N. ROZENAUERS
Latvijas Ūniversitātes docents

MĒCHANIKA

IV daļa

SISTĒMAS DINAMIKA

1934.

L. Ū. STUDENTU PADOMES GRĀMATNĪCAS IZDEVUMS

N. ROZENAUERS.
Latvijas Universitates docents.

M Ē C H A N I K A

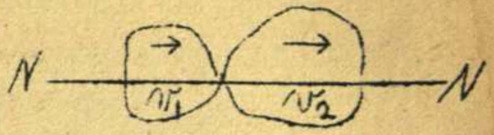
IV daļa.

<u>Sistemas dinamika.</u>

1934.
L.U.Studentu padomes grāmatnīcas izdevums.

Klūdu saraksts.

v i e t a			ir	jābūt
87.lap.	4 un 5 r.no apakš.		raksturosim	rakstīsim
89. "	5 rinda no	augšas	jāzin punkta	jāzin punktu
	11 "	apakšas	ķermene	ķermeņa
91. "	5 "	augšas	$= \sum_1^n [X_k(-y_k d\ )+$	$= \sum_1^n [X_k(-y_k d\varphi)+$
101. "	15 "	"	sinchrono	sinchrona
101. "	3 "	apakšas	ka $a_c = 0$	ka pie $a_c = 0$
102. "	5 "	augšas	$\min l = \rho_c + \frac{\rho_c^2}{c} =$	$\min l = \rho_c + \frac{\rho_c^2}{\rho_c} =$
102. "	6 "	augšas	$2\pi\sqrt{\frac{a_c + \frac{c^2}{a_c}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{b_c + \frac{c^2}{b_c}}{g}}$	$2\pi\sqrt{\frac{a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{b_c + \frac{\rho_c^2}{b_c}}{g}}$
103. "	16 "	"	$= \frac{1}{4} MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$	$= \frac{1}{4} MR^2 + MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$
108. "	14 "	~~apakšas~~	un $S_{1z}^a = - \ _z^a$	un $S_{1z}^a = - V_z^a$
110. "	4 "	"	$M\ddot{Y}_c = -S.\sin\varphi$	$M\ddot{y}_c = -S.\mathrm{Sin}\,\alpha$
111. "	3 "	augšas	centrs koordinātes,	centra koordinātes,
114. "	7 "	apakšas	un berzes samazināsies	un berzes ω samazināsies
116. "	25 "	augšas	pret ω un	pret ω_σ un
118. "	7 "	"	inerces	ierīces
120. "	16 "	"	komponentes ω_1,	komponentes: ω_1,
125. "	8 "	"	$\dot{\varphi} =$ ———	$\dot{\varphi} = -$ ———
125. "	14 "	"	$\varphi =$ ———	$\varphi = -$ ———
125. "	19 "	"	kur jāņem	kur φ jāņem
126. "	4 "	"	un tad no 3)	un tad no 2)
126. "	10 "	"	$F \leqq \mu Q(1 + \frac{R^2}{2})$	$F \leqq \mu Q(1 + \frac{R^2}{\rho^2})$
126. "	1 "	apakšas	$L \leqq 8000$ kg/mtr.	$L \leqq 8000$ kg.mtr.
129. "	8 "	augšas	uz leņķi	uz leņķi $\delta\varphi$
130. "	1 "	"	potenciālas	potenciāla
132. "	formula(118)		izlaistas iekavas	
132. "	formula(119)		nav apvilktas	

vieta	ir	jābūt
133.lap. formula (1207	nav apvilkta	. . . .
135. " 9 rindas no augšas	Ķermeņu trieciena teor.	§ 16.Ķermeņu triecienu teor.
135." zīm.112.		
137. " 9 rinda no apakšas	$\mathcal{H}$ = L	$\mathcal{H}$= 1

P r i e k š v ā r d s .

Arī šai Mēchanikas IV daļai : "Sistemas dinamikai", attiecībā uz materiāla izvēli un iztirzāšanas kārtību, pamatā ir liktas Prof.Dr.ing. E.Cizareviča lekcijas Latvijas Ūniversitātes Mēchanikas fakultātē, bet daži pierādījumi ir pārveidoti vektoriēlā formā un ir nākuši klāt arī daži paplašinājumi, kā piemēram: Lavaļa turbines problema. Elementāra žiroskopa teorija. Lagrang'a saistītas sistemas kustības diferenciālnolīdzinājumi otrā formā. Hamiltona princips. Trieciena iespaids uz ķermeni, kuŗam ir nekustoša griezes ass. Carnot teorema neelastīgam triecienam.

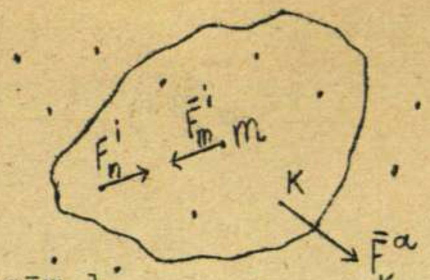
N.R.

Satura rādītājs.

Materiālu punktu sistēmas dinamika.

§ 1. Sistēmas dēfinicija. Spēki un reakcijas. Sistēmas saites. Neatkarīgas koordinātes. Galvenais vektors. Galvenais impulss. Galvenais moments. Iekšējo spēku darbs.

Materiālu punktu sistēma ir tāds materiālu punktu sakopojums, kuŗā katra punkta kustība iespaido arī pārējo punktu kustības.



zīm.1.

Pēc šis dēfinicijas neviens sistēmas punkts nevar kustēties neatkarīgi no citiem punktiem un, ja kāds punkts kustas neatkarīgi no pārējiem, tad tāds punkts pie sistēmas nepieder. Saskaņā ar šo dēfiniciju arvien ir jānorobežo sistēma, t.i. jāizšķir kādi punkti pieder pie sistēmas un kādi nepieder. Pēc tam tikai var ķerties pie prasītā jautājuma atrisināšanas.

Visus spēkus, kuŗi iedarbojas uz kādu sistēmas punktu, varam iedalīt divās grupās: ārējos spēkos un iekšējos spēkos. Ārējie spēki ir tādi, kuŗi nāk no ārpuses sistēmas. Iekšējie spēki ir tādi, kuŗi nāk no pašas sistēmas, t.i. no kāda sistēmai piederoša punkta.

Tāpat arī varam iedalīt saites un saites reakcijas: ārējās un iekšējās.

Lai atšķirtu ārējos spēkus jeb reakcijas no iekšējiem, ievedīsim apzīmējumus: ar indeksu "a" labā pusē augšā apzīmēsim ārējus spēkus un reakcijas, bet ar indeksu "i" iekšējus spēkus un reakcijas.

Analogiski indeksi labā pusē apakšā rādīs, uz kādu no sistēmas punktiem attiecīgais spēks iedarbojas.

Tā piemēram: F_k^a ir ārējais spēks, kas iedarbojas uz punktu k

F_k^i ir iekšējais spēks, kas iedarbojas uz punktu k

S_k^a ir punkta k ārējā reakcija

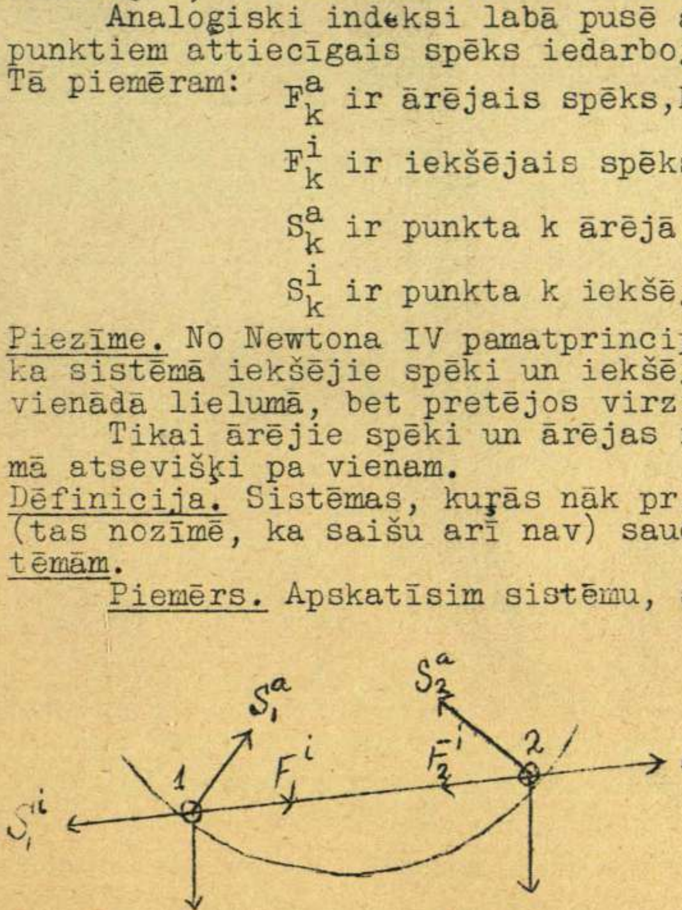
S_k^i ir punkta k iekšējā reakcija

Piezīme. No Newtona IV pamatprincipa (darbības un pretdarbības) seko, ka sistēmā iekšējie spēki un iekšējas reakcijas nāk priekšā pa divi vienādā lielumā, bet pretējos virzienos.

Tikai ārējie spēki un ārējas reakcijas var nākt priekšā sistēmā atsevišķi pa vienam.

Dēfinicija. Sistēmas, kuŗās nāk priekšā tikai spēki, bet reakciju nav (tas nozīmē, ka saišu arī nav) saucas par brīvām jeb dinamiskam sistēmām.

Piemērs. Apskatīsim sistēmu, sastāvošu no diviem smagiem magnetizētiem punktiem, kuŗi kustas uz kādas līknes un bez tam ir saistīti ar stienīti.



$F_1^a = m_1 g$ $\quad$ $F_2^a = m_2 g$

zīm.2.

Sekojot nupat pieņemtiem apzīmējumiem, konstatējam, ka

$$\left.\begin{array}{l} F_1^a = m_1 g \\ F_2^a = m_2 g \end{array}\right\} \text{smaguma spēks ir ārējais spēks}$$

F_1^i un F_2^i spēki, ar kuŗiem magnetizētie punkti savstarpīgi pievelkas, ir iekšējie spēki, pie kam $F_1^i = - F_2^i$

S_1^a un S_2^a līknes reakcijas ir ārējas reakcijas,

S_1^i un S_2^i stienīša reakcijas ir iekšējas reakcijas.

Sistēmas saites.

Agrāk vienam punktam saites varēja būt virsmas veidā:

$$f(xyz) = 0$$

jeb līknes veidā:

$$\begin{cases} f_1(xyz) = 0 \\ f_2(xyz) = 0 \end{cases}$$

Pie kam saites nolīdzinājumā nāca iekšā tikai viena punkta koordinātes.

Sistēmas saites nol-mā var ieiet vairāku punktu koordinātes, un dažreiz arī visu punktu koordinātes, tā tad - ja sistēmā ir "n" punktu, tad sistēmas saites vispārīgais veids būs:

$$f(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_n) = 0$$

Ja saites nol-mā atklātā veidā neieiet laiks t, tad saite ir skleronoma.

Ja saites nolīdzinājumā atklātā veidā ieiet laiks

$$f(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_nt) = 0$$

tad saite ir rheonoma.

Pēc analogijas ar punkta saitēm arī sistēmas saites saucas par holonomam, ja saites nol-ms ir dots galīgā veidā, t.i. nesatur diferenciālus. Arī gadījumā, ja saites nol-ms, kas satur diferenciālus, ir integrējams, saite tāpat skaitas holonoma.

Tikai ja saites nol-ms satur diferenciālus un nav integrējams, tad saite ir anholonoma. Piemēram nol-ms

$$(x_2 - x_1)dy_1 - (y_2 - y_1)dx_1 = 0$$

kas dod attiecību starp divu punktu koordinātēm, reprezentē anholonomu saiti, jo tas nav pilns diferenciāls.

Atgriežoties pie apskatītā piemēra, kur divi punkti bija saistīti ar stienīti, mēs šo saiti varam uzrakstīt tā:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} - \ell = 0$$

kur ℓ ir stienīša garums. Bet ja stienīša vietā nāks pavediens, tad

$$\ell - \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \geqslant 0$$

Vispārīgi, ja saite ir dota fizikali, mēs arvien varam tai uzstādīt nol-mu un arī otrādi, ja ir dots saites nol-ms, mēs varam uzkonstruēt mēchanismu, kas to apmierinātu.

Saišu skaits sistēmā.

Katram brīvam punktam telpā ir 3 kustības brīvības, t.i. 3 koordinātes, kuŗas var brīvi mainīties. Ja punktam ir uzlikta saite virsmas veidā, tam paliek 2 kustības brīvības. Ja saite ir dota ar divām virsmām, t.i. līknes veidā, punktam paliek tikai viena kustības brīvība. Trešā saite atņem punktam pēdējo kustības brīvību un punkts paliek nekustošs.

Pārejot uz punktu sistēmu, sastāvošu no "n" punktiem, varam teikt, ka uzliekot visiem punktiem pa 3 saitēm, t.i. ņemot sistēmai 3n saites, mēs dabūsim nekustošu sistēmu. Bet lai sistēmai būtu vismaz viena kustības brīvība, maksimālais saišu skaits var būt 3n - 1.

Apzīmējot saišu skaitu ar h, atrodam, ka

$$\max h = 3n - 1$$

Šādas sistēmas, kur saišu skaits h sasniedz savu maksimālo vērtību, sauc par sistēmām ar pilnām saitēm.

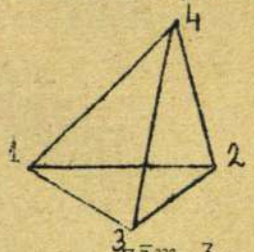
Brīvam punktam ir 3 kustības brīvības. Brīvai sistēmai ar "n" punktiem būs 3n kustības brīvības, bet ja sistēmā ir h saites, tad kustības brīvības paliek

$$s = 3n - h$$

Sistēmai ar pilnām saitēm ir viena kustības brīvība, jo tai

$$h = 3n - 1 \quad \text{un} \quad s = 3n - h = 3n - (3n - 1) = 1$$

Brīva cieta ķermeņa kustības brīvības: Izvedīsim, cik brīvam cietam ķermenim ir kustības brīvības, pieņemot, ka tas sastāv no n punktiem, negrozīgi saistītiem savā starpā. No n punktiem izdalīsim pirmos 3 punktus: 1,2 un 3. Lai tos negrozīgi savienotu, ir vajadzīgi 3 stieņi. Lai piestiprinātu katru no pāri palikušiem (n - 3) punktiem pie pirmajiem, par piemēru punktu 4, ir vajadzīgi 3 stieņi, tā tad pavisam stieņu jeb saišu skaits būs



zīm.3.

$$h = 3 + (n - 3)3 = 3n - 6$$

no kurienes kustības brīvības paliek

$$s = 3n - h = 6$$

Šāds rezultāts pilnīgi sakrīt ar ķermeņa kinēmatikas slēdzieniem, jo katram brīvam ķermenim ir 3 virzes kustības brīvības gar koordinātu asīm un 3 griezes kustības brīvības ap tām pašām asīm.

Sistēmas koordinātes jeb Lagrang'a koordinātes.

Par sistēmas jeb Lagrang'a koordinātēm sauksim tādus neatkarīgus geometriskus lielumus (attālumus, garumus jeb leņķus), ar kuŗiem sistēmas stāvoklis būtu pilnīgi noteikts un kuŗi būtu nepārtrauktas funkcijas no Dekarta koordinātēm.

Līdz šim, punkta stāvokļa noteikšanai, mēs lietojam Dekarta koordinātes, polaras koordinātes, cilindra koordinātes. Var lietot arī sferiskas koordinātes un citas. Punktu sistēmas stāvokli var noteikt, izvēloties kādu no minētām koordinātu sistēmām. Bez tam ir vēl bezgalīgi daudz citas metodes noteikt sistēmas stāvokli ar zinamiem geometriskiem lielumiem. Bet lai šos lielumus varētu pieņemt par Lagrang'a koordinātēm, tiem jābūt neatkarīgiem. Ja sistēma ir brīva, tad visas 3n koordinātes ir neatkarīgas un visas viņas atbilst Lagrang'a koordinātu prasībām. Bet ja sistēmā no n punktiem ir h saites, tad neatkarīgas koordinātes būs tikai 3n - h, jo no katra saites nol-ma:

$$f(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) = 0$$

vienu koordināti var izteikt caur citām un tā jau vairs nebūs neatkarīga.

Par Lagrang'a koordinātēm tad var pieņemt vienu daļu no Dekarta koordinātēm, vai arī kādus citus geometriskus lielumus, kuŗi būtu nepārtrauktas funkcijas no Dekarta koordinātēm.

Apzīmēsim Lagrang'a koordinātes ar $q_1 q_2 q_3 \ldots$ Lagrang'a koordinātu skaits ir 3n - h, bet sistēmas kustības brīvību skaits arī ir s = 3n - h, tas nozīmē, ka Lagrang'a koordinātu skaits sistēmā ir tik liels, cik sistēmai ir kustības brīvību.

Lagrang'a koordinātes ir nepārtrauktas funkcijas no Dekarta koordinātēm, šīs funkcijas apzīmēsim ar:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = \psi_1(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) \\ q_2 = \psi_2(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_s = \psi_s(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) \end{array}\right\} \text{ s nol-mu}$$

Pievienojot šiem s nol-miem vēl h saites nol-mus

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) = 0 \\ f_2(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) = 0 \end{array}\right\} \text{ h nol-mu}$$

un ievērojot, ka $s = 3n - h$ jeb $s + h = 3n$, varam visus šos nol-mus atrisināt attiecībā uz $3n$ Dekarta koordinātēm, t.i. izteikt visas Dekarta koordinātes caur Lagrang'a koordinātēm.

Izdarot sacīto atradīsim:

$$x_k = \varphi_{kx}(q_1 q_2 q_3 \ldots q_s)$$

$$y_k = \varphi_{ky}(q_1 q_2 q_3 \ldots q_s)$$

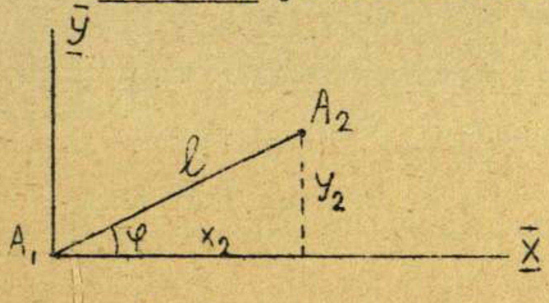
$$z_k = \varphi_{kz}(q_1 q_2 q_3 \ldots q_s)$$

Bet ja tagad mēs saišu nol-mus ievietosim Dekarta koordinātes, izteiktas caur Lagrang'a koordinātēm, tad saišu nol-mi būs identiski izpildīti.

Tā ir viena no svarīgākām Lagrang'a koordinātu īpašībām, jo tā dod iespēju, ievedot kustības diferenciālnol-mos Lagrang'a koordinātes, atsvabināties no saites reakcijām un noteikt sistēmas kustību.

Visa augstākā dinamika nodarbojas ar Lagrang'a koordinātu atrašanu.

Piemērs. Ņemsim sistēmu, sastāvošu no diviem materiāliem punktiem A_1 un A_2, kuŗi ir saistīti ar stienīti garumā ℓ un kustas plaknē. Izvēlēsim koordinātu sākumu vienā no punktiem A_1, tad saites nol-ms izteiksies:



zīm.4.

$$x_2^2 + y_2^2 = \ell^2$$

Katram punktam plaknē ir 2 kustības brīvības, bet viens punkts paliek koordinātu sākumā un bez tam ir vēl viena saite, tā tad sistēmā paliek tikai viena kustības brīvība un būs arī tikai viena Lagrang'a koordināte. Par šo koordināti izvēlēsim $\angle\varphi$, kuŗu veido stienītis ar $\bar{X}$ asi.

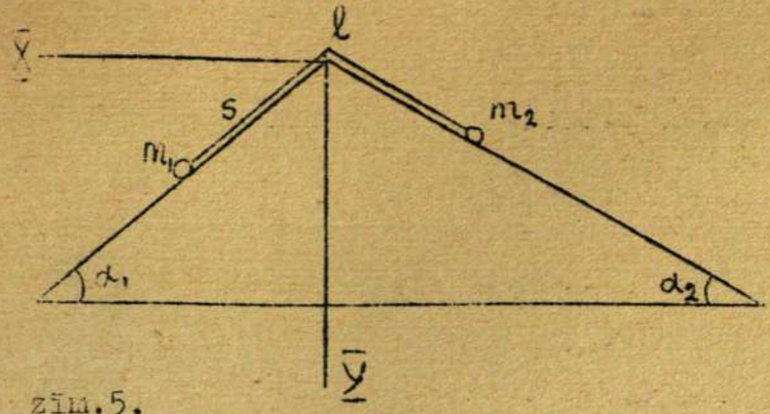
Izteiksim x_2 un y_2 caur φ un ieliksim saites nol-mā:

$$x_2 = \ell \operatorname{Cos}\varphi \qquad \ell^2\operatorname{Cos}^2\varphi + \ell^2\operatorname{Sin}^2\varphi = \ell^2$$

$$y_2 = \ell \operatorname{Sin}\varphi \qquad \ell^2 = \ell^2$$

Kā redzams saites nol-ms ir identiski izpildīts ar izvēlēto Lagrang'a koordināti.

Piemērs. Divi smagi materiāli punkti ar masām m_1 un m_2 ir sasieti ar pavedienu garumā ℓ. Katrs punkts kustas uz slīpas plaknes un pavediens slīd bez berzes caur virsotni.



Kustība notiek plaknē, katram punktam plaknē ir 2 kustības brīvības, bet sistēmā ir 3 saites, tā tad sistēmai būs 1 kustības brīvība.

zīm.5.

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ y_1 = x_1 \mathrm{tg}\alpha_1 & \text{kreisā slīpa plakne (sk.zīm.5),} \\ 2)\ y_2 = -x_2 \mathrm{tg}\alpha_2 & \text{labā slīpa plakne,} \\ 3)\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} - \ell = 0 & \text{pavediens.} \end{array}\right\} \text{saites}$$

Par Lagrang'a koordināti izvēlēsim punkta m_1 attālumu no virsotnes, kuŗu apzīmēsim ar "s", jo s pilnīgi nosaka sistēmas stāvokli.

Izteiksim Dekarta koordinātes caur Lagrang'a koordināti:

$$x_1 = s.\mathrm{Cos}\alpha_1 \qquad x_2 = -(\ell - s).\mathrm{Cos}\alpha_2$$

$$y_1 = s.\mathrm{Sin}\alpha_1 \qquad y_2 = (\ell - s).\mathrm{Sin}\alpha_2$$

un ieliksim saišu nol-mos:

$$1)\ s.\mathrm{Sin}\alpha_1 = s.\mathrm{Cos}\alpha_1.\mathrm{tg}\alpha_1 \quad \text{jeb} \quad s.\mathrm{Sin}\alpha_1 = s.\mathrm{Sin}\alpha_1$$

$$2)\ (\ell - s)\mathrm{Sin}\alpha_2 = (\ell - s)\mathrm{Cos}\alpha_2.\mathrm{tg}\alpha_2 \ \text{jeb} \ (\ell - s)\mathrm{Sin}\alpha_2 = (\ell - s)\mathrm{Sin}\alpha_2$$

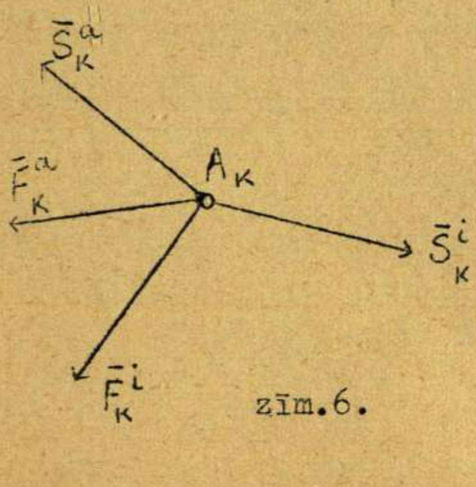
$$3)\ \sqrt{s.\mathrm{Cos}^2\alpha_1 + s.\mathrm{Sin}^2\alpha_1} + \sqrt{(\ell - s)\mathrm{Cos}^2\alpha_2 + (\ell - s)\mathrm{Sin}^2\alpha_2} - \ell = 0 \quad \text{jeb}$$

$$s + (\ell - s) - \ell = 0$$

Atkal, kā redzams, Lagrang'a koordināte identiski izpilda visus saišu nol-mus.

Sistēmas galvenais vektors.

Sistēmas galveno vektoru dēfinēsim kā visu ārējo, iekšējo spēku un reakciju geometrisko summu. Izņemsim no sistēmas kādu punktu A_k. Uz to darbojošos ārējo spēku kopspēks būs $\bar{F}_k^a$, iekšējo spēku kopspēks būs $\bar{F}_k^i$, ārējo reakciju kopspēks: $\bar{S}_k^a$ un iekšējo reakciju kopspēks: $\bar{S}_k^i$. Saskaitīsim visus šos spēkus geometriski:



zīm.6.

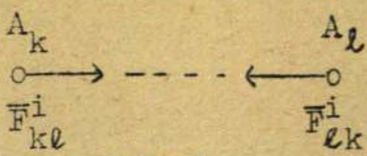
$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i + \bar{S}_k^a + \bar{S}_k^i = \bar{F}_k + \bar{S}_k$$

Bet, ja šos spēkus sasummēsim visai sistēmai, tad pēc dēfinicijas dabūsim galveno vektoru, kuŗu apzīmēsim ar: $\bar{V}$

$$V = \sum_1^n(\bar{F}_k + \bar{S}_k) = \sum_1^n(\bar{F}^a_k + \bar{F}^i_k + \bar{S}^a_k + \bar{S}^i_k)$$

$$V = \sum_1^n \bar{F}^a_k + \sum_1^n \bar{F}^i_k + \sum_1^n \bar{S}^a_k + \sum_1^n \bar{S}^i_k$$

Ievērojot, ka sistēmā iekšējie spēki un iekšējas reakcijas arvien nāk priekšā pa divi vienādā lielumā un pretējā virzienā, t.i.



zīm.7.

$$\bar{F}^i_{k\ell} = - \bar{F}^i_{\ell k} \quad \text{un} \quad \bar{S}^i_{k\ell} = - \bar{S}^i_{\ell k}$$

jānāk pie slēdziena, ka

$$\sum_1^n \bar{F}^i_k = 0 \quad \text{un arī} \quad \sum_1^n \bar{S}^i_k = 0 \quad \text{un}$$

$$\boxed{V = \sum_1^n \bar{F}^a_k + \sum_1^n \bar{S}^a_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Šī formula rāda, ka sistēmas galvenais vektors ir visu sistēmas ārējo spēku un ārējo reakciju ģeometriskā summa.

Projecējot nol-mu (1) uz koordinātu asīm, dabūsim galvenā vektora projekcijas

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \sum_1^n X^a_k + \sum_1^n S^a_{kx} \\ V_y &= \sum_1^n Y^a_k + \sum_1^n S^a_{ky} \\ V_z &= \sum_1^n Z^a_k + \sum_1^n S^a_{kz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1^a)$$

Sistēmas galvenais impulss.

Sistēmas galveno impulsu laika sprīdī no t_o līdz t dēfinēsim kā visu sistēmas ārējo un iekšējo spēku un reakciju impulsu minētā laika sprīdī geometrisko summu.

Lietojot tos pašus apzīmējumus, dabūsim impulsu vienam sistēmas punktam A_k sekojošā veidā:

$$\bar{I}_k = \int_{t_o}^{t} (\bar{F}^a_k + \bar{F}^i_k + \bar{S}^a_k + \bar{S}^i_k)dt$$

un summējot visiem punktiem, dabūsim galveno impulsu

$$\bar{I} = \sum_1^n \bar{I}_k = \sum_1^n \int_{t_o}^{t} (\bar{F}^a_k + \bar{F}^i_k + \bar{S}^a_k + \bar{S}^i_k)dt$$

Tālāk integrēsim un summēsim katru locekli atsevišķi, tad

$$\bar{I} = \sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{F}^a_k dt + \sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{F}^i_k dt + \sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{S}^a_k dt + \sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{S}^i_k dt$$

Ievērojot atkal, ka iekšējie spēki un iekšējas reakcijas sistēmā nāk priekšā pa divi vienādā lielumā un pretējos virzienos, nākam pie slēdziena, ka

$$\sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{F}^i_k \, dt = 0 \quad \text{un} \quad \sum_1^n \int_{t_o}^{t} \bar{S}^i_k \, dt = 0$$

un pēc tam paliek:

$$\boxed{\bar{I} = \sum_1^n \int_{t_0}^{t} \bar{F}_k^a \, dt + \sum_1^n \int_{t_0}^{t} \bar{S}_k^a \, dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

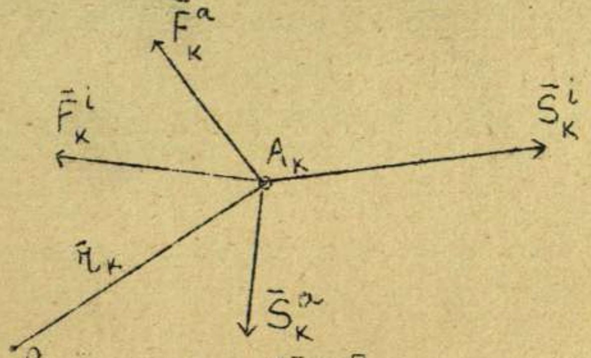
Kā redzams, sistēmas galvenais impulss ir geometriska summa no ārējo spēku un ārējo reakciju impulsiem.

Projecējot nol-mu (2) uz koordinātu asīm, dabūsim galvenā impulsa projekcijas:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \sum_1^n \int_{t_0}^{t} X_k^a \, dt + \sum_1^n \int_{t_0}^{t} S_{kx}^a \, dt \\ I_y &= \sum_1^n \int_{t_0}^{t} Y_k^a \, dt + \sum_1^n \int_{t_0}^{t} S_{ky}^a \, dt \\ I_z &= \sum_1^n \int_{t_0}^{t} Z_k^a \, dt + \sum_1^n \int_{t_0}^{t} S_{kz}^a \, dt \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2^a)$$

Sistēmas galvenais moments pret kādu punktu 0.

Sistēmas galveno momentu attiecībā uz punktu 0 dēfinēsim kā visu ārējo un iekšējo spēku un reakciju momentu vektorū attiecībā uz minēto punktu 0 geometrisku summu.



zīm.7.

Izņemsim no sistēmas punktu A_k, uz kuru iedarbojās spēki $\bar{F}_k^a$, $\bar{F}_k^i$ un reakcijas $\bar{S}_k^a$ un $\bar{S}_k^i$. Savienosim punktu A_k ar punktu 0 un apzīmēsim radiusu vektoru ar $\bar{r}_k$.

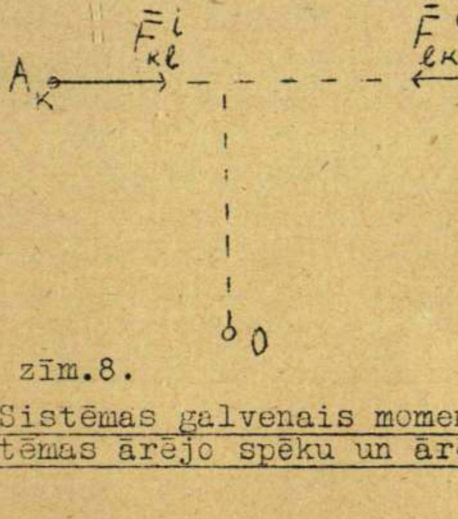
Tad spēku momentu summa pret punktu 0 priekš punkta A_k būs

$$\bar{L}_k = [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^a] + [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^i] + [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^a] + [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^i]$$

Visai sistēmai ar n punktiem galvenais moments:

$$\bar{L} = \sum_1^n \bar{L}_k = \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^a] + \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^i] + \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^a] + \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^i]$$

Ievērojot, ka sistēmā iekšējie spēki un reakcijas nāk priekšā pa divi vienādā lielumā un pretējos virzienos:



zīm.8.

$$\bar{F}_{kl}^i = -\bar{F}_{lk}^i \quad \text{un} \quad \bar{S}_{kl}^i = -\bar{S}_{lk}^i$$

varam apgalvot, ka visai sistēmai

$$\sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^i] = 0 \quad \text{un} \quad \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^i] = 0$$

tā tad paliek

$$\boxed{\bar{L} = \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{F}_k^a] + \sum_1^n [\bar{r}_k \cdot \bar{S}_k^a]} \qquad \ldots.(3)$$

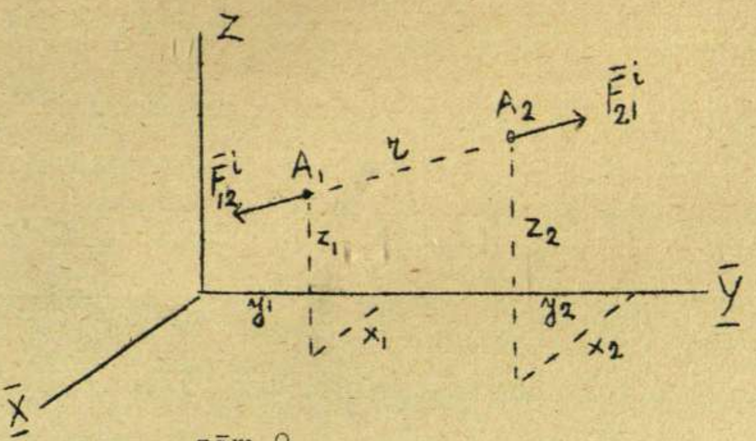
Sistēmas galvenais moments attiecībā uz kādu punktu 0 ir vienāds ar sistēmas ārējo spēku un ārējo reakciju momentu vektoru geometrisko summu.

Projecējot nol-mu (3) uz koordinātu asīm, dabūsim galvenā momenta vektora projekcijas uz asīm, jeb arī galvenos momentus attiecībā uz koordinātu asīm:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum_1^n (y_k Z_k^a - z_k Y_k^a) + \sum_1^n (y_k S_{kz}^a - z_k S_{ky}^a) \\ L_y &= \sum_1^n (z_k X_k^a - x_k Z_k^a) + \sum_1^n (z_k S_{kx}^a - x_k S_{kz}^a) \\ L_z &= \sum_1^n (x_k Y_k^a - y_k X_k^a) + \sum_1^n (x_k S_{ky}^a - y_k S_{kx}^a) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3^a)$$

Sistēmas iekšējo spēku darbs.

Agrāk mēs konstatējam, ka sistēmas iekšējo spēku ģeometriska summa = 0, ka iekšējo spēku impulsu summa = 0 un beidzot arī iekšējo spēku momentu summa = 0, bet apskatot sistēmas iekšējo spēku darbu, redzēsim, ka tas vispārīgi $\neq 0$. Tikai noteiktos speciālos gadījumos tas var līdzināties nullei. Kas attiecas uz iekšējām reakcijām, tad to darbs būs nulle pie ideālām saitēm, bet pie saitēm ar berzi, protams, nullei līdzināties nevar.



zīm.9.

Izdalīsim no sistēmas divus punktus A_1 un A_2, uz kuŗiem darbojas iekšējie spēki F_{12}^i un F_{21}^i, vienādi pēc lieluma, bet pretējos virzienos.

Vienosimies uz priekšu iekšējus spēkus apzīmēt ar diviem indeksiem tā, lai pirmais indekss aprādītu, uz kādu punktu spēks iedarbojas, un otrs indekss - no kāda punkta spēks iziet.

Iekšējo spēku F_{12}^i un F_{21}^i elementārais darbs:

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^2 (X^i dx + Y^i dy + Z^i dz) = X_{12}^i dx_1 + X_{21}^i dx_2 + Y_{12}^i dy_1 + Y_{21}^i dy_2 + Z_{12}^i dz_1 + Z_{21}^i dz_2$$

Sastādīsim iekšējo spēku projekcijas uz koordinātu asīm, apzīmējot spēku lielumu $F_{12}^i \equiv F_{21}^i = F$ un attālumu $A_1A_2 = r$

$$X_{12}^i = F_{12x}^i = F\,\frac{x_1 - x_2}{r} \qquad X_{21}^i = F_{21x}^i = F\,\frac{x_2 - x_1}{r}$$

$$Y_{12}^i = F_{12y}^i = F\,\frac{y_1 - y_2}{r} \qquad Y_{21}^i = F_{21y}^i = F\,\frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$Z_{12}^i = F_{12z}^i = F\,\frac{z_1 - z_2}{r} \qquad Z_{21}^i = F_{21z}^i = F\,\frac{z_2 - z_1}{r}$$

Ievietosim spēku projekcijas elementāra darba izteiksmē un izņemsim visiem locekļiem aiz iekavām: $\frac{F}{r}$

$$d\mathfrak{A} = \frac{F}{r}\left[(x_1-x_2)dx_1+(x_2-x_1)dx_2+(y_1-y_2)dy_1+(y_2-y_1)dy_2+(z_1-z_2)dz_1+(z_2-z_1)dz_2\right]$$

$$d\mathfrak{A} = \frac{F}{r}\left[(x_1-x_2)(dx_1-dx_2) + (y_1-y_2)(dy_1-dy_2) + (z_1-z_2)(dz_1-dz_2)\right]$$

$$d\mathfrak{A} = \frac{F}{r}\left[(x_1-x_2).d(x_1-x_2) + (y_1-y_2).d(y_1-y_2) + (z_1-z_2).d(z_1-z_2)\right]$$

$$d\mathfrak{A} = \frac{F}{r}\left[d\,\frac{(x_1-x_2)^2}{2} + d\,\frac{(y_1-y_2)^2}{2} + d\,\frac{(z_1-z_2)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{F}{r}\cdot\frac{d\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]}{2}$$

bet $(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 = r^2$

$d\mathfrak{A} = \frac{F}{r}\cdot\frac{d(r^2)}{2} = \frac{F}{r}\cdot\frac{2rdr}{2} = F.dr$, tā tad $\boxed{d\mathfrak{A} = F.dr}$

jeb integrējot, ja spēks $F = \varphi(r)$, dabūsim

$$\mathfrak{A} = \int_{r_1}^{r_2} F.dr = \int_{r_1}^{r_2}\varphi(r).dr \quad ; \quad \mathfrak{A} = \left[\Phi(r)\right]_{r_1}^{r_2} = U_2 - U_1$$

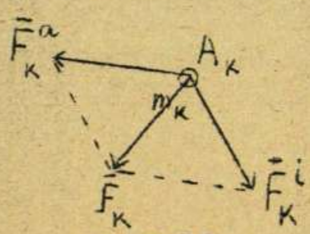
Acimredzot, iekšējo spēku darbs $\mathfrak{A}$ līdzināsies nullei šādos gadījumos:

1) ja $dr = 0$, bet tad $r = \text{const.}$ un tas nozīmē, ka attālums starp punktiem nemainās,
2) ja $r_1 = r_2$: tas nozīmē, ka attālums r starp punktiem var mainīties, tikai sākuma attālums r_1 ir vienāds ar gala attālumu r_2.

Apskatītie gadījumi ir tikai šauri speciāli gadījumi, un vispārīgi iekšējo spēku darbs pie dažādiem sistēmas pārvietojumiem nullei nelīdzinājās.

§ 2. Dinamiskas sistēmas kustība.

Kā jau agrāk bija minēts par dinamisko jeb brīvo materiālu punktu sistēmu sauc, tādu sistēmu, kurā darbojas tikai spēki, bet reakcijas nav nedz ārējas nedz iekšējas.



zīm.10.

Izdalīsim no sistēmas punktu A_k ar masu m_k un apzīmēsim visu, uz to darbojošos spēku, summu ar F_k, kur tad $\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i$

Punktu kustības diferenciālnolīdzinājums vektoriālā formā būs:

$$\boxed{m_k\bar{J}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

un projecējot to uz asīm, dabūsim kustības diferenciālnol-mus sistēmas punktam A_k

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= X_k^a + X_k^i \\ m_k\ddot{y}_k &= Y_k^a + Y_k^i \\ m_k\ddot{z}_k &= Z_k^a + Z_k^i \end{aligned}\right\}$$

3n dinamiskas sistēmas simultanie kustības dif-nol-mi pie ...(5) k =1,2,3 ... n

Ja visā sistēmā ir "n" punktu, tad šādu diferenciālnol-mu būs pavisam 3n, kuŗus dabūsim mainot indeksus $k = 1,2,3 \dots n$.

Šie 3n nol-mi reprezentē dinamiskas sistēmas kustības diferenciālnol-mus, kuŗiem visiem jābūt simultaniem, jo nevienam punktam diferenciālnol-mi nedrīkst integrēties neatkarīgi no citiem. Ja izdotos vienam punktam nointegrēt diferenciālnol-mus neatkarīgi no citiem, tad tas nozīmētu, ka šī punkta kustība ir neatkarīga no citu punktu kustības un ka minētais punkts pie sistēmas nepieder.

Katrā no diferenciālnol-miem (5) spēku komponentēs X_k, Y_k, Z_k var nākt priekšā arī citu punktu koordinātes $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$, bet vismaz vienā no spēku projekcijām jābūt arī viena no kāda cita punkta koordinātēm.

Diferenciālnol-mu sistēmu (5) ir jāintegrē 6n reizes, tamdēļ ieies iekšā 6n integrēšanas constantes, kuŗas būs jāatrod no sākuma apstākļiem zināmā laika momentā.

Dinamiskas sistēmas miera stāvoklis. Ja sistēma atrodas mierā, tad punktu koordinātes ir const. un

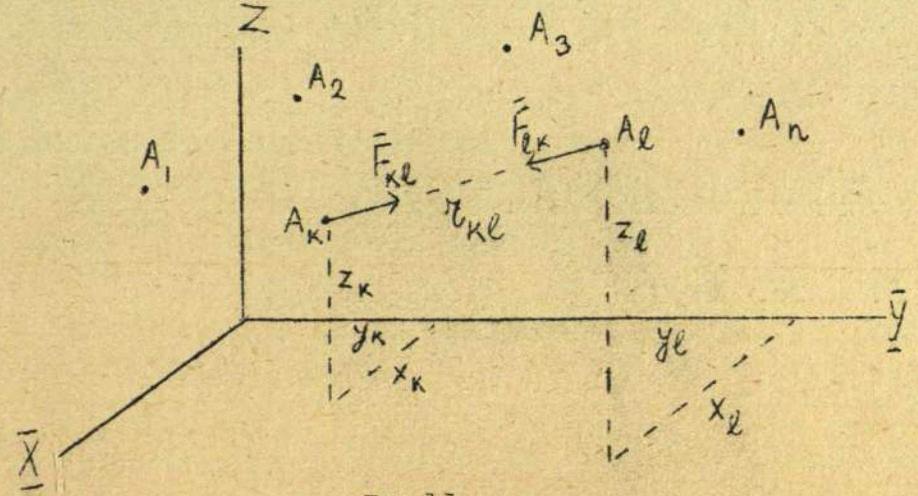
$$\ddot{x}_k = \ddot{y}_k = \ddot{z}_k = 0$$

ievedot šo nol-mos (5), dabūsim:

$$\left.\begin{aligned} X_k^a + X_k^i &= 0 \\ Y_k^a + Y_k^i &= 0 \\ Z_k^a + Z_k^i &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{3n miera stāvokļa nol-mi visiem } k = 1,2,3 \dots n$$

Dinamiskas sistemas kustība zem Newtona gravitācijas spēka iespaida (n - ķermeņu problema).

Izdalīsim no sistēmas divus punktus A_k un A_ℓ, ar masām m_k un m_ℓ. Abi punkti savstarpīgi pievelkas pēc Newtona likuma ar spēku



zīm.11.

$$F_{k\ell} = F_{\ell k} = - k\,\frac{m_k \cdot m_\ell}{r_{k\ell}^2}$$

proporcionālu masām un pretēji proporcionālu attāluma kvadratam. K ir proporcionālitātes koeficients jeb Newtona gravitācijas spēka konstante un (-) zīme rāda, ka šis spēks ir pievilkšanas spēks.

Sastādīsim spēka $F_{k\ell}$ projekcijas uz koordinātu asīm:

$$X_{k\ell} = F_{k\ell} \cdot \operatorname{Cos}(\overline{X}\overline{F}_{k\ell}) = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell}{r_{k\ell}^2} \cdot \frac{x_\ell - x_k}{r_{k\ell}} = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell (x_\ell - x_k)}{r_{k\ell}^3}$$

$$Y_{k\ell} = F_{k\ell} \cdot \operatorname{Cos}(\overline{Y}\overline{F}_{k\ell}) = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell}{r_{k\ell}^2} \cdot \frac{y_\ell - y_k}{r_{k\ell}} = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell (y_\ell - y_k)}{r_{k\ell}^3}$$

$$Z_{k\ell} = F_{k\ell} \cdot \operatorname{Cos}(\overline{Z}\overline{F}_{k\ell}) = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell}{r_{k\ell}^2} \cdot \frac{z_\ell - z_k}{r_{k\ell}} = k\,\frac{m_k \cdot m_\ell (z_\ell - z_k)}{r_{k\ell}^3}$$

Pie punkta A_k kustības diferenciālnol-mu uzstādīšanas jāievēro, ka arī visi citi punkti pievelk punktu A_k pēc tā paša likuma un atrastās spēku projekcijas ir jāsummē visiem $k = 1,2,3 \ldots n$, pie kam aiz iekavām varēs izņemt visiem locekļiem masu m_k un gravitācijas spēka konstanti k.

$$m_k\ddot{x}_k = k.m_k \sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{x_\ell - x_k}{r^3_{k\ell}}$$

$$m_k\ddot{y}_k = k.m_k \sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{y_\ell - y_k}{r^3_{k\ell}}$$

$$m_k\ddot{z}_k = k.m_k \sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{z_\ell - z_k}{r^3_{k\ell}}$$

bet masu m_k var saīsināt un tad galīgi iznāk

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_k &= k\sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{x_\ell - x_k}{r^3_{k\ell}} \\ \ddot{y}_k &= k\sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{y_\ell - y_k}{r^3_{k\ell}} \\ \ddot{z}_k &= k\sum_{\ell=1}^{\ell=n} m_\ell \frac{z_\ell - z_k}{r^3_{k\ell}} \end{aligned}\right\} \text{n-ķermeņu problema} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

kur $r_{k\ell} = \sqrt{(x_\ell - x_k)^2 + (y_\ell - y_k)^2 + (z_\ell - z_k)^2}$

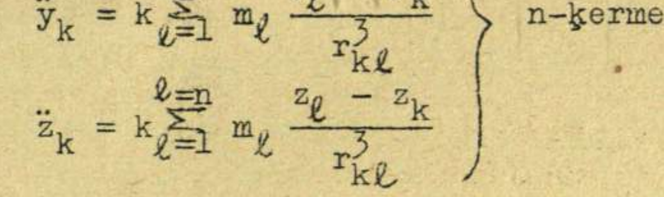
Atrastie dif-nol-mi (6) reprezentē tā saukto <u>n - ķermeņu problemu</u>, kuŗa vēl līdz šim vispārīgā veidā nav atrisināta, <u>tikai pie n = 2 mēs varam</u> dabūt precizu atrisinājumu.

Pie n = 3 atrisinājumus ir devuši Poincare un Laplace.

Pie n > 3 var dabūt tikai tuvenus atrisinājumus, ar kuŗiem nodarbojas astronomi un kuŗi sastāda debess-mēchaniku.

<u>n-ķermeņu problemas integrēšana pie n = 2.</u>

Aprobežosimies ar vienkāršāku gadījumu, kad punktiem sākuma ātrumu nav, tad acimredzot kustība notiks taisnes virzienā, kuŗa savieno abus punktus sākumā. Šo taisni pieņemsim par $\underline{X}$ asi, pie kam koordinātu sākumu izvēlēsim pirmā punkta A_1 sākuma stāvoklī: A_{10}



zīm.12.

Doti: Newtona gravitācijas spēks:

$$F_{12} = F_{21} = - k \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ kur } r=x_2-x_1$$

Sākuma apstākļi $x_{10} = 0$, $x_{20} = a$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$.

Uziet 1) kustību, t.i. $x_1 = f_1(t)$ un $x_2 = f_2(t)$

2) laiku T, kuŗā punkti sastapsies.

Spēku projekcijas uz $\underline{X}$ asi būs:

$$X_{12} = F_{12} = k\ \frac{m_1m_2}{r^2}$$

$$X_{21} = -\ F_{21} = -\ k\ \frac{m_1m_2}{r^2}$$

kur $r = x_2 - x_1$

Uzstādīsim kustības dif-nol-mus abiem punktiem

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= k\ \frac{m_1m_2}{(x_2 - x_1)^2} \\ m_2\ddot{x}_2 &= -\ k\ \frac{m_1m_2}{(x_2 - x_1)^2} \end{aligned}\right\}$$

Šie ir divi simultani dif-nol-mi, bet tos izdosies mākslīgā ceļā nointegrēt.

Pirmkārt saskaitīsim abus dif-nol-mus, tad:

$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$

$$m_1\ \frac{d\dot{x}_1}{dt} + m_2\ \frac{d\dot{x}_2}{dt} = 0$$

pareizināsim ar dt un integrēsim

$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = C_1$

no sākuma apstākļiem

$\dot{x}_{10} = \dot{x}_{20} = 0$ iznāk $C_1 = 0$

$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0$ ..... I integrāls

integrēsim otro reizi

$m_1x_1 + m_2x_2 = C_2$

no sākuma apstākļiem

$m_1.0 + m_2.a = C_2$, $C_2 = m_2a$

un galīgi $\boxed{m_1x_1 + m_2x_2 = m_2a}$

tas ir II integrāls, bet viņā ietilpst abi nezināmie x_1 un x_2.

Tā tad, lai atrastu katru no tiem, jāmeklē vēl vienu nol-mu ar tiem pašiem nezināmiem.

Ņemsim tagad tos pašus dif-nol-mus un saīsināsim pirmo ar m_1 un otro ar m_2:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= k\ \frac{m_2}{(x_2 - x_1)^2} \\ \ddot{x}_2 &= -\ k\ \frac{m_1}{(x_2 - x_1)^2} \end{aligned}\right\}$$ – atvilksim pirmo no otra

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\ k\ \frac{m_1 + m_2}{(x_2 - x_1)^2}$$ ievērojot tālāk, ka $x_2 - x_1 = r$ un $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \ddot{r}$,

ievedīsim jaunu nezināmo r: $\ddot{r} = -\ k\ \dfrac{m_1 + m_2}{r^2}$. Vienkāršības dēļ apzīmēsim: $k(m_1 + m_2) = A$: $\dfrac{d\dot{r}}{dr}\cdot\dfrac{dr}{dt} = -\ \dfrac{A}{r^2}$, pareizināsim ar dr un integrēsim

$$\int \dot{r}d\dot{r} = -\ A\int\frac{dr}{r^2} + C_1$$

$\dfrac{\dot{r}^2}{2} = A\ \dfrac{1}{2} + C_1$, bet sākumā $\dot{r}_o = 0$, $r_o = a$, $C_1 = -\ \dfrac{A}{a}$

$\dot{r}^2 = 2A(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{a})$ izvilksim kvadratsakni, bet saknei priekšā jāņem (–) zīme, jo $\dot{r} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$ un tas ir negatīvs lielums tamdēļ, ka $\dot{x}_2$ ir virzīts pret $\underline{X}$ asi, bet $\dot{x}_1$ formulā ieiet ar (-) zīmi.

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2A}{a}} \cdot \sqrt{\frac{a-r}{r}} \quad \text{........ I integrāls}$$

$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2A}{a}} \cdot \frac{\sqrt{a-r}}{\sqrt{r}}$ šķirosim nezināmos un integrēsim

$-\int \frac{\sqrt{r}\,.\,dr}{\sqrt{a-r}} = \sqrt{\frac{2A}{a}} \cdot t + C_2$ izlietosim substituciju $\sqrt{a-r} = z$,

$r = a - z^2$; $dr = -2z.dz$

$$\int \frac{\sqrt{a-z^2}\,.\,2zdz}{z} = \sqrt{\frac{2A}{a}} \cdot t + C_2$$

$2\int \sqrt{a-z^2}\,.dz = \sqrt{\frac{2A}{a}} \cdot t + C_2$ tagad kreiso pusi varam nointegrēt

$2\left[\frac{z}{2}\sqrt{a-z^2} + \frac{a}{2}\,\text{arc Sin}\,\frac{z}{\sqrt{a}}\right] = \sqrt{\frac{2A}{a}}\, t + C_2$, liksim atpakaļ $z = \sqrt{a-r}$

$\sqrt{(a-r)r} + a.\text{arc Sin}\sqrt{\frac{a-r}{a}} = \sqrt{\frac{2A}{a}}\, t + C_2$ sākumā $r_o = a$ un $C_2 = 0$

un liekot vēl $A = k(m_1 + m_2)$, dabūsim galīgi

$$\boxed{\sqrt{r(a-r)} + a.\text{arc Sin}\sqrt{\frac{a-r}{a}} = \sqrt{\frac{2k(m_1+m_2)}{a}}\; t} \quad \text{II integrāls}$$

Ievērojot, ka $r = x_2 - x_1$, mēs esam atraduši otru nol-mu ar tiem pašiem nezināmiem x_1 un x_2 un atrisinot viņu kopā ar pirmo, uziesim meklējamās funkcijas

$$x_1 = f_1(t) \quad \text{un} \quad x_2 = f_2(t)$$

Lai atrisinātu otro jautājumu, t.i. lai uzietu laiku T, kurā punkti sastapsies, jāpielīdzina atrastā otrā integrālā $r = 0$

$$0 + a.\text{arc Sin}\;1 = \sqrt{\frac{2k(m_1+m_2)}{a}} \cdot T$$

$$T = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{2k(m_1+m_2)}} \cdot \frac{\pi}{2}\;\text{sec}$$

Dimenzija šai formulai iznāk secundes, ja ievērosim, ka koeficienta k dimenzija jāņem pēc formulas $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$; $k\left[\frac{F.L^2}{M^2}\right]$ un masas dimenzija: $M = \left[FL^{-1}.T^2\right]$.

Piezīme. Ja punktiem sākuma ātrumi nelīdzināsies nullei un neies taisnes A_1A_2 virzienā, tad atkarībā no apstākļiem trajektorijas būs: elipses, hiperbolas jeb parabolas.

§ 3. Saites iespaids uz punktu ātrumiem un paātrinājumiem. Sistēmas virtuelie pārvietojumi. Ideālas saites. Saišu reakciju projekcijas.

Ņemsim sistēmas saiti vispārīgā veidā:

$$f(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_k y_k z_k \dots x_n y_n z_n) = 0$$

un diferencēsim to pēc laika

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\dot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\cdot\dot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\cdot\dot{z}_n = 0$$

jeb lietojot matematisku saīsinājumu

$$\boxed{\frac{df}{dt} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\cdot\dot{z}_k\right) = 0} \qquad \dots\dots\dots\dots(7)$$

kur $k = 1,2,3 \dots n$

Ar šādu nol-mu, kā redzams, punktu ātrumu projekcijas ir ierobežotas, ja sistēmā ir saite. Ātrumu projekcijām šo nol-mu ir jāapmierina. Diferencēsim saiti otru reizi pēc laika:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot\ddot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\ddot{y}_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\cdot\ddot{z}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\ddot{x}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\cdot\ddot{z}_n + f^{(2)} = 0$$

kur ar $f^{(2)}$ ir apzīmēta pārējo locekļu summa, kas satur ātrumu kvadratus un reizinājumus. Lietojot matematisku saīsinājumu, varam uzrakstīt to pašu nol-mu tā:

$$\boxed{\frac{d^2f}{dt^2} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\cdot\ddot{x}_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\cdot\ddot{y}_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\cdot\ddot{z}_k \right) + f^{(2)} = 0} \qquad \dots\dots(8)$$

Paātrinājumu projekcijām jāizpilda šis nol-ms neatkarīgi no spēkiem, kuŗi darbojas uz sistēmas punktiem, bet tad paātrinājumi var nesakrist ar spēku virzieniem un tas savukārt nozīmē, ka ir nākuši klāt jauni spēki, kuŗus izsauc saites eksistence. Šie jaunie spēki ir tā sauktas saites reakcijas, par kuŗām runa jau bija agrāk.

Ja sistēmā ir h saites, pie kam $h < 3n - 1$

$$f_1(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0$$
$$f_2(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_h(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0$$

tad pēc analogijas mēs dabūsim h noteikumus, ar kuriem būs saistītas ātruma projekcijas

$$\frac{df_1}{dt} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k}\cdot\dot{z}_k \right) = 0$$

$$\frac{df_2}{dt} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k}\cdot\dot{z}_k \right) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{df_h}{dt} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k}\cdot\dot{x}_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\cdot\dot{y}_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\cdot\dot{z}_k \right) = 0$$

un tāpat arī h noteikumus paātrinājumiem

$$\frac{d^2f_1}{dt^2} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\ddot{y}_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k}\ddot{z}_k \right) + f_1^{(2)} = 0$$

$$\frac{d^2f_2}{dt^2} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k}\ddot{y}_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k}\ddot{z}_k \right) + f_2^{(2)} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2f_h}{dt^2} = \sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\ddot{y}_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\ddot{z}_k \right) + f_h^{(2)} = 0$$

Piezīme. Pie rheonomām saitēm atrastos noteikumos nāks klāt vēl daži locekļi.

Sistēmas virtuelie pārvietojumi.

Par virtueliem pārvietojumiem sistēmā mēs sauksim tādus bezgalīgi mazus pārvietojumus, kuŗus sistēmas punkti varētu izdarīt, saskaņā ar saitēm, zem kāda blakus iemesla.

Īstus bezgalīgi mazus pārvietojumus zem sistēmas spēku iespaida punktu trajektorijas virzienā, mēs apzīmēsim punktam A_k ar ds_k, un tā projekcijas uz asim ar: dx_k , dy_k un dz_k.

Virtuelus pārvietojumus tam pašam punktam, lai atšķirtu tos no īsteniem, apzīmēsim ar δs_k un tā projekcijas uz asīm ar: δx_k, δy_k, δz_k.

Brīvā sistēmā virtuelie pārvietojumi δs_k var notikt kuŗā katrā virzienā un to ir bezgalīgi daudz.

Saistītā sistēmā virtuelie pārvietojumi δs_k var notikt tikai saskaņā ar saitēm. Noskaidrosim, kādus ierobežojumus dod saites eksistence virtueliem pārvietojumiem.

Pieņemsim, ka sistēmā ir saite:

$$f(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n) = 0$$

Ja sistēmas punktu koordinātes ir:

$$x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2 \ldots x_k,\ y_k,\ z_k \ldots z_n$$

tad pēc virtuela pārvietojuma tās pašas koordinātes būs:

$$x_1 + \delta x_1\ ;\ y_1 + \delta y_1\ ;\ z_1 + \delta z_1\ ;\ x_2 + \delta x_2 \ldots x_k + \delta x_k \ldots z_n + \delta z_n$$

Bet šinī jaunā stāvoklī punktu koordinātēm arī jāapmierina saites nol-ms, tā tad

$$f(x_1+\delta x_1; y_1+\delta y_1; z_1+\delta z_1; x_2+\delta x_2; \ldots x_k+\delta x_k \ldots z_n+\delta z_n) = 0$$

Attīstot šo formulu pēc Taylora, dabūsim

$$f(x_1+\delta x_1; y_1+\delta y_1; z_1+\delta z_1; \ldots x_k+\delta x_k \ldots z_n + \delta z_n) =$$

$$= f(x_1 y_1 z_1 x_2 \ldots x_k \ldots z_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 +$$

$$+ \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\delta z_n + R = 0$$

kur ar R ir apzīmēta pārējo otrās un augstākas kārtas bezgalīgi mazo locekļu summa. Šo locekļu summu salīdzinot ar pašiem virtueliem pārvietojumiem, kuŗi ir pirmās kārtas bezgalīgi mazie lielumi, varam ignorēt, bez tam arī pirmais loceklis $f(x_1 y_1 z_1 \dots x_k \dots z_n) = 0$, tā tad paliek:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \dots + \frac{\partial f}{\partial z_n}\delta z_n = 0$$

jeb lietojot matematisko saīsinājumu varam rakstīt

$$\boxed{\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\delta z_k \right) = 0} \qquad \dots\dots\dots\dots(9)$$

kur $k = 1, 2, 3 \dots n$

Formula (9) reprezentē noteikumu, kuŗu izsauc saites eksistence virtueliem pārvietojumiem.

Ja sistemā ir vairākas saites, tad katra saite dos virtueliem pārvietojumiem šādu noteikumu:

$$\left.\begin{array}{l}
\boxed{\sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k}\delta z_k \right) = 0} \\
\boxed{\sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k}\delta z_k \right) = 0} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\boxed{\sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\delta z_k \right) = 0}
\end{array}\right\} \text{Noteikumi virtueliem pārvietojumiem, ja sistēmā ir h saite} \quad \dots(10)$$

No $3n$ pārvietojumiem h pārvietojumu var atrast no šiem noteikumiem un $3n - h$ paliek neatkarīgi.

Lai noskaidrotu, kāda nozīme ir nol-mam (9), apskatīsim 3 speciālus gadījumus.

1) Punkts kustās uz virsmas: $f(xyz) = 0$.
Saite uzliek virtueliem pārvietojumiem noteikumu:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

izdalīsim šo nol-mu ar pirmās kārtas diferenciālo parametru

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta}\delta x + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta}\delta y + \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta}\delta z = 0$$

$$\mathrm{Cos}(\underline{X}\overline{N}).\delta s.\mathrm{Cos}(\underline{X}.\overline{\delta s}) + \mathrm{Cos}(\overline{YN}).\delta s.\mathrm{Cos}(\overline{Y}.\overline{\delta s}) + \mathrm{Cos}(\overline{ZN}).\delta s.\mathrm{Cos}(\overline{Z}.\overline{\delta s}) = 0$$

$$\delta s.\mathrm{Cos}(\overline{N}.\overline{\delta s}) = 0$$

bet $\delta s \neq 0$, tā tad $\mathrm{Cos}(\overline{N}\overline{\delta s}) = 0$, jeb $\delta s \perp \overline{N}$

Tas nozīmē, ka visi virtuelie pārvietojumi ir perpendikulāri normalei, jeb virtuelie pārvietojumi ir iespējami tikai tangenciālā plaknē.

2) Punkts kustās uz līknes, dotas ar divām virsmām.

$$f_1(xyz) = 0 \quad \text{un} \quad f_2(xyz) = 0$$

Katra saite dod virtueliem pārvietojumiem noteikumu

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0$$

izdalot atkal katru nol-mu ar savu diferenciālo parametru Δ_1 un Δ_2, dabūsim

$$\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\Delta_1}\delta x + \frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\Delta_1}\delta y + \frac{\frac{\partial f_1}{\partial z}}{\Delta_1}\delta z = 0$$

$$\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\Delta_2}\delta x + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial y}}{\Delta_2}\delta y + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial z}}{\Delta_2}\delta z = 0$$

un tāļāk

$$\delta x.\mathrm{Cos}(\overline{XN_1}) + \delta y.\mathrm{Cos}(\overline{YN_1}) + \delta z.\mathrm{Cos}(\overline{ZN_1}) = 0$$

$$\delta x.\mathrm{Cos}(\overline{XN_2}) + \delta y.\mathrm{Cos}(\overline{YN_2}) + \delta z.\mathrm{Cos}(\overline{ZN_2}) = 0$$

jeb

$$\delta s.\mathrm{Cos}(\overline{N}_1.\delta\overline{s}) = 0$$

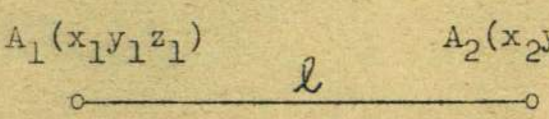
$$\delta s.\mathrm{Cos}(\overline{N}_2.\delta\overline{s}) = 0$$

bet $\delta s \neq 0$, tā tad $\mathrm{Cos}(\overline{N}_1.\delta\overline{s}) = 0$ un $\mathrm{Cos}(\overline{N}_2.\delta\overline{s}) = 0$, jeb

$$\delta\overline{s} \perp \overline{N}_1 \quad \text{un} \quad \delta\overline{s} \perp \overline{N}_2$$

tas nozīmē, ka virtuelam pārvietojumam jābūt perpendikulāram abām tangentēm jeb virtualais pārvietojums ir iespējams tikai tangentes virzienā.

3) Divi punkti ir saistīti ar stienīti:



zīm.13.

Saites nol-ms, kuŗš vispārīgi diviem punktiem ir

$$f(x_1y_1z_1x_2y_2z_2) = 0$$

šinī gadījumā būs:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2 = 0$$

Noteikums virtualiem pārvietojumiem ir:

$$\sum_1^n\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$

Šinī gadījumā iznāks:

$$-2(x_2-x_1).\delta x_1 - 2(y_2-y_1).\delta y_1 - 2(z_2-z_1).\delta z_1 + 2(x_2-x_1).\delta x_2 + 2(y_2-y_1)\delta y_2 + 2(z_2-z_1)\delta z_2$$

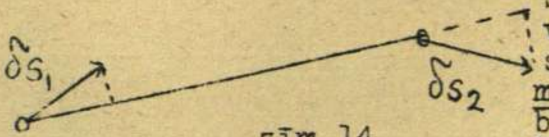
Izdalīsim ar 2ℓ visu nol-mu un pārnesīsim 3 locekļus otrā pusē

$$\frac{x_2 - x_1}{\ell}\delta x_1 + \frac{y_2 - y_1}{\ell}\delta y_1 + \frac{z_2 - z_1}{\ell}\delta z_1 = \frac{x_2 - x_1}{\ell}\delta x_2 + \frac{y_2 - y_1}{\ell}\delta y_2 + \frac{z_2 - z_1}{\ell}\delta z_2$$

$$\cos(\bar{X}\bar{l}).\delta x_1 + \cos(\bar{Y}\bar{l}).\delta y_1 + \cos(\bar{Z}\bar{l}).\delta z_1 = \cos(\bar{X}\bar{l}).\delta x_2 + \cos(\bar{Y}\bar{l}).\delta y_2 + \cos(\bar{Z}\bar{l}).\delta z_2$$

jeb

$$\boxed{\delta s_1 \cos(\bar{l}.\delta \bar{s}_1) = \delta s_2 \cos(\bar{l}.\delta \bar{s}_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$



zīm.14.

Šis nol-ms dod kinēmatisku ierobežojumu virtueliem pārvietojumiem, kuŗu izsauc saites eksistence: virtuelo pārvietojumu projekcijām uz stienīša virzienu jābūt vienādām.

Ideālas saites.

Par ideālām saitēm sistemā mēs sauksim tādas, kuŗām reakciju darbu summa uz sistemas virtueliem pārvietojumiem līdzinājās nullei.

Analitiski šī dēfinicija izsakās šādi:

$$\boxed{\delta \mathfrak{A}_s = (\bar{S}_k \,\delta \bar{s}_k) = \sum_1^n (S_{kx}.\delta x_k + S_{ky}.\delta y_k + S_{kz}.\delta z_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

kur S_k ir punkta A_k reakcija un S_{kx}, S_{ky}, S_{kz} šīs reakcijas projekcijas.

Nupat formulēta ideālas saites dēfinicija nemaz nestāv pretrunā ar agrāko ideālās virsmas jeb līknes jēdzienu, bet ir tikai plašāka.

Pārbaudīsim sacīto dažādos gadījumos:

1) Gadijumus: Punkta saite ir ideāla virsma: $f(xyz) = 0$.

Ideālai, t.i. absolūti gludai virsmai, saites reakcija S iet normālā virzienā, bet virtuelie pārvietojumi punktam uz virsmas, kā agrāk bija pierādīts, ir iespējami tikai tangenciālā plaknē, tā tad arvienu $\bar{S} \perp \delta \bar{s}$ un

$$\delta \mathfrak{A}_s = (\bar{S}.\delta \bar{s}) = S_x.\delta x + S_y.\delta y + S_z.\delta z = 0$$

Kā redzams, saites reakcijas virtuelais darbs ir nulle.

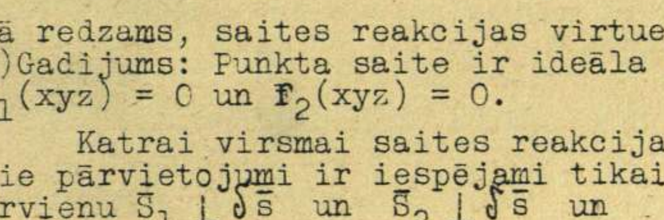
2) Gadijums: Punkta saite ir ideāla līkne, dota ar divām virsmām: $f_1(xyz) = 0$ un $f_2(xyz) = 0$.

Katrai virsmai saites reakcija iet normalā virzienā, bet virtuelie pārvietojumi ir iespējami tikai līknes tangentes virzienā, tā tad arvienu $\bar{S}_1 \perp \delta \bar{s}$ un $\bar{S}_2 \perp \delta \bar{s}$ un

$$\delta \mathfrak{A}_s = (\bar{S}_1 \delta \bar{s}) + (\bar{S}_2 \delta \bar{s}) = 0 \quad \text{jeb arī}$$

$$S_{1x}.\delta x + S_{1y}.\delta y + S_{1z}.\delta z + S_{2x}.\delta x + S_{2y}.\delta y + S_{2z}.\delta z = 0$$

3) Gadījums: Sistema no diviem punktiem, saistītiem ar stienīti.



zīm.15.

Pēc IV Newton'a principa saites reakcijas var iet tikai stieņa virzienā, pie kam abas būs vienādas un pretēji virzītas:

$$\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$$

Sastādīsim virtuelo darbu summu:

$$\delta \mathfrak{A}_s = (\bar{S}_1.\delta \bar{s}_1) + (\bar{S}_2.\delta \bar{s}_2)$$

$$\delta \mathfrak{A}_s = S_1.\delta s_1 Cos(\bar{S}_1.\delta\bar{s}_1) + S_2.\delta s_2 Cos(\bar{S}_2.\delta\bar{s}_2)$$

Pārrakstīsim Cos. pieņemot stieņa ℓ virzienu no A_1 uz A_2

$$\delta \mathfrak{A}_s = S_1.\delta s_1 Cos(\bar{\ell}.\delta\bar{s}_1) - S_2.\delta s_2 Cos(\bar{\ell}.\delta\bar{s}_2) = 0$$

jo pēc formulas (11):

$$\delta s_1 Cos(\bar{\ell}.\delta\bar{s}_1) = \delta s_2.Cos(\bar{\ell}.\delta\bar{s}_2)$$, tā tad atkal

$$\delta \mathfrak{A}_s = (\bar{S}_1.\delta\bar{s}_1) + (\bar{S}_2.\delta\bar{s}_2) = 0$$

tas nozīmē, ka stienīša veidā saite arī jāskaita par ideālu.

Ideālas saites reakciju projekcijas.

Pieņemsim, ka apskatamā sistemā ar n - punktiem ir dota ideāla saite:

$$f(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0$$

Ideālai saitei reakciju virtuelo darbu summa = 0 (form.12)

$$\delta \mathfrak{A}_s = \sum_1^n (S_{kx}.\delta x_k + S_{ky}.\delta y_k + S_{kz}.\delta z_k) = 0$$

Uzrakstīsim vēl noteikumu, kuŗu dod saites eksistence virtueliem pārvietojumiem (form.9):

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$

Pareizināsim otro nolīdzinājumu ar kādu, līdz šim vēl nenoteiktu faktoru λ, atvilksim no pirmā un izņemsim aiz iekavām δx_k, δy_k, δz_k:

$$\sum_1^n \left[(S_{kx} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x_k})\delta x_k + (S_{ky} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y_k})\delta y_k + (S_{kz} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z_k})\delta z_k\right] = 0$$

Attīstīsim šo formulu, liekot k = 1,2,3 ... n

$$(S_{1x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1})\delta x_1 + (S_{1y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1})\delta y_1 + (S_{1z} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1})\delta z_1 + (S_{2x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x_2})\delta x_2 +$$

$$+ \dots + (S_{kx} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x_k})\delta x_k + \dots + (S_{nz} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z_n})\delta z_n = 0$$

Ja sistemā ar n punktiem ir viena saite, tad neatkarīgo virtuelo pārvietojumu skaits būs 3n - 1, un viens virtuels pārvietojums būs atkarīgs no tiem.

Pieņemsim, ka atkarīgais virtuelais pārvietojums ir δx_1 un izvēlēsim λ tik lielu, lai koeficients pie δx_1 būtu nulle,t.i.,

lai $S_{1x} - \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$. Tad paliks pāri nolīdzinājums:

$$(S_{1y} - \lambda\frac{\partial f}{\partial y_1})\delta y_1 + (S_{1z} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1})\delta z_1 + \dots + (S_{nz} - \lambda\frac{\partial f}{\partial z_n})\delta z_n = 0$$

bet lai šāda summa pie neatkarīgiem pārvietojumiem δy_1, δz_1, $\delta x_2 .. \delta z_n$

varētu līdzināties nullei, jālīdzinājās nullei katram koeficientam pie neatkarīgiem pārvietojumiem, t.i.

$$
\left.
\begin{array}{llll}
S_{1y} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y_1} = 0 & & \text{jeb} & S_{1y} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y_1} \\
S_{1z} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_1} = 0 & & & S_{1z} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_1} \\
S_{2x} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 & & & S_{2x} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\
\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots \\
S_{kx} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = 0 & & & S_{kx} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_k} \\
S_{ky} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y_k} = 0 & & & S_{ky} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y_k} \\
S_{kz} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_k} = 0 & & & S_{kz} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_k} \\
\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots & & & \dots\dots\dots \\
S_{nz} - \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_n} = 0 & & & S_{nz} = \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z_n}
\end{array}
\right\} \dots\dots(13)
$$

Kā redzams, visas ideālas saites reakciju projekcijas izteicas caur saites parciālām atvasinātām reizinātām ar vienu un to pašu faktoru λ.

Ja dota saite $f(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots z_n) = 0$ nav ideāla, tad reakciju S_k var sadalīt divās komponentēs: normālā reakcijā, kuŗa izteicas ar nupat atrastām formulām un berzes spēkā, kas līdzinājās normalai reakcijai, reizinātāi ar berzes koeficientu μ.

Ideālo saišu reakcijas projekcijas, ja sistemā ir h saites.

Uzrakstīsim sistemai ar n punktiem h saišu nolīdzinājumus:

$$
\begin{array}{l}
f_1(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0 \\
f_2(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_h(x_1 y_1 z_1 x_2 \dots x_k y_k z_k \dots z_n) = 0
\end{array}
$$

Uz katru sistemas punktu darbosies h reakcijas, no katras saites viena reakcija, kuŗas varam iedomāties saliktas geometriski:

$$\bar{S}_k' = \bar{S}_k' + \bar{S}_k'' + \bar{S}_k''' + \dots\dots + \bar{S}_k^{(h)}$$

Dosim sistemai virtuelus pārvietojumus saskaņā ar saitēm, tad, ja saites ir ideālas, reakciju darbu summa uz virtueliem pārvietojumiem līdzinajās nullei:

$$\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (S_{kx}.\delta x_k + S_{ky}.\delta y_k + S_{kz}.\delta z_k) = 0$$

Bez tam saišu eksistence dod virtueliem pārvietojumiem h noteikumus:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0 \\
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0
\end{array}\right\} \text{h - noteikumi}$$

Reizināsim h noteikumus ar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_h$ un atvilksim visus no virtuela darba nolīdzinājuma, pie kam ņemsim vēl aiz iekavām $\delta x_k, \delta y_k$ un δz_k

$$\sum_1^n \Big[\Big(S_{kx} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k}\Big)\delta x_k +$$
$$+ \Big(S_{ky} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\Big)\delta y_k +$$
$$+ \Big(S_{kz} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\Big)\delta z_k = 0$$

No 3n virtueliem pārvietojumiem h ir atkarīgi un 3n - h neatkarīgi, jo starp 3n pārvietojumiem pastāv h noteiktu sakaru. Izvēlēsim tālāk, līdz šim vēl nenoteiktus faktorus $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_h$ tā, lai koeficienti pie h atkarīgiem pārvietojumiem līdzinātos nullei. Tad pēdējā nolīdzinājumā paliks summa no 3n - h neatkarīgiem pārvietojumiem, pareizinātiem ar zināmiem koeficientiem, pie kam šī summa līdzinājās nullei. Lai pie neatkarīgiem pārvietojumiem šāda summa varētu līdzināties nullei, ir jālīdzinājās nullei katram koeficientam atsevišķi.

Izteiksim sacīto analitiski:

$$\left.\begin{array}{l}
S_{1x} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_1} = 0 \\
S_{2x} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_2} = 0 \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
S_{hx} - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_h} - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_h} - \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_h} - \ldots - \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_h} = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{h - koeficienti,} \\ \text{kuŗi līdzinājās} \\ \text{nullei pēc } \lambda_1, \\ \lambda_2, \ldots \lambda_h \text{ izvēles.}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
S_{(h+1)x} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{h+1}} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{h+1}} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_{h+1}} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial x_{h+1}} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{nx} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial x_n} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial x_n} = 0 \\
S_{1y} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial y_1} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial y_1} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{ny} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_n} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_n} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial y_n} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial y_n} = 0 \\
S_{1z} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_1} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial z_1} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial z_1} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S_{nz} - \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} - \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n} - \lambda_3 \dfrac{\partial f_3}{\partial z_n} - \ldots - \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial z_n} = 0
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{pārējie}\\ 3n-h \\ \text{koef., kuŗiem}\\ \text{arī jālīdzinās}\\ \text{nullei}\end{array}$$

No šīm formulām varam atrast reakciju projekcijas visiem sistemas punktiem. Uzrakstīsim punktam A_k reakcijas projekcijas

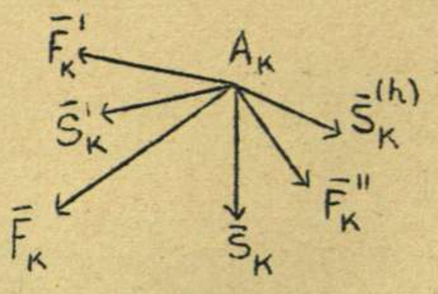
$$\boxed{\begin{array}{l}
S_{kx} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial x_k} \\
S_{ky} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial y_k} \\
S_{kz} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots + \lambda_h \dfrac{\partial f_h}{\partial z_k}
\end{array}} \quad \Bigg\} \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

Liekot formulās (14) $k = 1,2,3 \ldots n$, varam dabūt reakcijas projekcijas arī citiem punktiem.

§ 4. SAISTĪTAS SISTEMAS KUSTĪBAS DIFERENCIĀLNOLĪDZINĀJUMI PĒC LAGRANGA I FORMĀ. MIERA STĀVOKLIS.

Pieņemsim, ka sistemā ar n punktiem ir h saites, kuŗas dod punktiem ārējas un iekšējas reakcijas.

Izņemsim no sistemas punktu A_k un apzīmēsim ar $\bar{F}_k$ visu ārējo un iekšējo spēku geometrisko summu, tāpat arī ar $\bar{S}_k$ visu ārējo un iekšējo reakciju geometrisko summu.



zīm.16.

$$\bar{F}_k = \sum \bar{F}^a_k + \sum \bar{F}^i_k$$

$$\bar{S}_k = \sum \bar{S}^a_k + \sum \bar{S}^i_k$$

Tad punkta A_k kustības diferenciālnolīdzinājumi būs

$$m_k\ddot{x}_k = X_k + S_{kx}$$

$$m_k\ddot{y}_k = Y_k + S_{ky}$$

$$m_k\ddot{z}_k = Z_k + S_{kz}$$

ievietosim šeit saites reakcijas projekcijas pēc form.(14)

$$\left.\boxed{\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= X_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k} \\ m_k\ddot{y}_k &= Y_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k} \\ m_k\ddot{z}_k &= Z_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \dots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k} \end{aligned}}\right\} \dots\dots\dots\dots (15)$$

Atrastie nolīdzinājumi (15) ir saistītas sistemas kustības diferenciālnolīdzinājumi pēc Lagrang'a I formā.

Ja sistemā ir n punktu, tad Lagrang'a diferenciālnolīdzinājumu būs 3n, bet nezinamo 3n + h, jo nāk klāt vēl h lielumu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_n$, tā tad, lai būtu iespējams šo sistemu atrisināt, jāpievieno vēl h saites nolīdzinājumi.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) &= 0 \\ f_2(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ f_h(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ h - nol-mu}$$

Pievestas 3n + h nolīdzinājumu sistemas atrisināšanas metode ir šāda: pirmkārt jāizslēdz visi λ un, lai to panāktu, jāņem h + 1 vienkāršāki nolīdzinājumi. Rezultātā dabūsim 3n - h diferenciālnolīdzinājumus, kuŗos neietilpst λ, bet ietilpst visas 3 koordinātes un pirmās un otrās atvasinātās no koordinātēm.

Tālāk h saites nolīdzinājumus izlietosim h atkarīgo koordinātu noteikšanai. No iepriekš dabūtiem diferenciālnolīdzinājumiem izslēgsim šīs h atkarīgas koordinātes līdz ar to atvasinātām. Tad dabūsim 3n-h simultanus diferenciālnolīdzinājumus ar 3n - h neatkarīgām koordinātēm, kuŗi būs jāintegrē. Pie integrēšanas ieies 2(3n - h) = 6n - 2h konstantes, kuŗas ir jāatrod no sākuma apstākļiem, tā tad jābūt dotām 3n - h sākuma koordinātēm un 3n - h sākuma ātrumu projekcijām.

Pēc tam, kad 3n - h neatkarīgas koordinātes būs atrastas kā f(t), varam pārējās h atkarīgās koordinātes atrast no saišu nolīdzinājumiem.

Kad tādā kārtā visiem punktiem kustības nolīdzinājumi būs atrasti, varam atrast arī reakcijas katram punktam, piemēram punktam A_k pēc formulām:

$$S_{kx} = m_k\ddot{x}_k - X_k$$

$$S_{ky} = m_k\ddot{y}_k - Y_k$$

$$S_{kz} = m_k\ddot{z}_k - Z_k$$

Ja ir vajadzīgs zināt, kādu reakciju dod katra atsevišķa saite kādam noteiktam punktam, tad jāatrod attiecīgais λ, kas atbilst apskatāmai saitei un jāreizinā ar tās pašas saites parciālo atvasināto pēc punkta koordinātes.

Piemēram: pirmā saite pirmam punktam dod reakciju, kuŗas projekcija uz $\underline{X}$ asi ir: $\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$, otra saite pirmam punktam dod reakciju, kuŗas projekcija uz $\underline{Y}$ - asi ir: $\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1}$. Trešā saite ceturtam punktam dod reakciju, kuŗas projekcija uz Z asi ir: $\lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_4}$.

Pie vienpusīgām saitēm jāatrod attiecīgais λ, lai noskaidrotu, cik ilgi punkts paliek uz saites.

Saistītas sistemas miera stāvoklis.

Ja saistīta punktu sistema atrodas mierā, tad koordinātu atvasinātās $\ddot{x}_k = \ddot{y}_k = \ddot{z}_k = 0$, un no nolīdzinājumiem (15) dabūsim:

$$\left.\begin{aligned} X_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k} = 0 \\ Y_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k} = 0 \\ Z_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots\ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots(16) \\ 3n \text{ nol-mu} \end{array}$$

kur $k = 1, 2, 3 \ldots n$.

Pievienojot šiem nolīdzinājumiem vēl h saites nolīdzinājumus

$$f_1(x_1y_1z_1x_2 \ldots x_ky_kz_k \ldots z_n) = 0$$

$$f_2(x_1y_1z_1x_2 \ldots x_ky_kz_k \ldots z_n) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_h(x_1y_1z_1x_2 \ldots x_ky_kz_k \ldots z_n) = 0$$

dabūsim $3n + h$ nolīdzinājumu sistemu, ar kuŗu būs noteiktas $3n$ sistemas miera stāvokļa koordinātes un visi λ, kuŗi ir vajadzīgi reakciju noteikšanai.

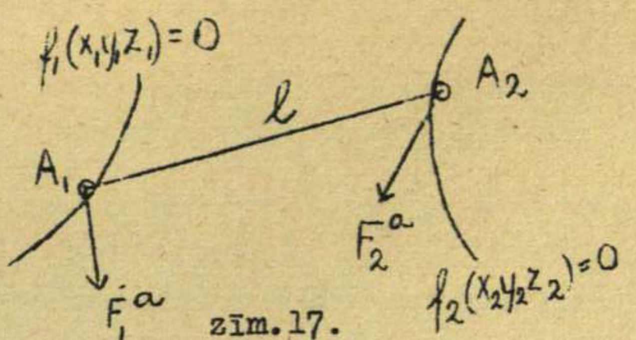
<u>Piemērs.</u> Divi punkti A_1 un A_2 ar masām m_1 un m_2 saistīti ar stienīti garumā ℓ un kustas katrs uz vienas virsmas. Uz punktiem iedarbojas ārējie spēki:

$$F_1^a \text{ un } F_2^a$$

Uziet: punktu kustību.

Pavisam sistēmā ar diviem punktiem ir 3 saites, pirmās divas ir ārējas, virsmas:

$$f_1(x_1y_1z_1) = 0 \text{ un } f_2(x_2y_2z_2)=0$$



zīm.17.

Trešā saite ir iekšēja, stienīts garumā ℓ:

$$f_3 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - \ell^2 = 0$$

Sastādīsim kustības diferenciālnolīdzinājumus abiem punktiem

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ m_1\ddot{y}_1 &= Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_1} \\ m_1\ddot{z}_1 &= Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_1} \end{aligned}\right\} \text{kustības diferenciālnolīdzinājumi punktam } A_1$$

$$\left.\begin{aligned} m_2\ddot{x}_2 &= X_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \\ m_2\ddot{y}_2 &= Y_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2} \\ m_2\ddot{z}_2 &= Z_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial z_2} \end{aligned}\right\} \text{kustības diferenciālnolīdzinājumi punktam } A_2$$

Šie nolīdzinājumi vienkāršojas, ja ievērosim, ka

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = 0 \quad \text{un} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0$$

un ieliksim trešās saites parciālās atvasinātās:

$$1)\ m_1\ddot{x}_1 = X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 2\lambda_3(x_2 - x_1)$$

$$2)\ m_1\ddot{y}_1 = Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} - 2\lambda_3(y_2 - y_1)$$

$$3)\ m_1\ddot{z}_1 = Z_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_1} - 2\lambda_3(z_2 - z_1)$$

$$4)\ m_2\ddot{x}_2 = X_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + 2\ \lambda_3(x_1 - x_2)$$

$$5)\ m_2\ddot{y}_2 = Y_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + 2\ \lambda_3(y_1 - y_2)$$

$$6)\ m_3\ddot{z}_3 = Z_2 + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_2} + 2\ \lambda_3(z_1 - z_2)$$

Pievienojot šiem 6 diferenciālnolīdzinājumiem vēl 3 saites nolīdzinājumus:

$$f_1(x_1y_1z_1) = 0, \quad f_2(x_2y_2z_2) = 0 \quad \text{un} \quad f_3(x_1y_1z_1x_2y_2z_2) = 0$$

dabūsim sistemu no 9 nolīdzinājumiem ar 9 nezināmiem, bet atrisinājumu varēs novest līdz galam tikai tad, ja būs doti abi virsmu nolīdzinājumi konkretā formā, kaut gan tas būs ļoti liels darbs.

§ 5. VIRTUELO PĀRVIETOJUMU PRINCIPS.

Sistemas miera stāvokļa noteikšana ar virtuelo pārvietojumu principu.

Tieksme novest visu mēchanikas jautājumu atrisināšanu kā statikā, tā arī dinamikā pie vieņas kopējas metodes veicināja virtuela pārvietojuma principa atklāšanu. Šo principu ir atklājis J.Bernoulli XVIII g.s. sākumā, bet pilnīgu attīstību šim principam ir devis Lagrange savā darbā "Mecanique analitique" 1788.g.

Virtuelo pārvietojumu princips formulējās tā:

> Materiālu punktu sistemas līdzsvaram ir nepieciešami un pietiekoši, lai visu sistemā darbojošos spēku un reakciju darbu summa uz punktu virtueliem pārvietojumiem līdzinātos nullei,

jeb vienkāršāki: materiālo punktu sistema atrodas līdzsvarā, ja sistemas virtuelais darbs: $\delta \mathfrak{A} = 0$.

Ja saites ir ideālas, tad reakciju darbu summa uz virtueliem pārvietojumiem pati līdzinājās nullei un punktu sistemas līdzsvaram pietiek, ja visu spēku virtuelais darbs līdzināsies nullei.

Daži autori virtuelo pārvietojumu principa vietā lieto nosaukumu: "virtuelo ātrumu princips", jo virtuelus pārvietojumus arvien var aizvietot ar virtueliem ātrumiem ievērojot, ka virtuelais ātrums:

$$V_\delta = \frac{\delta s}{dt}, \text{ no kuŗienes } \delta s = V_\delta dt.$$

Izvedīsim virtuelo pārvietojumu principu atsevišķi brīvai un saistītai punktu sistemai.

I. Brīvai sistemai.

Virtuelo pārvietojumu princips analitiski izsakās tā

$$\boxed{\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

kur $\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i$

jeb attīstot skalaro produktu:

$$\boxed{\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17^{a})$$

Ja sistema atrodas līdzsvarā, tad katram punktam: $\bar{F}_k = 0$, kur $\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i$.

Pareizinot $\bar{F}_k$ ar virtuelo pārvietojumu $\delta\bar{s}_k$ skalāri, t.i. sastādot virtuelo darbu spēkam $\bar{F}_k$ un summējot šo darbu visiem punktiem, dabūsim nulli

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k\delta\bar{s}_k) = 0$$

un attīstot produktu:

$$\sum_1^n (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0$$

Tagad otrādi - izejot no noteikuma, ka virtuelais darbs ir nulle, pierādīsim, ka sistema atrodas līdzsvarā.

Dots:

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0$$

kur $k = 1, 2, 3, \ldots n$. Bet brīvā sistemā visi virtuelie pārvietojumi ir neatkarīgi un $\delta x_k \neq 0$, $\delta y_k \neq 0$, $\delta z_k \neq 0$, tā tad, lai minētā summa varētu līdzināties nullei, jābūt

$$X_k = X_k^a + X_k^i = 0$$

$$Y_k = Y_k^a + Y_k^i = 0$$

$$Z_k = Z_k^a + Z_k^i = 0$$

$3n$ nolīdzinājumu priekš visiem $k = 1, 2, 3 \ldots n$.

Kā redzams, izejot no virtuela darba izteiksmes: $\delta\mathfrak{A} = 0$, mēs dabūjam brīvas sistemas līdzsvara noteikumus.

II. Saistītai sistemai.

Virtuelo pārvietojumu princips saistītai sistemai analitiski izsakās tā:

$$\boxed{\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k\delta\bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k\delta\bar{s}_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

kur $\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i$ un $\bar{S}_k = \bar{S}_k^a + \bar{S}_k^i$

Ja saistīta sistema atrodas līdzsvarā, tad katram punktam A_k: $\bar{F}_k + \bar{S}_k = 0$.

Pareizinot šo skalari ar virtuelo pārvietojumu $\delta\bar{s}_k$, t.i. sastādot virtuelo darbu un summējot visiem punktiem, mēs dabūsim nulli.

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k + \bar{S}_k, \delta\bar{s}_k) = 0$$

$$\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k \delta \bar{s}_k) = 0$$

<u>Piezīme.</u> Ņemot vērā, ka ideālām saitēm reakciju virtuelais darbs pats par sevi līdzinājās nullei

$$\sum_1^n (\bar{S}_k \delta \bar{s}_k) = 0$$

(sk.formulu 12), nākam pie slēdziena, ka saistītai ar ideālām saitēm sistemai virtuelo pārvietojumu princips izsakās tāpat, kā brīvai sistemai

$$\boxed{\sum_1^n (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) = \sum_1^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0} \quad \text{..........}(18^{a})$$

Tagad otrādi: izejot no virtuelo pārvietojumu principa (form.18):

$$\sum_1^n (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k \delta \bar{s}_k) = 0$$

pierādīsim, ka sistema atrodas līdzsvarā, t.i. ka šis noteikums ir pietiekošs līdzsvaram.

Ja sistema neatrastos līdzsvarā, tad daži jeb visi punkti nonāktu kustībā, pie kam punktu pārvietojumi arī piederētu pie virtueliem,t.i. iespējamiem.

Lai nepieļautu šādus pārvietojumus, iedomāsimies punktiem pieliktus fiktivus spēkus Q_k pretējā pārvietojumiem virzienā. Ar šiem spēkiem būtu atjaunots līdzsvara stāvoklis un mēs varētu uzstādīt virtuela darba nolīdzinājumu:

$$\Sigma \mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k \delta \bar{s}_k) - \sum_1^n Q_k \delta s_k = 0$$

Pēdējā loceklī nav jāņem skalārais produkts, jo spēki Q_k domāti pretējā virzienā pārvietojumiem, tamdēļ arī priekšā jāņem (-) zīme.

Salīdzinot šo formulu ar doto formulu (18) skaidri redzams, ka

$$-\sum_1^n Q_k \delta s_k = 0$$

jeb attīstot summu:

$$-Q_1 \delta s_1 - Q_2 \delta s_2 - \dots - Q_k \delta s_k - \dots - Q_n \delta s_n = 0$$

Pārvietojumi pēc pieņemtās propozicijas nullei nelīdzinājās, tā tad jālīdzinājās nullei visiem spēkiem Q_k, tas nozīmē, ka jau no paša sākuma sistema bija līdzsvarā.

Ar ideālām saitēm saistītas sistemas līdzsvara stāvokļa noteikšanas metode uz virtuelo pārvietojumu principa pamata.

Pieņemsim, ka sistemā ir h ideālas saites:

$$f_1(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) = 0$$
$$f_2(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_h(x_1y_1z_1x_2 \dots x_ky_kz_k \dots z_n) = 0$$

Ja saites ir ideālas, tad virtuelo pārvietojumu princips saistītai sistemai formulējas tāpat, kā brīvai:

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots(18^a)$$

bez tam saites eksistence dod virtueliem pārvietojumiem noteikumus:

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$
$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$

Šie h noteikumi kopā ar virtuela darba izteiksmi reprezentē nolīdzinājumu sistemu, ar kuŗu ir noteikts sistemas miera stāvoklis. Ja sistemā ir h saites, tad ir h atkarīgo pārvietojumu un 3n – h neatkarīgo.

Uziesim no h noteikumiem h atkarīgus pārvietojumus caur 3n – h neatkarīgiem un ieliksim tos virtuela darba nolīdzinājumā, tad šinī nolīdzinājumā būs summa no 3n – h neatkarīgiem pārvietojumiem pareizinātiem katrs ar kādu izteiksmi iekavās. Bet lai šāda summa varētu līdzināties nullei, tad katram koeficientam pie neatkarīgiem pārvietojumiem atsevišķi jālīdzinājās nullei. Šis apstāklis dos mums vēl trūkstošus nolīdzinājumus, no kuŗiem, izslēdzot atkarīgus pārvietojumus, dabūsim sistemas miera stāvokļa noteikumu.

Tas pats ar Lagrang'a koordinātu palīdzību.

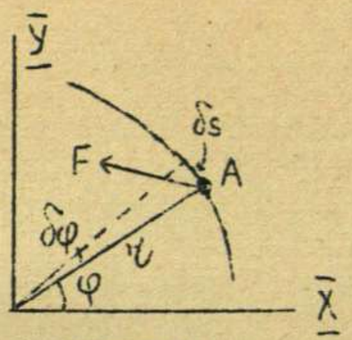
Ja virtuela darba izteiksmē visus virtuelus pārvietojumus izteiksim ar Lagrang'a koordinātēm, tad mēs varam atsvabināties no saitēm un atrast sistemas miera stāvokļa noteikumu, neņemot vērā saites. Pierādīsim sacīto sekojošā piemērā.

Piemērs: Punkta saite ir riņķis ar radiusu r. Uziet punkta līdzsvara noteikumu.

1) Atrisinājums uz virtuelo pārvietojumu principa pamata.

Virtuelais darbs:

$$\delta\mathfrak{A} = (\bar{F}_k\delta\bar{s}_k) = 0$$



zīm.18.

attīstīsim produktu, ievērojot, ka $Z = 0$,

$$X.\delta x + Y.\delta y = 0$$

Saites nolīdzinājums: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.
Saite dod virtueliem pārvietojumiem noteikumu

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k + \frac{\partial f}{\partial y_k}\delta y_k + \frac{\partial f}{\partial z_k}\delta z_k\right) = 0$$

kas mūsu gadījumā iznāk $2x.\delta x + 2y.\delta y = 0$,
no kurienes $\delta x = -\frac{y}{x}\delta y$.

Punktam A plaknē ir divas kustības brīvības un ir viena saite, tā tad paliek viena kustības brīvība un būs viens neatkarīgs virtuels pārvietojums. Izvēlēsim δy par neatkarīgo pārvietojumu un aizvietosim darba formulā visus pārvietojumus ar δy :

$$-X\frac{y}{x}\delta y + Y\delta y = 0 \quad \text{jeb} \quad (xY - yX)\delta y = 0$$

bet $\delta y \neq 0$, kā neatkarīgs pārvietojums, tā tad $xY - yX = 0$ un tas nav nekas cits kā $L_z = 0$.

Lai punkts atrastos mierā uz saites, ir nepieciešams, lai spēka moments attiecībā uz Z asi līdzinātos nullei.

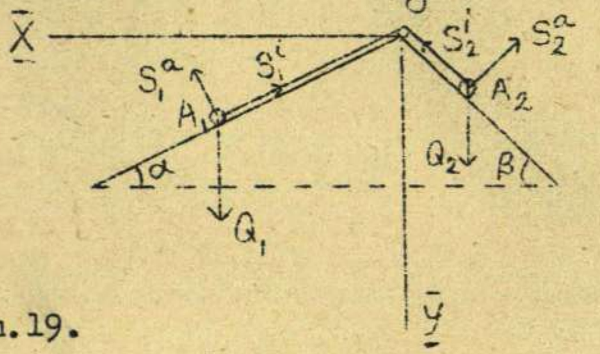
2) atrisinājums: tas pats, bet ar Lagrang'a koordinātēm. Virtuelais darbs $\delta\mathfrak{A} = (\bar{F}_k\delta\bar{s}_k) = 0$ jeb $F.\delta s.\mathrm{Cos}(\bar{F}.\delta\bar{s}) = 0$.

Par Lagrang'a koordināti izvēlēsim leņķi φ, kuru veido r ar $\bar{X}$ asi. tad $\delta s = r\,\delta\varphi$ un $F.\mathrm{Cos}(\bar{F}.\delta\bar{s}) = F_t$. Tad $F_t.r.\delta\varphi = 0$, bet $rF_t = L_z$ un galīgi iznāk: $L_z\,\delta\varphi = 0$.

Bet $\delta\varphi \neq 0$, kā neatkarīga koordināte un paliek $L_z = 0$. Mēs tādā kārtā ar Lagrang'a koordinātu palīdzību dabūjam to pašu rezultātu, neņemot nemaz vērā saites nolīdzinājumu.

Tālāk atrisināsim vēl vienu piemēru ar trīs dažādiem paņēmieniem: 1) ar Lagrang'a nolīdzinājumiem I formā, 2) ar virtuelo pārvietojumu principu un 3) ar to pašu principu, bet lietojot Lagrang'a koordināti.

<u>Piemērs.</u> Divi smagi materiāli punkti A_1 un A_2 ar svariem Q_1 un Q_2 kustās uz divām ideālām slīpām plaknēm, kuŗas veido ar horicontu leņķus $\angle\alpha$ un $\angle\beta$. Abi punkti ir sasieti ar neizstiepjamu pavedienu garumā l, kas slīd bez berzes caur virsotni O.
Doti: Q_1, Q_2, α, β.
Uziet: sistemas miera stāvokļa noteikumu un visas reakcijas ārējās un iekšējās.



zīm.19.

1) atrisinājums ar Lagrang'a nolīdzinājumiem I formā.

Dotā sistemā ir divi punkti un trīs saites. Uzrakstīsim saites nolīdzinājumus, ievērojot, ka tās ir vienpusīgas:

pirmā saite: $f_1(x_1y_1)$ ir $x_1\mathrm{tg}\alpha - y_1 \geqslant 0$

otrā saite: $f_2(x_2y_2)$ ir $-x_2\mathrm{tg}\beta - y_2 \geqslant 0$

trešā saite: $f_3(x_1y_1x_2y_2)$ ir $l - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2+y_2^2} \geq 0$

Lagrang'a miera stāvokļa nolīdzinājumi I formā pēc form.(16):

$$\left.\begin{aligned} X_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k} = 0 \\ Y_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k} = 0 \\ Z_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k} = 0 \end{aligned}\right\} \text{3n nol-mu}$$

Mūsu gadijumā n = 2 un h = 3, bet, ievērojot, ka abi punkti kustas plaknē, būs tikai četri nolīdzinājumi, katram punktam 2 nolīdzinājumi.

$$\left.\begin{aligned} 1)\ X_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = 0 \\ 2)\ Y_1 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_1} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = 0 \end{aligned}\right\} \text{2 nolīdzinājumi pirmam punktam}$$

$$\left.\begin{aligned} 3)\ X_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = 0 \\ 4)\ Y_2 + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_2} + \lambda_3 \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = 0 \end{aligned}\right\} \text{2 nol-mi otram punktam}$$

Spēku projekcijas mūsu gadijumā: $X_1 = 0$, $Y_1 = Q_1$, $X_2 = 0$, $Y_2 = Q_2$. Sastādīsim:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \operatorname{tg}\alpha \ ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -1 \ ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \ ; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \ ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \ ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\operatorname{tg}\beta \ ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -\frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = -\operatorname{Cos}\alpha \ ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = -\frac{2y_1}{2\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = -\operatorname{Sin}\alpha$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_2} = -\frac{2x_2}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = +\operatorname{Cos}\beta \ ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = -\frac{2y_2}{2\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = -\operatorname{Sin}\beta$$

un ievietosim visus šos lielumus minētos nol-mos

1) $0 + \lambda_1 \operatorname{tg}\alpha + 0 - \lambda_3 \operatorname{Cos}\alpha = 0$

2) $Q_1 - \lambda_1 + 0 - \lambda_3 \operatorname{Sin}\alpha = 0$

3) $0 + 0 - \lambda_2 \operatorname{tg}\beta + \lambda_3 \operatorname{Cos}\beta = 0$

$$4)\quad Q_2 + 0 - \lambda_2 - \lambda_3 \operatorname{Sin}\beta = 0$$

Izslēdzot no šiem 4 nol-miem trīs lielumus $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, dabūsim līdzsvara noteikumu:

no 1) $\lambda_1 = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha}$, ieliksim 2) $Q_1 = \lambda_3(\frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} + \operatorname{Sin}\alpha)$

jeb $Q_1 \operatorname{Sin}\alpha = \lambda_3$

no 3) $\lambda_2 = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}^2\beta}{\operatorname{Sin}\beta}$, ieliksim 4) $Q_2 = \lambda_3(\frac{\operatorname{Cos}^2\beta}{\operatorname{Sin}\beta} + \operatorname{Sin}\beta)$

jeb $Q_2 \operatorname{Sin}\beta = \lambda_3$

Pielīdzinot abas λ_3 izteiksmes, dabūsim līdzsvara noteikumu

$$\boxed{Q_1 \operatorname{Sin}\alpha = Q_2 \operatorname{Sin}\beta}$$

Ja šis noteikums būs izpildīts, sistema zem pašsvara atradīsies mierā, pretējā gadijumā notiks kustība.

Tāļāk meklēsim reakcijas. Šim nolūkam jāatrod visi λ.

λ_3 ir jau atrasts: $\lambda_3 = Q_1 \operatorname{Sin}\alpha = Q_2 \operatorname{Sin}\beta$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}^2\alpha}{\operatorname{Sin}\alpha} = Q_1 \operatorname{Cos}^2\alpha \quad \text{un} \quad \lambda_2 = \lambda_3 \frac{\operatorname{Cos}^2\beta}{\operatorname{Sin}\beta} = Q_2 \operatorname{Cos}^2\beta$$

Vēl jāuziet visām saitēm diferenciāli parametri:

$$\Delta_1 = \sqrt{(\frac{\partial f_1}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial f_1}{\partial y_1})^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = \operatorname{Sec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{(\frac{\partial f_2}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial f_2}{\partial y_2})^2} = \sqrt{\operatorname{tg}^2\beta + 1} = \operatorname{Sec}\beta = \frac{1}{\operatorname{Cos}\beta}$$

pirmam punktam: $\Delta_{31} = \sqrt{(\frac{\partial f_3}{\partial x_1})^2 + (\frac{\partial f_3}{\partial y_1})^2} = \sqrt{\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Sin}^2\alpha} = 1$

otram punktam: $\Delta_{32} = \sqrt{(\frac{\partial f_3}{\partial x_2})^2 + (\frac{\partial f_3}{\partial y_2})^2} = \sqrt{\operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Sin}^2\beta} = 1$

Tagad reakcijas:

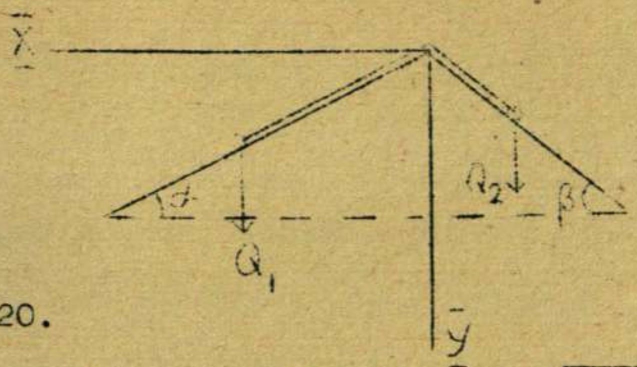
$$S_1^a = \lambda_1 \Delta_1 = Q_1 \operatorname{Cos}^2\alpha \frac{1}{\operatorname{Cos}\alpha} = Q_1 \operatorname{Cos}\alpha$$

$$S_2^a = \lambda_2 \Delta_2 = Q_2 \operatorname{Cos}^2\beta \frac{1}{\operatorname{Cos}\beta} = Q_2 \operatorname{Cos}\beta$$

$$S_1^i = \lambda_3 \Delta_{31} = Q_1 \operatorname{Sin}\alpha . 1 = Q_1 \operatorname{Sin}\alpha$$

$$S_2^i = \lambda_3 \Delta_{32} = Q_2 \operatorname{Sin}\beta . 1 = Q_2 \operatorname{Sin}\beta$$

Tas pats piemērs atrisināts ar virtuelo pārvietojumu principu.



zīm.20.

Doti: Q_1, Q_2, α, β.

Uziet: sistemas miera stāvokļa noteikumu.

Uzrakstīsim atkal saites nol-mus:

$f_1(x_1y_1)$ ir $x_1 tg\alpha - y_1 \geqslant 0$

$f_2(x_2y_2)$ ir $-x_2 tg\beta - y_2 \geqslant 0$

$f_3(x_1y_1x_2y_2)$ ir $l - \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geqslant 0$

Virtuelais darbs: $\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0$

Bez tam saites dod virtueliem pārvietojumiem šādus noteikumus:

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_1}{\partial z_k} \delta z_k\right) = 0 \\
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_2}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_2}{\partial z_k} \delta z_k\right) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_1^n \left(\frac{\partial f_h}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_h}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_h}{\partial z_k} \delta z_k\right) = 0
\end{array}\right\} \text{h nol-mu}$$

Mūsu gadījumā n = 2, tā tad virtuelais darbs

$$\delta \mathfrak{A} = X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 = 0$$

bet atkal $X_1 = 0$, $Y_1 = Q_1$, $X_2 = 0$, $Y_2 = Q_2$ un pēc tam iznāk

$$1) \quad \delta \mathfrak{A} = Q_1 \delta y_1 + Q_2 \delta y_2 = 0$$

Saites mūsu sistemā ir h = 3 un noteikumi virtueliem pārvietojumiem iznāk:

$$2) \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \delta y_2 = 0$$

$$3) \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \delta y_2 = 0$$

$$4) \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_3}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f_3}{\partial y_2} \delta y_2 = 0$$

Saišu parciālas atvasinātās bija jau atrastas pirmā atrisinājumā

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = tg\alpha \; ; \; \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -1 \; ; \; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \; ; \; \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -tg\beta \; ; \; \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -Cos\alpha; \; \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = -Sin\alpha; \; \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = Cos\beta \; ; \; \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = -Sin\beta$$

ievietojot šos lielumus nol-mos 2), 3) un 4), iznāk:

2) $tg\alpha . \delta x_1 - \delta y_1 = 0$

3) $-tg\beta . \delta x_2 - \delta y_2 = 0$

4) $-Cos\alpha . \delta x_1 - Sin\alpha . \delta y_1 + Cos\beta . \delta x_2 - Sin\beta . \delta y_2 = 0$

Diviem punktiem plaknē ir 2.2 = 4 kustības brīvības un sistemā ir h = 3 saites, tā tad neatkarīgo pārvietojumu skaits būs 2n - h = 4 - 3= = 1. Par neatkarīgo pārvietojumu varam izvēlēt kuŗu katru, ņemsim, piemēram, y_1 un izteiksim visus δ caur δy_1

no nol-ma 2) $\delta x_1 = Ctg\alpha . \delta y_1$

no nol-ma 1) $\delta y_2 = -\frac{Q_1}{Q_2} \delta y_1$

no nol-ma 3) $\delta x_2 = -Ctg\beta . \delta y_2 = Ctg\beta \frac{Q_1}{Q_2} \delta y_1$

Visus atrastos pārvietojumus ieliksim nol-mā 4):

$$-Cos\alpha \frac{Cos\alpha}{Sin\alpha} \delta y_1 - Sin\alpha . \delta y_1 + Cos\beta \frac{Cos\beta}{Sin\beta} \frac{Q_1}{Q_2} \delta y_1 + Sin\beta \frac{Q_1}{Q_2} \delta y_1 = 0$$

$$\left(-\frac{Cos^2\alpha + Sin^2\alpha}{sin\,\alpha} + \frac{Q_1}{Q_2} \frac{Cos^2\beta + Sin^2\beta}{Sin\,\beta} \right) \delta y_1 = 0$$

$$(- Q_2 Sin\beta + Q_1 Sin\alpha) \delta y_1 = 0$$

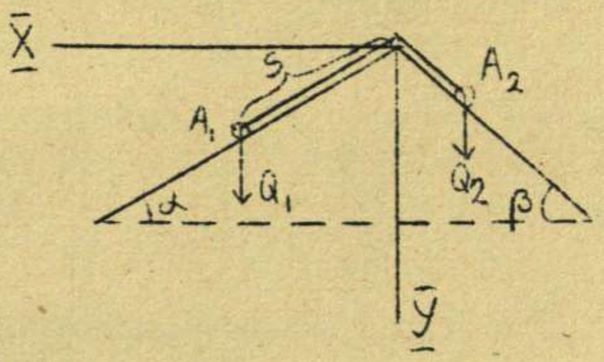
bet $\delta y_1 \neq 0$, kā neatkarīgs virtuels pārvietojums, tā tad paliek

$$-Q_2 Sin\beta + Q_1 Sin\alpha = 0$$

jeb $$\boxed{Q_1 Sin\alpha = Q_2 Sin\beta}$$

tas pats līdzsvara noteikums.

Tas pats piemērs atrisināts ar virtuelo pārvietojumu principu, bet Lietojot Lagrang'a koordinātes.



zīm.21.

Doti: Q_1, Q_2, α un β

Uziet: sistemas līdzsvara noteikumu.

Lietojot Lagrang'a koordinātes varam neņemt vērā saišu nol-mus. Virtuelais darbs:

$$\delta\mathfrak{A} = \sum_{1}^{n} (X_k\delta x_k + Y_k\delta y_k + Z_k\delta z_k) = 0$$

Attīstot summu mūsu gadījumam n = 2, dabūsim:

$$\delta\mathfrak{A} = X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 = 0$$

bet $X_1 = 0$; $Y_1 = Q_1$; $X_2 = 0$; $Y_2 = Q_2$, tad

$$\delta\mathfrak{A} = Q_1\delta y_1 + Q_2\delta y_2$$

Kā jau agrāk bija konstatēts šinī sistemā ir viena kustības brīvība, tā tad būs viena Lagrang'a koordināte.

Par šo koordināti, ar kuŗu pilnīgi būs noteikts sistemas stāvoklis, izvēlēsim punkta A_1 attālumu s no virsotnes.

Tagad izteiksim Dekarta koordinātes caur Lagrang'a koordinātēm

$y_1 = s.\mathrm{Sin}\,\alpha$ un $y_2 = (\ell - s)\mathrm{Sin}\,\beta$, no kurienes

$\delta y_1 = \mathrm{Sin}\,\alpha.\delta s$, $\delta y_2 = -\mathrm{Sin}\,\delta.\delta s$ ieliksim virtuela darba

izteiksmē: $\delta\mathfrak{A} = Q_1\mathrm{Sin}\,\alpha.\delta s - Q_2\mathrm{Sin}\,\beta.\delta s = 0$

$$\delta\mathfrak{A} = (Q_1\mathrm{Sin}\,\alpha - Q_2\mathrm{Sin}\,\beta)\delta s = 0$$

bet $\delta s \neq 0$, kā neatkarīgas koordinātes pieaugums, tad paliek

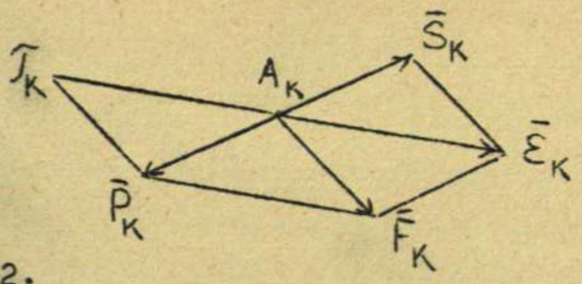
$$Q_1\mathrm{Sin}\,\alpha - Q_2\mathrm{Sin}\,\beta = 0$$

jeb $\boxed{Q_1\mathrm{Sin}\,\alpha = Q_2\mathrm{Sin}\,\beta}$

§ 6. D'Alembert'a princips punktu sistemai. Galvenais dinamikas nolīdzinājums. Inerces spēku momentu summa.

D'Alembert'a princips punktu sistemai.

Izlietosim d'Alembert'a principu vienam sistemas punktam A_k un izplatīsim to uz visu sistemu. Ja $\bar{F}_k$ ir visu spēku, kas darbojas uz punktu A_k, kopspēks, pie kam $\bar{F}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i$ un $\bar{S}_k$ ir visu reakciju geometriska summa punktam A_k, pie kam $\bar{S}_k = \bar{S}_k^a + \bar{S}_k^i$, tad varam abus



zīm.22.

spēkus geometriski saskaitīt, apzīmējot summu ar $\mathcal{E}_k$ un nosaucot to par efektīvo spēku:

$$\bar{F}_k + \bar{S}_k = \bar{\mathcal{E}}_k$$

Ja punktu A_k paātrinājums ir $\bar{J}_k$, tad

$$m\bar{J}_k = \bar{\mathcal{E}}_k$$

Pārrakstīsim šo vienā pusē

$$\mathcal{E}_k + (-m\bar{J}_k) = 0$$

un apzīmēsim, kā parasti, $-m_k\bar{J}_k = \bar{T}_k$ nosaucot T_k par inerces spēku. Ievedot inerces spēku, varam rakstīt:

$$\bar{\mathcal{E}}_k + \bar{T}_k = 0 \quad \text{jeb} \quad \boxed{\bar{F}_k + \bar{S}_k + \bar{T}_k = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

Šī formula reprezentē d'Alembert'a principu vienam sistemas punktam, kuŗš skan tā: katram sistemas punktam aktīvie spēki, reakcijas un inerces spēki atrodas līdzsvarā.

Nolīdzinājumu (19) varam vēl pārveidot, saskaitot geometriski $\bar{F}_k$ ar $\bar{T}_k$ un nosaucot summu par pazaudēto spēku P_k

$$\bar{F}_k + \bar{T}_k = \bar{P}_k$$

Spēks P_k ir nosaukts par pazaudēto tādēļ, ka, iedomājoties aktīvo spēku $\bar{F}_k$ sadalītu komponentēs $\bar{\mathcal{E}}_k$ un $\bar{P}_k$, kustība beidzot notiek zem efektīva spēka iespaida, bet spēks P_k ir priekš kustības pazaudēts. Ievedot pazaudēto spēku, mēs varam formulu (19) pārveidot tā:

$$\boxed{\bar{P}_k + \bar{S}_k = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

Šī formula arī reprezentē d'Alembert'a principu, kuŗš tagad skan tā: katram sistemas punktam pazaudētais spēks līdzsvarojas ar reakcijām.

Lai dabūtu d'Alembert'a principu visai sistemai, summēsim nol-mus (19) visiem punktiem

$$\sum_1^n (\bar{F}_k + \bar{S}_k + \bar{T}_k) = 0$$

šeit tikai jāpiezīmē, ka visai sistemai iekšējo spēku geometriskā summa ir nulle un iekšējo reakciju geometriska summa arī ir nulle, tā tad atrasto formulu varam pārveidot

$$\boxed{\sum_1^n (\bar{F}_k^a + \bar{S}_k^a + \bar{T}_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

Šī formula reprezentē d'Alembert'a principu sistemai, kuŗš skan tā: kustošā sistemā ārējie spēki, ārējās reakcijas un inerces spēki atrodas līdzsvarā.

Mēs varam dabūt vēl vienu d'Alembert'a principa izteiksmi, summējot visai sistemai formulas (20)

$$\boxed{\sum_1^n (\bar{P}_k + \bar{S}_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

jeb ievērojot, ka sistemā iekšējo reakciju $\sum_1^n S_k^i = 0$

$$\boxed{\sum_1^n (\bar{P}_k + \bar{S}_k^a) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22^a)$$

Vārdos šīs formulas skan tā: pazaudētie spēki kustošā sistemā arvien līdzsvarojas ar reakcijām (resp. ar ārējām).

Salīdzinot sistemas statikas nol-mus ar dinamikas jeb kustības nol-miem, redzam, ka d'Alembert'a princips dod iespēju sistemas kustības gadījumā pāriet no statikas nol-miem pie dinamikas nol-miem caur inerces spēka pieskaitīšanu.

Piezīme. D'Alembert'a princips ir spēkā neatkarīgi no tā, vai sistemas saites ir ideālas jeb nē.

Virtuelo pārvietojumu princips kustošai saistītai sistemai.

Pēc d'Alembert'a principa kustošā sistemā pazaudētie spēki līdzsvarojas ar reakcijām:

$$\sum_1^n (\bar{P}_k + \bar{S}_k) = 0$$

Pielietosim minētai spēku sistemai virtuelo pārvietojumu principu

$$\boxed{\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n \left\{ (\bar{P}_k . \delta \bar{s}_k) + (\bar{S}_k . \delta \bar{s}_k) \right\} = 0} \quad \ldots\ldots (23)$$

Šī formula izsaka virtuelo pārvietojumu principu kustošai saistītai sistemai.

Svarīgs apakšgadijums: saites ir ideālas.

Pie ideālām saitēm, kā zinams, $\sum_1^n (\bar{S}_k \delta \bar{s}_k) = 0$ un paliek

$$\boxed{\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{P}_k \delta \bar{s}_k) = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Šo rezultātu formulēsim vārdos tā: kustošā sistemā, saistītā ar ideālām saitēm, pazaudēto spēku virtuelais darbs līdzinājas nullei.

Ievērojot, ka $\bar{P}_k = \bar{F}_k + \bar{T}_k$, varam formulu (24) pārrakstīt vēl citādi:

$$\boxed{\sum_1^n \left\{ (\bar{F}_k \delta \bar{s}_k) + (\bar{T}_k \delta \bar{s}_k) \right\} = 0} \quad \ldots\ldots (24^a)$$

kas vārdos formulēsies sekojoši: kustošā sistemā, saistītā ar ideālām saitēm, aktīvo spēku un inerces spēku virtuelo darbu summa ir nulle.

Galvenais dinamikas nol-ms.

Ievērojot, ka inerces spēks $\bar{T}_k = - m_k \bar{J}_k$, varam formulu (24^a)vēl pārveidot tā:

$$\sum_1^n (\bar{F}_k - m_k \bar{J}_k , \delta \bar{s}_k) = 0 \quad . . . . (25)$$

Attīstot formulā (25) skalaro produktu, dabūsim:

$$\boxed{\sum_1^n \left[(X_k - m_k \ddot{x}_k)\delta x_k + (Y_k - m_k \ddot{y}_k)\delta y_k + (Z_k - m_k \ddot{z}_k)\delta z_k \right] = 0} \quad ....(25^a)$$

Šis nol-ms ir pazīstams zem nosaukums:"Galvenais dinamikas nolīdzinājums", jo šeit ir apvienoti d'Alembert'a princips un virtuelo pārvietojumu princips.

Iedomājoties visus sistemas punktus, savienotus ar kādu nekustošu punktu O un apzīmējot punktu radiusus vektorus ar r_k, mēs varam vēl atrast galvenā dinamikas nol-ma izteiksmi vektoriālā veidā.

Paātrinājums $\bar{J}_k$, kā zinams ir:

$$\bar{J}_k = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

Virtuelo pārvietojumu $\delta \bar{s}_k$ arī varam uzskatīt, ka kādu radiusa vektora $\bar{r}_k$ geometrisko pieaugumu $\delta \bar{r}_k$ un tad formula (25) izteiksies tā:

$$\boxed{\sum_1^n (\bar{F}_k - m_k \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} , \delta \bar{r}_k) = 0} \quad . . . .(26)$$

Formula (26) reprezentē galveno dinamikas nol-mu vektoriālā veidā. (Izteiksmi iekavās ir jāsaprot, kā skalāro produktu no diviem locekļiem:

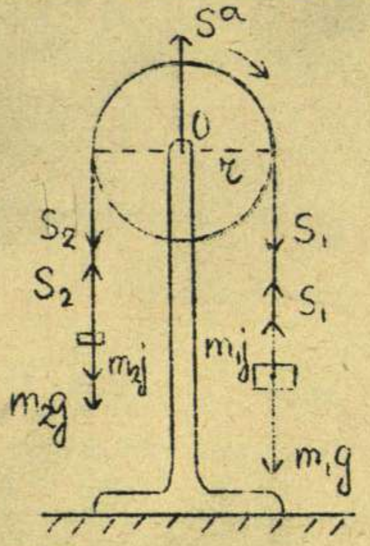
$\bar{F}_k - m_k \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$ un $\delta \bar{r}_k$). Šo formulu mēs izlietosim tāļāk pie Lagrang'a

diferenciālnol-mu izvešanas otrā formā.

Piemērs. Atwooda mašina. Divi smagi materiāli punkti ar masām m_1 un m_2 piekārti pavediena galos. Pavediens pārmests pār ripu, kuŗa griežas bez berzes ap horicontālu asi.

Doti m_1 un m_2, pie kam $m_1 > m_2$. Ripas masa ignorējama.

Uziet: sistemas paātrinājumu zem smaguma spēka iespaida j, punktu reakcijas S_1 un S_2 un štativa reakciju S^a?



zīm.23.

I atrisinājums

ar d'Alembert'a principu atsevišķam punktam.

Ja $m_1 > m_2$, tad kustība notiks pulksteņrādītāja virzienā. Pieliksim punktiem inerces spēkus un sastādīsim pēc d'Alembert'a principa līdzsvara nolīdzinājumus:

$$m_1g - m_1j - S_1 = 0 \quad \text{pirmam punktam,}$$

$$m_2g + m_2j - S_2 = 0 \quad \text{otram punktam.}$$

Ja mēs ripas masu ignorējam, tad ripas inercijas spēks arī jāatmet. Uz ripu darbojas trīs spēki: divas pavediena reakcijas vienādas ar S_1 un S_2, kuŗas ripai būs ārējas, un štatīva reakcija S^a. Pēc d'Alembert'a principa šie spēki līdzsvarojas ar inerces spēku, bet inerces spēku, kā jau bija teikts, mēs atmetam, un palikušiem spēkiem sastādīsim tādu līdzsvara nol-mu, lai štatīva reakcija izkristu, tas būs momentu nol-ms attiecībā uz ripas centru, punktu O.

$$\Sigma M = S_1.r - S_2.r = 0$$

kur r ir ripas radiuss, bet tas saīsinājas un iznāk, ka abas reakcijas ir vienādas:

$$S_1 = S_2$$

Atvelkot tagad nol-mu otram punktam no nol-ma pirmam punktam, saites reakcijas saīsināsies un mēs dabūsim:

$$m_1g - m_2g - m_1j - m_2j = 0$$

no kurienes meklējamais paātrinājums

$$\boxed{j = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

Saites reakcijas punktiem dabūsim, ņemot vienu no nol-miem un ievietojot atrasto j:

$$S_1 = m_1g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, g = \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) m_1g$$

$$\boxed{S_1 = S_2 = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

kā redzams $m_2g < S < m_1g$.

Lai dabūtu štatīva reakciju, jāievēro, ka tā līdzsvarojas ar divām pavediena reakcijām, tā tad $S^a = 2S$,

$$\boxed{S^a = \frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}\, g}$$

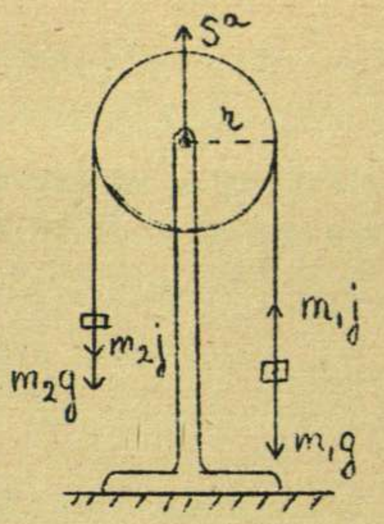
acimredzot $S^a < (m_1 + m_2)g$.

Tas pats piemērs atrisināts ar d'Alembert'a principu visai sistemai.

Doti: m_1 un m_2, pie kam $m_1 > m_2$. Ripas masa ignorējama.

Uziet: sistēmas paātrinājumu zem smaguma spēka iespaida j un štatīva reakciju S^a.

Ieslēgsim sistemā abus punktus un ripu un pielietosim izvēlētai sistemai d'Alembert'a principu, pēc kuŗa līdzsvarojas visi aktīvie ārējie spēki, inerces spēki un ārējās reakcijas. Ja ripas masu ignorējam,



zīm.24.

tad arī attiecīgus inerces spēkus varam atmest, pavediena reakcijas izvēlētā sistemā ir iekšējas un nol-mā nenāks priekšā, bet štatīva reakcija S_a ir ārēja un, lai nol-mā nebūtu divi nezinamie lielumi, sastādīsim momentu summu attiecībā uz punktu O.

$$\Sigma M = (m_1 g - m_1 j - m_2 g - m_2 j)r = 0$$

kur r ir ripas radiuss. No šī nol-ma tieši dabūjam:

$$\boxed{j = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Iekšējas reakcijas S_1^i un S_2^i var dabūt tikai pielietojot d'Alembert'a principu atsevišķam punktam, bet štatīva reakciju S^a var dabūt, projecējot minēto spēku sistemu,t.i. ārējus spēkus, inerces spēkus un ārējas reakcijas uz vertikalu virzienu.

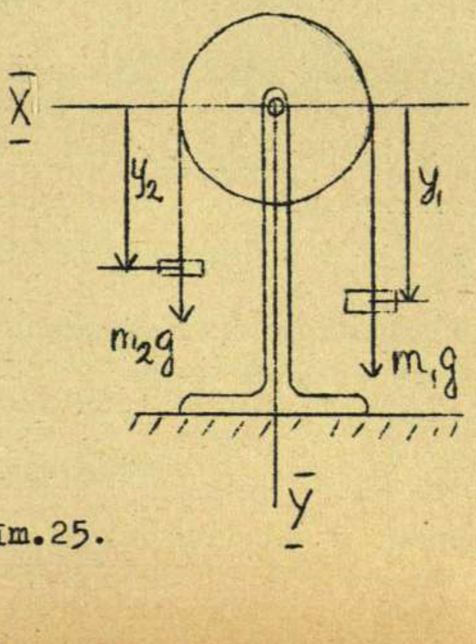
$$S^a + m_1 j - m_2 j - m_1 g - m_2 g = 0$$

$$S^a = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)j = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g =$$

$$= \frac{(m_1 + m_2)^2 - (m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} g$$

$$\boxed{S^a = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Tas pats piemērs atrisināts ar Lagrang'a diferenciālnolīdzinājumiem Dekarta koordinātēs.



zīm.25.

Doti: m_1 un m_2.

Uziet: sistemas paātrinājumu zem smaguma spēka iespaida j un saites reakciju S^i.

Sistemas saiti, t.i. pavedienu garumā ℓ, mēs varam izteikt analitiski tā:

$$f(y_1 y_2) \text{ ir } \ell - y_1 - y_2 - \pi r \geq 0$$

Lagrang'a diferenciālnol-mi, kuŗiem ir nozīme tikai Y - ass virzienā, ir:

$$m_1 \ddot{y}_1 = Y_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = Y_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

bet $Y_1 = m_1 g$; $Y_2 = m_2 g$; $\frac{\partial f}{\partial y_1} = -1$; $\frac{\partial f}{\partial y_2} = -1$, caur ko nol-mi vienkāršojas:

$$m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - \lambda$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = m_2 g - \lambda$$

Diferencēsim saiti divreiz pēc laika: $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$; $\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_1$, ievietosim šo otrā diferenciālnol-mā:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g - \lambda \\ -m_2 \ddot{y}_1 = m_2 g - \lambda \end{array}\right|$$

atvelkot: $(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = (m_1 - m_2)g$, no kurienes

$$\boxed{j = \ddot{y}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Lai uzietu saites reakciju, jāatrod λ:

$$\lambda = m_1 g - m_1 \ddot{y}_1 = m_1 g\left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

pirmam punktam $\Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)^2} = 1$

otram punktam $\Delta_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)^2} = 1$

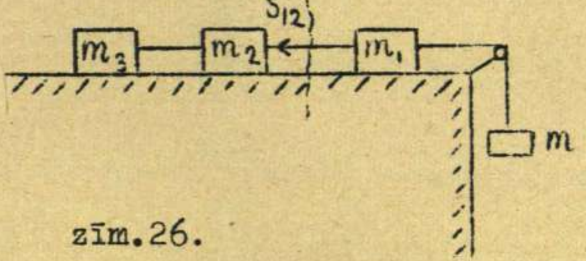
$$S_1 = \lambda . \Delta_1 \ ; \quad S_2 = \lambda . \Delta_2 \ ; \quad S_1 = S_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Saites reakcijas noteikšana ar saites šķelšanu.

Šī metode pastāv iekš tam, ka mēs pāršķeļam saiti un atmetam vienu daļu nost. Atmestas daļas iespaidu aizvietojam ar spēku, kas acimredzot līdzināsies saites reakcijai. Uzstādot attiecīgo nol-mu pēc d'Alembert'a principa, varam atrast saites reakciju.

Paskaidrosim sacīto ar sekojošu piemēru.

Piemērs. Masas m_1, m_2, m_3, kuŗas atrodas uz negludas horicontālas plaknes, ir sasietas ar pavedieniem savā starpā un pirmai masai m_1 piesietam pavedienam otrā galā ir brīvi piekārta masa m.



zīm.26.

Doti: m, m_1, m_2, m_3 un berzes koeficients μ.

Uziet: sistemas paātrinājumu zem smaguma spēka iespaida j un saites reakcijas.

Pēc d'Alembert'a principa sistemai līdzsvarojas spēki:

$$mg - \mu(m_1 + m_2 + m_3)g - (m + m_1 + m_2 + m_3)j = 0$$

no,kurienes

$$\boxed{j = \frac{m - \mu(m_1 + m_2 + m_3)}{m + m_1 + m_2 + m_3} g}$$

Lai noteiktu reakciju S_{12} starp m_1 un m_2 pāršķelsim attiecīgo saiti, pieliksim reakciju S_{12} un atkal izlietosim d'Alembert'a principu:

$$mg - S_{12} - \mu . m_1 g - (m + m_1)j = 0, \text{ no kurienes}$$

$$S_{12} = mg - \mu . m_1 g - (m + m_1)j$$

ievietojot šeit atrasto j, izteiksim S_{12} caur dotiem lielumiem.Analogiski varam atrast arī reakciju S_{23}.

Brīva cieta ķermeņa dinamikas nolīdzinājumi.

Pēc d'Alembert'a principa var pāriet no statikas nol-miem pie dinamikas nol-miem caur inerces spēku pievienošanu. Izlietosim šo brīvam cietam ķermenim uzskatot to kā n punktu sistemu.

Statikas nol-mi brīvam cietam ķermenim bija 6:

1) $\sum X_k = 0$

2) $\sum Y_k = 0$

3) $\sum Z_k = 0$

4) $L_x = \sum(y_k Z_k - z_k Y_k) = 0$

5) $L_y = \sum(z_k X_k - x_k Z_k) = 0$

6) $L_z = \sum(x_k X_k - y_k X_k) = 0$

kur k = 1,2,3 ... n.

Dinamikas nol-mi pēc d'Alemberta principa būs:

1) $\sum_1^n (X_k - m_k \ddot{x}_k) = 0$

2) $\sum_1^n (Y_k - m_k \ddot{y}_k) = 0$

3) $\sum_1^n (Z_k - m_k \ddot{z}_k) = 0$

4) $\sum_1^n \left[y_k (Z_k - m_k \ddot{z}_k) - z_k (Y_k - m_k \ddot{y}_k) \right] = 0$

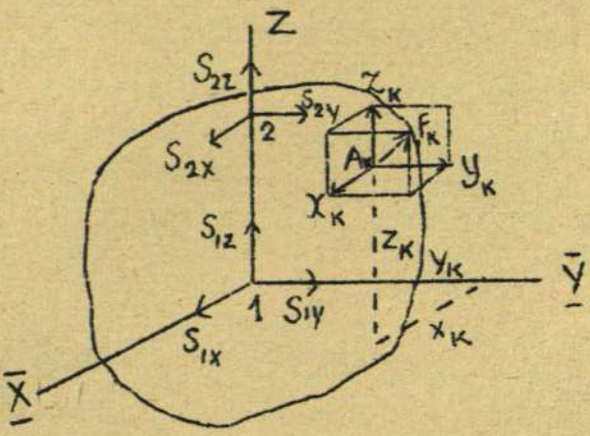
5) $\sum_1^n \left[z_k (X_k - m_k \ddot{x}_k) - x_k (Z_k - m_k \ddot{z}_k) \right] = 0$

6) $\sum_1^n \left[x_k (Y_k - m_k \ddot{y}_k) - y_k (X_k - m_k \ddot{x}_k) \right] = 0$

kur k = 1,2,3 ... n.

Šeit jāpiezīmē, ka aktīvus spēkus jāņem tikai iedarbes punktiem, bet inerces spēkus jāņem visiem punktiem.

Dinamikas nol-mi cietam ķermenim,kas griežas ap kādu asi.



zīm.27.

Ja ķermenis griežas ap asi, tad diviem ķermeņa punktiem jābūt nekustošiem. Pienemsim, ka šie punkti ir 1 un 2 un izvēlēsim koordinātu sistemu tā, lai koordinātu sākums sakristu ar vienu no šiem punktiem, piemēram, ar punktu 1 un lai viena no asīm, piemēram Z ass, sakristu ar griezes asi.

Lai noturētu līdzsvarā nekustošus punktus 1 un 2, tiem jāpieliek atbalsta spēki, jeb reakcijas S_1 un S_2, kuŗu projekcijas uz asīm apzīmēsim ar S_{1x}, S_{1y}, S_{1z} un S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}.

Visus aktīvus spēkus, kuŗi darbojas uz ķermeņa punktiem,kā piemēram, spēku F_k, kas darbojas uz punktu A_k, mēs sadalīsim komponentēs X_k, Y_k, Z_k un punkta A_k koordinātes apzīmēsim ar x_k, y_k, z_k. Piezīmēsim vēl, ka pie ķermeņa griezes ap Z asi koordinātes z_k ar laiku nemainas un tamdēļ visi $\ddot{z}_k = 0$.

Sastādīsim tagad pēc d'Alembert'a principa cietam ķermenim trīs projekciju nol-mus gar koordinātu asīm un trīs momentu nol-mus attiecībā uz tām pašām asīm, apzīmējot attālumu starp punktiem 1 un 2 ar h.

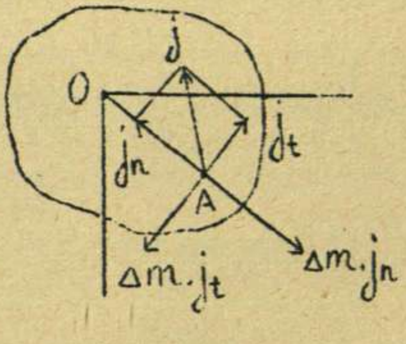
$$\left.\begin{array}{ll}
1) & \sum_1^n (X_k - m_k\ddot{x}_k) + S_{1x} + S_{2x} = 0 \\[2ex]
2) & \sum_1^n (Y_k - m_k\ddot{y}_k) + S_{1y} + S_{2y} = 0 \\[2ex]
3) & \sum_1^n Z_k + S_{1z} + S_{2z} = 0 \\[2ex]
4) & \sum_1^n \left[y_k Z_k - z_k(Y_k - m_k\ddot{y}_k)\right] - S_{2y}h = 0 \\[2ex]
5) & \sum_1^n \left[z_k(X_k - m_k\ddot{x}_k) - x_k Z_k\right] + S_{2x}h = 0 \\[2ex]
6) & \sum_1^n \left[x_k(Y_k - m_k\ddot{y}_k) - y_k(X_k - m_k\ddot{x}_k)\right] = 0
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(28)$$

kur k = 1,2,3 ... n.

Pie kam atkal aktīvus spēkus un spēku momentus jāņem tikai iedarbes punktiem, bet inerces spēkus un inerces spēku momentus jāņem visiem ķermeņa punktiem.

Uziesim tagad inerces spēku momentu summu ķermenim, kas griežas ap kādu asi.

Inerces spēku momentu summas noteikšana ķermenim, kas griežas ap kādu asi.



zīm.28.

Pieņemsim, ka ķermenis griežas ar paātrinājumu τ ap kādu asi, kuŗa iet caur punktu O. Ķermenis sastāv no bezgalīgi daudziem materiāliem punktiem. Izdalīsim vienu no šiem punktiem A un apzīmēsim tā masu ar Δm. Punkta paātrinājumu j sadalīsim divās komponentēs j_t un j_n. Attiecīgi dabūsim arī divus inerces spēkus $\Delta m.j_t$ un $\Delta m.j_n$ virzienos pretējos paātrinājumiem.

No šiem inerces spēkiem momentus attiecībā uz griezes asi dos tikai viens un proti tangenciālais: $\Delta m.j_t$.

Ja apzīmēsim punkta A attālumu no griezes ass ar r, un ievērosim, ka $j_t = r.\tau$, tad inerces spēka moments iznāks

$$\Delta m.j_t.r = \Delta m.r^2\tau$$

Summēsim šādus momentus visiem ķermeņa punktiem

$$\sum m.r^2\tau = \tau \sum r^2.\Delta m$$

jo τ visiem punktiem vienāds, bet šāda summa, ja $\Delta m \to 0$ un punktu skaits būs bezgalīgi liels nav nekas cits, ka

$$\int^M r^2.dm$$

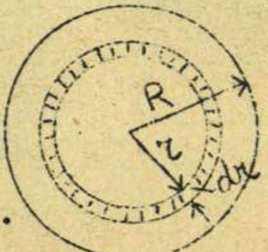
Integralu $\int^M r^2.dm$, izplātītu pa visu ķermeni, apzīmēsim ar J un nosauksim par ķermeņa inerces momentu attiecībā uz griezes asi jeb aksiālo inerces momentu

$$\boxed{J = \int^M r^2.dm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Lai dabūtu visiem ķermeņa punktiem inerces spēku momentu summu attiecībā uz griezes asi, jāreizina inerces moments ar griezes paātrinājumu

$$\boxed{\tau\int^M r^2.dm = \tau.J}$$

Ripas inerces momenta noteikšana attiecībā uz asi.



zīm.29.

Apzīmēsim ripas radiusu ar R. Izdalīsim elementāru gredzenu ar radiusu r platumā dr

$$J = \int^M r^2.dm$$

$dm = 2\pi r.dr.\delta$, kur δ ir specifiska masa

$$J = \int_0^M r^2.dm = \int_0^R r^2.2\pi.r.dr.\delta = 2\pi\delta\int_0^R r^3.dr = \frac{\pi\delta.R^4}{4}$$

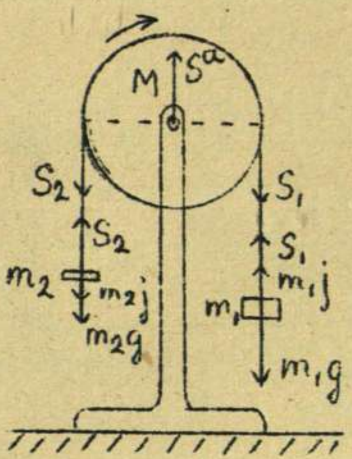
bet ņemot vērā, ka $\pi R^2.\delta = M$, dabūsim:

$$J = \frac{MR^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

Piezīme. Ja mēs apskatam nevis materiālu ripu, bet matematisku figuru, tad $\delta = 1$ un

$$J = \frac{\pi R^4}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (30^{a})$$

Piemērs. Atwooda mašina. Atrisinājums, ievērojot ripas masu.



zīm.30.

Doti: masas m_1 un m_2, ripas masa M.

Uziet: sistemas paātrinājumu j un reakcijas S_1, S_2.

Mēs pieņemam, ka pavediens slīdēt nevar un ripa griežas līdzi.

Ņemot sistemā ripu ar divām pavediena reakcijām S_1 un S_2, kuŗas ripai būs ārējās, tāpat kā štativa reakcija S^a, un sastādot pēc d'Alembert'a principa momentu nol-mu pret ripas asi, dabūsim:

$$S_1.r - J.\tau - S_2.r = 0,$$

bet $\tau = \frac{j}{r}$ un $J = \frac{Mr^2}{2}$, tā tad

$$S_1 = S_2 + \frac{Mr^2}{2}\cdot\frac{j}{r^2} \quad \text{jeb} \quad S_1 + S_2 + \frac{Mj}{2}$$

Kā redzams, reakcijas neiznāk vienādas, ja ievērojam ripas masu.

Tagad izlietosim d'Alembert'a principu katram punktam atsevišķi:

$$m_1g - m_1j - S_1 = 0 \qquad \text{pirmam punktam}$$

$$m_2g + m_2j - S_2 = 0 \qquad \text{otram punktam}$$

Ievietosim pirmā nolīdzinājumā $S_1 = S_2 + \frac{Mj}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} m_1g - m_1j - S_2 - \frac{Mj}{2} = 0 \\ m_2g + m_2j - S_2 = 0 \end{array}\right| \quad \text{atvelkot dabūsim}$$

$(m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})j = 0$, no kurienes sistemas paātrinājums

$$\boxed{j = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}\,g}$$

$$S_2 = m_2g + m_2j = m_2g(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}) = m_2g \cdot \frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$\boxed{S_2 = \frac{2m_1 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_2g}$$

kā redzam $S_2 > m_2g$.

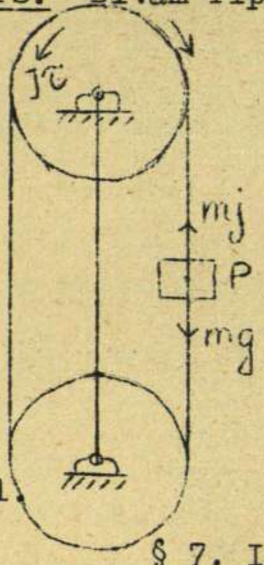
$$S_1 = m_1g - m_1j = m_1g(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}) = m_1g \cdot \frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}$$

$$\boxed{S_1 = \frac{2m_2 + \frac{M}{2}}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} m_1g}$$

kā redzams $S_1 < m_1g$. Statīva reakcija: $S^a = S_1 + S_2 + Mg$,

$$\boxed{S^a = \frac{4m_1m_2 + \frac{M}{2}(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g + Mg}$$

<u>Piemērs.</u> Divām ripām, kuŗām griezes ass ir atbalstītas uz vienas vertikales, ir pārmests pavediens ar piestiprinātu ķermeni svarā P. Pavediens uz ripām nevar slīdēt. Doti: ķermena svars P un katras ripas svars Q. Uziet: sistemas paātrinājumu j zem smaguma spēka.



zīm.31

Pēc d'Alembert'a momentu summa

$$mg.R - mjR - 2J.\tau = 0$$

kur R ir ripas radiuss, bet $\tau = \frac{j}{R}$, $mg = P$ un

$$J = \frac{MR^2}{2} = \frac{QR^2}{2g}$$

$$P.R - \frac{P}{g} \cdot j \cdot R - 2\frac{QR^2}{2g} \cdot \frac{j}{R} = 0 \text{ , no kurienes}$$

$$j = \frac{P}{P + Q} g$$

§ 7. Inerces momentu teorija.

Inerces momentiem, kā mēs redzējam, ir liela nozīme ķermeņu griezes kustībā un tamdēļ mēs noskaidrosim tagad dažas inerces momentu īpašības.

Aksiāla inerces momenta jēdziens bija jau noteikts: tas ir summa no punktu masas reizinājuma ar attāluma kvadratu līdz asij:

$$J = \int^M r^2.dm$$

kur r ir attālums līdz asij.

Sakarā ar šo inercijas momenti attiecībā uz koordinātu asīm būs:

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \int^M (y^2 + z^2).dm \\ J_y &= \int^M (x^2 + z^2).dm \\ J_z &= \int^M (x^2 + y^2).dm \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (31)$$

Kā redzams no uzrakstītām formulām divu inerces momentu summa arvien lielāka par trešo, bet diference ir mazāka par trešo, tā ir īpašība analogiska trīsstūru malu īpašībai un attēlojot inerces momentus ar nogriežņiem, arvien būs iespējams uzkonstruēt trīsstūri.

Ievērojot, ka ķermenim $dm = \delta dx.dy.dz$, kur δ ir specifiska masa, inerces momentus varam uzrakstīt arī tā:

$$J_x = \iiint \delta(y^2 + z^2).dx.dy.dz$$

$$J_y = \iiint \delta(x^2 + z^2).dx.dy.dz$$

$$J_z = \iiint \delta(x^2 + y^2).dx.dy.dz$$

Aksiālo inerces momentu pret kādu koordinātu asi varam arī uzrakstīt kā summu no diviem integrāļiem. Piemēram,

$$J_x = \int^M (y^2 + z^2)dm = \int^M y^2 dm + \int^M z^2 dm$$

Apskatot katru no šiem integrāļiem atsevišķi, konstatējam, ka tas reprezentē summu no masas elementu reizinājumiem ar attāluma kvadratu līdz attiecīgai koordinātu plaknei, kādēļ šādu integrālu var nosaukt par inerces momentu attiecībā pret koordinātu plakni. Tādā kārtā nonākam pie jauna jēdziena: inerces momenta pret koordinātu plakni un

$\int x^2 dm$ sauksim par inerces momentu pret $\overline{YZ}$ plakni,

$\int Y^2 dm$ " " " " " $\overline{XZ}$ "

$\int z^2 dm$ " " " " " $\overline{XY}$ "

Saskaitīsim visus trīs aksiālus inerces momentus

$$J_x + J_y + J_z = \int^M (y^2 + z^2)dm + \int^M (x^2 + z^2)dm + \int^M (x^2 + y^2)dm$$

$$J_x + J_y + J_z = \int^M 2(x^2 + y^2 + z^2).dm = 2\int^M r^2 dm$$

kur r tagad ir attālums līdz koordinātu sākumam. Kā redzams, trīs inerces momentu summa attiecībā uz taisnstūrīgām asīm nav atkarīga no asu virziena, tā tad ir Const. lielums katram punktam, kādēļ arī integrālu $\int r^2 dm$ apzīmējam ar J_p un nosaucam par ķermeņa polāru inerces momentu:

$$\boxed{J_p = \int^M r^2 . dm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

kur r ir attālums līdz polam, pie kam:

$$\boxed{J_p = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

Formula (33) nestāv pretrunā ar pazīstāmo no stiprības mācības formulu plakanām figurām: $J_p = J_x + J_y$, jo plaknē $J_p = J_z$ un tad

$$J_p = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2} J_p \quad \text{jeb} \quad \frac{1}{2} J_p = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \quad \text{un} \quad J_p = J_x + J_y$$

Inerces radiuss.

Ņemsim ķermeni ar masu M un kaut kādu asi. Ķermeņa aksiālais inerces moments: $J = \int^M r^2 dm$. Iedomāsimies tādu materiālu punktu, kuŗam masa būtu vienādā ar visa ķermeņa masu M un inerces moments attiecībā uz to pašu asi arī būtu J. Šāda punkta attālumu no ass apzīmēsim ar ρ un nosauksim par ķermeņa inerces radiusu. Pēc dēfinicijas

$$J = M\rho^2 \quad \text{un} \quad \rho = \sqrt{\frac{J}{M}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Sakarā ar sacīto, atšķirsim:

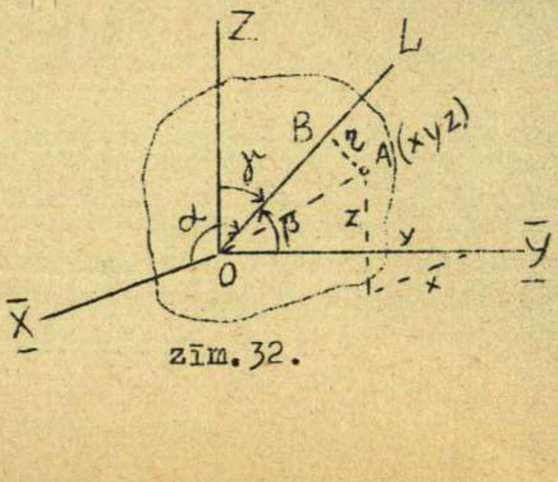
$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} \quad ; \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}} \quad ; \quad \rho_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}}$$

Var stādīt sev priekšā inerces radiusu arī kā tāda riņķa jeb cilindra radiusu, kuŗiem masa ir koncentrēta uz periferijas jeb virsmas un ir vienāda ar ķermeņa masu M un bez tam arī inerces moments attiecībā uz asi arī ir J.

Inerces momentu dimenzija.

Kā redzams, visu aksiālo un arī polāra inerces momenta dimenzija ir: $[M.L^2]$, bet matematiskiem ķermeņiem $[M]$ vietā nāks $[L^3]$ un inerces momenta dimenzija būs $[L^5]$.

Inerces moments attiecībā uz kaut kādu asi L caur koordinātu sākumu.



zīm.32.

Pieņemsim, ka dotā ass OL veido ar koordinātu asīm leņķus α, β un γ. Ķermeņa inerces moments attiecībā uz L asi ir

$$J_L = \int^M r^2 dm$$

kur r ir punkta attālums līdz asij OL un $r^2 = OA^2 - OB^2$, kur $OA^2 = x^2+y^2+z^2$, bet geometriski $\overline{OA} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$, projecējot šo nol-mu uz asi OL, dabūsim:

$$OB = x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma$$

Tagad $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x.\cos\alpha + y.\cos\beta + z.\cos\gamma)^2$

$$r^2 = x^2(1 - \cos^2\alpha) + y^2(1 - \cos^2\beta) + z^2(1 - \cos^2\gamma) - 2xy.\cos\alpha\cos\beta -$$
$$- 2xz.\cos\alpha\cos\gamma - 2yz.\cos\beta\cos\gamma,$$ bet vispārīgi

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$ tā tad

$$1 - \cos^2\alpha = \cos^2\beta + \cos^2\gamma \; ; \; 1 - \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2\gamma \; ;$$
$$1 - \cos^2\gamma = \cos^2\alpha + \cos^2\beta$$

$$r^2 = x^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma) + y^2(\cos^2\alpha + \cos^2\gamma) + z^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) -$$
$$- 2xy.\cos\alpha.\cos\beta - 2xz.\cos\alpha.\cos\gamma - 2yz.\cos\beta.\cos\gamma$$

tālāk ņemsim aiz iekavām $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ un $\cos^2\gamma$, tad

$$r^2 = (y^2 + z^2).\cos^2\alpha + (x^2 + z^2).\cos^2\beta + (x^2 + y^2).\cos^2\gamma -$$
$$- 2xy.\cos\alpha.\cos\beta - 2xz.\cos\alpha.\cos\gamma - 2yz.\cos\beta.\cos\gamma$$

Ievietosim šo izteiksmi formulā $J_L = \int^M r^2.dm$

$$J_L = \cos^2\alpha\int^M(y^2 + z^2)dm + \cos^2\beta\int^M(x^2 + z^2)dm + \cos^2\gamma\int^M(x^2 + y^2)dm -$$
$$- 2\cos\alpha.\cos\beta\int^M xy.dm - 2\cos\alpha.\cos\gamma\int^M xz.dm - 2\cos\beta.\cos\gamma\int^M yz.dm$$

Ievedot tālāk apzīmējumus:

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} J_{xy} = \int^M xy.dm \\ \hline J_{xz} = \int^M xz.dm \\ \hline J_{yz} = \int^M yz.dm \end{array}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

un nosaucot šos integrāļus par centrifugaliem inerces momentiem, mēs nonākam pie jauniem jēdzieniem, caur kuŗiem tad izteiksies J_L:

$$J_L = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma -$$
$$- 2J_{xz}\cos\alpha\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Kā rāda formula (36), mēs varam atrast ķermeņa inerces momentu attiecībā uz katru asi L, ja būs zinami attiecībā uz 3 ortogonalām asīm aksiālie un centrifugālie inerces momenti.

Pierādīsim sekojošu centrifugālu inerces momentu īpašību: centrifugālais inerces moments attiecībā uz divām asīm ir mazāks par pusi no aksiāla attiecībā pret trešo asi.

Acimredzot $(y - z)^2 > 0$ pie visiem y un z, bet tad

$y^2 + z^2 - 2yz > 0$ un $yz \leqslant \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$, tā tad arī

$\int yz.dm < \frac{1}{2}\int (y^2 + z^2)dm$ jeb $J_{yz} < \frac{1}{2} J_x$, tāpat arī var pierādīt,

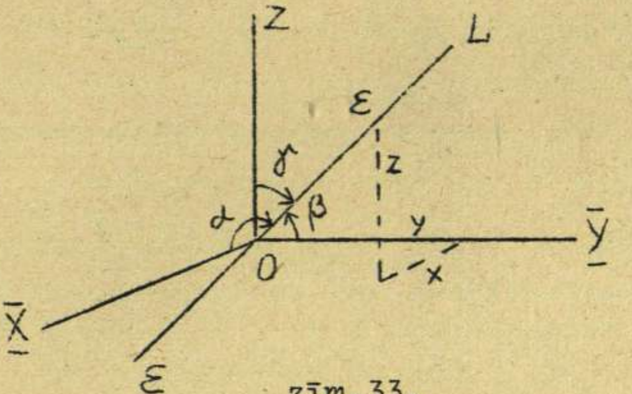
ka $J_{xz} < \frac{1}{2} J_y$ un $J_{xy} < \frac{1}{2} J_z$.

Galvenās ass. Inerces ellipsoids.

Tādas ass, pret kuŗām visi centrifugālie inerces momenti līdzinājās nullei, saucas par galvenām asīm. Šīm asīm

$$J_{xy} = 0 \quad , \quad J_{yz} = 0 \quad , \quad J_{xz} = 0$$

Šīm asīm ir liela nozīme ķermeņu dinamikā, tamdēļ apstāsimies pie viņu noteikšanas ar inerces ellipsoida palīdzību. Ķermeņa inerces moments attiecībā uz katru asi, kuŗa iet caur kādu punktu O, izteicas ar zināmu skaitli. Izvēlot brīvi kādu mērogu, atliksim no punkta O ass L virzienā abās pusēs nogriezni



zīm.33.

$$OE = \frac{1}{\sqrt{J_L}}$$

Mainīsim tagad ass L virzienu ap punktu O un noskaidrosim, kāda būs punkta E geometriska vieta. Apzīmējot punkta E koordinātes ar x,y,z un leņķus, kuŗus ass OL veido ar koordinātu asīm, ar α, β, γ, dabūsim

$$x = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\alpha \; ; \quad y = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\beta \; ; \quad z = \frac{1}{\sqrt{J_L}} \cos\gamma$$

no kurienes $\cos\alpha = x\sqrt{J_L}$, $\cos\beta = y\sqrt{J_L}$, $\cos\gamma = z\sqrt{J_L}$

Ieliksim šīs vērtības formulā (36) un saīsināsim J_L

$$\boxed{J_x.x^2 + J_y.y^2 + J_z.z^2 - 2J_{xy}.xy - 2J_{yz}.yz - 2J_{xz}.xz = 1} \quad \text{......(37)}$$

Šis nol-ms reprezentē otras kārtas virsmu ar centru punktā O, pie kam, ievērojot, ka nevienam virsmas punktam radiuss vektors, t.i. OE nevar būt bezgalīgi liels, jo tad iznāktu $J_L = 0$, kas acimredzot nevar būt, jānāk pie slēdziena, ka minēta virsma ir ellipsoids. Šo virsmu sauc par ķermeņa inerces ellipsoidu punktā O.

Kā zinams no analitiskās geometrijas, katram ellipsoidam tanī pašā punktā O ir trīs tā sauktās galvenās ass un ja tās izvēlam par koordinātu asīm, tad ellipsoida nol-mā koeficienti pie koordinātu reizinājumiem pārvēršās par nulli. Tā tad priekš galvenām asīm

$$J_{x_1y_1} = 0 \quad , \quad J_{y_1z_1} = 0 \quad ; \quad J_{x_1z_1} = 0$$

Bet tas nozīmē, ka šīs asis ir arī ķermeņa galvenās inerces asis punktā O, jo tās ir dēfinētas ar to pašu noteikumu.

Ja galvenās asis ir izvēlētas par koordinātu asīm punktā O, tad inerces ellipsoida nol-ms (sk. formulu 37) būs:

$$\boxed{J_1x_1^2 + J_2y_1^2 + J_3z_1^2 = 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

arī inerces moments attiecībā uz asi L (sk. formulu 36) izteiksies vienkāršāki:

$$\boxed{J_L = J_1\cos^2\alpha_1 + J_2\cos^2\beta_1 + J_3\cos^2\gamma_1} \quad \ldots\ldots (39)$$

kur I_1, I_2, I_3 ir inerces momenti attiecībā uz galvenām asīm un saucās par galveniem inerces momentiem punktā O.

Salīdzinot nol-mu (38) ar ellipsoida nol-mu kanoniskā veidā:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

redzam, ka inerces ellipsoida pusass būs:

$$a = \frac{1}{\sqrt{J_1}} \quad ; \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_2}} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_3}}$$

bet galvenie inerces radiusi, pēc agrāk dotas dēfinicijas:

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{J_1}{M}} \quad ; \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{J_2}{M}} \quad ; \quad \rho_3 = \sqrt{\frac{J_3}{M}}$$

Šīs formulas rāda, ka lielākam inerces momentam atbilst lielāks inerces radiuss, bet mazāka ellipsoida pusass, un ja

$$J_1 > J_2 > J_3 \text{ , tad } \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 \text{ , bet } a < b < c$$

Kā mēs redzējam, katrā ķermeņa punktā var atrast trīs ortogonālas galvenās inerces ass ķermenim.

Inerces ass, kuŗas iet caur smaguma centru, saucas par centrālām inerces asīm un attiecīgie inerces momenti, kuŗus apzīmēsim ar:

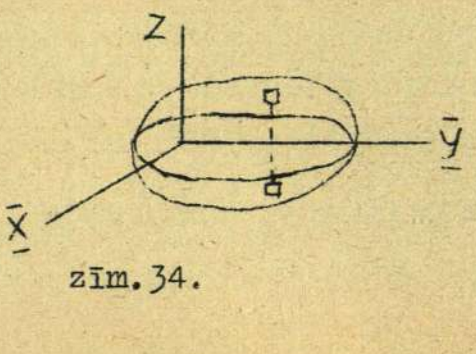
J_x^c , J_y^c ; J_z^c , saucas par centrāliem inerces momentiem.

Galvenās ass smaguma centrā saucas par galvenām centrālām asīm un attiecīgie inerces momenti, kuŗus apzīmēsim:

J_1^c , J_2^c , J_3^c ir galvenie centrālie inerces momenti.

Ievērojot galveno inerces asu lielo nozīmi, apskatīsim tagad divas teorēmas attiecībā uz galvenām asīm.

I Teorēma. Ja caur punktu O iet ķermeņa simmetrijas plakne, tad taisne perpendikulāra šai plaknei punktā O būs viena no ķermeņa galvenām inerces asīm.



zīm. 34.

To pašu teorēmu var formulēt arī citādi: ja ķermenī ir kāda simmetrijas plakne, tad visiem ķermeņa punktiem, kuŗi guļ šinī plaknē, galvenās ass ir perpendikulāras minētai plaknei.

Lai pierādītu sacīto, izvēlēsim simmetrijas plakni par $\overline{XY}$ plakni.

Simmetrijas dēļ katram masas elementam dm ar koordinātēm x,y,z atbilst otrs elements ar koordinātēm x,y,(-z) un sastādot centrifugālus inerces momentus

$$J_{xz} = \int xzdm = 0 \quad \text{un} \quad J_{yz} = \int yzdm = 0$$

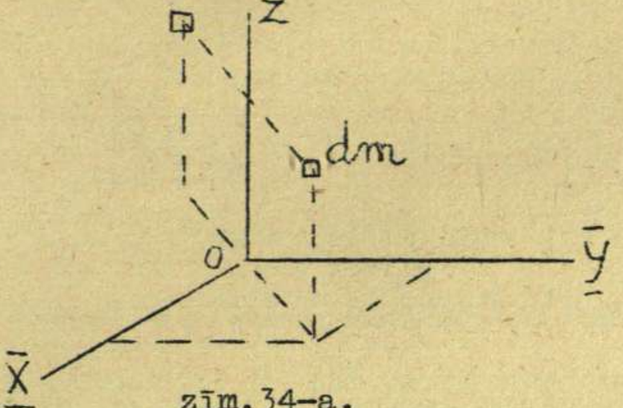
bet tad inerces ellipsoida nol-ms pēc formulas (37) iznāk:

$$J_x.x^2 + J_y.y^2 + J_z.z^2 - 2J_{xy}.xy = 1$$

Šinī nol-mā nenāk priekšā z koordināte pirmā pakāpē un tas nozīmē, ka Z ass ir ellipsoida galvenā ass un līdz ar to arī ķermeņa galvenā inerces ass punktā O.

No pierādītās teorēmas seko, ka ķermenim, kuŗam punktā O ir divas simmetrijas plaknes, visas galvenās ass būs noteiktas.

II teorēma. Ja ķermenim ir kāda simmetrijas ass, tad šī ass ir viena no galvenām asīm.



zīm.34-a.

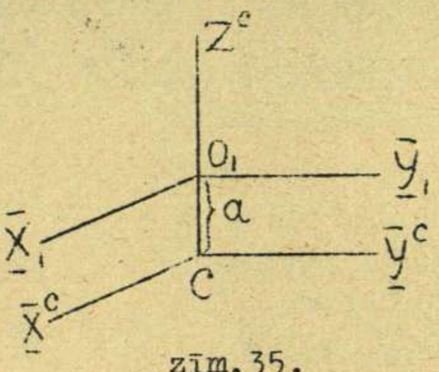
Pieņemsim, ka Z ass ir simmetrijas ass. Tad katram ķermeņa masas elementam dm ar koordinātēm x,y,z atbilst otrs elements dm ar koordinātēm (-x),(-y) un z. Acīmredzot tad centrifugālie inerces momenti

$$J_{xz} = \int^{M} xz.dm = 0$$

$$J_{yz} = \int^{M} yz.dm = 0$$

un tāpat kā iepriekšējā teorēmā, nākam pie slēdziena, ka OZ ass ir ķermeņa galvenā ass.

III Teorēma. Galvenā centrālā inercijas ass ir galvenā ass katram punktam, kas atrodās uz tās.



zīm.35.

Pieņemsim, ka C ir ķermeņa smaguma centrs un CZ ir galvenā centrālā inerces ass. Tādā gadījumā

$$J^c_{xz} = \int xzdm = 0 \quad \text{un} \quad J^c_{yz} = \int yzdm = 0$$

Izvēlēsim uz ass OZ kādu punktu O, attālumā a un pārnesīsim šinī punktā koordinātu sākumu, ņemot jaunās asis paralleli vecām, tad formulas pārejai uz jaunām asīm būs:

$$x_1 = x \;,\; y_1 = y \;,\; z_1 = z - a$$

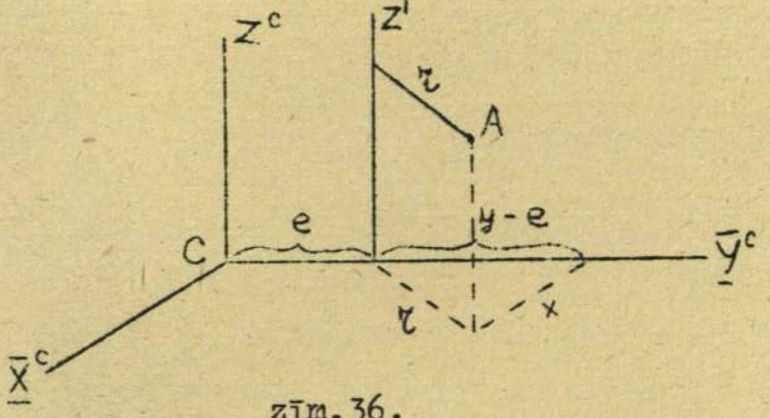
Lai pārliecinātos, ka ass O_1Z^c būs galvenā ass punktā O, sastādīsim centrifugālus inerces momentus:

$$J_{x_1z_1} = \int x_1z_1dm = \int x(z-a)dm = \int xzdm - a\int xdm = 0 - 0 = 0$$

$$J_{y_1z_1} = \int y_1z_1dm = \int y(z-a)dm = \int yzdm - a\int ydm = 0 - 0 = 0$$

Otrie integrāļi līdzinājās nullei tamdēļ, ka $\bar{X}^c$ un $\bar{Y}^c$ asis ir centrālas ass. Ar šo ir pierādīts, ka O_1Z^c ir galvenā inerces ass.

Pārejas formula aksiāliem inerces momentiem no centrālas ass uz kādu parallēlo asi.



zīm.36.

Pieņemsim, ka ķermeņa inerces moments J_z^c attiecībā uz asi Z^c, kuŗa iet caur smaguma centru C, ir dots. Uziesim ķermeņa inerces momentu J_z attiecībā uz asi Z, kuŗa ir parallēla asij CZ^c un atrodas attālumā e no pēdējās.

Vienkāršības dēļ $\bar{Y}$ asi izvēlēsim plaknē, kuŗa iet caur Z^c un Z asīm. Pēc dēfinicijas

$$J_z^c = \int (x^2 + y^2)dm$$

un $J_z = \int r^2 dm = \int \left[x^2 + (y - e)^2\right] dm = \int (x^2 + y^2 - 2ey + e^2)dm$

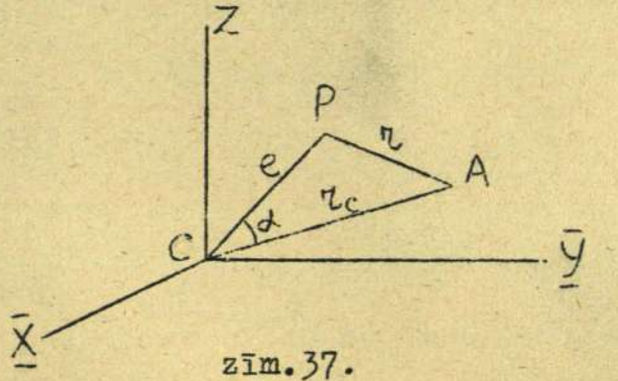
$$J_z = \int (x^2 + y^2)dm - 2e\int ydm + e^2\int dm = J_z^c - 2e\int ydm + Me^2$$

bet $\int ydm = 0$, jo tas ir ķermeņa statiskais moments attiecībā uz $\bar{X}Z$ plaknī, kuŗa iet caur smaguma centru C, tad paliek

$$\boxed{J_z = J_z^c + Me^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Pēc šīs formulas inerces moments attiecībā uz katru asi līdzinājas centrālam inerces momentam attiecībā uz parallēlo asi, saskaitītam ar masas reizinājumu ar asu attālumu kvadratu.

Pārejas formula polariem inerces momentiem no smaguma centra uz kādu citu punktu.



zīm.37.

Pieņemsim, ka ķermeņa polārais inerces moments J_p^c attiecībā uz smaguma centru C ir dots. Uziesim polāro inerces momentu J_p uz kādu citu punktu P, kas atrodas attālumā e no smaguma centra. Pēc dēfinicijas:

$$J_p^c = \int r_c^2\, dm$$

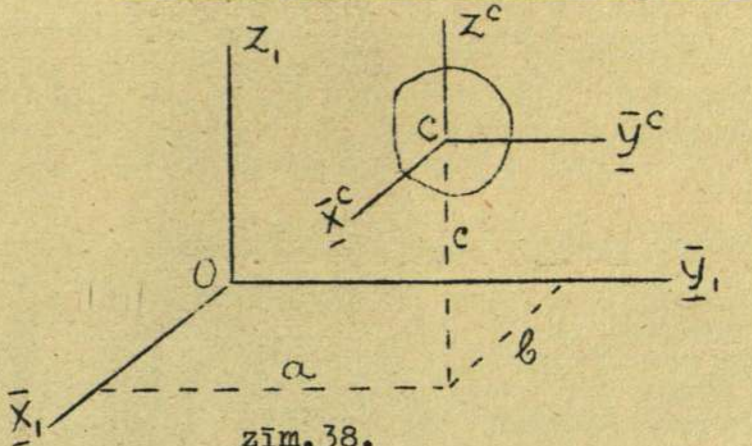
Sastādīsim $J_p = \int r^2 dm = \int (r_c^2 + e^2 - 2er_c \operatorname{Cos}\alpha)dm$

$$J_p = \int r_c^2 dm + e^2\int dm - 2e\, r_c \operatorname{Cos}\alpha . dm \text{ , bet}$$

$\int r_c \cos\alpha . dm = 0$ un paliek

$$\boxed{J_p = J_p^c + Me^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Pārejas formula centrifugāliem inerces momentiem no kādām centrālām asīm uz parallēlām asīm.



zīm. 38.

Pieņemsim, ka ķermeņa centrifugālais inerces moments J_{xy}^c uz kādām centrālām asīm $\underline{XY}$ ir dots. Uziesim centrifugālo inerces momentu $J_{x_1y_1}$ uz kādām citām asīm, kuŗas ir parallēlas centrālām. Pēc dēfinicijas:

$$J_{xy}^c = \int xydm$$

Sastādīsim $J_{x_1y_1} = \int x_1y_1dm$, bet $x_1 = x + a$, $y_1 = y + b$, kur a un b ir smaguma centra koordinātes sistemā $\underline{X}_1\underline{Y}_1\underline{Z}_1$.

$J_{x_1y_1} = \int (x + a)(y + b)dm = \int xydm + a\int ydm + b\int xdm + ab\int dm$, bet

$\int xdm = 0$ un $\int ydm = 0$, jo $\underline{X}$ un $\underline{Y}$ ass ir centrālas, tā tad paliek

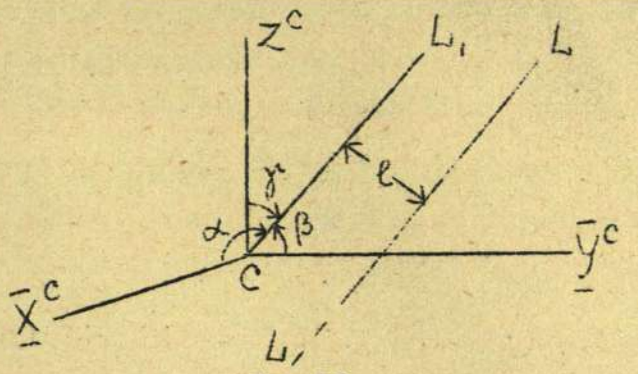
$$\boxed{J_{x_1y_1} = J_{xy}^c + Mab} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Pēc analogijas varam uzrakstīt vēl formulas:

$$\boxed{J_{x_1z_1} = J_{xz}^c + Mac} \qquad \boxed{J_{y_1z_1} = J_{yz}^c + Mbc}$$

Kā redzams no formulas (42) centrifugālais inerces moments $J_{x_1y_1}$ nemaina savu vērtību, ja koordinātu sākums O pārvietosies uz Z ass un tikai $\underline{X}$ un $\underline{Y}$ ass paturēs savu virzienu.

Inerces moments attiecībā uz kaut kādu asi L-L.



zīm. 39.

Pamatojoties uz divām formulām (39) un (41), mēs varam atrast inerces momentu attiecībā uz katru asi L. Izvēlēsim koordinātu sākumu smaguma centrā un galvenās ass par koordinātu asīm.

Vilksim caur smaguma centru C asi $CL_1 \parallel L\text{-}L$, tad pēc formulas (39) inerces moments attiecībā uz asi CL_1 būs:

$$J'_L = J_1^c \,\mathrm{Cos}^2\alpha + J_2^c \,\mathrm{Cos}^2\beta + J_3^c \,\mathrm{Cos}^2\gamma$$

kur α, β, γ ir leņķi starp asi L-L un koordinātu asīm. Pārejot tālāk pēc formulas (41) uz asi L-L, dabūsim

$$J_L = J_1^c \,\mathrm{Cos}^2\alpha + J_2^c \,\mathrm{Cos}^2\beta + J_3^c \,\mathrm{Cos}^2\gamma + Me^2 \qquad \ldots\ldots(43)$$

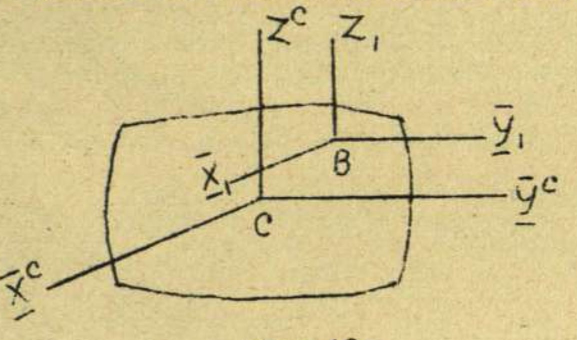
kur J_1^c, J_2^c, J_3^c ir galvenie centrālie inerces momenti un e attālums no smaguma centra C līdz asij L-L. Kā redzams, ja ir zinami galvenie centrālie inerces momenti, tad varam viegli atrast ķermeņa inerces momentu attiecībā uz katru asi L-L.

Lodes punktu B noteikšana ķermenī.

Ja divi no galveniem inerces momentiem kādā punktā būs vienādi, tad arī inerces ellipsoidam divas pusasis būs vienādas, jeb inerces ellipsoids būs rotacijas ellipsoids attiecībā pret trešo asi. Tādā gadījumā attiecībā pret visām asīm, kuŗas guļ ekvatoriālā plaknē un iet caur ellipsoida centru, inerces momenti būs vienādi.

Ja kādā ķermeņa punktā B visi trīs galvenie inerces momenti ir vienādi, tad inerces ellipsoids būs lode un tādu punktu B mēs sauksim par ķermeņa lodes punktu. Attiecībā uz visām asīm, kuŗas iet caur lodes punktu, ķermeņa inerces momenti ir vienādi.

Tagad varam apskatīt jautājumu, kā atrast ķermenī lodes punktus, t.i. tādus punktus, kuŗos inerces ellipsoids pārvēršas par lodi. Pēc minētā noteikuma šinī punktā visiem aksiāliem inerces momentiem jābūt vienādiem. Par koordinātu asīm izvēlēsim galvenās centrālās inerces asis. Tā kā lodes punktam katras trīs savstarpīgi perpendikulāras asis var pieņemt par galvenām asīm, tad izvēlēsim par tādām punktā B trīs ortogonālās asis $\overline{X_1 Y_1 Z_1}$ paralēlas galvenām asīm $\overline{XYZ}$ punktā C. Lai ass $\overline{X_1 Y_1 Z_1}$ būtu galvenās, tad centrifugāliem inerces momentiem jālīdzinājās nullei



zīm.40.

$$J_{x_1y_1} = \int x_1y_1 dm = 0 \ , \quad J_{x_1z_1} = \int x_1z_1 dm = 0 \ , \quad J_{y_1z_1} = \int y_1z_1 dm = 0$$

Ja apzīmēsim lodes punkta B koordinātes ar x_b, y_b, z_b, tad sakars starp koordinātēm būs šāds:

$$x_1 = x - x_b \ , \quad y_1 = y - y_b \ , \quad z_1 = z - z_b$$

Ar šīm formulām pārveidosim pirmo integrālu:

$$\int x_1y_1 dm = \int (x-x_b)(y-y_b) dm = \int xy dm - x_b\int y dm - y_b\int x dm + x_b y_b\int dm = 0$$

bet $\int xy dm = 0$, $\int x dm = 0$ un $\int y dm = 0$, jo $\overline{XYZ}$ ir galvenās centrālās inerces asis, tā tad paliek

$$x_b y_b . M = 0 \quad \text{jeb} \quad x_b y_b = 0$$

Pēc analogijas pārējie integrāļi dos $x_b z_b = 0$ un $y_b z_b = 0$, bet tas ir iespējams tikai tad, ja divas no punkta B koordinātēm līdzinājās nullei.

Pieņemsim, ka $x_b = 0$ un $y_b = 0$, tas nozīmēs, ka punkts atrodas uz Z^c ass, attālumā z_b no punkta C. Pēc formulas (40):

$$J_x^b = J_x^c + M.z_b^2 \, , \quad J_y^b = J_y^c + M.z_b^2 \, , \quad J_z^b = J_z^c$$

bet pēc lodes punkta noteikuma $J_x^b = J_y^b = J_z^b$, tā tad iznāk:

$$J_x^c + M.z_b^2 = J_y^c + M.z_b^2 \quad \text{jeb} \quad J_x^c = J_y^c$$

Tas būs lodes punkta eksistences noteikums: diviem galveniem centrāliem inerces momentiem jābūt vienādiem. Tālāk meklēsim z_b no formulas $J_x^b = J_x^c + M.z_b^2$:

$$M.z_b^2 = J_x^b - J_x^c \, , \text{ bet } J_x^b = J_z^b = J_z^c \, , \text{ tā tad}$$

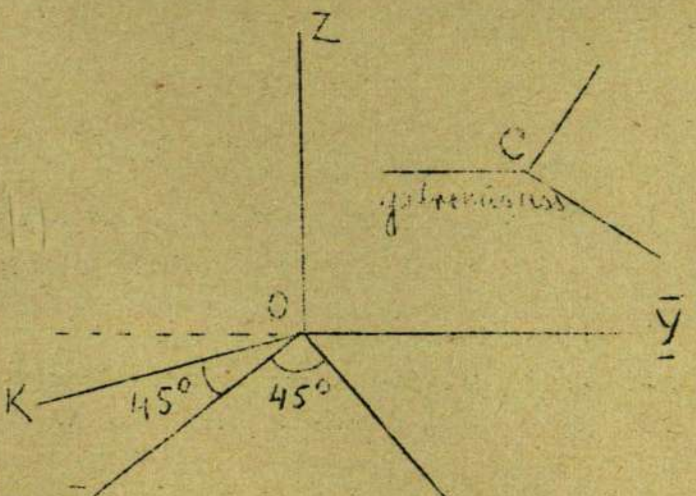
$$z_b = \sqrt{\frac{J_z^c - J_x^c}{M}}$$

Lai z_b būtu reāls, kā redzams no pēdējās formulas, jābūt

$$J_z^c > J_x^c$$

Savelkot visu sacīto, nākam pie slēdziena, ka ķermenim ir lodes punkti tikai tad, ja centrālam inerces ellipsoidam ir divas vienādas pusass un trešā pusass ir mazāka par tām. Uz šīs trešās ass tad atradīsies divi lodes punkti vienādos attālumos no smaguma centra.

Vēl viena metode centrifugala inerces momenta noteikšanai.



zīm.41.

Lai noteiktu ķermeņa centrifugālo inerces momentu J_{xy} kaut kādā punktā O, zinot 3 galvenos centrālos inerces momentus, varam lietot sekojošu paņēmienu: pēc formulas (43) uziesim inerces momentus attiecībā uz divām asīm OK un OL, kuras guļ $\overline{X}O\overline{Y}$ plaknē un veido ar $O\overline{X}$ asi leņķus 45°. Pēc tam uzrakstīsim tos pašus inerces momentus pēc form.(36):

$$J_K = J_x\cos^2\alpha_1 + J_y\cos^2\beta_1 + J_z\cos^2\gamma_1 - 2J_{xy}\cos\alpha_1\cos\beta_1 - 2J_{xz}\cos\alpha_1\cos\gamma_1 -$$
$$- 2J_{yz}\cos\beta_1\cos\gamma_1$$

$$J_L = J_x\cos^2\alpha_2 + J_y\cos^2\beta_2 + J_z\cos^2\gamma_2 - 2J_{xy}\cos\alpha_2\cos\beta_2 - 2J_{xz}\cos\alpha_2\cos\gamma_2 -$$
$$- 2J_{yz}\cos\beta_2\cos\gamma_2$$

Bet kā redzams no zīmējuma 41:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma_1 = 0$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma_2 = 0$$

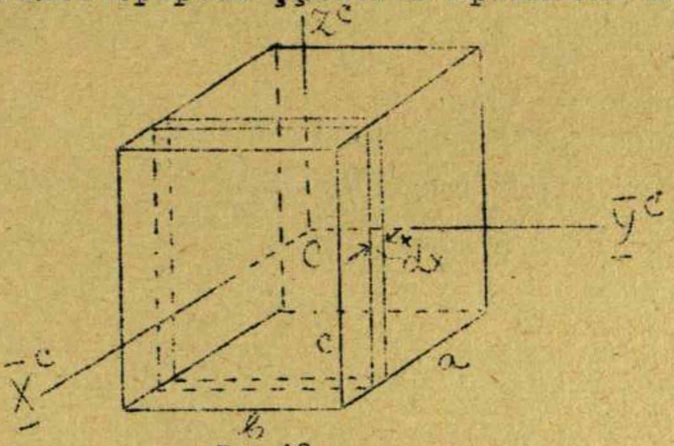
$$\left.\begin{aligned} J_K &= J_x\frac{1}{2} + J_y\frac{1}{2} + 2J_{xy}\frac{1}{2} \\ J_L &= J_x\frac{1}{2} + J_y\frac{1}{2} - 2J_{xy}\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$$ atvelkot otru nol-mu no pirmā, atrodam

$$J_{xy} = \frac{J_K - J_L}{2}$$

Dažu vienkāršu homogenu ķermenu galvenie centrālie inerces momenti.

Parallēlopipeda galvenie centrālie inerces momenti.

Parallēlopipeda šķautnes apzīmēsim ar a,b,c. Par koordinatu asīm izvēlēsim galvenās centrālās ass, kuŗas viegli var atrast ievērojot, ka smaguma centrā C ir trīs simmetrijas plaknes.



zīm.42.

Uziesim atsevišķi integrālu $\int x^2 dm$. Šim nolūkam izdalīsim parallēlopipeda elementu ar divām plaknēm perpendikulārām asij $\bar{X}^c$ attālumā x no smaguma centra un dx savā starpā, tad masas elements $dm = \delta.bc.dx$, kur δ ir specifiska masa

$$\int^{M} x^2 dm = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2.\delta.bc.dx = \delta bc\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = \delta.bc\left(\frac{a^3}{24} + \frac{a^3}{24}\right) = \frac{a^3bc\delta}{12}$$

Ievērojot, ka $abc.\delta = M$, dabūsim $\int^{M} x^2 dm = \frac{Ma^2}{12}$. Pēc analoģijas arī

$$\int^{M} y^2 dm = \frac{Mb^2}{12} \quad \text{un} \quad \int^{M} z^2 dm = \frac{Mc^2}{12}$$

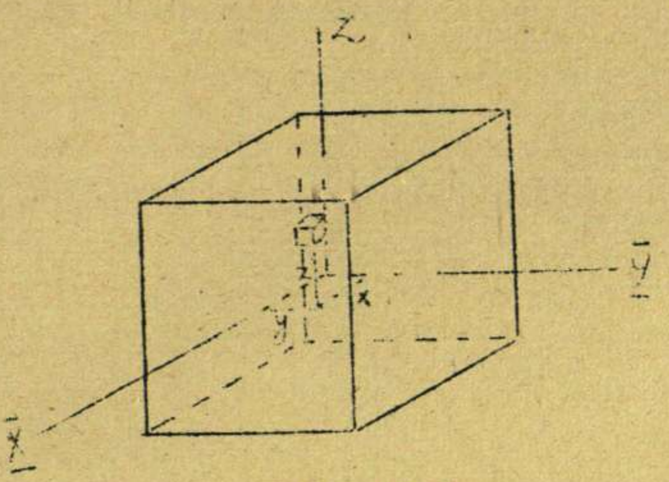
Tagad meklējamais inerces moments: $J_x^c = \int (y^2 + z^2) dm$

$$\boxed{J_x^c = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)}\ , \quad \boxed{J_y^c = \frac{M}{12}(a^2 + c^2)}\ , \quad \boxed{J_z^c = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)} \quad (44)$$

Polārais centrālais inerces moments parallēlopipedam:

$$J_p^c = \frac{1}{2}(J_x^c + J_y^c + J_z^c) = \frac{M}{24}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)\ , \quad \boxed{J_p^c = \frac{M}{12}(a^2 + b^2 + c^2)} \quad (45)$$

Cita metode integrāla $\int x^2 dm$ noteikšanai.



zīm.42-a.

zīm.42-a.

Masas elementu dm varam izvēlēties elementāra parallēlopipeda veidā

$$dm = dx.dy.dz.\delta$$

kur δ ir specifiska masa.

$$\int^{M} x^2 dm = \iiint x^2 dx.dy.dz.\delta =$$

$$= \delta \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 dx =$$

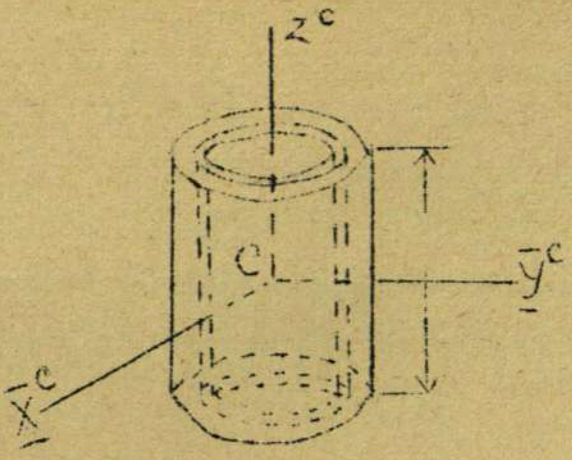
$$= \delta \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \frac{a^3}{12}$$

$$\int^{M} x^2 dm = \delta \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy.c\frac{a^3}{12} = \frac{a^3bc}{12}\delta = \frac{Ma^2}{12}$$

Cilindra inerces momenti.

Cilindra radiusu apzīmēsim ar R un augstumu ar H. Galvenās centrālās ass ir cilindra ass un divas tai an savstarpīgi perpendikulāras ass caur smaguma centru.

Pirmkārt uziesim cilindra aksiālo inerces momentu J_z pret cilindra asi. Šim nolūkam izdalīsim cilindra elementu caurulītes veidā ar divām cilindriskām konaksiālām virsmām ar radiusiem r un r + dr. Minētā elementa tilpums būs:



zīm.43.

$$\left[\pi(r+dr)^2 - \pi r^2\right]H = (2rdr + dr^2)\pi H$$

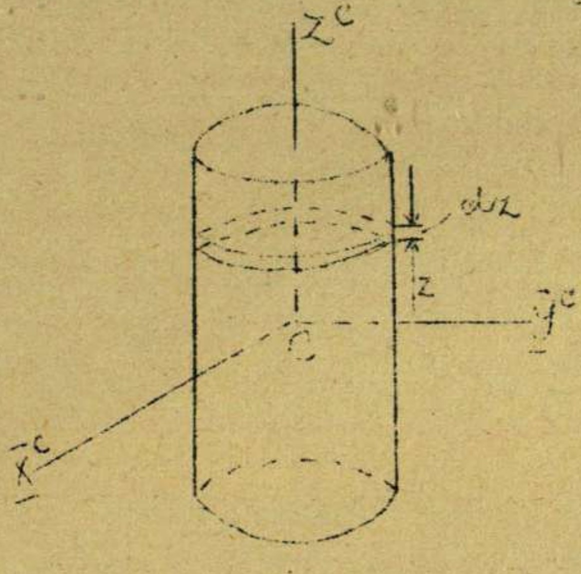
un, ignorējot otrās kārtas bezgalīgi mazus lielumus, dabūsim elementa tilpumu:

$$dm = 2\pi rdr.H\delta$$

$$J_z = \int^M r^2 dm = \int_0^R r^2.2\pi rdr.H.\delta =$$

$$= 2\pi H.\delta \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi H.\delta.R^4$$,bet ievērojot, ka $\pi R^2 H.\delta = M$, dabūsim aksiālo inerces momentu:

$$\boxed{J_z = \frac{MR^2}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (46)$$



zīm.44.

Tālāk meklēsim diametrālus centrālus inerces momentus: J_x^c un J_y^c. Simmetrijas dēļ $J_x^c = J_y^c$, jeb

$$\int^M (y^2 + z^2)dm = \int^M (x^2 + z^2)dm$$ un saīsinot $\int z^2 dm$, atrodam, ka

$$\int^M x^2 dm = \int^M y^2 dm$$, bet ja šie integrāļi ir vienādi, tad viņi līdzinājas pussummai:

$$\int^M x^2 dm = \int^M y^2 dm = \frac{1}{2}\int^M (x^2+y^2)dm = \frac{1}{2}J_z,$$

tā tad galīgi $\int^M x^2 dm = \int^M y^2 dm = \frac{1}{4}MR^2$. Tālāk meklēsim integrālu $\int^M z^2 dm$. Šim nolūkam izdalīsim cilindra elementu citādi: ar divām plaknēm paralēlām $\overline{XY}$ plaknei attālumā z un z + dz no pēdējās. Izdalītā elementa masa $dm = \pi R^2.dz.\delta$ un

$$\int^M z^2 dm = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2.\pi R^2.dz.\delta = \pi R^2.\delta\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} = \pi R^2.\delta\left(\frac{H^3}{24}+\frac{H^3}{24}\right) =$$

$$= \pi R^2 \delta \frac{H^3}{12}$$

bet ievērojot, ka $\pi R^2 H.\delta = M$, dabūsim $\int z^2 dm = \frac{MH^2}{12}$, tagad

$$J_x^c = \int^M (y^2 + z^2) dm = \int^M y^2 dm + \int^M z^2 dm = \frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} MH^2$$ un galīgi

$$\boxed{J_x^c = J_y^c = \frac{M}{12} (3R^2 + H^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

Polārais centrālais inerces moments cilindrim

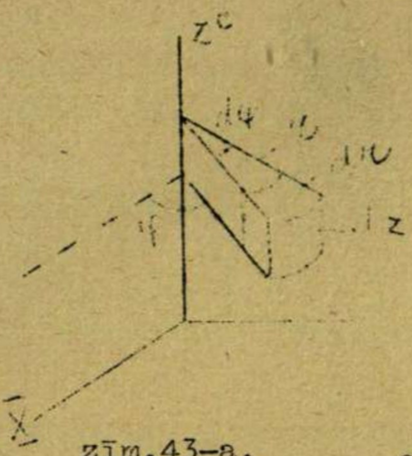
$$J_p = \frac{1}{2}(J_x^c + J_y^c + J_z^c) = J_x^c + \frac{1}{2} J_z^c = \frac{M}{12} (3R^2 + H^2 + 3R^2)$$

$$\boxed{J_p^c = \frac{M}{12} (6R^2 + H^2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

Cita metode aksiāla inerces momenta noteikšanai.

Masas elementu dm izvēlēsimies kā parādīts zīmējumā (43-a), tad:

$$dm = r d\varphi .dr.dz.\delta \quad \text{un}$$



zīm.43-a.

$$J_z = \delta \int^M r^2 dm = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} dz \int_0^R r^2.r.dr =$$

$$= \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} dz \cdot \frac{R^4}{4}$$

$$J_z = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{HR^4}{4} = 2\pi \frac{HR^4}{4} \delta = \frac{\pi R^4 H \delta}{2} = \frac{MR^2}{2}$$

Cita metode integrāla $\int z^2 dm$ noteikšanai.

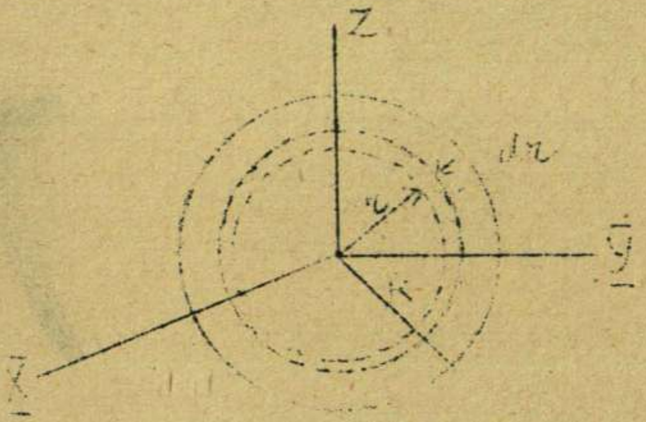
Ņemot to pašu elementu (zīm.43-a), dabūsim:

$$\int z^2 dm = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 dz \int_0^R r dr = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} z^2 dz \frac{R^2}{2} = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{2} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}}$$

$$\int z^2 dm = \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R^2}{2} \cdot \frac{H^3}{12} = \delta\, 2\pi \frac{R^2}{2} \cdot \frac{H^3}{12} = \frac{\pi R^2 H^3 \delta}{12} = \frac{MH^2}{12}$$

Lodes inerces momenti.

Apzīmēsim lodes radiusu ar R. Simmetrijas dēļ visi inerces momenti pret asīm, kuŗas iet caur lodes centru ir vienādi:



zīm.45.

$J_x^c = J_y^c = J_z^c$,bet ievērojot, ka

$J_x^c + J_y^c + J_z^c = 2J_p^c$,jānāk pie slēdziena, ka:

$$J_x^c = J_y^c = J_z^c = \frac{2}{3} J_p^c = \frac{2}{3}\int^M r^2 dm.$$

Lai atrastu $\int r^2 dm$, izdalīsim lodes elementu ar divām koncentriskām lodēm ar radiusiem r un r+dr. Šī elementa tilpums:

$$\frac{4}{3}\pi\left[(r + dr)^3 - r^3\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\pi(3r.dr^2 + 3r^2.dr + dr^3)$$

un masa, ignorējot otrās un trešās kārtas bezgalīgi mazus lielumus,būs: $dm = 4\pi r^2.dr.\breve{\delta}$, kur $\breve{\delta}$ ir specifiska masa. Tagad

$$J_p = \int^M r^2 dm = \int_0^R r^2.4\pi r^2.dr.\breve{\delta} = 4\pi\breve{\delta}\int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\breve{\delta} R^5$$,bet ievērojot,ka $M = \frac{4}{3}\pi R^3\breve{\delta}$,dabūsim izdalot $\frac{J_p^c}{M} = \frac{4\pi.\breve{\delta}.R^5.3}{5.4\pi.\breve{\delta}.R^3} = \frac{3}{5}R^2$ un polārais moments $\boxed{J_p^c = \frac{3}{5}MR^2}$ . . . . (49)

Aksiālie inerces momenti: $J_x^c = J_y^c = J_z^c = \frac{2}{3}J_p^c = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}MR^2 = \frac{2}{5}MR^2$

$$\boxed{J_x^c = J_y^c = J_z^c = \frac{2}{5}MR^2} \quad \text{. . . . . (50)}$$

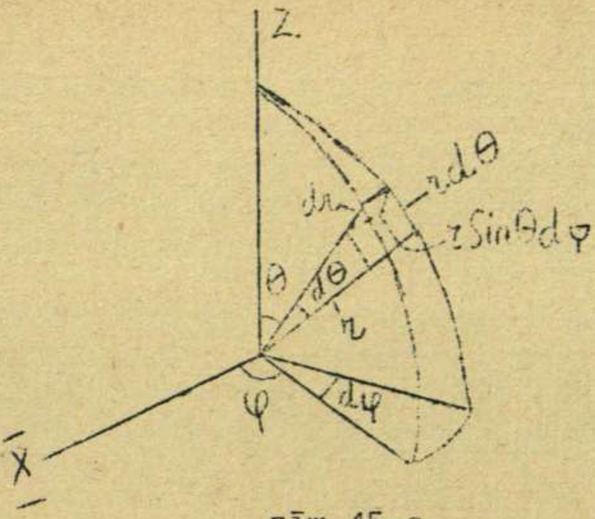
Cita metode lodes aksiāla inerces momenta noteikšanai.

Lodes aksiālo inerces momentu varam noteikt arī tieši izvēloties lodes elementu ar sferiskām koordinātēm r, φ un θ. Tad

$$dm = r.Sin\theta.d\varphi.r.d\theta.dr$$

un ievērojot, ka elementa attālums no Z ass ir r.Sinθ, dabūsim:

$$J_z = \int (rSin\theta)^2 dm = \breve{\delta}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} Sin^3\theta.d\theta\int_0^R r^4 dr = \breve{\delta}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} Sin^3\theta.d\theta\cdot\frac{R^5}{5}$$



zīm.45-a.

$$J_z = \frac{\rho R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\mathrm{Cos}^2\theta - 1)\, d\mathrm{Cos}\theta =$$

$$= \frac{\rho R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{\mathrm{Cos}^3\theta}{3} - \mathrm{Cos}\theta\right]_0^{\pi}$$

$$J_z = \frac{\rho R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \left[-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1\right] =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{\rho R^5}{5} 2\pi = \frac{2}{5} MR^2$$

§ 8. KUSTĪBAS DAUDZUMA TEOREMA SISTEMAI.

Kustības daudzums kādam sistemas punktam ir vektors $\overline{m_k V_k}$. Par sisā temas kustības daudzumu mēs sauksim visu šo vektoru geometrisku summu, apzīmējot to ar $\bar{\mu}$, tad:

$$\bar{\mu} = \sum_1^n \overline{m_k V_k}$$

Kustības daudzuma vektora projekcijas uz asīm būs:

$$\mu_x = \sum_1^n m_k \dot{x}_k$$

$$\mu_y = \sum_1^n m_k \dot{y}_k$$

$$\mu_z = \sum_1^n m_k \dot{z}_k$$

Tagad pierādīsim pašu kustības daudzuma teoremu. Izdalot no sistemas kādu punktu A_k, varam uzrakstīt

$$m_k \bar{J}_k = \bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i + \bar{S}_k^a + \bar{S}_k^i$$

Summējot šādus nol-mus visiem punktiem, dabūsim

$$\sum_1^n m_k \bar{J}_k = \sum_1^n \bar{F}_k^a + \sum_1^n \bar{F}_k^i + \sum_1^n \bar{S}_k^a + \sum_1^n \bar{S}_k^i$$

bet, kā zinams

$$\sum_1^n \bar{F}_k^i = 0\,, \quad \sum_1^n \bar{S}_k^i = 0 \quad \text{un} \quad \sum_1^n \bar{F}_k^a + \sum \bar{S}_k^a = \bar{V}$$, tā tad

$$\sum_1^n m_k \bar{J}_k = \bar{V}$$

Tagad pārveidosim kreiso pusi:

$$\sum_1^n m_k \bar{J}_k = \sum_1^n m_k \frac{d\bar{V}_k}{dt} = \sum_1^n \frac{dm\bar{V}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^n m\bar{V}_k = \frac{d\bar{\mu}}{dt}$$, tad

$$\boxed{\frac{d\bar{\mu}}{dt} = \bar{V}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Iegūtais rezultāts reprezentē kustības daudzuma teorēmu, kuŗu formulēsim tā: pilna atvasināta no sistēmas kustības daudzuma vektora ģeometriski vienāda ar sistēmas galveno vektoru.

Jeb pārveidojot formulu (51), dabūsim to pašu teorēmu citā veidā:

$$\boxed{d\bar{\mu} = \bar{V}.dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Vārdos šī formula izsakās tā: sistēmas kustības daudzuma vektora diferenciāls ir vienāds ar galvenā vektora elementāro impulsu.

Nointegrējot formulu (52), dabūsim to pašu teorēmu galīgā veidā:

$$\boxed{\bar{\mu} - \bar{\mu}_o = \int_{t_o}^{t} \bar{V}.dt} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

kuŗu formulēsim tā: sistēmas kustības daudzuma ģeometriskais pieaugums zināmā laika sprīdī ir vienāds ar galvenā vektora impulsu tanī pašā laika sprīdī.

Lai dabūtu kustības daudzuma teorēmas izteiksmes projekcijās, projecēsim uz koordinātu asīm vektoriālas formulas (51, (52) un (53):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mu_x}{dt} &= V_x \\ \frac{d\mu_y}{dt} &= V_y \\ \frac{d\mu_z}{dt} &= V_z \end{aligned}\right\} \ldots..(51^{\underline{a}}) \qquad \left.\begin{aligned} d\mu_x &= V_x.dt \\ d\mu_y &= V_y.dt \\ d\mu_z &= V_z.dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(52^{\underline{a}})$$

$$\left.\begin{aligned} \mu_x - \mu_{ox} &= \int_{t_o}^{t} V_x.dt \\ \mu_y - \mu_{oy} &= \int_{t_o}^{t} V_y.dt \\ \mu_z - \mu_{oz} &= \int_{t_o}^{t} V_z.dt \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(53^{\underline{a}})$$

Speciāli gadījumi.

1) Ja galvenā vektora projekcija $\overline{V}_x = 0$, tad no formulas (52a) atrodam, ka $\mu_x = C_1$. Tāpat ja $V_y = 0$, tad pēc analoģijas $\mu_y = C_2$, un ja

$$V_z = 0, \quad " \quad " \quad " \quad \mu_z = C_3$$

Ja visas projekcijas $V_x = V_y = V_z = 0$, t.i. $\overline{V} = 0$, tad $\overline{\mu} = Const.$ Šo gadījumu sauc par kustības daudzuma pastāvības principu, jo kustības daudzuma vektors patur Const. lielumu un virzienu.

2) Ja $V_x = k_1$, tad formulu (53a) var integrēt, un $\mu_x - \mu_{0x} = k_1(t-t_0)$

$$V_y = k_2 \quad " \quad \mu_y - \mu_{0y} = k_2(t - t_0)$$

$$V_z = k_3 \quad " \quad \mu_z - \mu_{0z} = k_3(t - t_0)$$

3) Formulas (53a) ir izdevīgi lietot arī tad, ja $V = f(t)$.

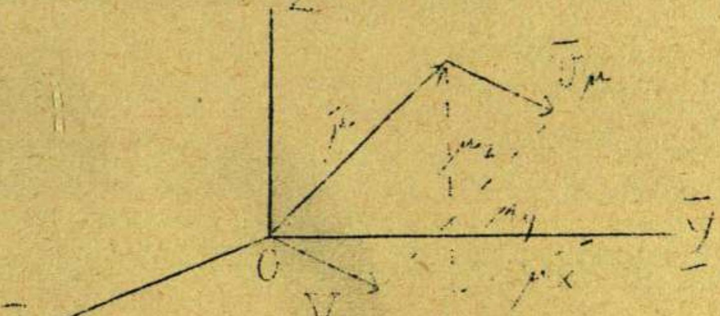
Ja $V_x = f_1(t)$, tad pēc integrēšanas $\mu_x - \mu_{0x} = \int_{t_0}^{t} f_1(t).dt$

$$V_y = f_2(t) \quad " \quad \mu_y - \mu_{0y} = \int_{t_0}^{t} f_2(t).dt$$

$$V_z = f_3(t) \quad " \quad \mu_z - \mu_{0z} = \int_{t_0}^{t} f_3(t).dt$$

Kustības daudzuma teorēmas ģeometriska interpretācija.

Atliksim no koordinātu sākuma sistēmas kustības daudzuma vektoru $\overline{\mu}$. Šī vektora gala punkts pie sistēmas kustības arī pārvietosies. Meklēsim minētā punkta ātrumu $\overline{V}_\mu$.



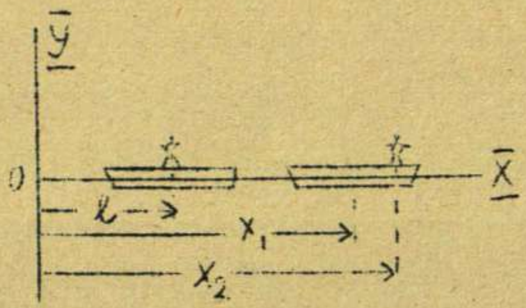
zīm.46.

Kā zināms, katra punkta ātrums ir radiusa vektora atvasinātā pēc laika $\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt}$. Tā tad $\overline{\mu}$ gala punkta ātrums $\overline{V}_\mu = \frac{d\overline{\mu}}{dt}$, bet no otras puses $\frac{d\overline{\mu}}{dt} = \overline{V}$ un

$$\boxed{\overline{V}_\mu = \overline{V}} \qquad \text{........(54)}$$

Formula (54) rāda, ka ātrums, ar kuru pārvietojas sistēmas kustības daudzuma vektora $\overline{\mu}$ gala punkts, ja šo vektoru atliekam no koordinātu sākuma, ir ģeometriski vienāds ar sistēmas galveno vektoru $\overline{V}$.

Piemērs. Cilvēks laivā kustas ar Const. paātrinājumu j_o. Sākumā laiva bija mierā. Cilvēks sākumā arī bija mierā laivas centrā, kuŗa sākuma attālums no koordinātu sākuma bija ℓ.



zīm.47.

Dots: laivas masa m_1 un cilvēka masa m_2.

Apzīmējot laivas centra koordināti ar x_1 un cilvēka koordināti ar x_2 un pieņemot, ka berzes starp laivu un ūdeni nav, uziet:

$$x_1 = f_1(t) \quad \text{un} \quad x_2 = f_2(t)$$

Pieņemsim, ka laiva ar cilvēku ir pārgājusi otrā stāvoklī uz labo pusi un cilvēks laivā arī ir pārgājis uz priekšu un pielietosim kustības daudzuma teoremu projekcijā uz $\underline{X}$ asi (form.53a):

$$\mu_x - \mu_{ox} = \int_{t_o}^{t} V_x . dt$$

bet šinī sistemā darbojošies spēki ir tikai smaguma spēki, tā tad visai sistemai $V_x = 0$.

$\mu_x - \mu_{ox} = 0$ ieliksim sistemas kustības daudzumu izteiksmes

$\sum_1^n m_k\dot{x}_k - \sum_1^n m_k\dot{x}_{ko} = 0$ attīstīsim summas

$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 - (m_1\dot{x}_{10} + m_2\dot{x}_{20}) = 0$, bet $\dot{x}_{10} = 0$ un $\dot{x}_{20} = 0$, tā tad

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0 \quad \text{........ I integrāls}$$

nointegrēsim to: $m_1x_1 + m_2x_2 = C_1$, bet no sākuma apstākļiem $C_1 = m_1\ell + m_2\ell$

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)\ell \quad \text{...... II integrāls.}$$

Mēs dabūjam tikai sakaru starp x_1 un x_2 uz kustības daudzuma teoremas pamata, bet, lai atrastu katru koordināti kā f(t), jāievēro, ka cilvēks laivā ir nogājis ceļu

$$s = \frac{j_ot^2}{2}$$

tā tad

$$x_2 - x_1 = \frac{j_ot^2}{2}$$ uziesim no šīs formulas x_2

$$x_2 = x_1 + \frac{j_ot^2}{2}$$ un ieliksim II. integrāla izteiksmē

$$m_1x_1 + m_2(x_1 + \frac{j_ot^2}{2}) = (m_1 + m_2)\ell$$

$$(m_1 + m_2)x_1 = (m_1 + m_2)\ell - m_2\frac{j_ot^2}{2}$$, no kurienes

$$\boxed{x_1 = \ell - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{j_o t^2}{2}}$$ laivas centra kustības nol-ms,

bet $x_2 = x_1 + \frac{j_o t^2}{2} = \ell - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{j_o t^2}{2} = \ell + (1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}) \frac{j_o t^2}{2}$

$$\boxed{x_2 = \ell + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{j_o t^2}{2}}$$ Cilvēka absolūtās kustības nol-ms pret nekustošu koordinātu sistemu.

Kā redzams x_1, kas sākumā līdzinājās ℓ ar laiku samazinājās $x_1 < \ell$, tā tad otrs laivas stāvoklis zīm.47 ir pieņemts nepareizi, tam jābūt pa kreisi no pirmā, ja cilvēks pārvietojas uz labo pusi. Šāda parādība izskaidrojas ar to, ka cilvēks ejot pa laivu, ar kājām grūž laivu pretējā virzienā. Šeit attīstas iekšējas reakcijas, kuŗu noteikšanai var izlietot d'Alembert'a principu atsevišķam punktam:

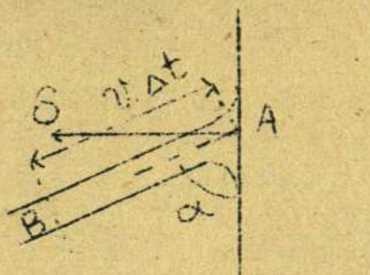
$S_2^i - m_2 j_2 = 0$, tā tad $S_2^i = m_2 j_2$, bet $j_2 = \ddot{x}_2$.

Sastādīsim $\dot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} j_o t$ un tāļāk $\ddot{x}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} j_o$, no kurienes

$$\boxed{S_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} j_o}$$

Šķidruma strūklas dinamiskais spiediens pret vertikalu sienu.

Šī jautājuma atrisināšanai mēs izlietosim kustības daudzuma teoremu. Apzīmēsim: šķidruma strūklas ātrumu ar V, strūklas šķērsgriezumu ar ω, meklējamo strūklas spiedienu, kas līdzinājās sienas reakcijai ar S. Norobežosim mūsu sistemu, atliekot no sienas garumu AB = V.Δt, kas līdzinājas ceļam, kuŗu noies kāda ūdens daļiņa ar ātrumu V laika sprīdī Δt.



zīm.47a

Pielietosim norobežotai sistemai kustības daudzuma teoremu projekcijā uz $\bar{X}$ asi, kuŗa izvēlēta normāli sienai, no kāda laika momenta t līdz t + Δt, t.i. par tādu laika sprīdi Δt, kuŗā visas ūdens daļiņas sasniegs sienu. Ārējie spēki sistemā ir smaguma spēki, kuŗi darbojas vertikalā virzienā un kuŗu projekcijas uz $\bar{X}$ asi līdzinājas nullei un ārējā reakcija ir sienas reakcija S. Tā tad galvenā vektora projekcija $V_x = - S$.

$\mu_x - \mu_{ox} = \int_t^{t+ t\Delta} V_x . dt$, bet gala momentā punktu ātrumi $V_x = 0$ un

arī $\mu_x = 0$.

$0 - \mu_{ox} = - S.\Delta t$ aizvietosim kustības daudzumu $\mu_{ox} = \sum m_k V_k \sin\alpha$

$\sum m_k V_k \sin\alpha = S.\Delta t$, bet visiem punktiem $V_k = V$ un $\sum m_k = M = V.\Delta t.\omega.\delta$,

kur δ ir specifiska masa,

$V.\Delta t.\omega.\delta.V.\sin\alpha = S.\Delta t$, no kuŗienes sienas reakcija jeb dinamiskais spiediens

$$\boxed{S = V^2.\omega.\delta.\sin\alpha}$$

Piezīme: Ja siena nebūs vertikala, tad, ņemot kustības daudzuma teorēmu normalā virzienā pret sienu, mēs dabūsim labā pusē arī smaguma spēka projekcijas impulsu, bet, pie lieliem ātrumiem smaguma spēks, kas darbojas uz elementu AB būs tik mazs, salīdzinot ar reakciju, ka to var ignorēt un lietot izvesto formulu arī gadījumos, kad siena nav vertikala.

Skaitliska piemērs. Uziet ūdens strūklas spiedienu uz sienu perpendikulāru strūklai, ja strūklas šķērsgriezienss $\omega = 50cm^2$ un ātrums $V=20m/sec$.

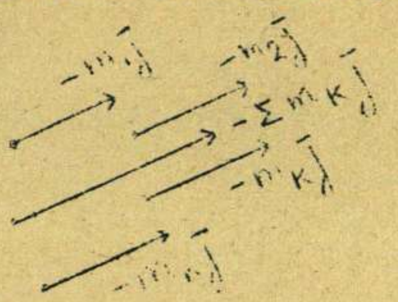
$S = V^2.\omega.\delta.\sin 90^o$, bet, ja mēs liksim ātrumu $[m/sec.]$, tad šķērsgriezienss jāņem $[m^2]$ un $\omega = 0,005\ m^2$.

Uziesim vēl $\delta = \frac{1000}{9,81} = 102 \left[\frac{kg}{m^3} : \frac{m}{sec^2}\right] = 102 \left[\frac{kg.sec^2}{m^4}\right]$

$$S = V^2.\omega.\delta = 20^2.0,005.102 \left[\frac{m^2.m^2.kg.sec^2}{sec^2.m^4}\right] = 204\ kg.$$

§ 9. INERCES CENTRA KUSTĪBAS TEOREMA.

Ja sistema atrodas virzes kustībā, tad visi sistemas inerces spēki reprezentē parallēlo spēku sistemu. Kā zinams no statikas, katrai parallēlo spēku sistemai ir centrs, kuŗā iedarbojas visu spēku kopspēks, neatkarīgi no tā, kāds virziens būs piešķirts visiem parallēliem spēkiem. Visu sistemas inerces spēku centru mēs apzīmēsim ar C un sauksim vienkārši par inerces centru.



zīm.48.

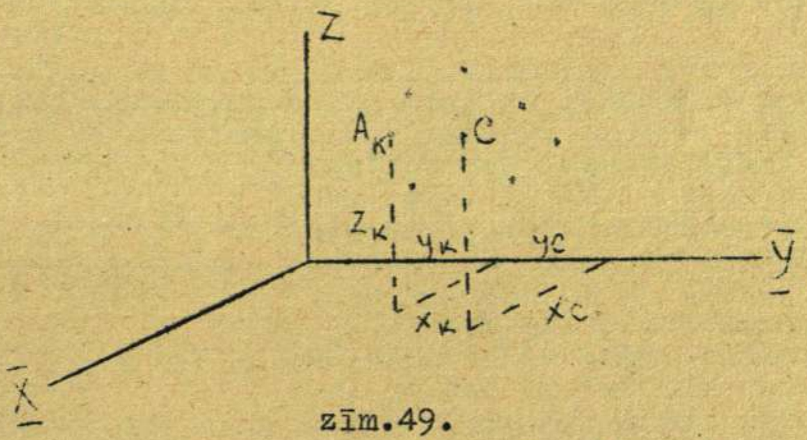
Sistemas inerces centra, kā parallēlo spēku centra, koordinātes jau zināmas no statikas un izteiksies ar formulām

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}, \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(55)$$

kur ar M ir apzīmēta visas sistemas masa: $M = \sum m_k$.

Piezīme. Ja sistema atrodas zem smaguma spēka iespaida, tad pazīstamais smaguma centrs sakritīs ar sistemas inerces centru, bet inerces centra jēdziens ir plašāks. Par smaguma centru mēs varam runāt tikai tad, ja sistemā smaguma spēks darbojas, bet inerces centrs, noteikts ar formulām (55) nav atkarīgs no tā, kādi spēki sistemā darbojas.

Tagad pāriesim uz pašu inerces centra kustības teoremu. Ja punktu sistema atrodas kustībā, tad inerces centrs vispārīgi arī var atrasties



zīm.49.

kustībā; uziesim šīs kustības likumu.

Ņemsim formulas (55) pareizinātas ar sistemas masu M.

$$Mx_c = \sum m_k x_k$$
$$My_c = \sum m_k y_k$$
$$Mz_c = \sum m_k z_k$$

un atvasināsim tās pēc laika:

$$M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k = \mu_x$$
$$M\dot{y}_c = \sum m_k \dot{y}_k = \mu_y$$
$$M\dot{z}_c = \sum m_k \dot{z}_k = \mu_z$$

jeb apvienojot visas trīs formulas vienā vektoriālā:

$$\boxed{M\bar{V}_c = \sum m_k \bar{V}_k = \bar{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

Šīs formulas izsaka, ka inerces centra kustības daudzums ir vienāds ar sistemas kustības daudzumu.

Atvasināsim šīs formulas vēl reiz pēc laika:

$$M\ddot{x}_c = \frac{d}{dt}\sum m_k \dot{x}_k = \frac{d\mu_x}{dt}$$
$$M\ddot{y}_c = \frac{d}{dt}\sum m_k \dot{y}_k = \frac{d\mu_y}{dt}$$
$$M\ddot{z}_c = \frac{d}{dt}\sum m_k \dot{z}_k = \frac{d\mu_z}{dt}$$

Bet pēc kustības daudzuma teoremas form.(51a)

$$\frac{d\mu_x}{dt} = V_x$$
$$\frac{d\mu_y}{dt} = V_y$$
$$\frac{d\mu_z}{dt} = V_z$$

tā tad galīgi

$$\boxed{\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= V_x \\ M\ddot{y}_c &= V_y \\ M\ddot{z}_c &= V_z \end{aligned}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (57)$$

jeb apvienojot visas formulas vienā vektoriālā dabūsim

$$\boxed{M\bar{J}_c = \bar{V}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (58)$$

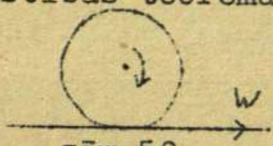
Formulas (57) un (58) reprezentē inerces centra kustības teoremu. Salīdzinot šīs formulas ar materiāla punkta kustības diferenciālnol-miem, varam atrasto teoremu formulēt tā:

Sistemas inerces centrs kustas, kā brīvs punkts, kuŗā ir koncentrēta visa sistemas masa M un uz kuŗu iedarbojas sistemas galvenais vektors V.

Inerces centra kustības teoremai ir ļoti liela nozīme, jo viņa noved sistemas kustību pie materiāla punkta kustības. Pateicoties šai teoremai ir attaisnojama materiāla punkta kustības pētīšana jeb punkta dinamika, kaut gan dabā materiālu punktu mēs nemaz nesastopam, bet arvien mums ir darīšanas ar punktu sistemām jeb ar ķermeņiem.

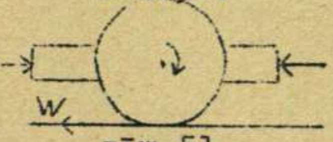
Piezīme. Iekšējie spēki un iekšējas reakcijas neatstāj nekādu iespaidu uz inerces centra kustību, jo galvenā vektora $\mathcal{V}$ izteiksmē tie nenāk priekšā.

Piemērs. Ar ko ir izskaidrojams, ka lokomotive kustas uz priekšu, ja tvaika spiediens cilindros, kā iekšējais spēks, pēc inerces centra kustības teoremas nevar izsaukt inerces centra kustību? Inerces centra kustību var izsaukt tikai ārējie spēki, šie ir berzes spēki W, kuŗi attīstas starp riteņiem un sliedēm un ir virzīti tādā virzienā, kādā lokomotive kustas. Ja sliedes būtu absolūti gludas, tad lokomotive netiktu uz priekšu.



zīm.50.

Tāpat arī pie bremzēšanas berze starp riteņiem un klučiem nevarētu palēnināt inerces centra kustību, jo tie ir iekšējie spēki. Tikai berzes spēki starp riteņiem un sliedēm, kuŗi tagad darbojas pretējā virzienā dod iespēju palēnināt vilciena kustību.



zīm.51.

Speciāli gadijumi.

1) Ja $\mathcal{V}_x = 0$ galvenā vektora projekcija uz kādu asi līdzinājās nullei, tad

$$M\ddot{x}_c = \frac{d}{dt}\sum m_k\dot{x}_k = 0 \quad \text{un integrējot,atrodam pirmo integrālu}$$

$$M\dot{x}_c = \sum m_k\dot{x}_k = C_1 \quad \text{no sākuma apstākļiem } C_1 = M\dot{x}_{co} = \sum m_k\dot{x}_{ko}$$

integrējot otro reizi:

$$Mx_c = \sum m_k x_k = C_1 t + C_2 \; \ldots\ldots \; \text{II integrāls}$$

un no sākuma apstākļiem $C_2 = Mx_{co} = \sum m_k x_{ko}$, kā redzams šinī gadijumā inerces centrs atrodas vienmērīgā kustībā. Analogiskas izteiksmes var dabūt arī ja $\mathcal{V}_y = 0$ un $\mathcal{V}_z = 0$. Gadījumu, kad $\overline{\mathcal{V}} = 0$ sauc par inerces centra kustības pastāvības principu, jo tad inerces centrs patur savu vienmērīgu taisnvirziena kustību.

Kā piemēru šim gadijumam, varam pievest saules sistemu: uz saules sistemu nekādi ārēji spēki nedarbojas (Newtona gravitācijas spēki ir iekšējie spēki), tā tad $\overline{\mathcal{V}} = 0$ un saules sistemas centram jāatrodas vai nu mierā jeb taisnvirziena vienmērīgā kustībā. Kā rāda novērojumi, tiešam saules sistemas centrs kustas taisnā virzienā vienmērīgi ar ātrumu 18 klm/st. pret Herkulesa zvaigzņāju.

2) Ja $\mathcal{V}_x = k_1$ (Const.), tad arī inerces centra kustību viegli var atrast.

$$M\ddot{x}_c = \frac{d}{dt}\sum m_k\dot{x}_k = k_1 \quad \text{integrējot dabūsim pirmo integrālu}$$

$$M\dot{x}_c = \sum m_k\dot{x}_c = k_1 t + C_1 \quad \text{un no sākuma apstākļiem } C_1 = M\dot{x}_{co} = \sum m_k\dot{x}_{ko}$$

Integrējot otro reizi $Mx_c = \sum m_k x_k = \frac{k_1 t^2}{2} + C_1 t + C_2 \; \ldots$ II integrāls,

no sākuma apstākļiem atrodam $C_2 = Mx_{co} = \sum m_k x_{ko}$.

Kā redzams šādā gadijumā inerces centrs atrodas vienmērīgi paātrinātā kustībā.

Analogiskas izteiksmes varam dabūt arī gadijumos, kad

$$V_y = 0 \quad \text{un} \quad V_z = 0$$

3) Arī gadijumā, kad $V_x = f_1(t)$ varam dabūt abus integrāļus.

$M\ddot{x}_c = \frac{d}{dt} \sum m_k \dot{x}_k = f_1(t)$, integrējot dabūsim

$M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k = \int f_1(t).dt + C_1$ .... I integrāls.

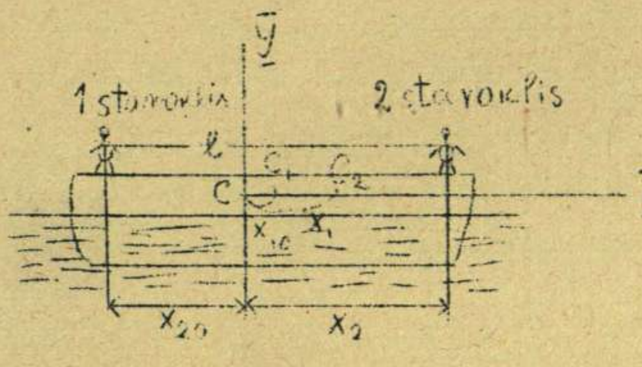
$Mx_c = \sum m_k x_k = \int \left[\int f_1(t).dt + C_1 \right] dt + C_2$ .... II integrāls.

abas Const. ir jāatrod no sākuma apstākļiem un analogiskas izteiksmes iegūsim arī gadijumos, kad

$$V_y = f_2(t) \quad \text{un} \quad V_z = f_3(t).$$

Piemērs. Laiva sākumā atrodas mierā. Cilvēks laivā sākumā arī atrodas mierā 1 stāvoklī un pēc tam ir pārgājis 2 stāvoklī, noejot relatīvi pret laivu ceļu l. Dota laivas masa m_1 un cilvēka masa m_2. Berzes starp laivu un ūdeni nav.

Uziet: laivas pārvietojumu pret ūdeni, cilvēka koordināti pēc pārvietojuma x_2 = ?.



zīm.52.

Apzīmēsim ar C_1 laivas smaguma centru un ar C sistemas smaguma centru. Punktā C izvēlēsim absolūto nekustošo koordinātu sākumu un $\bar{X}$ asi cilvēka kustības virzienā, tad $x_{co} = 0$ un $x_{10} = CC_1$.

Pieņemsim, ka laivas smaguma centrs, pie cilvēka pārvietošanās, pāries punktā C_2, tad $x_1 = CC_2$. Pielietosim inerces centra kustības teoremu $\bar{X}$ ass virzienā. Ārējie spēki sistemā ir tikai smaguma spēki, tā tad $V_x = 0$.

$M\ddot{x}_c = \frac{d}{dt} \sum m_k \dot{x}_k = V_x = C$ integrējot dabūsim $M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k = C_1$,

bet, ja sākumā laiva un cilvēks bija mierā, tad $C_1 = 0$.

$M\dot{x}_c = \sum m_k \dot{x}_k = 0$ .... I integrāls, un integrējot tālāk, dabūsim

$Mx_c = \sum m_k x_k = C_2$, bet $x_{co} = 0$, tā tad $C_2 = 0$,

$Mx_c = \sum m_k x_k = 0$ .... II integrāls.

Otrais integrāls rāda, ka neatkarīgi no cilvēka pārvietošanās kopējs inerces centrs paliek uz vietas. Tagad meklēsim absolūtus pārvietojumus cilvēkam un laivai.

Attīstot summu otrā integrālā, dabūsim $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$. Šim nolīdzinājumam, acīmredot, jāpaliek spēkā, kā sākuma stāvoklī, tā arī pēc visiem pārvietojumiem. Pielietojot to sākuma stāvoklim, uziesim koordināti x_{20}. Tad $m_1x_{10} + m_2x_{20} = 0$, no kurienes

$$x_{20} = -\frac{m_1}{m_2} x_{10}$$

Tagad uziesim cilvēka koordināti pēc pārvietojuma: x_2. Ja laiva paliktu mierā, tad cilvēka koordināte būtu $\ell - |x_{20}|$, bet laiva pati ir pārgājusi tanī pašā virzienā par $C_1C_2 = x_1 - x_{10}$, tā tad cilvēka koordināte pret nekustošām asīm būs

$$x_2 = \ell - |x_{20}| + x_1 - x_{10} = \ell - \frac{m_1}{m_2} x_{10} + x_1 - x_{10}$$

ieliekot šo pamatformulā $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$, dabūsim

$$m_1x_1 + m_2(\ell - \frac{m_1 + m_2}{m_2} x_{10} + x_1) = 0$$

$$(m_1 + m_2)x_1 + m_2 \ell - (m_1 + m_2)x_{10} = 0,$$

no kurienes $\boxed{x_1 = x_{10} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell}$ laivas koordināte pēc pārvietojuma.

Laivas koordināte sākumā bija x_{10}, tā tad laivas pārvietojums pret ūdeni ir otrs loceklis:

$$\boxed{-\frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell}$$

kas iznāk negatīvs. Tas nozīmē, ka punkts C_2 (zīm.52) jāņem pa kreisi no punkta C_1.

Cilvēka koordināte pēc pārvietojuma būs

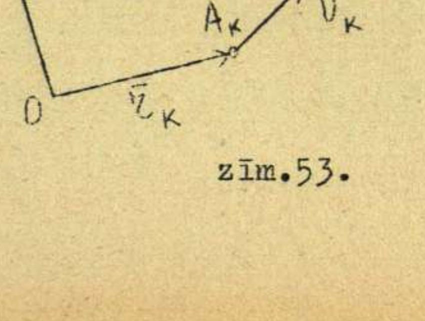
$$x_2 = \ell - \frac{m_1}{m_2} x_{10} + x_1 - x_{10} = \ell - \frac{m_1}{m_2} x_{10} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \ell$$

$$x_2 = (1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2})\ell - \frac{m_1}{m_2} x_{10} \quad ; \quad \boxed{x_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \ell - \frac{m_1}{m_2} x_{10}}$$

§ 10. KUSTĪBAS DAUDZUMA MOMENTA TEOREMA SISTEMAI.

Dažreiz to sauc arī vienkārši par momenta teoremu sistemai.

Izdalīsim no sistemas kādu punktu A_k. Šī punkta kustības daudzuma moments attiecībā uz kādu punktu O ir, kā zinams no Punkta dinamikas, vektoru produkts no punkta radiusa vektora $\bar{r}_k$ un kustības daudzuma vektora $\overline{m_kV_k}$



zīm.53.

$$\bar{\ell}_k = \left[\bar{r}_k \ \overline{m_kV_k}\right]$$

Uzrakstot vektorproduktu determinantes veidā un attīstot pēdējo, dabūsim kustības daudzuma momentus attiecībā uz koordinātu asīm

$$\left[\bar{r}_k \cdot \overline{m_k V_k}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i}_x & \bar{i}_y & \bar{i}_z \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} \quad \text{no kurienes} \quad \begin{aligned} \ell_{kx} &= m_k(y\dot{z} - z\dot{y}) = 2m_k \sigma_{yz} \\ \ell_{ky} &= m_k(z\dot{x} - x\dot{z}) = 2m_k \sigma_{zx} \\ \ell_{kz} &= m_k(x\dot{y} - y\dot{x}) = 2m_k \sigma_{xy} \end{aligned}$$

Par sistemas kustības daudzuma momentu, jeb galveno kustības daudzuma momentu ℓ attiecībā uz punktu O, sauksim geometrisko summu no sistemas punktu kustības daudzumu momentiem attiecībā uz to pašu punktu O.

$$\bar{\ell} = \sum_1^n \ell_k = \sum_1^n \left[\bar{r}_k \cdot \overline{m_k V_k}\right]$$

Projecējot vektoru $\bar{\ell}$ uz asīm, dabūsim sistemas kustības daudzuma momentus attiecībā uz asīm:

$$\ell_x = \sum_1^n \ell_{kx} = \sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k)$$

$$\ell_y = \sum_1^n \ell_{ky} = \sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k)$$

$$\ell_z = \sum_1^n \ell_{kz} = \sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k)$$

Lai pierādītu kustības daudzuma teorēmu, diferencēsim piemēram ℓ_x pēc laika

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = \sum_1^n \frac{d}{dt} m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k)$$

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \sum_1^n m_k(y_k\ddot{z}_k + \dot{y}_k\dot{z}_k - \dot{z}_k\dot{y}_k - z_k\ddot{y}_k) = \sum_1^n m_k(y_k\ddot{z}_k - z_k\ddot{y}_k)$$

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \sum_1^n (y_k \cdot m_k\ddot{z}_k - z_k \cdot m_k\ddot{y}_k), \text{ bet}$$

$$m_k\ddot{z}_k = Z_k^a + Z_k^i + S_{kz}^a + S_{kz}^i \quad \text{un} \quad m_k\ddot{y}_k = Y_k^a + Y_k^i + S_{ky}^a + S_{ky}^i$$

ievietojot šīs formulas iepriekšējā, dabūsim

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \sum_1^n y_k(Z_k^a + Z_k^i + S_{kz}^a + S_{kz}^i) - z_k(Y_k^a + Y_k^i + S_{ky}^a + S_{ky}^i)$$

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \sum_1^n (y_kZ_k^a - z_kY_k^a) + \sum_1^n (y_kZ_k^i - z_kY_k^i) + \sum_1^n (y_kS_{kz}^a - z_kS_{ky}^a) + \\ + \sum_1^n (y_kS_{kz}^i - z_kS_{ky}^i)$$

bet $\sum_{1}^{n}(y_k Z_k^{\bar{1}} - z_k Y_k^{\bar{1}}) = 0$, jo šī formula reprezentē visu iekšējo spēku momentu summu ap $\underline{X}$ asi.

Tāpat $\sum_{1}^{n}(y_k S_{kz}^{\bar{1}} - z_k S_{ky}^{\bar{1}}) = 0$, jo tā ir visu iekšējo reakciju momentu summa, un paliek

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \sum_{1}^{n}(y_k Z_k^a - z_k Y_k^a) + \sum_{1}^{n}(y_k S_{kz}^a - z_k S_{ky}^a)$$

, bet labā puse reprezentē galveno momentu ap $\underline{X}$ asi L_x (skat.form.3a), tā tad galīgi

un pēc analogijas

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\ell_x}{dt} &= L_x \\ \frac{d\ell_y}{dt} &= L_y \\ \frac{d\ell_z}{dt} &= L_z \end{aligned}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(59)$$

t.i. kustības daudzuma momenta teorema visvienkāršākā veidā.

Formulas (59) reprezentē kustības daudzuma momenta teoremu, kuŗu vārdos izteiksim tā: pilna atvasinātā pēc laika no sistemas kustības daudzuma momenta attiecībā uz kādu asi ir vienāda ar sistemas galveno momentu attiecībā uz to pašu asi.

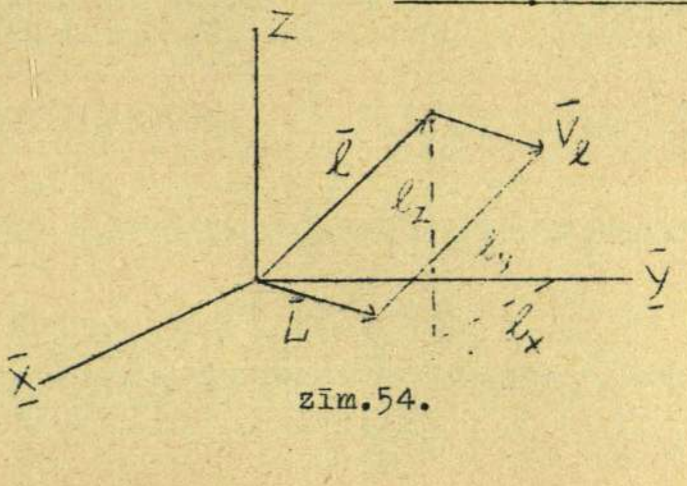
Formulas (59), kuŗas ir izteiktas projekcijās, var apvienot vienā formulā vektoriālā veidā:

$$\boxed{\frac{d\bar{\ell}}{dt} = \bar{L}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(60)$$

Šādā veidā kustības daudzuma momenta teorema formulējās tā: pilna atvasinātā no sistemas kustības daudzuma momenta vektora pēc laika ir geometriski vienāda ar sistemas galveno momentu.

Tāpat kā kustības daudzuma teoremai, mēs varam arī kustības daudzuma momenta teoremai apskatīt geometrisko interpretāciju, kuŗa ir pazīstama zem nosaukuma Resal'a teorema.

Resal'a teorema.



zīm.54.

Atliksim no koordinātu sākuma sistemas kustības daudzuma momenta vektoru . Šī vektora gala punkts pie sistemas kustības arī kustēsies. Uziesim minētā punkta ātrumu V_ℓ .

Kā zinams, katra punkta ātrums ir radiusa vektora atvasinātā pēc laika:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Tā tad $\bar{\ell}$ gala punkta ātrums $\bar{V}_\ell = \frac{d\bar{\ell}}{dt}$, bet pēc formulas (60) $\frac{d\bar{\ell}}{dt} = \bar{L}$

un $\boxed{\bar{V}_\ell = \bar{L}}$ . . . . (61)

Ar formulu (61) ir izteikta tā sauktā Resal'a teorema, kuŗa vārdos skan tā: ātrums, ar kuŗu pārvietojas sistemas kustības daudzuma momenta vektora gala punkts, ja to atliek no koordinātu sākuma, ir geometriski vienāds ar sistemas galveno momentu.

Šī teorema ir pazīstama zem nosaukuma Resal'a teorema, kaut gan angļu zinatnieks Hayward's ir publicējis to 1858.g., bet Resala darbs ir parādījies 1873.g.

Momentu teoremas izteiksme Dekarta koordinātēs.

Ja mēs gribam noteikt sistemas kustību Dekarta koordinātēs, tad kustības daudzuma momenta teoremā jāaizvieto "ℓ" projekcijas ar izteiksmēm Dekarta koordinātēs

$$\left.\begin{array}{|l|}\hline \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = L_x \\ \hline \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = L_y \\ \hline \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = L_z \\ \hline \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Speciāli gadijumi.

Apskatīsim kādos gadijumos ar kustības daudzuma teoremu var iegūt pirmo integralu.

1) Ja $L_x = 0$, tad ņemot formulu (62), dabūsim

$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = 0$ un integrējot, atrodam

$\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = C_1$, šī formula būs pirmais integrāls, jo tā satur tikai koordinātes un pirmās atvasinātās. Const. C_1 ir atrodama no sākuma apstākļiem. Analogiski atrodam arī

pie $L_y = C$, $\sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = C_2$

pie $L_z = C$, $\sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = C_3$

Gadijumu, kad $L_x = L_y = L_z = 0$, jeb vienkārši $L = 0$, mēs sauksim par kustības daudzuma momenta pastāvības principu, jo tad pēc formulas (60) iznāk

$$\frac{d\bar{\ell}}{dt} = C \text{ un } \bar{\ell} = \text{Const.}$$

Tas nozīmē, ka kustības daudzuma moments patur Const.lielumu un virzienu.

2) Ja $L_x = k_1$, kur k_1 ir kāds konstants lielums, mēs dabūsim

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = k_1 \quad \text{un integrējot}$$

$$\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = k_1 t + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots \text{ I integrāls.}$$

Integrēšanas const. C_1 ir atrodama no sākuma apstākļiem. Pēc analogijas arī gadijumos, kad

$L_y = k_2$, atrodam $\quad \sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = k_2 t + C_2$

$L_z = k_3$, " $\quad \sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = k_3 t + C_2$

3) Ja $L_x = f_1(t)$ arī var iegūt pirmo integrālu

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = f_1(t), \text{ un integrējot, atrodam}$$

$$\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = \int f(t).dt + C_1 \quad \ldots\ldots \text{ I integrāls, kur } C_1$$

ir jāatrod no sākuma apstākļiem.

Analogiski arī gadijumos, kad

$L_y = f_2(t)$, atrodam $\quad \sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = \int f_2(t).dt + C_2$

un $\quad L_z = f_3(t)$, atrodam $\quad \sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = \int f_3(t).dt + C_3$

Laukumu teorema.

Pārveidosim kustības daudzuma momenta teoremu izteiktu ar formulām (62)

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = L_x \quad \text{u.t.t.}$$

Ievērojot, ka $\frac{1}{2}(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = \sigma_{kyz} = \sigma_{kx}$, tad

$$\left.\begin{array}{|c|}\hline \frac{d}{dt}\sum_1^n 2m_k\sigma_{kyz} = L_x \\ \hline \frac{d}{dt}\sum_1^n 2m_k\sigma_{kxz} = L_y \\ \hline \frac{d}{dt}\sum_1^n 2m_k\sigma_{kxy} = L_z \\ \hline \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (63)$$

Laukumu teorema projekcijās

Formulas (63) var apvienot vienā formulā vektoriālā veidā

$$\boxed{\frac{d}{dt}\sum_{1}^{n} 2m_k \bar{\sigma}_k = \bar{L}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (64)$$

Formulas (63) un (64) ir pazīstamas zem"laukuma teorema" nosaukuma, jo tās raksturo radiusa vektora aprakstītā laukuma maiņu ar laiku.

Speciāls gadijums.

Vislielākā praktiskā nozīme ir gadijumam, kad galvenais moments attiecībā uz kādu asi līdzinājās nullei: piemēram $L_x = 0$, tad

$$\frac{d}{dt}\sum_{1}^{n} 2m_k \sigma_{kyz} = 0$$ šeit 2 var saīsināt un integrēt

$$\sum_{1}^{n} m_k \sigma_{kyz} = C_1$$, tāļāk pārveidosim ievērojot, ka $\sigma_{kx} = \frac{d\Omega_{kyz}}{dt}$

$$\sum_{1}^{n} m_k \frac{d\Omega_{kyz}}{dt} = C_1$$ un pēc tāļākas integrēšanas

$$\sum_{1}^{n} m_k \Omega_{kyz} = C_1 t + C_2$$ meklēsim C_2 no sākuma apstākļiem, atskaitot visus sektoru laukumus no laika momenta t_o.

$$0 = C_1 t_o + C_2$$

$$\boxed{\sum_{1}^{n} m_k \Omega_{kyz} = C_1(t - t_o)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

Šo rezultātu formulēsim vārdos tā: ja ārējo spēku un reakciju moments (galvenais moments) attiecībā uz kādu asi līdzinājās nullei, tad, projecējot kustību uz plakni, perpendikulāru minētai asij, summa no radiusu vektoru aprakstīto laukumu reizinājumiem ar punktu masu pieaug proporcionāli notecējošam laikam.

Apakšgadijums. Ļoti svarīgs ir apakšgadijums, ja bez $L_x = 0$ vēl sistema sākuma momentā atrodas mierā, tad:

$$\sum_{1}^{n} m_k \sigma_{kyzo} = C_1 = 0$$ un mēs dabūsim

$$\sum_{1}^{n} m_k \sigma_{kyz} = 0$$ un pēc pārveidošanas $\sigma_{kyz} = \frac{d\Omega_{kyz}}{dt}$

$$\sum_{1}^{n} m_k \frac{d\Omega_{kyz}}{dt} = 0,$$ tagad varam integrēt

$$\sum_{1}^{n} m_k \Omega_{kyz} = C_2$$ un ja laukumus Ω_{kyz} atskaitam no miera stāvokļa, tad $C_2 = 0$.

$$\boxed{\sum_1^n m_k \Omega_{kyz} = 0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

So rezultātu vārdos formulēsim tā: ja sistemā galvenais moments attiecībā uz kādu asi līdzinājās nullei un sistema sākumā vēl atrodas mierā, tad, projecējot kustību uz plakni, perpendikulāru minētai asij, summa no radiusu vektoru aprakstīto laukumu reizinājumiem ar punktu masu līdzinājās nullei.

Pie analogiskiem rezultātiem nonāksim arī, ja $L_y = 0$ jeb $L_z = 0$.

Momentu teorema polārkoordinātēs.

Ja formulās (63) sektoriālus ātrumus izteiksim polārkoordinātēs $\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$, tad mēs dabūsim:

$$\left.\begin{array}{|c|}\hline \frac{d}{dt} \sum_1^n m_k r_{kyz}^2 \frac{d\varphi_{kyz}}{dt} = L_x \\ \hline \frac{d}{dt} \sum_1^n m_k r_{kzx}^2 \frac{d\varphi_{kzx}}{dt} = L_y \\ \hline \frac{d}{dt} \sum_1^n m_k r_{kxy}^2 \frac{d\varphi_{kxy}}{dt} = L_z \\ \hline \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (67)$$

Formulas (67) reprezentē kustības daudzuma momenta teoremu polārkoordinātēs, pie kam kustība tiek projecēta uz trīs koordinātu plaknēm.

Speciāls gadijums. Ja attiecībā uz kādu asi galvenais moments līdzinājas nullei, piemēram $L_x = 0$, tad

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n m_k r_{kyz}^2 \frac{d\varphi_{kyz}}{dt} = 0 \quad \text{un mēs varam integrēt}$$

$$\sum_1^n m_k r_{kyz}^2 \cdot \frac{d\varphi_{kyz}}{dt} = C_1 \quad \ldots\ldots \text{ I integrāls}$$

jeb pārveidojot:

$$\boxed{\sum_1^n m_k r_{kyz}^2 \cdot \omega_{kyz} = C_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (67a)$$

Analogiskas formulas var iegūt arī, ja $L_y = 0$ un $L_z = 0$.

Momenta teorema cietiem ķermeņiem.

Ja mums ir darīšanas ar cietu ķermeni, tad kustības daudzuma momenta teorema pieņem citu, šim gadijumam raksturīgu, veidu.

Ņemsim formulas (67):

$$\frac{d}{dt} \sum_1^n m_k r_{kyz}^2 \frac{d\varphi_{kyz}}{dt} = L_x$$

Pirmkārt aizvietosim $\frac{d\varphi_{kyz}}{dt} = \omega_{kyz}$, tad

$\frac{d}{dt}\sum_{1}^{n} m_k r_{kyz}^2 \omega_{kyz} = L_x$, bet $\omega_{kyz} = \omega_{yz}$ ir visiem ķermeņa punktiem vienāds, tamdēļ mēs varam to izņemt no summas laukā, bet no $\frac{d}{dt}$ zīmes to iznest nevar, jo vispārīgi ω_{yz} var būt f(t), tad

$\frac{d}{dt}\omega_{yz}\sum_{1}^{n} m_k r_{kyz}^2 = L_x$, bet $\sum_{1}^{n} m_k r_{kyz}^2 = \int r_{kyz}^2 dm = J_x$, tā tad galīgi

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\omega_{yz}.J_x) = L_x \\ \hline \frac{d}{dt}(\omega_{xz}.J_y) = L_y \\ \hline \frac{d}{dt}(\omega_{xy}.J_z) = L_z \end{array}} \quad \ldots\ldots\ldots (68)$$

Formulas (68) var apvienot vienā vektoriālā formulā

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J.\bar{\omega}) = \bar{L}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Formulas (68) un (69) reprezentē momentu teoremu cietam ķermenim vispārīgā veidā.

Salīdzinot formulas (68) un (69) ar (59) un (60) atrodam vēl vienu kustības daudzuma momenta izteiksmi

$$\bar{\ell} = J\bar{\omega}$$

kuŗa, kā redzēsim vēlāk, piemīt ķermeņa griezes kustībai.

Formulas (68) varam vēl vienkāršot tādam gadijumam, kad J ar laiku nemainās, tas būs tad, kad ass pašā ķermenī nepārvietojas. Inerces momentus tad var izņemt no diferenciāla zīmes un formulas (68) pieņems šādu veidu:

$$\left.\boxed{\begin{array}{l} J_x \frac{d\omega_{yz}}{dt} = L_x \\ J_y \frac{d\omega_{xz}}{dt} = L_y \\ J_z \frac{d\omega_{xy}}{dt} = L_z \end{array}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (70)$$

Speciāls gadijums.

Ja attiecībā uz kādu asi galvenais moments līdzinājās nullei, piemēram $L_x = 0$, tad

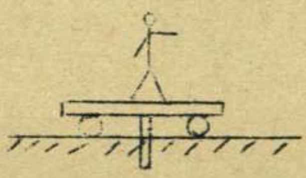
$$\frac{d}{dt}(\omega_{yz}.J_x) = C \text{ un } \boxed{\omega_{yz}.J_x = C_1} \quad \ldots\ldots (71a)$$

Ja pie tam vēl J_x ir Const., tad arī ω_{yz} ir Const. un ķermenis atrodas vienmērīgā griezes kustībā.

Tāļāk apskatīsim dažus piemērus, lai noskaidrotu kustības daudzuma momenta teoremas nozīmi dažādu problemu noskaidrošanai.

Prof.Žukovska eksperiments.

Cilvēks ar izstieptu roku stāv uz platformas, novietotas uz lodītēm tā, lai platforma varētu brīvi griezties ap vertikalu asi. Cilvēks un platforma sākumā atrodas mierā. Bet, ja cilvēks izstiepto roku pagriezīs uz vienu pusi, tad platforma ar cilvēku pagriezīsies uz pretējo pusi ap vertikalu asi. Izskaidrojumu šim eksperimentam atrodam "Laukumu teoremā", formulā (66)



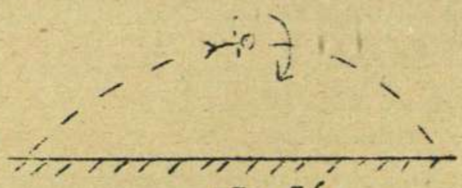
zīm.55.

$$\sum_{1}^{n} m_k \Omega_{kxy} = 0$$

Pirmkārt: galvenais moments ap vertikalu asi šeit $L_z = 0$ un ja dažiem sistemas punktiem (rokā) radiusi vektori apraksta no miera stāvokļa kādus laukumus, tad atkal citiem punktiem radiusi vektori aprakstīs negativus laukumus uz otru pusi, tā, lai būtu izpildīts noteikums formulā (66).

Salto mortale.

Ar ko ir izskaidrojams akrobatu numurs, ka palēcoties slīpi uz augšu, viņš var gaisā apgriezties? Atbildi uz šo jautājumu atrodam "Momentu teoremas polārkoordinātēs speciālā gadijumā", kad galvenais moments $L_x = 0$, izteikta ar formulu (67a):



zīm.56.

$$\sum_{1}^{n} m_k r_{kyz}^2 . \omega_{yz} = C_1$$

Ja iedomāsimies X asi caur akrobata smaguma centru perpendikulāri trajektorijas plaknei, tad formulai (67a) jābūt spēkā un, ja akrobats, būdams gaisā, pievilks kājas pie ķermeņa, tad attiecīgu punktu radiusi vektori r_{kyz} samazināsies, bet, lai formula (67a) būtu izpildīta, tad jāpalielinājās griezes ātrumam ω_{yz}. Šis apstāklis palīdz akrobatam apgriezties gaisā.

Kaķu krišana.

Ar to pašu teoremu 1894.g. Parīzes universitātē bija izskaidrots jautājums, kādēļ kaķi arvien krīt uz kājām. Kaķis krītot, piemēram, ar muguru uz leju, instinktīvi pagriež kājas un asti uz vienu pusi, caur ko viss ķermenis pagriežās uz otru pusi.

P i e m ē r s . Ja pa zemes lodes ekvatoru brauktu ļoti daudz vilcienu ar lielu masu tanī pašā virzienā, kādā griežas zemes lode, tad pēc kustības daudzuma momenta teoremas zemes lodes griezes ātrumam ap savu asi vajadzētu samazināties. Bet ja vilcieni brauktu virzienā, pretējā zemes lodes kustībai, tad zemes lodes griezes ātrumam vajadzētu palielināties.

Šis apgalvojums arī ir dibināts uz kustības daudzuma momenta teoremas speciālā gadijuma, kad $L_z = 0$, skat. formulu (67a):

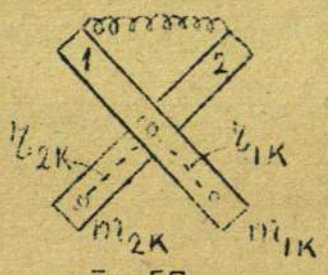
$$\sum_{1}^{n} m_k r_{kxy}^2 . \omega_z = C_1$$

P i e m ē r s. Ņemsim momentu teoremas cietam ķermenim speciālo gadījumu, kad $L_z = 0$ izteiktu ar formulu (70a):

$$\omega_z . J_z = C_1$$

Pie zemes lodes atdzišanas tā saraujās un J_z ar laiku paliek mazāks, bet lai $\omega_z . J_z$ paliktu Const. ir jāpalielinājās ω_z.

Piemērs: uz kustības daudzuma momenta teorēmu polārkoordinātēs.



zīm.57.

Divi ķermeņi, kuŗi var brīvi griezties ap kopējo asi, ir savienoti ar atsperi. Noteikt sistemas kustību, ja ārējo spēku moments ap griezes asi L = 0 un sistema sākumā atrodas mierā. Ņemsim formulu (67)

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k r_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} = L = 0$$

no kurienes, integrējot, atrodam:

$$\sum_1^n m_k r_k^2 . \omega_k = C_1 \quad .... \text{ I integrāls}$$

Ja sistema sākumā atrodas mierā, tad visiem punktiem $\omega_{ko} = 0$ un $C_1 = 0$. Tāļāk summēsim katram ķermenim atsevišķi, ievērojot, ka visiem ķermeņa punktiem griezes ātrumi ir vienādi:

$$\underbrace{\sum m_{1k} r_{1k}^2 . \omega_1}_{1 \text{ ķermenis}} + \underbrace{\sum m_{2k} r_{2k}^2 . \omega_2}_{2 \text{ ķermenis}} = 0$$

izņemsim no summām griezes ātrumus

$$\omega_1 . \sum m_{1k} r_{1k}^2 + \omega_2 \sum m_{2k} r_{2k}^2 = 0$$

un ievērojot, ka šādas summas ir ķermeņu inerces momenti, atrodam

$$\omega_1 J_1 + \omega_2 J_2 = 0 \quad \text{no kurienes}$$

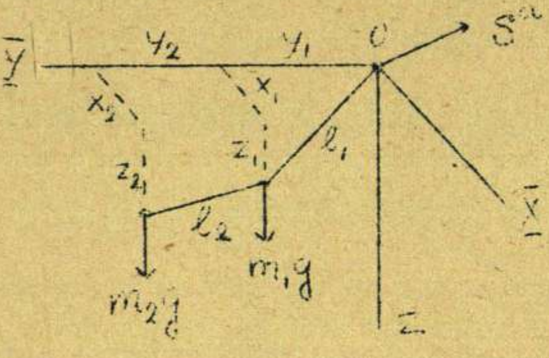
$$\omega_2 = -\frac{J_1}{J_2}\omega_1$$

Pie tā paša rezultāta varētu nonākt arī tieši integrējot form.(70).

Piemērs uz kustības daudzuma momenta teorēmu Dekarta koordinātēs:

Telpās dubultsvārsts.

Sistemu, sastāvošu no materiāla punkta m_1, piekārta ar bezsvara stieni garumā ℓ_1 pie nekustoša punkta O un otra punkta m_2, piekārta pie pirmā ar bezsvara stieni garumā ℓ_2, sauc par telpas dubultsvārstu.



Pieņemsim, ka uz doto sistēmu darbojas tikai smaguma spēki, tad acīmredzot $L_z = 0$, jo $m_1 g$ un $m_2 g$ ir paralēli Z asij. Pielietojot kustības daudzuma momentu teorēmu ap Z asi, dabūsim:

zīm.58.

$$\frac{d}{dt}\sum_{1}^{2} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = L_z = 0$$ integrēsim šo nol-mu

$$\sum_{1}^{2} m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = C_1$$ attīstīsim summu

$$m_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + m_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) = C_1$$ meklēsim C_1 no sākuma apstāk.

$$m_1(x_{1o}\dot{y}_{1o} - y_{1o}\dot{x}_{1o}) + m_2(x_{2o}\dot{y}_{2o} - y_{2o}\dot{x}_{2o}) = C_1$$ un, ievietojot C_1,

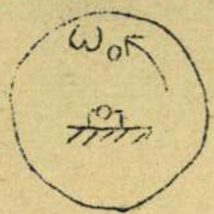
$$m_1(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) + m_2(x_2\dot{y}_2 - y_2\dot{x}_2) = m_1(x_{1o}\dot{y}_{1o} - y_{1o}\dot{x}_{1o}) +$$
$$+ m_2(x_{2o}\dot{y}_{2o} - y_{2o}\dot{x}_{2o})$$

Šis nol-ms ir I integrāls, kuŗu var iegūt uz kustības daudzuma momenta teoremas pamata, bet tas satur 4 nezinamus, tā tad galīgai atrisināšanai jāpievieno vēl 3 nol-mi. Ja mēs ņemsim klāt vēl divas saites

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \ell_1^2 \quad \text{un} \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \ell_2^2$$

tad nol-mu skaits pieaug līdz 3, bet nezinamo būs jau 6 un atkal galīgai atrisināšanai trūkst vēl 3 nol-mi. Tas ir izskaidrojams ar to, ka minētai sistemai ir 4 kustības brīvības un kustības noteikšanai ir nepieciešami 4 nol-mi, bet kustības daudzuma momenta teorema ap Z asi dod tikai vienu no tiem nol-miem.

Piemērs: Berzes momenta noteikšana gultnēs.



Zīm. 59.

Riteņa griezes ass atrodas gultnēs. Sākumā ritenim dots griezes ātrums ω_o un tas apstājas T sec. laikā, pateicoties berzei gultnēs. Riteņa inerces moments ap asi J ir dots.
Uziet: gultnēs berzes spēku momentu L_w.

Pielietosim kustības daudzuma momenta teoremu cietam ķermenim (skat.formulu 68), ap griezes asi

$\frac{d}{dt}(J.\omega) = L$, kur $L = L_w$ ir meklējamais berzes moments. Šinī formulā J varam no diferenciāla iznest, jo tas ir const. $J\frac{d\omega}{dt} = L$, bet $\frac{d\omega}{dt} = \tau$ un ja pieņemsim, ka ritenis apstājas vienmērīgi palēninātā kustībā, tad $\tau = \frac{0 - \omega_o}{T} = -\frac{\omega_o}{T}$, tā tad galīgi

$$L_w = -J\frac{\omega_o}{T}$$

Zīme momentam L_w iznāk negatīva tamdēļ, ka berzes spēki ir pasivi un darbojas arvienu pret kustību.

§ 11. SPARA TEOREMA SISTEMAI.

Spara jeb kinētiskas enerģijas izteiksme kādam sistemas punktam A_k ir:

$$K_k = \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

Par sistemas sparu jeb kinetisko enerģiju sauksim visu sistemas punktu sparu summu:

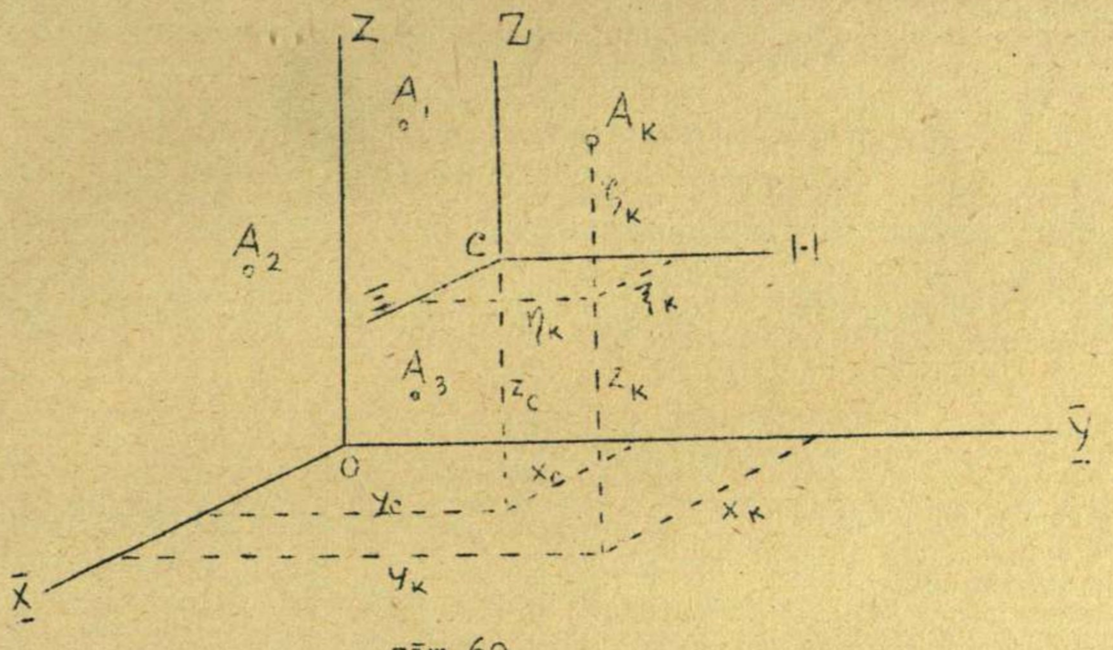
$$K = \sum_1^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \sum_1^n \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71)$$

Sistemas spars, tāpat kā punkta spars, ir skalars lielums.

Iekams mēs pāriesim uz pašas spara teoremas pierādījumu, apskatīsim vēl vienu teoremu, kuŗa atvieglo sistemas spara noteikšanu.

Koeniga teorema.

Ja $\overline{XYZ}$ ir nekustoša koordinātu sistema, tad iedomāsimies sistemas



zīm.60.

inerces centrā C vēl vienu kustošu koordinātu sistemu $\Xi H Z$, kuŗa kustas kopā ar sistemas inerces centru C virzes kustībā, t.i. tā, ka arvien $C\Xi \parallel O\overline{X}$, $CH \parallel OY$ un $CZ \parallel OZ$.

Pie sistemas kustības punkti attiecībā pret jaunām asīm vispārīgi arī atradīsies kustībā, bet ja izvēlēsimies kādu sistemas punktu A_k, tad starp tā koordinātēm, parādītām zīm.60, arvien pastāvēs šādi sakari:

$$x_k = x_c + \xi_k$$
$$y_k = y_c + \eta_k$$
$$z_k = z_c + \zeta_k$$

kur x_c, y_c un z_c ir inerces centra C koordinātes.
Atvasināsim šīs formulas pēc laika:

$$\dot{x}_k = \dot{x}_c + \dot{\xi}_k$$
$$\dot{y}_k = \dot{y}_c + \dot{\eta}_k$$
$$\dot{z}_k = \dot{z}_c + \dot{\zeta}_k$$

un ievietosim sistemas spara izteiksmē

$$K = \sum_1^n \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

$$K = \sum_1^n \frac{m_k}{2} (\dot{x}_c + \dot{\xi}_k)^2 + (\dot{y}_c + \dot{\eta}_k)^2 + (\dot{z}_c + \dot{\zeta}_k)^2$$

$$K = \sum_1^n \frac{m_k}{2}(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + \sum_1^n \frac{m_k}{2}(\dot{\xi}_k^2 + \dot{\eta}_k^2 + \dot{\zeta}_k^2) +$$
$$+ \sum_1^n m_k(\dot{x}_c\dot{\xi}_k + \dot{y}_c\dot{\eta}_k + \dot{z}_c\dot{\zeta}_k)$$

bet $\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2 = V_c^2$ ir inerces centra ātrums un

$\dot{\xi}_k^2 + \dot{\eta}_k^2 + \dot{\zeta}_k^2 = V_{k\sigma}^2$ ir punkta relatīvais ātrums ap inerces centru

$$K = \sum_1^n \frac{m_k}{2} V_c^2 + \sum_1^n \frac{m_k}{2} V_{k\sigma}^2 + \sum_1^n m_k\dot{x}_c\dot{\xi}_k + \sum_1^n m_k\dot{y}_c\dot{\eta}_k +$$
$$+ \sum_1^n m_k\dot{z}_c\dot{\zeta}_k$$

Apskatīsim atsevišķi summu:

$$\sum_1^n m_k\dot{x}_c\dot{\xi}_k = \dot{x}_c \sum_1^n m_k\dot{\xi}_k$$

bet $\sum_1^n m_k\xi_k = M\xi_c = 0$, jo Ξ ass iet caur inerces centru un, atvasinot to pašu pēc laika, dabūsim, ka ar $\sum_1^n m_k\dot{\xi}_k = 0$.

Pēc analogijas arī pārējās summas:

$$\sum_1^n m_k\dot{\eta}_k = 0 \quad , \quad \sum_1^n m_k\dot{\zeta}_k = 0 \qquad \text{un paliek}$$

$$K = V_c^2 \sum \frac{m_k}{2} + \sum_1^n \frac{m_k}{2} V_{k\sigma}^2 \quad , \text{ jeb galīgi}$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_k V_{k\sigma}^2} \qquad \text{.....................(72)}$$

Formula (72) reprezentē Koeniga teorēmu, kuŗu formulēsim tā: sistemas spars sastāv no divām daļām: 1)inerces centra spara virzes kustībā, ja tur iedomāsimies koncentrētu visu sistemas masu un 2)sistemas punktu sparu summas ap inerces centru.

Spara izteiksmes cietam ķermenim.

Cietu ķermeni var uzskatīt par tādu punktu sistemu, kuŗā punkti savā starpā ir saistīti negrozīgi. Apskatīsim cieta ķermeņa spara izteiksmes dažādos gadijumos.

I. Cieta ķermeņa spars virzes kustībā.

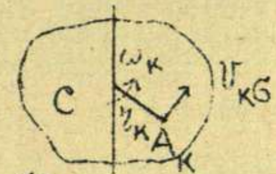
Ja ciets ķermenis atrodas virzes kustībā, tad visiem punktiem, ieskaitot inerces centru, ātrumi ģeometriski ir vienādi, bet pret inerces centru punktiem kustības nav un $V_{k\sigma} = 0$. Spara izteiksme, liekot form.(72) $V_{k\sigma} = 0$, iznāk

$$\boxed{K = \frac{1}{2} MV_c^2} \qquad \text{. . . . .(73)}$$

II. Cieta ķermeņa spars griezes kustībā ap nekustošu asi.

Atšķirsim divus apakšgadijumus, kad ass iet caur inerces centru un ass neiet caur inerces centru.

a)Griezes ass iet caur inerces centru. Šādā gadijumā inerces centra ātrums $V_c = 0$ un formulā (72) paliek



zīm.61.

$$K = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k V_{k\sigma}^2 \text{ , bet } V_{k\sigma} = r_k \omega_k = r_k . \omega$$

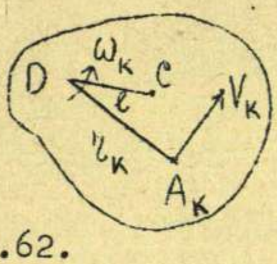
jo visiem punktiem ω ir vienāds, tad

$$K = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_1^n m_k r_k^2$$

bet $\sum_1^n m_k r_k^2 = J_c$ ir centrālais inerces moments ap griezes asi, un galīgi

$$\boxed{K = \frac{1}{2} J_c \omega^2} \qquad \text{. . . . .(74)}$$

b)Griezes ass neiet caur inerces centru, bet caur kādu citu punktu D. Uziesim sparu tieši pēc formulas (71), nelietojot Koeniga teorēmu:



zīm.62.

$$K = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k V_{k\sigma}^2 \text{ bet } V_{k\sigma} = r_k . \omega_k = r_k . \omega$$

jo visiem punktiem ω ir vienāds, un tad

$$K = \frac{1}{2} \sum_1^n m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_1^n m_k r_k^2$$

bet $\sum_1^n m_k r_k^2 = J_D$ ir inerces moments ap griezes asi un galīgi

$$\boxed{K = \frac{1}{2} J_D . \omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (75)$$

Šī formula ir analogiska formulai (74), bet mēs viņu vēl varam pārveidot, ievērojot, ka

$$J_D = J_c + M.e^2$$

kur e ir attālums starp asīm

$$\boxed{K = \frac{1}{2} J_c\omega^2 + \frac{1}{2} Me^2\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (76)$$

Šo formulu varētu dabūt arī tieši no Koeniga teoremas, izteiktas ar formulu (72), ja ievērosim, ka $V_c = e.\omega$

III. Cieta ķermeņa spars griezes kustībā ap nekustošu punktu.

Kustība ap nekustošu punktu ir ekvivalenta griezes kustībai ap momentano asi, tā tad spara noteikšanai varam izlietot formulas (74) un (75):

a) ja nekustošais punkts sakrīt ar inerces centru C, tad varam lietot formulu (74)

$$\boxed{K = \frac{1}{2} J_c\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (74a)$$

b) ja nekustošais punkts nesakrīt ar inerces centru C, tad varam lietot formulu (75)

$$\boxed{K = \frac{1}{2} J_D\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (75a)$$

Šeit tikai jāpiezīmē, ka pie kustības ap nekustošu punktu ass maina savu virzienu un inerces momenti ir mainīgi lielumi atkarīgi no ass stāvokļa, tā tad formulām (74a) un (75a) būs momentana nozīme.

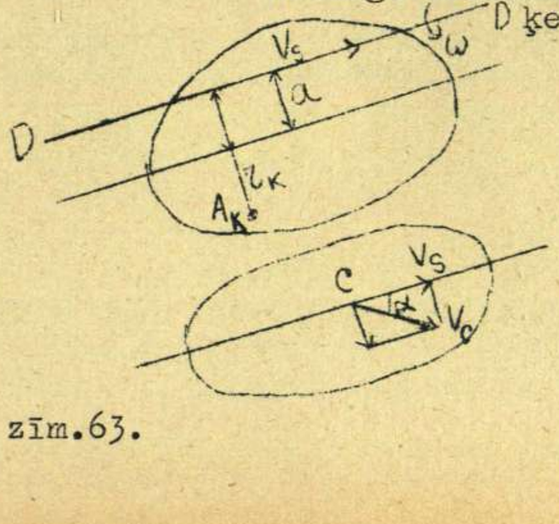
IV. Brīva cieta ķermeņa spars.

Katru brīvu kustību varam uzskatīt kā virzes kustību ar inerces centru C un griezes kustību ap šo centru. Ķermeņa sparu šinī gadijumā varam atrast, summējot formulas (73) un (74a), jeb arī pēc Koeniga teoremas

$$\boxed{K = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} J_c\omega^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (77)$$

Arī šeit J_c nav konstants, jo griezes ass ir momentana.

V. Cieta ķermeņa spars skrūves kustībā un otrs Koeniga teoremas pierādijums cietam ķermenim.



zīm.63.

Pieņemsim, ka dotais ķermenis atrodas skrūves kustībā ap asi D-D ar griezes ātrumu ω un slīdes ātrumu V_s. Ķermeņa spars pēc vispārīgas formulas (71)

$$K = \sum_1^n \frac{m_k V_k^2}{2}$$

kur V_k ir ķermeņa punkta A_k ātrums.

Ja apzīmēsim ar r_k punkta A_k attālumu no skrūves ass D-D, tad ātrums

$$V_k^2 = (r_k.\omega)^2 + V_s^2$$

Ieliksim šo lielumu spara izteiksmē:

$$K = \sum_1^n \frac{m_k}{2}(r_k^2\omega^2 + V_s^2) = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_1^n m_k r_k^2 + \frac{1}{2}V_s^2 \sum_1^n m_k$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} M.V_s^2 + \frac{1}{2} J_D\omega^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (78)$$

Formula (78) reprezentē vispārīgo spara izteiksmi ķermeņa skrūves kustībā, un no šīs formulas varam izvest Koeniga teorēmu cietam ķermenim.

No ķermeņa kinēmatikas ir zinams, ka katra skrūves kustība ir ekvivalenta griezes kustībai ap citu asi parallēli skrūves asij un virzes kustībai slīpi pret griezes asi. Slīdes kustības ātrums būs virzes kustības ātruma projekcija uz griezes asi. Izvēlēsim jauno griezes asi caur inerces centru C, tad

$$V_s = V_c \cos\alpha \quad \text{un attālums} \quad a = \frac{V_c \sin\alpha}{\omega}$$

Bez tam inerces moments pēc formulas (40): $J_D = J_c + M.a^2$. Ievietojot visu šo spara izteiksmē, dabūsim:

$$K = \frac{1}{2} M.V_c^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} J_c.\omega^2 + \frac{1}{2} M\left(\frac{V_c \sin\alpha}{\omega}\right).\omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} M.V_c^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} J_c.\omega^2 + \frac{1}{2} M.V_c^2 \sin^2\alpha$$

$$K = \frac{1}{2} M.V_c^2 + \frac{1}{2} J_c.\omega^2$$

Šī formula ir identiska ar formulu (77), kuŗa reprezentē Koeniga teorēmu cietam ķermenim.

Analogija starp virzes un griezes kustību.

Salīdzinot spara izteiksmes, varam novērot analogiju starp virzes un griezes kustību.

Spara izteiksme virzes kustībā: $\frac{1}{2} MV^2$

Spara izteiksme griezes kustībā: $\frac{1}{2} J.\omega^2$

Tāpat arī kustības daudzums virzes kustībā: $M\bar{V}$

un kustības daudzuma moments griezes kustībā: $J.\bar{\omega}$

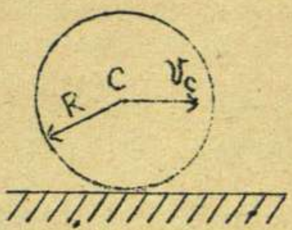
Piemērs. Lielgabala lādiņa spars.

zīm. 64.

Parasti lielgabala stobrā ir uzgrieztas vītnes, kādēļ lādiņš nākot ārā atrodas skrūves kustībā. Lādiņa spars tad būs:

$$K = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} J\omega^2$$

<u>Piemērs.</u> Ripa ar radiusu R veļās uz horicontālas plaknes, pie kam centra ātrums ir V_c. Uziet sparu.



zīm.65.

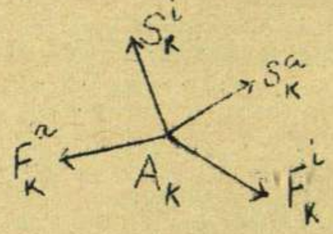
$$K = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} J_c\omega^2 \text{ , bet } J_c = \frac{MR^2}{2} \text{ un } \omega = \frac{V_c}{R}$$

$$K = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{V_c^2}{R^2} = \frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{4} MV_c^2$$

$$\boxed{K = \frac{3}{4} MV_c^2}$$

Sistemas spēku darbs.

Izdalīsim no sistemas kādu punktu A_k. Ja visus ārējus spēkus, kādi darbojas uz punktu A_k pievedīsim pie viena kopspēka F_k^a, visus iekšējus spēkus pie kopspēka F_k^i, ārējas reakcijas pie S_k^a un iekšējas reakcijas pie S_k^i, tad šo spēku elementārais darbs, kuŗu pastrādās visi šie spēki uz kāda elementāra pārvietojuma ds_k būs



zīm.66.

$$d\mathfrak{A}_k = (\bar{F}_k^a . d\bar{s}_k) + (\bar{F}_k^i . d\bar{s}_k) + (\bar{S}_k^a . d\bar{s}_k) + + (\bar{S}_k^i . d\bar{s}_k)$$

bet, ja saites ir ideālas un skleronomas, tad

$$(\bar{S}_k^a . d\bar{s}_k) = 0 \quad \text{un} \quad (\bar{S}_k^i . d\bar{s}_k) = 0$$

Kas attiecas uz iekšējo spēku darbu, tad atsevišķam punktam iekšēja spēka darbs nelīdzinājas nullei.

Arī visąi sistemai, ņemot iekšējus spēkus pa divi vienādā lielumā un pretējos virzienos, kā agrāk jau bija noskaidrots, divu iekšējo spēku darbs līdzināsies nullei tikai tad, ja: 1) punkti nepārvietojas, 2) sistemas kustībā attālums starp punktiem nemainās, starp citu šis noteikums ir izpildīts cietā ķermenī, un 3) attālums starp punktiem sākuma momentā ir vienāds ar to pašu punktu attālumu galā. Tā tad vispārīgi iekšējo spēku darbs sistemā nelīdzinājās nullei un vienkāršības dēļ apzīmēsim:

$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^i = \bar{F}_k$$

un arī projekcijas:

$$X_k^a + X_k^i = X_k$$

$$Y_k^a + Y_k^i = Y_k$$

$$Z_k^a + Z_k^i = Z_k$$

Elementāru darbu, kuŗu pastrādās spēki darbojošies uz punktu A_k, raksturosim tagad tā:

$$d\mathfrak{A}_k = (\bar{F}_k . d\bar{s}_k) = X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (79)$$

Galīgu darbu dabūsim integrējot šo formulu:

$$\mathfrak{A}_k = \int_{x_{ko} y_{ko} z_{ko}}^{x_k y_k z_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (79a)$$

Elementārais darbs, kuŗu pastrādās visi sistemas spēki, jeb vienkārši sistemas elementārais darbs, būs acīmredzot summa no elementāriem darbiem atsevišķiem punktiem

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^n d\mathfrak{A}_k\ , \quad \boxed{d\mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k d\bar{s}_k)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (80)$$

jeb arī

$$\boxed{d\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (80a)$$

Lai dabūtu galīgu darba izteiksmi visai sistemai, varam integrēt formulu (80a)

$$\boxed{\mathfrak{A} = \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k} \quad \dots\dots \quad (81)$$

jeb var arī summēt visiem punktiem augšā uzrakstītus integrāļus pēc formulas (79a)

$$\boxed{\mathfrak{A} = \sum_1^n \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k} \quad \dots\dots\dots \quad (81a)$$

noskaidrosim tālāk, kādos gadijumos un pie kādiem noteikumiem šīs izteiksmes var integrēt:

1) gadijums:

$$X_k = f_{kx}(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$$

$$Y_k = f_{ky}(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$$

$$Z_k = f_{kz}(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$$

Spēku projekcijas ir funkcijas no punkta koordinātēm, ātrumiem un laika.

Lai būtu iespējams nointegrēt formulu (81a) acīmredzot jāzin

$$x_k = \varphi_k(t)$$

$$y_k = \psi_k(t)$$

$$z_k = \chi_k(t)$$

bet ar šiem nol-miem ir noteikta sistemas punktu kustība, tā tad šinī gadijumā jābūt zināma sistemas kustība. Ievietojot šīs laika funkcijas darba integrālā, dabūsim

$$\mathfrak{A}_k = \int_{t_o}^{t} \Phi(t)dt \qquad \text{un} \qquad \mathfrak{A} = \sum_1^n \mathfrak{A}_k$$

2) gadijums:

$$X_k = f_{kx}(x_k y_k z_k)$$

$$Y_k = f_{ky}(x_k y_k z_k)$$

$$Z_k = f_{kz}(x_k y_k z_k)$$

Spēka projekcijas ir funkcijas tikai no punkta koordinātēm. Lai būtu iespējams nointegrēt formulu (81a), acīmredzot pietiks zināt:

$$x_k = \varphi_k(q)$$
$$y_k = \psi_k(q)$$
$$z_k = \chi_k(q)$$

bet šie nol-mi reprezentē punkta trajektoriju, tā tad šinī gadijumā ir jāzin punkta trajektorijas. Ievietojot koordinātes darba integrālā, dabūsim darbu, kā f(q)

$$\mathfrak{A}_k = \int_{q_0}^{q} \psi(q).dq \quad \text{un} \quad \mathfrak{A} = \sum_1^n \mathfrak{A}_k$$

3) tanī pašā gadijumā, ja spēka projekcijas ir koordinātu funkcijas:

$$X_k = f_{kx}(x_k y_k z_k)$$
$$Y_k = f_{ky}(x_k y_k z_k)$$
$$Z_k = f_{kz}(x_k y_k z_k)$$

un ja spēkam eksistē funkcija $U_k = \Phi(x_k y_k z_k)$ tad, kā zinams

$$X_k = \frac{\partial U_k}{\partial x_k}, \quad Y_k = \frac{\partial U_k}{\partial y_k}, \quad Z_k = \frac{\partial U_k}{\partial z_k} \quad \text{un darbs}$$

$$\mathfrak{A}_k = \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \cdot dx_k + \frac{\partial U_k}{\partial y_k} \cdot dy_k + \frac{\partial U_k}{\partial z_k} \cdot dz_k = \int_{U_{ko}}^{U_k} dU_k = U_k - U_{ko}$$

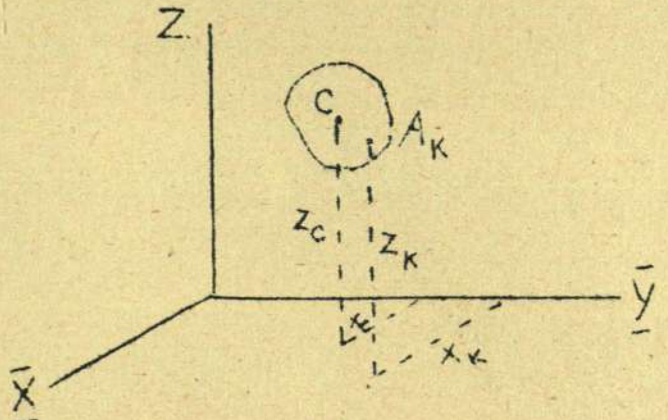
Darbs visā sistemā būs:

$$\mathfrak{A} = \sum_1^n \mathfrak{A}_k = \sum_1^n (U_k - U_{ko})$$

Pastrādāto darbu visā sistemā tad varam atrast kā summu no spēku funkciju pieaugumiem.

Tālāk apskatīsim ārējo spēku elementāro darbu dažādās cieta ķermeņa kustībās.

Smaguma spēka darbs pie ķermeņa pārvietošanas.



zīm.67.

Izvēlēsim Z ass vertikali uz augšu un izdalīsim ķermenī kādu punktu A_k. Uz punktu A_k darbojas smaguma spēks, kuŗa projekcijas uz izvēlētām asīm

$$X_k = 0, \quad Y_k = 0, \quad Z_k = -m_k g$$

Darba noteikšanai izlietosim formulu (81a)

$$\mathfrak{A} = \sum_1^n \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k$$

$$\mathfrak{A} = \sum_1^n \int_{z_{ko}}^{z_k} Z_k dz_k = \sum_1^n \int_{z_{ko}}^{z_k} -m_k g dz_k = \sum_1^n -m_k g(z_k - z_{ko}) = \sum_1^n m_x g(z_{ko} - z_k)$$

$$\mathfrak{A} = g \sum_1^n m_k(z_{ko} - z_k) = g.M(z_{co} - z_c) \; ; \; \boxed{\mathfrak{A} = Mg(z_{co} - z_c)} \quad \ldots\ldots(82)$$

kā redzams, smaguma spēka darbs līdzinājas ķermeņa svaram reizinātam ar smaguma centra pārvietojumu Z ass virzienā.

I. Spēku elementārais darbs cieta ķermeņa virzes kustībā.

Elementāram darbam ņemsim formulu (80a)

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

Ja ķermenis atrodas virzes kustībā, tad visiem punktiem pārvietojumi ir ģeometriski vienādi un punkta A_k pārvietojumu varam aizvietot ar inerces centra pārvietojumu

$$dx_k = dx_c \;, \quad dy_k = dy_c \quad \text{un} \quad dz_k = dz_c \;, \text{ tad}$$

$d\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k dx_c + Y_k dy_c + Z_k dz_c)$, atklāsim iekavas

$d\mathfrak{A} = \sum_1^n X_k dx_c + \sum_1^n Y_k dy_c + \sum_1^n Z_k dz_c$, izņemsim no summām inerces centra pārvietojumus

$d\mathfrak{A} = dx_c \sum_1^n X_k + dy_c \sum_1^n Y_k + dz_c \sum_1^n Z_k$ bet $\sum_1^n X_k = V_x$; $\sum_1^n Y_k = V_y$ un

$$\sum_1^n Z_k = V_z$$

$d\mathfrak{A} = V_x . dx_c + V_y . dy_c + V_z . dz_c$ un galīgi $\boxed{d\mathfrak{A} = (\bar{V} . d\bar{s}_c)}$ ...(83)

Elementārais darbs cieta ķermeņa virzes kustībā līdzinājas galvenā vektora skalaram produktam ar inerces centra elementāro pārvietojumu.

II. Spēku elementārais darbs cieta ķermeņa griezes kustībā ap nekustošu asi.

Izvēlēsim koordinātu sistemu tā, lai Z ass sakristu ar griezes asi un atkal elementāram darbam ņemsim formulu (80):

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

Bet pie griezes ap Z asi visiem ķermeņa punktiem z_k = Const. un $dz_k = 0$, bez tam:

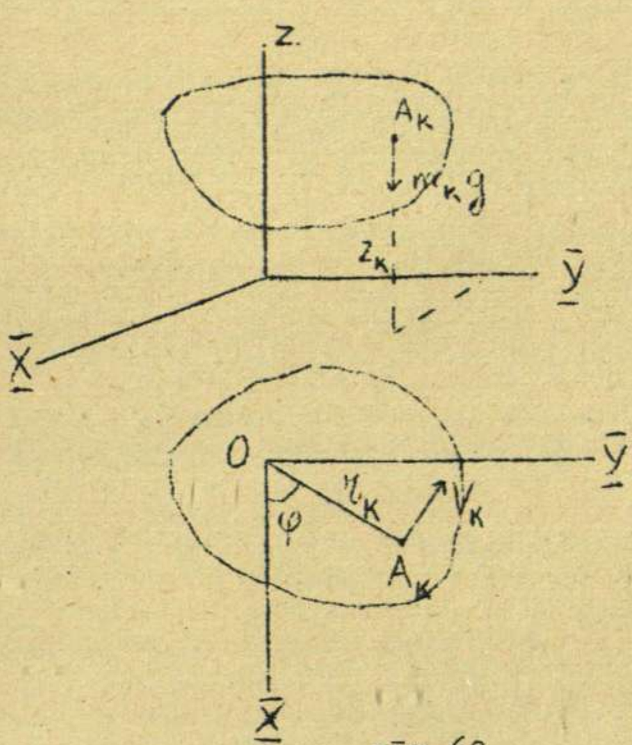
$$x_k = r_k . \mathrm{Cos}\varphi$$

$$y_k = r_k . \mathrm{Sin}\varphi$$

diferencējot:

$$dx_k = -\,r_k \mathrm{Sin}\,\varphi . d\varphi = -\,y_k d\varphi$$

$$dy_k = r_k \mathrm{Cos}\,\varphi . d\varphi = x_k d\varphi$$



zīm.68.

ievietosim šīs formulas darba izteiksmē:

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^n \left[X_k(-y_k d\ ) + Y_k . x_k . d\varphi\right] =$$

$$= d\varphi \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k), \text{ bet}$$

$$\sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k) = L_z \text{ , tā tad}$$

$$\boxed{d\mathfrak{A} = L_z . d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots (84)$$

Ārējo spēku elementārais darbs ķermeņa griezes kustībā ap nekustošu asi ir vienāds ar galveno momentu attiecībā uz to pašu asi reizinātu ar elementāro leņķi.

Ievērojot, ka $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ un $d\varphi = \omega dt$ varam to pašu izteikt vēl citādi:

$$\boxed{d\mathfrak{A} = L_z . \omega . dt} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (84a)$$

III. Spēku elementārais darbs ķermeņa kustībā ap punktu.

Ķermeņa kustība ap punktu ir ekvivalenta griezes kustībai ap momentano asi, un ārējo spēku darbs šinī kustībā izteiksies ar tām pašām formulām, tikai L_z vietā nāks moments ap momentano griezes asi D.

$$\boxed{d\mathfrak{A} = L_D . d\varphi} \quad \text{un} \quad \boxed{d\mathfrak{A} = L_D . \omega . dt} \quad \ldots\ldots\ldots (85)$$

Ārējo spēku elementārais darbs ķermeņa kustībā ap nekustošu punktu ir vienāds ar galveno momentu ap momentano asi pareizinātu ar elementāro leņķi.

IV. Spēku elementārais darbs ķermeņa brīvā kustībā.

Katru ķermeņa brīvo kustību varam uzskatīt kā virszes kustību ar inerces centru un griezes kustību ap inerces centru. Sakarā ar šo, elementāro darbu šim gadijumam dabūsim, saskaitot formulas (83) un (85)

$$\boxed{d\mathfrak{A} = (\bar{V} . d\bar{s}_c) + L_c . d\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (86)$$

Spara teorema punktu sistemai pie ideālām saitēm.

Lai dabūtu spara teoremu punktu sistemai, ņemsim spara teoremu vienam sistemas punktam A_k un summēsim šādas izteiksmes visai sistemai. Punktam A_k spara teorema diferenciālā veidā:

$$d\,\frac{m_kV_k^2}{2} = (\bar F_k d\bar s_k) \text{ jeb arī } d\,\frac{m_kV_k^2}{2} = X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k$$

Summējot visiem punktiem dabūsim spara teorēmu sistemai elementārā veidā:

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\sum_1^n d\,\frac{m_kV_k^2}{2} = \sum_1^n (\bar F_k d\bar s_k)} \\ \text{jeb } &\boxed{\sum_1^n d\,\frac{m_kV_k^2}{2} = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(87)$$

Lai dabūtu spara teorēmu sistemai galīgā veidā, uzrakstīsim to pašu teorēmu galīgā veidā vienam punktam

$$\frac{m_kV_k^2}{2} - \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \int_{s_{ko}}^{s_k} (\bar F_k d\bar s_k) \text{ jeb arī } \frac{m_kV_k^2}{2} - \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_ky_kz_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k$$

un summējot visiem punktiem:

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \sum_1^n \int_{s_{ko}}^{s_k} (\bar F_k d\bar s_k)} \\ \text{jeb } &\boxed{\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \sum_1^n \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_ky_kz_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots(88)$$

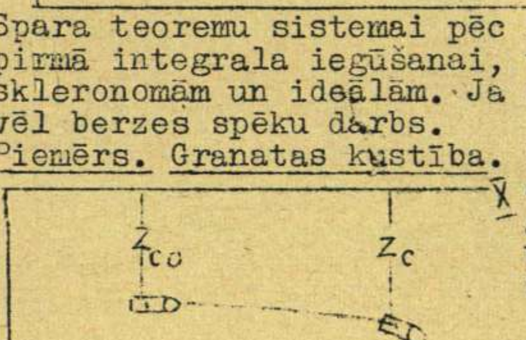
Šo formulu izlasīsim tā: sistemas spara pieaugums kādā sistemas pārvietojuma robežās ir vienāds ar visu sistemas spēku darbu summu tanīs pašās robežās.

Cietam ķermenim spara teorēmu varam uzrakstīt vēl citā veidā, ievedot spara izteiksmi pēc Koeniga teoremas un lietojot darba izteiksmei formulu (86)

$$\boxed{\left(\frac{1}{2} MV_c^2 + \frac{1}{2} J_c\omega^2\right) - \left(\frac{1}{2} MV_{co}^2 + \frac{1}{2} J_c\omega_o^2\right) = \int_{s_{co}}^{s_c} (\bar V \cdot d\bar s_c) + \int_{\varphi_o}^{\varphi} L_c d\varphi} \quad (89)$$

Spara teorēmu sistemai pēc formulām (87),(88),(89) var plaši lietot pirmā integrala iegūšanai, tikai ar ierobežojumu, t.i. saitēm jābūt skleronomām un ideālām. Ja saites nav ideālas, tad labā pusē nāks klāt vēl berzes spēku darbs.

Piemērs. Granatas kustība. Izpētīsim granatas kustību, kurai ir dots caur šāvienu sākuma virzes ātrums un sākuma griezes ātrums. Ārējais spēks, kas darbojas uz granatu, ir smaguma spēks Mg Z-ass virzienā.



zīm.69.

Ņemsim spara teorēmu cietam ķermenim, izteiktu ar formulu (89):

$$(\tfrac{1}{2} MV_c^2 + \tfrac{1}{2} J_c\omega^2) - (\tfrac{1}{2} MV_{co}^2 + \tfrac{1}{2} J_c\omega_o^2) = \int_{s_{co}}^{s_c} (\bar{V}.d\bar{s}_c) + \int_{\varphi_o}^{\varphi} L_c d\varphi$$

bet mūsu gadijumā $\bar{V} = Mg$, $(\bar{V}.d\bar{s}_c) = Mgdz_c$ un $L_c = 0$, tā tad

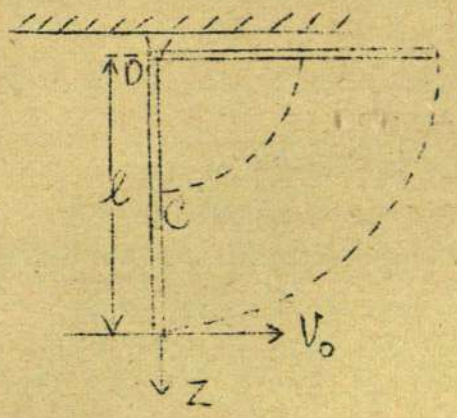
$$\tfrac{1}{2} M(V_c^2 - V_{co}^2) + \tfrac{1}{2} J_c(\omega^2 - \omega_o^2) = Mg(z_c - z_{co})$$

tā kā labā pusē momenta nav, tad loceklis $\frac{1}{2} J_c(\omega^2 - \omega_o^2) = 0$, tas nozīmē, ka $\omega = \omega_o$ un pēc tam, saīsinot masu, paliek

$$V_c^2 - V_{co}^2 = 2g(z_c - z_{co})$$

Kā redzams, granata, griežoties vienmērīgi, kustas kā materiāls punkts.

Piemērs. Smags stienis garumā ℓ brīvi piekārts vienā galā ar šarniru punktā D. Uziet cik lielu sākuma ātrumu jādod otram galam, lai stienis no vertikāla stāvokļa uzskrietu horicontālā. Berzes nav.



zīm.70.

Izlietosim spara teorēmu, Ievērojot, ka šeit kustība ir griezes kustība ap asi D, varam ņemt sparu pēc formulas (75). Sākumā griezes ātrums ir ω_o, bet galā stienis apstājās, tā tad $\omega = 0$. Spara pieaugums:

$$K - K_o = 0 - \tfrac{1}{2} J_D\omega_o^2$$

Uziesim tagad visu spēku darbu. Nekādi spēki, izņemot smaguma spēku, šeit nedarbojas, tā tad darbs pēc formulas (82):

$$\mathfrak{A} = Mg(0 - \tfrac{\ell}{2}) = - Mg \tfrac{\ell}{2}$$

Pielīdzinot spara pieaugumu pastrādātam darbam, dabūsim:

$$- \tfrac{1}{2} J_D.\omega_o^2 = - Mg \tfrac{\ell}{2}$$

Uziesim $J_D = \int_0^{\ell} z^2 dm$, bet $dm = \delta.dz$, tā tad $J_D = \int_0^{\ell} z^2\delta dz = \delta \frac{\ell^3}{3} = \frac{M\ell^2}{3}$ jo $M = \delta.\ell$

$$\frac{M\ell^2}{3}\omega_o^2 = Mg\ell \text{ ,no kurienes } \omega_o = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \text{ ,bet } V_o = \omega_o.\ell,$$

tā tad $\boxed{V_o = \sqrt{3g\ell}}$

Spara teorēma sistemai, ja saites nav ideālas.

Ja saites nav ideālas, tad pie aktīvo spēku darba jāpieskaita berzes spēku darbu, bet berzes spēka darbs līdzinājas pilnas reakcijas darbam, jo normalas reakcijas darbs līdzinājas nullei. Elementārais darbs visai sistemai tā tad būs

$$d\mathfrak{A} = \sum_1^n (\bar{F}_k d\bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k d\bar{s}_k)$$

tā tad spara teoremas izteiksme elementārā veidā:

$$\boxed{\sum_1^n d\frac{m_kV_k^2}{2} = \sum_1^n (\bar{F}_k d\bar{s}_k) + \sum_1^n (\bar{S}_k d\bar{s}_k)} \qquad \ldots\ldots(90)$$

jeb projekcijas $\sum_1^n d\frac{m_kV_k^2}{2} = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k) + \sum_1^n (S_{kx} dx_k + S_{ky} dy_k + S_{kz} dz_k)$

Pēc analogijas ar formulām (88) varam uzrakstīt spara teorēmas izteiksmi galīgā veidā, kad saites nav ideālas

$$\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \sum_1^n \int_{s_{ko}}^{s_k} (\bar{F}_k d\bar{s}_k) + \sum_1^n \int_{s_{ko}}^{s_k} (\bar{S}_k d\bar{s}_k) \qquad (91)$$

$$\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \sum_1^n \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_ky_kz_k} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k + \sum_1^n \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_ky_kz_k} S_{kx} dx_k + S_{ky} dy_k + S_{kz} dz_k$$

Perpetuum mobile neiespējamība.

Perpetuum mobile ir kāda mašina jeb mēchanisms, kuŗš būdams reiz iekustināts, turpinātu savu kustību mūžīgi, neprasot nekādu ārējo spēku iedarbību.

Šādu mēchanismu mēs varam uzskatīt par saistīto punktu sistemu, bet tā kā absolūti ideālas saites dabā neeksistē, tad jāpielaiž, ka sistemā ir saites ar berzi. Mēs pieņemam, ka aktīvie spēki sistemā $F_k = 0$, tad pēc formulas (91)

$$\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2} = \sum_1^n \int_{s_{ko}}^{s_k} (\bar{S}_k d\bar{s}_k)$$

bet labā puse, kuŗa reprezentē reakciju darbu ir arvienu negatīvs lielums, tā tad katrā ziņā

$$\sum_1^n \frac{m_kV_k^2}{2} < \sum_1^n \frac{m_kV_{ko}^2}{2}$$

Šī nevienādība ar laiku pieaugs, kamēr mēchanisms neapstāsies, jo darbs ar laiku arī pieaugs.

Sistemas spēku funkcija jeb sistemas potenciāls.

Ja visi sistemas spēki ir konservatīvi, tad mēs varam katram no tiem uziet funkciju. Pieņemsim, ka tādas funkcijas ir:

$$U_1, U_2, U_3 \ldots\ldots U_k \ldots\ldots U_n$$

Punkta dinamikā bija pierādīts, ka kopspēka funkcija ir algebrāiska summa no komponentu funkcijām. Sistemā spēkus, lai dabūtu galveno vektoru, mēs saskaitam geometriski, tamdēļ par sistemas funkciju jeb potenciālu mēs sauksim visu sistemas spēku funkciju algebrāisko summu:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_k + \dots + U_n} \qquad \dots\dots(92)$$

To pašu U mēs varam uzrakstīt vēl citādi, ja ievērosim, ka, piemēram, punktam A_k funkcija

$$U_k = \int X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k$$

tad sistemas funkcija:

$$\boxed{U = \sum_1^n \int X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(93)$$

Atsevišķo spēku funkcijas ir, kā zinams, koordinātu funkcijas, tā tad arī sistemas spēku funkcija ir koordinātu funkcija, pie kam šinī funkcijā var ieiet visas sistemas punktu koordinātes. Vispārīgi tad

$$\boxed{U = \Phi(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_k y_k z_k \dots x_n y_n z_n)} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(94)$$

Pēc formulas (91) uzrakstīsim sistemas spēka funkcijas diferenciālu

$$\boxed{dU = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(95)$$

Attīstīsim summu formulā (95):

$$dU = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2 + \dots + X_k dx_k + $$
$$+ Y_k dy_k + Z_k dz_k + \dots\dots + Z_n dz_n$$

Tad sastādīsim pilnu diferenciālu no formulas (94)

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U}{\partial y_2} dy_2 + \frac{\partial U}{\partial z_2} dz_2 + \dots$$
$$\dots + \frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_n} dz_n$$

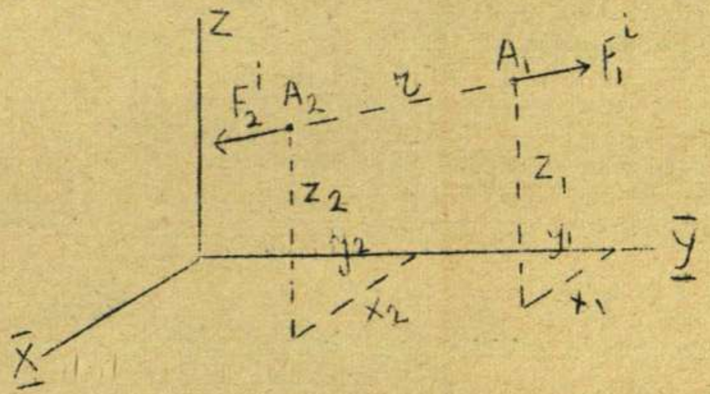
Salīdzinot abas dU izteiksmes, nākam pie slēdziena, ka

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 &= \frac{\partial U}{\partial x_1} \\ Y_1 &= \frac{\partial U}{\partial y_1} \\ Z_1 &= \frac{\partial U}{\partial z_1} \end{aligned}} \quad \boxed{\begin{aligned} X_2 &= \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ Y_2 &= \frac{\partial U}{\partial y_2} \\ Z_2 &= \frac{\partial U}{\partial z_2} \end{aligned}} \quad \text{u.t.t. un vispārīgi} \quad \boxed{\begin{aligned} X_k &= \frac{\partial U}{\partial x_k} \\ Y_k &= \frac{\partial U}{\partial y_k} \\ Z_k &= \frac{\partial U}{\partial z_k} \end{aligned}} \qquad \dots\dots(96)$$

Formulas (96) dod sakaru starp sistemas funkciju un spēkiem tādu pašu, kāds bija Punkta dinamikā. Uz šo formulu pamata mēs varam vēl definēt sistemas funkciju, kā tādu funkciju, kuŗas pārciālas atvasinātās pēc koordinātēm, dod spēka projekcijas.

Noskaidrosim tagad, kādām sistemām piemīt funkcija jeb potenciāls. Šis jautājums atkarājās protams no tā, kādi spēki sistemā darbojas, ja visi spēki sistemā ir konservativi, tad arī sistemai piemīt funkcija. Punkta dinamikā bija noskaidrots, ka pie konservatīviem spēkiem pieder: 1)visi spēki, kuŗi ir perpendikulāri kādai plaknei un ir attāluma funkcija no tās, 2) visi centrālie spēki, kuŗi ir f(r), 3)visi spēki,kuŗi krustojas ar kādu asi zem 90° un ir attāluma funkcijas no ass. Berzes spēki nav konservatīvi, tā tad sistemai, saistītai ar neideālām saitēm, nevar uzstādīt potenciāla funkciju.

Pierādīsim tāļāk, ka sistemā iekšējie atgrūšanās jeb pievilkšanas spēki ir konservatīvi, ja viņi ir f(r), kur r ir attālums starp punktiem.



zīm.71.

Divi iekšējie spēki starp punktiem A_1 un A_2 ir pēc lieluma vienādi, tamdēļ apzīmēsim tos ar

$$F_1^i = F_2^i = F = f(r)$$

Ņemsim formulu (95)

$$dU = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

un attīstīsim summu mūsu gadijumam:

$$dU = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1 + X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2$$

Spēku projekcijas uz asīm iznāk:

$$X_1 = F_1 \frac{x_1 - x_2}{r} = \frac{F}{r}(x_1 - x_2) \qquad X_2 = F_2 \frac{x_2 - x_1}{r} = \frac{F}{r}(x_2 - x_1)$$

$$Y_1 = F_1 \frac{y_1 - y_2}{r} = \frac{F}{r}(y_1 - y_2) \qquad Y_2 = F_2 \frac{y_2 - y_1}{r} = \frac{F}{r}(y_2 - y_1)$$

$$Z_1 = F_1 \frac{z_1 - z_2}{r} = \frac{F}{r}(z_1 - z_2) \qquad Z_2 = F_2 \frac{z_2 - z_1}{r} = \frac{F}{r}(z_2 - z_1)$$

tad $dU = \frac{F}{r}\left[(x_1-x_2)dx_1+(y_1-y_2)dy_1+(z_1-z_2)dz_1+(x_2-x_1)dx_2+(y_2-y_1)dy_2 + \right.$
$\left. +(z_2-z_1)dz_2\right]$

$$dU = \frac{F}{r}\left[(x_1-x_2)d(x_1-x_2)+(y_1-y_2)d(y_1-y_2)+(z_1-z_2)d(z_1-z_2)\right]$$

$$dU = \frac{F}{r}\left[d\frac{(x_1-x_2)^2}{2} + d\frac{(y_1-y_2)^2}{2} + d\frac{(z_1-z_2)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{F}{r} d \frac{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}{2}$$

bet $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2$

$$dU = \frac{F}{r} d\frac{r^2}{2} = \frac{F}{r}\frac{2rdr}{2} = F.dr$$

integrējot dabūsim $U = \int F.dr = \int f(r).dr = \Phi(r)$. Kā redzams, ja iekšējie spēki ir f(r), tad spēku funkciju U mēs varam atrast un šādi spēki ir konservatīvi.

Piezīme. Ja attālumi sākumā un galā $r = r_0$, tad iekšējie spēki darbu ne-pastrādā, jo $\mathfrak{A} = U - U_0 = U$.

Teorema. Darbs, kuŗu pastrādā visi sistemas spēki kāda pārvietojuma robežās, līdzinājas sistemas spēka funkcijas pieaugumam tanīs pašās robežās.

Ņemsim darba izteiksmi pēc formulas (81):

$$\mathfrak{A} = \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

bet pēc formulas (95):

$$dU = \sum_1^n (X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k)$$

tā tad

$$\mathfrak{A} = \int_{x_{ko}y_{ko}z_{ko}}^{x_k y_k z_k} dU = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0 \;; \quad \boxed{\mathfrak{A} = U - U_0} \quad \ldots\ldots(97)$$

ar šo teorēma ir pierādīta.

Mēchaniskas energijas pastāvības princips sistemā.

Spara teoremu, izteiktu ar formulu (88), var uzrakstīt šematiski, apzīmējot sparu jeb kinetisko energiju ar K, tādā veidā: $K - K_0 = \mathfrak{A}$ kur $\mathfrak{A}$ ir visu sistemas spēku pastrādātais darbs, bet nupat bija pierādīts, ka $\mathfrak{A} = U - U_0$, tā tad $K - K_0 = U - U_0$.

Tāpat kā Punkta dinamikā apzīmēsim: $-U = \Pi$ un nosauksim par sistemas potenciālo energiju, tad $K - K_0 = -\Pi + \Pi_0$ jeb pārveidojot, dabūjam

$$\boxed{K + \Pi = K_0 + \Pi_0 = \text{Const},} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(98)$$

Šī formula izsaka, ka summa no sistemas kinētiskas un potenciālas energijas ir Const. lielums.

Piezīme. Izteiktais princips paliek spēkā tikai sistemās, saistītās ar skleronomām un ideālām saitēm.

Ja sistemā ir saites ar berzi, tad minētais princips neder.

Sistemas līmeņa virsmas.

Spēka funkcija sistemai pēc formulas (94)

$$U = \Phi(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots z_n)$$

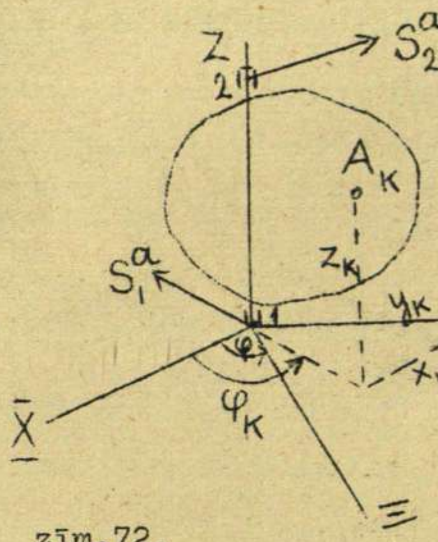
pie kam $U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_k + \ldots + U_n$.

Sistemas spēku funkcija ir algebrāiska summa no atsevišķo spēku, kuŗi iedarbojas uz sistemas punktiem, spēka funkcijām. Piemēram U_k ir spēka funkcija punkta A_k kopspēkam. Ja mēs pielīdzināsim U_k = const., tad mēs dabūsim līmeņa virsmu punktam A_k, tāpat mēs varam dabūt arī līmeņa virsmas visiem citiem punktiem.

Nol-mu (94) mēs varam apskatīt kā šo virsmu kompleksu, ja katrreiz skaitīsim apskatamā punkta koordinātes par mainīgām, bet citu punktu koordinātes par const. lielumiem.

§ 12. CIETA ĶERMEŅA GRIEZE AP NEKUSTOŠU ASI.

Koordinātu sistemu izvēlēsim tā,lai Z ass sakristu ar griezes asi. Lai noturētu griezes ass nekustoši,to jāatbalsta divos punktos 1 un 2, kuŗi dos reakcijas S_1^a un S_2^a.Griezes kustības pētīšanai izlietosim kustības daudzuma momenta teoremu ap griezes asi, t.i. ap Z asi form.(59)



zīm.72.

$$\frac{d}{dt}\ell_z = L_z$$

Kustības daudzuma momenta izteiksmi ℓ_z ņemsim polārkoordinātēs.Labā pusē momenta izteiksmē nāks priekšā tikai ārējie spēki,jo reakciju S_1^a un S_2^a momenti ap Z asi līdzinājas nullei.

$$\frac{d}{dt}\sum_1^n m_k r_k^2 \frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k)$$

bet ja φ_k ir ķermeņa punktiem vispārīgi dažāds, tad

$\frac{d\varphi_k}{dt} = \omega$ ir visiem punktiem vienāds un to var no summas izņemt,atstājot tikai zem diferenciāla zīmes, jo ω var būt f(t):

$$\frac{d}{dt} = \omega \sum_1^n m_k r_k^2 = \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k),\ \text{tāļāk}\ \sum_1^n m_k r_k^2 = J_z\ \text{un}$$

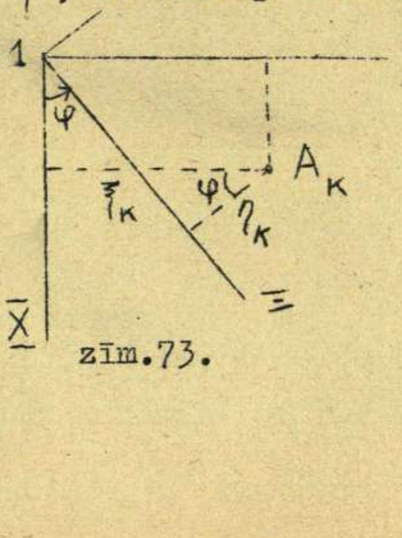
ja ass pret ķermeni nepārvietojas, tad J_z = Const.

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k)$$

Šo nol-mu varētu arī uzrakstīt tieši lietojot form.(70).Aizvietojot tāļāk $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, dabūsim cieta ķermeņa griezes kustības dif-nol-mu

$$\boxed{J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k)}$$

bet tikai vēl neintegrējamā formā, jo kreisā pusē figurē polarkoordināte φ ,bet labā pusē Dekarta koordinātes. Lai pārveidotu labo pusi, izvēlēsim $\overline{XY}$ plaknē jaunu koordinātu sistemu Ξ H ar to pašu koordinātu sākumu, bet saistītu ar ķermeni, tā ka šī sistema griežas līdzi ar ķermeni.



zīm.73.

Ja mēs apskatīsim ķermeņa punkta A_k jaunās koordinātes $\xi_k \eta_k \zeta_k$, tad pie ķermeņa griezes ap Z asi šīs koordinātes ar laiku nemainās. Izteiksim tagad visas Dekarta koordinātes caur jaunām:

$$x_k = \xi_k \cos\varphi - \eta_k \sin\varphi \qquad \dot{x}_k = -(\xi_k \sin\varphi + \eta_k \cos\varphi).\dot{\varphi}$$
$$y_k = \xi_k \sin\varphi + \eta_k \cos\varphi \qquad \dot{y}_k = (\xi_k \cos\varphi - \eta_k \sin\varphi).\dot{\varphi}$$
$$z_k = \zeta_k = Const. \qquad \dot{z}_k = \dot{\zeta}_k = 0$$

Katrs spēks F_k vispārīgi var būt $F_k = f_k(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$ un viņa projekcijas:

$$X_k = f_{kx}(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$$
$$Y_k = f_{ky}(x_k y_k z_k \dot{x}_k \dot{y}_k \dot{z}_k t)$$

Aizvietojam $L_z = \sum_1^n (x_k Y_k - y_k X_k)$ formulā visas Dekarta koordinātes ar jaunām, tad mēs dabūsim $L_z = f(\varphi \dot{\varphi} t)$ un griezes kustības dif-nol-ms iznāks integrējamā veidā

$$\boxed{J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z = f(\varphi \dot{\varphi} t)} \qquad \ldots\ldots\ldots (99)$$

Nol-ms (99) atšķiras no punkta taisnvirziena kustības dif-nol-ma tikai ar to, ka koordinātes x vietā nāk $\angle\varphi$ un masas vietā inerces moments J_z, tā tad visi, punkta dinamikā apskatītie integrēšanas paņēmieni, ir pilnīgi lietojami arī šeit.

Speciāli gadijumi. 1) $L_z = 0$, tad $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $\omega = C_1$ no sākuma apstākļiem $C_1 = \omega_0$, $\omega = \omega_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0$ integrējot $\varphi = \omega_0 t + C_2$, pie kam $C_2 = \varphi_0$ un galīgi $\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t}$

Kā redzams, pie $L_z = 0$, ķermenis atrodas vienmērīgā griezes kustībā.

2) $L_z = K$. Moments ap Z asi ir konstants lielums. Tad $J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = K$, $J_z \frac{d\omega}{dt} = K$, $\omega = \frac{K}{J_z} t + C_1$ no sākuma apstākļiem $C_1 = \omega_0$, $\omega = \frac{K}{J_z} t + \omega_0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{K}{J_z} t + \omega_0$, integrējot $\varphi = \frac{K}{2J_z} t^2 + \omega_0 t + C_2$, pie kam no sākuma apstākļiem atrodam $C_2 = \varphi_0$ un galīgi

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{K}{2J_z} t^2}$$

Kā redzams, pie $L_z = K$, ķermenis atrodas vienmērīgi paātrinātā griezes kustībā ar paātrinājumu $\tau = \frac{K}{J_z}$.

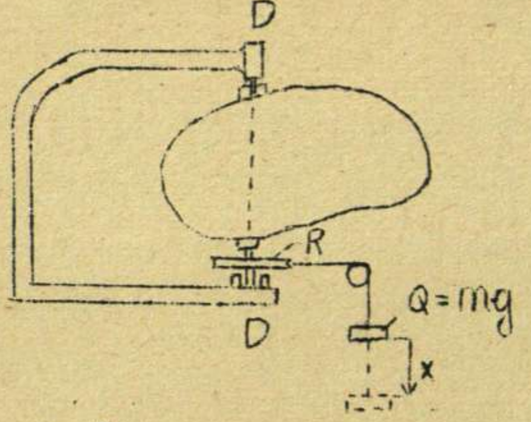
3) $L_z = f(\varphi)$. Tad $J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = f(\varphi)$; $J_z \frac{d\omega}{dt} = f(\varphi)$; $J_z \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi)$;

$\int J_z.\omega d\omega = \int f(\varphi).d\varphi + C_1$; $J_z \frac{\omega^2}{2} = \int f(\varphi)d\varphi + C$ un galīgi

$$\boxed{J_z \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\varphi)d\varphi}$$

To pašu formulu varētu uzrakstīt arī uz spāra teoremas pamata.

Ķermeņu inerces momentu noteikšana eksperimentālā ceļā.



zīm.74.

Inerces momentus var viegli aprēķināt ķermeņiem ar vienkāršām formām, sastādītiem no pazīstamiem ģeometriskiem ķermeņiem (lode, kubs, cilindrs, konuss u.c.). Bet ķermeņiem, kuŗiem nav noteiktas ģeometriskas formas, aprēķināt inerces momentus analitiski ir diezgan grūti. Turpretīm eksperimentālā ceļā tas ir iespējams pret katru asi un samērā vienkārši. Šim nolūkam jāiestiprina ķermenis (zīm. 74) šematiski parādītā aparatā tā, lai ass DD, ap kuŗu ir vēlams atrast inerces momentu, sakristu ar griezes asi. Uz griezes ass ir piestiprināta ripiņa ar rādiusu R, ap kuŗu ir aptīts pavediens; pavediens iet pāri otrai ripiņai ar horicontālu griezes asi un pavediena galā piekārts ķermenis Q ar svaru mg. Griezes ass un abas ripiņas jāņem cik iespējams ar mazu masu, lai šo masu varētu ignorēt, tāpat arī jāsamazina berze. Pieņemsim, ka sākumā visa sistema atrodas mierā un pēc tam ķermenis Q tiek palaists vaļā, zem pašsvara tas ies uz leju un griezīs izmēģinājamo ķermeni ap izvēlēto asi DD. Pielietosim spara teoremu no kustības sākuma līdz tam momentam, kad ķermenis Q ir nogājis ceļu x:

$$\left(\frac{1}{2} J_D\omega^2 - 0\right) + \left(\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - 0\right) = mgx, \text{ bet } x = R\varphi;\ \dot{x} = R\omega \text{ un } \omega = \frac{\dot{x}}{R},$$

ieliksim šo lielumu $J_D \dfrac{\dot{x}^2}{R^2} + m\dot{x}^2 = 2mgx$, izņemsim $\dot{x}^2$ aiz iekavām

$$\dot{x}^2\left(\frac{J_D}{R^2} + m\right) = 2mgx, \text{ no kurienes } \dot{x} = \sqrt{\frac{2mg}{\frac{J_D}{R^2} + m}} \cdot \sqrt{x} \text{ jeb } \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2mg}{\frac{J_D}{R^2} + m}} \cdot \sqrt{x}$$

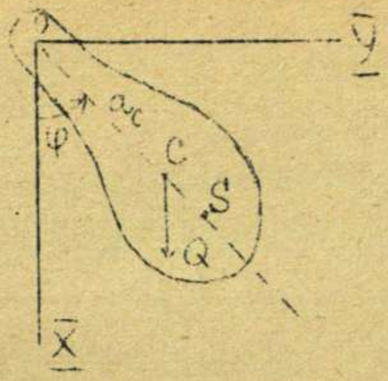
šķirosim nezināmos un integrēsim $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2mg}{\frac{J_D}{R^2} + m}} \cdot t + C$

$2\sqrt{x} = \sqrt{\dfrac{2mg}{\frac{J_D}{R^2} + m}} \cdot t + C$, bet sākumā $x_o = 0$, $t_o = 0$, tā tad $C = 0$. Celsim kvadratā: $4x = \dfrac{2mg}{\frac{J_D}{R^2} + m} \cdot t^2$; $\dfrac{J_D}{R^2} + m = \dfrac{mg}{2x} t^2$ atrisināsim šo nol-mu attiecībā uz J_D, tad dabūsim: $J_D = mR^2\left(\dfrac{gt^2}{2x} - 1\right)$. Novērojot krišanas augstumu h laikā T, atrodam inerces momentu:

$$\boxed{J_D = mR^2\left(\frac{gT^2}{2h} - 1\right)}$$

Fizikālais svārsts.

Par fizikālu svārstu mēs sauksim katru ķermeni, kuŗam ir horicontāla griezes ass, pie kam šī ass nedrīkst iet caur ķermeņa smaguma centru. Koordinātu sākumu O ņemsim uz griezes ass, $\bar{X}$ asi vertikali uz leju un $\bar{Y}$ asi horicontālā virzienā tā, lai ķermeņa smaguma centrs C gulētu $\bar{XY}$ plaknē. Attālumu no griezes ass O līdz smaguma centram C apzīmēsim ar a_c



zīm.75.

Ņemsim griezes kustības dif-nol-mu pēc formulas (99)

$$J_o \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_o$$

un uziesim momentu ap griezes asi:

$L_o = -Q.a_c.\mathrm{Sin}\varphi = -Mg.a_c.\mathrm{Sin}\varphi$

Zīme jāņem (-) tamdēļ,ka moments L_o griež ķermeni pulkstenrādītāja virzienā. Ievietojot momentu, dabūsim

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Mg.a_c}{J_o}\cdot \mathrm{Sin}\,\varphi} \quad ....(100)$$

Nol-ms (100) ir fizikala svārsta kustības dif-nol-ms.Salīdzinot to ar matematiska svārsta kustības dif-nol-mu

$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\mathrm{Sin}\,\varphi$,redzam, ka nol-mi būs identiski,ja $\frac{Mg.a_c}{J_o} = \frac{g}{\ell}$,no kurienes:

$$\boxed{\ell = \frac{J_o}{M.a_c}} \quad ....(101)$$

Atliekot no punkta O garumu $OS = \ell$,dabūsim punktu S,kuŗu sauksim par svārstīšanās centru. Pašu garumu ℓ mēs sauksim par fizikala svārsta ekvivalento jeb sinchrono matematiskā svārsta garumu.

Matematiskā svārsta svārstīšanās periods bija: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .Fizikalā svārsta periodu dabūsim, ieliekot ℓ pēc form.(101)

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{M.g.a_c}}\,.} \quad ....(102)$$

Pie kam, tāpat kā matematiskam svārstam, šī formula fizikalam svārstam der tikai maziem leņķiem $\varphi < 8^o$.

Pārveidosim tālāk ekvivalento garumu un periodu,ievērojot,ka inerces moments: $J_o = J_c + M.a_c^2$ un $J_c = M.\rho_c^2$

$$\ell = \frac{J_o}{M.a_c} = \frac{J_c + M.a_c^2}{M.a_c} = a_c + \frac{M.\rho_c^2}{M.a_c} = a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}\,; \quad \boxed{\ell = a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}} \quad ...(103)$$

Šī formula rāda, ka katrā ziņā $\ell > a_c$ un punkts S atrodas zemāk par smaguma centru C.

Svārstīšanās periods:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}}{g}}} \quad ....(104)$$

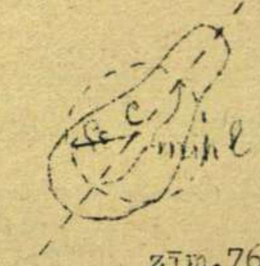
Izpētot formulas (103) un (104) redzam, ka

pie $a_c = 0$, $\ell = \infty$ un $T = \infty$

$a_c = \infty$, $\ell = \infty$ $T = \infty$

Šāds rezultāts nozīmē, ka $a_c = 0$ vairs nebūs svārstīšanās kustība,bet griezes kustība ap asi. No otras puses jādomā, ka starp $a_c = 0$ un $a_c = \infty$ var uziet tādu a_c, pie kuŗa periodam T būs minimalā vērtība.

Minimala perioda T noteikšana.



zīm.76.

Minimalam T, acīmredzot, atbilst min. ℓ, bet $\ell = f(a_c)$ un, lai dabūtu min. ℓ, sastādīsim:

$$\frac{d\ell}{da_c} = 1 - \frac{\rho_c^2}{a_c^2} = 0,$$ no kurienes $a_c = \rho_c$, pats

$$\min \ell = \rho_c + \frac{\rho_c^2}{c} = 2\rho_c \text{ un } \min T = 2\pi\sqrt{\frac{2\rho_c}{g}}$$

Kā redzams, lai dabūtu min T, piekares punktam O ir jāatrodas inerces radiusa ρ_c attālumā no smaguma centra, tas ir uz riņķa ar radiusu ρ_c aprakstītu ap smaguma centru.

<u>Teorema.</u> Piekares punkts un svārstīšanās centrs S ir apmaināmi.

zīm.77.

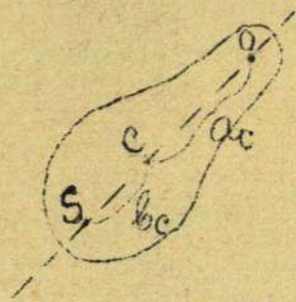
Sakars starp ℓ, a_c un ρ_c bija dots ar formulu(103)

$\ell = a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}$. Ja piekārsim ķermeni punktā S, tad

jauns $\ell' = a'_c + \frac{\rho_c^2}{a'_c}$, kur $a'_c = \ell - a_c = \frac{\rho_c^2}{a_c}$

$$\ell' = \ell - a_c + \frac{\rho_c^2}{\ell - a_c} = \frac{\rho_c^2}{a_c} + \frac{\rho_c^2 \cdot a_c}{\rho_c^2} = \frac{\rho_c^2}{a_c} + a_c = \ell$$

<u>Huygensa teorema.</u> Ja kādā plaknē, kuŗa iet caur ķermeņa smaguma centru dažādās pusēs no pēdējā, ir divi punkti, priekš kuŗiem svārstīšanās periodi ir vienādi, tad attālums starp tiem punktiem tieši līdzinājās ℓ. Pieņemsim, ka punktiem O un S: $T_o = T_s$ un apzīmēsim attālumus $CO = a_c$ un $CS = b_c$. Pēc formulas (104):



zīm.78.

$$T_o = 2\pi\sqrt{\frac{a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c}}{g}} \text{ un } T_s = 2\pi\sqrt{\frac{b_c + \frac{\rho_c^2}{b_c}}{g}}$$

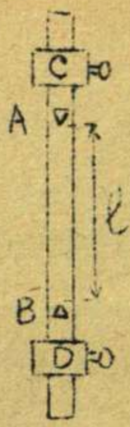
pielīdzinot T_o un T_s, dabūjam:

$$2\pi\sqrt{\frac{a_c + \frac{{}^{2}_{c}}{a_c}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{b_c + \frac{{}^{2}_{c}}{b_c}}{g}},$$ jeb $a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c} = b_c + \frac{\rho_c^2}{b_c}$ un tālāk

$$a_c - b_c = \rho_c^2\left(\frac{1}{b_c} - \frac{1}{a_c}\right);\ a_c - b_c = \rho_c^2\,\frac{a_c - b_c}{a_c \cdot b_c},$$ no kurienes $\rho_c^2 = a_c \cdot b_c$,

$$\text{bet } \ell = a_c + \frac{\rho_c^2}{a_c} = a_c + \frac{a_c \cdot b_c}{a_c} = a_c + b_c;\ \boxed{a_c + b_c = \ell}$$

Uz šīs teoremas ir dibināta apgriezeniskā svārsta konstrukcija, ar kuŗa palīdzību var noteikt g skaitlisko vērtību (kā zinams, dažādos zemes lodes punktos g ir dažāds). Pie stieņa ir piestiprinātas divas prizmas



A un B, bet divas masas C un D var pārvietot gar stieni tik tālu, kamēr nebūs sasniegti vienādi periodi $T_A = T_B$. Šinī gadijumā, kā zinams, attālums AB = ℓ un, novērojot attiecīgo periodu T, var atrast g no formulas $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, no kuŗas $g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$.

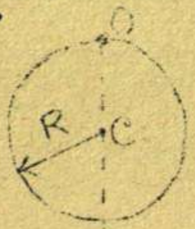
Piemērs. Uziet ripas radiusa R svārstīšanās periodu T_1 ap asi perpendikulāri ripas plaknei punktā O.

Fizikala svārsta periods:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{M.g.a_c}}$$

Šinī gadijumā: $a_c = R$; $J_c = \frac{MR^2}{2}$

zīm.79.

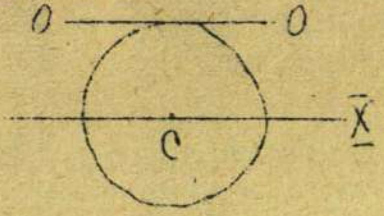


zīm.80.

$$J_o = J_c + M.R^2 = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{2} MR^2}{M.g.R}} \quad ; \quad \boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}}$$

Piemērs. Uziet ripas radiusa R svārstīšanās periodu T_2 ap asi O–O, kuŗa atrodas ripas plaknē. Fizikalā svārsta periods:



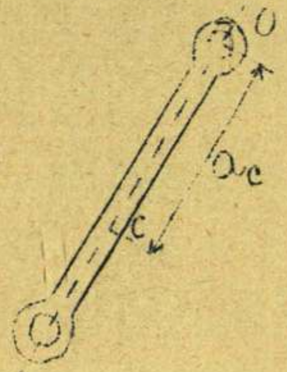
$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{Mga_c}}$. Tagad $J_x^c = \frac{MR^2}{4}$ un, pārejot uz asi O–O, dabūsim:

$$J_o = J_x^c + MR^2 = \frac{1}{4} MR^2 = \frac{5}{4} MR^2$$

zīm.81.

$$T_2 = 2\sqrt{\frac{\frac{5}{4} MR^2}{M.g.R}} \quad ; \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{5R}{4g}}$$. Attiecība $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

Ķermeņa inerces momenta noteikšana svārstīšanās ceļā.



Pieņemsim, ka kaut kādam ķermenim, piemēram klanim, jāatrod inerces moments pret asi O. Piekārsim ķermeni tā, lai tas varētu brīvi griezties ap asi O, liksim tam svārstīties tā, lai leņķis nepārsniegtu 8^o un novērosim periodu T. Izmērīsim vēl smaguma centra C attālumu a_c no griezes ass O. Ņemot svārstīšanās perioda formulu (102):

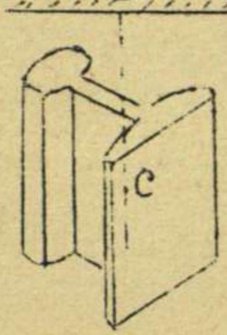
$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_o}{M.g.a_c}}$ varam to atrisināt attiecībā uz inerces momentu J_o: $J_o = \frac{M.g.a_cT^2}{4\pi^2}$, bet Mg = Q

zīm.82.

ir ķermeņa svars, tā tad:

$$\boxed{J_o = \frac{Q.a_c.T^2}{4\pi^2}}$$ Centrālo inerces momentu var atrast pēc formulas: $J_c = J_o - M.a_c^2$

Cits paņēmiens centrālā inerces momenta noteikšanai, ar verpes dēformācijām.



zīm.83.

Izmēģināmo gabalu piekārsim pie stiepules tā, lai stiepule pret ķermeni nevarētu griezties. Ja pagriezīsim ķermeni par zināmu leņķi φ, tad stiepules elestības spēku moments līdz proporcionālitātes robežai būs: $L = -k\varphi$, kur k ir kāds proporcionālitātes koeficients. Ja ķermenis piekārts vienā punktā brīvi, tad stiepules virziens ies arvien caur ķermeņa smaguma centru C. Ņemsim griezes kustības dif-nol-mu:

$$J_c \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L = -k\varphi, \text{jeb } \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{k}{J_c}\varphi,$$

bet šis nol-ms ir analogisks harmoniskas kustības dif-nol-mam:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1^2x,$$ kur x vietā ir ņemts φ un koef. $k_1^2 = \frac{k}{J_c}$.

Šādas kustības periods, kā zināms no Punkta dinamikas, ir $T = \frac{2\pi}{k_1}$ un mūsu gadijumā $T = 2\pi\sqrt{\frac{J_c}{k}}$, no kurienes atrodam

$$\boxed{J_c = \frac{kT^2}{4\pi^2}}$$

Šo formulu varētu lietot inerces momenta noteikšanai, ja būtu zināms koeficients k, bet tas ir atkarīgs no stiepules garuma, šķērsgriezie-na un elastīgām īpašībām, tamdēļ ir izdevīgāk viņu izslēgt, izdarot otru eksperimentu ar kādu citu ķermeni, kuŗam inerces moments jau būtu zināms, piemēram ar ripu. Tad pēc analogijas ripai

$$J_c^{ripai} = \frac{kT_1^2}{4\pi^2},$$

kur T_1 būs novērotais periods. Sastādot tagad attiecību:

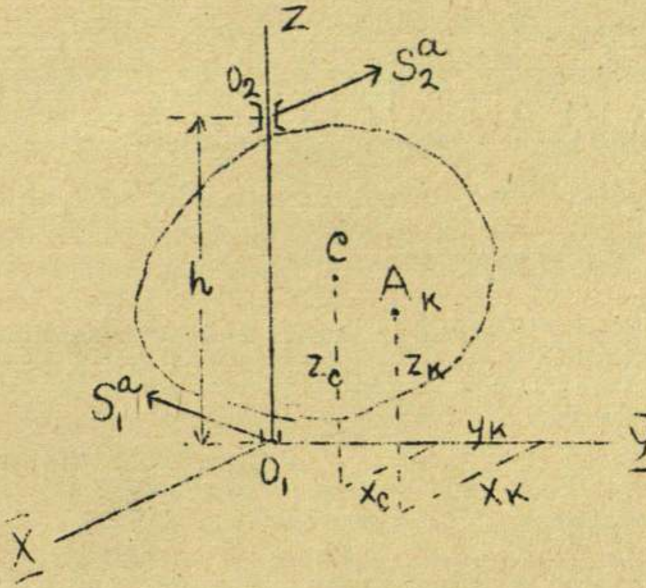
$$\frac{J_c}{J_c^{rip}} = \frac{kT^2 . 4\pi^2}{4\pi^2 . kT_1^2}$$

uziesim meklējamo inerces momentu.

$$\boxed{J_c = \frac{T^2}{T_1^2} \cdot J_c^{ripai}}$$

§ 13.CIETA ĶERMEŅA GRIEZES ASS DINAMISKAS REAKCIJAS.

Ķermenis griežas ap asi, pie kam ķermeņa smaguma centrs C neatrodas uz griezes ass. Vispārīgi, lai ķermenis atrastos griezes kustībā ap asi, tad diviem ķermeņa punktiem jābūt nekustošiem. Šinīs punktos novietosim gultnes, kuŗas dos reakcijas S_1^a un S_2^a, un caur šiem punktiem ies griezes ass. Koordinātu sākumu izvēlēsim vienā no nekustošiem punktiem un Z ass tā, lai viņa sakristu ar griezes asi. Ieslēgsim sistemā ķermeni un griezes asi ar divām reakcijām un pielietosim inerces centra kustības teoremu un kustības daudzuma momenta teoremu ap koordinatu asīm. Inerces centra kustības teorema dos 3 virzes kustības nol-mus gar koordinātu asīm un kustības daudzuma momenta teorema 3 griezes kustības nol-mus ap koordinātu asīm. Bet dotam ķermenim ir tikai viena kustības brīvība: grieze ap Z asi un šīs griezes kustības noteikšanai pietiks ar vienu no minētiem 6 nol-miem, pārējos izlietosim reakciju noteikšanai.



zīm.84.

1) $M\ddot{x}_c = V_x^a + S_{1x}^a + S_{2x}^a$

2) $M\ddot{y}_c = V_y^a + S_{1y}^a + S_{2y}^a$

3) $M\ddot{z}_c = V_z^a + S_{1z}^a + S_{2z}^a$

Šie ir 3 inerces centra kustības diferenciālnol-mi.

Ar V_x^a, V_y^a, V_z^a ir apzīmētas ārējo spēku galvenā vektora projekcijas.

4) $\frac{d\ell_x}{dt} = L_x^a - S_{2y}^a . h$

5) $\frac{d\ell_y}{dt} = L_y^a + S_{2x}^a . h$

6) $\frac{d\ell_z}{dt} = L_z$

Šie ir 3 kustības daudzuma momenta nol-mi ap koordinātu asīm.

Ar L_x^a un L_y^a ir apzīmēti ārējo spēku galvenie momenti ap $\bar{X}$ un $\bar{Y}$ asīm un ar h ir apzīmēts attālums starp gultnēm

Nol-miem 4,5 un 6 pārveidosim kreisāş puses, ievērojot, ka pie griezes ap Z asi koordinātes z_k = Const. un $\dot{z}_k = 0$, $\ddot{z}_k = 0$

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(-z_k\dot{y}_k) = \sum_1^n m_k(-\dot{z}_k\dot{y}_k - z_k\ddot{y}_k) =$$

$$= -\sum_1^n m_k z_k \ddot{y}_k$$

$$\frac{d\ell_y}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k z_k \dot{x}_k = \sum_1^n m_k(\dot{z}_k\dot{x}_k + z_k\ddot{x}_k) =$$

$$= \sum_1^n m_k z_k \ddot{x}_k$$

$$\frac{d\ell_z}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(x_k\dot{y}_k - y_k\dot{x}_k) = \sum_1^n m_k(\dot{x}_k\dot{y}_k + x_k\ddot{y}_k - \dot{y}_k\dot{x}_k - y_k\ddot{x}_k) =$$

$$= \sum_1^n m_k(x_k\ddot{y}_k - y_k\ddot{x}_k)$$

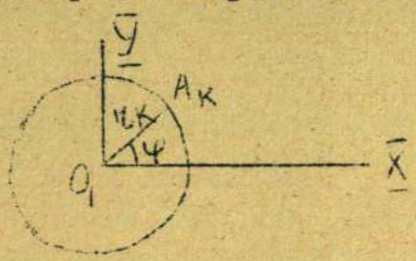
Sakopojot iegūtos rezultātus:

$$\frac{d\ell_x}{dt} = -\sum_1^n m_k z_k \ddot{y}_k$$

$$\frac{d\ell_y}{dt} = \sum_1^n m_k z_k \ddot{x}_k$$

$$\frac{d\ell_z}{dt} = \sum_1^n m_k(x_k\ddot{y}_k - y_k\ddot{x}_k)$$

un turpināsim pārveidošanu, izlietojot apstākli, ka ķermenis atrodas griezes kustībā ap Z asi un katrs punkts A_k apraksta riņķi ar radiusu r_k, kas ar laiku nemainās.



zīm.85.

$$x_k = r_k . \cos\varphi$$

$$y_k = r_k . \sin\varphi$$

$$\dot{x}_k = -r_k . \sin\varphi . \omega = -y_k . \omega$$

$$\dot{y}_k = r_k . \cos\varphi . \omega = x_k . \omega$$

atvasināsim otro reizi:

$$\ddot{x}_k = -\dot{y}_k . \omega - y_k . \tau = -x_k . \omega^2 - y_k . \tau$$

$$\ddot{y}_k = \dot{x}_k . \omega + x_k . \tau = -y_k . \omega^2 + x_k . \tau$$

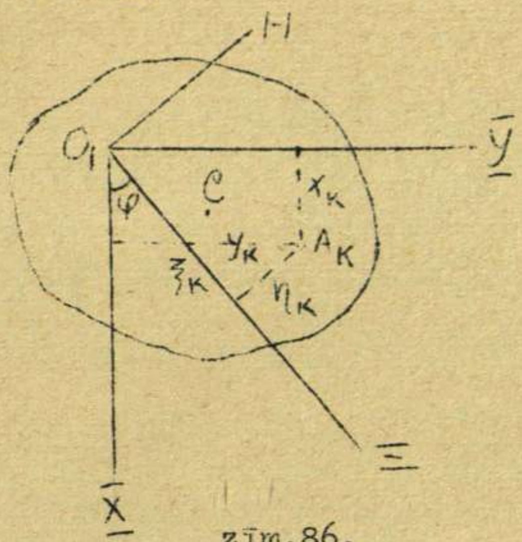
$$\frac{d\ell_x}{dt} = -\sum_1^n m_k z_k(-y_k\omega^2 + x_k\tau) = \omega^2 \sum_1^n m_k y_k z_k - \tau \sum_1^n m_k x_k z_k$$

$$\frac{d\ell_y}{dt} = \sum_1^n m_k z_k(-x_k\omega^2 - y_k\tau) = -\omega^2 \sum_1^n m_k x_k z_k - \tau \sum_1^n m_k y_k z_k$$

$$\frac{d\ell_z}{dt} = \sum_1^n m_k(-x_k y_k\omega^2 + x_k^2\tau + y_k x_k\omega^2 + y_k^2\tau) = \tau \sum_1^n m_k(x_k^2 + y_k^2) =$$

$$= \tau \sum_1^n m_k \mathbf{r_k^2} = \tau . J_z$$

ω^2 un τ varēja izņemt no summām tamdēļ, ka tie visiem punktiem ir vienādi.



zīm.86.

Summas $\sum_1^n m_k x_k z_k$ un $\sum_1^n m_k y_k z_k$ atrastās formulās atgādina centrifugālus inerces momentus, bet tikai pret asīm, kuŗas relatīvi pret ķermeni maina savu stāvokli. Tādus lielumus ievest nolmos ir neērti, tamdēļ pārrēķināsim minētās summas attiecībā uz jaunu koordinātu sistemu $\Xi H Z$ izvēlētu tā, lai abām sistemām būtu kopīgs sākums, lai Z ass sakristu ar Z asi, un lai ass Ξ un H būtu negrozīgi saistītas ar pašu ķermeni. Formulas priekš pārejas uz jaunām asīm:

$$x_k = \xi_k \mathrm{Cos}\,\varphi - \eta_k \mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$y_k = \xi_k \mathrm{Sin}\,\varphi + \eta_k \mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$z_k = \zeta_k$$

Ievietojot šīs formulas minētās summās, dabūsim

$$\sum_1^n m_k x_k z_k = \sum_1^n m_k(\xi_k \mathrm{Cos}\,\varphi - \eta_k \mathrm{Sin}\,\varphi)\zeta_k = \sum_1^n m_k \xi_k \zeta_k \mathrm{Cos}\,\varphi -$$

$$- \sum_1^n m_k \eta_k \zeta_k \mathrm{Sin}\,\varphi$$

Tagad iegūtas summas reprezentēs centrifugālus inerces momentus un

$$\sum_1^n m_k x_k z_k = J_{\xi\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi - J_{\eta\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi$$

$$\sum_1^n m_k y_k z_k = \sum_1^n m_k(\xi_k \mathrm{Sin}\,\varphi + \eta_k \mathrm{Cos}\,\varphi)\zeta_k = \sum_1^n m_k \xi_k \zeta_k \mathrm{Sin}\,\varphi +$$

$$+ \sum_1^n m_k \eta_k \zeta_k \mathrm{Cos}\,\varphi$$

un $\sum_1^n m_k y_k z_k = J_{\xi\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi + J_{\eta\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi$

Atgriežoties pie kustības daudzuma momentu izteiksmēm dabūsim

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\ell_x}{dt} &= \omega^2(J_{\xi\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi + J_{\eta\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi) - \tau(J_{\xi\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi - J_{\eta\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi) \\ \frac{d\ell_y}{dt} &= -\omega^2(J_{\xi\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi - J_{\eta\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi) - \tau(J_{\xi\zeta} \mathrm{Sin}\,\varphi + J_{\eta\zeta} \mathrm{Cos}\,\varphi) \\ \frac{d\ell_z}{dt} &= J_z \cdot \tau \end{aligned}\right\} \ldots (105)$$

Tagad pārrakstīsim no jauna visus 6 kustības nol-mus ievērojot, ka

$$\ddot{x}_c = -x_c\omega^2 - y_c\tau \quad \text{tāpat kā } \ddot{x}_k$$

$$\ddot{y}_c = -y_c\omega^2 + x_c\tau \quad \text{tāpat kā } \ddot{y}_k$$

$$\ddot{z}_c = 0\text{ , jo } z_c = \text{Const. tāpat kā } z_k$$

1) $Mx_c\omega^2 + My_c\tau + V_x^a + S_{1x}^a + S_{2x}^a = 0$

2) $My_c\omega^2 - Mx_c\tau + V_y^a + S_{1y}^a + S_{2y}^a = 0$

3) $V_z^a + S_{1z}^a + S_{2z}^a = 0$

4) $\frac{d\ell_x}{dt} = L_x^a - S_{2y}^a.h$

5) $\frac{d\ell_y}{dt} = L_y^a + S_{2x}^a.h$

kur $\frac{d\ell_x}{dt}$ un $\frac{d\ell_y}{dt}$ jāņem pēc formulām (105)

6) $J_z.\tau = L_z$

Atrisināšana jāved sekošā kārtā: no nol-ma 6), kurš reprezentē ķermeņa griezes kustības nol-mu atrodam τ un, integrējot to, arī ω un φ. Tālāk no nol-miem 4) un 5) var atrast reakcijas: S_{2x}^a un S_{2y}^a un tad no nol-ma 1) atrodam S_{1x}^a un no nol-ma 2) atrodam S_{1y}^a. Pēc tam paliks pāri divas nezināmas reakcijas S_{1z}^a un S_{2z}^a un tikai viens nol-ms. Tas nozīmē, ka šīs pēdējās reakcijas būs statiski nenoteiktas. Lai varētu atsvabināties no nenoteiktības, konstruēsim vienu gultni un proti augšējo slīdošu, tad

$$S_{2z}^a = 0 \quad \text{un} \quad S_{1z}^a = -V_z^a$$

Reakcijas S_1^a un S_2^a punktos O_1 un O_2 mēs arvien varam sadalīt divās komponentēs griezes ass virzienā un virzienā perpendikulārā pret griezes asi. Šīs pēdējās komponentes sauksim par sānu reakcijām.

Reakcijas S_{1x}, S_{1y} un S_{2x}, S_{2y} reprezentēs sānu reakciju komponentes. Punktam O_2 šīs komponentes dabūsim no nol-miem 4) un 5)

$$S_{2y}^a = \frac{1}{h} L_x^a - \frac{1}{h} \cdot \frac{d\ell_x}{dt}$$

$$S_{2x}^a = -\frac{1}{h} L_y^a + \frac{1}{h} \cdot \frac{d\ell_y}{dt}$$

Kā redzams, sānu reakciju komponentes sastāv no divām daļām: pirmā ir statiska reakcija un otra dinamiska reakcija. Statiska reakcija ir tā reakcijas daļa, kuru izsauc ārējie spēki, neatkarīgi no tā, vai ķermenis kustas jeb atrodas mierā. Dinamiskā sānu reakcija ir izsaukta caur ķermeņa griezes kustību. Uziesim dinamisko sānu reakciju punktā O_2 caur komponentēm

$$S_{2din} = \frac{1}{h}\sqrt{\left(\frac{d\varrho_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho_y}{dt}\right)^2}$$

ievietosim šeit formulas (105):

$$S_{2din} = \frac{1}{h}\sqrt{\omega^4(J^2_{\xi\zeta} + J^2_{\eta\zeta}) + \tau^2(J^2_{\xi\zeta} + J^2_{\eta\zeta})}$$

$$\boxed{S_{2din} = \frac{1}{h}\sqrt{(\omega^4 + \tau^2)(J^2_{\xi\zeta} + J^2_{\eta\zeta})}} \quad \ldots\ldots(106)$$

Kā redzams, vienmērīgas kustības gadijumā dinamiskas reakcijas ir proporcionālas griezes ātruma kvadratam ω^2. Šinī gadijumā dinamiskas reakcijas būs centrifugalu spēku iespaidu rezultāts, tamdēļ arī $J_{\xi\zeta}$ un $J_{\eta\zeta}$ saucas par centrifugaliem inerces momentiem.

Dinamiskas reakcijas virziens, acimredzot, mainās viena apgrieziena laikā, jo viņa projekcijās ieiet $\sin\varphi$ un $\cos\varphi$ un pēc apgrieziena atkal atkārtojas.

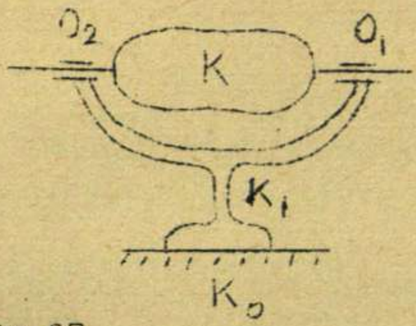
So parādību raksturo ar izteicienu: ķermenis sit. Lai novērstu šādus sitienus, kuŗi atkārtojas pie katra apgrieziena, jāizvēl griezes ass tā, lai centrifugālie inerces momenti: $J_{\xi\zeta} = 0$ un $J_{\eta\zeta} = 0$, t.i. lai griezes ass būtu galvenā inerces ass punktā O_1

Speciāls gadijums. Pieņemsim, ka griezes ass ir galvenā ass punktā O_1 un bez tam ārējo spēku galvenais vektors $V^a = 0$ un arī $L^a_x = L^a_y = 0$, tā tad darbojas tikai griezes moments L_z. No nol-ma 3) atrodam $S^a_{1z} = - S^a_{2z} = 0$. No nol-ma 4) atrodam, ka $S^a_{2y} = 0$ un no 5) ka $S^a_{2x} = 0$, jo $J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0$. Tā tad vispārīgi reakcija $S^a_2 = 0$ un griezes ass patur savu stāvokli arī tad, ja gultnī punktā O_2 noņemsim. Šādu griezes ass sauksim par permanento griezes asi.

Sānu reakcijas S_{1x} un S_{1y} punktā O_1 mēs atradīsim no nol-miem 1) un 2) pēc tam, kad būs zinami S_{2x} un S_{2y}. Lai arī šinī punktā dinamiska reakcija $S_{1din} = 0$ pie $S_{2din} = 0$, kā redzams no nol-miem 1) un 2), inerces centra koordinātēm jālīdzinājās nullei. Tas nozīmē, ka griezes asij jābūt netikai galvenai inerces asij, bet arī galvenai centrālai inerces asij. Atgriežoties pie speciālā gadijumā, kad ārējo spēku $V^a = 0$ un $L^a_x = L^a_y = 0$ un, ja griezes ass ir galvenā centrālā inerces ass, konstatējam, ka reakcijas abās gultnēs $S^a_1 = 0$, $S^a_2 = 0$. Abas gultnes var noņemt nost un griezes ass šinī gadijumā saucas par brīvo griezes asi.

Praksē dinamiskas reakcijas gultnēs nav vēlamas un tamdēļ visām griezošām mašinu daļām, ka spara ratiem, riteņiem, vārpstām, griezes asīm jābūt izbalansētām, t.i. tām jābūt galvenām centrālām inerces asīm. Gultnes praksē protams noņemt nevar, jo visur uz zemes lodes darbojas smaguma spēks, tā tad praktiski prasību, lai ārējo spēku projekcijas uz visām asīm līdzinātos nullei, mēs izpildīt nevaram.

Piemērs. Ņemsim ķermeni K, kas griežas ap asi attiecībā pret ķermeni K_1 pie kam ķermenis K_1 attiecībā pret nekustošu ķermeni K_0, arī var kustēties.

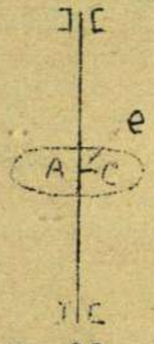


zīm.87.

Gadijumā, ja griezes ass nav izbalansēta, t.i. ja tā nav galvenā centrālā ass, gultnēs O_1 un O_2 radisies dinamiskas reakcijas, kuŗas kustinās ķermeni K_1 pret K_o. Gadijumā, ja griezes ass ir izbalansēta, tad gultnēs O_1 un O_2 dinamisku reakciju nebūs, bet, ja mēs sāksim ķermeni K_1 kustināt pret ķermeni K_o, tad pie ķermeņa K griezes pret K_1, kā redzams no nol-miem 4), 5) un 1), 2), gultnēs O_1 un O_2 izsauksies dinamiskas reakcijas.

Lavaļa turbinas problema.

Ņemsim ripu, piestiprinātu uz vārpstas ar zinamu ekscentricitāti, t.i.

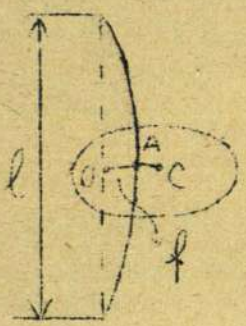


zīm.88.

tā, ka ripas smaguma centrs C atrodas attālumā e no griezes ass. Šī ekscentricitāte e turbinās nav liela, tā dažreiz sasniedz tikai dažas milimetra daļas, bet pie lieliem ātrumiem, kādi tiek sasniegti turbinās līdz 30000 apgr./min., var izsaukt bīstamas dinamiskas reakcijas.

Lai samazinātu šo reakciju iespaidu, zviedru inženiers Lavaļs lika priekšā konstruēt turbines asi ļoti tievu. Tas skan tīri paradoksali, bet, kā mēs redzēsim tālāk, pateicoties šim apstāklim, turbinei piemīt īpašība paš-centrēties.

Pieņemsim vienkāršības dēļ, ka ripa vārpstai ir piestiprināta vidū. Ripai griežoties zem centrifugalu spēku iespaida, vārpsta izlieksies, bet ripa paturēs horicontālu stāvokli. Apzīmēsim vārpstas izlieci OA = f. Spēks, kas izliec vārpstu vidū, līdzināsies ripas reakcijai vārpstas piestiprināšanas vietā; apzīmēsim to ar S, tad izliece

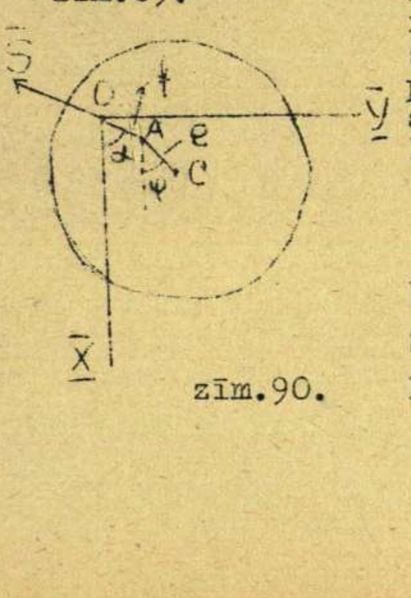


zīm.89.

$$f = \frac{S.\ell^3}{48EJ}\text{, jeb } S = \frac{48EJ}{\ell^3}\cdot f\text{. Apzīmējot koef. } \frac{48EJ}{\ell^3} = C,$$

dabūsim S = cf.

Uzzīmēsim atsevišķi ripu (zīm.90). Izvēlēsim koordinātu sistemu $\overline{XY}$ caur geometriskas griezes ass krustošanās punktu $\overline{O}$ ar ripas plakni un pielietosim ripai inerces centra kustības teoremu, ievērojot, ka šeit galvenais vektors $\bar{S}$ ir virzīts no punkta A uz punktu O. Apzīmēsim vēl ar α leņķi, kuŗu veido OA ar $\bar{X}$ asi un ar φ leņķi, kuŗu veido AC ar $\bar{X}$ asi. Inerces centra kustības nol-mi:



zīm.90.

$$M\ddot{x}_c = - S.\mathrm{Cos}\,\alpha$$

$$M\ddot{y}_c = - S.\mathrm{Sin}\,\varphi$$

bet S = cf un no zīm.90 atrodam, ka $\mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{x}{f}$ un $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{y}{f}$, kur ar x un y ir apzīmētas punkta A koordinātes. Tā tad:

$$M\ddot{x}_c = - cf \cdot \frac{x}{f} \qquad M\ddot{x}_c = - cx$$

$$M\ddot{y}_c = - cf \cdot \frac{y}{f} \qquad M\ddot{y}_c = - cy$$

Pēdējos dif-nol-mos kreisā pusē ir inerces centrs koordinātes, bet labā pusē punkta A koordinātes, tā tad pirms integrēšanas jāaizvieto vienu ar otru. Sakars starp minētām koordinātēm, kā redzams zīm.90. ir

$$x_c = x + e.\mathrm{Cos}\,\varphi$$

$$y_c = y + e.\mathrm{Sin}\,\varphi$$

Pieņemsim, ka grieze notiek ar Const. ātrumu ω_o, tad $\varphi = \omega_o t$ un

$$\left.\begin{aligned} x_c &= x + e.\mathrm{Cos}\,\omega_o t \\ y_c &= y + e.\mathrm{Sin}\,\omega_o t \end{aligned}\right\} \text{atvasināsim šīs formulas pēc laika}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_c &= \dot{x} - e\omega_o \mathrm{Sin}\,\omega_o t \\ \dot{y}_c &= \dot{y} + e\omega_o \mathrm{Cos}\,\omega_o t \end{aligned}\right\} \text{atvasināsim vēl reiz pēc laika}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} - e\omega_o^2 \mathrm{Cos}\,\omega_o t \\ \ddot{y}_c &= \ddot{y} - e\omega_o^2 \mathrm{Sin}\,\omega_o t \end{aligned}\right\} \text{ieliksim šīs formulas inerces centra kustības nol-mos}$$

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{x} - Me\omega_o^2 \mathrm{Cos}\,\omega_o t &= - cx \\ M\ddot{y} - Me\omega_o^2 \mathrm{Sin}\,\omega_o t &= - cy \end{aligned}\right\} \text{izdalīsim ar M un pārnesīsim otros locekļus labā pusē}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= - \frac{e}{M} x + e\omega_o^2 \mathrm{Cos}\,\omega_o t \\ \ddot{y} &= - \frac{e}{M} y + e\omega_o^2 \mathrm{Sin}\,\omega_o t \end{aligned}\right\} \text{ievedīsim apzīmējumu } \frac{e}{M} = k^2 \text{, tad}$$

$$\ddot{x} = - k^2 x + e\omega_o^2 \mathrm{Cos}\,\omega_o t$$

$$\ddot{y} = - k^2 y + e\omega_o^2 \mathrm{Sin}\,\omega_o t$$

Iegūtus dif-nol-mus varam integrēt pēc uzspiestas svārstīšanas kustības dif-nol-ma: $\ddot{x} = - k^2 x + b\mathrm{Sin}pt$ kuŗa integrāls bija atrast punkta dinamikā:

$$x = a.\mathrm{Sin}(kt + \alpha) + \frac{b}{k^2 - p^2}\,\mathrm{Sin}\,pt$$

Izlietojot šo formulu, dabūsim mūsu gadijumam:

$$x = a_1 \mathrm{Sin}(kt + \alpha_1) + \frac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2}\,\mathrm{Cos}\,\omega_o t$$

$$y = \underbrace{a_2 \mathrm{Sin}(kt + \alpha_2)}_{\text{pašsvārstības}} + \underbrace{\frac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2}\,\mathrm{Sin}\,\omega_o t}_{\text{uzspiestas svārstības.}}$$

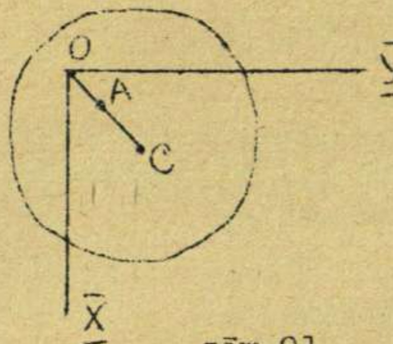
Pirmais loceklis šinīs integrāļos reprezentē pašsvārstības un otrais uzspiestas svārstības. Izvēlēsim sākuma apstākļus tādus, lai $a_1 = 0$ un $a_2 = 0$, tad paliek:

$$x = \frac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2} \cos \omega_o t$$

$$y = \frac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2} \sin \omega_o t$$

Tagad varam uziet izlieci:

$f = \sqrt{x^2 + y^2}$, $f = \dfrac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2}$ un izteikt



zīm.91.

$$\left.\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{f} = \cos \omega_o t \\ \sin \alpha &= \frac{y}{f} = \sin \omega_o t \end{aligned}\right\}$$ no šīm formulām seko,

ka $\alpha = \omega_o t = \varphi$ un trīs punkti O, A un C atrodas uz vienas taisnes, kura vienmērīgi griežas ap punktu O ar ātrumu ω_o. Uziesim tagad attālumu

$$OC = e + f = e + \frac{e\omega_o^2}{k^2 - \omega_o^2} \; ; \qquad \boxed{OC = \frac{e}{k^2 - \omega_o^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (107)$$

Tāļāk varam atšķirt dažādus gadijumus:

zīm.92.

zīm.93.

1) $\omega_o < k$ tad, kā redzams no form.(107), $OC > e$ un punkts A guļ starp O un C (skat.zīm.92).

2) $\omega_o > k$ tad, kā redzams no formulas

$$OC = e - \frac{e\omega_o^2}{\omega_o^2 - k^2}$$ iznāk, ka $OC < e$ un punkts A atrodas aiz punkta C. (skat. zīm.93).

3) $\omega_o = \infty$, šinī gadijumā, kā rāda formula (107), $OC = 0$, tas nozīmē, ka smaguma centrs pats cenšas iestāties uz geometriskas griezes ass. So īpašību sauc par pašcentrēšanos, pie kam jo lielāks ir griezes ātrums, jo tuvāk smaguma centrs pieies pie griezes ass.

4) $\omega_o = k$, šinī gadijumā, turpretīm, iznāk $OC = \infty$ un tas atbilst uzspiestas svārstīšanās kustības rezonances gadijumam un ir bīstams vārpstas stiprībai. Tamdēļ ātrumu $\omega_e = k$ sauc par vārpstas kritisko ātrumu un turbinei nekad nedrīkst atļaut strādāt ilgāku laiku ar tādu ātrumu.

Uziesim kritisko ātrumu $\omega_o = k = \sqrt{\frac{C}{M}}$, kur $C = \frac{48EJ}{\ell^3}$, tā tad

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{48EJ.g}{Q.\ell^3}}} \quad \ldots\ldots\ldots (108)$$

kur Q – vārpstas svars,
J – vārpstas šķērsgrieziena inerces moments,
E – materiāla elastības moduls.

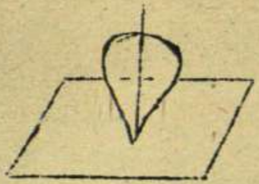
Lavaļa turbinēs parasti darba ātrums $\omega = 7k$, tā tad pēc form.(107):

$$OC = \frac{ek^2}{k^2 - 49k^2} = -\frac{e}{48}$$

un sākuma ekscentricitāte samazinājās 48 reiz.

Elementāra žiroskopa teorija.

Par žiroskopu sauksim rotacijas ķermeni, kas atrodas griezes kustībā ar lielu ātrumu ap savu asi, pie kam ķermenim paliek vairāk, kā viena kustības brīvība.



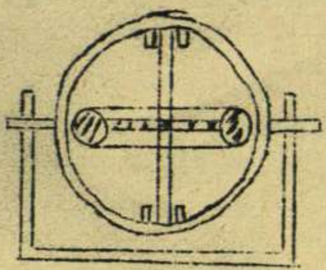
zīm.94.

Vienkāršam vilciņam, kas atbalstas vienā punktā pret horicontālu plakni ir 5 kustības brīvības, ja atbalsta punkts minētā plaknē var pārvietoties (zīm.94.)

Vilciņam,kas atbalstas vienā punktā, pie kam atbalsta punkts pārvietoties nevar, ir 3 kustības brīvības (zīm.95)

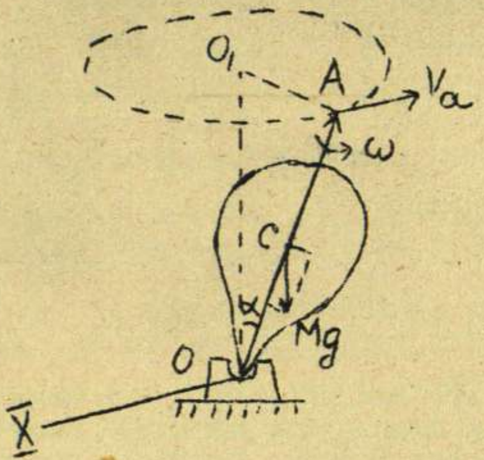
zīm.95.

Var uzkonstruēt arī žiroskopu ar divām kustības brīvībām. Ņemsim ķermeni tora veidā,kuram griezes ass ir atbalstīta rāmī, pie kam pats rāmis arī var griezties ap citu asi,perpendikulāri pret ķermeņa griezes asi. Tad ķermenis, attiecībā pret nekustošu koordinātu sistemu, var griezties ap divām asīm, tas nozīmē,ka ķermenim būs divas kustības brīvības.



zīm.96.

Žiroskops ar 3 kustības brīvībām.



zīm.97.

Apskatīsim tuvāk žiroskopu ar 3 kustības brīvībām, reprezentētu ar kaut kādu rotacijas ķermeni,atbalstītu vienā punktā,pie kam šis punkts pārvietoties nevar un atrodas zemāk par smaguma centru. Rotacijas ass ir ķermeņa galvenā centrālā inerces ass.Apskatīsim divos gadijumos, kas notiks ar ķermeni,ja tas ir padots smaguma spēkam un sākumā rotacijas ass OC veido ar vertikalu virzienu leņķi $\angle\alpha$. 1)Gadijums: ķermenis sākuma momentā atrodas mierā un 2)gadijums: ķermenis sākumā atrodas griezes kustībā ar lielu ātrumu ω ap savu asi. Apzīmēsim smaguma centra attālumu OC = a.

1)Gadijums. Ja sākumā ķermenis atrodas mierā, tad zem smaguma spēka iespaida ķermenis gāzīsies uz leju, griežoties ap horicontālu asi $O\bar{X}$,pie kam smaguma centrs C aprakstīs riņķi ar radiusu a un centru punktā O. Apzīmējot leņķi, kuŗu veido OC ar vertikalu virzienu, ar φ, dabūsim $J_x.\ddot{\varphi} = L_x$, kur $L_x = Mg.a.\sin\varphi$ un, ja apzīmēsim punkta C tangenciālo paātrinājumu ar j_{ct}, tad $j_{ct} = a\ddot{\varphi}$ jeb $\ddot{\varphi} = \frac{1}{a} j_{ct}$, no kurienes punkta C tangenciālais paātrinājums

$$j_{ct} = \frac{Mg}{J_x} a^2.\sin\varphi$$

leņķis φ ar laiku pieaugs, tā tad paātrinājums arī pieaugs. Punkta C ātrumu varam dabūt pielietojot spara teoremu

$$J_x \frac{\omega_x^2}{2} - J_x.0 = Mg(a.\cos\alpha - a.\cos\varphi), \text{ bet } \omega_x = \frac{V_c}{a}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{2Mg}{J_x} a^3(\cos\alpha - \cos\varphi)},$$ kā redzams ātrums V_c ar laiku arī pieaug.

<u>2)Gadijums.</u> ķermenim sākumā ir dots liels griezes ātrums ω ap savu asi. <u>Kustības daudzuma moments</u> $\bar{\ell} = J\bar{\omega}$ ir vektors, kas iet griezes ass virzienā, pie kam J šeit ir ķermeņa inerces moments ap savu asi. Atliksim kustības daudzuma momenta vektoru no punkta O tā, lai $\overline{OA} = \bar{\ell}$. Pēc Resal'a teoremas punkta A ātrums V_a ir geometriski vienāds ar sistemas galveno momentu L_o attiecībā uz punktu O.

$$\bar{V}_a = \bar{L}_o$$

Bet ja uz ķermeni darbojas tikai smaguma spēks, tad galvenais moments $L_o = Mg\sin\alpha$ ir vektors, kas iet perpendikulāri vertikālai plaknei, vilktai caur OA. Tā tad $\bar{L}_o$ vektors iet horicontālā virzienā. Tas nozīmē, ka punkta A, kas pieder griezes asij, ātrums V_A arī ir horicontāls un arvien perpendikulārs pret OA. Tā tad žiroskops negāzīsies zemē, bet paturēs Const. $\angle\alpha$, pie kam griezes ass OA aprakstīs konisku virsmu. So parādību sauc par griezes ass precessiju. Punkts A pie tam aprakstīs horicontālu riņķi ar centru punktā C_1. Apzīmēsim punkta A griezes ātrumu uz minētā riņķa ar ω_p, tas būs arī precessijas griezes ātrums, kuŗu tagad uziesim.

Pēc Resal'a $V_A = Mg.a.\sin\alpha$

un no otras puses $V_A = O_1A.\omega_p$, bet $O_1A = \ell.\sin\alpha$ un $\ell = J\omega$, tā tad $V_A = J\omega.\omega_p.\sin\alpha$, pielīdzinot abas V_A izteiksmes, dabūsim

$$J\omega.\omega_p\sin\alpha = Mg.a\sin\alpha, \text{ no kurienes } \boxed{\omega_p = \frac{Mga}{J\omega}} \quad \ldots\ldots\ldots (109)$$

Šo formulu var vēl pārveidot, ievedot inerces momenta izteiksmi caur inerces radiusu $J = M\rho^2$, tad

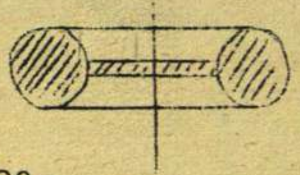
$$\omega_p = \frac{Mg.a}{M.\rho^2.\omega}; \quad \boxed{\omega_p = \frac{g.a}{\rho^2.\omega}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (109a)$$

Kā redzams, precessijas ātrums ir pretēji proporcionāls žiroskopa griezes ātrumam un ja aiz gaisa pretestības un berzes samazināsies, tad precessijas ātrums palielināsies. Vispārīgi precessijas ātrums ir daudz mazāks par griezes ātrumu, kā mēs to tūlīt redzēsim, apskatot skaitlisku piemēru.

<u>Piemērs.</u> Žiroskopa griezes ātrums $\omega = 200$ (6000 apgr./min.), smaguma centra attālums no atbalsta punkta a = 20 cm, inerces radiuss $\rho = 10$ cm. Uziet precessijas ātrumu ω_p. Pēc formulas (109a):

$$\omega_p = \frac{g.a}{\rho^2.\omega} = \frac{9,81.0,2}{0,01.200\,\pi} = 0,1\,\frac{9,81}{3,14} = 0,31\ \text{sec}^{-1},\text{t.i.}\ \frac{0,31.60}{2\pi} \cong 3\text{ap/mi}$$

Kā mēs redzējam, ja ķermenis atrodas griezes kustībā ap asi, tad tam piemīt īpašība pretoties katra spēka iespaidam,kas cenšas mainīt griezes ass virzienu,pie kam novirzīšanās ir diezgan maza un notiek virzienā, perpendikulārā pret spēka virzienu.Griezes ass tad zināmā mērā iegūst stabilitāti. Novirzīšanās,kā redzams no formulas (109),ir mazāka, jo lielāks ir griezes ātrums ω un inerces moments J. Līdz ar to arī griezes ass stabilitāte palielinājās ar griezes ātruma un inerces momenta palielināšanos. Sakarā ar šo apstākli, lielgabalu stobrā arvien ir uzgrieztas vītnes,lai lādiņam pie izejas no stobra būtu griezes ātrums ap savu asi, tādā gadijumā griezes ass būs stabilāka savā kustībā pret ārējo spēku,piemēram vēja, iespaidu.



zīm.98.

Lai palielinātu žiroskopisko efektu jeb griezes ass stabilitāti, kā jau bija teikts,jāpalielina inerces moments, tamdēļ bieži žiroskopus izveido tora veidā tā,lai pēc iespējas lielāka masa būtu koncentrēta tāļāk no griezes ass (sk.zīm.98).

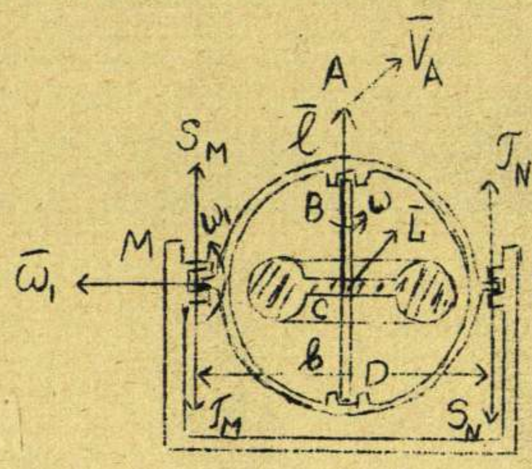
Tora aksiālais inerces moments,ja r ir veidojoša riņķa radiuss un R ir tā paša riņķa attālums no tora ass,ir

$$J_z = M(R^2 + \frac{3}{4}r^2)$$

Tora diametrālais inerces moments pie tiem pašiem apzīmējumiem

$$J_x = M(\frac{R^2}{2} + \frac{5}{8}r^2)$$

Žiroskops ar divām kustības brīvībām.



zīm.99.

Ņemsim žiroskopu,kas griežas attiecībā pret rāmi ap asi BD ar ātrumu ω .Pats rāmis attiecībā pret nekustošu pamatu var griezties ap asi MN,pie kam $MN \perp BD$. Dosim rāmim griezes kustību ap asi MN ar ātrumu ω_1 uzrādītā virzienā un apskatīsim kādas sekas būs šai griezei.

No ķermeņa smaguma centra atliksim griezes ass BD virzienā kustības daudzuma momenta vektoru $\bar{\ell} = \overline{OA}$. Bet ja rāmis kopā ar griezes asi BD griežas ap asi MN ar ātrumu ω_1,tad punkta A ātrums $V_A = \ell.\omega_1$. Pēc Resal'a teorēmas ārējo spēku un reakciju galvenam momentam L ģeometriski jālīdzinājas punkta A ātrumam $\bar{L} = \bar{V}_A$ jeb $L = \ell.\omega_1$,bet $\ell = J.\omega$,tā tad

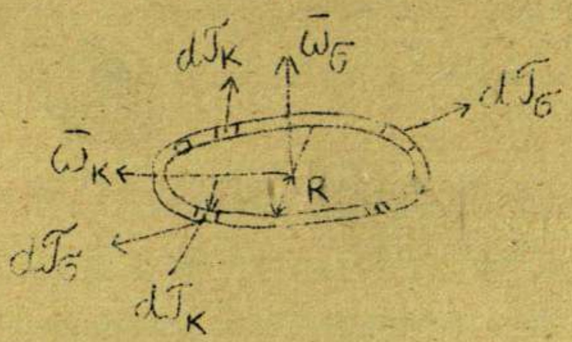
$$\boxed{L = J\omega.\omega_1}$$

Bet spēku galvenais vektors V = 0, jo inerces centrs C šinī kustībā nepārvietojas un prasīto momentu L var realizēt tikai dinamiskas reakcijas S_N un S_M atbalsta punktos M un N. Tā tad jānāk pie slēdziena, ka minētās divas griezes kustības izsauks dinamiskas reakcijas: S_N un S_M, kuŗas veidos momentu

$$\boxed{L = J\omega.\omega_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (110)$$

Bet šīs dinamiskas reakcijas nevar uzrādīt ievērojamas pretestības minētai rāmja griezes kustībai, izņemot, protams, berzi gultnēs, tā kad rāmja grieze viegli izdarama. Bez dinamiskām reakcijās punktos M un N būs vēl statiskas reakcijas, kuŗas līdzsvaro rāmja un žiroskopa svaru. No otras puses, pēc d'Alembert'a principa kustības gadijumā visi spēki un reakcijas līdzsvarojas ar inerces spēkiem, bet minētās dinamiskas reakcijas ar ārējiem spēkiem nevar līdzsvaroties. Ar ārējiem spēkiem līdzsvarojas tikai statiskas reakcijas, tā tad dinamiskām reakcijām jālīdzsvarojas ar inerces spēkiem un žiroskopa inerces spēkiem jāpievedas arī pie momenta, kas ir vienāds ar $L = J\omega.\omega_1$, bet iet pretējā virzienā. Šo inerces spēku momentu sauc par žiroskopisko momentu.

Pie tā paša rezultāta varam nonākt arī citā ceļā. Ņemsim materiālu aploci ar radiusu R. Aploce atrodas divās griezes kustībās, attēlotas ar vektoriem $\bar\omega_\sigma$ un $\bar\omega_k$. Griezes kustību ar vektoru $\bar\omega_\sigma$ ir relativa un griezes kustība ar vektoru $\bar\omega_k$ ir pārnesama.



zīm.100.

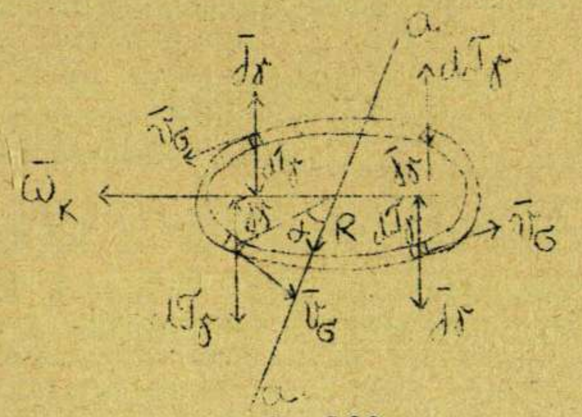
Izdalot kādu elementu ar masu dm, uziesim šim elementam relatīvo inerces spēku: $d\bar J_\sigma = R\omega_\sigma^2.dm$. Iezīmējot šo spēku perpendikulāri pret $\bar\omega$ un virzienā no ass, redzam, ka katram elementam vienā pusē var atrast tādu pat elementu otrā pusē, kuŗam inerces spēks būs tik pat liels un pretēji virzīts, tā tad visi relatīvie inerces spēki līdzsvarojas.

Apskatīsim tagad pārnesamos inerces spēkus. Tam pašam elementam pārnesamais inerces spēks:

$$d\bar J_k = r.\omega_k^2\ dm$$

kur r ir elementa attālums līdz griezes vektoram ω_k. Atkal katram elementam vienā pusē no ω_k var atrast elementu otrā pusē tā, lai tam inerces spēks būtu tik pat liels un pretēji virzīts, tas nozīmē, ka arī visi pārnesamie inerces spēki līdzsvarojas. Paliek vēl Coriolisa inerces spēki.

Sadalīsim aploci četros kvadrantos ar vektoru $\bar\omega_k$ un asi a–a perpendikulāri pret ω_k. Ņemot katrā kvadrantā vienu elementu un uzkonstruējot Coriolisa paātrinājumu, redzam, ka pa kreisi no ass a–a visiem elementiem Coriolisa paātrinājumi ir virzīti uz augšu un pa labi uz leju (sk. zīm.100a)



zīm.100a.

Iezīmēsim tiem pašiem elementiem Coriolisa inerces spēkus $d\bar J_c$, kuŗi, kā zinams, ies pretējos virzienos paātrinājumiem. Kā redzams visi Coriolisa inerces spēki veidos momentu ap asi a–a. Uziesim visu šo spēku rezultējošo momentu, nosakot elementa stāvokli ar $\angle\alpha$, kuŗu veido radiuss-vektors ar asi a-a. Elementa masa: $dm = R.d\alpha.\delta$, kur δ ir garumvienības masa.

Coriolisa paātrinājums: $\bar{j}_\gamma = 2[\bar{\omega}_k.\bar{V}_6]$; $j_\gamma = 2\omega_k.V_6.\mathrm{Sin}(\pi-\alpha)$,

$$j_\gamma = 2\omega_k.R.\omega_6.\mathrm{Sin}\alpha \; ; \quad j_\gamma = 2R.\omega_6.\omega_k.\mathrm{Sin}\alpha$$

Coriolisa inerces spēks elementam: $d\bar{J}_\gamma = -\bar{j}_\gamma dm$

$$dJ_\gamma = 2R\omega_6.\omega_k \mathrm{Sin}\alpha.R.d\alpha.\delta = 2R^2\delta.\omega_6.\omega_k \mathrm{Sin}\alpha d\alpha$$

Sastādīsim elementam Coriolisa inerces spēka momentu ap asi a-a

$$dL_\gamma = R.\mathrm{Sin}\alpha.dJ_\gamma = R.\mathrm{Sin}\alpha.2R^2.\delta.\omega_6.\omega_k \mathrm{Sin}\alpha.d\alpha$$

$$dL_\gamma = 2R^3.\delta.\omega_6.\omega_k \mathrm{Sin}^2\alpha.d\alpha$$

Lai dabūtu visu Coriolisa inerces spēku momentu summu, šo formulu jāintegrē pēc α no 0 līdz π un jāreizina ar 2, abām pusēm

$$L_\gamma = 2\int_0^\pi 2R^3.\delta.\omega_6.\omega_k \mathrm{Sin}^2\alpha d\alpha = 4R^3.\delta.\omega_6.\omega_k \int_0^\pi \mathrm{Sin}^2\alpha.d\alpha$$

$$L_\gamma = 4R^3.\delta.\omega_6.\omega_k \frac{1}{2}\Big[\alpha - \mathrm{Sin}\alpha \mathrm{Cos}\alpha\Big]_0^\pi = 2r^3.\delta.\omega_6.\omega_k.\pi,$$

bet $2\pi R\delta = M$, tā tad $L_\gamma = MR^2.\omega_6.\omega_k$. Tālāk vēl $MR^2 = J$ ir materiālas aploces inerces moments ap centrālo asi perpendikulāri aploces plaknei un galīgi nonākam pie formulas

$$L_\gamma = J.\omega_6.\omega_k$$

kuŗa ir pilnīgi identiska ar formulu (110).

Ar šo ir pierādīts, ka žiroskopiskais moments ir Coriolisa inerces spēku moments, pie kam ievērojot momenta virzienu pēc zīm. 100a varam to pašu formulu uzrakstīt vektoriālā veidā

$$\boxed{\bar{L}_\gamma = J.[\bar{\omega}_6.\bar{\omega}_k]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (110a)$$

vārdos tas nozīmē, ka žiroskopiskais moments dod spēku pāri, kas griež žiroskopu plaknē, kuŗā atrodās abi vektori ω_6 un ω_k, virzienā no ω_6 vektora uz ω_k vektoru visīsākā ceļā.

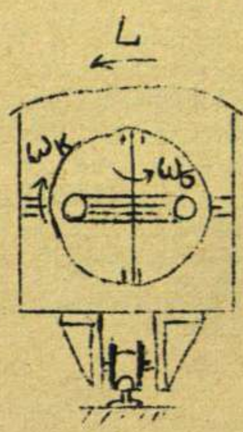
Kā jau agrāk bija minēts, žiroskopiskais moments izsauks dinamiskas reakcijas atbalsta punktos M un N (sk.zīm.99), kuŗas pēc lieluma būs vienādas

$$\boxed{S_M = S_N = \frac{L_\gamma}{b} = \frac{J\omega.\omega_1}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (111)$$

kur b apzīmē attālumu starp punktiem M un N.

Aprakstīto žiroskopu ar divām kustības brīvībām var izlietot viensliežu dzelzceļu vagonu, kugu jeb aeroplanu stabilizācijai. Apskatīsim šematiski tādu iekārtu. Vagonā iestiprināts žiroskopa ar divām kustības brīvībām rāmis.

Pieņemsim, ka vagons noliecas uz labo pusi. Ja žiroskops ap savu asi griežas pret pulksteņrādītāja virzienā, tad, lai izlīdzinātu vagonu, jāgriež žiroskopa rāmis zīm.101 uzrādītā virzienā, jo tad inerces spēki dod žiroskopisko momentu L ap vagona garenisko asi pretējā virzienā. Gadijumā, ja vagons gāžās uz kreiso pusi, žiroskopa rāmis jāgriež otrādi.



zīm.101.

Pats par sevi saprotams, ka viensliežu dzelzceļos šādas inerces darbojas automatiski, t.i. viņas dod automatiski rāmim vajadzīgo kustību. Tikai šeit jāņem vērā, ka žiroskopiska momenta vektors $\bar{L}$ arvienu ir perpendikulārs abiem griezes vektoriem ω_6 un ω_k, tā tad, ja žiroskopa ass ir pagriezta horicontāli, tad žiroskopiska momenta vektors $\bar{L}$ būs vertikals un šāds moments nevar noturēt vagonu no apgāšanās.

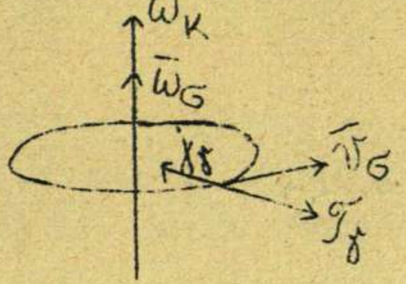
Skaitlisks piemērs. Žiroskopa svars $Q = 2$ ton., inerces radiuss $\rho = 1$ m., $\omega = 200\pi$ (6000 apgr./min.); $\omega_1 = 0{,}2$ (6 apgr./min).

Uziet: L.

$$L = J\omega.\omega_1 = \frac{Q}{g}\rho^2.\omega_6.\omega_k = \frac{2}{9{,}81}\,1.0{,}2\pi.200\pi = 80 \text{ ton.mtr.}$$

<u>Zemes lodes griezes kustības iespaids uz žiroskopu ar 2 un 3 kustības brīvībām.</u>

Kā jau agrāk bija noskaidrots, žiroskopisko momentu veido Coriolisa inerces spēki. Coriolisa inerces spēki nāk priekšā tikai tad, ja bez relatīvas kustības ir vēl pārnesama griezes kustība, jo pie pārnesamas virzes kustības, kā zinams, Coriolisa paātrinājums līdzinājās nullei.



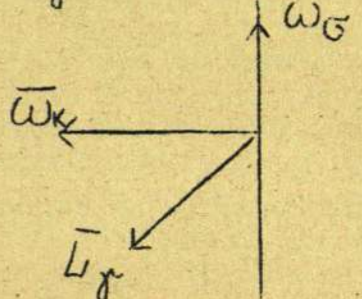
zīm.102.

Pārnesamas griezes kustības vektors $\bar{\omega}_k$ var ieņemt dažādus stāvokļus atticcībā pret relatīvas griezes kustības vektoru $\bar{\omega}_G$. Apskatīsim divus pamatgadijumus:

1) $\bar{\omega}_k$ sakrīt ar $\bar{\omega}_G$, tad, kā redzams zīm. 102., Coriolisa paātrinājumi un inerces spēki krustojas ar žiroskopa asi un nekādu momentu nedod. Tas pats ir redzams arī no formulas:

$$\bar{L}_\gamma = J\left[\bar{\omega}_G . \bar{\omega}_k\right] \qquad \text{(110a)}$$

ja vektori $\bar{\omega}_G$ un $\bar{\omega}_k$ ir parallēli, tad $\left[\bar{\omega}_G . \bar{\omega}_k\right] = 0$ un līdz ar to arī $L_\gamma = 0$.



zīm.102a.

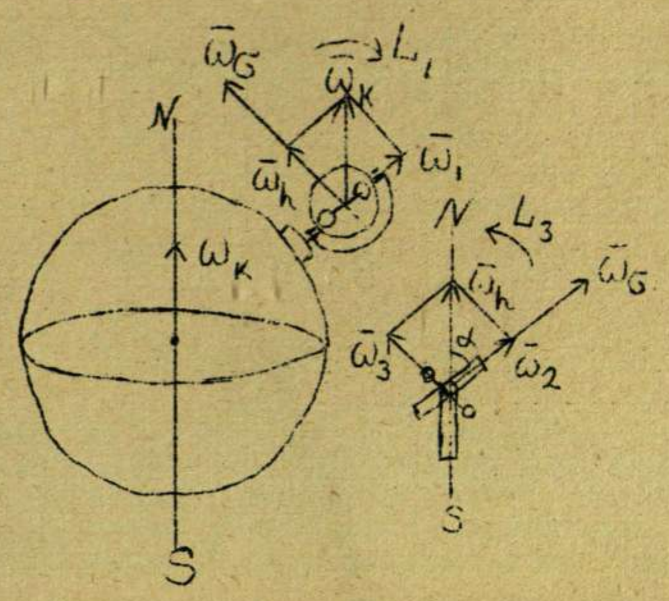
2) $\bar{\omega}_k \perp \bar{\omega}_G$ pārnesamas griezes kustības vektors $\bar{\omega}_k$ ir perpendikulārs relatīvas griezes kustības vektoram $\bar{\omega}_G$. Šinī gadijumā tieši formula (110a) dod žiroskopiska momenta vektora $\bar{L}_\gamma$ virzienu, sk. zīm. 102a, Ja žiroskops ar 2 jeb 3 kustības brīvībām ir uzstādīts kaut kur uz zemes lodes, tad zemes lodes griezes kustība, kā pārnesama griezes kustība dos žiroskopisko momentu, kas var pagriezt žiroskopu, ja tam būs

attiecīga kustības brīvība.

Lai noskaidrotu, kādā virzienā zemes lodes griezes kustība izsauks žiroskopa kustību, mēs arvien iedomāsimies zemes lodes griezes kustību pārnestu uz paralēlo asi caur žiroskopa centru. Kā zinams, pie griezes kustības pārnešanas uz paralēlo asi jāliek klāt vēl virzes kustība ar ātrumu, kas līdzinājas pārnestam griezes ātrumam, reizinātam ar asu attālumu, bet pārnesama virzes kustība Coriolisa paātrinājumu nedod, tā tad arī neizsauks žiroskopisko momentu un mēs varam aprobežoties tikai ar pārnesto zemes lodes griezes kustību.

Tālāk apskatīsim vairākus gadijumus.

I gadijums: žiroskopam ir divas kustības brīvības un žiroskopa ass var griezties tikai horicontālā plaknē.



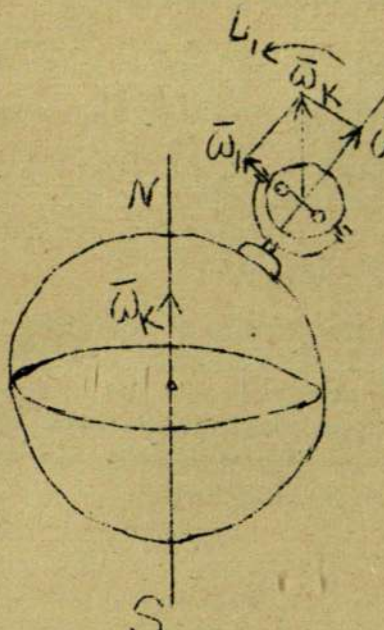
zīm.103. zīm. zīm.103a.

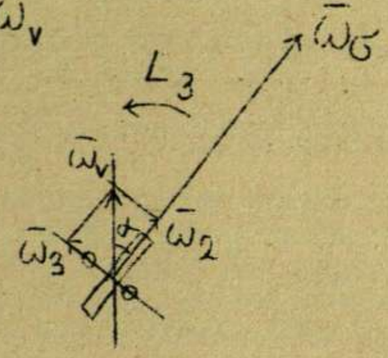
Pieņemsim, ka sākumā žiroskopa relatīvā griezes ass nesakrīt ar meridiana plakni, bet veido ar to $\angle\alpha$. Pārnesīsim zemes lodes griezes ātruma vektoru $\bar{\omega}_k$ uz žiroskopa centru un sadalīsim to pirmkārt divās komponentēs, vertikalā ω_1, kuŗa sakrīt ar žiroskopa rāmja griezes asi, un horicontālā komponentē ω_h, kā tas parādīts zīm.103. Vektoru ω_h sadalīsim tālāk vēl divās komponentēs $\bar{\omega}_2$, kas sakrīt ar žiroskopa relatīvo griezes asi un $\bar{\omega}_3$ perpendikulāri pret $\bar{\omega}_2$, kā parādīts zīm.103a.

Apskatot tagad katru pārnesamās griezes kustības komponenti atsevišķi, redzam, ka $\bar{\omega}_2$ sakrīt ar $\bar{\omega}_G$ un tamdēļ žiroskopisko momentu neizsauc. Tālāk $\bar{\omega}_1$ dod žiroskopisko momentu $\bar{L}_1 = J[\bar{\omega}_G.\bar{\omega}_1]$ (sk.zīm.103) ap asi perpendikulāru vektoriem $\bar{\omega}_G$ un $\bar{\omega}_1$. Šo momentu uzņem rāmja griezes ass gultnes un tas izsauc šinīs gultnēs dinamiskas reakcijas. Beidzot $\bar{\omega}_3$ dod žiroskopisko momentu $\bar{L}_3 = J[\bar{\omega}_G.\bar{\omega}_3]$ (sk.zīm.103a), kas cenšas pagriezt žiroskopa griezes asi ar rāmi meridiana virzienā. Bet tikko žiroskopa griezes ass būs nonākuse meridiana plaknē, kā komponente $\omega_3 = 0$, jo tad abi vektori $\bar{\omega}_G$ un ω_k atradīsies meridiana plaknē, un līdz ar to arī $\bar{L}_3 = 0$, tā tad žiroskopa griezes ass paliks meridiana plaknē.

Šo apstākli izlieto kugu kompasa konstrukcijai, jo modernos kugos lielās dzelzs masas un arī elektriskās strāvas dažādos vados stipri traucē magnetadatas pareizo darbību. Pie žiroskopiska kompasa konstruēšanas jāņem vērā, ka zemas lodes griezes ātrums ω_k pēc lieluma ir diezgan mazs: $\omega_k = 0{,}0000729$ sec^{-1}, tamdēļ, lai dabūtu ievērojamu momentu L_3, kas varētu pārvarēt berzes un gaisa pretestību un ātrāk iestādīt žiroskopa griezes asi meridiana plaknē, jāņem lielāku ω_G. Praksē šādiem žiroskopiem ar elektromotora palīdzību dod apmēram 20000 apgr./min. un tad $\omega_G = 666\,\pi$ sec^{-1}

<u>II gadijums:</u> žiroskopam arī ir divas kustības brīvības, bet žiroskopa ass var griezties tikai vertikalā plaknē ap horicontālu asi, kuŗa ir iestādīta meridiana plaknē.

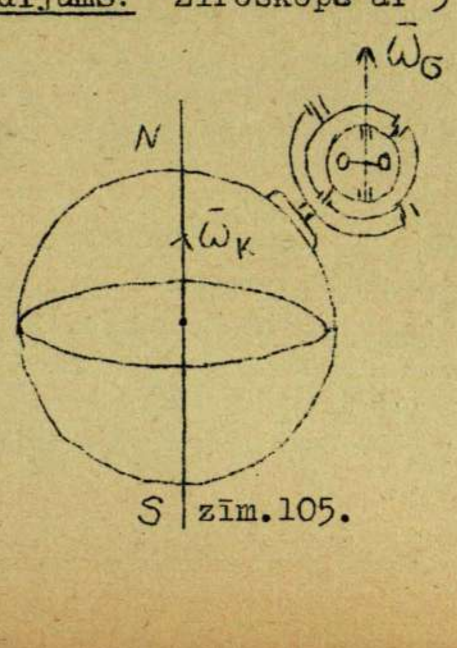




zīm.104. zīm.104a.

Pieņemsim, ka sākumā žiroskopa relatīvā griezes ass nesakrīt ar vertikalo virzienu, bet veido leņķi α ar to. Atkal pārnesīsim zemes lodes griezes kustības vektoru ω_k uz žiroskopa centru un sadalīsim šo vektoru divās komponentēs ω_1, kuŗa sakrīt ar rāmja griezes asi un ω_v vertikalā virzienā, kā parādīts zīm.104. Vektoru ω_v sadalīsim tāļāk vēl divās komponentēs ω_2, kas sakrīt ar žiroskopa relatīvo griezes asi un $\bar{\omega}_3$ perpendikulāri pret $\bar{\omega}_2$, kā parādīts zīm.104a. Apskatot katru pārnesamās griezes kustības komponenti atsevišķi, atkal konstatējam, ka $\bar{\omega}_2$, kas sakrīt ar relatīvā griezes ātruma vektoru $\bar{\omega}_G$, žiroskopisku momentu nedod. Komponente $\bar{\omega}_1$ dod žiroskopisko momentu $\bar{L}_1 = J[\bar{\omega}_G.\bar{\omega}_1]$ (skat. zīm.104) ap asi perpendikulāru vektoriem $\bar{\omega}_G$un $\bar{\omega}_1$; šo momentu uzņem rāmja griezes ass gultnes un tas izsauc šinīs gultnēs dinamiskas reakcijas, bet uz žiroskopa kustību nekādu iespaidu neatstāj. Beidzamā komponente $\bar{\omega}_3$ dod žiroskopisko momentu $\bar{L}_3 = J[\bar{\omega}_G.\bar{\omega}_3]$ (sk.zīm.104a), kas cenšas pagriez žiroskopa griezes asi vertikalā virzienā. Bet tiklīdz žiroskopa griezes ass būs nonākusi vertikalā stāvoklī, ka komponente ω_3 izzūd: $\omega_3 = 0$ un līdz ar to arī izzūd moments $L_3 = 0$. Tālāk tā tad žiroskopa griezes ass paturēs vertikalu virzienu.

<u>III gadijums:</u> Žiroskops ar 3 kustības brīvībām.



zīm.105.

Nostādot kaut kur uz zemes lodes žiroskopu ar 3 kustības brīvībām, jānāk pie slēdziena, ka žiroskopa griezes ass galu galā nostādīsies parallēli zemes lodes griezes asij, jo tikai tad žiroskopiskais moments L_γ, kā tas redzams no formulas(110a), līdzināsies nullei

$$L_\gamma = J[\bar{\omega}_G.\bar{\omega}_k] \quad ....(110a)$$

Ja sākumā žiroskopa griezes ass nebūs parallēla zemes lodes griezes asij, tad, prātojot tāpat kā I-mā un II-ā gadijumā, atradīsim, ka radīsies žiroskopiskais moments, kas novedīs žiroskopa asi stāvoklī paralleli zemes lodes griezes asij.

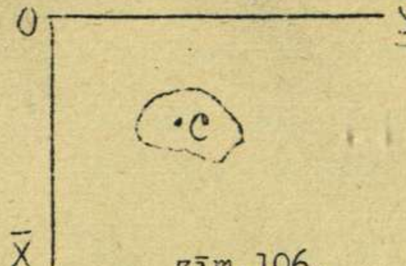
Augšā aprakstīto zemes lodes griezes kustības iespaidu uz žiroskopu, kuŗu varam pārbaudīt eksperimentāli, var skaitīt par pierādījumu, ka tiešam zemes lode atrodas griezes kustībā.

§ 14. CIETA ĶERMEŅA KUSTĪBAS DIFERENCIĀLNOL-MI:

I. plaknes kustībā,
II. kustībā ap nekustošu punktu,
III. brīvā kustībā.

I. Kustības dif-nol-mi ķermeņa plaknes kustībā.

Ķermeņa plaknes kustībā visiem punktiem trajektorijas atrodas parallēlās plaknēs. Vienu no šīm plaknēm un proti to, kuŗa iet caur smaguma centru, izvēlēsim par koordinātu plakni $\overline{XY}$, tad ķermeņa šķēliens atradīsies komplanā kustībā $\overline{XY}$ plaknē. Komplanās kustības noteikumi, acīmredzot, būs $V_z = 0$, $L_x = 0$, $L_y = 0$ un $z_c = 0$, $\dot{z}_{ko} = 0$. Šie noteikumi izsaka, ka visiem ārējiem spēkiem un reakcijām jāpievedas pie viena kopspēka, jeb spēku pāra, kas atrodas $\overline{XY}$ plaknē un bez tam visiem punktiem sākuma ātruma projekcijai uz Z asi jālīdzinājas nullei.



zīm.106.

Ar šiem noteikumiem ķermenim ir atņemtas 3 kustības brīvības, paliek tad vēl 3, ar kuŗām būs noteikta ķermeņa plaknes kustība. Sastādīsim attiecīgis dif-nol-mus

$$\left.\begin{aligned} &1)\ M\ddot{x}_c = V_x \\ &2)\ M\ddot{y}_c = V_y \\ &3)\ \frac{d\ell_{cz}}{dt} = L_z^c \qquad \text{jeb} \qquad J_c \tau = L_z^c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(112)$$

Bez tam, lai varētu šos dif-nol-mus integrēt, jāzin sākuma apstākļi.

Speciāls gadijums. Lai plaknes kustība būtu virzes kustība, tad, bez augšā minētiem noteikumiem, jābūt vēl $L_z^c = 0$ un $\omega_{xyo} = 0$

II. Kustības dif-nol-mi ķermeņa kustībā ap nekustošu punktu.

Šinī gadijumā koordinātu sistema jāizvēl caur nekustošu punktu. Ķermenim ir 3 kustības brīvības: griezes ap 3 asīm un kustības dif-nol-mus dabūsim, ņemot kustības daudzuma momenta teoremu ap 3 koordinātu asīm.

$$\frac{d\ell_x}{dt} = L_x \quad , \quad \frac{d\ell_y}{dt} = L_y \quad , \quad \frac{d\ell_z}{dt} = L_z \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(113)$$

Šinīs nol-mos momentu izteiksmēs L_x, L_y un L_z ieiet tikai ārējie spēki, jo ārējās reakcijas iet caur nekustošu punktu. Formulas (113) var vēl pārveidot, ievērojot, ka ķermenim

$$\frac{d\ell_x}{dt} = \frac{d}{dt}(J_x\omega_x) \ , \ \frac{d\ell_y}{dt} = \frac{d}{dt}(J_y\omega_y) \ , \ \frac{d\ell_z}{dt} = \frac{d}{dt}(J_z\omega_z)$$

Ja X,Y un Z ass ir nekustošas un ķermenis kustas ap koordinātu sākumu, tad J_x, J_y un J_z ar laiku mainas un tos no diferenciāliem iznest laukā nevar.

Kustības dif-nol-mu otrs veids būs:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(J_x\omega_x) = L_x\ , \quad \frac{d}{dt}(J_y\omega_y) = L_y \quad \text{un} \quad \frac{d}{dt}(J_z\omega_z) = L_z} \quad \ldots\ldots(113a)$$

Integrējot šos dif-nol-mus pirmo reizi, dabūsim

$$\omega_x\ ,\ \omega_y \ \text{un}\ \omega_z$$

un pēc otrreizējas integrēšanas arī: $\varphi_{yz}, \varphi_{zx}$ un φ_{xy}. Lai dabūtu reakcijas projekcijas, mēs varam izlietot inerces centra kustības nol-mus, kuŗi izteiksies tā:

$$M\ddot{x}_c = V_x^a + S_x$$

$$M\ddot{y}_c = V_y^a + S_y$$

$$M\ddot{z}_c = V_z^a + S_z$$

Šinīs nol-mos vēl jāizsaka $\ddot{x}_c$, $\ddot{y}_c$ un $\ddot{z}_c$ caur attiecīgiem ω un τ, kuŗi jau būs zināmi un pēc tam var atrast reakcijas: S_x, S_y un S_z.

III. Kustības dif-nol-mi ķermeņa brīvā kustībā.

Brīvā kustībā ķermenim ir 6 kustības brīvības, ķermeņa stāvokli telpā var noteikt ar 6 lielumiem un proti ar kāda punkta, piemēram inerces centra, 3 koordinātēm un 3 leņķiem, kuŗus veido kustošās asis ar nekustošām.

Sakarā ar šo, ķermeņa brīvo kustību arī varēs noteikt ar 6 kustības dif-nol-miem: 3 inerces centra kustības nol-miem un 3 kustības daudzuma momenta nol-miem ap centrālām asīm:

$$\boxed{\begin{array}{l} M\ddot{x}_c = V_x \\ M\ddot{y}_c = V_y \\ M\ddot{z}_c = V_z \end{array}} \qquad \left.\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d\ell_{cx}}{dt} = L_x^c \\ \dfrac{d\ell_{cy}}{dt} = L_y^c \\ \dfrac{d\ell_{cz}}{dt} = L_z^c \end{array}}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(114)$$

No sešām kustības brīvībām vienu daļu var atņemt, bet ne vairāk kā 5. Pie vienas kustības brīvības ar vienu vienīgu nol-mu, lietojot Lagrang'a koordinātes, var noteikt kustību un no pārējiem nol-miem var atrast reakcijas.

Nol-mus (114) cietam ķermenim var uzrakstīt vēl citā veidā, pie kam pirmie 3 nol-mi paliek tie paši:

$$\boxed{\begin{array}{l} M\ddot{x}_c = V_x \\ M\ddot{y}_c = V_y \\ M\ddot{z}_c = V_z \end{array}} \qquad \left.\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}(J_x^c.\omega_x) = L_x^c \\ \dfrac{d}{dt}(J_y^c.\omega_y) = L_y^c \\ \dfrac{d}{dt}(J_z^c.\omega_z) = L_z^c \end{array}}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots(114a)$$

Vēl viena brīvas kustības interpretācija.

Dažreiz nav izdevīgi brīvo kustību sadalīt inerces centra C kustībā un kustībā ap inerces centru. Tad mēs varam brīvo kustību uzskatīt kā skrūves kustību, kuŗa sastādās no virzes kustības gar asi un griezes kustības ap skrūves asi. Sadalīsim katru no šīm kustībām 3 komponentēs pa $\bar{X}$, $\bar{Y}$ un Z asīm, tad mēs atkal dabūsim 6 nol-mus. Pie kam pirmie 3 nol-mi atkal būs tie paši, jo virzes kustībā visiem punktiem paātrinājumi ir vienādi. Otrie 3 nol-mi atšķiras no form.(114) ar to, ka šeit $\bar{X}$,$\bar{Y}$ un Z asis neiet caur inerces centru.

$$M\ddot{x}_c = V_x \qquad \frac{d}{dt}(J_x\omega_x) = L_x$$

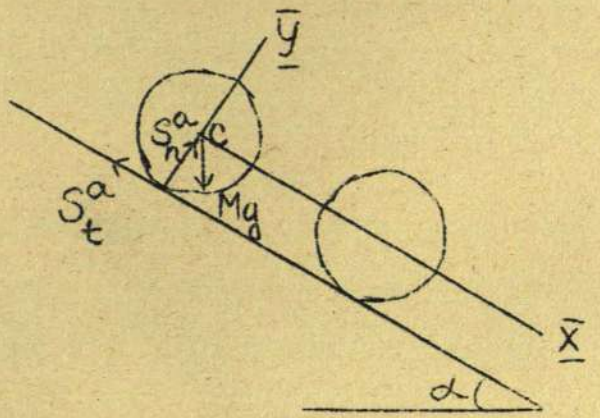
$$M\ddot{y}_c = V_y \qquad \frac{d}{dt}(J_y\omega_y) = L_y$$

$$M\ddot{z}_c = V_z \qquad \frac{d}{dt}(J_z\omega_z) = L_z$$

Speciāls gadijums. Apskatītā brīvā kustība būs virzes kustība tad, ja galvenais moments L = 0 un sākumā nav griezes: $\omega_o = 0$. Šīs kustība tad būs noteikta ar nol-miem

$$M\ddot{x}_c = V_x \ , \quad M\ddot{y}_o = V_y \quad \text{un} \quad M\ddot{z}_c = V_z$$

Piemērs uz ķermeņa plaknes kustību. Apskatīsim smaga homogena cilindra kustību zem paša svara iespaida no negludās slīpās plaknes, kuŗa veido ar horicontu $\angle\alpha$. Cilindra radiusu apzīmēsim ar R, sākumā tas atrodas mierā. Vilksim vertikalu plakni caur cilindra smaguma centru perpendikularu cilindra asij, kuŗa kustības laikā paliek horicontāla. Šinī plaknē ņemsim $\bar{X}$ asi paralēli slīpai plaknei un $\bar{Y}$ asi perpendukulāri slīpai plaknei caur smaguma centra sākuma stāvokli. Pēc form.(112) sastādīsim cilindra kustības dif-nol-mus:



zīm.107.

$$M\ddot{x}_c = V_x \quad \text{un mūsu gadijumā} \quad 1)\ M\ddot{x}_c = Mg\sin\alpha - S_t^a$$

$$M\ddot{y}_c = V_y \quad \text{"} \quad 2)\ M\ddot{y}_c = -MgCos\alpha + S_n^a$$

$$J_z^c\ddot{\varphi} = L_z^c \quad \text{"} \quad 3)\ J_z^c\ddot{\varphi} = -S_t^a.R$$

Pēdējā nol-mā jāņem (-) zīme tamdēļ, ka moments L_z^c darbojas pulksteņrādītāja virzienā. Atrastos 3 nol-mos ir 5 nezināmie: x_c, y_c, φ, S_n^a, S_t^a, tā tad trūkst vēl 2 nol-mi. Ceturto nol-mu dabūsim konstatējot, ka $y_c = 0$, 4) $y_c = 0$

Bet, lai dabūtu piekto nol-mu, jāatšķir divi gadijumi.

I gadijums: cilindrs veļās bez slīdes. Piekto nol-mu dabūsim, pielīdzinot inerces centra noietto ceļu x_c notītam lokam R.φ, bet, ievērojot, ka pie cilindra velšanās uz leju cilindrs griežas pulksteņrādītāja virzienā, leņķis φ jāskaita negatīvi

$$5)\ x_c = -R.\varphi$$

Šinī gadijumā berzes spēks tad būs: $S_t^a \leqslant \mu S_n$. No 2) nol-ma dabūsim reakciju: $\boxed{S_n^a = MgCos\alpha}$,jo $\ddot{y}_c = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ M\ddot{x}_c = MgSin\alpha - S_t^a \\ 3)\ J_z^c\ddot{\varphi} = -S_t^a.R \end{array}\right\}\ \text{izslēgsim no šiem nol-miem } S_t^a \text{ un ieliksim } J_z^c = \frac{1}{2}MR^2$$

$$3)\ \frac{1}{2}MR^2\ddot{\varphi} = -S_t^a.R \quad \text{no kurienes } S_t^a = -\frac{1}{2}MR\ddot{\varphi}$$

$$1)\ M\ddot{x}_c = MgSin\alpha + \frac{1}{2}MR\ddot{\varphi} \quad \text{bet } x_c = -R\varphi \quad \text{un} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{1}{2}\ddot{x}_c$$

$$1)\ M\ddot{x}_c = MgSin\alpha - \frac{1}{2}M\ddot{x}_c \quad \text{no kurienes:} \quad \ddot{x}_c = \frac{2}{3}g.Sin\alpha$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\frac{gSin\alpha}{R}$$

Abos dif-nol-mos labās puses ir Const., kas nozīmē, ka inerces centra kustība būs vienmērīgi paātrināta un cilindra grieze arī būs vienmērīgi paātrināta.

Integrējot pirmo dif-nol-mu, dabūsim

$$\dot{x}_c = \frac{2}{3}gt.Sin\alpha + C_1\ ,\ \text{bet } \dot{x}_{co} = 0,\ \text{tā tad } C_1 = 0$$

$$x_c = \frac{2}{3}\frac{gt^2}{2}Sin\alpha + C_2,\ \text{bet } x_{co} = 0,\ \text{tā tad } C_2 = 0,\ \text{un}$$

$$x_c = \frac{1}{3}gt^2Sin\alpha$$

no 5. nol-ma
$$\varphi = -\frac{1}{3}\frac{gt^2Sin\alpha}{R}$$

Ar šiem nol-miem ir izteikta inerces centra kustība un kustība ap inerces centru, kā funkcijas no laika.

Uziesim vēl berzes spēku no 1) nol-ma: $S_t^a = MgSin\alpha - M\ddot{x}_c$

$$S_t^a = MgSin\alpha - \frac{2}{3}MgSin\alpha\ ;\quad S_t^a = \frac{1}{3}MgSin\alpha$$

Izlietojot sakaru $S_t^a \leqslant \mu S_n^a$, dabūsim $\frac{1}{3}MgSin\alpha \leqslant \mu.MgCos\alpha$,no kurienes $\frac{1}{3}tg \leqslant \mu$ jeb $tg\alpha \leqslant 3\mu$. Tas nozīmē, ka cilindra tīra velšanas kustība notiek tad, ja slīpuma leņķa tangens ir mazāks jeb robežas gadijumā ir vienāds ar trīskārtīgo berzes koeficientu.

<u>II gadijums:</u> cilindrs slīd un veļās tā, lai arvien būtu izpildīts noteikums: 5) $S_t^a = \mu S_n^a$. Šis noteikums būs piektais nol-ms,jo tagad acīmredzot $x_c > |R\varphi|$ .Tāpat kā iepriekšējā gadijumā, atrodam no 2) nol-ma reakciju $S_n^a = MgCos\alpha$,jo $\ddot{y} = 0$. Izlietojot nol-mu 5) $S_t^a = \mu S_n^a$, atrodam $S_t^a = \mu.Mg.Cos\alpha$.Ņemot 1)$M\ddot{x}_c = MgSin\alpha - S_t^a$,

$M\ddot{x}_c = MgSin\alpha - \mu.MgCos\,\alpha$, dabūsim $\boxed{\ddot{x}_c = g.Cos\alpha(tg\,\alpha - \mu).}$

Šis nol-ms rāda, ka kustība var sākties no miera stāvokļa tikai tad, ja $tg\alpha > \mu$, pie kam kustība būs vienmērīgi paātrināta.

Ņemot 3) $J.\ddot{\varphi} = - S_t^a.R$ pēc pārveidošanas $\frac{1}{2}MR^2.\ddot{\varphi} = -\mu.MgCos\alpha.R$,

atrodam $$\ddot{\varphi} = -\frac{2\mu g.Cos\alpha}{R}$$

Tālāk integrēsim abus dif-nol-mus:

$\dot{x}_c = gt.Cos\alpha(tg\alpha - \mu) + C_1$, bet $\dot{x}_{co} = 0$, tā tad arī $C_1 = 0$

$\dot{\varphi} = \frac{2\mu gt.Cos\alpha}{R} + C_2$, bet $\dot{\varphi}_0 = 0$, tā tad arī $C_2 = 0$ un pēc otras integrēšanas atrodam:

$x_c = \frac{gt^2}{2} Cos\alpha(tg\alpha - \mu) + C_3$, bet $x_{co} = 0$, tā tad arī $C_3 = 0$

$\varphi = -\frac{\mu gt^2 Cos\alpha}{R} + C_4$, bet $\varphi_0 = 0$, tā tad arī $C_4 = 0$

Galīgā veidā cilindra kustības nol-mi:

$$\boxed{x_c = \frac{gt^2}{2} Cos\alpha(tg\alpha - \mu)}$$
$$\boxed{\varphi = \frac{\mu gt^2 Cos\alpha}{R}}$$

pie kam pirmais nol-ms dod inerces centra kustību un otrais kustību ap inerces centru.

Sākumā bija minēts, ka šinī gadijumā

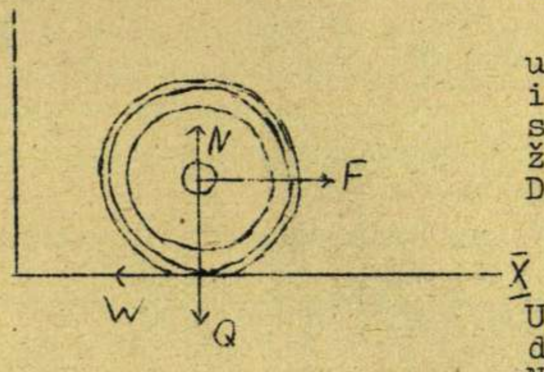
$$x_c > |R\varphi|$$

kur jāņem pēc absolūtā lieluma $\frac{gt^2}{2} Cos\alpha(tg\alpha - \mu) > \frac{\mu gt^2 Cos\,\alpha}{R} R$

$$tg\alpha - \mu > 2\mu \quad \text{jeb} \quad tg\alpha > 3\mu$$

Cilindra slīde ar velšanos notiek tad, kad slīpuma leņķa tangens ir lielāks par trīskārtīgo berzes koeficientu.

Piemērs uz ķermeņa plaknes kustību: Riteņa kustība uz sliedēm,



zīm.108.

I.gadijums: Kustība zem spēka iespaida.

Riteņu pāris atrodas mierā uz horicontālām sliedēm. Uz asi iedarbojas horicontālā virzienā spēks F. Noskaidrot spēka F robežas vērtību tā, lai nebūtu slīdes. Doti: Q - riteņu pāra svars,
R - riteņa radiuss,
ρ - riteņa inerces radiuss,
μ = berzes koeficients.

Uz riteņu pāri vēl darbojas sliedes reakcija N un berzes spēks W. Ņemsim dif-nol-mus (112):

1) $M\ddot{x}_c = V_x$ mūsu gadijumā 1) $M\ddot{x}_c = F - W$

2) $M\ddot{y}_c = V_y$ " 2) $M\ddot{y}_c = N - Q$

3) $J_z^c \tau = L_z^c$ " 3) $J_z^c \tau = -WR$

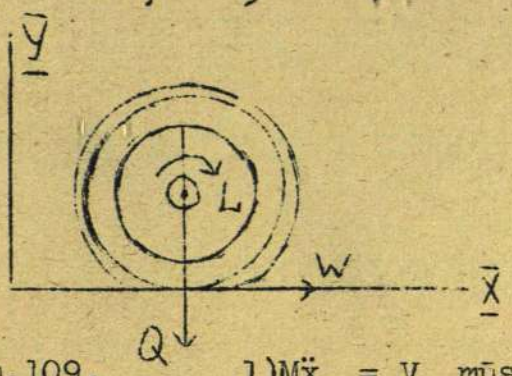
Pirmkārt konstatējam, ka $y_c = R$ un $\ddot{y}_c = 0$ un tad no 3) nol-ma atrodam, ka $N = Q$. Ja nav slīdes, tad $x_c = -R\varphi$ un $W \leqslant \mu N$ jeb $W \leqslant \mu Q$ $\ddot{x}_c = -R\tau$ un $J_z^c = M\rho^2$ ievietosim šo dif-nol-mos

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ -MR\tau = F - W \\ 3)\ M\rho^2\tau = -WR \end{array}\right\}$$ izdalīsim abus nol-mus $\frac{R}{\rho^2} = \frac{F - W}{WR}$ jeb

$WR^2 = F\rho^2 - W\rho^2$ no kurienes $W = \frac{F\rho^2}{R^2 + \rho^2}$, bet $W \leqslant \mu Q$, tā tad

$\frac{F\rho^2}{R^2 + \rho^2} \leqslant \mu Q$, no kurienes $\boxed{F \leqslant \mu Q(1 + \frac{R^2}{\rho^2})}$. Uziesim F skaitliski, ja

$Q = 8000$kg, $\rho^2 = \frac{2}{3}R^2$ un $\mu = 0,3$; $F \leqslant 0,3.8000(1 + \frac{3}{2})$; $F \leqslant 6000$kg



zīm.109.

II gadijums: kustība zem momenta iespaida. Riteņu pāris atrodas mierā uz horicontālām sliedēm. Uz asi iedarbojās moments L. Uziet momenta lielumu tā, lai nenotiktu slīde. Doti tie paši lielumi: Q, R, ρ un μ. Apzīmēsim normālo reakciju ar N un berzes spēku, kas ir virzīts pretīm aktīvam momentam L ar W. Pielietosim atkal dif-nol-mus (112):

1) $M\ddot{x}_c = V_x$ mūsu gadijumā 1) $M\ddot{x}_c = W$

2) $M\ddot{y}_c = V_y$ " 2) $M\ddot{y}_c = N - Q$

3) $J_z^c\tau = L_z^c$ " 3) $J_z^c\tau = -L + W.R$

Tāpat kā agrāk: $y_c = R$, $\ddot{y}_c = 0$, no 2) nol-ma $N = Q$. Ja nav slīdes, arī šeit $x_c = -R\varphi$ un $W \leqslant \mu N$ jeb $W \leqslant \mu Q$; $\ddot{x}_c = -R\tau$ un $J_z^c = M\rho^2$, ievietosim šo dif-nol-mos:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ -MR\tau = W \\ 2)\ M\rho^2\tau = -L + WR \end{array}\right\}$$ izdalīsim abus nol-mus $-\frac{R}{\rho^2} = \frac{W}{-L + WR}$ jeb

$RL - WR^2 = W\rho^2$, no kurienes $W = \frac{RL}{R^2 + \rho^2}$, bet $W \leqslant \mu Q$, tā tad

$\frac{RL}{R^2 + \rho^2} \leqslant \mu Q$, no kurienes $\boxed{L \leqslant \mu QR(1 + \frac{\rho^2}{R^2})}$

Uziesim F skaitliski, ja $Q = 20000$ kg., $\rho^2 = \frac{2}{3}R^2$, $\mu = 0,3$ un $R = 0,8$ mt.

$L \leqslant 0,3.20000.0,8(1 + \frac{2}{3})$, $L \leqslant 8000$ kg/mt.

§ 15. LAGRANG'A SAISTĪTAS SISTEMAS KUSTĪBAS DIF-NOL-MI OTRĀ FORMĀ.

Spara izteiksme Lagrang'a koordinātēs.

Lagrang'a jeb vispāroto koordinātu jēdziens bija jau agrāk noskaidrots, apzīmēsim tās ar: $q_1, q_2, q_3 \ldots$

Ja sistemā ir h saites, tad kustības brīvības būs $3n-h$ un Lagarnga koordinātu skaits $s = 3n-h$.

Parasti sistemas stāvokļa noteikšanai mēs lietojam Dekarta koordinātes un, ja saites ir skleronomas, mēs varam Dekarta koordinātes arī izteikt skleronomi, t.i. bez laika palīdzības, caur Lagrang'a koordinātēm.

$$x_k = f_x(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s)$$

$$y_k = f_y(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s)$$

$$z_k = f_z(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s)$$

Ātrumu projekcijas tad dabūsim atvasinot šīs funkcijas pēc laika

$$\dot{x}_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

$$\dot{y}_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial y_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

$$\dot{z}_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial z_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

Lielumus $\dot{q}_1 \dot{q}_2 \dot{q}_3 \ldots \dot{q}_s$ sauksim par vispārotiem ātrumiem un, kā rāda atrastās formulas, punktu ātrumā projekcijas ir lineāras funkcijas no vispārotiem ātrumiem.

Ņemsim tagad spara jeb kinētiskas energijas formulu

$$K = \sum_1^n \frac{m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_1^n m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2)$$

un aizvietosim šeit x_k, y_k, z_k ar atrastās izteiksmēm caur Lagrang'a koordinātēm, tad vispārīgi kinētiska energija būs kāda otrās kāpes homogena funkcija no vispārotiem ātrumiem

$$K = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + a_{ss}\dot{q}_s^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \ldots + 2a_{23}\dot{q}_2\dot{q}_3 + \ldots + 2a_{(s-1)s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s \quad \ldots\ldots(115)$$

Darba izteiksme Lagrang'a koordinātēs.

Izteiksim sistemas virtuelo darbu:

$$\delta \mathcal{A} = \sum_1^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k)$$

caur Lagrang'a koordinātēm. Dosim sistemai no stāvokļa, noteikta ar koordinātēm $q_1 q_2 q_3 \dots q_s$, kādu virtuelu pārvietojumu, tad šīs koordinātes dabūs kādus mazus pieaugumus δq_1, δq_2, $\delta q_3 \dots \delta q_s$. Tā kā Dekarta koordinātes ir Lagrang'a koordinātu funkcijas, tad arī tās dabūs pieaugumus, kuŗi, atmetot bezgalīgi mazus otras un augstākas kārtas, izteiksies tā:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial x_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{\partial x_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

$$\delta y_k = \frac{\partial y_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial y_k}{\partial q_2} \cdot \delta q_2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{\partial y_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

$$\delta z_k = \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \frac{\partial z_k}{q_2} \cdot \delta q_2 + \dots\dots\dots\dots + \frac{\partial z_k}{\partial q_s} \cdot \delta q_s$$

Ieliksim virtuela darba formulā šīs izteiksmes un sakārtosim locekļus pēc δq, ņemot attiecīgus δq_1, δq_2, $\delta q_3 \dots \delta q_s$ aiz iekavām, tad

$$\delta \mathfrak{A} = \delta q_1 \sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_1} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_1} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\right) + \delta q_2 \sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_2} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_2} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_2}\right) + \dots + \delta q_s \sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_s} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_s} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right)$$

Šinī formulā spēku projekcijas X_k, Y_k un Z_k vispārīgi var būt kādas funkcijas no Dekarta koordinātēm, tās atvasinātām un laika, tā tad uzrakstītas summas, pēc Dekarta koordinātu aizvietošanas ar Lagrang'a koordinātēm, būs kādas funkcijas no $q_1, q_2, q_3 \dots q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3 \dots \dot{q}_s t$. Apzīmēsim šīs funkcijas ar $Q_1\ Q_2\ Q_3 \dots Q_s$, t.i.

$$\sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_1} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_1} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\right) = Q_1$$

$$\sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_3} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_2} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_2}\right) = Q_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_s} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_s} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_s}\right) = Q_s$$

Funkcijas $Q_1 Q_2 Q_3 \dots Q_s$ mēs sauksim par vispārotiem spēkiem, atbilstošiem attiecīgām koordinātēm $q_1 q_2 q_3 \dots q_s$.

Tādā kārtā virtuela darba izteiksme būs:

$$\boxed{\delta \mathfrak{A} = \sum_1^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots Q_s \delta q_s} \quad \dots(116)$$

Ar šīs formulas palīdzību noskaidrojas vispārota spēka jēdziens: vispārotais spēks ir koeficients pie attiecīgas koordinātes darba pieauguma izteiksmē.

No sacītā seko, ka vispāroto spēku Q_1 varam atrast, dodot sistemai tādu virtuelo pārvietojumu, pie kuŗa mainās tikai koordināte q_1 un izdalot virtuela darba izteiksmi $\delta\mathfrak{A}$ caur δq_1.

Ja mainās tikai koordināte q_1, tad $\delta\mathfrak{A} = Q_1.\delta q_1$ un $Q_1 = \frac{\delta\mathfrak{A}}{\delta q_1}$

Piemērs. Pieņemsim, ka viena no cieta ķermeņa Lagrang'a koordinātēm ir griezes leņķis φ ap kādu asi. Kā zinams, elementārais darbs pie griezes uz leņķi

$$\delta\mathfrak{A} = L.\delta\varphi$$

Izdalot šo ar $\delta\varphi$, dabūsim vispāroto spēku, atbilstošu leņķim φ un tas būs:

$$Q = \frac{L.\delta\varphi}{\delta\varphi} = L$$

moments L attiecībā uz griezes asi.

Piemērs. Ja pieņemsim par vispāroto jeb Lagrang'a koordināti kādu inerces centra koordināti, piemēram x_c, tad elementārais darbs, dodot šai koordinātei virtuelo pieaugumu, būs

$$\delta\mathfrak{A} = V_x.\delta x_c$$

Izdalot šo ar δx_c, dabūsim vispāroto spēku:

$$Q = \frac{V_x . \delta x_c}{\delta x_c} = V_x$$

kas šinī gadijumā ir galvenā vektora projekcija uz $\overline{X}$ asi.

Vispāroto spēku izteiksme, ja sistemai piemīt funkcija.

Sistemas spēku funkcija jeb potenciāls vispārīgi ir koordinātu funkcija:

$$U = \Phi\,(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \ldots x_k y_k z_k \ldots x_n y_n z_n)$$

Aizvietojot šinī formulā Dekarta koordinātes ar Lagrang'a koordinātēm, dabūsim:

$$U = f(q_1 q_2 q_3 \ldots\ldots q_s)$$

Pēc formulām (96) spēka projekcijas:

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k} \quad ; \quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k} \quad ; \quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

Ņemsim tagad kādu vispārotu spēku, piemēram:

$$Q_1 = \sum_1^n \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_1} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_1} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_1}\right)$$

un ievietosim šeit spēka projekcijas, tad

$$Q_1 = \sum_1^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$$\boxed{Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}} \; ; \; \boxed{Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}} \; ; \ldots \; \boxed{Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}} \qquad \ldots\ldots\ldots(117)$$

Kā redzams, vispārotie spēki ir sistemas spēku funkcijas jeb potenciālas atvasinātās pēc Lagrang'a koordinātēm; pats par sevi saprotams, ka tad spēku funkcijai arī jābūt izteiktai tanīs pašās koordinātēs.

Lagrang'a diferenciālnol-mu izvedums.

Ņemsim galveno dinamikas nol-mu vektoriālā veidā pēc formulas (26):

$$\sum_1^n \left(\bar{F}_k - m_k \frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}, \tilde{\delta}\bar{r}_k\right) = 0$$

Izteiksme iekavās šeit reprezentē skalaro produktu. Pareizināsim skalari katru locekli atsevišķi un vienu produktu pārnesīsim otrā pusē, tad

$$\sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\tilde{\delta}\bar{r}_k\right) = \sum_1^n (\bar{F}_k\tilde{\delta}\bar{r}_k)$$

Labā puse reprezentē sistemas virtuelo darbu $\tilde{\delta}\mathfrak{A}$, kas pēc formulas (116) Lagrang'a koordinātēs izteicās tā:

$$\tilde{\delta}\mathfrak{A} = \sum_1^n (F_k\tilde{\delta}\bar{r}_k) = Q_1\tilde{\delta}q_1 + Q_2\tilde{\delta}q_2 + \ldots + Q_s\tilde{\delta}q_s \quad \text{tad}$$

$$\sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\tilde{\delta}\bar{r}_k\right) = Q_1\tilde{\delta}q_1 + Q_2\tilde{\delta}q_2 + \ldots + Q_s\tilde{\delta}q_s$$

Tagad sāksim kreisās puses pārveidošanu: ja visas Dekarta koordinātes mēs varam izteikt caur Lagrang'a koordinātēm, tad arī katra punkta radiuss vektors būs kāda vektoriāla funkcija no minētām koordinātēm

$$\bar{r}_k = \bar{f}_k(q_1 q_2 q_3 \ldots q_s)$$

Radiusa vektora virtuels pieaugums, atmetot bezgalīgi mazus otrās un augstākās kārtas, būs

$$\tilde{\delta}\bar{r}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\tilde{\delta}q_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\tilde{\delta}q_2 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_3}\tilde{\delta}q_3 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_s}\tilde{\delta}q_s$$

Analogiskā kārtā, atvasinot radiusu vektoru pēc laika, dabūsim punkta A_k ātrumu $\bar{V}_k$:

$$\bar{V}_k = \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_3}\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_s}\dot{q}_s$$

Ieliksim kreisā nol-ma pusē $\tilde{\delta}\bar{r}_k$ vietā atrasto izteiksmi:

$$\sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\tilde{\delta}\bar{r}_k\right) = \sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}\right)\tilde{\delta}q_1 + \sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_2}\right)\tilde{\delta}q_2 + \ldots$$

$$\ldots + \sum_1^n m_k\left(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\cdot\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_s}\right)\tilde{\delta}q_s$$

Pārveidosim pirmo no s summām labā pusē pēc Leibnica:

$\sum_1^n m_k(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}) = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}) - \sum_1^n m_k(\frac{d\bar{r}_k}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1})$. Šeit izdarīsim sekošus aizvietojumus: 1) $\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{V}_k$, 2) $\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial\bar{V}_k}{\partial\dot{q}_1}$ jo atvasinot $\bar{V}_k$ pēc $\dot{q}_1$ dabūsim šo sakaru, 3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial\bar{V}_k}{\partial q_1}$, jo sastādot $\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}$ un atvasinot parciāli $\bar{V}_k$ pēc q_1 dabūsim vienu un to pašu izteiksmi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\bar{r}_{k8}}{\partial q_1\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1\partial q_3}\dot{q}_3 + \ldots + \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1\partial q_s}\dot{q}_s$$

$$\frac{\partial\bar{V}_k}{\partial q_1} = \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1\partial q_3}\dot{q}_3 + \ldots\ldots + \frac{\partial^2\bar{r}_k}{\partial q_1\partial q_s}\dot{q}_s$$

pēc minētiem aizvietojumiem iznāk:

$$\sum_1^n m_k(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\frac{\partial\bar{r}_k}{\partial q_1}) = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k(\bar{V}_k\frac{\partial\bar{V}_k}{\partial\dot{q}_1}) - \sum_1^n m_k(\bar{V}_k\frac{\partial\bar{V}_k}{\partial q_1}) = \frac{d}{dt}\sum_1^n m_k\frac{\partial\frac{V_k^2}{2}}{\partial\dot{q}_1} - \sum_1^n m_k\frac{\partial\frac{V_k^2}{2}}{\partial q_1} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial\sum_1^n\frac{m_kV_k^2}{2}}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial\sum_1^n\frac{m_kV_k^2}{2}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1}$$

Pārveidojot tādā pašā kārtā arī visas citas summas, dabūsim kreiso pusi galīgā veidā:

$$\sum_1^n m_k(\frac{d^2\bar{r}_k}{dt^2}\bar{r}_k) = (\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1})\delta q_1 + (\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial q_2})\delta q_2 + \ldots + (\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s})\delta q_s$$

Pielīdzināsim tagad kreiso pusi labai:

$$(\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1})\delta q_1 + (\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial q_2})\delta q_2 + \ldots + (\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s})\delta q_s =$$

$$= Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots Q_s\delta q_s$$

Bet Lagrang'a koordinātes ir neatkarīgas, tā tad lai šāds nol-ms varētu pastāvēt, tad koeficientām pie neatkarīgiem pārvietojumiem kreisā un labā pusē jābūt vienādiem.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial K}{\partial q_2} = Q_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (113)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} = Q_s$$

Šie nol-mi reprezentē Lagrang'a kustības dif-nol-mus otrā formā. Piezīmēsim, ka šie nol-mi der tikai holonomām sistemām.

Pie pareizas Lagrang'a koordinātu izvēles mēs, kā jau agrāk bija noskaidrots, atsvabinājamies no saitēm un dabūjam kustības dif-nol-mu sistemu, kuŗa nesatur reakcijas.

Gadijums, kad sistemas spēkiem piemīt funkcija.

Ja spēkiem piemīt funkcija, mēs jau zinam pēc form. (117), ka

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}\ ;\ Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2}\ ;\ Q_3 = \frac{\partial U}{\partial q_3} \ \ldots\ldots\ Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

un tad Lagrang'a nol-mus varam pārrakstīt tā:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial K}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial K}{\partial q_s} = \frac{\partial U}{\partial q_s}$$

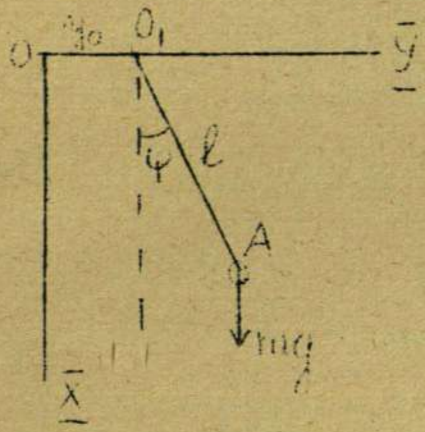
Ņemot vērā, ka spēku funkcija U ir koordinātu funkcija un vispāroto ātrumu nesatur, varam $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}$ aizvietot ar $\frac{\partial (K+U)}{\partial \dot{q}}$. Pārnesot pēc tam visus locekļus vienā pusē un apzīmējot $K + U = L$, dabūsim Lagrang'a nol-mus citā veidā:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ &\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{Lagrang'a dif-nol-mi} \\ \text{otrā formā, kad spē-} \\ \text{kiem piemīt funkcija}\end{array} \quad \ldots (119)$$

Lielumu $L = K + U = K - (-U) = K - \Pi$, kas reprezentē diferenci starp kinētisko un potenciālo energiju, sauc par Lagrang'a funkciju:

$\text{L} = K - \Pi$ Lagrang'a funkcija ....(120)

Piemērs. Ņemsim matemātisku svārstu, kura piekares punkts O_1 arī atrodas svārstīšanas kustībā uz $\bar{Y}$ ass pēc likuma $y_o = a.\text{Sinkt}$. Punktam A šeit ir viena kustības brīvība un par Lagrang'a koordināti izvēlēsim leņķi φ. Punkta A koordinātes:



zīm.110.

$$x = \ell \text{ Cos}\varphi$$

$$y = a.\text{Sinkt} + \ell \text{ Sin}\varphi$$

atvasināsim šīs koordinātes pēc laika:

$$\dot{x} = -\ell \text{ Sin}\varphi.\dot{\varphi}$$

$$\dot{y} = ak \text{ Coskt} + \ell \text{ Cos}\varphi.\dot{\varphi}$$

un sastādīsim kinetiskas energijas izteiksmi:

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}(\ell^2\text{Sin}^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + a^2k^2\text{Cos}^2kt + 2ak\ell\text{Coskt.Cos}\varphi.\dot{\varphi} + \ell^2\text{Cos}^2\varphi.\dot{\varphi}^2)$$

$$K = \frac{m}{2}(\ell^2.\dot{\varphi}^2 + a^2k^2\text{Cos}^2kt + 2ak\ell\text{Coskt.Cos}\varphi.\dot{\varphi})$$

Tagad sastādīsim spēku funkciju:

$$U = \int Xdx + Ydy = \int mg.dx = mgx = mg.\ell.\text{Cos}\varphi.$$

$$\text{L} = K + U = \frac{m}{2}(\ell^2\dot{\varphi}^2 + a^2k^2\text{Cos}^2kt + 2ak\ell.\text{Coskt.Cos}\varphi.\dot{\varphi} + 2g\ell.\text{Cos}\varphi)$$

$$\text{Lagrang'a nol-ms} \quad \frac{d}{dt}.\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Sastādīsim:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{2}(2\ell^2.\dot{\varphi} + 2ak\ell.\text{Coskt.Cos}\varphi) = m(\ell^2\dot{\varphi} + ak\ell.\text{Coskt.Cos}\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m}{2}(-2ak\ell.\text{Coskt.Sin}\varphi.\dot{\varphi} - 2g\ell.\text{Sin}\varphi) = -m(ak\ell.\text{Coskt.Sin}\varphi.\dot{\varphi} + g\ell.\text{Sin}\varphi)$$

Ievietojot šīs izteiksmes Lagrang'a nol-mā, dabūsim

$$m\frac{d}{dt}(\ell^2.\dot{\varphi} + ak\ell.\text{Coskt.Cos}\varphi) + m(ak\ell.\text{Coskt.Sin}\varphi.\dot{\varphi} + g\ell.\text{Sin}\varphi) = 0$$

$$\ell^2\ddot{\varphi} - ak^2\ell \text{ Sinkt.Cos}\varphi - ak\ell\text{Coskt Sin}\varphi.\dot{\varphi} + ak\ell.\text{Coskt.Sin}\varphi.\dot{\varphi} + g\ell.\text{Sin}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\text{ Sin}\varphi + \frac{ak^2}{\ell}\text{ Sin kt.Cos}\varphi$$

Lai dabūtu φ kā f(t), šis dif-nol-ms būtu jāintegrē, kas ir diezgan komplicēti, bet gadijumā, kad leņķis φ nav liels, mēs varam nol-mu vienkāršot, liekot sin $\varphi = \varphi$ un Cos $\varphi = 1$, tad

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{\ell}\varphi + \frac{ak^2}{\ell}\text{ Sin kt}$$

Šis dif-nol-ms ir analogisks uzspiestas svārstīšanas kustības dif-nol-mam: $\ddot{x} = -k^2x + b.\mathrm{Sin}\,pt$, kuŗa integrāls bija:

$$x = a.\mathrm{Sin}(kt + \alpha) + \frac{b}{k^2 - p^2}\mathrm{Sin}\,pt, \text{ tā tad}$$

$$\varphi = A.\mathrm{Sin}(t\sqrt{\tfrac{g}{\ell}} + \alpha) + \frac{ak^2}{\ell(\frac{g}{\ell} - k^2)}\mathrm{Sin}\,kt$$

$$\varphi = A.\mathrm{Sin}(t\sqrt{\tfrac{g}{\ell}} + \alpha) + \frac{ak^2}{g - k^2\ell}\mathrm{Sin}\,kt$$

Ja sākumā pieņemsim, ka $\varphi_o = 0$ un $\dot{\varphi}_o = 0$, tad $\alpha = 0$ un $A = \frac{ak}{\ell - \frac{g}{k^2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Hamiltona princips.

Vēl viens svarīgs mēchanikas princips sistemām ar konservatīviem spēkiem ir Hamiltona princips, kuŗš formulējās tā: variācija no Lagranga funkcijas integrala pēc laika līdzinājās nullei katrā brīvi izvēlētā laika sprīdī.

Formulā šis princips izsakās tā: $\delta\int_{t_o}^{t_1} L.dt = 0$

Iekams mēs pierādīsim šo formulu, atzīmēsim, ka Lagrang'a koordinātes $q_1q_2q_3...q_s$ un vispārotie ātrumi $\dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3...\dot{q}_s$, apskatamā laika sprīža robežās, t.i. no t_o līdz t_1 var brīvi mainīties, bet tikai pašās robežās, t.i. pie $t = t_o$ un $t = t_1$ viņu vērtības būs vienādas ar īstenām vērtībām, tā tad:

$$\left[\delta q\right]_{t=t_o} = 0 \quad \text{un} \quad \left[\delta q\right]_{t=t_1} = 0$$

Lagrang'a funkcija vispārīgi ir:

$$L = \Phi(q_1q_2q_3 \ldots q_s\ \dot{q}_1\dot{q}_2\dot{q}_3 \ldots \dot{q}_s)$$

Sastādīsim δL, atmetot otrās un augstākās kārtas bezgalīgi mazus

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta\dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\delta\dot{q}_2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s$$

bet pēc Lagrang'a nol-miem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0\ , \text{ tā tad } \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}\ , \text{ bez tam arī } \delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q,$$

ievietojot visu šo, dabūsim

$$\delta L = \delta q_1.\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \delta q_2.\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} + \ldots + \delta q_s\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\frac{d}{dt}\delta q_1 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\frac{d}{dt}\delta q_s$$

Savelkot locekļus pa divi pēc Leibnica formulas dabūsim:

$$\delta L = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right]$$

Pareizināsim ar dt un integrēsim robežās no t_o līdz t_1

$$\int_{t_o}^{t} \delta L.dt = \left[\frac{\partial L}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s \right]_{t=t_o}^{t=t_1}$$

Ņemot vērā, ka robežās visi $\delta q = 0$, izteiksme labā pusē arī līdzinājās nullei un

$$\int_{t_o}^{t} \delta L.dt = 0$$

, bet summa no visiem pieaugumiem ir summas jeb integrala pieaugums, tā tad to pašu formulu var pārrakstīt tā:

$$\boxed{\delta \int_{t_o}^{t_1} L.dt = 0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (121)$$

Hamiltona princips tāpat kā Lagrang'a dif-nol-mi form.(119) der tikai konservatīviem spēkiem.

Ķermeņu trieciena teorija.

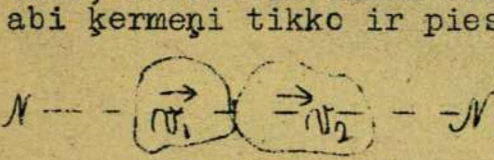
Par triecienu sauc ļoti liela spēka iedarbi uz ķermeni loti īsā laikā. Trieciens ir sasniedzams ar daudziem paņēmieniem, viens no tiem ir: likt diviem ķermeniem kustēties vienā virzienā ar dažādiem ātrumiem, pie kam $V_1 > V_2$, jeb var laist ķermeņus arī pretējos virzienos. Sadursme notiek īsā laikā, bet ātrumi par šo laiku ievērojami mainās, tāpat arī deformācijas ķermenos var būt ļoti lielas.

zīm.111.

Ja ātrumi ir mainijušies īsā laikā, tad tas nozīmē, ka paātrinājumi ir ļoti lieli un arī spēki attīstas ļoti lieli, pie kam spēki mainās sākot no 0 līdz kādai maksimālai vērtībai un no tas atkal līdz 0.

Pie trieciena ļoti lielu lomu spēlē ķermeņu plastiskas un elastīgas īpašības. Visa aina triecienā ir ļoti sarežģīta, bet mēs aprobežosim . . šo jautājumu ar to,ka noteiksim tikai ātrumus pēc trieciena, nepētot nemaz ātruma, paātrinājuma un spēka maiņu ar laiku.

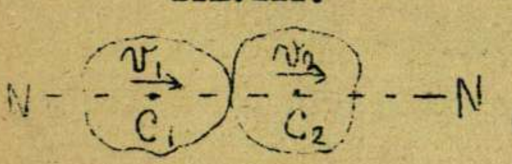
<u>Trieciena gadijumu klasifikācija.</u> Pirmkārt pieņemsim, ka abi ķermeņi atrodas virzes kustībā.Apzīmēsim ķermeņu ātrumus īsi pirms trieciena ar V_1 un V_2. Kā noritēja kustība pirms trieciena mūs neinteresē, ievērosim tikai abu ķermeņu ātrumus trieciena sākuma momentā,kad abi ķermeņi tikko ir pieskārušies. Tagad atšķirsim vairākus gadijumus.



zīm.112.

1) Ja abi ātrumi ir savstarpīgi paralēli un arī paralēli kopējai normalei N-N pieskares punktā,tad tādu gadijumu sauc par taisno triecienu. $\bar{V}_1 \parallel \bar{V}_2 \parallel$ N-N (sk.zīm.112)

<u>Apakšgadijums</u> a) ja pie tam vēl ķermeņu smaguma centri C_1 un C_2 guļ uz kopējas normales N-N,tad tas būs taisnais centrālais trieciens, (sk.zīm.113).

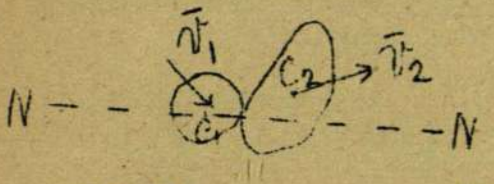


zīm.113.

<u>Apakšgadijums</u> b) ja kaut viens no ķermeņu smaguma centriem neatrodas uz kopējas normales,

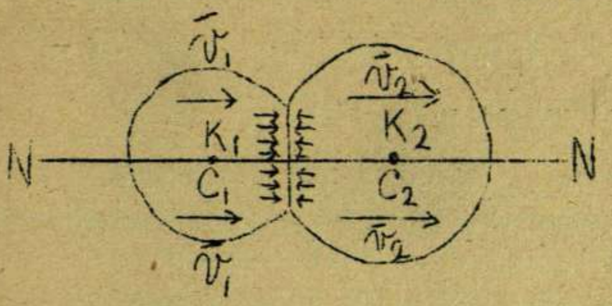
tad tāds gadijums saucās par taisno ekscentrisko triecienu.(zīm.112).
2) Ja viens jeb abi ātrumi nav parallēli kopējai normalei, tad tādu gadijumu sauc par slīpo triecienu (zīm.114).
Apakšgadijums a) ja pie tam abu ķermeņu smaguma centri atrodas uz kopējas normales, tad tas būs slīpais centrālais trieciens (sk. zīm.114).
Apakšgadijums b) ja kaut viens no ķermeņa smaguma centriem neatrodas uz kopējas normales, tad tāds gadijums saucas par slīpo ekscentrisko triecienu (sk.zīm.115)


zīm.114.


zīm.115.

Taisnais centrālais trieciens.

No visiem minētiem gadijumiem sīkāk apskatīsim pamata gadijumu, t.i. taisno centrālo triecienu. Apzīmēsim ar V_1 un V_2 ātrumus pirms trieciena, pie kam $V_1 > V_2$ un meklēsim W_1 un W_2 ātrumus pēc trieciena.


zīm.116.

Pie ķermeņu sadursanās tie deformējas un no deformācijas rodas vi.smas spēki, pie kam kreisie spēki veicina ķermeņa K_2 kustību, bet labie pretojas ķermeņa K_1 kustībai. Pie ķermeņu deformācijas centru attālums C_1C_2 noies līdz zinamam minimumam un tad C_1 sāks attālināties no C_2. Ja ķermeņi ir pilnīgi elastīgi, tad tie nonāks atkal izejas stāvoklī un beidzot šķirsies.

Pie pilnīgi neelastīgiem ķermeņiem C_1C_2 noies līdz minimumam un ķermeņi turpinas savu kustību kopīgi. Vidējiem ķermeņiem parādība būs kaut kāda vidēja, starp ideāliem gadijumiem.

Spēki jeb savstarpīgas reakcijas, kuŗas rodas pie trieciena ir, tā saucamie trieciena spēki. Tie sasniedz ļoti lielas vērtības, jo trieciena laiks ir ļoti mazs, piemēram, tērauda lodēm trieciena laiks ir $\tau = 0{,}00007$ sec.

Lielumi: paātrinājums, spēks un laiks trieciena gadijumā nav ērti pieejami mērīšanai, tamdēļ kustības dif-nol-mu $m\bar{j} = \bar{F}$ mēs šeit nelietosim, bet izvēlēsim tādu nol-mu, kuŗā ieietu ātrums, jo ātruma maiņu mēs varam viegli izmērīt. Šis nol-ms būs kustības daudzuma teorema. Apzīmēsim ķermeņu K_1 un K_2 ātrumus pirms trieciena ar V_1 un V_2. To pašu ķermeņu K_1 un K_2 ātrumus pēc trieciena ar W_1 un W_2. Ķermeņu K_1 un K_2 masas ar m_1 un m_2. Kustības daudzuma teorema visai sistemai:

$$\Sigma m\bar{W} - \Sigma m\bar{V} = \Sigma \int_0^{\tau} (\bar{F} + \bar{S})dt$$

bet kustība notiek taisnā virzienā

$$(M_1W_1 + M_2W_2) - (M_1V_1 + M_2V_2) = \Sigma \int_0^{\tau} F\cos\alpha . dt + \int_0^{\tau} S^{tr}.dt - \int_0^{\tau} S^{tr}.dt$$

Labā pusē abu trieciena spēku jeb reakciju impulsi saīsināsies, jo viņi ir vienādi pēc lieluma, bet iet pretējos virzienos. Kas attiecas uz pirmo integralu $\sum\int_0^{\tau} F\cos\alpha.dt$, tad tas ir mazāks par $\sum F_{max}\cos\alpha.\tau$, bet kā jau bija noskaidrots Punkta dinamikā trieciena laiks ir tik mazs, ka katru galīgu lielumu pareizinātu ar τ varam atmest,tamdēļ labā pusē paliek nulle

$$M_1W_1 + M_2W_2 - (M_1V_1 + M_2V_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

Piezīmēsim, ka nulli labā pusē mēs dabūjam tikai tad, kad apskatam visu sistemu, bet, ņemot kustības daudzuma teoremu vienam ķermenim,dabūsim labā pusē trieciena spēka impulsu, kas ir galīgs lielums.Tā piemēram, pirmam ķermenim:

$$M_1W_1 - M_1V_1 = -\int_0^{\tau} S^{tr}.dt = -I^{tr}$$

un otram ķermenims

$$M_2W_2 - M_1V_1 = -\int_0^{\tau} S^{tr}.dt = I^{tr}$$

Tāpat kā Punkta dinamikā, arī šeit par trieciena laiku atsevišķu ķermeņu punktu noietus ceļus varam ignorēt. Ievedīsim vēl sistemas, t.i. abu ķermeņu inerces centra ātrumus pirms trieciena V_c un pēc trieciena W_c, tad

$$M_1V_1 + M_2V_2 = (M_1 + M_2)V_c$$

$$M_1W_1 + M_2W_2 = (M_1 + M_2)W_c$$

bet ievērojot nol-mu (122), varam teikt, ka $V_c = W_c$, tas nozīmē,ka par trieciena laiku kopēja inerces centra ātrums nemainās.

Ja pirms trieciena $V_1 > V_2$,tad pēc trieciena vispārīgi $W_2 > W_1$. Trieciena efekts ir atkarīgs nevis no pašu ātrumu V_1 un V_2 lieluma,bet no šo ātrumu diferences,tamdēļ ievedīsim vēl $V_1 - V_2 = V_r$,t.i. relatīvais ātrums pirms trieciena un $W_2 - W_1 = W_r$, t.i. relatīvais ātrums pēc trieciena.

Šis ātrums ir atkarīgs no ķermeņu elastīgām īpašībām un būs jo lielāks, jo labākas elastīgas īpašības būs abiem ķermeņiem.

Pēc Newton'a priekšlikuma attiecību $\frac{W_r}{V_r}$,kuŗa raksturo izvēlētā ķermeņu pāra elastīgas īpašības, nosauc par trieciena koeficientu; apzīmēsim to ar $\varkappa$,tad trieciena koeficients:

$$\boxed{\frac{W_r}{V_r} = \frac{W_2 - W_1}{V_1 - V_2} = \varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (123)$$

Jo elastīgāki ir ķermeņi, jo vairāk $\varkappa$ tuvojas 1.
Ideāli elestīgiem ķermeņiem $\varkappa = 1$
Absolūti neelastīgiem " $\varkappa = 0$
Vidējiem ķermeņiem $0 < \varkappa < 1$
Trieciena koeficientu $\varkappa$ nosaka no eksperimentiem, pie kam tas arvien attiecas uz ķermeņu pāri, piemēram tērauds-tērauds,tērauds-akmens u.c. Meklēsim tagad ātrumus pēc trieciena, izlietojot trieciena koeficientu, relatīvo ātrumu V_r un inerces centra ātrumu V_c:

$W_2 - W_1 = \varkappa(V_1 - V_2) = \varkappa.V_r$, no kurienes $W_2 = W_1 + \varkappa V_r$,bet agrāk jau bija atrasts $(M_1 + M_2)V_c = M_1W_1 + M_2W_2$, ieliksim šeit W_2

$$(M_1 + M_2)V_c = M_1W_1 + M_2(W_1 + \varkappa V_r)$$

$(M_1 + M_2)V_c = (M_1 + M_2)W_1 + M_2\varkappa \cdot V_r$, no kurienes

un $W_2 = W_1 + \varkappa V_r$,

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{W_1 = V_c - \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r} \\ \boxed{W_2 = V_c + \dfrac{M_1}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(124)$$

Tāļāk meklēsim ātruma maiņu abiem ķermeniem. Ātruma maiņa ķermenim K_1 ir $V_1 - W_1$

$$V_1 - W_1 = V_1 - V_c + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r = V_1 - \frac{M_1V_1 + M_2V_2}{M_1 + M_2} + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r$$

$$= \frac{M_1V_1 + M_2V_1 - M_1V_1 - M_2V_2}{M_1 + M_2} + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r = \frac{M_2(V_1 - V_2)}{M_1 + M_2} + \frac{M_2}{M_1 + M_2}\varkappa \cdot V_r$$

un galīgi: $V_1 - W_1 = \dfrac{M_2}{M_1 + M_2} V_r(1 + \varkappa)$, pēc analogijas arī

$$W_2 - V_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_r(1 + \varkappa)$$

No šīm formulām varam uziet citas izteiksmes ātrumiem pēc trieciena caur ātrumiem pirms trieciena un relatīvo ātrumu.

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{W_1 = V_1 - \dfrac{M_2}{M_1 + M_2}(1 + \varkappa) \cdot V_r} \\ \boxed{W_2 = V_2 + \dfrac{M_1}{M_1 + M_2}(1 + \varkappa) \cdot V_r} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots(125)$$

Apskatot ātruma maiņas formulas konstatējam, ka labās puses arvien ir pozitivas, tā tad $W_1 < V_1$ ķermeņa K_1 ātrums pēc trieciena samazinājās, $W_2 > V_2$ ķermeņa K_2 ātrums pēc trieciena pieaug. Izdalot ātrumu maiņas formulas, atrodam: $\dfrac{V_1 - W_1}{W_2 - V_2} = \dfrac{M_2}{M_1}$, tas nozīmē, ka ātrumu maiņas attiecība ir pretēji proporcionāla masām un nav atkarīga no trieciena koeficienta $\varkappa$.

Trieciena iespaids uz kinetisko energiju.

Kinetiska energija pirms trieciena: $K_a = \frac{1}{2} M_1V_1^2 + \frac{1}{2} M_2V_2^2$

" " pēc " $K_p = \frac{1}{2} M_1W_1^2 + \frac{1}{2} M_2W_2^2$

Kinetiskās energijas zaudējumu apzīmēsim ar K_Δ, tad

$$K_\Delta = K_a - K_p = \frac{1}{2} M_1V_1^2 + \frac{1}{2} M_2V_2^2 - \frac{1}{2} M_1W_1^2 - \frac{1}{2} M_2W_2^2$$

Ieliksim šeit W_1 un W_2 pēc formulām (125), sastādot iepriekš:

$$\frac{1}{2} M_1 W_1^2 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2 - \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_1 (1 + \varkappa) V_r + \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} (1 + \varkappa)^2 . V_r^2$$

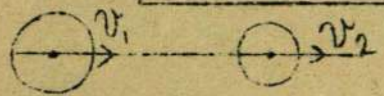
$$\frac{1}{2} M_2 W_2^2 = \frac{1}{2} M_2 V_2^2 + \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_2 (1 + \varkappa) V_r + \frac{1}{2} \frac{M_1^2 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (1 + \varkappa)^2 . V_r^2$$

$$K_\Delta = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_1 - V_2)(1 + \varkappa) V_r - \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (M_1 + M_2)(1 + \varkappa)^2 . V_r^2$$

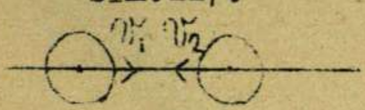
$$K_\Delta = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 + \varkappa) V_r^2 - \frac{1}{2} \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (1 + \varkappa)^2 . V_r^2$$

$$K_\Delta = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_r^2 (1 + \varkappa)\left(1 - \frac{1 + \varkappa}{2}\right) = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_r^2 (1 + \varkappa) \frac{1 - \varkappa}{2}$$

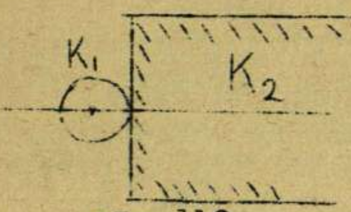
$$\boxed{K_\Delta = \frac{1 - \varkappa^2}{2} . \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (126)$$



zīm.117.



zīm.118.



zīm.119.

Piezīme. Ja ķermeņi kustas vienā virzienā, tad tad $V_r = V_1 - V_2$

Ja ķermeņi kustas viens otram pretīm, tad $V_r = V_1 + V_2$

Speciāls gadijums 1) attiecība $\frac{M_1}{M_2} = 0$, jeb $M_2 = \infty$. Ņemsim ātruma formulas pēc trieciena (125) ķermenim K_1:

$$W_1 = V_1 - \frac{M_2}{M_1 + M_2} (1 + \varkappa) V_r$$

$$W_1 = V_1 - \frac{1}{\frac{M_1}{M_2} + 1} (1 + \varkappa) V_r = V_1 - \frac{1}{\frac{M_1}{\infty} + 1} (1 + \varkappa) V_r = V_1 - (1 + \varkappa) V_r$$

$$W_1 = V_1 - (1 + \varkappa)(V_1 - V_2) = V_1 - V_1 + V_2 - \varkappa (V_1 - V_2) = V_2 - \varkappa (V_1 - V_2)$$

un galīgi $\boxed{W_1 = V_2 - \varkappa V_r}$ . . . . (127)

Ķermenim K_2: $W_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_1 + M_2} (1 + \varkappa) V_r$

$$W_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_1 + \infty} (1 + \varkappa) V_r = V_2 + 0 , \quad W_2 = V_2$$

Tas nozīmē, ka otra ķermeņa ātrums nemainās.

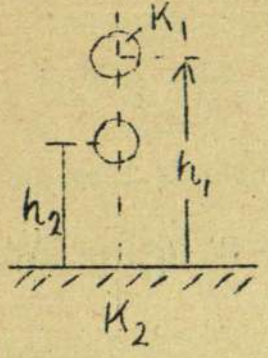
$$K_{\Delta} = \frac{1-\varkappa^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} V_r^2 = \frac{1-\varkappa^2}{2} \cdot \frac{M_1}{\frac{M_1}{M_2} + 1} V_r^2 = \frac{1-\varkappa^2}{2} M_1 V_r^2$$

$$\boxed{K_{\Delta} = \frac{1-\varkappa^2}{2} M_1 V_r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (128)$$

Apakšgadijums: $M_2 = \infty$ un $V_2 = 0$, otrs ķermenis nekustas. Tad arī $W_2 = V_2 = 0$ un $V_r = V_1 - V_2 = V_1$. Ņemot formulu (127), atrodam ķermeņa ātrumu $W_1 = 0 - \varkappa V_r$,

$$\boxed{W_1 = -\varkappa V_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (129)$$

Kā redzams, ķermenis K_1 maina ātruma virzienu. Kinētiskās enerģijas zaudējums: $K_{\Delta} = \frac{1-\varkappa^2}{2} M_1 V_1^2$



zīm. 120.

Formulu (129) parasti izlieto trieciena koeficienta $\varkappa$ noteikšanai, laižot ķermeni K_1 brīvi krist no kāda augstuma h_1 uz nekustošu ķermeni K_2 un novērojot celšanas augstumu h_2

$W_1 = -\varkappa V_1$, $-\sqrt{2gh_2} = -\varkappa\sqrt{2gh_1}$,no kurienes

$$\boxed{\varkappa = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}} \quad \ldots\ldots\ldots (130)$$

Kā jau bija teikts, trieciena koeficients arvien attiecas uz ķermeņu pāri, piemēram tērauds-tērauds, tērauds-akmens.

Speciāls gadijums 2): $\varkappa = 1$. Ķermeņi ir pilnīgi elastīgi.

Pirmkārt pēc formulas (126) ir redzams, ka $K_{\Delta} = 0$. Pilnīgi elastīga trieciena gadijumā kinetiskās enerģijas zaudējums nenotiek. Ātrumus pēc trieciena uziesim pēc formulām (125):

$$W_1 = V_1 - 2\frac{M_2}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) = \frac{M_1 V_1 + M_2 V_1 - 2M_2 V_1 + 2M_2 V_2}{M_1 + M_2}$$

$$\boxed{W_1 = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_1 + 2\frac{M_2}{M_1 + M_2} V_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (131)$$

$$W_2 = V_2 + 2\frac{M_1}{M_1 + M_2}(V_1 - V_2) = \frac{M_1 V_2 + M_2 V_2 + 2M_1 V_1 - 2M_1 V_2}{M_1 + M_2}$$

$$\boxed{W_2 = 2\frac{M_1}{M_1 + M_2} V_1 - \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} V_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (131)$$

Apakšgadijums: $\varkappa = 1$ un $M_1 = M_2$ abu ķermeņu masas ir vienādas. Šinī gadijumā atrodam tieši no form. (131)

$$\boxed{W_1 = V_2 \quad \text{un} \quad W_2 = V_1} \quad \ldots\ldots (132)$$

Tas nozīmē, ka ķermeņi apmainās ātrumiem.

Speciāls gadījums 3) $\mathcal{H} = 0$, t.i. ķermeņi ir pilnīgi neelastīgi. Ņemot formulu (124), redzam, ka šinī gadījumā $W_1 = V_c$ un $W_2 = V_c$, tā tad ķermeņiem pēc trieciena būs kopīgs ātrums

$$\boxed{W_1 = W_2 = V_c = \frac{M_1V_1 + M_2V_2}{M_1 + M_2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (133)$$

Pēc formulas (126) uziesim kinetiskas energijas zaudējumu šim gadījumam

$$\boxed{K_\Delta = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{V_r^2}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (134)$$

Apakšgadījums: $\mathcal{H} = 0$ un $V_2 = 0$, otrais ķermenis nekustas. Uziesim kinetisko energiju pēc trieciena:

$$K_p = \frac{1}{2} M_1W_1^2 + \frac{1}{2} M_2W_2^2 \text{, bet } W_1 = W_2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} V_1$$

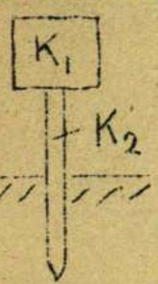
$$K_p = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)W_1^2 = \frac{1}{2}(M_1 + M_2) \cdot \frac{M_1^2V_1^2}{(M_1 + M_2)^2} = \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} \cdot \frac{V_1^2}{2}$$

Kinetiskās energijas zaudējums, ievērojot, ka $V_r = V_1$, būs $K = \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\cdot\frac{V_1^2}{2}$

Sastādīsim attiecību $$\boxed{\frac{K_p}{K_\Delta} = \frac{M_1}{M_2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (135)$$

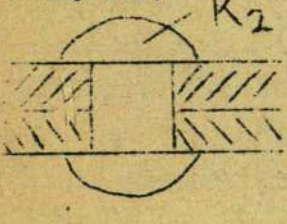
Formulas (135) praktisko nozīmi noskaidrosim sekojošos piemēros.

Piemērs 1) Pāļu sišana. Pie pāļu iesišanas ir vēlams, lai pālis pēc katra sitiena ietu dziļāk zemē un no otras puses, lai pāļa galva būtu pēc iespējas mazāk dēformēta. Ar citiem vārdiem sakot, lai kinetiskā energija pēc trieciena K_p būtu lielāka, bet kinetiskas energijas zaudējums pēc trieciena K_Δ – mazāks. Formula (135) rāda, ka tad zvelteņa K_1 masai M_1 jābūt pēc iespējas lielākai, salīdzinot ar pāļa K_2 masu M_2. Tas pats ir sakams arī pie naglu iesišanas, jo smagāks ir veseris, salīdzinot ar naglas svaru, jo ātrāk var naglu iesist.



zīm.121.

Piemērs 2) Kniedēšana. Pie kniedēšanas ir jāveido kniedes galviņa un šim nolūkam ir vajadzīgs patērēt darbu, kuŗu dos kinetiskas energijas zaudējums K_Δ. Tā tad šeit K_p jābūt mazākam un K_Δ pēc iespējas lielākam. Pēc formulas (135) masai M_1 jābūt mazai, salīdzinot ar masu M_2, bet kniedes masa pati par sevi nav liela un tamdēļ viņu parasti palielina noliekot apakšā smagus ķermeņus.



zīm.122.

Carnot teorema divu ķermeņu neelastīga taisna trieciena gadijumā.

Carnot teorema formulējas tā: ķermeņu kinetiskas energijas jeb dzīvā spēka zaudējums neelastīga trieciena gadijumā līdzinājas pazaudēto ātrumu kinetiskas energijas summai.

Dots: $\varkappa = 0$. Kinetiska energija pirms trieciena: $K_a = \frac{M_1V_1^2}{2} + \frac{M_2V_2^2}{2}$. Kinetiskā energija pēc trieciens: $K_p = \frac{M_1W_1^2}{2} + \frac{M_2W_2^2}{2}$. Kinetiskās energijas zaudējums: $K_\Delta = K_a - K_p$.

$$K_\Delta = \frac{M_1}{2}(V_1^2 - W_1^2) + \frac{M_2}{2}(V_2^2 - W_2^2),$$

bet ja ķermeņī ir neelastīgi $\varkappa = 0$, tad $W_1 = W_2 = W$

$$K_\Delta = \frac{M_1}{2}(V_1^2 - W^2) + \frac{M_2}{2}(V_2^2 - W^2)$$

Pēc kustības daudzuma teoremas: $M_1V_1 + M_2V_2 = M_1W + M_2W$, jeb

$M_1(V_1 - W) = M_2(W - V_2) = I^{tr}$ trieciena spēka impulsam.

$$K_\Delta = \frac{M_1}{2}(V_1 - W)(V_1 + W) + \frac{M_2}{2}(V_2 - W)(V_2 + W) = \frac{1}{2} I^{tr}(V_1 + W) - \frac{1}{2} I^{tr}(V_2 + W)$$

$$K_\Delta = \frac{1}{2} I^{tr}(V_1 + W - V_2 - W)\ ; \quad K_\Delta = \frac{1}{2} I^{tr}(V_1 - V_2)$$

$$\left.\begin{aligned} V_1 - W &= \frac{I^{tr}}{M_1} \\ W - V_2 &= \frac{I^{tr}}{M_2} \end{aligned}\right\} + \quad V_1 - V_2 = I^{tr}\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)$$

$$K_\Delta = \frac{1}{2}(I^{tr})^2\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) = \frac{(I^{tr})^2}{2M_1} + \frac{(I^{tr})^2}{2M_2}$$

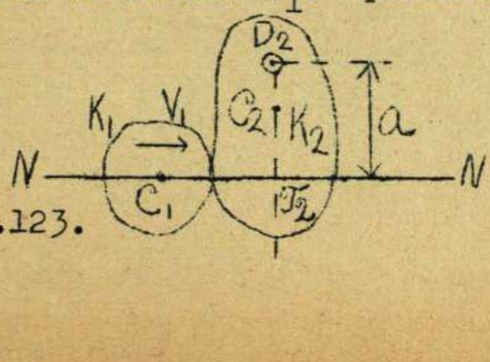
$$K_\Delta = \frac{M_1^2(V_1 - W)^2}{2M_1} + \frac{M_2^2(W - V_2)}{2M_2}$$

jeb arī $\boxed{K_\Delta = \frac{1}{2} M_1(V_1 - W)^2 + \frac{1}{2} M_2(V_2 - W)^2}$ ....(136)

ar šo Carnot teorema ir pierādīta. Piezīmēsim, ka formula (136) ir pareiza tikai tad, ja $\varkappa = 0$.

Taisnais ekscentriskais trieciens.

Praksē parasti ekscentriskais trieciens nāk priekšā pie ķermeniem, kuŗiem ir kāda nekustoša griezes ass, tamdēļ pieņemsim, ka ķermenis K_2 atrodas griezes kustībā ap asi D_2 un tikai ķermenis K_1 atrodas virzes kustībā ar ātrumu V_1. Apzīmēsim ķermeņa K_1 masu ar M_1 un ķermeņa K_2 masu ar M_2 un pieņemsim, ka ķermeņa K_1 smaguma centrs C_1 atrodas uz kopējas normales, bet C_2 guļ ārpus tās. Bez tam pieņemsim, ka $V_1 \parallel NN$ un $D_2C_2 \perp NN$, tad mēs šo gadijumu varam kvalificēt kā taisnu triecienu. Apzīmsēim D_2C_2 un NN krusto-



zīm.123.

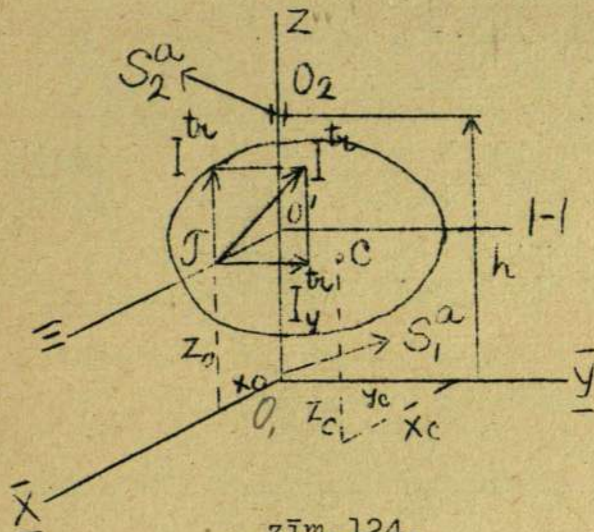
šanās punktu ar $\mathcal{T}_2$, nosauksim to par trieciena punktu un apzīmēsim $D_2\mathcal{T}_2 = a$. Bet lai varētu ekscentriskā trieciena gadijumā pielietot formulus, izvestas centrālam triecienam, jāiedomājās ķermeni K_2 aizvietotu ar citu ķermeni K_2', kuŗam smaguma centrs būtu punktā $\mathcal{T}_2$ un masa M_2' būtu tik liela, lai ķermeņa K_2' spars virzes kustībā būtu vienāds ar ķermeņa K_2 sparu griezes kustībā pirms trieciena. Apzīmēsim ķermeņa K_2 griezes ātrumu pirms trieciena ar ω_1, tad

$$\frac{M_2'V_2^2}{2} = \frac{J_2\omega_1^2}{2} \text{ ,bet } V_2 = \omega_1 a \text{ ,tā tad } M_2^1\omega_1^2 a^2 = J_2\omega_1^2$$ no kurienes mēs atrodam

M_2^1 kuŗu sauc par ķermeņa K_2 reducēto masu:
$$\boxed{M_2^1 = \frac{J_2}{a^2}} \quad . . . . (137)$$

Ievietojot reducēto masu taisna trieciena formulās 124,125,126 masas M_2 vietā, varam atrast punkta $\mathcal{T}_2$ ātrumu pēc trieciena, ka arī kinetiskās energijas zaudējumu. Bet šinī gadijumā ir vēl ļoti interesanti noskaidrot, pie kādiem apstākļiem griezes ass D_2 gultnēs nebūs reaktīvo trieciena. So jautājumu apskatīsim tagad atsevišķi, neatkarīgi no ķermeņa K_1 masas, t.i. pieņemot, ka uz ķermeni K_2 darbojas kāds trieciena spēks, kuŗa impulss ir zinams.

Ekscentriska trieciena iespaids uz ķermeni, kuŗam ir nekustoša griezes ass.



zīm.124.

Triecienu mēs dēfinējam kā ļoti liela spēka iedarbošanos uz ķermeni īsā laikā. Trieciena spēka iespaidu raksturo viņa impulss $\bar{I}^{tr}$, kas ir vektors spēka virzienā.

Lai griezes ass būtu nekustoša, tā jāieliek divās gultnēs, kuŗas dos divas reakcijas S_1^a un S_2^a. Koordinātu sākumu ņemsim vienā no gultnēm punktā O_1. Z asi izvēlēsim tā, lai viņa sakristu ar griezes asi. $\bar{X}$ asi ņemsim parallēli visīsākam impulsa vektora attālumam no griezes ass, līdz ar to tad $\bar{X}$ ass būs perpendikulāra impulsa vektoram $\bar{I}^{tr}$. Pārnesīsim impulsa vektoru $\bar{I}^{tr}$ savā virzienā līdz krustošanai ar $\overline{XZ}$ plakni punktā T. Tādā gadijumā vektora projekcija: $I_x^{tr} = 0$ un paliek I_y^{tr}, I_z^{tr} ar iedarbes punktu $\mathcal{T}$, kuŗa koordinātes $\mathcal{T}:(x_0, 0, z_0)$. Ievedīsim vēl šādus apzīmējumus:

- h – attālums starp gultnēm,
- M – ķermeņa masu,
- J_z – ķermeņa inerces momentu pret asi OZ,
- ω_1 un ω_2 – ķermeņa griezes ātrums trieciena sākuma un gala momentā, pie kam, ja ķermenis bija mierā, tad $\omega_1 = 0$.

Ņemsim griezes kustības ap Z asi dif-nol-mu:

$$J_z . \mathcal{E} = L_z \text{ , bet } L_z = F_y^{tr} . x_0$$

ievietojot šo un integrējot no trieciena sākuma momenta t_1 līdz trieciena gala momentam t_2, dabūsim

$$J_z(\omega_2 - \omega_1) = \int_{t_1}^{t_2} F_y^{tr} . x_0 \quad \text{bet} \quad \int_{t_1}^{t_2} F^{tr} . dt = I_y^{tr}$$

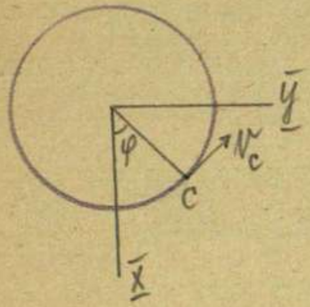
un tad $\boxed{J_z(\omega_2 - \omega_1) = I_y^{tr}.x_o}$ . . . . (138)

Ar šo nol-mu varam atrast ātrumu pēc trieciena ω_2. Bet ar ātruma noteikšanu mēs vēl nevaram skaitīt jautājumu galīgi atrisinātu; uziesim vēl cik lieli būs reaktīvie trieciени gultnēs jeb reakciju impulsi. Mūsu rīcībā šim nolūkam ir vēl 5 cieta ķermeņa vispārīgas kustības dif-nol-mi, t.i. 3 inerces centra kustības nol-mi un 2 momentu nol-mi ap $\underline{X}$ un $\underline{Y}$ asīm.

$$1)\ M\ddot{x}_c = S_{1x}^a + S_{2x}^a \qquad 4)\ \frac{d\ell_x}{dt} = L_x$$
$$2)\ M\ddot{y}_c = F_y^{tr} + S_{1y}^a + S_{2y}^a$$
$$3)\ M\ddot{z}_c = F_z^{tr} + S_{1z}^a + S_{2z}^a \qquad 5)\ \frac{d\ell_y}{dt} = L_y$$

Pirmkārt ievērosim, ka pie griezes ap Z asi koordinātes z = const. un $\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = 0$, tad pareizināsim 1), 2) un 3) nol-mus ar dt un integrēsim no t_1 līdz t_2

$$1)\ M(\dot{x}_{c2} - \dot{x}_{c1}) = \int_{t_1}^{t_2}(S_{1x}^a + S_{2x}^a)dt$$



$$2)\ M(\dot{y}_{c2} - \dot{y}_{c1}) = \int_{t_1}^{t_2}(F_y^{tr} + S_{1y}^a + S_{2y}^a)dt$$

$$3)\ 0 = \int_{t_1}^{t_2}(F_z^{tr} + S_{1z}^a + S_{2z}^a)dt$$

Ievērojot, ka griezes kustībā ap Z asi: $V_c = \omega . r_c$

un $V_{cx} = \dot{x}_c = - V_c \sin\varphi = -\omega . r_c \frac{y_c}{r_c} = - y_c . \omega$

$$V_{cy} = \dot{y}_c = V_c \cos\varphi = \omega . r_c \frac{x_c}{r_c} = x_c . \omega$$

zīm.125.

var aizvietot $\dot{x}_{c2} = - y_c\omega_2$ | $\dot{y}_{c2} = x_c . \omega_2$

$\dot{x}_{c1} = - y_c\omega_1$ | $\dot{y}_{c1} = x_c . \omega_1$

Apzīmēsim vēl reakciju impulsus: $\int_{t_1}^{t_2} S_{1x}^a = i_{1x}$; $\int_{t_1}^{t_2} S_{2x}^a = i_{2x}$ u.t.t.

un ievietosim nol-mos 1), 2) un 3), tad

1)	$-My_c(\omega_2 - \omega_1) = i_{1x} + i_{2x}$
2)	$Mx_c(\omega_2 - \omega_1) = I_y^{tr} + i_{1y} + i_{2y}$
3)	$0 = I_z^{tr} + i_{1z} + i_{2z}$

Tagad ņemsim priekšā nol-mus 4) un 5), ievietosim kreisās pusēs kustības daudzuma momentu izteiksmes un sastādīsim momentus labās pusēs:

$$4)\ \frac{d}{dt}\sum m_k(y_k\dot{z}_k - z_k\dot{y}_k) = - F_y^{tr}.z_o - S_{2y}^a.h$$
$$5)\ \frac{d}{dt}\sum m_k(z_k\dot{x}_k - x_k\dot{z}_k) = - F_z^{tr}.x_o + S_{2x}^a.h$$

pirmkārt liksim $\dot{z}_k = 0$, $\dot{x}_k = - y_k . \omega$ un $\dot{y}_k = x_k . \omega$, tad pareizināsim ar dt un integrēsim:

$$4)\ -\sum m_k x_k z_k(\omega_2-\omega_1) = -z_o\int_{t_1}^{t_2} F_y^{tr}.dt - h\int_{t_1}^{t_2} S_{2y}^a.dt$$

$$5)\ -\sum m_k y_k z_k(\omega_2-\omega_1) = -x_o\int_{t_1}^{t_2} F_z^{tr}.dt + h\int_{t_1}^{t_2} S_{2x}^a.dt$$

Skaitot par trieciena laiku punktu koordinātes par Const., varam likt:

$$\sum m_k x_k z_k = J_{xz}$$

$$\sum m_k y_k z_k = J_{yz}$$

tad

$$4)\ \boxed{J_{xz}(\omega_2-\omega_1) = z_o I_y^{tr} + h.i_{2y}}$$

$$5)\ \boxed{J_{yz}(\omega_2-\omega_1) = x_o I_z^{tr} - h.i_{2x}}$$

No nol-miem 1,2,3,4,5 var uziet reaktīvus impulsus, ja būs atrasti centrifugālie inerces momenti un zinamas inerces centra koordinātes.

Tagad noskaidrosim pie kādiem apstākļiem trieciena spēks neizsauks gultnēs reakcijas. Šim nolūkam jāpielīdzina: $i_{1x}=i_{2x}=i_{1y}=i_{2y}=$ $= i_{1z} = i_{2z} = 0$. No 1) nol-ma tūliņ atrodam, ka $\boxed{y_c = 0}$ tas nozīmē, ka smaguma centram C jāatrodas $\underline{X}Z$ plaknē. Tāļāk no 2) nol-ma atrodam: $Mx_c(\omega_2-\omega_1) = I_y^{tr}$. Ņemsim vēl griezes kustības nol-mu (138): $J_z =(\omega_2-\omega_1) = I_y^{tr}.x_o$, izdalot vienu ar otru, atrodam $x_o = \frac{J_z}{Mx_c}$, bet tas nav nekas cits, ka ekvivalenta svārsta garums ℓ, tā tad $\boxed{x_o = \ell}$ Tas nozīmē, ka trieciena iedarbes punktam A_1 jāatrodas attālumā ℓ no griezes ass, kas līdzinājās ekvivalenta svārsta garumam.

No 3) nolīdzinājuma atrodam, ka $\boxed{I_z^{tr} = 0}$, tas nozīmē, ka trieciena impulsam jābūt perpendikulāram $\underline{X}OZ$ plaknei. Pēc tam atrodam no nol-ma 5) $J_{yz} = 0$ un no 4): $J_{xz}(\omega_2-\omega_1) = z_o I_y^{tr}$. Lai noskaidrotu šo rezultātātu nozīmi, pārnesīsim koordinātu sākumu pa Z asi punktā O' ar ordinātu z_o un ņemsim jaunās ass parallēli vecām, tad

$x_k = \xi_k$	$y_k = \eta_k$	$z_k = \zeta_k + z_o$
$x_c = \xi_c$	$y_c = \eta_c = 0$	$z_c = \zeta_c + z_o$

$J_{yz} = \int y_k z_k dm = \int \eta_k(\zeta_k + z_o)dm = \int \eta_k\zeta_k dm + z_o\int \eta_k dm$

$J_{yz} = J_{\eta\zeta} + z_o.M\eta_c$ bet $\eta_c = 0$ un $J_{yz} = 0$, tad $\boxed{J_{\eta\zeta} = 0}$

$J_{xz} = \int x_k z_k dm = \int \xi_k(\zeta_k + z_o)dm = \int \xi_k\zeta_k dm + z_o\int \xi_k.dm$

$J_{xz} = J_{\xi\zeta} + z_o M\xi_c$. Izdalīsim nol-mu 4) $J_{xz}(\omega_2-\omega_1) = z_o I_y^{tr}$ ar nol-mu (137) $J_z(\omega_2-\omega_1) = x_o I_y^{tr}$, tad $J_{xz} = \frac{z_o}{x_o}J_z$, bet $x_o = \ell = \frac{J_z}{Mx_c}$

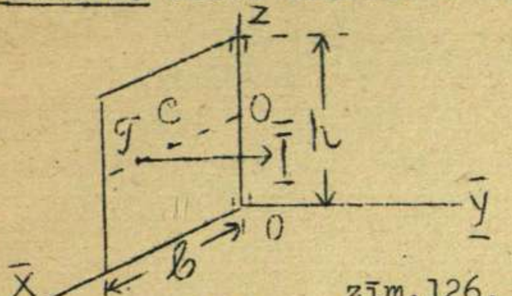
$J_{xz} = \frac{z_o J_z M x_c}{J_z} = Mz_o x_c$. Tagad $J_{\xi\zeta} = J_{xz} - Mz_o\xi_c = Mz_o x_c - Mz_o\xi_c = 0$, jo $x_c = \xi_c$.

Kā redzams, arī $\boxed{J_{\xi\varphi} = 0}$. Bet ja $J_{\eta\varphi} = 0$ un $J_{\xi\varphi} = 0$, tad griezes asij jābūt galvenai asij punktā O' (ne centrālai, bet tikai galvenai asij). Savelkot visus rezultātus varam teikt, ka gultnēs nebūs triecienu, ja: 1) trieciena impulss ir perpendikulārs plaknei, vilktai caur griezes asi un ķermeņa smaguma centru, 2) griezes ass ir galvenā inerces ass punktā O', kas ir iedarbes punkta A projekcija uz griezes asi un 3) impulsa vektora attālums no griezes ass līdzinājās ekvivalenta svārsta garumam.

Punkts A, kas atbilst minētām prasībām, saucas par trieciena centru un tas sakrīt ar jau pazīstamo svārstīšanas centru S.

Piemērs. Uziet trieciena centru homogenam taisnstūrim. Izvēlēsim koordinatu sistemu tā, lai Z ass sakristu ar griezes asi un X asi taisnstūra plaknē, tad inerces centra koordinātes: $x_c = \frac{b}{2}$; $y_c = 0$; $z_c = \frac{h}{2}$. Inerces moments ap Z asi: $J_z = \frac{1}{3} Mb^2$. Trieciena centra koordinātes:

$$x_o = \frac{J_z}{M.x_c} = \frac{\frac{1}{3} Mb^2}{M \frac{b}{2}} = \frac{2}{3} b \; ; \; y_o = 0 \text{ un } z_o = \frac{h}{2}$$

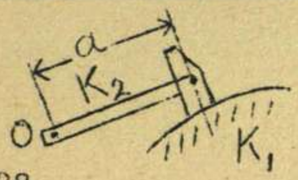


zīm.126.

Piemērs. Ballistiskais svārsts. Pēc ballistiskā svārsta novirzīšanās leņķa var spriest par lādiņa ātrumu, bet lai pekares punktos nerastos dinamiskas reakcijas, tad lādinam jāiesit svārstīšanas centrā, kas būs līdz ar to arī trieciena centrs.

zīm.127.

Piemērs. Rokas āmurs. Lietojot rokas āmuru, kāts jāņem tik garš, lai punkts $\mathcal{T}$ būtu svārstīšanas centrs punktam O, kuŗu turam rokā. Ja tas nebūs izpildīts, tad roka sajūtīs nepatīkamu reaktivu triecienu. Uziesim vēl āmura ātrumu pēc trieciena lietojot form. (125) un uzskatot āmuru par ķermeni K_2.



zīm.128.

$$W_2 = V_2 + \frac{M_1}{M_1+M_2}(1+\varkappa)V_r, \text{kur masa } M_1=\infty \,; V_r=-V_2;\; M_2 = \frac{J_2}{a^2}, \text{tad}$$

$W_2 = V_2 - (1+\varkappa)V_2$; $\boxed{W_2 = -\varkappa V_2}$. Kinetiskas energijas zaudējumu dabūsim pēc formulas 126:

$$K_\Delta = \frac{1-\varkappa^2}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1+M_2} V_r^2, \text{kuŗa dod } \boxed{K_\Delta = (1-\varkappa^2)\frac{J_2\omega^2}{2}}$$

Carnot teorema punktu sistemai.

Punktu sistemai Carnot teorema formulējās tā: ja sistemā pēkšņi rodas jauna saite, tad kinetiskas energijas zaudējums līdzinājās pazaudēto ātrumu kinetiskai energijai.

Pieņemsim, ka sistemā ir h saites:

$$f_1(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_n) = 0$$
$$f_2(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_n) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_h(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_n) = 0$$

Sistema atrodas kustībā un pēkšņi rodas jauna saite

$$f\,(x_1y_1z_1x_2y_2z_2 \dots x_ky_kz_k \dots x_ny_nz_n) = 0$$

pie kam vecās saites arī paliek spēkā. Tad mazā laika sprīdī τ no momenta t_1 līdz t_2 punktu ātrumu projekcijām V_{kx}, V_{ky}, V_{kz} jāmainās tā, lai tās apmierinātu kā veco tā arī jaunās saites nol-mus, ja mēs tās nodife rencēsim pēc laika. Apzīmēsim šīs jaunās ātruma projekcijas ar W_{kx}, W_{ky} un W_{kz}, tad

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k} W_{kx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f_1}{\partial z_k} W_{kz}\right) = 0$$

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_k} W_{kx} + \frac{\partial f_2}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f_2}{\partial z_k} W_{kz}\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} W_{kx} + \frac{\partial f}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f}{\partial z_k} W_{kz}\right) = 0$$

Ņemsim tagad punktam A_k kustības dif-nol-mus ar jauno saiti:

$$m_k\ddot{x}_k = X_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

$$m_k\ddot{y}_k = Y_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_k}$$

$$m_k\ddot{z}_k = Z_k + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots + \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_k}$$

pareizināsim ar dt, un integrēsim robežās no t_1 līdz t_2

$$m_k(W_{kx}-V_{kx}) = \int_{t_1}^{t_2} X_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_k} dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial x_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k} dt$$

$$m_k(W_{ky} - V_{ky}) = \int_{t_1}^{t_2} Y_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_k} dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial y_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial y_k} dt$$

$$m_k(W_{kz} - V_{kz}) = \int_{t_1}^{t_2} Z_k dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_k} dt + \ldots$$

$$\ldots + \int_{t_1}^{t_2} \lambda_h \frac{\partial f_h}{\partial z_k} dt + \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial z_k} dt$$

Jaunas saites reakcijas punktam K impulsa projekcijas uz koordinātu asīm būs:

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k} dt \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial y_k} dt \quad ; \quad \int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial z_k} dt$$

bet par mazu laika sprīdi $\tau = t_2 - t_1$ varam skaitīt visu punktu koordinātes par const. lielumiem, kādēļ $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ un $\frac{\partial f}{\partial z_k}$ var iznest no integrāļiem laukā un aizvietojot vēl $\lambda = \frac{S}{\Delta}$, dabūsim

$$\int_{t_1}^{t_2} \lambda \frac{\partial f}{\partial x_k} dt = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial x_k} \int_{t_1}^{t_2} S.dt = \frac{i}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

u.t.t., kur ar i ir apzīmēts reakcijas impulss $\int_{t_1}^{t_2} S.dt$ par trieciena laiku.

Ievērojot, ka $\int_{t_1}^{t_2} X_k.dt = 0$, $\int_{t_1}^{t_2} Y_x.dt = 0$, $\int_{t_1}^{t_2} Z_k.dt = 0$ un, pārveidojot visus pārējos integrāļus pēc apskatītā parauga, dabūsim:

$$m_k(W_{kx} - V_{kx}) = \frac{i}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{i_1}{\Delta_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \frac{i_2}{\Delta_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_k} + \ldots + \frac{i_h}{\Delta_h}\frac{\partial f_h}{\partial x_k}$$

$$m_k(W_{ky} - V_{ky}) = \frac{i}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial y_k} + \frac{i_1}{\Delta_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_k} + \frac{i_2}{\Delta_2}\frac{\partial f_2}{\partial y_k} + \ldots + \frac{i_h}{\Delta_h}\frac{\partial f_h}{\partial y_k}$$

$$m_k(W_{kz} - V_{kz}) = \frac{i}{\Delta}\frac{\partial f}{\partial z_k} + \frac{i_1}{\Delta_1}\frac{\partial f_1}{\partial z_k} + \frac{i_2}{\Delta_2}\frac{\partial f_2}{\partial z_k} + \ldots + \frac{i_h}{\Delta_h}\frac{\partial f_h}{\partial z_k}$$

Reizināsim šos nol-mus pirmo ar W_{kx}, otro ar W_{ky} un trešo ar W_{kz} un summēsim visai sistemai un visiem virzieniem:

$$\sum_1^n m_k(W_{kx}^2 + W_{ky}^2 + W_{kz}^2 - W_{kx}V_{kx} - W_{ky}V_{ky} - W_{kz}V_{kz}) = \frac{i}{\Delta}\sum_1^n (\frac{\partial f}{\partial x_k} W_{kx} +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f}{\partial z_k} W_{kz}) + \frac{i_1}{\Delta_1} \sum_1^n (\frac{\partial f_1}{\partial x_k} W_{kx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f_1}{\partial z_k} W_{kz}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{i_h}{\Delta_h} \sum_1^n (\frac{\partial f_h}{\partial x_k} W_{kx} + \frac{\partial f_h}{\partial y_k} W_{ky} + \frac{\partial f_h}{\partial z_k} W_{kz}),$$

bet labā pusē visām iekavām jalīdzinājās nullei, tamdēļ, ka jauniem ātrumiem jāapmierina visas saites, tā tad

$$\sum_1^n m_k(W_{kx}^2 + W_{ky}^2 + W_{kz}^2 - W_{kx}V_{kx} - W_{ky}V_{ky} - W_{kz}V_{kz}) = 0$$

Pārveidosim diferenci:

$$W_{kx}^2 - W_{kx}V_{kx} = \frac{1}{2}(W_{kx}^2 + W_{kx}^2 + V_{kx}^2 - V_{kx}^2 - 2W_{kx}V_{kx})$$

$$W_{kx}^2 - W_{kx}V_{kx} = \frac{1}{2}(W_{kx}^2 - V_{kx}^2) + \frac{1}{2}(V_{kx} - W_{kx})^2$$

Pārveidojot pēc tā paša parauga arī citas diferences, dabūsim

$$\sum_1^n \frac{m_k}{2}(W_{kx}^2 + W_{ky}^2 + W_{kz}^2) - \sum_1^n \frac{m_k}{2}(V_{kx}^2 + V_{ky}^2 + V_{kz}^2) + \sum_1^n \frac{m_k}{2}\left[(V_{kx} - W_{kx})^2 + \right.$$

$$\left. + (V_{ky} - W_{ky})^2 + (V_{kz} - W_{kz})^2\right] = 0 \text{ , jeb}$$

$$\sum_1^n \frac{m_k V_k^2}{2} - \sum_1^n \frac{m_k W_k^2}{2} = \sum_1^n \frac{m_k}{2}\left[(V_{kx} - W_{kx})^2 + (V_{ky} - W_{ky})^2 + (V_{kz} - W_{kz})^2\right]$$

$$\boxed{K_a - K_p = \sum_1^n \frac{m_k}{2}\left[(V_{kx} - W_{kx})^2 + (V_{ky} - W_{ky})^2 + (V_{kz} - W_{kz})^2\right]} \quad (138)$$

Ar šo Carnot teorema ir pierādīta.

<u>Piezīme.</u> Ja saite ir rheonoma, t.i. satur laiku atklātā veidā, tad teorema vairs neder.