Kopsavilkums

VISPĀRĪGAS KOMBINATORISKAS METODES UN TO LIETOJUMI ELEMENTĀRAJĀ MATEMĀTIKĀ

A.Andžāns

Latvijas Universitāte, Fizikas un matemātikas fakultāte
Raiņa bulv. 19, LV - 1586, Rīga, Latvija

Rīga - 1995

1. DARBA RAKSTUROJUMS. Darbu kopa.
2. PUBLIKĀCIJU SKAITS. 31.
3. APJOMS. 163 loksnes.
4. DARBA SATURS.

4_1. PRIEKŠMETS. Vispārīgas kombinatoriskas metodes, to apgūšanas un lietošanas jautājumi.

4_2. MĒRĶIS. Apzināt kombinatoriskās idejas, kas kopīgas daudzām matemātikas nozarēm. Sistematizēt to lietošanas paņēmienus un ieviest tās matemātiskās izglītības sistēmā.

4_3. GALVENIE REZULTĀTI. Izdalītas piecas vispārīgas metodes, analizēts to saturs un savstarpējie sakari. Izstrādāta metodika šo metožu apgūšanai. Izveidota padziļinātas matemātiskās izglītības sistēma skolās, kas balstās uz šo metožu apguvi. Sarakstīta virkne uzdevumu krājumu, mācību grāmatu un metodisku līdzekļu.

4_4. TEORĒTISKĀ NOZĪME. Konstatēti sakari starp šķietami tālām matemātikas nozarēm un spriešanas paņēmieniem. Izstrādāta jauna pieeja matemātikas padziļinātā mācīšanā.

4_5. PRAKTISKĀ NOZĪME. Aplūkotās metodes palīdz sistematizēt spriedumus kombinatoriska rakstura problēmu risināšanā un arī citās matemātikas nozarēs. To iekļaušana izglītības apritē paaugstina matemātisko zināšanu apguves efektivitāti, stimulē patstāvīgu radošu darbu. Sarakstītie uzdevumu krājumi, mācību grāmatas un mācību līdzekļi ieņēmuši stabilu vietu matemātikas mācīšanā.

4_6. DARBA APROBĀCIJA. Par rezultātiem referēts sekojošās svarīgākajās konferencēs:

- 1. Vissavienības konferencē par matemātikas padziļinātu mācīšanu Ļeņingradā 1973.g.;
- LVU Skaitļošanas centra 20 gadu jubilejas konferencē Rīgā 1981.g.;
- starptautiskā konferencē par matemātikas padziļinātu mācīšanu Tartu 1988.g.;
- Krievijas matemātiskās izglītības konferencē Krasnodarā 1991.g.;
- Baltijas valstu augstskolu un pedagoģisko institūtu konferencē Viļņā 1992.g.;
- 7. Vispasaules matemātiskās izglītības kongresā Kvebekā 1992.g.;
- 20. starptautiskajā matemātikas kongresā Cīrihē 1994.g.;
- 29. Vācijas matemātikas didaktikas konferencē Kaselē 1995.g.

Darbs aprobēts arī, saskaņā ar attīstītajām idejām organizējot matemātikas padziļinātas mācīšanas sistēmu Latvijas skolās un iestrādājot šīs idejas virknē plaši lietojamu mācību grāmatu, uzdevumu krājumu un metodisku materiālu.

SATURS

Ievads

Tāpat kā citu matemātikas daļu, arī elementārās matemātikas saturs nepārtraukti mainās, pamatā paplašinoties. Piemēram, neviens nešaubās, ka naturālu skaitļu dalīšanas algoritms attiecināms uz pašiem elementārās matemātikas pamatiem; tomēr viduslaikos par tā brīvu pārvaldīšanu piešķīra zinātniskos grādus. Par elementārās ģeometrijas klasiskām lappusēm šodien uzskatām uzdevumus, kas vēl 250 gadus atpakaļ bija pasaules ievērojamāko matemātiķu uzmanības lokā (Eilera riņķa līnija, Gausa taisne utt.).

Tradicionāli pieņemts vārdus "elementārā matemātika" saistīt tikai ar skolu. Tas nav gluži pareizi. Protams, vairums tās matemātikas, ko māca skolās, ir attiecināma uz elementāro (kaut gan ir arī izņēmumi; piemēram, dažos franču licejos vecākajās klasēs apgūst Hilberta telpas pamatīpašības); tomēr daudz plašāka ir tā elementārās matemātikas daļa, kas nav formāli saistīta ar skolu programmām.

Precizēsim, ko mēs saprotam ar vārdiem "elementārā matemātika".

Vispirms atzīmēsim, ka precīzu definīciju matemātiskā izpratnē šeit nav iespējams dot; tādas nav arī daudz skaidrāk norobežotām matemātikas nozarēm. Mēģinot uzskaitīt tās daļas, elementārajā matemātikā iekļautos Eiklīda planimetrija un stereometrija, lineārās operācijas ar plaknes un telpas vektoriem, to skalārais, pseidoskalārais un vektoriālais reizinājums, lielākā daļa kombinatoriskās ģeometrijas, elementārā skaitļu teorija, radikāļos atrisināmi algebriski vienādojumi un to sistēmas, algebriskās nevienādības, elementārās funkcijas un to īpašības, vienkāršākās skaitļu virkņu īpašības un galīgu kopu kombinatorika. Tomēr daudzi matemātiķi pie elementārās matemātikas pieskaita arī grafu teorijas elementus, vienkāršākos kombinatoriskos algoritmus, naturāla argumenta vienkāršākos funkcionālvienādojumus un dažas citas matemātikas nodaļas. Pilnīgi noteikti pie elementārās matemātikas netiek pieskaitītas tās metodes, kuras saprot un efektīvi lieto tikai daži šauras nozares speciālisti, kā arī tās metodes, kas gan tiek plaši izmantotas daudzās nozarēs, tomēr prasa izvērsta un specifiska matemātiskā aparāta lietošanu.

Viena no aprakstošām un nekādā gadījumā ne precīzām elementārās matemātikas definīcijām varētu būt šāda.

Elementārā matemātika ir 1) to spriešanas paņēmienu kopums, kurus plaša matemātiskā sabiedrība uzskata par pašsaprotamiem, neatkarīgiem no kādas specifiskas matemātikas nozares un bez īpašas atsauces uz tiem lieto tos visdažādākajās, arī ļoti tālu viena no otras stāvošās matemātikas nozarēs, 2) uzdevumi, kas atrisināmi ar šādu metožu palīdzību.

Acīmredzot, šāds elementārās matemātikas jēdziens ir vēsturiski nosacīts.

Vairumā gadījumu zinātniskajos pētījumos nepietiek tikai ar elementārajām metodēm: tās tiek lietotas kopā ar attiecīgās matemātikas nozares specifiskajiem paņēmieniem. Elementārās metodes bieži ir izšķirošās kādā sprieduma etapā: novērtējuma izdarīšanā, lemmas pierādījumā, singulāra gadījuma analīzē utt. Tomēr ir arī daudzi gadījumi, kad visa atrisinājuma pamatideja slēpjas elementārās metodes negaidītā pielietojumā. Atzīmēsim, ka dažreiz tikai pēc zināma laika izdodas pamanīt veiktā pierādījuma sakaru ar kādu no elementārās matemātikas metodēm.

Tāpēc ir svarīgi šīs metodes iespējami plaši un vispusīgi apzināt, konstatēt to izpausmes dažādās matemātikas nozarēs, to savstarpējās sakarības. Ne mazāk svarīgi atrast vai izveidot raksturīgus šo metožu lietošanas paņēmienus, iepazīšanās ar kuriem ļautu apgūt tās praktiskai darbībai.

Šajā darbā mēs aplūkosim dažas elementārās matemātikas metodes ar kombinatorisku saturu. To apzināšana sākotnēji galvenokārt notikusi, nodarbojoties ar uzdevumu komplektu veidošanu dažāda līmeņa matemātikas olimpiādēm, konkursiem utt., kā arī, izstrādājot mācību līdzekļus, kas atļauj sagatavoties šīm sacensībām. Minētā specifika nav nejaušība. Matemātikas olimpiādēs, kurās relatīvi īsā laika posmā jārisina 5 uzdevumi, dalībniekiem nevar piedāvāt pētīšanai dziļas problēmas (kaut arī daži veiksmīgi mēģinājumi ir bijuši). Tāpēc, lai padarītu šīs sacensības iespējami matemātiski saturīgas, Latvijā cenšamies tajās iekļaut uzdevumus, kuru risināšanai nepieciešamās idejas un paņēmieni tuvi mūsdienu zinātnē lietotajiem spriedumiem. No otras puses uzdevumu komplektu sastādīšana prasa to veidotājiem iepazīties ar daudzām matemātikas nozarēm, lai kaut daļēji izbēgtu no tēmu atkārtošanās. Šie apstākļi arī nosaka "olimpiāžu matemātikas" ciešo sakaru ar elementāro matemātiku augstāk minētajā izpratnē.

Galveno elementārās matemātikas kombinatorisko metožu apraksts dots darbos [1] - [6]. Lielākā daļa uzdevumu, kas sastādīti, izmantojot un ilustrējot šīs metodes, ievietoti krājumos [7] - [14]. Bez tam šīs metodes un uzdevumi ietverti mācību grāmatās un līdzekļos [15] - [23]. To apgūšanai un pielietošanai izveidotas daudzas (apmēram 30) metodiskas izstrādnes; skat., piem., [24] - [31].

Vispārīgās kombinatoriskās metodes šeit aplūkotas 1.§.

Ar mērķi iekļaut šīs metodes izglītības sistēmas apritē jau skolas posmā Latvijā izveidota izvērsta padziļinātas matemātiskās izglītības sistēma ar centru Latvijas Universitātes A.Liepas Neklātienes matemātikas skolā; tā aprakstīta 2.§. Šīs sistēmas darbību var uzskatīt par aplūkoto metožu praktisku aprobāciju.

Darba kopsavilkuma noslēgumā pievienots literatūras saraksts.

1.§. Dažas vispārīgas kombinatoriskas metodes

1.1. Kombinatorisko metožu un uzdevumu klasifikācija. Kombinatorikas pamatprincips.

Kombinatoriska rakstura uzdevumus var nosacīti iedalīt sekojošās lielās grupās:

A. Noskaidrot, vai eksistē kaut viens prasītā tipa objekts.
B. Uzrādīt kaut vienu šādu objektu.
C. Noskaidrot, cik šādu objektu ir.
D. Izstrādāt algoritmu, kas dod visus šādus objektus.
E. No visiem dotā tipa objektiem atrast kaut kādā nozīmē optimālo.

B, C, D grupu uzdevumi ir izteikti konstruktīva rakstura. A grupas uzdevumos var lietot gan konstruktīvas, gan netiešas metodes (neeksistences pierādījumi no pretējā). E grupas uzdevumos paša optimālā objekta atrašana prasa konstruktīvu pieeju, kamēr tā optimalitātes pierādījums var būt gan konstruktīvs, gan nekonstruktīvs.

Kombinatoriskās metodes, kuras mēs aplūkosim, var tikt iedalītas divās lielās grupās. Viena grupa raksturojas ar vispārīgo pieeju "spriežam par kopas īpašībām, balstoties uz tās elementu īpašībām". Otru grupu raksturo pieeja "cenšamies uzzināt kaut ko par atsevišķiem elementiem, balstoties uz visas kopas īpašībām".

Uz pirmā tipa metodēm mēs attiecinām matemātiskās indukcijas metodi un ekstremālā elementa metodi, uz otrā tipa metodēm - vidējās vērtības metodi, invariantu metodi un interpretāciju metodi. Protams, praktiskos pielietojumos šīs metodes tiek lietotas kombinēti.

Būtiska sastāvdaļa visās minētajās metodēs ir sekojošs princips, ko mēs sauksim par kombinatorikas pamatprincipu (KPP):

skaitīšanas rezultāts nav atkarīgs no skaitīšanas kārtības.

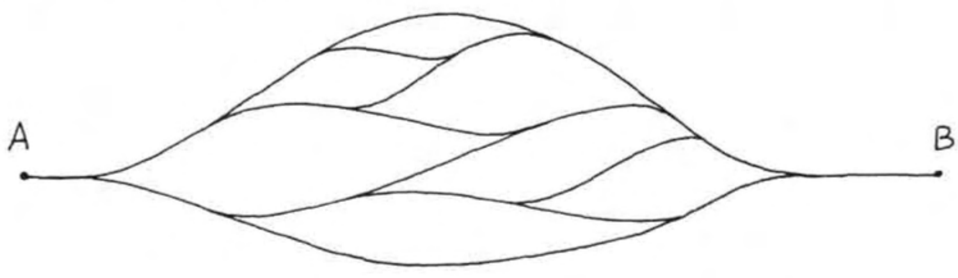
Bez ierunām šis princips ir pareizs attiecībā uz galīgām kopām, tomēr , kā zināms, ir spēkā tā analogi arī dažās "bezgalīgās" situācijās: absolūti konverģentu rindu summēšana, integrācijas kārtības maiņa absolūti konverģentos integrāļos utt. Mēs galvenokārt aplūkojam tā pielietojumus galīgu kopu situācijās (bet ne tikai).

Mūsu aplūkojamo metožu pielietojumos KPP ir īpaši svarīga loma arī apmācības procesā: ar tā palīdzību var ilustrēt dažādu matemātikas daļu ciešo saistību. Piemēram, uz KPP balstās praktiski visa identisko algebrisko pārveidojumu tehnika. Tiešām, pamatidentitātes $a \bullet b = b \bullet a$, $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(b+c)=ab+ac$ izsaka KPP dažādus variantus (piemēram, $a \bullet b = b \bullet a$ vienkāršotā variantā izsaka faktu, ka rūtiņu taisnstūrī ar a rindiņām un b kolonnām rūtiņu skaitu var iegūt, gan skaitot pa rindiņām, gan skaitot pa kolonnām.)

Otrs būtisks KPP pielietojumu loks ir C grupas uzdevumu risināšanā lietojamā rekurento sakarību metode. Tiešām, katra rekurentā sakarība izsaka faktu, ka mūs interesējošos objektus (kurus mēs parasti iedomājamies kaut kādā dabīgā kārtībā) var saskaitīt arī citādi, klasificējot pēc kādas noteiktas pazīmes. Tādējādi KPP pielietojumi ir arī reizinājuma likums kombinatorikā, klasisko kombinatorisko skaitļu aprēķināšana, ieslēgšanas - izslēgšanas formula, utt. Plaši KPP pielietojumi saistīti ar elementāro skaitļu teoriju (dalītāju skaita novērtējumi, Gausa lemma un tās pielietojumi utt.) Vispārinātā veidā KPP izpaužas ģeometrijā, kur daudzos gadījumos figūras mērs vienāds ar tās atsevišķo daļu mēru summu neatkarīgi no tā, kādās mērojamās daļās figūra sadalīta un kādā kārtībā šīs daļas apskata; uz to balstās, piemēram, visas laukumu aprēķināšanas metodes.

No pielietojumu viedokļa KPP apguvē sevišķi noderīgs t.s. "ceļu shēmas" jēdziens. Tā pielietojumu ilustrē sekojošs uzdevums.

"Pa cik dažādiem ceļiem var aizbraukt no A uz B, ja atļauts virzīties tikai no kreisās uz labo pusi (skat. 1.zīm.)?"



1.zīm.

Šis uzdevums ir viens no t.s. "modeļuzdevumiem" rekurento sakarību metodes apguvē. Ar līdzīgu shēmu palīdzību var uzskatāmi ilustrēt daudzu kombinatorikas uzdevumu risinājumus.

Kombinatorikas pamatprincipa pielietojumus skat. darbos [1], [7]-[14], kā arī kopā ar galveno kombinatorisko metožu izklāstu.

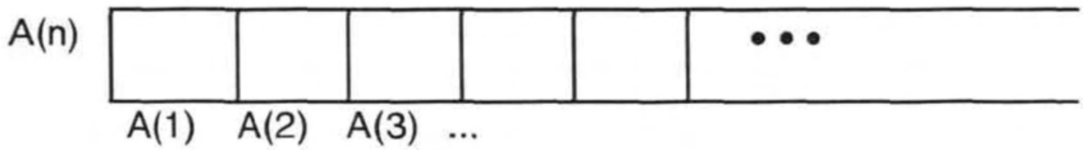
1.2. Matemātiskās indukcijas metode (MIM)

Acīmredzot, MIM ir pirmās grupas metode: tā ļauj izdarīt spriedumus no atsevišķu elementu īpašībām par visu kopu. Analizējot tās dažādos pielietojumus, tika konstatēts, ka ļoti būtisks ir indukcijas shēmas jēdziens.

Vispārpieņemtajos MIM lietojumos parasti pārbauda bāzi pie parametra vērtības n=1 un veic induktīvo pāreju no n=k uz n=k+1. Šāda shēma pēc būtības ietverta arī Peano aksiomu sistēmā. Skaidrs, ka arī jebkuriem citiem matemātiskās indukcijas lietojumiem galu galā principā jāreducējas uz šo shēmu. Tomēr, risinot konkrētas problēmas, daudz parocīgāki var izrādīties dažādi tās varianti.

Aplūkosim indukcijas shēmas jēdzienu.

Ja dots vispārīgs apgalvojums A(n) ar parametru n, attēlosim to kā uz vienu galu bezgalīgu rūtiņu lentu. Tad atsevišķās rūtiņas attēlo atbilstošos apgalvojumus ar parametra vērtībām n=1, n=2, n=3,... (skat. 2.zīm.)



2.zīm.

Iztēlosimies, ka no sākuma visa lenta ir balta. Pierādītiem apgalvojumiem atbilstošos apgabalus aizkrāsosim. Tad mūsu mērķis ir parādīt, ka var aizkrāsot visu bezgalīgo lentu A. Šādā interpretācijā klasiskā indukcijas shēma 1; k→k+1 attēlojas sekojoši:

a) aizkrāso pirmo kvadrātiņu A(1),

b) pierāda likumu, saskaņā ar kuru aiz aizkrāsota kvadrātiņa sekojošo arī var aizkrāsot.

Grafiski šādi spriedumi attēlojami ar 3.zīm.

a) b)

3.zīm.

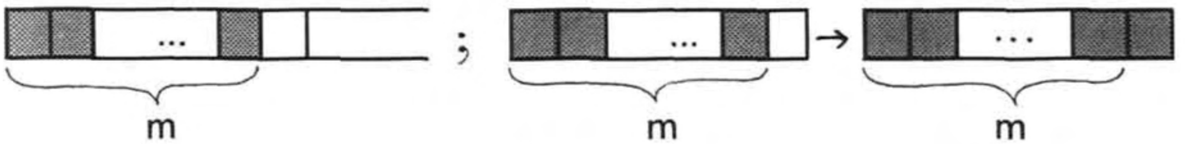
Uzskatāmi redzams, ka, izejot no situācijas 3.a zīm. un pakāpeniski pielietojot 3.b zīm. redzamo "šablonu", aizkrāsojam visu 2.zīm. lentu.

Saglabājot pamatinterpretāciju ar bezgalīgo aizkrāsoto lentu, ir skaidrs, ka aizkrāsošana var notikt arī citādi. Tādējādi nonākam pie indukcijas shēmas jēdziena. Tā galvenās izpausmes ir

1) viendimensionālās indukcijas shēmas ar bāzi

A(1), A(2),...,A(m) un induktīvo pāreju

A(k+1) & A(k+2) & ...& A(k+m) → A(k+m+1) (skat.4.zīm.)



4.zīm.

2) viendimensionālās indukcijas shēmas ar bāzi A(1) un induktīvo pāreju $\forall t(t<k \rightarrow A(t)) \rightarrow A(k+1)$ (skat. 5.zīm.)

5.zīm.

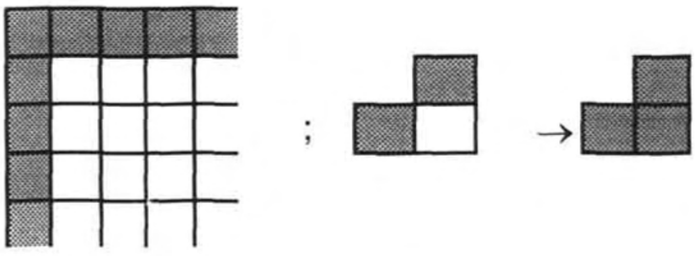
3) viendimensionālās indukcijas shēmas ar lēciena garumu lielāku nekā 1, piem., shēma ar bāzi A(1)&A(2) un induktīvo pāreju $A(k) \rightarrow A(k+2)$.

4) viendimensionālās indukcijas shēmas "turp - atpakaļ", piemēram, shēma ar bāzi A(1); A(2) un induktīvajām pārejām $k \rightarrow 2k$ un $k \rightarrow k-1$

5) viendimensionālās paralēlās indukcijas shēmas, kad vienlaikus pierāda vairākus apgalvojumus, no kuriem patiesībā svarīgi tikai daži, bet pārējie kalpo kā "sastatnes mājas celtniecībā"

6) vairākdimensionālas indukcijas shēmas, kad pierādāmais vispārīgais apgalvojums atkarīgs no vairākiem parametriem. Piemēram, plaši izplatīta ir apgalvojuma A(n,m) pierādīšana pēc shēmas ar bāzi A(1,m) & A(n,1) un induktīvo pāreju

$A(n-1,m)$ & $A(n,m-1) \rightarrow A(n,m)$ (skat. 6.zīm.)



6.zīm.

7) viendimensionālās indukcijas shēmas "pēc reizinājuma", piemēram, indukcijas shēma ar bāzi $A(p^k)$ (p-pirmskaitlis) un induktīvo pāreju $A(n)$ & $A(m)$ & $LKD(n,m)=1 \rightarrow A(n \bullet m)$.

MIM kombinatoriskos uzdevumos tiek pamatā lietota 1.1 punktā minētās D grupas uzdevumu risināšanā; bez šaubām, tai ir plaša loma arī ārpus kombinatorikas. Retāk, bet tomēr pietiekami bieži, MIM tiek lietota B grupas uzdevumu risināšanā ("matemātiskā indukcija atsevišķu apgalvojumu pierādīšanā"), kā arī C un E grupas uzdevumos (optimalitātes pierādījumi ar indukciju, kas parasti izmanto plašāku apgalvojumu pierādījumus, paralēlo indukciju utt.)

No pielietojumu viedokļa, apgūstot MIM, īpaša vērība veltāma arī pietiekami daudzpusīgām uzdevumu grupām, ar kurām ilustrē dažādas shēmas. Bez pedagoģijā klasiskajiem MIM pielietojumiem summu aprēķināšanā, nevienādību un dalāmības īpašību pierādīšanā un identitāšu pamatošanā liela uzmanība tiek veltīta induktīvām konstrukcijām (t. sk. induktīvām definīcijām), kombinatorisku algoritmu izstrādei un to pareizības pierādīšanai, indukcijas pielietojumiem atsevišķu apgalvojumu pierādīšanā, spēļu analīzē, jautājumam par piemērota indukcijas parametra izvēli. Vispār mēs uzskatām, ka MIM pēc būtības ir process, un tāpēc tās apguvi vislabāk sākt ar konstruktīva rakstura uzdevumiem, kuru risināšanas gaitā katra nākošā atsevišķā uzdevuma risinājums tieši un uzskatāmi izriet no iepriekšējā uzdevuma risinājuma, nevis ar algebrisku sakarību pierādīšanu, kā pieņemts klasiskajos mācību līdzekļos.

MIM pielietojumi elementārajā matemātikā izklāstīti darbā [1]; skat. arī [5], [7]-[14].

1.3. Vidējās vērtības metode (VVM)

VVM ir izteikta otrās grupas metode; tā ļauj spriest par kopas elementiem, izmantojot visas kopas integrālus raksturlielumus, kas saistīti ar visu elementu skaitlisko raksturlielumu summu, reizinājumu utt. VVM izpausmes elementārajā matemātikā ir ļoti daudzpusīgas un savstarpēji šķietami nesaistītas.

Plaša VVM pielietojumu grupa balstās uz sekojošu principu:

ja lielu objektu sadala mazā skaitā daļu, tad vismaz viena daļa ir pietiekami liela.

Ko katrā konkrētā situācijā nozīmē "liels", "mazs" un "pietiekami", atkarīgs no apskatāmā uzdevuma.

Paši vienkāršākie VVM pielietojumi saistīti ar summu un reizinājumu novērtējumiem sekojošu apgalvojumu formā:

ja $x_1+x_2+...+x_n \geq a_1+a_2+...+a_n$, tad eksistē tāds i, ka $x_i \geq a_i$.

Īpaši svarīgs ir speciālgadījums, kad $a_1=a_2...=a_n$.

Skaidrs, ka analogus rezultātus var formulēt stingrām nevienādībām, pozitīvu skaitļu reizinājumiem utt.

Minētās lemmas speciālgadījums diskrētu objektu gadījumā ir plaši pazīstamais Dirihlē princips (DP):

ja vairāk nekā k•n objekti sadalīti n grupās, tad vismaz vienā grupā ir ne mazāk kā k+1 objekts.

Pat šajā visvienkāršākajā formulējumā DP un tā tieši secinājumi gūst plašus pielietojumus. Atzīmēsim dažus no tiem.

A. Elementārajā grafu teorijā DP pielietojams teorēmās par sakārtojumiem virknēs un ciklos, par Hamiltona un Eilera ceļu un ciklu eksistenci un neeksistenci. Tālāk, visa klasiskā grafu Ramseja teorija pēc būtības ir daudzkārtīga un sarežģīta DP pielietošana (bieži reizē ar MIM) pilniem un nepilniem grafiem. Ar DP cieši saistīti klasiskie minimaksa rezultāti (Holla, Dilvorsa, Kēniga-Rado teorēma, Špernera lemma, Forda-Falkersona algoritms utt.)

B. Elementārajā skaitļu teorijā DP pielietojumi vispirms saistīti ar skaitļu klasificēšanu pēc moduļiem (tieši sakarā ar vācu matemātiķa P.L.Dirihlē darbiem šajā nozarē princips ieguvis savu nosaukumu). DP pielietošana ir viens no galvenajiem etapiem, pierādot tādus klasiskus rezultātus kā Fermā mazā teorēma, Vilsona teorēma, ķīniešu teorēma, Tues lemma utt.

Cita DP pielietojumu grupa saistīta ar skaitļu kanoniskajiem sadalījumiem pirmreizinātājos.

Trešā DP pielietojumu grupa saistīta ar reālu skaitļu pieraksta struktūru pozicionālās skaitīšanas sistēmās un iracionālu skaitļu racionāliem tuvinājumiem.

C. Elementārajā algebrā DP tiek lietots, lai konstatētu vienādojumu un nevienādību atrisinājumu eksistenci.

D. Elementārajā un kombinatoriskajā ģeometrijā DP parasti tiek lietots kombinācijā ar kādu tīri ģeometrisku ideju vai faktu. Kā galvenos no tiem jāmin : a) maksimālais attālums starp daudzstūra punktiem, b) (slēgtas) lauztas līnijas posmu un virsotņu īpašības, c) n-stūra leņķu summa, d) trijstūra nevienādība. Dažādu figūru un punktu sistēmu izvietojumu pētīšanā ļoti liela nozīme ir apkārtnes jēdzienam, kas kopā ar DP analogiem ģeometrijā ļauj konstatēt dažādu izvietojumu neiespējamību.

E. Plašus pielietojumus DP gūst teorētiskajā datorzinātnē. Pieminēsim dažus no tiem.

Pirmkārt, DP un tā analogus lieto kombinatorisko algoritmu optimalitātes pierādījumos (t.s. "informācijas teorijas sniegtie apakšējie novērtējumi").

Otrkārt, DP tiek izmantots kodēšanas teorijā kodu optimalitātes pētījumos kopā ar dažādiem ģeometriskā apkārtnes jēdziena vispārinājumiem.

Treškārt, DP un tam līdzīgi spriedumi ir pamatā daudziem neiespējamības pierādījumiem automātu teorijā. Tiešām, šādi pierādījumi bieži balstās uz faktu, ka automātu "piespiež" kaut kādā izpratnē ieciklotie; to panāk, apskatot situāciju skaitu, kas lielāks par automāta (vispārināto) stāvokļu skaitu, tāpēc vismaz divās situācijās automātam jāatrodas vienādos (vispārinātos) stāvokļos.

Ceturtkārt, DP ir viena no galvenajām idejām pēdu metodes lietošanā sarežģītības apakšējos novērtējumos.

DP un summu novērtēšanas metodes tiek lietotas galīgām kopām. VVM tiek lietota arī plašākos kontekstos, kas saistīti ar bezgalīgām kopām. Te galvenokārt jāmin sekojošie virzieni:

a) bezgalīgas kopas sadalījums galīgā skaitā daļu; tad vismaz viena daļa ir bezgalīga. Klasiski šāda pielietojuma piemēri ir Kēniga lemma par bezgalīgo koku, Ramseja teorēmas bezgalīgiem grafiem, Eiklīda plaknes Ramseja teorija utt.

b) VVM integrālie varianti, uz kuriem attiecināma, piemēram, klasiskā matemātiskās analīzes teorēma par nepārtrauktas funkcijas vidējo vērtību, nogriežņa vai slēgtas līnijas garuma raksturojums ģeometrijā ar tās projekciju palīdzību un uz to balstītās ģeometrisko nevienādību pierādīšanas metodes utt.

c) eksistences pierādījumi, kas balstās uz apjoma ziņā dažādu bezgalīgu kopu eksistenci (piemēram, transcendentu skaitļu eksistences Kantora pierādījums).

Minētie VVM pielietojumi pamatā saistīti ar eksistences vai neeksistences pierādījumiem, t.i., attiecināmi uz 1.1. punktā minētās A grupas uzdevumiem un vienu no divām E grupas uzdevumu daļām (jau konstruēta objekta optimalitātes pierādījums).

Citi VVM pielietojumi aplūkoti punktā "Interpretāciju metode".

VVM pielietojumi elementārajā matemātikā apskatīti darbos [2]-[4], [6]-[14].

1.4. Invariantu metode

Invarianta jēdziens vienmēr saistīts ar kādu procesu, kurā šis invariants izpaužas. Tas nosaka invariantu metodes galvenos pielietojumus:

a) kombinatorikas A grupas uzdevumos - neiespējamības pierādījumos, īpaši gadījumos, kad meklējamais objekts tiek meklēts kā kādas konstrukcijas iespējamais gala rezultāts,

b) kombinatorikas C grupas uzdevumos - balstoties uz kombinatorikas pamatprincipu, kas izsaka skaitīšanas rezultāta invarianci attiecībā pret skaitīšanas kārtības maiņu (tas ir galvenais kombinatoriskais invariants),

c) algoritmu pareizības pierādījumos, tai skaitā matemātisko spēļu stratēģiju pamatojumos.

Protams, var norādīt daudz atvasinātu pielietojumu, piemēram, figūras laukuma invariance attiecībā pret tās daļu pārkārtošanu utt.

Invariantu metodi neiespējamības pierādījumos parasti pielieto sekojošās situācijās: doti objekti α_1 un α_2 no klases $\mathfrak{A}$ un likums, saskaņā ar kuru katru objektu no klases $\mathfrak{A}$ var pārveidot par kaut kādu objektu no klases $\mathfrak{A}$. Vai iespējams ar galīgu skaitu šādu pārveidojumu, izpildot tos pēc kārtas, no objekta α_1 iegūt α_2 ?

Par šāda uzdevuma invariantu sauc funkciju f, kas katram $\alpha \in \mathfrak{A}$ piekārto lielumu f(α), turklāt, ja objekts w_1 iegūstams no w_2, pielietojot pieļauto pārveidojumu vienu reizi, tad $f(w_1)=f(w_2)$.

Ja atrasts uzdevuma invariants, kuram turklāt $f(\alpha_1)\neq f(\alpha_2)$, tad esam pierādījuši, ka no α_1 nevar iegūt α_2 ar galīgu skaitu pieļauto pārveidojumu.

Klasiski invariantu metodes pielietojumi ir pētījumi par loģikas algebras funkciju izsacīšanu dažādās bāzēs.

Neiespējamības pierādījumos elementārajā matemātikā parasti lieto skaitliskus invariantus (elementu skaits, attālumu summa, kaut kādā izpratnē maksimālais attālums starp figūras punktiem utt.). Tomēr sastopami arī "kvalitatīvi invarianti", kā figūras orientācija, skaitīšanas rezultāta paritāte utt. Atšķirība starp skaitliskiem un "kvalitatīviem" invariantiem nav būtiska matemātiskā izpratnē (katru "kvalitatīvu" invariantu var reducēt par skaitlisku), bet ļoti svarīga invariantu metodes apguvē.

Aplūkojamā tipa neiespējamības pierādījumos elementārajā matemātikā bieži lieto arī t.s. "pusinvariantus". Pieņemsim, ka iepriekš aprakstītajā situācijā funkcija f ir skaitliska un tai piemīt īpašība: ja objekts w_2 iegūstams no objekta w_1, pielietojot pieļauto pārveidojumu vienu reizi, tad $f(w_1)<f(w_2)$. Tādu funkciju f sauc par apskatāmā uzdevuma augošu pusinvariantu. (Līdzīgi ievieš nedilstoša, dilstoša utt. pusinvarianta jēdzienus).

Ja atrasts uzdevuma augošs pusinvariants, kuram turklāt $f(\alpha_1)\geq f(\alpha_2)$, tad esam pierādījuši, ka no α_1 nevar iegūt α_2 ar galīgu skaitu pieļauto pārveidojumu. Līdzīgi varam spriest cita tipa pusinvariantu gadījumos.

Par pusinvariantiem parasti kalpo tie paši skaitliskie raksturlielumi, kas par invariantiem.

Pusinvariantu lietojumus elementārajā matemātikā visdziļāk pētījis Sankt-Pēterburgas matemātiķis D.Fomins.

Invariantu metodi neiespējamības pierādījumos lieto arī tādos gadījumos, kad meklējamais objekts netiek definēts kā pārveidojumu virknes rezultāts, bet tiek apskatīts tieši. Tādā gadījumā izšķirošais invariants parasti ir skaitīšanas rezultāts attiecībā pret skaitīšanas kārtības maiņu: pieņemot hipotētiskā objekta eksistenci, mēs aprēķinām kādu skaitlisku raksturlielumu divos dažādos veidos un, iegūstot dažādus rezultātus, nonākam pie pretrunas. Šāda tipa uzdevumi sevišķi bieži sastopami divās elementārās matemātikas jomās:

a) kombinatoriskajā ģeometrijā, kad tiek runāts par figūru sagriešanu noteikta tipa daļās vai sastādīšanu no tādām,

b) uzdevumos, kas reducējas uz tāda grafa neeksistenci, kam ir nepāra skaits virsotņu ar nepāra kārtu.

Ievērosim, ka šāda grafa neeksistence izriet no pretrunas, kuru iegūst, divos dažādos veidos saskaitot visu virsotņu kārtas: 1) pa virsotnēm (rezultāts - nepāra skaitlis), 2) pa šķautnēm - pāra skaitlis.

Sevišķi jāatzīmē, ka šis pats invariants - skaitīšanas rezultāts ir arī VVM un Dirihlē principa pamatos; tiešām, šo metožu pamatojumi tiek izdarīti no pretējā, un pretruna tiek iegūta, salīdzinot divos dažādos veidos aprēķinātas summas, reizinājuma utt. vērtības.

Lietojot invariantu metodi skaitīšanas rezultāta aprēķināšanai, galvenokārt tiek izmantots sekojošs paņēmiens: ar meklējamā rezultāta palīdzību izsaka kādu lielumu, kuru pēc tam aprēķina vēl citādā ceļā. No abu rezultātu vienādības iegūst prasīto rezultātu. Klasisks piemērs ir aritmētiskās progresijas locekļu summas aprēķināšana.

Invariantu metodes pielietojumi algoritmu pareizības pamatojumos notiek, ar matemātisko indukciju pierādot vispārīgāku apgalvojumu par īpašību, kas paliek invarianta algoritma jebkāda soļu skaita izpildes rezultātā.

Klasiskajā elementārajā matemātikā, pielietojot šo paņēmienu spēļu analīzei, ļoti svarīgs un ērts ir "uzvarošās pozīcijas" jēdziens. Atcerēsimies, ka elementārajā matemātikā parasti aplūko divu spēlētāju spēles ar pilnīgu informāciju, kurās gājienus izdara pēc kārtas, mainot spēles gaitā izveidojošos pozīciju, un uzvarētājs ir tas, kas iegūst kādu iepriekš noteiktu pozīciju.

Acīmredzot, šādā spēlē uzvaroša stratēģija ir atrasta, ja izdodas visas spēles pozīcijas sadalīt divās grupās $\mathfrak{A}$ un $\mathfrak{B}$, pie tam

a) no $\mathfrak{A}$ grupas pozīcijām var pāriet tikai uz $\mathfrak{B}$ grupas pozīcijām,

b) no $\mathfrak{B}$ grupas pozīcijas var pāriet uz kādu $\mathfrak{A}$ grupas pozīciju,

c) iepriekš noteiktā beigu pozīcija pieder grupai $\mathfrak{A}$.

Tad uzvarošā stratēģija ir - ar savu gājienu iegūt $\mathfrak{A}$ grupas pozīciju; $\mathfrak{A}$ grupu sauc par "uzvarošajām pozīcijām".

Uzvarošo pozīciju klase ir atrasta uzreiz, ja izdodas atrast atbilstošu invariantu īpašību, kuras saglabāšanos pēc saviem gājieniem attiecīgais spēlētājs var garantēt. Ja šādu invariantu īpašību neizdodas atrast tieši, galvenā metode elementārajā matemātikā spēļu stratēģiju izstrādē ir spēles modeļa veidošana.

Šeit svarīgs ir spēles parametra jēdziens; atkarībā no būtiskajiem spēles parametriem izšķir spēles ar un bez priekšvēstures, t.i., spēles, kurās iespējamos gājienus ietekmē (resp. neietekmē) tas, kādi gājieni izdarīti agrāk spēles gaitā.

Skaidrs, ka ne invariantu metode, ne kāda cita metode principā nevar dot uzvarošas stratēģijas patvaļīgai spēlei; tomēr te aprakstītā pieeja ļauj analizēt samērā sarežģītas un daudzveidīgas spēles.

No pielietojumu viedokļa, aplūkojot invariantu metodes apgūšanas jautājumus, centrālais uzdevums ir galveno invariantu - skaitīšanas kārtība un paritāte - iespējami brīva pārvaldīšana un prasme tos saskatīt dažādās situācijās. Tāpat lietderīgi uzsvērt invariantu metodes saistību ar matemātiskās indukcijas metodi - pēc būtības katrā pierādījumā ar matemātisko indukciju tiek pamatots, ka kaut kāda īpašība ir invarianta pārejā no vienas parametra vērtības uz nākošo. Invariantu metodes lietojumi elementārajā matemātikā apskatīti darbos [2]-[3], [7]-[14].

1.5.Ekstremālā elementa metode (EEM)

Ekstremālā elementa metode savā būtībā pamatojas uz faktu, ka daudzas parādības vai īpašības visspilgtāk izpaužas robežgadījumos, t.i., tam pētāmās kopas elementam, kas kaut kādā ziņā ir izcilā stāvoklī starp pārējiem - gluži tāpat kā cilvēka rakstura īpašības visspilgtāk izpaužas ārkārtējos apstākļos. Elementārajā matemātikā šī metode parasti tiek lietota sekojoši: pētot kādu kopu A, koncentrējam uzmanību uz to kopas elementu x, kam kāda īpašība izpaužas visizteiktāk (bieži vien tieši šis nosacījums definē elementu x; to sauc par kopas A ekstremālo elementu) un pēc tam, analizējot x saistību ar citiem A elementiem, iegūst derīgu informāciju par x vai par visu kopu A.

EEM tiek lietota, gan lai iegūtu informāciju par visu kopu no tās atsevišķa elementa (piemēram, lai pierādītu, ka kopa ir tukša vai sastāv no kāda naturāla skaitļa daudzkārtņiem), gan arī pretējā virzienā; tātad tā satur gan pirmā, gan otrā veida kombinatorisku metožu iezīmes.

EEM parasti tiek lietota 1.1.punktā minētās A grupas uzdevumu risināšanā (vairākumā gadījumu - pierādot neeksistenci), retāk - B grupas uzdevumu risināšanā (pēc kāda parametra ekstremālais elements izrādās meklējamais pavisam citā kontekstā); ļoti plaši EEM tiek lietota C grupas uzdevumu risināšanā.

Pašos vienkāršākajos gadījumos kopas ekstremālais elements tiek atrasts tieši: lielākais skaitlis skaitļu kopā, trijstūris ar vislielāko laukumu, skaitlis starp aplūkojamiem, kas dalās ar vislielāko pirmskaitļa p pakāpi, utt. (Pēdējais gadījums ir raksturīgs piemērs EEM lietošanai elementārajā skaitļu teorijā). Grafu teorijas uzdevumos raksturīgs ekstremālā elementa piemērs ir virsotne ar vislielāko (vismazāko) kārtu, kombinatoriskās ģeometrijas uzdevumos par galīga skaita punktu un taišņu izvietojumiem - punkts, kurā krustojas visvairāk taišņu (respektīvi taisne, kas satur visvairāk punktu) vai pāris (punkts, taisne), kuru savstarpējais attālums ir vismazākais no nenulles attālumiem. Ļoti svarīgs ekstremālā elementa piemērs kombinatoriskajā ģeometrijā ir izliektā apvalka jēdziens.

Ekstremālā elementa metode dažreiz tiek lietota neiespējamības pierādījumos ar invariantu metodes palīdzību; ir uzdevumi, kuros izdevīgi izsekot, kā kaut kāda procesa gaitā mainās kopas ekstremālais elements, un tam pielietot 1.4. punktā minētos spriedumus. Ekstremālos elementus daudzreiz izmanto pārlases tipa algoritmos kā pārlases parametrus.

Būtiska ekstremālā elementa pielietošanas joma ir pierādījumi, kuros pamato,ka kāds process (piemēram, algoritma izpilde) ir galīgs. Parasti tas notiek pēc šādas shēmas:

a) konstatē, ka kāds procesu raksturojošs parametrs katrā izpildes solī (vai arī laiku pa laikam) palielinās,

b) pierāda, ka šim parametram var būt tikai galīgs skaits vērtību (vai arī pēc kāda laika paliek tikai galīgs skaits iespējamu vērtību)

c) secina, ka procesam jābeidzas, jo pretējā gadījumā parametrs pieņemtu bezgalīgi daudz dažādas vērtības.

Visplašāk pazīstamā šīs pieejas izpausme ir bezgalīgā kritiena metode elementārajā skaitļu teorijā, kā arī tādu algoritmu analīze, kuri sāk savu darbību ar patvaļīgu konfigurāciju un pakāpeniski to uzlabo.

Ar EEM pielietošanu saistīti principiāli jautājumi par ekstremālā elementa eksistenci; kā zināms, ne katrā netukšā skaitļu kopā eksistē vismazākais (vislielākais) elements. Ekstremālā elementa eksistence ir garantēta, ja apskatāmā kopa ir galīga. Gan no pedagoģiskā, gan izziņas viedokļa, pielietojot EEM kādas galīgas kopas analīzei, pēc tam lietderīgi izpētīt analogu jautājumu tās bezgalīgam analogam, kur EEM tieši vairs nav lietojama. Daudzos gadījumos, kad tiek iegūts pretējs rezultāts, tas runā pretī mūsu intuīcijai, un tādējādi šī pieeja padziļina izpratni par pētāmo parādību.

Ekstremālā elementa metode ir dziļi saistīta gan ar galveno pirmā veida kombinatorisko metodi - MIM, gan ar galveno otrā veida kombinatorisko metodi - VVM. Tiešām, matemātiskās indukcijas principa pamatojumos (ja tie netiek reducēti līdz Peano aksiomu sistēmai) parasti tiek izmantots fakts, ka katrai netukšai naturālu skaitļu kopai eksistē vismazākais elements (un tātad tādam jāeksistē arī starp tiem naturālajiem skaitļiem, kam neizpildās vispārīgais apgalvojums A(n), no kurienes tūlīt iegūstam pretrunu). No otras puses, gan VVM, gan DP, kas garantē kāda objekta eksistenci, pēc būtības apgalvo, ka šāds objekts ir tas, kam ir vislielākā (vismazākā) kāda skaitliska raksturlieluma vērtība.

Šie novērojumi, kaut arī matemātiski ne sevišķi dziļi, izrādās ārkārtīgi noderīgi, iepazīstinot skolēnu, skolotāju un studentu auditorijas ar apskatāmajām metodēm un veidojot iemaņas to lietošanā. EEM lietojumi elementārajā matemātikā apskatīti darbos [2] - [3], [7] - [14].

1.6. Interpretāciju metode.

Šīs metodes lietojumi balstās uz dziļām iekšējām saitēm starp dažādām matemātikas nozarēm, kas ļauj pielietot vienas nozares metodes citas nozares uzdevumu risināšanā. Īsi interpretāciju metodes būtību var aprakstīt sekojoši:

1) risināmo uzdevumu "pārtulko" citā "valodā",

2) atrisina "pārtulkoto" uzdevumu,

3) atrisinājumu "tulko" atpakaļ, iegūstot sākotnējā uzdevuma risinājumu.

Interpretāciju metodi mēs pieskaitām kombinatoriskām metodēm, jo tās pamatā ir atbilstības nodibināšana starp uzdevumu klasēm dažādās nozarēs, kas ir klasisks kombinatorisks paņēmiens. Tā rod pielietojumus visās 1.1. punktā minētajās kombinatorisko uzdevumu grupās, kā arī virknē citu uzdevumu.

Klasiski interpretāciju metodes piemēri ir analītiskās ģeometrijas pieeja ģeometrisku uzdevumu risināšanai, kā arī ģeometriskā skaitļu teorija, kad veselu un racionālu skaitļu dalāmības īpašības tiek pētītas, balstoties uz Dekarta plaknes veselo punktu (t.i., punktu, kam abas koordinātas ir veseli skaitļi) kopas īpašībām.

Interpretāciju metodes galvenie pielietojumi elementārajā matemātikā bez jau minēto lietojumu elementiem ir sekojoši:

a) kombinatoriska rakstura uzdevumu pārtulkošana grafu valodā,

b) algebrisku nevienādību pierādīšana ar ģeometriskas interpretācijas palīdzību,

c) identitāšu pierādīšana ar piemērotas interpretācijas palīdzību, kad abas identitātes puses interpretē kā kādas galīgas kopas elementu skaitu, kas aprēķināts dažādos veidos,

d) identitātes pierādīšana ar ģeometriskas interpretācijas palīdzību, kad tās abas puses interpretē kā dažādā veidā aprēķinātu vienas un tās pašas figūras laukumu, tilpumu utt.,

e) planimetrijas apgalvojumu pierādīšana ar stereometriskas interpretācijas palīdzību, tai skaitā ģeometrisko konstrukciju neiespējamības pierādījumi, izmantojot paralēlo un centrālo projicēšanu,

f) nevienādību pierādīšana ar varbūtību teorijas interpretācijas palīdzību, kad nevienādību pārveido formā

$$p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)\leq 1,$$

kur A_1, A_2, ...,A_n - pa pāriem nesavietojamu notikumu sistēma (skaidrs, ka iespējamas variācijas).

Ievērosim, ka šādi pielietojumi savā būtībā saistīti ar VVM.

Interpretāciju metodes sastāvdaļa ir arī matemātikas uzdevumu risināšana ar fizikālas interpretācijas palīdzību: smaguma centra jēdziens un tā pielietojumi, potenciālās enerģijas minimuma princips, enerģijas nezūdamības likums utt. Ievērosim, ka jēdziena par smaguma centru lietošana ir VVM variants; tiešām, materiālu punktu sistēmas smaguma centru var dabīgā izpratnē uzskatīt par tās "vidējo" punktu. No matemātiskās stingrības viedokļa šādas interpretācijas var radīt iebildumus, tomēr jāatzīmē: pirmkārt, visus minētos jēdzienus var formalizēt un atbrīvot no fizikālā satura, otrkārt, šādas interpretācijas var palīdzēt uzminēt vajadzīgo rezultātu, kuru pēc tam stingri pamato citādi.

No pielietojumu viedokļa raugoties, interpretāciju metodes lomu matemātikas padziļinātā mācīšanā grūti pārvērtēt. Tā attīsta nestandarta pieejas, palīdz atklāt agrāk nepamanītas sakarības, stimulē patstāvīgus pētījumus, utt.

Interpretāciju metodes lietojumi elementārajā matemātikā apskatīti darbos [5], [6], [7] - [14].

2. §. Pielietojumi matemātikas padziļinātā mācīšanā.
2.1. Galvenie didaktiskie principi.

Matemātiķa kvalifikāciju raksturo faktu zināšanas, prasme tos pielietot atbilstošās situācijās, spēja izveidot un analizēt adekvātu matemātisku modeli, vispārējā loģiskā kultūra un grūti definējams jēdziens "matemātiskā intuīcija", ko varētu raksturot kā spēju nojaust, vai kāds rezultāts ir pareizs vai nē, vēl pirms tā pamatojuma, un spēju uzminēt, kādā virzienā meklējams tā pamatojums. Vēl augstākā līmenī matemātisko intuīciju raksturo prame nojaust, kurās vēl nematematizētās cilvēka darbības sfērās slēpjas matemātikas (un tieši kuras matemātikas nozares) pielietošanas iespējas.

Matemātisko faktu uzkrāšana apziņā ievērojami atvieglojas, ja tie tiek organizēti kaut kādā sistēmā. Vispārējās izglītības tradicionālā pieeja organizē matemātiskos faktus pēc objektiem, uz kuriem tie attiecas (vienādojumi, laukumi utt.) Šāda pieeja attaisnojas, kamēr faktu materiāls nav liels. Mūsu pieredze parāda, ka, tam pieaugot, efektīvāka kļūst zināšanu organizēšana pēc to pielietojumiem. Minētās kombinatoriskās metodes izrādās efektīvi "zināšanu kondensācijas centri". Tā kā pierādījums, modeļa veidošana un analīze, apgalvojuma pareizības intuitīva novērtēšana ir procesi, tad tajos vispārīgas metodes spēlē svarīgāku lomu nekā fakti: faktus var atklāt ar metožu palīdzību, kamēr vispārīgu metožu sintezēšana no atsevišķiem faktiem ir daudz augstāka līmeņa uzdevums.

Katru zināšanu - gan faktu, gan metožu - apguve var būt induktīva un deduktīva. Mūsu pieredze parāda, ka gan skolēni, gan studenti, gan skolotāji minētās vispārīgās metodes prot lietot brīvāk, ja šīs metodes viņiem mācītas induktīvi, no dažādiem piemēriem pamazām sintezējot metodes vispārīgo jēdzienu.

Visefektīvākā shēma ir sekojoša:

liels skaits dažādu piemēru $\rightarrow$ vispārīgs jēdziens par metodi $\rightarrow$ jauni piemēri $\rightarrow$ vispārīgāks jēdziens par metodi $\rightarrow$ ... .

Ievaduzdevumi minēto metožu apguvē ir sekojoši:

MIM: induktīvas konstrukcijas, induktīvi algoritmi, rekurento sakarību metode

VVM: Dirihlē princips vienkāršākajā variantā dažāda tipa uzdevumos; tā pielietojumi uzdevumos par lielākās un mazākās vērtības atrašanu

Invariantu metode: skaitīšanas rezultāta neatkarība no skaitīšanas kārtības, paritātes apsvērumu pielietošana

EEM: skaitļu kopas lielākais un mazākais elements, izliektais apvalks

Interpretāciju metode: ģeometrijas pielietojumi algebrā, fizikālās interpretācijas.

Minēto metožu apmācības sākumā svarīgi panākt, lai metožu būtību neaizklātu tehniskie sīkumi, kas saistīti ar risinājuma precīzu pierakstu vispārīgā veidā. Tāpēc lielu lomu spēlē t.s. "vispārīgie atsevišķie gadījumi", kuros attiecīgais spriedums tiek veikts vienai vai nedaudzām konkrētām parametra vērtībām, punktu konfigurācijām utt., kas tomēr satur visas būtiskās vispārīgā gadījuma iezīmes. Jēdziens par šādu piemēru sistēmu radies no jēdziena par pilno piemēru sistēmu programmu testēšanā. Sevišķi efektīvi šādas piemēru sistēmas lietot jaunāko klašu skolēnu apmācībā.

Ja metožu lietošanas apmācību labāk veikt induktīvi, tad tās galarezultātam jābūt prasmei pielietot šīs metodes deduktīvi; turklāt šai prasmei jābūt jo izteiktākai, jo augstāka līmeņa audzēkņus apmācām. Ideālā variantā risinātājam jau no uzdevuma formulējuma "jājūt", kuras metodes būs lietderīgas tā risināšanā, un tālāk jārīkojas pēc vairāk vai mazāk precīzas shēmas. Skaidrs, ka tas principā nav sasniedzams attiecībā uz visiem iespējamiem uzdevumiem, tomēr ar šādas pieejas palīdzību var risināt plašas uzdevumu klases.

Mūsu pieredze parāda, ka gan minēto kombinatorisko, gan citu vispārīgo elementārās matemātikas metožu apgūšanu vislabāk veikt aktīvi, t.i., risinot speciālā veidā sastādītas uzdevumu sērijas pārmaiņus ar raksturīgo piemēru apgūšanu no literatūras vai pasniedzēja stāstījuma.

Minēto metožu apgūšanai ir vēl arī citi pozitīvi pedagoģiski efekti:

a) matemātikas vienotības demonstrēšana,

b) estētiskie apsvērumi,

c) minēto metožu pamatā esošo ideju pielietojamība arī ārpus matemātikas,

d) jēdziena par matemātisko pierādījumu paplašināšana, salīdzinot ar skolās parasti lietotajiem pierādījumiem,

e) skolēnu, studentu, skolotāju patstāvīgu aktivitāšu rosināšana, pielietojot apgūtās metodes jau atrisinātajiem uzdevumiem līdzīgos, arī agrāk citādi atrisinātos uzdevumos.

Runājot par minēto vispārīgo metožu pielietojamības robežām (piemēram, skaitīšanas kārtības maiņa bezgalīgu kopu gadījumā; indukcija pēc cita (ne naturāla) parametra; integrālie vidējās vērtības analogi; pilna invariantu sistēma; ekstremālā elementa eksistences problēma; fizikālo interpretāciju pielietojamības robežas; dažādu struktūru izomorfisms interpretāciju metodes gadījumā), izdodas dabīgā veidā pieskārties daudzām svarīgām matemātiskām idejām, kas atrodas tālu no formālā skolas kursa, tai pašā laikā parādot to ciešo sakaru ar matemātikas elementārajām nodaļām.

Protams, ka minētās vispārīgās kombinatoriskās metodes neizsmeļ visu padziļinātā matemātikas skolas kursa saturu: tajā ietilpst gan citas metodes, gan plašs pamatkursā neiekļauts faktu materiāls. Tomēr minētās metodes ir LU A.Liepas NMS izstrādātās matemātikas padziļinātas mācīšanas sistēmas kodols.

2.2. Apmācības sistēma.

Matemātikas zināšanas un matemātiskais domāšanas veids ir nozīmīgs faktors ne tikai vispārējā izglītībā, bet arī audzināšanā. Iepazīšanās ar matemātiskajām spriešanas metodēm vēlama daudzu profesiju pārstāvjiem, ne tikai matemātikas un datorzinātnes speciālistiem.

Latvijas Universitātē izveidota pasākumu sistēma matemātikas padziļinātai mācīšanai Latvijas skolās. Tās kodols ir LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola, kuru 1969.gadā nodibināja toreizējais Fizikas un matemātikas fakultātes dekāns Aivars Liepa.

Sistēma ietver sevī klātienes un neklātienes pasākumus un paredzēta darbam ar skolēniem, skolotājiem un studentiem - nākošajiem skolotājiem.

Skolēniem paredzētie neklātienes pasākumi ir a) A.Liepas NMS, kuras ietvaros katru gadu apmēram 300 audzēkņu pēc NMS sagatavotajiem metodiskajiem materiāliem (skat., piem., [24]-[30]) iepazīstas ar būtiskiem matemātikas jautājumiem papildus skolas kursam, tai skaitā ar aprakstītajām vispārīgajām kombinatoriskajām metodēm,

b) "Profesora Cipariņa klubs " - uzdevumu risināšanas konkurss laikrakstā "LaBA", kas tiek organizēts divās grupās un jaunāko klašu skolēniem pieejamā formā iepazīstina tos ar galvenajām matemātisko spriedumu metodēm, kā arī analogi konkursi jaunatnes laikrakstos vecāko klašu skolēniem, piemēram, [3], [8]-[14].

Pie šiem pasākumiem pieskaitāmas arī skolēnu zinātniskās biedrības matemātiskās sekcijas, kuru darbam ir izstrādātas īpašas metodikas (skat. [31]).

Skolēniem paredzētie klātienes pasākumi ietver a) Mazo matemātikas universitāti (≈ 80 dalībnieku), kuras ietvaros notiek lekcijas un praktiskās nodarbības matemātikā un informātikā, b) matemātikas pulciņus dažādās Latvijas skolās, kurus vada pašreizējie vai bijušie NMS aktīvisti, c) vasaras nometnes Latvijas rajonos matemātikā un informātikā; katru gadu notiek 3-5 šādas nometnes nedēļas garumā ar ≈30-80 dalībniekiem katrā, d) Latvijas matemātikas olimpiādi, atklāto matemātikas olimpiādi (≈1000 dalībnieku) un sagatavošanās olimpiādi (≈3000 dalībnieku); abas pēdējās izveidotas pēc LU NMS iniciatīvas, e) regulāras nodarbības ar Latvijas izlases kandidātiem, gatavojoties starptautiskajām sacensībām.

Matemātikas olimpiādes un konkursi ieņem būtisku vietu visas sistēmas darbā. Ar to palīdzību tiek rasta tieša pieeja plašām skolēnu un skolotāju masām. Olimpiāžu uzdevumi satur daudzus faktus, kas nav atrodami matemātikas pamatkursā; to risināšanas gaitā skolēni iepazīstas ar vispārīgajām matemātiskajām metodēm. Sacensību sportiskais raksturs mudina apdāvinātus skolēnus sagatavošanās posmam veltīt daudz laika un enerģijas, tādējādi būtiski pilnveidojot savas zināšanas; olimpiādes rezultāti visas valsts mērogā var kalpot par kritēriju (protams, ne vienīgo), kas gan skolotājiem, gan skolēniem ļauj salīdzināt savu un citu veikumu. Olimpiādes prasības pilda izglītības standarta lomu darbā ar spējīgākajiem skolēniem.

Tas viss nosaka augstas prasības olimpiāžu uzdevumu komplektiem. Pēc sistēmas ietvaros izstrādātajiem standartiem, jāievēro sekojošais:

a) uzdevumiem jābūt no dažādām matemātikas nozarēm,

b) uzdevumu risināšanā jābūt lietojamām dažādām metodēm,

c) uzdevumu komplektam jāsatur gan algoritmiska, gan deduktīva rakstura uzdevumi,

d) komplektā jābūt vismaz vienam vieglam un vismaz vienam grūtam uzdevumam.

Olimpiāžu un konkursu uzdevumu komplektus skat. darbos [7] - [14].

Skolotājiem paredzēti klātienes pasākumi - skolotāju kursi par matemātikas padziļinātas mācīšanas jautājumiem Rīgā un Latvijas rajonos, kuros katru gadu pēc 60 stundu programmas mācās ≈200 skolotāju. Daudzi skolotāji kā klausītāji piedalās arī minēto vasaras nometņu darbā.

Studenti sistēmas darbā tiek iesaistīti kā NMS dalībnieku darbu pārbaudītāji un mācību līdzekļu līdzautori, olimpiāžu žūriju locekļi, pulciņu vadītāji, Mazās matemātikas universitātes un vasaras nometņu lektori. LU Fizikas un matemātikas fakultātē matemātikas pedagoģijas specialitātes studenti apgūst virkni kursu par modernās elementārās matemātikas jautājumiem matemātikas bakalaura programmas ietvaros; kopš 1992. gada LU darbojas matemātikas maģistratūras apakšprogramma "Modernā elementārā matemātika". Kursi par elementārās matemātikas vispārīgajām metodēm regulāri tiek lasīti Liepājas Pedagoģiskajā augstskolā.

LU NMS izstrādātie jautājumi sastāda lielu daļu Latvijas Republikas oficiālajā matemātikas profilkursa programmā. Iepriekšējā punktā apskatītie didaktiskie principi un vispārīgās kombinatoriskās metodes iestrādātas mācību grāmatās [15] - [21] un mācību līdzekļos [22] - [23].

Aprakstītās sistēmas darbība tiek koordinēta ar laikraksta "Izglītība un Kultūra" matemātiskā pielikuma "Daudzskaldnis" palīdzību, ko LU A.Liepas NMS izdod kopš 1992.gada novembra.

Īpaša loma sistēmas izveidē bijusi matemātikas pulciņam Rīgas 1.vidusskolā (1969.-1991., vad. A.Andžāns), kurā tika praktiski pārbaudītas galvenās metodiskās idejas un sagatavots vairums Latvijas jauno matemātiķu izlašu dalībnieku.

2.3. Daži apmācības rezultāti

Šodien pastāvošajos eksakto zinātņu relatīvās nepopularitātes apstākļos matemātikas un informātikas prestižs jaunatnes vidū Latvijā joprojām ir augsts un pēdējo 5-6 gadu laikā palicis praktiski nemainīgs. Mēs to daļēji izskaidrojam ar iepriekš aprakstītās sistēmas darbību.

Labāko matemātikas un datorzinātnes pirmo kursu studentu sagatavotības līmenis ir ievērojami pieaudzis, salīdzinot ar gadiem pirms sistēmas darbības. Tas rada iespēju ievērojami intensificēt un individualizēt darbu ar tiem. Praktiski visi izcilākie jaunie matemātiķi, kas beiguši skolu pēdējos 10-15 gados, skolas gados aktīvi darbojušies minētajos pasākumos.

Rezultāti matemātikas olimpiādēs ļauj salīdzināt Latvijas skolēnu sagatavotības līmeni ar citām valstīm. Vissavienības matemātikas olimpiādēs 1978.-1991. gados 101 Latvijas dalībnieks izcīnīja 31 pirmo, 38 otrās, 24 trešās vietas un 5 atzinības, tikai 3 gadījumos paliekot bez apbalvojuma. Šajā laikā Rīgas komanda 6 reizes uzvarējusi starptautiskajās sacensībās "Pilsētu turnīrs". Starptautiskajās olimpiādēs, kurās Latvija piedalās kopš 1992.gada, izcīnītas 3 sudraba medaļas, 4 bronzas medaļas un 3 atzinības, bet 4 dalībnieki palikuši bez apbalvojuma. Starptautiskajās komandu olimpiādēs "Baltijas ceļš ", kas notikušas 5 reizes, Latvija vienreiz bijusi ceturtā, divreiz - otrā un divreiz - pirmā. Visi minēto sacensību dalībnieki gatavoti aplūkotās sistēmas ietvaros.

LITERATŪRA

DARBI, KAS VELTĪTI METOŽU APRAKSTAM

1. A.Andžāns, P.Zariņš. Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi. R.,Zvaigzne,1983.

2. E.Riekstiņš, A.Andžāns. Atrisini pats! R., Zvaigzne, 1984.

3. A.Andžāns, I.Kreicberga. Vai vari atrisināt? R., Zvaigzne, 1985.

4. A.Andžāns, J.Čakste, T.Larfelds, M.Seile. Dirihlē princips. R., Mācību grāmata, 1994.

5. Š.Trupins, A.Andžāns. Nevienādības vidusskolas matemātikas kursā. R., Zvaigzne; 1.daļa - 1979., 2.daļa - 1980.

6. A.Andžāns, J.Smotrovs. Turnīru matemātika. I - VI. R., "Zvaigžņotā Debess", 1993-1995.

UZDEVUMU KRĀJUMI

7. A.Andžāns, T.Ziļicka, O.Treilībs. Uzdevumi matemātikas olimpiādēs. R., Zvaigzne, 1977.

8. A.Andžāns, A.Bērziņš, M.Stupāne. Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi. R., Zvaigzne, 1992.

9. A.Andžāns. 1979.gada konkursu un olimpiāžu uzdevumi ar atrisinājumiem ārpusstundu darbam matemātikā. R., IM, 1980.

10. A.Andžāns u.c. Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 9.-12. (8.-11.) klašu skolēniem. I - XII daļas. R., IM, LU, IAI, 1990.-1995.

11. A.Andžāns u.c. Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 5.-8. (4.-7.) klašu skolēniem. I - IX daļas. R., IM, LU, IAI, 1990.-1994.

12. A.Andžāns. Nestandarta uzdevumi matemātikā 5.-9. klasei. I daļa. R., Mācību grāmata, 1994.

13. A.Andžāns, Z.Zvirbule. Profesora Cipariņa kluba uzdevumi. I daļa. R., Mācību grāmata, 1994.

14. A.Andžāns, Mathematical Problems for Junior Students. R., LU, 1993.

MĀCĪBU GRĀMATAS

15. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. I. Ģeometrijas pamatelementi. R., Zvaigzne, 1993.

16. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. II. Trijstūri. R., Zvaigzne, 1994.

17. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. III. Riņķis. R., Zvaigzne, 1993.

18. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. IV. Četrstūri. R., Zvaigzne, 1994.

19. A.Andžāns, U.Grinfelds, Ē.Ikaunieks, I.Spule, V.Vēzis. Informātika. Ievads datorikā. R., Zvaigzne, 1993.

20. A.Andžāns, Ē.Ikaunieks, T.Romanovskis. Informātika. Ievads algoritmikā. R., Zvaigzne, 1994.

21. A.Andžāns, Ē.Ikaunieks, U.Grinfelds, M.Raugulis, T.Romanovskis, I.Spule. Informātika. Programmmēšana un matemātiskie modeļi. R., Zvaigzne, 1994.

MĀCĪBU LĪDZEKĻI

22. I.Razma, A.Andžāns. Vajag varēt. I, II. R., Zvaigzne ABC, 1995.

23. A.Andžāns, U.Grinfelds, Ē.Ikaunieks. Informātika. R., Zvaigzne; 1.daļa - 1985., 2.daļa - 1986.

METODISKAS IZSTRĀDNES

24. A.Andžāns. Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi. R., LU, 1973.

25. A.Andžāns, I.Ignatoviča, I.Rambaha. Invariantu metode. R., LU, 1982.

26. A.Andžāns, A.Kalniņa. Daži vektoru nestandarta lietojumi planimetrijā. R., IM, 1985.

27. A.Andžāns. Kopu teorija. R., LU, 1991.

28. A.Andžāns, M.Opmanis. Ekstremālā elementa metode. R., LU, 1991.

29. A.Andžāns, I.Etmane, M.Šmite. Vienādojumu risināšana veselos skaitļos. R., IM, 1992.

30. J.Vīksna, A.Andžāns. Nevienādību pierādīšanas metodes. R., IM, 1993.

31. A.Andžāns. Tēmas skolēnu zinātniskajam darbam un daži ieteikumi tā vadīšanā. Rakstu krāj. "Skolēnu izziņas darbības aktivizēšana matemātikas stundās". R., Zvaigzne, 1985.

Summary

GENERAL COMBINATORIAL METHODS AND THEIR USES IN ELEMENTARY MATHEMATICS

A.Andžāns

University of Latvia, Faculty of Physics and Mathematics
Rainis boulv. 19, LV-1586, Riga, Latvia

Riga - 1995

1. THE CHARACTERIZATION. A set of papers.
2. THE NUMBER OF PAPERS. 31.
3. THE AMOUNT. 163 printed sheets.
4. THE CONTENT.

4_1. THE OBJECT. General combinatorial methods, problems of studying and application of them.

4_2. THE AIM. Studying of combinatorial ideas common to various branches of mathematics. Systematization of their applications. Embedding them into mathematical education.

4_3. THE MAIN RESULTS. Five general methods, their content and mutual connections are analyzed. The methodics of teaching these methods is elaborated. The system of advanced mathematical education in schools based on studying these methods is developed. A number of problem books, textbooks and methodical supplements is published.

4_4. THE THEORETICAL SIGNIFICANCE. The relations between various branches of mathematics and between various methods of reasoning are established. A new approach to advanced teaching of mathematics is developed.

4_5. THE PRACTICAL SIGNIFICANCE. The methods which are investigated help to systematize the reasoning in solving combinatorial problems and also problems in other branches of mathematics. The embedding of them into education improves the effectiveness of learning mathematics; it stimulates the creative work of students. The problem books, textbooks and methodical supplements are widely used in the schools of Latvia.

4_6. THE APPROBATION. The main results are lectured in the following important conferences:
- The 1st All-Union conference on advanced teaching of mathematics in Leningrad, 1973;
- The Scientific Conference of the Computer Center of University of Latvia dedicated to its 20th anniversary in Riga, 1981;
- The International conference on advanced teaching of mathematics in Tartu, 1988;
- The Russia's Conference on mathematical education in Krasnodar, 1991;
- The Conference of universities and pedagogical institutions of Baltic States, Vilnius, 1991;

- The 7th International Congress of Mathematical Education, Quebec, 1992;
- The 20th International Congress of Mathematics, Zürich, 1994;
- The 29th German conference on didactic of mathematics, Kassel, 1995.

The developing of the system of advanced mathematical education accordingly to the ideas developed here, the introducing a number of books containing these ideas into education also can be considered as the approbation of them.

CONTENTS

Introduction

The content of elementary mathematics is changing constantly; in general it becomes broader all time. For example, nobody will deny that the algorithm for dividing natural numbers is a part of elementary mathematics; nevertheless, in middle ages people who were able to use it were awarded scientific degrees. The problems investigated by world's most famous mathematicians only 250 years ago are now a part of classical elementary geometry (Eiler's circle, Gauss line, etc.).

It is a tradition that the words "elementary mathematics" are connected with school only. It's not quite correct. Of course, the greatest part of the mathematics taught at schools can be considered as elementary (there are exceptions; in some French high schools, for example, the basic concepts of Hilbert space are studied). Nevertheless, the part of elementary mathematics beyond the school programs is much broader.

Let's make the concept of elementary mathematics more precise.

Of course, no definition in the mathematical sense is possible. Trying to list the parts of elementary mathematics we include Euclidean planimetry and stereometry, linear operations with plane and space vectors, scalar, pseydoscalar and vectorial products, the greatest part of combinatorial geometry, elementary number theory, equations and systems solvable in radicals, algebraic inequalities, elementary functions and their properties, the simplest properties of sequences and the combinatorics of finite sets. There are many mathematicians however who include also elements of graph theory, simplest combinatorial algorithms, simplest functional equations in integers, etc. There are parts of mathematics which definitely should not be included: we can mention the methods which are effectively used only by a small amount of mathematicians as well as methods which, though used widely, demand a specific and advanced mathematical formalism.

We can give the following approximate description of elementary mathematics.

Elementary mathematics consists of: 1) the methods of reasoning recognized by a broad mathematical community as natural, not depending on any specific branch of mathematics and widely used in different parts of it, 2) the problems that can be solved by means of such methods.

Evidently, such a conception of elementary mathematics is historically conditioned.

In the greatest part of scientific investigations elementary methods alone are not enough; they are used together with the specific methods of corresponding branch. Elementary methods are often used in obtaining the estimation, in proving lemma, in the analysis of a singular case, etc. Nevertheless, there is a number of cases when the whole basic idea of a solution lies in the unexpected use of an elementary method. We can note that sometimes only after some period of time the solution is recognized as the application of an elementary method.

It makes the systematization of these methods to be an important task. Also an important task is to form the sets of examples that demonstrate the characteristic uses of these methods. Getting acquainted with such examples allows to master them for practical creative work in mathematics.

In this paper we consider some combinatorial methods of elementary mathematics. In their generality they were identified at first in the process of creating problem sets for mathematical competitions of various levels and elaborating methodical materials for preparation to these competitions. This is not an occasionally coincidence. In mathematical olympiads there is a restricted amount of time allowed for solving 5 problems; in general, deep problems can not be proposed on such competitions. So the way to make competitions close to serious mathematics is to propose problems in which general, though elementary, mathematical methods can be used. On the other side, to make a good set of problems make the authors to get acquainted with various branches of mathematics to avoid repetitions. These circumstances are the objective reasons for close relations between elementary mathematics and "olympiad mathematics".

The description of general combinatorial methods is given in [1]-[6]. The greatest part of problems based on them are included into problem books [7]-[14]. They are embedded also into textbooks and supplementary texts [15]-[23]. A number of methodical materials (approximately 30) is elaborated; for example, see [24]-[31].

In this paper, the general combinatorial methods are discussed in 1.§.

The system of advanced mathematical education developed in Latvia and based on studying of these methods is discussed in 2.§. The activities of it can be considered as practical approbation of the methods discussed.

At the end of the summary the list of publications is given.

1.§. SOME GENERAL COMBINATORIAL METHODS

1.1. The Classification of Combinatorial Methods and Problems. The Main Principle of Combinatorics.

The combinatorial problems can be conditionally divided into five large groups.

A. Find whether there exist at least one object of the given kind.
B. Indicate at least one such object.
C. Find the number of such objects.
D. Give an algorithm for constructing all such objects.
E. Find among all objects an object which is optimal in some way.

The problems from B, C, D are clearly constructive. In solving problems from A both constructive and non-constructive methods can be used (proofs of nonexistence by contradiction). In the problems from E, the finding of the optimal object is constructive; the proof of optimality can be constructive or non-constructive.

The combinatorial methods we consider can be divided into two large groups. One of them uses the approach "find the properties of the whole set from the properties of the elements". The second one uses the approach "find out something about individual elements from the properties of the whole set".

The methods of the first kind are mathematical induction and extremal element method, the methods of the second kind - mean value method, the method of invariants and the interpretation method. Of course, in practical applications these methods are combined.

The essential part of all these methods is the following principle; we call it the main principle of combinatorics (MPC):

> the result of the counting does not depend on the order of the counting.

Of course, this holds in general only for finite sets. Nevertheless, some analogues of it hold also in some "infinite situations", such as summation of absolutely convergent series etc. We mainly deal with the case of finite sets.

Considering the applications of methods discussed here the MPC is very significant also in the teaching of mathematics showing the unity of various branches of it. For example, MPC lies in the basis of all identical algebraic manipulations. Really, the basic identities

$$a+b=b+a,\ a\cdot b=b\cdot a,\ a+(b+c)=(a+b)+c,\ a(b+c)=ab+ac$$

express some variations of the MPC. For example, $a\cdot b=b\cdot a$ in the simplest version expresses the fact that the number of cells in the rectangular $a\times b$ area can be found counting by rows either by columns.

The another important application of MPC is the uses of recurrences in solving problems from C. Really, each recurrent relation expresses the fact that the objects we are interested in can be grouped in some natural way and counted "by groups". The direct applications of MPC are the product rule in combinatorics, computing of classical combinatorial numbers, the formula of inclusion-exclusion, etc. It is broadly used in elementary number theory. The generalizations of MPC plays important role in the geometry, were in many cases the measure of the figure is the sum of measures of its parts, no matter in what order they are considered. For example, all calculation of areas is based on it.

Considering the applications of MPC in education, the concept of "the road schema" is very useful. The uses of it are illustrated by the following example.

"In how many ways we can go from A to B along the lines in Fig.1., all time moving from left to right? "

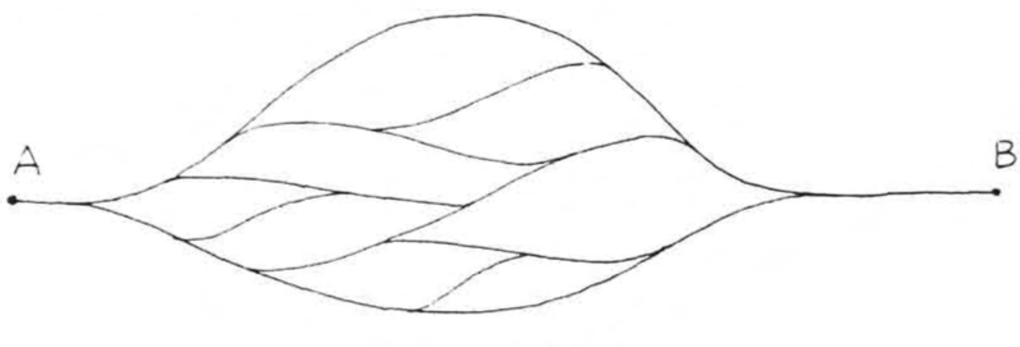


Fig.1.

It is one of the so-called "model problems" in teaching the method of recurrent relationships. Similar schemas can be effectively used in solving many combinatorial problems.

The uses of MPC are considered in [1], [7]-[14]; see also the descriptions of other combinatorial methods.

1.2. The Method of Mathematical Induction (MMI)

Clearly, MMI is the first group method; it makes the conclusions about the whole set depending on the properties of elements of it. Analyzing the uses of MMI it was discovered that the concept of the schema of induction is very useful.

In usually applications of MMI the basis with n=1 is checked; after that, we pass from n=k to n=k+1. This schema is essentially included in the Peano axioms. Clearly, each use of induction must finally reduce to this schema. Nevertheless, in applications some developed versions of it appear far more convenient.

Let's consider the concept of the schema of induction.

If a general assertion A(n) with a parameter n is given, let's represent it as the half-infinite tape divided into equal squares. Each square corresponds to the particular assertion with value of parameter n=1; n=2; n=3; ... (see. Fig.2.)

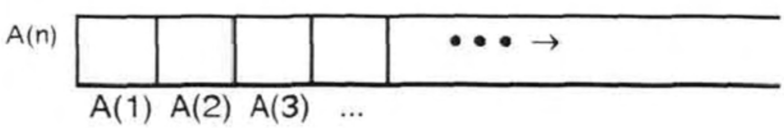
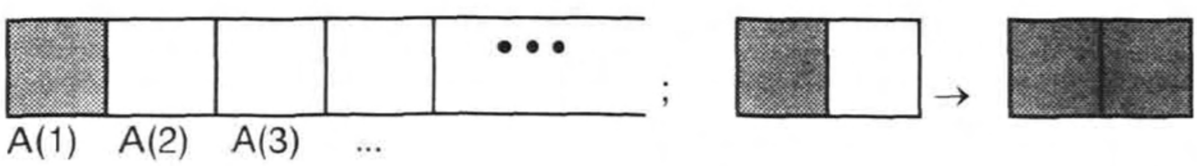


Fig.2.

Suppose that the whole tape is white at the beginning. The regions corresponding to the proved assertions will be colored. Our aim is to show that the whole infinite tape A can be colored. In this interpretation, the classical schema of induction can be formulated as follows:

a) color the first square A(1),
b) prove the rule: the square following to the colored one can be colored, too.

Graphically these considerations are illustrated in Fig.3.



a) b)

Fig.3.

It is intuitively clear that beginning from the situation in Fig.3[a] and using the pattern from Fig.3[b] we gradually color all the tape. Of course, the order in which all cells are colored is unessential for us; it may be another, too. So we come to the general concept of the schema of induction. The manifestations of it are

1) one-dimensional induction schemas with the basis A(1) & A(2) & ... ... & A(m) and the inductive transition
   A(k+1) & A(k+2) & ... & A(k+m) $\rightarrow$ A(k+m+1) (see Fig.4.)

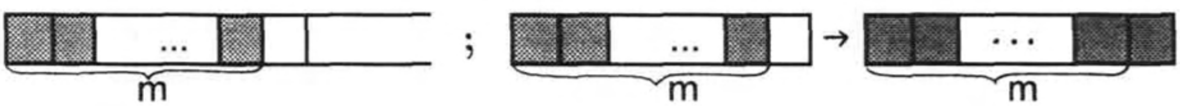


Fig.4.

2) one-dimensional induction schemas with the basis A(1) and the inductive transition
   $\forall$t (t<k $\rightarrow$ A(t)) $\rightarrow$ A(k+1) (see Fig.5.)

Fig.5.

3) one-dimensional induction schemas with the "length of jumps" greater than 1, for example, the schema with basis A(1) & A(2) and with the transition A(k) $\rightarrow$ A(k+2).
4) one-dimensional shuttle-type induction schemas, for example, the schema with basis A(1) & A(2) and with the transitions

   A(k) $\rightarrow$ A(2k) and A(k) $\rightarrow$ A(k-1).

5) one-dimensional induction schemas in which some assertions are proved in the same time, though only part of them are needed finally; the others serve as scaffold in building the house.
6) two-dimensional induction schemas when the general assertion depends on more than one parameter. For example, quite often the following schema is used for assertions of the type A(m,n):
   the basis A(1,n) & A(m,1) and the inductive transition
   A(n-1,m) & A(n,m-1) $\rightarrow$ A(n,m) (see Fig.6.)

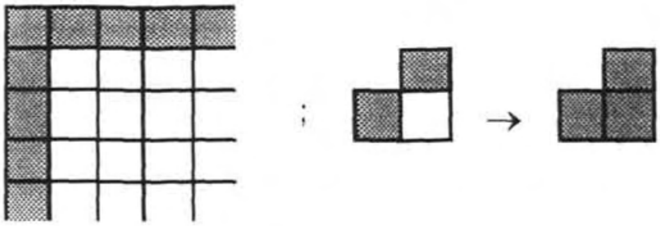


Fig.6.

7) one-dimensional induction schemas "by the product", for example, the schema with the basis $A(p^k)$, p - prime number, and with the transition $A(m)$ & $A(n)$ & $(n,m)=1 \rightarrow A(n \cdot m)$.

The MMI is often used in the problems of group D; of course, it has broad applications also outside combinatorics. Quite often MMI is used in the problems of group B (inductive construction of a single example) and in the problems of C and E (the proofs of optimality by induction that often use parallel induction schemas).

In teaching and studying the MMI the great attention must be paid to series of examples illustrating various schemas. Along the classical uses of MMI in pedagogics such as proving identities, inequalities and divisibility, a special attention must be paid to inductive constructions of general and particular examples, to combinatorial algorithms, to various possibilities to choose the induction parameter. In general our opinion is that the MMI is essentially a process and therefore the studying of it must be initiated by constructions rather than by proving algebraic facts that is common in the classical textbooks.

The uses of MMI are considered in [1]; see also [5], [7]-[14].

1.3. The Mean Value Method (MVM)

The MVM is a typical method of the second group. It allows to obtain information about particular elements of a set from information about such characteristics of the whole set as the product or the sum of numerical characteristics of all its elements. Its appearances in elementary mathematics are broad and seemingly unconnected.

A lot of applications of MVM uses the following common principle:

if something large is divided into small number of parts then at least one part is large enough.

What does the words "large", "small" and "enough" mean, depends on the concrete problem.

The simplest applications of MVM are connected with the evaluations of sums and products in the form of following assertions:

if $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, then there exists such an i, that $x_i \geq a_i$.

The particular case of $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ is of special importance.

It's clear that analogous assertions can be formulated for strong inequalities, for products of positive reals etc.

In the case of discrete characteristics this assertion turns into famous Dirichlet principle (DP), sometimes called the pigeonhole principle:

if more than $k \cdot n$ objects are divided among n groups then at least one group contains at least k+1 objects.

Even in this simplest formulation DP and its direct consequences has broad applications. Some of them are as follows.

A. In the elementary theory of graphs DP is used in the theorems on arrangements in sequences and cycles, on the existence and nonexistence of Eiler and Hamiltonian paths. All classical Ramsey graph theory is a multiple application of DP, often together with MMI, for complete and noncomplete graphs. The classical minimax results, such as Hall theorem, Dilworth theorem, König-Rado theorem, Sperner's lemma, Ford-Fulkerson algorithm etc., are closely related to DP.

B. The applications of DP in elementary number theory are connected at first with the classification of integers modulo n ($n \in N$). The use of DP is one of the crucial steps in proving such classical results as Fermat Little theorem, Vilson's theorem, Thue's lemma, Chinese theorem, etc.

Other applications of DP are connected with the canonical factorizations of natural numbers.

The third group of applications is connected with the rational approximations of irrational numbers.

C. In the elementary algebra DP is used to prove the existence of solutions for equations and inequalities and their systems.

D. In elementary and combinatorial geometry DP is usually used together with some geometrical idea or fact. The main of them are: a) maximal distance within a polygon, b) properties of the (closed) broken line, c) the sum of angles of an n-gon, d) triangle inequality. In investigation of the finite systems of points and other figures the concept of the neighborhood is of great importance.

E. There are broad applications of DP in computer science. Let's mention some of them.

At first, DP and its analogs are used in proving lower bounds for combinatorial algorithms ("information theory lower bounds").

At second, DP is used in the theory of mathematical codes in proving the optimality of codes.

At third, DP is the basis of many proofs of impossibility for finite automata and their versions. Really, such proofs are usually performed by making the automaton to go into the cycle (in some sense). This is achieved considering the number of situations which is more than the number of (generalized) states of the automaton; therefore there are two situations in which the automaton is in the same (generalized) state.

At fourth, DP is one of the main ideas in proving the lower bounds of computational complexity on Turing machines.

DP and the methods of sum evaluation are used for finite sets. The MVM is used in broader contexts also. The following classes of applications must be mentioned:

a) the partition of an infinite set into a finite number of subsets; then at least one subset must be infinite. The classical applications of this approach are König's lemma, Ramsey theorem for infinite graphs, Euclidean Ramsey theory, etc.

b) the integral variants of MVM which include, for example, the classical theorem on the mean value of a continuous function or the characterization of the length of a segment by means of its projections and the method of proving geometric inequalities based on it.

c) the proofs of existence depending on the comparison of infinite sets of different cardinalities (for example, the Cantor's proof of the existence of transcendent numbers).

These applications of MVM are mainly connected with the proof of existence or non-existence; they are used mainly for the problems from group A and in the proofs of optimality for the problems from group E.

Other applications of MVM see in the subparagraph "The Method of Interpretation".

The uses of MVM in elementary mathematics are considered in [2]-[4], [6]-[14].

1.4. The Method of Invariants

Any invariant is connected with the process in which it appears. This indicates the main uses of the method:

a) proofs of impossibility in combinatorial problems from the group A, especially in the cases when the object sought for is defined as the eventual final result of some construction,

b) finding the number of objects in problems from the group C; these applications are based on the invariance of the result of counting when the counting order is changed,

c) proofs of correctness of algorithms, including the game strategies.

Of course, a lot of derived applications can be indicated, for example, the invariance of the area upon the rearranging of it's parts, etc.

The proofs of impossibility by the method of invariants is usually performed in the following situations. Let α_1 and α_2 be two objects from the class $\mathfrak{A}$. A rule L is given accordingly to which each object from $\mathfrak{A}$ can be transformed into some object from $\mathfrak{A}$. Is it possible to obtain α_2, starting from α_1 and performing a finite number of consequent applications of the rule L ?

The invariant of such problem is the function f which is defined on the class $\mathfrak{A}$ and has the property:

$f(\omega_2)= f(\omega_1)$, whenever ω_2 can be obtained from ω_1, applying the rule L only once.

If we have found the invariant of a problem with the additional property that $f(\alpha_2) \neq f(\alpha_1)$, then clearly α_2 can not be obtained from α_1 by consequent applications of the rule L.

Classical applications of this kind are the investigations of expressibility of the logical functions in various bases.

In the proofs of impossibility in elementary mathematics, numerical invariants are used mainly. Nevertheless, sometimes we can meet also "qualitative invariants", such as the parity, the orientation of a figure, etc. The difference between them is not essential from the mathematical point of view, but of great importance in teaching and studying the method.

In the problems of this kind a concept of "half-invariants" is used also. Suppose that the function mentioned above is numerical and that it has the property: whenever ω_2 is obtained from ω_1 by a single application of the rule L then $f(\omega_1) < f(\omega_2)$. Such a function f is called an increasing half-invariant of the problem. Clearly the concepts of decreasing, non-decreasing, etc. half-invariants can be introduced similarly.

If we have found the increasing half-invariant for which $f(\alpha_1) \geq f(\alpha_2)$, then clearly α_2 can not be obtain from α_1 by consequent applications of the rule L.

The same characteristics which are used as invariants are used as half-invariants also.

The deepest studies of the half-invariants in elementary mathematics have been performed by D.Fomin from Sankt-Petersburg.

The method of invariants is used in elementary mathematics also in the situations when the object sought for is described directly, not as the eventual result of performing a sequence of steps. Then the crucial invariant is usually the result of counting upon the changes of the order of counting. We assume the existence of the object and calculate some numerical characteristic of it in two ways. The results appear to be different, and so the contradiction is obtained. In the following two areas of elementary mathematics this kind of reasoning is used very often:

a) in combinatorial geometry, when the impossibility of some dissection into parts or a reverse task is proved,
b) in problems which can be reduced to the non-existence of a graph having an odd number of odd vertices.

In this case, the contradiction is obtained by calculating the sum of the degrees of all vertices in two ways: 1) by the vertices (the result must be odd), 2) by the edges (the result must be even).

It must be stressed that the invariance of the result of counting lies in the basis of MVM and DP. Really, they are proved by contradiction, which is obtained by comparing the results of summation etc. in two different ways.

For calculating a numerical result, a method of invariants is usually used in the following way. Some quantity is expressed using the unknown value x. After that, the same quantity is calculated in another way. The value of x is obtained from the equality of both results. The calculation of a sum for arithmetic sequences is a classical example.

The uses of the method of invariants in the proofs of correctness of algorithms are closely related to the MMI. Usually these proofs are arranged in the following way: some more general assertion than the needed one is proved about the properties holding true after performing an arbitrary number of the steps of the algorithm.

In the classical elementary mathematics this idea is often used in the analysis of mathematical games. The concept of the winning position is very useful here. Recall that the games considered in elementary mathematics are usually two person games with full information. Both players move alternately, changing the position of the game. Some prescribed position is called final; the player who obtains it is announced a winner.

It is clear that the winning strategy can be realized if all possible positions can be divided into two parts $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ such that

a) the positions from $\mathfrak{A}$ can be turned only into positions from $\mathfrak{B}$,

b) each position from $\mathfrak{B}$ can be turned into some position from $\mathfrak{A}$,

c) the prescribed final position belongs to $\mathfrak{A}$.

In this case, the winning strategy is to obtain the positions from $\mathfrak{A}$. They are called "winning positions".

The class of winning positions is found if we can indicate a corresponding invariant property, which can be preserved after appropriate player's moves. If such an invariant property can not be found directly, the main method in elementary mathematics is to form a model of the game. Very important is the concept of the parameter of the game. Depending on the essential parameters of the game, the games are divided into two classes: games with pre-history or without it, accordingly to the fact whether the possible moves do or don't depend on the moves made previously.

It is clear that neither the method of invariants nor any other method can provide a winning strategy for each possible game; nevertheless, the approach described here can be applied to a broad class of games.

In teaching and studying the method of invariants the central task is the free use of two main invariants: the result of the counting and the parity. It is useful also to stress the connection between the method of invariants and the MMI. Really, in any proof by MMI the invariance of some property is established in the process of going from one value of a parameter to another one.

The uses of the method of invariants are considered in [2]-[3], [7]-[14].

1.5. The Method of Extremal Element (MEE)

The basis of the method of extremal element is the fact that various properties appear most expressive in the "boundary cases", as well as the features of man's character can be studied very well in extremal situations. This fact is used in elementary mathematics in the following way. If we have to study some set A, we concentrate on the element x of it which is extremal in some sense (this condition is often the definition of x). After that, analyzing the connections between x and other elements of A, we obtain some useful information about x or about the whole set A.

Usually MEE is used in the problems from group A (mostly in proving nonexistence); sometimes it is used in the problems from group B (the element which is extremal in some sense is the desired example); very often MEE is used in the problems from group E.

In the simplest cases the extremal element is found directly: the largest number of a set, the triangle with the largest area etc. Classical example of extremal element in elementary number theory is the number dividing into greatest power of a prime p. In graph theory, the vertice with the maximal degree is considered often as the extremal element of the graph. In the problems of combinatorial geometry on arrangements of finite sets of points and lines the extremal element is often the point in which maximum number of lines intersect; an interesting example is a pair (point, line) with the minimal non-zero distance between them. The concept of the convex hull is very important, too.

The MEE is used in the proofs of impossibility by the method of invariants; sometimes it appears useful to follow the changes of extremal element of some set as described in 1.4. Extremal elements are often used as the parameters for exhaustive search.

An essential area of the applications of the MEE are the proofs of the finiteness of certain process. Usually it is done along the following lines:

a) we find out that some numerical characteristic increases monotonically on each step or from time to time;
b) we prove that this characteristic has only a finite number of possible numerical values;
c) we conclude that the process must be finite.

The best known appearances of this approach is the method of infinite descent in the elementary number theory and the analysis of algorithms performing local improvements to obtain global result.

The applications of the MEE are connected with the problem of the existence of the extremal element. It is guaranteed if the considered set is finite. From the pedagogical point of view (and also from the scientific one) it is always desirable to study also the analogous infinite situations to which the MEE cannot be applied directly. In many cases the obtained result contradicts our intuition, and this makes our understanding of the problem deeper.

The MEE is closely related to the main method of the first kind - the MMI - and to the main method of the second kind - the MVM. Really, the "proofs" of the principle of mathematical induction (if they don't go to the Peano axioms) usually use the fact that each nonempty set of natural numbers has the least element. On the other side, both MVM and DP assert in fact that the existing element is that with the greatest (the least) value of the corresponding numerical characteristic.

These observations though not especially deep are extremely useful in teaching the general combinatorial methods.

The uses of MEE are considered in [2]-[3], [7]-[14].

1.6. The Method of Interpretation

The uses of this method exploit the deep inner connections between various branches of mathematics. They allow to use the methods from one branch to solve the problems from another one. The brief description of the method of interpretation is as follows:

1) we "translate" the problem into another "language",
2) we solve the "translated" problem,
3) we "translate" the solution back, obtaining the solution of the original problem.

The method of interpretation is considered as combinatorial because it is based on establishing the correspondence between various classes of problems; this is, of course, a classical combinatorial approach. It can be applied to all groups of problems from 1.1. and also to a number of another.

Classical examples of the use of method of interpretation are analytical geometry and geometrical number theory when the properties of divisibility of integers are investigated on the basis of properties of sets of integer points in the Decart plane.

Beside these, the main uses of the method of interpretation in elementary mathematics are as follows:

a) the translation of combinatorial problems into graph language,
b) the proofs of algebraic inequalities by geometrical interpretation,
c) the proofs of identities interpreting both sides of them as the number of elements of some finite set calculated in two different ways,
d) the proofs of identities interpreting both sides of them as the area, the volume etc. of the same figure calculated in two different ways,
e) the proofs of planimetry theorems by means of stereometrical interpretation, including the proofs of impossibility of geometric constructions using parallel and central projection,
f) the proofs of inequalities using the probabilistic interpretation when the inequality is converted into form

$$p(A_1)+ p(A_2)+...+ p(A_n)\leq 1,$$

where $A_1, \dots, A_n$ are mutually disjoint events.

Note that this application is connected with the MVM.

The part of the method of interpretation is also solving mathematical problems by means of physical interpretation: mass center, the potential energy minimum principle of, the law of conservation of energy, etc. Note that the uses of the concept of mass center is a variation of MVM; really, the mass center of a system of material points can be naturally considered as the "mean point" of it. From the mathematical rigorousity's point of view, such interpretations can be disputed. Nevertheless, we must stress that all these concepts can be formalized and the physical content can be deleted from them. On the other side, these interpretations can be used to guess the result which after that can be proved more rigorously by other means.

The importance of the method of interpretation in teaching mathematics can not be overestimated. It develops nonstandard approaches; it helps to establish connections; it stimulates independent research of students and teachers; it creates a strong aesthetical feeling, etc.

The uses of the method of interpretation are considered in [5], [6], [7]-[14].

2.§. APPLICATIONS TO THE ADVANCED TEACHING OF MATHEMATICS

2.1. The Main Didactic Principles

The qualification of a mathematician can be characterized by the knowledge of facts, by the ability to use them, by the ability to form and to analyze the mathematical model, by the common logical culture and by the hard-definable feature "mathematical intuition" which can be characterized as the ability to guess whether the assertion is true without proving it and as the ability to guess the direction in which the proof can be sought for. On the higher level, the mathematical intuition is the ability to guess in which areas of human activities which parts of mathematics can be used.

The forming of the amount of facts becomes much easier if they are organized into some system. The traditional approach of education organizes the mathematical knowledge around the objects (equations, areas etc.). This is effective while the amount of facts is small. Our experience shows that the organization of knowledge around the methods is more effective when this amount becomes larger. The general combinatorial methods appear to be effective "condensation centers". On the other side, the forming and analyzing the model and the intuitive evaluation of the proposition are processes, so general methods are more useful for them than facts.

The mastering of knowledge can be inductive or deductive. Our experience shows that teachers, high school students and university students use these methods more effectively if they have get acquainted with them inductively: the concept of general method is based on a number of examples.

The most effective approach is the following:

A large number of examples → general concept of a method →
new examples → broader concept of a method → ...

The introductory problems for combinatorial methods are the following:

MMI - inductive constructions, inductive algorithms, the recurrent relations;

MVM - the simplest forms of Dirichlet principle; the uses of it in finding the extremal values;

Method of invariants - the invariance of the result of counting, the idea of parity and its uses;

MEE - the greatest and the largest element of a set of numbers; the convex hull;

Method of interpretations - uses of geometry in algebra, physical interpretations.

At the beginning of studying these methods it is important that the general idea of the method must not be hidden in the formal manipulations connected with writing down the solution "for the general case". Therefore the so called "general special cases" are of greatest importance; the analysis is done only for some values of parameters which contain all the essential features of the general case. Such a concept has been derived from the concept of "full system of examples" in program testing.

The studying of the methods is more effective if it is done inductively; nevertheless, the final result must be the ability to use them deductively. In the ideal, for each problem it must be "felt" what kind of method does it demand, and after that more or less deterministic schema must be used. It is clear that this can not be reached for all problems; nevertheless, broad classes of problems can be solved by this approach.

Our experience shows that studying of general combinatorial methods as well as of other general methods of elementary mathematics is more effective if it is done actively, by solving special series of problems alternately with reading solutions of characteristic examples.

The studying of the general combinatorial methods has also some other positive pedagogical effects:

a) the demonstration of the unity of mathematics,

b) aesthetically considerations,

c) the possibility to use the underlying ideas of the methods also outside mathematics,

d) the broadening of the concept of proof,

e) the stimulating of independent activities of teachers and students.

Speaking of the bounds of applications of the mentioned methods (for example, the change of counting order for infinite sets; induction by non-natural parameter; integral analogues of mean value; the full system of invariants; the existence problem of an extremal element; the bounds of physical interpretations; the isomorphism of various structures in the method of interpretations, etc.) the teacher has the possibility to touch to many important mathematical ideas being far from the formal school curriculum; the close connection between them can be demonstrated.

Of course, the general combinatorial methods are not the only content of the advanced mathematical education in high school; this contains also other methods as well as a large amount of facts. Nevertheless, combinatorial methods are the basis of the system of advanced mathematical education centered in the A.Liepa Mathematical Correspondence School of University of Latvia.

2.2. The System of Education

The mathematical knowledge and the mathematical way of thinking is an important component not only in the general education, but also in the general development. To get acquainted with mathematical methods of reasoning is highly useful not only for mathematicians and computer scientists.

A system of advanced mathematical education in the schools of Latvia is developed in the University of Latvia. The center of it is A.Liepa's Mathematical Correspondence School (MCS). It was founded by Aivars Liepa, the former dean of the faculty of physics and mathematics.

The system contains various activities for middle and high school students, for teachers and university students who are going to become teachers of mathematics.

Activities for middle and high school students include the following arrangements carried out by correspondence:

a) the Mathematical Correspondence School with ≈300 students each school year; they are studying essential parts of mathematics beyond the school curriculum. The special methodical materials in the form of brochures are used (see, for example, [24]-[30]);

b) "Professor Littledigit's Club"; it comprises in itself mathematical problem solving contest through children newspaper "LABA". It is organized separately for beginners and for "advanced solvers".

There are also analogous contests for high school students (see, for example [3], [8]-[14]);

c) the mathematical sections of "High School Students Scientific Society"; special methodics are elaborated for them (see [31]).

Present way activities for middle and high school students include:

a) The Little Mathematical University (≈80 participants) with lectures in mathematics and informatics,

b) mathematical circles in various schools of Latvia conducted by present and past activists of MCS,

c) summer camps in mathematics and informatics in various regions of Latvia; each year there are 3-5 such camps with 30-80 participants each,

d) Latvian Mathematical Olympiad, Latvian Open Mathematical Olympiad (≈1000 participants) and Preparatory Olympiad (≈3000 participants); last both were initiated by MCS,

e) regular lectures and practice sessions for Latvia's teams of young mathematicians going to participate in international competitions.

Mathematical olympiads and contests are an essential part of the whole system. They give approach to the large number of students and teachers. Olympiad problems contain a lot of facts which are not included into school curriculum; by solving them, students get acquainted with general mathematical methods. The competitive nature of the olympiad makes gifted students to use a lot of time for improving their qualification. The results of the olympiad may serve as a criteria (not the only one) for comparing various schools and teachers. The demands of olympiad can play the role of education standard for talented students.

This all imposes strong demands on the set of olympiad problems. Accordingly to our standards, the set of problems must contain:

a) problems from various branches of mathematics,

b) problems to which various methods can be applied,

c) both algorithmic and deductive problems,

d) at least one simple and at least one hard problem.

The examples of olympiad and contest problem sets see in [7]-[14].

The activities for teachers include courses on problems of advanced teaching of mathematics in Riga and in the regions of Latvia. Each year ≈200 teachers graduate from these courses with program for 60 hours. There are also many teachers who take part in the summer camps.

Students are involved in the activities of the system in various ways: they check the papers of participants of CMS and olympiads, they are co-authors of methodical materials, they are lecturers in the Little Mathematical University and in the summer camps. On the faculty of Physics and Mathematics the students who are going to become mathematics teachers are taking a number of courses in modern elementary mathematics as the part of bachelor's program. Since 1992, there is a master subprogram in mathematics "Modern elementary mathematics" in University of Latvia. The courses in modern elementary mathematics are regularly given in the Liepāja Pedagogical High School.

A lot of questions elaborated in CMS are included in the official curriculum of advanced mathematical course in high schools of Latvia.

The general combinatorial methods and the main didactic principles are embedded into textbooks [15]-[21] and into supplementary texts [22-23].

The operating of the system is conducted by means of mathematical supplement "Daudzskaldnis" to the newspaper "Izglītība un Kultūra" which is published by CMS since 1992.

Especially important for the development of the system was the mathematical circle in Riga 1st Middle School (1969-1991, conductor A.Andžāns). All main methodical ideas were examined there; the greatest part of teams of Latvia's young mathematicians were prepared there, too.

2.3. Some Results of the Work of the System

Though exact sciences are relatively unpopular today in Latvia, the prestige of mathematics and informatics is still high among high-school students; practically it has not changed during last 5-6 years. We explain this partially by the functioning of the described system.

The level of the best first-year university students of mathematics and informatics has increased significantly comparing with the years before the system was developed. This gives the possibility to intensify and to individualize the work with them. Practically all the best young mathematicians who have graduated from high school during last 10-15 years have been actively involved in the activities mentioned above.

The results on mathematical olympiads allow to compare the level of Latvian students with that of other countries. On All-Union mathematical olympiads in the period 1978-1991 there were 101 participants from Latvia. They get 31 first prizes, 38 second prizes, 24 third prizes and 5 honorable mentions; only three of them did not get the award. During this period of time, the team of Riga 6 times was the first in the international "Tournament of Towns". On International mathematical olympiads (Latvia takes part in them since 1992) our students have won 3 silver medals, 4 bronze medals and 3 honorable mentions; 4 participants did not receive the award. On the international team contest "The Baltic Way" which has taken place 5 times Latvia was the fourth once, the second twice and the first twice. All our participants were trained within the system mentioned above.

PUBLICATIONS

PAPERS CONTAINING THE DESCRIPTION OF THE METHODS

1. A.Andžāns, P.Zariņš. Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi. R.,Zvaigzne,1983.
2. E.Riekstiņš, A.Andžāns. Atrisini pats! R., Zvaigzne, 1984.
3. A.Andžāns, I.Kreicberga. Vai vari atrisināt? R., Zvaigzne, 1985.
4. A.Andžāns, J.Čakste, T.Larfelds, M.Seile. Dirihlē princips. R., Mācību grāmata, 1994.
5. Š.Trupins, A.Andžāns. Nevienādības vidusskolas matemātikas kursā. R., Zvaigzne; 1.daļa - 1979., 2.daļa - 1980.
6. A.Andžāns, J.Smotrovs. Turnīru matemātika. I-VI. R., "Zvaigžņotā Debess", 1993-1995.

PROBLEM BOOKS

7. A.Andžāns, T.Ziļicka, O.Treilībs. Uzdevumi matemātikas olimpiādēs. R., Zvaigzne, 1977.
8. A.Andžāns, A.Bērziņš, M.Stupāne. Matemātikas olimpiāžu un konkursu uzdevumi. R., Zvaigzne, 1992.
9. A.Andžāns. 1979.gada konkursu un olimpiāžu uzdevumi ar atrisinājumiem ārpusstundu darbam matemātikā. R., IM, 1980.
10. A.Andžāns u.c. Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 9.-12. (8.-11.) klašu skolēniem. I - XII daļas. R., IM, LU, IAI, 1990.-1995.
11. A.Andžāns u.c. Izdales materiāls matemātikā darbam ar spējīgākajiem 5.-8. (4.-7.) klašu skolēniem. I - IX daļas. R., IM, LU, IAI, 1990.-1994.
12. A.Andžāns. Nestandarta uzdevumi matemātikā 5.-9. klasei. I daļa. R., Mācību grāmata, 1994.
13. A.Andžāns, Z.Zvirbule. Profesora Cipariņa kluba uzdevumi. I daļa. R., Mācību grāmata, 1994.
14. A.Andžāns. Mathematical Problems for Junior Students. R., LU, 1993.

TEXTBOOKS

15. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. I. Ģeometrijas pamatelementi. R., Zvaigzne, 1993.
16. A.Andžāns, E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. II. Trijstūri. R., Zvaigzne, 1994.
17. A.Andžāns. E.Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. III. Riņķis. R., Zvaigzne, 1993.
18. A.Andžāns. E,Falkenšteine, A.Grava. Ģeometrija 7.-9. klasei. IV. Četrstūri. R., Zvaigzne, 1994.
19. A.Andžāns, U.Grinfelds, Ē.Ikaunieks, I.Spule, V.Vēzis. Informātika. Ievads datorikā. R., Zvaigzne, 1993.
20. A.Andžāns, Ē.Ikaunieks, T.Romanovskis. Informātika. Ievads algoritmikā. R., Zvaigzne, 1994.
21. A.Andžāns, Ē.Ikaunieks, U.Grinfelds, M.Raugulis, T.Romanovskis, I.Spule. Informātika. Programmēšana un matemātiskie modeļi. R., Zvaigzne, 1994.

SUPPLEMENTARY TEXTS

22. I.Razma, A.Andžāns. Vajag varēt. I, II R., Zvaigzne ABC, 1995.
23. A.Andžāns, Ē.Ikaunieks, U.Grinfelds, Informātika. R., Zvaigzne, 1. daļa. - 1985., 2.daļa - 1986.

METHODICAL MATERIALS

24. A.Andžāns. Nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi. R., LU, 1973.
25. A.Andžāns, I.Ignatoviča, I.Rambaha. Invariantu metode. R., LU, 1982.
26. A.Andžāns, A.Kalniņa. Daži vektoru nestandarta lietojumi planimetrijā. R., IM, 1985.
27. A.Andžāns. Kopu teorija. R., LU, 1991.
28. A.Andžāns, M.Opmanis. Ekstremālā elementa metode. R., LU, 1991.
29. A.Andžāns, I.Etmane, M.Šmite. Vienādojumu risināšana veselos skaitļos. R., IM, 1992.

30. J.Vīksna, A.Andžāns. Nevienādību pierādīšanas metodes. R., IM, 1993.
31. A.Andžāns. Tēmas skolēnu zinātniskajam darbam un daži ieteikumi tā vadīšanā. Rakstu krāj. "Skolēnu izziņas darbības aktivizēšana matemātikas stundās". R., Zvaigzne, 1985.