Академия наук Латвийской ССР
Институт физики

На правах рукописи

ЮДРУПС Ояр Миервалдович

БИКОНТИНУАЛЬНАЯ И КОНТИНУАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

01.01.02. – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Л.Э.Рейзинь

Рига – 1978

Оглавление

Введение

Одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений или, более общно, теории динамических систем является проблема классификации. Задача классификации подразделяется на локальную и глобальную. В первом случае динамическая система рассматривается в сколь угодно малой окрестности некоторого инвариантного множества — это обычно либо точка покоя, либо замкнутая траектория. Вопрос о локальной топологической эквивалентности точек покоя был поставлен В.В.Немыцким (см. [I], с. 428), а ответ был дан работах Э.М.Вайсборда [2], А.М.Гробмана [I]. Эту тему также разрабатывали Ф.Хартман[3], Л.Э.Рейзинь [4] и др. Во втором случае динамические системы рассматривается во всей области определения. В частности, область определения может совпадать со всем пространством. Проблема о глобальной классификации динамических систем, которая и разрабатывается в данной диссертации, была поставлена С.Смейлом [5]. Дальше следует краткий обзор результатов по глобальной классификации динамических систем.

В настоящее время введено несколько разных типов отношений эквивалентностей. Если существует гомеоморфизм $h: M \to M$, где M — компактное n —мерное многообразие, на котором определены системы φ, ψ, такой, что справедливо равенство

$$h(\varphi(t,\cdot)) = \psi(t, h(\cdot))$$

для любого $t \in R$, то говорят, что динамические системы φ и ψ сопряжены [5] или динамически эквивалентны [6]. Такое отношение эквивалентности сохраняет даже минимальный период замкнутых траекторий, и получаем, что динамически неэквивалентны даже такие системы, у которых качественные картины одинаковы. Это побуждает ввести более слабое понятие эквивалентности.

Скажем, что динамические системы φ и ψ топологически эквивалентны, если существует такой гомеоморфизм $h: M \to M$, что

$$h(\varphi(R, \cdot)) = \psi(R, h(\cdot)),$$

т.е. h отображает траектории системы φ на траектории системы ψ. 1937 году А.А.Андроновым и Л.С.Понтрягиным [7] было введено понятие структурной устойчивости (грубости) для обыкновенных дифференциальных уравнений на двумерном диске. В этой же статье впервые было использованно понятие топологической эквивалентности дифференциальных уравнений, хотя отдельно оно небыло оформулировано, но входило в определении структурной устойчивости. Оказалось, что на компактных двумерных многообразиях структурно устойчивые потоки образует открытое плотное множество, однако при любой размерности больше двух, существуют компактные многообразия, на которых структурно устойчивые потоки не плотны [8,9], а также установлено, что множество классов топологически эквивалентных динамических систем на торе T^2 имеет мощность континуума [4]. Следовательно, топологическая эквивалентность оказалась слишком тонкой для глобальной классификации динамических систем.

Обозначим через $\Omega(\varphi) \subset M$ множество неблуждающих точек системы φ. Скажем, что динамические системы φ и ψ топологически эквивалентны на Ω, если существует сохраняющий траектории гомеоморфизм $h : \Omega(\varphi) \to \Omega(\psi)$. Динамическая система φ называется Ω устойчивым, если достаточно близкие к нему системы топологически эквивалентны φ на Ω. Эти определения даны С.Смейлом [5], а совместно с Р.А.Абрахамсом им установлено, что Ω —устойчивые потоки, вообще говоря, не плотны [10].

Следовательно, напрашивается вывод, что для удовлетворительной глобальной классификации динамических систем нужно еще ослабить требования в определении эквивалентности динамических систем. На У международной конференции по нелинейным колебаниям А.Н.Шарковским [11] было предложено понятие гомотопной эквивалентности динамических систем. В настоящей диссертации и исследуется это отношение эквивалентности, название которой после критики нам неизвестного рецензента из журнала "Дифференциальные уравнения", мы заменили на более нейтральную — биконтинуальную эквивалентностью.

В этой диссертации излагаются также некоторые результаты исследования континуальной эквивалентности динамических систем, которая была предложена Л.Э.Рейзинем.

В первой главе даются определения и теоремы, которые уже известны, но используются в следующих главах. В п.I.3

даны определения, касающиеся схемы динамической системы, а также те теоремы из монографии [12], которые многократно используются. Здесь даны также определения некоторым понятиям, которые в монографии [12] четко не сформулированы, а также даны в более упрощенном ввиде некоторые определения из той же монографии, так как в диссертации рассматривается область определения динамической системы с более простой границей.

Во второй главе исследуются некоторые свойства непрерывных отображений динамических систем на m мерном компактном многообразии. В п.2.1 рассматриваются образы предельных множеств, пролонгационных предельных множеств при непрерывных отображений, а также свойства прообразов для орбитно—неустойчивых траекторий и орбитно—неустойчивых замкнутых траекторий. Во п.2.2 построены непрерывные отображения $F: R^2 \to R^2$, которые сохраняет траектории. В п.2.3 построены непрерывные отображения $F: T^2 \to T^2$ на двумерном торе и установлены некоторые свойства этих отображений.

В третьей главе исследуется биконтинуальная эквивалентность динамических систем на замкнутой области плоскости R^2, граница которой является циклом без контакта. В п.3.1 установлено, что если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то системы φ и ψ имеют одинаковое число орбитно—неустойчивых замкнутых траекторий, точек покоя, сепаратрис и эллиптических областей, а также доказано, что на всех особых траекториях при отображении F ориентация или сохраняется или меняется на противоположную одновременно.

В п.3.2 доказано, что все локальные схемы, а также схемы систем φ и ψ тождественны с сохранением ориентации и направления движения по t, если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий.

В п.3.3 сравнивается биконтинуальная и топологическая эквивалентности на плоскости, и доказана теорема 3.3.I: если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то системы φ и ψ топологически эквивалентны. Теорема доказывается, используя понятие схемы динамической системы и опираясь на основную теорему монографии [12]. В п.3.3 дан также пример, показывающий, что теорема 3.3.I может не иметь место, если системы имеют бесконечное число особых траекторий. Следует отметить, что теорема 3.3.I имеет место также на двумерной сфере S^2, но может быть несправедливой на других двумерных многообразиях, так как при ее доказательстве существенно используется структура динамической системы на плоскости.

В п.3.4 дано определение биконтинуальной устойчивости и доказана теорема: система φ, определенная в замкнутой области плоскости R^2, биконтинуально устойчива тогда и только тогда, если она структурно устойчива.

В п.3.5 рассматривается биконтинуальная эквивалентность динамических систем на двумерных многообразиях и доказано, что множество классов биконитнуально эквивалентных динамических систем без точек покоя на торе, имеют мощность континуума.

В п.3.6 получены некоторые результаты для систем типа Морса—Смейла на n —мерном многообразии M и используя результаты работ С.Пилюгина [13,14], доказана биконтинуальная неэквивалентность систем с одинаковыми фазавыми диаграммами.

В четвертой главе исследуется континуальная эквивалентность динамических систем. В п.4.1 дано определение континуальной эквивалентности динамических систем. Следует отметить, что теорема [15] о существовании минимального элемента не доказана и вопрос о существовании минимальных элементов остается открытым. Здесь также дан пример существования нескольких минимальных систем для одной динамической системы.

В п.4.2 рассматриваются минимальные системы на двумерной сфере S^2, и доказано, что множество классов континуально эквивалентных систем имеет только три элемента. В этом же пункте дано определение континуальной устойчивости и теорема о континуальной устойчивости на сфере S^2.

В п.4.3 исследуются минимальные системы на торе без точек покоя и доказано, что множество классов континуально эквивалентных систем на торе имеет мощность континуума. Построены также минимальные системы на некоторых двумерных многообразиях.

В п.4.4 рассматривается минимальные системы на плоскости при некоторых ограничениях.

Новым в диссертации по отношению к уже известным результатам является исследованные свойства непрерывных отображений динамических систем, результаты исследований биконтинуальной эквивалентности на плоскости, сфере S^2 и торе T^2, ее сравнение с топологической эквивалентностью. Новым также является определение континуальной эквивалентности, которую предложил рассмотреть мой научный руководитель Л.Э.Рейзинь, а также те результаты, которые получены при ее исследовании.

Эти результаты и представляется к защите. Основные результаты опубликованны в работах [15—22].

Предварительные сведения.

I.I. Отображения и гомеоморфизмы

I.I.I. Определение [23]. Пусть заданы два множества X и Y и некоторое отображение $f: X \to Y$. Отображение f иньективно, если из $x \neq x'$, $x, x' \in X$, следует $f(x) \neq f(x')$. Отображение f сюрьективно, если $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Отображение f биективно, если оно одновременно сюрьективно и иньективно.

I.I.2. Определение [23]. Пусть далее X и Y метрические пространства. Отображение f непрерывно на X, если прообраз, при отображении f любого открытого множества Y, открытое множество в X. Отображение f открыто, если образ, при отображении f любого открытого множества из X, открыт в Y. Непрерывное отображение f называется гомеоморфизмом, если оно биективно и обратное отображение $f^{-1}: Y \to X$ непрерывно.

I.I.3. Теорема. Для того, чтобы биекция $f: X \to Y$ была гомеоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной и открытой.

Доказательство. См. Н.Бурбаки [25], с.69.

I.I.4. Теорема. Пусть $U \subset R^m$ открытое множество и $f: U \to R^m$ непрерывное, иньективное отображение. Тогда $f(U) \subset R^m$ открытое множество.

Доказательство. См. А.Долд [26], с.79.

I.I.5. Следствие. Если отображение $h: R^m \to R^m$

непрерывно и биективно, то оно является гомеоморфизмом.

Доказательство. В силу теоремы I.I.4 отображение h открыто, но тогда в силу теоремы I.I.3 получаем, что h является гомеоморфизмом.

I.I.6. Определение [27]. Соотношение $x \leq y$ является соотношением порядка на множестве E, если

I) соотношение $x \leq y$ и $y \leq z$ влечет $x \leq z$ — транзитивность

2) соотношение $x \leq y$ и $y \leq x$ влечет $x = y$

3) соотношение $x \leq x$ эквивалентно соотношению $x \in E$ — рефлективность.

I.I.7. Определение [27]. Соотношение $x \leq y$ является соотношением предпорядка на множестве E, если оно транзитивно и рефлексивно.

I.I.8. Предложение [27]. Если $\leq$ является соотношением предпорядка на множестве E, то ($x \leq y$ и $y \leq x$) является соотношением эквивалентности S, а соотношение $X \preccurlyeq Y$ является соотношением порядка в фактормножестве E/S, где $X \preccurlyeq Y$ есть соотношение $X \in E/S$, $Y \in E/S$ и $(\exists x)(\exists y)((x \in X$ и $y \in Y)$ и $x \leq y)$.

I.I.9. Определение [27]. Говорят, что два элемента x, y упорядоченного множества E сравнимы, если справедливо соотношение $x \leq y$ или $y \leq x$. Говорят, что множество E совершенно упорядочено, если оно упорядочено и любые два его элемента сравнимы.

1.2. Динамические системы

1.2.1. Определение [4,28]. Динамической системой на m — мерном многообразии M называется однопараметрическая группа преобразований $\varphi : R \times M \to M$, для которой $\varphi \in C^r$, $r \geq 0$, $\varphi(0,p)=p$, $\varphi(t_1+t_2,p)=\varphi(t_2,\varphi(t_1,p))$, где $M \in C^{r'}$, $r' > r$, $p \in M$, а R — действительная прямая. При фиксированном p множество точек $\varphi_p = \varphi(R,p)$ будем называть траекторией динамической системы φ; аналогично множества

$$\varphi(H^1,p) \quad \text{и} \quad \varphi(-H^1,p)$$

будем называть соответственно положительной и отрицательной полутраекториями, где

$$H^1=\{t \mid t \geq 0\}, \qquad -H^1=\{t \mid t \leq 0\}.$$

1.2.2. Определение [29]. Определим отображения L^+, $L^- : M \to 2^M$, подставляя для каждого $x \in M$

$$L^+(x)=\{y \in M \mid \exists \{t_n\},\ t_n \to +\infty \text{ и } \varphi(t_n,x) \to y\};$$

$$L^-(x)=\{y \in M \mid \exists \{t_n\},\ t_n \to -\infty \text{ и } \varphi(t_n,x) \to y\}.$$

Множества $L^+(x)$ и $L^-(x)$ называют соответственно положительным и отрицательным предельными множествами точки x.

1.2.3. Лемма Справедливы соотношения

$$L^+(x) = \bigcap_{t \in R} \overline{\varphi(H^1,\varphi(t,x))},$$

$$L^-(x) = \bigcap_{t \in R} \overline{\varphi(-H^1,\varphi(t,x))}.$$

Доказательство имеется [4], с.63.

I.2.4. Определение [29]. Определим отображения D^+, D^-, J^+, $J^-: M \to 2^M$, подставляя для каждого $x \in M$

$D^+(x) = \{ y \in M \mid \exists \{x_n\}$ в M и $\exists \{t_n\}$ в H^1, что $x_n \to x$, и $\varphi(t_n, x_n) \to y \}$;

$D^-(x) = \{ y \in M \mid \exists \{x_n\}$ в M и $\exists \{t_n\}$ в $-H^1$, что $x_n \to x$, и $\varphi(t_n, x_n) \to y \}$;

$J^+(x) = \{ y \in M \mid \exists \{x_n\}$ в M и $\exists \{t_n\}$ в H^1, что $x_n \to x$, $t_n \to +\infty$, и $\varphi(t_n, x_n) \to y \}$;

$J^-(x) = \{ y \in M \mid \exists \{x_n\}$ в M и $\exists \{t_n\}$ в $-H^1$, что $x_n \to x$, $t_n \to -\infty$, и $\varphi(t_n, x_n) \to y \}$.

Множества $D^+(x)$ и $D^-(x)$ называются соответственно положительной и отрицательной пролонгациями точки x.

Множества $J^+(x)$ и $J^-(x)$ называются соответственно положительным пролонгационным предельным и отрицательным пролонгационным предельным множествами точки x.

I.2.5. Определение [30]. Системой окрестностей точки называется семейство всех окрестностей этой точки.

I.2.6. Лемма. Справедливы соотношения

$$J^+(x) = \bigcap_{V,t} \overline{\varphi([t, +\infty), V)}$$

$$J^-(x) = \bigcap_{V,t} \overline{\varphi((-\infty, t], V)},$$

где V пробегает систему окрестностей точки x, а $t \to +\infty$ в первом случае, и $t \to -\infty$ во втором.

Доказательство имеется в [29].

I.2.7. Определение [28]. Точка $x_0 \in M$ называется неблуждающей точкой системы φ, если для любой окрестности U точки x_0 и любого $\tau \in R$ существует $t > \tau$ и $x \in U$, что $\varphi(t,x) \in U$.

I.2.8. Теорема. Точка $x \in M$ является неблуждающей точкой системы φ тогда и только тогда, если $x \in J^+(x)$.

Доказательство. Имеется в [29], с.35.

I.2.9. Теорема. Пусть $x \in M$. Каждая точка $y \in L^+(x)$ является неблуждающей точкой.

Доказательство. Имеется в [29], с. 35.

I.2.10. Определение [5]. Скажем, что динамическая система φ удовлетворяет условиям Морса—Смейла, если:

I) множество неблуждающих точек Ω является объединением конечного множества точек покоя и периодических траекторий, каждая из которых гиперболическая;

2) устойчивые и неустойчивые многообразия траекторий из Ω пересекаются трансверсально. Если $q \in \Omega$, через $W^s(q)$ и $W^u(q)$ обозначим соответственно ее устойчивое и неустойчивое многообразия.

I.2.11. Определение [13]. Будем писать $p \to q$, $p, q \in \Omega$, если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \emptyset$, и $p \Rightarrow q$, если $p \to q$ и множество $W^u(p) \cap W^s(q)$ имеет конечное число компонент. Соотношение $p \to q$ называется связью.

Фазовой диаграммой Φ системы φ назовем множество всех связей $p \to q$ с указанием размерностей $W^u(p)$ и $W^s(q)$ и того, являются ли они точками покоя или периодическими траекториями.

I.2.I2. Лемма [I4]. Любая связь вида $p \to q$ может быть представлена в виде $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow r_m \Rightarrow q$, $r_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, m$.

I.2.I3. Определение [5]. Динамические системы φ и ψ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $h : M \to M$, что

I) $h(\varphi(R, \cdot)) = \psi(R, h(\cdot))$,

2) h сохраняет направление движения на траекториях.

I.2.I4. Определение [3I]. Скажем, что отображение $F: M \to M$ сохраняет направление движения на траекториях, если существует отображение $T: R \times M \to R$ с свойствами:

I) $T(t,x)$ – непрерывно;

2) $T(0,x) = \emptyset$;

3) $T(\cdot, x): R \to R$ — монотонно возрастающая функция;

4) $F \circ \varphi(t,x) = \psi(T(t,x), F(x))$.

I.2.I5. Определение [4]. Множество $A \subset M$ называется инвариантным множеством, если $\forall x \in A$ и $\forall t \in R\ (\varphi(t,x) \subset A)$.

I.3. Схема динамической системы

Обозначим через $U_\delta(x)$ δ — окрестность точки x в пространстве R^m.

I.3.I. Определение ([I2], с.257). Полутраектория $\varphi(H^1, x)$ называется орбитно — устойчивой (в положительном направлении), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такой, что $\varphi(H^1, \tilde{x}) \subset U_\varepsilon(\varphi(H^1, x))$, как только $\tilde{x} \in U_\delta(x)$.

I.3.2. Определение ([I2], с.I02). Траектория φ_x называется ограниченной, если $\varphi_x \in G$, где G — ограниченная замкнутая область.

I.3.3. Определение ([I2], с.259). Ограниченная траектория называется орбитно—устойчивой или неособой, если она орбитно—устойчива как в положительном, так и в отрицательном направлениях.

I.3.4. Лемма [32]. Траектория φ_x орбитно—устойчива тогда и только тогда, если $L^\pm(x) = J^\pm(x)$.

I.3.5. Определение ([I2], с.284). Особыми траекториями динамической системы, определенной на R^2, называются все ограниченные орбитно—неустойчивые траектории, а также точки покоя, являющиеся орбитно—устойчивыми (центр).

I.3.6. Определение ([I2], с.277). Сепаратрисой называется орбитно—неустойчивая полутраектория, стремящаяся к точке покоя; а также траектория, у которой хотя бы одна полутраектория является сепаратрисой.

До конца этого параграфа предположим, что динамические системы заданы на замкнутой области $G \subset R^2$. В определениях I.3.9, I.3.10, I.3.17, I.3.27, I.3.33 даны определения понятий, которые в монографии [I2] четко не сформулированы, а определения I.3.40, I.3.41, I.3.42, I.3.43 несколько видоизменены по отношению к источнику [I2] потому, что в диссертации рассматриваются динамические системы, область определения G которых имеет более простую границу.

I.3.7. Предложение. Если число точек покоя конечно, то возможны следующие типы особых траекторий: точки покоя, сепаратрисы и замкнутые траектории, которые являются орбитно—неустойчивыми.

Доказательство смотрите в [I2], с.284.

I.3.8. Определение ([I2], с.287). Особой полутраекторией называется любая полутраектория особой траектории.

I.3.9. Определение. Особыми полутраеториями множества A называются все особые полутраектории $\varphi(H^1, x)$, $\varphi(-H^1, x)$ системы φ, для которых $L^{\pm}(x) = A$.

Обозначим через T_φ множество точек особых траекторий системы φ.

I.3.10. Определение. Ячейкой динамической системы называется компонента множества $(Int(G)) \setminus T_\varphi$.

I.3.11. Определение ([I2], с.328). Правильной эллиптической областью называется область, через все точки которой проходят траектории стремящиеся, при $t \to +\infty$

и $t \to -\infty$ к единственной точке покоя, и единственной орбитно—неустойчивой траекторией, кроме точки покоя, является траектория, ограничивающая эту область вместе с точкой покоя.

В дальнейшем мы эти области, где это не вызывает недаразумений, будем называть просто эллиптическими областями.

I.3.I2. Определение [24]. Замкнутой кривой Жордана называется кривая, гомеоморфная S^1 (одномерная сфера).

I.3.I3. Теорема (Жордана). Замкнутая кривая Жордана определяет на плоскости две области U^+ и U^- и является границей каждой из этих областей. Одна из этих областей U^+ — ограничена, U^- — не ограничена.

Доказательство. См. [24], с.504.

I.3.I4. Определение ([I2], с.530). Условимся считать положительным то направление движения на замкнутых жордановых кривых, при котором область U^+ находится слева.

I.3.I5. Определение ([I2], с.525). Плоскость называется ориентированной, если на замкнутых кривых Жордана установлено положительное направление обхода.

I.3.I6. Определение ([I2], с.3I7). Циклическим порядком конечного числа точек на замкнутой кривой Жордана называется порядок, в котором находится эти точки при положительном обходе этой кривой.

Обозначим через S_φ множество особых траекторий и эллиптических областей системы φ.

I.3.I7. Определение. Скажем, что отображение $\theta: S_\varphi \to S_\psi$ удовлетворяет условию A, если оно биективно и :

I) образом точки покоя системы φ является точка покоя системы ψ ;

2) образом замкнутой траектории системы φ является замкнутая траектория системы ψ ;

3) образом сепаратрисы системы φ является сепаратриса системы ψ ;

4) образом эллиптической области системы φ, является эллиптическая область системы ψ ;

5) если $\theta(\varphi_x) = \psi_y$, то $\theta(L^{\pm}(x)) = L^{\pm}(y)$.

I.3.I8. Определение ([I2], с.357). Скажем, что задана полная схема точки покоя x_0, не являющейся центром, если указан циклический порядок, в котором расположены вокруг точки покоя x_0 все особые полутраектории и все эллиптические области.

I.3.I9. Определение ([I2], с.359). Скажем, что полные схемы точек покоя x_0 и y_0 тождественны с сохранением ориентации и направления по t, если существует соответствие θ, удовлетворяющее условию A, между особыми полутраекториями и эллиптическими областями точек покоя x_0 и y_0, такое, что при замене $\varphi_x \subset S_\varphi$ на $\theta(\varphi_x)$, схема точки покоя x_0 переходит в схему точки покоя y_0.

I.3.20. Определение ([I2], с.36I). Скажем, что задана схема точки покоя типа центр, если указано, совпадает ли на траекториях этого центра направление по t

с положительным направлением обхода, или противоположено ему.

I.3.21. Определение ([I2], с.36I). Скажем, что схемы центров x_0 и y_0 тождественны с сохранением ориентации и направления по t, если на траекториях обеих этих центров направление по t либо одновременно совпадает с направлением положительного обхода, либо одновременно противоположно ему.

I.3.22. Определение ([I2], с.520). Континуумом называется замкнутое связное множество пространства R^m.

I.3.23. Определение ([I2], с.I06). Континуум K называется предельным, если существует x, для которого $L^{\pm}(x) = K$.

I.3.24. Предложение. Если число точек покоя системы φ конечно, то предельное множество каждой полутраектории системы φ может представлять множество одного из следующих типов:

I) одна точка покоя;

2) континуум, состоящий из целых траекторий, часть которых является точками покоя, а остальные — не замкнутые траектории, стремящиеся к точкам покоя;

3) одна замкнутая траектория.

Доказательство имеется в [I2], с.II2.

I.3.25. Определение ([I2], с.4I2). Предельные континуумы подразделяется на следующие типы:

I) ω — предельный континуум, если $K=L^{+}(x)$;

2) α — предельный континуум, если $K=L^{-}(x)$;

3) O (нуль) – предельный континуум, если K является границей области, заполненной замкнутыми траекториями.

В дальнейшем мы рассмотрим только такие предельные континуумы, которые отличны от точки покоя.

I.3.26. Лемма. Всякий предельный континуум K состоит из конечного числа замкнутых кривых Жордана S_i, $i = 1, \ldots, n$, образованных траекториями котинуума K, и обладающих следующими свойствами:

I) каждая отличная от точки покоя траектория континуума K входит в одну и только одну кривую S_i;

2) каждая кривая S_i имеет общую точку покоя по крайней мере с одной из S_j, $j \neq i$, если $n > 1$;

3) если $S_i \cap S_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, то множество $S_i \cap S_j$ состоит только из одной точки покоя.

Доказательство см. [I2], с.432.

I.3.27. Определение ([I2], с4I7). Если плоскость ориентирована, то скажем, что множество A находится на положительной (отрицательной) стороне континуума K, если $A \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i^{a}$, $(A \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i^{-a})$, где $a = +$, если направление движения по t совпадает с положительным направлением обхода кривой S_i, и $a = -$ в противном случае. Через U_i^+, U_i^- обозначены области, на которых кривая S_i разделяет плоскость, и область U_i^+ ограничена.

I.3.28. Определение ([I2], с.4I6). Континуум K является ω — или α — предельным с положительной (отрицательной) стороны, если траектория φ_x, для которой $L^{\pm}(x)=K$, находится с положительной (отрицательной) стороны континуума K.

O — предельный континуум является предельным с положительной (отрицательной) стороны, если замкнутые траектории находятся с положительной (отрицательной) стороны котинуума K.

I.3.29. Определение ([I2], с.435). Континуум K называется односторонним, если он является предельным только с одной стороны.

I.3.30. Определение ([I2], с.44I). Континуум K называется свободным, если для любого x, $L^{\pm}(x)=K$, траектория φ_x не является особой, и несвободным в противном случае.

I.3.3I. Определение ([I2], с.I95). Гладкая замкнутая кривая Жордана C называется циклом без контакта динамической системы φ, если:

I) на кривой C не лежит ни одной точки покоя;

2) ни одна траектория системы φ не касается кривой C в любой ее точке.

I.3.32. Определение ([I2], с.465). Скажем, что два ω — или α — предельных континуума K_1 и K_2 сопряжены, если существует такой цикл без контакта C, что для $\forall x\in C$, имеем $L^{\pm}(x)=K_1$, $L^{\mp}(x)=K_2$.

Предельный континуум, лежащий вне цикла C называется внешним, а второй континуум — внутренним.

Два O — определенных континуума называются сопряженными, если они являются границами области, заполненной только замкнутыми траекториями.

I.3.33. Определение ([I2], с.422). ω — перечислением предельного континуума K называется перечисление траекторий континуума K, при котором:

I) указываются все траектории φ_{x_k}, где $x_k \in K$ не является точкой покоя, и $\varphi_{x_{k'}} \neq \varphi_{x_{k''}}$, если $k' \neq k''$;

2) $L^+(x_k) = L^-(x_{k+1}) = \bar{x}_i$, где $\bar{x}_i \in K$ — точка покоя;

3) после каждой траектории φ_{x_k} указывается точка покоя $\bar{x}_i = L^+(x_k)$;

4) $\varphi_{x_{k+1}} \subset J^+(x_k)$.

I.3.34. Определение ([I2], с.423). Скажем, что ω —перечисления континуума K и K^* тождественны, если между точками покоя и траекториями, входящими в эти континуумы, может быть установлено биективное соответствие, при котором:

I) всяким двум последовательным в ω — перечислении предельного континуума K траекториям соответствуют две последовательные в ω — перечислении континуума K^* траектории;

2) всяким двум совпадающим в ω — перечислении континуума K точкам покоя соответствуют две совпадающие в ω — перечислении континуума K^* точки покоя.

I.3.35. Определение ([I2], с.426). Скажем, что задана локальная схема предельного континуума K, если заданы:

I) тип предельного континуума;

2) ω — перечисление континуума K .

I.3.36. Определение ([I2], с.426). Скажем, что локальные схемы предельных континуумов K и K^* тождественны с сохранением направления по t , если

I) K и K^* являются предельными континуумами одного и того же типа;

2) их ω — перечисления тождественны.

I.3.37. Определение ([I2], с.443). Скажем, что задана полная схема предельного континуума K если:

I) указано, с какой стороны континуум K является предельным;

2) задана локальная схема этого континуума;

3) на замкнутых кривых S_i , $i=1,\dots,n$, входящих в состав континуума K , указано соответствие между положительным направлением обхода и направлением по t ;

4) если K не является O — предельным континуумом, указаны все его особые траектории и их циклический порядок.

I.3.38. Определение ([I2], с.445). Скажем, что полные схемы предельных континуумов K и K^* тождественны с сохранением ориентации и направления по t , если:

I) K и K^* являются предельными континуумами одного и того же типа и с одной и той же стороны;

2) тождественны локальные схемы K и K^* ;

3) существует соответствие по локальной схеме между траекториями континуумов K и K^*, при котором на соответствующих друг другу кривых S_i и S_i^*, $i=1,\ldots,n$ этих континуумов направление положительного обхода либо на обеих совпадает с направлением по t, либо на обеих противоположно ему;

4) либо K и K^* являются свободными, либо оба несвободны, и тогда между особыми полутраекториями континуумов K и K^* существует соответствие θ, удовлетворяющее условию A.

I.3.39. Определение ([I2], с.448). Цикл без контакта C называется положительным (отрицательным), если для $\forall x \in C$, имеем $L^-(x) \subset G$ $(L^+(x) \subset G)$, где $Bd\,G = C$.

I.3.40. Определение ([I2], с.45I). Скажем, что задана схема границы области G, если перечислены в циклическом порядке все пересекающие $Bd\,G$ особые полутраектории и указано, является ли цикл положительным или отрицательным.

I.3.4I. Определение ([I2], с.452). Скажем, что схемы границ областей G и G^* тождественны, если: оба цикла являются одновременно положительными или отрицательными; существует биективное соответствие θ, удовлетворяющее условию A, между особыми траекториями, пересекающими $Bd\,G$ и $Bd\,G^*$.

I.3.42. Определение. Элементами схемы динамической системы φ, рассматриваемой в замкнутой области G назовем:

1) полные схемы точек покоя системы φ ;

2) односторонние ω —, α —, O — предельные континуумы и их полные схемы;

3) схему границы области G ;

4) пары сопряженных свободных ω —, α —, O — предельных континуумов и граничнего цикла без контакта, для которых указано, какой из элементов пары является внешним и какой внутренним.

I.3.43. Определение ([I2], с.481). Схемой динамической системы φ назовем:

I) перечисление особых траекторий динамической системы φ ;

2) перечисление элементов схемы с фиксированными в п.(I) обозначениями для особых траекторий.

I.3.44. Определение ([I2], с.484). Схемы динамических систем φ и ψ назовем тождественными с сохранением ориентации и направления движения, если существует биективное отображение θ особых траекторий φ_x системы φ на особые траектории системы ψ , причем типы каждого прообраза φ_x и $\theta(\varphi_x)$ совпадают, и, при замене всех φ_x на $\theta(\varphi_x)$, схема динамической системы φ переходит в схему динамической системы ψ .

I.3.45. Теорема. Для того чтобы топологические структуры разбиения на траектории динамических систем φ и ψ в замкнутых областях G и G^* были тождественными, необходимо и достаточно, чтобы схемы этих систем были тождественными.

Доказательство имеется в [I2], с.497.

I.3.46. Теорема. Всякая траектория, являющаяся предельной хотя для одной отличной от нее траектории, орбитно—неустойчива.

Доказательство имеется в [I2], с.262.

I.3.47. Теорема. Замкнутая траектория, не являющаяся предельной для незамкнутой траектории, орбитно — устойчива.

Доказательство следует из теоремы 4I ([I2], с.283).

I.3.48. Предложение. Вокруг каждой точки орбитно—устойчивой замкнутой траектории существует такая окрестность, что все пересекающие эту окрестность траектории являются орбитно — устойчивыми замкнутыми траекториями.

Доказательство имеется в [I2], с.295.

I.3.49. Предложение. Если O — предельный континуум отличен от точки покоя, то он представляет собой либо орбитно—неустойчивую замкнутую траекторию, либо континуум, частью траекторий которого являются орбитно — неустойчивые точки покоя.

Доказательство следует из теорем 69 и 70 ([I2], с.4I8).

2. Непрерывные отображения динамических систем

2.I. Общие свойства непрерывных отображений динамических систем

2.I.I. **Определение.** Положим $\varphi \geqslant \psi$, если существует непрерывное сюръективное отображение $F: M \to M$, такое, что

$$F(\varphi(R,\cdot)) = \psi(R, F(\cdot)) \qquad (\mathrm{I})$$

(F отображает траектории системы φ на траектории системы ψ), и F сохраняет направление движения на траекториях.

2.I.2. **Предложение.** Соотношение $\geqslant$ является соотношением предпорядка на множестве $\mathfrak{M}(M)$ динамических систем, определенных на многообразии M.

Доказательство. Покажем транзитивность соотношения $\geqslant$. Пусть $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$ и $\varphi_2 \geqslant \varphi_3$, а F_1, $F_2 : M \to M$ соответствующие отображения. Положим $F = F_2 \circ F_1$ и в силу (I) имеем

$$F(\varphi_1(R,\cdot)) = F_2 \circ F_1(\varphi_1(R,\cdot)) = F_2(\varphi_2(R, F_1(\cdot))) =$$

$$= \varphi_3(R, F_2 \circ F_1(\cdot)) = \varphi_3(R, F(\cdot)).$$

Следовательно, $\varphi_1 \geqslant \varphi_3$.

Если F тождественное отображение, то всегда имеем $\varphi \geqslant \varphi$. Следовательно, $\geqslant$ является соотношением предпорядка.

2.1.3. Лемма. Если $\varphi \geqslant \psi$ и M компактно, то справедливы равенства

$$F(L^{\pm}(x)) = L^{\pm}(F(x)).$$

Доказательство. В силу леммы 1.2.3 и непрерывности F, имеем

$$F(L^{+}(x)) = F\Big(\bigcap_{t\in R} \overline{\varphi(H^1, \varphi(t,x))}\Big) \subset$$

$$\subset \bigcap_{t\in R} F\big(\overline{\varphi(H^1, \varphi(t,x))}\big) \subset \bigcap_{t\in R} \overline{F(\varphi(H^1, \varphi(t,x)))} =$$

$$= \bigcap_{\bar t\in R} \overline{\psi(H^1, \psi(\bar t, F(x)))} = L^{+}(F(x)).$$

Допустим, что $y \in L^{+}(F(x))$. Согласно 1.2.2 существует такая последовательность $\{\bar t_n\}$, $\bar t_n \to +\infty$, что $\psi(\bar t_n, F(x)) \to y$. В силу сюръективности отображения F существует последовательность $\{\varphi(t_n, x)\}$, для которой $F(\varphi(t_n, x)) = \psi(\bar t_n, F(x))$ и $t_n \to +\infty$ в силу 1.2.14. В силу компактности M можно выделить подпоследовательность $\{\varphi(t_{n_k}, x)\} \to p$, $t_{n_k} \to +\infty$. Следовательно, $p \in L^{+}(x)$. В силу непрерывности F имеем $F(p) = y$.

Второе равенство доказывается аналогично.

2.1.4. Лемма. Если $\varphi \geqslant \psi$ и M компактно, то справедливы равенства

$$F(J^{\pm}(F^{-1}(y))) = J^{\pm}(y),$$

где $y \in M$.

Доказательство. Пусть $V=F^{-1}(U)$, где U пробегает систему окрестностей точки y. В силу непрерывности и сюръективности отображения F, множество V также пробегает систему окрестностей множества $F^{-1}(y)$. В силу леммы I.2.6, I.2.14 и непрерывности F имеем

$$F(J^+(F^{-1}(y)))=F(\bigcap_{V,t}\overline{\varphi([t,+\infty),V)})\subset$$

$$\subset\bigcap_{V,t}\overline{F(\varphi([t,+\infty),V)}=\bigcap_{U,\bar t}\overline{\psi([\bar t,+\infty),U)}=J^+(y).$$

Пусть $q\in J^+(y)$. Согласно определению множества $J^+(y)$ имеем, что $\exists\{y_n\}$, $y_n\to y$, $\exists\{\bar t_n\}$, $\bar t_n\to+\infty$ и $\psi(\bar t_n,y_n)\to q$. В силу сюръективности отображения F имеем последовательность $\{\varphi(t_n,x_n)\}$, $x_n\in F^{-1}(y_n)$, $t_n\to+\infty$ в силу I.2.14. В виду компактности M существует подпоследовательность $\{\varphi(t_{n_k},x_{n_k})\}\to p$ такая, что $t_{n_k}\to+\infty$, $x_{n_k}\to x\in$ $\in F^{-1}(y)$. Следовательно, $p\in J^+(x)\subset J^+(F^{-1}(y))$. В силу непрерывности отображения F имеем $F(p)=q$.

Второе равенство доказывается аналогично.

2.I.5. Следствие. Если $\varphi\geqslant\psi$ и M компактно, то справедливо равенство

$$F(D^\pm(F^{-1}(y)))=D^\pm(y).$$

Доказательство. В силу теоремы 4.3 ([29], с.26) имеем

$$D^+(x) = \varphi(H^1, x) \cup J^+(x),$$

а согласно лемме 2.I.4 имеем

$$F(D^+(F^{-1}(y))) = F(\varphi(H^1, F^{-1}(y)) \cup J^+(F^{-1}(y))) =$$

$$= F(\varphi(H^1, F^{-1}(y))) \cup F(J^+(F^{-1}(y))) =$$

$$= \psi(H^1, y) \cup J^+(y) = D^+(y).$$

2.I.6. Лемма. Если $\varphi \geqslant \psi$, M - компактно и ψ_y - орбитно—неустойчивая траектория системы ψ, то множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит по крайнем мере одну орбитно—неустойчивую траекторию.

Доказательство. Если ψ_y орбитно—неустойчивая траектория, то согласно лемме I.3.4 имеем, что $L^+(y) \neq \neq J^+(y)$, а в силу леммы 2.I.3 получаем

$$F(L^+(F^{-1}(y))) = L^+(y).$$

Покажем, что множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит по крайнем мере одну орбитно—неустойчивую траекторию. Допустим противное, т.е. $J^+(F^{-1}(y)) = L^+(F^{-1}(y))$. Согласно леммам 2.I.3 и 2.I.4 имеем

$$L^+(y) = F(L^+(F^{-1}(y))) = F(J^+(F^{-1}(y))) = J^+(y),$$

что противоречит начальному предположению.

Для лемм 2.I.7 и 2.I.8 допустим, что системы φ и ψ определены в R^2, а границы областей G,

$G^* \subset R^2$, являются циклами без контакта. Для определенности, допустим, что циклы являются отрицательными.

2.I.7. Лемма. Если существует такое $F: \bar{G} \to \bar{G}^*$, для которого $F(\varphi(R,\cdot) \cap \bar{G}) = \psi(R, F(\cdot)) \cap \bar{G}^*$, то справедливо равенство

$$F(Bd\, G) = Bd\, G^*.$$

Доказательство. Пусть $x \in Bd\, G$ и $F(x) = y$, где $y \in \bar{G}^*$. Покажем, что $y \in Bd\, G^*$. Допустим противное, т.е., $y \notin Bd\, G^*$, Возможны два случая.

I. $\psi(R, y) \cap Bd\, G^* \neq \emptyset$.

Тогда существует $t_1 \neq 0$ такое, что $\psi(t_1, y) \in Bd\, G^*$. Имеются две возможности:

I) $t_1 > 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ точка $\psi((t_1 - \varepsilon), y) \notin G^*$, следовательно, $y \notin G^*$;

2) $t_1 < 0$, тогда существует $t_2 > 0$, что $\psi(t_1, y) = F(\varphi(-t_2, x))$, но тогда $\varphi(-t_2, x) \notin G$.

2. $\psi(R, y) \cap Bd\, G^* = \emptyset$.

Рассмотрим произвольную точку $\psi(-t, y)$, где $t > 0$. В силу сюръективности отображения F существует $\bar{t} > 0$, такое, что $F(\varphi(-\bar{t}, x)) = \psi(-t, y)$, но для каждого $\bar{t} > 0$ имеем $\varphi(-\bar{t}, x) \notin G$.

2.I.8. Лемма. Если $\varphi \gg \psi$, φ, ψ имеют конечное число точек покоя и ψ_y является замкнутой орбитно—неустойчивой траекторией, то множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит не менее одной замкнутой орбитно—неустойчивой траектории системы φ.

Доказательство. Пусть ψ_y является замкнутой траекторией системы ψ. Множество $F^{-1}(\psi_y)$ не содержит точек покоя системы φ, а в силу непрерывности отображения F, оно замкнуто. В силу сюръективности F существует траектория $\varphi_x \subset F^{-1}(\psi_y)$. Множество $F^{-1}(\psi_y)$ замкнуто, следовательно, $L(x) \subset F^{-1}(\psi_y)$, а в силу предложения I.3.24 множество $L(x)$ состоит из замкнутых траекторий. Возможны два случая.

I. существует траектория φ_x, $x \in F^{-1}(\psi_y)$, такая, что $L^+(x) \neq \varphi_x$.

2. все траектории φ_x, $x \in F^{-1}(\psi_y)$, являются замкнутыми.

В первом случае согласно теореме I.3.46 имеем, что траектория $\varphi_{\bar{x}}$, $\bar{x} \in L^+(x)$, является замкнутой орбитно—неустойчивой траекторией.

Допустим, что ψ_y — замкнутая орбитно—неустойчивая траектория. Согласно лемме 2.I.6 и в случае 2 имеем, что множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит замкнутую орбитно—неустойчивую траекторию.

Рассмотрим динамическую систему φ в пространстве R^m. Пусть начало координат O является точкой покоя, которая имеет $(m-1)$ мерное устойчивое многообразие $W^s(O)$ и одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O)$, и пусть B - замкнутый шар с центром в точке O, ($Bd\, B = S$) который не содержит кроме O других предельных множеств для точек системы φ (рис.I). При этих условиях справедлива

2.I.9. Лемма. $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \quad \exists t>0$, что, если $x\in U_\delta(a)$, то $\varphi(t,x)\in U_\varepsilon(b)$, где $a\in W^s(0)\cap S$, $b\in W^u(0)\cap S$, $x\notin W^s(0)$, и при этом $t\to+\infty$, если $x\to a$.

Доказательство. Устойчивое многообразие $W^s(0)$ разлагает шар B на две области. Пусть точки $x_n\in S$, где $x_n\notin W^s(0)$ и $x_n\to a$, если $n\to+\infty$, и точка b принадлежат к одной и той же области шара B . Рассмотрим последовательность $\{\eta_n\}$, где $\eta_n>0$ и $\eta_n\to 0$, если $n\to+\infty$. Ясно, что $\forall n>0 \quad \exists T_n>0$, что $\varphi(T_n,a)\in U_{\eta_n}(0)$, а в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных условий, существует x_n такой, что $\varphi(T_n,x_n)=y_n\in U_{\eta_n}(0)$. Следовательно, имеем последовательность $\{y_n\}$, где $y_n\to 0$, если $n\to+\infty$. В силу предположений имеем, что $L^+(x_n)\notin$ $\notin B$, следовательно, через конечное время t_n имеем, $\varphi(t_n,y_n)=z_n\in S$, где z_n — первая точка пересечения $\varphi(H^1,y_n)$ с S . Получаем последовательность $\{z_n\}$, и в силу компактности S имеем, $z_n\to z_0$, если $n\to+\infty$. Покажем, что $L^-(z_0)=0$, где $z_0\notin W^u(0)$. Известно, что $y_n\to 0$, если $n\to+\infty$. На основании непрерывной зависимости от начальных условий заключаем, что

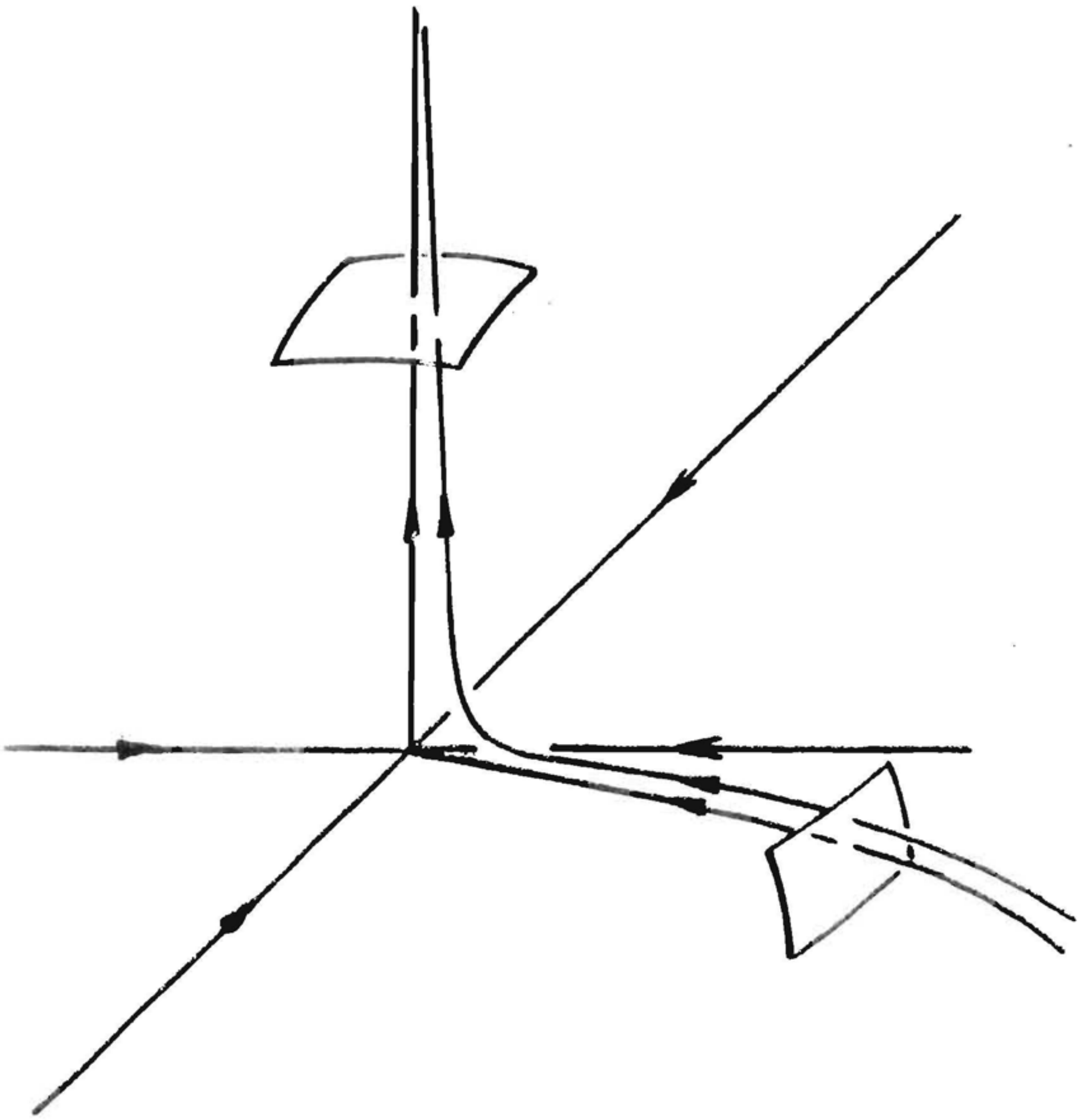

Рис. 1.

$t_n \to +\infty$, если $n \to +\infty$. В силу непрерывности φ имеем $L^-(z_0)=0$. Поэтому $z_0 = b$.

Лемма 2.I.9 является некоторым обобщением леммы 5 ([28], с.82) на пространство R^m.

2.I.IO. Лемма. Если $\varphi \geqslant \psi$, M — компактное m —мерное многообразие, и точка x неблуждающая точка системы φ, то $F(x)$ — неблуждающая точка системы ψ.

Доказательство. В силу теоремы I.2.8 имеем $x \in J^+(x)$, а в силу леммы 2.I.4 получаем

$$F(x) \in F(J^+(x)) \subset F(J^+(F^{-1}(F(x)))) \subset J^+(F(x)).$$

Следовательно, $F(x) \in J^+(F(x))$ и точка $F(x)$ является неблуждающей точкой системы ψ.

Как показывает следующий пример, для прообразов это, в общем, неверно.

2.I.II. Пример. На компактном 3—мерном многообразии H существуют динамические системы φ и ψ, $\varphi \geqslant \psi$, такие, что система ψ имеет неблуждающую точку, прообраз которой не содержит неблуждающую точку системы φ.

Рассмотрим динамическую систему $\overline{\varphi}$, определенную на кубе $A=\{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, с следующим дифференциальным уравнениям

$$\dot{x} = (2(y-z)-1)\,x(1-x)$$
$$\dot{y} = -y(1-y)$$
$$\dot{z} = -z(1-z).$$

нетрудно проверить, что для системы $\overline{\varphi}$ все вершины куба A являются элементарными точками покоя, при этом точка $(1,1,1)$ является источником, а точка $(0,0,0)$ — стоком (рис.2).

Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ и $\tau>0$ существует $t\geqslant\tau$ и траектория $\overline{\varphi}_{x_0,y_0,z_0}$, где $(x_0,y_0,z_0)\in U_\varepsilon(x,1,1)$, такая, что $\overline{\varphi}(t,x_0,y_0,z_0)\in$ $\in U_\varepsilon(x,0,0)$.

Точки покоя $(0,1,1)$, $(0,1,0)$ в плоскости $y=1$ являются седловыми, и в силу леммы 5 ([28], с.82) имеем, что для $\forall\varepsilon_1>0$ $\exists\,\delta_1>0$, такое, что, если $\rho((x,1,z),(x,1,1))<\delta_1$, то $\rho(\overline{\varphi}(t_1,x,1,z),$ $(x,1,0))<\varepsilon_1$ для некоторого $t_1>0$, где $t_1\to+\infty$, если $\delta_1\to 0$, а через $\rho(a,b)$ обозначено растояние между точками $a,b\in A$.

На основании теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий, имеем, что $\forall\varepsilon_2>0$ $\forall T_2>0$ $\exists\,\delta_2>0$ такое, что, если $\rho((x,y,z),(x,1,z))<\delta_2$, то $\rho(\overline{\varphi}(t,x,y,z),\overline{\varphi}(t,x,1,z))<\varepsilon_2$ для всех $t\leqslant T^2$.

Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем ε_1 так, чтобы $\delta_1<\varepsilon$. Потом выбираем точку $a_1\in U_{\varepsilon_1}(x,1,0)$ и получаем точку $\overline{\varphi}(-t_1,a_1)\in U_{\delta_1}(x,1,1)$. Точку a_1 можно всегда выбрать так, чтобы $t_1>\tau$. Потом выбираем $\varepsilon_2>0$ так, чтобы $U_{\varepsilon_2}(a_1)\subset U_{\varepsilon_1}(x,1,0)$. В силу леммы 2.1.9 можно выбрать точку $a_2\in U_{\varepsilon_2}(a_1)$ такую, что $\overline{\varphi}(t_2,a_2)\in U_\varepsilon(x,0,0)$. Если положить $T_3\geqslant t_1$, то получаем, что существует точка

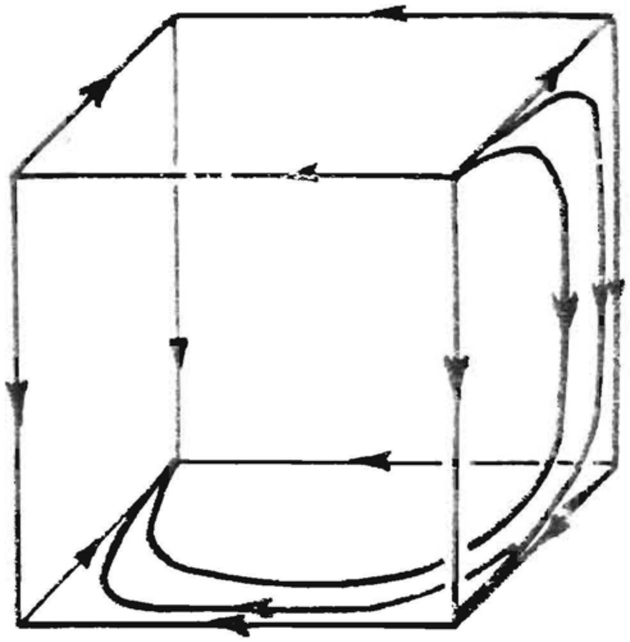

Рис. 2.

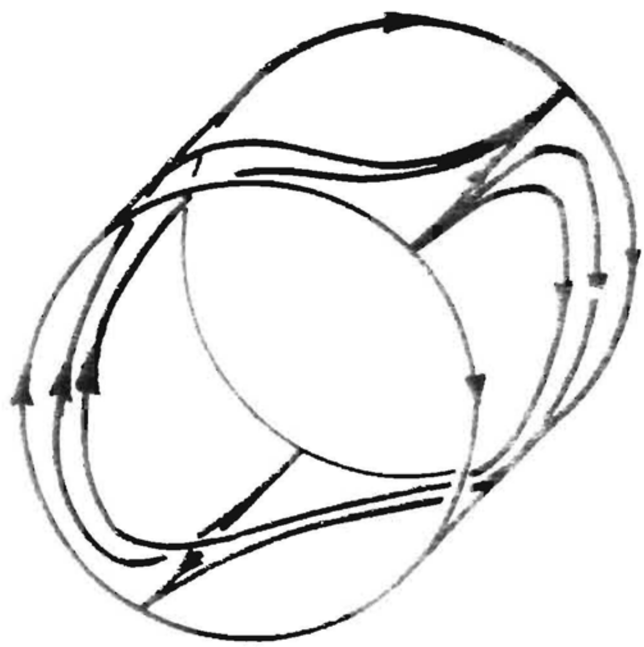

Рис. 3

$(x_0, y_0, z_0) = \bar{\varphi}(-t_1, a_2) \in U_\varepsilon(x, 1, 1)$, а точка $\bar{\varphi}(t_1 + t_2, x_0, y_0, z_0) \in U_\varepsilon(x, 0, 0)$.

Пусть $h : A \to H$, $h(x, y, z) = (x, h_2(y, z))$, где $H = [0,1] \times D^2$, $D^2 = \{(y,z) \mid y^2 + z^2 \le 1\}$, гомеоморфизм, который отображает траектории системы $\bar{\varphi}$ на траектории некоторой системы φ, определенной на H.

Согласно лемме 2.2.I существует непрерывное отображение $f : D^2 \to D^2$ с свойствами:

$f \circ h_2(0, z) = h_2(0, 1)$, $0 \le z \le 1$, $f \circ h_2(y, 1) = h_2(0, 1)$, $0 \le y \le 1$, а в остальных точках множества D^2 отображение f является гомеоморфизмом. Отображение $F : H \to H$, $F = id \times f$, очевидно, непрерывно, и отображает траектории системы φ на траектории некоторой системы ψ (рис.3), у которой множество $F \circ h(x, 0, 1)$, $0 < x < 1$, состоит из неблуждающих точек, а множество $F^{-1}(F \circ h(x, 0, 1))$, в силу выше сказанного, неблуждающих точек не содержит.

2.I.I2. Лемма. Если $A \subset M$ инвариантное множество системы ψ, $\psi \le \varphi$, то множество $F^{-1}(A)$ — инвариантное множество системы φ.

Доказательство. Пусть $x \in F^{-1}(y)$, где $y \in A$. Если допустить, что $\exists t$, такое, что $\varphi(t, x) \notin F^{-1}(A)$, то $F(\varphi(t, x)) = \psi(\tilde{t}, y) \notin A$, что противоречит инвариантности множества A.

2.2. Построение непрерывных отображений динамических систем в плоскости

Рассмотрим системы, определенные на R^2.

2.2.I. Лемма. Если компактное связное инвариантное множество A динамической системы φ отлично от точки покоя, то существует динамическая система ψ, такая, что $\varphi \geqslant \psi$ и $F(A)$ является точкой покоя системы ψ.

Доказательство. В силу теоремы Римана [33] существует взаимно однозначное регулярное отображение $f: R^2 \setminus A \to R^2 \setminus D$, где $D = \{ x \mid \rho(0,x) \leq \frac{1}{2} \}$, $x \in R^2$, 0 — начало координат. При этом $f|_{Bd A}$ — непрерывная взаимно однозначная функция, если $Bd A$ — кривая Жордана. Пусть $B = \{ x \mid \rho(0,x) \leq 1 \}$ и (r, θ) — полярные координаты на R^2. Определим отображение $g: R^2 \to R^2$ следующим образом: $g(r,\theta) = (r, \theta)$, если $x \notin B$, $g(r,\theta) = (p(r), \theta)$, если $x \in B \setminus D$, где $p(r) = -12r^3 + 28r^2 - 19r + 4$, и $g(r,\theta) = (0,0)$, если $x \in D$. Отображение $F: R^2 \to R^2$, где $F(x) = g \circ f(x)$, если $x \in R^2 \setminus A$, и $F(A) = (0,0)$, отображает траектории системы φ (рис.4) на траектории некоторой системы ψ (рис.5), для которой точка $(0,0)$ является точкой покоя.

Обозначим через Γ максимальное компактное

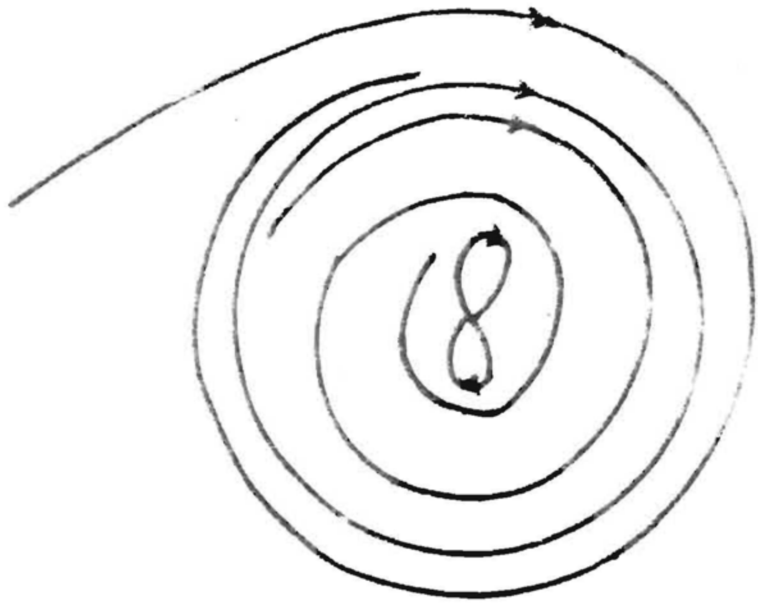

Рис. 4.

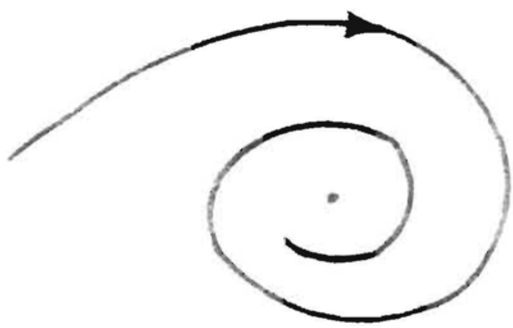

Рис. 5.

инвариантное множество системы φ.

2.2.2. Следствие. Если множество неблуждающих точек Ω динамической системы φ не пусто и множество Γ связно, то существует динамическая система ψ, $\psi \leq \varphi$, множество неблуждающих точек которой состоит из одной точки покоя. Доказательство следует из леммы 2.2.I.

Пусть для динамической системы ψ имеем $\Omega = x_0$. Для простоты изложения обозначим эллиптические сектора точки покоя x_0 системы ψ через E, гиперболические сектора — через H, параболические сектора — через P, сепаратрисы точки покоя x_0 — через S, произвольное объединение некоторых секторов точки покоя x_0 — через G.

2.2.3. Лемма. Если множество неблуждающих точек динамической системы φ состоит только из одной точки покоя x_0, то схема точки покоя x_0 определяет динамическую систему с точностью до гомеоморфизма.

Доказательство следует из теоремы I.3.45.

2.2.4. Лемма. Если точка покоя x_0 динамической системы ψ (рис.6) имеет эллиптический сектор E, который содержит ограниченную сепаратрису S, то существует динамическая система $\sigma \leq \psi$ (рис.7), для которой $F(A) = F(x_0)$, $F|_{R^2 \setminus A}$ — гомеоморфизм, где A — компактное множество с границей $\bar{S}$.

Доказательство вытекает из леммы 2.2.I.

2.2.5. Следствие. Если множество $E \setminus \bar{A}$ не содержит ограниченных сепаратрис, то $F(E)$ является

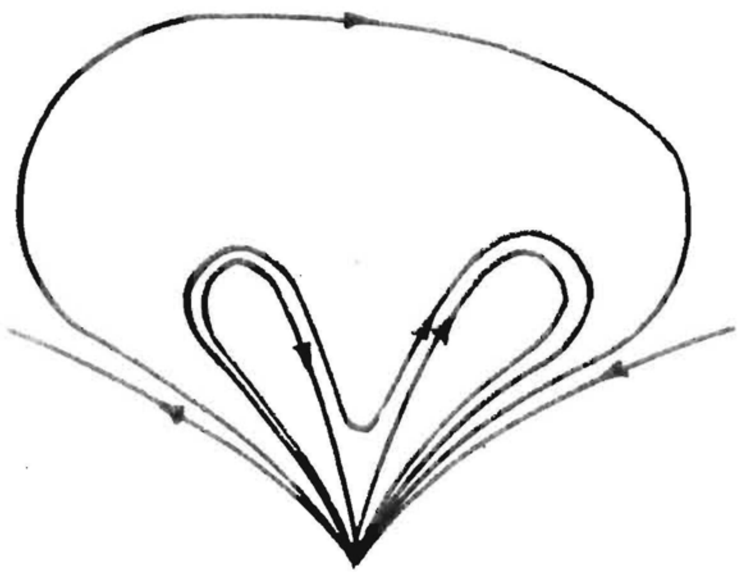

Рис. 6.

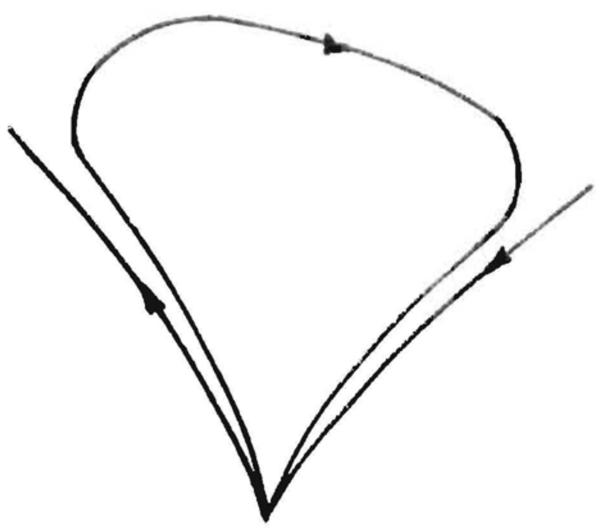

Рис. 7.

элементарным эллиптическим сектором.

Доказательство следует из лемм 2.2.I и 2.2.4.

В дальнейшем предположим, что система ψ имеет только элементарные эллиптические сектора.

2.2.6. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1, H_1, S_2, H_2, S_3, G (рис.8), то существует динамическая система $\sigma \leq \psi$, такая, что точка покоя $F(x_0)$ системы σ имеет схему: S_1, G (рис.9).

Доказательство. Отображение F определим следующим образом: $F(x_0) = x_0$, $F(S_1) = S_1$, $F(S_2) = x_0$, $F(B) = S_1$, где $B = (\bar{H}_1 \cup \bar{H}_2) \setminus S_2$, $F(x) = f(x)$, если $x \in G$, где $f : G \to R^2 \setminus S_1$ — гомеоморфизм, который существует согласно теореме Римана [33], при этом $f(x_0) = x_0$. Отображение F отображает траектории ψ_x, $x \in B$, на сепаратрису S_1 с сохранением направления движения на траекториях. Очевидно, F — непрерывное отображение.

2.2.7. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1, H_1, S_2, H_2, S_3, H_3, S_4, H_4, S_5, G (рис.10), где H_2, H_3 может быть и эллиптическими секторами, то существует динамическая система $\sigma \leq \psi$, такая, что точка покоя $F(x_0)$ имеет схему: S_1, G.

Доказательство. Отображение F определим следующим образом: $F(x_0) = x_0$, $F(\bar{H}_i) = x_0$, где $i = 2,3$, $F(B) = S_1$, где $B = H_1 \cup H_4 \cup S_1 \cup S_5$; $F(x) = f(x)$,

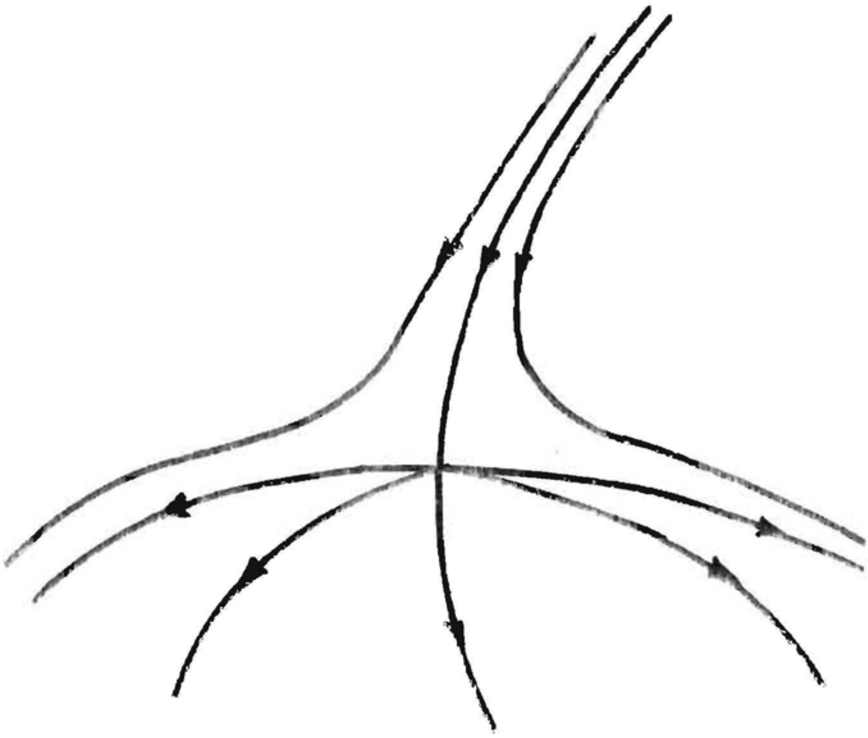

Рис. 8

Рис. 9

если $x \in G$, где $f: G \to R^2 \setminus S_1$ получено также как в лемме 2.2.6. При этом F отображает траектории ψ_x, $x \in B$ на S_1 с сохранением направления движения на траекториях. Очевидно, F — непрерывное отображение.

2.2.8. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1, E_1, S_2, E_2, S_3, E_3 S_4, G (рис.12), то существует динамическая система $\sigma \leq \psi$, такая, что точка покоя $F(x_0)$ имеет схему: S_1, E_1, S_2, G (рис.13).

Доказательство. Отображение F построим следующим образом: $F(x_0) = x_0$, $F(E_i) = h_i(E_i) = E_1$, где h_i, $i = 2, 3$, гомеоморфизмы элементарных эллиптических секторов, которые существует согласно лемме 12 ([12], с.345), $F(S_3) = S_1$, $F(S_4) = S_2$, $F(x) = f(x)$, если $x \in G$, где $f: G \to R^2 \setminus \bar{E}_1$ получено также как в лемме 2.2.6. $F(x) = x$, если $x \in E_1$. Очевидно, отображение F непрерывно.

2.2.9. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1, E_1, S_2, H_1, ..., S_{2n-1}, E_n, S_{2n}, H_n (рис.11), то существует система $\sigma \leq \psi$, такая, что точка покоя $F(x_0)$ имеет схему: S_1, E_1, S_2, H_1 (рис.13).

Доказательство. Отображение F построим следующим образом: $F(x_0) = y_0$, $F(E_i) = h_i(E_i) = E_1$,

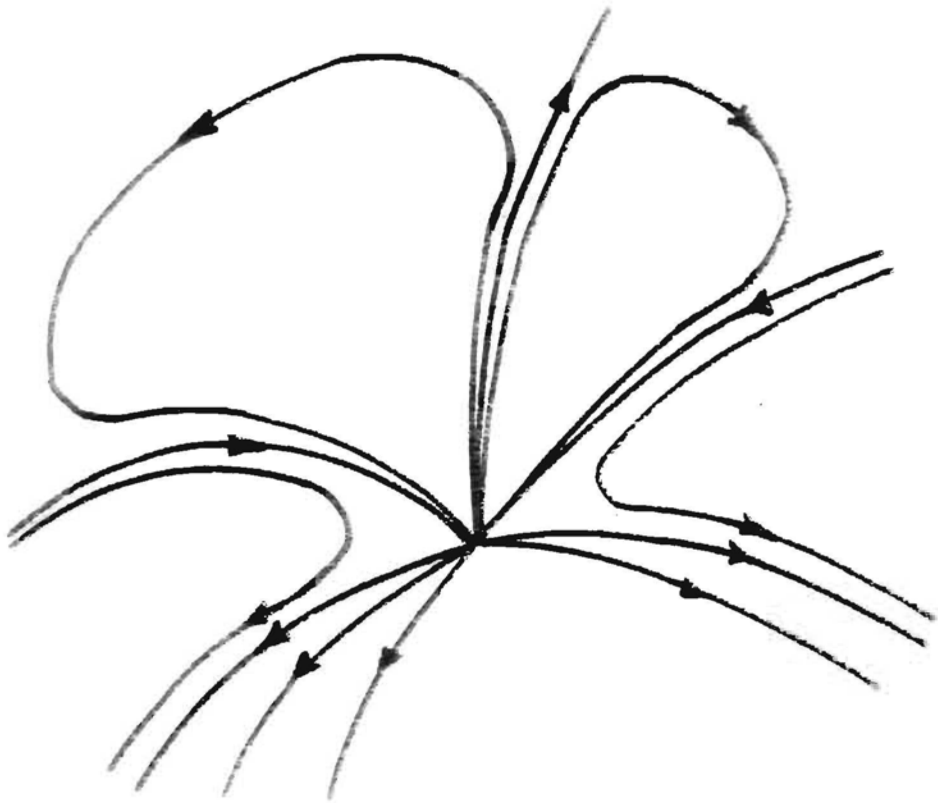

Рис. 10.

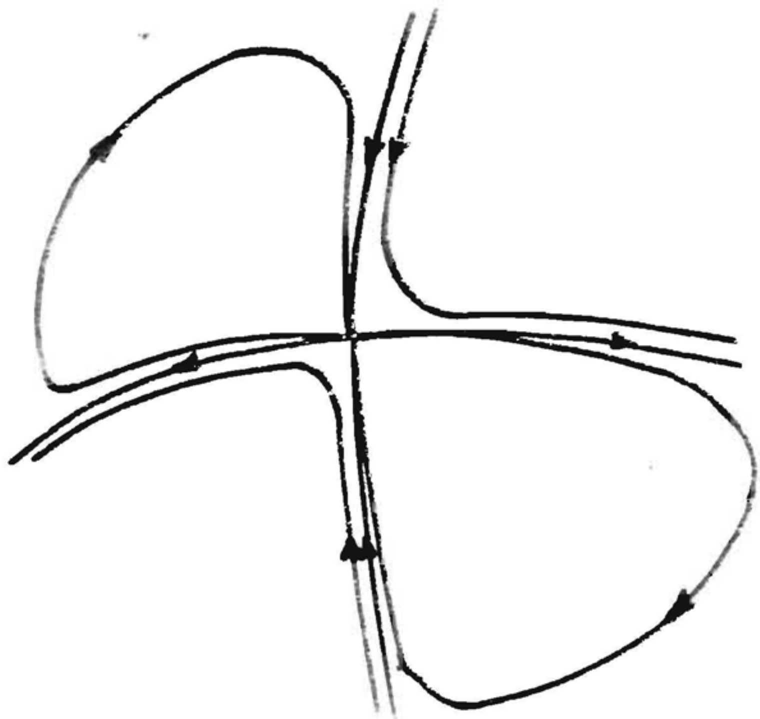

Рис. 11.

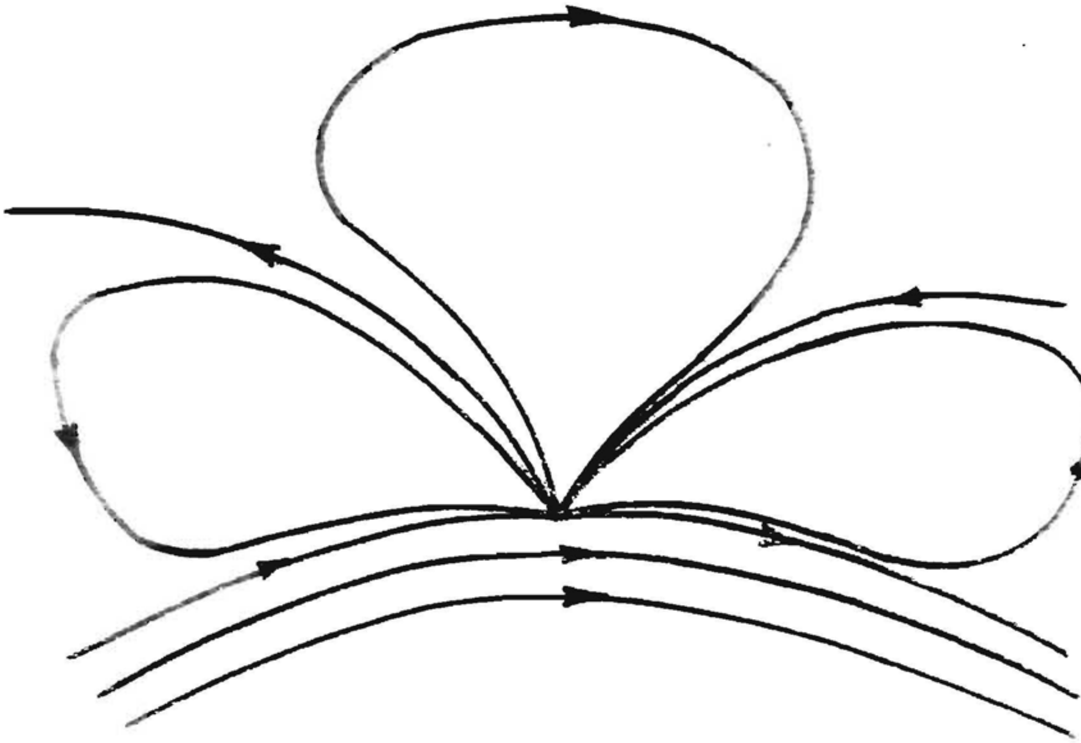

Рис. 12.

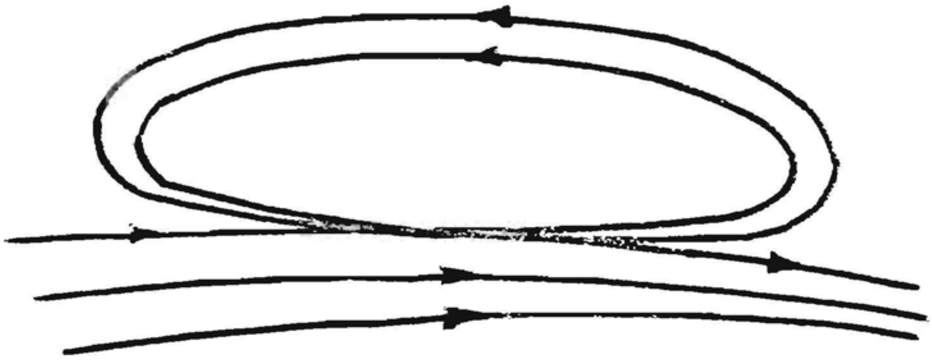

Рис. 13.

$i=1,\dots,n$, $F(H_i)=h_i^*(H_i)=H_1$, $F(S_i)=S_1$, если i нечетное и $F(S_i)=S_2$, если i — четное. Отображения h_i , h_i^* , $i=1,\dots,n$ являются гомеоморфизмами соответственно эллиптических и гиперболических секторов. Очевидно, F — непрерывное отображение.

2.2.10. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1 , P , S_2 , G (рис.14), то существует система $\sigma \leq \psi$ такая, что точка покоя $F(x_0)$ системы σ имеет схему: S_1 , G (рис.15).

Доказательство. Отображение F построим следующим образом: $F(x_0)=x_0$, $F(\bar{P})=\bar{S}_1$, $F(x)=f(x)$, если $x\in G$, где $f: G\to R^2\setminus S^1$ получено также как в лемме 2.2.6. Очевидно, отображение F непрерывно.

2.2.11. Лемма. Если точка покоя x_0 системы ψ имеет схему: S_1 , H_1 , S_2 , H_2 , то существует система $\sigma \leq \psi$, такая, что точка покоя $F(x_0)$ системы σ является узлом.

Доказательство. Система ψ топологически эквивалентна системе ψ^* , где все неограниченные траектории прямые. Введем прямоугольную систему координат: x_0 — начало координат, $\overline{S_1 \cup S_2}$ образует ось y и точки траектории S_2 имеют координаты $(0,y)$, где $y>0$. Определим отображение $f_1: R^2\to R^2\setminus S^2$, полагая

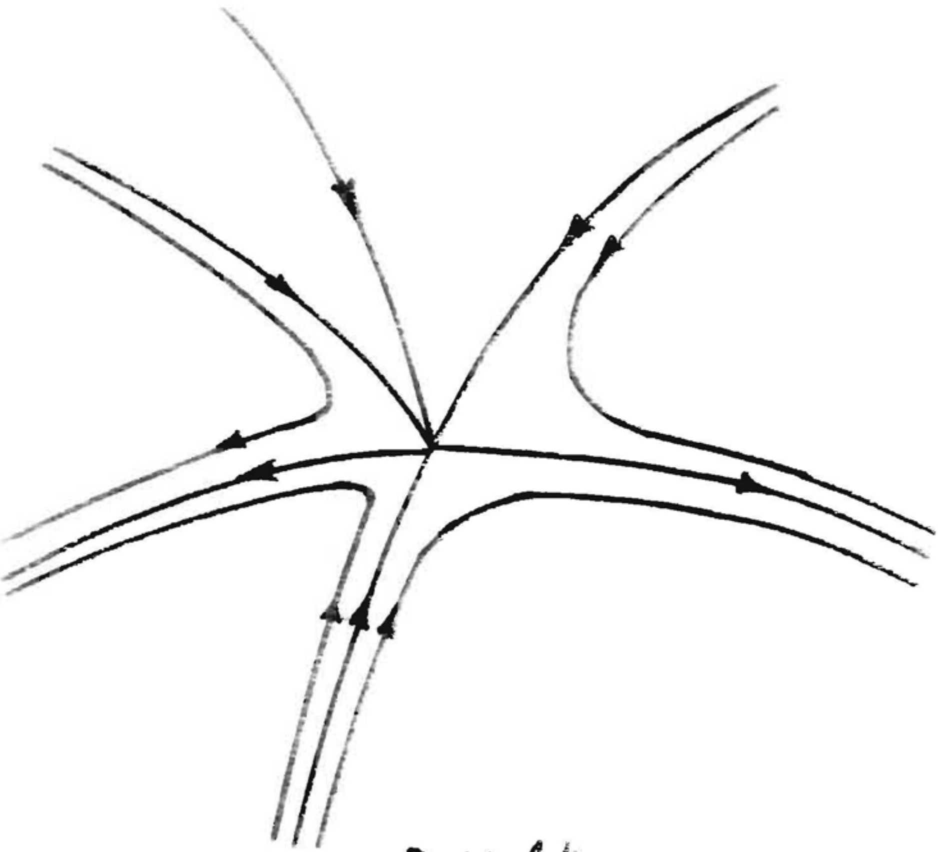

Рис. 14.

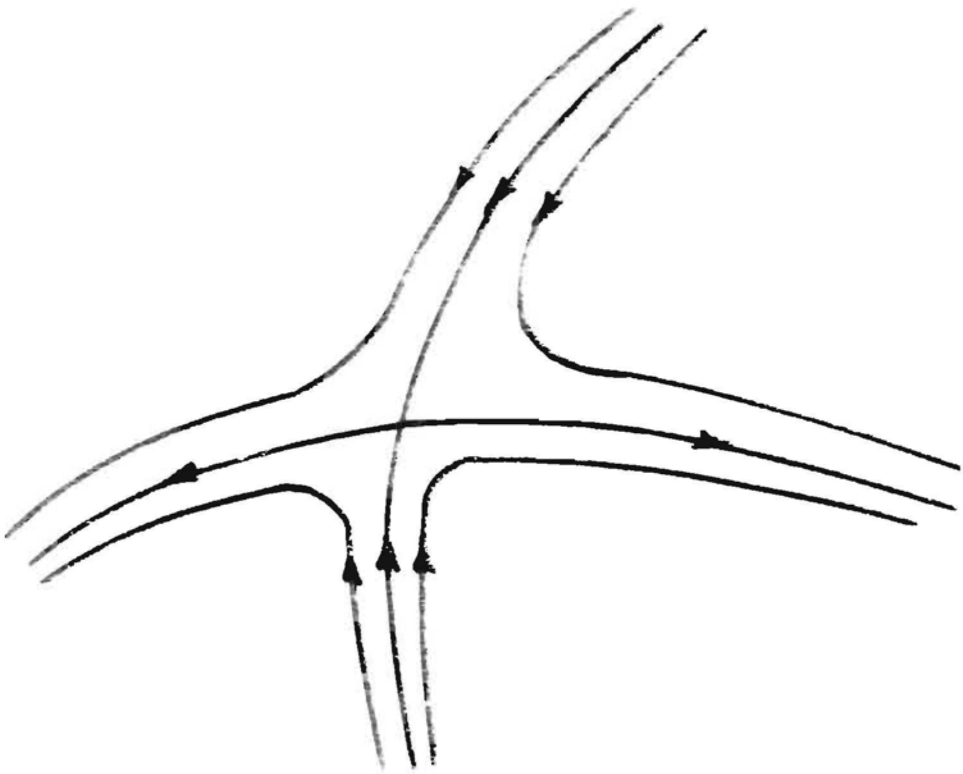

Рис. 15.

$$f_1^1(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

$$f_1^2(x,y) = \frac{yx^2}{x^2+y^2} ,$$

если $y \geqslant 0$ и $f_1(x,y) = id(x,y)$, если $y<0$. Отображение f_1 отображает траектории в I и II квадрантах на полуокружности, центры которых находится на прямой $y=0$ и радиус равен $\frac{|x|}{2}$. Определим еще отображение $f_2 : R^2 \setminus S_2 \Rightarrow R^2$, такое, что траектории системы ψ^* после преобразования f_2 отображаются на лучи точки покоя x_0 следующим образом: $f_2(x,u) = (s(u),\alpha)$, где через u обозначены точки траектории $f_1(\psi_x^*)$, а функция $s : f_1(\psi_x^*) \to H^1$ каждой точке u кривой $f_1(\psi_x^*)$ ставит в соответствии длину дуги $[x_0, u]$, и

$$\alpha = \begin{cases} \pi x & , \text{если } |x| \leq 1 \\ \pi\left(2-\frac{1}{|x|}\right) & , \text{если } x > 1 \\ -\pi\left(2-\frac{1}{|x|}\right) & , \text{если } x < -1 \end{cases} ,$$

где $s(u)$ и α являются полярными координатами в R^2 . Отображение $F : R^2 \to R^2$ следующее: $F(x,y) = f_2 \circ f_1(x,y)$. Очевидно, F — непрерывно, сюръективно и отображает траектории системы ψ на траектории системы σ .

2.3. Непрерывные отображения динамических систем на торе T^2.

Рассмотрим динамическую систему φ на плоскости R^2, определенную уравнением

$$\dot{y} = f(x) , \qquad (2)$$

где $x = (x^1, x^2)$, $f(x)$ — 2 — вектор, $f \in C$, $f(x^1+1, x^2) = f(x^1, x^2+1) = f(x^1, x^2)$ и f удовлетворяет условию единственности решений.

Предположим, что

$$f^1(x) > 0 . \qquad (3)$$

Согласно (3) имеем $\varphi^1(t, x_0) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, $x_0 \in R^2$. Следовательно, система φ не имеет точек покоя.

Пусть $h : R^2 \to T^2$ — накрытие. Тогда динамическая система φ определяет динамическую систему $h\varphi$ на торе T^2 . Для таких систем известно [28], что существует предел

$$\mu = \lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi^2(t, x_0)}{\varphi^1(t, x_0)} ,$$

не зависящий от x_0 и называемый числом вращения. Если $x_k^2 = \varphi^2(t_k, 0)$, где $\varphi^1(t_k, 0) = k$, то

$$\mu = \lim_{k \to +\infty} \frac{x_k^2}{k} .$$

Пусть $h\varphi \geqslant h\psi$. Тогда отображение $F: T^2 \to T^2$ индуцирует непрерывное сюръективное отображение $H: R^2 \to R^2$, такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{F} & T^2 \\ h\uparrow & & \uparrow h \\ R^2 & \xrightarrow[H]{} & R^2 \end{array}$$

комутативна. В частности $H(\varphi(R,\cdot)) = \psi(R, H(\cdot))$, а в силу сюръективности F имеем $H(x^1+1, x^2) = (H^1(x)+m, H^2(x)+n)$, $H(x^1, x^2+1) = (H^1(x)+p, H^2(x)+q)$, где m, n, p, q — целые числа. И так имеем $\varphi \geqslant \psi$.

Доказательство следующей леммы является повторением доказательства леммы 2.2 [34], где системы φ и ψ топологически эквивалентны.

2.3.I. Лемма. Если $\varphi \geqslant \psi$, то справедливо соотношение

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где μ, $\tilde{\mu}$, являются числами вращения соответственно систем φ, ψ, m и n, а также p, q взаимно просты.

Доказательство. Пусть $H(R, 0) = \vartheta_1$, $H(0) = 0$, $H(m,n) \in \vartheta_1$. Рассмотрим траекторию φ_0 системы φ. Соответствующая траектория системы ψ будет

$H(\varphi_0)=\psi_0$, так как $H(0)=0$. Пусть $x_0=0$, $x_k=\varphi_0\cap k\times R$, тогда $\tilde{x}_k=H(x_k)\in\vartheta_0+(km,kn)$, где $\vartheta_0=H(0;R)$, а выражение $\vartheta_0+(km,kn)$ обозначает кривую ϑ_0, сдвинутую на km по направлению оси x^1 и по kn по направлению оси x^2. Пусть далее $x_k\in R\times(s_k,s_k+1)$, где $s_k=[x_k^2]$ ($[\cdot]$ обозначает целую часть). Тогда $\tilde{x}_k$ находится между линиями $\vartheta_1+(s_kp,s_kq)$ и $\vartheta_1+((s_k+1)p,(s_k+1)q)$, т.е. $\tilde{x}_k=(km+ps_k+\xi_k^1,\ kn+qs_k+\xi_k^2)$, где $|\xi_k^1|<|p|$, $|\xi_k^2|<|q|$. Поэтому в силу равенства $\mu=\lim\limits_{k\to+\infty}s_k/k$ имеем

$$\mu=\lim_{k\to+\infty}\frac{kn+s_kq+\xi_k^2}{km+s_kp+\xi_k^1}=\frac{n+q\mu}{m+p\mu}.$$

Лемма доказана.

Если число вращения иррационально, то различаем два случая: эргодический и сингулярный.

2.3.2. Лемма. Для любой сингулярной системы φ существует некоторая эргодическая система $\psi\leq\varphi$.

Доказательство. Пусть φ сингулярная динамическая система. на T^2. Согласно лемме I4.I ([3], с.239) для системы φ на T^2 существует глобальная секущая — подмногообразие $S^1=h(0,R)$ и пусть $\overline{\varphi}$ — диффеоморфизм, заданный системой φ. Пусть $f:S^1\to S^1$ канторова функция [35], которая непрерывна, сюръективна и постоянна на смежных интервалах. Определим гомеоморфизм $\bar{\psi}: S^1 \to S^1$, полагая $\bar{\psi}(x) = f \circ \bar{\varphi} \circ f^{-1}(x)$. Пусть ψ является надстройкой гомеоморфизма $\bar{\psi}$. Тогда отображение

$F: T^2 \to T^2$ следующее

$$F(x) = \psi(t, f(\varphi(-t, x))),$$

где $\varphi(-t, x) \in h(0, R)$. Лемма доказана.

2.3.4. Лемма. Каждая эргодическая динамическая система на торе с числом вращения μ топологически эквивалентна динамической системе

$$\dot{x}^1 = 1$$

$$\dot{x}^2 = \mu.$$

Доказательство имеется в монографии [28].

2.3.5. Лемма. Для любой динамической системы φ с числом вращения μ существует система $\psi \leq \varphi$ с числом вращения

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu}$$

где m, n, p, q — целые числа, $|mq - np| \geq 1$, m и n, а также p и q взаимно просты.

Доказательство. Отображение $H: R^2 \to R^2$ построено

Л.Э.Рейзинем в лемме 2.I [34], которое является гомеоморфизмом даже, если $|mq - np| > 1$. Следует отметить, что отображение $F : T^2 \to T^2$, которое отображает траектории системы $h\varphi$ на траектории системы $h\psi$, где $F(x) = h \circ H \circ h^{-1}(x)$, не является гомеоморфизмом, если $|mq - np| > 1$.

3. Биконтинуальная эквивалентность динамических систем

3.I. Свойства биконтинуально эквивалентных динамических систем на плоскости

3.I.I. Определение. Динамические системы φ и ψ называются биконтинуально эквивалентными, если справедливо соотношение ($\varphi \geqslant \psi$ и $\psi \geqslant \varphi$).

3.I.2. Предложение. Биконтинуальная эквивалентность динамических систем является отношением эквивалентности.

Доказательство следует из предложений I.I.8 и 2.I.2.

До конца этого параграфа рассмотрим биконтинуально эквивалентные системы φ и ψ , определенные соответственно на множествах G , G^* , которые являются односвязными компактными подмножествами плоскости R^2 . Границы множеств G , G^* являются циклами без контакта. Точки континуумов G , G^* обозначим соответственно через x и y , а заданные соотношениями $\varphi \geqslant \psi$ и $\psi \geqslant \varphi$ отображения обозначим через F и F^* , где $F: G \to G^*$, $F^*: G^* \to G$.

3.I.3. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то φ и ψ имеют одинаковое число замкнутых орбитно—неустойчивых траекторий.

Доказательство. Применяя лемму 2.I.8 для отображений F и F^* , и в силу того, что особых траекторий конечное число, имеем, что замкнутых орбитно—неустойчивых траекторий у систем φ и ψ одинаково.

3.I.4. Лемма. Если системы биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то число орбитно—неустойчивых точек покоя у систем φ и ψ одинаково.

Доказательство. Пусть $\bar{y}$ является орбитно—неустойчивой точкой покоя системы ψ. Очевидно, $F^{-1}(\bar{y})$ замкнуто и в силу леммы 2.I.7 множество $F^{-1}(\bar{y}) \cap Bd\, G = \emptyset$.

В силу леммы 2.I.6 множество $F^{-1}(\bar{y})$ содержит орбитно—неустойчивую траекторию φ_x, которая в силу леммы 3.I.3 не является замкнутой траекторией. В силу замкнутости множества $F^{-1}(\bar{y})$ имеем, что $L^+(x) \subset$ $\subset F^{-1}(\bar{y})$. Учитывая предложение I.3.24 имеем, что множество $L^+(x)$ содержит по крайнем мере одну орбитно—неустойчивую точку покоя системы φ. Следовательно, число орбитно—неустойчивых точек покоя у системы ψ не больше, чем у системы φ.

В силу того, что особых траекторий конечное число, и учитывая соотношение $\psi \geqslant \varphi$, имеем, что число орбитно—неустойчивых точек покоя у динамических систем φ и ψ одинаково.

3.I.5. Лемма. Биконтинуально эквивалентные системы φ и ψ, которые имеют конечное число особых траекторий, имеют одинаковое число сепаратрис.

Доказательство. Пусть траектория ψ_y является сепаратрисой системы ψ и $L^+(y) = \bar{y}$. Согласно лемме 3.I.3 множество $F^{-1}(\bar{y})$ не содержит замкнутых орбитно—неустойчивых траекторий, но в силу леммы 3.I.4 имеет одну орбитно—неустойчивую точку покоя. В силу леммы 2.I.6 множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит орбитно—неустойчивую траекторию $\varphi_x \subset F^{-1}(\psi_y)$ и $F(x)=y$. Согласно лемме 2.I.3 имеем $F(L^+(x))=L^+(F(x))=L^+(y)$. Согласно предложению I.3.7 траектория φ_x является сепаратрисой системы φ.

Учитывая соотношение $\psi \geqslant \varphi$ и в силу того, что особых траекторий конечное число, имеем, что число сепаратрис у систем φ и ψ одинаково.

3.I.6. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то число точек покоя у динамических систем φ и ψ одинаково.

Доказательство. Пусть точка покоя $\bar{y}$ системы ψ является центром. Покажем, что множество $F^{-1}(\bar{y})$ содержит точку покоя системы φ. Предположим противное, т.е. множество $F^{-1}(\bar{y})$ не содержит точек покоя системы φ. Тогда ясно, что все траектории φ_x, $x \in F^{-1}(\bar{y})$, орбитно—устойчивые замкнутые траектории. Это следует из замкнутости множества $F^{-1}(\bar{y})$, предложения I.3.24 и леммы 3.I.3.

Граница области G^* является циклом без контакта, следовательно, существует некоторый O—предельный континуум K^*, который является границей множества V^* , $\bar{y} \in V^*$, и для каждого $y \in V^*$, $y \neq \bar{y}$, траектория ψ_y является орбитно—устойчивой замкнутой траекторией.

Согласно предложению I.3.48 возможны два случая:

I) K^* является орбитно—неустойчивая замкнутая траектория;

2) K^* является предельным континуумом, который содержит точек покоя.

Рассмотрим первый случай и покажем, что множество $F^{-1}(\bar{V}^*)$ односвязно. Предположим противное, т.е. множество $Bd\, F^{-1}(\bar{V}^*) = K_1 \cup K_2$, где $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Ясно, что $F(K_i) = K^*$, $i = 1, 2$.
В силу леммы 3.I.3 пусть K_1 содержит орбитно—неустойчивую замкнутую траекторию. Тогда, как следует из доказательства леммы 2.I.8 множество K_2 состоит только из орбитно—устойчивых замкнутых траекторий.

Согласно предложению I.3.49 имеем, что $\exists\, \delta_0 > 0$, такой, что $\forall \bar{x} \in U_{\delta_0}(K_2)$ траектория $\varphi_{\bar{x}} \subset U_{\delta_0}(K_2)$ и $\varphi_{\bar{x}}$ является орбитно—устойчивой замкнутой траекторией.

Согласно теореме I.3.47 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\exists\, y \in U = U_\varepsilon(K^*) \setminus \bar{V}^*$ и $L^+(y) = K^*$ или $L^-(y) = K^*$. В силу непрерывности отображения F , можно выбрать $\delta < \delta_0$ такой, что $F(U_\delta(K_2)) \subset U_\varepsilon(K^*)$. Множество $K_2 \subset Bd\, F^{-1}(\bar{V}^*)$, следовательно, в силу сюръективности F существует

$x \in U_\delta(K_2)$ такое, что $F(x) = y \notin K^*$, и $L^+(x) = \varphi_x$ а $L^+(y) = k^*$, что противоречит лемме 2.I.3. Следовательно, множество $F^{-1}(\bar{V}^*)$ односвязно.

Если имеет место второй случай, то в силу леммы 3.I.4 и 3.I.5 имеем, что множество $F^{-1}(\bar{V}^*)$ односвязно.

В силу леммы 3.I.3 множество $F^{-1}(V^* \setminus \bar{y})$ содержит только орбитно—устойчивые замкнутые траектории а согласно теоремы Пуанкаре—Бендиксона ([I2], с.II6) имеем, что траектория φ_x, $x \in F^{-1}(V^* \setminus \bar{y})$, окружает по крайнем мере одну точку покоя $\bar{x} \in F^{-1}(\bar{V}^*)$. В силу леммы 3.I.4 точка покоя $\bar{x}$ является центром. Ясно, что $F(\bar{x}) = \bar{y}$.

Учитывая соотношение $\psi \geqslant \varphi$ и в силу того, что особых траекторий конечное число, имеем, что число точек покоя у систем φ и ψ одинаково.

3.I.7. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то у систем φ и ψ число эллиптических областей одинаково.

Доказательство. Пусть точка покоя y_0 является предельным множеством для траекторий эллиптической области g^* динамической системы ψ.

Пусть $y \in g^*$. В силу сюръективности отображения F существует траектория φ_x системы φ, что $F(\varphi_x) = \psi_y$. Согласно лемме 2.I.3 имеем

$$F(L(x)) = L(F(x)) = y_0 .$$

Согласно леммам 3.I.3, 3.I.4 и 3.I.5 имеем, что $L^+(x)$ состоит только из одной точки покоя системы φ. Следовательно, множество $F^{-1}(g^*)$ заполнено только эллиптическими траекториями. В силу соотношения $\psi \geqslant \varphi$ и того, что особых траекторий конечное число, имеем, что число эллиптических областей у систем φ и ψ одинаково.

Обозначим через T_φ множество точек особых траекторий системы φ.

3.I.8. Лемма. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то существует отображение $\theta : S_\varphi \to S_\psi$, удовлетворяющее условию A из I.3.I7, а $F|_{T_\varphi} : T_\varphi \to \to G^*$ является гомеоморфизмом.

Доказательство. Пусть φ_x — особая траектория системы φ, то $\theta(\varphi_x) = F(\varphi_x)$, а в силу лемм 3.I.3, 3.I.4, 3.I.5, 3.I.6, 3.I.7 и 2.I.3 отображение θ удовлетворяет условию A, а учитывая еще определение I.2.I4 имеем, что $F|_{T_\varphi}$ является биективным непрерывным отображением. Множество T_φ замкнуто ([I2], с.287) и ограниченно, следовательно, в силу следствия I.I.5 $F|_{T_\varphi}$ — гомеоморфизм.

3.I.9. Следствие. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и система φ имеет конечное число особых траекторий, то система ψ также имеет конечное число особых траекторий.

Доказательство. Допустим противное. Из леммы 2.I.6

вытекает, что прообраз каждой особой траектории системы ψ содержит особую траекторию системы φ. Следовательно, система φ имеет бесконечное множества особых траекторий, и это противоречие доказывает лемму.

Обозначим через K ω — или α — предельный континуум, через C — цикл без контакта, для которого, если $x \in C$, то $L^{\pm}(x) = K$, а через D область, ограниченную циклом без контакта C и предельным континуумом K.

3.I.10. Лемма. Если при отображении F ориентация не меняется на C, то она не меняется и на континууме K.

Доказательство. Допустим, что K — положительный предельный континуум, состоящий из замкнутой траектории системы φ. Тогда система φ в области D гомеоморфна системе (рис.I6)

$$\frac{dr}{dt} = -r(r-1) \qquad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = r-2 .$$

Если допустить, что при отображении F ориентация меняется на предельном континууме K, то система $\psi\in\varphi$ в области D гомеоморфна системе (рис.I7)

$$\frac{dr}{dt} = -r(r-1) \qquad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2-r .$$

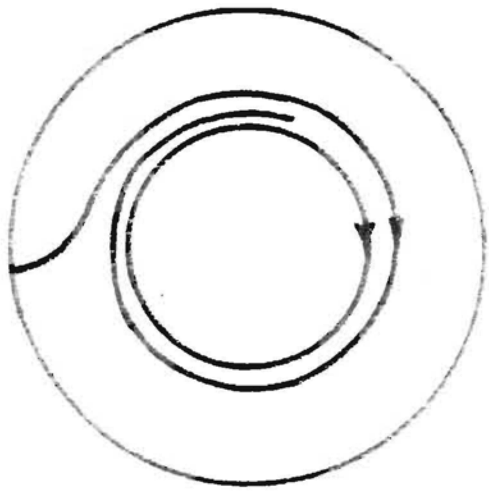

Рис. 16.

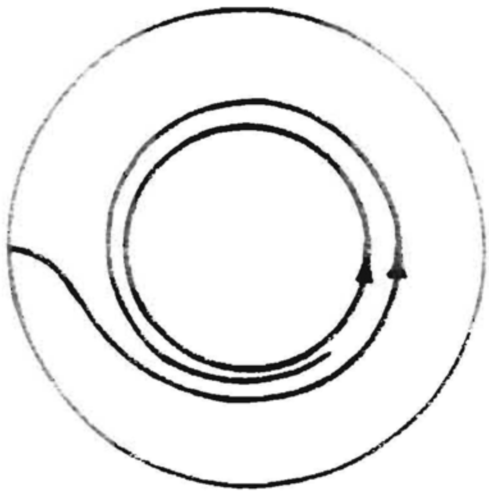

Рис. 17.

Имеем следующие решения системы (4)

$$r = \frac{r_0}{r_0 - (r_0 - 1)e^{t_0 - t}}$$

$$\theta = \theta_0 + t_0 - t + \ln \frac{r_0 - (r_0-1)e^{t_0-t}}{2r_0 - 1}$$

и системы (5)

$$r = \frac{r_0}{r_0 - (r_0 - 1)e^{t_0 - t}}$$

$$\theta = \theta_0 - t_0 + t - \ln \frac{r_0 - (r_0-1)e^{t_0-t}}{2r_0 - 1}.$$

Отображение F меняет ориентацию на кривой $r = 1$, следовательно, $F(1,\theta) = (1, -\theta)$, а в достаточно малой окрестности кривой $r = 1$ имеем $F(r, \theta) = (r, -\theta)$, т.е.

$$F(r,\theta) = \left(r, \theta + 2t_0 - 2t - 2\ln \frac{r_0 - (r_0-1)e^{t_0-t}}{(2r_0 - 1)}\right)$$

или

$$F(r,\theta) = \left(r, \theta + 2\ln \frac{r_0(r-1)}{2(r_0-1)} - 2\ln \frac{1}{r(2r_0-1)}\right)$$

Для последовательности $r_n \to 1$, $\theta = \theta_0$ имеем $F(r_n, \theta_0) = (r_n, \theta_n)$, где $\theta_n \to +\infty$, если $n \to +\infty$. Следовательно, $F(r_n, \theta_0) \to F(K)$ и нарушается непрерывность отображения F на континууме K.

Пусть K — предельный континуум системы φ, который содержит точки покоя. Тогда система φ в области D гомеоморфна системе

$$\frac{dr}{dt} = -r(r-1)$$
$$\frac{d\theta}{dt} = (r-2)\prod_i \left(1 + (r-1)^2 - \cos\left(\frac{\theta-\theta_i}{2}\right)\right), \qquad (6)$$

где θ_i — константа, $i = 1, \dots, n$, где n число точек покоя в ω — перечислении континуума K. В области D система (6) гомеоморфна системе (4). Аналогичную систему можно построить для системы ψ и аналогично, как выше доказано, мы получаем доказательство леммы.

Обозначим через S_i, $\tilde{S}_i$, $i = 1, \dots, n$ простые замкнутые кривые, образованные особыми траекториями систем φ и ψ.

3.I.II. Теорема. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то отображение F или сохраняет ориентацию или меняет на противоположную на всех особых траекториях одновременно.

Доказательство теоремы сводится к построению гомеоморфизма $H: G \to G^*$, такого, что $H|_{T_\varphi} = F|_{T_\varphi}$, где согласно лемме 3.I.8 отображение $F|_{T_\varphi}$ является гомеоморфизмом. Согласно теореме I ([24], с.579) отображение H или сохраняет ориентацию или меняет на противоположную одновременно во всех точках множества G , а в силу теоремы 8 ([24], с.564) это утверждение справедливо и для отображения $F|_{T_\varphi}$ на множестве T_φ .

Согласно теоремам 50,54 ([I2], с.304, 306), особые траектории разбивают область G на односвязные и двусвязные ячейки, границу которых образуют точки особых траекторий или цикл без контакта $B\partial G$. Двусвязные ячейки содержит либо замкнутые, либо незамкнутые траектории. В первом случае, если мы имеем два сопряженных O — предельных континуума, отличных от точки покоя, и ориентация сохраняется на одном из них, то она сохраняется и на втором, так как отображение F сохраняет направление движения на траекториях.

Во втором случае мы имеем два сопряженных ω — или α — предельных континуума. Согласно лемме 2 ([I2], с.424) для пределного континуума в некоторой его окрестности можно построить цикл без контакта C . Такой же цикл без контакта построим и для предельных континуумов односвязных ячеек, а через D обозначим область,ограниченную кривой C и данным предельным континуумом.

В каждой односвязной ячейке в силу теоремы I ([24], с.527) можно продолжить $F|_{T_\varphi}$ с границы ячейки на всю ячейку, если граница ячейки не содержит предельных континуумов.

Если имеются предельные континуумы, а также в случае двусвязных ячеек, отображение H построим только до цикла без контакта C. В силу леммы 3.I.I0 ориентация на C и K, $C \cup K \subset \bar{D}$ или сохраняется или меняется на противоположную. Используя комформные отображения [33], построим гомеоморфизм $\tilde{H}: \bar{D} \to \bar{D}^*$, где $\tilde{H}|_C = H|_C$, $\tilde{H}|_K = F|_K$.

Если мы имеем сопряженные ω —предельные континуумы, то это построение также имеет место. Отображение H построено.

Обозначим через K, K^* предельные континуумы систем φ, ψ, где $F(K) = K^*$, а через V, V^* — открытые ограниченные множества, границами которых являются K, K^*. Если точки траектории φ_x, где $L^{\pm}(x) = K$, принадлежат к множеству V, то рассматривается только та компонента связности множества V, которая содержит точки траекторий φ_x и которую также обозначим через V. Через $C\,A$ обозначено дополнение множества A до множества $\bar{G}$ или соответственно до $\bar{G}^*$.

3.I.I2. Лемма. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то $F(V) = V^*$, $F(C\bar{V}) = C\bar{V}^*$.

Доказательство. Согласно лемме 2.I.7 соотношения $F(C\bar{V}) = V^*$ и $F(C\bar{V}) \subset V^* \cup K^*$ не имеют место.

Пусть $F(C\bar{V}) \cap V^* \neq \varnothing$. Следовательно, существуют точки $x_i \in C\bar{V}$, $i = 1, 2$, что $F(x_1) = y_1 \in$

$\in V^*$, $F(x_2) = y_2 \in C\bar{V}^*$. Пусть l некоторая кривая и $x_1 \cup x_2 \subset l$, а $E = K^* \cap F(l)$. В силу непрерывности F и теоремы I ([24], с.136) множество $E \neq \emptyset$, а если ε достаточно мало, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\bar{y}_i \in U_\varepsilon(E)$, $\bar{y}_i \in F(l)$, $y_1 \in V^*$, $y_2 \in C\bar{V}^*$, $i = 1, 2$. Пусть $\bar{x}_i \in F^{-1}(\bar{y}_i)$ и $B = F^{-1}(E) \cap C\bar{V}$. Нетрудно проверить, что для каждого $\delta > 0$ существует $\varepsilon > 0$, что $\bar{x}_i \in U_\delta(B)$.

В силу леммы 3.I.8 через точки множества $F^{-1}(E) \cap K$ проходит единственные орбитно—неустойчивые траектории, которые отображаются на траектории $\phi(R, E)$, но $B \cap K = \emptyset$, следовательно, множество $\varphi(R, B)$ содержит только орбитно—устойчивые траектории, а согласно леммам 8, II, I2 ([I2], с.294) для достаточно малого $\delta > 0$ множество $\varphi(R, U_\delta(B))$ содержит только орбитно—устойчивые траектории.

Пусть K^* — замкнутая траектория. Из доказательства леммы 2.I.8 вытекает, что множество $\varphi(R, B)$ содержит только замкнутые траектории φ_x , $x \in B$, $L(x) = \varphi_x$. Согласно лемме 2 ([I2], с.424), начиная с некоторого $\varepsilon > 0$, имеем $L^{\pm}(\bar{y}_i) = K^*$, где $i = 1$ или $i = 2$, а в силу леммы 2.I.3 имеем

$$F(L(\bar{x}_i)) = L(F(\bar{x}_i)) = L(\bar{y}_i) = K^*,$$

но $L(\bar{x}_i) = \varphi_{\bar{x}_i}$ и $F(L(\bar{x}_i)) = F(\varphi_{\bar{x}_i}) \neq K^*$.

Если K^* не замкнутая траектория, то ясно, что множество $\varphi(R,B)$ не содержит замкнутых траекторий. В силу леммы II ([12], с.294) для одной компоненты множества B все траектории множества $\varphi(R,B)$ имеют одно и тоже предельное множество A. В силу леммы 2.I.3 имеем

$$F(L(\bar{x}_i)) = L(\bar{y}_i) = K^*,$$

но

$$F(L(x)) = L(F(x)) = y_0 \in K^*,$$

где $x \in B$, y_0 — точка покоя континуума K^*. Следовательно, $F(A) = K^*$ и $F(A) = y_0 \in K^*$, что доказывает справедливость соотношения $F(C\bar{V}) \cap V^* = \varnothing$.

В силу сюръективности F соотношения $F(V) = C\bar{V}^*$ и $F(V) \subset C\bar{V}^* \cup K^*$ не имеет место. Аналогично как выше доказывается, что соотношение $F(V) \cap C\bar{V}^* \neq \varnothing$ также несправедливо, но тогда в силу сюръективности F следует утверждение леммы.

3.2. Схемы биконтинуально эквивалентных систем.

Скажем, что отображение F удовлетворяет условию $Б$, если оно не меняет ориентацию на множестве T_φ.

3.2.I. Лемма. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, имеют конечное число особых траекторий, и удовлетворяют условие $Б$, то полные схемы любой точки покоя x_0 системы φ и точки покоя $F(x_0)$ системы ψ тождественны.

Доказательство. Согласно лемме 3.I.8 существует отображение $\theta : S_\varphi \to S_\psi$, удовлетворяющее условию А. Циклический порядок следования сепаратрис и эллиптических областей у точек покоя x_0 и $F(x_0)$ сохраняется в силу непрерывности отображения F и условия Б. Если точка покоя x_0 центр, то в силу лемм 3.I.6 и 3.I.4 точка $F(x_0)$ является центром, а согласно условию Б направление движения на траекториях и направление положительного обхода на траекториях точек покоя x_0 и $F(x_0)$ одновременно или совпадают, или одновременно противоположены. Следовательно, полные схемы точек покоя x_0 и $F(x_0)$ тождественны с сохранением ориентации и направления движения на траекториях.

3.2.2. Лемма. Если φ и ψ биконтинуально эквивалентны , имеют конечное число особых траекторий и удовлетворяет условие Б, а K является односторонним предельным континуумом системы φ , то $F(K)$ — односторонный предельный континуум системы ψ и их полные схемы тождественны с сохранением ориентации и направлением движения на траекториях.

Доказательство. В силу непрерывности отображения F множество $F(K)$ является континуумом, а согласно лемме 2.I.3 — предельным континуумом того же типа, что континуум K . Согласно лемме 3.I.8 ω — перечисление континуума K тождественно с ω — перечислением континуума $F(K)$. Следовательно, локальные схемы континуумов K и $F(K)$ тождественны.

Если предельный континуум K системы φ задан с положительной (отрицательной) стороны, то в силу условия Б и свойств отображения F континуум $F(K)$ является предельным континуумом с положительной (отрицательной) стороны.

Соотношение направлении положительного обхода и направлении движения на кривых континуумов K и $F(K)$ одинаково согласно условию Б и определению 2.I.I. Если K свободный предельный континуум, то в силу леммы 3.I.8 континуум $F(K)$ также свободный. Если существуют особые траектории φ_x, $L^{\pm}(\varphi_x)=K$, то согласно лемме 3.I.8 существует соответствие θ, удовлетворяющее условие А, между особымы траекториями φ_x и $F(\varphi_x)$.

Следовательно, полные схемы континуумов K и $F(K)$ тождественны с сохранением ориентации и направлением движения на траекториях.

3.2.3. Лемма. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, и удовлетворяют условию Б, то схемы границ областей G и G^* тождественны.

Доказательство. Согласно определению $Bd\,G$ и $Bd\,G^*$ являются циклами без контакта, а в силу леммы 2.I.7 имеем $F(Bd\,G)=Bd\,G^*$. Если все траектории системы φ входят в область G, то согласно определению 2.I.I все траектории системы ψ входят в область G^*. Согласно лемме 3.1.8 особым траекториям системы φ, пересекающим $Bd\,G$, соответствуют особые траектории системы ψ, пересекающие $Bd\,G^*$, а их циклический порядок следовании сохраняется в силу непрерывности отображения F и условия Б. Следовательно, эти схемы тождественны.

3.2.4. Лемма. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то каждой паре сопряженных предельных континуумов и $Bd\,G$ системы φ соответствует такая же пара системы ψ, причем внешним (внутренним) элементам пары соответствует внешний (внутренний) элемент соответствующей пары системы ψ.

Доказательство. Согласно лемме 3.2.2 каждому предельному континууму системы φ соответствует только один предельный континуум системы ψ. Если два предельных континуума K_1 и K_2 системы φ сопряжены, то в силу леммы 2.1.3 континуумы $F(K_1)$ и $F(K_2)$ также сопряжены. Аналогично, если некоторый предельный континуум K сопряжен с $Bd\,G$, то $F(K)$ сопряжен с $F(Bd\,G) = Bd\,G^*$.

В силу лемм 3.1.12 и 3.1.8 внешним (внутренним) элементам пары соответствует внешний (внутренний) элемент соответствующей пары системы ψ.

3.2.5. Теорема. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, имеют конечное число особых траекторий и удовлетворяют условию Б, то схемы систем φ и ψ тождественны с сохранением ориентации и направлении движения на траекториях.

Доказательство. В силу леммы 3.I.8 существует соответствие θ, удовлетворяющее условие А, между особыми траекториями систем φ и ψ, а согласно леммам 3.2.I, 3.2.2, 3.2.3 и 3.2.4 имеем, что схемы динамических систем φ и ψ тождественны с сохранением ориентации и направлении движения на траекториях.

3.2.6. Теорема. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, имеют конечное число особых траекторий, и удовлетворяют условию Б, то φ и ψ топологически эквивалентны с сохранением ориентации и направлении движения.

Доказательство вытекает из теорем 3.2.5 и 75 ([I2], с.495).

3.3. Сравнение биконтинуальной и топологической эквивалентностей на плоскости

3.3.I. Теорема. Если динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и имеют конечное число особых траекторий, то φ и ψ топологически эквивалентны.

Доказательство. Учитывая, что динамические системы $\psi_1 \leq \varphi$ и $\psi_2 \leq \varphi$, где $F_1 : G \to G^*$ меняет ориентацию, а $F_2 : G \to G^*$ не меняет ориентацию на множестве T_φ, топологически эквивалентны, и в силу теорем 3.I.II, 3.2.5, I.3.45 имеем, что динамические системы φ и ψ топологически эквивалентны.

Если модифицировать конструкцию гомеоморфизма в теореме 3.1.11, то в силу теорем [40] или [41] можно доказать теорему 3.3.1, не применяя понятие схемы динамической системы.

3.3.2. Следствие. Если динамические системы φ и ψ структурно устойчивы и биконтинуально эквивалентны, то эти системы также топологически эквивалентны.

Доказательство. Согласно теореме 29.1 ([36], с.263) имеем, что системы φ и ψ имеют конечное число особых траекторий, а в силу теоремы 3.3.1 системы φ и ψ топологически эквивалентны.

3.3.3. Следствие. Если аналитические динамические системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, то эти системы также топологически эквивалентны.

Доказательство. Из классических работ Бендиксона [37] и Дюлака [38] вытекает, что у всякой аналитической системы число особых траекторий во всякой ограниченной части плоскости конечно и в силу теоремы 3.3.1 системы φ и ψ топологически эквивалентны.

3.3.4. Пример. Если биконтинуально эквивалентные системы имеют бесконечное множество точек покоя, то эти системы могут не быть топологически эквивалентными.

Определим биконтинуально эквивалентные системы следующим образом.

Пусть точки $(\pm 1/2^n, 0)$, $n = 0, 1, \ldots$ являются точками покоя, а лучи $x = \pm 1/2^n$, $y < 0$ и $x = \pm 1/2^n$, $y > 0$ траекториями для систем φ и ψ, определенных в компактных областях G и G^*, ограниченных с циклами без контакта и все траектории обеих систем входят в области G и G^*.

Точки покоя системы φ для $n=0$ и для $n>2$ — нечетных являются узлами, для $n=1$ и для n — четных больше двух, являются седлами. Точки $(\pm 1/4, 0)$ — являются седло—узлами, неустойчивые многообразия которых стремятся к точкам $(\pm 1/8, 0)$, при $t \to +\infty$ (рис.I8). Система ψ построена следующим образом. Точки покоя для $n=0$ и для n — четных — узлами, а для n — нечетных — седлами (рис.I9). Пусть

$$G_n = \left\{ (x,y) \;\Big|\; \frac{1}{2^{n-1}} < |x| \leq \frac{1}{2^n} \;,\; |y| \leq 1 \right\}$$

$$G_0 = \{ (x,y) \mid (x,y) \in G \;\&\; (|x| \geq 1) \}$$

Аналогично определяются области G_0^* и G_n^*. Отображение F определим так: $F(x,y) = (x^*, y)$, где

$x^* = x$, если $(x,y) \in G_0 \cup G_1 \cup G_2$;

$x^* = \frac{1}{4}$, если $(x,y) \in G_3$, $x>0$;

$x^* = -\frac{1}{4}$, если $(x,y) \in G_3$, $x<0$;

$(x^*, y) \in G^*_{i-1}$, если $(x,y) \in G_i$, $i \geq 4$.

Координата x^* определяется так, чтобы F сохранило траектории системы φ.

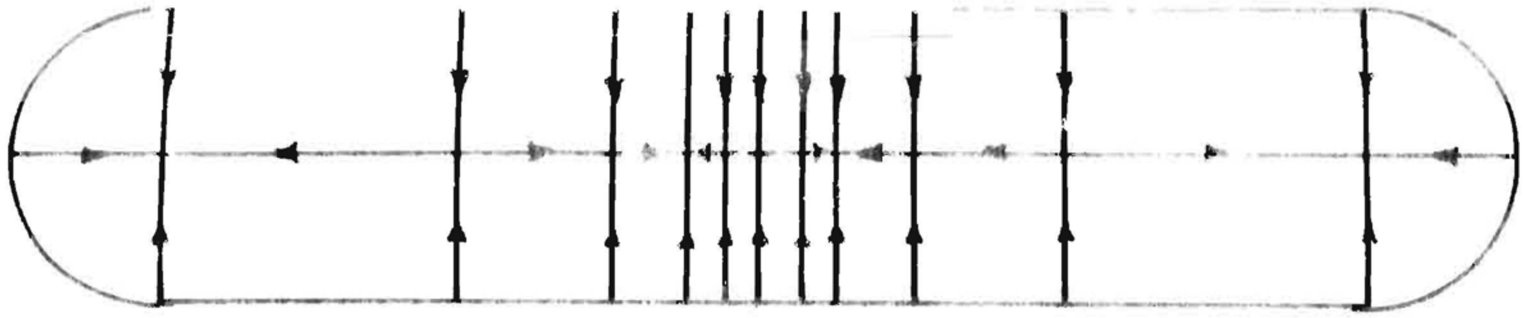

Рис 18.

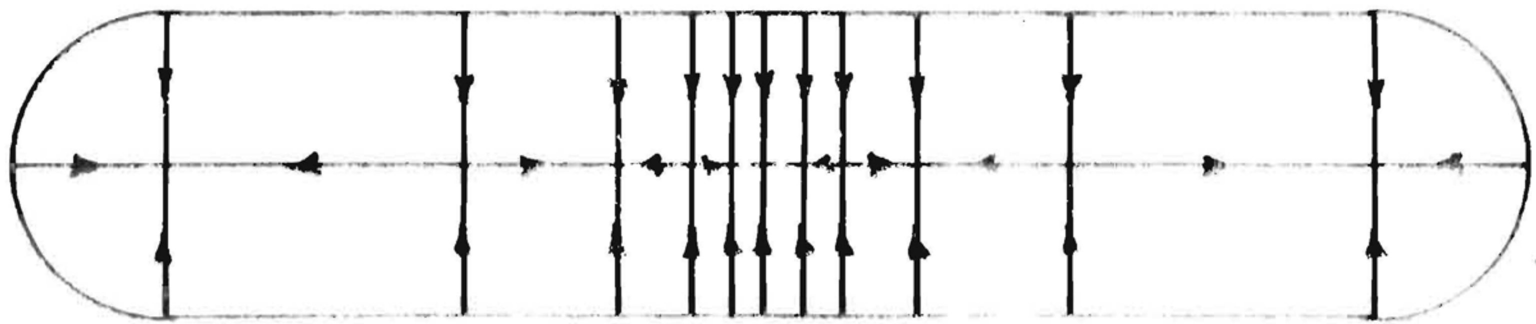

Рис 19

Отображение F^* зададим с соотношением

$F^*(x^*, y^*) = (x, y^*)$, где

$x = x^*$, если $(x^*, y^*) \in G_0^* \cup G_1^* \cup G_2^*$;

$x = \frac{1}{4}$, если $(x^*, y^*) \in G_3^*$, $x^* > 0$

$x = -\frac{1}{4}$, если $(x^*, y^*) \in G_3^*$, $x^* < 0$

$(x, y^*) \in G_{i-1}$, если $(x^*, y^*) \in G_i^*$, $i \geqslant 4$.

Координата x определяется так, чтобы F^* сохранило траектории системы ϕ. По определению видно, что F, F^* сюръективны и непрерывны. Система φ имеет точку покоя типа седло—узел, в то время как система ϕ такой точки покоя не имеет. Следовательно, φ и ϕ не являются топологически эквивалентными.

3.4. Биконтинуальная устойчивость динамических систем

3.4.I. Определение. Динамическая система φ, на многообразии M называется биконтинуально устойчивой, если существует $\delta > 0$ такое, что любая система $\tilde{\varphi} \in \mathcal{U}_\delta(\varphi)$ биконтинуально эквивалентна φ, где $\mathcal{U}_\delta(\varphi)$ — δ — окрестность φ в пространстве $\mathfrak{M}(M)$ наделенной с C^1 топологией.

3.4.2. Теорема Динамическая система φ, определенная на компактной области $G \subset R^2$ биконтинуально устойчива тогда и только тогда, если она является структурно устойчивой.

Доказательство. Пусть система φ структурно устойчива. Для каждой системы $\tilde{\varphi} \in \mathcal{U}_\delta(\varphi)$ существует гомеоморфизм $h: G \to G$, что $h \circ \varphi(t,x) = \tilde{\varphi}(\tilde{t}, h(x))$. Обозначим $F = h$, $F^* = h^{-1}$, следовательно, система φ — биконтинуально устойчива. Согласно теореме [43] множества структурно устойчивых систем плотно в $\mathfrak{M}(G)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \delta)$ существует структурно устойчивая система ψ, ε —близкая к системе φ. Каждая система $\tilde{\varphi} \in \mathcal{U}_\varepsilon(\varphi)$ биконтинуально эквивалентна системе ψ. Из теоремы 3.3.I и следствия 3.I.9 и 3.3.2 следует, что системы $\tilde{\tilde{\varphi}}$ и φ топологически эквивалентны. Следовательно, система φ структурно устойчива.

3.5. Биконтинуальная эквивалентность динамических систем на дву—мерных многообразиях

3.5.I. Предложение. Теоремы 3.3.I и 3.4.2 имеет место, если область определения динамических систем является сферой S^2.

Доказательство следует из [I2], с.497.

3.5.2. Лемма. Если φ, ψ эргодические динамические системы без точек покоя на торе T^2, траектории которых пересекают меридианы тора в одном направлении и $\varphi \geqslant \psi$, то $\psi \geqslant \varphi$.

Доказательство. Пусть μ, $\tilde{\mu}$ — числа вращения систем φ, ψ. Согласно лемме 2.3.I имеем,

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где m, n, p, q — целые числа, но

$$\mu = \frac{n - m\tilde{\mu}}{-q + p\tilde{\mu}}$$

и в силу лемм 2.3.4 и 2.3.5 имеем $\psi \geqslant \varphi$.

3.5.3. Теорема. Множество биконтинуальных классов динамических систем без точек покоя на торе, траектории которых пересекают меридианы тора в одном направлении, имеют мощность континуума.

Доказательство. В силу лемм 2.3.I и 3.5.2 имеем, что множество чисел вращения эргодических динамических систем одного биконтинуального класса счетно. Так как множество чисел вращения имеет мощность континуума, то получаем утверждение теоремы для эргодических динамических систем, и, следовательно, для динамических систем без точек покоя на торе.

3.5.4. Пример. На торе T^2 существуют биконтинуально эквивалентные системы, которые топологически не эквивалентны.

Рассмотрим эргодические системы φ, $\tilde{\varphi}$, которые имеют числа вращений μ и $\tilde{\mu}$ соответственно. Пусть

$$\tilde{\mu} = \frac{1+\mu}{3+\mu}$$

Тогда согласно леммам 2.3.5 и 3.5.2 системы φ и $\tilde{\varphi}$ биконтинуально эквивалентны, но $|mq - np| = 2$ и, следовательно, и в силу леммы 2.2.6 [34] эти системы не являются топологически эквивалентными.

3.6. Биконтинуальная неэквивалентность систем с одинаковыми фазовыми диаграммами

Рассмотрим системы Морса—Смейла, определенные на m — мерном компактном многообразии M (определение I.2.I0).

3.6.I. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, то они имеют одинаковое число замкнутых траекторий.

Доказательство. Пусть ψ_y замкнутая траектория системы ψ . Множество $F^{-1}(\psi_y)$ замкнуто, инвариантно и не содержит точек покоя системы φ . В силу сюръективности F существует траектория φ_x , $x \in F^{-1}(\psi_y)$. В силу замкнутости и инвариантности $F^{-1}(\psi_y)$ имеем, что $L(x) \subset F^{-1}(\psi_y)$. В силу теоремы 2.I3 [29] и определения I.2.I0 имеем, что $L^{\pm}(x)$ являются замкнутыми траекториями. Следовательно, система φ имеет замкнутых траекторий не меньше, чем система ψ . Учитывая соотношение $\psi \geqslant \varphi$, имеем, что системы φ и ψ имеют одинаковое число замкнутых траекторий.

3.6.2. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны, то системы φ и ψ имеют одинаковое число точек покоя.

Доказательство. Пусть y — точка покоя динамической системы ψ. Множество $F^{-1}(y)$ замкнуто, инвариантно и не пусто. Пусть $x \in F^{-1}(y)$. Тогда $L(x) \subset F^{-1}(y)$. Учитывая определение I.2.I0, теорему 2.I3 [29] и лемму 3.6.I имеем, что $F^{-1}(y)$ содержит точку покоя системы φ. Аналогично лемме 3.6.I получаем, что число точек покоя у систем φ и ψ одинаково.

Пусть p, $q \in \Omega$ системы ψ.

3.6.3. Лемма. Если системы φ и ψ биконтинуально эквивалентны и компоненты множества $W^u(p) \cap W^s(q)$, $\dim W^u(p) < m$, $\dim W^s(q) < m$, одномерны, то число компонент у множеств $W^u(p) \cap W^s(q)$ и $W^u(p') \cap W^s(q')$, p', $q' \in \Omega$ системы φ $p' \in F^{-1}(p)$, $q' \in F^{-1}(q)$, одинаково.

Доказательство. Пусть $\psi_y \in W^u(p) \cap W^s(q)$. $\dim W^u(p) < m$, $\psi_y \subset W^u(p)$, следовательно, траектория ψ_y — орбитно—неустойчивая. Согласно лемме 2.I.6 множество $F^{-1}(\psi_y)$ содержит орбитно—неустойчивую траекторию, и, если $x \in F^{-1}(\psi_y)$, то $L^{+}(x)=q'$, $L^{-}(x)=p'$. Следовательно, $\varphi_x \subset W^u(p') \cap W^s(q')$. Число компонент множества $W^u(p) \cap W^s(q)$ конечно, в противном случае, согласно лемме I.2.I2 в место p , q можно взять другие ? точки r_p , r_2 , такие, что $p \Rightarrow r_1 \Rightarrow r_2 \Rightarrow q$. Следовательно, учитывая соотношение $\psi \geqslant \varphi$ имеем желаемый результат.

Следующая теорема является аналогом теоремы I.I [I3].

3.6.4. Теорема. Пусть $m=\dim M \geqslant 3$. Если в фазовой диаграмме Φ системы φ есть связь $p \to q$, $\dim W^u(p) < m$, $\dim W^s(q) < m$, то существует бесконечно много попарно биконтинуально неэквивалентных систем, фазовая диаграмма которых совпадает с Φ .

Доказательство. Пусть динамическая система φ имеет связь $p \to q$ и $\dim W^u(p) < m$, $\dim W^s(q) < m$. Если допустить для простоты изложения $m=3$, то каждая компонента множества $W^u(p) \cap W^s(q)$ системы φ , представляет собой траекторию, положительным предельным множеством которой является траектория q , а отрицательным — траектория p . В силу леммы I.2.I2 можно предположить, что множество $W^u(p) \cap W^s(q)$ состоит из конечного числа компонент.

При таких предположениях для конструирования системы ψ , фазовая диаграмма которой совпадает с Φ

, можно использовать конструкцию примера, предложенную А.Мышкисом и Л.Рейзинем [39], если p и q являются точками покоя, или конструкцию С.Пилюгина [13]. В обеих работах идея конструкции одинакова и сводится к увеличению числа компонент множества $W^u(p) \cap W^s(q)$ путем деформации $W^u(p)$ в окрестности некоторой траектории множества $W^u(p) \cap W^s(q)$. Вне этой окрестности система φ не изменяется. В силу леммы 3.6.3 системы φ и ψ биконтинуально неэквивалентны. Ясно, что фазовые диаграммы систем φ и ψ совпадают, так как в фазовой диаграмме системы ψ новых связей по сравнению с диаграммой Φ не появляется, а старые связи сохраняются. Также ясно, что построением, аналогичным проведенному, можно получить бесконечно много биконтинуально неэквивалентных систем.

4. Континуальная эквивалентность динамических систем

4.I. Определение и содержательность понятия континуальной эквивалентности динамических систем

Обозначим через H соотношение биконтинуальной эквивалентности динамических систем.

4.I.I. Предложение. Соотношение $X \succcurlyeq Y$, где $X \in \mathfrak{M}(M)/H$, $Y \in \mathfrak{M}(M)/H$ и $(\exists \varphi)\ (\exists \psi)\ ((\varphi \in X$ и $\psi \in Y)$ и $\varphi \succcurlyeq \psi)$, является соотношением порядка в фактормножестве $\mathfrak{M}(M)/H$.

Доказательство следует из предложений 2.I.2 и I.I.8.

4.I.2. Предложение. Для каждого $X \in \mathfrak{M}(M)/H$ существует множество $V_X \subset \mathfrak{M}(M)/H$, на которой $\succcurlyeq$ — соотношение совершенного порядка и X — наибольший элемент множества V_X.

Доказательство. $X \in V_X$, следовательно, $V_X \neq \varnothing$.

Обозначим через X_m минимальный элемент множества V_X, а через Ω_X — множество минимальных элементов для класса X.

Предположим, что на рассматриваемом многообразии для каждого V_X существует минимальный элемент X_m.

В дальнейшем будет показано, что такие многообразия существуют.

4.I.3. Определение. X, $Y \in \mathfrak{M}(M)/H$ называются континуально эквивалентными, если

$$\Omega_X = \Omega_Y .$$

4.I.4. Определение. Динамические системы $\varphi \in X$ и $\psi \in Y$ называются континуально эквивалентными, если X и Y являются континуально эквивалентными классами фактормножества $\mathfrak{M}(M)/H$.

4.I.5. Система ω называется минимальной для динамической системы φ, если $\varphi \in X$ и $\omega \in X_m$.

Множество V_X линейно упорядочено, следовательно, в каждом множестве V_X существует не более одного элемента X_m, а для каждого X существует не менее одного множества V_X.

4.I.6. Пример. Пусть $M = S^2$. Рассмотрим систему φ, которая имеет две точки покоя x_1, x_2, где x_1 — центр, а x_2 — неустойчивый узел, и одну орбитно—неустойчивую замкнутую траекторию, а все остальные траектории орбитно—устойчивые. Следовательно, система φ имеет две ячейки. Согласно лемме 4.2.I существует непрерывное отображение $F_1 : S^2 \to S^2$ и $F_1(\varphi(R,\cdot)) = \varphi_1(R, F_1(\cdot))$, где φ_1 динамическая система, которая имеет только две особые траектори$_И$ — точки покоя типа центр.

Согласно лемме 4.2.I также сущетствуют отображения $F_i : S^2 \to S^2$, $i = 2, 3$, $F_2(\varphi(R,\cdot)) =$

$= \varphi_2(R, F_2(\cdot))$ и $F_3(\varphi_2(R,\cdot)) = \varphi_3(R, F_3(\cdot))$,
где система φ_2 имеет только две особые траектории — точки покоя типа узел, а система φ_3 — одну точку покоя, а все остальные траектории эллиптические. Согласно теореме 3.3.I и 3.5.I нетрудно установить, что динамические системы φ, φ_1, φ_2, φ_3 попарно биконтинуально неэквивалентны, следовательно, они принадлежат различным биконтинуальным классам. Пусть $\varphi \in X$, $\varphi_1 \in X_1$, $\varphi_2 \in X_2$, $\varphi_3 \in X_3$, тогда мы имеем два множества V'_X и V''_X, где $V'_X = \{X, X_1\}$, $V''_X = \{X, X_2, X_3\}$.

4.2. Минимальные системы на сфере S^2

Обозначим через A замкнутое инвариантное множество динамической системы φ, отличное от точки покоя и S^2.

4.2.I. Лемма. Если система φ имеет односвязное множество A, то существует система $\psi \leq \varphi$ и отображение $F: S^2 \to S^2$ такое, что $F|_{S^2 \setminus A}$ — гомеоморфизм, а $F(A)$ является точкой покоя системы ψ.

Доказательство. Пусть $h: S^2 \to R^2$ — стереографическая проекция, для которой $h^{-1}(\infty) \notin A$. Отображение h на R^2 задает некоторую систему $\bar{\varphi}$. Согласно лемме 2.2.I существует система $\bar{\psi} \leq \bar{\varphi}$ и отображение $f: R^2 \to R^2$, которое отображает траектории системы $\overline{\varphi}$ на траектории системы $\overline{\psi}$ с сохранением ориентации, при этом $f(h(A))$ является точкой покоя системы $\overline{\psi}$. Отображение h^{-1} определяет на сфере S^2 некоторую систему ψ, для которой $h(\psi(R,\cdot)) = \overline{\psi}(R, h(\cdot))$. Отображение $F: S^2 \to S^2$ задается равенством $F(x) = h^{-1} \circ f \circ h(x)$, где $x \in S^2$.

Обозначим через Ω множество неблуждающих точек данной динамической системы, через ω_1 — динамическую систему, у которой Ω состоит только из двух точек покоя типа центр, а все остальные траектории являются замкнутыми; через ω_2 — систему, у которой Ω состоит только из одной точки покоя, а все остальные траектории — эллиптические.

4.2.2. Лемма. Динамические системы ω_1, ω_2 — минимальные системы.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что любая система $\overline{\omega}_i \leq \omega_i$, $i = 1, 2$ биконтинуально эквивалентна системе ω_i. Допустим противное; пусть $F_i : S^2 \to S^2$ отображает траектории системы ω_i на траектории системы $\overline{\omega}_i$.

Рассмотрим систему ω_1. Пусть x_j, $j = 1, 2$ — точки покоя системы ω_1. Очевидно, $F_1(x_j)$ — точки покоя системы $\overline{\omega}_1$. В силу леммы 2.I.3 имеем

$$F_1(L(x)) = L(F_1(x))$$

где $x \in S^2$. Если через точку x проходит замкнутая траектория системы ω_1, то $L(x)=\omega_1(R,x)$, следовательно,

$$F_1(L(x))=F(\omega_1(R,x))=L(F_1(x)),$$

и траектория $F_1(\omega_1(R,x))$ либо точка покоя, либо замкнутая траектория. Следовательно, в силу непрерывности F_1 все точки покоя системы $\overline{\omega}_1$ типа центр, который имеет идекс $+1$. Индекс сферы $+2$, следовательно, система $\overline{\omega}_1$ имеет только две точки покоя. В силу теоремы I.3.45 системы ω_1 и $\overline{\omega}_1$ топологически (биконтинуально) эквивалентны.

В силу леммы 2.I.3 имеем, что траектории $F_2(\omega_2(R,x))$, $x\in S^2$, либо эллиптические, либо $F_2(\omega_2(R,x))=F_2(x_0)$, где x_0 — точка покоя системы ω_2. В силу сюръективности отображения F_2 и теоремы I.3.45 имеем, что системы ω_2 и $\overline{\omega}_2$ топологически эквивалентны и лемма доказана.

4.2.3. Теорема. На сфере S^2 существует только три класса континуально эквивалентных динамических систем.

Доказательство. Мы покажем, что для любой динамической системы на сфере S^2 минимальными системами являются либо только ω_1, либо только ω_2, либо ω_1 и ω_2. Следовательно, на S^2 существует только три класса континуально эквивалентных динамических систем.

Пусть произвольная система φ имеет некоторое множество траекторий L, точки которых образует множество $B \subset S^2$, и пусть множество L является либо односвязной компонентой двумерной ячейки системы φ, либо открытым множеством замкнутых траекторий. Допустим, что $\bar{B} \neq S^2$ и $A = \overline{S^2 \setminus \bar{B}}$. Множесво A односвязно, и в силу леммы 4.2.I существует отображение $F: S^2 \to S^2$, которое отображает траектории системы φ на траектории некоторой системы, топологически эквивалентной системе ω_1, если траектории $\varphi_x \in L$ замкнутые, или системе ω_2, если $\varphi_x \in L$ незамкнутые траектории.

Если $\bar{B} = S^2$ и $Bd\, B$ состоит из одной точки покоя, то мы, очевидно, имеем систему ω_2. Если $Bd\, B$ не связно, но траектории $\varphi_x \in L$ — замкнутые, то мы имеем систему типа ω_1. Если $Bd\, B$ не связно и φ_x — незамкнутые траектории, то обозначим через A множество, которое состоит из множества $Bd\, B$ и некоторой траектории φ_x, для которой множество $Bd\, B \cup \varphi_x = A$ связно, и применяем лемму 4.2.I.

В силу свойств множества L, кроме ω_1 и ω_2, на сфере других минимальных систем не существует.

4.2.4. Определение. Динамическая система φ называется континуально устойчивой, если существует такое $\delta > 0$, что каждая динамическая система δ — близкая (в C^1 топологии в $\mathfrak{M}(M)$) к системе φ является континуально эквивалентной системе φ.

4.2.5. Если динамическая система φ на сфере S^2 континуально устойчива, то она не имеет минимальную систему ω_1.

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует отображение $F: S^2 \to S^2$ такое, что

$$F(\varphi(R,\cdot)) = \omega_1(R, F(\cdot)).$$

Покажем, что тогда система φ континуально неустойчива. Пусть $\omega_1(R,x)$ — замкнутая траектория системы ω_1. В силу непрерывности F множество $A = F^{-1}(\omega_1(R,x))$ замкнуто. Следовательно, для каждого $x \in A$, справедливо $L(x) \subset A$. Очевидно, множество A точек покоя не содержит, и в силу предложения I.3.24 имеем две возможности:

(I) для каждого $x \in A$ справедливо $L(x) = \varphi_x$.

(II) существует $x \in A$, что $L(x) \neq \varphi_x$, но $L(x) = \varphi_y$, где φ_y — замкнутая траектория.

Рассмотрим множество $G = F^{-1}(S^2 \setminus \{x_1, x_2\})$, где x_1, x_2 — точки покоя системы ω_1. Множество G открыто и не содержит точек покоя. Нетрудно построить кривую Жордана L, трансверсальную траекториям $\varphi(R,x)$, где $x \in G$. Как известно ([I2] с.9I), в некоторой окрестности замкнутой траектории существует функция последования. Учитывая структуру траекторий множества G, можно построить функцию последования $f^*: Int(L) \to Int(L)$ определенную равенством $f^*(u) = \varphi(t_0, u)$, где t_0 есть первое

$t>0$, для которого $\varphi(t,u)\in L$, $L=l\cap\bar{G}$, и $u\in L$. Определим гомеоморфизм $f: L\to L$, определенный равенствами $f(u)=f^*(u)$, если $u\in Int(L)$ и $f(u)=u$, если $u\in Bd\,L$.

Рассмотрим множество

$$D_C=\{\varphi(t,C)\mid t\in[-1,0],\ \varphi(0,C)=C\},$$

где $C\subset L$ замкнутое множество и $f(u)=u$, если $u\in Bd\,C$. Пусть $h: D_C\to R^2$ — диффеоморфизм, а $P(x)=(P^1(x),P^2(x))$ векторное поле, индуцированное динамической системой φ в множестве $h(D_C)$, в которой построим векторное поле $\tilde{P}(x)$ следующим образом

$$\begin{pmatrix}\tilde{P}^1(x)\\ \tilde{P}^2(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha(x) & -\sin\alpha(x)\\ \sin\alpha(x) & \cos\alpha(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P^1(x)\\ P^2(x)\end{pmatrix}$$

где $x\in h(D_C)$, а функция $\alpha: h(D_C)\to H^1$ — принадлежит к классу C^∞, при этом $\alpha(x)=0$, если $x\in Bd\,h(D_C)$ и $\alpha(x)>0$ в остальных точках множества $h(D_C)$. Существлвание такой функции доказана в следствии I.I.2I ([4], с.I6). Пусть α_0 — максимальное значение функции α в множестве $h(D_C)$. Нетрудно проверить, что, если $\alpha_0\to 0$, то $\tilde{P}(x)\to P(x)$.

Кривая L трансверсальна также траекториям системы $\tilde{\varphi}$, порожденной векторным полем $\tilde{P}(x)$ в множестве D_C и совпадающую с системой φ вне этого множества. Пусть $\tilde{\bar{f}}: L \to L$ функция последования системы $\tilde{\varphi}$ в множестве $\bar{G}$ и предположим, что $C = L$. Мы имеем следующие возможности:

(A) $\rho(\tilde{\bar{f}}(u), u) > \rho(f(u), u) \geq 0$, где $u \in Int(L)$,

(B) $0 \leq \rho(\tilde{\bar{f}}(u), u) < \rho(f(u), u)$.

Если имеет место (A), для всех $u \in Int(L)$, то $\forall u \in Int(L)$ справедливо $\tilde{\bar{f}}(u) \neq u$, следовательно, в множестве G не содержится замкнутых траекторий. Если для всех $u \in Int(L)$ справедливо (B), то последнее утверждение также имеет место, если вместо $\alpha(x)$ брать функцию $-\alpha(x)$. Следовательно, $\forall \alpha, > 0$ существует система $\tilde{\varphi}$, которая не имеет множество замкнутых траекторий мощности континуума, и, следовательно, минимальную систему ω_1.

Рассмотрим случай, когда для одних $u \in L$ имеет место (A), а для других $u \in L$ — соотношение (B). Множество

$$E = \{ u \mid f(u) = u, u \in L \}$$

имеет мощность континуума, в силу мощности множества замкнутых траекторий системы ω_1. Рассмотрим возможность, когда множество E имеет нигде не плотное подмножество E^* мощности континуума. Согласно теореме 4 ([24], с.530) множество E^* гомеоморфно канторову множеству. Пусть $\{I_n\}$ — последовательность смежных интервалов, длина которых стремится к нулю, если $n \to +\infty$, и $I_n \subset L \setminus E$.

Мы предполагаем, что при стремлении n к $+\infty$ имеет место как (A), так и (B). В каждом интервале $\bar{I}_n$ существует $\rho_n = \max_{u \in \bar{I}_n} (\rho(f(u), u))$ и $\tilde{\rho}_n = \max_{u \in \bar{I}_n} (\rho(\tilde{f}(u), u))$. Ясно, что ρ_n , $\tilde{\rho}_n \to 0$, если $n \to +\infty$.

Если α_0 задан, то в множестве L рассмотрим замкнутые подмножества L_k , $k < +\infty$, таких, что $\forall I_n \subset L_k$ справедливо $2\rho_n < \tilde{\rho}_n$, что $u \in E^*$, если $u \in Bd\, L_k$, и множество $L_k \cap E^*$ имеет мощность континуума. Векторное поле $\tilde{P}(x)$ строим в множестве D_{L_k} и мы получаем, что, если $u \in Int\,(L_k)$, то $\tilde{f}(u) \neq u$.

Если множество E содержит также замкнутое подмножество $E_* = \{u \mid f(u) = u\}$, тогда мы строим векторное поле $\tilde{P}(x)$ в множестве $D_{L_k \cup E_*}$.

Следовательно, в любой окрестности системы φ можно построить систему $\tilde{\varphi}$, которая имеет лишь счетное множество замкнутых траекторий и, следовательно, не имеет минимальную систему ω_1 . Мы получаем, что φ континуально неустойчива, и это противоречие доказывает теорему.

4.3. Континуальная эквивалентность динамических систем на торе

4.3.1. Теорема. Эргодические системы являются минимальными системами для динамических систем на торе T^2 с иррациональным числом вращения.

Доказательство. Допустим противное. Пусть φ —

эргодическая система с числом вращения μ, для которой существует минимальная система $\omega \leq \varphi$ и соотношение $\varphi \leq \omega$ не истинно. Согласно лемме 2.3.I справедливо соотношение

$$\tilde{\mu} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где $\tilde{\mu}$ — число вращения системы ω, но

$$\mu = \frac{n - m\tilde{\mu}}{-q + p\tilde{\mu}},$$

и в силу леммы 2.3.5 имеем, $\omega \geqslant \bar{\varphi}$. Системы $\bar{\varphi}$ и φ имеют одинаковые числа вращения μ, а согласно лемме 2.3.4 такие системы топологически эквивалентны, следовательно, $\omega \geqslant \varphi$. В силу леммы 2.3.2 эргодические системы являются минимальными для сингулярных систем.

4.3.2. Теорема. Множество континуальных классов динамических систем без точек покоя на торе, имеет мощность континуума.

Доказательство. В силу леммы 2.3.I имеем, что множество чисел вращения динамических систем одного континуального класса счетно. Согласно теореме 4.3.I эргодические системы являются минимальными системами для динамических систем с иррациональным числом вращения. Учитывая еще лемму 2.3.4, получаем утверждение теоремы.

4.3.3. Теорема. Динамические системы с рациональным числом вращения имеет только три класса континуально эквивалентных систем.

Доказательство. Пусть система φ имеет рациональное число вращения. Согласно следствию 2.3 [34] существует система ψ, топологически эквивалентная системе φ с числом вращения $\mu = 0$. Согласно лемме I4.I ([3], с.239) для динамической системы ψ существует глобальное секущее многообразие S^1 и отображение последования $\bar{\psi}$ на S^1. Пусть на T^2 существует открытое множество A незамкнутых траекторий системы ψ, предельное множество которых состоит из замкнутых траекторий ψ_{x_1}, ψ_{x_2}, x_1, $x_2 \in S^1$. Допустим, что $x_1 \neq x_2$ и рассмотрим непрерывное отображение $f: S^1 \to S^1$, $f(0) = f(1)$,

$$f(\theta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta \in [0, \theta_2], \\ p(\theta), & \text{если } \theta \in [\theta_2, 1], \end{cases}$$

где 0, θ_2 являются координатами точек x_1, x_2, и, если $\theta \in [0, \theta_2]$, то ей соответствует точка $x \notin A^* \cap S^1$, где A^* множество точек траекторий $\psi_x \in A$, а отображение $p: [\theta_2, 1] \to S^1$, $p(1) = p(\theta_2)$ является гомеоморфизмом, с свойством: для каждого $\theta \in (\theta_2, 1)$ справедливо $p(\theta) \neq \theta$. Положим $\bar{\omega}_1(x) = f \circ \bar{\psi} \circ f^{-1}(x)$, где $x \in S^1$. Пусть ω_1 является надстройкой гомеоморфизма $\bar{\omega}_1$. Система ω_1 имеет только одну замкнутую траекторию.

Если положить, что множество $\bar{A}$ содержит только замкнутые траектории, то аналогично получим систему ω_2, которая имеет только замкнутые траектории.

Динамическая система φ не имеет точек покоя. Покажем, что любая система $\omega \leq \varphi$ также не имеет точек покоя. Допустим противное, т.е. система ω имеет точку покоя y. В силу непрерывности отображения F множество $F^{-1}(y)$ замкнуто, следовательно, $L(x) \subset F^{-1}(y)$, где $\varphi_x \subset F^{-1}(y)$, и $F^{-1}(y)$ содержит замкнутую траекторию системы φ. Если точка покоя y изолирована, то, учитывая структуру траекторий системы φ и лемму 2.I.3 имеем, что индекс точки покоя y больше или равен единице. Следовательно, индекс точек покоя динамической системы ω больше нуля, но индекс тора T^2 равен нулю, и мы имеем, что система ω не имеет изолированных точек покоя. В силу сюръективности и непрерывности F система ω не имеет также неизолированных точек покоя.

В силу выше сказанного и непрерывности F нетрудно проверить, что системы ω_1 и ω_2 минимальны и что других минимальных систем для систем с рациональным μ не существует. Следовательно, имеем только три класса континуально эквивалентных систем с рациональным числом вращения.

4.3.4. Пример. Пусть M — крендель т.е. многообразие гомеоморфное сфере S^2 с двумя ручками. Построим на M динамическую систему, содержащую иррациональную обмотку. Для этого используем часть конструкции примера Швейцера [42].

Пусть T^2 двумерный тор, на котором задана сингулярная система φ [28, 42], а K состоит из точек предельного множества траекторий системы φ, которое представляет собой канторовое совершенное множество. Пусть D — двумерный диск, где $D\subset T^2\setminus K$ и обозначим через A множество $T^2\setminus Int(D)$.

Пусть $f: T^2\to T^2$ гомеоморфизм, сжимающий множество A так, что

$$f(A)=\{(\alpha,\beta)\,|\,\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2],\ \beta\in[\beta_1,\beta_2],\ |\alpha_1-\alpha_2|\le\delta,$$
$$|\beta_1-\beta_2|\le\delta,\ \alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2 \text{ — константы, а } \delta \text{ — достаточно мало}\},$$

где (α,β) координаты точек тора T^2.

Пусть $H: f(A)\to M$ вложение, которое естественным образом отображает множество $f(A)$ в M.

Продолжим систему на множестве $H(f(A))=B$, индуцированную динамической системой φ, до некоторой системы ψ на многообразии M следующим образом.

Пусть $y_i\in M\setminus B$, $i=1,2$ две точки покоя типа седло, и пусть система ψ имеет сепаратрисы: $\psi(R,x_i)$, $i=1,2,\dots,6$, где $L^+(x_i)=y_1$, $L^-(x_i)\in B$, если $i=1,2$, и $L^+(x_i)=y_2$, $L^-(x_i)=y_1$ и $\psi(R,x_i)\cap B=\emptyset$, если $i=3,4$, и $L^+(x_i)\in B$, $L^-(x_i)=y_2$, если $i=5,6$. Для всех точек $x\in M\setminus B$ имеем $L(x)\in B$.

Следовательно, на M построена динамическая система

ψ, которая содержит иррациональную обмотку, и в силу леммы 2.3.I систему ψ можно отображать только на счетное множество систем, а множество сингулярных систем согласно лемме [34] имеет мощность континуума, следовательно, множество минимальных систем на M имеет мощность континуума.

4.3.5. Следствие. Полученный результат справедлив и на сфере S^2 с n — ручками, для этого, если построена система на сфере S^2 с $(n-1)$ ручками, то добавляются еще две точки покоя типа седло и замкнутые траектории на n — той ручке.

4.4. Минимальные системы на плоскости

Обозначим через Γ максимальное компактное инвариантное множество, а через ω_i, $i=1,2,3,4$ динамические системы, для которых множество неблуждающих точек Ω_i состоит из одной единственной точки покоя x_i, а схемы точки покоя x_i следующие:

x_1 — узел ;

x_2 — S_1, H, S_2, E ;

x_3 — S_1, E_1, S_2, E_2 ;

x_4 — центр.

4.4.I. Лемма. Если множество Γ динамической системы φ связно, то существует отображение $F: R^2 \to R^2$ такое, что

$$F(\varphi(R,\cdot)) = \omega_i(R, F(\cdot)),$$

где i принимает одну из значений $(1,2,3,4)$.

Доказательство следует из лемм 2.2.I, 2.2.2, 2.2.5 — 2.2.II.

4.4.2. Теорема. Динамические системы ω_i, $i=1,2,3,4$ являются минимальными.

Доказательство. Допустим противное, т.е., что существует система $\bar{\omega}_i \leq \omega_i$ и системы $\bar{\omega}_i$, ω_i — биконтинуально неэквивалентны.

Пусть $F_i : R^2 \to R^2$ и

$$F_i(\omega_i(R,\cdot)) = \bar{\omega}_i(R, F_i(\cdot)).$$

Следует отметить, что в силу леммы 2.I.6 число орбитно—неустойчивых траекторий системы $\bar{\omega}_i$ меньше или ровно числу орбитно—неустойчивых траекторий системы ω_i.

Рассмотрим систему ω_1. Ясно, что $F_1(x_1)$ — точка покоя системы $\bar{\omega}_1$, а в силу сюръективности F_1 существует x, что $F_1(\omega_1(R,x)) \neq F(x_1)$. В силу свойств отображения F_1 имеем, что $f = F_1|_{\omega_1(R,x)\cup x_1}$ является гомеоморфизмом. Используя конформные отображения и теорему I ([24], с.527) можно продолжить отображение f до гомеоморфизма $H: R^2 \to R^2$. В силу теоремы [40] имеем, что системы ω_1 и $\bar{\omega}_1$ топологически эквивалентны.

Следует отметить, что, если система ω_1 имеет устойчивый узел, а система $\tilde{\omega}_1$ имеет неустойчивый узел, то системы ω_1 и $\tilde{\omega}_1$ биконтинуально неэквивалентны и обе являются минимальными.

Рассмотрим систему ω_2. Ясно, что $F_2(x_2)$ — точка покоя системы $\bar{\omega}_2$, а в силу сюръективности F_2 существует x, что $F_2(\omega_2(R,x)) \neq F_2(x_2)$, и траектория $F(\omega_2(R,x))$ либо эллиптическая, либо гиперболическая. Индекс точки покоя является целым числом, следовательно, точка покоя $F_2(x_2)$ имеет два сектора — эллиптический и гиперболический. Пусть f — сужение отображения F на орбитно—неустойчивых траекториях, на одну эллиптическую и одну гиперболическую траекторию. f является гомеоморфизмом, и используя комформные отображения и теорему I ([24], с.527) можно продолжить до гомеоморфизма $H: R^2 \to R^2$. Тогда в силу теоремы [40] имеем, что ω_2 и $\bar{\omega}_2$ топологически эквивалентны.

При рассмотрении системы ω_3, аналогично, как с системой ω_2 получаем, что ω_3 и $\bar{\omega}_3$ топологически эквивалентны.

Рассмотрим динамическую систему ω_4. Ясно, что $F_4(x_4)$ — точка покоя системы $\bar{\omega}_4$, и в силу сюръективности F_4 существует x, что $F_4(\omega_4(R,x)) \neq F_4(x_4)$. Очевидно, $F_4(\omega_4(R,x))$ — замкнутая траектория системы $\bar{\omega}_4$. Отображение $f = F_4|_{\omega_4(R,x) \cup x_4}$ является гомеоморфизмом в силу свойств отображения F. Нетрудно продолжить f до гомеоморфизма $H: R^2 \to R^2$. В силу теоремы [40] имеем, что ω_4 и $\bar{\omega}_4$ топологически эквивалентны.

Цитированная литература

1. Теория показателей Ляпунова. М., "Наука", 1966. 576 с. Авт.: Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.
2. Вайсборд Э.М. Об эквивалентности систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. - "Научн. докл. высшей школы. Сер. физ.-мат. наук", 1958, № 1, с. 37-42.
3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Мир", 1970. 720 с.
4. Рейзинь Л.Э. Локальная эквивалентность дифференциальных уравнений. Рига, "Зинатне", 1971. 235 с.
5. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы. - "Успехи математических наук",1970, т.25, вып.1 (151), с.113-185.
6. Ладис Н.Н. Топологическая эквивалентность линейных потоков. - "Дифференциальные уравнения", 1973, т.9, № 7, с. 1222-1235.
7. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы. - Докл. АН СССР, 1937, т.14, №5, с. 247-250.
8. Смейл С. Грубые системы не плотны. - "Математика", 1967, т.11, № 4, с. 107 - 111.
9. Williams R.F. The "DA" maps of Smale and structural stability. - In: Global Analysis, Proc. Symp in Pure Math., V.14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, p. 329-334.

10. Абрахам Р., Смейл С. Ω — устойчивость не типична. - "Математика", 1969, т.13, № 2, с. 157-160.

11. Шарковский А.Н. О проблеме изоморфизма. - В.кн.: Труды 5 международной конференции по нелинейным колебаниям. Т.2, Киев, Изд. ин-т. математики АН УССР, 1970, с. 541-545.

12. Качественная теория динамических систем второго порядка. М., "Наука", 1966. 568 с. Авт.: Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон Н.Н., Майер А.Г.

13. Пилюгин С.Ю. О системах Морса—Смейла с одинаковыми фазовыми диаграммамы. - "Дифференциальные уравнения", 1974, т.10, № 5, с. 816-821.

14. Пилюгин С.Ю. О фазовых диаграммах систем дифференциальных уравнений, удовлетворяющих аксиоме А. — "Дифференциальные уравнения", 1973, т.9., № 4, с. 647-649.

15. Юдрупс О.М. Континуальная эквивалентность динамических систем. — "Латвийский математический ежегодник", 1976 , т.20, с. 138-140.

16. Юдрупс О.М. Сравнение эквивалентностей динамических систем на плоскости. — "Дифференциальные уравнения", 1976, т.12, № 7, с. 1247-1255.

17. Юдрупс О.М. Гомотопная неэквивалентность систем с одинаковыми фазовыми диаграммамы. — "Латвийский математический ежегодник", 1976, т.19, с.233-235.

18. Юдрупс О.М. Минимальные системы на плоскости. — Латвийский математический ежегодник". 1976 , т.20, с.133-137.

19. Юдрупс О.М. Континуальная эквивалентность динамических систем на торе". -- В кн.: Точность астрометрических наблюдений малых тел и времени. Астрономия. Вып. 12, Рига, изд. ЛГУ, 1977, с. 151-156

20. Юдрупс О.М. Континуальная эквивалентность динамических систем на сфере. — "Дифференциальные уравнения", 1978, т.14, с.753–754. #4

21. Юдрупс О.М. Одно свойство непрерывных отображений динамических систем. — "Латвийский математический ежегодник", 1977, т.21, с.113–115.

22. Юдрупс О.М. Непрерывные отображения динамических систем. — В кн.: Тезисы докл. Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений и методике преподавания теории дифференциальных уравнений в педагогических институтах. Рязань, 1976, с. 305.

23. Куратовский К. Топология. Т.1, М., "Мир", 1966. 594 с.

24. Куратовский К. Топология. Т.2., М., "Мир", 1969, 624 с.

25. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М., "Наука", 1968. 272 с.

26. Dold A. Lectures on Algebraic Topology. Berlin--Heidelberg--New York, Springer--Verlag, 1972. 377 p.

27. Бурбаки Н. Теория множеств. Основные структуры анализа. М., "Мир", 1965. 455 с.

28. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. второе. М. — Л., Гос. изд. технико — теоретической литературы, 1949. 550 с.

29. Bhatia N.P., Szegö G.P. Stability Theory of Dynamical systems. Berlin--Heidelberg-- New York, Springer--Verlag, 1970. 225 p.

30. Келли Дж. Л. Общая топология. М., "Наука", 1968. 383 с.

31. Egawa I. Isomorphisms and Local Dynamical Systems Admitting Invariant Positive Measures. -- "Funkcialaj Ekvacioj", 1975, 18, p. 59-72.

32. Добрынский В.А., Шарковский А.Н. Об орбитно устойчивых траекториях. — "Дифференциальные уравнения", 1973, т.9, № 3, с. 558-559.

33. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., "Наука", 1966. 626 с.

34. Рейзинь Л.Э. Топологическая классификация динамических систем без точек покоя на торе. — "Латвийский математический ежегодник", 1969, вып.5, с.113-121.

35. Дьедонно Ж. Основы современного анализа. М., "Мир", 1964. 430 с.

36. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., "Иностранная литература", 1961. 387 с.

37. Bendixson I. Sur les courbes definies par des equations differentielles. -- "Acta Mathem." 1901, 24, p. 1-88.

38. Dulaç H. Sur les cycles limites. -- " Bull. Soc. Math. de France", 1923, 51, p. 45-188.

39. Мышкис А.А., Рейзинь Л.Э. О числе ячеек динамической системы. — "Математические заметки", 1968, т.3, № 6, с.707-714.

40. Markus L. Global structure of ordinary differential equations in the plane. -- "Trans. Amer. Math. Soc.", 1954, 76, p.127-148.

41. Neumann D.A. Classification of continuous flows

on 2--manifolds.-- "Proceedings of the American Mathematical Society", 1975, 48, Nr. 1, p. 73-81.

42. Rosenberg H. Un contre--exemple a la conjecture de Seifert. [d'après P.Schweitzer] . "Lect. Notes Math"., 1974, 383, p. 294-306 .

43. Peixoto M. Structural stability on two--dimensional manifolds. -- "Topology", 1962 , 1, p. 101-120.