LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

LINEĀRĀS PROGRAMMĒŠANAS UZDEVUMI VESELOS SKAITĻOS

BAKALAURA DARBS

Autors: **Jānis Mārtiņš Leja**
Stud. apl.: jl12049
Darba vadītājs: profesore Dr. math. Inese Bula

RĪGA 2016

ANOTĀCIJA

Bakalaura darbs veltīts lineārās programmēšanas apakšnozarei – lineārajai programmēšanai veselos skaitļos. Darbā izklāstītas trīs lineārās programmēšanas veselos skaitļos uzdevumu risināšanas metodes: sazarošanās un robežu metode, Gomori metode un Balaša algoritms. Metodēm dots apraksts, tās ilustrētas ar piemēriem. Šis bakalaura darbs ir metodiska rakstura un var noderēt, apgūstot specifiskos lineārās programmēšanas uzdevumus veselos skaitļos.

Atslēgas vārdi: lineārā programmēšana, lineārā programmēšana veselos skaitļos, sazarošanās un robežu metode, Gomori metode, Balaša algoritms.

ANNOTATION

The Bachelor's Thesis is dedicated to sub-sector of Linear Programming problems – the Integer Programming. There are mentioned three methods of solving Integer Programming problems: Branch and Bound algorithm, Cutting Planes algorithm and Balas' Additive algorithm. The methods are described and illustrated with examples. This Bachelor's Thesis has a methodical nature and it can help with learning the specific tasks of Integer Programming.

Key words: Linear Programming, Integer Programming, Branch and Bound algorithm, Cutting Planes algorithm, Balas' Additive algorithm.

SATURS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

$x \in A$ – elements x pieder kopai A

$x \notin A$ – elements x nepieder kopai A

$\emptyset$ - tukša kopa

R – reālo skaitļu kopa

Z – veselo skaitļu kopa

$x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$ – vektors-kolonna, $x_1; x_2; \dots; x_n \in R$

$y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ – vektors-rinda, $y_1; y_2; \dots; y_n \in R$

R^n – n-dimensiju Eiklīda telpa

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – divdimensiju matrica, kas sastāv no elementiem a

$< c, x >$ - vektoru $c = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ un $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$ skalārais reizinājums

$cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ - vektoru $c = (c_1; c_2; \dots; c_n)$ un $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T$ skalārais reizinājums Eiklīda telpā R^n

IEVADS

Lineārā programmēšana ir matemātikas apakšnozare, kas nodarbojas ar vairāku argumentu lineāras funkcijas nosacīto ekstrēmu atrašanas problēmām tādās kopās, kuras tiek aprakstītas ar lineārām vienādībām vai nevienādībām.

Lineārās programmēšanas uzdevumos parasti netiek prasīts, lai plānu koordinātas būtu veseli skaitļi. Tomēr praksē bieži sastopams gadījums, kad jārisina uzdevums, kura optimālā plāna koordinātām jābūt veseliem skaitļiem. Dažreiz ir pieļaujama rezultātu noapaļošana, tomēr pastāv daudzi uzdevumi, kuru rezultātu noapaļošana var radīt lielu kļūdu.

Tāpēc liela nozīme ir lineārās programmēšanas uzdevumu atrisināšanas metodēm, ar kuru palīdzību atrod optimālo plānu, kura koordinātas ir veseli skaitļi. Lineārās programmēšanas uzdevumus, kuru plāniem jāsatur tikai veseli skaitļi, sauc par lineārās programmēšanas uzdevumiem veselos skaitļos (arī diskrētās vai integrās programmēšanas uzdevumiem).

Lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos atrisināšanas metodes ir iedalāmas divās kategorijās: atšķeļošās plaknes algoritmi, kas izmanto simpleksa algoritmu, un pārlases algoritmi, kas veic visu iespējamo atrisinājumu pārlasi. Šeit tiks aplūkotas lineārās programmēšanas veselos skaitļos uzdevumu atrisināšanas metodes – sazarošanās un robežu metode un Gomori metode. Labākai diskrētās programmēšanas uzdevuma izpratnei sākumā aplūkots jēdziens par lineārās programmēšanas uzdevumu un tā formām. Darbā aplūkota arī viena specifiska metode – Balaša algoritms, kas risina bināros uzdevumus, t.i., tādus minimizācijas uzdevumus, kuros mainīgie pieņem vērtību 0 vai 1.

Darbs uzrakstīts uz 65 lpp., tas iedalīts 5 nodaļās. Numerācija veikta nodaļu ietvaros. Izmantoti 7 informācijas avoti.

1. LINEĀRĀS PROGRAMMĒŠANAS UZDEVUMS (LPU)

Lineārās programmēšanas pamatjēdzieni un simpleksa algoritms aprakstīti, izmantojot [2], [4], [5].

1.1. LPU normālforma

Lineārās programmēšanas uzdevums ir uzdots normālformā (arī standartformā), ja tas izskatās šādi:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

f = mērķa funkcija;

n – mainīgo skaits;

m – nosacījumu skaits;

$x_1; \ldots; x_n$ – mainīgie;

$a_{11}; a_{12}; \ldots; a_{mn}, b_1; b_2; \ldots; b_m$ – nosacījumu koeficienti;

$c_1; c_2; \ldots; c_n$ – mērķa funkcijas koeficienti.

LPU iespējams pierakstīt arī īsāk:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \rightarrow max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \,; i = 1; \ldots; m, \\ x_j \geq 0, \; j = 1; \ldots; n, \end{cases}$$

kur a_{ij} – koeficienti.

To var pierakstīt arī matricu formā $Ax \leq b, \; x \geq 0$. Tas nozīmē, ka pie dota resursu vektora b var tikt realizēts jebkurš tāds produkcijas ražošanas plāns, kurš apmierina nosacījumus $Ax \leq b$ un $x \geq 0$. Ja ir zināmas produkciju $G_1; G_2; \ldots; G_n$ cenu vektors $c = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$, tad ražošanas plānošanas uzdevums ir matemātiski formulējams šādi:

$$f = < c, x > \rightarrow max$$

$$Ax \leq b, \; x \geq 0,$$

$x \le b$, $x \ge 0$, kur $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, $c = (c_1; c_2; \ldots; c_n)$, $b = (b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_m)$, $A = (a_{ij})$ — koeficientu matrica un ar $< c, x >$ apzīmēts vektoru c un x skalārais reizinājums.

Definīcija 1.1.1.

Lineāro formu

$$< c, x >= c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j\ ,$$

kurai tiek meklēts maksimums vai minimums, sauc par **mērķa funkciju**.

Definīcija 1.1.2.

Vektoru

$$x = (x_1; x_2; \ldots; x_n),$$

kurš apmierina visus lineārās programmēšanas uzdevuma ierobežojumus, sauc par **pieļaujamo plānu.**

1.2. LPU kanoniskā forma

Lineārās programmēšanas uzdevums ir uzdots kanoniskā formā, ja tas izskatās šādi:

$$f = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \end{cases}$$

Matricu formā:

$$f =< c, x >\to max$$

$$Ax = b,\ x \ge 0.$$

1.3. LPU vispārīgā forma

Lineārās programmēšanas uzdevums ir uzdots vispārīgā formā, ja daļa ierobežojumu ir nevienādības, bet otra daļa ir vienādības, un ne visi mainīgie ir nenegatīvi:

$$f = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_{\,2} \geq 0, \ldots, x_r \geq 0. \end{cases}$$

Šeit jāizpildās nosacījumam, ka $k \leq m$ un $r \leq n$. Standartuzdevums ir vispārīgā uzdevuma speciālgadījums, ja $k = m$, $r = n$, savukārt kanonisko uzdevums ir gadījumā, ja $k = 0$, $r = n$.

1.4. Pāreja no LPU standartformas uz kanonisko formu

Definē jaunus mainīgos $z_1; z_2; \ldots; z_m$, t.i., tik daudzus jaunus mainīgos, cik ir ierobežojošo nevienādību. Nevienādība

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

tiek aizstāta ar vienādību

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + z_i = b_i,$$

kur $z_i > 0,\ i = 1; \ldots; m$.

Mērķa funkcija:

$$f = max\ (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n),$$

$$f = max\,(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0z_1 + \cdots + 0z_m)\ .$$

Tad uzdevums kanoniskajā formā izskatās šādi:

$$f = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + 0 \cdot z_1 + \ldots + 0 \cdot z_m) \rightarrow max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \\ z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, \ldots, z_m \geq 0, \end{cases}$$

vai matricu pierakstā

$$f = < c, x > \to max$$

$$Ax + z = b; \; x \geq 0; z \geq 0.$$

Piemērs 1.4.1. Pārveidot doto uzdevumu kanoniskā formā:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2) \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Uzdevums kanoniskā formā:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2) \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + \quad x_4 = 2, \\ \qquad x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1.5. LPU atrisināšana ar simpleksa metodi

Aplūkosim lineārās programmēšanas uzdevums kanoniskā formā

$$f = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n) \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Pieņemsim, ka nosacījumu sistēma (1.1) ir saderīga, t. i., LPU eksistē atrisinājums. 1947. gadā Dž. Dancigs (*G. B. Dantzig*) izstrādāja universālu lineārās programmēšanas uzdevumu atrisināšanas metodi – **simpleksa metodes algoritmu**. Izpildot tā darbības, vai nu atrod LPU optimālo plānu x^* un mērķa funkcijas maksimālo vērtību $max\, f$, vai konstatē, ka uzdevumam nav atrisinājuma mērķa funkcijas neierobežotības dēļ ($f \to \infty$).

Ja minētie nezināmie ir $x_1; x_2; \ldots; x_m$, tad sistēmu (1.1) var pārveidot šādā ekvivalentā formā:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + y_{1,m+1}x_{m+1} + y_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + y_{1n}x_n = b_1^0, \\ \qquad x_2 \qquad + y_{2,m+1}x_{m+1} + y_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + y_{2n}x_n = b_2^0, \\ \ldots \\ \qquad\qquad x_m + y_{n,m+1}x_{m+1} + y_{n,m+2}x_{m+2} + \ldots + y_{mn}x_n = b_m^0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Definīcija 1.5.1.

Par **bāzes nezināmo** sauc LPU nezināmo, kas izslēgts no visiem nosacījumu sistēmas vienādojumiem, izņemot vienādojumu, kurā šim nezināmajam koeficients ir 1, ja atbilstošais brīvais loceklis ir nenegatīvs. Pārējos nezināmos sauc par **brīvajiem nezināmajiem**.

Saskaņā ar Definīciju 1.5.1 sistēmas (1.2) nezināmie $x_1; x_2; \ldots; x_m$ ir bāzes nezināmie, ja $b_i^0 \geq 0$ $(i = 1; \ldots; m)$, bet $x_{m+1}; \ldots; x_n$ ir brīvie nezināmie. Atbilstoši bāzes un brīvajiem nezināmajiem plāna koordinātas sauc par bāzes koordinātām un brīvajām koordinātām.

Apzīmēsim vektoru, kas sastāv no mērķa funkcijas bāzes koeficientiem šādi:

$$c_b = (c_1; c_2; \ldots; c_m).$$

Definīcija 1.5.2.

Par **atbalsta plānu** sauc tādu LPU plānu, kam bāzes koordinātas ir vienādas ar nosacījumu sistēmas nenegatīviem brīvajiem locekļiem, bet brīvās koordinātas ir vienādas ar nulli. Ja nosacījumu sistēmā (1.2) $b_i^0 \geq 0$ $(i = 1; \ldots; m)$, tad plāns

$$x^0 = (x_1^0; \ldots; x_m^0; 0; \ldots; 0)^T.$$

Lineārās programmēšanas uzdevuma sākuma simpleksa tabula (T^0) izskatās šādi.

1.1. tabula

LPU sākuma simpleksa tabula

c_b^0	c	c_1	c_2	...	c_j	...	c_m	c_{m+1}	...	c_i	...	c_n	x_b^0
	T^0	x_1	x_2	...	x_j	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_n	
c_1	x_1	1	0	...	0	...	0	$y_{1,\ m+1}$	...	y_{1j}	...	y_{1n}	x_1^0
c_2	x_2	0	1	...	0	...	0	$y_{2,\ m+1}$	...	y_{2j}	...	y_{2n}	x_2^0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_i	x_i	0	0	...	1	...	0	$y_{i,\ m+1}$	...	y_{ij}	...	y_{in}	x_i^0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_m	x_m	0	0	...	0	...	1	$y_{m,\ m+1}$	...	y_{mj}	...	y_{mn}	x_m^0
f		0	0	...	0	...	0	d_1	...	d_j	...	d_n	$f(x^0)$

Tabulā (1.1. tabula) mainīgie $x_1; \ldots; x_m$ ir bāzes nezināmie un atbalsta plāns ir

$$x^0 = (x_1^0; \ldots; x_m^0; 0; \ldots; 0)^T,$$

ja $b_i \geq 0$. Tabulas apakšējā rindā ieraksta mērķa funkcijas vērtību atbalsta plānam x^0, kas aprēķināta pēc formulas (1.3):

$$f(x^0) = c_b^0 x_b^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i^0 x_i^0. \tag{1.3}$$

Lai varētu pārbaudīt atbalsta plāna optimalitāti, nosaka tam atbilstošus rādītājus d_j $(j = 1; \dots ; n)$, kurus sauc par nezināmo novērtējumiem. Novērtējumus var aprēķināt, izmantojot formulu (1.4):

$$d_j = c_b^0 y_{ij} - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i y_{ij} - c_j. \tag{1.4}$$

Definīcija 1.5.3.

1.1. tabulas kolonnu, kurā atrodas $\min_j d_j = d_n < 0$, sauc par **galveno kolonnu**, bet rindu, kuras elementus dalot, ir noteikts θ, sauc par **galveno rindu**. Elementu, kas atrodas galvenās rindas un galvenās kolonnas krustojumā, sauc par **galveno elementu**.

Pāreja no vienas tabulas uz otru notiek, izpildot Žordāna – Gausa izslēgšanas metodes vienu soli ar noteiktā kārtībā izvēlētu galveno elementu. Jaunais atbalsta plāns no iepriekšējā atšķiras ar vienu jaunu bāzes nezināmo un vienu jaunu brīvo nezināmo.

1.5.1. Simpleksa algoritma soļi

Pēc sākuma simpleksa tabulas (1.1. tabula) sastādīšanas izpilda šādus simpleksa algoritma soļus.

1. Pārbauda atbalsta plāna optimalitāti. Ja visi novērtējumi ir nenegatīvi $(d_j \geq 0, j = 1; \dots ; n)$, tad atbalsta plāns x^0 ir optimālais plāns un tam atbilstošā mērķa funkcijas vērtība ir $max\, f$ – algoritms pabeigts. Ja kaut viens novērtējums ir negatīvs, atbalsta plāns x^0 nav optimālais plāns un jāveic nākamie algoritma soļi.
2. Pārliecinās, vai eksistē kāds negatīvs novērtējums $d_k < 0$, kuram atbilst $y_k \leq 0$. Šajā situācijā uzdevumam nav atrisinājuma, jo mērķa funkcija ir neierobežota $(f \to \infty)$, – algoritms pabeigts. Pretējā gadījumā, ja katram negatīvam novērtējumam $d_j < 0$ atbilst vektors y_j, kuram ir vismaz viena pozitīva koordināta, iespējams atrast jaunu atbalsta plānu x' ar lielāku mērķa funkcijas vērtību nekā $f(x^0)$. Pāreja no viena atbalsta plāna notiek, mainot vienu bāzes nezināmo.
3. Nosaka jauno bāzes nezināmo atbilstoši mazākajam negatīvajam novērtējumam. Pieņemsim, ka mazākais negatīvais novērtējums ir $d_n = \min d_j < 0$. Šajā gadījumā jaunais bāzes nezināmais ir x_n un simpleksa tabulā galvenā kolonna ir n-tā kolonna.

4. Nosaka jauno brīvo nezināmo, aprēķinot bāzes koordinātu un galvenās kolonnas attiecīgo pozitīvo elementu minimālo dalījumu. Pieņemsim, ka minimālais dalījums izveidojas m-tajā rindā:

$$\theta = min\frac{x_i^0}{y_{in}} = \frac{x_m^0}{y_{mn}},$$

kur $y_{mn} > 0$. Šajā gadījumā jaunais brīvais nezināmais ir x_m, un simpleksa tabulā galvenā rinda ir m-tā rinda. Elements $y_{mn} > 0$, kas atrodas galvenās rindas un galvenās kolonnas krustojumā, ir galvenais elements. Tā kā jaunais brīvais nezināmais ir x_m, atbalsta plāna x' m-tās koordinātas skaitliskā vērtība ir 0.

5. Sastāda nākošo simpleksa tabulu (1.2. tabula), kas atbilst jaunajam atbalsta plānam x'.

1.2.tabula

Nākošā simpleksa tabula

c_b^0	c	c_1	c_2	...	c_j	...	c_m	c_{m+1}	...	c_i	...	c_{n-1}	c_n	x'_b
	T^1	x_1	x_2	...	x_j	...	x_m	x_{m+1}	...	x_j	...	x_{n-1}	x_n	
c_1	x_1	1	0	...	0	...	0	y'_{1m}	...	y'_{1j}	...	$y'_{1,n-1}$	0	x'_1
c_2	x_2	0	1	...	0	...	0	y'_{2m}	...	y'_{2j}	...	$y'_{2,n-1}$	0	x'_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_i	x_i	0	0	...	1	...	0	y'_{im}	...	y'_{ij}	...	$y'_{i,n-1}$	0	x'_i
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
c_{m-1}	x_m	0	0	...	0	...	1	$y'_{m-1,m}$	...	$y'_{m-1,j}$	...	$y'_{m-1,n-1}$	0	x'_m
c_n	x_n	0	0	...	0	...	0	y'_{nm}	...	y'_{nj}	...	$y'_{n,n-1}$	1	x'_n
f		0	0	...	0	...	0	d'_m	...	d'_j	...	d'_{n-1}	0	$f(x')$

Saskaņā ar Žordāna – Gausa izslēgšanas metodes darbību izpildes secību jaunās simpleksa tabulas (1.2. tabula) elementi aprēķināti pēc šādām formulām:

$$x'_i = x_i^0 - \frac{x_m^0}{y_{mn}} y_{in} \ (i = 1; \dots; m-1), \qquad (1.5)$$

$$x'_n = \theta = \frac{x_m^0}{y_{mn}}, \qquad (1.5')$$

$$y'_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{mj}}{y_{mn}} y_{in} \ (i = 1; \dots; m-1, j = 1; \dots; n), \qquad (1.6)$$

$$y'_{nj} = \frac{y_{mj}}{y_{mn}} \ (j = 1; ..; n), \qquad (1.6')$$

$$f(x') = f(x^0) - \frac{x_m^0}{y_{mn}} d_n, \tag{1.7}$$

$$d_j' = d_j - \frac{y_{mj}}{y_{mn}} d_n \; (j = 1; \dots; n). \tag{1.8}$$

Aprēķinu pareizību var pārbaudīt, nosakot lielumus $f(x')$ un d_j' pēc šādām formulām:

$$f(x') = \sum_{i=1}^{m-1} c_i x_i' + c_n c_n' ; \tag{1.9}$$

$$d_j' = \sum_{i=1}^{m-1} c_i y_{ij}' + c_n y_{ij}'. \tag{1.10}$$

Vieglākai izpratnei var minēt šādus simpleksa tabulas elementu atrašanas soļus:

a) dala tabulas T^0 galvenās rindas elementus ar galveno elementu;
b) aizvieto ar nullēm tabulas T^0 galvenās kolonnas elementus, izņemot galveno elementu, kura jaunā vērtība ir skaitlis 1;
c) pārrēķina pārējos tabulas elementus pēc t.s. *taisnstūra likuma*.

Ja izveido taisnstūri, kura vienā virsotnē atrodas tabulas elements (I), kuru vajag nomainīt, otrā virsotnē – elements galvenajā rindā (II), trešajā virsotnē – elements galvenajā kolonnā (III), bet ceturtajā virsotnē atrodas galvenais elements (IV), tad atbilstošo tabulas T^1 elementu (I') var aprēķināt pēc formulas:

$$I' = I - \frac{II \cdot III}{IV}. \tag{1.11}$$

Piemērs 1.5.1.a

Atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumu ar simpleksa metodi

$$f(x_1; x_2; x_3; x_4) = 2x_1 + x_2 + 12x_3 + 12x_4 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Dotais piemēra uzdevums ir jau tādā formā, ka to var ierakstīt simpleksa tabulā T^0 (uzdevumā ir redzams, ka bāzes nezināmie ir x_1 un x_2).

1.3.tabula

Simpleksa tabula T^0

c_b^0	c	2	1	12	12	x_b^0
	T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	1	0	2	1	11
1	x_2	0	1	1	2	10
f		0	0	-7	-8	32

$x^0 = x(T^0) = (11; 10)^T$; $f(x^0) = 32$

1.3. tabulā tiek ierakstīti bāzes nezināmie x_1 un x_2, vektori $c = (2; 1; 12; 12)$, $c_b = (2; 1)$, $x_b^0 = b = (11; 10)^T$ un koordinātas $y_j = a_j$ $(j = 1; 2; 3; 4)$, vadoties pēc datu izvietojuma, kas dots 1.2. tabulā.

Izmantojot 1.3. tabulas elementus, ērti var aprēķināt mērķa funkcijas vērtību $f(x^0)$ un novērtējumus d_j $(j = 1; 2; 3; 4)$, izmantojot formulas (1.3) un (1.4):

$$f(x^0) = c_b^0 c_b^0 = 2 \cdot 11 + 1 \cdot 10 = 32,$$

$$d_1 = c_b^0 y_1 - c_1 = (2; 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 2 = 0,$$

$$d_2 = c_b^0 y_2 - c_2 = (2; 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 1 = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 = 0,$$

$$d_3 = c_b^0 y_3 - c_3 = (2; 2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 12 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 12 = -7,$$

$$d_4 = c_b^0 y_4 - c_4 = (2; 1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 12 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 12 = -8.$$

Iegūtie rezultāti tiek ierakstīti tabulas 1.3. apakšējā rindā. Kā redzams, bāzes nezināmo novērtējumi ir vienādi ar nulli $(d_1 = d_2 = 0)$.

Izmantojot 1.3. tabulā dotos datus, izpildīsim simpleksa algoritma soļus.

1. Atbalsta plāns x^0 nav optimālais plāns, jo ir negatīvi novērtējumi $(d_3 = d_4 = 0)$.
2. Iespējams atrast jaunu atbalsta plānu x^1, jo gan 3., gan 4. kolonnā ir pozitīvi elementi.
3. Jaunais bāzes nezināmais ir x_4, jo mazākais negatīvais novērtējums $d_4 = -8$ atrodas 4. kolonnā. Tātad 4. kolonna ir galvenā kolonna.
4. Jaunais bāzes nezināmais ir x_2, jo minimālais dalījums izveidojas šim nezināmajam atbilstošā rindā (2. rinda):

$$\theta = min \frac{x_i^0}{y_{i4}} = \min\left\{\frac{11}{1}; \frac{10}{2}\right\} = 5.$$

Tātad 2. rinda ir galvenā rinda un elements $y_{24} = 2$ ir galvenais elements.

5. Sastāda nākošo simpleksa tabulu (1.4. tabula), kas atbilst jaunajam atbalsta plānam x^1.

1.4.tabula

Simpleksa tabula T^1

c_b^1	c	2	1	12	12	x_b^1
	T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	6
12	x_4	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5
f		0	4	-3	0	72

$x^1 = x(T^1) = (6; 0)^T$; $f(x^1) = 72$

Salīdzinot 1.3. tabulu ar 1.4. tabulu, redzams, ka mainīgie x_2 un x_4 ir mainīti lomām. 1.4. tabulā x_4 ir bāzes nezināmais, bet x_2 ir brīvais nezināmais.

1.4. tabulas elementus nosaka, izpildot Žordāna – Gausa izslēgšanas metodes soļus ar tabulas 1.3. galveno elementu $y_{24} = 2$. Vispirms 1.3. tabulas galvenās rindas (2. rinda) elementus dala ar galveno elementu $y_{24} = 2$. Galvenā elementa jaunā vērtība ir 1. Tad galvenās kolonnas (4. kolonna) pārējie elementi tiek aizvietoti ar 0. Pārējie 1.4. tabulas elementi tiek aprēķināti pēc *taisnstūra likuma*, izmantojot formulu (1.11):

$$y'_{11} = 1 - \frac{0 \cdot 1}{2} = 1,$$

$$y'_{12} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y'_{13} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$x'_1 = 11 - \frac{10 \cdot 1}{2} = 6,$$

$$d'_1 = 0 - \frac{0 \cdot (-8)}{2} = 0,$$

$$d'_2 = 0 - \frac{0 \cdot (-8)}{2} = 0,$$

$$d'_3 = -7 - \frac{1 \cdot (-8)}{2} = -3,$$

$$f(x^1) = 32 - \frac{10 \cdot (-8)}{2} = 72.$$

No 1.4. tabulas redzams, ka iegūts atbalsta plāns

$$x^1 = (6; 0; 0; 5)^T$$

ar lielāku mērķa funkcijas vērtību nekā atbalsta plānam x^0:

$$f(x^1) = 72 > f(x^0) = 32.$$

Iegūto datu pareizību iespējams pārbaudīt, izmantojot formulas (1.9) un (1.10):

$$f(x^1) = c_b^1 c_b^1 = 2 \cdot 6 + 12 \cdot 5 = 72,$$
$$d_1 = d_4 = 0,$$
$$d_2 = c_b^1 y_2^1 - c_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 12 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 4,$$
$$d_3 = c_b^1 y_3^1 - c_3 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} - 12 = -3.$$

Tā kā $d_3 = -3 < 0$, tad nav atrasts optimālais plāns, tāpēc, izmantojot 1.4. tabulā dotos datus, atkal tiek izpildīti simpleksa algoritma soļi un veiktas nepieciešamās darbības, lai sastādītu 1.5. tabulu. Šeit

$$x^2 = (0; 0; 4; 3)^T$$

un

$$f(x^2) = 84 > f(x^1) = 72.$$

1.5.tabula

Simpleksa tabula T^2

c_b^2	c	2	1	12	12	x_b^2
	T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	
12	x_3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	4
12	x_4	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	3
f		2	3	0	0	84

$x^2 = x(T^2) = (0; 0)^T$; $f(x^2) = 84$

Tā kā 1.5. tabulā visi novērtējumi ir nenegatīvi, tad iegūtais atbalsta plāns x^2 ir optimālais plāns:

$$x^* = x^2 = (0; 0; 4; 3)^T, max\, f = 84.$$

Lai vienkāršotu pierakstu, turpmāk simpleksa tabulās vektorus c un c_b neliksim.

Piemērs 1.5.1.b

Atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumu ar simpleksa metodi

$$f(x_1; x_2) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Tā kā uzdevums ir dots normālformā, to vispirms nepieciešams pārveidot kanoniskā formā. Izmantojot trīs nenegatīvus palīgnezināmos $z_1 = x_3$, $z_2 = x_4$, $z_3 = x_5$, uzdevums kanoniskajā formā ir šāds:

$$f(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 16, \\ x_1; x_2; x_3; x_4; x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Tālāk uzdevuma risināšana notiek līdzīgi kā Piemēra 1.5.1.a gadījumā. Dotā uzdevuma sākotnējam atbalsta plānam

$$x^0 = (0; 0; 5; 6; 16)^T$$

sastāda simpleksa tabulu T^0 (1.6. tabula):

1.6.tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^0
x_3	1	1	1	0	0	5
x_4	1	2	0	1	0	6
x_5	3	1	0	0	1	16
f	-3	-4	0	0	0	0

$x^0 = x(T^0) = (0; 0)^T$; $f(x^0) = 0$

Izmantojot 1.6. tabulā dotos datus, izpildīsim simpleksa algoritma soļus.

1. Atbalsta plāns x^0 nav optimālais plāns, jo ir negatīvi novērtējumi ($d_1 = -3$; $d_2 = -4$).

2. Iespējams atrast jaunu atbalsta plānu x^1, jo gan 1., gan 2. kolonnā ir pozitīvi elementi.
3. Jaunais bāzes nezināmais ir x_2, jo mazākais negatīvais novērtējums $d_2 = -4$ atrodas 2. kolonnā. Tātad 2. kolonna ir galvenā kolonna.
4. Jaunais brīvais nezināmais ir x_3, jo minimālais dalījums izveidojas šim nezināmajam atbilstošā rindā (1. rinda):

$$\theta = min\frac{x_i^0}{y_{i2}} = \min\left\{\frac{5}{1};\frac{6}{2};\frac{16}{1}\right\} = 3.$$

Tātad 2. rinda ir galvenā rinda un elements $y_{12} = 1$ ir galvenais elements.

5. Sastāda nākošo simpleksa tabulu (1.7. tabula), kas atbilst jaunajam atbalsta plānam x^1.

1.7.tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^1
x_3	$\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_2	$\frac{1}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	0	3
x_5	$\frac{5}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	13
f	-1	0	0	2	0	12

$x^1 = x(T^1) = (0;3)^T$; $f(x^0) = 12$

Salīdzinot 1.6. tabulu ar 1.7. tabulu, redzams, ka mainīgie x_4 un x_2 ir mainīti lomām. 1.7. tabulā x_2 ir bāzes nezināmais, bet x_4 ir brīvais nezināmais. Tā kā bāzes nezināmie ir x_3, x_2 un x_5, tad $c_b^1 = (c_3; c_2; c_5) = (0;4;0)$. 1.7. tabulas elementus nosaka, izpildot Žordāna – Gausa izslēgšanas metodes soļus ar 1.6. tabulas galveno elementu $y_{12} = 1$. Vispirms 1.6. tabulas galvenās rindas (1. rinda) elementus dala ar galveno elementu $y_{12} = 1$. Galvenā elementa jaunā vērtība ir 1. Tad galvenās kolonnas (2. kolonna) pārējie elementi tiek aizvietoti ar 0. Pārējie 1.7. tabulas elementi tiek aprēķināti pēc *taisnstūra likuma*, izmantojot formulu (1.11). No 1.7. tabulas redzams, ka iegūts atbalsta plāns

$$x^1 = \left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;\frac{5}{2}\right)^T$$

ar lielāku mērķa funkcijas vērtību nekā atbalsta plānam x^0:

$$f(x^1) = 12 > f(x^0) = 0,$$

bet $d_1 = -1 < 0$. Izmantojot 1.7. tabulā dotos datus, atkal tiek izpildīti simpleksa algoritma soļi un veiktas nepieciešamās darbības, lai sastādītu 1.8. tabulu, kas šajā uzdevumā ir beigu tabula, jo visi novērtējumi $d_j \geq 0, j = 1; \dots; 5$. Tātad optimālais plāns ir

$$x^2 = (4; 1; 0; 0; 3)^T$$

un

$$f(x^2) = 16 > f(x^1) = 12.$$

1.8.tabula

Simpleksa tabula T^2

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^2
x_1	1	0	2	1	0	4
x_2	0	1	−1	1	0	1
x_5	0	0	−5	2	1	3
f	0	0	2	1	0	16

$x^2 = x(T^2) = (4; 1)^T$; $f(x^0) = 16$

Kanoniskā formā pārveidotā uzdevuma atrisinājums ir

$$x^* = x^2 = (4; 1; 0; 0; 3)^T, max\, f = 16,$$

bet sākotnējā normālformā dotā uzdevuma atrisinājums ir

$$x^* = x^2 = (4; 1)^T, max\, f = 16.$$

2. LINEĀRĀS PROGRAMMĒŠANAS UZDEVUMS VESELOS SKAITĻOS

Lineārās programmēšanas uzdevumus, kuru plāniem jābūt ar veselu skaitļu koordinātām, sauc par **lineārās programmēšanas uzdevumiem veselos skaitļos**.

Par LPU veselos skaitļos (arī diskrētās programmēšanas uzdevumu (DPU)) sauc uzdevumu (normālformā):

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \leq b_n, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \\ x_j \in Z, \ j = 1; 2; \ldots; n, \end{cases}$$

kur Z – veselo skaitļu kopa.

Matricu formā šis uzdevums izskatās šādi:

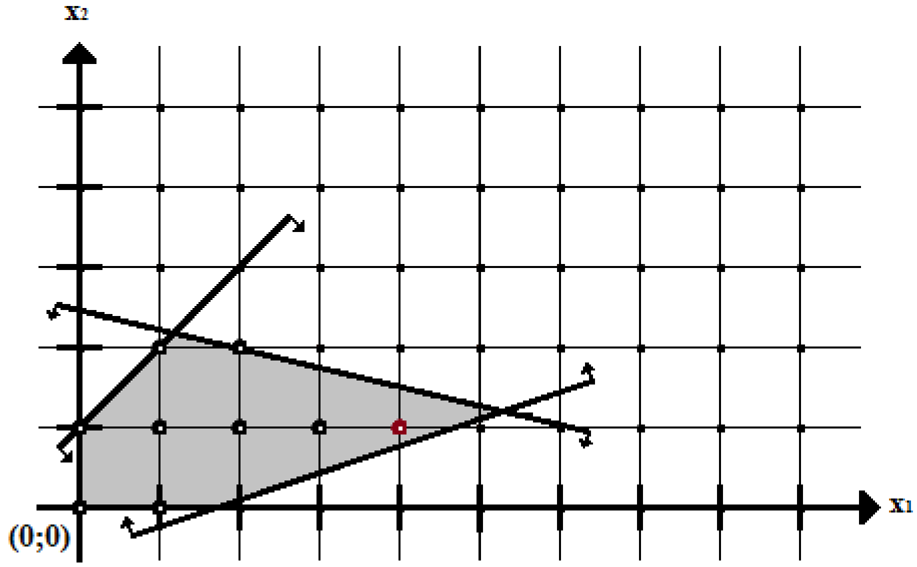
$$f = < c, x > \to max$$

$$Ax \leq b, \ x \geq 0,$$

$$x_j \in Z, \ j = 1; 2; ..; n,$$

kur Z – veselo skaitļu kopa.

Divu nezināmo lielumu gadījumā lineārās programmēšanas uzdevuma veselos skaitļos plānu kopu var attēlot grafiski. Uzdevuma pieļaujamo plānu kopa ir nevis izliekts daudzskaldnis, kā tas ir parastā LPU gadījumā, bet gan sastāv no atsevišķiem veselu skaitļu punktiem. 2.1. attēlā redzams divdimensionāls LPU veselos skaitļos ar pieciem ierobežojumiem un plānu kopā ietilpst 9 plāni. Ja nepieciešams noskaidrot plānu, kurā mērķa funkcija sasniedz maksimumu, tad var šāda neliela plānu skaita gadījumā apskatīt visus plānus un atrast plānu ar lielāko mērķa funkcijas vērtību. Vispārīgā gadījumā, ja plānu skaits ir liels, tad ir izstrādātas vairākas metodes, kā atrast plānu, kas maksimizē mērķa funkciju.



2.1. att. **LPU veselos skaitļos**

Definīcija 2.1.

Par reāla skaitļa a **veselo daļu** $[\boldsymbol{a}]$ sauc vislielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz skaitli a. Par reāla skaitļa a **daļveida daļu** $\{\boldsymbol{a}\}$ sauc starpību

$$\{a\} = a - [a].$$

Definīcija 2.2.

Par lineārās programmēšanas uzdevuma veselos skaitļos **pieļaujamo plānu** sauc vektoru

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_n)^T ,$$

kas apmierina visus uzdevuma nosacījumus.

Par lineārās programmēšanas uzdevuma veselos skaitļos **optimālo plānu** sauc tādu pieļaujamo plānu x^*, kas maksimizē mērķa funkciju.

2.1. Programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos piemēri

2.1.1. Kapitāla-budžeta uzdevums

Klasiskā kapitāla-budžeta problēmā ([1]) lēmumu pieņemšana sevī ietver potenciālo investīciju izvēli. Bieži šādās situācijās nav nepieciešams runāt par daļējām investīcijām, tādēļ šī problēma ir bināru veselu skaitļu uzdevums, kura mainīgie (pieņemamie lēmumi) x_j ir 0 vai

1, t.i., lēmums ir noraidīts vai pieņemts. Pieņemot, ka c_j ir j-to investīciju ieguldījumi un a_{ij} ir kāda i-tā resursa daudzums, piemēram, nauda vai darbaspēks, kas izmantoti j-ām investīcijām, problēmu var formulēt šādi:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1; \dots ; m, \\ x_j = 0 \text{ vai } x_j = 1, \ j = 1; \dots ; n. \end{cases}$$

Mērķis ir maksimizēt visu investīciju kopējos ieguldījumus, nepārsniedzot kāda resursa (ierobežoto) daudzumu b_i. Kapitāla – budžeta problēmā svarīgs faktors ir naudas plūsmas ierobežojumi. Šajā gadījumā ierobežojumi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1; \dots ; m$$

atspoguļo pieaugošo naudas atlikumu katra perioda laikā. Koeficienti a_{ij} ataino tīro naudas plūsmu no investīcijām j laika periodā i. Ja jāiegulda papildu līdzekļi periodā i, tad $a_{ij} > 0$, bet, ja investīcijas dod ienākumus periodā i, tad $a_{ij} < 0$. Labajā pusē esošie koeficienti b_i ataino pieaugošās naudas plūsmas, kas atkarīgas no kādiem ārējiem apstākļiem. Ja papildu līdzekļi pieejami periodā i, tad $b_i > 0$, bet ja līdzekļi ir izņemti no apgrozības periodā i, tad $b_i < 0$. Šie ierobežojumi norāda to, ka ieguldāmajiem līdzekļiem jābūt mazākiem vai vienādiem ar līdzekļiem no iepriekšējām investīcijām plus ārējiem pieejamajiem līdzekļiem (vai mīnus no apgrozības izņemtiem ārējiem līdzekļiem).

2.1.2. "Sagriešanas" uzdevums

No kāda materiāla ([7]) nepieciešams izgatavot m dažādus izstrādājumus, attiecīgi $b_1; \dots ; b_m$. Katru materiāla vienību var sagriezt n dažādos veidos, turklāt j-tā veida ($j = 1; \dots ; n$) izmantošana dod i-tā izstrādājuma a_{ij} vienības. Uzdevuma mērķis ir atrast tādu plānu, kas nodrošina maksimālu izstrādājuma vienību skaitu.

Ar x_j apzīmē materiāla vienību daudzumu, kas jāsagriež, izmantojot j-to veidu. Mainīgajiem x_j jāapmierina šādi uzdevuma nosacījumi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ = \ b_i x, \ i = 1; \dots ; m, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j = a, \\ x_j \geq 0, \\ x_j \in Z, \ j = 1; \dots ; n, \end{cases}$$

kur a – kopējais materiāla vienību skaits, x – izstrādājumu skaits. Uzdevums ir maksimizēt x pie dotajiem nosacījumiem.

2.1.3. Noliktavas uzdevums

Sadales modeļu sistēmās ([1]) nepieciešams atrast kompromisu starp transporta izdevumiem un sadales centru ekspluatācijas izmaksām. Piemēram, pieņemsim, ka pārdevējam jāizlemj, kuras no n noliktavām varētu izmantot, lai apmierinātu m klientu vajadzības. Svarīgi ir izlemt, kuras noliktavas izvēlēties darbam un cik daudz kravas jāpiegādā no jebkuras noliktavas jebkuram klientam. Pieņemsim, ka:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{ja noliktava } i \text{ ir atvērta,} \\ 0, & \text{ja noliktava } i \text{ ir slēgta,} \end{cases}$$

x_{ij} – kravas daudzums, kas jāpiegādā no noliktavas i klientam j;

f_i – fiksēta noliktavas i darbības cena, ja noliktava i ir atvērta (piemēram, noliktavas nomas cena);

c_{ij} – katras darbības cena noliktavā i plus kravas piegādes no noliktavas i klientam j izmaksas.

Modelim ir divi ierobežojumi:

- katra klienta pieprasījums d_j, kas jāizpilda katrai noliktavai;
- krava, kas var tikt piegādāta no kādas noliktavas, ja tā ir atvērta.

Modelis ir minimizācijas uzdevums:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j, \ j = 1; \dots; n, \quad (*) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - y_i \left(\sum_{j=1}^{n} d_j \right) \leq 0, \quad (**) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1; \dots; m), \ j = 1; \dots; n, \\ y_i = 0 \text{ vai } y_i = 1, \ i = 1; \dots; m. \end{cases}$$

Mērķa funkcija ietver transportēšanas un mainīgās uzglabāšanas izmaksas, kā arī fiksētās noliktavu ekspluatācijas izmaksas. Ierobežojumi (*) nosaka katra klienta pieprasījumu. Mainīgo x_{ij} summa ierobežojumiem (**) ir kravas daudzums, kas transportēts no noliktavas i. Gadījumā, kad noliktava ir slēgta, $y_i = 0$ un ierobežojumi norāda, ka nekas nevar tikt transportēts no šīs noliktavas. Citā gadījumā, kad noliktava darbojas un $y_i = 1$, kravas daudzums, kas jāpārved no noliktavas i, nevar būt lielāks par kopējo pieprasījumu.

3. SAZAROŠANĀS UN ROBEŽU METODE

Sazarošanās un robežu metodi ([5]) lietderīgi izmantot, ja nezināmo skaits ir neliels vai ja visiem nezināmiem netiek prasīts atrisinājuma veselos skaitļos nosacījums. Sazarošanās un robežu metodi raksturo veselo nezināmo īpašu robežu noteikšana un tām atbilstošu lineārās programmēšanas uzdevumu atrisināšana.

Pieņemsim, ka dots lineārās programmēšanas uzdevums veselos skaitļos

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = b_i, \ (*) \\ x_j \geq 0, \ (**) \\ x_j - veseli\ skaitļi, \ j = 1; 2; \dots; n. \ (***) \end{cases}$$

Pieņemsim, ka dotas veselo nezināmo optimālo vērtību apakšējās un augšējās robežas

$$\alpha_j \leq x_j \leq \beta_j \ ,$$

kur α_j un β_j ir veseli skaitļi, $j = 1; 2; \dots; n$.

Tiks aplūkots, kādā veidā sazarošanās un robežu metodē precizēt nezināmo pieļaujamo vērtību robežas. Pieņemsim, ka atrasts uzdevuma (3.1) ar nosacījumiem (*) un (**) optimālais plāns x' un tā koordinātas x'_k vērtību izsaka daļskaitlis. Koordinātas x'_k veselo daļu apzīmē ar $[x'_k]$. Tiek sastādīti divi jauni lineārās programmēšanas uzdevumi, kur vienā no tiem x_k vērtību apakšējā robeža ir $[x'_k] + 1$, bet otrā x_k vērtību augšējā robeža ir $[x'_k]$. No uzdevuma (2.14.) ar nosacījumiem (*), (**) un (***) jaunie uzdevumi atšķiras ar to, ka vienā no tiem ierobežojums $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k$ aizvietots ar $[x'_k] + 1 \leq x_k \leq \beta_k$, bet otrā ierobežojums $\alpha_k \leq x_k \leq \beta_k$ aizvietots ar $\alpha_k \leq x_k \leq [x'_k]$.

Tātad no pirmā LPU ir atzarojušies divi jauni lineārās programmēšanas uzdevumi, kuros vienam nezināmajam ir izmainītas pieļaujamo vērtību robežas. Atrisinot katru no šiem uzdevumiem, konstatē vienu no gadījumiem:

1) optimālais plāns nesastāv no veseliem skaitļiem;
2) optimālais plāns sastāv no veseliem skaitļiem;
3) uzdevumam nav atrisinājuma.

Tikai pirmajā gadījumā iespējama jaunu LPU atzarošanās iepriekš norādītā veidā. Otrajā in trešajā gadījumā attiecīgais atzarojums beidzas. Ja abu uzdevumu optimālie plāni satur (tikai) veselus skaitļus, tad tas plāns, kam ir lielāka mērķa funkcijas vērtība, ir dotā lineārās programmēšanas uzdevuma veselos skaitļos optimālais plāns, jo abi uzdevumi aptver visas pieļaujamās nezināmo vērtības. Ja abu uzdevumu optimālie plāni nesatur veselus skaitļus, tad veidojas četri jauni uzdevumi utt.

3.1. Risināmo LPU saraksts

Sazarošanās un robežu metodes algoritms nosaka, kādā secībā jāsastāda lineārās programmēšanas uzdevumi un jānovērtē to atrisinājumi, lai galīga skaita iterāciju rezultātā atrastu LPU veselos skaitļos optimālo plānu, ja tāds eksistē. Katrā iterācijā jāatrisina viens LPU, ko risina, izmantojot simpleksa metodi. Par **risināmo lineārās programmēšanas uzdevumu sarakstu** sauc LPU kopu, no kuras izvēlas attiecīgajā iterācijā risināmo uzdevumu. Piemēram, 1. iterācijā sarakstā ir viens uzdevums: (3.1) ar nosacījumiem (*), (**) un (***). Turpmākajās iterācijās saraksts mainās, jo atrisinātie uzdevumi tajā vairs neietilpst, bet to vietā ieiet jaunizveidotie LPU.

Lai samazinātu risināmo uzdevumu skaitu, katrā iterācijā tiek noteikta mērķa funkcijas (3.1) maksimālās vērtības apakšējā robeža f_p.

3.2. LPU veselos skaitļos risināšanas soļi

Lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos risināšana tiek sākta ar mērķa funkcijas maksimālās vērtības apakšējās robežas f_1 noteikšanu. Ja izdodas noteikt pietiekami lielu robežu, tad ievērojami samazinās iterāciju skaits. Sazarošanās un robežu metodes algoritma p-tā iterācijā jāizpilda 4 soļi. Katras iterācijas sākumā zināms atrisināmo uzdevumu saraksts un mērķa funkcijas maksimālās vērtības apakšējā robeža f_p.

1) Ja sarakstā nav neviena LPU, tad LPU veselos skaitļos ir atrisināts. Mērķa funkcijas maksimālā vērtība
$$max\, f = f_p .$$
Optimālais plāns ir tas plāns (kas satur tikai veselus skaitļus) x^*, kuram $f(x^*) = f_p$. Pretējā gadījumā jāizvēlas viens no sarakstā ietilpstošiem LPU.
2) Atrisina izvēlēto LPU. Ja uzdevumam nav atrisinājuma vai tā optimālajam plānam x_p mērķa funkcijas vērtība
$$max\, f \le f_p ,$$
tad ņem
$$f_{p+1} = f_p$$
un izpilda 1. soli. Citādi jāizpilda 3. solis.
3) Ja plāns x_p satur tikai veselus skaitļus, tad ņem
$$f_{p+1} = f(x_p)$$

un izpilda 1. soli. Citādi jāizpilda 4. solis.

4) Izvēlas optimālā plāna x_p jebkuru daļveida koordinātu, piemēram, koordinātu x_{kp}. Nosaka tās veselo daļu $[x_{kp}]$ un sastāda divus jaunus LPU, kurus ietver sarakstā. Jaunie uzdevumi no 1. solī izvēlētā uzdevuma atšķiras tikai ar nezināmā x_k pieļaujamo vērtību robežām. Vienā uzdevumā x_k pieļaujamo vērtību apakšējā robeža aizvietota ar $[x_{kp}] + 1$, bet otrā uzdevumā x_k pieļaujamo vērtību augšējā robeža aizvietota ar $[x_{kp}]$. Ņem $f_{p+1} = f_p$ un izpilda 1. soli.

Piemērs 3.2.1.

Atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos, izmantojot sazarošanās un robežu metodi

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1; x_2 \geq 0, \\ x_1; x_2 \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Tā kā dotā uzdevuma mērķa funkcijai ir divas koordinātas, iespējami divi risināšanas veidi – simpleksa metode un uzdevuma ģeometriskā interpretācija. Uzdevums dots normālformā, tāpēc tam ir plāns, kas sastāv no veseliem skaitļiem $x = (0; 0)^T$ un $f_1 = f(x) = 0$. Risināmo uzdevumu sarakstā ir 1. uzdevums.

1. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

<u>1. iterācija</u>.

1. solis. Sarakstā ir tikai viens uzdevums – 1. uzdevums.

2. solis. Atrisina 1. uzdevumu grafiski (3.1. attēls) un, izmantojot simpleksa metodi. Simpleksa tabulas elementus atrod, izmantojot *taisnstūra likuma* formulu (1.11). Izmanto LPU kanonisko formu.

3.1. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^0
x_3	10	7	1	0	40
x_4	1	1	0	1	5
f	-16	-12	0	0	0

$x(T^0) = (0; 0)^T$; $f(x^0) = 0$

3.2. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^1
x_1	1	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	4
x_4	0	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{10}$	1	1
f	0	$-\frac{8}{10}$	$1\frac{6}{10}$	0	64

$x(T^1) = (4; 0)^T$; $f(x^1) = 64$

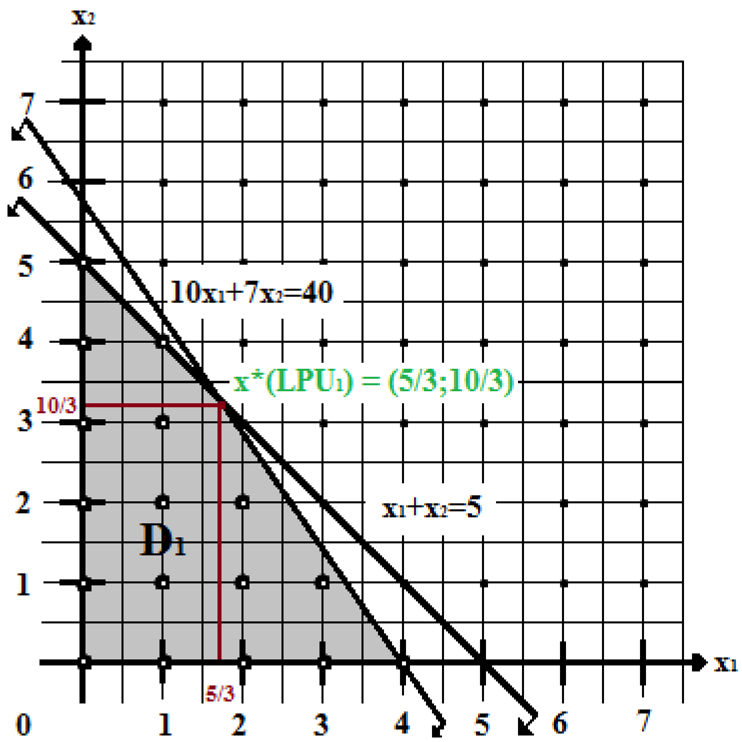
3.3. tabula

Simpleksa tabula T^2

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$
f	0	0	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{x_1^* = (x_1; x_2) = \left(1\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{f(x_1^*) = 66\frac{2}{3} > f_1 = 0}$$



3.1.att. **1.uzdevuma grafiska atrisināšana**

Tā kā plāns x_1^* nesatur veselus skaitļus, seko 4. solis.

4. solis. Optimālajam plānam ir divas daļveida koordinātas – $1\frac{2}{3}$ un $3\frac{1}{3}$. Izvēlamies koordinātu $x_1 = 1\frac{2}{3}$. Tad $[x_1] = 1$ un $[x_1] + 1 = 2$. Izmainot 1. uzdevuma nezināmā x_1 vērtību robežas, iegūst divus jaunus uzdevumus: 2. uzdevumā x_1 vērtību augšējā robeža ir $[x_1] = 1$, bet 3. uzdevumā x_1 vērtību apakšējā robeža ir $[x_1] + 1 = 2$. Tātad jāatrisina 2. uzdevums un 3. uzdevums.

Mērķa funkcijas maksimālās vērtības apakšējā robeža $f_2 = f_1 = 0$.

<u>2.iterācija.</u>

1. solis. No risināmo uzdevumu saraksta izvēlas 2. uzdevumu.

2. solis. Atrisina 2. uzdevumu grafiski (3.2. attēls) un, izmantojot simpleksa metodi.

2. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 1, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.4. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^0
x_3	10	7	1	0	0	40
x_4	1	1	0	1	0	5
x_5	1	0	0	0	1	1
f	-16	-12	0	0	0	0

$x(T^0) = (0; 0)^T;\ f(x^0) = 0$

3.5. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^1
x_3	0	7	1	0	-10	30
x_4	0	1	0	1	-1	4
x_1	1	0	0	0	1	1
f	0	-12	0	0	16	16

$x(T^1) = (1; 0)^T;\ f(x^1) = 16$

3.6. tabula

Simpleksa tabula T^2

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^2
x_3	0	0	1	-7	-3	2
x_2	0	1	0	1	-1	4
x_1	1	0	0	0	1	1
f	0	0	0	12	4	64

$\boldsymbol{x_2^* = (x_1;\ x_2) = (1;\ 4)}$

$\boldsymbol{f(x_2^*)\ =\ 64 > f_2 = 0}$

Optimālais plāns x_2^* sastāv no veseliem skaitļiem. Tad, pēc 3. soļa, $f_3 = f(x_2^*) = 64$**.** Seko nākošā iterācija.

3.iterācija.

1. solis. Sarakstā ir 3. uzdevums.

2. solis. Atrisina 3. uzdevumu grafiski (3.2. attēls) un, izmantojot simpleksa metodi.

3. uzdevums

$$f(x_1; x_2)\ =\ 16x_1\ +\ 12x_2\ \rightarrow\ max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 2, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.7. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^0
x_3	10	7	1	0	0	40
x_4	1	1	0	1	0	5
x_5	-1	0	0	0	1	-2
f	-16	-12	0	0	0	0

$x(T^0) = (0; 0)^T;\ f(x^0) = 0$

3.8. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^1
x_3	0	7	1	0	10	20
x_4	0	1	0	1	1	3
x_1	1	0	0	0	-1	2
f	0	-12	0	0	-16	32

$x(T^1) = (2; 0)^T;\ f(x^1) = 32$

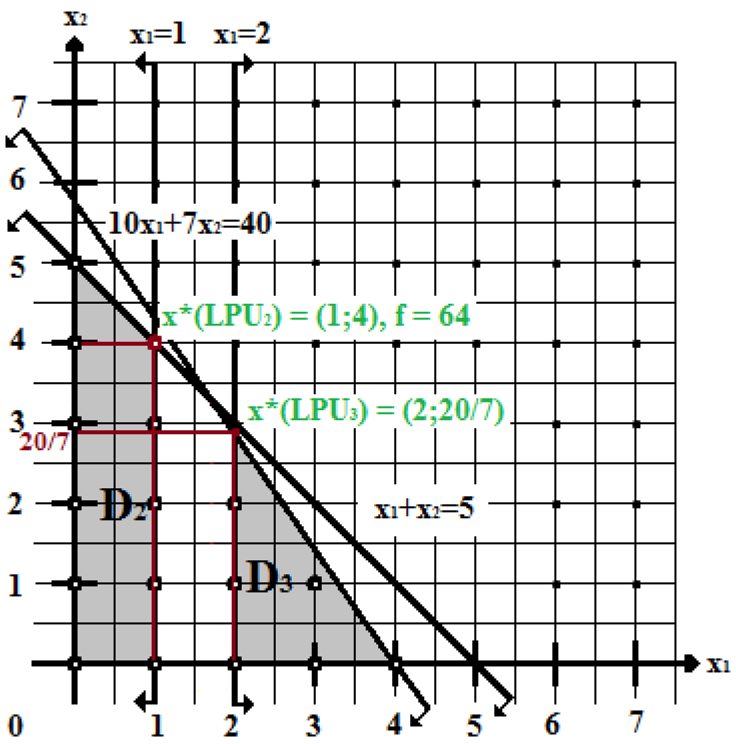
3.9. tabula

Simpleksa tabula T^2

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^2
x_2	0	1	$\frac{1}{7}$	0	$1\frac{3}{7}$	$2\frac{6}{7}$
x_4	0	0	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_1	1	0	0	0	-1	2
f	0	0	$1\frac{5}{7}$	0	$1\frac{1}{7}$	$66\frac{2}{7}$

$$x_3^* = (x_1; x_2) = \left(2;\ 2\frac{6}{7}\right)$$

$$f(x_3^*) = 66\frac{2}{7}$$



3.2.att. **2. un 3. uzdevuma grafiska atrisināšana**

Tā kā plāns x_3^* nesatur tikai veselus skaitļus, seko 4. solis.

4. solis. Optimālajam plānam x_3^* ir daļveida koordināta – $x_2 = 2\frac{6}{7}$. Tad $[x_2] = 2$ un $[x_2] + 1 = 3$. Izmainot 3. uzdevuma nezināmā x_2 vērtību robežas, iegūst divus jaunus uzdevumus: 4.

uzdevumā x_2 vērtību augšējā robeža ir $[x_2] = 2$, bet 5. uzdevumā x_2 vērtību apakšējā robeža ir $[x_2] + 1 = 3$. Tātad jāatrisina 4. uzdevums un 5. uzdevums.

4.iterācija.

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta, kurā ir 4. un 5. uzdevums, izvēlas 4. uzdevumu.

4. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumu:

$\boldsymbol{x_4^* = (x_1;\ x_2) = \left(2\frac{6}{10};\ 2\right)}$,
$\boldsymbol{f(x_4^*) = 65{,}6}$.

Tā kā plāns x_4^* nesatur tikai veselus skaitļus, seko 4. solis.
4. solis. Optimālajam plānam x_4^* ir daļveida koordināta – $x_1 = 2\frac{6}{10}$. Tad $[x_1] = 2$ un $[x_1] + 1 = 3$. Izmainot 4. uzdevuma nezināmā x_1 vērtību robežas, iegūst divus jaunus uzdevumus: 6. uzdevumā x_1 vērtību augšējā robeža ir $[x_1] = 2$, bet 7. uzdevumā x_1 vērtību apakšējā robeža ir $[x_1] + 1 = 3$. Tātad jāatrisina 6. uzdevums un 7. uzdevums. Atrisināmo uzdevumu sarakstā ir 5., 6. un 7. uzdevums.

5. iterācija.

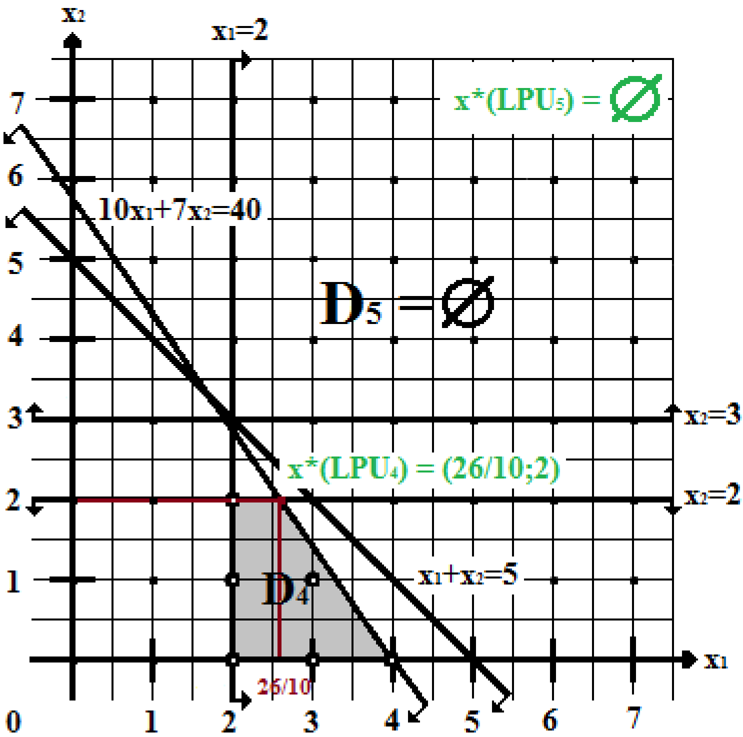
1. solis. Izvēlas 5. uzdevumu.

5. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 2, \\ x_2 \geq 3, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, konstatē, ka 5. uzdevumam nav atrisinājuma. Tāpēc $f_6 = f_5$. Seko nākošā iterācija. Grafiski 4. un 5. uzdevums izskatās šādi (3.3. attēls).



3.3.att. **4. un 5. uzdevuma grafiska atrisināšana**

6. iterācija.

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta, kurā ir 6. un 7. uzdevums, izvēlas 6. uzdevumu.

6. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 2, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumu:

$\boldsymbol{x_6^* = (x_1;\ x_2) = (2;\ 2)},$

$\boldsymbol{f(x_6^*) = 56}.$

3. solis. Tā kā plāns x_6^* satur tikai veselus skaitļus, $f_7 = f(x_6^*)$ un seko nākošā iterācija.

7. iterācija.

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta izvēlas 7. uzdevumu.

7. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

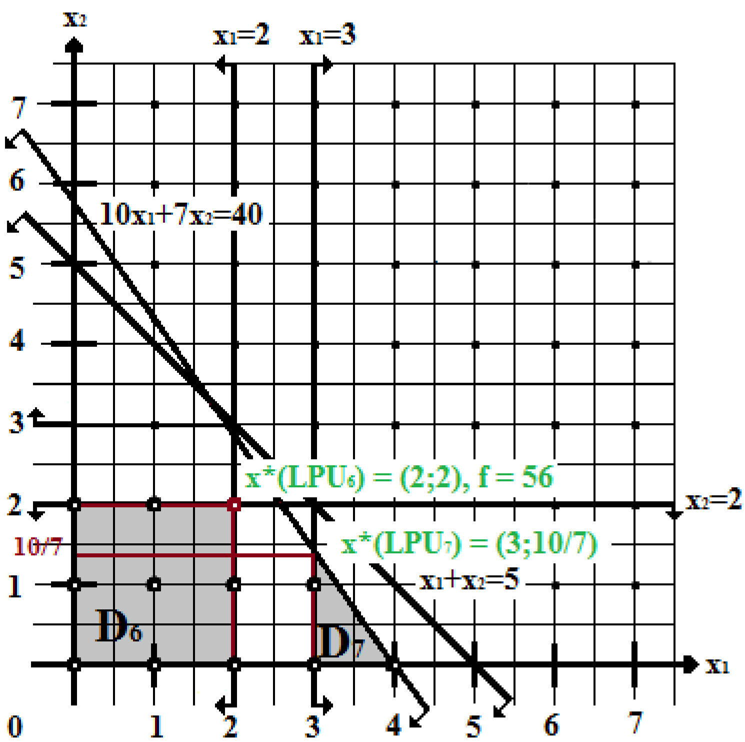
$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 3, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumu:

$\boldsymbol{x_7^* = (x_1; x_2) = \left(3;\ 1\frac{3}{7}\right)}$,

$\boldsymbol{f(x_7^*) = 65{,}14}$.

Grafiski 6. un 7. uzdevums izskatās šādi (3.4. attēls).



3.4.att. **6. un 7. uzdevuma grafiska atrisināšana**

Tā kā plāns x_7^* nesatur tikai veselus skaitļus, seko 4. solis.

4. solis. Optimālajam plānam x_7^* ir daļveida koordināta – $x_2 = 1\frac{3}{7}$. Tad $[x_2] = 1$ un $[x_2] + 1 = 2$. Izmainot 7. uzdevuma nezināmā x_2 vērtību robežas, iegūst divus jaunus uzdevumus: 8. uzdevumā x_1 vērtību augšējā robeža ir $[x_2] = 1$, bet 9. uzdevumā x_2 vērtību apakšējā robeža ir $[x_2] + 1 = 2$. Tātad jāatrisina 8. uzdevums un 9. uzdevums. Atrisināmo uzdevumu sarakstā ir 8. un 9. uzdevums.

<u>8. iterācija.</u>

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta izvēlas 8. uzdevumu.

8. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \geq 3, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumu:

$\boldsymbol{x_8^*} = (\boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{x_2}) = \left(\mathbf{3\frac{3}{10}};\ \mathbf{1}\right)$,

$\boldsymbol{f(x_8^*)} = \mathbf{64,8}$.

Tā kā plāns $\boldsymbol{x_8^*}$ nesatur tikai veselus skaitļus, seko 4. solis.

4. solis. Optimālajam plānam x_8^* ir daļveida koordināta – $x_1 = 3\frac{3}{10}$. Tad $[x_1] = 3$ un $[x_1] + 1 = 4$. Izmainot 8. uzdevuma nezināmā x_2 vērtību robežas, iegūst divus jaunus uzdevumus: 10. uzdevumā x_2 vērtību augšējā robeža ir $[x_1] = 3$, bet 11. uzdevumā x_2 vērtību apakšējā robeža ir $[x_1] + 1 = 4$. Tātad jāatrisina 10. uzdevums un 11. uzdevums. Atrisināmo uzdevumu sarakstā ir 9., 10. un 11. uzdevums.

<u>9. iterācija.</u>

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta, kurā ir 9., 10. un 11. uzdevums, izvēlas 9. uzdevumu.

9. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 3, \\ x_2 \geq 2, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, konstatē, ka 9. uzdevumam nav atrisinājuma. Tāpēc $f_{10} = f_9$. Seko nākošā iterācija.

<u>10. iterācija.</u>

1. solis. No atrisināmo uzdevumu saraksta, kurā ir 10. un 11. uzdevums, izvēlas 10. uzdevumu.

10. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

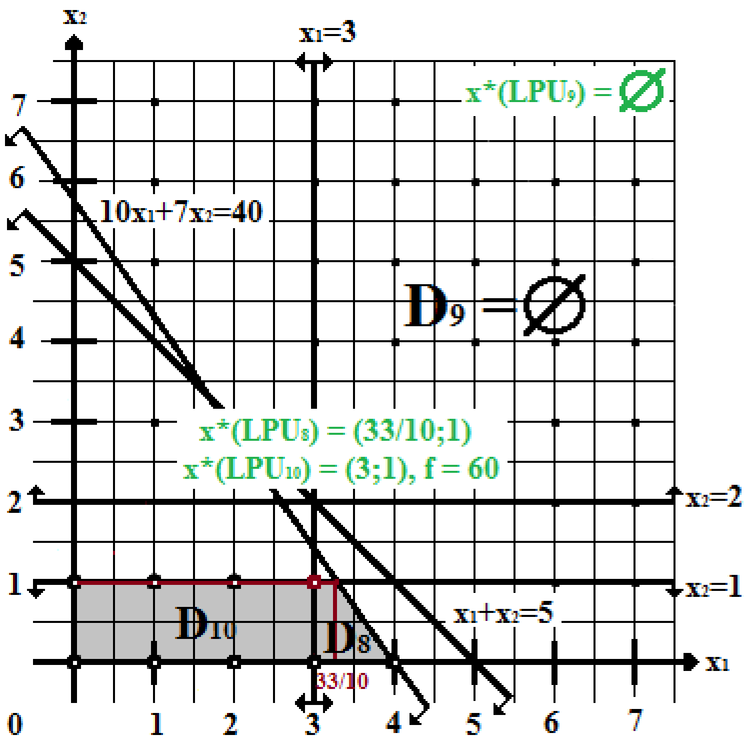
$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumus:

$\boldsymbol{x_{10}^* = (x_1;\ x_2) = (3;\ 1)}$,

$\boldsymbol{f(x_{10}^*) = 60}$.

Grafiski 8., 9. un 10. uzdevums izskatās šādi (3.5. attēls).



3.5.att. **8., 9. un 10. uzdevuma grafiska atrisināšana**

3. solis. Tā kā plāns x_{10}^* satur tikai veselus skaitļus, $f_{11} = f(x_{10}^*)$ un seko nākošā iterācija.

<u>11. iterācija.</u>

1. solis. Uzdevumu sarakstā ir tikai 11. uzdevums.

11. uzdevums

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \rightarrow max$$

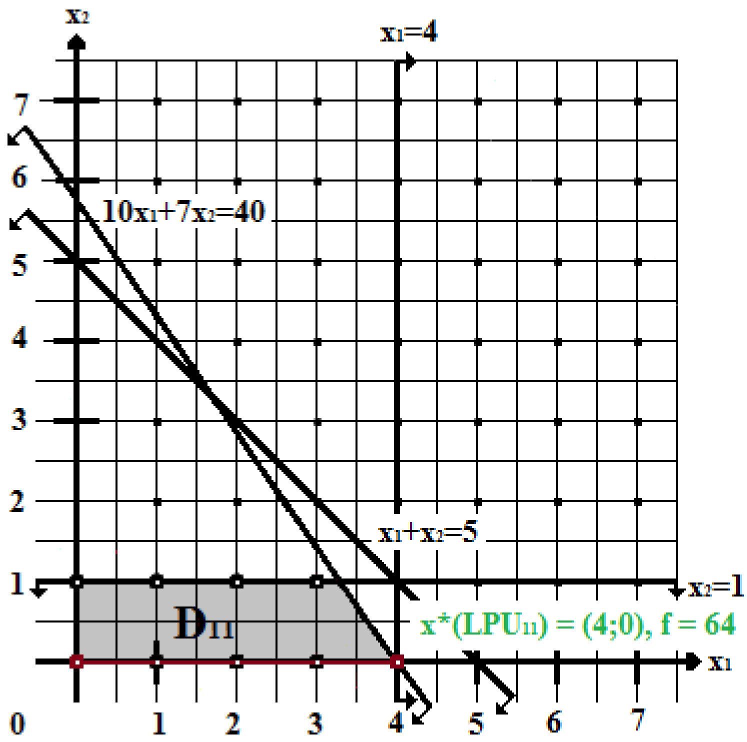
$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \leq 40, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_2 \leq 1, \\ x_1 \geq 4, \\ x_1; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. solis. Lietojot simpleksa metodi, iegūst atrisinājumus:

$\boldsymbol{x_{11}^* = (x_1;\ x_2) = (4;\ 0)}$,

$\boldsymbol{f(x_{11}^*) = 64}$.

Grafiski 11. uzdevums izskatās šādi (3.6. attēls).



3.6.att. **11.uzdevuma grafiska atrisināšana**

3. solis. Tā kā plāns x_{10}^* satur tikai veselus skaitļus, $f_{12} = f(x_{11}^*) = 68$ un seko nākošā iterācija.

<u>12. iterācija.</u>

1. solis. Lineārās programmēšanas uzdevumu sarakstā nav neviena uzdevuma. Dotajam diskrētās programmēšanas uzdevumam ir divi atrisinājumi:

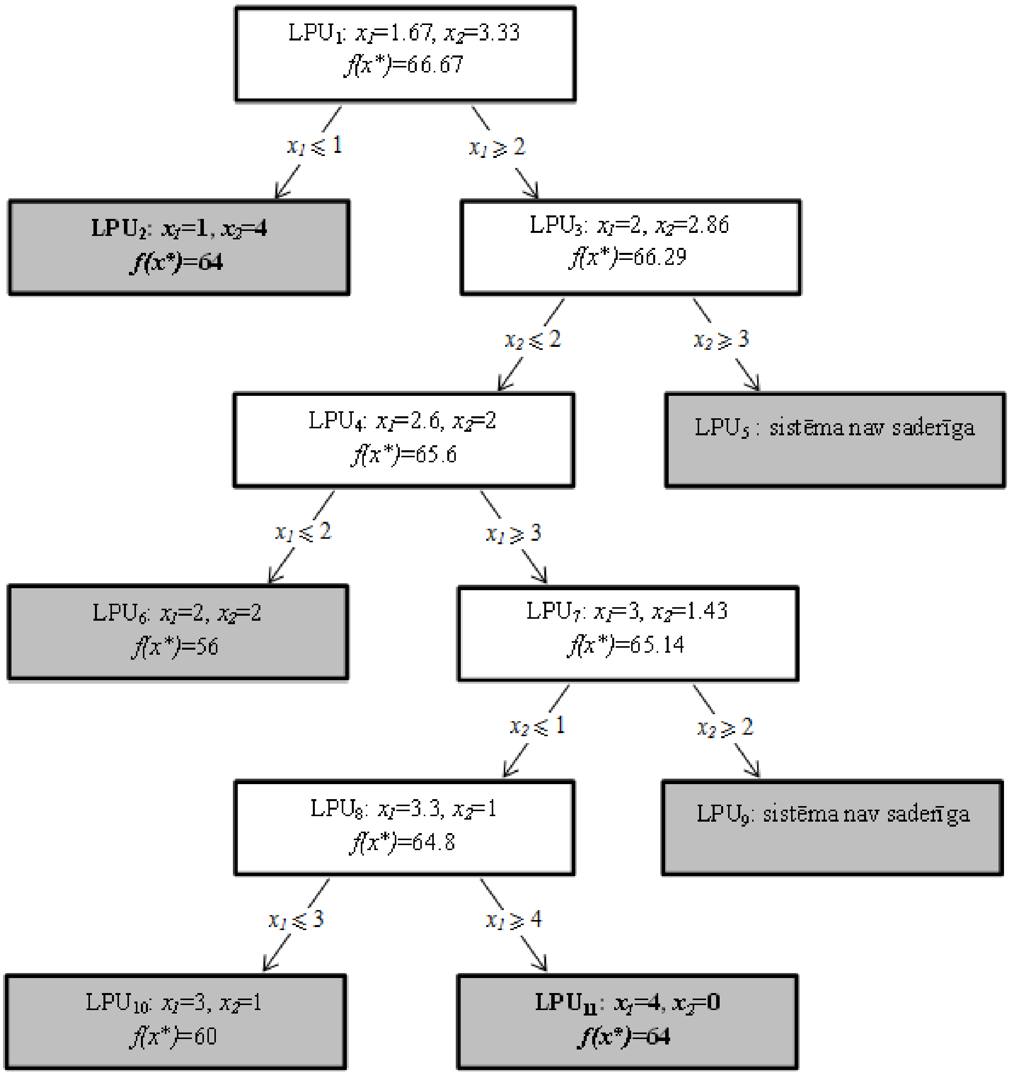
$$\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{1};\ \mathbf{4})^{\boldsymbol{T}};\ max\, f = 64$$

un

$$\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{4};\ \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}};\ max\, f = 64.$$

Diskrētās programmēšanas uzdevuma optimālais plāns x^* ir 2. iterācijā atrastais 2. uzdevuma optimālais plāns un 11. iterācijā atrastais 11. uzdevuma optimālais plāns, jo $f_{12} = f(x_{11}^*) = f_3 = f(x_2^*) = 64$. Abiem uzdevumiem ir vienāda mērķa funkcijas vērtība.

Aplūkojamā uzdevuma rezultātus iespējams parādīt ar šādu shēmu (3.7. attēls), ko sauc par *uzskaitījuma koku* (angliski „*enumeration tree*”). [6]



3.7.att. **LPU sazarošanās un robežu metodes *uzskaitījuma koks***

4. GOMORI METODE

Gomori (*R. E. Gomory*) metode ([4]) ir LPU veselos skaitļos risināšanas metode, kuru lietojot pēc galīga skaita iterācijām atrod optimālo plānu vai pārliecinās, ka uzdevumam nav atrisinājuma.

Pieņemsim, ka dots lineārās programmēšanas uzdevums veselos skaitļos

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1; \dots; m, & (*) \\ x_j \geq 0, & (**) \\ x_j \in Z, j = 1; \dots; n, & (***) \end{cases}$$

kura plānu kopu apzīmē ar D. Vispirms atrisina lineārās programmēšanas uzdevumu bez nosacījuma par veseliem skaitļiem (***). Ja atrastais optimālais plāns x apmierina veselo skaitļu nosacījumu, tad LPU veselos skaitļos ir atrisināts, bet, ja plānam x kaut viena koordināta ir daļskaitlis, tad sastāda papildnosacījumu, kuru pievieno uzdevuma (4.1) ar nosacījumiem (*) un (**) nosacījumu sistēmai. Plānu kopu, kas atbilst jaunā uzdevuma nosacījumu sistēmai, apzīmē ar D_1. Jauno uzdevumu izdevīgāk risināt, lietojot duālo simpleksa metodi. Ja jaunā uzdevuma plāns x_1 satur tikai veselus skaitļus, tad dotais uzdevums ir atrisināts. Pretējā gadījumā sastāda nākošo papildnosacījumu, kas no kopas D_1 atdala apakškopu, kura nesatur plānus veselos skaitļos. Risināšanas process turpinās, kamēr kādā iterācijā atrod optimālo plānu, kas satur tikai veselus skaitļus, vai pārliecinās, ka uzdevumam nav atrisinājuma.

4.1. Papildnosacījuma sastādīšana

Pieņemsim, ka plānam

$$x = (x_1; x_2; \dots; x_m; 0; \dots; 0)^T$$

vismaz viena koordināta, piemēram, x_k, ir daļskaitlis. No simpleksa tabulas, kura atbilst plānam x, var uzrakstīt nosacījumu sistēmu (*) formā

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i \,. \tag{4.2}$$

Saskaņā ar apzīmējumiem, kas ievesti vienādībās (4.2), optimālā plāna koordinātas $x_i = b'_i$, pie tam b'_k ir daļskaitlis. Ja LPU veselos skaitļos (2.25) ar nosacījumiem (*), (**) un (***)

eksistē optimāls plāns, tad katrs plāns veselos skaitļos apmierina pārveidoto nosacījumu sistēmu (4.2) un šīs sistēmas k-to vienādību

$$x_k + \sum_{j=m+1}^{n} a'_{kj} x_j = b'_k \ . \tag{4.3}$$

Izmantojot definīcijas par skaitļa a veselo daļu $[a]$ un daļveida daļu $\{a\}$, vienādību (4.3) var pārveidot šādi:

$$x_k + \sum_{j=m+1}^{n} ([a'_{kj}] + \{a'_{kj}\})\, x_j = [b'_k] + \{b'_k\} \tag{4.4}$$

jeb

$$x_k + \sum_{j=m+1}^{n} [a'_{kj}] x_j - [b'_k] = \{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \ . \tag{4.5}$$

Tā kā (4.5) kreisā puse katram plānam veselos skaitļos ir vesels skaitlis, tad arī labās puses vērtībai jābūt veselam skaitlim, ko apzīmē ar $[a_k]$. Tad

$$\{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j = [a_k] \ .$$

Pārliecinās, ka $[a_k] \leq 0$. Pieņemot pretējo, t.i., ka $[a_k] \geq 1$, no (4.4) iegūst nevienādību

$$\{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j \geq 1$$

jeb

$$\{b'_k\} \geq \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} x_j + 1 \ . \tag{4.6}$$

Tā kā $0 \leq \{a'_{kj}\} < 1$, tad no (4.6) izriet, ka $\{a'_{kj}\} \geq 1$, kas ir pretrunā ar definīciju par skaitļa a daļveida daļu. Tātad pieņēmums, ka $[a_k] \ \geq 1$, ir nepareizs un var apgalvot, ka $[a_k] \leq 0$.

Rezultātā no (4.4) iegūst nevienādību

$$\{b'_k\} - \sum_{j=m+1}^{n} \{a'_{kj}\} \leq 0. \tag{4.7}$$

Nevienādība (4.7) ir papildu nosacījums, kas jāpievieno sistēmai (*) – (**). Atbilstoši nevienādībai (4.7) no plānu kopas D atdala apakškopu, kura nesatur plānus veselos skaitļos. Jaunā plānu kopa D_1 nesatur optimālo plānu x. Plāns x neapmierina papildu nosacījumu (4.7), tāpēc ka atbilstošā nevienādība $\{b'_k\} \leq 0$ ir pretrunā ar doto, jo pēc dotā $\{b'_k\}$ ir daļskaitļa b'_k daļveida daļa, t. i., $0 < \{b'_k\} < 1$.

Ievietojot nenegatīvu palīgnezināmo $x_{n+1} \geq 0$, (4.7) pārveido par šādu vienādību:

$$-\{b_k'\} = -\sum_{j=m+1}^{n}\{a_{kj}'\} + x_{n+1} \ . \qquad (4.8)$$

Tālākā uzdevuma risināšanas procesā vienādība (4.8) jāpievieno nosacījumu sistēmai (*) – (**) un jāatrod optimālais plāns šādam uzdevumam:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,, \\ -\sum_{j=m+1}^{n} \{a_{kj}'\} x_j + x_{n+1} = -\{b_k'\}, \\ x_j \geq 0; j = 1; \dots ; n+1. \end{cases}$$

Izmantojot duālo simpleksa metodi, atrod jaunā uzdevuma optimālo plānu x_1. Uzdevuma risināšana apskatītajā veidā turpinās, kamēr atrod optimālo plānu x*, vai pārliecinās, ka uzdevumam nav atrisinājuma.

Piemērs 4.1. Atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos:

$$f \ = \ 3x_1 + \ 2x_2 \ \to \ max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 6, \\ x_1; x_2 \geq 0, \\ x_1; x_2 \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Uzdevums dots normālformā. Tātad nepieciešams pāriet uz kanonisko formu. Papildus pievieno nezināmos x_3 un x_4:

$$f \ = \ 3x_1 + \ 2x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 4x_2 + \qquad x_4 = 6 \\ x_1; \dots ; x_4 \geq 0 \\ x_1; \dots ; x_4 \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Uzdevumu atrisina bez nosacījuma par atrisinājumu veselos skaitļos ar simpleksa metodi.

4.1. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^0
x_3	2	1	1	0	8
x_4	1	4	0	1	6
f	-3	-2	0	0	0

$x(T^0) = (0; 0)^T;\ f(x^0) = 0$

4.2. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^1
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	4
x_4	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	2
f	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	12

$x(T^1) = (4; 0)^T;\ f(x^0) = 12$

4.3. tabula

Simpleksa tabula T^2

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^2
x_1	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{26}{7}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
f	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{86}{7}$

$x(T^2) = \left(\frac{26}{7}; \frac{4}{7}\right)^T;\ f(x^0) = \frac{86}{7}$

No tabulas T^2 atrod optimālo plānu $x = \left(\frac{26}{7}; \frac{4}{7}; 0; 0\right)^T$. Tā kā plāns x neapmierina veselo skaitļu nosacījumu, tad jāsastāda papildnosacījums vienai no koordinātām. Izvēlamies pirmo koordinātu $x_1 = \frac{26}{7} = 3\frac{5}{7}$, tās daļveida daļa: $\{x_1\} = 5/7$. Papildu nosacījuma sastādīšanai ņem 1. vienādojumu, kas tabulā T^2 ierakstīts formā

$$\frac{26}{7} = x_1 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4.$$

Nosakot vienādojuma koeficientu un brīvā locekļa daļveida daļu, saskaņā ar nevienādību (4.7) iegūst papildnosacījumu:

$$\frac{5}{7} - \left(\frac{4}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4\right) \leq 0.$$

Ievedot palīgnezināmo $x_5 \geq 0$:

$$-\frac{5}{7} = -\frac{4}{7}x_3 - \frac{6}{7}x_4 + x_5. \tag{4.9}$$

Sastāda palīguzdevumu, kas redzams 2.14 tabulā.

4.4. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^0
x_1	1	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{26}{7}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{4}{7}$
x_5	0	0	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{6}{7}$	1	$-\frac{5}{7}$
f	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{86}{7}$

$$x(T^0) = \left(\frac{26}{7}; \frac{4}{7}; 0; 0; -\frac{5}{7}\right)^T; \; f(x^0) = \frac{86}{7}$$

Risināšanā lieto duālo simpleksa metodi un iegūst 4.5. tabulu.

4.5. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_b^1
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{23}{6}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_4	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$
f	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{73}{6}$

$x(T^1) = \left(\frac{23}{6}; \frac{1}{3}; 0; \frac{5}{6}; 0\right)^T$; $f(x^0) = \frac{86}{7}$

Optimālais plāns $x_1 = \left(\frac{23}{6}; \frac{1}{3}; 0; \frac{5}{6}; 0\right)^T$ neapmierina veselo skaitļu nosacījumu. Tad jāsastāda nākošais papildnosacījums attiecībā uz to pašu pirmo koordinātu: no izteiksmes

$$\frac{23}{6} = x_1 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5$$

rodas jauna rinda

$$-\frac{5}{6} = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{5}{6}x_5 + x_6. \qquad (4.10)$$

Sastāda jaunu palīguzdevumu, kas redzams 4.6. tabulā.

Risināšanā lieto duālo simpleksa metodi, rezultāts redzams 4.7. tabulā.

4.6. tabula

Simpleksa tabula T^2

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_b^2
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{23}{6}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{11}{21}$
x_4	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{5}{6}$
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{5}{6}$	1	$-\frac{5}{6}$
f	0	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{73}{6}$

$x(T^2) = \left(\frac{23}{6}; \frac{11}{21}; 0; \frac{5}{6}; 0; -\frac{5}{6}\right)^T$; $f(x^0) = \frac{86}{7}$

4.7. tabula

Simpleksa tabula T^3

T^3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_1	1	0	$\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	4
x_2	0	1	$-\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	0
x_4	0	0	$\frac{8}{5}$	1	0	$-\frac{7}{5}$	2
x_5	0	0	$\frac{4}{5}$	0	1	$-\frac{6}{5}$	1
f	0	0	0	$\frac{6}{5}$	0	0	12

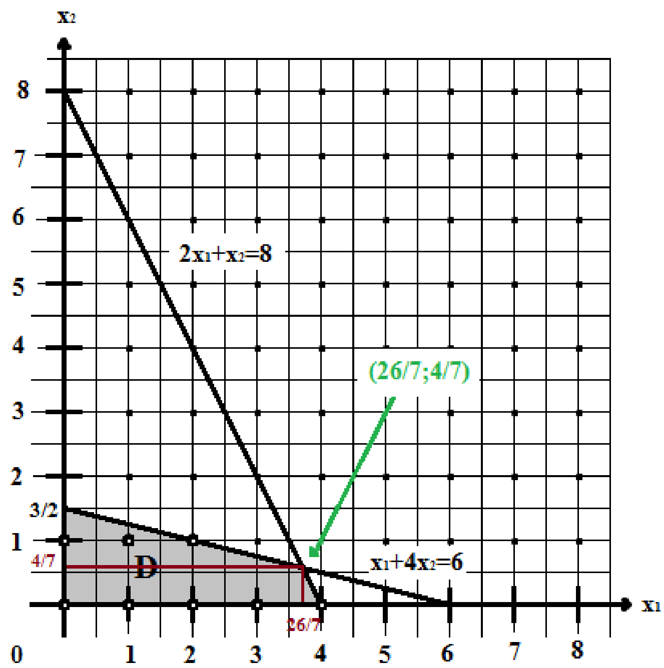
$x(T^3) = (4; 0; 0; 2; 1; 0)^T; \ f(x^0) = 12$

Optimālais plāns $x_2 = (4; 0; 0; 2; 1; 0)^T$ apmierina veselo skaitļu nosacījumu. Tad LPU veselos skaitļos optimālais plāns ir

$$x^* = (4; 0; 0; 2) \text{ un } max\ f = 12 .$$

Dotais sākotnējais uzdevums satur tikai divus mainīgos, tāpēc ir iespējams risinājuma gaitu attēlot arī grafiski. 4.1. attēlā redzams sākotnējais uzdevums ar tā optimālo plānu

$$x = \left(\frac{26}{7}; \frac{4}{7}\right)^T.$$



4.1.att. **Sākotnējais uzdevums**

Uzdevuma optimālo plānu var atrast, aprēķinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

Reizinot sistēmas otro vienādojumu ar 2, iegūst sistēmu

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, & (1) \\ 2x_1 + 8x_2 = 12. & (2) \end{cases}$$

Atņemot iegūst

$$(2) - (1) \Rightarrow 7x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{7}$$

un

$$x_1 = 6 - 4\frac{4}{7} = \frac{42 - 16}{7} = \frac{26}{7}.$$

Taisnes krustojas punktā $\left(\frac{26}{7}; \frac{4}{7}\right)$, kas ir arī uzdevuma optimālais atrisinājums. Tā kā atrisinājums nesatur veselus skaitļus, uzdevumam jāsastāda papildnosacījums, kas tiek pievienots uzdevuma simpleksa tabulai (skat. 4.4. tabulu). Papildnosacījums norāda, cik liels daudzums tiks atšķelts no uzdevuma sākotnējās plānu kopas, tāpēc to sauc arī par Gomori šķēluma nosacījumu.

No uzdevuma sistēmas kanoniskajā formā iegūst, ka

$$x_3 = 8 - 2x_1 - x_2$$

un

$$x_4 = 6 - x_1 - 4x_2,$$

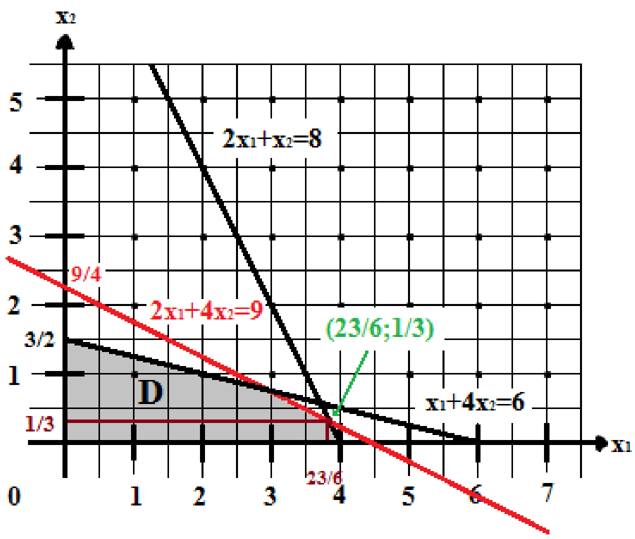
bet no vienādības (4.9) sākotnējā uzdevuma formulējumā izsaka x_5:

$$\begin{aligned} 0 \le x_5 &= \frac{4}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 - \frac{5}{7} = \frac{4}{7}(8 - 2x_1 - x_2) + \frac{6}{7}(6 - x_1 - 4x_2) - \frac{5}{7} \\ &= \frac{32}{7} - \frac{8}{7}x_1 - \frac{4}{7}x_2 + \frac{36}{7} - \frac{6}{7}x_1 - \frac{24}{7}x_2 - \frac{5}{7} = \frac{63}{7} - \frac{14}{7}x_1 - \frac{28}{7}x_2 \\ &= 9 - 2x_1 - 4x_2. \end{aligned}$$

Tātad pirmo atšķēlumu veido nevienādība

$$2x_1 + 4x_2 \le 9$$

4.2. attēlā redzams uzdevums ar pirmo atšķēlumu.



4.2.att. **Uzdevums ar pirmo atšķēlumu**

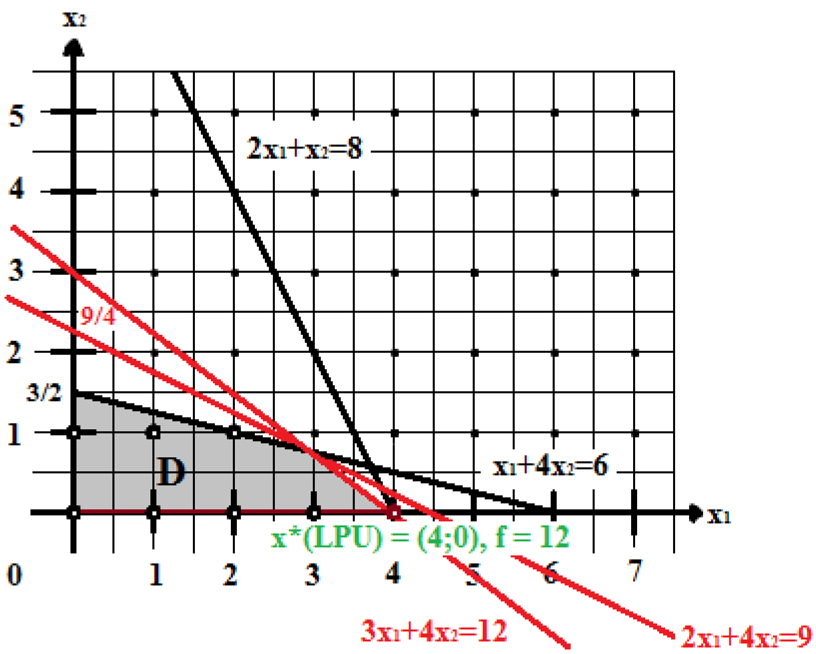
Tā kā iegūtais plāns $x_1 = \left(\frac{23}{6}; \frac{1}{3}; 0; \frac{5}{6}; 0\right)^T$ nesatur tikai veselus skaitļus (skat. 2.14 – 2.15 tabulu), nepieciešams jauns Gomori šķēluma nosacījums. No vienādības (4.10) izsaka x_6:

$$0 \le x_6 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{5}{6}x_5 - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}(8 - 2x_1 - x_2) + \frac{5}{6}(9 - 2x_1 - 4x_2) - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{16}{3} - \frac{4}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{45}{6} - \frac{10}{6}x_1 - \frac{20}{6}x_2 - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{32}{6} - \frac{8}{6}x_1 - \frac{4}{6}x_2 + \frac{45}{6} - \frac{10}{6}x_1 - \frac{20}{6}x_2 - \frac{5}{6} = \frac{72}{6} - \frac{18}{6}x_1 - \frac{24}{6}x_2$$
$$= 12 - 3x_1 - 4x_2.$$

Tātad otro atšķēlumu veido nevienādība

$$3x_1 + 4x_2 \le 12$$

4.3. attēlā redzams uzdevums ar abiem atšķēlumiem.



4.3.att. **Uzdevums ar abiem atšķēlumiem**

4.2. Gomori metodes un sazarošanās un robežu metodes salīdzinājums

Lai salīdzinātu abas lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos risināšanas metodes, tiks izmantots Piemēra 3.2.1 uzdevums.

Piemērs 4.2.

Atrisināt lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos, izmantojot Gomori metodi

$$f(x_1; x_2) = 16x_1 + 12x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 7x_2 \le 40, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1; x_2 \ge 0, \\ x_1; x_2 \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Sākotnējā uzdevuma simpleksa tabulas jau sastādītas 3.2. nodaļā. Tika iegūti šādi rezultāti (3.3. tabula):

4.8.tabula

Beigu simpleksa tabula

T^2	x_1	x_2	x_3	x_4	x_b^2
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$
f	0	0	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$66\frac{2}{3}$

$$\boldsymbol{x_1^* = (x_1; x_2) = \left(1\frac{2}{3};\, 3\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)}$$

$$\boldsymbol{f(x_1^*) = 66\frac{2}{3} > f_1 = 0}$$

No tabulas T^2 atrastais optimālais plāns $x = \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)^T$ neapmierina veselo skaitļu nosacījumu. Tātad jāsastāda papildnosacījums vienai no koordinātām. Izvēlamies pirmo koordinātu $x_1 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$, tās daļveida daļa: $\{x_1\} = \frac{2}{3}$. Papildu nosacījuma sastādīšanai ņem 1. vienādojumu, kas tabulā T^2 ierakstīts formā

$$\frac{5}{3} = x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_4.$$

Nosakot vienādojuma koeficientu un brīvā locekļa daļveida daļu, saskaņā ar nevienādību (4.7) iegūst papildnosacījumu:

$$\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4\right) \le 0.$$

Ievedot palīgnezināmo $x_5 \ge 0$:

$$-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + x_5. \qquad (4.11)$$

Sastāda palīguzdevumu, kas redzams 4.9. tabulā.

4.9. tabula

Simpleksa tabula T^0

T^0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-2\frac{1}{3}$	0	$1\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	0	$3\frac{1}{3}$
x_5	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
f	0	0	$1\frac{1}{3}$	$2\frac{2}{3}$	0	$66\frac{2}{3}$

$x(T^0) = \left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}; 0; 0; -\frac{2}{3}\right)^T$; $f(x^0) = 66\frac{2}{3}$

Risināšanā lieto duālo simpleksa metodi un iegūst 4.10. tabulu.

4.10. tabula

Simpleksa tabula T^1

T^1	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	4
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
x_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-1\frac{1}{2}$	1
f	0	0	0	0	4	64

$x(T^2) = (4; 0; 0; 1; 0)^T$; $f(x^0) = 64$

Optimālais plāns $x_1 = (4; 0)^T$ apmierina veselo skaitļu nosacījumu. Tad LPU veselos skaitļos optimālais plāns ir

$$x^* = (4; 0) \text{ un } max\, f = 64 .$$

Sākotnējā uzdevuma atrisinājums parādīts 3.1. attēlā. Taisnes krustojas punktā $\left(\frac{5}{3}; \frac{10}{3}\right)$, kas ir arī uzdevuma optimālais atrisinājums. Lai atrastu atrisinājumu veselos skaitļos, uzdevumam jāsastāda Gomori šķēluma nosacījums, izmantojot vienādību (4.11).

No uzdevuma sistēmas kanoniskajā formā iegūst, ka

$$x_3 = 40 - 10x_1 - 7x_2$$

un

$$x_4 = 5 - x_1 - x_2,$$

bet no vienādības (4.11) sākotnējā uzdevuma formulējumā izsaka x_5:

$$\begin{aligned} 0 \le x_5 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{3}{3}x_4 - \frac{2}{3} &= \frac{1}{3}(40 - 10x_1 - 7x_2) + \frac{2}{3}(5 - x_1 - x_2) - \frac{2}{3} \\ &= \frac{40}{3} - \frac{10}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{10}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3} = \frac{48}{3} - \frac{12}{3}x_1 - \frac{9}{3}x_2 \\ &= 16 - 4x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

Tātad atšķēlumu veido nevienādība

$$4x_1 + 3x_2 \le 16. \tag{4.12}$$

4.4. attēlā redzams uzdevums ar atšķēlumu.

Tā kā optimālais plāns $x_1 = (4; 0)^T$ apmierina veselo skaitļu nosacījumu, nav nepieciešami jauni Gomori šķēluma nosacījumi. Uzdevumam veikts tikai viens atšķēlums, kuru nosaka nevienādība (4.12).

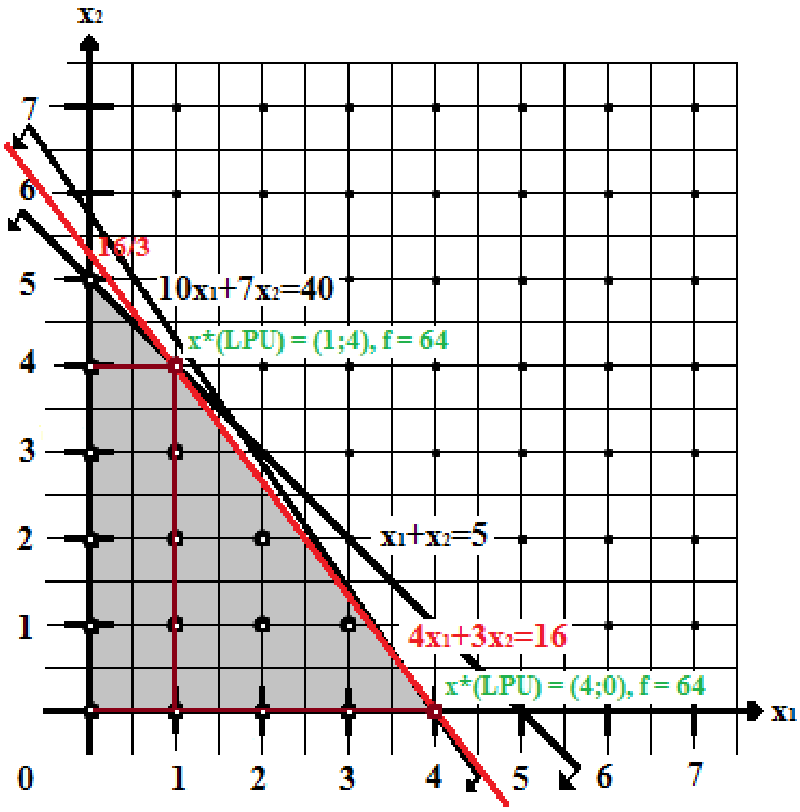
Atrisinot Piemēra 3.2.1 uzdevumu ar sazarošanās un robežu metodi, tika noskaidrots, ka tam ir divi atrisinājumi:

$$\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{1};\ \mathbf{4})^{\boldsymbol{T}};\ max\, f = 64$$

un

$$\boldsymbol{x}^* = (\mathbf{4};\ \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}};\ max\, f = 64.$$

Ar Gomori metodi var atrast tikai vienu atrisinājumu. Grafiski 4.4. attēlā var ieraudzīt arī otru atrisinājumu.



4.4.att. **Uzdevums ar atšķēlumu**

Šajā situācijā, lai atrisinātu uzdevumu ar sazarošanās un robežu metodi, bija nepieciešami 11 dažādi lineārās programmēšanas uzdevumi. Bet, lietojot Gomori metodi, bija nepieciešams tikai viens atšķēlums, lai atrisinātu doto uzdevumu. Tātad Gomori metode šajā situācijā darbojas ievērojami ātrāk.

5. BINĀRI DISKRĒTĀS PROGRAMMĒŠANAS UZDEVUMI (BDPU)

Praksē bieži notiek situācijas, kad ātri jāpieņem svarīgi lēmumi (galvenokārt, pozitīva vai negatīva atbilde, piemēram, "jā" vai "nē"). Kā piemēru var minēt situācijas:

- sākt (vai nesākt) jaunas rūpnīcas celtniecību;
- uzsākt (vai neuzsākt) reklāmas kampaņu;
- izstrādāt (vai neizstrādāt) kādu jaunu produktu;
- u.t.t. .

Šādas izvēles var aprakstīt vienkārši, pieņemot, ka $x_j = 1$, ja uzsāk j-to darbību, un $x_j = 0$ citā gadījumā. Mainīgos, kuri var būt 0 un 1, sauc par bināriem, bivalentiem vai 0 – 1-mainīgajiem.

Par bināru diskrētās programmēšanas uzdevumu sauc lineārās programmēšanas uzdevumu veselos skaitļos, kura plāns satur tikai koordinātas 0 un 1. Tiek aplūkota minimizācijas problēma.

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_j = 0 \; vai \; x_j = 1; \; j = 1; 2; \ldots; n. \end{cases}$$

Šādu problēmu risināšanai izmanto Balaša algoritmu ([3]), kas pēc būtības ir sazarošanās un robežu algoritma speciālgadījums. Algoritms nosaukts ungāru matemātiķa Egona Balaša (*Egon Balas'*, 1922.) vārdā. Tā kā dota minimizācijas problēma, uzdevuma mērķis ir atrast mazāko funkcijas *f* vērtību.

Piemērs 2.3.

Atrisināt uzdevumu:

$$f = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 10x_6 \to min$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 - 2x_6 \geq 2, & (1) \\ -5x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 \geq -2, & (2) \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 2x_5 - x_6 \geq 3, & (3) \\ x_j, \; j = 1; 2; \ldots; 6, & \\ x_j = 0 \; vai \; x_j = 1; \; j = 1; 2; \ldots; 6. & \end{cases}$$

Jāpiebilst, ka uzdevuma mainīgie jau uzdoti pareizā secībā. Iespējami ir $2^6 = 64$ šī uzdevuma atrisinājumi, bet ir sagaidāms, ka Balaša algoritms dos pēc iespējas mazāk pilnu un daļēju atrisinājumu. Uzdevuma risināšanas gaitu var parādīt, izmantojot *uzskaitījuma koku*, līdzīgi kā sazarošanās un robežu metodes gadījumā. Atšķirībā no sazarošanās un robežu metodes šeit tiek aplūkots tikai viens uzdevums un nav nepieciešams lietot simpleksa metodi. Algoritms veic pārlasi, pieņemot, ka uzdevuma plāna mainīgie ir 0 vai 1. Tātad pieņem, ka dotā uzdevuma plāns

$$x^* = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; x_6)^T$$

satur tikai skaitļus 0 vai 1. Uzdevuma *uzskaitījuma koks* sākas ar iztekas punktu (redzams 5.1. attēlā), kur tiek pieņemts, ka uzdevuma plāns ir

$$x_1^* = (0; 0; 0; 0; 0; 0)^T$$

Ievietojot $x_j, j = 1; ...; 6$ vietā atbilstošos skaitļus, pārbauda nosacījumu (1), (2) un (3) pareizību. No nosacījuma (1) iegūst

$$-2 * 0 + 6 * 0 - 3 * 0 + 4 * 0 + 0 - 2 * 0 \geq 2.$$

Nevienādība (1) nav patiesa, jo $0 \ngeq 2$ (0 nav lielāks par 2 vai vienāds ar 2). No nosacījuma (2) iegūst

$$-5 * 0 - 3 * 0 + 0 + 3 * 0 - 2 * 0 + 0 \geq -2.$$

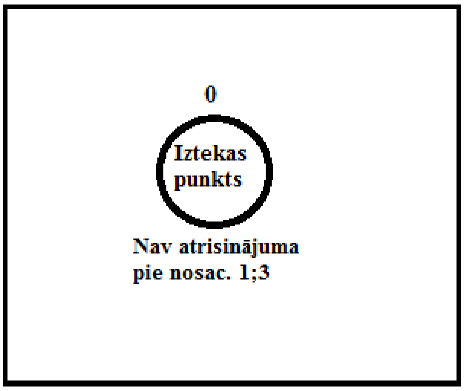
Nevienādība (2) ir patiesa, jo $0 \geq -2$. No nosacījuma (3) iegūst

$$5 * 0 - 0 + 4 * 0 - 2 * 0 + 2 * 0 - 0 \geq 3.$$

Nevienādība (3) nav patiesa, jo $0 \ngeq 3$. Uzdevuma mērķa funkcija

$$f = 3 * 0 + 5 * 0 + 6 * 0 + 9 * 0 + 10 * 0 + 10 * 0 = 0.$$

Šajā situācijā iztekas punkts nav uzdevuma atrisinājums, jo neizpildās nosacījumi (1) un (3).



5.1.att. **Iztekas punkts**

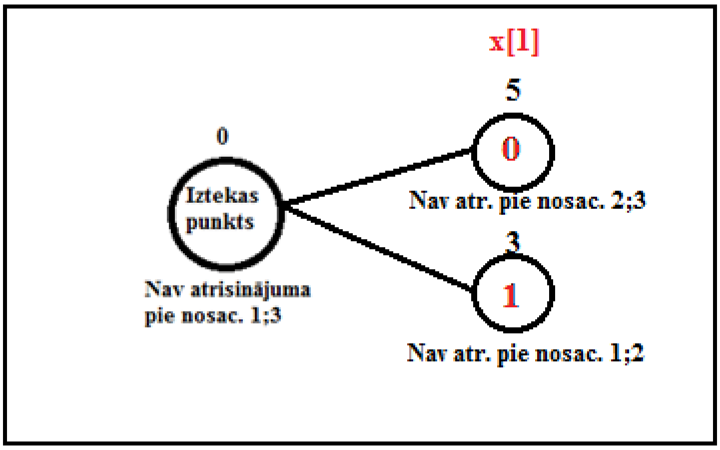
Tā kā iztekas punkts nav atrisinājums, tad aplūko citas situācijas. Veic atzarojumu pie mainīgā x_1 (atzīmēts sarkanā krāsā), jo tam ir vismazākais mērķa funkcijas koeficients. Tātad no iztekas punkta atzarojas divas jaunas situācijas ar uzdevuma plāniem:

$$x_2^* = (0; 1; 0; 0; 0; 0)^T \quad (1^*)$$

un

$$x_3^* = (1; 0; 0; 0; 0; 0)^T \quad (1^{**}).$$

Vispirms vienmēr tiek aplūkota situācija, kad $x = 0$. Situācijā (1^*) pieņem, ka mainīgais $x_1 = 0$. Pārbaudot nosacījumu (1) – (3) pareizību, konstatē, ka x_2^* nav uzdevuma atrisinājums, jo neizpildās nosacījumi (2) un (3), šeit $f = 5$. Tālāk aplūko situāciju (1^{**}), kur mainīgais $x_1 = 1$. Konstatē, ka x_3^* nav uzdevuma atrisinājums, jo neizpildās nosacījumi (1) un (2), šeit $f = 3$. Pirmā atzarošanās redzama 5.2. attēlā.



5.2. att. **Pirmā atzarošanās**

Tagad uzdevumam ir divas situācijas, kurām jāveic jauns atzarojums, jo uzdevumam kāds no nosacījumiem neizpildās. Otrajam atzarojumam izvēlas situāciju ar mazāko mērķa funkcijas vērtību, jo tiek aplūkota minimizācijas problēma. Tā kā $3 < 5$, izvēlas situāciju (1^{**}). Atzarojas situācijas ar plāniem:

$$x_4^* = (1; 0; 1; 0; 0; 0)^T \qquad (2^*)$$

un

$$x_5^* = (1; 1; 0; 0; 0; 0)^T \qquad (2^{**}).$$

Šoreiz atzarojums veikts mainīgajam x_2 (atzīmēts sarkanā krāsā). Jāpiebilst, ka šajā atzarojumā mainīgais $x_1 = 1$. Pieņem, ka situācijā (2^*) $x_2 = 0$. Konstatē, ka uzdevumam neizpildās nosacījumi (1) un (2). Mērķa funkcija $f = 9$. Aplūko situāciju (2^{**}) un pieņem, ka $x_2 = 1$. No nosacījuma (1) iegūst

$$-2 * 1 + 6 * 1 - 3 * 0 + 4 * 0 + 0 - 2 * 0 \geq 2\,.$$

Tā kā $4 \geq 2$, nosacījums (1) izpildās. No nosacījuma (2) iegūst

$$-5 * 1 - 3 * 1 + 0 + 3 * 0 - 2 * 0 + 0 \geq -2.$$

Tā kā izteiksme $-8 \geq -2$ nav pareiza, nosacījums (2) neizpildās. No nosacījuma (3) iegūst

$$5 * 1 - 1 + 4 * 0 - 2 * 0 + 2 * 0 - 0 \geq 3$$

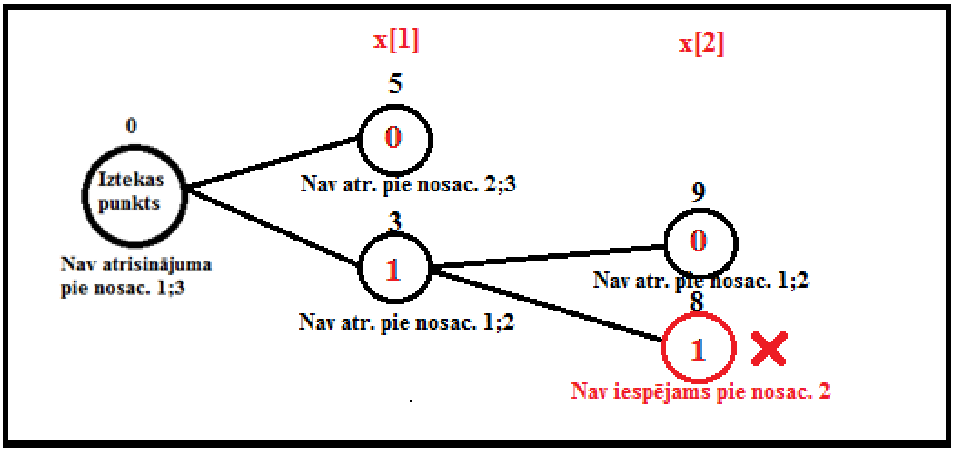
Tā kā $4 \geq 3$, nosacījums (3) izpildās. Mērķa funkcija

$$f = 3 * 1 + 5 * 1 + 6 * 0 + 9 * 0 + 10 * 0 + 10 * 0 = 3 + 5 = 8\,.$$

Konstatē ka x_5^* nav uzdevuma atrisinājums, jo neizpildās nosacījums (2). Lai atrastu tādu rezultātu, kas būtu lielāks vai vienāds ar -2, nevienādības (2) kreisā puse pēc iespējas jāpalielina. Sākotnēji pieņemts, ka mainīgie x_1 un x_2 ir vieninieki, bet pārējie – nulles. Tiks mainīti pārējie mainīgie ($x_3; x_4; x_5; x_6$), lai palielinātu nevienādības (2) kreisās puses vērtību. Pieņemsim, ka visi uzdevuma mainīgie ar pozitīvu koeficientu ir vienādi ar 1, bet mainīgie ar negatīvu koeficientu ir vienādi ar 0, tad iegūst

$$-5 * 1 - 3 * 1 + 1 + 3 * 1 - 2 * 0 + 1 \geq -2$$

Tā kā izteiksme $-3 \geq -2$ nav pareiza, nav izdevies iegūt tādu rezultātu, kas apmierinātu nevienādības (2) labo pusi. Konstatē, ka neviens jauns atzarojums šai situācijai nedos derīgu uzdevuma atrisinājumu. Tātad šajā gadījumā uzdevumam nav atrisinājuma, un situācijai atbilstošais punkts tiek svītrots. Otrā atzarošanās redzama 5.3. attēlā.



5.3. att. **Otrā atzarošanās**

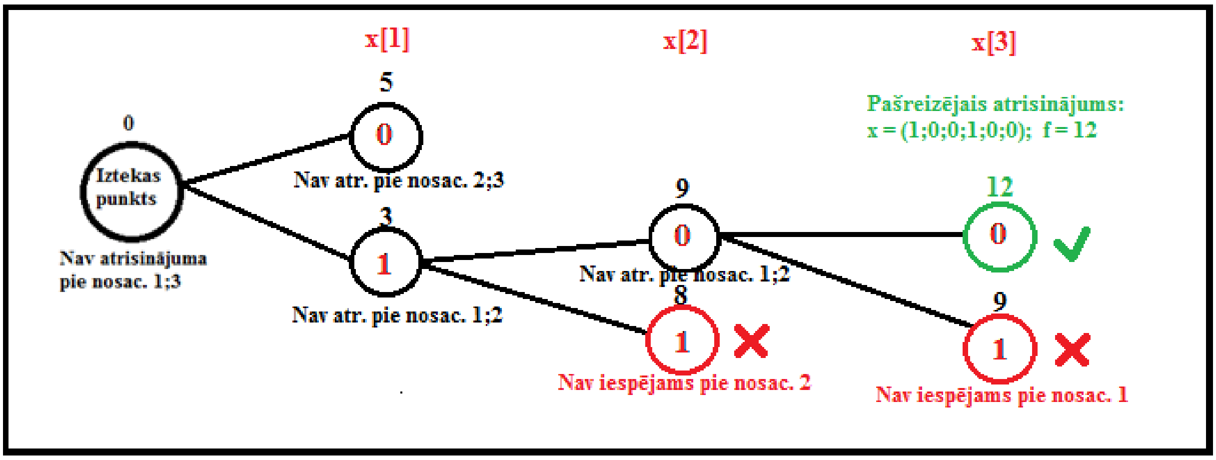
Tagad uzdevumam ir viena situācija, kurā jāveic jauns atzarojums, jo uzdevumam visi nosacījumi neizpildās. No otrā atzarojuma situācijas (2^*) veic jaunu (trešo) atzarojumu. Atzarojas situācijas ar plāniem

$$x_6^* = (1; 0; 0; 1; 0; 0)^T \qquad (3^*)$$

un

$$x_7^* = (1; 0; 1; 0; 0; 0)^T \qquad (3^{**}).$$

Šoreiz atzarojums veikts mainīgajam x_3. Jāpiebilst, ka šajā atzarojumā mainīgais $x_1 = 1$ un mainīgais $x_2 = 0$. Pieņem, ka situācijā (3^*) $x_3 = 0$. Konstatē, ka uzdevuma visi nosacījumi izpildās. Tas nozīmē, ka situācija (3^*) dod pagaidu atrisinājumu $x^* = (1; 0; 0; 1; 0; 0)^T$ ar mērķa funkcijas vērtību $f = 12$. Uzdevuma atrisinājums mainīsies, ja tiks atrasts atrisinājums ar mazāku mērķa funkcijas vērtību. Tālāk aplūko situāciju (3^{**}). Plāns $x_7^* = (1; 0; 1; 0; 0; 0)^T$ tika izskatīts jau otrā atzarojuma situācijā (2^*), tas sakrīt ar x_4^*. Tika noskaidrots, ka uzdevumam neizpildās nosacījumi (1) un (2). Mērķa funkcijas vērtība $f = 9$. Izpētot nosacījumus (1), līdzīgi kā pie otrā atzarojuma situācijas (2^{**}) nosacījumiem (2), konstatē, ka neviens jauns atzarojums situācijai (3^{**}) nedos derīgu uzdevuma atrisinājumu. Trešā atzarošanās redzama 5.4. attēlā.



5.4.att. **Trešā atzarošanās**

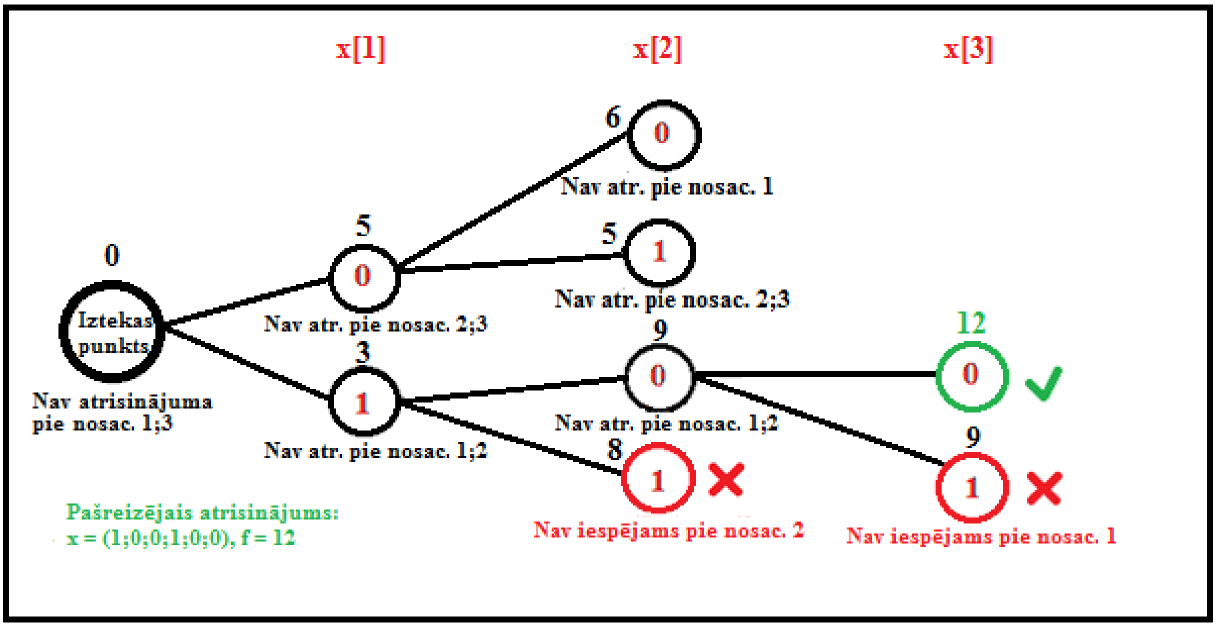
Atgriežas pie pirmā atzarojuma situācijas (1^*). Tika noskaidrots, ka x_2^* neapmierina uzdevuma pie nosacījumus (2) un (3) un tā mērķa funkcijas vērtība $f = 5$. No šīs situācijas veic atzarojumu mainīgajam x_2. Atzarojas situācijas ar plāniem

$$x_8^* = (0; 0; 1; 0; 0; 0)^T \qquad (4^*)$$

un

$$x_9^* = (0; 1; 0; 0; 0; 0)^T \qquad (4^{**})$$

Pieņem, ka situācijā (4^*) mainīgais $x_2 = 0$. Konstatē, ka uzdevumam neizpildās nosacījums (1). Mērķa funkcijas vērtība $f = 6$. Aplūko situāciju (4^{**}) un pieņem, ka $x_2 = 1$. Konstatē, ka uzdevumam neizpildās nosacījumi (2) un (3), bet tā mērķa funkcijas vērtība $f = 5$. Ceturtā atzarošanās redzama 5.5. attēlā.



5.5. att. **Ceturtā atzarošanās**

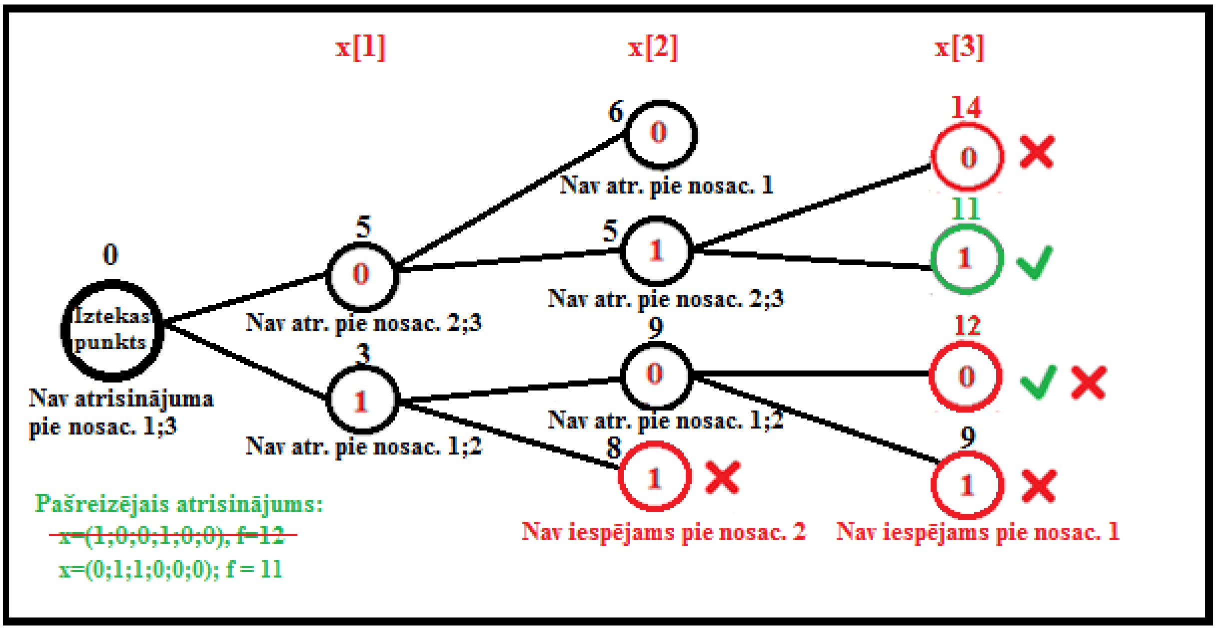
Nākamajam (piektajam) atzarojumam izvēlas situāciju ar mazāko mērķa funkcijas vērtību. Tā kā $5 < 6$, izvēlas situāciju (4**). No šīs situācijas veic atzarojumu mainīgajam x_3. Atzarojas situācijas ar plāniem

$$x_{10}^* = (0; 1; 0; 1; 0; 0)^T \qquad (5^*)$$

un

$$x_{11}^* = (0; 1; 1; 0; 0; 0)^T \qquad (5^{**}).$$

Jāpiebilst, ka šajā atzarojumā mainīgais $x_1 = 0$ un mainīgais $x_2 = 1$. Pieņem, ka situācijā (5*) mainīgais $x_3 = 0$. Konstatē, ka uzdevuma visi nosacījumi izpildās un tā mērķa funkcijas vērtība $f = 14$. Tā kā $14 > 12$, x_{10}^* nav uzdevuma optimālais atrisinājums. Situācijai (5*) atbilstošais punkts tiek svītrots. Pāriet pie situācijas (5**). Konstatē, ka uzdevuma visi nosacījumi ir pareizi un mērķa funkcijas vērtība ir 11. Tā kā $11 < 12$, tas nozīmē, ka situācija (5**) dod jaunu pagaidu atrisinājumu $x_0^* = (0; 1; 1; 0; 0; 0)^T$ ar mērķa funkcijas vērtību $f = 11$. Iepriekšējais atrisinājums tiek svītrots. Piektā atzarošanās redzama 5.6. attēlā.



5.6. att. **Piektā atzarošanās**

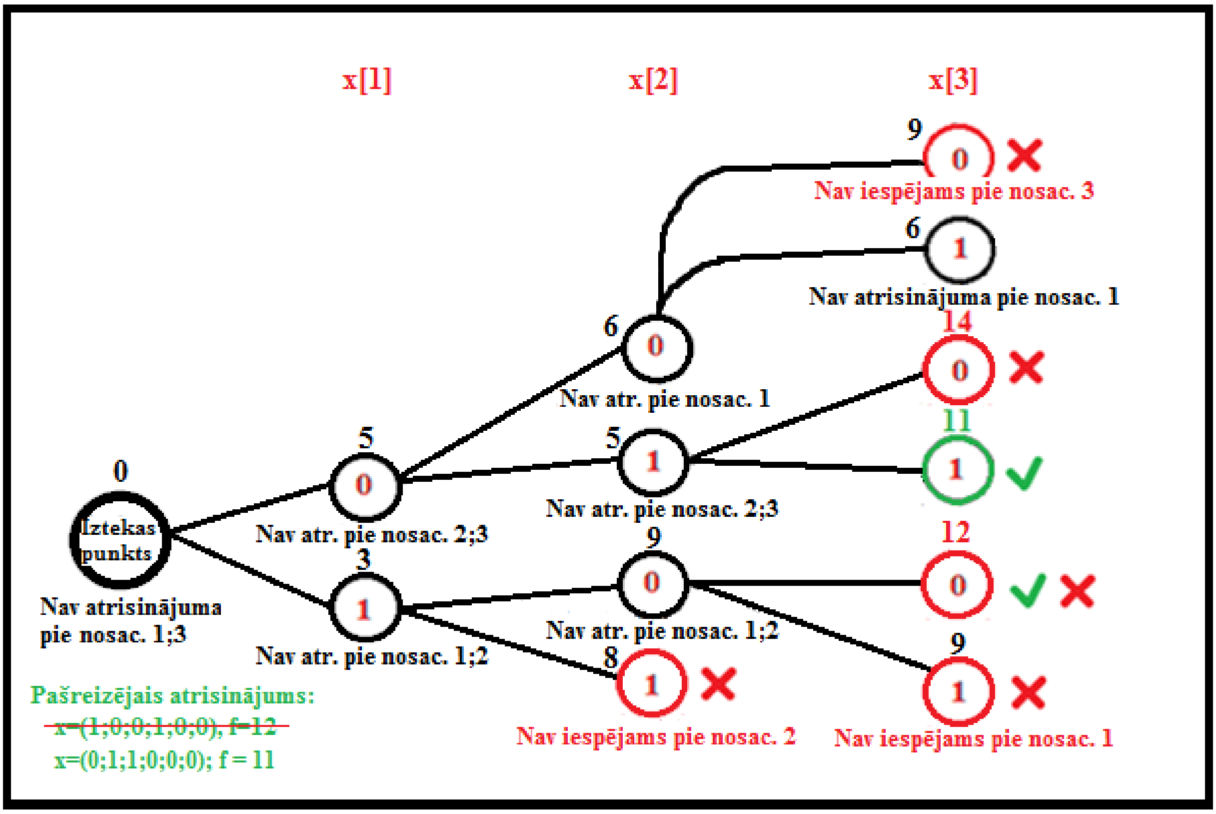
Atgriežas pie ceturtā atzarojuma situācijas (4*) mainīgajam x_2. Tika noskaidrots, ka uzdevumam neizpildās nosacījums (1) ,bet tā mērķa funkcijas vērtība $f = 6$. No šīs situācijas veic atzarojumu mainīgajam x_3. Atzarojas situācijas ar plāniem

$$x_{12}^* = (0; 0; 0; 1; 0; 0)^T \qquad (6^*)$$

un

$$x_{13}^{*} = (0; 0; 1; 0; 0; 0)^T \qquad (6^{**}).$$

Pieņem, ka situācijā (6*) mainīgais $x_3 = 0$. Konstatē, ka uzdevuam neizpildās nosacījums (3). Mērķa funkcijas vērtība f = 9. Tā kā nav iespējami jauni atzarojumi, atrisinājumu meklēšana beidzas. Situācija (6*) tiek svītrota. Pāriet pie situācijas (6**). Situācijai ir tāds pats uzdevuma plāns kā ceturtā atzarojuma situācijai (4*). Tātad x_{13}^{*} sakrīt ar x_8^{*}. Tika noskaidrots, ka uzdevumam nav atrisinājuma pie nosacījuma (1) un mērķa funkcijas vērtība $f = 6$. Sestā atzarošanās redzama 5.7. attēlā.



5.7. att. **Sestā atzarošanās**

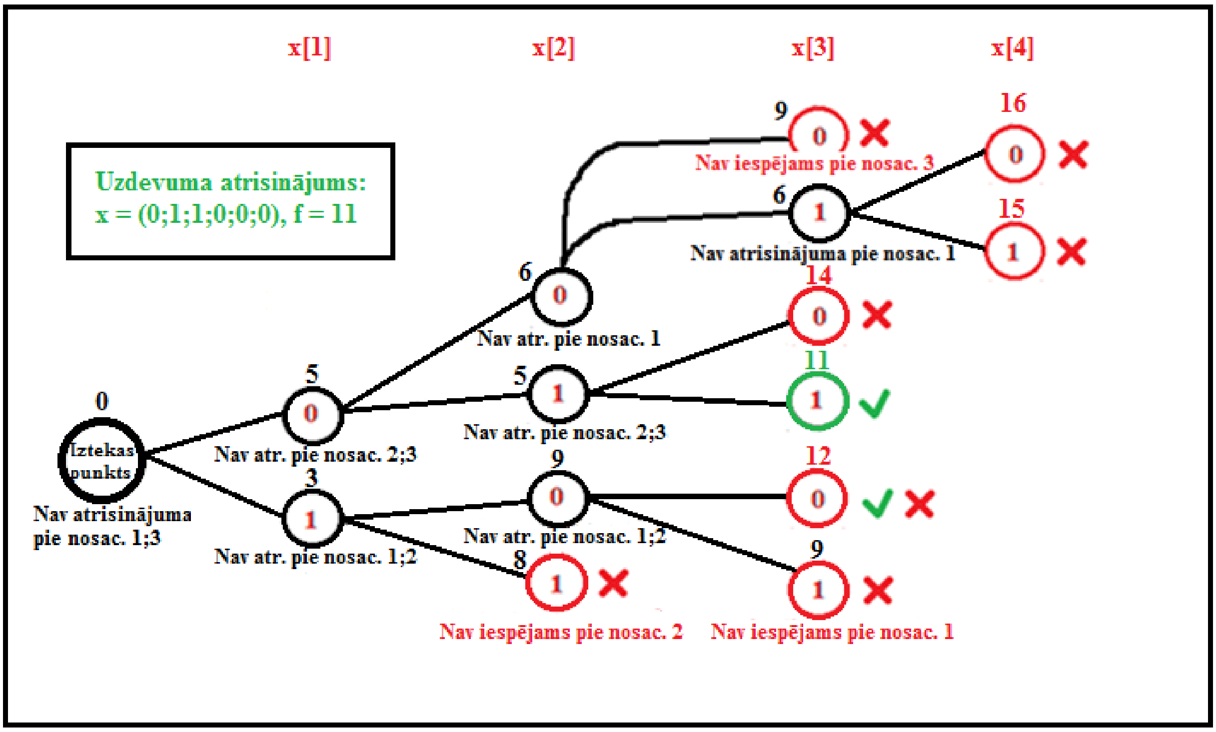
Tā kā citas uzdevuma situācijas ir izskatītas, sestā atzarojuma situācija (6**) ir vienīgā atlikusī situācija, kurai var veikt jaunu atzarojumu, jo šeit kāds no uzdevuma nosacījumiem neizpildās. Veic jaunu (septīto) atzarojumu, kurā rodas divas jaunas situācijas ar plāniem

$$x_{14}^{*} = (0; 0; 1; 0; 1; 0)^T \qquad (7^{*})$$

un

$$x_{15}^{*} = (0; 0; 1; 1; 0; 0)^T \qquad (7^{**}).$$

Šoreiz atzarojums veikts mainīgajam x_4. Jāpiebilst, ka šajā atzarojumā mainīgais $x_1 = 0$, mainīgais $x_2 = 0$ un mainīgais $x_3 = 1$. Pieņem, ka situācijā (7*) mainīgais $x_4 = 0$. Konstatē, ka uzdevumam visi nosacījumi izpildās. Mērķa funkcijas vērtība $f = 16$. Tā kā $16 > 11$, situācijas (7^*) atrisinājums nav uzdevuma optimālais atrisinājums. Situācija (7^*) tiek svītrota. Aplūko situāciju (7^{**}) un pieņem, ka mainīgais $x_4 = 1$. Konstatē, ka uzdevumam visi nosacījumi izpildās. Mērķa funkcijas vērtība $f = 15$. Tā kā $15 > 11$, situācijas (7^{**}) atrisinājums nav uzdevuma optimālais atrisinājums. Situācija (7^{**}) tiek svītrota. Septītā atzarošanās redzama 5.8. attēlā.



5.8.att. **Septītā atzarošanās**

Līdz ar to septītais atzarojums ir pēdējais iespējamais atzarojums, jo nav vairs iespējamas jaunas situācijas, kas dotu derīgu uzdevuma atrisinājumu. Dotā uzdevuma atrisinājums ir piektā atzarojuma situācija (5^{**}) ar plānu $x_{11}^* = (0; 1; 1; 0; 0; 0)^T$ un mērķa funkcijas vērtību $f = 11$, jo šī mērķa funkcijas vērtība ir mazākā no visu citu atrasto derīgo situāciju mērķa funkciju vērtībām. Tātad uzdevums ir atrisināts, pārbaudot 15 (nevis 64) plānus.

NOBEIGUMS

Bakalaura darbā “Lineārās programmēšanas uzdevumi veselos skaitļos” iepazināmies ar trim metodēm, ar kuru palīdzību var risināt lineārās programmēšanas uzdevumus, kuros nepieciešams atrisinājums veselos skaitļos.

Apakšnodaļā 4.2 veiktā Piemēra 4.2 atrisināšana ar Gomori metodi parādīja, ka būs tādi gadījumi, kad šī metode strādā ātrāk nekā sazarošanās un robežu metode. Dotajā piemērā pat daudz ātrāk. Taču ar Gomori metodi netiek atrasti visi iespējamie uzdevuma atrisinājumi, bet tikai viens. Ja nepieciešams Gomori metodi atkārtot vairākas reizes viena uzdevuma ietvaros, tad katrā reizē ir jāpievieno jauns nosacījums, tādējādi pieaug uzdevuma sarežģītība. Arī sazarošanās un robežu metode katrā solī kļūst arvien plašāka un ietver jaunu uzdevumu risināšanu.

Gribētu atzīmēt, ka darbā apskatītajos piemēros ar 2 nezināmajiem daudz efektīvāk strādātu ģeometriskā interpretācija (grafisks attēls), kur visos veselajos punktos tiktu izrēķinātas visas mērķa funkcijas vērtības un tā atrasts optimālais plāns. Bet šajā darbā esam apskatījuši tieši šādus neliela izmēra uzdevumus, jo ar tādiem var vienkāršāk parādīt, kā strādā metodes.

IZMANTOTIE INFORMĀCIJAS AVOTI

1. **Bradley P., Hax C., Magnanti T.** *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley, 1977, 272. – 275. lpp.
2. **Bula I.** Lineārā programmēšana. Lekciju konspekts [tiešsaiste]. [atsauce 10.05.2016]. Pieejams Internetā: http://home.lu.lv/~ibula/lv/studentiem/linprVISS1.pdf
3. **Chinneck J. W.** Practical Optimization: a Gentle Introduction. Chapter 13. Systems and Computer Engineering, Carleton University, Ottawa, Canada, 2000 [tiešsaiste]. [atsauce 10.05.2016]. Pieejams Internetā: http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po/Chapter13.pdf
4. **Kļaviņš D**. *Optimizācijas metodes ekonomikā I, II.* Rīga: Datorzinību Centrs, 2003, 22. – 64. lpp.
5. **Kļaviņš D., Zelčs J.** *Operāciju pētīšanas matemātiskās metodes*. Rīga: Zvaigzne, 1979, 192. – 196. lpp.
6. **Vanderbei R. J.** *Linear Programming Foundations and Extension*. Springer, 2001, 380. – 390. lpp.
7. **Шевченко В. Н., Золотых Н.Ю.** *Линейное и целочисленное линейное программирование*. Нижний Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004, 115. – 116. lpp.

Dokumentārā lapa

Bakalaura darbs „Lineārās programmēšanas uzdevumi veselos skaitļos” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Jānis Mārtiņš Leja

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: profesore Dr. math. Inese Bula 06.06.2016.

Recenzents: profesors Dr. math. Jānis Buls

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2016.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts Valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

____ 06.2016. prot. Nr._____

Komisijas sekretāre: asoc. profesore Ingrīda Uļjane