Аналитическая Геометрія

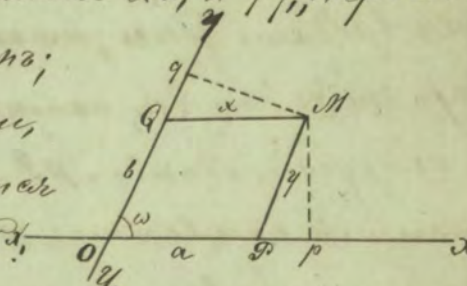
(лекціи Цингера)

Способъ изслѣдованія начальной Геометріи или, какъ ее называютъ иначе Геометріи древнихъ оказался неприложимымъ къ нѣкоторымъ вопросамъ, которые или оставались нерѣшенными, или рѣшались случайно какими нибудь косвенными путями. Такое несовершенство геометріи сознавали уже и древніе математики, но не имѣя никакихъ вспомогательныхъ средствъ, не могли помочь ему. Полная общность выводовъ, даваемыхъ при разрѣшеніи математическихъ вопросовъ помощію алгебраическаго анализа, навела ученыхъ на мысль примѣнить его къ геометріи и осуществленіе этой мысли, сдѣланное впервые Декартомъ, составило особую, существенно отличающуюся отъ начальной геометріи науку, получившую названіе Аналитической Геометріи. Обладая несравненно болѣе обширными средствами, наука эта не ограничилась одними прямыми линіями и кривой круга, составлявшими предметъ геометріи древнихъ, но пошла далѣе и изслѣдовала при посредствѣ алгебраическихъ вычисленій всевозможныя кривыя линіи и поверхности.

Ознакомившись такимъ образомъ съ содержаніемъ и методомъ этой науки, перейдемъ къ изложенію основныхъ началъ ея, замѣтивъ при этомъ, что основаніе дѣленія начальной геометріи на планиметрію и стереометрію остается также неизмѣннымъ и для аналитической, которая распадается на Аналитическую Геометрію на плоскости и Аналитическую Геометрію въ пространствѣ. —

Выразить величину линіи помощью алгебраическихъ выраженій, какъ мы уже знаемъ изъ приложенія алгебры къ геометріи, не представляетъ никакого затрудненія, но для того, чтобы имѣть точное понятіе о линіи кромѣ величины необходимо надо знать ея положеніе и потому первымъ вопросомъ, который слѣдовало разрѣшить Аналитической Геометріи, было - опредѣлить положеніе линіи алгебраическими знаками; если уже мы будемъ разсматривать всякую линію какъ слѣдъ, происходящій отъ движенія точки, перемѣщающейся на плоскости по какому-нибудь опредѣленному закону, то легко замѣтимъ, что вопросъ нашъ сводится къ тому, какъ опредѣлить положеніе точки, потому что зная положеніе какой-нибудь точки и законъ ея движенія, мы легко

выведемъ формулу опредѣляющую положеніе самой линіи.
Изъ различныхъ методовъ, которые встрѣчаются теперь въ наукѣ для опредѣленія положенія точки, мы укажемъ на болѣе употребительные. Простѣйшій изъ нихъ предложенъ основателемъ этой науки Декартомъ и состоитъ въ слѣдующемъ: на плоскости чертятся произвольно двѣ постоянныя прямыя $XX_{,}$ и $YY_{,}$, пересѣ=кающіяся подъ какимъ нибудь угломъ; очевидно что положеніе всякой точки, напр: точки M, вполнѣ опредѣлится ея разстояніями отъ этихъ линій.

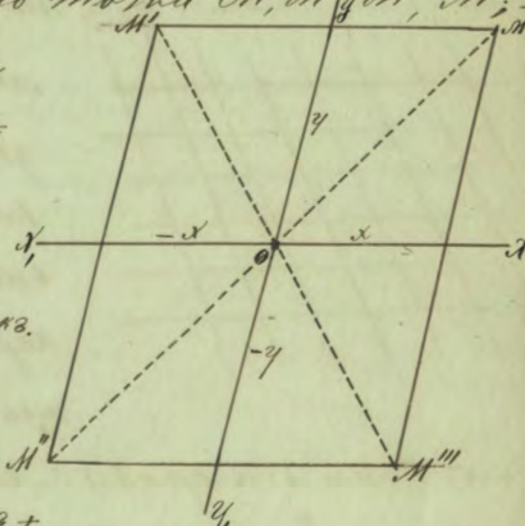


Въ самомъ дѣлѣ если, зная положеніе точки M, мы по=средствомъ простаго измѣренія можемъ найти ея раз=стоянія отъ линій $XX_{,}$ и $YY_{,}$, то безъ сомнѣнія и обратно, зная разстоянія точки M отъ этихъ линій, мы можемъ опредѣлить ея положеніе. Пусть разстояніе точки M отъ линіи $YY_{,}$ обозначаемое обыкновенно буквою x, равно нѣкоторой величинѣ a, а разстояніе этой же точки отъ линіи $XX_{,}$ обозначаемое обыкновенно буквою y, равно нѣко=торой величинѣ b; тогда чтобы опредѣлить положеніе точ=ки M, мы должны отъ O по линіи $XX_{,}$ отложить часть равную a и въ полученной такимъ образомъ точкѣ, провести ли=

нію параллельную YY, длина которой равнялась-бы b; верхній конецъ этой линіи и укажетъ положеніе точки M. Безъ сомнѣнія мы достигли бы того-же результата, если-бы отъ точки O по линіи YY, отложили часть равную b и изъ полученной такимъ образомъ точки провели линію параллельную XX, и равную длиною a. Это понятно уже изъ того что линіи XX, и YY, ничѣмъ не отличаются одна отъ другой; онѣ входятъ здѣсь, такъ сказать, на однихъ и тѣхъ же правахъ, такъ что все, сказанное объ одной, относится также и къ другой. Линіи MP и MQ, служащія для опредѣленія точки M называются координатами этой точки, первая изъ нихъ называется кромѣ того ординатою, вторая абсциссою; линіи XX, и YY, носятъ названіе осей координатъ, а точка ихъ пересѣченія O - начала координатъ.

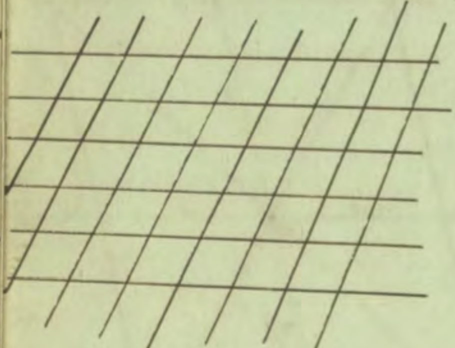
Кромѣ координатъ MP и MQ мы можемъ провести перпендикулярныя Mp и Mq, которыя пропорціональны первымъ и легко опредѣляются по формуламъ $Mp = y \sin\omega$; $Mq = x.\sin\omega$. Какъ частный случай Декартовой системы координатъ можно разсматривать систему прямоугольныхъ координатъ, отличающуюся отъ изложенной нами только тѣмъ, что уголъ между осями строится прямой; въ этомъ случаѣ координаты представляютъ собой кратчайшія разстоянія точки отъ осей.

Выше было сказано, что координатами точки M вполнѣ опредѣляется ея положеніе, но это не совсѣмъ вѣрно. Такъ какъ линіи $XX_,$ и $YY_,$ величины произвольныя, то мы можемъ продолжить ихъ за точку ихъ пересѣченія и въ каждомъ изъ четырехъ угловъ, полученныхъ отъ этого продолженія, мы найдемъ точку, имѣющую координаты, равныя съ точкой M; это именно точки M, M', M'', M'''; —

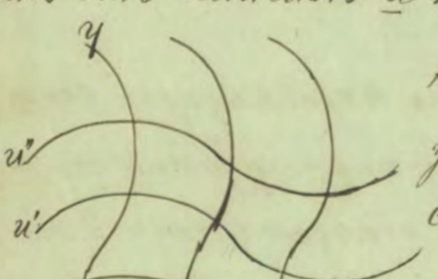


вслѣдствіе этого обнаруживается необходимость найти способъ отличать эти точки; способъ этотъ даетъ алгебра, каждое выраженіе которой должно имѣть свой знакъ. На основаніи этого правила условимся всѣ абсциссы, лежащія вправо отъ оси $YY_,$ означать знакомъ $+$, а противоположныя имъ знакомъ $-$; точно также ординаты всѣхъ точекъ, находящихся выше оси $XX_,$ считать положительными, находящіяся же ниже оси $XX_,$ — отрицательными; такимъ образомъ эти 4 точки отличаются между собой знаками своихъ координатъ: точка M имѣетъ $+x, +y$; $M_,$ $-x, +y$; $M_{,,}$ $-x, -y$; $M_{,,,}$ $+x, -y$. — Замѣтимъ при этомъ, что точки, лежащія на одной изъ осей, имѣютъ одну координату равную 0, точка же, лежащая на обѣихъ осяхъ, т.е. начало координатъ имѣетъ обѣ координаты равными 0. Діагонали параллелограма $MM'M''M'''$ пересѣкаются въ точкѣ начала координатъ.

Если мы положимъ въ системѣ Декарта оси не неподвижными, но перемѣщающимися, оставаясь при этомъ параллельными самимъ себѣ, то будемъ имѣть сѣть прямыхъ



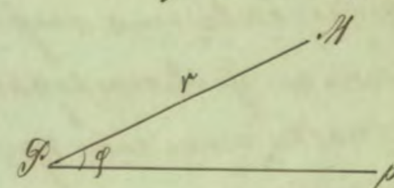
линій, пересѣченія которыхъ опредѣляютъ намъ каждую точку плоскости; представленная въ такомъ видѣ, система координатъ Декарта есть частный случай слѣдующей болѣе общей системы. Пусть намъ даны двѣ кривыя OX и OY положеніе которыхъ зависитъ отъ величинъ u и v; давая величинѣ u послѣдовательно



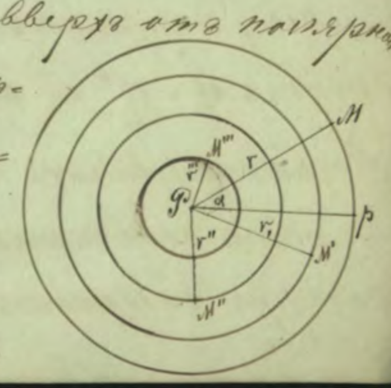
но значенія u', u''.... а величинѣ v значенія v', v''... мы получимъ сѣть, состоящую изъ двухъ группъ кривыхъ линій, которыми и опредѣляется положеніе точекъ на плоскости. Несмотря на всю общность этой системы, она не употребляется на практикѣ, такъ какъ

пересѣченіемъ двухъ кривыхъ не опредѣляется положеніе
одной какой-нибудь
точки, потомучто онѣ пересѣкаются не въ одной, а
въ нѣсколькихъ точкахъ.

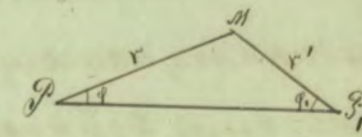
Скажемъ теперь нѣсколько словъ о другихъ системахъ координатъ, наичаще встрѣчающихся при рѣшеніи различныхъ вопросовъ, а именно о полярной и двуполярной системахъ. Первая изъ нихъ опредѣляетъ положеніе точки разстояніемъ ея отъ постоянной точки $\mathfrak{P}$, называемой полюсомъ, и угломъ, который дѣлаетъ это разстояніе съ постоянною линіею, $\mathfrak{P}p$, носящей названіе полярной оси. Разстояніе точки отъ полюса, означаемое обыкновенно буквою r называется радіусомъ векторомъ и есть величина постоянно положительная; полярный уголъ φ измѣняется отъ $0°$ до $360°$ и по условію отсчитывается всегда вверхъ отъ полярной оси.



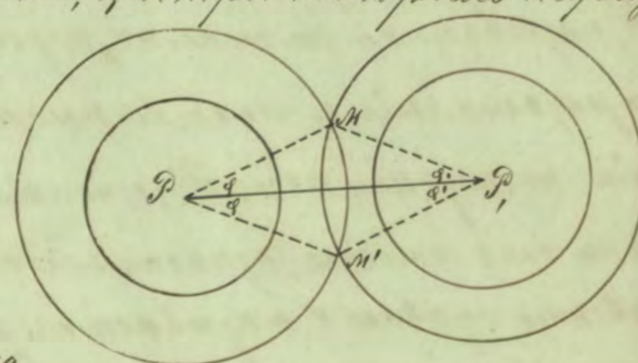
Изъ сказаннаго очевидно, что полярная система есть сѣть концентрическихъ круговъ, пересѣченія которыхъ съ радіусами опредѣляютъ различныя точки. Въ центрѣ сѣти этой помѣщается полюсъ.



Двуполярная или биполярная система уже самымъ названiемъ своимъ показываетъ, что въ ней берется два полюса; положенiе точки опредѣляется или двумя радiусами векторами r и r', или двумя углами этихъ радiусовъ съ постоянною линiей, соединяющей оба полюса.



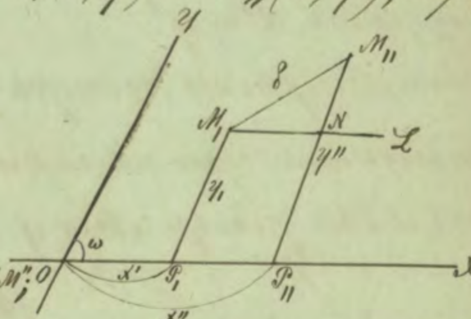
Какъ полярную систему можно изобразить въ видѣ сѣти концентрическихъ окружностей, такъ двуполярную — въ видѣ двухъ сѣтей пересѣкающихся концентрическихъ окружностей, центры которыхъ находятся въ полюсахъ. Двуполярная система представляетъ то неудобство, что координатамъ ея удовлетворяютъ двѣ точки, такъ какъ круги пересѣкаются непремѣнно въ двухъ точкахъ;



для устраненiя этой двойственности принято углы считать въ какую нибудь одну постоянную сторону напримѣръ къ верху, тогда координаты точки M будутъ φ и φ', а точки M' — $360-\varphi$ и $360-\varphi'$.

Познакомившись такимъ образомъ съ различными системами координатъ, рѣшимъ задачу, какъ опредѣлить по двумъ даннымъ точкамъ разстоянiе между ними.

Разберемъ сначала этотъ вопросъ въ Декартовыхъ координатахъ: положимъ намъ даны двѣ точки M' и M'', что по смыслу Аналитической Геометріи значитъ, что даны ихъ координаты, такъ что $M_{I}(x', y')$ и $M_{II}(x'', y'')$, требуется найти ихъ разстояніе.



Называя искомое разстояніе $M'M''$ через δ, изъ треугольника $M'M''N$ имѣемъ $\delta^2 = M'N^2 + M''N^2 - 2.M'N.M''N \cos M'NM''$; но $M'N$ проведена параллельно оси x-овъ и потому она равна $x'' - x'$, на этомъ же основаніи $M''N = y'' - y'$; уголъ $M''NL$ равенъ какъ составленный изъ сторонъ параллельныхъ углу ω, а слѣдовательно $M'NM'' = 180 - \omega$; $\cos M'NM'' = \cos(180 - \omega) = -\cos\omega$; поэтому наша формула получаетъ видъ

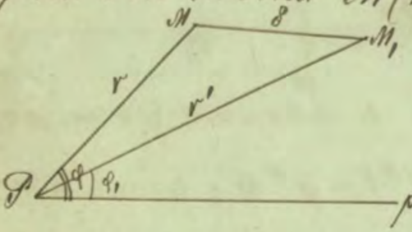
$$\delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y')\cos\omega.$$

Въ прямоугольныхъ координатахъ, такъ какъ $\cos 90 = 0$, послѣдній членъ уничтожается: $\delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2$.

Помѣщая точку M'' въ начало координатъ, т.е. положивъ x'' и y'' равными нулю, найдемъ по координатамъ точки разстояніе ея отъ начала координатъ. Формула наша получаетъ видъ: $\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2yx\cos\omega$.

Для прямоугольныхъ координатъ по предыдущему формула обращается въ $\delta^2 = x_1^2 + y_1^2$, что совершенно справедливо, такъ какъ δ въ этомъ случаѣ представляетъ собой гипотенузу прямоугольнаго треугольника, катетами котораго служатъ x' и y'.

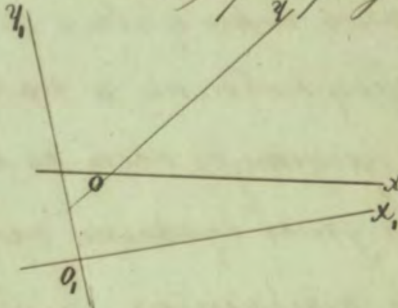
Посмотримъ теперь, измѣнится-ли формула нами выведенная при полярныхъ координатахъ. Положимъ даны двѣ точки $M(r, \varphi)$ и $M'(r', \varphi')$. Опредѣлить ихъ разстояніе.



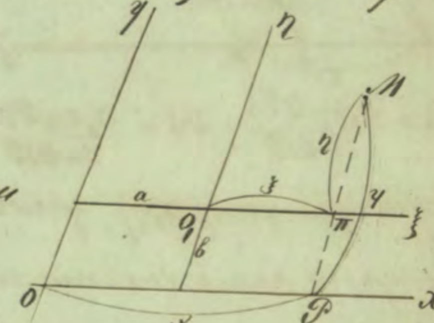
Поступая по предыдущему опредѣляемъ δ изъ треугольника $MM'P$, получаемъ $\delta^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1)$. Изъ этого можемъ заключить, что формула остается неизмѣнною и для полярныхъ координатъ.

Употребленіе той или другой системы координатъ, обусловливается, конечно, характеромъ рѣшаемаго вопроса, но при рѣшеніи различныхъ вопросовъ часто встрѣчается необходимость замѣнить одни координаты другими; такое замѣненіе называется преобразованіемъ координатъ и не представляетъ никакого затрудненія.

Положимъ вопервыхъ, что намъ необходимо оси X и Y замѣнить осями X_1 и Y_1, имѣющими со старыми разное направленіе и новое начало; задача эта распадается на двѣ, которыя мы разсмотримъ отдѣльно: 1) преобразовать начало координатъ, оставляя направленіе осей параллельно прежнему, и 2) перемѣнить направленіе осей при томъ же началѣ.

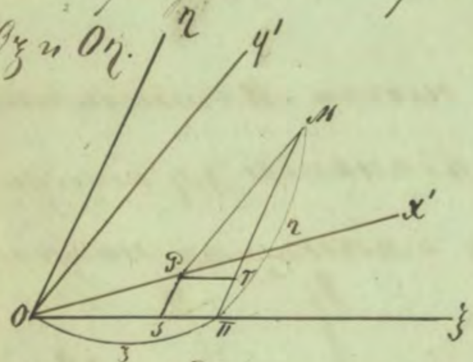


Пусть x и y будутъ координаты точки M относительно осей OX и OY требуется найти координаты (ξ, η) той же точки относительно осей $O_1\xi$ и $O_1\eta$, имѣющимъ направленіе параллельное прежнимъ но новое начало въ O_1. Замѣтимъ, что если намъ извѣстно положеніе точки O' (новаго начала), то это значитъ, что извѣстны ея координаты (a, b).



Изъ чертежа ясно видно соотношеніе между прежними и новыми координатами $x = \xi + a$; $y = \eta + b$; т.е. когда начало координатъ переносятъ въ точку, координаты которой по старой системѣ равны a и b, то координаты точки M = ея новымъ координатамъ
соотвѣтствующія
+ координаты новаго основанія по старой системѣ.

Рѣшимъ теперь второй вопросъ. Для того, чтобы преобразовать оси, при томъ-же началѣ, намъ необходимо знать три угла: уголъ между прежними осями, уголъ между новыми и наконецъ уголъ, составленный одною изъ прежнихъ осей съ одною изъ новыхъ. Будемъ называть эти углы буквами осей, ихъ составляющихъ. Положимъ что требуется перейти ~~отъ~~ отъ осей OX_1 и OY_1 къ осямъ $O\xi$ и $O\eta$.



Проведя линіи $PS \parallel O\eta$ и $PT \parallel O\xi$, имѣемъ $\xi = OS + S\pi$; $\eta = MT + T\pi$; подставивъ вмѣсто $S\pi$ и $T\pi$ равныя имъ PT и PS, опредѣлимъ OS и PS изъ треугольника OPS, а MT и PT изъ треугольника PMT.

$OS = \dfrac{x_1 \sin OPS}{\sin OSP}$; $PS = \dfrac{x_1 \sin POS}{\sin OSP}$; уголъ OPS = какъ внутренній накрестъ лежащій углу $(x_1\eta)$, уголъ POS есть уголъ $(x_1\xi)$, $\sin OSP = \sin(180 - OSP)$ который есть ничто иное какъ $\sin(\eta\xi)$, поэтому наши выраженія принимаютъ видъ: $OS = \dfrac{x_1 \sin(x_1\eta)}{\sin(\eta\xi)}$; $PS = \dfrac{x_1 \sin(x_1\xi)}{\sin(\eta\xi)}$.

$MT = \dfrac{y_1 \sin MPT}{\sin MTP}$; $PT = \dfrac{y_1 \sin PMT}{\sin MTP}$; уголъ MPT какъ составленный изъ сторонъ параллельныхъ = углу $(y_1\xi)$, уголъ PMT по тому же самому = углу $(y_1\eta)$, наконецъ ~~уголъ~~ $\sin MTP = \sin(180 - MTP) = \sin(\eta\xi)$ подставляя эти углы въ найденныя нами выраженія получимъ:

$MT = \frac{y_1 \, sn(y_1\xi)}{sn(\eta\xi)}$; $PT = \frac{y_1 \, sn(y_1\eta)}{sn(\eta\xi)}$; а такъ какъ $\xi = OS + PT$ и $\eta = MT + PS$

то, замѣняя OS, PT, MT и PS найденными для нихъ величинами, будемъ имѣть $\xi = \frac{x_1 sn(x_1\eta) + y_1 sn(y_1\eta)}{sn(\eta\xi)}$; $\eta = \frac{y_1 sn(y_1\xi) + x_1 sn(x_1\xi)}{sn(\eta\xi)}$

или приводя къ одному знаменателю:

$$\xi \, sn(\eta\xi) = x_1 sn(x_1\eta) + y_1 sn(y_1\eta).$$
$$\eta \, sn(\eta\xi) = x_1 sn(x_1\xi) + y_1 sn(y_1\xi).$$

Эти полученныя уравненія представляютъ общія формулы для преобразованія однихъ косоугольныхъ осей въ другія; въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ они могутъ быть упрощены; такъ для перехода ~~отъ~~ отъ ~~осей~~ осей прямоугольныхъ т.е. полагая уголъ $(\eta\xi) = 90°$, имѣемъ:

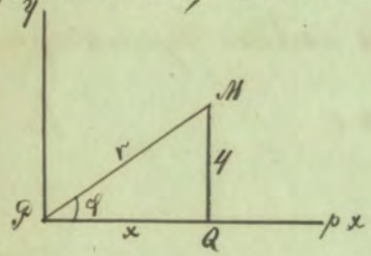
$$\xi = x_1 \, cs(x_1\xi) + y_1 \, cs(y_1\xi)$$
$$\eta = x_1 \, sn(x_1\xi) + y_1 \, sn(y_1\xi)$$

такъ какъ $sn(\eta\xi) = sn\, 90° = 1$ а $sn(x_1\eta) = sn(90° - (x_1\xi)) = cs(x_1\xi)$.

При переходѣ отъ однихъ прямоугольныхъ осей къ другимъ тоже прямоугольнымъ, составъ формулъ дѣлается еще проще; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ уголъ $(x_1\xi)$ черезъ φ и замѣтивъ, что $cs(y_1\xi) = cs(90 + (x_1\xi)) = -sn(x_1\xi)$, а $sn(y_1\xi) = sn(90 + (x_1\xi)) = cs(x_1\xi)$, найдемъ:

$$\xi = x_1 cs\varphi - y_1 sn\varphi \,; \quad \eta = x_1 sn\varphi + y_1 cs\varphi. -$$

Преобразованіе Декартовыхъ координатъ въ полярныя и наоборотъ точно также не представляетъ никакихъ затрудненій, хотя въ этомъ случаѣ формулы, вслѣдствіе разнородности входящихъ величинъ, являются второй степени. Такъ какъ мы уже знаемъ преобразованіе однихъ Декартовыхъ координатъ въ другія, то намъ нѣтъ надобности выводить формулы для перехода отъ полярныхъ ко всякимъ Декартовымъ и мы ограничимся преобразованіемъ полярныхъ координатъ въ прямоугольныя, положивъ для простоты, что P совпадаетъ съ началомъ Декартовыхъ



координатъ и ось Pp съ осью X-овъ; тогда изъ прямоугольнаго треугольника PMQ координаты x и y точки M опредѣляются уравненіями $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$.

Принимая наоборотъ x и y за данныя, изъ того-же треугольника опредѣлимъ полярныя координаты точки M: $r^2 = x^2+y^2$ откуда $r = +\sqrt{x^2+y^2}$, такъ какъ r величина всегда существенно положительная; $\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin(90-\varphi)}$; $\frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\varphi$.

Замѣтимъ, что эти же формулы мы могли вывести изъ формулъ $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$; раздѣливъ 2-ое на 1-ое, получимъ

$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = tg\,\varphi$; возведя ихъ въ квадратъ и сложивъ, имѣемъ

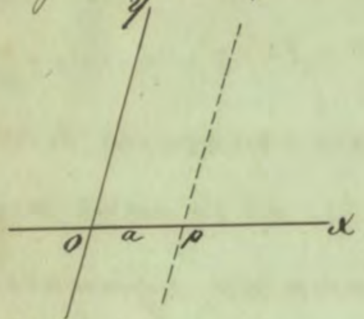
$x^2+y^2 = r^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)$ откуда $x^2+y^2=r^2$ или $r=\sqrt{x^2+y^2}$. —

Ознакомившись съ методами, употребляемыми въ Аналитической Геометріи для опредѣленія положенія точки т.е. съ различными системами координатъ, перейдемъ къ самой важной части ея, а именно къ вопросу о томъ, какимъ уравненіемъ можно представить положеніе, форму и величину линій.

Выше было сказано, что положеніе точки вполнѣ опредѣляется двумя ея координатами. Слѣдовательно, если намъ дано, что $x=a$, $y=b$, то мы имѣемъ право сказать, что положеніе точки намъ извѣстно. Очевидно, что мы можемъ считать положеніе точки извѣстнымъ и тогда, когда намъ даны не самыя величины x и y а уравненія, имѣющія общій видъ такой:

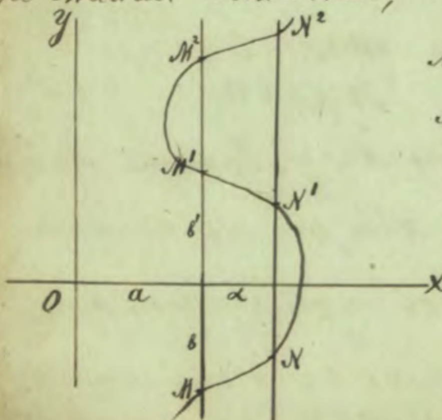
$$Ax+By+C=0 \quad \text{или} \quad M(x,y)=0$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad\quad N(x,y)=0$$

ибо рѣшая ихъ, мы получимъ величины x и y. Если же намъ дано только одно равенство, напримѣръ $x=a$, то мы не можемъ составить себѣ понятія о какой-нибудь опредѣленной точкѣ, (какъ это можно при двухъ данныхъ) но тѣмъ не менѣе можемъ указать линію, всѣ точки которой оправдываютъ это равенство,



имѣя абсциссы равныя $\underline{a}$. Эта линія па=раллельна оси y и проходитъ через точку p, лежащую на оси x и отстоящую отъ начала координатъ на разстояніи $\underline{a}$.

Разсмотримъ теперь какой геометрическій смыслъ имѣетъ уравненіе $M(x,y)=0$, гдѣ подъ M разумѣется многочленъ, состав=ленный какимъ-нибудь способомъ изъ количествъ x и y; оно неоп=редѣленно, потому что въ него входятъ два неизвѣстныхъ, но, рѣшая его, мы замѣтимъ, что, не выражая собою опредѣлен=ной какой-нибудь точки, оно не опредѣляетъ и всякую точку. Въ самомъ дѣлѣ положивъ $x=a$ изъ уравненія мы получимъ для y значенія $b, b', b^2 \ldots$, число которыхъ зависитъ отъ того ~~смотря по тому~~, какой степени было наше уравненіе; полагая затѣмъ $x=a+\alpha$, гдѣ α есть произволь=но малая величина, найдемъ, что $y=b+\beta,\ b'+\beta',\ b^2+\beta^2 \ldots$ и такъ да=лѣе;

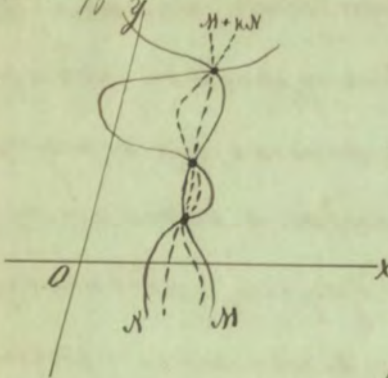


каждая пара этихъ рѣшеній опредѣ=литъ намъ извѣстную точку, такъ $x=a$, $y=b$ имѣетъ точка M; $x=a$, $y=b'$ — точка M' и такъ дальше, причемъ каждая изъ этихъ то=чекъ обращаетъ многочленъ M въ 0 т. е. удовлетворяетъ данному уравненію.

Давая такимъ образомъ величинѣ x различныя значенія и опредѣляя соотвѣтствующія значенія для y, мы найдемъ извѣстнымъ образомъ расположенный рядъ точекъ, изъ которыхъ каждая удовлетворяетъ нашему уравненію и которыя, будучи взяты возможно близко одна къ другой, представятъ намъ кривую линію. Слѣдовательно неопредѣленное уравненіе $M(x,y)=0$ выражаетъ кривую линію, форма и положеніе которой опредѣляются аналитическимъ смысломъ этого уравненія.

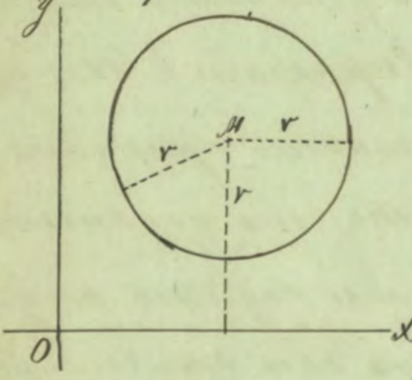
Если первая часть уравненія $M(x,y)=0$ разлагается на два множителя низшихъ степеней, напримѣръ $M=P^p Q^q$, гдѣ $p+q$ необходимо равно m, то уравненіе это не представляетъ одной кривой, но выражаетъ двѣ кривыя, болѣе простого вида; дѣйствительно, приравнявъ множителей P и Q нулю, легко видѣть, что уравненію $M(x,y)=0$ удовлетворяютъ координаты каждаго множителя, слѣдовательно оно опредѣляетъ двѣ кривыя, уравненія которыхъ будутъ $P(x,y)=0$ и $Q(x,y)=0$.

Прибавимъ еще одно общее разсужденіе о уравненіяхъ кривыхъ линій: положимъ мы построили кривыя по ихъ уравненіямъ $M(x,y)=0$ и $N(x,y)=0$; что выражается уравненіемъ $M+kN=0$, въ которомъ k есть произвольный множитель, неизмѣняющій геометрическаго значенія уравненія?



Такъ какъ уравненіе $M+kN=0$ удовлетворяется координатами, удовлетворяющими обѣимъ даннымъ уравненіямъ, то она и выражаетъ собой линіи, проходящія черезъ всѣ точки пересѣченія двухъ данныхъ.

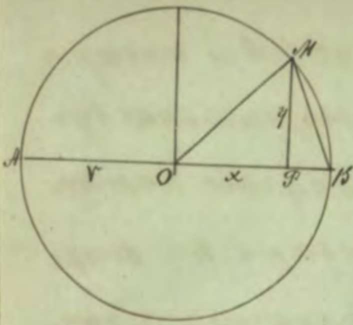
Сдѣлаемъ теперь примѣненіе всѣхъ предыдущихъ разсужденій къ отысканію уравненій нѣкоторыхъ кривыхъ. Начнемъ съ круга; такъ какъ кругъ есть геометрическое мѣсто



точекъ равно отстоящихъ отъ одной, называемой центромъ, то въ прямоугольныхъ координатахъ, принимая точку M, координаты которой a и b, за центръ, уравненіе его выразится такъ

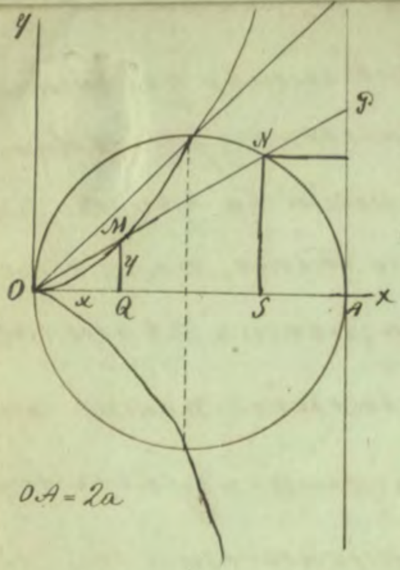
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Въ ~~полярныхъ~~ тѣхъ же координатахъ, положивъ, что начало находится въ центрѣ, находимъ для круга уравненіе $x^2+y^2=r^2$;



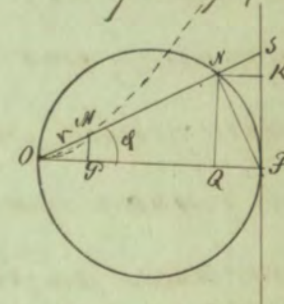
пользуясь этимъ послѣднимъ уравненіемъ, мы можемъ аналитически изучить свойства различныхъ линій въ кругѣ: такъ, перенося x^2 во вторую часть, получимъ $y^2=r^2-x^2$, разлагая разность квадратовъ $y^2=(r+x)(r-x)$ это уравненіе можно изобразить въ видѣ $\frac{r+x}{y}=\frac{y}{r-x}$ т.е. что перпендикуляръ опущенный изъ какой нибудь точки окружности на діаметръ, есть средняя пропорціональная между отрѣзками послѣдняго. Прибавляя къ обоимъ частямъ уравненія по r^2-2rx, получимъ $r^2-2rx+x^2+y^2=r^2+r^2-2rx$ откуда $(r-x)^2+y^2=2r(r-x)$; первая часть этого уравненія есть ничто иное какъ MB^2, а потому мы можемъ писать $MB^2=2r(r-x)$ или $\frac{2r}{MB}=\frac{MB}{r-x}$ т. е. хорда есть средняя пропорціональная между всѣмъ діаметромъ и прилежащимъ отрѣзкомъ, и т. д.

Другая кривая, уравненіе которой мы составимъ, носитъ названіе циссоиды Діоклеса, была открыта греческимъ геометромъ Діоклесомъ при рѣшеніи задачи о нахожденіи двухъ среднихъ пропорціональныхъ къ двумъ даннымъ



Дается кругъ, діаметръ OA и касательная къ одному концу его; если мы будемъ проводить изъ другого конца сѣкущія и откладывать на нихъ части равныя ихъ наружнымъ частямъ напр. $OM = NP$, то у насъ получится кривая съ двумя расходящимися вѣтвями и неопредѣленно приближающаяся къ касательной, которая въ этомъ случаѣ называется асимптотою. Найдемъ уравненіе этой кривой по осямъ прямоугольнымъ OX и Oy; проведя линію NS параллельно MQ и стало быть перпендикулярно OA, найдемъ $NS^2 = SA.OS$, но $SA = OQ = x$, а $OS = 2a - x$, поэтому $NS^2 = x(2a-x)$; изъ треугольниковъ OMQ и ONS вслѣдствіе ихъ подобія имѣемъ $\frac{NS}{MQ} = \frac{OS}{OQ}$ или $\frac{NS}{y} = \frac{2a-x}{x}$ откуда $NS = \frac{(2a-x)y}{x}$ подставляя величину NS въ первое изъ найденныхъ нами уравненій, получимъ $\frac{(2a-x)^2}{x^2}y^2 = x\cancel{(2a-x)}$ или $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ откуда $y = \frac{x^2}{\sqrt{x(2a-x)}}$. Составимъ теперь полярное уравненіе циссоиды, т. е. найдемъ отношеніе между r, φ и точкою M. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP имѣемъ $OP = r.\cos\varphi$;

изъ треугольника уес FNK, гдѣ $NK = OP$, получимъ $OP = NF \sin\varphi$, но $NF = 2R.\sin\varphi$; слѣдовательно $OP = 2R\sin^2\varphi$; соединяя 2 величины, найденныя для OP, имѣемъ $r\cos\varphi = 2R\sin^2\varphi$, откуда $r = \dfrac{2R\sin^2\varphi}{\cos\varphi}$ гдѣ подъ $2R$ разумѣется діаметръ круга.



Какъ мы уже видѣли, всякая кривая при помощи координатъ можетъ быть выражена уравненіемъ, общій видъ котораго есть $M(x,y) = 0$, и наоборотъ уравненіе такого вида всегда опредѣляетъ кривую, координаты которой имѣютъ свойство обращать многочленъ M въ ноль; слѣдовательно каждая кривая выражается своимъ ей одной свойственнымъ уравненіемъ. На этомъ свойствѣ кривыхъ основано дѣленіе ихъ на группы или классификація линій. Такъ какъ въ анализѣ разсматриваются два рода уравненій - алгебраическія, въ которыя входятъ только простыя алгебраическія дѣйствія (сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ цѣлыя и положительныя степени и извлеченіе корня) и притомъ въ конечномъ числѣ разъ, и трансцендентныя если въ уравненія входятъ дѣйствія не алгебраическія напримѣръ Sin, lg и т. д. или алгебраическія дѣйствія повторяются безконечно, то и кривыя, смотря по виду ихъ уравненій, раздѣляются на алгебраическія и трансцендентныя; это первое самое обширное дѣленіе. Трансцендентныя линіи не систематизированы и потому мы ограничимся изученіемъ только алгебраическихъ, которыя раздѣляются на порядки сообразно степени своихъ уравненій: если уравненіе 1ой степени, то линіи, имъ выражаемыя, называются линіями перваго порядка; уравненія 2ой степени принадлежатъ линіямъ втораго порядка и т. д.; вообще уравненіе mой степени опредѣляетъ кривую mго порядка. Изъ общихъ формулъ, служащихъ для преобразованія однѣхъ Декартовыхъ координатъ въ другія ($x = \alpha x' + \beta y' + \gamma$ и $y = \delta x' + \varepsilon y' + \eta$) очевидно, что степень уравненія а потому и порядокъ кривой отъ преобразованія осей не измѣняется; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ формулы эти первой степени — линейныя, какъ ихъ обыкновенно называютъ, то степень уравненія возвыситься не мо=

зметъ, равнымъ образомъ невозможно при этомъ и пони-
женіе степени, потому что при обратномъ преобразо-
ваніи она никогда не возвысится; слѣдовательно по-
рядокъ кривой есть постоянное, существенное ея
свойство; при переходѣ же къ полярнымъ координа-
тамъ алгебраическое уравненіе вставкою cos и sin пре-
образуется въ трансцендентное. Такъ какъ всякое
ирраціональное уравненіе путемъ различныхъ пре-
образованій можно замѣнить раціональнымъ, а по-
слѣдовательнымъ приведеніемъ къ одному знаменате-
лю всегда можно сдѣлать уравненіе цѣлымъ, то
на многочленъ M, во всемъ послѣдующемъ изложеніи,
мы будемъ смотрѣть какъ на цѣлый и раціональ-
ный. Нетрудно написать общій видъ этого много-
члена - онъ будетъ представлять сумму членовъ по-
добныхъ $Ax^p y^q$ гдѣ p и q могутъ измѣняться отъ 0
до ∞. Положимъ, что мы имѣемъ уравненіе $M=0$, въ
которомъ M представляетъ многочленъ $m^{ой}$ степени,
располагая его по убывающимъ степенямъ, найдемъ

$A_1x^m + B_1x^{m-1}y + C_1x^{m-2}y^2 + \dots + E_1xy^{m-1} + F_1y^m$ это совокупность всѣхъ членовъ $m^{ой}$ степени, гдѣ подъ A_1, B_1 и т. д. разумѣются числовые коэффиціенты; такая строка называется однороднымъ цѣлымъ многочленомъ количествъ x и y; если въ какомъ нибудь уравненіи $m^{ой}$ степени нѣтъ одного такого члена, то это уже частный случай, гдѣ коэффиціентъ равенъ нулю. ~~Сумма~~ число членовъ этой строки очевидно равна $m+1$, т. е. степени строки $+1$; продолжая далѣе, пишемъ всѣ члены $m-1^{ой}$ степени

$A_2x^{m-1} + B_2x^{m-2}y + \dots + E_2y^{m-1}$ здѣсь число членовъ $= m$

$A_3x^{m-2} + B_3x^{m-3}y + \dots + D_3y^{m-2}$ " —— " —" $= m-1$

....

$A_{m-1}x^2 + B_{m-1}xy + C_{m-1}y^2$ " —— " —" $= 3$

$A_mx + B_my$ " —— " —" $= 2$

$A_m = 0$ " —— " —" $= 1$

A_m выражаетъ сумму всѣхъ членовъ, несодержащихъ количествъ x и y. Число всѣхъ членовъ общаго вида равно $1+2+3+\dots(m-1)+m+(m+1)$ или, опредѣливъ сумму этой ариѳметической прогрессіи, $\frac{[1+(m+1)](m+1)}{2}$ откуда $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

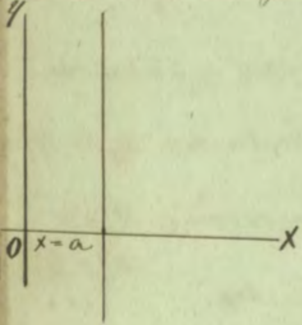
Форма многочлена m-ой степени выражаетъ опредѣлен-
ную кривую m-го порядка, которая опредѣлится, когда
будутъ даны всѣ коэффиціенты. Подставивъ въ уравне-
ніе $M=0$ удовлетворяющія ему координаты x_1 и y_1, найдемъ
уравненіе $M_1=0$; подставивъ x_2 и y_2 получимъ уравненіе
$M_2=0$ и такъ далѣе; наконецъ, когда подставимъ x_s и y_s,
будемъ имѣть $M_s=0$; изъ этого ряда уравненій:

$$M_1=0,\quad M_2=0,\quad \ldots,\quad M_s=0$$

вполнѣ опредѣляется кривая, т.е. когда на
плоскости даны s точекъ, гдѣ, какъ будетъ
объяснено впослѣдствіи, $s=\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$.

Порядокъ или степень кривой показываетъ число
точекъ, въ которыхъ она пересѣкается съ прямою ли-
ніей; примѣромъ можетъ служить кругъ, уравненіе
котораго $[(x-a)^2+(y-b)^2=r^2]$ квадратное, поэтому кругъ
всякую прямую пересѣкается въ двухъ, хотя бы и
мнимыхъ точкахъ; (послѣднее выраженіе имѣетъ мѣсто
тогда, когда прямая проходитъ въ сторонѣ отъ кру-
га, въ этомъ случаѣ понятно, что дѣйствительна-
го пересѣченія быть не можетъ). Докажемъ теперь

наше правило относительно всякой кривой: положимъ, что кривая чертится по Декартовымъ координатамъ; будемъ искать точки пересѣченія съ прямой, уравненія $x=a$, т.е. съ прямой параллельной оси y; если подставимъ

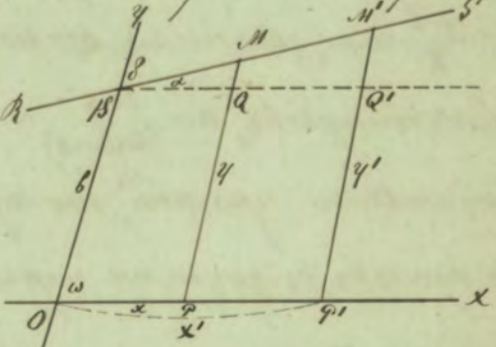


въ уравненіе нашей кривой $M^m=0$ произвольную величину $x=a$, то видимъ, что оно обращается въ уравненіе $m^{ой}$ степени съ однимъ неизвѣстнымъ, которое имѣетъ m рѣшеній, стало быть опредѣлимъ намъ m точекъ на разстояніи a отъ оси y и пересѣчется съ нашей прямой не болѣе не меньше какъ въ m точкахъ. Зная, что отъ преобразованія однѣхъ Декартовыхъ осей въ другія, степень не измѣняется, мы можемъ ко всякой прямой начертить оси, изъ которыхъ одна будетъ ей параллельна, и найдемъ, что и съ этой прямой кривая наша пересѣчется въ m точкахъ.

Перейдемъ теперь къ изученію линій перваго порядка т.е. прямыхъ; здѣсь намъ предстоитъ рѣшить двѣ задачи: 1) что всякое уравненіе вида $Ax+By+C=0$ выражаетъ прямую и

2.) что всякая прямая выражается подобнымъ уравненiемъ.

Начнемъ со второй: требуется составить уравненiе прямой BS т.е. найти зависимость между координатами какой-нибудь произвольной точки этой прямой, напримѣръ точки M. Черезъ точку B проводимъ линiю, параллельную оси x; уравненiе прямой можно вывести изъ пропорцiональности треугольниковъ BMQ и BM'Q', откуда $\frac{MQ}{M'Q'} = \frac{BQ}{BQ'}$, или, переставивъ среднiе, $\frac{MQ}{BQ} = \frac{M'Q'}{BQ'}$; замѣтивъ, что вслѣдствiе параллельности линiй $MQ = y - b$ и $M'Q' = y' - b$ и на томъ же основанiи $BQ = x$ и $BQ' = x'$, подставляемъ въ пропорцiю эти величины и получаемъ $\frac{y-b}{x} = \frac{y'-b}{x'}$; если-бы мы означили черезъ $M^2(x^2; y^2)$ третью точку прямой, то и для нее нашли-бы, что $\frac{y^2-b}{x^2} = \frac{y-b}{x}$; слѣдовательно это отношенiе есть величина постоянная для каждой точки данной прямой, называя его черезъ k, имѣемъ $\frac{y-b}{x} = k$ или $y = kx + b$. Это послѣднее выраженiе служитъ уравненiемъ прямой BS, пересѣкаю=



ющей ось y въ точкѣ B и наклоненной подъ угломъ α къ оси x. Величины k и b т. е. постоянныя величины, которыя должны быть даны, чтобы прямая была вполнѣ опредѣлена, называются параметрами прямой; въ данномъ случаѣ $b = OB$, $k = \frac{y-b}{x}$ или, замѣняя отношенiе между сторонами отношенiемъ синусовъ, $k = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}$; если воспользуемся другими свойствами прямой, то придемъ къ подобному-же уравненiю, но только съ другими параметрами.

Обратимся теперь къ первой задачѣ и посмотримъ, что выражаетъ уравненiе $Ax + By + C = 0$. Полагая въ немъ $B = 0$, найдемъ на основанiи вышесказаннаго, что оно представляетъ прямую параллельную оси y; если положимъ B и C равными нулю, то прямая этого уравненiя будетъ сама ось y, такъ какъ въ этомъ случаѣ $x = 0$; точно также при $A = 0$ уравненiе выражаетъ прямую параллельную оси x, а при A и $C = 0$ — саму ось x; если-же A, B и C не равны нулю, то уравненiе $Ax + By + C = 0$ можно представить въ видѣ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ т. е. привести къ формѣ $y = kx + b$, которое, какъ мы уже знаемъ, выражаетъ прямую пересѣкающую ось y и наклоненную подъ какимъ-нибудь угломъ α къ оси x. Слѣдовательно во всѣхъ своихъ формахъ уравненіе $Ax+By+C=0$ опредѣляетъ на плоскости какую-нибудь прямую. Построить прямую этого уравненія весьма просто: сравнивая его съ уравненіемъ $y=kx+b$, найдемъ $b=-\frac{C}{B}$; $k=-\frac{A}{B}$; величина b имѣетъ дѣйствительное значеніе при всѣхъ величинахъ B, кромѣ 0; другой параметръ k т.е. зависимость между угломъ наклоненія къ оси X и угломъ между осями координатъ легко вывести изъ уравненія $k=\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega-\alpha)}$; $\sin\alpha = k\sin(\omega-\alpha)$ раскрывая скобки, имѣемъ $\sin\alpha = k\sin\omega\cos\alpha - k\cos\omega\sin\alpha$; перенеся членъ съ минусомъ въ первую часть и взявъ $\sin\alpha$ за скобки, найдемъ $\sin\alpha(1+k\cos\omega) = k\sin\omega\cos\alpha$; раздѣливъ обѣ части уравненія на $\cos\alpha$ получимъ $tg\,\alpha(1+k\cos\omega) = k\sin\omega$ откуда $tg\,\alpha = \frac{k\sin\omega}{1+k\cos\omega}$ или $\frac{-A\sin\omega}{B-A\cos\omega}$.

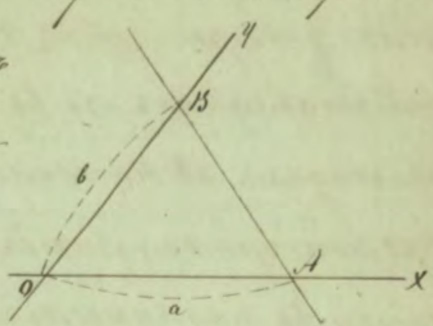
Двойственность рѣшенія по tg приводитъ къ одной и той же линіи, наклоненной къ оси X подъ угломъ α и $180°+\alpha$.

Если A и B неограниченно стремятся къ нулю, то уравненіе принимаетъ парадоксальную форму $C=0$ т.е. постоянное количество C равно нулю;

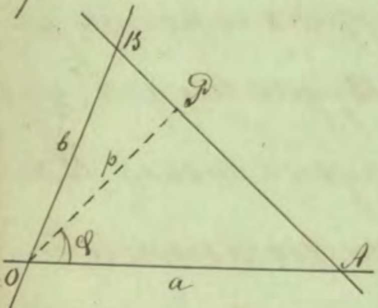
въ этомъ случаѣ параметры принимаютъ видъ $b=\infty$; $k=\frac{0}{0}$
а потому и говорятъ что линія, выражаемая этимъ урав=
неніемъ, всѣми своими точками удалена на безконечно-
большое разстояніе.

Съ перваго взгляда можетъ показаться, что въ уравненіи $Ax+By+C=0$ входятъ три параметра – величины A, B и C, но на самомъ дѣлѣ ихъ только два; ибо, зная, что отъ помноженія уравненія на произвольнаго множителя λ прямая линія не измѣняется, мы можемъ уравненіе наше помножить на λ и, измѣняя его, найдемъ безчисленное количество величинъ λA, λB, λC, дѣйствительно же неизмѣнно остаются отношенія $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$, которыя и суть параметры этого уравненія. При рѣшеніи общаго вида мы принимали за данныя точку пересѣченія съ осью y и уголъ наклоненія къ оси x, уравненіе принимало форму $y=kx+b$; это уравненіе даетъ выраженіе одной координаты черезъ другую; естественно желать равноправности осей, которой нѣтъ въ нашемъ уравненіи, потому что за данныя мы брали количества разнородныя. Чтобы получить уравненіе симметричное относи=

но x и y, примемъ за данныя точки пересѣченія прямой съ осями координатъ. Изъ всѣхъ точекъ прямой для A одной $y=0$ и уравненіе ея въ общемъ видѣ приметъ форму $Aa+C=0$; оно показываетъ каковы должны быть коэффиціенты, чтобы прямая проходила черезъ точку A; такъ какъ для полученія уравненія найнъ надо опредѣлить оба коэффиціента, то одного этого уравненія недостаточно. Другое подобное будемъ имѣть, разсуждая также относительно точки B; для нее $x=0$; $y=b$ и потому, чтобы прямая проходила черезъ точку B, необходимо должно существовать для нее соотношеніе $Bb+C=0$. Рѣшая эти два уравненія относительно A и B получимъ $A=-\frac{C}{a}$; $B=-\frac{C}{b}$; подставляя эти величины въ общій видъ уравненія прямой и замѣтивъ, что C какъ общій множитель сократится, найдемъ уравненіе $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, прямой относительно отрѣзковъ, которые она дѣлаетъ на осяхъ координатъ. Эту форму уравненія прямой можно прямо вывести изъ общаго вида, помноживъ его на такую я,



чтобы C приравнять -1, т.е. на λ равную $-\frac{1}{C}$; это уравненіе рѣдко употребляется, такъ какъ форма его дробная; чаще представляютъ его въ видѣ $ux+vy=1$, полагая $\frac{1}{a}=u$ и $\frac{1}{b}=v$. Перейдемъ къ наиболѣе употребляемой формѣ уравненія прямой; прямая линія можетъ быть опредѣлена подобно точки въ полярныхъ координатахъ: разстояніе отъ начала координатъ-одинъ параметръ, другой - уголъ перпендикуляра съ одной изъ осей; такое уравненіе принято называть нормальнымъ. Исходя изъ формы $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, вставимъ вмѣсто



a и b параметры p и φ. Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ AOP и BOP имѣемъ $p=a.\cos\varphi$; $p=b\cos(\omega-\varphi)$; подставляя эти выраженія и приводя къ одному знаменателю, получимъ $x.\cos\varphi+y\cos(\omega-\varphi)=p$. Это уравненіе показываетъ, что p равняется суммѣ проэкцій координатъ x и y точки P. Для осей прямоугольныхъ $\cos(\omega-\varphi)=\cos(90-\varphi)=\sin\varphi$ и потому нормальное уравненіе принимаетъ видъ $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p$. Нетрудно также вывести нормальное уравненіе прямой, исходя изъ общего вида $Ax+By+C=0$, стоитъ только помножить его на такую λ, чтобы $\lambda A=\cos\varphi$ и $\lambda B=\cos(\omega-\varphi)$ тогда необходимо

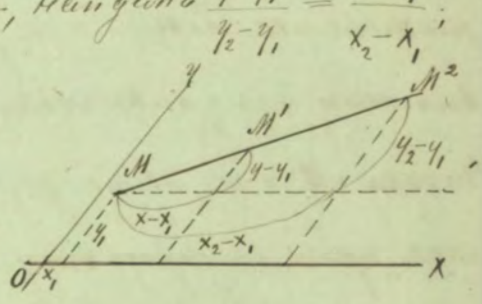
λC будетъ равнятся $-p$; для этого рѣшимъ уравненіе $\lambda B = \cos(\omega-\varphi) = \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi$; подставляя вмѣсто $\cos\varphi$ изъ уравненія $\lambda A = \cos\varphi$ его величину а вмѣсто $\sin\varphi$ $\sqrt{1-\lambda^2A^2}$, получимъ $\lambda B = \cos\omega\,\lambda A + \sin\omega\sqrt{1-\lambda^2A^2}$; перенеся $\cos\omega\,\lambda A$ въ первую часть, беремъ тамъ λ за скобки и освобождаемъ уравненіе отъ радикала $\lambda^2(B-A\cos\omega)^2 = \sin^2\omega\,(1-\lambda^2A^2)$; раскрывая во второй части скобки и перенеся членъ съ λ въ первую часть, имѣемъ

$$\lambda^2\left(A^2\sin^2\omega + (B-A\cos\omega)^2\right) = \sin^2\omega \text{ откуда } \lambda^2 = \frac{\sin^2\omega}{A^2\sin^2\omega+B^2-2AB\cos\omega+A^2\cos^2\omega}$$

или $\lambda^2 = \dfrac{\sin^2\omega}{B^2+A^2-2AB\cos\omega}$; извлекая квадратный корень, найдемъ $\lambda = \dfrac{\sin\omega}{\sqrt{B^2+A^2-2AB\cos\omega}}$; въ случаѣ осей прямоугольныхъ $\sin\omega = 1$; $\cos\omega = 0$ и потому $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Придавимъ еще формы уравненій прямой, гдѣ она опредѣляется одной или двумя точками. Они могутъ быть выведены изъ уравненія $y = kx + b$; положимъ намъ дана точка $M.(x'y')$, какіе должны быть параметры, чтобы прямая прошла черезъ эту точку; очевидно для этого необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію прямой, т.е. чтобы существовало равенство $y' = kx' + b$, въ про=

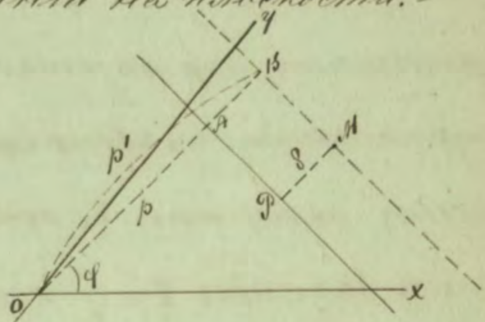
тивномъ случаѣ прямая не прошла бы чрезъ точку М. Поль=
зуясь уравненіемъ прямой и найденнымъ нами равенствомъ,
можно исключить или в, тогда прямыя, проходящія чрезъ
точку М, будутъ различаться углами, или к, тогда - отрѣзка=
ми на оси y. Проще уничтожить в вычтя равенство изъ
уравненія, получимъ $y-y_1=k(x-x_1)$ уравненіе прямой, проходя=
щей чрезъ данную точку М. Если кромѣ того будетъ дана
вторая точка $M_2(x^2y^2)$ то прямая вполнѣ опредѣлена и при
помощи ея уравненія мы можемъ исключить и в и к; въ
самомъ дѣлѣ какъ прямая проходящая чрезъ точку М она
имѣетъ уравненіе $y-y_1=k(x-x_1)$, но она проходитъ еще чрезъ
точку M_2, слѣдовательно координаты ея должны удовлетво=
рять уравненію $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$ откуда $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ или, подставляя
въ первое найденное нами уравненіе, найдемъ $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$;



геометрическій смыслъ послѣдняго уравненія крайне простъ; оно показываетъ пропорціональность сторонъ въ подобныхъ треугольникахъ.

Этими уравненіями, весьма часто употребляющимися, вмѣстѣ съ объясненными выше исчерпываются почти всѣ фор=

мы уравненій, выражающихъ прямую линію, и потому мы перейдемъ къ рѣшенію различныхъ вопросовъ, касающих=ся положенія точки и прямой линіи на плоскости.-



Положимъ намъ дана прямая (ея уравненіемъ) и точка (координатами ея); всѣ вопросы относитель=но ихъ взаимнаго положенія ис=черпываются вычисленіемъ разстоянія между ними, въ данномъ случаѣ опредѣленіемъ длины перпендикуляра MP, названнаго нами буквою δ. Всего удобнѣе опредѣлить δ изъ нормальнаго уравненія $x\cos\varphi + y\cos(\omega-\varphi) = p$; проведемъ черезъ точку $M(x'y')$ линію параллельно данной, тогда δ т.е. разстояніе точки отъ линіи равно разности перпен=дикуляровъ опущенныхъ изъ начала координатъ на дан=ную линію и на линію ей параллельную, проходящую черезъ точку M т.е. $\delta = p' - p$. Уравненіе линіи параллельной данной будетъ $x\cos\varphi + y\cos(\omega-\varphi) = p'$, но такъ какъ она про=ходитъ черезъ точку M, то координаты этой послѣдней должны удовлетворять ея уравненію, слѣдовательно

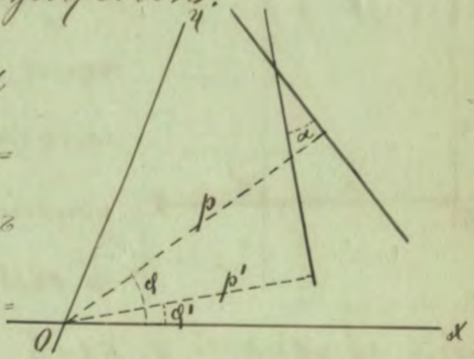
$x'\cos\varphi + y'\cos(\omega-\varphi) = p'$; подставляя это выраженіе для p' въ уравненіе $\delta = p_1 - p$, получимъ $\delta = x'\cos\varphi + y'\cos(\omega-\varphi) - p$. Сравнивая полученное нами выраженіе съ нормальнымъ уравненіемъ, легко замѣтимъ, что разстояніе точки отъ прямой равняется нормальному уравненію этой прямой, въ которомъ всѣ члены перенесены въ одну часть и на мѣсто неопредѣленныхъ величинъ x и y подставлены координаты $(x'y')$ данной точки; отсюда очевидно, что нормальное уравненіе для всевозможныхъ величинъ x и y, удовлетворяющихъ ему, имѣетъ опредѣленное геометрическое значеніе, заключающееся въ томъ, что точки лежащія на прямой, имѣютъ $\delta = 0$ т.е. не имѣютъ никакого разстоянія отъ данной прямой. Намъ нетрудно для δ составить уравненіе съ любыми коэффиціентами напримѣръ съ общими. Для этого подставимъ въ найденное нами для δ уравненіе вмѣсто $\cos\varphi$ — $\lambda A = \frac{A\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}$; вмѣсто $\cos(\omega-\varphi)$ — $\lambda B = \frac{B\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}$; и наконецъ вмѣсто $-p$ величину $\lambda C = \frac{C\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}$ получимъ $\delta = \frac{(Ax'+By'+C)\sin\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\omega}}$. Относительно знака разности $p'-p$ надо замѣтить, что разстояніе всѣхъ точекъ, лежащихъ относительно точки начала координатъ на сторонѣ противоположной принято считать положительнымъ, разстояніе же точекъ, лежащихъ по одну сторону съ началомъ координатъ, отрицательнымъ. Само собою разумѣется, что при всѣхъ подобныхъ геометрическихъ изысканіяхъ, гдѣ координаты произвольныя, употребляется обыкновенно система прямоугольная, значительно упрощающая рѣшеніе.

Если на плоскости даются двѣ прямыхъ, то можетъ возникнуть вопросъ о ихъ пересѣченіи и наклоненіи другъ къ другу. Положимъ, что намъ даны линіи $Ax+By+C=0$ и $A'x+B'y+C'=0$; вопросъ о ихъ пересѣченіи рѣшается весьма просто: такъ какъ координаты точки пересѣченія удовлетворяютъ обоимъ уравненіямъ, то ихъ легко найти, рѣшивъ эти два уравненія; изъ нихъ $x=\frac{BC'-CB'}{AB'-A'B}$ и $y=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}$; такъ какъ уравненія прямой первой степени, то рѣшеніе одно и какія бы ни были величины x и y положительныя или отрицательныя онѣ опредѣляютъ всегда одну конечную точку. Изслѣдуемъ нѣкоторые частные случаи, заслуживающіе особаго вниманія а именно:

1) если знаменатель этихъ дробей обращается въ ноль, тогда для x и y получается ∞, что служитъ указаніемъ на то, что данныя линіи параллельны; условіе ихъ параллельности можно вывести изъ равенства $AB' - A'B = 0$; откуда $AB' = A'B$ или разлагая въ пропорцію $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$, т. е. если угловые коэффиціенты пропорціональны, то линіи параллельны;

2.) если кромѣ знаменателя, одинъ изъ числителей тоже обращается въ ноль, то и другой числитель становится равнымъ нулю. Полагаемъ $AB' - A'B = 0$ и $BC' - CB' = 0$ отсюда найдемъ $AB' = A'B$ и $BC' = B'C$ или разлагая эти равенства въ пропорціи $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$; $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$; изъ этихъ пропорцій вытекаетъ, что $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$ или $AC' = A'C$ слѣдовательно $AC' - A'C = 0$; положивъ, что отношеніе $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ равняется $\frac{1}{\lambda}$, найдемъ $A' = \lambda A$; $B' = \lambda B$ и $C' = \lambda C$. а такъ какъ отъ помноженія уравненія на постояннаго множителя λ геометрическое значеніе его неизмѣняется, то прямыя, выражаемыя этими уравненіями $Ax + By + C = 0$ и $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$, совпадаютъ, иначе говоря эти уравненія даютъ одну и туже линію, что легко видѣть сократив второе уравненіе на λ и замѣтивъ, что получается уравненіе одинаковое съ первымъ.

Обратимся къ рѣшенію втораго вопроса, т.е. вопроса о наклоненіи двухъ прямыхъ линій между собою.



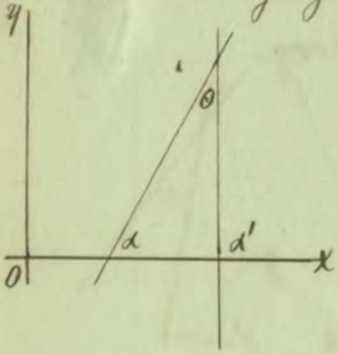
Уголъ между данными прямыми α равенъ углу, составленному изъ сторонъ перпендикулярныхъ даннымъ прямымъ т.е. углу $\varphi-\varphi'$. Преобразуемъ уравненія данныхъ линій въ нормальныя и, замѣтивъ, что углы независятъ отъ величины p и p', такъ какъ всѣ параллельныя линіи имѣютъ одинъ и тотъ же уголъ, найдемъ по sn и cs величины φ и φ' по выраженіямъ:

$$cs\,\varphi = \frac{A\,sn\,\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\,cs\,\omega}}\,;\quad cs(\omega-\varphi) = \frac{B\,sn\,\omega}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\,cs\,\omega}}\,;$$

$$cs\,\varphi' = \frac{A'\,sn\,\omega}{\sqrt{A_1^2+B_1^2-2A_1B_1\,cs\,\omega}}\,;\quad cs(\omega-\varphi') = \frac{B'\,sn\,\omega}{\sqrt{A_1^2+B_1^2-2A_1B_1\,cs\,\omega}}$$

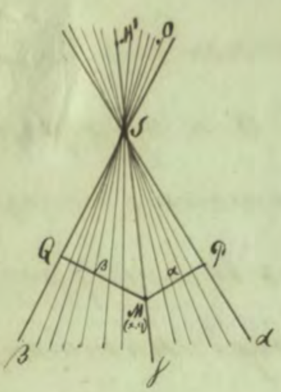
Равенство φ и φ' служитъ доказательствомъ параллельности линій и обусловливается пропорціональностью коэффиціентовъ.

Рѣшимъ этотъ же вопросъ проще употребляя уравненіе $y=kx+b$; положимъ, что прямыя чертятся въ осяхъ прямоугольныхъ, тогда $k=tg\,\alpha$ и $k'=tg\,\alpha'$; называя уголъ между прямыми черезъ θ имѣемъ $\theta=\alpha'-\alpha$ или $tg\,\theta = tg(\alpha'-\alpha)$ окуда $tg\theta = \frac{tg\alpha' - tg\alpha}{1 + tg\alpha' tg\alpha}$; подставляя вмѣсто $tg\alpha$ и $tg\alpha'$ — k и k'



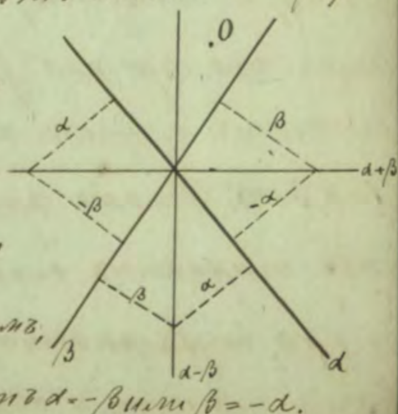
получимъ $tg\theta = \frac{k' - k}{1 + k'k}$; если $k = k'$ то $tg\theta =$ нулю, слѣдовательно линіи параллельны, если-же $1 + k'k = 0$ то $tg\theta = \infty$ и потому линіи перпендикулярны ($\theta = 90°$); изъ этого очевидно, что линіи перпендикулярныя къ данной $y = kx + b$ выражаются уравненіемъ вида $y = -\frac{1}{k}x + \beta$; нетрудно вывести формулу для опредѣленія угла наклоненія изъ уравненій общаго вида; такъ какъ $k = -\frac{A}{B}$ а $k' = -\frac{A'}{B'}$ то $tg\theta = \frac{AB' - BA'}{AA' + BB'}$ если числитель этой дроби обращается въ ноль, то линіи параллельны, что обусловливается пропорціональностью коэфиціентовъ. если $AA' + BB' = 0$ то $tg\theta = \infty$; $\theta = 90°$ и стало-быть линіи перпендикулярны.

Тѣ положенія, которыя уже выражены, вполнѣ достаточны чтобы рѣшать всѣ вопросы относительно прямолинейныхъ фигуръ. Тамъ, гдѣ нѣтъ надобности знать числовыя величины можно сократить способъ Аналитической Геометріи; мы будемъ говорить о приложеніи этого способа къ прямо-линіи. Для этого употребляется обыкновенно нормальная форма уравненія; положимъ общій видъ $L=0$ и преобразуемъ его въ нормальный, получимъ $\alpha=0$, гдѣ α имѣетъ положительное геометрическое значеніе, оно опредѣляетъ величину разстоянія точки, выраженной вставленными координатами, отъ данной прямой. Большинство теоремъ сводится ко вопросу о томъ, какія изъ трехъ и болѣе линій проходятъ черезъ одну точку, и этотъ вопросъ легко рѣшается помощью сокращеннаго способа. Положимъ, что намъ даны двѣ линіи $\alpha=0$ и $\beta=0$ и требуется составить уравненіе прямой, проходящей черезъ точку ихъ пересѣченія; для простоты пусть оси будутъ прямоугольныя. При объясненіи основныхъ началъ Аналитической геометріи было доказано, что если два уравненія $M=0$ и $N=0$ выражаютъ двѣ линіи, то уравненіе $M-kN=0$ опредѣляетъ линіи, проходящія черезъ точки пересѣченія данныхъ; основываясь на этомъ принципѣ, мы можемъ написать уравненіе $\alpha-k\beta=0$, которое и будетъ опредѣлять всѣ линіи, проходящія черезъ точку S.



Различаются всѣ эти линіи только значе-
ніемъ коэффиціента k, который равняется
$\frac{\alpha}{\beta}$; только для одной точки S количества
α и β обращаются заразъ въ ноль; для
всѣхъ остальныхъ они не будутъ нулями,
и легко могутъ быть опредѣлены; для
точки M напримѣръ $\alpha = MP = MS\,sn(\alpha,y)$; $\beta = MQ = MS\,sn(\beta,y)$ откуда
$k = \frac{sn(\alpha,y)}{sn(\beta,y)}$. Посмотримъ теперь какъ измѣняется коэффи-
ціентъ k; полагая, что точка начала координатъ лежитъ
въ O, и зная, что разстояніе точки отъ линіи принято счи-
тать положительнымъ въ томъ случаѣ, когда она лежитъ
отъ линіи на противуположной сторонѣ съ началомъ
координатъ, нетрудно замѣтить что k будетъ положи-
тельнымъ только въ углѣ (α,β) и въ углѣ ему вертикальномъ,
такъ какъ для перваго $k = \frac{+\alpha}{+\beta}$ а для втораго $= \frac{-\alpha}{-\beta}$; въ углахъ
же дополнительныхъ k отрицательное; числовая величина
k измѣняется отъ 0 до ∞; перемѣщая линію y до совпаденія
съ линіей α, мы увидимъ, что что k т.е. $\frac{sn(\alpha,y)}{sn(\beta,y)}$ все уменьшается
и въ моментъ совпаденія становится равной 0; если же

мы будемъ перемѣщать линію γ по направленію къ линіи β, то наоборотъ величина k будетъ все возрастать и въ моментъ совпаденія этихъ линій превратится въ безконечно[сть].
Если возьмемъ уравненія въ общемъ видѣ $L=0$ и $L'=0$, то всѣ линіи, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ выразются уравненіемъ $L-kL'=0$; помноживъ первое на R а второе на R', мы можемъ привести ихъ къ виду нормальнаго и тогда уравненіе $L-kL'=0$ приметъ форму $\alpha-k\frac{R}{R'}\beta=0$.
Обратимся теперь къ нѣкоторымъ приложеніямъ этого начала и во-первыхъ остановимся на частныхъ значеніяхъ величины k. Какія линіи выражаются уравненіемъ $\alpha-k\beta=0$ при $k=+1$ и при $k=-1$. Въ первомъ случаѣ уравненіе обращается въ $\alpha-\beta=0$ или $\alpha=\beta$, которое выражаетъ геометрическ[ое] мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ линій α и β равны, т.е. опредѣляетъ линію, дѣлящую уголъ (α,β) пополамъ. Второе уравненіе $\alpha+\beta=0$ или $\alpha=-\beta$ выражаетъ собой линію дѣлящую дополнительные углы пополамъ,



такъ какъ точки этой послѣдней имѣютъ $\alpha=-\beta$ или $\beta=-\alpha$.

Нетрудно доказать, что эти двѣ линіи взаимно перпендикулярны; положимъ, что уравненіе $\alpha=0$ имѣетъ параметры p и φ, уравненіе $\beta=0$ — p' и φ', тогда, знаем, что при прямоугольныхъ осяхъ условіе перпендикулярности линій заключается въ томъ, чтобы $AA'+BB'=0$, найдемъ для линій $\alpha-\beta=0$ и $\alpha+\beta=0$

$A=cs\varphi-cs\varphi'$; $B=sn\varphi-sn\varphi'$; $A'=cs\varphi+cs\varphi'$ и $B'=sn\varphi+sn\varphi'$;

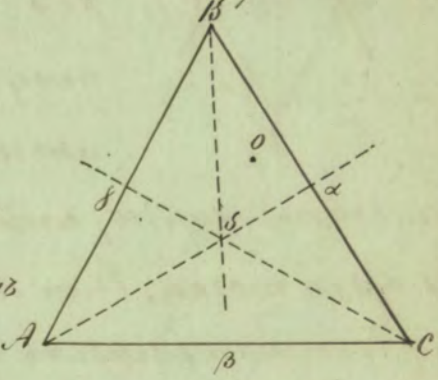
подставляя эти величины въ уравненіе $AA'+BB'=0$ получимъ $(cs\varphi-cs\varphi')(cs\varphi+cs\varphi')+(sn\varphi-sn\varphi')(sn\varphi+sn\varphi')=0$ или, замѣняя произведенія суммъ на разности — разностями квадратовъ,

$cs^2\varphi-cs^2\varphi'+sn^2\varphi-sn^2\varphi'=0$, откуда очевидно, что данныя линіи перпендикулярны.

+1 −1

Въ большинствѣ вопросовъ, какъ мы уже сказали, требуется убѣдиться, проходятъ ли три или болѣе линій черезъ одну точку, и доказали, что если двѣ линіи $\alpha=0$ и $\beta=0$ пересѣкаются, то третья γ проходитъ черезъ точку ихъ пересѣченія въ томъ случаѣ когда она выражается уравненіемъ $\alpha-k\beta=0$. Этотъ принципъ можетъ быть приложенъ въ болѣе широкомъ смыслѣ; а именно, если черезъ $\alpha=0$, $\beta=0$ и $\gamma=0$ выражаются три линіи и если многочлены α, β и γ имѣютъ свойство, что послѣ помноженія ихъ

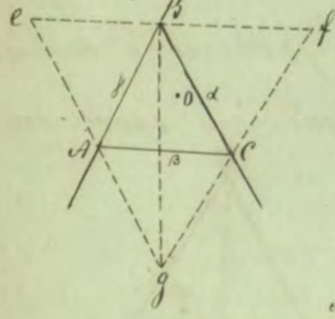
на произвольныхъ множителей k, l, m, сумма ихъ тождест-
венно обращается въ ноль, т.е. $k\alpha + l\beta + m\gamma = 0$, то три
эти линіи проходятъ черезъ одну точку; отсюда очевидно
что если α и β пересѣкаются то γ необходимо равна нулю.



Докажемъ справедливость нашего положенія на нѣкоторыхъ задачахъ.

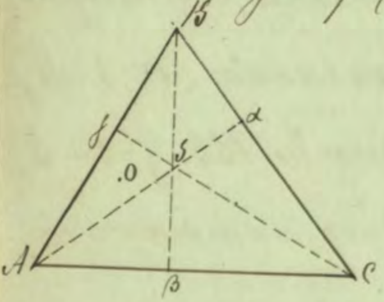
1) Требуется доказать, что линіи, дѣлящія углы треугольника пополамъ пересѣкаются въ одной точкѣ; стороны треугольника даны уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и $\gamma = 0$; положимъ, что начало координатъ лежитъ въ точкѣ O, тогда по предыдущему имѣемъ для линіи, дѣлящей уголъ C пополамъ т.е. для линіи CS уравненіе $\alpha - \beta = 0$, для линіи AS — $\beta - \gamma = 0$, наконецъ для линіи BS — $\gamma - \alpha = 0$; сумма многочленовъ даже не требуетъ помноженія, потому, что она прямо тождественна нулю, и потому три эти линіи проходятъ черезъ одну точку. Нетрудно показать, что, если продолжимъ двѣ стороны треугольника и раздѣлимъ два внѣшнихъ, получаемыхъ отъ этого, угла,

то линіи дѣленія вмѣстѣ съ линіей дѣлящей пополамъ внутренній уголъ, или несмежный, проходятъ черезъ одну точку.



Для Bd на основаніи предыдущаго уравненія будетъ $\gamma-\alpha=0$, для Ad $-\beta+\gamma=0$, для Cd- $\alpha+\beta=0$; если мы помножимъ уравненіе полученное для Ad на -1 то въ суммѣ многочленовъ найдемъ выраженіе тождественное нулю; слѣдовательно эти линіи встрѣчаются въ одной точкѣ. Если мы раздѣлимъ пополамъ каждую пару дополнительныхъ угловъ, то въ результатѣ получимъ треугольникъ def, вмѣщающій данный ABC.-

2.) Вопросъ о точкѣ пересѣченія высотъ также не представляетъ затрудненія. Положимъ по прежнему, что



стороны треугольника даны уравненіями $\alpha=0$, $\beta=0$ и $\gamma=0$ и начало координатъ находится въ точкѣ O. Тогда перпендикуляры Cγ выразятся уравненіемъ

$$\alpha-k\beta=0;\quad A\alpha-\beta-k'\gamma=0;\quad B\beta-\gamma-k^2\alpha=0;$$

величины k, k' и k^2 найдутся изъ прямоугольныхъ треугольниковъ: $k=\frac{\sin(\alpha\gamma)}{\sin(\beta\gamma)}=\frac{\cos B}{\cos A}$; $k'=\frac{\sin(\beta\alpha)}{\sin(\gamma\alpha)}=\frac{\cos C}{\cos B}$; $k^2=\frac{\sin(\gamma\beta)}{\sin(\alpha\beta)}=\frac{\cos A}{\cos C}$;
подставляя эти выраженія въ найденныя нами урав-

ненія высотъ и приводя къ одному знаменателю, получимъ:

для $C\gamma - \cos A\alpha - \cos B\beta = 0$. Сумма первыхъ частей этихъ урав-

— $A\alpha - \cos B\beta - \cos C\gamma = 0$. неній тождественна нулю и

— $B\beta - \cos C\gamma - \cos A\alpha = 0$. слѣдовательно высоты треуго-

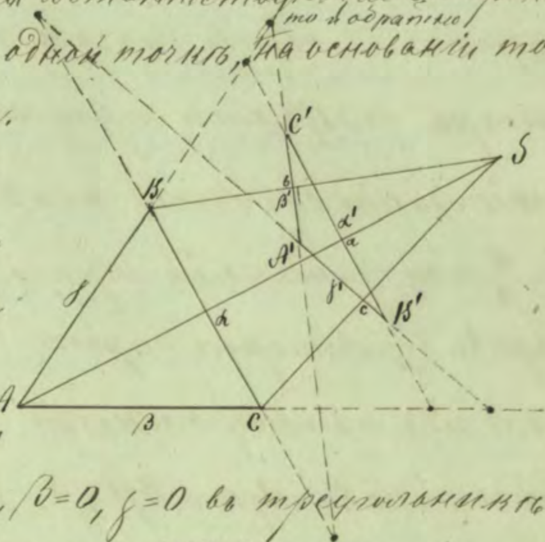
льника пересѣкаются въ одной точкѣ.-

3.) Докажемъ еще, что линіи, проведенныя изъ вершинъ треугольника въ средины противуположныхъ сторонъ, пересѣкаются въ одной точкѣ. Точка эта носитъ названіе центра тяжести треугольника.

Уравненія сторонъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

Уравненіе линіи CS будетъ $\alpha - k\beta = 0$; гдѣ $k = \frac{\alpha}{\beta}$ или отношенію перпендикуляровъ $\frac{\gamma l}{\gamma k}$, которые опредѣляются изъ прямоугольныхъ треугольниковъ $A\gamma k$ и $B\gamma l$; $\gamma l = \gamma B \sin B$, $\gamma k = \gamma B \sin A$; отсюда $k = \frac{\sin B}{\sin A}$ и уравненіе, приведенное къ одному знаменателю, принимаетъ видъ $\sin A\alpha - \sin B\beta = 0$; такимъ же образомъ найдемъ для AS уравненіе $\sin C\gamma - \sin B\beta = 0$, а для BS — $\sin A\alpha - \sin C\gamma = 0$; помноживъ первое изъ трехъ уравненій на -1 найдемъ, что ихъ сумма тождественна нулю; стало быть линіи эти пересѣкаются въ одной точкѣ, называемой центромъ тяжести. Для доказательства подобныхъ предложеній можно употреблять также уравненія общаго вида напримѣръ $L=0$, $L'=0$ и $L''=0$; основываясь на слѣдующемъ предложеніи: если изъ двухъ первыхъ многочленовъ можетъ быть составленъ одинъ, тождественный съ третьимъ, то линіи, выражаемыя ими, встрѣчаются въ одной точкѣ.

4) Докажемъ теперь, что если три перпендикуляра опускаются изъ вершинъ одного треугольника на соотвѣтствующія стороны другаго, ~~то~~ ~~эти~~ и пересѣкаются въ одной точкѣ, то и обратно, на основаніи только что высказаннаго предложенія.



Требуется доказать, что перпендикуляры Aa, Bb и Cc сходятся въ одной точкѣ. Для этого выразимъ ихъ уравненіями, пользуясь данными уравненіями сторонъ $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ въ треугольникѣ ABC и $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=0$ въ треугольникѣ $A'B'C'$. Уравненіемъ Aa будетъ $\beta-k\gamma=0$, Bb — $\gamma-k\alpha=0$, Cc — $\alpha-k\beta=0$; въ первомъ k есть ничто иное какъ отношеніе $sn\,CAS$ къ $sn\,BAS$, которое изъ прямоугольныхъ треугольниковъ можно замѣнить отношеніемъ $\frac{cs(\beta\alpha')}{cs(\gamma\alpha')}$ во второмъ уравненіи $k=\frac{sn\,ABS}{sn\,SBC}=\frac{cs(\beta'\gamma)}{cs(\beta'\alpha)}$ и въ третьемъ наконецъ $k=\frac{sn\,SCB}{sn\,CS}=\frac{cs(\alpha\gamma')}{cs(\beta\gamma')}$; подставляя эти выраженія для k въ найденныя выше уравненія и приводя къ одному знаменателю получимъ для перпендикуляровъ слѣдующія выраженія:

для Aa... $cs(\gamma\alpha')\beta - cs(\beta\alpha')\gamma = 0$

" " Bb... $cs(\alpha\beta')\gamma - cs(\gamma\beta')\alpha = 0$

" " Cc... $cs(\beta\gamma')\alpha - cs(\alpha\gamma')\beta = 0$

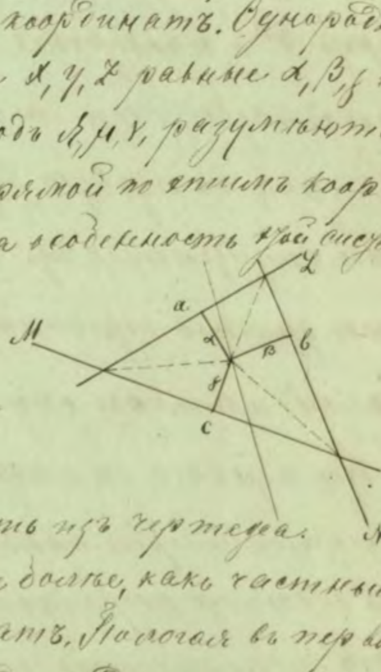
Но эти три перпендикуляра проходятъ черезъ одну точку и слѣдовательно если въ двухъ последнихъ исключимъ α то оно должно быть тождественно съ первымъ; $cs(\alpha\beta').cs(\beta\gamma')\gamma - cs(\gamma\beta').cs(\alpha\gamma')\beta = 0$ раздѣливъ это уравненіе на первое получимъ условіе, которое необходимо для того, чтобы перпендикуляры проходили черезъ одну точку, именно $cs(\alpha\beta').cs(\beta\gamma').cs(\gamma\alpha') = cs(\alpha'\beta).cs(\beta'\gamma).cs(\gamma'\alpha)$. требуется стало быть пропорціональность коэффиціентовъ. Если нужно рѣшить задачу обратную то стоитъ только замѣнить α черезъ α', β черезъ β' и наоборотъ, отчего очевидно условіе не измѣнится, кромѣ развѣ того что первая часть перенесется во вторую а вторая въ первую. Изъ чего слѣдуетъ, что если перпендикуляры опущенные изъ вершинъ одного треугольника на стороны другаго, пересѣкаются въ одной точкѣ, то и наоборотъ перпендикуляры опущенные изъ вершинъ втораго на стороны перваго также встрѣчаются въ одной точкѣ.-

Закончимъ теорію прямой линіи краткимъ указаніемъ на двѣ особыя системы координатъ, которыя вытекаютъ изъ выше-сказаннаго и получаютъ послѣднее время все большее и большее значеніе въ наукѣ. Это системы трилинейныхъ и касательныхъ координатъ. Если уравненія $L=0$, $M=0$ и $N=0$ выражаютъ три прямыя линіи, то всякая прямая можетъ быть представлена уравненіемъ вида $aL+bM+cN=0$; доказать это очень просто, положимъ, что $A_0x+B_0y+C_0=0$ есть уравненіе этой прямой, раскрывъ многочлены L, M и N и помноживъ ихъ на соотвѣтственныхъ множителей a, b и c найдемъ три уравненія

$$A_0 = aA_1 + bA_2 + cA_3$$
$$B_0 = aB_1 + bB_2 + cB_3$$
$$C_0 = aC_1 + bC_2 + cC_3$$

изъ которыхъ легко опредѣлить a, b и c, и наше уравненіе можетъ существовать; невозможно его существованіе только въ томъ случаѣ, когда линіи L, M и N проходятъ черезъ одну точку, такъ какъ тогда наше уравненіе опредѣляетъ прямыя, проходящія черезъ эту самую точку.

Чтобы уравненія L, M, N получили опредѣленное геометрическое значеніе измѣнимъ ихъ въ нормальныя, имѣемъ уравненіе всякой прямой въ формѣ $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$. Однородность этого выраженія даетъ понятіе объ идеѣ трилинейныхъ координатъ. Однородными координатами точки будутъ величины x, y, z равные α, β, γ или въ болѣе общемъ смыслѣ $\lambda\alpha$, $\mu\beta$, $\nu\gamma$, гдѣ подъ λ, μ, ν, разумѣются произвольные множители; уравненіе прямой по этимъ координатамъ будетъ $Ax+By+Cz=0$. Укажемъ на особенность этой системы: такъ какъ параметровъ, независимыхъ величинъ надо только 2, то между α, β и γ должна существовать какая нибудь зависимость; зависимость это выражается



уравненіемъ $a\alpha+b\beta+c\gamma=2\Delta$, что легко видѣть изъ чертежа.

Очевидно, что Декартова система есть не болѣе, какъ частный случай системы трилинейныхъ координатъ. Полагая въ первой единицу мѣры черезъ z, мы придемъ къ однородному уравненію

$Ax+By+Cz=0$, слѣдовательно что тотъ случай когда 3ᵃ линія удалена въ безконечность, линія, которой уравненіе будетъ $C=0$. Представляя кривую не какъ слѣдъ нѣкоторой движущейся точки но какъ слѣдъ прямой, мы придемъ къ понятію о касательныхъ координатахъ. Въ нихъ прямая линія выражается парой координатъ, а точка уравненіемъ; такимъ образомъ вездѣ замѣна точки линіей и наоборотъ.

Обратимся теперь къ изученію второй группы линій, которыя выражаются аналитически уравненіями $2^{ой}$ степени. Если въ общемъ видѣ уравненія $m^{ой}$ степени положить $m=2$, то полученное такимъ образомъ уравненіе будетъ содержать только вторую, первую и нулевую степени неизвѣстныхъ, причемъ члены второй степени будутъ трехъ родовъ, содержа или x^2, или y^2, или xy, первой степени — двухъ родовъ или съ x, или съ y, и наконецъ одинъ постоянный. Очевидно, что уравненіе линіи втораго порядка представится въ формѣ: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Изъ этой формы прямо можно изучать всѣ свойства кривыхъ втораго порядка, но при дальнѣйшемъ изученіи мы постараемся облегчить выводы выборомъ тѣхъ или другихъ координатъ и упрощеніемъ вслѣдствіе этого уравненія. Интересъ нашъ главнымъ образомъ будетъ направленъ на тѣ новыя формы линій, которыя намъ неизвѣстны; для этого намъ нужно выдѣлить тѣ уравненія, которыя выражаютъ пару прямыхъ; что это возможно, мы уже упоминали; когда уравненіе $2^{ой}$ степени распадается на два множителя первой, то оно представляетъ пару прямыхъ; слѣдовательно пара прямыхъ есть частный случай кривыхъ втораго порядка. При какихъ же условіяхъ данное уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ $L.L'=0$. Замѣтимъ, что если оно разлагается на два множителя первой степени, то оно обращается въ 0 при такихъ x и y, какія обращаютъ въ нуль или L или L' и которыхъ всѣ точки и первой и второй прямой удовлетворяютъ нашему уравненію и прочія точки, лежащія внѣ этихъ прямыхъ уравненію не удовлетворяютъ. Стало быть разложеніе далеко не всегда возможно. Очевидно, что условія возможности этого распаденія выразится отношеніемъ коэффиціентовъ нашего уравненія. Мы укажемъ на два различные способа отыскать это условіе. Въ этомъ уравненіи число коэффиціентовъ не соотвѣтствуетъ числу параметровъ. Они произвольны; то, что остается неизмѣннымъ, что дѣйствительно отличаетъ одно уравненіе отъ другаго, это отношенія коэффиціентовъ. Раздѣливъ все уравненіе на постоянный членъ F и означая отношенія къ нему коэффиціентовъ чрезъ A', B' и т. д. имѣемъ ур: $A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+1=0$, гдѣ A', B'... представляютъ настоящіе параметры; это общее замѣчаніе мы уже дѣлали относительно прямой. Мы будемъ говорить о возможности разложенія этого послѣдняго уравненія; мы можемъ писать $L=0$; $ax+by+1=0$ и $L'=0$; $a'x+b'y+1=0$; вопросъ сводится къ тому, чтобы найти такія величины a, a', b, и b', чтобы наше уравненіе было тождественно съ $L.L'=0$, или что все равно съ $(ax+by+1)(a_1x+b_1y+1)=0$. Раскрывая скобки, имѣемъ $aa_1x^2+(ab_1+a_1b)xy+bb_1y^2+(a+a_1)x+(b+b_1)y+1=0$; вслѣдствіе равенства постоянныхъ членовъ и коэффиціенты этихъ уравненій должны быть равны, слѣдовательно мы можемъ писать:

$$aa_1=A' \quad (1)$$
$$bb_1=C' \quad (2)$$
$$ab_1+a_1b=B' \quad (3)$$
$$a+a_1=D' \quad (4)$$
$$b+b_1=E' \quad (5)$$

Неизвѣстныхъ коэффиціентовъ четыре - уравненій пять; стало быть опредѣлить величины неизвѣстныхъ возможно только тогда, когда величины, опредѣленныя изъ четырехъ уравненій, удовлетворяютъ пятому; вопросъ такъ называемыхъ услов-

ныхъ уравненій. Опредѣлимъ величины неизвѣстныхъ изъ 1, и 4, и 2 и 5^{го} урав-
неній, примѣтивъ что произведеніе корней квадратнаго уравненія = извѣст-
ному члену а сумма — коэффиціенту при первой степени неизвѣстнаго
съ обратнымъ знакомъ; составивъ два квадратныя уравненія по даннымъ
корнямъ $u^2 - D'u + A' = 0$ и $v^2 - E'v + C' = 0$ имѣемъ изъ нихъ: $a = \frac{D' + \sqrt{D'^2 - 4A'}}{2}$ —
подставляя найденныя величины въ уравненіе (3) най- $a_1 = \frac{D' - \sqrt{D'^2 - 4A'}}{2}$
демъ $4B' = (D' + \sqrt{D'^2 - 4A'})(E' - \sqrt{E'^2 - 4C'}) + (D' - \sqrt{D'^2 - 4A'})(E' + \sqrt{E'^2 - 4C'})$ $b = \frac{E' + \sqrt{E'^2 - 4C'}}{2}$
или, замѣняя $\sqrt{D'^2 - 4A'}$ черезъ R а $\sqrt{E'^2 - 4C'}$ черезъ R' имѣемъ: $b_1 = \frac{E' - \sqrt{E'^2 - 4C'}}{2}$

$4B' = (D' + R)(E' + R_1) + (D' - R)(E' + R_1) = D'E' + E'R - D'R_1 - RR_1 + D'E' - E'R + R_1D' - RR_1$ отсюда
$4B' = 2D'E' - 2RR_1$, сокративъ на 2, переносимъ RR' въ первую часть и для уни-
чтоженія радикала возводимъ въ квадратъ: $(R.R_1)^2 = (D'E' - 2B')^2$ откуда

$D'^2E'^2 - 4A'E'^2 - 4C'D'^2 + 16A'C' = D'^2E'^2 - 4D'E'B' + 4B'^2$; $B'^2 - 4A'C' = B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2$

или, замѣнивъ буквы со значками отношеніями $\frac{A}{F}$, $\frac{B}{F}$ и т. д. и освободивъ
отъ знаменателя, получимъ выраженіе того отношенія между коэф-
фиціентами, которое необходимо для того, чтобы уравненіе могло
распадатся на два множителя первой степени и выражать собою
пару прямыхъ; это именно $F(B^2 - 4AC) = BDE - AE^2 - CD^2$. —

Теперь перейдемъ къ общимъ свойствамъ, прямо вытекающимъ изъ общаго
уравненія; мы легко убѣдимся что 5^{ю} точками кривая вполнѣ опредѣляется
т. е. $\frac{(m+1)(m+2)}{2} - 1$ точками. Докажемъ это: чтобы кривая проходила черезъ точку x_1
y_1, эти координаты должны удовлетворять ея уравненію, т. е. должно быть

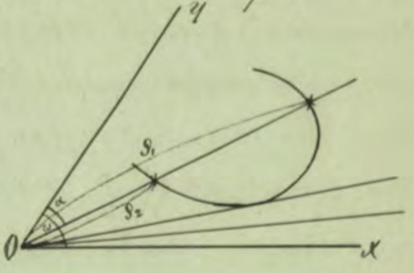
$A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + D_1x_1 + E_1y_1 + 1 = 0$ для второй точки напр: x_2y_2 должно быть
$A_1x_2^2 + B_1x_2y_2 + C_1y_2^2 + D_1x_2 + E_1y_2 + 1 = 0$ и т. д.

… … … … … … …

… … … … … … … наконецъ

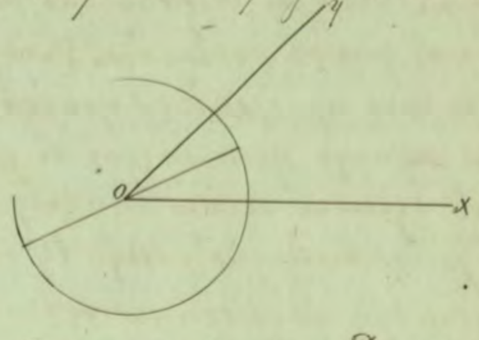
$A_1x_5^2 + B_1x_5y_5 + \dots \dots + 1 = 0$. Эти пять уравненій дадутъ опредѣленные рѣшеніе для пяти неизвѣстныхъ $A_1 = \frac{\alpha}{\Delta}$; $B_1 = \frac{\beta}{\Delta}$ и т. д.; если 3 или 4 точки будутъ лежать на одной прямой то уравненіе распадается на два множителя и выражаетъ пару прямыхъ; если 2 точки совпадутъ, то вопросъ становится неопредѣленнымъ; вообще можно сказать, что если три точки не лежатъ на одной прямой, то уравненіе представляетъ кривую.

Второе свойство кривыхъ втораго порядка состоитъ въ томъ, что онѣ пересѣкаются съ прямою въ двухъ точкахъ. Отыскивая координаты точекъ пересѣченія кривой съ прямою, данною уравненіемъ $y = \alpha x + \beta$, мы получимъ квадратное уравненіе, два корня котораго и опредѣлятъ намъ двѣ точки. Изслѣдуемъ это свойство относительно прямыхъ, проходящихъ чрезъ начало координатъ. Будемъ искать разстояніе точекъ пересѣченія отъ начала координатъ. Уравненіе прямой мы можемъ написать въ формѣ $x = n\varrho$, $y = m\varrho$ гдѣ ϱ есть разстояніе точки пересѣченія отъ начала координатъ, $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\omega}$ а $m = \frac{\sin(\omega-\alpha)}{\sin\omega}$; подставляя эти величины x и y въ общее уравненіе, мы получимъ: $(An^2+Bmn+Cm^2)\varrho^2+(Dn+Em)\varrho+F=0$; написавъ его для простоты въ видѣ $P\varrho^2+Q\varrho+S=0$ и рѣшая, найдемъ для ϱ двѣ величины $\varrho_1 = \frac{-Q+\sqrt{Q^2-4PS}}{2P}$ и $\varrho_2 = \frac{-Q-\sqrt{Q^2-4PS}}{2P}$, которыя могутъ быть равны, дѣйствительны, мнимы и т. д. Если $Q^2>4PS$ то для точки пересѣченія получаются два дѣйствительныя значенія, если же $Q^2<4PS$ то два мнимыя, въ послѣднемъ случаѣ прямая проходитъ мимо, но выгодно говорить, что она пересѣкается съ кривой въ двухъ мнимыхъ точкахъ, потому что всѣ свойства, которыя имѣетъ дѣйствительно пересѣкающая линія, остаются неизмѣнными и для этой мнимо-пересѣкающей; Q^2 переходя отъ значенія большаго $4PS$ къ значенію меньшему, очевидно имѣетъ такую величину равную $4PS$; этотъ случай 2хъ равныхъ корней, есть ничто иное какъ касательная, которая, какъ принято говорить пересѣкаетъ кривую въ двухъ совпадающихъ точкахъ; она служитъ такимъ образомъ предѣломъ, разграничивающимъ дѣйствительныя точки пересѣченія отъ мнимыхъ.



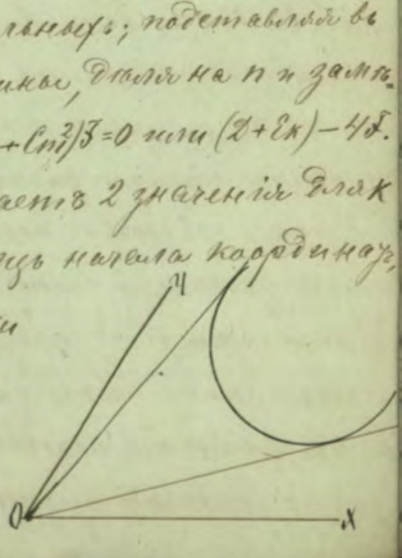
То, что сказано о линіи, проходящей чрезъ начало координатъ, относится безъ исключенія и ко всякой другой, такъ какъ мы легко можемъ переносить начало въ любую точку, оставляя направленіе осей параллельно прежнимъ, отчего общій видъ уравненія не измѣнится. Такимъ образомъ мы пришли къ слѣдующимъ заключеніямъ: прямая пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ дѣйствительныхъ, когда ρ_1 и ρ_2 дѣйствительны, совпадающихъ, когда $\rho_1 = \rho_2$, случай касательной, и мнимыхъ когда ρ_1 и ρ_2 мнимые. Есть еще одинъ случай, который предстоитъ намъ разобрать. Наша цѣль состоитъ въ знакомствѣ съ формами кривыхъ втораго порядка; разсматривая геометрическія мѣста, выражаемыя уравненіемъ второй степени и уже извѣстныя намъ, напримѣръ кругъ, пару прямыхъ, прежде всего бросается въ глаза то обстоятельство, что кругъ сомкнутъ, втораго же геометрическаго мѣста нельзя включить въ опредѣленную часть плоскости, такъ какъ прямая можетъ быть продолжаема до безконечности. Изъ этого частнаго случая мы легко можемъ заключить, что уравненіе второй степени представляетъ два типа. Вопросъ нашъ есть теперь о томъ, при какихъ же условіяхъ кривая, выражаемая уравненіемъ второй степени сомкнута, т.е. можетъ быть заключена въ опредѣленную часть плоскости, и при какихъ она разомкнута. Признакъ сомкнутости состоитъ въ томъ, что ρ_1 и ρ_2 не могутъ быть безконечно велики, если же который-нибудь изъ нихъ имѣетъ безконечно-большую величину, то кривая разомкнута. Въ какихъ же случаяхъ корни могутъ имѣть безконечно большое значеніе. Рѣшая квадратное уравненіе $Pz^2+Qz+S=0$, гдѣ P, Q и S данныя какія-нибудь конечныя величины, мы найдемъ $z=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-4PS}}{2P}$; для того чтобы какой-нибудь изъ этихъ корней имѣлъ безконечно-большую величину необходимо чтобы знаменатель равнялся нулю, т. е. чтобы $P=0$; тогда $z_2=\infty$ но $z_1=\frac{0}{0}$, чтобы выяснить эту неопредѣленность, которая часто бываетъ обманчива перенесемъ радикалъ въ знаменатель, имѣемъ $\frac{\cancel{Q^2}-\cancel{Q^2}+4\cancel{P}S}{2\cancel{P}(-Q-\sqrt{Q^2-4PS})}=\frac{2S}{-2Q}=-\frac{S}{Q}$; если кромѣ P и Q будетъ нулемъ, то оба корня будутъ безконечно-велики. Такимъ образомъ условія существованія безконечно-удаленныхъ вѣтвей у кривой состоитъ въ томъ чтобы $An^2+Bmn+Cm^2=0$ Всегда-ли это возможно? Раздѣливъ это уравненіе на n^2 и зная, что $\frac{y}{x}=\frac{m}{n}$ или $y=\frac{m}{n}x=kx$, напишемъ его въ видѣ $Ck^2+Bk+A=0$ откуда можно вывести слѣдующія заключенія: такъ какъ квадратное уравненіе можетъ кромѣ двухъ дѣйствительныхъ рѣшеній, имѣть два мнимыхъ, то 1) удаленіе въ безконечность возможно только въ нѣкоторыхъ случаяхъ и 2) у кривыхъ второго порядка есть два направленія, по которымъ онѣ уходятъ въ безконечность. Рѣшивъ это уравненіе, найдемъ $k=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2C}$ Если $B^2-4AC>0$ то мы имѣемъ два дѣйствительныхъ рѣшенія, кривыя стало быть разомкнутыя, онѣ носятъ названія гиперболъ; если во вторыхъ $B^2-4AC<0$, корни мнимые, кривыя поэтому сомкнутыя, называются онѣ эллипсами; третій наконецъ случай, служащій переходомъ между вышеупомянутыми, когда $B^2-4AC=0$, есть случай параболъ, также разомкнутыхъ кривыхъ но удаляющихся въ безконечность по одному только направленію, какъ показываетъ и уравненіе, давая два равныя рѣшенія. Такимъ образомъ рѣшеніе вопроса о пересѣченіи кривыхъ второго порядка съ прямою привело насъ къ классификаціи кривыхъ второго порядка, судя по значенію разности B^2-4AC.—

Укажемъ еще на нѣкоторыя слѣдствія. Когда корни ур: $Pz^2+Qz+S=0$ имѣютъ одинаковую величину, но разные знаки, то прямая $\left\{\begin{matrix} x=nz \\ y=mz \end{matrix}\right.$ пересѣкается съ кривой въ двухъ точкахъ на равномъ разстояніи отъ начала координатъ. Корни бываютъ равны, но противоположны по знаку, когда уравненіе не содержитъ первой степени неизвѣстнаго, т.е. когда $Q=0$, или, что все тоже, когда $Dn+Em=0$; раздѣливъ уравненіе на n и зная, по



предыдущему, что $\frac{m}{n}=k$, имѣемъ $D+Ek=0$, откуда $k=-\frac{D}{E}$, для всякаго сталобыть начала существуетъ одна такая хорда; если же и D и $E=0$, то уравненіе условное, такъ какъ можетъ быть удовлетворено при всѣхъ возможныхъ значеніяхъ m и n, и тогда всѣ хорды пересѣкутся въ ней пополамъ; эта единственная точка называется центромъ кривой.

Выведемъ кстати еще одно слѣдствіе, именно по вопросу о тѣхъ переходныхъ случаяхъ, которые разграничиваютъ дѣйствительныя (пересѣченія) точки отъ мнимыхъ, т.е. о касательныхъ. Когда въ уравненіи $Pz^2+Qz+S=0$ два корня равны, то $Q^2-4PS=0$, это случай касательныхъ; подставляя въ послѣднее условіе на мѣсто Q, P и S ихъ величины, дѣля на n и замѣняя $\frac{m}{n}$ черезъ k, имѣемъ $(Dn+Em)^2-4(An^2+Bmn+Cm^2)F=0$ или $(D+Ek)^2-4F\cdot(A+Bk+Ck^2)=0$, это квадратное уравненіе даетъ 2 значенія для k поэтому существуютъ двѣ касательныя изъ начала координатъ, т.е. какъ мы сказали выше изъ любой точки лежащей внѣ кривой. Откуда заключаемъ, что къ кривой $m^{го}$ порядка изъ внѣшней точки можно провести m касательныхъ; здѣсь двѣ.



Внутренною частью кривой называется та часть, откуда нельзя провести ни одной касательной.

Можно было-бы изъ общаго вида уравненія кривыхъ втораго порядка развить полную теорію ихъ, но гораздо выгоднѣе вывести ее изъ упрощенныхъ формъ уравненія. Для рѣшенія этой задачи займемся прежде-всего изысканіемъ центра кривыхъ.

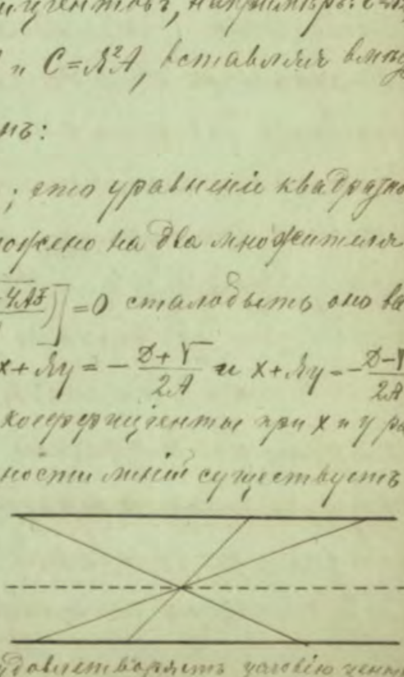
Какая разница произойдетъ въ уравненіи отъ перемѣны начала координатъ? перенеся начало въ точку O, и замѣняя поэтому x черезъ $x+x_1$, и y черезъ $y+y_1$, имѣемъ

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+\left.\begin{matrix}2Ax_1\\+By_1\\+D\end{matrix}\right| x+\left.\begin{matrix}2Cy_1\\+Bx_1\\+E\end{matrix}\right| y+\left.\begin{matrix}Ax_1^2\\+Bx_1y_1\\+Cy_1^2\\+Dx_1\\+Ey_1\\+F\end{matrix}\right| =0;$$

начало координатъ будетъ особой точкой т.е. центромъ, когда наши новые D и E будутъ нулями, слѣдовательно его легко опредѣлить изъ слѣдующаго условія: $2Ax_1+By_1+D=0$ и

$2Cy_1+Bx_1+E=0$ откуда очевидно, что всегда существуетъ одинъ центръ. Къ тѣмъ же заключеніямъ о центрѣ можно придти прямо опредѣливъ его и преобразовавъ уравненіе, перенеся въ эту точку начало координатъ. Что преобразовать общій видъ къ такому началу выгоднѣе всего, видно уже изъ того, что простота геометрическаго значенія отражается на простотѣ аналитическихъ формулъ. Будемъ же искать такую точку, относительно которой всѣ точки кривой расположены симметрично; если такая точка существуетъ, то она имѣетъ ту аналитическую особенность, что всякой парѣ координатъ, удовлетворяющихъ уравненію, соотвѣтствуетъ другая — равныхъ по величинѣ, но противоположныхъ по знаку. Перемѣна знака не имѣетъ вліянія на 1^ый^, 2^ой^, 3^ій^ и постоянный члены уравненія, мѣняются только D и E, и для согласія этихъ уравненій, необходимо, чтобы D и E сами были нулями. Такимъ образомъ уравненіе будетъ значительно проще при началѣ координатъ помѣщеннымъ въ центръ. Гдѣ бы ни было начало, его всегда можно перенесть въ центръ, такъ какъ координаты послѣдняго легко всегда могутъ быть опредѣлены $x_1 = \frac{2CD-BE}{B^2-4AC}$; $y_1 = \frac{2AE-BD}{B^2-4AC}$; обращаясь къ признаку $B^2-4AC \gtreqless 0$, мы видимъ, что эллипсъ и гипербола всегда имѣютъ центръ, такъ какъ координаты его количества конечныя; только при параболахъ имѣется сомнѣніе, такъ какъ для нихъ $B^2-4AC=0$; если при этомъ никакой изъ числителей не обращается въ ноль, то центръ лежитъ въ безконечности и уравненіе представляетъ параболу, къ которой оказывается неприложимымъ такое упрощеніе общей формы. Если же при $B^2-4AC=0$ и одинъ изъ числителей равенъ нулю, то и другой становится нулемъ, такъ какъ, мы можемъ писать пропорціи $\frac{2A}{B}=\frac{B}{2C}$; $\frac{B}{2C}=\frac{D}{E}$ слѣдовательно $\frac{2A}{B}=\frac{D}{E}$ или $2AE-BD=0$; координаты въ этомъ случаѣ принимаютъ существенно неопредѣленную форму $\frac{0}{0}$ и для объясненія этого требуется особое изслѣдованіе. Сначала изслѣдуемъ чисто аналитически; называя величину отношенія $\frac{1}{\lambda}$, можемъ исключить какую угодно пару коэффиціентовъ, напримѣръ: $E=\lambda D$, кромѣ того $2C=\lambda B$ и $B=2\lambda A$ откуда $2C=2\lambda^2 A$ и $C=\lambda^2 A$, вставляя вмѣсто B, C и E ихъ величины въ наше уравненіе, найдемъ:

$$A(x^2+2\lambda xy+\lambda^2y^2)+D(x+\lambda y)+F=0;$$ это уравненіе квадратное по одной величинѣ, именно $(x+\lambda y)^2$, можетъ быть разложено на два множителя первой степени $\left[x+\lambda y-\left(-\frac{D+\sqrt{D^2-4AF}}{2A}\right)\right]\cdot\left[x+\lambda y-\left(-\frac{D-\sqrt{D^2-4AF}}{2A}\right)\right]=0$ слѣдовательно оно выражаетъ пару прямыхъ, уравненія которыхъ $x+\lambda y=-\frac{D+V}{2A}$ и $x+\lambda y=-\frac{D-V}{2A}$; легко видѣть, что онѣ параллельны, такъ какъ коэффиціенты при x и y равны въ обоихъ уравненіяхъ. Почему же при параллельности линій существуетъ неопредѣленный центръ; проведя линію посрединѣ между ними и параллельно имъ, уравненіе которой будетъ $x+\lambda y=-\frac{D}{2A}$; мы видимъ что всякая точка ея

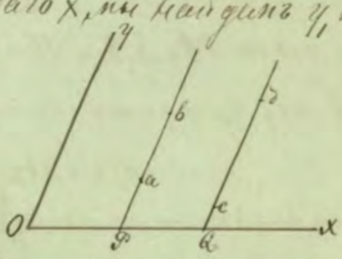


удовлетворяетъ условію центра

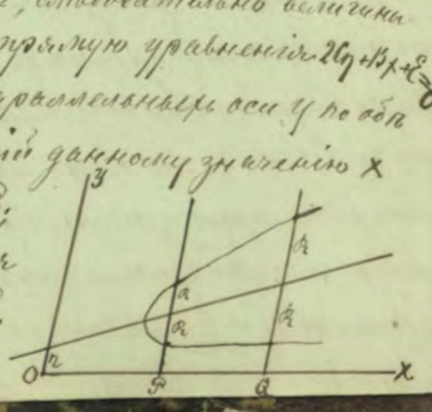
Еще нѣсколько словъ часто съ геометрической точки зрѣнія; первое уравненіе, служащее для опредѣленія центра, показываетъ, что дана прямая линія; второе также показываетъ, что дана другая прямая и центръ долженъ быть на обѣихъ; если онѣ пересѣкаются, то точка ихъ пересѣченія, всегда одна, и будетъ центромъ; если онѣ параллельны то точка ихъ пересѣченія удалена въ безконечность, слѣдовательно и центръ на безконечно большомъ разстояніи; если наконецъ уравненія эти тождественны, то прямыя совпадаютъ, всякую точку ихъ можно принимать за центръ — это случай неопредѣленнаго центра.

Изслѣдуя вопросъ о пересѣченіи линій втораго порядка съ прямою, мы пришли къ задачѣ о центрѣ; рѣшивъ ее, мы достигли знанія такой точки, въ которой выгоднѣе всего помѣщать начало координатъ; выборъ направленія осей, которое бы способствовало упрощенію уравненія, можно также разсматривая общій видъ его: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$; рѣшивъ его какъ квадратное относительно y найдемъ $y=\frac{-(Bx+E)\pm\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}}{2C}$;

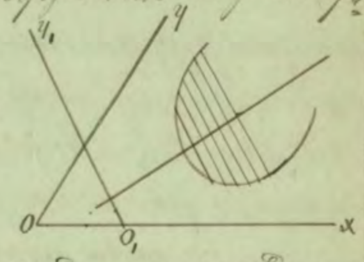
Геометрическое значеніе его таково: для каждаго x, мы найдемъ y_1 и y_2; для OP напримѣръ Pa и Pb для OQ — Qc и Qd и т. д.



величины y зависятъ отъ того, будутъ-ли корни дѣйствительные, мнимые или равные. Изслѣдуемъ это выраженіе инымъ образомъ: положивъ $y=\eta\pm R$, гдѣ $\eta=-\frac{Bx+E}{2C}$ а $R=\frac{\sqrt{(Bx+E)^2-4C(Ax^2+Dx+F)}}{2C}$, слѣдовательно величины извѣстныя при всякомъ данномъ x, строимъ прямую уравненія $2C\eta+Bx+E=0$ и для всякаго x откладываемъ на линіяхъ параллельныхъ оси y по обѣ стороны этой прямой R соотвѣтствующій данному значенію x получимъ такимъ образомъ ординаты кривой, это значитъ, что въ ней хорды параллельныя оси y дѣлятся пополамъ на одной прямой, выражаемой уравненіемъ $2C\eta+Bx+E=0$.



Прямая эта называется діаметромъ. Всякая система параллельныхъ хордъ имѣетъ свой діаметръ т.е. линію прямую проходящую черезъ средины ихъ; это легко доказать, разсуждая такимъ же образомъ относительно X мы найдемъ линію соединяющую средины хордъ параллельныхъ оси X, перенеся начало въ точку O_1, мы тѣже разсужденія можемъ примѣнить къ новому направленію оси Y и т.д.

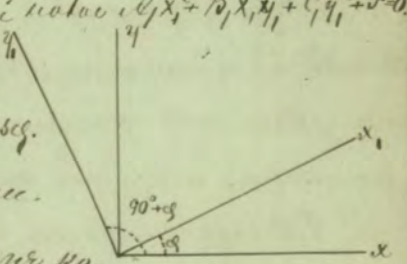


Это свойство весьма важно, такъ какъ основываясь на немъ, мы можемъ выбрать наивыгоднѣйшее направленіе осей; это будетъ именно въ томъ случаѣ когда за ось X-овъ мы возьмемъ діаметръ, ибо тогда при каждомъ x мы будемъ имѣть $+y$ и $-y$ и кривая будетъ расположена симметрично.

На основаніи этой теоремы, мы можемъ другимъ способомъ рѣшить уже разобранный нами вопросъ о томъ, при какихъ условіяхъ уравненіе представляетъ пару прямыхъ; ордината прямой выражается какъ мы знаемъ такъ $y = kx + b$, чтобы привести уравненіе нашей ординаты къ этому виду, необходимо уничтожить радикалъ, такъ чтобы мы имѣли $y = \frac{-(Bx+E) \pm (\alpha x + \beta)}{2C}$ откуда ординаты двухъ прямыхъ будутъ $y_1 = \frac{(\alpha - B)x + (\beta - E)}{2C}$ и $y_2 = \frac{-(\alpha+\beta)x - (B+E)}{2C}$; для уничтоженія радикала достаточно чтобы подкоренное количество было полнымъ квадратомъ, такъ какъ подъ корнемъ мы имѣемъ $(B^2-4AC)x^2 + 2(BE-2CD)x + E^2 - 4CF$ и знаемъ, что квадратное уравненіе $Px^2+Qx+R=0$ бываетъ полнымъ квадратомъ когда $Q^2=4PR$ то условіе наше выразится такъ: $\cancel{4}(BE-2CD)^2 = \cancel{4}(B^2-4AC)(E^2-4CF)$ откуда раскрывая скобки имѣемъ: $\underline{B^2E^2} - \cancel{4}BECD + \cancel{4}C^2D^2 + \cancel{4}CF(B^2-4AC) - \underline{B^2E^2} + \cancel{4}ACE^2 = 0$; сокращая на $4C$ и перенеся во вторую часть члены не содержащіе F, найдемъ, что условіе необходимое для того, чтобы уравненіе второй степени распадалось на два множителя первой и выражало собою пару прямыхъ заключается въ слѣдующемъ отношеніи между коэффиціентами. $F(B^2-4AC) = BED - CD^2 - AE^2$

Вопросъ о преобразованіи осей разбивается на 2. 1) относительно кривыхъ имѣющихъ центръ. 2) относительно параболъ. $Ax^2+Bxy+Cy^2+F=0$ есть уравненіе всѣхъ эллипсовъ и гиперболъ, когда начало координатъ помѣщено въ центрѣ ихъ. При перемѣнѣ осей будутъ мѣняться коэффиціенты, видъ останется такой-же. Въ помощь этой задачи припомнимъ нѣкоторые результаты предыдущаго: уравненіе $4F(An^2+Bmn+Cm^2)-(Dn+Em)^2=0$ представляетъ пару касательныхъ, исходящихъ изъ центра; уравненіе $An^2+Bmn+Cm^2=0$ выражаетъ двѣ прямыхъ, касающихся кривой въ двухъ безконечно удаленныхъ точкахъ. При началѣ координатъ помѣщенномъ въ центрѣ первое уравненіе существуетъ только для гиперболъ-прямыя выражаемыя имъ носятъ названіе асимптотъ; для эллипсовъ онѣ мнимыя. Этихъ замѣчаній достаточно, чтобы дать геометрическое значеніе аналитическимъ выраженіямъ. Коэффиціентъ F-постоянный и неизмѣнный; при преобразованіи осей мы располагаемъ двумя углами φ-между новыми осями и α- между одной изъ старыхъ съ одною изъ новыхъ осей, слѣдовательно можемъ уничтожить два коэффиціента: A и B или B и C уничтожить нельзя такъ какъ въ обоихъ случаяхъ оставшееся уравненіе представитъ пару прямыхъ, поэтому возможно только уничтоженіе A и C; уравненіе приведено будетъ къ виду $xy=m^2$, что возможно только для гиперболъ; для эллипсовъ $B^2-4AC<0$, уничтоживъ A и C получимъ $B^2<0$ и прямая получится мнимая. Покажемъ геометрическое значеніе полученнаго уравненія: представивъ общій видъ въ формѣ $(\alpha x+\beta y)(\alpha' x+\beta' y)+F=0$, мы видимъ, что для приведенія этого уравненія къ $xy=m^2$ надо за оси координатъ принять эти двѣ линіи, которые есть ничто иное какъ асимптоты гиперболы; слѣдовательно такое упрощеніе возможно для гиперболы если принять за оси асимптоты ея. Какое-же преобразованіе возможно сдѣлать, чтобы относилось и къ эллипсамъ и къ гиперболамъ?-

Возможно уничтожить B, но задача является неопредѣленной, такъ какъ для всякой оси X можно подыскать такую ось y-овъ, что Bxy уничтожится. Геометрическое значеніе уравненія $Ax_1^2 + Cy_1^2 + F = 0$ таково: за оси координатъ приняты тѣ діаметры, которые отличаются слѣдующею особенностью: ось-x тотъ діаметръ, который дѣлитъ пополамъ хорды параллельныя оси y и наоборотъ, что видно изъ того что $y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{-Ax_1^2 - F}$ и обратно $x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{A}}\sqrt{-Cy_1^2 - F}$; такіе діаметры называются сопряженными. Подобныхъ паръ сопряженныхъ діаметровъ безчисленное множество; удобнѣе слѣдуетъ одну за простѣйшую — это именно тѣ діаметры, которые дѣлятъ кривую на симметричныя части, которые раздѣляютъ пополамъ хорды имъ перпендикулярныя; такая пара сопряженныхъ діаметровъ носитъ названіе главныхъ осей. Какъ найти ихъ? Положимъ уравненіе кривыхъ написано относительно какой нибудь прямоугольной системы, займемся вопросомъ какъ измѣняется уравненіе при переходѣ отъ этой системы къ другой тоже прямоугольной: уравненіе новое $A_1x_1^2 + B_1x_1y_1 + C_1y_1^2 + F = 0$.



Старые координаты выражаются по новымъ такимъ образомъ $x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi$ и $y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi$. Подставивъ эти величины координатъ въ прежнее уравненіе мы найдемъ слѣдующія величины для коэффиціентовъ новаго:

$$A' = A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi$$
$$B' = -2A\sin\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2C\sin\varphi\cos\varphi.$$
$$C' = A\sin^2\varphi - B\cos\varphi\sin\varphi + C\cos^2\varphi.$$

Отъ этихъ прямоугольныхъ перейдемъ къ главнымъ осямъ, для чего надо, чтобы $B'=0$ или, что все тоже, $B\cos 2\varphi = (A-C)\sin 2\varphi$; откуда $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C}$. Изслѣдуемъ это рѣшеніе: если $A-C=0$ то $\operatorname{tg}2\varphi=\infty$; $\varphi=45°$ если $B=0$ то $\operatorname{tg}2\varphi=0$ и φ … лобыть данная система и есть уже главная. Рѣшеній по tg два φ и $90+\varphi$

но это не приводитъ насъ къ двумъ отдѣльнымъ системамъ, а указываетъ на то, что любую ось мы можемъ принять за ось X-овъ или Y-овъ; неопредѣленное рѣшеніе $tg2\varphi=\frac{0}{0}$ соотвѣтствуетъ кругу, такъ какъ тамъ всякая пара перпендикулярныхъ діаметровъ можетъ быть разсматриваема какъ главныя оси. Докажемъ кстати что при переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой нѣкоторыя выраженія не измѣняются такъ напримѣръ сумма $A+C$ и разность B^2-4AC; сложивъ выраженія A' и C' найдемъ $A+C=A'+C'$; докажемъ второе: $B'^2=(B\cos2\varphi-(A-C)\sin2\varphi)^2$; затѣмъ умножая A' и C' на 2 и разлагая, получимъ

$$2A_1=A-A\sin^2\varphi+A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi+C-C\cos^2\varphi$$

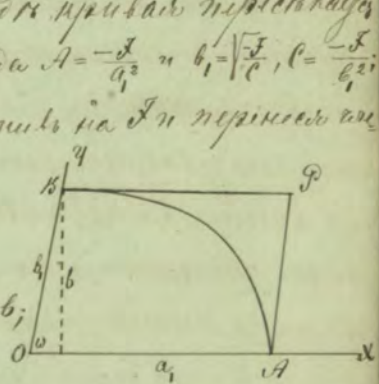
или $2A_1=A+C+B\sin2\varphi+(A-C)\cos2\varphi$ точно также

$2C_1=A+C-B\sin2\varphi-(A-C)\cos2\varphi$ тогда перемножая два этихъ выраженія найдемъ $4A_1C_1=(A+C)^2-(B\sin2\varphi+(A-C)\cos2\varphi)^2$ откуда

$$B'^2-4A'C'=(B\cos2\varphi-(A-C)\sin2\varphi)^2-(A+C)^2+(B\sin2\varphi+(A-C)\cos2\varphi)^2$$ что равно

$$-(A+C)^2+B^2+(A-C)^2=B^2-4AC.$$

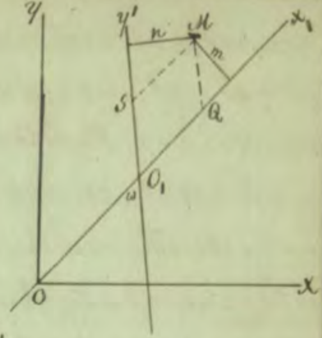
Изслѣдуя измѣненія общаго уравненія при началѣ координатъ помѣщенномъ въ центрѣ, мы остановились на переходѣ отъ одной прямоугольной системы къ другой и доказали что для такого перехода $A+C$ и B^2-4AC сохраняются, они называются инваріантами; дополнимъ вопросъ о преобразованіи взявъ уравненіе къ косоугольнымъ осямъ; цѣль наша доказать, что нѣкоторыя выраженія сохранятъ свою величину при всевозможныхъ косоугольныхъ системахъ. Положимъ, что уголъ между новыми осями ω'; тогда $y=y_1\sin\omega'$ и $x=x_1+y_1\cos\omega'$; коэффиціенты $A'=A$, $B'=2A\cos\omega'+B\sin\omega'$, $C'=A\cos^2\omega'+B\sin\omega'\cos\omega'+C\sin^2\omega'$. Сложимъ $A'+C'$, замѣнивъ A черезъ $A\sin^2\omega'+A\cos^2\omega'$, имѣемъ $A'+C'=A\sin^2\omega'+C\sin^2\omega'+2A\cos^2\omega'+B\sin\omega'\cos\omega'$; два послѣдніе члена равны B' помноженному на $\cos\omega'$; подставляя его величину, найдемъ $\frac{A'+C'-B'\cos\omega'}{\sin^2\omega'}=A+C$; если перейдемъ къ какимъ угодно косоугольнымъ осямъ, то получимъ $\frac{A''+C''-B''\cos\omega''}{\sin^2\omega''}$; при всякихъ переходахъ это выраженіе остается неизмѣннымъ; первый доказанный случай есть частный случай этого выраженія: если $\omega=90$ то $\sin\omega=1$, $\cos\omega=0$ и оно принимаетъ видъ $A+C$. Постараемся такъ преобразовать формулы, чтобы доказать вѣрность второго: $B'^2-4A'C'=4A^2\cos^2\omega'+4AB\sin\omega'\cos\omega'+B^2\sin^2\omega'-4A^2\cos^2\omega'-4AB\sin\omega'\cos\omega'$ $-4AC\sin^2\omega'$; сокративъ, получимъ $\frac{B'^2-4A'C'}{\sin^2\omega'}=B^2-4AC$, для новыхъ косоугольныхъ осей $\frac{B''^2-4A''C''}{\sin^2\omega''}$ и т. д. слѣдовательно и это выраженіе неизмѣнно. Выведемъ изъ этихъ двухъ теоремъ соотвѣтствующее геометрическое значеніе для кривыхъ второго порядка: для этого возьмемъ за оси координатъ сопряженные діаметры, для которыхъ общее уравненіе будетъ $Ax_1^2+Cy_1^2+F=0$. Необходимо отличать эллипсы отъ гиперболъ; для гиперболъ $\frac{-4AC}{\sin^2\omega}>0$ должно стало быть положительнымъ а для этого нужно, чтобы A и C были съ разными знаками; для эллипсовъ это выраженіе существенно отрицательно и потому A и C должны быть съ знаками одинаковыми. Замѣнимъ коэффиціенты параметрами, за которые примемъ разстоянія тѣхъ точекъ гдѣ кривая пересѣкается съ осями; полагая $x=a_1$ и $y=b_1$ найдемъ $a_1=\sqrt{\frac{-F}{A}}$ откуда $A=\frac{-F}{a_1^2}$ и $b_1=\sqrt{\frac{-F}{C}}$, $C=\frac{-F}{b_1^2}$; подставивъ найденныя величины въ уравненіе сократимъ на F и перенесемъ члены съ минусами въ другую часть, получимъ уравненіе эллипса въ формѣ: $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}=1$; въ случаѣ главныхъ осей полудіаметры означаются чрезъ a и b; это уравненіе частный случай общаго и потому



общія выраженія не измѣнятся; $\frac{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{b_1^2}}{\sin^2\omega}=\frac{a_1^2+b_1^2}{a_1^2b_1^2\sin^2\omega}$ эта величина постоянная при прямоугольныхъ осяхъ $\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$; стало быть $a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$ сумма квадратовъ сопряженныхъ полудіаметровъ величина постоянная; для гиперболы равность; $\frac{\frac{4}{a_1^2b_1^2}}{\sin^2\omega}=\frac{4}{a_1^2b_1^2\sin^2\omega}$ величина постоянная, для прямоугольныхъ она $=\frac{4}{a^2b^2}$ откуда $a_1b_1\sin\omega=ab$; прямоугольникъ ~~параллелограммъ~~ построенный на главныхъ полудіаметрахъ эллипса имѣетъ площадь равную площадямъ параллелограммовъ ~~большую, чѣмъ всѣ другіе~~; построенныхъ на сопряж

сопряженныхъ полудіаметрахъ; эти двѣ теоремы носятъ названіе теоремъ Аполлонія: $a_1 b_1 \sin\omega = ab$ - первая теорема, $a_1^2+b_1^2=a^2+b^2$ - вторая.
Мы достаточно ознакомились съ упрощеніемъ уравненій кривыхъ, имѣющихъ центръ посредствомъ измѣненія координатъ; обратимся къ упрощенію уравненія параболъ; для нея $B^2-4AC=0$ и потому уравненіе ея будетъ

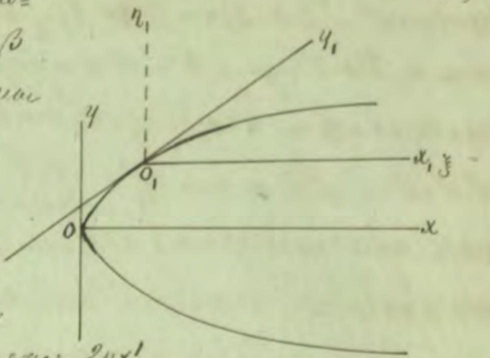
$(ax+by)^2+Dx+Ey+F=0$, намъ предстоитъ упростить его: предположимъ, что оси преобразованы въ какія-нибудь прямоугольныя; можно впередъ найти до какой степени упрощается это уравненіе; мы располагаемъ четырьмя величинами — 2-мя координатами новаго начала и двумя углами — стало быть можемъ уничтожить четыре члена, но тогда уравненіе представитъ намъ либо ось x либо ось y, слѣдовательно уничтожить можно только три: именно одинъ изъ квадратовъ, одинъ изъ неизвѣстныхъ первой степени и постоянный; ясно, что та желаемая форма, къ которой мы будемъ стремиться, есть $y^2=kx$; мы дѣйствительно покажемъ, что такое упрощеніе возможно.
Остановимся на нѣкоторыхъ геометрическихъ особенностяхъ: центръ параболы удаленъ въ безконечность, откуда слѣдуетъ что всѣ діаметры параболы параллельны; одинъ изъ такихъ діаметровъ выгодно принимать за ось x-овъ, такъ какъ уравненіе показываетъ, что для даннаго x, y получаетъ два значенія равныя, но противоположныя по знаку; начало координатъ возьмемъ на кривой, потому что при x и $y=0$ уравненіе удовлетворяется, и за ось y примемъ линію, параллельную хордамъ, раздѣленнымъ пополамъ осью x-овъ, т. е. касательную къ точкѣ O. Покажемъ какъ выполнить такое преобразованіе: построимъ прямыя $ax+by=0$ и $Dx+Ey+F=0$ приведемъ къ нормальному виду $\frac{(ax+by)}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$ и $\frac{(Dx+Ey+F)}{\sqrt{D^2+E^2}}=0$ подставивъ величину перпендикуляровъ, имѣемъ $m^2(a^2+b^2)=\sqrt{D^2+E^2}\cdot n$; а такъ какъ $m=y_1\sin\omega$ и $n=x_1\sin\omega$, то $y_1^2=\frac{\sqrt{D^2+E^2}}{(a^2+b^2)\sin\omega}\cdot x'$. Нетрудно обобщить этотъ результатъ для всякихъ осей слѣдующимъ соображеніемъ: Придавши къ двучлену $ax+by$ произвольное количество c и прилагая къ этому уравненію всѣ пре-



идущія разсужденія. Написавъ уравненіе въ формѣ $(ax+by+c)^2=(2ac-D)x+(2bc-E)y+c^2-F$ и называя $2ac-D$ черезъ α, $2bc-E$ черезъ β и c^2-F черезъ γ, строимъ прямыя $ax+by+c=0$ и $\alpha x+\beta y+\gamma=0$; откуда по предъидущему $m^2(a^2+b^2)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot n$ или $y_1^2=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{(a^2+b^2)\sin\omega}x_1$; послѣднее выраженіе представляютъ обыкновенно въ формѣ $y_1^2=2p_1x_1$

что уравненіе параболы для косоугольныхъ координатъ; такъ какъ положеніе с произвольно то оно можетъ быть приведено къ такому виду безконечно разнообразными пріемами. Не существуетъ-ли между діаметрами параболы, который-бы дѣлилъ пополамъ хорды къ нему перпендикулярны, мы убѣдимся что такой діаметръ есть - онъ носитъ названіе главной оси. Если будемъ брать за ось x прямыя параллельныя направленію опредѣляемому a и b а за ось y - другой прямой, то уравненіе принимаетъ выше приведенный видъ; оси эти вообще косоугольны; вопросъ идетъ, аналитически говоря о томъ, можно-ли c дать такое значеніе, чтобы прямыя этихъ двухъ уравненій были перпендикулярны? условіе перпендикулярности, какъ мы знаемъ, для прямоугольныхъ осей состоитъ въ томъ, чтобы $a\alpha+b\beta=0$ или $a(2ac-D)+b(2bc-E)=0$ откуда получается для c единственное значеніе $\frac{aD+bE}{2(a^2+b^2)}$, при которомъ и будутъ существовать перпендикулярны т.е. главныя оси; сомнѣніе въ годности рѣшенія можетъ возникнуть только въ томъ случаѣ, когда знаменатель будетъ нуль, но онъ только при $a=0$ и $b=0$ можетъ быть нулемъ, а это привело бы насъ къ одной прямой. $y^2=2px$ самая упрощенная форма уравненія параболы. Параметръ p легко опредѣлить $\alpha=\frac{b(aE-bD)}{a^2+b^2}$; $\beta=-\frac{a(aE-bD)}{a^2+b^2}$; $p=\frac{aE-bD}{2\sqrt{a^2+b^2}(a^2+b^2)}$. Мы можемъ рѣшить этотъ вопросъ, начиная съ косоугольныхъ осей первоначальнаго уравненія, но результаты были-бы одни и тѣже. Чтобы пополнить, мы сдѣлаемъ образное преобразовані-

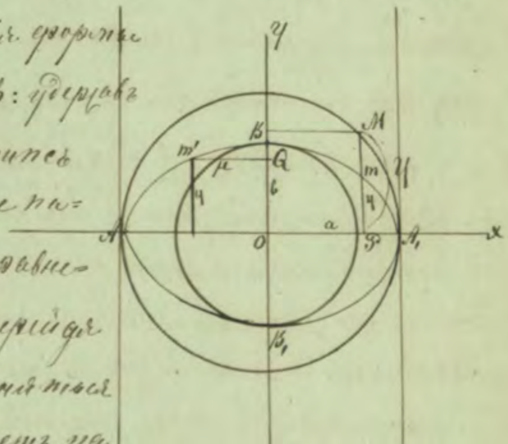
отъ главныхъ осей перейдемъ къ косоугольнымъ $x=\xi+x'$; $\xi = x_1\cos(x_1x)+y_1\cos(y_1x)$
подъ x' и y' подразумѣваются координаты но= $y=\eta+y'$; $\eta = x_1\sin(x_1x)+y_1\sin(y_1x)$
ваго начала. Называя уголъ XX_1 буквою α а XY_1 – β
и подставляя преобразованныя координаты
въ уравненіе имѣемъ $x_1^2\sin^2\alpha + y_1^2\sin^2\beta + y'^2 +$
$+ 2x_1y_1\sin\alpha\sin\beta + 2y_1y'\sin\beta + 2x_1y'\sin\alpha = 2px_1\cos\alpha +$
$+ 2py_1\cos\beta + 2px'$; $\sin^2\alpha$ долженъ равняться нулю,
слѣдовательно $\alpha=0$ и новая ось x_1 должна
быть параллельна старой y'^2 должно равняться $2px'$,



откуда слѣдуетъ, что новое начало должно быть взято на кривой; наконецъ
$2(y_1\sin\beta - p\cos\beta)=0$, откуда $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\omega=\frac{p}{y_1'}$ Уравненіе приводится къ виду $y_1^2=2\frac{p}{\sin^2\omega}x_1$;
$\frac{p}{\sin^2\omega}=p'$; $\frac{\sin^2\omega}{1-\sin^2\omega}=\frac{p^2}{y'^2}$; $\sin^2\omega=\frac{p^2}{p^2+y'^2}$; $p'=p+\frac{y'^2}{p}=p+2x'$; отсюда видна важная
связь между двумя этими параметрами.

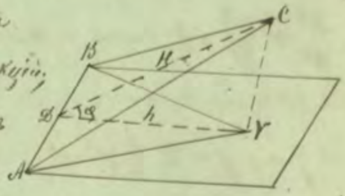
Мы окончили предварительную работу; доведя уравненіе кривыхъ вто=
раго порядка до простѣйшей формы, обратимся къ изученію формъ
и свойствъ этихъ линій т.е. къ построенію ихъ по даннымъ уравне=
ніямъ. Эллипсами называются тѣ кривыя, для которыхъ $B^2-4AC<0$;
при началѣ координатъ, помѣщенномъ въ центрѣ и при главныхъ осяхъ,
которыя суть ничто иное, какъ перпендикулярные сопряженные діамет=
ры, уравненіе его будетъ $Ax^2+Cy^2+F=0$ но оно относится также и къ гипер=
болѣ; различаются эти кривыя тѣмъ, что для первой $-4AC<0$ для второй
$-4AC>0$; слѣдовательно въ уравненіи эллипса A и C должны имѣть знаки
одинакіе и ихъ можно считать существенно положительными, если при этомъ
F будетъ отрицательнымъ, иначе уравненіе не представитъ ни одной дѣйст=
вительной линіи — случай мнимой кривой; итакъ будетъ $Ax^2+Cy^2-F=0$ уравненіе
эллипса. Эллипсъ уравненія $F=0$ — имѣетъ видъ точки — начало координатъ, потому
что сумма двухъ первыхъ членовъ можетъ равняться нулю, когда x и y отдѣльно равны

нулю. Для построенія эллипса по коэффиціентамъ параметрами, выбираемъ за послѣдніе разстоянія точекъ пересѣченія кривой съ осями координатъ отъ начала: $a=\pm\sqrt{\frac{F}{A}}$; $A=\frac{F}{a^2}$ и $b=\pm\sqrt{\frac{F}{C}}$; $C=\frac{F}{b^2}$ подставляя эти величины въ уравненіе и сокращая получимъ уравненіе эллипса въ окончательной формѣ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Какъ изслѣдовать фигуру кривой на основаніи этого уравненія: опредѣлимъ y и давая различныя значенія x-у прослѣдимъ измѣненія y-а; $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, при $x=0$, $y=\pm b$ для каждаго x, y получаетъ два значенія, при $x=a$, $y=0$ далѣе для y получаются уже мнимыя значенія, стало быть кривая сомкнутая. Можно убѣдиться что $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ будетъ >1 для внѣшнихъ точекъ и <1 для внутреннихъ. Эллипсъ граница между двумя этими неравенствами. Изученіе эллипса облегчается сравненіемъ его съ кругомъ; если полуоси равны, то получается кругъ: $a=b$ откуда $x^2+y^2=a^2$ и $x^2+y^2=b^2$; Называя черезъ X и Y координаты круга, имѣемъ $Y=\sqrt{a^2-X^2}$ и $X=\sqrt{b^2-Y^2}$; взявъ отношеніе ординатъ круга и эллипса при одной и той же абсциссѣ получимъ $\frac{y}{Y}=\frac{b}{a}$ т.е. измѣняя ординаты круга въ одномъ и томъ же отношеніи получимъ эллипсъ.

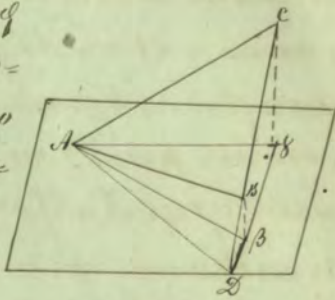


Укажемъ какія формы принимаетъ эллипсъ отъ измѣненія a и b: удержавъ ось AA_1 будемъ измѣнять BB_1; при $b=0$ эллипсъ представляетъ прямую линію, или вѣрнѣе пару прямыхъ, наложенныхъ одна на другую, уравненіе этой формы $a^2y^2=0$; при $b=a$ — кругъ; перейдя этотъ случай эллипсъ начинаетъ вытягиваться въ другую сторону и при $b=\infty$ представляетъ пару прямыхъ параллельныхъ, уравненіе которыхъ $x=\pm a$. Это всевозможныя измѣненія эллипса; прибавимъ еще уже указанный случай: взявъ ka и kb за полуоси и измѣняя k до 0 въ предѣлѣ найдемъ точку — начало координатъ. Обратимся теперь къ изученію геометрическихъ свойствъ эллипса основываясь на

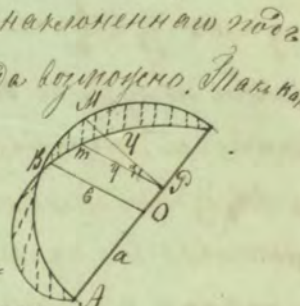
отношеніи его къ кругу, выраженному нами въ формѣ $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$.
Мы знаемъ, что проэкція линіи равна проэктируемой на косинусъ угла наклоненія. Совершенно также это предложеніе относится и къ плоскимъ фигурамъ: площадь треугольника $ABC = ABY.\cos\varphi$; $b.h = b.H.\cos\varphi$ такимъ образомъ теорема доказана для частнаго случая, когда



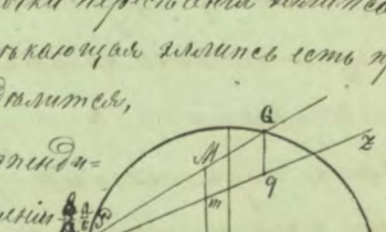
одна изъ сторонъ совпадаетъ съ плоскостью проэкціи; распространимъ ее вообще: возьмемъ треугольникъ ABC, касающійся плоскости проэкціи только вершиною A; тогда по предыдущему $A\gamma D = ACD\cos\varphi$ и $A\beta D = ABD\cos\varphi$; вычтя второе равенство изъ перваго, найдемъ $A\beta\gamma = ABC\cos\varphi$



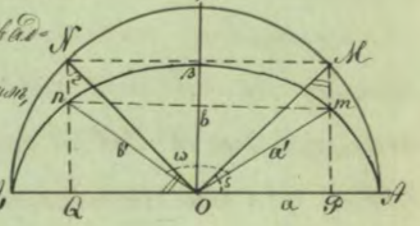
что и требовалось доказать; теорема эта относится и къ многоугольникамъ, такъ какъ ихъ можно разбить на нѣсколько треугольниковъ, а примѣняя способъ предѣловъ, предложеніе это можно распространить на кривыя фигуры, и пользуясь имъ разсматривать эллипсъ какъ проэкцію круга наклоненнаго подъ извѣстнымъ угломъ, полагая $\frac{y}{Y} = \frac{b}{a} = \cos\varphi$, что всегда возможно. Такъ какъ $\frac{y}{Y} = \cos\varphi$, то на основаніи вышесказаннаго эта кривая будетъ эллипсъ; $\cos\varphi = \frac{b}{a}$ гдѣ $b = OB$ а $a = OA$.



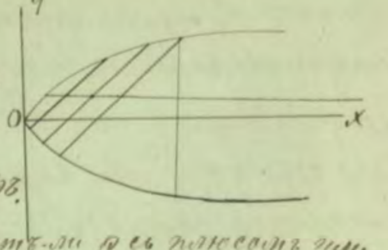
Намъ извѣстно, что прямая пересѣкающая кругъ и ея проэкція пересѣкаются въ одной точкѣ, также какъ и касательная; на этомъ основаніи мы можемъ отыскать точки пересѣченія эллипса и точку касанія его; въ самомъ дѣлѣ линія SZ, пересѣкающая эллипсъ есть проэкція линіи пересѣкающей кругъ, которая легко опредѣлится, если изъ произвольной точки x возставимъ перпендикуляръ къ діаметру и увеличимъ его въ отношеніи $\frac{a}{b}$ найдемъ точку M и соединивъ съ точкой S получимъ линію, пересѣкающую кругъ въ точкахъ P и Q, опустивъ изъ которыхъ пер-



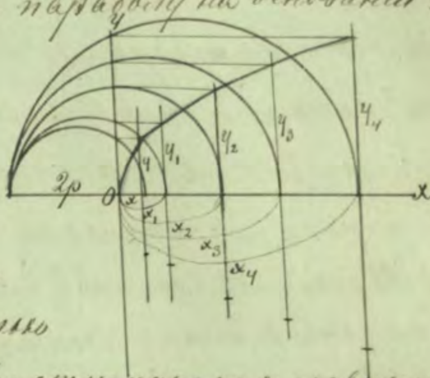
пендикуляры, найдемъ p и q точки пересѣченія эллипса съ прямою SZ; такимъ же способомъ можно провести касательную къ эллипсу. Опредѣлить его площадь легко, основываясь на доказанной теоремѣ, она равна площади круга на косинусъ угла наклоненія т.е. $= \pi a^2 \cos\varphi$ или, замѣняя $\cos\varphi$ черезъ $\frac{b}{a}$, $= \pi ab$; представляя это послѣднее выраженіе въ видѣ $\pi.(\sqrt{ab})^2$, видимъ, что площадь эллипса равняется площади круга, радіусъ котораго есть средняя пропорціональная между большой и малой полуосью. Существованіе сопряженныхъ діаметровъ у эллипса легко доказывается при такомъ взглядѣ на него: такъ какъ проэкціи параллельныхъ линій параллельны, то всѣ многочисленные системы перпендикулярныхъ діаметровъ круга въ проэкціи дадутъ такое же множество сопряженныхъ діаметровъ эллипса. Также просто доказательство теоремъ Аполлонія: 1.) Площадь треугольника между двумя сопряженными діаметрами неизмѣнна; двойная площадь $a'b'\sin\omega = NOM.\cos\varphi = a^2.\frac{b}{a} = ab$. 2.) Сумма квадратовъ полуосей величина постоянная; мы видимъ, что $a_1^2 = mP^2 + OP^2$ и $b_1^2 = nQ^2 + OQ^2$; или $a_1^2 = MP^2\frac{b^2}{a^2} + OP^2$ и $b_1^2 = NQ^2\frac{b^2}{a^2} + OQ^2$; вслѣдствіе же равенства треугольниковъ QNO и PMO, у которыхъ гипотенузы равны и углы, какъ составленные изъ сторонъ перпендикулярныхъ, ~~откуда~~ $NQ=OP$ и $MP=OQ$ подставляя эти величины и замѣчая, что $OP^2+OQ^2=a^2$ найдемъ $a_1^2+b_1^2 = a^2.\frac{b^2}{a^2}+a^2 = a^2+b^2$.



Мы достаточно ознакомились съ фигурою эллипса, намъ предстоитъ также знакомство съ параболой; геометрическое изслѣдованіе ея весьма просто; для нея $B^2-4AC=0$, изъ чего мы заключили, что она незамкнута, уходитъ въ безконечность по одному направленію и представляетъ переходный случай отъ эллипсовъ къ гиперболамъ. Мы привели уравненіе параболы къ виду $y_1^2 = 2p'x'$ и нашли единственную прямоугольную систему $y^2=2px$. Получить на чертежѣ главную ось параболы не представитъ никакого затрудненія; проведя систему

параллельныхъ хордъ, раздѣливъ каждую пополамъ и соединивъ точки дѣ-


ленія мы найдемъ діаметръ, проведя хорду ему перпендикулярную и раздѣливъ ее пополамъ, проведемъ линію параллельную діаметру черезъ эту точку дѣленія, эта линія и есть главный діаметръ.

Сдѣлаемъ построеніе по формулѣ $y = \pm\sqrt{2px}$; будетъ-ли p съ плюсомъ или съ минусомъ разницы нѣтъ, для перваго случая кривая лежитъ по правую сторону отъ оси y, для втораго по лѣвую. Замѣтивъ, что y есть средняя пропорціональная между $2p$ и x, строимъ параболу на основаніи пропорціональныхъ линій въ кругѣ.


Геометрическая форма параболы такъ проста какъ и уравненіе, выражающее ее.

Гипербола отличается между кривыми втораго порядка многими особенностями и потому мы остановимся на ней нѣсколько дольше; для нее $B^2 - 4AC > 0$ или въ уравненіи, отнесенномъ къ главнымъ осямъ $-4AC > 0$ для чего необходимо, чтобы A и C имѣли разные знаки, слѣдовательно уравненія гиперболы $Ax^2 - Cy^2 + F = 0$ и $Cy^2 - Ax^2 + F = 0$; тутъ нѣтъ мнимой кривой.

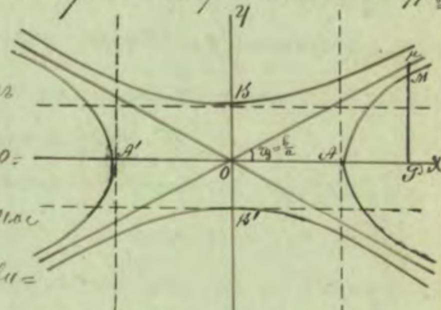
$$Cy^2 - Ax^2 - F = 0 \text{ и } Ax^2 - Cy^2 - F = 0.$$

Если $F = 0$ то уравненіе представляетъ пару пересѣкающихся прямыхъ; это касательныя проведенныя изъ центра и касающіяся гиперболы на безконечномъ разстояніи, называются онѣ асимптотами. Связь между гиперболами, выраженными написанными уравненіями та, что онѣ имѣютъ одну и туже пару асимптотъ.

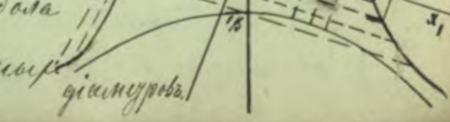
Приведемъ коэффиціенты къ параметрамъ, за которые примемъ точки пересѣченія съ главными осями; $Aa^2 - F = 0$, $a = \sqrt{\frac{F}{A}}$ откуда $A = \frac{F}{a^2}$;


a поперечная или дѣйствительная полуось; A, A' вершины гиперболы; пересѣченій съ осью y нѣтъ, такъ какъ получаются мнимыя величины: $Cb^2 + F = 0$; $b^2 = \sqrt{\frac{-F}{C}}$ откуда $C = \frac{-F}{b^2}$; вносимъ

названіе мнимой полуоси; этихъ величинъ достаточно, чтобы преобразов[ать]
уравненіе; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; измѣняя такимъ-же образомъ другое уравненіе, мы видимъ, что у этой гиперболы дѣйствительной полуосью будетъ b, мнимой a; такія гиперболы называются сопряженными; $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. Перейдемъ къ знакомству какъ съ той, такъ и съ другой кривой: если постоянный членъ равенъ нулю, то оба уравненія дѣлаются тождественны и выражаютъ пару прямыхъ $y=\pm\frac{b}{a}x$; $\frac{b}{a}$ есть тангенсъ угла наклоненія къ оси x, постр... теперь приступимъ къ построенію самой гиперболы: рѣшимъ ея уравненіе $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ пока x возрастаетъ до a, для y получаются величины мнимыя, когда $x=a$, $y=0$, съ возрастаніемъ дальше y увеличивается до безконечности; для сопряженной гиперболы тоже самое $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2-b^2}$, такъ какъ для нее пересѣченіе дѣйствительно только съ осью y.



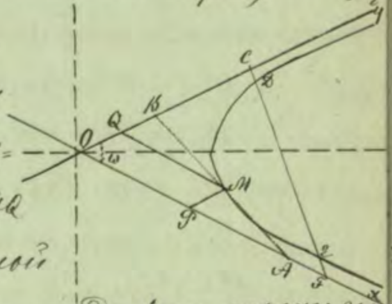
Надо доказать, что разность ординатъ асимптоты и гиперболы всегда величина конечная, т.е. $PN-PM=\Delta$, вычисливъ ординаты при одной абсциссѣ, найдемъ разность ихъ $\Delta=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$, съ возрастаніемъ x разность эта приближается къ нулю, но становится равнымъ ему только въ предѣлѣ; еще яснѣе это видно, если измѣнимъ видъ этой разности, перенеся корень въ знаменатель $\frac{b.a^2}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$ эта дробь имѣетъ величину нуля только въ предѣлѣ, когда $x=\infty$; точно также при возрастаніи y разность абсциссъ уменьшается. Оси x и y - главные сопряженные діаметры. Въ гиперболахъ различаются двѣ системы хордъ: одна параллельная мнимой полуоси пересѣкается внутри гиперболы, другая параллельная дѣйствительной пересѣкается внѣ; обратнымъ образомъ пересѣкаются эти хорды сопряженной гиперболой. Кромѣ главныхъ гипербола имѣетъ безчисленное множество сопряженныхъ діаметровъ.



Полагая в=а и приводя къ одному знаменателю уравненія сопряженныхъ гипербол, имѣемъ $x^2-y^2=a^2$ и $y^2-x^2=a^2$ - гипербола этого уравненія называется равносторонней - для нихъ ассимптоты прямоугольныя - этотъ случай между гиперболами соотвѣтствуетъ случаю круга между эллипсами.

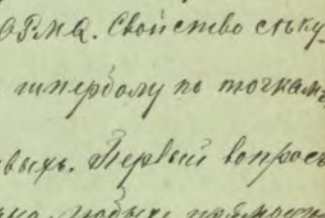
Сдѣлаемъ преобразованіе въ уравненіяхъ эллипса и гиперболы къ полярнымъ координатамъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$; для эллипса $r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi}$, для гиперболы $r^2=\frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi-a^2\sin^2\varphi}$; для удобства удержимъ одну первую величину $r^2=\frac{a^2b^2}{a^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi}$ и займемся короткимъ изслѣдованіемъ этого уравненія; для эллипса r всегда встрѣчается съ кривою; наибольшій r бываетъ при наименьшемъ знаменатель, который получится при наибольшемъ вычитаемомъ, что бываетъ когда $\cos\varphi=1$ т.е. при $\varphi=0°$ и $180°$; чтобы получить наименьшій r, нужно брать наибольшій знаменатель, что имѣетъ мѣсто при $\cos\varphi=0$ т.е. при $\varphi=90°$ и $270°$. Подобнаго же рода изслѣдованіе существуетъ и для гиперболы, но тамъ есть r невстрѣчающіяся съ кривой; для гиперболы $r^2=\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)\cos^2\varphi-a^2}$ начиная отъ $\varphi=90°$ и до $\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, имѣемъ невозможныя r, при послѣднемъ значеніи φ для r получается безконечность которая служитъ предѣломъ между дѣйствительными и невозможными радіусами и указываетъ ассимптоты; кратчайшій r при $\varphi=0°$ и $180°$.

Сдѣлаемъ еще нѣсколько замѣчаній относительно гиперболы; возьмемъ уравненіе относительно ассимптотъ. Такъ какъ $B^2>4AC$ то $Ax^2+Bxy+Cy^2=(\alpha x+\beta y)(\gamma x+\delta y)$ стоитъ только эти двѣ прямыя принять за оси координатъ и уравненіе получится въ формѣ $x_1y_1=\delta$; понятно, что предполагается извѣстнымъ уголъ ω между ассимптотами и данныхъ два уголъ ω и параметръ m. Самая форма уравненія $x_1y_1=m^2$ показываетъ, что для каждой точки гиперболы параллелограмъ, составленный координатами этой точки съ осями, есть величина постоянная. Гипербола - геометрическое мѣсто такихъ точекъ, для которыхъ площадь параллелограма, построеннаго изъ нихъ на двухъ данныхъ прямыхъ есть величина постоянная. Выведемъ весьма простое свойство гиперболы, дающее возможность строить ее по точкамъ. Возвратимся къ уравненію $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{b}{a}=tg\frac{\omega}{2}$, положимъ, что в и а измѣняются, но отношеніе жуг остается постояннымъ. Гиперболы, заключенныя въ одинакіе углы подобны; при a и $b=0$ уравненіе представляетъ самыя ассимптоты, при $b=\infty$ пару прямыхъ. Если мы проведемъ систему параллельныхъ хордъ въ одной подобной гиперболѣ, то ей соотвѣтствуетъ такая же система въ другой; діаметры при тѣхъ и другихъ хордахъ совпадаютъ; всякая прямая линія проведенная въ гиперболѣ, раздѣлитъ если пополамъ и соединитъ съ центромъ, будетъ діаметръ. Сѣкущая даетъ отрѣзки между



гиперболой и ассимптотами равныя; въ гиперболѣ всякая касательная между ассимптотами въ точкѣ прикосновенія дѣлится пополамъ: разсмотримъ треугольникъ OAB, ~~стороны~~ линіи MP и MQ проведены параллельно сторонамъ изъ средины одной потому онѣ раздѣляютъ пополамъ другія и площадь всего треугольника равняется двойной площади параллелограмма $OPMQ$. Свойство сѣкущей наводитъ на мысль о возможности строить гиперболу по точкамъ.

Обратимся къ изученію специальныхъ особенностей кривыхъ. Первый вопросъ будетъ о фокусахъ. Возьмемъ кривую и точку относительно любыхъ прямоугольныхъ координатъ и будемъ слѣдить за разстояніемъ



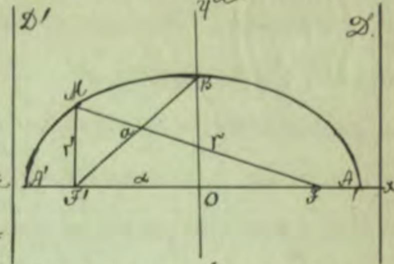
точки кривой отъ этой постоянной точки; оно будетъ измѣнятся; по формулѣ $r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, можно задать вопросъ, нѣтъ ли такой точки, для которой бы это разстояніе было раціональнымъ, такія точки существуютъ и носятъ названіе фокусовъ. Выразимъ эту задачу вполнѣ: разстояніе выражается черезъ α и β, величины данныя но произвольныя, и черезъ x и y, которыя должны удовлетворять уравненію кривой; требуется, чтобы это выраженіе было раціонально, вопросъ стало быть заключается въ отысканіи корня $Ax+By+C$; нетрудно перевести это на геометрическую почву: первая часть представляетъ разстояніе r, урав-дать геометрическое значеніе второй части построимъ прямую $\delta = \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ равную разстоянію точки (x,y) отъ данной прямой, тогда $r = e.\left(\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ или $r = e\delta$ гдѣ e постоянное число равное $\sqrt{A^2+B^2}$; это выраженіе имѣетъ простой геометрическій смыслъ: искать фокусъ значитъ искать къ кривой втораго порядка такую точку и такую прямую, для которыхъ бы отношеніе разстояній отъ нихъ для каждой точки кривой было постояннымъ, т.е. чтобы $\frac{r}{\delta} = e$; прямая линія называется директрисою, e — эксцентрицитетомъ кривой.

Чтобы рѣшить эту задачу, надо найти величины A, B, C, α и β подъ условіемъ чтобы $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$; это изысканіе не зависитъ отъ осей; опредѣляя фокусъ такимъ образомъ, мы видимъ, что онъ бываетъ только у кривыхъ втораго порядка, такъ какъ уравненіе его опредѣляющее получается квадратное.

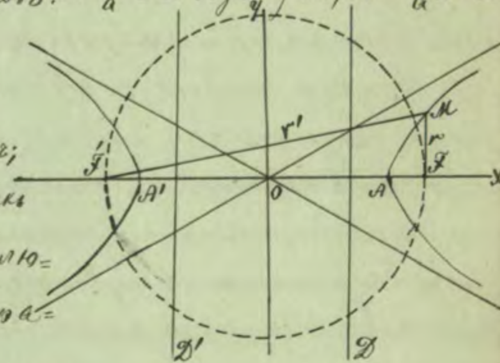
Будемъ искать такую точку для кривыхъ имѣющихъ центръ, уравненіе которыхъ $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$; можно-ли второе уравненіе привести къ формѣ перваго; это возможно, причемъ надо замѣтить, что нѣтъ необходимости въ равенствѣ коэффиціентовъ этихъ двухъ уравненій, достаточно ихъ пропорціональности.

Раскрываемъ первое уравненіе, перенося въ одну часть и соединяя подобные члены: $(1-A^2)x^2-2ABxy+(1-B^2)y^2-2(\alpha+AC)x-2(\beta+BC)y+\alpha^2+\beta^2-C^2=0$; отсюда сравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ, предварительно помноживъ второе уравненіе на λ имѣемъ: $1-A^2=\frac{\lambda}{a^2}$; $AB=0$; $1-B^2=\pm\frac{\lambda}{b^2}$; $\alpha+AC=0$; $\beta+BC=0$; $C^2-\alpha^2-\beta^2=\lambda$; для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ и шестаго λ, мы имѣемъ шесть уравненій, что вполнѣ достаточно; рѣшимъ ихъ: изъ втораго уравненія видно, что либо A либо B равняется нулю, но такъ какъ $a > b$ дробь $\frac{\lambda}{a^2}$ должна быть менѣе $\frac{\lambda}{b^2}$, то стало быть $B=0$, изъ этого видно, что $\beta=0$, слѣдовательно точки лежатъ по оси a; $\lambda=\pm b^2$; $A^2=\frac{a^2\mp b^2}{a^2}$; изъ четвертаго и послѣдняго уравненій имѣемъ
$$\alpha^2=A^2C^2 \qquad \alpha^2=C^2\mp b^2$$
откуда $C^2=\frac{\pm b^2}{1-A^2}=a^2$;
$$\alpha^2=a^2\mp b^2$$
остается изслѣдовать эти рѣшенія: точки двѣ, анализъ даетъ четыре фокуса, изъ которыхъ для эллипса два мнимыхъ, для гиперболы всѣ дѣйствительныя; мы знаемъ теперь, на основаніи предыдущихъ разсужденій уравненіе директрисы $x=-\frac{C}{A}=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2\mp b^2}}$.

Эксцентриситетъ эллипсовъ и гиперболъ равняется A т. е. $\frac{\alpha}{a}$; для эллипса стало быть $r = \pm\frac{\alpha}{a}x \pm a$; разсмотримъ какія знаки нужно принять въ этомъ выраженіи: a не можетъ быть отрицательною, потому что r было бы въ такомъ случаѣ отрицательнымъ, что невозможно, поэтому для эллипса $r = a \pm \frac{\alpha}{a}x$; $r = MF = a - \frac{\alpha}{a}x$ и $r' = MF' = a + \frac{\alpha}{a}x$. Самое замѣчательное сумма этихъ двухъ выраженій $r + r' = 2a$.



Въ послѣдствіи увидимъ различныя слѣдствія фокусовъ и директрисъ, а теперь сдѣлаемъ такое же заключеніе относительно гиперболы. Для нее также $r = \pm\frac{\alpha}{a}x \pm a$; разсмотримъ всевозможныя комбинаціи знаковъ: $+\frac{\alpha}{a} \pm a$ возможно, но $-\frac{\alpha}{a}x \pm a$ невозможно, такъ какъ не только разность но и сумма будетъ всегда отрицательна, поэтому второй случай мы отбрасываемъ; $r = \frac{\alpha}{a}x \pm a$; $r = MF = \frac{\alpha}{a}x - a$ и $r' = MF' = \frac{\alpha}{a}x + a$. Знакъ при a зависитъ отъ знака α, при $-\alpha$, a съ плюсомъ, при $+\alpha$ съ минусомъ. Вычитая выраженіе r изъ r_1, получимъ $r_1 - r = 2a$.

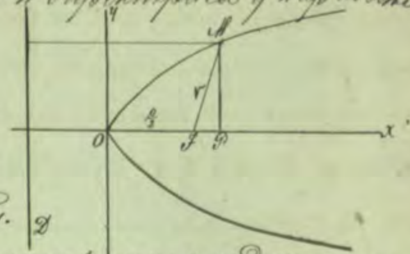


При изысканіи фокусовъ мы не касались изслѣдованія параболы. Результатъ этого изслѣдованія можно предвидѣть изъ опредѣленія параболы какъ эллипса съ безконечно удаленнымъ центромъ, откуда очевидно, что у параболы ~~центръ~~ фокусъ одинъ. Видимъ что изъ уравненій: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(Ax+By+C)^2$ и $y^2=2px$ причемъ $\frac{r}{\delta}=e=\sqrt{A^2+B^2}$ легко ожидать, что это отношеніе для параболы $=1$, такъ какъ для эллипса оно <1 для гиперболы >1, а парабола, какъ переходный случай отъ эллипсовъ къ гиперболамъ должна имѣть $\frac{r}{\delta}=1$. Такъ какъ достаточно пропорціональности коэффиціентовъ, то помноживъ уравненіе параболы на λ, мы можемъ писать:

$$\left.\begin{aligned} 1-A^2&=0\\ AB&=0\\ 1-B^2&=\lambda\\ 2(\alpha+AC)&=2\lambda p\\ \beta+BC&=0\\ \alpha^2+\beta^2-C^2&=0 \end{aligned}\right\} \text{ откуда слѣдуетъ } \left\{\begin{aligned} A^2&=1\\ B&=0\\ \lambda&=1\\ \beta&=0\\ C^2&=\alpha^2\\ \alpha^2&=(\lambda p-\alpha)^2 \end{aligned}\right.$$

раскрывая скобки и сокращая на α^2 послѣднее уравненіе, что, какъ мы знаемъ, указываетъ на существованіе безконечнаго рѣшенія, имѣемъ $p^2-2p\alpha=0$ откуда $\alpha=\frac{p}{2}$.

Наши эти величины, мы получаемъ $r = x + \frac{p}{2}$ рѣшеніе одно указываетъ на су-ществованіи одного только фокуса; въ параболѣ т.е. эксцентрицитетъ $= 1$; урав-неніе директрисы $x = -\frac{p}{2}$, откуда заключаемъ, что и директриса у параболы одна. Парабола геометрическое мѣсто точекъ одинаково удаленныхъ отъ директрисы и фокуса; геометрическое значеніе параметра p очень просто его двойная линія соединяющая фокусъ съ вершиной.



Фокусъ параболы есть такая точка, изъ которой возставленная ордината кри-вой, равняется удвоенной его абсциссѣ: $y^2 = 2px$; $y^2 = p^2$; $y = p$. для эллипса ордина-та $\frac{b^2}{a} <$ абсциссы удвоенной $2\sqrt{a^2-b^2}$, для гиперболы больше.

При употребленіи пріемовъ аналитической геометріи для изученія кри-выхъ втораго порядка не всегда удобно употреблять уравненія ихъ въ той формѣ, какую мы имъ придали. Есть вопросы, которые требуютъ иныхъ урав-неній, чѣмъ выведенныя простѣйшія. Съ двумя формами кривыхъ, часто употребляющимися мы познакомились, благодаря нашему знакомству съ фо-кусами и директрисами; вопросъ о томъ, что парабола есть переходный случай между этими двумя формами былъ высказанъ, но не имѣлъ очевиднаго доказатель-ства. Простѣйшія уравненія эллипса параболы и гиперболы такого вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$y^2 = 2px$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

изъ нихъ нельзя вывести уравненія, оттого что оси координатъ взяты, такія, относительно которыхъ кривыя расположены неодинаково; мы не усматриваемъ очевидно геометрически того, что парабола есть случай переходный; такъ какъ нельзя уравненіе параболы привести къ виду урав-неній двухъ другихъ кривыхъ, потому что центръ ея удаленъ въ безконечность, то возможно наоборотъ уравненія эллипса и гиперболы привести къ другимъ коорди-натамъ, такъ чтобы они расположены были подобно тому какъ расположена парабола т.е. другими словами написать уравненія ихъ относительно вершинъ. Эти урав-ненія будутъ встрѣчаться и въ различнаго рода другихъ вопросахъ. Для пре-образованія уравненія эллипса перенесемъ вершину его въ вершину параболы и новое начало О, въ начало параболы О, тогда старыя координаты выразятся

новыми такимъ образомъ: $X = x - a$ и $Y = y$;
уравненіе эллипса по новымъ осямъ будетъ
$\frac{X^2}{a^2} - \frac{2X}{a} + 1 + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ или $Y^2 = 2\frac{b^2}{a}X - \frac{b^2}{a^2}X^2$; тоже самое
сдѣлаемъ съ гиперболой, для которой старый
x = новому $X + a$ и старый y = новому Y, откуда
уравненіе ея $\frac{X^2}{a^2} + \frac{2X}{a} + 1 - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ или $Y^2 = 2\frac{b^2}{a}X + \frac{b^2}{a^2}X^2$.

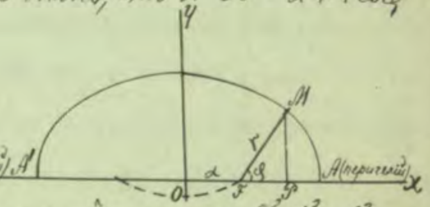
Разсмотримъ эллипсъ и гиперболу съ такими осями, чтобы $\frac{b^2}{a} = p$; здѣсь $\frac{b^2}{a}$ параметръ въ томъ же смыслѣ какъ p параболы. Подставивъ p на мѣсто $\frac{b^2}{a}$ имѣемъ для эллипса $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

„—„ параболы $y^2 = 2px$

„—„ гиперболы $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$; чтобы воспользоваться этими уравненіями, намъ полезно узнать, что общаго въ геометрическомъ смыслѣ между p для этихъ трехъ кривыхъ. Это длина ординаты, возставленной въ фокусѣ, что было доказано для параболы въ прошлой лекціи. Для эллипса и гиперболы p имѣетъ точно такое же значеніе, что подставляя въ ихъ уравненія на мѣсто X^2 абсциссу фокуса, имѣемъ для перваго $\frac{a^2-b^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ откуда $y = \pm\frac{b^2}{a}$, для второй точно также $\frac{a^2+b^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ откуда $y = \pm\frac{b^2}{a}$. Тогда парабола опредѣляется однимъ параметромъ, то эллипсъ и гипербола требуютъ двухъ и потому въ ихъ уравненія входитъ еще a. Послѣ этихъ разсужденій легко показать, что парабола есть переходный случай отъ эллипсовъ къ гиперболамъ. Сравненіе уравненій эллипса и параболы показываетъ, что парабола всѣми своими точками лежитъ внѣ эллипса; если сравнимъ уравненія гиперболы и параболы, то найдемъ что гипербола всѣми своими точками лежитъ внѣ параболы, обнимаетъ ее другими словами. Измѣняя въ уравненіяхъ эллипса и гиперболы a, мы ясно увидимъ, что первый стремится къ параболѣ увеличиваясь, вторая уменьшаясь;

Замѣнивъ въ уравненіи эллипса a черезъ a_1, причемъ $a_1 > a$, мы получимъ другой эллипсъ съ уравненія $y^2 = 2px - \frac{p}{a_1}x^2$, который обнимаетъ прежній, лежа самъ внутри параболы по мѣрѣ увеличиванія a мы будемъ получать эллипсы все болѣе и болѣе вытянутые и въ предѣлѣ, когда $a = \infty$, найдемъ параболу, уравненія $y^2 = 2px$, которая есть ничто иное какъ эллипсъ съ безконечно удаленнымъ центромъ. Съ другой стороны гипербола съ увеличиваніемъ a сжимается такъ сказать, причемъ центръ ея и другая вѣтвь отодвигаются влѣво и при $a = \infty$ уравненіе гиперболы дѣлается тождественнымъ съ уравненіемъ параболы, причемъ центръ и вторая вѣтвь уйдетъ въ безконечность, а правая сольется съ параболой и фокусъ ея придетъ въ фокусъ параболы.

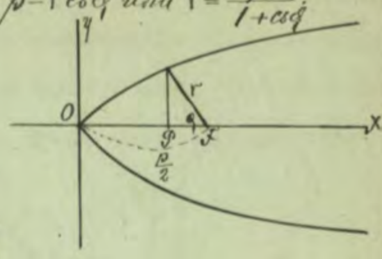
Есть еще форма уравненій весьма употребительная въ прикладныхъ наукахъ, особенно въ Астрономіи - это полярная форма, причемъ за полюсъ принимаютъ фокусъ кривыхъ. Чтобы перейти къ ней можно прямо пользоваться пріемами преобразованія координатъ; можно также рѣшить еще проще: мы искали въ эллипсѣ такія точки, чтобы разстоянія отъ нихъ до каждой точки кривой было раціональны и нашли $r = a - \frac{\alpha}{a}x$; это полученное выраженіе позволяетъ перейти къ полярной формѣ, такъ какъ r и будетъ радіусъ векторъ; если замѣнимъ x полярными координатами, то вопросъ будетъ рѣшенъ. Изъ чертежа видно, что $x = OP = \alpha + r\cos\varphi$ вставляя эту величину x, найдемъ $r = a - \frac{\alpha^2}{a} - \frac{\alpha}{a} r\cos\varphi$



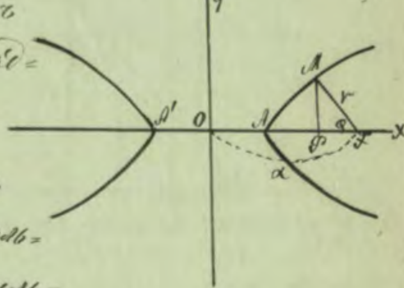
откуда $r = \dfrac{a - \frac{\alpha^2}{a}}{1 + \frac{\alpha}{a}\cos\varphi}$ или зная, что $\alpha^2 = a^2 - b^2$, $\frac{\alpha}{a} = e$ эксцентриситетъ, имѣемъ $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$; въ Астрономіи вмѣсто p употребляютъ обыкновенно большую полуось. Числитель $\frac{a^2 - \alpha^2}{a} = \frac{b^2}{a} = p$ помноживъ и раздѣливъ $\frac{a^2 - \alpha^2}{a}$ на a имѣемъ $a\left(\frac{a^2}{a^2} - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) = a(1 - e^2)$ откуда $r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\varphi}$

Такія же уравненія получаются для остальныхъ кривыхъ, откуда весьма ясно видно родство ихъ; вся разница въ e, которое равно $\frac{\alpha}{a}$ или, подставляя вмѣсто α его величину, $= \sqrt{1 \mp \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 \mp \frac{p}{a}}$ откуда видно что для эллипсовъ $e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}} < 1$, для гиперболъ $e = \sqrt{1 + \frac{p}{a}} > 1$, для параболъ наконецъ, у которыхъ $a = \infty$, $e = \sqrt{1} = 1$. Выведемъ полярныя уравненія для остальныхъ кривыхъ. Для параболы $r = x + \frac{p}{2}$; изъ чертежа

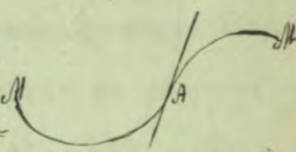
$x = O\Phi = \frac{p}{2} - r\cos\varphi$, подставляя вмѣсто x его величину $r = p - r\cos\varphi$ или $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}$



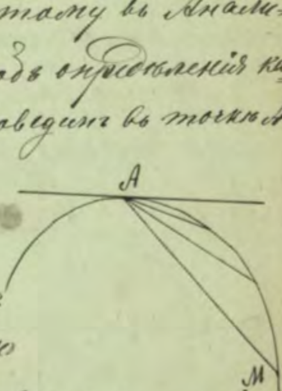
Для гиперболы $r = \frac{\alpha}{a}x - a$, замѣняя x полярными координатами, имѣемъ $x = O\Phi = \alpha - r\cos\varphi$; замѣняя въ первомъ выраженіи x черезъ найденную величину, найдемъ $r = \frac{\alpha^2}{a} - \alpha - \frac{\alpha}{a} r\cos\varphi$ откуда $r = \frac{\frac{\alpha^2 - a^2}{a}}{1+\frac{\alpha}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$; помноживъ и раздѣливъ числитель на a, получимъ $a\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{a^2}{a^2}\right) = a(e^2-1)$ замѣнивъ этой величиной p послѣдняго выраженія, имѣемъ $r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\varphi}$.



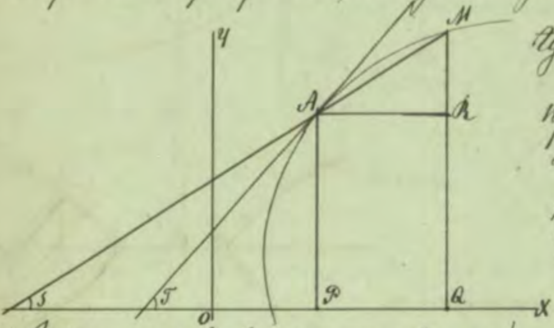
Понятіе о касательной, какъ о прямой, имѣющей съ данною кривою одну общую точку, причемъ всѣ остальныя точки кривой лежатъ по одну сторону касательной, было дано еще древними геометрами и извѣстно намъ изъ Начальной Геометріи. Существуютъ однако кривыя особенной формы, для которыхъ такое опредѣленіе касательной не точно. Именно когда касательная проводится къ кривой MM' въ точкѣ ея перегиба A (гдѣ элементъ A не имѣетъ направленія ни по вѣтви AM ни по вѣтви AM') то она представляется вмѣстѣ съ тѣмъ какъ бы сѣкущею и кривая расположена по обѣ стороны ея.



Поэтому въ Аналитической Геометріи употребляется болѣе общій способъ опредѣленія касательной: если на кривой возьмемъ двѣ точки A и M и проведемъ въ точкѣ A касательную къ кривой, то замѣтимъ, что по мѣрѣ приближенія M къ A хорда MA будетъ поворачиваться около A и въ предѣльномъ положеніи, когда M сольется съ A, пойдетъ по направленію касательной, имѣя съ кривою одну общую точку A; на основаніи этого касательною принято называть ту линію, которая служитъ предѣломъ хордъ, проходящихъ черезъ двѣ точки кривой, изъ которыхъ одна стремится къ совпаденію съ другою.-



Если имѣемъ какую нибудь кривую и на ней двѣ точки $A(x,y)$ и $M(x',y')$, то хорда AM вполнѣ опредѣлится, когда будетъ извѣстенъ уголъ наклоненія ея къ оси x. Для опредѣленія этого угла проведемъ линію AR паралельно оси X, замѣтивъ что уголъ δ = углу MAR, найдемъ изъ прямоугольнаго треугольника AMR, что

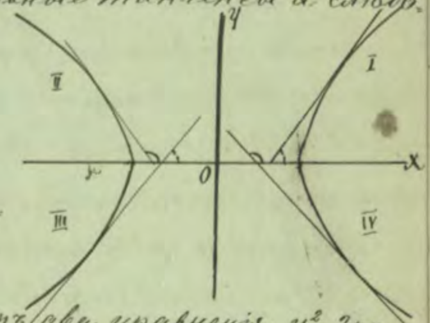


$tg\,\delta = \frac{MR}{AR} = \frac{y'-y}{x'-x}$; такъ какъ въ случаѣ касательной прямой, точка M сливается съ A и стало быть $y'=y$ и $x'=x$, то $tg\,\delta = \lim\limits_{\substack{y'=y\\x'=x}} \frac{y'-y}{x'-x}$. Если прямо положимъ что $y'=y$ и $x'=x$, то получается неопредѣленное рѣшеніе, вслѣдствіе того, что мы просто перенесли точку M въ A, не имѣя въ виду, что M приближается къ A по кривой.

Разсмотримъ теперь касательныя отдѣльно относительно каждой кривой втораго порядка и начнемъ съ эллипса.

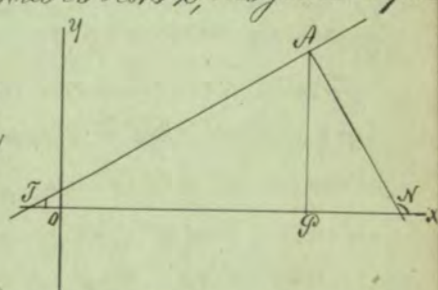
Такъ какъ A и M находятся на эллипсѣ, то координаты ихъ должны удовлетворять его уравненію; вставивъ ихъ въ это послѣднее, получимъ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$; вычтя первое уравненіе изъ втораго, найдемъ $\frac{y'^2-y^2}{b^2} = -\frac{x'^2-x^2}{a^2}$ или $\frac{(y'+y)(y'-y)}{b^2} = -\frac{(x'+x)(x'-x)}{a^2}$; раздѣливши все уравненіе на $x'-x$, имѣемъ $\frac{y'-y}{x'-x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'+x}{y'+y}$; отсюда, положивъ $x_1=x$ и $y_1=y$, найдемъ $tg\,\delta_e = -\frac{b^2x}{a^2y}$; тангенсъ угла наклоненія касательной къ оси x будетъ положительнымъ пока $\frac{x}{y}$ будетъ отрицательнымъ, что имѣетъ мѣсто во II и IV четверти, отрицательный тангенсъ будетъ при $\frac{x}{y}$ положительномъ т.е. при точкахъ, лежащихъ въ первой и третьей четверти: въ самомъ дѣлѣ, мы

видимъ что въ первомъ случаѣ углы, образуемые касательною съ осью X острые, слѣдовательно ихъ тангенсы положительны; во второмъ наоборотъ углы эти тупые, стало быть тангенсы ихъ отрицательны. Относительно касательныхъ къ гиперболѣ мы не скажемъ ничего новаго, такъ какъ уравненіе ея отличается только знакомъ минуса при b^2 отъ уравненія эллипса, откуда легко видѣть, что $\operatorname{tg}\vartheta_h = +\frac{b^2x}{a^2y}$. Этотъ же результатъ получимъ изъ уравненій $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$; вычтя первое изъ второго будемъ имѣть $\frac{y'^2-y^2}{b^2}=\frac{x'^2-x^2}{a^2}$ откуда $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x'+x}{y'+y}$ при $x'=x$ и $y'=y$, получаемъ $\operatorname{tg}\vartheta_h=\frac{b^2x}{a^2y}$. Отрицательные тангенсы а слѣдовательно углы тупые будутъ при $\frac{x}{y}$ отрицательномъ, что бываетъ во II и IV четвертяхъ; наоборотъ острые углы, слѣдовательно тангенсы положительные имѣютъ мѣсто во I и III четвертяхъ.

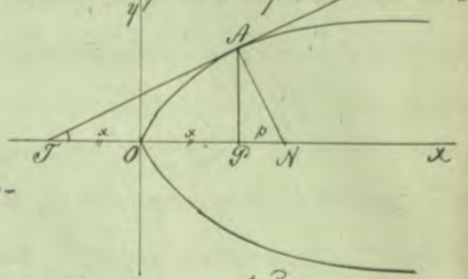


Вставляя x, y и x', y' въ уравненіе параболы получаемъ два уравненія $y^2=2px$ и $y'^2=2px'$, вычитая первое изъ втораго $y'^2-y^2=2p(x'-x)$ откуда $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{2p}{y'+y}$, полагая $x'=x$ и $y'=y$ имѣемъ $\operatorname{tg}\vartheta_p=\frac{p}{y}$ выраженіе несходное съ полученными выше выраженіями угла ϑ для эллипса и гиперболы, вслѣдствіе несходства между системами осей координатъ, относительно которыхъ были составлены уравненія этихъ кривыхъ.

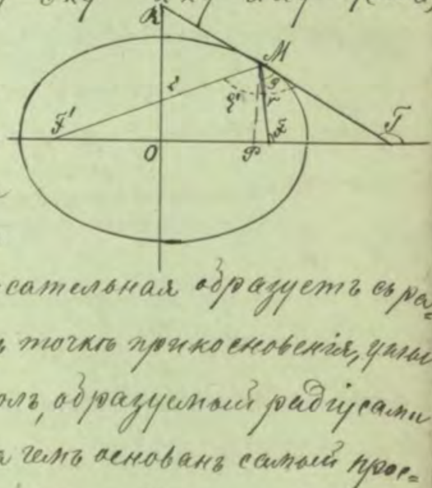
Если имѣемъ насательную въ точкѣ A къ кривой втораго порядка и въ A возставимъ перпендикуляръ къ насательной до пересѣченія съ осью x, то такая прямая носитъ названіе нормали. Очевидно, что если извѣстенъ уголъ ϑ, то извѣстенъ и уголъ N, который $=180-(90-\vartheta)=90+\vartheta$, вслѣдствіе чего $\operatorname{tg}\vartheta=-\operatorname{ctg}N$ и наоборотъ; слѣдовательно $\operatorname{tg}N_e=\frac{a^2y}{b^2x}$; $\operatorname{tg}N_h=-\frac{a^2y}{b^2x}$ и $\operatorname{tg}N_p=-\frac{y}{p}$.



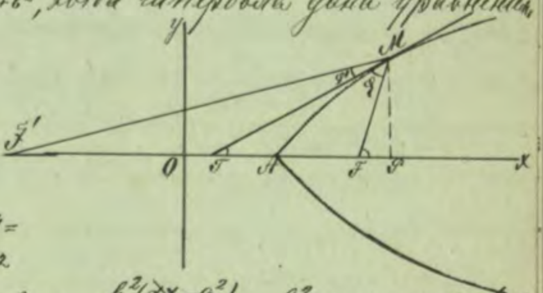
Зная наклоненіе насательной къ оси x-овъ, легко найти ея уравненіе; въ эллипсе мы имѣли $\operatorname{tg}\vartheta_e=\frac{y'-y}{x'-x}$; если назовемъ перемѣнныя координаты x', y' черезъ X и Y, и вмѣсто $\operatorname{tg}\vartheta_e$ подставимъ его величину, то найдемъ $Y-y=-\frac{b^2x}{a^2y}(X-x)$ откуда $a^2Yy-a^2y^2+b^2Xx-b^2x^2=0$; но $-(a^2y^2+b^2x^2)$ изъ уравненія эллипса $=-a^2b^2$, слѣдовательно $a^2Yy+b^2Xx=a^2b^2$, раздѣливъ уравненіе на a^2b^2, получимъ $\frac{Xx}{a^2}+\frac{Yy}{b^2}=1$. Отсюда очевидно, что для гиперболы уравненіе насательной будетъ $\frac{Xx}{a^2}-\frac{Yy}{b^2}=1$. Выразимъ уравненіемъ касательную къ параболѣ: $Y-y=\frac{p}{y}(X-x)$; $Yy-y^2=pX-px$; но $y^2=2px$ слѣдовательно $Yy-2px=pX-px$; откуда $Yy=p(X+x)$. Линія TP называется субтангенсомъ (подкасательной); линія PN — субнормалью. Изъ прямоугольнаго треугольника APT имѣемъ $\text{subtg}=\frac{AP}{\text{tg}T}=\frac{y}{\text{tg}T}$ (для всѣхъ кривыхъ) а $\text{subnorm}=y.\text{tg}T$. Вычислить субтангенсъ и субнормаль для каждой кривой въ отдѣльности весьма легко, зная величину $\text{tg}T$: для параболы напримѣръ находимъ, что $\text{subtg}=TP=\frac{y}{\frac{p}{y}}=\frac{y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x$ т.е. $TP=2OP$. На основаніи этого легко построить касательную къ параболѣ въ точкѣ A: откладываемъ линію $TO=OP$ и T соединяемъ съ A. AT и будетъ касательною. $\text{Subnorm}=PN=\frac{y.p}{y}=p$, т.е. ординатѣ возставленной въ фокусѣ, на чемъ основанъ еще болѣе простой способъ построенія касательной къ параболѣ.



Опредѣлимъ теперь касательную по отношенію къ фокусамъ кривой, именно опредѣлимъ уголъ φ наклоненія касательной къ радіусу вектору точки прикосновенія: $T=\varphi+F$ откуда $\varphi=T-F$; $\text{tg}\varphi=\frac{\text{tg}T-\text{tg}F}{1+\text{tg}T\,\text{tg}F}$; но $\text{tg}F=-\text{tg}MFP=-\frac{MP}{PF}=-\frac{y}{\alpha-x}=\frac{y}{x-\alpha}$; отсюда $\text{tg}\varphi=\frac{-\frac{b^2x}{a^2y}-\frac{y}{x-\alpha}}{1-\frac{b^2xy}{a^2y(x-\alpha)}}=\frac{-b^2x(x-\alpha)-a^2y^2}{a^2y(x-\alpha)-b^2xy}=\frac{-b^2x^2+b^2\alpha x-a^2y^2}{a^2yx-a^2\alpha y-b^2xy}=\frac{b^2\alpha x-a^2b^2}{\alpha^2xy-a^2\alpha y}=\frac{b^2(\alpha x-a^2)}{\alpha y(\alpha x-a^2)}=\frac{b^2}{\alpha y}$; что же касается до угла $F'MT$ т.е. угла φ' наклоненія касательной къ другому радіусу вектору, то очевидно, что величина $\text{tg}\varphi'=-\frac{b^2}{\alpha y}$, гдѣ минусъ относится къ α; слѣдовательно $\text{tg}\varphi'=-\text{tg}\varphi$ откуда заключаемъ, что $\varphi'=180-\varphi$; но $F'MT=180-\varphi=RMF$ изъ этого $F'MT-F'MF=RMF-F'MF$ или $F'MR=\varphi$ т.е. касательная образуетъ съ радіусами векторами, проведенными изъ фокусовъ къ точкѣ прикосновенія, углы равные, или, что все то-же, нормаль дѣлитъ уголъ, образуемый радіусами векторами къ точкѣ прикосновенія, пополамъ, на чемъ основанъ самый простой способъ проведенія касательной къ эллипсу въ данной точкѣ. Эта теорема объ отношеніи касательной къ радіусу вектору много помогаетъ изученію

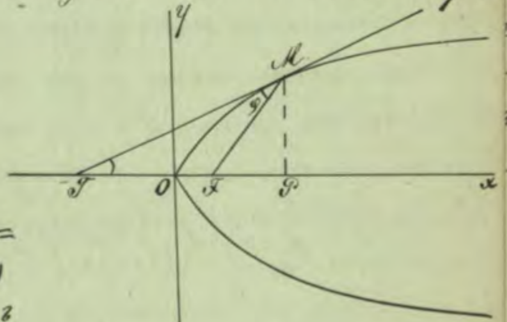


касательныхъ и потому мы сдѣлаемъ такое-же изслѣдованіе, которое производили для эллипса, относительно касательныхъ къ гиперболѣ и параболѣ. — Припомнимъ, что для гиперболы $tg\,\mathcal{T} = \frac{b^2x}{a^2y}$; анализъ даетъ по вопросу о наклоненіи касательной къ радіусу вектору въ гиперболѣ совершенно такое-же рѣшеніе какъ и для эллипса, но геометрически существуетъ нѣкоторая различіе. Уголъ $\varphi = \mathcal{T} - T$; $tg\,\mathcal{T} = \frac{y}{x-\alpha}$ гдѣ $\alpha = \sqrt{a^2+b^2}$, когда гипербола дана уравненіемъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; изъ этихъ выраженій получимъ:



$$tg\,\varphi = \frac{\frac{y}{x-\alpha} - \frac{b^2x}{a^2y}}{1 + \frac{b^2xy}{a^2y(x-\alpha)}} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2 + b^2\alpha x}{a^2xy - a^2\alpha y + b^2xy};$$

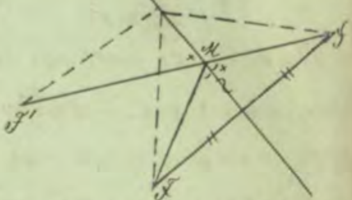
сумму первыхъ двухъ членовъ числителя можемъ замѣнить черезъ $-a^2b^2$, а въ знаменателѣ a^2+b^2 какъ множитель при xy черезъ α^2; тогда $tg\,\varphi = \frac{b^2(\alpha x - a^2)}{\alpha y(\alpha x - a^2)} = \frac{b^2}{\alpha y}$, такое же выраженіе какъ и для эллипса; если предложить вопросъ объ углѣ φ' разница будетъ только въ знакѣ $tg\,\varphi' = -\frac{b^2}{\alpha y}$ откуда слѣдуетъ, что углы φ и φ' равные и тутъ касательная дѣлаетъ съ радіусами-векторами углы равные, но углы эти расположены по разнымъ сторонамъ касательной а не по одну какъ въ эллипсѣ; тутъ стало быть касательная дѣлитъ уголъ между радіусами векторами пополамъ. Докончимъ наше изслѣдованіе этого вопроса относительно параболы, уравненіе которой $y^2 = 2px$; называя тангенсъ угла наклоненія касательной къ радіусу вектору черезъ $tg\,\varphi$, найдемъ $tg\,\varphi = tg(\mathcal{T} - T)$; $tg\,T$, какъ мы знаемъ $= \frac{p}{y}$; $tg\,\mathcal{T} = \frac{y}{x-\frac{p}{2}}$ откуда



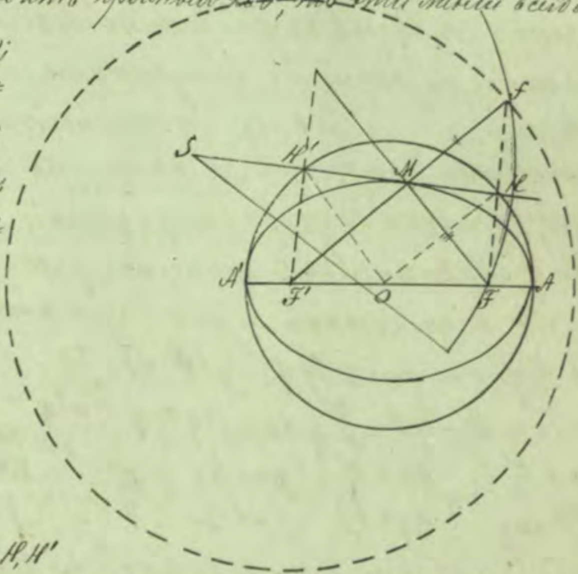
$$tg\,\varphi = \frac{\frac{y}{x-\frac{p}{2}} - \frac{p}{y}}{1 + \frac{py}{y(x-\frac{p}{2})}} = \frac{y^2 - px + \frac{p^2}{2}}{xy - \frac{py}{2} + py} = \frac{px + \frac{p^2}{2}}{xy + \frac{py}{2}} = \frac{p(x+\frac{p}{2})}{y(x+\frac{p}{2})} = \frac{p}{y}$$

т. е. уголъ наклоненія касательной къ радіусу вектору равенъ углу наклоненія касательной къ оси x и стало быть треугольникъ, составленный изъ касательной, оси xовъ и радіуса вектора равнобедренный. Выведенныя нами уравненія послужатъ намъ для изученія общихъ свойствъ касательныхъ.

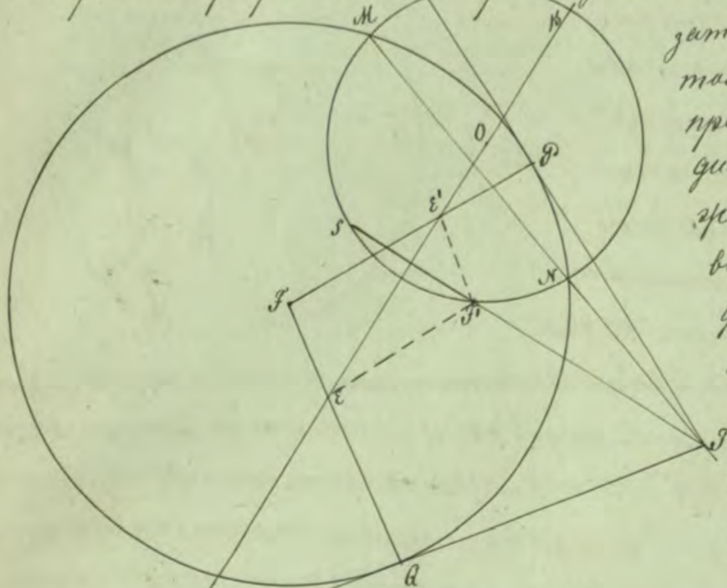
Все выведенное нами относительно касательной къ эллипсу можетъ быть выведено съ помощью элементарной геометріи если мы будемъ смотрѣть на эллипсъ какъ на кривую, сумма разстояній каждой точки которой отъ фокусовъ есть величина постоянная. Какъ изслѣдовать отношеніе этой кривой къ прямой? для этого изслѣдуемъ измѣненіе суммы разстояній каждой точки прямой отъ двухъ данныхъ точекъ F и F'. Точка кратчайшаго разстоянія найдется, если опустимъ на прямую перпендикуляръ изъ точки F, продолжимъ до f точки симметричной съ первою и эту найденную точку соединимъ съ F' и точка пересѣченія данной линіи съ проведенной нами будетъ точкою кратчайшаго разстоянія. Изъ этого слѣдуетъ, что точка M, должна быть точкою касательной



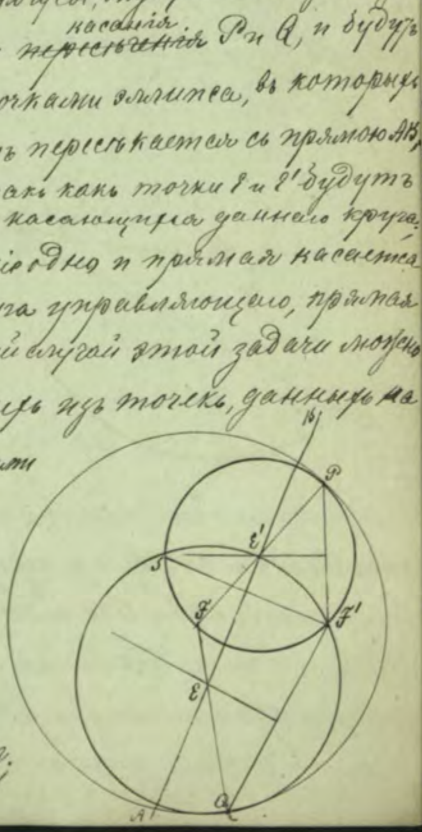
сумма разстояній для которой отъ F и F' наименьшая.
Исходя изъ опредѣленія эллипса по фокусамъ, легко можно убѣдиться въ различныхъ свойствахъ касательной: если будемъ проводить касательныя къ эллипсу изъ F опускать на нихъ перпендикуляры изъ точекъ симметричныхъ F проводить прямыя ~~къ F'~~, то эти линіи всегда равны $2a$.



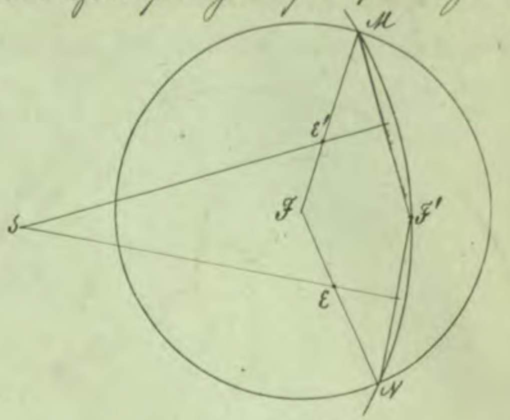
къ точкѣ M проводимъ касательную; изъ равныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ FMH и fMH видно, что $MF = Mf$, но $MF' + MF = 2a$ слѣдовательно и $MF' + Mf = 2a$; откуда очевидно, что эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ равно отстоящихъ отъ фокуса F и отъ окружности, описанной изъ другого фокуса F' радіусомъ равнымъ $2a$. Если опустимъ изъ фокусовъ перпендикуляры на касательныя, то основанія этихъ перпендикуляровъ H, H' всегда лежатъ на кругѣ описанномъ на большой оси какъ на діаметрѣ и отстоятъ поэтому отъ центра O на разстояніи a. Пользуясь этими свойствами легко рѣшить вопросъ о пересѣченіи эллипса съ прямою. Весьма просто свести его на задачу элементарной геометріи: такъ какъ точки пересѣченія должны находится на прямой и притомъ на равномъ разстояніи отъ управляющаго круга и отъ точки F', то вопросъ приводится къ задачѣ о проведеніи круга, центръ котораго долженъ лежать на данной прямой, и который долженъ проходить черезъ точку F' и касаться даннаго круга. Для рѣшенія этой задачи изъ F' опускаемъ перпендикуляръ на AB и продолжаемъ его до точки S, симметричной къ F'.



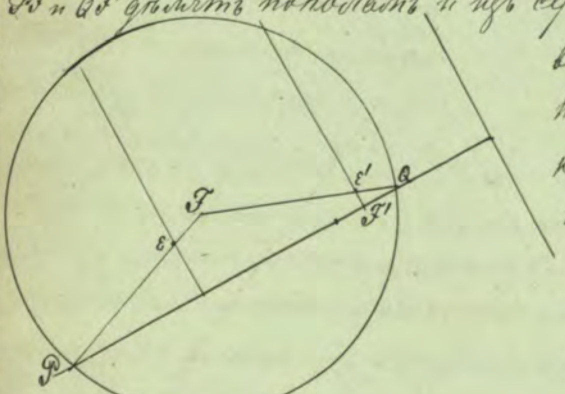
Затѣмъ изъ точки O, произвольно взятой на линіи AB, проводимъ кругъ, проходящій черезъ точки S и F', соединяемъ хордою M и N и продолжаемъ хорды SF' и MN до пересѣченія въ точкѣ F, изъ которой проводимъ двѣ касательныя къ направляющему кругу. Точки E и E', въ которыхъ пересѣкутся радіусы, опущенные изъ F въ точки ~~пересѣченія~~ касанія P и Q, и будутъ точками эллипса, въ которыхъ онъ пересѣкается съ прямою AB, такъ какъ точки E и E' будутъ центрами круговъ проходящихъ черезъ точки F' и касающихся даннаго круга. Если точка F лежитъ на окружности то рѣшеніе одно и прямая касается эллипса, въ случаѣ-же если F упадетъ въ средину круга управляющаго, прямая проходитъ мимо, не задѣвая эллипса. Какъ частный случай этой задачи можно разсматривать вопросъ о проведеніи касательныхъ изъ точекъ, данныхъ на эллипсѣ. Если проведемъ круги изъ точекъ E и E' радіусами EP и E'Q, соединимъ точки P и Q съ F' и изъ средины этихъ хордъ возставимъ перпендикуляры, то они будутъ касательными къ эллипсу въ точкахъ E и E', что очевидно на основаніи предъидущаго. Изъ внѣшней точки провести къ эллипсу касательную также не представляетъ никакого затрудненія;



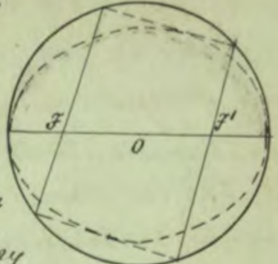
Изъ точки S радіусомъ SF' описываемъ окружность, которая пересѣчетъ управляющій кругъ въ двухъ точкахъ M и N, эти точки соединяемъ съ F' и изъ срединъ хордъ MF' и NF' возставляемъ перпендикуляры, которые будутъ касательными къ эллипсу, точки касанія опредѣлятся если изъ F проведемъ радіусы къ точкамъ M и N. Искомыя точки ε и ε'. Если мы будемъ удалять точку S въ безконечность то обѣ касательныя въ предѣлѣ явятся параллельными а кругъ въ видѣ прямой линіи; на основаніи этого соображенія изобрѣтенъ способъ проводить къ эллипсу касательныя параллельно данному направленію.

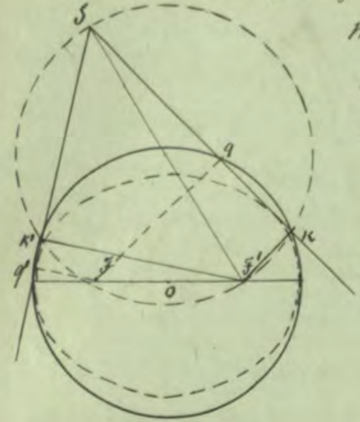


Къ линіи параллельно которой требуется провести касательную проводятъ черезъ F' перпендикуляръ пересѣкающій управляющій кругъ въ точкахъ P и Q; отрѣзки его PF' и QF' дѣлятъ пополамъ и изъ срединъ возставляютъ перпендикуляры, очевидно параллельные данной линіи; эти перпендикуляры суть касательныя къ эллипсу, точки касанія есть точки пересѣченія этихъ перпендикуляровъ съ радіусами большаго круга т.е. точки ε и ε'.



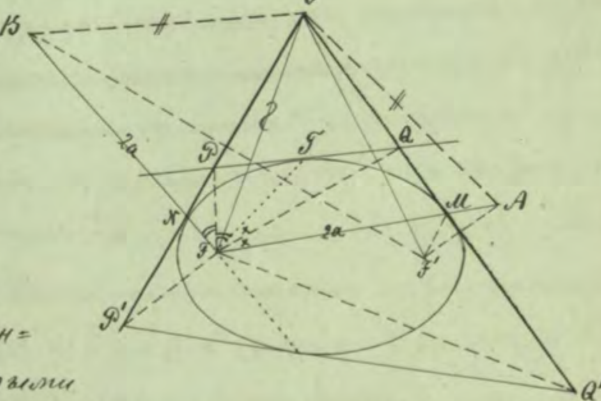
Мы уже замѣтили, что точки H и H' основаній перпендикуляровъ опущенныхъ изъ фокусовъ на касательную лежатъ на кругѣ описанномъ на большой оси эллипса какъ на діаметрѣ; это очевидно изъ того, что $OH \parallel F'f$ и $OH' \parallel Ff'$ изъ треугольниковъ $Ff'F'$ и $OH'F'$ имѣемъ $OH' = \frac{Ff'}{2} = a$ и изъ треугольниковъ $F'fF$ и OHF имѣемъ $OH = \frac{F'f}{2} = a$. На этомъ основаніи если возьмемъ кругъ и двѣ точки на діаметрѣ равно отстоящія отъ центра, то хорды, соединяющія концы параллельныхъ хордъ, проходящихъ черезъ эти двѣ точки, будутъ касательными къ эллипсу, котораго центръ въ O, большая полуось = радіусу круга а фокусы въ данныхъ точкахъ. Кромѣ того на этомъ основанъ особый способъ проведенія касательной къ эллипсу чрезъ данную точку S. На линіи SF' какъ на діаметрѣ строимъ кругъ, ко-



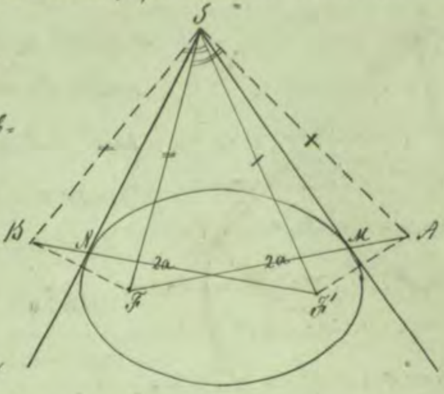


торый пересѣчетъ описанный кругъ въ точкахъ K и K', соединивъ эти точки съ S, получимъ пару касательныхъ; такъ какъ треугольники SKF' и SK'F' при K и K' прямоугольны, то KF' и K'F' суть перпендикуляры, а такъ какъ къ тому же K и K' лежатъ на кругѣ описанномъ, то слѣдовательно линіи SK и SK' суть касательныя къ эллипсу. Тѣ-же касательныя получимъ если вмѣсто SF' примемъ за діаметръ SF, только точки, опредѣляющія ихъ будутъ уже не K и K' а q и q'.

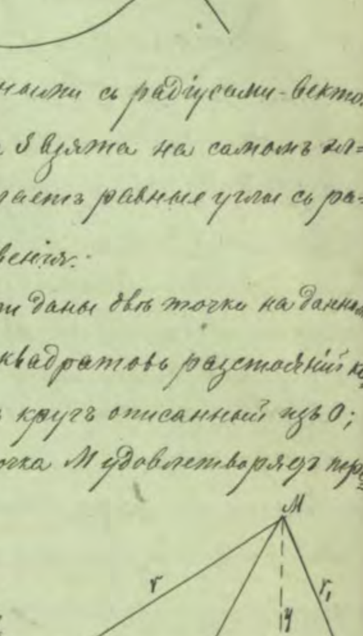
Углы подъ которыми видны изъ фокуса F касательныя SM и SN равны; треугольники BSF и ASF равны, такъ какъ сторона SF общая; SA равна SF' изъ равнобедреннаго треугольника ASF'; SF' равна SB изъ равнобедреннаго треугольника BSF'; слѣдовательно AS = BS да кромѣ того AF = BF = 2a; изъ равенства этихъ треугольниковъ вытекаетъ равенство угловъ SFB и SFA подъ которыми



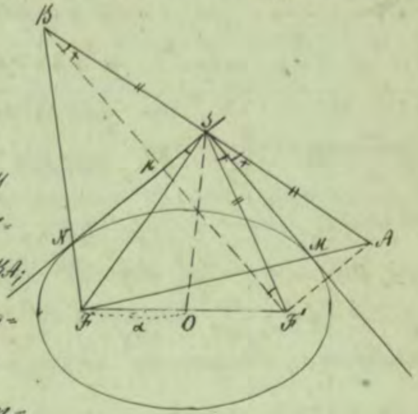
видны касательныя. Замѣтимъ кстати, что, если при двухъ постоянныхъ касательныхъ SM и SN будемъ проводить третью произвольную, то уголъ, подъ которымъ виденъ отрѣзокъ перемѣнной касательной между постоянными изъ фокуса F, есть величина постоянная и равная половинѣ угла, образуемаго радіусами векторами проведенными въ M и N точки прикосновенія постоянныхъ касательныхъ. Проведя касательную къ точкѣ T, по предъидущему имѣемъ углы PFN = PFT и QFM = QFT, отсюда $NFM = 2PFT + 2TFQ$ но $PQF = PFT + TFQ$ слѣдовательно $PFQ = \frac{1}{2} NFM$, что и требовалось доказать. Иногда этотъ уголъ бываетъ дополнительнымъ до двухъ прямыхъ. Разберемъ теперь нѣсколько теоремъ знакомящихъ насъ съ свойствами внѣшнихъ точекъ эллипса. Сравнимъ треугольники SFA и $SF'B$, они равны, такъ какъ $SA = SF'$, $SB = SF$ и $AF = BF'$ слѣдовательно углы BSF и ASF' равны; эти углы дѣлятся касательными SN и SM пополамъ, вслѣдствіе чего углы NSF и MSF' равны; отсюда получается такая теорема: если внѣшнюю точку соединимъ съ фокусами и проведемъ изъ нее пару касательныхъ, то углы, образуемые этими касательными съ радіусами-векторами равны; отсюда какъ частный случай когда точка S взята на самомъ эллипсѣ вытекаетъ предложеніе, что касательная дѣлаетъ равные углы съ радіусами векторами, проведенными въ точку прикосновенія.



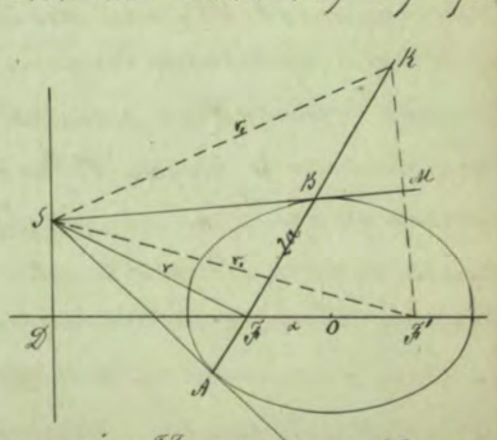
Въ Начальной Геометріи рѣшается слѣдующая задача: если даны двѣ точки на данномъ разстояніи $2a$, то геометрическое мѣсто точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ данныхъ есть величина постоянная, будетъ кругъ описанный изъ O; докажемъ, что MO величина постоянная, полагая, что точка M удовлетворяетъ требованіямъ задачи т.е. для нее $r^2 + r_1^2 = k^2$; опустивъ перпендикуляръ MP, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ FMP и $F'MP$ находимъ $r^2 = y^2 + (a+x)^2$ и $r_1^2 = y^2 + (a-x)^2$; подставляя эти величины въ предъидущее уравненіе, получимъ: $2y^2 + 2a^2 + 2x^2 = k^2$ откуда $x^2 + y^2 = \overline{OM}^2 = \frac{k^2 - 2a^2}{2}$ слѣдовательно OM есть величина постоянная, такъ какъ въ выраженіе его входятъ только постоянныя количества k и a.



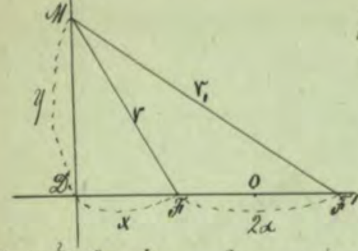
Благодаря этой теоремѣ, мы можемъ доказать, что, ища такія точки, проведенныя изъ которыхъ касательныя къ эллипсу пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, мы найдемъ, что всѣ онѣ расположены на кругѣ; другими словами геомрическое мѣсто вершинъ прямоугольниковъ, описанныхъ около эллипса, есть кругъ. Изъ точки S проводимъ пару перпендикулярныхъ касательныхъ SM и SN; точки A и B симметричныя фокусу F' лежатъ на одной прямой съ точкою S, такъ какъ SM и KF параллельны то углы MSF' и SFK равны, но SF'K = SBK, слѣдовательно MSF' или равный ему ASM = SBK, что возможно только въ случаѣ, когда ASB есть прямая. SF перпендикулярна къ BA, по предъидущей теоремѣ, такъ какъ уголъ ASF получается изъ угла NSM прямаго отнятіемъ и прибавленіемъ равнаго угла. Найдемъ геометрическое мѣсто вершины S; изъ прямоугольнаго треугольника BSF, въ которомъ BF = 2a; SF = r; BS = SF' = r' имѣемъ $r^2 + r_1^2 = (2a)^2$ слѣдовательно точка S, по предъидущей задачѣ лежитъ на кругѣ, центръ котораго лежитъ въ O, а радіусъ $SO = \sqrt{\frac{4a^2-2\alpha^2}{2}}$ или $SO = \sqrt{2a^2-\alpha^2}$, но такъ какъ $\alpha^2 = a^2 - b^2$, то $SO = \sqrt{a^2+b^2}$.



Мы видѣли, что если проведены двѣ касательныя къ эллипсу, изъ фокуса прямыя въ точки прикосновенія и изъ того-же фокуса прямая въ точку пересѣченія касательныхъ, то эта послѣдняя дѣлитъ уголъ между радіусами векторами пополамъ. Поэтому если черезъ фокусъ проведемъ хорду, къ концамъ ея двѣ касательныя, то линія соединяющая точку пересѣченія касательныхъ со фокусомъ будетъ перпендикулярна къ хордѣ. Найдя точку симметричную F' именно точку K, имѣемъ по предъидущему MF' = MK и KF = 2a. Можно предложить вопросъ о геометрическомъ мѣстѣ точекъ S пересѣченія касательныхъ проводимыхъ къ концамъ хорды, проходящей черезъ фокусъ. Изъ прямоугольнаго треугольника SFK имѣемъ:

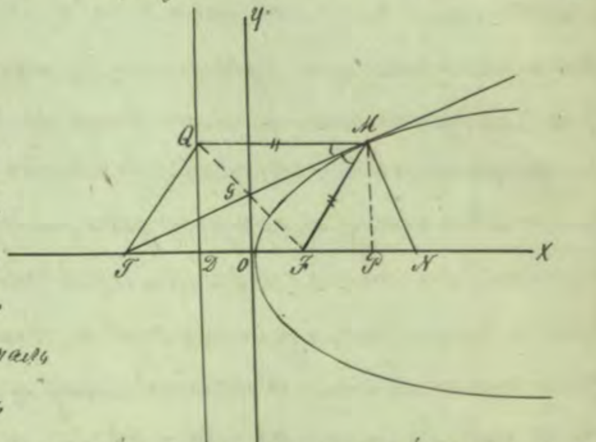


$r_1^2 - r^2 = 4a^2$; изъ S опустимъ перпендикуляръ на линію FF' и назовемъ DF черезъ x, MD черезъ y; разстояніе FF' какъ извѣстно равняется 2α; тогда получимъ слѣ-



дующія уравненія $r_1^2 = y^2+(2\alpha+x)^2$ и $r^2 = y^2+x^2$; подставляя въ найденное, имѣемъ $r_1^2 - r^2 = 4\alpha^2+4\alpha x = 4a^2$ или сокращ. $\alpha^2+\alpha x = a^2$ уравненіе прямой перпендикулярной къ оси x такъ какъ въ него невходитъ величина y, что это показываетъ что всякая точка этой прямой удовлетворяетъ требованію. Легко убѣдится, что эта прямая есть директриса: для точки D имѣемъ $\overline{DF'}^2 - \overline{DF}^2 = 4a^2$; $DF' - DF = 2\alpha$ раздѣливъ эти два уравненія другъ на друга получимъ $DF'+DF = \frac{2a^2}{\alpha^2}$ откуда $\frac{DF'+DF}{2} = DO = \frac{\alpha^2}{a}$ разстоянію директрисы отъ центра эллипса. Такимъ образомъ если черезъ фокусъ будемъ проводить хорды къ концамъ ихъ касательныя, то каждая пара такихъ касательныхъ пересѣчется на соотвѣтствующей этому фокусу директрисѣ.

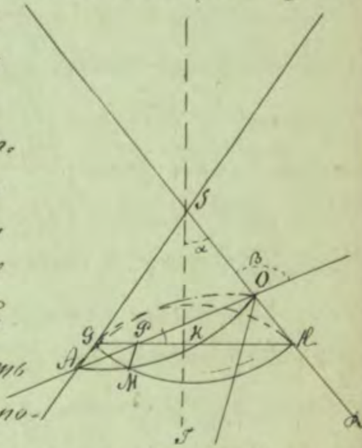
Все что сказано объ эллипсѣ относится также и къ гиперболѣ и потому неостанавливаясь на ней мы перейдемъ къ разсмотрѣнію касательной параболы, для которой $tg\, T = \frac{p}{y}$.



Докажемъ что субтангенсъ TP въ точкѣ O дѣлится пополамъ. MF = MQ = PD = FT. Углы QMT и TMF равны. Слѣдовательно TQMF ромбъ діагонали котораго перпендикулярны и дѣлятся пополамъ. Треугольники MPF и QDT равны слѣдовательно TD = PF и такъ какъ OD = OF то OT = OP, что и требовалось доказать. Субнормаль величина постоянная и равна ординатѣ возставленной въ фокусѣ. Разсматривая параболу какъ эллипсъ съ безконечно удаленнымъ центромъ, мы можемъ вывести слѣдующія заключенія, точка g въ эллипсѣ лежитъ на кругѣ радіуса a въ предѣлѣ онъ обращается въ прямую, касательную къ вершинѣ параболы, слѣдовательно g лежитъ на оси y. Точка Q въ эллипсѣ лежитъ на кругѣ описанномъ изъ фокуса радіусомъ 2a, въ параболѣ она всегда находится на директрисѣ, которая служитъ предѣломъ этого круга при удаленіи центра въ безконечность.

Если требуется провести 2 касательныя къ параболѣ чрезъ какую-нибудь внѣшнюю точку H, то радіусомъ HF описываютъ окружность, которая пересѣчетъ директрису въ точкахъ Q и Q'; QH и $Q'H$ будутъ искомыми касательными. Это основано на томъ, что треугольники QHF и $Q'HF$ равнобедренные и точки Q и Q' будутъ точками симметричными фокусу а потому QH и $Q'H$ касательными.

Коническія сѣченія.



Возьмемъ прямой круглый конусъ и пересѣчемъ его плоскостью, положеніе которой опредѣляется разстояніемъ $SO = d$ и угломъ β сѣкущей плоскости съ образующей SR. Опредѣлимъ теперь уравненіе кривой получаемой въ сѣченіи, принявъ за оси линію OA и линію ей перпендикулярную въ точкѣ O; тогда для какой нибудь точки M кривой $OP = x$, $PM = y$; чрезъ PM проводимъ плоскость перпендикулярную къ SS оси конуса; въ сѣченіи очевидно кругъ, діаметръ котораго QR проходитъ чрезъ точку P, такъ какъ лежитъ съ линіей OA въ одной плоскости. Для круга этого линія MP есть ордината, проходящая перпендикулярно къ діаметру, поэтому $y^2 = PQ.PR$; положимъ, что конусъ опредѣляется угломъ $KSR = \alpha$; изъ треугольника POR имѣемъ $\frac{PR}{x} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$; $PR = \frac{x.\sin\beta}{\cos\alpha}$; $PQ = QR - PR$; $QR = 2KR = 2SR\sin\alpha$, изъ того же треугольника $SR = d + OR$; $\frac{OR}{x} = \frac{\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}$ такъ какъ уголъ OQR равенъ $180-\beta-90+\alpha = 90-(\beta-\alpha)$. Такимъ образомъ $PQ = 2\left(d + \frac{x\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha - \frac{x.\sin\beta}{\cos\alpha}$; отсюда уравн.

$$y^2 = 2d.\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha\,x - \left(\frac{\sin\beta^2 - 2\cos(\beta-\alpha).\sin\alpha.\sin\beta}{\cos^2\alpha}\right)x^2 \text{ или}$$

$$y^2 = 2d\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha\,x - \left[\frac{\sin\beta - 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)}{\cos^2\alpha}\right]\sin\beta\,x^2.$$

Это уравненіе совершенно одинаковой формы съ уравненіями кривыхъ втораго порядка относительно вершины $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$; знакъ послѣдняго члена опредѣляетъ форму кривой; въ нашемъ выраженіи $\cos^2\alpha$ и $\sin\beta$ величины существенно положительныя, β всегда $< 180°$, слѣдовательно форма кривой зависитъ отъ знака разности стоящей въ скобкахъ:

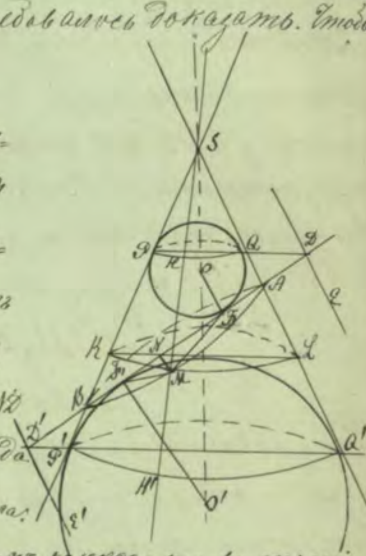
Если $\sin\beta > 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)$ то въ сѣченіи эллипсъ
" — " $\sin\beta < 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)$ " — " — " гипербола
" — " $\sin\beta = 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)$ " — " — " парабола

въ послѣднемъ случаѣ $\beta = 2\alpha$; Параметры p и a опредѣляются изъ двухъ урав-ній: $2p = 2\,tg\alpha.\sin\beta.d$ и $\frac{p}{a} = \sin\beta.\frac{\sin\beta - 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)}{\cos^2\alpha}$ отсюда $a = \frac{\cos^2\alpha.\,tg\alpha.\,d}{\sin\beta - 2\sin\alpha.\cos(\beta-\alpha)}$

Сѣченіе прямаго круглаго конуса плоскостью есть кривая втораго порядка.

1.) Если плоскость пересѣкаетъ всѣ образующія конуса, то въ сѣченіи получается кривая сомкнутая. Докажемъ, что эта кривая есть эллипсъ, т.е. такая кривая для каждой точки которой сумма разстояній отъ фокусовъ есть величина постоянная и равная большой оси. Пусть сѣкущая плоскость перпендикулярна къ плоскости чертежа, пересѣкается съ ней по линіи AB; впишемъ въ треугольникъ ASB 2 круга съ центрами O и O' и будемъ вращать чертежъ около оси, оставляя плоскость AB неподвижною, тогда изъ треугольника получится конусъ а изъ круговъ сферы, касающіяся плоскости въ точкахъ F и F' а образующихъ въ точкахъ P, Q, P' и Q'; возьмемъ какую нибудь точку M сѣченія, проводимъ черезъ нее образующую, которая коснется шаровъ въ точкахъ H и H'; линіи MF и MH, какъ касательныя къ шару изъ одной внѣшней точки M равны, по тому же самому равны MF' и MH'.

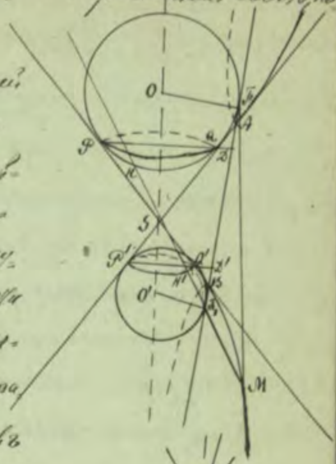
Слѣдовательно $MF + MF' = HH' = PP' = AB$, такъ какъ $BP = BF$; $BP' = BF' = AF$ такъ какъ $FF' + 2BF' = FF' + 2AF = PP' = QQ'$ откуда $BF' = AF$, что и требовалось доказать. Чтобы найти директриссы продолжаемъ AB до пересѣченія съ PQ и $P'Q'$ по линіямъ DE и $D'E'$, которыя и суть директриссы эллипса; для доказательства опустимъ изъ M перпендикуляръ MN на AB и черезъ него проводимъ плоскость перпендикулярно оси; въ сѣченіи получается кругъ пересѣкающійся съ плоскостью чертежа по линіи KL.



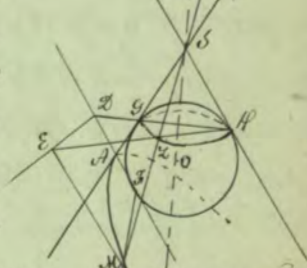
Такъ какъ $KL \parallel QD$, то мы имѣемъ $ND : QL = const$; но ND есть разстояніе точки M отъ прямой, а $QL = MH = MF$, отсюда $\frac{ND}{MF} = const$ отличительное свойство директриссы эллипса.

2.) Если сѣкущая плоскость параллельна двумъ образующимъ конуса, то въ сѣченіи получается кривая съ двумя вѣтвями, докажемъ, что это гипербола т.е. кривая для каждой точки которой разность разстояній отъ фокусовъ есть величина постоянная. Поступая по предыдущему, т.е. вписавъ два круга касательныхъ къ AB и образующимъ конуса, взявши какую нибудь точку сѣченія M и проведя черезъ нее образующую, имѣемъ $MF = MH$ и $MF' = MH'$; слѣдовательно

$MA - MA' = MH - MH' = HH' = const$. продолжая плоскости PQ и $P'Q'$ до пересѣченія съ AB, получимъ двѣ прямыя-директрисы гиперболы.



3.) Если наконецъ плоскость параллельна одной образующей напримѣръ SH, то получимъ въ сѣченіи параболу; докажемъ это доказавъ, что каждая точка сѣченія находится въ равномъ разстояніи отъ точки и прямой, что и характеризуетъ параболу. Впишемъ шаръ касающійся конуса и сѣкущей плоскости; пусть DE будетъ пересѣченіе сѣкущей плоскости съ плоскостью круга прикосновенія GH. Черезъ произвольную точку M сѣченія проводимъ ME перпендикулярно къ DE и образующую SM встрѣчающуюся съ кругомъ прикосновенія въ точкѣ L; прямая ME будетъ параллельна AA' и SH; слѣдовательно ME, SH и SM находятся въ одной плоскости а 3 точки H, L и E лежатъ на пересѣченіи HE плоскости прикосновенія съ предыдущей; треугольники MLE и HSL подобны; $SL = SH$, слѣдовательно $ML = ME$; $ML = MF$; откуда $ME = MF$ разстоянія точки отъ фокуса и директрисы равны, стало быть кривая парабола что и требовалось доказать.

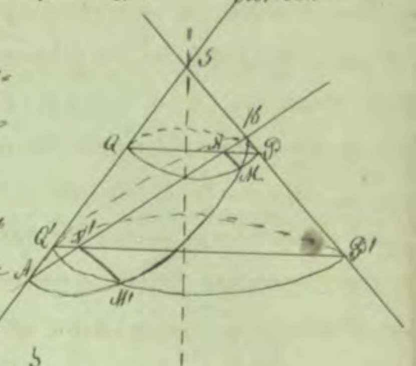


Квадраты ординатъ всякаго коническаго сѣченія относятся между собою, какъ произведенія отрѣзковъ, образуемыхъ этими ординатами на главной оси. Положимъ, что имѣемъ эллипсъ уравненія $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; возьмемъ на немъ двѣ точки $M'(x_1, y_1)$ и $M''(x_{11}, y_{11})$ находимъ что для каждой изъ нихъ уравненіе приметъ видъ $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ и $\frac{x_{11}^2}{a^2}+\frac{y_{11}^2}{b^2}=1$ откуда:

$$y'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)=\frac{b^2}{a^2}(a+x')(a-x')\ ;\ y_{11}^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_{11}^2)=\frac{b^2}{a^2}(a+x_{11})(a-x_{11})$$

раздѣливши одно уравненіе на другое получимъ: $\frac{y_1^2}{y_{11}^2}=\frac{(a+x_1)(a-x_1)}{(a+x_{11})(a-x_{11})}$; для гиперболы тоже самое, такъ какъ величины b не входятъ; для параболы отношеніе квадратовъ ординатъ равняется отношенію абсциссъ, такъ какъ изъ уравненій $y_1^2=2px_1$ и $y_{11}^2=2px_{11}$ имѣемъ $\frac{y_1^2}{y_{11}^2}=\frac{x_1}{x_{11}}$. При помощи этого предложенія легко доказать, что сѣченія какъ прямаго такъ и косаго конуса плоскостью есть кривыя втораго порядка. Пересѣчемъ сѣкущую плоскость прямаго конуса двумя плоскостями перпендикулярными къ оси. Линіи NM и $N'M'$ будутъ перпендикулярны къ AB и также къ PQ и $P'Q'$, отсюда имѣемъ $MN^2=QN.NP$; $M_1N_1^2=Q'N'.N'P'$; изъ подобія тре-

треугольниковъ N'BP' и NBP имѣемъ $\frac{NB}{N'B}=\frac{NP}{N'P'}$; изъ подобія треугольниковъ N'AQ' и NAQ получимъ $\frac{NA}{N'A}=\frac{NQ}{N'Q'}$ слѣдовательно $\frac{QN.NP}{Q'N'.N'P'}=\frac{NA.NB}{N'A.N'B}$; откуда $\frac{MN^2}{M'N'^2}=\frac{AN.BN}{AN'.BN'}$; слѣдовательно въ сѣченіи кривая втораго порядка.

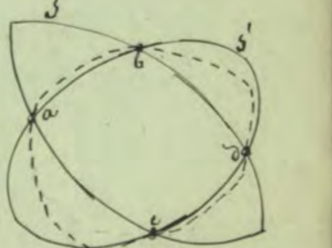


Докажемъ это-же предложеніе въ случаѣ косаго конуса; пересѣчемъ его плоскостью AB и проведемъ двѣ параллельныя основанію плоскости PQ и P'Q', которыя дадутъ два круга пересѣкающіеся съ кривою сѣченія въ точкахъ M, L, M' и L'. Опустимъ изъ центровъ круговъ перпендикуляры ON и O'N' на хорды ML и M'L' и черезъ точки N, N', S проведемъ плоскость, которая съ сѣкущей пересѣчется по линіи AB, проходящей черезъ N и N', съ поверхностью конуса по образующимъ SR и SR', проходящимъ черезъ A и B а также черезъ CD, C' и D'. Такимъ образомъ получимъ $MN^2=CN.ND$; $M_1N_1^2=C'N'.N'D'$ или $\frac{MN^2}{M'N'^2}=\frac{CN.ND}{C'N'.N'D'}$; изъ подобія треугольниковъ N'BD' и NBD имѣемъ $\frac{ND}{N'D'}=\frac{NB}{N'B}$; изъ подобія треугольниковъ CNA и C'N'A, получимъ $\frac{CN}{C'N'}=\frac{AN}{AN'}$; перемножая эти двѣ равенства, имѣемъ $\frac{ND.CN}{N'D'.C'N'}=\frac{AN.NB}{AN'.N'B}$; сравнивая съ предыдущимъ находимъ $\frac{MN^2}{M_1N_1^2}=\frac{AN.NB}{AN'.N'B}$ т.е. что кривая сѣченія есть кривая втораго порядка.

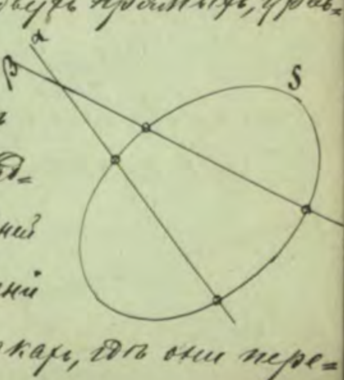
Сѣченіе проходитъ черезъ точки M, B, L и M'A L' и имѣетъ видъ эллипса.

Мы видимъ, что всякій вопросъ относительно кривыхъ втораго порядка можетъ быть опредѣленъ. Въ интересахъ Геометріи различать задачи, въ которыхъ искомыя величины даны количественно и тѣ, въ которыхъ требуется найти извѣстныя геометрическія отношенія вообще. Анализъ весьма удобенъ въ приложеніи къ задачамъ первой группы; къ вопросамъ о положеніи и соотношеніи фигуръ прикладывается другой способъ именно сокращенный; замѣтимъ, что здѣсь онъ имѣетъ еще ту выгоду, что не надо будетъ разсматривать кривыя втораго порядка въ отдѣльности; результаты не будутъ зависѣть отъ опредѣленныхъ количествъ и отъ вида фигуры и потому будутъ имѣть болѣе общ-

ности. Данная кривая можетъ быть выражена уравненіемъ $S=0$; это урав-
неніе представляетъ опредѣленное коническое сѣченіе; возмемъ другое, урав-
неніе котораго пусть будетъ $S'=0$; разсматривая совокупность этихъ
двухъ уравненій придемъ къ мысли о сокращенномъ способѣ. Помножая
второе на произвольное k и сложивъ или вычтя съ первымъ, получимъ
$S-kS'=0$ постараемся объяснить смыслъ этого уравненія, что и по-
ведетъ насъ къ опредѣленію сокращеннаго способа. Оно очевидно
представляетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки пересѣченій
двухъ первыхъ; такихъ коническихъ сѣченій множество, такъ какъ ко-
личество k совершенно произвольно. Въ самомъ началѣ изученія было
сказано, что 5 точекъ вполнѣ опредѣляютъ кривую; точки пересѣ-
ченія двухъ коническихъ сѣченій опредѣляются изъ уравненія чет-
вертой степени, значитъ ихъ вообще 4, хотя можетъ быть, сообра-
зно значенію корней биквадратнаго уравненія 3, 2, 1 и ни одной.
Наша кривая необходимо проходитъ черезъ 4 точки пересѣченія S и S'
будутъ ли они дѣйствительныя или мнимыя. Когда дана
еще точка $f(x'y')$ то подставляя координаты ея

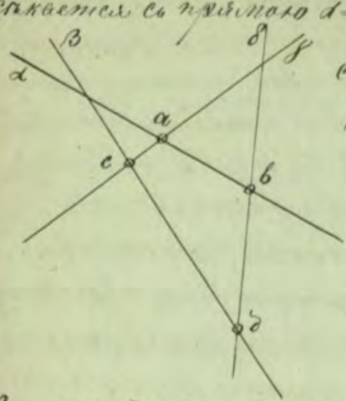


въ уравненіе получимъ $S_1-kS_1'=0$ откуда $k=\frac{S_1}{S_1'}$
совершенно опредѣлено, а слѣдовательно и наша
кривая. Положимъ что S' представляетъ пару
прямыхъ т. е. что $S'=\alpha.\beta=0$; уравненіе $S-k\alpha\beta=0$
опредѣляетъ коническое сѣченіе проходящее черезъ
точки пересѣченія коническаго же сѣченія $S=0$ и двухъ прямыхъ, урав-
ненія которыхъ $\alpha=0$ и $\beta=0$. Если и S распадается

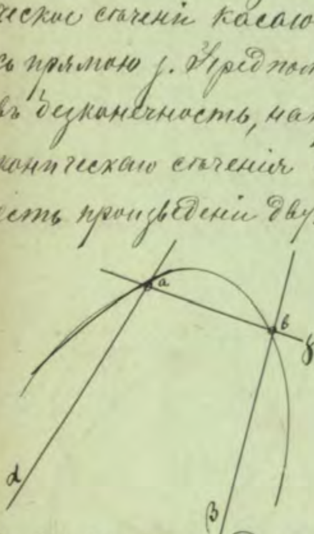


на два множителя, то уравненіе принимаетъ видъ
$\gamma.\delta-k.\alpha.\beta=0$ и опредѣляетъ кривую втораго поряд-
ка описанную около четыреугольника. Изъ послѣдней
формы полагая $\alpha=\beta$, мы получимъ коническое сѣченіе
касательное къ линіямъ $\gamma=0$ и $\delta=0$ въ тѣхъ точкахъ, гдѣ они пере-

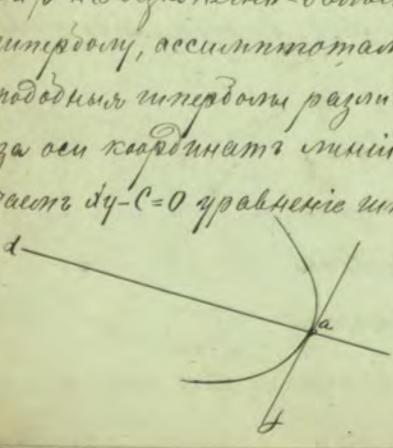
съкается съ прямою $\alpha=0$, такъ какъ точки a и b служатъ предѣломъ точекъ



c и d, при совпаденіи β съ α. Дѣлая въ этомъ уравненіи другія положенія, мы будемъ получать различные частные случаи коническихъ сѣченій. Уравненіе послѣдняго сѣченія будетъ $\gamma\delta-k\alpha^2=0$. Уравненіе $S-k\gamma\delta=0$ служитъ какъ мы уже знаемъ уравненіемъ кривыхъ втораго порядка проходящихъ черезъ точки пересѣченія кривой втораго порядка съ парой прямыхъ; придвигая тутъ δ къ совпаденію съ γ, получимъ въ предѣлѣ уравненіе $S-k\gamma^2=0$ опредѣляющее коническое сѣченіе касающееся даннаго въ тѣхъ двухъ точкахъ гдѣ оно пересѣкается съ прямою γ. Предположимъ что въ четвероугольникѣ одна прямая удалена въ безконечность, напримѣръ δ; уравненіе ея принимаетъ видъ $C=0$ а уравненіе коническаго сѣченія описаннаго около этого четырехугольника $\alpha\beta-k'\gamma=0$; гдѣ k' есть произведеніе двухъ постоянныхъ количествъ; уравненіе это представляетъ

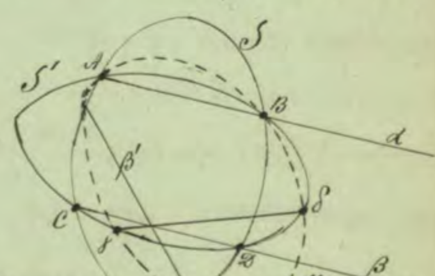


коническія сѣченія проходящія чрезъ точки a и b и чрезъ точки лежащія на α и β на безконечно-большомъ разстояніи; стало быть прямыя эти параллельны ея асимптотамъ. Чтобы получить гиперболу удалимъ и вторую линію въ безконечность, точки a и b сольются съ точками c и d и стало быть коническое сѣченіе будетъ касаться линій α и β на безконечно-большомъ разстояніи, слѣдовательно представитъ собою гиперболу, ассимптотами которой служатъ α и β; уравненіе ея $\alpha\beta-C=0$ подобныя гиперболы различаются постояннымъ количествомъ C; если примемъ за оси координатъ линіи α и β то $\left\{\begin{matrix}\alpha=0\\ \beta=0\end{matrix}\right.$ обращаются въ $\begin{matrix}x=0\\ y=0\end{matrix}$; вставляя получаемъ $xy-C=0$ уравненіе гиперболы относительно ассимптотъ. Если въ урав-



неніи $\alpha\beta-k'\gamma=0$ будемъ придвигать β къ совпаденію съ α то въ предѣлѣ двѣ точки пересѣченія сольются въ одну касанія и получится коническое сѣченіе имѣющее безконечно-удаленныя точки по одному только на-

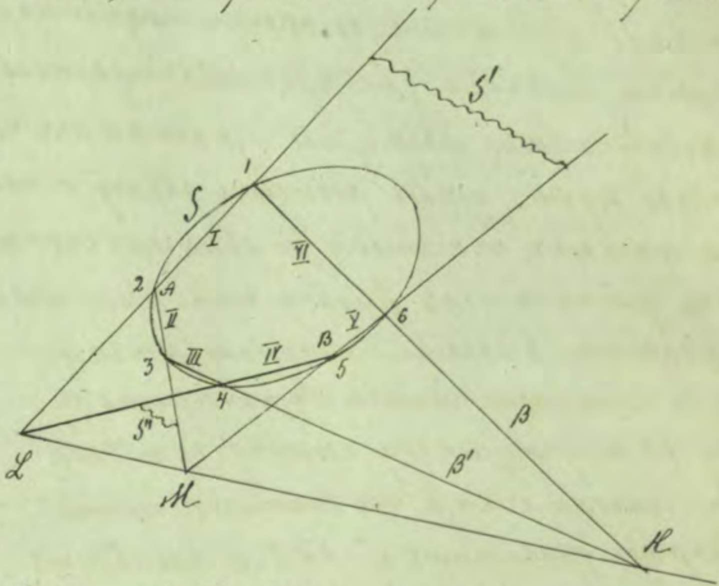
уравненію, по линіи α, т.е. парабола, діаметры которой параллельны α.
Ея уравненіе $\alpha^2-ky=0$; принимая α за ось x а γ за ось y, имѣемъ уравненіе
$y^2-kx=0$ уже извѣстное намъ уравненіе параболы. Изслѣдуемъ въ данномъ
общемъ уравненіи кривой втораго порядка, какое измѣненіе произойдетъ
въ формѣ ея, когда одинъ изъ коэффиціентовъ измѣнится; положимъ, что
измѣняется членъ съ x^2; первоначальное уравненіе $S=0$; измѣнимъ въ немъ
Ax^2 вычтя или придавивъ kx^2, тогда уравненіе новой кривой $S-kx^2=0$, но это
равносильно $S-ky^2=0$, гдѣ γ принята за ось y-овъ, стало быть новая кри-
вая касается прежней въ точкахъ пересѣченія съ осью y. Измѣнимъ про-
изведеніе xy; новое уравненіе $S-kxy=0$ приведетъ насъ къ формѣ $S-k\gamma\delta=0$
и кривая выражаемая этимъ уравненіемъ будетъ касаться прежней
въ точкахъ пересѣченія съ осями координатъ. Точно также не пред-
ставляетъ никакого затрудненія изслѣдовать измѣненія и другихъ
членовъ; собственно говоря, мы ознакомимся съ сокращеннымъ способомъ
настолько нужно, чтобы рѣшить задачу о построеніи кривой по даннымъ
пяти точкамъ, т.е. чтобы по даннымъ пяти умѣть опредѣлять еще
сколько угодно точекъ. Задача эта рѣшается съ помощью Паскале-
вой теоремы о шестиугольникѣ вписан-
номъ въ коническое сѣченіе. Разсмотримъ эту
задачу по сокращенному способу: если даны
на плоскости S, α и β, то коническое сѣченіе
S, выраженное уравненіемъ $S-k\alpha\beta=0$ проходитъ
черезъ точки A, B, C и D. Проведемъ еще коническое



сѣченіе, подчиняя его условію, чтобы оно проходило черезъ A и B; уравненіе это-
го S'' будетъ $S-k'\alpha\beta'=0$; нетрудно, благодаря сокращенной формѣ, доказать
теорему, что хорда (γδ) пересѣченія S' и S'' пройдетъ черезъ точку пересѣченія
β и β' т.е. доказать, что когда три коническія сѣченія имѣютъ двѣ об-
щія точки, или, что все тоже, одну общую хорду, то кромѣ того они по-
парно пересѣкаются еще по тремъ хордамъ, которыя всегда проходятъ

черезъ одну точку. Разсмотримъ пересѣченія кривыхъ $S-k\alpha\beta=0$ и $S-k'\alpha\beta'=0$; вычтя одно уравненіе изъ другаго, имѣемъ $k\alpha\beta-k'\alpha\beta'=0$, которому должны удовлетворять точки пересѣченія S' и S''; уравненіе $\alpha(k\beta-k'\beta')=0$ очевидно представляетъ пару прямыхъ. Одно уравненіе $\alpha=0$ показываетъ уже извѣстное свойство, что общія точки S' и S'' лежатъ на этой прямой; другое $\beta-\frac{k'}{k}\beta'=0$ представляетъ тоже прямую, на которой лежатъ двѣ другія общія точки кривыхъ S' и S''; форма послѣдняго уравненія ясно показываетъ, что эта прямая проходитъ черезъ точку пересѣченія прямыхъ $\beta=0$ и $\beta'=0$, что и требовалось доказать.

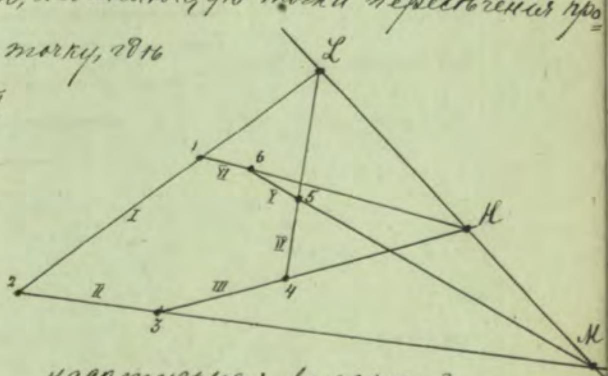
Паскалева теорема есть не болѣе какъ частный случай только что доказанной; она состоитъ въ томъ, что три точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ шестиугольника вписаннаго въ коническое сѣченіе лежатъ на одной прямой. Когда берется три коническихъ сѣченія S, S' и S'' имѣющія двѣ общія точки A и B, то частный случай этой теоремы будетъ когда S' и S'' представляютъ пары прямыхъ:



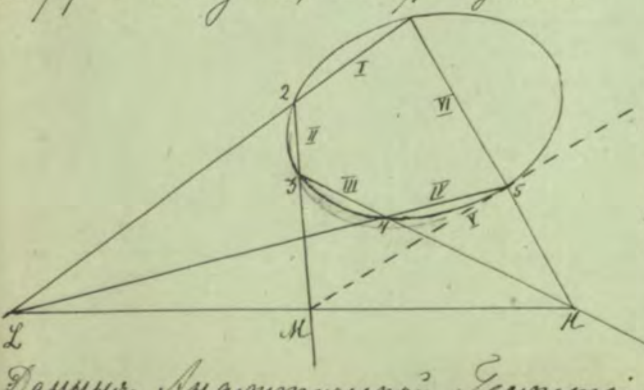
S' линіи I и V; S'' линіи II и IV линіи III и VI будутъ β и β' т. е. линіи, по которымъ пересѣкаются коническое сѣченіе S съ двумя парами прямыхъ S' и S'', слѣдовательно линія пересѣченія S' и S'' линія LM должна проходить черезъ точку H, что показываетъ, что эти три точки должны лежать на одной прямой. Эту теорему можно приложить къ пятиугольнику, разсматривая его какъ предѣлъ шестиугольника, у котораго одна сторона уменьшается и въ предѣлѣ обращается въ касательную; къ четырехугольнику съ двумя касательными въ вершинахъ его и наконецъ къ двумъ треугольникамъ вписанному и описанному, имѣющимъ то свойство, что точки прикосновенія втораго служатъ вершинами первому.

Если на коническомъ сѣченіи взяты четыре точки и на нихъ построены два четырехугольника вписанный и описанный, то эти послѣдніе имѣютъ слѣдующую связь - точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой. Относительно треугольника замѣтимъ, что стороны его съ касательными въ противоположныхъ вершинахъ пересѣкаются на одной прямой. Все э/о видоизмѣненія Паскалевой Теоремы.

Выше мы говорили, что съ помощью теоремы Паскаля легко построить коническое сѣченіе по пяти даннымъ точкамъ; покажемъ теперь ея приложеніе къ этой задачѣ. Соединяемъ точки 1, 2, 3, 4 и 5 прямыми; черезъ 1^{ю} проводимъ произвольную прямую, которая должна имѣть еще одну точку общую съ коническимъ сѣченіемъ; отыскиваемъ линію, соединяющую точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ I и IV, III и VI, а точку, гдѣ эта линія пересѣкается стороною II соединяемъ съ точкой 5; на произвольной линіи получаемъ точку 6, принадлежащую коническому сѣченію.

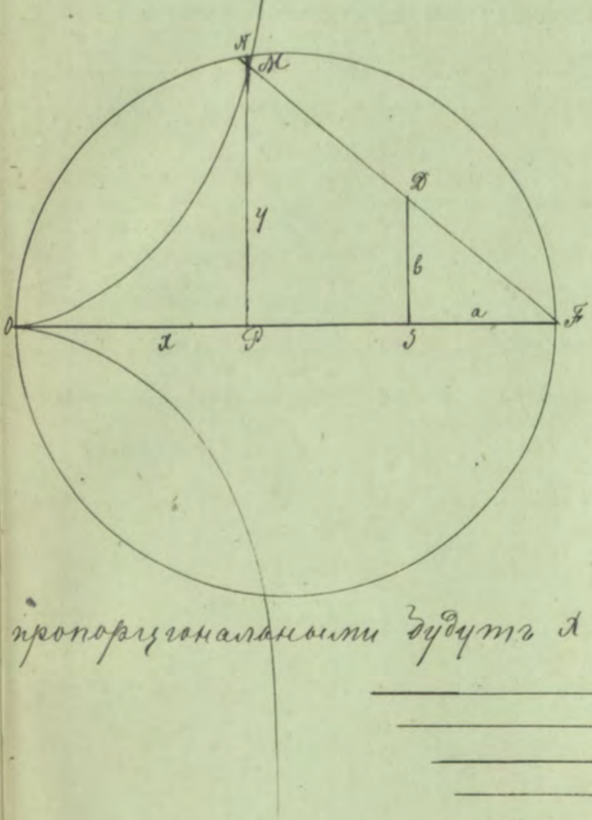


Нетрудно показать, какъ проводится касательная въ данной или найденной точкѣ, напримѣръ въ точкѣ 5; разсматривая пятиугольникъ, соединяемъ I съ IV и III со VI продолжаемъ II до линіи LH и точку пересѣченія M соединяемъ съ точкой 5; эта линія и будетъ искомая касательная.



Данныя Аналитической Геометріи даютъ возможность отыскать діаметры, центръ и оси кривыхъ. Мы знаемъ, что вершина касательныхъ лежитъ на діаметрѣ сопряженномъ хордѣ касанія; проводимъ поэтому къ точкамъ 5, 4, 3 касательныя, точки 5.. В вершины ихъ соединяемъ съ точками, дѣлящими пополамъ хорды ихъ касанія; получаемъ два діаметра, величину которыхъ легко опредѣлить, такъ какъ центръ уже найденъ пересѣченіемъ ихъ. Уравненіе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ пять точекъ будетъ $\alpha\beta - \frac{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}.\gamma\delta = 0$ или $\frac{\alpha\beta}{\alpha'\beta'} - \frac{\gamma\delta}{\gamma'\delta'}$ т.е. произведеніе перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ какой нибудь точки коническаго сѣченія на двѣ противоположныя стороны вписаннаго четыреугольника относятся къ произведенію перпендикуляровъ изъ той-же точки на двѣ другія стороны, какъ постоянное количество k. Взаимной теоремой къ Паскалевой служитъ теорема Бріаншона объ описанномъ шестиугольникѣ, что коническое сѣченіе можетъ быть опредѣлено какъ изъ условія прохожденія черезъ пять точекъ такъ и изъ условія касаться пяти прямыхъ.

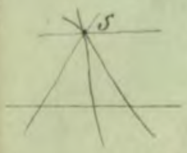
Дополненіе. Циссоида Діоклеса имѣетъ весьма важное практическое примѣненіе къ задачѣ объ отысканіи двухъ среднихъ пропорціональныхъ къ двумъ даннымъ, т.е. когда даны a и b и надо отыскать u и v такъ, чтобы $\frac{a}{u} = \frac{u}{v} = \frac{v}{b}$ тогда если положимъ $\frac{2R-x}{y} = \frac{a}{b}$ то $u = \sqrt{x(2R-x)}$ и $v = x$. Построеніемъ среднія пропорціональныя опредѣляются слѣдующимъ образомъ: отъ точки F откладываемъ по линіи FO линію равную a; изъ конца ея S возставляемъ перпендикуляръ и на немъ откладываемъ линію $SD=b$; черезъ F и D проводимъ прямую до пересѣченія съ циссоидой въ точкѣ M, изъ которой мы опускаемъ перпендикуляръ на діаметръ OF и продолжаемъ до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ N. Тогда изъ подобія треугольниковъ MPF и DSF получимъ: $\frac{a}{b} = \frac{2R-x}{y}$; слѣдовательно средними пропорціональными будутъ x и $\sqrt{x(2R-x)}$; $x = OP$ и $\sqrt{x(2R-x)} = PN$. —



Сергій Шереметевскій

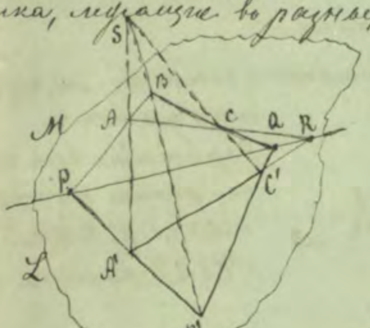
Высшая Геометрія
(лекціи Цингера)

Пространство принимается въ Евклидовомъ смыслѣ. Начало взаимности или двойственности: линія опредѣляется двумя точками и наоборотъ. Прямая есть безконечная и непрерывная последовательность точекъ и называется рядомъ. Точка есть безконечная и непрерывная последовательность линій, проходящихъ черезъ нее, и называется центромъ пучка.

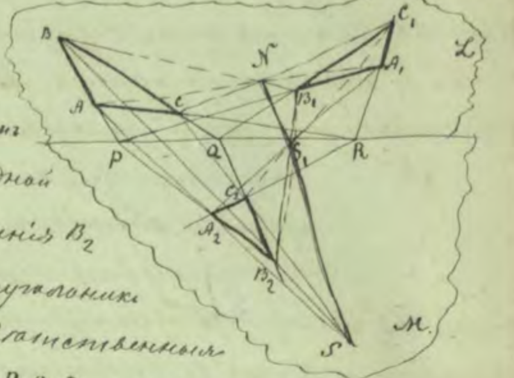


Каждому лучу соотвѣтствуетъ на прямой одинъ опредѣленный элементъ. Только одинъ лучъ пересѣкается съ прямой въ безконечности — лучъ параллельный. Всѣ параллели пересѣкаются въ одной безконечноудаленной точкѣ; онѣ суть лучи пучка, центръ котораго лежитъ въ безконечности.

О соотвѣтственныхъ или перспективныхъ треугольникахъ. Такъ называются два треугольника, вершины которыхъ лежатъ на трехъ линіяхъ, проходящихъ черезъ одну точку; притомъ точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой. Разсмотримъ сперва 2 треугольника, лежащіе въ разныхъ плоскостяхъ.

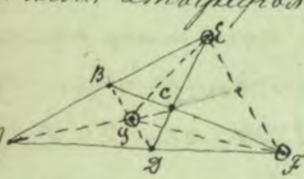


Т.к. AB и A'B' перспективны, то онѣ лежатъ въ одной плоскости A'ASBB' и слѣдовательно пересѣкаются и притомъ на линіи пересѣченія плоскостей L и M; тоже самое можно сказать о линіяхъ AC и A'C', BC и B'C'; такимъ образомъ теорема доказана. Обратная теорема: AB и A'B' въ одной плоскости, AC и A'C' въ другой, BC и B'C' въ третьей; S принадлежитъ всѣмъ тремъ и слѣдовательно составляетъ вершину 3^хъ^ граннаго угла; треугольники перспективны, т.к. ребра AA', BB', CC' проходятъ черезъ одну точку. Перейдемъ къ треугольникамъ лежащимъ въ одной плоскости. Пусть точки пересѣченія соотвѣтственныхъ сторонъ лежатъ на одной прямой P, Q, R, докажемъ, что треугольники перспективны. На плоскости другой беремъ треугольникъ, перспективный обоимъ даннымъ изъ точекъ S и S_1; продолжимъ SS_1 до N, тогда линіи SA_2A — $A_2S_1A_1$ — SS_1N лежатъ въ одной плоскости, пересѣкающей данную по-линію AA_1; точно также $SB_2B - S_1B_2B_1 - SS_1N$ пересѣкаетъ данную по линіи BNB_1 и плоскость $SC_2C - S_1C_2C_1 - SS_1N$ — по линіи CNC_1; слѣдовательно линіи AA_1-BB_1-CC_1 проходятъ черезъ одну точку N — треугольники перспективны. Обратная теорема: черезъ N проводимъ произвольную прямую NS внѣ плоскости треугольниковъ и на ней двѣ произвольныя точки S и S_1, соединимъ S съ ABC и S_1 съ $A_1B_1C_1$, т.к. BS и B_1S_1 лежатъ въ одной плоскости то отмѣтимъ точку ихъ пересѣченія B_2 также отмѣтимъ A_2 и C_2 и составимъ треугольникъ $A_2B_2C_2$ перспективный двумъ даннымъ, соотвѣтственныя



стороны данныхъ пересѣкутся въ точкахъ P, Q, R, гдѣ стороны $A_2B_2C_2$ встрѣчаютъ слѣдъ пересѣкающихся плоскостей L и M, что и требовалось доказать. Если на плоскости даны n точекъ, то соединяя ихъ попарно прямыми получимъ n-угольникъ, число сторонъ котораго $\frac{n(n-1)}{1.2} = n-1+n-2+n-3+\dots+1$. Совокупность n прямыхъ какъ угодно расположенныхъ на плоскости, причемъ три изъ нихъ не проходятъ черезъ одну точку называется n-сторонникомъ.

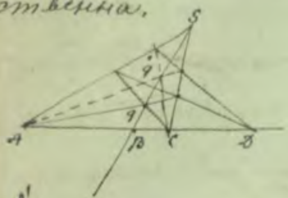
Полный четыреугольникъ: E, F, G называются діагональными точками, точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ.



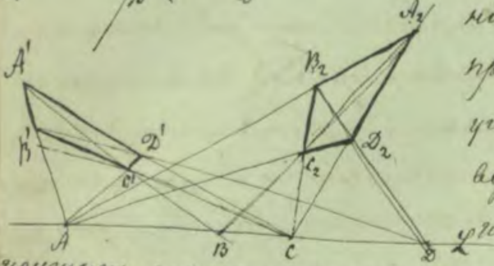
Полный четырехсторонникъ: AC, BD, PQ суть діагонали. Обратимъ вниманіе на группы точекъ: 1) A, R, C, T; 2) B, R, D, S; и 3) P, S, Q, T; каждая изъ

этихъ группъ называется гармоническимъ рядомъ. Въ четыреугольникѣ существуетъ соотвѣтственно при каждой діагональной точкѣ гармоническій пучекъ также изъ $4^{хъ}$ элементовъ: $2^{хъ}$ противоположныхъ сторонъ и 2 линій соединяющихъ діагональныя точки. Эти пары называются соотвѣтственными; въ ряду 2 вершины и 2 точки пересѣченія діагоналей также соотвѣтственны. Изъ чертежа видно что гармоническій рядъ A, R, C, T служитъ основаніемъ гармоническому пучку при Q, слѣдовательно можно изучать только свойства ряда и распространять доказанныя для нихъ теоремы на пучки. Если даны A и C соотвѣтственныя и B, то 4 гармоническая, соотвѣтствующая B, всегда одна

Для этого докажемъ, что какъ бы мы ни строили 4 сторонники подъ условіемъ, чтобы A и C были ихъ вершинами и B ~~діагон~~ точкой пересѣченія діагоналей, другая точка пересѣченія D будетъ вполнѣ опредѣлена и единственна.

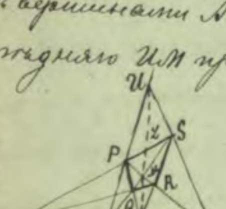


Разсмотримъ два четырехсторонника, удовлетворяющіе требованію въ разныхъ плоскостяхъ: треугольники $B'C'D'$ и $B_2C_2D_2$ перспективны, вслѣдствіе чего линіи $B'B_2 - C'C_2 - D'D_2$ должны сходиться въ н.н. точкѣ пространства O; также перспективны и треугольники $A'B'D'$ и $A_2B_2C_2$ и ихъ соотвѣтственныя вершины соединенныя должны сходиться въ O,



ибо двѣ изъ этихъ линій участвовали въ предъидущемъ доказательствѣ, стало быть фигуры перспективны. Слѣдовательно $B'B_2O$ и $D'D_2O$ лежатъ въ одной плоскости и потому линіи $B'D'$ съ B_2D_2 пересѣкаются на линіи L въ точкѣ D, единственной для однихъ діагоналей. Пусть четырехсторонники лежатъ въ одной плоскости: возьмемъ третій четырехсторонникъ въ иной плоскости съ тѣми-же условіями какъ и два первые, видимъ, что онъ будетъ перспективенъ обоимъ даннымъ и на основаніи предъидущей теоремы діагональ B_3D_3 пересѣчется съ діагональю B_2D_2 въ точкѣ D, и въ той же точкѣ съ $B'D'$ откуда заключаемъ что $B'D'$ и B_2D_2 пересѣкаются въ единственной точкѣ D.

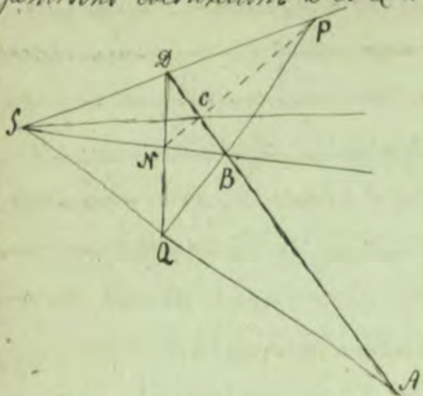
Если къ двумъ сопряженнымъ A и C и 3ей B, 4ая гармоническая есть D, то и наоборотъ къ сопряженнымъ B и D и 3ей A, 4ая будетъ C. Возьмемъ 4сторонникъ $PQRS$ съ вершинами A и C и $UPMS$ съ вершинами B D и докажемъ что діагональ послѣднюю UM пройдетъ черезъ C. Пусть точка L есть пересѣченіе CM съ AS; относительно



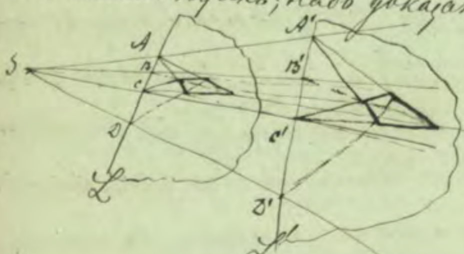
четырехсторонника $CQMR$ рядъ A, P, L, S гармоническій а потому діагональ UM пройдетъ необходимо чрезъ L какъ гармоническую на діагонали AS для точекъ A, P, S, слѣдовательно она пройдетъ и черезъ C; теорема доказана.

Всякій пучекъ опирающійся на гармоническій рядъ есть гармоническій. Докажемъ, что можно построить 4сторонникъ такъ, что одна пара лучей SA и SC была бы діагоналями, а другая SB и SD противоположными сторонами. Для этого возьмемъ на SD произвольную точку D соединимъ съ B и продолжимъ до луча SA

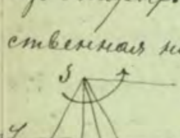
затѣмъ соединимъ D съ Q и отмѣтимъ точку N на SB, тогда діагональ PN



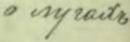
непремѣнно пройдетъ черезъ C, какъ точку гармоническую сопряженную съ A относительно B и D. Полученная фигура есть полный четыреугольникъ, вслѣдствіе чего пучекъ при S гармоническій. Такъ какъ точка S совершенно произвольна, то всякій пучекъ опирающійся на гармоническій рядъ есть гармоническій. Обратная теорема: Гармоническій пучекъ на всякой прямой опредѣляетъ гармоническій рядъ. Соединяя данныя A, B, C, D гармоническія съ произвольною S получимъ гармоническій пучекъ; надо доказать, что A'B'C'D' гармоническія. Черезъ L и L' двѣ плоскости



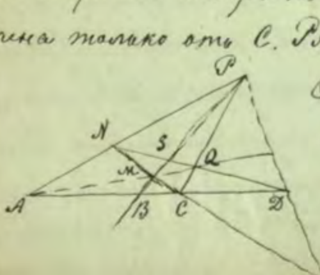
и построивъ на L четыреугольникъ проэктируемъ его изъ S на L'; понятно, что A'B'C'D' рядъ гармоническій. Докажемъ, что когда даны двѣ пары гармоническихъ AC и BD, то одна изъ первыхъ лежитъ на отрѣзкѣ BD и одна изъ вторыхъ на отрѣзкѣ AC. При движеніи луча около S непрерывно и точка соотвѣтственная на рядѣ L движется непрерывно и опредѣленно. Когда лучъ параллеленъ



ряду, точка лежитъ въ безконечности и при малѣйшемъ движеніи луча дальше является на другой сторонѣ линіи; слѣдовательно двѣ точки дѣлаютъ два отрѣзка: одинъ конечный, другой безконечно большой. Слѣдовательно одна точка не можетъ совершенно раздѣлить двухъ; но если возьмемъ четверую то двѣ точки будутъ вполнѣ отдѣлены другъ отъ друга, другія другими.

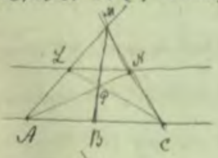


A отдѣлена отъ C точками B и D и наоборотъ. Тоже самое можно сказать и о лучахъ. Приступимъ теперь къ доказательству нашего предложенія: докажемъ что A отдѣлена только отъ C. Ряды ABCD и NSQD гармоническіе, также какъ и ряды ABCD. QSND.

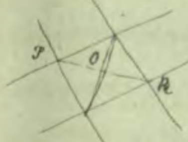


Допустимъ, что A отдѣлена отъ B, тогда S отдѣлена отъ N и Q отъ S, что невозможно. Предположеніе A отдѣлена отъ D приводитъ къ невозможному заключенію, что D отдѣлена одновременно отъ N и отъ Q. Слѣдовательно въ гар-

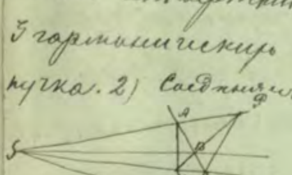
моническихъ отдѣлены вершины діагональными точками и наоборотъ.
Гармоническая соотвѣтствующая безконечно-удаленной D называется серединой AC. Найти середину весьма легко: проводимъ параллельную къ AC, наши



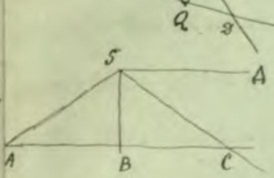
произвольно L и N, соединяемъ ихъ съ A и C и черезъ точки M и P проводимъ прямую, точка B будетъ искомою серединою. Может встрѣтиться случай когда точки A и C лежатъ въ безконечности; O здѣсь средина PR.



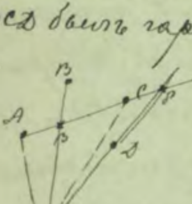
Задачи: найти четвертую гармоническую: На 3-хъ строимъ четыреугольникъ принимая A и C за вершины противоположныхъ сторонъ и B за одну изъ діагональныхъ точекъ. Взаимно найти четвертый гармоническій лучъ: 1) пересѣкая три данныхъ получимъ 3 гармоническихъ точки, опредѣляемъ четвертую и соединяемъ съ центромъ пучка. 2) Соединимъ произвольную P съ B и C и продолжаемъ PB до встрѣчи



въ M съ SC. Прямая AM встрѣчаясь съ PC даетъ Q и SQ будетъ искомый лучъ.

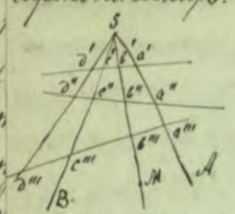


Пучекъ составленный изъ сторонъ прямого угла и двухъ его биссектрисъ гармоническій. Пересѣкаемъ прямою параллельною SD; треугольникъ ASC равнобедренный, стало быть B его средина; пучекъ опирающійся на гармоническій рядъ гармоническій.
Даны A B C D не лежащія на одной прямой; найти S такъ, чтобы пучекъ SABCD былъ гармоническій. Соединивъ A съ C прямой ищемъ β, δ другую пару гармоническихъ. Пересѣченіе Bβ и Dδ опредѣлитъ точку S.

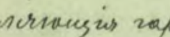


Взаимная: Даны A, B, C, D прямыя не проходящія через одну точку, найти L такъ, чтобы рядъ a.b.c.d былъ гармоническій
точку пересѣченія A съ C принимаемъ за центръ пучка, отыскиваемъ другую пару сопряженныхъ Mβ и Mδ и проводимъ ихъ до пересѣченія съ B и D въ точкахъ b и d; линія bd искомая.

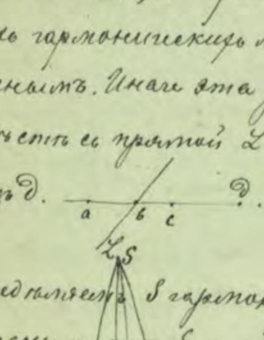
Даны три гармоническихъ луча и три ряда точекъ отсѣкаемыхъ (a'b'c'), (a''b''c''), (a'''b'''c'''), найти геометрическое мѣсто четвертыхъ гармоническихъ. Отыскавъ d' и соединивъ съ S получимъ искомое геометрическое мѣ-



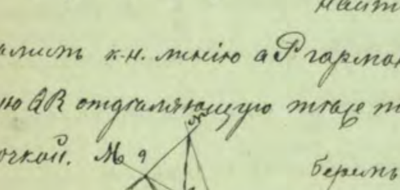
сто. Эту задачу можно формулировать такъ: найти геометричес-
кое мѣсто точекъ гармонически отдѣленныхъ отъ точки M лучами
SA и SB; такое геометрическое мѣсто будетъ очевидно четвертый гар-
моническій лучъ. Взаимная: даны три точки a, b, c гармоническія
опредѣляющія гармоническія пучки (S'abc), (S''abc)... найти геометрическое мѣсто четвер-
тыхъ гармоническихъ лучей. Очевидно искомое мѣсто будетъ точка d-4ая гармоническая къ
даннымъ. Иначе эта задача выражается такъ: найти положеніе прямыхъ, которыя
вмѣстѣ съ прямой L вполнѣ раздѣляютъ точки a и c; всѣ онѣ должны пройти
черезъ d.



d. Даны прямыя A и B встрѣчающіяся въ неприступной точкѣ



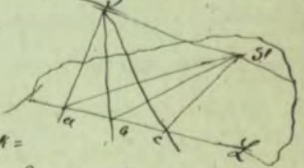
найти прямую, соединяющую точку M съ точкой ихъ встрѣча-
Опредѣляемъ S гармонически отдѣленную отъ M прямыми A и B и M' также от-
дѣленную отъ S; линія MM' будетъ искомая: черезъ M проводимъ произвольно rs и pq
изъ S точки пересѣченія qr и sp, произвольно SaMb и Scd; линіи
ad и cb дадутъ точку M', которую соединяемъ съ M. Взаимная:
даны точки A и B, раздѣленныя неприступнымъ предметомъ;
найти точку пересѣченія прямой M съ прямой AB. Опре-
дѣлимъ к.н. линію aP гармонически раздѣляющую вмѣстѣ съ M точки A и B и пря-
мую QR отдѣляющую также точки съ прямой aP; пересѣченіе QR съ M будетъ искомой
точкой.



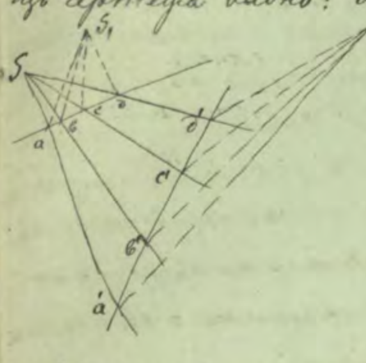
Беремъ произвольно q и s и отмѣчаемъ N и P пересѣченія ли-
ній Aq съ Bs и As съ Bq; на прямой NP беремъ точ-
ки a и b; пересѣченія прямыхъ Aa съ Bb и Ab съ Ba
опредѣляютъ линію QR, которая пересѣкаетъ
M въ искомой точкѣ L.

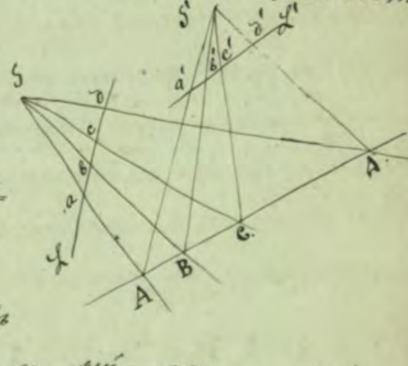
Всѣ геометрическія изслѣдованія идутъ логически изъ начальной основной идеи-со-
вмѣстія линіи какъ ряда точекъ и точки какъ центра пучка. Каждому элемен-
ту ряда соотвѣтствуетъ единственный элементъ пучка - однозначность. Непре-
рывное измѣненіе луча обусловливается непрерывнымъ измѣненіемъ соотвѣт-
ствующаго ему элемента ряда; за соотвѣтствующій элементъ принимается
точка пересѣченія луча съ основаніемъ ряда. Если тотъ же пучекъ пересѣчимъ

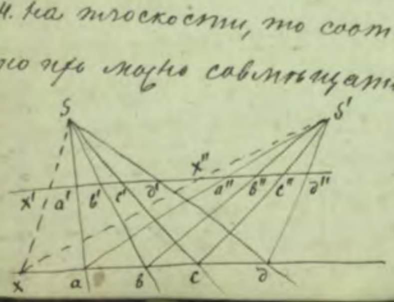
другой линіей, то получимъ другой соответственный рядъ. Два такихъ ряда можно называть соответственными причемъ одинъ служитъ перспективой другого. Соответствіе и тутъ однозначное. Взявъ при томъ же основаніи другой центръ пучка, получимъ съ прежнимъ соответственные пучки, называемые перспективными на томъ основаніи, что, взявъ другой пучекъ въ плоскости наклонной, видимъ, что изъ всякой точки линіи SS' они перспективны и оставляемъ за ними это названіе и въ предѣлѣ при совпадающихъ плоскостяхъ.

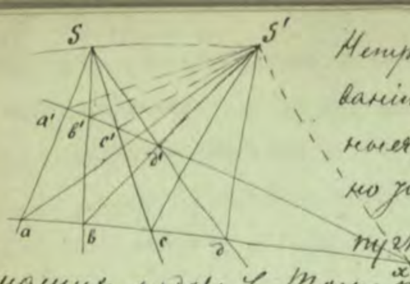


Изъ чертежа видно: S и S_I соответственны и перспективны, также какъ и S съ S_{II}. Между S_I и S_{II} можно установить соответствіе болѣе общее, причемъ оно вполнѣ опредѣлено, т.е. одному элементу S' соответствуетъ единственный и опредѣленный элементъ S_{II}; но пучки эти уже не перспективны. Они соответственны, какъ опирающіеся на два соответственныя ряда. Ряды L и L' соответственны, если мы будемъ считать за соответственные тѣ элементы ихъ, черезъ которые проходятъ соответственные лучи пучковъ S и S' имѣющихъ общее основаніе. Такимъ образомъ перспективная соответственность есть только частный случай. Вообще если имѣемъ n рядовъ или пучковъ такихъ что 1-ый перспективенъ 2-му, 2-ой 3-ему и т.д. $(n-1)$-ый n-ому, то 1-ый соответственъ n-ому. Если мы соответственные ряды или пучки перемѣстимъ к.н. на плоскости, то соответственность не нарушается. Отсюда очевидно что ихъ можно совмѣщать. Примѣръ двухъ соответственныхъ рядовъ находящихся на одномъ основаніи представляетъ прилагаемый чертежъ. Точно также соединивъ точки двухъ соответственныхъ рядовъ съ S' получимъ при S' два соответственныхъ пучка съ общимъ центромъ



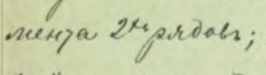






Нетрудно обнаружить, что при двухъ рядахъ на общемъ основаніи существуютъ двѣ точки сами себѣ соотвѣтственныя, двойныя, какъ ихъ обыкновенно называютъ; это именно точка пересѣченія L съ основаніемъ соотвѣтственныхъ пучковъ и другая точка пересѣченія линіи SS' съ основаніемъ нашихъ рядовъ L. Точно также и въ пучкахъ съ общимъ центромъ существуютъ двойные лучи напримѣръ S'x и SS'.

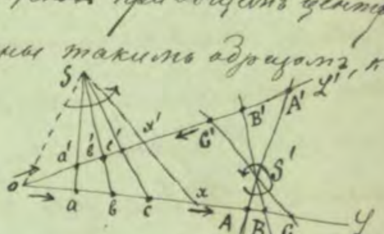
Два ряда на одномъ основаніи не могутъ имѣть болѣе двухъ двойныхъ точекъ, въ противномъ случаѣ ряды тождественные. Положимъ что совпадаютъ 3 элемента 2хъ рядовъ; принимая a и c за сопряженныя, находимъ d четвертую гармоническую сопряженную b; съ ней непремѣнно совпадетъ d', какъ

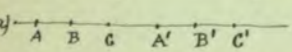


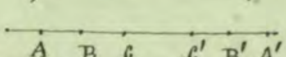
четвертая гармоническая къ a'b'c'. Определяя четвертыя гармоническія къ каждымъ тремъ изъ данныхъ и продолжая этотъ процессъ на найденныя, мы получимъ безконечное число совпадшихъ точекъ обоихъ рядовъ; надо показать, что онѣ идутъ непрерывно: положимъ наоборотъ, что между x и y нѣтъ ни одной двойной точки; принимая x и y за сопряженныя и отыскивая сопряженную къ a видимъ, что она какъ 4ая гармоническая непремѣнно попадетъ между x и y и будетъ двойною, слѣдовательно весь отрѣзокъ xy будетъ состоять изъ двойныхъ; взявъ середину его, видимъ что и безконечная точка также двойная, слѣдовательно ряды тождественны и двойныхъ точекъ можетъ быть не болѣе двухъ.

Теорема прямо распространяется на лучи двухъ пучковъ при общемъ центрѣ.

Ряды одинаково направленные, когда они расположены такимъ образомъ, какъ на чертежѣ (a) и разнонаправленные — чертежъ (b)

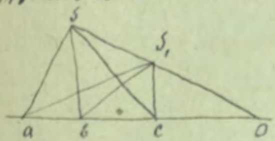


(a)


(b)


Если ряды перспективны, то точка O пересѣченія ихъ основаній сама себѣ соотвѣтственна, докажемъ теорему обратную: соединивъ b и b', c съ c' и получивъ точку S докажемъ, что x соотвѣтствуетъ x'. Проведя лучи изъ S видимъ, что на основаніи L' получаются два ряда одинъ данный a'b'c' другой отъ пересѣченія лучей b'c'a'', которые оба соотвѣтствуютъ a.b.c но рядъ b'c'a'' имѣетъ три элемента слившимися съ элементами ряда a'b'c' именно O, b' c' стало быть они тождественны x' соотвѣтствуетъ x и данные ряды перспективны

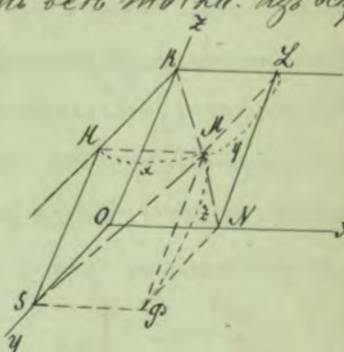
Если намъ даны два соотвѣтственные и перспективные пучка S и S', то очевидно, что лучъ SS' самъ себѣ соотвѣтственен; докажемъ теорему обратную: имѣемъ два соотвѣтственные пучка, въ которыхъ лучи Sa, Sb соотвѣтствуютъ $S'a$ $S'b$ и кромѣ того SS' самъ себѣ соотвѣтствуетъ. На прямой abO построимъ два перспективныхъ пучка $S(a,b,c,O\ldots)$ и $S'(a,b,c'',O\ldots)$, послѣдній пучекъ



соотвѣтственъ данному при S' т. к. оба соотвѣтствуютъ пучку при S; но они имѣютъ 3 луча совпадшими $S'(a,b,O)$ слѣдовательно они тождественны и пучекъ при S' перспективенъ пучку S.

(лекціи Цингера)

Основныя начала Аналитической Геометріи въ примѣненіи къ пространству остаются тѣже, существенная разница въ осложненіи этихъ началъ, отчего осложняется и методъ. Вмѣсто двухъ являются необходимыми три координаты. Начнемъ со знакомства съ Декартовой системой координатъ; распространеніе ея на пространство было сдѣлано позднѣе и потому названіе только по аналогіи. Для опредѣленія положенія какой нибудь точки М представимъ три плоскости въ пространствѣ, относительно которыхъ будемъ разсматривать всѣ точки. Изъ всѣхъ угловъ предпочитаются плоскости, наклоненныя подъ прямымъ угломъ. Для общности представимъ какой-угодно уголъ; замѣтимъ, что чертежъ дѣлается схематически: плоскость чертежа пусть будетъ одна изъ нужныхъ намъ



плоскостей, другая плоскость пересѣкается съ первою по линіи ОК и наконецъ третья предполагается горизонтальною. Какъ опредѣлить положеніе М между этими плоскостями, можно взять кратчайшія разстоянія т. е. длины перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ М на эти три плоскости, но чаще въ видахъ симметріи положеніе опредѣляется длиною линій, проведенныхъ изъ М параллельно ребрамъ пересѣченія. Проводимъ линію МР - этого одного даннаго очевидно недостаточно, такъ какъ всѣ точки плоскости, проведенной изъ К параллельно горизонтальной имѣютъ отъ нея такое-же разстояніе. Второе данное МL - разстояніе отъ плоскости чертежа; двумя этими данными опредѣляется положеніе линіи НМ, чтобы означить какая точка этой линіи взята нами, мы даемъ МН разстояніе отъ третьей плоскости координатъ. Слѣдовательно точка М есть вершина параллелепипеда

МН - МL - МР { координаты точки М, которыя вполнѣ ея опредѣляютъ
x y z

Каждая координата повторяется на чертежѣ четыре раза, поэтому способы ихъ проведенія весьма разнообразны; самый простой и удобный провести MP и затѣмъ PN тогда отрѣзокъ NO будетъ третьей координатой. Самая употребительная система координатъ прямоугольныхъ; въ ней можно строить координаты, опустивъ перпендикуляры изъ M на оси, найдемъ отрѣзки, равные координатамъ. Какъ въ Геометріи на плоскости, такъ и здѣсь однихъ величинъ координатъ недостаточно, надо будетъ ввести знаки, иначе не возможно будетъ отличить въ какомъ изъ восьми трегранныхъ угловъ лежитъ точка. Условимся z считать положительнымъ вверхъ отъ плоскости xy, внизъ - отрицательнымъ, x вправо отъ плоскости zy положительнымъ, влѣво отрицательнымъ, и наконецъ y положительнымъ впередъ отъ плоскости zx и отрицательнымъ назади ея; изъ этихъ условій вытекаютъ слѣдующія восемь комбинацій знаковъ, вполнѣ достаточныхъ, чтобы различить въ какомъ углу лежитъ искомая точка:

$M,\ +x, +y, +z;\quad M^{IV},\ -x, +y, +z;$

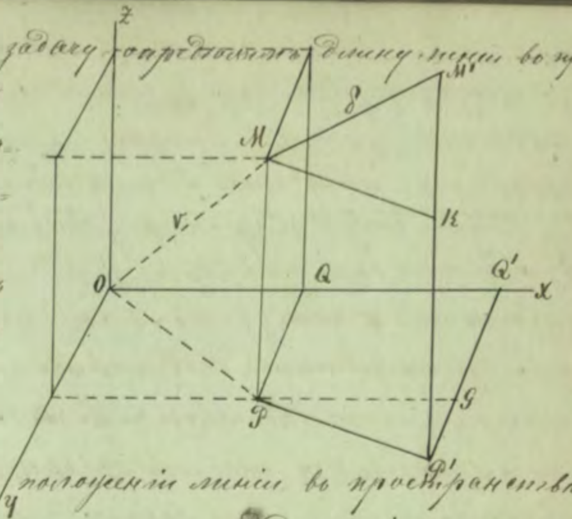
$M',\ +x, +y, -z;\quad M^{V},\ -x, +y, -z;$

$M'',\ +x, -y, +z;\quad M^{VI},\ -x, -y, +z;$

$M''',\ +x, -y, -z;\quad M^{VII},\ -x, -y, -z.$

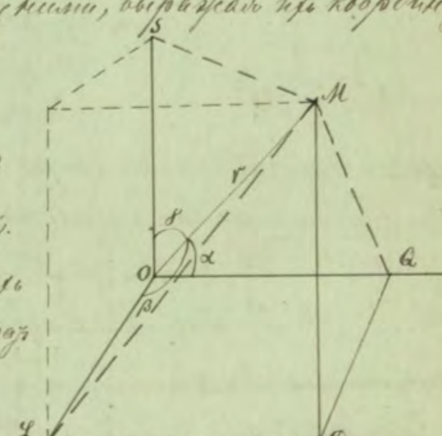
Приступая къ знакомству съ приложеніемъ этихъ началъ, займемся выводомъ нѣкоторыхъ формулъ относительно прямоугольныхъ координатъ; первый вопросъ, который мы зададимъ себѣ, будетъ состоять въ томъ, какъ по даннымъ тремъ координатамъ точки M опредѣлить разстояніе ея отъ O точки начала координатъ, т.е. по даннымъ тремъ измѣреніямъ прямоугольнаго параллелепипеда опредѣлить его діагональ. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP имѣемъ $r^2 = z^2 + OP^2$; но OP^2 изъ прямоугольнаго треугольника POQ, $= x^2 + y^2$ слѣд.

довательно $r^2 = x^2+y^2+z^2$. Рѣшимъ другую задачу — опредѣлить длину линіи во пространствѣ $M(x,y,z)\,M'(x',y',z')$. Проведемъ MK параллельно PP' тогда $M'K = z'-z$; проведя затѣмъ линію Pg параллельно оси x, изъ прямоугольнаго треугольника $PP'g$ имѣемъ, что $\overline{PP'}^2 = (y'-y)^2+(x'-x)^2$; теперь легко опредѣлить искомое разстояніе, изъ прямоугольнаго треугольника $MM'K$ получимъ:



$$\delta^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

Перейдемъ къ вопросамъ не о величинѣ а о положеніи линіи въ пространствѣ; весьма важно бываетъ знать углы, образуемые какою-нибудь линіей съ осями координатъ; очевидно, что они не могутъ быть произвольными; аналитически легко вывести соотношеніе, существующее между ними, выражая ихъ координатами точки M и найденною нами величиною r.

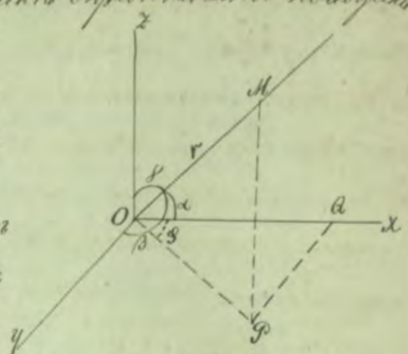


Изъ прямоугольнаго треугольника MOQ — $x = r\cos\alpha$

" — " " " OML — $y = r\cos\beta$

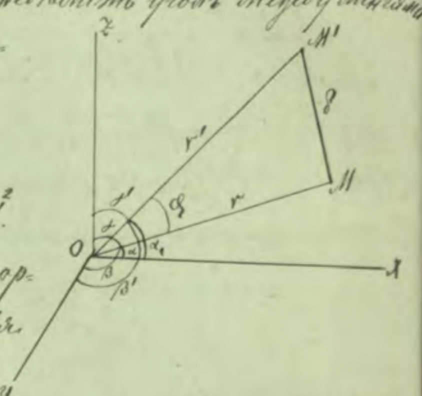
" " " " OMS — $z = r\cos\gamma$.

Желаемое соотношеніе легко получится изъ этихъ уравненій; возвысивъ каждое отдѣльно въ квадратъ и сложивъ, получимъ $r^2 = r^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$ откуда $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$; очевидно, что только два угла могутъ быть произвольны, но третій долженъ быть опредѣленъ изъ этого уравненія. Надо замѣтить что называется угломъ двухъ линій въ пространствѣ; обыкновенно, угломъ этихъ линій считается уголъ, составленный изъ линій имъ параллельныхъ, проведенныхъ черезъ произвольную точку. Такъ какъ величинъ α, β и γ, служащихъ для опредѣленія положенія линіи въ пространствѣ, много, то является вопросъ о нахожденіи такихъ величинъ, которыя были-бы необходимыми и достаточными; здѣсь самое удобное воспользоваться идеею полярныхъ координатъ. Примемъ за одно данное уголъ линіи съ плоскостью xy т.е. уголъ MOP или, что все такъ, уголъ γ дополнительный къ первому до прямаго; другое данное пусть будетъ уголъ QOP, который назовемъ черезъ φ; этими двумя углами вполнѣ опредѣляется положеніе



линіи; счетъ φ отъ x въ сторону положительныхъ y до 360°; для γ до $+90^\circ$ вверхъ и до -90° внизъ отъ плоскости xy. Важно знать связь этихъ угловъ съ углами α, β и γ; и получимъ, если прибавимъ къ 3^{мъ} уже найденнымъ уравненіямъ $x = r\cos\alpha$, $y = r\cos\beta$ и $z = r\cos\gamma$ еще три по угламъ φ и γ. Изъ треугольника OMP имѣемъ $z = r.\cos\gamma$ и $OP = r\sin\gamma$; Изъ треугольника OQP получимъ $x = r\sin\gamma\cos\varphi$ и $y = r\sin\gamma\sin\varphi$; Сравнивая эти двѣ системы уравненій, найдемъ $\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varphi$ и $\cos\beta = \sin\gamma\sin\varphi$.

Рѣшимъ задачу о томъ, какъ по даннымъ M и M' опредѣлить уголъ между линіями OM и OM', названный нами буквою φ. Мы имѣемъ слѣдующія восемь уравненій:



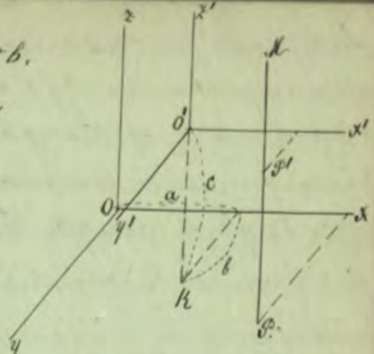
$$x = r.\cos\alpha \quad \text{и} \quad x' = r'.\cos\alpha'$$
$$y = r.\cos\beta \qquad y' = r'.\cos\beta'$$
$$z = r.\cos\gamma \qquad z' = r'.\cos\gamma'$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

δ, какъ разстояніе между двумя точками M и M', координаты которыхъ даны опредѣлится изъ уравненія

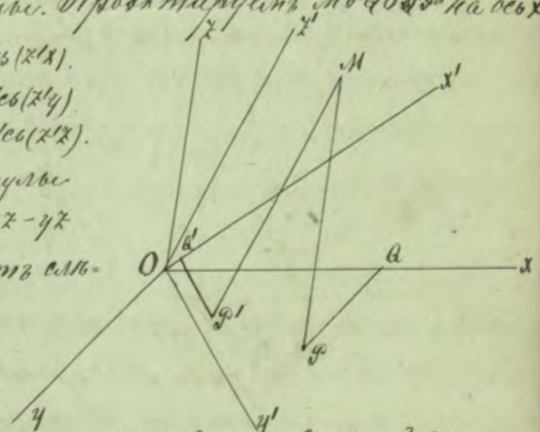
$$\delta^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \text{ или}$$
$$\delta^2 = \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{r^2} + \underbrace{x'^2+y'^2+z'^2}_{r'^2} - 2(xx'+yy'+zz');$$

тоже самое δ, какъ сторона треугольника $M'OM$, найдется изъ уравненія $\delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi$; сравнивая два эти уравненія, получимъ $\cos\varphi = \frac{xx'+yy'+zz'}{rr'}$; представивъ въ видѣ $\cos\varphi = \frac{x}{r}.\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}.\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}.\frac{z'}{r'}$ легко замѣтить, что $\cos\varphi = \cos\alpha.\cos\alpha' + \cos\beta.\cos\beta' + \cos\gamma.\cos\gamma'$, или въ болѣе наглядной формулы $\cos(rr') = \cos(rx).\cos(r'x) + \cos(ry)\cos(r'y) + \cos(rz)\cos(r'z)$. —

Обратимся къ вопросу о преобразованіи координатъ; какъ и при разсмотрѣніи этого вопроса въ геометріи на плоскости, мы разобьемъ его на два: 1) преобразованіе начала при томъ же направленіи и 2) преобразованіе направленія. Преобразовать начало значитъ для произвольной точки M, координаты которой x, y, z, найти координаты x', y', z', когда начало O перенесено въ точку $O'(a,b,c)$; задача эта не представляетъ затрудненій; такъ какъ $O'K = Q'P$ какъ отрѣзки параллельныхъ прду параллельными, то $z = z' + c$; затѣмъ $x = x' + a$ и $y = y' + b$. Приступая къ вопросу о преобразованіи осей, замѣтимъ, что сумма проекцій сомкнутой ломанной линіи на прямую равна нулю, т.е. если мы будемъ считать направленіе въ одну сторону, то между двумя предѣльными точками проекціи равны. На основаніи этого свойства легко преобразовать координаты системы



x, y, z въ координаты x', y', z' другой системы, предполагая всѣ углы извѣстными. Система координатъ M представляетъ косой шестиугольникъ въ пространствѣ: z, y и x въ направленіи положительномъ, x', y' и z' въ отрицательномъ, значитъ сумма проекцій каждаго направленія равны. Проектируемъ $MPaOQ'P'$ на ось x



тогда $\left\{ x + y\,cs(yx) + z\,cs(zx) = x'cs(x'x) + y'cs(y'x) + z'cs(z'x). \right.$

на ось y $\left\{ x.cs(xy) + y + z\,cs(zy) = x'cs(x'y) + y'cs(y'y) + z'cs(z'y) \right.$

на ось z $\left\{ x.cs(xz) + y\,cs(yz) + z = x'cs(x'z) + y'cs(y'z) + z'cs(z'z). \right.$

Если система x, y, z прямоугольная, то формулы значительно упрощаются, такъ какъ cs - xy, - xz - yz обращаются въ нуль и формулы получаютъ слѣдующій видъ

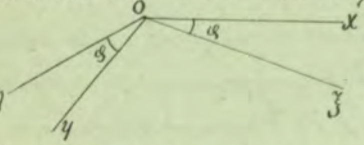
$$\begin{cases} x = x'cs(x'x) + y'cs(y'x) + z'cs(z'x) \\ y = x'cs(x'y) + y'cs(y'y) + z'cs(z'y) \\ z = x'cs(x'z) + y'cs(y'z) + z'cs(z'z). \end{cases}$$

Кромѣ того получаются слѣдующія соотношенія: $\left\{ \begin{array}{l} cs^2(x'x) + cs^2(yx') + cs^2(x'x) = 1; \\ cs^2(y'x) + cs^2(y'y) + cs^2(y'z) = 1; \\ cs^2(z'x) + cs^2(z'y) + cs^2(z'z) = 1. \end{array} \right.$

Если переходить отъ прямоугольной тоже къ прямоугольной, то упрощеній въ формулахъ преобразованія уже не произойдетъ, но зато появится новый рядъ соотношеній между коэффиціентами, которыми они еще болѣе будутъ стѣснены; такъ сумма квадратовъ горизонтальныхъ коэффиціентовъ по три $= 1$, что дастъ 3 новыхъ уравненія. Кромѣ того прямоугольность второй системы даетъ возможность писать $cs(x'y') = 0 = cs(x'x).cs(y'x) + cs(x'y)cs(y'y) + cs(x'z)cs(y'z)$ и т.д. такихъ соотношеній можно отыскать много.

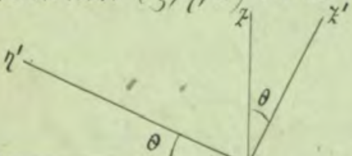
Желательно имѣть формулы преобразованія только съ тремя необходимыми независимыми данными; это ведетъ насъ къ Эйлерову методу преобразованія.

Получимъ, что плоскость xy пересѣкается съ $x'y'$ по линіи ξ; какъ данныя для опредѣленія системы x',y',z' относительно x,y,z, могутъ быть избраны углы $zOz'=\theta$, $xO\xi=\varphi$ и $x'O\xi=\psi$. Повернемъ плоскость xy на уголъ φ такъ чтобы x совпало съ ξ тогда y упадетъ въ η причемъ $yO\eta=\varphi$. Слѣдовательно отъ одной прямоугольной системы переходимъ къ другой и притомъ на плоскости: отъ (x,y,z) къ (ξ,η,z)



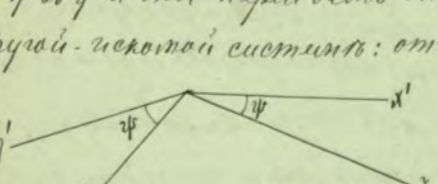
$$x = \xi cs\varphi - \eta sn\varphi$$
$$y = \xi sn\varphi + \eta cs\varphi$$

$z = z$; такъ какъ z и z' $\perp$ къ ξ и η $\perp$ къ ξ, то слѣдовательно z, z' и η лежатъ въ плоскости перпендикулярной къ ξ. Повернемъ теперь плоскость $z\eta$ около оси ξ на уголъ θ тогда z упадетъ въ z' а η въ η' причемъ $\eta O\eta'=\theta$; опять переходимъ на плоскости отъ однихъ прямоугольныхъ координатъ къ другимъ; переходимъ отъ системы (ξ,η,z) къ системѣ (ξ,η',z')



$$\xi = \xi$$
$$\eta = \eta' cs\theta - z' sn\theta$$

$z = \eta' sn\theta + z' cs\theta$. Замѣтимъ, что z' перпендикулярна къ осямъ η', y', ξ и x' т.е. что эти четыре оси лежатъ въ одной плоскости перпендикулярной z' и кромѣ того уголъ $\eta'Oy' = x'O\xi = \psi$, какъ углы съ перпендикулярными сторонами повернемъ плоскость $\xi\eta'$ на уголъ ψ; тогда ξ упадетъ въ x', η' въ y' и мы перейдемъ опять на плоскости отъ одной прямоугольной къ другой - искомой системѣ: отъ (ξ,η',z') къ (x',y',z')



$$\xi = x' cs\psi + y' sn\psi$$
$$\eta' = y' cs\psi - x' sn\psi$$

$z' = z'$. Собравъ эти результаты, исключимъ вспомогательныя количества и получимъ искомыя Эйлеровы формулы преобразованія: $\eta = y' cs\psi cs\theta - x' sn\psi cs\theta - z' sn\theta$; ξ прямо дано при послѣднемъ преобразованіи; отсюда:

$$\begin{cases} x = x'(cs\varphi . cs\psi - sn\varphi . sn\psi . cs\theta) + y'(cs\varphi . sn\psi + sn\varphi . cs\psi . cs\theta) - z' sn\varphi . sn\theta. \\ y = x'(sn\varphi . cs\psi - cs\varphi . sn\psi . cs\theta) + y'(sn\varphi . sn\psi + cs\varphi . cs\psi . cs\theta) - z' cs\varphi . sn\theta. \\ z = -x' sn\psi . sn\theta + y' cs\psi . sn\theta + z' cs\theta. \end{cases}$$

Сравнивая коэффиціенты этихъ уравненій съ коэффиціентами прежнихъ ма получимъ рядъ соотношеній между углами, образуемыми осями координатъ и углами введенными нами въ вычисленіе.

Скажемъ нѣсколько словъ о связи уравненій, которыми выражается зависимость между косинусами угловъ, дѣлаемыхъ осями координатъ двухъ прямоугольныхъ системъ. Положимъ для упрощенія слѣдующее обозначеніе этихъ косинусовъ:

	x	y	z
x'	a	b	c
y'	a_1	b_1	c_1
z'	a_2	b_2	c_2

система прямоугольная; условіе перпендикулярности осей первой системы выразится такимъ образомъ:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+b^2+c^2=1 \\ a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

условіе перпендикулярности другой можно выразить различными способами напримѣръ:

$$\left.\begin{array}{l} aa_1+bb_1+cc_1=0 \\ aa_2+bb_2+cc_2=0 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \end{array}\right\} \mathrm{II}$$

или иначе:

$$\left.\begin{array}{l} a^2+a_1^2+a_2^2=1 \\ b^2+b_1^2+b_2^2=1 \\ c^2+c_1^2+c_2^2=1 \end{array}\right\} \text{новая группа соотношеній}$$

Для доказательства, что эти и подобныя соотношенія должны вытекать изъ одной пары какъ слѣдствіе, сдѣлаемъ слѣдующее: уравненія первой группы возвысимъ въ квадратъ, потомъ всѣ члены перенесемъ во ~~вторую~~ первую часть и сдѣлаемъ ихъ тождественно равными нулю; уравненія второй группы возвысимъ въ квадратъ и умножимъ на два, они тоже равны нулю; затѣмъ вычтемъ уравненія I группы предварительно помноживъ ихъ на два; сумма всего этого тождественно равна нулю:

$$\begin{array}{l} a^4+b^4+c^4 \\ a_1^4+b_1^4+c_1^4 \\ a_2^4+b_2^4+c_2^4 \end{array} +2\left|\begin{array}{l} a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 \\ a_1^2b_1^2+a_1^2c_1^2+b_1^2c_1^2 \\ a_2^2b_2^2+a_2^2c_2^2+b_2^2c_2^2 \\ a^2a_1^2+b^2b_1^2+c^2c_1^2 \\ a^2a_2^2+b^2b_2^2+c^2c_2^2 \\ a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2 \end{array}\right. \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ \\ \\ \\ \end{array} +4\left|\begin{array}{l} aba_1b_1+aca_1c_1+bcb_1c_1 \quad -2a^2-2b^2-2c^2+2 \\ aba_2b_2+aca_2c_2+bcb_2c_2 \quad -2a_1^2-2b_1^2-2c_1^2+2 \\ a_1b_1a_2b_2+a_1c_1a_2c_2+b_1c_1b_2c_2 \quad -2a_2^2-2b_2^2-2c_2^2+2 \end{array}\right\} =0.$$

Собирая члены составляющіе полные квадраты получимъ слѣдующее уравненіе:

$$(a^2+a_1^2+a_2^2-1)^2+(b^2+b_1^2+b_2^2-1)^2+(c^2+c_1^2+c_2^2-1)^2+2(ab+a_1b_1+a_2b_2)^2+2(ac+a_1c_1+a_2c_2)^2+$$
$$+2(bc+b_1c_1+b_2c_2)^2=0.$$

Такъ какъ сумма квадратовъ только тогда тождественно равна нулю, когда каждый членъ отдѣльно равенъ нулю, то, приравнивая ихъ, найдемъ двѣ новыхъ группы соотношеній и стало быть наше положеніе доказано.

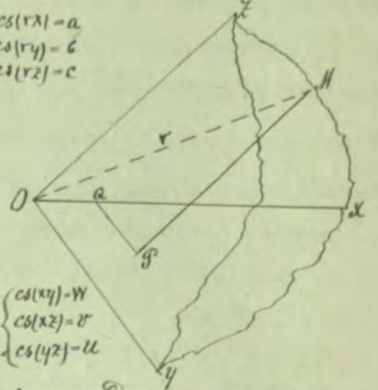
$$\left\{\begin{array}{l} a^2+a_1^2+a_2^2=1 \\ b^2+b_1^2+b_2^2=1 \\ c^2+c_1^2+c_2^2=1 \end{array}\right. \quad \text{и} \quad \left.\begin{array}{l} ab+a_1b_1+a_2b_2=0 \\ ac+a_1c_1+a_2c_2=0 \\ bc+b_1c_1+b_2c_2=0 \end{array}\right\}.$$

Рѣшимъ двѣ уже рѣшенныя нами задачи относительно какихъ угодно косоугольныхъ осей; что именно объ углахъ линіи съ осями и о разстояніи точки M отъ начала. Проектируемъ сомкнутый многоугольникъ OQPM на оси; проектируя на ось X, имѣемъ $ra = x + yw + zv$

$\cos(rx) = a$, $\cos(ry) = b$, $\cos(rz) = c$

" ——— " ——— " y, ——— " $rb = xw + y + zu$

" ——— " ——— " z, ——— " $rc = xv + yu + z$

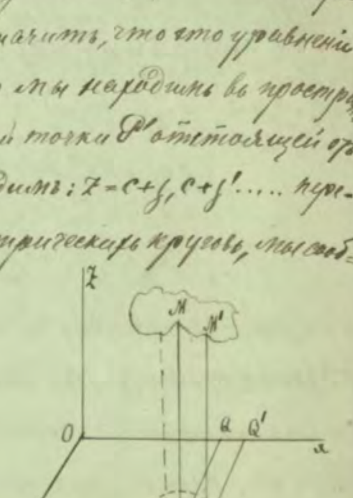


Проектируя OQPM на самую линію OM, мы получимъ $r = xa + yb + zc$. Опредѣливъ изъ трехъ первыхъ x, y, z, получимъ выраженія вида Ar, Br, Cr; подставивъ въ послѣднее и сокративъ на r получимъ желаемое соотношеніе между углами: $1 = \ldots\ldots$

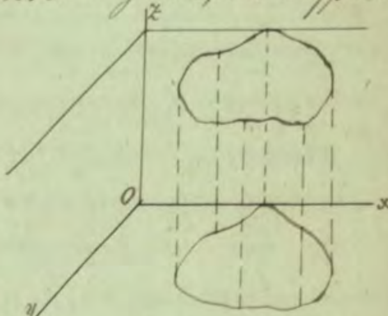
$\cos(xy) = w$, $\cos(xz) = v$, $\cos(yz) = u$

Для опредѣленія разстоянія OM опредѣлимъ a, b, c изъ первыхъ трехъ уравненій и подставимъ въ послѣднее, найдемъ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyw + 2xzw + 2yzu$. —

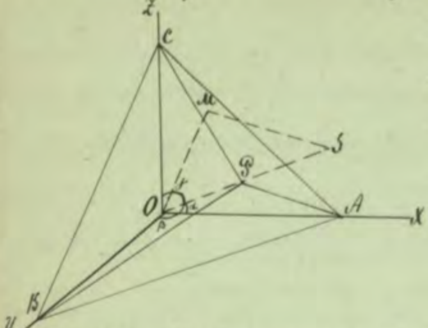
Слѣдуетъ различать линіи и поверхности въ пространствѣ; нетрудно показать, что одно уравненіе съ координатами x, y, z представляетъ нѣкоторую опредѣленную поверхность. Положимъ, что $M = 0$ есть уравненіе какой-нибудь степени съ тремя неизвѣстными; мы можемъ x и y дать произвольныя значенія напримѣръ положимъ $x = a$ и $y = b$, тогда рѣшивъ уравненіе относительно z получимъ $c, c', c^2 \ldots$ смотря по тому какой степени было уравненіе. Геометрически значитъ, что это уравненіе показываетъ такое условіе, при удовлетвореніи котораго мы находимъ въ пространствѣ нѣкоторыя опредѣленныя точки. Для произвольной точки P' отстоящей отъ P какъ угодно близко $x = a + \alpha$, $y = b - \beta$ рѣшивъ опять, находимъ: $z = c + \gamma, c + \gamma' \ldots$ перемѣщая P по плоскости xy положимъ по системѣ концентрическихъ круговъ, мы сообщаемъ движеніе точки M, которая перемѣщается по какой нибудь кривой поверхности. Примѣромъ можетъ служить уравненіе $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, которому удовлетворяютъ всѣ точки шара описаннаго изъ точки O радіусомъ r; точно также уравненіе $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, есть уравненіе шаровой поверхности, центръ котораго точка $M(abc)$.



Поверхности, смотря по ихъ уравненіямъ дѣлятся на алгебраическія и трансцендентныя. Общій видъ уравненія $\sum Ax^p y^q z^r = 0$ степенью уравненія называется степень старшаго члена, такъ что, если уравненіе $m^{ой}$ степени, то для всѣхъ членовъ $p+q+r$ или $=$ или $< m$. По степенямъ уравненія дѣлятся на порядки; степень показываетъ число точекъ, въ которыхъ поверхность пересѣкается прямою; при переходѣ отъ одной Декартовой системы координатъ къ другой Декартовой же степень уравненія не можетъ ни повышаться ни понижаться. Положимъ, что въ уравненіи $M=0$ содержатся двѣ координаты x и y, тогда чертимъ на плоскости xy кривую опредѣляемую этимъ уравненіемъ а такъ какъ z произвольно, то получается цилиндрическая поверхность; слѣдовательно одно уравненіе всегда относится къ поверхности; совокупность же двухъ уравненій $M=0$ и $N=0$ опредѣляетъ ~~пер~~ геометрическое мѣсто пересѣченія двухъ поверхностей т. е. линію.



Между алгебраическими поверхностями простѣйшая есть плоскость, опредѣляемая простѣйшимъ уравненіемъ первой степени вида $Ax+By+Cz+D=0$. Намъ предстоитъ рѣшить двѣ задачи: 1) по извѣстнымъ даннымъ вывести уравненіе плоскости и 2) показать что всякое уравненіе указаннаго вида опредѣляетъ плоскость. Вывести уравненіе значитъ найти соотношеніе между x, y и z для всякой точки плоскости, для этого мы воспользуемся опредѣленіемъ плоскости какъ геометрическаго мѣста точекъ, равно отстоящихъ отъ двухъ данныхъ. Положимъ, что мы имѣемъ плоскость, пересѣкающуюся съ осями координатъ въ точкахъ A, B и C и отсѣкающую такимъ образомъ отъ трехграннаго угла, образуемаго плоскостями координатъ тетраэдръ. Изъ начала координатъ опускаемъ перпендикуляръ OP на основаніе тетраэдра; если извѣстна длина OP и углы, которые онъ дѣлаетъ съ осями координатъ, то плоскость вполнѣ опредѣлена. Для того, чтобы примѣнить только что сказанное опредѣленіе плоскости, продолжимъ OP на равное разстояніе до точки S. Это условіе легко выразить въ зависимости отъ координатъ и такимъ образомъ вопросъ ръшается; означимъ для краткости координаты точки P такимъ образомъ: $\begin{cases} p.cs\alpha = a \\ p.cs\beta = b \\ p.cs\gamma = c \end{cases}$



тогда координаты точки S будутъ $2a, 2b, 2c$.
Возьмемъ на плоскости произвольную точку M, тогда согласно опредѣленію плоскости $OM = MS$ или $\overline{OM}^2=\overline{MS}^2$; надо преобразовать такъ, чтобы выразить эти величины черезъ координаты точки M и данныя. Получимъ:

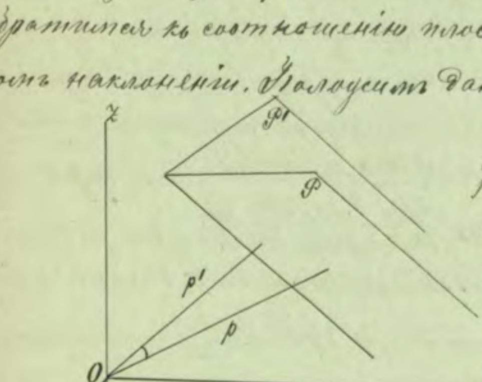
$$x^2+y^2+z^2=(2a-x)^2+(2b-y)^2+(2c-z)^2 \text{ или}$$

$$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2;$$ обыкновенно вмѣсто a, b и c употребляютъ ихъ величины; $x cs\alpha + y cs\beta + z cs\gamma = p$; такое уравненіе плоскости называется нормальнымъ. Углы α, β и γ могутъ быть разсматриваемы какъ мѣра двугранныхъ угловъ образуемыхъ данною плоскостью съ плоскостями координатъ, α уголъ (p,x) служитъ мѣрою двуграннаго угла (P, yz); $\beta - (p,y) - (P, xz)$ и $\gamma - (p,z)$ (P, xy). Чтобы перейти ко второй задачѣ замѣтимъ, что уравненіе будетъ представляющее плоскость, на какую бы величину λ мы его не помножили. Намъ надо показать что общее уравненіе помноженное на λ можетъ быть приведено къ формѣ нормальной, а такъ какъ эта форма, какъ мы только что показали представляетъ плоскость то и общій видъ, если мы сумѣемъ найти λ, будетъ опредѣлять нѣкоторую плоскость. Возможно-ли подыскать такую λ, чтобы $\lambda A = cs\alpha$, $\lambda B = cs\beta$ и $\lambda C = cs\gamma$? предполагая еще уравненіе $cs^2\alpha + cs^2\beta + cs^2\gamma = 1$, вопросъ оказывается возможнымъ; опредѣляя косинусы, вставляемъ въ послѣднее выраженіе и находимъ $\lambda^2(A^2+B^2+C^2)=1$ откуда $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ кромѣ того $cs\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $cs\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; $cs\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; Сравнивая коэффиціенты получимъ длину перпендикуляра $p = -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Стало быть привести общій видъ къ нормальному весьма просто; нетрудно показать частные случаи когда нѣкоторыхъ коэффиціентовъ недостаетъ въ уравненіи; когда нѣтъ D то плоскость проходитъ черезъ начало координатъ, такъ какъ въ этомъ случаѣ перпендикуляръ изъ начала координатъ на плоскость равенъ нулю. Когда нѣтъ C, то $cs\gamma = 0$; $\gamma = 90$ слѣдовательно плоскость параллельна ребру z и перпендикулярна плоскости xy; тоже самое и относительно другихъ коэффиціентовъ. Отсутствіе двухъ изъ нихъ указываетъ на то что плоскость параллельна двумъ изъ осей координатъ.

Измѣняя S мы можемъ получать различныя формы уравненія плоскости съ различными параметрами; укажемъ на самыя простыя: употребимъ какъ данныя отрѣзки, отсѣкаемые плоскостью на осяхъ координатъ $\underset{u}{OA}, \underset{v}{OB}, \underset{w}{OC}$, изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OAP, OBP и OCP имѣемъ: $\left\{\begin{array}{l} p = u.\cos\alpha \\ p = v.\cos\beta \\ p = w.\cos\gamma \end{array}\right.$; вставляя въ нормальное мѣсто косинусовъ ихъ величины и сокращая, имѣемъ: $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1$. Примѣчаемъ, что плоскость можетъ быть вполнѣ опредѣлена тремя условіями, тремя параметрами, слѣдовательно въ общемъ видѣ параметрами служатъ не коэффиціенты, но отношенія ихъ между собою. Опредѣлимъ плоскость тремя точками; положимъ дана одна точка (x_1, y_1, z_1) тогда $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ - это есть уравненіе, но связь между коэффиціентами и координатами, показывающая, что плоскость уравненія $Ax + By + Cz + D = 0$ проходитъ чрезъ данную точку. Помощью уравненія и этого соотношенія мы можемъ исключить одинъ изъ коэффиціентовъ, получимъ $A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0$, потребуемъ, чтобы эта плоскость прошла чрезъ вторую точку $(x_2 y_2 z_2)$ тогда $A(x^2-x') + B(y^2-y') + C(z^2-y') = 0$; совокупность этихъ выраженій позволяетъ уничтожить еще одинъ коэффиціентъ $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \frac{A(x-x_1) + B(y-y')}{A(x_2-x_1) + B(y_2-y_1)}$; если требуется чтобы плоскость проходила чрезъ третью точку $(x_3 y_3 z_3)$ то помощью такого же выраженія получится уравненіе окончательно освобожденное отъ всякаго посторонняго коэффиціента. Замѣтимъ кстати, что общее уравненіе, разсмотрѣнное нами относительно прямоугольной системы, будетъ имѣть такой же видъ для всякихъ косоугольныхъ, такъ какъ формулы преобразованія линейныя, то уравненіе получается такого-же вида. Предложимъ теперь для рѣшенія два вопроса о взаимномъ положеніи точки съ плоскостью и плоскостей между собою. Относительно перваго вопроса единственная задача вычислить разстояніе точки отъ плоскости. Пріемъ рѣшенія такой-же какъ и относительно линіи и точки на плоскости. Положимъ, что плоскость дана уравненіемъ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ точка M съ координатами (x_1, y_1, z_1); чрезъ M проводимъ плоскость параллельно данной и изъ O опускаемъ перпендикуляръ на обѣ плоскости OPP'; тогда будетъ $\delta = p' - p$; чтобы опредѣлить p' напишемъ уравненіе проведенной плоскости; она будетъ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p' = 0$; но такъ какъ она проходитъ чрезъ точку M, то слѣдовательно $x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p' = 0$, вслѣдствіи этого $\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$.

Такимъ образомъ δ найдется если въ нормальное уравненіе плоскости подставимъ координаты точки M и перенесемъ всѣ члены въ одну сторону. Представляя въ общемъ видѣ $\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; относительно знака условимся считать δ положительнымъ когда M лежитъ на противоположной сторонѣ плоскости съ началомъ координатъ. Если же M по одну сторону съ началомъ координатъ то ея разстояніе отрицательно.

Обратимся къ соотношенію плоскостей и именно разберемъ вопросъ о ихъ взаимномъ наклоненіи. Положимъ даны двѣ плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (P)
$A'x + B'y + C'z + D' = 0$ (P'); для опредѣленія угла PP' опредѣлимъ уголъ pp' ему равный; но мы уже знаемъ какъ отыскать уголъ pp'



$\cos(pp') = \cos(px)\cdot\cos(p'x) + \cos(py)\cos(p'y) + \cos(pz)\cos(p'z)$; мы только, что видѣли величины косинусовъ второй части этого уравненія, именно:

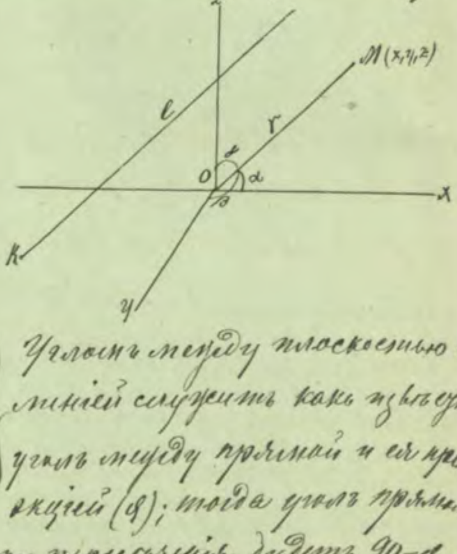
$$\cos(px) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos(p'x) = \frac{A'}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$
$$\cos(py) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos(p'y) = \frac{B'}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$
$$\cos(pz) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad \cos(p'z) = \frac{C'}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}};$$

отсюда $\cos(pp') = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}}$;

эта формула прямо даетъ условія параллельности и перпендикулярности: при углѣ $0°$, $\cos 0° = 1$; тогда $(AA' + BB' + CC')^2 = (A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)$ отсюда перенеся во вторую часть и раскрывъ скобки получимъ $(AB' - BA')^2 + (AC' - CA')^2 + (BC' - CB')^2 = 0$, что возможно когда каждый членъ отдѣльно равенъ 0, отсюда вытекаетъ какъ условіе параллельности пропорціональность коэффиціентовъ. $\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$. Такъ какъ $\cos 90° = 0$, то условіе перпендикулярности плоскостей состоитъ въ томъ, чтобы $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$.—

Изслѣдованіе вопроса о пересѣченіи плоскостей ведетъ къ изученію прямой линіи въ пространствѣ. Если даны $Ax+By+Cz+D=0$ (P) и $A'x+B'y+C'z+D'=0$ (P'), то эти два уравненія, разсматриваемыя въ совокупности, представляютъ прямую линію. Черезъ данную линію кромѣ этихъ плоскостей проходитъ еще множество другихъ и выборъ пары плоскостей опредѣляющихъ ея произволенъ; это наводитъ на мысль выбрать такія, которыя опредѣлялись бы самыми простыми уравненіями. Выразимъ уравненія всѣхъ плоскостей проходящихъ черезъ данную линію, по принципу намъ уже извѣстному можно въ видѣ $P-kP'=0$ такъ какъ k произвольно, то этимъ уравненіемъ опредѣляется все множество, проходящихъ черезъ данную линію; придавши еще плоскость $P-k'P'=0$; пара этихъ новыхъ плоскостей также опредѣляетъ данную прямую. Выборомъ k и k' мы можемъ достигнуть упрощенія уравненій. Уничтоженіе постояннаго члена нарушитъ симметрію, такъ какъ въ обоихъ уравненіяхъ заразъ его уничтожить нельзя, потому что пришлось бы сравнять k и k' и уравненія получились бы тождественныя. Слѣдовательно уничтожимъ одну изъ координатъ, причемъ также разныя въ разныхъ уравненіяхъ. Первое уравненіе $(A-kA')x+(B-kB')y+(C-kC')z+D-kD'=0$; полагая $B-kB'=0$ откуда $k=\frac{B}{B'}$, мы этимъ уничтожимъ y и получимъ одно изъ уравненій, опредѣляющихъ прямую линію въ видѣ $x=az+p$; для втораго уравненія положимъ $k'=\frac{A}{A'}$ такимъ образомъ вторая плоскость, опредѣляющая данную линію выразится уравненіемъ $y=bz+q$; эти два уравненія принято считать за самыя выгодныя для выраженія прямой. Замѣтимъ, что они опредѣляютъ плоскости, проектирующія эту прямую на плоскости координатъ, содержащіяся въ ихъ уравненіяхъ. Уравненіе третьей проектирующей плоскости получится какъ слѣдствіе изъ двухъ первыхъ оно будетъ именно такое; $\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}$; проектирующая на (xy).

Займемся вопросами объ отношеніи прямой линіи къ плоскости 1) о точкѣ пересѣченія прямой и плоскости и 2) подъ какимъ угломъ наклонена прямая къ плоскости. Пусть линія будетъ дана уравненіями $\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$, а плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Предварительно изслѣдуемъ эти уравненія и прежде всего опредѣлимъ углы данной линіи l съ осями координатъ; проведемъ линію изъ O параллельно l; уравненіе этой линіи найдется если обнаружимъ смыслъ p и q въ данныхъ уравненіяхъ прямой l - они суть координаты точки K, въ которой данная линія пересѣкается съ плоскостью xy; въ самомъ дѣлѣ координаты точки K мы получимъ полагая въ уравненіяхъ прямой $z=0$, откуда прямо имѣемъ: $x=p$ и $y=q$; измѣняя K мы будемъ получать линіи параллельныя l и перенеся наконецъ K въ O т.е. полагая p и q равными нулю найдемъ $\begin{cases} x=az \\ y=bz \end{cases}$ уравненія линіи r параллельной l и проходящей чрезъ начало координатъ. Углы которые она дѣлаетъ съ осями координатъ равны такъ же угламъ линіи l по самому опредѣленію угла между двумя линіями въ пространствѣ. Мы знаемъ, что $cs\,\alpha = \frac{x}{r}$; $cs\,\beta = \frac{y}{r}$; $cs\,\gamma = \frac{z}{r}$; координаты точки M удовлетворяютъ уравненію линіи и потому $\begin{cases} cs\,\alpha = a\,cs\,\gamma \\ cs\,\beta = b\,cs\,\gamma \\ cs\,\gamma = cs\,\gamma \end{cases}$ чтобы эти cs могли быть найдены не надо забывать, что существуетъ еще третье равенство $cs^2\alpha + cs^2\beta + cs^2\gamma = 1$; прибавимъ къ найденнымъ уравненіямъ тождество, возвысимъ въ квадратъ и сложимъ



$1 = cs^2\gamma(a^2+b^2+1)$ откуда: $\begin{cases} cs\,\gamma = cs(lz) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \\ cs\,\alpha = cs(lx) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \\ cs\,\beta = cs(ly) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}; \end{cases}$ или написавъ это въ пропорціи $\frac{cs\,\alpha}{a} = \frac{cs\,\beta}{b} = \frac{cs\,\gamma}{1}$.

Угломъ между плоскостью и линіей служитъ какъ извѣстно уголъ между прямой и ея проекціей (φ); тогда уголъ прямой съ перпендикуляромъ восставленнымъ въ точку пересѣченія будетъ $90-\varphi$. Положимъ p есть перпендикуляръ, тогда какъ извѣстно $cs(px) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ также $cs(py) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ и $cs(pz) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ отсюда по выведенной уже формулѣ

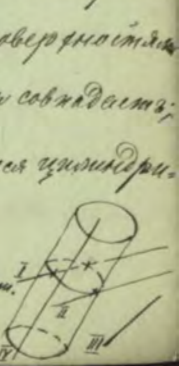
$\cos(lp) = \sin(lP) = \cos(lx)\cos(px) + \cos(ly)\cos(py) + \cos(lz)\cos(pz)$; подставляя найденныя выше величины этихъ косинусовъ, имѣемъ $\sin(lP) = \dfrac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+1}}$; отсюда очевидны условія параллельности и перпендикулярности линіи съ плоскостью; для перваго необходимо, чтобы $\sin(lP)=0$, что возможно если $Aa+Bb+C=0$. Если линія перпендикулярна то $\sin(lP)=1$ очевидно, что она сливается съ перпендикуляромъ p, слѣдовательно косинусы p и l съ осями равны; приравнявъ ихъ и перемѣнивъ мѣста среднихъ членовъ, получимъ $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{1}$; этотъ же результатъ легко вывесть изъ формулы; для того чтобы дробь равнялась единицѣ, необходимо, чтобы $(Aa+Bb+C)^2=(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+1)$; перенеся въ одну часть всѣ члены и сокративъ подобные имѣемъ выраженіе распадающееся на три полные квадраты $0=(Ab-Ba)^2+(A-Ca)^2+(B-Cb)^2$, что возможно только тогда когда каждый членъ отдѣльно равенъ былъ нулю т.е. $\begin{cases} Ab-Ba=0; & \dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b} \\ A-Ca=0; & \dfrac{A}{a}=\dfrac{C}{1} \\ B-Cb=0; & \dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{1} \end{cases}$ откуда вытекаетъ таже пропорція.

Переходимъ къ вопросу о точкѣ пересѣченія линіи съ плоскостью; она лежитъ на линіи и на плоскости, слѣдовательно координаты ея x, y, z отыскиваются изъ трехъ уравненій, такъ какъ должны имъ удовлетворять; рѣшеніе одно и всегда возможно: $z = -\dfrac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C}$ подставляя, найдемъ подобныя же выраженія для x и y съ тѣмъ же знаменателемъ. Разсмотримъ случай когда $Aa+Bb+C=0$ причемъ ни одинъ изъ числителей не есть ноль; точка лежитъ въ безконечности и стало быть это есть требованіе параллельности линіи съ плоскостью, которое совершенно согласуется съ выведеннымъ нами раньше. Допустимъ теперь, что кромѣ этого еще $Ap+Bq+D=0$; въ этомъ случаѣ неопредѣленность рѣшенія указываетъ на то, что точекъ пересѣченія безчисленное множество, слѣдовательно она совпадаетъ съ плоскостью. Написавъ условіе параллельности и написавъ другое мы требуемъ, чтобы p, q и D равнялись нулю т.е. чтобы и плоскость и линія проходили чрезъ начало, что при первомъ условіи возможно только тогда когда линія лежитъ въ этой плоскости.

Изслѣдованіе вопросовъ объ относительномъ положеніи двухъ линій въ пространствѣ непредставляетъ затрудненія и потому мы имъ займемся кратко. Возьмемъ кромѣ линіи l, уравненія которой $\begin{cases} x=az+p \\ y=bz+q \end{cases}$ еще l' уравненія $\begin{cases} x=a'z+p' \\ y=b'z+q' \end{cases}$, которая дѣлаетъ съ осями слѣдующіе углы: $\cos\alpha' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$; $\cos\beta' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$ и $\cos\gamma' = \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$; отсюда по предъидущему $\cos(ll') = \frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\,\sqrt{a'^2+b'^2+1}}$; условіе перпендикулярности $aa'+bb'+1=0$; параллельности $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=1$. Вопросъ о ихъ пересѣченіи условный, что показываетъ и анализъ, давая для отысканія координатъ трехъ точки пересѣченія четыре уравненія. Сравнивая ихъ попарно, найдемъ: $$az+p=a'z+p'$$ $$bz+q=b'z+q'$$ откуда $\frac{p'-p}{a-a'}=\frac{q'-q}{b-b'}$; для того, чтобы линіи дѣйствительно пересѣкались, необходимо существованіе такого равенства.

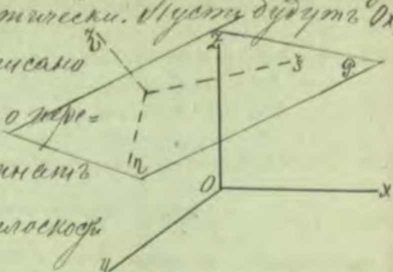
Обратимся къ поверхностямъ второго порядка, которыя опредѣляются уравненіями второй степени; онѣ суть видоизмѣненія одного общаго вида, представляемаго общимъ уравненіемъ; уравненіе общаго вида второй степени съ тремя перемѣнными состоитъ изъ десяти членовъ, которые мы обозначимъ слѣдующимъ образомъ: $Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1zx+2B_2xy+2Cx+2C_1y+2C_2z+F=0$. Извлечемъ изъ него всѣ могущія быть изъ него выведенными слѣдствія; коэффиціентовъ въ немъ 10, но они не суть параметры, такъ какъ помноживъ на k мы не найдемъ новаго; параметрами будутъ 9 отношеній этихъ коэффиціентовъ, откуда можемъ заключить, что необходимыхъ и вполнѣ достаточныхъ для опредѣленія положенія поверхности точекъ надо девять; раздѣливъ все уравненіе на F условимся называть первую часть буквою U. Взявъ точку (x_1,y_1,z_1) мы найдемъ условіе, чтобы поверхность проходила чрезъ нее, въ видѣ $U_1=0$; взявъ другую точку и подставляя ея координаты, найдемъ $U_2=0$ совокупность этихъ двухъ уравненій служитъ условіемъ, чтобы поверхность проходила черезъ 2 точки; постепенно прибавляя точки и стѣсняя уравненіями произволъ коэффиціентовъ, мы продолжаемъ это до тѣхъ поръ, пока получимъ 9 уравненій, которыя относительно коэффиціентовъ первой степени и стало быть съ помощью ихъ мы можемъ исключить всѣ коэффиціенты, величина которыхъ выразится дробями съ общимъ знаменателемъ; сомнѣніе можетъ возникнуть въ случаѣ, когда при знаменателѣ равномъ нулю, только нѣкоторые числители обращаются въ нуль, или когда всѣ;

первой случай указываетъ на то, что эти коэффиціенты должны быть прямо быть уничтоженными; второй дѣлаетъ вопросъ неопредѣленнымъ, что возможно при весьма разнообразныхъ случаяхъ; напримѣръ при нѣкоторыхъ точкахъ сливающихся, расположенныхъ на прямой и т.д. всѣ эти случаи встрѣтятся намъ при дальнѣйшемъ изслѣдованіи. Общій видъ можетъ распадаться на два множителя первой степени $U = P.P^1 = 0$ и тогда онъ уже не представляетъ поверхности а опредѣляетъ двѣ плоскости, выражаемыя уравненіями $P=0$ и $P^1=0$. Рѣшимъ вопросъ о числѣ точекъ пересѣченія съ прямою: вообще въ двухъ точкахъ; докажемъ аналитически; положимъ, что уравненія прямой даны въ видѣ: $\begin{cases} x = az+p \\ y = bz+q \end{cases}$; найти точки пересѣченія этой прямой съ поверхностью, опредѣляемою уравненіемъ общаго вида значитъ найти точки лежащія заразъ на прямой и на поверхности, координаты которыхъ удовлетворяютъ стало быть тремъ уравненіямъ; не выполняя на самомъ дѣлѣ подстановки величинъ x и y, опредѣленныхъ изъ уравненія прямой, въ общее уравненіе, ясно, что послѣ подстановки получится одно уравненіе квадратное относительно z, вида $Pz^2 + Qz + R = 0$, которое можетъ дать или два мнимыхъ, или два равныхъ, или два дѣйствительныхъ корня; подставляя ихъ въ уравненія прямой получимъ для x и y тоже соотвѣтствующія два значенія; слѣдовательно вообще имѣемъ 2 точки; при дѣйствительныхъ рѣшеніяхъ прямая пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ; при равныхъ эти точки сливаются въ одну-точку касанія наконецъ при мнимыхъ прямая не задѣваетъ, проходитъ мимо поверхности. Анализъ даетъ еще одинъ случай: когда P, Q и R равны нулю, то задача неопредѣлена; такъ какъ всякое z удовлетворяетъ, то стало быть между поверхностями второго порядка можетъ встрѣтиться такая, съ которою прямая совпадаетъ; дѣйствительно такія поверхности существуютъ - онѣ называются цилиндрическими, уравненія ихъ лишены одной изъ координатъ; съ такою поверхностью прямая можетъ совпадать всѣми своими точками.



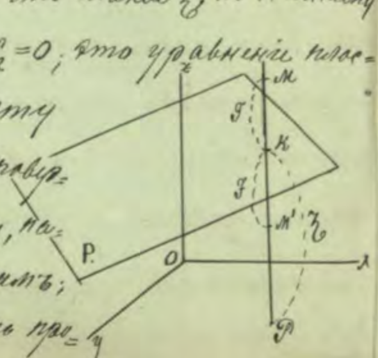
I двѣ точки пересѣченія; II точка касанія; III мнимыя точки; IV совпаденіе.

Возникаетъ теперь другой вопросъ о пересѣченіи этихъ поверхностей съ плоскостями, рѣшить который можно и геометрически и аналитически. Пусть будутъ Ox, Oy и Oz оси координатъ, относительно которыхъ написано уравненіе поверхности; предложимъ частный вопросъ о пересѣченіи поверхности съ одной изъ плоскостей координатъ



напримѣръ (xy); для точекъ поверхности, лежащихъ въ плоскости xy, $z=0$ слѣдовательно получится уравненіе геометрическаго мѣста въ формѣ $S=0$, которое какъ мы знаемъ опредѣляетъ коническое сѣченіе. Откуда заключаемъ что съ плоскостями координатъ поверхности второго порядка пересѣкаются по кривымъ второго порядка; нетрудно обобщить этотъ выводъ для всякой плоскости напримѣръ P: основываясь на преобразованіи плоскостей координатъ, ничто не мѣшаетъ намъ принять ее за одну изъ плоскостей и въ новомъ уравненіи относительно новыхъ осей, положивъ $z=0$, найдемъ опять-таки уравненіе кривой второго порядка. Этотъ же результатъ можно получить изъ предыдущаго путемъ чисто геометрическимъ: будемъ проводить всевозможныя прямыя въ плоскости сѣченія, онѣ вообще будутъ встрѣчаться съ поверхностью а стало быть и съ линіею пересѣченія въ двухъ точкахъ; слѣдовательно эта линія есть коническое сѣченіе.

Докажемъ въ короткихъ словахъ существованіе діаметральныхъ плоскостей у поверхностей второго порядка. Напишемъ уравненіе общее въ видѣ $A_2z^2+2Qz+R=0$, гдѣ подъ $2Q$ разумѣется весь коэффиціентъ при z первой степени а подъ R всѣ постоянные члены, несодержащіе z; тогда $z=\frac{-Q\pm\sqrt{Q^2-A_2R}}{A_2}$; давши x и y произвольныя значенія найдемъ точку P; построимъ теперь $z=\zeta\pm\mathfrak{z}$; что такое ζ? по нашему положенію $\zeta=-\frac{Q}{A_2}=-\frac{(By+B_1x+C_2)}{A_2}$ откуда $A_2\zeta+By+B_1x+C_2=0$; это уравненіе плоскости P для которой ζ есть ордината; построивъ эту плоскость мы найдемъ искомыя ординаты нашей поверхности PM и PM', очевидно что всѣ хорды поверхности, параллельныя оси z, пересѣкутся плоскостью P пополамъ; отсюда очевидно, что если какую угодно поверхность про=



рѣшимъ системой хордъ параллельныхъ оси z, то средины ихъ лежатъ въ одной плоскости; понятно, что всякая система параллельныхъ хордъ имѣетъ свою такую плоскость; эти-то плоскости, служащія геометрическимъ мѣстомъ срединъ хордъ всѣхъ параллельныхъ извѣстнаго направленія наз. діаметральными.

Для облегченія дальнѣйшаго изученія упростимъ общій видъ; упрощеніе это будетъ основано на выборѣ наивыгоднѣйшаго начала и направленія осей.

Кривыя поверхности втораго порядка имѣютъ центръ т. е. точку, въ которой дѣлятся пополамъ всѣ хорды; аналитическая особенность центра состоитъ въ слѣдующемъ: такъ какъ, помѣстивъ начало координатъ въ центрѣ, каждой точкѣ мы найдемъ соотвѣтствующую въ противуположномъ трехгранномъ углѣ и имѣющую координаты, равныя съ первой по величинѣ, но противоположныя по знаку, то рядомъ съ уравненіемъ общимъ

$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1xz+2B_2xy+2Cx+2C_1y+2C_2z=0$ должно существовать $Ax_1^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1zx+2B_2xy-2Cx-2C_1y-2C_2z=0$, что возможно только въ томъ случаѣ, когда $Cx+C_1y+C_2z=0$ или, что все тоже, когда $C=0$, $C_1=0$, $C_2=0$.

Изъ аналитической особенности центра вытекаетъ способъ нахожденія его. Перенесемъ начало координатъ въ произвольную точку, преобразуемъ уравненіе къ нему и выбираемъ координаты для новаго начала такъ, чтобы члены съ первыми степенями x, y и z уничтожились. Общее уравненіе:

$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1zx+2B_2xy+2Cx+2C_1y+2C_2z+F=0$$

Положимъ что координаты новаго начала $x'y'z'$ и замѣнимъ x чрезъ $x+x'$, y чрезъ $y+y'$ и z чрезъ $z+z'$ получимъ:

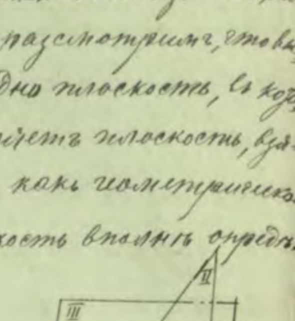
$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1zx+2B_2xy+\left|\begin{matrix}2Ax_1\\+2B_1z_1\\+2B_2y_1\\+2C\end{matrix}\right|x+\left|\begin{matrix}2A_1y_1\\+2Bz_1\\+2B_2x_1\\+2C_1\end{matrix}\right|y+\left|\begin{matrix}2A_2z_1\\+2By_1\\+2B_1x_1\\+2C_2\end{matrix}\right|z+\left|\begin{matrix}Ax_1^2\\+A_1y_1^2\\+A_2z_1^2\\+2By_1z_1\\+2B_1z_1x_1\\+2B_2x_1y_1\\+2Cx_1\\+2C_1y_1\\+2C_2z_1\\+F\end{matrix}\right|=0$$

Если требуется помѣстить начало въ центрѣ то необходимо, чтобы:

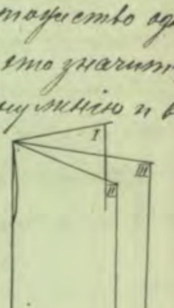
$$Ax_1+B_2y_1+B_1z_1+C=0;$$
$$B_2x_1+A_1y_1+Bz_1+C_1=0;$$
$$B_1x_1+By_1+A_2z_1+C_2=0.$$

Рѣшеніе этихъ трехъ уравненій вообще говоря всегда возможно и всегда одно. Сомнѣніе можетъ явиться только въ случаѣ знаменателя равнаго нулю;

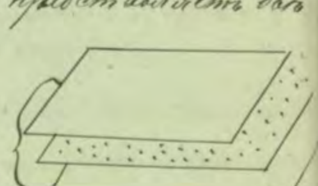
тогда или I центръ уходитъ въ безконечность и стало быть мы имѣемъ дѣло съ по-
верхностью занимающей то же мѣсто, которое занимаетъ парабола между кри-
выми втораго порядка, II или центръ имѣютъ неопредѣленность; понятно, что
она возникаетъ вслѣдствіе тождества этихъ уравненій; они не суть независим-
тутъ мы различаемъ два случая или одно изъ уравненій есть слѣдствіе двухъ неза-
висимыхъ другихъ; или одно уравненіе самобытно а два вытекаютъ изъ него, то-
ждественны съ нимъ; изслѣдуемъ это чисто геометрически: разсмотримъ, что вы-
ражаетъ первое уравненіе отдѣльно? оно выражаетъ очевидно плоскость, въ кото-
рой долженъ лежать центръ, точно также 2ое представляетъ плоскость, взя-
тое въ отдѣльности; два въ совокупности даютъ линію, какъ геометрическое
мѣсто центра; третье уравненіе представляющее плоскость вполнѣ опредѣ-
ляетъ центръ, пересѣкаясь съ линіей пересѣченія двухъ
первыхъ въ одной точкѣ; понятно, что если 3ья плоскость
параллельна линіи пересѣченія двухъ первыхъ, то центръ
удаленъ въ безконечность, что показываетъ въ этомъ случаѣ



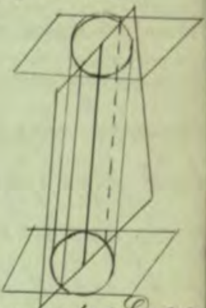
и аналитическое рѣшеніе данныхъ уравненій. Если является тождество одно-
го уравненія съ двумя другими, неопредѣленность не столь обширная; то это значитъ,
что мы имѣемъ дѣло съ тремя плоскостями проходящими чрезъ одну линію и въ
такомъ случаѣ вмѣсто опредѣленной точки, получаемъ линію
на которой долженъ находится центръ. Второй случай неопредѣ-
ленность въ широкомъ смыслѣ получается тогда, когда мы имѣ-
емъ плоскость, съ которой двѣ другихъ совпадаютъ, что бываетъ на-



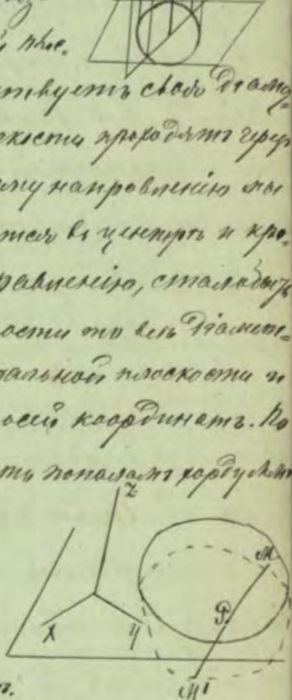
примѣръ въ томъ случаѣ, если поверхность втораго порядка представляетъ двѣ
параллельныя плоскости, лежащія на равномъ разстояніи
отъ срединной плоскости центра. Линію, какъ геометри-
ческое мѣсто центра, имѣютъ поверхности цилиндрическія,
образующія которыхъ параллельны линіи пересѣченія трехъ
центральныхъ плоскостей. Если поверхность имѣетъ центръ, то въ сѣченіи пло-
костью, проходящей чрезъ него, получится кривая, которой центръ будетъ центр-
поверхности; всякая плоскость пересѣкающая по линіи геометрическаго мѣста



центра, даетъ въ сѣченіи пару параллельныхъ прямыхъ. Все это какъ видно изъ прилагаемаго чертежа характеризуетъ цилиндрическую поверхность.



Обратимся къ вопросу о выгоднѣйшемъ направленіи осей координатъ; этотъ выборъ основывается главнымъ образомъ на предположеніи заключающемся въ томъ, что если мы представимъ поверхность и систему параллельныхъ линій, то нѣкоторыя изъ (опредѣлимъ систему хордъ) нихъ пересѣкутся съ поверхностью, вообще въ двухъ точкахъ; возьмемъ средины ихъ, они, какъ доказано, всѣ лежатъ на одной плоскости-діаметральной; всякому направленію соотвѣтствуетъ своя діаметральная плоскость; изъ теоріи центра ясно, что всѣ эти плоскости проходятъ черезъ центръ, если поверхность его имѣетъ, такъ какъ параллельно всякому направленію мы можемъ взять хорду проходящую черезъ центръ, средина ея находится въ центрѣ и кромѣ того лежитъ въ плоскости діаметральной этому направленію, слѣдовательно центръ лежитъ на этой плоскости. Если центръ въ безконечности то всѣ діаметральныя плоскости очевидно параллельны. Направленіе діаметральной плоскости и хордъ ей сопряженныхъ наивыгоднѣе принять за направленіе осей координатъ. По опредѣленію діаметральной плоскости въ точкѣ P она раздѣляетъ пополамъ хорду MM' a вслѣдствіи того что ось z принята по направленію хордъ



ясно, что координаты M будутъ x, y, z, M' — x, y, −z, всякой точкѣ слѣдовательно должна существовать соотвѣтствующая, у которой x и y такія же но z съ знакомъ обратнымъ. Если преобразуемъ уравненіе общее къ этимъ плоскостямъ координатъ, то рядомъ съ общимъ должно будетъ существовать слѣдующее уравненіе

$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2-2Byz-2B_1zx+2B_2xy+2Cx+2C_1y-2C_2z+F=0$$

что возможно только при $(By+B_1x+C_2)z=0$; выполнить это условіе должно для произвольныхъ x и y, для чего необходимо, чтобы $B=0$, $B_1=0$ и $C_2=0$. Напишемъ упрощенное уравненіе въ такомъ видѣ A_2z^2+S, гдѣ S представляетъ полный многочленъ второй степени съ двумя перемѣнными x и y. У насъ еще возможно измѣнять мѣсто начала координатъ и направленіе осей x и y; полагая $z=0$, получимъ $S=0$, что есть уравненіе кривой втораго порядка, по которой поверхность наша пересѣкалась бы діаметралльною плоскостью; оставляя ось z параллельной самой себѣ, мы будемъ преобразовывать многочленъ S и дальнѣйшее упрощеніе будетъ заключаться въ выборѣ начала координатъ и направленія осей, при которыхъ S явится наиболѣе простымъ, а это уже мы знаемъ, такъ какъ S представляетъ кривую втораго порядка; слѣдовательно надо за начало и оси принять тѣ, которыя были бы упрощаютъ уравненіе кривыхъ втораго порядка. Относительно имѣющихъ центръ помѣщаемъ начало въ центрѣ а за направленія осей принимаемъ пару сопряженныхъ діаметровъ, причемъ многочленъ принимаетъ форму: $Mx^2+Ny^2+F=0$ все уравненіе будетъ $Mx^2+Ny^2+Pz^2+F=0$ простѣйшій видъ уравненія поверхностей имѣющихъ центръ. Если кривая поверхность неимѣетъ центра, то и въ сѣченіи получатся кривыя не имѣющія центра вообще параболы. Тогда простѣйшая форма многочлена S будетъ $Ny^2+Mx=0$ причемъ начало взято на кривой а за оси діаметръ и касательная къ концу его; простѣйшая форма уравненія поверхностей неимѣющихъ центра будетъ слѣдовательно такая $Mx+Ny^2+Pz^2=0$. Общее правило относительно выбора наивыгоднѣйшаго направленія координатъ выражается такъ: взявъ ось z произвольно, подыскиваемъ къ ней единственную сопряженную діаметральную плоскость на этой плоскости для поверхностей имѣющихъ центръ принимаемъ его за начало а осями x и y беремъ какую-нибудь пару сопряженныхъ діаметровъ, для поверхностей безъ центра беремъ любую точку кривой получаемой въ сѣченіи за начало, за ось x принимаемъ діаметръ изъ этой точки а за ось y – касательную къ концу его. –

Со стороны формы уравненіе упрощено, но со стороны сущности, геометрически возникаетъ вопросъ, не существуютъ ли оси и плоскости такія, которыя имѣютъ значеніе главныхъ осей на плоскости. Дѣйствительно существуютъ единственная система взаимно перпендикулярныхъ плоскостей, относительно которой уравненія при той-же формѣ упрощаются. Исслѣдуемъ кстати подробнѣе рѣшеніе о пересѣченіи прямой съ поверхностью втораго порядка: общее уравненіе

$$Ax^2+A_1y^2+A_2z^2+2Byz+2B_1xz+2B_2xy+2Cx+2C_1y+2C_2z+F=0$$

предложимъ вопросъ опредѣлить точки пересѣченія съ произвольною прямою, уравненіе которой $x=az+p$; $y=bz+q$; для этого вставимъ x и y въ уравненіе кривой; уравненіе приметъ видъ: $Pz^2+2Qz+R=0$; рѣшеніе дастъ двѣ ординаты точекъ пересѣченія. Насъ интересуетъ средина этой прямой $m(\xi,\eta,\zeta)$ причемъ координаты краевъ $x_1y_1z_1$ и $x_2y_2z_2$: когда найдены z_1 и z_2 то $\zeta=\frac{z_1+z_2}{2}$; $\xi=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{a(z_1+z_2)+2p}{2}=a\zeta+p$, $\eta=\frac{y_1+y_2}{2}=b\zeta+q$. Для опредѣленія этихъ координатъ надо знать P и Q, но какъ извѣстно изъ теоріи квадратныхъ уравненій, $z_1+z_2=-\frac{2Q}{P}$; $\frac{z_1+z_2}{2}=\zeta=-\frac{Q}{P}$.

$P=Aa^2+A_1b^2+A_2+2Bb+2B_1a+2B_2ab$; $Q=Aap+A_1bq+Bq+B_1p+B_2aq+B_2bp+Ca+C_1b+C_2$;

отсюда: $$\zeta=-\frac{Aap+A_1bq+Bq+B_1p+B_2aq+B_2bp+Ca+C_1b+C_2}{Aa^2+A_1b^2+A_2+2Bb+2B_1a+2B_2ab}$$

$$\xi=\frac{A_1b^2p+A_2p+2Bbp+B'ap+B_2abp-A_1abq-Baq-B_2a^2q-Ca^2-C_1ab-C_2a}{\text{идет}}$$

$$\eta=\frac{Aa^2q+A_2q+Bbq+2B_1aq+B_2abq-Aabp-B_1bp-B_2b^2p-Cab-C_1b^2-C_2b}{\text{идет}}$$

Исключимъ отсюда p и q т. е. найдемъ геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ хордъ; имѣемъ $$\zeta=-\frac{(Aa+B_1+B_2b)p+(A_1b+B+B_2a)q+(Ca+C_1b+C_2)}{\Delta}$$

$$\xi=\frac{(A_1b^2+A_2+2Bb+B_1a+B_2ab)p-(A_1b+B+B_2a)a.q-(Ca+C_1b+C_2)a}{\Delta}$$

$$\eta=\frac{(Aa^2+A_2+Bb+2B_1a+B_2ab)q-(Aa+B_1+B_2b)b.p-(Ca+C_1b+C_2)b}{\Delta}$$

въ результатѣ этихъ вычисленій получимъ очевидно уравненіе первой степени относительно ξ, η и ζ, коэффиціенты котораго извѣстнымъ образомъ зависятъ отъ a и b, такъ, что его можно представить въ видѣ:

$$(P_1a+Q_1b+R_1)\xi+(P_2a+Q_2b+R_2)\eta+(P_3a+Q_3b+R_3)\zeta+(Pa+Qb+R)=0$$

такъ какъ это есть уравненіе плоскости то теперь доказано, что средины всѣхъ параллельныхъ хордъ лежатъ въ одной плоскости. По извѣстнымъ уже формуламъ можно опредѣлить подъ какимъ угломъ наклонена эта плоскость къ сопряженнымъ ей хордамъ. Намъ надо найти хорды перпендикулярныя къ своей діаметральной плоскости; для этого необходимо существованіе условій $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}$ или $\frac{P_1a+Q_1b+R_1}{a}=\frac{P_2a+Q_2b+R_2}{b}=\frac{P_3a+Q_3b+R_3}{1}$; постараемся изъ этихъ двухъ уравненій определить a и b. Припомнимъ, что a и b представляютъ отношеній косинусовъ угловъ $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$ и $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$; означивъ эти отношенія для простоты черезъ $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\gamma}$ и вводя ихъ въ вычисленіе мы увеличиваемъ число неизвѣстныхъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ увеличивается и число уравненій, ибо эти три величины всегда связаны равенствомъ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Называя величину отношенія черезъ λ, имѣемъ

$$(P_1-\lambda)\alpha+Q_1\beta+R_1\gamma=0$$
$$P_2\alpha+(Q_2-\lambda)\beta+R_2\gamma=0$$
$$P_3\alpha+Q_3\beta+(R_3-\lambda)\gamma=0$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Рѣшеніе будетъ заключаться въ томъ, что послѣ раздѣленія каждаго изъ трехъ уравненій на γ, найдемъ тѣже отношенія $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\gamma}$, опредѣливъ которыя изъ двухъ первыхъ уравненій и вставивъ въ $3^{ье}$, найдемъ одно уравненіе съ λ, которое будетъ $3^{ей}$ степени. Изслѣдованіе этого уравненія показываетъ, что оно имѣетъ всѣ три корня дѣйствительные, такъ что существуютъ три направленія прямой, для которой діаметральная сопряженная плоскость перпендикулярна. Рѣшимъ этотъ же вопросъ иначе, мы имѣемъ:

$$(Aa^2+A_1b^2+A_2+2Bb+2B_1a+2B_2ab)\zeta+(Aa+B_1+B_2b)p+(A_1b+B+B_2a)q+Ca+C_1b+C_2=0$$

$\xi=a\zeta+p$ и $\eta=b\zeta+q$; отсюда $p=\xi-a\zeta$; $q=\eta-b\zeta$; вставляя, находимъ:

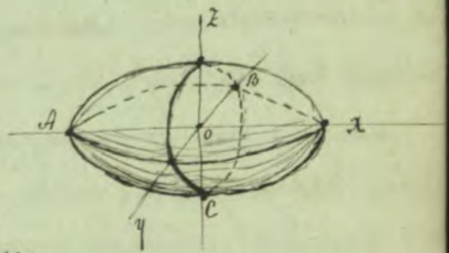
$$\left.\begin{array}{r}Aa\\+B_2b\\+B_1\end{array}\right|\xi+\left.\begin{array}{r}A_1b\\+B_2a\\+B\end{array}\right|\eta+\left.\begin{array}{r}B_1a\\+Bb\\+A_2\end{array}\right|\zeta+\left.\begin{array}{r}Ca\\+C_1b\\+C_2\end{array}\right|=0$$

Уравненіе діаметральной плоскости; пишемъ условіе перпендикулярности этой плоскости къ линіи

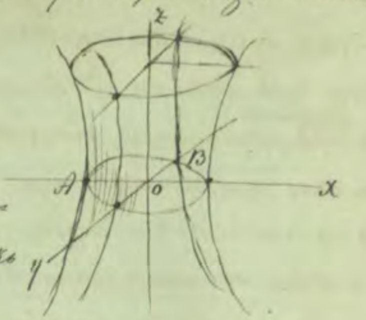
$$\frac{Aa+B_1+B_2b}{a}=\frac{A_1b+B+B_2a}{b}=\frac{A_2+Bb+B_1a}{1}$$

подставляя вмѣсто a и b отношеніе косинусовъ угловъ, получаемъ тѣ уравненія, которыя были написаны; рѣшеніе ихъ приводитъ насъ къ уравненію кубичному относительно λ; для насъ важно то, что всякое кубическое уравненіе всегда имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ дѣйствительный корень, такъ что всегда существуютъ взаимно перпендикулярныя діаметральныя плоскости.

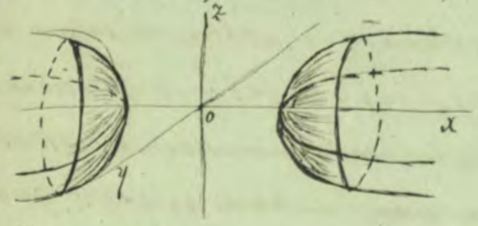
Виды поверхностей втораго порядка. Мы видѣли выше, что простѣйшій видъ уравненія поверхностей, имѣющихъ центръ таковъ: $Ax^2+By^2+Cz^2=F$ при F положительномъ мы имѣемъ три случая: 1) когда A, B и C положительны, 2) когда два изъ нихъ положительны и одно отрицательно и наконецъ 3) когда два отрицательны и одно положительно. Въ I-томъ случаѣ уравненіе представляетъ эллипсоидъ т.е. поверхность, всѣ сѣченія которой плоскостями координатъ суть эллипсы; чтобы найти точки пересѣченія съ осями, полагая x и y равными нулю, находимъ $z=\pm\sqrt{\frac{F}{C}}=c$; точно также находимъ $y=\pm\sqrt{\frac{F}{B}}=b$ и $x=\pm\sqrt{\frac{F}{A}}=a$; отсюда имѣемъ $C=\frac{F}{c^2}$; $B=\frac{F}{b^2}$ и $A=\frac{F}{a^2}$; уравненіе эллипсоида принимаетъ поэтому видъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Форма его изображена на прилагаемомъ рисункѣ причемъ $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Если положить что двѣ изъ полуосей эллипсоида равны, то получимъ уравненія: $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$; опредѣляющія эллипсоиды вращенія вокругъ осей координатъ. Если всѣ три полуоси равны то уравненіе принимаетъ видъ $x^2+y^2+z^2=a^2$ и представляетъ шаръ. Полагая a удлинившимся до безконечности получимъ уравненіе $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ цилиндрической поверхности, направляющею которой служитъ эллипсъ; полагая кромѣ того и b удлинившимся до безконечности найдемъ $\frac{z^2}{c^2}=1$ уравненіе опредѣляющее пару плоскостей параллельныхъ плоскости xy.



Два другіе случая общаго уравненія поверхностей втораго порядка имѣющихъ центръ, т.е. $Ax^2+By^2-Cz^2=F$ и $Ax^2-By^2-Cz^2=F$ представляютъ собой гиперболоиды. Опредѣлимъ сѣченія ихъ съ плоскостями координатъ сначала перваго: полагая $z=0$, находимъ уравненіе эллипса, полагая z постояннымъ имѣемъ уравненіе $Ax^2+By^2=F+Cc^2$, эллипсъ нѣсколько большей величины. Тѣмъ первый въ сѣченіяхъ плоскостями xz и yz получаются гиперболы. Поверхность эта имеющая видъ, изображенной на прилагаемомъ рисункѣ, и называется гиперболоидомъ съ одной полостью.

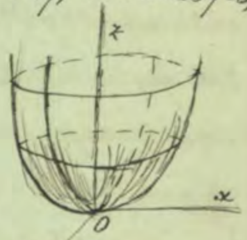


Другой видъ гиперболоида съ плоскостью zy вовсе не пересѣкается, съ плоскостями ей параллельными даетъ въ сѣченіи эллипсисы съ остальными же плоскостями пересѣкается по гиперболамъ; это, такъ называемый, гиперболоидъ со двумя полостями.



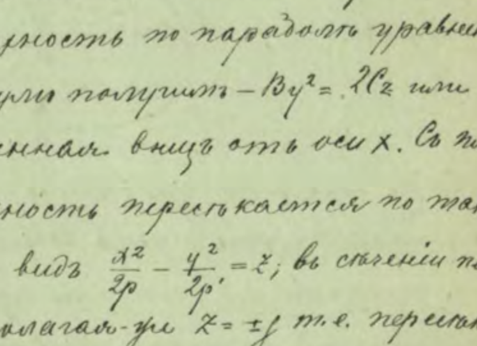
Обѣ эти поверхности, когда въ нихъ эллипсы обращаются въ круги называются гиперболоидами вращенія.

Переходимъ теперь къ поверхностямъ неимѣющимъ центра; уравненіе ихъ, отнесенное къ единственнымъ прямоугольнымъ осямъ и возможно упрощенное имѣетъ такой видъ $Ax^2+By^2=2Cz$. Знакъ при C не имѣетъ вліянія на видъ поверхности и означаетъ только по какую сторону оси x она лежитъ. Мы можемъ предположить поэтому что C всегда положительно. Что касается до знаковъ первой части, то случай когда оба члена отрицательны мы отбрасываемъ, такъ какъ перемѣна знака упадетъ въ такомъ случаѣ на C а мы положили, что оно всегда положительно. Поэтому возможно только два случая: когда знакъ у обоихъ членовъ плюсъ, или когда одинъ плюсъ другой минусъ. Поверхность, въ уравненіи которой A и B положительны, пересѣкается съ осями только въ точкѣ начала координатъ. Разсмотримъ пересѣченія ея съ плоскостями zx и zy; полагая $y=0$, получимъ $x^2=2\frac{C}{A}z=2pz$; полагая $x=0$, имѣемъ $y^2=2\frac{C}{B}z=2p'z$ т.е. въ обоихъ случаяхъ въ сѣченіи получаются параболы. Съ плоскостями параллельными этимъ мы будемъ получать въ сѣченіи параболы уравненій $x^2=2pz+k$ и $y^2=2p'z+h$. Уравненіе поверхности получаетъ видъ $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p'}=z$; отсюда очевидно, что съ плоскостью xy поверхность пересѣкается въ точкѣ 0; съ плоско-



тями ей параллельными, давая z значенія γ пересѣкается она по эллипсамъ, урав-неній которыхъ $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2p'} = \gamma$. Поверхность эта носитъ названіе эллиптическаго параболоида; когда $p=p'$ то получается параболоидъ вращенія. Если бы одинъ изъ параметровъ обращался въ безконечность, то оставшееся уравненіе опре-дѣляло бы параболическій цилиндръ; уравненіе его $\frac{x^2}{2p} = z$ или $\frac{y^2}{2p'} = z$.

Уравненіе $Ax^2 - By^2 = 2Cz$ опредѣляетъ гиперболическій параболоидъ, не да-ющій замкнутыхъ сѣченій; онъ во всѣ стороны уходитъ въ безконечность и слу-житъ простѣйшимъ представителемъ, такъ называемыхъ, сѣдлообразныхъ поверхностей. Съ осями она пересѣкается въ точкѣ O начала координатъ. Съ плоскостью xz пересѣкается эта поверхность по параболѣ уравненія $x^2 = 2pz$; съ плоскостью zy, приравнивая x нулю получимъ $-By^2 = 2Cz$ или $y^2 = -2p'z$ т.е. въ сѣченіи парабола, обращенная внизъ отъ оси x. Съ пло-скостями параллельными этимъ поверхность пересѣкается по такимъ-же параболамъ; уравненіе ея получаетъ видъ $\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2p'} = z$; въ сѣченіи пло-скостью xy получается пара прямыхъ; полагая-же $z = \pm\gamma$ т.е. пересѣкая поверхность плоскостями параллельными xy мы найдемъ гиперболы, имѣ-ющія при $+\gamma$ по оси x ~~дѣйс~~ дѣйствительную ось и по оси y мнимую, при $-\gamma$ на-оборотъ по оси x мнимую, а по оси y дѣйствительную. Видъ поверхно-сти изображенъ на прилагаемомъ чертежѣ.



Скажемъ нѣсколько словъ въ самыхъ общихъ чертахъ о прямолинейныхъ образующихъ поверхностей второго порядка. Прежде всего надо убѣдиться въ томъ, что прямая совпада-етъ съ поверхностью. Черезъ каждую точку A проходятъ двѣ прямыхъ; возьмемъ ось z проходящую черезъ O и A и оси x и y въ плоскости перпендикулярной къ оси z; уравненіе поверхно-сти относительно этихъ осей будетъ $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{z^2}{c_1^2} = 1$. Разсмотримъ сѣченіе этой поверхности плоскостью параллельной ZX; съ самой плоскостью ZX въ сѣченіи получимъ $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{z^2}{c_1^2}=1$; полагая $y=\beta$, находимъ $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{z^2}{c_1^2}=1-\frac{\beta^2}{b_1^2}$ при $\beta=b_1$ получаемъ пару прямыхъ. Такимъ образомъ существованіе доказано. Другимъ болѣе ощутительнымъ способомъ существованіе прямолинейныхъ образующихъ можетъ быть доказано такъ при главныхъ осяхъ уравненіе поверхности представляется въ видѣ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)$$

Написавъ его въ видѣ:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\left(1-\frac{y}{b}\right)\lambda$$

$$\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\left(1+\frac{y}{b}\right)\frac{1}{\lambda},$$

видимъ что это уравненія плоскости; совокупность ихъ представляетъ прямую; эта линія всеми своими точками лежитъ на поверхности; это слѣдуетъ изъ того, что изъ этихъ двухъ вытекаетъ верхнее, т.е. точка координаты которой удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ удовлетворяютъ и верхнему. Замѣтимъ, что двѣ образующія одной и той-же системы не пересѣкаются. Уравненіе образующей другой системы получаются отъ перенесенія во вторую часть $\frac{x^2}{a^2}$ и имѣетъ форму:

$$\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\mu$$

$$\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{x}{a}\right)\frac{1}{\mu}$$

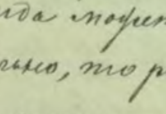
Прямолинейныя образующія составляютъ отличительный признакъ гиперболоида съ одной полостью, точно также какъ и гиперболическаго параболоида, который есть частный случай перваго, что увеличивая въ немъ горловую окружность получимъ въ предѣлѣ изъ эллипса и гиперболы параболы. Уравненіе его $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2p_1}=z$ или $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=z$ иначе въ видѣ $\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)=z$ образующія одной системы будутъ опредѣлены уравненіями $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=z.\lambda$ и $\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=\frac{1}{\lambda}$; уравненія образующей другой системы таковы $\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=z.\mu$ и $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=\frac{1}{\mu}$; всѣ образующія одной и той же системы параллельны этой плоскости и слѣдовательно нигдѣ не пересѣкаются.

Сергій Шереметевскій

Интегральное исчисленіе
(лекціи Давыдова.)

Уравненія, въ которыхъ заключаются дифференціальные коэффиціенты и перемѣнныя напр: $F(\frac{dy}{dx}, x, y)=0$, называются дифференціальными. Въ болѣе общей формѣ такія уравненія могутъ заключать 2^ые 3^ьи и т. д. производныя. Рѣшить такое уравненіе относительно y значитъ взять интегралъ его, хотя пріемы интегрированія совершенно иные, чѣмъ тѣ, съ которыми мы уже знакомы. Дифференціальныя уравненія дѣлятся на двѣ группы: съ однимъ перемѣннымъ, какъ указанное выше и со многими, въ которыя входятъ поэтому частныя производныя. Интегралы первыхъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ; интегралы вторыхъ отъ произвольныхъ функцій. Кромѣ этого дѣленія, различается еще порядокъ уравненія — высшій порядокъ производной и степень. Напримѣръ $f(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n})=0$ есть уравненіе 1^ой степени n^аго порядка. Линейное уравненіе n^го порядка. $X_n\frac{d^ny}{dx^n}+X_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots$, гдѣ X суть нѣкоторыя функціи перемѣннаго x. Случай когда онѣ постоянныя весьма важенъ въ прикладныхъ наукахъ.

Разсмотримъ уравненія перваго порядка и степени: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; $Mdx+Ndy=0$. Первый вопросъ, который теорія рѣшаетъ положительно, заключается въ томъ: существуетъ ли для всякаго дифференціальнаго уравненія y какъ функція x, обращающій это уравненіе въ тождество? Изложимъ весьма простое геометрическое рѣшеніе: считая x и y координатами, $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$ нужно считать тангенсомъ касательной. Взявъ точку $A(x_0 y_0)$ имѣемъ $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=f(x_0 y_0)$. Давая x приращеніе h, найдемъ точку B съ координатами $\begin{cases} x_1=x_0+h \\ y_1=y_0+h\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \end{cases}$



отсюда $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1=f(x_1 y_1)$, что даетъ возможность провести новую касательную. Продолжая такимъ образомъ далѣе мы найдемъ кривую, которая выражаетъ зависимость между x и y, и стало быть y всегда можетъ быть выражена въ функціи x. Такъ какъ мы беремъ y произвольно, то рѣшеніе дифференціальнаго уравненія зависитъ отъ произвольнаго постояннаго. Разсмотримъ частные случаи, въ которыхъ интеграція возможна: простѣйшій $f(x)dx + F(y)dy = 0$ и $\int f(x)dx + \int F(y)dy = C$. Здѣсь какъ говорятъ перемѣнныя раздѣлены и всѣ пріемы рѣшенія стремятся раздѣлить перемѣнныя. Къ этому случаю приводятся уравненія, если въ немъ $M = f(x)f_1(y)$ и $N = F(x).F_1(y)$ тогда, раздѣливъ на $F(x)f_1(y)$, имѣемъ $\frac{f(x)}{F(x)}dx + \frac{F_1(y)}{f_1(y)}dy = 0$.

Примѣры: $x^2dy = (y+a)dx$; $\frac{dy}{(y+a)} = \frac{dx}{x^2}$; $lg(y+a) = -\frac{1}{x} + C$.

$xydx = (a-x)(y-b)dy$; $\frac{xdx}{(a-x)} = \frac{(y-b)dy}{y}$; $-dx + \frac{adx}{a-x} = dy - \frac{bdy}{y}$; $-x - a\,lg(a-x) = y - b.lgy + C$.

Къ этому же классу принадлежатъ однородныя уравненія, въ которыхъ M и N суть однородныя функціи отъ x и y. Пусть n степень однородности, тогда: $M = x^n f\left(\frac{y}{x}\right)$; $N = x^n F\left(\frac{y}{x}\right)$; полагая $\frac{y}{x} = u$; $y = xu$; $f(u)dx + F(u)dy = 0$; $dy = udx + xdu$

$(fu + uFu)dx + xFu\,du = 0$; $\frac{dx}{x} + \frac{Fu}{fu+uFu}du = 0$, въ этомъ уравненіи перемѣнныя раздѣлены. Примѣръ:

$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2+y^2}$; $dy - \frac{y}{x}dx = dx\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$; $\frac{y}{x} = u$; $\cancel{udx} + xdu - \cancel{udx} = dx\sqrt{1+u^2}$;

$\frac{dx}{x} = \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$; $lg x = lg(u+\sqrt{1+u^2}) + lg C$; $x = C(u+\sqrt{1+u^2}) = C\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)$; $x^2 = C(y+\sqrt{x^2+y^2})$

Изъ логарифмическаго вида, мы всегда находимъ прямо данное дифференціальное уравненіе, тогда какъ изъ послѣдняго вида, мы прямо не найдемъ пер[illegible]наго уравненія, надо будетъ сперва исключить произвольное постоянное. Стало быть интегралы дифференціальныхъ уравненій можно раздѣлить на прямо возвращающіе насъ къ данному начальному уравненію, и другіе, требующіе для возвращенія къ данному исключенія произвольнаго постоянн. Видъ первыхъ $C = F(x,y)$; - вторыхъ $F(x,y,c) = 0$. Примѣръ:

$\int ydx = \frac{y^3}{x}$; $ydx = \frac{3y^2dy}{x} - \frac{y^3dx}{x^2}$; $\frac{y}{x}dx = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2dy - \left(\frac{y}{x}\right)^3dx$; $udx = 3u^2(udx + xdu) - u^3dx$

$dx = 2u^2dx + 3uxdu$; $(1-2u^2)dx = 3uxdu$; $\frac{dx}{x} = \frac{3udu}{1-2u^2}$; $lg x = -\frac{3}{4}lg(1-2u^2) + lg c$;

$x^4(1-2u^2)^3 = c$; $x^2(x^2-2y^2)^3 = Cx^2$;

Къ этому же виду приводятся неоднородныя уравненія вида:

$$(mx+ny+a)dx + (px+qy+b)dy = 0$$

подставимъ $\begin{cases} x = x_1+\alpha \\ y = y_1+\beta \end{cases}$ и выбираемъ α и β такъ, чтобы уравненіе сдѣлалось однороднымъ т.е. полагаемъ $\begin{cases} m\alpha+n\beta+a=0 \\ p\alpha+q\beta+b=0 \end{cases}$ отсюда $\alpha = \frac{bn-aq}{mq-np}$ и $\beta = \frac{ap-bm}{mq-np}$ и уравненіе получаетъ интегрируемую форму $(mx_1+ny_1)dx_1 + (px_1+qy_1)dy_1 = 0$. Этотъ пріемъ неудобенъ, когда α и β не могутъ быть опредѣлены, т.е. когда $mq-np=0$

но это бываетъ, когда данное уравненіе интегрируется непосредственно
$q=\frac{np}{m}$; уравненіе будетъ $(mx+ny+a)dx+(px+\frac{np}{m}y+b)dy=0$

$$(mx+ny+a)dx+\left[\frac{p}{m}(mx+ny)+b\right]dy=0$$

$(mx+ny)\left[dx+\frac{p}{m}dy\right]+adx+bdy=0$; полагая $mx+ny=u$; $y=\frac{u-mx}{n}$; получимъ

$$udx+\frac{up}{m}\left[\frac{du-mdx}{n}\right]+adx+\frac{b}{n}(du-mdx)=0$$ или $\cancel{mdx}$ =

$$dx\left[u-\frac{up}{n}+a-\frac{mb}{n}\right]+du\left[\frac{up}{m.n}+\frac{b}{n}\right]=0$$

уравненіе, въ которомъ перемѣнныя могутъ быть раздѣлены.

Переходимъ къ интегрированію линейныхъ уравненій вида $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, гдѣ P и Q суть функціи x. Положимъ $y=u.v$, тогда $udv+vdu+(Pu.v-Q)dx=0$; выберемъ v такимъ образомъ, чтобы $dv+Pv.dx=0$ отсюда $\frac{dv}{v}=-Pdx$; $lgv=-\int Pdx$; $v=e^{-\int Pdx}$. $vdu=Qdx$; $e^{-\int Pdx}.du=Qdx$; $du=e^{\int Pdx}Qdx$; $u=\int Qe^{\int Pdx}.dx+C$ отсюда $y=e^{-\int Pdx}\left(\int Q.e^{\int Pdx}.dx+C\right)$. Примѣры:

$\frac{dy}{dx}+y=x^3$; $y=v.u$; $udv+vdu+uvdx=x^3dx$; $dv+vdx=0$; $\frac{dv}{v}=-dx$; $v=e^{-x}$;
$vdu=x^3dx$; $du=e^{x}x^3dx$; $u=\int e^{x}x^3dx=e^{x}x^3-3\int e^{x}x^2dx$
$\qquad -3e^{x}x^2+6\int e^{x}xdx$
$\qquad +6e^{x}x-6\int e^{x}dx$
$\qquad -6e^{x}+C$

отсюда $y=x^3-3x^2+6x-6+Ce^{-x}$.

$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-xy=a$; $(1+x^2)(udv+vdu)-xu.vdx=adx$;

$(1+x^2)dv-xvdx=0$
$\frac{dv}{v}=\frac{xdx}{1+x^2}$
$lgv=\frac{1}{2}lg(1+x^2)$
$v=\sqrt{1+x^2}$

$(1+x^2)vdu=adx$
$du=\frac{adx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
$u=\frac{ax}{\sqrt{1+x^2}}+C$

отсюда $y=ax+C\sqrt{1+x^2}$.

Когда въ уравненіи $Mdx+Ndy$ не усматривается возможности примѣнить пріемъ для раздѣленія перемѣнныхъ, мы стараемся удостовѣриться не происходитъ-ли это уравненіе отъ непосредственнаго дифференцированія функціи u т.е. не существуетъ-ли равенства $Mdx+Ndy=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy$, отсюда
$M=\frac{du}{dx}$ дифференцируя по y получимъ $\frac{dM}{dy}=\frac{d^2u}{dx.dy}$
$N=\frac{du}{dy}$ " — " — " x $\frac{dN}{dx}=\frac{d^2u}{dy.dx}$ слѣдовательно $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$
послѣднее равенство называется условіемъ интегрируемости уравненія; интегрируя $M=\frac{du}{dx}$ по x, получимъ $u=\int Mdx+Y$, дифференцируя по y, находимъ $\frac{du}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx+\frac{dY}{dy}=N$ отсюда $\frac{dY}{dy}=N-\int\frac{dM}{dy}dx$ и $Y=\int Ndy-\int dy\int\frac{dM}{dy}dx+C$

слѣдовательно $u=\int Mdx+\int Ndy-\int dy\int\frac{dM}{dy}dx+C$. вопросъ такимъ образомъ рѣшенъ. Условіе интегрируемости заключается въ скрытой формѣ въ уравненіи опредѣляющемъ Y; такъ какъ Y есть постоянное относительно x, то, дифференцируя его по x, мы должны получить въ результатѣ ноль: $\int\frac{dN}{dx}dy-\int\frac{dM}{dy}dy=0$ откуда $\frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$. Примѣръ:

$\left[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right]dy=0$; посмотримъ, выполняется-ли условіе?

$-\frac{2y}{(x-y)^2}-\frac{2y^2}{(x-y)^3}=-\frac{2[y(x-y)-y^2]}{(x-y)^3}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$; $\frac{2x}{(x-y)^2}-\frac{2x^2}{(x-y)^3}=\frac{2[x(x-y)-x^2]}{(x-y)^3}=-\frac{2xy}{(x-y)^3}$;

$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $u=\lg x+\frac{y^2}{x-y}+Y$; $\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}=\frac{2y}{x-y}+\frac{y^2}{(x-y)^2}+\frac{dY}{dy}$ отсюда получаемъ

$\frac{dY}{dy}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}-\frac{2y}{x-y}-\frac{1}{y}=\frac{x+y}{x-y}-\frac{2y}{x-y}+\frac{1}{y}=1-\frac{1}{y}$; $Y=y-\lg y$; $u=\lg x-\lg y+\frac{y^2}{x-y}+y=C$.

приравниваемъ произвольному постоянному.

Каждое уравненіе $Mdx+Ndy=0$, какъ извѣстно имѣетъ интегралъ $u=c$; т.к. $du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=0$, то, исключивъ помощью даннаго уравненія $dy=-\frac{Mdx}{N}$, получимъ $\frac{du}{dx}-\frac{du}{dy}\cdot\frac{M}{N}=0$ отсюда $\frac{M}{\frac{du}{dx}}=\frac{N}{\frac{du}{dy}}=\frac{1}{\mu}$ слѣдовательно $\mu M=\frac{du}{dx}$; $\mu N=\frac{du}{dy}$; и потому

$$\mu[Mdx+Ndy]=du$$

очевидно, что помноживъ данное уравненіе на μ; мы получимъ полный дифференціалъ. μ называется интегрирующимъ множителемъ и существуетъ для всякаго дифференціальнаго уравненія, не смотря на то умѣемъ-ли мы, или неумѣемъ найти его интегралъ. Для опредѣленія его имѣемъ:

$\frac{d(\mu M)}{dy}=\frac{d(\mu N)}{dx}$; $\frac{d\mu}{dy}M+\mu\frac{dM}{dy}=\frac{d\mu}{dx}N+\mu\frac{dN}{dx}$; $M\frac{d\mu}{dy}-N\frac{d\mu}{dx}=\mu\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]$;

послѣднее уравненіе, служа для опредѣленія μ, содержитъ въ себѣ частныя производныя, т.к. μ есть функція двухъ перемѣнныхъ, и слѣдовательно свести рѣшеніе даннаго уравненія на рѣшеніе этого относительно μ, мы не имѣемъ права, ибо послѣдній вопросъ высшаго порядка, сравнительно съ первымъ. Только частные случаи, когда μ зависитъ отъ одного перемѣннаго, могутъ быть рѣшаемы: положимъ оно зависитъ только отъ x, тогда уравненіе его опредѣляющее обращается въ линейное вида $-N\frac{d\mu}{dx}=\mu\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]$.

Примѣръ: $dy+(Py-Q)dx=0$; $\mu dy+\mu(Py-Q)dx=0$; $\frac{d\mu}{dx}=\frac{d\mu}{dy}(Py-Q)+\mu P$; полагаемъ $\frac{d\mu}{dy}=0$ тогда $\frac{d\mu}{dx}=P\mu$; $\frac{d\mu}{\mu}=Pdx$; $\mu=e^{\int Pdx}$; помноживъ уравненіе на μ находимъ: $e^{\int Pdx}dy+e^{\int Pdx}(Py-Q)dx=0$; составивъ выраженіе $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$, получимъ:

$$e^{\int Pdx}P=P.e^{\int Pdx}$$

видимъ, что послѣ помноженія на μ условіе интегрируемости удовлетворяется.

Пусть M и N однородные коэффиценты степени n. $x^n\left[f\left(\frac{y}{x}\right)dx\right]+x^n\left[F\left(\frac{y}{x}\right)dy\right]=0$ стало-быть мы множимъ на $\frac{1}{x^n}$; затѣмъ мы полагаемъ $\frac{y}{x}=u$; $dy=udx+xdu$; $fu\,dx+F(u)(udx+xdu)=0$; $(fu+uFu)dx+Fu.x\,du=0$, и чтобы раздѣлить перемѣнныя ввели множитель $\frac{1}{x(fu+uFu)}$; стало-быть весь множитель введенный нами для приведенія однороднаго уравненія къ интегрируемому виду былъ $\frac{1}{x^{n+1}\left[f\frac{y}{x}+\frac{y}{x}.F\frac{y}{x}\right]}=\frac{1}{xM+yN}$; посмотримъ удовлетворяется-ли по введеніи этого множителя условіе интегрируемости, т.е. существуетъ-ли равенство $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$. Имѣемъ:

$$(\cancel{Mx}+Ny)\frac{dM}{dy}-M\left(\cancel{x\frac{dM}{dy}}+y\frac{dN}{dy}+\cancel{N}\right)=(Mx+\cancel{Ny})\frac{dN}{dx}-N\left(\cancel{M}+x\frac{dM}{dx}+\cancel{y\frac{dN}{dx}}\right)$$

$\frac{dM}{dy}Ny-\frac{dN}{dy}My=\frac{dN}{dx}Mx-\frac{dM}{dx}Nx$; $N\left(\frac{dM}{dy}y+\frac{dM}{dx}x\right)=M\left(\frac{dN}{dx}x+\frac{dN}{dy}y\right)$ по свойству однородныхъ функцій $n.N.M=nMN$, стало-быть условіе выполнено.

Можно доказать, что всякое выраженіе $f(u)\mu$ будетъ интегрирующимъ множителемъ. Докажемъ, что въ уравненіи $fu.\mu.Mdx+fu\mu Ndy=0$ условіе интегрируемости удовлетворяется, это и будетъ доказательствомъ нашего предложенія: $\frac{d(fu.\mu.M)}{dy}=\frac{d(fu.\mu.N)}{dx}$; $f'u\frac{du}{dy}\mu M+fu\frac{d(\mu M)}{dy}=f'u\frac{du}{dx}\mu N+fu\frac{d(\mu N)}{dx}$ или вставляя $\mu M=\frac{du}{dx}$; $\mu N=\frac{du}{dy}$ получимъ:

$f'u\mu^2MN+fu\frac{d(\mu M)}{dy}=f'u\mu^2MN+fu\frac{d(\mu N)}{dx}$ а т.к. μ по предположенію есть интегрирующій множитель, то вторые члены равны и стало-быть условіе удовлетворяется.

Если существуютъ два интегрирующихъ множителя, то одинъ μ_1 равенъ другому μ умноженному на функцію и т.е. интеграла даннаго уравненія.

$$\left.\begin{aligned}\mu Mdx+\mu Ndy&=du\\ \mu_1Mdx+\mu_1Ndy&=dU\end{aligned}\right\}$$ отсюда $\frac{\mu_1}{\mu}=\frac{dU}{du}$; $dU=\frac{\mu_1}{\mu}du$ и $\frac{\mu_1}{\mu}=fu$ ибо иначе одно

этихъ выраженій не было бы полнымъ дифференціаломъ. Если извѣстны два интегрирующихъ множителя, то $\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const}$ будетъ интеграломъ нашего уравненія.

Возьмемъ произведенія $(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right) = Mdx + N\frac{y}{x}dx + M\frac{x}{y}dy + Ndy$ и

$$(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right) = Mdx - N\frac{y}{x}dx - M\frac{x}{y}dy + Ndy$$

и сложимъ ихъ: $Mdx+Ndy = \frac{1}{2}(Mx+Ny)\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right) + \frac{1}{2}(Mx-Ny)\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right) =$

$$= \frac{1}{2}(Mx+Ny)\,d(\lg(xy)) + \frac{1}{2}(Mx-Ny)\,d\left(\lg\left(\frac{x}{y}\right)\right)$$

Если уравненіе такого свойства, что $Mx-Ny=0$ то $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny} = \frac{1}{2}d(\lg xy)$ интегрирующій множитель слѣдовательно $\frac{1}{Mx+Ny}$

Если наоборотъ $Mx+Ny=0$; то $\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny} = \frac{1}{2}d(\lg\frac{x}{y})$ интегрир: множитель $\frac{1}{Mx-Ny}$;

эти заключенія можно формулировать такъ: если одно изъ выраженій $Mx \pm Ny$ равняется нулю, то единица, дѣленная на другое есть интегрирующій множитель.

Примѣръ: $(x^2y^2+xy^3)dx - (x^3y+x^2y^2)dy=0$; составивъ выраженіе $Mx+Ny$ видимъ, что оно равно нулю: $x^3y^2+x^2y^3-x^3y^2-x^2y^3=0$, слѣдовательно интегрирующій множ: $=\frac{1}{2(x^3y^2+x^2y^3)}$

$$\frac{x^2y^2+xy^3}{x(x^2y^2+xy^3)}dx - \frac{x^3y+x^2y^2}{y(x^3y+x^2y^2)}dy=0;\quad \frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0;\quad \lg x-\lg y=\lg C.;\quad \frac{x}{y}=C.$$

Возьмемъ $\frac{Mdx+Ndy}{Mx-Ny} = \frac{1}{2}\,\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}\,d(\lg xy)+\frac{1}{2}d(\lg\frac{x}{y})$; лѣвая часть будетъ точнымъ дифференціаломъ, когда правая будетъ имъ, т.е. когда $\frac{Mx+Ny}{Mx-Ny}=F(xy)$. Если отношеніе это будетъ функціей произведенія xy, то интегрирующій множитель этого уравненія есть $\frac{1}{Mx-Ny}$; это бываетъ всегда, когда $M=y\varphi(xy)$ и $N=x\varphi_1(xy)$; уравненіе имѣетъ видъ: $\varphi(xy)ydx+\varphi_1(xy)xdy=0$; интегрирующій множитель: $\frac{1}{\varphi(xy)xy-\varphi_1(xy)xy}$

Примѣръ: $(y+xy^2)dx+(x-x^2y)dy=0$ интегр: множ: $\frac{1}{xy(1+xy)-xy(1-xy)}=\frac{1}{2x^2y^2}$; введя его, мы обращаемъ уравненіе въ точный дифференціалъ.

Если возьмемъ $\frac{Mdx+Ndy}{Mx+Ny}=\frac{1}{2}d(\lg xy)+\frac{1}{2}\,\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}\,d(\lg\frac{x}{y})$, то по предъидущему первая часть будетъ точнымъ дифференціаломъ, когда $\frac{Mx-Ny}{Mx+Ny}=F(\frac{x}{y})$; инт: множ: $\frac{1}{Mx+Ny}$ подобный мы встрѣчали при однородныхъ уравненіяхъ, что и понятно, ибо, если

M и N однородныя функціи $n^{ой}$ степени, то числитель и знаменатель взятаго отношенія будутъ однородными функціями $n+1$ степени; раздѣливъ ихъ на y^{n+1} получимъ $f\left(\frac{x}{y}\right)$.

Зададимъ теперь себѣ такой вопросъ: какому условію должно удовлетворять уравненіе, чтобы интегрирующій множитель имѣлъ опредѣленную форму, напримѣръ $\mu = f\left(\frac{y}{x}\right)$ былъ бы однородной функціей нулевой степени. $\frac{y}{x}=v$; $\mu=f(v)$. Общее условіе интегрируемости: $\frac{d(\mu M)}{dy}=\frac{d(\mu N)}{dx}$; $\frac{d\mu}{dy}M+\mu\frac{dM}{dy}=\frac{d\mu}{dx}N+\mu\frac{dN}{dx}$ $\frac{d\mu}{dy}M-\frac{d\mu}{dx}N=\mu\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]$; $\frac{d\mu}{dy}=\frac{f'(v)}{x}$; $\frac{d\mu}{dx}=-f'(v)\frac{y}{x^2}$; $f'(v)\left[\frac{M}{x}+\frac{Ny}{x^2}\right]=f(v)\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]$ отсюда $f'(v)(Mx+Ny)=x^2f(v)\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)$; $\frac{f'(v)}{f(v)}=\frac{x^2\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]}{Mx+Ny}=F\left(\frac{y}{x}\right)$. Чтобы интегрирующій множитель былъ однородной функціей нулевой степени, необходимо, чтобы эта дробь была такою-же, тогда $\lg\mu=\int Fv\,dv$ и $\mu=e^{\int Fv\,dv}$. Если M и N однородныя, то это условіе выполняется и тогда и числитель и знаменатель однородныя функціи одной и той-же степени. Примѣръ неоднороднаго уравненія, которое однако удовлетворяетъ сказанному условію:

$\left(\frac{1}{y}+\sec\frac{y}{x}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$; $\frac{dM}{dy}=-\frac{1}{y^2}+\frac{\mathrm{sn}\frac{y}{x}}{x\,\mathrm{cs}^2\frac{y}{x}}$; $\frac{dN}{dx}=-\frac{1}{y^2}$; условіе однородности

$$\frac{x^2\left[-\frac{\mathrm{sn}\frac{y}{x}}{x\,\mathrm{cs}^2\frac{y}{x}}\right]}{\frac{x}{\mathrm{cs}\frac{y}{x}}}=-\frac{\mathrm{sn}\frac{y}{x}}{\mathrm{cs}\frac{y}{x}}=-\mathrm{tg}\frac{y}{x}$$

отсюда заключаемъ, что данное уравненіе имѣетъ интегрирующій множитель однородный нулевой степени: $\lg\mu=\int\frac{-\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cs}\,v}dv=\lg\mathrm{cs}\,v$; $\mu=\mathrm{cs}\frac{y}{x}$.

Отыщемъ это условіе въ болѣе общей формѣ, чтобы $\mu=x^nf\left(\frac{y}{x}\right)$ однородной функціи $n^{ой}$ степени: $\frac{y}{x}=v$ и $\mu=x^nf(v)$. $\frac{d\mu}{dy}=\frac{x^nf'v}{x}=x^{n-1}f'(v)$; $\frac{d\mu}{dx}=nx^{n-1}f(v)-x^{n-2}.y.f'(v)$;

$$Mx^{n-1}f'v-Nnx^{n-1}fv+Nx^{n-2}yf'v=x^nfv\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]$$

$$f'(v)\left[Mx+Ny\right]=f(v)\left[x^2\left(\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right)+nNx\right]$$

$$\frac{f'(v)}{f(v)}=\frac{x^2\left[\frac{dN}{dx}-\frac{dM}{dy}\right]+nNx}{Mx+Ny}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Съ помощью этой формулы обнаруживается, что вообще неоднородное уравненіе $P_1dx+P_2dy+Q(xdy-ydx)=0$ можетъ быть обинтегрировано.

Положимъ p степень однородности P_1 и P_2 и q тоже для Q; произвольное количество n позволяетъ выполнить требуемое условіе: $(P_1+yQ)dx+(P_2-xQ)dy=0$ отсюда

$$\left.\begin{aligned}\frac{dM}{dy}&=\frac{dP_1}{dy}+Q+y\frac{dQ}{dy}\\ \frac{dN}{dx}&=\frac{dP_2}{dx}-Q-x\frac{dQ}{dx}\end{aligned}\right\}\ \frac{x^2\left(\frac{dP_2}{dx}-\frac{dP_1}{dy}\right)-2x^2Q-x^2\left(x\frac{dQ}{dx}+y\frac{dQ}{dy}\right)+nx(P_2-xQ)}{P_1x+P_2y}=$$

$$\frac{x^2\left(\frac{dP_2}{dx}-\frac{dP_1}{dy}\right)-x^2Q(2+q)+nxP_2-nx^2Q}{P_1x+P_2y}$$

Въ этомъ выраженіи 1ый и 3ій члены числителя и знаменатель суть однородныя функціи $p+1$ степени; принимая $n=-(2+q)$, видимъ, что оставшееся выраженіе будетъ однородное нулевой степени. Слѣдовательно данное уравненіе имѣетъ интегрирующаго множителя - однородную функцію степени $-(2+q)$.

Примѣръ, надъ которымъ работали Эйлеръ и Якоби.

$(A+A_1x+A_2y)(xdy-ydx)-(B+B_1x+B_2y)dy+(C+C_1x+C_2y)dx=0$. постоянныя A, B, C можно уничтожить выбравъ α и β въ выраженіяхъ $x=x'+\alpha$ и $y=y'+\beta$; получимъ:

$$(A+A_1x+A_1\alpha+A_2y+A_2\beta)(xdy-ydx+\alpha dy-\beta dx)-(B+B_1x+B_1\alpha+B_2y+B_2\beta)dy+(C+C_1x+C_1\alpha+C_2y+C_2\beta)dx=0$$

$\alpha(A+A_1\alpha+A_2\beta)=B+B_1\alpha+B_2\beta$ и $\beta(A+A_1\alpha+A_2\beta)=C+C_1\alpha+C_2\beta$; отсюда опредѣляются α и β. тогда остается слѣдующее уравненіе:

$$(A+A_1\alpha+A_2\beta)(\underline{xdy}-\underline{ydx})+(A_1x+A_2y)(xdy-ydx)+(\underline{A_1x}+\underline{A_2y})(\underline{\alpha dy}-\underline{\beta dx})-(\underline{B_1x}+\underline{B_2y})\underline{dy}+(\underline{C_1x}+\underline{C_2y})\underline{dx}=0$$

соединяя одинакія члены, находимъ: $(A_1x+A_2y)(xdy-ydx)-(B'x+B''y)dy+(C'x+C''y)dx=0$

Такъ какъ $q=1$, то интегрирующій множитель будетъ степени -3 однородная функція: Рѣшимъ написанныя выше уравненія относительно α и β.

$$\frac{B+B_1\alpha+B_2\beta}{\alpha}=\frac{C+C_1\alpha+C_2\beta}{\beta}=\frac{A+A_1\alpha+A_2\beta}{1}=\lambda \text{ отсюда}$$

$$\begin{array}{l|l|l} A-\lambda+A_1\alpha+A_2\beta=0 & B_2 & C_2-\lambda\\ B+(B_1-\lambda)\alpha+B_2\beta=0 & A_2 & \\ C+C_1\alpha+(C_2-\lambda)\beta=0 & & A_2\end{array}$$

$$(A-\lambda)B_2-A_2B+(A_1B_2-A_2(B_1-\lambda))\alpha=0$$

$$(A-\lambda)(C_2-\lambda)-A_2C+(A_1(C_2-\lambda)-C_1A_2)\alpha=0$$

$$[(A-\lambda)B_2-A_2B][A_1(C_2-\lambda)-C_1A_2]-[(A-\lambda)(C_2-\lambda)-A_2C][A_1B_2-A_2(B_1-\lambda)]=0 \text{ отсюда}$$

$$-\lambda^3+(A+B_1+C_2)\lambda^2+(A_1B+B_2C_1+A_2C-B_1C_2-AB_1-AC_2)\lambda+AB_1C_2+A_1B_2C+A_2BC_1-A_2B_1C-A_1BC_2-AB_2C_1=0.$$

Опредѣливъ λ помощью этого уравненія, легко найдемъ α и β.

Когда уравненіе не интегрируется, то изслѣдуютъ частные его случаи, при частныхъ значеніяхъ коэффиціентовъ, которые можно интегрировать; и затѣмъ обобщаютъ вопросъ оконченнымъ въ томъ смыслѣ, что остальные случаи не могутъ быть проинтегрированы. Примѣръ: $\frac{dy}{dx}+by^2=cx^n$; подставимъ $y=\frac{z}{x}$, получимъ уравненіе вида $x\frac{dy}{dx}-ay+by^2=cx^n$ при частныхъ значеніяхъ $a=1$ и $n=n+2$. Подставимъ сюда $y=zx^a$; $\frac{dy}{dx}=ax^{a-1}z+x^a\frac{dz}{dx}$; $\cancel{ax^az}+x^{a+1}\frac{dz}{dx}-\cancel{ax^az}+bx^{2a}z^2=cx^n$; въ этомъ уравненіи перемѣнныя могутъ быть раздѣлены, если $n=2a$, ибо тогда $x^{1-a}\frac{dz}{dx}+bz^2=c$ или $\frac{dz}{c-bz^2}=\frac{dx}{x^{1-a}}$; подставимъ $y=A+\frac{x^n}{y_1}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{nx^{n-1}}{y_1}-\frac{x^n\frac{dy_1}{dx}}{y_1^2}$; уравненіе получаетъ видъ: $\frac{nx^n}{y_1}-\frac{x^{n+1}\frac{dy_1}{dx}}{y_1^2}-aA-\frac{ax^n}{y_1}+bA^2+\frac{2bAx^n}{y_1}+\frac{bx^{2n}}{y_1^2}=cx^n$. Выберемъ A такъ, чтобы $aA=bA^2$ т.е. полагаемъ $A=0$ или $A=\frac{a}{b}$, тогда: $ny_1x^n-x^{n+1}\frac{dy_1}{dx}\cancel{-ay_1x^n}+\cancel{2}ay_1x^n+bx^{2n}=cy_1^2x^n$. или $ny_1-x\frac{dy_1}{dx}+ay_1+bx^n=cy_1^2$; $x\frac{dy_1}{dx}-(a+n)y_1+cy_1^2=bx^n$; сравнивая полученное уравненіе съ начальнымъ, видимъ, что вслѣдствіе подстановки $y=\frac{a}{b}+\frac{x^n}{y_1}$ коэффиціенты b и c перемѣстились, а a получило приращеніе n; стало быть сдѣлавъ въ этомъ уравненіи такую-же подстановку $y_1=\frac{a+n}{c}+\frac{x^n}{y_2}$, получимъ уравненіе $x\frac{dy_2}{dx}-(a+2n)y_2+by_2^2=cx^n$; условіе интегрируемости здѣсь $n=2(a+2n)$ послѣ i подстановокъ это условіе напишется такъ $n=2(a+in)$ откуда $i=\frac{n-2a}{2n}$ должно быть цѣлымъ положительнымъ числомъ. Интегралъ такого уравненія будетъ

$$y=\frac{a}{b}+\cfrac{x^n}{\frac{a+n}{c}+\cfrac{x^n}{\frac{a+2n}{b}+\cfrac{x^n}{\ddots+\cfrac{x^n}{y_i}}}}$$

. Положимъ теперь, что $A=0$, тогда $ny_1x^n-x^{n+1}\frac{dy_1}{dx}-ay_1x^n+bx^{2n}=cy_1^2x^n$; или $ny_1-x\frac{dy_1}{dx}-ay_1+bx^n=cy_1^2$ иначе $x\frac{dy_1}{dx}-(n-a)y_1+cy_1^2=bx^n$ и въ этомъ случаѣ b и c мѣняются мѣстами. Условіе интегрируемости $n=2(n-a)$ послѣ i подстановокъ $n=2(in-a)$ откуда $i=\frac{n+2a}{2n}$ = цѣлому положительному числу. Интегралъ въ этомъ случаѣ будетъ

$$y=\cfrac{x^n}{\frac{n-a}{c}+\cfrac{x^n}{\frac{2n-a}{b}+\cfrac{x^n}{\ddots+\cfrac{x^n}{y_i}}}}$$

. Соединяя въ одно полученныя заключенія имѣемъ $\frac{n\pm 2a}{2n}$ = цѣл. пол. ч. замѣняя $a=1$ и $n=n+2$, найдемъ условіе интегрируемости даннаго уравненія Риккати. $\frac{n+2\pm 2}{2n+4}=i$; отсюда $\frac{n}{2n+4}=i$; $n=2ni+4i$; $n=-\frac{4i}{2i-1}$; или $\frac{n+4}{2n+4}=i+1$; $n+4=2ni+4i+2n+4$; $n=-\frac{4i}{2n+1}$. —

Положимъ, что мы не имѣемъ понятія о логариѳмѣ и встрѣчаемъ уравненіе $\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=0$; означивъ $\int_1^x\frac{dx}{x}=Fx=u$; $\int_1^y\frac{dy}{y}=Fy=v$; тогда $\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_1^y\frac{dy}{y}=c$ полагивъ при $x=1$, $y=z$ имѣемъ $c=\int_1^z\frac{dz}{z}$ отсюда $\int_1^x\frac{dx}{x}+\int_1^y\frac{dy}{y}=\int_1^z\frac{dz}{dz}$; очевидно $\int_1^z\frac{dz}{z}=Fz=W$, слѣдовательно $u+v=W$. Приведя данное уравненіе къ одному знаменателю и интегрируя его, получаемъ $ydx+xdy=0$; $d(xy)=0$; $xy=c$; $xy=z$; сравнивая это выраженіе съ прежде полученнымъ, находимъ $Fxy=Fx+Fy$: а этого свойства достаточно, чтобы вывести всю теорію логариѳмовъ. Положимъ, что, изучая тригонометрическихъ функцій, намъ пришлось интегрировать $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$. Дадимъ условіе, что при $x=0$, $y=z$. Означимъ, какъ и прежде, $\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=u$; $x=\varphi(u)$; $\int_0^y\frac{dy}{1+y^2}=v$; $y=\varphi v$; тогда $\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}+\int_0^y\frac{dy}{1+y^2}=c=\int_0^z\frac{dz}{1+z^2}=W$; отсюда $z=\varphi W$. Интегрируемъ тоже уравненіе алгебраически: $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$; додавъ въ скобкахъ $\pm xy$ найдемъ $[1-xy+y(x+y)]dx+[1-xy+x(x+y)]dy=0$; $(1-xy)d(x+y)+(x+y)d(xy)=0$; преобразуемъ такимъ образомъ $\frac{(1-xy)d(x+y)-(x+y)d(1-xy)}{(1-xy)^2}=0$; $d\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)=0$; $\frac{x+y}{1-xy}=c=z$; и слѣдовательно $\varphi W=\varphi(u+v)=\frac{\varphi u+\varphi v}{1-\varphi u\varphi v}$ это выраженіе опредѣляетъ свойство функціи тангенса.
Скажемъ еще о синусѣ: дано уравненіе $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$; введя условіе, что при $x=0$; $y=z$; получаемъ $\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=c=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ или $u+v=W$; $x=\psi u$; $y=\psi v$; $z=\psi W$. Чтобы найти алгебраическій интегралъ помножимъ уравненіе на $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy$, имѣемъ: $\sqrt{1-y^2}\cdot dx-\frac{xydx}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}\cdot dy-\frac{xydy}{\sqrt{1-y^2}}=0$; $d(x\sqrt{1-y^2})+d(y\sqrt{1-x^2})=0$; $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=c=z$ отсюда $\psi W=\psi(u+v)=\psi u\sqrt{1-\psi v^2}+\psi v\sqrt{1-\psi u^2}$; уравненіе показывающее свойство синуса. Другой интегралъ данного уравненія будетъ $\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}-xy=\sqrt{1-z^2}=c$; ибо оно имѣетъ два интегрирующихъ множителя — указанный выше и единицу — отношеніе ихъ приравненное постоянному дастъ этотъ интегралъ, подставляя сюда φ найдемъ функцію опредѣляющую свойство косинуса.
Интегрированіе уравненія $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+fx^4}}+\frac{dy}{\sqrt{a+by+cy^2+ey^3+fy^4}}=0$ приводитъ насъ къ функціямъ эллиптическимъ. Положимъ $a+bx+\dots fx^4=X$ и $a+by+\dots fy^4=Y$; $\frac{dx}{\sqrt{X}}=-\frac{dy}{\sqrt{Y}}=dt$ отсюда $\frac{dx}{dt}=\sqrt{X}$; $\frac{dy}{dt}=-\sqrt{Y}$. Введемъ новыя перемѣнныя $\begin{cases}p=x+y\\ q=x-y\end{cases}$; $\frac{dp}{dt}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\sqrt{X}-\sqrt{Y}$; $\frac{dq}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}=\sqrt{X}+\sqrt{Y}$. составимъ $\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=X-Y=b(x-y)+c(x^2-y^2)+e(x^3-y^3)+f(x^4-y^4)=$ $=bq+cpq+eq\left(\frac{3p^2+q^2}{4}\right)+fpq\left(\frac{p^2+q^2}{2}\right)$. $\frac{d^2p}{dt^2}=\frac{\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}}{\sqrt{X}}-\frac{\frac{1}{2}\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}}{\sqrt{Y}}=\frac{1}{2}\left[\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}\right]=\frac{1}{2}[2b+2c(x+y)+3e(x^2+y^2)+4f(x^3+y^3)]=\frac{1}{2}\left[2b+2cp+\frac{3e}{2}(p^2+q^2)+fp(3q^2+p^2)\right]$; $q\frac{d^2p}{dt^2}=bq+cpq+\frac{e}{4}(3p^2q+3q^3)+\frac{f}{2}(3pq^3+p^3q)$; составимъ разность $q\frac{d^2p}{dt^2}-\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dq}{dt}=\frac{e}{2}q^3+fpq^3$; раздѣливъ на q^2 получимъ точный дифференціалъ дроби

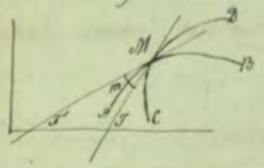
$d\left[\frac{\frac{dp}{dt}}{q}\right]=\left[\frac{c}{2}+fp\right]q\,dt$; отсюда $\frac{\frac{dp}{dt}}{q}\cdot d\left[\frac{\frac{dp}{dt}}{q}\right]=\left[\frac{c}{2}+fp\right]dp$ интегрируемъ: $\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{dp}{dt}}{q}\right]^2=\frac{C}{2}+\frac{cp}{2}+\frac{fp^2}{2}$ или $\frac{dp}{dt}=q\sqrt{C+cp+fp^2}=\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=\sqrt{X}-\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{C+c(x+y)+f(x+y)^2}$. Помощью этой функціи можно интегрировать данное уравненіе. Пріемъ предложенъ Лежандромъ.

Интеграція дифференціальнаго уравненія $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ какой-нибудь степени можетъ быть совершена, если оно разрѣшимо относительно $\frac{dy}{dx}$; ибо тогда мы можемъ интегрировать каждый изъ корней $\frac{dy}{dx}=\varphi_1(x,y)=\varphi_2(xy)\ldots\ldots=\varphi_m(xy)$ отдѣльно и получимъ $F_1(xy)=c_1$; $F_2(xy)=c_2$; $\ldots$ $F_m(xy)-c_m$; соединяя всѣ эти рѣшенія въ одну формулу имѣемъ $[F_1-c][F_2-c]\ldots[F_m-c]=0$; гдѣ для каждаго отдѣльнаго случая c есть произвольное постоянное, введенное интеграціей.

Разсмотримъ тѣ случаи дифференціальныхъ уравненій, которые могутъ быть интегрированы: 1.) уравненіе содержитъ только производныя: $f(\frac{dy}{dx})=0$; разрѣшая его, находимъ $\frac{dy}{dx}=a_1$ интегрируемъ: $y=a_1x+C$; $a_1=\frac{y-C}{x}$; отсюда получаемъ $f(\frac{y-C}{x})=0$, которое есть интегралъ даннаго уравненія. 2.) уравненіе, содержащее кромѣ производныхъ одно изъ перемѣнныхъ, если оно разрѣшимо относительно этого перемѣннаго $f(\frac{dy}{dx},y)=0$; $y=\varphi(\frac{dy}{dx})$ или, полагая $\frac{dy}{dx}=p$; $y=\varphi(p)$ дифференцируемъ $dy=p\,dx=\varphi'(p)\,dp$; отсюда $x=\int\frac{\varphi'(p)dp}{p}=F(p)+C$. 3.) точно также поступаемъ съ уравненіемъ $f(\frac{dy}{dx},x)=0$ т.е. полагаемъ $x=\varphi(p)$ .....I тогда $dx=\frac{dy}{p}=\varphi'(p)dp$ откуда $y=\int p.\varphi'(p)dp=F(p)+C$ .....II исключеніе x и y изъ уравненій I и II приводитъ насъ къ одному уравненію съ производными. 4.) Уравненіе содержащее оба перемѣнныхъ, но разрѣшимое относительно одного изъ нихъ $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$; введя новое перемѣнное $\frac{dy}{dx}=p$, имѣемъ $y=\varphi(\frac{dy}{dx},x)=\varphi(p,x)$ дифференцируемъ: $dy=\frac{d\varphi}{dp}dp+\frac{d\varphi}{dx}dx=p\,dx$ отсюда $p=\frac{d\varphi}{dp}\cdot\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}$ уравненіе перваго порядка и степени. (точно тоже имѣетъ въ случаѣ, если данное уравненіе рѣшено относительно x). Возьмемъ для примѣра $y=x.\varphi(p)+\psi(p)$ по сказанному дифференцируемъ:
$p\,dx=\varphi(p)dx+x\varphi'(p)dp+\psi'(p)dp$; раздѣливъ ~~это уравненіе~~ его на dp, получаемъ уравненіе $[\varphi(p)-p]\frac{dx}{dp}+x\varphi'(p)+\psi'(p)=0$ линейное относительно x, которое всегда можетъ быть интегрировано. Затрудненія представляются только въ томъ случаѣ, когда $\varphi(p)=p$ т.е. $y=px+\psi(p)$; прилагая прямо дифференцированіе, находимъ
$p\,dx=p\,dx+x\,dp+\psi'(p)dp$ откуда $[x+\psi'(p)]dp=0$; послѣднему уравненію можно удовлетворить двоякимъ образомъ: или, полагая $dp=0$, т.е. $p=C$, что приводитъ насъ къ интегралу $y=Cx+\psi(C)$ или, полагая $x+\psi'(p)=0$ откуда $x=-\psi'(p)$; исключая изъ послѣдняго уравненія и даннаго p получимъ $F(x,y)=0$ интегралъ называемый особымъ рѣшеніемъ, который не содержитъ произвольнаго постояннаго и не можетъ быть полученъ изъ общаго интеграла

ни при какомъ частномъ значеніи этого постояннаго.

Геометрическія приложенія. Задача: дана кривая, заключающая въ своемъ уравненіи $F(x,y,\alpha)=0$ произвольный параметръ α; т.е. другими словами данъ цѣлый классъ подобныхъ кривыхъ, требуется опредѣлить кривую, пересѣкающую всѣ данныя подъ опредѣленнымъ угломъ, напримѣръ подъ угломъ, тангенсъ котораго есть m. (угломъ между кривыми считается уголъ между касательными къ точкѣ пересѣченія). Такая кривая называется траекторіей. Изъ чертежа очевидно, что



$$m = tg(T-T') = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}}{1 - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}} = \frac{\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}-\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}}$$; отсюда имѣемъ

$$m\frac{dF}{dy} - m\frac{dF}{dx}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{dx}$$; исключивъ изъ этого уравненія и уравненія данныхъ кривыхъ произвольный параметръ α, получимъ $\varphi(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ интегралъ котораго и представитъ намъ уравненіе траекторіи. Если она пересѣкаетъ кривыя подъ прямымъ угломъ, то называется ортогональной. Условіе ея существованія $m=\infty$; а т.к. числитель безконечностью быть не можетъ, то условіе это представится въ формѣ $\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0$.

Опредѣлимъ напримѣръ ортогональную траекторію гомофокальныхъ эллипсовъ, т.е. такихъ, ~~у~~ которые имѣютъ общіе фокусы, ~~одни и~~ ~~[illegible]~~ и слѣдовательно сохраняютъ одинакій эксцентрицитетъ. Уравненіе ихъ $\frac{x^2}{\varrho^2}+\frac{y^2}{\varrho^2-b^2}=1$; условіе существованія ортогональной траекторіи $\frac{y}{\varrho^2-b^2} - \frac{x}{\varrho^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$; исключимъ изъ этихъ уравненій произвольный параметръ ϱ: ~~тогда~~: $\varrho^2 y - \varrho^2 x\frac{dy}{dx} + b^2x\frac{dy}{dx}=0$; $\varrho^2 = \frac{b^2x\frac{dy}{dx}}{x\frac{dy}{dx}-y}$; $\varrho^2-b^2 = \frac{b^2y}{x\frac{dy}{dx}-y}$;

$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{xdy-ydx}{b^2xdy}$; $\frac{1}{\varrho^2-b^2}=\frac{xdy-ydx}{b^2ydx}$; результатъ исключенія:

$1 = \frac{xdy-ydx}{b^2}\left[\frac{x}{dy}+\frac{y}{dx}\right]$ или $1=\frac{[xdy-ydx].[xdx+ydy]}{b^2dx.dy}$. Интегрируя это уравненіе, получимъ искомое уравненіе траекторіи. Такъ какъ это довольно сложно, то мы опредѣлимъ видъ этого интеграла, исключая ϱ изъ даннаго уравненія и его производной

$\frac{xdx}{\varrho^2}+\frac{ydy}{\varrho^2-b^2}=0$; $\varrho^2=\frac{b^2xdx}{xdx+ydy}$; $\varrho^2-b^2 = -\frac{b^2ydy}{xdx+ydy}$; $\frac{1}{\varrho^2}=\frac{xdx+ydy}{b^2xdx}$; $\frac{1}{\varrho^2-b^2} = -\frac{xdx+ydy}{b^2ydy}$

результатъ исключенія: $1=\frac{xdx+ydy}{b^2}\left[\frac{x}{dx}-\frac{y}{dy}\right]$ или $1=\frac{[xdx+ydy][xdy-ydx]}{b^2dxdy}$; это уравненіе есть ничто иное какъ дифференціальное уравненіе гомофокальныхъ эллипсовъ оно тождественно съ полученнымъ выше дифференціальнымъ уравненіемъ искомой траекторіи, слѣдо-

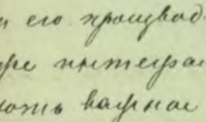
заключаемъ, что интегралъ этого послѣдняго будетъ уравненіе софокусныхъ
Эллипсовъ, въ которомъ роль перемѣннаго параметра будетъ играть произвольное
постоянное. Искомая ортогональная траекторія есть эллипсъ съ тѣми же
фокусами, какъ и данный.

Выше мы сказали, что особыми рѣшеніями называются тѣ интегралы, даннаго уравненія, которые удовлетворяютъ ему, но не содержатъ произвольнаго постояннаго и не могутъ быть получены изъ общаго интеграла при какомъ-нибудь частномъ значеніи этого постояннаго. Весьма важно умѣть отличать ихъ отъ частныхъ интеграловъ: пусть дано уравненіе $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$; общій интегралъ его $F(x,y,C)=0$ характеризуется тѣмъ, что результатомъ исключенія изъ него и производнаго $\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0$ будетъ уравненіе тождественное съ даннымъ. Особое рѣшеніе можемъ вывести отсюда считая C перемѣннымъ, ибо при этомъ предположеніи $F(x,y,C)$ можетъ обратиться въ новую $\varphi(x,y)$. Опредѣлимъ такое c, подъ условіемъ, чтобы интегралъ удовлетворялъ данному уравненію. $\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dc}dc=0$ отсюда $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}-\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\cdot\frac{dc}{dx}$ если c постоянное, то получаемъ $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$ удовлетворяющее уравненію; слѣдовательно, чтобы уравненіе удовлетворялось и при перемѣнномъ c надо, чтобы $\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\frac{dc}{dx}=0$, тогда результатъ исключенія c будетъ одинаковъ какъ при постоянномъ c, такъ и при перемѣнномъ. Написанное условіе удовлетворяется въ трехъ случаяхъ: 1) $\frac{dc}{dx}=0$; 2) $\frac{dF}{dc}=0$, 3) $\frac{dF}{dy}=\infty$; первый случай откидываемъ, ибо онъ даетъ $c=const$ остаются такимъ образомъ два уравненія; съ помощью любаго изъ которыхъ можно опредѣлить c какъ функцію x и y. Это и будетъ особымъ рѣшеніемъ.

Между особымъ рѣшеніемъ и интегрирующимъ множителемъ существуетъ замѣчательное соотношеніе: положимъ $\varphi(x,y)=c$ и $\mu[dy-f(x,y)]=du$ интегралъ его будетъ $u=c$; особое рѣшеніе даетъ уравненіе $\frac{du}{dy}=\infty$, но $\frac{du}{dy}=\mu$, отсюда $\mu=\infty$.

Примѣръ: $xdx+ydy=dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}$ интегрирующій множитель $\frac{1}{\sqrt{y^2+x^2-a^2}}$; интегрируя уравненіе $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=dy$, получимъ $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=y+C$ общій интегралъ. Условіе $\frac{dF}{dc}=0$ не годится т. к. c при дифференцированіи исчезаетъ; пользуясь другимъ $\frac{dF}{dy}=\infty$ находимъ $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-1=\infty$ отсюда $x^2+y^2=a^2$; особое рѣшеніе есть кругъ, тогда какъ общій интегралъ есть уравненіе параболы. Возведя его въ квадратъ, имѣемъ: $x^2+y^2-a^2=y^2+2cy+c^2$; $2yc+c^2-a^2-x^2=0$, теперь можно приложить и первое условіе $2y+2c=0$ откуда $c=-y$ это значеніе постояннаго c обращаетъ общій интегралъ въ особое рѣшеніе; подставивъ его, получаемъ $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$; $x^2+y^2=a^2$; при этомъ видѣ интеграла неприложимо второе условіе.

Такимъ образомъ особыя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій перваго порядка получаются, если мы исключимъ постоянное изъ общаго интеграла и его производной по этому постоянному, приравненной нулю, или изъ того-же интеграла и его производной по y, приравненной безконечности. Они имѣютъ важное значеніе въ геометрическихъ вопросахъ. Рѣшимъ нѣсколько примѣровъ: 1.) Найти такую кривую, чтобы отрѣзокъ касательной къ ней, заключенный между осями координатъ, имѣлъ ~~опредѣленную~~ постоянную длину l.



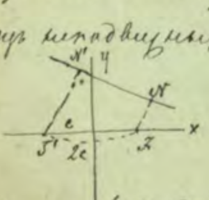
$MN=l$. Уравненіе касательной $Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$ отсюда $OM=y-px$; $ON=\frac{px-y}{p}$ гдѣ $p=\frac{dy}{dx}$; условіе вопроса $\overline{OM}^2+\overline{ON}^2=l^2$ или

$(y-px)^2+\left(\frac{px-y}{p}\right)^2=l^2$; $(y-px)^2(p^2+1)=l^2p^2$; $y-px=\frac{lp}{\sqrt{1+p^2}}$; $y=px+\frac{lp}{\sqrt{1+p^2}}$

Дифференцируя послѣднее уравненіе, получаемъ $pdx=pdx+xdp+\frac{ldp}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{lp^2dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$

$dp\left[x+\frac{l}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]=0$ отсюда $dp=0$; $p=c$ и слѣдовательно $y=cx+\frac{cl}{\sqrt{1+c^2}}$ общій интегралъ представляетъ безконечное множество прямыхъ. Особое рѣшеніе даетъ уравненіе $x+\frac{l}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}=0$; $x=-\frac{l}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$; $y=\frac{-pl}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{pl}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{p^3l}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$; исключая изъ двухъ послѣднихъ уравненій p, ~~получимъ~~ имѣемъ $\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{1+p^2}$; $\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{p^2}{1+p^2}$; складывая, получаемъ уравненіе $\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}}=1$, опредѣляющее эпициклоиду. Кривая получается при движеніи круга радіуса $\frac{l}{4}$ внутри окружности радіуса l. Исключеніе c изъ ~~уравненія~~ общаго интеграла и его производной по c, приравненной нулю, очевидно привело-бы насъ къ тому-же самому уравненію.

2.) Найти такую кривую, чтобы произведеніе двухъ перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ неподвижныхъ точекъ F и F' на касательную къ ней, было постоянная величина a^2.-



Уравненіе касательной $Y-y=p(X-x)$. Уравненіе перпендикуляра FN поэтому $Y=-\frac{1}{p}(X-c)$; $\overline{NF}^2=Y^2+(X-c)^2$;

$Y=y+pc-px+p(X-c)=y-p(x-c)+p(X-c)=-\frac{1}{p}(X-c)$; $p(x-c)-y=\frac{1+p^2}{p}(X-c)$;

$(X-c)=\frac{(p[x-c]-y)p}{1+p^2}$; $Y=\frac{y-p[x-c]}{1+p^2}$; $\overline{NF}^2=\frac{(y-p[x-c])^2}{1+p^2}$; $NF=\frac{y-p(x-c)}{\sqrt{1+p^2}}$; $N'F'=\frac{y-p(x+c)}{\sqrt{1+p^2}}$;

перемноживъ два послѣднія равенства, имѣемъ $\frac{(y-px)^2-p^2c^2}{1+p^2}=a^2$, отсюда $(y-px)^2=p^2c^2+a^2(1+p^2)$; означивъ $a^2+c^2=b^2$ найдемъ $y-px=\sqrt{a^2+b^2p^2}$; $y=px+\sqrt{a^2+b^2p^2}$ дифференцируемъ: $pdx=pdx+xdp+\frac{b^2p\,dp}{\sqrt{a^2+b^2p^2}}$; $dp\left(x+\frac{b^2p}{\sqrt{a^2+b^2p^2}}\right)=0$ первое рѣшеніе $dp=0$ откуда $p=C$ даетъ общій интегралъ $y=Cx+\sqrt{a^2+b^2C^2}$, опредѣляющій прямую линію. Выведемъ теперь особое рѣшеніе; взявъ производную отъ общаго интеграла, приравниваемъ ее нулю $x+\frac{b^2C}{\sqrt{a^2+b^2C^2}}=0$; $y=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2C^2}}$; складывая выраженія $\left(\frac{x}{b}\right)^2=\frac{b^2C^2}{a^2+b^2C^2}$; $\left(\frac{y}{a}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2C^2}$ получаемъ $\left(\frac{x}{b}\right)^2+\left(\frac{y}{a}\right)^2=1$ уравненіе опредѣляющее эллипсъ.

Особыя рѣшенія дифференціальныхъ уравненій всегда можно найти, несмотря на то, умѣемъ-ли мы или не умѣемъ ихъ интегрировать: положимъ, что дано уравненіе $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ и пусть интегралъ его $y=F(x,c)$; $p=\frac{dy}{dx}=\frac{dF(x,c)}{dx}$ подставимъ сюда c какъ функцію отъ y при условіи особаго рѣшенія, ~~будемъ~~ возьмемъ: $\frac{dp}{dy}=\frac{d^2F(x,c)}{dx.dc}\cdot\frac{dc}{dy}$ изъ даннаго интеграла имѣемъ $dy=\frac{dF}{dc}.dc$; $\frac{dc}{dy}=\frac{1}{\frac{dF}{dc}}$; $\frac{dp}{dy}=\frac{\frac{d^2(F(x,c))}{dx.dc}}{\frac{dF}{dc}}=\frac{d\left(\lg\frac{dF}{dc}\right)}{dx}$; чтобы c обращало общій интегралъ въ особое рѣшеніе необходимо $\frac{dF}{dc}=0$, при этомъ условіи получаемъ изъ послѣдняго уравненія $\frac{dp}{dy}=\infty$. Такимъ образомъ для нахожденія особыхъ рѣшеній достаточно приравнять безконечности производную p по y. Примѣръ:
$p^2-2px+2y=0$; $p=x\pm\sqrt{x^2-2y}$; $\frac{dp}{dy}=\mp\frac{1}{\sqrt{x^2-2y}}=\infty$ отсюда $x^2-2y=0$; $x^2=2y$ особое рѣшеніе.

Геометрическое значеніе особыхъ рѣшеній. Пусть дано уравненіе $f(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ интегралъ его $F(x,y,c)=0 \ldots \mathrm{I}$; давая здѣсь c различныя значенія получимъ множество кривыхъ однообразныхъ. Разсмотримъ двѣ изъ нихъ при c и $c+dc$. Уравненіе второй будетъ $F(x,y,c+dc)=0$ или $F(x,y,c)+\frac{dF}{dc}dc=0$ отсюда $\frac{dF}{dc}=0 \ldots \mathrm{II}$ совмѣстное существованіе уравненій I и II даетъ точки пересѣченія двухъ послѣдовательныхъ кривыхъ (исключая c изъ уравненій I и II получимъ) точекъ пересѣченія всѣхъ кривыхъ геометрическое мѣсто т.е. кривую огибающую данныхъ. Тотъ же рядъ операцій т.е. исключеніе c между общимъ интеграломъ и его производной по c, приравненной нулю, производится для отысканія особыхъ рѣшеній. Отсюда заключаемъ, что особое рѣшеніе представляетъ огибающую того класса кривыхъ, который ~~представляетъ~~ опредѣляется общимъ интеграломъ. —

Интегрированіе дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ. Положимъ, что уравненіе $f(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}\dots\frac{d^ny}{dx^n})=0$ разрѣшено относительно производной наивысшаго порядка, т.е. что мы имѣемъ $\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi(x,y,\frac{dy}{dx}\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$ ..... (I); нетрудно доказать, что это уравненіе всегда имѣетъ интегралъ т.е. существуетъ соотношеніе между y и x, (удовлетворяющее ему ~~данному уравненію~~ ~~обозначивъ~~) представивъ y зависимымъ отъ x, разложимъ его въ рядъ, тогда

$$y=y_0+x\left(\frac{dy}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0+\frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0+\dots\quad\frac{x^{n-1}}{1.2\dots n-1}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0+\frac{x^n}{1.2\dots n}\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0+\dots$$

гдѣ подъ $y_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\dots$ разумѣемъ значенія y и производныхъ при $x=0$. Положивъ въ уравненіи (I) $x=0$ ~~дифференцируемъ~~ получимъ $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_0=\varphi\left(0,y_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0\dots\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0\right)$; дифференцируя его по x, (находимъ ~~получаемъ~~

и замѣняя каждый разъ $\frac{d^ny}{dx^n}$ его величиной изъ уравненія I-го)

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\varphi_1\left(x,y,\frac{dy}{dx}\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),\ \text{~~полагая въ нихъ~~}$$

$$\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}=\varphi_2\left(x,y,\frac{dy}{dx}\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

. . . . полагая въ нихъ $x=0$ видимъ, что всѣ производныя будутъ выражены помощію n первыхъ коэффиціентовъ разложенія φ. Такимъ образомъ мы ~~имѣемъ~~ опредѣлили нашли y ~~...~~ въ видѣ безконечной строки, коэффиціенты которой зависятъ отъ n (опредѣленныхъ) величинъ. Такъ какъ вмѣсто $x=0$, мы можемъ взять любую величину для опредѣленія этихъ n количествъ, то эти (послѣднія) суть ничто иное, какъ n произвольныхъ постоянныхъ и $y=F(x,C_1C_2\dots C_n)$ интегралъ даннаго уравненія.

Если всѣ C могутъ быть опредѣлены съ помощію начальныхъ данныхъ, т.е. изъ уравненій $y_0=\psi(0,C_1C_2\dots C_n)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0=\psi'(0,C_1C_2\dots C_n)$$

. . . .

$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0=\psi^{(n-1)}(0,C_1C_2\dots C_n),$$ то интегралъ называется общимъ.-

Пусть $F(x,y,C_1C_2\dots C_n)=0$ будетъ интеграломъ даннаго уравненія; опредѣливъ $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{d^2F}{dx^2}=0\dots\frac{d^nF}{dx^n}=0$; исключеніе ~~...~~ всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ изъ этой группы уравненій возвращаетъ насъ къ данному дифференціальному. Исключеніе можетъ быть сдѣлано слѣдующимъ образомъ: сначала исключаемъ одно изъ C между $F=0$ и $\frac{dF}{dx}=0$, въ результатѣ получимъ $\varphi(x,y,\frac{dy}{dx}C_2C_3\dots C_n)=0$; опредѣливъ $\frac{d\varphi}{dx}=0$, $\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0\dots\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}}=0$, имѣемъ n уравненій, изъ которыхъ можемъ исключить $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ; поступая по предъидущему т.е. исключая одно изъ C между $\varphi=0$ и $\frac{d\varphi}{dx}=0$, найдемъ $\psi(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}C_3C_4\dots C_n)=0$ и т.д. конечный резульжать будетъ $f(x,y,\frac{dy}{dx}\dots\frac{d^ny}{dx^n})=0$. Функція $\varphi=0$ заключающая въ себѣ $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ есть интегралъ особаго рода называемый интеграломъ $(n-1)^{го}$ порядка. Число такихъ интеграловъ n, ибо между $F=0$ и $\frac{dF}{dx}=0$ мы можемъ исключить любое изъ n произвольныхъ постоянныхъ. Исключеніе двухъ C изъ уравненій $F=0$, $\frac{dF}{dx}=0$, $\frac{d^2F}{dx^2}=0$ даетъ въ результатѣ $\varphi(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},c_3,c_4,\dots c_n)=0$ интегралъ $(n-2)^{го}$ порядка, число которыхъ, равное числу сочетаній изъ n буквъ по двѣ, есть $\frac{n(n-1)}{1.2}$. И т. д. Взявъ наконецъ $F=0$, $\frac{dF}{dx}=0\dots\frac{d^{n-1}F}{dx^{n-1}}=0$ и исключая всѣ C за исключеніемъ одного, получимъ n уравненій вида $\varphi(x,y,\frac{dy}{dx},\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},C_n)=0$, называемыхъ интегралами перваго порядка. Исключеніе изъ послѣднихъ n уравненій производныхъ, даетъ намъ общій интегралъ ~~получимъ возвращаемся нам~~ $F(x,y,c,c_2\dots c_n)=0$.

Уравненія высшихъ порядковъ, которыя могутъ быть интегрированы здѣсь заслуживаетъ вниманія преобразованіе, помощью котораго n-кратный интегралъ приводится къ простому. Дано уравненіе $\frac{d^ny}{dx^n}=f(x)$. Интегрируя его, получаемъ:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\int f(x)dx+c$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\int dx\int f(x)dx+cx+c_1$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y=\int^n f(x)dx^n+cx^{n-1}+c_1x^{n-2}+\dots\dots+c_{n-1}$$

Чтобы найти, чему равняется n-кратный интегралъ, входящій въ это выраженіе производимъ интеграцію по частямъ:

$$\int \underbrace{dx}_{du}\underbrace{\int f(x)dx}_{v}=x\int f(x)dx-\int xf(x)dx$$

$$\int dx\int dx\int f(x)dx=\int\underbrace{xdx}_{du}\underbrace{\int f(x)dx}_{v}-\int\underbrace{dx}_{du}\underbrace{\int xf(x)dx}_{v}=\frac{x^2}{2}\int f(x)dx-\frac12\int x^2f(x)dx-x\int xf(x)dx+\int x^2f(x)dx$$

$$=\frac12\left[x^2\int f(x)dx-2x\int xf(x)dx+\int x^2f(x)dx\right]$$

$$\int dx\int\!\!\int^3 f(x)dx^3=\frac12\left[\int x^2dx\int f(x)dx-2\int xdx\int xf(x)dx+\int dx\int x^2f(x)dx\right]=$$

$$=\frac12\left[\frac{x^3}{3}\int f(x)dx-\frac13\int x^3f(x)dx-x^2\int xf(x)dx+\cancel{\int x^3f(x)dx}+x\int x^2f(x)dx-\cancel{\int x^3f(x)dx}\right]=$$

$$=\frac{1}{2.3}\left[x^3\int f(x)dx-3x^2\int xf(x)dx+3x\int x^2f(x)dx-\int x^3f(x)dx\right]$$

по аналогіи заключаемъ

$$\int^n f(x)dx^n=\frac{1}{1.2.3\dots\overline{n-1}}\left[x^{n-1}\int f(x)dx-(n-1)x^{n-2}\int xf(x)dx+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int x^2f(x)dx-\dots\dots\right]=$$

замѣненія во второй части подъ знаками интеграла x черезъ z, давъ предварительно имъ какіе-нибудь предѣлы a и x, тогда получимъ:

$$\int^n f(x)dx^n = \frac{1}{1.2\ldots\overline{n-1}}\left[x^{n-1}\int_a^x f(z)dz - (n-1)x^{n-2}\int_a^x z f(z)dz + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int_a^x z^2 f(z)dz - \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots\overline{n-1}}\int_a^x f(z)dz\left[x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}.z + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}z^2 - \ldots\right] = \frac{1}{1.2\ldots\overline{n-1}}\int_a^x f(z).(x-z)^{n-1}dz.$$

Эта формула, если обобщимъ выраженіе $\frac{d^ny}{dx^n}$ для всякаго n, служитъ основаніемъ дифференцированію по дробному показателю.

Положимъ, что уравненіе содержитъ двѣ послѣдовательныя производныя, т.е. мы имѣемъ: $f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=0$ и допустимъ, что $\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$; полагая $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=z$ получимъ $\frac{dz}{dx}=\varphi(z)$ откуда $x=\int\frac{dz}{\varphi(z)}$ ~~откуда~~ и $z=\psi(x)=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$; такимъ образомъ вопросъ приводится къ предъидущему. Точно также поступаютъ въ томъ случаѣ когда имѣютъ $\frac{d^ny}{dx^n}=f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$; полагая $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=z$, находимъ $\frac{d^2z}{dx^2}=f(z)$; представивъ его въ формѣ $\frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}\cdot dx = f(z)dz$ и интегрируя, получимъ $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\int f(z)dz + C$ откуда $dx=\frac{dz}{\sqrt{C+2\int f(z)dz}}$; опредѣленіе z по x приводится къ квадратурамъ если мы получимъ отсюда $z=\varphi(x)$; то $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=\varphi(x)$, уравненіе, рѣшать которое мы умѣемъ. Примѣръ:

$\frac{d^2y}{dx^2}=n^2y$; $\frac{1}{2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = n^2y\,dy$; $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=n^2(y^2+c^2)$; $\frac{dy}{dx}=n\sqrt{y^2+c^2}$; $n\,dx=\frac{dy}{\sqrt{y^2+c^2}}$ интегрируемъ

$nx+c_1=\lg(y+\sqrt{y^2+c^2})$; $y+\sqrt{y^2+c^2}=Ae^{nx}$; $y^2+c^2=A^2e^{2nx}-2Aye^{nx}+y^2$; $y=\frac{A}{2}e^{nx}-\frac{c^2}{2A}e^{-nx}$

въ случаѣ $\frac{d^2y}{dx^2}=-n^2y$ интегралъ будетъ $y=c.\cos(nx+A)$.

Уравненіе $f\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ можетъ быть упрощено въ томъ смыслѣ, что порядокъ его можетъ быть пониженъ. Положимъ $\frac{dy}{dx}=z$ тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=z\frac{dz}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=z^2\frac{d^2z}{dy^2}+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2.z$$

n-ая производная выразится очевидно $n-1$-ой; мы принимаемъ y за главное перемѣнное и получаемъ $f\left(y,z,\frac{dz}{dy}\ldots\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)=0$ уравненіе низшаго порядка.

Пониженіе порядка возможно еще въ томъ случаѣ, когда уравненіе $f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\ldots\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$ однородно относительно y и его производныхъ; пусть n степень однород. тогда его можно ~~тогда~~ представить въ формѣ $y^n.\varphi\left(x,\frac{\frac{dy}{dx}}{y},\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{y},\ldots\frac{\frac{d^ny}{dx^n}}{y}\right)=0$ и, вводя сто-

$y=e^{\int z dx}$ и стало быть $\frac{dy}{dx}=z.e^{\int z dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}=z^2.e^{\int z dx}+e^{\int z dx}.\frac{dz}{dx}$ видимъ, что порядокъ его понижается и мы получимъ уравненіе $n-1$ порядка.

Примѣръ: найти кривую, для которой радіусъ-кривизны былъ-бы пропорціоналенъ нормали. $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=ny\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$; $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=ny\frac{d^2y}{dx^2}$ положивъ $\frac{dy}{dx}=p$ и $\frac{d^2y}{dx^2}=p.\frac{dp}{dy}$, имѣемъ $1+p^2=npy\frac{dp}{dy}$; $\frac{dy}{y}=\frac{np\,dp}{1+p^2}$; $lg\frac{y}{c}=\frac{n}{2}lg(1+p^2)$; $\frac{y}{c}=(1+p^2)^{\frac{n}{2}}$
$1+p^2=\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}$; $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}-1}$; $dx=\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{n}}-1}}$ въ нѣкоторыхъ случаяхъ это выраженіе интегрируется при $n=-1$; $x=\sqrt{c^2-y^2}$ кривая кругъ.

$n=+1$; $x+d=c\,lg(y+\sqrt{y^2-c^2})$ это уравненіе представленное въ видѣ $y=Ae^{\frac{x}{c}}+Be^{-\frac{x}{c}}$ опредѣляетъ цѣпную линію.

$n=-2$; $dx=\frac{y\,dy}{\sqrt{c-y}}$ интегралъ даетъ циклоиду

$n=+2$; $x+d=2\sqrt{c}\sqrt{y-c}$; кривая парабола.

Уравненія линейныя: $\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+Ry=V$ это общій видъ линейнаго уравненія съ послѣднимъ членомъ; если во второй части стоитъ нуль, то оно называется уравненіемъ безъ послѣдняго члена; интегралъ перваго болѣе общаго становится извѣстнымъ, какъ скоро найденъ интегралъ втораго, разсмотрѣніемъ котораго мы теперь займемся. Если ему удовлетворяетъ $y=y'$, то удовлетворитъ и $y=Cy'$, ибо подставляя $\frac{d^ry}{dx^r}=C\frac{d^ry_1}{dx^r}$ и вынося C за скобку, въ скобкахъ получимъ уравненіе съ y' тожественно равное нулю. Если ему удовлетворяютъ $y=y_1$ и $y=y_2$, то удовлетворитъ и $y=y_1+y_2$, ибо подставляя $\frac{d^ry}{dx^r}=\frac{d^ry_1}{dx^r}+\frac{d^ry_2}{dx^r}$, получимъ двѣ суммы отдѣльно равныя нулю. Отсюда заключаемъ, что и $y=C_1y_1+C_2y_2$ также будетъ корнемъ даннаго уравненія. Обобщая эти заключенія, получаемъ такую теорему: если уравненію удовлетворяютъ величины $y_1\ y_2\ y_3 \dots y_r$, то ему удовлетворяетъ и $C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+\dots C_ry_r$ и слѣдовательно если уравненіе порядка n то выраженіе $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$ будетъ общимъ его интеграломъ, ибо удовлетворяетъ ему и содержитъ n произвольныхъ постоянныхъ.

Для $n=1$ имѣемъ $\frac{dy}{dx}+uy=0$; $\frac{dy}{y}+udx=0$; $lg\frac{y}{c}=-\int udx$; $y=C.e^{-\int udx}=Cy_1$. Введемъ въ уравненіе $\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+uy=0$ новое перемѣнное, полагая $y=uy_1$ и [illegible]

$\frac{dy}{dx} = y_1\frac{du}{dx} + u\frac{dy_1}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2y_1}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{d^2u}{dx^2}$; .... $\frac{d^ny}{dx^n} = u\frac{d^ny_1}{dx^n} + \dots$ вставляя эти величины мы при u очевидно получимъ коэффиціентомъ данное уравненіе съ подставленнымъ y_1, которое равно нулю; полагая $\frac{du}{dx} = v$ получимъ:

$$\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + A\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \dots + Lv = 0$$

$$v = \frac{du}{dx} = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{n-1}v_{n-1}$$

$$u = C + c_1\int v_1dx + c_2\int v_2dx + \dots + c_{n-1}\int v_{n-1}dx$$

$$y = Cy_1 + c_1y_1\int v_1dx + c_2y_1\int v_2dx + \dots c_{n-1}y_1\int v_{n-1}dx.$$

Всегда можно найти интегралъ для уравненія съ последнимъ членомъ, когда известенъ онъ для уравненія безъ последняго члена способомъ измененія произвольныхъ постоянныхъ. Для уравненія $\frac{d^3y}{dx^3} + P\frac{d^2y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = 0$ мы нашли интегралъ $y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3$ желая доставить ему общность, т.е. сделать его удовлетворяющимъ такому же уравненію, въ которомъ вместо нуля стоитъ U, полагаемъ $C_1C_2C_3$ функціями новаго переменнаго съ темъ условіемъ, чтобы первая и вторая производныя y были таковы, какъ будто $C_1C_2C_3$ постоянны, т. е. чтобы $\frac{dy}{dx} = C_1\frac{dy_1}{dx} + C_2\frac{dy_2}{dx} + C_3\frac{dy_3}{dx}$ и $y_1dC_1 + y_2dC_2 + y_3dC_3 = 0$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1\frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2\frac{d^2y_2}{dx^2} + C_3\frac{d^2y_3}{dx^2} \qquad dy_1dC_1 + dy_2dC_2 + dy_3dC_3 = 0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1\frac{d^3y_1}{dx^3} + C_2\frac{d^3y_2}{dx^3} + C_3\frac{d^3y_3}{dx^3} + \frac{d^2y_1}{dx^2}\cdot\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2}\cdot\frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_3}{dx^2}\cdot\frac{dC_3}{dx}$$

Вставляя эти величины y и производныхъ въ данное полное уравненіе, находимъ: $\frac{d^2y_1}{dx^2}\cdot\frac{dC_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2}\cdot\frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_3}{dx^2}\cdot\frac{dC_3}{dx} = U$, которое вместе съ двумя условіями:

$$\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx}\cdot\frac{dC_3}{dx} = 0$$

$y_1\frac{dC_1}{dx} + y_2\frac{dC_2}{dx} + y_3\frac{dC_3}{dx} = 0$ даетъ возможность определить $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_3}{dx}$.

Положимъ, что решивъ ихъ мы получимъ $\frac{dC_1}{dx} = X_1$; $\frac{dC_2}{dx} = X_2$ и $\frac{dC_3}{dx} = X_3$ отсюда помощью квадратуръ находимъ $C_1 = c_1 + \int X_1dx$; $C_2 = c_2 + \int X_2dx$; $C_3 = c_3 + \int X_3dx$ и интегралъ полнаго уравненія будетъ $y = [c_1 + \int X_1dx]y_1 + [c_2 + \int X_2dx]y_2 + [c_3 + \int X_3dx]y_3$. Если бы мы знали только два частныхъ интеграла $y = C_1y_1 + C_2y_2$, то могли бы найти интегралъ полнаго уравненія при помощи не квадратуръ, но дифференціальныхъ уравненій 1го порядка; если известенъ одинъ частный интегралъ, то вопросъ о нахожденіи общаго приводитъ насъ къ решенію дифференц. ур. 2го порядка

Вообще если дано уравненіе $n^{го}$ порядка и мы знаемъ m частныхъ интеграловъ того-же уравненія безъ последняго члена, то нахожденіе общаго интеграла приводится къ рѣшенію уравненія $n-m^{го}$ порядка. $\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+Uy=V$, вставляемъ $y=uy_1$, гдѣ y_1 по условію обращаетъ въ ноль тоже уравненіе безъ последняго члена по вставкѣ членъ содержащій u исчезнетъ и мы получимъ $A\frac{d^nu}{dx^n}+B\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\dots+L\frac{du}{dx}=V$ полагая $\frac{du}{dx}=v$ имѣемъ $A\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\dots+Lv=V$; такимъ образомъ воспользовавшись однимъ частнымъ интеграломъ мы понизили порядокъ уравненія на единицу. $v=\frac{du}{dx}=\frac{d\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx}$ но кромѣ y_1 намъ извѣстны $m-1$ величинъ, стало-быть мы получимъ величины $v_1, v_2 \dots v_{m-1}$ вставляя въ выраженіе v вмѣсто y его различныя значенія. Поступая съ ними также какъ съ y, мы понизимъ порядокъ уравненія еще на единицу и найдемъ новое, для котораго будутъ извѣстны $m-2$ интеграла и т.д. Продолжаемъ этотъ пріемъ до тѣхъ поръ, пока не придемъ къ уравненію $n-m^{го}$ порядка, относительно котораго мы не знаемъ ни одного интеграла.

Если въ уравненіи $\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\dots+Ly=0$ коэффиціенты постоянны, то одинъ изъ частныхъ интеграловъ найдемъ подставивъ $y=e^{rx}$; $\frac{d^iy}{dx^i}=r^ie^{rx}$. Уравненіе получаетъ видъ: $f(r)=r^n+Pr^{n-1}+Qr^{n-2}+\dots+L=0$ если вмѣсто r возьмемъ любой корень этого уравненія, то получимъ частный интегралъ даннаго. Корней n, слѣдовательно мы знаемъ всѣ частные интегралы и общій поэтому таковъ:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+\dots+C_ne^{r_nx}$$

полагая $x=0$ получимъ:

$$y_0=C_1+C_2+C_3+\dots+C_n=a$$

$$y_0'=C_1r_1+C_2r_2+\dots+C_nr_n=a_1$$

$$y_0''=C_1r_1^2+C_2r_2^2+\dots+C_nr_n^2=a_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y_0^{(n-1)}=C_1r_1^{n-1}+C_2r_2^{n-1}+\dots+C_nr_n^{n-1}=a_{n-1}$$

умножимъ соотвѣтственно на $A, A_1, A_2 \dots$ последнее на 1 и сложимъ, находимъ: означивъ $A_0+A_1r_1+A_2r_1^2+\dots+r_1^{n-1}=\varphi(r_1)$:

$$C_1\varphi(r_1)+C_2\varphi(r_2)+\dots+C_n\varphi(r_n)=aA+a_1A_1+a_2A_2+\dots+a_{n-1}$$

для $\varphi(r)$ мы выберемъ такую, которая обращается въ ноль при всѣхъ r кромѣ r_1, напримѣръ $\varphi(r)=\frac{f(r)}{r-r_1}$ * $f'r$; тогда $C_1f'(r_1)=aA+a_1A_1+\dots a_{n-1}$, отсюда опредѣляемъ C_1, т.к. $A+A_1r_1+A_2r_1^2+\dots+r_1^{n-1}=\varphi r_1=f'r_1$ то при сравнивая коэффиціенты, мы опредѣлимъ всѣ такимъ образомъ всѣ произвольныя постоянныя могутъ быть опредѣлены помощью начальныхъ данныхъ, интегралъ взятый нами поэтому общiй.

Положимъ $r_1 = a+b\sqrt{-1}$ въ свойству уравненiя должно существовать $r_2 = a-b\sqrt{-1}$

$C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} = C_1e^{ax}(\cos bx+\sin bx\sqrt{-1})+C_2e^{ax}(\cos bx-\sin bx\sqrt{-1}) = (C_1+C_2)e^{ax}\cos bx+(C_1-C_2)e^{ax}\sin bx.\sqrt{-1}$ $=e^{ax}(c_1\cos bx+c_2\sin bx)$ здѣсь c_1 и c_2 произвольныя постоянныя и ихъ нѣтъ надобности считать мнимыми, ибо они опредѣляются помощью начальныхъ данныхъ и если мы получимъ для нихъ величины дѣйствительныя, то это будетъ служить указанiемъ на то, что C_1 и C_2 были мнимыя. Означивъ $c_1 = \varrho\sin\alpha$ и $c_2=\varrho\cos\alpha$ получимъ $\varrho e^{ax}\sin(bx+\alpha)$, гдѣ ϱ и α произвольныя постоянныя.

Когда характеристичное уравненiе $f(r)=r^n+\mathfrak{P}r^{n-1}+\dots+\mathfrak{L}$ имѣетъ равные корни, то частные интегралы, имъ соотвѣтствующiе сливаются, число произвольныхъ постоянныхъ уменьшается и интегралъ теряетъ характеръ общности.

Подставивъ въ данное ур. $y=e^{rx}$, получимъ:

$$\frac{d^n(e^{rx})}{dx^n}+\mathfrak{P}\frac{d^{n-1}(e^{rx})}{dx^{n-1}}+\dots+\mathfrak{L}e^{rx}=e^{rx}f(r)$$

продифференцируемъ его по r тогда

$$\frac{d^n(x.e^{rx})}{dx^n}+\mathfrak{P}\frac{d^{n-1}(xe^{rx})}{dx^{n-1}}+\dots+\mathfrak{L}x.e^{rx}=x.e^{rx}fr+e^{rx}f'r$$

если вмѣсто r подставимъ сюда одинъ изъ двукратныхъ корней характеристичнаго ур: напримѣръ r_1, то вторая часть обращается въ нуль, откуда заключаемъ, что данному уравненiю удовлетворяетъ величина $x.e^{r_1x}$, такъ, что общiй интегралъ его будетъ:

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}+C_3e^{r_3x}+\dots C_ne^{r_nx}$$

Это заключенiе можемъ вывести другимъ путемъ: разсмотримъ $C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$, полагая $r_2=r_1+h$ и приближая h до нуля.

$$C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_1x}.e^{hx}=e^{r_1x}(C_1+C_2e^{hx})=e^{r_1x}\left(C_1+C_2+C_2hx+\frac{C_2h^2}{1.2}x^2+\dots\right)$$

полагая въ этомъ выраженiи $h=0$, видимъ, что членъ содержащiй его въ первой степени не уничтожается, ибо C_2 какъ произвольное постоянное можетъ быть сдѣлано какъ угодно большимъ и мы получимъ въ предѣлѣ $e^{r_1x}(c_1+C_2x)$. Мы можемъ обобщить этотъ выводъ и на трехкратные корни, стоитъ только дифференцировать вторично по r; получаемъ

$$\frac{d^n(x^2e^{rx})}{dx^n}+\mathfrak{P}\frac{d^{n-1}(x^2e^{rx})}{dx^{n-1}}+\dots+\mathfrak{L}x^2e^{rx}=x^2e^{rx}f(r)+2xe^{rx}f'(r)+e^{rx}f''(r)$$

если подставимъ сюда 3-кратный корень, то вторая часть обращается въ ну и данному уравненію удовлетворяетъ величина x^2e^{rx}. Вмѣсто двухъ потерянныхъ частныхъ интеграловъ имѣемъ два новыхъ.

Указаннымъ выше способомъ мы можемъ рѣшить уравненіе

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+My=U$$

но въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ пріемъ значительно упрощается. Напримѣръ когда $U=\mathrm{const}$, интегрированіе можетъ быть прямо сведено къ интегрированію такого же уравненія безъ послѣдняго члена, стоитъ только положить $y=z+\frac{U}{M}$; также просто рѣшается вопросъ когда $U=Ax^m+Bx^{m-1}+\dots$, положивъ $y=z+ax^m+bx^{m-1}+\dots$ имѣемъ:

$$\frac{d^nz}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\dots+Mz+\alpha x^m+\beta x^{m-1}+\dots=Ax^m+Bx^{m-1}+\dots$$

составивъ равенства $\alpha=A$; $\beta=B$; ... и опредѣливъ отсюда $a, b, \dots$ приводимъ вопросъ къ уравненію безъ послѣдняго члена. Въ случаѣ $U=A\cos mx+B\sin mx$ полагаемъ $y=z+a\cos mx+b\sin mx$, подставивъ это выраженіе въ наше уравненіе, получимъ:

$$\frac{d^nz}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\dots+Mz+(ak+bs)\cos mx+(ak_1+bs_1)\sin mx=A\cos mx+B\sin mx$$

приравнявъ $ak+bs=A$ и $ak_1+bs_1=B$; приведемъ къ уравненію безъ послѣдняго члена. Частный случай: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos x$; $y=z+a\cos x+b\sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{dx^2}-a\cos x-b\sin x;\quad \frac{d^2z}{dx^2}+z=\cos x;$$

видимъ, что пріемъ неприложимъ, такъ какъ приводитъ насъ къ совершенно тождественному уравненію; въ этомъ случаѣ беремъ болѣе общее: $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\cos nx$, съ условіемъ приравнять въ окончательномъ результатѣ n единицѣ. Полагаемъ $y=z+a\cos nx+b\sin nx$; уравненіе получитъ видъ:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+z-an^2\cos nx-bn^2\sin nx+a\cos nx+b\sin nx=\cos nx$$

$$a(1-n^2)=1;\quad a=\frac{1}{1-n^2};\qquad \frac{d^2z}{dx^2}+z=0;\ r^2+1=0;\ r=\pm\sqrt{-1};$$

$$b(1-n^2)=0;\quad b=0;\qquad z=Ce^{x\sqrt{-1}}+C_1e^{-x\sqrt{-1}}=(C+C_1)\cos x+(C-C_1)\sqrt{-1}\sin x=c\cos x+c_1\sin x$$

$y=c\cos x+c_1\sin x+\frac{1}{1-n^2}\cos nx=c\cos x+c_1\sin x+\frac{\cos nx-\cos x}{1-n^2}$ послѣдній членъ при $n=1$ обращается въ $\frac{0}{0}$ и потому $y=c\cos x+c_1\sin x+\frac{x\sin x}{2}$.

Уравненіе съ перемѣнными коэффиціентами не линейное можетъ быть интегрировано тѣмъ же пріемомъ:

$$(ax+b)^n\frac{d^ny}{dx^n}+P(ax+b)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+L(ax+b)\frac{dy}{dx}+My=0$$

подставимъ сюда $y=(ax+b)^r$ и стало быть вмѣсто производныхъ слѣдункція выраженія: $\frac{dy}{dx} = r(ax+b)^{r-1}\cdot a$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = r(r-1)(ax+b)^{r-2}\cdot a^2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = r(r-1)\dots(r-n+1)(ax+b)^{r-n}\cdot a^n$$

уравненіе послѣ подстановки и сокращенія на $(ax+b)^r$ получаетъ видъ

$$a^n r(r-1)\dots(r-n+1) + Pa^{n-1}r(r-1)\dots(r-n+2) + \dots + La\cdot r + M = 0$$

или $Ar^n + Br^{n-1} + \dots = 0$; послѣднее уравненіе имѣетъ n корней $r_1, r_2 \dots r_n$ поэтому общій интегралъ даннаго уравненія будетъ:

$$y = C_1(ax+b)^{r_1} + C_2(ax+b)^{r_2} + \dots + C_n(ax+b)^{r_n}.$$

Въ крайнихъ случаяхъ для интегрированія употребляется разложеніе въ рядъ Маклорена; затрудненіе при этомъ встрѣчается въ томъ, что нѣкоторые члены обращаются въ безконечность; мы можемъ уничтожить ихъ пользуясь произвольнымъ постояннымъ; но этотъ пріемъ даетъ только частный интегралъ, перейти отъ котораго къ общему возможно способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ. Примѣръ:

$x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + n^2xy = 0$ дифференцируемъ его нѣсколько разъ

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + n^2x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + n^2x\frac{d^2y}{dx^2} + 2n^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{d^5y}{dx^5} + 5\frac{d^4y}{dx^4} + n^2x\frac{d^3y}{dx^3} + 3n^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$\dots\dots\dots$$

если мы прямо положимъ $x=0$ то изъ даннаго ур. получимъ $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$, поэтому полагаемъ сначала $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = 0$ тогда первое уравненіе при $x=0$ тождественно удовлетворяется, остальныя получаютъ видъ $3y_0'' + n^2y_0 = 0$ откуда $y_0'' = -\frac{n^2y_0}{3}$

$$4y_0''' = 0 \qquad y_0''' = 0$$

$$5y_0^{IV} + 3n^2y_0'' = 0 \qquad y_0^{IV} = -\frac{3n^2y_0''}{5} = \frac{n^4y_0}{5}$$

$$\dots\dots\dots \qquad y_0^{V} = 0;\ y_0^{VI} = -\frac{n^6y_0}{7};$$

по теоремѣ Маклорена $y = y_0 + xy_0' + \frac{x^2}{1.2}y_0'' + \dots$ отсюда . . . .

$$y = y_0 - \frac{n^2y_0}{2.3}x^2 + \frac{n^4y_0}{2\dots5}x^4 - \frac{n^6y_0}{2\dots7}x^6 + \dots = \frac{y_0}{nx}\left[nx - \frac{(nx)^3}{1.2.3} + \frac{(nx)^5}{1.2\dots5} - \frac{(nx)^7}{1.2\dots7} + \dots\right] = \frac{y_0}{nx}\sin nx$$

$= C\frac{\sin nx}{x}$ это есть ничто иное, какъ частный интегралъ даннаго уравненія. Нахожденіе общаго способомъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ приводитъ къ рѣшенію дифференціальнаго уравненія перваго порядка. Разложеніе въ рядъ можетъ быть также совершено помощію неопредѣленныхъ коэффиціентовъ. Возьмемъ уравненіе $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{dx}+n^2y=0$ и положимъ, что интегралъ его $y=Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\ldots$ тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+B\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+\ldots$$

$$\frac{2}{x}\cdot\frac{dy}{dx}=2A\alpha.x^{\alpha-2}+2B\beta.x^{\beta-2}+\ldots$$

$$n^2y=n^2Ax^\alpha+n^2Bx^\beta+\ldots$$

Чтобы сумма второй части давала нуль необходимо, чтобы коэффиціенты отдѣльныхъ степеней x равнялись нулю, напримѣръ $A[(\alpha-1).\alpha+2\alpha]=0$ и такъ какъ A не можетъ быть нулемъ, то необходимо $\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=0\end{cases}$. Полагаемъ $\alpha=-1$; принимая $\beta-2=\alpha=-1$, получаемъ $\beta=1$; $2B+n^2A=0$ и $B=-\frac{n^2A}{2}$. слѣдующій членъ не можетъ отдѣльно уничтожиться ибо $\gamma>\beta>1$ и потому онъ долженъ сократиться съ другимъ для чего принимаемъ $\gamma-2=\beta$, получимъ: $\gamma=3$; $C.2.3.+2C.3+n^2B=0$ и $C=-\frac{n^2B}{4.3}=\frac{n^4A}{2.3.4}$ принимая $\delta-2=\gamma$, получимъ: $\delta=5$; $D.5.4+D.2.5+n^2C=0$ и $D=-\frac{n^2C}{5.6}=-\frac{n^6A}{2.3.4.5.6}$ и т. д. находимъ:

$$y=\frac{A}{x}-\frac{n^2A}{2}x+\frac{n^4A}{2.3.4}x^3-\frac{n^6A}{2\ldots6}x^5+\ldots=\frac{A}{x}\left[1-\frac{(nx)^2}{1.2}+\frac{(nx)^4}{1.2.3.4}-\frac{(nx)^6}{1\ldots6}+\ldots\right]=\frac{A\cos nx}{x}$$

Другой частный интегралъ этого уравненія даетъ положеніе $\alpha=0$; полагаемъ $\beta-2=\alpha$ тогда $\beta=2$; $B.2+2.B.2+n^2A=0$ и $B=-\frac{n^2A}{2.3}$; $\gamma-2=\beta$, тогда $\gamma=4$; $C.4.3+2.C.4+n^2B=0$ и $C=-\frac{n^2B}{4.5}=\frac{n^4A}{2.3.4.5}$ и т. д. откуда

$$y=A_1\left[1-\frac{n^2x^2}{2.3}+\frac{n^4x^4}{2.3.4.5}-\ldots\right]=\frac{A_1}{nx}\left[nx-\frac{(nx)^3}{1.2.3}+\frac{(nx)^5}{1.2\ldots5}-\ldots\right]=\frac{A_1\sin nx}{x}$$

отсюда общій интегралъ даннаго уравненія будетъ $y=\frac{A\cos nx+A_1\sin nx}{x}$.

Приложимъ указанный способъ къ рѣшенію уравненія Рикати. Возьмемъ уравненіе $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2n}{x}\cdot\frac{dy}{dx}-m^2y=0$. Подставимъ $y=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\left[\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{z}-\frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z^2}\right]$ въ уравненіе Рикати, которое имѣетъ видъ $\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m$, получимъ $\frac{d^2z}{dx^2}=abzx^m$. Полагаемъ $x^{\frac{m+2}{2}}=t$ тогда $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{m+2}{2}x^{\frac{m}{2}}$ и $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{m^2+2m}{4}x^{\frac{m-2}{2}}\frac{dz}{dt}+\frac{(m+2)^2}{4}.x^m\frac{d^2z}{dt^2}$ отсюда уравненіе Рикати принимаетъ видъ

$$\frac{m^2+2m}{(m+2)^2}\cdot x^{-\frac{(m+2)}{2}}\frac{dz}{dt}+\frac{d^2z}{dt^2}-\frac{4abz}{(m+2)^2}=0 \text{ или}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{m^2+2m}{(m+2)^2}\cdot\frac{\frac{dz}{dt}}{t}-\frac{4ab}{(m+2)^2}z=0$$

видъ сходный съ видомъ взятаго нами уравненія, рѣшеніемъ котораго мы мы и займемся. Полагаемъ $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \dots$ отсюда имѣемъ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} + \dots$$

$$\frac{2n}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = 2nA\alpha x^{\alpha-2} + 2nB\beta x^{\beta-2} + \dots$$

$$-m^2y = -m^2Ax^{\alpha} - m^2Bx^{\beta} - \dots$$

$$\alpha(\alpha-1) + 2n\alpha = 0;\ \begin{cases}\alpha = 0\\ \alpha = 1-2n\end{cases};\ \beta = 2;\ \gamma = 4;\ \delta = 6$$

$$B.2 + 2nB.2 = m^2A;\ B = \frac{m^2A}{2(1+2n)}$$

$$C.4.3 + 2nC.4 = m^2B;\ C = \frac{m^2B}{4(3+2n)} = \frac{m^4A}{2.4(1+2n)(3+2n)}$$

$$y = A\left(1 + \frac{m^2x^2}{2(1+2n)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(1+2n)(3+2n)} + \dots\right)$$ одинъ частный интегралъ.

$\beta - 2 = \alpha;\ \beta = 3-2n;\ \gamma = 5-2n;\ \delta = 7-2n.$

$$B(3-2n)(2-2n) + 2nB(3-2n) = 2.B(3-2n) = m^2A;\ B = \frac{m^2A}{2(3-2n)}$$

$$C(5-2n)(4-2n) + 2nC(5-2n) = 4.C.(5-2n) = m^2B;\ C = \frac{m^2B}{4(5-2n)} = \frac{m^4A}{2.4(3-2n)(5-2n)};$$ и т. д.

$$y = A\left(x^{1-2n} + \frac{m^2x^{3-2n}}{2(3-2n)} + \frac{m^4x^{5-2n}}{2.4(3-2n)(5-2n)} + \dots\right) = Ax^{1-2n}\left[1 + \frac{m^2x^2}{2(3-2n)} + \frac{m^4x^4}{2.4.(3-2n)(5-2n)} + \dots\right)$$

другой частный интегралъ.—

Совмѣстныя дифференціальныя уравненія:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^py}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2} \dots \frac{d^qz}{dx^q}\right) = 0$$

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^py}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^qz}{dx^q}\right) = 0$$

чтобы привести интеграцію этихъ уравненій къ интеграціи одного, т. е. чтобы исключить одно изъ неизвѣстныхъ со всѣми его производными, дифференцируемъ первое уравненіе p разъ, 2-ое q разъ, получаемъ $2+p+q$ уравненій; высшій дифференціальный коэффиціентъ будетъ $\frac{d^{p+q}z}{dx^{p+q}}$, слѣдовательно исключенію подлежатъ $p+q+1$ неизвѣстныхъ; въ результатѣ получимъ одно уравненіе, несодержащее z и его производныхъ, причемъ порядокъ его выше данныхъ.

Наоборотъ $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$ можетъ быть замѣнено системой 3-хъ уравненій перваго порядка. Полагаемъ $\frac{dy}{dx} = y';\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = y'';\ \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx}$ тогда

$$f\left(x, y, y', y'' \frac{dy''}{dx}\right) = 0;\ \frac{dy}{dx} = y';\ \frac{dy'}{dx} = y''$$

получаемъ три уравненія перваго порядка, гдѣ y' и y'' неизвѣстныя функціи оба входятъ только съ первыми своими производными. Такое же преобразованіе возможно и въ болѣе общемъ случаѣ; напримѣръ: $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$; положимъ:

$\frac{dy}{dx}=y'$; $\frac{dy'}{dx}=y''$; .... $\frac{dy^{(n-2)}}{dx}=y^{(n-1)}$ и наконецъ $f(x,y,y',y''\dots y^{(n-1)},\frac{dy^{(n-1)}}{dx})=0$.

Пусть $\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}$; $\frac{dz}{dx}=\frac{R}{P}$; $\frac{du}{dx}=\frac{S}{P}$; будетъ система трехъ уравненій перваго порядка откуда $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{S}$. Эти уравненія всегда имѣютъ интегралы. По теоремѣ Маклорена $y=y_0+xy_0'+\frac{x^2}{1.2}y_0''+\dots$ здѣсь $y_0^{(n)}$ суть значенія производныхъ при $x=0$

$y_0'=\left(\frac{Q}{P}\right)_{x=0}=\varphi(y_0 z_0 u_0)$; $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0=\frac{d\left(\frac{Q}{P}\right)_0}{dx}=\varphi_1(y_0 z_0 u_0)$ отсюда $y=F(x,y_0 z_0 u_0)$ точно также

$$z=F_1(x,y_0 z_0 u_0)$$
$$u=F_2(x,y_0 z_0 u_0)$$

гдѣ $y_0 z_0 u_0$ играютъ роль произвольныхъ постоянныхъ; полагая $\begin{cases} y_0=\varphi'(c_1c_2c_3)\\ z_0=\varphi''(c_1c_2c_3)\\ u_0=\varphi'''(c_1c_2c_3),\end{cases}$ получимъ интегралы данныхъ уравненій

$$y=F_I(x c_1 c_2 c_3)$$
$$z=F_{II}(x c_1 c_2 c_3)$$
$$u=F_{III}(x c_1 c_2 c_3)$$

иначе

$$c_1=f_1(xyzu)$$
$$c_2=f_2(xyzu)$$
$$c_3=f_3(xyzu)$$

Дифференцируя эти уравненія, получимъ тождественныя съ данными.

$\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{df_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{df_1}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0$; замѣняя производныя величинами изъ данныхъ уравненій, получимъ: $P\frac{df_1}{dx}+Q\frac{df_1}{dy}+R\frac{df_1}{dz}+S\frac{df_1}{du}=0$ тоже самое получимъ дифференцируя f_2 и f_3. Этому уравненію удовлетворяетъ и $\varphi(f_1f_2f_3)$ всякая совершенно произвольная функція этихъ величинъ. Дѣйствительно

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dx}&=\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx}+\frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx}+\frac{d\varphi}{df_3}\cdot\frac{df_3}{dx} && P\\
\frac{d\varphi}{dy}&=\frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dy}+\frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dy}+\dots && Q\\
\frac{d\varphi}{dz}&=\dots\dots && R\\
\frac{d\varphi}{du}&=\dots\dots && S
\end{aligned}\right.$$

$$P\frac{d\varphi}{dx}+Q\frac{d\varphi}{dy}+R\frac{d\varphi}{dz}+S\frac{d\varphi}{du}=0.$$

φ вообще есть $\psi(x,y,z,u)$, исключивъ отсюда y,z,u помощью трехъ найденныхъ интеграловъ, получимъ $\varphi=\psi(x,c_1c_2c_3)$, слѣдовательно:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dx}&=\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dc_1}\cdot\frac{dc_1}{dx}+\frac{d\psi}{dc_2}\cdot\frac{dc_2}{dx}+\frac{d\psi}{dc_3}\cdot\frac{dc_3}{dx} && P\\
\frac{d\varphi}{dy}&=\frac{d\psi}{dc_1}\cdot\frac{dc_1}{dy}+\dots\dots && Q\\
\frac{d\varphi}{dz}&=\dots\dots && R\\
\frac{d\varphi}{du}&=\dots\dots && S
\end{aligned}\right.$$

$0 = P\frac{d\varphi}{dx}$ отсюда $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, т.е. φ не может содержать x явнымъ образомъ и есть функ[ция]
только частныхъ интеграловъ $f_1 f_2 f_3$.

Разсмотримъ уравненія $\frac{dy}{dx} + Py + Qz = V$ и $\frac{dz}{dx} + P_1y + Q_1z = V_1$; помножимъ второе на λ
и сложимъ: $\frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx} + y(P+\lambda P_1) + z(Q+\lambda Q_1) = V+\lambda V_1$; положимъ: $y+\lambda z = t$; $y = t-\lambda z$.

$$\frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx} - z\frac{d\lambda}{dx}$$

уравненіе приметъ видъ: $\frac{dt}{dx} - z\frac{d\lambda}{dx} + (P+\lambda P_1)(t-\lambda z) + z(Q+\lambda Q_1) = V+\lambda V_1$ теперь полагаемъ:

$$\frac{d\lambda}{dx} + \lambda(P+\lambda P_1) = Q+\lambda Q_1$$

$$\frac{dt}{dx} + (P+\lambda P_1)t = V+\lambda V_1$$

Эта система выгоднѣе первой такъ какъ первое уравненіе содержитъ только одно неизвѣстное, оставаясь $1^{\text{го}}$ порядка; кромѣ того λ есть вспомогательная величина, только частныя значенія которой намъ нужно знать. Если извѣстны λ_1 и λ_2 то простой интеграціей найдемъ t_1 и t_2 и изъ уравненій $y+\lambda_1 z = t_1$,
$y+\lambda_2 z = t_2$ опредѣлимъ искомые y.

Положимъ, что коэффиціенты P и Q постоянные, тогда полагаемъ λ постоянной и получаемъ уравненіе $\lambda^2P_1 + \lambda(P-Q_1) - Q = 0$, которое своими корнями дастъ нужныя намъ два частныя значенія λ. Если корни этого уравненія равны т.е. оно представляетъ полный квадратъ, то мы получаемъ, оставляя λ перемѣннымъ, уравненіе

$$\frac{d\lambda}{dx} + P_1(\lambda-\alpha)^2 = 0$$

въ которомъ перемѣнныя могутъ быть раздѣлены и общій интегралъ котораго представится въ формѣ

$$\frac{1}{\lambda-\alpha} - P_1x + C$$

такъ какъ намъ нужны только двѣ частныя величины λ, то мы выбираемъ ихъ самымъ простымъ способомъ, полагая $C=0$ и $C=\infty$; откуда $\lambda_1 = \alpha + \frac{1}{P_1x}$ и $\lambda_2 = \alpha$. —

Интеграція трехъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій по способу Эйлера.

Имѣемъ

$$\begin{array}{l|l} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V & \\ \frac{dz}{dx} + P_1y + Q_1z + R_1u = V_1 & \lambda \\ \frac{du}{dx} + P_2y + Q_2z + R_2u = V_2 & \mu \end{array}$$

$$\frac{dy}{dx} + \lambda\frac{dz}{dx} + \mu\frac{du}{dx} + y(P+\lambda P_1+\mu P_2) + z(Q+\lambda Q_1+\mu Q_2) + u(R+\lambda R_1+\mu R_2) = V+\lambda V_1+\mu V_2$$

Возьмемъ новое перемѣнное $t = y+\lambda z+\mu u$. Тогда

$$\frac{dt}{dx} - z\frac{d\lambda}{dx} - u\frac{d\mu}{dx} + (t-\lambda z-\mu u)(P+\lambda P_1+\mu P_2) + z(Q+\lambda Q_1+\mu Q_2) + u(R+\lambda R_1+\mu R_2) = V+\lambda V_1+\mu V_2$$

Полагая $\frac{d\lambda}{dx}+\lambda(P+\lambda P_1+\mu P_2)=Q+\lambda Q_1+\mu Q_2$ 1

$$\frac{d\mu}{dx}+\mu(P+\lambda P_1+\mu P_2)=R+\lambda R_1+\mu R_2 \quad \ldots \quad 2$$

получимъ $\frac{dt}{dx}+t(P+\lambda P_1+\mu P_2)=V+\lambda V_1+\mu V_2$ 3

хотя степень уравненій и повышена, но рѣшеніе вопроса упрощено, такъ какъ первыя два содержатъ только по два неизвѣстныхъ и если мы найдемъ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и соотвѣтствующія имъ μ_1, μ_2, μ_3 то изъ уравненія третьяго получимъ ~~интегралы~~ три величины для t, и искомые интегралы будутъ

$$y+\lambda_1 z+\mu_1 u=t_1$$
$$y+\lambda_2 z+\mu_2 u=t_2$$
$$y+\lambda_3 z+\mu_3 u=t_3$$

откуда опредѣлятся y, z и u, содержащія каждый по три произвольныхъ постоянныхъ.

Положимъ, что коэффиціенты $P, Q, R \ldots$ постоянные, тогда уравненія 1 и 2 удовлетворяются постоянными λ и μ. Опредѣленіе ихъ совершается слѣдующимъ путемъ: мы имѣемъ

$$\lambda(P+\lambda P_1+\mu P_2)=Q+\lambda Q_1+\mu Q_2$$
$$\mu(P+\lambda P_1+\mu P_2)=R+\lambda R_1+\mu R_2$$

полагаемъ I $P+\lambda P_1+\mu P_2=\varrho$ и получаемъ

$$\text{II} \quad Q+(Q_1-\varrho)\lambda+\mu Q_2=0$$
$$\text{III} \quad R+R_1\lambda+(R_2-\varrho)\mu=0$$

Исключая μ изъ I и II и изъ I и III получимъ:

$$Q_2(P-\varrho)-QP_2+\lambda(P_1Q_2-[Q_1-\varrho]P_2)=0$$
$$(P-\varrho)(R_2-\varrho)-RP_2+\lambda(P_1[R_2-\varrho]-R_1P_2)=0$$

исключая изъ этихъ двухъ λ, находимъ

$$(P-\varrho)(Q_1-\varrho)(R_2-\varrho)-(P-\varrho)Q_2R_1-(Q_1-\varrho)P_2R-(R_2-\varrho)P_1Q+P_2QR_1+P_1Q_2R=0$$

нашедши отсюда три величины ϱ опредѣлимъ λ и μ изъ любыхъ двухъ уравненій.

Пріемъ Коши при $P, Q, R \ldots$ постоянныхъ. Разсматриваемъ такія уравненія безъ послѣднихъ членовъ и допускаемъ $y=e^{-\varrho x}$

$$z=\lambda e^{-\varrho x}$$
$$u=\mu e^{-\varrho x}$$

Подставляя эти величины въ данныя уравненія, получаемъ:

$$-\varrho + P + Q\lambda + R\mu = 0$$
$$-\lambda\varrho + P_1 + Q_1\lambda + R_1\mu = 0$$
$$-\mu\varrho + P_2 + Q_2\lambda + R_2\mu = 0$$

исключая изъ нихъ λ и μ, находимъ для ϱ тоже характеристическое уравненіе, рѣшая которое найдемъ $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3$, соотвѣтственно этимъ корнямъ получимъ $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ $\lambda_3\mu_3$ и опредѣлимъ для $y, z,$ и по три значенія, откуда общіе интегралы будутъ

$$A.\left\{\begin{aligned} y &= C_1e^{-\varrho_1 x} + C_2e^{-\varrho_2 x} + C_3e^{-\varrho_3 x} \\ z &= C_1\lambda_1e^{-\varrho_1 x} + C_2\lambda_2e^{-\varrho_2 x} + C_3\lambda_3e^{-\varrho_3 x} \\ u &= C_1\mu_1e^{-\varrho_1 x} + C_2\mu_2e^{-\varrho_2 x} + C_3\mu_3e^{-\varrho_3 x} \end{aligned}\right.$$

чтобы найти интегралы уравненій съ послѣднимъ членомъ, дифференцируемъ эти выраженія, считая $C_1C_2C_3$ функціями x, вставляемъ въ данныя уравненія и опредѣляемъ $\frac{dC_1}{dx} = X_1$ $\frac{dC_2}{dx} = X_2$ и $\frac{dC_3}{dx} = X_3$ откуда

$C_1 = \int X_1dx + c_1$ } подставляя эти величины въ уравненія A, получимъ
$C_2 = \int X_2dx + c_2$ } общія интегралы данныхъ уравненій съ послѣднимъ
$C_3 = \int X_3dx + c_3$ } членомъ.

Теорія послѣдняго множителя Якоби. Пусть даны два совмѣстныхъ уравненія $\frac{dy}{dx} = Y$ и $\frac{dz}{dx} = Z$ и одинъ изъ интеграловъ $f(x,y,z) = C$; опредѣливъ отсюда z и вставивъ въ 1ое получимъ простое дифференціальное уравненіе, множитель котораго пусть будетъ μ. $dy - Ydx = 0$, отсюда

$\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu Y}{dy} = 0$, сюда x и y входятъ какъ явно, такъ и неявно чрезъ посредство z поэтому $\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d\mu Y}{dy} + \frac{d\mu Y}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0$; производныя z по x и y опредѣляемъ изъ интеграла $\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dz}}$ и $\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}$; вставимъ эти величины въ послѣднее равенство:

$$\frac{df}{dz}\left(\frac{d\mu}{dx} + \frac{d\mu Y}{dy}\right) - \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{df}{dx} - \frac{d\mu Y}{dz}\cdot\frac{df}{dy} = 0$$

означимъ $\frac{df}{dz} = \vartheta$; $\frac{d\mu\vartheta}{dx} = \mu\frac{d^2f}{dz.dx} + \vartheta\frac{d\mu}{dx}$; $\frac{d\vartheta\mu Y}{dy} = \mu Y\frac{d^2f}{dzdy} + \vartheta\frac{d\mu Y}{dy}$; вставляемъ это

$\frac{d\mu\vartheta}{dx} - \mu\frac{d^2f}{dz.dx} + \frac{d\vartheta\mu Y}{dy} - \mu Y\frac{d^2f}{dz.dy} - \frac{d\mu}{dz}\cdot\frac{df}{dx} - \frac{d\mu Y}{dz}\cdot\frac{df}{dy} = 0$ или

$\frac{d\mu\vartheta}{dx} + \frac{d\vartheta\mu Y}{dy} - \frac{d\left[\mu\frac{df}{dx} + \mu Y\frac{df}{dy}\right]}{dz} = 0$. Продифференцировавъ интегралъ получимъ $\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0$ или $\frac{df}{dx}+Y\frac{df}{dy}=-\frac{df}{dz}Z=-\varphi Z$. отсюда $\frac{d\mu\varphi}{dx}+\frac{d\mu\varphi Y}{dy}+\frac{d\mu\varphi Z}{dz}=0$ означивъ $\mu\varphi=\xi$; $\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\xi Y}{dy}+\frac{d\xi Z}{dz}=0$; если найдемъ ξ удовлетворяющій этому условію, то получимъ $\mu=\frac{\xi}{\frac{df}{dz}}$; эта теорема позволяетъ найти другой интегралъ когда одинъ извѣстенъ. Обобщая этотъ выводъ на систему уравненій, получаемъ теорію Якоби. $\frac{dy}{dx}=Y$; $\frac{dz}{dx}=Z$; $\frac{du}{dx}=U$; два интеграла $f(xyzu)=c$

$f_1(xyzu)=c_1$

опредѣливъ изъ перваго интеграла u и вставивъ во второй, найдемъ $f_1(xyzc)=c_1$ и этимъ приводимъ вопросъ къ предъидущему. Тѣмъ же рядомъ разсужденій получимъ уравненіе $\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\xi Y}{dy}+\frac{d\xi Z}{dz}=0$, но въ немъ xyz входятъ еще и неявно вслѣдствіе подстановки u, отъ чего оно получаетъ такой видъ:

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\xi}{du}\frac{du}{dx}+\frac{d\xi Y}{dy}+\frac{d\xi Y}{du}\cdot\frac{du}{dy}+\frac{d\xi Z}{dz}+\frac{d\xi Z}{du}\cdot\frac{du}{dz}=0$$

замѣняя $\frac{du}{dx}$ и т. д. изъ перваго интеграла величинами $-\frac{df}{dx}:\frac{df}{du}$ и т. д. и полагая $\frac{df}{du}=\varphi$, имѣемъ

$$\frac{d\varphi\xi}{dx}-\frac{d\left(\xi\frac{df}{dx}\right)}{du}+\frac{d\varphi\xi Y}{dy}-\frac{d\left(\xi Y\frac{df}{dy}\right)}{du}+\frac{d\varphi\xi Z}{dz}-\frac{d\left(\xi Z\frac{df}{dz}\right)}{du}=0 \text{ или}$$

$$\frac{d\varphi\xi}{dx}+\frac{d\varphi\xi Y}{dy}+\frac{d\varphi\xi Z}{dz}+\frac{d\varphi\xi U}{du}=0$$

означивъ $\varphi\xi=\xi_1$ и опредѣливъ отсюда частную величину ξ_1 будемъ имѣть $\mu=\frac{\xi}{\frac{df_1}{dz}}=\frac{\xi_1}{\frac{df}{du}\cdot\frac{df_1}{dz}}$.

Интегрированіе уравненій съ частными производными; функціи зависятъ отъ нѣсколькихъ главныхъ перемѣнныхъ; при интеграціи войдутъ новый видъ произвольныхъ постоянныхъ - это произвольныя функціи. $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$. Здѣсь мы встрѣчаемъ три вопроса: 1) Когда даны обѣ частныя производныя. 2) одна изъ нихъ и 3) соотношеніе между ними. Навзяму представимъ только послѣдній вопросъ.

Первый случай приводится къ виду $dz=Mdx+Ndy$; полагаемъ $M=\frac{dz}{\partial x}$, $N=\frac{dz}{dy}$ $\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}$ если это условіе существуетъ, то интегралъ есть, если же оно не удовлетворяется, то нѣтъ и интеграла. M и N суть функціи x и y; интегрируя $M=\frac{dz}{dx}$ находимъ $z=\int M\,dx+Y$ для опредѣленія Y дифференцируемъ его $\frac{dz}{dy}=\int\frac{dM}{dy}dx+\frac{dY}{dy}=N$; $\frac{dY}{dy}=N-\int\frac{dM}{dy}dx$; $Y=\int N\,dy-\int dy\int\frac{dM}{dy}dx+C$

отсюда $z=\int M\,dx+\int N\,dy-\int dy\int\frac{dM}{dy}dx+C$.

понятно, что для возможности интеграціи необходимо, чтобы $Y=\varphi(y)$, а это возможно только при существованіи вышесказаннаго условія; произвольность M и N не годится.

примѣръ: $dz=\left[\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx+\left[\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}\right]dy$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{-2y}{(x-y)^2}-\frac{2y^2}{(x-y)^3}=\frac{-2xy+\cancel{2y^2}-\cancel{2y^2}}{(x-y)^3}$$

$$\frac{dN}{dx}=\frac{2x}{(x-y)^2}-\frac{2x^2}{(x-y)^3}=\frac{\cancel{2x^2}-2xy-\cancel{2x^2}}{(x-y)^3}$$

условіе интегрируемости выполнено.

$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}-\frac{y^2}{(x-y)^2}$; $z=\lg x+\frac{y^2}{x-y}+Y$; $Y=y-\lg y+c$

$\frac{dz}{dy}=\frac{x^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{y}=\frac{2y}{x-y}+\frac{y^2}{(x-y)^2}+\frac{dY}{dy}$; $\frac{dY}{dy}=\frac{x+y}{x-y}-\frac{2y}{x-y}-\frac{1}{y}=1-\frac{1}{y}$;

$$z=\lg x+\frac{y^2}{x-y}+y-\lg y+c=\lg\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{xy}{x-y}+c.$$

предположимъ, что M и N суть функціи x, y, и z; дано уравненіе

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=0$$

если это уравненіе равняется du, то $P=\frac{du}{dx}$, $Q=\frac{du}{dy}$, $R=\frac{du}{dz}$; отсюда получаются слѣдующія условія: $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$; $\frac{dP}{dz}=\frac{dR}{dx}$; $\frac{dQ}{dz}=\frac{dR}{dy}$; если эти условія выполнены, то интеграція возможна.

$\frac{du}{dx}=P$; $u=\int P\,dx+Z$; $\frac{du}{dz}=R=\int\frac{dP}{dz}dx+\frac{dZ}{dz}$; $\frac{dZ}{dz}=R-\int\frac{dP}{dz}dx$

$Z=\int R\,dz-\int dz\int\frac{dP}{dz}dx+Y$; $\frac{dZ}{dy}=\int\frac{dR}{dy}dz-\int dz\int\frac{d^2P}{dz\,dy}dx+\frac{dY}{dy}$; $\frac{dZ}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx$ (изъ 1го)

$\frac{dY}{dy}=Q-\int\frac{dP}{dy}dx-\int\frac{dR}{dy}dz+\int dz\int\frac{d^2P}{dz\,dy}dx$;

$$Y=\int Q\,dy-\int dy\int\frac{dP}{dy}dx-\int dy\int\frac{dR}{dy}dz+\int dy\int dz\int\frac{d^2P}{dz\,dy}dx+C.$$

примѣръ съ выполненнымъ условіемъ интегрируемости.

$(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$; $\frac{du}{dx}=y+z$; $u=yx+zx+Z$. $\frac{du}{dz}=x+y=x+\frac{dZ}{dz}$; $\frac{dZ}{dz}=y$.

$Z=yz+Y$; $\frac{dZ}{dy}=z+\frac{dY}{dy}$; $\frac{dZ}{dy}=z+x-x=z$; $\frac{dY}{dy}=0$; $Y=C$; $Z=yz+C$; $u=yx+zx+yz+C$; инте-

грамъ даннаго уравненія будетъ $yx+zx+zy=C$.
Условіе интегрируемости изображается въ иномъ видѣ. Изъ уравненія $Pdx+Qdy+Rdz=0$ имѣемъ $dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy$; $p=-\frac{P}{R}$; $q=-\frac{Q}{R}$; существуетъ условіе $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$ или $\frac{d\frac{P}{R}}{dy}=\frac{d\frac{Q}{R}}{dx}$ отсюда

$$R\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}q\right)-P\left(\frac{dR}{dy}+\frac{dR}{dz}q\right)=R\left(\frac{dQ}{dx}+\frac{dQ}{dz}p\right)-Q\left(\frac{dR}{dx}+\frac{dR}{dz}p\right)$$

$$R\frac{dP}{dy}-Q\frac{dP}{dz}-P\frac{dR}{dy}=R\frac{dQ}{dx}-P\frac{dQ}{dz}-Q\frac{dR}{dx}$$

$$P\left(\frac{dQ}{dz}-\frac{dR}{dy}\right)+Q\left(\frac{dR}{dx}-\frac{dP}{dz}\right)+R\left(\frac{dP}{dy}-\frac{dQ}{dx}\right)=0$$

если это условіе невыполняется то нельзя найти интегрирующій множитель; дѣйствительно

$$\cancel{\mu}P\left(\frac{d\mu Q}{dz}-\frac{d\mu R}{dy}\right)+\cancel{\mu}Q\left(\frac{d\mu R}{dx}-\frac{d\mu P}{dz}\right)+\mu R\left(\frac{d\mu P}{dy}-\frac{d\mu Q}{dx}\right)=0$$

$$P\left(\mu\frac{dQ}{dz}+Q\frac{d\mu}{dz}-\mu\frac{dR}{dy}-R\frac{d\mu}{dy}\right)+\ldots\ldots\quad=0$$

$$\frac{d\mu}{dz}(P\cancel{Q}-P\cancel{Q})+\ldots\ldots\quad=0$$

въ результатѣ получается прежнее условіе, что заставляетъ заключить о невозможности найти интегрирующій множитель. Какое значеніе имѣетъ эта зависимость z какъ функціи невозможной отъ x и y? Возможныя функціи представляютъ собой поверхности, чтобы дать значеніе невозможности, беремъ совершенно произвольное соотношеніе $y=\varphi(x)$ и исключаемъ y изъ данного уравненія; $Mdz+Ndx=0$ (получаемъ) интегралъ котораго всегда можетъ быть опредѣленъ $z=\psi(x)$ совокупность этихъ двухъ уравненій даетъ линію въ пространствѣ и такъ какъ φ функція произвольная, то они опредѣляютъ совокупность разбросанныхъ въ пространствѣ линій.-

Второй случай, когда дается одна изъ производныхъ. $p=\frac{dz}{dx}=3x^2y$ интегралъ $z=x^3y+\varphi(y)$. Въ общемъ видѣ $f(p,x,y,z)=0$ интегрируется какъ простое дифференціальное уравненіе, принимая y за постоянное и затѣмъ придавая произвольную функцію отъ y. Также интегрируются уравненія съ высшими производными.
Примѣръ: $\frac{d^2z}{dxdy}+a\frac{dz}{dx}=xy$; $\frac{dz}{dx}=z'$; $\frac{dz'}{dy}+az'=xy$; $z'=u.v$; и $\frac{dv}{dy}+v\frac{du}{dy}+auv=$

определимъ и подъ условіемъ $\frac{du}{dy}+au=0$; $\frac{du}{u}=-a\,dy$; $lg\,u=-ay$; $u=e^{-ay}$

$e^{-ay}\frac{dv}{dy}=xy$; $v=x\int ye^{ay}dy = x\left[\frac{e^{ay}y}{a}-\frac{1}{a}\int e^{ay}dy\right]+C = x\left[\frac{ye^{ay}}{a}-\frac{e^{ay}}{a^2}\right]+C$

$z'=\frac{xy}{a}-\frac{x}{a^2}+\varphi(x)e^{-ay}$; $z=\frac{yx^2}{2a}-\frac{x^2}{2a^2}+e^{-ay}\int\varphi(x)dx=\frac{yx^2}{2a}-\frac{x^2}{2a^2}+e^{-ay}\varphi_1(x)+\psi(y)$.

Дано уравненіе съ частными производными $Pp+Qq=R$; интегрировать его значитъ найти такую $F(x,y,z)=0$, чтобы величины p и q определенныя изъ нея удовлетворяли данному уравненію. $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=0$ и $p=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dz}}$; $q=-\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}$; вставляя эти величины находимъ $P\frac{dF}{dx}+Q\frac{dF}{dy}+R\frac{dF}{dz}=0$; искомая функція должна удовлетворять этому уравненію. Но мы видели, что такая F есть произвольное сочетаніе интеграловъ совместныхъ уравненій. Поэтому вопросъ можно привести къ интегрированію дифференціальныхъ уравненій $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$, пусть интегралы ихъ $f=c$ и $f_1=c_1$, тогда искомая $F=\varphi(f,f_1)$ или въ виде $f=\varphi(f_1)$. Нетрудно обратнымъ путемъ убедиться въ справедливости этого, исключивши произвольную функцію; для чего дифференцируемъ:

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dz}p=\varphi'(f_1)\left[\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dz}p\right]$$

$$\frac{df}{dy}+\frac{df}{dz}q=\varphi'(f_1)\left[\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q\right]$$

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{df_1}{dy}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{df_1}{dy}p+\frac{df}{dx}\cdot\frac{df_1}{dz}q=\frac{df}{dy}\cdot\frac{df_1}{dx}+\frac{df}{dz}\cdot\frac{df_1}{dx}q+\frac{df}{dy}\cdot\frac{df_1}{dz}p$$

$$\left[\frac{df}{dz}\cdot\frac{df_1}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{df_1}{dz}\right]p+\left[\frac{df}{dx}\cdot\frac{df_1}{dz}-\frac{df}{dz}\cdot\frac{df_1}{dx}\right]q=\frac{df}{dy}\cdot\frac{df_1}{dx}-\frac{df}{dx}\cdot\frac{df_1}{dy}$$

получимъ линейное ~~от~~ относительно p и q уравненіе, коеффиціенты котораго суть функціи x, y, z. Примеръ:

$xp-yq=0$; $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}=\frac{dz}{0}$; $dz=0$; $z=c$; $lg\,x+lg\,y=lg\,c_1$; $xy=c_1$; $z=\varphi(xy)$.

Произвольная функція определяется по начальному положенію, т.е. по той зависимости, которая существуетъ между y и z при известномъ x. При $x=x_0$, $z=f(y)$ } полагая $xy=\alpha$ имеемъ $z=\varphi(\alpha)$ но такъ какъ y совершенно произвольно, то можно ему дать значеніе α; отсюда $z=f(xy)$.

$px^2-qxy=-y^2$; $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{dz}{-y^2}$; $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$; $xy=c$; $\frac{dy}{x}=\frac{dz}{y}$; $\frac{y^2dy}{c}=dz$; $z=\frac{y^3}{3c}+c_1$

$z=\frac{y^2}{3x}+c_1$; интегралъ даннаго уравненія $z-\frac{y^2}{3x}=\varphi(xy)$.

$py - qx = 0;\ \frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0};\ dz = 0;\ z = c;\ x\,dx + y\,dy = 0;\ x^2+y^2 = c_1;\ z = \varphi(x^2+y^2)$

диференцируя последнее уравнение, получимъ $p = \varphi'(x^2+y^2)2x$

$q = \varphi'(x^2+y^2)2y$ откуда

$\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$ или $py - qx = 0$.

Приложимъ сказанное къ задачѣ объ образовании поверхностей. Пусть уравнения образующей

$$f(x,y,z,a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$
$$f_1(x,y,z,a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$

и $\left.\begin{matrix} F(x,y,z)=0; & F_1(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0; & \Phi_1(x,y,z)=0 \end{matrix}\right\}$ уравнения двухъ управляющихъ. Исключивъ изъ этихъ уравнений $x\,y\,z$, найдемъ условия встрѣчи этихъ двухъ линий

$$\varphi(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$
$$\varphi_1(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$$

исключая изъ этихъ последнихъ уравнений вмѣстѣ съ уравнениями образующей всѣ параметры, получимъ $\Phi(x,y,z) = 0$ искомая поверхность. Если произвольныхъ параметровъ n, то управляющихъ может быть $n-1$, тогда между первыми получится $n-1$ уравнений $\varphi_{n-2}(a_1 a_2 \dots a_n) = 0$ и одинъ останется произвольнымъ.

Цилиндрическия поверхности. Образующая есть прямая уравнения $\left.\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{matrix}\right\}$ гдѣ a и b постоянны, такъ какъ линия остается себѣ параллельною. Пусть управляющая выразится такъ $\left.\begin{matrix} F(x,y,z) = 0 \\ \Phi(x,y,z) = 0 \end{matrix}\right\}$ исключая координаты получимъ условие встрѣчи этихъ линий $\alpha = \varphi(\beta)$ или $x - az = \varphi(y - bz)$ общее уравнение цилиндрической поверхности. Диференциальное получимъ исключивъ произвольную функцию. $1 - ap = \varphi'(y-bz)(-bp)$

$$-aq = \varphi'(y-bz)(1-bq)$$

$\frac{1-ap}{-aq} = \frac{-bp}{1-bq}$; $1 - ap - bq + abpq = abpq$, откуда $ap + bq = 1$.

Если цилиндръ проходитъ черезъ заданую кривую $\begin{matrix} F(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0 \end{matrix}$, означивъ $\begin{matrix} x - az = \alpha \\ y - bz = \beta \end{matrix}$ и исключивъ $x\,y\,z$ изъ этихъ 4хъ ур: получимъ $\alpha = f(\beta)$ извѣстной функции. Точно также определить произвольную функцию φ можно, подчинивъ цилиндръ условию соприкосаться съ поверхностью $F(x,y,z) = 0$, откуда определимъ p и q, которые должны быть одинаковы для линии соприкосновения $a\frac{dF}{dx} + b\frac{dF}{dy} + \frac{dF}{dz} = 0$ полагая $\begin{matrix} x - az = \alpha \\ y - bz = \beta \end{matrix}$ и исключая, найдемъ $\alpha = f(\beta)$.

Коническая поверхность: образующая $\begin{cases} x-\alpha=a(z-\gamma) \\ y-\beta=b(z-\gamma)\end{cases}$ перемѣнные параметры a и b; управляющая $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0\end{cases}$ исключеніе x,y,z изъ этихъ уравненій приведетъ насъ къ $a=\varphi(b)$ или $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=\varphi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)$ уравненіе конуса.
Дифференціальное уравненіе получается такимъ образомъ:

$$\frac{1}{z-\gamma}-\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2}p=\varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left(-\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2}p\right)$$

$$-\frac{x-\alpha}{(z-\gamma)^2}q=\varphi'\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)\left(\frac{1}{z-\gamma}-\frac{y-\beta}{(z-\gamma)^2}q\right)$$

$$\frac{(z-\gamma)-(x-\alpha)p}{(x-\alpha)q}=\frac{(y-\beta)p}{(z-\gamma)-(y-\beta)q}$$

$(z-\gamma)^2-(z-\gamma)(x-\alpha)p-(z-\gamma)(y-\beta)q+(x-\alpha)(y-\beta)pq=(x-\alpha)(y-\beta)pq$ или

$z-\gamma=(x-\alpha)p+(y-\beta)q$; интегралъ этого уравненія приводитъ къ найденному выше уравненію конуса въ конечномъ видѣ.
Поверхности вращенія образуются движеніемъ круга. Уравненіе его $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ ax+by+cz=d\end{cases}$ уравненіе управляющей $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F_1(x,y,z)=0\end{cases}$ исключая отсюда координаты, получимъ $d=\varphi(r^2)$; исключеніе произвольныхъ параметровъ изъ уравненій этого и образующей даетъ

$$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$$

Отсюда находимъ дифференціальное уравненіе поверхностей вращенія:

$$a+cp=\varphi'(x^2+y^2+z^2)2(x+zp) \qquad \frac{a+cp}{b+cq}=\frac{x+zp}{y+zq}$$
$$b+cq=\varphi'(x^2+y^2+z^2)2(y+zq)$$

$$p(cy-bz)+q(az-cx)=bx-ay$$

Интегрируя это уравненіе получимъ то изъ котораго вышли; для этого сначала интегрируемъ такія уравненія

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}=dt$$

$$\begin{array}{l|c|c} dx=(cy-bz)dt & a & x \\ dy=(az-cx)dt & b & y \\ dz=(bx-ay)dt & c & z \end{array}$$

$$adx+bdy+cdz=0 \qquad xdx+ydy+zdz=0$$
$$ax+by+cz=\alpha \qquad x^2+y^2+z^2=\beta$$

Интегралъ даннаго уравненія представится въ видѣ:

$$ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

Дано уравненіе $P\frac{du}{dx}+Q\frac{du}{dy}+R\frac{du}{dz}=V$; предполагая существованіе интеграла въ формѣ $F(x,y,z,u)=0$ опредѣлимъ отсюда частныя производныя $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0$ и вставляя ихъ въ данное, имѣемъ: $P\frac{dF}{dx}+Q\frac{dF}{dy}+R\frac{dF}{dz}+V\frac{dF}{du}=0$, но F можетъ быть произвольной функціей трехъ интеграловъ совмѣстныхъ уравненій $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{V}$; пусть эти интегралы суть $f=c$, $f_1=c_1$, $f_2=c_2$, тогда интегралъ даннаго $F(f,f_1,f_2)=0$ или $f=\varphi(f_1 f_2)$. Примѣръ:

$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}=mu$; интегрируемъ сначала $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{mu}$

$lgy=lgx+lgc$ $\quad \frac{y}{x}=c$ интегралъ даннаго уравненія будетъ

$lgz=lgx+lgc_1$ $\quad \frac{z}{x}=c_1$ $\quad \frac{u}{x^m}=\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$ или $u=x^m\varphi\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)$

$lgu=mlgx+lgc_2$ $\quad \frac{u}{x^m}=c_2$

интегралъ выражаетъ общее свойство однородныхъ функцій.

Интеграція уравненій перваго порядка какого-нибудь вида

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

означимъ $\frac{dF}{dx}=X$; $\frac{dF}{dy}=Y$ и т. д. и введемъ новое перемѣнное $u=\varphi(x,y)$, замѣняя имъ y черезъ $\psi(u,x)$. тогда

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx}\ ;\quad \frac{d^2z}{dx.du}=\frac{dp}{du}+\frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx}+q\frac{d^2y}{dx.du}\ ;\quad \frac{dp}{du}+\frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{du}$$

$$\frac{dz}{du}=q\frac{dy}{du}\ ;\quad \frac{d^2z}{du\,dx}=\frac{dq}{dx}\frac{dy}{du}+q\frac{d^2y}{du.dx}\ ;\quad \frac{dp}{du}=\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

Дифференцируемъ данное уравненіе по u:

$$\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{du}+\frac{dF}{dz}\cdot\frac{dz}{du}+\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dp}{du}+\frac{dF}{dq}\cdot\frac{dq}{du}=0 \text{ или}$$

$$(A)\ldots Y\cdot\frac{dy}{du}+Zq\frac{dy}{du}+P\left(\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{du}-\frac{dq}{du}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+Q\frac{dq}{du}=0$$

дифференцируя тоже уравненіе по x, найдемъ

$$(B)\ldots X+Y\frac{dy}{dx}+Z\frac{dz}{dx}+P\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx}=0$$

Уравненіе (A) даетъ: $\left[Y+Zq+P\frac{dq}{dx}\right]\frac{dy}{du}+\left[Q-P\frac{dy}{dx}\right]\frac{dq}{du}=0$, такъ какъ $\frac{dy}{du}$ совершенно произвольно, то для выполненія этого уравненія необходимо 1) $Y+Zq+P\frac{dq}{dx}=0$, а слѣдовательно и $Q-P\frac{dy}{dx}=0$ или $dy=\frac{Q\,dx}{P}$

но $dz = p\,dx + q\,dy$; $dz = p\,dx + q\frac{Q\,dx}{P}$ или $dz = (pP + qQ)\frac{dx}{P}$ слѣдовательно

$$\frac{dy}{Q} = \frac{dx}{P} = \frac{dz}{pP + qQ} = \frac{-dq}{Y + Zq} = \frac{-dp}{X + Zp}$$

послѣднія два равенства получаются изъ уравненій 1. и (13)

$$X + \cancel{Y\frac{Q}{P}} + Z\frac{Pp + \cancel{Qq}}{P} + P\frac{dp}{dx} + Q\frac{-\cancel{(Y+Zq)}}{P} = 0$$

$$X + Zp + P\frac{dp}{dx} = 0$$

Эти четыре совмѣстныя уравненія интегрируются какъ простыя дифференціальныя, ибо въ нихъ входитъ только одно главное перемѣнное x; полагая c произвольными функціями другого главнаго перемѣннаго u, найдемъ интегралы ихъ

$$f_1(x,y,z,p,q) = c_1 \quad \text{или} \quad y = \varphi_1(x\, c_1 c_2 c_3 c_4)$$
$$f_2(x,y,z,p,q) = c_2 \qquad z = \varphi_2(x\, c_1 c_2 c_3 c_4)$$
$$f_3(x,y,z,p,q) = c_3 \qquad p = \varphi_3(x\, c_1 c_2 c_3 c_4)$$
$$f_4(x,y,z,p,q) = c_4 \qquad q = \varphi_4(x\, c_1 c_2 c_3 c_4)$$

подставивъ эти выраженія въ данное уравненіе, найдемъ $\psi(c_1 c_2 c_3 c_4) = 0$ отсюда заключаемъ что произвольны только три изъ величинъ c. слѣдовательно $y = \varphi(x\, c_1 c_2 c_3)$ и интегралъ даннаго уравненія $f(x,y,z,c_1,c_2) = 0$

$$z = \varphi_1(x\, c_1 c_2 c_3)$$

онъ называется полнымъ, ибо на мѣсто произвольной функціи стоятъ два произвольныхъ постоянныхъ, чтобы найти общій полагаемъ $c_2 = \varphi(c_1)$ ибо $c_2 = \psi(u)$, $c_1 = \psi_1(u)$ получимъ $f(x,y,z,c_1,\varphi(c_1)) = 0$ и $\frac{df}{dc_1} = 0$ исключая отсюда c_1 найдемъ общій интегралъ $\Phi(x,y,z,\varphi c_1) = 0$. Примѣръ:

$z - apq = 0$; $\frac{-dx}{aq} = \frac{-dy}{ap} = \frac{-dz}{2z} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q}$;

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q};\quad \frac{p}{q} = c_1$$
$$\frac{dp}{p} = \frac{dz}{2z};\quad \frac{\sqrt{z}}{p} = c_4$$
$$\frac{dy}{ap} = \frac{dp}{p};\quad y = ap + c_2$$
$$\frac{dx}{aq} = \frac{dq}{q};\quad x = aq + c_3$$

$q = \frac{x - c_3}{a}$; $p = \frac{c_1(x - c_3)}{a}$; $z = \frac{c_4^2 c_1^2 (x - c_3)^2}{a^2}$;

$$\frac{c_4^2 c_1^2 (x - c_3)^2}{a^2} - \frac{c_1 (x - c_3)^2 a}{a^2} = 0;\quad c_4^2 c_1 = a$$

$z = \frac{(x - c_3)^2}{c_4^2}$ полный интегралъ.

Изъ уравненій втораго порядка разсмотримъ уравненіе Ампера $Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$. Коэффиціенты не содержатъ вто

рыхъ производныхъ и суть функціи x, y, z, p и q. Пусть u и v функціи этихъ же количествъ и положимъ $u=\varphi(v)$. Диференцируя по x и по y находимъ $\frac{du}{dx}+\frac{du}{dz}p+\frac{du}{dp}r+\frac{du}{dq}s=\varphi'(v)\left[\frac{dv}{dx}+\frac{dv}{dz}p+\frac{dv}{dp}r+\frac{dv}{dq}s\right]$,
и $\frac{du}{dy}+\frac{du}{dz}q+\frac{du}{dp}s+\frac{du}{dq}t=\varphi'(v)\left[\frac{dv}{dy}+\frac{dv}{dz}q+\frac{dv}{dp}s+\frac{dv}{dq}t\right]$ или

$$\frac{A+\frac{du}{dp}r+\frac{du}{dq}s}{A_1+\frac{du}{dp}s+\frac{du}{dq}t}=\frac{B+\frac{dv}{dp}r+\frac{dv}{dq}s}{B_1+\frac{dv}{dp}s+\frac{dv}{dq}t}$$

$$AB_1+B_1\frac{du}{dp}r+B_1\frac{du}{dq}s+A\frac{dv}{dp}s+\cancel{\frac{du}{dp}\cdot\frac{dv}{dp}rs}+\frac{du}{dq}\frac{dv}{dp}s^2+A\frac{dv}{dq}t+\frac{du}{dp}\frac{dv}{dq}rt+\cancel{\frac{du}{dq}\frac{dv}{dq}st}$$
$$=A_1B+A_1\frac{dv}{dp}r+A_1\frac{dv}{dq}s+B\frac{du}{dp}s+\cancel{\frac{du}{dp}\frac{dv}{dp}rs}+\frac{du}{dp}\frac{dv}{dq}s^2+B\frac{du}{dq}t+\frac{du}{dq}\frac{dv}{dp}rt+\cancel{\frac{du}{dq}\cdot\frac{dv}{dq}st}$$

$$M+Hr+2Ks+Lt+N(rt-s^2)=0.$$

Кромѣ окончательнаго рѣшенія уравненіе 2^го порядка имѣетъ посредствующіе или первые интегралы т.е. содержащіе p и q. Предполагая, что $u=\varphi(v)$ удовлетворяетъ данному уравненію мы этимъ самымъ даемъ условіе, что оно имѣетъ первый интегралъ. Введемъ новое перемѣнное $y=\psi(x,u)$

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx}\qquad \frac{dp}{dx}=r+s\frac{dy}{dx}\qquad \frac{dq}{dx}=s+t\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dz}{du}=q\frac{dy}{du}\qquad \frac{dp}{du}=s\frac{dy}{du}\qquad \frac{dq}{du}=t\frac{dy}{du}$$

$$t=\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}};\quad s=\frac{dq}{dx}-\frac{dy}{dx}\cdot\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}};\quad r=\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}$$

$$rt-s^2=\frac{dp}{dx}\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}\right)^2-\left(\frac{dq}{dx}\right)^2-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}\right)^2+2\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}$$
$$=-\left(\frac{dq}{dx}\right)^2+\left(\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}\right)\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}$$

$$H\left[\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right]+2K\frac{dq}{dx}+M-N\left(\frac{dq}{dx}\right)^2+\left[H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2K\frac{dy}{dx}+L+N\left(\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dp}{dx}\right)\right]\frac{\frac{dq}{du}}{\frac{dy}{du}}$$

Выберемъ перемѣнное такъ, чтобы одинъ изъ множителей обращался въ ноль, тогда получимъ два уравненія, которыя можно разсматривать какъ простыя диференціальныя, изъ явно и въ нихъ не входитъ. Если удастся найти два интеграла этихъ уравненій $\begin{cases} w = c \\ v = c_1 \end{cases}$, то общій интегралъ будетъ $v = \varphi(w)$ и произвольное постоянное есть произвольная функція отъ u. Подставимъ во второе уравненіе величину $\frac{dq}{dx}$ и $\frac{dp}{dx}$ тогда

$$H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2K\frac{dy}{dx} + L + N\left[s\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + r + s\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$(H+Nt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(K-Ns)\frac{dy}{dx} + L + Nr = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K-Ns}{H+Nt} \pm \sqrt{\frac{(K-Ns)^2 - (L+Nr)(H+Nt)}{(H+Nt)^2}}$$

подъ корнемъ стоитъ: $K^2 - 2KNs + N^2s^2 - LH - NHr - LNt - N^2rt$

$$K^2 - LH - N\left[Hr + 2Ks + Lt + N(rt - s^2)\right]$$

$$K^2 - LH + MN = g.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{K - Ns \pm \sqrt{g}}{H+Nt}\ ;\ H\frac{dy}{dx} + Nt\frac{dy}{dx} = K - Ns \pm \sqrt{g}.$$

Окончательная форма второго уравненія Ампера.

$$H\frac{dy}{dx} + N\frac{dq}{dx} = K \pm \sqrt{g}.$$

съ помощью его упрощается и первое.

$$H\frac{dp}{dx} + N\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 - K\frac{dq}{dx} \mp \sqrt{g}\frac{dq}{dx} + 2K\frac{dq}{dx} + M - N\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = 0$$

$$H\frac{dp}{dx} + M + K\frac{dq}{dx} \mp \sqrt{g}\frac{dq}{dx} = 0$$

$$H\frac{dp}{dx} + (K \mp \sqrt{g})\frac{dq}{dx} = -M$$

Рѣшая эти уравненія получимъ двѣ системы линейныхъ уравненій, помощью которыхъ найдемъ два первыхъ интеграла $v = \varphi(w)$, $v_1 = \varphi_1(w_1)$, опредѣлимъ изъ нихъ p и q, вставимъ въ выраженіе $dz = p\,dx + q\,dy$ и интегрируя найдемъ общій интегралъ. Примѣръ:
$r - a^2t = 0$; $H = 1$, $K = 0$, $L = -a^2$, $M = 0$, $N = 0$. Первое уравненіе $\frac{dy}{dx} = \pm a$; второе $\frac{dp}{dx} \mp a\frac{dq}{dx} = 0$ взявъ въ обоихъ уравненіяхъ верхній знакъ получимъ по ин-

теграціи $y-ax=c$; $p-aq=c_1$ первый интегралъ $p-aq=\psi(y-ax)$
пользуясь другимъ знакомъ $y+ax=c$; $p+aq=c_1$ и интегралъ $p+aq=\varphi(y+ax)$
изъ этихъ уравненій опредѣляемъ p и q, приписавъ при произвольныхъ функціяхъ множитель $2a$, находимъ:

$$p=a\left(\varphi(y+ax)+\psi(y-ax)\right)$$
$$q=\left(\varphi(y+ax)-\psi(y-ax)\right)$$

и интегрируемъ $dz=pdx+qdy$ вставивъ сюда эти выраженія:

$$dz=\varphi(y+ax)\left[dy+adx\right]-\psi(y-ax)\left[dy-adx\right]$$
$$z=\varphi_1(y+ax)+\psi_1(y-ax)$$

Другой путь заключается въ слѣдующемъ: интегрируемъ уравненіе $p+aq=\varphi(y+ax)$ интегралъ его получится изъ рѣшенія совмѣстныхъ уравненій $\frac{dx}{1}=\frac{dy}{a}=\frac{dz}{\varphi(y+ax)}$

$$dy=adx \qquad dz=\varphi(y+ax)dx \qquad c=y-ax$$
$$y=ax+c \qquad dz=\varphi(2ax+c)dx \qquad c_1=z-\varphi_1(y+ax)$$
$$z=\varphi_1(2ax+c)+c_1 \qquad z-\varphi_1(y+ax)=\psi(y-ax)$$
$$z=\varphi_1(y+ax)+c_1 \qquad z=\varphi_1(y+ax)+\psi(y-ax)$$

пришли такимъ образомъ къ тому же результату.—

Развертывающіяся поверхности: уравненіе управляющей $x=F(z)$, $y=f(z)$
образующая $x=az+m$, $y=bz+n$ называя черезъ $\alpha\beta\gamma$ координаты точки прикосновенія изъ этихъ уравненій касательной $\alpha=F'_\gamma\cdot\gamma+m$, $\beta=f'_\gamma\cdot\gamma+n$

$x-\alpha=F'_\gamma(z-\gamma)$; $x-F(\gamma)=F'_\gamma(z-\gamma)$
$y-\beta=f'_\gamma(z-\gamma)$; $y-f(\gamma)=f'(\gamma)(z-\gamma)$.

Геометрическое мѣсто прямыхъ, касательныхъ къ данной кривой есть развертывающаяся поверхность. Дифференцируемъ по x и по y.

$1-F'_\gamma\frac{d\gamma}{dx}=F'_\gamma\left(p-\frac{d\gamma}{dx}\right)+F''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}$; $1=F'_\gamma p+F''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}$

$-F'_\gamma\frac{d\gamma}{dy}=F'_\gamma\left(q-\frac{d\gamma}{dy}\right)+F''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dy}$; $0=F'_\gamma q+F''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dy}$

Второе уравненіе по дифференцированіи и по сокращеніи даетъ

$0=f'_\gamma p+f''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}$ и $1=f'_\gamma q+f''_\gamma(z-\gamma)\frac{d\gamma}{dy}$.

Исключая изъ этихъ четырехъ уравненій $(z-f)\frac{dy}{dx}$, $(z-f)\frac{dy}{dy}$, и f, получимъ $p=\varphi(q)$ дифференцируя которое по x и y имѣемъ $\begin{cases} r=\varphi'(q)s \\ s=\varphi'(q)t \end{cases}$ отсюда

$\frac{r}{s}=\frac{s}{t}$; $rt-s^2=0$ когда данная поверхность удовлетворяетъ этому условію, она принадлежитъ къ классу развивающихся.

Первое уравненіе даетъ $\left(\frac{dq}{dx}\right)^2=0$ т. е. $\frac{dq}{dx}=0$; второе $\frac{dp}{dx}=0$ слѣдов. $q=c_1$; $p=c$, и $q=\varphi(p)$ такимъ образомъ мы имѣемъ только одинъ корень, для интеграціи котораго беремъ совмѣстныя уравненія

$$\frac{dx}{-\varphi'(p)}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{q-p\varphi'(p)}=\frac{-dp}{0}=\frac{-dq}{0}$$

$$dy=-\frac{dx}{\varphi'(p)} \qquad dz=q\,dy-p\varphi'p\,dy \qquad y+\frac{x}{\varphi'c}=c'$$

$$y+\frac{x}{\varphi'(p)}=c_1 \qquad dz=q\,dy+p\,dx \qquad z-(cx+\varphi c y)=c''$$

$$z=px+qy+c_2$$

интегралъ: $z-cx-\varphi(c)y=\psi\left(y+\frac{x}{\varphi'c}\right)$

Возьмемъ для примѣра еще уравненіе $pqr-(1+p^2)s=0$ показывающее что одна изъ системъ линій кривизны лежитъ въ параллельныхъ плоскостяхъ. $H=pq$; $K=-\frac{1+p^2}{2}$; $L=M=N=0$. Уравненія таковы:

$$pq\,dy-\left(-\frac{1+p^2}{2}\pm\frac{1+p^2}{2}\right)dx=0. \qquad \left|\; dy=0 \right. \qquad \left|\; pq\,dy+(1+p^2)dx=0 \right.$$

$$pq\,dp+\left(-\frac{1+p^2}{2}\mp\frac{1+p^2}{2}\right)dq=0 \qquad \left|\; pq\,dp-(1+p^2)dq=0 \right. \qquad \left|\; dp=0. \right.$$

$y=c$; $\frac{p\,dp}{1+p^2}=\frac{dq}{q}$; $\frac{1}{2}\lg(1+p^2)=\lg\left(\frac{q}{c_1}\right)$; $\frac{q}{\sqrt{1+p^2}}=c_1$ отсюда

$$1)\ \frac{q}{\sqrt{1+p^2}}=\varphi(y)$$

$p=c$; $p(q\,dy+p\,dx)+dx=0$; $p\,dz+dx=0$; $c\,dz+dx=0$; $cz+x=c_1$; $pz+x=c_1$

$$2)\ pz+x=\psi(p)$$

Дальнѣйшій путь можетъ быть различенъ: опредѣляемъ отсюда p и q и вставляемъ для дальнѣйшей интеграціи въ $dz=p\,dx+q\,dy$

$dx = \psi'(p)dp - z\,dp - p\,dz$

$dz = p\psi'(p)dp - pz\,dp - p^2dz + \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y)dy$; $(1+p^2)dz + zp\,dp = p\psi'(p)dp + \sqrt{1+p^2}\,\varphi(y)dy$

$$\sqrt{1+p^2}\,dz + \frac{zp\,dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p\psi'(p)\,dp}{\sqrt{1+p^2}} + \varphi(y)\,dy$$

интегрируя и обозначая интегралъ второй части через $\psi_1 p + \varphi_1 y$, получимъ:

$$z\sqrt{1+p^2} = \psi_1(p) + \varphi_1(y)$$

исключая p отсюда помощію уравненія 2-го получимъ функц[ію] однихъ перемѣнныхъ. Изъ 2-го способа употребляя другой путь,

$$\frac{dx}{z-\psi'(p)} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{zp - p\psi'(p)} = \frac{-dp}{1+p^2} = \frac{-dq}{pq}.$$

$dy = 0$ $\quad \frac{p\,dp}{1+p^2} = \frac{dq}{q}$; $\frac{1}{2}lg(1+p^2) = lg\left(\frac{q}{c_1}\right)$; $\frac{q}{\sqrt{1+p^2}} = c_1$

$y = C$

$$dz(1+p^2) = -zp\,dp + p\psi'(p)\,dp$$

$$z\sqrt{1+p^2} = \psi_1(p) + c_2$$

$$z\sqrt{1+p^2} = \psi_1(p) + \varphi_1(y)$$

и опять тѣмъ же пріемомъ исключенія p между этими 2-мя уравненіями мы получимъ искомый интегралъ.

Линейныя уравненія съ частными производными. Общій видъ его: $Az + B\frac{dz}{dx} + B_1\frac{dz}{dy} + C\frac{d^2z}{dx^2} + C_1\frac{d^2z}{dx.dy} + C_2\frac{d^2z}{dy^2} + D\frac{d^3z}{dx^3} + \dots = 0$

положимъ, что производныя идутъ до n-го порядка и коэффиціенты постоянны. Его можно рѣшить въ частномъ предположеніи $z = e^{\alpha x + \beta y}$ гдѣ α и β суть произвольныя постоянныя. Подстановка этого перемѣннаго дастъ $A + B\alpha + B_1\beta + C\alpha^2 + C_1\alpha\beta + C_2\beta^2 + D\alpha^3 + \dots = 0$; $\varphi(\alpha,\beta) = 0$ рѣшая которое мы найдемъ $\beta_1 = f_1\alpha$; $\beta_2 = f_2\alpha \dots \beta_n = f_n\alpha$ и потому

$$z = \sum ce^{\alpha x + f_1\alpha y} + \sum ce^{\alpha x + f_2\alpha y} \dots + \sum ce^{\alpha x + f_n\alpha y}$$

суммированіе распространяется на всѣ c и α. Если $\beta = a_1\alpha + b_1$ то

$$z = \sum ce^{\alpha x + (a_1\alpha + b_1)y} = e^{b_1y}\sum ce^{\alpha(x+a_1y)} = e^{b_1y}\varphi_1(x+a_1y) + e^{b_2y}\varphi_2(x+a_2y) + \dots$$

Возьмемъ примѣръ, который мы уже рѣшили прежде:

$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\frac{d^2y}{dx^2}$; $y=e^{\alpha x+\beta t}$; $\beta^2=a^2\alpha^2$; $\beta=\pm a\alpha$; $y=\varphi_1(x+at)+\varphi_2(x-at)$.

Рѣшить уравненіе $\frac{du}{dt}=a\frac{d^2u}{dx^2}$ выражающее законъ прямолинейнаго распространенія теплоты. $u=e^{\alpha x+\beta t}$; $\beta=a\alpha^2$; $u=\Sigma C e^{\alpha x}\cdot e^{a\alpha^2 t}$

по формулѣ $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi}$, подставивъ $v=\omega-\alpha\sqrt{at}$, имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2+2\omega\alpha\sqrt{at}-\alpha^2at}\,d\omega=\sqrt{\pi};\quad e^{-a\alpha^2t}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2+2\omega\alpha\sqrt{at}}\,d\omega=\sqrt{\pi}$$ отсюда

$$e^{a\alpha^2t}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2+2\alpha\omega\sqrt{at}}\,d\omega,$$ такимъ образомъ:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Sigma C.e^{\alpha x}.e^{-\omega^2}.e^{2\omega\alpha\sqrt{at}}\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2}\Sigma Ce^{\alpha(x+2\omega\sqrt{at})}\,d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\omega^2}f(x+2\omega\sqrt{at})\,d\omega$$

Какъ послѣднее средство и здѣсь употребляется разложеніе въ строку. Разложить можно по x и по t и результаты различаются только числомъ произвольныхъ постоянныхъ. При $t=0$ мы имѣемъ $u_0=f(x)$

$$u=u_0+t\left(\frac{du}{dt}\right)_0+\frac{t^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0+\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_0=a\frac{d^2u_0}{dx^2}=af''(x);\quad \frac{d^2u}{dt^2}=a\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{du}{dt}\right)=a^2\frac{d^4u}{dx^4}$$

$\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)_0=a^2\frac{d^4u_0}{dx^4}=a^2f^{IV}(x)$ и т. д.

$$u=f(x)+atf''(x)+\frac{a^2t^2}{1.2}f^{IV}(x)+\ldots$$

При $x=0$, мы имѣемъ $u_0=\varphi(t)$; $\left(\frac{du}{dx}\right)_0=\psi(t)$

$$u=u_0+x\left(\frac{du}{dx}\right)_0+\frac{x^2}{1.2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0+\frac{x^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0+\ldots\ldots$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{a}\frac{du}{dt};\quad \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0=\frac{1}{a}\frac{du_0}{dt}=\frac{\varphi'(t)}{a};\quad \frac{d^3u}{dx^3}=\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dx}\right);\quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0=\frac{\psi'(t)}{a};$$

$\frac{d^4u}{dx^4}=\frac{1}{a}\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\frac{1}{a^2}\frac{d^2u}{dt^2}$; $\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0=\frac{1}{a^2}\frac{d^2u_0}{dt^2}=\frac{\varphi''(t)}{a^2}$ и т. д. разложеніе имѣетъ такой видъ:

$$u=\varphi(t)+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\varphi'(t)}{a}+\frac{x^4}{1.2..4}\cdot\frac{\varphi''(t)}{a^2}+\ldots$$
$$+x\psi(t)+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{\psi'(t)}{a}+\frac{x^5}{1.2\ldots5}\cdot\frac{\psi''(t)}{a^2}+\ldots$$

Теорія вѣроятностей.
(лекціи Давидова).

Всѣ явленія совершающіяся передъ нами мы можемъ раздѣлить на два отдѣла: одни правильно повторяющіяся, постоянныя, совершенно достовѣрныя напримѣръ смерть каждой личности, ежедневный восходъ солнца; другія происходящія безъ этой правильности, или какъ ихъ называютъ случайныя, которыя нельзя предсказать напримѣръ продолжительность жизни, перемѣна погоды и т. д. Самый лучшій примѣръ случайности можетъ представить закрытый сосудъ съ бѣлыми и черными шарами, изъ котораго мы вынимаемъ по одному. Если бѣлыхъ шаровъ больше то вынуть бѣлый будетъ болѣе вѣроятно, чѣмъ черный, или какъ говорятъ болѣе правдоподобно. Въ большинствѣ случаевъ наши ошибки, неудачи нашихъ предпріятій зависятъ отъ того, что состоялся случай неправдоподобный; но это не заставляетъ насъ перемѣнять свое мнѣніе; ибо его основаніе находится въ законѣ, который былъ однимъ изъ первыхъ употреблявшихся человѣкомъ, хотя и безсознательно. Когда число явленій увеличивается, тогда случайности уничтожаются и является правильность. Если мы будемъ вынимать шары изъ сосуда и отмѣтивъ опять кладемъ, то мы замѣтимъ нѣкоторую правильность въ появленіи цвѣтовъ, тѣмъ большую, чѣмъ больше мы вынимали; отношеніе между цвѣтами сохраняется такое же какъ и въ сосудѣ. Бюффонъ бросалъ къ верху монету и отмѣчалъ сколько разъ явится орелъ и сколько рѣшетка изъ 4000 было 2005 первый и 1995 вторая. Кетле изъ 20 бѣлыхъ и 20 черныхъ шаровъ вынувши 4000 разъ имѣлъ разницу въ 12. Температура зависитъ отъ постоянныхъ и случайныхъ обстоятельствъ, но послѣднія пропадаютъ если мы будемъ сравнивать среднія за два десятилѣтія ежедневныя maximum и minimum. и мы получимъ почти равенство этихъ среднихъ. Тоже самое можно сказать о прививкѣ; причемъ замѣтимъ, что средній выводъ даетъ величину притяженія солнца и луны такъ, какъ бы случайныхъ причинъ не было. Изъ тысячи англійскихъ кораблей отправляющихся ежегодно на Истъ-Индію гибнутъ пять; изъ тысячи голландскихъ, отправляющихся туда-же — семь. Этотъ законъ названъ Пуассономъ закономъ большихъ чиселъ. Онъ оправдывается повсюду: число невѣрно адрессованныхъ писемъ въ Парижѣ и Лондонѣ постоянно. Прибыль и убыль народонаселенія, если нѣтъ особенно рѣзкихъ причинъ, вліяющихъ въ ту или другую сторону постоянно. Даже судебная практика указываетъ постоянство числа преступленій и самоубійствъ.

Этотъ законъ служитъ основаніемъ теоріи вѣроятностей. Явленія чаще случающіяся есть вмѣстѣ съ тѣмъ и болѣе вѣроятныя. Хотя въ обыденной жизни можно различать весьма тонкіе оттѣнки вѣроятности, мы понимаемъ это различіе но высказать, формулировать его не можемъ. Постараемся уяснить вѣроятность считая ее за величину; за единицу принимаютъ достовѣрность, вѣроятность выражается въ доляхъ этой единицы; но это суть понятія разнородныя, ибо вѣроятность постепеннымъ увеличеніемъ не можетъ перейти въ достовѣрность. Мы можемъ однако устранить эту разнородность: мы имѣемъ достовѣрность абсолютную и относительную, которая есть высшая степень вѣроятности. Почти всѣ наши достовѣрности относительны, такъ какъ допускаютъ сомнѣнія. Что огонь жжетъ — это фактъ достовѣрный, полученный нами или непосредственно ощущеніемъ, или наведеніемъ; сфероидальное состояніе жидкости — тоже достовѣрный фактъ — опустить руку въ расплавленный металлъ и не обжечься — выводъ науки, но онъ оставляетъ въ умѣ сомнѣніе, хотя передъ наукой эти факты одинаково достовѣрны. Собственно говоря почти всегда достовѣрность есть только высшая степень вѣроятности, ибо абсолютная достовѣрность встрѣчается весьма рѣдко.—

случайности вызывающія извѣстное событіе называются случаями благопріятными, противоположные — неблагопріятными: въ сосудѣ $\overset{\text{бѣл.}}{m}+\overset{\text{чер.}}{n}=\mu$ шаровъ, вѣроятность вынуть бѣлый шаръ p имѣетъ за себя m благопріятныхъ статочностей и n неблагопріятныхъ; если бы всѣ μ шаровъ были бѣлыми, то вынуть бѣлый было бы достовѣрностью т.е. 1. отсюда имѣемъ пропорцію $\frac{p}{1}=\frac{m}{\mu}$ и $p=\frac{m}{\mu}$ вѣроятность равняется числу благопріятныхъ случаевъ дѣленному на общее число случаевъ. q, вѣроятность вынуть черный шаръ, $=\frac{n}{\mu}$; Сумма противоположныхъ, какъ ихъ называютъ, вѣроятностей есть единица.

Вѣроятность $>\frac{1}{2}$ считается въ обыденной жизни возможностью — $<\frac{1}{2}$ невѣроятностью; дробь близкая къ нулю показываетъ физическую невозможность, — близкая къ единицѣ достовѣрность. Примеры:

вѣроятность выдернуть фигуру изъ полной колоды $\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$

" — " — " — " простую карту $\frac{10}{13}$.

" — " — " открыться извѣстной сторонѣ игорной кости $\frac{1}{6}$ соот. $\frac{5}{6}$

" — " — " — " — " на двухъ костяхъ заразъ $\frac{1}{36}$

" — " — " — " — " въ суммѣ семь очковъ $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$;

1—6	4—3
2—5	5—2
3—4	6—1

Мы могли предполагать, что всѣ случаи одинаково-возможны, на самомъ дѣлѣ этого почти никогда не бываетъ; такъ въ случаѣ шаровъ статочности будутъ равновозможны, если шары совершенно равны. Для вычисленія вѣроятности при неравно возможныхъ статочностяхъ поступаютъ такъ: пусть $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m$ m неравновозможныхъ благопріятныхъ статочностей и $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n$ n неблагопріятныхъ; полагаемъ что ε_1 распадается на r_1 равновозможныхъ между собою статочностей

ε_2 " — " — " r_2 " — " — " — " — " и съ предыдущими

. . . .

ε_m " — " — " r_m " — " — " — " — " — "

а $\tau_1 \tau_2 \dots$ распадаются соотвѣтственно на $s_1 s_2 \dots s_n$ равновозможныхъ статочностей. Тогда число благопріятныхъ случаевъ $r_1+r_2+\dots+r_m$; число всѣхъ — $M=r_1+r_2+\dots r_m+s_1+\dots s_n$ и P вѣроятность событія $=\frac{r_1+r_2+\dots+r_m}{M}$ но $\frac{r_1}{M}=p_1$ есть вѣроятность первой статочности, $\frac{r_2}{M}=p_2$ — второй и т.д. и $P=p_1+p_2+\dots p_m$ вѣроятность событія при неравновозможныхъ статочностяхъ равняется суммѣ вѣроятностей благопріятныхъ статочностей. Очень часто принимаютъ за равновозможные случаи неравновозможные — ошибка, которой не избѣгали великіе математики таковъ напримѣръ Д'Аламберъ. Вѣроятность появленія орла при двукратномъ бросаніи монеты, онъ опредѣлялъ $\frac{2}{3}$ ибо считалъ три случая о.р. 2) р.о 3) р.р. въ дѣйствительности появленіе орла при первомъ бросаніи $\frac{1}{2}$ а при второмъ

р.о
р.р.
о.р
о.о

только $\frac{1}{4}$ слѣдовательно полная вѣроятность $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

Вѣроятности опредѣляемыя съ полнымъ знаніемъ обстоятельствъ имѣютъ солидарность съ самымъ явленіемъ; въ противномъ случаѣ мы имѣемъ только указанія неимѣющія ничего общаго съ событіями. Первыя называются вѣроятностями объективными, вторыя — субъективными. Изложенное выше правило наз. сложеніемъ вѣроятностей. Событія состоящія изъ совокупленія нѣсколькихъ отдѣльныхъ или изъ многократнаго повторенія одного и того-же называются сложными, и вѣроятности такихъ событій вычисляются особымъ образомъ. Вѣроятность смерти мужа и жены въ извѣстный промежутокъ времени; вѣроятность извлеченія двухъ одноцвѣтныхъ шаровъ заразъ. и т.д. Пусть сложное событіе состоитъ изъ 2хъ простыхъ, вѣроятности которыхъ p_1 и p_2; напримѣръ вынуть заразъ два бѣлыя шара изъ двухъ сосудовъ $\overset{б.}{m}+\overset{ч.}{n}=\mu$ число всѣхъ ~~возмож~~ случаевъ $\mu\mu_1$,

$m_1+n_1=\mu_1$ число благопріятныхъ mm_1,

вѣроятность $\frac{mm_1}{\mu\mu_1}=P=p_1p_2$. Вѣроятность r кратнаго повторенія одного и того-же простого событія, по этому правилу равняется p^r. Это умноженіе вѣроятностей.

Вѣроятность сложнаго событія состоящаго изъ простыхъ p и q, повторяющихся m и n разъ, будетъ $p^m \cdot q^n$. Если последовательность простыхъ такова, что 2 раза p, $n-5$ разъ q, $m-2$ раза p и наконецъ 5 разъ q то вѣроятность сложнаго $p^2 \cdot q^{n-5} \cdot p^{m-2} \cdot q^5 = p^m \cdot q^n$.

Опредѣлимъ число испытаній μ, чтобы явленіе вѣроятность котораго p состоялось одинъ разъ. Пусть вѣроятность однократнаго появленія въ μ испытаніяхъ будетъ P; вѣроятность противоположнаго случая т.е. ни одного появленія пусть будетъ Q; какъ извѣстно $P+Q=1$. $Q=(1-p)^\mu$; $P=1-(1-p)^\mu$; опредѣлимъ число испытаній чтобы вѣроятность явленія и неявленія были въ одинаковомъ отношеніи: $P=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}=1-(1-p)^\mu$; $(1-p)^\mu=\frac{1}{2}$; $\mu \lg(1-p) = -\lg 2$. Вѣроятность появленія извѣстнаго очка игорной кости $p=\frac{1}{6}$; отсюда $\mu = 3,8\ldots$ т.е. появленіе вѣроятно при четырехъ бросаніяхъ. Появленіи одного и того-же очка на двухъ костяхъ: вѣроятность $\frac{1}{36}$; $\mu = 24,6\ldots$ т.е. при 25 бросаніяхъ можно надѣятся на одно появленіе. Этотъ примѣръ послужилъ основаніемъ теоріи вѣроятностей; кавалеръ Мерэ предложилъ вопросъ о немъ Паскалю, который и рѣшилъ именно этимъ способомъ.

Мы предполагали что событія независимы; въ нашемъ обыкновенномъ примѣрѣ сосуда съ шарами это выражается тѣмъ, что шары кладутся обратно, стало быть шансы не измѣняются. Иначе когда вынутый шаръ откладывается, событіе зависитъ отъ предъидущаго.

	Первое испытаніе		; второе испытаніе	
Событ:	E	F	E_1	F_1
вѣроятн:	p.	q.	p_1	q_1 при условіи что состоялось E.

сочетанія EE_1, EF_1, FE_1, FF_1 они неравновозможны; раздѣлимъ на равновозможныя m n ν s; тогда P(вѣроятность EE_1) $= \frac{m}{m+n+\nu+s} = pp_1$, ибо $p = \frac{m+n}{m+n+\nu+s}$ а $p_1 = \frac{m}{m+n}$; отсюда заключаемъ что правило сложныхъ событій распространяется и на зависимыя. $\overset{б.}{m}+\overset{ч.}{n}=\mu$. вѣроятность двухъ бѣлыхъ подрядъ $\frac{m}{\mu}\cdot\frac{m-1}{\mu-1}$; бѣлаго, чернаго $\frac{m}{\mu}\cdot\frac{n}{\mu-1}$; двухъ черн: $\frac{n}{\mu}\cdot\frac{n-1}{\mu-1}$.

Задача: шары 4 черн. 2 бѣл. А вынимаетъ шаръ если бѣлый то онъ выигр[аетъ], если черный то откладываетъ въ сторону и вынимаетъ В. также, С так-же до перваго бѣлаго шара. Въ какомъ отношеніи должны быть став-ки чтобы игра была равна.

Для А вѣроятность вынуть въ первый разъ бѣлый $\frac{2}{6}$ при второмъ кругѣ $\underset{\substack{A\\ ч}}{\frac{4}{6}}\cdot\underset{\substack{B\\ ч}}{\frac{3}{5}}\cdot\underset{\substack{C\\ ч}}{\frac{2}{4}}\cdot\underset{\substack{A\\ б}}{\frac{2}{3}}$; для В въ первомъ случаѣ $\underset{\substack{A\\ ч}}{\frac{4}{6}}\cdot\underset{\substack{B\\ б}}{\frac{2}{5}}$ при второмъ: $\underset{\substack{A\\ ч}}{\frac{4}{6}}\cdot\underset{\substack{B\\ ч}}{\frac{3}{5}}\cdot\underset{\substack{C\\ ч}}{\frac{2}{4}}\cdot\underset{\substack{A\\ ч}}{\frac{1}{3}}\cdot\underset{\substack{B\\ б}}{\frac{2}{2}}$

Для С только одинъ разъ возможенъ бѣлый шаръ $\underset{\substack{A\\ ч}}{\frac{4}{6}}\cdot\underset{\substack{B\\ ч}}{\frac{3}{5}}\cdot\underset{\substack{C\\ б}}{\frac{2}{4}}$. Полныя вѣроятности выражаются суммою этихъ для А $7/15$ для В $5/15$ для С $3/15$ слѣдовательно для равенства игры ихъ ставки должны относиться какъ 7:5:3.

Сосудъ съ бѣлыми и черными шарами; вѣроятность вынуть первый p, второй q; опредѣлить вѣроятность того, чтобы при μ испытаніяхъ вышло m бѣлыхъ и n черныхъ. необращая вниманія на ихъ послѣдовательность, вѣроятность какъ мы уже опредѣлили будетъ $p^m q^n$. Всѣ комбинаціи ихъ послѣдовательности $\frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}$

вѣроятность одной изъ комбинацій:

$$\mathcal{P}=\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}p^m q^n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-m+1)}{1.2\ldots m}p^m q^n=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1.2\ldots n}p^m q^n$$

Таблица всѣхъ вѣроятностей:

$m=\mu \qquad \mathcal{P}=p^\mu$

$\begin{cases}m=\mu-1\\ n=1\end{cases} \qquad \mathcal{P}=\mu p^{\mu-1}q$

$\begin{cases}m=\mu-2\\ n=2\end{cases} \qquad \mathcal{P}=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}p^{\mu-2}q^2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\begin{cases}m=2\\ n=\mu-2\end{cases} \qquad \mathcal{P}=\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}p^2q^{\mu-2}$

$\begin{cases}m=1\\ n=\mu-1\end{cases} \qquad \mathcal{P}=\mu p q^{\mu-1}$

$n=\mu \qquad \mathcal{P}=q^\mu$

Онѣ представляютъ полную совокупность членовъ бинома $(p+q)^\mu$.

Предположимъ, что событія зависимы т.е. вѣроятности ихъ измѣняются; пусть при первомъ наблюденіи вѣроятности двухъ событій p_1, q_1, при второмъ $p_2\, q_2$ вѣроятности всевозможныхъ сложныхъ событій будутъ:

p_1p_2 ; $p_1q_2+q_1p_2$; q_1q_2. Составимъ про-

изведенія $(p_1u+q_1v)(p_2u+q_2v)=p_1p_2u^2+(p_1q_2+p_2q_1)vu+q_1q_2v^2$. т.е. коэффиціенты э-
го выраженія представляютъ вѣроятности различныхъ сложныхъ со-
бытій. Если испытаній сдѣлаемъ три и означимъ вѣроятности
простыхъ событій при третьемъ испытаніи черезъ $p_3\, q_3$ то вѣроят-
ности сложныхъ будутъ таковы:

$$p_1p_2p_3\ ;\ p_1p_2q_3+p_1q_2p_3+q_1p_2p_3\ ;\ p_1q_2q_3+q_1p_2q_3+q_1q_2p_3\ ;\ q_1q_2q_3$$

онѣ служатъ коэффиціентами разложенія

$$(p_1u+q_1v)(p_2u+q_2v)(p_3u+q_3v)=p_1p_2p_3u^3+\dots\dots+q_1q_2q_3v^3.$$

обобщая это заключеніе на μ испытаній, при послѣднемъ изъ ко-
торыхъ вѣроятности простыхъ событій суть p_μ и q_μ, мы получимъ:

$$(p_1u+q_1v)(p_2u+q_2v)\dots\dots(p_\mu u+q_\mu v)=p_1p_2\dots p_\mu u^\mu+\dots\dots+Au^mv^n+\dots\dots$$

гдѣ коэффиціентъ A есть вѣроятность m кратнаго повторенія
перваго и n кратнаго — втораго событія.

Этотъ случай вычисленія вѣроятности въ самомъ общемъ видѣ бы-
лъ предложенъ Лапласомъ (аналит. теорія вѣроятн.), который придумалъ
особое исчисленіе для рѣшенія этого вопроса, названное имъ теоріею
производящихъ функцій. Лагранжъ (Théorie des fonctions), желая обойти
возраженія представленныя многими учеными противъ теоріи Лейб-
ница и Ньютона, вывелъ правило дифференцированія безъ разсма-
триванія безконечно-малыхъ. Онъ бралъ $f(x)$ давалъ x-у конечное прира-
щеніе h; разлагалъ въ рядъ $f(x+h)=A+Bh+Ch^2+\dots$ и опредѣлялъ коэф-
фиціенты. На этомъ же основаніи построилъ и Лапласъ свою теорію
производящихъ функцій: $F(x)=\dots\dots+A_mx^m+\dots\dots$ задача состоитъ
въ томъ, чтобы по виду $F(x)$ опредѣлить коэффиціентъ A_m не разлагая
функціи. $(p_1u+q_1v)\dots(p_\mu u+q_\mu v)=Au^\mu+Bu^{\mu-1}v+\dots Qu^{m+1}v^{n-1}+\underline{Pu^mv^n}+\dots\dots+Tv^\mu$.
для опредѣленія P положимъ $u=e^{x\sqrt{-1}}$; $v=e^{-x\sqrt{-1}}$ и вставимъ эти величины.

$$X=Ae^{\mu x\sqrt{-1}}+Be^{(\mu-2)x\sqrt{-1}}+\dots+Qe^{(m-n+2)x\sqrt{-1}}+Pe^{(m-n)x\sqrt{-1}}+Re^{(m-n-2)x\sqrt{-1}}+\dots+Se^{-(\mu-2)x\sqrt{-1}}+Te^{-\mu x\sqrt{-1}}.$$

помножимъ обѣ части на $e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}$, получимъ:

$$Xe^{-(m-n)x\sqrt{-1}}=Ae^{(\mu-m+n)x\sqrt{-1}}+\dots+Qe^{2x\sqrt{-1}}+P+Re^{-2x\sqrt{-1}}+\dots+Se^{-(\mu+m-n-2)x\sqrt{-1}}+Te^{-(\mu+m-n)x\sqrt{-1}}$$

Возьмемъ отъ обѣихъ частей опредѣленный интегралъ $\int_{-\pi}^{+\pi}$; но

$$M\int_{-\pi}^{+\pi} e^{r x\sqrt{-1}}dx = \left[\frac{Me^{rx\sqrt{-1}}}{r\sqrt{-1}}\right]_{-\pi}^{+\pi} = \left[\frac{M(\cos rx + i\sin rx)}{r\sqrt{-1}}\right]_{-\pi}^{+\pi} = 0$$ при всѣхъ значеніяхъ r

стало быть:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}dx = P\int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi P \quad \text{и} \quad P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X e^{-(m-n)x\sqrt{-1}}dx.$$

$$p_1 u + q_1 v = \underbrace{(p_1+q_1)}_{1}\cos x + (p_1-q_1)\sin x\sqrt{-1} = r_1 e^{\varrho_1\sqrt{-1}}$$ т. е. мы полагаемъ $r_1\cos\varrho_1 = \cos x$, $r_1\sin\varrho_1 = (p_1-q_1)\sin x$

r_1 не мѣняетъ знака } при измѣненіи знака x.
ϱ_1 мѣняетъ знакъ }

$$X = r_1 r_2 \dots r_\mu e^{(\varrho_1+\varrho_2+\dots\varrho_\mu)\sqrt{-1}} = Ye^{y\sqrt{-1}}$$ гдѣ Y знакопостоянно а y знакоперемѣнно

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y e^{[y-(m-n)x]\sqrt{-1}}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y\cos(y-(m-n)x)\,dx + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Y\sin[y-(m-n)x]\,dx$$

послѣдній членъ равенъ нулю и потому окончательное выраженіе

$$P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} Y\cos[y-(m-n)x]\,dx.$$

Рѣшимъ вопросъ какая комбинація двухъ событій, вѣроятности которыхъ при одномъ испытаніи $p+q=1$, наиболѣе правдоподобна при μ испытаній; получимъ, что наиболѣе правдоподобно m кратное повтореніе перваго и n кратное — второго событія, гдѣ $m+n=\mu$, другими словами въ разложеніи

$$(p+q)^\mu = \dots\dots Qp^{m+1}q^{n-1} + Pp^m q^n + Rp^{m-1}q^{n+1} + \dots\dots$$

членъ Pp^mq^n наибольшій, т. е. условіе предположенной наивѣроятнѣйшей комбинаціи:

$$Pp^mq^n > Qp^{m+1}q^{n-1} \quad \text{и} \quad Pp^mq^n > Rp^{m-1}q^{n+1}$$

но $P = \dfrac{1.2.\dots\mu}{1.2\dots m.\,1.2\dots n}$; $Q = \dfrac{1.2.\dots\mu}{1.2\dots\overline{m+1}.\,1.2\dots\overline{n-1}}$; $R = \dfrac{1.2.\dots\mu}{1.2\dots\overline{m-1}.\,1.2\dots\overline{n+1}}$

изъ условій по вставкѣ этихъ величинъ имѣемъ:

$$\frac{p^mq^n}{n} > \frac{p^{m+1}q^{n-1}}{m+1} \text{ или } \frac{q}{n} > \frac{p}{m+1}; \quad \frac{p^mq^n}{m} > \frac{p^{m-1}q^{n+1}}{n+1} \text{ или } \frac{p}{m} > \frac{q}{n+1}$$

$qm+q>pn$	$n=\mu-m$	$qm+q>p\mu-pm$	$m(q+p)>p\mu-q$	$m>p\mu-q$
$pn+p>qm$		$p\mu-pm+p>qm$	$p\mu+p>m(q+p)$	$m<p\mu+p$

разность этихъ предѣловъ $p\mu+p-p\mu+q=1$, а m должно быть по суще-

ству числамъ цѣлымъ, слѣдовательно m есть цѣлое число заключа-ющееся въ этомъ промежуткѣ; если $p\mu$ цѣлое число, то $m=p\mu$
Предѣлы для n таковы: $n < \mu q+q$

$$n > \mu q-p$$

если μp цѣлое число то и $\mu q = \mu(1-p)$ есть цѣлое число и n въ этомъ случаѣ равняется μq. Такимъ образомъ правдоподобнѣйшій случай, при μp и μq цѣлыхъ, есть тотъ когда числа повтореній пропорціональны вѣроятностямъ простыхъ событій; въ противномъ случаѣ числа наиболѣе подходящія къ этимъ пропорціональнымъ.
Вѣроятность сложнаго событія выражается формулой

$$\mathcal{P}=\frac{1.2.\dots\mu}{1.2\dots m.1.2\dots n}\,p^{m}q^{n}$$

если μ весьма большое число, то вычисленія весьма затруднительны; поэтому вопросъ при μ большомъ рѣшается помощью формулы Стирлинга по тремъ логарифмамъ, съ точностью до единицы.
Изъ Эйлерова интеграла имѣемъ:

$$1.2.3\dots m = \int_0^\infty e^{-x}x^{m}dx$$

положимъ $x=m(1+y)$, $dx = m\,dy$, предѣлы $x=0;\ y=-1$; $x=\infty;\ y=\infty$; тогда интегралъ получаетъ слѣдующую форму.

$$1.2\dots m = m^{m+1}\int_{-1}^{\infty} e^{-m(1+y)}(1+y)^{m}dy = m^{m+1}e^{-m}\int_{-1}^{\infty} e^{-my}(1+y)^{m}dy;$$

Подъинтегральная функція $\left(e^{-y}(1+y)\right)^{m}=\left(\frac{1+y}{e^{y}}\right)^{m}$; $e^{y}=1+y+\frac{y^2}{2}+\dots$ отсюда очевидно, что для y замѣтныхъ при m большомъ подъинтегральное выраженіе весьма мало; для y малыхъ выраженіе близко къ единицѣ.

$$e^{-my}(1+y)^{m}=e^{-my}.e^{\lg(1+y)^{m}}=e^{-my}.e^{m\lg(1+y)}=e^{-my}.e^{my-\frac{my^2}{2}}=e^{-\frac{my^2}{2}};\quad \lg(1+y)=y-\frac{y^2}{2};$$

слѣдовательно:

$$1.2\dots m = m^{m+1}.e^{-m}\int_{-1}^{\infty}e^{-\frac{my^2}{2}}dy=\sqrt{\frac{2}{m}}\,m^{m+1}e^{-m}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\frac{2\pi}{m}}\,m^{m+1}e^{-m};$$

замѣнимъ $\frac{my^2}{2}=u^2$; $y=u.\sqrt{\frac{2}{m}}$, $dy=du\sqrt{\frac{2}{m}}$ предѣлы $y=-1;\ u=-\sqrt{\frac{m}{2}}=-\infty$; $y=\infty;\ u=\infty$;

получаемъ формулу Стирлинга: $1.2.3\dots m = e^{-m}m^{m}\sqrt{2\pi m}$

Предположимъ m и n большими числами и замѣнимъ въ выраженіи $\mathcal{P}$ произведенія по формулѣ Стирлинга, получимъ:

$$\mathcal{P}=\frac{1.2\ldots\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\,p^m q^n=\frac{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\pi\mu}}{e^{-m}m^m\sqrt{2\pi m}.\,e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}}\,p^m q^n=\frac{\mu^{\mu}}{m^m.\,n^n}\,p^m q^n\sqrt{\frac{\mu}{2\pi mn}};$$

$\mu^{\mu}=\mu^{m+n}$ поэтому $\mathcal{P}=\left(\frac{\mu p}{m}\right)^m.\left(\frac{\mu q}{n}\right)^n\sqrt{\frac{\mu}{2\pi mn}}$ или $\mathcal{P}=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi mn}}$ ибо для большихъ чиселъ p весьма мало отличается отъ $\frac{m}{\mu}$. Означимъ черезъ x весьма малую дробь такъ, что $p+x=\frac{m}{\mu}$, тогда $m=\mu(p+x)$

$$n=\mu-\mu p-\mu x=\mu(q-x).$$

$$\mathcal{P}=\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}.\left(\frac{q}{q-x}\right)^{\mu(q-x)}.\sqrt{\frac{\mu}{2\pi\mu^2(p+x)(q-x)}}=\frac{\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}.\left(\frac{q}{q-x}\right)^{\mu(q-x)}}{\sqrt{2\pi\mu(p+x)(q-x)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(p+x)(q-x)}}=(p+x)^{-\frac{1}{2}}.(q-x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\left(1+\frac{x}{p}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{q}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{pq}}=\frac{\left(1-\frac{x}{2p}\right)\left(1+\frac{x}{2q}\right)}{\sqrt{pq}}=\frac{1-\frac{x(q-p)}{2pq}}{\sqrt{pq}}$$

на основаніи этого преобразуемъ предыдущее выраженіе:

$$\mathcal{P}=\frac{\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}.\left(\frac{q}{q-x}\right)^{\mu(q-x)}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.\left(1-\frac{x(q-p)}{2pq}\right).$$ Преобразуемъ числитель

$$\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}=e^{lg\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}}=e^{\mu(p+x)\,lg\left(\frac{p}{p+x}\right)}=e^{\mu(p+x)\,lg\frac{1}{1+\frac{x}{p}}}=e^{-\mu(p+x)\,lg\left(1+\frac{x}{p}\right)}$$

$$=e^{-\mu(p+x)\left[\frac{x}{p}-\frac{x^2}{2p^2}\right]}=e^{-\mu\left(x+\frac{x^2}{2p}\right)};$$

$$\left(\frac{q}{q-x}\right)^{\mu(q-x)}=e^{-\mu\left(-x+\frac{x^2}{2q}\right)};$$ помноживъ эти два выраженія, находимъ:

$$\left(\frac{p}{p+x}\right)^{\mu(p+x)}.\left(\frac{q}{q-x}\right)^{\mu(q-x)}=e^{-\mu\left(\frac{x^2}{2p}+\frac{x^2}{2q}\right)}=e^{-\frac{\mu x^2}{2}.\frac{p+q}{pq}}=e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}$$ отсюда

$$\mathcal{P}=\frac{e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.\left(1-\frac{x(q-p)}{2pq}\right)$$

обыкновенно ограничиваются первымъ членомъ этого выраженія

$$\mathcal{P}=\frac{e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

то обстоятельство, что $\mathcal{P}$ зависитъ отъ показательной функціи, показываетъ, что вѣроятность также быстро возрастаетъ и уменьшается какъ и показательная функція съ квадратнымъ показат.

P достигаетъ maximum при $x=0$ причемъ $P=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$.

Докажемъ теорему Якова Бернулли, заключающуюся въ опредѣленіи вѣроятности такого сложнаго событія, въ которомъ число повтореній перваго случая не равняется $\mu(p+x)$ но заключается между предѣлами $\mu(p\pm l)$. Назовемъ искомую вѣроятность черезъ Q; давая x всѣ значенія отъ $+l$ до $-l$ и взявъ сумму P при всѣхъ значеніяхъ x имѣемъ:

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\sum_{-l}^{+l} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}$$

Меньшая величина m есть по условію $\mu(p-l)$ отъ нея m переходитъ черезъ единицу до $\mu(p+l)$; x при этомъ переходитъ отъ $-l$ до $+l$ черезъ $\frac{1}{\mu}$ ибо $m+1=\mu\left(p+x+\frac{1}{\mu}\right)$; это приращеніе весьма мало, обозначимъ $\frac{1}{\mu}=\Delta x$ тогда $\mu\Delta x=1$; и помножимъ обѣ части нашего равенства на $\mu\Delta x$, тогда получимъ:

$$Q=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi pq}}\cdot\sum_{-l}^{+l} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}\Delta x=\sqrt{\frac{\mu}{2\pi pq}}\int_{-l}^{+l} e^{-\frac{\mu x^2}{2pq}}dx$$

замѣнимъ $\frac{\mu x^2}{2pq}=y^2$; $x=y\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$; предѣлы $x=-l$; $y=-l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}$

$dx=dy\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ $\qquad x=+l$; $y=+l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}$.

$$Q=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}}^{+l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}} e^{-y^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}}} e^{-y^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u} e^{-y^2}dy.$$

Для этого интеграла составлены таблицы отъ $u=0$ до $u=3$ ибо уже при $u=3$; $Q=0{,}99999=1$ т. е. почти достовѣрность. Предѣлы для m суть $\mu p\pm\mu u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}=\mu p\pm u\sqrt{2\mu pq}$; $\frac{m}{\mu}$ содержится между предѣлами $p\pm u\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$. При $u=3$ и μ достаточно большомъ между этими предѣлами почти нѣтъ разницы. Въ этой теоремѣ заключается доказательство закона большихъ чиселъ.

Для каждаго u находимъ соотвѣтствующее Q по таблицамъ Крампа, употребляющимся въ астрономіи. Для составленія ихъ употребляются следующіе ряды: если $u<1$ то

$e^{-y^2}=1-y^2+\frac{y^4}{1.2}-\frac{y^6}{1.2.3}+\dots\qquad \int_0^u e^{-y^2}dy=u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{1.2.5}-\frac{u^7}{1.2.3.7}+\dots$

рядъ быстро сходящійся. Когда $u > 1$ употребляютъ иной способъ:

$$\int_0^u e^{-y^2}dy = \int_0^\infty e^{-y^2}dy - \int_u^\infty e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_u^\infty e^{-y^2}dy.$$

множимъ и дѣлимъ послѣдній интегралъ на $2y$ и интегрируемъ по частямъ: $du = e^{-y^2}dy.2y$; $u = -e^{-y^2}$

$$\int_u^\infty \frac{e^{-y^2}2ydy}{2y} = \left[\frac{-e^{-y^2}}{2y}\right]_u^\infty - \frac{1}{2}\int_u^\infty \frac{e^{-y^2}}{y^2}dy = \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-y^2}}{2y^3} - \frac{3}{2}\int \frac{e^{-y^2}}{y^4}dy\right]_u^\infty =$$

$$= \frac{e^{-u^2}}{2u} - \frac{e^{-u^2}}{2^2u^3} + \frac{3}{2^3}\frac{e^{-u^2}}{u^5} - \frac{3.5}{2^4}\cdot\frac{e^{-u^2}}{u^7} + \dots$$

этотъ рядъ сходящійся для $u > 1$. —

Предѣлы m состоятъ изъ двухъ равныхъ промежутковъ: $\mu p - u\sqrt{2\mu pq}$ до μp и отъ μp до $\underline{\mu p + u\sqrt{2\mu pq}}$ вѣроятность того, что m содержится въ одномъ изъ этихъ промежутковъ есть $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-y^2}dy$. если промежутокъ будетъ отъ μp до $\mu p + \underline{(u+du)\sqrt{2\mu pq}}$, то вѣроятность выразится интеграломъ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u+du} e^{-y^2}dy$; разность этихъ интеграловъ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2}du$ показываетъ, что m помѣщается между подчеркнутыми предѣлами т. е.

$$m = \mu p + u\sqrt{2\mu pq}$$

такъ какъ du можетъ быть сдѣлано какъ угодно малымъ. —

Одинъ изъ общихъ вопросовъ теоріи вѣроятностей состоитъ въ томъ, чтобы опредѣлить вѣроятность какого-нибудь условія. Положимъ, что извѣстное явленіе случится, если величины $x_1, x_2 \dots x_i$ подчиняются извѣстному условію т. е. $F(x_1, x_2 \dots x_i) \begin{smallmatrix}\leq b\\ > a\end{smallmatrix}$ гдѣ $b > a$;

пусть $\varphi_1 u$ есть вѣроятность того, что x_1 содержится между 0 и u,
тогда $\varphi_1(u+du) = \varphi_1 u + \varphi_1' u du$ " — " — " — " 0 и $u+du$,
слѣдовательно $\varphi_1' u du$ " — " — " — " u и $u+du$,
т. е. вѣроятность $x_1 = u$, означимъ ее черезъ $f_1 u du$.

$f_1 u du$ есть вѣроятность $x_1 = u$
$f_2 u du$ " — " — " $x_2 = u$
. . . .
$f_i u du$ " — " — " $x_i = u$

Ограничимъ предѣлами измѣняемость этихъ величинъ: предѣлы x_1 суть $\alpha_1 \dots \beta_1$
" — " x_2 " — " $\alpha_2 \dots \beta_2$
. . . .
" — " x_i " — " $\alpha_i \dots \beta_i$

тогда $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1 x_1 dx_1 = 1$; $\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2 x_2 dx_2 = 1$; . . . . . $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_i x_i dx_i = 1$.

Положимъ $b = c + d$
$a = c - d$

тогда $\frac{F(x_1 x_2 \cdots x_i) - c}{d} \begin{matrix} < +1 \\ > -1 \end{matrix}$ или $z \begin{matrix} < +1 \\ > -1 \end{matrix}$.

Означимъ черезъ P вѣроятность существованія этого условія и выберемъ такую φz, чтобы она обращалась въ ноль при z = неправильной дроби и въ единицу при z = правильной дроби. Тогда

$$P = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1 x_1 \, dx_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2 x_2 \, dx_2 \cdots\cdots \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \varphi z \, f_i x_i \, dx_i$$

если разложимъ интегралы на суммы, то въ каждомъ членѣ получимъ вѣроятность случайнаго событія, имѣющаго мѣста при комбинаціи цѣнностей $x_1, x_2 \cdots x_i$; если эта комбинація невозможна т.е. условіе невыполняется, то $\varphi(z)$ обращается въ ноль и уничтожаетъ этотъ членъ; если комбинація возможна то $\varphi(z) = 1$ и не имѣетъ вліянія на этотъ членъ.-

Опредѣлимъ видъ функціи $\varphi(z)$, удовлетворяющей нашему условію разсмотримъ слѣдующій интегралъ:

$$2\int_0^\infty \sin u . \cos uz . \frac{du}{u} = \int_0^\infty \sin(1+z)u . \frac{du}{u} + \int_0^\infty \sin(1-z)u . \frac{du}{u} \quad \ldots\ldots (A)$$

чтобы вычислить этотъ интегралъ, надо интегрировать:

$$\int_0^\infty \sin ku . \frac{du}{u}$$

возьмемъ $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$; вмѣсто α подставимъ $a + b\sqrt{-1}$, получимъ:

$$\int_0^\infty e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}} = \frac{a - b\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

отсюда приравнивая отдѣльно дѣйствительныя части, имѣемъ:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx . dx = \frac{a}{a^2+b^2}$$

помножимъ обѣ части на db и возьмемъ опредѣленный интегралъ отъ 0 до k относительно b:

$$\int_0^\infty e^{-ax} . \sin bx . \frac{dx}{x} = \int_0^k \frac{\frac{db}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} = \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)_0^k = \operatorname{arctg}\frac{k}{a}$$

положимъ $a = 0$ тогда $\int_0^\infty \sin ku \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}$ при k положительномъ
$= -\frac{\pi}{2}$ при k отрицательномъ

Отсюда очевидно, что выраженіе (A) равняется π, когда z есть пра=

величина дробь, ибо въ этомъ случаѣ и въ обоихъ слагаемыхъ положительно; и равняется нулю когда z дробь неправильная; слѣдовательно если его раздѣлимъ на π, то оно представитъ искомую функцію $\varphi(z)$. Такимъ образомъ:

$$\varphi(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty sn u . cs uz . \frac{du}{u}$$

и

$$P = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1 x_1 dx_1 \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f_2 x_2 dx_2 \ldots\ldots \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_i x_i dx_i \int_0^\infty sn u \, cs uz \frac{du}{u}$$

вмѣсто $cs uz$ напишемъ дѣйствительную часть выраженія $e^{uz\sqrt{-1}}$, тогда

$$P = д.ч. \frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1 x_1 dx_1 \ldots \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f_i x_i dx_i \int_0^\infty e^{uz\sqrt{-1}} . sn u \frac{du}{u}$$

Опредѣлимъ частный видъ этой формулы, когда $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_i = \infty$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_i = -\infty$

$f_1(x) = f_2(x) = \ldots f_i(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ т.е. когда всѣ величины не связаны никакими условіями и въ своихъ измѣненіяхъ подлежатъ одному и тому же закону.

$$z = a + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots a_i x_i \begin{matrix} < +1 \\ > -1 \end{matrix}$$

тогда

$$P = д.ч. \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_1^2} dx_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_2^2} dx_2}{\sqrt{\pi}} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_i^2} dx_i}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{u(a + a_1 x_1 + \ldots a_i x_i)\sqrt{-1}} . sn u . \frac{du}{u}$$

или

$$P = д.ч. \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{ua\sqrt{-1}} . sn u . \frac{du}{u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_1^2 + u a_1 x_1 \sqrt{-1}}}{\sqrt{\pi}} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x_i^2 + u a_i x_i \sqrt{-1}}}{\sqrt{\pi}} dx_i$$

Разсмотримъ: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2 + uax\sqrt{-1}} . dx}{\sqrt{\pi}}$; намъ извѣстно $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$

полагая $v = x - \frac{au\sqrt{-1}}{2}$ имѣемъ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2 + aux\sqrt{-1} + \frac{a^2u^2}{4}} dx = \sqrt{\pi}$; раздѣливъ обѣ части на $\sqrt{\pi}$ и на $e^{\frac{a^2u^2}{4}}$ найдемъ, что разсматриваемый интегралъ $= e^{-\frac{a^2u^2}{4}}$

слѣдовательно

$$P = д.ч. \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{au\sqrt{-1}} . sn u . e^{-\frac{u^2}{4}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_i^2)} . \frac{du}{u}$$

или

$$P = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4}(a_1^2 + \ldots a_i^2)} sn u . cs au . \frac{du}{u} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4}(a_1^2 + \ldots a_i^2)} sn(1+a)u . \frac{du}{u} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{4}(a_1^2 + \ldots a_i^2)} sn(1-a)u . \frac{du}{u}$$

Исходя изъ выраженія $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$, для преобразованія послѣдней формулы положимъ въ ней $v = v_1 + \alpha\sqrt{-1}$, тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_1^2-2v_1\alpha\sqrt{-1}+\alpha^2}dv_1 = \sqrt{\pi}\,;\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_1^2-2v_1\alpha\sqrt{-1}}dv_1 = \sqrt{\pi}.e^{-\alpha^2}\,;\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v_1^2}\cos 2v_1\alpha\,dv_1 = \sqrt{\pi}.e^{-\alpha^2}$$

такъ какъ подынтегральная функція не измѣняетъ своего значенія отъ измѣненія знака перемѣннаго, то мы можемъ писать, что

$$2\int_0^{\infty} e^{-v_1^2}\cos 2v_1\alpha\,dv_1 = \sqrt{\pi}.e^{-\alpha^2}$$

Интегрируя по α между предѣлами 0 и α_1, получимъ:

$$\int_0^{\infty} e^{-v_1^2}\sin 2v_1\alpha_1\frac{dv_1}{v_1} = \sqrt{\pi}\int_0^{\alpha_1} e^{-\alpha^2}d\alpha$$

Приложимъ эту формулу къ выраженію $\mathcal{P}$; полагаемъ:

$v_1^2 = \frac{u^2}{4}(a_1^2+a_2^2+\dots a_i^2)$; $\frac{dv_1}{v_1} = \frac{du}{u}$; $u = 2v_1\cdot\frac{1}{\sqrt{a_1^2+\dots a_i^2}}$; $\alpha_1 = \frac{1+a}{\sqrt{a_1^2+\dots a_i^2}} = y_1$

$v_1 = \frac{u}{2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots a_i^2}$;

Первое слагаемое $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_1} e^{-y^2}dy$; Второе $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_2} e^{-y^2}dy$, гдѣ $y_2 = \frac{1-a}{\sqrt{a_1^2+\dots a_i^2}}$

такимъ образомъ:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_1} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_2} e^{-y^2}dy.$$

Пусть въ ряду μ событій, происшествіе, вѣроятность котораго p, случилось m разъ, другое — вѣроятности q, n разъ, такъ что $\mu = m+n$. Спрашивается въ ряду μ_1 между какими предѣлами будетъ заключаться число m_1 перваго событія. Если μ и μ_1 числа достаточно большія, то дроби $\frac{m}{\mu}$ и $\frac{m_1}{\mu_1}$ весьма мало разнятся между собой. Означимъ наибольшую разность черезъ l, тогда $\frac{m_1}{\mu_1}$ заключается между предѣлами $\frac{m}{\mu} \pm l$

m_1 " — " — " — $\mu_1\frac{m}{\mu} \pm \mu_1 l$

условіе $\frac{m}{\mu} - \frac{m_1}{\mu_1} \begin{matrix} < +l \\ > -l \end{matrix}$; $\frac{m}{l\mu} - \frac{m_1}{l\mu_1} \begin{matrix} < +1 \\ > -1 \end{matrix}$

По теоремѣ Бернулли $\frac{m}{\mu} = p + x_1\sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$ съ вѣроятностью $\frac{e^{-x_1^2}}{\sqrt{\pi}}$

$\frac{m_1}{\mu_1} = p + x_2\sqrt{\frac{2pq}{\mu_1}}$ " — " — " $\frac{e^{-x_2^2}}{\sqrt{\pi}}$

такъ какъ придаточные члены весьма малы, то p и q можемъ замѣнить черезъ $\frac{m}{\mu}$ и $\frac{n}{\mu}$ и получимъ: $\frac{m}{\mu} = p + x_1\sqrt{\frac{2mn}{\mu^3}}$; $\frac{m_1}{\mu_1} = p + x_2\sqrt{\frac{2mn}{\mu_1\mu^2}}$.

Вставляя эти выраженія въ условіе, находимъ:

$$\frac{x_1}{l}\sqrt{\frac{2mn}{\mu^3}} - \frac{x_2}{l}\sqrt{\frac{2mn}{\mu_1\mu^2}} \lessgtr \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}$$ сличая съ $a + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_ix_i \lessgtr \begin{matrix}+1\\-1\end{matrix}$, видимъ:

$$a = 0\ ;\ a_1 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{2mn}{\mu^3}}\ ;\ a_2 = -\frac{1}{l}\sqrt{\frac{2mn}{\mu_1\mu^2}}\ ;\ a_3 = \dots = a_i = 0.$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l^2}\left[\frac{2mn}{\mu^3} + \frac{2mn}{\mu_1\mu^2}\right]}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{2mn(\mu+\mu_1)}{\mu^3\mu_1}}} = \frac{l\mu\sqrt{\mu\mu_1}}{\sqrt{2mn(\mu+\mu_1)}}$$; отсюда

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma_1} e^{-\gamma^2}d\gamma$$

если требуется опредѣлить съ большой точностью, то принимаютъ γ_1 равнымъ 3, тогда $P = 0,999$; съ меньшею точностью полагаютъ $\gamma = 2$ тогда $P = 0,98$. условіе такимъ образомъ существуетъ съ достовѣрностью, если l выбрано такъ, что $\gamma_1 = 2$, ибо для выводовъ статистики два исключенія на сто допускается уже какъ достовѣрность.

$\frac{m_1}{\mu_1}$ заключается между предѣлами $\frac{m}{\mu} \pm \gamma_1 \frac{\sqrt{2mn(\mu+\mu_1)}}{\mu\sqrt{\mu\mu_1}}$

чѣмъ больше наблюденій, тѣмъ тѣснѣе эти предѣлы. Если опредѣленное на практикѣ m_1 не заключается между этими предѣлами, то на основаніи этого мы можемъ только предполагать, что самое явленіе измѣнилось т.е. вѣроятность его другая, но никакъ не можемъ выводить иныя слѣдствія и заключенія.

Обстоятельства благопріятствующія или неблагопріятствующія какому-нибудь событію въ большинствѣ случаевъ или неизвѣстны или очень сложны, въ такихъ случаяхъ прибѣгаютъ обыкновенно къ опыту и вѣроятность событія опредѣляютъ a posteriori. Вопросъ этотъ, обработанный Лапласомъ, основанъ на теоремѣ Байэ. Въ теоріи вѣроятностей комбинація условій, влекущая за собой какое-нибудь событіе, называется причиною условіе, придающее событію нѣкоторую вѣроятность — предположеніемъ гипотезой. Положимъ, что требуется опредѣлить вѣроятность событія при нѣкоторыхъ предположеніяхъ; обращаясь къ нашему обычному примѣру, представимъ его въ слѣдующей формѣ; мы питаемъ μ сосудовъ, раздѣленныхъ на нѣсколько группъ: $\mu = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_r$

число сосудовъ въ первой группѣ m_1 во второй m_2 ..... въ послѣдней m_r
вѣроятность извлечь бѣлый шаръ: p_1 " — " p_2 .... p_r
Вѣроятность попасть рукой въ первую группу или вѣроятность перваго предположенія $\frac{m_1}{\mu} = P_1$

вѣроятность втораго — $\frac{m_2}{\mu} = P_2$

......

" — " — " послѣдняго $\frac{m_r}{\mu} = P_r$

Опредѣлимъ вѣроятность Q_i вынутія бѣлаго шара изъ i группы. Предположимъ, что мы сдѣлали большое число опытовъ ω и вынули u бѣлыхъ и v черныхъ шаровъ, такъ, что $\omega = u + v$; пусть число шаровъ по группамъ будетъ: изъ 1 бѣлыхъ u_1 черныхъ v_1

" " 2 " — " u_2 " — " v_2

....

" — " r " — " u_r " — " v_r

Рука слѣдовательно въ первую группу попала $u_1 + v_1$ разъ, во вторую $u_2 + v_2$ разъ и т. д. слѣдовательно

$$\frac{u_1 + v_1}{\omega} = P_1 \;;\; \frac{u_2 + v_2}{\omega} = P_2 \;;\; \dots\dots \; \frac{u_r + v_r}{\omega} = P_r$$

Вѣроятности получить бѣлый шаръ изъ различныхъ группъ на основаніи опытовъ таковы:

изъ 1^ой^ $p_1 = \frac{u_1}{u_1 + v_1}$; $p_2 = \frac{u_2}{u_2 + v_2}$; .... изъ r^ой^ $p_r = \frac{u_r}{u_r + v_r}$

полное число вынутыхъ бѣлыхъ шаровъ $u = u_1 + u_2 + \dots + u_r$; отсюда вѣроятность вынуть бѣлый шаръ изъ i группы будетъ:

$$Q_i = \frac{u_i}{u}$$

Составимъ произведенія:

$$P_1 p_1 = \frac{u_1}{\omega} \;;\; P_2 p_2 = \frac{u_2}{\omega} \;;\; \dots\dots \; P_r p_r = \frac{u_r}{\omega}$$

взявъ сумму ихъ, имѣемъ:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots P_r p_r = \frac{u}{\omega}$$

такимъ образомъ: $\frac{u_1}{u} = Q_i = \frac{P_1 p_1}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_r p_r}$

Вѣроятность предположенія послѣ наблюденія равняется вѣроятности предположенія до наблюденія, умноженной на вѣроятность событія въ этомъ предположеніи, и дѣленной на сумму такихъ произведеній для всѣхъ возможныхъ предположеній. Въ этомъ заключается теорема Байя. Онъ полагаетъ всѣ $\mathfrak{P}$ равными и получаетъ

$$Q_i = \frac{p_i}{p_1+p_2+\dots+p_r}$$

Лицо имѣетъ лотерейный билетъ; вѣроятность выиграть $\mathfrak{P}$, невыигр. $1-\mathfrak{P}$; лотерея была разыграна въ его отсутствіе и ему говорятъ, что онъ выигралъ; выигрышъ его достовѣренъ, если лицо говорящее никогда не вретъ; въ противномъ случаѣ онъ только вѣроятенъ – спрашивается эта вѣроятность. Пусть между μ показаніями лица говорящаго m вѣрныхъ, тогда $\frac{m}{\mu}=p$ есть вѣроятность правдивости показанія: Фактъ выигрыша можетъ быть въ двухъ предположеніяхъ: или онъ дѣйствительно выигралъ, что имѣетъ мѣсто пр. $\mathfrak{P}p$; или его обманули, вѣроятность чего $1-p$. отсюда вѣроятность выигрыша $\frac{\mathfrak{P}p}{\mathfrak{P}p+(1-\mathfrak{P})(1-p)}$

вѣроятность невыигрыша $\frac{(1-\mathfrak{P})(1-p)}{\mathfrak{P}p+(1-\mathfrak{P})(1-p)}$

Эта задача положено Пуассономъ въ основаніе его знаменитаго труда относительно правильности приговоровъ суда присяжныхъ.

Если сдѣланы наблюденія надъ другимъ явленіемъ, вѣроятности котораго суть: $q_1\ q_2 \dots q_r$

вѣроятности предположеній: $Q_1\ Q_2 \dots Q_r$

то

$$Q_i' = \frac{Q_i q_i}{Q_1q_1+Q_2q_2+\dots+Q_rq_r} = \frac{\mathfrak{P}_i p_i q_i}{\mathfrak{P}_1p_1q_1+\mathfrak{P}_2p_2q_2+\dots\mathfrak{P}_rp_rq_r}$$

это можно распространить на любое число зависимостей.

Вѣроятность того, что событіе случилось въ одномъ изъ $i, i+1, i+2$ предположеній будетъ:

$$\frac{\mathfrak{P}_ip_i+\mathfrak{P}_{i+1}p_{i+1}+\mathfrak{P}_{i+2}p_{i+2}}{\mathfrak{P}_1p_1+\mathfrak{P}_2p_2+\mathfrak{P}_3p_3+\dots+\mathfrak{P}_rp_r}$$

Особаго вниманія заслуживаетъ тотъ случай, когда число предположеній неограниченно. Пусть наблюдаемое явленіе есть сложное, зависящее отъ простаго, вѣроятность котораго x; вѣроятность наблюденнаго есть $f(x)$. Еслибы предположеній было неограниченное число, то x содержался бы между 0 и 1 естественными предѣлами вѣроятности. Положимъ, что поне

предположеній ограничено такъ, что x содержится между a и b, гдѣ $a<b$. Обращаясь къ нашему обычному примѣру, положимъ, что мы вынули 3 бѣлыхъ и 2 черныхъ; опредѣлить вѣроятность, что бѣлыхъ вдвое больше черныхъ т.е. что x имѣетъ опредѣленную величину.
Число всѣхъ возможныхъ предположеній $\frac{b-a}{dx}$ вѣроятность каждаго предположенія $\frac{dx}{b-a}$; вѣроятность того, что x имѣетъ опредѣленную величину будетъ:

$$\frac{\frac{f(x)\,dx}{b-a}}{\int_a^b \frac{f(x)\,dx}{b-a}} = \frac{f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

вѣроятность, что x заключается между предѣлами α и β.

$$\frac{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Примѣръ: въ сосудѣ находятся бѣлые и черные шары въ неизвѣстномъ количествѣ; при μ испытаніяхъ мы вынули m бѣлыхъ и n черныхъ требуется опредѣлить вѣроятность, что въ сосудѣ больше бѣлыхъ чѣмъ черныхъ.

$$f(x) = \frac{1.2\ldots\ldots\mu}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}\, x^m(1-x)^n\,; \quad \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}\,; \quad x > \frac{1}{2} \quad \text{т.е.} \quad \begin{matrix} \alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = 1. \end{matrix}$$

искомая вѣроятность
$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^m(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}$$

въ частномъ случаѣ, когда при μ наблюденіяхъ, получено μ бѣлыхъ т.е. $m=\mu$, $n=0$, таже вѣроятность:
$$\frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 x^\mu\,dx}{\int_0^1 x^\mu\,dx} = \frac{\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)_{\frac{1}{2}}^1}{\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)_0^1} = 1 - \frac{1}{2^{\mu+1}}$$

Было наблюдаемо явленіе, вѣроятности котораго въ i предположеніяхъ суть $p_1 \quad p_2 \ldots\ldots p_i$
вѣроятности предположеній $P_1 \quad P_2 \ldots\ldots P_i$
вѣроятности предположеній послѣ наблюденій:

$$Q_1 = \frac{P_1 p_1}{\Sigma P p}\,; \quad Q_2 = \frac{P_2 p_2}{\Sigma P p}\,; \quad \ldots\ldots \quad Q_i = \frac{P_i p_i}{\Sigma P p}.$$

Требуется определить вѣроятность что новое событіе, совершится въ томъ же предположеніи какъ и первое; вѣроятности новаго событія въ прежнихъ предположеніяхъ суть $q_1 q_2 \dots q_i$. Тутъ можетъ быть i различныхъ случаевъ и потому искомая вѣроятность

$$R = Q_1 q_1 + Q_2 q_2 + \dots + Q_i q_i$$

Изъ сосуда, въ которомъ неизвѣстное число бѣлыхъ и черныхъ шаровъ вынули бѣлой, требуется опредѣлить вѣроятность, что и второй тоже будетъ бѣлой. Безъ наблюденія вѣроятность эта есть $1/2$ ибо можемъ предположить, что шансы равны. Положимъ, что число шаровъ m. Число предположеній m: $1б.\ 2б.\ 3б. \dots m б.$ вѣроятность каждаго предположенія $\frac{1}{m}$. вѣроятности явленія въ этихъ предположеніяхъ: $\frac{1}{m}\ \frac{2}{m}\ \frac{3}{m} \dots \frac{m}{m}$

вѣроятности этихъ предположеній послѣ наблюденія

$$\frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}+\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m}+\dots\frac{m}{m}\cdot\frac{1}{m}} = \frac{1}{1+2+\dots+m};\ \frac{\frac{1}{m}\cdot\frac{2}{m}}{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m}+\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m}+\dots\frac{m}{m}\cdot\frac{1}{m}} = \frac{2}{1+2+\dots+m}; \dots$$

суммируя знаменатели, получимъ вѣроятности предположеній послѣ наблюденія въ видѣ:

$$\frac{2}{(m+1)m};\ \frac{2.2}{(m+1)m};\ \frac{2.3}{(m+1)m}; \dots$$

новое событіе тоже, что и первое, слѣдовательно его вѣроятности въ тѣхъ же предположеніяхъ таковы же:

$$\frac{1}{m},\ \frac{2}{m},\ \frac{3}{m}, \dots \frac{m}{m}$$

отсюда $R = \frac{2}{m(m+1)}\cdot\left[\frac{1}{m}+\frac{2^2}{m}+\frac{3^2}{m}+\dots+\frac{m^2}{m}\right] = \frac{2}{m^2(m+1)}\left[1+2^2+3^2+\dots m^2\right]$

сумма квадратовъ натуральныхъ чиселъ $= \frac{m(2m+1)(m+1)}{1.\ 2.\ 3}$ поэтому

$$R = \frac{2m+1}{3m} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3m}$$

еслибы число предположеній было неограниченно то $R = \frac{2}{3}$.

Величина x непрерывно измѣняется между предѣлами a и b; вѣроятность, что она имѣетъ опредѣленную величину на основаніи наблюденія, какъ уже было выведено есть $\frac{f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$; новое явленіе имѣетъ вѣроятность $F(x)$, вѣроятность того, что оно совершится въ томъ же предположеніи какъ и первое, будетъ

$$R = \frac{\int_a^b F(x)f(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

Наблюденное явленіе: μ испытаній дало m бѣлыхъ, n черныхъ
ожидаемое " — " r " — " — " t " — " s " — "

$$f(x) = \frac{1.2.\ldots\mu}{1\ldots m.1\ldots n}x^m(1-x)^n \qquad F(x) = \frac{1\ldots r}{1\ldots t.1\ldots s}x^t(1-x)^s$$

$$R = \frac{\frac{1.2\ldots r}{1\ldots t.1\ldots s}\int_a^b x^{m+t}(1-x)^{n+s}dx}{\int_a^b x^m(1-x)^n dx}$$

Если число шаровъ неограничено, то предѣлы интеграціи отъ 0 до 1.
Примѣръ: сряду вынули μ бѣлыхъ опредѣлимъ вѣроятность, что слѣдующій опять бѣлый

$$m=\mu \quad n=0 \qquad t=1 \quad s=0$$

$$R = \frac{\int_0^1 x^{\mu+1}dx}{\int_0^1 x^{\mu}dx} = \frac{\left(\frac{x^{\mu+2}}{\mu+2}\right)_0^1}{\left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)_0^1} = \frac{\mu+1}{\mu+2} = 1 - \frac{1}{\mu+2}.$$

При производствѣ какихъ бы то ни было наблюденій неизбѣжны ошибки; онѣ бываютъ двухъ родовъ: постоянныя и случайныя. Постоянныя ошибки опредѣляются и исключаются изъ каждаго наблюденія, или самыя наблюденія располагаются такъ, чтобы эти ошибки не имѣли вліянія на результаты наблюденій. Случайныя погрѣшности, зависящія отъ несовершенства нашихъ чувствъ не могутъ быть вычислены. Напримѣръ въ астрономическихъ наблюденіяхъ мы оцѣниваемъ разстоянія глазомъ, ухомъ опредѣляемъ моментъ боя часовъ. Наука вывела уравненіе наблюдателя, различное для различныхъ людей; но всѣ эти случайныя погрѣшности, между которыми находятся и тѣ, которыя происходятъ отъ чисто внѣшнихъ причинъ - температуры, колебаній воздуха и т.д. вычислены быть не могутъ. Когда мы имѣемъ большой рядъ наблюденій, то является вопросъ опредѣлить наивѣроятнѣйшую величину - вопросъ, прямо входящій въ теорію вѣроятностей.

Уклоненія отъ искомой величины въ одну или другую сторону одинаково вѣроятны; если означимъ погрѣшность чрезъ α вѣроят=ность ея чрезъ $\varphi(x)$, то мы должны предположить, что $\varphi(x)=\varphi(-x)$ т.е. функція четнаго порядка. Предѣлы погрѣшности положимъ $\pm\alpha$, аналитически это выражается такъ $\varphi(\alpha)=0$; что показываетъ невозможность сдѣлать погрѣшность болѣе α.
Наблюденія раздѣляются на непосредственныя и посредственныя, 1.) когда наблюдается прямо искомая величина, 2) когда искомыя величины выражаются какъ функціи наблюдаемыхъ. Въ пер=вомъ случаѣ неточность искомой величины прямо равна по=грѣшности наблюденія, во второмъ неточность эта есть функ=ція погрѣшностей наблюденія.
Положимъ, что имѣемъ m неизвѣстныхъ $x, y, z \ldots$ Первое наблю=деніе дало намъ уравненіе $f_1(x\, y\, z \ldots) = M_1$ съ погрѣшностью $\pm \varepsilon_1$

второе наблюденіе дало $f_2(x\, y\, z \ldots) = M_2 \ldots\ldots \varepsilon_2$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_n(x\, y\, z \ldots) = M_n \ldots\ldots \varepsilon_n$$

Если $n<m$ вопросъ неопредѣленный; если $n=m$, вопросъ рѣша=ется изъ этихъ уравненій; наичаще встрѣчающійся случай $n>m$ рѣшивъ m уравненій, получимъ извѣстную систему $x_1\, y_1\, z_1 \ldots$ взявъ другія m уравненій, получимъ другую систему $x_2\, y_2\, z_2 \ldots$ Спросимъ себя какъ координировать уравненія, чтобы получить наи=вѣроятнѣйшія величины $x\, y\, z \ldots$?
Положимъ, что вѣроятности ошибокъ $\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \ldots$ суть $\varphi_1\varepsilon_1\ \varphi_2\varepsilon_2\ \varphi_3\varepsilon_3 \ldots$
вѣроятность извѣстной системы погрѣшностей

$$\varphi_1(\varepsilon_1)\cdot\varphi_2(\varepsilon_2)\cdot\varphi_3(\varepsilon_3)\cdot\ldots\cdot\varphi_n(\varepsilon_n)=\Omega$$

вѣроятнѣйшая система погрѣшностей получится когда Ω = max обращеніе Ω въ maximum требуетъ $\frac{d\Omega}{dx}=0$; $\frac{d\Omega}{dy}=0$; $\frac{d\Omega}{dz}=0$; ...

$$\varepsilon_1 = f_1(x, y, z \ldots) - M_1$$
$$\varepsilon_2 = f_2(x, y, z \ldots) - M_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_n = f_3(x, y, z \ldots) - M_n$$

диференцируя Ω и раздѣливъ полученныя уравненія для простоты на Ω, находимъ:

$$\frac{\varphi_1'(\varepsilon_1)\frac{d\varepsilon_1}{dx}}{\varphi_1(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi_2'(\varepsilon_2)\frac{d\varepsilon_2}{dx}}{\varphi_2(\varepsilon_2)} + \ldots + \frac{\varphi_n'(\varepsilon_n)\frac{d\varepsilon_n}{dx}}{\varphi_n(\varepsilon_n)} = 0$$

$$\frac{\varphi_1'(\varepsilon_1)\frac{d\varepsilon_1}{dy}}{\varphi_1(\varepsilon_1)} + \frac{\varphi_2'(\varepsilon_2)\frac{d\varepsilon_2}{dy}}{\varphi_2(\varepsilon_2)} + \ldots + \frac{\varphi_n'(\varepsilon_n)\frac{d\varepsilon_n}{dy}}{\varphi_n(\varepsilon_n)} = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Такихъ уравненій получимъ столько, сколько неизвѣстныхъ. Если бы φ_1, φ_2 ... были извѣстными функціями, то вопросъ вполнѣ рѣшался бы этими уравненіями, но видъ этихъ функцій неизвѣстенъ. Въ случаѣ непосредственныхъ наблюденій, наивѣроятнѣйшая величина есть ариѳметическая средина — пріемъ этотъ выработанъ практикой. Задаемъ вопросъ, какой видъ φ удовлетворяетъ этому закону ариѳметической средины.

Имѣемъ величину x и рядъ наблюденій надъ ней $\begin{cases} x = M_1 \\ x = M_2 \\ \ldots\ldots \\ x = M_n \end{cases}$

$$x = \frac{M_1 + M_2 + \ldots + M_n}{n} \quad \text{или}$$

$nx = M_1 + M_2 + \ldots + M_n$ напишемъ это уравненіе въ видѣ

$$(x - M_1) + (x - M_2) + (x - M_3) + \ldots\ldots + (x - M_n) = 0 \ldots\ldots (I)$$

посмотримъ, что дѣлается въ этомъ случаѣ съ выведенными нами общими уравненіями; такъ какъ неизвѣстное одно, то изъ нихъ остается одно первое. Предполагая, что наблюденія дѣлаются однимъ и тѣмъ же наблюдателемъ и одинакимъ способомъ, мы должны предположить всѣ φ равными между собою. А такъ какъ

$$x - M_1 = \varepsilon_1 \quad x - M_2 = \varepsilon_2 \ldots\ldots \quad x - M_n = \varepsilon_n$$

то всѣ производныя ε по x равны 1.$^{\text{цѣ}}$ Такимъ образомъ

$$\frac{\varphi'\varepsilon_1}{\varphi\varepsilon_1} + \frac{\varphi'\varepsilon_2}{\varphi\varepsilon_2} + \ldots \frac{\varphi'\varepsilon_n}{\varphi\varepsilon_n} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\varphi'(x - M_1)}{\varphi(x - M_1)} + \frac{\varphi'(x - M_2)}{\varphi(x - M_2)} + \ldots \frac{\varphi'(x - M_n)}{\varphi(x - M_n)} = 0 \ldots\ldots II$$

уравненія I и II должны быть тождественны и могутъ отличаться только множителемъ, поэтому $\frac{\varphi'(x-M_1)}{\varphi(x-M_1)} = m(x-M_1)$ или

$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = mu$; $lg(\varphi u) = \frac{m}{2}u^2 + C$; $\varphi(u) = Ae^{\frac{m}{2}u^2}$;

при $u=\infty$ функція должна равняться нулю т.е. m должно быть отрицательнымъ, полагая $\frac{m}{2} = -h^2$, находимъ:

$$\varphi(u) = Ae^{-h^2u^2}.$$

умноживъ на du и взявъ интегралъ отъ $-\infty$ до $+\infty$ получимъ въ первой части $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du = 1$, ибо это сумма всѣхъ возможныхъ случаевъ сталобыть

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2u^2}du = 1$$

полагая $hu = v$, имѣемъ:

$$\frac{A}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = 1;\quad \frac{A\sqrt{\pi}}{h} = 1;\quad A = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

такимъ образомъ мы опредѣлили видъ функціи погрѣшностей

$$\varphi(u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2u^2}$$

при переходѣ отъ однихъ наблюденій къ другимъ измѣняется только h, которая есть мѣра точности. Чтобы опредѣлить зависимость h отъ качества наблюденій, положимъ, что имѣемъ два ряда из опредѣляемыя величинами h и h_1; въ первомъ погрѣшность заключается между предѣлами $\pm m$; во второмъ $\pm m_1$; возьмемъ

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-m}^{+m} e^{-h^2u^2}du \quad и \quad \frac{h_1}{\sqrt{\pi}}\int_{-m_1}^{+m_1} e^{-h_1^2u^2}du.$$

очевидно, что если $m_1 < m$, то второй рядъ точнѣе, если наоборотъ первый рядъ будетъ точнѣе.

$hu = v$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-mh}^{+mh} e^{-v^2}dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{mh} e^{-v^2}dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{m_1h_1} e^{-v^2}dv;\quad mh = m_1h_1$$

~~такимъ~~ отсюда заключаемъ, что h прямо зависитъ отъ точности наблюденія; чѣмъ больше h, тѣмъ точнѣе наблюденія. Величина погрѣшности, относительно которой равновозможно сдѣлать ошибку въ ту или другую сторону, называется вѣроятною

~~средняго~~ погрѣшностью; назовемъ ее чрезъ ϱ, тогда вѣроятность сдѣлать погрѣшность меньше ϱ есть $\frac{1}{2}$ »

$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\varrho} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2}$ дополнительная вѣроятность $\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\varrho}^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{1}{2}$

полагая $h\varepsilon = y$ имѣемъ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{h\varrho} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}$ въ таблицахъ Крампа отыщемъ величину $h\varrho = 0,46936$ и $\varrho = \frac{0,46936}{h}$.

Среднюю погрѣшность принимаютъ въ двухъ значеніяхъ: 1/ Лапласъ подъ этимъ названіемъ разумѣетъ сумму всѣхъ погрѣшностей, взятыхъ съ положительнымъ знакомъ, дѣленную на число ихъ. Положимъ, что имѣемъ μ наблюденій съ погрѣшностями $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n$ встрѣтившимися $m_1\ m_2 \dots m_n$ разъ

$m_1 + m_2 + \dots + m_n = \mu$.

$$\frac{m_1\varepsilon_1 + m_2\varepsilon_2 + \dots + m_n\varepsilon_n}{\mu}$$

каждая погрѣшность умножена соотвѣтственно на ея вѣроятность и взята сумма такихъ произведеній, называя ее Λ имѣемъ

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\varepsilon\, d\varepsilon = \Lambda$$

$$\Lambda = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-y^2} y\, dy = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left(-e^{-y^2}\right)_0^{\infty} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} = \frac{0,5642}{h}$$

2./ Гауссъ нашелъ наилучшее средство опредѣлить мѣру точности, пользуясь нѣсколько инымъ видомъ средней погрѣшности.

$$\omega^2 = \frac{m_1\varepsilon_1^2 + m_2\varepsilon_2^2 + \dots m_n\varepsilon_n^2}{\mu}\ ; \quad \omega = \sqrt{\frac{m_1}{\mu}\varepsilon_1^2 + \frac{m_2}{\mu}\varepsilon_2^2 + \dots + \frac{m_n}{\mu}\varepsilon_n^2}$$

$$\omega^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\varepsilon^2}\varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}y^2 dy = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-y^2}y^2 dy = \frac{1}{2h^2}$$

$v=y$

$$\int_0^{\infty} 2e^{-y^2}y^2 dy = \left[-e^{-y^2}y\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ; \quad \omega = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \frac{0,70711}{h}$$

ω прямо выводится изъ наблюденій и съ помощью ея вычисляется h. —

Сдѣлано n наблюденій надъ величинами x y z .... однимъ лицомъ, инструментомъ и способомъ, съ точностью h и получено

$$f_1(x\,y\,z\dots) = M_1 \text{ съ погрѣшностью } \varepsilon_1$$
$$f_2(x\,y\,z\dots) = M_2 \text{ " ——— " } \varepsilon_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x\,y\,z\dots) = M_n \text{ " ——— " } \varepsilon_n$$

$n >$ числа неизвѣстныхъ. Наивыгоднѣйшую комбинацію этихъ уравненій получимъ, когда выберемъ наивѣроятнѣйшую систему погрѣшностей.

Вѣроятность извѣстной системы погрѣшностей такова:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_1^2} \cdot \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_2^2} \cdots\cdots \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_n^2} = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\dots+\varepsilon_n^2)}$$

эта величина должна быть maximum, слѣдовательно

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\dots+\varepsilon_n^2 = \text{minimum}$$

способъ этотъ называется поэтому способомъ наименьшихъ квадратовъ.

$$\Omega = (f_1 - M_1)^2 + (f_2 - M_2)^2 + \dots + (f_n - M_n)^2 = \min.$$

$$\frac{d\Omega}{dx} = 0 \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0 \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \quad \dots\dots$$

число такихъ уравненій равно числу неизвѣстныхъ, которыя отсюда и опредѣляются. Онѣ удовлетворяютъ уравненію $\Omega = \min$ слѣдовательно представляютъ наивѣроятнѣйшую систему.

Часто функціи этихъ неизвѣстныхъ трансцендентны, тогда употребляютъ слѣдующій пріемъ: выбираютъ любыя m уравненій и опредѣляютъ изъ нихъ $x_1, y_1, z_1, \dots$ точныя величины неизвѣстныхъ таковы: ~~получаются уравненія вида~~

$$x = x_1 + \xi \qquad y = y_1 + \eta \qquad z = z_1 + \zeta \qquad \dots\dots$$

ихъ вставляютъ въ уравненія, раскладываютъ по степенямъ $\xi\ \eta\ \zeta \dots$ и рѣшаютъ ~~эти величины исправляются~~ помощью способа наименьшихъ квадратовъ; если бы вычисливъ ξ мы нашли бы, что она не настолько мала, чтобы можно было пренебречь ее второй степенью, то полученныя уравненія рѣшаются обыкновенными способами потомъ прибавляемъ ξ_1 и снова вычисляемъ, далѣе второго вычисленія во всѣхъ извѣстныхъ до сихъ поръ случаяхъ дѣлать не приходится, да и первое обыкновенно даетъ такую точную величину, что ею въ большинствѣ случаевъ вполнѣ можно удовлетво-

Пусть мы имѣемъ n неизвѣстныхъ, для опредѣленія которыхъ сдѣлали m наблюденій и получаемъ m уравненій. Выбираемъ изъ нихъ n простѣйшихъ, оставляя $m-n$ безъ вниманія, и опредѣляемъ всѣ неизвѣстныя $x=x_1$, $y=y_1$, $z=z_1\ldots\ldots$ Тогда точныя величины будутъ таковы $x=x_1+\xi$, $y=y_1+\eta$, $z=z_1+\zeta\ldots\ldots$

Если уравненія наши
$$f_1(x\,y\,z\ldots\ldots)=M_1+\varepsilon_1$$
$$f_2(x,y,z\ldots\ldots)=M_2+\varepsilon_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m(x\,y\,z\ldots)=M_m+\varepsilon_m$$
то вставляя сюда точныя величины неизвѣстныхъ и раскладывая въ рядъ Тайлора получимъ:
$$a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+d_1\varphi+\ldots\ldots=v_1$$
$$a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta+d_2\varphi+\ldots\ldots=v_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_m\xi+b_m\eta+c_m\zeta+d_m\varphi+\ldots\ldots=v_m$$
Наблюденія всѣ были сдѣланы однимъ наблюдателемъ, способомъ и снарядомъ, такъ что для всѣхъ h постоянно. Вѣроятность извѣстной погрѣшности $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}$; наивыгоднѣйшій результатъ получимъ изъ условія, чтобы сумма квадратовъ погрѣшностей была наименьшая т.е.
$$\Omega=(a_1\xi+b_1\eta+\ldots-v_1)^2+(a_2\xi+b_2\eta+\ldots-v_2)^2+\ldots\ldots+(a_m\xi+\ldots-v_m)^2=\min.$$
Приравнивая производныя нулю получимъ n уравненій вида
$$\sum a^2\xi+\sum ab\eta+\sum ac\zeta+\ldots\ldots=\sum av$$
$$\sum ab\xi+\sum b^2\eta+\sum bc\zeta+\ldots\ldots=\sum bv$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
Изъ этихъ уравненій легко опредѣляются наивѣроятнѣйшія поправки.

Примѣръ: одно неизвѣстное x; сдѣлавъ m наблюденій имѣемъ
$$a_1x=b_1$$
$$a_2x=b_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$a_mx=b_m$$
вмѣсто поправки опредѣлимъ прямо самое неизвѣстное x.

Составляемъ уравненія по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$(a_1^2+a_2^2+\dots+a_m^2)x = a_1b_1+a_2b_2+\dots a_mb_m$$

$$x_1 = \frac{a_1b_1+a_2b_2+\dots a_mb_m}{a_1^2+a_2^2+\dots a_m^2}$$

Эта величина точнѣе всѣхъ получаемыхъ прямо изъ уравненій, важно знать въ какую мѣру она точнѣе. Положимъ, что мѣра точности уравненій есть h. Вѣроятность извѣстной системы погрѣшностей:

$$Ae^{-h^2\left[(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\dots(a_mx-b_m)^2\right]}$$

или

$$Ae^{-h^2\left[(a_1^2+a_2^2+\dots a_m^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\dots a_mb_m)x\right]}$$

постоянный членъ относимъ къ коэффиціенту. Иначе

$$A_1e^{-h^2(a_1^2+a_2^2+\dots)\left[x^2-2\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\dots)x}{a_1^2+a_2^2+\dots}+\frac{a_1b_1+\dots a_mb_m}{a_1^2+a_2^2+\dots}\right]}$$

$$A_1e^{-h^2(a_1^2+a_2^2+\dots)(x-x_1)^2}$$

это есть вѣроятность опредѣленной величины погрѣшности, которая получается, если за истинную величину неизвѣстнаго принять x_1 полученное по способу наименьшихъ квадратовъ. Мѣра точности.

$$h\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots}$$

Способъ этотъ даетъ такимъ образомъ тѣмъ лучшій результатъ, чѣмъ больше будутъ коэффиціенты при неизвѣстномъ въ данныхъ уравненіяхъ.

Болѣе сложный случай уравненій съ четырьмя неизвѣстными, разрѣшимъ по способу Гаусса, означимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{d\xi} = \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\delta\varphi-u = P=0 \;;\; \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{d\eta}=Q=0\;;$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega}{d\zeta}=R=0\;;\; \frac{1}{2}\frac{d\Omega}{d\varphi}=S=0.$$

Составимъ новое выраженіе

$$\Omega_1=\Omega-\frac{P^2}{\alpha}$$

оно не содержитъ ξ, ибо $\frac{d\Omega_1}{d\xi}=2P-\frac{2P}{\alpha}\cdot\frac{dP}{d\xi}=2P-\frac{2P}{\alpha}\alpha=0$. Поэтому

$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_1}{d\eta}=Q_1=\beta_1\eta+\gamma_1\zeta+\delta_1\varphi-u_1$; новое выраженіе получаемое нами

$$\Omega_2 = \Omega_1 - \frac{Q_1^2}{\beta_1}$$

небудетъ содержать неизвѣстныхъ ξ и η, такъ какъ производныя по нимъ равны нулю. Означимъ:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_2}{d\zeta} = R_1 = \gamma_2\zeta + \delta_2\varphi - u_2 \text{ ; функція}$$

$$\Omega_3 = \Omega_2 - \frac{R_1^2}{\gamma_2}$$

небудетъ содержать ξ η и ζ, поэтому можемъ положить

$$\frac{1}{2}\frac{d\Omega_3}{d\varphi} = S_1 = \delta_3\varphi - u_3 \text{ ; функція}$$

$$\Omega_4 = \Omega_3 - \frac{S_1^2}{\delta_3}$$

есть постоянное количество. Опредѣлимъ введенныя нами функціи

$$Q_1 = Q - \frac{P\beta}{\alpha} = 0$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Omega_1}{d\zeta} - \frac{Q_1\gamma_1}{\beta_1} = R - \frac{P\gamma}{\alpha} - \frac{Q_1\gamma_1}{\beta_1} = 0$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\frac{d\Omega_2}{d\varphi} - \frac{R_1\delta_2}{\gamma_2} = \frac{1}{2}\frac{d\Omega_1}{d\varphi} - \frac{Q_1\delta_1}{\beta_1} - \frac{R_1\delta_2}{\gamma_2} =$$

$$= S - \frac{P\delta}{\alpha} - \frac{Q_1\delta_1}{\beta_1} - \frac{R_1\delta_2}{\gamma_2} = 0$$

Мы можемъ означить:

$$R_1 = R + AQ + BP$$

$$S_1 = S + A_1R + B_1Q + C_1P$$

такимъ образомъ первоначальная система уравненій выведенныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ замѣняется такой:

$$P = 0\ ,\quad Q_1 = 0\ ,\quad R_1 = 0\ ,\quad S_1 = 0$$

въ которыхъ перемѣнныя послѣдовательно исключены; изъ послѣдняго находимъ $\varphi = \frac{u_3}{\delta_3}$; не полагая S_1 равнымъ нулю, имѣемъ:

$$\delta_3\varphi - u_3 = S + A_1R + B_1Q + C_1P$$

откуда $\varphi = \frac{u_3}{\delta_3} + \frac{1}{\delta_3}S + aP + bQ + cR$

или $\varphi = \bar{\varphi} + AP + BQ + CR + DS$

обратный коэффиціентъ при S есть знаменатель $\bar{\varphi}$, полученнаго спо-

способомъ наименьшихъ квадратовъ.

$$\Omega = \frac{P^2}{\alpha} + \frac{Q_1^2}{\beta_1} + \frac{R_1^2}{\gamma_2} + \frac{S_1^2}{\delta_3} + \Omega_4$$

вѣроятность системы погрѣшностей пропорціональна величинѣ

$$e^{-h^2\Omega}$$

чтобы найти вѣроятность извѣстной погрѣшности φ при произвольности другихъ перемѣнныхъ надо взять $\iiint_{-\infty}^{+\infty} d\xi . d\eta . d\zeta$

$$dP = \alpha d\xi \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\frac{P^2}{\alpha}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2 P^2}{\alpha}} \frac{dP}{\alpha} = const.$$

въ результатѣ этихъ трехъ интеграцій получится выраженіе пропорціональное

$$e^{-\frac{h^2 S_1^2}{\delta_3}} = e^{-\frac{h^2}{\delta_3}(\delta_3\varphi - u_3)^2} = e^{-h^2\delta_3(\varphi - \bar\varphi)^2}.$$

мѣра точности вывода $h\sqrt{\delta_3}$.

Рѣшая теперь уравненія относительно ξ, получимъ:

$$\xi = \bar\xi + AP + BQ + CR + DS$$

наиболѣе точная величина есть $\xi = \bar\xi$, мѣра точности $\frac{h}{\sqrt{A}}$.

Примѣръ:

$$\begin{aligned} \xi - \eta + 2\zeta &= 3 \\ 3\xi + 2\eta - 5\zeta &= 5 \\ 4\xi + \eta + 4\zeta &= 21 \\ -\xi + 3\eta + 3\zeta &= 14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 27\xi + 6\eta - 88 &= P \\ 6\xi + 15\eta + \zeta - 70 &= Q \\ \eta + 54\zeta - 107 &= R \end{aligned}$$

$$19899\xi = 49154 + 809P - 324Q + 6R$$

$$737\eta = 2617 - 12P + 54Q - R$$

$$6633\zeta = 12.707 + 2P - 9Q + 123R$$

$\xi = \frac{49154}{19899} = 2,470$ съ точностью $\sqrt{\frac{19899}{809}} = 4,96$

$\eta = 3,551$ съ точностью $\sqrt{\frac{737}{54}} = 3,69$; $\zeta = 1,916$ съ точ. $\sqrt{\frac{6633}{123}} = 7,34.$

Мы получили, что параметръ h означаетъ мѣру точности наблюденія. Имѣемъ систему уравненій съ одинаковыми погрѣшностями изъ наблюденій, т.е. всѣ имѣютъ одинакую величину h. Средній квадратъ погрѣшностей есть q^2, тогда h опредѣляется изъ уравненія:

$$q = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{h} = \frac{0{,}707}{h}$$

Для опредѣленія q вычисляемъ неизвѣстныя по способу наименьшихъ квадратовъ и подставляемъ ихъ въ уравненія, подстановка эта не даетъ тождествъ, но опредѣляетъ погрѣшность каждаго уравненія; взявъ квадраты ихъ, сложивъ и раздѣливъ на число уравненій получимъ искомое q. Но полученная такимъ образомъ величина q нѣсколько менѣе истинной средней квадратичной погрѣшности, ибо неизвѣстныя опредѣленныя по способу наименьшихъ квадратовъ даютъ сумму квадратовъ погрѣшностей наименьшую. Для опредѣленія болѣе точнаго значенія q существуетъ иной способъ. Положимъ, что даны уравненія:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1 &= 0 \\ a_2x + b_2 &= 0 \\ \dots\dots & \\ a_nx + b_n &= 0 \end{aligned} \qquad \text{надо было бы написать} \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1 &= \varepsilon_1 \\ a_2x + b_2 &= \varepsilon_2 \\ \dots\dots & \\ a_nx + b_n &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

Рѣшая ихъ по способу Гаусса находимъ:

$$\sum a^2 x + \sum ab = \mathcal{P} \qquad \text{и} \qquad x = -\frac{\sum ab}{\sum a^2} + \frac{\mathcal{P}}{\sum a^2}$$

величина x по способу наименьшихъ квадратовъ такова:

$$\bar{x} = -\frac{\sum ab}{\sum a^2} \qquad \text{мѣра ея точности} \quad \sqrt{\sum a^2}$$

погрѣшность въ $\bar{x}$ назовемъ черезъ ξ, такъ что точная величина будетъ:

$$x = \bar{x} + \xi$$

вставляя ее въ наши уравненія, получимъ:

$$\begin{aligned} a_1(\bar{x} + \xi) + b_1 &= \varepsilon_1 \\ a_2(\bar{x} + \xi) + b_2 &= \varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots & \\ a_n(\bar{x} + \xi) + b_n &= \varepsilon_n \end{aligned}$$

Сумма квадратовъ дѣйствительныхъ погрѣшностей:

$$\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\dots+\varepsilon_n^2=(a_1\bar{x}+b_1+a_1\zeta)^2+\dots\dots\quad(a_n\bar{x}+b_n+a_n\zeta)^2$$

$$nq^2 = M + 2a_1\zeta(a_1\bar{x}+b_1)+\dots 2a_n\zeta(a_n\bar{x}+b_n)+\zeta^2(a_1^2+\dots a_n^2)$$

M есть сумма квадратовъ погрѣшностей, если мы вставимъ неизвѣстныя, опредѣленныя по способу наименьшихъ квадратовъ. Сумма двойныхъ пр произведеній

$$2\zeta\left[\sum a^2\bar{x}+\sum ab\right]=0$$

ибо $\bar{x}$ удовлетворяетъ этому уравненію. Такимъ образомъ

$$nq^2=M+\zeta^2\sum a^2$$

вмѣсто ζ возьмемъ $\frac{q}{\sqrt{\sum a^2}}$ ибо $\frac{\text{опредѣленная}}{\text{наблюденной}}=\frac{\sqrt{\sum a^2}}{1}$, отсюда

$$nq^2=M+q^2\quad;\quad q^2=\frac{M}{n-1}\quad;\quad q=\sqrt{\frac{M}{n-1}}$$

слѣдовательно сумму квадратовъ погрѣшностей, полученныхъ послѣ подстановки въ уравненія величинъ неизвѣстныхъ, вычисленныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ, надо дѣлить не на число уравненій, а на число уравненій безъ числа неизвѣстныхъ. Бессель объяснилъ этотъ выводъ слѣдующимъ образомъ: Данныя уравненія и уравненія, полученныя по способу наименьшихъ квадратовъ зависимы (между собой) и ~~величины погрѣшностей, опредѣляемыя изъ нихъ, не~~ уравненія, полученныя по способу наименьшихъ квадратовъ, уничтожаютъ соотвѣтственное число данныхъ. Если дано n уравненій съ 3^мя неизвѣстными, то по способу наименьшихъ квадратовъ получимъ 3 уравненія, которыя становятся на мѣсто трехъ изъ n, дѣлающихся лишними.

Доказательство Гаусса: для опредѣленія неизвѣстныхъ $x\ y\ z\dots$ имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+\dots+l_1=\varepsilon_1 \\ a_2x+b_2y+\dots+l_2=\varepsilon_2 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}\text{число ихъ } \mu$$

опредѣленіе неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ совершаемъ помощью неопредѣленныхъ множителей $\alpha_1\,\alpha_2 \ldots\ldots$ умножая ими соотвѣтственно уравненія и складывая, получимъ:

$$x = \overline{x} + \alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots \qquad \text{полагая } \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots = 1$$

$$y = \overline{y} + \beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \ldots\ldots \qquad \text{,, —— ,, } \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Сумма квадратовъ дѣйствительныхъ погрѣшностей:

$$\Omega = (a_1x + b_1y + \ldots + l_1)^2 + (a_2x + b_2y + \ldots + l_2)^2 + \ldots\ldots$$

подставимъ $x = \overline{x} + x - \overline{x}$ тогда:

$$y = \overline{y} + y - \overline{y}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega = \sum \left(a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + \ldots + l_1 + a_1(x-\overline{x}) + b_1(y-\overline{y}) + \ldots\right)^2$$

$$= M + \sum \left(a_1(x-\overline{x}) + b_1(y-\overline{y}) + \ldots\right)^2$$

M есть сумма квадратовъ погрѣшностей, получаемыхъ, когда въ уравненія вставимъ величины $\overline{x}\ \overline{y} \ldots\ldots$, опредѣленныя по способу наименьшихъ квадратовъ. Членъ:

$$2(x-\overline{x})\sum a_1(a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + \ldots + l_1) = 0$$

ибо величины $\overline{x}\ \overline{y} \ldots$ удовлетворяютъ этимъ уравненіямъ, поэтому:

$$\sum a_1(a_1\overline{x} + b_1\overline{y} + \ldots) = -\sum a_1 l_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Omega = M + (x-\overline{x})\sum a_1\left[a_1(x-\overline{x}) + b_1(y-\overline{y}) + \ldots\right] + (y-\overline{y})\sum b_1\left[a_1(x-\overline{x}) + \ldots\right] + \ldots$$

$$= M + (x-\overline{x})\sum a_1\left[a_1x + b_1y + \ldots + l_1\right] + (y-\overline{y})\sum b_1\left[a_1x + b_1y + \ldots + l_1\right] + \ldots$$

$$= M + (x-\overline{x})\sum a_1\varepsilon_1 + (y-\overline{y})\sum b_1\varepsilon_1 + \ldots\ldots$$

$$= M + (\alpha_1\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \ldots)(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots) + (\beta_1\varepsilon_1 + \beta_2\varepsilon_2 + \ldots)(b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \ldots) + \ldots$$

Средній квадратъ погрѣшности мы опредѣлили равенствомъ:

$$q^2 = \frac{\Omega}{\mu}$$

поэтому $\mu q^2 = M + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots)q^2 + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \ldots)q^2 + \ldots$

здѣсь вмѣсто квадратовъ дѣйствительныхъ погрѣшностей мы вставляемъ квадратъ средней погрѣшности, средняя величина $\varepsilon_i\varepsilon_r$

есть ноль, ибо при данномъ ε_i мы съ равной вѣроятностью можемъ дать ε_r тотъ или другой знакъ и наоборотъ. Отсюда

$$\mu q^2 = M + m q^2$$

гдѣ m число несуществующихъ, и

$$q^2 = \frac{M}{\mu - m}$$

дѣлить надо не на полное число погрѣшностей, но на число ихъ безъ числа несуществующихъ.

Примѣръ. По мѣрѣ углубленія внутрь земли температура увеличивается; при опусканіи на $30^{met.} = 100^{фут.}$ термометръ подымается на $1°C$, поэтому

$$t = \varphi(h)$$

разлагая эту функцію получимъ

$$\varphi(h) = a + ph + qh^2$$

a есть средняя температура мѣста, ибо $t = a$ при $h = 0$. Возьмемъ данныя Араго, относящіяся къ артезіанскому колодцу въ Гренвилѣ

h (въ метрахъ)	$t°$ (C)	
0	10,60	
28	11,71	$1,11 = 28p + 28^2 q$
66	12,90	$2,30 = 66p + 66^2 q$
173	16,40	$5,80 = 173p + 173^2 q$
248	20,20	$9,40 = 248p + 248^2 q$
298	22,20	$11,60 = 298p + 298^2 q$
400	23,75	$13,15 = 400p + 400^2 q$
505	26,43	$15,83 = 505p + 505^2 q$
548	27°,70	$17,10 = 548p + 548^2 q$

Уравненія полученныя по способу наименьшихъ квадратовъ:

$$900706p + 404557966q - 29599,23 = P$$
$$404557966p + 193410001814q - 13068985,39 = Q$$

отсюда

$$p = 0,0420960 + 0,0000173\,P - 0,000000037\,Q$$

$$q = -0,000020558 - 0,000000037\,P + 0,00000000000082\,Q$$

такимъ образомъ

$$p = 0,0420960 \quad \text{съ мѣрой точности} \quad \frac{h}{\sqrt{0,0000173}} = 245h$$

$$q = -0,000020558 \quad \text{" — " — "} \quad \frac{h}{\sqrt{0,00000000000082}} = 111000h$$

$$t = 10,60 + 0,0420960h - 0,000020558h^2$$

Средній квадратъ погрѣшности

$$\frac{M}{8-2}$$

h (въ метр.)	t (наблюд.)	t (вычисл.)	ε	ε^2
28	11,71	11,76	0,05	0,0025
66	12,90	13,29	0,39	0,1521
173	16,40	17,26	0,86	0,7396
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

$$M = 1,9535$$

$$q = \sqrt{\frac{M}{6}} = 0,5683$$

Предполагая погрѣшность въ $\frac{1}{2}$° средней при наблюденіяхъ, получимъ мѣру точности наблюденій

$$h = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{q} = 1,2392$$

Мѣра точности выводовъ опредѣленія p есть 303,6

средняя погрѣшность $q = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{h}$ $\qquad$ q " — " 137,000

средняя погрѣшность въ p .. 0,0023

" — " — " въ q .. 0,0000052.

отсюда очевидно что за вѣрныя можно принимать слѣдующія величины коэффиціентовъ: $p = 0,04$; $q = -0,000002$.

Продолжительность жизни вычисляется съ помощью таблицъ смертности; таблицы эти составляются такимъ образомъ: взявъ большое число сверстниковъ, слѣдятъ за ними по годамъ и цифры вносятъ въ слѣдующую таблицу

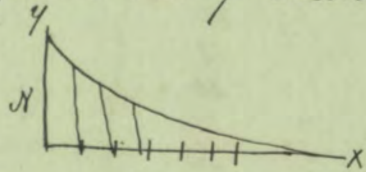
Лѣта	Осталось въ живыхъ
0	число новорожденныхъ A_0
1	A_1
2	A_2
....	....
....	....
90	$A_{90} = 0$

Всѣ данныя относятся къ срединѣ года. Вслѣдствіе большой смертности дѣтей 1ый годъ дѣлится на 4 промежутка, 2ой на 2. Но такія таблицы никогда не употребляются, хотя теоретически они ничего не оставляютъ желать; на практикѣ собраніе этихъ данныхъ крайне трудно вслѣдствіе неточности метрическихъ книгъ, переселеній и т. п. Кромѣ этого разнородность показаній представляетъ тоже неудобство этихъ таблицъ, онѣ относятся къ большому промежутку времени, въ теченіи котораго случаются войны, эпидеміи, случайно увеличивающія смертность извѣстнаго возраста. Поэтому принятъ другой способъ составленія таблицъ, основанный на равновѣсіи народонаселенія т. е. на одинаковости числа рожденій и смертей по годамъ. Для какого-нибудь года N число умершихъ распредѣляется по возрастамъ: недостигшихъ одного года умерло a_1; не достигшихъ двухъ умерло a_2 и т. д. причемъ $N = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ и мы получаемъ слѣдующую таблицу:

Лѣта	Осталось въ живыхъ
0	N
1	$N-a_1$
2	$N-a_1-a_2$
. . .	. . . .
. . .	. . . .

N обыкновенно приводятъ къ одной единицѣ, за которую принимаютъ 1000 т. е. всякое число дѣлятъ на N и множатъ на 1000.

Можно начертить кривую смертности: по оси x откладывать года, а по оси y число оставшихся въ живыхъ.



Многіе пытались составить уравненіе этой кривой т. е. найти формулу, выражающую законъ смертности, наилучшихъ результатовъ достигли:

Ламбертъ, формула котораго

$$y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left(e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right)$$

гдѣ k, m, n, постоянныя опредѣляемыя по тремъ наблюденіямъ для данной мѣстности.

Мозеръ далъ слѣдующую формулу:

$$y = N\left(1 - 0{,}2\,x^{\frac{1}{4}} - \frac{0{,}7125}{10^5}\,x^{\frac{9}{4}} - \frac{0{,}1570}{10^8}\,x^{\frac{17}{4}}\right)$$

Даже для $x < 30$ лѣтъ два послѣднія члена могутъ быть отброшены.

Формула Муавра: $y = 86 - x$

лѣт.	ост. въ жив.
0	86
1	a_1
. . .	. . .
86	0

эта формула наиболѣе удобна по своей простотѣ, но вполнѣ совпадаетъ съ таблицами только въ промежуткѣ отъ 20 лѣтъ до 86. —

Депарсіеux составилъ таблицы смертности по 1-му способу для монастыря Св. Бенедикта. Кирзебомъ для Голландіи на основаніи данныхъ издаваемыхъ обществами страхованія жизни. Самыя лучшія таблицы смертности бельгійскія, составленныя по указанію Кетле.
Для Россіи существуютъ таблицы смертности издаваемыя Св. Синодомъ черезъ 5-ти лѣтніе промежутки.

Православное населеніе мужескаго пола

Лѣта	Осталось въ живыхъ
0	1000
5	593
10	556
15	538
20	519
25	497
30	472
35	446
40	414
45	377
50	335
55	295
60	249
65	197
70	142
75	87
80	45
85	16
90	5
95	0

До 15 лѣтъ смертность мужескаго пола сильнѣе отъ 15-40 смертность женщинъ сильнѣе, начиная съ 40 лѣтъ опять женщины долговѣчнѣе. въ Европѣ число мужскихъ рожденій превышаетъ число женскихъ на 106 мальчиковъ приходится 100 дѣвочекъ; для незаконнорожденныхъ это отношеніе слабѣе на $103\frac{1}{2}$ мальчиковъ приходится 100 дѣвочекъ и подобное же отношеніе существуетъ для городскихъ жителей. По государствамъ на 100 дѣвочекъ приходится въ Россіи 106,3 мальчиковъ, во
Франціи 106,5
Австріи 106,1
Пруссіи 105,9
Къ 16-ти лѣтнему возрасту число м. и ж. уравновѣшивается.

Академикъ Буняковскій составилъ на основаніи этихъ таблицъ другія, которыя показываютъ число оставшихся въ живыхъ для каждаго года.