1a

K. Zalts

Parasto diferencialvienādojumu skaitliskā integrēšana

V un VI nodaļa.

Rīgā, 1948. g.

1b

V.

Aritmetiskās metodes parasto diferenciālvienādojumu integrēšanai

Saturs

5.10. Otrās kārtas vienādojumu integrēšana ar vidusvērtības metodi

5.11. Otrās kārtas vienādojumu integrēšana ar ekstrapolaciju. (Störmer'a metode.)

Literatura.

1d

21.I.48

V.

Aritmētiskās metodes parasto diferencialvienādojumu integrēšanai.

5.0. Ievads. Katru vienādojumu, kas izteic sakarību starp argumentu x, nezināmu funkciju y un šīs funkcijas atvasināto $y' = dy/dx$ sauc par parasto pirmās kārtas diferencialvienādojumu. Vienkāršības labā iedomāsimies, ka vienādojums ir atrisināts attiecībā pret atvasināto, tā ka tam ir veids

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{5.0.1}$$

kur funkcija f ir vienvērtīga un nepārtraukta — vismazākais apskatamā vērtību maiņas apgabalā.

Geometriski runājot vienādojums (5.0.1) plaknes punktam $P(x,y)$ piekārto noteiktu virzienu. Virziena attēlošanai caur doto punktu var vilkt svītriņu, kurai ar x asi ir tāds leņķis α, ka

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x,y).$$

Ja virziena svītriņas ir vilktas pietiekami daudzos punktos, tad dabū virzienu lauku, kuru var uzskatīt kā diferencialvienādojuma grafisko attēlu.

Integrēt diferencialvienādojumu (5.0.1) nozīmē atrast visas funkcijas

$$y = \varphi(x),$$

kas apmierina doto diferenciālvienādojumu, t.i. ja pēdējā y aizvieto ar $\varphi(x)$, tad aizvietošanas iznākumā dabū identitati

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

kas ir spēkā neatkarīgi no x vērtības. Šādu funkciju $\varphi(x)$ sauc par diferenciālvienādojuma atrisinājumu jeb integrāli.

Geometriskā iztulkojumā katru diferenciālvienādojuma atrisinājumu attēlo integrallīkne, kurai ikvienā punktā pieskares virziens ir vienlīdzīgs tam, ko tanī pašā plaknes punktā noteic diferenciālvienādojums. Priekšstatu par integrallīknes veidu dabū konstruējot integralpoligonu. Konstrukcija ir šāda. Pieņem iesākuma punktu un pārvietojas nelielā attatumā pa taisni, kuras virziens atbilst iesākuma punktam; jaunā vietā atkal noteic attiecīgo virzienu un turpina pārvietojumu nelielā atstatumā jaunā virzienā un t.t. Ja pārvietojumus samazina, tad integralpoligons tuvojas integrallīknei kā savam robežstāvoklim.

Integrallīkņu ir bezgala daudz, jo citam iesākuma punktam vispārīgi atbilst cita integrallīkne. Katra integrallīkne attēlo noteiktu partikulāro atrisinājumu, ko dabū, ja vispārīgā atrisinājumā ietvertai nenoteiktai konstantai dod noteiktu skaitlisku vērtību. Lai specificētu partikulāro atrisinājumu jādod kāds viens punkts, teiksim, ar koordinatām

x_0, y_0, caur kuru integrallīknei jāiet. Ar to no bezgalīgi daudzām integrallīknēm ir atšķirta viena, kas atbilst dotām iesākuma vērtībām:

$$\text{ja } x=x_0, \text{ tad } y=y_0.$$

Pētniecības praksē (piem. technikā) bieži gadās, ka nav nekādas vajadzības dabūt diferenciālvienādojuma pilnīgo atrisinājumu. Pietiek atrast partikulāro atrisinājumu, kas apmierina dotos iesākuma noteikumus, turklāt argumenta maiņas robežas ir samērā šauras. Nav vajadzīgs arī meklējamo funkciju izteikt analitiski, bet pietiek, ja tai sastāda vērtību tabulu vai arī ja tai konstruē attēlu līknes veidā. Tādā nostādnē diferenciālvienādojuma integrēšanas uzdevums prasa īpašas atrisināšanas metodes, kuru iztirzāšana ir šī darba kodols. Pats diferenciālvienādojums var būt dots analitiski, bet tas var būt dots arī skaitliski — ar mērojumu datiem — vai arī grafiski — kā virzienu lauks. Uzdevuma būtībā tas neko nemaina. Uzdevums vienmēr ir — atrast dotajam diferenciālvienādojumam partikulāro atrisinājumu skaitliskas tabulas vai grafiska attēla veidā.

5.1. Eilera metode pirmās kārtas vienādojumu integrēšanai.

Savā darbā „Institutiones Calculi Integralis" (1755) Eilers apskata metodi, ar kuru var atrast tuvinu atrisinājumu pirmās kārtas diferenciālvienādojumam.

Pieņemsim, ka dotais diferenciālvienādojums ir

$$dy/dx = f(x, y). \qquad (5.1.1)$$

Vajaga dabūt atrisinājumu $y = \varphi(x)$, kas izpilda iesākuma noteikumu: ja $x = x_0$, tad $y = y_0$.

Viens integrallīknes punkts (x_0, y_0) ir dots ar iesākuma noteikumu. Kā atrast otru tās pašas līknes punktu? Otra punkta (x_1, y_1) abscisu var izvēlēt patvaļīgi. Pieņemsim, ka x_0 dabū pieaugumu h, tā ka $x_1 = x_0 + h$. Tad arī ordinata y_0 dabū pieaugumu. Uzdevums ir – aprēķināt šo ordinatas pieaugumu.

Ja integrallīknes punkti $A_0(x_0, y_0)$ un $A_1(x_1, y_1)$ ir pietiekami tuvu un funkcija $\varphi(x)$ apskatamā vērtību apgabalā – nepārtraukta, tad līknes novirzi no iesākuma punktā pievilktas pieskares var uztvert kā neievērojamu un punktu A_1 pieņemt uz pieskares. Pēdējās virziena koeficients

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Abscisas x_0 pieaugums h un attiecīgais ordinatas y_0 pieaugums k ir saistīti savā starpā ar sakarību

$$k = h\varphi'(x_0) = hf(x_0, y_0). \qquad (5.1.2)$$

Tātad abscisai $x_1 = x_0 + h$ atbilst ordinata

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Līdzīgā kārtā atrodam, ka abscisām $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_2 + h, \dots x_n = x_{n-1} + h$ atbilst ordinatas:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Aprēķinu var ērti sakopot tabulā, iekārtojot tā, ka katra piepildītā rinda dod datus nākamai rindai.

<u>Tuvins atrisinājums diferencial-vienādojumam</u> $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$y_i + hf(x_i, y_i) = y_{i+1}$
x_0	y_0	$f(x_0, y_0)$	$y_0 + hf(x_0, y_0) = y_1$
x_1	y_1	$f(x_1, y_1)$	$y_1 + hf(x_1, y_1) = y_2$
x_2	y_2	$f(x_2, y_2)$	$y_2 + hf(x_2, y_2) = y_3$
----	----	------	--------------
x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1}, y_{n-1})$	$y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_n$
x_n	y_n		

Tabulas pirmos divos stabiņos sakopotie skaitļi rezimē atrasto tuvino atrisinājumu.

Geometriskā iztulkojumā Eilera metodes kodols ir tas, ka konstruē integralpoligonu, un katrai poligoņa malai pieņem virzienu, kas atbilst malas iesākuma punktam. Poligona malām praktiski vienmēr ir galīgs (nevis bezgalīgi mazs) garums, tādā kārtā pārvietošanās gar pieskari integralpoligonu aizvienam vairāk aizvirzas projām no integrallīknes. Kā to aizrāda arī Eilers, funkcijas vērtībām $y_1, y_2, \dots$ $\dots y_n$ piemīt kļūda, kas pieaug reizē ar rēķināšanas soļu skaitu un beigās var sasniegt ievērojamu lielumu.

Kļūdas aprēķins.

Pieņemsim, ka integralfunkciju $y=\varphi(x)$ var izvirzīt Teilora rindā. Tādā gadījumā funkcijas pieaugums $\bar{k}$, kas atbilst argumenta x_0 pieaugumam h, ir izteikts ar formulu

$$\bar{k}=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=h\varphi'(x_0)+\frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_0)+\cdots \tag{5.1.3}$$

Eilera metode pieauguma pareizo vērtību aizvieto ar izvirzījuma pirmo (lineāro) locekli:

$$k=h\varphi(x_0) \tag{5.1.3'}$$

Šī metode sasniedz pirmās kārtas tuvinājumu.

Starpība starp pareizo un tuvīno vērtību ir tuvīnās vērtības kļūda. Ja izvirzījums (5.1.3) ātri savirzas, tad kļūdu raksturo pirmais atmestais loceklis:

$$\bar{k}-k=\frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0)+\frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_0)+\cdots\cong\frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0). \qquad (5.1.4)$$

Pati funkcija $\varphi(x)$ nav zināma. Bet tā apmierina doto diferenciālvienādojumu. Tādēļ tās atvasinātās var aprēķināt:

$$\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

$$\varphi''(x)=\frac{d}{dx}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=f_1+f_2f,$$

beidzot

$$\varphi'''(x)=\frac{\partial}{\partial x}(f_1+f_2f)+f\frac{\partial}{\partial y}(f_1+f_2f)=$$
$$=f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2+f_2(f_1+f_2f).$$

Šinīs vienādībās iznākumi uzrakstīti saīsinātos apzīmējumos, pieņemot $f(x,y)$ vietā f un līdzīgā kārtā parciālos atvasinājumus $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x\partial y$, $\partial^2 f/\partial y^2$ aizvietojot attiecīgi ar simboliem f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}.

Kopsavilkums.

Jāatrod diferenciālvienādojumam $dy/dx=f(x,y)$ partikulārais atrisinājums $y=\varphi(x)$, kas izpilda iesākuma noteikumu: ja $x=x_0$, tad $y=y_0$. Lai dabūtu citu kopā saderīgo vērtību pāri (x_1,y_1) pieņem pietiekami mazu argumenta pieaugumu $x_1-x_0=h$ un aprēķina attiecīgo ordinatas y_0 pieaugumu k saskaņā ar tuvīno formulu (5.1.2):

$$k = hf(x_0, y_0).$$

Pieļautā kļūda

$$\bar{k} - k \cong \frac{1}{2} h^2 (f_1 + f_2 f),$$

kur izteiksmē, kas ieslēgta iekavās, mainīgie lielumi x, y jāaizvieto ar x_0, y_0.

5.2. Eilera metodes vienkāršākie uzlabotie varianti. (Otrās kārtas tuvinājumi.)

Diferenciālvienādojuma integrēšanas metodes precizitāte uzlabojas, ja integrālpoligonam katras malas virzienu pieskaņo virzienu laukam nevis malas iesākumā, kā Eilera metodē, bet malas vidusdaļā.

Pirmais paņēmiens: integrālpoligona malu velk virzienā, kas atbilst intervāla vidum.

Dots ir virzienu lauks (diferenciālvienādojums) un iesākuma punkts $A_0(x_0, y_0)$. Jāatrod integrālpoligona stūris $A_1(x_1, y_1)$, t.i. jāaprēķina ordinātas pieaugums $y_1 - y_0 = k$, zinot, ka abscisas pieaugums $x_1 - x_0 = h$.

Uzdevuma ģeometriskais atrisinājums ir šāds. Caur iesākuma punktu $A_0(x_0, y_0)$ velk taisni virzienā, ko diferenciālvienādojums piekārto šim punktam. Vilktā taisne sastop intervāla viduslīniju punktā B_0, kam abscisa ir $x_0 + \frac{1}{2}h$. Nosaka virzienu, kas atbilst punktam B_0, un tādā virzienā velk pirmo integrālpoligona malu A_0A_1. Punkts A_1 ir noteikts ar to, ka tā abscisa ir zināma $(x_1 = x_0 + h)$.

Turpmākos integrālpoligona stūrus $A_2 A_3 \dots$ dabū izejot no A_1 kā iesākuma punkta un atkārtojot aprakstīto konstrukciju.

Darbību skaitliskais izpildījums.

Virziena koeficients punktā A_0: $f(x_0, y_0)$.

Pārejot šinī virzienā no A_0 līdz B_0 abscisa pieaug par $\frac{1}{2}h$. Attiecīgais ordinatas pieaugums saskaņā ar (5.1.2) ir $\frac{1}{2}hf(x_0, y_0)$.

Punkta B_0 koordinatas:

$$x_{B_0} = x_0 + \frac{1}{2}h,$$

$$y_{B_0} = y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0).$$

Virziena koeficients punktā B_0:

$$f(x_{B_0}, y_{B_0}) = f(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0)).$$

Šinī virzienā ir vilkta mala A_0A_1. Pārvietojumam no A_0 līdz A_1 atbilst abscisas pieaugums h un ordinatas pieaugums

$$K = hf(x_{B_0}, y_{B_0}) = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}hf(x_0, y_0)),$$

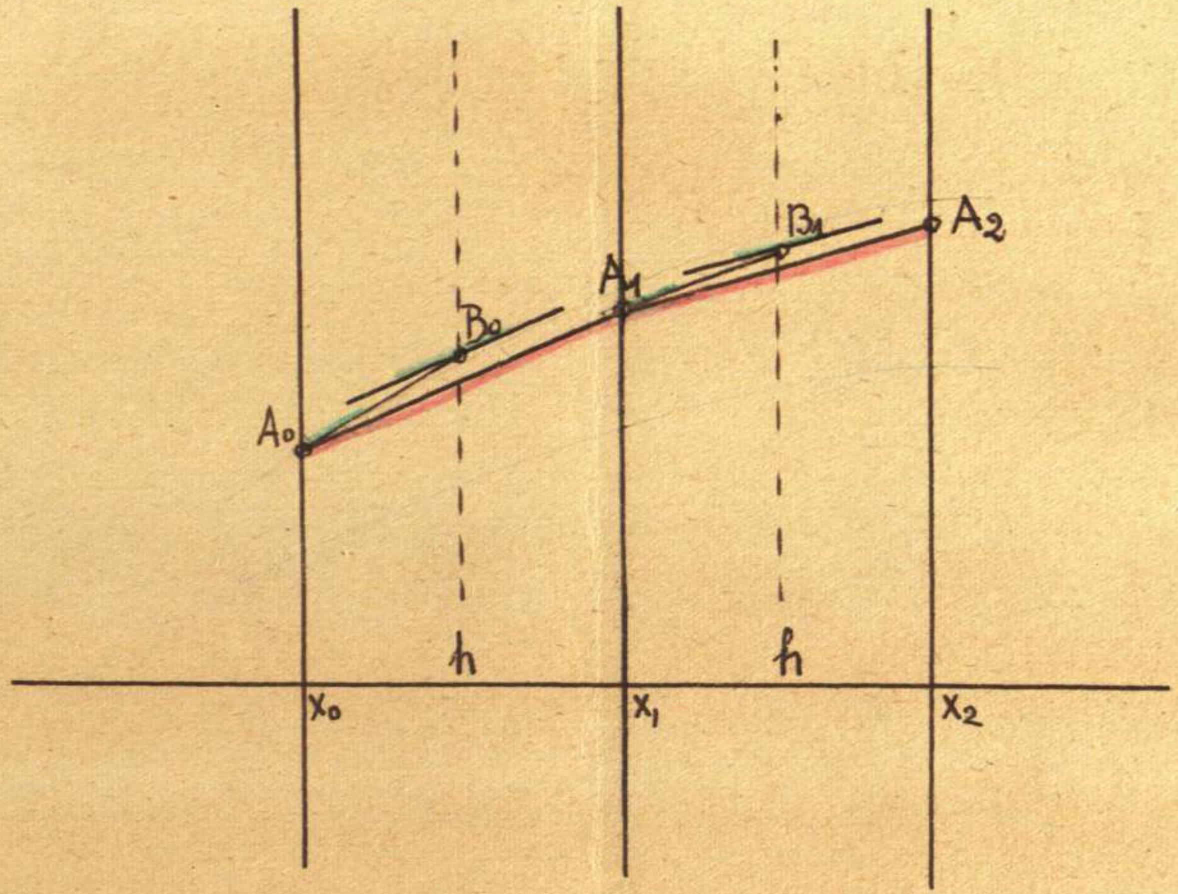
tātad punktam A_1 koordinatas ir atrastas:

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + K.$$

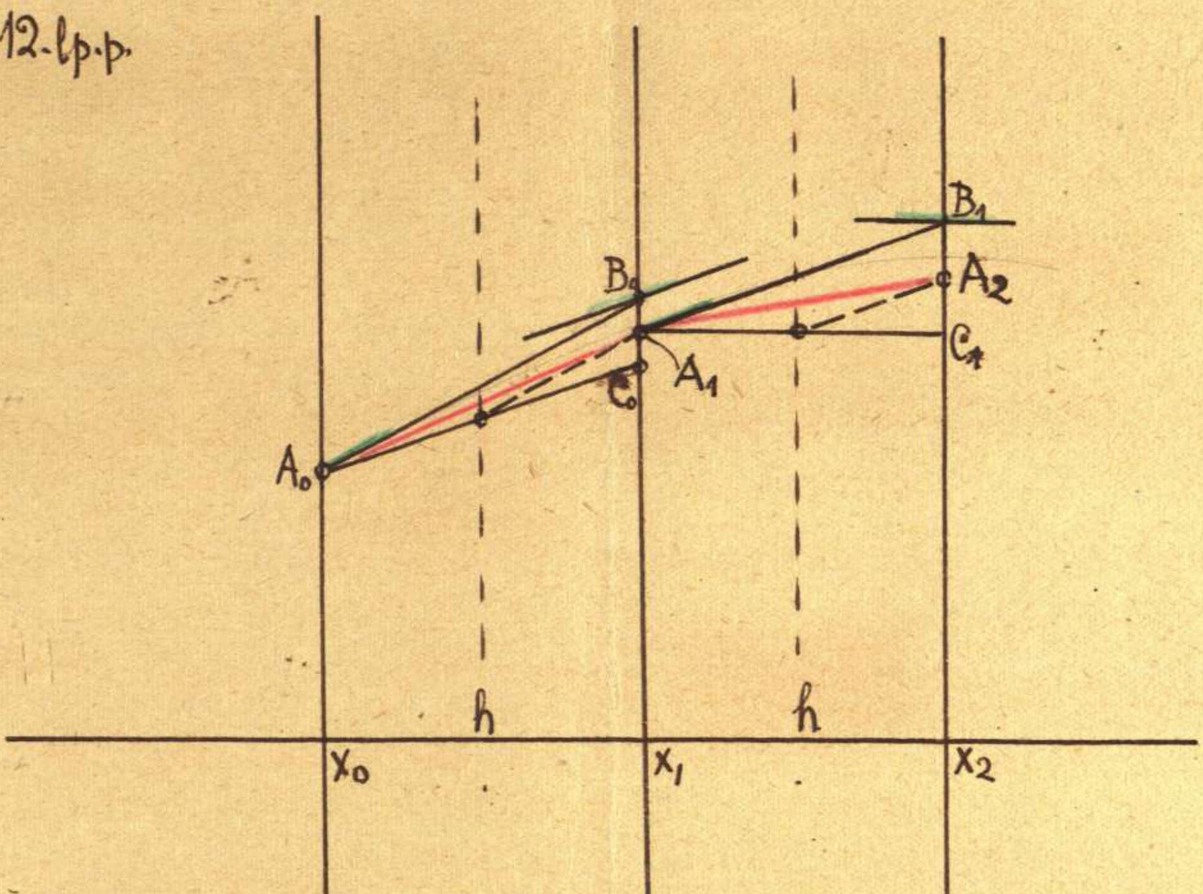
Līdzīgā kārtā aprēķina koordinatas turpmākiem integralpoligona punktiem.

Aprēķinu ieteicams sakārtot tabulā.

pie 9. lp.p.



pie 12. lp.p.



Tuvinš atrisinājums diferenciālvienādojumam $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

$x_i = x_{i-1}+h$	y_i	$f(x_i,y_i)$	$x_{B_i}= x_i+\frac{1}{2}h$	$y_{B_i}= y_i+\frac{1}{2}hf(x_i,y_i)$	$f(x_{B_i},y_{B_i})$	$y_{i+1}= y_i+hf(x_{B_i},y_{B_i})$
x_0	y_0	$f(x_0,y_0)$	x_{B_0}	y_{B_0}	$f(x_{B_0},y_{B_0})$	y_1
x_1	y_1	$f(x_1,y_1)$	x_{B_1}	y_{B_1}	$f(x_{B_1},y_{B_1})$	y_2
x_2	y_2	$f(x_2,y_2)$	x_{B_2}	y_{B_2}	$f(x_{B_2},y_{B_2})$	y_3
.....	....	.....	.....	.....	....	...
x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1},y_{n-1})$	$x_{B_{n-1}}$	$y_{B_{n-1}}$	$f(x_{B_{n-1}},y_{B_{n-1}})$	y_n
x_n	y_n					

Skaitļi, kas sakopoti pirmos divi stabiņos, ir vajadzīgais partikulārais atrisinājums.

Pareizības novērtējums.

Ja punktā $A_0(x_0,y_0)$ abscisa x_0 dabū pieaugumu h, tad ordinata y_0 saskaņā ar sacīto pieaug par

$$k = hf\left(x_0+\frac{1}{2}h,\ y_0+\frac{1}{2}hf(x_0,y_0)\right). \qquad (5.2.1)$$

Pielietājot labai pusei Teilora izvirzījumu dabū gala iznākumā

$$k = hf+\frac{1}{2}h^2(f_1+f_2f)+\frac{1}{8}h^3(f_{11}+2f_{12}f+f_{22}f^2)+\cdots, \qquad (5.2.1')$$

kur labā pusē x,y vietā jāliek x_0,y_0. Šī piezīme attiecas arī uz (5.2.2) un (5.2.3).

k ir ordinatas pieaugums integralpoligonam. Attiecībā pret integrallīkni šī vērtība ir tuvinājums. Pareizā vērtība saskaņā ar (5.1.3) ir

$$\bar{k} = h\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(x_0) + \frac{h^3}{3!}\varphi'''(x_0) + \dots = hf + \frac{1}{2}h^2(f_1 + f_2 f) + \frac{1}{6}h^3\left[f_2(f_1 + f_2 f) + f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2\right] + \dots \quad (5.2.2)$$

Tuvinā vērtiba saskan ar pareizo pirmās un otrās pakāpes locekļos, tātad paņēmiens dod otrās kārtas tuvinājumu. Tuvinās vērtības kļūda

$$\bar{k} - k = \frac{1}{6}h^3\left[f_2(f_1 + f_2 f) + \frac{1}{4}(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\right] + \dots \quad (5.2.3)$$

Otrais paņēmiens: integralpoligona malu velk virzienā, kas vidējs starp virzieniem malas galos.

Caur iesākuma punktu $A_0(x_0, y_0)$ velk taisni virzienā, kas saskaņā ar diferenciālvienādojumu ir šim punktam piekārtots. Vilktā taisne punktā B_0 krusto ~~paraleli Y~~ taisni Y, kas intervala galā ($x = x_0 + h$) vilkta paraleli ordinatu asij. Sameklē punktam B_0 piekārtoto virzienu. Šinī virzienā velk taisni A_0C_0 līdz krustpunktam C_0 ar paraleli Y. Nogriežņa B_0C_0 viduspunkts ir poligona stūris A_1.

Aprakstītā konstrukcija būtībā neatšķiras no šādas: caur punktu A_0 tam atbilstošā virzienā velk taisni līdz krustpunktam B_0 ar paraleli Y. Nogriežņa A_0B_0 viduspunktā velk taisni virzienā, kurš atbilst punktam B_0; šī taisne sastop paraleli Y punktā A_1.

Līdzīgā kārtā, izejot no A_1 kā iesākuma punkta, atkārtojot aprakstīto konstrukciju dabū pārējos integralpoligona stūrus $A_2, A_3, \dots$

Darbību skaitliskais izpildījums.

Virziena koeficients punktā A_0: $f(x_0, y_0)$.

Ordinatas pieaugums, kas atbilst pārvietojumam no A_0 līdz B_0: $hf(x_0, y_0)$.

Punkta B_0 koordinatas:

$$x_{B_0} = x_0 + h, \qquad y_{B_0} = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Virziena koeficients punktā B_0:

$$f(x_{B_0}, y_{B_0}) = f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)).$$

Tādā virzienā velk taisni A_0C_0. Pārvietojumam no A_0 līdz C_0 atbilst abscisas pieaugums h un ordinatas pieaugums

$$hf(x_{B_0}, y_{B_0}) = hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0)).$$

Punkta C_0 koordinatas:

$$x_{C_0} = x_0 + h,$$
$$y_{C_0} = y_0 + hf(x_0 + h, y_0 + hf(x_0 + y_0)).$$

Punkts A_1 dala uz pusēm nogriezni B_0C_0. Tādēļ punktam A_1 ir koordinatas:

$$x_1 = x_0 + h,$$
$$y_1 = y_0 + k = \frac{1}{2}(y_{B_0} + y_{C_0}) =$$
$$= y_0 + \frac{1}{2}h\left[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\right]$$

Ordinatas pieaugums

$$k = y_1 - y_0 = \frac{1}{2}h\left[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))\right]. \qquad (5.2.4)$$

Pareizības novērtējums.

Ja punktā $A_0(x_0, y_0)$ abscisa x_0 pieaug par h, tad ordinata y_0 saskaņā ar (5.2.4) dabū pieaugumu

$$k = \frac{1}{2} h \left[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + h f(x_0, y_0)) \right].$$

Pielietājot šai izteiksmei Teilora izvirzījumu dabū gala iznākumā

$$k = hf + \frac{1}{2} h^2 (f_1 + f_2 f) + \frac{1}{4} h^3 (f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2) + \dots \tag{5.2.5}$$

k ir integrallīknes ordinatas pieauguma tuvinā vērtība. Pareizā vērtība, saskaņā ar (5.2.2):

$$\bar{k} = hf + \frac{1}{2} h^2 (f_1 + f_2 f) + \frac{1}{6} h^3 \left[f_2 (f_1 + f_2 f) + \right.$$
$$\left. + f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2 \right] + \dots \tag{5.2.6}$$

Tuvinā vērtība saskan ar pareizo pirmās un otrās pakāpes locekļos, tātad paņēmiens dod <u>otrās kārtas tuvinājumu</u>. Tuvinās vērtības <u>kļūda</u>

$$\bar{k} - k = \frac{1}{6} h^3 \left[f_2 (f_1 + f_2 f) - \frac{1}{2} (f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2) \right] + \dots \tag{5.2.7}$$

Formulās (5.2.5), (5.2.6) un (5.2.7) funkcijā f un tās parciālās atvasinātās mainīgie x, y jāaizvieto ar iesākuma vērtībām x_0, y_0.

15

29.I.48

Kopsavilkums.

Dots diferenciālvienādojums $dy/dx = f(x,y)$. Jāatrod partikulārais atrisinājums $y=\varphi(x)$, izejot no iesākuma vērtībām (x_0,y_0), tā ka $y_0=\varphi(x_0)$. Atrisinājums jāiedomājas kopā saderīgo skaitlisko vērtību tabulas veidā: (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), ...

Pārejā no dotām vērtībām (x_0,y_0) pie (x_1,y_1) vienīgais nezināmais lielums ir y_1, jo argumenta pieaugumu $x_1-x_0=h$ var pieņemt par dotu. Attiecīgais funkcijas pieaugums $\bar{k}=y_1-y_0$ ir jāaprēķina.

Saskaņā ar (5.2.2) resp. (5.2.6)

$$\bar{k} = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{6}h^3(f_2 I + K) + \cdots, \qquad (5.2.8)$$

kur pieņemti saīsināti apzīmējumi:

$$I = f_1 + f_2 f, \qquad K = f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2. \qquad (5.2.8')$$

Funkcijā f un tās atvasinātās mainīgie x, y jāaizvieto ar x_0, y_0. Ja atvasināto veidošana un iznākumu izskaitļošana nav grūta, tad (5.2.8) dod vajadzīgo funkcijas pieaugumu. Pretējā gadījumā aprēķina pieauguma tuvino vērtību k. Papriekš atrod $k_1 = hf(x_0,y_0)$, tad seko otrās kārtas tuvinājumi:

$$\left.\begin{aligned} &\text{I)}\; k = y_1 - y_0 = hf\left(x_0+\tfrac{1}{2}h,\, y_0+\tfrac{1}{2}k_1\right), \\ &\text{ar kļūdu}\quad \bar{k}-k = \tfrac{1}{6}h^3\left(f_2 I + \tfrac{1}{4}K\right)+\cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.9)$$

un

$$\left.\begin{aligned} &\text{II)}\; k = y_1 - y_0 = \tfrac{1}{2}h\left[f(x_0,y_0) + f(x_0+h,\, y_0+k_1)\right], \\ &\text{ar kļūdu}\quad \bar{k}-k = \tfrac{1}{6}h^3\left(f_2 I - \tfrac{1}{2}K\right)+\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (5.2.9')$$

5.3. Trešās kārtas tuvinājumi.

Uzdevums: izejot no diferenciālvienādojuma $dy/dx = f(x,y)$ partikulārā atrisinājuma iesākuma vērtībām (x_0, y_0), dabūt citu kopā saderīgo vērtību pāri (x_1, y_1). Argumenta pieaugums $x_1 - x_0 = h$ ir dots, attiecīgais funkcijas pieaugums izriet no Teilora izvirzījuma:

$$\bar{k} = y_1 - y_0 = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) =$$
$$= h\varphi'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2\varphi''(x_0) + \frac{1}{3!}h^3\varphi'''(x_0) + \frac{1}{4!}h^4\varphi^{IV}(x_0) + \dots \tag{5.3.1}$$

Ja visām vajadzīgām atvasinātām $\varphi^{(n)}(x_0)$ viegli izdodas atrast to analītiskās izteiksmes un skaitliskās vērtības, tad dabūtais izvirzījums ir pilnīgs uzdevuma atrisinājums.

Pati funkcija $\varphi(x)$ nav zināma, bet tā kā tā apmierina diferenciālvienādojumu, tad tās atvasinātā

$$\varphi'(x_0) = \frac{d\varphi(x_0)}{dx} = f(x_0, \varphi(x_0)) = f,$$

un turpmākās atvasinātās atrod diferencējot salikto funkciju $f(x, \varphi(x))$:

$$\varphi''(x_0) = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f = f_1 + f_2 f,$$

$$\varphi'''(x_0) = \frac{d}{dx}(f_1 + f_2 f) = f_2(f_1 + f_2 f) + f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2,$$

beidzot:

$$\varphi^{IV}(x_0) = 3(f_{12} + f_{22}f)(f_1 + f_2 f) + f_2^2(f_1 + f_2 f) +$$
$$+ f_2(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2) + f_{111} + 3f_{112}f + 3f_{122}f^2 + f_{222}f^3.$$

Atvasināto izteiksmes top aizvienam sarežģītākas. Pieņemot saīsinātus apzīmējumus:

$$\left.\begin{aligned} I &= f_1 + f_2 f, \\ J &= f_{12} + f_{22} f, \\ K &= f_{11} + 2 f_{12} f + f_{22} f^2, \\ L &= f_{111} + 3 f_{112} f + 3 f_{122} f^2 + f_{222} f^3, \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.2)$$

dabū atvasināto izteiksmes

$$\varphi'(x_0) = f, \quad \varphi''(x_0) = I, \quad \varphi'''(x_0) = f_2 I + K,$$
$$\varphi^{IV}(x_0) = 3IJ + f_2^2 I + f_2 K + L.$$

Kā tas pēdējo 4 vienādību kreisā pusē norādīts, argumenta vērtība atvasinātām ir x_0. Jāsaprot, ka izteiksmēs (5.3.2), pēc funkcijas $f(x, y)$ parciālo atvasināto izrēķināšanas, mainīgo x, y vietā jāieliek x_0, y_0. Gala iznākumā dabū:

$$\bar{k} = hf + \frac{1}{2} h^2 I + \frac{1}{6} h^3 (f_2 I + K) +$$
$$+ \frac{1}{24} h^4 (3IJ + f_2^2 I + f_2 K + L) + \cdots \qquad (5.3.3)$$

Pieņemsim, ka rinda (5.3.3) savirzās tik ātri, ka var aprobežoties ar 4. pakāpi. Novērtēsim darbu, kas vajadzīgs formulas skaitliskai izvērtēšanai. Dotai funkcijai $f(x, y)$ jāveido parciālās atvasinātās f_1, f_2, f_{11}, f_{12}, f_{22}, f_{111}, f_{112}, f_{122}, f_{222} (20 reiz jāatvasina). Pēc tam funkcijā un tās atvasinātās jāievieto argumentu vērtības (10 izteiksmēs jāsubstituē skaitļi). Jāpiezīmē arī, ka diferencēšanas un skaitliskās izvērtēšanas ziņā visas izteiksmes nav līdzvērtīgas, bet ka tās (ja $f(x, y)$ nav visai vienkārša funkcija) atvasināšanas kārtai pieaugot top aizvienam sarežģītākas.

Tātad skaitliskai rēķināšanai formula (5.3.3) visbiežāk ir nederīga, jo tā vispārīgi prasa pārliecīgi daudz darba. Tās teorētiskā nozīme tomēr ir ļoti liela, jo tā palīdz izveidot lietderīgākas metodes.

Pirmais paņēmiens.

Aprēķina pakāpeniski

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_0 + h,\ y_0 - k_1 + 2k_2), \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.4)$$

tad seko trešās kārtas tuvinājums:

$$k = y_1 - y_0 = \frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{3}k_2 + \frac{1}{6}k_3. \qquad (5.3.4')$$

Pierādījums.

Lai pierādītu kārtulas pareizību integrālfunkcijas tuvinā pieauguma izteiksme k jāizvirza rindā pēc argumenta pieauguma pakāpēm. Vispirms

$$k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}hf) = hf + \frac{1}{2}h^2(f_1 + f_2 f) + \frac{1}{8}h^3(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2) + \frac{1}{48}h^4(f_{111} + 3f_{112}f + 3f_{122}f^2 + f_{222}f^3) + \dots$$

jeb saīsinātos apzīmējumos (5.3.2)

$$k_2 = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{8}h^3 K + \frac{1}{48}h^4 L + \dots$$

Līdzīgā kārtā, izmantojot iepriekš dabūto k_2:

$$k_3 = hf(x_0 + h,\ y_0 - k_1 + 2k_2) = hf + h^2 I + h^3\left(f_2 I + \frac{1}{2}K\right) + h^4\left[IJ + \frac{1}{4}f_2 K + \frac{1}{6}L\right] + \dots$$

No tā seko
$$k=\frac{1}{6}k_1+\frac{2}{3}k_2+\frac{1}{6}k_3=hf+\frac{1}{2}h^2I+\frac{1}{6}h^3(f_2I+K)+$$
$$+\frac{1}{24}h^4(4IJ+f_2K+L)+\cdots$$

Tāda ir integralfunkcijas pieauguma tuvinā vērtība. Tuvinā vertība ar stingri pareizo ~~...~~ (5.3.3) saskan pirmās, otrās un trešās pakāpes locekļos. Tātad ar (5.3.4') sasniegtais tuvinājums ir trešās kārtas. Pieļautā kļūda:
$$\bar{k}-k=\frac{1}{24}h^4(f_2^2-J)I+\cdots \qquad (5.3.4'')$$

Otrais paņēmiens.

Aprēķina pakāpeniski
$$\left.\begin{aligned} k_1&=hf(x_0,y_0),\\ k_2&=hf(x_0+\tfrac{1}{3}h,\ y_0+\tfrac{1}{3}k_1),\\ k_3&=hf(x_0+\tfrac{2}{3}h,\ y_0+\tfrac{2}{3}k_2),\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.5)$$
tad seko trešās kārtas tuvinājums:
$$k=y_1-y_0=\frac{1}{4}k_1+\frac{3}{4}k_3. \qquad (5.3.5')$$

Pierādījums.

Ar Teilora izvirzījumu dabū, ka
$$k_2=hf(x_0+\tfrac{1}{3}h,\ y_0+\tfrac{1}{3}hf)=$$
$$=hf+\frac{1}{3}h^2I+\frac{1}{18}h^3K+\frac{1}{162}h^4L+\cdots$$
un
$$k_3=hf(x_0+\tfrac{2}{3}h,\ y_0+\tfrac{2}{3}k_2)=$$
$$=hf+\frac{2}{3}h^2I+\frac{2}{9}h^3(f_2I+K)+$$
$$+\frac{1}{27}h^4(4IJ+f_2K+\frac{4}{3}L)+\cdots$$

No tā seko tuvinā vērtība

$$k=\frac{1}{4}k_1+\frac{3}{4}k_3=hf+\frac{1}{2}h^2I+\frac{1}{6}h^3(f_2I+K)+$$
$$+\frac{1}{27}h^4\left(3IJ+\frac{3}{4}f_2K+L_1\right)+\cdots,$$

kas ar stingri pareizo saskan pirmo trīs pakāpju locekļos. Pieļautā kļūda

$$\bar{k}-k=\frac{1}{72}h^4\left(IJ+3f_2^{\,2}I+f_2K+\frac{1}{3}L_1\right)+\cdots \qquad (5.3.5'')$$

Trešais paņēmiens. (Runge, 1896.)

Aprēķina pakāpeniski:

$$\left.\begin{aligned} k_1&=hf(x_0,y_0),\\ k_2&=hf(x_0+h,\ y_0+k_1),\\ k_3&=hf(x_0+h,\ y_0+k_2),\\ k_4&=hf\left(x_0+\tfrac{1}{2}h,\ y_0+\tfrac{1}{2}k_1\right),\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.6)$$

tad seko trešās kārtas tuvinājums:

$$k=\frac{1}{6}(k_1+k_3)+\frac{2}{3}k_4. \qquad (5.3.6')$$

Pierādījums.

Funkcijas vērtības (5.3.6), kas atbilst pieaugušiem argumentiem izvirzām pēc argumentu pieaugumu pakāpēm. Seko:

$$k_2=hf+h^2I+\frac{1}{2}h^3K+\frac{1}{6}h^4L_1+\cdots,$$

$$k_3=hf+h^2I+\frac{1}{2}h^3(2f_2I+K)+$$
$$+\frac{1}{6}h^4(6IJ+3f_2K+L_1)+\cdots,$$

$$k_4=hf+\frac{1}{2}h^2I+\frac{1}{8}h^3K+\frac{1}{48}h^4L_1+\cdots$$

Tātad

$$k=\frac{1}{6}(k_1+k_3)+\frac{2}{3}k_4=hf+\frac{1}{2}h^2I+\frac{1}{6}h^3(f_2I+K)+$$
$$+\frac{1}{24}h^4(4IJ+2f_2K+L)+\cdots$$

Tas saskan ar pareizo vērtību vēl trešās pakāpes locekļos (trešās kārtas tuvinājums). Tuvinājumam piemīt kļūda

$$\bar{k}-k=\frac{1}{24}h^4(-IJ+f_2^{\,2}I-f_2K)+\cdots \qquad (5.3.6^4)$$

5.4. Ceturtās kārtas tuvinājumi.

Pirmais paņēmiens.

Aprēķina pakāpeniski

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0+\tfrac{1}{2}h,\ y_0+\tfrac{1}{2}k_1), \\ k_3 &= hf(x_0+\tfrac{1}{2}h,\ y_0+\tfrac{1}{2}k_2), \\ k_4 &= hf(x_0+h,\ y_0+k_3), \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.1)$$

tad seko ceturtās kārtas tuvinājums

$$k = y_1 - y_0 = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4. \qquad (5.4.1')$$

Pierādījums.

Izvirzījumu pieaugumam k_2 aprēķinājām iepriekšējā nodalījumā. Sakarā ar (5.3.4) atradām, ka

$$k_2 = hf(x_0+\tfrac{1}{2}h,\ y_0+\tfrac{1}{2}k_1) = \\ = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{8}h^3 K + \frac{1}{48}h^4 L + \dots$$

Šī izteiksme jāievieto izvirzījumā

$$k_3 = hf(x_0+\tfrac{1}{2}h,\ y_0+\tfrac{1}{2}k_2) = hf(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(h^2 f_1 + hf_2 k_2) + \\ + \frac{1}{8}(h^3 f_{11} + 2h^2 f_{12} k_2 + hf_{22} k_2^2) + \\ + \frac{1}{48}(h^4 f_{111} + 3h^3 f_{112} k_2 + 3h^2 f_{122} k_2^2 + hf_{222} k_2^3) + \dots$$

Aprobežojoties ar 4-ās pakāpes locekļiem:

$$k_3 = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{8}h^3(2f_2 I + K) + \\ + \frac{1}{48}h^4(6IJ + 3f_2 K + L) + \dots$$

Beidzot:

$$k_4 = hf(x_0+h, y_0+k_3) = hf(x_0, y_0) + h\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k_3\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}h\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k_3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f + \frac{1}{6}h\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k_3\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f + \dots$$

jeb, pēc norādīto simbolisko darbību izdarīšanas

$$k_4 = hf + h(hf_1 + k_3 f_2) + \frac{1}{2}h(h^2 f_{11} + 2hk_3 f_{12} + k_3^2 f_{22}) + \frac{h}{6}(h^3 f_{111} + 3h^2 k_3 f_{112} + 3hk_3^2 f_{122} + k_3^3 f_{222}) + \dots$$

Še jāievieto iepriekš atrastā k_3 vērtība. Galīgā iznākumā dabū:

$$k_4 = hf + h^2 I + \frac{1}{2}h^3(f_2 I + K) + \frac{1}{24}h^4(12IJ + 6f_2^2 I + 3f_2 K + 4L_1) + \dots$$

Ja ar dabūtām vērtībām k_1, k_2, k_3, k_4 veido izteiksmi (5.4.1'), tad seko:

$$k = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 =$$

$$= hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{6}h^3(f_2 I + K) + \frac{1}{24}h^4(3IJ + f_2^2 I + f_2 K + L_1) + \dots,$$

kas visās pirmās četrās pakāpēs saskan ar pareizo vērtību (5.3.3).

Tātad ar šo paņēmienu atrod <u>ceturtās kārtas tuvinājumu</u>.

Darbību izpildījums.

Darbību izpildījumu ieteicams sakārtot tabulā. Dengа ir šāda schema:

x	y	$f(x,y)$	$hf(x,y)$		y_0
x_0	y_0	$f(x_0,y_0)$	k_1	k_1	
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_1$	$f(x_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_1)$	k_2	$2k_2$	
$x_0+\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}k_2$	$f(x_0+\frac{1}{2}h, y_0+\frac{1}{2}k_2)$	k_3	$2k_3$	
x_0+h	y_0+k_3	$f(x_0+h, y_0+k_3)$	k_4	k_4	k
				$6k$	y_1
x_1	y_1	$f(x_1,y_1)$	k_1	k_1	
$x_1+\frac{1}{2}h$	$y_1+\frac{1}{2}k_1$	$f(x_1+\frac{1}{2}h, y_1+\frac{1}{2}k_1)$	k_2	$2k_2$	
----	----	----------	---	---	

Schemu piepilda rēķinot horicontalās rindās, un katru atrasto k_i vērtību izlietā nākamai rindai!

Otrais paņēmiens.

Aprēķina pakāpeniski:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0), \\ k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{3}h,\ y_0 + \tfrac{1}{3}k_1), \\ k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{2}{3}h,\ y_0 - \tfrac{1}{3}k_1 + k_2), \\ k_4 &= hf(x_0 + h,\ y_0 + k_1 - k_2 + k_3), \end{aligned}\right\} \quad (5.4.2)$$

tad seko ceturtās kārtas tuvinājums

$$k = y_1 - y_0 = \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_2 + \frac{3}{8}k_3 + \frac{1}{8}k_4. \qquad (5.4.2')$$

Pierādījums.

Ar Teilora izvirzījumu dabū:

$$k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{3}h, y_0 + \tfrac{1}{3}k_1) =$$
$$= hf + \frac{1}{3}h^2 I + \frac{1}{18}h^3 K + \frac{1}{162}h^4 L_1 + \dots$$

$$k_3 = hf(x_0 + \tfrac{2}{3}h, y_0 - \tfrac{1}{3}k_1 + k_2) =$$
$$= hf + h\left[\frac{2}{3}hf_1 + \left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)f_2\right] +$$
$$+ \frac{1}{2}h\left[\frac{4}{9}h^2 f_{11} + \frac{4}{3}h\left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)f_{12} + \left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)^2 f_{22}\right] +$$
$$+ \frac{1}{6}h\left[\frac{8}{27}h^3 f_{111} + \frac{4}{3}h^2\left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)f_{112} + \right.$$
$$\left. + 2h\left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)^2 f_{122} + \left(-\frac{1}{3}k_1 + k_2\right)^3 f_{222}\right] + \dots$$

Šeit labā pusē jāaizvieto k_1 un k_2. Tā kā

$$-\frac{1}{3}k_1 + k_2 = \frac{2}{3}hf + \frac{1}{3}h^2 I + \frac{1}{18}h^3 K + \frac{1}{162}h^4 L_1 + \dots,$$

tad seko:

$$k_3 = hf + \frac{2}{3}h^2 I + \frac{1}{9}h^3(3f_2 I + 2K) +$$
$$+ \frac{1}{162}h^4(36IJ + 9f_2 K + 8L_1) + \dots$$

Tātad

$$k_1 - k_2 + k_3 = hf + \frac{1}{3}h^2 I + \frac{1}{6}h^3(2f_2 I + K) +$$
$$+ \frac{1}{162}h^4(36 I J + 9 f_2 K + 7 L_1) + \dots = s.$$

Šis lielums vajadzīgs, lai varētu aprēķināt

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + s) = hf(x_0, y_0) + h(hf_1 + sf_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}h(h^2 f_{11} + 2hs f_{12} + s^2 f_{22}) +$$
$$+ \frac{1}{6}h(h^3 f_{111} + 3h^2 s f_{112} + 3hs^2 f_{122} + s^3 f_{222}) + \dots$$

Aprobežojoties ar ceturtās pakāpes locekļiem dabū galīgā iznākumā

$$k_4 = hf + h^2 I + \frac{1}{6}h^3(2f_2 I + 3K) +$$
$$+ \frac{1}{6}h^4(2 I J + 2f_2^2 I + f_2 K + L) + \dots$$

No skaitļiem k_1, k_2, k_3 un k_4 var sakombinēt ceturtās kārtas tuvinājumu, ja tos saskaņā ar kartulu pareizina attiecīgi ar $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$ un reizinājumus saskaita; dabū:

$$k = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{6}h^3(f_2 I + K) +$$
$$+ \frac{1}{24}h^4(3 I J + f_2^2 I + f_2 K + L_1) + \dots,$$

kas pirmo 4 pakāpju robežās neatšķiras no pareizās vērtības (5.3.3).

Kļūdas novērtējums.

Kļūdas lielumu n-ās kārtas tuvinājumam raksturo $n+1$-ās pakāpes loceklis Teilora izvirzījumā, pieņemot, ka izvirzījuma locekļi ātri dilst. Bet var gadīties, ka šī locekļa skaitlisko aprēķināšanu ir neērta vai pat neiespējama. Tādā gadījumā lieto citu paņēmienu. Vienu to pašu aprēķinu atkārto ar divreiz lielāku intervalu un salīdzina savā starpā iznākumus. Iznākumu starpība atļauj spriest par kļūdu.

Pieņemsim, ka P_0, P_1 un P_2 ir 3 integrallīknes punkti, kas atbilst argumenta vērtībām x_0, x_0+h, x_0+2h. Punkts $P_0(x_0, y_0)$ ir iesākuma punkts, tas ir dots. Liekot argumentam x_0 pieaugt par h un aprēķinot ordinatas y_0 pieaugumu k_I atrod nevis punktu P_1, bet kādu citu – kaut arī tuvu – punktu $Q_1(x_0+h, y_0+k_I)$. Starpība Q_1P_1, kuru apzīmēsim ar Δ_I ir skaitļa k_I kļūda, kas izteic integralpoligona novirzi no integrallīknes pirmā intervaļa beigās. Ja aprēķināšanas metode dod n-ās kārtas tuvinājumu, tad aprēķinātā skaitļa k_I kļūda

$$\Delta_I = Ah^{n+1}, \qquad (I)$$

aprobežojoties ir $n+1$-ās pakāpes locekli. Koeficients A ir atkarīgs no iesākuma noteikumiem. Mūsu mērķis ir novērtēt Δ_I neaprēķinot A.

Ja punkta P_1 koordinatas būtu pilnīgi zinamas, tad no tām izejot varētu aprēķināt ordinatas pieaugumu un pieauguma kļūda maz atšķirtos no Δ_I, pieņēmumā ka h ir pietiekami mazs. Bet tā kā otrā intervalā iesākuma punkts ir nevis P_1, bet Q_1, kam pašam ir novirze Δ_I, tad gala punktā Q_2 novirze ir tuvini divkārtīga, tātad $2\Delta_I$. Ordinatas pieaugumu k_{II} punktam Q_2 aprēķina parastā kārtā. Punktam Q_2 ir koordinatas $(x_0+2h, y_0+k_I+k_{II})$, bet integrallīknes punktam P_2: $(x_0+2h, y_0+k_I+k_{II}+2\Delta_I)$. Punktam P_2, salīdzinot to ar P_0, ordinatas pieaugums ir vienlīdzīgs

$$k_I+k_{II}+2\Delta_I. \qquad (II)$$

Šī secinājuma pamatā ir pieņēmums, ka integralpoligona stūru novirze no patiesās integrallīknes nedaudzu argumenta intervalu robežās ir proporcionāla argumenta pieaugumam.

Izdarīsim to pašu aprēķinu vienā paņēmienā, dodot argumentam x_0 divreiz lielāku pieaugumu $2h$. Attiecīgo ordinatas y_0 pieaugumu k aprēķinam saskaņā ar parastiem paņēmieniem, tāpat kā k_I un k_{II}. Aprēķinātam skaitlim piemīt kļūda Δ, un tā ir ievērojami lielāka par Δ_I, jo saskaņā ar (I)

$$\Delta = A(2h)^{n+1} = 2^{n+1}\Delta_I. \qquad (III)$$

Aprēķina iznākumā dabū punktu Q_1, kam koordinatas ir (x_0+2h, y_0+k). Pieskaitot ordinatai novirzi Δ dabū integrallīknes punktu P_2. Pēdējam, ja to salīdzina ar P_0, ordinatas pieaugums ir

$$k+\Delta = k+2^{n+1}\Delta_I. \qquad \text{(IV)}$$

Šī izteiksme neatšķiras no (II):

$$k+2^{n+1}\Delta_I = k_I+k_{II}+2\Delta_I,$$

tātad

$$2\Delta_I = \frac{k_I+k_{II}-k}{2^n-1}. \qquad \text{(V)}$$

Ja tuvinājums ir ceturtās kārtas $(n=4)$, tad $2^n-1=15$. No tā izriet šāda kārtula kļūdas novērtēšanai: <u>aprēķina ordinatas pieaugumu divos soļos (k_I+k_{II}) un vienā—divreiz lielākā solī (k). Starpība jāizdala ar 15. Iznākums ir kļūda divu intervaļu beigās.</u>

5.5. Vidējās vērtības (jeb vispārinātās kvadraturas) metode skaitliskā (pirmās kārtas) diferenciālvienādojumu integrēšanā.

No līdzšinējā pārskata redz, ka ir dažādi paņēmieni funkcijas pieauguma noteikšanai, kad argumenta pieaugums ir dots. Visu apskatīto skaitlisko paņēmienu pamatā ir vienāda doma: izejot no noteiktām virzienu funkcijas $f(x,y)$ vērtībām aprēķina skaitļus $k_1, k_2, k_3, \dots$, no kuriem sakombinē tuvinu integrālfunkcijas pieaugumu, reizinot tos attiecīgi ar nemainīgiem koeficientiem (svara skaitļiem) $R_1, R_2, R_3, \dots$, tā ka

$$k = R_1 k_1 + R_2 k_2 + R_3 k_3 + \dots$$

Ar tādu t.s. <u>vidējās vērtības metodi</u> no meklējamā lieluma tuvinām vērtībām izdodas dabūt <u>labāku tuvinājumu</u>. Šī metode ir arī dažādu <u>kvadraturas paņēmienu</u> pamatā, ko lieto skaitliskā noteiktā integrēšanā, un var parādīt, ka tas nav nejauša sagadīšanās. Patiešām, skaitliskie uz vidējās vērtības principa dibinātie paņēmieni diferenciālvienādojumu integrēšanai ir nekas cits, kā <u>kvadraturas paņēmienu vispārinājumi</u>.

Lai to parādītu pielietosim Eilera metodi noteiktam integrālim

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,$$

kuru var uztvert kā diferenciālvienādojuma $dy/dx = f(x)$

atrisinājumu. Eilera metode dod tuvinājumu

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots,$$

kurš ģeometriskā iztulkojumā atbilst kvadratūras metodei, kad laukuma strēmelītes aizvieto ar taisnstūriem.

Eilera metodes uzlabotais variants (5.2.1) dod tuvinājumu

$$f\left(x_0+\frac{x_1-x_0}{2}\right)(x_1-x_0)+f\left(x_1+\frac{x_2-x_1}{2}\right)(x_2-x_1)+\cdots$$

jeb

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)(x_1-x_0)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)(x_2-x_1)+\cdots,$$

kurš izteic no pieskaru trapezām veidotu laukumu. Šinī gadījumā laukumu starp līkni, abscisu asi un divi ordinatām sadala strēmelītes un katrai strēmelītei līknes loku aizvieto ar pieskari strēmelītes vidus linijas galā.

Otrais Eilera metodes uzlabotais variants (5.2.4) dod tuvinājumu

$$\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}(x_1-x_0)+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}(x_2-x_1)+\cdots,$$

kas izteic no chordu trapezām veidotu laukumu. Šinī gadījumā laukumu parastā kārtā sadala strēmelītes un katrai strēmelītei līknes loku aizvieto ar chordu, kas savieno loka gala punktus.

Paņēmieni (5.3.4), (5.3.6) un (5.4.1), kad tos pielieto funkciju integrēšanai, noved pie Simpsona kārtulas. Pietiks parādīt to vienam intervalim. Robežās no x_0 līdz x_1 uzskaitītie paņēmieni dod ($x_1-x_0=h$):

$$\frac{1}{6}hf(x_0)+\frac{2}{3}hf(x_0+\frac{1}{2}h)+\frac{1}{6}hf(x_0+h)$$

jeb

$$\frac{1}{6}h\left[f(x_0)+4f(x_{\frac{1}{2}})+f(x_1)\right],$$

kas izteic Simpsona t. s. pirmo (jeb trešdaļas) kārtulu. Katrs intervalis ir jādala uz pusēm un funkcijas vērtība intervaļa vidū jāņem ar 4reiz lielāku svaru, kā intervaļa galos.

Paņēmiens (5.4.2) dod tuvinājumu

$$\frac{1}{8}hf(x_0)+\frac{3}{8}hf(x_0+\frac{1}{3}h)+\frac{3}{8}hf(x_0+\frac{2}{3}h)+\frac{1}{8}hf(x_0+h)$$

jeb

$$\frac{1}{8}h\left[f(x_0)+3f(x_{\frac{1}{3}})+3f(x_{\frac{2}{3}})+f(x_1)\right],$$

kas izteic Simpsona t. s. otro (jeb trīs astotdaļu) kārtulu. Intervalis ir jādala trīs vienlīdzīgās daļās, un funkcijas vērtības dalījuma punktiem, kuru abscisas ir apzīmētas ar $x_{\frac{1}{3}}$ un $x_{\frac{2}{3}}$, jāņem ar 3 reiz lielāku svaru, kā intervaļa galos.

5.6. Iteracijas jeb pakāpenisko tuvinājumu metode.

Šo metodi Pikārs (E. Picard) lietāja noteiktā integrala eksistences pierādīšanai, bet tā ir derīga arī skaitliskai diferenciālvienādojumu integrēšanai.

Pieņemsim, ka jāatrod funkcija y, ko definē diferenciālvienādojums

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

ar iesākuma noteikumu: $y = y_0$, ja $x = x_0$.

Pareizinot vienādojumam abas puses ar dx un integrējot no x_0 līdz x dabū

$$y - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

tātad

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx. \qquad (5.6.1)$$

Lai atrastu funkciju y jāaprēķina noteiktais integralis funkcijai, kas ietver sevī meklējamo funkciju.

Argumenta maiņas intervalis jāiedomājas tik mazs, ka attiecīgo funkcijas maiņu (vajadzīgās pareizības robežās) var uztvert kā nenozīmīgu. Tad integrējamā izteiksmē y var aizvietot ar y_0. Integrējot dabū meklējamās funkcijas pirmo tuvinājumu

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

Atrasto vērtību y_1 ieviešo y vietā integralī (5.6.1) un atkārto integrēšanu, tad seko

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx,$$

un līdzīgā kārtā tālāk:

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2)\,dx,$$

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_3)\,dx,$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$y_k = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})\,dx.$$

Visi tuvinājumi izpilda īesākuma noteikumu. Japierāda, ka tie, kad $k \to \infty$, arvienam mazāk atšķiras no vajadzīgā partikulārā atrisinājuma.

Iterācijas procesa savirzamība.

Apskatīsim starpību starp funkcijas pirmo tuvinājumu un pareizo vērtību:

$$y - y_1 = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx.$$

To var pārrakstīt šādi:

$$y - y_1 = \int_{x_0}^{x} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}(y - y_0)\,dx. \quad (5.6.1')$$

Pieņemsim, ka apskatāmo vērtību apgabalā funkcija $f(x, y)$ ir <u>nepārtraukta</u> un ka attiecībā pret mainīgo y tā izpilda <u>Lipšica noteikumu</u>:

$$|f(x,y)-f(x,y_0)| \leqq M|y-y_0|,$$

tā ka

$$\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right| \leqq M.$$

Norunāsim arī apzīmējumus tuvinājumu vislielākām novirzēm no pareizās vērtības:

$$\max.|y-y_0| = \varepsilon_0,$$
$$\max.|y-y_1| = \varepsilon_1,$$
$$\max.|y-y_2| = \varepsilon_2,$$
$$- - - - - - - -$$
$$\max.|y-y_k| = \varepsilon_k.$$

No (5.6.1') seko

$$|y-y_1|_{max} = \max\left|\int_{x_0}^{x}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}(y-y_0)\,dx\right|$$

$$< \int_{x_0}^{x}\left|\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right|_{max}\cdot|y-y_0|_{max}\,dx,$$

tātad

$$\varepsilon_1 < \int_{x_0}^{x} M\varepsilon_0\,dx = M\varepsilon_0(x-x_0).$$

Līdzīgā kārtā

$$\varepsilon_2 < M\varepsilon_1(x-x_0),$$
$$\varepsilon_3 < M\varepsilon_2(x-x_0),$$
$$- - - - - - - -$$
$$\varepsilon_k < M\varepsilon_{k-1}(x-x_0).$$

Ja šīs nevienlīdzības (skaitā k) pareizina savā starpā, kreisās puses savā starpā un labās puses savā starpā, tad pēc saīsināšanas atrod

$$\varepsilon_k < [M(x-x_0)]^k \varepsilon_0.$$

Ar attiecīgu intervala $x-x_0$ izvēli vienmēr var sasniegt to, ka [redacted] $M(x-x_0)<1$. Ja tas ir izpildīts, tad ar pietiekami lielu kāpinātāju k lielumu $[M(x-x_0)]^k$ var pataisīt tik mazu, cik vien vēlas. Tātad arī ε_k var pataisīt neaprobežoti mazu, t.i. $\varepsilon_k \to 0$, kad $k \to \infty$.

Tātad iterācijas process savirzās diferenciālvienādojuma atrisinājumā, ja

$$\left|h\frac{\partial f}{\partial y}\right|<1 \text{ jeb } h<\frac{1}{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|},$$

kur $h=x-x_0$. Saskaņā ar pēdējo nevienlīdzību, jo lielāka vērtība ir atvasinātai $\partial f/\partial y$, jo mazāks ir jāizvēlē argumenta pieaugums h; redzams arī, ka iterācijas process neved pie mērķa, ja $\partial f/\partial y=\infty$.

Interpolacija kā iteracijas procesa papildinājums.

Ja iteracijas procesā ietvertās darbības ir iespējams veikt, tad dabūtie tuvinājumi pakāpeniski izvirzas diferenciālvienādojuma atrisinājumā. Parasti tomēr integrējamās izteiksmes ātri top tik sarežģītas, ka integrēšana ir praktiski neiespējama. Tad jāizpalīdzas ar interpolacijas metodēm.

Diferenciālvienādojumam $dy/dx=f(x,y)$ jāatrod atrisinājums $y=\varphi(x)$, kas atbilst iesākuma noteikumam $\varphi(x_0)=y_0$. Atrisinājums jāiedomājas kopā saderīgo vērtību tabulas veidā. Viens pāris tādu vērtību (x_0,y_0) ir dots, pārējie $(x_1,y_1; x_2,y_2; x_3,y_3; \dots)$ — jāaprēķina. Argumenta vērtības $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ var pieņemt vienādos atstatumos, tā ka $x_{k+1}-x_k=h>0$. $(k=0,1,2,\dots)$ Attiecīgās funkcijas vērtības $y_1, y_2, y_3, \dots$ var dabūt tuvini ar iepriekš aprakstītiem paņēmieniem. Iteracijas process ļoti saīsinās, ja iesāk ar vērtībām, kas ir tuvas meklējamām. Nepieciešams tads iepriekšējs aprēķins nav. Var iziet no gluži rupjiem tuvinājumiem, pieņemot, piem., ka visas funkcijas vērtības ir vienlīdzīgas y_0. Iteracijas procesa būtība ir tuvinājumu uzlabošana.

Pieņemsim, ka ekvidistantām argumenta vērtībām $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$ atbilst funkcijas vērtības $y_0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, \dots$ Ar augšējo indeku 0 apzīmētās ir rupji tuvinājumi, kurus ar iteracijas procesu ir vajadzīgs izlabot.

Šim nolūkā katrai kopā saderīgo vērtību pārai aprēķina attiecīgo virziena koeficientu $f_0=f(x_0,y_0)$ vai $f_k^0=f(x_k,y_k^0)$ $(k=1,2,3,\dots)$ un sastāda diferenču tabulu:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_0 & y_0 & f_0 & & & & & & \\
 & & & \Delta f_0 & & & & & \\
x_1 & y_1^0 & f_1^0 & & \Delta^2 f_0 & & & & \\
 & & & \Delta f_1^0 & & \Delta^3 f_0 & & & \\
x_2 & y_2^0 & f_2^0 & & \Delta^2 f_1^0 & & \Delta^4 f_0 & & \\
 & & & \Delta f_2^0 & & \Delta^3 f_1^0 & & \dots & \\
x_3 & y_3^0 & f_3^0 & & \Delta^2 f_2^0 & & \Delta^4 f_1^0 & & \\
 & & & \Delta f_3^0 & & \Delta^3 f_2^0 & & \dots & \\
x_4 & y_4^0 & f_4^0 & & \Delta^2 f_3^0 & & \Delta^4 f_2^0 & &
\end{array}$$

Virziena koeficienta starpvērtības izteic ar interpolācijas polinomu. Derīga ir Ņūtona-Gregorija formula:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\xi\,\Delta f_0+\frac{\xi(\xi-1)}{1.2}\Delta^2 f_0+\frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{1.2.3}\Delta^3 f_0+\dots, \tag{5.6.2}$$

kur $x=x_0+\xi h$.

Integrālfunkcijas pieaugumu intervālā (x_0,x_n) atrod ar formulu

$$y_n-y_0=\int_{x_0}^{x_n}\left(\frac{dy}{dx}\right)dx=\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)\,dx.$$

Formulā (5.6.2) neatkarīgais mainīgais ir ξ, tādēļ uz šo mainīgo jāpārkārtojas arī noteiktā integrāļa izvērtējumā. Tā kā ξ mainās no 0 līdz n, kad x mainās no x_0 līdz x_n, un $dx=h\,d\xi$, tad seko, ka

$$y_n-y_0=h\int_0^n f(x,y)\,d\xi.$$

Pareizinot (5.6.2) ar $d\xi$ un izpildot integrēšanu dabū:

$$y_n - y_0 = h\Big[A_0 f_0 + \frac{A_1}{2}\Delta f_0 + \frac{A_2}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{A_3}{24}\Delta^3 f_0 + \\ + \frac{A_4}{720}\Delta^4 f_0 + \frac{A_5}{1440}\Delta^5 f_0 + \frac{A_6}{60480}\Delta^6 f_0\Big], \qquad (5.6.3)$$

kur pieņemti apzīmējumi:

$$A_0 = n, \quad A_1 = n^2, \quad A_2 = n^2(2n-3),$$

$$A_3 = n^2(n-2)^2,$$

$$A_4 = n^2(6n^3 - 45n^2 + 110n - 90),$$

$$A_5 = n^2(2n^4 - 24n^3 + 105n^2 - 200n + 144),$$

$$A_6 = n^2(12n^5 - 210n^4 + 1428n^3 \\ - 4725n^2 + 7672n - 5040).$$

Koeficientu skaitliskās vērtības.

	$n=$							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A_0	1	2	3	4	5	6	7	8
A_1	1	4	9	16	25	36	49	64
A_2	−1	4	27	80	175	324	539	832
A_3	1	0	9	64	225	576	1225	2304
A_4	−19	−8	−27	224	2125	8856	26117	62848
A_5	27	16	27	0	475	4752	22491	74752
A_6	−863	−592	−783	−512	−1375	17712	216433	1160192

Attiecinot formulu (5.6.3) uz iepriekš sastādīto diferenču tabulu un pieņemot pēc kārtas $n=1,2,3,4,\ldots$ atrod funkcijas vērtības

$$y_1^I,\ y_2^I,\ y_3^I,\ y_4^I,\ \ldots,$$

kuras ir tuvāk meklējamām, kā tās, ar kurām sastādīta diferenču tabula. Piemēram, ja $n=1$, tad seko

$$y_1^I - y_0 = h\Big[f_0 + \frac{1}{2}\Delta f_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 f_0 - \frac{19}{720}\Delta^4 f_0 + \frac{3}{160}\Delta^5 f_0 - \frac{863}{60480}\Delta^6 f_0\Big]. \qquad (5.6.3')$$

Pieņemot $n=2$ dabū

$$y_2^I - y_0 = h\Big[2f_0 + 2\Delta f_0 + \frac{1}{3}\Delta^2 f_0 - \frac{1}{90}\Delta^4 f_0 + \frac{1}{90}\Delta^5 f_0 - \frac{37}{3780}\Delta^6 f_0\Big]. \qquad (5.6.3'')$$

Līdzīgā kārtā

$$y_3^I - y_0 = h\Big[3f_0 + \frac{9}{2}\Delta f_0 + \frac{9}{4}\Delta^2 f_0 + \frac{3}{8}\Delta^3 f_0 - \frac{3}{80}\Delta^4 f_0 + \frac{3}{160}\Delta^5 f_0 - \frac{29}{2240}\Delta^6 f_0\Big]. \qquad (5.6.3^{III})$$

$$y_4^I - y_0 = h\Big[4f_0 + 8\Delta f_0 + \frac{20}{3}\Delta^2 f_0 + \frac{8}{3}\Delta^3 f_0 + \frac{14}{45}\Delta^4 f_0 - \frac{8}{945}\Delta^6 f_0\Big]. \qquad (5.6.3^{IV})$$

Pēc tam, kad pirmā serija izlaboto vērtību $y_1^I, y_2^I, y_3^I, y_4^I, \ldots$ ir atrasta, sastāda jaunu diferenču schemu:

$$
\begin{array}{cccllll}
x_0 & y_0 & f_0 & & & & \\
 & & & \Delta f_0^I & & & \\
x_1 & y_1^I & f_1^I & & \Delta^2 f_0^I & & \\
 & & & \Delta f_1^I & & \Delta^3 f_0^I & \\
x_2 & y_2^I & f_2^I & & \Delta^2 f_1^I & & \ldots \\
 & & & \Delta f_2^I & & \Delta^3 f_1^I & \\
x_3 & y_3^I & f_3^I & & \Delta^2 f_2^I & & \ldots \\
 & & & \Delta f_3^I & & \Delta^3 f_2^I & \\
x_4 & y_4^I & f_4^I & & \Delta^2 f_3^I & & \ldots
\end{array}
$$

kur $f_k^I = f(x_k, y_k^I)$, un atkārto aprēķinu ar jaunās schemas datiem. Dabū otru seriju izlaboto y vērtību, un šo izlabošanu turpina tik ilgi, kamēr aprēķinātās vērtības pielaistās pareizības robežās neatšķiras no tām, kuras ir diferenču tabulā. Tātad mums ir vērtību sekojumi:

$$
\begin{array}{l}
y_0, y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0, \ldots \\
y_0, y_1^I, y_2^I, y_3^I, y_4^I, \ldots \\
y_0, y_1^{II}, y_2^{II}, y_3^{II}, y_4^{II}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots
\end{array}
$$

Pēdējā sekojuma locekļi nemainas, ja tos pakļauj iteracijas procesam. Nelielas kļūdas process automatiski izlabo.

Metodes variants, kas lietā centrālo diferenču formulas. Pieņemsim, ka ekvidistantām x vērtībām $x_0, x_1, x_2, \dots$ atbilst attiecīgi $y_0, y_1^0, y_2^0, \dots$ Aprēķina attiecīgos virziena koeficientus $f_0, f_1^0, f_2^0, \dots$ un sastāda diferenču schemu:

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_0 & y_0 & f_0 & & \delta^2 f_0^0 & & \delta^4 f_0^0 & \\
 & & & \delta f_{\frac12}^0 & & \delta^3 f_{\frac12}^0 & & \dots \\
x_1 & y_1^0 & f_1^0 & & \delta^2 f_1^0 & & \delta^4 f_1^0 & \\
 & & & \delta f_{\frac32}^0 & & \delta^3 f_{\frac32}^0 & & \dots \\
x_2 & y_2^0 & f_2^0 & & \delta^2 f_2^0 & & \delta^4 f_2^0 & \\
 & & & \delta f_{\frac52}^0 & & \delta^3 f_{\frac52}^0 & & \dots \\
x_3 & y_3^0 & f_3^0 & & \delta^3 f_3^0 & & \delta^4 f_3^0 &
\end{array}
$$

No izejas datiem seko schemas daļa lejpus kāpņu veidīgās līnijas. Papildinājums virs šīs līnijas jāatrod no labās puses — iesākot ar stabiņu, kura diferences var uztvert par nezināmām.

Trešā stabiņā $f_0 = f(x_0, y_0)$ un $f_k^0 = f(x_k, y_k^0)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$, kur $x_k = x_0 + kh$. Beseļa interpolacijas formula funkcijas vērtības izteic diferencēs, kas visas pieder vienai schemas starp līnijai — atstatumā $\frac{1}{2}h$ no centrālās rindas:

$$
\begin{aligned}
f(x, y) = \bar{f}_{\frac12} &+ \frac{\delta f_{\frac12}}{1!}\xi + \frac{\bar{\delta}^2 f_{\frac12}}{2!}\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right) + \frac{\delta^3 f_{\frac12}}{3!}\xi\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right) + \\
&+ \frac{\bar{\delta}^4 f_{\frac12}}{4!}\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\xi^2 - \frac{9}{4}\right) + \frac{\delta^5 f_{\frac12}}{5!}\xi\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\xi^2 - \frac{9}{4}\right) + \\
&+ \frac{\bar{\delta}^6 f_{\frac12}}{6!}\left(\xi^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\xi^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\xi^2 - \frac{25}{4}\right) + \dots
\end{aligned}
\qquad (5.6.4)
$$

kur $x = x_{\frac12} + \xi h$.

Integralfunkcijas pieaugums intervalā (x_0, x_1)

$$y_1^{I} - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx = h\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f(x,y)\,d\xi,$$

tāpēc, ka $x = x_0 + \frac{1}{2}h + \xi h$, un tātad ja $x = x_0$, tad $\xi = -\frac{1}{2}$, un ja $x = x_1 = x_0 + h$, tad seko, ka $\xi = \frac{1}{2}$. Mēs integrējam viena intervala robežās un integrali izteicam diferencēs, kas pieder intervala vidum. Iznākumā dabū ļoti ērtu formulu:

$$y_1^{I} - y_0 = h\left[\bar{f}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{12}\bar{\delta}^2 f_{\frac{1}{2}} + \frac{11}{720}\bar{\delta}^4 f_{\frac{1}{2}} - \frac{191}{60480}\bar{\delta}^6 f_{\frac{1}{2}} + \dots\right] \qquad (5.6.4')$$

Pusintervalā starp x_0 un x_1 tabulā nav ne funkcijas vertības ne pārskaitlīgo diferenču, t.i. nav visu lielumu, kas vajadzīgi formulā (5.6.4'). Jāsaprot, ka šie fiktīvie, ar virsstrīpojumu izceltie lielumi apzīmē vidējos aritmetiskos, kas veidoti no blakus rindu skaitļiem:

$$\bar{f}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(f_0 + f_1), \quad \bar{\delta}^2 f_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\delta^2 f_0 + \delta^2 f_1), \dots$$

Vispārīgi:

$$y_{n+1}^{\nu+1} - y_n^{\nu+1} = h\left[\frac{f_{n+1}^{\nu} + f_n^{\nu}}{2} - \frac{1}{12}\frac{\delta^2 f_{n+1}^{\nu} + \delta^2 f_n^{\nu}}{2} + \frac{11}{720}\frac{\delta^4 f_{n+1}^{\nu} + \delta^4 f_n^{\nu}}{2} - \frac{191}{60480}\frac{\delta^6 f_{n+1}^{\nu} + \delta^6 f_n^{\nu}}{2} + \dots\right], \qquad (5.6.5)$$

kur $n = 0, 1, 2, \dots$; $\nu = 0, I, II, \dots$

5.7. Ekstrapolacijas metode. Uzdotam diferencialvienādojumam $dy/dx = f(x,y)$ jāatrod atrisinājums $y = \varphi(x)$ kopā saderīgo vērtību tabulas veidā:

$$\text{ja } x = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots,$$
$$\text{tad } y = y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots,$$

kur iesākuma vērtības (x_0, y_0) ir dotas. Argumenta vērtības, ciktāl tās nav noteiktas ar priekšrakstu, izvēlē rēķinātājs. Tādēļ var pieņemt, ka tās ir vienādā atstatumā h, tā ka

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = h > 0.$$

Pirmais solis uzdevuma risināšanā ir tas, ka pirmām argumenta x vērtībām $x_1, x_2, \ldots x_n$ aprēķina attiecīgās funkcijas y vērtības $y_k = \varphi(x_k)$. $(k = 1, 2, 3, \ldots n)$. Šo izejas datu aprēķins jāveic ar vislielāko iespējamo precizitāti, jo tie nosaka vēlāk dabūto iznākumu pareizību. Lietāt var, piem., pakāpenisko tuvinājumu (iterācijas) metodi. Pieņemsim, ka šis darbs ir padarīts. Tad zināmam skaitam kopā saderīgo vērtību (piem. pēdējām 4 pārām) aprēķina attiecīgo virziena funkcijas $f(x,y)$ vērtību un veido diferenču tabulu (līdz kāpņu veidīgai līnijai):

$$\begin{array}{cccccc}
x_{n-3} & y_{n-3} & f_{n-3} & & \nabla^2 f_{n-2} & \\
 & & & \nabla f_{n-2} & & \nabla^3 f_{n-1} \\
x_{n-2} & y_{n-2} & f_{n-2} & & \nabla^2 f_{n-1} & \\
 & & & \nabla f_{n-1} & & \nabla^3 f_n \\
x_{n-1} & y_{n-1} & f_{n-1} & & \nabla^2 f_n & \\
 & & & \nabla f_n & & \nabla^3 f_{n+1} \\
x_n & y_n & f_n & & \nabla^2 f_{n+1} & \\
 & & & \nabla f_{n+1} & & \\
x_{n+1} & y_{n+1} & f_{n+1} & & &
\end{array}$$

Ekstrapolacijas metodes kodols ir tas, ka sastādīto tabulu turpina uz leju (zem kāpņu veidīgās līnijas). Šo turpināšanu sauc arī par *„integrēšanu uz priekšu."* Tās pamatā ir augšup kāpjošām diferencēm pielāgotā *Ņutona-Gregorija interpolacijas formula*:

$$f(x,y) = f_n + \frac{\nabla f_n}{1!}\xi + \frac{\nabla^2 f_n}{2!}\xi(\xi+1) + \frac{\nabla^3 f_n}{3!}\xi(\xi+1)(\xi+2) + \dots, \qquad (5.7.1)$$

kur $x = x_n + h\xi$.

Ja $x = x_n$, tad $\xi = 0$, un ja $x = x_{n+1} = x_n + h$, tad seko, ka $\xi = 1$. Tādeļ funkcijas y pieaugums intervalā x_n, x_{n+1}

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)\,dx = h\int_0^1 f(x,y)\,d\xi.$$

Pareizinot (5.7.1) ar $d\xi$ un izdarot integrēšanu dabū:

$$y_{n+1} - y_n = h\Big[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720}\nabla^4 f_n + \frac{95}{288}\nabla^5 f_n + \frac{19087}{60480}\nabla^6 f_n + \dots\Big] \qquad (5.7.2)$$

No (5.7.2) atrod y_{n+1}, kas atbilst argumentam x_{n+1}. Tagad var aprēķināt $f_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$ un diferenču tabulu apakšā papildināt ar vienu slīpo rindu. Pielietojot šīs slīpās rindas skaitļiem to pašu formulu (5.7.2) dabū y_{n+2} un t.t.

Šo ekstrapolacijas paņēmienu sauc par *Adams'a metodi* (1883.).

Vispārīgā formula funkcijas pieauguma aprēķināšanai. Intervalim (x_k, x_{k+1}) atbilst funkcijas pieaugums

$$y_{k+1}-y_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)\,dx = h\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} f(x,y)\,d\xi,$$

kur ξ_k un ξ_{k+1} ir ξ vertības, kas atbilst attiecīgi x vertībām x_k un x_{k+1}. Tā kā $x=x_n+\xi h=x_0+(n+\xi)h$ un $x_k=x_0+kh$, tad no vienādības $x=x_k$ izriet, ka

$$n+\xi=n+\xi_k=k,$$

un tātad

$$\xi_k=k-n. \qquad (5.7.3)$$

Līdzīgā kārtā

$$\xi_{k+1}=k+1-n. \qquad (5.7.3')$$

Vienādību (5.7.1) jāpareizina ar $d\xi$ un jāintegrē robežās no $\xi=\xi_k$ līdz $\xi=\xi_{k+1}$. To izdarot dabū:

$$\begin{aligned} y_{k+1}-y_k = h\Big[& f_n\xi+\frac{1}{2}\nabla f_n\,\xi^2+\frac{1}{12}\nabla^2 f_n\,(2\xi^3+3\xi^2)+ \\ & +\frac{1}{24}\nabla^3 f_n\,(\xi^4+4\xi^3+4\xi^2)+ \\ & +\frac{1}{720}\nabla^4 f_n\,(6\xi^5+45\xi^4+110\xi^3+90\xi^2)+ \\ & +\frac{1}{1440}\nabla^5 f_n\,(2\xi^6+24\xi^5+105\xi^4+200\xi^3+144\xi^2)+ \\ & +\frac{1}{60480}\nabla^6 f_n\,(12\xi^7+210\xi^6+1428\xi^5+4725\xi^4+ \\ & +7672\xi^3+5040\xi^2)\Big]_{\xi_k}^{\xi_{k+1}}. \qquad (5.7.4) \end{aligned}$$

Secinājumi no (5.7.4).

Ja šinī formulā pieņem $k=n$, tad saskaņā ar (5.7.3) un (5.7.3') $\xi_k=0$ un $\xi_{k+1}=1$, un seko (5.7.2).

 28. II. 48

Pieņemot $\kappa = n-1$ dabū $\xi_\kappa = -1$ un $\xi_{\kappa+1} = 0$. Attiecīgā funkcijas pieauguma aprēķināšanai seko formula:

$$y_n - y_{n-1} = h\left[f_n - \frac{1}{2}\nabla f_n - \frac{1}{12}\nabla^2 f_n - \frac{1}{24}\nabla^3 f_n - \frac{19}{720}\nabla^4 f_n - \frac{3}{160}\nabla^5 f_n - \frac{863}{60480}\nabla^6 f_n\right]. \quad (5.7.5)$$

Tā kā šinī formulā koeficienti ir mazāki, kā formulā (5.7.2), tad (5.7.5) var lietāt lai uzlabotu iznākumus, kas dabūti ar (5.7.2).

Līdzīgā kārtā var aprēķināt funkciju pieaugumus, kas atbilst citiem argumenta intervaliem. Sakoposim dažas formulas, kas izriet no (5.7.4), aprobežojoties ar 4 kārtas diferencēm:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\ y_{n+1} - y_n = h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720}\nabla^4 f_n\right],\\
&(\mathrm{II})\ y_n - y_{n-1} = h\left[f_n - \frac{1}{2}\nabla f_n - \frac{1}{12}\nabla^2 f_n - \frac{1}{24}\nabla^3 f_n - \frac{19}{720}\nabla^4 f_n\right],\\
&(\mathrm{III})\ y_{n-1} - y_{n-2} = h\left[f_n - \frac{3}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{1}{24}\nabla^3 f_n + \frac{11}{720}\nabla^4 f_n\right],\\
&(\mathrm{IV})\ y_{n-2} - y_{n-3} = h\left[f_n - \frac{5}{2}\nabla f_n + \frac{23}{12}\nabla^2 f_n - \frac{3}{8}\nabla^3 f_n - \frac{19}{720}\nabla^4 f_n\right],\\
&(\mathrm{V})\ y_{n-3} - y_{n-4} = h\left[f_n - \frac{7}{2}\nabla f_n + \frac{53}{12}\nabla^2 f_n - \frac{55}{24}\nabla^3 f_n + \frac{251}{720}\nabla^4 f_n\right].
\end{aligned} \quad (5.7.6)$$

Formulas (I) un (II) ir agrāk atrastās (5.7.2) un (5.7.4); to lietājumi ir jau atzīmēti. Formulas (III), (IV) un (V) lietā agrāk aprēķināto iznākumu pārbaudīšanai.

No formulām (5.7.6), saskaitot (I) ar (II) un (II) ar (III), var dabūt vēl divas šādas formulas:

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\left[2f_n+\frac{1}{3}\nabla^2 f_n+\frac{1}{3}\nabla^3 f_n+\frac{232}{720}\nabla^4 f_n\right],$$

$$y_n-y_{n-2}=2h\left[f_n-\nabla f_n+\frac{1}{6}\nabla^2 f_n-\frac{1}{180}\nabla^4 f_n\right],$$

kuras var tuvīni aizvietot ar šādām:

$$y_{n+1}-y_{n-1}=h\left[2f_n+\frac{1}{3}\left(\nabla^2 f_n+\nabla^3 f_n+\nabla^4 f_n\right)\right], \quad (5.7.7)$$

$$y_n-y_{n-2}=2h\left[f_n-\nabla f_n+\frac{1}{6}\nabla^2 f_n\right]. \quad (5.7.8)$$

Formula (5.7.7) ir ekstrapolacijas formula, kad ņem vienā laidā divus intervalus. Ar šo formulu aprēķinātie pieaugumi jāpieskaita nevis pēdējai atrastai vērtībai (y_n), bet priekšpēdējai (y_{n-1}).

Formula (5.7.8) ir derīga divkāršotu intervalu pārbaudīšanai. Tā ir ievērojami vienkārša un precīza. Lai gan tā lietā tikai pirmās un otrās kārtas diferences, tomēr tā sasniedz trešās kārtas tuvinājumu.

 28.II.48

<u>Ekstrapolacija ar pakāpeniskiem tuvinājumiem.</u> Adams'a metodē jaunu funkcijas vērtību dabū tieši ar formulu (5.7.2), un tādā nozīmē var teikt, ka ekstrapolacija šinī gadījumā ir tieša. Citās metodes tiešo ekstrapolaciju aizvieto ar pakāpeniskiem tuvinājumiem; to sauc par <u>netiešo ekstrapolaciju</u>.

Sagatavošanas darbs ir tas pats, kas Adams'a metodē: funkcijas y vērtību un virziena koeficienta $f(x,y)$ aprēķināšana dotām argumenta vērtībām $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$, un diferenču tabulas izveidošana. Atšķirība parādas diferenču tabulas turpināšanā.

Lai dabūtu jaunu funkcijas vērtību y_{n+1} lieto to pašu formulu (5.7.2), bet ņem šinī formulā tikai dažus pirmos locekļus un tādā kārtā atrod nevis pašu meklējamo vērtību, bet tās tuvinājumu y^0_{n+1}. Tam atbilst virziena koeficienta tuvinājums

$$f^0_{n+1} = f(x_{n+1}, y^0_{n+1}).$$

Pēc f^0_{n+1} aprēķināšanas diferenču schemu var papildināt ar pirmo slīpo rindu zem kāpņu veidīgās līnijas. (Sk. schemu).

Otro funkcijas vērtību y^0_{n+1} izlabo ar formulu (5.7.5), kurai šinī gadījumā ir šāds izskats:

$$y^{I}_{n+1} - y_n = h\Big[f^0_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f^0_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f^0_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f^0_{n+1} - \frac{19}{720}\nabla^4 f^0_{n+1} - \frac{3}{160}\nabla^5 f^0_{n+1} - \frac{863}{60480}\nabla^6 f^0_{n+1}\Big]. \qquad (5.7.9)$$

Zinot y^{I}_{n+1} var aprēķināt f^{I}_{n+1} un veidot jaunu slīpo rindu, kura aizstāj iepriekšējo un no kuras ar (5.7.5) resp. (5.7.9) secina otru tuvinājumu y_{n+1}^{II} unt.t., kamēr atkārtošanai nesoko ~~uzlabojumi~~ nekāds uzlabojums. Tāds stāvoklis bieži iestājas pēc 2–3 atkārtojumiem. Tuvinājumi ātri savirzas savā galīgā vērtībā:

$$y_{n+1}^{0},\ y_{n+1}^{I},\ y_{n+1}^{II},\ \ldots \to y_{n+1},$$

kuru liek pamatā jaunam aprēķinam.

Aprēķina schema:

x_{n-3}	y_{n-3}	f_{n-3}		$\nabla^2 f_{n-2}$		...
			∇f_{n-2}		$\nabla^3 f_{n-1}$	...
x_{n-2}	y_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla^2 f_{n-1}$		...
			∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_{n}$	...
x_{n-1}	y_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_{n}$		...
			∇f_{n}		$\nabla^3 f_{n+1}^{0}$	...
x_{n}	y_{n}	f_{n}		$\nabla^2 f_{n+1}^{0}$		...
			∇f_{n+1}^{0}		$\nabla^3 f_{n+1}^{I}$	...
x_{n+1}	y_{n+1}^{0}	f_{n+1}^{0}		$\nabla^2 f_{n+1}^{I}$	....	...
			∇f_{n+1}^{I}	....		
	y_{n+1}^{I}	f_{n+1}^{I}	....		$\dot\nabla^3 f_{n+1}$	...
	....			$\nabla^2 f_{n+1}$	$\nabla^3 f_{n+2}^{0}$	...
			∇f_{n+1}			...
	y_{n+1}	f_{n+1}		$\nabla^2 f_{n+2}^{0}$		...
			∇f_{n+2}^{0}			
x_{n+2}	y_{n+2}^{0}	f_{n+2}^{0}				

Netiešās ekstrapolacijas priekšrocība ir tā, ka jālieto formula (5.7.9), kurai koeficienti ir mazāki, kā formulā (5.7.2). Pateicoties iteracijai netiešā ekstrapolacija ir arī precizāka par tiešo.

Netiešā ekstrapolacija ar kvadraturas formulām.

(Milna metode). Pieņemsim, ka f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 ir 5 vertibas funkcijai $f(x)$, kas atbilst ekvidistantām argumenta vērtībām x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Intervalu no vienas argumenta vertibas lidz otrai apzīmesim ar h, tā ka $x_k = x_0 + kh$ $(k=0,1,2,3,4)$. Patvaļīgi noteiktu argumenta vērtību definēsim ar sakarību $x = x_0 + \xi h$.

Šiem datiem atbilst diferenču schema:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f_0 & & & & \\
 & & \Delta f_0 & & & \\
x_1 & f_1 & & \Delta^2 f_0 & & \\
 & & \Delta f_1 & & \Delta^3 f_0 & \\
x_2 & f_2 & & \Delta^2 f_1 & & \Delta^4 f_0 \\
 & & \Delta f_2 & & \Delta^3 f_1 & \\
x_3 & f_3 & & \Delta^2 f_2 & & \\
 & & \Delta f_3 & & & \\
x_4 & f_4 & & & &
\end{array}$$

Saskaņā ar diferenču veidošanas likumu

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0,$$
$$\Delta^2 f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0,$$
$$\Delta^3 f_0 = f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0,$$
$$\Delta^4 f_0 = f_4 - 4f_3 + 6f_2 - 4f_1 + f_0.$$

Var uzrakstīt 4. pakāpes polinomu, kurš datu vērtības f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, kad x ir vienlīdzīgs attiecīgi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Tādu polinomu izteic Gregorija-Ņutona interpolacijas formula:

$$f(x) = f(x_0 + \xi h) = f_0 + \Delta f_0\, \xi + \frac{1}{2}\Delta^2 f_0\, \xi(\xi-1) + $$
$$+ \frac{1}{6}\Delta^3 f_0\, \xi(\xi-1)(\xi-2) + \frac{1}{24}\Delta^4 f_0\, \xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3). \tag{5.7.10}$$

Pareizinot (5.7.10) ar $dx = h\,d\xi$ un aprēķinot notikto integrali robežās no

$$x_a = x_0 + ah \quad \text{līdz} \quad x_b = x_0 + bh$$

dabū

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)dx = h\Big[A_0 f_0 + \frac{1}{2}A_1\Delta f_0 + \frac{1}{12}A_2\Delta^2 f_0 + \\ + \frac{1}{24}A_3\Delta^3 f_0 + \frac{1}{720}A_4\Delta^4 f_0\Big]_a^b, \tag{5.7.11}$$

kur koeficienti A_i ir ξ funkcijas:

$$A_0 = \xi, \qquad A_1 = \xi^2,$$
$$A_2 = \xi^2(2\xi - 3),$$
$$A_3 = \xi^2(\xi - 2)^2,$$
$$A_4 = \xi^2(6\xi^3 - 45\xi^2 + 110\xi - 90).$$

<u>Koeficientu skaitliskās vērtības.</u>

ξ	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1	1	−1	1	−19
2	2	4	4	0	−8
3	3	9	27	9	−27
4	4	16	80	64	224

 29.II.78

Formula (5.7.11) diferences jāizteic funkcijas vērtībās un jāspecializē noteiktā integrala robežas. Pieņemot $a=0$ resp. 2 un $b=4$ dabū divas <u>kvadraturas formulas</u>:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_2+4f_3+f_4) - \frac{8}{720}h\Delta^4 f_0 \qquad (5.7.12')$$

un

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}(2f_1-f_2+2f_3) + \frac{224}{720}h\Delta^4 f_0. \qquad (5.7.12'')$$

Ja funkcija $f(x)$ apskatamā intervalā ir nepārtraukta, tad argumenta pieaugumu h var izvēlēt tik mazu, ka pēdējo locekli iepriekšējās formulas var neievērot. Pieņemot, ka tas tā ir, var rakstīt vispārīgi:

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{h}{3}(f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n), \qquad (5.7.13)$$

$$\int_{x_{n-4}}^{x_n} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}(2f_{n-3}-f_{n-2}+2f_{n-1}). \qquad (5.7.13')$$

Formula (5.7.13) izteic <u>Simpsona kārtulu</u>. Formula (5.7.13') nav tik preciza, kā (5.7.13), bet ērta tanī ziņā, ka noteikto integrali var izrēķināt nezinot f_n. Tādai iespējamībai ir svariga nozīme diferencialvienādojumu atrisināšanā.

Pieņemsim, ka dotais diferencialvienādojums ir $dy/dx = f(x,y)$ un iesākuma vērtības ir (x_0, y_0). Pieņemsim arī, ka argumenta intervalis h ir izvēlēts, un ka funkcijai y ir aprēķinātas vērtības, kas atbilst $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$

 29.I.78

un $x_3 = x_0 + 3h$. Ar kopā saderīgām x, y vērtībām var aprēķināt virziena koeficientu $dy/dx = f(x, y)$. Tātad mūsu rīcībā ir šādi izejas dati:

x	y	$f(x,y)$
x_0	y_0	f_0
x_1	y_1	f_1
x_2	y_2	f_2
x_3	y_3	f_3
x_4		

Vajadzīgs atrast y_4.

Tā kā

$$y_4 - y_0 = \int_{x_0}^{x_4} f(x, y)\,dx,$$

tad no (5.7.13') seko, pieņemot $n=4$:

$$y_4 = y_0 + \frac{4h}{3}\left(2f_1 - f_2 + 2f_3\right). \qquad (5.7.14)$$

Tā nav galīgā vērtība, tā ir vēl jāpārbauda. Ar tās palīdzību aprēķina $f(x_4, y_4) = f_4$. Zinot f_4 var no jauna aprēķināt y_4 ar formulu (5.7.13), kura šinī gadījumā iegūst izskatu:

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}\left(f_2 + 4f_3 + f_4\right). \qquad (5.7.15)$$

Ja iznākumi (5.7.14) un (5.7.15) saskan tikdaudz decimalzīmēs, cik vajadzīgs, tad atrasto y_4 vērtību uztver kā pareizu un piegriežas līdzīgā kārtā y_5 aprēķināšanai. Ja iznākumi nesaskan, tad vispirms jāpārbauda, vai rēķinā nav ieviesusies kļūda. Pieņemsim, ka kļūdas nav.

29/II·48

Tad atliek vienīgi pieņemt, ka funkcijai $f(x,y)$ ceturtās kārtas diferences ir tik lielas, ka atlikuma locekļi formulās (5.7.12') un (5.7.12'') ietekmē iznākumus.

Nesaskaņa starp abām citētām formulām, ciktāļ to noteic ceturtās kārtas diference, ir vienlīdzīga

$$\varepsilon = \frac{232}{720} h \Delta^4 f_0 .$$

Formulā (5.7.15) ceturtās kārtas diferences ietekme ir izteicama ar

$$\varepsilon_1 = \frac{8}{720} h \Delta^4 f_0 = \frac{\varepsilon}{29} .$$

Ja ε_1 ir lielāks, kā drīkst pielaut, tad tas rāda, ka izvēlētais argumenta pieaugums h ir pārāk liels, un ka to vajaga samazināt.

Visā aprēķinā blakus y vērtībām ieteicams reģistrēt attiecīgo nesaskaņu ε. Ja šis skaitlis sāk pēkšņi svārstīties, tas norāda uz kļūdas ieviešanos rēķinā un atgādina, ka rēķinu ir vajadzīgs pārbaudīt.

Piezīme.

Simpsona formula attiecas uz intervaļiem pāra skaitā. Tādēļ skaidrs, ka funkcijas vērtības $y_4, y_6, y_8, \dots$ veidojas neatkarīgi no $y_3, y_5, y_7, \dots$ un paralēli šīm pēdējām. Nelielu kļūdu ietekmē kopīgā y vērtību sekojumā var rasties svārstības, kuru kontrolei vajadzīgas formulas intervaļu nepāra skaitam. Vienkāršākā no tādām kvadratūras formulām:

$$y_4 - y_1 = \frac{h}{24}\left(-f_0 + 13 f_1 + 21 f_2 + 31 f_3 + 8 f_4\right) + \\ + \frac{3h}{720} \Delta^4 f_0 . \qquad (5.7.16)$$

1.II.1948

Izejas datu iegūšana.

Mēs pieņemām izejas datus par dotiem. Tos var aprēķināt ar izvirzījumu Teilora rindā, vai ar vidējās vērtības metodēm (Runge, Kutta) vai arī ar iterāciju. Šāda iterācijas metode, kas lieto kvadratūras formulas, saskaņā ar Milna ieteikumu bieži izrādās visai apmierinoša. Te ir vajadzīga kvadratūras formula, ko dabū no (5.7.11) integrējot robežās no x_2 līdz x_3:

$$y_3-y_2=\frac{h}{24}(-f_1+13f_2+13f_3-f_4)+ \\ +\frac{11}{720}h\Delta^4 f_0. \qquad (5.7.16)$$

Varam pieņemt, ka atlikuma locekli drīkst atstāt bez ievērības. Tad, attiecīgi pārmainot indeksus, iepriekšējo formulu pārrakstām izskatā

$$y_1-y_0=\frac{h}{24}(-f_{-1}+13f_0+13f_1-f_2) \qquad (5.7.16')$$

Lai varētu iesākt rēķinu pieņemam tuvinās vērtības y_{-1}, y_1, y_2 šādi:

$$y_{-1}=y_0-hf_0, \quad y_1=y_0+hf_0, \quad y_2=y_0+2hf_0,$$

un pēc tam no diferenciālvienādojuma aprēķinam attiecīgās tuvinās vērtības f_{-1}, f_1, f_2. Tās zinot aprēķinam no jauna y_2, y_1, y_{-1} ar formulām

$$\left.\begin{aligned} y_2&=y_0+\frac{1}{3}h(f_0+4f_1+f_2), \\ y_1&=y_0+\frac{1}{24}h(-f_{-1}+13f_0+13f_1-f_2), \\ y_{-1}&=y_1-\frac{1}{3}h(f_{-1}+4f_0+f_1). \end{aligned}\right\} \quad (5.7.17)$$

Aprēķinātās vērtības y_2, y_1, y_{-1} ievietojam diferenciālvienādojumā, atrodam no jauna f_{-1}, f_1, f_2 un atrastos iznākumus ievietojam formulās (5.7.17), lai dabūtu labākas vērtības y_2, y_1, y_{-1}, un šo procesu turpinām tik ilgi, kamēr darbību atkārtošana atstāj vērtības bez pārmaiņas.

Precīzāku formulu sakopojums.

Integrēšanai „uz priekšu":

$$y_5-y_0=\frac{5h}{144}(19f_0-10f_1+120f_2-70f_3+85f_4)+ +\frac{95}{288}h^6f_5. \qquad (5.7.18)$$

$$y_6-y_0=\frac{3h}{10}(11f_1-14f_2+26f_3-14f_4+11f_5)+ +\frac{41}{140}h^7f_6. \qquad (5.7.19)$$

Iesākuma datu uzlabošanai:

$$y_1-y_0=\frac{h}{720}(251f_0+646f_1-264f_2+106f_3 -19f_4)+\frac{3}{160}h^6f_5. \qquad (5.7.20)$$

$$y_2-y_0=\frac{h}{90}(29f_0+124f_1+24f_2+ +4f_3-f_4)+\frac{1}{90}h^6f_5. \qquad (5.7.21)$$

$$y_3-y_0=\frac{3h}{80}(9f_0+34f_1+24f_2+14f_3-f_4) +\frac{3}{160}h^6f_5. \qquad (5.7.22)$$

5.8. Diferencialvienādojumu sistemas integrēšana ar vidusvērtības metodi. (Pirmās kārtas vienādojumi.)

Visvienkāršākais gadījums ir divi pirmās kārtas diferencialvienādojumi, kas izteic sakarību starp argumentu x, divām nezināmām funkcijām $y=y(x)$ un $z=z(x)$ un šo funkciju atvasinātām:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x,y,z), \\ \frac{dz}{dx} &= g(x,y,z). \end{aligned}\right\} \qquad (5.8.1)$$

Uztverot x, y, z kā telpas punkta koordinatas ortogonalās koordinatu asīs viegli pārliecinas, ka nolīdzinājumi (5.8.1) punktam piekārto virzienu, ko noteic diferenciaļu attiecība

$$dx : dy : dz = 1 : f(x,y,z) : g(x,y,z).$$

Tātad sistema (5.8.1) noteic virzienu lauku telpā, un sistemas atrisinājums grafiskā iztulkojumā ir visas integrallīknes, kuŗām katrā punktā pieskares virziens ir tāds, kā virzienu laukam tanī pašā punktā.

Atrisināt skaitliski diferencialvienādojumu sistemu (5.8.1) nozīmē atrast partikulāro atrisinājumu

$$y=y(x) \qquad z=z(x)$$

kopā saderīgo vērtību tabulas veidā:

$$\text{ja } x = x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3, \dots$$
$$\text{tad} \begin{cases} y = y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3, \dots \\ z = z_0,\ z_1,\ z_2,\ z_3, \dots \end{cases}$$

kur viena trijotne (iesākuma vērtības x_0, y_0, z_0) ir dota.

Argumenta vērtībām var likt pieaugt pastāvīgā solī h, tā ka $x_{i+1} - x_i = h$. Pamatuzdevums ir — atrast funkcijas vērtībām y_0 un z_0 attiecīgos pieaugumus k un l, ja arguments x_0 dabū pieaugumu h. Pieaugumi jāatrod ar pietiekamu pareizību, piemēram, noteiktam skaitam decimalzīmju ir jābūt pareizām.

Funkcijas pieauguma noteikšanai ir derīgs Teilora izvirzījums. Ja x_0 dabū pieaugumu h, tad $y(x_0)$ pieaug par

$$\overline{k} = y(x_0+h) - y(x_0) = h y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_0) + \cdots,$$

un $z(x_0)$ pieaug par

$$\overline{l} = z(x_0+h) - z(x_0) = h z'(x_0) + \frac{h^2}{2!} z''(x_0) + \frac{h^3}{3!} z'''(x_0) + \cdots,$$

pieņemot, ka funkcijas $y(x)$ un $z(x)$ izpilda zināmos noteikumus attiecībā pret vienvērtību un nepārtrauktību. Ar virssvītrojumu virs burtiem k un l ir uzsvērts tas, ka bezgalīgās rindas vienādību labā pusē definē funkciju pieaugumu stingri pareizās vērtības.

Funkcijas $y(x)$ un $z(x)$ apmierina diferencialvienādojumus (5.8.1)

$$y'(x_0)=\frac{dy(x_0)}{dx}=f(x_0,y(x_0),z(x_0))=f,$$

$$z'(x_0)=\frac{dz(x_0)}{dx}=g(x_0,y(x_0),z(x_0))=g.$$

Otrās kārtas atvasinātās atrod diferencējot saliktās funkcijas $f(x,y(x),z(x))$ un $g(x,y(x),z(x))$:

$$y''(x_0)=\frac{d}{dx}f(x_0,y(x_0),z(x_0))=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

$$z''(x_0)=\frac{d}{dx}g(x_0,y(x_0),z(x_0))=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

vai arī:

$$y''(x_0)=f_1+f_2f+f_3g,$$

$$z''(x_0)=g_1+g_2f+g_3g,$$

apzīmējot ar f_1,g_1; f_2,g_2; f_3,g_3 funkciju $f(x,y,z)$ un $g(x,y,z)$ parciālās atvasinātās attiecīgi pēc x,y,z. Jāsaprot, kaut arī tas nav parādīts pašā apzīmējumā, ka atvasināšanas iznākumā x jāaizvieto ar x_0.

Līdzīgā kārtā tālāk:

$$y'''(x_0)=\frac{d}{dx}(f_1+f_2f+f_3g)=$$

$$=f_{11}+f_{22}f^2+f_{33}g^2+2f_{12}f+2f_{13}g+2f_{23}fg+$$

$$+f_2(f_1+f_2f+f_3g)+f_3(g_1+g_2f+g_3g),$$

$$z'''(x_0)=\frac{d}{dx}(g_1+g_2f+g_3g)=$$

$$=g_{11}+g_{22}f^2+g_{33}g^2+2g_{12}f+2g_{13}g+2g_{23}fg+$$

$$+g_2(f_1+f_2f+f_3g)+g_3(g_1+g_2f+g_3g).$$

Pieņemot saīsinātus apzīmējumus

$$\left.\begin{aligned} I &= f_1 + f_2 f + f_3 g, \\ I^* &= g_1 + g_2 f + g_3 g, \\ K &= f_{11} + f_{22} f^2 + f_{33} g^2 + 2 f_{12} f + 2 f_{13} g + 2 f_{23} f g, \\ K^* &= g_{11} + g_{22} f^2 + g_{33} g^2 + 2 g_{12} f + 2 g_{13} g + 2 g_{23} f g \end{aligned}\right\} \quad (5.8.2)$$

dabū šādas pirmo 3 atvasināto izteiksmes:

$$y'(x_0) = f, \quad y''(x_0) = I, \quad y'''(x_0) = K + f_2 I + f_3 I^*,$$

$$z'(x_0) = g, \quad z''(x_0) = I^*, \quad z'''(x_0) = K^* + g_2 I + g_3 I^*.$$

Aprēķināsim vēl ceturtās kārtas atvasinātās. Diferencējot atrod:

$$y^{IV}(x_0) = \frac{dK}{dx} + \frac{df_2}{dx} I + \frac{df_3}{dx} I^* + f_2 y''' + f_3 z''',$$

$$z^{IV}(x_0) = \frac{dK^*}{dx} + \frac{dg_2}{dx} I + \frac{dg_3}{dx} I^* + g_2 y''' + g_3 z''',$$

kur labā pusē $y''' = y'''(x_0)$ un $z''' = z'''(x_0)$.

Pieņemsim apzīmējumus:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{df_2}{dx} = f_{12} + f_{22} f + f_{23} g, \\ H &= \frac{df_3}{dx} = f_{13} + f_{23} f + f_{33} g, \\ J^* &= \frac{dg_2}{dx} = g_{12} + g_{22} f + g_{23} g, \\ H^* &= \frac{dg_3}{dx} = g_{13} + g_{23} f + g_{33} g. \end{aligned}\right\} \quad (5.8.2')$$

Tālāk:

$$\left.\begin{aligned} L &= f_{111}+3f_{112}f+3f_{113}g+3f_{122}f^2+6f_{123}fg+ \\ &\quad +3f_{133}g^2+f_{222}f^3+3f_{223}f^2g+3f_{233}fg^2+f_{333}g^3; \\ L^* &= g_{111}+3g_{112}f+3g_{113}g+3g_{122}f^2+6g_{123}fg+\dots \end{aligned}\right\} (5.8.2'')$$

Atvasinot izteiksmes K un K^* formulu sakopojumā (5.8.2) pārliecinās, ka

$$\left.\begin{aligned} \frac{dK}{dx} &= L+2(IJ+I^*H), \\ \frac{dK^*}{dx} &= L^*+2(IJ^*+I^*H^*). \end{aligned}\right\} \qquad (5.8.2''')$$

Ceturtās kārtas atvasinātās:

$$\left.\begin{aligned} y^{IV}(x_0) &= 3(IJ+I^*H)+(f_2^2+g_2f_3)I+ \\ &\quad +f_3(f_2+g_3)I^*+f_2K+f_3K^*+L, \\ z^{IV}(x_0) &= 3(IJ^*+I^*H^*)+(g_3^2+g_2f_3)I^*+ \\ &\quad +g_2(f_2+g_3)I+g_2K+g_3K^*+L^*. \end{aligned}\right\} (5.8.3)$$

Ja arguments x_0 dabū pieaugumu h, tad funkcijas $y(x)$ un $z(x)$ pieaug par

$$\bar{k} = y(x_0+h)-y(x_0) = hf+\frac{1}{2!}h^2I+\frac{1}{3!}h^3(K+f_2I+f_3I^*)+\dots, \qquad (5.8.4)$$

$$\bar{l} = z(x_0+h)-z(x_0) = hg+\frac{1}{2!}h^2I^*+\frac{1}{3!}h^3(K^*+g_2I+g_3I^*)+\dots \qquad (5.8.4')$$

Ja lielumus $I, J, K, \ldots; I^*, J^*, K^*, \ldots$ nav grūti aprēķināt, tad formulas (5.8.4) un (5.8.4') ietver sevī pilnīgu nospraustā uzdevuma atrisinājumu, jo ar tām pakāpeniski var dabūt kopā saderīgo vērtību trijotnes: x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; ... Visbiežāk tomēr funkciju pieaugumu noteikšana šādā tiešā ceļā nav ieteicama, jo tā prasa pārliecīgi daudz darba.

Vidējās vērtības metodes ir labākas. Tās aprobežojas ar funkciju vērtības aprēķināšanu, pilnīgi iztiekot bez atvasināšanas.

Pirmais piemērs.

Aprēķina

$$k_1 = hf, \qquad l_1 = hg,$$

kur $f = f(x_0, y_0, z_0)$ un $g = g(x_0, y_0, z_0)$. Tad funkciju pieaugumi

$$\left.\begin{aligned} k &= y_1 - y_0 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right), \\ l &= z_1 - z_0 = hg\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (5.8.5)$$

ir otrās kārtas tuvinājumi stingri pareizām vērtībām $\overline{k}$ un l.

Ja pieaugumus k, l, kas definēti ar formulām (5.8.5), izvirza h pakāpēs, tad izvirzījuma pirmās un otrās pakāpes locekļi saskan ar attiecīgajiem locekļiem formulās (5.8.4) un (5.8.4').

pārbr 4.IV

Teilora izvirzījums triju argumentu funkcijām, kad argumenti x, y, z dabū pieaugumus attiecīgi α, β, γ:

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = f(x,y,z) + \frac{1}{1!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \\ + \frac{1}{2!}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f + \cdots$$

To var pārrakstīt izskatā

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = A + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}C + \frac{1}{3!}D + \ldots, \quad (5.8.6)$$

kur

$$\left.\begin{aligned} A &= f(x,y,z), \\ B &= A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma, \\ C &= B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma, \\ D &= C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma, \\ &- - - - - - - - - - - \end{aligned}\right\} \quad (5.8.6')$$

Lielumi $A, B, C, D, \ldots$ veidojas katrs nākamais no iepriekšējā pievienojot operatoru

$$\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z};$$

formulās (5.8.6') parciālā atvasināšana ir izteikta ar indeksiem.

Ja $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ un

$$\alpha = \frac{1}{2}h, \quad \beta = \frac{1}{2}k_1 = \frac{1}{2}hf, \quad \gamma = \frac{1}{2}l_1 = \frac{1}{2}hg,$$

kur $f = f(x_0, y_0, z_0)$ un $g = g(x_0, y_0, z_0)$, tad no (5.8.6') seko

$$A = f(x_0, y_0, z_0) = f_1$$

$$B = \frac{1}{2}h\left(f_1 + f_2 f + f_3 g\right) = \frac{1}{2}hI,$$

$$C = \frac{1}{4}h^2(I_1 + I_2 f + I_3 g) =$$

$$= \frac{1}{4}h^2\left(K + f_2 I + f_3 I^*\right),$$

- -

tātad

$$f(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1) =$$

$$= f + \frac{1}{2}hI + \frac{1}{8}h^2\left(K + f_2 I + f_3 I^*\right) + \dots$$

Pareizinot ar h dabū

$$k = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{8}h^3\left(K + f_2 I + f_3 I^*\right) + \dots \qquad (5.8.7)$$

un līdzīgā kārtā

$$l = hg + \frac{1}{2}h^2 I^* + \frac{1}{8}h^3\left(K^* + g_2 I + g_3 I^*\right) + \dots \qquad (5.8.7')$$

Šie izvirzījumi pirmās un otrās pakāpes locekļos saskan ar pareizām vērtībām (5.8.4) un (5.8.4'), tie ir tātad otrās kārtas tuvinājumi šīm pēdējām.

4.IV

Otrais piemērs.

Aprēķina

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= hf(x_0, y_0, z_0), \qquad l_1 = hg(x_0, y_0, z_0), \\ k_2 &= hf(x_0+h, y_0+k_1, z_0+l_1), \\ l_2 &= hg(x_0+h, y_0+k_1, z_0+l_1), \end{aligned}\right\} \qquad (5.8.8)$$

tad seko otrās kārtas tuvinājumi:

$$\left.\begin{aligned} k &= y_1 - y_0 = \frac{1}{2}(k_1+k_2), \\ l &= z_1 - z_0 = \frac{1}{2}(l_1+l_2). \end{aligned}\right\} \qquad (5.8.8')$$

Formulās (5.8.6) un (5.8.6') jāpieņem $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ un pieaugumi $\alpha=h$, $\beta=hf$, $\gamma=hg$. Seko

$$A = f(x_0, y_0, z_0) = f$$

$$B = h(f_1 + f_2 f + f_3 g) = hI,$$

$$C = h^2(I_1 + I_2 f + I_3 g) =$$

$$= h^2(K + f_2 I + f_3 I^*),$$

- - - - - - - - - - - - - - -

tātad

$$k_2 = hf + h^2 I + \frac{1}{2}h^3(K + f_2 I + f_3 I^*) + \ldots,$$

$$k = \frac{1}{2}(k_1+k_2) = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{4}h^3(K + f_2 I + f_3 I^*) + \ldots$$

Dabūtais k pirmās un otrās pakāpes locekļos saskan ar pareizo vērtību (5.8.4), tātad izteic otrās kārtas tuvinājumu šai pēdējai. Līdzīgs apgalvojums ir spēkā attiecībā pret l.

67

<u>Trešais piemērs.</u>

<u>Aprēķina</u>

$$\left.\begin{aligned} k_1&=hf(x_0,y_0,z_0), \qquad l_1=hg(x_0,y_0,z_0),\\ k_2&=hf(x_0+\tfrac{1}{3}h,\ y_0+\tfrac{1}{3}k_1,\ z_0+\tfrac{1}{3}l_1),\\ l_2&=hg(x_0+\tfrac{1}{3}h,\ y_0+\tfrac{1}{3}k_1,\ z_0+\tfrac{1}{3}l_1),\\ k_3&=hf(x_0+\tfrac{2}{3}h,\ y_0+\tfrac{2}{3}k_2,\ z_0+\tfrac{2}{3}l_2),\\ l_3&=hg(x_0+\tfrac{2}{3}h,\ y_0+\tfrac{2}{3}k_2,\ z_0+\tfrac{2}{3}l_2), \end{aligned}\right\}\cdots(5.8.9)$$

<u>tad seko trešās kārtas tuvinājumi:</u>

$$\left.\begin{aligned} k&=y_1-y_0=\frac{1}{4}k_1+\frac{3}{4}k_3,\\ l&=z_1-z_0=\frac{1}{4}l_1+\frac{3}{4}l_3. \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(5.8.9')$$

Pietiks, ja pierādīsim to, ka k ir trešās kārtas tuvinājums stingri pareizai vērtībai $\overline{k}$. Pieņemot

$$\alpha=\frac{1}{3}h,\quad \beta=\frac{1}{3}k_1=\frac{1}{3}hf,\quad \gamma=\frac{1}{3}l_1=\frac{1}{3}hg$$

aprēķinam

$$A=f(x_0,y_0,z_0)=f,$$

$$B=\frac{1}{3}h(f_1+f_2f+f_3g)=\frac{1}{3}hI,$$

$$C=\frac{1}{9}h^2(I_1+I_2f+I_3g)=$$

$$=\frac{1}{9}h^2(K+f_2I+f_3I^*),$$

- - - - - - - - - - - - - -

tātad, saskaņā ar (5.8.6)

$$k_2=hf(x_0+\tfrac{1}{3}h,\ y_0+\tfrac{1}{3}k_1,\ z_0+\tfrac{1}{3}l_1)=$$

$$=hf+\frac{1}{3}h^2I+\frac{1}{18}h^3(K+f_2I+f_3I^*)+\cdots$$

un līdzīgā kārtā

$$l_2 = hg + \frac{1}{3}h^2 I^* + \frac{1}{18}h^3(K^* + g_2 I + g_3 I^*) + \cdots$$

Tālāk vajadzīgs izvirzījums

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{2}{3}h,\ y_0 + \frac{2}{3}k_2,\ z_0 + \frac{2}{3}l_2\right) =$$

$$= hf(x_0, y_0, z_0) + \frac{2}{3}h\,Df + \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{3}\right)^2 h\,D^2 f + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{3}\right)^3 h\,D^3 f + \cdots,$$

kur D apzīmē diferencēšanas operatoru

$$h\frac{\partial}{\partial x} + k_2\frac{\partial}{\partial y} + l_2\frac{\partial}{\partial z}.$$

Izdarot ar operatoru norādītās darbības dabū

$$Df = hf_1 + k_2 f_2 + l_2 f_3,$$

$$D^2 f = h^2 f_{11} + 2hk_2 f_{12} + 2hl_2 f_{13} + k_2^2 f_{22} + 2k_2 l_2 f_{23} + l_2^2 f_{33},$$

$$D^3 f = h^3 f_{111} + 3h^2 k_2 f_{112} + 3h^2 l_2 f_{113} + 3hk_2^2 f_{122} + 6hk_2 l_2 f_{123} + 3hl_2^2 f_{133} + k_2^3 f_{222} + 3k_2^2 l_2 f_{223} + 3k_2 l_2^2 f_{233} + l_2^3 f_{333},$$

- -

Šinīs izteiksmēs k_2 un l_2 jāaizvieto ar to izvirzījumiem h pakāpēs. Pietiek, ja k_3 ir izteikts pirmās četrās h pakāpēs, tātad aprēķinot $Df, D^2f, D^3f, \ldots$ var atmest locekļus, kuru kārta ir augstāka par trešo. Ja tā dara, tad atrod:

5.IV.48

$$Df = hI + \frac{1}{3}h^2(f_2 I + f_3 I^*) + \frac{1}{18}h^3 S,$$

kur

$$S = (f_2^2 + g_2 f_3)I + (f_2 + g_3)f_3 I^* + f_2 K + f_3 K^*;$$

tālāk:

$$D^2 f = h^2 K + \frac{2}{3}h^3(JI + HI^*),$$

$$D^3 f = h^3 L.$$

Ar šim vērtībam atrod galīgi:

$$k_3 = hf + \frac{2}{3}h^2 I + \frac{2}{9}h^3(K + f_2 I + f_3 I^*) + \\ + \frac{1}{81}h^4[12(JI + HI^*) + 3S + 4L] + \dots,$$

tātad

$$k = \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3 = hf + \frac{1}{2}h^2 I + \frac{1}{6}h^3(K + f_2 I + f_3 I^*)$$

$$+ \text{augstākas kārtas locekļi}.$$

Pirmo trīs pakāpju locekļi šinī izvirzījumā saskan ar stingri pareizo pieauguma vērtību, kas izteikta ar formulu (S.8.4). Tā tad, vidējās vērtības paņēmiens (S.8.9') dod <u>trešās kārtas tuvinājumu</u> pareizai vērtībai.

Ceturtais piemērs.

Aprēķina pakāpeniski:

$$\left.\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_0, y_0, z_0), \qquad l_1 = hg(x_0, y_0, z_0),\\
&k_2 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1),\\
&l_2 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_1,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_1),\\
&k_3 = hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_2),\\
&l_3 = hg(x_0 + \tfrac{1}{2}h,\ y_0 + \tfrac{1}{2}k_2,\ z_0 + \tfrac{1}{2}l_2),\\
&k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3,\ z_0 + l_3),\\
&l_4 = hg(x_0 + h,\ y_0 + k_3,\ z_0 + l_3),
\end{aligned}\right\} \quad (5.8.10)$$

tad seko ceturtās kārtas tuvinājumi:

$$\left.\begin{aligned}
&k = y_1 - y_0 = \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
&l = z_1 - z_0 = \tfrac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).
\end{aligned}\right\} \quad (5.8.10')$$

5.9. Otrās kārtas diferencialvienādojumu integrēšana, izvirzot Teilora rindā. Vienādojumam $y'' = f(x, y, y')$ jāatrod atrisinājums, turklāt jāizpilda iesākuma noteikums: ja $x = x_0$, tad $y = y_0$ un $y' = y_0'$, kur x_0, y_0, y_0' ir doti skaitļi (iesākuma vērtības.) Grafiskā iztulkojumā, uztverot x un y kā punkta koordinatas, uzdevuma jēga ir tā, ka jāatrod integrallīkne, kas iet caur doto punktu (x_0, y_0) un kurai tanī punktā pieskares virziena koeficients ir y_0'. Mechanikas iztulkojumā argumentu uztver kā laiku un meklējamo funkciju y kā pārvietojumu, tad y' un y'' apzīmē attiecīgi kustības ātrumu un paātrinājumu. Vajadzīgs atrast pārvietojuma atkarību no laika (kustības likumu), zinot punkta vietu un ātrumu iesākuma momentā.

Pieņemsim, ka iesākuma vērtība argumentam pieaug par $\Delta x = h$, tā ka x_0 vietā stājas $x_1 = x_0 + h$. Jaunai argumenta vērtībai atbilst funkcijas vērtība y_1, ko noteic Teilora izvirzījums

$$y_1 = y_0 + y_0' h + y_0'' \frac{h^2}{2!} + y_0''' \frac{h^3}{3!} + y_0^{IV} \frac{h^4}{4!} + \cdots \quad (5.9.1)$$

un atvasinātās vērtība

$$y_1' = y_0' + y_0'' h + y_0''' \frac{h^2}{2!} + y_0^{IV} \frac{h^3}{3!} + \cdots \quad (5.9.1')$$

Ja šo izvirzījumu skaitliskā izvērtēšana būtu viegla, integrēšanas uzdevums būtu pilnīgi atrisināts.

22-VIII-78 pārr. 24-VIII

Īstenībā abu izvirzījumu lietāšana atduras pret lielām grūtībām. Argumenta pieaugumu h izvēlē pats rēķinātājs, tā ka h ir zināms, y_0 un y_0' ir doti ar iesākuma noteikumu, bet y_0'' var aprēķināt no dotā diferencialvienādojuma, ievietojot tur x, y, y' vietā attiecīgi x_0, y_0, y_0':

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0').$$

Zinot h, y_0, y_0' un y_0'' varam viegli aprēķināt pirmos trīs locekļus izvirzījumā (5.9.1) un pirmos divus – izvirzījumā (5.9.1'). Turpmāko locekļu skaitliskai izvērtēšanai ir vajadzīgas trešās un augstākas kārtas atvasinātās. Lai tās atrastu, atkārtoti jāatvasina doto diferencialvienādojumu un atvasināšanas iznākumos jāievieto iesākuma vērtības.

Ja dotais diferencialvienādojums nav visai vienkāršs, tā diferencēšana ātri noved pie sarežģītām izteiksmēm, kuru veidošana un skaitliskā aprēķināšana prasa pārmērīgi daudz darba.

Lai šīs grūtības novērstu izvirzījumus (5.9.1) un (5.9.1') saīsina, atmetot visus locekļus, kas atkarīgi no trešās un augstākas kārtas atvasinātām. Tā dabū tuvinās formulas:

$$y_1 = y_0 + y_0' h + \frac{1}{2} y_0'' h^2, \qquad y_1' = y_0' + y_0'' h. \quad (5.9.2)$$

Vērtībām, ko ar šīm formulām dabū, piemīt kļūda, ko noteic atmestajie locekļi izvirzījumos, bet tomēr rēķināšanas grūtības ir pilnīgi novērstas.

Pirmā formula (5.9.2), geometriski runājot, izteic parabolu, kurai simetrijas ass ir paralela ordinatu asij. Šī parabola iet caur iesākuma punktu (x_0, y_0), un iesākuma punktā tai pieskares virziena koeficients ir y_0'. Integrallīkne, ko izteic Teilora izvirzījums (5.9.1), atmetot izvirzījumā trešās un augstākas kārtas locekļus, intervalā (x_0, x_1) ir aizvietota ar parabolu, kas izpilda iesākuma noteikumu.

Intervalā no x_0 līdz $x_1 = x_0 + h$ integralfunkcija (integrallīknes ordinata) pieaug par $y_0'h + \frac{1}{2}y_0''h^2$. Pirmais loceklis šinī sumā ir vienlīdzīgs pieskares ordinatas pieaugumam, šo pieaugumu apzīmēsim ar k_0; otrais loceklis $\frac{1}{2}y_0''h^2$ izteic parabolas atvirzi no pieskares, skaitot pa ordinatu intervala galā, šo atvirzi apzīmēsim ar l_0. Tātad

$$k_0 = y_0'h, \qquad l_0 = \frac{1}{2}y_0''h^2.$$

Saprotams, parabolas atvirze arī ir ordinatas pieaugums, proti, tas nogrieznis, ko intervala gala ordinatai nošķeļ iesākuma punktā (x_0, y_0) vilktā parabola un tās pieskare.

Otrā intervalā no x_1 līdz $x_2 = x_1 + h$ integrallīkni aizvieto cita parabola un ordinata dabū pieaugumus

$$k_1 = y_1'h, \qquad l_1 = \frac{1}{2}y_1''h^2.$$

Vispārīgi ~~1-tā~~ $i+1$ intervalā ordinatas pieaugumi ir

$$k_i = y_i' h, \qquad l_i = \frac{1}{2} y_i'' h^2. \qquad (5.9.3)$$

Formulas (5.9.2), ja otro no tām abās pusēs pareizina ar h, var pārrakstīt izskatā:

$$y_1 = y_0 + k_0 + l_0, \qquad k_1 = k_0 + 2l_0.$$

Otrā intervalā

$$y_2 = y_1 + k_1 + l_1, \qquad k_2 = k_1 + 2l_1.$$

Vispārīgi ~~k~~ i+1 intervalā

$$y_{i+1} = y_i + k_i + l_i, \qquad k_{i+1} = k_i + 2l_i. \qquad (5.9.4)$$

Rēķināšanas gaita.

Pirmais intervals.

Intervala platums ir dots: h, tāpat iesākuma vērtības x_0, y_0, y_0'. Aprēķina $y_0'' = f(x_0, y_0, y_0')$. Zinot y_0' un y_0'' atrod:

$$k_0 = y_0' h, \quad l_0 = \frac{1}{2} y_0'' h^2, \quad k_1 = k_0 + 2l_0.$$

Otrais intervals.

Iesākuma vērtības: $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + k_0 + l_0$, $y_1' = k_1 : h$. Aprēķina $y_1'' = f(x_1, y_1, y_1')$. Zinot y_1' un y_1'' atrod:

$$k_1 = y_1' h, \quad l_1 = \frac{1}{2} y_1'' h^2, \quad k_2 = k_1 + 2l_1.$$

Ar to ir sagatavoti dati trešā intervala aplēsei, un t.t.

Tuvinājumiem (5.9.4) piemīt kļūda, kas ieviesās tādēļ, ka bezgalīgām rindām (5.9.1) un (5.9.1') atstāja tikai pirmos locekļus. Šo kļūdu nevar ~~at~~ pamest neievērotu, jo rēķināšanas gaitā tā neatlaidīgi krājas un pieaug. Aprēķinātiem tuvinājumiem jāpievieno labojumi, kas daļēji atsver atmesto locekļu ietekmi.

Labojumus pievieno zināmās atstarpās, pēc tam kad zināms skaits vērtību ir aprēķinātas bez labošanas, jo tad tos var aprēķināt no nelabotām starpvērtībām, neķeroties pie vienādojuma diferencēšanas.

Norunāsim labot katru piekto tuvino vērtību. Funkcijas vērtību labojumus apzīmēsim ar δ, šo vērtību pieaugumu k labojumus – ar ε. Šos labojumus var izteikt kā lineāras, no aprēķinātām l vērtībām veidotas funkcijas:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{45}{24} l_4 + \frac{100}{24} l_1 - \frac{145}{24} l_0, \\ \varepsilon &= \frac{11}{12} l_5 + \frac{5}{12} l_1 - \frac{16}{12} l_0. \end{aligned}\right\} \quad (5.9.5)$$

Ar izlabotām vērtībām, kuras apzīmēsim ar virssvītrojumu, turpina rēķināt kā ar iesākuma vērtībām. Darbības ieteicams pārredzami sakārtot tabulā.

25.VIII.48

Tābula 1.

Skaitliski integrēt vienādojumu

$$y'' = f(x, y, y').$$

x	y	y'	k	$l = \frac{1}{2}h^2 f(x, y, y')$
x_0	y_0	y_0'	$k_0 = hy_0'$	$l_0 = \frac{1}{2}h^2 f(x_0, y_0, y_0')$
x_1	$y_1 = y_0 + k_0 + l_0$	$y_1' = \frac{k_1}{h}$	$k_1 = k_0 + 2l_0$	$l_1 = \frac{1}{2}h^2 f(x_1, y_1, y_1')$
x_2	$y_2 = y_1 + k_1 + l_1$	$y_2' = \frac{k_2}{h}$	$k_2 = k_1 + 2l_1$	$l_2 = \frac{1}{2}h^2 f(x_2, y_2, y_2')$
x_3	$y_3 = y_2 + k_2 + l_2$	$y_3' = \frac{k_3}{h}$	$k_3 = k_2 + 2l_2$	$l_3 = \frac{1}{2}h^2 f(x_3, y_3, y_3')$
x_4	$y_4 = y_3 + k_3 + l_3$	$y_4' = \frac{k_4}{h}$	$k_4 = k_3 + 2l_3$	$l_4 = \frac{1}{2}h^2 f(x_4, y_4, y_4')$
x_5	$y_5 = y_4 + k_4 + l_4$	$y_5' = \frac{k_5}{h}$	$k_5 = k_4 + 2l_4$	$l_5 = \frac{1}{2}h^2 f(x_5, y_5, y_5')$
lab.	δ		ε	
x_5	$\bar{y}_5 = y_5 + \delta$	$\bar{y}_5' = \frac{\bar{k}_5}{h}$	$\bar{k}_5 = k_5 + \varepsilon$	$\bar{l}_5 = \frac{1}{2}h^2 f(x_5, \bar{y}_5, \bar{y}_5')$
x_6	$y_6 = \bar{y}_5 + \bar{k}_5 + \bar{l}_5$	$y_6' = \frac{k_6}{h}$	$k_6 = \bar{k}_5 + 2\bar{l}_5$	$l_6 = \frac{1}{2}h^2 f(x_6, y_6, y_6')$
x_7	$y_7 = y_6 + k_6 + l_6$	$y_7' = \frac{k_7}{h}$	$k_7 = k_6 + 2l_6$	$l_7 = \frac{1}{2}h^2 f(x_7, y_7, y_7')$
...	...	...	...	...

Kļūdu labojumi.

Atliek noskaidrot, cik tālu sniedzas kļūdu labojumu ietekme: vai tie novērš visu kļūdu, vai tikai daļu un pēdējā gadījumā — cik liela ir novērstā daļa. Tādēļ labojumi, kas izteikti ar formulām (5.9.5) jāsalīdzina ar kļūdu, kāda piemīt tuvinājumiem (5.9.4), un — lai salīdzināšana būtu iespējama — kā vieni tā otri jāizteic lielumos, kas atbilst iesākuma punktam.

Labojumi δ un ε ir izteikti parabolu novirzēs l_i $(i=0,1,2,\dots)$ Izteiksim tanīs arī y un k vērtības piektā intervala beigās.

No vienadībām, kas sakopotas rēķināšanas schemas ceturtā stabiņā (pirmā grupā) seko:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k_0 + 2l_0, \\ k_2 &= k_0 + 2(l_0+l_1), \\ k_3 &= k_0 + 2(l_0+l_1+l_2), \\ k_4 &= k_0 + 2(l_0+l_1+l_2+l_3), \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

beidzot:

$$k_5 = k_0 + 2(l_0+l_1+l_2+l_3+l_4). \qquad (5.9.6)$$

No vienādībām tās pašas schemas otrā stabiņā seko, kad tās saskaita:

$$\begin{aligned} y_5 = y_0 + k_0 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \\ + l_0 + l_1 + l_2 + l_3 + l_4. \end{aligned}$$

Ievietojot k_i vietā izteiksmes (A) dabū:

25.VIII.43

$$y_5 = y_0 + 5\kappa_0 + 9l_0 + 7l_1 + 5l_2 + 3l_3 + l_4. \qquad (5.9.6')$$

Lai izteikomes y_5 un κ_5 varētu izteikt iesākuma vērtībās, jāizteic tanīs novirzes.

Saskaņā ar Teilora formulu

$$y_1'' = y_0'' + y_0'''h + y_0^{IV}\frac{h^2}{2!} + y^{V}\frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

tātad novirze pirmā intervaļa beigās

$$l_1 = \frac{1}{2}h^2 y_1'' = y_0''\frac{h^2}{2!} + 3y_0'''\frac{h^3}{3!} + 6y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 10y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots$$

To var uztvert kā sakarību starp atvasināto vērtībām intervaļa iesākumā un parabolas novirzi tās paša intervala beigās. Otrā intervalā

$$l_2 = \frac{1}{2}h^2 y_2'' = y_1''\frac{h^2}{2!} + 3y_1'''\frac{h^3}{3!} + 6y_1^{IV}\frac{h^4}{4!} + 10y_1^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots,$$

un šinī izteiksmē

$$y_1''' = y_0''' + y_0^{IV}h + y_0^{V}\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

$$y_1^{IV} = y_0^{IV} + y_0^{V}h + \cdots$$

$$y_1^{V} = y_0^{V} + \cdots,$$

tā ka galīgi:

$$l_2 = y_0''\frac{h^2}{2!} + 6y_0'''\frac{h^3}{3!} + 24y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 80y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots$$

Līdzīgā kārtā

$$l_3 = y_0''\frac{h^2}{2!} + 9y_0'''\frac{h^3}{3!} + 54y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 270y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots,$$

$$l_4 = y_0''\frac{h^2}{2!} + 12y_0'''\frac{h^3}{3!} + 96y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 640y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots,$$

$$l_5 = y_0''\frac{h^2}{2!} + 15y_0'''\frac{h^3}{3!} + 150y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 1250y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots$$

Ievietojot izteikumes l_i formulās (5.9.6) un (5.9.6′) dabū piektā intervala beigās:

$$y_5 = y_0 + 5y_0'h + 25y_0''\frac{h^2}{2!} + 90y_0'''\frac{h^3}{3!} + \\ + 420y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 1920y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots \quad (5.9.7)$$

$$k_5 = y_0'h + 10y_0''\frac{h^2}{2!} + 60y_0'''\frac{h^3}{3!} + 360y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + \\ + 2000y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots \quad (5.9.7')$$

To pašu lielumu stingri pareizās vērtības seko no Teilora izvirzījumiem (5.9.1) un (5.9.1′), ja tur h aizvieto ar $5h$:

$$\overline{y_5} = y_0 + 5y_0'h + 25y_0''\frac{h^2}{2!} + 125y_0'''\frac{h^3}{3!} + \\ + 625y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 3125y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots \quad (5.9.7a)$$

$$\overline{k_5} = y_0'h + 10y_0''\frac{h^2}{2!} + 75y_0'''\frac{h^3}{3!} + 500y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + \\ + 3125y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots \quad (5.9.7b)$$

Salīdzinot tuvinās vērtības ar attiecīgām stingri parizām redzama pilnīga saskaņa līdz otrās pakāpes locekļiem, pēdējos ieskaitot. Tātad algoritms (5.9.2) jau pats sasniedz otrās kārtas tuvinājumu. Jājautā: cik tālu tuvinājums uzlabojas, kad pievienojas korekturas (5.9.5)?

Tuvinājumiem y_5 un k_5 piemīt kļūdas:

$$\overline{\delta} = \overline{y_5} - y_5 = 35y_0'''\frac{h^3}{3!} + 205y_0^{IV}\frac{h^4}{4!} + 1205y_0^{V}\frac{h^5}{5!} + \cdots \quad (5.9.8)$$

25.VIII.48

$$\overline{\varepsilon}=\overline{K}_5-K_5=15y_0'''\frac{h^3}{3!}+140y_0^{IV}\frac{h^4}{4!}+1125y_0^{V}\frac{h^5}{5!}+\dots \qquad (5.9.8')$$

$\overline{\delta}$ un $\overline{\varepsilon}$ ir labojumi, kas jāpieskaita tuvinām vērtībām y_5 un K_5, lai dabūtu stingri pareizās, t.i. lai pilnīgi novērstu kļūdas. Bet šie labojumi ir izteikti augstākas kārtas atvasinātās, no kuru aprēķināšanas ir vēlams izvairīties. Tādeļ tos aizvieto ar mazāk pilnīgiem, bet vieglāk aprēķinamiem labojumiem δ un ε, sk. (5.9.5). Formulas (5.9.8) un (5.9.8') ir vērtīgas ar to, ka tās atļauj noskaidrot, cik tālu sniedzas daļējo labojumu ietekme. Tādas noskaidrošanas nolūkā formulās (5.9.5) visi l jāizteic iesākuma vērtībās. Seko:

$$\delta=35y_0'''\frac{h^3}{3!}+205y_0^{IV}\frac{h^4}{4!}+1241\tfrac{2}{3}y_0^{V}\frac{h^5}{5!}+\dots \qquad (5.9.9)$$

$$\varepsilon=15y_0'''\frac{h^3}{3!}+140y_0^{IV}\frac{h^4}{4!}+1150y_0^{V}\frac{h^5}{5!}+\dots \qquad (5.9.9')$$

Labojumu tuvinās vērtības saskan ar stingri pareizajām pirmos divos locekļos un tikai dažu procentu robežās atšķiras divos turpmākajos (piektās un sestās kārtas) locekļos.

Argumenta solis.

Izvēlot argumenta pieaugumu h jāvadās no tā, cik plašs ir vērtību apgabals, ar kuru ir darīšana. Jo plašāks tas ir, jo mazāks jāpieņem h, lai rēķināšanas beigās vajadzīgā pareizība tiešām būtu sasniegta. Ļoti mazs argumenta solis prasa nevajadzīgi lielu rēķināšanas darbu, pārmērīgi liels – traucē pareizību. Vajadzīgs sasniegt pietiekamu pareizību ar minimālu darba patēriņu. Tā kā šī prasība ietver sevī grūti saskaņojamus noteikumus, tad tās izpildīšanai ir vajadzīgi kādi noteikti pieturas punkti.

Dibinoties uz prakses piedzīvojumiem (Blaess) ieteic argumenta soli izvēlēt tā, ka katras grupas vidū skaitlis

$$\lambda_i = \left| \frac{y_{i+1}''\frac{h^2}{2} - y_i''\frac{h^2}{2}}{y_{i+1} - y_i} \right| = \left| \frac{l_{i+1} - l_i}{y_{i+1} - y_i} \right|$$

ir vienlīdzīgs konstantai noteiktai vērtībai, mēreni plašam vērtību apgabalam apmēram 0,005 līdz 0,01. Visvienkāršākais paņēmiens, ar kuru kontrolē sasniegto pareizību, ir aprēķina atkārtošana ar (teiksim, divreiz) mazāku argumenta soli.

5.10. Otrās kārtas vienādojumu integrēšana ar vidusvērtības metodi.

Dotais diferenciālvienādojums: $y'' = f(x, y, y')$.
Dotās iesākuma vērtības: x_0, y_0, y_0'.
Uzdevums: atrast y_1 un y_1', kas atbilst argumentam $x_1 = x_0 + h$. Kad tas ir atrisināts, tad x_1, y_1, y_1' pieņem par iesākuma vērtībām un meklē y_2 un y_2', kas atbilst $x_2 = x_1 + h$, un t. t.

Pamatuzdevuma risināšanas vispārīgā gaita: intervala (x_0, x_1) robežās aprēķina pakāpeniski 4 provizoriskas novirzes l_1, l_2, l_3, l_4; ar tām veido divas vidusvērtības l un l'; pēdējās zinot atrod gala vērtības y_1 un y_1'. Viens tāds aprēķina posms ir līdzīgs un līdzvērtīgs 5 soļiem metodē, kas aprakstīta iepriekšējā nodalījumā.

Provizoriskās novirzes aprēķina argumenta vērtībām x_0, $x_0 + \frac{1}{2}h$, $x_0 + \frac{1}{2}h$ un $x_0 + h$ saskaņā ar šādu priekšrakstu:

$$\left.\begin{aligned}
l_1 &= f(x_0, y_0, y_0'h)\frac{h^2}{2}, \\
l_2 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}y_0'h + \frac{1}{4}l_1, y_0'h + l_1\right)\frac{h^2}{2}, \\
l_3 &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}y_0'h + \frac{1}{4}l_1, y_0'h + l_2\right)\frac{h^2}{2}, \\
l_4 &= f(x_0 + h, y_0 + y_0'h + l_3, y_0'h + 2l_3)\frac{h^2}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (5.10.1)$$

Atvasinājumi y' aizvietoti ar izteiksmēm $y'h$, kurām ir tāda pat dimensija, kā ordinatai y.

Vidusvērtības:

$$\left.\begin{aligned} l &= \tfrac{1}{3}(l_1+l_2+l_3), \\ l' &= \tfrac{1}{3}(l_2+l_3+l_4). \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (5.10.2)$$

Gala vērtības:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0+y_0'h+l, \\ y_1'h &= y_0h+l+l'. \end{aligned}\right\} \ldots \qquad (5.10.3)$$

Visu rēķinu veic pārredzami saskaņā ar šādu schemu:

Tabula 1. Integrēt $y'' = f(x, y, y')$.

x	y	$y'h$	l_i	
0	y_0	$y_0'h$	l_1	
$\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}y_0'h+\frac{1}{4}l_1$	$y_0'h+l_1$	l_2	l
$\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}y_0'h+\frac{1}{4}l_1$	$y_0'h+l_2$	l_3	l'
h	$y_0+y_0'h+l_3$	$y_0'h+2l_3$	l_4	
h	y_1	$y_1'h$		

Ja dotā vienādojuma labā pusē nav y, tad schema top vienkāršāka, jo y starpvērtības tad nav vajadzīgs atzīmēt. Vidusvērtību un gala aprēķins paliek bez pārmaiņām.

Ja vienādojuma labā pusē nav y', tad aprēķins top vienkāršāks un pārveidojas šādā:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= f(x_0, y_0)\frac{h^2}{2}, \\ l_2 &= f\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{1}{2}y_0'h+\frac{1}{4}l_1\right)\frac{h^2}{2}, \\ l_3 &= f(x_0+h, y_0+y_0'h+l_2)\frac{h^2}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (5.10.4)$$

Vidusvērtības:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{1}{3}(l_1+2l_2), \\ l' &= \frac{1}{3}(2l_2+l_3). \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (5.10.5)$$

Gala rēķins:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0+y_0'h+l, \\ y_1'h &= y_0'h+l+l'. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (5.10.6)$$

Tabula 2. Integrēt $y''=f(x, y)$.

x	y	$y'h$	l_i	
0	y_0	$y_0'h$	l_1	
$\frac{1}{2}h$	$y_0+\frac{1}{2}y_0'h+\frac{1}{4}l_1$		l_2	l
h	$y_0+y_0'h+l_2$		l_3	l'
h	y_1	$y_1'h$		

Metodes pareizība.

Lai noskaidrotu, cik tālu sniedzas metodes pareizība, jāsalīdzina tuvinais atrisinājums ar stingri pareizo atrisinājumu — ar integrālfunkcijas izvirzījumu Teilora rindā. Funkciju $y=y(x)$, kas apmierina doto diferenciālvienādojumu

$$y''(x)=f[x, y(x), y'(x)]$$

un atbilst iesākuma vērtībām (x_0, y_0, y_0') var izvirzīt argumenta pieauguma $h(=x_1-x_0)$ pakāpēs:

$$y_1=y_0+y_0'h+y_0''\frac{h^2}{2!}+y_0'''\frac{h^3}{3!}+y_0^{IV}\frac{h^4}{4!}+\dots \quad (5.10.7)$$

Līdzīgā kārtā

$$y_1'=y_0'+y_0''h+y_0'''\frac{h^2}{2!}+y_0^{IV}\frac{h^3}{3!}+y_0^{V}\frac{h^4}{4!}+\dots \quad (5.10.7a)$$

jeb, pareizinot ar h:

$$y_1'h=y_0'h+y_0''h^2+3y_0'''\frac{h^3}{3!}+4y_0^{IV}\frac{h^4}{4!}+\dots \quad (5.10.7b)$$

Šeit y_0 un y_0' ir doti ar iesākuma noteikumu, bet y_0'' seko no dotā diferenciālvienādojuma, ja tanī x, y, y' aizvieto ar iesākuma vērtībām. Turpmākie koeficienti y_0''', y_0^{IV}, ... jāaprēķina diferencējot doto vienādojumu. Piemēram

$$y'''(x)=\frac{d}{dx}f[x, y(x), y'(x)]=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y'',$$

$$y^{IV}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+$$
$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}y'y''+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}y''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial y'}y''',$$

un tā tālāk.

Diferencēšanas iznākumos viscaur x jāaizvieto ar x_0. Labākas pārredzamības ~~dēļ~~ sasniegšanai pieņemsim parciālo atvasināto skaitliskām vērtībām saīsinātus apzīmējumus; piemēram

$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y'},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\dots$$

skaitliskās vērtības, kad $x=x_0$, apzīmēsim attiecīgi ar

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_{11},\ f_{22},\ f_{33},\ f_{12},\dots$$

Tālāk rakstīsim

$$y_0'=y'(x_0)=e,\qquad y_0''=f(x_0,y_0,y_0')=f.$$

Tad seko

$$\left.\begin{aligned} y_0'''&=f_1+f_2e+f_3f=I,\\ y_0^{IV}&=K+f_2f+f_3I,\end{aligned}\right\}\qquad(5.10.8)$$

kur

$$K=f_{11}+f_{22}e^2+f_{33}f^2+2f_{12}e+2f_{13}f+2f_{23}ef.$$

Tātad, aprobežojoties izvirzījumos ar 4. pakāpes locekļiem:

$$y_1=y_0+eh+\frac{1}{2}fh^2+\frac{1}{6}Ih^3+\frac{1}{24}(K+f_2f+f_3I)h^4+\dots\qquad(5.10.9)$$

$$y_1'h=eh+fh^2+\frac{1}{2}Ih^3+\frac{1}{6}(K+f_2f+f_3I)h^4+\dots\qquad(5.10.9')$$

Ar šiem izvirzījumiem jāsalīdzina tie, kas seko no vidējo vērtību metodes. Saskaņā ar (5.10.1) aprēķina dažādu tuvinājuma parabolu novirzes. Iesākuma punktā (x_0, y_0) pievilktai parabolai, kas atbilst atvasinājumu vērtībām y_0' un y_0'', novirze no pieskares, skaitot novirzi uz ordinātas $x = x_0 + h$, ir izteikta ar pirmo formulu (5.10.1):

$$l_1 = f(x_0, y_0, y_0')\frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}fh^2.$$

Uz pievilktās parabolas izvēlēsim punktu, kas atbilst pussolim. Šinī punktā abscisa $x = x_0 + \frac{1}{2}h$, ordināta $y = y_0 + \frac{1}{2}hy_0' + \frac{1}{4}l_1$ un pieskares virziena koeficients $y' = y_0' + l_1/h$. Šos datus viegli atrod no parabolas vienādojuma

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{1}{2}y_0''(x - x_0)^2.$$

Datiem atbilstošo novirzi izteic otrā formula sakopojumā (5.10.1):

$$l_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}y_0'h + \frac{1}{4}l_1, y_0' + \frac{l_1}{h}\right)\frac{h^2}{2}.$$

Izvirzot funkcijas vērtību Teilora rindā un aprobežojoties ar ceturtās pakāpes locekļiem dabū:

$$l_2 = \frac{1}{2}fh^2 + \frac{1}{4}Ih^3 + \frac{1}{16}(K + ff_2)h^4 + \ldots$$

Līdzīgā kārtā

$$l_3 = \frac{1}{2}fh^2 + \frac{1}{4}Ih^3 + \frac{1}{16}(K + ff_2 + 2If_3)h^4 + \ldots$$

No tā seko:

$$l=\frac{1}{3}(l_1+l_2+l_3)=\frac{1}{2}fh^2+\frac{1}{6}Ih^3+\frac{1}{24}(K+ff_2+If_3)h^4+\dots$$

tātad, saskaņā ar (5.10.6)

$$y_1=y_0+y_0'h+l=$$
$$=y_0+eh+\frac{1}{2}fh^2+\frac{1}{6}Ih^3+\frac{1}{24}(K+ff_2+If_3)h^4+\dots \quad (5.10.10)$$

un tas visos izrakstītos locekļos saskan ar stingri pareizo izvirzījumu (5.10.9).

5.11. Otrās kārtas diferencialvienādojumu integrēšana ar ekstrapolaciju. (Störmer'a metode.)

Otrās kārtas diferencialvienādojumam

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (5.11.1)$$

jāatrod atrisinājumu $y = y(x)$ kopā sadergo vērtību tabulas veidā:

$$\begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_0' & y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \end{matrix} \qquad (A)$$

kur viena trijotne ir dota, piem. (iesākuma vērtības) x_0, y_0, y_0'. Katrai trijotnei atbilst noteikta otrās atvasinātas vērtība, ko aprēķina no dotā diferencialvienādojuma (5.11.1), aizvietojot tur x, y, y' attiecīgi ar x_i, y_i, y_i'. Iznākumu y_i'' ~~y_i''~~ apzīmēsim saīsināti ar f_i:

$$y_i'' = f(x_i, y_i, y_i') = f_i. \qquad (5.11.1')$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

Argumenta pieaugumu $x_{i+1} - x_i$ rēķinātājs izvēlē vadoties no lietderības apsvērumiem. Pārāk mazs argumenta solis palielina rēķināšanas darbu, pārāk liels — traucē pareizību. Vēlams argumenta soli bez vajadzības nemainīt. Pieņemsim, ka

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const.}$$
$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

Kā, izejot no iesākuma vērtībām x_0, y_0, y_0', atrod argumentam $x_1 = x_0 + h$ atbilstošo y_1 un y_1', to apskatīsim vēlāk. Pagaidām pieņemsim, ka zināms skaits kopā saderīgo vērtību, piem. tabulā (A) sakopotās, jau ir aprēķinātas. Papildināsim tabulu ar otrās kārtas atvasinātās vērtībām f_i un to diferencēm. Tātad, pieņemsim, ka mūsu rīcībā ir šādi dati:

x_i	y_i	y_i'	f_i	δf_i	$\delta^2 f_i$	$\delta^3 f_i$
x_0	y_0	y_0'	f_0			
				$\delta f_{\frac{1}{2}}$		
x_1	y_1	y_1'	f_1		$\delta^2 f_1$	
				$\delta f_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{3}{2}}$
x_2	y_2	y_2'	f_2		$\delta^2 f_2$	
				$\delta f_{\frac{5}{2}}$		$\delta^3 f_{\frac{5}{2}}$
x_3	y_3	y_3'	f_3		$\delta^2 f_3$	
...	...	...	...	...	...	...
x_{n-3}	y_{n-3}	y_{n-3}'	f_{n-3}		$\delta^2 f_{n-3}$	
				$\delta f_{n-\frac{5}{2}}$		$\delta^3 f_{n-\frac{5}{2}}$
x_{n-2}	y_{n-2}	y_{n-2}'	f_{n-2}		$\delta^2 f_{n-2}$	
				$\delta f_{n-\frac{3}{2}}$		$\delta^3 f_{n-\frac{3}{2}}$
x_{n-1}	y_{n-1}	y_{n-1}'	f_{n-1}		$\delta^2 f_{n-1}$	
				$\delta f_{n-\frac{1}{2}}$		
x_n	y_n	y_n'	f_n			

Lietāti ir centrālo diferenču apzīmējumi: indeks diferences apzīmējumā norāda uz vietu* diferenču tabulā, kur diference atrodama.

Jāapskata tabulas turpināšana uz leju (ekstrapolacija), pamatojoties uz līdzšinējiem datiem.

Teorētiskie pamati.

Datu tabula noteic 3 funkcijas $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ ar to skaitliskām vērtībām, kas atbilst argumenta vērtībām $x_0, x_1, \dots x_n$. Apskatīsim intervalu $[\overline{x}, x]$, kas simetrisks attiecībā pret x_n:

$$\overline{x} = x_n - \xi h, \qquad x = x_n + \xi h.$$

Saskaņā ar Stirling'a interpolacijas formulu

$$y''(x) = y''(x_n + \xi h) = f(x, y, y') =$$
$$= f_n + \frac{\overline{\delta} f_n}{1!}\xi + \frac{\delta^2 f_n}{2!}\xi^2 + \frac{\overline{\delta}^3 f_n}{3!}\xi(\xi^2-1) +$$
$$+ \frac{\delta^4 f_n}{4!}\xi^2(\xi^2-1) + \frac{\overline{\delta}^5 f_n}{5!}\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4) +$$
$$+ \frac{\delta^6 f_n}{6!}\xi^2(\xi^2-1)(\xi^2-4) + \dots$$

Līdzīgā kārtā

$$y''(\overline{x}) = y''(x_n - \xi h) = f_n - \frac{\overline{\delta} f_n}{1!}\xi + \frac{\delta^2 f_n}{2!}\xi^2 - \dots$$

Ja abas formulas saskaita, tad saīsinās labā pusē visi nepārkāpes locekļi, kur sastopamas fiktīvās diferences $\overline{\delta} f_n$, $\overline{\delta}^3 f_n, \dots$, kas diferenču tabulā ar indeku norādītā vietā nav atrodamas, bet jāveido kā vidējais aritmetiskais no blakus skaitļiem. Ar summēšanu dabū formulu:

$$y''(x)+y''(\bar{x})=2\left[f_n+\frac{\delta^2 f_n}{2!}\xi^2+\frac{\delta^4 f_n}{4!}\xi^2(\xi^2-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{\delta^6 f_n}{6!}\xi^2(\xi^2-1)(\xi^2-4)+\dots\right] \quad (5.11.2)$$

Īpašs gadījums: $\xi=1$.

Šinī gadījumā $x=x_n+h=x_{n+1}$ un $\bar{x}=x_{n-1}$. Izvirzījumā (5.11.2) iekavās neizzūd tikai pirmie divi locekļi. Tā kā $y''(x_{n+1})=f_{n+1}$ un $y''(x_{n-1})=f_{n-1}$, tad seko sakarība:

$$f_{n+1}+f_{n-1}=2f_n+\delta^2 f_n. \quad (5.11.2')$$

Īpašs gadījums: $\xi=2$.

Šinī gadījumā $x=x_n+2h=x_{n+2}$ un $\bar{x}=x_{n-2}$. Izvirzījumā (5.11.2) iekavās izzūd visi locekļi, kas seko trešajam. Tātad

$$f_{n+2}+f_{n-2}=2f_n+4\delta^2 f_n+\delta^4 f_n. \quad (5.11.2'')$$

Pareizināsim (5.11.2) ar $dx=h\,d\xi$ un integrēsim, liekot x mainīties no x_n līdz x; tam atbilst labā pusē argumenta maiņa no 0 līdz $+\xi$. Integrēšanas iznākums ir:

$$y'(x)-y'(\bar{x})=h\left[2f_n\xi+\frac{1}{3}\delta^2 f_n\cdot\xi^3+\frac{1}{180}\delta^4 f_n\cdot\xi^3(3\xi^2-5)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{7560}\delta^6 f_n\cdot\xi^3(3\xi^4-21\xi^2+28)+\dots\right]$$
$$(5.11.3)$$

Ja apskata atvasinātās vērtības, kas atbilst argumenta vērtībām x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, tad $\xi=1$, un mums ir sakarība:

$$y'_{n+1}=y'_{n-1}+h\left[2f_n+\frac{1}{3}\delta^2 f_n-\frac{1}{90}\delta^4 f_n+\frac{1}{756}\delta^6 f_n+\dots\right]$$
$$(5.11.3')$$

Pareizināsim (5.11.3) ar $dx=h\,d\xi$ un integrēsim robežās no $x=x_n$ līdz $x=x$. Labā puse tam atbilst $\xi=0$ un $\xi=\xi$. Seko:

$$y(x)+y(\bar{x})-2y(x_n)=$$
$$=h^2\left[f_n\xi^2+\frac{1}{12}\delta^2 f_n\cdot\xi^4+\frac{1}{720}\delta^4 f_n\cdot\xi^4(2\xi^2-5)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{60480}\delta^6 f_n\cdot\xi^4(3\xi^4-28\xi^2+56)+\dots\right]$$
$$(5.11.4)$$

Īpašā gadījumā, kad $\xi=1$:

$$y_{n+1}+y_{n-1}-2y_n=h^2\left[f_n+\frac{1}{12}\delta^2 f_n-\frac{1}{240}\delta^4 f_n+\right.$$
$$\left.+\frac{31}{60480}\delta^6 f_n+\dots\right] \qquad (5.11.4')$$

Diferenču schemas iesākumā interpolacijai jālietā Nutona-Gregorija formula:

$$y''(x)=y''(x_0+\xi h)=$$
$$=f_0+\Delta f_0\cdot\xi+\frac{1}{2!}\Delta^2 f_0\cdot\xi(\xi-1)+\frac{1}{3!}\Delta^3 f_0\cdot\xi(\xi-1)(\xi-2)$$
$$+\frac{1}{4!}\Delta^4 f_0\cdot\xi(\xi-1)(\xi-2)(\xi-3)+\dots \quad (5.11.5)$$

Ja šo formulu pareizina ar $dx=h d\xi$ un integrē, liekot argumentam kreisā pusē mainīties no x_0 līdz x (labā pusē: no 0 līdz ξ), tad seko:

$$y'(x)-y'(x_0)=h\Big[f_0\xi+\frac{1}{2}\Delta f_0\cdot\xi^2+\frac{1}{12}\Delta^2 f_0\cdot\xi^2(2\xi-3)$$
$$+\frac{1}{24}\Delta^3 f_0\cdot\xi^2(\xi^2-4\xi+4)+\frac{1}{720}\Delta^4 f_0\cdot\xi^2(6\xi^3-45\xi^2+$$
$$+110\xi-90)+\dots \quad (5.11.5')$$

Atkārtojot integrēšanu dabū:

$$y(x)-(x-x_0)y'(x_0)-y(x_0)=$$
$$=h^2\Big[\frac{1}{2}f_0\xi^2+\frac{1}{6}\Delta f_0\cdot\xi^3+\frac{1}{24}\Delta^2 f_0\cdot\xi^3(\xi-2)+$$
$$+\frac{1}{360}\Delta^3 f_0\cdot\xi^3(3\xi^2-15\xi+20)+$$
$$+\frac{1}{1440}\Delta^4 f_0\cdot\xi^3(2\xi^3-18\xi^2+55\xi-60)+\dots$$
$$(5.11.5'')$$

Īpašā gadījumā, kad $\xi=1$:

$$y_1'=y_0'+h\Big[f_0+\frac{1}{2}\Delta f_0-\frac{1}{12}\Delta^2 f_0+\frac{1}{24}\Delta^3 f_0-\frac{19}{720}\Delta^4 f_0+\dots\Big]$$
$$(5.11.6)$$

$$y_1=y_0+hy_0'+h\Big[\frac{1}{2}f_0+\frac{1}{6}\Delta f_0-\frac{1}{24}\Delta^2 f_0+\frac{1}{45}\Delta^3 f_0$$
$$-\frac{7}{480}\Delta^4 f_0+\dots\Big] \quad (5.11.6')$$

Ekstrapolacijas apvienojums ar iteraciju.

Izejot no dotiem tuvinājumiem $y_i, y_i', y_i'' = f_i$ un funkcijas f_i diferencēm, kas atbilst ekvidistantām vietām x_i $(i=1,2,3,\dots n)$, aprēķina jaunus tuvinājumus y_{n+1} un y_{n+1}' ar formulām

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= 2y_n - y_{n-1} + h^2\left(f_n + \tfrac{1}{12}\delta^2 f_n\right), \\ y_{n+1}' &= y_{n-1}' + h\left(2f_n + \tfrac{1}{3}\delta^2 f_n\right), \end{aligned}\right\} \quad (5.11.5)$$

kas izriet no (5.11.4′) un (5.11.3′), ja tur atmet diferences, kuru kārta augstāka par trešo. Ieteicams aprēķināt nevis tieši atvasinātas, bet to reizinājumus ar argumenta soli:

$$hy_{n+1}' = hy_{n-1}' + h^2\left(2f_n + \tfrac{1}{3}\delta^2 f_n\right), \quad (5.11.5')$$

jo šiem reizinājumiem ir vienāda dimensija ar ordinatu y.

Tuvinājumu y_{n+1} un y_{n+1}' aprēķināšanai vajadzīga diference $\delta^2 f_n$, kuras izejas datu tabulā nav. Šo grūtību novērš ar <u>iteraciju.</u> Vajadzīgo diferenci <u>novērtē</u>, piem. ekstrapolējot jau aprēķinātās otrās kārtas diferences. Ja diference $\delta^2 f_n$ ir izvēlēta, tad no (5.11.5) un (5.11.1′) izriet tuvinājumi

$$y_{n+1},\ y_{n+1}',\ y_{n+1}'' = f_{n+1},$$

kuri atļauj diferencei $\delta^2 f_n$ aprēķināt labāku vērtību, un ar pēdējās palīdzību izlabot arī pašus tuvinājumus

Rēķināšanas schema extrapolacijas metodei.

x	Reizulis y :		1		1/12
	Reizulis hy' :		2		1/3
	y	hy'	$h^2y''=h^2f$	$h^2\delta f$	$h^2\delta^2 f$
...	...	...	...		
x_{n-2}	y_{n-2}	hy_{n-2}'	h^2f_{n-2}		
				$h^2\delta f_{n-\frac{3}{2}}$	
x_{n-1}	y_{n-1}	$\boxed{hy_{n-1}'}$	h^2f_{n-1}		$h^2\delta^2 f_{n-1}$
				$h^2\delta f_{n-\frac{1}{2}}$	
x_n	y_n	hy_n'	$\boxed{h^2f_n}$		$\boxed{h^2\delta^2 f_n}$
				$h^2\delta f_{n+\frac{1}{2}}$	
x_{n+1}	y_{n+1}	$\boxed{hy_{n+1}'}$	h^2f_{n+1}		

Formulas:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= 2y_n - y_{n-1} + h^2\left(f_n + \frac{1}{12}\delta^2 f_n\right), \\ hy_{n+1}' &= hy_{n-1}' + h^2\left(2f_n + \frac{1}{3}\delta^2 f_n\right). \end{aligned}\right\} \quad (5.11.5'')$$

Argumenta solis h jāizvēlē tā, ka iterācijas pietiekami ātri savirzas un ka ~~noltds~~ vienādojumos (5.11.3') un (5.11.4') ceturtās kārtas locekļu

$$-\frac{1}{90}\delta^4 f_n \quad \text{un} \quad -\frac{1}{240}\delta^4 f_n$$

ietekme ir neievērojama.

Kā ar iterāciju aprēķina pirmās vērtības.

Vispirmais solis otrās kārtas diferenciālvienādojuma atrisināšanā ir pāreja no iesākuma vērtībām x_0, y_0, y_0' pie x_1, y_1, y_1'; tad seko otrais solis—pāreja pie x_2, y_2, y_2' un t.t. Katrs solis ietver divējādas darbības: 1) jāatrod jaunām y un y' vērtībām tuvinājumi un 2) pietiekami jāsamazina tuvinājumu kļūda. Ja $y''=f(x,y)$, t.i. ja diferenciālvienādojums ir neatkarīgs no pirmās kārtas atvasinātās, tad pēdējai nav vajadzīgs ne tuvinājumu ne labojumu aprēķins.

Pirmais solis.

Dots x_0, y_0, y_0', aprēķina $y_0''=f(x_0, y_0, y_0')=f_0$. Ar šiem datiem ir noteikta parabola, kas iesākuma punktā pieskaņjas integrālliknei. Parabola krusto paraleli ordinatu asij $x=x_1$ punktā, kur

$$(y_1)=y_0+hy_0'+\frac{1}{2}h^2f_0,$$

$$(hy_1')=hy_0'+h^2f_0; \text{ no tā seko}$$

$$(f_1)=f\left[x_1,(y_0),(y_1')\right].$$

Šeit apaļās iekavas izteic, ka tanīs ietvertie skaitļi ir iepriekšeji—provizoriski. Var aprēķināt diferenci

$$(\delta f_{\frac{1}{2}}) = (f_1) - f_0,$$

kura arī jālabo.

Datu tabulai ir pievienojusies viena rinda un viena diference:

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & y_0 & y_0' & f_0 & \\ & & & & (\delta f_{\frac{1}{2}}) \\ x_1 & (y_1) & (y_1') & (f_1) & \end{array}$$

Izlabotie tuvinājumi, saskaņā ar (5.11.6) un (5.11.6'):

$$y_1^{(0)} = y_0 + hy_0' + h\left[\frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{6}(\delta f_{\frac{1}{2}})\right],$$

$$hy_1^{(0)\prime} = hy_0' \quad + h^2\left[f_0 + \frac{1}{2}(\delta f_{\frac{1}{2}})\right];$$

no šejienes $f_1^{(0)}$, $\delta f_{\frac{1}{2}}^{(0)}$.

<u>Datu tabula:</u>

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & y_0 & y_0' & f_0 & \\ & & & & \delta f_{\frac{1}{2}}^{(0)} \\ x_1 & y_1^{(0)} & y_1^{(0)\prime} & f_1^{(0)} & \end{array}$$

<u>Otrais solis.</u>

Tā kā datu tabulā jau ir divas rindas, un jāatrod dati nākamai (ar indeksu 2), tad varam lietāt rupjo tuvinājumu noteikšanai formulas (5.11.4') un (5.11.3'):

$$y_2^{(0)} = 2y_1^{(0)} - y_0 + h^2 f_1^{(0)},$$

$$hy_2^{(0)\prime} = hy_0' \quad + 2h^2 f_1^{(0)};$$

no šejienes seko $f_2^{(0)}$, $\delta f_{\frac{3}{2}}^{(0)}$, $\delta^2 f_1^{(0)}$.

Datu tabula:

x_0	y_0	y_0'	f_0		
				$\delta f_{\frac{1}{2}}^{(0)}$	
x_1	$y_1^{(0)}$	$y_1^{(0)\prime}$	$f_1^{(0)}$		$\delta^2 f_1^{(0)}$
				$\delta f_{\frac{3}{2}}^{(0)}$	
x_2	$y_2^{(0)}$	$y_2^{(0)\prime}$	$f_2^{(0)}$		

Izlabotie tuvinājumi pēdējām divām rindām (indeki 1 un 2):

$$y_1^{(1)} = y_0 + hy_0' + h^2\left(\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{6}\delta f_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \frac{1}{24}\delta^2 f_1^{(0)}\right),$$

$$hy_1^{(1)\prime} = hy_0' \quad + h^2\left(f_0 + \frac{1}{2}\delta f_{\frac{1}{2}}^{(0)} - \frac{1}{12}\delta^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$y_2^{(1)} = 2y_1^{(1)} - y_0 + h^2\left(f_1^{0} + \frac{1}{12}\delta^2 f_2^{(0)}\right),$$

$$hy_2^{(1)\prime} = hy_0' \quad + h^2\left(2f_1^{(0)} + \frac{1}{3}\delta^2 f_2^{(0)}\right);$$

no šejienes seko $f_1^{(1)}$, $f_2^{(1)}$, $\delta f_{\frac{1}{2}}^{(1)}$, $\delta f_{\frac{3}{2}}^{(1)}$, $\delta^2 f_1^{(1)}$.

Trešais solis.

Pamatojoties uz izlaboto datu tabulu aprēķinam elementus nākamai rindai (indeks 3):

$$y_3^{(1)} = 2y_2^{(1)} - y_1^{(1)} + h^2\left(f_2^{(1)} + \frac{1}{12}\delta^2 f_1^{(1)}\right),$$

$$hy_3^{(1)} = hy_1^{(1)} \quad + h^2\left(2f_2^{(1)} + \frac{1}{3}\delta^2 f_1^{(1)}\right);$$

no šejienes seko: $f_3^{(1)}$, $\delta f_{\frac{5}{2}}^{(1)}$, $\delta^2 f_2^{(1)}$, $\delta^3 f_{\frac{3}{2}}^{(1)}$.

 27. IX. 48

<u>Datu tabula:</u>

$$
\begin{array}{llllccc}
x_0 & y_0 & y_0' & f_0 & & & \\
 & & & & \delta f_{\frac{1}{2}}^{(1)} & & \\
x_1 & y_1^{(1)} & y_1^{(1)\prime} & f_1^{(1)} & & \delta^2 f_1^{(1)} & \\
 & & & & \delta f_{\frac{3}{2}}^{(1)} & & \delta^3 f_{\frac{3}{2}}^{(1)} \\
x_2 & y_2^{(1)} & y_2^{(1)\prime} & f_2^{(1)} & & \delta^2 f_2^{(1)} & \\
 & & & & \delta f_{\frac{5}{2}}^{(1)} & & \\
x_3 & y_3^{(1)} & y_3^{(1)\prime} & f_3^{(1)} & & &
\end{array}
$$

Iteracijas process tabulas datu pareizības uzlabošanai:

$$y_1^{(\nu+1)} = y_0 + hy_0' + h^2\left(\frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{6}\delta f_{\frac{1}{2}}^{(\nu)} - \frac{1}{24}\delta^2 f_1^{(\nu)} + \frac{1}{45}\delta^3 f_{\frac{3}{2}}^{(\nu)}\right),$$

$$hy_1^{(\nu+1)\prime} = hy_0' + h^2\left(f_0 + \frac{1}{2}\delta f_{\frac{1}{2}}^{(\nu)} - \frac{1}{12}\delta^2 f_1^{(\nu)} + \frac{1}{24}\delta^3 f_{\frac{3}{2}}^{(\nu)}\right),$$

$$y_2^{(\nu+1)} = 2y_1^{(\nu+1)} - y_0 + h^2\left(f_1^{(\nu)} + \frac{1}{12}\delta^2 f_2^{(\nu)}\right),$$

$$hy_2^{(\nu+1)\prime} = hy_0' + h^2\left(2f_1^{(\nu)} + \frac{1}{3}\delta^3 f_{\frac{3}{2}}^{(\nu)}\right),$$

$$y_3^{(\nu+1)} = 2y_2^{(\nu+1)} - y_1^{(\nu+1)} + h^2\left(f_2^{(\nu)} + \frac{1}{12}\delta^2 f_2^{(\nu)}\right),$$

$$hy_3^{(\nu+1)} = hy_1^{(\nu+1)\prime} + h^2\left(2f_2^{(\nu)} + \frac{1}{3}\delta^2 f_2^{(\nu)}\right).$$

Pārmaiņām labo: 1) y_i un hy_i' vadoties no iepriekšējām formulām, un 2) funkcijas vērtības $f_i^{(\nu)} = f(x_i, y_i^{(\nu)}, y_i^{(\nu)\prime})$ un to diferences, kamēr vērtības tālāk nemainās.

Literatura

Афендик, Л. Г. Оценка погрешности при численном интегрировании по способу Штерпера. Прикладн. математика и механика, т. I, в. 4, стр. 557.–562. (1938.)

Blaess, V. Zur angenäherten Lösung gewöhnlicher Diferentialgleichungen. Zeitschr. d. Vereins d. Ing, Bd. 81, № 21, 587.–596. lp.p. (1937).

Collatz, L. Natürliche Schrittweite bei numerischer Integration von Diferentialgleichungssystemen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 22, № 4, 216.–225. lp.p. (1942)

Collatz, L., u. R. Zurmühl. Beiträge zu den Interpolationsverfahren der numerischen Integration von Diferentialgleich. 1. und 2. Ordnung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 22, № 1, 42.–55. lp.p. (1942).

Heun, K. Neue Methode zur approximativen Integration der Diferentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen. Zeitschr. f. Math. u. Physik, 45. Bd. (1900), 23.–38. lp.p.

Крылов, Н.А. Приближенные вычисления.

Lindow, M. Numerische Infinitesimalrechnung. Berlin, 1928.

Kamke, E. Differentialgleichungen. Lösungsmethoden u. Lösungen. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 2. Aufl. Leipzig, 1943.

Milne, W.E. Numerical integration of ordinary differential equations. The Amer. Math. Monthly, vol. XXXIII (1926), 455.–460. lp.p.

Runge, C. Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Math. Annalen, 46. Bd. (1895), 167.–178. lp.p.

Runge, C., u. H. König. Vorlesungen über numerisches Rechnen. Berlin, 1924.

Willers, Fr. A. Methoden der prakt. Analysis. Berlin u. Leipzig, 1928.

Willers, Fr. A. Numerische Integration. Berlin u. Leipzig, 1923. (Samml. Göschen, № 864.)

Zurmühl, R. Zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgl. 2. und höherer Ordnung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 20 (1940), № 2, 104.–116. lp.p.