

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
DATORIKAS FAKULTĀTE

ULTRAMETRISKI AUTOMĀTI

BAKALaura DARBS

Autors: **Rihards Krišlauks**

Stud. apl. rk09006

Darba vadītājs: Prof., Dr. habil. math. Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

RĪGA 2013

Anotācija

Darbā tiek pētīts valodu iedalījums klasēs atkarībā no automāta galviņu skaita. Tiek aplūkoti rezultāti, kas sasniegti determinētiem, nedeterminētiem un varbūtiskiem vienvirziena un divvirzīnu galīgiem automātiem, un tiek pierādīts, ka līdzīgi rezultāti pastāv arī divvirzīnu galīgiem ultrametriskiem automātiem, kas tiek iegūti vispārinot ultrametrisku automātu definīciju, ko pavisam nesen ieviesis Freivalds [1]. Vienvirzīna ultrametriskiem vienas galviņas automātiem tiek parādīts pārkums pār determinētiem un nedeterminētiem vairākgalviņu automātiem konkrētai valodai. Darbā kā starpposms pierādījumiem tiek izmantota ultrametrisku Tjūringa mašīnu definīcija un ultrametriskas vairāku reģistru mašīnas. Tiek parādīts arī interesants rezultāts vairāku lenšu automātiem.

Atslēgas vārdi: ultrametriski automāti, p -adiski skaitļi, vairākgalviņu automāti, vairāku lenšu automāti, valodu klases, galviņu hierarhija

Abstract

The work explores the language classes that arise with respect to the head count of a finite automaton. The results for deterministic non-deterministic and probabilistic automata are explored and similar results are proved for two-way ultrametric automata, which are viewed as a generalization of ultrametric finite automata that have just recently been introduced by Freivalds [1]. For the one-way setting it is shown that ultrametric one-head finite automata are more powerful than deterministic and non-deterministic automata for certain languages. Definitions for ultrametric Turing machines and ultrametric multi-register machines are introduced as a tool for proving the results. An interesting result regarding multi-tape automata is shown as well.

Keywords: ultrametric automata, p -adic numbers, multi-head automata, multi-tape automata, language classes, head hierarchy

Saturs

Apzīmējumu saraksts	2
Ievads	3
1. p-adiski skaitļi	4
1.1. Ievads p -adiskos skaitļos	4
1.2. p -adiskas absolūtās vērtības	5
2. Vienvirziena vairākgalviņu automāti	7
2.1. Defīnīcijas	7
2.2. Attiecība pret klasiskajiem automātiem	8
3. Vienvirziena vairāku lenšu automāti	12
3.1. Defīnīcijas	12
3.2. Valodu pāru atpazīšana	12
4. Divvirzienu automāti	14
4.1. Defīnīcijas	14
4.2. Ultrametriska automāta simulācija	16
4.3. Vairākgalviņu automāti	19
5. Rezultāti	23
6. Secinājumi	24

Apzīmējumu saraksts

Apzīmējums	Atšifrējums
u_pfa	Galīgs (vienvirziena) p -ultrametriskais automāts
$1u_pfa(k)$ ($2u_pfa(k)$)	Galīgs k -galviņu vienvirziena (divvirzienu) p -ultrametriskais automāts
$1U_PFA(k)$ ($2U_PFA(k)$)	Valodu klase, ko var atpazīt ar galīgs k -galviņu vienvirziena (divvirzienu) p -ultrametrisku automātu ar amplitūdām no kādas \log -space p -konstruējamas kopas
$1dfa(k)$ ($2dfa(k)$)	Galīgs k -galviņu vienvirziena (divvirzienu) determinēts automāts
$1nfa(k)$ ($2nfa(k)$)	Galīgs k -galviņu vienvirziena (divvirzienu) nedeterminēts automāts
$1pfa(k)$ ($2pfa(k)$)	Galīgs k -galviņu vienvirziena (divvirzienu) varbūtiskais automāts
$u_p t m$	p -ultrametriska Tjūringa mašīna ar 2 lentēm, un ar \log -space telpas sarežģītību
$U_p T M$	Valodu klase, ko var atpazīt ar p -ultrametrisku Tjūringa mašīnu ar \log -space telpas sarežģītību, un ar amplitūdām no kādas \log -space p -konstruējamas kopas
\widehat{C}	Valodu klases C apakškopa, kas satur tikai valodas formā 1^{2^n} , $n \in \mathbb{N}$, jeb precīzāk – $\widehat{C} = \{h \mid h \in C \wedge \exists n \in \mathbb{N} : h = 1^{2^n}\}$

Ievads

Ultrametriskus automātus un Tjūringa mašīnas 2012. gadā ir ieviesis Rūsiņš Freivalds [1]. Tam ir sekojuši vairāki darbi, kur dažādi to aspekti ir pētīti padziļināti. 2013. gadā Baloža un līdzautoru [2] darbā ir pētīta ultrametrisku automātu apraksta sarežģītība, tiek parādīts, ka ultrametriski automāti var sasniegt eksponenciālu pārsvaru stāvokļu skaita ziņā salīdzinot ar determinētiem automātiem, un 2013. gadā Krišlauka un līdzautoru darbā [3] tiek pētīta ultrametrisku Tjūringa mašīnu galviņas pagriezienu sarežģītība.

Ultrametrisku automāti ir līdzīgi varbūtiskajiem automātiem, bet atšķirībā no tiem, ultrametriskajā gadījumā netiek prasīts, lai amplitūdas, kas atbilst varbūtības jēdzienam varbūtiskajos automātos, būtu robežās no 0 līdz 1. Tie var būt patvaļīgi racionāli skaitļi. Jāpiebilst, ka Paavo Turakainen 1969. gadā [4] ir ieviesis līdzīgas konstrukcijas, kur arī "varbūtības" var būt patvaļīgi lieli skaitļi, un beigu stāvokļa varbūtība tiek salīdzināta ar kādu noteiktu sliekšni, turklāt ir parādīts abas konstrukcijas ir ekvivalentas. Tomēr, atšķirībā no šiem pseido-varbūtiskajiem automātiem, ultrametrisko automātu definīcijā tiek izmantots p -adiskās normas jēdziens.

Var teikt, ka Freivalda ieviestā definīcija ir dabīga, jo tiek pētīts vienīgais atlikušais maz pētītais nejaušību uzdošanas veids [1]. Turklāt ultrametrisko automātu definīcijai ir pierādītas derīgas īpašības – Balodis ar līdzautoriem [2] ir pierādījis, ka regulētu p -adisko automātu atpazīstamo valodu klase sakrīt ar regulāro valodu klasi.

Darbā lielākā uzmanība tiek pievērsta jautājumam par valodu hierarhiju vairākgalviņu automātu gadījumā. Determinētiem, nedeterminētiem un varbūtiskiem galīgiem automātiem ir pierādīti vairāki rezultāti gan vienvirziena gan divvirziena automātiem [5–8]. Darbā tiek pētīts vai ultrametriskiem vairākgalviņu automātiem pastāv līdzīgi rezultāti attiecībā uz valodu dalījumu hierarhijas klasēs. Kā arī tiek pētītas valodu klašu savstarpējās attiecības salīdzinot ultrametriskos automātus ar klasiskajiem.

1 P -ADISKI SKAITĻI

1.1 Ievads p -adiskos skaitļos

Par p -adisku ciparu sauc naturālu skaitli robežās no 0 līdz $p - 1$ (ieskaitot), kur p ir patvaļīgs pirmskaitlis. Par p -adisku veselu skaitli sauc virkni $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, kur a_i ir p -disks cipars. To var pierakstīt kā $\dots a_i \dots a_2 a_1 a_0$. Šī virkne atbilst naturālam skaitlim

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i p^i,$$

kur p ir izvēlētais pirmskaitlis un skaitīšanas sistēmas bāze. Šī virkne ir bezgalīga uz kreiso pusi. Naturālo skaitļu attēlojumiem p -adiskos skaitļos tikai galīgs skaits ciparu būs nenulles. Naturālam skaitlim n , tā p -adiskās reprezentācijas nenulles daļa precīzi sakrītīs ar skaitļa pierakstu bāzē p . Kā piemēru varam apskatīt skaitli 42 kas pie bāzes 5 tiek pierakstīts kā 132, un līdz ar to tā reprezentācija 5-adiskos skaitļos ir $\dots 0 \dots 0132$.

Negatīviem un racionāliem skaitļiem situācija ir ievērojami citāda. Kā piemēru apskatīsim skaitli $\frac{1}{2}$ un tā 5-adisko reprezentāciju. $\frac{1}{2}$ definē kā skaitli, ko, saskaitot ar sevi, iegūst 1. 1 5-adiskā reprezentācija ir $\dots 0 \dots 001$. To zinot, varam izteikt $\frac{1}{2}$ 5-adiskos skaitļos:

$$\begin{array}{r} \dots 2 2 2 2 2 3 \\ + \dots 2 2 2 2 2 3 \\ \hline \dots 0 0 0 0 0 1 \end{array}$$

Atņemšana tiek veikta pēc tādiem pašiem principiem, bet ņemot vērā, ka skaitļu pieraksta virknes ir bezgalīgas; piemēram 7-adiskiem skaitļiem:

$$\begin{array}{r} \dots 0 0 0 1 3 2 \\ - \dots 0 0 0 2 3 4 \\ \hline \dots 6 6 6 3 4 3 \end{array}$$

Turklāt var ievērot, ka arī negatīviem skaitļiem informāciju satur tikai galīgs skaits ciparu pozīciju. Pozīcijās, kas ir pietiekami tālu pa kreisi atkārtojas cipars $p - 1$.

Interesantā kārtā gandrīz jebkuru racionālu skaitli var līdzīgi izteikt kā p -adisku veselu skaitli. Izņēmumi kādam konkrētam p ir skaitļi formā $\frac{a}{b}$, kur a nedalās ar p , bet b ar p dalās.

Skaitļi, kas nevar tikt izteikti p -adiskos veselos skaitļos, var tikt attēloti p -adiskos (ne veselos) skaitļos. Kā piemēru varam apskatīt skaitli $\frac{1}{5}$, kuru nevar attēlot 5-adiskos Veselos skaitļos. Tā vietā to var pierakstīt kā

$$\dots 0 \dots 000,1.$$

Jāievēro, ka arī vispārīgajā p -adisko skaitļu gadījumā skaitļa pieraksts ir bezgalīgs uz kreiso pusi, un galīgs uz labo.

p -adiskiem skaitļiem ir izpildāmas visas tās pašas aritmētiskās darbības – saskaitīšana, atņemšana, reizināšana un dalīšana – kas izpildāmas skaitļiem decimālajā pierakstā. Saskaitīšanu, atņemšanu un reizināšanu var izpildīt p -adiskos veselos skaitļos, bet dalīšanas rezultāts var būt pierakstām tikai p -adiskos skaitļos.

Var redzēt, ka katram racionālam skaitlim q eksistē tāds pirmskaitlis p , ka q var tikt izteikts kā p -adisks vesels skaitlis. To pašu nevar teikt par reāliem skaitļiem. Pastāv iracionāli skaitļi, ko nevar izteikt kā p -adisku skaitli nevienam p . Tas gan nenozīmē, ka p -adiski skaitļi kādam p būtu reālo skaitļu apakškopa – ir kontinuums p -adisku skaitļu, kas neatbilst nevienam reālam skaitlim [1].

1.2 p -adiskas absolūtās vērtības

Funkcija $d : X \times X \rightarrow R_{\geq 0}$, kur X ir netukša kopa, tiek saukta par metriku, ja tiek apmierinātas šādas īpašības:

1. $d(x,y) = 0$ tad un tikai tad, ja $x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x)$,
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ visiem $z \in X$.

Metrikas funkcija tiek izmantota, lai noteiktu attālumu starp diviem kopas elementiem. Elementa attālums līdz nullei $d(x,0)$ tiek saukts par tā normu, vai absolūto vērtību, un tiek apzīmēts ar $\|x\|$.

Elementa norma apmierina šādas īpašības:

1. $\|x\| = 0$ tad un tikai tad, ja $x = 0$,
2. $\|x * y\| = \|x\| * \|y\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (trīsstūra nevienādība).

Ja trešo īpašību var aizstāt ar tas spēcīgāko variantu – stingro trīsstūra nevienādību $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$ –, tad normu sauc par ultrametrisku. Citādi to sauc par Arhimedisku [1].

Definīcija 1. Katram nenulles racionālam skaitlim α eksistē viennozīmīgi nosakāms sadalījums pirmreizinātājos - $\alpha = \pm 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} \dots$, kur α_i -tie ir veseli skaitļi, no kuriem tikai galīgs

skaitis ir nenulles. Par racionāla skaitļa α **p -adisko absolūto vērtību** (arī sauktu par **p -normu**) sauc

$$\|x\|_p = \begin{cases} p^{-\alpha_p}, & \text{ja } \alpha \neq 0 \\ 0, & \text{ja } \alpha = 0. \end{cases}$$

Ar detalizētāku izklāstu par p -adiskiem skaitļiem iespējams iepazīties [9]. Ar p -adisko skaitļu pielietojumu citās zinātnes nozarēs var iepazīties [10–12]

2 VIENVIRZIENA VAIRĀKGALVIŅU AUTOMĀTI

2.1 Definīcijas

Ultrametriski automāti tiek definēti kā Baloža un līdzautoru darbā [2].

Definīcija 2. Galīgs p -ultrametriskais (U_pFA) automāts ir kortežs $\langle S, \Sigma, s_0, \delta, F, \Lambda \rangle$, kur

- S ir galīga stāvokļu kopa,
- Σ ir galīga kopa, ($\$ \notin \Sigma$) – ieejas alfabēts,
- $s_0 : S \rightarrow \mathbb{Q}_p$ ir sākotnējais amplitūdu sadalījums,
- $\delta : (\Sigma \cup \{\$\}) \times S \times S \rightarrow \mathbb{Q}_p$ ir pārejas funkcija,
- $F \subseteq S$ ir akceptējošo stāvokļu kopa,
- $\Lambda = (\lambda, \diamond)$ ir akceptēšanas nosacījums, kur $\lambda \in \mathbb{R}$ ir akceptēšanas sliekšnis, un $\diamond \in \{\leq, \geq\}$.

Automāts darbojas šādi. Katrā laika momentā katram automāta stāvoklim ir piekārtots p -adisks skaitlis, saukts par stāvokļa amplitūdu. Automāts darbu sāk ar sākotnējo amplitūdu sadalījumu s_0 . Tas pa vienam pēc kārtas apstrādā ieejas vārda $w = w_1 \dots w_n$ simbolus. Amplitūdu sadalījums pēc i -tā simbola ielasīšanas tiek apzīmēts ar s_i , kur

$$s_i(y) = \sum_{x \in S} s_{i-1}(x) \cdot \delta(w_i, x, y)$$

katram $y \in S$. Pēc n -tā simbola ielasīšanas tādā pat veidā tiek apstrādāts beigu marķieris $\$$, iegūstot beigu amplitūdu sadalījumu s_{n+1} . Akceptēšanas nosacījums tiek piemērots akceptējošo stāvokļu beigu amplitūdu p -normu summai. Tas ir, ja $\sum_{x \in F} |s_{n+1}(x)|_p \diamond \lambda$, tad saka, ka vārds w tiek akceptēts, citādi – noraidīts.

Divvirzienu k -galviņu (kur $k \geq 1$) galīgs automāts sastāv no ieejas lentas, kas satur ieejas vārdu, pa kuru automāta galviņas drīkst pārvietoties abos virzienos, nepārkāpjot vārda galu atdalītājsimbolu robežas. Simbolus uz ieejas lentas drīkst tikai lasīt. Formālāk:

Definīcija 3 ([5]). Par nedeterminētu divvirzienu k -galviņu galīgu automātu ($2nfa(k)$) tiek saukts kortežs $\langle S, \Sigma, k, s_0, \delta, F \rangle$, kur

- S ir galīga stāvokļu kopa,

- Σ ir galīga kopa, ($\triangleright, \triangleleft \notin \Sigma$) – ieejas alfabēts,
- $k \geq 1$ ir galviņu skaits,
- $s_0 \in S$ ir sakuma stāvoklis,
- $\delta : (\Sigma \cup \{\triangleright, \triangleleft\})^k \times S \times S \rightarrow \{-1, 0, 1\}^k$ ir pārejas funkcija, kur \triangleright un \triangleleft ir vārda sākumu un beigas atdalošie simboli,
- $F \subseteq S$ ir akceptējošo stāvokļu kopa.

$2nfa(k)$ sākot darbu, visas tā galviņas ir novietotas uz vārda sakuma simbola. Automāts darbu beidz, kad pārejas funkcija dotajai automāta konfigurācijai nav definēta. Par $2nfa(k)$ konfigurāciju kādā laika momentā $t \geq 0$ sauc kortežu $c_t = (w, s, p)$, kur w ir ieejas vārds, $s \in S$ ir pašreizējais stāvoklis, un $p = (p_1, \dots, p_k) \in \{0, \dots, |w| + 1\}^k$ norāda pašreizējās galviņu pozīcijas. Pāreju no vienas konfigurācijas uz nākamo apzīmē ar \vdash . Pāreja $(w, s, (p_1, \dots, p_k)) \vdash (w, s', (p_1 + d_1, \dots, p_k + d_k))$ notiek tad un tikai tad, ja $(d_1, \dots, d_k) \in \delta((a_{p_1}, \dots, a_{p_k}) s, s')$, kur $w = a_1 a_2 \dots a_n$ ir ieejas vārds, un $a_0 = \triangleright$, un $a_{n+1} = \triangleleft$. \vdash refleksīvais, tranzitīvais slēgums tiek apzīmēts ar \vdash^* .

Valodā $L(M)$, ko akceptē automāts M ietilpst tie un tikai tie vārdi, ko akceptē M . $2nfa(k)$ akceptē tos un tikai tos vārdus w , kam pastāv kāda konfigurāciju virkne, kas noved pie automāta apstāšanās akceptējošā stāvoklī, ja uz ieejas lentes ir $\triangleright w \triangleleft$. Jeb precīzāk -

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (w, s_0, (1, \dots, 1)) \vdash^* (w, s, (p_1, \dots, p_k)), s \in F, \\ \text{un } M \text{ apstājas } (w, s, (p_1, \dots, p_k))\}.$$

Ja δ katram izejošajam stāvoklim piekārtu ne vairāk kā vienu ieejošo stāvokli, tad saka, ka automāts ir determinēts ($2dfa(k)$). Ja automāta galviņas nevienā brīdī nepārvietojas pa kreisi, saka ka automāts ir vienvirziena. Nedeterminētus un determinētus vienvirziena galīgus k galviņu automātus apzīmē attiecīgi ar $1nfa(k)$ un $1dfa(k)$.

2.2 Attiecība pret klasiskajiem automātiem

Vienvirziena vairākgalviņu automātiem gan determinētā gan nedeterminētā gadījumā ir pierādītas stingri iekļaujošas klases valodām, ko automāts var atpazīt atkarībā no galviņu skaita [5, 6]. 1978. gadā Yao and Rivest [6] parādīja, ka, lai atdalītu valodu klasi, ko var atpazīt ar $1dfa(k)$, no tās, ko var atpazīt ar $1dfa(k+1)$, pietiek ar valodu

$$L_n = \{w_1 \$ w_2 \$ \dots \$ w_{2n} \mid w_i \in \{a, b\}^* \text{ un } w_i = w_{2n+1-i} \text{ visiem } 1 \leq i \leq n\}.$$

Mēs apskatīsim līdzīgu valodu – L_k .

Teorēma 1. Katram $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ eksistē valoda L_k , tāda ka:

- (1) katram $k \geq 1 \in \mathbb{N}$ eksistē $1u_pfa(1)$, kas atpazīst L_k ,
- (2) L_k nevar atpazīt ne ar kādu $1dfa(k)$,
- (3) L_k nevar atpazīt ne ar kādu $1nfa(k)$.

Pierādījums. Meklētā valoda ir

$$L_k = \left\{ w_1 1 w_2 1 \dots 1 w_{2n} \mid w_i \in \{0\}^m \wedge m \geq 1 \in \mathbb{N} \wedge w_i = w_{2n-i+1} \wedge n = \binom{k}{2} + 1 \right\}.$$

Tālāk tiks pierādīts, ka L_k apmierina teorēmas punktus.

(1) Tiks parādīts, kā patvaļīgai valodai L_k uzbūvēt $1u_pfa(1)$ katram pirmskaitlim p . Automāts, sāk darbu ar amplitūdu 1 n dažādos sākuma stāvokļos $q_{1,1,1}, q_{1,2,1}, \dots, q_{1,n,1}$. No katra no šiem stāvokļiem izies "zars", kas būs atbildīgs par amplitūdas krāšanu vienā no n dažādiem akceptējošajiem stāvokļiem $q_{2n,1,2}, q_{2n,2,2}, \dots, q_{2n,n,2}$. Katrā zarā būs divu veidu stāvokļi – 1. grupas stāvokļi $q_{i,j,1}$ būs atbildīgi par amplitūdu "ģenerēšanu" un 2. grupas stāvokļi $q_{i,j,2}$ – par amplitūdu "krāšanu", $i \in [1, 2n], j \in [1, n]$.

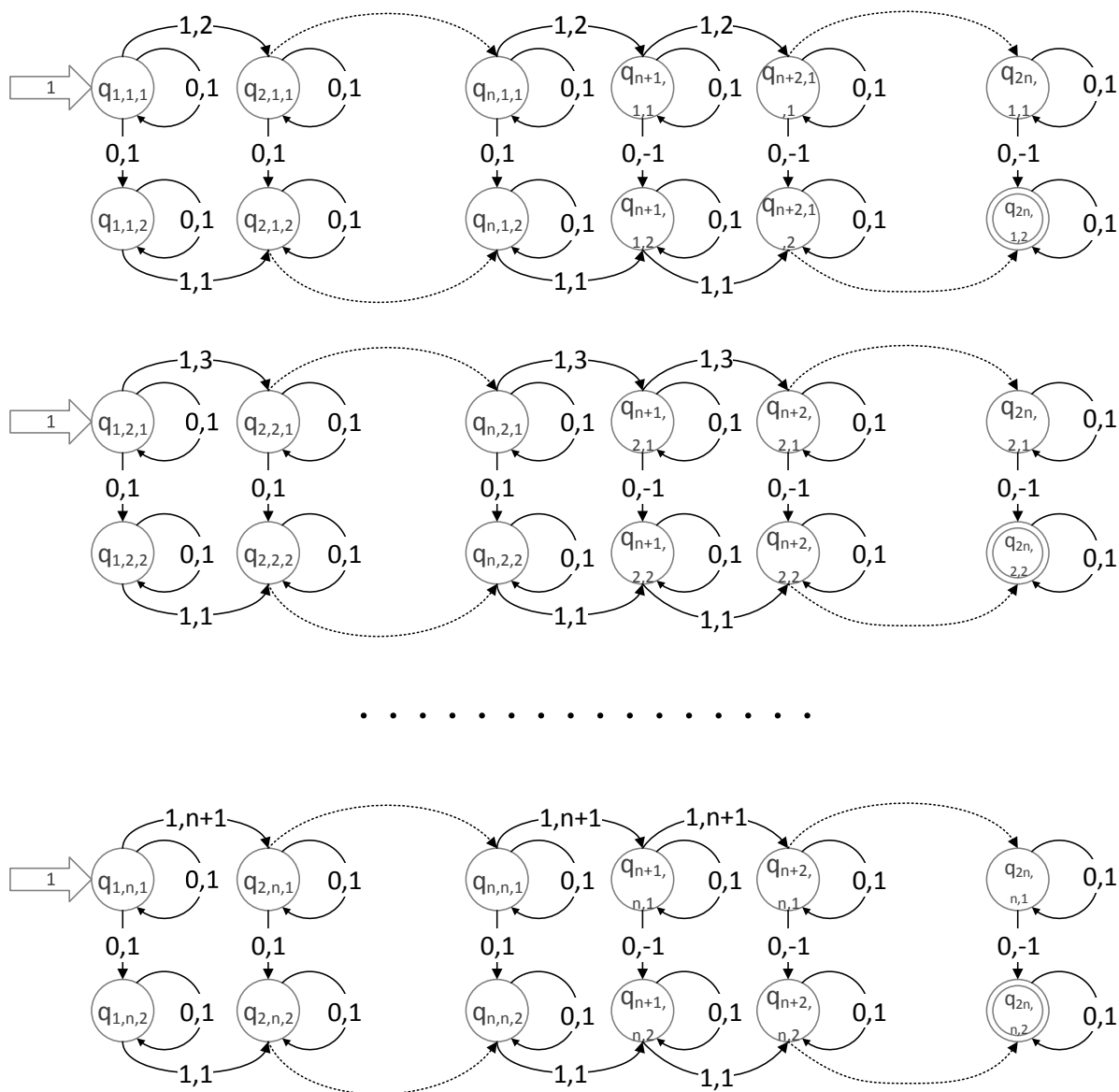
Ielasot 0, atrodoties kādā no pirmās grupas stāvokļiem $q_{i,j,1}$, kam $i \leq n$, stāvokļa amplitūda tiek saglabāta nemainīga, un ar amplitūdu 1 tiek pāriets uz 2. grupas stāvokli $q_{i,j,2}$, tādējādi sakrāto amplitūdu pieskaitot $q_{i,j,2}$. Ielasot 0, 2. grupas stāvokļos $q_{i,j,2}$ amplitūda tiek saglabāta nemainīga. Ielasot 1 1. grupas stāvoklī $q_{i,j,1}$, kam $i < n$, automāts ar amplitūdu $j + 1$ pāriet uz stāvokli $q_{i+1,j,1}$, tādējādi nonākot tur ar amplitūdu $(j + 1) \cdot |q_{i+1,j,1}|$ (ar $|q_i|$ apzīmējam stāvokļa q_i amplitūdu). Savukārt, ielasot 0 1. grupas stāvoklī $q_{i,j,1}$, kam $i > n$, stāvokļa amplitūda tiek saglabāta nemainīga, no $q_{i,j,2}$ tagad tiek pāriets ar amplitūdu -1 . Ielasot 1 1. grupas stāvoklī $q_{i,j,1}$, kam $i \geq n$, automāts uz stāvokli $q_{i+1,j,1}$ pāriet ar amplitūdu $-(j + 1)$. Ielasot 1 2. grupas stāvoklī ar amplitūdu 1 tiek pāriets no $q_{i,j,1}$ uz $q_{i+1,j,1}$. Izņēmums ir stāvokļi pēdējā kolonnā – $q_{2n,j,1}$ un $q_{2n,j,2}$ – tā kā tie atbild par vārda pēdējā fragmenta ielasīšanu, tad tiem pāreja, ielasot 1 netiek definēta. Automāta shēma redzama attēlā 2.1.

Rezultātā, ja tika ielasīts vārds $0^{a_1} 10^{a_2} 10^{a_3} 1 \dots 10^{a_{2n}}$, katrā no akceptējošajiem stāvokļiem $q_{2n,j,2}$ ir sakrājusies amplitūda

$$a_1 + a_2 \cdot (j + 1) + a_3 \cdot (j + 1)^2 + \dots + a_n \cdot (j + 1)^{n-1} - a_{n+1} \cdot (j + 1)^{n-1} - a_{n+2} \cdot (j + 1)^{n-2} - \dots - a_{2n},$$

kas ir vienāda ar 0, ja vārds pieder valodai; t.i., ja

$$a_1 = a_{2n} \wedge a_2 = a_{2n-1} \wedge \dots \wedge a_n = a_{n+1}.$$



2.1. att. Automāts $0^n 10^m 10^h 1 \dots 10^h 10^m 10^n$ atpazīšanai.

Iegūstam, ka vārds pieder valodai tad un tikai tad, ja ir apmierināta šāda vienādojumu sistēma:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 \cdot 2 + a_3 \cdot 2^2 + \dots + a_n \cdot 2^{n-1} - a_{n+1} \cdot 2^{n-1} - a_{n+2} \cdot 2^{n-2} - \dots - a_{2n} = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot 3 + a_3 \cdot 3^2 + \dots + a_n \cdot 3^{n-1} - a_{n+1} \cdot 3^{n-1} - a_{n+2} \cdot 3^{n-2} - \dots - a_{2n} = 0 \\ a_1 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 4^2 + \dots + a_n \cdot 4^{n-1} - a_{n+1} \cdot 4^{n-1} - a_{n+2} \cdot 4^{n-2} - \dots - a_{2n} = 0 \\ \dots \\ a_1 + a_2 \cdot (n+1) + a_3 \cdot (n+1)^2 + \dots + a_n \cdot (n+1)^{n-1} - a_{n+1} \cdot (n+1)^{n-1} \\ \quad - a_{n+2} \cdot (n+1)^{n-2} - \dots - a_{2n} = 0 \end{array} \right.$$

3 VIENVIRZIENA VAIRĀKU LENŠU AUTOMĀTI

3.1 Definīcijas

Lai gan izmantosim tikai 2 lenšu automātus, definēsim tos patvaļīgam skaitam lenšu.

Definīcija 4. p -ultrametrisks k lenšu automāts sastāv no galīga p -ultrametriska vadības bloka, un k galviņām, kas pozicionētas katra uz savas lentas, no kuras informāciju var nolasīt. Uz katras no lentām, automātam sākot darbu, atrodas ieejas vārds, un automāta galviņas atrodas to sākumos. Savas darbības laikā automāta vadības bloks veic pārejas ar noteiktam amplitūdām, norādot kādu simbolu ielasīšanai atbilst pāreja, un kuras no k galviņām rezultātā pārvietot uz priekšu. Visām galviņām sasniedzot vārda beigas, automātam atļauts izdarīt vēl pēdējo darbību, pēc kā tiek aprēķinātas akceptējošo stāvokļu amplitūdu p normas, un salīdzinātas pret noteikto sliekšni. Amplitūdu aprēķināšana automāta konfigurācijai notiek analogiski ultrametrisko automātu definīcijā norādītajai.

3.2 Valodu pāru atpazīšana

Pierādīsim no varbūtiskiem automātiem aizgūtu rezultātu 2 lenšu automātiem.

Teorēma 2. Valodu L_b , kas sastāv no vārdu pāriem $(0^m, 0^n 10^k)$ formā

$$L_b = \{(0^m, 0^n 10^k) \mid m = n = k \in \mathbb{N}\}$$

(1) var atpazīt ar 2 lenšu galīgu p -ultrametrisku automātu jebkuram pirmskaitlim $p \geq 3$,

(2) nevar atpazīt ar nekādu 2 lenšu galīgu nedeterminētu automātu.

Pierādījums. Pieņemsim, ka vārds $0^n 10^k$ ir novietots uz automāta pirmās lentes, un vārds 0^m – uz otrās.

(1) Pierādījuma ideja tiešā veidā seko no līdzīga rezultāta varbūtiskiem automātiem [14]. Būvēsim 2 lenšu galīgu p -ultrametrisku automātu, kas atpazīst L_b . Automāts ar vienādu amplitūdu 1 sāk darbu divos neatkarīgos zaros. Tālākā darbība katrā no zariem norit determinēti, veicot pārejas ar amplitūdu 1. Pirmajā zarā automāts uz katriem 3 vārda pirmās lentes simboliem pārvietojas 1 simbolu uz otrās lentes, līdz uz pirmās lentes sastop atdalītājsimbolu 1. Tālāk automāts uz katriem 3 pirmās lentes simboliem pārvietojas 2 simbolus uz otrās lentes. Ja abu lenšu galviņas nonāk vārda galā vienlaicīgi tad automāts ar amplitūdu $\frac{p}{2}$ pāriet uz akceptējošo stāvokli q_a , ja nē, tad akceptējošajā stāvoklī nonāk ar amplitūdu 1. Vienkāršības labad pieņemsim, ka pa abiem vārdiem var noiet ar veselu soļu skaitu. Ja to nevar izdarīt, tad automātam ir

jāatceras atlikums, kāds veidojas apstaigājot katru vārda daļu. Otrā zarā darbības notiek līdzīgi, tikai pretējā secībā – apstrādājot pirmo vārda daļu, uz pirmās lentes noejot 3 simbolus, uz otrās lentes pārvietojas 2, un apstrādājot otro vārda daļu – 1. Otrajā zarā ar analogisku nosacījumu pāriet uz akceptējošo stāvokli q_a .

Var redzēt, ka, lai abos zaros galviņas nonāktu galā vienlaicīgi, jātiek apmierinātai šādai vienādojumu sistēmai:

$$\begin{cases} \frac{n}{3} \cdot 1 + \frac{k}{3} \cdot 2 = m \\ \frac{n}{3} \cdot 2 + \frac{k}{3} \cdot 1 = m \end{cases}$$

pārrakstot

$$\begin{cases} n + 2 \cdot k = m \\ 2 \cdot n + k = m \end{cases}$$

iegūstam

$$n + 2 \cdot k = 2 \cdot n + k$$

$$n = k$$

$$k = m.$$

Tātad automāts no abiem zariem nonāk akceptējošajā stāvoklī ar amplitūdu $\frac{p}{2}$, kopā veidojot amplitūdu p , tad un tikai tad, ja vārds pieder valodai. Ja vārds nepieder valodai, tad amplitūda būs vai nu $\frac{p}{2} + 1$ vai 2. Tātad par akceptēšanas sliekšni varam izvēlēties $\frac{1}{p}$, un varam teikt, ka vārdu pāris pieder valodai, ja $|q_a|_p \leq \frac{1}{p}$, un nepieder, ja pretēji.

(2) Pierādījis Freivalds [14]. □

Lai arī pierādījums viegli seko no līdzīga rezultāta varbūtiskajā gadījumā, kas parādīts [14], uzrādītajam ultrametriskajam automātam piemīt interesanta īpašība – tas atbilst Freivalda [1] ieviestajai regulēto integrālo automātu definīcijai, kas ir analogs automātiem ar izolētu šķēluma punktu varbūtiskajā gadījumā. Balodis et al. [2] ir parādījis, ka vienvirziena vienas galviņas regulēti automāti akceptē regulārās valodas. Tomēr, kā redzams augstāk minētajā teorēmā, valodu L_b nevar atpazīt ar nedeterminētu divu lenšu automātu, tātad tā nav regulāra. Šis rezultāts sasaucas ar tādiem pašiem novērojumiem varbūtiskajiem automātiem [14, 15].

4 DIVVIRZIENU AUTOMĀTI

4.1 Definīcijas

Ultrametrisku vairākgalviņu galīgu automātu definīcija tiek iegūta visdabiskākajā veidā paplašinot [2] ieviesto ultrametrisko automātu definīciju. Par pamatu tiek ņemta arī [5] ieviestā vairākgalviņu automātu definīcija.

Definīcija 5. Par galīgu k -galviņu divvirzienu p -ultrametrisku automātu ($2u_pfa(k)$) tiek saukts kortežs $\langle S, \Sigma, k, s_0, \delta, F, \Lambda \rangle$, kur

- S ir galīga stāvokļu kopa,
- Σ ir galīga kopa, $(\triangleright, \triangleleft \notin \Sigma)$ – ieejas alfabēts,
- $k \geq 1$ ir galviņu skaits,
- $s_0 : S \rightarrow \mathbb{Q}_p$ ir sākotnējais amplitūdu sadalījums,
- $\delta : (\Sigma \cup \{\triangleright, \triangleleft\})^k \times S \times S \rightarrow \mathbb{Q}_p \times \{-1, 0, 1\}^k$ ir pārejas funkcija, kur \triangleright un \triangleleft ir vārda sākumu un beigas atdalošie simboli,
- $F \subseteq S$ ir akceptējošo stāvokļu kopa,
- $\Lambda = (\lambda, \diamond)$ ir akceptēšanas nosacījums, kur $\lambda \in \mathbb{R}$ ir akceptēšanas sliekšnis, un $\diamond \in \{\leq, \geq\}$.

$2u_pfa(k)$ darbojas līdzīgi, kā u_pfa , ar to izņēmumu, ka automātam tagad ir k galviņas, un tās var kustēties abos virzienos līdzīgi kā $2nfa(k)$. Atšķirībā no u_pfa tagad amplitūdas tiek norādītas stāvokļa un galviņu pozīcijas pārim. Amplitūda ar kādu automāts atrodas stāvoklī $y \in S$ ar galviņām pozīcijās $(p_1, \dots, p_k) \in \{0, \dots, |w| + 1\}^k$ pēc i -tās darbības veikšanas tiek apzīmēta ar

$$s_i(y, (p_1, \dots, p_k)) = \sum_{\substack{x \in S \wedge \\ \exists (p'_1, \dots, p'_k) : (p'_1, \dots, p'_k) + \delta((w_{p'_1}, \dots, w_{p'_k}), x, y)_2 = (p_1, \dots, p_k)}} s_{i-1}(x) \cdot \delta((w_{p'_1}, \dots, w_{p'_k}), x, y)_1$$

Līdzīgi kā iepriekš, automātam beidzot darbu, akceptēšanas nosacījums tiek piemērots akceptējošo stāvokļu beigu beigu amplitūdu p -normu summai. Tas ir, ja

$$\sum_{x \in F \wedge} |s_{n+1}(x, (p_1, \dots, p_k))|_p \diamond \lambda$$

$\exists (p_1, \dots, p_k)$: automāts beidz darbu stāvoklī x ar galviņām pozīcijās (p_1, \dots, p_k)

, tad saka, ka vārds w tiek akceptēts, citādi – noraidīts.

Ultrametriskas Tjūringa mašīnas darbā tiks izmantotas, lai pierādītu rezultātus vairākgalviņu automātu sadalījumam hierarhijas klasēs.

Ultrametriskas Tjūringa mašīnas definīcija tiek iegūta dabiskā veida paplašinot J. Hopcroft un J. Ullman [16] 1979. gadā ieviesto definīciju. Ērtības labad definēsim mašīnu ar vairākām darba lentēm.

Definīcija 6. Par p -ultrametrisku Tjūringa mašīnu ar k darba lentēm ($U_pTM(k)$) sauc kortežu $M = \langle Q, \Sigma, b, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, kur:

- Q ir galīga netukša stāvokļu kopa,
- Σ ir galīga netukša kopa – darba alfabēts,
- $b \in \Sigma$ ir "tukšais" simbols (drīkst atrasties uz lentes neierobežoti daudz eksemplāros),
- $\Sigma \subseteq \Sigma \setminus \{b\}$ ieejas alfabēts,
- $q_0 \in Q_p$ ir sākotnējais amplitūdu sadalījums,
- $F \subseteq Q$ ir akceptējošo stāvokļu kopa.
- $\delta : Q \setminus F \times \Sigma^k \rightarrow Q \times (\Sigma \times \{L, N, R\} \times \mathbb{Q}_p)^k$ ir daļēji definēta pārejas funkcija, kur L apzīmē mašīnas galviņas pabīdīšanu pa kreisi, R – pabīdīšanu pa labi, un N norāda, ka mašīnas galviņa netiek pārvietota, un \mathbb{Q}_p ir amplitūda, ar kādu tiek veikta pāreja.

Līdzīgi kā ultrametrisku vairākgalviņu automātu gadījumā mašīna ar noteiktu amplitūdu atrodas kāda no tās iespējamajām konfigurācijām, bet tagad konfigurācija iekļauj vadības bloka stāvokli un visu k lenšu saturu. Amplitūda, ar kādu mašīna i -tajā solī atrodas kāda konfigurācijā tiek aprēķināta analogi tam, kā norādīts ultrametrisko vairākgalviņu automātu gadījumā. Darba robežās, sakot, ka Tjūringa mašīna akceptē vārdu, mēs sapratīsim, ka mašīna apstājas vadības bloka akceptējoša stāvoklī. Līdz ar to, vārda akceptēšanai var izvirzīt analogiskus nosacījumus kā ultrametriskiem vairākgalviņu automātiem (jāievēro tikai, ka tagad automāta konfigurācijā ietilpst arī no lentes saturs, un amplitūda tiek piekārtota tam kombinācijā ar vadības bloka stāvokli).

Ultrametriski vairāku reģistru automāti arī tiks izmantoti kā starpposms pierādījumos.

Definīcija 7. Galīgs p -ultrametriskais k reģistru automāts (turpmāk arī mašīna) ($2u_pra(k)$) sastāv no vadības bloka ar ultrametriskām pārejām, un k reģistriem, kas satur naturālus skaitļus.

Automāts sāk darbu ar ieejas vārdu pirmajā reģistrā, un ar amplitūdu, kas atbilst sākotnējamam amplitūdu sadalījumam, kāda no vadības bloka stāvokļiem. Katram no reģistriem var tikt pielietots predikāts $\stackrel{?}{=} 0$ un operācija $+1$ vai -1 . Katrai vadības bloka pārejai var tikt norādīts predikāts vai operācija, kas izpildās veicot pāreju, kā arī amplitūda. Vārda akceptēšanas kritēriji ir analogi ultrametrisko automātu definīcijā izmantotajiem.

4.2 Ultrametriska automāta simulācija

Nākamās nodaļas pierādījumos tiks izmantota iespēja ultrametrisku vairākgalviņu automātu simulēt ar ultrametrisku Tjūringa mašīnu. Šeit tiks parādīti vispārīgie principi, kas ir šādas simulācijas pamatā, izmantotās idejas ir līdzīgas kā [8] varbūtisko automātu gadījumā.

Vienkāršības labad var pieņemt, ka simulējamajam automātam no katra stāvokļa iziet ne vairāk kā 2 pārejas. Tiks aprakstīts veids, kā veidot p -ultrametrisku 2 lenšu Tjūringa mašīnu, kas, ieejā saņemot p -ultrametriska k galviņu automāta aprakstu, akceptē tos un tikai tos vārdus, ko simulējamais automāts. Tā kā turpmākajā darbā šādas simulācijas nepieciešamība tiks apskatīta tikai darbojoties ar vārdiem viena burta alfabētā, tad tiks parādīts veids, kā automāta aprakstu uzdot izmantojot viena burta alfabētu; konkrētāk – vārdus formā 1^{2^n} , $n \in \mathbb{N}$. Vēl tiek prasīts, lai simulējamā automāta amplitūdas būtu \log -space p -konstruējamas skaitļu kopas.

Definīcija 8. Par \log -space p -konstruējamu skaitļu kopu sauksim tādu kopu, kam eksistē p -ultrametriska Tjūringa mašīna ar \log -space telpas sarežģītību, kas, saņemot ieejā kaut kādu skaitļa, kas pieder kopai, ”aprakstu”, spēj nonākt kādā īpaši atzīmētā stāvoklī ar amplitūdu, kas atbilst ”aprakstam”.

Zemāk tiks parādīts, ka šāda ultrametriska Tjūringa mašīna pastāv amplitūdām racionālos skaitļos binārajā pierakstā.

p -ultrametriska galīga k galviņu automāta aprakstu var uzdot ar bināru virkni, pēc kārtas norādot:

- automāta stāvokļu skaitu,
- galviņu skaitu,
- pārejas starp stāvokļiem un to amplitūdas

Simulācija tiek realizēta šādi. p -ultrametriska galīga k galviņu automāta ar pāreju amplitūdām no \log -space p -konstruējamas kopas, saukta par A , simulēšanai tiek veidota p -ultrametriska 2 lenšu Tjūringa mašīna, saukta par T . T uz ieejas lentes tiek padots A apraksts viena burta alfabētā formā 1^{2^n} , $n \in \mathbb{N}$. Sākot darbu T ielasa ieejas vārdu un determinēti, pārejas veicot ar

amplitūdu 1, sagatavo 2. lentu, tur ierakstot skaitli n binārā pierakstā. n ir simulējamā automāta A apraksts. Tiek arī izdalīta vieta apjomā $O(k \cdot n)$ k skaitītājiem, kas norādīs A galviņu pozīcijas. Tālākajā simulācijas gaitā tiks izmantota tikai 2. lente (lai arī rakstīšanai var izmantot abas lentes, ērtībai sauksim 2. lenti par darba lenti).

Atceramies, ka A savas darbības laikā iziet cauri vairāku konfigurāciju virknei, un katrā laika momentā A var "paralēli" būt vairākās konfigurācijās ar dažādām amplitūdām. Ja A atrodas kāda konfigurācijā ar amplitūdu a , tad T to simulēs, ar atbilstošu amplitūdu atrodoties konfigurācijā, kur darba lentes saturs atbilst attiecīgajai A konfigurācijai.

Lai parādītu, ka T var šādā veidā simulēt A , jāparāda, ka T ir spējīgs veikt katru A pāreju. Parādīsim, ka, ja A ir pāreja no q_1 uz q_2 ar amplitūdu a_1 (pieņemsim, ka tā ir apzīmēta ar numuru i) un pāreja no q_1 uz q_3 ar amplitūdu a_2 (pieņemsim, ka tā ir apzīmēta ar numuru j), tad T atrodoties q_1 atbilstošajā konfigurācijā var "paralēli" veikt pārejas uz q_2 un q_3 atbilstošajām konfigurācijām ar attiecīgajām amplitūdām. Tas tiek darīts, U sazarojoties un abos gadījumos ar amplitūdu 1 īpašā vietā uz lentes ierakstot vai nu skaitli i vai j , kas attiecīgi atbilst pirmajai un otrajai A pārejai. Ierakstīšana tiek veikta determinēti, pārejas veicot ar amplitūdu 1. Tālāk tiek darbināta apakšprogramma, kas ierakstītajam skaitlim atbilstošu amplitūdu a_1 vai a_2 ielasa īpašā stāvoklī q_u (tā kā tika uzstādīta prasība, ka ir no \log -space p -konstruējamas kopas, tad šāda apakšprogramma eksistē). Tālāk no stāvokļa q_u tiek pāriets uz bloku, kas darba lenti izmaina atbilstoši pārejai, kas atbilst uz lentes ierakstītajam skaitlim (tas tiek darīts determinēti, pārejas veicot ar amplitūdu 1). Tā kā vienīgā pāreja, kas ir atšķirīga no 1, tiek veikta, pārejot no q_u , tad darbības beigās uz U darba lentes ar amplitūdu $1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot a_1 = a_1$ ir ieraksts, kas atbilst A konfigurācijai pēc pārejas i izdarīšanas, un ar amplitūdu $1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot a_2 = a_2$ – ieraksts, kas atbilst A konfigurācijai pēc pārejas j izdarīšanas.

Teorēma 3. *Racionālie skaitļi veido \log -space p -konstruējamu kopu.*

Pierādījums. Parādīsim, ka jebkuram pirmskaitlim p eksistē p -ultrametriska vienas lentes Tjūringa mašīna, kas ieejā saņemot racionāla skaitļa a pierakstu binārā formā, savas darbības beigās nonāk īpašā stāvoklī q_u ar amplitūdu a .

Skaitlis a uz lentes tiks padots formā

$$\triangleright a_n a_{n-1} \cdots a_1 \cdot a_0 | a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m} \triangleleft,$$

kur

$$\sum_{i=-m}^n a_i \cdot 2^i = a \quad (| \text{ ir atdalītājsimbols}).$$

Mašīna sākotnēji, ignorējot atdalītājsimbolu, cikliski no skaitļa $a \cdot 2^m$ atņem 1, katru reizi to izdarot, palielinot q_u amplitūdu par 1. Kad uz lentas atrodas vairs tikai

$$00 \dots 0 | 00 \dots 0,$$

mašīna q_u sakrāto amplitūdu izdala ar 2^m . \rightarrow_i norāda, ka pāreja tiek veikta ar amplitūdu i .

Tjūringa mašīnas programmas teksts:

Atņem 1 no a

$$q_0 \triangleleft \rightarrow_1 q_1 \triangleleft L$$

$$q_1 0 \rightarrow_1 q_1 1 L$$

$$q_1 1 \rightarrow_1 q_2 0 R$$

$$q_1 | \rightarrow_1 q_1 | L$$

Iet atpakaļ uz a sākumu

$$q_2 0 \rightarrow_1 q_2 0 R$$

$$q_2 1 \rightarrow_1 q_2 1 R$$

$$q_2 | \rightarrow_1 q_2 | R$$

$$q_2 \triangleleft \rightarrow_1 q_1 \triangleleft L$$

Palielina īpašā stavokļa amplitūdu par 1

$$q_2 \triangleleft \rightarrow_1 q'_u \triangleleft L$$

Atrodas a sākumā, jo tas jau ir 0

$$q_1 \triangleright \rightarrow_1 q_3 \triangleright R$$

Nodzēs pēdejā gājienā kļūdaini sarakstīto

$$q_3 0 \rightarrow_1 q_3 0 R$$

$$q_3 1 \rightarrow_1 q_3 1 R$$

$$q_3 | \rightarrow_1 q_3 | R$$

Dala īpašā stāvokļa amplitūdu, atbilstoši ciparu skaitam aiz komata

$$q_3 \triangleleft \rightarrow_1 q'_u \triangleleft L$$

$$q'_u 0 \rightarrow_{\frac{1}{2}} q'_u 0 L$$

$$q'_u 1 \rightarrow_{\frac{1}{2}} q'_u 1 L$$

Iet uz a sākumu

$$q'_u | \rightarrow_1 q_u | R$$

$$q_u 0 \rightarrow_1 q_u 0 R$$

$$q_u 1 \rightarrow_1 q_u 1 R$$

Var redzēt, ka algoritms nav atkarīgs no p . □

4.3 Vairākgalviņu automāti

Monien [7] ir parādījis, ka galīgiem determinētiem un nedeterminētiem automātiem valodu klase, ko var atpazīt, izmantojot k galviņas, stingri iekļaujas valodu klasē, ko var atpazīt ar $k + 1$ galviņu. Vēlāk, izmantojot līdzīgas metodes, Macarie [8] pierādīja atbilstošos rezultātus arī galīgiem varbūtiskiem automātiem. Tālāk tiks pierādīts, ka tādi paši rezultāti ir spēkā arī ultrametriskiem automātiem.

Teorēma 4. *Katram naturālam skaitlim k un pirmskaitlim p izpildās*

$$U_p \widehat{FA}(k) \subsetneq U_p \widehat{TM}.$$

Pierādījums. Veidosim īpašu p -ultrametrisku Tjūringa mašīnu ar 2 lentēm, un ar \log -space telpas sarežģītību, sauktu par T , un parādīsim, ka tās atpazītā valoda nevar tikt atpazīta ar nevienu p -ultrametrisku automātu ar k galviņām (visiem k).

Līdzīgi kā parādīts nodaļas sākumā, T veidosim tā, ka tā simulē ieejā saņemtu $u_p fa(k)$, sauktu par A . Atšķirībā no apraksta, A "aprakstā" tieša veidā netiek iekļauts ieejas vārds, ko A apstrādā. Tā vietā A tiks darbināts uz ieejas virknes, t.i. – uz sava "apraksta".

Precīzāk – T uz 1. lentes atrodas vārds 1^m , $m \in \mathbb{N}$, T pārbauda, vai tas ir formā 1^{2^n} , $n \in \mathbb{N}$ (vārdu noraida, ja tas neatbilst) un uz 2. lentes (sauksim par darba lenti) uzraksta n binārā pierakstā, aizņemot $O(\log(n))$ vietas. Tiek pārbaudīts, vai n pieraksts sintaktiski atbilst kādam $u_p fa(k)$; vārdu noraida, ja tas neatbilst. Tālāk T uz darba lentes tiek izdalīta vieta k skaitītājiem, kas norādīs A galviņu pozīcijas uz ieejas vārda. Tā kā vērtības var būt robežās $[0, \dots, 1^{2^n}]$, tad tam tiek patērēts $O(k \cdot \log(2^n)) \sim O(k \cdot n)$ vietas. Tas tiek darīts determinēti, pārejas veicot ar amplitūdu 1. Tālāk T darbina uz ieejas virknes kā parādīts nodaļas sākumā (1. lentes galviņa vairs netiek kustināta, tiek pārbaudīts, vai galviņām atbilstošie skaitītāji ir vārda robežās, vai nē). Rezultātā T ar attiecīgajām amplitūdām ir nonācis visās iespējamajās konfigurācijās, kur A var nonākt apstrādājot vārdu. Tālāk T skatās, vai darba lentes saturs liecina, ka A ir nonācis

akceptējošā stāvoklī, un vārdu noraida, ja A ir akceptējošā stāvoklī, un akceptē, ja A nav nonācis akceptējošā stāvoklī. Tādējādi T ar tādu pašu amplitūdu kā A , dod pretēju rezultātu.

Apskatīsim valodu $L(T)$, ko akceptē T . Ir skaidri redzams, ka katram $u_pfa(k)$, ko apzīmēsim ar J , eksistē tāds vārds, kas pieder $L(T)$, bet nepieder $L(J)$, vai nepieder $L(T)$, bet pieder $L(J) - J$ apraksts. \square

Tāpat kā [8] un [7] tiks izmantota funkcija

$$f_k : \{1^{2^n} | n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \{1^{2^n} | n \in \mathbb{N}\}, \text{ kur } f_k(1^{2^n}) = 1^{2^{k \cdot n}}$$

Lemma 5. *Katrai valodai $L \in \widehat{U_pTM}$ eksistē naturāls skaitlis u , tāds ka*

$$f_u(L) \in \widehat{U_pFA(3)}.$$

Pierādījums. Parādīsim, kā u_ptm , sauktu par T , kas atpazīst L , pārveidot par citu u_ptm , sauktu par T' , ko iespējams aizstāt ar p -ultrametrisku 3 reģistru mašīnu, no kā viegli seko, ka eksistē $u_pfa(k)$, kas atpazīst ar f_u "izstiepto" L variantu.

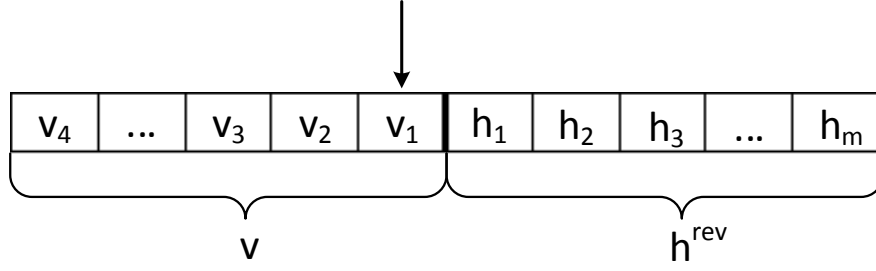
Veidosim T' , kas simulēt T . T' uz darba lentes glabās šādu informāciju:

- ieejas vārda bināru reprezentāciju,
- T 1. lentes galviņas pozīciju (sauksim par ieejas lenti),
- T 2. lentes saturu (sauksim par darba lenti) (aizņem $O(\log n)$ vietas),
- T darba lentes galviņas pozīciju.

Uz T' darba lentes T simulēšanu veikt ir vienkāršāk nekā ultrametrisko automātu gadījumā, jo T' var izmantot oriģinālo T vadības bloku, un pārejas nav jāsimulē uz lentes. T simulācijā T' izmanto tikai darba lenti.

Var redzēt, ka var uzbūvēt T' atbilstošu p -ultrametrisku 3 reģistru mašīnu. Ja ieejas vārds ir 1^{2^n} , tad mašīna sāk darbu ar n bināro reprezentāciju pirmajā reģistrā un ar 0 pārējos. Var pārliecināties, ka izmantojot pirmos divus reģistrus, kuros darbības laikā atrodas skaitļi v un h^{rev} , un trešo reģistru kā palīgmainīgo, iespējams simulēt T' darba lenti. Lai to panāktu tiek izmantota iespēja reģistriem pieskaitīt un atņemt 1, un tos saturu reizināt un dalīt ar 2, ko palīdz realizēt trešais – papildus reģistrs. Tas shematiski parādīts attēlā 4.1.

Tā kā vairākgalviņu automāta galviņas pozīcija tiešā veidā atbilst skaitlim reģistrā, un simulējamā Tjūringa mašīna ir ar \log -space telpas sarežģītību, tad 3 reģistru mašīnu var aizstāt ar p -ultrametrisku galīgu 3 galviņu automātu. Tomēr, tā kā vairākgalviņu automāta galviņas nedrīkst iziet ārpus lentes robežām, tad tas nevar simulēt patvaļīgi lielus skaitītājus. To, ka ieejas



4.1. att. Tjūringa mašīnas lentes satura simulēšana ar reģistriem.

vārdi ir pietiekami gari, lai automāts simulētu T' darba lentes saturu, nodrošina piemeklējot pietiekami lielu u . \square

Lemma 6. Visām valodām $L \in \widehat{U_p TM}$ un visiem $u, v \geq 1, u, v \in \mathbb{N}$ izpildās

$$f_u(L) \in \widehat{U_p FA}(v) \Rightarrow L \in \widehat{U_p FA}(u \cdot v).$$

Pierādījums. Premisā minēto $u_p fa(v)$ sauksim par A , un sekās minēto $u_p fa(u \cdot v)$ – par A' . Apskatīsim A darbību, ja ieejā saņemts vārds $f_u(l), l = 1^{2^n} \in L, n \in \mathbb{N}$. Pozīciju uz ieejas vārda katrai no automāta A v galviņām var aprakstīt naturālu ar skaitli robežās $[0, 2^{u \cdot n} - 1]$. Šo skaitli var arī izteikt ar u cipariem pie bāzes 2^n . Tā kā katras A' galviņas pozīciju uz ieejas vārda varam aprakstīt ar ciparu pie bāzes 2^n , tad katru no A galviņām var simulēt ar u A' galviņām. Tā kā katrai A galviņas kustībai atbilst kāda A' galviņas kustība, tad atbilstošās pārejas var veikt ar vienādām amplitūdām, un vārdu akceptēšanas amplitūdas saglabājas.

Šī simulācija notiek līdzīgi kā varbūtiskajā [8] un determinētajā gadījumā [7]. \square

Lemma 7. Visām valodām $L \in \widehat{U_p TM}$ un visiem $u > v > 1, u, v \in \mathbb{N}$ izpildās

$$f_{u+1}(L) \in \widehat{U_p FA}(v) \Rightarrow f_u(L) \in \widehat{U_p FA}(v+1).$$

Pierādījums. Premisā minēto $u_p fa(v)$ sauksim par A , un sekās minēto $u_p fa(v+1)$ – par A' . Apskatīsim A darbību, ja ieejā saņemts vārds $f_{u+1}(l), l = 1^{2^n} \in L, n \in \mathbb{N}$. Pozīciju uz lentes katrai no automāta A v galviņām var aprakstīt naturālu ar skaitli h_i robežās $h_i \in [0, 2^{(u+1) \cdot n} + 1]$. Simulēsim h_i pozīciju automātā A' ar galviņu g_i un papildus skaitli $x_i \in [0, 2^n]$, tā, ka $h_i = g_i + x_i \cdot 2^{u \cdot n}$. Var redzēt, ka šādi var aprakstīt skaitļus vajadzīgajā intervālā

$$\begin{aligned} 2^{u \cdot n} + (2^n - 1) \cdot 2^{u \cdot n} &= \\ 2^{u \cdot n} \cdot (1 + (2^n - 1)) &= \\ 2^{u \cdot n + n} &= \\ 2^{(u+1) \cdot n}. & \end{aligned}$$

Visi skaitā v nepieciešamie x_i tiek kodēti ar A' ($v+1$)-mo galviņu to dara līdzīgi kā [7]. To var panākt, ja uz A' lentes ir pietiekami daudz vietas, t.i., ja $(2^n)^v < 2^{u \cdot n}$, no kā seko prasība $v < u$.

Tā kā katrai A galviņas kustībai atbilst kāda A' galviņas kustība, tad atbilstošās pārejas var veikt ar vienādām amplitūdām, un vārdu akceptēšanas amplitūdas saglabājas.

Šīs simulācija notiek līdzīgi kā varbūtiskajā [8] un nedeterminētajā [7] gadījumā. \square

Rezultāts par $k+1$ galviņas pārkumu pār k viegli seko no iepriekšējām lemmām un teorēmas 4.

Teorēma 8. *Visiem $k \geq 2 \in \mathbb{N}$ izpildās*

$$U_p \widehat{FA}(k) \subsetneq U_p \widehat{FA}(k+1).$$

Pierādījums. Pierādām no pretējā, parādot, ka no pieņēmuma, ka eksistē tāds $h \geq 2$, kam $U_p \widehat{FA}(h) = U_p \widehat{FA}(h+1)$ seko, $U_p \widehat{FA}(h \cdot (h+1)) = \widehat{UTM}$, kas ir pretrunā ar teorēmu 4.

Ņemam kādu $L \in \widehat{UTM}$ kādam pirmskaitlim p . No lemmas 5 seko, ka eksistē tāds $m \in \mathbb{N}$, ka $f_m(L) \in U_p \widehat{FA}(3)$. Tātad arī $f_m(L) \in U_p \widehat{FA}(h)$. No lemmas 7 seko, ka, ja $m > h+1$ tad $f_{m-1}(L) \in U_p \widehat{FA}(h+1) = U_p \widehat{FA}(h)$. Ņemam $m = m-1$, un atkārtojam, līdz nonākam pie $f_m(L) \in U_p \widehat{FA}(h)$ un $m = h+1$. Tad no lemmas 6 seko, ka, ja $f_m(L) \in U_p \widehat{FA}(h)$, tad $L \in U_p \widehat{FA}(h \cdot m) = U_p \widehat{FA}(h \cdot (h+1))$. Kas ir pretrunā ar teorēmu 4. \square

Sekas 9. *Tā kā $U_p \widehat{FA}(k+1)$ sevī iekļauj $U_p \widehat{FA}(k)$, un tikko tika parādīts, ka eksistē tāda valoda, ko var atpazīt ar $k+1$ galviņu, bet nevar ar k , tad galviņu hierarhijas rezultāts ir spēkā arī valodām vairāku burtu alfabētā:*

$$U_p \widehat{FA}(k) \subsetneq U_p \widehat{FA}(k+1).$$

5 REZULTĀTI

Darbā ultrametriskiem galīgiem vairakgalviņu automātiem ir sekmīgi pierādīti rezultāti, kas ir analogiski tiem, kas literatūrā sastopami determinētiem, nedeterminētiem varbūtiskiem automātiem. Tiek stingri nošķirtas valodu klases, ko var atpazīt ar divvirzienu galīgiem k galviņu ultrametriskiem automātiem, no tām, ko var atpazīt, izmantojot $k + 1$ galviņu. Turklāt tiek arī ieviesta definīcija ultrametriskiem vairāku reģistru automātiem, kas tāpat kā ultrametriskas Tjūringa mašīnas tiek izmantota, kā starpposms galviņu hierarhijas rezultātu pierādīšanai.

Vienvirziena galīgiem ultrametriskiem automātiem ar vienu galviņu ir pierādīti rezultāti, kas parāda to pārākumu attiecībā pret determinētiem un nedeterminētiem automātiem ar k galviņām. Līdzīgs sasniegums pastāv arī varbūtiskiem automātiem, lai arī literatūrā atrodami tikai rezultāti varbūtiskiem 2 galviņu galīgiem automātiem.

Vienvirziena galīgiem ultrametriskiem automātiem ar vairākām lentām ir pierādīts analogs rezultāts varbūtisko automātu gadījumam – ir parādīts ultrametrisks automāts ar izolēta šķēluma punkta analogu varbūtiskiem automātiem, kas atpazīst valodu, kas nav regulāra, gadījumā kad tiek pieļautas atkāpēs no vienvirziena, vienas galviņas modeļa.

6 SECINĀJUMI

Darbā ir radīts pamats turpmākiem dziļākiem pētījumiem divvirzienu ultrametrisku automātu galviņu hierarhijas jautājumā, kā arī ir pamats turpināt pētīt vienvirziena ultrametriskus automātus, jo tiem netika sasniegti analogiski rezultāti. Vairāk uzmanības ir arī jāpievērš ieviestajai p -ultrametriski *log-space* konstruējamu kopu definīcijai, jo tā tiek izmantota kā būtisks elements ultrametrisku automātu simulācijā ar ultrametriskas Tjūringa mašīnas palīdzību. Darbā tika parādīts tikai tas, ka šādi konstruējama ir racionālo skaitļu kopa, lai gan interesi raisa arī citu skaitļu, piemēram, p -adisku veselu skaitļu, izmantošana par amplitūdām simulējamā automāta pārejās.

Pierādītie rezultāti pozitīvi atsaucas uz ultrametrisko automātu definīciju, kas ieviesta ir salīdzinoši neseno, pierādot īpašības, ko varētu sagaidīt, apskatot rezultātus klasiskajiem automātiem.

Autors uzskata, ka ir panākti nozīmīgi rezultāti galviņu hierarhijas jautājumos vairākgalviņu ultrametriskiem automātiem, tos nostādot klasisko automātu kontekstā, un paverot iespējas tālākiem pētījumiem.

Literatūra

- [1] Rūsiņš Freivalds. “Ultrametric automata and Turing machines”. In: *Turing-100*. Ed. by Andrei Voronkov. Vol. 10. EPiC Series. EasyChair, 2012, pp. 98–112.
- [2] Kaspars Balodis et al. “On the State Complexity of Ultrametric Finite Automata”. In: *SOFSEM 2013: Theory and Practice of Computer Science*. Vol. 2. 2013, pp. 1–9.
- [3] Rihards Krišlauks et al. “Ultrametric Turing Machines with Limited Reversal Complexity”. In: *SOFSEM 2013: Theory and Practice of Computer Science*. Vol. 2. 2013, pp. 87–94.
- [4] Paavo Turakainen. “Generalized Automata and Stochastic Languages”. In: *Proceedings of The American Mathematical Society* 21 (2 1969), pp. 303–309. DOI: 10.2307/2036989.
- [5] Markus Holzer, Martin Kutrib, and Andreas Malcher. “Multi-Head Finite Automata: Characterizations, Concepts and Open Problems”. In: *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* 1 (June 2009), pp. 93–107. DOI: 10.4204/EPTCS.1.9.
- [6] Andrew C. Yao and Ronald L. Rivest. “ $k + 1$ Heads Are Better than k ”. In: vol. 25. 2. New York, NY, USA: ACM, Apr. 1978, pp. 337–340. DOI: 10.1145/322063.322076.
- [7] Burkhard Monien. “Two-Way Multihead Automata Over a One-Letter Alphabet”. In: *ITA* 14.1 (1980), pp. 67–82.
- [8] IoanI. Macarie. “Multihead two-way probabilistic finite automata”. In: *LATIN '95: Theoretical Informatics*. Ed. by Ricardo Baeza-Yates, Eric Goles, and Patricio V. Pobleto. Vol. 911. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1995, pp. 371–385. ISBN: 978-3-540-59175-7. DOI: 10.1007/3-540-59175-3_103.
- [9] David A. Madore. *A first introduction to p-adic numbers*. URL: <http://www.madore.org/~david/math/padics.pdf>.
- [10] I. V. Volovich V. S. Vladimirov and E. I. Zelenov. “p-Adic Analysis and Mathematical Physics.” In: *World Scientific* (1995).
- [11] Sergey V. Kozyrev. “Ultrametric analysis and interbasin kinetics”. In: American Institute of Physics, 2006, pp. 121–128.

- [12] Branko Dragovich Dragovich and Alexandra. “A p-adic model of dna sequence and genetic code.” In: *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications* (2009), 1(1):34–41.
- [13] Rūsiņš Freivalds. “Вычисления на вероятностных машинах с ограниченными ресурсами”. PhD thesis. 1982.
- [14] Rūsiņš Mārtiņš Freivalds. “Language recognition using finite probabilistic multitape and multihead automata”. In: *Problemy Peredachi Informatsii* 15.3 (1979), pp. 99–106.
- [15] Rūsiņš Freivalds. “Probabilistic two-way machines”. In: *Mathematical Foundations of Computer Science 1981*. Ed. by Jozef Gruska and Michal Chytil. Vol. 118. Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin Heidelberg, 1981, pp. 33–45. ISBN: 978-3-540-10856-6. DOI: 10.1007/3-540-10856-4_72.
- [16] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Addison-Wesley, 1979. ISBN: 0-201-02988-X.

Bakalaura darbs "Ultrametriski automāti" izstrādāts LU Datorikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Rihards Krišlauks

(paraksts) (datums)

Rekomendēju / nerekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Prof., Dr. habil. math. Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

(paraksts) (datums)

Recenzents: Juris Vīksna profesors Dr.sc.comp.

(paraksts) (datums)

Darbs iesniegts _____

(datums)

Dekāna pilnvarotā persona: _____

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____.

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: _____

(Vārds, Uzvārds)

(paraksts)