

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**SILTUMA ĢENERĒŠANAS UN PĀRNESES PROCESU  
MODELĒŠANA GRAFOS**  
MAGISTRA DARBS

Autors: **Laura Leja**

St. apliecības Nr.: 1118076

Darba vadītājs: Dr. math. Uldis Strautiņš

RĪGA 2020

## Anotācija

Šajā maģistra darbā ir apskatīts siltuma pārnese un starojuma pārnese process siltumvadīšanas vienādojumam, ar kuriem tālāk izveidoti matemātiskie modeļi. Vispirms analizē diskrēto Laplasa operatoru siltumvadīšanas vienādojumiem tas attēlots ar grafu palīdzību. Tika izveidoti matemātiskie modeļi diskrētiem gadījumiem ar avota locekļiem un bez tiem un veikti to skaitliskie eksperimenti. Ar Furjē likumu siltuma plūsmai tika veidota diskretizācija no vienas grafa virsotnes uz otru. Pēc tam tiek aplūkots ēnošanas efekts un radiatīvā pārnese un modeļiem veiktas simulācijas ar taisņu metodi programmu paketē MATLAB. Darbā ir aprakstīts kāda ir saistība siltumvadīšanas vienādojumiem uz grafiem un metriskiem grafiem. Visbeidzot izstrādāta siltumenerģijas plūsmas matemātiskā analīze maksimuma principam.

Atslēgas vārdi: Laplasa operators, siltumvadīšanas vienādojuma diskretizācija, siltumvadīšanas vienādojums uz grafa, siltumvadīšanas vienādojums uz metriskā grafa, starojuma pārnese.

## **Abstract**

In this master's thesis, the process of heat transfer and radiation transfer for the heat conduction equation is considered, with which mathematical models are further developed. First, the discrete Laplace operators for the thermal conduction equations are represented by graphs. Mathematical models for discrete cases with and without source members were developed and their numerical experiments were performed. With Fourier's law, the flow of heat was discretization from one vertex of the graph to another. Then the shading effect and radiative transfer are considered and simulations of the models are performed with the method of lines in the MATLAB software package. Describes the relationship between heat conduction equations on graphs and metric graphs. Finally, the principle of maximum for temperature is obtained.

Keywords: Laplace operator, discretization of the heat conduction equation, heat conduction equation on a graph, heat conduction equation on a metric graph, radiation transfer.

# Saturs

<b>APZĪMĒJUMU SARAKSTS</b>	<b>5</b>
<b>IEVADS</b>	<b>8</b>
<b>1 TEORĒTISKAIS APRAKSTS MATEMĀTISKAJĀ FIZIKĀ UN PAMATJĒDZIE- NI</b>	<b>9</b>
1.1 Siltuma ģenerēšana un reakcijas . . . . .	9
1.2 Siltuma pārnese process . . . . .	10
1.2.1 Siltumvadīšanas vienādojums . . . . .	10
1.2.2 Stefana - Bolcmaņa likums . . . . .	11
1.3 Grafu un metrisku grafu apraksts . . . . .	12
1.4 Diskrētais Laplasa operators un siltumvadīšanas vienādojums uz grafa . . . . .	14
1.5 Siltumvadīšanas vienādojums uz metriska grafa apraksts . . . . .	15
1.6 Starojuma radiatīvā pārnese . . . . .	16
<b>2 MATEMĀTISKAIS MODELIS</b>	<b>18</b>
2.1 Problēmas nostādne . . . . .	18
2.2 Apskatāmais modelis . . . . .	19
2.3 Siltumvadīšanas vienādojuma diskretizācija . . . . .	23
2.4 Siltumvadīšanas vienādojuma diskretizācija pa šķautņu punktiem . . . . .	25
2.5 Siltumvadīšanas vienādojumu uz grafa un metriska grafa saistība . . . . .	26
2.6 Ēnošanas efekts . . . . .	28
2.7 Radiatīvā siltumapmaiņa . . . . .	32
<b>3 MODEĻU MATEMĀTISKĀ ANALĪZE</b>	<b>34</b>
<b>4 SKAITLISKIE EKSPERIMENTI</b>	<b>38</b>
<b>5 SECINĀJUMI</b>	<b>52</b>
<b>IZMANTOTĀS LITERATŪRAS UN AVOTU SARAKSTS</b>	<b>53</b>
<b>PIELIKUMI</b>	<b>55</b>

# APZĪMĒJUMU SARAKSTS

**Ja ir nepieciešams!**  $T$  - absolūtā temperatūra pēc Kelvina , (ja norādīsim pēc Celsija grādiem, tad pieņemsim par  $-273$ );

$\beta$  - konstante no Arēniusa likuma, tas ir aktivizācijas enerģija pret universālās gāzes konstanti ( $\beta = \frac{E}{R}$ );

$C$  - īpatnējā siltumietilpība;

$Q_s$  - īpatnējais sadegšanas siltums;

$u_{ij}$  - temperatūra uz šķautnes, kas savieno virsotni  $i$  ar virsotni  $j$ ;

$u_i$  - temperatūra uz virsotnes  $i$ ;

$f$  - avota funkcija;

$R$  - pilnā; enerģija viļņu garumam;

$G$  - grafs;

$w$  - grafu svars;

$d$  - distance jeb attālums starp virsotnēm;

$\Delta$  - Laplasi operators;

$a^2$  - difūzijas koeficients;

$k$  - siltumvadīšanas koeficients;

$s$  - pāramortizējošais mainīgais;

$q$  - gradients;

$h$  - solis;

$I$  - starojuma intensitāte;

$\omega$  - frekvence;

$C_g$  - gaismas ātrums;

$E$  - enerģija;

$\mathcal{E}$  - siltumenerģija.

## IEVADS

Vispārzināms process, kā siltums tiek nodots un kā dažādi materiāli var apmainīties ar siltumenerģiju, nosaka lielu daļu procesus, sākot no ēku sildītājiem un izpratni par sezonālajām izmaiņām līdz pat kuģu nosūtīšanai kosmosā. Siltumu var pārnest tikai ar trīs līdzekļu palīdzību, tas ir, vadīšanu, konvekciju un starojumu. No minētajiem līdzekļiem šajā darbā tiks apskatīta vadīšana, kura ir visizplatītākā un dabā notiek regulāri, un starojums, kurš ir sarežģītāks process. Tieši siltuma pārvešana notiek molekulārā līmenī no viena ķermeņa uz otru; kad virsma absorbē siltuma enerģiju un liek virsmas molekulām ātrāk pārvietoties. Šajā procesā sasilušās molekulas, kuras ir ar lielāku enerģiju, mijiedarbojoties saduras un atdod enerģiju molekulām ar mazāku enerģiju. Šis process turpinās tik ilgi, kamēr siltums vēl tiek pievienots [6].

Parasti izmantotais termins siltumenerģija nozīmē jaudas integrāli pēc laika, kas tiek ražota ar jaudas palīdzību ar kādu siltums rodas siltuma avotā, piemēram - reaktora kodolā, lai sadalītos degvielā. Ķermeņus, kuri iekšējo enerģiju atdod, sauc par siltuma avotiem. Siltuma avots var būt jebkas, sākot ar biomasu un koksni beidzot ar kodolreaktoru atomelektrostacijā, kas nelielā apjomā rada milzīgu siltuma daudzumu [22].

Viena no darba aktualitātēm, kāpēc darba autore izvēlējās šo tematu ir dabā sastopami procesi, kurus ir iespējams modelēt ar degšanas procesu, pielietojot grafus.

Pirmkārt, šajā darbā interesē fizikāls process siltumapmaiņai un degšanai, kad tiek sasniegtas augstas temperatūras. Tātad, ja degšana notiek pietiekami lielā karstumā, tad starojums ir ļoti būtisks, bet tad parādās uzdevums ar intensitātes funkciju, kas ir sarežģītāks process. Starojuma intensitāte, kas ir 7 dimensiju funkcija, un to skaitliski risināt ir sarežģīti, tāpēc rodas grūtības diskretizācijai un šo funkciju nepieciešams vienkāršot. Vienkāršošanai ir dažādas pieejas un metodes, bet un viena no idejām, kā risināt šāda veida uzdevumus ir aizstāt klasisko siltumvadīšanas vienādojumu ar starojuma pārnesi no divām un trim dimensijām uz grafiem, kas ir vienkāršāks modelis.

Otrkārt, ir doti uzdevumi, kur pats uzdevums satur diskrētus elementus, kā piemērs – meža ugunsgrēks. Modelējot meža ugunsgrēku, katru koku var pieņemt par grafa virsotni, tādējādi veidojas sarežģītas struktūras. Milzīgais siltuma daudzums, kas rodas degšanas procesā, ir galvenais iemesls, kāpēc neapdomīgu ugunsgrēku dzēšana ir tik grūts uzdevums un kāpēc uguns lietošana ir sarežģīts process, kurā nepieciešami zinoši un pieredzējuši speciālisti. Bet tieši izmēģinājumi notiek Salaspilī, Latvijas Universitātes Fizikas institūtā, kur veido eksperimentus ar Latvijā pieejamiem organiskiem materiāliem - biomasas granulām, kur tiek pētīta un novērota

to degšana un īpašības. Granulas kā kurināmais ir ne tikai efektīvs, bet arī ekoloģisks līdzeklis, kam īpaši Latvijas aukstajos mēnešos perspektīva ir palielināties, kad tiek meklēti aizvien izdevīgāki veidi mājokļa apsildīšanai. Kā arī zaļajai enerģētikai vienmēr ir pievērsta uzmanība, izmantojot atjaunojamus resursus, dedzinot tādas lietas kā briketes un granulas vienmēr ir aktuāls, samazinot draudus par klimata pārmaiņām. Tik pat labi apskatāmais objekts varētu būt kaut kas cits, piemēram, pingvīna kolonija, kur šajā kolonijā iekšā starp pingvīniem ir silts, bet apkārt ir auksts. Mums interesē, kā notiek siltuma pārvade, kāda ir konfigurācijas energoefektivitāte un siltumu zudums, piemēram, salīdzinot vai tie pingvīni stāv tālu viens no otra, vai salīdzinoši tuvu.

Treškārt, kas noved pie modeļu svarīgiem datiem ir parciālā diferenciālvienādojuma diskretizācija ir Laplasa vienādojums divās dimensijās ar centrālo diferencu shēmu.

Šie visi procesi vai tas būtu starojuma uzdevums, vai pingvīna kolonija - tie visi noved pie grafa izmantošanas. Ir metode, ko angļu valodā sauc "Finite Pointset method", latviski tas būtu bez režģa parciālo vienādojumu diskretizācija, kas parādās arī šajā darbā, kur visi uzdevumi noved pie diferenciālvienādojumiem uz grafiem.

Grafa virsotnes veido neregulāru režģu virsotnes, kur tiek aproksimēts atrisinājums, un ir situācijas, kur tās parādās dabiski un tur notiek siltumapmaiņa ar diskrētiem elementiem. Diferenciālvienādojumu uz grafiem ir iespējams definēt vairākos veidos. Apskatīsim trīs veidus, kas pieminēti šajā darbā. Pirmais ir funkcijas atrisinājumi tikai uz virsotnēm, kur šķautnes parāda, kuras virsotnes savā starpā mijiedarbojas. Tas ir piemērs sērkokciņa struktūras tipiskam modelim, kur nepieciešams grafs un parastie diferenciālvienādojumi. Otrais ir atrisinājums ir tikai uz šķautnēm un klāt doti saistības nosacījumi uz virsotnēm, kur virsotnes kalpo kā savienojuma punkti un uz tām nav siltumietilpības. Šādam modelim ir nepieciešams metriska grafs uz parciālais diferenciālvienādojums Trešais ir funkcijas atrisinājums gan uz šķautnēm, gan uz virsotnēm, kur ir nepieciešams metriska grafs kopā ar parciāliem un parastiem diferenciālvienādojumiem, rezultātā iegūstot sistēmu.

Darba autore maģistra darbu aizsāka jau pirms diviem gadiem, maģistra 1. kursā, kur tika izvirzīts darba **mērķis** - izveidot un izpētīt siltuma ražošanas, pārneses (tas ir siltumvadīšanas un starojumu) un zudumu procesu matemātiskos modeļus lietojot grafus un realizēt *MATLAB* veicot skaitliskos eksperimentus. Attiecīgi, lai sasniegtu darbā izvirzīto mērķi, darba autore izvirza šādus uzdevumus:

- (1) iepazīties ar fizikālajiem pamatlikumiem un pamatjēdzieniem;

- (2) apskatīt diskrēto Laplasa vienādojumu uz grafiem;
- (3) izveidot matemātisko modeli siltumvadīšanas vienādojumiem uz grafa un metriskā grafa;
- (4) aprakstīt un izveidot modeli starojuma pārneši ar ēnošanas efektu palīdzību;
- (5) analizēt matemātiskos modeļus un pārliecinoties par to atbilstību;
- (6) veikt modeļu skaitliskos eksperimentus.

Maģistru darba izstrādes vadmotīvs ir saprast kā matemātiski var aprakstīt un izskaidrot siltumvadīšanas vienādojumu un ar simulācijas palīdzību, kā ir iespējams paredzēt dažādus procesus dabā. Izmantotās pētniecības metodes iekļauj eksperimentu rezultātu analīzi un skaitliskas simulācijas programmpaketē *MATLAB*.

Maģistra darba struktūra satura ziņā ir veidota atbilstoši izvēlētajiem uzdevumiem un mērķim. Darbs ir iedalīts ievadā, piecās nodaļās un divpadsmit apakšnodaļās. Pirmajā nodaļā darbs vispirms iepazīstina ar matemātisko aprakstu siltumvadīšanas vienādojuma vispārinājumam un nepieciešamiem pamatjēdzieniem, kur tiek iekļauta siltuma ģenerēšana vadīšanas un starojuma procesos. Otrajā nodaļā aprakstīti matemātiskie modeļi siltumvadīšanas vienādojumiem uz grafiem un veikta diskretizācija ar Furjē likumu. Kā arī aprakstīti modeļi par ēnošanas efektu un radiatīvo siltumapmaiņu. Trešajā nodaļā apskatīta modeļa matemātiskā analīze ar maksimuma principu. Ceturtajā nodaļā veikti skaitliskie eksperimenti, kur pamatā ņemti otrās nodaļas modeļi. Piektajā nodaļā ir nobeigums kopsavilkuma un secinājuma veidā.

# 1. TEORĒTISKAIS APRAKSTS MATEMĀTISKAJĀ FIZIKĀ UN PAMATJĒDZIENI

## 1.1. Siltuma ģenerēšana un reakcijas

Siltākā temperatūrā ķīmiskās reakcijas notiek straujāk, piemēram, piens kļūst skābs daudz ātrāk, ja to uzglabā istabas temperatūrā, nevis ledusskapī. Tāpēc temperatūrai paaugstinoties, molekulas pārvietojas ātrāk un enerģiskāk saduras, ievērojami palielinot saišu šķelšanās un pārkaršanas iespējamību. Šeit siltumenerģija attiecas uz kustības virzienu molekulārā līmenī. Savukārt, degšanā notiek ķīmiskas reakcijas, tādā veidā norisinās siltuma ģenerēšana. Degšanas process ir pazīstams kā sabrukšana, kas ir ķēdes reakcija, kas ķīmiski līdzīga fotosintēzei apgrieztā virzienā. Lai aizdegšanās un sadegšana varētu notikt, ir vajadzīgas trīs lietas: siltuma avots, skābeklis un degviela, kas var būt dabisks vai mākslīgi veidots [16], [18], [21], [19].

Līdz 1890. gadam bija zināms, ka augstāka temperatūra paātrina reakcijas, bieži divkāršojot 10 grādu paaugstināšanās ātrumu, taču tā iemesli nebija skaidri zināmi. Visbeidzot, 1899. gadā zviedru ķīmiķis Svante Arēniuss (Svante Arrhenius) pamatojoties uz holandiešu ķīmiķa Jakoba van't Hofs (Jacobus Henricus van't Hoff) darbu, ierosināja vienādojumu:

$$k = Ae^{\left(\frac{-E}{RT}\right)}, \text{ kur}$$

- 1)  $k$  ir ātruma konstante (sadursmju skaits sekunē, kas izraisa reakciju);
- 2)  $A$  ir katras ķīmiskās reakcijas biežuma koeficients (ja notiek pareiza reakcijas orientācija);
- 3)  $E$  ir reakcijas aktivizācijas enerģija (šī ir minimālā enerģija, kas nepieciešama reakcijas norisei, lai to iekļautu vienādojumā, tas jāizsaka džoulos uz mola) ;
- 4)  $R$  ir universālā gāzes konstante (nāk no vienādojuma  $pV = nRT$ , kas attiecas uz spiedienu, tilpumu un temperatūru noteiktam skaitam gāzes molu).
- 5)  $T$  ir absolūtā temperatūra (tiek mērīta kelvinos);

Šim vienādojumam ir plašs un svarīgs pielietojums, nosakot ķīmisko reakciju ātrumu un aprēķinot aktivizācijas enerģiju. Arēniusa vienādojums parāda ķīmiskās reakcijas ātruma konstantes atkarību no absolūtās temperatūras, preeksponeciālā koeficienta un citām reakcijas konstantēm. Tātad paaugstinot temperatūru vai samazinot aktivizācijas enerģiju (piemēram, izmantojot katalizatorus), palielināsies reakcijas ātrums [16], [18], [21].

Līdzīgi kā katrs materiāls sadeg citādāk, tāpat arī tā raksturīgais parametrs - siltumietilpība, katram ir atšķirīga.

*Definīcija.* Par siltumietilpību sauc fizikālu lielumu, kuru apzīmē ar  $C$ , tā ka:

$$C = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Kur  $\Delta Q$  ir siltuma daudzums, kas jāpievieno ķermeņa masai, lai paaugstinātu tā temperatūru par  $\Delta T$  [12].

Šī parametra vērtība parasti ievērojami mainās atkarībā no ķermeņa sākuma temperatūras  $T$  un spiediena  $P$ . Jo īpaši, tas krasi mainās ar fāžu pārejām, piemēram, kušanu vai iztvaikošanu (tāpēc pieņem par divargumenta funkciju  $C(P,T)$ ). Siltumietilpība atšķiras dažādiem procesiem un to vielu stāvokļiem. Ķermeņa temperatūras paaugstināšanās ir tieši proporcionāla tam pievadītajam siltuma daudzumam un ķermeņa siltumietilpība paliek kā konstants (nemainīgs) lielums. Vispārīgajā gadījumā ķermeņa siltumietilpība var būt atkarīga no ķermeņa stāvokļa parametriem, piemēram, no tā temperatūras vai tilpuma konkrētā brīdī un ir acīmredzami, ka, jo lielāka ir ķermeņa masa, jo lielāks būs nepieciešams siltuma daudzums tā sasildīšanai, tāpēc siltumietilpība ir proporcionāla vielas daudzumam, kas atrodas ķermenī. Vielas daudzums var būt aprakstīts ar masu vai molu daudzumu. Pastāv īpatnējā, molārā un tilpuma siltumietilpība. Parasti aprēķinos ir ērti lietot īpatnējo siltumietilpību, jeb ķermeņa vienas masas daļiņas siltumietilpību [9], [10], [12].

*Definīcija.* Par vielas īpatnējo siltumietilpību sauc ķermeņa masas vienības siltumietilpību, kas skaitliski vienāda ar siltuma daudzumu  $Q$ , kas jāpievada vienai masas vienībai (parasti par masas vienību izvēlas kilogramu, bet var arī izvēlēties gramu), lai tās temperatūra palielinātos par vienu Kelvina ( $K$ ) vai Celsija grādu ( $^{\circ}C$ ) Kelvina un Celsija grādi ir vienlieli. Īpatnējās siltumietilpības mērvienība ir  $\frac{J}{kg \cdot ^{\circ}C}$  [9], [13]. Turpmāk darbā izmantosim siltumietilpību nevis īpatnējo siltumietilpību.

*Definīcija.* Par īpatnējā sadegšanas siltumu sauc siltuma daudzumu, kas izdalās sadegot  $1kg$  kurināmā vielas. Apzīmēsim ar  $Q_s = \frac{\gamma}{\alpha}$  un to mērvienība ir  $\frac{J}{kg}$ . Šo apzīmējumu var apskatīt 3. nodaļā un vairāk (3.17) vienādojumā.

## 1.2. Siltuma pārnese process

### 1.2.1. Siltumvadīšanas vienādojums

Siltumvadīšanas vienādojumā notiek enerģijas plūsma, kuru apskatīsim šādā formā:

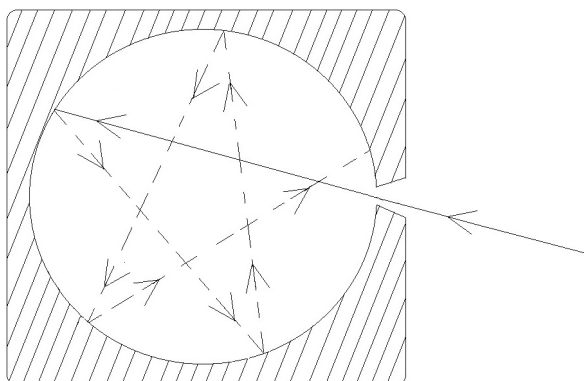
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t); & (1.1a) \\ u = u(x, t). & (1.1b) \end{cases}$$

Tas ir lineārs, otrās kārtas vienādojums, kas iegūts izmantojot empīrisko likumu Furjē likumu, kas darbojas materiāla iekšienē. Ir vēl viens nozīmīgs svarīgs empīriskais likums, ko var izmantot - Ņūtona siltumapmaiņas likums norāda, ka siltuma plūsma ir proporcionāla temperatūrai (starp mūsu objektu un apkārtējo vidi) [3].

### 1.2.2. Stefana - Bolcmaņa likums

Gaisma, kuru izstaro vielas atomi, ir elektromagnētiskie viļņi, tie spēj pārnest enerģiju. Tad rezultātā atomi, līdz ar to arī ķermenis kopumā, izstaro enerģiju. Lai ķermenis spētu ilgstoši izstarot elektromagnētiskos viļņus, tam jāpievada enerģija no ārienes. Vienkāršākais un izplatītākais starojuma veids ir termiskais starojums jeb siltumstarojums. Šī starojuma pētīšana 19. gadsimta beigās izraisīja lielu interesi zinātnieku vidū [14], [15].

Lai saprastu, kas īsti ir līdzsvarots starojums, pieņēmot, ka starojošais ķermenis ievietots dobjā lodē (1.1. att.), kuras sienas pilnīgi atstaro visu krītošo starojumu. Ķermeņa starojums neizkļiedējas telpā ārpus lodes un pēc vairākkārtējas atstarošanās daļēji atgriežas starojošajā ķermenī. Pēc noteikta laika iestājas siltuma līdzsvars. Ķermenis apmainās ar enerģiju tikai emisijas un absorbcijas veidā. Termiskā starojuma būtiska īpašība atšķirībā no citiem starojumiem ir tā, ka termiskais starojums var būt līdzsvarotais starojums. Tas nozīmē, ka izstarojošais ķermenis var atrasties līdzsvarā ar savu starojumu. Ja laika vienībā ķermeņa izstarotā enerģija ir vienāda ar absorbēto enerģiju, tad ķermeņa temperatūra nemainās. Paaugstinot temperatūru, palielinās ķermeņa termiskā starojuma intensitāte un rodas arvien augstāku frekvenču starojums. Viela absorbē tikai tādas frekvences starojumu, kādu viela spēj izstarot [14], [15].



### 1.1.att. Absolūti melns ķermenis

Termiskā starojuma spektrālais sastāvs ir atkarīgs no starojošā ķermeņa temperatūras. Augstas temperatūras ķermeņa starojuma spektrs ir nepārtraukts. Ja ķermenis absorbē pilnīgi visu uz to krītošo starojumu neatkarīgi no ķermeņa temperatūras un starojuma viļņa garuma, tad šādu ķermeni sauc par absolūti melnu ķermeni. Absolūti melna ķermeņa termiskais starojums ir visintensīvākais salīdzinājumā ar pārējo ķermeņu termisko starojumu, bet absolūti melnu ķermeņu dabā nav sastopams. Ļoti labi gaismu absorbē melns papīrs, melns samta audums, kvēpi kā arī citas melnas vielas vai priekšmeti. Absolūti melnais ķermenis var neizskatīties vienmēr melns, jo tas var arī izstarot daudz gaismas un tāpēc būt ļoti spožs. Ja, piemēram, karsētu iepriekš aplūkoto dobo lodī, tad atvērums izskatītos spožs, kaut gan dobums ir absolūti melns ķermenis. Un ir jāsaprot, ka izraudzītā temperatūrā, enerģija, ko laika vienībā izstaro absolūti melnā ķermeņa virsmas laukuma vienība, ir lielāka salīdzinājumā ar jebkura cita ķermeņa izstaroto enerģiju. Laika vienībā no virsmas laukuma vienības izstarotā ķermeņa enerģija ir proporcionāla absolūtās temperatūras  $T$  ceturtajai pakāpei [14], [15].

Absolūti melnā ķermeņa starojums ir atkarīgs tikai no temperatūras  $T$ , bet gan šī ķermeņa starojuma enerģijas sadalījums pa viļņa garumiem tika iegūts eksperimentāli. Austriešu fiziķis Jozefs Stefans (Josef Stefan) pirmo reizi starojumu mērīšanai izmantoja termodinamikas principus. Izmantoja Dž. Maksvela hipotēzi par gaismas spiedienu un 1879. gadā balstoties uz eksperimentāliem datiem, secināja, ka izstarotā enerģija laika vienībā no virsmas laukuma vienības ir proporcionāla temperatūras  $T$  ceturtajai pakāpei:

$$R(T) = \sigma T^4, \quad (1.2)$$

kur  $R$  ir pilnā enerģija viļņu garumam. Skaitliskā vērtība  $\sigma$  pēc jaunākajiem mērījumiem  $\sigma = 5,671 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 T^4}$ , kur  $W$  ir vati,  $m$  ir metri, bet  $T$  ir temperatūra pēc Kelvina skalas. Tas nozīmē, ka katrs kvadrātmeters no starojošā ķermeņa virsmas izstaro šo jaudu, kas mērams vatos. 1884. gadā šo sakarību ieguva teorētiski Ludvigs Bolcmans (Ludwig Boltzmann). Tāpēc šo likumu nosauca par Stefana - Bolcmaņa likumu [14], [15].

### 1.3. Grafu un metrisku grafu apraksts

Attēlosim siltumvadīšanas vienādojumu ar grafu palīdzību. Pieņemsim, ka mums ir dots grafs ar  $G = (V, E)$ , kur  $V$  ir virsotņu kopa, bet  $E$  ir šķautņu kopa, ko var uzskatīt par simetrisku apakškopu no  $V \times V$ . Uzskatīsim visus savus grafus par lokāli ierobežotiem, savienotiem,

galīgiem, bez virziena un bez cilpām, bet atsevišķi neiekļausim incidences attēlojumu  $I$  no grafa  $G$ , kas katram šķautnes kopas elementam piekārto virsotnes kopas elementu. Tālāk apskatīsim grafu ar svaru [1].

*Definīcija.* Par  $(x, y) \in E$  apzīmēsim ar  $x \sim y$ . Punktu virkne  $x_0, \dots, x_n \in V$  ir ķēde, kas savieno  $x$  un  $y$  ja  $x_0 = x, x_n = y$  un  $x_i \sim x_{i+1}$  visiem  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ . Skaitli  $n$  sauc par šīs ķēdes garumu. Grafā dabisku metriku  $\rho$  var definēt uz virsotņu kopas  $V$  kā minimālu ķēžu garumu, kas savieno divus atšķirīgus punktus. Bet šī metrika nav tā, ko izmantosim tālāk darbā. Ar jēdzienu metriskais grafs sapratīsim citu definīciju, kas tālāk darbā tiks nedefinēta. Pieņemsim, ka  $\mu(x)$  ir pozitīva funkcija uz virsotņu kopu  $V$ . Kur grafu svars  $w(x, y)$  ir funkcija  $V \times V$  tā, kā grafu uzdošana:

$$(1) \quad w(x, y) \geq 0;$$

$$(2) \quad w(x, y) = w(y, x);$$

$$(3) \quad w(x, y) > 0 \Leftrightarrow (x, y) \in E.$$

Trījnieku  $(V, w, \mu)$  sauc par svērto grafu [1].

Svērto pakāpi sauksim par

$$\text{deg}(x) =: \frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in V} w(x, y).$$

Kur  $x \in V$  ir atšķirīga no parastās lokāli ierobežoto grafu pakāpes [1].

Tālāk izmantosim metriskus grafus, tāpēc šī maģistra darba ietvaros definēsim metrisku grafu.

*Definīcija.* Par metrisku grafu sauc grafu  $G = (V, E)$ , kur  $V$  ir virsotņu kopa, bet  $E$  ir šķautņu kopa un katrām divām virsotnēm  $x$  un  $y \in V$ , eksistē  $d(x, y)$ , kas ir attālums starp virsotni  $x$  un  $y$ . Šo attālumu sauksim par malas garumu, tātad katrai šķautnei ir garums, kuru var parametrizēt no 0 līdz noteiktam garumam  $l$ . Uzskatīsim, ka šķautnes  $E_{ij} = E_{ji}$  ir simetriskas šķautnes ar pretēju parametrizāciju [7], [8].

Metriskie grafi bieži tiek ieviesti, pamatojoties uz kombinatoriku, pēc katras grafa malas "saistīšanas" ar intervālu vai citādi gadījuma rakstura "līmēšana" to galapunktos tīklam līdzīgā veidā. [7], [8].

## 1.4. Diskrētais Laplasa operators un siltumvadīšanas vienādojums uz grafa

Apskata funkciju, kas definēta tikai uz virsotnēm, kura savieno ar šķautni  $x$  un  $y$  virsotni. Ieviešam šādu formālu Laplasa operatoru no  $(V, w, \mu)$ :

$$\Delta v(x) = -\frac{1}{\mu(x)} \sum_{y \in V} w(x,y)(v(x) - v(y)). \quad (1.3)$$

Laplasa operators tiek definēts tikai diskrētos režģa punktos, kā arī netiek ņemts vērā malas garums. Laplasa operators no funkcijas  $V$ , kas ir vektors ar galīgu skaitu virsotņu un  $w(x, y)$  tās malas svars, kur  $x$  ir viena no virsotnēm. Summa ir ierobežota katram  $x \in V$ . Dabisks pieņēmums ir gadījums, kad  $\mu(x) \equiv 1$  un  $w(x, y) \in \{0, 1\}$ . Tad Laplasa operators pieņem vienkāršu formu:

$$\Delta v(x) = - \sum_{y \in V, y \sim x} (v(x) - v(y)). \quad (1.4)$$

Svara funkcija  $w$  reprezentē mēru, kādā viena virsotne mijiedarbojas ar otru, kur lielāks svars, tur lielāks siltumvadīšanas koeficients starp virsotnēm

Nosakot siltuma vienādojumu Eiklīda telpā, sākotnēji nosaka risinājumu unikalitāti Košī problēmai, kur sākuma nosacījums ir nulle. Šeit tiek apskatīts siltuma vienādojuma klases unitātes problēma, kas definēta svērtos grafos. Literatūras rakstā [1], Laplasa operators tika definēts ar pretējo zīmi līdz ar to siltumvadīšanas vienādojums arī ir pretējā zīme, bet šajā darbā apskata siltumvadīšanas vienādojumu uz grafiem lietosim šādu Laplasa operatora definīciju, kura ir saskaņots ar to, kas tiek iegūts no diskretizācijas. Vēlamies definēt siltumvadīšanas vienādojumu uz grafa. Vēlamies vispārināt siltumvadīšanas vienādojumu, tāpēc par siltuma vienādojumu grafos definēsim šādu vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(x,t) = a^2 \Delta u(x,t) \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

$x$  ņemts no virsotņu kopas  $V$ , kā arī  $x \in \mathbb{R}; t > 0$  un nepārtraukts kā klasiskajam siltumvadīšanas vienādojumam, bet  $\Delta$  ir klasiskais Laplasa operators. Ir labi zināms, ka klasiskajam siltumvadīšanas vienādojumam Košī problēmai atrisinājuma unitāte izpildās tikai mazākā funkciju klasē, tāpēc atrisinājuma unitāte neizriet automātiski.

$$|u(x, t)| \leq c \exp c(|x|)^2. \quad (1.6)$$

Tikhonovs pierādīja, ka tādā funkciju klasē, kurā ir visu nepārtraukto, diferencējamo funkciju klases apakškopa, kur eksistē konstante  $c > 0$  un kur  $u$  tiek ierobežots, kā parādīts (1.6), tad  $u \equiv 0$ . Tas nozīmē, ka siltumvadīšanas vienādojumam (1.5) eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas ir vienāds ar nulli, tikai tādu funkciju klasē kā attēlots (1.6) nevienādībā. Iestatot grafus ar svaru, var ievadīt Laplasa operatora diskreto analogu. Tad ir dabiski izpētīt atbilstošās Košī problēmas atrisinājuma unitāti [1]. Tāpat kā nepārtrauktajā gadījumā, unitātes atrisinājuma problēma ir saistīta ar svērto grafu stohastisko pilnīgumu. Stohastiskā pilnība ir līdzvērtīga tam, ka ierobežotās funkcijas veido unitātes klasi. Šiem vienādojumiem gan Eiklīda telpā gan uz grafiem unitātes atrisinājums, nav garantētās, bet vairāk par atrisinājuma unitātes un eksistences pētīšanu Košī problēmai nodarbojās A. Vēbers un informāciju par to var meklēt rakstos [1] un [2].

## 1.5. Siltumvadīšanas vienādojums uz metriska grafa apraksts

Kas notiek, ja apskatām diferenciālvienādojumus uz grafa malām? Var apskatīt kā daļēju diferenciālvienādojumu sistēmu, kur parādās gan parastie, gan daļējie vienādojumi uz grafiem. Viens no lietojumiem ir neirona tīkla veidošana. Neirona tīklus var aprakstīt kā diferenciālvienādojumus uz grafiem, kā paši neironi izplata signālus no vienas virsotnes uz otru. Tādam siltumvadīšanas vienādojumam uz malām siltumvadīšanas koeficients ir ļoti augsts. Ja uz katras malas tiek sasniegts līdzsvara stāvoklis, tad uz šīm malām ir lineāra funkcijas, un varam pārejam uz siltumvadīšanas vienādojumu grafiem. (Kā redzēsīm, kā tas tiks attēlots nodaļā (2.5)).

Analizēsīm, kā iegūt siltumvadīšanas vienādojumu uz grafa parasto diferenciālvienādojuma sistēmai no siltumvadīšanas vienādojuma uz metriska grafa daļēju diferenciālvienādojuma sistēmai.

Uz metriska grafa ir virsotnes, teiksim,  $V_i$  un šķautnes, piemēram,  $E_{ij}$ . Pieņemtais šķautnes  $E_{ij}$  garums ir  $L_{ij}$ , un to parametrizē mainīgais  $0 < s < L_{ij}$ . Pie tam punktā  $s = 0$  uz šķautnes  $E_{ij}$  atradīsimies virsotnē  $V_i$ , bet punktā  $s = L_{ij}$  atradīsimies virsotnē  $V_j$ . Pieņemsim, ka degošais materiāls atrodas virsotnēs  $V_i$ , bet šķautnes  $E_{ij}$  tikai vada siltuma plūsmu. Uz katras virsotnes  $V_i$  definējam temperatūru  $u_i(t)$  un siltumietilpību  $C_i$ , līdz ar to, tās temperatūra būs  $u_i(t)$ . Uz katras šķautnes  $E_{ij}$  definējam siltuma difūzijas koeficientu  $a > 0$ , siltumvadīšanas koeficientu  $k$  un temperatūru  $u_{ij}(s,t)$ .

Te darbojas klasiskais siltumvadīšanas vienādojums:

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial s^2}, \quad (1.7)$$

kur  $0 < s < L_{ij}$ . Ar Dirihlē robežnosacījumiem:

$$\begin{cases} u_{ij}|_{s=0} = u_i(t) \\ u_{ij}|_{s=L_{ij}} = u_j(t). \end{cases} \quad (1.8a)$$

$$(1.8b)$$

Uz virsotnes  $V_i$  darbojas parastais diferenciālvienādojums:

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j:V_j \sim V_i} k \frac{du_{ij}}{ds} \Big|_{s=0} + f, \quad (1.9)$$

kur  $f$  ir avota saskaitāmais. Šajā gadījumā

$$k \frac{du_{ij}}{ds} \Big|_{s=0} \quad (1.10)$$

ir siltuma plūsma, kas ieplūst virsotnē  $V_i$  caur šķautni  $E_{ij}$ . Ja klāt tiek pievienoti sākumnosacījumi, tad iegūstam noslēgtu sistēmu. Tagad varam pieņemt, ka siltuma vadīšana notiek ļoti ātri, tā, ka siltuma difūzijas koeficients  $a$  ir ļoti liels. Vēlamies atrast tādu veidu, kā parādīt, kā iepriekš aprakstītās diferenciālvienādojumu sistēmai pievienojot sākumnosacījumus atrisinājums tuvojas vienkāršā siltumvadīšanas vienādojuma (1.5) atrisinājumam, kur definēta tikai uz virsotnēm (tas tiks izdarīts nodaļā (2.5.))[5].

## 1.6. Starojuma radiatīvā pārnese

Siltuma pārnese no ķermeņa ar augstu temperatūru uz ķermeni ar zemāku temperatūru, kad ķermeņi nav tiešā fiziskā kontaktā viens ar otru vai kad tie ir atdalīti telpā, sauc par starojuma radiatīvo pārnese. Visas fizikālās vielas: cietā, šķidrā vai gāzveida stāvoklī, var izstarot enerģiju elektromagnētiskā starojuma procesā, pateicoties to molekulu un atomu vibrāciju un rotācijas kustībai. Šādas enerģijas plūsmas intensitāte ir atkarīga no ķermeņa temperatūras un arī no tā virsmas rakstura [20].

Atšķirībā no vadīšanas un konvekcijas, siltuma pārnesei ar termisko starojumu enerģijas pārvešanai nav obligāti nepieciešams materiāls līdzeklis. Termiskā starojuma gadījumā no cietas virsmas vide, caur kuru starojums iziet, var būt vakuums, gāze vai šķidrums. Molekulas un atomi var absorbēt, atspoguļot vai pārveidot starojuma enerģiju. Ja vide ir vakuums, tātad tajā nav molekulu vai atomu, starojuma enerģija netiek vājināta un tāpēc tiek pilnībā pārveidota. Tāpēc

radiācijas siltuma pārnese ir efektīvāka tieši vakuumā. Gāzes, piemēram, gaisa gadījumā enerģiju var nedaudz absorbēt vai atspoguļot gaisa molekulas. Šķidrā vidē lielāko daļu starojuma absorbē plāns slānis, kas atrodas tuvu cietai virsmai un nekas netiek izstarots. Radiatīvā siltuma starojuma kontekstā virsmu, kas absorbē visu krītošo starojumu un neatstaro nevienu, sauc par melnu virsmu vai melnu ķermeni. Stefana – Bolcmaņa absolūti melnā ķermeņa starojuma likumā teikts, ka starojuma enerģijas daudzums no virsmas uz laukuma vienību ir proporcionāls ķermeņa temperatūras ceturtajai pakāpei [20]. Tāpat kā Saule arī citas zvaigznes izstaro siltumenerģiju, kas notiek starojuma veidā. Zvaigžņu starojuma radiatīvo pārnesi pēta astrofizikā. No 19. gs. astrofizikā pastāv "tumšo nakts debesu paradokss", ko sauc par Olbersa paradoksu (Olbers' paradox), kas nosaukts vācu astronoma Heinriha Vilhelma Olbersa vārdā (Heinrich Wilhelm Olbers). Šis paradokss saistās ar problēmu, kāpēc debesis naktīs ir tumšas, ja Visums ir bezgalīgs un vienmērīgi apklāts ar mirdzošām zvaigznēm. Minētajā gadsimtā valdīja hipotēze, ka Visums visos virzienos ir bezgalīgs laikā un telpā, un visos virzienos aptuveni homogēns, un visos apgabalos vienāds, tā ka zvaigžņu blīvums gandrīz visur ir vienāds, jo zvaigznes visur ir vienmērīgi apklātas. Matemātiski izskaitļoja, ka katras zvaigznes redzamais diametrs ir apgriezti proporcionāls attāluma kvadrātam noteiktā attālumā no  $l$  līdz  $l + \Delta$  [17], [4].

Zvaigžņu skaits ir proporcionāls attāluma kvadrātam, tāpēc, ka sfēras laukums proporcionāls  $s^2$ , līdz ar to tika secināts, ka zvaigznēm katrā vidējā attālumā ir vienāds piensums no visām pusēm. Lai uz kādu pusi skatītos, vienmēr skats atdursies uz kādas zvaigznes virsmu, tādējādi, pretēji novērojumiem, šis arguments nozīmē, ka nakts debesīm visur jābūt gaišām, bez stariem starp zvaigznēm. Arguments, ka nakts debesīs tumsa ir pretrunā ar paradoksa pieņēmumu [17], [4].

Šeit iezīmējas fakts, ka viena zvaigzne aizēno citas zvaigznes, jo tās atrodas šo zvaigžņu ēnā un vai atrodas diezgan tālu. Šādu efektu sauksim pār ēnošanas efektu, kad no Zemes var redzēt zvaigznes, bet tās neapklāj visu Visumu tā, lai naktī debesis izskatītos gaišas. No Zemes konkrētā leņķī mēs redzam zvaigznes, bet tās zvaigznes, kuras nav iespējams redzēt, tās atrodas aiz redzamām zvaigznēm, jeb redzamo zvaigžņu ēnā vai arī atrodas diezgan tālu. Nakts debesu tumsa ir viens no pierādījumiem par dinamisku Visumu, piemēram, Lielā sprādziena modelis. Šis modelis izskaidro novēroto spilgtuma nevienmērīgumu, atsaucoties uz kosmosa laika izplešanos, kas gaismu, kas nāk no lielā sprādziena, pagarina līdz mikroviļņu līmenim, šī mikroviļņu starojuma fona viļņu garums ir daudz garāks nekā redzamās gaismas, tāpēc tas ir tumšs un ar neapbruņotu aci nevar pamanīt. Tika piedāvāti arī citi paradoksa skaidrojumi, taču kosmoloģijā tie nav plaši atzīti [17], [4].

## 2. MATEMĀTISKAIS MODELIS

### 2.1. Problēmas nostādne

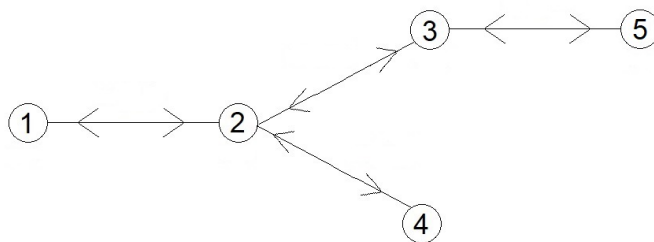
Apskatīsim degšanas procesu, kur notiek siltuma pārnese un ķīmiskās reakcijas, kas dabā būtu kā piemērs kūlas degšanai vai meža ugunsgrēkam. Apskatot praktiskus piemērus, viens no tiem ir industriāls lietojums, kad ir kurtuve, kur ir katls ar granulām. Kur granulās tiek pieņemtas par vienu punktu- grafa virsotni. Teorētiski varam apskatīt arī cauruļvadu sistēmu. Piemēram, rūpnīcā, kur notiek ķīmiskas reakcijas, kas notiek arī degšanas vienādojumā. Vai arī tuneļos, gaitēnos virzās liesmas fronte, kur tā pārvietojas dažādos virzienos. Šādā gadījumā objekts varētu būt arī neironu tīkls vai līdzīgs process, kas notiek neironu tīklos, kur jonu difūziju, kas dodas no viena neirona tīkla uz otra tādā veidā tiek nosūtīts signāls un tas dodas caur savienojuma punktiem. Tie visi ir tīkli un matemātiski nebūtu nozīmes kādi objekti tiktu apskatīti, jo vienādojumi būtu līdzīgi.

Kā īsti notiek degšanas process, modelējot ugunsgrēku? Lai to izdarītu matemātiski, tas viss noved pie sarežģītām struktūrām. Sazarojušas struktūras, kuri attēlojas kā tīkli un modelē ar grafa palīdzību. Apskatāmais modelis ir sērkociņu puzzle, kur sērkociņi salikti noteiktā konfigurācijā viens pie otra. Aizdedzinot sērkociņus veidojas ķēdes reakcija - uguns liesmas pāreja no viena sērkociņa uz otru. Šim diskrētajam apgabalam sērkociņi aizdegas viens pēc otra un tālāk izplešas dažādos virzienos. Šādu grafu diskretizējam katrā centrālajā punktā, kuriem ir kaimiņi abās pusēs ar nezināmajām vērtībām, jo notiek siltuma apmaiņas process starp grafa punktiem.

Pārejot uz viendimensiju grafu un pārrakstot to matricā tā, ka matricai visi elementi reprezentē savienotību šajā grafā. Diskretizācijas matrica tiek taisīta, lai risinātu vienādojumu uz šī grafa. Uzdotot šādu matricu ar precizitāti līdz grafu izomorfismam (pārbīdot virsotnes visādos virzienos), kas nosaka kāds tas grafs izskatās, kā arī aprakstīs grafa vadāmību. Rindu skaits - grafu virsotņu skaits, kolonnu skaits - lielākais kaimiņu skaits kādai no grafa virsotnēm. Grafu uzdošana tiks attēlota šādi:

$$G = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} 1. \text{ virsotnes kaim.} \\ 2. \text{ virsotnes kaim.} \\ \vdots \\ n. \text{ virsotnes kaim.} \end{array} \right] \end{bmatrix}$$

## 2.2. Apskatāmais modelis



2.1.att. Diskrēts uzdevums ar piecām sērkokociņu virsotnēm

Uz virsotnēm ir degoši materiāli un pieņemsi, ka dotās virsotnes ir sērkokociņu galviņas.

Kā piemēru apskatām siltuma vadīšanas vienādojumu grafos. Modelis ir grafs, kas ir ļoti vienkāršs ar 5 virsotnēm. Pieņemam, ka tas ir sērkokociņu galviņas modelis, kā parādīts 2.1. attēlā. Ir doti diskrēti objekti - grafa virsotnes. Tos objekta pārus, kuru mijiedarbību (siltuma apmaiņas procesu) iekļaujam modelī, savienojam ar grafa malām. Mēs apskatām temperatūru grafa  $i$ -tajā virsotnē  $T_i(t)$ , kas atkarīga no laika  $t$ , kur  $i = 1, \dots, 5$ . Virsotnes atrodas siltumapmaiņā tikai ar kaimiņiem savā starpā. Šeit var teikt, ka virsotne ar numuru 2 ir tiešā siltumapmaiņā ar punktiem 1, 3 un 4. Siltumapmaiņas intensitāte ir proporcionāla temperatūras starpībai, tātad kaimiņi vai nu silda vai dzesē viens otru. Uz ārējām virsotnēm nepieciešams uzdot robežnosacījumus, šajā gadījumā virsotnēm ar numuriem 1, 4 un 5.  $T_1(t)$ ,  $T_4(t)$  un  $T_5(t)$  ir zināmas funkcijas. Tad ir iespējams diskretizēt pēc taišņu metodes. Ja robežpunkti ir doti, tādā gadījumā izveidojam vienādojumus, kas ir divu parasto diferenciālvienādojumu sistēma pēc laika, tādi, ka:

$$\begin{cases} C_2 \frac{dT_2}{dt} = k_{1,2}(T_1 - T_2) + k_{2,3}(T_3 - T_2) + k_{2,4}(T_4 - T_2) + f_2; \\ C_3 \frac{dT_3}{dt} = k_{2,3}(T_2 - T_3) + k_{3,5}(T_5 - T_3) + f_3. \end{cases} \quad (2.1)$$

Sistēmā (2.1) pēdējie saskaitāmie  $f_2$  un  $f_3$  ir avota saskaitāmie. Ja  $T_1$ ,  $T_4$ ,  $T_5$  ir doti, bet  $C_2$  un  $C_3$  ir siltumietilpība.

Sākotnēji pieņem, ka robežnosacījumi ir nulles, kur labajā pusē otrajai un trešajai virsotnei (iekšējās virsotnes) pieskaita attiecīgos avotus. Avoti nāk no ķīmiskajām reakcijām, kas sākotnēji arī ir nulle.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

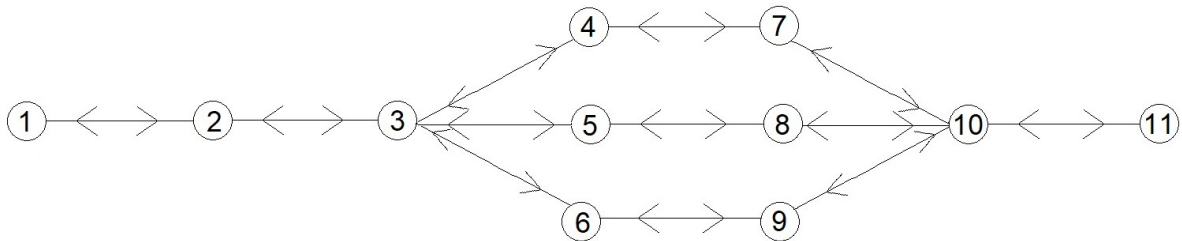
Pārrakstot matricu formā, norādītas piecas virsotnes, kur atzīmētu kaimiņu punktus. Matrica  $B$  ir negatīvi pusdefinīta ( $B \leq 0$ ), jo diagonāles elementi  $B_{ii} < 0$ , tātad ar negatīvām īpašvērtībām. Skatoties diskretizācijas matricā uz nulles elementiem, trešajā rindā nulles elementi būs tajā kolonnā, kur tas sakrīt ar šo punkta numuru grafā. Uz galvenās diagonālēs norādīts kaimiņu skaits ar pretējo zīmi, bet kaimiņu vietās ierakstīts attiecīgais kaimiņu skaitlis. Ja matricu  $B$  reizina ar vektoru  $T$ , tad :

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = B \cdot T + f \\ T(0) = T_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

Kur vektors  $T$  ir

$$T = \begin{pmatrix} T_1(t) \\ T_2(t) \\ T_3(t) \\ T_4(t) \\ T_5(t) \end{pmatrix}.$$

Tad apskatīsim vēl vienu modeli ar 11 virsotnēm, skatīt 2.2. attēlu.

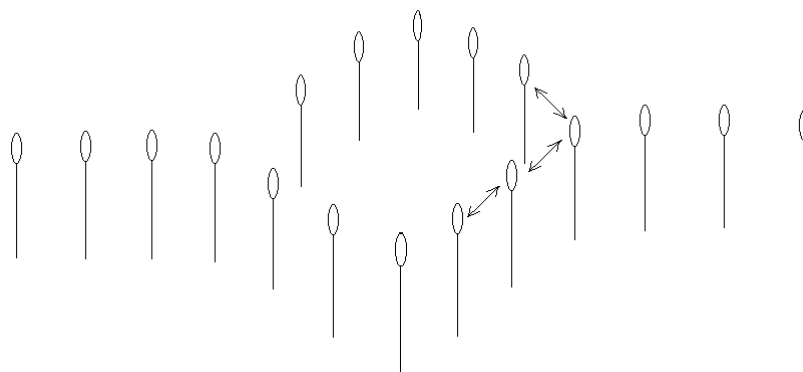


### 2.2.att. Diskrēts uzdevums ar vienpadsmit sērkociņu virsotnēm

Tāpat kā iepriekšējam grafam  $B$  sastādījām matricu, arī  $B_1$  sastādīsim matricu un veiksīm modeļa simulācijas programmpaketē *Matlab*. Attiecīgā  $B_1$  matrica grafam izskatās šādi:

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

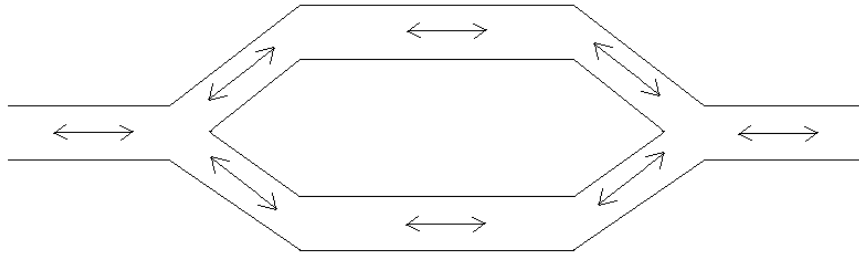
Matricu izmanto siltumvadīšanas vienādojuma diskretizēšanai. Apskatīsim kāda saistība ir diskrētiem modeļiem ar nepārtrauktiem modeļiem. Var apskatīt divu veida modelēšanas uzdevumus, pirmais uzdevums ir diskrēti modeļi ar siltuma avotu. Šajā modelēšanas uzdevumā notiek reakcijas, kas savā starpā apmainās ar siltumu, notiekot siltuma pārnesei. Bet otrais modelēšanas uzdevums ir nepārtrauktais process. Nepārtraukts process, kad izveidojas siltuma pārnese tīklu veidā -siltumvadu tīkli, elektriskie tīkli, gāzes vad tīkli, kur ir vadi vai caurules, kuri sazarojas un tad savienojas atkal kopā, veidojot grafu. Šādi tīkli novedīs pie līdzīgas sistēmas matricas kā matrica  $B_1$ . Ar taisņu metodi diskretizāciju laikā, iegūst matricu. Diskretizāciju var taisīt vai nu diskrētam procesam, vai arī nepārtrauktam procesam.



**2.3.att. Diskrēts apgabals - sērkociņu modeļa attēlojums**

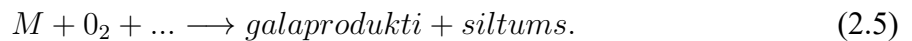
Šie dabiskie modeļi, kā, piemēram, sērkociņu domino vai pingvīnu kolonijas ir punktveida modeļi, bet miljoniem sērkociņu konfigurācijā izdevīgāk pāriet uz nepārtrauktu modeli – parciālus diferenciālvienādojumu grafiem. Apskatot nepārtrauktu apgabalu un pārejām uz viendimen-

sionālu grafa modeli, kas varētu izskatīties kā 2.4. attēlā. Kā reāls dabas piemērs šim modelim ir cauruļvadu sistēma vai reaktorā notiekošās plūsmas.



#### 2.4.att.Nepārtraukts apgabala modelis

Darbā apskatāmais modelis ir diskrētu objektu sistēma, starp kuriem notiek siltuma enerģijas pārnese. Sērskociņa galviņa ir viens punkts, kur notiek viena ķīmiskā reakcija.  $M_0$  ir degošs materiāls laikā  $t = 0$ . Ķīmiskā reakcija:



Reakcijas intensitāte ir  $k_0 \exp \frac{-E}{RT(t)}$ , kur  $T(t)$  ir absolūtā temperatūra.

Tātad, rakstot vienādojumu sistēmu, mums ir divi parastie diferenciālvienādojumi, kur labās puses saucējā ir norādīta absolūtā nulle pēc Celsija grādiem, kas ir -273.15, bet vienkāršības labad noapaļojam līdz -273.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = -\alpha M \exp \frac{-\beta}{T(t) + 273}; \\ \frac{dT}{dt} = \gamma M \exp \frac{-\beta}{T(t) + 273} + \delta(T_0 - T). \end{array} \right. \quad (2.6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = -\alpha M \exp \frac{-\beta}{T(t) + 273}; \\ \frac{dT}{dt} = \gamma M \exp \frac{-\beta}{T(t) + 273} + \delta(T_0 - T). \end{array} \right. \quad (2.6b)$$

Kur  $\gamma M \exp(\frac{\beta}{T(t)+273})$  ir saražotais siltums,  $T_0$  ir apkārtējās vides temperatūra.

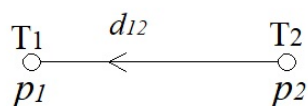
Pie vienādojuma (2.6b) klāt nāk siltuma zudumi, kuri ir lineāri siltuma zudumi pēc Ņūtona siltumapmaiņas likuma. Ja temperatūra ir pietiekami zema, tad dominē Ņūtona siltumapmaiņa, bet ja pietiekami augsta, tad dominē starojuma siltumapmaiņa, tad abas siltumapmaiņas nāk klāt vienādojumam vispārīgā gadījumā. Ja temperatūra būtu tik augsta ka starojuma siltumapmaiņa kļūst nozīmīga, tādā gadījumā (2.6.b) labajā pusē ir jāpieskaita ( $\epsilon T_0^4 - T^4$ ), kas modelētu zudumus tieši siltuma starojuma dēļ.

### 2.3. Siltumvadīšanas vienādojuma diskretizācija

Apskatīsim siltuma plūsmu, kur siltumvadīšanas koeficients tiek dalīts ar attālumu.

$$q_{2 \rightarrow 1} = k \frac{T_2 - T_1}{d_{12}}, \quad (2.7)$$

kur  $q$  ir siltuma plūsma, kas ir vektors:  $\vec{q} = -k \text{ grad } T$ . Kur  $\text{grad}$  ir temperatūras gradients, kas ir fizikāls lielums, kurš raksturo, kurā virzienā un ar kādu ātrumu temperatūra mainās noteiktā vietā. Temperatūra vienmēr plūst no karstākā uz aukstāko avotu sakarā ar to, ka aukstums nav nekas cits kā siltumenerģijas trūkums. Šī pārvietošanās starp ķermeņiem turpinās, līdz samazinās temperatūras starpība, un rodas stāvoklis, kas pazīstams kā termiskais līdzsvars [2].



#### 2.5.att. Siltuma plūsma no viena punkta uz otru punktu

Pie diskretizācijas apskatām divus punktus, pirmais  $P_1$  un otrais  $P_2$ , starp šiem punktiem attālums, jeb distance ir apzīmēts ar  $d_{12}$ . Punkta galos attiecīgās temperatūras  $T_1$  un  $T_2$ , tad  $q$  ir siltuma plūsma no virsotnes 2 līdz virsotnei 1, kur  $k$  ir siltumvadīšanas koeficients (skatīt 2.5. attēlu).

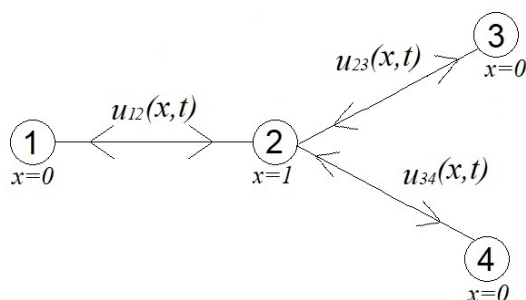
Furjē likuma diskretizācija vienā dimensijā notiek ar gadījuma rakstura ģeometrijas palīdzību. Var apskatīt sfēriskas virsmas grafa mākonī vai citas ģeometrijas, piemēram, Stenfordas trusi un to virsmas punktus (Stanford bunny point cloud). Stenforda trusi ir datorgrafikas trīs dimensiju modelis, kas bija viens no pirmajiem telpiska objekta digitālajām reprezentācijām, tāpēc to sāka izmantot kā eksperimentu grafiskie dizaineri. Bet šo modeli šajā maģistra darba ietvaros neapskatīsim, jo apgrūtinā fakts, ka pārlietu daudz koordinātas.

Apskatīsim sfērisku grafa mākonī trīs dimensiju formā, aizdedzināsim to un veiksīm novērojumus, kā notiek reakcijas. Tiek veidoti tādi vienādojumi grafos, ja tos taiza ar grafiskām virsotnēm, bet šie punkti nav regulāri sadalīti, bet gan ģenerēti ar gadījuma procesu palīdzību un tad izdalīti ar normu. Sfēras virsmu var apskatīt jebkurā laika momentā.

Pieņemsim, ka dota viena sērskociņa galviņa, no kā var veidot dažādas figūras - salīmēti sērskociņi viens pie otra. Tad aizdedzinām šo figūru un skatāmies, kā notiek degšanas process. Piemēram, sfēra kā figūra. Kā viena daļiņa tiek aizdedzināta un kā šis degšanas process notiek tālāk, kā liesma dodas uz priekšu un kā liesma dodas uz sāniem. Uzskatām šos sērskociņus par

punktveida daļiņām. No diskrētā pārejot uz nepārtraukto, siltuma plūsma ir salīdzināma ūdens plūsmai. Ja caurules sadalās vairākos virzienos, tad arī plūsma sadalās šajos virzienos. Uz malām temperatūra var būt dažāda, sākotnējais plūsmas profils var būt arī nekonstants, pat ne lineārs un ar svārstībām.

Aplūkosim parciālus diferenciālvienādojumus uz grafiem, kā piemērs ļoti vienkāršs grafs ar četrām virsotnēm.



2.6.att. Parciālie diferenciālvienādojumi uz grafiem

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x^2} + f, \quad i = 1,2,3; \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} u_{12}|_{x=1} = u_{23}|_{x=0}; \\ u_{12}|_{x=1} = u_{24}|_{x=0}; \end{cases} \quad (2.9a)$$

$$\begin{cases} u_{12}|_{x=1} = u_{24}|_{x=0}; \end{cases} \quad (2.9b)$$

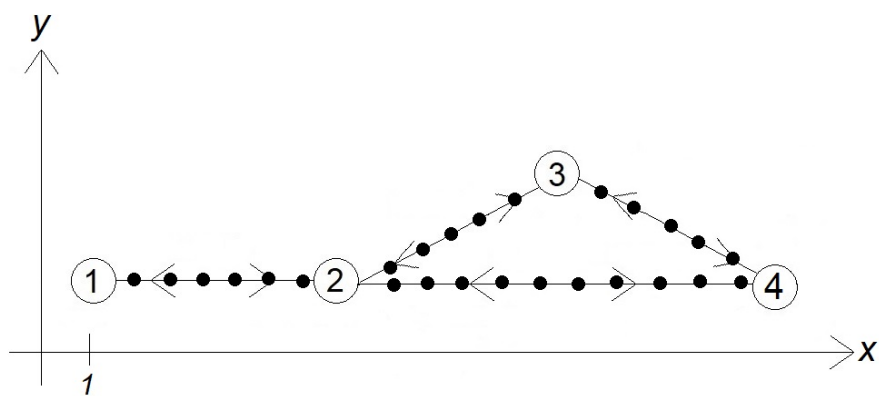
$$k \frac{\partial u_{12}}{\partial x} |_{x=1} = k \frac{\partial u_{23}}{\partial x} |_{x=0} + k \frac{\partial u_{24}}{\partial x} |_{x=0} \quad (2.10)$$

Dotās grafa virsotnēs ir vienāda temperatūra. Apskatīsim mijiedarbību starp virsotnēm, kuras savienotas ar šķautnēm. Ja starp virsotnēm būtu gaiss vai kāds cits materiāls, piemēram, kāda maza stieple, caur kuru notiktu siltuma vadīšana pēc Furjē likuma. Vienādojumi (2.9a) un (2.9b) ir Dirihlē robežnosacījumi, kuri attēlo temperatūras nepārtrauktību, bet vienādojums 2.10 ir plūsmas nepārtrauktībai, kas nosaka, ka ja siltumenerģija ieplūst kādā no virsotnēm, tā tur nepaliek, bet gan visa arī izplūst ārā no virsotnes, tieši no fizikāliem apsvērumiem, kā nepārtrauktā gadījumā. Papildus mezglu punktos 1, 2, un 3 nāk Dirihlē robežnosacījumi un sākumnosacījumu pieņemam, ka  $t = 0$ . Esam ieguvuši trīs vienādojumus gan vienas telpas dimensijā, gan vienā laika dimensijā, kopā doti tieši 6 nosacījumi, trīs parciālie diferenciālvienādojumi kopā ar diviem Dirihlē robežnosacījumiem un sākumnosacījumu, tik daudz, kas nepieciešams, lai viennozīmīgi noteiktu temperatūras izmaiņas.

Lietojums šim modelim- granulas, degošie materiāli, kuri ir kā salmi - tievas garas stieples un krustojās mezglu punktos. Vienādojumā (2.8) labajā pusē ir avota saskaitāmais, jo degošais materiāls arī ir pašas šķautnes, bet virsotnēs degošā materiāla nav. Siltuma pārnese sistēma ar ribām ir tā sistēma, kas tiek modelēta kā šis grafs, kur virsotnes tiek savienotas ar šķautnēm. Mums interesē, kā īsti var modelēt izmantojot siltumvadīšanas vienādojumu pa avota locekļiem, ņemot vērā tikai savstarpējo stāvokli attālumam un novietojumu. Šajā pēcē ignorēsim karsto gāzu pārnese kuras papildus parādās degšanā. Kā izplatās degšana, ja uzskata katru granulu par punktveida daļiņu?

## 2.4. Siltumvadīšanas vienādojuma diskretizācija pa šķautņu punktiem

Apskatīsim situāciju, kad vēlamies parciālo diferenciālvienādojumus attēlot uz grafiem, skatīt vienādojumus (2.9a), (2.9b) un (2.10) pieliekot klāt degšanas saskaitāmos (Arēniusa likumu). Pieņemsim, ka mums ir dotas šķautnes un virsotnes kā parādīts 2.12 attēlā. Uz virsotnēm ir dots degošais materiāls, bet šķautnes vada siltumu.



2.12. att. Grafa attēlojums sistēmu plaknē ar diskretizācijas punktiem

Katrai šķautnei, kuras ir taisnas līnijas un iet no virsotnes uz virsotni diskretizēsīm ar laika soli, piemēram, laika solis  $h = 0.1$ . Katrai šķautnei ir iekšēja diskretizācijas punktu skaits, kur tiek rēķināta temperatūra pēc parastā siltumvadīšanas vienādojuma uz parciāla vienādojuma. Papildus katrai virsotnei ir sava temperatūra, ko sākotnēji pieņemsim  $T_1, T_2, T_3, T_4$ ,

Sistēmas lineārās daļas matrica, būs tik liela, cik ir doti nezināmie. Lai izrēķinātu, cik ir tādu iekšējo diskretizācijas punkti, ņem malas garumu izdala ar  $h^2$ , noapaļojam iegūto rezultātu, atskaitām vieninieku, jo sistēmu plaknē grafs sākas no koordinātām(1,1). Saskaitot pa visām šķautnēm iegūst diskretizācijas punktu skaitu. Lielā sistēmas matrica, kur  $Sk$  ir šķautne izskatās

šādi:

$$Y = \begin{bmatrix} T_{1-4} \\ M_{1-4} \\ Sk_1 \\ Sk_2 \\ Sk_3 \\ Sk_4 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Kur  $Sk$  ir šķautne

$$\frac{dY}{dt} = A \cdot Y + N_{elin}. \quad (2.12)$$

Matricai  $A$ , kura sastāv arī no matricas

$\frac{a^2}{h^2}$  ar trīsdiogmālo matricu iebūvēta katrai matricai, iegūst matricas daļu un ievieto lielajā matricā. Skatoties uz vienu šķautni - iekšējās diskretizācijas punkts  $S_1, S_2$ , pieskarās divām virsotnēm  $v_1, v_2$ , ar soli  $h$ , diskretizēsim ar taišņu metodi temperatūru  $T$ .

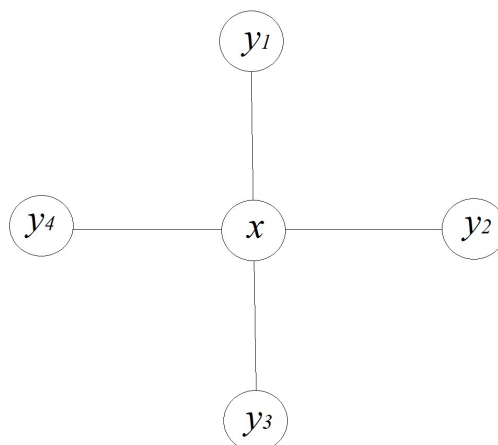
$$\frac{du_1}{dt} = a \frac{u_2 - 2u_1 + T_{v1}}{h^2} \quad (2.13)$$

Pirmajam un pēdējam elementam diskretizācija parādīties temperatūrai no virsotnes, kurai viņa pieguļ, tad sanāk ka virsotne vai nu atdziest vai arī sasilst. Vienādojums virsotnei, kur ieplūst siltuma daudzums, vairākas šķautnes, kuras ieplūst iekšā:

$$\frac{dT_j}{dt} = k \frac{u_1 - T_j}{h^2} + k \frac{u_2 - T_j}{h^2} + \dots + f \quad (2.14)$$

## 2.5. Siltumvadīšanas vienādojumu uz grafa un metriska grafa saistība

Tā kā diskrētais Laplasa operators veidojas dabiski ( skat. (1.4) vienādojumu), lai to parādītu, kā piemēru aplūkosim grafa fragmentu, kas izskatītos kā attēlā 2.8.



2.7.att. grafs

Tad Laplasa operators izskatās šādi:

$$\Delta u(x) = -4u(x) + u(y_1) + u(y_2) + u(y_3) + u(y_4) \quad (2.15)$$

Atbilst centrālai diferencu shēmai ar  $h = 1$ , kas aproksimē Laplasu no funkcijas  $u$  divās dimensijās. No nepārtrauktiem mainīgumiem  $x_1$  un  $x_2$  Laplasa operatoram, kur mainīgie atrodas tikai grafa virsotnēs.

$$\Delta u(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \quad (2.16)$$

Ja grafa virsotnes ir sakārtotas uz režģa uz virsotnes atrastos režģī, tā ka :  $\mathbb{Z}^2 \equiv V$  Katrai virsotnei ir 4 kaimiņi.

$$(x, y) \sim (x \pm 1, y)$$

$$(x, y) \sim (x, y \pm 1)$$

Tā ir Laplasa operatora diskretizācija režģa punktos ar centrālo diferencu shēmu, piecu punktu šablonam, tāpēc to sauc par diskrēto Laplasa operatoru. Tagad pieņemam, ka funkcija būs definēta ne tikai virsotnēs, bet arī būs funkcija no laika. Kā var siltumvadīšanas vienādojums uz metriska grafa var reducēties uz siltumvadīšanas vienādojuma uz grafa Apskatīsim šķautni, kas savieno virsotnes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}; \\ u|_{s=0} = T_1(t); \\ u|_{s=L} = T_2(t); \\ u|_{t=0} = u_0(s), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.17a) \\ (2.17b) \\ (2.17c) \\ (2.17d) \end{array}$$

kad  $0 < s < L$ , un interesē, kas notiek, ja  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Funkcija  $u$  tiek izvirzīta asimptotiskā rindā, tā ka :

$$u(s, t, \varepsilon^2) \sim u_0(s, t) + \varepsilon^2 u_1(s, t) + o(\varepsilon^2) \quad (2.18)$$

kad  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ievietojot pašā sistēmas vienādojumā un pielīdzināt katras  $\varepsilon$  pakāpēm.

pie  $\varepsilon^0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_0}{\partial s^2} = 0 \\ u_0|_{s=0} = T_1(t) \\ u_1|_{s=L} = T_2(t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.19a) \\ (2.19b) \\ (2.19c) \end{array}$$

Kur funkcija  $u$  ir asimptotiski ekvivalents  $u_0$ , ar kārtu  $\varepsilon^2$ , jo proporcionāls nākamajam saskaitāmajam tā, ka:

$$u(s, t, \varepsilon^2) \sim u_0 + O(\varepsilon^2) \quad (2.20)$$

kur  $u_0$  un  $u_1$  ir robežnosacījumi. Ir svarīgi ka nevar pieprasīt, lai izpildās sākumnosacījums, jo sākumnosacījumam (2.22a) nav nozīmes. Tātad neatkarīgi no sākuma nosacījuma, to atmet un dabūjam ekvivalentu siltumvadīšanas vienādojumiem uz grafa. Tad atrisinājums

$$u_0(s, t) = T_1 \frac{L-s}{L} + T_2 \frac{s}{L} \quad (2.21)$$

No atrisinājuma (2.23) pārrakstot uz gradientu:

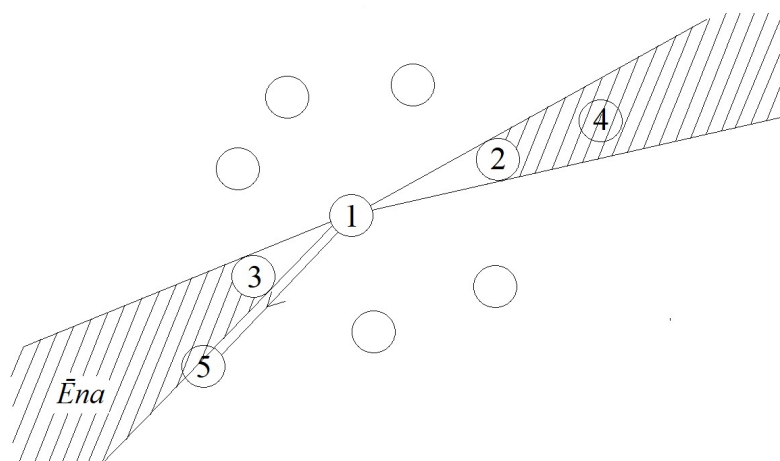
$$\frac{\partial u_0}{\partial s} = \frac{T_2 - T_1}{L} \quad (2.22)$$

Tad siltuma plūsmu no (2.24) pāriet uz diskrēto Laplasa operatoru, jo iegūst ekvivalenci - siltumvadīšanas vienādojums uz metriska grafa reducējas uz siltumvadīšanas vienādojuma uz grafa.

## 2.6. Ēnošanas efekts

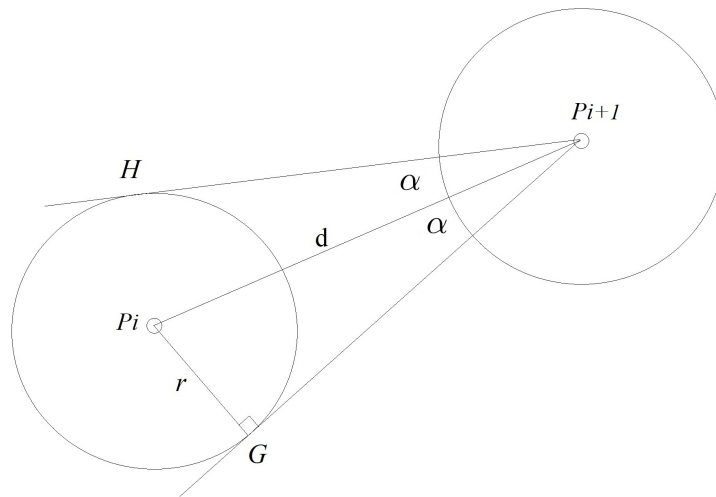
Jo vairāk ir dotas grafa virsotnes, kas savienojas pāros, jo siltumapmaiņas process ir spēcīgāks. Realitātē modelis ir plakana sērkokociņu konfigurācija. Tiek izvēlēts viens no punktiem uz

kuru skatīsimies un apskatīsim šo punktu kaimiņus. Tātad, pieņemam šo vienu izvēlēto punktu par centrālo punktu ar numuru 1 (pirmā virsotne) un no labās puses, (skatīt. 2.8. attēlu) redzam kaimiņu nr. 2 (otrā virsotne), bet aiz kaimiņa ar numuru divi mēs neredzam kaimiņu ar nr. 4, jo tas atrodas otrās virsotnes ēnā. Var saprast, ka no pirmās virsotnes līdz ceturtajai virsotnei siltumapmaiņai nevajadzētu notikt. Šis process notiek līdzīgi arī kreisajā pusē, bet tur kaimiņu ar numuru 5 nevar redzēt pilnībā, tāpēc centrālā virsotne mijiedarbojas tikai daļēji ar šo punktu. Šķautnes svars ir proporcionāls redzamajam leņķim, ja virsotnes nav redzamas viena otrai, tad mijiedarbība vienai ar otru nav, bet ja daļēji redzamas tad mijiedarbojas vāji, ja lielā leņķī redzama otra daļiņa, tad stipri mijiedarbojas viena daļiņa ar otru daļiņu. Šajā situācijā dažas tuvāk esošās virsotnes aizklāj tālāk esošās virsotnes, tāpēc notiek aizēnošanas efekti, ko vienkārši saucim par ēnošanas efektu.



2.8.att.Siltumapmaiņa starp virsotnēm

Apskatīsim tagad divas dimensijas versiju, kur visi punkti atrodas plaknē  $xy$ . Uzskatīsim, ka katram punktam ir apkārtnē ar rādiusu  $r$ . Visiem objektiem vienādi rādiusi. Mums ir doti punkti  $P_i \in R^2$ , kur  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Kādā leņķī mēs redzam no centra blakus esošo kaimiņu? Pieņemsim, ka veidotais leņķis ir  $2\alpha$ .



2.9.att.Divu punktu veidotais leņķis

Ģeometrisks attēlojums: tiek dots riņķis ar centra punktu  $P_i$  un rādiusu ir dots  $r$ , tad vēl ir dots cits punkts  $P_{i+1}$ , starp šiem punktiem ir novilkts attālums  $d$ . Pieskares  $P_{i+1}G$  un  $P_{i+1}H$  veido taisno leņķi. Mums interesē, kādā leņķī no vienas daļiņas centra mēs redzam otru daļiņu? Var redzēt, ka zīmējumā iezīmējas taisnleņķa trijstūris  $P_{i+1}GP_i$  (skat. 2.9. attēlu), kur katete ir  $d$  un  $r$ . Tad leņķi  $\alpha$  aprēķinām kā:

$\sin \alpha = \frac{r}{d} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{r}{d}$ . Nepieciešams atrast procedūru kā labāk definēt sistēmas matricu konfigurācijā, kur uzdoti dažādi punkti. Sākam ar vistuvāko virsotni, jo tai neviens nevar stāvēt priekšā, pēc tam ņem nākamās daļiņas un vai tās tuvākās daļiņas aizēno nākamās daļiņas. Jo lielāks būs leņķu intervāls kurā mēs daļiņu redzam, jo lielāks būs svars grafā, kas savieno vienu virsotni ar otru virsotni. Aizēnotās virsotnes, kuras ir ēnā pavisam, mēs neredzēsim vispār, tāpēc tās vispār netiks savienotas ar malu un svars ir nulle. Tātad siltumapmaiņas intensitāte starp divām tādām daļiņām ir atkarīga no redzamā laukuma otrās daļiņas, tas ir no redzamā leņķa  $\alpha$ .

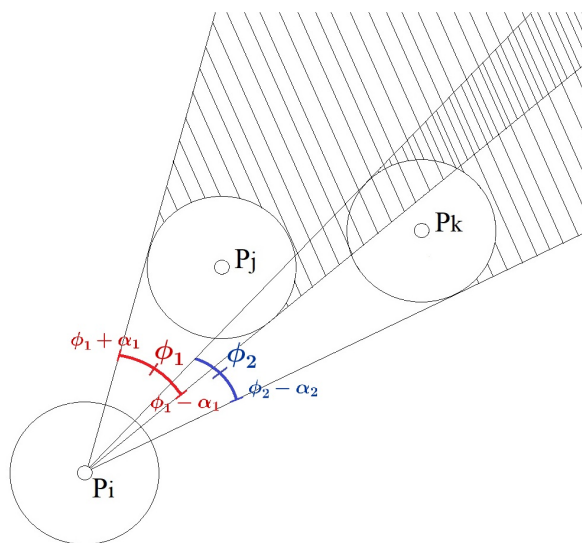
Pieņemsim, ka dotais pirmais punkts  $P_i$ , ir ar koordinātām  $(x_2, y_2)$  un tad otrs punkts  $P_{i+1}$  ir ar koordinātām  $(x_1, y_1)$ . Definējam vektoru, kas pieņem vērtības no pirmā punkta uz otro punktu  $\vec{r}_{12}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ , tādā gadījumā polārās koordinātas leņķis  $\phi$  būs:

$$\arctan \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Arctg vērtību apgabals ir no  $-\frac{\pi}{2}$  līdz  $\frac{\pi}{2}$ , bet polārais leņķis maiņas no  $-\pi$  uz  $\pi$  atkarība no tā kurā kvadrantā tas punkts  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  atrodas, būtu nepieciešams pieskaitīt vai atskaitīt no rezultāta  $\pi$  matlab iebūvēto funkciju attal 2 no y un no x, kas novērš problēmu  $x = 1$  un  $y = 1$  dod to pašu leņķi, kad  $x = -1$  un  $y = -1$

Tagad varam pateikt, ka ap šo punktu  $(x_2, y_2)$  centrēta vesela daļiņa ar rādiusu  $r$  un mēs

šo daļiņu redzam leņķa intervālā no  $\phi - \alpha$  līdz  $\phi + \alpha$ , kas aizēno visas nākamās daļiņas, kas atrodas aiz tās.



2.10.att. Polārās koordinātas

Aplūkosim daļiņu savstarpējo mijiedarbību. Furjē likums attēlo, ka starp pirmo un otro virsotni temperatūra mainās lineāri, ja pieņem uz taisnes punktu  $S$ , tad temperatūra punktā  $S$  mainās lineāri

$$T(s) = T_1 \frac{d-s}{d} + T_2 \frac{s}{d}. \quad (2.23)$$

$T_1$  ir pirmās virsotnes temperatūra, bet  $T_2$  otrās virsotnes. Atvasinot pēc  $s$  iegūsim:  $T_2 - \frac{T_1}{d}$ . Šīs divas virsotnes atrodas termodinamiskā līdzsvarā ar siltuma plūsmu no  $q_{1 \rightarrow 2}$ .

Apskatām sarežģītāku procesu- starojuma siltuma pārneši: Ja ir dots jebkurš ķermenis ar virsmas laukumu  $V_{virisma}$  un temperatūru  $T$ , tad katras virsmas elements izstaro siltuma starojumu intensitāti  $q_{1 \rightarrow 2} = \beta(T_1^4 - T_2^4) \cdot V_{virisma}$ , kas ir pirmās daļiņas laukums  $\frac{S_1}{d^2}$ , kur  $d$  ir attālums starp dotām daļiņā un labajā pusē reizina ar redzmās virsmas laukumu. Tātad reizina ar telpas leņķi kurā no centrālās daļiņas  $V_c$  daļiņas centra ir redzama otras daļiņas virsma. Kādu intensitāti saņem katras otrās daļiņas punkts? Kopējā enerģija ko izstaro vienības virsmas laukums melnam ķermenim ir  $\sigma t^4$ , kur  $\sigma$  melnam ķermenim ir šāda dotā mazā konstante. Gadījumā, ja nav absolūti melns ķermenis, tad izstaro mazāk enerģiju (no Stefana Bolcmaņa likuma).

Reizina ar telpas leņķi kurā no centrālās daļiņas  $V_c$  daļiņas centra ir redzama cotras daļiņas virsma.

## 2.7. Radiatīvā siltumapmaiņa

Interesanta un svarīga problēma ir modelēt starojuma siltumapmaiņu, kas ir daudz sarežģītāka problēma nekā modelējot parasto siltumvadīšanas vienādojumu. Tiek apskatīts, kā caur katru telpas punktu iet starojums visos virzienos un šis starojums var būt arī dažādās frekvencēs, kas nozīmē ļoti daudzas brīvības pakāpes. Starojuma sadalījuma intensitāte ir 7 dimensionāls objekts:

$$I(x, y, z, t, \vec{p}, \nu)$$

Lai aprakstītu starojuma sadalījumu telpā nepieciešamas telpas koordinātas  $(x, y, z)$ , nākamais mainīgais ir vienības vektors  $\vec{p}$ , un  $\nu$  ir frekvence, kas atrodas uz vienības sfēras un  $\nu \in R_+$ . Sfēra pa divām dimensijām  $\vec{p} \in S^2\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

Interpretācija - katrā punktā ir dots virziens  $\vec{p}$ , starojuma intensitāti ietekmē visas iespējamās frekvences, kura intensitātes blīvums var būt gan  $\gamma$ , gan rentgenstarojums vai jebkāda cita frekvence, kas attēlojas kā vilnis ar svaru no Stefana Bolcmaņa vienādojuma, kas parāda, kā starojums izplatās. Lai izveidotu modeli, to nepieciešams vienkāršot, jo kopā ir doti 7 mainīgie, tāpēc definēta septiņu dimensiju telpā. Starojuma emisija - tas ir starojuma izstarošana vai dažādu daļiņu izsviešana no dažādiem materiāliem, mūsu gadījumā no virsotnēm, jeb citādi apstarošana - notiek tikai šajos dotajos punktos. Starojuma vienādojums izskatās šādi:

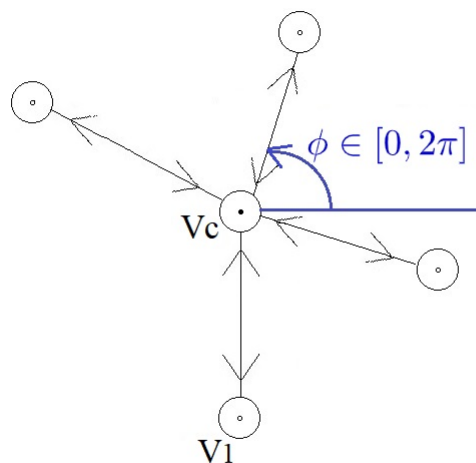
$$\frac{\partial I}{\partial t} + c_g p \nabla I = f. \quad (2.24)$$

Gaismas viļņi, kas dodas cauri punktam ar koordinātām  $x, y, z$ , kustas ar lielu ātrumu, kur  $c_g$  ir gaismas ātrums,  $\vec{p}$  ir virziens, kas saistīts kopā ar gradientu jeb ar orientētu līnijas normāli. Avoti šeit ir emisija no kuras atskaita zudumus, kas ir absorbcija, kad notiek pretējs efekts un daļiņa uzsūcās, kā arī tiek pievienota starojuma novirze, jeb izkliede. Analizējot praktisku piemēru, ka ir dota vide: ļoti karsts sakarsēts stikls, piemēram, 1000 grādi. Visi punkti kvēlo, kas atrodas uz stikla virsmas, tiem punktiem var būt arī atšķirīgas temperatūras, atkarībā no tā, kur tie atrodas. Starp stiklu un gaisu dotajā blīvajā vidē nemitīgi notiek absorbcija un emisija, kur gaismas stari pārvietojas dažādos virzienos. Pieņemam, ka mūsu šādos piemēros darbojas trīs šādi pieņēmumi:

1. Starojums rodas un ir absorbēts tikai gafa virsotnēs;
2. izklijes nav;

### 3. darbojas Stefana Bolcmaņa likums.

$(x, y, z)$  vietā paliek tikai  $n$  virsotnes, tas ir  $(x, y, z) \mapsto V_1 \dots V_n \in R^2$ , kur  $V_C$  apzīmējam ar centrālo virsotni, kur  $c \in 1, \dots, n$ . Sakoties ilustrācijā ( skat. 2.11.attēlu).



2.11.att.Starojuma pārnese

Tie var būt tikai četri virzieni, kur starojums var plūst, virzienos turp un atpakaļ. No centrālā virziena redzam polāro leņķi  $\phi \in [0, 2\pi]$  un centrālajai virsotnei radiatīvā siltumapmaiņa definējam šādi:

$$C_c \frac{dT_c}{dt} = \phi_{c \rightarrow 1} (T_1^4 - T_c^4) \sigma. \quad (2.25)$$

### 3. MODEĻU MATEMĀTISKĀ ANALĪZE

Šajā nodaļā apskatīsim siltumenerģiju  $E$  grafos un to plūsmu starp grafa virsotnēm. Pieņemsim, ka mums ir dots grafs ar  $N_V$  virsotnēm un  $N_E$  šķautnēm. Definēsim siltumenerģiju, kas ir funkcija, kura ir atkarīga no laika  $t$  un parāda summu pa visām grafa virsotnēm un, visām grafa šķautnēm, kur  $u_j$  ir temperatūra  $j$  virsotnei.

$$E = \sum_{j=1}^{N_V} C_j T_j(t) + \sum_{j=1}^{N_E} \int_0^{L_j} u_j(s,t) \frac{k}{a^2} ds. \quad (3.1)$$

Kur  $a^2 = \frac{k}{c \cdot \rho}$ . Tātad  $k$  ir siltumvadīšanas koeficients, bet  $a^2$  ir difūzijas koeficients. Uz katras grafa šķautnes ir dots šāds vienādojums:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_j}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_j}{\partial s^2}; & (3.2a) \\ u|_{s=0} = T_1(t); & (3.2b) \\ u|_{s=L_j} = T_2(t). & (3.2c) \end{cases}$$

Dotie vienādojumi: (4.2.b) un (4.2.c) ir robežnosacījumi ar  $T_1$  pirmās virsotnes temperatūru  $T_2$  otrās virsotnes temperatūru. Mainīgais  $j$  mainās šādi -  $1 \leq j \leq N_E$  un šķautnes, kas savieno vienu ar otru virsotni, pieņem šādas vērtības  $E_j : V_1 \rightarrow V_2$ . Definēsim, ka integrālis no temperatūras ir  $E_j(t)$ .

$$\int_0^{L_j} u_j(s,t) ds = E_j(t). \quad (3.3)$$

Tad nointegrējot vienādojumu (4.2.a) no 0 līdz  $L_j$  tā, ka var mainīt integrāli atvasinājuma vietā, tad kreisā pusē būs parastais diferenciālvienādojums no  $E_j$ , bet labajā pusē būs koeficienta  $a^2$  reizinātājs un atlikušie locekļi. Izmantojot Ņūtona Leibnica formulu:

$$\frac{dE_j}{dt} = a^2 \left( \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=L_j} - \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=0} \right). \quad (3.4)$$

Kur, ja  $s = L_j$ , tas nozīmē, kad  $s$  pieņem maksimālo lielumu. Kāda ir temperatūra pirmajai un otrajai virsotnei?

$$\begin{cases} C_1 \frac{dT_1}{dt} = \dots + k \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=0}; & (3.5a) \\ C_2 \frac{dT_2}{dt} = \dots - k \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=L_j}. & (3.5b) \end{cases}$$

Šeit tiek apzīmētas divu virsotņu temperatūras  $V_1$  pirmajai virsotnei un  $V_2$  otrajai virsotnei, konkrētai  $j$  šķautnei. Daudzpunktu vietā ir domāts, ka siltums var ieplūst arī no citām virsotnēm

(daudzpunktu vietās var atrasties arī avotu saskaitāmie). Jo, ja  $u$  ir augoša funkcija, tas nozīmē, ka virsotņu temperatūras tikai un vienīgi pieaug un, tad virsotne paliek siltāka nekā pieguļošā mala virsotnei un tad virsotne zaudē siltuma daudzumu atdodot to šķautnei.

Vienādojumu (4.4) reizinot ar  $\frac{k}{a^2}$  iegūst:

$$\frac{k}{a^2} \frac{dE_j}{dt} = k \left( \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=L_j} - \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=0} \right). \quad (3.6)$$

Ja mainām integrāli (4.3), piereizinot klāt  $\frac{k}{a^2}$ , tad

$$\int_0^{L_j} \frac{k}{a^2} u_j(s,t) ds = E_j(t), \quad (3.7)$$

bet vienādojumu (4.6) iegūstam patīkamāku un reizinātājs  $\frac{k}{a^2}$  pazūd, jo tas parādās iepriekšējā  $E_j$  integrāļa formulējumā, tad:

$$\frac{dE_j}{dt} = k \left( \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=L_j} - \frac{\partial u_j}{\partial s} \Big|_{s=0} \right). \quad (3.8)$$

Cik daudz šķautnes  $E_j$  zaudē, lai iegūtu enerģiju, tik pat zaudē enerģiju virsotnes  $V_1, V_2$ . Ja tiek saskaitīta kopā iegūtā enerģija, tad var redzēt, ka no vienas šķautnes malas koeficients  $k$  ir ar pluss zīmi, bet no otras šķautnes malas ar mīnusa zīmi, skatīt (4.5) vienādojumu. Tātad labās puses tiek noīsinātas. Sistēmai (4.5) kreisā puse ir vienāda ar:

$$\frac{E_1}{dt} \equiv C_1 \frac{dT_1}{dt}. \quad (3.9)$$

Un attiecīgi otrs vienādojums:

$$\frac{E_2}{dt} \equiv C_2 \frac{dT_1}{dt}. \quad (3.10)$$

### Secinājumi

1. Ja avotu nav, tad

$$\frac{dE}{dt} = 0 \implies E = const. \quad (3.11)$$

2. Avotu funkcija  $f \geq 0$ , tātad:

$$\frac{dE}{dt} \geq 0. \quad (3.12)$$

Šeit parādās minimuma princips, ja sērkokči deg, tad siltumenerģija palielinās.

### 3. Maksimuma princips šķautnei.

$$u_j(s, t) \leq \max \left\{ \sup_{0 \leq s \leq L_j} u_j(s, 0), \sup_{t \geq 0} T_1, \sup_{t \geq 0} T_2 \right\}. \quad (3.13)$$

Temperatūra  $u$  šķautnei  $j$  ir mazāks vai vienāds par maksimālo no suprēmu sākumnosacījumiem un robežnosacījumiem uz virsotņu temperatūras. Kur suprēms ar temperatūru  $u_j(s, 0)$  ir sākumnosacījums, bet suprēms ar  $T_1$  un  $T_2$  ir robežnosacījumi. Šķautnei nevar parādīties pati augstākā temperatūra, tie saucamie "karstie punkti" uz šķautnes, jo šķautnēm nav avota locekļi, bet pati augstākā temperatūra nāk no virsotnēm. Bet, ja avoti nav, tad siltumenerģija paliek konstanta, kas izriet no 1. secinājuma.

Cik katrā virsotnē degošā masa satur enerģijas? Šis vienādojums pārvieto siltuma daudzumu no šķautnēm vai otrādi no šķautnēm uz virsotnēm, kur  $\frac{d}{dT} E_i(t) = C_i \frac{dT}{dt}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_i}{dt} = \alpha f \\ C_i \frac{dT}{dt} = \gamma f. \end{array} \right. \quad (3.14a)$$

$$(3.14b)$$

Var izrēķināt cik katra virsotne satur siltumenerģijas, bet siltumenerģija ir ekvivalenta starp masu un enerģiju, tātad sadegušo masu un saražoto enerģiju.

$$\frac{dM_i}{dt} = \alpha f. \quad (3.15)$$

(4.16) izpildīsies, ja

$$0 \leq M_i(t) \leq M_i(0). \quad (3.16)$$

Jo sākotnēja masa nerodas klāt. Masa pārvēršas siltumenerģijā, sadegot. Tā ir funkcija, kura vienmēr paliek nenegatīva.

Vienādojuma labo pusi pārrakstām šādi:

$$C_i \frac{dT}{dt} = \gamma f = -\frac{\gamma}{\alpha} \frac{dM_i}{dt}. \quad (3.17)$$

Vienādojumā (3.17) parādās īpatnējais sadegšanas siltums, ko apzīmējam ar

$$\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ja integrējam no 0 līdz  $t$ , tad pēc sākotnēji pieņemtās definīcijas, ko sākumā formulējām:

$$E_i(t) - E_i(0) \frac{\gamma}{\alpha} (M_i(0) - M_i(t)) \geq \frac{\gamma}{\alpha} M_i(0), \quad (3.18)$$

Tāpēc, ka  $M_i(t) \geq 0$ .

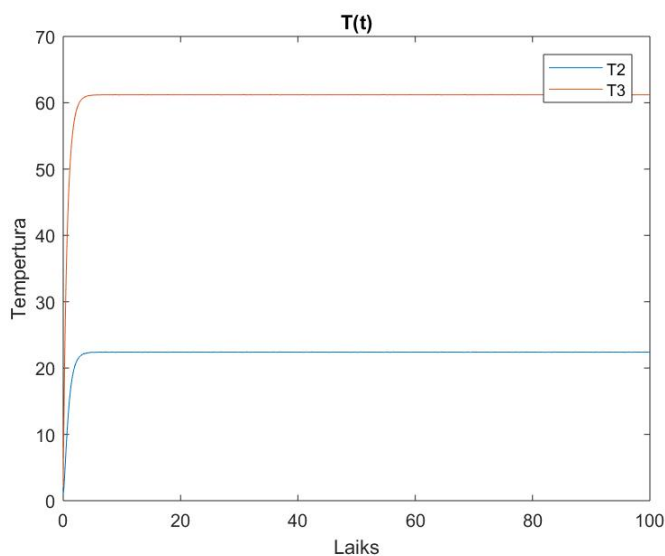
Ja avotu loceklis nav nulle, tadā gadījumā sistēmā ar avotiem:

$$E(0) \leq E(t) \leq \sum_{i=1}^{N_V} \frac{\gamma}{\alpha} M_i(0) + E(0). \quad (3.19)$$

$E(t)$  faktiskā enerģija laikā  $t$ ,  $M_i$  ir virsotnes  $i$  masas sastāvs, bet  $E(0)$  sākumnosacījums enerģijai. Attēlo novērtējumu no augšas, kad pārvarēt degvielas masas enerģiju un pierādīt šāda veida rezultātu.

## 4. SKAITLISKIE EKSPERIMENTI

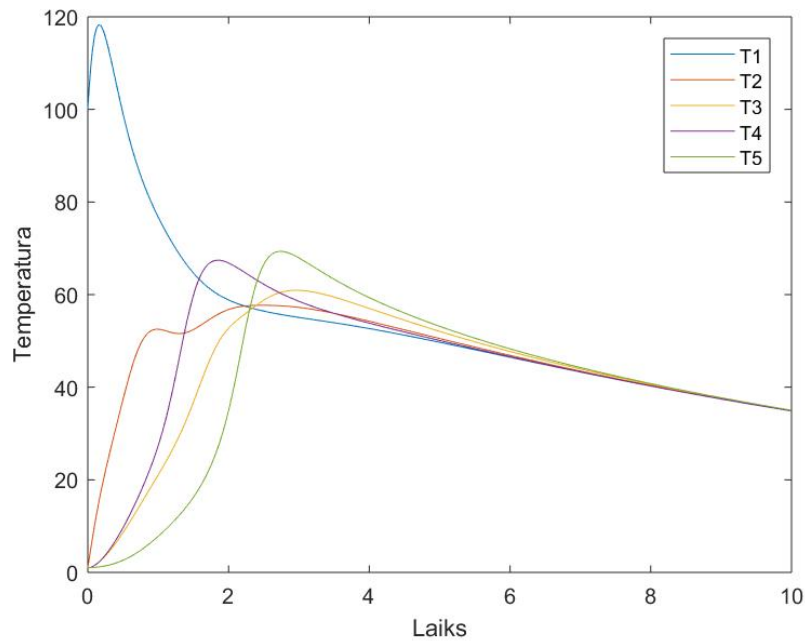
Izveidotajiem matemātiskajiem modeļiem veicam simulācijas programmpaketē *MATLAB*. Vispirms sāksim ar diskrēta tipa uzdevumu ar piecām sērkokociņa virsotnēm, ar modeli, kas attēlots 2.1. attēlā. Diskretizēsim pēc taišņu metodes, pirmkārt, apskatīsim šo modeli bez avota locekļiem (vienādojums (2.1)). Tā kā virsotnes 1, 4 un 5 ir robežnosacījumi, tad šajos punktos izvēlamies temperatūru, bet uz virsotnēm 2 un 3 temperatūra tiks aprēķināta. Skatīt 1. pielikumā programmas kodu!



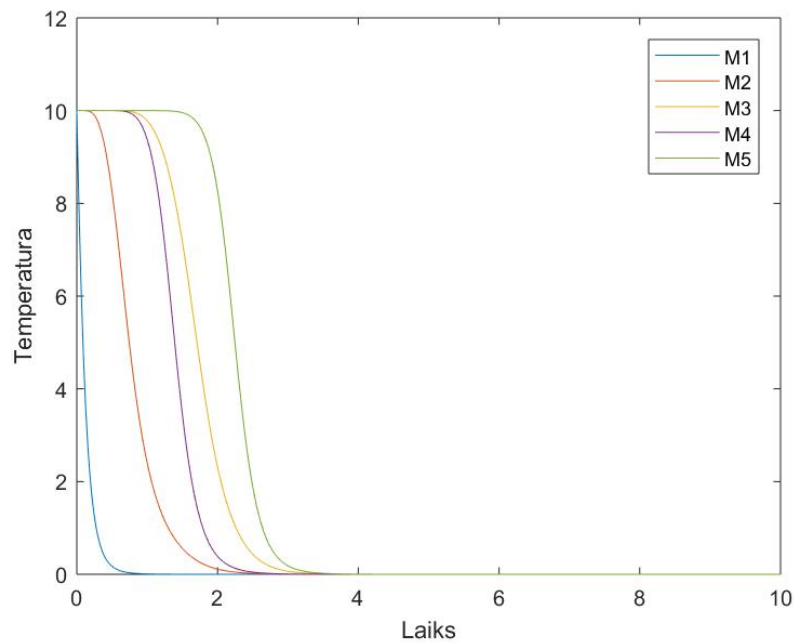
3.1.att.sērkokociņa modeļa divu iekšējo punktu temperatūras

Attēlā 3.1. attēlā ir pieņemtas temperatūras, virsotnē,  $T_1 = 1$ ; virsotnē  $T_4=5$ ; virsotnē  $T_5$  ir 100. Tas nozīmē, ka aizdedzināšana sākas no virsotnes 5, kā arī pēc grafika var redzēt, ka lielāku temperatūru saņem virsotne 3 nekā virsotne 2. Tagad aplūkosim tādu pašu modeli, kuru reprezentē vienādojums (2.1) kopā ar avota locekļiem. Un aplūkosim, kas notiek ar temperatūras un masas izmaiņu, ja aizdedzinām kādu konkrētu sērkokociņu.

Tagad 2.1. attēla modelis matemātiskā simulācijas ar avota locekļiem. Tie aizdedzināta pirmā virsotne, kas redzams arī attēlā 3.2.

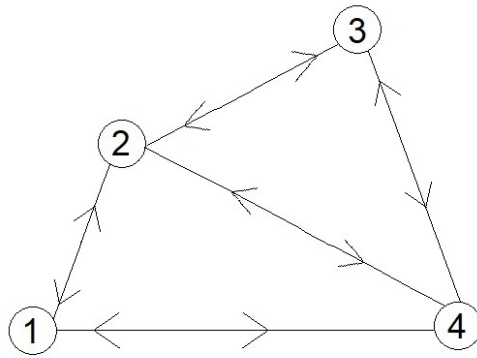


3.2.att.sērkociņa modelis ar piecām virsotnēm; temperatūras izmaiņas



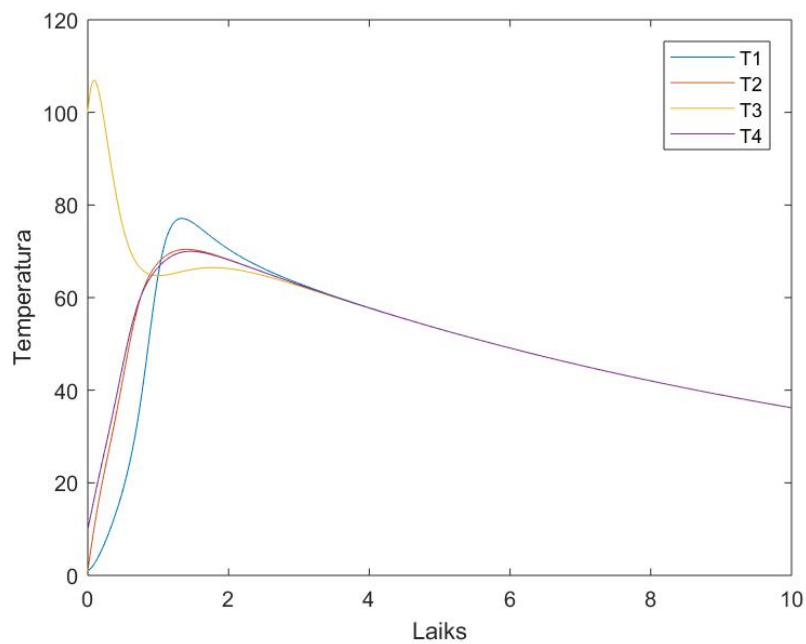
3.3.att.sērkociņa modelis ar piecām virsotnēm; masas izmaiņas

Var redzēt, ka pēdējā virsotne, kas aizdegas ir 5 virsotne, kas ir saprotami, bet otrās virsotnes temperatūra sasniedz pašu mazāko temperatūru, jo atdod siltumu trešajai un ceturtajai virsotnei. Pamainot visotņu skaitu un koeficientus, tagad apskatīsim, kas notiek, ja apskata šāda veida grafu.

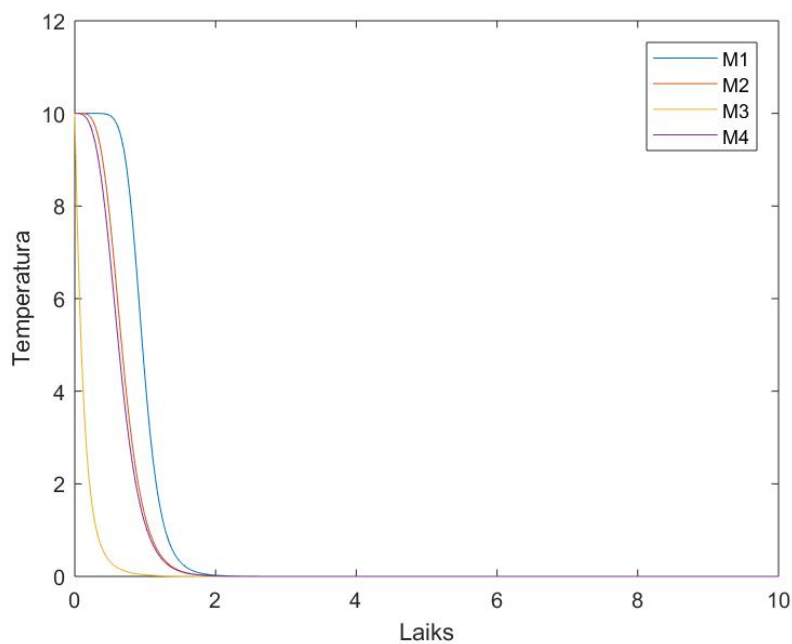


3.4.att. Modelis ar 4 virsotnēm

Tagad pieņemsim, ka aizdedzinām 3 virsotni, tas ir  $T_3$ , bet  $T_4$  virsotnei sākotnējā temperatūra būs 10.

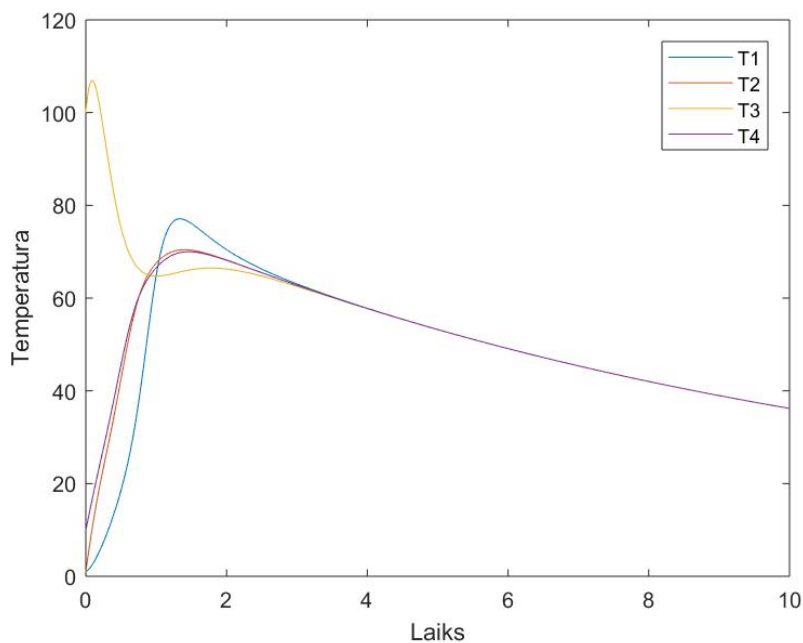


3.5.att. sērskociņa modelis ar četrā virsotnēm; temperatūras izmaiņas

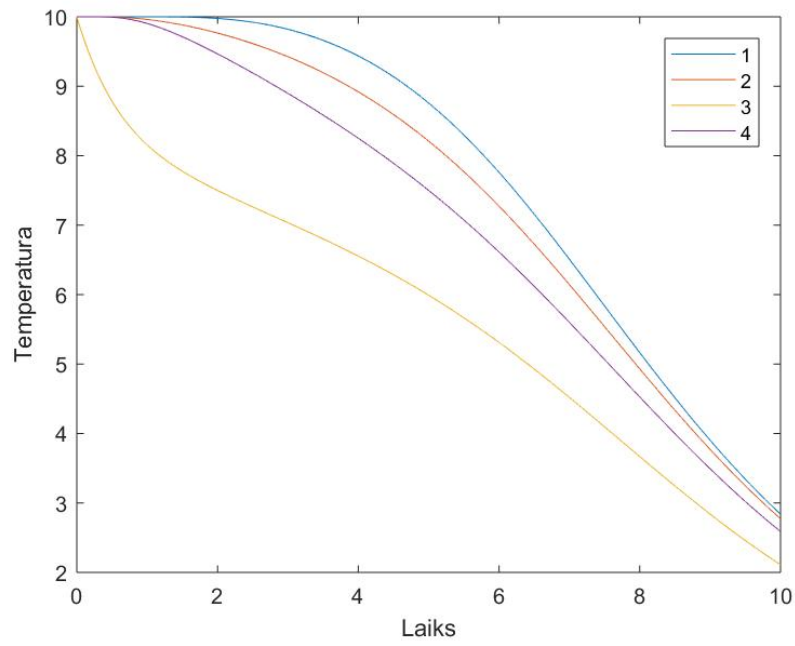


3.6.att.sērkokciņa modelis ar piecām virsotnēm; masas izmaiņas

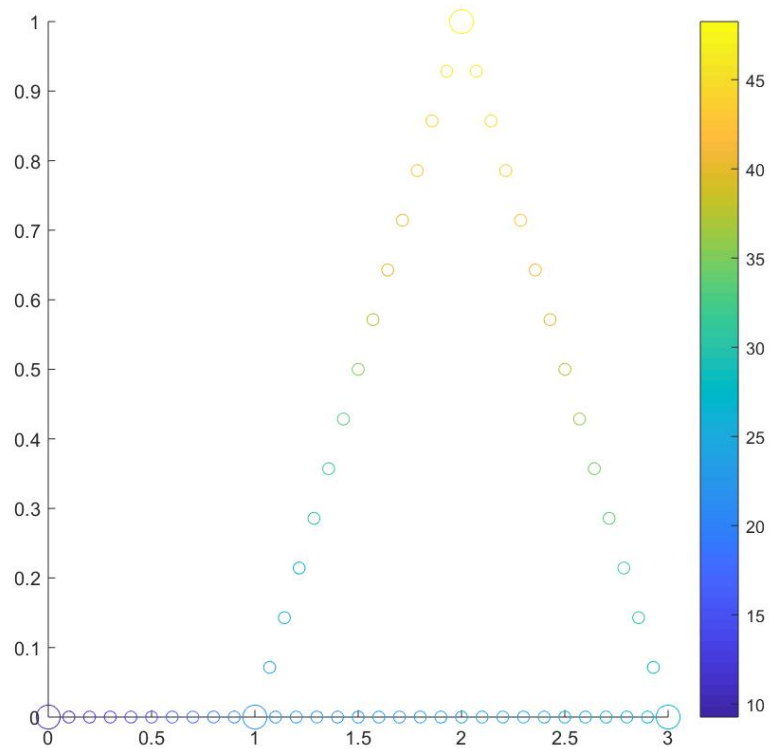
Pēc attēla 3.6. var redzēt, ka pirmās virsotnes masa pēdējānoārdās, jo pēdējā arī aizdegās. Nākamo apskatīsim vizualizāciju siltumvadīšanas vienādojumam uz metriskā grafa ar visām šķautnēm. Temperatūras grafikā, ( skat. attēlu (3.7.)) Redzam, ka pēc aizdegšanās temperatūra samazinās, bet pēc tad atkal palielinās, ko ietekmē šķautņu degtspēja.



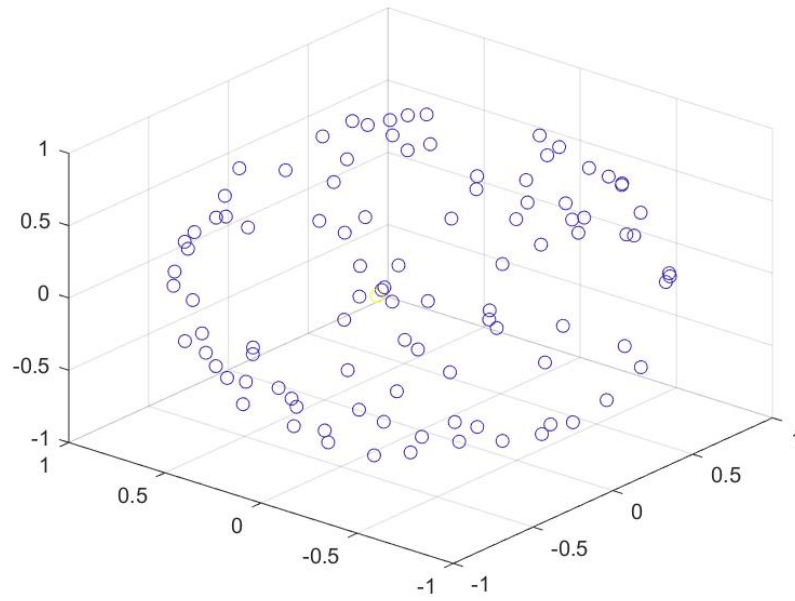
3.7.att.Modelis ar metriskiem grafiem; temperatūras izmaiņas



3.8.att. Modelis ar metriskiem grafiem; masas izmaiņas

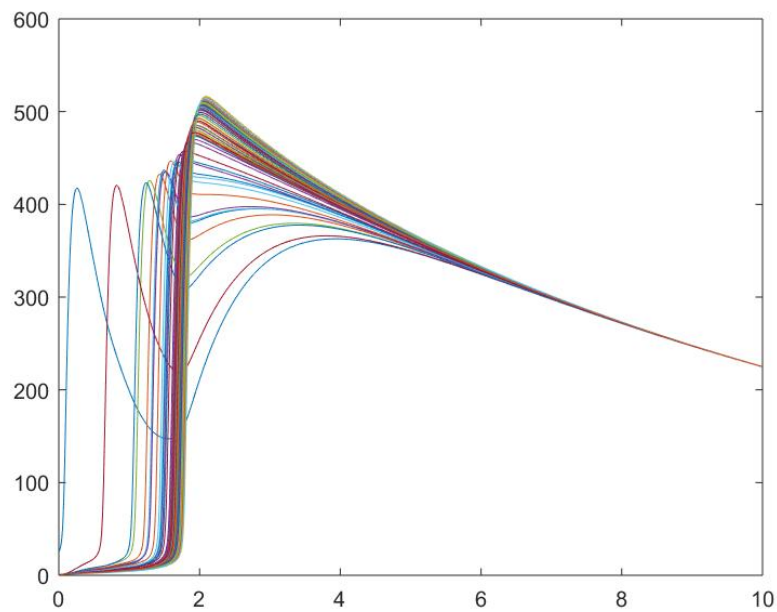


3.9.att. Modelis ar metriskiem; grafiem vizualizācija

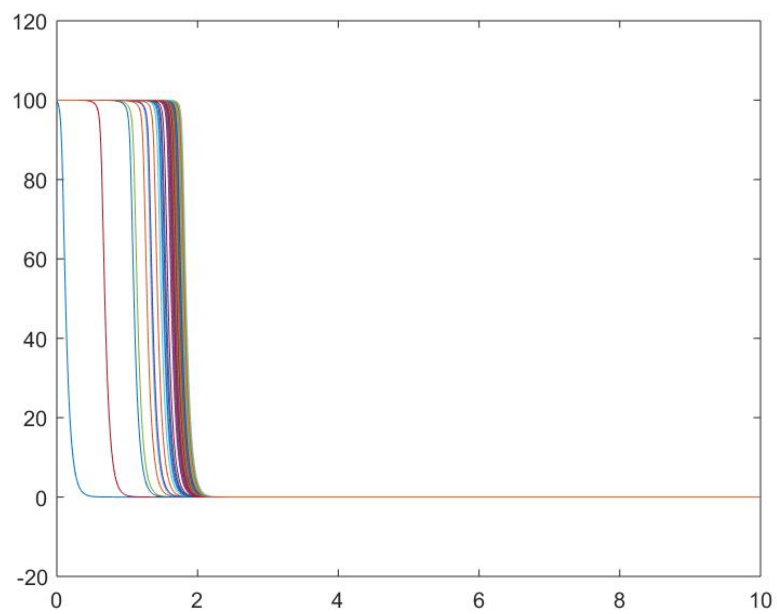


**3.10.att.Sfēras virsmas diskretizācija pa gadījuma punktiem**

Attēlā (3.10.) ir attēlotā sfēras virsma, kur katrā laika momentā ir iespējams redzēt kā aizdegas virsmas punkti.

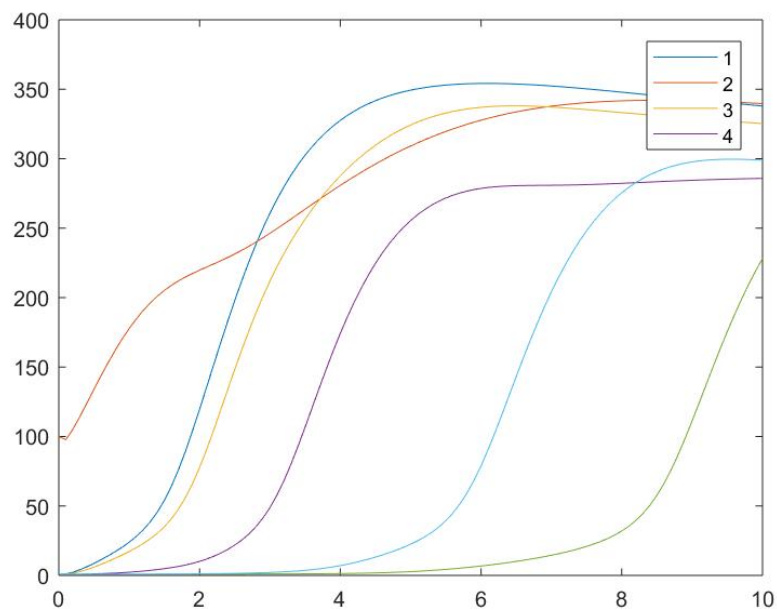


**3.11.att.Sfēras virsmas diskretizācija pa gadījuma punktiem; temperatūras izmaiņas**

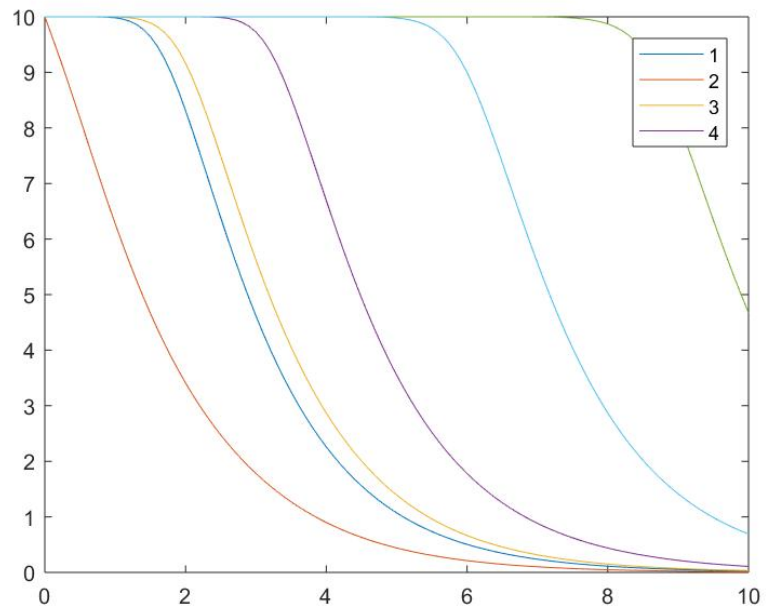


**3.12.att. Sfēras virsmas diskretizācija pa gadījuma punktiem; masas izmaiņas**

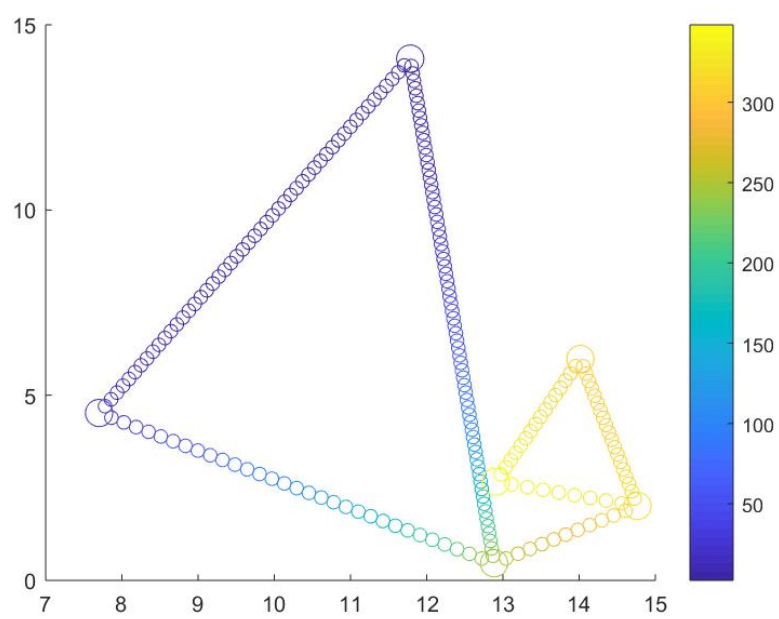
Tagad aplukosim Vēl vienu vizualizāciju siltumvadīšanas vienādojums ar visām šķautnēm un virsotnēm, kur attēlojas radiatīvā siltumapmaiņa. (Skatīt pielikumu 5.)



**3.13.att. Papildus piemērs siltumvadīšanas vienādojumam; temperatūras izmaiņa**

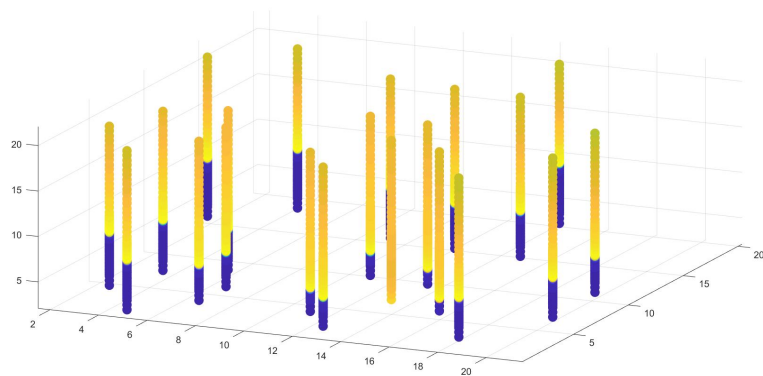


**3.14.att. Papildus piemērs siltimvadīšanas vienādojumam; masas izmaiņa**

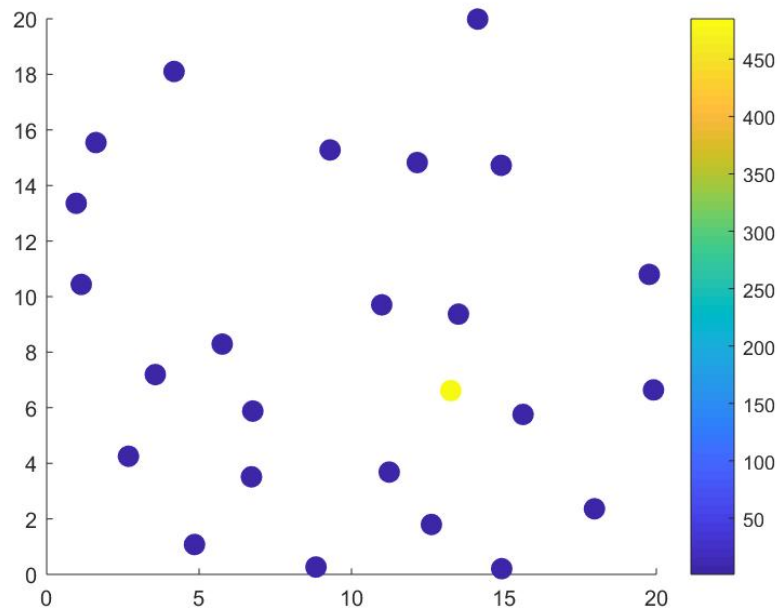


**3.15.att. Papildus piemērs siltimvadišanas vienādojumam vizualizācija**

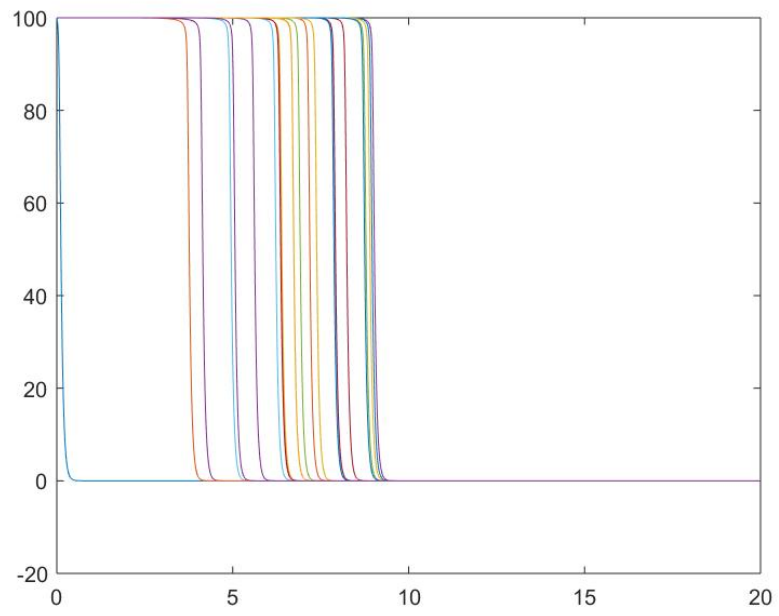
Visbeidzot apskatām ēnošanas efekta siltumapmaiņu un vizualizāciju matlab.(Skatīt pielikumā 6.)



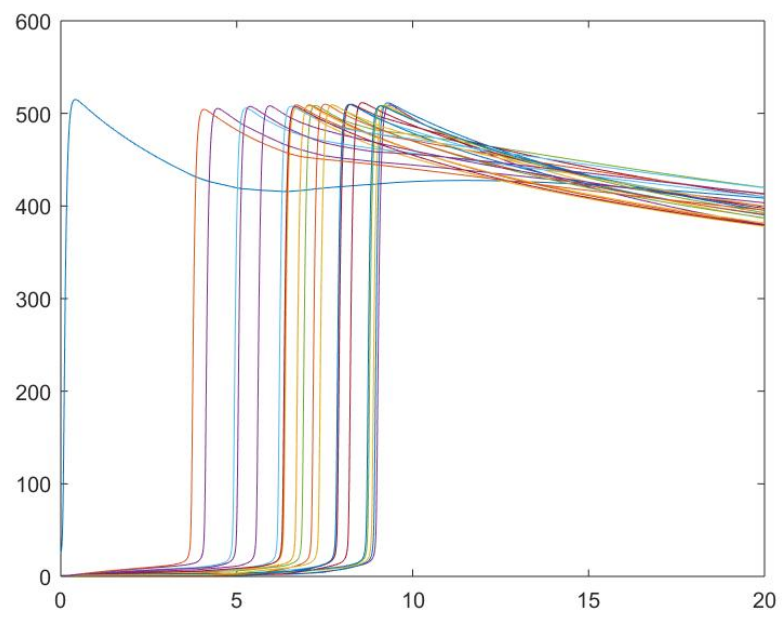
3.16att.



3.17.att.Starojuma siltuma pārnese



*3.18.att.*



*3.19.att.4*

## 5. SECINĀJUMI

Izstrādājot šo Maģistra darbu, tika izveidots un analizēts siltumvadīšanas un siltuma starojuma pārneses procesi un zuduma procesu matemātiskie modeļi, un veikti modeļu skaitliskie eksperimenti. Modeļus veidojam ar grafu palīdzību tā, lai tie līdzinātos matemātiskajiem un analizējamiem objektiem un to īpašībām. Šajā darbā tika sasniegts izvirzītais mērķis un izteiktie uzdevumi. Maģistra darba secinājumi:

1. ražošana un ģenerēšana vienmēr notiek telpā un laikā; Telpas diskretizācija, ko var reprezentēt ar grafu palīdzību, piemēram, galīgai diferencu shēmas šabloni;
2. Situācijas, kad siltuma pārnese notiek starp maziem diskrētiem objektiem, kas siltumvadīšanas vienādojumā ir dabiski, tad var uzreiz definēt lietojot grafa formālismu;
3. Radiatīvās siltumu pārneses gadījumā, grafu lietošana ir ērta un skaitliskie eksperimenti izprotami.
4. Skaitliskie vienādojumi ir radniecīgi taišņu metodēm;
5. Ja šķautnes labi vada siltumu, tad uz tām nav nepieciešams risināt parciālo diferenciālvienādojumu, kas atvieglo darbu un tapa taupa resursus;
6. Šajā darbā esam ieguvuši maksimuma un minimuma principus degšanas modelim, kas garantē atrisinājuma ierobežotību šīs nelineārās sistēmas atrisinājumiem;
7. Skaitliskie eksperimenti parāda, ka ir daudzsoļa pieeja dažādu uzdevumu risināšanai;

Autore turpmāk matemātisko modeļu aprakstu un pētījumu varētu lietot simulētu degšanu vai siltuma ražošanu laikā, kā piemēram, modelēt neirona tīklus vai, lai simulētu epidēmijas izplatīšanos, kur virsotnes ir pilsētas, bet ceļi ir šķautnes. Papildus pievienojot konvekciju pa šķautnēm, tas ir uzdot ātrumu uz šķautnēm. Papildus tam varētu apskatīt kustīgas virsotnes, piemēram, aizdedzinot gāzveida vielas, kas būtu daudz interesantāks modelis.

# IZMANTOTĀS LITERATŪRAS UN AVOTU SARAKSTS

- [ 1 ]. **X. Huang** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, "On uniqueness class for a heat equation on graphs" , Department of Mathematics, Bielefeld University, 33501 Bielefeld, Germany, 2012.
- [ 2 ]. **A. Weber** *Analysis of the laplacian and the heat flow on a locally finite graph*, J. Math. Anal., 146–158p, 2010
- [ 3 ]. **T.Tamai, K. Murotani** *On the consistency and convergence of particle-based meshfree discretization schemes for the Laplace operator*, n.142,79-85 p., 2016
- [ 4 ]. **A.A. Samarskii and A.P.Mikhailov** *Principles of mathematical Modeling*, 79-86p., 2002.
- [ 5 ]. **G. Qi Xu, N. E. Mastorakis** *DIFFERENTIAL EQUATIONS ON METRIC GRAPH*, 53-109p., 2010
- [ 6 ]. <https://phys.org/news/2014-12-what-is-heat-conduction.html> (01.04.2020).
- [ 7 ]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Metric\\_dimension\\_\(graph\\_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Metric_dimension_(graph_theory)) (01.05.2020).
- [ 8 ]. <https://arxiv.org/abs/1912.07549> (01.05.2020).
- [ 9 ]. <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/calorific-value> (01.05.2020).
- [ 10 ]. <https://lv.wikipedia.org/wiki/Siltumietilp%C4%ABba> (01.05.2020).
- [ 11 ]. [https://www.vugd.gov.lv/lat/drosibas\\_padomi/ugunsdrosiba/par\\_kulas\\_ugunsgrekiem](https://www.vugd.gov.lv/lat/drosibas_padomi/ugunsdrosiba/par_kulas_ugunsgrekiem)(01.04.2020).
- [ 12 ]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Heat\\_capacity](https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_capacity) (01.05.2020).
- [ 13 ]. <https://www.fizmix.lv/fiztemas/siltums-un-darbs-9/siltuma-daudzums> (11.05.2020).
- [ 14 ]. <http://www.ulbrokas-vsk.lv/diski/Physicon2/Open%20Physics%202.6%20part%20%20Lat/content/chapter5/section/paragraph1/theory.html> (13.05.2020).
- [ 15 ]. <https://www.sciencedirect.com/topics/physics-and-astronomy/stefan-boltzmann-law> (13.05.2020).
- [ 16 ]. [https://en.wikipedia.org/wiki/Arrhenius\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Arrhenius_equation) (12.03.2020).
- [ 17 ]. <https://www.britannica.com/science/Olbers-paradox> (19.05.2020).

- [ 18]. [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical\\_and\\_Theoretical\\_Chemistry\\_Textbook\\_Maps/Supplemental\\_Modules\\_\(Physical\\_and\\_Theoretical\\_Chemistry\)/Kinetics/Modeling\\_Reaction\\_Kinetics/Temperature\\_Dependence\\_of\\_Reaction\\_Rates/The\\_Arrhenius\\_Law/Arrhenius\\_Equation](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Kinetics/Modeling_Reaction_Kinetics/Temperature_Dependence_of_Reaction_Rates/The_Arrhenius_Law/Arrhenius_Equation) (12.03.2020).
- [ 19 ]. [https://www.auburn.edu/academic/forestry\\_wildlife/fire/combustion.htm](https://www.auburn.edu/academic/forestry_wildlife/fire/combustion.htm) (19.05.2020).
- [ 20 ]. <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/radiation-heat-transfer> (21.05.2020).
- [ 21 ]. <https://www.chemguide.co.uk/physical/basicrates/arrhenius.html> (12.03.2020).

# PIELIKUMI

Skaitliskās simulācijas *MATLAB* programpaketē.

1. % funkcija bez avotiem, šis būs gadījums pirmajam modelim ar 5 virsotnēm

```
function result=f1(t, T)
%T(1) ir T2(t)
%T(2) ir T3(t)
T1=1;% bez avota locekļiem
T4=5;
T5=100;
k12=1;
k32=1;
k24=1;
k23=1;
k35=1;
result=zeros(2, 1);
result(1)=k12*(T1-T(1,:))+k32*(T(2,:)-T(1,:))+k24*(T4-T(1,:));
result(2)=k23*(T(1,:)-T(2,:))+k35*(T5-T(2,:));
%[t, Y] = ode45(@fun,[0 100],[1,2]);
end
```

```
[t, Y] = ode45(@f1,[0,100],[1;2]);% [0,100] ir laiks un otrs SN.
```

```
figure
plot(t, Y)
title('T(t)')
xlabel('Laiks'), ylabel('Temperatura')
legend('T2', 'T3');
```

2. function out = burn1(t,Y)% ar siltuma avotiem un matricu forma.

```
% Y(1)...Y(5) ir mezglu 1...5 temperatūra
% Y(6)...Y(10) ir mezglu 1...5 degvielas saturs
%Grafa matrica
M = [-1 1 0 0 0;
```

```

1 -3 1 1 0;
0 1 -2 0 1;
0 1 0 -1 0;
0 0 1 0 -1];
skaits = size(M,1);
out = zeros(2*skaits,1);
ind1 = (1:skaits)'; %Temperaturas
ind2 = ((skaits+1):(2*skaits))'; %Masas
out(ind1) = M*Y(ind1,:); %Silt. vadišana
out(ind1)=out(ind1)+ 100*Y(ind2,:).*exp(-100./Y(ind1,:)); %Degšanas siltums
out(ind1)=out(ind1) + 0.1*(10*ones(skaits,1)-Y(ind1,:));%siltuma zudumi lineari
out(ind2) = -20* Y(ind2,:).*exp(-100./Y(ind1,:));

```

```

[t,Y]=ode45(@burn1, [0 10],[100 1 1 1 1 10 10 10 10 10]');% tas ir burn1plot= main
figure
plot(t,Y(:,1:5))
legend('T1','T2','T3','T4','T5');
figure
plot(t,Y(:,6:10));
legend('M1','M2','M3','M4','M5');

```

### 3. function out = burn2(t,Y)% ar siltuma avotiem un matricu form?

```

% Y(1)...Y(5) ir mezglu 1...5 temperatura
% Y(6)...Y(10) ir mezglu 1...5 degvielas saturs
%Grafa matrica
M = [-2 1 0 1;
1 -3 1 1 ;
0 1 -2 1;
1 1 1 -3];
skaits = size(M,1);
out = zeros(2*skaits,1);
ind1 = (1:skaits)';%Temperaturas
ind2 = ((skaits+1):(2*skaits))'; %Masas

```

```

out(ind1) = M*Y(ind1,:); %Silt. vadīšana
out(ind1)=out(ind1)+ 100*Y(ind2,:).*exp(-100./Y(ind1,:)); %Degšanas siltums
out(ind1)=out(ind1) + 0.1*(10*ones(skaitis,1)-Y(ind1,:));%siltuma zudumi lineari
out(ind2) = -20* Y(ind2,:).*exp(-100./Y(ind1,:));

```

#### 4. % Virsotņu koordinātes

```

vk = [0 0;
      1 0;
      2 1;
      3 0];

```

% Šķautnes

```

ed = [1 2;
      2 3;
      2 4;
      3 4];

```

```

Nv = size(vk,1); Ne = size(ed,1);

```

% Virsotņu siltumietilpība

```

ci = 10*ones(Nv,1);

```

% šķautņu siltuma difūzijas koeficienti

```

a2 = 10*ones(Ne,1);

```

% Šķautņu siltuma vadīšanas koeficienti

```

ek = 1*ones(Ne,1);

```

% Telpas diskretizācijas solis solis

```

hx = .1;

```

% Arreniusa parametri

```

arhA = 10; arhE = 100; arhB = 1;

```

```

%+++++

```

% Globālo mainīgo numerācija:

```

% j = 1:Nv -> virsotņu temperatūra

```

```

% j = Nv+1:2*Nv -> degvielas masa virsotnes

```

```

% j = 2*Nv+1 : Nv+(1. šķautnes iekšējo disk. ptu skaits) -> 1. šķautnes temp.
% utt.

tmp = vk(ed(:,1),:)-vk(ed(:,2),:);
Le = diag(sqrt(tmp*tmp'));
% Šķautņu iekšējo diskretizācijas punktu skaits
Nde = sum(floor(Le/hx)-1);
% Sakam veidot globlo sistēmas matricu A
% Un globlo labo pusi RHS A = zeros(2*Nv+Nde, 2*Nv+Nde); idx = 2*Nv; for k = 1:Ne
% Siltumvadišanas vienādojuma diskretizācija uz k-tas šķautnes
ss = 0:hx:Le(k); ss = ss(2:end-1); Ns = length(ss);
Ak = -2*diag(ones(1,Ns))+diag(ones(1,Ns-1),1)+diag(ones(1, Ns-1),-1);
Ak = Ak * a2(k)/hx2;

A((idx+1):(idx+Ns), (idx+1):(idx+Ns)) = Ak;

% siltuma piensumu šīs šķautnes virsotnēm.
v1 = ed(k,1); v2 = ed(k,2);
A(v1, idx+1) = ek(k)/hx;
A(v1, v1) = A(v1,v1) - ek(k)/hx;
A(v2, idx + Ns) = ek(k)/hx;
A(v2, v2) = A(v2,v2) - ek(k)/hx;

% ... un virsotņu piensumu šķ.
A(idx+1, v1) = a2(k)/hx2;
A(idx+Ns, v2) = a2(k)/hx2;
% Sagatavojamies nakamajai šķautnei
idx = idx+Ns;
end;
% Sistēmas funkcija
arrh = @(y) [arhA*y((Nv+1):(2*Nv)).*exp(-arhE./y(1:Nv));
-arhB*y((Nv+1):(2*Nv)).*exp(-arhE./y(1:Nv));
zeros(Nde,1)];

```

```
odef = @(t,y) A*y + arrh(y);
```

```
%sākumnosacījumi
```

```
y0 = 100*ones(2*Nv+Nde,1);
```

```
y0(1:Nv) = [1;1;100;1]; % Sakuma temperatuura virsotnēm
```

```
y0(Nv+1:2*Nv) = 10*ones(Nv,1); % sākuma degvielas saturs virsotnēm
```

```
y0(2*Nv+1:end) = 1.*ones(Nde,1); % šķautņu sākuma temperatuura
```

*t,y*

```
=ode45(odef, [0, 10], y0);
```

```
plot(t,y(:,1:Nv));
```

```
xlabel('Laiks'), ylabel('Temperatura')
```

```
legend('1','2','3','4');
```

```
figure; plot(t,y(:,Nv+1:2*Nv));
```

```
xlabel('Laiks'), ylabel('Temperatura')
```

```
legend('1','2','3','4');
```

## 5. clear

```
% Virsotņu koordinātes
```

```
%vk = [0 1; 0 -1; 1 0; 2 0; 3 1; 3 -1];
```

```
vk = rand(6,2)*15;
```

```
% Šķautnes
```

```
ed = [1 2
```

```
1 3;
```

```
2 3;
```

```
3 4;
```

```
4 5;
```

```
5 6;
```

```
4 6];
```

```
Nv = size(vk,1); Ne = size(ed,1);
```

```
% Virsotņu siltumietilpība
```

```
ci = 10*ones(Nv,1);
```

```

% Š?aut?u siltuma difuuzijas koeficienti
a2 = 10*ones(Ne,1); % Š?aut?u siltuma vad?šanas koeficienti
ek = 1*ones(Ne,1)
% Telpas diskretizācijas solis šķ
hx = .2;
% Arr?niusa parametri arhA = 50; arhE = 100; arhB = 1;

%+++++++% Glob?l? main?go numer?cija:
% j = 1:Nv -> virsot?u temperatūra
% j = Nv+1:2*Nv -> degvielas masa virsotn?s
% j = 2*Nv+1 : Nv+(1. š?autnes iekš?jo disk. ptu skaits) -> 1. š?autnes temp.
% utt.
% Izr??in?m š?aut?u garumus
tmp = vk(ed(:,1),:)-vk(ed(:,2),:);
Le = diag(sqrt(tmp*tmp'));
% Š?aut?u iekš?jo diskretiz?cijas punktu skaits
Nde = sum(floor(Le/hx)-1);% S?kam veidot glob?lo sist?mas matricu A
A = zeros(2*Nv+Nde, 2*Nv+Nde);
idx = 2*Nv;
for k = 1:Ne
% Siltumv. disk. punktos
ss = 0:hx:Le(k); ss = ss(2:end-1); Ns = length(ss);
Ak = -2*diag(ones(1,Ns))+diag(ones(1,Ns-1),1)+diag(ones(1, Ns-1),-1);
Ak = Ak * a2(k)/hx2;

% Ievietojam lok?lo diskretiz?ciju glob?laj? sist?mas matrica
A((idx+1):(idx+Ns), (idx+1):(idx+Ns)) = Ak;
% Izr??in?m siltuma pienesumu š?s š?autnes virsotn?m
. v1 = ed(k,1); v2 = ed(k,2);
A(v1, idx+1) = ek(k)/hx;
A(v1, v1) = A(v1,v1) - ek(k)/hx;

A(v2, idx + Ns) = ek(k)/hx;

```

```

A(v2, v2) = A(v2,v2) - ek(k)/hx;
%.. un virsotnu pienesumu sk.
A(idx+1, v1) = a2(k)/hx2;
A(idx+Ns, v2) = a2(k)/hx2;
% Sagatavojamies n?kamajai š?autnei
idx = idx+Ns;
end;
% Sist?mas funkcija
arrh = @(y) [arhA*y((Nv+1):(2*Nv)).*exp(-arhE./y(1:Nv))
-arhB*y((Nv+1):(2*Nv)).*exp(-arhE./y(1:Nv))];
zeros(Nde,1)];
odef = @(t,y) A*y + arrh(y);

% S?kumnosacijumi
y0 = 100*ones(2*Nv+Nde,1); y0(1:Nv)= [1;100;1;1;1;1]; % S?kuma temperatūra vir-
sotn?m
y0(Nv+1:2*Nv) = 10*ones(Nv,1); % s?kuma degvielas saturs virsotn?m
y0(2*Nv+1:end) = 1.*ones(Nde,1); % š?aut?u s?kuma temperatūra

Tb = 10; %Simul?cijas beigu laiks
ht = .1 % Laika interv?ls, ar k?du tiek izvad?ti atrisin?jumi

t,y
=ode45(odef, [0:ht:Tb],y0); %Kas notiek ar ode15s?

plot(t,y(:,1:Nv)); legend('1','2','3','4');
figure; plot(t,y(:,Nv+1:2*Nv)); legend('1','2','3','4');
% Atrad?sim visu š?aut?u iekš?jo main?go koordin?te
xx = zeros(Nde+Nv,1); yy=xx; idx=1
for k=1:Ne
v1 = ed(k,1); v2 = ed(k,2);
x1 = vk(v1,1); x2 = vk(v2,1);
y1 = vk(v1,2); y2 = vk(v2,2);

```

```

np = floor(Le(k)/hx)+1
xk = linspace(x1,x2,np); xk = xk(2:end-1);
yk = linspace(y1,y2,np); yk = yk(2:end-1);
xx(idx:idx+np-3) = xk; yy(idx:idx+np-3) = yk;
idx = idx+np-2;
end
xx(idx:idx+Nv-1) = vk(:,1); yy(idx:idx+Nv-1) = vk(:,2);
Tchoice = 5; Tnumber = floor(Tchoice/ht);
msize = [40*ones(idx-1,1); 160*ones(Nv,1)];
data = [y(Tnumber, 2*Nv+1:end), y(Tnumber,1:Nv)];
figure
scatter(xx,yy, msize, data); colorbar;

```

Maģistra darbs darbs "SILTUMA ĢENERĒŠANAS UN PĀRNESES PROCESU MO-  
DELĒŠANA GRAFOS" izstrādāts LU Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie in-  
formācijas avoti un iesniegtā noslēguma darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: \_\_\_\_\_ Laura Leja

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: Dr. math. Uldis Strautiņš \_\_\_\_\_ .06.2020

Recenzents: Mg.math. Maksims Marinaki

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā \_\_\_\_\_ .2020.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Lāsma Štāle \_\_\_\_\_

Darbs aizstāvēts Maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

\_\_\_\_\_. prot. Nr. \_\_\_\_\_

Komisijas sekretāre: lektore Maruta Avotiņa \_\_\_\_\_