Lehrbuch

der

Planimetrie

zum Schulgebrauch bearbeitet

von

G. Schweder,
Oberlehrer am Real-Gymnasium zu Riga.

Riga.
Verlag von J. Bacmeister.
1869.

Vorwort.

Obgleich ich bei meiner Bearbeitung der Planimetrie mich bemüht habe, die geometrischen Sätze in einen organischen Zusammenhang zu bringen, so können doch manche Sätze, als nicht wesentlich in das System gehörig, beim ersten Durchnehmen, oder wo dem Lehrer eine zu kurze Zeit zugemessen ist, übergangen werden. Solche Sätze sind mit einem * bezeichnet.

Da die Geometrie nicht blos gekannt, sondern auch gekonnt werden soll, so muß der Schüler außer der Erklärung und Begründung der Hauptsätze noch Gelegenheit zu selbstthätigen Uebungen haben. Diese Uebungen geben erst das volle Verständniß und erwecken gleichzeitig Lust und Liebe zur Geometrie. Dennoch glaubte ich die Aufgaben fortlassen zu dürfen, da sie nicht wesentlich in den Lehrbegriff der Geometrie gehören. Am wenigsten passen für ein Lehrbuch Aufgaben mit gleich folgender Lösung, da solche ziemlich ebenso wenig nützen als das Lesen lateinischer Schriftsteller mit beigedruckter deutscher Uebersetzung. Der Schüler soll die Lösungen selbst finden, und ihm darin die Anleitung zu geben, das ist die Aufgabe des Lehrers. Dem Lehrer darf also wol auch die Auswahl der Aufgaben überlassen werden, und diesem wird es an Sammlungen geeigneter Aufgaben nicht fehlen. Ich erinnere nur an „die Geometrie der Alten" von Woeckel.

Riga, October 1868.

G. Schweder.

Abkürzungen.

$a + b$	heißt	a zu b addirt.
$a - b$	„	b von a subtrahirt.
$a \times b$ $a \cdot b$	„	a mit b multiplicirt.
$\frac{a}{b}$	„	a durch b dividirt.
$a < b$	„	a größer als b.
$a < b$	„	a kleiner als b.
$a = b$	„	a gleich b.
$a \backsim b$	„	a ähnlich b.
$a \cong b$	„	a kongruent b.
$a \parallel b$	„	a parallel b
$a \# b$	„	a gleich und parallel b.
$\perp$	„	a senkrecht zu b.
$\angle$	„	Winkel.
R	„	rechter Winkel.
Fig.	„	Figur.
$\triangle$	„	Dreieck.
$\parallel$gr.	„	Parallelogramm.
Bog.	„	Bogen.
Vors.	„	Voraussetzung.
Bpt.	„	Behauptung.
Bw.	„	Beweis.

Einleitung.

I. Vorbegriffe.

1. Alles, was einer Theilung oder Vervielfältigung fähig ist, heißt eine Größe. —

Die Mathematik ist die Lehre von den Größen. Sie hat es mit Größen zweierlei Art zu thun und heißt Arithmetik, wenn sie von Zahlengrößen, Geometrie, wenn sie von Raumgrößen handelt. Während es bei Zahlengrößen blos auf die Menge der Einheiten ankommt, aus denen sie bestehen, besitzen die Raumgrößen Ausdehnung, und hängen ihre Theile ununterbrochen zusammen, so daß das Ende des einen Theils zugleich der Anfang des andern ist. —

Größen, von denen eine oder ein Theil der einen für die andere gesetzt werden kann, ohne daß dadurch etwas geändert wird, heißen gleichartig. Gleichartige Größen heißen gleich, wenn man die eine für die andere setzen kann, ungleich, wenn zu der einen noch etwas hinzugefügt werden muß, um die andere hervorzubringen. Die erste Größe ist dann die kleinere, die zweite die größere. —

2. Ein nach allen Seiten vollständig begrenzter Raum ist ein geometrischer Körper; er ist die Form eines physischen Körpers. Die Grenzen der Körper sind Flächen, die Grenzen der Flächen Linien, die Grenzen der Linien sind Punkte. Ein Punkt hat weiter keine Grenzen und keine Ausdehnung, sondern bezeichnet blos eine Stelle im Raum. —

Da die Grenze eines Gegenstandes kein Theil desselben ist, sondern blos angibt, wo derselbe aufhört, so kann durch Zusammensetzen von Punkten keine Linie, durch Aneinanderlegen von Linien keine Fläche, durch Aufeinanderlegen von Flächen kein Körper gebildet werden. Wol aber kann durch Bewegung eines Punktes eine Linie, durch Bewegung einer Linie eine Fläche, durch Bewegung einer Fläche ein Körper erzeugt werden. Die Linie ist dann die Spur, der Weg des bewegten Punktes und erhält eine Ausdehnung: die Länge; eine Fläche ist der Weg einer bewegten Linie und erhält noch eine zweite Ausdehnung: die Breite; ein Körper ist der Weg einer bewegten Fläche und erhält noch eine dritte Ausdehnung: die Dicke (Höhe oder Tiefe). Da der

Weg, den ein Körper im Raum zurücklegt. wieder ein Körper ist, so gibt es blos drei Raumgrößen: Linien, Flächen, Körper. —

3. Soll ein Punkt durch stetige Bewegung eine Linie beschreiben, so muß er in irgend einer Richtung fortgehen. Behält er dabei die einmal eingeschlagene Richtung fortwährend bei, so entsteht die gerade Linie oder Gerade. Eine Gerade ist also eine Linie, die in allen ihren Theilen dieselbe Richtung hat. Aendert der sich bewegende Punkt aber seine Richtung beständig, so entsteht eine krumme Linie. Es gibt nur eine Art gerader, aber unzählige Arten krummer Linien. —

Eine Gerade ist bestimmt durch einen Punkt und die Richtung, in welcher dieser Punkt fortgehen müßte, um die Gerade zu beschreiben. Haben also zwei Gerade einen Punkt und die Richtung gemein, so fallen sie ganz zusammen. Diese Richtung ist aber auch durch einen zweiten Punkt der Geraden bestimmt, daher ist auch die Gerade durch zwei Punkte bestimmt oder: Zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich; und eine begrenzte Gerade läßt sich nur auf eine Art verlängern. Wenn also eine Gerade so gedreht wird, daß zwei ihrer Punkte fest bleiben, so legt sie keinen Weg im Raume zurück, sondern bleibt in ihrer Lage. Zugleich ist eine Gerade die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten. —

4. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene, wenn jede Gerade, welche irgend zwei Punkte der Fläche mit einander verbindet, mit ihrer ganzen Ausdehnung in dieser Fläche liegt. Hat eine Gerade zwei Punkte mit einer Ebene gemein, so liegt sie ganz in derselben.

Jede Fläche, in welcher sich nicht nach allen Richtungen Gerade ziehen lassen, heißt eine krumme Fläche. Es gibt nur eine Art ebener, aber unzählige Arten krummer Flächen. —

5. Als Grenzen an einem Körper betrachtet sind Linien und Flächen auch selbst wieder begrenzt und endlich. Da aber der Raum im allgemeinen als unendlich aufgefaßt werden kann, so kann man sich auch alle nicht geschlossenen Linien und Flächen über ihre Grenzen hinaus ins Unendliche verlängert denken. So wird der unendliche Raum durch eine unendliche Ebene, diese durch eine in ihr liegende unendliche Gerade und diese durch einen in ihr liegenden Punkt in zwei Theile geschieden. —

6. Derjenige Theil der Geometrie, der blos von den räumlichen Gestalten handelt, die in einer Ebene liegen, heißt Geometrie der Ebene oder Planimetrie, zum Unterschiede von der Geometrie des Raumes oder der Stereometrie, welche die beliebige Lage von Linien und Flächen im Raum, so wie die Körper behandelt. —

II. Allgemeine mathematische Grundsätze.

7. Gleiche Größen können für einander gesetzt werden, ohne daß dadurch etwas geändert wird. —

8. Das Ganze ist größer als ein Theil desselben und gleich der Summe seiner Theile. —

III. Allgemeine mathematische Lehrsätze.

9. Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter einander gleich.

Vors. $a = b$

$c = b$

Bpt. $a = c$

Bw. Setzt man in der ersten Vos. c statt b (7), so ist die Richtigkeit der Behauptung erwiesen.

10. Ist von zwei gleichen Größen die eine einer dritten ungleich, so ist auch die andere der dritten ungleich mit demselben Ungleichheitszeichen.

Vors. $a = b$

$b > c$

Bpt. $a > c$

Bw. Setzt man in der gegebenen Ungleichheit a statt b (7), so erhält man die Behauptung.

11. Wenn eine Größe $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ ist als die zweite, und diese $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die dritte, so ist auch die erste $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ als die dritte.

Vors. $a < b$

$b < c$

Bpt. $a < c$

Bw. Es sei $a + x = b$

$b + z = c$

also (7) $a + x + z = c$

und (8) $a < c$

12. Gleiches, zu Gleichem addirt, von Gleichem subtrahirt, mit Gleichem multiplicirt, durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches.

Vors. $m = n$

$p = q$

Bpt. $m + p = n + q$

$m - p = n - q$

$m \cdot p = n \cdot q$

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q}$$

Bw. Offenbar ist $m + p = m + p$

$m - p = m - p$

$m \cdot p = m \cdot p$

$$\frac{m}{p} = \frac{m}{p}$$

Setzt man auf der rechten Seite statt n statt m und q statt p (7), so erhält man die Behauptung.

13. Gleiches, zu Ungleichem addirt, von Ungleichem subtrahirt, mit Ungleichem multiplicirt, in Ungleiches dividirt, gibt Ungleiches mit demselben Ungleichheitszeichen.

Vors. $m > n$
$p = q$

Bpt. $m + p > n + q$
$m - p > n - q$
$m . p > n . q$
$$\frac{m}{p} > \frac{n}{q}$$

Bw. Es sei $m = n + x$, so folgt (12)
$$m + p = n + x + q$$
$$m - p = n + x - q$$
$$m . p = n . q + x . q$$
$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} + \frac{x}{q}$$
woraus nach (8) sofort das Behauptete folgt.

14. Ungleiches, von Gleichem subtrahirt, in Gleiches dividirt, gibt Ungleiches mit entgegengesetztem Ungleichheitszeichen.

Vors. $m = n$
$p > q$

Bpt. $m - p < n - q$
$$\frac{m}{p} < \frac{n}{q}$$

Bw. Es sei $p = q + z$, dann ist (12)
$m - p = n - q - z$, also (8)
$n - q - z < n - q$ und (7)
$m - p < n - q$

Da ferner der Werth eines Bruches desto kleiner ist, je größer sein Nenner, so ist auch
$$\frac{n}{q + z} < \frac{n}{q}$$
Setzt man links m statt n und p statt $q + z$, so folgt
$$\frac{m}{p} < \frac{n}{q}.$$

I. Kapitel.

Von den Winkeln.

15. Zwei nicht zusammenfallende Gerade, welche gleiche Richtung haben, heißen parallel.

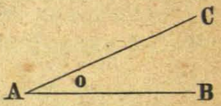
Parallele Gerade können, so weit man sie auch verlängert, sich niemals schneiden, da sie sonst einen Punkt und die Richtung gemein hätten, also zusammenfallen müßten. (3)

16. Zwei Gerade, die einer dritten parallel sind, sind es auch unter einander, weil alle drei die gleiche Richtung haben.

17. Von einem Punkt außerhalb einer Geraden läßt sich nur eine Parallele zu dieser ziehen, weil durch einen Punkt und die Richtung die Lage einer Geraden vollkommen bestimmt ist.

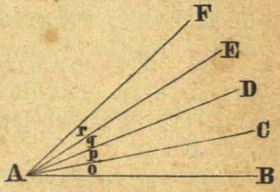
18. Zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden, denn hätten sie noch einen zweiten Punkt gemein, so müßten sie zusammenfallen (3).

19. Gehen von einem Punkte zwei verschiedene Gerade aus, so haben sie verschiedene Richtung. Der Richtungsunterschied zweier Geraden heißt Winkel. Den Durchschnittspunkt der beiden Geraden nennt man den Scheitel, die Geraden selbst die Schenkel des Winkels. Man bezeichnet einen Winkel entweder durch drei Buchstaben, von denen der mittlere am Scheitel, die andern an seinen Schenkeln stehen, oder durch einen an den Scheitel geschriebenen Buchstaben, also



$$\angle BAC \text{ oder } \angle CAB \text{ oder } \angle A \text{ oder } \angle o.$$

Die Größe des Winkels ist von der Länge seiner Schenkel unabhängig, und es kommt dabei nur auf die Verschiedenheit der Richtung an. Von dieser erhält man am besten eine deutliche Vorstellung, wenn man sich den Winkel durch Drehung entstanden denkt. So kann der Winkel CAB dadurch entstanden sein, daß eine Gerade aus der Lage AB in die Lage AC gedreht wurde. Nun kann man sich aber leicht vorstellen, daß jene Gerade immer um gleich viel gedreht werde und so nach und nach in die Lagen AD, AE und AF komme.



Dann ist $\angle o = \angle p = \angle q = \angle r$

also $\angle BAD = \angle o + \angle p = 2. \angle o$

$\angle EAD = \angle EAB - \angle DAB$

$\angle FAB = 4. \angle o$

$\angle o \quad = {}^1/_4 \angle FAB$

Es kann somit ein Winkel vervielfacht und getheilt werden, er ist daher ebenfalls eine mathematische Größe, welche sich auf die gegenseitige Lage von Raumgrößen bezieht und von diesen nicht getrennt werden kann.

20. Unter den verschiedenen Lagen, welche eine Gerade bei einer solchen Drehung erhält, ist diejenige besonders ausgezeichnet, bei welcher der sich drehende Schenkel rückwärts in die Verlängerung des festen Schenkels fällt, so daß beide eine Gerade bilden. Diesen Winkel nennt man einen gestreckten Winkel. Da derselbe nicht durch eine beliebige, sondern durch eine ganz bestimmte Drehung erzeugt wird, so ist es klar, daß alle gestreckten Winkel einander gleich sind.

21. Haben zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein, während ihre andern Schenkel in entgegengesetzter Richtung in derselben Geraden liegen, so heißen sie Nebenwinkel.

Zwei Nebenwinkel sind zusammen gleich einem gestreckten Winkel.

22. Sind zwei Winkel einander gleich, so sind es auch ihre Nebenwinkel.

Vors. $\angle a = \angle c$

Bpt. $\angle b = \angle d$

Bw. $\angle a + \angle b =$ einem gestreckten Winkel.

$\angle c + \angle d =$ einem gestreckten Winkel,

also $a + b = c + d$ (9)

$$\frac{a = c}{b = d} \quad (12)$$

23. Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder ein Rechter, ein Winkel, der größer ist als ein Rechter, heißt stumpf, ein kleinerer spitz. Bilden zwei Gerade einen rechten Winkel, so heißen sie senkrecht zu einander. Alle rechten Winkel sind einander gleich, denn sie sind die Hälften von gestreckten Winkeln.

Da der rechte Winkel somit eine bestimmte Größe ist, so wird er als Maß aller übrigen Winkel benutzt.

24. Die Summe aller Winkel auf einer Seite einer Geraden ist = 2 R.

Alle Winkel um einen Punkt herum sind zusammen = 4 R.

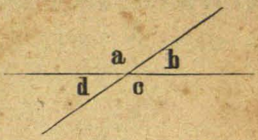
25. Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, auf verschiedenen Seiten desselben liegen und zusammen 2 R oder einen Gestreckten betragen, so bilden ihre andern Schenkel eine Gerade.

Es folgt dies aus der Erklärung eines gestreckten Winkels (20).

26. Wenn sich zwei Gerade durchschneiden, so heißen diejenigen Winkel, welche blos den Scheitel gemein haben, während die Schenke

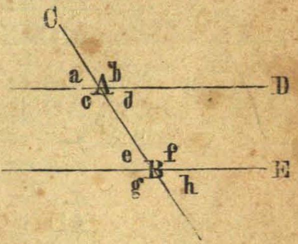
des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des andern sind, Scheitelwinkel: a und c, b und d.

Scheitelwinkel sind einander gleich, denn sie sind Nebenwinkel eines und desselben dritten Winkels (22).



27. Haben die Schenkel eines Winkels einzeln gleiche Richtung mit den Schenkeln eines andern Winkels, so ist von selbst klar, daß auch der Richtungsunterschied der beiden ersten Geraden gleich ist dem Richtungsunterschied der beiden letzten Geraden oder: Winkel, deren Schenkel parallel und deren Oeffnungen nach derselben Seite liegen, sind einander gleich.

28. Werden zwei Gerade von einer dritten durchschnitten, so entstehen an beiden Durchschnittspunkten zusammen 8 Winkel. Von diesen heißen die Winkel, welche auf derselben Seite der durchschneidenden und der durchschnittenen Geraden liegen, korrespondirende Winkel: a und e; Winkel auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden und der durchschnittenen Geraden heißen Wechselwinkel: a und h; Winkel auf derselben Seite der durchschneidenden und auf verschiedenen Seiten der durchschnittenen Geraden heißen Gegenwinkel: g und a.



29. Werden zwei parallele Gerade von einer dritten Geraden durchschnitten, so sind:

a) die korrespondirenden Winkel einander gleich,
b) die Wechselwinkel einander gleich,
c) die Summe der Gegenwinkel $= 2$ R.

Vorſ. AD $\parallel$ BE

Bpt. $\angle a = \angle e$, $\angle b = \angle f$ u. s. w.
$\angle a = \angle h$, $\angle c = \angle f$ u. s. w.
$\angle a + \angle g = 2$ R, $\angle e + \angle c = 2$ R u. s. w.

Bw. a. Nach der Voraussetzung haben AD und BE dieselbe Richtung, da nun auch AC und BA dieselbe Richtung haben, so ist (27) $\angle b = \angle f$

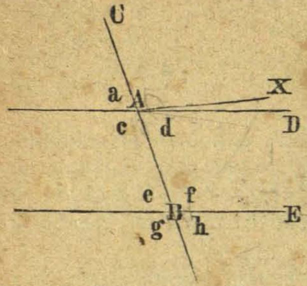
b. Aus $\angle a = \angle e$ und (26)
$\angle h = \angle e$ folgt
$\angle a = \angle h$.

c. Es ist $\angle e + \angle g = 2$ R
$\angle e = \angle a$
$\angle a + \angle g = 2$ R.

Ebenso wird der Beweis für die übrigen Winkel geführt. —

30. Wenn zwei Gerade von einer dritten so geschnitten werden, daß entweder zwei korrespondirende oder zwei Wechselwinkel einander gleich sind, oder die Summe

zweier Gegenwinkel 2 R beträgt, so sind die beiden ersten Geraden einander parallel.



a. Vors. $\angle CAD = \angle f$

Bpt. $AD \parallel BE$

Bw. Es sind über die gegenseitige Lage von AD und BE nur zwei Fälle denkbar; entweder ist $AD \parallel BE$ oder es ist AD nicht $\parallel$ BE. Einer dieser Fälle muß stattfinden. Wäre nun AD nicht $\parallel$ BE, so müßte es eine andere Gerade AX geben, welche von A ausgehend $\parallel$ BE wäre (17). Dann hätte man (29, a)

$\angle CAX = \angle f$ und nach der Vos.

$\angle CAD = \angle f$

$\angle CAX = \angle CAD$, was unmöglich ist (8).*)

b. Vors. $\angle c = \angle f$

Bpt. $AD \parallel BE$

Bw. $\angle c = \angle f$

$\angle g = \angle f$

$\angle c = \angle g$ also (30, a)

$AD \parallel BE$

c. Vors. $\angle d + \angle f = 2\,R$

Bpt. $AD \parallel BE$

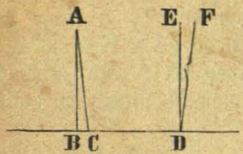
Bw. $\angle d + f = 2\,R$

$\angle d + c = 2\,R$

$\angle d + f = \angle d + c$

$\angle f = \angle c$, also (30, b)

$AD \parallel BE$.



31. In einem Punkt einer Geraden läßt sich nur eine Senkrechte auf diese errichten.

Hätte man, außer $ED \perp BD$, noch $FD \perp BD$, so wären als rechte Winkel

$$\angle CDE = \angle CDF,$$

was unmöglich ist (8).

32. Stehen zwei verschiedene Gerade auf einer dritten Senkrecht, so sind sie einander parallel (30).

---

*) Während der direkte Beweis, von der Voraussetzung ausgehend, durch Verbindung derselben mit bekannten Sätzen die Behauptung als nothwendige Folge darthut (30, b), stellt man beim indirekten oder apagogischen Beweise (30, a) außer der behaupteten noch alle andern aus der Voraussetzung denkbare Folgerungen auf, erweist durch Verbindung dieser letzteren mit bekannten Sätzen, daß sie anerkannten Wahrheiten widersprechen und daher unmöglich sind, womit dann die Nothwendigkeit der behaupteten Folgerung dargethan ist.

33. Ist von zwei parallelen Geraden die eine zu einer dritten senkrecht, so ist es auch die andere (29).

34. Von einem Punkte außerhalb einer Geraden läßt sich nur eine Senkrechte auf diese fällen.

Gäbe es außer $AB \perp BD$ noch $AC \perp BD$, so wäre (32)

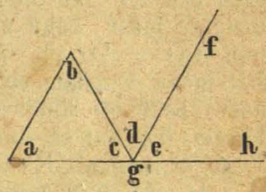
$AB \parallel AC$.

Es könnten sich also (15) AB und AC nicht schneiden, was der Voraussetzung widerspricht.

II. Kapitel.

Von den Dreiecken.

35. Eine vollständig begrenzte Fläche heißt eine Figur. Eine von lauter Geraden begrenzte Figur heißt ein Polygon oder Vieleck und nach der Zahl seiner Ecken ein Dreieck, Viereck, Fünfeck u. s. w. Verlängert man eine Seite eines Vielecks, so heißt der von dieser Verlängerung und der sie schneidenden Vielecksseite gebildete Winkel ein Außenwinkel.



36. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel, die nicht Nebenwinkel von ihm sind, mithin größer als jeder einzelne von ihnen.

Vors. $\angle bgh$ ist der Außenwinkel des $\triangle$ abc.

Bpt. $\angle bgh = \angle a + \angle b$

Bw. Man ziehe $gf \parallel ab$; dann ist

$\angle e = \angle a$ als korrespondirender Winkel

$\angle d = \angle b$ als Wechselwinkel

$\angle bgh = \angle a + \angle b$

37. In jedem Dreieck ist die Summe der drei Winkel $= 2R$.

Addirt man auf beiden Seiten der letzten Gleichung $\angle c$ hinzu, so erhält man

$\angle bgh + \angle c = \angle a + \angle b + \angle c$

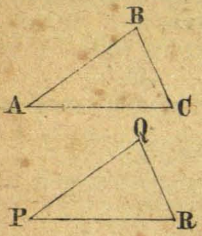
$\angle bgh + \angle c = 2R$ (24)

$\angle a + \angle b + \angle c = 2R$.

38. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks einzeln gleich sind zweien Winkeln eines andern Dreiecks, so ist auch der dritte Winkel des ersten Dreiecks gleich dem dritten Winkel des zweiten Dreiecks. — Hat ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel, so sind seine beiden andern Winkel spitz. Es heißt dann entweder ein rechtwink=

liges oder ein *stumpfwinkliges* Dreieck. Sind alle drei Winkel eines Dreiecks spitz, so heißt es ein *spitzwinkliges*.

39. Zwei Raumgrößen, die in einander gelegt sich decken, d. h. ihrer ganzen Ausdehnung nach zusammenfallen, heißen *kongruent*. Kongruente Figuren haben nicht nur gleichen Flächeninhalt, sondern in denselben sind auch die gleichliegenden (homologen) Seiten und Winkel gegenseitig gleich.



40. I. **Kongruenzsatz:** *Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und zwei übereinstimmend liegende Winkel einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.*

Vors. $AB = PQ$
$\angle A = \angle P$
$\angle C = \angle R$

Bpt. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Bw. Nach 38 ist auch $\angle B = \angle Q$.

Man denke sich das $\triangle$ PQR so auf das $\triangle$ ABC gelegt, daß der Punkt P auf den Punkt A fällt, daß die Seite PQ in die Richtung von AB und beide Dreiecke nach einerlei Seite der gemeinsamen Geraden fallen; dann muß auch der Punkt Q auf den Punkt B fallen, weil $PQ = AB$ ist. Weil ferner $\angle P = \angle A$ ist, muß die Seite PR in die Richtung von AC fallen, und weil $\angle Q = \angle B$ ist, muß auch QR in die Richtung von BC zu liegen kommen. Weil nun zwei Gerade sich nur in einem Punkt schneiden können, so muß auch der Durchschnittspunkt R mit dem Durchschnittspunkt C zusammenfallen.

41. II. **Kongruenzsatz:** *Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel einzeln gleich sind, so sind die Dreicke kongruent.*

Vors. $AB = PQ$
$AC = PR$
$\angle A = \angle P$

Bpt. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Bw. Man denke sich das $\triangle$ PQR so auf das $\triangle$ ABC gelegt, daß der Punkt P auf den Punkt A, daß die Seite PQ in die Richtung von AB und beide Dreiecke auf einerlei Seite von AB fallen. Dann muß der Punkt Q auf den Punkt B fallen, weil $PQ = AB$ ist. Weil ferner $\angle P = \angle A$ ist, muß PR in die Richtung von AC fallen, wobei der Punkt R auf den Punkt C zu liegen kommt, weil $PR = AC$ ist. Da endlich zwischen zwei Punkten nur eine Gerade möglich ist, so fällt auch QR mit BC zusammen.

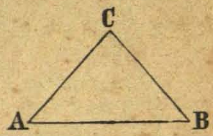
42. Wenn in einem Dreieck zwei Seiten einander gleich sind, so heißt es *gleichschenklig*, sind alle drei Seiten einander gleich, so heißt es *gleichseitig*.

In einem gleichschenkligen Dreieck stehen den gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Vorſ. $AC = BC$.

Bpt. $\angle A = \angle B$.

Bw. Man denke ſich das $\triangle$ ABC ſo um den Punkt C gedreht, daß CA in die frühere Lage von CB fällt, dann muß auch CB in die frühere Lage von CA fallen, und die ſpätere Lage des Dreiecks ABC iſt ſeiner früheren Lage kongruent, alſo iſt auch



$$\angle A = \angle B.$$

43. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich ſind, ſo ſind es auch die denſelben gegenüber ſtehenden Seiten.

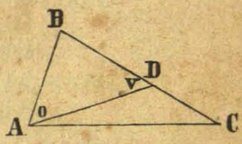
Vorſ. $\angle A = \angle B$.

Bpt. $CB = CA$.

Bw. Man denke ſich das Dreieck ſo umgelegt, daß der Punkt B in die frühere Lage von A, A dagegen in die frühere Lage von B kommt, indem zugleich beide Dreiecke nach einerlei Seite liegen, ſo fallen ſie zuſammen (40) und es iſt

$$CB = CA$$

44. In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber.



Vorſ. $BC > BA$.

Bpt. $\angle BAC > \angle C$.

Bw. Man mache $BD = BA$ und ziehe AD, ſo iſt (42)

$$\angle o = \angle v$$

Es iſt aber $\angle v > \angle C$ (36)

alſo auch $\angle o > \angle C$

Da nun auch $\angle BAC > \angle o$ iſt, ſo iſt um ſo mehr (11)

$$\angle BAC > \angle C.$$

45. In jedem Dreieck liegt dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Vorſ. $\angle BAC > \angle C$.

Bpt. $BC > BA$.

Bw. Es ſind blos drei Fälle denkbar, von denen einer eintreten muß:

$$BC = BA,\ BC < BA,\ BC > BA.$$

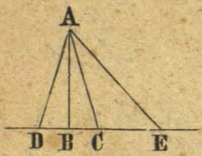
Im erſten Fall müßte (42) $\angle BAC = \angle C$,

im zweiten Fall (44) $\angle BAC < \angle C$ ſein.

Beides widerſpricht der Vorausſetzung; es kann alſo blos der dritte Fall ſtattfinden, nämlich

$$BC > BA.$$

46. Die Senkrechte ist die kürzeste Enfernung zwischen einer Geraden und einem außer ihr liegenden Punkt.



Vors. $AB \perp DE$

Bpt. $AB <$ als irgend eine Gerade AC

Bw. $\angle ABC > \angle ACB$ (38)

also $\quad AC > AB$ (45)

Da in einem rechtwinkligen Dreieck die den rechten Winkel bildenden Seiten Katheten, die ihm gegenüberliegende Seite Hypotenuse genannt werden, so läßt sich der vorstehende Satz auch so aussprechen:

Die Hypotenuse ist stets größer als eine Kathete desselben Dreiecks.

47. Der Punkt, in dem eine Gerade von einer zu ihr Senkrechten getroffen wird, heißt der Fußpunkt der letzteren.

Wenn von einem Punkt außerhalb einer Geraden schiefe Linien zu dieser gezogen werden, sind diejenigen einander gleich, welche die Gerade in gleichem Abstande vom Fußpunkte der Senkrechten treffen, und desto größer, in je größerem Abstande sie dies thun.

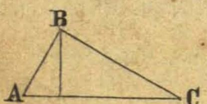
Vors. $AB \perp DE$
$BD = BC$
$BE > BC$

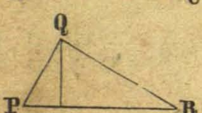
Bpt. $AD = AC$
$AE > AC$

Bw. Die erste Behauptung folgt aus $\triangle ABD \cong \triangle ABC$ (41).
Da $\angle ABC = 1$ R, so ist als Außenwinkel
$\angle ACE > 1$ R, also auch
$\angle ACE > \angle AEC$, also
$AE = AC$.

48. Hieraus ergibt sich, daß von einem Punkte zu einer Geraden auf derselben Seite der Senkrechten nicht zwei gleich lange schiefe Linien gezogen werden können, daß es aber zu jeder schiefen Linie auf der andern Seite der Senkrechten stets eine, aber auch nur eine ihr gleich lange schiefe Linie geben muß. —

49. III. **Kongruenzsatz**: Wenn in zwei Dreiecken **zwei** Seiten und der der größeren von ihnen gegenüberliegende Winkel einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent. —





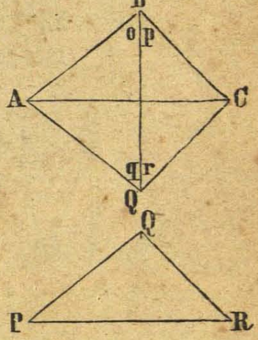
Vors. $BC = QR > AB = PQ$
$\angle A = \angle P$

Bpt. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

Bw. Man denke sich das $\triangle PQR$ so auf das $\triangle ABC$ gelegt, daß der Punkt P auf den

Punkt A, daß die Seite PR in die Richtung von AC und beide Dreiecke nach einerlei Seite fallen; dann müssen wegen Gleichheit der Winkel P und A auch PQ in die Richtung von AB und wegen Gleichheit dieser beiden Seiten auch ihre andern Endpunkte Q in B zusammenfallen. Denkt man sich von B und Q Senkrechte auf die Gegenseiten gefällt, so fallen auch diese zusammen (34). Mögen nun A und P spitze, rechte oder stumpfe Winkel sein, in jedem Fall erkennt man (47 und 48), daß nach derselben Seite von AB nicht zwei gleich lange Linien von B nach AC gezogen werden können, die größer als AB sind, es müssen somit QR und BC ebenfalls zusammenfallen, womit die Kongruenz der Dreiecke ABC und PQR bewiesen ist.

Daß die Kongruenz zweier Dreiecke nicht nothwendig ist, wenn sie in zwei Seiten und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen, ergibt sich aus der Betrachtung der Figur 46, wo $\triangle$ AEC ein Theil des $\triangle$ AED ist, ihm also nicht gleich sein kann, obgleich $\angle$ E und Seite AE beiden Dreiecken gemein und AC = AD ist.



50. IV. **Kongruenzsatz:** Wenn in zwei Dreiecken alle **drei** Seiten einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Vors. $AB = PQ$
$BC = QR$
$CA = RP$

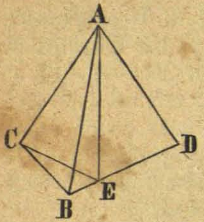
Bpt. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$.

Bw. Ist keine der Seiten größer als AC, so denke man sich das $\triangle$ PQR so an das $\triangle$ ABC gelegt, daß der Punkt P auf den Punkt A, die Seite PR in die Richtung von AC, die Dreiecke aber nach verschiedenen Seiten zu liegen kommen; dann muß auch R auf C fallen. Weil nun der größten Seite auch der größte Winkel gegenüberliegt, so müssen die beiden Winkel bei A und ebenso die beiden Winkel bei C spitz sein, so daß die Verbindungsgerade BQ innerhalb des Vierecks ABCQ fällt. Weil die Dreiecke ABQ und CBQ gleichschenklig sind, hat man

$$\angle o = \angle q$$
$$\angle p = \angle r$$
$$\angle ABC = \angle AQC, \text{ also (41)}$$
$$\triangle ABC \cong \triangle AQC, \text{ also auch}$$
$$\triangle ABC \cong \triangle PQR.$$

51. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich sind, der von denselben eingeschlossene Winkel aber ungleich ist, so steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Man denke sich die Dreiecke mit der größeren der gleichen Seiten so an einander gelegt, daß auch die anderen gleichen Seiten mit einem Endpunkt zusammenstoßen.



Vors. AB beiden Dreiecken gemein und größer als

$AD = AC$

$\angle BAD > \angle BAC$

Bpt. $BD > BC$

Bw. Man ziehe AE so, daß der Winkel CAD halbirt wird; AE muß dann zwischen die Schenkeln des größeren Winkels BAD fallen. Zieht man dann noch CE, so ist (41)

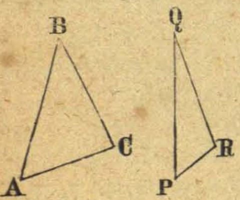
$\triangle AED \cong \triangle AEC$ daher auch

$DE = CE$

Da nun $CE + EB > CB$, so ist auch

$DE + EB > CB$ oder

$DB > CB.$



52. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so steht der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüber. —

Vors. $AB = PQ$

$BC = QR$

$AC > PR$

Bpt. $\angle B > \angle Q$

Bw. Ueber das Größenverhältniß der Winkel B und Q sind nur folgende drei Fälle denkbar, von denen einer stattfinden muß:

$$\angle B = \angle Q;\ \angle B < \angle Q;\ \angle B > \angle Q.$$

Im ersten Fall müßte $AC = PR$ (41)
im zweiten Fall müßte $AC < PR$ (51) sein.

Beides widerspricht der Veraussetzung, daher der dritte Fall stattfinden muß:

$$\angle B > \angle Q.$$

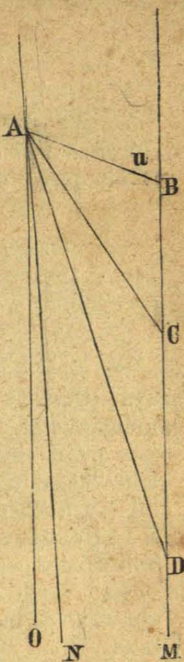
53. Wenn zwei Gerade von einer dritten so durchschniten werden, daß die Summe zweier Gegenwinkel kleiner ist als 2 R, so müssen sie gehörig verlängert zusammentreffen und ein Dreieck bilden.*)

---

*) Dieser Satz bildet den berühmten Grundsatz des Euklid, für den hier der Legendre'sche Beweis gegeben ist. Obgleich er eigentlich in das vorige Kapitel gehört, so konnte er doch erst in diesem Kapitel bewiesen werden, da dazu die Sätze 36 und 42 nöthig sind. Wir stellen hier nochmals die 4 Sätze der Parallelentheorie zusammen:

1. Gerade von gleicher Richtung treffen nie zusammen (15).

Vorſ. $\angle NAB + \angle MBA < 2R$.
Bpt. AN und BM ſchneiden einander.
Bw. Man ziehe $AO \parallel BM$, dann iſt
$\angle OAB + \angle MBA = 2R$, alſo
$\angle OAB > \angle NAB$, d. h. AN fällt zwiſchen die Parallelen AO und AM. Man mache $BC = BA$, $CD = CA$, $DE = DA$ u. ſ. w.; dann iſt (36 und 42)

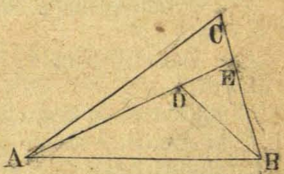


$\angle u = 2 . \angle ACB = 4 . \angle ADB = 8 . \angle AEB$ u. ſ. w.
$\angle u = 2 . \angle CAO = 4 . \angle DAO = 8 . \angle EAO$ u. ſ. w.

Man kann alſo von A aus nach BM eine Reihe von Geraden ziehen, welche mit AO immer kleinere Winkel bilden. Da jede neue Gerade den vorigen Winkel halbirt, ſo kann man zuletzt einen Winkel erhalten, welcher kleiner iſt als jeder gegebene Winkel, alſo auch kleiner als $\angle OAN$. Dann liegt aber AN innerhalb eines vollſtändig begrenzten Dreiecks, muß alſo die Gegenſeite BM ſchneiden.

*54. Wenn von den Endpunkten einer Dreiecksſeite zwei Gerade in einen Punkt innerhalb eines Dreiecks zuſammenlauſen, ſo iſt ihre Summe kleiner als die der beiden andern Dreieckſeiten, der von ihnen gebildete Winkel aber größer als der zwiſchen jenen Dreiecksſeiten.

Vorſ. Der Punkt D liegt innerhalb des Dreiecks.
Bpt. $AC + CB > AD + DB$
$\angle D > \angle C$



Bw. a) $AC + CE > AE$ (3), alſo auch (13).
$AC + CB > AE + EB$. Ebenſo iſt
$AE + EB > AD + DB$, al. auch (11)
$AC + CB > AD + DB$
b) $\angle D > \angle E$
$\angle E > \angle C$ (36)
$\angle D > \angle C$.

---

2. Gerade von ungleicher Richtung treffen ſtets zuſammen. Dies iſt nur eine andere Form des Satzes 53.

3. Nicht zuſammentreffende Gerade haben gleiche Richtung, denn hätten ſie ungleiche Richtung, ſo müßten ſie zuſammentreffen.

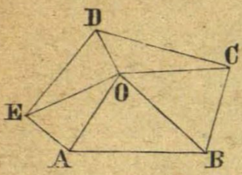
4. Zuſammentreffende Gerade haben ungleiche Richtung (19).

III. Kapitel.

Von den Vierecken.

55. In jedem Vieleck ist die Summe der Winkel so viel mal 2 R als dasselbe Seiten hat, weniger 4 R.

Man verbinde einen beliebigen Punkt O innerhalb des Vielecks mit allen Eckpunkten durch Gerade, so entstehen so viele Dreiecke als die Figur Seiten hat. Da in jedem Dreieck die Summe aller Winkel = 2 R ist, so ist die Winkelsumme in allen Dreiecken so viel mal 2 R als Dreiecke da sind. Von diesen Winkeln gehören aber die um den Punkt O herumliegenden nicht zum Vieleck. Deren Summe ist aber = 4 R (24), woraus die Behauptung folgt.



Ein n-Eck enthält (2 n-4) R,

Ein Viereck also 4 R.

56. Ein Viereck, in dem keine Seite einer andern || ist, heißt eine Trapezoide. —

Ein Viereck, in dem zwei Seiten einander ||, die beiden andern nicht || sind, heißt ein Trapez.

Ein Viereck, in dem die Gegenseiten || sind, heißt ein Parallelogramm.

Ein Parallelogramm, in dem kein Winkel ein R und die anstoßenden Seiten ungleich sind, heißt eine Rhomboide. —

Ein Parallelogramm, in dem alle Seiten einander gleich sind, heißt ein Rhombus.

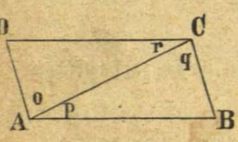
Ein Parallelogramm, in dem alle Winkel rechte sind, heißt ein Rechteck. —

Ein Rechteck, in dem alle Seiten gleich sind, heißt ein Quadrat. —

Eine Gerade, welche zwei nicht benachbarte Eckpunkte eines Vielecks verbindet, heißt eine Diagonale.

Eine Gerade, welche ein Vieleck durchschneidet, ohne zwei Ecken desselben zu verbinden, heißt eine Transversale.

57. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel und Seiten einander gleich.



Vors. AB || DC
AD || BC

Bpt. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
$AB = DC$, $AD = BC$

Bw. Man ziehe die Diagonale AC, dann ist (29).

$$\begin{aligned}\angle p &= \angle r\\ \angle o &= \angle q\\ \hline \angle A &= \angle C\end{aligned}$$

Da außerdem die Seite AC beiden Dreiecken gemein ist, so ist (40)

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$, also
$AB = DC$
$BC = AD$
$\angle B = \angle D$

Dieser Satz läßt sich auch so aussprechen:

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich und da der Beweis derselbe bleibt, wenn alle Winkel R sind, sagt man auch

Parallele Gerade haben überall gleichen Abstand.

58. **Ist in einem Parallelogramm ein Winkel ein R, so sind es auch die übrigen.**

59. **Sind in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.**

Vors. $\angle A = \angle C$
$\angle B = \angle D$

Bpt. $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$

Bw. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R$ (55)
$\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 4R$ (7)
$\angle A + \angle B = 2R$
$AD \parallel BC$ (30)

Ebenso ist die andere Behauptung zu erweisen.

60. **Sind in einem Viereck die Gegenseiten einander gleich, so ist es ein Parallelogramm.**

Vors. $AB = DC$, $AD = BC$

Bpt. $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$

Bw. Man ziehe die Diagonale AC, dann ist
$\triangle ABC \cong ADC$ (50), also
$\angle p = \angle r$ und $\angle q = \angle o$, also auch (30)
$AB \parallel DC$ und $BC = AD$.

61. **Sind in einem Viereck zwei Seiten einander gleich und parallel, so ist es ein Parallelogramm.**

Vors. $AB \,\#\, CD$

Bpt. $AD \parallel BC$

Bw. Zieht man die Diagonale AC, so ist (29)
$\angle p = \angle r$.

Da nun auch die diese Winkel einschließenden Seiten gegenseitig gleich sind, so ist

$\triangle ABC \cong \triangle ADC$, also
$\angle q = \angle o$ und (30)
$BC \parallel AD$.

62. **In einem Parallelogramm halbiren die Diagonalen einander.**

63. Wenn die Diagonalen eines Vierecks einander halbiren, so ist es ein Parallelogramm.

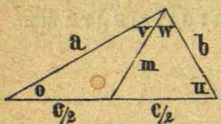
64. In einem Quadrat und Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

65. In einem Quadrat und Rhombus schneiden sich die Diagonalen rechtwinklig.

Die Beweise zu 62 bis 65 sind ihrer Leichtigkeit wegen fortgelassen. Wie kann man die Sätze 64 und 65 umkehren?

66. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Transversale vom Scheitel des rechten Winkels nach der Mitte der Hypotenuse, so ist sie halb so groß als diese.

Der Beweis ergibt sich aus 62 und 64.



*67. Ist in einem Dreieck die Transversale von der Spitze eines Winkels nach der Mitte der Gegenseite gleich der Hälfte derselben, so ist jener Winkel ein rechter.

Vorſ. $m = \frac{c}{2}$

Bpt. $a \perp b$

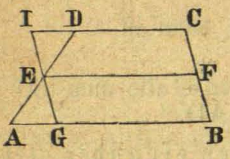
Bw. $\angle o = \angle v$

$\angle u = \angle w$

$\angle o + \angle u = \angle v + \angle w$

Da $\angle o + \angle u + \angle v + \angle w = 2R$, so folgt

$\angle v + \angle w = 1R.$



*68. Verbindet man in einem Trapez die Mitten der nicht parallelen Seiten durch eine Gerade, so ist diese den parallelen Seiten parallel und halb so groß als die Summe derselben.

Vorſ. $AB \parallel DC$, $AE = ED$, $BF = FC$.

Bpt. $EF \parallel AB$, $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Bw. Man ziehe $IG \parallel BC$ u. verlängere CD bis I. Es ist dann (40)

$\triangle EDI \cong \triangle EAG$, daher

$EI = EG$ und

$ID = GA$.

Nach 57 ist $IG = CB$, also auch als Hälften dieser Linien

$EG = FB$.

Da diese Linien zugleich $\parallel$ sind, so ist (61)

$EF \# GB$.

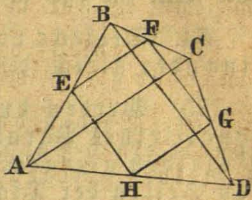
Nun ist aber auch $EF = \frac{1}{2}(ID + DC + GB)$

$= \frac{1}{2}(AG + DC + GB)$

$= \frac{1}{2}(AB + DC)$.

Fällt der Punkt D mit C zusammen, so geht das Trapez in ein Dreieck über und der vorstehende Satz läßt sich dann folgendermaßen aussprechen:

*69. In einem Dreieck ist die Transversale durch die Mitten zweier Seiten der dritten Seite parallel und halb so groß als diese.



*70. In jedem Viereck sind die Mitten der Seiten die Ecken eines Parallelogramms.

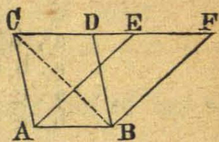
Bw. Nach 69 sind EF und GH = $^1/_2$ AC und zugleich $\parallel$ AC, also auch einander $\#$, folglich EFGH ein Parallelogramm.

IV. Kapitel.

Von der Flächengleichheit geradliniger Figuren.

71. Der Flächeninhalt einer Figur ist der von ihren Seiten begrenzte Theil der Ebene. Zwei Figuren können flächengleich sein, ohne daß sie kongruent sind. — Die Senkrechte von der Spitze eines Dreiecks auf die Gegenseite oder die Senkrechte zwischen den beiden Parallelen eines Trapezes oder Parallelogramms wird die Höhe der entsprechenden Figur genannt, während die zu jenen Höhen senkrechten Seiten ihre Grundlinien heißen.

72. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.



Wegen Gleichheit ihrer Grundlinien lassen sich solche $\parallel$gr. immer so auf einander legen, daß ihre Grundlinien zusammenfallen und die $\parallel$gr. nach einerlei Seite liegen. Dann müssen wegen der gleichen Höhen auch die Gegenseiten in derselben Geraden liegen.

Vors. ABDC und ABFE (oder kürzer AD und AF) sind zwei $\parallel$gr. auf der gemeinsamen Grundlinie AB.

Bpt. $\parallel$gr. AD = $\parallel$gr. AF

Bw. AC = BD (57)
AE = BF
$\angle$CAE = $\angle$DBF (27)

$\triangle$CAE $\cong$ $\triangle$DBF.

Nimmt man nun von dem Trapez ABFC einmal $\triangle$ CAE, dann $\triangle$DBF fort, so ist (12)

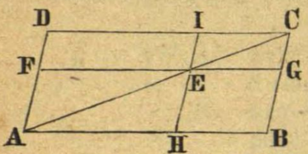
$\parallel$gr. AD = $\parallel$gr. AF.

Der Beweis bleibt derselbe, wenn der Punkt E auf D oder zwischen D und C fällt.

73. Ein Dreieck ist halb so groß als ein Parallelogramm von gleicher Grundlinie und Höhe, denn eine Diagonale theilt ein || gr. in zwei kongruente Dreiecke.

74. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich, denn sie sind die Hälften gleicher || gr.

75. Werden durch einen beliebigen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten desselben gezogen, so sind die Parallelogramme zu beiden Seiten der Diagonale einander gleich.



Vos. $AB \parallel FG \parallel DC$
$AD \parallel HI \parallel BC$

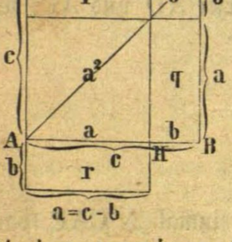
Bpt. $\parallel \text{gr.} FI = \parallel \text{gr.} HG$

Bw. $\triangle ADC \cong \triangle ABC$
$\triangle AFE \cong \triangle AHE$
$\triangle EIC \cong \triangle EGC$

$$\triangle ADC - \triangle AFE - \triangle EIC = \triangle ABC - \triangle AHE - \triangle EGC$$
$$\parallel \text{gr.} FI = \parallel \text{gr.} HG.$$

76. Ist das || gr. des vorigen Satzes ein Quadrat, so sieht man leicht, daß auch FH und IG Quadrate, aber FI und HG Rechtecke sind.

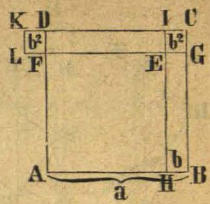
Wir bezeichnen zur Abkürzung
mit a die Seite AH und die ihr gleichen Linien
" b " " HB " " " " "
" c " " AB " " " " "
" a^2, b^2, c^2 die Quadrate über diesen Linien
" a . b das Rechteck aus den Seiten a und b
" a . c " " " " " a und c
" b . c " " " " " b und c.



Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien nebst dem doppelten Rechteck aus beiden Linien.

Es ergibt sich unmittelbar aus der Figur, daß $c^2 = a^2 + p + q + b^2$, also
$(a+b)^2 = a^2 + 2a . b + b^2$.

77. Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über beiden Linien weniger dem doppelten Rechteck aus beiden Linien.



In dem Quadrat $AC = a^2$ bilde man in einer Ecke des Quadrat $EC = b^2$ und verlängere dessen Seiten IE und EG bis H und F und beschreibe über DF noch das Quadrat $LD = b^2$. Dann sind HC und LI Rechtecke aus den Seiten a und b und es ergibt sich:

$AE = AC + LD - HC - LI$ oder abgekürzt:

$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2 . a . b$

*78. **Der Unterschied zweier Quadrate ist gleich dem Rechteck aus der Summe ihrer Seiten und der Differenz derselben.**

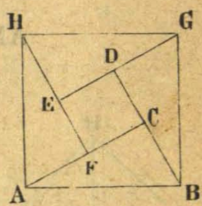
Aus 76 folgt

$c^2 - b^2 = a^2 + p + q.$

Legt man an die Seite AH noch ein Rechteck $r \cong q$, so ist

$c^2 - b^2 = a^2 + p + r =$ dem Rechteck aus den Seiten $(c + b)$ und $(c - b)$ oder nach der früheren Bezeichnung:

$c^2 - b^2 = (c + b) . (c - b).$



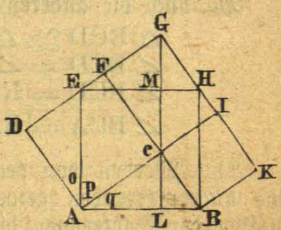
79. **Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über seinen Katheten (Pythagoräischer Satz).**

Bw. 1. In dem Quadrat ABGH über der Hypotenuse AB des rechtwinkligen Dreiecks ABC ziehe man $HF \perp AC$, $GE \perp HF$ und verlängere BC bis D, so wird das Quadrat ABGH in vier kongruente Dreiecke und das kleinere Quadrat CE zerlegt.

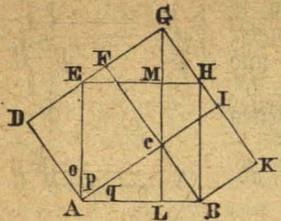
Setzt man zur Abkürzung $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$, so ist $CF = c - b$.

Da zwei jener Dreiecke zusammen gleich einem Rechteck aus den Seiten b und c sind, so hat man

$$a^2 = 2 . b . c + (c - b)^2$$
$$a^2 = 2 . b . c + c^2 + b^2 - 2 b . c \quad (77)$$
$$a^2 = b^2 + c^2.$$



Bw. 2. Ueber den Katheten des rechtwinkligen Dreiecks ABC errichte man die Quadrate ACFD und CBKI; auf AB errichte man ferner die Senkrechten AE und BH bis zu den Seiten DF und KI und verbinde E mit H. Endlich verlängere man DF und KI bis zu ihrem Durchschnitt G und ziehe von dort die Gerade GL durch den Punkt C.



Dann ist $\angle o + \angle p = R = \angle p + \angle q$, also

$$\angle o = \angle q$$
$$\angle D = \angle ACB = 1R.$$
$$AD = AC$$
$$\overline{\triangle ADE \cong \triangle ACB}$$
$$AE = AB$$

Ebenso beweist man, das

$$BH = AB$$

Somit sind AE und BH einander =, und $\perp$ zu AB, also ABHE das Quadrat über der Hypotenuse.

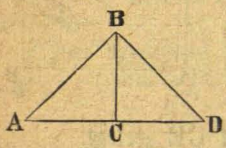
Ferner ist $DE = CB = BK = FG$

$$DE + EF = EF + FG$$
$$DF = EG$$
$$DF = AC$$
$$\overline{EG = AC}$$

Da auch $EG \parallel AC$,
so ist $GC \parallel AE$.

Jetzt erkennt man leicht die Gleichheit der folgenden $\parallel$gr.

$$AM = AG = AF$$
$$BM = BG = BI$$
$$\overline{AM + BM = AF + BI}$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$



80. **Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der von den letzteren eingeschlossene Winkel ein Rechter.**

Vors. $AB^2 = AC^2 + CB^2$

Bpt. $\angle ACB = R$.

Bw. Man ziehe $CD \perp CB$ und mache $CD = CA$. Zieht man dann noch BD, so ist

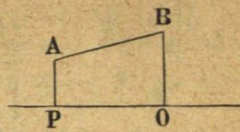
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 \quad (79)$$
$$BD^2 = BC^2 + CA^2 = AB^2$$
$$BD = AB.$$

Da auch die anderen Seiten gleich sind, so ist (50)

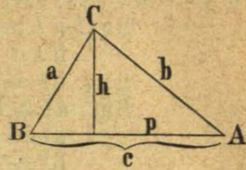
$$\triangle BCD \cong \triangle BCA$$
$$\angle BCD = \angle BCA,$$
$$\angle BCD = R \text{ nach der Konstruktion}$$
$$\overline{\angle BCA = R.}$$

81. Werden von den Endpunkten einer Geraden Senkrechte auf eine andere Geraden gezogen, so heißt das Stück zwischen den Fußpunkten der Senkrechten die **Projektion** der ersten Geraden auf die

zweite. PO ist die Projektion von AB. Es kann hierbei eine Senkrechte auch $= o$ sein.



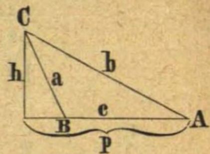
In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten $\frac{\text{nebst}}{\text{weniger}}$ dem doppelten Rechteck aus einer von ihnen und der Projektion der andern auf diese, wenn der Gegenwinkel der ersten Seite $\frac{\text{stumpf}}{\text{spitz}}$ ist.



a) Vorf. $\angle A < R$

Bpt. $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c.p,$

wo p die Projektion von b auf AB ist.



Bw. Ist $\angle CBA < R$, so ist (79)

$$a^2 = (c - p)^2 + h^2.$$

Ist $\angle CBA > R$, so ist

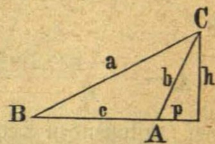
$$a^2 = (p - c)^2 + h^2.$$

In beiden Fällen ist also (77)

$$a^2 = c^2 - 2.c.p + h^2 + p^2$$

und da $h^2 + p^2 = b^2$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c.p.$$



b) Vorf. $\angle BAC > R$.

Bpt. $a^2 = b^2 + c^2 + 2.c.p$

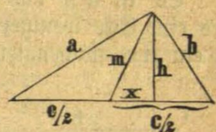
Bw. $a^2 = h^2 + (p + c)^2$

$$= h^2 + p^2 + 2\,c.p + c^2$$

$$= b^2 + c^2 + 2\,c.p.$$

Ist der Gegenwinkel von a ein rechter, also $p = o$, so hat man den Pythagoräischen Satz.

*82. Das Quadrat der von der Spitze eines Dreiecks nach der Mitte der Gegenseite gezogenen Transversale ist gleich der halben Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem Quadrate über der halben Gegenseite.



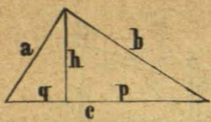
Vorf. x ist die Projektion jener Transversalen m auf die Gegenseite.

Bpt. $m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$

Bw.
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2.\frac{c}{2}.x \\ b^2 &= m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2.\frac{c}{2}.x \end{aligned}\right\} (81)$$

$$a^2 + b^2 = 2\,m^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$



83. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Senkrechten gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Vors. $a \perp b$

$h \perp c$

Bpt. $h^2 = p \cdot q$

Bw. $a^2 + b^2 = c^2$ (79)

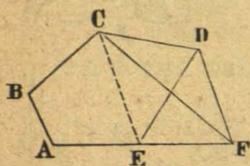
$a^2 = h^2 + q^2$

$b^2 = h^2 + p^2$

$c^2 = p^2 + q^2 + 2\,h^2$

$c^2 = p^2 + q^2 + 2\,p \cdot q$ (76)

$h^2 = p \cdot q.$



84. Ein jedes Vieleck läßt sich in ein ihm flächengleiches Dreieck verwandeln.

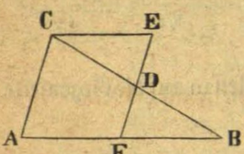
Man schneide von dem Vieleck ABCDE durch eine Diagonale CE ein $\triangle$CDE ab, ziehe durch die Spitze D dieses Dreiecks eine Parallele DF zu jener Diagonale bis sie die Verlängerung einer anstoßenden Seite des Vielecks schneidet, und verbinde diesen Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkt C der Diagonale; dann ist (74)

$\triangle$ CDE = $\triangle$ CFE.

Fügt man auf beiden Seiten die Fläche ABCE hinzu, so ist

ABCDE = ABCF.

Es ist also das gegebene Vieleck in ein anderes verwandelt, welches eine Ecke weniger hat. So fortfahrend läßt sich dann jedes Vieleck in ein ihm flächengleiches Dreieck verwandeln.



85. Jedes Dreieck (also auch jedes Vieleck) läßt sich in ein ihm flächengleiches Parallelogramm verwandeln.

Zieht man durch die Mitte D der einen Seite des gegebenen Dreiecks ABC eine Parallele EF zu AC, durch C eine Parallele zu AB, so ist (40)

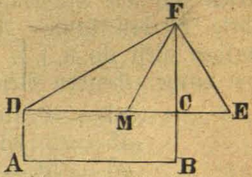
$\triangle$ DBF $\cong$ $\triangle$ DCE

$\triangle$ DBF + DFAC = $\triangle$ DCE + DFAC

$\triangle$ ABC = $\|$gr. AE.

86. Jedes Parallelogramm (also auch jedes Vieleck) läßt sich in ein ihm flächengleiches Rechteck verwandeln.

Man braucht nur aus den Endpunkten einer Seite eines Parallelogramms Senkrechte zu errichten, bis sie die Gegenseite oder deren Verlängerung schneiden, so ist das so entstandene Rechteck dem früheren $\|$gr. gleich. (72)



87. Jedes Rechteck (also auch jedes Vieleck) läßt sich in ein ihm flächengleiches Quadrat verwandeln.

Man verlängere die beiden in C zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks AC, die eine um CE = CB, bestimme die Mitte von DE und auf der Verlängerung von BC einen Punkt F, so daß MF = ME ist, so ist (67)

$$\angle DFE = R$$

und nach (83) ist $CF^2 = DC \cdot CE$

$$CF^2 = DC \cdot CB.$$

V. Kapitel.

Von der Ausmessung geradliniger Figuren.

88. Zwei gleichartige Dinge lassen sich in Beziehung auf ihre Größe auf zweierlei Art vergleichen: man untersucht entweder, um wie viel das eine größer als das andere, oder man bestimmt, wie viel mal das eine so groß ist als das andere. Im ersten Falle erhält man eine Differenz, das s. g. arithmetische Verhältniß, im andern Falle einen Quotienten, das s. g. geometrische Verhältniß, welches letztere stets eine unbenannte Zahl ist.

Die Geometrie hat es meist nur mit dem letzteren Verhältniß zu thun. Die Bestimmung dieses Verhältnisses einer geometrischen Größe zu einer andern als Einheit angenommenen ihr gleichartigen Größe heißt das Ausmessen derselben. Es können also Linien nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen gemessen werden u. s. w.

89. Um eine Gerade auszumessen, d. h. ihr Verhältniß zu einer andern als Einheit angenommenen Geraden zu bestimmen, kann man auf folgende Art verfahren. Ist die Maßeinheit ab kleiner als die zu messende Gerade ce, so trägt man sie hinter einander auf letztere auf. Fällt dabei ihr Endpunkt mit dem von ce zusammen, so ist die Zahl der Auftragungen zugleich die Zahl, wie oft das Maß ab in der Geraden ae enthalten ist. In unserem Beispiel also

$$\frac{ce}{ab} = 3 \text{ oder } ce = 3 \cdot ab.$$

Geht die Maßeinheit ab aber in der zu messenden Geraden cd nicht auf, indem noch ein Rest ed $<$ ab übrig bleibt, so trägt man diesen auf die Maßeinheit ab auf, wobei wieder ein Rest bf $<$ de übrig bleiben kann. Alsdann trage man diesen Rest wieder auf den vorigen Rest de u. s. f. In unserm Beispiel geht der Rest dg in dem ihm vorhergehenden Rest bf auf und wir haben

$$
\begin{aligned}
cd &= 3 \,.\, ab + ed \\
ab &= 2 \,.\, ed + bf \\
ed &= bf + dg \\
bf &= 3\, dg.
\end{aligned}
$$

Durch eine rückwärts aufsteigende Substitution erhält man

$$
\begin{aligned}
ed &= 4 \,.\, dg \\
ab &= 11 \,.\, dg \\
cd &= 37 \,.\, dg
\end{aligned}
$$

also ist $\frac{cd}{ab} = \frac{37}{11}$ oder $cd = 3\,{}^4\!/_{11}$ ab.

Ist die zu messende Gerade kleiner als die Maßeinheit, so verfährt man so, als ob gleich der Rest de gegeben wäre. Man erhält dann

$$\frac{de}{ab} = \frac{4}{11} \text{ oder } de = {}^4\!/_{11}\, ab$$

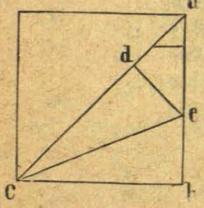
Das Verhältniß der Linien cd (oder ed) und ab läßt sich zwar nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken, aber es gibt doch zu beiden Linien eine dritte dg, welche in beiden aufgeht. Diese heißt auch das gemeinschaftliche Maß der beiden Geraden, und von jenen sagt man daher, sie seien kommensurabel und haben ein rationales Verhältniß.

Es kann aber bei vorstehendem Verfahren geschehen, daß immer wieder ein Rest übrig bleibt, daß sich somit kein gemeinschaftliches Maß zu zwei Geraden finden läßt. Solche Gerade heißen inkommensurabel und ihr Verhältniß ein irrationales, da es sich weder durch eine ganze Zahl noch durch das Verhältniß zweier ganzen Zahlen genau ausdrücken läßt.

Zwei inkommensurabele Linien sind z. B. die Seite und die Diagonale eines Quadrats.

Man mache cd = ab und ziehe de $\perp$ ca; dann ist

$$
\begin{aligned}
\triangle\, cbe &\cong \triangle\, cde \;(49), \text{ also} \\
be &= de = da \;(43).
\end{aligned}
$$



Die Seite des Quadrats geht nicht in die Diagonale auf, weil die Diagonale stets größer als die Seite (45), aber doch kleiner als die doppelte ist. Es beibt also stets ein Rest. Nimmt man diesen Rest da = be einmal von der Seite ab fort, so bleibt ein Rest ae, der die Diagonale zum Quadrat über dem vorigen Rest ad ist, in welche jener also ebenso wenig aufgeht. Man sieht jetzt leicht, daß man so fortfahrend nie einen Rest bekommen wird, der in dem vorigen aufgeht, daß also die genannten Geraden inkommensurabel sind. Ihr Verhältniß läßt sich, wie später (97) gezeigt werden soll, so ausdrücken

$$\frac{ac}{ab} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

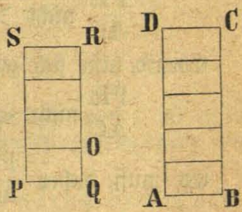
Kann man also das Verhältniß inkommensurabeler Größen in Zahlen nie genau ausdrücken, so lassen sich doch oft Zahlen finden, welche jenes Verhältniß in beliebiger Annäherung darstellen.

Das Verhältniß einer Geraden zu einer andern als Einheit angenommenen Geraden nennen wir die Längenzahl derselben.

90. Rechtecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

Vos. $AB = PQ$

Vpt. $\dfrac{PR}{AC} = \dfrac{PS}{AD}$



Bw. a) Sind die Höhen kommensurabel, so trägt man auf dieselben das gemeinschaftliche Maß auf; dasselbe sei in PS 4 mal, in AD 5 mal enthalten. Dann ist

$$\frac{PS}{AD} = \frac{4}{5}$$

Zieht man durch die Theilungspunkte Parallele zu den Grundlinien, so zerfällt das Rechteck PR in 4, das Rechteck AC in 5 kleinere Rechtecke, welche alle einander gleich sind. Es kann daher eins derselben PO als Maß der gegebenen Rechtecke angesehen werden. Es ist dann

$$PR = 4\,PO$$
$$AC = 5\,PO$$

also $\dfrac{PR}{AC} = \dfrac{4}{5}$, daher auch

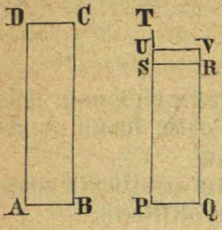
$$\frac{PR}{AC} = \frac{PS}{AD}$$

b) Sind die Höhen AD und PS inkommensurabel, so verfährt man indirekt und nimmt an, es wäre entweder

$$\frac{PR}{AC} > \frac{PS}{AD} \text{ oder } \frac{PR}{AC} < \frac{PS}{AD}.$$

Im ersten Falle müßte es dann eine Gerade $PT > PS$ geben, so daß $\dfrac{PR}{AC} = \dfrac{PT}{AD}$ wäre.

Alsdann kann die Höhe AD immer in so viele einander gleiche Theile zerlegt werden, daß ein Theil kleiner ist als TS. Trägt man diesen Theil von P aus auf PT auf, so muß ein Theilungspunkt U nothwendig zwischen S und T fallen. Zieht man ferner UV || PQ, so sind die Höhen der Rechtecke PV und AC kommensurabel, weil das Maß vor AD auch in PU aufgeht. Es ist daher nach (90, a)



$$\frac{PV}{AC} = \frac{PU}{AD}$$

Dividirt man diese Gleichung durch die angenommene Gleichung

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PT}{AD},$$ so erhält man

$$\frac{PV}{PR} = \frac{PU}{PT},$$ was unmöglich ist, da ein unechter Bruch einem echten Bruch nicht gleich sein kann.

Somit kann

$$\frac{PR}{AC} \text{ nicht } > \frac{PS}{AD} \text{ sein.}$$

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$$\frac{PR}{AC} \text{ nicht } < \frac{PS}{AD} \text{ sein kann.}$$

Es muß daher $\frac{PR}{AC} = \frac{PS}{AD}$ sein.

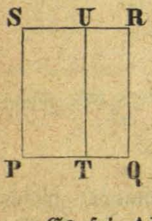
Da man AD und PS auch als Grundlinien der Rechtecke ansehen kann, so läßt sich der vorstehende Satz auch so aussprechen:

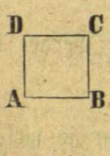
Rechtecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

91. *Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen und Parallelogramme und Dreiecke von gleicher Höhe wie ihre Grundlinien.*

Denn jedes || gr. ist gleich einem Rechteck von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe, jedes Dreieck ist halb so groß.

92. *Eine Fläche ausmessen* heißt ihr Verhältniß zu einer andern als Einheit angenommene Fläche bestimmen. Als solche gilt das Quadrat über der Längeneinheit. Die Zahl, wie oft die Flächeneinheit in einer andern Figur enthalten ist, heißt die *Flächenzahl* derselben.





93. *Die Flächenzahl eines Rechtecks ist gleich dem Produkt der Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.*

Es sei AB die Längeneinheit und das Quadrat AC die Flächeneinheit, somit

$\frac{PS}{AB} = m$ die Längenzahl der Seite PS

$\frac{PQ}{AB} = n$ „ „ „ „ PQ

$\frac{PR}{AC} = f$ „ Flächenzahl des Rechtecks PR.

Macht man $PT = AB$ und zieht $TU \parallel PS$, so ist

$$\frac{PU}{AC} = \frac{PS}{AD} \; (90)$$

$$\frac{PR}{PU} = \frac{PQ}{PT}$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt

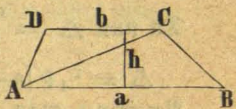
$$\frac{PR}{AC} = \frac{PS}{AB} \cdot \frac{PQ}{AB}, \text{ also auch}$$

$$f = m \,.\, n.$$

94. Die Flächenzahl eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt der Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

Die Flächenzahl eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus den Längenzahlen seiner Grundlinie und Höhe.

95. Die Flächenzahl eines Trapezes ist gleich der halben Summe der Längenzahlen seiner parallelen Seiten, multiplicirt mit der Längenzahl seiner Höhe.



Nennen wir die Längenzahlen der $\parallel$ Seiten a und b, die der Höhe h, so ist die

$$\text{Flächenzahl des } \triangle ABC = \frac{a \,.\, h}{2}$$

$$\text{„ „ } \triangle ADC = \frac{b \,.\, h}{2}$$

$$\text{„ „ Trapezes } ABCD = \frac{(a + b)\, h}{2}$$

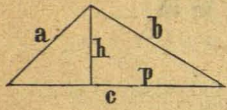
96. Die Flächenzahl eines Vielecks wird gefunden, indem man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und die Flächenzahlen derselben addirt. —

97. Die Flächenzahl eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz der Längenzahl seiner Seite.

Die Längenzahl der Seite eines Quadrats ist gleich der Quadratwurzel aus der Flächenzahl des Quadrats. Ist a die Längenzahl der Seite eines Quadrats, d die Längenzahl seiner Diagonale, so ist nach dem Pythagoräi'schen Satz

$$d^2 = 2a^2$$
$$\frac{d^2}{a^2} = 2$$
$$\frac{d}{a} = \sqrt{2}$$

Das Verhältniß der Diagonale eines Quadrats zu seiner Seite ist also ein irrationales, wie schon 89 gezeigt worden ist.



*98. Bedeuten a, b, c die Längenzahlen der drei Seiten eines Dreiecks und Δ die Flächenzahl desselben, so ist

$$\Delta = {}^1\!/_4 \sqrt{[(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]}.$$

Bw. h und p seien die Längenzahlen der Höhe und der Projektion von b anf c. Dann ist (81)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,p\,.\,c$$
$$p = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

Ferner ist $h^2 = b^2 - p^2 = (b+p)\,(b-p)$

$$h^2 = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c}$$
$$4\,h^2c^2 = [(b+c)^2 - a^2]\,.\,[a^2 - (b-c)^2]$$
$$4\,h^2c^2 = (a+b+c)\,.\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)$$
$$2\,hc = \sqrt{[(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$$

Da nun $\Delta = \frac{ch}{2}$, so folgt

$$\Delta = {}^1\!/_4 \sqrt{[a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}$$

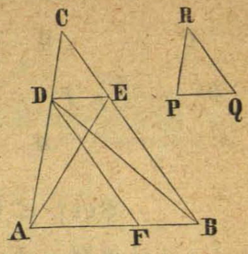
Bezeichnet man die halbe Summe der drei Seitenzahlen mit s, also $a + b + c = 2s$, so ist

$$-a + b + c = 2\,(s-a)$$
$$a - b + c = 2\,(s-b)$$
$$a + b - c = 2\,(s-c), \text{ daher auch}$$
$$\Delta = \sqrt{s,\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

VI. Kapitel.

Von der Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

99. Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn die Winkel der einen Figur der Reihe nach den Winkeln der andern Figur gleich sind und wenn zwischen je zwei gleichliegenden Seiten beider Figuren stets dasselbe Verhältniß stattfindet.



100. I. **Aehnlichkeitssatz:** Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel einzeln gleich sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich

Vors. $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$

Bpt. $\angle C = \angle R$

$$\frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC} = \frac{PQ}{AB}$$

Bw. daß $\angle C = \angle R$, folgt aus (38)

Man mache $CD = RP$, $CE = RQ$ und ziehe DE, dann ist $\triangle DEC \cong \triangle PQR$ (41) und $\angle D = \angle P = \angle A$, also

$$DE \parallel AB \ (30)$$

Zieht man noch AE und DB, so ist (91)

$$\frac{\triangle DBC}{\triangle ABC} = \frac{CD}{CA}$$

$$\frac{\triangle EAC}{\triangle ABC} = \frac{CE}{CB}$$

Nun ist aber $\triangle DBE = DAE$ (74). Addirt man auf beiden Seiten des $\triangle DEC$ hinzu, so erhält man

$$\triangle DBC = \triangle EAC.$$

Da somit die beiden Quotienten auf der linken Seite einander gleich sind, müssen es auch die auf der rechten Seite sein, also

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \text{ oder}$$

$$\frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$$

Ebenso läßt sich nach nachweisen, daß

$$\frac{PR}{AC} = \frac{PQ}{AB} \text{ ist.}$$

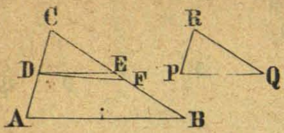
101. Zugleich ergibt sich auch:

$$\frac{CA}{CD} - 1 = \frac{CB}{CE} - 1$$

$$\frac{AD}{CD} = \frac{BE}{CE} \text{ d. h.}$$

Eine Parallele zur Grundlinie eines Dreiecks theilt die andern Seiten so, daß die Theile der einen Seite in demselben Verhältniß stehen, als die Theile der andern.

102. II. Aehnlichkeitssatz: Wenn zwei Seiten eines Dreiecks zu zwei Seiten eines andern Dreiecks in gleichem Verhältniß stehen und wenn der von diesen Geraden eingeschlossene Winkel in beiden Dreiecken gleich ist, so sind die Dreiecke einander ähnlich.



Vors. $\angle C = \angle R$; $\frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$

Bpt. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Bw. Man mache $CD = PR$ und $CE = QR$ und ziehe DE, so ist $\triangle CDE \cong \triangle RPQ$ und man hat

$$\frac{DC}{AC} = \frac{CE}{BC}$$

Wäre nun DE nicht $\parallel AB$, so könnte man von D aus eine andere Gerade $DF \parallel AB$ ziehen. Dann wäre (100)

$$\frac{DC}{AC} = \frac{CF}{BC}, \text{ also}$$

$CE = CF$, was unmöglich ist.

Somit ist $DE \parallel AB$ und

$\angle CDE = \angle A$ und $\angle CED = \angle P$, also auch

$\angle P = \angle A$ und $\angle Q = \angle B$, somit

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

102. Zugleich ergibt sich hieraus:

Wenn zwei Seiten eines Dreiecks durch eine Gerade so getheilt werden, daß die Theile der einen dasselbe Verhältniß zu einander haben wie die Theile der andern, so ist jene Gerade der dritten Seite parallel.

103. III. Aehnlichkeitssatz: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen zu zwei Seiten des andern Dreiecks in gleichem Verhältniß stehen und wenn die den größeren von diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Vors. $\frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$; $CB > CA$

$\angle A = \angle P$; $RQ > RP$

Bpt. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Bw. Man mache $CD =$ der kleineren Seite PR und ziehe $DE \parallel AB$, dann ist (100)

$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB}$; nach der Vos. ist aber

$$\frac{CD}{CA} = \frac{QR}{BC}$$

$CE = QR$; da ferner

$CD = PR$

$\angle CDE = \angle P$, weil beide $= \angle A$ sind, so folgt (49)

$\triangle CDE \cong \triangle RPQ$, also auch

$\angle C = \angle R$ und somit (100)

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

104. IV. **Aehnlichkeitssatz:** Wenn in zwei Dreiecken jede Seite des einen Dreiecks zu der entsprechenden Seite des andern Dreiecks dasselbe Verhältniß hat, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Vors. $\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC} = \frac{RP}{CA}$.

Bpt. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Bw. Man mache $CD = PR$, $CE = QR$ und ziehe DE.

Durch Substitution in die Vors. erhält man:

$\frac{CE}{BC} = \frac{CD}{CA}$, also (102)

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$, folglich

$\frac{CE}{BC} = \frac{DE}{AB}$. Nach der Vors. ist aber

$\frac{QR}{BC} = \frac{PQ}{AB}$.

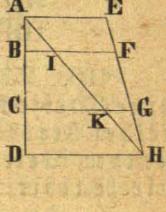
Da nun $CE = QR$ ist, so muß auch

$DE = PQ$ sein, somit

$\triangle DEC \cong \triangle PQR$. Es war aber

$\triangle DEC \sim \triangle ABC$

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

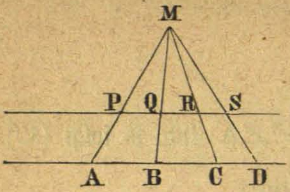


105. Zwei Gerade werden durch mehrere Parallele so getheilt, daß die Theile der einen Geraden zu einander in demselben Verhältniß stehen wie die homologen Stücke der andern Geraden.

Aus 100 und 101 ergibt sich sofort

$\frac{AB}{AD} = \frac{AI}{HA} = \frac{EF}{EH}$ u. s. w.

Sind also die Stücke der einen Geraden einander gleich, nämlich $AB = BC = CD$, so sind es auch die Stücke der andern Geraden, nämlich $AI = IK = KH$ und $EF = FG = GH$.



106. Zwei Parallele werden von mehreren durch einen Punkt gehenden Geraden so getheilt, daß die homologen Stücke beider Parallelen dasselbe Verhältniß haben.

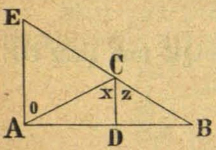
Vors. PS || AB.

Bpt. $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS}$.

Bw. Nach (100) ist

$$\frac{AB}{PQ}\left(= \frac{MB}{MQ}\right) = \frac{BC}{QR} = \left(\frac{MC}{MR}\right) = \frac{CD}{RS} \text{ u. s. w.}$$

Sind die Stücke der einen Parallelen einander gleich, so sind es auch die der andern.



*107. Die Gerade, welche den Winkel eines Dreiecks halbirt, theilt die Gegenseite in zwei Theile, die zu einander dasselbe Verhältniß haben, wie die den getheilten Winkel einschließenden Seiten.

Vors. $\angle x = \angle z$

Bpt. $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$

Bw. Man ziehe AE || CD, bis sie die Verlängerung von BC trifft. Dann ist

$\angle x = \angle o$

$\angle z = \angle E$.

Setzt man diese Werthe in die Vors., so folgt

$\angle o = \angle E$, also

$EC = AC$. Es ist aber (101)

$\frac{AD}{DB} = \frac{EC}{CB}$, also auch

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$.

*108. Theilt eine Transversale aus der Winkelspitze eines Dreiecks die Gegenseite so, daß ihre Theile in demselben Verhältniß stehen, wie die den Winkel einschließenden Seiten, so ist jener Winkel durch die Transversale halbirt.

Vors. $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$

Bpt. $\angle x = \angle z$

Bw. Man verlängere CB und mache $CE = CA$. Dann ist

$$\frac{AD}{DB} = \frac{CE}{CB}, \text{ folgt (102)}$$
$$CD \parallel EA \text{ und}$$
$$\angle o = \angle x$$
$$\angle E = \angle z.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung

$$\angle o = \angle E \text{ (wegen } CE = CA\text{), so folgt}$$
$$\angle x = \angle z.$$

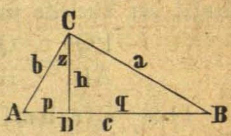
109. Wenn eine Größe so oft in einer zweiten enthalten ist, als diese in einer dritten, so nennt man die zweite das geometrische Mittel der beiden andern. Ist also $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, so ist b das geometrische Mittel zu a und c. Zugleich ist $b^2 = a.c$ und $b = \sqrt{a.c}$.

110. Die Senkrechte aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks theilt dieses in zwei Dreiecke, die einander und dem ganzen Dreieck ähnlich sind. Hieraus folgt, daß jede Kathete das geometrische Mittel zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben, die Höhe aber das geometrische Mittel zwischen beiden Abschnitten der Hypotenuse ist.

Vors. $a \perp b$, $h \perp c$.

Bpt. $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle BCD.$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q}, \; \frac{c}{b} = \frac{b}{p}, \; \frac{p}{h} = \frac{h}{q}.$$



Bw. $\triangle ABC$ ist $\sim \triangle ACD$, weil sie $\angle A$ gemein und außerdem noch einen rechten Winkel haben. Ebenso ist $\triangle ABC \sim \triangle BCD$. Folglich ist auch $\angle z = \angle B$.

Weil außerdem die beiden Winkel bei D rechte sind, so ist auch $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

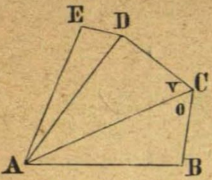
Aus diesen Aehnlichkeiten folgen die behaupteten Gleichungen. Schreibt man die beiden ersten, wie folgt:

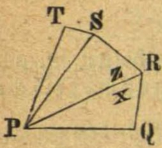
$$\begin{array}{l} a^2 = q \cdot c \\ b^2 = p \cdot c \\ \hline a^2 + b^2 = (p+q) \cdot c \\ a^2 + b^2 = c^2, \end{array}$$

was wieder den Pythagoräischen Satz in Flächenzahlen gibt (79).

111. Aehnliche Vielecke werden durch gleichliegende Diagonalen in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Vors. ABCDE $\sim$ PQRST





Bpt. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\triangle ACD \sim \triangle PRS$

$\triangle ADE \sim \triangle PST$

Bw. Die erſte Behauptung folgt ſofort nach 102. Deshalb iſt auch

$$\frac{QR}{BC} = \frac{PR}{AC}.$$ Nach der Vorſ. iſt aber

$$\frac{QR}{BC} = \frac{RS}{CD}$$

$$\frac{PR}{AC} = \frac{RS}{CD}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und PQR folgt

$\angle o = \angle x$. Nach der Vorſ. iſt

$\angle C = \angle R$

$\angle v = \angle z$, alſo auch (102)

$\triangle ACD \sim \triangle PRS$ u. ſ. f.

112. **Wenn zwei Vielecke aus einer gleichen Zahl ähnlicher und übereinſtimmend liegender Dreiecke zuſammengeſetzt ſind, ſo ſind ſie ähnlich.**

Vorſ. $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\triangle ACD \sim \triangle PRS$

$\triangle ADE \sim \triangle PST$

Bpt. $ABCDE \sim PQRST$

Bw. Weil die homologen Winkel der Dreiecke einander gleich ſind, ergibt ſich durch Addition, daß es auch die homologen Winkel der Vielecke ſind. Ferner folgt aus der Vorſ.:

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{QR}{BC}\left(= \frac{PR}{AC}\right) = \frac{RS}{CD}\left(= \frac{PS}{AD}\right) = \frac{ST}{DE}.$$

113. **Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten ſich wie zwei gleichliegende Seiten.**

Bw. $$\frac{AB}{AB} = \frac{PQ}{PQ}$$

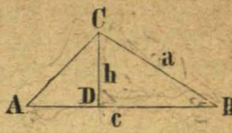
$$\frac{BC}{AB} = \frac{QR}{PQ}$$

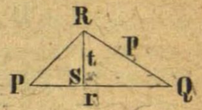
$$\frac{CD}{AB} = \frac{RS}{PQ} \text{ u. ſ. w.}$$

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{AB} = \frac{PQ + QR + RS + \ldots}{PQ} \text{ oder}$$

$$\frac{AB + BC + CD + \ldots}{PQ + QR + RS} = \frac{AB}{PQ}.$$

114. Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Seiten oder wie die Quadrate der Höhen.





Bezeichnet man die Längenzahlen der Linien durch die denselben beigeschriebenen kleinen Buchstaben, so ist (94)

die Flächenzahl des $\triangle ABC = \frac{c.h}{2}$

„ „ „ $\triangle PQR = \frac{r.t}{2}$

Da sich die Flächen wie die Flächenzahlen verhalten, so ist

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{c.h}{r.t}.$$

Weil offenbar $\triangle BCD \sim \triangle QRS$ ist, so hat man

$$\frac{h}{t} = \frac{a}{p}, \text{ es ist aber auch}$$

$$\frac{c}{r} = \frac{a}{p}$$

$$\frac{ch}{rt} = \frac{a^2}{p^2} = \frac{h^2}{t^2}, \text{ somit auch}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{a^2}{p^2} = \frac{h^2}{t^2} \text{ oder}$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{CD^2}{RS^2}$$

115. Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Seiten.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR} = \frac{AB^2}{PQ^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\triangle ABC}{AB^2} = \frac{\triangle PQR}{PQ^2}$$

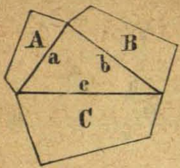
$$\frac{\triangle ACD}{\triangle PRS} = \frac{CD^2}{RS^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} \qquad \frac{\triangle ACD}{AB^2} = \frac{\triangle PRS}{PQ^2}$$

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle PST} = \frac{DE^2}{ST^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} \qquad \frac{\triangle ADE}{AB^2} = \frac{\triangle PST}{PQ^2}$$

Durch Addition folgt $\frac{ABCDE}{AB^2} = \frac{PQRST}{PQ^2}$ oder

$$\frac{ABCDE}{PQRST} = \frac{AB^2}{PQ^2}.$$

***116. Bilden die homologen Seiten dreier ähnlichen Vielecke ein rechtwinkliges Dreieck, so ist das Viel-**



eck über der Hypotenuse gleich der Summe der Vielecke über beiden Katheten.

$$\frac{A}{C} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\frac{B}{C} = \frac{b^2}{c^2}$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \text{ (79), also}$$

$$A + B = C.$$

VII. Kapitel.

Von den Bogen, Winkeln und Linien im Kreise.

117. Wenn eine begrenzte Gerade in derselben Ebene um einen Endpunkt herumgedreht wird, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt der andere Endpunkt eine geschlossene Linie, welche die **Kreislinie** heißt und die Eigenschaft besitzt, daß jeder ihrer Punkte von jenem festen Punkt, (**Mittelpunkt, Centrum**) gleich weit entfernt ist. Der von der Kreislinie begrenzte Theil der Ebene wird **Kreis**, die Kreislinie selbst auch Umfang oder Peripherie des Kreises genannt. Eine Gerade vom Mittelpunkt zur Peripherie des Kreises heißt sein **Halbmesser** oder **Radius**.

Eine Gerade kann mit einer Kreislinie höchstens zwei Punkte gemein haben, denn sonst müßte man vom Mittelpunkt des Kreises mehr als zwei gleich lange Gerade nach einer Geraden ziehen können, was unmöglich ist (48). Eine Kreislinie ist folglich eine **krumme** Linie. Ein Theil derselben heißt ein **Bogen** oder **Kreisbogen**.

Eine unbegrenzte Gerade, welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemein hat, heißt **Tangente**; eine Gerade, welche die Kreislinie in zwei Punkten schneidet, heißt **Sekante**; das von der Peripherie begrenzte Stück der Sekante heißt **Sehne**. Die durch den Mittelpunkt gehende Sehne wird der Durchmesser des Kreises genannt, er ist doppelt so groß als der Halbmesser.

Alle Halb- und Durchmesser desselben Kreises sind einander gleich.

Durch Aufeinanderlegen ist leicht zu zeigen, daß **zwei Kreise von gleichem Halb- oder Durchmesser kongruent sind und daß jeder Durchmesser den Kreis in zwei kongruente Theile zerlegt.**

118. Wenn sich zwei Sehnen auf der Peripherie des Kreises schneiden, so heißt der von ihnen gebildete Winkel ein **Peripherie-**

winkel, während der von zwei Radien gebildete Winkel ein *Centriwinkel* heißt. Der von zwei Radien und dem zwischen ihnen liegenden Bogen begrenzte Theil der Ebene heißt ein *Kreisausschnitt* oder *Sektor*, die von dem Kreisbogen und seiner Sehne begrenzte Fläche ein *Kreisabschnitt* oder *Segment*.

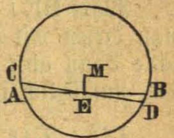
119. *In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören gleiche Centriwinkel, Sehnen, Bogen, Sektore und Segmente zu einander*, d. h. wenn z. B. zwei Centriwinkel einander gleich sind, so sind auch die übrigen zu diesen gehörigen genannten Größen einander gleich, wie sich leicht durch Aufeinanderlegen zeigen läßt.

Wenn dagegen eine der genannten Größen größer ist als eine gleichnamige in demselben oder in einem gleichen Kreise, so sind die übrigen oben genannten Größen, welche zu der ersten gehören, ebenfalls größer als die zur zweiten gehörigen, was sich leicht mit Rücksicht auf (51 und 52) zeigen läßt. Hierbei wird die Sehne als zum kleineren der beiden Bogen gehörig betrachtet. —

120. *Eine Senkrechte vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne halbirt diese und den zugehörigen Bogen* (49. 122). — *Eine Gerade vom Mittelpunkt eines Kreises zur Mitte einer Sehne steht auf letzterer senkrecht* (50).

Eine Senkrechte in der Mitte einer Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises, denn sonst könnte man von diesem eine Senkrechte auf die Sehne fällen und hätte dann in demselben Punkt der Sehne zwei Senkrechte zu derselben, was unmöglich ist.

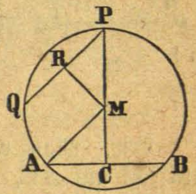
121. Die Senkrechten, welche in der Mitten zweier nicht || Sehnen errichtet werden, schneiden sich im Centrum. Durch drei Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen, läßt sich nur eine Kreislinie ziehen.



*122. *Zwei Sehnen, welche nicht Durchmesser sind, können sich nicht halbiren.*

Wäre E die Mitte von AB und CD, so müßte (120)
$\angle AEM = R$ und $\angle CEM = R$, also
$\angle AEM = \angle CEM$ sein, was unmöglich ist.

123. *Sehnen, welche gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, sind einander gleich, und gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.*



Vors. $CM = RM$ — Vors. $AB = PQ$
Bpt. $AB = PQ$ — Bpt. $CM = RM$.

Die Richtigkeit beider Sätze ergibt sich leicht aus der Kongruenz der Dreiecke ACM und PRM mit Rücksicht auf 120.

124. *Von zwei Sehnen ist diejenige größer, welche dem Mittelpunkt näher ist, und umgekehrt.*

Vorſ. $CM < RM$
Bpt. $AB > PQ$
Bw. $AC^2 = AM^2 - CM^2$
$PR^2 = PM^2 - RM^2$

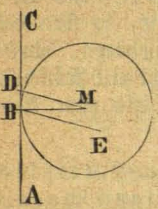
$$\overline{AC^2 > PR^2}$$
$$AC > PR$$
$$AB > PQ$$

Vorſ. $AB > PQ$
Bpt. $CM < RM$
Bw. $AC > PR$
$CM^2 = AM^2 - AC^2$
$RM^2 = PM^2 - PR^2$

$$\overline{CM^2 < RM^2}$$
$$CM < RM$$

125. Der Durchmeſſer iſt die größte Sehne im Kreiſe.

126. Wird in dem Endpunkt eines Radius auf dieſen eine Senkrechte errichtet, ſo iſt ſie eine Tangente zum Kreiſe.



Da B der Fußpunkt der Senkrechten MB iſt, ſo muß jeder andere Punkt D der Geraden AC von M weiter abſtehen als B (46) und, weil B auf der Kreislinie liegt, außerhalb derſelben fallen. Somit iſt B der einzige Punkt, den die Gerade AC mit dem Kreiſe gemein hat.

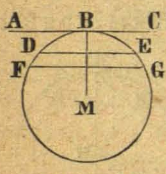
Die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkt einer Tangente verbindet, ſteht auf letzterer ſenkrecht.

Wäre BM nicht $\perp$ AC, ſo könnte man von M eine andere Senkrechte MD auf AC ziehen, dann müßte aber (46) $MD < MB$ ſein, was unmöglich iſt, weil D außerhalb des Kreiſes liegt.

Die Senkrechte, welche im Berührungspunkt auf der Tangente errichtet wird, geht durch den Mitlelpunkt des Kreiſes.

Wäre BE $\perp$ AC und ginge nicht durch den Mittelpunkt M, ſo könnte man dieſen mit dem Berührungspunkt B durch eine Gerade verbinden, hätte dann aber zwei Senkrechte in einem Punkt auf derſelben Geraden, was unmöglich iſt.

127. Die Bogen zwiſchen einer Tangente und einer ihr parallelen Sehne, ſo wie die Bogen zwiſchen zwei parallelen Sehnen ſind einander gleich.



Vorſ. $AC \parallel DE \parallel FG$
Bpt. Bog. FB = Bog. GB
Bog. FD = Bog. GE

Bw. Man verbinde den Berührungspunkt B mit M, ſo iſt BM ſenkrecht auf AC, DE und FG (126. 29), alſo (120)

Bog. FB = Bog. GB
Bog. DB = Bog. EB

$$\overline{\text{Bog. FD} = \text{Bog. GE}}$$

128. *In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen verhalten sich die Sektoren wie ihre Centriwinkel und wie die Bogen zwischen ihren Schenkeln.*

Der Beweis ist dem von 90 ganz analog.

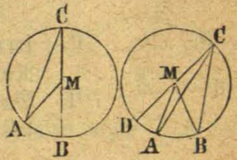
129. Man theilt einen rechten Winkel in 90 gleiche Theile oder Gerade. Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum beträgt also 360 Gerade. Ebenso theilt man auch den Kreisumfang in 360 gleiche Theile, welche ebenfalls Gerade genannt werden. Doch sind die Winkelgrade und die Bogengrade von einander zu unterscheiden. Wenn also ein Centriwinkel und der zu ihm gehörige Bogen gleich viel Grade haben, so heißt das: der *Centriwinkel ist ebenso oft in 4 R enthalten, wie oft sein Bogen im Kreisumfange aufgeht.* Diesen Sinn hat es, wenn man die Größe eines Winkels aus der Größe seines Bogens beurtheilt, denn natürlich kann ein Winkel nur durch einen Winkel, ein Bogen nur durch einen Bogen gemessen werden (88).

130. *Jeder Peripheriewinkel ist halb so groß als der Centriwinkel, der mit ihm auf demselben Bogen steht.*

Vors. $\angle AMB$ ein Centriwinkel
$\angle ACB$ ein Peripheriewinkel

Bpt. $\angle ACB = \frac{1}{2} . \angle AMB$

Bw. Es sind drei Fälle möglich: entweder liegt der Mittelpunkt M auf einem Schenkel des Peripheriewinkels, oder er liegt zwischen beiden Schenkeln desselben, oder er liegt außerhalb dieser Schenkel.

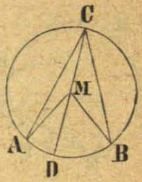


a) $\angle A = \angle C$

$\angle AMB = \angle A + \angle C = 2 . \angle C$

$\angle C = \frac{1}{2} . \angle AMB$

b und c) Man ziehe den Durchmesser CD, so ist (130, a)

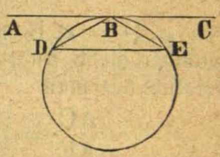


$\angle DCB = \frac{1}{2} \angle DMB$

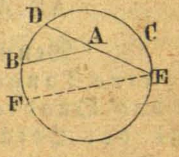
$\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AMD$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AMB.$

131. Ein Peripheriewinkel hat immer halb so viele Gerade als der Bogen zwischen seinen Schenkeln. — Alle Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen oder auf kongruenten Bogen stehen, sind einander gleich. — Ein Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise steht, ein s. g. Winkel im Halbkreise, ist ein Rechter.



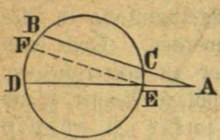
132. *Der Winkel, den eine Tangente mit einer Sehne bildet, ist ebenso groß als ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen steht.*



Man ziehe DE ∥ BC und verbinde E mit B. Dann ist

Bog. BD = Bog. BE (127), also
$\angle E = \angle D$ (131)
$\angle ABD = \angle D$
$\angle ABD = \angle E$.

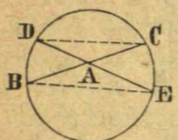
*133. Der Winkel, welchen zwei sich innerhalb des Kreises schneidende Sehnen bilden, hat halb so viele Grade, als die Summe der Bogen zwischen seinen Schenkeln, und der Winkel, welchen zwei sich außerhalb des Kreises schneidende Sekanten bilden, hat halb so viele Grade als der Unterschied der Bogen zwischen seinen Schenkeln.



Man ziehe EF || BC. Dann ist
$\angle BAD = \angle E$
Bog. BF = Bog. CE,
$\angle E$, also auch $\angle BAD$ hat halb so viele Grade als Bog. DF.

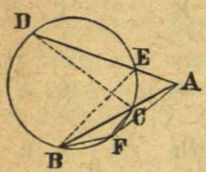
Im ersten Fall ist Bg. DF = Bg. DB + Bg. BF = Bg. DB + Bg. CE,
im zweiten Fall ist Bg. DF = Bg. DB — Bg. BF = Bg. DB — Bg. CE,
also hat $\angle BAD$ halb so viele Grade als

Bog. BD $\pm$ Bog. CE.



134. Wenn zwei Sehnen einander innerhalb des Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne.

Wenn von einem Punkt außerhalb des Kreises zwei Sekanten gezogen werden, so sind die Rechtecke aus jeder Sekante und ihrem äußeren Abschnitt einander gleich.



pt. AB.AC = AD.AE

Bw. Man ziehe DC und BE. Es ist dann

$\triangle ADC \sim \triangle ABE$

weil $\angle D = \angle B$ und weil im ersten Fall die Scheitelwinkel bei A einander gleich sind, im zweiten Fall $\angle A$ beiden Dreiecken gemein ist. Folglich hat man

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AD}{AB} \text{ oder}$$
$$AB.AC = AD.AE$$

135. Wenn von einem Punkt außerhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante gezogen werden, so ist das Quadrat über der Tangente gleich dem Rechteck aus der Sekante und deren äußerem Abschnitt (oder

die Tangente ist das geometrische Mittel zwischen der Sekante und deren äußerem Abschnitt.)

Vpt. $AF^2 = AD \,.\, AE$.

Bw. 1) Es folgt dies eigentlich schon aus dem zweiten Theil des vorigen Satzes, denn denkt man sich die Sekante AB um den festen Punkt A gedreht, so rücken die Punkte B und C einander immer näher und fallen zuletzt in F zusammen, so daß $AB \,.\, AC$ in $AF \,.\, AF$ übergeht.

2) Indessen läßt sich der Satz auch vom vorigen unabhängig beweisen: $\angle AFE = \angle ADF$ (132)

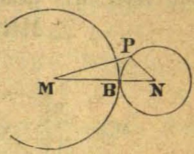
$\angle A$ gemeinschaftlich

$\triangle AFE \sim \triangle ADF$ und

$\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AF}$ oder $AF^2 = AD \,.\, AE$.

136. Die Gerade zwischen den Mittelpunkten zweier Kreise heißt die *Centrale* derselben.

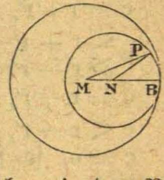
Ist die Centrale gleich der Summe der beiden Radien, so haben beide Kreise blos einen Punkt gemein, welcher in der Centralen liegt; die Kreise berühren sich von außen.



Da die Kreislinie um N von der Centralen ein Stück gleich ihrem Radius abschneidet, so bleibt natürlich nur ein Stück gleich dem andern Radius übrig, jener Durchschnittspunkt B muß also auch auf der Kreislinie um M liegen.

Jeder andere Punkt P aber der Kreislinie um N liegt außerhalb des Kreises um M, weil

$$\begin{array}{l} MP + PN > MB + BN \\ \phantom{MP +{}} PN = BN \\ \hline MP \phantom{{}+ PN} > MB. \end{array}$$



Ist die Centrale gleich dem Unterschiede beider Radien, so haben beide Kreislinien nur einen Punkt gemein, welcher in der Verlängerung der Centralen liegt, die Kreise berühren sich von innen.

Da die Kreislinie um N die Verlängerung der Centralen in einem Punkt B schneidet, welcher von N um einen Radius entfernt ist, so muß die Entfernung zwischen B und M um den Unterschied beider Radien größer, also gleich dem größeren Radius sein. B muß also auch auf der Kreislinie um M liegen.

Jeder andere Punkt P aber der Kreislinie um N muß innerhalb der Kreislinie um M liegen, weil

$$
\begin{array}{l}
MP < MN + NP \\
\underline{NP = NB} \\
MP < MN + NB \\
MP < MB.
\end{array}
$$

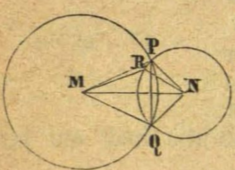
*137. **Ist die Centrale kleiner als die Summe der beiden Radien und größer als der Unterschied der beiden Radien, so schneiden sich die beiden Kreislinien in zwei Punkten.**

Es bezeichnen r und r' die beiden Radien, c die Centrale. Rücken die beiden Kreise bei unveränderlichen Radien aus der Lage $\dfrac{c = r + r' \text{ näher zu}}{c = r - r' \text{ weiter von}}$ einander, so werden die Kreise zum Theil auf einander fallen, zum Theil nicht. Da die Kreislinien geschlossene Linien sind, so müssen sie sich alsdann in wenigstens zwei Punkten durchschneiden. Hätten sie noch einen dritten Punkt R gemein, so müßte, weil

$$
\begin{array}{l}
MR = MP = MQ \\
NR = NP = NQ
\end{array}
$$

und weil MN gemeinschaftlich ist,

$\triangle MRN \cong \triangle MPN \cong \triangle MQN$ sein,



d. h. es müßte R mit P oder Q zusammenfallen.

Zwei Kreislinien haben also höchstens zwei Punkte gemein.

138. Es folge hier noch eine übersichtliche Zusammenstellung:

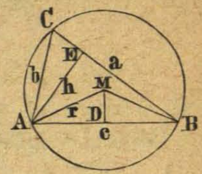
Wenn $c > r + r'$, so liegt ein Kreis ganz außerhalb des andern.
" $c = r + r'$, so berührt ein Kreis den andern von außen.
" $c \begin{smallmatrix} < r + r' \\ > r - r' \end{smallmatrix}$, so schneidet eine Kreislinie die andere.
" $c = r - r'$, so berührt ein Kreis den andern von innen.
" $c < r - r'$, so liegt ein Kreis ganz innerhalb des andern.
" $c = o$, so fallen die Mittelpunkte zusammen, die Kreise sind koncentrisch.

139. Die Centrale steht auf der gemeinschaftlichen Sehne oder Tangente senkrecht.

Wenn mehrere Kreise eine Sehne oder den Berührungspunkt gemein haben, so liegen ihre Mittelpunkte in einer und derselben Geraden.

VIII. Kapitel.

Von den Sehnen- und Tangentenvielecken.



140. Ein Vieleck, dessen Seiten Sehnen eines und desselben Kreises sind, heißt ein Sehnenvieleck; man sagt, es sei dem Kreise eingeschrieben. Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten eines und desselben Kreises sind, heißt ein Tangentenvieleck; wenn dieses den Kreis einschließt, so sagt man es sei demselben umschrieben. Im ersten Fall ist der Kreis dem Vieleck umschrieben, im zweiten Falle eingeschrieben.

141. Die Senkrechten auf den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich im Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, **im ersten der vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks.**

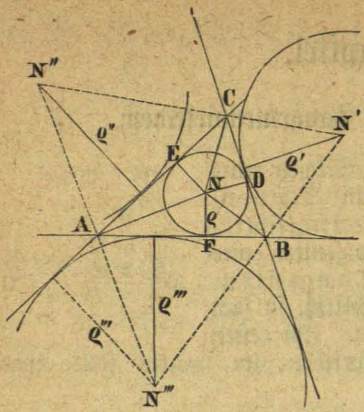
Der Beweis folgt aus 120.

*142. Die Flächenzahl eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der Längenzahlen seiner drei Seiten, dividirt durch die vierfache Längenzahl des Radius des umschriebenen Kreises.

Bezeichnet man die Längenzahl der Linien BC, CA, AB, AE und AM der Reihe nach mit a, b, c, h und r, so ist

$$\angle ACE = \angle AMD, \text{ weil jeder } = \tfrac{1}{2} \angle AMB$$
$$\angle AEC = \angle ADM = R$$
$$\overline{\triangle ACE \sim \triangle AMD}$$
$$\frac{h}{\frac{1}{2}c} = \frac{b}{r}$$
$$h = \frac{bc}{2r}$$
$$\frac{ah}{2} = \frac{abc}{4r}$$
$$\frac{ah}{2} = \triangle \ (94)$$
$$\overline{\triangle = \frac{abc}{4r}}$$

143. Die Geraden, welche die drei Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich im Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises, **im zweiten der vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks.**



Fällt man aus dem Durchschnittspunkte N der die Winkel A und B halbirenden Geraden die Senkrechten ND, NE und NF auf die drei Seiten des Dreiecks, so ist (40)

$\triangle ANE \cong \triangle ANF$ und $\triangle BNF \cong \triangle BND$, somit $ND = NF = NE$

Der mit dem Radius ND um N beschriebene Kreis geht also durch die drei Punkte D, E, F und weil die Seiten des Dreiecks in diesen Punkten auf den Radien senkrecht stehen, sind sie Tangenten. Zieht man nun noch CN, so ist

$\triangle CND \cong \triangle CNE$ (49)

also $\angle DCN = \angle ECN$, so daß also auch die Halbirungslinie des dritten Winkels durch N geht. —

*144. Die Flächenzahl eines Dreiecks ist gleich der halben Summe der Längenzahlen seiner drei Seiten multiplicirt mit der Längenzahl des Radius des eingeschriebenen Kreises.

Bezeichnet man die Längenzahl des Radius des eingeschriebenen Kreises mit ϱ, so ist

$$\triangle ABC = \triangle BNC + \triangle CNA + \triangle ANB$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} a\varrho + \tfrac{1}{2} b\varrho + \tfrac{1}{2} c\varrho$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} (a + b + c)\, \varrho \text{ oder}$$
$$\varrho = \frac{2\triangle}{a + b + c}$$

*145. Das Quadrat der Flächenzahl eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der Längenzahlen der Radien der vier Kreise, welche zugleich alle drei Seiten des Dreiecks berühren.

Es gibt zwar nur einen Kreis, welcher dem Dreieck ABC eingeschrieben werden kann; halbirt man aber die Nebenwinkel von A, B und C, so schneiden sich diese Halbirungslinien in 3 Punkten N', N'' und N''', welche Mittelpunkte dreier Kreise sind, von denen jeder eine Seite des Dreiecks direkt, die anderen in ihren Verlängerungen berührt. Bezeichnet man die Längenzahlen der drei Radien dieser Kreise mit ϱ', ϱ'', ϱ''', so findet man

$$\triangle ABC = \triangle N'AB + \triangle N'AC - \triangle N'BC$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} c\varrho' + \tfrac{1}{2} b\varrho' - \tfrac{1}{2} a\varrho'$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} (b + c - a)\varrho'. \text{ Ebenso findet man}$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} (a - b + c)\varrho''$$
$$\triangle = \tfrac{1}{2} (a + b - c)\varrho'''.$$

Durch Multiplication der drei letzten Gleichungen und der ähnlichen aus 144 erhält man mit Rücksicht auf (98)

$$\triangle^2 = \varrho \varrho' \varrho'' \varrho''' \text{ oder}$$
$$\triangle = \sqrt{\varrho . \varrho' . \varrho'' . \varrho'''}.$$

Leicht ergibt sich auch noch die schöne Relation:

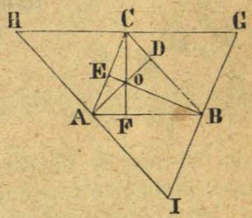
$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{\varrho'''}.$$

146. **Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt, im dritten der vier merkwürdigen Punkte des Dreiecks.**

Man ziehe $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$
$GH \parallel BA$, $HI \parallel CB$, $IG \parallel AC$,
dann ist auch $AD \perp IH$, $BE \perp GI$, $CF \perp GH$.

Ferner ist $HC = CG$, weil jede $= AB$ (56)
$IB = BG$, weil jede $= AC$
$HA = AI$, weil jede $= BC$.

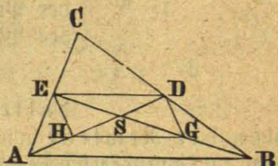
Es sind somit die Höhen des Dreiecks ABC zugleich die Senkrechten in den Mitten der Seiten des Dreiecks GHI und müssen sich (140) in einem Punkte schneiden.



147. **Die Transversalen von den Winkelspitzen eines Dreiecks nach den Mitten der Gegenseiten schneiden sich in einem Punkt, dem vierten merkwürdigen Punkt** (welcher auch der Schwerpunkt des Dreiecks genannt wird).

Man ziehe zwei dieser Transversalen AD und BE, welche sich in S schneiden, halbirt AS in H, BS in G und ziehe die Geraden DE, EH, HG und GD, so ist $ED \#\!\# HG$, weil jede $\parallel AB$ und $= \frac{1}{2} AB$ (102) also DEHG ein $\parallel$gramm und (62)

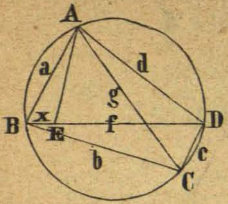
$$DS = SH = HA$$
$$ES = SG = GB.$$



Jede dieser Transversalen wird also durch eine andere so getheilt, daß der Durchschnittspunkt S von der Spitze doppelt so weit entfernt ist als von der Mitte der Gegenseite. Folglich müssen sich die drei Transversalen in einem Punkt schneiden.

148. Von den vier merkwürdigen Punkten fallen der zweite und vierte nothwendig innerhalb des Dreiecks, während der erste und dritte auch außerhalb liegen können.

In einem gleichseitigen Dreieck fallen alle vier merkwürdigen Punkte in einen zusammen.



*149. In jedem Sehnenviereck ist das Rechteck aus den Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus den Gegenseiten (Ptolemäischer Satz).

Vpt. $fg = ac + bd$

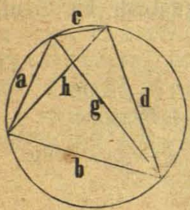
wenn mit a, b, c, d, f, g, x, der Reihe nach die Geraden AB, BC, CD, DA, BD, AC, BE (oder auch die Längenzahlen dieser Geraden) bezeichnet werden.

Bw. Man mache $\angle BAE = \angle CAD$
Da ferner $\angle ABE = \angle ACD$

$$\triangle BAE \sim \triangle CAD.$$

$$\frac{x}{c} = \frac{a}{g} \text{ oder } xg = ac.$$

Addirt man zu $\angle BAE = \angle CAD$ auf beiden Seiten $\angle EAC$, so erhält man

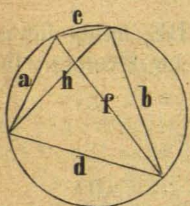


$$\angle BAC = \angle EAD$$
ferner ist $\angle ACB = \angle ADE$

$$\triangle BAC \sim \triangle EAD$$

$$\frac{f-x}{b} = \frac{d}{g} \text{ oder}$$

$$fg - xg = bd$$
$$xg = ac$$
$$fg = ac + bd$$



Ist das Sehnenviereck ein Rechteck, so wird $f = g$, $a = c$, $b = d$ und man erhält

$$g^2 = a^2 + b^2, \text{ d. h.}$$

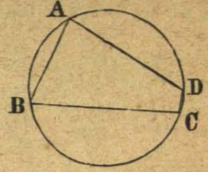
der Pythagoräische Satz ist nur ein besonderer Fall des Ptolemäischen Satzes.

*150. In jedem Sehnenviereck verhalten sich die Diagonalen wie die Summen der Rechtecke aus den Seiten, die in ihren Endpunkten zusammenstoßen.

$$\text{Vpt. } \frac{f}{g} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Bw. Vertauscht man die Seiten eines Sehnenvierecks auf alle mögliche Weise unter einander, so entstehen noch zwei neue Sehnenviereck, sodaß der Seite a im ersten die Seite c, im zweiten die Seite d, im dritten die Seite b gegenübersteht.

Jedes der neuen Vierecke hat mit dem ursprünglichen eine Diagonale gemein, während die neuen Diagonalen in beiden Vierecken einander gleich sind und mit h bezeichnet werden mögen. Man erhielt jetzt (149)



$$fh = ab + cd$$
$$gh = ad + bc$$
$$\frac{f}{g} = \frac{ab + cd}{ad + bc}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit der in 149 gefundenen läßt sich jetzt jede Diagonale aus den vier Seiten berechnen.

*151. Die Flächenzahl eines Sehnenvierecks ist gleich dem Produkt der Längenzahlen seiner drei Diagonalen, dividirt durch die vierfache Längenzahl des Radius des umschriebenen Kreises.

ABCD = △ ABC + △ ADC oder (142)

$$V = \frac{abg}{4r} + \frac{cdg}{4r}$$

$$V = \frac{(ab + cd)g}{4r}$$

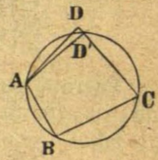
$$V = \frac{fgh}{4r}.$$

152. In jedem Sehnenviereck ist die Summe der Gegenwinkel = 2 R.

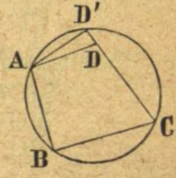
Die Winkel A und C (und ebenso die Winkel B und D) stehen zusammen auf der ganzen Kreisperipherie, sind also zusammen halb so groß als ein Centriwinkel, der auf der ganzen Peripherie steht, d. h. = 2 R.

Wenn also in einem Viereck die Summe der Gegenwinkel kleiner oder größer als 2 R ist, so läßt sich kein Kreis demselben umschreiben.

153. Wenn in einem Viereck die Summe der Gegenwinkel = 2 R ist, so geht die Kreislinie, welche durch drei Punkte gelegt wird, auch durch den vierten.



Gesetzt, es ginge die Kreislinie, welche durch A, B und C geht, nicht auch durch D, so muß sie CD oder ihre Verlängerung in D' schneiden. Es wäre dann (152)

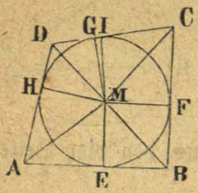


$\angle B + \angle AD'C = 2 R$. Nach der Vors. ist aber
$\angle B + \angle ADC = 2 R$

$$\angle B + \angle AD'C = \angle B + \angle ADC$$
$$\angle AD'C = \angle ADC,$$ was unmöglich ist.

154. In jedem Tangentenviereck ist

die Summe der ersten und dritten Seite gleich der Summe der zweiten und vierten Seite.



Vpt. $AB + CD = BC + DA$.

Bw. $\triangle AEM \cong \triangle AHM$, also

$$\begin{aligned} AE &= AH, \text{ ebenso} \\ BE &= BF \\ CG &= CF \\ DG &= DH \\ \hline AB + CD &= BC + AD. \end{aligned}$$

Wenn also in einem Viereck die Summe der ersten und dritten Seite nicht gleich der Summe der zweiten und vierten Seite ist, so läßt sich demselben kein Kreis hineinbeschreiben.

155. In jedes Viereck, in dem die Summe der ersten und dritten Seite gleich der Summe der zweiten und vierten Seite ist, läßt sich ein Kreis beschreiben.

Bw. Man halbire den Winkel A und B; aus dem Durchschnittspunkt M der Halbirungslinien fälle man die Senkrechten MH, ME und MF, so ist

$$\triangle AMH \cong \triangle AME; \ \triangle BME \cong \triangle BMF, \text{ also}$$
$$MH = ME = MF$$

Ein Kreis, mit einer dieser Linien als Halbmesser um M beschrieben, berührt also die Geraden DA, AB und BC. Es ist aber auch

$$\begin{aligned} AH &= AE \\ BF &= BE \\ \hline AH + BF &= AB. \end{aligned}$$

Nach der Vors. ist aber

$$\begin{aligned} AH + HD + BF + FC &= AB + CD \\ \hline HD + FC &= CD. \end{aligned}$$

Macht man nun $DG = DH$, so ist auch
$$CG = CF.$$

$$\begin{aligned} MF^2 &= MC^2 - CF^2 = MC^2 - CG^2 \\ MH^2 &= MD^2 - DH^2 = MD^2 - DG^2 \\ \hline MC^2 - CG^2 &= MD^2 - DG^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber, daß $MG \perp DC$, denn wäre dies nicht der Fall, so könnte man eine andere Senkrechte ziehen, etwa $MI \perp DC$ und hätte

$$\begin{aligned} MC^2 - CI^2 &= MD^2 - DI^2 \\ \hline CI^2 - CG^2 &= DI^2 - DG^2, \text{ was unmöglich ist.} \end{aligned}$$

Somit ist $MG \perp DC$, dann ist aber

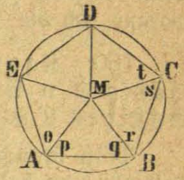
$$\begin{aligned} MC^2 - CG^2 &= MG^2, \text{ also} \\ MG^2 &= MF^2 \\ MG &= MF, \end{aligned}$$

d. h. die Kreislinie mit dem Halbmesser MF berührt auch die Gerade CD.

156. Um jedes Quadrat und um jedes Rechteck läßt sich ein Kreis beschreiben, und in jedes Quadrat und in jeden Rhombus; um und in andere Parallelogramme nicht.

157. Ein Vieleck, in dem alle Seiten einander gleich und auch alle Winkel einander gleich sind, heißt ein **regelmäßiges** Vieleck. Da in einem n=Eck die Summe aller Winkel $= (2n - 4) R$ ist (38), so ist jeder Winkel eines regelmäßigen n=Ecks $= (2 - {}^4/_n) R$.

Regelmäßige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.



158. **Um und in jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis beschreiben.**

Bw. Man halbire die Winkel A und B und verbinde den Durchschnittspunkt M der Halbirungsgeraden mit allen Ecken, so ist $\angle p = \angle q$

$$AM = BM.$$

Weil ferner $\angle q = \angle r$

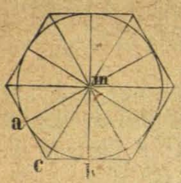
$$\begin{aligned}
&AB = BC \\
&BM \text{ gemeinschaftlich} \\
\hline
\triangle\ &AMB \cong BMC \\
&AM = CM \\
&\angle p = \angle s \\
&\angle p = \tfrac{1}{2} \angle A = \tfrac{1}{2} \angle C \\
\hline
&\angle s = \tfrac{1}{2} \angle C = \angle t \\
&BC = CD \\
&CM \text{ gemeinschaftlich} \\
\hline
\triangle\ &BMC \cong \triangle\ CMD \\
&BM = DM \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

Alle Ecken sind also von M gleich weit entfernt, d. h. M ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Da gleiche Sehnen vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, so sind auch die Senkrechten von M auf die Seiten des Vielecks alle einander gleich, d. h. M ist auch der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

159. **Läßt sich der Umfang eines Kreises in eine beliebige Zahl gleicher Theile zerlegen, so bilden die zu den gleichen Bogen gehörigen Sehnen, so wie die durch die Theilungspunkte gezogenen Tangenten regelmäßige Vielecke.**

Bw. 1) Die Seiten sind einander gleich, weil zu gleichen Bogen gleiche Sehnen gehören, die Winkel sind einander gleich, weil sie Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind.

2) Verbindet man die Ecken durch Gerade mit dem Mittel=



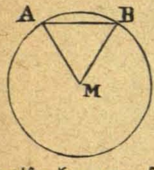
punkt und zieht die Radien zu den Berührungspunkten, so sind je zwei an einer Ecke liegenden Dreiecke einander kongruent, z. B. $\triangle acm \cong \triangle bcm$, woraus folgt, daß die vom Mitelpunkt zu den Ecken gezogenen Geraden die von den Senkrechten gebildeten Winkel halbiren. Letztere waren als Centriwinkel auf gleichen Bogen aneinander gleich, also sind es auch ihre Hälften. Man erkennt jetzt leicht die Kongruenz aller vorhandenen Dreiecke, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergibt.

160. Kann man in oder um einen Kreis ein regelmäßiges n-Eck beschreiben, so läßt sich auch ein regelmäßiges 2 n-Eck in und um den Kreis beschreiben.

Man braucht nur die gleichen Bogen (oder die zugehörigen Centriwinkel) zu halbiren und die nöthigen Sehnen und Tangenten zu ziehen.

161. Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Vors. AB die Seite des regelm. Sechsecks.
Bpt. $AB = AM$.
Bw. Da AB die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist, so ist Bog. AB $= \frac{1}{6}$ des Kreisumfanges und $\angle AMB = \frac{2}{3} R$, also $\angle MAB + \angle MBA = \frac{4}{3} R$, und weil beide Winkel einander gleich sind, ist jeder $= \frac{2}{3} R$. $\triangle AMB$ ist also gleichwinklig, mithin auch gleichseitig und $AB = AM$.



Trägt man jetzt den Halbmesser als Sehne im Kreise herum, so wird der Umfang desselben in 6 Theile, also auch in drei gleiche Theile getheilt. Mit Rücksicht auf 160 kann man somit behaupten:

In und um jeden Kreis läßt sich ein regelmäßiges Vieleck von 3, 6, 12, 24,... überhaupt von 3.2^n Seiten beschreiben.

162. Verbindet man in einem Kreise die Endpunkte zweier zu einander senkrechten Durchmesser, so erhält man die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Vierecks.

In und um jeden Kreis läßt sich also ein regelmäßiges Vieleck von 4, 8, 16,... überhaupt von 2^n Seiten beschreiben.

163. Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist gleich dem größeren Stück des Halbmessers, wenn dieser so getheilt wird, daß sein größeres Stück das geometrische Mittel zwischen dem Radius und seinem andern Abschnitt ist (oder wenn das

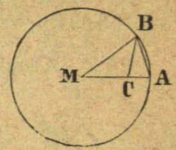
Quadrat über dem größeren Stück gleich ist dem Rechteck aus dem Radius und dem kleinern Stück).

Wenn AB die Seite des regelmäßigen Zehnecks ist, so ist

$\angle M = {}^2/_5\, R$, also

$\angle A + \angle MBA = {}^8/_5\, R$ und

$\angle MBA = {}^4/_5\, R$.



Man ziehe jetzt BC so, daß $\angle MBA$ halbirt wird, so ist $\angle ABC = \angle MBC = {}^2/_5\, R$ und $\angle BCA = {}^4/_5\, R$, folglich

$$\triangle ABC \sim \triangle AMB, \text{ somit}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

Es ist aber auch $AB = BC = MC$, also

$$\frac{MC}{AC} = \frac{AM}{MC} \text{ oder } MC^2 = AC \, . \, AM.$$

Man würde also die Seite des Zehnecks erhalten, wenn sich der Halbmesser auf obige Weise theilen ließe. Wir bezeichnen deshalb die Längenzahlen von MA, MC und CA der Reihe nach mit r, x und r—x und erhalten

$$x^2 = r\,(r - x) = r^2 - rx$$

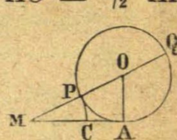
$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$x + \frac{r}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$x = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}$$

Hieraus ergibt sich folgende Konstruktion:

Man errichte auf MA in A eine Senkrechte $AO = {}^1/_2\, AM$ und ziehe OM. Beschreibt man nun mit AO als Halbmesser um O einen Kreis, so ist x die Längenzahl von MP. Macht man endlich $MC = MP$, so ist der Halbmesser auf die verlangte Weise getheilt.



Diese Theilung ist unter dem Namen **„der goldene Schnitt"** bekannt. Die Richtigkeit der Konstruktion läßt sich auch leicht direkt zeigen:

$$\frac{MQ}{MA} = \frac{MA}{MP} \; (135) \qquad MA = 2\,AO = PQ$$

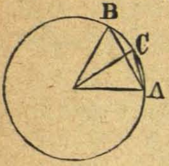
$$\frac{MQ}{MA} - 1 = \frac{MA}{MP} - 1 \qquad MC = MP$$

$$\frac{MP}{MA} = \frac{AC}{MC}$$

$$\frac{MC}{MA} = \frac{AC}{MC} \text{ oder } MC^2 = AC \,.\, AM.$$

Um und in jeden Kreis läßt sich also ein regelmäßiges Vieleck von 5, 10, 20 ... überhaupt von 5.2^n Seiten beschreiben.

146. Trägt man von A aus die Seite des Sechsecks AB und



die Seite des Zehnecks AC nach derselben Seite in die Kreislinie hinein, so ist Bog. BC $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ des Kreisumfanges.

Um und in jeden Kreis läßt sich also ein regelmäßiges Vieleck von 15, 30, 60 ... überhaupt von 15.2^n Seiten beschreiben.

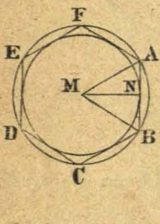
165. Bei einem regelmäßigen Vieleck von n Seiten ist die Längenzahl u seines Umfanges das n fache der Längenzahl a einer seiner Seiten, also

$$u = na$$

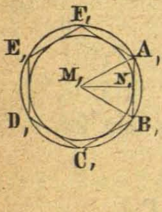
und die Flächenzahl v gleich dem halben Produkt aus den Längenzahlen des Umfanges und des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises

$$v = \frac{u\varrho}{2}$$

was sich leicht ergibt, wenn die Fläche des Vielecks als eine Summe von Dreiecken angesehen wird, die ihre gemeinsame Spitze im Mittelpunkt haben.



166. Die Umfänge regelmäßiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der um- und eingeschriebenen Kreise, ihre Flächen wie die Quadrate dieser Radien.



Daß $\frac{u}{u_,} = \frac{a}{a_,} = \frac{\varrho}{\varrho_,} = \frac{r}{r_,}$

und $\frac{v}{v_,} = \frac{a^2}{a_,^2} = \frac{\varrho^2}{\varrho_,^2} = \frac{r^2}{r_,^2}$

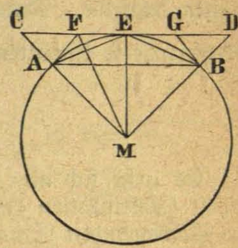
folgt leicht aus ABCDEF $\sim$ A,B,C,D,E, $\triangle$ AMN $\sim$ $\triangle$ A,M,N, und $\triangle$ ABM $\sim$ $\triangle$ A,B,M. —

IX. Kapitel.

Rektifikation und Quadratur des Kreises.

167. Der Umfang des umgeschriebenen 2n-Ecks ist kleiner als der des umgeschriebenen n-Ecks, der des eingeschriebenen 2n-Ecks ist größer als der des eingeschriebenen n-Ecks.

Bw. 1)
$$AF < CF$$
$$GB < GD$$
$$AF + FG + GB < CD$$
$$2\,FG < CD$$
$$2n\,.\,FG < n\,.\,CD$$



2)
$$AE + EB > AB$$
$$2\;AE > AB$$
$$2n\,AE > n\,.\,AB.$$

168. Wenn man also die Seitenzahlen der um- und eingeschriebenen regelmäßigen Vielecke immer weiter verdoppelt, so nehmen die Umfänge der ersteren immer mehr ab, die der zweiten immer mehr zu. Wie groß nun aber auch die Seitenzahl dieser Vielecke werden mag, der Umfang des umschriebenen Vielecks kann doch nicht unbegrenzt abnehmen, da es ja immer noch den Kreis einschließt, der Umfang des eingeschriebenen Vielecks kann wieder nicht größer werden als die sie umschließende Kreislinie. Die Umfänge beider Vielecke nähern sich also bei fortdauernder Verdoppelung immermehr dem Kreisumfange selbst. Zugleich nähern sich aber auch die Flächen jener Vielecke fortwährend der Kreisfläche, und man kann also den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ansehen.

169. Dann gelten aber auch die für die regelmäßigen Vielecke gefundenen Sätze für den Kreis:

Alle Kreise sind einander ähnlich (157).

Ihre Umfänge verhalten sich wie ihre Radien: (113)

$$\frac{p}{p_{\prime}} = \frac{r}{r_{\prime}}$$

Ihre Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Radien

$$\frac{k}{k_{\prime}} = \frac{r^2}{r_{\prime}^2}$$

Der Halbkreis über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Halbkreise über seinen Katheten (116).

Die Flächenzahl eines Kreises ist gleich dem halben Produkt der Längenzahlen des Umfanges und des Halbmessers. —

170. Aus der Gleichung — $\frac{p}{p_,} = \frac{r}{r_,}$ folgt

$$\frac{p}{r} = \frac{p_,}{r_,} \text{ oder}$$

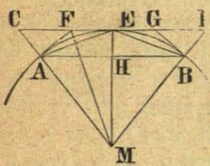
$$\frac{p}{2r} = \frac{p_,}{2r_,}$$

d. h. das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser ist bei allen Kreisen dasselbe. Nennt man die Zahl, wie oft der Durchmesser in der Peripherie enthalten ist π, also $\frac{p}{2r} = \pi$, so erhält man

$$p = 2 r \pi$$
$$k = r^2 \pi.$$

Es ließe sich also sowol das Verhältniß der Kreislinie zur Längeneinheit (Rektifikation des Kreises (als auch das Verhältniß des Kreises zur Flächeneinheit (Quadratur des Kreises) ermitteln, wenn die Zahl π bestimmt wäre. π läßt sich aber nur annäherungsweise bestimmen, unter andern auch durch folgende Methode:

171. Aus den Flächenzahlen des eingeschriebenen und des umgeschriebenen n-Ecks lassen sich die Flächenzahlen des eingeschriebenen 2n-Ecks berechnen.



AB ist die Seite des eingeschriebenen n-Ecks
AE=EB „ „ „ „ „ 2n-Ecks
CD „ „ „ „ umschriebenen n-Ecks
FG „ „ „ „ „ 2n-Ecks

E_n sei die Flächenzahl des eingeschriebenen n-Ecks
E_{2n} „ „ „ „ „ 2n-Ecks
U_n „ „ „ „ umschriebenen n-Ecks
U_{2n} „ „ „ „ „ 2n-Ecks

$$\triangle MHA \sim \triangle MEC$$

$$\frac{ME}{MH} = \frac{MC}{MA}$$

$$\frac{\triangle MCE}{\triangle MAE} = \frac{MC}{MA}$$

$$\frac{\triangle MAE}{\triangle MAH} = \frac{ME}{MH}$$

$$\frac{\triangle MCE}{\triangle MAE} = \frac{\triangle MAE}{\triangle MAH}$$

$$\frac{2n.\triangle MCE}{2n \triangle MAE} = \frac{2n.\triangle MAE}{2n \triangle MAH}$$

$$\frac{U_n}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_n}$$

$$E^{2n} = \sqrt{E_n \, . \, U_n}$$

$$\frac{\triangle\ MCF}{\triangle\ MAF} = \frac{MC}{AM} = \frac{ME}{MH} = \frac{\triangle\ MAE}{\triangle\ MAH}$$

$$\frac{\triangle\ MCF}{\triangle\ MAF} + 1 = \frac{\triangle\ MAE}{\triangle\ MAH} + 1$$

$$\frac{\triangle\ MCE}{\triangle\ MAF} = \frac{\triangle\ MAE + \triangle\ MAH}{\triangle\ MAH}$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\frac{2n}{4n}$, so folgt

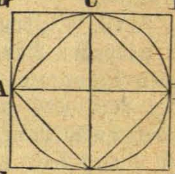
$$\frac{U_n}{U_{2n}} = \frac{E_{2n} + E_n}{2\,E_n}$$

$$U_{2n} = \frac{2\,E_n\ U_n}{E_n + E_{2n}} = \frac{2\quad E_{2n}^2}{E^n + E_{2n}}$$

172. Berechnung von π mittelst der Formeln

$$E_{2n} = \sqrt{E_n \, . \, U_n}$$

$$U_{2n} = \frac{2\ E_{2n}^2}{E_n + E_{2n}}$$



Die Flächenzahl des $\triangle$ ABC ist $= r^2$, also

$$E_4 = 2r^2$$

$$U_4 = 4r^2$$

$$E_8 = \sqrt{8} . r^2 = 2{,}82842\ r^2$$

$$U_8 = \frac{16}{2 + 2{,}82842}\ r^2 = 3{,}31370\ r^2$$

Fährt man so fort, so ergibt sich folgende Tabelle:

Seitenzahl	Flächenzahlen der eingeschriebenen Vielecke	der umschriebenen Vielecke
4	2,00000 r^2	4,00000 r^2
8	2,82842 r^2	3,31370 r^2
16	3,06146 .	3,18259
32	3,12144 .	3,15172
64	3,13654 .	3,14411
128	3,14033	3,14222
256	3,14127	3,14175
512	3,14131	3,14163
1024	3,14157	3,14160
2048	3,14158	3,14159 . . .
4096	3,14159	3,14159

Es bestätigt sich also durch diese Berechnung, daß bei fortdauernder Verdoppelung der Seiten die Flächen der ein- und umgeschriebenen Vielecke sich immer mehr der Kreisfläche nähern, so daß schon beim 4096 Eck der Unterschied weniger als $\frac{1}{100000}$ vom Quadrat des Radius beträgt.

Da somit

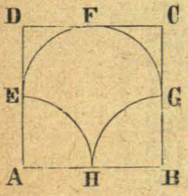
$$k = 3{,}14159\ r^2$$
$$\text{und } k = \pi\ r^2, \quad \text{so folgt}$$
$$\pi = 3{,}14159$$

Schon Archimedes in Syracus († 212 v. Chr.) bestimmte $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}14(2)$. Ludwig von Ceulen*) (fälschlich Ludolf von Cöln genannt) bestimmte π auf 35 Decimalstellen: $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288$. Diese Zahl heißt daher auch häufig die Ludolf'sche Zahl. Einen leicht zu merkenden Ausdruck fand Metius (17. Jahrhundert) $\pi = \frac{355}{133} = 3{,}141592(9)$. Meist genügt $\pi = 3{,}1416$.

Auch nach der oben entwickelten Methode könnte die Berechnung genauer geführt werden, viel bequemere Mittel bietet aber die höhere Mathematik, so daß Clausen in Dorpat sogar mehr als 500 Decimalstellen für π berechnet hat.

*173. Indem man also die Flächenzahl eines Kreises mit sehr weit gehender Annäherung berechnen kann, läßt sich auch die Seite desjenigen Quadrats berechnen, dessen Inhalt dem des Kreises gleich ist. Trägt man nun auf eine Gerade so viel Längeneinheiten auf, als es die berechnete Längenzahl angibt, und beschreibt darüber ein Quadrat, so ist dieses sehr nahe gleich dem Kreise. Insofern ist die Quadratur des Kreises ausführbar. In der Art aber, wie früher jedes Vieleck durch bloße Konstruktion in ein ihm flächengleiches Quadrat verwandelt wurde, in der Art ist die Quadratur des Kreises unmöglich.

Bei dem langen und vergeblichen Suchen nach dieser Quadratur des Kreises fand man indessen, daß sich für einige von Kreisbogen begrenzte Flächen geradlinige Figuren, also auch Quadrate, von gleicher Größe bilden lassen. Davon zum Schluß einige Beispiele:

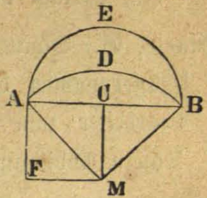


Beschreibt man aus dem Mittelpunkt eines Quadrats ABCD einen Halbkreis EFG und um A und B zwei Viertelkreise EH und GH, so ist die von jenen Kreisbogen begrenzte Fläche HEFGH (die s. g. Art des Hippokrates) halb so groß als das Quadrat ABCD. Der Beweis ist leicht

Wenn man über die Sehne AB eines Viertelkreises MADB einen Halbkreis

*) Er war ein Deutscher von Geburt, der auch eine Zeitlang in Livland lebte, später aber Prof. in Leyden war.

AEB beschreibt, so ist die von Kreisbogen begrenzte Fläche (Lunula Hippocratis) gleich dem Quadrat über dem Radius des Halbkreises.



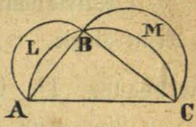
Bw. Halbkreis ABE $= \frac{1}{2}$ AC^2 π

Viertelkreis MADB $= \frac{1}{4}$ AM$^2 \pi = \frac{1}{2}$ AC^2 π

Halbkreis ABE = Viertelkreis MADB.

Nimmt man auf beiden Seiten des Segment ADB fort, so bleibt

Lunula ADBEA = $\triangle$ ABM = $\square$ ACMF.



Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks Halbkreise, so ist die Summe der beiden Möndchen L und M gleich dem Dreieck ABC.

Druck von G. Kreysing in Leipzig.