

Br/89

3376



**Теоретические и численные
исследования краевых задач**

Министерство народного образования Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет им. П.Стучки

Вычислительный центр

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
(межвузовский)

Латвийский государственный университет им. П.Стучки
Рига 1989

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ

Теоретические и численные исследования краевых задач:
Сборник научных трудов (межвузовский) / Отв. ред. Д.А.Клоков.
- Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1989. - 158 с.

Сборник содержит 17 научных статей, написанных представителями различных вузов страны. В статьях изучаются актуальные вопросы теории нелинейных краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследован ряд конкретных прикладных задач, возникающих в различных отраслях естествознания.

Сборник предназначен для специалистов по краевым задачам, занимающихся как вопросами общей теории, так и изучением конкретных уравнений, а также для аспирантов и студентов специальностей "Прикладная математика" и "Математическое моделирование"

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

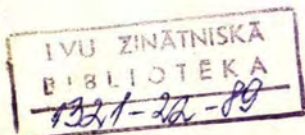
Д.А.Клоков (отв. ред.), В.В.Гудков,
М.М.Адьютов

Печатается по решению Издательского совета
ЛГУ им. П.Стучки

Т 1702050000-080у Рез.89
М812(11)-89



Латвийский
государственный
университет
им. П.Стучки,
1989



Введение

Характерной чертой развития современной фундаментальной науки является ее ориентированность на прикладные дисциплины. В этих условиях значительно возрастает роль математического моделирования, как действенного инструмента познания.

Важной составной частью математического моделирования являются методы математической физики, в особенности бурно развивающийся нелинейный прикладной анализ.

В настоящий сборник вошли статьи математиков БЦ при ЛГУ им. П. Стучки, в которых изучаются существенно нелинейные задачи, имеющие в основном прикладной характер. Эти работы выполнены в рамках госбюджетной темы "Исследование прикладных краевых задач с существенными нелинейностями для обыкновенных дифференциальных уравнений", включенной в целевую комплексную программу АН СССР "Математическое моделирование".

В статьях сборника изучаются наряду с ~~прикладными~~ задачами также фундаментальные вопросы теории краевых задач, в том числе разрешимость краевых задач для систем уравнений второго порядка. Рассматриваются сингулярные краевые задачи, автомодельные задачи теории теплопроводности, свойства решений автомодельных задач.

Полученные результаты являются новыми и вносят существенный вклад в теорию нелинейных краевых задач математической физики.

Межузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989.- С.4-12

УДК 517.927

А.А.Лепин

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (I)$$

где $f \in \text{Car}(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $I = [a, b]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $H_{1,2}: S(I, \mathbb{R}) \rightarrow$

$\mathbb{R}$, $h_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in A(I, \mathbb{R})$ и $\beta \in B(I, \mathbb{R})$. Обозначения смотрите в [1]. В работе [2] был изложен подход к обобщению базовых теорем работы [3]. Наша цель - получить обобщения теорем 5-13 работы [2] при наличии условия Шредера: для любых $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in (t_1, b]$ и любого решения $x: (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения $x'' = f(t, x, x')$ из $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ следует $\sup \{ |x'(t)| : t \in (t_1, t_2) \} < \infty$. При условии Шредера обобщенные решения, нижние и верхние функции превращаются в обычные решения, нижние и верхние функции. Пусть $S = \{x \in S(I, \mathbb{R}) : \alpha \leq x \leq \beta\}$. Тогда $H_{1,2}$ можно предполагать определенными только на S . Условие Шредера позволяет в доказательствах теорем считать, что

$|f(t, x, x')| \leq g(t)$, $t \in I$, $x, x' \in \mathbb{R}$, где $g \in L(I, \mathbb{R})$. Действительно, из условия Шредера следует существование $M \in (0, \infty)$ такого, что для

$$f_*(t, x, x') = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-M, x', M)),$$

где $\delta(x, y, z) = (x + |x - y| - |y - z| + z) 2^{-1}$, множество решений уравнения, лежащих между α и β , совпадает с множеством решений уравнения $x'' = f_*(t, x, x')$, лежащих между α и β , α является нижней функцией, а β — верхней функцией для уравнения $x'' = f_*(t, x, x')$. Обозначим через SB множество решений краевой задачи (I). Из теорем I-4 работы [2] получаем следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha \leq \beta$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x(a) = \alpha(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x(a) = \alpha(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$.

Теорема 2. Пусть $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x(b) = \alpha(b)$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \leq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \geq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\alpha'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$.

Теорема 4. Пусть $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) \geq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \leq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x'(b) = \alpha'(b)$ следует $H_1 x = h_1$ и $H_2 x = h_2$. Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x'(a) = \alpha'(a)$ и $x'(b) = \alpha'(b)$.

Теоремы I-4 отличаются от теорем 5-16 работы [2] тем, что в теоремах 5-16 работы [2] требуется единственность решения задачи Коши и непрерывность $H_{1,2}$. От непрерывности $H_{1,2}$ отказаться нельзя. Поэтому далее будем предполагать, что $H_{1,2}: S \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывны в метрике

$$\rho(x, y) = \sup \{ |x(t) - y(t)| : t \in I \} + \sup \{ |x'(t) - y'(t)| : t \in I \}.$$

В теоремах 5-9 работы [2] можно отказаться от единственности решения задачи Коши. Для этого нам потребуется следующая лемма.

Лемма. Пусть в метрическом пространстве X последова-

тельность континуумов $K_n, n=1,2,\dots$ удовлетворяет условиям: $K_0 = \bigcap_{n \rightarrow \infty} K_n \neq \emptyset$ и для любых $\psi: N \rightarrow N = \{1,2,\dots\}$ и $K_n \in K_{\psi(n)}, n=1,2,\dots$ следует существование $k \in X$ и $\psi: N \rightarrow N$ таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{\psi(n)} = k$. Тогда $K = \bigcup_{n \rightarrow \infty} K_n$ есть континуум. Определение $\bigcap_{n \rightarrow \infty} K_n$ и $\bigcup_{n \rightarrow \infty} K_n$ смотрите в [4] с. 343.

Доказательство. Покажем, что для любой последовательности $K_n \in K, n=1,2,\dots$ найдется сходящаяся подпоследовательность. Из определения K следует, что найдутся $\psi: N \rightarrow N$ и $x_n \in K_{\psi(n)}, n=1,2,\dots$ такие, что ψ монотонно возрастает и $\rho(K_n, x_n) < n^{-1}, n=1,2,\dots$. Пусть $\psi: N \rightarrow N$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\psi(n)} = k \in K$. Тогда $\rho(K_{\psi(n)}, k) \leq \rho(K_{\psi(n)}, x_{\psi(n)}) + \rho(x_{\psi(n)}, k) < (\psi(n))^{-1} + \rho(x_{\psi(n)}, k) \rightarrow 0$. Компактность K доказана. Для доказательства связности K достаточно показать, что существование замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset K$ таких, что $F_1, F_2 \neq \emptyset, F_1 \cup F_2 = K$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ведет к противоречию. Ясно, что F_1 и F_2 компактны. Следовательно, найдутся непересекающиеся окрестности G_1 и G_2 компактов F_1 и F_2 (см. [5] с. 191). Выберем $a \in F_1$ и $b \in F_2$ так, чтобы $a \in K_0$ или $b \in K_0$. Тогда найдется $\psi: N \rightarrow N$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty, K_{\psi(n)} \cap G_1 \neq \emptyset$ и $K_{\psi(n)} \cap G_2 \neq \emptyset$ для $n=1,2,\dots$. Следовательно, $F_n(G_1) \cap K_{\psi(n)} \neq \emptyset$ для $n=1,2,\dots$ (см. [6] с. 136). Пусть $k_n \in F_n(G_1) \cap K_{\psi(n)}$ для $n=1,2,\dots$ и $\psi: N \rightarrow N$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{\psi(n)} = k_* \in F_n(G_1) \cap K$. Из $k_* \in F_n(G_1) = \overline{G_1} - G_1$ следует $k_* \notin F_1$. Из $G_1 \subset X \setminus G_2$ и $\overline{G_1} \subset X \setminus \overline{G_2} = X \setminus G_2$ следует $k_* \notin F_2$. Полученное противоречие доказывает связность K .

Теорема 5. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, выполняется условие Шредера и для любого $x \in S$ из $x(\beta) = \mathcal{L}(\beta)$ следует $H_2 x = H_2$ и

$$x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, x(\alpha) = \beta(\alpha) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x(\beta) = \mathcal{L}(\beta)$.

Доказательство. Без ограничения общности будем счи-

тать, что $f = f_n$. Пусть $\beta_k = \beta + \kappa^{-1}$ для $k \in N$. Тогда $\beta_k \in B(I, \mathbb{R})$, $k \in N$. Пусть для $k \in N$, $m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$, $t \in I$, $x, y, u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{kml}(t, x, y) &= f(t, x - \varphi_m(x - \mathcal{L}(t))\psi_m(y - \mathcal{L}'(t))) = \\ &= \varphi_m(x - \beta_k(t))\psi_m(y - \beta'_k(t)), \quad y - \varphi_m(y - \mathcal{L}'(t))\psi_m(x - \mathcal{L}(t)) = \\ &= \varphi_m(y - \beta'_k(t))\psi_m(x - \beta_k(t)); \end{aligned}$$

$$\varphi_m^{(n)} = m^{-1}\varphi(mu), \quad \psi_m(u) = \psi(mu),$$

$$\varphi(u) = 2^{-1}|u-2| - |u-1| + |u+1| - 2^{-1}|u+2|,$$

$$\psi(u) = 2^{-1}(|u-2| - |u-1| - |u+1| + |u+2|).$$

При фиксированном $t \in I$ функция f_{kml} отличается от f только в $2m^{-1}$ окрестностях точек $(\mathcal{L}(t), \mathcal{L}'(t))$, $(\beta_k(t), \beta'_k(t))$ и равна $f(t, \mathcal{L}(t), \mathcal{L}'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\mathcal{L}(t), \mathcal{L}'(t))$ и $f(t, \beta_k(t), \beta'_k(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\beta_k(t), \beta'_k(t))$. Пусть для $k \in N$, $m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$, $n \in \{m, m+1, \dots\}$, $t \in I$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$f_{kmln}(t, x, y) = 4^{-1}n^{-2} \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \int_{y-\frac{1}{n}}^{y+\frac{1}{n}} f_{kml}(t, u, v) du dv.$$

Функция f_{kmln} удовлетворяет обобщенному условию Липшица по второму и третьему аргументам, а $\mathcal{L}$ и β_k являются нижней и верхней функциями для уравнения $x'' = f_{kmln}(t, x, x')$.

Аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 5 работы [2], получаем вложение

$$u_{kmln}: [0, 1] \rightarrow \{x \in S_{f_{kmln}}(I, \mathbb{R}) : \mathcal{L} \leq x \leq \beta_k \wedge x(b) = \mathcal{L}(b)\},$$

такое, что $u_{kmln,0}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)$ и $u_{kmln,1}(\alpha) = \beta_k(\alpha)$.

По лемме находим континуум

$$K_{kml} \subset \{x \in S_{f_{kmln}}(I, \mathbb{R}) : \mathcal{L} \leq x \leq \beta_k \wedge x(b) = \mathcal{L}(b)\},$$

для которых найдутся $\gamma_{kl}, \beta_{kl} \in K_{kl}$ такие, что $\gamma_{kl}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)$ и $\beta_{kl}(\alpha) = \beta_k(\alpha)$. По лемме находим континуумы

$$K_k \subset \{x \in S(I, \mathbb{R}) : \mathcal{L} \leq x \leq \beta_k \wedge x(b) = \mathcal{L}(b)\},$$

для которых найдутся $\gamma_k, \beta_k \in K_k$ такие, что $\gamma_k(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)$ и $\beta_k(\alpha) = \beta_k(\alpha)$. По лемме находим континуум

$$K \subset \{x \in S(I, \mathbb{R}) : \mathcal{L} \leq x \leq \beta \wedge x(b) = \mathcal{L}(b)\},$$

для которого найдутся $\gamma, \beta \in K$ такие, что $\gamma(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)$ и $\beta(\alpha) = \beta(\alpha)$. Тогда $H_1 \gamma \leq h_1$, $H_1 \beta \geq h_1$ и $H_2 x = h_2$ для любого $x \in K$. Следовательно, существует $x \in SB$ такое, что $x(b) = \mathcal{L}(b)$.

Аналогично доказываются аналоги теорем 6-9 работы [2].

Теорема 6. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(\alpha) \leq x'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(b) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(\alpha) \leq x'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(b) \leq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x'(b) = \mathcal{L}'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x(\alpha) = \beta(\alpha) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x'(b) = \mathcal{L}'(b)$.

Теорема 8. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$, $\mathcal{L}'(b) \leq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(\alpha) \leq x'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x'(b) = \mathcal{L}'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$.

Теорема 9. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(a) \leq \beta'(a)$, $\mathcal{L}'(b) \geq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(b) = \mathcal{L}(b) \vee x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x(b) = \beta(b) \vee x'(b) = \mathcal{L}'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \geq x'(b) \geq \beta'(b)$.

Аналогично доказываются аналоги теорем I-5 работы [8].

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ имеем $H_2 x = h_2$ и

$$x(a) = \mathcal{L}(a) \wedge x(b) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$.

Теорема II. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(a) > \beta'(a)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x'(a) = \mathcal{L}'(a) \wedge x(b) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x'(a) = \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a)$.

Теорема 12. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(a) > \beta'(a)$, $\mathcal{L}'(b) < \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x'(a) = \mathcal{L}'(a) \wedge x'(b) = \mathcal{L}'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x'(a) = \beta'(a) \wedge x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(a) \geq x'(a) \geq \beta'(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$.

Теорема I3. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(\alpha) \leq x'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$(x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \wedge x(\beta) = \mathcal{L}(\beta)) \vee (x'(\alpha) = \beta'(\alpha) \wedge x(\beta) = \beta(\beta)) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$(x(\alpha) = \beta(\alpha) \wedge x(\beta) = \beta(\beta)) \vee (x'(\alpha) = \mathcal{L}'(\alpha) \wedge x(\beta) = \mathcal{L}(\beta)) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(\alpha) \leq x'(\alpha) \leq \beta'(\alpha)$.

Теорема I4. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(\beta) > \beta'(\beta)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $\mathcal{L}'(\beta) \geq x'(\beta) \geq \beta'(\beta)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$(x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \wedge x(\beta) = \mathcal{L}(\beta)) \vee (x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \wedge x'(\beta) = \beta'(\beta)) \Rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$(x(\alpha) = \beta(\alpha) \wedge x(\beta) = \beta(\beta)) \vee (x(\alpha) = \beta(\alpha) \wedge x'(\beta) = \mathcal{L}'(\beta)) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $\mathcal{L}'(\beta) \geq x'(\beta) \geq \beta'(\beta)$.

Теоремы I0-I6 работы [2] без условия единственности решения задачи Коши не верны. Построим соответствующий пример для теоремы I0 работы [2]. Пусть $f(t, x, x') = 0$ при $0 < x$, $f(t, x, x') = -12|x|^{1/2}$ при $-1 \leq x \leq 0$, $f(t, x, x') = -x^2 - 12$ при $x < -1$, $h_1 = h_2 = 0$,

$$g(t) = \left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right)\left(1 + \frac{12}{\pi^2} + \sin \pi t\right) - \frac{12}{\pi^2}\left(1 + \frac{12}{\pi^2} + \cos \pi t\right),$$

$\tau = \inf \{t \in (1, \infty) : g(t) = -1\}$, $\mathcal{L}(t) = -t^4$ при $t \in [0, 1]$;
 $\mathcal{L}(t) = g(t)$ при $t \in [1, \tau]$, $\mathcal{L}(t) = -(t - \tau - 1)^4$
 при $t \in [\tau, \tau+1]$, $\beta(t) = t$ при $t \in [0, \tau+1]$, $H_1 x = 1$
 при $x \in S \setminus \{\mathcal{L}\}$, $H_1 \mathcal{L} = -1$, $H_2 : S \rightarrow \{0\}$.

Ясно, что $SB = \emptyset$. Примеры для теорем II-I6 работы [2] строятся аналогично.

Если в теореме 5 сделать замену t на $-t$, то получим следующую теорему.

Теорема 5'. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x(b) = \mathcal{L}(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x(b) \geq \beta(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x(a) = \mathcal{L}(a)$. Ясно, что теорема 5' является обобщением теоремы 10 работы [2]. Теорема 6 является обобщением теоремы 12 работы [2]. Теорема 6 при $\mathcal{L}'(a) = \beta'(a)$ и теорема II при $\mathcal{L}'(a) > \beta'(a)$ являются обобщениями теоремы 13 работы [2]. На этом пути будем искать обобщение теоремы II работы [2].

Теорема 15. Пусть $\mathcal{L} \leq \beta$, $\mathcal{L}'(b) \leq \beta'(b)$, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S$ из $x(a) = \mathcal{L}(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$ следует $H_2 x = h_2$ и

$$x'(b) = \mathcal{L}'(b) \Rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad x'(b) = \beta'(b) \Rightarrow H_1 x \geq h_1.$$

Тогда существует $x \in SB$ такое, что $x(a) = \mathcal{L}(a)$ и $\mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5, за исключением построения вложения

$$u_{k\text{тп}} : [0, 1] \rightarrow \{x \in S_{j_{k\text{тп}}}(I, \mathbb{R}) : \mathcal{L} \leq x \leq \beta_k \wedge x(a) = \mathcal{L}(a) \wedge \mathcal{L}'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)\}.$$

Пусть y - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f_{k\text{тп}}(t, x, x'), \quad x(a) = \mathcal{L}(a), \quad x'(b) = \mathcal{L}'(b), \quad \mathcal{L} \leq x \leq \beta_k,$$

а z - минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f_{k\text{тп}}(t, x, x'), \quad x(a) = \mathcal{L}(a), \quad x'(b) = \beta'(b), \quad y \leq x \leq \beta_k.$$

Тогда $u_{k\text{тп}\lambda}$, $\lambda \in [0, 1]$ является решением задачи Коши

$$x'' = f_{k\text{тп}}(t, x, x'), \quad x(a) = \mathcal{L}(a), \quad x'(a) = y'(a) + \lambda(z'(a) - y'(a)).$$

Теорема 15 является обобщением теоремы II работы [2].

Обобщение теорем I4-I6 работы [2] требует привлечения других идей и будет изложено в другой работе.

Список литературы

1. Лепин Л.А. Обобщенные решения и разрешимость краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка // Диф.уравн.- 1982. - Т.18, № 8. - С.1323-1330.
2. Лепин А.Я. Разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛУ им.П.Стучки, 1988. - С.69-78.
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.
4. Куратовский К. Топология. Т.1. - Москва: Мир, 1966. - 594 с.
5. Келли Дж.Л. Общая топология. - Москва: Наука, 1968. - 383 с.
6. Куратовский К. Топология. Т.2. - Москва: Мир, 1969. - 624 с.
7. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Обобщенная разрешимость одной двухточечной краевой задачи // Латв.мат.ежегодник, 30. - Рига: Зинатне, 1986. - С.63-68.
8. Лепин А.Я. Разрешимость некоторых краевых задач для уравнения второго порядка // Латв.мат.ежегодник, 33. - Рига: Зинатне, 1989. - С.39-46.

Поступила 1.09.88

УДК 548.732+517.547

А.А.Степанов

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

При интерпретации данных двухкристальной рентгеновской дифрактометрии возникает обратная краевая задача диагностики кристаллов. Математическая постановка обратной двухточечной краевой задачи дана в работе [1]. Наряду с построением эффективных численных алгоритмов решения необходимо также исследование единственности решения обратной задачи (фазовой проблемы). В настоящей работе в рамках кинематического приближения эти вопросы рассматриваются для случая кусочно-постоянных решений. Такой класс функций используется в дискретной модели кристалла [2], а также при численном решении обратной задачи дифракции [3 - 4].

Исходя из общей постановки задачи для указанного подхода, следует, что доступная измерению интенсивность дифракционного отражения $\mathcal{F}(\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \left| \sum_{k=1}^N r_k \exp(-i(k-1)\alpha) + \tau \exp(-iN\alpha) D(\alpha) \right|^2, \quad (1)$$

где $0 < \tau < 1$, $r_k \in \mathbb{C} \quad \forall k$, функция $D(\alpha)$ при комплексном α является обратной к функции Жуковского, причем $|D(\alpha)|^2 < 1$. Функция $D(\alpha)$ имеет смысл коэффициента дифракционного отражения подложки. Величина τ харак-

теризует поглощение излучения кристаллом и известна для каждого типа вещества.

В обратной задаче по известной функции $\tilde{F}(\alpha)$ требуется определить число N и комплексные числа Γ_k . В работах [3-4] эта задача численно решалась методом наименьших квадратов. Покажем, что, исходя из представления (I), можно свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений.

Предположим, что натуральное число N известно. Тогда непосредственно из (I) следует соотношение:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha) &= \frac{1}{\tau^N} [\tilde{F}(\alpha) \exp(-iN\alpha) - \tau^{2N} |D(\alpha)|^2 \exp(-iN\alpha)] = \\ &= D^*(\alpha) \sum_{k=1}^N \Gamma_k e^{-i(k-1)\alpha} + D(\alpha) \sum_{k=1}^N \Gamma_k^* e^{-i(N-k+1)\alpha} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2N} \rho_k e^{-ik\alpha}. \end{aligned} \quad (2)$$

Умножив (2) на $e^{-i\ell\alpha}$ и интегрируя от 0 до 2π , получаем систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^N (\Gamma_k d_{k+\ell} + \Gamma_k^* \tilde{d}_{k+\ell}) = g_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3)$$

где

$$g_\ell = \int_0^{2\pi} \tilde{F}(\alpha) e^{-i\ell\alpha} d\alpha,$$

$$d_{k+\ell} = \int_0^{2\pi} D^*(\alpha) \exp(-i(k+\ell)\alpha) d\alpha,$$

$$\tilde{a}_{k+\ell} = \int_0^{2\pi} D(\lambda) \exp(-i(N-k+1+\ell)\lambda) d\lambda, \quad \ell = 0, 1, \dots, N-1.$$

Систему (3) численно решать целесообразнее итерационным методом, поскольку для реальных кристаллов число N достаточно велико. При этом матрица коэффициентов задается одним вектором размерности $2N$ (коэффициентами Фурье функции $D(\lambda)$).

Заметим, что величина N может быть определена независимо от решения обратной задачи, см. [5].

Для системы (3) возникает вопрос о ее разрешимости. Последнее, очевидно, связано с возможностью однозначного определения решения по функции $\mathcal{F}(\lambda)$. Как хорошо известно, см., например, [6], если $D(\lambda)$ в формуле (1) тождественно равна нулю, то обратная задача может иметь 2^N решений. Поскольку N может достигать несколько тысяч, то ясно, что неоднозначность решения чрезвычайно велика. Покажем, что при наличии подложки, т.е. $D(\lambda) \neq 0$, задача однозначно разрешима.

Предположим обратное, т.е. существуют два решения $r_1, r_2, \dots, r_N$ и $r'_1, r'_2, \dots, r'_N$, которым соответствует одна и та же функция $\mathcal{F}(\lambda)$. Очевидно, функция $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет аналитическое продолжение с множества $[0, 2\pi]$ на всю комплексную плоскость с выброшенным отрезком $[-1, 1]$. При этом аналитическим продолжением функции $D^*(\lambda)$ является функция $D^*(z^*)$. См., например, [7]. Поскольку $D(z)$ многозначная, то для выделения однозначной ветви достаточно указать значение D в любой точке, в нашем случае $D(\infty) = 0$ [7].

В силу однозначности аналитического продолжения имеем в области $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ по предположению тождество

$$\left[\sum_{k=1}^N r_k e^{-i(k-1)z} + r_N^* e^{-iNz} D(z) \right] x \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\sum_{k=1}^N r_k^* e^{-i(k-1)x} + \tau^N e^{iNx} D^*(x^*) \right] \equiv \\ & \equiv \left[\sum_{k=1}^M r_k' e^{-i(k-1)x} + \tau^M e^{-iMx} D(x) \right] \times \\ & \times \left[\sum_{k=1}^M (r_k')^* e^{i(k-1)x} + \tau^M e^{iMx} D^*(x^*) \right]. \end{aligned}$$

Покажем сначала, что $N=M$. Без ограничения общности можем считать, что $N \leq M$. Пусть $N < M$. Умножим обе части тождества (4) на $e^{-iMx}/D^*(x^*)$. Положив

$x = -i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}^+$, перейдем к пределу в (4) на мнимой оси. Используя свойства элементарных функций, получим в левой части (4) ноль, справа же — ненулевое число $r_1' \tau^M$. Полученное противоречие показывает, что величина N по функции $F(x)$ определяется однозначно.

С учетом доказанного равенства $M=N$ соотношения (2) перепишем тождество (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} & D^*(x^*) \sum_{k=1}^N r_k^* e^{-i(k-1)x} + D(x) \sum_{k=1}^N r_k^* e^{-i(2N-k+1)x} + \\ & + \sum_{k=1}^{2N-1} \beta_k e^{-ikx} \equiv \\ & \equiv D^*(x^*) \sum_{k=1}^N r_k' e^{-i(k-1)x} + D(x) \sum_{k=1}^N (r_k')^* e^{-i(2N-k+1)x} + \\ & + \sum_{k=1}^{2N-1} \beta_k' e^{-ikx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Поделив обе части тождества (5) на $D^*(\alpha^*)$, перейдем, как и выше, к пределу при $\alpha = -i\eta$, $\eta \rightarrow +\infty$. В результате получим, что $r_1 = r_1'$. Следовательно, первое слагаемое в обеих частях (5) можно опустить, а остальные сократить на $e^{-i\alpha}$. Далее аналогичным образом получаем равенство $r_1 = r_1'$, затем $r_2 = r_2'$ и т.д. Таким образом, доказано, что по функции $F(\alpha)$ однозначно "восстанавливаются" N и числа $r_1, r_2, \dots, r_N$.

В силу доказанного система (3) имеет единственное решение. Однако при $\eta \rightarrow +\infty$ коэффициенты Фурье стремятся к нулю, поэтому матрица системы будет становиться плохо обусловленной. В этом случае для ее решения необходимо использовать метод регуляризации [8].

В работе [9] использовалось несколько другое представление функции $F(\alpha)$, а именно:

$$F(\alpha) = \left| \sum_{k=1}^N r_k e^{-i\alpha d_k} + r^N e^{-i\alpha L} D(\alpha) \right|^2, \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \theta.$$

Поскольку $F(\alpha)$ наблюдается в узкой области угла θ_0 , удовлетворяющего закону Вульфа-Брэгга [2]

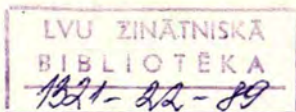
$$2d \sin \theta_0 = n\lambda, \quad n \in \mathbb{N},$$

то можем записать, что

$$e^{-i\alpha d} \approx e^{-i2\pi n \frac{\Delta d}{\lambda}} e^{-i\alpha},$$

где $\Delta = \frac{2\pi d}{\lambda \sin \theta_0} \cdot \sin 2\theta_0 \cdot \Delta \theta, \quad \Delta \theta = \theta - \theta_0.$

В результате формула (6) переходит в (1).



Как следует из доказанного ранее и работы [9], в обоих случаях в системе тонкий исследуемый слой - подложка искомые параметры находятся однозначно.

Литература.

1. Степанов А.А. Обратная краевая задача рентгеновской диагностики полупроводников // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.79-90.
2. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей. - М.: ИЛ, 1950. - 572 с.
3. Kyutt R.N., Petrashen P.V., Sorokin L.M. Strain profiles in ion-doped silicon obtained from X-ray rocking curves// Phys.Stat.sol.(a).- 1980.- Vol.60.- P.381-389.
4. Speriosu V.S., Glaes H.L., Kobayashi T. X-ray determination of strain and damage distributions in ion-implanted layers // Appl.Phys.Lett.- 1979.- Vol.34, N 9.- P.539-542.
5. Гончарский А.В., Колпаков А.В., Степанов А.А. Восстановление строения приповерхностных слоев монокристаллов по данным рентгеновской дифракции // Метрология. - 1986. - № II. - С.19-27.
6. Афанасьев А.М., Фанченко С.С. О восстановлении профилей нарушений тонких приповерхностных слоев по рентгенодифракционным данным // Доклады АН СССР. - 1986. - Т.287, № 6. - С.1395-1399.
7. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - М.: Наука, 1978. - 415 с.
8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979. - 288 с.
9. Гончарский А.В., Степанов А.А. Вычислительная диагностика полупроводниковых кристаллов // Доклады АН СССР. - 1987. - Т.292, № I. - С.60-63.

Поступила 3.09.88

УДК 517.927

Ф.Ж.Садырбаев
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЛЕРА

Рассматривается уравнение

$$y'' + p(x)|y|^{2\epsilon} y = 0, \quad \epsilon > 0, \quad (I)$$

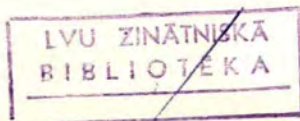
с непрерывной и положительной функцией $p(x)$. Все решения уравнения (I) удовлетворяют условию $yy'' < 0$ при $y \neq 0$ и, следовательно, их поведение носит осциллирующий характер.

Нетривиальное решение уравнения (I) принято называть правильным, если это решение определено в некоторой окрестности $+\infty$, и сингулярным, если его нельзя продолжить правее некоторой конечной точки ([I]).

Известно ([I]), что если не налагать на функцию $p(x)$ никаких других ограничений, кроме непрерывности и положительности, возможно существование сингулярных решений уравнения (I). В связи с этим возникает вопрос ([I]) об условиях, обеспечивающих существование хотя бы одного правильного решения уравнения (I).

В данной статье такие условия приводятся в терминах решений Нехари.

Если символом $G_n(\alpha, \beta)$ обозначить множество решений уравнения (I), обращающихся в нуль на концах интервала (α, β) и ровно в $n-1$ точке внутри интервала, то под решением Нехари U_n (для данного натурального n и конеч-



ного интервала (α, β) понимается элемент множества $G_n(\alpha, \beta)$, минимизирующий функционал $H(y) = \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} y^2 dx$ за-
данный на том же множестве. Отметим, что множество $G_n(\alpha, \beta)$ всегда непусто.

Минимальное значение функционала H называется характеристическим числом и обозначается символом $\lambda_n(\alpha, \beta)$. Понятие характеристического числа было введено в работах [2], [3], где было показано, что для любых $n, [\alpha, \beta]$ решение Нехари существует и приводился ряд свойств таких решений.

Следующее утверждение обобщает теорему 6 из [2] и приводится без доказательства.

Предложение I. Если $p_1(x) \leq p_2(x)$, $\lambda_n^1(\alpha, \beta)$, $\lambda_n^2(\alpha, \beta)$ соответствующие характеристические числа для уравнений

$$y'' + p_1(x)|y|^{2\epsilon} y = 0,$$

$$y'' + p_2(x)|y|^{2\epsilon} y = 0,$$

то $\lambda_n^1(\alpha, \beta) \geq \lambda_n^2(\alpha, \beta)$.

Непосредственным вычислением устанавливается справедливость следующего утверждения.

Предложение 2. Характеристические числа, соответствующие уравнению (I) с $p = \text{const}$, вычисляются по формуле:

$$\lambda_n(\alpha, \beta) = p^{-\frac{1}{\epsilon}} A[(\beta - \alpha)^{-1 - \frac{1}{1+\epsilon}} n^2]^{1 + \frac{1}{\epsilon}}$$

$$A = \varepsilon(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\epsilon}} (2+\varepsilon)^{-1} (4\gamma^2)^{1 + \frac{1}{\epsilon}}, \quad (2)$$

$$\gamma = \int_0^1 (1 - s^{2\epsilon+2})^{-\frac{1}{2}} ds.$$

Отметим, что формула (2) несколько отличается от приведенной в [2], с.154, где допущена вычислительная ошибка.

Следующее утверждение является центральным.

Предложение 3. Осциллирующее решение Нехари, т.е. решение (I), имеющее бесконечное число нулей t_n , и на каждом интервале (t_0, t_n) являющееся решением Нехари, является правильным.

Доказательство. Пусть x - осциллирующее решение Нехари, определенное на интервале (α, β) . Предположим, что это решение является сингулярным. Тогда β - конечно и $\lim (x^2 + x'^2) = \infty$ при $t \rightarrow \beta$. Пусть ρ_0, ρ_1 - соответственно минимальное и максимальное значения функции $\rho(t)$ на интервале $[\alpha, \beta]$. Тогда, согласно предложению I, на каждом интервале $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ выполняется

$$\lambda_n^1(\alpha', \beta') \leq \lambda_n(\alpha', \beta') \leq \lambda_n^0(\alpha', \beta'),$$

где λ_n^0, λ_n^1 - характеристические числа, соответствующие уравнению (I) с коэффициентами ρ_0, ρ_1 .

Пусть b_k - последовательные нули решения x , $k=1, 2, \dots$. Используя представление (2), получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_{2n}(\alpha, b_{2n}) \lambda_{2n}(\alpha, b_{2n})^{-1} = \\ &= [\lambda_n(\alpha, b_n) + \lambda_n(b_n, b_{2n})] \lambda_{2n}(\alpha, b_{2n})^{-1} \geq \\ &\geq [\lambda_n^1(\alpha, b_n) + \lambda_n^1(b_n, b_{2n})] \lambda_{2n}^0(\alpha, b_{2n})^{-1} = \\ &= C_1 n^{2(1+\frac{1}{6})} [(b_n - \alpha)^{-(1+\frac{1}{6})} + (b_{2n} - b_n)^{-(1+\frac{2}{6})}] \times \\ &\times [C_2 (2n)^{2(1+\frac{1}{6})} (b_{2n} - \alpha)^{-(1+\frac{2}{6})}]^{-1} = \\ &= C_3 \left[\left(\frac{b_{2n} - \alpha}{b_n - \alpha} \right)^{1+\frac{2}{6}} + \left(\frac{b_{2n} - \alpha}{b_{2n} - b_n} \right)^{1+\frac{2}{6}} \right]. \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 - не зависящие от n постоянные. Поскольку второе слагаемое неограниченно возрастает с увеличением n , получено противоречие.

Предложение 4. Пусть $\{y_n(\alpha, b_n)\}$ - последовательность решений Нехари, $b_n < B < \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Тогда $t_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого фиксированного k , где t_k - k -ый нуль решения Нехари.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $\delta > 0$ такое, что $t_k(y_n) > \delta \quad \forall n$. Так как $\lambda_n(\alpha, b_n) = \lambda_k(\alpha, t_k) + \lambda_{n-k}(t_k, b_n)$, получаем

$$1 = \frac{\lambda_n(\alpha, b_n)}{\lambda_n(\alpha, b_n)} = \frac{\lambda_k(\alpha, t_k)}{\lambda_n(\alpha, b_n)} + \frac{\lambda_{n-k}(t_k, b_n)}{\lambda_n(\alpha, b_n)} \geq \\ \geq \frac{\lambda_k(\alpha, B)}{\lambda_n(\alpha, b_n)} + \frac{\lambda_{n-k}(\delta, b_n)}{\lambda_n(\alpha, b_n)} = S_1 + S_2.$$

Здесь было использовано свойство монотонности характеристических чисел в зависимости от интервала (лемма 3.1 из [3] и замечание на с.153). Так как $\lambda_n(\alpha, b_n) \geq \lambda_n(\alpha, B)$, а $\lambda_n(\alpha, B) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то $S_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Оценим S_2 . Согласно теореме 5.1 из [3],

$$\lambda_n(\alpha, b) = \lambda n^{2(1+\frac{1}{6})} [1 + O(n^{-2})],$$

где $\lambda = c(\delta) \left[\int_a^b p(x)^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} dx \right]^{-1-\frac{1}{6}}$

$$\text{Тогда} \quad S_2 = \left[\frac{\int_a^{b_n} p(x)^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} dx}{\int_a^B p(x)^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} dx} \right]^{1+\frac{1}{6}} \left(\frac{n-k}{n} \right)^{2(1+\frac{1}{6})} \frac{1+O((n-k)^{-2})}{1+O(n^{-2})}.$$

Не ограничивая общности, можно считать число B точной верхней гранью чисел b_n . Первый множитель для бес-

конечного числа номеров превышает единицу на некоторое $\Delta(\delta)$, а остальные сомножители стремятся к единице.

Получено противоречие.

Следствие. Пусть $\{y_n(a, b_n)\}$ - последовательность решений Нехари с $0 < y'_n(a) < \text{const.}$

Тогда $b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть существует $B > 0$, ограничивающее сверху бесконечно много чисел из последовательности $\{b_n\}$. По доказанному ранее, первые нули соответствующих решений Нехари неограниченно приближаются к $t = a$ при возрастании n . Но это возможно в силу свойств уравнения (I) только при неограниченном возрастании начальных значений производной.

Предложение 5. Пусть $\{y_n(a, b_n)\}$ - последовательность решений Нехари с $0 < \alpha < y'_n(a) < \beta < \infty$ равномерно по n .

Такая последовательность сходится к правильному решению уравнения (I).

Доказательство. Поскольку $y'_n(a) < \beta$, числа $b_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем равномерную ограниченность последовательности решений $\{y_n\}$ на каждом интервале (a, b_n) . Здесь b_n фиксировано и для удобства обозначено B .

Каждое решение y_n имеет на интервале (a, B) лишь конечное число нулей, не превышающее некоторое натуральное N , зависящее лишь от B . Если это не так, то первый нуль с увеличением n неограниченно приближается к $t = a$, и, следовательно, возникает противоречие с ограниченностью первой производной в начальной точке.

Тогда для всех y из рассматриваемой последовательности величина $\mathcal{E}(1+\delta) \int_a^B y'^2 dx$ ограничена числом $\lambda_{N+1}(a, B)$ или

$$y^2(t) = \left(\int_a^t y' dt \right)^2 \leq (t-a) \int_a^B y'^2 dt \leq (B-a)(1+\delta) \mathcal{E}^{-1} \lambda_{N+1}(a, B).$$

Таким образом, рассматриваемая последовательность решений компактна в C^1 на каждом интервале (α, β_n) и, следовательно, содержит сходящуюся к некоторому решению уравнения (I) подпоследовательность. Функция $\mathfrak{A}$ не может быть тождественным нулем, т.к. начальные значения производных функций из аппроксимирующей последовательности отделены от нуля числом $\mathfrak{A} > 0$.

Доказательство завершено.

Введем в рассмотрение функцию δ_n , определенную на $(0, +\infty)$ следующим образом:

$$\delta_n(\alpha) = \sup \{ \beta : \exists y_n(\alpha, \beta) - \text{решение Нехари, } y'_n(\alpha) \geq \alpha \}.$$

Условия существования правильного решения уравнения (I) будут сформулированы в терминах функции δ_n . Однако сначала установим некоторые ее свойства.

Доказательство следующего факта может быть проведено путем построения аппроксимирующей последовательности.

Предложение 6. Пусть для некоторого натурального k k - е нули решений Нехари $y_n(\alpha, \beta)$, $n > k$, равномерно ограничены при неограниченном увеличении числа β .

Тогда уравнение (I) имеет правильное неосциллирующее решение.

Предложение 7. Пусть уравнение (I) не имеет неосциллирующих решений.

Тогда функция $\delta_n(\alpha)$ конечна для любого n .

Доказательство. Пусть $\delta_n(\alpha_0) = +\infty$. Тогда существует последовательность решений Нехари $y_k(\alpha, \beta_k)$ с $\beta_k \rightarrow \infty$ и $y'_k(0) \geq \alpha_0$. Первые нули этих решений не могут быть ограничены сверху, но тогда $y'_k(\alpha)$ должно принимать сколь угодно малые значения. Получено противоречие.

В дальнейшем предполагается, что уравнение (I) не имеет неосциллирующих решений.

Предложение 8. Для каждого n функция $\delta_n(\alpha)$ является невозрастающей, причем $\delta_n(\alpha) \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$,

$\delta_n(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Доказательство. Невозрастание следует из того, что *supremum* при больших α берется по меньшему множеству. Асимптотика при больших и малых α вытекает из того, что $t_n(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$, $t_n(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow 0$, где t_n - n -ый нуль решения уравнения (I) с начальной производной, равной α .

Предложение 9. Пусть существуют числа $0 < \alpha < \beta < +\infty$ и номера $n_k \rightarrow \infty$ такие, что $\delta_{n_k}(\alpha) > \delta_{n_k}(\beta) \forall n_k$.

Тогда существует правильное решение уравнения (I).

Доказательство. Зафиксируем n_k . Все решения Нехари $y_{n_k}(\alpha, \beta)$ при $\beta \in (\delta_{n_k}(\beta), \delta_{n_k}(\alpha))$ имеют начальные значения производной, меньшие β , но среди них существует решение с $y'_{n_k}(\alpha) \geq \alpha$. Меняя n_k , получаем последовательность решений Нехари $\{y_{n_k}\}$, определенных соответственно, на интервалах (α, β_{n_k}) , где $\beta_{n_k} \in [\delta_{n_k}(\beta), \delta_{n_k}(\alpha)]$ и все имеющие начальное значение производной из интервала $[\alpha, \beta]$.

Требуемое утверждение вытекает из предложения 5.

Литература

1. Kiguradze I.T. On the oscillatory and monotone solutions of ordinary differential equations // Arch.Math.-1978.- Vol.14, N 3. - P.370-385.
2. Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations // Trans.Amer.Math.Soc.- 1960.-V.95. - 0.101-123.
3. Nehari Z. Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations // Acta Math. - 1961.- V.105, N 3-4. - P.141-175.

Поступила 5.09.88

Межвузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.26-36

УДК 517.911

Б.В.Задворный
БГУ им.В.И.Ленина

ПСЕВДОЭКВИВАЛЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫДНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1⁰ Введение. Прежде всего укажем, откуда возникла необходимость введения того типа решений, который стоит в названии статьи. В работах [1-3] автор рассматривает зависимость от фазовых начальных данных правого максимального промежутка существования задачи Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

$$x|_{t=s} = \xi, \quad s - \text{фиксировано}, \quad (2)$$

$t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (G - область),

$$f: G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \xi \in G_s = \{(t, x) | (s, x) \in G\},$$

который обозначается $[s, \beta[$, причем β является, вообще говоря, функцией вектора ξ , то есть $\beta = \beta(\xi)$. Непрерывность такой функции $\beta(\xi)$ в точке ξ_0 гарантирует, что время продолжения моделируемых процессов приблизительно одинаково со временем продолжения исходного (идеального) процесса, если начальные параметры их (вектора ξ и ξ_0) достаточно близки друг к другу. Этого, однако, недостаточно для того, чтобы можно было характеризовать поведение таких решений по поведению идеального вблизи любой точки, то есть вблизи правого конца максимального

промежутка существования (ср. [4, гл. XIII]). Понятно, что интегральные кривые всех таких решений могут расходиться при $t \rightarrow \beta(\xi)$, но могут находиться и в достаточной близости друг от друга. Для характеристики такого взаимного расположения интегральных кривых в [3] и [5] введено понятие обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных (или более кратко - условие (A)). Именно: обозначим решение задачи (I)-(2) через $x(t; \xi)$, интегральную кривую такого решения при $\xi = \xi_0$ через γ_0 , то есть $\gamma_0 = \{(t, x(t; \xi_0)) | t \in [s, \beta_0[\}$, $\beta_0 = \beta(\xi_0)$, $|A, B|$ - расстояние между точками A и B в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $d(D, E) = \inf_{\substack{A \in D, \\ B \in E}} |A, B|$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$, тогда:

Определение I. Решения задачи (I)-(2) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных (удовлетворяют условию (A)) при $\xi = \xi_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall \xi, \|\xi - \xi_0\| \leq \delta(\varepsilon), \quad \forall t \in [s, \beta(\xi)[\\ \Rightarrow d((t, x(t; \xi)), \gamma_0) < \varepsilon.$$

Для исследования такой непрерывной зависимости решений уравнения (I) (в случае $G = [s, +\infty[\times \mathbb{R}^n$) в [5] применен прямой метод Ляпунова, основанный на теореме:

Теорема I. Если существует функция $V(t, x)$, определенная и непрерывная на некотором множестве

$$G_r = \{(t, x) | t \geq t_1, d((t, x), \gamma_0) \leq r\}, \quad r > 0, \quad s \leq t_1 < \beta_0,$$

удовлетворяющая условиям:

$$(a) \quad V(t, x(t; \xi_0)) \equiv 0 \quad t \in [s, \beta(\xi_0)[,$$

$$\text{но } V(t, x) > 0, \quad \text{если } (t, x) \in G_r \setminus \gamma_0;$$

(б) если последовательность точек $\{(t^k, x^k)\} \subset G_r$, и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d((t^k, x^k), \gamma_0) > 0, \quad \text{то } \lim_{k \rightarrow \infty} V(t^k, x^k) > 0;$$

(в) функция $V(t, x(t; \xi))$ не возрастает на любом промежутке изменения t , на котором $(t, x(t; \xi)) \in Gr$, тогда решения задачи (1)-(2) удовлетворяют условию (A) при $\xi = \xi_0$.

В определенном смысле верна и обратная теорема:

Теорема 2. Пусть решения задачи (1)-(2) обобщенно непрерывно зависят от начальных данных при $\xi = \xi_0$, и все решения, интегральные кривые которых пересекают некоторую G -трубку G_ε интегральной кривой решения $x(t; \xi_0)$ при $t > t_1$, $s \leq t_1 < \beta_0$, продолжимы влево до t_1 ; тогда существует функция $V(t, x)$, определенная в G_ε , удовлетворяющая условиям теоремы I.

Именно при обращении теоремы I возникает затруднение, вызываемое ситуацией, описываемой ниже. (Заметим, что предположения теоремы 2 исключают возможность возникновения такой ситуации). Прежде чем перейти к основным определениям и примеру, условимся еще, что всюду в этой статье $G = [s, +\infty[\times \mathbb{R}^n$, f - непрерывна, и, если не указано противное, через каждую точку $(t, y) \in G$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (I), которую обозначим $\gamma(t, y)$; решение, соответствующее этой кривой, будем обозначать $x(t; t, y)$.

2°. Определения и пример.

Определение 2. Конечную точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ назовем точкой слипания для решений $x(t; \bar{t}, \bar{x})$ и $x(t; \underline{t}, \underline{x})$, если существуют последовательности начальных значений $(\bar{x}^k)$ и $(\underline{x}^k)$, $\bar{x}^k \rightarrow \bar{x}$, $\underline{x}^k \rightarrow \underline{x}$ при $k \rightarrow \infty$ и последовательности $(\bar{t}^k)$, $(\underline{t}^k)$, $\bar{t}^k \rightarrow t_0$ и $\underline{t}^k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что

$$x(\bar{t}^k; \bar{t}, \bar{x}^k) \rightarrow x_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$$\text{и} \quad x(\underline{t}^k; \underline{t}, \underline{x}^k) \rightarrow x_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

В этом случае будем говорить также, что решения $x(t; \bar{t}, \bar{x})$ и $x(t; \underline{t}, \underline{x})$ имеют общую точку слипания (t_0, x_0) .

Возможность такой ситуации для несовпадающих решений показывает следующий пример.

Пример. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2).$$

с начальными условиями $x_1|_{t=0} = \xi_1, x_2|_{t=0} = \xi_2$, где

$$f_1(t, x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 4, \\ \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{x_2 \cdot \pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{t-4}{2} \cdot \pi\right), & 4 < t < 6, \\ 0, & 6 \leq t, \end{cases}$$

$$f_2(t, x_1, x_2) = \begin{cases} (t-2) \cdot x_2^2, & 0 \leq t \leq 2, \\ 0, & 2 < t < 6, \\ (t-6) \cdot x_2^2, & 6 \leq t. \end{cases}$$

Функции f_1 и f_2 определены при $t \geq 0$, непрерывны и удовлетворяют локально условию Липшица по x . Рассмотрим далее решения, отвечающие следующим последовательностям начальных данных:

$$(I) \quad \xi^{4k-3} = (\xi_1^{4k-3}, \xi_2^{4k-3}) = \left(-1, \frac{4k-3}{1-2(4k-3)}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{причем} \quad \xi^{4k-3} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty;$$

$$(2) \quad \xi^{2k} = (\xi_1^{2k}, \xi_2^{2k}) = \left(0, \frac{2k}{1-4k}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{причем} \quad \xi^{2k} \rightarrow \left(0, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty;$$

$$(3) \quad \xi^{4k-1} = (\xi_1^{4k-1}, \xi_2^{4k-1}) = \left(1, \frac{4k-1}{1-2(4k-1)}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{причем} \quad \xi^{4k-1} \rightarrow \left(1, -\frac{1}{2}\right) \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Решения начальных задач с такими условиями легко находятся в явном виде, откуда для $t_0 = 0$ и $k = 1, 2, \dots$ сразу получаем:

$$(1) \quad x_1(10; 0, \xi^{4k-3}) = 0,$$

$$x_2(10; 0, \xi^{4k-3}) = \left(\frac{1}{4k-3} - 2\right)^{-1} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{при } k \rightarrow \infty;$$

$$(2) \quad x_1(10; 0, \xi^{2k}) = 0,$$

$$x_2(10; 0, \xi^{2k}) = \left(\frac{1}{2k} - 2\right)^{-1} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{при } k \rightarrow \infty;$$

$$(3) \quad x_1(10; 0, \xi^{4k-1}) = 0,$$

$$x_2(10; 0, \xi^{4k-1}) = \left(\frac{1}{4k-1} - 2\right)^{-1} \rightarrow -\frac{1}{2} \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для трех различных решений $x(t; 0, (-1, -\frac{1}{2}))$, $x(t; 0, (0, -\frac{1}{2}))$, $x(t; 0, (1, -\frac{1}{2}))$ (а также и для решения $x(t; 10, (0, -\frac{1}{2}))$) существует общая точка слипания $(10, (0, -\frac{1}{2}))$.

Введем далее в рассмотрение наименьшее отношение эквивалентности на множестве решений дифференциального уравнения (I), содержащего отношение наличия общей точки слипания. Будем обозначать такое отношение эквивалентности символом $\sim$.

Определение 3. Назовем два решения $x(t; \bar{t}, \bar{x})$ и $x(t; \underline{t}, \underline{x})$ псевдоэквивалентными, если между ними можно установить отношение $\sim$, то есть

$$x(t; \bar{t}, \bar{x}) \sim x(t; \underline{t}, \underline{x}).$$

Замечание. Отметим, что в случае наличия точки слипания в любой сколь угодно малой ξ -трубке интегральной кривой решения $x(t; \xi_0)$ ($\xi_0 > 0$) способ построения функции $V(t, x)$, примененный в [5] для доказательства теоремы 2, привел бы, вообще говоря, к неоднозначности определения этой функции в таких точках.

Обозначим $T(\bar{t}, \bar{x}) = \{(\underline{t}, \underline{x}) \mid x(t; \underline{t}, \underline{x}) \sim x(t; \bar{t}, \bar{x})\}$ — множество начальных условий, соответствующих классу решений, псевдоэквивалентных решению $x(t; \bar{t}, \bar{x})$. Аналогично

- 31 -

$S(\xi_0) = \{ \xi \mid x(t; \xi) \sim x(t; \xi_0) \}$ - множество начальных значений, соответствующих классу решений, псевдоожили-
 лентных решению $x(t; \xi_0)$, и продолжимых влево до S .

3° Основные теоремы.

Теорема 3. Выберем для некоторого $\xi \in S(\xi_0)$ после-
 довательности (ξ^k) и (t_k) , $\xi^k \rightarrow \xi$, $t_k \rightarrow t$ при $k \rightarrow \infty$,
 такие, что

$$x(t_k; \xi^k) = x^k \rightarrow x \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

$(t, x) \in [S, +\infty[\times \mathbb{R}^n$. Тогда либо:

1) промежуток существования решения $x(t; t, x)$ име-
 ет общие точки с $[S, \beta(\xi)]$, и тогда $x(t; t, x) \equiv$
 $\equiv x(t, \xi)$, то есть $(t, x) \in \gamma(S, \xi)$; либо:

2) $x(t; \xi) \sim x(t; t, x)$, и тогда для любой
 последовательности $(\bar{t}_k, \bar{x}^k)$, $(\bar{t}_k, \bar{x}^k) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x})$ при $k \rightarrow \infty$,
 $(\bar{t}, \bar{x}) \in \gamma(t, x)$, такой, что все решения $x(t; \bar{t}_k, \bar{x}^k)$
 продолжимы влево до S , предельные точки последователь-
 ности $\bar{\xi}^k = x(S, \bar{t}_k, \bar{x}^k)$ принадлежат $S(\xi_0)$, причем:

2а) точки интегральной кривой $\gamma(t, x)$ сами являют-
 ся точками слипания, общими для решений, выходящих из
 этих предельных точек и решения $x(t; \xi)$.

Доказательство. В случае 1) решение $x(t; t, x)$ про-
 должимо до некоторой точки $\tilde{t} \in [S, \beta(\xi)[$, поэтому в
 силу непрерывной зависимости решений уравнения (I) от на-
 чальных данных [6, с.80] в точках (S, ξ) и (t, x) при
 достаточно больших k все решения $x(t; \xi^k) \equiv x(t; t_k, x^k)$
 определены на $[S, \tilde{t}]$ и $[\tilde{t}, t]$ (или $[t, \tilde{t}]$, если $t < \tilde{t}$),
 где они равномерно по t стремятся к $x(t; \xi)$ и $x(t; t, x)$
 соответственно при $k \rightarrow \infty$, то есть $x(\tilde{t}; \xi) = x(\tilde{t}; t, x)$,
 и в силу единственности $x(t; \xi) \equiv x(t; t, x)$.

2) - очевидно, так как в силу единственности решения
 $x(t; t, x)$ последовательности решений $x(t; \xi^k) \equiv$
 $\equiv x(t; t_k, x^k)$ и $x(t; \xi^k) \equiv x(t; \bar{t}_k, \bar{x}^k)$ равномерно
 стремятся к этому решению на любом компактном подмножестве
 его интервала существования, откуда следует:

$$x(t; \bar{\xi}) \sim x(t; \underline{t}, \underline{x}) = x(t; \bar{t}, \bar{x}) \sim x(t; \bar{\xi}),$$

где $\bar{\xi}$ - произвольная предельная точка последовательности $(\bar{\xi}^k)$. Взяв же любую точку $(t_0, x_0) \in \mathcal{Y}(\underline{t}, \underline{x})$, замечаем, что $x(t_0; \bar{\xi}^k) = x(t_0; \bar{t}_k, \bar{x}^k) \rightarrow x_0$ и $x(t_0; \bar{\xi}^k) = x(t_0; \underline{t}_k, \underline{x}^k) \rightarrow x_0$ при $k \rightarrow \infty$ (ввиду равномерной сходимости), то есть получаем 2а). Теорема доказана.

Следствие I. Пусть $\bar{y}$ - интегральная кривая решения уравнения (I), и для начальных значений $\bar{\xi}$ и $\underline{\xi}$ существуют последовательности $(\bar{\xi}^k) \rightarrow \bar{\xi}$, $(\underline{\xi}^k) \rightarrow \underline{\xi}$, $(\bar{t}_k) \rightarrow \bar{t}$, $(\underline{t}_k) \rightarrow \underline{t}$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что

$$(\bar{t}_k, x(\bar{t}_k; \bar{\xi}^k)) \rightarrow (\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{y}, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$(\underline{t}_k, x(\underline{t}_k; \underline{\xi}^k)) \rightarrow (\underline{t}, \underline{x}) \in \bar{y}, \quad k \rightarrow \infty,$$

тогда $x(t; \bar{\xi}) \sim x(t; \underline{\xi})$, то есть $\{\bar{\xi}, \underline{\xi}\} \subset S(\bar{\xi}) = S(\underline{\xi})$.

Следствие 2. Если $x(t; \bar{\xi}) \sim x(t; \underline{\xi})$, $\bar{\xi} \neq \underline{\xi}$ и (t_0, x_0) - общая точка слипания этих решений, то решение $x(t; t_0, x_0)$ непродолжимо влево до $\bar{\rho} = \max \{ \rho(\bar{\xi}), \rho(\underline{\xi}) \}$.

Следующее утверждение легко получить, используя теорему 3. Мы, однако, докажем его непосредственно, но в более общем виде, а именно: будем требовать единственности только в точках интегральной кривой $\mathcal{Y}_0$. Заметим, что в этом случае остается справедливой лемма I из [2].

Теорема 4. Пусть каждая точка интегральной кривой решения $x(t; \xi_0)$ является точкой единственности уравнения (I), и для решения $x(t; \xi_0)$ существует неравное ему псевдоэквивалентное решение. Тогда для этих решений существует точка слипания $(t_0, x_0) \notin \mathcal{Y}_0$. Кроме того, для любой точки слипания выполняется $t_0 \neq \beta_0$, где $\beta_0 = \beta(\xi_0)$.

Доказательство. Последнее утверждение доказывается с помощью леммы I из [2]. Действительно, пусть существуют последовательности $(\bar{\xi}^k)$ и $(\bar{t}_k)$, $\bar{\xi}^k \rightarrow \bar{\xi}_0$, $\bar{t}_k \rightarrow \beta_0$ при $k \rightarrow \infty$ и соответствующая им последовательность решений $x(t; \bar{\xi}^k)$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k; \xi^k) = x_0, \quad \|x_0\| = M < \infty.$$

В силу указанной леммы каждое решение $x(t; \xi^k)$ либо определено на интервале $[s, \beta(\xi^k)[$, $\beta(\xi^k) \leq \beta_0$, и тогда: существуют t_k^1 и t_k^2 , $t_k < t_k^1 < t_k^2 < \beta_0$ такие, что

$$\left. \begin{aligned} & \|x(t_k^1; \xi^k)\| = 2 \cdot M, \quad \|x(t_k^2; \xi^k)\| = 3 \cdot M, \\ & \text{и } 2 \cdot M < \|x(t; \xi^k)\| < 3 \cdot M \quad \forall t \in]t_k^1, t_k^2[, \end{aligned} \right\} (*)$$

либо продолжимо на весь промежуток $[s, \beta_0]$, причем при всех достаточно больших k : $\|x(\beta_0; \xi^k)\| > 3 \cdot M$, и тогда вновь имеют место утверждения (*). Используя теперь теорему о модуле конечного приращения для векторных функций [7, с.81], получаем:

$$\begin{aligned} M &= \|x(t_k^2; \xi^k)\| - \|x(t_k^1; \xi^k)\| \leq \|x(t_k^2; \xi^k) - x(t_k^1; \xi^k)\| = \\ &= \|\dot{x}(t_k^2; \xi^k)\| \cdot |t_k^2 - t_k^1| \leq \sup_{\substack{2 \cdot M \leq \|x\| \leq 3 \cdot M \\ t_k^1 \leq t \leq \beta_0}} \|f(t, x)\| \cdot |t_k^2 - t_k^1|, \end{aligned}$$

$$t_k^2 \in [t_k^1, t_k^2], \quad \text{то есть } \sup_{\substack{2 \cdot M \leq \|x\| \leq 3 \cdot M \\ t_k^1 \leq t \leq \beta_0}} \|f(t, x)\| \geq \frac{M}{|t_k^2 - t_k^1|},$$

откуда следует неограниченность функции f на компакте, что противоречит ее непрерывности.

Выберем теперь псевдоэквивалентное решение $x(t; \bar{t}, \bar{x}) \sim x(t; \xi_0)$, $(\bar{t}, \bar{x}) \notin \mathcal{X}_0$, для которого существует точка слипания $(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$, общая с решением $x(t; \xi_0)$. Если $\bar{t}_0 > \beta_0$, то достаточно взять $(t_0, x_0) = (\bar{t}_0, \bar{x}_0)$. Пусть $\bar{t}_0 < \beta_0$. Тогда в силу единственности $(\bar{t}_0, \bar{x}_0) \in \mathcal{X}_0$ (см. определение 2), и, кроме того, существуют последовательности $(\bar{x}^k)$ и $(\bar{t}_k)$, $\bar{x}^k \rightarrow \bar{x}$, $\bar{t}_k \rightarrow \bar{t}_0$ при $k \rightarrow \infty$ такие, что

$$x(\bar{t}_k; \bar{t}, \bar{x}) \rightarrow x_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Ввиду единственности решения $x(t; \bar{t}_0, \bar{x}_0) \equiv x(t; \xi_0)$ (и, следовательно, непрерывности решений $x(t; \tau, y)$ по начальным данным в точке $(\bar{t}_0, \bar{x}_0)$, см. [6, с.83]), начиная с некоторого номера k_0 , последовательность реше-

ний

$$x(t; \bar{t}_k, x(\bar{t}_k; \bar{t}, \bar{x}^k)) = x(t; \bar{t}, \bar{x}^k)$$

определена на $[s, \frac{\bar{t}_0 + \beta_0}{2}]$, где она равномерно по t стремится к решению $x(t; \bar{t}_0, \bar{x}_0) = x(t; \xi_0)$, поэтому найдется последовательность значений $\xi^k = x(s; \bar{t}, \bar{x}^k)$, сходящаяся к ξ_0 , такая, что

$$x(\bar{t}; \xi^k) = x(\bar{t}; \bar{t}, \bar{x}^k) = \bar{x}^k \rightarrow \bar{x} \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

то есть $(\bar{t}, \bar{x})$ сама является точкой слипания для решений $x(t; \xi_0)$ и $x(t; \bar{t}, \bar{x})$, и $\bar{t} > \beta_0$. Осталось положить $(t_0, x_0) = (\bar{t}, \bar{x})$.

Теорема доказана.

Из последней теоремы следует утверждение, для выполнения которого также достаточно единственности только в точках интегральной кривой γ_0 .

Теорема 5. Если функция β непрерывна в точке ξ_0 , то $S(\xi_0) = \{\xi_0\}$.

Действительно, в противном случае нашлись бы точка слипания (t_0, x_0) , $t_0 > \beta_0$, и последовательность (ξ^k) , $\xi^k \rightarrow \xi_0$ при $k \rightarrow \infty$, для которой $\beta(\xi^k) \geq t_0 > \beta_0$.

4°. Применение к исследованию условия (A). Укажем еще две теоремы о существовании функций Ляпунова в случае выполнения условия (A), исходя из новых предположений о поведении решений уравнения (I).

Теорема 6. Если решения задачи (I)-(2) удовлетворяют условию (A) при $\xi = \xi_0$, и для любого ξ из некоторой окрестности точки ξ_0 выполняется $S(\xi) = \{\xi\}$, то существуют $\varepsilon > 0$ и функция $V(t, x)$, определенная в ε -трубке интегральной кривой γ_0 , удовлетворяющая условиям теоремы I.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 (см. [5]), только функция $V(t, x)$ здесь определяется следующим образом. Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что для любого ξ , $\|\xi - \xi_0\| \leq \delta$ выполняется $S(\xi) = \{\xi\}$. Тогда в точках $(t, x) = (t, x(t; \xi))$, $\|\xi - \xi_0\| \leq \delta$ положим:

$$V(t, x) = \|\xi - \xi_0\|^2,$$

во всех остальных точках $(t, x) \in G_\delta$, $G_\delta = \{B = (t, x) | t \geq s, d(B, \gamma_0) \leq \delta\}$ ($\delta > 0$ - достаточно мало):

$$V(t, x) = \delta^2.$$

Л е м м а. Пусть решения задачи (I)-(2) удовлетворяют условию (A) при $\xi = \xi_0$, и существуют точки t_1, t_2 , $s \leq t_1 < \beta_0 < t_2$, такие, что все решения, интегральные кривые которых пересекают некоторую δ -трубку G_δ интегральной кривой γ_0 при $t \geq t_1$, продолжимы по крайней мере до t_1 влево или до t_2 вправо; тогда существует окрестность точки ξ_0 такая, что для любого ξ из этой окрестности выполняется: $S(\xi) = \{\xi\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $\delta > 0$, $\delta < \min\{\beta_0 - t_1, t_2 - \beta_0\}$, и $\delta > 0$ такое, что

$$\forall \xi, \|\xi - \xi_0\| \leq \delta, \forall t \in [s, \beta(\xi)] \Rightarrow d((t, x(t; \xi)), \gamma_0) \leq \delta.$$

Тогда для таких ξ : $\beta(\xi) \in [\beta_0 - \delta, \beta_0 + \delta]$. Покажем, что для $\delta_0 = \delta/2$ и любого ξ , $\|\xi - \xi_0\| \leq \delta_0$ выполняется утверждение леммы. Допустим противное: существует $\bar{\xi}$, $\|\bar{\xi} - \xi_0\| \leq \delta_0$, для которого $S(\bar{\xi}) \neq \{\bar{\xi}\}$, то есть существует точка слипания $(t_0, x_0) \notin \gamma(s, \bar{\xi})$ (теорема 4). При этом решение $x(t; t_0, x_0)$ в силу единственности и следствия 2 непродолжимо влево до $\beta(\bar{\xi})$ и тем более до t_1 , поэтому оно продолжимо вправо до t_2 . Тогда найдутся последовательности $(\bar{\xi}^k), (\bar{t}^k), \bar{\xi}^k \rightarrow \bar{\xi}$ и $\bar{t}^k \rightarrow t_0$ при $k \rightarrow \infty$, для которых

$$x(\bar{t}^k; \bar{\xi}^k) \rightarrow x_0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Ввиду непрерывной зависимости решений от начальных данных при всех достаточно больших k решения $x(t; \bar{t}^k, x(\bar{t}^k; \bar{\xi}^k)) \equiv x(t; \bar{\xi}^k)$ продолжимы влево до t_2 , но, начиная с некоторого номера k_0 , становится выполненным неравенство $\|\bar{\xi}^k - \xi_0\| \leq \delta$, и поэтому $\beta(\bar{\xi}^k) \leq \beta_0 + \delta < t_2$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Из теоремы 6 и леммы сразу следует

Т е о р е м а 7. Если решения задачи (I)-(2) удовлетворяют условию (A) при $\xi = \xi_0$ и существуют точки t_1, t_2 , $s \leq t_1 < \beta_0 < t_2$ такие, что все решения, интегральные кривые которых пересекают некоторую ε -трубку G_ε интегральной кривой γ_0 при $t \geq t_1$ продолжимы по крайней мере до t_1 влево или до t_2 вправо, то существует функция $V(t, x)$, определенная в множестве G_ε , удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Литература

1. Задворный Б.В. Зависимость промежутка существования решения дифференциального уравнения от начальных данных // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, № 2. - С. 351-353.
2. Задворный Б.В. Применение функций Ляпунова к исследованию промежутка существования решения // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т. 24, № 3. - С. 522-523.
3. Задворный Б.В. Исследование промежутка существования решения дифференциального уравнения, определенного на ограниченной области. - М., 1987. Деп. в ВИНТИ 19.11.87, № 8175 - В87.
4. Бругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск, 1979.
5. Задворный Б.В. Метод функций Ляпунова и обобщенная непрерывная зависимость решений от начальных данных. - М., 1987. Деп. в ВИНТИ 6.08.87, № 5721 - В87.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М., 1984.
7. Зорич В.А. Математический анализ. - Ч. 2. - М., 1984.

Поступила 7.09.88

УДК 517.925.46

Л.А.Лепин

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О КОЛИЧЕСТВЕ НУЛЕЙ У РЕШЕНИЙ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В данной работе исследуется вопрос о количестве ну-
лей у решений линейного уравнения

$$x'' + Ax' + Bx - Ce^{\delta t} x' = 0, \quad (I)$$

где $A, B, C, \delta \in (0, \infty)$. Уравнения вида (I) возникают
при линеаризации нелинейных уравнений, встречающихся в те-
ории нелинейной теплопроводности (см., например, [1]), и
вопрос о количестве нулей у решений уравнения (I) связан
с вопросом о количестве решений краевой задачи для нели-
нейного уравнения.

В случае, если $4B > A^2$, ответ на поставленный вопрос
прост: любое решение уравнения (I) имеет бесконечно много
нулей. Поэтому в данной работе будет рассмотрен случай
 $0 < 4B < A^2$.

Перед тем, как сформулировать основной результат,
приведем несколько лемм. Первая из них касается общего
линейного уравнения и будет дана без доказательства. Она
легко следует из теорем Штурма (см. [2, с. 393]).

Л е м м а I. Рассмотрим линейное уравнение

$$a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0, \quad (2)$$

где $a, b, c \in C([t_0, t_1], \mathbb{R})$ и $a(t) > 0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$. Пусть функции $x, y \in C_2([t_0, t_1], \mathbb{R})$ удовлетворяют соответственно дифференциальным неравенствам

$$a(t)x''(t) + b(t)x'(t) + c(t)x(t) \geq 0,$$

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) \leq 0$$

при всех $t \in [t_0, t_1]$ и не являются решениями уравнения (2) на $[t_0, t_1]$. Тогда:

1) если $x(t_0) = x(t_1) = 0$ и $x(t) \geq 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, то любое решение уравнения (2) имеет нуль в интервале (t_0, t_1) ;

2) если $y(t) \geq 0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, то любое решение уравнения (2) имеет в интервале $[t_0, t_1]$ не более одного нуля;

3) если $y(t_0) = y(t_1) = 0$ и $y(t) \leq 0$ при $t \in (t_0, t_1)$, то любое решение уравнения (2) имеет нуль в интервале;

4) если $x(t) \leq 0$ при всех $t \in [t_0, t_1]$, то любое решение уравнения (2) имеет в интервале $[t_0, t_1]$ не более одного нуля.

Л е м м а 2. Уравнение (I) имеет решение $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что функция $\beta(t) = 1 - \frac{2}{c_0} e^{-\frac{c_0}{2}t}$ при t больших некоторого t_* является верхней функцией для уравнения (I). При этом можно считать, что t_* выбрано так, что $\beta(t_*) > 0$. В качестве нижней функции выберем $\alpha(t) = \beta(t_*)$. Очевидно, на интервале $[t_*, +\infty)$ выполняется неравенство $\alpha(t) \leq \beta(t)$. Поэтому согласно [3] найдется решение уравнения (I) $\alpha_0: [t_*, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, которое на $[t_*, +\infty)$ удовлетворяет неравенствам $\alpha(t) \leq \alpha_0(t) \leq \beta(t)$. Так как α_0 не может иметь положительных минимумов, оно должно иметь предел. Таким образом, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_0(t) = c_0 > 0$. В силу линейности уравнения (I) функция $\frac{1}{c_0} \alpha_0$ также является его решением. Это решение продолжимо на всю числовую ось и на $+\infty$ имеет предел, равный 1. Лемма дока-

зана.

Если в уравнении (I) отбросить последнее слагаемое, то получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет общее решение

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t},$$

если $4B < A^2$, и

$$x = c_1 e^{k_1 t} + c_2 t e^{k_1 t},$$

если $4B = A^2$, где

$$k_1 = -\frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}, \quad (4)$$

$$k_2 = -\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B}.$$

Заметим, что $k_1 < 0$, $k_2 < 0$ и $|k_1| \leq |k_2|$.

Л е м м а 3. Если A, B и γ таковы, что $-k_1 = \gamma n$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$, то уравнение (I) имеет точное решение вида

$$x(t) = 1 + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i e^{-\gamma i t}, \quad (5)$$

где

$$a_1 = \frac{B}{C_\gamma}, \quad a_{i+1} = \frac{(\gamma i + k_1)(\gamma i + k_2)}{C_\gamma(i+1)} a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Справедливость этой леммы проверяется путем непосредственной подстановки функции (5) в уравнение (I).

Л е м м а 4. Пусть A, B и γ таковы, что $-k_1 = \gamma n$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$, t_* - минимальный, а t^* - максимальный нуль решения (5). Тогда любое решение уравнения

(I), линейно независимое от решения (5), имеет нуль в интервале $(-\infty, t_*)$ и нуль в интервале $(t^*, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $x_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ решение уравнения (I) линейно независимое от решения (5). Предположим, что x_1 не имеет нулей на $(-\infty, t_*)$. Из линейной независимости решений $\bar{x}_1$ и $\bar{x}$ следует, что $x_1(t_*) \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_1(t) > 0$ при $t \in (-\infty, t_*]$. Покажем, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) e^{-\kappa_1 t} = +\infty. \quad (6)$$

Если это не так, то

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_1(t) e^{\kappa_1 t} = c,$$

где $c \in [0, +\infty)$. Так как для решения (5) справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) e^{-\kappa_1 t} = (-1)^n a_n,$$

а решения $\bar{x}$ и $\bar{x}_1$ линейно независимы, то нижний предел $\lim_{t \rightarrow -\infty} x_n(t) e^{-\kappa_1 t}$ должен быть конечен для любого решения $\bar{x}_n$ уравнения (I). Покажем, что это не так. Сначала рассмотрим случай, когда $\lambda^2 > 4B$. Функция $\alpha(t) = e^{\kappa_2 t}$ является нижней функцией для уравнения (I) на $\mathbb{R}$. Если t_0 отрицательно и достаточно велико по абсолютной величине, то на интервале $(-\infty, t_0]$ функция $\beta(t) = e^{\kappa_2 t} + e^{(\kappa_2 + \varepsilon)t}$, где $\varepsilon = \min \left\{ \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{2}, \delta/2 \right\}$, является верхней функцией для уравнения (I). Следовательно, согласно [3], найдется решение $\bar{x}_n: (-\infty, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (I), для которого $\alpha(t) \leq x_n(t) \leq \beta(t)$. Очевидно, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_n(t) e^{-\kappa_1 t} \geq \lim_{t \rightarrow -\infty} \alpha(t) e^{-\kappa_1 t} = +\infty.$$

Это же соотношение получается и в случае $\lambda^2 = 4B$, если в качестве нижней и верхней функций выбрать $\alpha(t) = -te^{\kappa_1 t}$, $\beta(t) = -te^{\kappa_1 t} + \sqrt{t}e^{\kappa_1 t}$. Полученное противоречие доказывает равенство (6).

Пусть

$$M = \min_{t \in (-\infty, t_*)} \left\{ \frac{\alpha_1(t)}{\alpha(t)} \right\}$$

Из (6) следует, что минимум достигается в некоторой внутренней точке интервала $(-\infty, t_*)$. Обозначим эту точку через t_0 . Но тогда два различных решения уравнения (I) $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t) = M\alpha(t)$ в точке t_0 будут иметь равные значения и равные производные. Полученное противоречие завершает доказательство первой половины леммы. Доказательство того, что α_1 имеет нуль в интервале $(t_*, +\infty)$, проводится аналогично.

Л е м м а 5. Решение (5) имеет ровно n нулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что решение (5) имеет не более, чем n нулей. Это сразу следует из того, что функция α является полиномом n -ой степени относительно функции y , которая определяется равенством $y = e^{-\gamma t}$. Следовательно, существует не более n различных значений y , при которых α обращается в 0. Тот факт, что y монотонна по t , завершает доказательство.

Докажем, что функция α имеет ровно n нулей. Доказательство проведем по индукции. При $n=1$, очевидно, функция α имеет 1 нуль, каковы бы ни были A, B, γ и C . Предположим, что при любых A, B, γ и C , если $-\kappa_1 = \gamma(n-1)$, где $n \in \{2, 3, \dots\}$, то решение (5) имеет ровно $n-1$ нуль. Рассмотрим случай произвольных A, B, γ и C таких, что $-\kappa_1 = \gamma n$. Наряду с уравнением (I) рассмотрим уравнение

$$\alpha'' + A\alpha' + B_1\alpha - Ce^{\gamma t}\alpha' = 0, \quad (7)$$

где $\beta_1 \in (0, \beta)$ выбрано так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \beta_1} = \gamma(n-1).$$

Точное решение для уравнения (7) (обозначим его α_1) по предположению имеет ровно $n-1$ нуль. Заметим, что так как $\beta_1 < \beta$, то функция α_1 является для уравнения (I) нижней функцией там, где $\alpha_1 > 0$, и верхней функцией там, где $\alpha_1 < 0$. Пусть $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$ — нули функции α_1 . Тогда по лемме I решение (5) должно иметь нули в каждом из интервалов $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{n-2}, t_{n-1})$.

Пусть $t_1^* \in (t_1, t_2)$ — нуль решения (5). Возьмем решение уравнения (7), удовлетворяющее условиям $\alpha_2(t_1^*) = 0$, $\alpha_2'(t_1^*) = -1$. Согласно лемме 4, это решение должно иметь нуль в интервале $(-\infty, t_1)$. Пусть $t_2^* = \max \{t \in (-\infty, t_1^*): \alpha_2(t) = 0\}$. Тогда $\alpha_2(t) > 0$ на интервале (t_2^*, t_1^*) , $\alpha_2(t_2^*) = \alpha_2(t_1^*) = 0$ и α_2 — нижняя функция для уравнения (I) на (t_2^*, t_1^*) .

Поэтому, по лемме I, решение (5) имеет нуль в интервале (t_2^*, t_1^*) . Если $t_3^* \in (t_{n-2}, t_{n-1})$ — нуль решения (5), то аналогично доказывается, что решение (5) имеет нуль больший, чем t_3^* . Таким образом, решение (5) имеет не менее чем n нулей. С другой стороны, как уже доказано, оно не может иметь более n нулей. Этим завершается доказательство леммы.

Л е м м а 6. Пусть $\gamma \in [\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$. Тогда решение уравнения

$$\alpha'' + 2\alpha' + \alpha - e^{\gamma t} \alpha' = 0, \quad (8)$$

удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 1, \quad (9)$$

имеет ровно n нулей.

Доказательство. Докажем сначала, что данное решение имеет не менее n нулей. Пусть $n=1$. Тогда из уравнения (8) следует, что для достаточно больших t $\ddot{x}'(t) > 0$. Так как $\ddot{x}$ не может иметь положительных минимумов, то $\ddot{x}$ либо имеет нуль, либо $\ddot{x}'(t) > 0$ на $(-\infty, +\infty)$ и $\ddot{x}$ имеет неотрицательный предел при $t \rightarrow -\infty$. Однако вид уравнения (8) показывает, что второй вариант невозможен. Если $n \in \{2, 3, \dots\}$, то наличие у данного решения не менее n нулей доказывается точно так же, как это делалось в заключительной части леммы 5.

Докажем, что решение задачи (8)-(9) имеет не более n нулей. Вспомним, что если $\delta = \frac{1}{n}$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$, то уравнение (8) имеет точное решение, которое удовлетворяет условию (9) и имеет ровно n нулей. Если $n=1$, то это решение имеет вид $\ddot{x}_1 = 1 - e^{-t}$. Единственный нуль этого решения будет $t=0$. Пусть теперь $\delta > 1$. Тогда $\ddot{x}_1$ будет нижней функцией для уравнения (8) на интервале $(-\infty, 0]$ и верхней функцией на интервале $[0, +\infty)$. По лемме I, решение задачи (8)-(9), обозначив его $\ddot{x}_2$, на интервале $(-\infty, 0]$ имеет не более одного нуля. Покажем, что это решение не имеет нулей при $t > 0$. Если это не так, и $\ddot{x}_2(t_0) = 0$ при некотором $t_0 > 0$, то решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям $\ddot{x}(t_0/2) = 0$, $\ddot{x}'(t_0/2) = 1$, должно иметь нуль при $t > t_0$. Этот факт доказывается аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 4. Однако, по лемме I, ни одно решение уравнения (8) не может иметь двух нулей при $t > 0$. Таким образом, решение $\ddot{x}_2$ имеет ровно один нуль.

Рассмотрим случай $\delta < 1$. Пусть t_0 - максимальный нуль решения задачи (8)-(9). Получим на t_0 некоторые оценки. Функция $\ddot{x}_1$, определенная в предыдущем абзаце, будет в данном случае нижней функцией для уравнения (8) на интервале $[0, +\infty)$. Поэтому, с учетом леммы I можно показать, что $t_0 \geq 0$. Кроме того, заметим, что решение задачи Коши

$$\ddot{x}'' - 2\ddot{x}' + \ddot{x} = 0,$$

$$\alpha\left(\frac{\ln 4}{\gamma}\right) = 0, \quad \alpha'\left(\frac{\ln 4}{\gamma}\right) = 1$$

будет для уравнения (8) верхней функцией на интервале $[\ln 4/\gamma, +\infty)$. Поэтому, по лемме I, $t_0 \leq \ln 4/\gamma$.

Пусть теперь $\gamma_1 < \gamma_2 < 1$ и t_1 - максимальный нуль решения задачи (8)-(9) при $\gamma = \gamma_1$, а t_2 - при $\gamma = \gamma_2$. Тогда $\gamma_1 t_1 \geq \gamma_2 t_2$. Для того чтобы установить этот факт, заметим, что если $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - решение задачи (8)-(9) при $\gamma = \gamma_1$, то функция

$$\alpha_2(t) = \alpha_1\left(t + t_1\left(1 - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)\right)$$

является верхней функцией для уравнения (8) при $\gamma = \gamma_2$ на интервале $[t_1 \gamma_1/\gamma_2, +\infty)$. Отсюда, по лемме I, получаем $t_2 \leq \gamma_1/\gamma_2 t_1$.

Сделаем в уравнении (8) замену переменных

$$\alpha = y \cdot \exp\left(\frac{e^{\gamma t}}{2\gamma} - t\right), \quad s = \gamma t.$$

Получим уравнение

$$y'' + \left(\left(\frac{1}{2\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right)e^s - \frac{1}{4\gamma^2}e^{2s}\right)y = 0. \quad (10)$$

Заметим, что если $s \leq \ln 4$, то коэффициент при y заведомо положителен и убывает по γ . При $\gamma = 1/n$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$, уравнение (10) будет иметь решение $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, соответствующее точному решению уравнения (8). Это решение будет иметь n нулей $s_1 < s_2 < \dots < s_n$, причем s_n будет удовлетворять неравенству $0 \leq s_n \leq \ln 4$. Пусть теперь $\gamma_0 > \frac{1}{n}$ и s_0 - максимальный нуль решения уравнения (10) при $\gamma = \gamma_0$, которое соответствует решению задачи (8)-(9). Тогда, как было показано выше, $s_0 \leq s_n$. Заметим, что на интервале $(-\infty, \ln 4]$ точное решение y

при $\gamma = \frac{1}{n}$ является для уравнения (10) при $\gamma = \gamma_0$ верхней функцией там, где $y > 0$, и нижней функцией там, где $y < 0$. Из этого, с учетом леммы I, следует, что решение уравнения (10) при $\gamma = \gamma_0$ на каждом из интервалов $(-\infty, s_1], [s_1, s_2], \dots, [s_{n-1}, s_n]$ может иметь не более одного нуля. Так как при $s > s_n$ нужное решение нулей не имеет, то оно не может иметь более n нулей. То же самое относится и к решению задачи (8)-(9). Лемма доказана.

Наконец, сформулируем и докажем основной результат данной работы.

Т е о р е м а. Если A, B и γ таковы, что $-\kappa_1 \in (\gamma(n-1), \gamma n]$, где $n \in \{1, 2, \dots\}$,

то решение уравнения (I), имеющее на $+\infty$ предел $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, имеет ровно n нулей.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тот факт, что нужное решение имеет не менее n нулей, доказывается так же, как это делалось при доказательстве лемм 5 и 6. Докажем, что нужное решение имеет не более n нулей. Здесь нужно рассмотреть два случая: $A \geq 2\gamma n$ и $A < 2\gamma n$. Сначала рассмотрим случай, когда $A \geq 2\gamma n$. Тогда можно выбрать $B_1 \in (B, A^2/4]$ так, чтобы

$$\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B_1} = \gamma n.$$

Согласно лемме 5, точное решение $x_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения

$$x'' + Ax' + B_1x - Ce^{\gamma t}x' = 0 \quad (II)$$

имеет ровно n нулей. А так как x_1 является для уравнения (I) верхней функцией там, где $x_1 > 0$, и нижней функцией там, где $x_1 < 0$, то, по лемме I, решение уравнения (I), имеющее на $+\infty$ предел, равный 1, не может иметь более n нулей.

Рассмотрим случай $A < 2\gamma n$ и положим $B_1 = \frac{A^2}{4}$.

Покажем, что и в этом случае решение $x: R \rightarrow R$ уравнения (I), удовлетворяющее условию $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 1$, имеет ровно n нулей. Для этого сделаем в уравнении (II) замену независимой переменной

$$s = \frac{A}{2}t - \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{A}{2c}.$$

Получим уравнение

$$x'' + 2x' + x - e^{\gamma_0 s} x' = 0,$$

где $\gamma_0 = \frac{2\gamma}{A}$. По лемме 6, решение этого уравнения, соответствующее решению x , имеет ровно n нулей, а, следовательно, это же можно сказать и про решение x_1 . Далее этот случай рассматривается так же, как и предыдущий. Теорема доказана.

Литература

1. Лешин Л.А. Счетный спектр собственных функций нелинейного уравнения теплопроводности с распределенными параметрами// Дифф.уравнения. - 1988. - Т.24, № 7. - С. 1226-1234.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970. - 720 с.
3. Лешин Л.А. Метод нижних и верхних функций для дифференциальных уравнений второго порядка с особенностями// Дифф.уравнения. - 1987. - Т.23, № 9. - С.1632-1634.

Поступила 9.09.88

УДК 517.927

С.А.Беспалова, Ю.А.Клоков
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА

п.І. В этой работе мы рассмотрим краевую задачу

$$x''' = x''(A + Bx + Cx' + Dx'') \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = \alpha, \quad x'(\infty) = b, \quad (2)$$

где $A, B, C, D, x_0, \alpha, b \in \mathbb{R}$, а также задачу Коши

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = \alpha, \quad x''(0) = \mathcal{L}, \quad (3)$$

где $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$.

Частным случаем уравнения (1) является известное уравнение Блазиуса $x''' + x x'' = 0$, которое изучалось в ряде работ, например, [1-3], в основном численными методами.

Если $\alpha = b$, то решением задачи (1), (2) является функция $x = x_0 + \alpha t$. В дальнейшем будем считать, что $\alpha \neq b$. Не уменьшая общности, положим $b > 0$. Если $b > 0$, то решение задачи (1), (2) при больших t имеет вид $x \approx bt$ и из (1) следует, что необходимо $Bb \neq 0$. Случай $B = 0$ разобран в [4]. Поэтому будем считать, что $B < 0$. Не уменьшая общности, положим $B = -1$ и будем в дальнейшем изучать уравнение

$$x''' = x''(A - x + Cx' + Dx'') \quad (4)$$

с условиями (2). Вторая производная любого решения задачи (4), (2) необходимо сохраняет свой знак. Ввиду этого,

$$(b - \alpha) x''(t) > 0 \quad \text{и} \quad \Delta x''(t) > 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty, \Delta \neq 0.$$

Преобразуем уравнение (4) к несколько иному виду. Пусть $\alpha < b$. Обозначим $x'(t) = s(t)$, $\alpha \leq s \leq b$. Из (4) находим

$$\left(\frac{x'''}{x''} \right)' = (A - x + Cx' + Dx'')$$

или

$$\left(\frac{s'''}{s''} \right)' = -s + Cs' + Ds'' \quad (5)$$

Так как $s(t)$ с увеличением t изменяется монотонно, то в качестве искомой функции возьмем $t = t(s)$. Подставляя ее в (5), найдем

$$t'''_{sss} = 2 \frac{t''^2_{ss}}{t'_s} + s t'^3_s - C t'^2_s + D t''_{ss}. \quad (6)$$

В (6) сделаем замену

$$t'_s = \frac{1}{u(s)}, \quad \alpha \leq s \leq b. \quad (7)$$

Тогда для новой функции $u(s)$ получим уравнение

$$u'' = -\frac{s}{u} + C + Du'. \quad (8)$$

Из подстановок следует краевое условие

$$u' = A_0 + Du(a), \quad (9)$$

$$u(b) = 0, \quad (10)$$

где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} - x_0 + Ca$.

Аналогично, вместо задачи Коши (3) получаем

$$u(a) = \mathcal{L} \quad (II)$$

$$u'(a) = \mathcal{A}_0 + D\mathcal{L}. \quad (II)$$

Если $a > b$, то вместо задачи (4), (2) снова получаем задачу (8)-(10), где $a > b$.

Т е о р е м а I. Пусть $a > b$, $b > 0$. Тогда решение задачи (4), (2) существует и единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование решения задачи (4), (2) доказывается путем построения соответствующих нижних и верхних функций так, как это сделано в [4].

Докажем единственность. Пусть $b > a$ и существуют два решения. Тогда задача (8)-(10) также будет иметь два решения $u_1(s)$, $u_2(s)$. Обозначим $\mathcal{A}(s) = u_1(s) - u_2(s)$, $\mathcal{A}(a) > 0$. Из (8)-(10) получаем

$$\mathcal{A}'' = \frac{s}{u_1 u_2} \mathcal{A} + D\mathcal{A}' \quad (I3)$$

$$\mathcal{A}'(a) = D\mathcal{A}(a), \quad \mathcal{A}(b) = 0. \quad (I4)$$

Интегрируя (I3) от $s=a$ до $s \geq a$ и учитывая (I4), найдем

$$\mathcal{A}'(s) = D\mathcal{A}(s) + \mathcal{E}(s), \quad (I5)$$

где

$$\mathcal{E}(s) = \int_a^s \frac{\tau \mathcal{A}(\tau) d\tau}{u_1(\tau) u_2(\tau)}.$$

Интегрируя (I5), получаем

$$\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(a) e^{D(s-a)} + \int_a^s e^{D(s-\tau)} \mathcal{E}(\tau) d\tau. \quad (I6)$$

Из (16) следует, что так как $x(a) > 0$, то $x(s) > 0$ при $a \leq s \leq b$, и при $s = b$ получаем противоречие с $x(b) = 0$. Тем самым в случае $b > a$ единственность доказана. Если $a > b$, то доказательство аналогичное.

З а м е ч а н и е I. При $a = 0, b > 0$ единственность имеет место, но, вообще говоря, решение может и не существовать для некоторых значений параметров. Такие примеры легко построить. Если $b = 0$, то при $a > 0$ единственность также имеет место. Однако, уже в случае $b = 0, a < 0$ задача может иметь два решения.

п.2. Рассмотрим теперь случай $a < 0, b > 0$.

В зависимости от параметров задача (4), (2) может иметь одно, два или ни одного решения.

Т е о р е м а 2. Задача (8)-(10), а значит и задача (4), (2) не может иметь трех решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существуют три решения: u_1, u_2, u_3 , $u_i(s) > 0$ ($i = 1, 2, 3$), $a \leq s \leq b$, задачи (8)-(10). Обозначим $x_1 = u_2 - u_1$, $x_2 = u_3 - u_1$. Тогда из (8)-(10) находим

$$x_1'' = \frac{s}{u_1 u_2} x_1(s) + D x_1'(s) \quad (17)$$

$$x_2'' = \frac{s}{u_1 u_3} x_2(s) + D x_2'(s) \quad (18)$$

$$x_i'(a) = D x_i(a), \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

$$x_i(b) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (20)$$

При $0 \leq s \leq b$, x_1, x_2 , рассматриваемые как решения линейных уравнений (17), (18), не могут иметь положительных максимумов и отрицательных минимумов и в силу (20) x_1, x_2 на отрезке $[0, b]$ обязаны сохранять значения, как и разность $u_3 - u_2$. Не уменьшая общности, будем считать, что

$0 < \alpha_1(s) < \alpha_2(s)$ и $\alpha_2'(s) < \alpha_1'(s) < 0$ при $0 \leq s < b$,
так что $u_3 - u_2 > 0$, $s \in [0, b]$.

Рассмотрим функцию $\alpha_1(s)$. Из (17), (19) находим

$$\alpha_1' = D\alpha_1 + \int_a^s \frac{\tau \alpha_1(\tau) d\tau}{u_1(\tau) u_2(\tau)}, \quad (a \leq s \leq b). \quad (21)$$

Так как $\alpha_1'(s) < 0$, $0 \leq s < b$, $\alpha_1(s) \rightarrow 0$, $s \rightarrow b$ и так как подынтегральное выражение в (21) положительно при $0 \leq s < b$, то интеграл в (21) необходимо будет сходиться при $s \rightarrow b$. Отсюда следует, что $\alpha_1'(s)$ непрерывна при $a \leq s \leq b$ и $\alpha_1'(b) \leq 0$.

Все сказанное выше относительно функции $\alpha_1(s)$ справедливо и для $\alpha_2(s)$.

Умножая (17) на $\alpha_2(s)$, а (18) на $\alpha_1(s)$ и вычитая из второго уравнения первое, получим

$$(\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_2 \alpha_1') = - \frac{s \alpha_1 \alpha_2}{u_1} \left(\frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} \right) + D(\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2). \quad (22)$$

Из (22), учитывая, что $(\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2)_{s=b} = 0$, находим

$$\begin{aligned} & \alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2 = \\ & = \int_a^b e^{D(s-\tau)} \frac{\tau \alpha_1(\tau) \alpha_2(\tau)}{u_1(\tau) u_2(\tau) u_3(\tau)} (u_3(\tau) - u_2(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим правую часть в (23) через $v(s)$, где функция $v(s) > 0$ при $0 \leq s < b$ и непрерывна. Из (23) следует

$$\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)' = \frac{1}{\alpha_1^2} v(s). \quad (24)$$

Интегрируя (24) от $s=0$ до $s \geq 0$, найдем

$$\frac{x_2(s)}{x_1(s)} = \frac{x_2(0)}{x_1(0)} + \int_0^s \frac{v(\tau) d\tau}{x_1^2(\tau)}$$

или

$$x_2(s) = \frac{x_2(0)}{x_1(0)} x_1(s) + x_1(s) \int_0^s \frac{v(\tau) d\tau}{x_1^2(\tau)}$$

Из последнего равенства, в силу монотонного убывания функции $x_1(s)$, $s \in [0, b]$, следует

$$x_2(s) > \int_0^s \frac{v(\tau) d\tau}{x_1(\tau)} > 0 \quad \text{при } 0 \leq s < b.$$

Поэтому $x_2(b) > 0$. Но это противоречит (20). Тем самым теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $\alpha < 0$. Тогда существуют значения A_0, C, D такие, что задача (4), (2) не имеет решения ни для какого $b > 0$.

Доказательство. Положим $A_0 > 0, C = 0, D > 0, \alpha = -\lambda, \lambda > 0$. Тогда из (8), (II), (I2) находим для $s \in [-\lambda, 0]$

$$u'(s) \geq (A_0 + D\lambda) e^{\lambda(s+\lambda)}$$

$$u(s) \geq \lambda + (A_0 + D\lambda)(e^{\lambda(s+\lambda)} - 1)/D,$$

откуда при $s=0$ имеем (учитывая, что $\lambda > 0$)

$$u'(0) > A_0 e^{\lambda D}, \quad u(0) > D^{-1} A_0 (e^{\lambda D} - 1) \equiv r.$$

В дальнейшем потребуем, чтобы

$$DA_0^2 e^{\lambda D} (e^{\lambda D} - 1) \geq 1. \quad (25)$$

При $S \geq 0$ рассмотрим вспомогательную задачу

$$\omega'' = -\frac{S}{r} + D\omega', \quad \omega(0) = r, \quad \omega'(0) = u'(0). \quad (26)$$

Очевидно, что там, где $\omega(s) \geq r$, необходимо будет $u'(s) \geq \omega'(s)$. Интегрируя (26), получим

$$\omega'(s) = \left(u'(0) - \frac{1}{rD^2}\right) e^{Ds} + \frac{S}{rD} + \frac{1}{rD^2}. \quad (27)$$

Из (27), (25) следует

$$\omega'(s) \geq (rD)^{-1} s + (rD^2)^{-1}.$$

Поэтому для $S \geq 0$

$$\omega(s) \geq r + \frac{s^2}{2rD} + \frac{s}{rD^2} \geq r.$$

Значит, $u(s) \geq \omega(s) \geq r$ при всех $S \geq 0$, и поэтому условие (I0) не будет выполнено. Тем самым теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Из условия (25) видно, что для заданных $A=C=0$, $D>0$, $\alpha<0$, $\beta>0$ всегда можно выбрать λ_0 в условии (2) столь большой отрицательной величиной, что задача (4), (2) не будет иметь решения.

Точно так же из условия (25) следует, что если решение задачи (4), (2) существует, то величина λ не может быть очень большой. Найдем оценку сверху для тех значений λ , при которых решение может существовать. Считая $A_0 \geq 0$, $C=0$, $D \geq 0$, из (8) найдем

$$(uu')' = -s + D(uu') + u'^2$$

$$uu' = u(a)u'(a)e^{D(s-\tau)} + \int_a^s e^{D(s-\tau)} (u'^2(\tau) - \tau) d\tau.$$

Интегрируя еще раз от $s=a$ до $s=b$, отбрасывая положительные слагаемые в правой части и учитывая, что $u(b)=0$, получим

$$\int_{-a}^b \int_{-a}^s e^{D(s-\tau)} \tau d\tau ds > 0. \quad (28)$$

Таким образом, если для заданных $A_0 \geq 0$, $C=0$, $D \geq 0$ решение задачи (8)-(10) существует, то величина $\lambda = -a > 0$ должна удовлетворять условию (28). При $D=0$ из (28) найдем неравенство $2\lambda < b$ из [2].

Оценки (25), (28) найдены в предположении, что $C=0$. Более сложными приемами аналогичные оценки можно получить и для случая $C \neq 0$.

З а м е ч а н и е 3. Если $a < 0$, $b=0$, $A_0, C, D \in \mathbb{R}$ и выполняется условие

$$\int_{-a}^0 e^{-D\tau} (A_0 + C\tau) d\tau \geq 0,$$

то задача (8)-(10) решения не имеет. Соответствующие рассуждения мы опускаем.

Рассмотрим теперь случай $D < 0$, $a < 0$, $b > 0$, $A_0, C \in \mathbb{R}$. Обозначим через $u(s, \alpha)$, $\alpha > 0$, решение задачи (8), (II), (I2). Можно показать, что график решения этой задачи обязательно пересекает ось S в некоторой точке, которую мы обозначим через b_α , причем $b_\alpha > 0$ для $\forall \alpha > 0$.

Т е о р е м а 4. Величина b_α непрерывно зависит от α и $b_\alpha \rightarrow +\infty$ при $\alpha \rightarrow 0$ и при $\alpha \rightarrow +\infty$.

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

Обозначим

$$b_* = \min_{\alpha \in \mathbb{R}_+} b_\alpha.$$

Из теоремы 4 следует предположение

Т е о р е м а 5. Если $b < b_*$, то решение задачи (8)-(10) не существует, а если $b > b_*$, то существуют два решения. При $b = b_*$ - решение единственно.

Значение b_* следует находить численными методами.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: ИЛ, 1956.
2. Hussaini M.Y. // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1986. 39. N 1, p. 15-24.
3. Hussaini M.Y., Lakin W.D., Nachman A. // SIAM J. Appl. Math. 1987. 47, N 4, p. 669-709.
4. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига, ЛГУ им. П. Стучки, 1988. - С. 99-108.

Поступила 13.09.88

УДК 518.61

С.А.Беспалова

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОДУ

п.1. В приложениях часто возникают проблемы, которые описываются краевыми задачами для сингулярных ОДУ (линейных или нелинейных), см., например, [1-23]. Исследования таких задач ведутся, в частности, и в плане поиска эффективных методов их численного решения. С этой целью рассматривались такие методы, как метод стрельбы, метод конечных разностей, методы типа Гира, метод коллокации.

Как известно, некоторые численные методы решения краевых задач, в том числе и сингулярных, основываются на численных методах решения соответствующей задачи Коши.

В настоящей работе исследуется эффективность численного метода решения задачи Коши ОДУ с применением полиномов Чебышева, предложенного в работах [25,26], применительно к сингулярным ОДУ

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (1)$$

где $t \in (0, T] = I_0$, $f \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$, в общем, нелинейная относительно $x^{(i)}$, $i = 0, n-1$, $x^{(0)} = x$, и имеет при $t=0$ особенность первого рода некоторого порядка $r \in \mathbb{R}$.

п.2. Несколько результатов из [25,26].

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

$t \in I = [t_0, T]$, $T > t_0$, $x \in \mathbb{R}$. Предполагаем, что решение задачи (2) существует и единственно. Предположим также, что нам известно это решение в точке $t_k \in [t_0, T)$, $x(t_k) = x_k$ и мы хотим найти решение на отрезке $[t_k, t_{k+1}] \subset I$. Обозначим длину интервала $[t_k, t_{k+1}]$ через $h_k = t_{k+1} - t_k$ и сделаем замену

$$t = t_k + \frac{h_k}{2} (1 + \tau), \quad \tau \in [-1, 1]. \quad (3)$$

Пусть $x(t) = x(t_k + \frac{h_k}{2} (1 + \tau)) = \tilde{x}(\tau)$.

Так, что

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{h_k}{2} f(t_k + \frac{h_k}{2} (1 + \tau), \tilde{x}(\tau)), \quad \tau \in [-1, 1]. \quad (4)$$

Обозначим

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = y(\tau), \quad \tau \in [-1, 1], \quad (5)$$

где $y(\tau)$ - новая искомая функция.

Пусть задано целое число $p \geq 1$. Обозначим через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p$ - корни полинома Чебышева $T_p(\tau)$, так что $T_p(\tau_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$. При этом

$$\tau_j = \cos(j - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{p}, \quad j = 1, \dots, p. \quad (6)$$

Аппроксимируем функцию $y(\tau)$ полиномом степени $p-1$.

Обозначим его $Y(\tau)$ и $y(\tau_j) = y_j$. Тогда $Y(\tau_j) = y_j$.

Аппроксимирующий полином $Y(\tau)$ имеет вид, [24], :

$$Y(\tau) = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \sqrt{1 - \tau_j^2} y_j \frac{T_p(\tau)}{\tau - \tau_j} = \sum_{j=1}^p y_j a_j(\tau), \quad (7)$$

где

$$a_j(\tau) = \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-\tau_j^2}}{P(\tau-\tau_j)} T_p(\tau).$$

Из (5) находим $\tilde{x}(\tau)$:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = Y(\tau), \quad \tilde{x}(-1) = x_k \quad - \text{ известная величина,}$$

следовательно,

$$\tilde{x}(\tau) = x_k + \int_{-1}^{\tau} Y(x) dx; \quad (8)$$

и, подставляя (8) в (4), получаем

$$Y(\tau) = \frac{h_k}{2} f\left(t_k + \frac{h_k}{2}(1+\tau), x_k + \int_{-1}^{\tau} Y(x) dx\right). \quad (9)$$

Потребуем, чтобы (9) выполнялось в точках $\tau_i, i=1, \dots, p$.
Так как $Y(\tau_i) = y_i$, то имеем

$$y_i = \frac{h_k}{2} f\left(s_{k,i}, x_k + \sum_{j=1}^p a_{ij} y_j\right), \quad (10)$$

где

$$a_{ij} = \frac{(-1)^{j-1} \sqrt{1-\tau_j^2}}{P T_{p-1}(\tau_j)} \sum_{r=1}^p \frac{T_{r-1}(\tau_j) - T_{r+1}(\tau_j)}{r} (T_r(\tau_i) - T_r(-1)), \quad (11)$$

$$s_{k,i} = t_k + \frac{h_k}{2} (1+\tau_i), \quad (12)$$

($T_{p+1}(\tau_j)$, $j=1, \dots, p$, полагаем равными нулю).

После нахождения из (10) $y_i, i=1, \dots, p$ находим x_{k+1} по формуле

$$x_{k+1} = x(t_{k+1}) = x_k + \int_{-1}^1 y(\alpha) d\alpha = x_k + \sum_{j=1}^P b_j y_j, \quad (I3)$$

где

$$b_j = \frac{(-1)^{j+1} \sqrt{1-\tau_j^2}}{P T_{P-1}(\tau_j)} \left(\sum_{r=1}^P \frac{T_{r-1}(\tau_j) - T_{r+1}(\tau_j)}{r} (T_r(1) - T_r(-1)) \right). \quad (I4)$$

В случае регулярных ОДУ, как было показано в работе [26], в качестве точек коллокации с тем же успехом можно использовать и экстремальные точки полиномов Чебышева, т.е. нули полинома $(\tau^2 - 1) T_{P-1}(\tau) = 0$. Для сингулярных ОДУ точками коллокации, очевидно, целесообразно взять нули полиномов Чебышева.

п.3. Уравнение (I) эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений I-го порядка

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad x_n \quad (I5)$$

$t \in (0, T]$

Так что $y_1, \dots, y_p$ и x_k из (I3) в случае системы (I5) являются n -мерными векторами. Обозначим их компоненты, соответственно, через $(y_i)_r$ и $(x_k)_r$, $i=1, \dots, p$, $r=1, 2, \dots, n$, $k=0, 1, \dots$. Тогда для определения $(y_i)_r$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ получаем систему порядка $n \times p$, [25]:

$$(y_i)_r = \frac{h_k}{2} f_r(s_{k,i}, (x_k)_1 + \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} (y_j)_1, \dots, (x_k)_n + \sum_{j=1}^P \alpha_{ij} (y_j)_n), \quad (I6)$$

$r=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, \dots, n,$

где

$$f_r(s_{n,i}, (x_k)_1 + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_1, \dots, (x_k)_n + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_n) = x_{r+1},$$

$$(r=1, \dots, n-1).$$

$$f_n(s_{n,i}, (x_k)_1 + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_1, \dots, (x_k)_n + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_n) = \quad (17)$$

$$= f(s_{n,i}, (x_k)_1 + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_1, \dots, (x_k)_n + \sum_{j=1}^p a_{ij}(y_j)_n).$$

Теперь задача Коши

$$x_i(0) = \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i=1, \dots, n,$$

для сингулярной системы (15) (с предложенным выше выбором точек коллокации) может быть решена по той же схеме, что дана в [25].

п.4. Контроль точности и выбор шага осуществляется так же, как и в регулярном случае [25, 26]. Несколько отличается от регулярного случая выбор начального приближения для y_{ij} в итерационном процессе. Из замены переменной (12) имеем

$$y_{ij} = y_j(s_{\kappa,i}), \quad (i=1, \dots, p; \quad j=1, \dots, n; \quad \kappa=0, 1, \dots). \quad (18)$$

В [25, 26] для сокращения времени счета рекомендовалось начальное приближение для y_{ij} на начальном интервале интегрирования $[0, t_1]$ находить из правой части системы (15), используя начальные данные задачи Коши. В сингулярном случае для начального интервала $[0, t_1]$ можем, например, взять $y_{ij}^{(0)} = y_{ij}^{(0)}(s_0, i) = 0$ для всех $i=1, 2, \dots, p; \quad j=1, 2, \dots, n$. Для всех последующих ин-

тервалов $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$
регулярном случае.

поступаем, как и в ре-

п.5. Численные результаты. Эффективность решения задачи Коши для сингулярных ОДУ указанным выше методом исследовалась путем сравнения приближенного решения с точным. В качестве тестовых задач были взяты тестовые задачи из работ других авторов, в частности [3, 5, 12, 13, 14, 16, 18, 27]. Всего было решено 9 задач. Полученные нами результаты проиллюстрируем на нескольких примерах.

$$1) [14]: \quad u''(x) + \frac{2}{x} u'(x) - 4u(x) = -2, \quad x \in (0, 1] \quad (I)$$

$$u(0) = 0.5 + 10/\operatorname{sh} 2, \quad u'(0) = 0.$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(x) = 0.5 + 5 \operatorname{sh} 2x / x \operatorname{sh} 2.$$

Таблица I.

Зависимость точности приближенного решения задачи (I) от степени P аппроксимирующего полинома

$$(h_{\max} = 1.0; \quad \varepsilon = 10^{-7}).$$

P	$N_{\text{шаг}}$	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$	$N_{\text{эм}}$
3	4147	0.212 (-11)	0.881 (-12)	0.213 (-11)	0.386 (-12)	12
5	32	0.369 (-13)	0.137 (-13)	0.369 (-13)	0.670 (-14)	13
7	5	0.295 (-12)	0.189 (-12)	0.295 (-12)	0.535 (-13)	13
8	4	0.555 (-13)	0.226 (-13)	0.555 (-13)	0.101 (-13)	13

$$2) [3]: \quad v'' + \frac{\sigma}{t} v' = (\sigma - 2)t - t^{\sigma-1} \cos t, \quad t \in (0, 1], \quad \sigma > 0. \quad (II)$$

При $\sigma = \frac{3}{2}$ известно точное решение уравнения (II):

$$v(t) = 1 - t^{-1/2} (1 - \cos t).$$

Так что $v'(t) = (-2\sin t - \cos t + 1)/(2t^{3/2})$, и, следовательно, для этого Θ для уравнения (II) решается задача Коши

$$v(0) = 1, \quad v'(0) = 0.$$

Таблица 2.

Зависимость точности приближенного решения задачи (II) от степени p аппроксимирующего полинома

$$(h_{\max} = 1.0; \quad \epsilon = 10^{-7}).$$

P	$N_{\max}$	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$	$N_{\text{эл}}$
3	14750	0.945 (-II)	0.929 (-II)	0.945 (-II)	0.175 (-IO)	10
5	201	0.915 (-II)	0.892 (-II)	0.915 (-II)	0.169 (-IO)	10
7	107	0.914 (-II)	0.378 (-II)	0.914 (-II)	0.169 (-IO)	10
8	107	0.923 (-II)	0.386 (-II)	0.922 (-II)	0.171 (-IO)	10

3) [27]: $u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + mu(x) = 0, \quad x \in (0, 1], \quad m > 0, \quad (\text{III})$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Точное решение задачи (III)

$$u(x) = J_0(\sqrt{m}x),$$

где $J_0(s), s \geq 0$ - функция Бесселя.

Таблица 3.

Зависимость точности приближенного решения задачи (III) от порядка p аппроксимирующего полинома и параметра m .

$$(h_{\max} = 1.0; \quad \epsilon = 10^{-7}).$$

P	$N_{\max}$	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$	$N_{\text{эл}}$	m
3	128	0.232 (-14)	0.113 (-14)	0.232 (-14)	0.232 (-14)	14	10^{-1}
5	1	0.222 (-15)	0.222 (-15)	0.222 (-15)	0.222 (-15)	15	

Продолжение таблицы 3.

P	N _{шаг}	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$	N _{зн}	m
6	1	0.0	0.0	0.0	0.0	бсе	10^{-1}
7	1	0.139 (-16)	0.139 (-16)	0.139 (-16)	0.139 (-16)	16	
3	1024	0.124 (-13)	0.158 (-14)	0.124 (-13)	0.162 (-13)	13	
5	16	0.348 (-14)	0.140 (-14)	0.348 (-14)	0.455 (-14)	14	10^0
6	4	0.799 (-12)	0.375 (-12)	0.799 (-12)	0.104 (-11)	12	
7	2	0.882 (-13)	0.511 (-13)	0.882 (-13)	0.115 (-12)	12	
3	31664	0.657 (-12)	0.205 (-12)	0.657 (-12)	0.267 (-11)	11	10^2
5	236	0.301 (-13)	0.830 (-14)	0.128 (-13)	0.522 (-13)	13	
6	64	0.403 (-12)	0.158 (-12)	0.112 (-12)	0.456 (-12)	12	
7	32	0.256 (-13)	0.973 (-14)	0.143 (-14)	0.583 (-13)	13	

$$4), [16], \quad u''(x) + \frac{2}{x} u'(x) + [u(x)]^5 = 0, \quad x \in (0, 1], \quad (\text{IV})$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0.$$

Точное решение этой задачи

$$u(x) = 1/\sqrt{1+x^2/3}.$$

Таблица 4.

Зависимость точности приближенного решения задачи (IV) от степени P аппроксимирующего полинома

$$(h_{\max} = 10^{-7}; \quad \varepsilon = 10^{-9}).$$

P	N _{шаг}	$\Delta_{\max}$	$\Delta_{\text{сред}}$	$\Delta_{\text{абс}}$	$\Delta_{\text{отн}}$	N _{зн}
3	39145	0.483 (-11)	0.413 (-12)	0.483 (-11)	0.558 (-11)	11
5	196	0.449 (-5)	0.415 (-7)	0.449 (-5)	0.519 (-5)	5
7	115	0.489 (-3)	0.164 (-4)	0.489 (-3)	0.565 (-3)	3

$$5), [14],$$

$$u''(x) + \frac{2}{x} u'(x) + 4.703 \cdot 10^8 [41.13 - 0.632 u(x)]^2 \exp(-9058/u(x)) = 0 \quad (\text{V})$$

$$u(0) = 645, \quad u'(0) = 0.$$

Точное решение этой задачи не известно, и в качестве контрольного значения бралось значение приближенного решения при $x=1$, указанное в [14], а именно: $u(1)=600.00$. Наши результаты следующие:

$$p=3, \quad u(1) = 599.998836,$$

$$p=5, \quad u(1) = 600.000728,$$

$$p=7, \quad u(1) = 599.997541.$$

По каждой из тестируемых задач, кроме (У), выдавались следующие качественные характеристики [28]:

$N_{\text{шаг}}$ - суммарное число шагов интегрирования, сделанных на заданном интервале интегрирования;

$$\Delta_{\text{max}} = \max_{x \in I} |u_{\text{прибл.}}(x) - u_{\text{точн.}}(x)|;$$

$$\Delta_{\text{сред}} = \left(\sum_{r=1}^{N_{\text{шаг}}} |u_{r, \text{прибл.}} - u_{r, \text{точн.}}| \right) / N_{\text{шаг}} \quad - \text{среднее значение}$$

погрешности приближенного решения;

$\Delta_{\text{абс}}, \Delta_{\text{относ}}$ - соответственно, абсолютная и относительная погрешность приближенного решения в конце интервала интегрирования;

$N_{\text{зн}}$ - число совпадающих знаков в точном и приближенном решениях в конце интервала интегрирования.

Вычисления выполнены на ЭВМ ЕС-1060 (с удвоенной точностью).

п.6. О сходимости процесса. Теоретически можно как угодно повысить точность аппроксимации заданной функции за счет повышения порядка аппроксимирующего полинома, (7). Однако, в общем случае на практике это повышение точности идет очень медленно. Например, вычисление функции $x(t) = t^k$ для $t=0.01$, $k=0.5; 1.0$, (формула (36) таблицы П приложения в [29]) с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ требует порядок аппроксимирующего полинома $p \geq 74$. Естественно, что при больших значениях порядка p , если решается задача Коши для нелинейной сингулярной системы ОДУ некоторого порядка $m \geq 2$, на конечных результатах будет значитель-

но сказываться потеря точности при решении итерационным методом нелинейной системы алгебраических уравнений порядка $p \times m$ относительно неизвестных $(y_i)_p$, $i = 1, 2, \dots, p$; $r = 1, 2, \dots, m$, (формула (16)). Поэтому уже из этих соображений нецелесообразно значительно повышать p . Решение тестовых задач из приведенного списка литературы показало, что для получения результатов с точностью 10^{-7} - 10^{-9} порядков аппроксимирующего полинома $3 \leq p < 10$. При этом особо следует подчеркнуть, что в случае нелинейных систем лучшая точность получается при $p = 3$ и очень мелком шаге, а с увеличением p точность резко падает, табл.4.

Из сказанного следует, что предложенный алгоритм достаточно эффективен при решении задач Коши для линейных сингулярных ОДУ и значительно менее эффективен, если правая часть уравнения (1) не является гладкой функцией.

Как достоинство этого алгоритма, отметим, что он позволяет по единой схеме решать ОДУ и в регулярном, и сингулярном случаях.

Литература

1. Asher U. and Russell R.D. Reformulation of boundary value problems into "standard" form // SIAM Review, 1981, v.23, No.2, pp.238-254.
2. Bohl Erich, On two boundary value problems in nonlinear elasticity from a numerical viewpoint // Lect.Notes Math., 1978. v.679, pp.1-14.
3. Brabston D.C. and Keller H.B. A numerical method for a singular two point boundary value problem // SIAM J. Numer.Anal., 1977, v.14, No.5, pp.775-791.
4. Bushard Louis B. Computationally useful bounds for singular nonlinear second order boundary value problems// SIAM J.Math.Anal., 1978, v.9, No.4, pp.651-659.
5. Chawla M.M., McKee S., Shaw G. Order h^2 method for a singular two-point boundary value problem// BIT, 1986, 26, pp.318-326.
4. De Bruijn N.G. Topological existence proof for a non-

- linear two-point boundary value problem// Philips J. Res., 1981, v.36, No.4-6, pp.229-238.
7. Jozeph D.D. and Lundgren T.S., Quasilinear Dirichlet Problems Driven by Positive Sources// Arch.Rational Mechanics and Analysis, 1973, v.49, No.4, pp.241-269.
 8. Harten A. Vom. On unusual bifurcation phenomenon in a free surface problem for a laser sustained plasma// Delft Progr.Rept., 1981, v.6, N.4, pp.257-267.
 9. Kurtz J.C. A singular nonlinear boundary value problem // Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1981, v.11, N.2, pp.227-241.
 10. Macki J. A singular nonlinear boundary value problem// Pacific J. Math., 1978, 18, pp.375-383.
 11. Nehary Z. On a nonlinear differential equation arising in nuclear physics// Proc.Royal Irish Acad., 1963, 62, pp.117-135.
 12. Russell R.D. and Christiansen J. Adaptive mesh selection strategies for solving boundary value problems// SIAM, J.Numer.Anal., 1978, v.15, N.1, pp.59-80.
 13. Russell R.D. and Shampine L.F. A collocation method for boundary value problems// Numer.Math., 1972, 19, pp.1-28.
 14. Russell R.D. and Shampine L.F. Numerical methods for a singular boundary value problems// SIAM J.Numer. Anal., 1975, v.12, N.1, pp.13-36.
 15. Ryder G. Boundary value problems for a class of nonlinear differential equations// Pacific J.Math., 1967, 22, pp.477-503.
 16. Rentrop P. A Taylor series method for a numerical solution of two-point boundary value problems// Numer. Math., 1979, 31, pp.359-375.
 17. Seymour V. Parter, Solutions of a differential equation arising in chemical reaction processes// SIAM J. Appl.Math., 1974, v.26, N.4, pp.687-716.
 18. Weinmüller Ewa. Collocation for singular boundary value problems of second order// SIAM J.Numer.Anal., 1986, v.23, N.5, pp.1062-1095.

19. Williams Lynn R. Leggett Richard W., Multiple Fixed Point Theorems for Problems in Chemical Reactor Theory// J.Math.Anal. and Appl., 1979, v.69, n.1, pp.180-183.
20. Wolkowisky Jay H., Buckling of the circular plate embedded in elastic springs. An application to Geophysics// Communications on Pure and Applied Mathematics, 1969, v.XXII, pp.639-667.
21. Zakharov V., Sobolev V. and Synakh V., Behaviour of light beams in nonlinear media// Zh.Eksp.Theor.Fiz., 1971, 60, pp.136-145.
22. Гризанс Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью// Латв.математ.ежегодн. - Рига: Зинатне, 1984. Вып.28. - С.14-24.
23. Жидков П.Е. Существование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики// Объедин. ин-т ядерн.исслед. Дубна. Сообщ. - 1982. - № 5. - С.62-68.
24. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.1. - М.: Наука, 1973. - 632 с.
25. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Решение задачи Коши для систем ОДУ с применением полиномов Чебышева// Латв. математ.ежегодник. - Рига: Зинатне, 1987. - Вып.31. - С.3-12.
26. Беспалова С.А. К вопросу о применении полиномов Чебышева для решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений// Латв.математ.ежегодник - Рига: Зинатне, 1988. - Вып. 32. - С.114-119.
27. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. - М.: Наука, 1971. - 47 с.
28. Смирнов А.М. К вопросу о сравнительном исследовании методов численного интегрирования систем ОДУ. - Киев, 1985. Деп. в УкрНИИТИ 05.08.85, № 1685 - Ук.
29. Васильев Н.И., Клоков Ю.А., Шкерстена А.Я. Применение полиномов Чебышева в численном анализе. - Рига: Зинатне, 1984. - 240 с.

Поступила 11.09.88

УДК 517.927

Г.П.Гризан
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ОДУ

Рассматривается краевая задача

$$x'' = f(t, x, x'), \quad (1)$$

$$x'(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(\tau) + Bx'(\tau) = d, \quad (3)$$

где $f \in Car(I_0 \times \mathbb{R}^{2n})$, $I_0 = (0, \tau]$, $I = [0, \tau]$, $\tau > 0$,
 $\forall \alpha \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$.

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (1)-(3) назовем вектор-функцию $x(t)$, которая абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на каждом сегменте, содержащемся в I_0 , и непрерывно дифференцируема на I , удовлетворяющую краевым условиям (2), (3) и при почти всех $t \in I_0$ - уравнению (1).

Двухточечные краевые задачи для уравнений второго порядка с несуммируемой особенностью изучались многими авторами [1-4]. Результаты данной статьи дополняют эти исследования.

п.1. Введем скалярную функцию $w(t, x) \in C^2(I_0 \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+)$. Для данного $H > 0$ обозначим через $\omega(H)$ множество точек $(t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $w(t, x) \geq H$.

Далее будем предполагать, что это множество непустое и связанное для некоторого $H > 0$, причем $|w_x| > 0$
 $\forall (t, x) \in \omega(H)$, а множество точек $(t, x) \in I_0 \times \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $w(t, x) \leq H$, ограничено $|x| \leq M$, где M зависит от H . Через $\omega_{t_0}(H)$ обозначим множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $w(t_0, x) \geq H$, $t_0 \in I_0$.

Т е о р е м а 1. Пусть в (3) матрица B положительно определенная и существуют $w(t, x)$ и число $H > 0$ такие; что для (t, x, y) таких, что $t \in I_0$, $w(t, x) \geq H$, $w'_t + w'_x y \equiv 0$, выполняются неравенства:

$$(A_1) \quad w''_{tt} + 2w''_{tx} y + w'_x f(t, x, y) + w''_{xx} y y \geq 0,$$

$$(A_2) \quad w''_{tt} + 2w''_{tx} \alpha + w''_{xx} \alpha \cdot \alpha \geq 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n,$$

$$(A_3) \quad w'_t \geq 0,$$

$$(A_4) \quad -w'_t(t, x) + w'_x(t, x) \cdot B^{-1}(x-d) \geq 0 \quad x \in \omega_t(H).$$

(B₁) Кроме того, допустим, что для любого $M > 0$ и $c \in (0, \tau)$ найдется $N_c > 0$ такое, что если $x(t)$, $t \in [c, \tau]$, есть любое решение уравнения

$$x'' = f(t, x, x') \cdot \lambda_c(t), \quad \lambda_c \in L([c, \tau]; [0, 1]),$$

удовлетворяющее неравенству $|x(t)| \leq M \quad \forall t \in [c, \tau]$, то выполняется неравенство $|x'(t)| \leq N_c \quad \forall t \in [c, \tau]$.

(B₂) Пусть также существует $h \in I_0$ такое, что

$$f(t, x, y) y \leq a(t) y^2 + b(t),$$

$\forall t \in (0, h)$, $|x| \leq M$, $|y| \leq 1$, где $a, b \in L(I_0)$, $b(t) \geq 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \exp(2 \int_s^t a(\alpha) d\alpha) b(s) ds = 0. \quad (4)$$

Тогда решение (I)-(3) существует.

При доказательстве теоремы I нам понадобятся две леммы.

Л е м м а I. Пусть выполняются условия (A_1) - (A_4) теоремы I. Тогда для любого решения задачи (I)-(3) справедливо $|x(t)| \leq M$, где M зависит от H .

Лемма I доказывается аналогично теореме I в работе [5].

Л е м м а 2. Пусть выполняются условия (B_1) и (B_2) теоремы I. Тогда для любого решения задачи (I)-(3), удовлетворяющего $|x(t)| \leq M$, справедливо $|x'(t)| \leq N$ $0 \leq t \leq \tau$, где N зависит от M .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x(t)$ решение задачи (I)-(3), $|x(t)| \leq M$ $t \in I$. Учитывая (2), найдется $h_0 > 0$ такое, что $|x'(t)| \leq 1$ при $t \in [0, h_0]$. Далее из условия (B_2) находим

$$|x'(t)|^2 \leq 2 \int_0^t \exp(2 \int_s^t a(\alpha) d\alpha) b(s) ds \leq 1, \quad t \in [0, h_1],$$

где $h_1 = \min(h_0, h)$. Теперь из условия (B_1) при $c = h_1$ найдем N_c . Обозначим $N = \max(1, N_{h_1})$. Получаем $|x'(t)| \leq N \quad \forall t \in I$ и

$$|x'(t)|^2 \leq 2 \int_0^t \exp(\int_s^t a(\alpha) d\alpha) b(s) ds,$$

при $t \in [0, h_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы I. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$x'' = f(t, x, x'), \quad (5)$$

$$x'(\nu) = 0, \quad x(\tau) + Bx'(\tau) = d, \quad (6)$$

где $\nu \in (0, \tau)$. Учитывая $f \in \text{Car}([\nu, \tau] \times \mathbb{R}^{2n})$, имеем, что решение (5), (6) существует для любого $\nu \in (0, \tau]$.

Обозначим эти решения через $x_j(t)$. Полученное семейство решений равномерно ограничено и равностепенно непрерывно на каждом компакте, содержащемся в I_0 . Следовательно, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $x(t)$, который удовлетворяет условию (3) и при $t \in I_0$ - уравнению (1). Нам необходимо показать, что $\lim_{t \rightarrow 0} x'(t) = 0$. Учитывая (β_2) , имеем

$$|x'_j(t)|^2 \leq 2 \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\alpha) d\alpha\right) b(s) ds \leq 2 \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\alpha) d\alpha\right) b(s) ds,$$

и в силу (4) имеем $\lim_{t \rightarrow 0} x'(t) = 0$. Доопределив $x'(t)$ в нуле как $x'(0) = 0$, получим решение задачи (1)-(3).

Теорема I доказана.

п.2. Исследуем задачу, часто встречающуюся в приложениях,

$$x'' + \frac{Kx'}{t} = \psi(t, x, x'), \quad (7)$$

$$x'(0) = 0, \quad x(t) + Bx'(t) = d, \quad (8)$$

где K - симметричная матрица $(K+E)x \cdot x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in C(I \times \mathbb{R}^{2n})$, $Bx \cdot x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$.

Пусть существует симметричная, положительно определенная матрица H и постоянная $m > 0$ такие, что для всех $t \in I$, $|x| \geq m$, $Hx \cdot y = 0$, $Hx \cdot Ky = 0$ выполняется

$$Hx \cdot \psi(t, x, y) + Hy \cdot y \geq 0.$$

Кроме того, для любого $M > 0$ существуют число $p \geq 0$ и положительная функция $q(s) \in C(\mathbb{R}_+)$ такие, что $q(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, $\exists^2 q(s)$ есть неубывающая функция, причем

$$|\psi(t, x, y)| \leq p(1 + |y|^2 q(|y|)),$$

$$\forall t \in I, |x| \leq M, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда решение (7), (8) существует.

Действительно, положив $w(t, x) = Hx \cdot x$, легко проверить, что выполняются условия $(A_1) - (A_4)$. Из [1, с. 76] вытекает условие (B_1) . Очевидно также выполнение условия (B_2) , и в силу теоремы I получаем существование решения (7), (8).

Покажем, что решение (7), (8) есть дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке $[0, \tau]$. Для этого необходимо $\lim_{t \rightarrow 0} x''(t) < \infty$.

Легко проверить, что решение (7), (8) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x'' = -\frac{\kappa}{t} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\kappa} [\psi(s) - \psi(0)] ds - \frac{\kappa}{t} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\kappa} \psi(0) ds + \psi(t),$$

где $\psi(s) = \psi(s, x(s), x'(s))$, $\psi(0) = \psi(0, x(0), 0)$,

или

$$x'' = -\frac{\kappa}{t} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\kappa} [\psi(s) - \psi(0)] ds + \kappa(\kappa + E)^{-1} \psi(0) + \psi(t).$$

Учитывая непрерывность $\psi(t)$, имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0} x''(t) = (\kappa + E)^{-1} \psi(0) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\kappa}{t} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\kappa} [\psi(s) - \psi(0)] ds,$$

где $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\kappa}{t} \int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^{\kappa} [\psi(s) - \psi(0)] ds \leq \frac{\|K\|}{1 + \lambda_0} \lim_{t \rightarrow 0} \max_{s \in [0, t]} |\psi(s) - \psi(0)| = 0$,

$\lambda_0 > -1$ - наименьшее собственное значение матрицы K .

Следовательно, $x'' \in C(I)$ и $x''(0) = (\kappa + E)^{-1} \psi(0, x(0), 0)$.

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 189 с.
2. Гаприндашвили Г.Д. О разрешимости в обобщенном и классическом смысле одной двухточечной краевой задачи для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Труды ин-та прикл.мат.им.И.Н.Веккуа. - 1986. - Т.17. - С.17-56.
3. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: ТГУ, 1975. - 352 с.
4. Лепин Л.А. Разрешимость нелинейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с особенностью// Нелинейные краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1985. - С.29-34.
5. Гризан Г.П. Об одной краевой задаче для систем ОДУ второго порядка// Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.155-121.

Поступила 15.09.88

УДК 517.927

А.И.Звягинцев

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СУММЫ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ

При рассмотрении краевой задачи химического катализа

$$d_1((1-u_2)u_1'' + u_1u_2'') = -a_1(1-u_1-u_2) + a_3u_1 +$$

$$+ u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N, \quad (1)$$

$$d_2(u_2u_1'' + (1-u_1)u_2'') = -a_2(1-u_1-u_2) + a_4u_2 +$$

$$+ u_1u_2(1+b_1u_1+b_2u_2)^N, \quad (2)$$

$$u_1'(-1) = u_2'(-1) = u_1'(1) = u_2'(1) = 0, \quad (3)$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2 > 0$; $b_1, b_2 > -1$; $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$; $\gamma \in \{1, 2\}$,

с физической точки зрения интерес представляют только решения $u_1(x), u_2(x)$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq u_1(x) \leq 1, \quad 0 \leq u_2(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1], \quad (4)$$

$$0 \leq u_1(x) + u_2(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1]. \quad (5)$$

В данной работе исследуется вопрос, при каких условиях решение задачи (1)-(4) удовлетворяет и оценкам (5).

Обозначим через Φ множество решений $u_1(x), u_2(x)$ задачи (1)-(4).

Т е о р е м а I. Пусть N - четно или хотя бы одно из чисел b_1, b_2 неотрицательно, а в случае $\gamma=2$ дополнительно выполнено условие

$$a_1 d_2 > a_2 d_1. \quad (6)$$

Тогда, если $(u_1, u_2) \in \Phi$, то для $u_1(x), u_2(x)$ справедливы оценки (5), то есть $u_1(x), u_2(x)$ является решением задачи (I)-(5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $(u_1, u_2) \in \Phi$ рассмотрим краевую задачу

$$v''(x) = -\frac{a_1}{d_1} (1-v(x)) - \frac{a_2}{d_2} (1-v(x))^\gamma + \frac{a_2}{d_1} u_1(x) + \frac{a_2}{d_2} u_2^N(x) + \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) u_1(x) u_2(x) (1 + b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x)), \quad (7)$$

$$v'(-1) = v'(1) = 0. \quad (8)$$

Эта краевая задача имеет по крайней мере одно решение

$$v_0(x) = u_1(x) + u_2(x),$$

так как уравнение (7) является суммой уравнений (I) и (2), предварительно деленных на d_1 и d_2 , соответственно.

Пусть $x_0 \in [-1, 1]$ - точка, в которой $v_0(x)$ принимает наибольшее значение, т.е.

$$v_0(x_0) = \max_{-1 \leq x \leq 1} v_0(x).$$

Докажем оценку

$$v_0(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1]. \quad (9)$$

Если предположить противное $v_0(x_0) > 1$, то из (7) следует, что

$$v_0''(x_0) > 0, \quad (10)$$

причем в случае $\delta^* = 2$ неравенство (10) следует из (6) и очевидной оценки $v_0(x_0) \leq 2$.

Если $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$, то в силу (8) и (10) имеем

$$v_0(x_0) > 1, \quad v_0'(x_0) = 0, \quad v_0''(x_0) > 0.$$

Следовательно, на концах отрезка $[-1, 1]$ функция $v_0(x)$ не может достигать максимума.

Если же $-1 < x_0 < 1$, то необходимо

$$v_0'(x_0) = 0, \quad v_0''(x_0) \leq 0,$$

что противоречит (10). Полученное противоречие доказывает неравенство (9). Оценка $v_0(x) \geq 0$ для $x \in [-1, 1]$ очевидна. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть N - четно или хотя бы одно из чисел b_1, b_2 неотрицательно, а в случае $\delta^* = 2$ дополнительно выполнено условие

$$a_3 d_1^{-1} \geq \begin{cases} d_2^{-1} (3a_2 - a_4) & , \text{ если } a_4 < 2a_2, \\ d_2^{-1} a_2^2 (a_4 - a_2)^{-1} & , \text{ если } a_4 \geq 2a_2. \end{cases} \quad (\text{II})$$

Тогда, если $(u_1, u_2) \in \Phi$, то для $u_1(x), u_2(x)$ справедливы оценки (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим краевую задачу

$$v''(x) = \left(\frac{a_1}{d_1} + \delta^* \frac{a_2}{d_2} \right) v(x) - \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} - \left(\sqrt{\frac{a_2}{d_2}} (u_1(x) + u_2(x)) \right)^{2\delta^* - 2} + \frac{a_3}{d_1} u_1(x) + \frac{a_4}{d_2} u_2^2(x) + \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) u_1(x) u_2(x) (1 + b_1 u_1(x) + b_2 u_2(x))^N, \quad (\text{I2})$$

$$v'(-1) = v'(1) = 0. \quad (\text{I3})$$

Поскольку соответствующая линейная однородная краевая задача

$$v'' = \alpha^2 v, \quad v'(-1) = v'(1) = 0, \quad (I4)$$

где $\alpha = \sqrt{a_1 d_1^{-1} + \gamma a_2 d_2^{-1}}$, имеет только нулевое решение, то (см., например, [1, с. 7]) задача (I2), (I3) имеет единственное решение $v_0(x)$, которое может быть представлено в виде

$$v_0(x) = \int_{-1}^1 G(x, t) F_f(t) dt,$$

где $G(x, t)$ - функция Грина задачи (I4) и

$$F_f(t) = -\frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} - \left(\sqrt{\frac{a_2}{d_2}} (u_1(t) + u_2(t)) \right)^{2\gamma-2} + \frac{a_3}{d_1} u_1(t) + \frac{a_4}{d_2} u_2(t) + \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) u_1(t) u_2(t) (1 + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t)).$$

Так как

$$G(x, t) = \begin{cases} -\frac{ch(a+at)}{a \operatorname{sh} 2a} ch(a-ax), & -1 \leq t \leq x, \\ -\frac{ch(a-at)}{a \operatorname{sh} 2a} ch(a+ax), & x \leq t \leq 1, \end{cases}$$

то непосредственным вычислением получаем

$$\int_{-1}^1 G(x, t) dt = -\alpha^{-2}.$$

Покажем, что для всех $t \in [-1, 1]$ имеет место неравенство

$$F_f(t) \geq -a_1 d_1^{-1} - \gamma a_2 d_2^{-1} = -\alpha^2. \quad (I5)$$

Учитывая оценки $0 \leq u_1(t), u_2(t) \leq 1$, неравенство (I5)

при $\gamma = 1$ очевидно, а при $\gamma = 2$ для его доказательства исследуем на минимум функцию

$$f(u, v) = -\frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} - \frac{a_2}{d_2} (u+v)^2 + \frac{a_2}{d_1} u + \frac{a_4}{d_2} v^2$$

в квадрате

$$\Pi = \{(u, v): 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}.$$

Поскольку $f''_{uu} = -2a_2 d_2^{-1} \neq 0$ и

$$f''_{uu} f''_{vv} - (f''_{uv})^2 = -4a_2 a_4 d_2^{-1} < 0,$$

то $f(u, v)$ не имеет точек экстремумов. На границе квадрата Π получаем очевидные оценки $f(0, v) \geq -a^2$, $f(u, 0) \geq -a^2$, и в силу (II)-оценки $f(1, v) \geq -a^2$, $f(u, 1) \geq -a^2$. Таким образом, для $(u, v) \in \Pi$ справедливо неравенство

$$f(u, v) \geq -a_1 d_1^{-1} - 2a_2 d_2^{-1}.$$

Но так как $F_2(t) \geq f(u_1(t), u_2(t))$, то отсюда вытекает оценка (I5) при $\gamma = 2$.

Учитывая отрицательность функции $G(x, t)$, из (I5) получаем

$$v_0(x) = \int_{-1}^1 G(x, t) F_2(t) dt \leq -a^2 \int_{-1}^1 G(x, t) dt = 1. \quad (I6)$$

Если обозначить $v(x) = u_1(x) + u_2(x)$, то, разделив уравнение (I) на d_1 и уравнение (2) на d_2 , а затем сложив их, получим уравнение (I2). Поскольку задача (I2), (I3) имеет единственное решение, то

$$v_0(x) = u_1(x) + u_2(x).$$

В силу (I6) получаем оценку (5). Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Пусть

$$m = \min \{1, (1+b_1)^N, (1+b_2)^N, (1+b_1+b_2)^N\},$$

$$M = \max \{1, (1+b_1)^N, (1+b_2)^N, (1+b_1+b_2)^N\},$$

$$a_1 d_1^{-1} + a_2 d_2^{-1} \geq a_3 d_1^{-1} + a_4 d_2^{-1} + (d_1^{-1} + d_2^{-1}) M, \quad (I7)$$

$$4a_3 a_4 d_1 d_2 \geq (d_1 + d_2)^2 m^2, \quad (I8)$$

а в случае $\gamma=2$ еще выполняется условие

$$a_1 d_2 > 2a_2 d_1. \quad (I2)$$

Тогда, если $(u_1, u_2) \in \Phi$, то для $u_1(x), u_2(x)$ справедливы оценки (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим краевую задачу (7), (8). Обозначив правую часть уравнения (7) через $f(x, v)$, для $\alpha(x) \equiv 0$ в силу (I7) имеем

$$\alpha''(x) \geq f(x, \alpha(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

а для $\beta(x) \equiv 1$ в силу (I8) имеем

$$\beta''(x) \leq f(x, \beta(x)), \quad x \in [-1, 1]. \quad (20)$$

Для доказательства неравенства (20) достаточно исследовать на минимум функцию

$$h(u, v) = a_3 d_1^{-1} u + a_4 d_2^{-1} v^\gamma + m (d_1^{-1} + d_2^{-1}) uv$$

в квадрате $\Pi = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$. Учитывая (I8), нетрудно показать, что $\min \{h(u, v) : (u, v) \in \Pi\} \geq 0$.

Из (7), (8) получаем

$$v'(x) = \int_{-1}^x f(t, v(t)) dt. \quad (21)$$

Положив

$$\varphi(x) = -(a_1 d_1' + a_2 d_2' + |m| d_1' + |m| d_2')(x+1),$$

$$\psi(x) = (a_3 d_1' + a_4 d_2' + M d_1' + M d_2')(x+1),$$

для $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\varphi(x) \leq \alpha'(x) = 0 = \beta'(x) \leq \psi(x).$$

Но поскольку при $\alpha(x) \leq v(x) \leq \beta(x)$, $x \in [-1, 1]$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} -a_1 d_1' - a_2 d_2' - |m|(d_1' + d_2') &\leq f(x, v(x)) \leq \\ &\leq a_3 d_1' + a_4 d_2' + M(d_1' + d_2'), \end{aligned} \quad (22)$$

то после интегрирования (22) с учетом (21) получаем неравенства $\varphi(x) \leq v'(x) \leq \psi(x)$. Отметим также, что имеют место равенства $\alpha'(-1) = \beta'(-1) = \alpha'(1) = \beta'(1) = 0$. Отсюда заключаем [2, с. 35], что задача (7), (8) имеет решение $v_0(x)$, причем для $x \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$0 \leq v_0(x) \leq 1, \quad \varphi(x) \leq v_0'(x) \leq \psi(x). \quad (23)$$

Так как соответствующая линейная однородная краевая задача (14) имеет только тривиальное решение, то решение краевой задачи (7), (8) при $\bar{y} = 1$ в силу линейности уравнения (7) единственно, а при $\bar{y} = 2$ может быть записано в виде

$$v(x) = \int_{-1}^1 G(x, t) F(t, v(t)) dt, \quad (24)$$

где $G(x, t)$ - функция Грина задачи (14) и

$$F(t, v(t)) = -a_1 d_1^{-1} - a_2 d_2^{-1} - a_2 d_2^{-1} v^2(t) + a_3 d_1^{-1} u_1(t) + \\ + a_4 d_2^{-1} u_2^2(t) + (d_1^{-1} + d_2^{-1}) u_1(t) u_2(t) (1 + b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t))^N.$$

Покажем, что при $\gamma = 2$ задача (7), (8) может иметь только одно решение $v(x)$, удовлетворяющее оценке

$$|v(x)| \leq 2, \quad x \in [-1, 1]. \quad (25)$$

Предположим, что существуют два различных решения $v_1(x)$, $v_2(x)$ задачи (7), (8) такие, что $\|v_1\| \leq 2$ и $\|v_2\| \leq 2$ (здесь $\|x\| = \sup \{|x(x)| : x \in [-1, 1]\}$). На основании (24) имеем

$$|v_1(x) - v_2(x)| \leq \frac{a_2}{d_2} \int_{-1}^1 |G(x, t)| \cdot |v_1^2(t) - v_2^2(t)| dt \leq \\ \leq \frac{a_2}{d_2} \|v_1 - v_2\| \int_{-1}^1 |G(x, t)| \cdot |v_1(t) + v_2(t)| dt \leq \\ \leq \frac{4a_2}{d_2} \|v_1 - v_2\| \int_{-1}^1 |G(x, t)| dt = \frac{4a_2 d_2^{-1}}{a_1 d_1^{-1} + 2a_2 d_2^{-1}} \|v_1 - v_2\|.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|v_1 - v_2\| \leq \frac{4a_2 d_1}{a_1 d_2 + 2a_2 d_1} \|v_1 - v_2\|,$$

которое в силу (19) невозможно. Полученное противоречие доказывает единственность решения $v(x)$ краевой задачи (7), (8), удовлетворяющего условию (25). Но в силу (23) условию (25) удовлетворяет решение $v_0(x)$. Следовательно, задача (7), (8), (25) имеет единственное решение $v_0(x)$. А так как задаче (7), (8), (25) удовлетворяет сумма $u_1(x) + u_2(x)$, то $v_0(x) = u_1(x) + u_2(x)$. Тогда из (23) следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Литература

1. Кигурадзе И.Т. Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. - М.: ВИНТИ, 1987. - Т.30. - С.3-103.
2. Васильев Н.И., Клоков Ю.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 163 с.

Поступила 17.09.88

Межвузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С. 83-90

УДК 517.927

А.И.Звягинцев, Л.Ф.Зубова, Д.Ю.Пономарев
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки, ЛГУ им.П.Стучки

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Рассмотрим краевую задачу, моделирующую реакцию окис-
ления на поверхности катализатора

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \psi(u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$u(x, 0) = a(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=-1} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0,$$

где $u = (u_1, u_2)$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$,

$$\psi_1 = \psi_1(u_1, u_2) = a_1(1 - u_1 - u_2) - a_3 u_1 - u_1 u_2,$$

$$\psi_2 = \psi_2(u_1, u_2) = a_2(1 - u_1 - u_2)^2 - a_4 u_2^2 - u_1 u_2,$$

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} d_1(1 - u_2) & d_1 u_1 \\ d_2 u_2 & d_2(1 - u_1) \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2 > 0$. Из физических соображений
функции $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ при $-1 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$
должны удовлетворять оценкам

$$0 \leq u_1(x, t) \leq 1, \quad 0 \leq u_2(x, t) \leq 1, \quad 0 \leq u_1(x, t) + u_2(x, t) \leq 1.$$

Исследуя стационарные решения этой задачи ($\frac{\partial u}{\partial t} = 0$), получаем краевую задачу Неймана для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u_1'' = \frac{u_1(d_1^{-1} \varphi_1(u_1, u_2) + d_2^{-1} \varphi_2(u_1, u_2)) - d_1^{-1} \varphi_1(u_1, u_2)}{1 - u_1 - u_2}, \quad (1)$$

$$u_2'' = \frac{u_2(d_1^{-1} \varphi_1(u_1, u_2) + d_2^{-1} \varphi_2(u_1, u_2)) - d_2^{-1} \varphi_2(u_1, u_2)}{1 - u_1 - u_2}, \quad (2)$$

$$u_1'(-1) = u_1'(1) = u_2'(1) = 0, \quad (3)$$

с дополнительными условиями

$$u_1(x) \geq 0, u_2(x) \geq 0, u_1(x) + u_2(x) \leq 1, \quad x \in [-1, 1]. \quad (4)^0$$

Чтобы получить условия существования решения задачи (I)-(4), мы предварительно для более общей краевой задачи

$$u'' = f_1(u, v), \quad (5)$$

$$v'' = f_2(u, v), \quad (6)$$

$$u'(a) = v'(a) = u'(b) = v'(b) = 0, \quad (7)$$

где $f_1, f_2: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$; $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$; $u, v: I \rightarrow \mathbb{R}$; $I = [a, b]$, докажем следующий результат.

Т е о р е м а I. Пусть существуют функции $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in C_2(I)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\alpha_1(x) \leq \beta_1(x)$ и $\alpha_2(x) \leq \beta_2(x)$ для всех $x \in I$;

2) $f_1, f_2 \in C(W)$, где $W \subset \mathcal{A}$ и

$$W = \{(u, v) : \alpha_1(x) \leq u \leq \beta_1(x), \alpha_2(x) \leq v \leq \beta_2(x), x \in I\};$$

3) $\alpha_1''(x) \geq f_1(\alpha_1(x), v(x))$ и $\beta_1''(x) \leq f_1(\beta_1(x), v(x))$ для $\alpha_2(x) \leq v(x) \leq \beta_2(x)$, $x \in I$;

4) $\alpha_2''(x) \geq f_2(u(x), \alpha_2(x))$ и $\beta_2''(x) \leq f_2(u(x), \beta_2(x))$
 для $\alpha_1(x) \leq u(x) \leq \beta_1(x)$, $x \in I$;

5) $\alpha_i'(a) \geq 0$, $\alpha_i'(b) \leq 0$, $\beta_i'(a) \leq 0$, $\beta_i'(b) \geq 0$ для $i=1, 2$.
 Тогда задача (5)-(7) имеет решение $u(x), v(x)$ такое,
 что для всех $x \in I$ выполняются неравенства

$$\alpha_1(x) \leq u(x) \leq \beta_1(x); \quad \alpha_2(x) \leq v(x) \leq \beta_2(x).$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$G_1(u, v) = f_1(\delta(\alpha_1(x), u, \beta_1(x)), \delta(\alpha_2(x), v, \beta_2(x))) - \\ - \delta(\alpha_1(x), u, \beta_1(x)),$$

$$G_2(u, v) = f_2(\delta(\alpha_1(x), u, \beta_1(x)), \delta(\alpha_2(x), v, \beta_2(x))) - \\ - \delta(\alpha_2(x), v, \beta_2(x)),$$

где функция $\delta(x, y, z)$ определяется следующим образом:

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} x, & y < x \leq z, \\ y, & x \leq y \leq z, \\ z, & x \leq z < y, \\ \frac{x+z}{2}, & x > z. \end{cases}$$

Ясно, что функции G_1, G_2 непрерывны и ограничены на всем множестве R^2 .

Исследуем краевую задачу

$$u'' = u + G_1(u, v), \quad (8)$$

$$v'' = v + G_2(u, v), \quad (9)$$

$$u'(a) = v'(a) = u'(b) = v'(b) = 0. \quad (10)$$

Поскольку соответствующая однородная система

$$u'' = u,$$

$$v'' = v$$

имеет только тривиальное решение, удовлетворяющее условиям (I0), то [I, с. 25] краевая задача (8)-(I0) имеет решение, которое обозначим через $u_0(x), v_0(x)$.

Покажем, что для всех $x \in I$ выполняются оценки

$$\alpha_1(x) \leq u_0(x) \leq \beta_1(x); \quad \alpha_2(x) \leq v_0(x) \leq \beta_2(x). \quad (II)$$

Докажем только неравенство

$$\alpha_1(x) \leq u_0(x), \quad (I2)$$

так как остальные неравенства (II) доказываются аналогично.

Пусть x_0 - точка максимума функции $\alpha(x) = \alpha_1(x) - u_0(x)$ на отрезке I , т.е.

$$\alpha(x_0) = \max_{x \in I} \alpha(x).$$

Если неравенство (I2) неверно, то $\alpha(x_0) > 0$, и из третьего условия теоремы следует, что

$$\begin{aligned} u_0''(x_0) &= u_0(x_0) + f_1(\alpha_1(x_0), \delta(\alpha_2(x_0), v(x_0), \beta_2(x_0))) - \\ &- \alpha_1(x_0) \leq u_0(x_0) + \alpha_1''(x_0) - \alpha_1(x_0). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\alpha''(x_0) > 0. \quad (I3)$$

В случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ на основании (I0), (I3) и пятого условия теоремы соответственно имеем

$$\alpha(a) > 0, \quad \alpha'(a) \geq 0, \quad \alpha''(a) > 0$$

или

$$\alpha(b) > 0, \quad \alpha'(b) \leq 0, \quad \alpha''(b) > 0.$$

Следовательно, на концах отрезка I функция $\alpha(x)$ не может достигать положительного максимума.

В случае $\alpha < x_0 < b$ необходимо выполнение условий

$$\alpha'(x_0) = 0, \quad \alpha''(x_0) \leq 0,$$

что противоречит (I3). Полученное противоречие доказывает оценку (I2).

Из неравенств (II) и определения функций G_1, G_2 следует, что при $u(x) = u_0(x)$, $v(x) = v_0(x)$ система (8), (9) совпадает с системой (5), (6). Значит, $u_0(x), v_0(x)$ является решением и краевой задачи (5)-(7). Теорема доказана.

С помощью теоремы I докажем теперь существование решения исходной задачи (I)-(4).

Т е о р е м а 2. Если выполнено условие

$$a_4 d_1 \leq (a_3 + 1) d_2, \quad (I4)$$

то задача (I)-(4) имеет решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через

$$v(x) = u_1(x) + u_2(x). \quad (I5)$$

Сложив уравнения (I) и (2), рассмотрим следующую краевую задачу.

$$u_2'' = \frac{u_2(d_1^{-1}e_1(v-u_2, u_2) + d_2^{-1}e_2(v-u_2, u_2)) - d_2^{-1}e_2(v-u_2, u_2)}{1-v}, \quad (I6)$$

$$v'' = -d_1^{-1}e_1(v-u_2, u_2) - d_2^{-1}e_2(v-u_2, u_2), \quad (I7)$$

$$u_2'(-1) = v'(-1) = u_2'(1) = v'(1) = 0. \quad (I8)$$

Полагая для всех $x \in [-1, 1]$

$$\alpha_1(x) = 0, \beta_1(x) = 1, \alpha_2(x) = 0, \beta_2(x) = 1 - \delta,$$

где $\delta \in (0, 1)$ и будет определен ниже, проверим выполнение условий теоремы I для задачи (I6)-(I8). Если считать, что $u_2 = u$, а правые части уравнений (I6), (I7) соответственно обозначить через $f_1(u_2, v)$, $f_2(u_2, v)$, то очевидно, что первое, второе и пятое условия теоремы I выполнены. Покажем, что третье и четвертое условия теоремы I тоже выполняются.

Для $0 \leq v(x) \leq 1 - \delta$, $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\alpha_1''(x) = 0 \geq -\alpha_2 d_2^{-1} (1 - v(x)) = f_1(\alpha_1(x), v(x)),$$

$$\beta_1''(x) = 0 \leq d_1^{-1} (a_1 + a_3 + 1) = f_1(\beta_1(x), v(x)).$$

В силу (I4) для $0 \leq u_2(x) \leq 1$, $x \in [-1, 1]$ имеем

$$\alpha_2''(x) = 0 \geq \left(\frac{a_4 - 1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) u_2^2(x) - \frac{a_3}{d_1} u_2(x) - \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} = f_2(u_2(x), \alpha_2(x)),$$

$$\beta_2''(x) = 0 \leq \left[\frac{(a_3 + u_2(x))(1 - u_2(x))}{d_1} + \frac{u_2(x)(a_4 u_2(x) + 1 - u_2(x))}{d_2} \right] -$$

$$- \delta \left(\frac{a_1 + a_3 + u_2(x)}{d_1} + \frac{a_2 \delta + u_2(x)}{d_2} \right) = f_2(u_2(x), \beta_2(x)).$$

Поскольку выражение в квадратных скобках строго положительно, то последнее неравенство выполняется для достаточно малых $\delta \in (0, 1)$. Взяв δ_0 достаточно малым, получаем, что третье и четвертое условия теоремы I тоже выполняются. Тогда по теореме I краевая задача (I6)-(I8) имеет решение $\bar{u}_2(x)$, $\bar{v}(x)$, причем для всех $x \in [-1, 1]$ справедливы неравенства

$$0 \leq \bar{u}_2(x) \leq 1, \quad 0 \leq \bar{v}(x) \leq 1 - \delta_0. \quad (I9)$$

Так как $\bar{u}_1(x) = v(x) - \bar{u}_2(x)$ является решением уравнения (I) и в силу (I8) удовлетворяет условиям

$\bar{u}_1'(-1) = \bar{u}_1'(1) = 0$, то $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ является решением краевой задачи (I)-(3). Из (I9) следует, что $\bar{u}_1(x) < 1$ для всех $x \in [-1, 1]$. Покажем, что функция $\bar{u}_1(x)$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. Пусть $x_0 \in [-1, 1]$ точка, в которой $\bar{u}_1(x)$ достигает минимума:

$$\bar{u}_1(x_0) = \min_{-1 \leq x \leq 1} \bar{u}_1(x).$$

Предположим, что $\bar{u}_1(x_0) < 0$. Тогда из (I), (I4), (I9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \bar{u}_1''(x_0) &< \frac{\bar{u}_1(x_0)}{1 - \bar{u}_1(x_0)} \left[\frac{a_3 + \bar{u}_2(x_0)}{d_1} (1 - \bar{u}_1(x_0)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_4 \bar{u}_2(x_0) + \bar{u}_1(x_0)}{d_2} \bar{u}_2(x_0) \right] < \frac{\bar{u}_1(x_0)}{1 - \bar{u}_1(x_0)} \left[\frac{a_3 + \bar{u}_2(x_0)}{d_1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_4}{d_2} \bar{u}_2^e(x_0) \right] \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Если $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$, то с учетом (I8), (20) имеем

$$\bar{u}_1(x_0) < 0, \quad \bar{u}_1'(x_0) = 0, \quad \bar{u}_1''(x_0) < 0.$$

Следовательно, на концах отрезка $[-1, 1]$ функция $\bar{u}_1(x)$ не может достигать отрицательного минимума. В случае же $x_0 \in (-1, 1)$ необходимо выполнение условий

$$\bar{u}_1'(x_0) = 0, \quad \bar{u}_1''(x_0) \geq 0,$$

что противоречит (20). Полученное противоречие доказывает оценку $\bar{u}_1(x) \geq 0$ для $x \in [-1, 1]$.

Таким образом, для функций $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$, которые являются решением краевой задачи (I)-(3), установили оценки

$$0 \leq \bar{u}_1(x) < 1, \quad 0 \leq \bar{u}_2(x) \leq 1, \quad 0 \leq \bar{u}_1(x) + \bar{u}_2(x) < 1$$

при всех $x \in [-1, 1]$. Следовательно, $\bar{u}_1(x)$, $\bar{u}_2(x)$ есть решение исходной задачи (I)-(4). Теорема доказана.

Литература

1. Васильев Н.И., Клоков Д.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Зинатне, 1978. - 183 с.

Поступила 19.09.88

Межаузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им. П. Стучки, 1989. - С. 91-99

УДК 517.927

Э.И. Лепина
ЛГУ им. П. Стучки

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗ МАКСИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В работе [1] доказаны 17 теорем о существовании максимального обобщенного решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

где $f \in \text{Car}([a, b] \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $H_{1,2} x = H_{1,2}(x(\alpha), x(\beta), x'(\alpha), x'(\beta))$, $H_{1,2} \in C(\mathbb{R}^2 \times \bar{\mathbb{R}}^2, \bar{\mathbb{R}})$, $h_{1,2} \in \bar{\mathbb{R}}$, α - обобщенная нижняя, а β - обобщенная верхняя функции. Условия существования состоят из принадлежности $H_{1,2}$ определенным классам монотонности и различных сочетаний дополнительных условий:

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\alpha(a) = \beta(a)$, | 2. $\alpha'(a) < \beta'(a)$, |
| 3. $\alpha'(a) = \beta'(a)$, | 4. $\alpha'(a) > \beta'(a)$, |
| 5. $\alpha(b) = \beta(b)$, | 6. $\alpha'(b) < \beta'(b)$, |
| 7. $\alpha'(b) = \beta'(b)$, | 8. $\alpha'(b) > \beta'(b)$. |

(Определения и обозначения смотрите в [1-2]).

Цель настоящей работы - при помощи примеров показать, что в [1] найдены все теоремы такого типа.

Приведем в сокращенной записи (см. [2]) все 17 базовых теорем.

ТВМО1 I--0-10+ ,

ТВМО2 II--I--0 I,

ТВМО3 ---0---0 2V3,

TBM04 -I0+-0+0 3v4,
 TBM05 ---0-0+0 3v4,
 TBM06 -0+0-0+0 3v4,
 TBM07 III+I-I0 I3,
 TBM08 II-+II-+ I5,
 TBM09 I-+I-0- I6vI7,
 TBM10 I-0-I-0- I7vI7,
 TBM11 I-+I-+ I7vI8,
 TBM12 -0+00-0- 36v37v46,
 TBM13 III+III+ I35,
 TBM14 I-I+I-I- I36vI37,
 TBM15 I-I-I-I- I36vI37,
 TBM16 I-I+I-I+ I37vI38,
 TBM17 IIIIIIII I357.

Если теоремы TBM03-TBM06, TBM09-TBM11 и TBM14-TBM16 записать в виде двух теорем, а теорему TBM12 - в виде четырех, то получим порождающие теоремы. При помощи замены (симметрии) $H_1 \leftrightarrow H_2$ и $t \rightarrow -t$ из порождающих теорем получается 78 максимальных теорем:

TM01 I--0-IO+,	TM02 -IO+I--0,
TM03 II-+I--0 I,	TM04 I--0II-+ I,
TM05 ---0---0 2,	TM06 -IO+-0+0 3,
TM07 ---0---0 3,	TM08 ---0-0+0 3,
TM09 -0+0-IO+ 3,	TM10 -0+0---0 3,
TM11 -0+0-0+0 3,	TM12 -IO+-0+0 4,
TM13 ---0-0+0 4,	TM14 -0+0-IO+ 4,
TM15 -0+0---0 4,	TM16 -0+0-0+0 4,
TM17 II-+I0+ 5,	TM18 -IO+II-+ 5,
TM19 I--00-0- 6,	TM20 --0+0-0- 6,
TM21 0-0-I--0 6,	TM22 0-0---0+ 6,
TM23 0-0-0-0- 6,	TM24 I--00-0- 7,
TM25 --0+--0+ 7,	TM26 --0+0-0- 7,
TM27 0-0-I-0 7,	TM28 0-0---0+ 7,
TM29 0-0-0-0- 7,	TM30 --0+--0+ 8,
TM31 III+I-I0 I3,	TM32 I-IOIII+ I3,
TM33 II-+II-+ I5,	TM34 I-+I-0- I6,
TM35 I-0-I-+ I6,	TM36 I-0-I-0- I6,

TM37 I--I--I 17,	TM38 I--I-I- 17,
TM39 I-0-I-- 17,	TM40 I-0-I-0- 17,
TM41 I--I--I 18,	TM42 -I--I-- 25,
TM43 -I+0-I+0 35,	TM44 -I+0-I-- 35,
TM45 -I--I+0 35,	TM46 -I--I-- 35,
TM47 -0+00-0- 36,	TM48 0-0--0+0 36,
TM49 -0+00-0- 37,	TM50 0-0--0+0 37,
TM51 -I+0-I+0 45,	TM52 -I+0-I-- 45,
TM53 -I--I+0 45,	TM54 -0+00-0- 46,
TM55 0-0--0+0 46,	TM56 -0+00-0- 47,
TM57 0-0--0+0 47,	TM58 II-I-I0I 57,
TM59 -I0III-I 57,	TM60 III+III+ 135,
TM61 I-I+I-I- 136,	TM62 I-I-I-I+ 136,
TM63 I-I-I-I- 136,	TM64 I-I+I-I+ 137,
TM65 I-I+I-I- 137,	TM66 I-I-I-I+ 137,
TM67 I-I-I-I- 137,	TM68 I-I+I-I+ 138,
TM69 II-III-I 157,	TM70 -I-I-I-I 257,
TM71 -I+I-I+I 357,	TM72 -I+I-I-I 357,
TM73 -I-I-I+I 357,	TM74 -I-I-I-I 357,
TM75 -I+I-I+I 457,	TM76 -I+I-I-I 457,
TM77 -I-I-I+I 457,	TM78 IIIIIIII 1357.

Теперь рассмотрим последовательно все порождающие теоремы (TG001 - TG028) работы [2] и при помощи примеров покажем, что теорем о существовании максимального обобщенного решения, не следующих из теорем TMOI-TM78, они не содержат.

Для теоремы TG001 II--+00 нам понадобятся следующие примеры:

ЕМОI ++000000 37.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $H_1 x = x(-1) + x(1)$. Тогда $x_1 = t$ и $x_2 = -t$ являются решениями краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), H_1 x = 0, 0 \leq x \leq \beta, \alpha \leq x \leq \beta. \quad (I)$$

Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = 1$ и $x_m(1) = 1$.

Но тогда $x_m = 1$ и не удовлетворяет граничному условию $H, x_m = 0$.

ЕМО2 00+00000 28.

Пусть $a = -1, b = 1, f = x, \alpha = -\cos^{-1} \varepsilon \cos \varepsilon t, \beta = \cos^{-1} \varepsilon \cos \varepsilon t$ (здесь и всюду далее $\varepsilon \in (0, +\infty)$ достаточно мало) и $H, x = \operatorname{cth} 1 x(1) - x'(-1)$. Тогда $x_1 = \operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ и $x_2 = -\operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ являются решениями краевой задачи (I). Аналогично предыдущему получаем, что максимального решения не существует.

ЕМО3 00+00000 26.

Пусть $a = -1, b = 1, f = x, \alpha = -1 - \varepsilon(t+1), \beta = 1 + \varepsilon(t+1)$ и $H, x = -x'(-1) + x'(1)$. Тогда $x_1 = \operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ и $x_2 = -\operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = 1$ и $1 \leq x_m(1) \leq 1 + 2\varepsilon$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H, x_m = 0$.

ЕМО4 +00+00000 28.

Этот пример получается из ЕМО2 заменой $t \rightarrow -t$.

Алгоритм исследования ТГ001 можно изобразить следующей схемой, смысл и содержание которой описывается ниже:

а 01 II+---00 ++000000 а02-а03

а 02 -I+---00 0+-000000 а04-а05

а 03 I+---00 +00+0000 а06-а07

а 04 ----+---00 00+0000 а08-а09

а 05 -I0+---00 ТМО2

а 06 ----+---00 а04

а 07 I+---00 ТМО1

а 08 --0+---00 ТМО2

а 09 ----0---00 ТМО1.

В строке а01 выписаны ТГ001 и пример ЕМО1, который показывает, что для ТГ001 не обязательно существует максимальное обобщенное решение. Все частные случаи ТГ001, для которых пример ЕМО1 не годится, являются частными случаями одной из теорем ТГ₁001 : -I+---00 и ТГ₂001 : I+---00. Эти теоремы записываются, соответственно, в

строках $\alpha 02$ и $\alpha 03$ вместе с примерами ЕМ02 и ЕМ04, которые показывают, что и для этих теорем не обязательно существует максимальное обобщенное решение. Все частные случаи теоремы $TG_{11} 001$, для которых пример ЕМ02 не подходит, являются частными случаями теорем $TG_{11} 001$: $---+---00$ и $TG_{12} 001$: $-10+---00$, записанных в строках $\alpha 04$ и $\alpha 05$. Теорема $TG_{21} 001$ и пример ЕМ04 из строки 03 приводят, аналогично, к теоремам $TG_{21} 001$: $---+---00$ и $TG_{22} 001$: $I--0---00$, записанных в строках $\alpha 06$ и $\alpha 07$. Далее теорема $TG_{11} 001$ и пример ЕМ03 из строки $\alpha 04$ приводят к строкам $\alpha 08$ и $\alpha 09$. Теорема $TG_{12} 001$ из строки $\alpha 05$ является частным случаем теоремы ТМ02 о существовании максимального обобщенного решения. Теорема строки $\alpha 06$ совпадает с теоремой строки $\alpha 04$. Теоремы, записанные в строках $\alpha 07$, $\alpha 08$ и $\alpha 09$, следуют из теорем ТМ01, ТМ02 и ТМ01 соответственно.

Таким образом, из теоремы $TG001$ новых теорем о существовании максимального обобщенного решения не получается.

Порождающие теоремы $TG002$: $I--0-10+$ и $TG003$: $II+I--0$ I совпадают, соответственно, с теоремами ТМ01 и ТМ03.

Для порождающей теоремы $TG004$: $-I+---0$ 2 аналогично предыдущему получаем:

в 01 $-I+---0$ 2 00+0000 В в 02- 603

6 02 $-10+---0$ 2 ТМ02

6 03 $-I-0---0$ 2 0+00000 2 604 -605

6 04 $---0---0$ 2 ТМ05

6 05 $-100---0$ 2 ТМ02.

Следовательно, теорема $TG004$ приводит к частным случаям теоремы ТМ02 и теореме ТМ05.

Для теоремы $TG005$: $-II+---10$ 3 понадобятся следующие примеры:

ЕМ05 00010000 27.

Пусть $\alpha = -1, \beta = 1, f = x, \alpha = 0, \beta = \cos \varepsilon(t-1)$
и $H, x = x'(1)(x'(1) - \text{cth } 2)$. Тогда $x_1 = \cos 2\varepsilon \cdot$
 $\cdot \text{ch}'^2 \text{ch}(t-1)$ и $x_2 = \text{sh}'^2 \text{sh}(t+1)$ являются решениями

краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = \cos 2\varepsilon$ и $x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

ЕМО6 0+-00000 37.

Пусть $\alpha = -\pi$, $\beta = \pi$, $f(x) = x + 2$ для $x \in (-\infty, -1]$,
 $f(x) = -x$ для $x \in [-1, 0]$, $f(x) = x$ для $x \in [0, +\infty)$, $\alpha = -2$, $\beta = \operatorname{sh} \pi$ и $H_1 x = x(\pi) + \operatorname{sh} \pi x'(-\pi)$. Тогда $x_1 = (\operatorname{sh} \pi \operatorname{ch}(t + \pi) - \operatorname{sh}(t - \pi))(1 + 2 \operatorname{ch} \pi)^{-1}$ и $x_2 = \sin t$ при $t \in [-\pi, 0]$,
 $x_2 = \operatorname{sh} t$ при $t \in [0, \pi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-\pi) = \operatorname{sh} \pi$, $x_m(\pi) = \operatorname{sh} \pi$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

ЕМО7 -00-0000 27.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f(x) = x$, $\alpha = 0$, $\beta = \cos \varepsilon(t-1)$ и $H_1 x = -\max\{0, x(-1)\} \max\{0, x'(1)\}$. Тогда $x_1 = \cos 2\varepsilon \operatorname{ch}^{-1} 2 \operatorname{ch}(t-1)$ и $x_2 = \operatorname{sh}^{-1} 2 \operatorname{sh}(t+1)$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = \cos 2\varepsilon$, $x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

ЕМО8 0+-00000 37.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f = x$, $\alpha = -1$, $\beta = 1$ и $H_1 x = \operatorname{cth} 1 x(1) - x'(-1)$. Тогда $x_1 = \operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ и $x_2 = -\operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $x_m(-1) = 1$ и $x_m(1) = 1$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 x_m = 0$.

ЕМО9 00-+0000 36.

Пусть $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $f = x$, $\alpha = -\operatorname{ch} \varepsilon(t+1)$, $\beta = \operatorname{ch} \varepsilon(t+1)$ и $H_1 x = -x'(-1) + \delta \varepsilon(x'(1))$, где $\delta \varepsilon(x) = x + \varepsilon$ для $x \in (-\infty, -\varepsilon]$, $\delta \varepsilon(x) = 0$ для $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ и $\delta \varepsilon(x) = x - \varepsilon$ для $x \in [\varepsilon, +\infty)$. Тогда $x_1 = \operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ и $x_2 = -\operatorname{sh}^{-1} 1 \operatorname{sh} t$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение x_m су-

существует, то оно должно удовлетворять условиям $\chi_m(-1)=1$ и $1 \leq \chi_m(1) \leq \operatorname{ch} 2\varepsilon$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 \chi_m = 0$.

ЕМ10 00--0000 37.

Пусть $\xi \in (0, +\infty)$ - корень уравнения $\operatorname{sh}(\xi - \frac{\pi}{2}) = 1$, $\alpha = -\xi$, $\beta = \xi$, $f(x) = x+2$ для $x \in (-\infty, -1]$, $f(x) = -x$ для $x \in [-1, 0]$, $f(x) = x$ для $x \in [0, +\infty)$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$ и $H_1 \chi = -\chi'(-\xi) - \chi'(\xi) + \varphi_\xi(\chi'(\xi) - \operatorname{th} \xi)$, где $\varphi_\xi(x) = 0$ для $x \in (-\infty, -\varepsilon]$, $\varphi_\xi(x) = x + \varepsilon$ для $x \in [-\varepsilon, 0]$, $\varphi_\xi(x) = \varepsilon - x$ для $x \in [0, \varepsilon]$ и $\varphi_\xi(x) = 0$ для $x \in [\varepsilon, +\infty)$. Тогда $\chi_1 = 0$ и $\chi_2 = -\operatorname{sh}(t + \frac{\pi}{2})$ при $t \in [-\xi, -\frac{\pi}{2}]$, $\chi_2 = -\operatorname{cost}$ при $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и $\chi_2 = \operatorname{sh}(t - \frac{\pi}{2})$ при $t \in [\frac{\pi}{2}, \xi]$ являются решениями краевой задачи (I). Если максимальное решение χ_m существует, то оно должно удовлетворять условиям $\chi_m(-\xi) = 1$, $\chi_m(\xi) = 1$ и $0 \leq \chi_m$. Но тогда не удовлетворяется граничное условие $H_1 \chi_m = 0$.

Если в примерах ЕМ05, ЕМ07 и ЕМ10 сделать замену $t \rightarrow -t$, то получим примеры:

ЕМ11 00100000 38,

ЕМ12 0+00000 38,

ЕМ13 00++0000 37.

Если в примерах ЕМ11 и ЕМ12 сделать замену $H_1 \leftrightarrow H_2$, то получим примеры:

ЕМ14 00000010 38,

ЕМ15 00000+0 38.

Аналогично предыдущему для ТГ005 получаем схему:

c01 -11+--10 3 00100000 3 c02-c03

c02 -1+---10 3 0++00000 3 c04-c05

c03 -1+---10 3 0+-00000 3 c06-c07

c04 ----+--10 3 0+-00000 3 c08-c09

c05 -10+---10 3 00000010 3 c10-c11

c06 ----+--10 3 00+00000 3 c12-c13

c07 -10+---10 3 c05

c08 -0+---10 3 00++0000 3 c14-c15

c09 --0+---10 3 00000010 3 c16-c17

c10 -10+---0 3 00000+0 3 c18-c19

c11 -10+---0 3 TM02
 c12 --0+---10 3 00000010 3 c20-c21
 c13 ---0---10 3 00000010 3 c22-c23
 c14 -00+---10 3 00000010 3 c24-c25
 c15 -0+0---10 3 00000010 3 c26-c27
 c16 --0+---+0 3 00000+0 3 c28-c29
 c17 --0+---0 3 TM02
 c18 -10+0+0 3 TM06
 c19 -10+---00 3 TM02
 c20 --0+---+0 3 c16
 c21 --0+---0 3 TM02
 c22 ---0---+0 3 00000+0 3 c30-c31
 c23 ---0---0 3 TM07
 c24 -00+---+0 3 00000+0 3 c32-c33
 c25 -00+---0 3 TM02
 c26 -0+0---+0 3 00000+0 3 c34-c35
 c27 -0+0---0 3 TM10
 c28 --0+0+0 3 TM06
 c29 --0+---00 3 TM02
 c30 ---0-0+0 3 TM08
 c31 ---0---00 3 TM01
 c32 -00+0+0 3 TM06
 c33 -00+---00 3 TM02
 c34 -0+0-0+0 3 TM11
 c35 -0+0---00 3 TM09.

Следовательно, теорема **TG005** приводит к частным случаям теорем TM01, TM02, TM09 и к теоремам TM06-TM08, TM10, TM11.

Остальные порождающие теоремы работы [2] будут рассмотрены в следующих статьях.

Литература

1. Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка//Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения.- Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.131-139.
2. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.

Поступила 21.09.88

Межвузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С. 100-111

УДК 517.929

Е.П.Дударев

Пермский политехнический институт

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ И РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИО-
НАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННОЙ
ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В монографии Ю.Е.Бояринцева [1] исследована краевая задача

$$\mathcal{L}x = f, \quad l_x \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 [dG(s)]x(s) = \alpha$$

для двух типов систем линейных обыкновенных дифференциаль-
ных уравнений с произвольными матрицами коэффициентов, а
именно, для систем вида:

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} B(t)x(t) - A(t)x(t)$$

и

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - A(t)x(t),$$

где $A(t), B(t)$ - непрерывные на $[0,1]$ $m \times n$ -матрицы;
 $G(s)$ - $k \times n$ -матрица с ограниченными неубывающими на $[0,1]$
элементами, $\alpha \in \mathbb{R}^k$ - заданный вектор.

В работах [12,13] получены соответствующие утвержде-
ния для краевой задачи

$$\mathcal{L}x = f, \quad \ell x = L \quad (*)$$

в случае, когда $\mathcal{L}$ - линейная функционально-дифференциальная операция вида

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} B(t) \dot{x}(t) - \int_a^b K(t,s) \dot{x}(s) ds + A(t) x(a),$$

а $\ell: D_p^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - произвольный линейный ограниченный вектор-функционал.

Целью предлагаемой работы является дальнейшее изучение краевой задачи (*) в случае, когда линейная функционально-дифференциальная операция $\mathcal{L}$ имеет вид

$$(\mathcal{L}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - \int_a^b K(t,s) \dot{x}(s) ds + A(t)x(a).$$

Сметим, что при определенных ограничениях на матрицу B последняя операция сводится к операции, рассмотренной в [12, 13]. Однако в данной работе условия, налагаемые на матрицу B , значительно слабее, и поэтому краевая задача, исследуемая здесь, и краевая задача, исследованная в [12, 13], являются разными.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathbb{R}^n$ - линейное пространство n -мерных вещественных векторов $y = \text{col}\{y^1, \dots, y^n\}$ с нормой $|\cdot|$; L_p^n , $1 \leq p < \infty$, - пространство функций $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, с суммируемыми в степени p компонентами, $\|y\|_{L_p^n} = \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{1/p}$; L_∞^n - пространство функций $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с измеримыми и ограниченными в существенном компонентами $\|y\|_{L_\infty^n} = \max_{s \in [a, b]} |y(s)|$; D_p^n - пространство абсолютно непрерывных функций $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых $\dot{y} \in L_p^n$, $\|y\|_{D_p^n} = \|\dot{y}\|_{L_p^n} + |y(a)|$; $L_{m \times n}$ - линейное пространство матриц порядка $m \times n$; E_n - единичная $n \times n$ -матрица; I - тождественный оператор; запись $C \in L_p$ ($C \in D_p$) означает, что матрица C имеет столбцами элементы из

$$L_p^n(D_p^n).$$

1. Объект исследования. Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x)(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt}[B(t)x(t)] - (Kx)(t) + A(t)x(a) = \\ &= f(t), \quad -\infty < a \leq t \leq b < +\infty, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\ell x = \mathcal{L}, \quad (2)$$

где $B(t) \in M_{n \times n}$, $B \in L_\infty$; $K: L_p^n \rightarrow L_p^m$ ($1 \leq p < \infty$) - линейный интегральный оператор

$$(Ky)(t) = \int_a^b K(t,s)y(s)ds$$

с измеримым на $[a,b] \times [a,b]$ ядром $K(t,s)$ и удовлетворяющий следующему условию: если $p=1$, то K - слабо вполне непрерывный; если $1 < p < \infty$, то ядро $K(t,s)$ обладает одним из свойств $\mathcal{U}_p$ или $\mathcal{K}_p$ [2] (отметим, что каждое из этих условий обеспечивает полную непрерывность оператора K ([3], с.106)); $A(t) \in M_{m \times n}$, $A \in L_p$; $f \in L_p^m$; $\ell = \{\ell^1, \dots, \ell^n\}: D_p^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - линейный ограниченный вектор-функционал. Как известно, такой вектор-функционал имеет представление ([4], с.372):

$$\ell x \stackrel{\text{def}}{=} \{\ell^1 x, \dots, \ell^n x\} = \int_a^b \Phi_\ell(s)x(s)ds + \Psi_\ell x(a),$$

где $\Phi_\ell(s) \in M_{n \times n}$, $\Phi_\ell \in L_q$ ($\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$); Ψ_ℓ - постоянная $n \times n$ -матрица; $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^n$.

Под решением краевой задачи (1), (2) будем понимать такую функцию $x \in D_p^n$, что $Bx \in D_p^m$ и которая удовлетворяет почти всюду на $[a,b]$ уравнению (1) и условию (2).

Будем предполагать, что матрица B имеет такую полуобратную [1] матрицу $B^- \in D_p$, что краевая задача

$$(\mathcal{L}_B y)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{y}(t) - (K_1 \dot{y})(t) + A_1(t)y(a) = 0, \quad \ell_B y = 0, \quad (3)$$

где

$$(K_1 y)(t) = \int_a^b [K(t,s)B^-(s) + \int_s^b K(t,\tau) \frac{d}{d\tau} B^-(\tau) d\tau] y(s) ds,$$

$$A_1(t) = A(t)B^-(a) - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^-(s) ds,$$

$$\ell_B y = \int_a^b \Phi_\ell(s) B^-(s) \dot{y}(s) ds + \Psi_\ell B^-(a) y(a),$$

имеет только тривиальное решение.

Напомним ([1], с.31), что полуобратной матрицей к $m \times n$ -матрице B^- называется $n \times m$ -матрица U , удовлетворяющая матричному уравнению

$$BUB = B.$$

Общее решение этого уравнения представляется в виде

$$U = B^- + (E_n - B^-B)U + V(E_m - BB^-),$$

где B^- - любая полуобратная матрица к матрице B , а U и V - произвольные $n \times m$ -матрицы.

Краевые задачи вида (1), (2) часто встречаются в приложениях. Так, например, в [1] показано, что в случае, когда $\mathcal{L}$ - обыкновенная дифференциальная операция, краевые задачи вида (1), (2) возникают в теории автоматического регулирования, в теории электрических цепей; к таким задачам приводит также задача об управляемости системы управления.

Методика исследования краевой задачи (1), (2) состоит в переходе с помощью указанной выше полуобратной матрицы

B^- к решению эквивалентной задачи и в последующем использовании для исследования этой задачи результатов теории линейных функционально-дифференциальных уравнений [2, 5-10].

2. Эквивалентная формулировка задачи. Найти пару $\{y, v\}$, где $y \in D_p^m$, $v \in D_p^n$, удовлетворяющую почти всюду на $[a, b]$ системе:

$$(\mathcal{L}_B y)(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s) \dot{y}(s) ds - A(t) v(a), \quad a \leq t \leq b \quad (4)$$

$$[E_m - B(t)B^-(t)]y(t) = 0, \quad (5)$$

$$B(t)v(t) = 0, \quad (6)$$

и условием

$$\ell_B y = \mathcal{L} - \ell v. \quad (7)$$

Л е м м а I. Если x есть решение краевой задачи (1), (2), то пара

$$y(t) = B(t)x(t), \quad v(t) = [E_n - B^-(t)B(t)]x(t) \quad (8)$$

является решением краевой задачи (4)-(7). Обратно, если пара $\{y, v\}$, где $y \in D_p^m$, $v \in D_p^n$ есть решение краевой задачи (4)-(7), то

$$x(t) = B^-(t)y(t) + v(t) \quad (9)$$

является решением краевой задачи (1), (2), при этом имеют место соотношения (8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x - решение краевой задачи (1), (2). Образует функции (8) и непосредственной подстановкой убедимся, что пара $\{y, v\}$ удовлетворяет системе (4)-(6) и условию (7). Непосредственно из опреде-

ления полуобратной матрицы вытекает, что пара $\{u, v\}$ удовлетворяет уравнениям (5), (6) и условию (7). Подставляя (8) в (4), имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - \int_a^b [K(t,s)B^{-}(s) + \int_a^b K(t,\tau) \frac{d}{d\tau} B^{-}(\tau) d\tau] \frac{d}{ds} [B(s)x(s)] ds + \\ & + [A(t)B^{-}(a) - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) ds] B(a)x(a) = f(t) + \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [(E_n - \\ & - B^{-}(s)B(s))x(s)] ds - A(t)[E_n - B^{-}(a)B(a)]x(a), \end{aligned}$$

или, что то же самое:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - \int_a^b K(t,s)B^{-}(s) \frac{d}{ds} [B(s)x(s)] ds - \\ & - \int_a^b \int_a^b K(t,\tau) \frac{d}{d\tau} B^{-}(\tau) d\tau \frac{d}{ds} [B(s)x(s)] ds - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) ds B(a)x(a) - \\ & - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [(E_n - B^{-}(s)B(s))x(s)] ds + A(t)[B^{-}(a)B(a)x(a) + \\ & + (E_n - B^{-}(a)B(a))x(a)] = f(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем третье и четвертое слагаемые в левой части последнего равенства: в третьем слагаемом поменяем переменные s и τ местами, затем изменим порядок интегрирования — это возможно на основании теоремы Фубини ([11], с. 328) — и запишем третье и четвертое слагаемые под общим знаком интеграла. В результате получим:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b K(t,\tau) \frac{d}{d\tau} B^{-}(\tau) d\tau \frac{d}{ds} [B(s)x(s)] ds + \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) ds B(a)x(a) = \\ & = \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) \int_a^s \frac{d}{d\tau} [B(\tau)x(\tau)] d\tau ds + \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) B(a)x(a) ds = \\ & = \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} B^{-}(s) \left[\int_a^s \frac{d}{d\tau} [B(\tau)x(\tau)] d\tau + B(a)x(a) \right] ds = \\ & = \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [B^{-}(s)B(s)x(s)] ds, \end{aligned}$$

а, следовательно, (10) примет вид

$$\frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - \int_a^b K(t,s) B^{-1}(s) \frac{d}{ds} [B(s)x(s)] ds - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [B^{-1}(s) B(s)x(s)] - \\ - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [(E_n - B^{-1}(s) B(s))x(s)] ds + A(t)x(a) = f(t),$$

или, что то же самое:

$$\frac{d}{dt} [B(t)x(t)] - \int_a^b K(t,s) \frac{d}{ds} [B^{-1}(s) B(s)x(s) + (E_n - \\ - B^{-1}(s) B(s))x(s)] ds + A(t)x(a) = f(t),$$

откуда и следует, что пара $\{y, v\}$ из (8) является решением краевой задачи (4)-(7).

Обратно, если пара $\{y, v\}$, где $y \in D_p^m$, $v \in D_p^n$, есть решение краевой задачи (4)-(7), то из (4) и (7) сразу же следует, что x из (9) является решением краевой задачи (1), (2). Первое из соотношений (8) получается из (9) путем умножения левой и правой части равенства (9) на $B(t)$ прибавлением к обеим частям полученного равенства $-y(t)$ и последующим использованием (5) и (6). Второе из соотношений (8) получается из (9) путем подстановки в него $y = Bx$.

Лемма доказана.

3. Вспомогательная задача. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$(\mathcal{L}_B y)(t) = g(t), \quad \ell_B y = 0, \quad (II)$$

где $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ - некоторая функция из L_p^n .

Отметим, что сделанные предположения относительно B^{-1} и K обеспечивают фредгольмовость главной части $J - K_B$ оператора $\mathcal{L}_B$ и что краевая задача (II) исследована в [5-10]. В силу фредгольмовости задачи (3) задача (II) однозначно разрешима, и ее решение имеет представление

$$y(t) = (G_B g)(t) = \int_a^b G_B(t, s) g(s) ds,$$

где $G_B(t, s)$ - матрица Грина [9] полуоднородной задачи (II). В [10] получено представление для матрицы $G_B(t, s)$.

4. Представление решения краевой задачи. На основании леммы I решение краевой задачи (I), (2) сводится к решению краевой задачи (4)-(7).

Пусть пара $\{y, v\}$, где $y \in D_p^m$, $v \in D_p^n$, есть решение краевой задачи (4)-(7).

Функция y , являясь решением уравнения (4), удовлетворяющим условию (7), определяется соотношением

$$y(t) = Y_B(t)(\alpha - lv(t)) + \int_a^b G_B(t, s) [f(s) + K(s, \tau) \dot{v}(\tau) - A(s)v(a)] ds \quad (I2)$$

(см. [5]), где Y_B - фундаментальная матрица однородного уравнения $(L_B y)(t) = 0$, удовлетворяющая условию $l_B Y_B = E_m$; $G_B(t, s)$ - матрица Грина полуоднородной задачи (II).

Подставим правую часть (I2) в уравнение (5). Тогда получим

$$\begin{aligned} [E_m - B(t)B^{-1}(t)] \{ Y_B(t)(\alpha - \int_a^b \Phi_e(s) \dot{v}(s) ds - \\ - \Phi_e v(a)) + \int_a^b G_B(t, s) (f(s) + \int_a^b K(s, \tau) \dot{v}(\tau) d\tau - \\ - A(s)v(a)) ds \} = 0. \end{aligned}$$

Меняя в повторном интеграле на основании теоремы Фубини порядок интегрирования и вводя обозначения

$$K_B(t, \tau) = \int_a^b G_B(t, s) K(s, \tau) ds - \Phi_e(\tau),$$

$$f_b(t) = -Y_b(t)\alpha - \int_a^b G_b(t,s)f(s)ds,$$

$$A_b(t) = -\Psi_c - \int_a^b G_b(t,s)A(s)ds,$$

окончательно получим, что если пара $\{y, v\}$ есть решение задачи (4)-(7), то v удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} [E_m - B(t)B^*(t)] \left[\int_a^b K_b(t,\tau)\dot{v}(\tau)d\tau + A_b(t)v(a) - f_b(t) \right] = 0, \\ B(t)v(t) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Таким образом, доказана следующая

Л е м м а 2. Если пара $\{y, v\}$, где $y \in D_p^m$, $v \in D_p^n$, является решением краевой задачи (4)-(7), то функция v удовлетворяет почти всюду на $[a, b]$ системе (13).

Из этой леммы и леммы I вытекает

Т е о р е м а I. Если краевая задача (I), (2) разрешима, то ее общее решение имеет представление

$$\begin{aligned} x(t) = & B^*(t) \left[Y_b(t) \left(\alpha - \int_a^b \Phi_c(s)\dot{v}(s)ds - \right. \right. \\ & \left. \left. - \Psi_c v(a) + \int_a^b G_b(t,s)(f(s) + \int_a^b K(s,\tau)\dot{v}(\tau)d\tau - \right. \right. \\ & \left. \left. - A(s)v(a)ds \right) + v(t), \right. \end{aligned} \quad (14)$$

где $v(t)$ есть решение системы (13); Y_b - фундаментальная матрица однородного уравнения $(\mathcal{L}_b y)(t) = 0$, удовлетворяющая условию $\mathcal{L}_b Y_b = E_m$; $G_b(t, s)$ - матрица Грина полуоднородной задачи (II).

Так как первое уравнение системы (13) получено подстановкой правой части равенства (12) в (5), то рассматривая v как решение системы (13) и проводя рассуждения в обратном порядке со ссылкой на лемму I, получаем, что x

из равенства (I4) есть решение краевой задачи (I), (2), и, следовательно, справедливо утверждение, обратное теореме I:

Т е о р е м а 2. Если $v \in D_p^n$ является решением системы (I3), то функция $x \in D_p^n$, определяемая равенством (I4), есть решение краевой задачи (I), (2).

Б. О разрешимости краевой задачи. Второе уравнение системы (I3) всегда разрешимо, и его общее решение имеет представление (см. [I], с.32, леммы I и 2)

$$v(t) = [E_n - B^-(t)B(t)]x(t), \quad (I5)$$

где $x: [a, b] \rightarrow R^n$ - произвольная функция. А поэтому, если матрицы $B(t)$ и $B^-(t)$ таковы, что среди функций $x: [a, b] \rightarrow R^n$ имеется такая, для которой

$$[E_n - B^-B]x \in D_p^n, \quad (I6)$$

то получаем отсюда с учетом теорем I и 2 следующий критерий разрешимости краевой задачи (I), (2).

Т е о р е м а 3. Краевая задача (I), (2) разрешима тогда и только тогда, когда система

$$[E_m - B(t)B^-(t)] \left[\int_a^b K_b(t, \tau) \frac{d}{d\tau} [(E_n - B^-(\tau)B(\tau))x(\tau)] d\tau + \right. \quad (I7)$$

$$\left. + A_b(t)[E_n - B^-(a)B(a)]x(a) - f_b(t) \right] = 0, \quad a \leq t \leq b,$$

имеет решение x такое, что $[E_n - B^-B]x \in D_p^n$.

С л е д с т в и е I. Если $\text{rank } B(t) = m$ и матрицы $B(t)$ и $B^-(t)$ таковы, что среди функций $x: [a, b] \rightarrow R^n$ имеется такая, для которой выполнено (I6), то краевая задача (I), (2) разрешима при любых f и $\mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\text{rank } B(t) = m$, то в силу леммы 3 ([I], с.38) $E_m - B(t)B^-(t) = 0$, и, сле-

довательно, решением системы (17) является функция (16).

С л е д с т в и е 2. Если $\text{rank } B(t) = n$, то краевая задача (1), (2) разрешима при тех и только тех f и α , при которых $[E_m - B(t)B^-(t)]f_a(t) = 0$ на $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\text{rank } B(t) = n$, то в силу леммы 1 ([1], с.36) $E_n - B^-(t)B(t) = 0$, и, следовательно, система (17) имеет решение тогда и только тогда, когда

С л е д с т в и е 3. Если $\text{rank } B(t) \neq \min \{m, n\}$ то краевая задача (1), (2) разрешима тогда и только тогда, когда система линейных функционально-дифференциальных уравнений

$$\int_a^b K_b(t, \tau) \dot{x}(\tau) d\tau + A_b(t)x(a) = f_b(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (18)$$

имеет решение, представимое в виде (15).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\text{rank } B(t) \neq m$, то в силу леммы 3 ([1], с.38) $E_m - B(t)B^-(t) \neq 0$, и, следовательно, система (17) эквивалентна системе

$$\int_a^b K_b(t, \tau) \frac{d}{d\tau} [(E_n - B(\tau)B^-(\tau))x(\tau)] d\tau + A_b(t)[E_n - B^-(a)B(a)]x(a) = f_b(t), \quad a \leq t \leq b,$$

или, что то же самое, системе (18), где через $v(t)$ обозначено $[E_n - B^-(t)B(t)]x(t)$.

Литература

1. Бояринцев Ю.И. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1960. - 222 с.
2. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. О некоторых свойствах матрицы Грина// Краевые задачи. - Пермь, 1987.-С.6-15.
3. Забрейко П.П. и др. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968. - 448 с.

4. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. - М.: ИЛ, 1962. - 895 с.
5. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. О представлении решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц.уравнения. - 1973. - Т.9, № 6. - С.1026-1036.
6. Азбелев Н.В., Исламов Г.Г. Об одном классе функционально-дифференциальных уравнений// Дифференц.уравнения. - 1976. - Т.12, № 3. - С.417-427.
7. Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения// Дифференц.уравнения. - 1978. - Т.14, № 5. - С.771-797.
8. Рахматуллина Л.Ф. К вопросу о представлении решений линейных функционально-дифференциальных уравнений// Краевые задачи. - Пермь, 1979. - С.107-110.
9. Рахматуллина Л.Ф. Оператор Грина и регуляризация линейных краевых задач// Дифференц.уравнения. - 1979. - Т.15, № 3. - С.425-435.
10. Рахматуллина Л.Ф. К вопросу о свойствах матрицы Грина // Краевые задачи. - Пермь, 1983. - С.6-11.
11. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - М.: Наука, 1974. - 480 с.
12. Дударев Е.П. О разрешимости одной системы линейных функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной// Тезисы докладов III Уральской региональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" - Пермь: Изд-во Перм.ун-та, 1988. - С.30.
13. Дударев Е.П., Ламанова Л.Г. Об одной системе линейных функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной// Функционально-дифференциальные уравнения. - Пермь, 1988. - С.136-150.

Поступила 23.09.88

Межвузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.112-120

УДК 517.911

М.М.Адьюттов

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ
КОШИ ПРИ ОТСУТСТВИИ УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА

В связи с развитием теории нелинейных уравнений математической физики как основы описания всевозможных объектов в различных отраслях естествознания, стал актуальным ряд теоретических вопросов, недостаточно освещенных классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Одним из таких вопросов является следующий. Как известно, для единственности решения задачи Коши на правую часть уравнения накладываются ограничения типа условий Липшица по искомой функции и ее производным. В рассматриваемом же классе задач типичной является такая ситуация: задача Коши с нулевыми начальными данными имеет тривиальное и положительное решение. Еще одна часто встречающаяся постановка начальной задачи, требующая разработки, - случай, когда условия заданы в особой точке. С точки зрения приложений, наиболее интересны задачи, в которых нелинейности входят в степенной форме. Отметим, что в большинстве случаев нелинейности другого типа могут быть аппроксимированы степенными.

Полученные в настоящей статье результаты являются наиболее общими в указанной постановке и содержат как частный случай работу [2] и ряд результатов, установленных для конкретных прикладных задач [3-6]. В качестве объекта исследования выбрано уравнение второго порядка,

так как оно наиболее часто встречается на практике. На самом деле методика годится для уравнений любого порядка и при нарушении условия Липшица по любой производной.

Рассмотрим задачу

$$x'' = x^{\lambda} f(t, x, x') + F(t, x, x'), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x'(t_0) = 0, \quad (2)$$

где $t_0 \in \mathbb{R}$, $|\lambda| < 1$, $f(t, x, y)$ и $F(t, x, y)$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по второму и третьему аргументу при $(t, x, y) \in [t_0, t_0 + a] \times [-a, a]^2$ для некоторого $a > 0$. Дополнительно потребуем $f(t_0, 0, 0) > 0$ - это ограничение может быть ослаблено, о чем будет сказано в дальнейшем, и $F(t, 0, 0) \equiv 0$ - необходимое условие существования тривиального решения при $\lambda > 0$. Если $\lambda < 0$, то задача (1), (2) является сингулярной, и под решением понимается функция, непрерывная на некотором интервале $[t_0, t_0 + a_0]$, имеющая две непрерывные производные и удовлетворяющая уравнению (1) для всех $t \in (t_0, t_0 + a_0]$. Условия (2) понимаются при этом как пределы. Если же $\lambda > 0$, то для правой части (1) нарушено условие Липшица по искомой функции. Очевидно, что задача (1), (2) при $\lambda > 0$ имеет своим решением функцию $x(t) \equiv 0$ - тривиальное решение. Докажем, что при затребованных ограничениях задача (1), (2) имеет единственное положительное при $t \in (t_0, t_0 + a_0]$ решение.

Вначале получим априорные оценки решения исследуемой задачи.

Т е о р е м а I. Пусть $x(t)$ - решение задачи (1), (2), положительное в некоторой правой полуокрестности точки t_0 , тогда

$$x(t) = \int_0^{\frac{1}{1-\lambda}} x_{\lambda}(t)(1 + \varepsilon_0(t)), \quad (3)$$

$$x'(t) = \int_0^{1-\alpha} x'_\alpha(t)(1+\varepsilon_1(t)), \quad (4)$$

где $\varepsilon_0(t_0) = \varepsilon_1(t_0) = 0$, $f_0 = f(t_0, 0, 0)$,

$$x_\alpha(t) = \left(\frac{(1-\alpha)^2}{2(1+\alpha)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} (t-t_0)^{\frac{2}{1-\alpha}}.$$

Доказательство. Вначале докажем, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{F(t, x, x')}{x^\alpha} = 0, \quad (5)$$

если $x(t)$ — положительное в некоторой правой полуокрестности точки t_0 решение задачи (I), (2). Для $\alpha \leq 0$, учитывая, что $F(t, 0, 0) = 0$, это утверждение очевидно, поэтому в дальнейшем будем считать $\alpha > 0$.

Вычислим последовательно несколько пределов. В некоторой правой полуокрестности точки t_0 функция $x(t)$ возрастает, поэтому для t из этой полуокрестности

$$\frac{x(t)}{x'(t)} = \frac{\int_{t_0}^t x'(s) ds}{x'(t)} \leq \frac{x'(t)(t-t_0)}{x'(t)} = t-t_0.$$

Отсюда следует

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x(t)}{x'(t)} = 0. \quad (6)$$

Используя условие Липшица для функции F , получаем в правой полуокрестности точки t_0

$$\left| \frac{F(t, x, x')}{x^{\alpha-1} x'} \right| = \left| \frac{F(t, x, x') - F(t, 0, 0)}{x^{\alpha-1} x'} \right| \leq \frac{L(x+x')}{x^{\alpha-1} x'} = L(x^{1-\alpha} \frac{x}{x'} + x^{1-\alpha}).$$

С помощью этой оценки и (6) получаем

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{F(t, x, x')}{x^{\alpha-1} x'} = 0. \quad (7)$$

Докажем, что

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x'(t)}{x^\alpha(t)} = 0. \quad (8)$$

Для этого воспользуемся правилом Лопиталя, уравнением (I), формулами (6) и (7):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x'}{x^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x''}{\alpha x^{\alpha-1} x'} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x^\alpha f(t, x, x') + F(t, x, x')}{\alpha x^{\alpha-1} x'} = \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{x}{\alpha x'} f(t, x, x') + \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{F(t, x, x')}{\alpha x^{\alpha-1} x'} = 0. \end{aligned}$$

Переходим к доказательству (5).

$$\left| \frac{F(t, x, x')}{x^\alpha} \right| = \left| \frac{F(t, x, x') - F(t, 0, 0)}{x^\alpha} \right| \leq \frac{L(x+x')}{x^\alpha} = L \left(x^{1-\alpha} + \frac{x'}{x^\alpha} \right)$$

в некоторой правой полуокрестности t_0 . Из этой оценки и (8) следует справедливость (5).

Запишем (I) в виде

$$x'' = x^\alpha \left(f(t, x, x') + \frac{F(t, x, x')}{x^\alpha} \right).$$

Используя (5), получаем эквивалентную запись:

$$x'' = x^\alpha f_0(1 + \varepsilon_2(t)), \quad \text{где } \varepsilon_2(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_0^+.$$

Умножим последнее уравнение на $x'(t)$ и проинтегрируем от t_0 до $t > t_0$:

$$\frac{x'^2}{2} = \int_{t_0}^t f_0(1+\varepsilon_2(s)) x^\alpha(s) x'(s) ds = \frac{f_0}{1+\alpha} x^{1+\alpha}(1+\varepsilon_3(t)),$$

где $\varepsilon_3(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0^+$. Следовательно,

$$x' = \sqrt{\frac{2f_0}{1+\alpha}} x^{\frac{1+\alpha}{2}} (1+\varepsilon_4(t)), \quad \text{где } \varepsilon_4(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow t_0^+.$$

Интегрируя это уравнение, получаем формулы (3) и (4).

Из теоремы I непосредственно следует утверждение: для любого положительного решения задачи (I), (2) найдется правая полукрестность точки t_0 , в которой выполняются неравенства

$$\frac{1}{2} f_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x_\alpha(t) \leq x(t) \leq 2 f_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x_\alpha(t),$$

$$\frac{1}{2} f_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x'_\alpha(t) \leq x'(t) \leq 2 f_0^{\frac{1}{1-\alpha}} x'_\alpha(t).$$

При помощи этих неравенств следующая теорема может быть доказана аналогично теореме 2 из [2].

Т е о р е м а 2. Решение задачи (I), (2), положительное в некоторой правой полукрестности точки t_0 , существует.

Т е о р е м а 3. Положительное в некоторой правой полукрестности точки t_0 решение задачи (I), (2) единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что найдутся два различных решения $x(t), y(t)$, $t_0 < t \leq t_0 + a_0$. Если на некотором отрезке $[t_1, t_2] \subset [t_0, t_0 + a_0]$ выполняется $x(t) \equiv y(t)$ для любого $t \in [t_1, t_2]$, то из классических результатов единственности следует $x(t) \equiv y(t)$ для любого $t \in [t_0, t_0 + a_0]$. Поэтому в любой правой полукрестности t_0 найдутся точки t , что

$$x(t) \neq y(t).$$

Из теоремы (I) следует

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{y'(t)}{x'(t)} = 1. \quad (9)$$

Для любого $\tau > 0$ обозначим через θ ($\theta > 1$) наименьшее число такое, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$\frac{y'}{x'} \leq \theta, \quad \frac{x'}{y'} \leq \theta \quad \text{при } t \in [t_0, t_0 + \tau]. \quad (10)$$

Не уменьшая общности, мы можем считать, что в (10) равенство достигается при некотором τ для первого отношения, т.е.

$$\frac{y'(t_0 + \tau)}{x'(t_0 + \tau)} = \theta$$

(в противном случае мы поменяли бы местами x и y и при необходимости уменьшили бы τ). Из (9) следует, что τ всегда найдется, причем его можно взять сколь угодно малым.

Из уравнения (I) находим

$$\frac{y''}{y^\alpha} - \frac{x''}{x^\alpha} = f(t, y, y') - f(t, x, x') + \frac{F(t, y, y')}{y^\alpha} - \frac{F(t, x, x')}{x^\alpha},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha x'' + y^\alpha (f(t, y, y') - f(t, x, x')) + F(t, y, y') - \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha F(t, x, x') \leq \\ &\leq \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha x'' + y^\alpha K(|y - x| + |y' - x'|) + L(|y - x| + |y' - x'|) + F(t, x, x') \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $F(t, 0, 0) \equiv 0$, получаем

$$y'' \leq \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha x'' + Ky^\alpha \left(x \left|\frac{y}{x} - 1\right| + x' \left|\frac{y'}{x'} - 1\right|\right) + L \left(x \left|\frac{y}{x} - 1\right| + x' \left|\frac{y'}{x'} - 1\right|\right) +$$

$$+ L(x+x') \left| \left(\frac{y}{x} \right)^\alpha - 1 \right|.$$

Заметим, что если $y'(t)(x'(t))^{-1} \leq \theta$ для $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, то для этих же t

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\int_{t_0}^t y'(s) ds}{\int_{t_0}^t x'(s) ds} \leq \frac{\int_{t_0}^t \theta x'(s) ds}{\int_{t_0}^t x'(s) ds} = \theta,$$

и поэтому $y^\alpha = (yx^{-1})^\alpha x^\alpha \leq \theta^{|\alpha|} x^\alpha$. Таким образом,

$$y'' \leq \theta^{|\alpha|} x'' + K \theta^{|\alpha|} (x^{1+\alpha} + x^\alpha x')(\theta - 1) + L(x+x')(\theta - 1) + \\ + L(x+x')(\theta^{|\alpha|} - 1).$$

Интегрируем это неравенство от t_0 до $t \in t_0 + \tau$:

$$y' \leq \theta^{|\alpha|} x' + K \theta^{|\alpha|} \left((t-t_0) x^{1+\alpha} + \frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right) (\theta - 1) + \\ + L((t-t_0)x + x)(\theta - 1) + L((t-t_0)x + x)(\theta^{|\alpha|} - 1),$$

$$\frac{y'}{x'} \leq \theta^{|\alpha|} + \frac{x^{1+\alpha}}{x'} K \theta^{|\alpha|} \left(t-t_0 + \frac{1}{1+\alpha} \right) (\theta - 1) + \\ + \frac{x}{x'} L(t-t_0+1)(\theta - 1) + \frac{x}{x'} L(t-t_0+1)(\theta^{|\alpha|} - 1).$$

При $t = t_0 + \tau$ получаем

$$\theta \leq \theta^{|\alpha|} + \gamma_1(\tau)(\theta - 1) + \gamma_2(\tau)(\theta^{|\alpha|} - 1), \quad (II)$$

$$\text{где } \gamma_1(\tau) = \frac{x^{1+\alpha}(t_0+\tau)}{x'(t_0+\tau)} K \theta^{|\alpha|} \left(\tau + \frac{1}{1+\alpha} \right) + \frac{x(t_0+\tau)}{x'(t_0+\tau)} L(\tau+1)$$

$$\text{и } \gamma_2(\tau) = \frac{\chi(t_0 + \tau)}{\chi'(t_0 + \tau)} L(\tau + 1).$$

Из теоремы I, в частности из формул (3), (4) и (5), непосредственно следует

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \gamma_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \gamma_2(\tau) = 0. \quad (12)$$

Запишем (II) в виде

$$\frac{\theta - \theta^{|\alpha|}}{\theta - 1} \leq \gamma_1(\tau) + \gamma_2(\tau) \frac{\theta^{|\alpha|} - 1}{\theta - 1}.$$

Последнее неравенство не может быть справедливым для достаточно малых τ , что следует из (12), (9) и пределов

$$\lim_{\theta \rightarrow 1^+} \frac{\theta^{|\alpha|} - 1}{\theta - 1} = |\alpha|,$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 1^+} \frac{\theta - \theta^{|\alpha|}}{\theta - 1} = 1 - |\alpha|.$$

Полученное противоречие доказывает невозможность существования двух различных решений.

В [2] приведен пример, показывающий, что если не требовать условие Липшица для функции f , то задача (1), (2) может иметь два положительных решения.

Из теоремы единственности решения следует теорема о непрерывной зависимости положительного решения от правой части и начальных данных. Это легко может быть доказано аналогично тому, как это сделано в [1]. Поэтому следующую теорему приведем без доказательства.

Т е о р е м а 4. Положительное решение задачи (1), (2) непрерывно зависит от t_0 на некотором отрезке $[t_0, t_0 + \alpha_*]$, $\alpha_* > 0$.

В заключении отметим, что условие $f(t_0, 0, 0) > 0$

требовалось в доказательствах для получения асимптотики и априорных оценок решения. Если же удастся получить асимптотику положительного решения вблизи точки $t=t_0$ каким-нибудь другим способом, то от этого условия можно отказаться.

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970. - 289 с.
2. Адъютов М.М., Клоков Ю.А. О единственности положительного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С.3-11.
3. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Безударное сжатие конечной массы газа плоским поршнем при произвольном распределении энтропии// Ин-т прикл.мат.АН СССР. Препринт № 151. М., 1984. - 27 с.
4. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. О некоторых сингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифф.уравнения. - 1987. - Т.23, № 7. - С.1278-1282.
5. Адъютов М.М. Теорема существования решения краевой задачи для системы двух дифференциальных уравнений второго порядка// Дифф.уравнения. - 1986. - Т.22, № 7. - С.1129-1134.
6. Лепин Л.А. Счетный спектр собственных функций нелинейного уравнения теплопроводности с распределенными параметрами// Дифф.уравнения. - 1986. - Т.24, № 7. - С.1226-1234.

Поступила 25.09.88

Межвузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С. 121-124

УДК 517.956

Е.В.Мамонтов
РПИ

О РАВНОВЕСНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ
ПРОИЗВОДНЫМИ

Рассмотрим уравнение

$$D(x)y = y - f(x), \quad (1)$$

где $x \in R^m$, $R = (-\infty, \infty)$, $m \geq 1$, $y \in R^n$, $n \geq 1$, $f: R^m \rightarrow R^n$,
 $f \in C^\infty(R^m)$. $D(x)$ - дифференциальный линейный опе-
ратор с частными производными по компонентам вектора x и
коэффициентами, являющимися действительными матрицами раз-
мера $n \times n$, элементы которых определены на R^m и принадле-
жат классу $C^\infty(R^m)$. Предположим, что все компоненты
вектора $f(x)$ и элементы матриц - коэффициентов оператора
 $D(x)$ - ограничены на R^m и их всевозможные частные
производные всех порядков также ограничены на R^m . Отсю-
да, очевидно, следует, что для каждого $k = 0, 1, 2, \dots$ величи-
на $C_k < \infty$, где

$$C_k = \sup_{x \in R^m} \{ \| [D(x)]^k f(x) \| \}, \quad (2)$$

а $\| \cdot \|$ - какая-либо норма векторов.

На R^m введем обозначение

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [D(x)]^k f(x). \quad (3)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема I. Пусть при принятых выше предположениях

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty. \quad (4)$$

Тогда на множестве R^m функция ψ определена, ограничена и является решением уравнения (I).

Доказательство. В силу соотношений (2) и (4) ряд в правой части равенства (3) сходится равномерно относительно $x \in R^m$. Поэтому функция ψ определена и ограничена на R^m . Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} [D(x)]^{k+1} f(x)$.

В силу соотношений (2) и (4) он сходится равномерно относительно $x \in R^m$. При любом $x \in R^m$ его можно представить в виде $D(x) \sum_{k=0}^{\infty} [D(x)]^k f(x)$, откуда ввиду равенства (3) вытекает, что

$$D(x)\psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} [D(x)]^{k+1} f(x), \quad (5)$$

и, следовательно, вектор $D(x)\psi(x)$ определен на R^m . Учитывая это и выражения (3) и (5) и подставляя в уравнение (I) вместо y величину $\psi(x)$, нетрудно убедиться в том, что на множестве R^m функция ψ является решением уравнения (I). Этим доказательство завершено.

Из доказанной теоремы вытекает следствие.

С л е д с т в и е I. Пусть выполняется условие теоремы I. Предположим, что функции f и D периодичны по каким-либо компонентам вектора x с некоторыми периодами.

Тогда решение ψ также периодически по тем же компонентам вектора x с теми же периодами.

Доказательство очевидно ввиду выражения (3).

Не представляет труда доказательство и следующих теоремы и следствия.

Т е о р е м а 2. Пусть выполняется условие теоремы I. Тогда функция ψ является единственным ограниченным на $\mathbb{R}^m$ решением уравнения (I) в том и только в том случае, когда уравнение

$$D(x)\bar{x} = \bar{x}, \quad (6)$$

где $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, не имеет нетривиальных ограниченных на $\mathbb{R}^m$ решений.

С л е д с т в и е 2. Пусть выполняется условие следствия I. Тогда функция ψ является единственным периодическим по указанным в условии компонентам вектора x с упомянутыми там же периодами в том и только в том случае, когда уравнение (6) не имеет нетривиальных периодических по этим компонентам с этими периодами решений.

Если оператор $D(x)$ нильпотентный на $\mathbb{R}^m$ с индексом нильпотентности i , то ряд в правой части равенства (3) переходит в выражение $\sum_{k=0}^{i-1} [D(x)]^k f(x)$, и, как нетрудно убедиться с помощью приведенных выше теорем и следствий, эта величина является единственным ограниченным на $\mathbb{R}^m$ решением уравнения (I), при наличии периодичности функций f и D - единственным периодическим его решением.

Решение (3) уместно называть равновесным решением неавтономной системы уравнений (I), поскольку в случае, если в этой системе функция f постоянная, указанное решение также постоянное и его значение является положением равновесия такой системы.

Отметим, что формула (3) указывает весьма простой способ вычисления решения ψ . На практике это решение часто удается представить лишь приближенно - некоторой частичной суммой ряда в правой части равенства (3). Однако

и такое представление может быть использовано в качестве приближения решений разнообразных краевых задач для системы уравнений (I).

Поступила 29.09.68

УДК 534.2

В.П.Андреев, В.В.Гудков
ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ИЗОТРОПНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ОСОБОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящей работе рассматривается задача об упругих колебаниях цилиндра с сечением в виде кольцевого сектора. Задача не столь глубоко исследована, как, например, аналогичная задача о распространении волн в цилиндре прямоугольного сечения (см. работу [1] и библиографию к ней). Построение решения проводится в цилиндрической системе координат методом рядов, т.е. представлением искомого решения в виде бесконечных сумм собственных функций.

1. Пусть в цилиндрической системе координат ось z направлена параллельно граням цилиндра, а поверхности

$$r = a, r = b, \varphi = \varphi_0, \varphi = -\varphi_0 \quad (1)$$

ограничивают его со сторон. В случае свободных гармонических колебаний уравнение движения записывается в виде:

$$\mu \Delta \vec{u} + \rho \omega^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = 0, \quad (2)$$

где λ и μ - упругие постоянные Ламэ, ρ - объемная плотность материала, ω - частота колебаний.

Введем обозначение $\delta = \text{div } \vec{u}$. Тогда, применяя к левой части уравнения (2) операцию div , получим урав-

нение Гельмгольца

$$\Delta \delta + \kappa^2 \delta = 0, \quad \kappa^2 = \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}. \quad (3)$$

Если δ — общее решение уравнения (3), то, подставив его в уравнение (2), получим систему неоднородных уравнений

$$\Delta \vec{u} + \frac{\rho \omega^2 \vec{u}}{\mu} = - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \text{grad } \delta. \quad (4)$$

Общее решение $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ этой системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= u - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \delta}{\partial x}, \\ u_y &= v - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \delta}{\partial y}, \\ u_z &= w - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial \delta}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5)$$

где (u, v, w) — общее решение соответствующей однородной системы

$$\Delta \vec{u} + \kappa_0^2 \vec{u} = 0, \quad \kappa_0^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}. \quad (6)$$

Вторые слагаемые в правых частях соотношений (5), как можно убедиться подстановкой, являются частными интегралами системы уравнений (4).

Таким образом, интегрирование уравнения (2) свелось к интегрированию уравнений (3) и (6), а общее решение уравнения (2) удалось выразить через четыре функции: δ, u, v, w . Но, учитывая определение $\delta = \text{div } \vec{u}$, независимыми являются только три из них. Действительно, из соотношений (5) находим:

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{\kappa^2} \Delta \delta.$$

Отсюда, благодаря (3), приходим к соотношению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

2. Задача о свободных колебаниях упругого тела заключается в получении периодически зависящих от времени решений уравнения (2), удовлетворяющих условиям отсутствия сил, действующих на поверхность тела (объемные силы исключены уже при выписывании уравнения движения (2)).

Компоненты тензора напряжений выражаются через компоненты тензора деформаций формулами:

$$\sigma_r = \lambda \delta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_z = \lambda \delta + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_{\varphi} = \lambda \delta + 2\mu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r} \right),$$

$$\tau_{r,\varphi} = \mu \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_{\varphi}}{\partial r} - \frac{u_{\varphi}}{r} \right),$$

$$\tau_{\varphi,z} = \mu \left(\frac{\partial u_{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad \tau_{r,z} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Здесь u_r, u_{φ}, u_z - радиальная, тангенциальная и осевая компоненты вектора смещения. Ограничиваясь рассмотрением смещений в плоскости сечения, перпендикулярного оси z , можно записать граничные условия задачи в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= 0, & \sigma_r|_{r=b} &= 0, \\ \tau_{r,\varphi}|_{r=a} &= 0, & \tau_{r,\varphi}|_{r=b} &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\delta_{r,\psi}|_{\psi=\pm\psi_0} = 0, \quad \tau_{r,\psi}|_{\psi=\pm\psi_0} = 0.$$

Следующий шаг заключается в представлении решения δ уравнения (3) рядом по собственным функциям и выписывании аналогичных рядов для u и v . Требование, чтобы δ, u, v удовлетворяли граничным условиям, приводит нас к системам линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов рядов.

В настоящей работе мы остановимся лишь на процедуре построения общего решения задачи Дирихле для уравнения (3) в цилиндрической системе координат и на методике нахождения собственных чисел.

3. Пусть требуется найти функцию $\delta(r, \psi)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial \psi^2} + \kappa^2 \delta = 0 \quad (9)$$

внутри области и принимающую на границе области значения:

$$\begin{aligned} \delta(a, \psi) &= F_1(\psi), & -\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ \delta(b, \psi) &= F_2(\psi), & -\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0, \\ \delta(r, \psi_0) &= G_1(r), & a \leq r \leq b, \\ \delta(r, -\psi_0) &= G_2(r), & a \leq r \leq b. \end{aligned} \quad (10)$$

Методом разделения переменных находим частный интеграл уравнения (9)

$$\delta_0(r, \psi) = (A \cos \psi + B \sin \psi) (C J_\nu(\kappa r) + D Y_\nu(\kappa r)), \quad (11)$$

где ν^2 — постоянная разделения.

Чтобы получить решение задачи Дирихле (9), (10), представим искомое решение в виде суммы $\delta(r, \psi) + \delta_0(r, \psi)$,

где $\delta_0(r, \varphi)$ принимает заданные значения на ребрах цилиндра, а $\delta(r, \varphi) = 0$ на этих ребрах. Условие обращения в ноль решения (II) при $r = \alpha$ и $r = \beta$ приводит к системе уравнений

$$C J_\nu(\kappa \alpha) + D Y_\nu(\kappa \alpha) = 0,$$

$$C J_\nu(\kappa \beta) + D Y_\nu(\kappa \beta) = 0,$$

которая имеет нетривиальные решения лишь при собственных числах $\nu = \nu_m$, $m = 1, 2, \dots$. Соответствующие числам ν_m собственные функции запишем в следующем виде:

$$W_{\nu_m}(\kappa r, \kappa \alpha) = J_{\nu_m}(\kappa r) Y_{\nu_m}(\kappa \alpha) - Y_{\nu_m}(\kappa r) J_{\nu_m}(\kappa \alpha).$$

В результате найдена последовательность решений (II), обращающихся в ноль при $r = \alpha$ и $r = \beta$,

$$\delta_{\nu_m}(r, \varphi) = (C_m \cos \nu_m \varphi + D_m \sin \nu_m \varphi) W_{\nu_m}(\kappa r, \kappa \alpha).$$

Условие обращения в ноль решения (II) при $\varphi = \pm \varphi_0$ приводит к другой последовательности решений уравнения (9), обращающихся в ноль при $\varphi = \pm \varphi_0$,

$$\delta_{\alpha_n}(r, \varphi) = (A_n J_{\alpha_n}(\kappa r) + B_n Y_{\alpha_n}(\kappa r)) \sin \alpha_n(\varphi + \varphi_0),$$

где $\alpha_n = \pi n / 2 \varphi_0$, $n = 1, 2, \dots$.

Решение, принимающее заданные значения на ребрах цилиндра, можно взять в виде;

$$\delta_0(r, \varphi) = \frac{1}{2} \left[(\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0} + (\alpha_2 - \alpha_1) \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_0} \right] \frac{W_1(\kappa r, \kappa \beta)}{W_1(\kappa \alpha, \kappa \beta)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(\alpha_3 + \alpha_4) \frac{\cos \psi}{\cos \psi_0} + (\alpha_4 - \alpha_3) \frac{\sin \psi}{\sin \psi_0} \right] \frac{W_1(\kappa a, \kappa r)}{W_1(\kappa a, \kappa b)}$$

Теперь мы можем привести общий вид искомого решения задачи Дирихле (9), (10)

$$\delta(r, \psi) = \delta_0(r, \psi) + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_{\nu_m}(r, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\kappa_n}(r, \psi). \quad (12)$$

Отщепление функции $\delta_0(r, \psi)$ от искомого решения позволило построить ряды, которые можно почленно дифференцировать.

4. Изложим процедуру нахождения коэффициентов A_n, B_n, C_m, D_m . Пусть заданные граничные значения (10) непрерывны на всей поверхности, т.е.

$$F_1(\psi_0) = G_1(a) = \delta(a, \psi_0), \quad F_2(-\psi_0) = G_2(b) = \delta(b, -\psi_0),$$

$$F_2(\psi_0) = G_1(b) = \delta(b, \psi_0), \quad F_1(-\psi_0) = G_2(a) = \delta(a, -\psi_0).$$

Функция $\delta_0(r, \psi)$ принимает заданные значения на ребрах цилиндра, что позволяет определить коэффициенты α_i

$$\alpha_1 = F_1(-\psi_0), \quad \alpha_2 = F_1(\psi_0), \quad \alpha_3 = F_2(-\psi_0), \quad \alpha_4 = F_2(\psi_0).$$

Представим теперь, что граничные функции разложены по собственным функциям:

$$f_1(\psi) = F_1(\psi) - \delta_0(a, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \kappa_n (\psi + \psi_0),$$

$$f_2(\varphi) = F_2(\varphi) - \delta_0(b, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \alpha_n (\varphi + \varphi_0),$$

$$g_1(r) = G_1(r) - \delta(r, \varphi_0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m W_{\gamma_m}(\kappa r, \kappa a),$$

$$g_2(r) = G_2(r) - \delta(r, -\varphi_0) = \sum_{m=1}^{\infty} d_m W_{\gamma_m}(\kappa r, \kappa a).$$

Сравнивая построенное решение (12) с граничными значениями (13), находим уравнения для определения коэффициентов

$$A_n F_{\alpha_n}(\kappa a) + B_n Y_{\alpha_n}(\kappa a) = a_n,$$

$$A_n F_{\alpha_n}(\kappa b) + B_n Y_{\alpha_n}(\kappa b) = b_n,$$

$$C_m \cos \gamma_m \varphi_0 + D_m \sin \gamma_m \varphi_0 = c_m,$$

$$C_m \cos \gamma_m \varphi_0 - D_m \sin \gamma_m \varphi_0 = d_m.$$

Отсюда следует:

$$C_m = \frac{c_m + d_m}{2 \cos \gamma_m \varphi_0}; \quad D_m = \frac{c_m - d_m}{2 \sin \gamma_m \varphi_0};$$

$$A_n = \frac{a_n Y_{\alpha_n}(\kappa b) - b_n Y_{\alpha_n}(\kappa a)}{W_{\alpha_n}(\kappa a, \kappa b)}; \quad (14)$$

$$B_n = \frac{b_n Y_{\alpha_n}(\kappa a) - a_n Y_{\alpha_n}(\kappa b)}{W_{\alpha_n}(\kappa a, \kappa b)}.$$

Подставляя (14) в (12), приходим к искомому решению задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \delta(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{W_{\alpha_n}(kr, \kappa b)}{W_{\alpha_n}(\kappa a, \kappa b)} + b_n \frac{W_{\alpha_n}(\kappa a, kr)}{W_{\alpha_n}(\kappa a, \kappa b)} \right] \sin \alpha_n(\varphi + \varphi_0) + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left[c_m \frac{\sin \gamma_m(\varphi + \varphi_0)}{\sin 2\gamma_m \varphi_0} + d_m \frac{\sin \gamma_m(\varphi - \varphi_0)}{\sin 2\gamma_m \varphi_0} \right] W_{\gamma_m}(kr, \kappa a) + \delta_0(r, \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Ряды в (15) допускают двукратное почленное дифференцирование; коэффициенты разложений определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi} f_1(\varphi) \sin \alpha_n(\varphi + \varphi_0) d\varphi, \\ b_n &= \frac{1}{\varphi_0} \int_{-\varphi_0}^{\varphi} f_2(\varphi) \sin \alpha_n(\varphi + \varphi_0) d\varphi, \\ c_m &= \int_a^b g_1(r) W_{\gamma_m}(kr, \kappa a) \frac{dr}{r} \left(\int_a^b W_{\gamma_m}^2(kr, \kappa a) \frac{dr}{r} \right)^{-1}, \\ d_m &= \int_a^b g_2(r) W_{\gamma_m}(kr, \kappa a) \frac{dr}{r} \left(\int_a^b W_{\gamma_m}^2(kr, \kappa a) \frac{dr}{r} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения можно получить для функций u, v .

5. При численных расчетах решения задачи необходимо вычислять собственные числа γ_m , как корни трансцендентного уравнения

$$J_{\gamma}(\kappa a) Y_{\gamma}(\kappa b) - Y_{\gamma}(\kappa a) J_{\gamma}(\kappa b) = 0. \quad (16)$$

Следует отметить, что, кроме традиционных способов нахождения корней трансцендентных уравнений, мы применили к уравнению (16) метод стрельбы. Дело в том, что собственная функция $W_{\nu}(kr, \kappa a)$ является решением уравнения Бесселя, а собственное число ν_m есть такой индекс, при котором функция $W_{\nu}(kr, \kappa a)$ обращается в ноль в точке $kr = \kappa b$. Таким образом, численно решая на интервале $[\kappa a, \kappa b]$ задачу Коши для уравнения Бесселя, можно находить значения параметра ν , при которых $W_{\nu}(kr, \kappa a)$ обращается в ноль на правом конце интервала.

Литература

1. Вовк А.Е., Гудков В.В., Левченкова Т.В., Тюткин В.В.
Нормальные волны твердого прямоугольного волновода//
Акустический журнал. - 1980. - Т.26, № 3. - С.356-363.

Поступила 11.10.88

Межузовский сборник научных трудов
Теоретические и численные исследования краевых задач
РИГА: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С. 134-146

УДК 517.927.4

Я.В.Виржицкий

ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С
ОГРАНИЧЕНИЕМ $\alpha'(a) < \beta'(a)$

В работе продолжены исследования [1]. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x, x'), & (1) \\ H_0 x = H_0(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_0, & (2) \\ H_1 x = H_1(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_1, & (3) \\ \alpha \leq x \leq \beta & (4) \end{cases}$$

где $t \in I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $f \in \text{Car}(I \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $H_j \in C(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$, $h_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1$, $\alpha \in AG(I, \mathbb{R})$, $\beta \in BG(I, \mathbb{R})$, $x \in SG(I, \mathbb{R})$.

Здесь AG, BG, SG - обозначения обобщенных нижних и верхних функций и обобщенных решений уравнения (1) (см. [2]).

В работе использованы неравенства между α и β в точках a и b :

$$2. \alpha'(a) < \beta'(a), \quad 8. \alpha'(b) > \beta'(b),$$

имеющие номера 2 и 8. В дальнейшем наличие этих неравенств будем обозначать их номером. В общем случае используется обозначение U . Например, $U=2$.

Введем обозначения. Будем говорить, что функция H имеет тип монотонности $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где $\sigma_i \in \{0, -, +, 1\}$,

если H по i -му аргументу при $\zeta_i = 0$ не зависит, при $\zeta_i = -$ ($\zeta_i = +$) не возрастает (не убывает), а при $\zeta_i = 1$ ограничения не накладываются. Все функции типа монотонности $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ из $C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R})$ образуют класс монотонности $M(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$. В наших обозначениях $C(R^2 \times \bar{R}^2, \bar{R}) = M(1111)$. Введем также обозначения обобщенных классов монотонности $MG(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$, где $\zeta_i \in \{0, -, +, 1, A, B, C, D, E, F, K, L, X, Y\}$. Определим поведение функции $H \in MG(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ по первому аргументу для различных ζ_1 . Определения для остальных аргументов аналогичны. Для $\zeta_1 \in \{0, -, +, 1\}$, как в случае классов монотонности.

Для $\zeta_1 = X$ строго убывает, а для $\zeta_1 \in \{A, C, E, K\}$ определим равенствами:

$$MG(A\zeta_2\zeta_3\zeta_4) = MG(1\zeta_2\zeta_3\zeta_4) \setminus MG(-\zeta_2\zeta_3\zeta_4),$$

$$MG(C\zeta_2\zeta_3\zeta_4) = MG(-\zeta_2\zeta_3\zeta_4) \setminus MG(0\zeta_2\zeta_3\zeta_4),$$

$$MG(E\zeta_2\zeta_3\zeta_4) = MG(-\zeta_2\zeta_3\zeta_4) \setminus MG(X\zeta_2\zeta_3\zeta_4),$$

$$MG(K\zeta_2\zeta_3\zeta_4) = MG(E\zeta_2\zeta_3\zeta_4) \setminus MG(0\zeta_2\zeta_3\zeta_4).$$

Для $\zeta_1 \in \{Y, B, D, F, L\}$ $H \in MG(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$, если $-H \in MG(\zeta_5, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$ при $\zeta_5 \in \{X, A, C, E, K\}$ соответственно.

Обобщенные классы монотонности необходимы для описания свойств функции H_0 .

О п р е д е л е н и е. Набор (H_0, M, U) , состоящий из фиксированной функции H_0 , класса монотонности M и условий U , является классом разрешимости $((H_0, M, U) \in CS)$, если для любых $\alpha \in R$, $\beta \in (a, +\infty)$, $f \in \text{Car}(I \times R^2, R)$, $\lambda \in AG(I, R)$, $\beta \in BG(I, R)$, $H_1 \in M$, $h_0, h_1 \in \bar{R}$ таких, что выполнены неравенства $\alpha \leq \beta$, $H_j \alpha \leq h_j \leq H_j \beta$ и условия U , существует обобщенное решение краевой задачи (I)-(4).

Перейдем к изложению вспомогательных результатов,

используемых для доказательства необходимых условий того, что набор (H_0, M, U) является классом разрешимости.

Л е м м а I. Пусть $U \in \{2, 28\}$ и $(H_0, M, U) \in CS$. Тогда $H_0 \in MG(11-+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $U = 28$. Покажем, что при сделанных предположениях $H_0 \in MG(11-1)$.

Пусть $H_0 \in MG(11-1)$. Это означает, что найдутся $u_1, u_2 \in \mathbb{R}, u_{31}, u_{32}, u_4 \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $u_{31} < u_{32}$ и

$$H_0(u_1, u_2, u_{31}, u_4) < H_0(u_1, u_2, u_{32}, u_4). \quad (5)$$

В силу строгости неравенства (5) и непрерывности H_0 без ограничения общности можно считать $u_{31}, u_{32}, u_4 \in \mathbb{R}$.

Покажем, что можно построить конкретную краевую задачу вида (I)-(4) с H_0 такую, что выполнены все предпосылки существования обобщенного решения из определения класса разрешимости, но самого решения не существует. Полученное противоречие покажет несостоятельность предположения $H_0 \in MG(11-1)$.

Без ограничения общности считаем $u_1 = u_2 = u_{31} = u_4 = 0$ (см. [3], лемма I). Возьмем следующий интервал $[a, b]$, функции f, α, β (в дальнейшем такой набор будем называть парой (α, β)):

$$I = [0, 1], \quad f(t, x) = 0,$$

$$\alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = \min \{t, \varepsilon(1-t)\}, \quad \varepsilon > 0,$$

ε выбирается достаточно малым таким образом, чтобы ввиду (5) выполнялось $H_0 \alpha < H_0 \beta$.

Легко видеть, что для заданных α и β выполнены условия 2 и 8. Положим $h_0 = H_0 \beta, h_1 x \equiv 0, h_1 = 0$. Краевая задача вида (I)-(4) с отсутствием решения построена. Действительно, единственное решение уравнения (I), удовлетворяющее (4), есть α . В силу $H_0 \alpha < H_0 \beta = h_0$ граничное условие (2) не выполнено.

Заменой типа $t \rightarrow -t$ из приведенного доказательства

вытекает включение $H_0 \in MG(111+)$, что вместе дает $H_0 \in MG(11-+)$.

Так как случай $U=28$ предполагает выполнение $U=2$, то лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Леммы 2-5 доказываются по схеме доказательства леммы I, и поэтому изложение будет лаконичнее.

Л е м м а 2. Пусть $U \in \{2, 28\}$ и $(H_0, M, U) \in CS$. Если выполнено $H_0 \alpha \leq H_0 \beta$, то $M \subset M(11-+)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U=28$. Достаточно показать, что не может выполняться $M(00+0) \subset M$ и $M(000-) \subset M$. Рассмотрим включение $M(00+0) \subset M$. Построим пример конкретной краевой задачи с $H_0 \in M(00+0)$, для которой выполнены все предпосылки существования обобщенного решения из определения класса разрешимости, но решения не существует. Возьмем пару (α, β) из доказательства леммы I. Положим $h_0 = H_0 \alpha$, $h_1 = \chi'(\alpha)$, $h_2 = \beta'(\alpha)$. Легко видеть, что граничное условие $\chi'(\alpha) = \beta'(\alpha)$ не может быть выполнено в силу $\alpha'(\alpha) < \beta'(\alpha)$. Отметим, что выполнение и невыполнение (2) не влияет на несуществование решения краевой задачи.

Случай $M(000-) \subset M$ следует из рассмотрения случая $M(00+0) \subset M$, приведенного выше, путем замены типа $t \rightarrow -t$.

Для завершения доказательства леммы отметим, что $U=28$ предполагает выполнение $U=2$.

Л е м м а 3. Если $(H_0, M, U) \in CS$, $U \in \{2, 28\}$, $H_0 \in MG(111+)$, то $M \subset M(-1+1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $U=28$. Достаточно показать, что невозможны включения $M(+000) \subset M$ и $M(00-0) \subset M$.

$H_0 \in MG(1111)$ означает, что существуют u_{11}, u_{12} , $u_2 \in \mathbb{R}$, $u_3, u_4 \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $u_{11} < u_{12}$ и

$$H_0(u_{11}, u_2, u_3, u_4) < H_0(u_{12}, u_2, u_3, u_4). \quad (6)$$

В силу непрерывности H_0 и строгости неравенства в (6) будем считать $u_3, u_4 \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности будем полагать $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, $u_{12} = 1$. Построим пример требуемой краевой задачи с отсутствием решения. Возьмем пару (α, β) :

$$I = [0, 2 + \varepsilon + \varepsilon^3],$$

$$f(t, x) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ 12|x|^{1/2}, & t \in [1, 2 + \varepsilon), \\ 0, & t \in [2 + \varepsilon, 2 + \varepsilon + \varepsilon^3]. \end{cases}$$

$$\alpha(t) = 0,$$

$$\beta(t) = \min \{ \varepsilon t + \varepsilon - 1, (t - 2)^4, -\varepsilon t + \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \}, \quad \varepsilon > 0.$$

Положим $h_0 = H_0 \beta$, $h_1 x = \chi(\alpha)$, $h_1 = \alpha(\alpha)$. В силу непрерывности функции H_0 имеем $H_0 \alpha < H_0 \beta$ (при выборе достаточно малого ε). Полученная краевая задача вида (I)-(4) не имеет решения, так как для всех решений, удовлетворяющих условию $\chi(\alpha) = \alpha(\alpha)$ и $\alpha \leq x \leq \beta$, в силу непрерывности H_0 и $H_0 \alpha < H_0 \beta$ не выполнено условие $H_0 x = h_0$. Тем самым невозможность включения $M(+000) \subset M$ показана.

Аналогично на этой паре (α, β) показывается невозможность включения $M(00-0) \subset M$, полагая $h_1 x = \psi(x(\alpha))$, $h_1 = H_1 \alpha$, где

$$\psi(s) = \begin{cases} -s, & s < 0, \\ 0, & s \in [0, \varepsilon), \\ -s + \varepsilon, & s \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Лемма 4. Если $(H_0, M, U) \in CS$, $U \in \{2, 28\}$ и $H_0 \in MG(1A11)$, то $M \subset M(1-1-)$.

Доказательство аналогично доказатель-

ству леммы 3 на паре (α, β) :

$$I = [-\varepsilon^{-2}, 1], \quad f(t, x) = 0, \quad \alpha(t) = 0, \\ \beta(t) = \min \{ \varepsilon^2 t, 1 - \varepsilon t \}, \quad \text{где } \varepsilon \in (0, 1).$$

Лемма 5. Если $(H_0, M, U) \in CS$, $U = 2$ и $H_0 \in MG(111D)$, то $M \subset M(1-1-)$.

Доказательство. Следует показать, что невозможны включения $M(O+OO) \subset M$ и $M(OOO+) \subset M$.

Рассмотрим включение $M(O+OO) \subset M$. $H_0 \in MG(111D)$ означает, что найдутся $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $u_3, u_{41}, u_{42} \in \overline{\mathbb{R}}$ такие, что $u_{41} < u_{42}$ и

$$H_0(u_1, u_2, u_3, u_{41}) < H_0(u_1, u_2, u_3, u_{42}). \quad (7)$$

В силу непрерывности H_0 и строгости неравенства в (7) считаем $u_3, u_{41}, u_{42} \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности полагаем $u_1 = u_2 = u_{41} = 0$, $u_{42} = 1$. Построим пример требуемой краевой задачи с отсутствием решения. Возьмем пару (α, β) :

$$I = [0, 1], \quad f(t, x) = \lambda^2 x, \\ \alpha(t) = 0, \quad \beta(t) = (\lambda \operatorname{ch} \lambda)^{-1} \operatorname{sh} \lambda t, \quad \lambda > 0.$$

Дальнейшее доказательство аналогично лемме 4.

Лемма 6. Если $(H_0, M, U) \in CS$, $U = 2$ и $H_0 \in MG_1(-AC+)$, то $M \subset M(-111)$, где

$$MG_1(-AC+) = \{ F \in MG(-AC+) : (\exists u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in \overline{\mathbb{R}}, \\ \exists u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \overline{\mathbb{R}}) (u_{11} \leq u_{12}, u_{13} \in [u_{11}, u_{12}], u_{21} < u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}], u_{31} < u_{32}) \\ (F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = l_1 \leq l_2 = F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) \wedge \\ F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \in [l_1, l_2]) \}.$$

Доказательство. Если дано $H_0 \in MG_1(-\mathcal{AC}+)$, то без ограничения общности можно считать $u_{33}, u_{43} \in \mathbb{R}$. Для $u_{31}, u_{32}, u_{41}, u_{42}$ следует рассмотреть две возможности: конечные и бесконечные значения.

Рассмотрим случай $u_{31}, u_{32}, u_{41}, u_{42} \in \mathbb{R}$. Для доказательства леммы достаточно указать путь построения конкретных краевой задачи вида (I)-(4) и α, β, χ таких, что

$$\alpha(\alpha) = u_{11}, \alpha(\beta) = u_{21}, \alpha'(\alpha) = u_{31}, \alpha'(\beta) = u_{41},$$

$$\beta(\alpha) = u_{12}, \beta(\beta) = u_{22}, \beta'(\alpha) = u_{32}, \beta'(\beta) = u_{42},$$

$$\chi(\alpha) = u_{13}, \chi(\beta) = u_{23}, \chi'(\alpha) = u_{33}, \chi'(\beta) = u_{43},$$

при этом χ являлось единственным решением уравнения (I) с условиями $\chi(\beta) = u_{23}$ и $\alpha \leq \chi \leq \beta$.

Без ограничения общности будем считать $u_{13} = u_{23} = u_{33} = u_{43} = 0$ (см. лемму I в [3]). Тогда $u_{11} \leq u_{13}$, $u_{12} \geq u_{13}$, $i=1,2$. Опишем алгоритм построения. Строим α как отрезок прямой с условиями $\alpha(\alpha) = u_{11}$, $\alpha'(\alpha) = u_{31}$. Далее берем часть ветви решения $\alpha(t) = -c^2(t-t)^4$ уравнения $\chi'' = -12c/\chi^{1/2}$ при подходящих c и t . Необходимо следить, чтобы выполнялось $\alpha \leq 0$, а также соответствующее соотношение производных в точке пересечения прямой и $\alpha(t)$.

Аналогично строится $\alpha(t)$ от точки β . $\beta(t)$ строится аналогично $\alpha(t)$.

В случае бесконечного значения одной из величин используется модификация уравнения $\chi'' = -2\chi'^2$ и его решения $\chi(t) = t^2$.

Аналогично лемме 6 доказываются леммы:

Л е м м а 7. Если $(H_0, M, U) \in \mathcal{CS}$, $U=2$ и $H_0 \in MG_1(--KO)$, то $M \subset M(-111)$, где

$$MG_1(--KO) = \{F \in MG(--KO) : (\exists u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} & \exists u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{\mathbb{R}})(u_{11} \leq u_{12}, \\ & u_{13} \in [u_{41}, u_{42}], u_{21} < u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}], \\ & u_{31} < u_{32})(F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = \ell_1 \leq \ell_2 = \\ & = F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) \wedge \\ & F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \in [\ell_1, \ell_2]) \}. \end{aligned}$$

Л е м м а 8. Если $(H_0, M, U) \in CS$, $U=2$ и $H_0 \in MG_1(--CD)$, то $M \subset M(-111)$, где

$$\begin{aligned} MG_1(--CD) = \{ & F \in MG(--CD) : (\exists u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{22}, u_{23} \in \mathbb{R}, \\ & \exists u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \bar{\mathbb{R}})(u_{11} \leq u_{12}, \\ & u_{23} \in [u_{11}, u_{12}], u_{31} < u_{32})(F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, \\ & u_{41}) = \ell_1 \leq \ell_2 = F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) \wedge \\ & F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \in [\ell_1, \ell_2]) \}. \end{aligned}$$

Т е о р е м а 1. Пусть $U=2$. $(H_0, M, U) \in CS$ тогда и только тогда, если H_0 и M принадлежат одному из следующих сочетаний классов функций, соответственно (в первый класс входит H_0 , во второй - M):

- 1) $MG(AA-+)$, $M(--00)$,
- 2) $MG(A--0)$, $M(-10+)$,
- 3) $MG(A--D)$, $M(--00)$,
- 4) $MG(-AD+)$, $M(1--0)$,
- 5) $MG_1(-AC+)$, $M(---0)$,
- 6) $MG_2(-AC+)$, $M(1--0)$,
- 7) $MG(--00)$, $M(11-+)$,
- 8) $MG(--X0)$, $M(1111)$,
- 9) $MG_1(--K0)$, $M(-1-+)$,
- 10) $MG_2(--K0)$, $M(11-+)$,

$$II) MG(--OD), M(1--D),$$

$$I2) MG_1(--CD), M(---O),$$

$$I3) MG_2(--CD), M(1--O).$$

Доказательство. Достаточность. В силу леммы I имеем $H_0 \in MG(11-+)$. Возьмем разбиение

$$MG(11-+) = MG(AA-+) \cup MG(A--O) \cup$$

$$MG(A--D) \cup MG(-AO+) \cup$$

$$MG(-AC+) \cup MG(--OO) \cup$$

$$MG(--XO) \cup MG(--KO) \cup$$

$$MG(--OD) \cup MG(--CD).$$

Для некоторых элементов этого разбиения также возьмем следующие разбиения:

$$MG(-AC+) = MG_1(-AC+) \cup MG_2(-AC+),$$

где элементы разбиения определены в лемме 6,

$$MG(--KO) = MG_1(--KO) \cup MG_2(--KO),$$

где элементы разбиения определены в лемме 7,

$$MG(--CD) = MG_1(--CD) \cup MG_2(--CD),$$

где элементы разбиения определены в лемме 8.

В итоге получаем:

$$MG(11-+) = MG(AA-+) \cup MG(A--O) \cup MG(A--D) \cup$$

$$MG(-AO+) \cup MG_1(-AC+) \cup MG_2(-AC+) \cup$$

$$MG(--OO) \cup MG(--XO) \cup MG_1(--KO) \cup$$

$$MG_2(--KO) \cup MG(--OD) \cup MG_1(--CD) \cup$$

$$MG_2(--CD).$$

Рассмотрим каждый из элементов разбиения в предположении $(H_0, M, U) \in CS$.

Если $H_0 \in MG(AA-+)$, то в силу лемм 3, 4 и 2 имеем $M \subset M(---00)$. Пусть $H_0 \in MG(A--0)$. Тогда на основании лемм 2, 3 имеем $M \subset M(-10+)$. Если $H_0 \in MG(A--D)$, то $M \subset M(---00)$ на основании лемм 2, 3, 5. Для $H_0 \in MG(-A0+)$ из лемм 2 и 4 следует $M \subset M(1--0)$. Если $H_0 \in MG_1(-AC+)$, то $M \subset M(---0)$ в силу лемм 2, 4 и 6. Для $H_0 \in MG_2(-AC+)$ имеем $M \subset M(i--0)$ на основании лемм 2, 4. Если $H_0 \in MG(---00)$, то из леммы 2 получаем $M \subset M(11-+)$. Для $H_0 \in MG(--X0)$ при условии $U=2$, что означает выполнение неравенства $\alpha'(\alpha) < \beta'(\alpha)$, имеем неравенство $H_0\alpha > H_0\beta$, которое противоречит неравенству $H_0\alpha \leq H_0\beta$, поэтому ограничения на M получить невозможно. Следовательно, $M \subset M(1111)$. Если $H_0 \in MG_1(--K0)$, то из лемм 2 и 7 имеем $M \subset M(-1-+)$. Для $H_0 \in MG_2(--K0)$ на основании леммы 2 получаем $M \subset M(11-+)$. Пусть $H_0 \in MG(--0D)$. Тогда из лемм 2, 5 имеем $M \subset M(1--0)$. Для $H_0 \in MG_1(--CD)$ на основании лемм 2, 5 и 8 получаем $M \subset M(---0)$. Если $H_0 \in MG_2(--CD)$, то из лемм 2, 5 имеем $M \subset M(1--0)$.

Необходимость. Следует показать, что для сочетаний H_0 и M , описанных в I)-I3), для $U=2$ набор (H_0, M, U) является классом разрешимости. Используем следующее соображение. Если для H_0 из некоторого класса и для любого H_1 из другого класса M набор (H_0, H_1, U) является классом разрешимости, то и набор (H_0, M, U) является классом разрешимости. Таким образом, приведенное соображение дает возможность использовать теоремы работы [2].

Для H_0 и M из I)-5), 7), 9), II), I2) имеем $(H_0, M, U) \in CS$ на основании теорем [2] (следует рассмотреть теоремы с $U=\emptyset$ и $U=2$). Кроме того, учитываем, что $MG(AA-+) \subset M(11-+)$, $MG(A--0) \subset M(1--0)$, $MG(A--D) \subset M(1--+)$, $MG(-A0+) \subset M(-10+)$,

$$MG_1(-\mathcal{A}C+) \subset M(-1-+), \quad MG(--00) = M(--00),$$

$$MG_1(--K0) \subset M(---0), \quad MG(--0D) \subset M(--0+),$$

$$MG_1(--CD) \subset M(---+).$$

Для 8) никогда не выполнено в определении класса разрешимости неравенство $H_0\alpha \leq H_0\beta$, поэтому для $H_0 \in MG(--X0)$ считаем $(H_0, M, U) \in CS$ тривиально.

Для 6), 10), 13) доказательства будут даны в теоремах 2-4.

Теорема 2. Пусть $U=2$, $H_0 \in MG_2(-\mathcal{A}C+)$, $M \subset M(1--0)$. Тогда $(H_0, M, U) \in CS$.

Доказательство. Запишем $MG_2(-\mathcal{A}C+)$ в развернутом виде:

$$MG_2(-\mathcal{A}C+) = \left\{ F \in MG(-\mathcal{A}C+) : (\forall u_{11}, u_{12}, u_{13} \in \mathbb{R}, \forall u_{21}, u_{22}, u_{23} \in \mathbb{R}, \forall u_{31}, u_{32}, u_{33}, u_{41}, u_{42}, u_{43} \in \overline{\mathbb{R}}) (u_{11} \leq u_{12}, u_{13} \in [u_{11}, u_{12}], u_{21} < u_{22}, u_{23} \in [u_{21}, u_{22}], u_{31} < u_{32}) (F(u_{11}, u_{21}, u_{31}, u_{41}) = l_1 > l_2 = F(u_{12}, u_{22}, u_{32}, u_{42}) \vee F(u_{13}, u_{23}, u_{33}, u_{43}) \in [l_1, l_2]) \right\}.$$

Пусть заданы α, β и U такие, что $\alpha \leq \beta$. Полагая

$$\alpha(\alpha) = u_{11}, \quad \alpha(\beta) = u_{21}, \quad \alpha'(\alpha) = u_{31}, \quad \alpha'(\beta) = u_{41},$$

$$\beta(\alpha) = u_{12}, \quad \beta(\beta) = u_{22}, \quad \beta'(\alpha) = u_{32}, \quad \beta'(\beta) = u_{42},$$

$$u(\alpha) = u_{13}, \quad u(\beta) = u_{23}, \quad u'(\alpha) = u_{33}, \quad u'(\beta) = u_{43},$$

для $F \in MG_2(-\mathcal{A}C+)$ при $Fx = F(x(\alpha), x(\beta), x'(\alpha), x'(\beta))$, имеем $F\alpha > F\beta \vee Fx \in [F\alpha, F\beta]$.

Пусть $H_0 \in MG_2(-\mathcal{A}C+)$, $H_1 \in M(1--0)$, $U=2$, и пусть дана краевая задача вида (I)-(4). Покажем, что эта краевая задача при $h_0 \in [H_0\alpha, H_0\beta]$, $h_1 \in [H_1\alpha, H_1\beta]$ имеет обобщенное решение. Этим будет показано, что $(H_0, M(1--0), 2) \in CS$.

Построим последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$ такие,

что $\alpha_i \in \mathcal{A}G(I, \mathbb{R})$, $\beta_i \in BG(I, \mathbb{R})$, $\alpha'_i(a) \leq \beta'_i(a)$, $H_j \alpha_i \leq H_j \beta_i$, $j = 0, 1$. Пусть $\alpha_i = \alpha$, $\beta_i = \beta$. Если α_i и β_i уже построены, тогда α_{i+1} и β_{i+1} строим следующим образом.

Возьмем $u(t)$ — обобщенное решение (I) такое, что $\alpha_i \leq u \leq \beta_i$, $u(b) = \frac{1}{2}(\alpha_i(b) + \beta_i(b))$, $H_1 u = h_1$ (существует в силу теорем [2]). Из определения $H_0 \in MG_2(-\mathcal{A}C+)$ и $H_0 \alpha_i \leq H_0 \beta_i$ имеем $H_0 u \in [H_0 \alpha_i, H_0 \beta_i]$.

Полагаем $\alpha_{i+1} = \alpha_i$, $\beta_{i+1} = u$, если $u'(a) \geq \alpha'_i(a)$, и $\alpha_{i+1} = u$, $\beta_{i+1} = \beta_i$ — в противном случае. Отметим, что в обоих случаях $H_0 \alpha_{i+1} \leq H_0 \beta_{i+1}$.

Таким образом, построены последовательности $\{\alpha_i\}$ и $\{\beta_i\}$, которые имеют пределы (см. [2]) α_0 и β_0 . Для α_0 и β_0 выполнено $H_0 \alpha_0 \leq H_0 \beta_0$, $\alpha'_0(a) \leq \beta'_0(a)$, $\alpha_0(b) = \beta_0(b)$. Но тогда в силу $H_0 \in MG_2(-\mathcal{A}C+) \subset M(-1-+)$ получаем $H_0 \alpha_0 \geq H_0 \beta_0$, что вместе с неравенством $H_0 \alpha_0 \leq H_0 \beta_0$ дает $H_0 \alpha_0 = H_0 \beta_0$. Так как $\{\alpha_0, \beta_0\} \cap SG(I, \mathbb{R}) \neq \emptyset$, то решение найдено.

Аналогично доказываются теоремы:

Теорема 3. Пусть $u=2$, $H_0 \in MG_2(--KO)$, $M \in M(11-+)$. Тогда $(H_0, M, u) \in CS$.

Теорема 4. Пусть $u=2$, $H_0 \in MG_2(--CD)$, $M \in M(11-+)$. Тогда $(H_0, M, u) \in CS$.

Сформулируем теорему, получаемую из теоремы I заменой типа $t \rightarrow -t$.

Теорема 5. Пусть $u=8$. $(H_0, M, u) \in CS$ тогда и только тогда, если H_0 и M принадлежат одному из следующих сочетаний классов функций соответственно:

- | | | |
|----|----------------------------------|-------------|
| 1) | $MG(\mathcal{A}\mathcal{A}-+)$, | $M(--00)$, |
| 2) | $MG(-\mathcal{A}0+)$, | $M(1--0)$, |
| 3) | $MG(-\mathcal{A}C+)$, | $M(--00)$, |
| 4) | $MG(\mathcal{A}--0)$, | $M(-10+)$, |
| 5) | $MG_1(\mathcal{A}--C)$, | $M(--0+)$, |
| 6) | $MG_2(\mathcal{A}--C)$, | $M(-10+)$, |
| 7) | $MG(--00)$, | $M(11-+)$, |
| 8) | $MG(--0\mathcal{U})$, | $M(1111)$, |
| 9) | $MG_1(--0L)$, | $M(1--+)$, |

- I0) $MG_2(--OL), M(11-+),$
 II) $MG(--CO), M(-10+),$
 I2) $MG_1(--CD), M(---0),$
 I3) $MG_2(--CD), M(-10+),$

где $MG_1(\lambda--C), MG_2(\lambda--C), MG_1(--OL), MG_2(--OL), MG_1(--CD), MG_2(--CD)$ получаются из соответствующих обобщенных классов монотонности в 5), 6), 9), 10), 12), 13) теоремы I.

Литература

1. Виржицкий Я.В., Лепин А.Я., Лепин Л.А. Применение ЭВМ к исследованию обобщенной разрешимости двухточечных краевых задач// Докл.АН СССР. - 1988. - Т.299, № I. - С.22-26.
2. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.
3. Виржицкий Я.В. Необходимые и достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи// Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1987. - С.53-68.

Поступила 17.10.88

УДК 517.927

А.И.Колосов

Харьковский институт инженеров коммунального
строительства

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ
СВЫЧНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА

При исследовании эффектов локализации и образования структур в газовой динамике рассматривается следующая краевая задача со свободной границей [1]:

$$x'' = \frac{\varphi(t)}{x^2} \quad (0 < x < 1), \quad (I)$$

$$x(0) = a, \quad x(t_0) = x'(t_0) = 0.$$

$$x'(t) < 0 \quad (0 < t < t_0).$$

Под решением задачи (I) понимаем пару $(x(t), t_0)$:

$$(x(t), t_0) \in C^1[0, t_0] \cap C^2]0, t_0[\times]0, \infty[.$$

Выясним следующие вопросы.

Пусть задача (I) имеет решение при некотором $a_0 > 0$.

Имеет ли задача решение при a , близких к a_0 ?

Пусть задача (I) имеет решения при некоторых a_1 и a_2 ($0 < a_1 < a_2$). Имеет ли задача решение при всех $a \in]a_1, a_2[$?

Относительно функции $\varphi(t)$ всюду в дальнейшем предполагаем следующее:

- I. функция $\varphi(t) > 0$ при $0 < t < \infty$;
- II. функция $\varphi(t)$ непрерывна при $0 < t < \infty$;
- III. функция $\varphi(t)$ не возрастает при росте t ;
- IV. существует $\lim_{t \rightarrow 0} t^m \varphi(t)$ ($0 < m < 1$);
- V. при любых $\sigma \in]0, 1[$, $t \in]0, \infty[$

$$\varphi\left(\frac{1}{\sigma}t\right) > \sigma^2 \varphi(t).$$

В работе будут доказаны следующие теоремы:

Т е о р е м а 1 (единственности). При любом $\alpha > 0$ задача (I) не может иметь двух различных решений.

Т е о р е м а 2. Пусть $(x_1(t, \alpha_1), t_0(\alpha_1))$ и $(x_2(t, \alpha_2), t_0(\alpha_2))$ решения задачи (I) при различных α_1 и α_2 . Пусть $\alpha_1 < \alpha_2$.

Тогда $t_0(\alpha_1) < t_0(\alpha_2)$,

$$x_1(t, \alpha_1) < x_2(t, \alpha_2) \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_0(\alpha_1).$$

Т е о р е м а 3. Пусть задача (I) имеет решения при некоторых α_1 и α_2 ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$).

Тогда она имеет решения при всех $\alpha \in]\alpha_1, \alpha_2[$.

Т е о р е м а 4. Пусть задача (I) имеет решение при некотором $\alpha_0 > 0$. Тогда она имеет решения при всех $\alpha > 0$ из некоторой окрестности α_0 и $(x(t, \alpha), t_0(\alpha))$ непрерывная функция α .

Т е о р е м а 5. Пусть функция $\varphi(t)$ такова, что

$$\varphi\left(\frac{1}{\sigma}t\right) \geq \sigma^{2\mu} \varphi(t) \quad (0 < \mu < 1)$$

при любых $\sigma \in]0, 1[$, $t \in]0, \infty[$.

Тогда при каждом $\alpha > 0$ задача (I) имеет единственное решение, которое может быть получено методом итераций.

Для доказательства сформулированных теорем представим задачу (I) несколько в ином виде. Сделаем в задаче следующую замену переменных

$$x(t) = \alpha y(t), \quad (2)$$

В результате приходим к такой задаче:

$$\lambda y'' = \frac{\varphi(t)}{y^3}$$

$$y(0) = 1, \quad y(t_0) = y'(t_0) = 0, \quad (3)$$

$$y'(t) < 0 \quad (0 < t < t_0),$$

где

$$\lambda = \alpha^{1+\nu} \quad (4)$$

Положим

$$[y'(t)]^2 = u(y), \quad u(0) = 0. \quad (5)$$

$$\text{Тогда } y'(t) = -u^{1/2}(y),$$

$$t(y) = \int_y^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega, \quad y''(t) = \frac{1}{2} \frac{du}{dy}.$$

Из уравнения $\lambda y'' = \frac{\varphi(t)}{y^3}$ имеем

$$\lambda \cdot \frac{1}{2} \frac{du}{dy} = \varphi\left(\int_y^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega\right) \cdot \frac{1}{y^3},$$

$$\lambda u(y) = (\Gamma_1)(y) = 2 \int_0^1 \varphi\left(\int_s^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega\right) \frac{ds}{s^3}. \quad (6)$$

Л е м м а I. Оператор Γ обладает следующими свойствами:

$$1. \quad \Gamma K_1 \subset K(u_0), \quad u_0 = y^{1-\nu}$$

$$2. \quad u_1 \leq u_2 \Rightarrow \Gamma u_1 \leq \Gamma u_2 \quad (\forall u_1, u_2 \in K),$$

3. оператор Γ непрерывен на K .

4. оператор Γ u_0 -вогнут на $K(u_0)$.

Здесь K - конус неотрицательных функций из $C[0,1]$; K_1 - множество функций $u(y) \in K$ таких, что $u^{-1/2}(y)$ суммируема на $[0,1]$; $K(u_0)$ - множество функций из K , соизмеримых $u_0(y)$. (Определение $K(u_0)$, монотонного, u_0 -вогнутого оператора и других объектов теории положительных решений операторных уравнений, используемых в данной статье, имеются в [2]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Т.к. функция $\psi(t)$ неотрицательна, то оператор Γ каждую непрерывную и неотрицательную на $[0,1]$ функцию переводит в непрерывную неотрицательную функцию, т.е. $\Gamma K \subset K$. Покажем, что $\Gamma K_1 \subset K(u_0)$. Для этого достаточно показать, что

$$0 < \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\Gamma u)(y)}{y^{1-\gamma}} < \infty \quad (\forall u \in K_1).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\int_0^y \psi \left(\int_s^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega \right) \frac{ds}{s^\gamma}}{y^{1-\gamma}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\psi \left(\int_y^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega \right) \cdot \frac{1}{y^\gamma}}{(1-\gamma) \cdot \frac{1}{y^\gamma}} = \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \lim_{y \rightarrow 0} \psi \left(\int_y^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega \right) = \frac{1}{1-\gamma} \psi \left(\int_0^1 u^{-1/2}(\omega) d\omega \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Монотонность оператора Γ непосредственно следует из монотонности функции $\psi(t)$. Непрерывность оператора Γ следует из непрерывности функции $\psi(t)$.

Условие U , налагаемое на функцию $\psi(t)$, обеспечивает u_0 -вогнутость оператора Γ на $K(u_0)$.

Л е м м а 2. Краевая задача (I) топологически эквивалентна интегральному уравнению (6), рассматриваемому на $K(u_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего очевидно: задача (I) топологически эквивалентна задаче (3).

Напомним, что два операторные уравнения (в частности, краевая задача и интегральное уравнение) топологически эквивалентны, если они эквивалентны между множествами, на которых они определены, установлен гомеоморфизм. Отсюда сразу же следует, что если решение одного операторного уравнения получено как предел некоторой сильно сходящейся последовательности, то подобным же образом может быть получено и решение топологически эквивалентного ему операторного уравнения.

Доказательство же топологической эквивалентности задачи (3) имеется в работе [3].

Отметим, наконец, что если интегральное уравнение (6) имеет решение $u(y)$ в конусе неотрицательных непрерывных функций, то ему отвечает решение $(x(t), t_0)$ задачи (I), где

$$t(x) = \int_{x/\alpha}^1 \frac{d\omega}{u^{1/2}(\omega)}, \quad t_0 = \int_0^1 \frac{d\omega}{u^{1/2}(\omega)},$$

$$x'(x) = -\alpha u^{1/2}(x). \quad (7)$$

Здесь $t(x)$ - обращение $x(t)$.

Доказательство теоремы I.

Доказательство теоремы основано на следующей теореме теории операторных уравнений [2, теорема 6.3]:

Если оператор Γ u_0 -вогнут и монотонен, то уравнение $\lambda u = \Gamma u$ ни при каком значении параметра λ не имеет двух различных ненулевых решений в конусе.

В лемме I установлено, что оператор Γ , определенный правой частью уравнения (6), u_0 -вогнут и монотонен.

В силу леммы 2, свойство единственности распространяется и на задачу (I).

Доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы основано на такой теореме [2, теорема 6.1]:

Пусть оператор Γ вогнут и монотонен. Пусть u , и u_2 -

ненулевые положительные решения уравнения $\lambda u = \Gamma u$, соответствующие различным значениям λ_1 и λ_2 параметра λ :

$$\lambda_1 u_1 = \Gamma u_1, \quad \lambda_2 u_2 = \Gamma u_2.$$

Пусть, наконец, $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда $u_1 \geq u_2$.

Пусть $(x_1(t, a_1), t_0(a_1))$, $(x_2(t, a_2), t_0(a_2))$ решения задачи (I) при различных a_1 и a_2 . Тогда и уравнение (6) имеет два различных решения u_1 и u_2 при λ_1 и λ_2 , где $\lambda_1 = a_1^{1+\nu}$, $\lambda_2 = a_2^{1+\nu}$. Пусть для определенности $a_1 < a_2$. Тогда и $\lambda_1 < \lambda_2$.

Оператор Γ , определенный правой частью уравнения (6), вогнут и монотонен. Следовательно, $u_1(y) \geq u_2(y)$.

Из соотношений (7) получаем $t_0(a_1) < t_0(a_2)$,
 $x_1(t, a_1) < x_2(t, a_2)$ при $0 \leq t \leq t_0(a_1)$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении [2, теоремы 6.2]:

Пусть уравнение $\lambda u = \Gamma u$ с вогнутым и монотонным оператором Γ имеет ненулевые положительные решения u_1 и u_2 при положительных значениях λ_1 и λ_2 параметра λ . Пусть конус K сильно миниедрален. Тогда уравнение $\lambda u = \Gamma u$ имеет ненулевые положительные решения при всех $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$.

Пусть задача (I) имеет решения при некоторых a_1 и a_2 ($0 < a_1 < a_2$). Тогда и уравнение (6) имеет решение при соответствующих λ_1 и λ_2 ($0 < \lambda_1 < \lambda_2$).

Уравнение (6) рассматриваем в конусе K_2 , где K_2 - конус неотрицательных функций в пространстве L_p ($1 \leq p < \infty$).

Известно, [2], что конус K_2 правилен и сильно миниедрален. Как было ранее показано, оператор Γ вогнут (более того, он u_0 -вогнут) и монотонен. Следовательно, выполнены все требования, предъявляемые к оператору Γ с тем, чтобы уравнение (6) имело решение при всех $\lambda \in]\lambda_1, \lambda_2[$.

Согласно лемме 2, этим же свойством обладает и задача (I). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4.

Доказательство данной теоремы основано на следующем результате теории операторных уравнений [2, лемма 6.1]:

Пусть оператор Γ U_0 -вогнут, пусть конус K правилен и сильно миниедрален. Тогда позитивный спектр оператора Γ вместе с каждой точкой λ_0 содержит полностью некоторую ее окрестность, и $u(\lambda)$ — непрерывная функция λ .

Будем рассматривать уравнение (6) в конусе $K_2 \subset L_p$. Пусть задача (I) имеет решение при некотором $\alpha_0 > 0$. Тогда, согласно лемме 2, уравнение (6) имеет решение при $\lambda_0 = \alpha_0^{1+\gamma}$. Оператор Γ , определенный правой частью уравнения (6), согласно лемме 2, обладает свойством U_0 -вогнутости.

Следовательно, при всех $\lambda > 0$ из некоторой окрестности λ_0 уравнение (6) имеет решение $u(y, \lambda)$, принадлежащее L_p . При этом $u(y, \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных.

В силу ограничений, наложенных на функцию $\varphi(t)$, всякое решение интегрального уравнения (6), принадлежащее $L_p[0, 1]$, принадлежит и $C[0, 1]$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5.

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении [4]:

Пусть монотонный оператор удовлетворяет условию

$$\Gamma(\alpha \cdot u) \geq \alpha^\beta \Gamma u \quad (u \in K, 0 \leq \alpha \leq 1), \quad (8)$$

где $\beta \in]0, 1[$. Пусть конус K нормален и Γ оставляет инвариантной компоненту конуса $K(U_0)$. Тогда уравнение $u = \Gamma u$ имеет в $K(U_0)$ единственное решение, и это решение можно получить методом последовательных приближений, причем последовательные приближения сходятся по норме того пространства, в котором рассматривается конус K .

Дело в том, что ограничения, налагаемые в данной те-

реме на оператор Γ и конус K , обеспечивают выполнение условий принципа сжатых отображений для оператора Γ в метрике Биркгофа

$$\rho(u, v) = \min \{ \alpha : \bar{e} u \leq v \leq e u \} \quad (u, v \in K(u_0)).$$

Рассмотрим уравнение (6) в пространстве $C[0, 1]$. Конус $K \subset C[0, 1]$ нормален.

Из выполнения того требования, что при любых $\beta \in]0, 1[$, $t \in]0, \infty[$ $\psi(\frac{1}{\beta}t) \geq \beta^{2\mu} \psi(t)$ ($0 < \mu < 1$), следует, что при любом $\lambda > 0$

$$\Gamma_{\lambda}(\beta^2 u) \geq (\beta^2)^{\mu} \Gamma_{\lambda} u,$$

и $\Gamma_{\lambda} u \equiv \frac{1}{\lambda} \Gamma u$. Тогда Γ_{λ} - сжимающий оператор.

Так как интегральное уравнение (6) топологически эквивалентно задаче (I), то из равномерной сходимости некоторой последовательности к решению уравнения (6), следует что соответствующая ей последовательность равномерно сходится к решению задачи (I).

Теорема доказана.

Полученные здесь результаты распространяются на следующую задачу

$$\eta'' = \frac{\xi^{\delta/\gamma}}{\eta^{\gamma/\delta}} \quad (\eta' = \frac{\alpha \eta}{\xi}, \quad \gamma > 0, \delta < 0)$$

$$\eta(0) = 1, \quad \eta(\xi_f) = \eta'(\xi_f) = 0 \quad (\xi_f > 0),$$

встречающуюся при рассмотрении сжатия газа в режиме с обострением [5].

П р и м е ч а н и е. При доказательстве всех приведенных здесь теорем не предполагается непрерывность оператора Γ . Это позволяет ослабить требование непрерывности функции $\psi(t)$, заменив его, например, требованием измеримости $\psi(t)$. При этом необходимо соответствующим образом

определил решение задачи (I).

Литература

1. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. О некоторых сингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц.уравнения. - 1987. Т.23, № 7. - С.1278-1282.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. - М.: Физматгиз, 1962. - 394 с.
3. Колосов А.И. Об одном классе краевых задач, приводимых к уравнению с гетерогенным оператором// Дифференц.уравнения. - 1985. - Т.21, № 11. - С.1884-1891.
4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенное решение операторных уравнений. - М.: Наука, 1969. - 455 с.
5. Демидов М.А., Михайлов А.П. Эффекты локализации и образования структур при сжатии конечной массы газа в режиме с обострением// Прикл.матем.и мех. - 1986. - Т.50, № 1. - С.119-127.

Поступила 25.10.88

Закключение

Результаты, излагаемые в статьях настоящего сборника, представляют определенный интерес для специалистов по математической физике, занимающихся как теоретическим исследованием, так и исследованиями прикладных задач, сводящихся к краевым задачам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Кроме того, эти результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для студентов, а также аспирантов специальности-прикладная математика.

Полученные выше результаты распространяются на следующую задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям (2).

Полученные выше результаты распространяются на следующую задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (2)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям (2).

Для $p(x) = 0$ и $q(x) = 0$ при действительности этих функций задача (1) превращается в задачу (2), что позволяет сделать требования непрерывности функции $f(x)$ и значения его, например, требованиям непрерывности $f(x)$ и значения его, например, требованиям непрерывности $f(x)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
I. Лепин А.Я. О разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка	4
2. Степанов А.А. О дискретном преобразовании Фурье в одной обратной краевой задаче	13
3. Садырбаев Ф.Ж. О правильных решениях уравнения типа Эмдена-Фаулера	19
4. Задворный Б.В. Псевдоэквивалентные решения обыкновенных дифференциальных уравнений	26
5. Лепин Л.А. О количестве нулей у решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка	37
6. Беспалова С.А., Клоков Ю.А. Об одном обобщении уравнения Блазиуса	47
7. Беспалова С.А. Эффективность применения полиномов Чебышева для решения сингулярных ОДУ	56
8. Гризан Г.П. О разрешимости одной краевой задачи для систем сингулярных ОДУ	68
9. Звягинцев А.И. Априорные оценки суммы решений одной прикладной задачи	74
10. Звягинцев А.И., Зубова Л.Ф., Пономарев Д.Ю. О существовании стационарных решений одной краевой задачи химической кинетики	83
II. Лепина Э.И. Краевые задачи без максимального решения	91
12. Дударев Е.П. О представлении решения и разрешимости общей краевой задачи для одной системы линейных функционально-дифференциальных уравнений, не разрешенной относительно производной ...	100
13. Адъятов М.М. Единственность положительного решения задачи Коши при отсутствии условия Липлица	112
14. Мамонтов Е.В. С равновесном решении системы дифференциальных неавтономных линейных уравнений с частными производными	121

15. Андреев В.П., Гудков В.В. Об упругих колебаниях изотропного бесконечного цилиндра особого сечения	125
16. Виржицкий Я.В. О разрешимости двухточечной краевой задачи с ограничением	134
17. Колосов А.И. Об одной задаче со свободной границей для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка	147
Заключение	156

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Сборник научных трудов

(межвузовский)

Рецензенты: Н.И.Васильев, канд.физ.-мат.наук, зам.директора ВЦ при ЛГУ им.П.Стучки по научной работе;

Л.Э.Рейзинь, доктор физ.-мат.наук, профессор
Института физики АН ЛатвССР;

Е.Ф.Царьков, доктор физ.-мат.наук, профессор
РПИ

Редакторы: В.Гудков, М.Адъятов
Технический редактор Е.Сундеева
Корректор Т.Трейкале

Подписано к печати 14.06.1989. ЯТ 07277 Ф/б 60x84/16.
Бумага №1. 10,8 физ.печ.л. 10,0 усл.печ.л. 7,5 уч.-изд.л.
Тираж 350 экз. Зак. № 119. Цена 1 р. 60 к

Латвийский государственный университет им.П.Стучки
226098 Рига, б.Райниса, 19

Отпечатано на ротапринтере, 226050 Рига, ул.Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им.П.Стучки

УДК 517.927

Лепин А.Я. О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.4-12.

Доказано 15 теорем о разрешимости краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'). \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

при наличии условия Шредера.

Библиогр. 8 назв.

УДК 548.732+5A.547

Степанов А.А. О ДИСКРЕТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ОДНОЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.13-18.

Рассмотрим численный алгоритм и единственность решения обратной задачи диагностики кристаллов по данным рентгеновской дифракции.

Библиогр. 9 назв.

УДК 517.927

Садырбаев Ф.Ж. О ПРАВИЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛЛЕРА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.19-25.

Доказываются новые свойства решений Нехари (см. РЖМат, 1963, 3Б187) уравнения

$$y'' + p(x)|y|^{2\epsilon} y = 0, \quad \epsilon > 0, \quad (I)$$

с непрерывной функцией $p(x) > 0$. В терминах решений Нехари приводятся условия существования правильного (продолжимого до бесконечности) решения уравнения (I).

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.911

Задворный Б.В. ПСЕВДОЖИВАЛЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.26-36.

В более ранних работах автора (см., например, РЖМат, 1987, 12Б173Деп.) изучалось определяемое в них свойство

обобщенной непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных. В реферируемой статье обсуждаются проблемы, с которыми пришлось столкнуться при доказательстве некоторых утверждений, вследствие чего возникла необходимость введения отношения псевдоэквивалентности решений; изучаются некоторые свойства псевдоэквивалентных решений; на основе этих свойств рассмотрены другие утверждения об обобщенной непрерывной зависимости решений от начальных данных.
Библиогр. 7 назв.

УДК 517.925.46

Лепин Л.А. О КОЛИЧЕСТВЕ НУЛЕЙ У РЕШЕНИЙ ОДНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.37-46.

Исследован вопрос о количестве нулей у решений линейного уравнения

$$x'' + Ax' + Bx - Ce^{\gamma t} x' = 0,$$

где $A, B, C, \gamma \in (0, +\infty)$, $4B \leq A^2$, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 1$.

Библиогр. 3 назв.

УДК 517.927

Беспалова С.А., Клоков Ю.А. ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЯ БЛАЗИУСА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.47-55.

Исследуется существование и единственность решения краевой задачи

$$x''' = x''(A + Bx + Cx' + Dx''),$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = \alpha, x'(+\infty) = \beta,$$

где $A, B, C, D, x_0, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Библиогр. 4 назв.

УДК 518.61

Беспалова С.А. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ОДУ // Теоретические и численные исследования краевых задач. Рига: ЛГУ им.П.Стучки. 1989. - С.56-67.

Исследуется эффективность применения полиномов Чебышева для численного решения задач Коши, сингулярных ОДУ

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

где $t \in (0, T) = I_0$, $f \in C(I_0 \times \mathbb{R}^n)$. В общем, нелинейная относительно $x^{(i)}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $x^{(0)} = x$. Функция имеет при $t = 0$ особенность первого рода некоторого порядка $\alpha \in \mathbb{R}$.
Библиогр. 29 назв.

УДК 517.927

Гризан Г.П. О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ОДУ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.68-73.

Исследуется разрешимость краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'),$$

$$x'(0) = 0, \quad x(\tau) + Bx'(\tau) = d,$$

где $f \in \text{Car}(I_0 \times \mathbb{R}^{2n})$, $I_0 = (0, \tau]$, $\tau > 0$.

Библиогр. 5 назв.

УДК 517.927

Звягинцев А.И. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ СУММЫ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ПРИКЛАДНОЙ ЗАДАЧИ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.74-82.

Приводятся условия существования априорных оценок суммы решений одной краевой задачи химического катализа.

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.927

Звягинцев А.И., Зубова Л.Ф., Пономарев Д.Ю. О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.83-90.

Для краевой задачи химической кинетики

$$d_1((1-u_2)u_1'' + u_1u_2'') = -a_1(1-u_1-u_2) + a_3u_1 + u_1u_2,$$

$$d_2(u_2u_1' + (1-u_1)u_2'') = -a_2(1-u_1-u_2)^2 + a_4u_2^2 + u_1u_2,$$

$$u_1'(-1) = u_2'(-1) = u_1'(1) = u_2'(1) = 0$$

приводятся условия существования решения с заданными ограничениями.

Библиогр. 1 назв.

УДК 517.927

Лепина Э.И. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ БЕЗ МАКСИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

// Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.91-99.

Первая часть работы, в которой при помощи построения примеров доказывается полнота системы теорем о существовании максимального обобщенного решения краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Библиогр. 2 назв.

УДК 517.929

Дударев Е.П. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ И РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1989. - С.100-111.

Исследуется краевая задача

$$\frac{d}{dt}[B(t)x(t)] - (Kx)(t) + A(t)x(\alpha) = f(t), \quad -\infty < \alpha \leq t \leq b < +\infty, \\ \ell x = \alpha,$$

где $B - m \times n$ - матрица, элементы которой принадлежат L_∞^1 ; $K: L_p^n \rightarrow L_p^m$ ($1 \leq p < +\infty$) - линейный интегральный оператор, удовлетворяющий следующему условию: если $p=1$, то K - слабо вполне непрерывный, если $1 < p < +\infty$, то ядро $K(t,s)$ оператора K обладает одним из свойств $\mathcal{U}_p$, или $\mathcal{K}_p^1$; $A - m \times n$ - матрица, элементы которой принадлежат L_p^1 ; $f \in L_p^m$; $\ell: D_p^n \rightarrow R^r$ - произвольный линейный ограниченный вектор-функционал; $\alpha \in R^n$.

Получены представление решения и критерий разрешимости исследуемой задачи.

Библиогр. 13 назв.

УДК 517.911

Альтов М.М. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ПРИ ОТСУТСТВИИ УСЛОВИЯ ЛИПШИЦА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1969. - С.112-120.

В работе доказано существование положительного в некоторой правой полукрестности точки t_0 решения задачи

$$x'' = x^\alpha f(t, x, x') + F(t, x, x'),$$

$$x(t_0) = x'(t_0) = 0, \quad |\alpha| < 1,$$

где функции f и F удовлетворяют условию Липшица по второму и третьему аргументу. Это решение единственно и непрерывно зависит от t_0 .
Библиогр. 6 назв.

УДК 517.956

Мамонтов Е.В. О РАВНОВЕСНОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1969. - С.121-124

В работе рассматривается уравнение

$$D(x)y = y - f(x), \quad (I)$$

где $x \in R^m$, $R = (-\infty, +\infty)$, $m \geq 1$, $y \in R^n$, $n \geq 1$, $f: R^m \rightarrow R^n$, $f \in C^\infty(R^m)$.

$D(x)$ - дифференциальный линейный оператор с частными производными по компонентам вектора x и с коэффициентами, являющимися действительными матрицами размера $n \times n$, элементы которых определены на R^m и принадлежат классу $C^\infty(R^m)$. Предполагается, что все компоненты вектора $f(x)$ и элементы матриц - коэффициентов оператора $D(x)$ - ограничены на R^m и их всевозможные частные производные всех порядков также ограничены на R^m .

Получены условия существования единственного ограниченного на R^m решения уравнения (I) и указан его вид, пригодный для практического использования.

УДК 534.2

Андреев В.П., Гудков В.В. ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ ИЗОТРОПНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ОСОБОГО СЕЧЕНИЯ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1969. - С.125-133.

Рассматривается задача об упругих колебаниях цилиндра с сечением в виде кольцевого сектора. В цилиндрической системе координат решение задачи Дирихле представлено в виде рядов по собственным функциям, удовлетворяющим уравнению Бесселя. Предложена методика вычисления собственных чисел - индексов функций Бесселя.
Библиогр. 1 назв.

УДК 517.927.4

Виржицкий Я.В. О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ $\alpha'(a) < \beta'(a)$ // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1969. - С.134-146.

Изучается обобщенная разрешимость краевой задачи

$$\begin{cases} x'' = f(t, x, x'), & H_j(x(a), x(b), x'(a), x'(b)) = h_j, \\ \alpha \leq x \leq \beta, & \alpha'(a) < \beta'(a), \end{cases}$$

при $f \in \text{Car}(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $j = 0, 1$. H_0 - фиксирована.

Доказаны необходимые и достаточные условия разрешимости.
Библиогр. 3 назв.

УДК 517.927

Колосов А.И. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА // Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1969. - С.147-155.

Рассматривается краевая задача

$$x'' = \varphi(t)x^{-\gamma}, \quad (0 < \gamma < 1),$$

$$x(0) = \alpha, \quad x(t_0) = x'(t_0) = 0,$$

$$x'(t) < 0, \quad (0 < t < +\infty),$$

встречающаяся при исследовании эффектов локализации и образования структур в газовой динамике.

Под решением задачи понимается

$$(x(t), t_0) \in C^1[0, t_0] \cap C^2]0, t_0[\times]0, +\infty[.$$

В предположении, что при $t \in]0, +\infty[$ функция $\psi(t)$ положительна, непрерывна и не возрастает, а также удовлетворяет некоторому условию вогнутости, выясняется зависимость решения задачи от параметра α .

Библиогр. 5 назв.

- 167 -

©
ДЛЯ ЗАМЕТОК

80178

LU bibliotēka



948009835

549

1 р. 60 к.