LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

PARAMETRISKIE INTEGRĀĻI: TEORIJAS JAUTĀJUMI UN PIELIETOJUMI BETA UN GAMMA FUNKCIJU IZPĒTĒ

MAĢISTRA DARBS

Autore: **Kristīne Isaka**
Studentes apliecības Nr.: ki09022
Darba vadītāja: docente Ingrīda Uļjane

RĪGA 2015

ANOTĀCIJA

Maģistra darbā ir aplūkoti teorijas jautājumi par parametriskajiem integrāļiem un tajā skaitā arī par Gamma un Beta funkcijām. Doti uzdevumi ar atrisinājumiem par atbilstošām tēmām. Pirmā.nodaļā tiek definēts no parametra atkarīgais integrālis, apskatītas tā īpašības un atrisināšanas metodes. Otrā nodaļā ir apkopots teorijas izklāsts par Eilera integrāļiem. Dots ieskats par Gamma funkcijas vispārinājumu kompleksā plaknē.

Atslēgvārdi: no parametra atkarīgie integrāļi, Eilera integrāļi, Gamma funkcija, Beta funkcija.

ANNOTATION

Master’s thesis deals with issues concerning parametric integrals, including Gamma and Beta functions. There are exercises with key answers on appropriate themes. Chapter 1 defines the parameter dependent integral, discusses its qualities and methods of solution. Chapter 2 summarizes the theory outline of Euler integrals. The overview of Gamma function generalization in the complex plane is given.

Key words: parameter dependent integrals, Euler integrals, Gamma function, Beta function.

SATURS

IEVADS

Bakalaura līmeņa matemātikas studiju programmās matemātiskās analīzes kursa ietvaros tiek aplūkoti teorijas jautājumi par parametriskajiem integrāļiem.

Parametriskie integrāļi tiek būtiski pielietoti citās nozarēs, piemēram, varbūtību teorijā un matemātiskajā fizikā.

Maģistra darba mērķis: izveidot mācību materiālu, kurā ir izklāstīts teorētiskais materiāls par parametriskajiem integrāļiem un ilustrēts ar atbilstošo uzdevumu risināšanas piemēriem.

Maģistra darba uzdevumi:

1. Veikt teorētisko aprakstu par parametriskiem integrāļiem;
2. Veikt teorētisko aprakstu par Gamma un Beta funkcijām, izpētīt to īpašības;
3. Pielietot zināšanas par parametriskiem integrāļiem, risinot uzdevumus.

Maģistra darbs sastāv no divām nodaļām.

1.nodaļā tiek definēts no parametra atkarīgais integrālis, apskatītas tā īpašības un atrisināšanas metodes, tādas kā integrēšana zem integrāļa zīmes, Leibnica likums. Tiek aplūkota no parametra atkarīgo integrāļu nepārtrauktība. Tāpat ir aplūkoti daži ievērojami no parametra atkarīgie integrāļi, piemēram, Puasona integrālis, Dirihlē integrālis u.c.

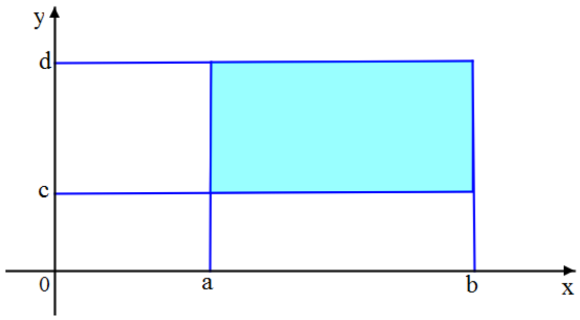
2.nodaļā ir apkopots teorijas izklāsts par Eilera integrāļiem. Tiek apskatīti uzdevumi, kuros pielieto Eilera integrāļu īpašības. Dots ieskats par Gamma funkcijas vispārinājumu kompleksā plaknē, ka arī ir aplūkots Gamma funkcijas grafiks reālā argumenta gadījumā.

Maģistra darbā visi aplūkotie uzdevumi ir atrisināti. Darba izstrādē nav pielietoti specifiski matemātiski apzīmējumi, izņemot vispārpieņemtos.

1. NO PARAMETRA ATKARĪGAIS INTEGRĀLIS, TĀ DEFINĪCIJA, ĪPAŠĪBAS UN APRĒĶINĀŠANA

1.1. No parametra atkarīga integrāļa definīcija

Divu mainīgo funkcija $f(x, y)$ ir definēta taisnstūrī $\Pi = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$, tas ir, $\Pi: [a, b] \times [c, d] = \{(x, y): x \in [a, b], y \in [c, d]\}$ (skat.1.1.1.att.). Katram fiksētam $y \in [c, d]$ eksistē konkrēta noteiktā integrāļa $\int_a^b f(x, y)dx$ vērtība.



1. 1.1. att.

Simboliski to pieraksta $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, kur $y \in [c, d]$.

Šajā pierakstā $f(x, y)$ ir no mainīgā (parametra) y atkarīgā funkcija, $I(y)$ - no parametra y atkarīgais integrālis. [2, 3], [2,73]

Ja katram fiksētam $x \in [a, b]$ eksistē noteiktā integrāļa $\int_c^d f(x, y)dy$ vērtība, tad teiksim, ka eksistē no parametra *x* atkarīga funkcija $f(x, y)$ un $\tilde{I}(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, kur $x \in [a, b]$ sauc no parametra *x* atkarīgo integrāli.

1.2. No parametra atkarīga integrāļa īpašības

<u>Teorēma 1 (robežpāreja pēc parametra zem integrāļa zīmes)</u>

Ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π ($f(x, y) \in C(\Pi)$) un $\lambda \in [c; d]$, tad

$$\lim_{y \to \lambda} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \left(\lim_{y \to \lambda} f(x, y)\right) dx = \int_a^b f(x, \lambda)dx. \quad [2,3]$$

Pierādījums.

Katram $y \in [c,d]$ eksistē integrālis $\int_a^b f(x,y)dx$. Katram fiksētam $y \in [c;d]$ funkcija ir nepārtraukta intervālā $[c;d]$, tas ir, $f(x,y) \in C([a,b])$. Tas nozīmē, ka eksistē integrālis $\int_a^b f(x,\lambda)dx$.

Tiek izvēlēts un fiksēts $\lambda \in [c,d]$ un $\varepsilon > 0$.

Tā kā $f(x,y) \in C(\Pi)$, tad pēc Kantora teorēmas (*Slēgtā intervālā nepārtraukta funkcija ir vienmērīgi nepārtraukta šajā intervālā)* funkcija $f(x,y)$ ir vienmērīgi nepārtraukta apgabalā Π . Attiecīgi, ja $\varepsilon > 0$, tad eksistē $\delta > 0$, kurš ir atkarīgs no ε vērtības. Tas ir, katriem diviem punktiem $(x_1;y_1)$ un $(x_2;y_2)$ no definēta taisnstūra Π, ja izpildās nosacījumi, ka $|x_2 - x_1| < \delta$ un $|y_2 - y_1| < \delta$, tad ir spēkā

$$|f(x_2;y_2) - f(x_1;y_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tiek pieņemts, ka $y_1 = \lambda$ un $y_2 = y$, kur y ir patvaļīgs punkts no intervāla $[c,d]$, kurš apmierina nosacījumu, ka $|y - \lambda| < \delta$.

Tiek pieņemts, ka $x_1 = x_2 = x$, kur x ir patvaļīgs punkts no intervāla $[a,b]$, kurš apmierina nosacījumu, ka $|x_2 - x_1| = 0 < \delta$.

Tiek iegūts, ja $|y - \lambda| < \delta$, kur $y \in [c,d]$, tad visiem $x \in [a,b]$, ir spēkā nevienādība:

$$|f(x;y) - f(x;\lambda)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Līdz ar to iegūst, ka

$$\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,\lambda)dx = \int_a^b \big(f(x,y) - f(x,\lambda)\big)dx$$

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,\lambda)dx\right| \leq \int_a^b |f(x,y) - f(x,\lambda)|dx < \frac{\varepsilon}{b-a} x\Big|_a^b = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon.$$

Rezultātā tiek iegūts, ka visiem $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, tāds, ka, ja $|y - \lambda| < \delta$, kur $y \in [c,d]$, tad

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,\lambda)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Šī nevienādība savukārt nozīmē, ka

$$\int_a^b f(x,\lambda)dx = \lim_{y\to\lambda} \int_a^b f(x,y)dx.$$

Kas arī bija jāpierāda [2,4].

Analoģiski var pierādīt teorēmu: ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π un $\lambda \in [a, b]$, tad ir spēkā:

$$\lim_{x\to\lambda} \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d \left(\lim_{x\to\lambda} f(x, y)\right) dy = \int_c^d f(\lambda, y)dy. \quad [2,4]$$

<u>Teorēma 2 (No parametra atkarīgā integrāļa nepārtrauktība)</u>

Ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π, tad integrālis $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ ir nepārtraukts intervālā $y \in [c, d]$. [2,5]

<u>Pierādījums.</u>

Fiksē patvaļīgu punktu $\lambda \in [c, d]$. Robežpārējā zem integrāļa zīmes tika pierādīts, ka

$$\lim_{y\to\lambda} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x, \lambda)dx$$

tas ir

$$\lim_{y\to\lambda} I(y) = I(\lambda).$$

Tiek secināts, ka funkcija $I(y)$ ir nepārtraukta punktā λ.

Tā kā λ ir patvaļīgs punkts no intervāla $[c, d]$, tad tiek secināts, ka $I(y) \in C([c, d])$.
Kas bija jāpierāda. [2,5]

Nosacījums funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π, ir pietiekams nosacījums integrāļa $I(y)$ nepārtrauktībai intervālā $[c, d]$, bet tas nav nepieciešams nosacījums.

Analoģiski var pierādīt teorēmu: "Ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π un integrālis $\tilde{I}(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, kur $x \in [a, b]$, tad integrālis $\check{I}(x)$ ir nepārtraukts intervālā $[a, b]$. "[2,5]

Ja funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta taisnstūrī Π, tad integrālis $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ ir nepārtraukts intervālā $y \in [c, d]$ un integrālis $\tilde{I}(x) = \int_c^d f(x, y)dy$ ir nepārtraukts intervālā $x \in [a, b]$. Respektīvi, tas nozīmē, ka vienlaicīgi eksistē:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx\right) dy$$

$$\int_a^b \tilde{I}(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx. \quad [2,6]$$

Definīcija.

Integrāļus

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

$$\int_a^b \tilde{I}(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

sauc par funkcijas $f(x,y)$ atkārtotiem integrāļiem taisnstūrī Π. [2,6]

1.3. No parametra atkarīga integrāļa aprēķināšana

1.3.1. Integrēšana zem integrāļa zīmes

Apskata integrāli

$$I(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx,$$

kurā gan zemintegrāļa izteiksme, gan integrēšanas robežas ir atkarīgas no parametra *y*. Acīmredzot integrāļa vērtība arī būs atkarīga no mainīgā (parametra) *y*.

Ja funkcijas $\varphi_1(y)$ un $\varphi_2(y)$ ir nepārtrauktas un funkcija $f(x,y)$ ir nepārtraukta pēc abiem mainīgiem *x* un *y*, tad eksistē integrālis:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Gadījumā, ja funkcijas $\varphi_1(y)$ un $\varphi_2(y)$ ir konstantes: $\varphi_1(y) = a$ un $\varphi_2(y) = b$, tad

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$$

var mainīt integrēšanas secību:

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy. \quad [11{,}663-665]$$

1.3.2. Atvasināšana zem integrāļa zīmes

Teorēma 3 (Leibnica likums)

Ja funkcija $I(y)$ ir uzdota šādi: $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$, turklāt funkcija $f(x,y)$ ir nepārtraukta un tai taisnstūrī $\Pi = \begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ eksistē nepārtraukts, pirmās kārtas atvasinājums $f'_y(x,y)$, tad eksistē integrāļa $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ atvasinājums, kuru aprēķina šādi :

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Pierādījums

Fiksē patvaļīgi punktu $y_o \in [c,d]$. Šim punktam pieskaita funkcijas pieaugumu Δy tādu, ka $\Delta y \neq 0$ un $y_0 + \Delta y \in [c,d]$. Aprēķina šajos punktos integrāļa $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ vērtības:

$$I(y_0) = \int_a^b f(x,y_0)dx$$

$$I(y_0 + \Delta y) = \int_a^b f(x,y_0 + \Delta y)dx.$$

Atrod attiecību:

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \frac{\int_a^b f(x,y_0 + \Delta y)dx - \int_a^b f(x,y_0)dx}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x,y_0 + \Delta y) - f(x_0)}{\Delta y}dx.$$

Pēc Langranža teorēmas (*Ja* $f(x)$ *ir nepārtraukta funkcija slēgtā intervālā* $[a;b]$ *un eksistē atvasinājums visos intervāla* $(a;b)$ *punktos, tad intervālā* $(a;b)$ *eksistē vismaz viens punkts c, kurā* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$) [1,163]

$$f(x,y_0 + \Delta y) - f(x,y_0) = f'_y(x,y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \qquad \text{kur } 0 < \theta < 1.$$

Līdz ar to

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x,y_0 + \theta\Delta y)dx.$$

Tā kā $f'_y(x,y)$ ir nepārtraukts taisnstūrī Π, tad sakarībā

$$\frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f_y'(x, y_0 + +\theta\Delta y)dx$$

pāriet uz robežu, kad $\Delta y \to 0$. Ņemot vērā teorēmu 1, iegūst, ka

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f_y'(x, y_0 + \theta\Delta y)dx = \int_a^b f_y'(x, y_0)dx.$$

Ir iegūts, ka eksistē $I'(y_0)$ vērtība :

$$I'(y_0) = \int_a^b f_y'(x, y_0)dx.$$

Tā kā y_0 ir patvaļīgi fiksēts punkts no intervāla $[c, d]$, tad seko, ka $I'(y)$ eksistē patvaļīgam $y \in [c, d]$, un

$$I'(y) = \int_a^b f_y'(x, y)dx.$$

Tā kā $f_y'(x, y)$ ir nepārtraukts taisnstūrī Π un $I'(y) = \int_a^b f_y'(x, y)dx$, tad pēc teorēmas 1 seko, ka $I'(y)$ ir nepārtraukts intervālā $y \in [c, d]$.

Kas arī bija jāpierāda. [2,6-7],[13]

__Teorēma 4__

Apskata

$$I(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx.$$

Ja taisnstūrī Π= $\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$ funkcija $f(x, y)$ un tās pirmās kārtas atvasinājums $f_y'(x, y)$ ir nepārtraukti, un ja intervālā $y \in [c, d]$ funkcijām $\varphi_1(y)$ un $\varphi_2(y)$ eksistē atvasinājumi $\varphi_1'(y)$ un $\varphi_2'(y)$, tad integrāļa

$$I(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)dx$$

atvasinājums ir aprēķināms pēc formulas:

$$I'(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f_y'(x, y)dx + \varphi_2'(y) \cdot f(\varphi_2(y), y) - \varphi_1'(y) \cdot f(\varphi_1(y), y).$$

Pierādījums

Apskata integrāli

$$\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Šajā integrālī ievieš apzīmējumus: $\varphi_1(\mathrm{y}) = u$; $\varphi_2(\mathrm{y}) = v$, tad

$$\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_{u}^{v} f(x,y)dx = F(y,u,v).$$

Diferencē funkciju pēc y:

$$\frac{dF}{dy} = \frac{dF}{dy} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}$$

Pēc teorēmas 3 seko, ka

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int\limits_{u}^{v} f'_y(x,y)dx.$$

Integrāļa ar mainīgu augšējo robežu atvasinājums integrēts pēc šīs robežas:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -f(u,y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = f(v,y)$$

Līdz ar to atvasinājums ir

$$I'(y) = \frac{dF}{dy} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{du}{dy} + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy} = \int\limits_{v}^{u} f'_y(x,y)dx + f(\mathrm{v},y)\cdot\frac{dv}{dy} - f(u,y)\cdot\frac{du}{dy} =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y(x,y)dx + \varphi'_2(y)\cdot f(\varphi_2(y),y) - \varphi'_1(y)\cdot f(\varphi_1(y),y).$$

Kas arī bija jāpierāda.[5,75]

Ja zemintergrāļa funkcija ir nepārtraukta, tad var atrast ne tikai tā atvasinājumu, bet arī no parametra atkarīga integrāļa vērtību.

1.3.3. Frullani formula

Par Frullani (G. Froullani) integrāļiem sauc integrāļus, kuri ir uzdoti šādi

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx, \qquad \text{kur } a > 0 \text{ un } b > 0.$$

Tiks apskatīti trīs gadījumi atkarībā no funkcijas $f(x)$.

1. gadījums Tiek pieņemts, ka funkcijai $f(x)$ ir spēkā šādi nosacījumi:

1. funkcija $f(x)$ ir definēta un nepārtraukta visiem $x \geq 0$;
2. funkcijai $f(x)$ eksistē galīgā robeža, kura definēta šādi:

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

No 1. nosacījuma izriet, ka eksistē (ja $0 < m < n < +\infty$) integrālis

$$\int_m^n \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_m^n \frac{f(ax)}{x} dx - \int_m^n \frac{f(bx)}{x} dx.$$

Abos integrāļos izmanto substitūciju $ax = z$ un $bx = z$.

$$\int_m^n \frac{f(ax)}{x} dx - \int_m^n \frac{f(bx)}{x} dx = \left| \begin{array}{c} ax = z \\ dx = \dfrac{dz}{a} \\ Ja\ x = m, tad\ z = am \\ Ja\ x = n, tad\ z = an \\ bx = z \\ dx = \dfrac{dz}{b} \\ Ja\ x = m, tad\ z = bm \\ Ja\ x = n, tad\ z = bn \end{array} \right| = \int_{am}^{an} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{bm}^{bn} \frac{f(z)}{z} dz =$$

$$= \int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z} dz - \int_{an}^{bn} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Integrāli izsaka kā robežu

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{m \to 0} \int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z} dz - \lim_{n \to +\infty} \int_{an}^{bn} \frac{f(z)}{z} dz.$$

Abos integrāļos tiek pielietota vidējās vērtības teorēma*: "Ja* $f(x)$ *un* $g(x)$ *ir nepārtrauktas intervālā* $[a, b]$ *un* $g(x)$ *saglabā savu zīmi, tad eksistē vismaz viens tāds punkts* $\xi \in (a, b)$, *ka*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx \quad [7,198]"$$

iegūstot

$$\int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z} dz = f(\xi) \int_{am}^{bm} \frac{dz}{z} = f(\xi) ln \frac{b}{a}, \text{kur } am \leq \xi \leq bm$$

$$\int_{an}^{bn} \frac{f(z)}{z} dz = f(\eta) \int_{an}^{bn} \frac{dz}{z} = f(\eta) ln \frac{b}{a}, \text{kur } an \leq \eta \leq bn.$$

Acīmredzot, ja $m \to 0$, tad $\xi \to 0$, un ja $n \to +\infty$, tad $\eta \to +\infty$. Tādējādi

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \lim_{m \to 0} \int_{am}^{bm} \frac{f(z)}{z} dz - \lim_{n \to +\infty} \int_{an}^{bn} \frac{f(z)}{z} dz = \lim_{\xi \to 0} f(\xi) ln \frac{b}{a} -$$

$$- \lim_{\eta \to +\infty} f(\eta) ln \frac{b}{a} = f(0) ln \frac{b}{a} - f(+\infty) ln \frac{b}{a} = \big(f(0) - f(+\infty)\big) ln \frac{b}{a}.$$

Līdz ar to 1. Frullani integrāļa formula ir

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \big(f(0) - f(+\infty)\big) ln \frac{b}{a}.$$

2. gadījums Tiek apskatīta funkcija $f(x)$, kurai neeksistē galīga robeža, kad $x \to +\infty$, bet savukārt eksistē integrālis $\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z} dz$, kurš konverģē, ja $A > 0$.

Apskatītajā 1. gadījumā, mainot n uz $+\infty$, iegūst 2.Frullani integrāļa formulu

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) ln \frac{b}{a}$$

3. gadījums Analoģiski 2. gadījumam tiek apskatīta funkcija $f(x)$, kurai neeksistē galīga robeža, kad $x = 0$, bet savukārt eksistē integrālis $\int_0^A \frac{f(z)}{z} dz$, kur $A < +\infty$.

Ja 2. gadījumā izmanto substitūciju $x = \frac{1}{t}$, tad iegūst 3.Frullani integrāļā formulu

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) ln \frac{b}{a}. \quad [11{,}621 - 623]$$

1.3.4. Daži ievērojami no parametra atkarīgie neīstie integrāļi

Šajā apakšparagrafā tiks apskatīti visbiežāk sastopamie no parametra atkarīgie neīstie integrāļi un to vērtību aprēķināšana.

1. Dirihlē integrālis

Par Dirihlē integrāli sauc integrāli, kurš ir uzdots kā

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{x} dx.$$

Lai aprēķinātu Dirihlē integrāļa vērtību, pieņem, ka $\alpha > 0$ un tiek apskatīts integrālis

$$F(\alpha; \beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx, \qquad \text{kur } \beta > 0.$$

Fiksētām parametra $\beta > 0$ vērtībām integrālis

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$$

konverģē visiem $\alpha > 0$.

Lai to pamatotu integrālis $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$ tiek sadalīts divu integrāļu summā:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx = \int_0^{1} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx + \int_1^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx.$$

Integrālī $\int_0^{1} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx$ izmanto substitūciju $\frac{1}{x} = t$.

$$\int_0^{1} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx = \left|\begin{array}{c} \frac{1}{x} = t \\ dx = \frac{-dt}{t^2} \\ Ja\ x \to 0, tad\ t \to +\infty \\ Ja\ x = 1, tad\ t = 1 \end{array}\right| = -\int_1^{+\infty} e^{-\frac{\beta}{t}}\frac{sin\frac{\alpha}{t}}{t}dt = \int_1^{+\infty}\frac{sin\frac{\alpha}{t}}{e^{\frac{\beta}{t}}t}dt$$

Tā kā visiem $t \in [1; +\infty)$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{\left|sin\frac{\alpha}{t}\right|}{e^{\frac{\beta}{t}}t} \le \frac{\frac{\alpha}{t}}{t}$$

jeb

$$\frac{\left|sin\frac{\alpha}{t}\right|}{e^{\frac{\beta}{t}}t} \le \frac{\alpha}{t^2}$$

un neīstais integrālis

$$\int_1^{+\infty}\frac{\alpha}{t^2}dt$$

konverģē, tad pēc salīdzināšanas teorēmas konverģē arī integrālis

$$\int_1^{+\infty}\frac{sin\frac{\alpha}{t}}{e^{\frac{\beta}{t}}t}dt,$$

tas ir, konverģē integrālis

$$\int_0^{1} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x}dx.$$

Aplūko integrāli

$$\int_1^{+\infty}\frac{sin\alpha x}{xe^{\beta x}}dx.$$

Fiksētām parametra $\beta > 0$ vērtībām pēc Dirihlē pazīmes integrālis

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{xe^{\beta x}} dx$$

konverģē visiem $\alpha > 0$, jo

1) funkcija $\frac{e^{-\beta x}}{x}$ intervālā $[1; +\infty)$ dilst;

2) ja $\alpha \neq 0$, funkcijai $sin\alpha x$ eksistē ierobežota primitīva funkcija

$$\int_{1}^{x} sin\alpha x dx = \frac{cos\alpha - cos\alpha x}{\alpha}.$$

Tā kā konverģē integrālis $\int_0^1 e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ un integrālis $\int_1^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{xe^{\beta x}} dx$, tad konverģē arī integrālis

$$\int_{0}^{1} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx + \int_{1}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx.$$

Ja $\alpha = 0$, tad

$$F(0;\beta) = \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin0}{x} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{x} \cdot 0 dx = 0.$$

Atvasinot integrāli $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ pēc parametra α, tiek iegūts, ka

$$K(\alpha;\beta) = \int_{0}^{+\infty} \left(e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x}\right)' dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx.$$

Pēc Veiještrāsa pazīmes „ *Ja intervālā* $[a; +\infty)$ *eksistē funkcija* $\varphi(x)$ *tāda, ka* $|f(x,\alpha)| \leq \varphi(x)$ *visiem* $x \in [a; +\infty)$ *un visiem* $\alpha \in E$*, un, ja integrālis* $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ *konvergē, tad integrālis* $\int_a^{+\infty} f(x,\alpha) dx$ *konverģē absolūti un vienmērīgi apgabalā E”* [7,335] integrālis $K(\alpha;\beta)$ vienmērīgi konverģē attiecībā pret parametru α visām reālām *x* vērtībām.

Parciāli atvasinot, aprēķina vērtību integrālim $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx$.

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} e^{-\beta x} cos\alpha x dx \left| \begin{matrix} u = e^{-\beta x} & dv = cos\alpha x dx \\ du = -\beta e^{-\beta x} & v = \int cos\alpha x dx = \frac{sin\alpha x}{\alpha} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left(e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{\alpha} \Big|_0^A + \frac{\beta}{\alpha} \int_{0}^{A} e^{-\beta x} sin\alpha x dx \right) = \lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A} \frac{sin\alpha A}{\alpha} +$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-\beta x} sin\alpha x dx = \left| \begin{matrix} u = e^{-\beta x} & dv = sin\alpha x dx \\ du = -\beta e^{-\beta x} & v = \int sin\alpha x dx = \frac{-cos\alpha x}{\alpha} \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A}\frac{sin\alpha A}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\lim_{A\to+\infty}\left(-e^{-\beta x}\frac{cos\alpha x}{\alpha}\Big|_0^A - \frac{\beta}{\alpha}\int_0^A e^{-\beta x} cos\alpha x dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A}\frac{sin\alpha A}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}\lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A} cos\alpha A + \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx$$

Tā kā $\lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A}\frac{sin\alpha A}{\alpha} = 0$ un $\lim_{A\to+\infty} e^{-\beta A} cos\alpha A = 0$, tad

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx$$

$$\left(1+\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \frac{\beta\alpha^2}{\alpha^2(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Tātad tiek iegūts, ka $F'(\alpha;\beta)$ vērtība ir

$$F'_\alpha(\alpha;\beta) = K(\alpha;\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} cos\alpha x dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Vienādojuma abas puses tiek integrētas intervālā $t \in [0;\alpha]$.

$$\int_0^{\alpha} F'_t(t;\beta) = \int_0^{\alpha} \frac{\beta}{t^2+\beta^2} dt$$

$$F(t;\beta)|_0^{\alpha} = \frac{\beta}{\beta} arctg\frac{t}{\beta}\Big|_0^{\alpha}$$

$$F(\alpha;\beta) - F(0;\beta) = arctg\frac{\alpha}{\beta} - arctg 0$$

$$F(\alpha;\beta) - F(0;\beta) = arctg\frac{\alpha}{\beta}$$

Tā kā $F(0;\beta) = 0$, tad visiem $\beta > 0$ ir spēkā sakarība $F(\alpha;\beta) = arctg\frac{\alpha}{\beta}$.

Tālāk pamatosim, ka visiem > 0 (α- konstants skaitlis) integrālis $F(\alpha;\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x}\frac{sin\alpha x}{x} dx$ konverģē vienmērīgi pēc parametra β intervālā [0;1].

Integrālis $\int_1^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ konverģē vienmērīgi pēc parametra β ,jo

1) funkcijai $sin\alpha x$ eksistē ierobežota primitīva funkcija;

2) funkcija $g(x,\beta) = \frac{e^{-\beta x}}{x}$ ir monotoni dilstoša, jo

2.1) tiek apskatīts funkcijas atvasinājums

$$g'_x(x,\beta) = \left(\frac{e^{-\beta x}}{x}\right)'_x = \frac{-\beta x e^{-\beta x} - e^{-\beta x}}{x^2} = \frac{-e^{-\beta x}(\beta x + 1)}{x^2};$$

2.2) acīmredzot no 2.1. seko, ka $\beta \geq 0$ un visiem $x > 0$ funkcijas atvasinājums ir negatīvs, tas ir $g'_x(x,\beta) < 0$;

2.3) ja $x \to +\infty$, tad $g'_x(x,\beta)$ vienmeŗīgi konverģē uz 0 intervālā $[0;1]$.

3)Pēc Dirihlē pazīmes integrālis$\int_1^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ vienmērīgi konverģē pēc parametra β.

Savukārt, ka integrālis $\int_0^1 e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ konverģē vienmērīgi, tiek secināts līdzīgi iepriekš apskatītajam.

Tātad integrālis $F(\alpha;\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx$ konverģē vienmērīgi pēc parametra β intervālā [0;1].

Respektīvi tiek iegūts, ka intervālā $[0;1]$ funkcija $F(\alpha;\beta)$ ir nepārtraukta pēc parametra β, tā kā integrālis

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx = arctg\frac{\alpha}{\beta}$$

vienmērīgi konverģē un funkcija $e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x}$ ir nepārtraukta taisnstūrī

$$\Pi = \begin{cases} 0 \leq x < +\infty \\ 0 \leq \beta \leq 1 \end{cases}$$

Tādējādi funkcija $F(\alpha;\beta)$ ir nepārtraukta punktā $\beta = 0$ no labās puses.

Rezultātā tiek secināts, kad $\beta \to +0$, var pāriet uz robežu integrālī

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx = arctg\frac{\alpha}{\beta},$$

tas ir,

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{sin\alpha x}{x} dx = \lim_{\beta \to +0} arctg\frac{\alpha}{\beta} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, ja\ \alpha > 0 \\ 0, ja\ \alpha = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, ja\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Ņemot vērā, ka $\frac{sin\alpha x}{x}$ ir nepāra funkcija pēc parametra α, tad integrāļa vērtību var pārrakstīt šādi

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} sign\alpha, \text{kur } \alpha \in R. [7,348 - 349]$$

2. Eilera - Puasona integrālis

Par Eilera – Puasona integrāli sauc integrāli, kurš uzdots kā

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Eilera – Puasona integrāli bieži pielieto varbūtību teorijā, ka arī dažos matemātiskās fizikas uzdevumos.

Lai aprēķinātu tā vērtību izmanto substitūciju $x = yt$, kur $t > 0$ (t-fiksēta konstante). Iegūst

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = yt \\ dx = tdy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} tdy$$

Abas vienādojuma puses reizina ar e^{-t^2}, iegūst, ka

$$I \cdot e^{-t^2} = e^{-t^2} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2 t^2} tdy$$

$$I \cdot e^{-t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} tdy.$$

Abas vienādojuma puses tiek integrētas intervālā $[0; +\infty)$ pēc parametra *t.*

$$\int_0^{+\infty} I \cdot e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} tdy \right) dt$$

$$I \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} tdy$$

Tiks pamatots, ka vienādojuma labajā pusē var mainīt integrēšanas secību.

Ir zināms, ka zemintegrāļa funkcija $e^{-t^2(y^2+1)}t$ ir nenegatīva un nepārtraukta, ja $t \geq, y \geq 0$. Pēc Veiještrāsa pazīmes integrālis $\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)} tdy$ konverģē pēc parametra *t* jebkurā intervālā $[c, d] \subset (0, +\infty)$, tā kā ir spēkā novērtējums

$$\left|e^{-t^2(y^2+1)}t\right| \leq \left|de^{-c^2(y^2+1)}\right|$$

un neīstais integrālis

$$\int_0^{+\infty} de^{-c^2(y^2+1)}dy$$

konverģē. Analoģiski var parādīt, ka integrālis

$$\int_0^{+\infty} te^{-t^2(y^2+1)}dt$$

vienmērīgi konverģē attiecībā pret *y* jebkurā intervālā $[a,b] \subset (0,+\infty)$. Atkārtotais integrālis

$$\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdt$$

konverģē.[10,6]

Līdz ar to vienādojumā labajā pusē var mainīt integrēšanas secību, tas ir

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdy = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdt$$

Tiek ņemts vērā, ka

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = I,$$

iegūstot

$$I^2 = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdt.$$

Vispirms aprēķina vērtību integrālim

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdt.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2(y^2+1)}tdt = \left| \begin{array}{c} (1+y^2)t^2 = z \\ tdt = \dfrac{dz}{2(1+y^2)} \\ Ja\ t=0, tad\ \ z=0 \\ Ja\ t \to +\infty, tad\ z \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} e^{-z}\frac{dz}{2(1+y^2)} =$$

$$= \frac{-1}{2(1+y^2)}\int_0^{+\infty} e^{-z}d(-z) = \lim_{A\to+\infty}\frac{-1}{2(1+y^2)}\int_0^{A} e^{-z}d(-z) = \frac{-1}{2(1+y^2)}\lim_{A\to+\infty} e^{-z}\Big|_0^A =$$

$$= \frac{-1}{2(1+y^2)}\lim_{A\to+\infty}(e^{-A}-e^0) = 0 + \frac{1}{2(1+y^2)} = \frac{1}{2(1+y^2)}.$$

Attiecīgi ir iegūts, ka

$$I^2 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+y^2)} dy = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\int_0^{A} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty} arctgy\Big|_0^A =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(arctgA - arctg0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Tātad

$$I^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ir aprēķināts, ka Eilera-Puasona integrāļa vērtība

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad [7{,}350-351]$$

Tiks apskatīt vēl viens veids kā atrast Eilera – Puasona integrāļa vērtību:

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tā kā funkcija $(1+t)e^{-t}$ sasniedz savu maksimālo vērtību 1, ja $t=0$, tiek secināts, ja $t \neq 0$, tad $(1+t)e^{-t} < 1$. Pieņemot, ka $t = \pm x^2$, iegūst, ka

$$(1+x^2)e^{-x^2} < 1$$

un

$$(1-x^2)e^{x^2} < 1$$

Tiek izteikts e^{-x^2} no abām nevienādībām:

$$e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

$$e^{x^2} < \frac{1}{1-x^2}$$

Jeb

$$e^{-x^2} > 1 - x^2$$

Tādējādi, ja $x > 0$

$$1 - x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$$

Nevienādībā $(1+x^2)e^{-x^2} < 1$ ierobežojot *x* maiņas apgabalu intervālā $(0{,}1)$, tas ir

$1-x^2>0$, bet nevienādībā $(1-x^2)e^{x^2}<1$, pieņemot x par patvaļīgu skaitli, un abu izteiksmju nevienādību puses kāpinot naturāla skaitļa *n* pakāpē, iegūst, ka

$$e^{-nx^2}<\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n=\frac{1}{(1+x^2)^n}, \text{ja } x>0$$

$$e^{-nx^2}>(1-x^2)^n, \text{ja } 0<x<1$$

tas ir

$$(1-x^2)^n<e^{-nx^2}.$$

Integrē pirmo nevienādību intervālā (0,1) un otro neivenādību intervālā $(0;+\infty)$ iegūstot, ka

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx<\int_0^1 e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx<\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}.$$

Pielietojot substitūcijas, tiek izteikti integrāļi $\int_0^1(1-x^2)^n dx$, $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx$ un $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx=\left|\begin{array}{c} u=\sqrt{nx} \\ u^2=nx \\ 2udu=ndx \\ Ja\ x\to+\infty, tad\ u\to+\infty \\ Ja\ x=0, tad\ u=0 \end{array}\right|=\int_0^{+\infty} e^{-n\frac{u^4}{n^2}}\frac{2u}{n}du=\frac{2}{n}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^4}{n}}udu=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=\dfrac{u^2}{\sqrt{n}} \\ dt=\dfrac{2udu}{\sqrt{n}} \\ udu=\dfrac{\sqrt{n}}{2}dt \\ Ja\ u\to+\infty, tad\ t\to+\infty \\ Ja\ u=0, tad\ t=0 \end{array}\right|=\frac{2}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\frac{\sqrt{n}}{2}dt=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot I$$

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\left|\begin{array}{c} x=cost \\ dx=-sintdt \\ Ja\ x=0, tad\ t=\dfrac{\pi}{2} \\ Ja\ x=1, tad\ t=0 \end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-cos^2t)^n\cdot(-sint)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sint)^{2n+1}dt$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\left|\begin{array}{c} x=ctgt \\ dx=-\dfrac{dt}{sin^2t} \\ Ja\ x\to 0, tad\ t\to\dfrac{\pi}{2} \\ Ja\ x\to+\infty, tad\ t\to 0 \end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{2}}^0-\frac{1}{sin^2t}\cdot\frac{1}{(1+ctg^2t)^n}dt=$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^2t} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{sin^2t}\right)^n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sint)^{2n-2} dt$$

Tiek apskatīts integrālis

$$K_l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^l dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{l-1} d(-cosx).$$

Šis integrālis tiek integrēts parciāli:

$$K_l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{l-1} d(-cosx) = \begin{vmatrix} u = (sinx)^{l-1} & dv = d(-cosx) \\ du = (l-1)(sinx)^{l-2} cosxdx & v = -cosx \end{vmatrix} =$$

$$= -(sinx)^{l-1} cosx \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -cosx\,(l-1)(sinx)^{l-2} cosxdx = -\left(sin\frac{\pi}{2}\right)^{l-1} cos\frac{\pi}{2} +$$

$$+(sin0)^{l-1} cos0 + (l-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\,(sinx)^{l-2} dx = (l-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - sin^2x)\,(sinx)^{l-2} dx =$$

$$= (l-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((sinx)^{l-2} - sin^l x)\, dx = (l-1) + (l-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^l dx$$

Tādējādi tiek iegūts, ka $K_l = (l-1)K_{l-2} - (l-1)K_l$

$$K_l(1 + (l-1)) = (l-1)K_{l-2}$$

$$lK_l = (l-1)K_{l-2}$$

$$K_l = \frac{(l-1)}{l} K_{l-2}$$

Ar šo sakarību pakāpeniski tiek pāriets uz integrāli K_0 vai K_1, kuru vērtības attiecīgi ir

$$K_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^0 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$K_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = -cosx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(cos\frac{\pi}{2} - cos0\right) = 1$$

Ja $l = 2n$, kur $n \in N$, tad

$$K_{2n=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{2n} dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ja $l = 2n + 1$, kur $n \in N$, tad

$$K_{2n+1=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx)^{2n+1}dx = \frac{2n(2n-2)(2n-4)\dots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots 3\cdot 1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

Respektīvi tiek iegūts, ka

$$K_l = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx)^l dx = \begin{cases}\frac{(l-1)!!}{l!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ja } l - \text{pāra skaitlis} \\ \frac{(l-1)!!}{l!!}, \text{ja } l - \text{nepāra skaitlis}\end{cases} \quad [11{,}311-312]$$

Tādējādi tiek secināts, ka

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sint)^{2n+1}dt = \frac{(2n+1-1)!!}{(2n+1)!!} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sint)^{2n-2}dt = \frac{(2n-2-1)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Šo integrāļu vērtības tiek ievietotas nevienādībā

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx < \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot I < \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Nevienādības puses reizina ar $\sqrt{n}$, iegūstot

$$\frac{\sqrt{n}(2n)!!}{(2n+1)!!} < I < \frac{\sqrt{n}(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Divkāršās nevienādības abas puses tiek kāpinātas kvadrātā

$$\frac{n\big((2n)!!\big)^2}{\big((2n+1)!!\big)^2} < I^2 < \frac{n\big((2n-3)!!\big)^2}{\big((2n-2)!!\big)^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\big((2n)!!\big)^2}{(2n+1)\big((2n-1)!!\big)^2} < I^2 < \frac{n}{2n-1}\cdot\frac{\big((2n-3)!!\big)^2\pi^2(2n-1)}{4\big((2n-2)!!\big)^2}$$

Pēc Vallesa (J. Wallis) formulas (formula iegūšanas veids tiks parādīts vēlāk) seko, ka

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n!!)^2}{\big((2n-1)!!\big)^2(2n+1)}$$

Apskatām robežas, kad $n \to +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n+1)\left((2n-1)!!\right)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\left((2n)!!\right)^2}{(2n+1)\left((2n-1)!!\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1}\cdot\frac{n\left((2n-3)!!\right)^2\pi^2(2n-1)}{4\left((2n-2)!!\right)^2}=\frac{\pi^2}{4}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1}\lim_{n\to+\infty}\frac{\left((2n-3)!!\right)^2(2n-1)}{\left((2n-2)!!\right)^2}=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{\left((2n-2)!!\right)^2}{\left((2n-3)!!\right)^2(2n-1)}}=\frac{\pi^2}{8}\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left((2n-2)!!\right)^2}{\left((2n-3)!!\right)^2(2n-1)}}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

Secina, ka

$$I^2=\frac{\pi}{4}$$

Tā kā $I>0$, tad

$$I=\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad[5{,}612-613.]$$

Tātad ir iegūts, ka Eilera – Puasona integrāļa vērtība ir

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Tiks parādīts, kā iegūst Vallesa formulu. Ja $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, tad ir spēkā divkāršā nevienādība

$$sin^{2n+1}x<sin^{2n}x<sin^{2n-1}x$$

Nevienādību puses integrē intervālā $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n+1}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n}xdx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2n-1}xdx$$

Pielieto iepriekš iegūto sakarību

$$K_l=\begin{cases}\frac{(l-1)!!}{l!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \text{ja } l-\text{pāra skaitlis}\\ \frac{(l-1)!!}{l!!}, \text{ja } l-\text{nepāra skaitlis}\end{cases}$$

iegūst, ka

$$\frac{(2n+1-1)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-1-1)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\Bigg|\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} < \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}$$

$$\frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n}$$

Apzīmē

$$x_n = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n+1}$$

$$y_n = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n}$$

Līdz ar to

$$x_n < \frac{\pi}{2} < y_n$$

Visas divkāršās nevienādības puses dala ar $2n$, iegūstot

$$\frac{x_n}{2n} < \frac{\pi}{2 \cdot 2n} < \frac{y_n}{2n}$$

Aplūko starpību

$$y_n - x_n = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n} - \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\frac{1}{2n+1} = \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{\left((2n)!!\right)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2 2n(2n+1)} = \frac{x_n}{2n}$$

Līdz ar to

$$\frac{\left((2n)!!\right)^2}{2n(2n+1)\left((2n-1)!!\right)^2} < \frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} < \frac{y_n}{2n}.$$

Acīmredzot, ja $n \to +\infty$, tad

$$\frac{1}{2n}\frac{\pi}{2} \to 0.$$

Respektīvi, tas nozīmē, ka

$$\lim_{n\to+\infty}(y_n - x_n) = 0.$$

Ja nogriežņu $[x_n; y_n]$, kas ietver punktu $\frac{\pi}{2}$, garums tiecas uz nulli, tad to galapunkti tiecas uz $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{\pi}{2}.$$

Līdz ar to

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n!!)^2}{\left((2n-1)!!\right)^2(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot \ldots\cdot 2n\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 3\cdot \ldots\cdot (2n-1)(2n+1)}$$

Tika parādīts veids, kā iegūst Vallesa formulu. [5,145]

3. Laplasa integrāļi

Par Laplasa integrāļiem sauc integrāļus, kuri uzdoti kā

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx \text{ un } \int_0^{+\infty} \frac{xsin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx.$$

Lai aprēķinātu integrāļu $\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ un $\int_0^{+\infty} \frac{xsin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx$ vērtības veic pārveidojumus:

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}dx = \left|\begin{matrix} \frac{x}{\alpha} = y \\ x = \alpha y \\ dx = \alpha dy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{cos(\beta\alpha y)}{1+y^2}\alpha dy = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{cos(\beta\alpha y)}{1+y^2}dy$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsin\beta x}{\alpha^2+x^2}dx = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{xsin\beta x}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}dx = \left|\begin{matrix} \frac{x}{\alpha} = y \\ x = \alpha y \\ dx = \alpha dy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{+\infty} \frac{\alpha ysin(\beta\alpha y)}{1+y^2}\alpha dy = \int_0^{+\infty} \frac{ysin(\beta\alpha y)}{1+y^2}dy$$

Lai atvieglotu turpmākus aprēķinus integrāļos apzīmē $\beta\alpha = \gamma$, tas ir

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{cos(\beta\alpha y)}{1+y^2}dy = \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{cos\gamma y}{1+y^2}dy \text{ un } \int_0^{+\infty} \frac{ysin(\beta\alpha y)}{1+y^2}dy = \int_0^{+\infty} \frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy.$$

Tiek aplūkoti integrāļi

$$I(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{cos\gamma y}{1+y^2}dy \text{ un } K(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy.$$

Tiek pieņemts, ka $\gamma > 0$. Tā kā visām y un γ vērtībām zemintegrāļa funkcija

$$\frac{cos\gamma y}{1+y^2}$$

ir nepārtraukta un integrālis

$$I'(\gamma)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{cos\gamma y}{1+y^2}\right)'_y dy=\int_0^{+\infty}\frac{-ysin\gamma y}{1+y^2}dy=-\int_0^{+\infty}\frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy$$

intervālā $[\gamma_0,+\infty]$, kur $\gamma_0>0$ vienmērīgi konverģē, tad izmantojot Leibnica likumu, tiek iegūts, ka

$$I'(\gamma)=-\int_0^{+\infty}\frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy.$$

Saskaitot vienādojuma $I'(\gamma)=-\int_0^{+\infty}\frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy$ un Dirihlē integrāļa $\int_0^{+\infty}\frac{sin\gamma y}{y}dy=\frac{\pi}{2}$ vērtību, iegūst, ka

$$I'(\gamma)+\frac{\pi}{2}=-\int_0^{+\infty}\frac{ysin\gamma y}{1+y^2}dy+\int_0^{+\infty}\frac{sin\gamma y}{y}dy=\int_0^{+\infty}\left(\frac{sin\gamma y}{y}-\frac{ysin\gamma y}{1+y^2}\right)dy=$$

$$=\int_0^{+\infty}\left(\frac{sin\gamma y+y^2sin\gamma y-y^2sin\gamma y}{y(1+y^2)}\right)dy=\int_0^{+\infty}\frac{sin\gamma y}{y(1+y^2)}dy.$$

Atvasina abas vienādojuma puses pēc parametra γ:

$$I''(\gamma)=\int_0^{+\infty}\frac{ycos\gamma y}{y(1+y^2)}dy=\int_0^{+\infty}\frac{cos\gamma y}{1+y^2}dy=I(\gamma).$$

Respektīvi, funkcija $I(\gamma)$ apmierina diferenciālvienādojumu:

$$I''(\gamma)-I(\gamma)=0$$

$$I(\gamma)=e^{\lambda\gamma}$$

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda=\pm 1$$

$$I(\gamma)=C_1e^{\gamma}+C_2e^{-\gamma}$$

Atzīmēsim, ka

$$|I(\gamma)|\le I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{cos0}{1+y^2}dy=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2}=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{dy}{1+y^2}=\lim_{A\to+\infty}arctgy\Big|_0^A=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}(arctgA-arctg0)=\frac{\pi}{2}.$$

Ja $\gamma\to+\infty$, tad $e^{-\gamma}\to 0$ un $e^{\gamma}\to+\infty$, tiek noteikts koeficients $C_1=0$ un attiecīgi integrālis $I(\gamma)=C_2e^{-\gamma}$.

Ja $\gamma=0$ ir zināms, ka $I(0)=\frac{\pi}{2}$. Tiek aprēķināta konstantes C_2 vērtība

$$\frac{\pi}{2}=C_2e^0$$

$$C_2 = \frac{\pi}{2}$$

un integrāļa vērtība, ja $\gamma > 0$, ir

$$I(\gamma) = \frac{\pi}{2} e^{-\gamma} .$$

Tā kā

$$I(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{cos\gamma y}{1 + y^2} dy$$

ir pāra funkcija, tāpēc integrāļa vērtību var pārrakstīt visām reālām γ vērtībām šādi:

$$I(\gamma) = \frac{\pi}{2} e^{-|\gamma|}.$$

Ievērojot, ka

$$I'(\gamma) = -\int_0^{+\infty} \frac{ysin\gamma y}{1 + y^2} dy = -K(\gamma),$$

tad attiecīgi tiek aprēķināta integrāļa $K(\gamma)$ vērtība (ja $\gamma > 0$).

$$K(\gamma) = I'(\gamma) = -\left(\frac{\pi}{2} e^{-\gamma}\right)' = \frac{\pi}{2} e^{-\gamma}.$$

Tā kā

$$K(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{ysin\gamma y}{1 + y^2} dy$$

ir nepāra funkcija, tāpēc integrāļa vērtību var pārrakstīt visām reālām γ vērtībām šādi:

$$K(\gamma) = \int_0^{+\infty} \frac{ysin\gamma y}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} sgn\gamma \cdot e^{-|\gamma|} \quad [4,349 - 350]$$

respektīvi, Laplasa integrāļu vērtības(ievērojot, ka $\beta\alpha = \gamma$, ja $\beta \neq 0$) ir

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{cos\gamma y}{1 + y^2} dy = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-|\gamma|} = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-|\beta\alpha|}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsin\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{ysin(\gamma y)}{1 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} sgn\gamma \cdot e^{-|\gamma|} = \frac{\pi}{2} sgn\alpha \cdot e^{-|\beta\alpha|}.$$

Tika iegūts, ka Laplasa integrāļu vērtības, ja $\beta \neq 0$ ir

$$\int_0^{+\infty} \frac{cos\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\alpha} e^{-|\beta\alpha|}$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\sin\beta x}{\alpha^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} sgn\alpha \cdot e^{-|\beta\alpha|}.$$

Literatūras avotos ir sastopami vēl divu veida Laplasa integrāļi

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx \text{ un } \int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin\beta x dx$$

Tāpat kā iepriekš tiek veikti pārveidojumi un apzīmē $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = 2\gamma$

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos\beta x dx = \left| \begin{array}{c} x\sqrt{\alpha} = y \\ \sqrt{\alpha}dx = dy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{array} \right| = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-y^2} \cos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} y dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} \cos\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} y dy = \left| \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = 2\gamma \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\gamma y dy.$$

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin\beta x dx = \left| \begin{array}{c} x\sqrt{\alpha} = y \\ \sqrt{\alpha}dx = dy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{array} \right| = \int_{0}^{+\infty} \frac{y e^{-y^2}}{\sqrt{\alpha}} \sin\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} y \frac{dy}{\sqrt{\alpha}} = \left| \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} = 2\gamma \right| =$$

$$= \frac{1}{\alpha} \int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} \sin 2\gamma y dy$$

Apskata integrāli

$$C(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\gamma y dy\,.$$

Tā kā zemintegrāļa funkcija $e^{-y^2}\cos 2\gamma y$ ir nepārtraukta, ja $y \geq 0$ un $\gamma \in R$, un integrālis $C(\gamma)$ konverģē visām γ vērtībām, un integrālis $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\cos 2\gamma y dy$ vienmērīgi konverģē pēc Veiještrāsa pazīmes, tad var pielietot Leibnica likumu (teorēma 3). Tas ir atvasina abas vienādojuma abas puses pēc parametra γ, iegūstot, ka

$$C'(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\gamma y dy = \int_{0}^{+\infty} -2y e^{-y^2} \sin 2\gamma y dy = -2 \int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} \sin 2\gamma y dy.$$

Integrējot parciāli, tiek iegūts, ka

$$C'(\gamma) = -2 \int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} \sin 2\gamma y dy = -\,2 \lim_{A \to +\infty} \int_{0}^{A} y e^{-y^2} \sin 2\gamma y dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = sin2\gamma y \\ du = 2\gamma cos2\gamma y dy \\ dv = ye^{-y^2}dy \\ v = \int \frac{y}{e^{y^2}}dy = -\frac{e^{-y^2}}{2} \end{matrix} \right| = -2 \lim_{A\to+\infty} \left(-\frac{e^{-y^2}}{2} sin2\gamma y \Big|_0^A - \int_0^A -\frac{e^{-y^2}}{2} \cdot 2\gamma cos2\gamma y dy \right) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} e^{-y^2} sin2\gamma y\Big|_0^A - 2\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-y^2}\gamma cos2\gamma y dy = \lim_{A\to+\infty} (e^{-A} sin2\gamma A - e^0 sin0) -$$

$$-2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\gamma cos2\gamma y dy = -2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\gamma cos2\gamma y dy.$$

Tā kā

$$C(\gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} cos2\gamma y dy$$

tiek iegūts, ka atvasinājums ir

$$C'(\gamma) = -2\gamma C(\gamma)$$

$$\frac{dC(\gamma)}{d(\gamma)} = -2\gamma C(\gamma)$$

$$\frac{dC(\gamma)}{C(\gamma)} = -2\gamma d\gamma$$

$$lnC(\gamma) = -\frac{2\gamma^2}{2} + lnC$$

$$ln\frac{C(\gamma)}{C} = -\gamma^2$$

$$\frac{C(\gamma)}{C} = e^{-\gamma^2}$$

$$C(\gamma) = Ce^{-\gamma^2}$$

Ja $\gamma = 0$, tad, ievērojot Eilera – Puasona integrāļa vērtību,

$$C(0) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} cos0dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

un $C(0) = Ce^0 = C$. Tādējādi konstantes C vērtība ir $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ un

$$C(\gamma) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\gamma^2} \quad [7,351].$$

Aplūkojot iepriekš zināmo ($\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} = \gamma$), tiek iegūts, ka Laplasa integrāļa vērtība ir

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} cos\beta x dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{0}^{+\infty} e^{-y^2} cos2\gamma y dy = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\gamma^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

Lai aprēķinātu Laplasa integrāļa

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} sin\beta x dx = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} sin2\gamma y dy$$

vērtību, atsevišķi tiek aplūkots integrālis

$$S(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} sin2\gamma y dy$$

Ievērojot, ka

$$C'(\gamma) = \int_{0}^{+\infty} -2y e^{-y^2} sin2\gamma y dy = -2\int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} sin2\gamma y dy = -2S(\gamma),$$

tad attiecīgi tiek aprēķināta integrāļa $S(\gamma)$ vērtība (ja $\gamma > 0$)

$$S(\gamma) = \frac{C'(\gamma)}{-2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\gamma^2}\right)' = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma e^{-\gamma^2}.$$

Respektīvi, Laplasa integrāļa vērtība (ievērojot, ka $\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} = \gamma$) ir

$$\int_{0}^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} sin\beta x dx = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{+\infty} y e^{-y^2} sin2\gamma y dy = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}\gamma e^{-\gamma^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \cdot \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} e^{-\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}.$$

4. Freneļa integrālis

Par Freneļa (Ogustens Žans Frenelis – franču fiziķis, viļņu teorijas pamatlicējs) sinusa un kosinusa integrāļiem sauc attiecīgi funkcijas:

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{x} sint^2 dt$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{x} cost^2 dt.$$

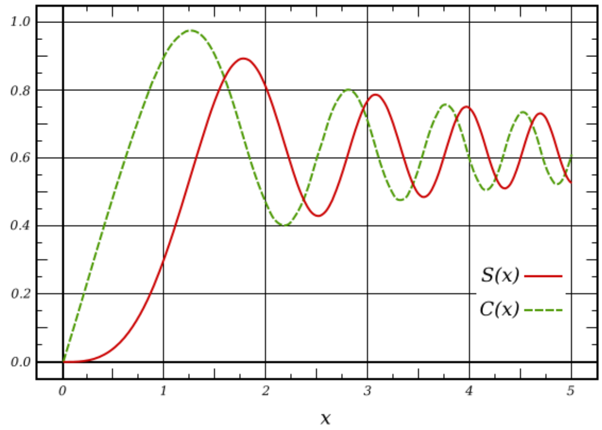
Šie integrāļi tiek izmantoti matemātiskās fizikas uzdevumu risināšanā (piemēram, difrakcijas teorijā un klasiskās mehānikas uzdevumos). Freneļa integrāli var izteikt Teilora rindā (vispirms zemintegrāļa funkciju izsaka Teilora rindā un tad nointegrē atsevišķi katru virknes locekli). Freneļa integrāļi Teilora rindā ir izsakāmi kā

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!\,(4n+3)}$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!\,4n}.$$

Redzams, ka Freneļa integrāļi ir veselas (par veselu funkciju sauc funkciju, kas ir regulāra visā apgabalā), nepāra funkcijas. [6,39]

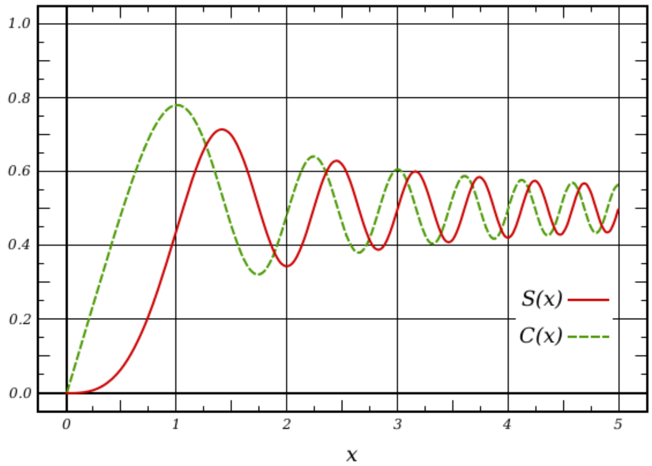
Freneļa integrāļu grafiks, ja $x \geq 0$ ir redzams attēlā 1.3.4.1



1.3.4.1.att. **Freneļa integrāļu grafiks**

No 1.3.4.1. attēla ir redzams, ka maksimāla Freneļa kosinusa integrāļa vērtība ir aptuveni 0,98, bet Freneļa sinusa integrāļa maksimāla vērtība ir aptuveni 0,9.

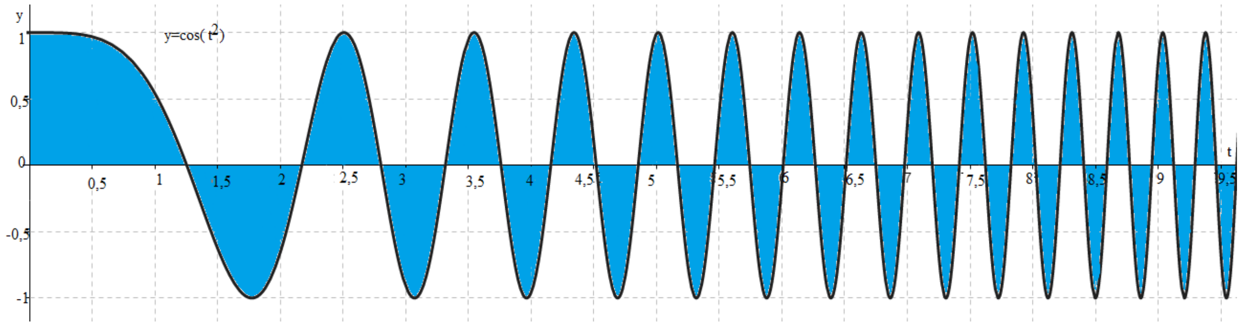
Freneļa integrāļus var normalizēt, tas ir, funkcijas argumenta t^2 vietā izmantot $\frac{\pi t^2}{2}$ vērtību. Tātad Freneļa integrāļu definīcija ir iegūstama iepriekš minētajā Freneļa integrālī veicot mainīgo maiņu $t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}t$ un integrāļa vērtību reizinot ar $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. (skat att.1.3.4.2)



1.3.4.2. att. **Normalizēts Freneļa integrāļu grafiks**

No 1.3.4.2. attēla ir redzams, ka normalizēta Freneļa kosinusa un sinusa integrāļu maksimālās vērtības attiecīgi ir aptuveni 0,78 un 0,71.Salīdzinot ar 1.3.4.1. attēlu, ir redzams, ka mainās horizontālais un vertikālais mērogs.

Tālāk apskatīsim Freneļa integrāļa vērtību lielām argumenta x vērtībām. Zemintegrāļa funkcija ir maiņzīmju funkcija. Kā iepriekš jau aplūkots, integrāli var izteikt kā maiņzīmju rindas funkcijas laukumu summu, kur laukumi ir tieši proporcionāli zemintegrāļu funkcijas periodam (skat. att. 1.3.4.3.). Svārstību periods, kad $t \to +\infty$, kā redzams 1.3.4.3. attēlā, tiecas uz nulli. Attiecīgi arī maiņzīmju rindas locekļi tiecas uz nulli. Pēc Liuvilla konverģences pazīmes rindas konverģē, respektīvi, integrāļi $S(x)$ un $C(x)$ ir ierobežoti, ja $x \to +\infty$.[6,40]



1.3.4.3. att. **Freneļa kosinusa integrāli var izteikt kā maiņzīmju rindas summu, kuras locekļi ir funkcijas $y = cos(t^2)$ un t ass ierobežoto plaknes apgabalu laukumi**

Tiks aprēķināti Freneļa integrāļu $S = \int_0^{+\infty} sint^2 dt$ un $C = \int_0^{+\infty} cost^2 dt$ vērtības.

Vispirms, izmantojot substitūciju $t^2 = y$, tiek aprēķināts integrāļa $S = \int_0^{+\infty} sint^2 dt$ vērtība.

$$S = \int_0^{+\infty} sint^2 dt = \left| \begin{matrix} t^2 = y \\ 2tdt = dy \\ Ja\ t = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ t \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{siny}{2\sqrt{y}} dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{siny}{\sqrt{y}} dy$$

Tiek pieņemts, ka $y > 0$. Apskata integrāli

$$\int_0^{+\infty} e^{-yu^2} du.$$

Pielieto substitūciju $t = \sqrt{y}u$ un pielieto Eilera – Puasona integrāļa vērtību

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

iegūstot, ka

$$\int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du = \left| \begin{matrix} t = \sqrt{y}u \\ du = \dfrac{dt}{\sqrt{y}} \\ Ja\ u = 0, tad\ t = 0 \\ Ja\ u \to +\infty, tad\ t \to +\infty \end{matrix} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{y}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}.$$

Reizinot abas vienādojuma puses ar $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$ iegūst, ka

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du = \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Ievērojot, ka

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{siny}{\sqrt{y}} dy \text{ un } \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du$$

tiek iegūts, ka

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} siny \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} dy \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} sinydy \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du.$$

Lai pamatotu, ka integrālī var mainīt integrēšanas secību apskata integrāli

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{siny}{\sqrt{y}} dy$$

un, ja $\alpha \neq 0$, izmanto vienādību

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 y} \frac{siny}{\sqrt{y}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 y} sinydy \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du = \int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y(u^2+\alpha^2)} sinydy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + (u^2 + \alpha^2)^2}.$$

Apskatot robežu, kad $\alpha \to 0$, iegūst vienādību

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4}.$$

Pāriet uz robežu drīkst, tā kā integrāļi vienmērīgi konverģē.

Citiem vārdiem integrālī

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} sinydy \int_0^{+\infty} e^{-yu^2}du$$

tiek mainīta integrēšanas secība

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-yu^2} sinydy$$

un tiek izmantota vienādība

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} sin\beta x dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

(vienādība ir spēkā, ja $\alpha > 0$ un $\beta \in R$), iegūstot iepriekš minēto

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4}.$$

Aprēķina integrāļa $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}$ vērtību. Šajā integrālī izmantojot substitūciju $u = \frac{1}{x}$, integrāli var izteikt šādi:

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \left| \begin{array}{c} u = \frac{1}{x} \\ du = -\frac{1}{x^2} dx \\ Ja\ u \to 0, tad\ x \to +\infty \\ Ja\ u \to +\infty, tad\ x \to 0 \end{array} \right| = \int_{+\infty}^{0} -\frac{dx}{x^2\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^4\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{x^2(1 + x^4)} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1 + u^4}.$$

Attiecīgi veic identisko pārveidojumu, vienādojuma abas puses reizina ar 2, tas ir

$$2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = 2\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1 + u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1 + u^4} + \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1 + u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{1 + u^4} + \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(u^2 + 1)du}{1 + u^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1 + \frac{1}{u^2}}{u^2 + \frac{1}{u^2}} du = \left| \begin{array}{c} u - \frac{1}{u} = x \\ \text{Abas vienādojuma puses kāpina kvadrātā} \\ \left(u - \frac{1}{u}\right)^2 = x^2 \\ u^2 - 2u \cdot \frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} = x^2 \\ u^2 + \frac{1}{u^2} = x^2 + 2 \\ dx = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) du \\ Ja\ u \to 0, tad\ x \to -\infty \\ Ja\ u \to +\infty, tad\ x \to +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A \frac{dx}{x^2+2} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A \frac{dx}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A \frac{\sqrt{2}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} \int_B^A \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} arctg \frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_B^A = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} (arctgA - arctgB) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\substack{A\to+\infty \\ B\to-\infty}} (arctgA - arctgB) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Rezultātā ir iegūts, ka

$$2\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

tātad

$$\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Attiecīgi Freneļa sinusa integrāļa vērtība ir

$$S = \int_0^{+\infty} sint^2 dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Analoģiski tiek aprēķināts Freneļa kosinusa integrāļa vērtība, kura vērtība ir

$$C = \int_0^{+\infty} cost^2 dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad [4{,}351-353]$$

1.3.5. Uzdevumi par parametra atkarīgo integrāļu aprēķināšanu

Šajā apakšnodaļā tiks formulēti uzdevumi par parametra atkarīgo neīstiem integrāļiem, ka arī tiks sniegti uzdevumu atrisinājumi. Uzdevumos tiek pieņemts, ka funkcijas ir nepārtrauktas un tām eksistē pirmās kārtas atvasinājumi.

1.uzdevums

Atrast atvasinājumu funkcijai

$$I(y) = \int_0^1 ln(x^2+y^2)\,dx. \quad [13]$$

Risinājums

Lai aprēķinātu funkcijas $I(y) = \int_0^1 ln(x^2 + y^2)dx$ atvasinājumu, izmanto sakarību $I'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)dx.$

Līdz ar to

$$I'(y) = \int_0^1 \left(ln(x^2 + y^2)\right)_y' dx = \int_0^1 \frac{2y}{y^2 + x^2} dx = 2y\int_0^1 \frac{dx}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1\right)} = \frac{2}{y}\int_0^1 \frac{yd\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} =$$

$$= 2arctg\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_0^1 = 2arctg\frac{1}{y} - 2arctg0 = 2arctg\frac{1}{y}$$

2.uzdevums

Atrast atvasinājumu funkcijai

$$I(y) = \int_0^1 si\,n(yx)\,dx. \quad [4,329]$$

Risinājums

Lai aprēķinātu funkcijas $I(y) = \int_0^1 sin(yx)dx$ atvasinājumu, izmanto sakarību

$$I'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)dx.$$

Tātad

$$I'(y) = \int_0^1 (sin(yx)_y' dx = \int_0^1 xcos(yx)\,dx = \left(\frac{1}{y^2}cosyx + \frac{xsin(yx)}{y}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{cosy - cos0}{y^2} + \frac{siny - 0}{y} = \frac{cosy - 1 + ysiny}{y^2}$$

3.uzdevums

Atrast atvasinājumu funkcijai

$$I(y) = \int_{chy}^{shy} l\,n(1 + x^2 + y^2)\,dx \quad [7,329]$$

Risinājums

Tā kā funkcijas $f(x,y) = ln(1 + x^2 + y^2)$ un $\varphi_1(y) = chy$, un $\varphi_2(y) = shy$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad atvasinājumu meklē pēc formulas:

$$I'(y) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y(x,y)dx + \varphi'_2(y) \cdot f(\varphi_2(y),y) - \varphi'_1(y) \cdot f(\varphi_1(y),y).$$

Vispirms atrod atvasinājumus:

$$f'_y(x,y) = (ln(1+x^2+y^2))'_y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

$$\varphi'_1(y) = (chy)'_y = shy$$

$$\varphi'_2(y) = (shy)'_y = chy$$

līdz ar to atvasinājums

$$I'(y) = \int\limits_{chy}^{shy} \frac{2y}{1+x^2+y^2}dx + chyln(1+x^2+y^2)|_{x=shy} - shy \cdot ln(1+x^2+y^2)|_{x=chy} =$$

$$= \int\limits_{chy}^{shy} \frac{2ydx}{\left(\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + 1\right)(1+y^2)} + chy \cdot ln(1+sh^2y+y^2) - shy\, ln(1+ch^2y+y^2) =$$

$$= \frac{2y}{1+y^2} \int\limits_{chy}^{shy} \frac{\sqrt{1+y^2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right) + chy \cdot ln(ch^2y+y^2) -$$

$$-shy\, ln(1+ch^2y+y^2) = \frac{2y\sqrt{1+y^2}}{1+y^2} arctg \frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_{chy}^{shy} + chy \cdot ln(ch^2y+y^2) -$$

$$-shy\, ln(1+ch^2y+y^2) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\left(arctg\frac{shy}{\sqrt{1+y^2}} - arctg\frac{chy}{\sqrt{1+y^2}}\right) +$$

$$+chy \cdot ln(ch^2y+y^2) - shy\, ln(1+ch^2y+y^2)$$

<u>4.uzdevums</u>

Atrast atvasinājumu funkcijai

$$I(y) = \int\limits_{y}^{0} ln(y^2+x^2)\, dx. \quad [3,3]$$

<u>Risinājums</u>

Atvasinājumu meklē pēc formulas:

$$I'(y) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f'_y(x,y)dx + \varphi'_2(y) \cdot f(\varphi_2(y),y) - \varphi'_1(y) \cdot f(\varphi_1(y),y)$$

Vispirms atrod atvasinājumus:

$$f_y'(x,y) = (ln(y^2+x^2))_y' = \frac{2y}{y^2+x^2}$$
$$\varphi_1'(y) = (y)_y' = 1$$
$$\varphi_2'(y) = (0)_y' = 0$$

Līdz ar to

$$I'(y) = \int_y^0 \frac{2ydx}{y^2+x^2} + 0\cdot ln(x^2+y^2)|_{x=0} - 1\cdot ln(x^2+y^2)|_{x=y} = 2y\int_y^0 \frac{dx}{y^2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)} -$$

$$-ln(y^2+y^2) = \frac{2}{y}\int_y^0 \frac{yd\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1} - ln(2y^2) = 2arctg\frac{x}{y}\Big|_y^0 - ln(2y^2) = 2arctg0 -$$

$$-2arctg\frac{y}{y} - ln(2y^2) = -\frac{2\pi}{4} - ln2 - lny^2 = -\frac{\pi}{2} - ln2 - 2lny$$

5.uzdevums

Atrast atvasinājumu funkcijai

$$I(y) = \int_{ye^{-y}}^{ye^y} ln(1+y^2x^2)\,dx. \quad [7,329]$$

Risinājums

Atvasinājumu meklē pēc formulas:

$$I'(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f_y'(x,y)dx + \varphi_2'(y)\cdot f(\varphi_2(y),y) - \varphi_1'(y)\cdot f(\varphi_1(y),y)$$

Vispirms atrod atvasinājumus:

$$f_y'(x,y) = (ln(1+x^2y^2))_y' = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$$
$$\varphi_1'(y) = (ye^{-y})_y' = e^{-y} - ye^{-y}$$
$$\varphi_2'(y) = (ye^y)_y' = e^y + ye^y$$

Līdz ar to

$$I'(y) = \int_{ye^{-y}}^{ye^y} \frac{2x^2ydx}{1+x^2y^2} + (e^y+ye^y)ln(1+x^2y^2)|_{x=ye^y} -$$

$$-(e^{-y}-ye^{-y})ln(1+x^2y^2)|_{x=ye^{-y}}=2y\int_{ye^{-y}}^{ye^{y}}\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y^2(1+x^2y^2)}\right)dx+$$

$$+(e^y+ye^y)\,ln(1+y^2e^{2y}y^2)-(e^{-y}-ye^{-y})\,ln(1+y^2e^{-2y}y^2)=$$

$$=\frac{2}{y}\int_{ye^{-y}}^{ye^{y}}dx-\frac{2}{y}\int_{ye^{-y}}^{ye^{y}}\frac{dx}{(1+x^2y^2)}+e^y(1+y)\,ln(1+e^{2y}y^4)-$$

$$-e^{-y}(1-y)\,ln(1+y^4e^{-2y})=\frac{2}{y}x|_{ye^{-y}}^{ye^{y}}-\frac{2}{y}\int_{ye^{-y}}^{ye^{y}}\frac{d(xy)}{y(1+(xy)^2)}+$$

$$+e^y(1+y)\,ln(1+e^{2y}y^4)-e^{-y}(1-y)\,ln(1+y^4e^{-2y})=\frac{2(ye^y-ye^{-y})}{y}-$$

$$-\frac{2}{y^2}arctgxy|_{ye^{-y}}^{ye^{y}}+e^y(1+y)\,ln(1+e^{2y}y^4)-e^{-y}(1-y)\,ln(1+y^4e^{-2y})=$$

$$=\frac{4y(e^y-e^{-y})}{2y}-\frac{2}{y^2}\left(arctg(y^2e^y)-arctg(y^2e^{-y})\right)+e^y(1+y)\,ln(1+e^{2y}y^4)-$$

$$-e^{-y}(1-y)\,ln(1+y^4e^{-2y})=4shy+\frac{2}{y^2}\left(arctg(y^2e^{-y})-arctg(y^2e^y)\right)+$$

$$+e^y(1+y)\,ln(1+e^{2y}y^4)-e^{-y}(1-y)\,ln(1+y^4e^{-2y})$$

<u>6.uzdevums</u>

Aprēķināt

$$\lim_{y\to 0}\int_0^{\pi}xcos\big((1+y)x\big)dx.\quad [8,327]$$

<u>Risinājums</u>

Tā kā zemintegrāļa funkcija $f(x,y)=xcos\big((1+y)x\big)$ ir nepārtraukta visā plaknē O_{xy} plaknē, tad tā ir nepārtraukta taisnstūrī $\Pi=\begin{cases}0\le x\le\pi\\-d\le y\le d\end{cases}$, kur $d>0$.

Pēc teorēmas 1, seko, ka drīkst veikt robežpāreju zem integrāļa zīmes, ja $y\to 0$.

Tādējādi

$$\lim_{y\to 0}\int_0^{\pi}xcos\big((1+y)x\big)dx=\int_0^{\pi}\lim_{y\to 0}\Big(xcos\big((1+y)x\big)\Big)dx=\int_0^{\pi}xcosxdx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=x & dv=cosxdx\\ du=dx & v=\int cosxdx=sinx\end{matrix}\right|=xsinx|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}sinxdx=\pi sin\pi-0-(-cosx)|_0^{\pi}=$$

$= cos\pi - cos0 = -1 - 1 = -2$

<u>7.uzdevums</u>

Aprēķināt

$$\lim_{y\to 1}\int_2^4 \frac{x}{1+x^2+y^8}dx.$$

<u>Risinājums</u>

Tā kā zemintegrāļa funkcija $f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^8}$ ir nepārtraukta visā plaknē O_{xy} plaknē, tad tā ir nepārtraukta taisnstūrī $\Pi = \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ -d \le y \le d \end{cases}$, kur $d > 0$.

Pēc teorēmas 1, seko, ka drīkst veikt robežpāreju zem integrāļa zīmes, ja $y \to 1$.

Tādējādi

$$\lim_{y\to 1}\int_2^4 \frac{x}{1+x^2+y^8}dx = \int_2^4 \lim_{y\to 1}\frac{x}{1+x^2+y^8}dx = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2+1}dx = \int_2^4 \frac{xdx}{2+x^2} ==$$

$$= \left| \begin{matrix} 2+x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ Ja\ x = 2, tad\ t = 6 \\ Ja\ x = 4, tad\ t = 18 \end{matrix} \right| = \int_6^{18} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} ln|t| \Big|_6^{18} = \frac{1}{2}(ln18 - ln6) = \frac{1}{2} ln\frac{18}{6} = \frac{ln3}{2}$$

<u>8.uzdevums</u>

Aprēķināt integrāļa

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{lnx}dx$$

vērtību, ja $a > 0, \mathrm{b} > 0$. [5,74-75]

<u>Risinājums</u>

Pieņemsim, ka *b* ir parametrs, bet $a-$ konstante, respektīvi, tas nozīmē, ka

$$f(x,b) = \frac{x^a - x^b}{lnx}$$

ir zemintegrāļa funkcija, un integrālis ir uzdots kā $I = I(b)$. Lai varētu pielietot teorēmu par atvasināšanu zem integrāļa zīmes (*teorēma 3)*, nepieciešams nodrošināt, lai izpildās teorēmas nosacījumi, tas ir, lai funkcija $f(x,b)$ un tā atvasinājums $f(x,b)'_b$ būtu nepārtraukti.

Gadījumā, ja $x \in (0;1)$ funkcija $f(x,b)$ ir nepārtraukta. Definēsim funkciju intervāla galapunktos:

$$f(x,b)=\begin{cases}\dfrac{x^a-x^b}{lnx}, & \text{ja } x\in(0;1)\\ 0, & ja\ \ x=0\\ a-b, & ja\ \ x=1\end{cases}$$

Pārbaudām intervāla galapunktus.

Ja $x = 0$, tad pēc funkcijas definīcijas $f(0;b) = 0$ un

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^a-x^b}{lnx}=0.$$

Ja $x\to 0$, tad $lnx\to -\infty$, līdz ar to, ja $x\to 0$, tad

$$\frac{x^a-x^b}{lnx}\to 0.$$

Izmantojot Lopitāla kārtulu, atrod funkcijas $f(x,b)$ robežu, ja $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^a-x^b}{lnx}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^a-x^b}{lnx}\right)'=\lim_{x\to 1}\frac{ax^{a-1}-bx^{b-1}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}(ax^a-bx^b)=a-b$$

Funkcija $f(x,b)=\frac{x^a-x^b}{lnx}$ ir ierobežota intervālā $x\in[0;1]$.

Tā kā funkcijai $f(x,b)$ neeksistē pamatintegrāļa funkcija, tad pēc teorēmas 3 atvasinām zemintegrāļa funkciju pēc parametra b:

$$f(x,b)'_b=\left(\frac{x^a-x^b}{lnx}\right)'_b=-\frac{x^b lnx}{lnx}=-x^b.$$

Tā kā $b>0$, tad funkcijas atvasinājums $f(x,b)'_b=-x^b$ ir arī nepārtraukts.

Pēc teorēmas 3 atrod integrāļa $I=\int_0^1\frac{x^a-x^b}{lnx}$ atvasinājumu:

$$I'_b(b)=\int_0^1 -x^b\,dx=-\frac{x^{b+1}}{b+1}\bigg|_0^1=-\frac{1^{b+1}}{b+1}+\frac{0^{b+1}}{b+1}=-\frac{1}{b+1}$$

Tā kā

$$I'_b(b)=-\frac{1}{b+1},$$

tad integrāļa vērtība ir

$$I=\int I'_b(b)db=\int -\frac{1}{b+1}db\ =-\int\frac{1}{b+1}d(b+1)=-\ln(b+1)+C.$$

Atrod konstantes C vērtību. Apskata uzdevumā doto integrāli $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{x^a-x^b}{lnx}dx.$

Acīmredzot, ja $a=b$, tad

$$I=\int_0^1\frac{x^a-x^a}{lnx}dx=\int_0^1\frac{0}{lnx}dx=0.$$

Līdz ar to

$$0 = -\,ln(a+1) + C$$
$$C = ln(a+1)$$

Iegūst, ka

$$I = -\,ln(b+1) + ln(a+1) = ln\frac{a+1}{b+1}.$$

9.uzdevums

Aprēķināt integrāli

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos^2x + y^2sin^2x)\,dx. \quad [3,4]$$

Risinājums

Tā kā, ja $y > 0$, zemintegrāļa funkcija $f(x,y) = ln(cos^2x + y^2sin^2x)$ ir nepārtraukta un tai eksistē nepārtraukts parciālais atvasinājums (ja $y > 0$):

$$f'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2ysin^2x}{cos^2x + y^2sin^2x}.$$

Tiek izmantota *teorēma 3* un aprēķināta atvasinājuma $I'(y)$ vērtība iegūstot, ka

$$I'(y) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ysin^2x}{cos^2x + y^2sin^2x}dx = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \qquad cos^2x = \frac{1}{1+t^2} \qquad sin^2x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ Ja\ x = 0, tad\ t = tg0 = 0 \\ Ja\ x \to \frac{\pi}{2}, tad\ t \to +\infty \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{2y\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2} + y^2\frac{t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2yt^2dt}{(1+y^2t^2)(1+t^2)}$$

Zemintegrāļa funkciju sadala parciāldaļās:

$$\frac{2yt^2}{(1+y^2t^2)(1+t^2)} = \frac{A}{1+y^2t^2} + \frac{B}{1+t^2}$$
$$2yt^2 = A + At^2 + B + By^2t^2$$
$$\begin{matrix} t: \\ t^0: \end{matrix}\begin{cases} 2y = A + By^2 \\ \ \ 0 = A + B \end{cases}$$
$$2y = -B + By^2$$
$$B = \frac{2y}{y^2-1}$$
$$A = -B = \frac{-2y}{y^2-1}$$

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{2yt^2 dt}{(1+y^2t^2)(1+t^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{-2ydt}{(1+y^2t^2)(y^2-1)} + \int_0^{+\infty} \frac{2ydt}{(1+t^2)(y^2-1)} =$$

$$= \frac{-2y}{y^2-1}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}\right)$$

Ja $y \neq 1$, tad neīstie integrāļi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2t^2}$ un $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ konverģē, to vērtības attiecīgi ir

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+y^2t^2} = \frac{1}{y}\int_0^{+\infty} \frac{d(yt)}{1+(yt)^2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Respektīvi, tas nozīmē, ka

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{2yt^2 dt}{(1+y^2t^2)(1+t^2)} = \frac{-2y}{y^2-1}\left(\frac{\pi}{2y} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-2\pi y(1-y)}{2y(y-1)(y+1)} = \frac{\pi}{y+1}.$$

Zinot integrāļa atvasinājuma vērtību, atrod integrāļa vērtību:

$$I'(y) = \frac{\pi}{y+1}$$

$$I(y) = \int \frac{\pi}{y+1} dy = \int \frac{\pi}{y+1} d(y+1) = \pi \ln(y+1) + C$$

Konstanti *C* nosaka no nosacījuma, ja $y = 1$, tad

$$I(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos^2x + sin^2x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\, 1\, dx = 0$$

$$I(1) = \pi \ln(1+1) + C = \pi \ln 2 + C$$

$$\pi \ln 2 + C = 0$$

$$C = -\pi \ln 2$$

Iegūst, ka

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(cos^2x + y^2 sin^2x)\, dx = \pi\, ln(y+1) - \pi \ln 2 = \pi ln \frac{y+1}{2}$$

10.uzdevums

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}dx, \text{ ja } \int_y^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \ [3,6]$$

Risinājums.

Apzīmē $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}dx$.

Tā kā zemintegrāļa funkcija $f(x,y) = e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}$ ir nepārtraukta un tai eksistē nepārtraukts parciālais atvasinājums, tad vispirms aprēķina parciālo atvasinājumu

$$f_y'(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{-2y}{x^2}e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}.$$

Tiek pielietota teorēma 3 un aprēķināta atvasinājuma $I'(y)$ vērtība iegūstot, ka

$$I'(y) = \int_0^{+\infty} \frac{-2y}{x^2}e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}dx = -2y\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \frac{y}{t} \\ dx = \frac{-y}{t^2}dt \\ Ja\ x \to 0, tad\ t \to +\infty \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ t \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= -2y\int_{+\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{y^2}{t^2}-\frac{y^2t^2}{y^2}}t^2}{y^2}\cdot\left(\frac{-y}{t^2}\right)dt = -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{t^2}-t^2}dt = \left| \begin{array}{c} t = x \\ dx = dt \\ Ja\ t = 0, tad\ x = 0 \\ Ja\ t \to +\infty, tad\ x \to +\infty \end{array} \right| =$$

$$= -2\int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{x^2}-x^2}dx = -2I(y)$$

Zinot integrāļa atvasinājuma vērtību $I'(y) = -2I(y)$ atrisina diferenciālvienādojumu, tas ir, tiek izteikta integrāļa vērtība

$$\frac{dI(y)}{dy} = -2I(y)$$

$$\frac{dI(y)}{I(y)} = -2dy$$

$$\int \frac{dI(y)}{I(y)} = \int -2dy$$

$$lnI(y) = -2y + lnC$$

$$I(y) = Ce^{-2y}$$

Konstanti *C* nosaka no nosacījuma, ja $y = 0$, tad

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = Ce^0$$

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2-\frac{y^2}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2y}.$$

11.uzdevums

Ja $|y| \leq 1$, *aprēķināt integrāli*

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln\frac{1+ysinx}{1-ysinx}\frac{dx}{sinx} \text{ [3,4]}$$

Risinājums.

Zemintegrāļa funkcija ir nepārtraukta funkcija, ja $|y| \leq 1$.

Vispirms tiek aprēķināts funkcijas parciālais atvasinājums:

$$\left(ln\frac{1+ysinx}{1-ysinx}\cdot\frac{1}{sinx}\right)'_y = \frac{1-ysinx}{sinx(1+ysinx)}\cdot\frac{sinx(1-ysinx)-(-sinx)(1+ysinx)}{(1-ysinx)^2} =$$

$$= \frac{sinx - ysin^2x + sinx + ysin^2x}{sinx(1+ysinx)(1-ysinx)} = \frac{2sinx}{sinx(1+ysinx)(1-ysinx)} = \frac{2}{1-y^2sin^2x}$$

Pēc 3.teorēmas iegūst, ka atvasinājuma $I'(y)$ vērtība ir

$$I'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{1-y^2sin^2x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{sin^2x\left(\frac{1}{sin^2x}-y^2\right)} = \left|\begin{matrix} ctgx = t \qquad 1+ctg^2x = \frac{1}{sin^2x} \\ dt = -\frac{1}{sin^2x}dx \\ Ja\ x \to 0, tad\ t \to +\infty \\ Ja\ x = \frac{\pi}{2}, tad\ t = ctg\frac{\pi}{2} = 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{+\infty}^{0} \frac{-2dt}{1+t^2-y^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2dt}{t^2+1-y^2} = \left|\begin{matrix}\text{Tā kā } |y| \leq 1, \text{tad} \\ 1-y^2 \geq 0\end{matrix}\right| = \frac{2}{1-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{1-y^2}}{1-y^2} arctg \frac{t}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_0^{+\infty} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{(1-y^2)^2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{2\pi}{2}\sqrt{\frac{1}{1-y^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

Zinot integrāļa atvasinājuma vērtību

$$I'(y) = \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

aprēķina integrāļa vērtību

$$I(y) = \int \frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}} dy = \left| \begin{matrix} y = sinu \\ dy = cosudu \end{matrix} \right| = \int \frac{\pi cosu}{\sqrt{1-sin^2u}} du = \int \frac{\pi cosu}{\sqrt{cos^2u}} du =$$

$$= \int \frac{\pi cosu}{cosu} du = \int \pi\, du = \pi u + C = \pi arcsiny + C.$$

Konstanti *C* nosaka no nosacījuma, ja $y = 0$.

$$I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \frac{1 + 0 \cdot sinx}{1 - 0 \cdot sinx} \frac{dx}{sinx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ln1dx}{sinx} = 0$$

$$I(0) = \pi arcsin0 + C = 0 + C$$

$$0 + C = 0$$

$$C = 0$$

Iegūst, ka

$$I(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln \frac{1 + ysinx}{1 - ysinx} \frac{dx}{sinx} = \pi arcsiny + 0 = \pi arcsiny$$

12.uzdevums

Izmantojot Frullani formulas, aprēķināt integrāļu vērtības, ja $a > 0, b > 0$

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx \quad [7,345]$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{sinax - sinbx}{x} dx \quad [3,4]$$

$$c)\ I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{lnx} dx$$

Risinājums.

Visos 3. gadījumā tiek pāriets uz Frullani integrāļa formulu.

a) Izvēlas funkciju $f(x) = e^{-x^2}$, tā ir nepārtraukta visiem $x \geq 0$, funkcijai $f(x)$ eksistē galīgā robeža, kura definēta šādi:

$$f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} e^{-(x)^2} = 0$$

Izsaka

$$e^{-bx^2} = e^{-(\sqrt{b}x)^2} = f(\sqrt{b}x)$$

$$e^{-ax^2} = e^{-(\sqrt{a}x)^2} = f(\sqrt{a}x)$$

Aprēķina $f(0) = e^{-a\cdot 0^2} = 1$

Izmantojot 1.Frullani integrāļa formulu, iegūst, ka

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\sqrt{a}x) - f(\sqrt{b}x)}{x} dx = (1-0)ln\sqrt{\frac{b}{a}} = ln\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}ln\frac{b}{a}.$$

b) Izvēlas funkciju $f(x) = sinx$, tad

$$sinbx = f(bx)$$

$$sinax = f(ax)$$

Aprēķina $f(0) = sin0 = 0$

Tā kā funkcijai $f(x)$ neeksistē galīga robeža, kad $x \to +\infty$, tad izmantojot 2.Frullani integrāļa formulu iegūst, ka

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{sinax - sinbx}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = 0 \cdot ln\frac{b}{a} = 0$$

c) Jau iepriekš (6.uzdevums) tika aplūkots, ka

$$I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{lnx} dx = ln\frac{a+1}{b+1}$$

Integrālī izmantojot substitūciju $lnx = y$, pāriet uz Frullani formulu.

$$I = \int_0^1 \frac{x^a - x^b}{lnx} dx = \left| \begin{matrix} lnx = y \\ dx = e^y dy \\ Ja\ x \to 0, tad\ y \to +\infty \\ Ja\ x \to 1, tad\ y \to 0 \end{matrix} \right| = \int_{+\infty}^0 \frac{e^{ay} - e^{by}}{y} e^y dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{(b+1)y} - e^{(a+1)y}}{y} dy$$

Izvēlas funkciju $f(y) = e^y$, tā ir nepārtraukta visiem $y \geq 0$.

Aprēķina $f(0) = e^0 = 1$.

Tā kā funkcijai $f(y)$ neeksistē galīga robeža, kad $y \to +\infty$, tad izmantojot 2.Frullani integrāļa formulu, iegūst, ka

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(b+1)y} - e^{(a+1)y}}{y} dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f((b+1)x) - f((a+1)x)}{x} dx = ln\frac{a+1}{b+1}$$

Kas arī bija jāiegūst.

2. EILERA INTEGRĀĻI

Eilera integrāļi pieder pie vienkāršākām, bet tajā pašā laikā pie svarīgākām ievērojamām funkcijām. Citu specifisku funkciju pētīšanai, ir jāzina Eilera integrāļu aprēķināšanas metodes un pamatīpašības. Pirmais Gamma un Beta funkcijas definēja L.Eilers. Šīs funkcijas pētīja arī I.Ņūtons, Dž.Vallis un citi. [9]

Šajā nodaļā tiks definēti Eilera integrāļi, aplūkotas to īpašības un atrisināti uzdevumi, kuros jāpielieto Eilera integrāļi.

2.1. Beta funkcija jeb 1.veida Eilera integrālis

Definīcija

Par Beta funkciju sauc 1.veida Eilera integrāli, kuru uzdod šādi:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \text{ , kur } a>0; b>0.$$

Integrālis ir īsts, ja vienlaikus konstantes $a>1; b>1$. Pretējā gadījumā integrālis $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ ir neīsts. Beta funkcijai ir divi singulārie punkti. Ja $a<1$, tad singulārais punkts ir $x=0$, bet, ja $b<1$, tad singulārais punkts ir $x=1$.

Tiek parādīts, ka integrālis $B(a,b)$ konverģē, ja vienlaicīgi konstantes $a>0; b>0$. Integrālis $B(a,b)$ tiek sadalīts divu integrāļu summā:

$$B(a,b)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=I_1+I_2, \text{kur}$$

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Tiek apskatīts 1.integrālis $I_1=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Integrālis ir neīsts, ja $a<1$. Funkcijas singulārais punkts $x=0$. Zemintegrāļa funkcija tiek pārrakstīta šādi:

$$f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}.$$

Apzīmē

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-a}}$$

Tā kā visiem $b \neq 0$ robeža

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-x)^{b-1}}{x^{1-a}}}{\frac{1}{x^{1-a}}} = \lim_{x\to 0}(1-x)^{b-1} = 1^{b-1} = 1,$$

tad integrāļi $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ un $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx$ vienlaicīgi konverģē vai diverģē. Zinot, ka

$$\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^{1-a}}$$

konverģē tad, ja $1 - a < 1$ (t.i., ja $a > 0$), tiek secināts, ka integrālis

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

konverģē visām b vērtībām, ja $a > 0$.

Tiek apskatīts 2.integrālis $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Integrālis ir neīsts, ja $b < 1$. Zemintegrāļa izteiksme tiek pārrakstīta šādi:

$$f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1} = \frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}.$$

Apzīmē

$$\tilde{g}(x) = \frac{1}{(1-x)^{1-b}}.$$

Tā kā visiem $a \neq 0$ robeža

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\tilde{g}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^{a-1}}{(1-x)^{1-b}}}{\frac{1}{(1-x)^{1-b}}} = \lim_{x\to 0} x^{a-1} = 1^{a-1} = 1,$$

tad integrāļi $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$ un $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \tilde{g}(x)dx$ vienlaicīgi konverģē vai diverģē. Ievērojot, ka

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \tilde{g}(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{(1-x)^{1-b}}$$

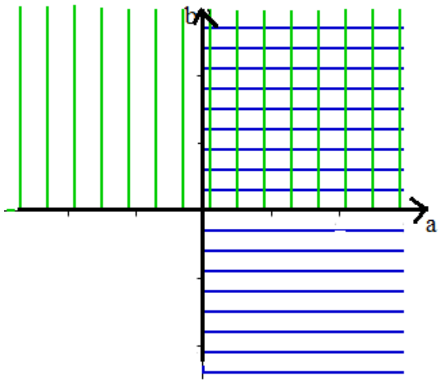
konverģē tad, ja $1 - b < 1$ (t.i., ja $b > 0$), tiek secināts, ka integrālis

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

konverģē visām a vērtībām, ja $b > 0$.

1.veida Eilera integrālis $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ konverģē, ja vienlaicīgi konstantes $a > 0, b > 0$. Funkcijas $B(a,b)$ definīcijas apgabals ir

$$\begin{cases} 0 < a < +\infty \\ 0 < b < +\infty \end{cases} (\text{skat. } 2.1.1. \text{ att.}) \ \ [2{,}129-130]\,.$$



2.1.1. att. **Beta funkcijas definīcijas apgabala noteikšana**

2.1.1. Beta funkcijas svarīgākās īpašības

Šeit tiks apskatīts 1.veida integrāļa $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ biežāk lietojamās īpašības. Visas apskatītās īpašības tiks pierādītas.

Beta funkciju svarīgākās īpašības:

1. Beta funkcija ir simetriska funkcija:

Pierādījums.

Integrālī $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, pielieto substitūciju $x = 1 - t$.

Iegūst

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-t)^{a-1}\big(1-(1-t)\big)^{b-1}(-dt) = \int_0^1 (1-t)^{a-1}t^{b-1}dt = B(b,a)$$

Tātad $B(a,b) = B(b,a)$.

Kas arī bija jāpierāda.[2,130]

2. Ir spēkā šādas sakarības:

Ja parametrs $b > 1$, $a > 0$, tad

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Ja parametrs $a > 1$, $b > 0$, tad

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b) \quad [2,130].$$

<u>*Pierādījums.*</u>

Tā kā Beta funkcija ir simetriska funkcija, tad pietiek pierādīt tikai vienu gadījumu (ja $b > 1$, sakarību pierāda analoģiski). Ja $a > 1$, tad jāpierāda, ka

$$B(a,b) = \frac{a-1}{a+b-1} B(a-1, b)$$

Integrējot parciāli Beta funkciju, iegūst, ka

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^1 x^{a-1} d\left(\frac{(1-x)^b}{b}\right) = \frac{(1-x)^b}{b} x^{a-1}\Bigg|_0^1 +$$

$$+\frac{a-1}{b}\int_0^1 (1-x)^b x^{a-2} dx = \frac{(1-1)^b \cdot 1^{a-1}}{b} - \frac{(1-0)^b}{b} \cdot 0^{a-1} +$$

$$+\frac{a-1}{b}\int_0^1 (1-x)^b x^{a-2} dx = \frac{a-1}{b}\int_0^1 (1-x)^b x^{a-2} dx.$$

Tā kā

$$(1-x)^b = (1-x)^{b-1} - (1-x)^{b-1}\big(1-(1-x)\big) = (1-x)^{b-1} - (1-x)^{b-1}x,$$

tad iegūst, ka

$$B(a,b) = \frac{a-1}{b}\int_0^1 (1-x)^{b-1}x^{a-2}dx - \frac{a-1}{b}\int_0^1 (1-x)^{b-1}x^{a-1}dx = \frac{a-1}{b}B(a-1,b) -$$

$$-\frac{a-1}{b}B(a,b)$$

Atrisina vienādojumu $B(a,b) = \frac{a-1}{b}B(a-1,b) - \frac{a-1}{b}B(a,b)$ attiecībā pret $B(a,b)$.

$$B(a,b) = \frac{a-1}{b}B(a-1,b) - \frac{a-1}{b}B(a,b)$$

Vienādojuma abas puses reizina ar $b \neq 0$, iegūstot

$$bB(a,b) = (a-1)B(a-1,b) - (a-1)B(a,b)$$

$$(b+a-1)B(a,b) = (a-1)B(a-1,b)$$

$$B(a,b)=\frac{(a-1)}{b+a-1}B(a-1,b).$$

Kas arī bija jāpierāda.

3. Ir spēkā šādas sakarības, kuras iegūst samazinot argumentu a, b vērtības:

$$B(a,n)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}, \qquad \text{kur } n\in N$$

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}, \text{kur } m,n\in N \quad [1,214].$$

Pierādījums.

Gadījumā, ja $b=n, n\in N, n>1$, vairākas reizes pēc kārtas izmantojot sakarību

$$B(a,b)=\frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$$

iegūst, ka

$$B(a,n)=\frac{n-1}{a+n-1}B(a,n-1)=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}B(a,n-2)=\dots=$$

$$=\frac{n-1}{a+n-1}\cdot\frac{n-2}{a+n-2}\cdot\cdot\dots\cdot\frac{1}{a+1}B(a,1)=\frac{(n-1)!}{(a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)}B(a,1)$$

Ievērojot, ka

$$B(a,1)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{1-1}dx=\int_0^1 x^{a-1}dx=\left.\frac{x^a}{a}\right|_0^1=\frac{1^a}{a}-\frac{0^a}{a}=\frac{1}{a}.$$

Ievērojot, ka Beta funkcija ir simetriska funkcija, iegūst, ka

$$B(a,n)=B(n,a)=\frac{(n-1)!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}$$

Gadījumā, ja $a=m,$ kur $m\in N$ un $b=n,$ kur $n\in N$, tad tiek iegūta sakarība

$$B(m,n)=B(n,m)=\frac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)}=\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

Kas arī bija jāpierāda. [2,131]

4. Beta funkciju var izteikt ar formulu

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$$

Pierādījums.

Integrālī $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ pielieto substitūciju $x=\frac{y}{1+y}$, no kurienes seko,ka

$$y = \frac{x}{1-x}$$

Izsaka

$$1 - x = \frac{1}{1+y}$$

Atvasina abas vienādojuma puses, iegūstot, ka

$$(1-x)' = \left(\frac{1}{1+y}\right)'$$

$$-dx = \frac{-dy}{(1+y)^2}$$

$$dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$$

Ja $x = 0$, tad $y = 0$.

Ja $x \to 1$, tad $y \to +\infty$.

Tādējādi iegūst, ka

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{b-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

Kas bija jāpierāda. [2,131]

5. Beta funkciju var izteikt ar šādi:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2a-1}\varphi sin^{2b-1}\varphi d\varphi.$$

Pierādījums.

Apskata Beta funkciju $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. Šajā integrālī izmanto substitūciju $x = cos^2\varphi$.

Acīmredzot, ka

$$1 - x = 1 - cos^2\varphi = sin^2\varphi$$

$$dx = (cos^2\varphi)'d\varphi = -2cos\varphi sin\varphi d\varphi$$

Ja $x = 0$, tad $\varphi = arccos\sqrt{0} = arccos0 = \frac{\pi}{2}$.

Ja $x = 1$, tad $\varphi = arccos\sqrt{1} = arccos1 = 0$.

Tādējādi iegūst, ka

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (cos^2\varphi)^{a-1}(sin^2\varphi)^{b-1} \cdot (-2cos\varphi sin\varphi)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2a-2+1}\varphi sin^{2b-2+1}\varphi d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2a-1}\varphi sin^{2b-1}\varphi d\varphi.$$

Kas arī bija jāpierāda.

6. Ja $b = 1 - a$ un $0 < a < 1$, kas nozīmē, ka $0 < b < 1$, tad

$$B(a, 1 - a) = \frac{\pi}{sin\pi a} [2,131]$$

Pierādījums.

Apskata Beta funkciju $B(a, 1 - a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$. Šo integrāli sadala divu integrāļu summā

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx = I_1 + I_2,$$

kur

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x} dx.$$

Apskata integrāli $I_1 = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x} dx$.

Tā kā funkcijas $\frac{1}{1+x}$ izvirzījums Maklorēna rindā ir

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^l,$$

tad zemintegrāļa funkcijas izvirzījums rindā ir

$$\frac{x^{a-1}}{1 + x} = x^{a-1} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^l = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^l\, x^{a-1} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l x^{a+l-1}.$$

Šī rinda vienmērīgi konverģē, ja $0 < \varepsilon \leq x \leq 1 - \varepsilon' < 1$. Rindai eksistē integrējama mažorante intervālā$[0,1]$:

$$0 \leq \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l x^{a+l-1} = \frac{x^{a-1}(1 - (-x)^n)}{1 + x} < x^{a+1}.$$

Seko, ka integrālis no mažorantes konverģē vienmērīgi (gan ja $x = 1$, gan ja $x = 0$).

Pielietojot teorēmu: ”*Ja funkcija* $f(x, y), y \in Y$ *ir integrējama pēc x intervālā* $[a, A]$, *kur* $A > a$ *un katrā tādā intervālā, ja* $y \to y_0$, *funkcija vienmērīgi tiecas uz robežfunkciju* $\varphi(x)$ *turklāt ja integrālis* $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *vienmērīgi konverģē, tad ir spēkā formula:* $\lim_{y \to y_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$" [11,695] iegūst, ka

$$I_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^l x^{a+l-1} dx = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l x^{a+l}}{a+l}\Bigg|_0^1 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a+l}.$$

Otrajā integrālī, izmantojot substitūciju $x = \frac{1}{y}$ iegūst, ka

$$I_2 = \int_0^1 \frac{y^{-a}}{1+y} dy = \int_0^1 \frac{y^{1-a-1}}{1+y} dy.$$

Balstoties uz integrāļa I_1 izvirzījumu rindā, analoģiski iegūst I_2 izvirzījumu rindā:

$$I_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a-l}$$

Rezultātā iegūst, ka

$$I = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a+l} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a-l} = \frac{1}{a} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a+l} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l}{a-l} = \frac{1}{a} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a-l}\right)$$

Rindai

$$\frac{1}{a} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{a+l} + \frac{1}{a-l}\right)$$

pielieto $sinx$ izvirzījumu, tas ir,

$$sinx = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \quad [11,374 - 377]$$

Tiek izvirzīts $\frac{1}{sinx}$, tāpēc vispirms to pārraksta šādi

$$\frac{1}{sinx} = \frac{1}{2}\left(ctg\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2}\right)$$

Vispirms tiks izvirzītas $ctg\frac{x}{2}$ un $tg\frac{x}{2}$, lai to veiktu aplūko

$$sinx = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

Ņemot abas vienādojuma puses modulī, iegūst

$$|sinx| = |x| \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

Ja $x \neq 2n$, kur $n \in Z$, tad, logaritmējot abas vienādojuma puses, iegūst

$$ln|sinx| = ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} ln\left|1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right|$$

Atvasinot abas vienādojuma puses pēc mainīgā x, tiek iegūts, ka

$$\frac{cosx}{sinx} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2x}{n^2\pi^2}}{1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}}$$

$$ctgx = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n}\right)$$

Pēc redukcijas formulām $tgx = -ctg\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, kas nozīmē, ka tgx izvirzījums ir

$$tgx = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x - \frac{2n-1}{2}\pi} + \frac{1}{x + \frac{2n-1}{2}\pi}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4}}$$

Iegūst, ka

$$\frac{1}{sinx} = \frac{1}{2}\left(ctg\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x - \pi n} + \frac{1}{x + \pi n}\right)$$

Kā redzams, aplūkotā rinda

$$\frac{1}{a} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{a + l} + \frac{1}{a - l}\right)$$

atbilst funkcijas $\frac{\pi}{sin\pi a}$ izvirzījumam rindā. Līdz ar to ir iegūts, ka

$$B(a, 1 - a) = \frac{\pi}{sin\pi a}.$$

Kas arī bija jāpierāda.[11,699-700]

No 6.īpašības iegūst, ja $a = b = \frac{1}{2}$, tad Beta funkcijas vērtība ir $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{sin\frac{\pi}{2}} = \pi$.

2.1.2. Uzdevumi par Beta funkciju jeb 1.veida Eilera integrāli

1.uzdevums

Pierādīt vai atspēkot, ka Beta funkcijai izpildās sakarība:

$$B(a, b) = B(a + 1, b) + B(a, b + 1) \quad [3,9]$$

Pierādījums

Pielietojot Beta funkcijas 2.īpašību, viegli var pierādīt doto sakarību. Izsaka vienādības labajā pusē dotās Beta funkcijas pēc 2. īpašības:

$$B(a+1,b) = \frac{a+1-1}{b+a+1-1}B(a+1-1,b) = \frac{a}{b+a}B(a,b)$$

$$B(a,b+1) = \frac{b+1-1}{b+1+a-1}B(a,b+1-1) = \frac{b}{b+a}B(a,b)$$

Ievietojot šīs izteiksmes sākuma dotos nosacījumos, tiek iegūts, ka

$$B(a,b) = \frac{a}{b+a}B(a,b) + \frac{b}{b+a}B(a,b)$$

$$B(a,b) = \left(\frac{a}{b+a} + \frac{b}{b+a}\right)B(a,b)$$

$$B(a,b) = B(a,b)$$

Ir pierādīta uzdevumā dotā sakarība.

2.uzdevums

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4tg^{\frac{2}{3}}xdx.$$

Risinājums.

Tā kā

$$tgx = \frac{sinx}{cosx},$$

tad doto integrāli var pārrakstīt šādi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4tg^{\frac{2}{3}}xdx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\frac{2}{3}}xcos^{-\frac{2}{3}}xdx$$

Integrāli izsaka ar Beta funkciju. Pēc Beta funkcijas 5.īpašības nosaka Beta funkcijas *a* un *b* vērtības no sistēmas:

$$\begin{cases} 2b-1 = \frac{2}{3} \\ 2a-1 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{5}{6} \\ a = \frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4tg^{\frac{2}{3}}xdx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\frac{2}{3}}xcos^{-\frac{2}{3}}xdx = 2B\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$$

Pēc Beta funkcijas 6.īpašības seko, ka

$$2B\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)=\frac{2\pi}{sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$$

Tātad

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4tg^{\frac{2}{3}}xdx=4\pi$$

3.uzdevums

Integrāli

$$\int_0^1 \frac{x^{3c}}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx,$$

kur $c>-\frac{1}{3}$, *izteikt ar 1.veida integrāli*.[7,366]

Risinājums.

Lai integrāli izteiktu ar Beta funkciju jeb 1.veida integrāli, vispirms tiek izmantota substitūcija $1-x^3=t$.

$$\int_0^1 \frac{x^{3c}}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx=\left|\begin{matrix}1-x^3=t\\ dx=\dfrac{dt}{-3\sqrt[3]{(1-t)^2}}\\ Ja\ x=0\,,tad\ t=1\\ Ja\ x=1,tad\ t=0\end{matrix}\right|=\int_1^0 \frac{(1-t)^c}{\sqrt[3]{1-(1-t)}}\cdot\frac{dt}{-3\sqrt[3]{(1-t)^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^{c-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}}dt$$

Nosaka Beta funkcijas parametru *a* un *b* vērtības no sistēmas:

$$\begin{cases} b-1=\dfrac{-1}{3}\\ a-1=c-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{2}{3}\\ a=\mathrm{c}+\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Tādējādi iegūst, ka

$$\int_0^1 \frac{x^{3c}}{\sqrt[3]{1-x^3}}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 (1-t)^{c-\frac{2}{3}}t^{-\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3};a+\frac{1}{3}\right)$$

4.uzdevums

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln^2x}{1+x^4}dx \; [7{,}365]$$

Risinājums.

Integrālī pielieto substitūciju $y = x^4$, iegūstot, ka

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln^2x}{1+x^4}dx = \left| \begin{array}{c} t = x^4\,, \quad \text{tātad } x = t^{\frac{1}{4}} \\ dx = \dfrac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}} \\ lnx = lnt^{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{4}lnt \\ Ja\ x = 0, tad\ t = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ t \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}lnt\right)^2}{1+t}\frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{64}\int_0^{+\infty} \frac{ln^2t \cdot t^{-\frac{3}{4}}}{1+t}dt$$

Apskatām Beta funkciju $B(a; 1-a) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt$, kur $0 < a < 1$. Tātad

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \frac{\pi}{sin\pi a}$$

Atrod otrās kārtas atvasinājumu pēc parametra a abām vienādojuma pusēm. Pirmās kārtas atvasinājums ir vienāds ar

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}lnt}{1+t}dt = \frac{-\pi^2 cos\pi a}{sin^2\pi a}$$

Otrās kārtas atvasinājums ir vienāds ar

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}ln^2t}{1+t}dt = \left(\frac{-\pi^2 cos\pi a}{sin^2\pi a}\right)'_a$$

$$\left(\frac{-\pi^2 cos\pi a}{sin^2\pi a}\right)'_a = \frac{-\pi^2(-\pi sin\pi a \cdot sin^2\pi a - \pi cos\pi a \cdot 2sin\pi a \cdot cos\pi a)}{sin^4\pi a} =$$

$$= \frac{\pi^3 sin\pi a(sin^2\pi a + 2cos^2\pi a)}{sin^4\pi a} = \frac{\pi^3(sin^2\pi a + 2cos^2\pi a)}{sin^3\pi a}$$

Tātad

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}ln^2t}{1+t}dt = \frac{\pi^3(sin^2\pi a + 2cos^2\pi a)}{sin^3\pi a}$$

Ievērojot, ka $a - 1 = -\frac{3}{4}$, tas ir, $a = \frac{1}{4}$, iegūst, ka

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{-\frac{3}{4}} ln^2 t}{1+t} dt = \frac{\pi^3 \left(sin^2 \frac{\pi}{4} + 2cos^2 \frac{\pi}{4}\right)}{sin^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3 \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{6\pi^3}{\sqrt{2}} = 3\pi^3\sqrt{2}$$

Rezultātā tiek aprēķināts, ka

$$\int_0^{+\infty} \frac{ln^2 x}{1+x^4} dx = \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{ln^2 t \cdot t^{-\frac{3}{4}}}{1+t} dt = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{64}$$

5.uzdevums

Ja $0 < \alpha < \beta$, *aprēķināt* i*ntegrāli*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} dx \ [7{,}365]$$

Risinājums.

Integrālī pielieto substitūciju $x^{\beta} = t$ iegūstot

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} dx = \left| \begin{array}{c} x^{\beta} = t \\ dx = \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt \\ Ja\ x = 0, tad\ t = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ t \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}}}{1+t} \cdot \frac{1}{\beta} t^{\frac{1}{\beta}-1} dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}}{1+t} dt$$

Pēc Beta funkcijas 4. īpašības $B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy$, sastādot vienādojumu sistēmu nosaka parametru *a* un *b* vērtības.

$$\begin{cases} a - 1 = \frac{\alpha-\beta}{\beta} \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{\alpha}{\beta} \\ b = 1 - \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

Tādējādi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} dx = \frac{1}{\beta} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}}{1+t} dt = \frac{1}{\beta} B\left(\frac{\alpha}{\beta}; 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

Tā kā $0 < \alpha < \beta$, tad ņemot vērā Beta funkcijas 6.īpašību, iegūst, ka

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x^{\beta}} dx = \frac{1}{\beta} B\left(\frac{\alpha}{\beta}; 1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{\pi}{\beta sin \frac{\beta\pi}{\alpha}}$$

2.2. Gamma funkcija jeb 2.veida Eilera integrālis

Šajā apakšnodaļā tiks aplūkota Gamma funkcija jeb 2.veida Eilera integrālis reālām argumenta vērtībām, tiks pierādītas Gamma funkcijas īpašības. Tāpat tiks parādīta sakarība ar 1.veida Eilera integrāli, un tiks atrisināti uzdevumi, kuros jāpielieto Gamma funkcija vai arī sakarība starp Beta un Gamma funkcijām. Gamma funkciju ieviesa L.Eilers 1729. gadā.

<u>Definīcija</u>

Par Gamma funkciju sauc 2.veida Eilera integrāli, kuru uzdod šādi:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

2.veida Eilera integrālis konverģē, ja $a > 0$. Lai to parādītu, 2. veida Eilera integrālis tiek sadalīts divu integrāļu summā:

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2, \text{kur}$$

$$I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Tiek apskatīts 1.integrālis $I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$. Integrālis ir īsts, ja $a > 1$. Pretējā gadījumā – tas ir, ja $a < 1$, integrālis ir neīsts. Zemintegrāļā funkcijas singulārais punkts ir $x = 0$. Zemintegrāļa funkcija tiek pārrakstīta šādi:

$$f(x) = x^{a-1}e^{-x} = x^{-(1-a)}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{x^{1-a}}.$$

Apzīmē

$$g(x) = \frac{1}{x^{1-a}}.$$

Tā kā visām parametra a vērtībām

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{-x}}{x^{1-a}}}{\frac{1}{x^{1-a}}} = \lim_{x\to 0} e^{-x} = e^0 = 1,$$

tad integrāļi $\int_0^1 f(x)dx$ un $\int_0^1 g(x)dx$ vienlaicīgi vai nu konverģē, vai diverģē. Zināms, ka

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1-a}}$$

konverģē tad, ja $1 - a < 1$ (t.i., ja $a > 0$), tiek secināts, ka integrālis $I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ konverģē.

Tiek apskatīts 2.integrālis $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. Tā kā visām parametra a vērtībām

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{a-1}}{e^x} = \frac{0^{a-1}}{e^0} = 0,$$

tad eksistē skaitlis $k > 1$, tāds, ka, ja $x \geq k$, tad

$$\frac{x^a}{e^x} < 1.$$

Skaidrs, ja $x \geq k$, tad visām a vērtībām

$$\frac{x^a}{e^x} < \frac{1}{x^2}.$$

Zinot, ka neīsts integrālis

$$\int_k^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

konverģē, tiek secināts, ka visām parametra a vērtībām arī integrālis

$$\int_k^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

konverģē. Tādēļ arī integrālis $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ konverģē, ja $a > 0$. [2,132-133]

2.veida Eilera integrālis $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ konverģē, ja parametrs $a > 0$. [2,133]

2.2.1. Gamma funkcijas svarīgākās īpašības

Kaut arī 2. veida Eilera integrāli nevar izteikt elementāras funkcijas veidā, no tā neizriet, ka nevar izpētīt funkcijai raksturīgās īpašības. Šajā apakšnodaļā tiks aplūkotas un pierādītas Gamma funkcijas raksturīgākās īpašības.

1. Gamma funkcijas vērtības ir pozitīvas: $\Gamma(a) > 0$, ja $a \in (0; +\infty)$.

Pierādījums.

Šī īpašība izriet no Gamma funkcijas uzdošanas veida. [2,133].

2. Ir spēkā sakarība: $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Šo sakarību sauc par Gamma funkcijas pamatīpašību.

Pierādījums.

Tiek apskatīts reizinājums

$$a\Gamma(a) = a\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = a\lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-x}d\left(\frac{x^a}{a}\right) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{-x} & dv = d\left(\frac{x^a}{a}\right) \\ du = -e^{-x}dx & v = \int d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \frac{x^a}{a} \end{array} \right| = a\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{x^a e^{-x}}{a}\Big|_0^c + \int_0^c \frac{x^a(-e^{-x})dx}{a}\right) =$$

$$= a\left(\lim_{c\to+\infty}\left(\frac{c^a e^{-c}}{a} - \frac{0^a e^{-0}}{a}\right) + \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{x^a(-e^{-x})dx}{a}\right) =$$

$$= a\left(\lim_{c\to+\infty}\frac{c^a e^{-c}}{a} + \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{x^a(-e^{-x})dx}{a}\right)$$

Ievēro, ka

$$\lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{x^a(-e^{-x})dx}{a} = \int_0^{+\infty} \frac{x^a(-e^{-x})dx}{a} = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} x^a e^{-x}dx = \frac{1}{a}\Gamma(a+1)$$

$$\lim_{c\to+\infty}\frac{c^a}{ae^c} = \lim_{c\to+\infty}\left(\frac{c^a}{ae^c}\right)'_c = \lim_{c\to+\infty}\frac{ac^{a-1}}{ae^c} = \lim_{c\to+\infty}\frac{c^a}{ae^c}\cdot\lim_{c\to+\infty}\frac{a}{c} = \lim_{c\to+\infty}\frac{c^a}{ae^c}\cdot 0 = 0$$

Iegūst:

$$a\Gamma(a) = a\left(0 + \frac{1}{a}\Gamma(a+1)\right) = \Gamma(a+1)$$

Respektīvi $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

Kas bija jāpierāda.[1,133]

3. Ir spēkā sakarība:$\Gamma(a+1) = a(a-1)(a-2)\ldots(a-k)\Gamma(a-k)$, kur $a-k > 0$ un $k \in N$

Pierādījums.

Pieņem, ka $a \in Z$ un $k = [a]$ jeb skaitļa a veselā daļa, tas ir, tuvākais mazākais skaitlis.

Secīgi pielietojot Gamma funkcijas 2.īpašību, tiek iegūts, ka

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) = a(a-1)\Gamma(a-1) = \cdots = a(a-1)(a-2)\ldots(a-k)\Gamma(a-k)$$

Kas bija jāpierāda.[5,70-71]

Ja $k \in N$, tad ir spēkā sakarība:

$\Gamma(n+a) = (n+a-1)\Gamma(n+a-1) = \cdots = (n+a-1)(n+a-2)\ldots(a-1)a\Gamma(a)$

Atsevišķi tiek apskatīts gadījums, kad $n = 1$, tas ir, tiek meklēta Gammas funkcijas $\Gamma(a+1)$ vērtība.

Vispirms attiecīgi tiek aprēķināta $\Gamma(1)$ vērtība:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} x^{1-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} e^{-x}d(-x) = -e^{-x}|_0^{+\infty} = 1.$$

Attiecīgi $\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1\Gamma(1) = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$

Definīcija:

Par *funkcijas turpinājumu* sauc analītiskas funkcijas definīcijas apgabala paplašināšanu, saglabājot funkcijas analītiskās īpašības.[12]

Gamma funkcija ir faktoriāla (naturāla argumenta funkcijas) turpinājums. [2,133]

4. Gamma funkcija ir nepārtraukta intervālā $(0; +\infty)$.

Pierādījums.

Fiksē punktu $a_0 > 0$, kurš ir definēts intervālā $0 < c < d < +\infty$, tā kā $c < a_0 < d$.

2.veida neīstais integrālis tiek uzrakstīts divu integrāļu summas veidā:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = I_1 + I_2,$$

kur

$$I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Vispirms tiek apskatīts 1. integrālis

$$I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Šajā integrālī ir spēka šādi nosacījumi, pirmkārt, zemintegrāļa funkcija $f(x) = x^{a-1}e^{-x}$ ir nepārtraukta apgabalā

$$\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ c \leq a \leq d. \end{cases}$$

Otkārt,

$$\int_0^1 f(x, a)dx = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

intervālā $[c, d]$ vienmērīgi konverģē attiecībā pret a.

Tiek apskatīts apgabals $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ c \leq a \leq d \end{cases}$

Tā kā $0 < x \leq 1$, tad $x^a \leq x^c$.

Abas nevienādības puses reizina ar

$$\frac{e^{-x}}{x} > 0$$

$$\frac{e^{-x}x^a}{x} \leq \frac{e^{-x}x^c}{x}$$

iegūstot $e^{-x}x^{a-1} \leq e^{-x}x^{c-1}$.

Tā kā $\int_0^1 x^{c-1}e^{-x}dx$ konverģē, ja $c > 0$, tad pēc neīsto integrāļu vienmērīgās konverģences „ *Ja* $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)dx$ *konverģē visiem* $y \in [c, d]$, *tad to sauc par vienmērīgi konverģentu intervālā* $[c, d]$, *ja katram* $\varepsilon > 0$ *eksistē tāds* $x(\varepsilon)$, *ka jebkuram* $A > x(\varepsilon)$ *un visiem* $y \in [c, d]$ *izpildās* $\left|\int_A^{+\infty} f(x, y)dx\right| < \varepsilon$" [1,213] seko, ka integrālis

$$I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

vienmērīgi konverģē attiecībā pret a intervālā $[c, d]$. No tā tiek secināts, ka

$$I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$$

ir nepārtraukts punktā a_0.

Līdzīgi apskata 2. integrāli

$$I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

Ir spēka šādi nosacījumi, pirmkārt, zemintegrāļa funkcija $f(x) = x^{a-1}e^{-x}$ ir nepārtraukta apgabalā $\begin{cases} 1 \leq x < +\infty \\ c \leq a \leq d \end{cases}$.

Otkārt,

$$\int_{1}^{+\infty} f(x,a)dx = \int_{1}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

intervālā $[c,d]$ vienmērīgi konverģē attiecībā pret a. Līdzīgi iepriekš apskatītajam intervālā $1 \leq x < +\infty$ ir spēkā sakarība $x^a \leq x^d$.

Abas nevienādības puses reizina ar

$$\frac{e^{-x}}{x} > 0$$

$$\frac{e^{-x}x^a}{x} \leq \frac{e^{-x}x^d}{x},$$

iegūst, ka $e^{-x}x^{a-1} \leq e^{-x}x^{d-1}$.

Tā kā integrālis $\int_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}dx$ konverģē visām mainīgā d vērtībām, tad intervālā $[c,d]$ integrālis $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ konverģē vienmērīgi attiecībā pret a. Savukārt, tas nozīmē, ka integrālis $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ ir nepārtraukts intervālā $[c,d]$, tātad arī punktā a_0

Tā kā integrāļi $I_1 = \int_0^1 x^{a-1}e^{-x}dx$ un $I_2 = \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ ir nepārtraukti punktā a_0, tad arī 2. veida Eilera integrālis $\Gamma(a) = I_1 + I_2$ arī ir nepārtraukts punktā a_0.

Zinot, ka punkts a_0 ir patvaļīgs punkts no intervāla $(0;\ +\infty)$ tiek secināts, ka Gamma funkcija $\Gamma(a)$ ir nepārtraukta intervālā $(0;\ +\infty)$.

Kas arī bija japierāda. [2,135-136]

5. Ja parametra a vērtība tiecas uz 0 no labās puses, tad Gamma funkcijas vērtība ir ekvivalenta vērtībai $\frac{1}{a}$. Simboliski to var pierakstīt šādi, ja $a \to +0$, tad $\Gamma(a) \sim \frac{1}{a}$.

<u>Pierādījums.</u>

Tiek pārrakstīta Gamma funkcijas 2. īpašība ($\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$) šādi:

$$\Gamma(a+1) = \frac{\Gamma(a)}{\frac{1}{a}}.$$

Tiek apskatīta robeža, kad $a \to +0$. Pēc Gamma funkcijas 3. īpašības seko, ka tā ir nepārtraukta funkcija intervālā $(0;\ +\infty)$. Tiek iegūts, ka

$$\lim_{a \to +0} \Gamma(a+1) = \Gamma(1) = 1,$$

kas savukārt, nozīmē, ka

$$\lim_{a \to +0} \frac{\Gamma(a+1)}{\frac{1}{a}} = 1$$

jeb, ja $a \to +0$, tad $\Gamma(a) \sim \frac{1}{a}$.

Citiem vārdiem sakot, parametra a vērtībai tiecoties uz 0 no labās puses, Gamma funkcijas vērtība ir ekvivalenta bezgalīgi lielai pozitīvai vērtībai $\frac{1}{a}$.

Kas arī bija jāpierāda. [2,136-137]

6. Gamma funkcijai intervālā $(0;\ +\infty)$ eksistē *n*-tās kārtas atvasinājumi, kurus uzdod šādi:

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(lnx)^n dx$$

Pierādījums.

Vispirms tiek pierādīta 1. kārtas atvasinājuma eksistence un vienādība:

$$\Gamma'(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx.$$

Tiek apskatīts intervāls $[c, d]$, kurā patvaļīgi izvēlās punktu a_0 tādu, ka $0 < c < a_0 < d < +\infty$. Šajā intervālā izpildās šādi nosacījumi, pirmkārt, zemintegrāļa funkcija $f(x) = x^{a-1}e^{-x}$ un tās atvasinājums $f_a'(x) = (x^{a-1}e^{-x})_a' = x^{a-1}e^{-x}lnx$ ir nepārtraukti apgabalā $\begin{cases} 0 < x < +\infty \\ 0 < c \le a \le d \end{cases}$.

Otkārt, intervālā $[c, d]$ integrālis

$$\int_0^{+\infty} f(x, a)dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx.$$

Treškārt, pierādīsim, ka intervālā $[c, d]$ integrālis

$$\int_0^{+\infty} f_a'(x)dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx$$

vienmērīgi konverģē attiecībā pret mainīgo a.

Gamma funkcijas integrāļa atvasinājums tiek sadalīts divu integrāļu summas veidā:

$$\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx = \int_0^{1} x^{a-1}e^{-x}lnxdx + \int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx.$$

Aplūko integrāli

$$\int_0^{1} x^{a-1}e^{-x}lnxdx.$$

Tā kā integrālis ir uzdots apgabalā $\begin{cases} 0 < x \le 1 \\ c \le a \le d \end{cases}$, tad $x^a \le x^c$.

Abas nevienādības puses reizinot ar

$$\frac{e^{-x}}{x} > 0,$$

iegūst $e^{-x}x^{a-1} \leq e^{-x}x^{c-1}$.

Ņemot vērā, ka $lnx \leq 0$, tiek secināts, ka $e^{-x}x^{a-1}lnx \leq 0$ un $e^{-x}x^{c-1} \leq 0$. No tā izriet, ka $e^{-x}x^{a-1}lnx \geq e^{-x}x^{c-1}lnx$. Līdz ar to, ja $lnx \leq 0$, $0 < x \leq 1$, tad

$$|e^{-x}x^{a-1}lnx| \leq |e^{-x}x^{c-1}lnx|$$

$$|e^{-x}x^{c-1}lnx| = -e^{-x}x^{c-1}lnx \geq 0.$$

Apskatot intervālu $0 < x \leq 1$, $e^{-x} < 1$, iegūst $|e^{-x}x^{a-1}lnx| \leq -x^{c-1}lnx$

Integrējot parciāli iegūst, ka

$$\int_0^1 -x^{c-1}lnx\,dx = \left| \begin{matrix} u = lnx & dv = x^{c-1} \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \int x^{c-1}dx = \dfrac{x^{c-1+1}}{c-1+1} = \dfrac{x^c}{c} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\left(l\,nx\frac{x^c}{c}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^c dx}{cx} \right) = -\left(0 - \frac{1}{c}\int_0^1 x^{c-1}dx \right) = \frac{1}{c}\int_0^1 x^{-(-c+1)}dx = \frac{1}{c}\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}}.$$

Integrālis $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1-c}}$ konverģē, ja $1 - c > 1$, tas ir, ja $c > 0$**.** Pēc vienmērīgās konverģences pazīmes: *„Ja eksistē tāda funkcija $g(x)$, ka visiem $x \geq x_0 > a$ un visiem $y \in [c,d]$ $|f(x,y)| \leq g(x)$ un $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ konverģē, tad $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ konverģē vienmērīgi intervālā $[c,d]$.*"[1,213] tiek secināts, ka integrālis intervālā $[c,d]$

$$\int_0^1 x^{a-1}e^{-x}lnxdx$$

konverģē vienmērīgi attiecībā pret a.

Līdzīgi tiek apskatīts 2. integrālis $\int_1^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx$.

Apgabalā$\begin{cases} 1 \leq x < +\infty \\ c \leq a \leq d \end{cases}$ izpildās nosacījums, ka $e^{-x}x^{a-1} \leq e^{-x}x^{d-1}$.

Reizinot abas nevienādības puses ar $lnx \geq 0$, kur $1 \leq x < +\infty$, tiek iegūts, ka

$$e^{-x}x^{a-1}lnx \leq e^{-x}x^{d-1}lnx = e^{-x}x^{d}x^{-1}lnx = \frac{e^{-x}x^{d}lnx}{x}.$$

Tā kā robeža

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0,$$

tad eksistē punkts m, $m > 1$ tāds, ka $x \geq m$: $\frac{lnx}{x} < 1$. Attiecīgi, ja $x \geq m$, tad

$$e^{-x}x^{d-1}lnx \leq e^{-x}x^{d}.$$

Tā visām mainīgā d vērtībām

$$\int_{\mathrm{m}}^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}dx$$

konverģē, tad arī integrālis

$$\int_{m}^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}lnxdx$$

konverģē, no tā atbilstoši konverģē integrālis

$$\int_{1}^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}lnxdx$$

Tā kā integrālis $\int_1^{+\infty} x^{d-1}e^{-x}lnxdx$ konverģē visām mainīgā d vērtībām, tad (pēc neīsto integrāļu vienmērīgās konverģences) intervālā $[c,d]$ integrālis

$$\int_{1}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx$$

konverģē vienmērīgi attiecībā pret a.

Iegūst, ka

$$\int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx$$

intervālā $[c,d]$ konverģē vienmērīgi attiecībā pret a.

Citiem vārdiem sakot, visiem $a \in [\mathrm{c},\mathrm{d}]$ eksistē Gamma funkcijas atvasinājums $\Gamma'(a)$, tātad eksistē $\Gamma'(a_0)$, kur $a_0 > 0$ jeb eksistē Gamma funkcijas atvasinājums $\Gamma'(a)$ intervālā $a \in (0;\ +\infty)$ un atvasinājumu izsaka sakarība

$$\Gamma'(a) = \int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx.$$

Ir pierādīts 1. kārtas atvasinājuma eksistence un sakarība

$$\Gamma'(a) = \int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}lnxdx.$$

Augstāko kārtu atvasinājumu eksistence un

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_{0}^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}(lnx)^n dx$$

tiek pierādīta ar matemātisko indukciju. [2, 137-139]

7. Ir spēkā Eilera Gausa formula:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \dots \cdot (n-1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)} = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{n!}{a\prod_{m=0}^{n}(a+k)}$$

__Pierādījums.__

Tiek apskatīta Gamma funkcija $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$.

Izmanto substitūciju $e^{-x} = z$ un ievēro, ka

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-z^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{-1}{n^2}z^{\frac{1}{n}}lnz}{\frac{1}{n^2}} =$$

$$= -lnz\lim_{n\to+\infty} z^{\frac{1}{n}} = -lnz = lnz^{-1} = ln\frac{1}{z}.$$

Tādējādi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \left|\begin{array}{c} e^{-x} = z \\ x = ln\frac{1}{z} = \lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right) \\ dx = -\frac{dz}{z} \\ Ja\ x = 0, tad\ z = 1 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ z \to 0 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_1^0 \frac{-\left(n\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)\right)^{a-1} zdz}{z} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{a-1}\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}dz$$

Izmanto substitūciju $y = z^{\frac{1}{n}}$, iegūstot, ka

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{a-1}\left(1-z^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}dz = \left|\begin{array}{c} y^n = z \\ y = z^{\frac{1}{n}} \\ dz = ny^{n-1}dy \\ Ja\ z = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ z = 1, tad\ y = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 n^{a-1}(1-y)^{a-1}ny^{n-1}dy = \lim_{n\to+\infty} n^a\int_0^1 (1-y)^{a-1}y^{n-1}dy$$

Pielietojot Beta funkcijas 3 īpašību

$$\int_0^1 (1-y)^{a-1}y^{n-1}dy = B(n,a) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\dots(n-1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}$$

tiek iegūts, ka

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^a (1-y)^{a-1} y^{n-1} dy = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{1\cdot 2\cdot 3 \dots (n-1)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)}$$

Kas arī bija jāpierāda [8,15-16]

2.2.2. Beta funkcijas izteikšana ar Gamma funkciju

Tiek apskatīta Gamma funkcija $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$. Tiek veikta mainīgo maiņa $x = ty$, kur $t > 0$.

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} x = ty \\ dx = tdy \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x \to +\infty, tad\ y \to +\infty \end{array} \right| = \int_0^{+\infty} (ty)^{a-1}e^{-ty}tdy =$$

$$= \int_0^{+\infty} t^a y^{a-1} e^{-ty} dy = t^a \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy$$

Ir iegūts, ka

$$\Gamma(a) = t^a \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy$$

jeb

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^{+\infty} y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Tiek izmantota substitūcija $\begin{cases} a = a+b \\ t = t+1 \end{cases}$, iegūstot

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(t+1)^{a+b}} = \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy.$$

Abas vienādojuma puses reizina ar t^{a-1}

$$\frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}} = t^{a-1} \int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy$$

Abas vienādojuma puses tiek integrētas pēc mainīgā *t* integrālrobežās no 0 līdz +∞.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Gamma(a+b)t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy \right) t^{a-1}dt$$

$$\Gamma(a+b) \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy \right) t^{a-1}dt$$

Pēc Beta funkcijas 4. īpašības $B(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy$ un, mainot labās vienādojuma puses integrēšanas kārtību, iegūst, ka

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-ty} dt \right) y^{a+b-1} e^{-y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (ty)^{a-1} e^{-ty} d(ty) \right) y^{b-1} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (x)^{a-1} e^{-x} dx \right) y^{b-1} e^{-y} dy =$$

$$= \int_0^{+\infty} \Gamma(a) y^{b-1} e^{-y} dy = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

Ir iegūts, ka $\Gamma(a+b)B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)$. Izsaka Beta funkciju, iegūstot sakarību

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad [2,133-134]$$

Sakarība starp Gamma un Beta funkcijām bieži tiek pielietota, lai aprēķinātu integrāļu vērtības.

Tiks aplūkotas vēl dažas Gamma funkcijas īpašības.

8. Ir spēkā papildinājuma sakarība:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a}, \text{kur } 0 < a < 1.$$

Pierādījums.

Gamma funkcija tiek izvirzīta funkciju rindā:

Pēc Eilera Gausa formulas

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)} =$$

$$= \frac{2^a \cdot 3^a \cdot 4^a \cdot \ldots n^a \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}{2^a \cdot 3^a \cdot 4^a \cdot \ldots n^a \cdot a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^a \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^a \cdot \left(1+\frac{1}{3}\right)^a \cdot \ldots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^a}{a\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)} = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n}}$$

Tādējādi

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^a}{1+\frac{a}{n}}$$

un arī

$$\Gamma(a+1)=\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}}.$$

Izmantojot substitūciju $a=-a$, tiek atrasta vērtība:

$$\Gamma(-a)=-\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}.$$

Pēc Gamma funkcijas pamatīpašības iegūst, ka $\Gamma(1-a)=-a\Gamma(-a)$. Respektīvi, tas nozīmē, ka

$$\Gamma(1-a)=-a\cdot\left(-\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}.$$

Tāpēc

$$\Gamma(1-a)\cdot\Gamma(a)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}\cdot\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}}=\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{n}\right)^{2}}.$$

Kā iepriekš tika minēts $sinx$ var izteikt šādi

$$sinx=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{x}{n\pi}\right)^{2}\right)\quad[11{,}374-377]$$

tiek secināts, ja $x=\pi a$, tad

$$sin\pi a=\pi a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^{2}\right).$$

Tādējādi

$$\Gamma(1-a)\cdot\Gamma(a)=\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{n}\right)^{2}}=\frac{1}{a}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}1-\left(\frac{a}{n}\right)^{2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{sin\pi a}{\pi a}}=\frac{\pi}{sin\pi a}.$$

Kas arī bija jāpierāda.[8,16-17]

Ir iegūts, ja parametra a vērtība ir daļskaitlis, tad ir iespējams analītiski aprēķināt tās vērtību. Piemēram, ja $a=\frac{1}{2}$, tad

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2}=\pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

9. Ir spēkā sakarība:

$$\Gamma(a)\Gamma(-a) = \frac{-\pi}{asin\pi a}. \quad [1,215]$$

<u>*Pierādījums.*</u>

Pierādot 8.īpašību $\Gamma(a)$ un $\Gamma(-a)$ jau tika izvirzīti rindā:

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}}$$

$$\Gamma(-a) = -\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}$$

Tiek apskatīts reizinājums

$$\Gamma(a)\Gamma(-a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{a}}{1+\frac{a}{n}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-a}}{1-\frac{a}{n}}\right) = -\frac{1}{a^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{n}\right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{a^2}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} 1-\left(\frac{a}{n}\right)^2}$$

Pierādot 8.īpašību, jau tika minēts, ka

$$sin\pi a = \pi a\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right).$$

Tādējādi

$$\Gamma(a)\Gamma(-a) = -\frac{1}{a^2}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} 1-\left(\frac{a}{n}\right)^2} = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{sin\pi a}{\pi a}} = \frac{-\pi}{asin\pi a}$$

Kas arī bija jāpierāda.

10. Ir spēkā sakarība:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right) = \frac{\pi}{cos\pi a}. \quad [1,215]$$

<u>*Pierādījums.*</u>

Pierādot Gamma funkcijas 8.īpašību, tika iegūts, ka

$$\Gamma(1-a)\cdot\Gamma(a) = \frac{1}{a}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{a}{n}\right)^2} = \frac{1}{a}\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} 1-\left(\frac{a}{n}\right)^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\frac{sin\pi a}{\pi a}} = \frac{\pi}{sin\pi a}$$

Tiek izmantota substitūcija $a = a + \frac{1}{2}$, iegūstot, ka

$$\Gamma\left(1 - \left(a + \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \Gamma(a) = \frac{\pi}{sin\pi\left(a + \frac{1}{2}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{\pi}{sin\left(\pi a + \frac{\pi}{2}\right)}$$

Pēc trigonometrisko funkciju redukcijas formulām iegūst, ka

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{\pi}{cos\pi a}$$

Kas arī bija jāpierāda.

11. Ležandra formula:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a). \quad [1,215]$$

Pierādījums.

Ležandra formula tiek pārrakstīta šādi:

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)}{\Gamma(2a)} = \sqrt{\pi}.$$

Ievērojot Eilera Gausa formulu (substitūcija $n = 2n$) iegūst, ka

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to+\infty} n^a \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot n}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a n!}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right) = \lim_{n\to+\infty} n^{a+\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot n}{\left(a + \frac{1}{2}\right)\left(a + \frac{1}{2} + 1\right)\left(a + \frac{1}{2} + 2\right)\ldots\left(a + n + \frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^{a+\frac{1}{2}} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot n}{2(2a+1)(2a+2)(2a+3)\ldots(2a+2n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{a+\frac{1}{2}} n!}{2(2a+1)\ldots(2a+2n+1)}$$

$$\Gamma(2a) = \lim_{n\to+\infty} (2n)^{2a} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots \cdot (2n)}{2a(2a+1)(2a+2)\ldots(2a+2n)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{2a}(2n)!}{2a(2a+1)(2a+2)\ldots(2a+2n)}$$

Tiek iegūts, ka izteiksmes vērtība

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2} + a\right)}{\Gamma(2a)} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2a-1}n^a \cdot n! \cdot n^{a+\frac{1}{2}} \cdot n! \cdot 2a(2a+1)(2a+2)\dots(2a+2n)}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)\cdot 2(2a+1)\dots(2a+2n+1)(2n)^{2a}(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2a-1}\cdot n^{2a+\frac{1}{2}}\cdot (n!)^2 \cdot 2^{2n+2}}{(2n)^{2a}(2a+2n+1)(2n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}\cdot n^{\frac{1}{2}}\cdot (n!)^2}{(2a+2n+1)(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\cdot (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2a+2n+1}$$

Tā kā

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2a+2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

tad

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\Gamma(2a)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}\cdot (n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}.$$

Iegūtā vienādojuma labā puse nav atkarīga no parametra *a* vērtības, attiecīgi tiek secināts, ka arī kreisā puse nav atkarīga no parametra *a* vērtības, citiem vārdiem sakot, visām parametra *a* vērtībām, izteiksmes

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\Gamma(2a)}$$

vērtība ir konstanta.

Tiek pieņemts, ka $a = \frac{1}{2}$, tad $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(2\cdot\frac{1}{2}\right) = \Gamma(1) = 1$$

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\Gamma(2a)} = 2^{2\cdot\frac{1}{2}-1}\frac{\sqrt{\pi}\cdot 1}{1} = \sqrt{\pi}$$

Ir pierādīts, ka

$$\frac{2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\Gamma(2a)} = \sqrt{\pi}$$

jeb

$$\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

Kas bija jāpierāda.[8,18]

Līdzīgi var pierādīt vispārīgo sakarību (reizināšanas teorēmu), ka

$$\Gamma(a)\Gamma\left(\frac{1}{n}+a\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}+a\right)\dots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}+a\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}\Gamma(na).$$

2.2.3. Uzdevumi, kuros jāizmanto Gamma funkcija vai arī sakarība starp Gamma un Beta funkcijām

Apskatītajos uzdevumos tiek pieņemts, ka negatīvām parametra a vērtībām arī ir spēkā Gamma funkcijas pamatīpašība $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$

1.uzdevums

Zinot, ka $\Gamma(1) = 1$ *un*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

aprēķināt vērtību izteiksmei

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \cdot \Gamma(5).$$

Risinājums

Uzdevuma risinājumā pielieto Gamma funkcijas pamatīpašību, ka $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

Tiek aprēķinātas atsevišķi katras Gamma funkcijas vērtība:

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{7}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{16\sqrt{\pi}}{105}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) =$$

$$= \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$$

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 4\Gamma(3+1) = 4\cdot 3\Gamma(3) = 4\cdot 3\Gamma(2+1) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot\Gamma(1) =$$
$$= 24$$

Līdz ar to izteiksmes vērtība ir

$$\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\cdot\Gamma(5) = \frac{16\sqrt{\pi}}{105}\cdot\frac{105\sqrt{\pi}}{16}\cdot 24 = 24\pi$$

2.uzdevums

Dotos integrāļus izteikt ar Gamma funkcijas palīdzību un, ja iespējams, aprēķināt to vērtības

$$a)\int_0^1 \left(ln\frac{1}{x}\right)^a dx\text{, kur } a>0\quad [10{,}23]$$

$$b)\int_0^{+\infty} x^a e^{-x^b}dx\text{, kur } a>-1; b>0\quad [5{,}86]$$

$$c)\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2}dx\text{, kur } n>0\quad [10{,}23]$$

Risinājums

Visos gadījumos tiks izmantots, ka $\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}x^{a-1}e^{-x}dx$

a) Izmanto substitūciju $y=ln\frac{1}{x}$

$$\int_0^1 \left(ln\frac{1}{x}\right)^a dx=\left|\begin{array}{c} y=ln\dfrac{1}{x}\\ dy=\dfrac{-dx}{x}=\dfrac{-dx}{e^y}\\ Ja\ x\to 0, tad\ y\to+\infty\\ Ja\ x\to 1, tad\ y\to 0\end{array}\right|=-\int_{+\infty}^{0} y^a e^{-y}dy=\int_0^{+\infty} y^{a+1-1}e^{-y}dy=\Gamma(a+1)$$

b) Izmanto substitūciju $x=y^{\frac{1}{b}}$

$$\int_0^{+\infty} x^a e^{-x^b}dx=\left|\begin{array}{c} x=y^{\frac{1}{b}}\\ dx=\dfrac{1}{b}y^{\frac{1}{b}-1}dy\\ Ja\ x=0, tad\ y=0\\ Ja\ x\to+\infty, tad\ y\to+\infty\end{array}\right|=\int_0^{+\infty} y^{\frac{a}{b}}e^{-y}\frac{1}{b}y^{\frac{1}{b}-1}dy=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty} y^{\frac{a}{b}+\frac{1}{b}-1}e^{-y}dy=$$

$$=\frac{1}{b}\Gamma\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b}\Gamma\left(\frac{a+1}{b}\right)$$

c) Izmanto substitūciju $x=y^{\frac{1}{2}}$

$$\int_0^{+\infty} x^{2n-1}e^{-x^2}dx=\left|\begin{array}{c} x=y^{\frac{1}{2}}\\ dx=\dfrac{dy}{2y^{\frac{1}{2}}}\\ Ja\ x=0, tad\ y=0\\ Ja\ x\to+\infty, tad\ y\to+\infty\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{2}(2n-1)}e^{-y}y^{-\frac{1}{2}}dy=$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} y^{n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}e^{-y}dy = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} y^{n-1}e^{-y}dy = \frac{1}{2}\Gamma(n) = \frac{1}{2}(n-1)\Gamma(n-1) =$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = \frac{(n-1)!}{2}$$

3.uzdevums

Aprēķināt integrāļa

$$\int_{0}^{1} ln\Gamma(x)dx$$

vērtību, ja

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} lnsinxdx = -\frac{\pi}{2}ln2.\ \ [10,25]$$

Risinājums

Apzīmē

$$I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(x)dx$$

Integrālī $\int_0^1 ln\Gamma(x)dx$ tiek pielietota substitūcija $x = 1 - x$, iegūstot

$$I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(1-x)dx.$$

Ir iegūta sistēma

$$\begin{cases} I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(x)dx \\ I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(1-x)dx \end{cases}$$

Abas vienādojuma puses tiek summētas:

$$2I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(x)dx + \int_{0}^{1} ln\Gamma(1-x)dx.$$

$$2I = \int_{0}^{1} ln\Gamma(x)ln\Gamma(1-x)dx$$

Pēc Gamma funkcijas 8.īpašības seko, ka $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{sin\pi x}$.

$$2I = \int_0^1 ln\frac{\pi}{sin\pi x}dx = \int_0^1 (ln\pi - lnsin\pi x)dx = ln\pi x|_0^1 - \int_0^1 lnsin\pi xdx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \pi x = y \\ dx = \dfrac{dy}{\pi} \\ Ja\ x = 0, tad\ y = 0 \\ Ja\ x = 1, tad\ y = \pi \end{array} \right| = ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} lnsinydy = ln\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} lnsinydy$$

Tā kā

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} lnsinxdx = -\frac{\pi}{2}ln2,$$

tad

$$2I = ln\pi - \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}ln2\right) = ln\pi + ln2 = ln2\pi$$

$$2I = ln2\pi$$

$$I = \frac{ln2\pi}{2}$$

Integrāli $\int_0^1 ln\Gamma(x)dx$ sauc par Rābes integrāli. (Rābe - 19. gs. šveiču matemātiķis).[11,759]

<u>4.uzdevums</u>

Zinot, ka $\Gamma(1) = 1$ *un*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

aprēķināt vērtību izteiksmei

$$\sqrt{B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cdot B(7;3)}.$$

<u>Risinājums</u>

Uzdevuma risinājumā tiks pielietota sakarība starp Gamma un Beta funkcijām $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ un Beta funkcijas 3.īpašība: $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$, kur $m,n \in N$

Vispirms tiek aprēķinātas atsevišķi katras Beta funkcijas vērtība:

$$B(7;3) = \frac{(7-1)!\,(3-1)!}{(7+3-1)!} = \frac{6!\,2!}{9!} = \frac{6!\cdot 2}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6!} = \frac{1}{252}$$

Aprēķina vērtības:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

$$\Gamma(4)=\Gamma(3+1)=3\Gamma(3)=3\Gamma(2+1)=3\cdot 2\cdot\Gamma(2)=6$$

Šīs vērtības ir nepieciešamas Beta funkcijas aprēķināšanā

$$B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}{\Gamma(4)}=\frac{\frac{3\pi}{8}}{6}=\frac{\pi}{16}$$

Līdz ar to izteiksmes vērtība ir

$$\sqrt{B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)}\cdot B(7;3)=\sqrt{\frac{\pi}{16}}\cdot\frac{1}{252}=\frac{\sqrt{\pi}}{1008}$$

<u>5.uzdevums</u>

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^1\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx.\ \ [3,10]$$

<u>Risinājums</u>

Integrālī ar substitūcijas palīdzību tiek pāriets uz Beta funkciju.

$$\int_0^1\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx=\left|\begin{array}{c}1-x^2=t\\ x=\sqrt{1-t}\\ -2xdx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{-2\sqrt{1-t}}\\ Ja\ x=0\,,tad\ t=1\\ Ja\ x=1,tad\ t=0\end{array}\right|=\int_1^0\frac{\sqrt{(1-t)^5}}{\sqrt{t}}\frac{dt}{-2\sqrt{1-t}}=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^2t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)^{3-1}t^{\frac{1}{2}-1}dt=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2};3\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(3)}{\Gamma\left(3+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2+1)}{\Gamma\left(1+\frac{5}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(2)}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(1+1)}{\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(1)}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{\pi}}{\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}=\frac{8}{15}$$

6.uzdevums

Aprēķināt laukumu plaknes figūrām, ko ierobežo līknes

a) $r = sin\varphi cos^3\varphi$ (viena lapa)

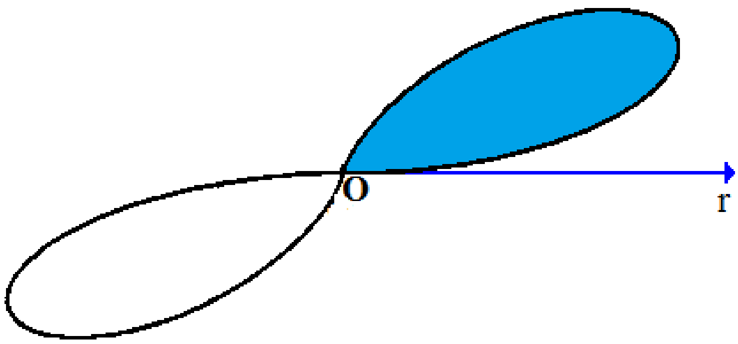
b) $r^4 = sin^5\varphi cos^3\varphi$ [3,11]

Risinājums

Laukumu plaknes figūrai, ja tā ir uzdota polārajās koordinātās aprēķina pēc formulas:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi$$

a) Tiek uzzīmēts līknes grafiks (skat. 2.2.3.1 att.):



2.2.3.1.att.

Nosaka integrēšanas robežas. Tā kā figūru ierobežo izliekta līnija, kas iet caur polārās ass sākumpunktu, tad integrēšanas robežu nosaka līnijas pieskare, kuras vienādojumu atrod funkciju $r = sin\varphi cos^3\varphi$ pielīdzinot nullei, tas ir, $r = 0$

$$sin\varphi cos^3\varphi = 0$$

$$sin\varphi = 0 \quad vai \quad cos^3\varphi = 0$$

$$\varphi = \pi n \qquad\qquad cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Izvēloties $n = 0$ iegūst $\varphi_1 = 0$ un $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Rezultātā laukums tiek aprēķināts šādi:

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (sin\varphi cos^3\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi cos^6\varphi\,d\varphi.$$

Vispirms aprēķināsim laukumu, neizsakot to caur Beta funkcijām, un pārliecināsimies, ka, doto integrāli aprēķinot ar Beta funkcijas palīdzību, iegūtie rezultāti būs vienādi.

$$S=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(sin\varphi cos^3\varphi)^2\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}sin^2\varphi cos^6\varphi\,d\varphi=\left|\begin{array}{c} sin^2\varphi=\frac{1-cos2\varphi}{2} \\ cos^2\varphi=\frac{1+cos2\varphi}{2} \\ cos\alpha cos\beta=\frac{1}{2}(cos(\alpha-\beta)+ \\ +cos(\alpha+\beta)) \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-cos2\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+cos2\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1+cos2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{1}{32}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2 2\varphi)\,(1+2cos2\varphi+cos^2 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{32}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1+cos4\varphi}{2}\right)\left(1+2cos2\varphi+\frac{1+cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{128}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4\varphi)\,(3+4cos2\varphi+cos4\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{128}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(3+4cos2\varphi+cos4\varphi-3cos4\varphi-4cos2\varphi cos4\varphi-cos^2 4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{128}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3+4cos2\varphi-2cos4\varphi-4\cdot\frac{1}{2}(cos2\varphi+cos6\varphi)-\frac{1+cos8\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{256}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(5+4cos2\varphi-4cos4\varphi-4cos6\varphi-cos8\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{256}\left(5\varphi+\frac{4sin2\varphi}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4sin4\varphi}{4}-\frac{4sin6\varphi}{6}-\frac{sin8\varphi}{8}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{256}\left(\frac{5\pi}{2}+2sin\pi-sin\pi-\frac{2sin3\pi}{3}-\frac{sin4\pi}{8}-0-\right.$$

$$\left.-2sin0+sin0+\frac{2sin0}{3}+\frac{sin0}{8}\right)=\frac{5\pi}{512}\,(l.v.)$$

Tagad aprēķināsim plaknes figūras laukumu, integrāli izsakot ar Beta funkciju. Pēc Beta funkcijas 5.īpašības nosaka Beta funkcijas *a* un *b* vērtības no sistēmas:

$$\begin{cases}2b-1=2\\2a-1=6\end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Līdz ar to iegūst, ka

$$S = \frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi cos^6\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right).$$

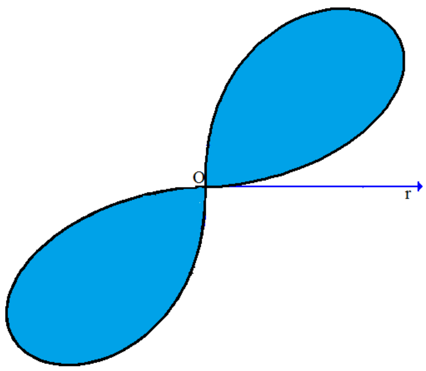
Tiek pāriets uz Gamma funkciju un pielieto Gamma funkcijas pamatīpašību, tas ir,

$$S = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(4+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{5}{4}\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{4\Gamma(4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{5}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{4\Gamma(3+1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{4\cdot 3\Gamma(3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\cdot 3\Gamma(2+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{4\cdot 3\cdot 2\Gamma(2)} = \frac{15\pi}{1536} = \frac{5\pi}{512}(l.v.)$$

b) Līdzīgi kā a) gadījumā vispirms tiek uzzīmēts līknes grafiks (skat.2.2.3.2.att.)



2.2.3.2.att.

Tā kā plaknes figūra ir simetriska pret polārās ass sākumpunktu *O*, tad plaknes figūras laukumu var aprēķināt, aprēķinot vienas „lapas" laukumu un rezultātu pareizinot ar 2.

Nosaka integrēšanas robežas. Tā kā figūru ierobežo izliekta līnija, kas iet caur polu, tad integrēšanas robežu nosaka līnijas pieskare, kuras vienādojumu atrod funkciju $r^4 = sin^5\varphi cos^3\varphi$ pielīdzinot nullei.

Tātad $sin^5\varphi cos^3\varphi = 0$

$$sin^5\varphi = 0 \quad vai \quad cos^3\varphi = 0$$

$$sin\varphi = 0 \qquad\qquad cos\varphi = 0$$

$$\varphi = \pi n \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Izvēloties $n = 0$ iegūst $\varphi_1 = 0$ un $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Rezultātā laukums tiek aprēķināts šādi

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt[4]{sin^5\varphi cos^3\varphi}\right)^2 d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{sin^5\varphi cos^3\varphi}\, d\varphi = \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\frac{5}{2}}\varphi cos^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi$$

Integrāli izsaka ar Beta funkciju. Pēc Beta funkcijas 5.īpašības nosaka Beta funkcijas a un b vērtības no sistēmas:

$$\begin{cases} 2b - 1 = \frac{5}{2} \\ 2a - 1 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{7}{4} \\ a = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Līdz ar to iegūst, ka

$$S = \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{\frac{5}{2}}\varphi cos^{\frac{3}{2}}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4};\frac{5}{4}\right).$$

Tiek pāriets uz Gamma funkciju un pielieto Gamma funkcijas pamatīpašību, ka arī izmanto Gamma funkcijas papildinājuma sakarību: $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{sin\pi a}$, ja $0 < a < 1$.

$$S = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{4};\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{16}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(2)} = \frac{3}{64}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{64}\frac{\pi}{sin\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{64}\frac{\pi}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\pi}{32\sqrt{2}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{64}\,(l.v.)$$

7.uzdevums

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^4} dx. \qquad [3,10]$$

Risinājums

Integrālī ar substitūciju $y = \frac{2x}{x+1}$ tiek pāriets uz Beta funkciju.

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}{(x+1)^4}dx = \left| \begin{array}{c} y = \dfrac{2x}{x+1} \qquad x = \dfrac{y}{2-y} \\ dy = \dfrac{2dx}{(x+1)^2} \\ Ja\ x = 0\,, tad\ y = 0 \\ Ja\ x = 1, tad\ y = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\sqrt{\dfrac{y}{2-y}} \cdot \left(1 - \dfrac{y}{2-y}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\left(\dfrac{y}{2-y}+1\right)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\cdot(2-y-y)^{\frac{3}{2}}(2-y)^2}{\sqrt{2-y}\cdot(2-y)^{\frac{3}{2}}(y+2-y)^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sqrt{y}\cdot(2-2y)^{\frac{3}{2}}}{2^2}dy =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{8}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}}\cdot(1-y)^{\frac{3}{2}}dy = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}-1}\cdot(1-y)^{\frac{5}{2}-1}dy = \frac{\sqrt{2}}{4}B\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma(4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3+1)} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{3\Gamma(3)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{16}\frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2+1)} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{32}\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{2}\pi}{64}$$

<u>8.uzdevums</u>

Pierādīt vai atspēkot vienādību:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Risinājums</u>

Apskatām vienādojuma labo pusi

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Atsevišķi, pielietojot substitūcijas abos integrāļos pāriet uz Beta funkciju:

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left| \begin{array}{c} x = \sqrt{t} \\ dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \\ Ja\ x = 0\,, tad\ t = 0 \\ Ja\ x = 1, tad\ t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left| \begin{array}{c} 1 - t^2 = y \\ t = \sqrt{1-y} \\ dt = \dfrac{dy}{-2\sqrt{1-y}} \\ Ja\ t = 0\,, tad\ y = 1 \\ Ja\ t = 1, tad\ y = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{-2\sqrt[4]{1-y}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{2}}dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^{\frac{3}{4}-1}y^{\frac{1}{2}-1}dy =$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$$

Un

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \left| \begin{array}{c} x=\sqrt{t} \\ dx=\dfrac{dt}{2\sqrt{t}} \\ Ja\ x=0\,, tad\ t=0 \\ Ja\ x=1, tad\ t=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \left| \begin{array}{c} 1-t^2=y \\ t=\sqrt{1-y} \\ dt=\dfrac{dy}{-2\sqrt{1-y}} \\ Ja\ t=0\,, tad\ y=1 \\ Ja\ t=1, tad\ y=0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{-2\sqrt[4]{1-y}\sqrt{1-y}} = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^{-\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-y)^{\frac{1}{4}-1} y^{\frac{1}{2}-1} dy =$$

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$$

Ir iegūts, ka vienādojuma labā puse ir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\pi}{16}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{\pi}{4}$$

Līdz ar to ir atspēkots, ka

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{2}$$

jo

$$\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2}$$

<u>9.uzdevums</u>

Aprēķināt integrāli

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x+2)^2}. \quad [7,365]$$

<u>Risinājums.</u>

Integrālī, pielietojot substitūciju

$$\frac{x}{x+2} = \frac{t}{3},$$

pāriet uz Beta funkciju.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{(x+2)^2} = \left| \begin{array}{c} \frac{x}{x+2} = \frac{t}{3} \quad x = \frac{2t}{3-t} \\ dx = \frac{6dt}{(3-t)^2} \\ Ja\ x = 0, tad\ t = 0 \\ Ja\ x = 1, tad\ t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\frac{2t}{3-t}}{\frac{2t}{3-t}}} \frac{6dt}{\left(\frac{2t}{3-t}+2\right)^2 (3-t)^2} =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{3(1-t)}{2t}} \cdot \frac{6dt}{6^2} = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \int_0^1 (1-t)^{\frac{3}{2}-1} t^{\frac{1}{2}-1} dt =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{12} B\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{6}}{12} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma(2)} = \frac{\sqrt{6\pi}}{12} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = \frac{\sqrt{6\pi}}{24} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{6}}{32}\pi$$

10.uzdevums

Vispirms integrāli

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2\alpha-1}x cos^{2\beta-1}x dx}{(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x)^{\alpha+\beta}} \text{ , kur } \alpha > 0, \beta > 0, a > 0, b > 0$$

izteikt ar Beta funkciju un tad aprēķināt tā vērtību, ja

$$\alpha = 2, \beta = 3, a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$$

Risinājums.

Vispirms, pielietojot substitūcijas, integrālis tiek izteikts ar Beta funkciju:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2\alpha-1}x cos^{2\beta-1}x dx}{(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x)^{\alpha+\beta}} = \left| \begin{array}{c} tgx = t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ Ja\ x = 0, tad\ t = 0 \\ Ja\ x \to \frac{\pi}{2}, tad\ t \to +\infty \\ cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\beta-\frac{1}{2}} dt}{\left(\frac{a^2t^2}{1+t^2}+\frac{b^2}{1+t^2}\right)^{\alpha+\beta} (1+t^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha-1}(1+t^2)^{\alpha+\beta} dt}{(1+t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}+\beta-\frac{1}{2}+1}(a^2t^2+b^2)^{\alpha+\beta}} =$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{t^{2\alpha-1}dt}{(a^2t^2+b^2)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{b^{2(\alpha+\beta)}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2\alpha-1}dt}{\left(\frac{a^2t^2}{b^2}+1\right)^{\alpha+\beta}}=\left|\begin{array}{c}\frac{a^2t^2}{b^2}=y\\ \frac{2a^2tdt}{b^2}=dy\\ Ja\ t=0, tad\ y=0\\ Ja\ t\to+\infty, tad\ y\to+\infty\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{b^{2(\alpha+\beta)}}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2\alpha-1}y^{\frac{2\alpha-1}{2}}b^2ady}{(y+1)^{\alpha+\beta}2a^2by^{\frac{1}{2}}}=\frac{b^{2\alpha-1}b^2a}{2b^{2(\alpha+\beta)}a^{2\alpha-1}a^2b}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{2\alpha-1-1}{2}}}{(y+1)^{\alpha+\beta}}dy=$$

$$=\frac{1}{2b^{2\beta}a^{2\alpha}}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\alpha-1}}{(y+1)^{\alpha+\beta}}dy$$

Pēc Beta funkcijas 4. īpašības $B(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$, sastādot vienādojumu sistēmu nosaka parametru *a* un *b* vērtības.

$$\begin{cases}a-1=\alpha-1\\ a+b=\alpha+\beta\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=\alpha\\ b=\beta\end{cases}$$

Tādējādi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^{2\alpha-1}xcos^{2\beta-1}xdx}{(a^2sin^2x+b^2cos^2x)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{2b^{2\beta}a^{2\alpha}}B(\alpha;\beta)$$

Tagad tiek aprēķināta integrāļa vērtība, ja $\alpha=2, \beta=3, a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$.

Tiek pāriets uz Gamma funkciju un pielieto Gamma funkcijas pamatīpašību, tas ir,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin^3xcos^5xdx}{\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2sin^2x+\left(\frac{3}{2}\right)^2cos^2x\right)^5}=\frac{B(2;3)}{2\left(\frac{3}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^6\Gamma(2+3)}=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^6\Gamma(5)}=$$

$$=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^6\Gamma(4+1)}=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^64\Gamma(4)}=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^64\Gamma(3+1)}=\frac{2^9\Gamma(2)\Gamma(3)}{3^64\cdot3\Gamma(3)}=\frac{2^9\Gamma(2)}{3^64\cdot3}=\frac{2^9\cdot1}{3^6\cdot4\cdot3}=\frac{2^7}{3^7}=$$

$$=\frac{128}{2187}$$

2.2.4. Gamma funkcijas analītisks turpinājums kompleksā plaknē

Iepriekš tika aplūkota Gamma funkcija parametra a pozitīvām vērtībām Šajā nodaļā tiks aplūkots Gamma funkcijas analītisks turpinājums kompleksā plaknē. Gamma funkcija būs atkarīga no parametra z vērtības, kur z – kompleksais skaitlis. Tātad Gamma funkcija tiek uzdota šādi:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{(z-1)lnx-x}dx$$

Integrālī tiek pieņemts, ka *x* ir reāls, pozitīvs skaitlis, bet *lnx* ir tikai reālas vērtības. Integrāli var pārrakstīt šādi

$$\Gamma(z) = \int_0^1 x^{z-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^1 e^{(z-1)lnx-x}dx + \int_1^{+\infty} e^{(z-1)lnx-x}dx$$

Tā kā visiem $x \geq 1$ un visām parametra *z* vērtībām $e^{(z-1)lnx-x}$ ir no *z* un *x* vērtībām nepārtraukta funkcija un vesela funkcija (par veselu funkciju sauc analītisku funkciju (funkciju $f(z)$ sauc par analītisku funkciju punktā z_0, ja tā ir diferencējama punktā z_0 un arī kādā šī punkta apkārtnē [1,311]) visā kompleksā plaknē [12]) pēc parametra *z* visiem $x \geq 1$, ja $lnx \geq 0$, tad tiks aplūkots tikai tās kompleksā skaitļa $z = a + bi$ vērtības, kuras pieder ierobežotam slēgtam apgabalam *E* kompleksā plaknē *(z)*. Šajā apgabalā *E* kompleksā skaitļa *z* reālās daļas (tas ir, a) maksimālo vērtību apzīmē ar a_0. Tādējādi visām *z* vērtībām no apgabalā *E* ir spēkā sakarība

$$|x^{z-1}e^{-x}| = \left|e^{(z-1)lnx-x}\right| = \left|e^{(a+bi-1)lnx-x}\right| = \left|e^{((a-1)lnx-x)+iblnx}\right| =$$
$$= \left|e^{(a-1)lnx-x}e^{iblnx}\right| = \left|e^{(a-1)lnx-x}\right| \cdot \left|e^{iblnx}\right| = \left|e^{(a-1)lnx-x}\right||cos(blnx) + isin(blnx)| =$$
$$= \left|e^{(a-1)lnx-x}\right| \leq e^{(a_0-1)lnx-x} = x^{(a_0-1)lnx}e^{-x} = x^{a_0-1}e^{-x}$$

Tātad apgabalā *E* integrālis $\int_0^1 x^{z-1}e^{-x}dx$ konverģē vienmērīgi attiecībā pret *z* vērtību. No tā seko, ka funkcija

$$f_1(z) = \int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \int_1^{+\infty} e^{(z-1)lnx-x}dx$$

ir regulāra funkcija apgabalā *E* un integrāli

$$\int_1^{+\infty} e^{(z-1)lnx-x}dx$$

var atvasināt zem integrāļa zīmes. Tā kā apgabals *E* tika izvēlēts patvaļīgi, tas nozīmē, ka funkcijas $f_1(z)$ īpašības ir spēkā visā kompleksā plaknē *(z),* tas ir funkcija $f_1(z)$ raksturo veselu funkciju, kuru var atvasināt pēc parametra *z* zem integrāļa zīmes.

Tiek pieņemts, ja $x = 0$, tad $lnt = -\infty$.Tas savukārt nozīmē, ja $x = 0$, tad zemintegrāļa funkcijai

$$f(z) = \int_0^1 x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^1 e^{(z-1)lnx-x}dx$$

var būt pārtraukuma punkts. Tiek apskatīts zemintegrāļa funkcijas modulis

$$|x^{z-1}e^{-x}| = \left|x^{(a-1)+bi}e^{-x}\right| = x^{a-1}e^{-x}$$

Tā kā kompleksā plaknē taisnes $a = 1$ labajā pusē zemintegrāļa funkcija ir regulāra visām $x \geq 0$ vērtībām (šo secina līdzīgi kā funkcijā $f_1(z)$), tad ja $a > 1$, tad punkts $x = 0$ nav funkcijas $f(z)$ pārtraukuma punkts.

Tiek izvēlēts galīgs apgabals *E*, kurš ir ierobežots ar taisnēm $a = 0$ un $a = 1$**.** Apzīmē ar a_1 mazāko kompleksā skaitļa *z* reālās daļas vērtību $a = Rez$ apgabalā *E,* tādu, ka $a_1 > 0$ un $lnx \leq 0$, ja $x \leq 1$. Visām kompleksā skaitļa *z* vērtībām apgabalā *E* ir spēkā, ka

$$|x^{z-1}e^{-x}| \leq x^{a_1-1}e^{-x}$$

Tā kā visiem $a_1 > 0$ integrālis

$$\int_0^1 x^{a_1-1}e^{-x}dx$$

konverģē, tad, ievērojot, ka apgabals *E* aplūkotajā labajā pusplaknē, tiek izvēlēts patvaļīgi, tad var pārliecināties, ka funkcijas $f_1(z)$ īpašība ir spēkā visām $a > 0$ vērtībām, tas ir, visā kompleksās plaknes labā pusplaknē, kura ir ierobežota ar imagināro asi.

Šādi tiek secināts, ka funkcija

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{(z-1)lnx-x}dx$$

kompleksās plaknes labajā pusē no imaginārās ass (tas ir $Rez = a,$ kur $a > 0$) ir regulāra funkcija. Var ievērot, ka pozitīvām, reālām *z* vērtībām, Gamma funkcijas uzdošanas veids sakrīt ar iepriekš aplūkoto:

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

Tādējādi, kā jau iepriekš tika pieminēts Gamma funkciju $\Gamma(z)$ var aplūkot ka Gamma funkcijas $\Gamma(a)$ analītisku turpinājumu kompleksās plaknes *(z)* labajā pusplaknē.

Lai aplūkotu funkcijas $\Gamma(z)$ analītisku turpinājumu kreisajā pusplaknē, vispirms

Funkciju e^{-x}, definētu intervālā $0 \leq x \leq 1$, izsaka vienmērīgi konverģējošās rindas veidā:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Vienādojuma abas puses tiek reizinātas ar x^{z-1}, iegūstot

$$x^{z-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} x^{z-1}$$

$$x^{z-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+z-1}}{n!}$$

Iegūto izteiksmi integrējot pēc *x* intervālā $0 < x < 1$, iegūst, ka

$$\int_0^1 x^{z-1}e^{-x} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+z-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{n+z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^{n+z-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{n+z}}{n+z}\bigg|_0^1$$

Ja punkts $z = a + bi$ pieder imaginārās ass labajai pusplaknei, tad $Re(n+z) = n + a$, kur $n + a > 0$, un, ja *x=0*, tad $x^{n+z} = 0$, no tā izriet, ka, ja $Re(z) > 0$, tad

$$\int_0^1 x^{z-1}e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Tiek iegūts, ka $\Gamma(z)$ funkciju var pārrakstīt šādi:

$$\Gamma(z) = \int_0^1 x^{z-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx.$$

Ir zināms, ka integrālis $\int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$ definē veselu funkciju. Tiek apskatīta rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}.$$

Tā kā rindas locekļu saucējā ir $n!$, tas nozīmē, ka rinda katrā ierobežotā kompleksās plaknes *(z)* apgabalā (vērā netiek ņemti rindas pirmie locekļi, kuros $z = -n$, kur $n \in N \cup \{0\}$) absolūti un vienmērīgi konverģē. Tāmdēļ formula

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} x^{z-1}e^{-x}dx$$

definē regulāru funkciju visā kompleksā plaknē *(z)*, izņemot punktus $z = -n$, kuros $n \in N \cup \{0\}$, tātad šī formula izsaka funkcijas $\Gamma(z)$ analītiso turpinājumu visā komleksā plaknē *(z)*.

No formulas

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_{1}^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

skaidrs, ka funkcija $\Gamma(z)$ ir meromorfu funkciju (par meromorfu funkciju sauc analītisku funkciju, kurai neeksistē singulārie punkti, izņemot tās polus [12]) ar poliem punktos $z = -n$, kuros $n \in N \cup \{0\}$.[8,27 – 31]

2.2.5. Gamma funkcijas poli

Gamma funkcijas poli kompleksā plaknē ir punkti $z = -n$, kuros $n \in N \cup \{0\}$. Lai to parādītu tiek apskatīta Gamma funkcija kompleksā plaknē

$$\Gamma(z) = \int_{0}^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Acīmredzot zemintegrāļa izteiksmes eksponente e^{-xz}, ja $Re(z) > 0$, straujāk dilst, nekā aug algebriskā funkcija x^{z-1}. Diferencējot Gamma funkciju pēc parametra *z* iegūst, ka

$$\frac{d\Gamma}{dz} = \int_{0}^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} lnx dx.$$

Integrālis konverģē, ja $Re(z) > 0$, kas savukārt nozīmē, ka Gamma funkcija kompleksā skaitļa *z* labajā pusplaknē ir analītiska funkcija (analītiska funkcija - kompleksā mainīgā funkcija *f*(*x*), kura nevienai galīgai neatkarīgā mainīgā *x* vērtībai nepārvēršas bezgalībā [9])

Gadījumā, ja $Re(z) \leq 0$, tad Gamma funkcijas pamatīpašība nav spēkā, tātad šīm vērtībām Gamma funkcijas nav definēts vienādojums $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Tiek aplūkota Gamma funkcija punkta $z = 0$ apkārtnē. Tā kā Gamma funkcija $\Gamma(z+1)$ ir analītiska, tad to var izteikt šādi: $\Gamma(z+1) = 1 + zf(z)$, kur $f(z)$ ir punkta $z = 0$ apkārtnē analītiska funkcija.

Pēc Gamma funkciju īpašībām seko, ka

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{1 + zf(z)}{z} = \frac{1}{z} + f(z).$$

Acīmredzot, ka funkcijai $\Gamma(z)$ eksistē pirmās kārtas pols, ja $z = 0$. Atceras, ka par polu sauc punktu, kurā funkcija $\frac{1}{f(z)}$ ir analītiska punktā $z = z_0$ un z_0 ir funkcijas $\frac{1}{f(z)}$ k-tās kārtas nulle. [1,317].

Tiek aplūkots $\Gamma(z-1)$. Pēc Gamma funkcijas 2. īpašības seko, ka

$$\Gamma(z-1) = \frac{\Gamma(z)}{z-1} = \frac{\frac{1}{z} + f(z)}{z-1} = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{f(z)}{z-1}.$$

Acīmredzot, ka punkta $z = -1$ apkārtnē eksistē 1. kārtas pols.

Izteiksme $\Gamma(z+n)$ pēc Gamma funkcijas 3. īpašības tiek izteikta šādi:

$$\Gamma(z+n) = (z+n-1)(z+n-2) \dots .(z+1)\Gamma(z) = \Pi_n(z)\Gamma(z)$$

kur $\Pi_n(z) = (z+n-1)(z+n-2) \dots .(z+1), n \in N$

Tātad

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{\Pi_n(z)}$$

Pieņemot, ka $\Pi_n(z) \neq 0$, tad visām ω vērtībām, tuvām z vērtībām, ir spēkā formula $\Gamma(\omega) = \frac{\Gamma(\omega+n)}{\Pi_n(\omega)}$, kura uzdod analītisku funkciju. Tiek apskatīts polinoms vienādojuma saucējā $\Pi_n(z) = (z+n-1)(z+n-2) \dots .(z+1), \quad n \in N$. Polinoma $\Pi_n(z)$ saknes ir visas vērtības, no kopas $z \in \{0; -1; -2; \dots; 1-n\},$ kur $n \in N$. Tādējādi Gamma funkcija ir analītiska visām z vērtībām, izņemot vērtības, kuros punkti ir veseli, negatīvi skaitļi un nulle.

Tiek aplūkoti punkti, kuros z vērtības ir veseli, negatīvi skaitļi un nulle, tas ir, $z = -n$, kur $n \in N \cup \{0\}$. Ja $n = 0$, tas ir $z = 0$, tad pietiekami mazām ω vērtībām $\Gamma(\omega) = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\omega}$.

Tā kā $\Gamma(1) = 1$ un, ja funkcija $f(z)$ ir analītiska punktā $z = a$, tad šajā punktā rezidijus atrod kā

$$Res_a \frac{f(z)}{z-a} = f(a)$$

tātad $Res_0 \Gamma(z) = 1$.

Ievērojot, ka

$$\Pi_n(-n+\omega) = (\omega-n)(\omega-n-1) \dots .(\omega-1),$$

tad pietiekami mazām ω vērtībām ir spēkā

$$\Gamma(\omega-n) = \frac{\Gamma(\omega)}{(\omega-n)(\omega-n-1) \dots .(\omega-1)} = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\omega(\omega-n)(\omega-n-1) \dots .(\omega-1)}$$

Nulles punkta mazā apkārtnē gan daļas saucējā, gan daļas skaitītājā visi polinoma reizinātāji, izņemot ω, ir atšķirīgi no nulles. Tā kā Gamma funkciju tiek izteikta kā

$$\Gamma(z-n) = \frac{1+zf(z)}{z(z-1)(z-2) \dots .(z-n)} = \frac{1}{z(z-1) \dots .(z-n)} + \frac{f(z)}{(z-1) \dots .(z-n)},$$

kur $n \in N$, tad tiek secināts, ka punkti, kuros $z = -n$, kur $n \in N \cup \{0\}$ ir Gamma funkcijas 1.kārtas poli, kuros rezidiju vērtības aprēķina kā

$$Res_{-m}\Gamma = \frac{(-1)^n}{n!} \qquad [6,10-11]$$

2.2.6. Gamma funkcijas grafiks reālā argumenta gadījumā

Lai pētītu Gamma funkcijas grafiku novietojumu koordinātu plaknē, vispirms tiek apskatīts gamma funkcijas vertikālo asimptotu novietojums.

Tā ka $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ (*Gamma funkcijas 2.īpašība*), tad, izsakot $\Gamma(a)$ iegūst, ka

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

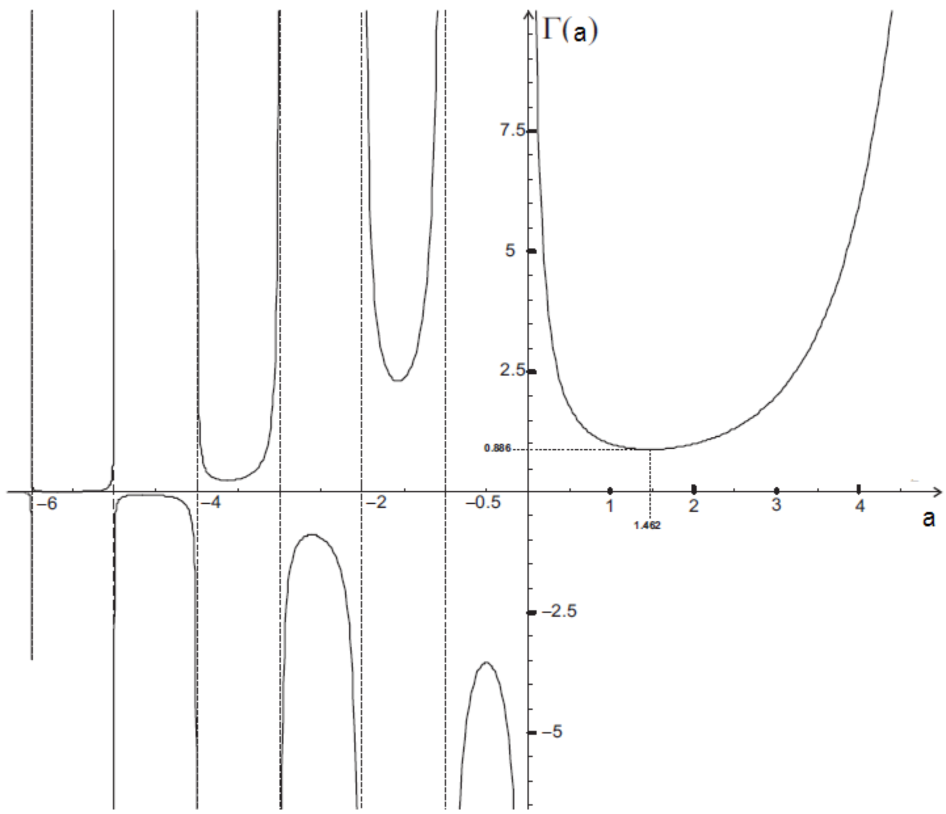
Apskata robežu, kad $a \to +0$, tad $\Gamma(a) \to +\infty$, tas ir

$$\Gamma(0) = \lim_{a \to +0} \Gamma(a) = +\infty.$$

Ja $a = -n$, kur $n \in N$, iegūst, ka

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \frac{\Gamma(-n+2)}{-n(-n+1)} = \cdots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = \infty$$

Respektīvi tiek iegūts, ja $a < 0$, kur $a \in Z$, tad Gamma funkcijas vērtības tiecas uz bezgalību.(skat.2.2.6.1 att.) [5,71]



2.2.6.1.att.. **Gamma funkcijas grafiks**

Tiek apskatīts intervāls $a \in (0; +\infty)$. Zināms, ka Gamma funkcijas zemintegrāļa izteiksme $f > 0$ un tās otrās kārtas atvasinājums $f'' > 0$, līdz ar to $\Gamma(a) > 0$ un $\Gamma''(a) > 0$.

Skaidrs, ka no tā var secināt, ka Gamma funkcijas grafiks atrodas virs abcisu ass un ir izliekts uz leju.

Tā kā otrās kārtas parciālais atvasinājums

$$\Gamma''(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}ln^2 x dx,$$

intervālā $(0; +\infty)$ pieņem pozitīvas vērtības, attiecīgi tiek secināts, ka $\Gamma'(a)$ šajā intervālā aug.

Ņemot vēra, ka $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, pēc Rolla teorēmas intervālā $(1; 2)$ eksistē punkts c tāds, ka $\Gamma'(c) = 0$. Respektīvi, tas nozīmē, ja $a \in (0; \mathrm{c})$, tad $\Gamma'(c) < 0$ un, ja $a \in (\mathrm{c}; +\infty)$, tad $\Gamma'(c) > 0$. Tiek secināts, ka Gamma funkcija intervālā $(0; \mathrm{c})$ dilst, bet intervālā $(0; +\infty)$ aug. Acīmredzot

$$\lim_{a \to +0} \Gamma(a) = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \Gamma(n) = \lim_{a \to +0} \Gamma(a) = +\infty$$

Funkcija minimumu sasniedz punktā c, turklāt $c \approx 1{,}462$ un $\Gamma(c) \approx 0{,}886$. (skat.2.2.6.1 att.) [2,139]

Kā redzams no attēlā 2.2.6.1. intervālā $a \in (-\infty; 0)$ Gamma funkcija pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības.

Lai noteiktu Gamma funkcijas zīmi, tiek izmantota Gamma funkcijas 2.īpašība, ka $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$. Piemēram, tiks noteikta zīme intervālā $(-3; -2)$. Izvēlās punktu no šī intervāla $m = -\frac{5}{2}$, attiecīgi iegūst, ka

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{-8\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{15} = \frac{-8\sqrt{\pi}}{15}$$

Tātad intervālā $(-3; -2)$ Gamma funkcija atrodas zem abcisu ass.

Piemēram, intervāls $(-6; -5)$. Izvēlās punktu no šī intervāla $m = -\frac{11}{2}$, attiecīgi iegūst, ka

$$\Gamma\left(-\frac{11}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{11}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{9}{2}\right)}{-\frac{11}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{9}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{11}{2}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{64\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{10395} = \frac{64\sqrt{\pi}}{10395}$$

Tātad intervālā $(-6;-5)$ Gamma funkcija atrodas virs abcisu ass. Līdzīgi secina arī par pārējiem intervāliem.

2.2.7. Gamma funkcijas reljefa modelis kompleksa argumenta gadījumā

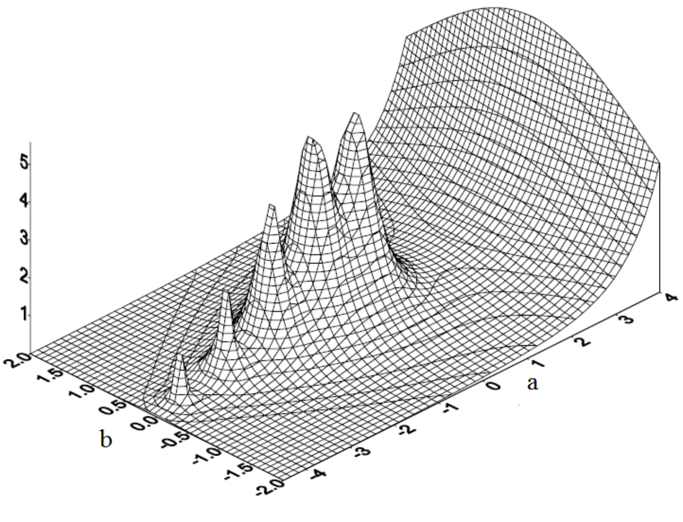
Tiks aplūkots arī Gamma funkcijas modelis. Lai konstruētu Gamma funkcijas modeli, tiek aplūkota sakarība

$$\Gamma(z+1) = e^{-Cz}\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{z}{k}}\frac{k}{z+k},$$

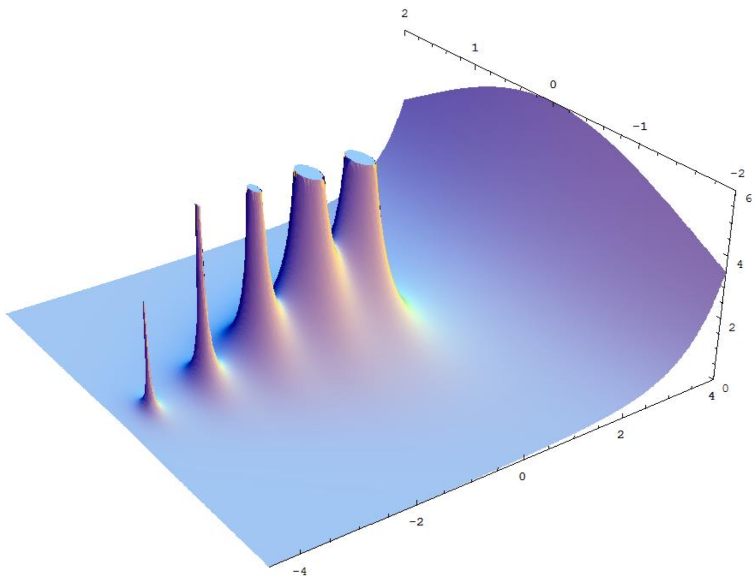
kur *C* ir Eilera konstante un tās vērtība ir

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = 0{,}577215\,...$$

Gamma funkcijas reljefa modelis kompleksajā plaknē ir redzams attēlos 2.2.7.1.. un 2.2.7.2.



2.2.7.1. att. **Funkcijas Γ(z) modelis kompleksā plaknē** [4,18]

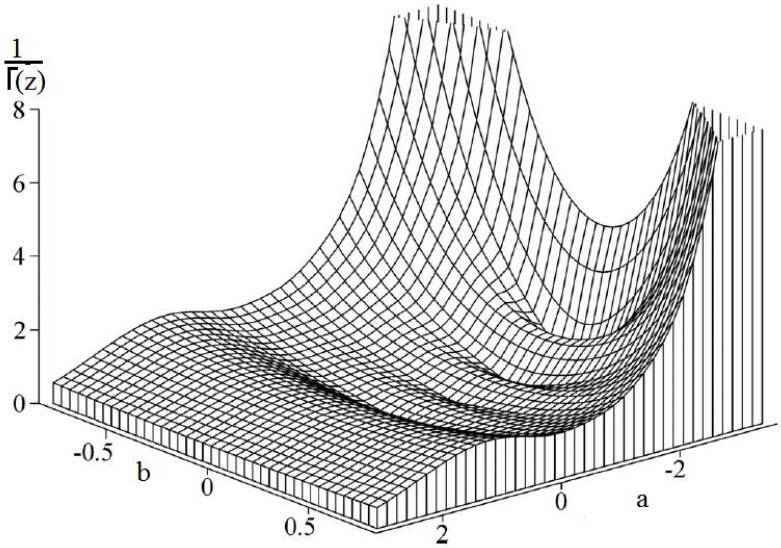


2.2.7.2. att. **Funkcijas Γ(z) attēls kompleksā plaknē.** Modelis veidots ar programmu Mathematica

No attēliem 2.2.7.1. un 2.2.7.2. ir redzams, ka negatīvajos, veselos punktos Gamma funkcijai eksistē 1.veida pola punkti, kuru atlikumu vērtības ir vienādas ar

$$Res(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, kur\ n \in N.$$

Attēlā 2.2.7.3. var redzēt Gamma funkcijas apgriezto funkciju, tas ir $\frac{1}{\Gamma(z)}$ augšējo slāni.



2.2.7.3. att. **Funkcijas $\frac{1}{\Gamma(z)}$ augšējā slāņa attēls kompleksā plaknē** [4,18]

No attēla 2.2.7.1. un 2.2.7.2. ir redzams, ka imaginārās ass virzienā Gamma funkcija dilst.

NOBEIGUMS

Maģistra darbā „Parametriskie integrāļi: teorijas jautājumi un pielietojumi Beta un Gamma funkciju izpētē” ir apkopota informācija par parametriskiem integrāļiem un Eilera integrāļiem. Veicot darba uzdevumus, ir sasniegts maģistra darba mērķis – ir izveidots mācību materiāls, kurā ir izklāstīts teorētiskais materiāls par parametriskajiem integrāļiem un ilustrēts ar atbilstošo uzdevumu risināšanas piemēriem.

Darba pirmā nodaļā ir definēts no parametra atkarīgais integrālis, apskatītas un pierādītas tā īpašības, aplūkotas atrisināšanas metodes. Aplūkoti ievērojami no parametra atkarīgie integrāļi un parādīts veids kā aprēķināt to vērtības. Ir apskatīti 14 piemēri no parametra atkarīgo integrāļu aprēķināšanu (atvasināšana zem integrāļa zīmes, Leibnica likums, Frullani formula).

Otrā nodaļā ir aplūkoti tieši Eilera integrāļi, tas ir Gamma un Beta funkcijas. Pierādītas Gamma un Beta funkciju īpašības pozitīvo parametru gadījumā. Dots ieskats par Gamma funkcijas vispārinājumu kompleksajā plaknē. Parādīts, kā pielietot Gamma un Beta funkciju īpašības uzdevumu risināšanā. 2.nodaļā kopā ir atrisināti 18 piemēri par Gamma un Beta funkcijām.

Uzskatu, ka darbā apkopoto materiālu var izmantot kā palīglīdzekli, lai apgūtu matemātiskās analīzes kursa tēmas par parametriskiem integrāļiem.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. B. Siliņa, K.Šteiners. Rokasgrāmata matemātikā, Zvaigze ABC, 2006, 367.lpp.
2. Аксёнов А.П. Математический анализ. (Интегралы, зависящие от параметра.Двойные интегралы. Криволинейные интегралы.) Учебное пособие. Изд-во „НЕСТОР”, 2000, 145 с.
3. Блинова И.В., Попов И.Ю. Интегралы, зависящие от параметров .Методические указания по решению задач, Санкт-Петербург, Изд-во „ИТМО”, 2008. 16 с.
4. Захаров Ю.В. Охоткин., К.Г,. Титов Л.С,.Поверхности функций комплексного переменного: Метод. Указания, Краснояр. гос. ун-т; Красноярск, 2004. 39 с.
5. Зенков А.В. Дифференциальные уравнения, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра: Учебник для студентов физических специальностей ,Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2010, 92 с.
6. Киселев О.М., Зоопарк чудовищ или знакомство со специальными функциями. Уфа:БашГЫ, 2012.-104с.
7. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по Математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменых. Москва: Изд-во „ФИЗМАТЛИТ ”, 2003. 472 с.
8. Кузнецов Д.С., Специальные функции, Москва, Изд-во „Высшая школа”, 1962., 249 с.
9. Лебедев. Н.Н., Специальные функции и их приложения,Москва, Изд-во „ФМЛ”, 1963. 358 с.
10. Литвинов В.В.Различные методы вычисления несобстенных интегралов зависящих от параметра, Ярославль, ЯрГУ, 2014. 30 с
11. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, Том 2, Москва, Изд-во „ФМЛ”, 1970. 800 с.
12. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_physics/3126/%D0%90%D0%9D%D0%90%D0%9B%D0%98%D0%A2%D0%98%D0%A7%D0%95%D0%A1%D0%9A%D0%9E%D0%95 - Физическая энциклопедия
13. http://kvm.gubkin.ru/vip3p1/g3.pdf - Несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра.

Maģistra darbs „Parametriskie integrāļi: teorijas jautājumi un pielietojumi Beta un Gamma funkciju izpētē” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autore: Kristīne Isaka

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: docente Ingrīda Uļjane 01.06.2015.

Recenzents: profesors Aleksandrs Šostaks

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2015.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

____ 06.2015. prot. Nr.______

Komisijas sekretāre: lektore Inese Bērziņa