LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

OTRĀS KĀRTAS PARASTO DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU DIVPUNKTU ROBEŽPROBLĒMAS AR ASIMETRISKĀM NELINEARITĀTĒM

BAKALAURA DARBS

Autors: Valērijs Mihailovs
Studenta apliecības Nr.: vm13026
Darba vadītājs: docents Sergejs Smirnovs

RĪGA 2017

Anotācija

Darbs ir veltīts 2.kārtas parasto diferenciālvienādojumu robežproblēmam. Tiek apskatīta divpunktu robežproblēma ar asimetriskām nelinearitātēm. Ir iegūti rezultāti par atrisinājuma eksistenci un skaitu. Darbā ir paradīts, ka robežproblemu atrisinājumu skaits ir atkarīgs no intervāla garuma.

Atslēgvārdi: robežproblēmas ar asimetriskām nelineartātēm, piešaudes metode, hamiltona sistēma, transformāciju metode.

Annotation

This paper has been devoted to boundary value problems for second order ordinary differential equation. Has been considered two point boundary value problem with asymmetric nonlinearities. Has been received results about existence and number of solutions. It was shown, that number of solutions of boundary value problem depends on intervals length.

Key words: Boundary value problem with asymmetric nonlinearity, shooting method, hamiltonian system, transformation method.

SATURS

1. Ievads.

Salīdzinājumā ar sākumproblēmām, kur vispārīgas eksistences un unitātes teorēmas ir zināmas, neunitātes un neeksistences gadījumi parādas jau ļoti vienkāršās robežproblēmās. Apskatīsim vienādojumu $x'' = 0$. Vienādojuma atrisinājums ir lineāra funkcija $x(t) = C_1 t + C_2$. Dirihlē tipa robežproblēmai $x'' = 0$, $x(0) = \eta_1, x(1) = \eta_2$ vienmēr eksistē viens vienīgs atrisinājums $x(t) = (\eta_2 - \eta_1)t + \eta_1$, bet Neimana tipa robežproblēmai $x'' = 0$, $x'(0) = \eta'_1$, $x'(1) = \eta'_2$ nav neviena atrisinājuma, ja $\eta_1' \neq \eta_2'$ un ir bezgalīgi daudz atrisinājumu, ja $\eta_1' = \eta_2'$.

1.1. Jautājuma vēsture.

Matemātikas nozares, kurās bieži sastopamas robežproblēmas ir variāciju rēķini un matemātiskās fizikas vienādojumi. Robežproblēmam ir ļoti daudz praktisko pielietojumu. Aprakstīti daži uzdevumi, kuri noved pie diferenciālvienādojuma robežproblēmam.

1.1.1. Uzdevums par visātrāko nolaidi.

Baristahronas uzdevums ir viens no pirmajam uzdevumam, kas reducējas uz robežproblēmu.

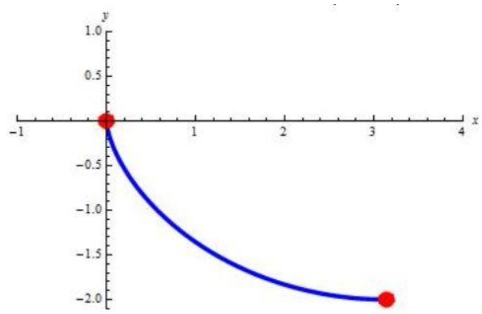
1696.gadā žurnālā "Acda Eruditorum" I.Bernulli publicēja piezīmi "Problema novum ad cujus solutionem matematice invitantur" (Jaunais uzdevums kura atrisinājumam aicināti matemātiķi). Piezīmē bija teikts, ka "Vertikālā plaknē ir doti divi punkti A un B. Noteikt ceļu AMB, pa kuru nolaižoties, smaguma spēka iedarbībā, ķermenis M, sākot kustību no punkta A aizies līdz punktam B, īsākā laikā". Šī uzdevuma atrisinājumu deva tādi ievērojamie matemātiķi, kā I.Bernulli, Leibnics, Njūtons, J.Bernulli un Lopitāls.

Uzdevuma risinājumam I.Bernulli deva pusgada laika, bet tajā laikā atrisinājumu atsūtīja tikai Leibnics. Tāpēc, pēc Leibnica lūguma, I.Bernulli pagarināja termiņu līdz 1697. gada Lieldienām. Šajā laika termiņā uzdevumu atrisināja arī Njūtons, Jacobs Bernulli un Lopitāls. Katrs nonāca pie atrisinājuma, ka visātrākā nolaides likne ir cikloīda. Njūtona atrisinājums bija publicēts 1697.gadā maija žurnālā "Philosophical Transactions" bez autora paraksta. Bet tajā pašā gada maija žurnālā "Ada Eruditorum", kurā I.Bernulli publicēja savu atrisinājumu, bija arī publicēts viņa vecāka brāļa J.Bernulli, un Lopitāla raksti ar analoģiskiem atrisinājumiem [1].

Viens no variantiem, kā risināt uzdevumu.

Doti divi punkti A un B. Ķermenis, smaguma spēka iedarbībā, kustās no punkta A, līdz punktam B. Kādā trajektorijā jākustas ķermenim, lai visātrāk nonāktu uz punktu B?

Lai aprēķini būtu ērtāki, izvēlēsimies punktu A ar koordinātēm $(0; 0)$ un B ar koordinātēm $(x_0; y_0)$ kur $x_0 > 0$ un $y_0 < 0$, kā paradīts zīmējumā



Ķermenis kustās pa funkcijas $y = y(x)$ līkni. Tā, ka ķermenis kustās tikai gravitācijas spēka iedarbībā, tad tas kustās ar ātrumu

$$v = \sqrt{2g|y|}$$

un ceļa garums ir

$$s = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \dot{y}^2}\, dx.$$

Tad laiks, kurā ķermenis noies no punkta A līdz punktam B ir

$$T = \frac{s}{v} = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2g|y|}}\, dx.$$

Tātad mūsu uzdevums ir minimizēt laiku

$$T \to min.$$

Tā, ka zemintegrāļa izteiksme $L(y, \dot{y}) \coloneqq \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{|y|}}$ nav atkarīga no x, tad pirmo integrāli Eilera-Lagranža vienādojumā, aprēķina pēc formulas

$$y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = C_1$$

Tad mūsu gadījumā iegūstam diferenciālvienādojumu

$$y(1 + \dot{y}^2) = const$$

ar robežnosacījumiem

$$y(0) = 0, \;\; y(x_0) = y_0.$$

Robežproblēmas atrisinājums ir cikloīda.

1.1.2. Uzdevums par rotējošas virsmas minimālo laukumu.

Caur diviem uzdotiem punktiem $A(x_1, y_1)$ un $B(x_2, y_2)$ augšējā pusplaknē, iet kaut kāda līkne $y(x)$, nekrustojot x asi. Tā līkne rotē ap x asi. Atrast tādu līkni $y(x)$, lai rotējošam ķermenim sānu virsmas laukums būtu minimāls [2].

Tā, ka virsmas laukums ķermenim rotējot ap x asi aprēķina pēc formulas

$$I(y) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+\dot{y}^2}\, dx$$

tad mūsu uzdevums ir minimizēt doto funkcionāli ar robežnosacījumiem $y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = x_2$.

Apzīmējam integrantu ar $L(y, \dot{y})$:

$$L(y, \dot{y}) \coloneqq y\sqrt{1+\dot{y}^2}$$

Tāpat kā iepriekšējā uzdevumā zemintegrāļa funkcija nav atkarīga no x. Tāpēc pirmo integrāli Eilera-Lagranža vienādojumā aprēķina pēc formulas

$$y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = C_1$$

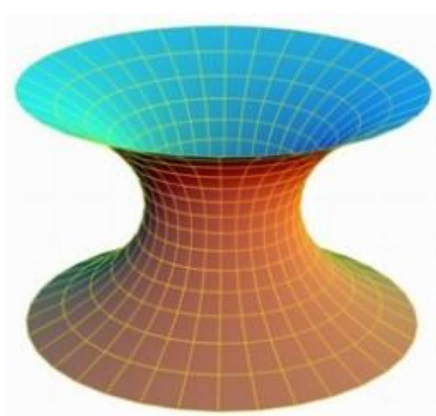
Tad mūsu gadījumā iegūstam diferenciālvienādojumu

$$y = C_1\sqrt{1+\dot{y}^2}$$

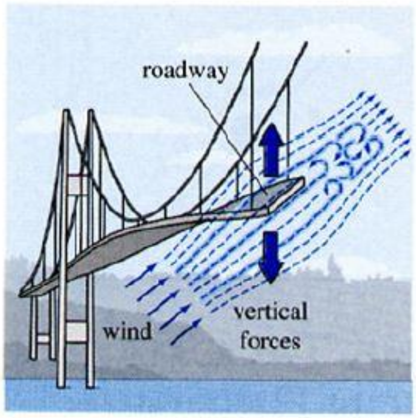
ar robežnosacījumiem

$$y(x_1) = y_1,\ \ y(x_2) = y_2.$$

Uzdevuma atrisinājums ir katenoīds



1.1.3. Piekaramie tilti.



1940.gadā, vasarā, piekaramais tilts Takoma bija uzcelts. Gandrīz uzreiz novērotāji pamanīja, ka dažreiz vējš izsauc braucamā ceļa vertikālas oscilācijas. Viļņveidīgais tilts kļuva par tūristu objektu, kuru viņi varēja apskatīt, kā arī varēja pārbraukt tam pāri. Beigu beigās 1940.gada 7.novembrī, stipra vēja laikā, oscilācijas momentāni paaugstinājās. Un drīz pēc tam, vertikālās oscilācijas kļuva par rotējošām, kā rezultātā braucamais ceļš apgriezās. Negaidīti, braucamās daļas neatkarīgi viena no otras, sāka trīcēt ar lielām oscilācijām un tilts sabruka.

Pēc tā, kad Takoma tilts sabruka, inženieru savienība uzskatīja par vajadzību atrast precīzu vienādojumu, lai būtu vismaz kaut kāds skaidrojums notikušajam. Pirmais avots, neapšaubāmi bija Smita Vinsenta darbs [1], kuru viņš uzrakstīja atsaucoties uz Takomas tiltu notikušo.

Gandrīz piecdesmit gadus galvenā hipotēze, kāpēc tilts sabruka bija rezonanšu sērija. Bet, kā var redzēt no rezonanšu vienādojuma

$$x(t) = \lim_{\gamma\to\omega} F_0 \left(\frac{-\gamma\sin(\omega t) + \omega\sin(\gamma t)}{\omega(\omega^2-\gamma^2)}\right)\overrightarrow{L.K.}\left(\frac{F_0}{2\omega^2}\right)(\sin(\omega t) - t\cos(\omega t))$$

rezonanšu amplitūda izmainās lineāri. Pie tam, lai notiktu rezonanse, ir jābūt sakritībai starp uzspiestas funkcijas frekvenci un tilta īpašfrekvenci. Nav vērts brīnīties, ka rezonanse nebija īstais iemesls tilta sabrukšanai. Bet ja ne rezonanse, kas tad? Matemātiķi Lazers un McKenna savos pētījumos šo jautājumu apstrīd. Lazers uzskata, ka galvenais faktors, kurš noveda tiltu līdz lielām oscilācijām bija nelineārais efekts, savukārt McKenna uzkata, ka galvenais iemesls bija nelineārā rezonanse. Kaut gan teorija ietver parciālu diferenciālvienādojumu, vienkāršotais modelis noved pie parastā diferenciālvienādojuma. Rezultāts parāda citu veidu, kā oscilācijas amplitūda var palielināties [3].

Tilts būs modelēts, kā viendimensionāls vibrēts baļķis. Trošu kustību ignorēsim, izņemot tikai tās kustības, kuras no troses pāriet uz braucamo ceļu. Modelis noved pie sekojošā vienādojuma

$$u_{tt} + EIu_{yyyy} + u_t + ku^+ = W(y) + \epsilon g(y,t) \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(L,t) = u_{yy}(0,t) = u_{yy}(L,t) = 0$$

Tādā veidā, uzskatīsim ka piekaramais tilts ir baļķis ar garumu L, ar nostiprinātiem galiem. Baļķa vertikālā novirze ir $u(y,t)$, ar nelieliem viskozu nosacījumiem, kuri ir atkarīgi no trijiem dažādiem spēkiem; trose tur to, kā nelineāru atsperi, ar atsperes stinguma koeficientu k, svars uz vienu garuma vienību ir $W(y)$, un ārējie spēki ir $\epsilon g(y,t)$. Slodze $W(y)$ uzskatīsim, ka konstanti. E ir Junga modulis, I- inercijas moments [4].

Tā vietā, lai ņemtu svaru, kā konstanti, mēs aizvietosim to ar īpašfunkcijas izteiksmi no konstantes funkcijas, tas ir, mēs aizvietosim $W(y)$ar vienādību $W(y) = W_0 \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$. Tas dod slodzes un novirzes kļūdu apmērā 10%. Tad, mēs pieņemsim, ka ārējie spēki ir uzdoti, kā $g(y,t) = g(t)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$. Tā ir specifiska izvēle, bet nav iemeslu tam, kāpēc uz tiltu nevar iedarboties tāda tipa ārējie spēki. Un beidzot, tā vietā, lai meklētu vispārīgo atrisinājumu problēmai (1), mēs meklēsim atrisinājumu formā $u(y,t) = x(t)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$.

Kad $u(y,t)$ir ievietots vienādojumā (1), ar nosacījumu, ka $\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \neq 0$, mēs varam dalīt ar $\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$. Kad to visu izdarām, iegūstam

$$x'' + \delta x' + \left(\frac{\pi}{L}\right)^4 x + kx^+ = W_0 + \epsilon g(t)$$

kur $x^+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Tātad esam ieguvuši 2.kārtas nelineāro diferenciālvienādojumu, kuru vispārīgi var pierakstīt sekojoši

$$x'' + f(x) = \epsilon g(t) \quad (2)$$

Izpētīt vienādojuma (2), ar robēznosacījumiem

$$x(0) = x(b) = 0, \;\; b > 0$$

atrisinājuma īpašības, kad $\epsilon \to 0$, ir bakalaura darba mērķis.

1.2. Problēmas nostādne.

Pētījuma objekts:

Bakalaura darbā tiek pētīta robežproblēma nelineāram autonomam vienādojumam

$$x'' = -f(x) = -\begin{cases} x^p, & x \geq 0 \\ x^q, & x < 0 \end{cases} \qquad (3.1.)$$

kopā ar divpunktu robežnosacījumiem

$$x(0) = x(b) = 0, \;\; b > 0 \qquad (3.2.)$$

kur $p > 1$ un $0 < q < 1$.

Tiek uzskatīts, ka funkcija $f(x): R \to R$ ir nepārtraukta un apmierina sekojošus nosacījumus:

a) $xf(x) > 0, \;\; ja\; x \neq 0$;
b) Ja $x > 0$, tad $f(Ax) = A^p f(x)$, kur $p > 1$, un ja $x < 0$, tad $f(Ax) = A^q f(x)$, kur $0 < q < 1$, $A > 0$ ir parametrs.

Nosacījumi (a) un (b) nodrošina vienādojuma (3.1.) atrisinājumu oscilācijas raksturu, kā arī nosacījums (b) nodrošina nelineāritātes asimetriju vienādojumā. Nosacījumi (a) un (b) ir neatkarīgi.

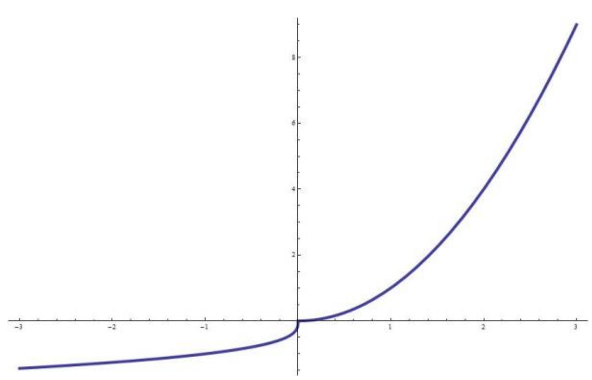
Pētījuma mērķis: izpētīt robežproblēmas (3), (4) atrisinājumu eksistenci, skaitu un oscilācijas īpašības sakarā ar nelinearitātes raksturu un intervala [0,b] garumu.

Funkcijas $f(x)$, kura apmierina nosacījumus (a) un (b) tipisks piemērs ir

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x < 0 \end{cases} \qquad (P1)$$

šeit $p = 2, q = \frac{1}{3}$.

Zimējums:

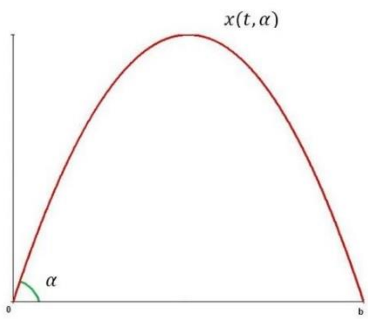


1.3. Pētījuma metodes.

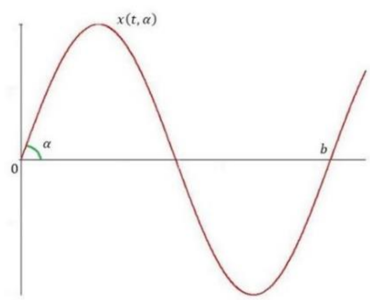
Darba galvenais mērķis ir sniegt rezultātus pār robežproblēmas $(3.1.), (3.2.)$ atrisinājumu eksistenci un skaitu. Tādējādi, mūs interesē atrisinājumi, kuriem ir nulle punktā $t = 0$ un kuri oscilē, ja $t > 0$. Robežproblēmas atrisinājumu pētīšanai tiek izmantota *piešaudes metode*. Piešaudes metode reducē robežproblēmas risināšanu uz Koši problēmas risināšanu. Tātad mēs apskatam Koši palīgproblēmu vienādojumam $(3.1.)$ ar sākuma nosacījumiem

$$x(0) = 0,\ x'(0) = \alpha \quad (3.3.)$$

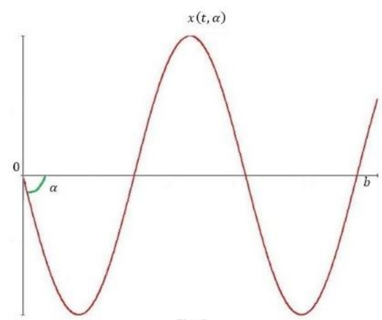
un mēs meklējam tādas parametra α vērtības pie kurām Koši palīgproblēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājumam $x(t, \alpha)$ ir nulle punktā $t = b$.



Zim.1



Zim.2



Zim.3

2. Vienādojuma atrisinājumu oscilācijas īpašības.

2.1. Oscilācijas īpašības.

Cik bieži vienādojuma $(3.1.)$ netriviāliem atrisinājumiem paradās nulles? Jebkuram vienādojuma (1) atrisinājumam, jebkurā galīga intervālā, ir galīgs skaits nuļļu. Tiešām, ja kādā galīgā intervālā J, kādam atrisinājumam φ ir bezgalīgi daudz nuļļu $t_1, t_2, ...$, tad intervāla J kompaktības dēļ, var uzskatīt, ka $t_k \to t_0 \in J$, pie $k \to \infty$. No vienādības $\varphi(t_k) = 0$ $(k = 1,2, ...)$ seko vienādības $\varphi(t_0) = 0, \varphi'(t_0) = 0$. Bet tā, kā jebkurai Koši problēmai atrisinājums priekš vienādojuma $(3.1.)$ ir viens vienīgs, tad pēdējā vienādība garantē, ka atrisinājums φ ir triviāls. Tādā veidā vienādojuma $(3.1.)$ atrisinājumam var būt bezgalīgi daudz nuļļu, tikai bezgalīgā intervālā. Tādā gadījumā atrisinājumu sauc pār *oscilējošu*, bet pretējā gadījumā – *neoscilējošu* [5].

Apgalvojums. Ja funkcija $f(x)$ apmierina nosacījumus (a) un (b), tad funkcija ir augoša.

Pierādījums. Pieņemsim, ka $0 < x_1 < x_2$. Acīmredzami, ka eksistē tāds $A > 1$, ka $x_2 = Ax_1$. Apskatīsim $f(x_2) = f(Ax_1) = A^p f(x_1) > f(x_1)$. Tātad $f(x)$ ir augoša funkcija, kad $x > 0$.

Pieņemsim, ka $x_2 < x_1 < 0$. Acīmredzami, ka eksistē tāds $A > 1$, ka $x_2 = Ax_1$. Apskatīsim $f(x_2) = f(Ax_1) = A^q f(x_1) < f(x_1)$. Tātad $f(x)$ ir augoša funkcija, kad $x < 0$.

Secinājums. Ja diferencējama funkcija $f(x)$ apmierina nosacījumus (a) un (b), tad $f'(x) \geq 0$.

Apgalvojums. Pieņemsim, ka $x(t, \alpha)$ ir Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājums. Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad atrisinājumam $x(t, \alpha)$ eksistē nulle intervālā $(0, +\infty)$.

Pierādījums.

Pieņemsim pretējo: $x(t) \neq 0$, ja $t > 0$. Pieņemsim, ka $x(t) > 0$, ja $t > 0$ (gadījumā, kad $x(t) < 0$ pierādījums ir analoģisks). Ja $x(t) > 0$, kad $t > 0$, tad, ņemot vērā vienādojumu (1) un nosacījumu (a), $x''(t) < 0$, kad $t > 0$. Tātad $x'(t)$ dilst intervālā $(0, +\infty)$. Pieņemsim, ka $t > 0$ un apskatīsim izteiksmi:

$$\left(\frac{x'(t)}{f\big(x(t)\big)}\right)' = \frac{x''(t) \cdot f\big(x(t)\big) - f'(x(t)) \cdot x'(t)^2}{f^2(x(t))} = \frac{x''(t)}{f(x(t))} - f'\big(x(t)\big) \cdot \left(\frac{x'(t)}{f\big(x(t)\big)}\right)^2 =$$

$$= -1 - f'\big(x(t)\big) \cdot \left(\frac{x'(t)}{f\big(x(t)\big)}\right)^2 \leq -1 \quad (jo\, f'\big(x(t)\big) \geq 0\,)$$

Tātad, ja $t > 0$, tad $\left(\frac{x'(t)}{f(x(t))}\right)' \leq -1$.

Integrējot robežas no t_1 līdz t $(0 < t_1 < t)$, iegūstam

$$\frac{x'(t)}{f\big(x(t)\big)} - \frac{x'(t_1)}{f\big(x(t_1)\big)} \leq -(t - t_1)$$

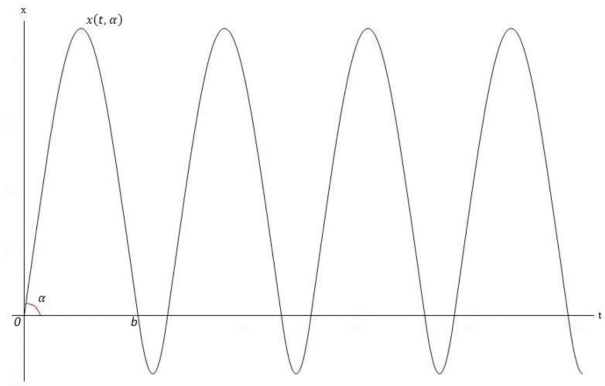
jeb

$$\frac{x'(t)}{f\big(x(t)\big)} \leq \frac{x'(t_1)}{f\big(x(t_1)\big)} - (t - t_1)$$

No pēdējās nevienādības izriet, ka eksistē $t_2 > 0$, ka $x'(t) < 0$, kad $t \geq t_2$. Ņemot vērā, ka $x'(t)$ dilst, kad $t > 0$, tad $x'(t) \leq x'(t_2)$, kad $t \geq t_2$. Integrējot robežas no t_2 līdz t, iegūstam $x(t) - x(t_2) \leq x'(t_2)(t - t_2)$, jeb $x(t) \leq x(t_2) + x'(t_2)(t - t_2)$ un $x'(t_2) < 0$. Ja $t \to \infty$, tad $x(t_2) + x'(t_2)(t - t_2) \to -\infty$, bet $x(t) > 0$. Pretruna.

□

Secinājums. Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājumam $x(t,\alpha)$ ir bezgalīgi daudz vienkāršu nuļļu intervālā $(0, +\infty)$.



2.2. Atrisinājuma periodiskums.

Apskatīsim autonomu vienādojuma sistēmu

$$\begin{cases} x' = H_y(x,y) \\ y' = -H_x(x,y) \end{cases} \quad (HS)$$

kur $H(x,y)$ ir divreiz diferencējama funkcija, kura ir definēta $(x,y) \in R^2$. Funkciju H sauc pār *hamiltoniānu* un sistēmu sauc pār *hamiltona sistēmu*. Turpmāk uzskatīsim, ka atrisinājumi $x(t)$ un $y(t)$ ir definēti visām $t \in R$.

Lemma 1 [6]. Ja $x(t)$ un $y(t)$ ir atrisinājums sistēmai (HS), tad eksistē tāds $c \in R$, ka $H\big(x(t), y(t)\big) = c$.

Pierādījums.

Atvasinot $H\big(x(t), y(t)\big)$ pēc t iegūst

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(H\big(x(t), y(t)\big)\Big) = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Tā, ka $x'(t) = H_y(x,y)$ un $y' = -H_x(x,y)$ iegūst

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(H\big(x(t), y(t)\big)\Big) = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot H_y(x,y) - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot H_x(x,y) = 0$$

Tāpēc $H\big(x(t), y(t)\big)$ ir konstante.

Definīcija. Punktus $(x^*, y^*) \in R^2$, tādus ka $H_x(x^*, y^*) = H_y(x^*, y^*) = 0$, sauksim pār hamiltona sistēmas (HS) *līdzsvara punktiem*.

Kopa

$$\Lambda_c = \{(x, y) \in R^2 : H(x, y) = c\}$$

ir sistēmas *fāzu portrets*.

Teorēma. Ja fāzu trajektorija ir slēgta līnija, kas neiet caur līdzsvara punktu, tad sistēmai ir periodisks atrisinājums [6].

Piemērs.

$$x'' = -f(x)$$

$$x(0) = 0, \;\; x'(0) = \alpha$$

Pārrakstām vienādojumu

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -f(x) \\ x(0) = 0, \;\; y(0) = \alpha \end{cases}$$

Tad hamiltoniāns ir

$$H(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + F(x)$$

Kur

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds$$

Apskatīsim gadījumu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^{\frac{1}{3}}, & x < 0 \end{cases}$$

Tad

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}, & x \geq 0 \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}, & x < 0 \end{cases}$$

Tā, ka pēc lemmas 1, funkcija $H(x,y) = c$, tad izmantojot sākuma nosacījumus $x(0) = 0,\ \ y(0) = \alpha$, var atrast c vērtību:

$$c = \frac{\alpha^2}{2}$$

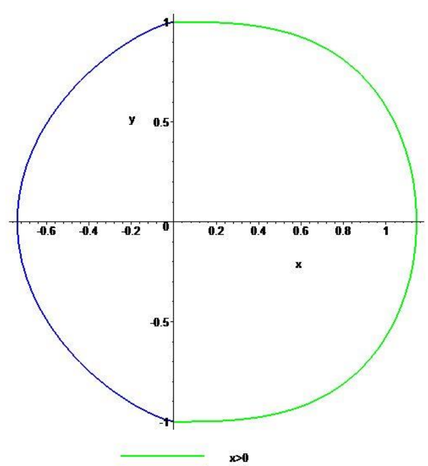
tad

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{\alpha^2}{2}, & x \geq 0 \\ \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} = \dfrac{\alpha^2}{2}, & x < 0 \end{cases} => \begin{cases} 3y^2 + 2x^3 = 3\alpha^2, & x \geq 0 \\ 2y^2 + 3x^{\frac{4}{3}} = 2\alpha^2, & x < 0 \end{cases}$$

Ja $\alpha = 1$, tad

$$\begin{cases} 3y^2 + 2x^3 = 3, & x \geq 0 \\ 2y^2 + 3x^{\frac{4}{3}} = 2, & x < 0 \end{cases}$$

Grafiks:



Tā, ka fāzu trajektorija ir slēgta līnija un tā neiet caur līdzsvara punktu $(0{,}0)$, tad (HS) atrisinājums ir periodisks.

Piezīme. Ja $\lim\limits_{|x|\to\infty} F(x) = \infty$, tad visas Λ_c liknes ir slēgtas [7].

Secinājums. Košī palīgproblēmai $(1), (3)$ atrisinājums ir periodisks.

3. Vienādojuma atrisinājuma struktūra.

(Atrisinājumu pašlīdzība, parametra transformāciju metode, atrisinājuma atkarība no sākuma nosacījumiem)

3.1. Transformāciju metode.

Transformāciju metodes lietojuma shēma [8]:

1. Tiek uzdota diferenciālvienādojuma ietilpstošo mainīgo transformācija, kura satur reālas vērtības pieņemošus parametrus, tāda, ka pēc tas izpildes diferenciālvienādojums šos parametrus nesatur.

2. Trūkstošajā sākuma nosacījumā iekļauj kādu no transformācijas parametriem, dodot iespēju noteikt pārējo parametru skaitliskās vērtības. Pēc mainīgo transformācijas izpildes arī sākuma nosacījumi nedrīkst saturēt parametrus.

3. Transformācijas parametru, kurš atbilst trūkstošajam sākuma nosacījumam, nosaka robežnosacījums atrisinājuma definīcijas apgabala otrajā galapunktā. Šeit būtiska ir šī robežnosacījuma nehomogenitāte.

4. Tiek pārveidoti arī robežnosacījumi atrisinājuma definīcijas apgabala pirmajā galapunktā, te būtiska ir šo robežnosacījumu homogenitāte.

5. Risinot Koši problēmu un izmantojot uzdotās mainīgo transformācijas formulas, iegūstam robežproblēmas tuvinātu skaitlisko atrisinājumu.

Tā ka nelinearitāte diferenciālvienādojumā (3.1), kad $x > 0$ un kad $x < 0$ atšķiras, tad atrisinājuma pozitīvo daļu aprakstīsim atsevišķi no negatīvās daļas.

3.2. Pozitīvā daļa.

Apskatīsim Košī problēmas (3.1.), (3.3.) netriviālo atrisinājumu $x_1(t, \alpha)$, kur $x_1'(0) = \alpha_0^+ > 0$ ($\alpha_0^+ = const$). Pieņemsim, ka $t = t_1$ ir atrisinājuma $x_1(t, \alpha_0^+)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$ un $x_1(t, \alpha_0^+) > 0$, kad $t \in (0, t_1)$ (jo $\alpha_0^+ > 0$). Apzīmēsim $x_1'(t_1, \alpha_0^+) = \alpha_1 < 0$.

Izmantosim transformāciju metodi. Robežproblēmai (3.1), (3.3.) lietojām mainīgo maiņu

$$\tau = \frac{t}{A}, \qquad x(\tau) = A^{\lambda} x_1(t) = A^{\lambda} x_1(A\tau)$$

kur $A, \lambda \in R$ ir kādi pagaidām nezināmi parametri, $A > 0$. Iegūstam

$$A^{\lambda+2}x_1''(A\tau) = -f\left(A^{\lambda}x_1(A\tau)\right) = -A^{\lambda p}f\big(x_1(A\tau)\big).$$

Ja

$$\lambda + 2 = \lambda p => \lambda = \frac{2}{p-1}$$

tad iegūtais diferenciālvienādojums nav atkarīgs no parametra A, un mums ir diferenciālvienādojums

$$x_1''(A\tau) = -f\big(x_1(A\tau)\big)$$

Robežnosacījumi izmainās sekojoši

$$0 = x(0) = A^{\frac{2}{p-1}} \cdot x_1(A \cdot 0) => x_1(0) = 0$$

un

$$x'(\tau) = A^{\frac{2}{p-1}+1}x_1'(A\tau) => x'(0) = A^{\frac{2}{p-1}+1}x_1'(0) = A^{\frac{p+1}{p-1}} \cdot \alpha_0^+ = \alpha.$$

No otra robežnosacījuma atrodam A:

$$A = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}$$

Iegūstam

$$x(\tau,\alpha) = A^{\lambda}x_1(A\tau,\alpha_0^+) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2}{p+1}} \cdot x_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}\tau,\alpha_0^+\right) \qquad (4)$$

kur $\alpha > 0$.

Apgalvojums. Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad funkcija (4) ir Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājums intervālā $[0,\tau_1]$, kur $\tau_1(\alpha) = t_1 \Big/ \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}.$ **(5)**

Pierādījums.

Apgalvojums var būt pierādīts ar tiešo substitūciju. Apskata

$$x''(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2}{p+1}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}\cdot 2} \cdot x_1''\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}t,\alpha_0^+\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \cdot x_1''\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}t,\alpha_0^+\right)$$

Priekš $x_1(t,\alpha) > 0$, funkcija f ir $f\big(x_1(t,\alpha)\big) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2p}{p+1}} \cdot f\left(x_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t, \alpha_0^+\right)\right)$. Tādā veidā $x_1(t,\alpha)$ apmierina vienādojumu (1) piekš $t \in [0,\tau_1]$. Pie tam $x_1(t,\alpha) \in C^2_{[0,\tau_1]}$.

Piezīme:

No formulas (5) izriet, ka:

- Ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz $+\infty$, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = 0$.
- Ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz 0, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = +\infty$.

Secinājums.

Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad jebkuru pozitīvu Koši problēmas (3.1), (3.3) atrisinājumu $x_1(t,\alpha)$ intervālā $[0,t_1]$ (t_1 – atrisinājuma $x_1(t,\alpha)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$) var izteikt kā

$$x(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2}{p+1}} \cdot x_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t, \alpha_0^+\right)$$

kur $\alpha > 0$. Tātad $x_1(t_1,\alpha) = 0$ un $x'(t_1,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) x_1'(t_1,\alpha_0^+) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot \alpha_1 < 0$.

Secinājums.

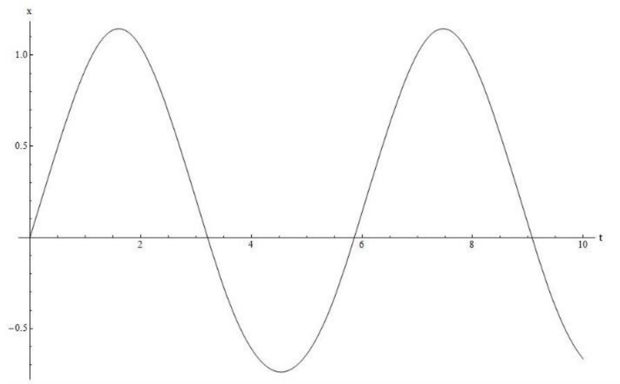
τ_1 ir funkcija no α, jeb $\tau_1(\alpha) = {t_1}\Big/{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$. $\qquad (\alpha > 0)$

Pie tam, ņemot vērā, ka $p > 1$, $\tau_1(\alpha)$ ir dilstoša funkcija un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz 0^+, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = +\infty$, un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz $+\infty$, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = 0$.

Piemērs. Zara τ_1 konstruēšanai, kā piemēru apskatīsim uzdevumu $(P1)$, ar sākuma nosacījumiem $x(0) = 0,\ x'(0) = 1$, tad

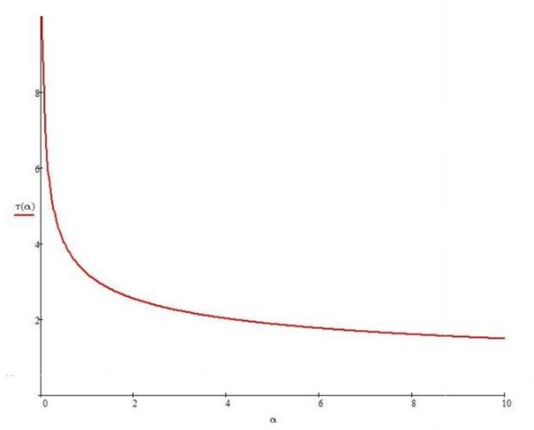
$$\tau_1(\alpha) = {t_1}\Big/{\left(\frac{\alpha}{1}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur $p = 2$, t_1 ir atrisinājuma $x_1(t, 1)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$. Atrisinājuma $x_1(t, 1)$ grafiks tika iegūts ar datorprogrammu *Mathematica* palidzību. Programmas kods, atrisinājuma meklēšanai, ir pielikumā.



No grafika var nolasīt $t_1$vertību $t_1 \approx 3{,}209$. Tātad

$$\tau_1(\alpha) \approx \frac{3.209}{(\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$



Secinājums.

$x'(t_1, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot \alpha_1 < 0$ ir funkcija no α $(\alpha > 0)$ un ir dilstoša, pie tam

$\lim_{\alpha \to 0^+} x'(t_1, \alpha) = 0$ un $\lim_{\alpha \to +\infty} x'(t_1, \alpha) = -\infty$.

3.3. Negatīvā daļa.

Apskatīsim Košī problēmas (3.1), (3.3) netriviālo atrisinājumu $x_2(t,\alpha_0^-)$, kur $x_2{}'(0) = \alpha_0^- < 0$ ($\alpha_0^- = const$). Pieņemsim, ka $t = t_1^*$ ir atrisinājuma $x_2(t,\alpha_0^-)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$ un $x_2(t,\alpha_0^-) < 0$, kad $t \in (0, t_1^*)$ (jo $\alpha_0^- < 0$). Apzīmēsim $x_2{}'(t_1^*, \alpha_0^-) = \alpha_1 > 0$.

Izmantosim transformāciju metodi. Robežproblēmai (3.1), (3.3) lietojām mainīgo maiņu

$$\tau^* = \frac{t^*}{B}, \qquad x(\tau) = B^{\mu} x_2(t^*) = B^{\lambda} x_2(B\tau^*)$$

kur $B, \mu \in R$ ir kādi pagaidām nezināmi parametri, $B > 0$. Iegūstam

$$B^{\mu+2} x_2''(B\tau^*) = -f\big(B^{\mu} x_2(B\tau^*)\big) = -B^{\mu q} f\big(x_2(B\tau^*)\big).$$

Ja

$$\mu + 2 = \mu q \Rightarrow \mu = \frac{2}{q-1}$$

tad iegūtais diferenciālvienādojums nav atkarīgs no parametra B, un mums ir diferenciālvienādojums

$$x_2''(B\tau^*) = -f\big(x_2(B\tau^*)\big)$$

Robežnosacījumi izmainās sekojoši

$$0 = x(0) = B^{\frac{2}{q-1}} \cdot x_2(B \cdot 0) \Rightarrow x_2(0) = 0$$

un

$$x'(\tau^*) = B^{\frac{2}{q-1}+1} x_2'(B\tau^*) \Rightarrow x'(0) = B^{\frac{2}{q-1}+1} x_2'(0) = B^{\frac{q+1}{q-1}} \cdot \alpha_0^- = \alpha.$$

No otra robežnosacījuma atrodam B:

$$B = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}$$

Iegūstam

$$x(\tau,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2}{q+1}} \cdot x_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} \tau, \alpha_0^-\right) \qquad (6)$$

kur $\alpha < 0$.

Apgalvojums. Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad funkcija (6) ir Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājums intervālā $[0, \tau_1^*]$, kur $\tau_1^* = {t_1^*}\Big/{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$ $\qquad (7)$.

Pierādījums.

Apgalvojums var būt pierādīts ar tiešo substitūciju. Apskata

$$x''(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2}{q+1}} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}\cdot 2} \cdot x_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \cdot x_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right)$$

Priekš $x(t,\alpha) < 0$, $f\big(x(t,\alpha)\big) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2q}{q+1}} \cdot f\left(x_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right)\right)$. Tādā veidā $x_2(t,\alpha)$ apmierina vienādojumu $(3.1.)$ piekš $t \in [0, \tau_1^*]$. Pie tām $x_2(t,\alpha) \in C^2_{[0,\tau_1^*]}$.

Piezīme

No formulas (7) izriet, ka:

- Ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz $-\infty$, tad punkts $t = \tau_1^*$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = +\infty$.
- Ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz 0, tad punkts $t = \tau_1^*$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = 0$.

Secinājums.

Ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad jebkuru negatīvu Koši problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājumu $x_2(t,\alpha)$ intervālā $[0, t_1^*]$ (t_1^* atrisinājuma $x_2(t,\alpha)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$) var izteikt kā

$$x(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2}{q+1}} \cdot x_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right)$$

kur $\alpha < 0$. Tātad $x_2(t_1^*,\alpha) = 0$ un $x'(t_1^*,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) x_2'(t_1^*,\alpha_0^-) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot \alpha_1 > 0$.

Secinājums.

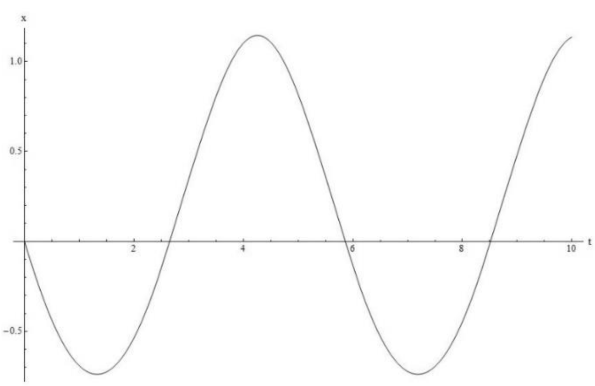
τ_1^* ir funkcija no α, jeb $\tau_1^*(\alpha) = {t_1^*}\Big/{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$. $\qquad (\alpha < 0)$

Pie tam, ņemot vērā, ka $0 < q < 1$, tad $\tau_1^*(\alpha^*)$ ir dilstoša, un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz 0^-, tad punkts $t = \tau_1^*$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = 0$, un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz $-\infty$, tad punkts $t = \tau_1^*$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz $t = +\infty$.

Piemērs. Zara τ_1^* konstruēšanai, kā piemēru apskatīsim uzdevumu $(P1)$, ar sākuma nosacījumiem $x(0) = 0,\ x'(0) = -1$, tad

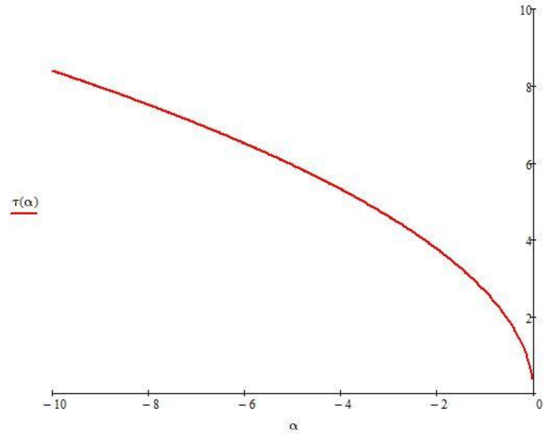
$$\tau_1^*(\alpha) = {t_1^*}\Big/{\left(\frac{\alpha}{-1}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur $p = \frac{1}{3}$, t_1^* ir atrisinājuma $x_2(t, -1)$ pirmā nulle pa labi no $t = 0$. Atrisinājuma $x_2(t, -1)$ grafiks tika iegūts ar datorprogrammu *Mathematica* palidzību:



No grafika var nolasīt t_1^* vertību: $t_1^* \approx 2.652$. Tātad

$$\tau_1^*(\alpha) \approx \frac{2.652}{(-\alpha)^{-\frac{1}{2}}}$$



Secinājums.

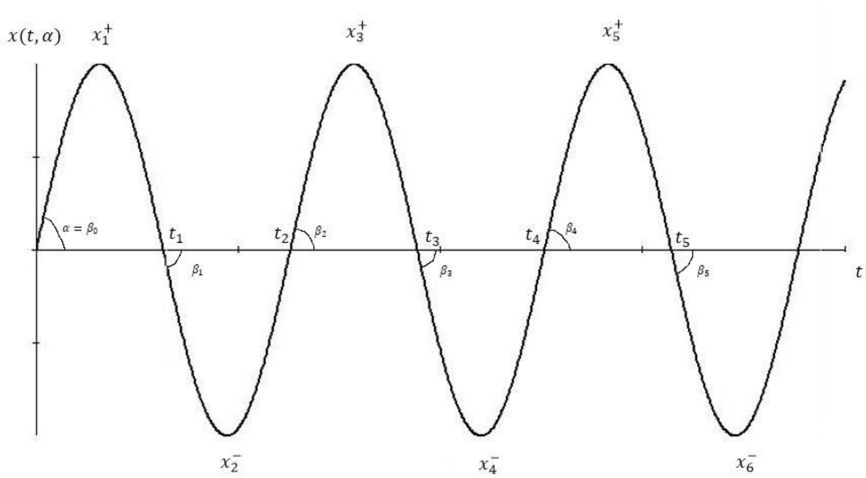
$x'(t_1^*, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot \alpha_1 > 0$ ir funkcija no α ($\alpha < 0$) un ir dilstoša, pie tam $\lim\limits_{\alpha \to 0^-} x'(t_1^*, \alpha) = 0$ un $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} x'(t_1^*, \alpha) = +\infty$.

4. Pozitīvās un negatīvās daļas salīmēšana.

Tā, ka vienādojums (3.1.) ir autonoms, tad ja $x(t)$ ir vienādojuma (3.1.) atrisinājums, tad arī $x(t + C)$ ir vienādojuma (3.1.) atrisinājums, kur C ir patvaļīga konstante.

Apskatīsim Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājumu $x(t, \alpha)$ un apzīmēsim funkcijas $x(t, \alpha)$ vienkāršas nulles intervālā $(0, +\infty)$, ar $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$

4.1. Gadījums kad $\alpha > 0$.



$x(t) > 0$, kad $t \in (t_{2i-2}, t_{2i-1})$ un $x(t) < 0$, kad $t \in (t_{2i-1}, t_{2i}), i = 1,2,3, \ldots$

Apzīmēsim $\delta_{2i-1}^{+} = t_{2i-1} - t_{2i-2}$ un $\delta_{2i}^{-} = t_{2i} - t_{2i-1}$, $i = 1,2,3, \ldots$, $x(t)$ intervālā $[t_{2i-2}, t_{2i-1}]$ ar $x_{2i-1}^{+}(t)$ un intervālā $[t_{2i-1}, t_{2i}]$ ar $x_{2i}^{-}(t)$.

Ņemot vērā atrisinājumu struktūras formulas

$$\delta_{2i-1}^{+}(\beta_{2i-2}) = \frac{\delta_{2i-1}^{+}}{\left(\frac{\beta_{2i-2}}{\alpha_0^{+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur $\beta_{2i-2} = x_{2i-1}'(t_{2i-2}) > 0$ un

$$\delta_{2i}^{-}(\beta_{2i-1}) = \frac{\delta_{2i}^{-}}{\left(\frac{\beta_{2i-1}}{\alpha_0^{-}}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur $\beta_{2i-1} = x_{2i}'(t_{2i-1}) < 0$

Pie tam $\tau_1(\alpha) = \delta_1^{+}(\beta_0)$; $\tau_2(\alpha) = \delta_1^{+}(\beta_0) + \delta_2^{-}(\beta_1)$, pie tam $x_1'(t_1) = x_2'(t_1)$; $\tau_3(\alpha) = \delta_1^{+}(\beta_0) + \delta_2^{-}(\beta_1) + \delta_3^{+}(\beta_2)$, pie tam $x_2'(t_2) = x_3'(t_2)$; utt…

$\boldsymbol{\tau_1(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\delta_1^{+}(\beta_0) = \frac{\delta_1^{+}}{\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0^{+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur $\beta_0 = x_1'(t_0) = x_1'(0) = \alpha > 0$ un $\delta_1^{+} - const$ ir attālums no 0 līdz pirmajai saknei t_1, tātad

$$\boldsymbol{\tau_1(\alpha) = \delta_1^{+}(\beta_0) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^{+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_2(\alpha)}$ konstruēšana:

$\tau_2(\alpha) = \delta_1^{+}(\beta_0) + \delta_2^{-}(\beta_1)$

$\delta_1^{+}(\beta_0) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^{+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$, $\quad \delta_2^{-}(\beta_1) = \frac{\delta_2^{-}}{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_0^{-}}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$, kur $\beta_1 = x_2'(t_1) < 0$. Ņemot vērā, ka $x_1'(t_1) = x_2'(t_1)$, mēs varam izteikt β_1 caur α. Atradīsim $x_1'(t_1)$, ņemot vērā struktūru

$$x_1(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{2}{p+1}} \cdot x_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t, \alpha_0^+\right)$$

Tad atvasinājums ir

$$x'_1(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t, \alpha_0^+\right)$$

$$x'_1(t_1,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t_1, \alpha_0^+\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_1(\tau_1, \alpha_0^+) => \boldsymbol{\beta_1} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right) \cdot \boldsymbol{x'_1(\tau_1, \alpha_0^+) < 0}$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_1(\tau_1, \alpha_0^+) = \alpha_1 < 0}$ $(\boldsymbol{const})$, iegūstam

$$\delta_2^-(\beta_1) = \frac{\delta_2^-}{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} = \frac{\delta_2^-}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur δ_2^- ir attālums no t_1 līdz nākamai saknei t_2.

Tātad

$$\boldsymbol{\tau_2(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{t_1}}{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right)^{\frac{\boldsymbol{p-1}}{\boldsymbol{p+1}}}} + \frac{\boldsymbol{t_2 - t_1}}{\left(\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha_1}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)^{\frac{\boldsymbol{q-1}}{\boldsymbol{q+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_3(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\tau_3(\alpha) = \delta_1^+(\beta_0) + \delta_2^-(\beta_1) + \delta_3^+(\beta_2)$$

$$\delta_1^+(\beta_0) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} \qquad \delta_2^-(\beta_1) = \frac{t_2 - t_1}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} \qquad \delta_3^+(\beta_2) = \frac{\delta_3^+}{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur $\beta_2 = x_3'(t_2) > 0$. Ņemot vērā, ka $x_2'(t_2) = x_3'(t_2)$, mēs varam izteikt β_2 caur α. Atradīsim $x_2'(t_2)$, ņemot vērā struktūru:

$$x'_2(t_2.\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot x'_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t_2, \alpha_0^-\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot x'_2(\tau_2, \alpha_0^-) => \boldsymbol{\beta_2} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right) \cdot \boldsymbol{x'_2(\tau_2, \alpha_0^-) > 0}$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_2(\tau_2, \alpha_0^-) = \alpha_2 > 0}$ $(\boldsymbol{const})$, iegūstam

$$\delta_3^+(\beta_2) = \frac{\delta_3^+}{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} = \frac{\delta_3^+}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

un tā ka mēs pieņemam, ka $\alpha > 0$, bet funkcijai $x_2(t, \alpha)$, $\alpha < 0$ tad, lai saglabātu zīmi, saucējā pirms α uzliksim mīnus zīmi, tad iegūstam

$$\delta_3^+(\beta_2) = \frac{\delta_3^+}{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} = \frac{\delta_3^+}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur δ_3^+ ir attālums no t_2 līdz nākamajai saknei t_3.

Tātad

$$\boldsymbol{\tau_3(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{t_3 - t_2}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_4(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\tau_3(\alpha) = \delta_1^+(\beta_0) + \delta_2^-(\beta_1) + \delta_3^+(\beta_2) + \delta_4^-(\beta_3)$$

$$\delta_1^+(\beta_0) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} \qquad \delta_2^-(\beta_1) = \frac{t_2 - t_1}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} \qquad \delta_3^+(\beta_2) = \frac{t_3 - t_2}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

$$\delta_4^-(\beta_3) = \frac{\delta_4^-}{\left(\frac{\beta_3}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}, \qquad \text{kur } \beta_3 = x_4'(t_3) < 0$$

Ņemot vērā, ka $x_4'(t_3) = x_3'(t_3)$, mēs varam izteikt β_3 caur α. Atradīsim $x_3'(t_3)$, ņemot vērā struktūru.

$$\boldsymbol{x'_3(t_3.\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_3\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t_3, \alpha_0^+\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_3(\tau_3, \alpha_0^+) \Rightarrow \beta_3 = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_3(\tau_3, \alpha_0^+) < 0}$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_3(\tau_3, \alpha_0^+) = \alpha_3 < 0}$ $(\boldsymbol{const})$, iegūstam

$$\delta_4^-(\beta_3) = \frac{\delta_4^-}{\left(\frac{\beta_3}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} = \frac{\delta_4^-}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur δ_3^+ ir attālums no t_3 līdz nākamajai saknei t_4.

Tātad

$$\boldsymbol{\tau_4(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{t_3 - t_2}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{t_4 - t_3}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}}$$

Piezīme: Ja atrisinājums $x(t,\alpha)$ ir periodisks, tad

$$\delta_1^+ = \delta_{2k-1}^+ = t_1, \qquad \delta_2^- = \delta_{2k}^- = t_2 - t_1, \qquad k = 2, \dots N$$

$$\beta_{2k-2} = \beta_0 = \alpha, \quad \beta_{2k-1} = \beta_1 = -\alpha \quad k = 2, \dots, N$$

un

$$\delta_{2i-1}^+(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}, \quad \delta_{2i}^-(\alpha) = \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} \quad \forall\, i \in N$$

Piemērs. Kā piemēru var apskatīt uzdevumu $(P1)$. Tā, ka uzdevumam $(P1)$ atrisinājums ir periodisks, tad var izmantot "saīsinātas" formulas

$$\tau_1(\alpha) = \delta_1^+(\beta_0) = \delta_1^+(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

$$\tau_2(\alpha) = \delta_1^+(\alpha) + \delta_2^-(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

$$\tau_3(\alpha) = \delta_1^+(\alpha) + \delta_2^-(\alpha) + \delta_3^+(\alpha) = 2\delta_1^+(\alpha) + \delta_2^-(\alpha) = \frac{2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

$$\tau_4(\alpha) = 2\delta_1^+(\alpha) + 2\delta_2^-(\alpha) = \frac{2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{2t_2 - 2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

…

$$\tau_k(\alpha) = \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \delta_1^+(\alpha) + \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor \delta_2^-(\alpha) = \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ ir vesela daļa skaitlim $\frac{k}{2}$ no augšas, un $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ ir vesela daļa skaitlim $\frac{k}{2}$ no apakšas.

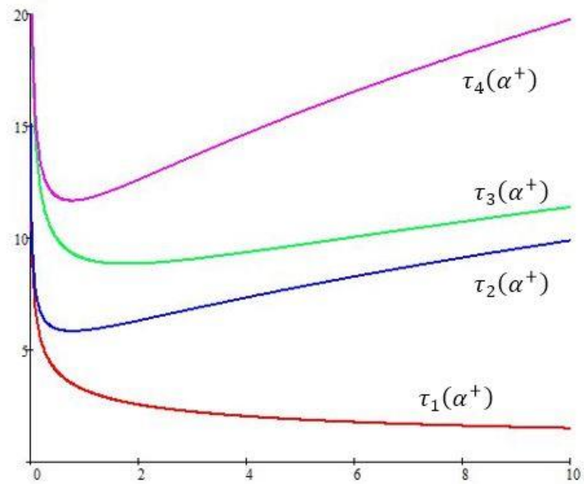
Tad iegūstam

$$\tau_1(\alpha^+) = \frac{3.209}{(\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$

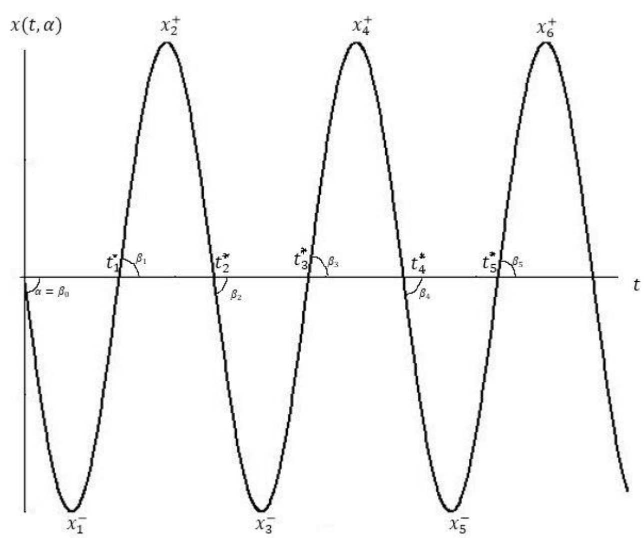
$$\tau_2(\alpha^+) = 2.652\sqrt{\alpha} + \frac{3.209}{(\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\tau_3(\alpha^+) = 2.652\sqrt{\alpha} + \frac{6.418}{(\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\tau_4(\alpha^+) = 5.304\sqrt{\alpha} + \frac{6.418}{(\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$



4.2. Gadījums kad $\alpha < 0$.



$x(t) > 0$, kad $t \in (t_{2i-1}^*, t_{2i}^*)$ un $x(t) < 0$, kad $t \in (t_{2i-2}^*, t_{2i-1}^*), i = 1,2,3, \ldots$

Apzīmēsim $\delta_{2i}^+ = t_{2i}^* - t_{2i-1}^*$ un $\delta_{2i-1}^- = t_{2i-1}^* - t_{2i-2}^*,\ i = 1,2,3, \ldots$, $x(t)$ intervālā $[t_{2i-2}^*, t_{2i-1}^*]$ ar $x_{2i-1}^-(t)$ un intervālā $[t_{2i-1}^*, t_{2i}^*]$ ar $x_{2i}^+(t)$.

Ņemot vērā atrisinājumu struktūras formulas

$$\delta_{2i-1}^{-}(\beta_{2i-2}) = \frac{\delta_{2i-1}^{-}}{\left(\frac{\beta_{2i-2}}{\alpha_0^{-}}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur $\beta_{2i-2} = x'_{2i-1}(t^*_{2i-2}) < 0$

$$\delta_{2i}^{+}(\beta_{2i-1}) = \frac{\delta_{2i}^{+}}{\left(\frac{\beta_{2i-1}}{\alpha_0^{+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur $\beta_{2i-1} = x'_{2i}(t^*_{2i-1}) > 0$

Pie tam $\tau_1^*(\alpha) = \delta_1^-(\beta_0)$. $\tau_2^*(\alpha) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1)$, pie tam $x'_1(t_1^*) = x'_2(t_1^*)$. $\tau_3^*(\alpha) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1) + \delta_3^-(\beta_2)$, pie tam $x'_2(t_2^*) = x'_3(t_2^*)$, utt…

$\boldsymbol{\tau_1^*(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\delta_1^-(\beta_0) = \frac{\delta_1^-}{\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur $\beta_0 = x'_1(t_0^*) = x'_1(0) = \alpha < 0$ un $\delta_1^- - const$ ir attālums no 0 līdz pirmajai saknei t_1^*, tātad

$$\boldsymbol{\tau_1^*(\alpha) = \frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_2^*(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\tau_2^*(\alpha) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1) \qquad \delta_1^-(\beta_0) = \frac{\boldsymbol{t_1^*}}{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)^{\frac{\boldsymbol{q-1}}{\boldsymbol{q+1}}}}$$

$$\delta_2^+(\beta_1) = \frac{\delta_2^+}{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}, \quad \text{kur } \beta_1 = x'_2(t_1^*) > 0$$

Ņemot vērā, ka $x'_1(t_1^*) = x'_2(t_1^*)$, mēs varam izteikt β_1 caur α. Atradīsim $x'_1(t_1^*)$, ņemot vērā struktūru.

$$x_1(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{2}{q+1}} \cdot x_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right)$$

Tad atvasinājums ir

$$x'_1(t,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot x'_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t, \alpha_0^-\right)$$

$$x'_1(t_1^*,\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot x'_1\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}} t_1^*, \alpha_0^-\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right) \cdot x'_1(\tau_1^*, \alpha_0^-) \Rightarrow \boldsymbol{\beta_1} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right) \cdot \boldsymbol{x'_1(\tau_1^*, \alpha_0^-) > 0}$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_1(\tau_1^*, \alpha_0^-) = \alpha_1 > 0\ (const)}$, iegūstam

$$\delta_2^+(\beta_1) = \frac{\delta_2^+}{\left(\frac{\beta_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} = \frac{\delta_2^+}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur δ_2^+ ir attālums no t_1^* līdz nākamajai saknei t_2^*, tātad

$$\boldsymbol{\tau_2(\alpha) = \frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{t_2^* - t_1^*}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_3^*(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\tau_3^*(\alpha) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1) + \delta_3^-(\beta_2)$$

$$\delta_1^-(\beta_0) = \frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} \qquad \delta_2^+(\beta_1) = \frac{t_2^*-t_1^*}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

$$\delta_3^-(\beta_2) = \frac{\delta_3^-}{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}, \qquad \text{kur } \beta_2 = x_3'(t_2^*) < 0$$

Ņemot vērā, ka $x_2'(t_2^*) = x_3'(t_2^*)$, mēs varam izteikt β_2 caur α.

Atradīsim $x_2'(t_2^*)$, ņemot vērā struktūru.

$$x'_2(t_2^*.\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_2\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}} t_2^*, \alpha_0^+\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot x'_2(\tau_2^*, \alpha_0^+) \Rightarrow \boldsymbol{\beta_2} = \left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right) \cdot \boldsymbol{x'_2(\tau_2^*, \alpha_0^+) < 0}$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_2(\tau_2^*, \alpha_0^-) = \alpha_2 < 0\ (const)}$, iegūstam

$$\delta_3^-(\beta_2)=\frac{\delta_3^-}{\left(\frac{\beta_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}=\frac{\delta_3^-}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

un tā ka mēs pieņemam, ka $\alpha<0$, bet funkcijai $x_2(t,\alpha)$, $\alpha>0$ tad, lai saglabātu zīmi, saucējā pirms α uzliksim mīnus zīmi, tad iegūstam

$$\delta_3^-(\beta_2)=\frac{\delta_3^-}{\left(-\frac{\beta_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}=\frac{\delta_3^-}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

kur δ_3^- ir attālums no t_2^* līdz nākamajai saknei t_3^*, tātad

$$\boldsymbol{\tau_3(\alpha)=\frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}+\frac{t_2^*-t_1^*}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}+\frac{t_3^*-t_2^*}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}}$$

$\boldsymbol{\tau_4^*(\alpha)}$ konstruēšana:

$$\tau_4^*(\alpha)=\delta_1^-(\beta_0)+\delta_2^+(\beta_1)+\delta_3^-(\beta_2)+\delta_4^+(\beta_3)$$

$$\delta_1^-(\beta_0)=\frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}\qquad \delta_2^+(\beta_1)=\frac{t_2^*-t_1^*}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_1}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}\qquad \delta_3^-(\beta_2)=\frac{t_3^*-t_2^*}{\left(\left(\frac{-\alpha}{\alpha_0^+}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

$$\delta_4^+(\beta_3)=\frac{\delta_4^+}{\left(\frac{\beta_3}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}},\qquad \text{kur } \beta_3=x_4'(t_3^*)>0$$

Ņemot vērā, ka $x_4'(t_3^*)=x_3'(t_3^*)$, mēs varam izteikt β_3 caur α.

Atradīsim $x_3'(t_3^*)$, ņemot vērā struktūru.

$$x'_3(t_3^*,\alpha)=\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\cdot x'_3\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}t_3^*,\alpha_0^-\right)=\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\cdot x'_3(\tau_3^*,\alpha_0^-)\Rightarrow \beta_3=\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\cdot x'_3(\tau_3^*,\alpha_0^-)>0$$

Ja apzīmēt $\boldsymbol{x'_3(\tau_3^*,\alpha_0^-)=\alpha_3>0\ (const)}$, iegūstam

$$\delta_4^+(\beta_3)=\frac{\delta_4^+}{\left(\frac{\beta_3}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}=\frac{\delta_4^+}{\left(\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)\frac{\alpha_3}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

kur δ_4^+ ir attālums no t_3^* līdz nākamajai saknei t_4^*, tātad

$$\boldsymbol{\tau_4(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{t_1^*}}{\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{\boldsymbol{t_2^* - t_1^*}}{\left(\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha_1}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} + \frac{\boldsymbol{t_3^* - t_2^*}}{\left(\left(\frac{\boldsymbol{-\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha_2}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{\boldsymbol{t_4^* - t_3^*}}{\left(\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha_0^-}}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha_3}}{\boldsymbol{\alpha_0^+}}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

Utt.

Piezīme. Ja atrisinājums $x(t,\alpha)$ ir periodisks, tad

$$\delta_1^- = \delta_{2k-1}^- = t_1^*, \qquad \delta_2^+ = \delta_{2k}^+ = t_2^* - t_1^*, \qquad k = 2, \dots N$$

$$\beta_{2k-2} = \beta_0 = -\alpha, \quad \beta_{2k-1} = \beta_1 = \alpha \quad k = 2, \dots, N$$

un

$$\delta_{2i-1}^-(\alpha) = \frac{t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}, \quad \delta_{2i}^+(\alpha) = \frac{t_2^* - t_1^*}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}} \quad \forall\, i \in N$$

Piemērs. Kā piemēru var apskatīt uzdevumu $(P1)$ $(\alpha < 0)$. Tā, ka uzdevumam $(P1)$ atrisinājums ir periodisks, tad var izmantot saīsinātās formulas

$$\tau_1(\alpha) = \delta_1^-(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}}$$

$$\tau_2(\alpha) = \delta_1^-(\alpha) + \delta_2^+(\alpha) = \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

$$\tau_3(\alpha) = \delta_1^-(\alpha) + \delta_2^+(\alpha) + \delta_3^-(\alpha) = 2\delta_1^-(\alpha) + \delta_2^+(\alpha) = \frac{2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

$$\tau_4(\alpha) = 2\delta_1^-(\alpha) + 2\delta_2^+(\alpha) = \frac{2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \frac{2t_2 - 2t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

…

$$\tau_k(\alpha) = \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \delta_1^-(\alpha) + \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor \delta_2^+(\alpha) = \left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil \frac{t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{q-1}{q+1}}} + \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor \frac{t_2 - t_1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha_0^-}\right)^{\frac{p-1}{p+1}}}$$

Kur $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ ir vesela daļa skaitlim $\frac{k}{2}$ no augšas, un $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor$ ir vesela daļa skaitlim $\frac{k}{2}$ no apakšas.

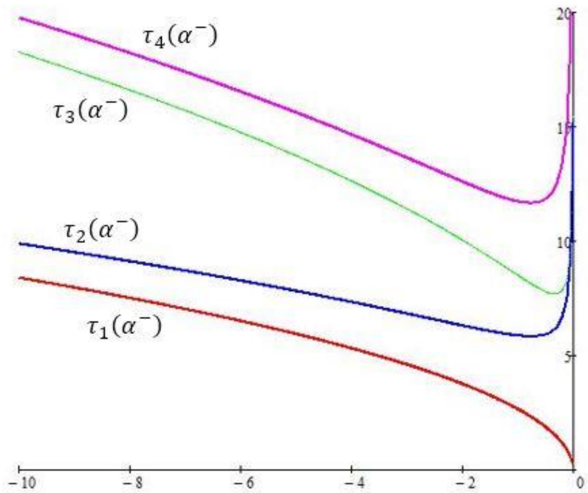
Tad iegūstam

$$\tau_1(\alpha^-) = 2.652\sqrt{-\alpha}$$

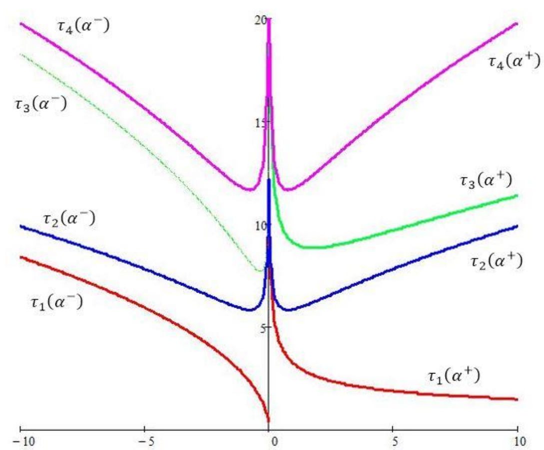
$$\tau_2(\alpha^-) = 2.652\sqrt{-\alpha} + \frac{3.209}{(-\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\tau_3(\alpha^-) = 5.304\sqrt{-\alpha} + \frac{3.209}{(-\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$

$$\tau_4(\alpha^-) = 5.304\sqrt{-\alpha} + \frac{6.418}{(-\alpha)^{\frac{1}{3}}}$$



Tādā veidā mēs varam aprakstīt τ_i, kā funkciju no α. Katra funkcija $\tau_i(\alpha)$ sastāv no diviem zariem. Pirmais zars definēts priekš $\alpha > 0$, un mēs apzīmēsim to ar $\tau_i(\alpha^+)$ un otrais zars definēts priekš $\alpha < 0$ un mēs apzīmēsim to ar $\tau_i(\alpha^-)$. Tādā veidā $\tau_1(\alpha^+) = \delta_1^+(\beta_0)$, $\tau_1(\alpha^-) = \delta_1^-(\beta_0)$, $\tau_2(\alpha^+) = \delta_1^+(\beta_0) + \delta_2^-(\beta_1)$, $\tau_2(\alpha^-) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1)$, $\tau_3(\alpha^+) = \delta_1^+(\beta_0) + \delta_2^-(\beta_1) + \delta_3^+(\beta_2)$, $\tau_3(\alpha^-) = \delta_1^-(\beta_0) + \delta_2^+(\beta_1) + \delta_3^-(\beta_2)$ un tā tālāk.



Tā, ka katram $i = 2,3,\ldots$ $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \tau_i(\alpha^+) = +\infty$, $\lim\limits_{\alpha\to +\infty} \tau_i(\alpha^+) = +\infty$, $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} \tau_i(\alpha^-) = +\infty$, $\lim\limits_{\alpha\to -\infty} \tau_i(\alpha^-) = +\infty$, zariem $\tau_i(\alpha^+)$ un $\tau_i(\alpha^-)$ ir minimumi ($i = 2,3,\ldots$). Apzīmēsim $\tau_i^+ = \min\limits_{(0,+\infty)} \tau_i(\alpha^+)$, $\tau_i^- = \min\limits_{(-\infty,0)} \tau_i(\alpha^-)$ un $\tau_i^* = \min\{\tau_i^+, \tau_i^-\}$, $i = 2,3,\ldots$

Katrs punkts krustojumā $\tau_i(\alpha)$ ar līniju $\tau = b$ dod atrisinājumu problēmai $(3.1.), (3.2.)$. Pieņemsim šis punkts pieder $\tau_m(\alpha)$ noteiktam m. Tad attiecīgam atrisinājumam ir tieši $(m-1)$ vienkāršu nuļļu intervālā $(0, b)$. Krustojumu skaits atbilst atrisinājumu skaitam sākuma problēmai. Tā ka zariem $\tau_i(\alpha^+)$ un $\tau_i(\alpha^-)$ ir minimumi, krustojumu skaits ir atkarīgs no vērtības b.

Teorēma. Pieņemsim ka nosacījums (b) ir spēkā. Ja $b \in (0, \tau_2^*)$, tad problēmai $(3.1.), (3.2.)$ ir divi netriviāli atrisinājumi. Pirmais atrisinājums eksistē priekš $\alpha > 0$ un ir pozitīvs, kad $t \in (0, b)$; otrs atrisinājums eksistē priekš $\alpha < 0$ un ir negatīvs, kad $t \in (0, b)$.

Pierādījums.

Tā, ka $b \in (0, \tau_2^*)$, tad līnija $\tau = b$ krusto zarus $\tau_1(\alpha^+)$ un $\tau_1(\alpha^-)$. Tādā veidā problēmai $(3.1.), (3.2.)$ ir divi netriviāli atrisinājumi. Pirmais atrisinājums eksistē priekš $\alpha > 0$ un ir pozitīvs, kad $t \in (0, b)$; otrs atrisinājums eksistē priekš $\alpha < 0$ un ir negatīvs, kad $t \in (0, b)$.

Teorēma. Pieņemsim ka nosacījums (b) ir spēkā. Ja $b \in (\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$, tad problēmai $(3.1.), (3.2.)$ ir vismaz $2i$ netriviāli atrisinājumi ($i = 2,3, ...$).

Pierādījums.

Tā, ka $b \in (\tau_i^*, \tau_{i+1}^*)$, tad līnija $\tau = b$ krusto zarus $\tau(\alpha^+)$, $\tau_1(\alpha^-)$, $\tau_2(\alpha)$ vismaz divreiz, $\tau_3(\alpha)$ vismaz divreiz,…, $\tau_i(\alpha)$ vismaz divreiz. Tādā veidā problēmai $(1), (2)$ ir vismaz $2i$ netriviāli atrisinājumi.

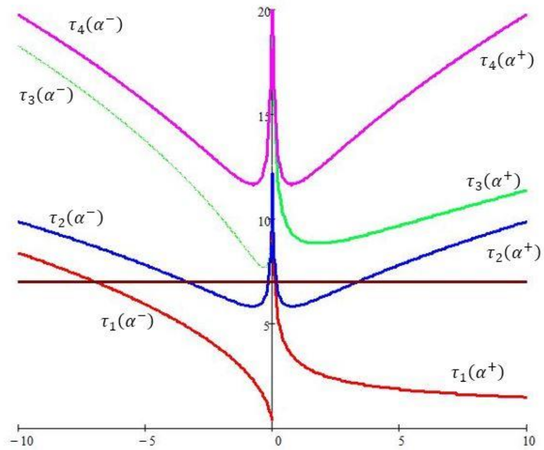
Teorēma. Pieņemsim ka nosacījums (b) ir spēkā. Ja $b = \tau_i^*$, tad problēmai $(3.1.), (3.2.)$ ir vismaz $2i - 1$ netriviāli atrisinājumi ($i = 2,3, ...$).

Pierādījums.

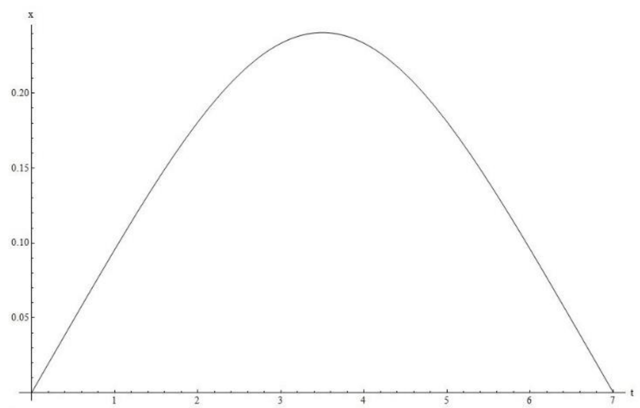
Tā, ka $b = \tau_i^*$, tad līnija $\tau = b$ krusto zarus $\tau_1(\alpha^+)$, $\tau_1(\alpha^-)$, $\tau_2(\alpha)$ vismaz divreiz, $\tau_3(\alpha)$ vismaz divreiz,…, un zaru $\tau_i(\alpha)$. Tādā veidā problēmai $(3.1.), (3.2.)$ ir vismaz $2i - 1$ netriviāli atrisinājumi.

Piemērs.

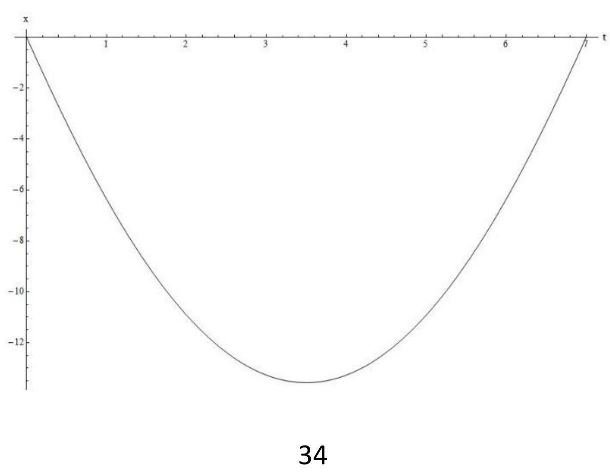
Apskatam uzdevumu $(P1)$ ar robežnosacījumiem $(3.2.)$, kur $b = 7$. Izmantosim jau iepriekš konstruētas $\tau_i(\alpha)$ līknes un pievienosim vēl taisni $b = 7$:



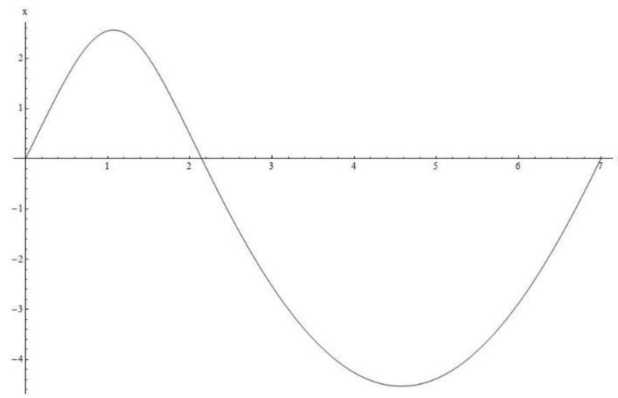
No attēla redzams, ka taisne $b = 7$ krusto līknes $\tau_i(\alpha)$ sešas reizes, t.i. $\tau_1(\alpha^+), \tau_1(\alpha^-)$, divreiz $\tau_2(\alpha^+)$ un divreiz $\tau_2(\alpha^-)$, tātad dotajai robežproblēmai ir seši netriviālie atrisinājumi. Pirmajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_1(\alpha^+)$ dod $\alpha = 0.09634186102$, intervālā $(0; 7)$ vienkāršu nuļļu nav:



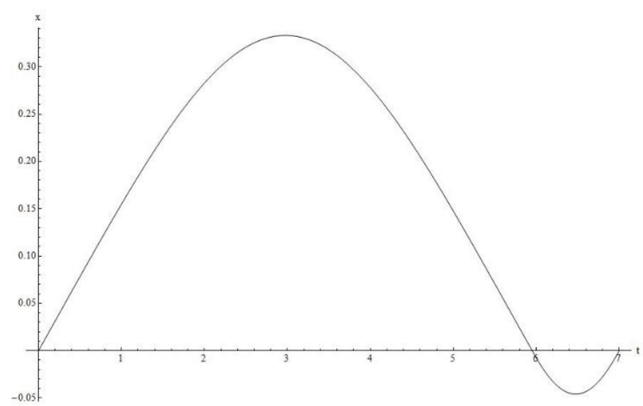
Otrajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_1(\alpha^-)$ dod $\alpha = -6.967051817$, intervālā $(0; 7)$ vienkāršu nuļļu nav:



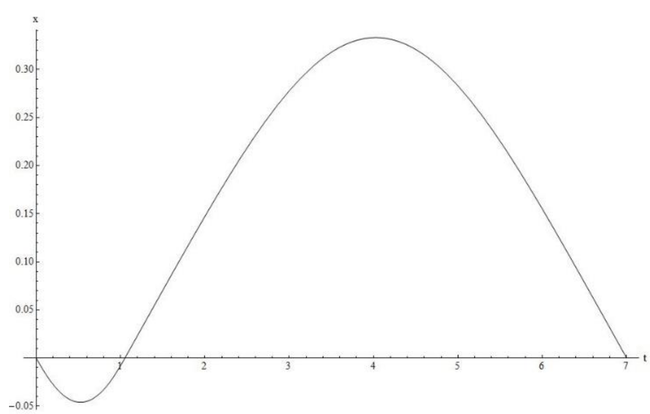
Trešajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_2(\alpha^+)$ dod $\alpha \approx 3.352741734$, intervālā $(0; 7)$ ir viena vienkārša nulle:



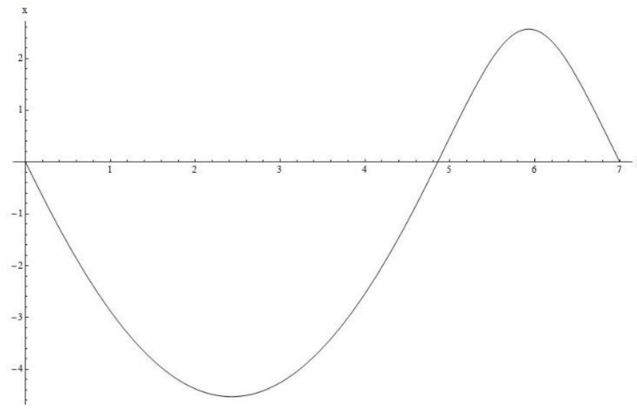
Ceturtajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_2(\alpha^+)$ dod $\alpha \approx 0.1569191376$, intervālā $(0; 7)$ ir viena vienkārša nulle:



Piektajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_2(\alpha^-)$ dod $\alpha \approx -0.1569191376$, intervālā $(0; 7)$ ir viena vienkārša nulle:



Sestajam atrisinājumam, krustojums $b = 7$ ar $\tau_2(\alpha^-)$ dod $\alpha \approx -3.352741734$, intervālā $(0; 7)$ ir viena vienkārša nulle:



Atrisinājumu programmas kods ir pielikumā.

Secinājumi.

Bakalaura darbā tika izpētītas 2. kārtas divpunktu robežproblēmas ar asimetrisku nelineāritāti vienādojumā. Iegūti rezultāti, ka ja izpildās nosacījumi (a) un (b), tad Košī problēmas $(3.1.), (3.3.)$ atrisinājumam $x(t, \alpha)$ ir bezgalīgi daudz vienkāršu nuļļu intervālā $(0, +\infty)$. Visām robežproblēmam $(3), (4)$, jebkādam p un q $(p > 1$ un $0 < q < 1)$ vērtībām, atrisinājums ir periodisks, no ka seko, ka atrisinājums ir oscilējošs.

Funkcija τ_1 ir atkarīga no α. Pie tam, ņemot vērā, ka $p > 1$, $\tau_1(\alpha)$ ir dilstoša funkcija un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz 0^+, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz bezgalību, un ja α nepārtraukti un monotoni tiecas uz $+\infty$, tad punkts $t = \tau_1$ nepārtraukti un monotoni tiecas uz nulli.

$x_1'(\tau_1, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0^+}\right) \cdot \alpha_1 < 0$ ir funkcija no α $(\alpha > 0)$ ir dilstoša, pie tam $\lim_{\alpha \to 0^+} x_1{}'(\tau_1, \alpha) = 0$ un $\lim_{\alpha \to +\infty} x_1{}'(\tau_1, \alpha) = -\infty$.

Katrs punkts krustojumā $\tau_m(\alpha)$ ar līniju $\tau = b$ dod atrisinājumu problēmai $(3.1.), (3.2.)$, un attiecīgam atrisinājumam ir tieši $(m - 1)$ vienkāršu nuļļu intervālā $(0, b)$. Krustojumu skaits atbilst atrisinājumu skaitam sākuma problēmai.

Formulētas un pierādītas dažas teorēmas par atrisinājuma skaitu atkarība no intervāla garuma.

Izmantota literatūra.

1. Полак Л.С., Уильям Гамильтон, М., *«Наука»*, 1993 г., с. 88-90.
2. Гельфанд И.М., Фомин С.В. «*Вариационное исчисление*» 1961 г
3. Dennis G. Zill: «*A first course in differrential equations with modeling applications*».
4. A.C.Lazer, P.J.McKenna: «*Large amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis*».
5. Р.Р.Ахмеров, Б.Н.Садовский: «*Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*».
6. Shair Ahmad, Antonio Ambrosetti: «*A textbook on ordinary differential equations*».
7. Р.Рейссиг, Г.Сансоне, Р.Конти: «*Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений*».
8. J.Cepītis: «*Parasto diferenciālvienādojumu nelineāras robežproblēmas*».
9. Д.Эрроусмит, К.Плейс: «*Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями*».
10. Sergejs Smirnovs: «*On the third order boundary value problems with asymmetric nonlinearity*».
11. Ravi P. Agarwal: «*Oscialtion theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations*».

Pielikums.

Programmas kods atrisinājuma $x(t, \alpha)$ meklēšanai Košī palīgproblēmai (3.1), (3.3):

```
f1[y_]= Sign[y]Abs[y]^(1/3);
f2[y_]=y^2;
f[y_]:=Which[y<0,f1[y],0≤y,f2[y],True,0];
Plot[f[y],{y,-3,3}]

vars={x[t]}
eqns={x''[t]==-f[x[t]]};
inits1={x[0]==0,x'[0]==alpha};
sol=vars/.NDSolve[Join[eqns,inits1],vars,{t,0,10}];

{x[t]}

Plot[{Evaluate[{sol}]},{t,0,10},AxesLabel
        → {Style["t",16],Style["x",16]},PlotStyle → {Black},TicksStyle
        → Directive[Black,14]]
```

Dokumentārā lapa

Bakalaura darbs „Otrās kārtas parasto diferenciālvienādojumu divpunktu robežproblēmas ar asimetriskām nelinearitātēm" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: *(personiskais paraksts)* Valērijs Mihailovs

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: docents. Sergejs Smirnovs (*paraksts 20.05.2017.)*

Recenzents: Asoc. Prof., Jānis Cepītis

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2017.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

14. 06.2017. prot. Nr._____

Komisijas sekretāre: docente Margarita Buiķe