

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ ЛАТВИЙСКОЙ ССР

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. ПЕТРА СТУЧКИ

РИГА 1976 г.

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Републикативный центр

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Республиканский межвузовский сборник
научных трудов



Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1976

Большая часть работ предлагаемого сборника посвящена теории дифференциальных уравнений и их приложениям. Кроме того, в сборник включены статьи по теории разностных уравнений. Авторами работ являются аспиранты и научные сотрудники.

Сборник рассчитан на научных работников, интересующихся теорией и приложениями дифференциальных уравнений.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П. Стучки от 27 июня 1976 года

© Латвийский государственный университет им. П. Стучки, 1976

И 20204-50у 76
М 812(II)-76

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕ-
РЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.А. Беспалова

Вычислительный центр ЦИ. им. П. Стучки

Рассмотрим краевую задачу

$$x''' = f(t, x, x', x'') \quad , \quad t \in I = [-1, +1] \quad (1)$$

$$x(-1) = x_1, \quad x(0) = x_2, \quad x(1) = x_3, \quad (2)$$

где $x_i \in R, i = 1, 2, 3, f(t, x, x', x'') \in C(I \times R^3)$.

Обозначим $I_- = [-1, 0]$ и $I_+ = [0, 1]$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(t, x, x', x'')$ непрерывная для $(t, x, x', x'') \in (I \times R^3)$ и выполняются следующие условия:

(A) для $t \in I_+$ и $\forall (x', x'') \in R^2$

$$\left. \begin{aligned} f(t, x, x', x'') &\geq -\beta(t) - a(t)x, \quad x \geq 0 \\ f(t, x, x', x'') &\leq \beta(t) - a(t)x, \quad x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

для $t \in I_-$ и $\forall (x', x'') \in R^2$

$$\left. \begin{aligned} f(t, x, x', x'') &\leq \beta(t) + a(t)x, \quad x \geq 0 \\ f(t, x, x', x'') &\geq -\beta(t) + a(t)x, \quad x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $a(t), \beta(t), a(-t), \beta(-t) \in C(I)$ и, кроме того, $a(t), \beta(t) \geq 0$. Предположим, что $a(t)$ удовлетворяет условию

$$(a) \quad \max(A_1, A_2) = q < 1,$$

$$\text{где } A_i = \max_{t \in I_i} \int_0^1 \psi_i(t, s) \left(\int_0^1 2\alpha(-t)z \, dz \right) ds, \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

при этом $U, (t, s) \geq 0$ есть функция Грина задачи $u'' = 0, u(0) = u(1) = 0$

$$U, (t, s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \leq s \leq t \\ t(1-s), & t \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (6)$$

(B) Пусть для любого $M \geq 0$ существуют постоянные $K, \epsilon > 0$ такие, что

$$|f(t, x, x', x'')| \leq K(1 + |x'|^3 + |x''|^3)^{1-\epsilon} \quad (7)$$

(B₀) Для любого $M_0 \geq 0$ в достаточно малой окрестности точки $t=0$ существуют постоянные $K_0, \epsilon > 0$ такие, что

$$|f(t, x, x', x'')| \leq K_0 [1 + |x'|^{v_1} \varphi_1(|t| |x'|^{n_1}) + |x''|^{v_2} \varphi_2(|t| |x''|^{n_2})] \quad (8)$$

для $|x| \leq M_0, \forall (x', x'') \in R^2$.

где $v_i = \frac{4+\epsilon}{1+\epsilon+1}, i = 1, 2, \varphi_i(s)$ — непрерывные убывающие функции и $\varphi_i(0) = 1$.

Тогда решение задачи (I); (2) существует для любых $x_i, i = 1, 2, 3$.

п. I. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА I. Пусть $\alpha(t)$ удовлетворяет условию (а) теоремы I. Тогда решение $u, (t_0, t)$ задачи Коши

$$u''' = -\alpha(t) u \quad (9)$$

$$u(t_0) = 0, u'(t_0) = 1, u''(t_0) = 0 \quad (10)$$

для $\forall t_0 \in [0, 1)$ положительно для $\forall t \in (t_0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ I. Допустим противное, т.е. что существует значение $t = t_0 \in (t_0, 1]$, для которого $u, (t_0, t) = 0$, так что $u, (t_0, t) > 0, \forall t \in (t_0, t_0)$. Подставив это решение в уравнение (9) и проинтегрировав его от t_0 по $t \geq t_0$, получаем

$$u_1'' = - \int_{t_0}^t a(s) u_1(t_0, s) ds, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (II)$$

Для уравнения (II) рассмотрим краевую задачу

$$u_1(t_0, t_0) = u_1(t_0, t_1) = 0. \quad (I2)$$

Представим решение задачи (II), (I2) в виде

$$\begin{aligned} u_1(t_0, t) &= \int_{t_0}^t y(t, s) \int_{t_0}^s a(z) u_1(t_0, z) dz ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t y_0(t, s) 2 \int_{t_0}^s a(z) u_1(t_0, z) dz ds, \quad t \in [t_0, t_1], \end{aligned} \quad (I3)$$

где $y_0(t, s) \geq 0$ есть функция Грина задачи

$$u'' = 0, \quad u(t_0) = u(t_1) = 0$$

$$y_0(t, s) = \begin{cases} \frac{(s-t_0)(t_1-t)}{t_1-t_0}, & t_0 \leq t \leq s \\ \frac{(t_1-s)(t-t_0)}{t_1-t_0}, & s \leq t \leq t_1. \end{cases} \quad (I4)$$

Из (6), (I2) следует, что

$$y_0(t, s) \leq y_1(t, s), \quad t_0 \leq s, t \leq t_1. \quad (I5)$$

Обозначим $\max_{t \in [t_0, t_1]} u_1(t_0, t) = u_1(t_0, t^*) = u_1^* > 0, \quad t^* \in (t_0, t_1).$

Из (I3) следует, что

$$u_1^* \leq u_1^* \max_{t \in [t_0, t_1]} \left(\int_{t_0}^t y_0(t, s) 2 \int_{t_0}^s a(z) dz ds \right)$$

или, с учетом того, что выполнено условие (a) теоремы I, и (I5), $1 \leq q$.

Полученное противоречие доказывает лемму I.

ЛЕММА 2. Пусть $q(t)$ удовлетворяет условию (а) теоремы I. Тогда решение $u_2(t_0, t)$ задачи Коши для уравнения (9) с начальными условиями

$$u(t_0) = u'(t_0) = 0, u''(t_0) = 1 \quad (16)$$

для $\forall t_0 \in [0, 1)$ положительно для $\forall t \in (t_0, 1)$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы I.

ЛЕММА 3. Пусть $q(t)$ удовлетворяет условию (а) теоремы I для $t \in I$, и $x(t)$ есть решение задачи

$$x''' = -q(t)x - \beta(t) + \alpha(t), \quad t \in I, \quad (17)$$

$$x(0) = H_0, \quad x'(0) = T, \quad x''(0) = 0,$$

где $H_0 \in R$, $\alpha(t) \geq 0$, $\alpha \in C(I)$.

Тогда при достаточно больших T будут справедливы неравенства

$$x(t) \geq H_0, \quad \forall t \in I, \quad x(1) \geq H_0 + T\rho, \quad (18)$$

где $\rho > 0$ и не зависит от T и $\alpha(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Обозначим через $x_0(t)$ решение задачи

$$x'' = -q(t)x - \beta(t) \quad (19)$$

$$x(0) = H_0, \quad x'(0) = x''(0) = 0$$

и через $A(t)$ - решение задачи

$$x'' = -q(t)x + \alpha(t) \quad (20)$$

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

Легко проверить, что $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \int_0^t \begin{vmatrix} v_0(s) & v_1(s) & v_2(s) \\ v_0(s) & v_1(s) & v_2(s) \\ v_0'(s) & v_1'(s) & v_2'(s) \end{vmatrix} \frac{\alpha(s)}{w(s)} ds \quad (21)$$

$0 \leq s \leq t \leq 1$

где $v_k^{(i)}$, $k=0,1,2$ — есть частные линейно независимые решения уравнения $x''' = -\alpha(t)x$, $t \in I_+$, определенные начальными условиями

$$v_i^{(j)}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 0, 1, 2, \quad (22)$$

а $W(s)$ — их определитель Вронского. Из (19), (22) следует, что $W(t) \equiv 1$, $\forall t \in I_+$. Кроме того, $A(t) \geq 0$. Из (21) видно, что для этого нам достаточно показать, что

$$\bar{x}(t) = \begin{vmatrix} x_0(t) & x_1(t) & x_2(t) \\ x_0(s) & x_1(s) & x_2(s) \\ x_0'(s) & x_1'(s) & x_2'(s) \end{vmatrix} \geq 0, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

Пусть $s = s_* \in I_+$. Тогда $\bar{x}(s_*) = \bar{x}'(s_*) = 0$, $\bar{x}''(s_*) = 1$ и по лемме 2 получаем, что $\bar{x}(t) \geq 0$ для $t \geq s_*$ и для $\forall s_* \in I_+$, как решение задачи Коши

$$\bar{x}'' = -\alpha(t)\bar{x}, \quad \bar{x}(s_*) = \bar{x}'(s_*) = 0, \quad \bar{x}''(s_*) = 1, \quad s_* \leq t \leq 1.$$

Теперь решение задачи (17) можно записать в виде

$$x(t) = x_0(t) + \Gamma u_1(0, t) + A(t) \geq H_0 + \Gamma [u_1(0, t) + \frac{x_0(t) - H_0}{\Gamma}], \quad (23)$$

где $u_1(0, t)$ — решение задачи (9), (10).

Из (23) при $t=1$ и достаточно больших Γ получаем

$$x(1) \geq H_0 + \Gamma \frac{1}{2} u_1(0, 1), \quad (24)$$

откуда следует, что в качестве $\rho > 0$ можно зять число $\frac{1}{2} u_1(0, 1)$. Из (23) следует также, что $x(t) \geq H_0$,

$\forall t \in I_+$. В самом деле, т.к. $u_1'(0, 0) > 0$, а $x_0(0) = H_0$, $x_0'(0) = x_0''(0) = 0$, то при достаточно большом Γ выражение в квадратной скобке в равенстве (23) будет неотрицательным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждение леммы 3 имеет место, если в задаче (I7) вместо $\alpha(t)$ поставить $\alpha(-t)$, $t \in I$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если вместо задачи (I7) рассмотреть задачу

$$\begin{aligned} x'' &= -\alpha(t)x - \beta(t) + \alpha(t), \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq 1 \\ x(t_0) &= H_0, \quad x'(t_0) = \Gamma, \quad x''(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $H_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in [0, 1)$, $\alpha(t) \in C(I)$, $\alpha(t) \geq 0$,

то утверждение леммы 3 будет иметь место и для этой задачи, если только $t_0 > 0$ достаточно мало. Это прямо следует из непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных, [1]. Можно выбрать t_0 таким, например, что

$$u_1(t_0, 1) > \frac{u_1(0, 1)}{2}, \quad u_2(t_0, 1) > \frac{u_2(0, 1)}{2}. \quad \text{После чего,}$$

взяв Γ достаточно большим, можем получить величину в квадратной скобке в (23) при $t=1$ равной $\frac{1}{2}u_1(0, 1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Аналогичное утверждение можно сформулировать для решения $x(t)$ задачи

$$x(t_0) = H_0, \quad x'(t_0) = 0, \quad x''(t_0) = \Gamma.$$

п.2. В дальнейшем нам понадобится функция $\varphi(t)$ $t \geq 0$, которую мы определим как решение задачи

$$\begin{aligned} u'' &= m(u_1' \varphi_1(u_1 |u_1|^{1/2}) + u_1' \varphi_2(u_1 |u_1|^{1/2})), \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = \alpha, \quad u''(0) = \beta, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\varphi_i(s)$, ν_i , $i=1, 2$, — те же, что и в теореме I, $m > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Это решение $\varphi(t)$ существует на некотором интервале $[0, t^*]$, где $t^* > 0$.

Для малых t по формуле Тейлора имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha t + \beta \frac{t^2}{2!} + \varphi'''(t_0) \cdot \frac{t^3}{3!} \\ \varphi'(t) &= \alpha + \beta t + \varphi'''(t_1) \cdot \frac{t^2}{2!} \\ \varphi''(t) &= \beta + \varphi'''(t_2) \cdot t \end{aligned} \right\} 0 < t_j < t \leq t'' \quad (28) \\ j=0,1,2.$$

Так как $\varphi_i(s)$ — непрерывные неубывающие функции, то взяв t'' достаточно малым, чтобы $\varphi_\kappa(|t| \cdot |u^{(\kappa)}(t)|) \leq 2$ для $0 \leq t \leq t''$, $\kappa = 1, 2$, тогда $\varphi'''(t_j) \leq 2m$, $j = 0, 1, 2$ и из (28) для $0 \leq t \leq t''$ получаем неравенства

$$\left. \begin{aligned} \varphi(t) &\leq \alpha t + \beta \frac{t^2}{2} + m \frac{t^3}{3} \\ \varphi'(t) &\leq \alpha + \beta t + m t^2 \\ \varphi''(t) &\leq \beta + 2m t \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq t'' \quad (29)$$

При этом важно отметить, что m в неравенствах (29) не зависит от α и β .

ЛЕММА 4. Решение $u(t)$ задачи

$$\begin{aligned} u'' &= m(|u'|)^{\nu_1} \varphi_1(|t| \cdot |u'|^{\frac{1}{1-\nu_1}}) + |u'|^{\nu_2} \varphi_2(|t| \cdot |u'|^{\frac{1}{1-\nu_2}}) \\ u(0) &= -H_0; u'(0) = T^{\frac{1}{\nu_1}} \alpha, u''(0) = T^{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \beta, H_0 \geq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $T \geq 0$ определяется равенством

$$(u'(0))^{\nu_1} + (u''(0))^{\nu_2} = T(\alpha^{\nu_1} + \beta^{\nu_2}) = T$$

имеет вид

$$u(t) = -H_0 + A\varphi(Bt), \quad (31)$$

где $A = T^{\frac{1}{2}}$, $B = T^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$, так что $AB = T^{\frac{1}{2}}$.
 $AB^2 = T^{\frac{1}{2}}$ и $(AB)^2 = (AB^2)^2 = T$, а $\varphi(s)$ - решение задачи (26). Лемма 4 доказывается прямыми вычислениями, которые мы опускаем.

ЛЕММА 5. Пусть имеет место (27). Тогда

$$\min_{0 \leq \beta \leq 2mz_0} (\alpha + \beta z_0) > \frac{1}{2}, \text{ если } 2mz_0 \leq \frac{1}{2}, z_0 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Обозначим $\alpha + \beta z_0 = v$.

Из (27) имеем

$$v = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{4}} + \beta z_0. \quad (32)$$

Из (32) следует, что $v(0) = 1$, $v(1) = z_0$, $v'(0) = z_0 > 0$ и $v'' < 0$ для $\forall \beta \in [0, 1]$. Таким образом, график функции v лежит целиком над прямой ℓ , соединяющей концы кривой v . Заметим, что для $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ и $\forall z_0 > 0$ ордината прямой ℓ больше $\frac{1}{2}$, а это значит, что $v > \frac{1}{2}$, если $0 \leq \beta \leq 2mz_0 \leq \frac{1}{2}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть функция $f(t, x, x', x'')$ удовлетворяет условиям (A), (a) и (B₀) теоремы I. Тогда для любого решения $x(t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка

$$|x'(0)| + |x''(0)| < C_0, \quad (33)$$

где $C_0 > 0$ зависит от f , x_1 , x_2 , x_3 и не зависит от выбранного решения задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Пусть $x(t)$ - какое-либо решение задачи (1), (2). В силу (3), (4), не уменьшая общности, можем считать, что $x'(0) \geq 0$, $x''(0) \geq 0$. При этом относительно $x(0)$ возможны два случая: 1) $x(0) = x_1 \geq 0$, 2) $x(0) = x_2 < 0$. Для $x(0) \geq 0$, $x'(0) \geq 0$, $x''(0) \geq 0$ справедливость леммы 6, очевидно, следует из леммы 3. Будем доказывать лемму 6 для $x(0) < 0$, $x'(0) \geq 0$, $x''(0) \geq 0$. (Остальные случаи сводятся к рассматриваемому заменами t на $-t$ и x на $-x$. При замене t на $-t$ на I_+ необходимо рассматривать функцию $q(-t)$ вместо $q(t)$), Можем

также считать, что $x'(0) + x''(0) > 0$. Для удобства дальнейших вычислений запишем $x'(0)$, $x''(0)$ в виде

$$x'(0) = T^{\frac{1}{2}} \alpha, \quad x''(0) = T^{\frac{1}{2}} \beta, \quad (34)$$

где α, β - те же, что и в теореме I, а $\alpha > 0, \beta > 0$ удовлетворяют соотношению (27). $T > 0$ определяется равенством

$$(x'(0))^{\nu_1} + (x''(0))^{\nu_2} = T. \quad (35)$$

Будем считать, что $T > 1$.

Нам необходимо показать, что T не может принимать сколь угодно больших значений. Обозначим $H = |x_2|$ и возьмем в условии (B_0) $M_0 = H$. Пусть $x(t)$ - решение задачи (I), (2), для которого

$$|x'(0)|^{\nu_1} \varphi_1(0) + |x''(0)|^{\nu_2} \varphi_2(0) > 1.$$

Тогда для тех $t \geq 0$, для которых величина

$$S(t) = |x'(t)|^{\nu_1} \varphi_1(t + |x'(t)|^{\frac{1}{\nu_1}}) + |x''(t)|^{\nu_2} \varphi_2(t + |x''(t)|^{\frac{1}{\nu_2}}) \geq 1,$$

можно сделать следующие преобразования

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{f}{S(t)} (|x'(t)|^{\nu_1} \varphi_1(t + |x'(t)|^{\frac{1}{\nu_1}}) + |x''(t)|^{\nu_2} \varphi_2(t + |x''(t)|^{\frac{1}{\nu_2}})) \equiv \\ &\equiv a_0(t) (|x'(t)|^{\nu_1} \varphi_1(t + |x'(t)|^{\frac{1}{\nu_1}}) + |x''(t)|^{\nu_2} \varphi_2(t + |x''(t)|^{\frac{1}{\nu_2}})). \end{aligned} \quad (36)$$

Для функции $a_0(t)$ из условия (B_0) получаем следующую оценку

$$|a_0(t)| = \frac{|f|}{S(t)} \leq \frac{K_0(1+S(t))}{S(t)} \leq 2K_0. \quad (37)$$

Заметим, что $a_0(t)$ есть непрерывная функция, зависящая от выбранного решения $x(t)$ задачи (I), (2), но удовлетворяющая оценке (37) для тех $0 \leq t \leq \bar{t}$, для которых $S(t) \geq 1$ и $|x(t)| \leq H$. Для дальнейших рассуждений мы ограничимся значениями $x(t)$ $x_2 \leq x(t) \leq 0$.

Пусть $u(t)$ есть функция, найденная в лемме 4 с T , α , β , определенными равенствами (34), (35) и с $m = 2k_0$. Очевидно, что для $0 \leq t \leq \bar{t}$ будем иметь

$$x''(t) \geq -u''(t). \quad (38)$$

Покажем, что если существует $x(t)$, для которого $T > 1$ может принимать сколь угодно большое значение, то решение $x(t)$ выйдет из прямоугольника, определяемого прямыми $t = 0$, $t = 1$, $x = 0$, $x = -H$ через прямую $x = 0$ при некотором $t = \bar{t} < 1$ и с достаточно большим значением $x'(\bar{t})$, либо $x''(\bar{t})$, а в таком случае из замечания 2 леммы 3 будет следовать, что $x(1) > |x_0|$.

Полученное противоречие и будет доказывать лемму 6. Трижды интегрируя неравенство (38) с начальными условиями

$$x(0) = u(0) = -H, \quad x'(0) = u'(0) = T^{\frac{1}{2}} \alpha, \quad x''(0) = u''(0) = T^{\frac{1}{2}} \beta, \quad (39)$$

от $t = 0$ до $t \geq 0$, получим следующие неравенства

$$x^*(t) \geq 2\beta T^{\frac{1}{2}} - u''(t)$$

$$x'(t) \geq 2\alpha T^{\frac{1}{2}} + 2\beta T^{\frac{1}{2}} - u'(t) \quad (40)$$

$$x(t) \geq -2H + 2\alpha t T^{\frac{1}{2}} + \beta t^2 T^{\frac{1}{2}} - u(t)$$

Из леммы 4 имеем

$$u(t) = -H + A\varphi(Bt) = -H + T^{\frac{1}{2}} \varphi(Bt)$$

$$u'(t) = AB\varphi'(Bt) = T^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi'(Bt)$$

$$u''(t) = AB^2\varphi''(Bt) = T^{\frac{1}{2}} \cdot \varphi''(Bt).$$

Подставив эти выражения в (40) получаем

$$\begin{aligned} x''(t) &\geq T^{\frac{1}{2}} (2\beta - \varphi''(Bt)) \\ x'(t) &\geq T^{\frac{1}{2}} 2\beta t + T^{\frac{1}{2}} (2\alpha - \varphi'(Bt)) \\ x(t) &\geq -H + 2\alpha t T^{\frac{1}{2}} + \beta t^2 T^{\frac{1}{2}} - T^{\frac{1}{2}} \varphi_2(Bt). \end{aligned} \quad (41)$$

Обозначим теперь $Bt = z$ и будем считать z настолько малым, что $0 \leq t \leq \min(t^*, \bar{T})$, и, кроме того, $2mz < \frac{1}{2}$ для $0 \leq z \leq z_0$.

Используя неравенства (29), (41) найдем, что

$$x''\left(\frac{z}{B}\right) \geq (\beta - 2mz) T^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$x'\left(\frac{z}{B}\right) \geq (\alpha + \beta z - mz^2) T^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

$$x\left(\frac{z}{B}\right) \geq -H + (\alpha + \beta z - mz^2) \frac{z}{2} T^{\frac{1}{2}}, \quad 0 \leq z \leq z_0. \quad (44)$$

Пусть $z = z_0$. Тогда из (44) можно определить такое значение $T = T_0$, что, если положить

$$x(0) = -H, \quad x'(0) = T_0^{\frac{1}{2}} \alpha, \quad x''(0) = T_0^{\frac{1}{2}} \beta. \quad (45)$$

то $x\left(\frac{z_0}{B}\right) \geq 0$, а именно

$$T_0 = \frac{(2H)^{1/2}}{z_0^{1/2} (\alpha + \beta z_0 - m z_0^2)^{1/2}}. \quad (46)$$

Покажем, что T_0 не может быть очень большим. Очевидно, что существует $0 < z_* \leq z_0$, при котором решение $x(t)$ определенное начальными условиями (45), обращается в нуль, т.е.

$$x(t_*) = 0, \quad t_* = \frac{z_*}{B}. \quad (47)$$

При этом

$$x'(t_*) \geq (\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}}. \quad (48)$$

$$x''(t_*) \geq (\beta - 2m z_*) T_0^{\frac{1}{2}}. \quad (49)$$

Если теперь обозначить через $x(t_*, 1)$ значение решения задачи

$$x''' = -a(t)x - b(t) + d(t)$$

$$x(t_*) = 0, \quad x'(t_*) = (\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}},$$

$$x''(t_*) = (\beta - 2m z_*) T_0^{\frac{1}{2}}$$

при $t = 1$, то

$$x(t_*, 1) \geq u_1(t_*, 1)(\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}} + u_2(t_*, 1)(\beta - 2m z_*) T_0^{\frac{1}{2}}. \quad (50)$$

Пусть теперь $\beta - 2m z_* \geq 0$. Тогда $\alpha + \beta z_* - m z_*^2 \geq \alpha + m z_*^2 \geq 0$. Очевидно, что либо

$$\beta - 2m z_* \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{либо} \quad \alpha + m z_*^2 \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (51)$$

В этом случае из (50) следует, что взяв достаточно большое T_0 , будем иметь $x(t_*, 1) > |x_1|$.

Из (46) видно, что T_0 возрастает с уменьшением z_0 . При этом $z_* \leq z_0$. Следовательно, взяв достаточно малое z_0 , получим значение T_0 , при котором будет иметь место $x(1) > |x_1|$, и для z_* , соответствующего выбранному нами z_0 , будут заведомо выполняться неравенства (51).

Рассмотрим теперь случай $\beta - 2m z_* < 0$. Тогда, учитывая лемму 5, имеем

$$\begin{aligned} x(t_*, 1) &\geq u_1(t_*, 1)(\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}} + u_2(t_*, 1)(\beta - 2m z_*) T_0^{\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq u_1(t_*, 1)(\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}} - 2m z_* u_2(t_*, 1) T_0^{\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq u_1(t_*, 1)(\alpha + \beta z_* - m z_*^2) T_0^{\frac{1}{4}} - 2m z_0 u_2(t_*, 1) T_0^{\frac{1}{2}} \geq \end{aligned} \quad (52)$$

$$\geq C_1 T_0^{\frac{1}{4}} - C_2 z_0^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} T_0^{\frac{1}{4}} = T_0^{\frac{1}{4}} (C_1 - C_2 z_0^{\frac{\sigma}{1+\sigma}}),$$

где $C_1 = \frac{1}{2} \bar{u}_1$, $C_2 = H^{\frac{1}{1+\sigma}} \cdot 2^{\frac{1+\sigma}{2}} m \bar{u}_2$,

а $\bar{u}_1 = \min_{t_* \in [0, t_*]} u_1(t_*, t)$, $\bar{u}_2 = \max_{t_* \in [0, t_*]} u_2(t_*, t)$.

(В силу лемм 1, 2 $\bar{u}_1, \bar{u}_2 > 0$.)

Очевидно, при достаточно малом z_0 $C_1 - C_2 z_0^{\frac{\sigma}{1+\sigma}} \geq \frac{C_1}{2}$,

т.е. $x(t_*, t) \geq T_0^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{C_1}{2}$. Т.о., при предположении, что T_0 может принимать сколь угодно большие значения, получаем опять, что $x(t_*, t) > |x_2|$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $\sigma=0$ из (52) следует, что

$$x(t_*, t) \geq T_0^{\frac{1}{4}} C_3,$$

где $C_3 = C_1 - C_2$ может быть как положительной так и отрицательной величины, в зависимости от соотношения C_1 и C_2 . Таким образом, лемма 6 справедлива при $\sigma > 0$ в условии (B_0) теоремы 1.

ЛЕММА 7. Пусть функция $f(t, x, x', x'')$ удовлетворяет условиям (A), (a), (B_0) теоремы 1. Тогда существует число $N \geq 0$, зависящее от $\alpha_i, i=1, 2, 3, f$ и условия $(A)_0$ такое, что

$$|x(t)| \leq N, \quad t \in I, \quad (53)$$

где $x(t)$ - любое решение задачи (1), (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7. Докажем справедливость леммы для $t \in I_+$. Из условия (A) следует, что для $t \in I_+, x > 0$ уравнение (1) может быть записано как

$$x'' = -\beta(t) - \alpha(t)x + \alpha(t), \quad (54)$$

а для $t \in I_+, x \leq 0$ как

$$x'' = \beta(t) - \alpha(t)x - d(t), \quad (55)$$

где $d(t) \geq 0$ зависит от выбранного решения. Заметим, что $x(t)\beta(t)$ и $x(t)d(t)$ есть непрерывные функции для $t \in I_+$. Таким образом, для $\forall (x, x', x'') \in R^3$ и $t \in I_+$ имеем

$$x'' = \mp \beta(t) - \alpha(t)x \pm d(t). \quad (56)$$

Введем теперь вспомогательную функцию

$$V(t) = \frac{1}{2} x^2(t), \quad t \in I_+, \quad (57)$$

для которой имеют место следующие соотношения

$$V' = x x', \quad V'' = x x'' + (x')^2 \quad \text{и}$$

$$V''' = x x''' + 3x'x''. \quad (58)$$

Интегрируя (58) от 0 до t получаем для V уравнение вида

$$V'' = C + \beta_1(t) - \int_0^t 2\alpha(s)V(s) ds + \beta_2(t), \quad (59)$$

где

$$C = V''(0) - \frac{3}{2}(x'(0))^2 = x(0)x''(0) - \frac{1}{2}(x'(0))^2 = \text{const},$$

причем $|C| < +\infty$ в силу леммы 6 и т.к. $|x(0)| < +\infty$.

$$\beta_1(t) = \frac{3}{2}(x'(t))^2 + \int_0^t (\pm d(s)x(s)) ds \geq 0, \quad (60)$$

т.к. $d(t) \geq 0$, $t \in I_+$ и знак " \pm " в подынтегральном выражении (60) совпадает со знаком x :

$$\beta_2(t) = \int_0^t (\mp \beta(s)x(s)) ds \leq 0, \quad (61)$$

т.к. $\beta(t) \geq 0$, $t \in I_+$ и знак " \mp " в подынтегральном выражении (61) противоположен знаку x .

Исследуем решение $V(t)$ краевой задачи

$$V'' = C + B_1(t) - \int_0^t 2a(s)V(s)ds + B_2(t) \quad (62)$$

$$V(0) = \frac{1}{2}(x(0))^2 = V_0, \quad V(1) = \frac{1}{2}(x(1))^2 = V_1,$$

которое может быть записано как

$$V(t) = - \int_0^t C \psi_1(t,s) ds - \int_0^t \psi_1(t,s) B_1(s) ds + \int_0^t \psi_1(t,s) \left[\int_0^s 2a(z)V(z) dz \right] ds - \int_0^t \psi_1(t,s) B_2(s) ds. \quad (63)$$

Если теперь учесть (60), то получим

$$V(t) = B(t) + \int_0^t \psi_1(t,s) \int_0^s 2a(z)V(z) dz ds + \int_0^t \psi_1(t,s) B_2(s) ds, \quad (64)$$

где $B(t) = - \int_0^t C \psi_1(t,s) ds$.

Далее,

$$B_2(t) = \int_0^t b(s)x(s)ds = \int_0^t b(s) \frac{x}{1+\epsilon x^2} (1+\epsilon x^2) ds = \int_0^t b(s) \frac{x}{1+\epsilon x^2} ds + 2 \int_0^t b(s) \frac{\epsilon x}{1+\epsilon x^2} V ds, \quad \epsilon > 0. \quad (65)$$

Обозначим $\frac{x}{1+\epsilon x^2} = f_1(x)$ и $\frac{\epsilon x}{1+\epsilon x^2} = f_2(x)$.

Относительно этих функций справедливо следующее:

I) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = 0 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}$ и $|f_2(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$ для $\forall \epsilon > 0$ и $\forall x \in \mathbb{R}$.



$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad |f_2(x)| \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{2} \quad \text{для} \\ \forall \epsilon > 0 \quad \text{и} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Из этого видно, что выбором соответствующего ϵ второй интеграл в (65) можно сделать сколь угодно малой величиной, в то время как первый интеграл при этом остается величиной ограниченной.

Выбираем теперь $\epsilon > 0$ столь малой величиной, что

$$q + \epsilon_1 < 1, \quad (66)$$

где

$$\epsilon_1 = \max_{t \in I_+} \left(\int_0^1 \psi_1(t, s) \int_0^5 2\beta(z) \epsilon \, dz \, ds \right).$$

Обозначим $\max_{t \in I_+} V(t) = V(t^*) = V^*$, $t^* \in I_+$.

Из (64) следует, что

$$V^* \leq \max_{t \in I_+} \bar{B}(t) + V^* \left[\max_{t \in I_+} \left(\int_0^1 \psi_1(t, s) \int_0^5 2\alpha(z) \, dz \, ds \right) + \right. \\ \left. + \max_{t \in I_+} \left(\int_0^1 \psi_1(t, s) \int_0^5 2\epsilon \beta(z) \, dz \, ds \right) \right]$$

или

$$V^* \leq V^*(q + \epsilon_1) + \max_{t \in I_+} B(t).$$

И в силу выполнения условия (а) теоремы I и выбора $\epsilon > 0$ (66), получаем, что $V(t)$, а следовательно и $x(t)$ ограничено для $\forall t \in I_+$.

Чтобы доказать ограниченность $x(t)$ на I_- следует сделать замену t на $-t$.

п.3. Итак, доказано, что существует число $N \geq 0$, зависящее от x_i , $i=1, 2, 3$, f , условия (A) такое, что для любого решения $x(t)$ задачи (1), (2) справедлива оценка $|x(t)| \leq N$, $t \in I$.

В таком случае, в силу выполнения условия (B), согласно результатам [2], [3], получаем существование априорных оценок для $x'(t)$ и $x''(t)$, а именно

$$|x'(t)| + |x''(t)| < N_1, \quad t \in I.$$

где $N_1 > 0$ - некоторая постоянная, не зависящая от t .
Определим функцию

$$F(t, x, x', x'') = f(t, N_1 \sigma(\frac{x}{N_1}), N_1 \sigma(\frac{x'}{N_1}), N_1 \sigma(\frac{x''}{N_1})), \quad (67)$$

где

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1 & , \quad z > 1 \\ z & , \quad |z| \leq 1 \\ -1 & , \quad z < -1 \end{cases}$$

и рассмотрим краевую задачу

$$x''' = F(t, x, x', x''), \quad t \in I \quad (68)$$

$$x(-1) = x_1, \quad x(0) = x_2, \quad x(+1) = x_3.$$

Легко проверить, что функция F удовлетворяет условиям теоремы I и с теми же функциями $a(t)$, $B(t)$, что и функции f . Кроме того, для $|x| < N$, $|x'(t)| + |x''(t)| \leq N_1$ функция F совпадает с функцией f , для $|x| > N$, $|x'(t)| + |x''(t)| > N_1$ она ограничена. Применяя теперь результат R. Conti [3], [4], получаем существование решения задачи (68), а следовательно и задачи (I), (2).

Благодарю своего научного руководителя Д.А.Клокова за постановку задачи, советы и замечания при обсуждении результатов.

Литература

1. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970. 279 с.
2. Клоков Д.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. Рига, 1963. 104 с.
3. Гудков В.В., Клоков Д.А., Лешин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1973. 134 с.
4. Conti R. Equazioni differenziali ordinarie quasilineari con condizioni lineari. - Ann. mat. pura ed appl., 1962, 57, p. 49-61.

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМИ
СЛАГАЕМЫМИ

1к

Н.И.Васильев

Вычислительный центр ЛГУ
им. П.Стучки

Рассмотрим простейшую двухточечную краевую задачу с квадратичными слагаемыми вида

$$x'' = f(t, x, x'). \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} f(t, x, x') = & A(t) + B(t)x + C(t)x' + a(t)x^2 + \\ & + b(t)xx' + c(t)x'^2, \\ t \in [0, 1] = I, \quad A, B, C, a, b, c \in C(I), \\ x_0, x_1 \in R. \end{aligned} \quad (3)$$

Задачи такого типа могут вообще не иметь решения, либо иметь их несколько. Все эти случаи хорошо иллюстрируются следующими примерами. Так, задача

$$x'' = x^2 + A, \quad x(0) = x(1) = 0,$$

если $A > 0$ и достаточно велико, не имеет ни одного решения. В случае $A = 0$ существуют два решения. Если $A < 0$, то для любого целого $N > 0$ можно подобрать A таким, что краевая задача

$$x'' = x^2 + A, \quad x(0) = x(1) = -\sqrt{-A} \quad (4)$$

будет иметь точно N решений. Последнее следует из рассмотрения на фазовой плоскости поведения интегральных краевых уравнений

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + A}{y}$$

в окрестности особой точки $(-\sqrt{-A}, 0)$. Заметим, что наличие нескольких решений существенно затрудняет численное нахождение хотя бы одного решения.

п. I. Для задачи (1), (2) необходимым и достаточным условием существования решения является (см. [1], [2]) наличие двух функций $\alpha, \beta \in C^2(I)$ таких, что

$$\alpha(t) \leq \beta(t), \quad \forall t \in I, \quad (5)$$

$$\alpha'' \geq f(t, \alpha, \alpha'), \quad \beta'' \leq f(t, \beta, \beta'), \quad \forall t \in I \quad (6)$$

$$\alpha(0) \leq x_0 \leq \beta(0), \quad \alpha(1) \leq x_1 \leq \beta(1). \quad (7)$$

Построение таких функций в общем случае представляет известные трудности. Для задачи (1), (2) были найдены следующие случаи, для которых оказалось возможным построить такие функции.

1) Пусть в выражении (3)

$$A(t) = B(t) = a(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Тогда, полагая

$$\alpha(t) = \min(x_0, x_1), \quad \beta(t) = \max(x_0, x_1),$$

видим, что условия (5)-(7) выполняются.

2) Пусть

$$a(t) = 0, \quad b(t) > 0 \quad \forall t \in I.$$

В этом случае в качестве функций α, β можно взять

$$\beta(t) = -\alpha(t) = \max(|x_0|, |x_1|, \sup_{t \in I} \frac{|A(t)|}{B(t)}).$$

3) Пусть

$$a(t) = 0, \quad b(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $b(t) > 0$
 $\forall t \in I$ (в противном случае делаем замену x на $-x$).
Выберем постоянную $k > 0$ так, чтобы

$$b(t) + \beta(t)k > 0 \quad \forall t \in I.$$

Теперь функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ определим следующим образом

$$\alpha(t) = kt + H_0, \quad \beta(t) = kt + H_1,$$

где

$$H_0 = -H_1,$$

$$H_1 = \max_{t \in I} \left(\frac{|A(t)| + C(t)k + c(t)k^2}{B(t) + b(t)k} \right), \quad k, |x_0|, |x_1| + k.$$

Выполнение условий (5)-(7) в этом случае легко проверяется, т.е. задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение.

4) Пусть

$$Q(t) = b(t) = 0, \quad B(t) > 0 \quad \forall t \in I$$

и уравнение

$$x'' = A(t) + B(t)x + C(t)x' + c(t)x'^2 \quad (8)$$

имеет решение $u(t)$, продолжимое на интервал I . Тогда краевая задача (8), (2) имеет точно одно решение.

В самом деле обозначим $u(0) = u_0$, $u(1) = u_1$ и сделаем замену $y(t) = x(t) - u(t)$. Относительно функции $y(t)$ задача (8), (2) запишется в виде

$$y'' = B(t)y + (C(t) + 2c(t)u'(t))y' + c(t)y'^2,$$

$$y(0) = x_0 - u_0, \quad y(1) = x_1 - u_1.$$

Эта краевая задача разрешима, так как построенные для нее функции

$$\beta(t) = \max(x_0 - u_0, x_1 - u_1),$$

$$d(t) = \min(x_0 - u_0, x_1 - u_1)$$

удовлетворяют условиям (5)-(7). Тем самым разрешима задача (8), (2). Единственность решения следует из условия

$$b(t) \geq 0 \quad \forall t \in I \quad (\text{см. [3]}).$$

5) Пусть

$$c(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

и выражение

$$a(t)x^2 + b(t)x x' + c(t)x'^2$$

для любого $t \in I$ можно представить в виде

$$c(t)(x' - k_1(t)x)(x' - k_2(t)x),$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ - непрерывно дифференцируемые на I функции. Предположим, кроме того, что хотя бы для одной из функций $k_1(t)$ или $k_2(t)$ выполняется неравенство

$$b(t) + c(t)k_i - k_i^2 - k_i' > 0 \quad \forall t \in I, \quad i=1,2. \quad (9)$$

Тогда решение задачи (1), (2) существует.

В самом деле, пусть, например, неравенство (9) выполняется для функции $k_1(t)$.

Обозначим

$$\gamma = \inf_{t \in I} (b(t) + c(t)k_1(t) - k_1^2(t) - k_1'(t)),$$

$$\delta = \sup_{t \in I} (|A(t)| \exp(-\int_0^t k_1(s) ds)).$$

$$H_1 = \max \left(\frac{\delta}{\gamma}, |x_0|, |x_1| \right), \quad H_0 = -H_1.$$

Определим функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ следующим образом

$$\alpha(t) = H_0 \exp \left(\int_0^t \kappa_1(s) ds \right), \quad \beta(t) = H_1 \exp \left(\int_0^t \kappa_1(s) ds \right).$$

Очевидно, условия (5) и (7) выполняются. Проверим, например, для функции $\beta(t)$, что условие (6) также выполняется. Учитывая, что $\beta(t)$ - решение дифференциального уравнения

$$x' - \kappa_1(t)x = 0,$$

условие (6) для функции $\beta(t)$ переписывается в виде

$$\beta'' \leq A(t) + B(t)\beta + C(t)\beta'. \quad (10)$$

Имеем

$$\beta' = H_1 \kappa_1(t) \exp \left(\int_0^t \kappa_1(s) ds \right),$$

$$\beta'' = H_1 (\kappa_1^2(t) + \kappa_1'(t)) \exp \left(\int_0^t \kappa_1(s) ds \right).$$

Теперь, вспоминая определение числа H_1 и учитывая условие (9), легко проверяем для всех $t \in I$ справедливость неравенства (10). Таким образом, задача (I), (2) имеет по крайней мере одно решение.

6) Пусть

$$Q(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Не уменьшая общности, можем считать, что $Q(t) > 0 \quad \forall t \in I$ (в противном случае делаем замену x на $-x$). Предположим далее, что для всех $t \in I$ квадратное уравнение

$$A(t) + B(t)z + Q(t)z^2 = 0$$

имеет вещественные корни $z_1(t)$ и $z_2(t)$, причем существует число $d \in \mathbb{R}$ такое, что

$$z_1(t) \leq d \leq z_2(t) \quad \forall t \in I. \quad (II)$$

Тогда задача (I), (2) разрешима для x_0, x_1 , удовлетворяющих условию

$$\min(x_0, x_1) \geq d. \quad (I2)$$

В самом деле, полагая

$$\alpha(t) = d, \quad \beta(t) = \max(x_0, x_1, \sup_{t \in I} z_2(t))$$

и учитывая неравенства (II), (I2), а также, что $Q(t) > 0 \quad \forall t \in I$, легко проверяем, что условия (5)-(7) выполняются. Таким образом, краевая задача (I), (2) разрешима для x_0, x_1 , удовлетворяющих неравенству (I2).

п.2. Приведенные условия разрешимости задачи (I), (2) не удалось уложить в стройную систему. Заметим, что в случаях I-5 существование решения краевой задачи (I), (2) гарантируется для любых $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. В тех случаях, когда задача (I), (2) разрешима не для всех $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ представляется интересным на плоскости (x_0, x_1) построить область, точки которой соответствуют крайним условиям, при которых краевая задача (I), (2) имеет решение.

В качестве примера построим такую область D для задачи

$$x'' = x^2, \quad x(-1) = x_0, \quad x(1) = x_1, \quad (I3)$$

Прежде всего заметим, что если краевая задача (I3) имеет решение, то разрешима также краевая задача

$$x'' = x^2, \quad x(-1) = x_0, \quad x(1) = x_0.$$

Отсюда следует, что искомая область D симметрична относительно прямой $x_0 = x_1$. Из условий разрешимости краевой задачи (I), (2), рассмотренных в случае (6), получаем, что задача (I3) разрешима для всех $x_0, x_1 \geq 0$. Более того, если задача (I3) имеет решение $x^*(t)$ при некоторых x_0^*, x_1^* , то она разрешима для всех x_0, x_1 , таких, что $x_0 \geq x_0^*, x_1 \geq x_1^*$. В самом деле, полагая

$$\alpha(t) = x^*(t), \quad \beta(t) = \max(x_0, x_1),$$

видим, что условия (5)-(7) выполняются.

Пусть $\tilde{x}(t)$ - решение задачи Коши для уравнения

$$x'' = x^2, \quad (I4)$$

с начальными условиями

$$\tilde{x}(0) = -1, \quad \tilde{x}'(0) = 0.$$

Это решение симметрично относительно оси x , монотонно возрастает для $t \geq 0$ и имеет вертикальную асимптоту при некотором $t = \tau \geq 0$. Пусть $(-\tau, \tau)$ - максимальный интервал из $(-\tau, \tau)$, где $\tilde{x}(t) < 0$.

Теперь решение уравнения (14) с условиями

$$x(0) = -\gamma^2, \quad x'(0) = 0, \quad \gamma \geq 0$$

имеет вид

$$x(t) = \gamma^2 \tilde{x}(\gamma t).$$

Очевидно, если $t \in [-1, 1]$, то решение $x(t)$ определено для $\gamma \in [0, \tau)$. Обозначим

$$\sigma = \inf_{\gamma \in [0, \tau)} \gamma^2 \tilde{x}(\gamma)$$

и пусть $\gamma_0 \in (0, \tau_0]$ корень уравнения

$$\gamma^2 \tilde{x}(\gamma) = \sigma.$$

Очевидно такое γ_0 единственно. Легко видеть, что задача

$$x'' = x^2, \quad x(-1) = x_0, \quad x(1) = x_0$$

имеет решение только для $x_0 \in [\sigma, \infty)$, причем $x_0 = \sigma$ является граничной точкой области D . Учитывая симметрию области D относительно прямой $x_0 = 1$, задачу (13) достаточно рассмотреть при краевых условиях, где $x_0 \in [\sigma, \infty)$, $x_1 \leq x_0$. Теперь можно показать, что граница области $D: x_1 = \varphi(x_0)$ есть монотонно убывающая функция, заданная параметрическими уравнениями

$$x_0 = \gamma_0^2 \tilde{x}(-\gamma_0 - \tau), \quad x_1 = \gamma_0^2 \tilde{x}(\gamma_0 - \tau), \quad (15)$$
$$C \in (0, \tau - \gamma_0).$$

которая стремится к горизонтальной асимптоте

$$x_1 = \gamma_0^2 \tilde{x}(2\gamma_0 - \tau).$$

Заметим также, что в каждой внутренней точке области D задача (13) имеет два решения, в то время как на границе D только одно. В общем случае для краевой задачи (1), (2) при приближенном построении границ таких областей удобно пользоваться ЭМ.

п. 3. Для численного нахождения решения задачи (1), (2) можно применить метод стрельбы. В точке $t=0$ задается недостающее значение $x'(0)$ и решается задача Коши на отрезке $[0, 1]$. В зависимости от полученной величины $x(1)$ значение $x'(0)$ уточняется. Однако применение метода стрельбы осложняется тем, что зависимость величины $x(1)$ от $x'(0)$ при наличии у задачи (1), (2) нескольких решений не является монотонной. В этом случае полезно построение графика $x(1)$ в зависимости от $x'(0)$. Такой график позволяет находить области, где существует одно, два, и т.д., и ни одного решения задачи (1), (2). Для численного решения задачи Коши можно использовать метод Рунге-Кутты, который в этом случае достаточно эффективен, если значение

$$\sup_{t \in (0, 1)} (|x(t)| + |x'(t)|)$$

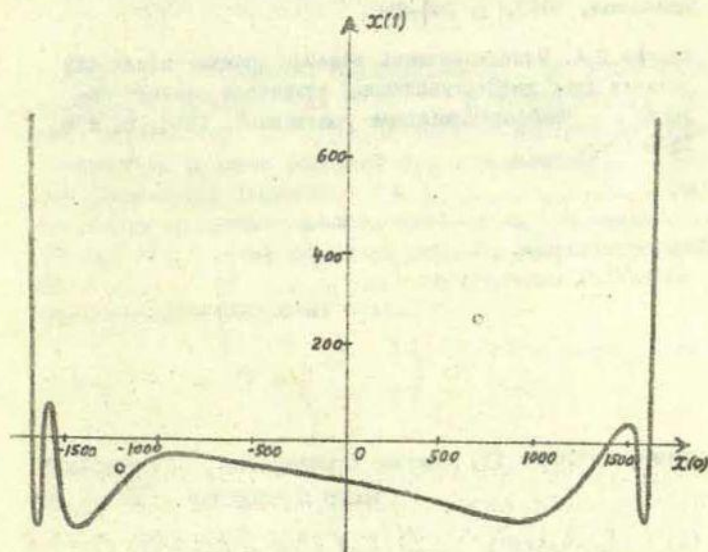
не очень велико.

В качестве примера для задачи

$$x'' = x^2 - 10000, \quad x(0) = -100$$

приведем график $x(t)$ в зависимости от $x'(0)$. При интегрировании на ЭВМ использовался метод Рунге-Кутты с постоянным шагом $h = 1/256$. Из этого графика для задачи

$$x'' = x^2 - 10000, \quad x(0) = -100, \quad x(1) = x_1,$$



в зависимости от x_1 , легко судить о существовании или несуществовании решения, в случае же существования о количестве решений.

В заключение выражаю благодарность Ю.А.Клокову за постановку задачи и некоторые замечания.

Литература

- 1 Гуднов В.В., Клоков Ю.А., Ленин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, "Зинатне", 1973. 135с.
- 2 Jackson K., Schrader L., Comparison Theorems for Nonlinear Differential Equations. Journal of Differential Equations, 1967, 3, 248-255.
- 3 Клоков Ю.А. Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1972, 8, № 8, 1376-1385.

К ВОПРОСУ ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ
ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

Δn

Б.М. Живихин

Вычислительный центр ЛГУ и П.Стучки

Пусть дана линейная импульсная система дифференциальных уравнений

$$\mathcal{J} \frac{dy}{dt} = Hy + \lambda R(t)y + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k \delta_{t_k}, \quad (I)$$

где $y(t)$ - m -мерный вектор-столбец, H - постоянная матрица размерности $m \times m$, $R(t)$ - переменная матрица размерности $m \times m$, элементами которой являются комплексные функции действительного переменного, λ - малый комплексный параметр, $\{s_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ - двусторонняя последовательность комплексных m -мерных векторов, δ_{t_k} - импульс (мера Дирака), сосредоточенный в точке t_k , $\{t_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ - двусторонняя последовательность действительных чисел.

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

Известно [1], что решения системы (I) являются функциями на R^1 следующего вида:

$$y(t, y_0) = X(t, t_k, \lambda) C_k \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (2)$$

где последовательность $\{C_k\}_{-\infty < k < +\infty}$ удовлетворяет системе разностных уравнений

$$c_{k+1} = X(t_{k+1}, t_k, \lambda) c_k + s_{k+1}, \quad c_0 = y_0, \quad (3)$$

а $X(t, t_k, \lambda)$ обозначает фундаментальную матрицу однородной системы дифференциальных уравнений

$$\mathcal{J} \frac{dx}{dt} = Hx + \lambda R(t)x. \quad (4)$$

Пусть функции $R(t)$ и $\sum_k s_k \delta_{t_k}$ являются периодическими с периодом $T > 0$, т.е.

$$\sum_k s_k \delta_{t_k + T} \equiv \sum_k s_k \delta_{t_k}, \quad R(t+T) \equiv R(t)$$

и будем предполагать, что однородная система (4) является гамильтоновой при вещественном значении параметра λ , т.е.

$$(H + \lambda R(t))^* = H + \lambda R(t) \quad \text{при } \Im \lambda = 0.$$

Поскольку фундаментальная матрица $X(t, \tau, \lambda)$ гамильтоновой системы (4) есть симплектическая матрица

$$[2] \quad X^*(t, \tau, \lambda) \mathcal{J} X(t, \tau, \lambda) = \mathcal{J},$$

то однородная система разностных уравнений

$$a_{k+1} = X(t_{k+1}, t_k, \lambda) a_k \quad (5)$$

будет канонической [1].

Предположим, что существует такое $N > 0$, что точки t_k удовлетворяют соотношению

$$t_k = t_0 + k \frac{T}{N} \quad (6)$$

Тогда

$$X(t_{k+1}, t_k, \lambda) = X(t_{k+1} + T, t_k + T, \lambda) = X(t_{k+1}, t_k, \lambda)$$

и однородная система разностных уравнений (5) есть периодическая с периодом $N > 0$. Таким образом, по предположению, система разностных уравнений (5) является канонической с периодическими коэффициентами при вещественном значении параметра λ , в частности, при $\lambda = \lambda_0$. В этих предположениях фундаментальная матрица $X(t, \tau, \lambda)$ будет аналитической функцией λ в окрестности вещественного $\lambda = \lambda_0$ при любых фиксированных t и τ , т.е., в частности,

$$X(t_{k+1}, t_k, \lambda) = X_0(t_{k+1}, t_k) + (\lambda - \lambda_0) X_1(t_{k+1}, t_k) + \dots$$

Каноническую систему (5) можно, в этом случае, представить в следующем виде

$$a_{k+1} = (M_k + \lambda B_k(\lambda)) a_k, \quad (7)$$

где $M_k = e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} A_{k, k_0}(\lambda) dt} - \lambda_0 (X_1(t_{k+1}, t_k) - \lambda_0 X_2(t_{k+1}, t_k) - \dots)$,

$$B_k(\lambda) = X_1(t_{k+1}, t_k) + \lambda X_2(t_{k+1}, t_k) + \dots$$

Обозначим через $A_{k, k_0}(\lambda)$ фундаментальную матрицу системы (7), через $U(\lambda)$ - матрицу монодромии, $\rho(\lambda)$ - мультипликаторы системы, причем $\rho(\lambda_0) = \rho_0$, $u(\lambda)$ - соответствующие этим мультипликаторам собственные векторы, т.е. $U(\lambda) u(\lambda) = \rho(\lambda) u(\lambda)$ для всех мультипликаторов. Тогда имеет место следующая лемма.

ЛЕММА. Пусть мультипликаторы $\varrho(\lambda)$ канонической системы (7) таковы, что при вещественном значении $\lambda = \lambda_0$ все они расположены на единичной окружности, т.е. $|\varrho_0| = 1$ и $u^* \nabla u \neq 0$. Тогда справедливо следующее представление

$$\varrho(\lambda) = \varrho_0 \{ 1 + (\lambda - \lambda_0) \mu + \theta [(\lambda - \lambda_0)^2] \}, \quad (8)$$

где
$$\mu = \frac{1}{u^* \nabla u} \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nabla \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_\nu(\lambda)] a_\nu \Big|_{\lambda=\lambda_0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее соотношение

$$U(\lambda) u(\lambda) = \varrho(\lambda) u(\lambda). \quad (9)$$

Дифференцируя по λ , получим

$$\frac{dU}{d\lambda} u(\lambda) + U(\lambda) \frac{du(\lambda)}{d\lambda} = \varrho(\lambda) \frac{du(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d\varrho}{d\lambda} u(\lambda).$$

Умножим обе части полученного равенства на $u^* \nabla$ слева, тогда имеем

$$u^* \nabla \frac{dU}{d\lambda} u + u^* \nabla U \frac{du}{d\lambda} = u^* \nabla \frac{d\varrho}{d\lambda} u + u^* \nabla \varrho \frac{du}{d\lambda}. \quad (10)$$

При $\lambda = \lambda_0$ мультипликаторы $|\varrho(\lambda_0)| = |\varrho_0| = 1$ следовательно $\bar{\varrho}_0^{-1} = \varrho_0$. Матрица монодромии U канонической системы (7) является симплектической, поэтому

$$u^* \nabla U \frac{du}{d\lambda} = (U^{-1} u)^* \nabla \frac{du}{d\lambda} = \bar{\varrho}^{-1} u^* \nabla \frac{du}{d\lambda}.$$

Учитывая полученное, из соотношения (10) при $\lambda = \lambda_0$ получим

$$u^* \int \frac{d\varrho}{d\lambda} u + \varrho u^* \int \frac{du}{d\lambda} = u^* \int \frac{dU}{d\lambda} u + \varrho^{-1} u^* \int \frac{du}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

или

$$\frac{d\varrho}{d\lambda} u^* \int u = u^* \int \frac{dU}{d\lambda} u \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (II)$$

Для фундаментальной матрицы решений имеем

$$A_{k_0, k_0}(\lambda) = (M_k + \lambda B_k(\lambda)) A_{k_0, k_0}(\lambda) \quad (I2)$$

Дифференцируя по λ , получаем

$$\frac{d}{d\lambda} A_{k_0, k_0}(\lambda) = (M_k + \lambda B_k(\lambda)) \frac{d}{d\lambda} A_{k_0, k_0}(\lambda) + \frac{d}{d\lambda} (M_k + \lambda B_k(\lambda)) A_{k_0, k_0}(\lambda)$$

Используя формулу вариации постоянной [I], находим решение этой разностной системы в точке периода $N > 0$. В начале имеем

$$\frac{d}{d\lambda} A_{k_0, k_0}(\lambda) = A_{k_0, k_0}(\lambda) \left\{ \frac{d}{d\lambda} A_{k_0, k_0}(\lambda) + \sum_{v=k_0}^{n-1} A_{v, k_0}^{-1}(\lambda) \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] A_{v, k_0}(\lambda) \right\}$$

При $n = N$ и $\lambda = \lambda_0$ будет

$$\frac{dU}{d\lambda} = U \sum_{v=k_0}^{N-1} A_{v, k_0}^{-1} \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] A_{v, k_0} \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

В частности, при $K_0 = 0$, обозначая $A_{k,0} = A_k$, получим

$$\frac{dU}{d\lambda} = U \sum_{v=0}^{N-1} A_v^{-1} \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] A_v \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (I3)$$

Таким образом, соотношение (II) можно записать теперь, учитывая (I3), в виде

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} u^* \mathcal{F} u = u^* \mathcal{F} U \left\{ \sum_{v=0}^{N-1} (A_v^{-1} \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] A_v) \right\} u \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

По предположению $u^* \mathcal{F} u \neq 0$, а фундаментальная матрица A_k симплектична, поэтому

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{u^* \mathcal{F} u} \left[(U^{-1} u)^* \mathcal{F} \sum_{v=0}^{N-1} (A_v^{-1} \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] A_v) u \right] \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

Поскольку $U^{-1} u = \varphi^{-1} u$ при $\lambda = \lambda_0$ и $a_k = A_k u$ - решение системы разностных уравнений (7) с начальным условием $a_0(\lambda_0) = u(\lambda_0)$, имеем

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\varphi_0}{u^* \mathcal{F} u} \sum_{v=0}^{N-1} a_v^* \mathcal{F} \frac{d}{d\lambda} [\lambda B_v(\lambda)] a_v \Big|_{\lambda=\lambda_0} \quad (I4)$$

Из этого соотношения сразу следует утверждение леммы.

Полученный результат можно использовать для исследования условий ограниченности решений импульсной системы (I).

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия леммы при $\lambda_0 = 0$, последовательность $\{\delta_k\}$ - $-\infty < k < +\infty$ ограничена и для любого вектора $w \in C^m$

$$w^* \nexists B_k(0) w \neq 0.$$

Тогда, если

$$\Im m(\lambda) > 0, \quad u^* \nexists u > 0, \quad \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nexists B_\nu(0) a_\nu < 0,$$

ИЛИ

$$\Im m(\lambda) > 0, \quad u^* \nexists u < 0, \quad \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nexists B_\nu(0) a_\nu > 0, \quad (I5)$$

ИЛИ

$$\Im m(\lambda) < 0, \quad u^* \nexists u < 0, \quad \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nexists B_\nu(0) a_\nu < 0,$$

ИЛИ

$$\Im m(\lambda) < 0, \quad u^* \nexists u > 0, \quad \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nexists B_\nu(0) a_\nu > 0,$$

то при всех комплексных λ из достаточно малой окрестности нуля решения импульсной системы (I) ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя результат леммы при $\lambda_0 = 0$ имеем

$$\varrho(\lambda) = \varrho_0 [1 + \mu \lambda + \theta(\lambda^2)],$$

где $\varrho_0 = \varrho(0)$ и $\mu = \frac{1}{u^* \nexists u} \sum_{\nu=0}^{N-1} a_\nu^* \nexists B_\nu(0) a_\nu$.

При достаточно малых $|\lambda|$

$$|\varrho(\lambda)|^2 = 1 + 2\mu \Im m(\lambda) + \theta(|\lambda|^2), \quad (I6)$$

поскольку $|\varrho_0| = 1$. Из соотношения (I6) следует, что если выполнены условия (I5), то при малом комплексном возмущении, мультипликаторы системы (7) сдвигаются

внутри единичной окружности. Таким образом, при такого рода возмущениях, тривиальное решение разностной системы (7) является равномерно асимптотически устойчивым, а решения неоднородной системы (3) —ограниченным. Поскольку тривиальное решение однородной системы дифференциальных уравнений (4) равномерно асимптотически устойчиво, то по теореме Персидского существуют такие $\alpha > 0$, $\beta > 1$ что

$$|X(t, \tau, \lambda)| \leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)} \quad \text{для } t \geq \tau.$$

Отсюда, учитывая соотношение (2), следует справедливость утверждения теоремы.

В заключение выражаю благодарность Е.Ф.Царькову за постановку задачи и некоторые замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 309 с.
2. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972, 718 с.
3. Живихин Б.М., Мастерков А.С. Об устойчивости решений линейных систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами. - В кн.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, 1974, 124 с.

О СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМАХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

2m

Б.М. Живихин, А.С. Мастерков
вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

§ I. Однородные системы

Рассмотрим следующую сингулярно возмущенную систему
обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad A(t+T) \equiv A(t) \quad (1)$$

$$x(t_k+0) = B_k x(t_k), \quad B_{k+N} \equiv B_k \quad (2)$$

где $x(t)$ — m -мерный вектор-столбец, $x(t) \in C^m$,
 $A(t)$ — $m \times m$ -мерная матрица-функция, элементами кото-
рой являются комплексные функции действительного аргумен-
та, интегрируемые и кусочно-непрерывные на любом конечном
интервале, $\{t_k\}_{1 \leq k < \infty}$ — строго возрастающая
последовательность действительных чисел, $T > 0$, $N > 0$.
Обозначим через $X(t)$ матрицант системы (1). В общем
случае, когда в качестве начальных условий берется значе-
ние решений в j -й момент точки, $x(t_j, j, x_j) = x_j$,
решение сингулярно возмущенной системы (1), (2) выписыва-
ется формулой

$$x(t, k, x_j) = X(t) \left\{ \prod_{t_s}^k X^{-1}(t_s) B_s X(t_s) \right\} X^{-1}(t_j) x_j \quad (3)$$

$$t \in (t_k, t_{k+1}]$$

Положим

$$H(t, t_j, \kappa) = X(t) \left\{ \prod_{t_s}^{\kappa} X^{-1}(t_s) B_s X(t_s) \right\} X^{-1}(t_j) \quad (4)$$

Тогда решение системы (1), (2) запишется в виде

$$X(t, \kappa, X_j) = H(t, t_j, \kappa) X_j \quad , \quad t \in (t_{\kappa}, t_{\kappa+1}] \quad .$$

Положим $t_0 = 0$, $B_0 = J$ и рассмотрим решение сингулярно возмущенной системы (1), (2) с начальным условием $X(t_0, 0, X_0) = X_0$, т.е.

$$X(t, \kappa, X_0) = H(t, t_0, \kappa) X_0 \quad , \quad t \in (t_{\kappa}, t_{\kappa+1}] \quad . \quad (5)$$

Пусть последовательность t_{κ} удовлетворяет соотношению

$$t_{\kappa+N} = t_{\kappa} + T \quad , \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда, поскольку $X(t+T) = X(t) X(T)$, имеем

$$\begin{aligned} H(t+T, t_0, \kappa+N) &= X(t+T) \prod_{t_s}^{\kappa+N} X^{-1}(t_s) B_s X(t_s) = \\ &= X(t) X(T) X^{-1}(T) \prod_{t_s}^{\kappa} (X^{-1}(t_s) B_s X(t_s)) X(T) \prod_{t_s}^N (X^{-1}(t_s) B_s X(t_s)) = \\ &= H(t, t_0, \kappa) H(T, t_0, N) \quad . \end{aligned}$$

Таким образом, если t_k удовлетворяют соотношению (6), имеет место тождество

$$H(t+T, t_0, \kappa+N) = H(t, t_0, \kappa) H(T, t_0, N) \quad \text{при } t \in (t_k, t_{k+1}) \quad (7)$$

В связи с этим, назовем матрицу $H(t, t_0, \kappa)$ матрицантом сингулярно возмущенной системы (1), (2), а матрицу $H(T, t_0, N)$ - матрицей монодромии системы (1), (2) с начальным условием $\mathcal{X}(t_0, \kappa, x_0) = x_0$.

Известно [1], что система обыкновенных дифференциальных уравнений (1) приводима в смысле Ляпунова. Это значит, что существует непрерывная и неособая для всех t периодическая с периодом $T > 0$ матрица-функция $F(t)$, такая, что замена $\mathcal{X}(t) = F(t) y(t)$ приводит систему (1) к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = R y, \quad (8)$$

где $R = \frac{1}{T} \ln(X(t))$. Пусть $t_k = t_0 + \kappa \frac{T}{N}$, тогда для сингулярно возмущенной системы (1), (2) имеет место следующая

ТЕОРЕМА I. (аналог теоремы Ляпунова о приводимости). Пусть дана сингулярно возмущенная система (1), (2) с периодическими матрицами $A(t)$, B_k . Тогда существует непрерывная и неособая для всех $t \in [0, +\infty)$ $\kappa = 1, 2, \dots$, периодическая с периодом T и N , имеющая непрерывную кусочно-интегрируемую производную матрица-функция $Q(t, t_0, \kappa)$ такая, что замена

$$\mathcal{X}(t) = Q(t, t_0, \kappa) y(t), \quad t \in (t_k, t_{k+1}) \quad (9)$$

приводит систему (1), (2) к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = R y \quad (10)$$

$$y(t_k + 0) = P y(t_k) \quad (11)$$

где $P = \exp\left(-\frac{T}{N} R\right) \exp S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Итак, пусть

$$S = \frac{1}{N} \ln H(T, t_0, N) \quad (12)$$

Определим матрицу $Q(t, t_0, k)$ выражением

$$Q(t, t_0, k) = H(t, t_0, k) e^{-kS} e^{(t_k - t)R} \quad (13)$$

при $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Учитывая соотношения (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} Q(t+T, t_0, k+N) &= H(t+T, t_0, k+N) e^{-(k+N)S} e^{(t_{k+N} - t - T)R} = \\ &= H(t, t_0, k) H(T, t_0, N) H^{-1}(T, t_0, N) e^{-kS} e^{(t_{k+1} + T - t)R} \end{aligned}$$

Следовательно, $Q(t, t_0, k)$ периодическая, т.е.

$$Q(t+T, t_0, k+N) = Q(t, t_0, k). \quad (14)$$

Учитывая, что

$$\frac{dH}{dt} = A(t)H$$

и произведя в (1), (2) замену (9), получим утверждение теоремы.

Решение приведенной системы с постоянными коэффициентами (10), (11) выписывается формулой

$$y(t, k, y_0) = e^{-R(t_{k+1}-t)} e^{S_{(k+1)} t} y_0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}], \quad (15)$$

где $y_0 = x_0$. Решение же исходной сингулярно возмущенной системы (1), (2) можно представить в виде

$$x(t, k, x_0) = Q(t, t_0, k) e^{-(t_{k+1}-t)R} e^{(k+1)S} x_0, \quad (16)$$

где $Q(t+T, t_0, k+N) \equiv Q(t, t_0, k)$.

Представляет интерес исследование свойств решений сингулярно возмущенной системы через соответствующую систему разностных уравнений.

Положим в соотношении (5) $j=k$, тогда

$$x(t, k, x_k) = X(t) X^{-1}(t_k) B_k x_k \quad \text{при } t \in (t_k, t_{k+1}].$$

Из этого соотношения приходим к системе разностных уравнений

$$v_{k+1} = M_k v_k, \quad (17)$$

где $v_k = X(t_k, X_0)$, $M_k = X(t_{k+1}) X^{-1}(t_k) B_k$. При выполнении соотношения (6), легко видеть, что система разностных уравнений (17) является периодической, т.е. $M_{k+N} \equiv M_k$. Решение системы (17) с начальным условием $v_0 = X_0$ выписывается формулой

$$v_k = X(t_k) \prod_{\ell=0}^{k-1} X^{-1}(t_{\ell+1}) B_{\ell} X(t_{\ell}) u_0. \quad (18)$$

а матрица монодромии системы имеет вид

$$V_N = X(T) \prod_{\ell=0}^{N-1} X^{-1}(t_{\ell+1}) B_{\ell} X(t_{\ell}).$$

Следовательно, матрицы монодромии сингулярно возмущенной системы (1), (2) и системы разностных уравнений (17) совпадают.

§ 2. Системы с малым параметром

Пусть дана сингулярно возмущенная система с малым параметром

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1(t)) x, \quad (1)$$

$$x(t_{k+0}) = (L_0 + \varepsilon B_k) x(t_k), \quad (2)$$

где $A_k(t+\Gamma) \stackrel{\Gamma}{\equiv} A_k(t)$, $B_{k+N} \stackrel{N}{\equiv} B_k$, $k=1, 2, \dots$.
Решение этой системы имеет вид

$$x(t, \kappa, x_0) = H(t, t_0, \kappa, \varepsilon) x_0, \quad t \in (t_\kappa, t_{\kappa+1}] \quad (3)$$

где $x(t_0) = x_0$,

$$H(t, t_0, \kappa, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) \prod_{t_0}^{\kappa} X^{-1}(t_\varepsilon, \varepsilon) (L_0 + \varepsilon B_\varepsilon) X(t_\varepsilon, \varepsilon).$$

а матрица монодромии

$$H(T, t_0, N, \varepsilon) = X(T, \varepsilon) \prod_{t_0}^N X^{-1}(t_\varepsilon, \varepsilon) (L_0 + \varepsilon B_\varepsilon) X(t_\varepsilon, \varepsilon).$$

Как следует из § I, решение $x(t, x_0)$ системы (1), (2) удовлетворяет системе разностных уравнений

$$u_{\kappa+1} = M_\kappa(\varepsilon) u_\kappa, \quad (4)$$

где $M_{\kappa+N}(\varepsilon) \stackrel{N}{\equiv} M_\kappa(\varepsilon) = X(t_{\kappa+1}, \varepsilon) X^{-1}(t_\kappa, \varepsilon) (L_0 + \varepsilon B_\kappa)$.

Известно [1], что фундаментальная матрица $\tilde{X}(t, \tau, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) X^{-1}(\tau, \varepsilon)$ системы (I) является аналитической функцией ε в окрестности $\varepsilon = 0$ при любых t и τ , т.е.

$$\tilde{X}(t, \tau, \varepsilon) = X_0(t, \tau) + \varepsilon X_1(t, \tau) + \varepsilon^2 X_2(t, \tau) + \dots$$

Поэтому, учитывая соотношение (6) первого параграфа, т.е.

$$t_{k+N} = t_k + T,$$

систему разностных уравнений (4) можно представить в виде

$$u_{k+1} = (D_0 + \varepsilon F_k(\varepsilon)) u_k, \quad (5)$$

где $D_0 = \exp\left(\frac{T}{N} A_0\right) L_0$,

$$F_k(\varepsilon) = \left(\exp\left(\frac{T}{N} A_0\right) B_k + X_i(t_{k+N}, t_k) L_0 \right) + \varepsilon \left(X_i(t_{k+N}, t_k) B_k + X_2(t_{k+N}, t_k) L_0 \right) + \dots$$

Поскольку для всех $i = 1, 2, \dots$

$$X_i(t_{k+N}, t_{k+N}) = X_i(t_{k+N} + T, t_{k+N} + T) = X_i(t_{k+N}, t_k),$$

то $F_{k+N}(\varepsilon) = F_k(\varepsilon)$, т.е. система (5) периодическая. Матрица монодромии системы разностных уравнений (5)

$$U_N(\varepsilon) = D_0^N + \varepsilon R_N(\varepsilon)$$

поэтому имеет место следующая теорема

ТЕОРЕМА 2. Если собственные значения матрицы

$$D_0 = \exp\left(\frac{T}{N} A_0\right) L_0$$

лежат внутри единичной окружности, то при достаточно малом $\epsilon > 0$ тривиальное решение сингулярно возмущенной системы (1), (2) является равномерно асимптотически устойчивым.

В § I был рассмотрен аналог теоремы Ляпунова о приводимости для однородных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами вида (1), (2) параграфа первого. Для сингулярно возмущенных систем с малым параметром вида (1), (2) определенный интерес представляет следующий аналог теоремы о приводимости проведенной в работе [3].

ТЕОРЕМА 3. Пусть собственные значения λ_j , μ_i соответственно матриц L_0 и A_0 таковы, что

$$\frac{\mu_p}{\mu_q} \neq e^{\frac{2\pi i \omega}{T}}, \quad \frac{\lambda_p}{\lambda_q} \neq e^{\frac{2\pi i \omega}{N}}, \quad p \neq q, \quad \omega = 1, 2, \dots \quad (6)$$

и точки удара связаны соотношением $t_{k+N} = t_k + \epsilon T$
 $k = 1, 2, \dots$. Тогда для систем вида (1), (2) существует замена переменной

$$y(t) = (I - \epsilon C(t, k)) x(t), \quad (7)$$

где $C(t, k)$ — ограниченная матрица, приводящая систему (1), (2) к системе с постоянными коэффициентами, за исключением коэффициента при ϵ^2

$$\frac{dy}{dt} = (A_0 + \varepsilon S_k + \varepsilon^2 Q(t, k, \varepsilon)) y(t) \quad (8)$$

$$y(t_{k+0}) = (L_0 + \varepsilon R + \varepsilon^2 \theta(k, \varepsilon)) y(t_k), \quad (9)$$

где $Q(t, k, \varepsilon)$, $\theta(k, \varepsilon)$ - равномерно ограниченные по t, k и $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если собственные значения $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ матрицы A_0 удовлетворяют соотношению (6), то [3] существует периодическая с периодом $T > 0$ матрица $Z(t)$ такая, что замена $y(t) = (J - \varepsilon Z(t)) x(t)$ приводит систему (I) к системе с постоянными

$$\frac{dy}{dt} = (A_0 + \varepsilon S + \varepsilon^2 Q(t, \varepsilon)) y(t),$$

где $Q(t, \varepsilon)$ - ограниченная матрица. Определим матрицу $C(t, k)$ выражением

$$C(t, k) = Z(t) + V_{k+1}, \quad t \in (t_k, t_{k+1}]. \quad (10)$$

Замена переменной (7) приводит систему (I) к системе

$$\frac{dy}{dt} = (A_0 + \varepsilon S_k + \varepsilon^2 Q_1(t, k, \varepsilon)) y(t), \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

где $S_k = S + A_0 V_{k+1} - V_{k+1} A_0$,

$Q_1(t, k, \varepsilon)$ - равномерно ограниченная по t и k матрица. Соотношение (2) при такой замене принимает вид

$$y(t_{k+0}) = [L_0 + \varepsilon (B_k + L_0 V_k - V_{k+1} L_0) + \varepsilon L_0 Z(t_k) - \varepsilon Z(t_k) L_0 + \varepsilon^2 \theta_1(t_k, k, \varepsilon)] y(t_k).$$

Возникает вопрос о возможности выбора матриц V_{k+1} и V_k так, чтобы

$$B_k + L_0 V_k - V_{k+1} L_0 + L_0 Z(t_k) - Z(t_k) L_0 = R.$$

Если выполняется соотношение $t_{k+N} = t_k + T$, то легко видеть, что

$$D_{k+N} = B_{k+N} + L_0 Z(t_{k+N}) - Z(t_{k+N}) L_0 = B_k + L_0 Z(t_k) - Z(t_k) L_0 = D_k.$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: существует ли постоянная матрица R такая, что система

$$D_k + L_0 V_k - V_{k+1} L_0 = R \quad (II)$$

имеет периодическое решение. В работе [4] показано, что система (II) имеет периодическое решение с периодом N в том случае, если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы L_0 таковы, что

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_q} \neq \exp\left(\frac{2\pi i \omega}{N}\right), \quad p \neq q, \quad \omega = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Теорема доказана.

Докажем следующую теорему, являющуюся аналогом соответствующей теоремы о первом приближении для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему

$$\frac{dy}{dt} = (A + Q(t))y, \quad (I2)$$

$$y(t_k+0) = (B + R_k)y(t_k), \quad (I3)$$

где $\|Q(t)\| \leq \gamma$, $\|R_k\| \leq \beta$ при $t \in [0, +\infty)$, $k=1, 2, \dots$.
 Вряду с этой системой, рассмотрим также соответствующую
 "приведенную" сингулярно возмущенную систему

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (I4)$$

$$x(t_{k+0}) = B x(t_k). \quad (I5)$$

Решение $x(t, k, \tau_0) \equiv 0$, $t \in (t_k, t_{k+1}]$, системы (I4),
 (I5) назовем равномерно асимптотически устойчивыми, если
 для любого $\varepsilon > 0$ существует такие $\delta_0 > 0$,
 $\delta(\varepsilon) > 0$ и такое натуральное $N(\varepsilon)$, что из
 $|x(t, k_0, \tau_0)| < \delta(\varepsilon)$ следует $|x(t, k, \tau_0)| < \varepsilon$
 для $k \geq k_0$, а из $|x(t, k_0, \tau_0)| < \delta_0$ следует
 $|x(t, k, \tau_0)| < \varepsilon$ для $k \geq k_0 + N(\varepsilon)$.

ТЕОРЕМА 4. Если тривиальное решение сингулярно воз-
 мущенной системы (I4), (I5) равномерно асимптотически ус-
 тойчиво, то при достаточно малых γ и β тривиальное
 решение системы (I2), (I3) тоже будет равномерно асимпто-
 тически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из § I, решения системы
 (I4), (I5) имеет вид

$$x(t, k, x_0) = H(t, t_0, k) x_0, \quad t \in (t_k, t_{k+1}],$$

$$\text{где } H(t, t_0, k) = X(t) \prod_{t_0}^k X^{-1}(t_i) B X(t_i).$$

$X(t)$ - матрицант уравнения (I4).

Соответствующая система разностных уравнений имеет вид

$$v_{k+1} = M_k v_k, \quad v_k = x(t_k, x(t_0)), \quad (I6)$$

где $M_k = X(t_{k+1}) X^{-1}(t_k) B$. Решение системы (I2), (I3) можно выписать следующим образом

$$y(t, y(t_k)) = X(t) X^{-1}(t_k) (B + R_k) y(t_k) + \\ + \int_{t_k}^t X(t) X^{-1}(\tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau,$$

где $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Соответствующая неоднородная система разностных уравнений дается соотношением

$$u_{k+1} = X(t_{k+1}) X^{-1}(t_k) B u_k + X(t_{k+1}) X^{-1}(t_k) R_k u_k + \\ + \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}) X^{-1}(\tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau, \quad (I7)$$

где $u_k = y(t_k, y(t_0))$. Прежде чем оценивать последние два слагаемых (I7), покажем, что для всех $t \in (t_k, t_{k+1}]$

$$\frac{|y(t)|}{|y(t_{k+0})|} \leq L$$

равномерно по k , если $y(t_{k+0}) \neq 0$. Действительно, пусть

$$|z(t)| = \frac{|y(t)|}{|y(t_{k+0})|}$$

Тогда из $y(t, y(t_k)) = X(t) X^{-1}(t_k) y(t_k + 0) +$

$$+ \int_{t_k}^t X(t) X^{-1}(\tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau$$

при $t \in [t_k, t_{k+1}]$, следует

$$|z(t)| \leq |X(t) X^{-1}(t_k)| +$$

$$+ \int_{t_k}^t |X(t) X^{-1}(\tau)| |Q(\tau)| |z(\tau)| d\tau,$$

$$|z(t)| \leq C + \gamma \int_{t_k}^t C |z(\tau)| d\tau,$$

$$|z(t)| \leq C e^{\gamma C(t-t_k)} \leq C e^{\gamma C m_0} < L$$

где $t - t_k \leq t_{k+1} - t_k \leq m_0$. Таким образом, последние два слагаемых (I7) оцениваются следующим образом:

$$|X(t_{k+1}) X^{-1}(t_k) R_k u_k| < C \beta |y_k|,$$

$$\left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} X(t_{k+1}) X^{-1}(\tau) Q(\tau) y(\tau) d\tau \right| \leq M \gamma |y_k|$$

и за счет выбора γ, β могут стать как угодно малыми.

Отсюда следует утверждение теоремы.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A x \quad (18)$$

$$x(t_{k+0}) = (L + \varepsilon B) x(t_k), \quad (19)$$

где A, L, B - некоторые постоянные матрицы размерности $m \times m$. Решение этой системы записывается в виде:

$$x(t, k, x_k) = e^{\varepsilon A(t-t_k)} (L + \varepsilon B) x_k,$$

при $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Отсюда, при $t = t_{k+1}$

$$x(t_{k+1}, k, x_k) = e^{\varepsilon A(t_{k+1}-t_k)} (L + \varepsilon B) x_k$$

или

$$u_{k+1} = e^{\varepsilon A(t_{k+1}-t_k)} (L + \varepsilon B) u_k.$$

Если $\{t_k\}_{0 \leq k < +\infty}$ удовлетворяют соотношению (6) первого параграфа, то $t_{k+1} - t_k = S_k$, $S_{k+n} \cong S_k$. Используя разложение матрицы $e^{\varepsilon S_k A}$ в ряд по степеням ε в окрестности $\varepsilon = 0$, получим

$$u_{k+1} = (L + \epsilon B + \epsilon s_k AL + \epsilon^2 \theta(k, \epsilon)) u_k, \quad (20)$$

где $\|\theta(k, \epsilon)\| = o(\epsilon)$. В работе [4] доказано существование замены $v_k = (J - \epsilon \tau_k J) u_k$, где τ_k — некоторая периодическая последовательность скалярных величин, $\tau_{k+N} \equiv \tau_k$, приводящая систему (20) к системе с постоянными коэффициентами

$$v_{k+1} = (L + \epsilon(B + P) + Q_1(k, \epsilon)) v_k, \quad (21)$$

где $\|Q_1(k, \epsilon)\| = o(\epsilon)$, а τ_k определяется из разностного уравнения

$$\tau_k L + s_k AL + \tau_{k+1} L = P. \quad (22)$$

Решая (22), получим

$$P = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} s_k \right) AL = \frac{1}{N} TAB.$$

Таким образом, система (21) принимает вид

$$v_{k+1} = \left(L + \epsilon \left(B + \frac{1}{N} AL \right) + Q_1(k, \epsilon) \right) v_k.$$

Отсюда получаем следующий результат: если собственные значения матрицы

$$R = L + \varepsilon \left(\frac{T}{N} AL + B \right)$$

расположены внутри единичной окружности, то тривиальное решение системы (18), (19) будет равномерно асимптотически устойчиво при достаточно малых ε .

В заключение выражаем глубокую благодарность Е.Ф.Царькову за постановку задачи и ценные замечания.

Литература

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. М., 1972. 718 с.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971. 309 с.
3. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971. 297 с.
4. Зивихин Б.М., Мастерков А.С. Об устойчивости решений линейных систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами. - В кн.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, 1974. 124 с.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО
ФЕРРОМАГНЕТИКА В ЧЕТВЕРТОМ ПОРЯДКЕ ТЕОРИИ
ВОЗМУЩЕНИЙ

В. В. Солотарев

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Методом диаграммной техники выводятся общие выражения для массового оператора квазичастиц в четвертом порядке теории возмущений.

Важная физическая характеристика системы — спектр элементарных возбуждений, — как известно [1], определяется полусом временной запаздывающей (оперегающей) функции Грина G^R (G^A) в нижней (верхней) полуплоскости. Действительная и мнимая части полуса соответствуют энергии и затуханию квазичастиц. В случае слабого взаимодействия между частицами обратную функцию Грина можно разложить в ряд теории возмущений и ограничиться вычислением нескольких первых членов ряда. Хорошо известны [2] расчеты $(G^R)^{-1}$ во втором порядке теории возмущений по взаимодействию для спиновой и фононной систем. Редко встречаются расчеты в четвертом порядке: в работе [3] найдено затухание фонона из-за четырехфононовых процессов, а в [4, 5] — релаксационные характеристики фонона и магнона, обусловленные спин-фононным взаимодействием с учетом кубического ангармонизма. Цель данной статьи — изложение основных технических приемов, позволяющих вывести поправку четвертого порядка к обратной функции Грина квазичастиц (фононов, магнонов).

При конечных температурах сначала рассчитывают мацусаровскую (каузальную) функцию Грина (G) , а затем путем аналитического продолжения строят G^R (G^A).

Связь между запаздывающей и каузальной функциями Грина дается равенством [1] :

$$G^R(i\omega_n) = G(\omega_n), \quad \omega_n > 0. \quad (1)$$

Здесь ω_n - дискретная частота, $\omega_n = (2n+1)\pi/\beta\hbar$ для ферми-частиц, $\omega_n = 2n\pi/\beta\hbar$ для бозе-частиц; $\beta = (\kappa T)^{-1}$, T - температура, κ - постоянная Больцмана.

Ниже рассматривается спин-фононная бозе-система, описывающая гейзенберговский ферромагнетик при низких температурах. Гамильтониан системы имеет вид [6] :

$$H = H_0 + H_{int},$$

$$H_0 = \sum_{\vec{k}, i} \hbar \omega_{\vec{k}, i} b_{\vec{k}, i}^\dagger b_{\vec{k}, i} + \sum_{\vec{k}, i} \hbar \omega_{\vec{k}, i} a_{\vec{k}, i}^\dagger a_{\vec{k}, i}, \quad (2)$$

$$H_{int} = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, i} V_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, i} b_{\vec{k}_1, i}^\dagger b_{\vec{k}_2, i} a_{\vec{k}_2, i} \Delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) + \text{к.с.}$$

В формулах (2) $b_{\vec{k}, i}^\dagger, b_{\vec{k}, i}, a_{\vec{k}, i}^\dagger, a_{\vec{k}, i}$ - операторы рождения и уничтожения магнона и фонона соответственно, $\omega_{\vec{k}, i}, \omega_{\vec{k}, i}$ - частоты магнона и фонона с поляризацией i , V - матричный элемент взаимодействия, \vec{k} - волновой вектор. Отметим одно свойство гамильтониана H_{int} , которое проявляется в общих выражениях для функции Грина: каждая вершина (узел) диаграммы Фейнмана содержит две магнонные линии (входящую и выходящую) и одну фононную линию, не имеющую направления вследствие четности функции Грина фонона.

Введем согласно [1] каузальную функцию Грина:

$$G_{\vec{q}}(\omega_n) = \frac{1}{G_0^{-1} - \sum_{\vec{q}} \bar{q}(\omega_n)}, \quad (3)$$

$$G_0^{-1} = \omega_{\vec{q}} - i\omega_n.$$

где $\Sigma_{\vec{q}}$ - массовый оператор (МО). Задающая функция Грина действительной переменной ω определяется следующим образом:

$$G_{\vec{q}}(\omega + i0) = G_{\vec{q}}^*(\omega), \quad (4)$$

$$\Sigma_{\vec{q}}(\omega + i0) = \Delta_{\vec{q}}(\omega) - i\Gamma_{\vec{q}}(\omega).$$

Величины Δ и Γ связаны дисперсионным соотношением:

$$\Delta_{\vec{q}}(\omega) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega \Gamma_{\vec{q}}(\Omega)}{\omega - \Omega} \quad (5)$$

Как видно из формул (3) - (4), спектр системы определяется массовым оператором $\Sigma_{\vec{q}}(\omega_n)$, равным сумме различных неприводимых собственно энергетических частей [1]. Аналогичное выражение, соответствующее какой-либо диаграмме, содержит операции суммирования и интегрирования по всем независимым внутренним частотам и импульсам. В первую очередь удобно просуммировать выражение по дискретным частотам ω_n . Выпишем для этого вспомогательные формулы:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a - i\omega_n} = \beta \hbar \left[\frac{1}{2} + n(a) \right], \quad (6)$$

$$\sum_{n=-i0}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n \beta \hbar \delta}}{a - i\omega_n} = \beta \hbar [1 + n(a)]. \quad (7)$$

$$\sum_n \frac{1}{(a - i\omega_n)(b - i\omega_n)} = \beta \hbar \frac{n(a) - n(b)}{b - a}, \quad a \neq b \quad (8a)$$

$$\sum_n \frac{1}{(a - i\omega_n)(b - i\omega_n)} = \beta \hbar \left(-\frac{\partial n(a)}{\partial a} \right), \quad a = b \quad (8b)$$

$$\sum_n \frac{1}{(a - i\omega_n)(b - i\omega_n)(c - i\omega_n)} =$$

$$= \beta \hbar \left[\frac{n(a)}{(b-a)(c-a)} - \frac{n(b)}{(b-a)(c-b)} + \frac{n(c)}{(c-a)(c-b)} \right], \quad (9a)$$

$$= \frac{\beta \hbar}{c-b} \left[\frac{n(a) - n(b)}{b-a} - \frac{n(a) - n(c)}{c-a} \right], \quad (9b)$$

где $n(a) = (e^{\beta \hbar a} - 1)^{-1}$ - равновесные числа заполнения.

Произведения функций Грина свободных частиц (т.е. произведения простых дробей), соответствующие диаграмме Фейнмана, удобно разлагать на слагаемые с меньшим числом множителей, пользуясь формулами (6) - (9б). В случае большого числа дробей (в высших порядках теории возмущений) возможны несколько вариантов разложения. Однако следует реализовать тот вариант, который наилучшим образом отвечает цели преобразования. Например, в четвертом порядке теории возмущений при использовании формул (9) разумно так группировать множители, чтобы результат разложения содержал "четырёхчастичный" знаменатель в качестве общего множителя. Для этой цели более подходит формула (9б): в отличие от (9а) она не является симметричной относительно перестановки параметров (а, в, с), но зато содержит общий знаменатель.

Запишем полученные в соответствии с изложенными выше правилами результаты суммирования по внутренним частотам основных диаграмм четвертого порядка, которые изображены на рис. I.

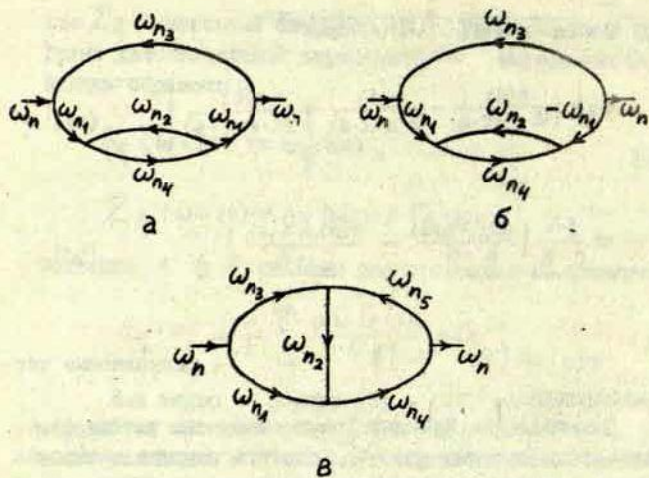


Рис. 1.

$$\frac{-(\beta \hbar)^2 (n_{\vec{k}_2} - n_{\vec{k}_4})}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_4}}$$

$$\times \left[\frac{n_{\vec{k}_1} - n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2})}{(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_1})^2} - \frac{n_{\vec{k}_1} - n_{\vec{k}_3}}{(i\omega_n + \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_1})^2} \right]$$

$$+ \frac{\partial n_{\vec{k}_1}}{\partial \omega_{\vec{k}_1}} \left(\frac{1}{\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_1}} - \frac{1}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_1}} \right), \quad (10a)$$

$$\frac{(\beta \hbar)^2 (n_{\vec{k}_2} - n_{\vec{k}_4})}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_4}}$$

$$\times \frac{1}{2\omega_{\vec{k}_1}} \left[\frac{n_{\vec{k}_1} - n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2})}{\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3}} - \frac{n_{\vec{k}_1} - n_{\vec{k}_3}}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{n(-\omega_{\vec{k}_1}) - n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2})}{\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3}} + \frac{n(-\omega_{\vec{k}_1}) - n_{\vec{k}_3}}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3}} \right], \quad (100)$$

$$\frac{(\beta \hbar)^2}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_4}} \left\{ \frac{n_{\vec{k}_4} - n_{\vec{k}_2}}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_4}} \times \right.$$

$$\times \left[\frac{n_{\vec{k}_1} - n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2})}{\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3}} - \frac{n_{\vec{k}_1} - n(-\omega_{\vec{k}_2})}{i\omega_n - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3}} \right] +$$

$$+ \frac{n_{\vec{k}_2} - n_{\vec{k}_3}}{i\omega_n + \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_4}} \times$$

$$\times \left[\frac{n_{\vec{k}_1} - n(-\omega_{\vec{k}_2})}{i\omega_n - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3}} - \right. \quad (10B)$$

$$\left. - \frac{n(-\omega_{\vec{k}_2}) - n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2})}{\omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_4}} \right] \Big\} .$$

где $n_{\vec{k}_i} \equiv n(\omega_{\vec{k}_i})$.

Заметим, что две части формулы (10в) могут описывать разные процессы, протекающие в спин-фононной системе (2). Например, диаграмма на рис.2 дает вклад в функцию Грина магнона, соответствующую четырехчастичным спин-фононным (а) и спин-спиновым (б) взаимодействиям.

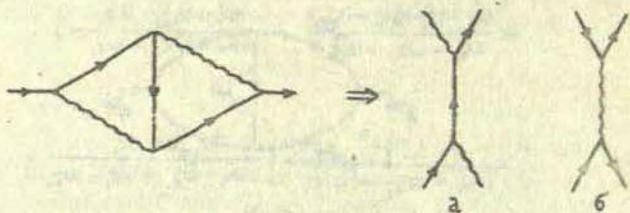


Рис.2. Прямая линия обозначает магнон, волнистая - фонон.

Дисперсионное соотношение (5) позволяет ограничиться нахождением с помощью громоздкой диаграммной техники только мнимой части массового оператора квазичастиц.

При написании мнимой части полезны следующие тождества:

$$\begin{aligned}
 & (n_{\vec{k}_4} - n_{\vec{k}_2}) [n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2}) - n_{\vec{k}_2}] \\
 &= (n_{\vec{k}_4} - n_{\vec{k}_2}) [n(\omega_{\vec{k}_4} - \omega_{\vec{k}_2}) - n_{\vec{k}_2}] \quad (II) \\
 &= [n_{\vec{k}_2} - n(-\omega_{\vec{k}_2})] [n(\omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_2}) - n_{\vec{k}_2}] .
 \end{aligned}$$

Формулы (I0) - (II) после применения правил диаграммной техники и несложных преобразований, включающих изменения направлений стрелок на диаграммах, "сдвиги" импульсов при суммировании во всей зоне Бриллюэна, использование закона сохранения и других, дают возможность компактно записать мнимую часть МО. Примеры таких выражений можно найти в работах [3-5], где рассматриваются соответственно фонов-фононные и спин-фононные процессы в четвертом порядке теории возмущений, о чем указано выше. Приведем для сравнения мнимую часть МО магнона, описывающего четырехспиновые процессы рассеяния в четвертом порядке теории возмущений по H_{int} (2) (см., например, рис.2):

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \sum_{\vec{q}} (\omega + i0) &= \frac{\pi}{2\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{l}_1, \vec{l}_2} \delta(\omega + \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2 + \vec{k}_1} - \omega_{\vec{q} - \vec{k}_1}) \times \\
 &\times [n_{\vec{k}_1} - n_{\vec{k}_2 + \vec{k}_1}] [1 + n_{\vec{q} - \vec{k}_1} + n(\omega - \omega_{\vec{q} - \vec{k}_1})] \times \\
 &\times \{ V_{\vec{q}\vec{q} - \vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{l}_2} V_{\vec{k}_1, -\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{l}_2} \times \\
 &\times ((\omega_{\vec{k}_1, \vec{l}_1} + \omega_{\vec{q} - \vec{k}_1} - \omega)^{-1} + (\omega - \omega_{\vec{q} - \vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_1, \vec{l}_1})^{-1}) + \\
 &+ V_{\vec{q}\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{q} - \vec{k}_1, -\vec{k}_2, \vec{l}_1} V_{\vec{q} - \vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{q} - \vec{k}_1, -\vec{k}_2, \vec{l}_1} \times \\
 &\times ((\omega_{\vec{q} - \vec{k}_1, -\vec{k}_2, \vec{l}_1} + \omega_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2} - \omega)^{-1} + (\omega - \omega_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2} + \omega_{\vec{q} - \vec{k}_1, -\vec{k}_2, \vec{l}_1})^{-1}) \}^2.
 \end{aligned}
 \tag{I2}$$

Как видно, здесь совокупность матричных элементов и знаменателей представляет собой полный квадрат (или квадрат модуля, поскольку матричные элементы V — чисто мнимые величины), что согласуется с общими положениями и вероятности взаимодействия (средняя вероятность взаимодействия в единицу времени равна среднему значению затухания квазичастицы с данным импульсом по ее равносному распределению [2]).

Отметим в заключение, что расчеты релаксационных характеристик квазичастиц в более высоких, чем четвертое, приближениях теории возмущений практически трудноисполнимы вследствие большого числа независимых внутренних переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., 1962, 443 с.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спин-волны. М., 1967, 368 с.
3. Kwok P.C., Miller P.B. Attenuation of High-Energy Transverse Phonons. — "Phys.Rev.", 1966, 146, N 2, pp. 592 - 597.
4. Золотарев В.В. Поляризационный оператор фона в четвертом приближении теории возмущений. — "Изв.АН ЛатвССР. Сер. физ. и техн. наук", 1974, № 6, с. 23-30.

- ✓
5. Золотарев В.В. Массовый оператор магнона в четвертом порядке теории возмущений.- "Изв.АН ЛатвССР.. Сер. физ.и техн. наук", 1975, № I, с.39-44.
 6. Кащеев В.Н., Швец А.Е. Влияние магнитного поля на спектр квазичастиц в ферродieleктрике.- "Изв. АН ЛатвССР. Сер.физ. и техн.наук", 1967, № 3, с.19-23.

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ С НЕСУММИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

А.И. Ломакина

Вычислительный центр ЛГУ им. П. Стучки

Рассмотрим краевую задачу

$$x'' + \frac{\kappa}{t} x' = f(t, x, x'), \quad (1)$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = b, \quad (2)$$

где $\kappa > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $f(t, x, x')$ - непрерывна для $t \in I$,
 $x, x' \in \mathbb{R}$; $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $I = [0, 1]$.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $x(t)$ - непрерывно-дифференцируемую при $t \in I$, удовлетворяющую краевым условиям (2), а при $t \in (0, 1]$ удовлетворяющую уравнению (1) и имеющую непрерывную вторую производную $x''(t)$.

Задачи такого типа возникают в приложениях (см. [1], [2], [3], [8]).

В работе [8], например, рассматривается один численный метод для краевой задачи

$$\frac{1}{x^{a-1}} \frac{d}{dx} \left(x^{a-1} \frac{dc_j}{dx} \right) = f_j(c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$\frac{dC_j}{dx} = 0, \quad x=0, \quad j=1, 2, \dots, n;$$

$$\frac{2}{sh_j} \frac{dC_j}{dx} + C_j = C_{0j}, \quad x=1,$$

где $a = 1, 2, 3, \dots$, C_j - концентрация, sh_j - коэффициент.

Продифференцировав первый член в уравнении и сделав преобразования, получим уравнение

$$\frac{d^2 C_j}{dx^2} + \frac{a-1}{x} \frac{dC_j}{dx} = f_j(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

рассматриваемого нами типа.

Следует заметить, что теоремы существования и единственности в указанных работах приводятся для уравнений, в которых правая часть не зависит от x .

Приведем достаточные условия существования и единственности задачи (1), (2), а также рассмотрим применение метода последовательных приближений к нахождению численного решения задачи (1), (2).

II. I. ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

1) Существует $d, \beta \in C^2(I)$;

$$2) \quad d'' + \frac{\kappa}{t} d' \geq f(t, d, d'), \quad t \in I;$$

$$\beta'' + \frac{\kappa}{t} \beta' \leq f(t, \beta, \beta'), \quad t \in I,$$

$$3) \quad d(t) \leq \beta(t), \quad t \in I;$$

$$4) \quad d(1) \leq \beta \leq \beta(1), \quad \beta'(0) \leq 0 \leq d'(0);$$

- 5) Существует определенная и непрерывная для $s > 0$ функция $\varphi(s) > 0$ такая, что

$$|f(t, x, x')| \leq \varphi(|x'|)$$

для $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$, $t \in I$, $x' \in R$,

причем
$$\int_0^{\infty} \frac{s ds}{\varphi(s)} = \infty.$$

Тогда существует решение $u(t)$ задачи (1), (2) такое, что $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, $t \in I$.

Заметим, прежде всего, следующее: если существует решение $x(t)$ задачи (1), (2), то, интегрируя тождество (1) от τ до t , $0 < \tau < t < 1$ получим

$$x'(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^k \left[x'(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, x(s), x'(s)) \left(\frac{s}{\tau}\right)^k ds \right]. \quad (3)$$

Для выполнения краевого условия на левом конце необходимо

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} f(s, x(s), x'(s)) \left(\frac{s}{\tau}\right)^k ds. \quad (4)$$

Заменяя теперь $x'(\tau)$ в (3) выражением (4) будем иметь

$$x'(t) = \int_0^t f(s, x(s), x'(s)) \left(\frac{s}{t}\right)^k ds. \quad (5)$$

Интегрируя $x'(t)$ на интервале $[t, 1]$, получим

$$x(t) = b - \int_t^1 x'(s) ds. \quad (6)$$

Таким образом, всякое решение задачи (1), (2) удовлетворяет системе (5), (6) и обратно всякое решение (5), (6) удовлетворяет задаче (1), (2).

Для доказательства теоремы существования нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА. Если существует $L > 0$ такое, что

$$|f(t, x, x')| \leq L,$$

$$t \in I, \quad x, x' \in R,$$

то краевая задача (1), (2) имеет по крайней мере одно решение. (При $k=0$ этот результат следует из работы R. Conti (см. [9]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы. Для доказательства существования решения рассмотрим наряду с задачей (1), (2) задачу (7), (2).

$$x'' + \frac{k}{t+\varepsilon} x' = f(t, x, x'), \quad t \in (0, 1) \quad (7)$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = b, \quad (2)$$

решение $x_\varepsilon(t)$ которой, существует по теореме I.I. (см. [4]). Рассматривая уравнение (7) как дифференциальное уравнение первого порядка относительно x' и интегрируя его в пределах от 0 до t , $t \in I$, получим

$$x'_\varepsilon(t) = \int_0^t f(s, x_\varepsilon(s), x'_\varepsilon(s)) \left(\frac{s+\varepsilon}{t+\varepsilon}\right)^k ds, \quad (8)$$

Интегрируя $x'_\varepsilon(t)$ на $[t, 1]$, $t \in I$ имеем

$$x_\varepsilon(t) = b - \int_t^1 x'_\varepsilon(s) ds. \quad (9)$$

Из (8) и ограниченности функции $f(t, x, x')$ следует равномерная ограниченность $x'_\varepsilon(t)$, $t \in I$.

Действительно,

$$|x'_\varepsilon(t)| \leq \frac{L}{(k+1)(t+\varepsilon)^k} [(t+\varepsilon)^{k+1} - \varepsilon^{k+1}] \leq \frac{L}{k+1} (t+\varepsilon).$$

Положив $N = \frac{2L}{k+1}$, имеем $|x'_\varepsilon(t)| \leq N, t \in I, \varepsilon \in (0, 1]$.
 Из равномерной ограниченности $x'_\varepsilon(t)$ и выражений (9) и (7) следует равномерная ограниченность $x_\varepsilon(t)$ и $x''_\varepsilon(t)$ $t \in I, \varepsilon \in (0, 1]$.

Действительно из (9) имеем

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |b| + N, t \in I, \varepsilon \in (0, 1].$$

а из (7) следует

$$|x''_\varepsilon(t)| \leq \frac{k}{1+\varepsilon} \frac{L}{k+1} (t+\varepsilon) + |f(t, x_\varepsilon(t), x'_\varepsilon(t))| \leq 2L, \\ t \in I, \varepsilon \in (0, 1].$$

Используя ограниченность $f(t, x, x')$, выражения (8), (9), легко показать равностепенную непрерывность $x_\varepsilon(t), x'_\varepsilon(t)$. Тогда, как следует из теоремы Арцеля, при $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$, $x_\varepsilon(t)$ сходится равномерно к непрерывной функции $x(t), t \in I$, а $x'_\varepsilon(t)$ к непрерывной функции $x'(t), t \in I$. Учитывая равномерную непрерывность подынтегральной функции в выражении (8) и равномерную сходимость $x_\varepsilon(t)$ и $x'_\varepsilon(t)$ при $n \rightarrow \infty, \varepsilon = \frac{1}{n}$, перейдем к пределу в выражении (8) и получим в пределе выражение (5). Рассматривая теперь выражение (9) при $n \rightarrow \infty, \varepsilon = \frac{1}{n}$, получим в пределе выражение (6).

Таким образом, получим непрерывно-дифференцируемую функцию $x(t), t \in I$, являющуюся решением задачи (1), (2). Тем самым лемма доказана.

Учитывая равномерную ограниченность $x''_\varepsilon(t), t \in I, \varepsilon \in (0, 1]$ заметим, что $x''(t)$ можно сделать непрерывной $\forall t \in I$.

$$\text{Действительно, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x'(t) - x'(0)}{t} = \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t f(s, x(s), x'(s)) \left(\frac{s}{t}\right)^k ds}{t} = \frac{f(0, x(0), 0)}{k+1}.$$

Положив $x''(0) = \frac{f(0, x(0), 0)}{\kappa+1}$, будем иметь, что $x''(t)$ непрерывна $\forall t \in I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы. Пусть $N = 1 + \max\{M, \max\{\alpha(t), \max\{\beta'(t), t \in I\}\}$, где M определяется из уравнения

$$\int_0^M \frac{s ds}{\varphi(s)} = \max_I \beta(t) - \min_I \alpha(t).$$

Пусть $\varphi(t, x, x') = f(t, x, \varepsilon(-N, x', N))$, $\alpha(t) = u(t) = \beta(t)$, $t \in I$, где функция ε заданная на подмножестве из R^3 и принимающая значения из R , определяется следующим образом

$$\delta(x, y, z) = \begin{cases} x & , y < x \leq z \\ y & , x \leq y \leq z \\ z & , x = z < y \end{cases}$$

Определим также функцию $F(t, x, x')$

$$F(t, x, x') = \varphi(t, \delta(\alpha, x, \beta), x') + \delta(0, x - \beta, 1) - \delta(0, x - \alpha, 1).$$

$F(t, x, x')$ - непрерывна и ограничена при $t \in I, x, x' \in R$. Как следует из леммы задача (IO), (2)

$$x'' + \frac{\kappa}{t} x' = F(t, x, x') \quad (IO)$$

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = b \quad (2)$$

имеет решение $u(t)$.

Покажем, что $\alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t)$, $t \in I$. Докажем правую часть этого неравенства. Покажем сначала, что фун-

кция $\mu(t) = \dot{u}(t) - \beta(t)$ не имеет внутренних положительных максимумов.

В противном $\exists t_0 \in (0, 1]$, $\mu(t_0) > 0$, $\mu'(t_0) = 0$.

С другой стороны для решения $u(t)$ задачи (I), (2) имеем в точке t_0

$$\begin{aligned} u(t_0) &= -\frac{\kappa}{t_0} u'(t_0) + F(t_0, u(t_0), u'(t_0)) = \\ &= \Phi(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) + \min(\mu(t_0), 1) = \\ &= -\frac{\kappa}{t_0} u'(t_0) + f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)) + \min(\mu(t_0), 1). \end{aligned}$$

Для функции $\beta(t)$ из условия (2) теоремы имеем в точке t_0

$$\beta''(t_0) \geq \frac{\kappa}{t_0} \beta'(t_0) + f(t_0, \beta(t_0), \beta'(t_0)).$$

Откуда $\mu''(t) = u''(t_0) - \beta''(t_0) > \min(\mu(t_0), 1) > 0$.

Поэтому $\mu(0) > 0$ и $\mu'(0) = 0$. С другой стороны $\mu''(0) \geq \min(\mu(0), 1) > 0$, следовательно $\mu''(t) \leq 0$, $t \in I$. Аналогично легко показать $u(t) \geq \alpha(t)$, $t \in I$.

Следовательно, $u(t)$ удовлетворяет уравнению

$$x'' + \frac{\kappa}{t} x' = \Phi(t, x, x').$$

Покажем теперь, что $-N < u'(t) < N$.

Предположим противное, $\exists t_1 \in (0, 1]$, $u'(t_1) = N$.

Пусть $\xi \in]t_1, 1]$, где ξ — ближайшая к t_1 точка слева $0 < \xi \leq t_1$, интервал, на котором $u'(t) \in [0, N]$.

Для решения $u(t)$ на интервале $[\xi, t_1]$ имеем

$$u'' + \frac{\kappa}{t} u' = \Phi(t, u, u') = f(t, u, u') \leq \psi(u').$$

Откуда

$$\frac{u' u''}{\psi(u')} + \frac{\kappa}{t} \cdot \frac{u'}{\psi(u')} \leq u'(t).$$

Проинтегрировав последнее неравенство на

$$\int_0^N \frac{u' du'}{\varphi(u')} + k \int_E^{t_1} \frac{u'^2(t) dt}{t \varphi(u'(t))} \leq \max_I \beta(t) - \min_I \alpha(t),$$

получим противоречие определению числа N .

Следовательно, $|u'(t)| < N$, $t \in I$, но тогда $u(t)$ — решение уравнения (I).

П.2. Рассмотрим вопрос единственности решения задачи (I), (2). Этому вопросу посвящены работы [1], [2]. В работе [2], например, доказательство единственности решения проводится при условии, что $f(t, x)$ — невозрастающая функция по x при фиксированном t . Мы потребуем от функции $f(t, x, x')$ еще одно дополнительное условие, такого типа условие для единственности задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(0) = A, \quad x(1) = B$$

имеются в работе [5].

ТЕОРЕМА. Пусть $f(t, x, x')$ — неубывающая по x , $t \in I$, $x, x' \in R$ и пусть далее для любого $\rho > 0$ существует суммируемая функция $v(t)$, $t \in I$ такая, что

$$\frac{f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)}{y_1 - y_2} \leq v(t), \quad (II)$$

$$t \in I, \quad x, y_1, y_2 \in [-\rho, \rho].$$

Тогда краевая задача (I), (2) не может иметь двух решений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ задачи (I), (2).

Тогда разность $u(t) = x_1(t) - x_2(t) \neq 0, t \in T$ удовлетворяет краевым условиям $u'(0) = u(1) = 0$ и уравнению

$$u'' + \frac{\kappa}{t} u' = a(t) + \beta(t) u', \quad (I2)$$

где $a(t) = f(t, x_1(t), x_1'(t)) - f(t, x_2(t), x_2'(t))$

$$\text{и } \beta(t) = \frac{f(t, x_2(t), x_2'(t)) - f(t, x_2(t), x_2'(t))}{x_2'(t) - x_2'(t)}$$

Полагая $P = \max \{ \max |x_1(t)|, \max |x_2(t)|, \max |x_1'(t)|, \max |x_2'(t)|, t \in I \}$ получаем из (II) что $\beta(t) < \beta(t), t \in I$. Из (I2) получим выражение для $u'(t)$

$$u'(t) = \exp \left(\int_{\xi}^t c(s) ds \right) \left[u'(\xi) + \int_{\xi}^t a(s) \exp \left(- \int_{\xi}^s c(\sigma) d\sigma \right) ds \right], \quad (I3)$$

где $t, \xi \in I, t > \xi$ и $c(t) = \beta(t) - \frac{\kappa}{t}$.

Так как мы предположили, что $u(t) \neq 0$, то не уменьшая общности можно считать, что $\exists t_0 \in [0, 1)$, в которой $u(t_0) > 0$. Из краевого условия на правом конце следует, что $\exists t_1 \in (t_0, 1]$, в которой $u(t_1) = 0$.

Пусть $(t_2, t_1), t_2 < t_1$, максимальный интервал, содержащий точку t_0 , в котором $u(t) > 0$. Если $u(t_2) > 0$, то как следует из выбора интервала (t_2, t_1) , $t_2 = 0$ при этом $u'(0) = 0$. Полагая в (I3) $\xi = 0$, имеем $u'(t) > 0, t \in [0, t_1]$ и $u(t_1) > 0$.

Если $u(t_2) < 0$, то $\exists \xi \in (t_2, t_1), u'(\xi) = 0$, но тогда, аналогично предыдущему, $u(t_1) > 0$.

Так как получили противоречие условию $u(t_1) = 0$, то тем самым теорема доказана.

П.3. Этот пункт посвящен нахождению численного решения задачи (I), (2). Мы воспользуемся для нахождения численного решения методом последовательных приближений, предложенным в работе 6 и применим этот метод к интегральному уравнению (I4), эквивалентному, в случае существования решения, задаче (I), (2).

$$x(t) = b - \frac{1}{\kappa-1} \int_0^t f(s, x(s), x'(s)) \left[t \left(\frac{s}{t}\right)^\kappa - s^\kappa \right] ds - \\ - \frac{1}{\kappa-1} \int_t^1 f(s, x(s), x'(s)) (s - s^\kappa) ds. \quad (I4)$$

Решение уравнения (I4) может быть получено как предел последовательности

$$x_{n+1}(t) = \sigma b + (1-\sigma) x_n(t) - \\ - \frac{\sigma}{\kappa-1} \int_0^t f(s, x_n(s), x_n'(s)) \left[t \left(\frac{s}{t}\right)^\kappa - s^\kappa \right] ds - \\ - \frac{\sigma}{\kappa-1} \int_t^1 f(s, x_n(s), x_n'(s)) (s - s^\kappa) ds, \quad (I5)$$

которая при некотором $\sigma \in (0, 1]$ сходится к решению (I4).

Для вычисления интервалов в выражении (I5) используется метод Кленшоу-Куртиса (см. [7]), суть которого заключается в том, что неопределенный интеграл $\int_{-1}^1 F(t) dt$ аппроксимируется на $[-1, 1]$ следующим матричным выражением

$$\left[\int_{-1}^1 F(t) dt \right] = B[f], \quad (I6)$$

где B - квадратная матрица $N+1$ порядка, элементы однострочковой матрицы $[f]$ даны равенством

$$f_j = f\left(-\cos \frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Правая сторона выражения (16) дает аппроксимацию интеграла в точках

$$x_j = -\cos \frac{j\pi}{N}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

Элементы b_{ij} матрицы B определяются следующим образом

$$b_{ij} = \frac{1}{N} \left\{ (1 + T_i(x_j) + \frac{1}{2} T_i(x_j)) [-1 + T_2(x_i)] + \right. \\ \left. + 2 \frac{N-1}{2i} T_2(x_j) \left[\frac{(i-1)^{2i}}{2^{2i}-1} - \frac{1}{2(N+1)} T_{2i}(x_i) + \frac{1}{2(N-1)} T_{2i}(x_i) \right] + \right. \\ \left. + T_N(x_j) \left[\frac{(i-1)^{N+1}}{N^{N+1}} T_{N+1}(x_i) + \frac{1}{2(N+1)} T_{N+1}(x_i) \right] \right\},$$

где $T_j(x_i)$ — полином Чебышева, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N-1$. В случаях $i=0$, $j=N$ выражение для b_{ij} отличается от приведенного тем, что коэффициент, стоящий перед фигурными скобками в два раза меньше.

Мы приведем здесь два примера, в которых правая часть уравнения (I) не зависит от x' , то есть имеет вид $f(t, x)$. Последний пример не имеет единственности решения. Все вычисления проделаны с заданной точностью $\epsilon = 0.001$ для $k=2$. Для удобства численного интегрирования воспользуемся заменой $s=2t-1$, которая позволяет вместо выражения (15) рассматривать выражение (18)

$$x_{n+1}(t) = \sigma \delta + (1-\sigma) x_n(t) - \frac{\sigma}{k-1} \int_{-1}^1 F(s, x_n(s)) \left[(t+1) \left(\frac{s+1}{t+1} \right)^k - \frac{(s+1)^k}{2^{k-1}} \right] ds - (18) \\ - \frac{\sigma}{k-1} \int_{-1}^1 F(-s, x_n(-s)) \left[(1-s) - \frac{(t-s)^k}{k-1} \right] ds$$

на интервале $[-1, 1]$, где $F(t, x_n(t)) = \frac{1}{4} f(t, x_n(t))$.

Пример 1.

$$F(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} (t+1) + \frac{\kappa}{4 \left(\frac{t+1}{2}\right)} (\exp(\frac{t+1}{2}) - 1), & t \in (-1, 1), \\ \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} (t+1) + \frac{1}{4} \kappa, & t = 1, \quad \delta = \exp 1 - 1. \end{cases}$$

Задача имеет точное решение

$$x(t) = \exp\left(\frac{t+1}{2}\right) - \frac{t+1}{2}.$$

Как показали вычисления в случае $\delta = 0,1; N = 8$ последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к точному решению с точностью до $\epsilon = 0,001$ в результате 56 итераций, в случае $\delta = 0,4; N = 16$ в результате 11 итераций. За нулевое приближение в том и другом случае в точках $t_j = -\omega \frac{j\pi}{N}, j = 0, \dots, N$ берется значение точного решения на правом конце $x_0(t_j) = 1,718, j = 0, 1, \dots, N$.

Пример 2.

$$F(t, x) = \frac{1}{4} a(t) x^2, \quad \delta = 0,$$

где

$$a(t) = - \frac{(\kappa+1)(\kappa+3)(\kappa+5)}{\left[1 + (\kappa+1) \frac{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}{4} + \frac{2(\kappa+1)(\kappa+3)}{3} \frac{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}{4}\right]^2}.$$

Известны два точных решения

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = \left[\frac{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}{4} + (\kappa+1) \frac{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}{4} + \frac{2(\kappa+1)(\kappa+3)}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{t+1}{2}\right)^2}{4} \right)^2 \right]^3.$$

При $\epsilon = 0,4$; $N = 8$ и $x_0(t_j) = -0,2$; $j = 0, 1, \dots, N$ последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится к $u_1(t)$ в результате 12 итераций. Во-втором случае при $N = 8$ и различных значениях ϵ решения быстро раскисываются и последовательность приближений расходится при начальных приближениях сколь угодно близких к точному решению $u(t)$.

Предложенный метод нахождения численного решения задачи (1), (2) обусловлен особенностью уравнения (1) в точке $t = 0$. Однако в некоторых случаях нарушения единственности решения задачи более эффективным методом стрельбы, при котром решается задача Коши для уравнения (1) на I с начальными условиями заданными в точке t_0 - достаточно близкой и отличной от $t = 0$. С другой стороны, для систем применение метода стрельбы, в отличие от предложенного, затруднительно.

В заключение выражаю признательность Васильеву Н.И. за руководство и помощь, оказанную в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Joseph D.D., Lundgren T.S. Quasilinear Dirichlet Problems Driven by Positive Sources. - "Archive for Rational Mechanics and Analysis", 1973, 49, No.4, p.241-269.
2. Djairo Guedes de Figueiredo. On a Boundary Value Problem Arising in the Elastic Membrane Theory. - "Anais da Academia brasil.-Cienc.", 1972, 44, No.2, p.181-183.
3. Lee O.F., Shedden J.H. On the Existence of Solutions of Nonlinear Differential Diffusion System. - "Proceedings of the Royal Society England"(A), 1971/1972, 71, No.1, p.1-7.

4. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Рига, 1973. 134 с.
5. Клоков Ю.А. Единственность решения краевых задач для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1972, УИ, № 8, с.1377-1385.
6. Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. Рига, 1963, 197 с.
7. El-Zendi S.E. Shebushchev solution of differential integral and integro differential equations. - "The Computer Journal", 1969, 12, No.3, p.282-287.
8. Ferguson B., Einlaugson A. Error Bounds for Approximate Solutions to Nonlinear Ordinary Differential Equations. - "American Institute of Chemical Engineer's Journal", 1972, 8, No.5, p.1053-1059.
9. Conti R. Equazioni differenziali ordinarie quasilineari con condizioni lineari. - "Ann.mat.pure ed.app.", 1962, 57, 49-61.

ПРИВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ
К СИСТЕМАМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ

А.С. Мастерков

Вычислительный центр ДГУ им. Н. Стучки

Рассмотрим систему

$$x_{n+1} = (A + \mu B_1(n) + \mu^2 B_2(n) + \dots + \mu^m B_m(n)) x_n \quad (1)$$

где $B_i(n) \stackrel{\Delta}{=} B_i(n+N)$, $i = 1, 2, \dots, m$; A - постоянная матрица с вещественными или комплексными элементами такая, что ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ удовлетворяют условию

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_p} \neq \exp\left(\frac{2\pi i a}{N}\right), \quad j \neq p, \quad \omega = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Преобразуем уравнение (1), положив

$$y_n = K_n x_n, \quad K_n = J - \mu H_1(n) - \mu^2 H_2(n) - \dots - \mu^m H_m(n), \quad (2)$$

где $H_i(n) \stackrel{\Delta}{=} H_i(n+N)$, $i = 1, 2, \dots, m$ и построены так, что система (1) приводится к системе с постоянными коэффициентами

$$y_{n+1} = (A + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots + \mu^m S_m + \mu^{m+1} \theta(n, \mu)) y_n, \quad (3)$$

где $\theta(n, \mu)$ - равномерно стремящаяся по n к μ -матрица.

Если существует замена (2), приводящая к системе (3), то системы (1) и (3) будут иметь с точки зрения асимптотической устойчивости тривиального решения одинаковые свойства. Произведя в (1) замену (2) получаем

$$y_{n+1} = K_{n+1} (A + \mu B_1(n) + \mu^2 B_2(n) + \dots + \mu^m B_m(n)) K_n^{-1} y_n$$

Для достаточно малого μ можно записать

$$K_n^{-1} = J + \mu H_1(n) + \mu^2 (H_2(n) + H_1^2(n)) + \mu^3 (H_3(n) + 2H_1(n)H_2(n) + H_1^3(n)) + \dots + \mu^m (H_m(n) + \dots + H_1^m(n)) + \mu^{m+1} \theta(n, \mu)$$

и система (1) принимает вид

$$y_{n+1} = \{A + \mu(B_1 - H_1(n+1)A + AH_1(n)) + \mu^2(B_2 - H_2(n+1)A + AH_2(n) + R_2) + \dots + \mu^m(B_m - H_m(n+1)A + AH_m(n) + R_m) + \mu^{m+1}\theta(n, \mu)\} y_n,$$

где R_j , $j \geq 2$ получены из матриц A, B_k, H_{k-1} , $k \leq j$ путем конечного числа алгебраических операций и следовательно $R_j(n) \triangleq R_j(n+N)$, если $B_k(n) \triangleq B_k(n+N)$, $H_{k-1}(n) \triangleq H_{k-1}(n+N)$, $k \leq j$.

Получаем следующую систему для определения матриц $H_i(n)$

$$B_1(n) - H_1(n+1)A + AH_1(n) = S_1$$

$$B_2(n) - H_2(n+1)A + AH_2(n) = S_2$$

(4)

$$B_m(n) - H_m(n+1)A + AH_m(n) = S_m$$

Таким образом, чтобы перейти к системе (3), нужно найти такие постоянные матрицы S_j , $j = 1, 2, \dots, m$, чтобы матричная система (4) допускала периодическое решение $H_i(n)$ периода N . Учитывая замечание относительно $R_j(n)$ и то, что все уравнения системы имеют вид

$$B_i(n) - H_i(n+1)A + AH_i(n) + R_i(n) = S_i, \quad (5)$$

достаточно доказать существование периодического решения $H(n)$ для матричного уравнения

$$C(n) - H(n+1)A - AH(n) = S, \quad (6)$$

где $C(n)$ - некоторая периодическая по n периода N матрица. А существование S такой, что уравнение (6) имеет периодическое решение $H(n)$ доказано в [2]. Последовательно решая уравнения системы (4), мы получим искомые матрицы $H_i(n)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Этим и завершается доказательство существования замены (2).

Аналогичный факт имеет место в случае, когда A - постоянная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell$ такими, что $|\lambda_j| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, \ell$; $\frac{\lambda_j}{\lambda_p} \neq e^{i\omega} \cdot k + p$,

ω - вещественное; $B_j(n)$, $j = 1, 2, \dots, m$ принадлежит классу \mathcal{F} (класс матриц с элементами в виде конечных сумм экспоненциальных членов вида $\alpha e^{i\omega n}$, α - комплексное, ω - вещественное).

Замену ищем в виде (2), считая, что

$$H_j(n) \in \mathcal{F}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Проведя выкладки, как и в случае периодических матриц $B_j(n)$ приходим к системе матричных уравнений (4), в которой матрицы $R_j(n)$, $j \geq 2$ получены из матриц $A, B_k(n), H_{k-1}(n)$, $k \leq j$ и $R_j(n) \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, \dots, m$, если $B_k(n), H_{k-1}(n), H_{k-1}(n+1) \in \mathcal{F}$, $k \leq j$ как и в случае периодических матриц $B_j(n)$ достаточно доказать существование S такой, что матричное уравнение

$$C(n) - H(n+1)A + AH(n) = S, \quad (6)$$

где $C(n) \in \mathcal{F}$, имеет решение $H(n) \in \mathcal{F}$.

Решим уравнение (6).

Учитывая, что $C(n) \in \mathcal{F}$ может записать

$$C(n) = e^{i\sigma_1 n} R_1 + e^{i\sigma_2 n} R_2 + \dots + e^{i\sigma_k n} R_k,$$

где R_1, R_2, \dots, R_k - некоторые постоянные матрицы с комплексными элементами; $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ - различные между собой вещественные числа. Учитывая линейный характер уравнения (6), рассмотрим только случай, когда $C(n) = e^{i\sigma n} R$.

Если $\sigma = 0$, то $C(n) \equiv R$ и полагаем $S = C(n)$, $H(n) = 0$.
 Если $\sigma \neq 0$, то полагаем $S = 0$ и ищем $H(n)$ в виде
 $H(n) = e^{i\sigma n} K$, где K - постоянная матрица. Получаем

$$e^{i\sigma(n+1)} K A = e^{i\sigma n} A K + e^{i\sigma n} R \quad \text{или}$$

$$e^{i\sigma} K A = A K + R. \quad (7)$$

Уравнение (7) будет иметь единственное решение, если

$$e^{i\sigma} K A - A K = 0 \Rightarrow K = 0 \quad (8)$$

Докажем это.

Пусть $x \in \mathcal{M}_j$, где \mathcal{M}_j - векторное подпространство, соответствующее собственному значению λ_j матрицы A [1]. Тогда согласно предположению (8) $e^{i\sigma} K A = A K$ и получаем

$$e^{i\sigma} K A - \lambda_j e^{i\sigma} K = A K - \lambda_j e^{i\sigma} K$$

$$e^{i\sigma} K (A - \lambda_j J) = (A - e^{i\sigma} \lambda_j J) K. \quad (9)$$

Для $x \in \mathcal{M}_j$ возможно несколько вариантов. Если $(A - \lambda_j J)x = 0$, то $Kx = 0$, т.е. $e^{i\sigma} \lambda_j$ не является собственным значением матрицы A .

Если $(A - \lambda_j J)^2 = 0$, то $(A - \lambda_j J)x \in \mathcal{M}_j$ и $K(A - \lambda_j J)x = 0$, $(A - e^{i\sigma} \lambda_j J)Kx = 0$, т.е. $Kx = 0$ и так далее.

Таким образом $Kx = 0 \quad \forall x \in \mathcal{M}_j$, следовательно $K = 0$.

Таким образом доказано существование решения уравнения (6), а, следовательно, и существование замены (2).

Применим полученные результаты к системе

$$\frac{dx}{dt} = (A_0 + \mu A_1(t) + \mu^2 A_2(t) + \dots + \mu^m A_m(t))x(t) \quad (10^*)$$

$$x(t_k + 0) = (B_0 + \mu B_1(t_k) + \mu^2 B_2(t_k) + \dots + \mu^m B_m(t_k))x(t_k), \quad (10^{**})$$

где $A_i(t) \equiv A_i(t+T)$, $B_i(t_k) \equiv B_i(t_k + N)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

В [I] было показано, что существует замена

$$y(t) = (J - \mu H_1(t) - \mu^2 H_2(t) - \dots - \mu^m H_m(t)) x(t), \quad (II)$$

где $H_i(t) \triangleq H_i(t+N)$, $i=1, 2, \dots, m$, которая приводит систему (IO') к системе

$$\frac{dy}{dt} = (A_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \dots + \mu^m S_m + \mu^{m+1} Q(t, \mu)) y(t)$$

где S_1, S_2, \dots, S_m - постоянные матрицы, $Q(t, \mu)$ - некоторая ограниченная матрица. Попытаемся произвести аналогичную замену для всей системы (IO), взяв в качестве матриц замены матрицы $\overline{H}_i(t) = H_i(t) + C_{k+1}^{(i)}$, где $H_i(t)$ - матрицы, фигурирующие в (II), а $C_{k+1}^{(i)}$ - некоторые матрицы, постоянные на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$. Матрицы $C_{k+1}^{(i)}$ необходимо определить таким образом, чтобы система (IO'') свелась к системе с постоянными матрицами R_i , $i=1, 2, \dots, m$. Система (IO'') заменой

$$y(t) = (J - \mu \overline{H}_1(t) - \mu^2 \overline{H}_2(t) - \dots - \mu^m \overline{H}_m(t)) x(t)$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} y(t_k+0) = & (B_0 + \mu (B_0 C_k^{(1)} - C_{k+1}^{(1)} B_0 + B_1(t_k) + M_1(t_k)) + \\ & + \mu^2 (B_0 C_k^{(2)} - C_{k+1}^{(2)} B_0 + B_2(t_k) + M_2(t_k)) + \dots + \\ & + \mu^m (B_0 C_k^{(m)} - C_{k+1}^{(m)} B_0 + B_m(t_k) + M_m(t_k)) + \\ & + \mu^{m+1} \theta(k, \mu)) y(t_k), \end{aligned}$$

где $M_i(t_k)$ получены из матриц $B_0, B_j(t_k), H_j(t_k), H_j(t_k, 0), j=i$ путем конечного числа алгебраических операций.

Пусть $t_{k+n} = t_k + nT$, n - целое.

Тогда $H_j(t_{k+n}) = H_j(t_k + nT) = H_j(t_k)$, $M_j(t_{k+n}) = M_j(t_k)$.

$B_j(t_{k+n}) = B_j(t_k)$, $j=1, 2, \dots, m$. Если $C_{k+n}^{(i)} \triangleq C_k^{(i)}$

Литература

1. Розо М. Нелинейные колебания и теория устойчивости. М., 1971. 297 с.
2. Живихин Б.М., Мастерков А.С. Об устойчивости решений систем разностных уравнений с периодическими коэффициентами. - В кн.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, 1974. 124 с.

ТЕОРЕМА ОБ ОСРЕДНЕНИИ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ
ПАРАМЕТРАМИ

Ф. А. Сопроник

Черновицкий государственный университет

Пусть $x(t, \omega)$ ($t \geq 0, \omega \in \Omega$) сепарабельный, непрерывный с вероятностью единица случайный процесс со значениями в R^N . Отрезки траекторий процесса $\{x(t+\theta, \omega), -h \leq \theta \leq 0\}$ при каждом фиксированном t в дальнейшем будем обозначать x_t . Пусть $C(-h, 0)$ — пространство непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций. Будем обозначать через $C([-h, 0], R^N)$ пространство, полученное как N -кратное произведение пространства $C(-h, 0)$ на себя. Тогда x_t почти наверное будет элементом пространства $C([-h, 0], R^N)$ с нормой $\|x_t\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} E\{|x(t+\theta, \omega)|\}$, где $E\{\cdot\}$ — обозначает операцию математического ожидания.

Рассмотрим в R^N функционально-дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t, \omega), \quad (I)$$

где $\omega \in \Omega$, (Ω, \mathcal{F}, P) — вероятностное пространство [1], $f(t, x_t, \omega)$ — оператор, отображающий $R \times C([-h, 0], R^N)$ в R^N , зависящий от параметра μ . Этот параметр будем записывать в виде верхнего индекса, т.е. $f^\mu(t, x_t, \omega)$. Предположим, что параметр μ может принимать значения на некоторой окрестности точки μ_0 . Для простоты записи положим $\mu_0 = 0$.

Пусть при каждом фиксированном $\varphi \in C(-h, 0], Q^*$ $f(t, x, \omega)$ представляет собой измеримый случайный процесс, удовлетворяющий для всех $t \geq 0$ условию

$$A. \quad E \{ |f(t, 0, \omega)| \} < L_1$$

Предположим, что существует монотонно неубывающие функции единичной вариации $q_1(\theta)$ и $q_2(\theta)$ также, что для всех $t \geq 0$ и P -почти всех ω выполняются условия

$$B. \quad |f(t, x_1, \omega) - f(t, x_2, \omega)| < L_2 \int_{-h}^0 |x_1(\theta) - x_2(\theta)| d q_1(\theta),$$

$$B. \quad |f(t_1, x, \omega) - f(t_2, x, \omega)| < L_3 |t_1 - t_2| \int_{-h}^0 |1 + x(\theta)| d q_2(\theta),$$

$$B^*. \quad |f(t_1, x, \omega) - f(t_2, x, \omega)| < L_3 |t_1 - t_2| \int_{-h}^0 |x(\theta)| d q_2(\theta).$$

L_1 в условиях А, Б, В и В* - некоторая постоянная.

Аналогично [2] введем конечно-разностную аппроксимацию решения уравнения (I) на конечном отрезке $[0, T]$. Для этого рассмотрим разбиение γ отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ и для $t \in [t_j, t_{j+1})$ ($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$) запишем

$$y_j^\gamma(t, \omega) = y_j^\gamma(t_j, \omega) + f(t_j, y_j^\gamma, \omega)(t - t_j). \quad (2)$$

Процесс, задаваемый (2), будем называть конечно-разностной аппроксимацией решения уравнения (I).

Обозначим $\varphi(\theta)$ ($-h \leq \theta \leq 0$) начальную функцию, по которой решается уравнение (I). Прежде, чем доказать близость решения (I) и процесса (2), построенных по одной и той же начальной функции, докажем несколько вспомогательных утверждений. В дальнейшем, для простоты записи, верхний индекс γ , а также аргумент ω у случайных процессов будем опускать.

ЛЕММА 1. Если $\varphi \in C([-h, 0], R^m)$ и выполняются условия А и Б, то $\|x_t\| \leq (1 + \|\varphi\|) M(T)$ для всех $t \in [0, T]$. (Здесь и в дальнейшем $M(T)$ — некоторая абсолютная постоянная в смысле работы [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем (1) в интегральной форме

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(\tau, x_\tau) d\tau. \quad (3)$$

Если $t \leq 0$, то $x(t)$ ограничено по условию. Если же $t > 0$, то

$$x(t+\theta) = x(0) + \int_0^{t+\theta} f(\tau, x_\tau) d\tau.$$

Отсюда, используя условия А и Б, имеем

$$\|x(t+\theta)\| \leq \|x(0)\| + L_1 T + L_2 \int_0^{t+\theta} \int_{-\theta}^0 \|x(\tau+\theta)\| dg_i(\theta) d\tau.$$

Применив математическое ожидание к обеим частям, получим

$$E\{\|x(t+\theta)\|\} \leq \|x(0)\| + L_1 T + L_2 \int_0^t \|x_\tau\| d\tau$$

$$\text{или } \|x_t\| \leq (L_1 T + \|\varphi\|) + L_2 \int_0^t \|x_\tau\| d\tau.$$

Из этого неравенства и леммы Гроуолла-Беллмана следует

$$\|x_t\| \leq (1 + \|\varphi\|) M(T). \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $f(t, 0) = 0$ и выполняются условия леммы 1, то

$$\|x_t\| \leq \|\varphi\| M(T). \quad (5)$$

ЛЕММА 2. Если $\varphi(\theta) \in C([-h, 0], R^m)$ удовлетворяет при каждом достаточно малом $\delta > 0$ условию $|\varphi(\theta+\delta) - \varphi(\theta)| \leq \|\varphi\| L_\varphi \delta$ и выполнены условия леммы 1, то

$$\sup_{-h \leq t \leq T-h} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq \delta(1 + \mu\varphi) M(T). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (3) имеем

$$x(t+\delta) - x(t) = \int_t^{t+\delta} f(\tau, x_\tau) d\tau.$$

Очевидно, что $\sup_{-h \leq t \leq T-h} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq$

$$\leq \sup_{-h \leq t \leq 0} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} + \sup_{0 \leq t \leq T-h} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \}.$$

Оценим каждое слагаемое правой части

$$\sup_{-h \leq t \leq 0} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq \sup_{-h \leq t \leq -\delta} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} +$$

$$+ \sup_{-\delta \leq t \leq 0} E \{ |x(t+\delta) - \varphi(t)| \} \leq \delta \mu \varphi L_\varphi + \sup_{-\delta \leq t \leq 0} E \{ |\varphi(0) - \varphi(t) +$$

$$+ \int_0^{t+\delta} f(\tau, x_\tau) d\tau | \} \leq 2\delta \mu \varphi L_\varphi + E \int_0^\delta |f(\tau, x_\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq 2\delta \mu \varphi L_\varphi + L_f \delta + \delta(1 + \mu\varphi) M(T).$$

$$E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq L_f \int_t^{t+\delta} E \left\{ \int_{-h}^0 |x(\tau+\theta)| d g_{\tau, \theta} \right\} d\tau + L_f \delta \leq$$

$$\leq L_f \int_t^{t+\delta} \|x_\tau\| d\tau + L_f \delta \leq L_f \delta (1 + \mu\varphi) M(T) + L_f \delta.$$

а значит $\sup_{0 \leq t \leq T-h} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq \delta(1 + \mu\varphi) M(T).$

Объединив эти оценки, получим утверждение леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если выполнены условия следствия I и леммы 2, то

$$\sup_{-h \leq t \leq T-h} E \{ |x(t+\delta) - x(t)| \} \leq \delta \mu \varphi M(T). \quad (7)$$

Обозначим

$$x_j(t) = \begin{cases} x(t) & t \leq t_j \\ x(t_j) + f_j(t_j, x_{t_j})(t - t_j) & t_j < t \leq t_{j+1} \end{cases}$$

($j = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

ЛЕММА 3. Если выполнены условия леммы 2 и условие В, то при всех $t \leq t_{j+1}$ имеет место неравенство

$$E\{|x(t) - x_j(t)|\} \leq \Delta_j^2 (1 + \|\varphi\|) M_1(T). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку при $t \geq t_j$

$$x(t) - x_j(t) = \int_{t_j}^t [f(\tau, x_\tau) - f(t_j, x_{t_j})] d\tau,$$

то, представив эту разность в виде

$$x(t) - x_j(t) = \int_{t_j}^t [f(\tau, x_\tau) - f(\tau, x_{t_j}) + f(\tau, x_{t_j}) - f(t_j, x_{t_j})] d\tau$$

и взяв обе части по модулю, получим

$$\begin{aligned} |x(t) - x_j(t)| &\leq L_f \int_{t_j}^t \int_{-h}^0 |x(\tau + \theta) - x(t_j + \theta)| dq_j(\theta) d\tau + \\ &+ L_f \int_{t_j}^t (\tau - t_j) \int_{-h}^0 (1 + |x(t_j + \theta)|) dq_j(\theta) d\tau. \end{aligned}$$

Применим к обеим частям последнего неравенства математическое ожидание и используя условия теоремы, имеем

$$\begin{aligned} E\{|x(t) - x_j(t)|\} &\leq L_f \Delta_j^2 (1 + \|\varphi\|) M(T) + L_f \Delta_j^2 (1 + \|\varphi\|) M(T) \leq \\ &\leq \Delta_j^2 (1 + \|\varphi\|) M(T). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполнены условия следствия 2 и леммы 3, то для всех $0 \leq t \leq t_j$

$$E\{|x(t) - x_j(t)|\} \leq \Delta_j^2 \Psi \Phi M(\tau). \quad (9)$$

ТЕОРЕМА I. Если выполнены условия А, Б, В и выполнено первое условие леммы 2, то

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\{|x(t) - y(t)|\} \leq \Delta (1 + \Psi \Phi) M(\tau). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\alpha_j = \sup_{0 \leq t \leq t_j} E\{|x(t) - y(t)|\}$.

Имеем $\alpha_{j+1} \leq \sup_{0 \leq t \leq t_{j+1}} E\{|x(t) - x_j(t)|\} + \sup_{0 \leq t \leq t_{j+1}} E\{|x_j(t) - y(t)|\}$.

Оценим второе слагаемое. Для $t > t_j$ имеем

$$\begin{aligned} & E\{|x(t_j) + f(t_j, x_j)(t-t_j) - y(t_j) - f(t_j, y_j)(t-t_j)|\} \leq \\ & \leq E\{|x(t_j) - y(t_j)|\} + E\{|f(t_j, x_j) - f(t_j, y_j)|\} \Delta_j \leq \\ & \leq \alpha_j + L_j \Delta E\left\{\int_{t_j}^0 |x(t_j+\theta) - y(t_j+\theta)| d g_j(\theta)\right\} \leq \\ & \leq \alpha_j (1 + L_j \Delta). \end{aligned}$$

Очевидно, что это неравенство выполняется для всех t , так как при $0 \leq t \leq t_j$ имеет место тождество

$$x_j(t) - y(t) = x(t) - y(t).$$

Тогда

$$\alpha_{j+1} \leq \alpha_j (1 + L_j \Delta) + \Delta^2 (1 + \Psi \Phi) M(\tau). \quad (11)$$

Рассматривая (II) как рекуррентное соотношение, получим

$$d_n \leq d_0 (1 + L_1 \Delta)^n + \Delta^2 (1 + \|\psi\|) M(T) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + L_1 \Delta)^k.$$

Поскольку $d_0 = 0$, то

$$d_n \leq \Delta^2 (1 + \|\psi\|) M(T) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + L_1 \Delta)^k$$

или
$$d_n \leq \Delta^2 n (1 + \|\psi\|) M(T) e^{n L_1 \Delta} \quad (I2)$$

Обозначим $Q = \max_{0 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j) = \min_{0 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j)$. Тогда (I2) принимает вид

$$d_n \leq \Delta Q T (1 + \|\psi\|) M(T) e^{Q T L_1}$$

а значит, $\sup_{0 \leq t \leq T} E \{ |x(t) - y(t)| \} \leq \Delta (1 + \|\psi\|) M(T)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $f(t, 0) \equiv 0$ и выполняются условия теоремы I, то

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E \{ |x(t) - y(t)| \} \leq \Delta \|\psi\| M(T).$$

Используя теорему I, докажем непрерывную зависимость решения (I) от параметра. Пусть $f^{yx}(t, x_t, \omega)$ удовлетворяет условиям А, Б, В и пусть существует $\sup_{y \in \Lambda} L_y^x = L_x$. Здесь через Λ обозначена окрестность точки $y = 0$.

Обозначим $x^{yx}(t)$ решение уравнения

$$\frac{dx^{yx}}{dt} = f^{yx}(t, x_t^{yx}, \omega) \quad (I3)$$

$$x_0^{yx} = \varphi, \quad (I4)$$

$y_j^{yx}(t)$ соответствующую этому решению конечно-разностную аппроксимацию вида (2).

ТЕОРЕМА 2. Если $f^{(n)}(t, x_t, \omega)$ удовлетворяет условиям А, Б, В, а также существует такая монотонно неубывающая функция $\mathcal{K}(\theta)$ единичной вариации на $[-h, 0]$, что

$$E \left\{ \int_t^{t+T_1} [f^{(n)}(t, \varphi) - f^{(n)}(t, \varphi^0)] \leq \psi(\mu) \int_{-h}^0 (1 + |\varphi(\theta)|) d\mathcal{K}(\theta) \right\} \quad (15)$$

равномерно по $t \in [0, T]$ и любом $T_1 > 0$, а $\psi(\mu)$ стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq T} E \{ |x^\mu(t) - x^0(t)| \} = 0 \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$. Пусть $t \in [t_n, t_{n+1}]$.

Тогда

$$\begin{aligned} |x^\mu(t) - x^0(t)| &\leq |x^\mu(t) - y^\mu(t)| + \\ &+ |y^\mu(t) - y^0(t)| + |y^0(t) - x^0(t)|. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим $E \{ |y^\mu(t) - y^0(t)| \}$. Так как $t \in [t_n, t_{n+1}]$, то

$$y^\mu(t) - y^0(t) = y^\mu(t_n) - y^0(t_n) + \int_{t_n}^t [f^{(n)}(t, y_n^\mu) - f^{(n)}(t, y_n^0)] dt.$$

Отсюда легко получить

$$\begin{aligned} |y^\mu(t) - y^0(t)| &\leq |y^\mu(t_n) - y^0(t_n)| + \int_{t_n}^{t_n + \Delta_n} |f^{(n)}(t, y_n^\mu) - f^{(n)}(t, y_n^0)| dt + \\ &+ \int_{t_n}^{t_n + \delta_n} |f^{(n)}(t, y_n^\mu) - f^{(n)}(t, y_n^0)| dt + \int_{t_n}^{t_n + \delta_n} |f^{(n)}(t, y_n^0) - f^{(n)}(t, y_n^0)| dt + \\ &+ \int_{t_n}^{t_n + \delta_n} |f^{(n)}(t, y_n^0) - f^{(n)}(t, y_n^0)| dt. \end{aligned}$$

Обозначив $\beta_k = \sup_{0 \leq t \leq t_k} E \{ |y^{(k)}(t) - y^0(t)| \}$, имеем

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k + \Delta^2(1 + \mu\varphi\eta)L_1 M(\tau) + \beta_k \Delta L_1 + \\ + \Psi(\beta_k)(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) + \Delta^2(1 + \mu\varphi\eta)L_1 M(\tau).$$

Здесь $\Delta = \max_{0 \leq k \leq n-1} (t_{k+1} - t_k)$. Значит

$$\beta_{k+1} \leq \beta_k(1 + L_1 \Delta) + \Delta^2(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) + \Psi(\beta_k)(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) \quad (18)$$

Рассматривая (18), как рекуррентное соотношение, получим

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} E \{ |y^{(n)}(t) - y^0(t)| \} \leq \Delta^2(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + L_1 \Delta)^k + \\ + \Psi(\beta_k)(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + L_1 \Delta)^k$$

$$\text{или } \sup_{0 \leq t \leq \tau} E \{ |y^{(n)}(t) - y^0(t)| \} \leq \Delta(1 + \mu\varphi\eta)Q\tau M(\tau) e^{Q\tau L_1} + \\ + \Psi(\beta_k)(1 + \mu\varphi\eta)\eta M(\tau) e^{Q\tau L_1}$$

Из (17), используя последнее неравенство и теорему I, имеем

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} E \{ |x^{(n)}(t) - x^0(t)| \} \leq \Delta(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) + \Psi(\beta_k)\eta(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau).$$

Теперь по произвольному $\varepsilon > 0$ выберем вначале Δ таким, чтобы

$$\Delta(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) < \frac{\varepsilon}{2},$$

а затем, при фиксированном η , выберем такую окрестность Λ_0 , чтобы $\Psi(\beta_k)\eta(1 + \mu\varphi\eta)M(\tau) < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $\beta_k \in \Lambda_0$.

Это означает, что $\sup_{0 \leq t \leq T} E\{|x^\mu(t) - x^0(t)|\}$ является бесконечно малой при $\mu \rightarrow 0$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если выполнены условия А, Б, В* и существует такая монотонно неубывающая функция $\chi(\mu)$, что

$$E\left\{\left|\int_t^{t+\tau} [f^\mu(x, \varphi) - f^0(x, \varphi)] dx\right|\right\} \leq \chi(\mu) \int_{-h}^0 |\varphi(\theta)| d\alpha(\theta)$$

равномерно по $t \in [0, T]$ и любом $\tau, \tau > 0$, а $\chi(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$, то при достаточно малом μ имеет место неравенство

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\{|x^\mu(t) - x^0(t)|\} \leq (\Delta + \mu \chi(\mu)) \|\varphi\| M(T). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь в R^n функционально-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{dt} &= f\left(\frac{t}{\mu}, x_t^\mu, \omega\right) \\ x_0^\mu &= \varphi, \end{aligned} \quad (20)$$

где $f\left(\frac{t}{\mu}, \varphi, \omega\right)$ удовлетворяет условиям А, Б, В, а также условию

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t_0 > 0} E\left\{\left|\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f\left(\frac{t}{\mu}, \varphi, \omega\right) dt - \bar{f}(\varphi)\right|\right\} = 0 \quad (21)$$

при $\mu \rightarrow \infty$.

Обозначим $y(t)$ решение уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \bar{f}(y_t) \\ y_0 &= \varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда при любом $T_1 > 0$, в силу (21) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} E \left\{ \left| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\mu}} f(s, y, w) ds - \bar{f}(y) \right| \right\} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} E \left\{ \left| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\mu}} f(s, y, w) ds - \bar{f}(y) \right| \right\} = \\ &= T_1 \lim_{\mu \rightarrow 0} E \left\{ \left| \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\mu}} f(s, y, w) ds - \bar{f}(y) \right| \right\} = 0. \end{aligned}$$

Поэтому непосредственным следствием теоремы 2 является

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия А, Б, В и (21), то существует такое $L > 0$, что

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{\mu}} E \{ |x^\mu(t) - y(t)| \} = 0.$$

Пусть правая часть (20) удовлетворяет условиям теоремы 3 с заменой условия В на В'. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 4. Если нулевое решение уравнения (22) экспоненциально асимптотически устойчиво, т.е.

$\|y_t\| \leq C e^{-\lambda t} \|\varphi\|$ (C, λ - некоторые положительные постоянные), то тривиальное решение (20) асимптотически устойчиво при достаточно малом μ , а именно $0 < \mu \leq \mu_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем написать

$$\|x_t^\mu - y_t\| \leq \|y_t\| + \|x_t^\mu - y_t\| \quad (23)$$

По условию теоремы $\|y_t\| \leq C e^{-\lambda t} \|\varphi\|$. Пусть $\|y_t\| < \delta$ ($\delta > 0$ - постоянная). Тогда выберем t таким, чтобы $C e^{-\lambda t} \|\varphi\| < \frac{\delta}{4}$ и зафиксируем $t = T$. На отрезке $[0, T]$ для второго слагаемого в (22), в силу (19), имеем оценку

$$\|x_t^\mu - y_t\| \leq \Delta \|\varphi\| M(T) + \psi(\mu) \|\varphi\| M(T).$$

Поэтому, выбрав разбиение отрезка $[0, T]$ таким, чтобы $\| \psi \| M(T) < \frac{\delta}{8}$, а затем, при фиксированном n , выбрав μ таким, чтобы $\psi(\mu) n \| \psi \| M(T) < \frac{\delta}{8}$, и зафиксировав $\mu = \mu_0$, получим

$$\| x_T \| < \frac{\delta}{2}.$$

Очевидно, что на отрезке $[0, T]$ при $\mu \in (0, \mu_0)$ $\| x_t \| \in M(T) \delta$. Оценим $\| x_t \|$ на отрезке $[T, 2T]$, выбрав x_T за начальную функцию. В силу выбранных T и μ_0 мы получаем

$$\| x_{2T} \| < \frac{\delta}{4},$$

кроме того, для всех $t \in [T, 2T]$ $\| x_t \| \leq M(T) \frac{\delta}{2}$.

Продолжая аналогичные рассуждения для промежутка $[kT, (k+1)T]$ получим $\| x_t \| \leq M(T) \frac{\delta}{2^k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$). Отсюда следует утверждение теоремы.

В заключение выражаю благодарность Е.Ф.Царькову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956. 605 с.
2. Гихман И.И. Дифференциальные уравнения со случайными функциями. - В кн.: Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Киев, 1964. с.41-85.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ
К ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЯМ
ПАРАМЕТРОВ

Ф. А. Сопроник

Черновицкий государственный университет

§ I. О приводимости систем дифференциальных
уравнений с малым тригонометрическим
возмущением постоянною запаздывания

Пусть в системе

$$\frac{dx(t_i)}{dt_i} = F(t_i, x(t_i), x(t_i - 1 - \mu\tau(t_i))) \quad (I)$$

$\tau(t_i) = \sum_{k=0}^l (\alpha_k \cos \nu_k t_i + \beta_k \sin \nu_k t_i)$, α_k, β_k, ν_k - постоянные, μ - малый параметр, $l \geq 0$ - целое число, x - вектор-столбец $(x_1, x_2, \dots, x_n)'$, F - вектор-функция $(F_1, F_2, \dots, F_n)'$. Здесь знаком $(\quad)'$ обозначено транспонирование.

В [1] показано, что при определенных ограничениях на запаздывание можно указать такую замену переменных, которая приводит (I) к системе дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием. Однако не всегда можно привести явный вид такой замены переменных.

В конкретных случаях бывает нужна замена, производная которой ограничена на всей оси и которая приводит (I) к системе с постоянным запаздыванием с некоторой степенью точности. В этом параграфе доказывается существование такой замены и приводится ее явный вид с точностью до вели-

чин порядка малости высшей чем μ^2 равномерно на всей оси.

В системе (I) сделаем замену переменных

$$t_1 = \gamma(t) \quad (2)$$

так, чтобы

$$\gamma(t) = \gamma(t-1) + 1 + \mu \tau(\gamma(t)) \quad (3)$$

и будем искать $\gamma(t)$ в виде

$$\gamma(t) = \Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^3 z(t) \quad (4)$$

где

$$\Delta = 1 + \mu^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau'(at) u_1(t) dt + o(\mu^2) \quad (5)$$

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos v_k \Delta t + B_k \sin v_k \Delta t) \quad (6)$$

$$u_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (C_k \cos 2v_k \Delta t + D_k \sin 2v_k \Delta t) +$$

$$+ \sum_{\substack{k, j=0 \\ k \neq j}}^{\infty} [a_{kj} \cos (v_k + v_j) \Delta t +$$

$$+ b_{kj} \cos (v_k - v_j) \Delta t + c_{kj} \sin (v_k + v_j) \Delta t +$$

$$+ d_{kj} \sin (v_k - v_j) \Delta t] \quad (7)$$

а $Z(t)$, как будет показано ниже, удовлетворяет некоторому функциональному уравнению и есть почти-периодическая функция, которая при $\mu \rightarrow 0$ стремится к нулю.

Рассмотрим функциональное уравнение

$$y(t) = y(t-1) + \mu f(t, y(t)), \quad (8)$$

где $f(t, y)$ почти-периодическая по t функция равномерно относительно y . Сделаем замену $t = n + s$, где $n = 0, 1, 2, \dots$; $-1 \leq s \leq 0$. Обозначим $y(n+s) = Z_n(s)$ $f(n+s, y) = f_n(s, y)$. Тогда (8) принимает вид

$$Z_n(s) = Z_{n-1}(s) + \mu f_n(s, Z_n(s)). \quad (9)$$

Пусть существует

$$\bar{f}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(s, z).$$

ЛЕММА I.I. Пусть $\xi^0 = \text{const}$ - некоторое решение уравнения $\bar{f}(z) = 0$, такое что $\bar{f}'(\xi^0) < 0$. Тогда (9) для достаточно малых $\mu > 0$ допускает почти-периодическое решение $Z_n(s, \mu)$, для которого имеет место соотношение $\lim_{\mu \rightarrow 0} Z_n(s, \mu) = \xi^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим почти-периодическое решение (9) с помощью метода последовательных приближений. Пусть

$$Z_n^0(s, \mu) = \xi^0 + \mu \sum_{k=1}^n (1-\mu)^{n-k} f_{k-1}(s, \xi^0).$$

Поскольку последовательность $f_n(s, \xi^0)$ почти-периодическая при каждом $s \in [-1, 0]$, то $Z_n^0(s, \mu)$ почти-периодична. Тогда из леммы Боголюбова [2] следует, что

$$|Z_n^0(s, \mu) - \xi^0| < \eta(\mu),$$

где $\lim_{\mu \rightarrow 0} \eta(\mu) = 0$. Причем $\eta(\mu)$ не зависит от s , т.е. сходимость $Z_n^0(s, \mu)$ к ξ^0 равномерна относительно s при $\mu \rightarrow 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^0(s, \mu) &= \xi^0 + \mu \sum_{k=0}^{n+1} (1-\mu)^{n+1-k} f_{k-1}(s, \xi^0) = \\ &= \xi^0 + \mu (1-\mu) \sum_{k=0}^n (1-\mu)^{n-k} f_{k-1}(s, \xi^0) + \mu f_n(s, \xi^0). \end{aligned}$$

Значит $Z_{n+1}^0(s, \mu) = \mu f_n(s, \xi^0) + (1-\mu)[Z_n^0(s, \mu) - \xi^0] + \xi^0$ и, следовательно $Z_{n+1}^0(s, \mu) = Z_n^0(s, \mu) + \mu [f_n(s, \xi^0) - Z_n^0(s, \mu) + \xi^0]$.

Определим $Z_n^{i+1}(s, \mu)$, как решение уравнения

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^i &= Z_n^i + \mu \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z} + \mu f_n(Z_n^i(s, \mu), s) - \\ &- \mu \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z} Z_n^i(s, \mu). \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $\sigma_n = \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z}$. Имеем

$$\bar{\sigma} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sigma_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\partial f_k(s, \xi^0)}{\partial z} = f'(s, \xi^0),$$

так что $\bar{G} < 0$. Поэтому $e^{\mu \bar{G}} < 1$ и, согласно [2], решение уравнения $u_{n+1} = u_n + \mu \bar{G}_n u_n$ равномерно асимптотически устойчиво, а тогда из теоремы I [2, § 2, гл. II] вытекает, что (10) имеет единственное почти-периодическое решение. Далее,

$$\begin{aligned} z_{n+1}^{j+1} - z_{n+1}^0 &= z_{n+1}^{j+1} - z_n^0 - \mu \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} (z_n^{j+1} - z_n^0) + \\ &+ \mu \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} z_n^0 - \mu f_n(s, \zeta^0) + \mu (z_n^0 - \zeta^0) + \\ &+ \mu f_n(s, z_n^j) - \mu \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} z_n^j = \\ &= \left[1 + \mu \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} \right] (z_n^{j+1} - z_n^0) + \mu [f_n(s, z_n^j) - f_n(s, \zeta^0) - \\ &- \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} (z_n^j - z_n^0) + \mu (z_n^0 - \zeta^0)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Но } f_n(s, z_n^j) - f_n(s, \zeta^0) - \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} (z_n^j - z_n^0) &= \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f_n(s, \zeta^0 + \lambda(z_n^j - \zeta^0))}{\partial z} d\lambda (z_n^j - \zeta^0) - \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} (z_n^j - z_n^0) = \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f_n(s, \zeta^0 + \lambda(z_n^j - \zeta^0))}{\partial z} d\lambda (z_n^j - z_n^0) - \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} (z_n^j - z_n^0) + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial f_n(s, \zeta^0 + \lambda(z_n^j - \zeta^0))}{\partial z} d\lambda (z_n^0 - \zeta^0) = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_n(s, \zeta^0 + \lambda(z_n^j - \zeta^0))}{\partial z} - \frac{\partial f_n(s, \zeta^0)}{\partial z} \right\} d\lambda (z_n^j - z_n^0) + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial f_n(s, \xi^0 + \lambda(z_n^j - \xi^0))}{\partial z} d\lambda (z_n^j - \xi^0).$$

Так что для достаточно малых μ и $f_n \in C^1$

$$|f_n(s, z_n^j) - f_n(s, \xi^0) - \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z} (z_n^j - \xi^0) + \\ + z_n^j - \xi^0| \leq \frac{1}{2M} \sup_n |z_n^j - z_n^0| + \eta_1(\mu).$$

где $\lim_{\mu \rightarrow 0} \eta_1(\mu) = 0$, M - постоянная, которая зависит только от вида однородной системы. Мы учли тот факт, что $|z_n^j - \xi^0| \leq \eta(\mu)$ и предположим по индукции, что $z_n^j(s, \mu) - \xi^0 \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$ равномерно по s . Таким образом по теореме I [2, гл. II]

$$|z_{n+1}^{j+1} - z_n^0| \leq M \left(\frac{1}{2M} \sup_n |z_n^j - z_n^0| + \eta_1(\mu) \right),$$

а значит, если $|z_n^j - z_n^0| \leq 2M \eta_1(\mu)$, то такое же неравенство справедливо для $|z_{n+1}^{j+1} - z_n^0|$ и предположение $z_n^{j+1} - \xi^0 \rightarrow 0$ действительно выполняется.

Итак

$$z_{n+1}^{j+1} - z_{n+1}^j = z_n^{j+1} - z_n^j + \mu \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z} (z_n^{j+1} - z_n^j) + \\ + \mu f_n(s, z_n^j) - \mu f_n(s, z_n^{j-1}) - \mu \frac{\partial f_n(s, \xi^0)}{\partial z} (z_n^j - z_n^{j-1}).$$

$$\begin{aligned} \text{и } f_n(s, z_n^j) - f_n(s, z_n^{j-1}) &= \frac{\partial f_n(s, \xi^*)}{\partial z} (z_n^j - z_n^{j-1}) = \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{\partial f_n(s, z_n^{j-1} + \lambda(z_n^j - z_n^{j-1}))}{\partial z} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial f_n(s, \xi^*)}{\partial z} \right\} d\lambda (z_n^j - z_n^{j-1}). \end{aligned}$$

Значит $|z_n^{j+1} - z_n^j| \leq \eta_2(\mu) \max |z_n^j - z_n^{j-1}|$,

чем и обеспечена равномерная сходимость последовательных приближений. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА I.1. Если $\nu_n \Delta \neq pT$, $(\nu_n - \nu) \Delta \neq Tn$, $(\nu_n + \nu) \Delta \neq Tm$ для $k, j = 0, 1, \dots, l$; $p, n, m = 0, 1, 2, \dots$, то существует замена вида (4), которая с точностью до величин порядка малости высшей чем μ^2 равномерно на всей оси приводит систему (I) к системе вида

$$\frac{dv(t)}{dt} = g(t, v(t), v(t-1), \mu), \quad (\text{II})$$

причем $g(t, y, z, 0) = f(t, y, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (3), уравнение (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^2 Z(t) &= \mu u_1(t-1) + \mu^2 u_2(t-1) + \mu^2 Z(t-1) + \\ &+ t - \Delta + \mu \tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^2 Z(t)) - \\ &- \mu \tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t)) + \mu \tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t)) - \\ &- \mu \tau(\Delta t + \mu u_1(t)) + \mu \tau(\Delta t + \mu u_1(t)) - \mu \tau(\Delta t) + \\ &+ \mu \tau(\Delta t). \end{aligned} \quad (\text{I2})$$

Учитывая то, что

$$\frac{\tau(\Delta t + \mu u_1(t)) - \tau(\Delta t)}{\mu} = \tau'(\Delta t) u_1(t) +$$

$$+ \mu \sum_{j=2}^{\infty} \mu^{j-2} u_1^j(t) \tau^{(j)}(\Delta t) = \tau'(\Delta t) u_1(t) + \mu f^1(t, \mu),$$

$$\frac{\tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t)) - \tau(\Delta t + \mu u_1(t))}{\mu} =$$

$$= \mu \sum_{j=1}^{\infty} \mu^{2(j-1)} u_2^j(t) \tau^{(j)}(\Delta t + \mu u_1(t)) = \mu f^2(t, \mu),$$

(причем сходимость рядов равномерна), получим

$$\mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^2 z(t) = \mu u_1(t-1) + \mu^2 u_2(t-1) +$$

$$+ \mu^2 z(t-1) + \mu^2 \frac{1-\Delta}{\mu^2} +$$

$$+ \mu^2 \frac{\tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^2 z(t)) - \tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t))}{\mu} +$$

$$+ \mu^3 f^1(t, \mu) + \mu^3 f^2(t, \mu) + \mu^2 \tau'(\Delta t) u_1(t) +$$

$$+ \mu \tau(\Delta t) + \mu^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau'(\Delta t) u_1(t) dt -$$

$$- \mu^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau'(\Delta t) u_1(t) dt.$$

Отсюда для $u_1(t)$, $u_2(t)$ и $z(t)$ получаем уравнения

$$u_1(t) = u_1(t-1) + \tau(\Delta t), \quad (13)$$

$$u_2(t) = u_2(t-1) + \tau'(\Delta t) u_1(t) -$$

$$- \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T \tau'(\Delta t) u_1(t) dt \quad (14)$$

$$z(t) = z(t-1) + \frac{1-\Delta}{\mu^2} + \mu f'(t, \mu) + \mu f^2(t, \mu) +$$

$$+ \frac{\tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t) + \mu^2 z(t)) - \tau(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t))}{\mu^2} +$$

$$+ \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T \tau'(\Delta t) u_1(t) dt. \quad (15)$$

Если Δ такое, что

$$\frac{1-\Delta}{\mu^2} + \mu \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T [f'(t, \mu) + f^2(t, \mu)] dt + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T \tau'(\Delta t) u_1(t) dt = 0,$$

т.е. Δ имеет вид (5), то осредненное уравнение (15) имеет изолированное решение $\bar{z}(t) \equiv 0$. Если кроме того

$$\chi(\mu) = \mu \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T \tau'(\Delta t + \mu u_1(t) + \mu^2 u_2(t)) dt =$$

$$= \mu^2 \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^T \tau''(\Delta t) u_1(t) dt + o(\mu^2) < 0 \quad (16)$$

то для достаточно малых μ существует почти-периодическое решение (15), которое при $\mu \rightarrow 0$ стремится к нулю. Этот факт вытекает из леммы I.I., если учесть, что для

нашего вида $\tau(t)$ дискретное осреднение совпадает с непрерывным.

Ниже будет показано, что условие (16) в рассматриваемом случае всегда выполняется.

Решение (13) и (14) ищем в виде (6) и (7) соответственно. Постоянные находятся методом неопределенных коэффициентов и имеют вид

$$A_k = \frac{1}{2} \alpha_k - \frac{1}{2} \frac{\sin v_k \Delta}{1 - \cos v_k \Delta} \beta_k; \quad B_k = \frac{1}{2} \beta_k + \frac{1}{2} \frac{\sin v_k \Delta}{1 - \cos v_k \Delta} \alpha_k; \quad (17)$$

$$C_k = \frac{v_k \Delta}{4} \left[\alpha_k B_k + \beta_k A_k + \frac{\sin 2v_k \Delta}{1 - \cos 2v_k \Delta} (\alpha_k A_k - \beta_k B_k) \right];$$

$$D_k = \frac{v_k \Delta}{4} \left[\beta_k B_k - \alpha_k A_k + \frac{\sin 2v_k \Delta}{1 - \cos 2v_k \Delta} (\alpha_k B_k + \beta_k A_k) \right];$$

$$\alpha_{kj} = \frac{v_k \Delta}{4} \left[\alpha_k B_j + \beta_k A_j + \frac{\sin(v_k + v_j) \Delta}{1 - \cos(v_k + v_j) \Delta} (\alpha_k A_j - \beta_k B_j) \right];$$

$$\beta_{kj} = \frac{v_k \Delta}{4} \left[\beta_k A_j - \alpha_k B_j + \frac{\sin(v_k - v_j) \Delta}{1 - \cos(v_k - v_j) \Delta} (\alpha_k A_j + \beta_k B_j) \right];$$

$$C_{kj} = \frac{v_k \Delta}{4} \left[\beta_k B_j - \alpha_k A_j + \frac{\sin(v_k + v_j) \Delta}{1 - \cos(v_k + v_j) \Delta} (\alpha_k B_j + \beta_k A_j) \right];$$

$$d_{kj} = \frac{v_k \Delta}{4} \left[-(\alpha_k A_j + \beta_k B_j) + \frac{\sin(v_k - v_j) \Delta}{1 - \cos(v_k - v_j) \Delta} (\beta_k A_j - \alpha_k B_j) \right];$$

$k = 0, 1, \dots, \ell$; $j = 0, 1, \dots, \ell$, причем в последних четырех соотношениях $k \neq j$.

Покажем, что выполняется условие (I6). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau''(\Delta t) u_i(t) dt &= \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\Delta^2 \sum_{k=0}^{\ell} \gamma_k^2 (\alpha_k \cos \gamma_k \Delta t + \beta_k \sin \gamma_k \Delta t) \times \right. \\ &\times \left. \sum_{j=0}^{\ell} (A_j \cos \gamma_j \Delta t + B_j \sin \gamma_j \Delta t) \right] dt = \\ &= - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Delta^2 \sum_{k=0}^{\ell} \gamma_k^2 (\alpha_k A_k \cos^2 \gamma_k \Delta t + \beta_k B_k \sin^2 \gamma_k \Delta t) dt = \\ &= - \frac{\Delta^2}{2} \sum_{k=0}^{\ell} \gamma_k^2 (\alpha_k A_k + \beta_k B_k). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (I7), получим, что

$$\chi(\mu) = -\mu^2 \frac{\Delta^2}{4} \sum_{k=0}^{\ell} \gamma_k^2 (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + o(\mu^2),$$

а значит, при достаточно малых μ условие (I6) выполняется. Теорема доказана.

ПРИМЕР I.I. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx(t_1)}{dt_1} = b x(t_1 - t - \mu \sin vt_1), \quad (I8)$$

где δ - постоянная величина. Замена (4), в которой

$$u_1(t) = -\frac{1}{2} \frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} \cos \nu \delta t + \frac{1}{2} \sin \nu \delta t,$$

$$u_2(t) = -\frac{\nu}{8} \left(\frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} + \frac{\sin 2\nu \delta}{1 - \cos 2\nu \delta} \right) \cos 2\nu \delta t +$$

$$+ \frac{\nu}{8} \left(1 - \frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} \cdot \frac{\sin 2\nu \delta}{1 - \cos 2\nu \delta} \right) \sin 2\nu \delta t$$

приводит (18) с точностью до величин $O(\nu^2)$ к виду

$$\frac{dy}{dt} = \delta \Delta [1 + \nu \psi_1(t) + \nu^2 \psi_2(t)] y(t-1),$$

где

$$\psi_1(t) = \frac{\nu}{2} \left(\cos \nu \delta t + \frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} \sin \nu \delta t \right),$$

$$\psi_2(t) = \frac{\nu^2}{4} \left(1 - \frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} \cdot \frac{\sin 2\nu \delta}{1 - \cos 2\nu \delta} \right) \cos 2\nu \delta t +$$

$$+ \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{\sin \nu \delta}{1 - \cos \nu \delta} + \frac{\sin 2\nu \delta}{1 - \cos 2\nu \delta} \right) \sin 2\nu \delta t$$

§ 2. Исследование устойчивости решений
линейного скалярного дифференциально-
разностного уравнения с переменными
коэффициентами

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^L a_{kj} \frac{d^k x(t-\Delta_{kj})}{dt^k} = \mu \sum_{j=0}^L b_j(t) x(t), \quad (1)$$

где $a_{kj}, \Delta_{kj} \geq 0$ — постоянные, $\mu > 0$ — малый параметр, $L \geq 0, n \geq 1$ — целые числа, $b_j(t) = A_j \cos \nu_j t + B_j \sin \nu_j t$; A_j, B_j, ν_j — постоянные.

Однородное уравнение, соответствующее (1)

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^L a_{kj} \frac{d^k y(t-\Delta_{kj})}{dt^k} = 0. \quad (2)$$

Пусть уравнение $W(\lambda) = 0$, (3)

где $W(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^L a_{kj} \lambda^k e^{-\lambda \Delta_{kj}}$ — характеристический квазиполином (2), имеет однократный корень $\lambda = 0$, т.е. $W(0) = 0$, $W'(0) \neq 0$, а все остальные корни расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < -\gamma$, $\gamma = \text{const} > 0$.

Как известно [3], решение (1) можно записать в виде

$$x(t) = y(t) + \mu \int_0^t h(t-\tau) \sum_{j=0}^L b_j(\tau) x(\tau) d\tau \quad (4)$$

Здесь $h(t)$ — фундаментальное решение (2), а $y(t)$ — некоторое решение (2). Согласно [3]

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = c} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{w(\lambda)} \quad (5)$$

В силу условий на корни уравнения (3) $y(t) = y_0 = \text{const}$ может быть решением (2). Если это не так, то $y(t) = y_0 + a(e^{rt})$ и для исследования устойчивости можно считать $y(t) = y_0$. Поэтому, выбрав $y(t) = y_0$, получим из (4)

$$x(t) = y_0 + \mu \sum_{j=0}^l \int_0^t h(t-\tau) b_j(\tau) x(\tau) d\tau \quad (6)$$

Запишем решение (I), подставив один раз в силу (6)

$$x(t) = y_0 + \mu \sum_{j=0}^l y_0 \int_0^t h(t-\tau) b_j(\tau) d\tau + \\ + \mu^2 \int_0^t h(t-\tau) \sum_{j=0}^l b_j(\tau) \int_0^{\tau} h(\tau-s) \sum_{k=0}^l b_k(s) x(s) ds d\tau \quad (7)$$

Очевидно, что $\int_0^t h(t-\tau) b_j(\tau) d\tau$ является решением уравнения

$$\frac{d^n z}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^l a_{kj} \frac{d^k z(t-l_{kj})}{dt^k} = b_j(t)$$

построенным по нулевым начальным данным. Решение этого уравнения ищем в виде $z(t) = C_j \cos \nu_j t + d_j \sin \nu_j t - C_j$. Постоянные C_j и d_j находятся легко методом неопределенных коэффициентов и в силу громоздкости их выражения здесь не выписываются.

Тогда (7) можно записать в виде

$$x(t) = y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^L [d_j \sin y_j t - c_j (1 - \cos y_j t)] + \\ + \mu^2 \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L \int_0^t h(t-\tau) b_j(\tau) \int_0^{\tau} h(\tau-s) b_k(s) x(s) ds d\tau. \quad (8)$$

В последнем слагаемом (8) меняем порядок интегрирования

$$x(t) = y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^L [d_j \sin y_j t - c_j (1 - \cos y_j t)] + \\ + \mu^2 \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L \int_0^t \int_s^t h(t-\tau) h(\tau-s) b_j(\tau) d\tau b_k(s) x(s) ds. \quad (9)$$

Рассмотрим интеграл

$$H_j(t,s) = \int_s^t h(t-\tau) h(\tau-s) b_j(\tau) d\tau = \\ = \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) h(\tau) b_j(\tau+s) d\tau.$$

Учитывая вид $b_j(t)$, $H_j(t,s)$ можно записать так

$$H_j(t,s) = \left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i}\right) e^{iy_j s} \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) h(\tau) e^{iy_j \tau} d\tau + \\ + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i}\right) e^{-iy_j s} \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) h(\tau) e^{-iy_j \tau} d\tau.$$

Введем обозначения

$$H_j'(t-s) = \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) h(\tau) e^{iy_j \tau} d\tau.$$

$$H_j^2(t-s) = \int_0^{t-s} h(t-s-\tau) h(\tau) e^{-\nu_j \tau} d\tau$$

Используя преобразование Лапласа, для H_j^1 и H_j^2 можем записать

$$H_j^1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = c} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{w(\lambda) w(\lambda - \nu_j)} \quad (I)$$

$$H_j^2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = c} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{w(\lambda) w(\lambda + i\nu_j)} \quad (II)$$

где интегрирование производится вдоль прямой $\text{Re } \lambda = c$ так, что все корни уравнения (3) лежат слева от этой прямой. Легко видеть, что подынтегральная функция (I) имеет два простых полюса $\lambda = 0$ и $\lambda = i\nu_j$, а подынтегральная функция (II) — $\lambda = 0$ и $\lambda = -i\nu_j$, лежащих на мнимой оси, а все остальные корни лежат в левой полуплоскости $\text{Re } \lambda < -\gamma$. Сдвинем контур интегрирования влево до прямой $\text{Re } \lambda = -\gamma$, учитывая встречающиеся особенности. Для $H_j^1(t)$ получим

$$H_j^1(t) = \text{Res} \left[\frac{e^{\lambda t}}{w(\lambda) w(\lambda - i\nu_j)} \right] \Big|_{\lambda=0} + \text{Res} \left[\frac{e^{\lambda t}}{w(\lambda) w(\lambda - i\nu_j)} \right] \Big|_{\lambda=i\nu_j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = -\gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{w(\lambda) w(\lambda - i\nu_j)}$$

Аналогично

$$H_j^2(t) = \text{Res} \left[\frac{e^{\lambda t}}{w(\lambda) w(\lambda + i\nu_j)} \right] \Big|_{\lambda=0} + \text{Res} \left[\frac{e^{\lambda t}}{w(\lambda) w(\lambda + i\nu_j)} \right] \Big|_{\lambda=-i\nu_j} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \lambda = -\gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{w(\lambda) w(\lambda + i\nu_j)}$$

Отсюда для $H_j^1(t)$ и $H_j^2(t)$ получаем

$$H_j^1(t) = \frac{1}{w'(0)} \left[\frac{1}{w(-i\gamma_j)} + \frac{e^{i\gamma_j t}}{w(i\gamma_j)} \right] + Q_j^1(t),$$

$$H_j^2(t) = \frac{1}{w'(0)} \left[\frac{1}{w(i\gamma_j)} + \frac{e^{-i\gamma_j t}}{w(-i\gamma_j)} \right] + Q_j^2(t).$$

причем $|Q_j^1(t)| \leq C e^{-\gamma t}$, $|Q_j^2(t)| \leq C e^{-\gamma t}$ с постоянной C , независимой от j .

Значит

$$H_j(t, s) = \left[\left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\gamma_j s}}{w(-i\gamma_j)} + \frac{e^{i\gamma_j t}}{w(i\gamma_j)} \right) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\gamma_j s}}{w(i\gamma_j)} + \frac{e^{-i\gamma_j t}}{w(-i\gamma_j)} \right) \right] \frac{1}{w'(0)} + Q_j(t, s), \quad (12)$$

где $Q_j(t, s) = \left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) e^{i\gamma_j t} Q_j^1(t-s) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) e^{-i\gamma_j s} Q_j^2(t-s)$.

Используя (12), формулу (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^k [d_j \sin \gamma_j t - c_j (1 - \cos \gamma_j t)] + \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) B_k(s) x(s) ds + \\ & + \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t Q_j(t, s) B_k(s) x(s) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

где $G_j(t, s) = \frac{1}{w'(0)} \left[\left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\gamma_j s}}{w(-i\gamma_j)} + \frac{e^{i\gamma_j t}}{w(i\gamma_j)} \right) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\gamma_j s}}{w(i\gamma_j)} + \frac{e^{-i\gamma_j t}}{w(-i\gamma_j)} \right) \right]$,

а для $Q_j(t, s)$ справедлива равномерная по j оценка

$$|Q_j(t, s)| \leq C_1 e^{-\gamma(t-s)} \quad (I4)$$

с некоторой постоянной C_1 .

Пусть $u(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$u(t) = y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^L [d_j \sin \nu_j t - c_j (1 - \cos \nu_j t)] + \\ + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) u(s) ds. \quad (I5)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Если тривиальное решение уравнения (I5) экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем $\mu^2 \gamma$, $\gamma > 0$, то тривиальное решение (I3) асимптотически устойчиво при $0 < \mu < \mu_0$, где $\mu_0 = \text{const}$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем написать

$$|x(t)| \leq |u(t)| + |x(t) - u(t)| \quad (I6)$$

По условию теоремы $|u(t)| \leq M |y_0| e^{-\mu^2 \gamma t}$ (I7)

Рассмотрим разность $x(t) - u(t)$. В силу (I3) и (I5) получим

$$x(t) - u(t) = \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) [x(s) - u(s)] ds + \\ + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t Q_j(t, s) \theta_k(s) x(s) ds = \\ = \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) [x(s) - u(s)] ds +$$

Отсюда для $H_j^1(t)$ и $H_j^2(t)$ получаем

$$H_j^1(t) = \frac{1}{w'(0)} \left[\frac{1}{w(-i\nu_j)} + \frac{e^{i\nu_j t}}{w(i\nu_j)} \right] + Q_j^1(t),$$

$$H_j^2(t) = \frac{1}{w'(0)} \left[\frac{1}{w(i\nu_j)} + \frac{e^{-i\nu_j t}}{w(-i\nu_j)} \right] + Q_j^2(t),$$

причем $|Q_j^1(t)| \leq C e^{-\gamma t}$, $|Q_j^2(t)| \leq C e^{-\gamma t}$ с постоянной C , независимой от j .

Значит

$$H_j(t, s) = \left[\left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\nu_j s}}{w(-i\nu_j)} + \frac{e^{i\nu_j t}}{w(i\nu_j)} \right) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\nu_j s}}{w(i\nu_j)} + \frac{e^{-i\nu_j t}}{w(-i\nu_j)} \right) \right] \frac{1}{w'(0)} + Q_j(t, s), \quad (I2)$$

где $Q_j(t, s) = \left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) e^{i\nu_j t} Q_j^1(t, s) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) e^{-i\nu_j t} Q_j^2(t, s)$.

Используя (I2), формулу (9) запишем в виде

$$\begin{aligned} x(t) = & y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^k [d_j \sin \nu_j t - c_j (1 - \cos \nu_j t)] + \\ & + \mu^2 \sum_{\alpha=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) b_\alpha(s) x(s) ds + \\ & + \mu^2 \sum_{\alpha=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t Q_j(t, s) b_\alpha(s) x(s) ds, \end{aligned} \quad (I3)$$

где $G_j(t, s) = \frac{1}{w'(0)} \left[\left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\nu_j s}}{w(-i\nu_j)} + \frac{e^{i\nu_j t}}{w(i\nu_j)} \right) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\nu_j s}}{w(i\nu_j)} + \frac{e^{-i\nu_j t}}{w(-i\nu_j)} \right) \right],$

а для $Q_j(t, s)$ справедлива равномерная по j оценка

$$|Q_j(t, s)| \leq C_1 e^{-\gamma(t-s)} \quad (14)$$

с некоторой постоянной C_1 .

Пусть $u(t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$u(t) = y_0 + \mu y_0 \sum_{j=0}^k [d_j \sin \nu_j t - c_j (1 - \cos \nu_j t)] + \\ + \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) u(s) ds. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Если тривиальное решение уравнения (15) экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем $\mu^2 \varphi$, $\varphi > 0$, то тривиальное решение (13) асимптотически устойчиво при $0 < \mu < \mu_0$, где $\mu_0 = \text{const}$ достаточно мало.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можем написать

$$|x(t)| \leq |u(t)| + |x(t) - u(t)| \quad (16)$$

По условию теоремы $|u(t)| \leq M |y_0| e^{-\mu^2 \varphi t}$ (17)

Рассмотрим разность $x(t) - u(t)$. В силу (13) и (15) получим

$$x(t) - u(t) = \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) [x(s) - u(s)] ds + \\ + \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) x(s) ds = \\ = \mu^2 \sum_{k=0}^k \sum_{j=0}^k \int_0^t G_j(t, s) \theta_k(s) [x(s) - u(s)] ds +$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t Q_j(t,s) B_k(s) [x(s) - u(s)] ds + \\
 & + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t Q_j(t,s) B_k(s) u(s) ds.
 \end{aligned}$$

Оценим левую и правую часть по модулю

$$\begin{aligned}
 |x(t) - u(t)| & \leq \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |Q_j(t,s)| |B_k(s)| |u(s)| ds + \\
 & + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |G_j(t,s)| |B_k(s)| |x(s) - u(s)| ds + \\
 & + \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |Q_j(t,s)| |B_k(s)| |x(s) - u(s)| ds.
 \end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства

$$\begin{aligned}
 & \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |Q_j(t,s)| |B_k(s)| |u(s)| ds \leq \\
 & \leq |y_0| \mu^2 C_1^L M N^L \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} e^{-\mu^2 \varrho s} ds = \\
 & = \mu^2 |y_0| C_1^L M N^L \frac{e^{-\mu^2 \varrho t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \mu^2 \varrho} \leq \\
 & \leq \mu^2 |y_0| C_1^L M N^L \frac{e^{-\mu^2 \varrho t}}{\gamma - \mu^2 \varrho}.
 \end{aligned}$$

При получении этой оценки предполагалось, что μ достаточно мало и $|B_k(t)| < N$, а также использовалась оценка (I4).

Заметим, что $|G_j(t,s)| < K$ равномерно по j, t и s . Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned} & \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |G_j(t,s)| |B_k(s)| |\alpha(s) - u(s)| ds \leq \\ & \leq \mu^2 K^L N^L \int_0^t |\alpha(s) - u(s)| ds ; \\ & \mu^2 \sum_{k=0}^L \sum_{j=0}^L \int_0^t |Q_j(t,s)| |B_k(s)| |\alpha(s) - u(s)| ds \leq \\ & \leq \mu^2 C_1^L N^L \int_0^t e^{-\varrho(t-s)} |\alpha(s) - u(s)| ds \leq \\ & \leq \mu^2 C_1^L N^L \int_0^t |\alpha(s) - u(s)| ds . \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - u(t)| & \leq \mu^2 C_1^L M N^L |y_0| \frac{e^{-\mu^2 \varrho t}}{\gamma - \mu^2 \varrho} + \\ & + \mu^2 N^L (K^L + C_1^L) \int_0^t |\alpha(s) - u(s)| ds . \end{aligned}$$

Обозначив $\frac{C_1^L M N^L}{\gamma - \mu^2 \varrho} = C_2$ и $N^L (K^L + C_1^L) = C_3$,
получим

$$|\alpha(t) - u(t)| \leq \mu^2 |y_0| C_2 e^{-\mu^2 \varrho t} + \mu^2 C_3 \int_0^t |\alpha(s) - u(s)| ds .$$

Отсюда, используя лемму I [4, гл.2], имеем

$$\begin{aligned} |\alpha(t) - u(t)| & \leq \mu^2 |y_0| C_2 e^{-\mu^2 \varrho t} + \\ & + \mu^2 |y_0| C_2 C_3 \int_0^t e^{\mu^2 C_3 (t-s)} e^{-\mu^2 \varrho s} ds \leq \\ & \leq \mu^2 |y_0| C_2 e^{-\mu^2 \varrho t} + \mu^2 \frac{C_2 C_3}{C_3 + \varrho} |y_0| e^{-\mu^2 C_3 t} \end{aligned}$$

Значит

$$|x(t)| \leq [(M + \mu^2 c_2) e^{-\mu^2 \rho t} + \mu^2 \frac{c_2 c_3}{c_3 + \rho} e^{\mu^2 c_3 t}] |y_0| \quad (18)$$

Выбрав $\mu^2 t = T$ так, чтобы первое слагаемое правой части (18) было меньше $\frac{1}{4}$ и фиксируя T , затем выбрав $\mu = \mu_0$ таким, чтобы второе слагаемое также было меньше $\frac{1}{4}$ и обозначив $T_1 = \frac{T}{\mu_0^2}$, получим

$$|x(T_1)| \leq \frac{|y_0|}{2}$$

В силу того, что на интервале $[T_1, 2T_1]$ для $|x(t)|$ имеет место оценка (18), но только вместо $|y_0|$ будет $|x(T_1)|$ и вместо второго слагаемого будет $\mu^2 \frac{c_2 c_3}{c_3 + \rho} \exp\{\mu^2 c_3 (t - T_1)\}$, можем написать

$$|x(2T_1)| \leq \frac{|y_0|}{4}$$

Продолжив рассуждения по индукции, имеем на интервале $[(k-1)T_1, kT_1]$

$$|x(kT_1)| \leq \frac{|y_0|}{2^k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Обозначим

$$C_4 = \max_{\substack{0 \leq t \leq T_1 \\ 0 \leq \mu \leq \mu_0}} [(M + \mu^2 c_2) e^{-\mu^2 \rho t} + \mu^2 \frac{c_2 c_3}{c_3 + \rho} e^{\mu^2 c_3 t}]$$

Тогда для $t \in [(k-1)T_1, kT_1]$ получаем

$$|x(t)| \leq C_4 \frac{|y_0|}{2^k}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Это неравенство завершает доказательство теоремы.

Перейдем к исследованию интегрального уравнения (15). Дифференцируя обе части (15), получим

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & \mu y_0 \sum_{j=0}^L v_j (d_j \cos v_j t - c_j \sin v_j t) + \\ & + \mu^2 \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L M_j \beta_j(t) \beta_k(t) u(t) + \\ & + \mu^2 \frac{i}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j [A_j' e^{iv_j t} - B_j' e^{-iv_j t}] \int_0^t \sum_{k=0}^L \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $M_j = \frac{1}{w'(0)} \left[\frac{1}{w(-iv_j)} + \frac{1}{w(iv_j)} \right];$

$$A_j' = \frac{1}{w'(iv_j)} \left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right); B_j' = \frac{1}{w'(-iv_j)} \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right)$$

Обозначив $\Phi_0 = \dot{u}(t) - \mu^2 \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L M_j \beta_j(t) \beta_k(t) u(t)$, имеем

$$\begin{aligned} \Phi_0 = & \mu y_0 \sum_{j=0}^L v_j (d_j \cos v_j t - c_j \sin v_j t) + \\ & + \mu^2 \frac{i}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j (A_j' e^{iv_j t} - B_j' e^{-iv_j t}) \int_0^t \sum_{k=0}^L \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau; \end{aligned}$$

$$\ddot{\Phi}_0 = -\mu y_0 \sum_{j=0}^L v_j^2 (d_j \sin v_j t + c_j \cos v_j t) -$$

$$- \mu^2 \frac{i}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j^2 (A_j' e^{iv_j t} + B_j' e^{-iv_j t}) \int_0^t \sum_{k=0}^L \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau +$$

$$+ \mu^2 \frac{i}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j (A_j' e^{iv_j t} - B_j' e^{-iv_j t}) \sum_{k=0}^L \beta_k(t) u(t);$$

$$\ddot{\Phi}_0 = -\mu y_0 \sum_{j=0}^L v_j^3 (d_j \cos v_j t - c_j \sin v_j t) -$$

$$- \mu^2 \frac{i}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j^3 (A_j' e^{iv_j t} - B_j' e^{-iv_j t}) \int_0^t \sum_{k=0}^L \beta_k(\tau) u(\tau) d\tau -$$

$$- \mu^2 \frac{2}{w'(0)} \sum_{j=0}^L v_j^2 (A_j' e^{iv_j t} + B_j' e^{-iv_j t}) \sum_{k=0}^L \beta_k(t) u(t) +$$

$$+ \mu^2 \frac{l}{w(t)} \sum_{j=0}^l \nu_j (A_j' e^{i\nu_j t} - B_j' e^{-i\nu_j t}) \sum_{\kappa=0}^l (\delta_{\kappa}(t) u(t) + \beta_{\kappa}(t) \dot{u}(t)).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_0 = & -\nu_0^2 \Phi_0 - \mu \gamma_0 \sum_{j=1}^l \nu_j (\nu_j^2 - \nu_0^2) (d_j \cos \nu_j t - c_j \sin \nu_j t) - \\ & - \mu^2 \frac{l}{w(t)} \sum_{j=1}^l \nu_j (\nu_j^2 - \nu_0^2) (A_j' e^{i\nu_j t} - B_j' e^{-i\nu_j t}) \int_0^t \sum_{\kappa=0}^l \beta_{\kappa}(\tau) u(\tau) d\tau + \\ & + \mu^2 F_0(t). \end{aligned}$$

где $F_0(t) = -\frac{2}{w(t)} \sum_{j=0}^l \nu_j^2 (A_j' e^{i\nu_j t} + B_j' e^{-i\nu_j t}) +$

$$+ \frac{l}{w(t)} \sum_{j=0}^l \nu_j (A_j' e^{i\nu_j t} - B_j' e^{-i\nu_j t}) \sum_{\kappa=0}^l (\delta_{\kappa}(t) u(t) + \beta_{\kappa}(t) \dot{u}(t)).$$

Обозначим $\Phi_1 = \ddot{\Phi}_0 + \nu_0^2 \Phi_0 - \mu^2 F_0(t)$. Тогда так же, как и для Φ_0 , получим

$$\begin{aligned} \ddot{\Phi}_1 = & -\nu_1^2 \Phi_1 + \mu^2 \gamma_0 \sum_{j=2}^l \nu_j (\nu_j^2 - \nu_1^2) (\nu_j^2 - \nu_1^2) (d_j \cos \nu_j t - c_j \sin \nu_j t) + \\ & + \mu^2 \frac{l}{w(t)} \sum_{j=2}^l \nu_j (\nu_j^2 - \nu_1^2) (\nu_j^2 - \nu_1^2) (A_j' e^{i\nu_j t} - B_j' e^{-i\nu_j t}) \int_0^t \sum_{\kappa=0}^l \beta_{\kappa}(\tau) u(\tau) d\tau + \\ & + \mu^2 F_1(t). \end{aligned}$$

где $F_1(t) = \frac{2}{w(t)} \sum_{j=1}^l \nu_j^2 (\nu_j^2 - \nu_0^2) (A_j' e^{i\nu_j t} + B_j' e^{-i\nu_j t}) \sum_{\kappa=0}^l \beta_{\kappa}(t) u(t) -$

$$- \frac{l}{w(t)} \sum_{j=1}^l \nu_j (\nu_j^2 - \nu_0^2) (A_j' e^{i\nu_j t} - B_j' e^{-i\nu_j t}) \sum_{\kappa=0}^l (\delta_{\kappa}(t) u(t) + \beta_{\kappa}(t) \dot{u}(t)).$$

Аналогичными рассуждениями по индукции имеем

$$\varphi_m = \varphi_{m-1} + \gamma_{m-1}^2 \varphi_{m-2} - \gamma^2 F_{m-1} \quad (m=1, 2, \dots, L),$$

$$\ddot{\varphi}_L + \gamma_L^2 \varphi_L = \gamma^2 F_L(t). \quad (19)$$

Здесь

$$\varphi_0 = \dot{u}(t) - \gamma^2 \sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L M_j \beta_j(t) \beta_k(t) u(t),$$

$$F_m = (-1)^{m+1} \left\{ \frac{2}{W(\gamma_0)} \sum_{j=m}^L \gamma_j^2 \prod_{k=0}^{m-1} (\gamma_j^2 - \gamma_k^2) (A_j' e^{i\gamma_j t} + B_j' e^{-i\gamma_j t}) \sum_{k=0}^L \beta_k(t) u(t) - \right. \\ \left. - \frac{L}{W(\gamma_0)} \sum_{j=m}^L \gamma_j^2 \prod_{k=0}^{m-1} (\gamma_j^2 - \gamma_k^2) (A_j' e^{i\gamma_j t} - B_j' e^{-i\gamma_j t}) \sum_{k=0}^L (\beta_k(t) u(t) + \beta_k(t) \dot{u}(t)), \right.$$

$$(m=0, 1, \dots, L).$$

Введем обозначения

$$N_0 = \gamma_0^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_L^2,$$

$$N_1 = \gamma_0^2 \gamma_1^2 + \dots + \gamma_0^2 \gamma_L^2 + \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \dots + \gamma_1^2 \gamma_L^2 + \dots + \gamma_{L-1}^2 \gamma_L^2;$$

$$N_2 = \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 + \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_3^2 + \dots + \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_L^2 + \gamma_0^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \dots + \gamma_0^2 \gamma_2^2 \gamma_L^2 + \\ + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \dots + \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_L^2 + \dots + \gamma_{L-2}^2 \gamma_{L-1}^2 \gamma_L^2,$$

$$N_3 = \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + \dots + \gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 \gamma_L^2 + \dots + \gamma_{L-3}^2 \gamma_{L-2}^2 \gamma_{L-1}^2 \gamma_L^2,$$

$$N_{L-1} = \gamma_0^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{L-1}^2 + \gamma_0^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_{L-2}^2 \gamma_L^2 + \dots + \gamma_L^2 \gamma_2^2 \dots \gamma_0^2,$$

$$N_L = \gamma_0^2 \gamma_1^2 \dots \gamma_L^2.$$

Учитывая эти обозначения и вид Φ_j, F_j ($j=0,1,\dots,L$) из (19), получим

$$u^{(2L-3)} = -N_0 u^{(2L-1)} - N_1 u^{(2L-1)} - N_2 u^{(2L-3)} - \dots - N_L \dot{u} + \\ + \mu^2 (\Xi_0(t) u + \Xi_1(t) \dot{u} + \dots + \Xi_{2L+2} u^{(2L+2)}) \quad (20)$$

$\Xi_j(t)$ ($j=0,1,\dots,2L+2$) коэффициенты при $u(t)$ и ее производных, которые можно легко выписать собирая соответствующие коэффициенты, которые входят с μ^2 .

Обозначив $u = \xi_0, \dot{u} = \xi_1, \dots, u^{(2L+2)} = \xi_{2L+2}$ запишем (20) в виде системы

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \xi_1 \\ \xi_1 &= \xi_2 \\ &\dots \\ \xi_{2L+1} &= \xi_{2L+2} \\ \xi_{2L+2} &= -N_L \xi_1 - N_{L-1} \xi_3 - \dots - N_0 \xi_{2L+1} + \\ &+ \mu^2 [\Xi_0(t) \xi_0 + \Xi_1(t) \xi_1 + \dots + \Xi_{2L+2}(t) \xi_{2L+2}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} v_0 &= \xi_1, \quad v_1 = \xi_2, \dots, \quad v_{2L+1} = \xi_{2L+2}, \\ v_{2L+2} &= \xi_{2L+2} + N_0 \xi_{2L} + N_1 \xi_{2L-2} + \dots + N_L \xi_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда находим

$$\xi_0 = \frac{v_{2L+2} - v_{2L+1} - N_0 v_{2L-1} - N_1 v_{2L-3} - \dots - N_{L-1} v_1}{N_L} \quad (23)$$

Учитывая (22) и (23), получаем систему

$$\dot{v}_0 = v_1$$

$$\dot{v}_1 = v_2$$

$$\dot{v}_{2L+1} = N_L v_0 - N_{L-1} v_2 - \dots - N_0 v_{2L} +$$

$$+ \gamma^2 \left[\xi_1 v_0 + \left(\xi_2 - \frac{\xi_0 N_{L+1}}{N_L} \right) v_1 + \xi_3 v_2 + \left(\xi_4 - \frac{N_{L+2}}{N_L} \xi_0 \right) v_3 + \right.$$

$$\left. + \dots + \xi_{2L} v_{2L} + \left(\xi_{2L+2} - \frac{1}{N_L} \xi_0 \right) v_{2L+1} + \frac{\xi_0}{N_L} v_{2L+2} \right]$$

$$\dot{v}_{2L+1} = \gamma^2 \left[\xi_1 v_0 + \left(\xi_2 - \frac{N_{L+1}}{N_L} \xi_0 \right) v_1 + \right.$$

$$\left. + \xi_3 v_2 + \left(\xi_4 - \frac{N_{L+2}}{N_L} \xi_0 \right) v_3 + \dots + \xi_{2L} v_{2L} + \right.$$

$$\left. + \left(\xi_{2L+2} - \frac{1}{N_L} \xi_0 \right) v_{2L+1} + \frac{\xi_0}{N_L} v_{2L+2} \right]$$

Вли в матричном виде

$$\dot{V} = A_M V + \gamma^2 B_M(t) V \quad (24)$$

где A_m и $B_m(t)$ квадратные матрицы $(2L+3) \times (2L+3)$ и ввиду того, что их легко выписать исходя из последней системы, они здесь не приводятся.

Поскольку уравнение $\det(J\lambda - A_m) = 0$ имеет $L+1$ пар чисто мнимых корней $\pm i\nu_0, \pm i\nu_1, \dots, \pm i\nu_L$, а также корень $\lambda = 0$, причем чисто мнимые корни мы приобрели при составлении уравнения $\ddot{\varphi}_L + \nu_L^2 \varphi_L = 0$, то для исследования устойчивости тривиального решения интегрального уравнения (15) нам необходимо спроектировать (24) на собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\lambda = 0$. Тогда получим

$$\dot{v}_{2L+2} = \beta \omega^2 \frac{1}{N_L} \bar{\Xi}_0(t) v_{2L+2} \quad (25)$$

По индукции легко показать, что среднее значение $\bar{\Xi}_0(t)$ равно

$$\bar{\Xi}_0(t) = \frac{N_{L+1}}{4W(0)} \sum_{j=0}^L (A_j^2 + B_j^2) \left(\frac{1}{W(i\nu_j)} + \frac{1}{W(-i\nu_j)} \right) \quad (26)$$

Поэтому, осредняя (25), получим

$$\dot{\bar{v}}_{2L+2} = \beta \omega^2 \frac{1}{4W(0)} \sum_{j=0}^L (A_j^2 + B_j^2) \left(\frac{1}{W(i\nu_j)} + \frac{1}{W(-i\nu_j)} \right) \bar{v}_{2L+2}$$

Отсюда, если выполнено условие

$$\Lambda = \frac{1}{4w(t_0)} \sum_{j=0}^L (A_j^2 + B_j^2) \left(\frac{1}{w(i\nu_j)} + \frac{1}{w(-i\nu_j)} \right) < 0, \quad (27)$$

то тривиальное решение (25), а значит и (15) экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем $\mu^2 \Lambda$.

Заметим, что выражение легко получить, учитывая следующее

$$G_j(t, s) \cdot \beta_j(s) = \frac{1}{w(t_0)} M_j \left[\left(\frac{A_j}{2} + \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{i\nu_j s}}{w(-i\nu_j)} + \frac{e^{i\nu_j t}}{w(i\nu_j)} \right) + \left(\frac{A_j}{2} - \frac{B_j}{2i} \right) \left(\frac{e^{-i\nu_j s}}{w(i\nu_j)} + \frac{e^{-i\nu_j t}}{w(-i\nu_j)} \right) \right] (A_j \cos \nu_j s + B_j \sin \nu_j s).$$

Осредняя последнее выражение по s , получим

$$\overline{G_j(t, s) \beta_j(s)} = \frac{1}{4w(t_0)} (A_j^2 + B_j^2) \left[\frac{1}{w(i\nu_j)} + \frac{1}{w(-i\nu_j)} \right].$$

Поэтому

$$\sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L \overline{G_j(t, s) \beta_k(s)} = \frac{1}{4w(t_0)} \sum_{j=0}^L (A_j^2 + B_j^2) \left[\frac{1}{w(i\nu_j)} + \frac{1}{w(-i\nu_j)} \right].$$

аналогично, для интегральных уравнений вида (15) мы доказали следующую теорему

ТЕОРЕМА 2.2. Если среднее значение по s

$\sum_{j=0}^L \sum_{k=0}^L \overline{G_j(t, s) \beta_k(s)} < 0$, то тривиальное решение (15) экспоненциально асимптотически устойчиво с показателем $\mu^2 \Lambda$.

ПРИМЕР 2.1.

Рассмотрим дифференциальное-разностное уравнение

$$x(t) + a[x(t-1) - x(t)] = \mu \cos \gamma t x(t). \quad (28)$$

Характеристический квазиполином соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$w(\lambda) = \lambda + a(e^{-\lambda} - 1).$$

При условии $a \neq 1$ уравнение $w(\lambda) = 0$ имеет простой корень $\lambda = 0$, а все остальные корни лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < -\gamma$, $\gamma > 0$. Используя алгоритм, описанный в § 2, а также теорему 2.1 мы приходим к исследованию на устойчивость следующего интегрального уравнения вида (15)

$$u(t) = y_0 + \mu y_0 [d \sin \gamma t - c(1 - \cos \gamma t)] + \mu^2 \int_0^t G(t,s) \cos \gamma s u(s) ds. \quad (29)$$

Здесь $d = \frac{\gamma - a \sin \gamma}{a^2(1 - \cos \gamma)^2 + (\gamma - a \sin \gamma)^2}$, $c = -\frac{a(1 - \cos \gamma)}{a^2(1 - \cos \gamma)^2 + (\gamma - a \sin \gamma)^2}$,

$$G(t,s) = \frac{1}{2(1-a)} \left[\frac{e^{i\gamma s}}{w(i\gamma)} + \frac{e^{i\gamma t}}{w(i\gamma)} + \frac{e^{i\gamma s}}{w(i\gamma)} + \frac{e^{-i\gamma t}}{w(-i\gamma)} \right].$$

Используя теорему 2.2., имеем

$$\Lambda = -\frac{a(1 - \cos \gamma)}{2(1-a)[(1 - \cos \gamma)^2 a^2 + (\gamma - a \sin \gamma)^2]}$$

При выполнении условия $\Lambda < 0$ получаем экспоненциальную устойчивость тривиального решения (29), а значит асимптотическую устойчивость тривиального решения (28). Эти результаты совпадают с результатами, полученными в [5] и [6] другими методами.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Методом, описанным в §2, можно исследовать на устойчивость скалярные уравнения вида (I) параграфа первого, которые при помощи замены (2) приводятся к уравнениям (II).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверкин А.И. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. - В кн.: Пятая летняя математическая школа. Киев, 1968, с.307-399.
2. Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М., 1971, 309 с.
3. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967. 500 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1969, 354 с.
5. Валеев К.Г. Применение преобразования Лапласа к решению и исследованию устойчивости линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздываниями аргумента. - "Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом", 1967, 4, с.51-78.
6. Колесов Ю.С., Майоров В.В. Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с последствием с близким к постоянным почти-периодическими коэффициентами. - "Вестник Ярославского университета". 1973, Ярославль, № 5, с. 68-85.

ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1к

М. И. Хазан

Экономический факультет ДГУ им. П. Стучки
Введение

В последние годы во многих работах /см., например, [1] - [8], [18] - [21]/ изучались эллиптические и параболические задачи с краевым условием вида

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ на границе области,} \quad (0.1)$$

где $\partial/\partial \nu$ - дифференцирование по конормали, а β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} /вообще говоря, многозначный/. Частными случаями условия /0.1/ являются первое, второе и третье краевые условия, а также условие

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu} = \beta(u) \text{ на границе области}$$

где $\beta: (a_-, a_+) \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная неубывающая функция, $-\infty \leq a_- < a_+ \leq +\infty$, причем либо $a_{\pm} = \pm \infty$, либо $\beta(r) \rightarrow \pm \infty$ при $r \rightarrow \pm \infty$. Термин "односторонние условия" относится к случаям, когда β действительно является многозначным. Например, условие

$$u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ на границе области,} \quad (0.2)$$

встречающееся в теории упругости /задача Синьорини, впервые изученная в работе Фикера [1]/, может быть записано в виде /0.1/, если положить

$$\beta(r) = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ (-\infty, 0], & r = 0 \\ \emptyset, & r < 0 \end{cases}$$

Другие примеры см. в [2], с. 37 - 39. Задачи с краевым ус-

ловием /0.1/ для линейных эллиптических уравнений второго порядка были подробно изучены Ерезисом в [2], [3]. Его результаты мы существенно используем в настоящей работе. Начально-краевую задачу для уравнения $u_t = \Delta u + f(t, x)$ с краевым условием /0.1/ также исследовал Ерезис /см. [4], пример 2, [2], с. 101 - 102/ методами теории вариационных неравенств и теории полугрупп нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. При некоторых специальных β задачи с краевым условием /0.1/ для линейных уравнений ранее рассматривали Дово и Лионс /см. [5], [6]/. В настоящей работе мы доказываем существование сильных решений задач с краевым условием /0.1/ для эллиптических и параболических уравнений второго порядка с главной линейной частью, содержащих нелинейные младшие члены вида $F(x, u, \nabla u)$, где F - непрерывная функция, имеющая рост по ∇u меньше 2. Точные формулировки приводятся в § I. Ранее задачи с условием /0.1/ общего вида для таких уравнений, насколько нам известно, не рассматривались. Вместе с тем имеется ряд работ, где изучаются задачи с условием /0.2/ для квазилинейных уравнений. Так, в книге Лионса [18] в рамках теории вариационных неравенств получены теоремы существования и единственности "слабого" решения задач с краевым условием /0.2/ для эллиптических и параболических уравнений, содержащих нелинейные монотонные операторы типа

$$A(u) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + |u|^{p-2} u$$

/см. [3], гл. 2, п. 5.7, 9.5/. В работе да Вега [20] устанавливается ограниченность и гёльдеровость слабых решений вариационных неравенств, соответствующих задачам с краевым условием вида /0.2/ для равномерно эллиптических уравнений

$$\sum_{i=1}^N \frac{d}{dx_i} a_i(x, u(x), \nabla u(x)) + a_0(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad (0.3)$$

где a_i удовлетворяют условиям Каратеодори в некотором

ограничениям на рост. Результаты да Бега были усилены Н. Н. Уральцевой [19]. В этой же работе Н. Н. Уральцева доказала существование решения задачи /0.2/, /0.2/ из класса $W_2^2(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ в предположениях, гарантирующих классическую разрешимость уравнения /0.3/ при краевом условии вида $-\partial u / \partial \nu = \psi(u)$, где ψ - гладкая функция /фактически в [19] рассматривалось краевое условие, более общее, чем /0.2//. В частности, если главная часть уравнения /0.3/ - линейный равномерно эллиптический оператор, то для функции α_0 /которая предполагается дифференцируемой по всем аргументам/ допустим рост по ∇u не выше $2/\gamma$ на допускается рост меньше 2 , но зато не требуется дифференцируемости/. В работах да Бега и Гласа [7], [21] показывается существование, ограниченность и регулярность слабого решения вариационного неравенства, соответствующего начально-краевой задаче с краевым условием /0.2/ для квазилинейного равномерно параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \sum_{i,j=1}^N \frac{d}{dx_i} a_{ij}(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)) + \alpha_0(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)).$$

При этом предполагается, что функции a_{ij} ($0 \leq i, j \leq N$) имеют рост не выше 1 как по u , так и по ∇u /правда, допускаются особенности по t, x /.

Наши результаты получены с помощью теории о возмущенных m -диссипативных операторах /см. [14]/ и теории нелинейных эволюционных уравнений в банаховых пространствах /см. [15]/ в сочетании с методом регуляризации краевого условия, использованным Грезисом [2]. Решающей является возможность использовать нерефлексивное основное пространство, поэтому методы Грезиса и Люнса для доказательства существования хотя бы слабых решений непосредственно применить нельзя.

Отметим, что все результаты данной работы переносятся на случай краевого условия $g(x) - \partial u / \partial \nu(x) \in \beta(u(x) + h(x))$, где g и h - достаточно регулярные функции, заданные на границе области.

Терминология и обозначения

Область определения оператора \mathcal{A} обозначается $D(\mathcal{A})$, а множество значений - $R(\mathcal{A})$. Напомним, что оператор \mathcal{A} в банаховом пространстве X называется диссипативным, если

$$\forall u, v \in D(\mathcal{A}) \quad \forall \lambda > 0 \quad \|u - v - \lambda(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v)\| \geq \|u - v\|,$$

и m -диссипативным, если, кроме того, $\forall \lambda > 0 \quad R(I - \lambda \mathcal{A}) = X$ /здесь I - тождественный оператор/.

Всуду в дальнейшем Ω - ограниченная область в \mathbb{R}^N с гладкой границей Γ , и $\forall x \in \Gamma$ вектор внешней нормали к Γ в точке x обозначается $n(x) = (n_1(x), \dots, n_N(x))$. Норму в пространстве $L_p(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) будем обозначать $\|\cdot\|_p$, а норму в пространстве Соболева $W_p^s(\Omega)$ - $\|\cdot\|_{s,p}$. Мы будем часто пользоваться теоремами вложения пространств Соболева /см. [17], /, не всегда явно оговаривая это.

Примем сокращение $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_N)$ и положим $\|\nabla u\|_p = \|\nabla u\|_p$, т.е. $|\cdot|$ - норма в \mathbb{R}^N .

Топологию $\mathcal{C}(L_\infty(\Omega), L_1(\Omega))$ в $L_\infty(\Omega)$ будем называть слабой* топологией. Множество слабо* непрерывно дифференцируемых функций $u: [0, T] \rightarrow L_\infty(\Omega)$ обозначим $w^*C^1([0, T]; L_\infty(\Omega))$, множество слабо непрерывных функций $u: [0, T] \rightarrow X$, где X - банахово пространство, обозначим $wC([0, T]; X)$.

Очевидно, $wC([0, T]; X) \subset L_\infty(0, T; X)$. Если функция u , заданная на подмножестве S банахова пространства X и принимающая значения в банаховом пространстве Y , удовлетворяет условию Липшица на S , то будем писать:

$$u \in Lip(S; Y) \quad \text{/или просто } u \in Lip(S) \text{, если } Y = \mathbb{R} \text{ /.$$

§ I. Постановка задач и формулировка результатов

В этой работе мы рассмотрим две задачи: задачу о нахождении и решения аналитического уравнения

$$-Lu(x) + F(x, u(x), \nabla u(x)) + \lambda u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega) \quad (1.1)$$

удовлетворяющего условию

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma, \quad (1.2)$$

а также соответствующую начально-краевую задачу для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x) = Lu(t, x) - F(t, x, u(t, x), \nabla u(t, x)) + f(t, x) \quad (1.3)$$

$$(0 \leq t \leq T, x \in \Omega),$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (x \in \Omega), \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) \in \beta(u(t, x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.5)$$

Здесь

$$Lu = \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x) u, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} n_k(x), \quad (1.7)$$

$\beta: \mathbb{R} \rightarrow 2^{\mathbb{R}}$ - максимальный монотонный оператор. Последнее означает, что если $r_1, r_2 \in \mathcal{D}(\beta) = \{z \in \mathbb{R} : \beta(z) \neq \emptyset\}$ и $s_i \in \beta(r_i)$, $i=1,2$, то $(s_2 - s_1)(r_2 - r_1) \geq 0$, причем это свойство нарушается при любом расширении гл. 1-ника β .

Относительно коэффициентов дифференциального оператора L мы сделаем обычные предположения:

$$a_{ik} \in C^1(\bar{\Omega}), \quad b_i \in L_{\infty}(\Omega), \quad (1.8)$$

$$\forall x \in \bar{\Omega} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i,k=1}^N a_{i,k}(x) \xi_i \xi_k \geq \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0 \quad (1.9)$$

а на функцию F наложим следующие условия:

/А/ $F: [0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ - непрерывная функция, причем $|F(t, x, u, p)| \leq \mathcal{K}(|u|)(1 + |p|^{\sigma(|u|)})$, где $\mathcal{K}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ и $\sigma: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 2)$ не убывают;

/Б/ найдется такое $\omega_0 \in \mathbb{R}$, что $\forall (t, x, p) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ функция $u \rightarrow F(t, x, u, p) + \omega_0 u$ не убывает;

/Б/ при всех $t, \tau \in [0, T]$, $(x, u, p) \in \bar{\Pi} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$
 $|F(t, x, u, p) - F(\tau, x, u, p)| \leq \mathcal{K}_2(|u|) |t - \tau|,$
 где $\mathcal{K}_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает.

Мы докажем следующие теоремы.

Т е о р е м а I.1. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям /I.8/, /I.9/, а функция $F(t, x, u, p) \equiv F(x, u, p)$ - условиям /А/, /Б/. Пусть, далее, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - неубывающая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, $\beta(0) = 0$. Тогда найдется такое $\omega \in \mathbb{R}$, что при всех $\lambda > \omega$ задача /I.1/, /I.2/ для любого $f \in L_\infty(\Omega)$ имеет единственное решение $u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^2(\Omega)$, причем

$$\forall q \in [2, \infty) \quad \|u\|_{2, q} \leq \varphi_q(\|u\|_\infty)(1 + \|f\|_q), \quad (1.10)$$

$$\|u\|_\infty \leq (\lambda - \omega)^{-1} (\|f\|_\infty + M). \quad (1.11)$$

Здесь $\varphi_q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ - неубывающая функция, зависящая только от q, N, Ω, β, F и коэффициентов оператора L ; $M = \max\{F(x, 0, 0): x \in \bar{\Pi}\}$. При $q=2$ φ_q не зависит от β . Если $f_1, f_2 \in L_\infty(\Omega)$ и u_1, u_2 - соответствующие решения задачи /I.1/, /I.2/, то

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (\lambda - \omega)^{-1} \|f_1 - f_2\|_\infty \quad (1.12)$$

З а м е ч а н и е I.1. В тех случаях, когда оператор β предполагается однозначным /т.е. функцией/, в условии /I.2/ следует, разумеется, заменять включение равенством. Это относится и к условию /I.5/.

З а м е ч а н и е I.2. Число ω в теореме I.1 зависит лишь от коэффициентов оператора L и числа ω_0 из условия /Б/. В частности, если $\beta_i(x) = 0$ ($1 \leq i \leq N$), то можно взять $\omega = \omega_0 - \text{ess inf } \beta_0(x)$.

Т е о р е м а I.2. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям /I.8/, /I.9/, а функция $F(t, x, u, p) \equiv F(x, u, p)$ - условиям /А/, /Б/. Предположим, что β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} и $\beta(0) \geq 0$. Тогда при всех $\lambda > \omega$ /см. теорему I.1/ задача /I.1/, /I.2/ имеет решение $u \in W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ для любого $f \in L_\infty(\Omega)$.

Для этого решения справедливы оценки /I.10/ с $q=2$ и /I.11/.

Мы не знаем, единственно ли решение задачи /I.1/, /I.2/ в условиях теоремы I.2. Следующий результат показывает, что единственность имеет место в классе $W_2^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, более узком, чем тот, в котором установлено существование решения.

Т е о р е м а I.3. Предположим, что выполнены условия теоремы I.2 и $\lambda > \omega$ /см. теорему I.1 и замечание I.2/. Пусть $f_1, f_2 \in L_\infty(\Omega)$ и $\forall i=1,2 \quad u_i \in W_2^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ - решение задачи /I.1/, /I.2/ с $f=f_i$. Тогда

$$\|u_1 - u_2\|_\infty \leq (\lambda - \omega)^{-1} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Перейдем к вопросу о регулярности решений задачи /I.1/, /I.2/. Мы не касаемся здесь случая, когда $N=1$ /т.е. интервал вещественной прямой/. Более сильные результаты могут быть получены в этом случае более прямым путем; это относится и к задаче /I.3/ - /I.5/. Мы надеемся посвятить одномерному случаю отдельную работу. При $N=2$ $W_2^2(\Omega)$ вложено в $Lip(\bar{\Omega})$, так что решение задачи /I.1/, /I.2/, существование которого гарантируется теоремой I.2, оказывается Липшиц-непрерывным в $\bar{\Omega}$. При $N > 2$ мы уже не можем непосредственно с помощью теорем вложения сделать такой вывод, однако он остается в силе по крайней мере для $N \leq 4$. Это видно из следующей теоремы /мы считаем в ней $N > 2$.

Т е о р е м а I.4. Пусть выполнены условия теоремы I.2 и $u \in W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ - решение задачи /I.1/, /I.2/. Положим $\bar{\sigma} = \sigma(\|u\|_\infty)$ /см. условие /A/; напомним, что $\bar{\sigma} < 2$ /. Если $\bar{\sigma} < N/(N-2)$, то $u \in Lip(\bar{\Omega})$ и $\forall q > N$

$$\|u\|_{Lip(\bar{\Omega})} \leq \psi(\|f\|_q), \quad (1.13)$$

где невозрастающая функция $\psi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ зависит лишь от N , Ω , L , q и F .

С л е д с т в и е. Если $N \leq 4$, то в условиях теоремы I.2 при всех $\lambda > \omega$ и $f \in L_\infty(\Omega)$ существует решение задачи /I.1/, /I.2/ из класса $W_2^2(\Omega) \cap Lip(\bar{\Omega})$, удовлетворяю-

щие оценкам /I.10/ с $q=2$, /I.11/ и /I.13/.

Перейдем теперь к параболическому уравнению.

Т е о р е м а I.5. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям /I.8/, /I.9/, функция F - условиям /A/, /B/ и /B/. Пусть, далее, $f: [0, T] \rightarrow L_\infty(\Omega)$ - непрерывная функция с ограниченным изменением, $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - неубывающая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, $\beta(0)=0$. Положим

$$\mathcal{D} = \left\{ u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^2(\Omega) : Lu \in L_\infty(\Omega), -\frac{\partial u}{\partial y}(x) = \beta(u(x)) \text{ п. в. на } \Gamma \right\}$$

Тогда $\forall u_0 \in \mathcal{D}$ задача /I.3/ - /I.5/ имеет единственное решение u , такое, что

$$u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^1([0, T]; W_q^2(\Omega)) \cap C([0, T]; C^1(\bar{\Omega})) \cap \\ \cap Lip([0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap W^*C^1([0, T]; L_\infty(\Omega)), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L_\infty([0, T] \times \Omega).$$

При этом

$$\|u\|_{Lip([0, T]; L_\infty(\Omega))} + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c, \quad (1.14)$$

где $c > 0$ зависит только от $\|u_0\|_\infty$, $\|Lu_0 - F(0, x, u_0(x), \nabla u_0(x))\|_\infty$, функций \mathcal{K}_i и f и не зависит от β . Наконец, если $v_0 \in \mathcal{D}$ и v - соответствующее решение задачи /I.3/ - /I.5/, то

$$\forall t \in [0, T] \quad \|u(t) - v(t)\|_\infty \leq e^{ct} \|u_0 - v_0\|_\infty \quad (1.15)$$

Т е о р е м а I.6. Предположим, что функции F и f , а также оператор L удовлетворяют условиям теоремы I.5. Пусть β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} , $\beta(0)=0$,

$$u_0 \in W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega), Lu_0 = \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (a_{ik}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_i}) \in L_\infty(\Omega), \quad (1.16)$$

$$-\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) \in \beta(u_0(x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma. \quad (1.17)$$

Тогда задача /1.3/ - /1.5/ имеет решение

$$u \in W^1_2(\Omega) \cap Lip([0, T]; L_\infty(\Omega)) \cap W^1_\infty([0, T]; L_\infty(\Omega)),$$

удовлетворяющее оценке /1.14/ с c , зависящей от тех же параметров, что и в теореме 1.5.

С единственностью дело обстоит примерно так же, как и в эллиптическом случае. Соответствующий результат мы приведем в § 3 /см. теорему 3.1/.

С помощью теоремы 1.4 без труда доказывается

Т е о р е м а 1.7. Если

$$(N-2) \sup_{\tau \geq 0} \sigma(\tau) < N$$

/в частности, если $N \leq 4$ /, то решение задачи /1.3/ - /1.5/, построенное в теореме 1.6, принадлежит классу $Lip([0, T] \times \bar{\Omega})$.

§ 2. Доказательство основных результатов для эллиптического уравнения

Пусть β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} , $\beta(0) > 0$. Определим операторы \mathcal{A}_p ($2 \leq p \leq \infty$) в $L_p(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_p) = \{u \in W^1_2(\Omega) \cap L_p(\Omega) : Lu \in L_p(\Omega), -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

$$\mathcal{A}_p u(x) = Lu(x) \quad (2.1)$$

Из результатов [2] /теоремы 1.7, 1.10, предложение 1.13, замечание 1.34/ вытекает

Л е м м а 2.1. Существует число $\omega_1 \in \mathbb{R}$, зависящее только от коэффициентов оператора L , такое, что $\forall p \in [2, \infty]$ оператор $\mathcal{A}_p - \omega_1 I$ m -диссипативен в $L_p(\Omega)$. При этом

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_p) \quad \|u\|_{2,2} \leq c \|(\mathcal{A}_p - \omega_1 I) u\|_2, \quad (2.2)$$

где постоянная, C зависит только от N , Ω и коэффициентов оператора L /и не зависит от β /.

Определим теперь оператор B в $L_\infty(\Omega)$ соотношениями

$$\mathcal{D}(B) = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : -\frac{\partial u}{\partial \nu} \in \beta(u) \text{ п. в. на } \Gamma\}, \quad (2.3)$$

$$Bu(x) = -F(x, u(x), \nabla u(x)). \quad (2.4)$$

Наша ближайшая цель - показать, что оператор

$$\mathcal{A}_\infty + B - (\omega_0 + \omega_1)I : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty) \cap \mathcal{D}(B) \rightarrow L_\infty(\Omega)$$

диссипативен, а в условиях теоремы I.1 - m -диссипативен в $L_\infty(\Omega)$. Тем самым мы докажем теорему I.3 и значительную часть теоремы I.1. Как показал Като /см. [10], лемма I.1/, оператор \mathcal{A} в банаховом пространстве X диссипативен тогда и только тогда, когда

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \min_{f \in G(u-v)} (\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, f) \leq 0, \quad (2.5)$$

где

$$G(u) = \{f \in X^* : \|f\| = 1, (u, f) = \|u\|\}. \quad (2.6)$$

Назовем оператор \mathcal{A} вполне диссипативным, если

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \max_{f \in G(u-v)} (\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, f) \leq 0 \quad (2.7)$$

Легко видеть, что сумма диссипативного и вполне диссипативного операторов - диссипативный оператор. Этим фактом мы и воспользуемся для доказательства диссипативности оператора $\mathcal{A}_\infty + B - (\omega_0 + \omega_1)I$. Нам понадобится следующее известное соотношение:

$$\forall u, v \in X \quad \max_{f \in G(u)} (v, f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\|u + \varepsilon v\| - \|u\|}{\varepsilon} \equiv \tau(u, v), \quad (2.8)$$

которое вытекает, например, из теоремы У.9.5 книги [16] /существование предела в /2.8/ при любых $u, v \in X$ доказано в лемме У.9.1 той же книги/.

Л е м м а 2.2. Если функция $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет условию /Б/ и если выполнены

условия /1.8/, /1.9/, то оператор $B - \omega_0 I$ вполне диссипативен в $L_\infty(\Omega)$.

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что B вполне диссипативен, если условие /Б/ выполнено с $\omega_0 = 0$ /т.е. функция F не убывает по u /. Используем соотношение /2.8/ и явное выражение для функционала $\tau(u, v)$ в $C(\bar{\Omega})$ /в силу /2.3/, /2.4/ $\mathcal{D}(B) \cup R(B) \subset C(\bar{\Omega})$ /, полученное Сато /см. [II], §6/:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\|u + \varepsilon v\|_\infty - \|u\|_\infty}{\varepsilon} = \max_{x^* \in \{x \in \bar{\Omega} : |u(x)| = \|u\|_\infty\}} v(x^*) \operatorname{sgn} u(x^*) \quad (2.9)$$

$$(u, v \in C(\bar{\Omega}), u \neq 0).$$

Таким образом, нам следует показать, что если $u, v \in \mathcal{D}(B)$, $u \neq v$ и $x^* \in \bar{\Omega}$ - такая точка, что

$$|u(x^*) - v(x^*)| = \|u - v\|_\infty, \quad (2.10)$$

то

$$(-F(x^*, u(x^*), \nabla u(x^*)) + F(x^*, v(x^*), \nabla v(x^*))) \operatorname{sgn}(u(x^*) - v(x^*)) \leq 0.$$

Поскольку F не убывает по u , для этого достаточно проверить, что из /2.10/ вытекает

$$\nabla u(x^*) = \nabla v(x^*). \quad (2.11)$$

Это очевидно, если $x^* \in \Omega$. Пусть теперь $x^* \in \Gamma$ и выполнено /2.10/. Не умаляя общности, можем считать, что $u(x^*) - v(x^*) > 0$, т.е. в точке x^* функция $W = u - v$ достигает максимума. Тогда, во-первых,

$$\frac{\partial W}{\partial n}(x^*) = (\nabla W(x^*), n(x^*)) \geq 0, \quad (2.12)$$

а во-вторых, поскольку в точке x^* W достигает максимума на Γ , производные W по всем касательным направлениям равны нулю, так что

$$\nabla W(x^*) = (\nabla W(x^*), n(x^*)) n(x^*). \quad (2.13)$$

Из /2.12/ и /2.13/ выводим, что

$$\nabla W(x^*) = \alpha n(x^*), \quad \alpha \geq 0. \quad (2.14)$$

Используя /2.14/ и /1.9/, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial v}(x^*) &= \sum_{i,k=1}^N \alpha_{ik}(x^*) \frac{\partial w}{\partial x_i}(x^*) n_k(x^*) = \\ &= \alpha \sum_{i,k=1}^N \alpha_{ik}(x^*) n_i(x^*) n_k(x^*) \geq \alpha \alpha, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial W}{\partial v}(x^*) = \frac{\partial u}{\partial v}(x^*) - \frac{\partial v}{\partial v}(x^*) \leq 0, \quad (2.16)$$

так как

$$-\frac{\partial u}{\partial v}(x^*) \in \beta(u(x^*)), \quad -\frac{\partial v}{\partial v}(x^*) \in \beta(v(x^*))$$

и $u(x^*) > v(x^*)$. Сравнивая /2.15/ и /2.16/, убедимся, что $\alpha = 0$. Отсюда в силу /2.14/ следует, что $\nabla W(x^*) = 0$, т.е. выполнено /2.11/. Лемма доказана.

Из лемм 2.2 и 2.1, как было замечено выше, вытекает

Л е м м а 2.3. В условиях леммы 2.2 оператор

$$A_\infty + B - (\omega_0 + \omega_1)I : \mathcal{D}(A_\infty) \cap \mathcal{D}(B) \rightarrow L_\infty(\Omega)$$

диссипативен в $L_\infty(\Omega)$.

Доказательство теоремы I.3. Пусть $\lambda > \omega = \omega_0 + \omega_1$ и u_i, f_i ($i=1,2$) удовлетворяют условиям теоремы. Это означает, что $u_i \in \mathcal{D}(A_\infty) \cap \mathcal{D}(B)$, $f_i = \lambda u_i - (A_\infty + B)u_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f_1 - f_2 &= (\lambda - \omega)(u_1 - u_2) - ((A_\infty + B - \omega I)u_1 - (A_\infty + B - \omega I)u_2) = \\ &= (\lambda - \omega)(u_1 - u_2 - (\lambda - \omega)^{-1}((A_\infty + B - \omega I)u_1 - (A_\infty + B - \omega I)u_2)). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммой 2.3 и определением диссипативного оператора, получим: $\|f_1 - f_2\|_\infty \geq (\lambda - \omega) \|u_1 - u_2\|_\infty$, что и доказывает теорему.

Перейдем теперь к доказательству теоремы I.1.

Л е м м а 2.4. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям /1.8/, /1.9/ и пусть $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - неубывающая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, $\beta(0) = 0$. Тогда $\mathcal{D}(A_\infty) \subset \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^2(\Omega)$ и

$$\forall q \geq 2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A_\infty) \quad \|u\|_{2,q} \leq c_q (\|u\|_\infty) \|(\lambda - \omega_1 I)u\|_q, \quad (2.17)$$

где $c_q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ - неубывающая функция, зависящая только от N, Ω, q, β и коэффициентов оператора L .

Доказательство. Если β удовлетворяет условию Липшица на \mathbb{R} , то лемма вытекает из теоремы I.9 работы [2], причем c_q можно считать константами. Общий случай легко сводится к этому. В самом деле, если $u \in W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \beta(u(x)) \text{ п. в. на } \Gamma,$$

где β удовлетворяет локальному условию Липшица, то

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \bar{\beta}(u(x)) \text{ п. в. на } \Gamma$$

для любой $\bar{\beta}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающей с β на сегменте $[-\|u\|_\infty, +\|u\|_\infty]$ и удовлетворяющей условию Липшица на \mathbb{R} .

Лемма 2.5. Если выполнены условия теоремы I.1, то оператор

$$\mathcal{A}_\infty + B - (\omega_0 + \omega_1)I : \mathcal{D}(\mathcal{A}_\infty) \rightarrow L_\infty(\Omega)$$

m -диссипативен в $L_\infty(\Omega)$.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_\infty - \omega_1 I, \quad \tilde{B} = B - \omega_0 I \quad (2.18)$$

Из лемм 2.1, 2.4 и 2.3 следует, что оператор \mathcal{A} m -диссипативен, $\mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}(\tilde{B})$ (напомним, что $W_q^2(\Omega)$ вложено в $C^2(\bar{\Omega})$ при $q > N/2$) и оператор $\mathcal{A} + \tilde{B} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow L_\infty(\Omega)$ диссипативен в $L_\infty(\Omega)$. Если мы покажем, что $\forall \mu > 0$ оператор $\tilde{B}(I - \mu \mathcal{A})^{-1}$ вполне непрерывен в $L_\infty(\Omega)$ и

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \|\tilde{B}u\|_\infty \leq \psi(\|u\|_\infty, \|\mathcal{A}u\|_\infty), \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\psi(z, \rho)}{\rho} = 0, \quad (2.19)$$

где $\psi(z, \rho): \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает по z и ρ , то из теоремы 2 нашей работы [14] будет следовать m -диссипативность оператора $\mathcal{A} + \tilde{B}$. Для проверки условия /2.18/ воспользуемся оценкой

$$\|\nabla u\|_q \leq c_{\alpha, \rho} \|u\|_{2, \rho}^\alpha \|u\|_\infty^{1-\alpha} \quad (2.20)$$

$$(u \in W_p^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega), \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < 1, \quad 1 \leq \rho \leq \infty, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-2\alpha}{N} + \frac{\alpha}{p}),$$

которая является частным случаем интерполяционного неравенства Ниренберга /см. [12]/. Из /2.18/, /2.4/ и условия /A/ получим:

$$\forall u \in \mathcal{D}(\tilde{B}) \quad \|\tilde{B}u\|_{\infty} \leq \mathcal{K}(\|u\|_{\infty}) (1 + \|\nabla u\|_{\infty}^{\delta(\|u\|_{\infty})}). \quad (2.21)$$

Применяя /2.20/ с $\rho = 2N/(2 - \delta(\|u\|_{\infty}))$, $\alpha = 2/(2 + \delta(\|u\|_{\infty}))$, находим, что

$$\forall u \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} W_p^2(\Omega) \quad \|\nabla u\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_2(\|u\|_{\infty}) \|u\|_{2, 2N/(2 - \delta(\|u\|_{\infty}))}^{\frac{2}{2 + \delta(\|u\|_{\infty})}} \quad (2.22)$$

Из /2.21/ и /2.22/, учитывая лемму 2.4 и /2.18/, выводим:

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \quad \|\tilde{B}u\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_3(\|u\|_{\infty}) \left(1 + \|Au\|_{\infty}^{\frac{2\delta(\|u\|_{\infty})}{2 + \delta(\|u\|_{\infty})}}\right) \quad (2.23)$$

где $\mathcal{K}_3: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ - неубывающая функция. Поскольку $\forall \tau \geq 0$ $\delta(\tau) < 2$, то

$$\frac{2\delta(\tau)}{2 + \delta(\tau)} < 1,$$

так что из /2.23/ следует /2.19/. Итак, остается показать, что $\forall \mu > 0$ оператор $\tilde{B}(I - \mu \mathcal{A})^{-1}$ вполне непрерывен в $L_{\infty}(\Omega)$. Поскольку оператор \tilde{B} непрерывен как оператор из $C^1(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$ /см. /2.18/ и /2.4//, достаточно проверить, что оператор $(I - \mu \mathcal{A})^{-1}$ вполне непрерывен из $L_{\infty}(\Omega)$ в $C^1(\bar{\Omega})$. В силу леммы 2.1

$$\forall u, v \in L_{\infty}(\Omega) \quad \|(I - \mu \mathcal{A})^{-1}u - (I - \mu \mathcal{A})^{-1}v\|_{\infty} < \|u - v\|_{\infty}. \quad (2.24)$$

Из /2.24/ и тождества

$$\mathcal{A}(I - \mu \mathcal{A})^{-1} = \mu^{-1}((I - \mu \mathcal{A})^{-1} - I) \quad (\mu > 0),$$

которое легко проверить непосредственно, следует, что оператор

$$\mathcal{A}(I - \mu \mathcal{A})^{-1}: L_{\infty}(\Omega) \rightarrow L_{\infty}(\Omega)$$

удовлетворяет условию Липшица с константой $2\mu^{-1}$. Так как $\mathcal{A}1 \geq 0$ и $\mathcal{A}1 = 0$, то $\forall u > 0$ $(I - \mu \mathcal{A})^{-1}0 = 0$ и $\mathcal{A}(I - \mu \mathcal{A})^{-1}0 = 0$. Поэтому

$$\forall u \in L_{\infty}(\Omega) \quad \|\mathcal{A}(I - \mu \mathcal{A})^{-1}u\|_{\infty} \leq 2\mu^{-1}\|u\|_{\infty} \quad (2.25)$$

Из /2.25/ в силу леммы 2.4 вытекает, что

$$\|(I - \mu A)^{-1} u\|_{2, 2N} \leq \mu^{-1} K_4(\|u\|_\infty) \quad (\mu > 0, u \in L_\infty(\Omega)), \quad (2.26)$$

где $K_4(\tau) = 2\tau c_{2N}(\tau) (\text{mes } \Omega)^{1/2N}$, $\tau > 0$. Применяя неравенство /2.20/ с $p = 2N$, $\alpha = 2/3$, а также /2.24/ и /2.26/, находим:

$$\begin{aligned} \forall \mu > 0 \quad \forall u, v \in L_\infty(\Omega) \quad & \|\nabla((I - \mu A)^{-1} u - (I - \mu A)^{-1} v)\|_\infty \leq \\ & \leq c_{2/3, 2N} \|(I - \mu A)^{-1} u - (I - \mu A)^{-1} v\|_{2, 2N}^{2/3} \|(I - \mu A)^{-1} u - (I - \mu A)^{-1} v\|_\infty^{1/3} \\ & \leq \mu^{-2/3} c_{2/3, 2N} (K_4(\|u\|_\infty) + K_4(\|v\|_\infty))^{2/3} \|u - v\|_\infty^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Из /2.24/, /2.26' и /2.27/ следует, что оператор

$$(I - \mu A)^{-1} : L_\infty(\Omega) \rightarrow C^1(\bar{\Omega})$$

вполне непрерывен при каждом $\mu > 0$ /нужно учесть, что вложение $W_{2N}^2(\Omega)$ в $C^1(\bar{\Omega})$ компактно/. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I.I. Из леммы 2.5 следует, что в условиях теоремы I.I для любых $\lambda > \omega = \omega_0 + \omega_1$ и $f \in L_\infty(\Omega)$ уравнение

$$\lambda u - A_\infty u - Bu = f \quad (2.28)$$

имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(A_\infty)$. Учитывая лемму 2.4 и вспоминая определение операторов A_∞ и B , убеждаемся, что u принадлежит классу $\bigcap_{q \geq 2} W_q^2(\Omega)$ и является решением /и притом единственным/ задачи /I.I/, /I.2/. Оценка /I.I2/ следует из доказанной выше теоремы I.3, так как при $q > N$ $W_q^2(\Omega)$ вложено в $C^1(\bar{\Omega})$. Пользуясь тем, что $u = 0$ является единственным решением задачи /I.I/, /I.2/ с $f(x) = F(x, 0, 0)$ /напомним, что $\mathcal{E}(\Omega) \subset C^1(\bar{\Omega})$ из /I.I2/ получим /I.II/. Остается доказать оценку /I.I3/. Из /2.28/ получаем:

$$(\lambda - \omega_1 I)u = (\lambda - \omega_1)u - Bu - f \quad (2.29)$$

откуда, в силу леммы 2.4,

$$\forall q \geq 2 \quad \|u\|_{2, q} \leq c_q(\|u\|_\infty) \|(\lambda - \omega_1)u - Bu - f\|_q. \quad (2.30)$$

причем C_2 можно считать константой, не зависящей от β /см. лемму 2.1/. Поскольку оператор \mathcal{L}_∞ является сужением диссипативного в $L_q(\Omega)$ оператора \mathcal{L}_q и

$$(\lambda - \omega_1)u - (\mathcal{L}_\infty - \omega_1 I)u = f + Bu,$$

то $\forall q \in [2, \infty)$

$$\|u\|_q \leq (\lambda - \omega_1)^{-1} (\|f + Bu\|_q + M_q), \quad M_q = \|F(x, 0, 0)\|_q, \quad (2.31)$$

Из /2.30/ и /2.31/ вытекает, что

$$\|u\|_{2,q} \leq c_q (\|u\|_\infty) (2\|f\|_q + 2\|Bu\|_q + M_q) \quad (2 \leq q < \infty). \quad (2.32)$$

В силу условия /A/ $\forall q \in [2, \infty)$

$$\|Bu\|_q \leq (1 + (\text{mes } \Omega)^{1/q}) \mathcal{K}(\|u\|_\infty) (1 + \|\nabla u\|_{2q}^{\sigma(\|u\|_\infty)}). \quad (2.33)$$

Применяя неравенство /2.20/, получим:

$$\|\nabla u\|_{2q} \leq c_{1/2,q} \|u\|_{2,q}^{1/2} \|u\|_\infty^{1/2} \quad (2 \leq q < \infty). \quad (2.34)$$

Из /2.33/ и /2.34/ выходит оценка

$$\|Bu\|_q \leq h_q(\|u\|_\infty) (1 + \|u\|_{2,q}^{\sigma(\|u\|_\infty)/2}) \quad (2 \leq q < \infty), \quad (2.35)$$

где функция $h_q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ определяется по функции \mathcal{K} из условия /A/, числу q и области Ω . Из /2.35/ и /2.32/, в свою очередь, следует, что

$$\|u\|_{2,q} \leq d_q(\|u\|_\infty) (\|f\|_q + \|u\|_{2,q}^{\sigma(\|u\|_\infty)/2} + 1) \quad (2 \leq q < \infty), \quad (2.36)$$

где $d_q(r) = 2c_q(r)(1 + 2h_q(r) + M_q)$. Наконец, из /2.36/ вытекает, что

$$\|u\|_{2,q} \leq \max \{ 2d_q(\|u\|_\infty) (\|f\|_q + 1), 2^{2 - \frac{2}{\sigma(\|u\|_\infty)}} \} \quad (2 \leq q < \infty),$$

откуда и следует /2.10/ с

$$\varphi_q(r) = \max \{ 2d_q(r), 2^{2 - \frac{2}{\sigma(r)}} \}.$$

Из доказательства видно, что функция φ_q вполне определяется числами N и q , функциями \mathcal{K} и σ из условия /A/, коэффициентами оператора L и областью Ω , а при $q > 2$ — также функцией β . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Поскольку β — максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} , то $\forall \varepsilon > 0$

$R(I + \varepsilon\beta) = R$, оператор $(I + \varepsilon\beta)^{-1} : R \rightarrow R$ однозначен /и является сжатием/, а оператор

$$\beta_\varepsilon = \varepsilon^{-1} (I - (I + \varepsilon\beta)^{-1})$$

суть определенная на R неубывающая функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой ε^{-1} /см., например, [13], леммы I.2 и I.3/. Легко видеть, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall z \in R \quad \beta_\varepsilon(z) \in \beta(I + \varepsilon\beta)^{-1}(z). \quad (2.37)$$

Зафиксируем $\lambda > \omega$ и $f \in L_\infty(\Omega)$. В силу теоремы I.I для любого $\varepsilon > 0$ задача

$$-L u_\varepsilon(x) + F(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) + \lambda u_\varepsilon(x) = f(x), \quad (x \in \Omega) \quad (2.38)$$

$$-\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu}(x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x)) \quad (x \in \Gamma) \quad (2.39)$$

имеет единственное решение $u_\varepsilon \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} W_2^2(\Omega)$, причем

$$\sup_{\varepsilon > 0} (\|u_\varepsilon\|_\infty + \|u_\varepsilon\|_{2,2}) < +\infty \quad (2.40)$$

/условие /2.39/ выполняется при всех $x \in \Gamma$, а не только почти всюду, так как в силу теорем вложения $\partial u_\varepsilon / \partial \nu$ и u_ε непрерывны на Γ /. Из /2.40/ вытекает, что найдутся $u \in W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ и последовательность $\varepsilon(n) \downarrow 0$ такие, что

$$u_{\varepsilon(n)} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в } W_2^2(\Omega) \text{ и слабо}^* \text{ в } L_\infty(\Omega) \quad (2.41)$$

Из /2.41/, поскольку вложение $W_2^2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$ компактно, следует, что

$$u_{\varepsilon(n)} \rightarrow u \quad \text{в } W_2^1(\Omega).$$

Поэтому можно считать, что

$$u_{\varepsilon(n)}(x) \rightarrow u(x), \quad \nabla u_{\varepsilon(n)}(x) \rightarrow \nabla u(x) \quad \text{п. в. в } \Omega \quad (2.42)$$

Значит,

$$F(x, u_{\varepsilon(n)}(x), \nabla u_{\varepsilon(n)}(x)) \rightarrow F(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{п. в. в } \Omega. \quad (2.43)$$

Из /2.41/ в силу /1.6/ и /1.8/ вытекает, что

$$L u_{\varepsilon(n)} \rightarrow L u \quad \text{слабо в } L_2(\Omega), \quad (2.44)$$

а отсюда и из /2.38/ получаем

$$\|F(x, u_{\varepsilon(n)}(x), \nabla u_{\varepsilon(n)}(x))\|_2 \leq \text{const}. \quad (2.45)$$

Из /2.43/ и /2.45/ в силу леммы I.3 главы I книги [18] вы-
ходит:

$$F(x, u_{\varepsilon(n)}(x), \nabla u_{\varepsilon(n)}(x)) \rightarrow F(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{слабо в } L_2(\Omega) \quad (2.46)$$

Наконец, из /2.38/, /2.41/, /2.44/ и /2.46/ выводим, что

$$-L u(x) + F(x, u(x), \nabla u(x)) + \lambda u(x) = f(x) \quad \text{п. в. в } \Omega. \quad (2.47)$$

Покажем теперь, что u удовлетворяет также граничному ус-
ловию /1.2/. Из /2.41/ с помощью теорем вложения получим:

$$u_{\varepsilon(n)}|_{\Gamma} \rightarrow u|_{\Gamma} \quad \text{в } L_2(\Gamma), \quad (2.48)$$

$$\forall i=1, \dots, N \quad \frac{\partial u_{\varepsilon(n)}}{\partial x_i} |_{\Gamma} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} |_{\Gamma} \quad \text{в } L_2(\Gamma). \quad (2.49)$$

Из /2.49/ в силу /1.7/ и /1.8/ следует, что

$$\frac{\partial u_{\varepsilon(n)}}{\partial \nu} |_{\Gamma} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} |_{\Gamma} \quad \text{в } L_2(\Gamma). \quad (2.50)$$

Из /2.48/ и /2.50/ вытекает, что

$$u_{\varepsilon(n)}(x) \rightarrow u(x), \quad \frac{\partial u_{\varepsilon(n)}}{\partial \nu}(x) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \quad \text{п. в. на } \Gamma \quad (2.51)$$

Сравнивая /2.39/ и /2.37/, убедимся, что

$$\forall n \quad \forall x \in \Gamma \quad -\frac{\partial u_{\varepsilon(n)}}{\partial \nu}(x) \in \beta(I + \varepsilon(n)\beta)^{-1} u_{\varepsilon(n)}(x). \quad (2.52)$$

С другой стороны, учитывая определение функции β_ε , из
/2.39/ получим:

$$\forall n, \quad \forall x \in \Gamma \quad (I + \varepsilon(n)\beta)^{-1} u_{\varepsilon(n)}(x) - u_{\varepsilon(n)}(x) = \varepsilon(n) \frac{\partial u_{\varepsilon(n)}}{\partial \nu}(x). \quad (2.53)$$

Отсюда в силу /2.51/ вытекает, что

$$(I + \varepsilon(n)\beta)^{-1} u_{\varepsilon(n)}(x) \rightarrow u(x) \quad \text{п. в. на } \Gamma \quad (2.54)$$

Поскольку график максимального монотонного оператора β замкнут, из /2.52/, /2.54/ и /2.51/ следует, что

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma. \quad (2.55)$$

Соотношения /2.47/ и /2.55/ показывают, что u является решением задачи /I.1/, /I.2/. В силу теоремы I.1

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|u_\varepsilon\|_\infty \leq (\lambda - \omega)^{-1} (\|f\|_\infty + M).$$

Отсюда и из /2.41/ вытекает, что u удовлетворяет неравенству /I.II/. Что же касается оценки /I.I0/ с $q = 2$, то она справедлива для любого решения задачи /I.1/, /I.2/, принадлежащего классу $W_2^2(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Вывод, приведенный в доказательстве теоремы I.1, при $q = 2$ остается в силе, если выполнены условия теоремы I.2. Следует лишь вместо леммы 2.4 использовать лемму 2.1 и под Bu понимать функцию $F(x, u(x), \nabla u(x))$. Теорема полностью доказана.

§ 3. Доказательство основных результатов для параболического уравнения

Предположим, что выполнены условия теоремы I.5; и определим семейство операторов $\mathcal{A}(t)$ ($0 \leq t \leq T$) в $L_\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) = \left\{ u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_2^2(\Omega) : Lu \in L_\infty(\Omega), \forall x \in \Gamma - \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \beta(u(x)) \right\}, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{A}(t)u(x) = Lu(x) - F(t, x, u(x), \nabla u(x)) + f(t, x). \quad (3.2)$$

Учитывая обозначения, введенные в § 2, и лемму 2.4, можем записать:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_\infty + \mathcal{B}(t) + f(t).$$

Для доказательства теоремы I.5 мы используем теорему I.4 нашей работы [15], положив в ней $X = L_\infty(\Omega) = (L_1(\Omega))'$.

Из леммы 2.5 и 2.4 непосредственно следует

Л е м м а 3.1. В условиях теоремы I.5 оператор

$\mathcal{A}(t) - (\omega_0 + \omega_1)I$ m -диссипативен в $L_\infty(\Omega)$ при любом $t \in [0, T]$.

Л е м м а 3.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.5, $t \in [0, T]$,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}(t)) \ni u_n \rightarrow u \quad \text{в } L_\infty(\Omega), \quad (3.4)$$

$$\mathcal{A}(t)u_n \rightarrow v \quad \text{слабо}^* \text{ в } L_\infty(\Omega). \quad (3.5)$$

Тогда $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$ и $\mathcal{A}(t)u = v$.

Доказательство. В силу теоремы 1.1 $\forall u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t))$

$$\forall q \in [2, \infty) \quad \|u\|_{2,q} \leq \varphi_q(\|u\|_\infty)(\|\mathcal{A}(t)u + (\omega_0 + \omega_1 + 1)u\|_q + 1). \quad (3.6)$$

Из /3.4/ - /3.6/ следует, что

$$\forall q \in [2, \infty) \quad \sup_n \|u_n\|_{2,q} < +\infty. \quad (3.7)$$

Из /3.4/ и /3.7/ вытекает, что

$$u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^2(\Omega), \quad (3.8)$$

$$\forall q \in [2, \infty) \quad u_n \rightarrow u \quad \text{слабо в } W_q^2(\Omega). \quad (3.9)$$

Поскольку $W_{2N}^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\bar{\Omega})$, из /3.9/ получаем:

$$u_n \rightarrow u \quad \text{в } C^1(\bar{\Omega}). \quad (3.10)$$

Переходя к пределу в равенствах

$$-\frac{\partial u_n(x)}{\partial y} = \beta(u_n(x)) \quad (x \in \Gamma),$$

получим, учитывая /3.10/, /1.7/ и /1.8/:

$$-\frac{\partial u}{\partial y}(x) = \beta(u(x)) \quad (x \in \Gamma). \quad (3.11)$$

Из /3.9/ - /3.11/, принимая во внимание /3.2/, /1.6/ и /1.8/ выведем:

$$u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}(t)), \quad \mathcal{A}(t)u_n \rightarrow \mathcal{A}(t)u \quad \text{слабо в } L_2(\Omega). \quad (3.12)$$

Наконец, сравнивая /3.12/ и /3.5/, убеждаемся, что $v = \mathcal{A}(t)u$.

Доказательство теоремы 1.5. Из леммы 3.1, 3.2 и оценки

$$\|\mathcal{A}(t)u - \mathcal{A}(\tau)u\|_\infty \leq \mathcal{K}_1(\|u\|_\infty)|t - \tau| + \|f(t) - f(\tau)\|_\infty \quad (0 \leq t, \tau \leq T),$$

которая вытекает из /3.2/ и условия /В/, следует, что семейство операторов $\mathcal{A}(t)$ удовлетворяет всем условиям теорем

1.2 и 1.4. работы [15]. Поэтому $\forall u_0 \in \mathcal{D}(A(0))$ найдется такая функция

$$u \in \text{Lip}([0, T]; L_\infty(\Omega)) \cap W^* C^1([0, T]; L_\infty(\Omega)), \quad (3.13)$$

что

$$\forall t \in [0, T] \quad u(t) \in \mathcal{D}(A(t)), \quad (3.14)$$

$$W^* - \frac{d}{dt} u(t) = A(t)u(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = u_0, \quad (3.15)$$

причем

$$\|u\|_{\text{Lip}([0, T]; L_\infty(\Omega))} \leq c_0, \quad (3.16)$$

где c_0 зависит лишь от $\|u_0\|_\infty$, $\|A(0)u_0\|_\infty$, функций \mathcal{K}_1 и f . Из /3.15/ и /3.14/, учитывая /3.1/ и /3.2/, заключаем, что функция $u(t, x) = u(t)(x)$ является решением задачи /1.3/ - /1.5/, причем уравнение /1.3/ удовлетворяется в смысле распределений и почти всюду в Ω , $\partial u / \partial t \in L_\infty([0, T] \times \Omega)$ и

$$\forall t \in [0, T] \quad u(t) \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W_q^2(\Omega). \quad (3.17)$$

Кроме того, из /3.15/ и /3.16/ следует, что

$$\sup_{0 \leq t \leq T} (\|A(t)u(t)\|_\infty + \|u(t)\|_\infty) \leq c_1,$$

а отсюда с помощью /3.6/ получим:

$$\forall q \in [2, \infty) \quad \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{2, \Omega} \leq \bar{c}_q, \quad (3.18)$$

причем \bar{c}_2 не зависит от β /а зависит лишь от N , Ω , c_0 и коэффициентов оператора L /. Поскольку $\forall q \in [2, \infty)$ пространство $W_q^2(\Omega)$ рефлексивно, а при $q > N$ компактно вложено в $C^1(\bar{\Omega})$, из /3.13/ и /3.18/ следует, что

$$u \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} W^* C([0, T]; W_q^2(\Omega)) \cap C([0, T]; C^1(\bar{\Omega})).$$

Единственность решения задачи /1.3/ - /1.5/ в условиях теоремы 1.5, а также оценка /1.15/ вытекают из теоремы 3.1 /см. ниже/. Доказательство теоремы 1.5 закончено.

З а м е ч а н и е 3.1. Теорема 1.5 остается в силе, если условие /В/ заменить более слабым условием

$$|F(t, x, u, p) - F(\tau, x, u, p)| \leq \mathcal{K}_1(|u|)(1 + |\nabla u|^{\sigma(|u|)}) |t - \tau|,$$

однако при этом постоянная C в /1.14/ будет уже зависеть

от β , что лишает нас возможности доказать теорему 1.6.

Т е о р е м а 3.1. Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям /1.8/, /1.9/, функция $F(t, x, u, p)$ непрерывна и удовлетворяет условию /Б/, $f \in L_\infty((0, T) \times \Omega)$,

$$u_i \in Lip([0, T]; L_\infty(\Omega)) \quad (i=1, 2),$$

$$u_i(t) \in W_2^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}) \quad \text{п. в. на } [0, T],$$

$$\partial u_i(t, x) / \partial t = L u_i(t, x) - F(t, x, u_i(t, x), \nabla u_i(t, x)) + f(t, x)$$

в смысле распределений в $(0, T) \times \Omega$, и при почти всех $t \in (0, T)$

$$-\frac{\partial u_i}{\partial \nu}(t, x) \in \beta(u_i(t, x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma,$$

где β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} , $\beta(0) = 0$. Тогда

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_\infty \leq e^{(\omega_0 + \omega_1)t} \|u_1(0) - u_2(0)\|_\infty \quad (0 \leq t \leq T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим операторы $\tilde{B}(t)$ в $L_\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathcal{D}(\tilde{B}(t)) = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \text{ п. в. на } \Gamma\},$$

$$\tilde{B}(t)u(x) = -(F(t, x, u(x), \nabla u(x)) + \omega_0 u(x)).$$

Из условий теоремы следует, что п. в. на $(0, T) \quad \forall q \in [2, \infty)$ в $L_q(\Omega)$ существует сильная производная

$$du_i(t)/dt \in L_\infty(\Omega),$$

$$u_i(t) \in \mathcal{D}(A_\infty) \cap \mathcal{D}(\tilde{B}(t)) \quad \text{п. в. на } (0, T),$$

$$\frac{d}{dt} (e^{-(\omega_0 + \omega_1)t} u_i(t)) = (A_\infty - \omega_1 I) u_i(t) + \tilde{B} u_i(t) + f(t, \cdot).$$

Положим $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Используя лемму 1.3 работы [10], получим, что п. в. на $(0, T) \quad \forall q \in [2, \infty)$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e^{-(\omega_0 + \omega_1)t} u(t)\|_q = \|(A_\infty - \omega_1 I) u_1(t) - (A_\infty - \omega_1 I) u_2(t) + \tilde{B}(t) u_1(t) - \tilde{B}(t) u_2(t), J_q(u_1(t) - u_2(t))\|,$$

где $J_q : L_q(\Omega) \rightarrow L_{q/(q-1)}(\Omega)$ - отображение двойственности:

$$\forall h \in L_q(\Omega) \quad \|h\|_q^2 = (h, J_q(h)) = \|J_q(h)\|_{\frac{q}{q-1}}^2,$$

$$(h, g) = \int_{\Omega} h(x)g(x) dx.$$

Поскольку оператор $A_\infty - \omega_1 I$ является сужением диссипативного в $L_q(\Omega)$ оператора $A_q - \omega_1 I$ при каждом $q \in [2, \infty)$ /см. лемму 2.1/, то в силу леммы I.1 работы [10]

$$((A_\infty - \omega_1 I)u_1(t) - (A_\infty - \omega_1 I)u_2(t), J_q(u_1(t) - u_2(t))) \leq 0 \quad (2 \leq q < \infty).$$

Следовательно, $\forall q \in [2, \infty)$

$$\|e^{-(\omega_0 + \omega_1)t} u(t)\|_q^2 \leq \|u(0)\|_q^2 + 2 \int_0^t (\tilde{B}(s)u_1(s) - \tilde{B}(s)u_2(s), J_q(u(s))) ds \quad (3.19)$$

при всех $t \in [0, T]$. Теперь заметим, что

$$\forall h \in L_q(\Omega) \setminus \{0\} \quad J_q(h) = |h|^{q-2} h / \|h\|_q^{q-2} \quad (2 \leq q < \infty).$$

Пользуясь этой формулой и известным соотношением

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|h\|_q = \|h\|_\infty \quad (h \in L_\infty(\Omega)) \quad (3.20)$$

и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы I работы [9], можно показать, что

$$\forall g \in C(\bar{\Omega}) \quad \lim_{q \rightarrow \infty} (g, J_q(h)) \leq \|h\|_\infty \tau_\infty(h, g), \quad (3.21)$$

где

$$\tau_\infty(h, g) = \max_{x^* \in \{x \in \bar{\Omega} : |h(x)| = \|h\|_\infty\}} g(x^*) \operatorname{sign} h(x).$$

Перейдем в /3.19/ к пределу при $q \rightarrow \infty$. Учитывая /3.20/ /3.21/ и лемму Лебега - Фату, получим:

$$\|e^{-(\omega_0 + \omega_1)t} u(t)\|_\infty^2 \leq \|u(0)\|_\infty^2 + 2 \int_0^t \|u(s)\|_\infty \tau_\infty(u(s), \tilde{B}(s)u_1(s) - \tilde{B}(s)u_2(s)) ds.$$

Но из доказательства леммы 2.2 видно, что

$$\tau_\infty(h_1 - h_2, \tilde{B}(s)h_1 - \tilde{B}(s)h_2) \leq 0 \quad (s \in [0, T], h_i \in \mathcal{D}(\tilde{B}(s))).$$

Таким образом,

$$\|e^{-(\omega_0 + \omega_1)t} u(t)\|_\infty^2 \leq \|u(0)\|_\infty^2 \quad (0 \leq t \leq T),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 1.6. Как и при доказательстве теоремы 1.2 аппроксимируем оператор β неубывающими функциями $\beta_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(I - (I + \varepsilon\beta)^{-1})$, удовлетворяющими условию Липшица на \mathbb{R} . Пусть $\forall \varepsilon > 0$

$$u_\varepsilon^{(6)} \in \bigcap_{z \in \bar{Q}} W_2^1(\Omega), \quad (3.22)$$

$$-L_\varepsilon u_\varepsilon^{(6)} + u_\varepsilon^{(6)} = -L_0 u_0 + u_0 \quad (x \in \Omega), \quad (3.23)$$

$$-\frac{\partial u_\varepsilon^{(6)}}{\partial \nu}(x) = \beta_\varepsilon(u_\varepsilon^{(6)})$$

/см. леммы 2.1, 2.4 и замечание 1.2/. В силу /1.1./ и теоремы 1.7 работы [2] функция $u = u_0$ является единственным /в классе $W_2^2(\Omega)$ / решением задачи

$$-L_0 u(x) + u(x) = -L_0 u_0(x) + u_0(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$-\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma.$$

Поэтому, как видно из доказательства теоремы 1.2,

$$u_\varepsilon^{(6)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_0 \quad \text{слабо в } W_2^2(\Omega) \quad \text{и слабо}^* \text{ в } L_\infty(\Omega). \quad (3.25)$$

Из теоремы 3 работы [3] следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \|u_\varepsilon^{(6)}\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C \| -L_0 u_\varepsilon + u_\varepsilon \|_\infty, \quad (3.26)$$

где $C > 0$ зависит только от Ω и $\|a_{ij}\|_{C^2(\bar{\Omega})}$. Поскольку

$$Lu = L_0 u + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x) u, \quad (3.27)$$

из /3.22/, /3.26/ и /1.16/ вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad Lu_\varepsilon^{(6)} \in L_\infty(\Omega), \quad (3.28)$$

$$\sup_{\varepsilon > 0} (\|Lu_\varepsilon^{(6)} - F(0, x, u_\varepsilon^{(6)}(x), \nabla u_\varepsilon^{(6)}(x))\|_\infty + \|u_\varepsilon^{(6)}\|_\infty) < +\infty. \quad (3.29)$$

Из /3.22/, /3.24/ и /3.26/ в силу теоремы 1.5 следует, что $\forall \varepsilon > 0$ задача

$$\frac{\partial u^{(\varepsilon)}}{\partial t}(t, x) = Lu^{(\varepsilon)}(t, x) - F(t, x, u^{(\varepsilon)}(t, x), \nabla u^{(\varepsilon)}(t, x)) + f(t, x) \quad (3.30)$$

$$(0 \leq t \leq T, x \in \Omega),$$

$$-\frac{\partial u^{(\varepsilon)}}{\partial \nu}(t, x) = \beta_\varepsilon(u^{(\varepsilon)}(t, x)) \quad (0 \leq t \leq T, x \in \Gamma), \quad (3.31)$$

$$u^{(\varepsilon)}(0, x) = u_0^{(\varepsilon)}(x) \quad (x \in \Omega) \quad (3.32)$$

имеет единственное решение

$$u^{(\varepsilon)} \in W^1([0, T]; W_2^2(\Omega)) \cap Lip([0, T]; C(\bar{\Omega})) \cap W^*C^2([0, T]; L_\infty(\Omega)), \quad (3.33)$$

причем ввиду /3.29/

$$\sup_{\varepsilon > 0} (\|u^{(\varepsilon)}\|_{Lip([0, T]; C(\bar{\Omega}))} + \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^{(\varepsilon)}(t)\|_{2,2}) < +\infty \quad (3.34)$$

Из /3.34/ и /3.30/ получим:

$$\sup_{\substack{\varepsilon > 0 \\ 0 \leq t \leq T}} \|Lu^{(\varepsilon)}(t, \cdot) - F(t, \cdot, u^{(\varepsilon)}(t, \cdot), \nabla u^{(\varepsilon)}(t, \cdot))\|_\infty < +\infty. \quad (3.35)$$

Из /3.33/ и /3.34/ следует, что найдется последовательность $\varepsilon(n) \downarrow 0$ и функция $u \in W^1([0, T]; W_2^2(\Omega)) \cap Lip([0, T]; L_\infty(\Omega))$, такие что

$$\forall t \in [0, T] \quad u^{(\varepsilon(n))}(t) \rightarrow u(t) \quad \text{слабо в } W_2^2(\Omega) \text{ и слабо* в } L_\infty(\Omega). \quad (3.36)$$

Отсюда, учитывая /3.35/, с помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы I.2, получим:

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, T] \quad & Lu^{(\varepsilon(n))}(t, \cdot) - F(t, \cdot, u^{(\varepsilon(n))}(t, \cdot), \nabla u^{(\varepsilon(n))}(t, \cdot)) \rightarrow \\ & \rightarrow Lu(t, \cdot) - F(t, \cdot, u(t, \cdot), \nabla u(t, \cdot)) \quad \text{слабо* в } L_\infty(\Omega), \quad (3.37) \end{aligned}$$

причем функция

$$t \rightarrow Lu(t, \cdot) - F(t, \cdot, u(t, \cdot), \nabla u(t, \cdot)) \quad (3.38)$$

принадлежит классу $W^*C([0, T]; L_\infty(\Omega))$. Из /3.30/, /3.32/

и /3.33/ вытекает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall h \in L_1(\Omega) \quad \int_{\Omega} u^{(\varepsilon)}(t, x) h(x) dx = \int_{\Omega} u_0^{(\varepsilon)}(x) h(x) dx + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (L u^{(\varepsilon)}(\tau, x) - F(\tau, x, u^{(\varepsilon)}(\tau, x), \nabla u^{(\varepsilon)}(\tau, x)) + f(\tau, x)) h(x) dx d\tau.$$

Отсюда, учитывая /3.36/, /3.37/ и /3.25/, с помощью теоремы Лебега об ограниченной сходимости выводим, что

$$\forall h \in L_1(\Omega) \quad \int_{\Omega} u(t, x) h(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) h(x) dx + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} (L u(\tau, x) - F(\tau, x, u(\tau, x), \nabla u(\tau, x)) + f(\tau, x)) h(x) dx d\tau. \quad (3.39)$$

Из слабой* непрерывности функции /3.38/ следует, что в /3.39/ под знаком \int_0^t стоит непрерывная функция от τ . Поэтому соотношение /3.39/ позволяет нам заключить, что u принадлежит классу $W^*C^2([0, T]; L_{\infty}(\Omega))$, удовлетворяет уравнению /I.3/ и начальному условию /I.4/. Наконец, из /3.31/ и /3.35/, как видно из доказательства теоремы I.2, вытекает, что u удовлетворяет также граничному условию /I.5/. Теорема доказана.

§ 4. Доказательство теоремы I.4

Из теоремы 3 работы Брезиса [3] вытекает

Л е м м а 4.1. Если $u \in W_2^q(\Omega)$, $h \in L_q(\Omega)$, $q > N$,

$$-L_0 u + u = h \quad \text{в } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) \in \beta(u(x)) \quad \text{п. в. на } \Gamma, \quad (4.1)$$

где β - максимальный монотонный оператор в \mathbb{R} , $\beta(0) \geq 0$, то $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$ и

$$\|u\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \leq c_q \|h\|_q, \quad (4.2)$$

причем c_q зависит только от β , q и $\|a_{ik}\|_{C^1(\bar{\Omega})}$.

Доказательство теоремы I.4. Из условия теоремы следует, что u удовлетворяет соотношениям /4.1/ с

$$h(x) = f(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + (b_0(x) - \lambda + 1) u(x) - F(x, u(x), \nabla u(x)). \quad (4.3)$$

Определим функцию $\bar{q}: L_1(\Omega) \rightarrow [1, +\infty]$ следующим образом:

$$\bar{q}(v) = \sup \{ q \in [1, \infty) : v \in L_q(\Omega) \}.$$

Мы покажем, что $\bar{q}(h) > N$ и воспользуемся леммой 4.1. Не умаляя общности, можем считать, что $\sigma(\|u\|_\infty) = \bar{\sigma} \geq 1$, так что

$$1 \leq \bar{\sigma} < N/(N-2). \quad (4.4)$$

/напомним, что $N > 2$ /. Учитывая, что $f, \delta_i, u \in L_\infty(\Omega)$ и принимая во внимание условие /A/, из /4.3/ получим:

$$\bar{q}(h) \geq \frac{1}{\bar{\sigma}} q(|\nabla u|), \quad (4.5)$$

причем

$$\|h\|_q \leq N_q (\|u\|_\infty (1 + \|\nabla u\|_{\bar{\sigma}}^{\bar{\sigma}}) + \|f\|_q) \quad (q \leq \frac{1}{\bar{\sigma}} \bar{q}(|\nabla u|)), \quad (4.6)$$

где функция $N_q: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ зависит только от $q, \Omega, \|\delta_i\|_\infty, \lambda$ и функции \mathcal{K} из условия /A/. Из теоремы I.II работы [2] в силу /4.1/ следует, что

$$h \in L_q(\Omega), \quad 2 \leq q < N \Rightarrow \bar{q}(|\nabla u|) \geq \frac{Nq}{N-q}, \quad (4.7)$$

$$\|\nabla u\|_{\frac{Nq}{N-q}} \leq \tilde{C}_q \|h\|_q \quad (2 \leq q < N), \quad (4.8)$$

где \tilde{C}_q зависит лишь от N, Ω, q и коэффициентов a_{ii} . Положим

$$q_0 = 2, \quad (4.9)$$

$$q_{i+1} = \frac{Nq_i}{\bar{\sigma}(N-q_i)} \quad (i \geq 0). \quad (4.10)$$

Из /4.5/, /4.7/ и /4.10/ вытекает, что

$$(\bar{q}(h) \geq q_i, \quad 2 \leq q_i < N) \Rightarrow (\bar{q}(h) \geq q_{i+1}). \quad (4.11)$$

В силу теоремы вложения Соболева

$$u \in W_2^2(\Omega) \Rightarrow (\bar{q}(|\nabla u|) \geq \frac{2N}{N-2}, \quad \|\nabla u\|_{\frac{2N}{N-2}} \leq C \|u\|_{2,2}), \quad (4.12)$$

где C зависит лишь от N и Ω . Из /4.12/, /4.5/ и /4.4/ следует, что

$$\bar{q}(h) \geq \frac{2N}{\bar{\sigma}(N-2)} > 2 = q_0. \quad (4.13)$$

Из /4.10/ легко получить, что

$$N(1 - \frac{1}{\delta}) < q_i < N \Rightarrow q_{i+1} > q_i, \quad (4.14)$$

а из /4.4/ вытекает, что

$$N(1 - \frac{1}{\delta}) < q_0 = 2 < N. \quad (4.15)$$

Предположим, что

$$\forall i \quad q_i < N. \quad (4.16)$$

Из /4.14/ - /4.16/ немедленно выводим:

$$\forall i \quad q_i > 2, \quad (4.17)$$

а из /4.16/ и /4.17/ в силу /4.10/ и /4.4/ следует:

$$\forall i \quad \frac{q_{i+1}}{q_i} = \frac{N}{\delta(N - q_i)} \geq \frac{N}{\delta(N - 2)} > 1,$$

что противоречит /4.16/. Таким образом, допущение /4.16/ неверно. Поэтому из /4.14/, /4.15/ выходит:

$$\exists i_0 \geq 0 \quad 2 = q_0 < \dots < q_i < \dots < q_{i_0} < N < q_{i_0+1}. \quad (4.18)$$

Из /4.13/, /4.11/ и /4.18/ получаем: $\bar{q}(k) \geq q_{i_0+1} > N$.

Лемма 4.1 позволяет заключить, что $u \in \text{Lip}(\bar{\Omega})$, причем

$$\|u\|_{\text{Lip}(\bar{\Omega})} \leq C_q \|h\|_q \quad (q > N). \quad (4.19)$$

Из /4.6/, /4.12/ и выведенной в § 2 априорной оценки $\|u\|_{2,q} \leq C_2 (\|u\|_{\infty}) (1 + \|f\|_2)$ /см. доказательство теоремы I.1 и конец доказательства теоремы I.2/ следует, что

$$\|h\|_q \leq \tilde{H}_q (\|u\|_{\infty}, \|f\|_2) + \|f\|_q \quad (2 \leq q \leq q_1), \quad (4.20)$$

где $\tilde{H}_q : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ не убывает по обоим аргументам и не зависит от β . Из /4.19/ и /4.20/ получается оценка /I.13/ в случае, когда $q_1 > N$, т.е. $i_0 = 0$. В противном случае нужно, кроме того, применить неравенства

$$\|h\|_q \leq H_q (\|u\|_{\infty}) (1 + (\tilde{C}_{q_i} \|h\|_{q_i})^{\bar{\delta}}) + \|f\|_q \quad (q < q_1 < q_{i+1}, 1 \leq i \leq i_0),$$

которые следуют из /4.6/, /4.8/ и /4.10/. Теорема доказана.

В заключение автор выражает Г. М. Залтену свою признательность за помощь при подготовке статьи.

ИИТЕРАТУРА

1. Fichera G., Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno. - "Mem.Acad.Naz.Lincei", 1964, ser. 8, 7, p.91-140.
2. Brezis H. Problemes unilateraux. - "J.Math.Pures Appl" 1972, 51, No.1, p.1-168.
3. Brezis H. Seuil de regularite pour certains problemes unilateraux. - "C.R.Acad.Sci.", 1971, 273, ser.A, No. 1, p.35-37.
4. Brezis H. Proprietes regularisantes de certains semigroupes non lineaires. - "Isr.J.Math.", 1971, 9, No.4, p.513-534.
5. Duvaut G., Lions J.L. Sur le nouveaux problemes d'inequations variationnelles posees par la Mecanique. Le cas stationaire. - "C.R.Acad.Sci.", 1969, 269, ser.A, No.13, p.510-513.
6. Duvaut G., Lion J.L. Nouvelles inequations variationnelles rencontrees en thermique et en thermoelasticite. - "C.R.Acad.Sci.", 1969, 269, ser.A, No.25, p.1198 - 1201.
7. Beirao Da Veiga H., Dias J.-P. Regularite des solutions d'une equation parabolique non lineaire avec des contraintes unilaterales sur la frontiere. - "Ann.Inst. Fourier", 1972, 22, No.4, p.161-197.
8. Konishi Y. Sur un systeme degenerate des equations paraboliques semi-lineaires avec les conditions aux limites non lineaires. - "J.Fac.Sci.Univ.Tokyo", 1972, sect.1A, 19, No.3, p.353-361.
9. Konishi Y. On $u_t = u_{xx} - F(u_x)$ and the differentiability of the nonlinear semi-group associated with it. - "Proc.Japan Acad.", 1972, 48, No.5, p.281-286.
10. Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations. - "J.Math.Soc.Japan", 1967, 19, No.4, p.508-520.

11. Sato K. On the generators of non-negative contraction semi-groups in Banach lattices. - "J.Math;Soc.Japan", 1968, 20, No.3, p.423-436.
12. Nirenberg L. On elliptic partial differential equations. - "Ann.Scuola Norm.Super.Pisa", 1959, ser.3, 13, No.2, p.115-182.
13. Brezis H., Pazy A. Semigroups of nonlinear contractions on convex sets. - "J.Functional Analysis", 1970, 6, No.3, p.237-281.
14. Хазан М.И. Теорема о возмущениях m -диссипативных операторов. - В кн.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, 1974, с.115-122.
15. Хазан М.И. О дифференцируемости нелинейных эволюционных систем в нерефлексивных банаховых пространствах. - В кн.: Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений. Рига, 1974, с.85-114.
16. Данфорт Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М., 1963. 895 с.
17. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950. 255 с.
18. Лионс К.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., 1972. 587 с.
19. Уралычева Н. Н. О регулярности решений вариационных неравенств. - "Записки научных семинаров ЛОМИ АН СССР", 1972, 27, с. 211 - 219.
20. Beirao Da Veiga H. Regularite pour une classe d'inequations non lineaires. - "C.R.Acad.Sci.", 1970, 270, ser. A, No.1, p.23-25.
21. Beirao Da Veiga H., Dias J.-P. Sur l'existence et la regularite des solutions faibles d'une inequation parabolique non lineaire. - "J.reine angew.Math.", 1973, 260, 181-199.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Беспалова С.А. Существование решения трехточечной краевой задачи для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка	5
Васильев Н.И. Первая краевая задача для дифференциального уравнения второго порядка с квадратичными слагаемыми	21
Ливихин Б.М. К вопросу об ограниченности решений импульсных систем дифференциальных уравнений	33
Ливихин Б.М., Мастерков А.С. О сингулярно возмущенных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами	41
Золотарев В.В. Вычисление функции Грина гейзенберговского ферромагнетика в четвертом порядке теории возмущений ...	58
Ломакина А.И. Итерационный метод решения нелинейных краевых задач с нессумируемой особенностью	68
Мастерков А.С. Приведение некоторых систем разностных уравнений с периодическими и почти периодическими коэффициентами к системам с постоянными коэффициентами	82
Сопронюк Ф.А. Теорема об осреднении для функционально-дифференциальных уравнений со случайными параметрами	89
Сопронюк Ф.А. Устойчивость решений линейных систем дифференциально-разностных уравнений к тригонометрическим возмущениям параметров	101

Хазан М.И. Задачи с односторонними краевыми условиями для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений	131
--	-----

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Республиканский межвузовский сборник
научных трудов

Редакторы: А. Лиєпа, Р. Довгополова
Технический редактор Е. Царьков
Корректор Ф. Сопронюк

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1976

Подписано к печати 15.06.1976. ЯТ 05287. Зак. № 5135
Бумага №1. Ф/с 60x84/16. Физ. п. л. 10,5. Уч.-и. л. 7,8
Тираж 350 экз. Цена 78 к.

Отпечатано на ротопринте в БАУСКОЙ ТИПОГРАФИИ
г. БАУСКА, ул. РИГАС 26