

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
Институт механики полимеров

В.В. ХИТРОВ

ВЛИЯНИЕ УКЛАДКИ АРМАТУРЫ В ПЛОСКОСТИ
АРМИРОВАНИЯ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ СЖИМАЕМЫХ
ПЛАСТИН ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор техн. наук, проф. Ю.М.Тарнопольский

Рига 1972

О г л а в л е н и е

	Стр.
§ 1. Введение	4
<u>I глава.</u> Устойчивость кольцевых пластин при однородном докритическом напряженном состоянии	22
§ 2. Работы по устойчивости круглых пластин	22
§ 3. Основные соотношения	24
§ 4. Критический параметр нагрузки	29
§ 5. Влияние сдвигов на критическую нагрузку	41
<u>II глава.</u> Управление укладкой в круглых пластинах	46
§ 6. Исходные зависимости	46
§ 7. Устойчивость сплошных пластин	50
§ 8. Устойчивость кольцевых пластин	56
§ 9. Влияние отношения модулей в окружном и радиальном направлении на критическую нагрузку	65
<u>III глава.</u> Управление укладкой в прямоугольных пластинах	73
§ 10. Пластины из многонаправленных материалов	73

	Стр.
§ II. Аналитические выражения для подсчета упругих характеристик	79
§ I2. Влияние схемы укладки волокон на критические нагрузки	88
<u>IУ глава.</u> Экспериментальное изучение сжимаемых пластин из стеклопластика с различной укладкой арматуры	I00
§ I3. Техника изготовления и эксперимента; характеристики изученных пластин	I00
§ I4. Круглые пластины	II6
§ I5. Прямоугольные пластины	I24
З а к л ю ч е н и е	I3I
Л и т е р а т у р а	I34

§ I. В в е д е н и е.

I.I. Вводные замечания. Перспективность применения волоконистых композитов (ВК) в качестве материалов для изготовления несущих конструкций типа тонкостенных оболочек и пластин в настоящее время является общепризнанной. Она доказана опытом эксплуатации ряда ответственных инженерных конструкций. Однако интерес к механике ВК не ослабевает. Этот интерес во многом объясняется расширением класса задач по изучению рационального использования материала в конструкциях.

Характер механических и других свойств ВК определяется взаимным расположением арматуры в материале. Определенное расположение арматуры в изделии из ВК будем называть **с х е м о й а р м и р о в а н и я**. При существующих видах армирования тканью или ровницей схема армирования образуется определенной **у к л а д к о й** слоев в **п л о с к о с т и а р м и р о в а н и я**.

Большая часть ВК является существенно анизотропными материалами [65]. Многочисленными экспериментальными исследованиями установлено, что анизотропия ВК носит конструкционный характер и что, управляя ею, можно создать в изделии заданное (соответствующее прилагаемой нагрузке) поле сопротивлений материала, то есть в некотором смысле оптимальную конструкцию. Вопросы оптимизации конструкций из ВК представляют несомненный практический интерес, однако в имеющихся исследованиях, например, [1], [2], [27], [36] и монографиях [64], [65] ^{х/} они почти не затронуты.

х/ В работе [65] нашли отражение результаты, полученные автором.

Расчеты, которые проводятся для частных случаев анизотропии, в основном являются проверочными и не позволяют оценить перспектив изменения схем армирования для повышения несущей способности конструкции. Существующие методы оптимизации (обзор их дан в [14], [19], [52], [53], [76], [99]), разработанные для изотропных материалов, позволяют определить лишь форму изделия. Применение их для ВК затруднительно, так как в оптимальном изделии форма и анизотропия зависимы между собой. Кроме того, пока что отсутствуют надежные критерии оптимальности армирования. Неудивительно сравнительно малое число работ (характеристика некоторых из них дана в [43]), выполненных в этой области.

I.2. Обзор работ по изучению влияния укладки на несущую способность. Большинство исследований касаются лишь частных задач, в которых рассматриваются простые конструкции с заданной формой, нагруженные простыми системами нагрузок. Изучение зачастую проводится с привлечением дополнительных гипотез, вытекающих из характера рассматриваемой задачи. Это согласуется с мнением Ю.Н.Работнова [49] о нецелесообразности учета тонких вторичных эффектов из-за разброса прочностных и деформативных свойств существующих ВК.

Наиболее многочисленным является класс работ по выбору рационального армирования при конструировании оболочек, изготавливаемых намоткой. Это объясняется тем, что за счет изменения угла намотки можно наиболее просто и с высокой точностью управлять анизотропией прочностных и деформативных свойств изделия. В этих работах в качестве критерия оптимальности часто принимается условие равнонапряженности волокон (во всех сечениях и

одновременно напряжения в конструкции достигают предела прочности). При других равных условиях такая оболочка обладает наименьшим весом. Основные условия, которым подчиняются идеальные намоточные структуры, указаны в работе Аутвотера [92]. Известны исследования В.И.Королева, В.В.Васильева, В.Т.Томашевского, О.Г. Цыплакова, А.Н.Елпатьевского, Ю.В.Немировского, А.В.Чигиринского, Маркетоса, Ривлина, Шерча, Бурграфа и др. отечественных и зарубежных авторов по оптимизации армирования оболочек. Хотя подходы, используемые при этом, являются общими, мы, не затрагивая вопроса об оптимальном армировании оболочек из ВК, далее остановимся лишь на работах, относящихся к выбору схемы армирования пластин.

Вопрос рационального армирования пластин из ВК является мало исследованным. Большинство результатов, полученных к настоящему времени, относится к конструкциям, изгибаемым поперечной нагрузкой. Поэтому естественен интерес к управлению анизотропией как в плоскости армирования, так и по толщине пластины. В качестве критерия эффективности армирования принимаются минимальные вес, интенсивность армирования, либо максимальная прочность при заданном ресурсе материала и т.д.

Рассмотрим несколько подробнее работы, наиболее близко относящиеся к теме диссертации. Для круглых осесимметрично изогнутых пластин задача определения рациональной схемы армирования облегчается, так как необходимые свойства в радиальном и окружном направлении могут быть легко сопоставлены с долей волокон, уложенных в этих направлениях. Такое сопоставление в работе В.П.Ставрова и В.Г.Дедюхина [63] проводится экспериментально. Эта работа посвящена оптимальному, с учетом прочности и жестко-

сти, выбору анизотропии при армировании кольцевой пластинки, заземленной по контурам и нагруженной осевой нагрузкой. Однако эксперимент показал лишь качественное соответствие теории. Возможной причиной систематической ошибки является неучет поперечных сдвигов. Возможности минимизации суммарного объема и рационального распределения радиальной и окружной арматуры при пластическом изгибе отмечаются Розваны [98], использующим развитый им вариационный метод, а также Завидски и Савчуком [103]. Эффективность управления толщиной несущих слоев и интенсивностью армирующих волокон для достижения минимального веса при изгибе сплошных и трехслойных пластин исследована Х.М.Муштари и И.Г.Амирхановым [39], [40]. В ряде работ определяется рациональная по прочности схема армирования при нагружении в плоскости пластин. Менсфилд и Кэрролл [88] предлагают схему укладки арматуры в кольцевой пластинке, нагруженной сдвигающими усилиями по внутренней кромке. Приводятся (без выводов) выражения для минимального объема арматуры и оптимальных углов ориентации. Определению рациональной схемы расположения армирующих волокон во вращающемся диске посвящены работы С.Б.Чревацкого, В.Л.Сегала, В.И.Макарова [75] и Кэйзера [20].

Прямоугольные пластины также исследованы лишь для простейших случаев опирания и нагружения. Возможность существенной экономии в весе пластины, изгибаемой поперечной нагрузкой, при оптимальном выборе закона изменения ее толщины и интенсивности армирования показана Х.М.Муштари [38]. Подобная задача для проектирования трехслойных пластин, при котором при минимуме интенсивности армирующих волокон достигается максимум прочности несущего

слоя, рассмотрена Г.И.Брызгалиным и Ю.В.Немировским [41]. Оптимизация трехнаправленных материалов по прочности для пластин, нагружаемых различными комбинациями растяжения и сдвига в плоскости армирования в рамках сеточной теории [87], изучена Харрисом [85]. В предположении существования пределов при растяжении и сжатии волокон найдены допустимые диапазоны изменения нагрузок.

Задачи выбора укладки в случаях, когда возможна потеря устойчивости, в имеющихся работах изучаются с позиций линейной теории упругости в предположении справедливости гипотезы плоских сечений. По-видимому, первой работой в этом направлении является работа И.Г.Немана [41], где исследована устойчивость бесконечно длинной анизотропной пластинки с наклонными главными направлениями упругости для двух вариантов опорных закреплений, нагруженной сжатием и сдвигом в срединной плоскости. При этом найдено, что в некоторых случаях можно повысить критическую нагрузку в несколько раз только за счет рациональной ориентации материала. Оптимальное расположение волокон трехнаправленных и двухнаправленных материалов в удлиненной пластине, находящейся под действием сжатия либо сдвига по кромкам, в рамках сеточной теории [87] изучено Ротвеллом [97]. Учитываются также случаи, когда прочность волокон исчерпывается ранее достижения критической нагрузки. В работах А.В.Кузнецова [28], [29] показано, что при заданной геометрии пластины в плане можно обосновать целесообразность той или иной схемы симметричного в плане армирования сопоставлением различных схем армирования по одному из лимитирующих толщину условий. Упругие решения с введением "длительных" значений упругих констант используются Г.И.Брызгалиным [9]

Им изучено влияние интенсивности армирования в направлениях, совпадающих с направлением сторон опорного контура свободно опертой пластины при длительно действующей нагрузке в направлении одной из сторон. Такой же подход и условия опирания приняты В.А. Коминаром [24 - 26], которым изучены различные схемы армирования как при длительной, так и кратковременной нагрузке. По принятым схемам вся арматура или ее часть, прилегающая к нейтральной плоскости, расположена под углами $\pm \varphi$ к сторонам опорного контура, образуя ортотропные пакеты слоев. Теоретически найдено, что в зависимости от соотношения сторон пластины рациональными являются ориентация всех слоев вдоль направления действия нагрузки либо под углом $\pm \varphi_{opt}$ к нему. В указанных работах изучены лишь материалы ортотропной структуры. Более сложная задача исследования свободно опертой пластины из материала, имеющего лишь одну плоскость упругой симметрии, решена В.С. Саркисяном и Л.А. Мовсисяном [59], применившими метод малого параметра. В частном случае показано, что существует некоторая ориентация, предпочтительная с точки зрения жесткости.

Далее остановимся на работах, в которых проблема выбора расположения армирующего материала рассматривается с более общих позиций. Здесь укажем исследование Мруза [90], где рассмотрены пластины, материал которых подчиняется условию текучести Хилла. В статье [91] тот же подход применяется для определения условий оптимального сочетания нескольких однородных материалов с идеальными свойствами упругости или пластичности. Критерием оптимальности является минимум статической податливости или максимум предельной нагрузки соответственно. На примере свободно опертой

круглой пластинки, нагруженной равномерной нагрузкой, рассмотрены оптимальные случаи армирования более жесткой фазой. Исследуя критерий прочности типа Хилла, Брэндмейер [78] нашел, что при плоском напряженном состоянии пластин из однонаправленных материалов и определенных соотношениях между прочностью поперек волокон и на сдвиг в плоскости, параллельной волокнам, существует отличный от нуля угол армирования, при котором достигается максимальная прочность пластин из ВК. Броши [79] предлагает критерий для оптимального проектирования плит, согласно которому арматура должна располагаться так, чтобы деформации всюду были постоянны и максимальны, и на примере круглой и квадратной плит показывает возможность реализации своих выводов. Применение принципа максимума [33] для определения оптимального армирования и толщины нагруженной произвольной осесимметричной нагрузкой кольцевой плиты рассмотрено М.И. Рейтманом [54]. Показана возможность и более общего подхода в случае переменных нагрузок. Явление экстремальности коэффициентов концентрации напряжения у отверстий в анизотропных пластинах по параметрам анизотропии отмечается В.В. Болотиным [3].

Ряд авторов исследует оптимальное конструирование материала, армированного волокнами, задаваясь гипотезами относительно его поведения в составе конструкции. Здесь следует отметить работу В.П. Севереденко, Б.М. Макушок, В.М. Сегала [60], где материал считается жестко пластичным, а несущая способность ограничивается наступлением пластичности. Уточнение моделей материала и формулировка математического алгоритма создания оптимального композита и условий, налагаемых при этом, принадлежит

Г.И. Брызгалину [8 - 10] . В этих работах обсуждается возможность построения анизотропного тела с переменными интенсивностями и направлениями армирования, а также переменной толщиной при минимальном количестве арматуры. Однако, реализация этих результатов по причине существенного усложнения технологии производства изделий может встретить трудности. Дзенишевски [82] , изучая пространственную сетку, армирующую волокнистое тело, показал, что наименьшей податливости соответствует расположение волокон, при котором удельная энергия упругой деформации является одинаковой в любой точке тела. Наиболее общий подход к проблеме, реализуемый с помощью ЭЦВМ, намечен В.А. Комаровым [23] , где оптимальной считается структура материала, обладающая при данных условиях и постоянном объеме армирующего материала минимальной энергией деформации. Интересный подход предложен в работе Хакмана и Штотлера [84] , где проводится оптимизация пакета слоев по выбору материала в данном слое и ориентации главных направлений упругости слоя в условиях однородного напряженного состояния. При этом с учетом внешних условий (среда, температура и т.д.) в максимальной степени совмещаются поля сопротивлений с полями действующих нагрузок. В работе указываются также перспективы исследования в этой области. Алгоритм оптимального синтеза прямоугольных пластин постоянной толщины приводится также Чамисом [81] . Алгоритм позволяет определить оптимальное число слоев, направление отдельных слоев и некоторые сочетания искоемых параметров.

Как видно из приведенного обзора, решенные задачи, относящиеся к сжимаемым пластинам, то есть случаям, когда возможна

потеря устойчивости, весьма немногочисленны и касаются лишь прямоугольных пластин. Крайне малочисленны и экспериментальные данные по исследованию пластин с различными укладками слоистого материала. Прямоугольные пластины с упругой симметрией относительно срединной плоскости исследованы в работах М.К. Смирновой с соавторами [62] и В.А. Коминара [24]. Найдено, что экспериментальные значения критических нагрузок удовлетворительно согласуются с решениями на основе классической теории анизотропных пластин [32]. Эти же решения с введением приведенной изгибной жесткости [95] использованы Кичером и Мэнделлом [22] для оценки верхних границ критических нагрузок пластин из малого числа слоев, уложенных без упругой симметрии относительно срединной плоскости. Найдено, что чувствительность к асимметрии повышается с увеличением степени анизотропии слоя. В этих работах рассматривались одноосно сжимаемые по двум свободно опертым краям пластины. Две другие кромки были свободными либо свободно опертыми. Исследование защемленных пластин из борволокна проведено Аштоном и Лавом [77]. При расчете критических нагрузок ими также использовано понятие приведенной изгибной жесткости. Опытные данные по круглым пластинам [16], [80], [100] относятся лишь к поперечному изгибу.

К сожалению, от внимания исследователей ускользнули такие моменты как слабое сопротивление ВК межслойному сдвигу и поперечному отрыву, сопутствующие послойной укладке арматуры. Погрешность, допускаемая при этом, увеличивается для конструкций типа пластин [4] и в случаях использования высокомодульных ВК, относительное сопротивление сдвигу которых меньше стеклопластика.

Отмеченные обстоятельства ограничивают область использования получаемых результатов и уменьшают эффект от выбранной схемы армирования. В ряде случаев этот эффект уменьшается из-за существенной нелинейности материала. Применение теории линейной упругости в этих случаях носит условный характер. Более того, особенности материала могут привести к возникновению нового механизма исчерпания несущей способности.

Из имеющихся исследований большинство выполнено для случая свободного опирания по всем краям либо для удлиненной пластины. Поэтому представляет интерес изучение иных условий опирания пластин конечной длины. Необходимо также исследовать, меняется ли и на сколько рациональная укладка при использовании материалов на основе перспективных видов арматуры (бор, углерод) со значительно более высокой анизотропией свойств. Таким образом, необходимо дальнейшее теоретическое и экспериментальное изучение пластин с различными укладками материала, сжимаемых в плоскости армирования. Интерес к таким задачам увеличивается и потому, что, как это будет показано экспериментально, жесткость пластин при такой схеме нагружения более чувствительна к укладке, чем при поперечном изгибе. Исследование этих вопросов на примере круглых и прямоугольных пластин и приведено в работе.

1.3. Цель и содержание работы. Предметом изучения в данной работе является влияние анизотропии свойств материала, изменяемой путем управления схемой армирования, на поведение круглых и прямоугольных сжимаемых в плоскости армирования пластин с различными условиями опирания. Схема рассмотренных задач приведена на рис. 1. На этом же рисунке указано число изученных аналити-

Схема задач рассмотренных в работе.

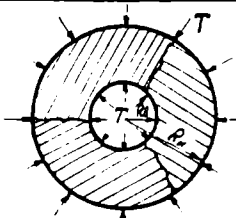
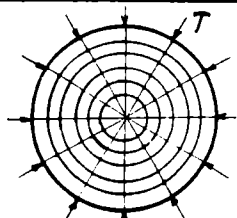
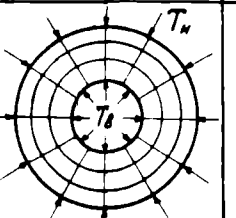
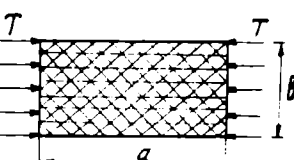
Наименование задач		Круглые пластины			Прямоугольные пластины
		Устойчивость кольцевой трансверсально изотропной пластины	Влияние параметров анизотропии на устойчивость цилиндрически ортотропных пластин		
			Сплошные	Кольцевые	
Схема					
Число вариантов граничных условий	Изученных аналитически	12	2	12	2
	Реализованных в эксперименте			2	2
Диапазон исследованных параметров	Характеризующих геометрию в плане	$0,1 \leq \frac{R_0}{R_n} \leq 0,9$	$0 \leq \frac{R_0}{R_n} \leq 0,9$		$0,2 \leq \frac{a}{b} \leq 5$
	Характеризующих относительную толщину и анизотропию либо укладку	$0 \leq \frac{2H}{R_n} \sqrt{\frac{E_0}{G_{22}}} \leq 2$ $0 < \gamma_{20} < 0,5$	$0 \leq \frac{2H}{R_n} \sqrt{\frac{E_0}{G_{22}}} \leq 1,5$ $0 \leq \sqrt{\frac{E_0}{E_z}} \leq 5$ $0 \leq \gamma_{20} \leq 0,5$		$0 \leq \alpha_y \leq 1$ $0 \leq \beta_\varphi \leq 1$ $0 \leq \varphi^\circ \leq 1$
Число реализованных в эксперименте схем армирования				4	9

Рис. 1.

чески и экспериментально вариантов граничных условий и число реализованных в опыте схем армирования. Приведены диапазоны изменения параметров исследованных пластин, характеризующих геометрию - $K' = \frac{R_0}{R_H}$, $\frac{2H}{R_H}$, $c = \frac{a}{b}$ (R_0 , R_H , $2H$ - внутренний и наружный радиусы и толщина круглой пластины; a , b - длины сторон прямоугольной пластины) анизотропию - $\alpha = \sqrt{\frac{E_0}{E_r}}$, $\sqrt{\frac{E_0}{G_{r2}}}$, ν_{r0} (E_0 , E_r , G_{r2} - модули упругости в окружном и радиальном направлениях и межслойного сдвига; ν_{r0} - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в радиальном направлении), а также укладку материала - α_y , β_φ (доли укладываемых слоев под углами 90° и $\varphi = \pm \arcsin \sqrt{q}$ к направлению действия нагрузки).

Цель выполненных исследований состоит в теоретической и экспериментальной оценке эффективности управления схемой армирования и создании методики расчета указанных, часто весьма ответственных конструкций.

В работе не ставилась задача оптимизации укладки и характеристик исходного материала по всем возможным параметрам. Изучено лишь влияние укладки на несущую способность в рамках используемых расчетных моделей. Несущая способность сжимаемых в плоскости армирования тонкостенных конструкций из ВК в большинстве случаев ограничивается устойчивостью [67]. Сравнительно малые модули юнга либо сдвига приводят к тому, что не удается использовать высокую прочность армирующих волокон из-за преждевременного разрушения вследствие выпучивания. Поэтому исследовалась в основном жесткость пластин. Экспериментально показано, что в ряде случаев опирания из-за особенностей ВК истощение

несущей способности происходит по прочности. Однако, так как до разрушения пластины из ВК, как правило, получают заметный прогиб [22], [62], то и в этих случаях используемый подход имеет смысл. Он позволяет изучить возможность уменьшения податливости пластин.

Особенность построения работы состоит в том, что во введении характеризуются только исследования, касающиеся определения укладки в пластинах и экспериментального изучения различных схем армирования. Обзор работ, связанных с техникой решения рассмотренных задач устойчивости круглых пластин, дан в главе I. (Главы I и II, как более тесно тематически связанные, имеют общий обзор). Во введении также намечаются задачи исследования. Эти задачи рассмотрены в последующих четырех главах. Каждая глава заканчивается выводами. Итоговые выводы сформулированы в разделе "Заключение". Такое построение работы наилучшим образом соответствует поставленной цели.

Первая глава имеет вспомогательное значение. Ее цель - оценка различных факторов, необходимых для решения задачи об управлении укладкой в круглых пластинах. Решена задача потери устойчивости в осесимметричной форме кольцевой пластины при однородном поле докритического напряженного состояния. Учитывается слабое сопротивление сдвигу в плоскостях, перпендикулярных плоскости пластины, причем закон распределения касательных напряжений по толщине не постулируется. Введено предположение о несжимаемости нормалей $\epsilon_z = 0$. Составлены уравнения для определения критического параметра нагрузки λ_k при различных граничных условиях. Изучено влияние на λ_k параметров, характери-

зующих материал и условий заземления на кромке. Указаны возможности упрощенного подсчета λ_k . В заключение характеризуется влияние сдвигов на критическую нагрузку и определяется область λ_k, κ_0 , в которой для существенного повышения критических нагрузок за счет относительной толщины, модуля Юнга или жесткости закрепления краев приходится увеличивать сопротивление сдвигу.

Вторая глава содержит решение задачи осесимметричной потери устойчивости цилиндрически ортотропной круглой пластины в постановке, принятой для первой главы. Здесь введены предположения о неизменности модулей упругости и сдвига по радиусу и независимости параметра критической нагрузки от характеристик материала. Последнее предположение основывалось на результатах предыдущей главы. Использован вариант метода Бубнова-Галеркина с отысканием аппроксимирующей функции в самом решении. Рассмотрены различные граничные условия. Вычисления выполнены для случаев сплошной и кольцевой сжимаемых по наружному контуру пластин. Дано сопоставление с имеющимися литературными данными, а также с результатами, полученными, считая докритическое напряженное состояние однородным. Обсуждается влияние на критическую нагрузку отношения радиусов, параметров, характеризующих цилиндрическую ортотропию и податливость сдвигу. В рассмотренных условиях сделаны выводы о предпочтительных диапазонах значений отношения модулей упругости в окружном и радиальном направлениях. Отмечается существенность условий опирания и параметра сдвигов при выборе рациональной (радиальной или окружной в соответствии с ориентацией наибольшей жесткости) укладки.

Задачей третьей главы явилось изучение влияния способа укладки слоев в многонаправленном материале на критическую нагрузку одноосно сжимаемых в главном направлении ортотропных прямоугольных пластин.

Для материалов этой главы использованы решения, построенные на гипотезе плоских сечений. Такая гипотеза накладывает ограничения на анизотропию, характеризующую податливость поперечному сдвигу и относительную толщину пластин. Поэтому полученные результаты в ряде случаев носят качественный характер. По крайней мере, как показал эксперимент при варьировании укладкой α_y , допускаемая погрешность не увеличивается из-за изменения модуля межслойного сдвига.

Далее, считая напряженное состояние плоским, получены выражения для деформативных характеристик многонаправленных ортотропных материалов в плоскости армирования. Исходными считались данные элементарного слоя, для которых указаны способы получения и контроля. Найденные зависимости для приведенных коэффициентов матрицы жесткостей использованы для выбора укладки в сжимаемых прямоугольных пластинах. При анализе пренебрегалось разницей между коэффициентами матрицы жесткостей при растяжении и приведенными коэффициентами жесткости при изгибе, то есть материал считался однородным. Допустимость этого в широком диапазоне пластин с одинаковой по толщине укладкой показана экспериментом. На примере трех однонаправленных **исходных** материалов с характеристиками, типичными для стеклопластика, угленластика и боропластика, оценено влияние анизотропии материала на выбор и эффективность рациональной укладки.

Рассмотрены два типичных по алгоритму, используемому для изучения влияния укладки, случая реализации условий опирания. В первом, более простом случае максимальная критическая нагрузка найдена дифференцированием по параметру укладки. Для второго случая приводится алгоритм, работающий по методу случайного поиска, для реализации на ЭВМ. В обоих случаях указаны диапазоны отношения сторон в плане, в которых рациональны изученные схемы армирования.

В четвертой главе проводится экспериментальная оценка влияния укладки арматуры на несущую способность круглых и прямоугольных пластин, сжимаемых в плоскости армирования. В целях сравнения чувствительности пластин к способу приложения нагрузки круглые пластины исследованы также и при поперечном изгибе. Изучены различные схемы укладки круглых и прямоугольных пластин. Диапазон изучаемых схем армирования прямоугольных пластин по сравнению с главой 3 расширен для сопоставления. Исследованы различные условия опирания. Выявлены два механизма исчерпания несущей способности. Дана численная оценка и сравнение различных схем укладок по величине критической и разрушающей нагрузок. Проведено сопоставление с полученными автором аналитическими зависимостями, учитывающими особенности укладки. Экспериментально показана роль условий опирания и, в частности, фактической реализации заделки, а также — нелинейности материала. Предложены коэффициенты, качественно характеризующие жесткость пластин в условиях нагружения. Даются конкретные рекомендации по выбору схем армирования в условиях опыта.

При решении задач учитывалось, что в реальных конструкциях

материал, как правило, имеет ортотропную или трансверсально-изотропную структуру, причем число структурных элементов достаточно велико для предельного перехода к квазиоднородной среде [4]. Считалось, что деформативные характеристики определяются при испытаниях всего материала в целом. Для многонеправленных материалов деформативные характеристики определены аналитически, исходя из характеристик и укладки исходных слоев.

Все задачи решены в линейно упругой постановке. Это объясняется тем, что большая часть ВК при кратковременном нагружении в широком диапазоне напряжений ведет себя как линейно упругие тела. Такой подход, конечно, не является исчерпывающим, однако он позволяет оценить влияние исследуемых факторов. Полученные результаты могут быть использованы, когда время нагружения много меньше или много больше характерного времени релаксации связующего.

В работе теоретически определялись схемы армирования, в которых укладка по толщине пластин образует квазиоднородный материал. Для эксперимента лишь в качестве сопоставления в ряде случаев использовались "трехслойные", симметричные относительно срединной плоскости, укладки.

Экспериментальная проверка выполнена на отечественном серийном стеклопластике АГ-4С. Выбор однонаправленного материала АГ-4С для эксперимента обусловлен стремлением максимально расширить диапазон изучаемых характеристик. Хотя эксперимент проводился на стеклопластике, полученные результаты характерны для многих ВК. Применение более жесткой и более прочной арматуры лишь усиливает анизотропию и тем самым увеличивается важность

учета изученных факторов и управления ими.

Для рассматриваемых конструкций исследуемые формы потери устойчивости не являются единственно возможными. Поэтому экспериментальная проверка полученных выводов проведена на установках, в которых принимались меры для обеспечения заданной формы потери устойчивости. Изучение поведения пластин на таких установках позволяет судить о применимости предлагаемого метода расчета и эффективности изученных схем армирования.

Исследование проведено вне учета времени и температуры нагружения. Эти факторы, к которым более чувствительна матрица, в большинстве случаев увеличивают диапазон физических и геометрических параметров пластин, в котором необходим учет поперечных сдвигов, проведенный в основной части работы.

Автор признателен ст.научному сотруднику А.В. Розе, под руководством и совместно с которым был рассмотрен ряд задач [45], [56], [58], обобщенных в диссертации.

Г Л А В А 1

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЫЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ ОДНОРОДНОМ ДОКРИТИЧЕСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ.

§ 2. Работы по устойчивости круглых пластин.

Исследования устойчивости, связанные с учетом особенностей, характерных для пластин из ВК, крайне малочисленны. В рамках гипотезы Кирхгофа-Лява задача устойчивости круглой пластины из физически нелинейного материала исследована в работе [68]. Получено предельное значение относительной толщины, до которого потеря устойчивости еще происходит. Как показало исследование Г.Б.Киреевой [21], использование гипотезы Кирхгофа-Лява в такой задаче приводит к занижению относительной толщины, гарантирующей устойчивость при любой нагрузке примерно на 18%.

Задачи, связанные с учетом сдвига, первоначально развивались для сравнительно толстых пластин. Т.Т.Хачатуряном [71] устойчивость круглой пластины рассматривалась в предположении отсутствия поперечных деформаций при задании параболического закона изменения касательных напряжений по толщине. Полученные результаты, как показано А.Ш.Петояном [44], использовавшим теорию типа Рейсснера, приводят к занижению расчетных критических нагрузок для изотропных пластин. А.П.Мелконян и А.А.Хачатрян [37] получили решение для трансверсально изотропных пластин, теряющих устойчивость с образованием нескольких узловых диаметров, с учетом как сжимаемости, так и низкой сдвиговой жесткости в поперечном направлении. Найдено, что учет этих

факторов приводит к снижению критических нагрузок, которое усиливается с увеличением относительной толщины, параметра анизотропии и числа узловых диаметров. Основную часть поправки вносит учет поперечных сдвигов. Поправкой от поперечных сдвигов при заданной форме выпучивания можно ограничиться в большинстве практически важных случаев. Результаты этой работы затруднительны для использования в практических расчетах из-за необходимости решения сложных трансцендентных уравнений и отсутствия выводов в форме, облегчающей практическое применение.

Возможность местной потери устойчивости в слоистых пластинах показана Буфлером [80] .

Еще менее, даже в рамках гипотезы Кирхгофа-Лява, изучена устойчивость цилиндрически ортотропных пластин.

Критические нагрузки ортотропного диска с отверстием при различных однородных закреплениях наружного края, нагружаемого касательными усилиями, равно распределенными по внутреннему краю, найдены Росковски [96] . В условиях осевой симметрии вопросы устойчивости цилиндрически ортотропных сплошных пластин рассматривались Пенделей [93] и Войновским-Кригером [101], получившим точное решение. Для кольцевых пластин такая задача методом Бубнова-Галеркина решена Е.Ф.Бурмистровым и Н.М.Масловым [12] . Критические нагрузки пластины с толщиной, меняющейся по степенному закону, найдены Пателом и Бросом [94] .

Попытка учесть влияние сдвиговой слабости материала сделана в статье А.В.Розе [55] при изучении устойчивости сплошных пластин. Однако, как показывает анализ, это решение пригодно лишь для структур, близких трансверсальной изотропии, так как

в этой работе игнорируется неоднородность докритического напряженного состояния. Для кольцевых пластин такая неоднородность может быть вызвана приложенной нагрузкой даже в изотропных пластинах. Соответствующая задача изучена А.Н. Григолюком [15] с использованием метода Бубнова-Галеркина.

Характерным для рассмотренных работ является практическое отсутствие анализа влияния параметров анизотропии.

Использованная в большинстве случаев гипотеза Кирхгофа-Лява при расчете конструкций из ВК может внести большие погрешности, так как не учитывает влияния поперечного сдвига, пренебрегая по сравнению с единицей членами порядка $\frac{E_r}{G_{r\theta}} \left(\frac{2H}{R_H}\right)^2$, (смысл обозначений очевиден), которые, несмотря на то, что толщина пластины $2H$ мала по сравнению с ее радиусом R_H , могут быть большими вследствие низкой сдвиговой жесткости ($G_{r\theta} \ll E_r$), характерной для ВК.

§ 3. Основные соотношения.

В круглых пластинах арматура укладывается, как правило, в радиальном и окружном направлениях (рис. 2).

Следовательно, материал в этом случае является цилиндрически-ортотропным [32]. Параметрами анизотропии, позволяющими характеризовать цилиндрически-ортотропную укладку материала и сопротивление сдвигу, будем считать

$$\alpha = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}} \quad \alpha_0 = \frac{2H}{R_H} \sqrt{\frac{E_\theta}{G_{r\theta}}} \quad (1.1)$$

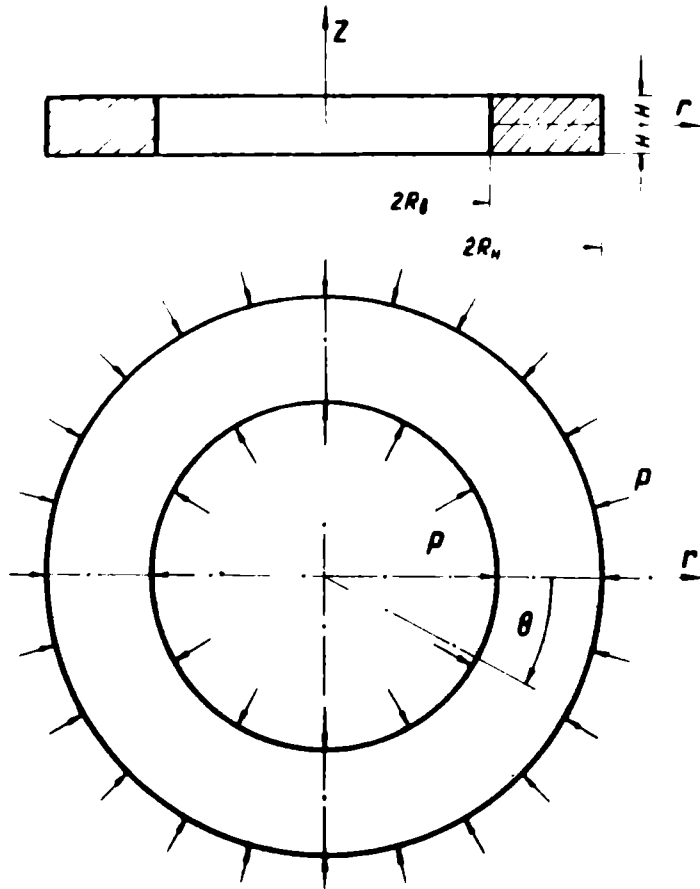


Рис. 2.

где E_θ , E_r , G_{rz} - модули упругости в окружном (θ) и радиальном (r) направлениях и модуль сдвига в плоскости rz

Система уравнений равновесия в случае цилиндрически-ортотропных круглых пластин принимает вид [2]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{G_r - G_\theta}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r - M_\theta}{r} &= Q_r \\
 \frac{\partial H_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} H_{\theta r} &= Q_\theta
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

где $G_r, \tau_{\theta r}, \tau_{zr}; G_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}; G_z, \tau_{rz}, \tau_{\theta z}$ - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат $r\theta z$, причем ввиду свойства парности

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (i, j) = (r, \theta, z)$$

$M_r, M_\theta, Q_r, Q_\theta$ - изгибающие моменты и поперечные усилия по направлениям r, θ ;

$H_{\theta r}$ - крутящий момент.

Компоненты тензора напряжений определяются из закона Гука

$$G_r = \bar{E}_r (\epsilon_r + \nu_{r\theta} \epsilon_\theta); \quad G_\theta = \bar{E}_\theta (\epsilon_\theta + \nu_{\theta r} \epsilon_r)$$

$$\tau_{r\theta} = G_{r\theta} \gamma_{r\theta}, \quad \tau_{rz} = G_{rz} \gamma_{rz}, \quad \tau_{\theta z} = G_{\theta z} \gamma_{\theta z} \quad (1.3)$$

$$\bar{E}_r = \frac{E_r}{1 - \nu_{\theta z} \nu_{r\theta}}; \quad \bar{E}_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \nu_{\theta r} \nu_{r\theta}}$$

где $\nu_{r\theta} = \nu_{\theta r} \alpha^2$ - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении r при растяжении в направлении θ .

Линейные $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ и угловые $\gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{z\theta}$ деформации определяются соотношениями [2]

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.4)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

Здесь u , v , w — перемещения в направлениях r , θ , z соответственно. Как показано в [2], [37], [57], поправками от поперечного и докритического сжатия при исследовании жесткости конструкций из МАН в широком диапазоне размеров можно пренебречь по сравнению с поправкой от поперечных сдвигов.

В настоящей главе устойчивость кольцевых пластин, одинаково сжатых по внутренней и наружной цилиндрическим поверхностям равномерным давлением p , исследуется в широком классе граничных условий с учетом отмеченной особенности материала.

Число варьируемых параметров задачи ограничивается отношениями упругих постоянных $\frac{E}{G}$ внутреннего и наружного радиусов

$k = \frac{R_B}{R_H}$ — относительной толщиной и коэффициентом Пуассона в плоскости пластины $\nu_{r\theta} = \nu_{\theta r} = \nu$. При этом пластина считается трансверсально изотропной ($E_r = E_\theta = E$, $G_{rz} = G$) и несжимаемой в направлении ее оси ($\epsilon_z = 0$). Последнее предположение формально равносильно положению $\frac{1}{E_z} = \nu_{zr} = \nu_{z\theta} = 0$

Предполагая форму выпучивания пластин осесимметричной, уравнения устойчивости получим ^{x/} из (1.2) с учетом (1.3), (1.4) (в силу принятых допущений — $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ прогиб не зависит от координаты z , а радиальные перемещения — $-u = u(r, z)$)

x/ При изгибе соответствующая система уравнений равновесия в перемещениях приведена в [55].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{I.5})$$

$$2H \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + \int_{-H}^H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = - \frac{q(r)}{G} \quad (\text{I.6})$$

$$\beta^2 = \frac{E}{G(1-\nu^2)}$$

заменяв поперечную нагрузку $q(r)$ приведенной нагрузкой

$$q(r) = 2H \left(G_{r0} \frac{d^2 w}{dr^2} + G_{\theta 0} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right)$$

зависящей от начальных (докритических) напряжений G_{r0} , $G_{\theta 0}$.

Здесь второе уравнение проинтегрировано по координате z .

В трансверсально изотропной кольцевой пластине, одинаково сжатой по внутренней и наружной цилиндрическим поверхностям равномерным давлением p , начальное напряженное состояние является однородным, причем $G_{r0} = G_{\theta 0} = p$. Это позволяет уравнению (I.6) придать вид:

$$(2GH - T) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) + G \int_{-H}^H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (\text{I.7})$$

где $T = 2Hp$

Уравнение (I.5) может быть проинтегрировано методом Фурье. Непосредственной подстановкой легко проверить, что это уравнение и граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{z=\pm H} = 0 \quad (\text{I.8})$$

требующие отсутствия касательных усилий на плоских поверхностях пластины, будут удовлетворены, если

$$w(r) = A_1 J_0(\rho) + A_2 Y_0(\rho) + A_3 r^2 + A_4 \ln r + A_5 \quad (I.9)$$

$$u(r, z) = [A_1 J_1(\rho) + A_2 Y_1(\rho)] \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 \frac{z}{H}}{\beta \operatorname{ch} \alpha_1} - (2A_3 r + A_4 r^{-1})(z + A_5) \quad (I.10)$$

$$\alpha_1 = \lambda_0 \beta H = 0,5 \bar{\beta} \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2}} ;$$

Здесь A - постоянные, имеющие размерность длины:

$\rho = \lambda_0 r$ - безразмерный радиус (постоянная λ_0 имеет размерность (длина)⁻¹), который меняется в пределах $\bar{\alpha} = \lambda_0 R_0 \leq \rho \leq \bar{\beta} = \lambda_0 R_H$

J_0, J_1, Y_0, Y_1 - функции Бесселя первого и второго рода нулевого и первого порядков.

С учетом (I.9) и (I.10) уравнению (I.7) можно придать

вид:

$$\lambda_0^2 [A_1 J_0(\rho) + A_2 Y_0(\rho)] (T - \bar{\lambda}^2 \frac{D}{R_H^2} L) - 4A_3 T = 0 \quad (I.11)$$

где $\bar{\lambda} = \lambda_0 R_H$; $D = \frac{2H^3 E}{3(1-\nu^2)}$; $L = \frac{3(\alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_1)}{\alpha_1^3}$

Функция L табулирована в [65].

§ 4. Критический параметр нагрузки λ_K .

4.1. Выражения для подсчета λ_K . Уравнение (I.11) будет удовлетворено, если $A_3 = 0$ и $T = \bar{\lambda}^2 \frac{D}{R_H^2} L$. Критические значения параметров λ_K и тем самым критическая нагрузка

$$T_K = \lambda_K^2 \frac{D}{R_H^2} L \quad (I.12)$$

определяется условиями закрепления краев пластины $r = R_B$ и $r = R_H$

Дальнейшее изложение параграфа подчинено определению λ_K и оценке влияния на λ_K поперечных сдвигов α_0 , коэффициента Пуассона ν и условий защемления. Исследовалась возможность замены λ_K на λ_K^* /вычисленного без учета поперечных сдвигов/ и на λ_K^{**} /эйлерово значение критического параметра продольно сжатого стержня с теми же граничными условиями/.

Условия свободно опертого края можно сформулировать так же, как в теории Кирхгофа-Лява, приравнявая нулю прогиб и изгибающий радиальный момент: $w = 0$, $M_r = 0$.

Определение "защемленный край" в рамках рассматриваемой здесь теории, учитывающей поперечные сдвиги, теряет свою определенность, какую оно имеет в классической теории, когда защемление означает задание условий $w = 0$, $\frac{dw}{dr} = 0$. Эта неопределенность обусловлена искривлением нормалей - из выражения (1.10) видно, что перемещение u меняется по толщине пластины нелинейно. Поэтому условия для радиального перемещения могут быть сформулированы по-разному (условие для прогиба остается неизменным: $w = 0$). Различные способы закрепления опорных сечений приведены на рис.3.

Закрепив точки края, находящиеся на расстоянии z_0 от срединной плоскости пластины, имеем условие $f_0(z_0) = u|_{z=\pm z_0} = 0$ (рис. 3а), а требование, чтобы при деформации не поворачивались нормали, касательные к точкам $z = \pm z_1$, приводит к условию $f_1(z_1) = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm z_1} = 0$ (рис. 3б). Следует отметить,

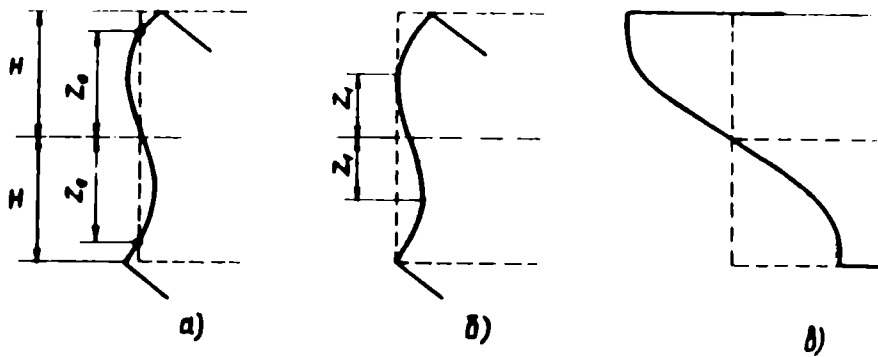


Рис. 3.

что последнее переходит в условие $\frac{dw}{dr} = 0$ (рис. 3в), если $z_1 = H$. Кроме того, при $z_0 = 0$ и $z_1 = 0$ имеем два эквивалентных, хотя и записанных по-разному, условия $f_0(0) = u|_{z=0} = 0$ и $f_1(0) = \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = 0$. Адекватность их может быть проверена совершением предельного перехода при $z_0 \rightarrow 0$ и $z_1 \rightarrow 0$.

Под свободным краем будем подразумевать край, который может свободно перемещаться в направлении оси пластины z , а также свободно поворачиваться и искривляться. Граничные условия при этом будут иметь вид: $M_r = 0$, $Q_r = T \frac{dw}{dr}$, где Q_r - перерезывающая сила.

Если край имеет свободное перемещение в направлении z , но поворот его воспрещен (например, присоединенным к нему жестким пояском), он называется подвижным краем с заданием на нем условий $Q_r = 0$ и $f_0 = 0$ (или $f_1 = 0$). Выражения для w , M_r , Q_r и $f_{0,1}$, необходимые для написания граничных условий, с учетом, что $A_3 = 0$, будут иметь вид:

$$w = A_1 J_0(\rho) + A_2 Y_0(\rho) + A_4 \ln r + A_5$$

$$M_r = \int_{-H}^H z G_r dz = \frac{(\nu-1)DL}{r^2} (A_1 \bar{J}_\rho + A_2 \bar{Y}_\rho - A_4)$$

$$Q_r = \int_{-H}^H \tau_{rz} dz = - \frac{\lambda_0^2 DL}{r} (A_1 J_\rho + A_2 Y_\rho)$$

$$f_{0,1} = \frac{1}{r} (A_1 J_\rho + A_2 Y_\rho - A_4)$$

здесь

$$J_\rho = n\rho J_1(\rho), \quad \bar{J}_\rho = \frac{L\rho^2}{\nu-1} \left[J_0\rho + \frac{\nu-1}{\rho} J_1(\rho) \right]$$

$$Y_\rho = n\rho Y_1(\rho), \quad \bar{Y}_\rho = \frac{L\rho^2}{\nu-1} \left[Y_0(\rho) + \frac{\nu-1}{\rho} Y_1(\rho) \right]$$



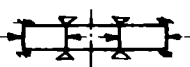
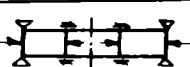
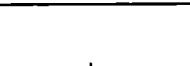

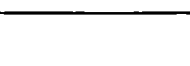
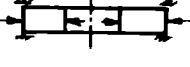

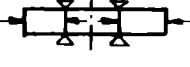
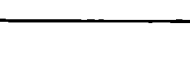

$$n = 1 \text{ для } Q_r; \quad n = \frac{H \operatorname{sh} \alpha_1 \frac{z_0}{H}}{\alpha_1 z_0 \operatorname{ch} \alpha_1} \quad \text{для } f_0;$$

$$n = \frac{\operatorname{ch} \alpha_1 \frac{z_1}{H}}{\operatorname{ch} \alpha_1} \quad \text{для } f_1.$$

Четыре условия на краях пластины $\rho = \bar{a}$, $\rho = \bar{b}$ образуют систему однородных уравнений относительно коэффициентов A_1 , A_2 , A_4 , A_5 . Нетривиальному решению этой системы соответствует изогнутая форма пластины, т.е. потеря устойчивости. Следовательно, значение параметра λ_κ , определяющего критическую нагрузку T_κ по формуле (1.12), должно быть найдено из равенства нулю детерминанта системы уравнений. Эти равенства для различных случаев закрепления краев пластины представлены в табл. I.

При $\alpha_0 \rightarrow 0$, то есть в случае бесконечно тонких пластин или бесконечно большой сдвиговой жесткости материала $n \rightarrow 1$, $n(z_0) \rightarrow 1$, $n(z_1) \rightarrow 1$ и уравнения табл. I обращаются в соответствующие уравнения для критического параметра λ_κ^* , вычислен-

Таблица 1.

N п.п.	Схема закрепления краев пластины	Граничные условия		Уравнения для определения критического параметра λ_k	λ_k^{**}
		При $r=R_0$	При $r=R_n$		
1		$w=0$ $M_r=0$	$w=0$ $M_r=0$	$\Delta J(\bar{Y}_0 - \bar{Y}_a) - \Delta Y(\bar{J}_0 - \bar{J}_a) -$ $-(Y_0 \bar{J}_a - Y_a \bar{J}_0) \ell n k = 0$	π
2		$w=0$ $f=0$	$w=0$ $f=0$	$\Delta J(Y_0 - Y_a) - \Delta Y(J_0 - J_a) -$ $-(Y_0 J_a - Y_a J_0) \ell n k = 0$	2π
3		$w=0$ $M_r=0$	$w=0$ $f=0$	$\Delta J(\bar{Y}_0 - \bar{Y}_a) - \Delta Y(\bar{J}_0 - \bar{J}_a) -$ $-(Y_0 \bar{J}_a - Y_a \bar{J}_0) \ell n k = 0$	$\text{tg} \lambda^{**} = \lambda^{**}$
4		$w=0$ $f=0$	$w=0$ $M_r=0$	$\Delta J(\bar{Y}_0 - Y_a) - \Delta Y(\bar{J}_0 - \bar{J}_a) -$ $-(Y_0 \bar{J}_a - Y_a \bar{J}_0) \ell n k = 0$	$\text{tg} \lambda^{**} = \lambda^{**}$
5		$Q_r = T \frac{dw}{dr}$ $M_r=0$	$w=0$ $M_r=0$	$\bar{Y}_0 \bar{J}_a - \bar{Y}_a \bar{J}_0 = 0$	—
6		$Q_r=0$ $f=0$	$w=0$ $M_r=0$	$\bar{Y}_0 J_a - Y_a \bar{J}_0 = 0$	$0,5\pi$
7		$Q_r = T \frac{dw}{dr}$ $M_r=0$	$w=0$ $f=0$	$Y_0 \bar{J}_a - \bar{Y}_a J_0 = 0$	$0,5\pi$
8		$Q_r=0$ $f=0$	$w=0$ $f=0$	$Y_0 J_a - Y_a J_0 = 0$	π
9		$w=0$ $M_r=0$	$Q_r = T \frac{dw}{dr}$ $M_r=0$	$\bar{Y}_0 \bar{J}_a - \bar{Y}_a \bar{J}_0 = 0$	—
10		$w=0$ $M_r=0$	$Q_r=0$ $f=0$	$Y_0 \bar{J}_a - \bar{Y}_a J_0 = 0$	$0,5\pi$
11		$w=0$ $f=0$	$Q_r = T \frac{dw}{dr}$ $M_r=0$	$\bar{Y}_0 J_a - Y_a \bar{J}_0 = 0$	$0,5\pi$
12		$w=0$ $f=0$	$Q_r=0$ $f=0$	$Y_0 J_a - Y_a J_0 = 0$	π

Примечание: $\Delta J = J_0(b) - J_0(a)$, $\Delta Y = Y_0(b) - Y_0(a)$

ного без учета поперечных сдвигов [34], [35], [51], [102]. х/

Если пренебречь влиянием сдвигов на λ_k , то критическая нагрузка определяется формулой

$$T_k^* = \lambda_k^* \frac{D}{R_H^2} L^* \quad (1.13)$$

где
$$L^* = \frac{3(\lambda_k^* \beta H - t h \lambda_k^* \beta H)}{(\lambda_k^* \beta H)^3}$$

Значения λ_k , за исключением случаев, когда один из краев свободен, а другой свободно оперт (см. табл. I), увеличиваются с ростом $\kappa = \frac{R_b}{R_H}$. С ростом этого отношения условия, в которых находится кольцевая пластина, приближаются к условиям удлиненной прямоугольной пластины с расстоянием между длинными сторонами $l = R_H - R_b$, сжатой по этим сторонам постоянной нагрузкой интенсивностью T . Критическая нагрузка такой пластины выражается формулой:

$$T_k^{**} = \left(\frac{\lambda_k^{**}}{1-\kappa} \right)^2 \frac{D}{R_H^2} L^{**} \quad (1.14)$$

где λ_k^{**} определяется условиями закрепления краев (см. табл. I)

$$L^{**} = \frac{3(\bar{\lambda}_k^{**} \beta H - t h \bar{\lambda}_k^{**} \beta H)}{(\bar{\lambda}_k^{**} \beta H)^3}; \quad \bar{\lambda}_k^{**} = \frac{\lambda_k^{**}}{1-\kappa}.$$

х/ Следует отметить, что в работах [34], [51] при выводе уравнения, определяющего λ_k^* для случая I (см. табл. I), допущена ошибка в знаке, вследствие чего соответствующие числовые результаты, приведенные в этих работах, неверны.

4.2. Возможности упрощенного подсчета λ_K . Наименьшие значения λ_K для определения представляющей практический интерес первой критической нагрузки при различных случаях опирания в области изменения параметров $0 \leq \alpha_0 \leq 2$, $0,1 \leq K \leq 0,9$ вычислялись на БЭСМ-2 и приведены на рис. 4-6. На этих рисунках показано изменение λ_K в зависимости от отношения радиусов K и параметра сдвигов α_0 для условий опирания, заземления либо комбинации опирания с заземлением на кромках пластин (случаи 1-3, табл. I). Как видно, увеличение α_0 может приводить к уменьшению λ_K (случай 1), не влиять на λ_K (случай 2) или увеличивать его (случай 3). Однако диапазон этих изменений от кривых, соответствующих $\alpha_0 = 0$, незначителен. В широкой области K с этими кривыми практически совпадают и значения $\frac{\lambda_K^{**}}{1-K}$ (штриховая линия). Численная оценка влияния этих факторов на жесткость пластины проведена в табл. 2. Здесь указаны значения безразмерного параметра критической нагрузки $\bar{T}_K = \frac{T_K R_K^2}{D}$, вычисленной по формулам (1.12)-(1.14). Эти данные позволяют оценить возможность использования параметров λ_K^* и λ_K^{**} для расчета критических нагрузок. Из данных таблиц I-2 (как видно из табл. I, для случаев 5-12 уравнения для определения критического параметра нагрузки не зависят от α_0) можно сделать вывод, что влиянием сдвига на λ_K в широком диапазоне изменения исследованных параметров можно пренебречь, так как основная поправка от сдвигов содержится в множителе L . Это позволяет пользоваться имеющимися таблицами для λ_K^* , приведенными

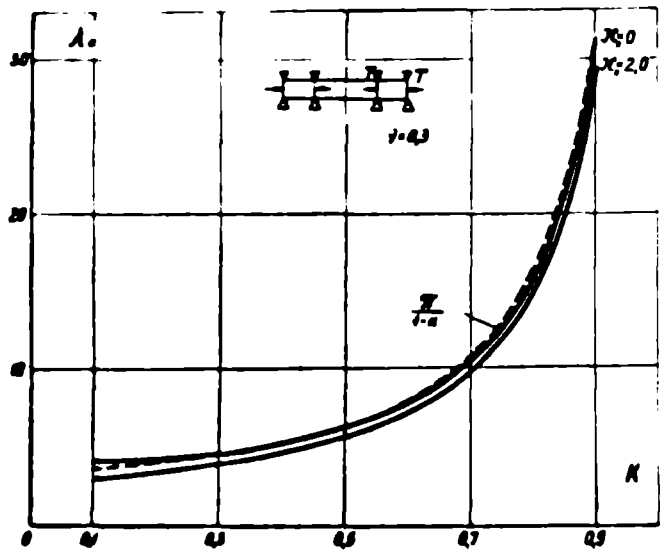


Рис. 4.

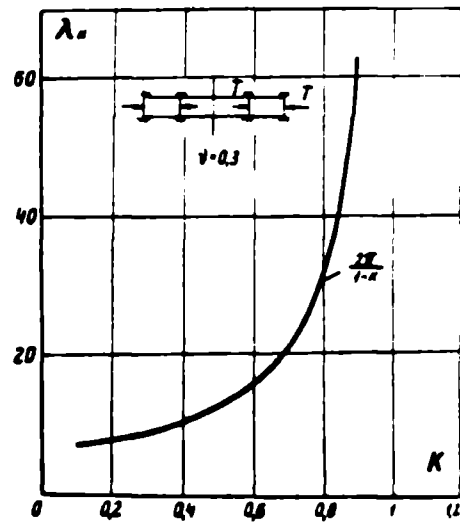


Рис. 5.

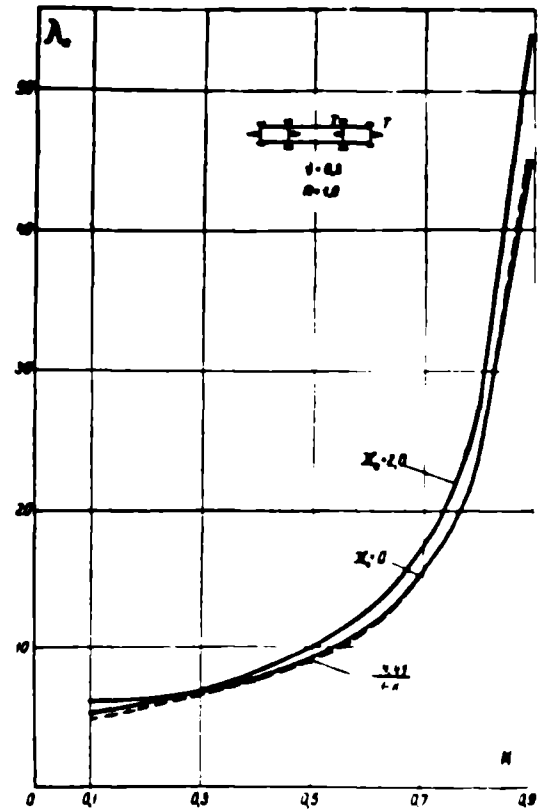


Рис. 6.

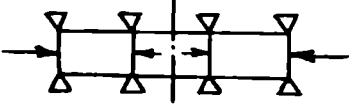
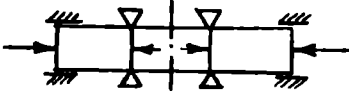
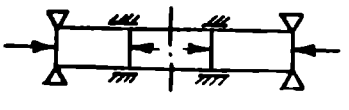
Таблица 2.

Вариант условий опирания (по табл. 1)	α_0	Значения критической нагрузки	Значения K				
			0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
I	0	\bar{T}_K	17,72	22,56	40,96	110,25	988,47
		\bar{T}_K^{**}	12,18	20,07	39,44	109,41	985,96
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	31,26	-11,03	-3,71	-0,76	-0,25
	2	\bar{T}_K	2,02	2,27	2,19	2,70	2,90
		\bar{T}_K^*	2,29	2,37	2,53	2,72	2,90
		$\frac{\bar{T}_K^* - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	13,36	4,41	1,61	0,74	0
		\bar{T}_K^{**}	2,14	2,33	2,52	2,72	2,91
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	5,94	2,64	1,20	0,74	0,34
2	0	\bar{T}_K	50,69	81,36	158,51	441,42	3947,61
		\bar{T}_K^{**}	48,72	80,46	157,75	438,06	3943,84
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	-3,89	-1,11	-0,48	-0,22	-0,095
	2	\bar{T}_K	2,94	2,96	2,98	2,99	3,00
		\bar{T}_K^{**}	2,57	2,67	2,76	2,86	2,95
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	-12,58	-9,79	-7,38	-4,34	-1,67
3	0	\bar{T}_K	39,82	49,84	88,74	234,40	2043,04
		\bar{T}_K^{**}	24,90	41,09	80,64	223,80	2016,01
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	-37,46	-17,55	-9,13	-4,52	-1,32
	2	\bar{T}_K	2,47	2,59	2,71	2,83	2,95
		\bar{T}_K^*	2,53	2,57	2,68	2,81	2,93
		$\frac{\bar{T}_K^* - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	2,84	-0,77	-1,11	-0,71	-0,67
		\bar{T}_K^{**}	2,40	2,53	2,67	2,80	2,93
		$\frac{\bar{T}_K^{**} - \bar{T}_K}{\bar{T}_K} 100\%$	-2,44	-2,32	-1,47	-1,06	-0,68

в [35], [51] видно, что даже при относительно малых K допустима приполюсная замена $T_K \approx T_K^{**}$, что избавляет от необходимости решения трансцендентных уравнений, приведенных в таблице I.

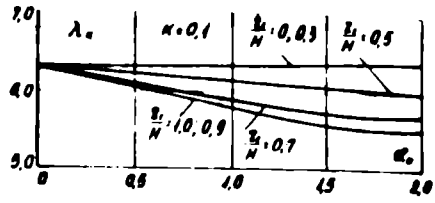
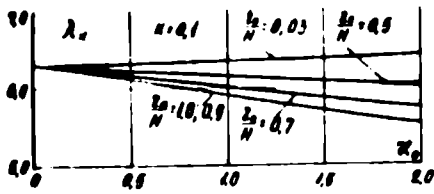
4.3 Изменение коэффициента Пуассона. Для анализа влияния изменения коэффициента Пуассона составлена таблица 3. Значения λ_K вычислены при $\alpha_0 = 0$.

Таблица 3
Влияние изменения коэффициента Пуассона ν
на λ_K

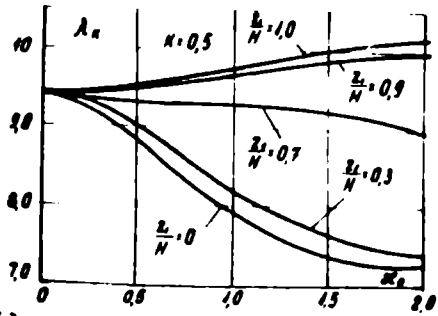
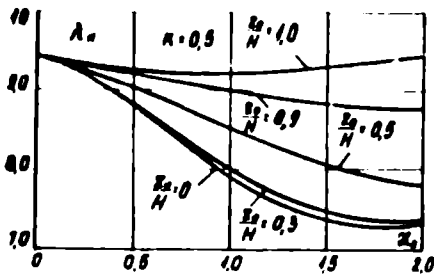
Эскиз опирания	$K \setminus \nu$	0	0,3	0,5
	0,1	3,822	3,901	3,92
	0,5	6,299	6,337	6,336
	0,9	31,22	31,33	31,44
	0,1	6,224	6,084	5,948
	0,5	9,709	9,531	9,394
	0,9	47,665	47,111	46,554
	0,1	4,562	4,72	4,821
	0,5	8,4	8,62	8,734
	0,9	40,877	42,221	43,221

Как видно из таблицы 3, влиянием изменения ν в диапазоне 0-0,5 на λ_K можно пренебречь.

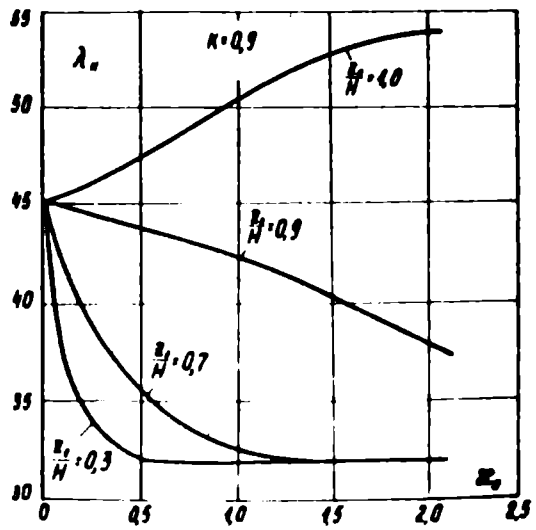
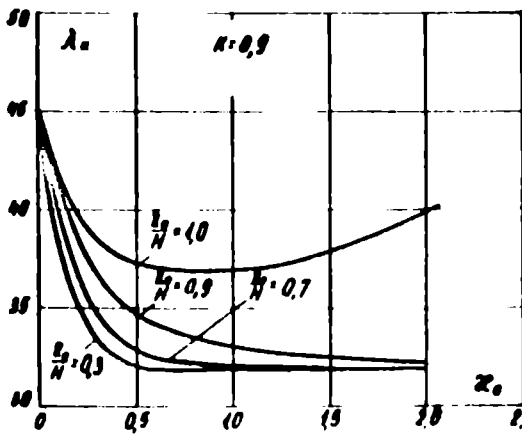
4.4 Различные модели заделки. В расчетах, проведенных выше, была использована модель f_1 при $\frac{z_1}{H} = 1$, то есть $n = 1$, соответствующая классическому условию жесткой заделки - заземлению горизонтального элемента наружной кромки от поворота (см. рис. 3в). Представляет интерес изучение влияния сдвигов на λ_k и для иных моделей заделки - f_0 (параметр $\frac{z_0}{H}$), а также f_1 (параметр $\frac{z_1}{H}$), представленных на рис. 3. Это влияние оценено на примере пластины, имеющей внутренний контур свободно опертым, а наружный - заземленным. Корни λ_k соответствующего уравнения (случай 3, табл. I) в зависимости от α_0 для различных K представлены на рис. 7. Данные рис. 7 позволяют сопоставить с кривой соответствующей $\frac{z_1}{H} = 1$ кривые для $0 \leq \frac{z_0}{H} \leq 1$ и $0 \leq \frac{z_1}{H} \leq 1$. Уменьшение $\frac{z_0}{H}$, $\frac{z_1}{H}$, то есть отстояний точек z_0 или z_1 , в которых элемент закрепляется от радиального перемещения или поворота влечет к некоторому увеличению λ_k для $K \leq 0,2$ и более значительному уменьшению при $K > 0,2$. Влияние сдвигов на λ_k с уменьшением z_0 и z_1 , как правило, увеличивается. Лишь для $K < 0,2$ имеет место обратное. С увеличением параметра сдвигов α_0 чувствительность к нему в основном падает. Таким образом, вычисляя λ_k в широком диапазоне K для обеих моделей, нельзя пренебрегать положением закрепляемой точки по толщине торца, так как из-за влияния сдвигов в области $K > 0,2$ и $\frac{z_0}{H}$, $\frac{z_1}{H}$, меньших 1, ошибка может возрасти в несколько раз. Разницей в результатах, полученных с использованием обеих моделей при $z_0 = z_1$, допустимо пренебречь при $K < 0,5$ либо z_0 и z_1 близких к 0.



a)



b)



b)

Рис. 7.

Полученные результаты показывают, что в ряде случаев заделки пластин из материалов, податливых сдвигу, необходим учет ее практической реализации.

§ 5. Влияние сдвигов на критическую нагрузку.

Для материалов из армированных пластиков характерны большие значения параметров β , поэтому снижение критической нагрузки T_K по сравнению с вычисленной на основании гипотезы Кирхгофа-Лява T_K^0 может быть существенным (см. рис. 8-9). На этих рисунках приведены отношения $\frac{T_K}{T_K^0}$ для случаев опирания I и 3 по таблице I. Задаваясь определенной точностью расчета в отношении сдвигов, можем на рис. 8-9 для всех K отсечь области значений α_0 , для которых пренебрежение влиянием сдвигов не приводит к ошибке более заданной. Например, для $K = 0,1$ ошибка от неучета сдвигов не превысит 10% в области значений α_0 , меньших 0,25 и 0,2 для случаев I и 3 соответственно (см. рис. 8-9). При увеличении K эти области уменьшаются.

Из выражений (1.12)-(1.14) следует, что, если пренебречь сдвигами α_0 , то критическая нагрузка T_K^0 растет с увеличением λ_K по параболическому закону, однако, если сдвиги учитывать, то с ростом λ_K уменьшается L и тем сильнее, чем больше α_0 . Поэтому для пластин из материала, податливого сдвигу, становится важной вспомогательная задача оценки области, в которой методы повышения жесткости изотропных пластин становятся неэффективными из-за преобладающего влияния поперечного сдвига. Пренебрегая влиянием сдвигов на величину λ_K и заменяя параметр L его приближенным значением

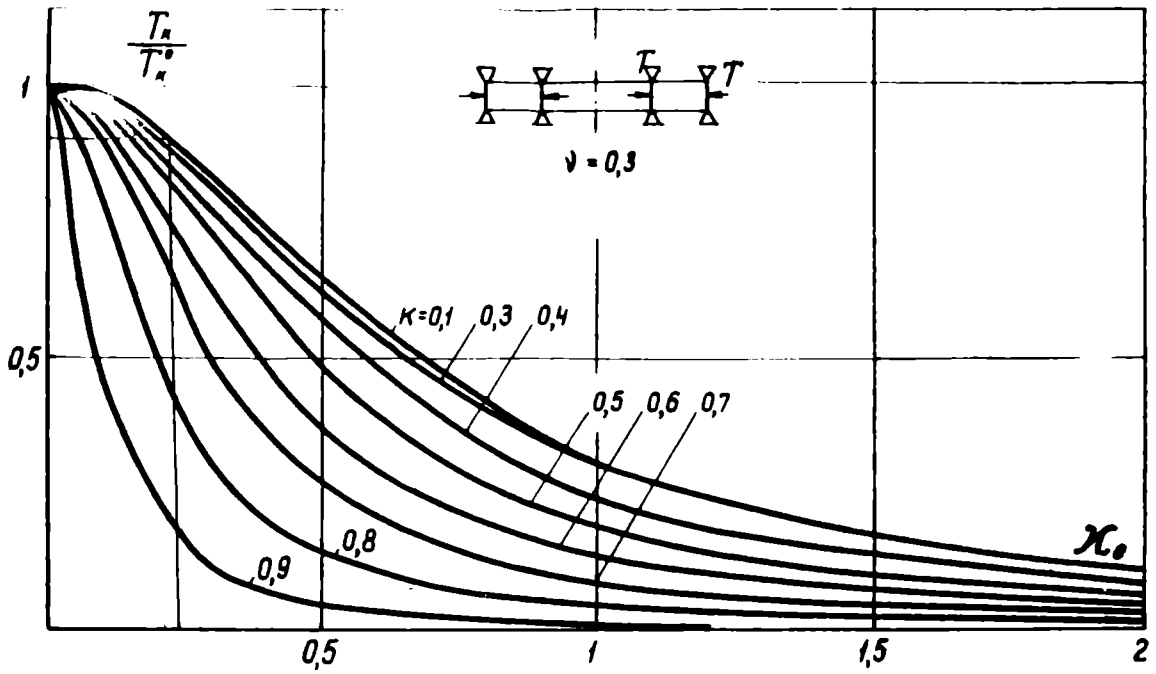


Рис. 8.

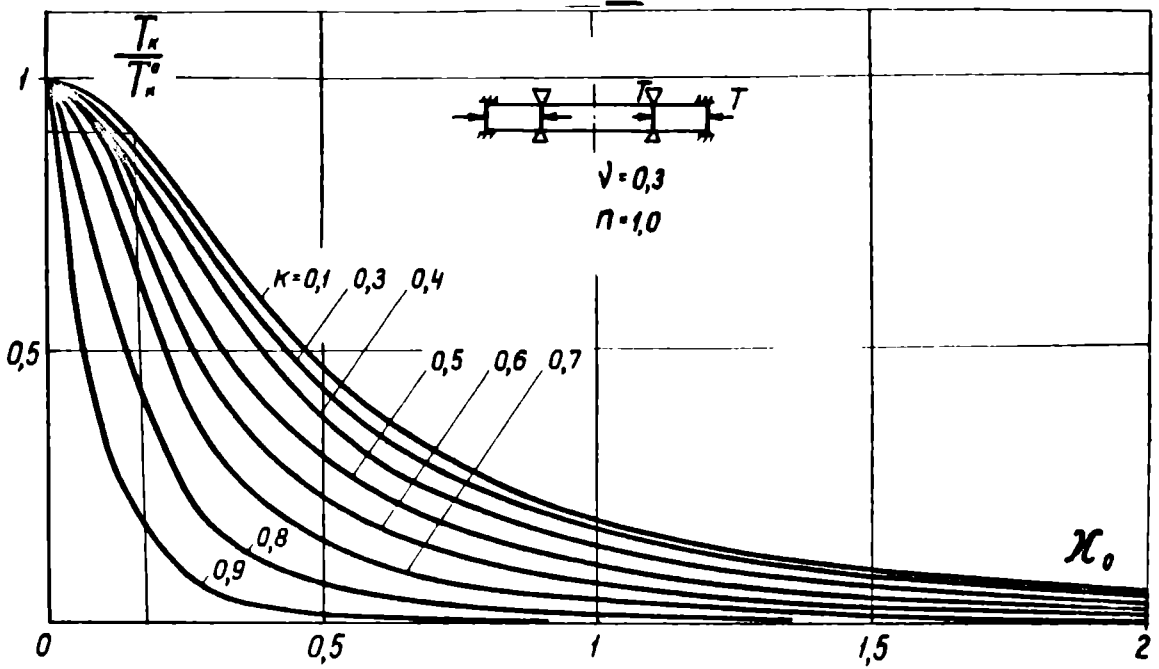


Рис. 9.

$L \approx (1 + 0,4 \alpha_1^2)^{-1}$ (при $\alpha_1 \leq 3$ погрешность этой замены, соответствующей постулированию закона распределения касательных напряжений по толщине в виде квадратной параболы, менее 5% [65]), формулу (1.12) можем представить в виде

$$\frac{1}{\rho_k} = \frac{1}{\rho_k^*} + \frac{1,2}{G}$$

Здесь величину $\frac{1}{\rho_k}$ можем трактовать как общую податливость, а $\frac{1}{\rho_k^*}$ и $\frac{1,2}{G}$ - соответственно, как изгибную податливость в классическом смысле (то есть вычисленную без учета сдвигов) и сдвиговую податливость.

Чувствительность критической нагрузки к изменениям ρ_k^* и G можно характеризовать производными $\gamma_\alpha = \frac{\partial \rho_k}{\partial \rho_k^*} \approx L^2$; $\gamma_G = \frac{\partial \rho_k}{\partial G} = \frac{2}{15} \alpha_1^4 L^2$, а об эффективности увеличения ρ_k^* или G судить по отношению $\frac{\gamma_G}{\gamma_\alpha} = \frac{2}{15} \alpha_1^4$

Для изотропных пластин $\rho_k \ll G$, поэтому повышения жесткости конструкций в основном добиваются увеличением ρ_k^* , то есть относительной толщины, модулей Юнга или жесткостей закрепления краев (λ_k). Для конструкций из армированных пластиков $E \gg G$, вследствие чего возможно, что $\frac{1}{\rho_k^*} < \frac{1,2}{G}$ и увеличение ρ_k^* без одновременного увеличения G становится неэффективным. Это следствие важно иметь ввиду при существующей тенденции замены относительно низко модульных стекловолокон высоко модульными волокнами бора, углерода и др., что связано с увеличением отношения $\frac{E}{G}$. Значения α_0 , λ_k , при которых одно лишь увеличение ρ_k неэффективно при заданном по конструктивным или технологическим соображениям отно-

шении $\frac{\gamma_G}{\gamma_\alpha}$, можно определить по рис. 10.

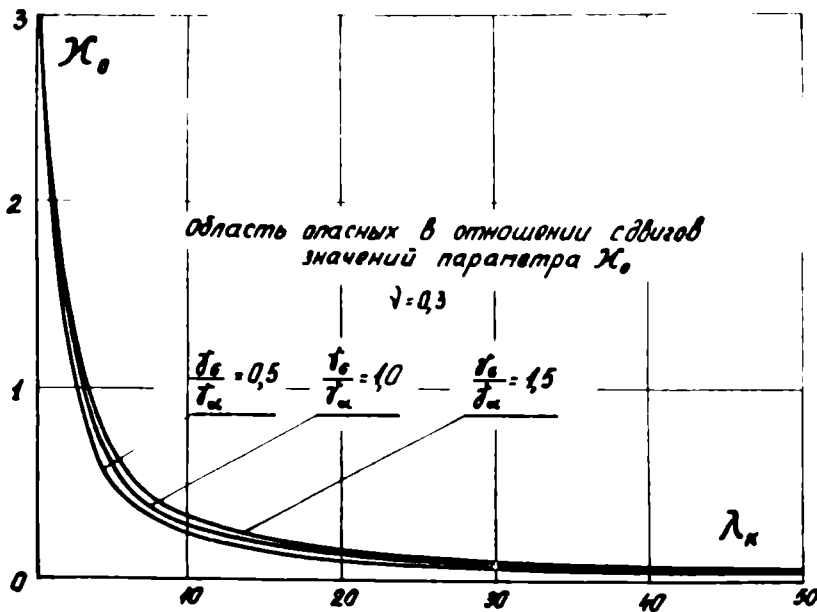


Рис 10

Из этого рисунка видно, что изменение отношения $\frac{\gamma_G}{\gamma_\alpha}$ незначительно влияет на границы области сдвиговой опасности. Проведенный анализ относится и к сплошной пластине.

В В О Д Ы

1. Решена задача устойчивости трансверсально изотропной кольцевой пластины из материала, слабо сопротивляющегося сдвигу при однородном докритическом напряженном состоянии. Даны инженерные формулы для определения критических нагрузок.
2. Показано, что учет сдвигов для широкого класса пластин значительно уменьшает критические усилия.
3. Исследовано влияние изменения коэффициентов Пуассона ν и поперечных сдвигов α при вычислении критического параметра нагрузки λ_k . Показано, что этим влиянием в широком диа-

пазоне условий опирания и параметров K , λ_0 допустимо пренебречь. Исключение – комбинация опирания с защемлением, когда этим влиянием допустимо пренебречь при защемлении наружных точек контура, а также при $K < 0,2$.

4. Изучено влияние на λ_K двух различных по способу закрепления точек торца моделей жесткой заделки. Показано, что при одинаковых условиях различие между ними существенно в области $K > 0,5$ и отстояний закрепленных точек от срединной поверхности $z_0 > 0$, $z_1 > 0$

5. Определена область λ_K , λ_0 , внутри которой можно повышать устойчивость круглых пластин за счет относительной толщины ($\frac{2H}{R_H}$) модулей Юнга (E) и жесткости защемления краев (λ_K), не опасаясь влияния сдвигов.

Г Л А В А П

УПРАВЛЕНИЕ УКЛАДКОЙ В КРУГЛЫХ ПЛАСТИНАХ

§ 6. Исходные зависимости.

Как было показано в предыдущей главе, для трансверсально изотропных пластин в обширной области параметров λ_k , α_0 можно значительно повысить критические нагрузки, лишь изменяя анизотропию в поперечной плоскости, то есть, приняв меры к устранению слабого сопротивления межслойному сдвигу. Однако возможности этого в рамках существующих схем армирования тканью или ровницей ограничены. Поэтому в таких случаях целесообразно переходить на трехмерно армированные материалы при той же анизотропии в плоскости.

Существует и другой путь увеличения критических нагрузок посредством регулирования анизотропии в плоскости пластины, то есть создания цилиндрической ортотропии ($\alpha \neq I$), естественной для круглых пластин. При этом возникает задача по изучению влияния параметра α , характеризующего укладку материала на критические нагрузки. Решение этой задачи необходимо для выбора рациональной укладки в сжимаемых пластинах.

В настоящей главе рассмотрено влияние анизотропии, образованной укладкой материала, на потерю устойчивости под действием нагрузки в плоскости пластины. При этом учитывается анизотропия как в плоскости пластины, так и, подобно предыдущей главе, в поперечных плоскостях, что необходимо для пластин из ВК.

Задача решается при следующих предположениях:

1) отсутствие поперечной деформации;

2) E_r , E_θ , G_{rz} постоянные. Это можно реализовать, используя конструктивный характер анизотропии [101]. Для пластин, изготавливаемых непрерывной укладкой вдоль радиуса, такое предположение является, конечно, первым приближением, позволяющим, однако, уловить основные закономерности. Справедливость его растет с увеличением K .

3) Осесимметричность выпучивания. Последнее предположение имеет практический интерес, так как осесимметричная форма может реализовываться в условиях нагружения, например, при продольно-поперечном изгибе. Хотя при изучении изотропных пластин [69], [70] найдено, что такое предположение может привести к завышению расчетных критических нагрузок из-за реализации на практике форм без осевой симметрии, вопрос об этих формах в цилиндрически ортотропных пластинах нуждается в дополнительном изучении и выходит за рамки настоящего исследования.

Для решения поставленной задачи использованы выводы предыдущей главы о возможности пренебрежения влиянием параметров, характеризующих материал при использовании граничных условий, характерных для изотропных тонких пластин и недопустимости пренебрежения различными способами защемления при вычислении λ_k .

Круглая пластина, рассматриваемая в системе цилиндрических координат r , θ , z (см. рис. 2), нагружена осесимметричной нагрузкой в плоскости $r\theta$, причем в случае кольцевой пластины $T_\theta \neq T_H$. Докритическое напряженное со-

стояние в цилиндрически ортотропных круглых пластинах в условиях нагружения уже не является однородным, поэтому уравнения устойчивости, полученные из (I.2), можем представить в виде:

$$\frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{G_r - G_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{d(Q_r r)}{dr} + \frac{d}{dr} \left(N_r \frac{dw}{dr} r \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} - Q_r = 0 \quad (2.3)$$

Здесь уравнение (2.2) соответствует третьему уравнению системы (I.2), написанному относительно внутренних усилий.

Напряжения G_r , G_θ , τ_{rz} определим с учетом соотношений (I.3), (I.4), переходя к безразмерным координатам $\rho_1 = \frac{r}{R_H}$

$$G_r = \frac{\bar{E}_r}{R_H} \left(\frac{\partial u}{\partial \rho_1} + \nu \frac{u}{\rho_1} \right); \quad G_\theta = \frac{\bar{E}_\theta}{R_H} \left(\frac{u}{\rho_1} + \frac{\nu}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} \right); \quad (2.4)$$

$$\tau_{rz} = G_{rz} \left(\frac{1}{R_H} \frac{dw}{d\rho_1} + \frac{du}{dz} \right)$$

Здесь $\nu = \nu_{r\theta}$.

Изгибающие моменты M_r , M_θ и радиальное усилие N_r определяются зависимостями

$$M_r = \int_{-H}^H z G_r dz, \quad M_\theta = \int_{-H}^H z G_\theta dz, \quad N_r = \int_{-H}^H G_r dz. \quad (2.5)$$

Сопоставляя интеграл уравнения (2.2) с условием равновесия части пластины радиуса $r - (Q_r r - N_r r \frac{dw}{dr} = 0)$, имеем:

$$Q_r = -N_r \frac{dw}{dr} \quad (2.6)$$

С учетом (2.4), (2.6) уравнения (2.1), (2.3) в безразмерных координатах образуют разрешающую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho_1^2} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial \rho_1} - \alpha^2 \frac{u}{\rho_1^2} + \frac{R_H^2}{\beta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{dM_r}{d\rho_1} + \frac{M_r - M_\theta}{\rho_1} + N_r \frac{dw}{d\rho_1} = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $\beta^2 = \frac{\bar{E}_r}{G_{rz}}$

Решение уравнения (2.7) может быть получено методом Фурье и представлено в виде [55]

$$\begin{aligned} u = & A J_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + A_1 J_\alpha(\lambda_1 \rho_1) \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{\beta}{R_H} z + \\ & + A_2 Y_\alpha(\lambda_2 \rho_1) \operatorname{sh} \lambda_2 \frac{\beta}{R_H} z + A_3 Y_\alpha(\lambda_3 \rho_1) \operatorname{ch} \lambda_3 \frac{\beta}{R_H} z + \\ & + B \rho_1^\alpha z + B_1 \rho_1^\alpha + B_2 \rho_1^{-\alpha} z + B_3 \rho_1^{-\alpha}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

где A, B - постоянные,

J_α, Y_α - функции Бесселя I и II рода порядка α

λ - постоянная, которая, как показано во второй

главе, характеризует критическую нагрузку

при потере устойчивости. Если уравнения устой-

чивости удовлетворены, то $\lambda = \lambda_k$. В дальней-

шем индекс K для удобства опускаем.

Поскольку одной форме потери устойчивости соответствует лишь одна критическая нагрузка, положим:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

Постоянную λ считаем независимой от параметров анизотропии. Это предположение основывается на результатах предыдущей главы, где показано, что учет характеристик материала величин ν , $\frac{E_\theta}{G_{rz}}$ практически не влияет на корни трансцендентных уравнений, составленных для определения критических нагрузок трансверсально изотропных ($\alpha = 1$) пластин при точном решении. Величины λ определяются лишь видом нагружения, соотношением радиусов K и условиями на границах. Сравнение результатов настоящей работы с полученными в [12], [93], [101] указывает на правомерность такого предположения и для $\alpha \neq 1$.

§ 7. Устойчивость сплошных пластин.

Для выполнения условия $U = 0$ при $\rho_1 = 0$ должно быть

$$A_2 = A_3 = B_2 = B_3 = 0$$

Условия отсутствия касательных напряжений на торцевой поверхности пластины $\tau_{rz} \Big|_{z=\pm H} = 0$ (см. (1.8) выполняются, если

$$u = A J_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + B \rho_1^\alpha z + B_1 \rho_1^\alpha, \quad (2.10)$$

$$\frac{dw}{d\rho_1} = -A \lambda \beta J_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{ch} \lambda \alpha - B R_H \rho_1^\alpha, \quad (2.11)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\beta H}{R_H} = 0,5 \alpha_0 \sqrt{\frac{1}{\alpha^2 - \nu^2}}$$

Проинтегрировав по ρ_1 , получаем:

$$w = -A\beta F_\alpha \operatorname{ch} \lambda \alpha - B R_H (\alpha + 1) \rho_1^{\alpha+1} + C, \quad (2.12)$$

$$\text{где } F_\alpha = \int J_\alpha(\lambda \rho_1) d(\lambda \rho_1).$$

Используя (2.4), (2.5), находим выражения для напряжений и изгибающих моментов:

$$G_r = \frac{\bar{E}_r}{R_H} \left[A \varphi_1 \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + B \rho_1^{\alpha-1} z (\alpha + \nu) + B_1 \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu) \right]; \quad (2.13)$$

$$G_\theta = \frac{\bar{E}_r}{R_H} \left[A \varphi_0 \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + B \alpha z \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu) + B_1 \alpha \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu) \right],$$

$$M_r = A \beta \lambda \varphi_1 \frac{DL}{R_H^2} \operatorname{ch} \alpha + B \frac{D}{R_H} \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu), \quad (2.14)$$

$$M_\theta = A \beta \lambda \varphi_0 \frac{DL}{R_H} \operatorname{ch} \alpha + B \frac{D}{R_H} \alpha \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu),$$

где введены обозначения:

$$D = \frac{2}{3} \bar{E}_r H^3; \quad L = \frac{3}{(\lambda \alpha)^3} (\lambda \alpha - \operatorname{th} \lambda \alpha),$$

$$\varphi_1 = \frac{dJ_\alpha(\lambda \rho_1)}{d\rho_1} + \nu \frac{J_\alpha(\lambda \rho_1)}{\rho_1}; \quad \varphi_0 = \nu \frac{dJ_\alpha(\lambda \rho_1)}{d\rho_1} + \alpha^2 \frac{J_\alpha(\lambda \rho_1)}{\rho_1}$$

Определим постоянную B_1 . Для этого, согласно (2.5), составим выражение для усилия в радиальной плоскости

$$N_r = 2H \frac{\bar{E}_r}{R_H} B_1 \rho_1^{\alpha-1} (\alpha + \nu).$$

Если $\rho_1 = 1$, то $N_r = -T_H$, откуда $B_1 = -\frac{T_H R_H}{2H\bar{E}_r(\alpha+\nu)}$ и

$$N_r = -T_H \rho_1^{\alpha-1} \quad (2.15)$$

Решим (2.8) методом Бубнова-Галеркина, приняв в качестве решения (2.11). С учетом (2.11), (2.14), (2.15) получаем функцию невязку, соответствующую уравнению (2.8):

$$\bar{f}(\rho_1) = A \frac{DL}{R_H^2} \lambda^3 \beta \rho_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{ch} \lambda x - T_H \rho_1^\alpha [A \lambda \beta] (\lambda \rho_1) \operatorname{ch} \lambda x + B R_H \rho_1^\alpha$$

Выражение (2.12) представим в виде

$$w = -A \beta F_\alpha(\rho_1) \operatorname{ch} \lambda x - B R_H \rho_1^{\alpha+1} (\alpha+1)^{-1} + C_1,$$

где $F_\alpha(\rho_1) = \int_0^{\rho_1} J_\alpha(\lambda \rho_1) d(\lambda \rho_1)$

Воспользуемся тем, что прогиб определен с точностью до произвольной константы C_1 , и выразим с помощью граничных условий постоянные A , B через C_1 .

Пластина жестко заделана по торцам. При жесткой заделке кромки, учитывая, что в рамках рассматриваемой теории классическая модель $\frac{dw}{d\rho_1} = 0$ не является единственной [65], примем следующие условия на границе $\rho_1 = 1$

$$w = 0 \quad \begin{array}{l} \alpha) \frac{dw}{d\rho_1} = 0 \\ \delta) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pm x_1} = 0 \end{array} \quad (2.16)$$

Вопрос о возможной модели жесткой заделки для конструкций из материалов, армированных волокнами, подлежит дополнительному исследованию.

Условия (2.16) дают систему уравнений, из которых легко найти

$$A = \frac{C_1(\alpha+1)}{\beta \operatorname{ch} \lambda x [(\alpha+1)F_\alpha(1) - \lambda n J_\alpha(\lambda)]} = \frac{C_1}{\beta \operatorname{ch} \lambda x} \alpha',$$

$$B = - \frac{C_1(\alpha+\nu)\lambda n J_\alpha(\lambda)}{R_H [(\alpha+\nu)F_\alpha(1) - \lambda n J_\alpha(\lambda)]} = - \frac{C_1 \lambda}{R_H} \beta'.$$

Здесь $n = 1$ для варианта а) и $n = \frac{\operatorname{ch} \lambda x \frac{z_1}{H}}{\operatorname{ch} \lambda x}$ для варианта б).

Пластина свободно оперта по торцам. Условия $w = M_r = 0$ при $\beta_1 = 1$ дают для A, B

$$A = \frac{C_1(\alpha+1)(\alpha+\nu)}{\beta \operatorname{ch} \lambda x [(\alpha+1)(\alpha+\nu)F_\alpha(1) - \lambda L \Phi_1(1)]} = \frac{C_1}{\beta \operatorname{ch} \lambda x} \alpha';$$

$$B = - \frac{C_1(\alpha+1)\lambda L \Phi_1(1)}{R_H [(\alpha+1)(\alpha+\nu)F_\alpha(1) - \lambda L \Phi_1(1)]} = - \frac{C_1 \lambda}{R_H} \beta',$$

где $\Phi_1(1) = (\alpha+\nu)J_\alpha(\lambda) - \lambda J_{\alpha+1}(\lambda)$

Таким образом, в каждой задаче точно удовлетворены уравнение (2.7) и граничные условия, Уравнение (2.8) удовлетворяется приближенно. Из выражения вида

$$\frac{d}{dC_1} \int_0^1 \bar{f}(\rho_1) \frac{dw}{d\rho_1} d\rho_1 = 0;$$

соответствующего методу Бубнова-Галеркина для этого уравнения, получаем $C_1 = 0$, что соответствует плоской форме равновесия или:

$$T_{HK} = \frac{DL}{R_H^2} t, \quad t = \frac{\lambda^2 \int_0^1 J_\alpha(\lambda \rho_1) [J_\alpha(\lambda \rho_1) - \frac{\beta'}{\alpha'} \rho_1^\alpha] d\rho_1}{\int_0^1 \rho_1^\alpha [J_\alpha(\lambda \rho_1) - \frac{\beta'}{\alpha'} \rho_1^\alpha]^2 d\rho_1}, \quad (2.17)$$

где t может быть названа квадратом критического параметра нагрузки рассматриваемых пластин.

Для жесткой заделки $\frac{b'}{a'} = n J_{\alpha}(\lambda)$, для свободной опоры $\frac{b'}{a'} = \frac{L \varphi_1(\lambda)}{\alpha + \nu}$. Интересно отметить, что в случае жесткой заделки по варианту (а) t не зависит от α

Постоянная λ находится из работ [17], [18], выполненных для изотропных пластин. В случае жесткой заделки (модель а) сплошной пластины $\lambda = 3,83$; для свободной опоры $\lambda = 2,05$. При этом важно помнить, что λ может быть чувствительна к определенной модели жесткой заделки (см. § 4.4) и задаваться одинаковой моделью.

Значения t , подсчитанные на ЭЦМ для жесткой заделки (модель а)^{x/} и свободного опирания кромок пластины при различных α_0 , приведены на рис. II и I2. На этих рисунках также приведены штриховые кривые, соответствующие результатам [55], полученным в предположении однородного поля докритического напряженного состояния. Видно, что такое предположение допустимо лишь при $\alpha \approx 1$. Оно приводит к существенному завышению при $\alpha < 1$ и занижению при $\alpha > 1$, причем ошибка увеличивается с возрастанием α и в условиях защемления. Кривые, соответствующие $\alpha_0 = 0$, очень близки со штрихпунктирными кривыми, полученными в [101] при точном решении. Это указывает на

x/ Эта модель выбрана лишь для облегчения сопоставления с результатами, полученными в [93], [101]. Ее использование позволяет изучить влияние α , α_0 , по крайней мере, качественно.

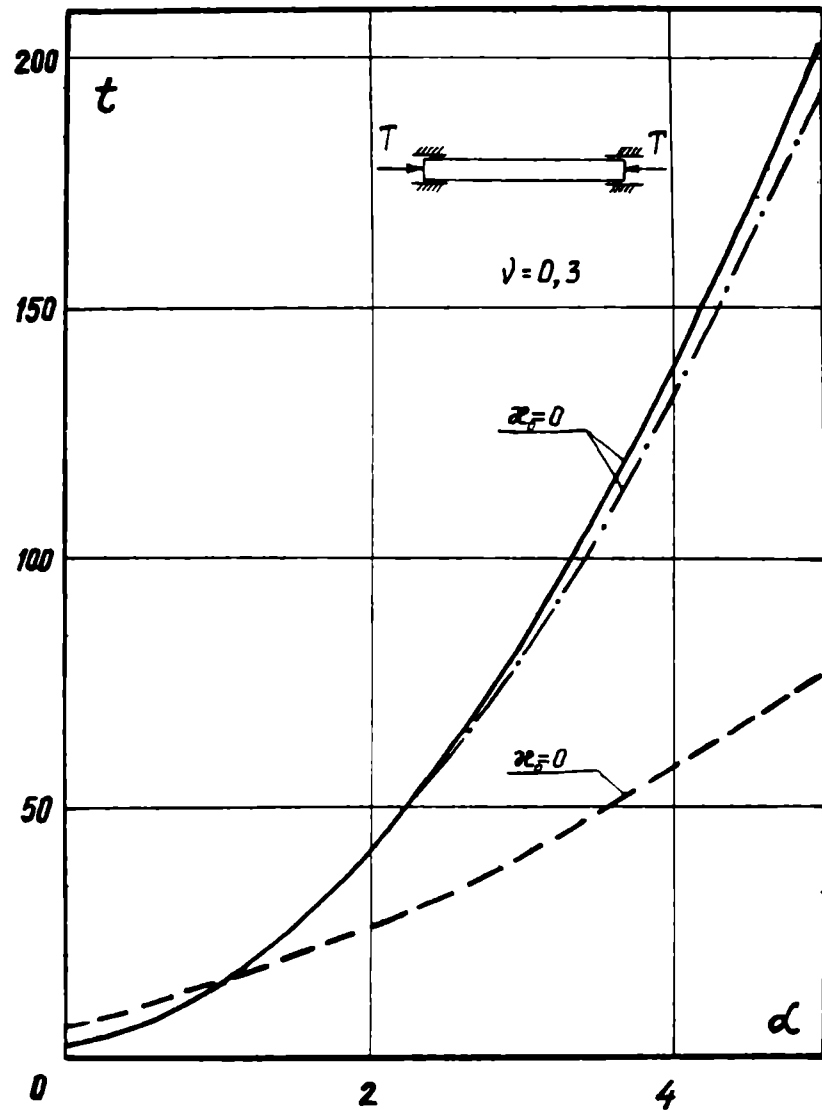


Рис. 11.

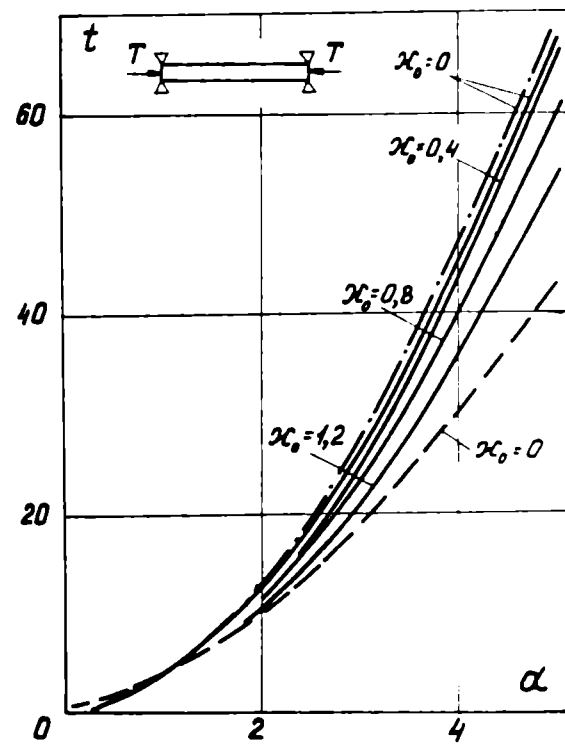


Рис. 12

высокую точность применения метода Бубнова-Галеркина в данной форме даже при удерживании лишь первого члена ряда, аппроксимирующего решению.

§ 8. Устойчивость кольцевых пластин.

8.1. Уравнение для определения критических нагрузок.

В этом случае полюс $\rho_1 = 0$ отсутствует и в выражении (2.9) следует оставить все произвольные постоянные, за исключением

A_1, A_2 , которые из условия отсутствия касательных напряжений на плоских поверхностях пластины $\frac{1}{R_H} \frac{dw}{d\rho_1} = - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm H}$

должны быть равны 0.

Решение (2.9) принимает вид:

$$u = A_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + A_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{sh} \lambda \frac{\beta}{R_H} z + B_1 \rho_1^\alpha z + B_2 \rho_1^\alpha + B_3 \rho_1^\alpha z^2 + B_4 \rho_1^{-\alpha} z^2 \quad (2.18)$$

$$\frac{dw}{d\rho_1} = - [A_1 \lambda \beta J'_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{ch} \lambda z + A_2 \lambda \beta Y'_\alpha(\lambda \rho_1) \operatorname{ch} \lambda z + B_1 R_H \rho_1^\alpha + B_2 R_H \rho_1^{-\alpha}] \quad (2.19)$$

Используя (2.4), (2.5), (2.18), находим моменты M_r, M_θ и радиальное усилие N_r

$$M_r = A \beta \lambda \Phi_1 \frac{DL}{R_H^2} \operatorname{ch} \lambda z + A_2 \beta \lambda S_1 \frac{DL}{R_H^2} \operatorname{ch} \lambda z + B_1 \frac{D}{R_H} (\alpha + \nu) \rho_1^{\alpha-1} + B_2 \frac{D}{R_H} (\nu - \alpha) \rho_1^{-(\alpha+1)}, \quad (2.20)$$

$$M_\theta = A \beta \lambda \Phi_0 \frac{DL}{R_H^2} \operatorname{ch} \lambda z + A_2 \beta \lambda S_0 \frac{DL}{R_H^2} \operatorname{ch} \lambda z + B_1 \frac{D}{R_H} \alpha (\alpha + \nu) \rho_1^{\alpha-1} + B_2 \frac{D}{R_H} \alpha (\alpha - \nu) \rho_1^{-(\alpha+1)},$$

$$N_r = 2HB_1(\alpha + \nu)\rho_1^{\alpha-1} + 2HB_3(\nu - \alpha)\rho_1^{-(\alpha+1)}, \quad (2.21)$$

где S_1 , S_0 выражения, идентичные Φ_1 , Φ_0 , но составленные из функций Бесселя второго рода.

Условия $N_r = -T_B$ при $\rho_1 = \kappa$ и $N_r = -T_H$ при $\rho_1 = 1$ дают два уравнения для определения постоянных B и B_3 , которые принимают вид:

$$B_1 = \frac{T_B \kappa^{\alpha+1} - T_H}{2H(\alpha + \nu)(1 - \kappa^{2\alpha})}; \quad B_3 = \frac{T_H \kappa^{\alpha-1} - T_B}{2H(\nu - \alpha)[\kappa^{-(\alpha+1)} - \kappa^{\alpha-1}]}$$

Подставляя эти выражения в (2.21), получаем

$$N_r = \frac{1}{1 - \kappa^{2\alpha}} \left[(T_B \kappa^{\alpha+1} - T_H) \rho_1^{\alpha-1} + (T_H \kappa^{2\alpha} - T_B \kappa^{\alpha+1}) \rho_1^{-(\alpha+1)} \right] \quad (2.22)$$

С учетом (2.19), (2.20), (2.22) определим функцию-невязку $\bar{f}_1(\rho_1)$, соответствующую уравнению (2.8)

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(\rho_1) = & \lambda^3 \beta \frac{DL}{R_H^2} \rho_1 [A J_\alpha(\lambda \rho_1) + A_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1)] \operatorname{ch} \lambda x + \\ & + \frac{\rho_1^{\alpha-1}}{1 - \kappa^{2\alpha}} \left[T_B \kappa^{\alpha+1} (1 - \rho_1^{-2\alpha}) + T_H (\kappa^{2\alpha} \rho_1^{-2\alpha} - 1) \right] \left\{ \lambda \beta \rho_1 [A J_\alpha(\lambda \rho_1) + \right. \\ & \left. + A_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1)] \operatorname{ch} \lambda x + R_H \rho_1^{\alpha+1} (B + B_2 \rho^{-2\alpha}) \right\} \end{aligned}$$

Составляя выражение ища:

$$\frac{d}{dC_1} \int_{\kappa}^1 \bar{f}_1(\rho_1) \frac{d\omega}{d\rho_1} d\rho_1 = 0, \quad (2.23)$$

придем к уравнению для определения критических усилий

$$T_{\theta K} + T_{HK} \frac{P_2}{P_1} = \frac{DL}{R_H^2} \frac{P}{P_1}, \quad (2.24)$$

где величины P , P_1 , P_2 принимают значения:

$$P = \lambda^2 \int_{\kappa}^1 \rho_1 [a'_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) + a'_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1)] [a'_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) + a'_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1) + \rho_1 (\beta' + \beta'_2 \rho_1^{-2\alpha})] d\rho_1;$$

$$P_1 = \frac{\kappa^{\alpha+1}}{1-\kappa^{2\alpha}} \int_{\kappa}^1 \rho_1^\alpha (\rho_1^{-2\alpha} - 1) [a'_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) + a'_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1) + \rho_1^\alpha (\beta' + \beta'_2 \rho_1^{-2\alpha})] d\rho_1,$$

$$P_2 = \frac{1}{1-\kappa^{2\alpha}} \int_{\kappa}^1 \rho_1^\alpha (1 - \kappa^{2\alpha} \rho_1^{-2\alpha}) [a'_1 J_\alpha(\lambda \rho_1) + a'_2 Y_\alpha(\lambda \rho_1) + \rho_1^\alpha (\beta' + \beta'_2 \rho_1^{-2\alpha})] d\rho_1;$$

Аналитические зависимости для констант a'_1 , a'_2 , β' , β'_2 , найденные из граничных условий после подстановки A , A_2 , B , B_2 , в (2.23) представлены в табл. 4. В этой таблице рассмотрены условия, включающие свободный край, свободное опирание, а также защемление, согласно вариантам α и β (см. (2.16)). Постоянные λ для различных κ выбираются из решения соответствующей задачи для изотропных либо трансверсально-изотропных пластин при одинаковых граничных условиях (в том числе одинаковых условиях защемления) и нагружении. Как видно из предыдущей главы, при приближении закрепляемой точки к срединной поверхности при этом может понадобиться учет поперечных сдвигов.

Таблица 4.

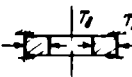




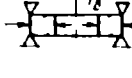
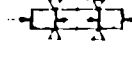
Эскиз пластины или	Граничные условия		Постоянные $\alpha, \alpha_2,$ β, β_2	Аналитические выражения для постоянных
	$\rho=1$	$\rho=\kappa$		
1 	$w=0$ $\frac{dw}{d\rho}=0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	$M_r=0$ $Q=Q_r$ $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$	α' α_2' β' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)[(\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}(\alpha+\nu)\kappa^{\alpha-1}] + \bar{\eta}[S_\alpha L(\kappa^\alpha - \kappa^{-\alpha}) + 2\alpha\eta\kappa^{-\alpha} Y_\alpha(\lambda)]$ $J_\alpha(\lambda\kappa)[(\alpha+\nu)\kappa^\alpha - (\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}] + \bar{\eta}[\Phi_\alpha L(\kappa^{-\alpha} - \kappa^\alpha) - 2\alpha\eta\kappa^{-\alpha} J_\alpha(\lambda)]$ $L[Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha] + \eta(\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}[J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda) - Y_\alpha(\lambda\kappa)J_\alpha(\lambda)] + \bar{\eta}L\eta\kappa^{-\alpha}[J_\alpha(\lambda)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha]$ $L[J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha] + \eta(\alpha+\nu)\kappa^{\alpha-1}[Y_\alpha(\lambda)J_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda)] + \bar{\eta}L\eta\kappa^{-\alpha}[Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda)S_\alpha]$
2 	$w=0$ $\frac{dw}{d\rho}=0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	$Q_r=0$	α' α_2' β' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)(\kappa^\alpha - \kappa^{-\alpha})$ $J_\alpha(\lambda\kappa)(\kappa^{-\alpha} - \kappa^\alpha)$ $\eta\kappa^{-\alpha}[J_\alpha(\lambda)Y_\alpha(\lambda\kappa) - J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda)]$ $\eta\kappa^{-\alpha}[J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda)Y_\alpha(\lambda\kappa)]$
3 	$M_r=0$ $Q=Q_r$ $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	$w=0$ $\frac{dw}{d\rho}=0$	α' α_2' β' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)[(\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}(\alpha+\nu)\kappa^{\alpha-1}] + \bar{\eta}[S_\alpha L(\kappa^\alpha - \kappa^{-\alpha}) + 2\eta\alpha Y_\alpha(\lambda\kappa)]$ $J_\alpha(\lambda\kappa)[(\alpha+\nu)\kappa^\alpha - (\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}] + \bar{\eta}[\Phi_\alpha L(\kappa^{-\alpha} - \kappa^\alpha) - 2\eta\alpha J_\alpha(\lambda\kappa)]$ $\kappa^{-\alpha}L[\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda) - S_\alpha J_\alpha(\lambda)] + (\nu-\alpha)\eta[J_\alpha(\lambda)Y_\alpha(\lambda\kappa) - Y_\alpha(\lambda)J_\alpha(\lambda\kappa)] + \bar{\eta}\eta L[S_\alpha J_\alpha(\lambda\kappa) - \Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda\kappa)]$ $\kappa^{-\alpha}L[J_\alpha(\lambda)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha] + (\alpha+\nu)\eta[Y_\alpha(\lambda)J_\alpha(\lambda) - Y_\alpha(\lambda\kappa)J_\alpha(\lambda)] + \bar{\eta}\eta L[\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda\kappa) - S_\alpha J_\alpha(\lambda\kappa)]$
4 	$\frac{dw}{d\rho}=0$ $Q_r=0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	$w=0$ $\frac{dw}{d\rho}=0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	α' α_2' β' β_2'	$(\kappa^{-\alpha} - \kappa^\alpha)Y_\alpha(\lambda)$ $(\kappa^\alpha - \kappa^{-\alpha})J_\alpha(\lambda)$ $[J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda)Y_\alpha(\lambda\kappa)]\eta$ $[J_\alpha(\lambda)Y_\alpha(\lambda\kappa) - J_\alpha(\lambda\kappa)Y_\alpha(\lambda)]\eta$
5 	$w=0$ $M_r=0$ $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$ $\frac{\partial w}{\partial z} _{z=0, \pm L} = 0$	$M_r=0$ $Q=Q_r$ $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$	α' α_2' β' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^{-(\alpha+1)}\kappa^{\alpha-1}] + \frac{\bar{\eta}L}{\sqrt{1-\alpha^2}}\{S_\alpha[(\nu-\alpha)\kappa^\alpha - (\alpha+\nu)\kappa^{-(\alpha+1)}] + 2\alpha S_\alpha \kappa^{-\alpha}\}$ $J_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^{\alpha-1}\kappa^{-(\alpha+1)}] + \frac{\bar{\eta}L}{\sqrt{1-\alpha^2}}\{\Phi_\alpha[(\alpha+\nu)\kappa^\alpha - (\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}] - 2\Phi_\alpha \alpha \kappa^{-\alpha}\}$ $\frac{L}{\alpha+\nu}\{[Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha] + \kappa^{-(\alpha+1)}[J_\alpha(\lambda)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha] + \frac{L}{\alpha+\nu}\kappa^\alpha[S_\alpha\Phi_\alpha - S_\alpha\Phi_\alpha]\}$ $\frac{L}{\nu-\alpha}\{[J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha] + \kappa^{\alpha-1}[Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda)S_\alpha] + \frac{L}{\nu-\alpha}\kappa^\alpha[\Phi_\alpha S_\alpha - \Phi_\alpha S_\alpha]\}$
6 	$w=0$ $M_r=0$	$\frac{dw}{d\rho}=0$ $Q_r=0$	α' α_2' β' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^\alpha(\nu-\alpha) - \kappa^{-(\alpha+1)}(\nu+\alpha)]$ $J_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^{-(\alpha+1)}(\nu+\alpha) - \kappa^\alpha(\nu-\alpha)]$ $L\kappa^{-\alpha}[\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda\kappa) - S_\alpha J_\alpha(\lambda\kappa)]$ $L\kappa^\alpha[S_\alpha J_\alpha(\lambda\kappa) - \Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda\kappa)]$
7 	$M_r=0$ $Q=Q_r$ $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$	$\alpha=0$ $\beta=C$	α' β_2'	$Y_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^{-(\alpha+1)}\kappa^{\alpha-1}] + \frac{\bar{\eta}L}{\sqrt{1-\alpha^2}}\{S_\alpha[(\nu-\alpha)\kappa^\alpha - (\alpha+\nu)\kappa^{-(\alpha+1)}] - 2\alpha S_\alpha\}$ $J_\alpha(\lambda\kappa)[\kappa^{\alpha-1}\kappa^{-(\alpha+1)}] + \frac{\bar{\eta}L}{\sqrt{1-\alpha^2}}\{\Phi_\alpha[(\alpha+\nu)\kappa^\alpha - (\nu-\alpha)\kappa^{-(\alpha+1)}] + 2\alpha\Phi_\alpha\}$ $\frac{L}{\alpha+\nu}\{[Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha] + \kappa^{-(\alpha+1)}[J_\alpha(\lambda)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha] + \frac{L}{\alpha+\nu}\kappa^\alpha[\Phi_\alpha S_\alpha - S_\alpha\Phi_\alpha]\}$ $\frac{L}{\nu-\alpha}\{[J_\alpha(\lambda\kappa)S_\alpha - Y_\alpha(\lambda\kappa)\Phi_\alpha] + \kappa^{\alpha-1}[Y_\alpha(\lambda)\Phi_\alpha - J_\alpha(\lambda)S_\alpha] + \frac{L}{\nu-\alpha}\kappa^\alpha[\Phi_\alpha S_\alpha - \Phi_\alpha S_\alpha]\}$

Табл 4 (продолжение)

Эскиз пластины	Граничные условия		Постоянные $\alpha, \alpha_1,$ β, β_1	Аналитические выражения для постоянных
	$\rho=1$	$\rho=k$		
8 	$\frac{dw}{d\rho} = 0$ $Q_r = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	$w = 0$ $M_r = 0$	α' α_1' β' β_1'	$Y_\alpha(\lambda) [(1-\alpha)k^{-(\alpha+1)} - (1+\alpha)k^{\alpha-1}]$ $J_\alpha(\lambda) [(1-\alpha)k^{\alpha-1} - (1+\alpha)k^{-(\alpha+1)}]$ $L [\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda) - S_\alpha J_\alpha(\lambda)]$ $L [S_\alpha J_\alpha(\lambda) - \Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda)]$
9 	$w = 0$ $M_r = 0$	$w = 0$ $M_r = 0$	α' α_1' β' β_1'	$\frac{1}{kL} (\nu^2 - \alpha^2) (k^\alpha - k^{-\alpha}) N_1 + \frac{2\alpha(\beta\nu)}{1-\alpha} (S_1 + S_2) + \frac{\nu-\alpha}{1+\alpha} [k^{\alpha+1} S_2 + k^{-(\alpha+1)} S_1] - \frac{\nu+\alpha}{1-\alpha} (k^{-\alpha-1} S_1 + k^{\alpha-1} S_2)$ $\frac{1}{kL} (\nu^2 - \alpha^2) (k^{-\alpha} - k^\alpha) F_1 - \frac{2\alpha(\beta\nu)}{1-\alpha} (\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\nu-\alpha}{1+\alpha} [k^{\alpha+1} \Phi_2 + k^{-(\alpha+1)} \Phi_1] - \frac{\nu+\alpha}{1-\alpha} (k^{-\alpha-1} \Phi_1 + k^{\alpha-1} \Phi_2)$ $\frac{L}{1-\alpha} (\Phi_2 S_2 - \Phi_1 S_1) (k^{\alpha+1} - 1) + (\alpha - \nu) [k^{-(\alpha+1)} S_2 - S_1] F_1 + (\nu - \alpha) [k^{-(\alpha+1)} \Phi_1 - \Phi_2] N_1$ $\frac{L}{1+\alpha} (S_1 \Phi_1 - \Phi_2 S_2) (k^{\alpha-1} + 1) + (\nu + \alpha) (k^{\alpha-1} S_2 - S_1) F_1 - (\nu + \alpha) (k^{\alpha-1} \Phi_1 - \Phi_2) N_1$
10 	$w = 0$ $\frac{dw}{d\rho} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	$w = 0$ $\frac{dw}{d\rho} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	α' α_1' β' β_1'	$(k^\alpha - k^{-\alpha}) N_1 + \left(\frac{2\alpha k}{1-\alpha} - \frac{k^\alpha}{1-\alpha} + \frac{k^{-\alpha}}{1+\alpha} \right) n Y_\alpha(\lambda) \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha} + \frac{k^{\alpha+1}}{1+\alpha} - \frac{k^{\alpha-1}}{1-\alpha} \right) n Y_\alpha(\lambda)$ $(k^\alpha - k^{-\alpha}) F_1 + n \left(\frac{k^\alpha}{1-\alpha} - \frac{2\alpha k}{1-\alpha} - \frac{k^{-\alpha}}{1+\alpha} \right) J_\alpha(\lambda) + n \left(\frac{k^{-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{2\alpha}{1-\alpha} - \frac{k^{\alpha+1}}{1+\alpha} \right) J_\alpha(\lambda)$ $\{ [Y_\alpha(\lambda) - k^{-\alpha} Y_\alpha(\lambda)] F_1 + [k^{-\alpha} J_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda)] N_1 + n \frac{k^{\alpha-1}}{1-\alpha} [J_\alpha(\lambda) Y_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda) Y_\alpha(\lambda)] \} n$ $\{ [k^{-\alpha} Y_\alpha(\lambda) - Y_\alpha(\lambda)] F_1 + [J_\alpha(\lambda) - k^{-\alpha} J_\alpha(\lambda)] N_1 + n \frac{1-k^{\alpha+1}}{1-\alpha} [J_\alpha(\lambda) Y_\alpha(\lambda) - J_\alpha(\lambda) Y_\alpha(\lambda)] \} n$
11 	$w = 0$ $\frac{dw}{d\rho} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	$w = 0$ $M_r = 0$	α' α_1' β' β_1'	$[k^{\alpha-1} (\nu + \alpha) - k^{-(\alpha+1)} (\nu - \alpha)] N_1 + \left(\frac{k^{\alpha-1}}{1+\alpha} - \frac{k^{-(\alpha+1)}}{1-\alpha} \right) L S_\alpha + \frac{2\alpha(\beta\nu)}{1-\alpha} - \frac{\nu+\alpha}{1-\alpha} k^{\alpha-1} + \frac{\nu-\alpha}{1+\alpha} k^{-(\alpha+1)} n Y_\alpha(\lambda)$ $[k^{-\alpha} (\nu - \alpha) - k^{\alpha+1} (\nu + \alpha)] F_1 + \left(\frac{k^{\alpha-1}}{1-\alpha} - \frac{k^{-(\alpha+1)}}{1+\alpha} \right) L \Phi_\alpha - \frac{2\alpha(\beta\nu)}{1-\alpha} - \frac{\nu+\alpha}{1-\alpha} k^{\alpha-1} + \frac{\nu-\alpha}{1+\alpha} k^{-(\alpha+1)} n J_\alpha(\lambda)$ $[L S_\alpha - n (\nu - \alpha) k^{\alpha-1} Y_\alpha(\lambda)] F_1 + [(\nu - \alpha) k^{-(\alpha+1)} J_\alpha(\lambda) - L \Phi_\alpha] N_1 + \frac{(k^{\alpha-1}) L n [S_\alpha J_\alpha(\lambda) - \Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda)]}{1-\alpha}$ $[(\nu + \alpha) n k^{\alpha-1} Y_\alpha(\lambda) - L S_\alpha] F_1 + [L \Phi_\alpha (\nu + \alpha) k^{\alpha-1} n J_\alpha(\lambda)] N_1 + \frac{(k^{-(\alpha+1)}) L n [\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda) - S_\alpha J_\alpha(\lambda)]}{1+\alpha}$
12 	$w = 0$ $M_r = 0$ $\frac{dw}{d\rho} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	$w = 0$ $\frac{dw}{d\rho} = 0$ $\frac{\partial u}{\partial z} \Big _{z=\pm z_0} = 0$	α' α_1' β' β_1'	$[(\nu - \alpha) k^\alpha - (\nu + \alpha) k^{-\alpha}] N_1 + \left(\frac{k^\alpha - k^{-\alpha}}{1+\alpha} - \frac{k^\alpha - k^{-\alpha}}{1-\alpha} \right) S_\alpha L + \left[\frac{(\nu - \alpha) (k^{\alpha+1} - 1)}{1+\alpha} - \frac{(\nu + \alpha) (k^{\alpha-1} - 1)}{1-\alpha} \right] n Y_\alpha(\lambda)$ $[(\nu + \alpha) k^\alpha - (\nu - \alpha) k^{-\alpha}] F_1 + \left(\frac{k^\alpha - k^{-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{k^\alpha - k^{-\alpha}}{1+\alpha} \right) \Phi_\alpha L + \left[\frac{(\nu - \alpha) (1 - k^{\alpha+1})}{1+\alpha} - \frac{(\nu + \alpha) (k^{\alpha-1} - 1)}{1-\alpha} \right] n J_\alpha(\lambda)$ $[n (\nu - \alpha) Y_\alpha(\lambda) - k^\alpha L S_\alpha] F_1 + [k^{-\alpha} L \Phi_\alpha - n (\nu - \alpha) J_\alpha(\lambda)] N_1 + n \frac{k^{\alpha-1}}{1-\alpha} [\Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda) - S_\alpha J_\alpha(\lambda)]$ $[k^\alpha L S_\alpha - n (\nu + \alpha) Y_\alpha(\lambda)] F_1 + [n (\nu + \alpha) J_\alpha(\lambda) - k^\alpha L \Phi_\alpha] N_1 + L \frac{k^{\alpha+1}}{1+\alpha} [S_\alpha J_\alpha(\lambda) - \Phi_\alpha Y_\alpha(\lambda)] n$

где $N_1 = \int_k^1 Y_\alpha(\lambda) d\rho$, $F_1 = \int_k^1 J_\alpha(\lambda) d\rho$,
 $\bar{q} = \frac{T_x}{T_x - \lambda^2 \frac{DL}{R^2}}$, $T_x = \begin{cases} T_0 \\ T_n \end{cases}$, $n = \begin{cases} 1 & \text{если } \frac{dw}{d\rho} = 0 \\ \frac{\text{ch} \lambda x \frac{z_0}{R}}{\text{ch} \lambda x} & \text{если } \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\pm z_0} = 0 \end{cases}$
 $\Phi_\alpha = \frac{\alpha + \nu}{k} J_\alpha(\lambda) - \lambda J_{\alpha+1}(\lambda)$, $\Phi_1 = (\alpha + \nu) J_\alpha(\lambda) - \lambda J_{\alpha+1}(\lambda)$,
 $S_\alpha = \frac{\alpha + \nu}{k} Y_\alpha(\lambda) - \lambda Y_{\alpha+1}(\lambda)$, $S_1 = (\alpha + \nu) Y_\alpha(\lambda) - \lambda Y_{\alpha+1}(\lambda)$.

8.2. Частные случаи опирания и нагружения. Важное практическое значение имеет случай заземления либо опирания наружной кромки при свободной внутренней кромке. Заметим, что при наличии нагрузки на обеих кромках для этих случаев критические нагрузки $T_{ок}$ войдут в постоянные α' , α_2' , β' , β_2' , ($\bar{\eta} \neq 0$). При этом (2.24) приводит к нелинейному уравнению относительно критических нагрузок, которое может быть решено при заданных $\frac{T_N}{T_0}$. Далее рассмотрим более часто встречающийся на практике случай нагружения наружным давлением ($T_0 = 0$). Критическое значение сжимающей нагрузки принимает вид:

$$T_{нк} = \frac{DL}{R_N^2} \frac{\rho}{\rho_2}, \quad (2.25)$$

Постоянные α' , α_2' , β' , β_2' выбираются из таблицы 4 (случаи I и 5 соответственно), причем $\bar{\eta} = 0$, так как $T_0 = 0$. Постоянные λ выбираются из таблицы 5 по данным работы [15] (в случае I заземление по варианту α).

Таблица 5.

случай по табл. 4 \ k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
1	3,61	3,58	3,79	4,26	5,05	6,36	8,64	13,2	27,4
5	1,97	1,86	1,75	1,67	1,59	1,53	1,47	1,42	1,37

Отношение $\bar{m} = \frac{\rho}{\rho_2}$ может быть названо квадратом критического параметра нагрузки кольцевых ортотропных пластин. Эти отношения в реальной области параметров k , α_0 вычислены на БСМ-ЭМ и приведены на рис. 13 для случая I и на рис. 14 для случая 5.

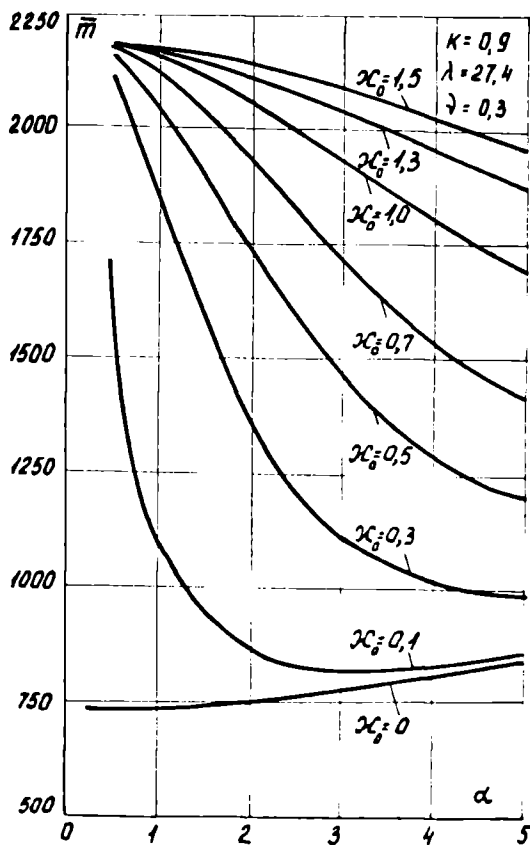
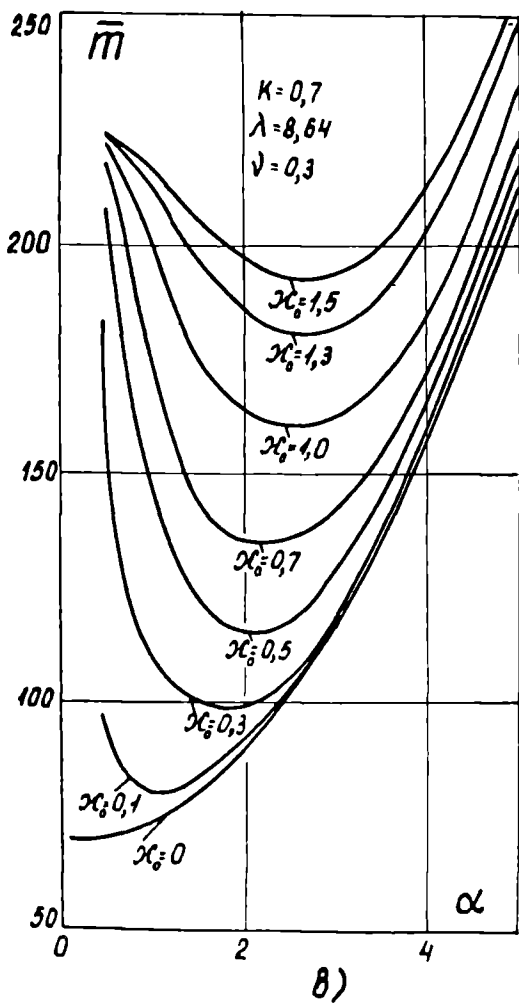
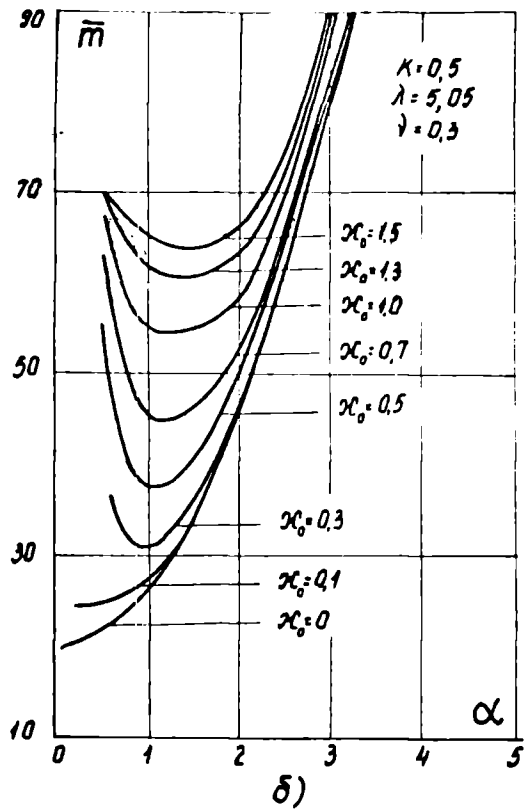
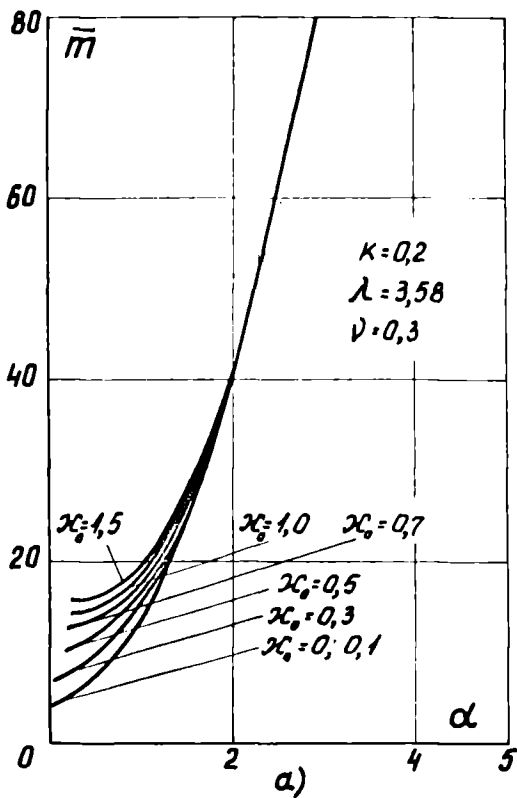


Рис. 13.

2)

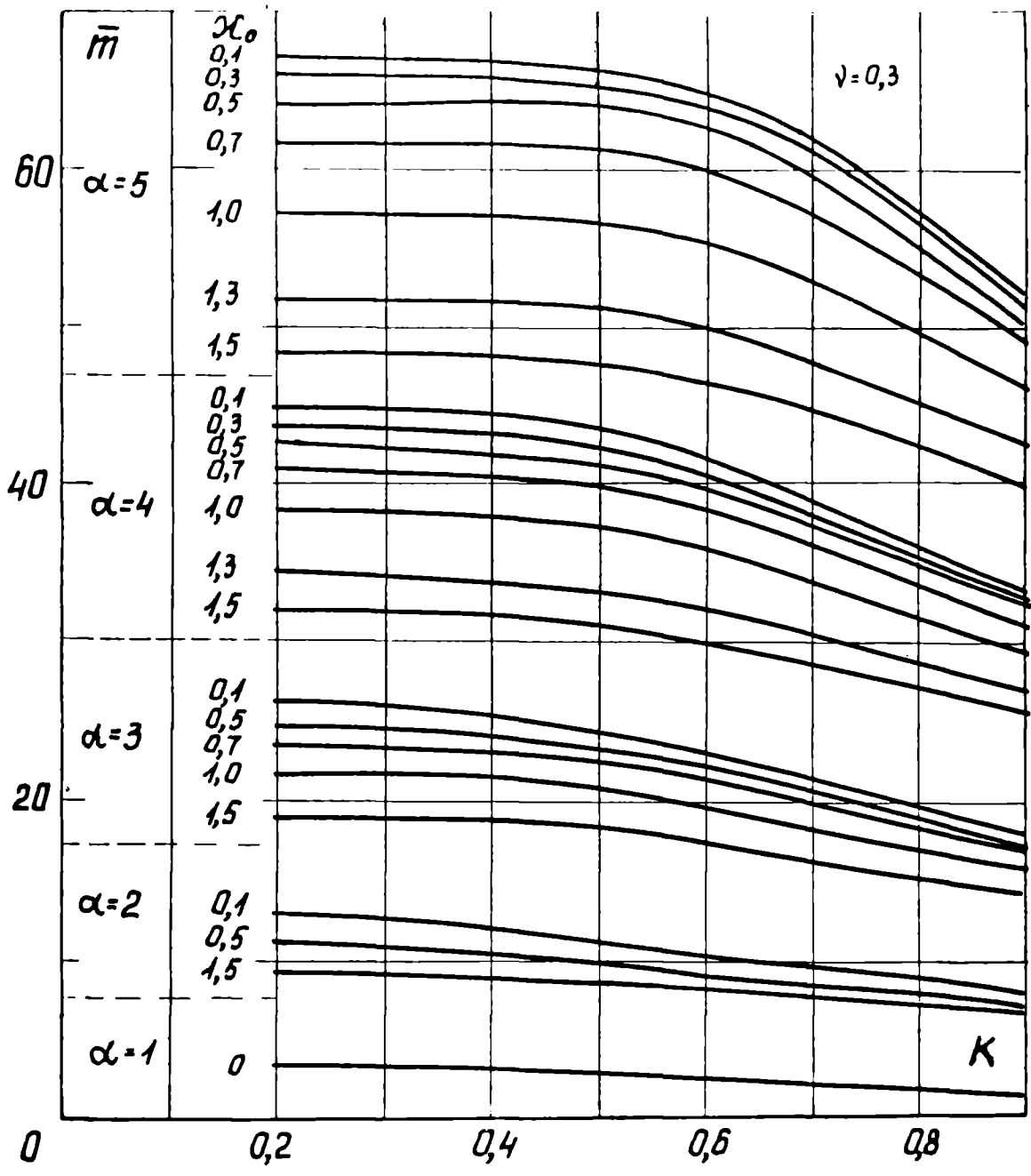


Рис. 14.

При расчете принято $\nu = 0,3$. На рис. 13 представлено изменение \bar{m} в зависимости от α для различных K в случае заземленной по варианту α ($n = 1$) пластины. Видно, что поведение \bar{m} в зависимости от указанных параметров достаточно сложно. В широком диапазоне α_0 с увеличением α \bar{m} увеличивается для малых K , имеет минимум для средних значений K и уменьшается для больших K . Значительно проще зависимость $\bar{m}(\alpha)$ для свободного опирания (рис. 14). Для этого случая зависимость более наглядна в координатах $\bar{m} - K$. Из рис. 14 видно, что при $\alpha = 1$ в отличие от предыдущего случая \bar{m} практически не зависит от α_0 для всех K . С увеличением α возрастание α_0 уменьшает значения \bar{m} . Эти значения с ростом K во всех случаях несколько снижаются.

Из обоих рисунков видно, что, предположив сдвиговую жесткость бесконечной $\alpha_0 = 0$ для $\alpha = 1$, практически получаем $\bar{m} = \lambda^2$, то есть решение соответствующей задачи в случае изотропных пластин. Для ортотропных пластин $\alpha_0 = 0$, $\alpha = 1,5$ в случае I (см. рис. 15) найденное решение (сплошная линия) со-

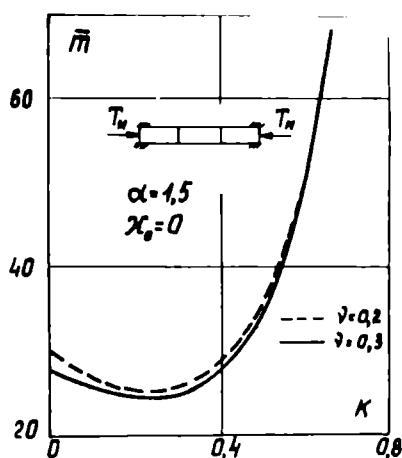


Рис. 15.

поставлено с результатами работы [12] (штриховая линия). Некоторым расхождением коэффициентов Пуассона для обеих кривых, согласно данным предыдущей главы, пренебрегаем. Видно, что совпадение этих кривых, полученных с использованием различных приемов, достаточно хорошее. Таким образом, высокая точность решения получена и для кольцевых пластин.

§ 9. Влияние отношения модулей в окружном и радиальном направлении на критическую нагрузку.

Изучим влияние α в рассмотренных случаях. Это влияние исследовалось и в работах [12], [101]. Однако, в отличие от этих работ здесь учитывается изменение изгибной жесткости \mathcal{D} и параметра \mathcal{X}_0 , что может привести к качественно иным выводам. Для исследования этого влияния зададимся модулем E_0 . Поэтому изменение α будет означать изменение E_r .

С учетом выражения для \mathcal{D} критическую нагрузку T_{HK} можно представить в виде

$$T_{HK} = \frac{2}{3} \frac{E_0 H^3}{R_H^2} m_0, \quad (2.26)$$

где $m_0 = \frac{L \bar{m}}{\alpha^2 - \nu^2}$

\bar{m} равно t , или $\frac{\rho}{\rho_2}$ в рассмотренных случаях нагружения сплошных и кольцевых пластин.

При данных размерах R_H , H и данном E_θ величина T_{HK} изменяется пропорционально m_0 . Зависимости $m_0(\alpha)$ для защемленных (согласно модели a) сплошных пластин приведены на рис. 16. При опирании эти зависимости указаны на рис. 17. В случае кольцевых пластин, имеющих свободную внутреннюю кромку, рис. 18 соответствует защемлению наружной кромки (модель a), а рис. 19 – опиранию. Особенностью рис. 19 является то, что для $K = 0,2$ и $K = 0,3$ (см. рис. 19а и 19б) построена зависимость m_0 от α (Эти графики будут использованы в главе 4 для сопоставления экспериментальных данных с расчетными), а для $0,5 \leq K \leq 0,9$ зависимость m_0 от K при $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 2,5$ (в этом диапазоне K такие координаты выбраны для большей наглядности).

Как показали вычисления, влиянием на T_{HK} изменения ν в диапазоне 0–0,5 при рассматриваемых значениях α_0 можно пренебречь, как при $\alpha \geq 1$ (в этом случае критическая нагрузка не чувствительна к изменению ν), так и при $\alpha < 1$ (при этом обычно $\nu \ll \alpha$). Для построения зависимостей $m_0(\alpha)$ во всех случаях принято $\nu = 0,3$. Рассматривая эти зависимости, следует иметь в виду, что, как показано в [48] и подтверждено в [31], исходя из налагаемого термодинамическими соотношениями принципа положительности суммарной энергии деформации, для ортотропного материала должна выполняться оценка:

$$\nu = \nu_{r\theta} < \alpha < \frac{1}{\nu_{\theta r}} \quad (2.27)$$

Анализ зависимости $m_0(\alpha)$ с учетом ограничений (2.27) дает возможность сделать вывод о значениях α , которые обеспечи-

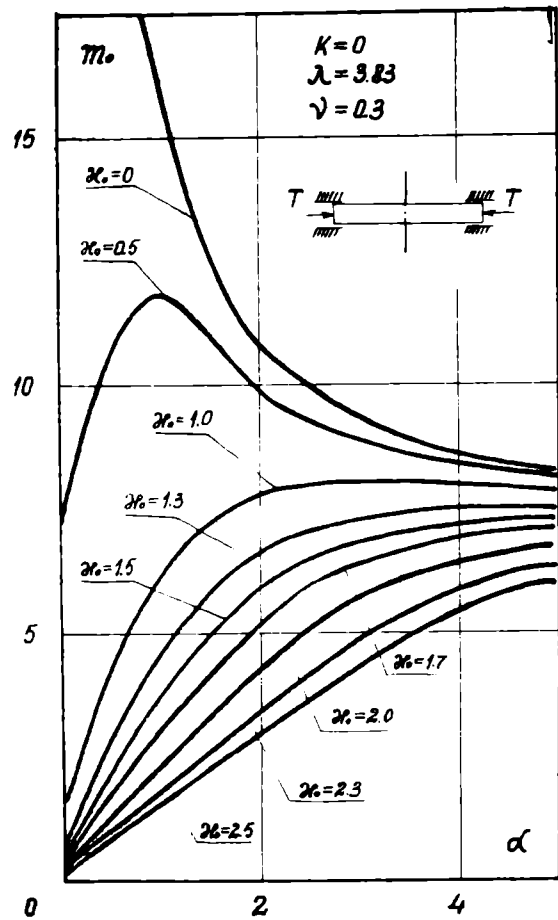


Рис. 16.

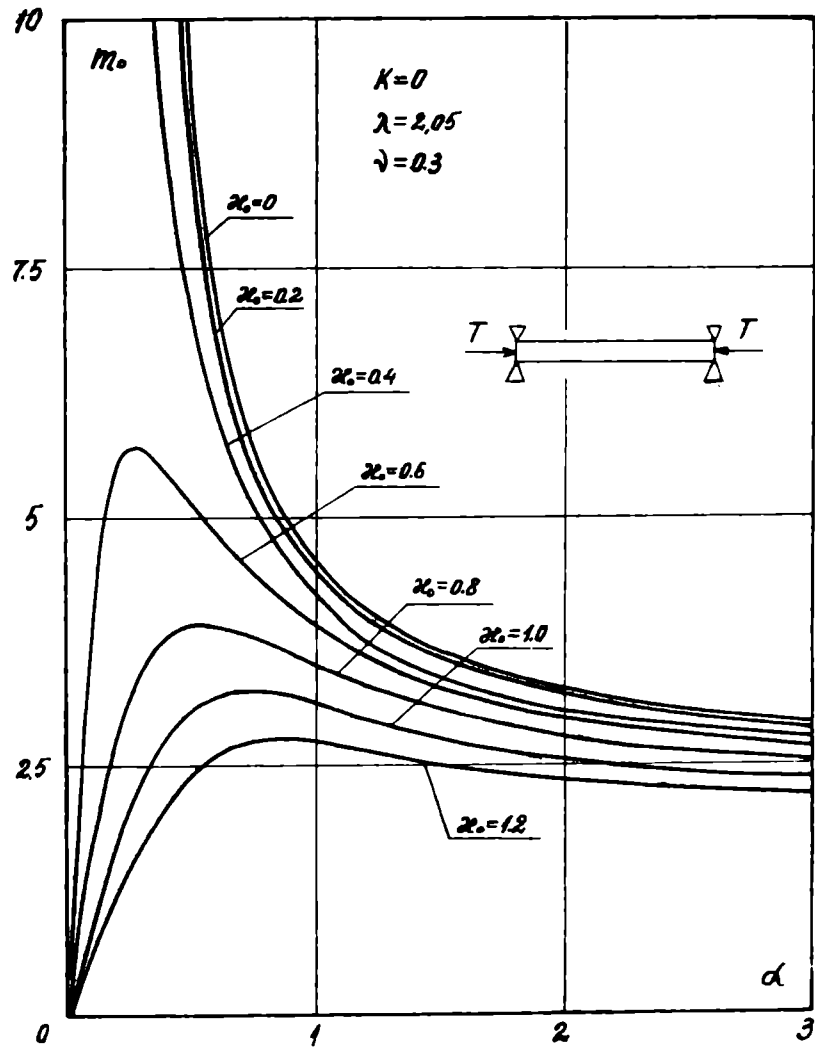


Рис. 17.

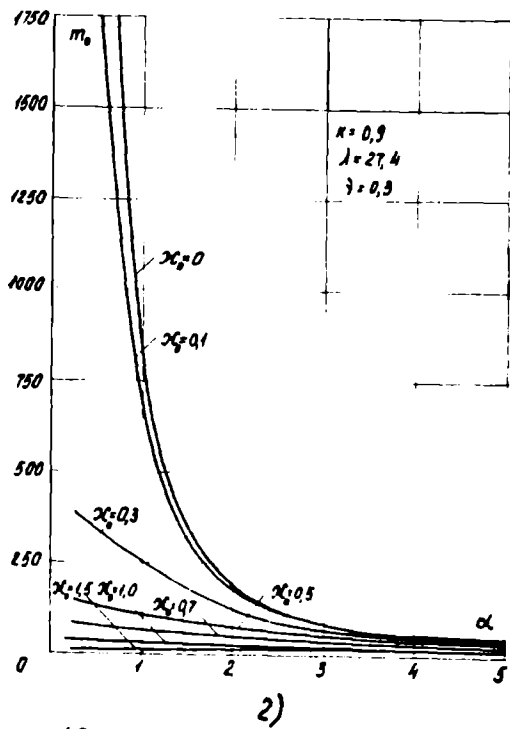
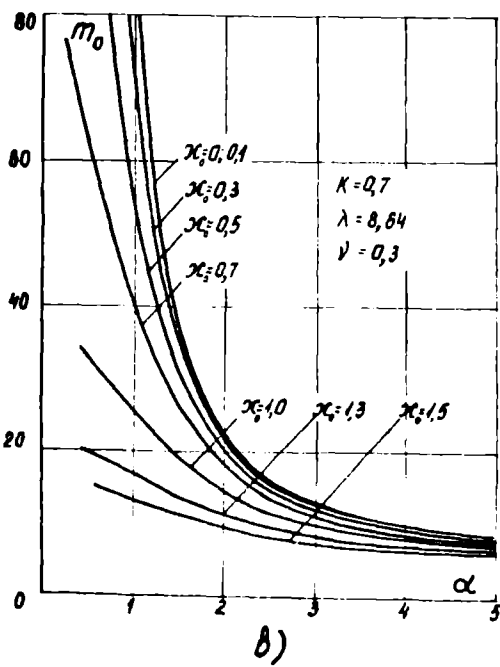
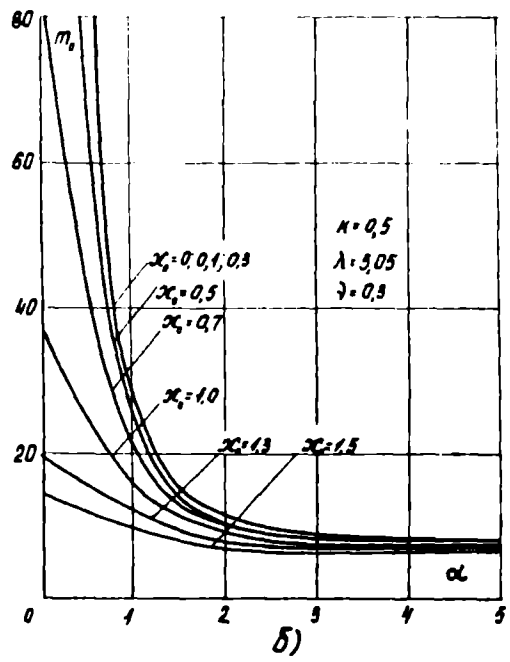
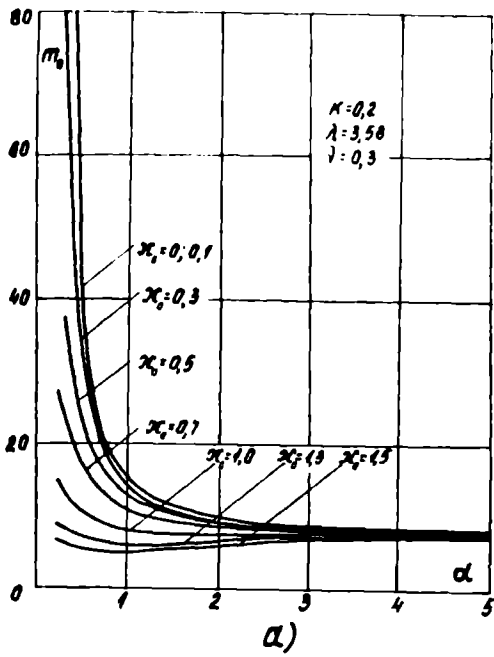


Рис. 18.

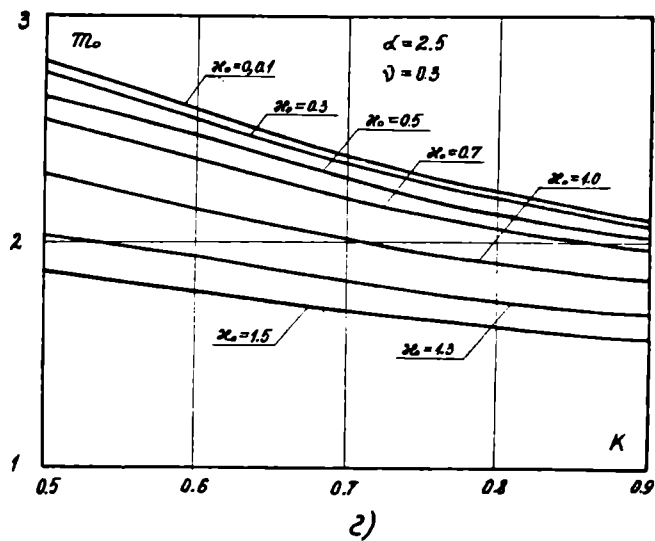
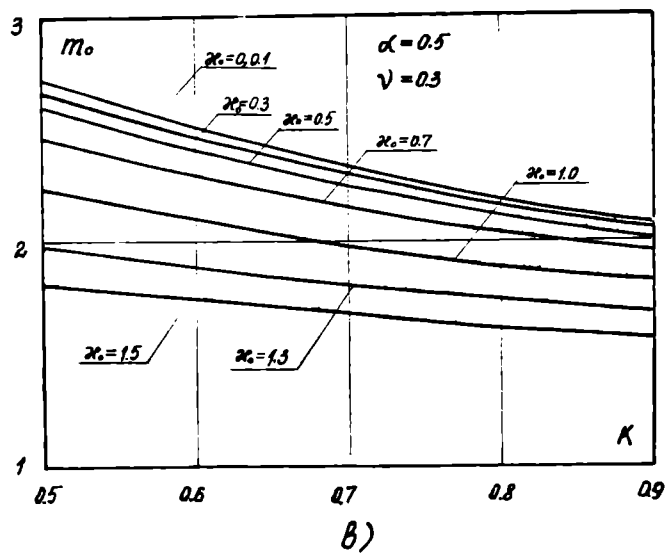
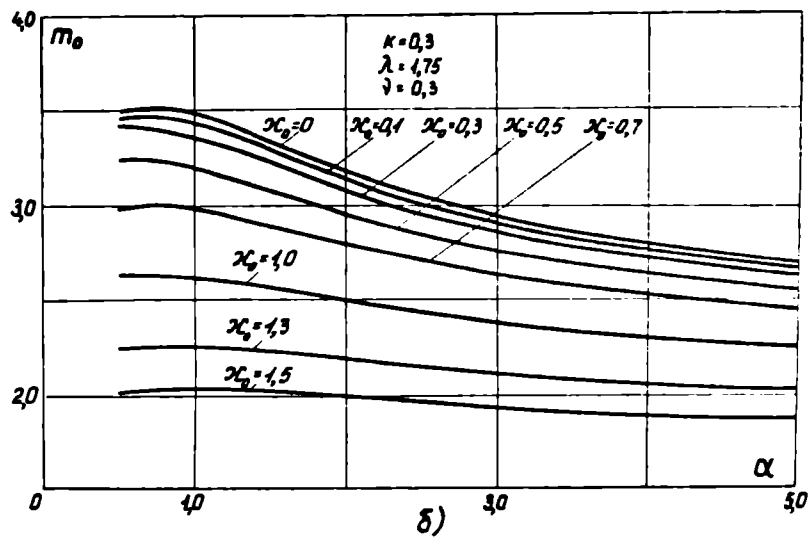
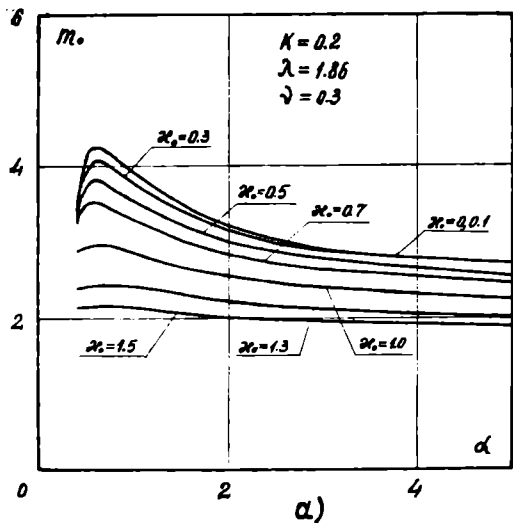


Рис. 19.

дают максимальную критическую нагрузку при заданных K и α_0 .

Для пластин, имеющих жесткую заделку по наружному контуру (рис. 16, 18), с увеличением α падает влияние сдвигов на устойчивость и тем сильнее, чем больше K . При $K = 0$ (сплошные пластины) с увеличением параметра сдвигов α_0 параметр α , реализующий максимальное значение m_0 , смещается в сторону больших значений $\alpha > 1$. для $K \neq 0$ (кольцевые пластины) наибольшие значения m_0 соответствуют малым значениям α

1, которые не меняются при изменении параметра сдвигов. Влияние анизотропии α снижается с увеличением параметров K и α_0 . Для малых K большее влияние оказывает α , для больших более существенно изменение α_0 .

Для свободно опертой пластинки (рис. 17, 19) падение влияния сдвигов на устойчивость с увеличением α заметно только при $K < 0,5$. Влияние параметра α для такой пластинки также ослабевает с увеличением K и α_0 и практически отсутствует при $K \geq 0,5$.

При практическом выборе укладки необходимо иметь в виду оба модуля E_θ и E_r , повышая распределением материала тот, который приводит к увеличению критической нагрузки $T_{нк}$. Как видно из рис. 16, 17, для сплошных жестко-зашемленных и опертых пластин при малых α_0 чувствительность критической нагрузки к увеличению E_r больше, чем к увеличению E_θ и, таким образом, наивыгоднейшие значения α лежат в области $\nu < \alpha < 1$. С увеличением α_0 более выгодным оказывается выбор значений α в области $1 < \alpha < \frac{1}{\nu_{\theta r}}$. Такие же выводы относительно диапазонов выбора α справедливы для жестко-зашемленных кольцевых

пластин (см. рис. 18). В случае свободно опертых кольцевых пластин (см. рис. 19) в широкой области K , α_0 значение T_{HK} более чувствительно к увеличению E_0 . Во всех случаях эти значения можно уточнить, учитывая имеющиеся в наличии материалы и считая модуль G_{rz} независимым от укладки. (Экспериментальное подтверждение этому предположению дано в следующей главе).

Таким образом, для широкого класса круглых пластин рациональная укладка (радиальная или окружная, в соответствии с направлением ориентации наибольшей жесткости) существенно зависит от условий опирания и параметра сдвигов.

В ы в о д ы

1. Решена задача осесимметричной потери устойчивости круглых цилиндрически ортотропных пластин из материалов, податливых сдвигу. Предложенный способ определения критических нагрузок дает хорошее приближение даже при удержании только одного члена ряда аппроксимирующего решения.

2. При изучении устойчивости цилиндрически ортотропных пластин из волокнистых композитов в широкой области размеров и характеристик материала недопустимо пренебрегать неоднородностью докритического напряженного состояния и влиянием сдвигов. Неучет указанных факторов приводит к значительной погрешности. Влиянием изменения коэффициента Пуассона $\nu_{r\theta}$ в диапазоне (0-0,5), характеризующего сокращение в радиальном направлении при растяжении в окружном, в реальной области изменения

параметров $\alpha = \sqrt{\frac{E_0}{E_r}}$, $\alpha_0 = \frac{2H}{R_H} \sqrt{\frac{E_0}{G_{rz}}}$ можно пренебречь.

3. Существуют области α_0 , в которых можно значительно повысить устойчивость круглых пластин надлежащим выбором α . Рациональная схема армирования (α) в широком диапазоне размеров во многом определяется схемой опирания и параметром сдвигов α_0 . Для сплошных пластин и защемленных по наружному контуру кольцевых пластин, имеющих внутреннюю кромку свободной, рациональные значения α изменяются с возрастанием α_0 от 0, переходя из области $\nu_{r\theta} < \alpha < 1$ в область $1 < \alpha < \frac{1}{\nu_{\theta r}}$. Для кольцевых свободно опертых по наружному контуру пластин, имеющих внутреннюю кромку свободной, рациональные значения α лежат в области $1 < \alpha < \frac{1}{\nu_{\theta r}}$. В указанных областях критическая нагрузка возрастает при удалении от 1.

Г Л А В А Ш

УПРАВЛЕНИЕ УКЛАДКОЙ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНАХ

§ 10. Пластины из многонаправленных материалов.

10.1. Основные допущения. Задачей этой главы являлось изучение влияния способа укладки слоев в многонаправленном материале на критическую нагрузку одноосно-сжимаемых в главном направлении ортотропных прямоугольных пластин, опертых различным образом, и выбор рациональной укладки. Рациональной считалась укладка, приводящая к повышению критической нагрузки.

При анализе принималось, что число слоев достаточно велико, толщины и свойства их одинаковы, слои каждого направления распределены равномерно по толщине пластины h и работают совместно. При этом характеристики слоев можно осреднить по толщине и вести расчет конструкций как для однородного анизотропного материала $x/$, пренебрегая разницей между коэффициентами жесткости при растяжении \bar{B}_{ij} и приведенными коэффициентами жесткости при изгибе $\frac{12}{h^3} D_{ij}$ [47]. С другой стороны число слоев считалось не слишком большим (имелись ввиду тонкостенные пластины) для уменьшения влияния неучета поперечных сдвигов и нормальных напряжений σ_z , действующих перпендикулярно плоскости армирования (см. рис. 20). Допущение о пренебрежении влиянием поперечных сдвигов является сравнительно грубым. Оно накладывает ограниче-

$x/$ Считается, что коэффициент объемного армирования слоя и материала одинаков.

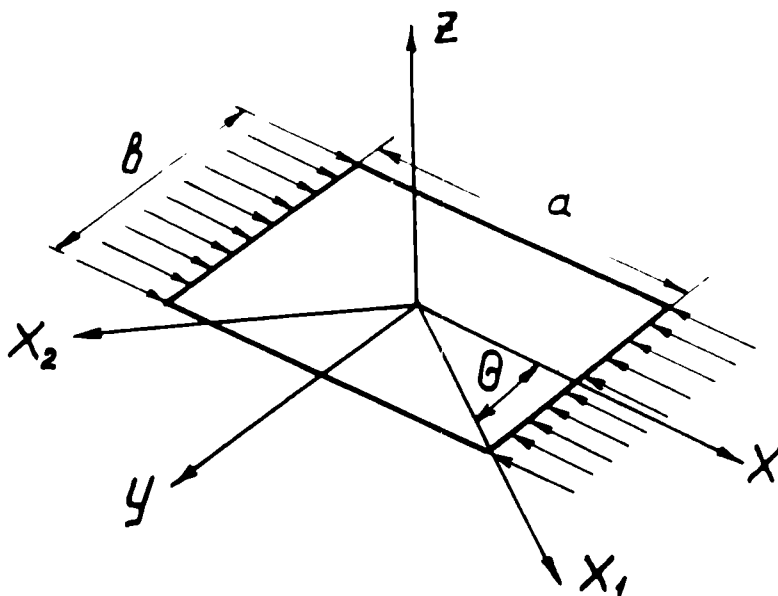


Рис. 20.

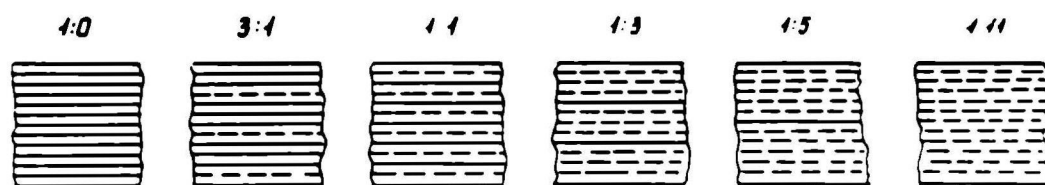
ния на относительную толщину и отношения вида $\frac{E_x}{G_{xz}}$, $\frac{E_y}{G_{xz}}$, $\frac{G_{xy}}{G_{xz}}$ (смысл обозначений очевиден). Однако решения с учетом сдвигов в рассматриваемых случаях приводят к громоздким и малообозримым, с точки зрения поставленной задачи, выражениям [2]. Принятые же допущения, как показывают результаты экспериментальных исследований (см. гл. 4), позволяют исследовать влияние способа укладки по крайней мере качественно. Предварительная оценка некоторых из этих допущений дана в эксперименте, приведенном далее.

10.2. Экспериментальное определение осредненных модулей E_x , G_{xz} материала, образованного различными укладками элементарных слоев. Главной целью эксперимента являлась качественная оценка возможности перехода при изгибе к однородному анизотропному материалу, то есть справедливости равенства $D_{ij} = \bar{B}_{ij} \frac{h^3}{12}$ для материалов, в которых способ укладки одинаковых слоев повторяется по толщине пластины. Такая оценка проводилась на примере

определения осредненных модулей упругости E_x , найденных при испытаниях на растяжение и изгиб. Для однородных материалов модули, определенные из этих испытаний, отличаться не должны. Попутно качественно изучено поведение модуля межслойного сдвига G_{xz} , представляющее интерес с точки зрения принятых допущений.

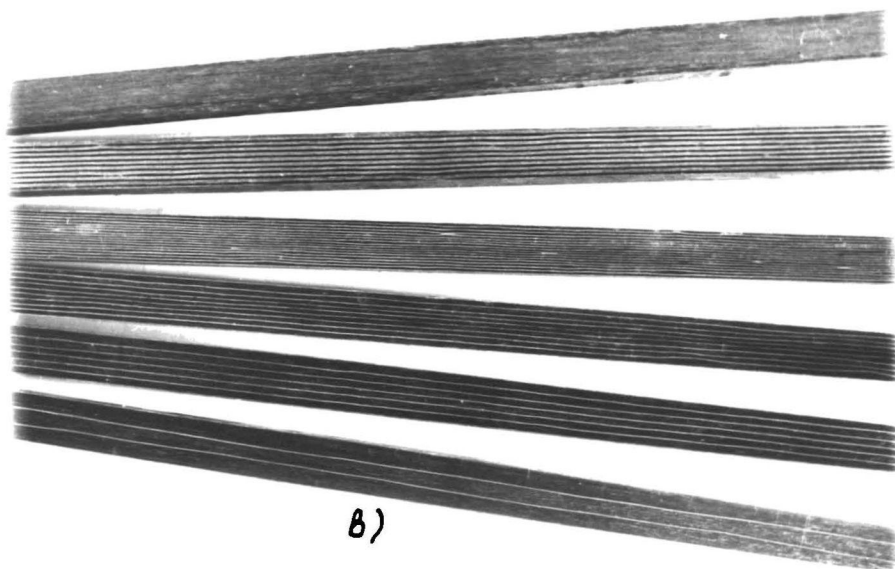
Определение модуля E_x производилось на примере изгиба сосредоточенной нагрузкой посередине пролета стержней, полученных различными укладками стеклоровницы АГ-4С (ось x совпадает с осью стержня). Используемая методика дала возможность выделить влияние G_{xz} .

Исследованы 6 вариантов равномерной укладки (см. рис. 21)



----- поперечный слой

а)



б)

Рис. 21.

Например, укладка 1:0 означает, что направление наибольшей жесткости всех слоев (100%) совпадает с направлением оси стержня ($\alpha_y = 0$); 1:2 - равномерное чередование слоев, ориентированных вдоль $(1 - \alpha_y)\% = 33\%$ и поперек $\alpha_y = 67\%$ оси стержня и т.д. Число слоев в стержнях с каждой укладкой - 36. Стержни размерами $10 \times 10 \times 200$ (в миллиметрах) числом 6-8 штук вырезались из пластин, полученных прессованием по режиму (§ 13.2) в прессформе открытого типа (рис. 285).

Схема и общий вид приспособления для испытания на изгиб приведены на рис. 22

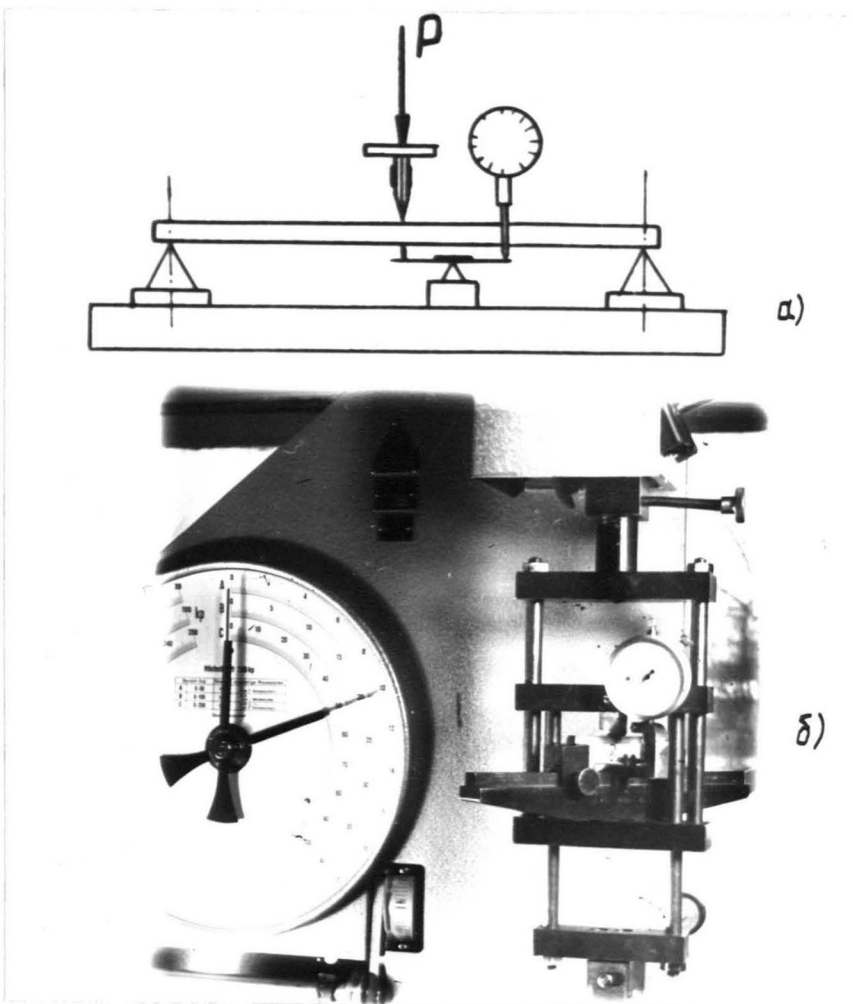


Рис. 22.

Испытания производились при четырех пролетах.

При нагружении записывались нагрузка \bar{P} , прогиб w_{max} .

Модуль E_x определялся по зависимости [65]

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1}{E_x} + \frac{1,2}{G_{xz}}, \quad E^* = \frac{\bar{P}l^3}{48Jw_{max}} \quad (3.1)$$

где h , l - высота и пролет стержня,

J - момент инерции поперечного сечения,

w_{max} - максимальный прогиб.

Использование метода наименьших квадратов для построения прямых $\frac{1}{E^*} = f\left(\frac{h^2}{l^2}\right)$ по результатам испытания i образцов позволяет получить расчетную формулу для E_x

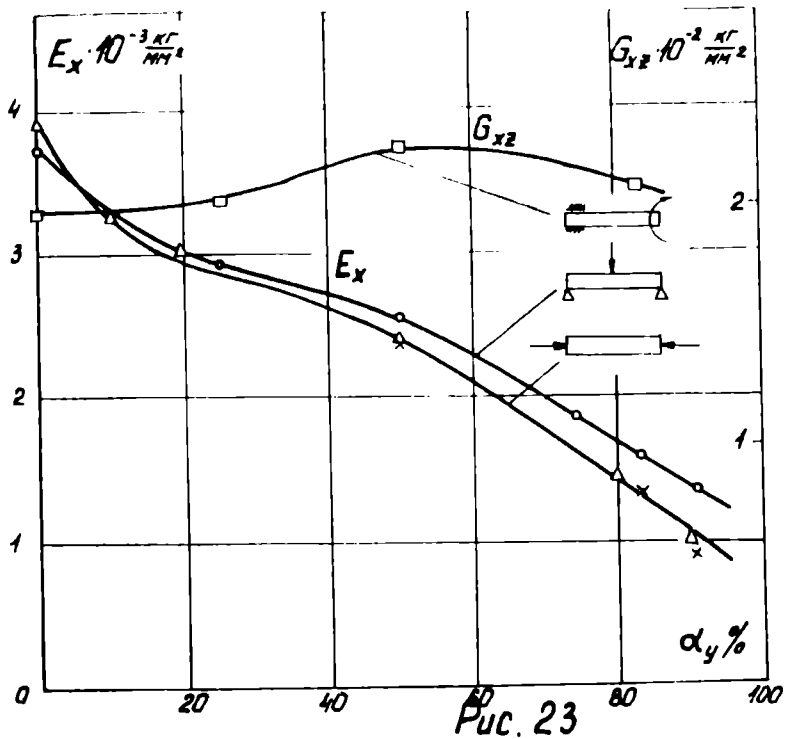
$$E_x = \frac{4S_{11} - S_1^2}{S_{11}S_2 - S_1S_{12}}, \quad (3.2)$$

$$S_1 = \sum_1^i \left(\frac{h_i}{l_i}\right)^2; \quad S_2 = \sum_1^i \frac{1}{E_i^*}, \quad S_{11} = \sum_1^i \left(\frac{h_i}{l_i}\right)^4; \quad S_{12} = \sum_1^i \left(\frac{h_i}{l_i}\right)^2 \frac{1}{E_i^*}$$

Коэффициент вариации модуля E_x не превосходил 7%. Данные испытаний, обработанные по зависимости (3.2), указаны на рис. 23

На этом рисунке приведены и данные, полученные по растяжению как тех же образцов (обозначены \times), так и заимствованные из [16] (обозначены Δ).

Используемая методика испытаний на изгиб может быть применена и для определения модулей G_{xz} . Однако некоторые экспери-



менты на стальных образцах показали значительный разброс этих модулей. То же наблюдалось при обработке данных по испытываемым образцам. Поэтому G_{xz} определялись при кручении заземленных образцов с различным сечением [42]. Данные этих испытаний также приведены на рис. 23. Коэффициент вариации модуля G_{xz} не превосходил 10%.

Из данных рис. 23 видно, что для равномерных укладок модуль E_x , полученный при испытании на растяжение, с увеличением доли продольных слоев увеличивается, изменяясь по зависимости, близкой к линейной, в 4-5 раз. Некоторая нелинейность, по-видимому, связанная с наличием искривлений волокон, более заметна,

когда слои одного из направлений преобладают. Разницей в E_x , вносимой способом испытаний на изгиб в широком диапазоне α_y можно пренебречь. Лишь при доле продольных слоев менее одной восьмой эта разница доходит до 20% в сторону завышения, то есть различие в поведении при изгибе и растяжении становится существенным. Поэтому для возможности перехода к квазиоднородной среде имеет значение и доля слоев в каждом направлении. Для неоднородной среды величины осредненных модулей могут зависеть от вида испытания.

Модуль G_{xz} по экспериментальным данным увеличился для укладки I:I примерно на 10%. Однако это увеличение находится в пределах точности эксперимента. Поэтому с высокой достоверностью этот модуль можно считать независимым от укладки. Таким образом, изменение модуля сдвига от укладки, по крайней мере, не увеличивает погрешность неучета сдвигов.

§ II. Аналитические выражения для подсчета упругих характеристик.

II.1. Вводные замечания. Поставленная задача потребовала изучения деформативных характеристик многонаправленных материалов в плоскости армирования xy . Это изучение и проводится в данном параграфе. Основная цель его — получение главных коэффициентов жесткости многонаправленных материалов. Попутно получены выражения для механических характеристик.

При изготовлении конструкций типа пластин волокна в композитном материале укладывают в одну или нескольких направлениях, но в большинстве случаев так, что составной материал получается

ортотропным в осях x , y (см. рис. 20). Это достигается укладкой равного количества волокон в направлениях, составляющих с осью x углы $+\varphi$ и $-\varphi$. Другими словами, для этого необходимо укладывать слои волокон в направлениях $\pm \varphi$ равным числом. При невыполнении этого условия композит будет иметь лишь одну плоскость упругой симметрии xy . Разумеется, число волокон, уложенных вдоль и перпендикулярно (в направлениях x и y), может быть произвольным, так как направления ± 0 , а также ± 90 совпадают. При такой укладке оси x и y будут главными осями ортотропии.

Далее исследованы схемы армирования, при которых образуются одно-, двух-, трех- и четырехнаправленные материалы. Полученные выражения позволяют легко учесть влияние параметров укладки (угол φ , а также доли слоев, укладываемые под углом $\pm \varphi$ и в направлениях x , y) и могут быть использованы для предварительного предсказания свойств составного материала, получаемого наслоением ортотропных слоев в различных направлениях. При этом данные для слоя (предсказанные на основе теории армированных сред и получившие многократное экспериментальное подтверждение) считаются известными.

II.2. Исходный слой. В качестве исходного слоя может быть однонаправленный либо тканый материал. От этого последующие рассуждения не меняются.

Рассмотрим материал, ортотропный в осях xy . Для определенности ось x направим так, чтобы $E_x \geq E_y$. Вводим обозначения

$$M = \frac{E_x}{E_y}, \quad N = \frac{E_x}{G_{xy}}, \quad \mu = \nu_{yx}$$

Здесь $E_x = E_0$, $G_{xy} = G_0$, $\nu_{yx} = \nu_0$ - модули упругости и сдвига и коэффициент Пуассона. Формулами преобразования коэффициентов матриц податливостей и жесткостей будем пользоваться в виде, представленном в табл. 6. Независимыми постоянными для плоской задачи, таким образом, будут $M \geq 1$ (так как согласно выбору осей $E_x \geq E_y$), $N > 0$ и μ , характеризующий поперечную деформацию образца ϵ_y при растяжении вдоль оси x (для этого коэффициента Пуассона введено специальное обозначение μ , потому что он является одной из независимых величин).

Упругие постоянные в осях x_1, x_2 , повернутых на угол θ (рис. 20), обозначены через $E_\theta, G_\theta, \nu_\theta, \eta_\theta$. Здесь ν_θ и η_θ характеризуют соответственно линейную деформацию ϵ_r и угловую деформацию γ_{12} , обусловленные напряжением σ_1 .

Некоторые соотношения для исходных величин M, N, μ и величин, непосредственно от них зависящих, приведены в табл. 7. Как видно, параметры C и A могут быть вычислены по известным значениям главных технических постоянных. Затруднения возникают потому, что нередко отсутствуют достоверные значения довольно трудно определяемых из прямых опытов модулей сдвига $G_{xy} = G_0$. Часто G_0 определяют из опытов на растяжение-сжатие под углом $\theta = 45^\circ$, применяя формулу $G_0 = \frac{E_{45}}{2(1 + \nu_{45})}$.

Дальнейшее увеличение точности обработки экспериментальных данных может быть достигнуто применением специальных систем координат. Этим смягчается влияние погрешностей при определении модуля G_0 , который весьма чувствителен к разориентации по вырезке и по укладке [66]. Если при напряжении σ_1 измерены как продольная ϵ_1 , так и поперечная ϵ_2 деформации, то обработку ре-

Таблица 6.

Формулы преобразования коэффициентов матриц податливостей и жесткостей			
Коэффициенты матрицы податливостей		Коэффициенты матрицы жесткостей	
a_{11}	$1 + Aq + Cq_1$	B_{11}	$M - Aq - \bar{D}q_1$
a_{22}	$M - Aq + Cq_1$	B_{22}	$1 + Aq - \bar{D}q_1$
a_{12}	$-\mu - Cq_1$	B_{12}	$\mu + \bar{D}q_1$
a_{66}	$N - 4Cq_1$	B_{66}	$\omega + \bar{D}q_1$
a_{16}	$(A + C - 2Cq_1)\sqrt{q_1}$	$2B_{16}$	$-(\bar{D} + A - 2\bar{D}q_1)\sqrt{q_1}$
a_{26}	$(A - C + 2Cq_1)\sqrt{q_1}$	$2B_{26}$	$-(A - \bar{D} + 2\bar{D}q_1)\sqrt{q_1}$
Введенные обозначения			
$a_{ij} = \frac{\bar{a}_{ij}}{a_{11}^0} = \bar{a}_{ij} E_0, \quad B_{ij} = \frac{\bar{B}_{ij}}{B_{22}^0} \quad - \text{приведенные коэффициенты}$			
$\bar{a}_{ij}, \bar{B}_{ij} \quad - \text{физические коэффициенты}$			
$M = \frac{E_0}{E_{90}}; \quad N = \frac{E_0}{G_0}; \quad N^* = \frac{E_0}{G_{45}}, \quad \mu = \nu_0, \quad A = M - 1; \quad C = N - M - 1 - 2\mu = N - N^*;$			
$\bar{D} = M + 1 - 2\mu - 4\omega; \quad \omega = \frac{M - \mu^2}{N}; \quad q = \sin^2 \theta, \quad q_1 = q(1 - q)$			

• 22 •

Таблица 7.

Соотношения для исходных величин

$M \gg 1$ это следует из выбора осей так чтобы $E_0 \gg E_{90}$

$$A \geq 0; N > 0; \omega > 0$$

из $a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$ ($i, j = 1, 2, 6$) следует

$$\mu^2 < M; \quad \eta^2 < N$$

$$C = N + 2\sqrt{M} - 2\mu - (M + 1 + 2\sqrt{M}) > -(1 + \sqrt{M})^2$$

$$C - A > -2\sqrt{M}(1 + \sqrt{M});$$

$$C + A > -2(1 + \sqrt{M})$$

$$K = M + 1 - 2\mu > 0$$

$$\bar{D} = \frac{A^2 + 4\omega C}{1 + M + 2\mu} = \frac{A^2 + KC}{N},$$

$$N(C - \bar{D}) = C(N - K) - A^2 = C(C + 4\mu) - A^2$$

зультатов рекомендуется вести в координатах.

$$\frac{1-\nu_{\theta}}{E_{\theta}} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{G_1} = f(\sin^2 \theta), \quad \frac{\nu_{\theta}}{E_{\theta}} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = f(\sin^2 2\theta)$$

Однако в случаях когда измеряется лишь продольная деформация, или при отсутствии полного набора характеристик G_1 , ϵ_1 , ϵ_2 полезно иметь оценки отдельно для E_{θ} и G_{θ} , а также ν_{θ} и η_{θ} . Формулы для этих технических постоянных имеют вид:

$$\frac{E_{\theta}}{E_0} = (1 + Aq + Cq_1)^{-1}, \quad \frac{G_{\theta}}{E_0} = (N - 4Cq_1)^{-1} \quad (3.3)$$

$$\nu_{\theta} = \frac{M + Cq_1}{1 + Aq + Cq_1}, \quad \eta_{\theta} = \frac{(A + C - 2Cq)\sqrt{q_1}}{1 + Aq + Cq_1} \quad (3.4)$$

II.3. Главные коэффициенты жесткости композита, составленного из исходных слоев. Далее рассмотрим схемы армирования, приведенные на рис. 24. Первые три из них, наиболее часто встречающиеся на практике, являются частными случаями четвертой, образу-

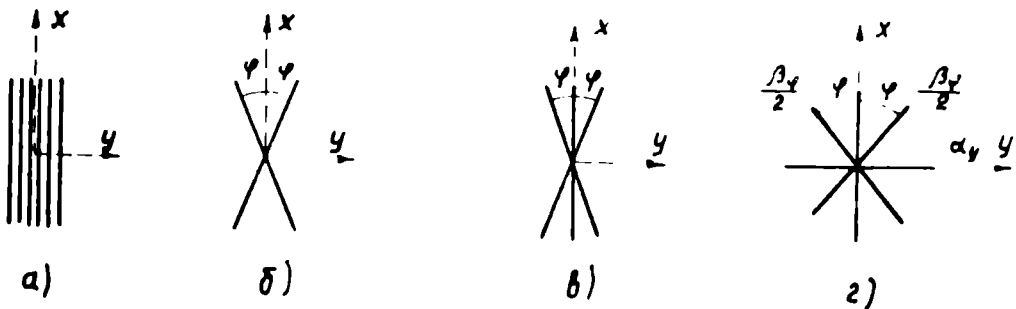


Рис. 24.

щей четырехнаправленный материал. Покажем способ получения главных коэффициентов жесткости композита B_{ij} на примере B_{11} для ортотропной структуры четырехнаправленного материала, полученного посредством укладки однонаправленного (для которого введено обозначение B_{ij}°) согласно рис. 24 ($\alpha_y, \beta_{\varphi}$ - доли слоев каждого направления). Владе жесткости слоев каждого из направлений

x, y, φ

$$\begin{aligned} \bar{B}_{11}^x &= B_{11}^{\circ} \\ \bar{B}_{11}^y &= B_{22}^{\circ} \\ \bar{B}_{11}^{\varphi} &= B_{11}^{\circ} - A^{\circ} q^{\circ} - D^{\circ} q_1^{\circ} \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} A^{\circ} &= B_{11}^{\circ} - B_{22}^{\circ} = B_{22}^{\circ} A \\ D^{\circ} &= B_{11}^{\circ} - B_{22}^{\circ} - 2B_{12}^{\circ} - 4B_{66}^{\circ} = B_{22}^{\circ} \bar{D} \\ q^{\circ} &= \sin^2 \varphi, \quad q_1^{\circ} = q^{\circ} (1 - q^{\circ}) \end{aligned}$$

Жесткость композита \bar{B}_{11}^k при совместной деформации слоев каждого из i направлений долей δ_i как обычно выражается:

$$\bar{B}_{11}^k = \sum_i \delta_i \bar{B}_{11}^i = \bar{B}_{11}^x (1 - \alpha_y - \beta_{\varphi}) + \alpha_y \bar{B}_{11}^y + \beta_{\varphi} \bar{B}_{11}^{\varphi}$$

Произведем подстановки выражений (3.5):

$$B_{11} = \frac{\bar{B}_{11}^k}{B_{22}^{\circ}} = M - A_0 - D_0$$

где





$$A_0 = A(\alpha_y + \beta_{\varphi} q^{\circ}), \quad D_0 = \beta_{\varphi} \bar{D} q_1^{\circ}$$

Полученные подобным образом главные коэффициенты жесткости композита, выраженные через характеристики слоя и параметры укладки, приведены в табл. 8 для двух-, трех- и четырех-

Таблица 8.

Главные коэффициенты жесткости композита и соотношения между ними	
Обозначение	Выражение
B_{11}	$M - A_0 - D_0$
B_{22}	$1 + A_0 - D_0$
B_{12}	$\mu + D_0$
B_{66}	$\omega + D_0$
$M_K = \frac{B_{11}}{B_{22}}$	$\frac{M - A_0 - D_0}{1 + A_0 - D_0}$
$\mu_K = \frac{B_{12}}{B_{22}}$	$\frac{\mu + D_0}{1 + A_0 - D_0}$
$N_K = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{22}B_{66}}$	$\frac{M - \mu^2 - D_0(M + 1 + 2\mu) - A_0^2 + A_0 A}{(1 + A_0 - D_0)(\omega + D_0)}$
C_K	$\frac{\omega C - 2D_0(M + 1 + 2\mu) - A_0^2 + A_0 A}{(1 + A_0 - D_0)(\omega + D_0)}$
A_K	$\frac{A - 2A_0}{1 + A_0 - D_0}$
$\omega_K = \frac{B_{66}}{B_{22}}$	$\frac{\omega + D_0}{1 + A_0 - D_0}$
D_K	$\frac{M + 1 - 2\mu - 4\omega - 8D_0}{1 + A_0 - D_0}$
обозначения	
$B_{ij} = \frac{\bar{B}_{ij}}{B_{22}^0}$, $A_0 = A(\alpha_y + \beta_y \varphi^0)$, $D_0 = \beta_y \bar{D} \varphi_1^0$, $\varphi^0 = \sin \varphi$, $\varphi_1^0 = \varphi^0(1 - \varphi)$ α_y - доля волокон уложенных в направлении $\varphi = 90^\circ$ β_y - доля волокон уложенных поровну в направлении $+\varphi$ и $-\varphi$	

Таблица 9.

	Тип материала			
				
B_{11}	M	$M - Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0$	$M - \frac{2}{3}Aq_1^0 - \frac{2}{3}\bar{D}q_1^0$	$M - \frac{A}{4}(1+2q_1^0) - \frac{\bar{D}}{2}q_1^0$
B_{22}	1	$1 + Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0$	$1 + \frac{2}{3}Aq_1^0 - \frac{2}{3}\bar{D}q_1^0$	$1 + \frac{A}{4}(1+2q_1^0) - \frac{\bar{D}}{2}q_1^0$
B_{12}	μ	$\mu + \bar{D}q_1^0$	$\mu + \frac{2}{3}\bar{D}q_1^0$	$\mu + \frac{\bar{D}}{2}q_1^0$
B_{66}	ω	$\omega + \bar{D}q_1^0$	$\omega + \frac{2}{3}\bar{D}q_1^0$	$\omega + \frac{\bar{D}}{2}q_1^0$
$M_x = \frac{B_{11}}{B_{22}}$	M	$1 + \frac{(1-2q_1^0)A}{1+Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0}$	$1 + \frac{A(3-4q_1^0)}{3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0}$	$1 + \frac{2A(1+2q_1^0)}{M+3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0}$
$\mu_x = \frac{B_{12}}{B_{22}}$	μ	$1 - \frac{1-\mu+Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0}{1+Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0}$	$1 - \frac{3(1-\mu)+2Aq_1^0 - 4\bar{D}q_1^0}{3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0}$	$1 - \frac{4(1-\mu)+A(1+2q_1^0) - 4\bar{D}q_1^0}{M+3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0}$
N_k	$\frac{M-\mu^2}{\omega}$	$\frac{M-\mu^2+q_1^0[A^2-\bar{D}(M+1+2\mu)]}{(1+Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0)(\omega + \bar{D}q_1^0)}$	$\frac{q_1^0(M-\mu^2) - 6\bar{D}q_1^0(M+1+2\mu) + 2Aq_1^0(3-2q_1^0)}{(3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0)(3\omega + 2\bar{D}q_1^0)}$	$\frac{16(M-\mu^2) - 8\bar{D}q_1^0(M+1+2\mu) + A^2(1+2q_1^0)(3-2q_1^0)}{[4+A(1+2q_1^0) - 2\bar{D}q_1^0](4\omega + 2\bar{D}q_1^0)}$
C_k	C	$\frac{\omega C - (8\omega C + A^2)q_1^0}{(1+Aq_1^0 - \bar{D}q_1^0)(\omega + \bar{D}q_1^0)}$	$\frac{\omega C(9-48q_1^0) - A^2(12q_1^0 - 4q_1^0 - 6q_1^0)}{(3+2Aq_1^0 - 2\bar{D}q_1^0)(3\omega + 2\bar{D}q_1^0)}$	$\frac{16[\omega C - \bar{D}q_1^0(M+1+2\mu)]A^2(1+2q_1^0)(3-2q_1^0)}{2[4+A(1+2q_1^0) - 2\bar{D}q_1^0](2\omega + 2\bar{D}q_1^0)}$

направленных материалов, когда количество арматуры, уложенной в различных направлениях, одинаково, эти зависимости приведены в таблице 9. Выражения (3.4) могут быть использованы для определения механических характеристик многонаправленных материалов с подстановкой соответствующих обозначений с индексом "к" (см. табл. 8, 9). При этом (3.3) с помощью выражений табл. 8 можем представить в виде:

$$\frac{E_{\theta}}{E_0} = \frac{S}{1 + A_k q + C_k q_1}, \quad \frac{G_{\theta}}{E_0} = \frac{S}{N_k - 4C_k q_1} \quad (3.6)$$

где

$$S = \frac{M - \mu^2 - D_0(M + 1 + 2\mu) - A_0^2 - A_0 A}{(M - \mu^2)(1 + A_0 - D_0)}$$

§ 12. Влияние схемы укладки волокон на критические нагрузки.

12.1. Исходные данные. Тонкая прямоугольная пластина, материал которой является ортотропным, образована из β_{φ} диагональных, α_y поперечных и $1 - \beta_{\varphi} - \alpha_y$ продольных ортотропных слоев. Здесь диагональными являются слои, уложенные под углами $\pm \varphi$, продольными — под углом $\varphi = 0$ и поперечными — под углом $\varphi = 90$ к направлению действия сжимающей нагрузки (укладку в последних двух случаях назовем параллельной).

Выражения для критической нагрузки прямоугольных пластин, сжимаемых в главном направлении, зависят от главных жесткостей изгиба и кручения. Относительное влияние жесткости кручения

зависит от отношения сторон $C = \frac{a}{b}$ и модулей Юнга. Диагональная укладка обеспечивает повышение жесткости кручения и, следовательно, критических нагрузок в случаях, когда влияние этой составляющей значительно. Изучение влияния укладки, характеризуемого параметрами $\alpha_y, \beta_\varphi, \varphi$, и выявление диапазона отношений сторон опорного контура C , при которых рациональна параллельная, диагональная либо смешанная укладка, и проведено в данном параграфе.

В качестве исходных приняты однонаправленные материалы типа стеклопластик (СП), боропластик (БП) и углепластик (УП). На основе анализа экспериментальных данных по свойствам этих материалов, армированных параллельными волокнами, для монослоев (шпонов) приняты следующие типичные характеристики [66]:

Тип материала	$E_x \cdot 10^{-3}$ кгс/мм ²	M	N	M	A	C	ω	\bar{D}
СП	4	4	12	0,3	3	6,4	0,326	3,097
БП	20	10	30	0,3	9	18,4	0,3303	9,079
УП	20	20 ^{х/}	30	0,3	19	8,4	0,664	17,744

х/ Высокое значение M объясняется существенной анизотропией углеволокон.

12.2. Частные случаи опирания. Рассмотрим влияние укладки на примере двух случаев реализации условий опирания пластин, сжатых в одном направлении по двум свободно опертым кромкам длиной a .^{х/} Две другие кромки длиной b закреплены по-разному:

- А) опирание и свободный край;
- Б) защемление.

Критическая нагрузка T_k , выражения для которой в рассматриваемых случаях получены в [32], [62], пропорциональна безразмерному параметру:

$$\bar{T} = \frac{12b^2}{\pi^2 h^3 B_{22}^0} T_k$$

где $\bar{T} = B_{11} \frac{1}{C^2} + \frac{12}{\pi^2} B_{66}$ для случая А (3.7)

$$\bar{T} = B_{11} \left(\frac{m}{C}\right)^2 + \frac{8}{3} (B_{12} + 2B_{66}) + \frac{16}{3} B_{22} \left(\frac{C}{m}\right)^2$$

для случая Б (3.8)

Здесь m число полуволн в направлении действия нагрузки, причем $m = i$, если $C_i < C < C_{i+1}$, где C_i и C_{i+1} определяются по зависимости

$$C_i = 0,658 \sqrt{i(i+1)} \sqrt[4]{\frac{B_{11}}{B_{22}}} \quad (3.9)$$

х/ Выбранные случаи типичны для постоянного и переменного волнообразования пластин при потере устойчивости в зависимости от C . Различные комбинации условий опирания подобным образом можно исследовать, используя результаты [5], [6].

для двух последовательных значений i ($i = 0, 1, 2, 3, \dots$). При $C \ll 1$ можно считать, что \bar{T} прямо пропорционально B_{ii} и от других B_{ij} не зависит. Поэтому численный анализ не является необходимым. Рациональной укладкой в обоих случаях будет параллельная вдоль действующих усилий. Для выбора укладки для иных C далее остановимся на каждом случае отдельно. При анализе будем считать заданными характеристиками слоя и C . Критерием, характеризующим схему армирования при данном C , будем считать отношение $\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}$, где \bar{T} соответствует $\alpha_y = \varphi = 0$ (укладка однонаправленного материала в направлении армирования).

Вариант А. Используя выражения таблицы 8, представим \bar{T} в виде:

$$\bar{T} = \frac{1}{C^2} \left\{ M - A\alpha_y + d\omega + \beta_\varphi q^\circ [\bar{D}(d-1) - A] - \bar{D}\beta_\varphi q^{\circ 2}(d-1) \right\} \quad (3.10)$$

$$d = 12 \left(\frac{C}{\pi} \right)^2$$

При этом согласно условиям (см. табл. 7) $A > 0$; $\bar{D} > 0$; $q^\circ \leq 1$. Из выражения (3.10) видно, что наибольшая критическая нагрузка соответствует $\alpha_y = 0$. Анализ этого выражения показывает, что параллельная укладка $\varphi = 0$ остается рациональной до значения

$$C \leq 0,91 \sqrt{1 + \frac{A}{\bar{D}}}. \quad \text{Если } C > 0,91 \sqrt{1 + \frac{A}{\bar{D}}}, \text{ то}$$

\bar{T}_{opt} - наибольшее значение \bar{T} соответствует

$$q_{opt}^\circ = \frac{\bar{D}(d-1) - A}{2\bar{D}(d-1)} \leq \frac{1}{2} \quad (3.11)$$

то есть $\varphi_{opt} = 45^\circ$

$$\bar{T}_{opt} = \frac{1}{C^2} \left\{ M + d\omega + \frac{\beta_\varphi [\bar{D}(d-1) - A]^2}{4\bar{D}(d-1)} \right\} \quad (3.12)$$

Наибольшее значение $\bar{T}_{опт}$ получает при $\beta_{\varphi} = 1$ (диагональная укладка).

Если $C \rightarrow \infty$, то $\varphi_{опт} \rightarrow 45^{\circ}$ независимо от характеристик материала пластины, а $\frac{\bar{T}_{опт}}{T_0} \rightarrow 1 + \frac{\bar{D}}{4\omega}$

Значения $\varphi_{опт}$, а также отношений $\frac{\bar{T}_{опт}}{T_0}$ для рассматриваемых материалов приведены на рис. 25. Из этого рисунка видно,

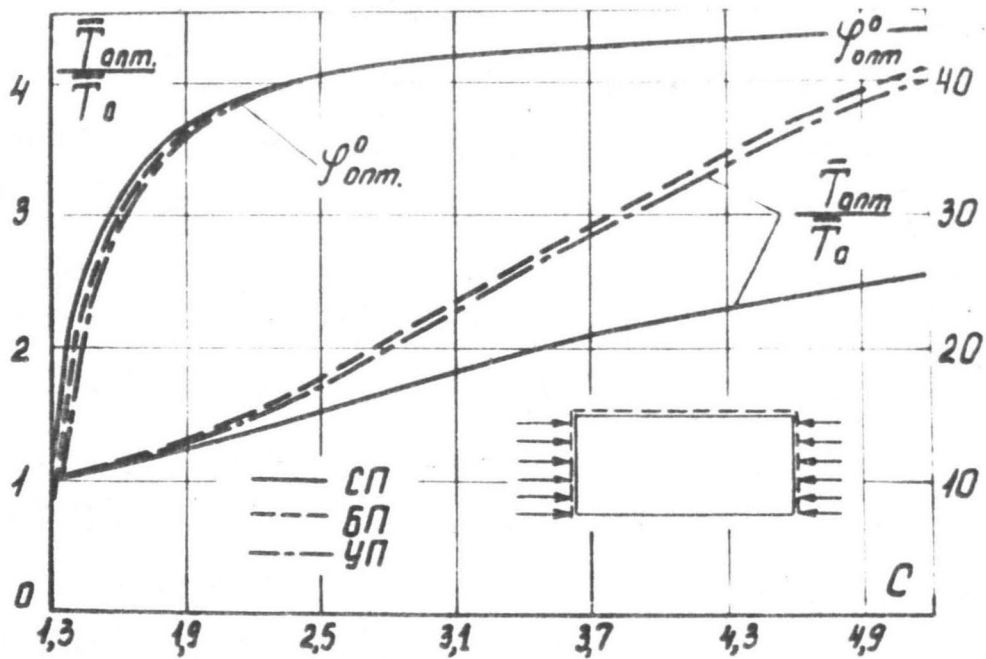


Рис. 25.

что при $C > 2$ разницей в $\varphi_{опт}$ практически можно пренебречь. Выигрыш от укладки под оптимальным углом $\frac{\bar{T}_{опт}}{T_0}$ увеличивается с увеличением C и в случае удлиненных пластин может составить для СП 2,5 раза, для боро- и углепластиков - 4 раза. Интересно отметить, что для данных условий эффективность использования различных высокомодульных материалов практически одинакова.

Вариант Б. В общем случае критическая нагрузка зависит от волнообразования. Лишь при $C \gg 1$ выражение (3.8) не содержит m . При этом из условия $\frac{\partial \bar{T}}{\partial m^2} = 0$ находим значение \bar{T} , наименьшее из всех определяемых по зависимости (3.8):

$$m = 4C^2 \sqrt{\frac{B_{22}}{3B_{11}}}$$

$$\bar{T} = \frac{8}{3} \left(\sqrt{3B_{11}B_{22}} + B_{12} + 2B_{66} \right) \quad (3.13)$$

Изменение \bar{T} по выражению (3.13) в зависимости от параметров укладки для рассматриваемых материалов представлено на рис.

26. На этом рисунке приведены данные для диагональных ($\alpha_y = 0$, $\beta_\varphi = 1$); параллельных ($\alpha_y = 0$, $\beta_\varphi = 0$) и смешанных укладок.

. Видно, что, хотя \bar{T} и имеет локальный максимум при $\alpha_y = 0,5$ (см. рис. 26 б), ее наибольшее значение соответствует $\alpha_y = 0$, $\beta_\varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ$. В то же время выбор α_y в диапазоне $0 < \alpha_y < 0,5$ (смешанная укладка) приводит к незначительному падению \bar{T} и может быть рекомендован для практической укладки из-за возможной нелинейности материала с диагональными ($\beta_\varphi = 1$, $\varphi = 45^\circ$) схемами армирования, снижающей эффективность рациональной укладки.

В общем случае задача выбора параметров укладки осложняется из-за трудностей исследования целевой функции $\bar{T} = \bar{T}(\alpha_y, \beta_\varphi, \varphi)$. Эта функция описывает поверхность отклика, имеющую весьма сложный вид из-за изменения характера волнообразования в зависимости от параметров укладки и m . Детерминированный поиск экстремумов (методы Гаусса-Зайделя и т.п.) по такой поверхности в условиях ограничений часто не приводит к цели, либо требует больших

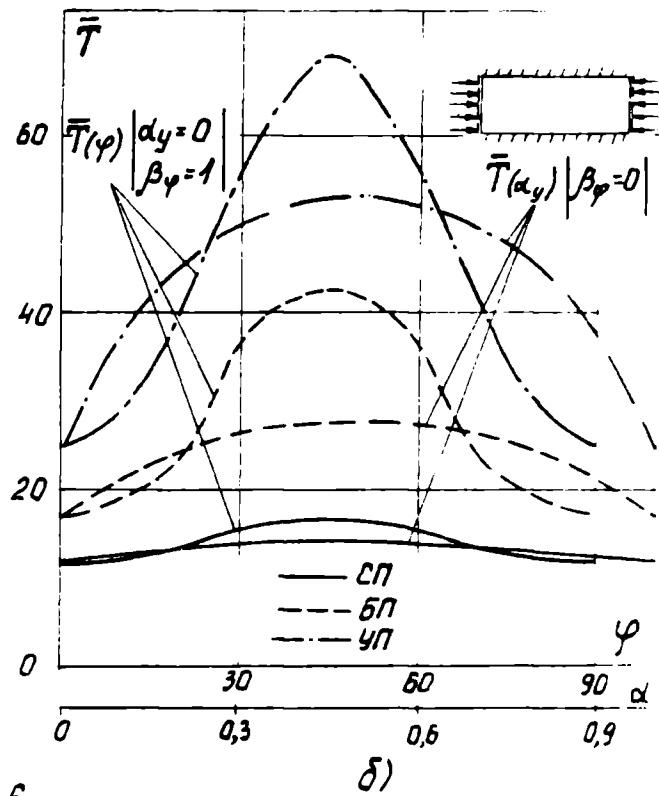
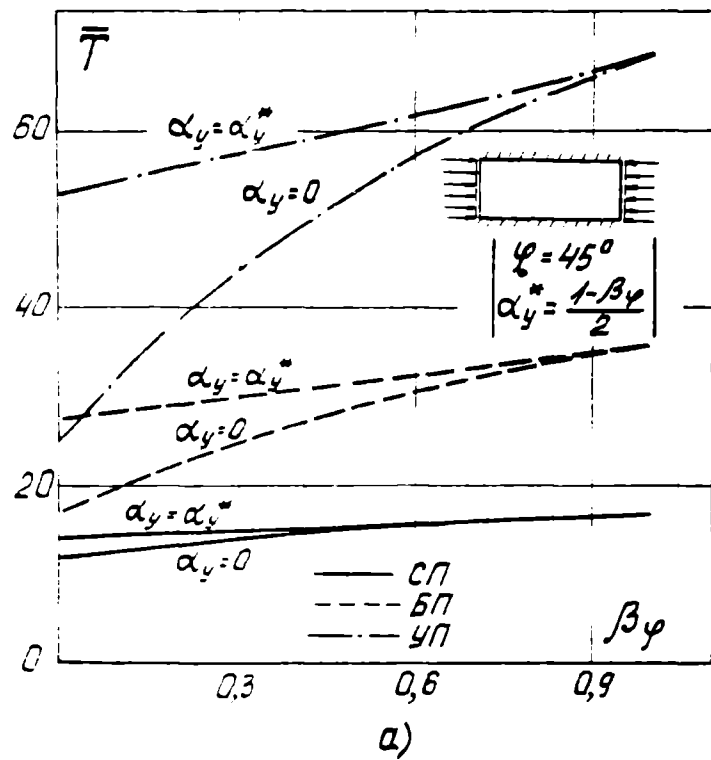


Рис. 26.

затрат машинного времени. Поэтому здесь могут быть применены статистические методы поиска - в частности, случайный поиск [50]. Далее приводится описание алгоритма, работающего по методу случайного поиска. Хотя в данной задаче оптимизируются три параметра α_y , β_φ , q° , их число принципиально можно увеличить.

Алгоритм поиска с пересчетом. В допустимой области

$$0 \leq \alpha_y + \beta_\varphi \leq 1 \quad 0 \leq q^\circ \leq 1$$

пространства параметров α_y , β_φ , q° (рис. 27) из заданного

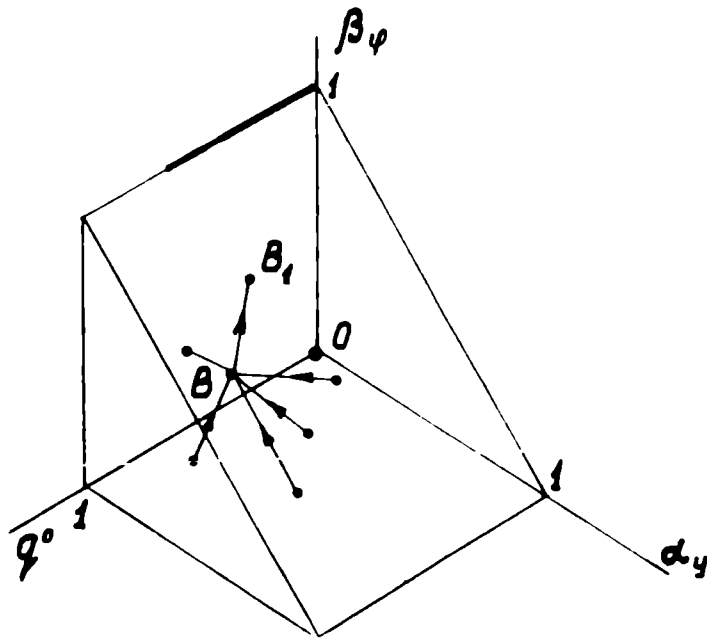


Рис. 27

начального состояния, например, точка B , делается случайный шаг $\Delta \alpha_y$, $\Delta \beta_\varphi$, Δq° . При полученных значениях $\alpha_y + \Delta \alpha_y$, $\beta_\varphi + \Delta \beta_\varphi$, $q^\circ + \Delta q^\circ$ вычисляется значение целевой функции \bar{T} . Оно сравнивается с начальным. Если значение целевой функции возросло, шаг считается удачным, если оно снизилось, либо

не изменилось - неудачным. В случае удачного шага (точка B_I) значения параметров, полученные на этом шаге, являются исходными для следующего шага. В случае неудачного (необозначенные точки) исходными являются значения последнего удачного шага. Оптимальные значения считаются достигнутыми, если число неудачных шагов подряд достигает заданной величины. Оптимальное значение целевой функции при малых C известно. Оно соответствует $\alpha_y = \beta_\varphi = q^0 = 0$. Эти значения параметров и функции качества и являются исходными. Величина C задается с шагом ΔC в области $(0, 2-5)$. С целью ускорения поиска при каждом новом значении C исходными являются оптимальные значения параметров, полученные для $C - \Delta C$.

Описанный алгоритм был составлен на языке АЛГОЛ и реализован на ЭЦВМ БЭСМ-3М. Найденные данные приведены на рис. 27 (выделены) и в табл. 10 (цифры каждой ячейки сверху вниз относятся к СП, БП и УП соответственно). Из этой таблицы видна та же закономерность в изменении рациональной схемы армирования в зависимости от C - от параллельной - $(\alpha_y)_{opt} = (\beta_\varphi)_{opt} = 0$ к диагональной - $(\alpha_y)_{opt} = 0, (\beta_\varphi)_{opt} = 1$, $\varphi = \varphi_{opt}$. Влияние заземления кромок в направлении действия нагрузки сказывается лишь в том, что диагональная схема становится рациональной при меньших C по сравнению с предыдущим случаем. Результаты показывают, что в данном частном случае в широкой области значений C алгоритм поиска можно упростить и уточнить, полагая $(\alpha_y)_{opt} = 0$ $(\beta_\varphi)_{opt} = 1$ (полученные незначительные отклонения от этих значений связаны с погрешностью поиска) и определяя φ_{opt} . Однако, как показывают вычисления, это не

Таблица 10.

c	0,2	0,4	0,6	0,8	I	I,2	I,4	I,6	I,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3	4	5
$(\alpha_y)_{onm}$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0,013 0 0	0,013 0,034 0,03	0 0 0,00I	0 0 0,00I	0,005 0,033 0	0,005 0,033 0	0 0,03 0	0,009 0,04 0	0,006 0,002 0	0,006 0,002 0	0 0 0,03	0 0 0,002	0 0 0,002	0 0 0,006
$(\beta_\varphi)_{onm}$	0 0 0	0 0 0	I I I	0,987 I I	0,987 0,966 0,969	I I 0,998	I I 0,999	0,995 0,967 I	0,995 0,967 I	I 0,967 I	0,990 0,959 I	0,994 0,998 I	0,994 0,998 I	I I 0,968	0,992 I 0,998	I I 0,998	I I 0,994
φ_{onm}^o	0 0 0	0 0 0	38,5 36,8 37,2	55,0 36,8 37,2	55,0 4I,0 4I,2	38,3 37,8 35,6	38,3 49,8 35,6	44,8 44,9 45,7	44,8 44,9 4I,6	44,9 44,9 4I,6	45,6 45,0 4I,6	4I,3 43,3 43,2	4I,3 43,3 43,2	48,I 47,0 45,2	43,8 43,9 44,5	46,4 44,9 44,5	45,3 45,0 44,8
\bar{T}_{onm}	102,75 252,77 504,5	28,38 65,88 I30,2	I7,0 36,4I 69,4	I8,0 36,0 6I,3	I6,66 38,8 73,97	I7,0 36,4 69,4	I6,37 36,0 6I,9	I7,3 36,47 69,97	I6,77 36,26 69,I	I6,72 35,3 67,3	I6,92 35,9 68,0	I6,94 36,08 68,8	I6,43 35,5 67,I	I6,83 35,9 67,8	I6,88 35,98 68,5	I6,72 35,66 66,9	I6,75 35,06 67,9
m_{onm}	I I I	I I I	I I I	I I I	2 I I	2 2 I	2 3 2	2 2 3	3 3 3	3 3 3	4 4 3	3 3 4	3 4 4	5 5 5	5 5 5	6 6 6	8 7 8
$\frac{\bar{T}_{onm}}{\bar{T}_0}$	I I I	I I I	I,09 I,I2 I,I2	I,48 I,67 I,57	I,4 2,I7 2,49	I,3I 2,I2 2,68	I,23 I,99 2,48	I,4I I,8I 2,7I	I,42 I,89 2,49	I,4I I,97 2,27	I,38 2,07 2,49	I,39 2,I 2,66	I,38 2,03 2,67	I,42 I,98 2,7I	I,42 2,0I 2,7I	I,4I 2,02 2,67	I,4I 2,02 2,67

приводит к заметному увеличению целевой функции (3.8). Таким образом, алгоритм, обладая большей общностью, надежно выводит искомую точку пространства α_y , β_φ , q° в окрестность цели. Выигрыш от рациональной укладки, особенно при применении высоко-модульных материалов в широком диапазоне C , значителен. При этом диапазон изменений φ_{opt} и $\frac{T_{opt}}{T}$ от их средних значений при $C > 0,8$ невелик. Лишь для углепластика он достигает 15%. При $C = 5$ оптимальные параметры по рис. 26 и табл. 10 практически совпадают. Интересно, что по сравнению с СII эффективность рациональной схемы армирования для обоих случаев реализации граничных условий, при применении высокомодульных материалов (БII и УII), в несколько раз возрастает (см. табл. 10 и рис. 25, 26). Как показывает численный анализ, это, в основном, происходит за счет более резко увеличивающихся для таких материалов жесткостей, характеризующих влияние коэффициента Пуассона и кручения, то есть B_{12} и B_{66} .

В Ы В О Д Ы

1. Получены выражения, зависящие от параметров укладки для предварительного предсказания деформативных свойств много-направленного ортотропного материала при плоском напряженном состоянии. Эти выражения могут быть использованы для исследования влияния укладки материала в оболочках и пластинах.

2. Тонкостенные многослойные пластины, имеющие одинаковую по толщине укладку материала в широком диапазоне укладок, допустимо считать квазиоднородными. Изменением модуля межслойного сдвига от укладки в первом приближении допустимо пренебречь.

3. При одноосном сжатии в главном направлении прямоугольных пластин рациональная по жесткости схема армирования изменяется с увеличением отношения сторон опорного контура от параллельной (все слои ориентированы в направлении действия нагрузки) до диагональной (одинаковое количество слоев ориентировано под углами $+\varphi_{опт}$ и $-\varphi_{опт}$). Для удлиненных пластин $\varphi_{опт} = 45^\circ$ независимо от исходного материала. Влияние граничных условий на кромках в направлении сжатия сказывается в изменении диапазона, в котором рациональна параллельная или диагональная схема.

4. При применении высокомодульных материалов за счет более резко возрастающих жесткостей, характеризующих влияние коэффициента Пуассона и кручения, эффективность диагональной схемы армирования пластин по сравнению со стеклопластиком увеличивается в несколько раз. Влиянием анизотропии исходного материала на рациональную схему армирования можно пренебречь.

Г Л А В А IY

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СЖИМАЕМЫХ ПЛАСТИН ИЗ СТЕКЛОПЛАСТИКА С РАЗЛИЧНОЙ УКЛАДКОЙ АРМАТУРЫ

§ 13. Техника изготовления и эксперимента;
характеристики изученных пластин.

13.1. Вводные замечания. В главах 2 , 3 приведены данные для выбора рациональных схем армирования и методика расчета круглых и прямоугольных пластин, работающих на устойчивость при сжатии в их плоскости. Однако конструктивные особенности стеклопластика [65], в частности, слабое сопротивление сдвигу вдоль волокон и поперечному отрыву могут привести к разрушению при докритических напряжениях. Поэтому схема армирования, предпочтительная по жесткости, может быть не рациональной по прочности. Необходимы эксперименты для оценки рациональной схемы укладки при разных механизмах исчерпания несущей способности. Как показано в §1 , поставленная задача, особенно в экспериментальном плане, изучена крайне недостаточно. Основная цель работы состоит в экспериментальной оценке влияния закона укладки арматуры на несущую способность сжимаемых пластин из стеклопластика, опертых различным образом. Помимо полученные данные использованы для оценки применимости расчетных зависимостей, полученных в главах 2 , 3 и в [73].

Структура пластин, использованные обозначения и способ получения наглядно представлены в таблицах 11 , 12 . Для

Таблица 11.

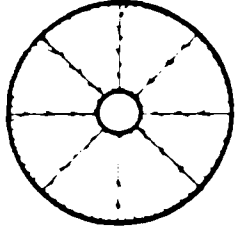
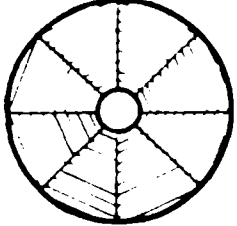
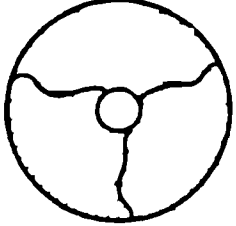
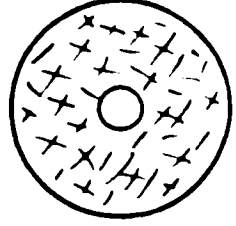
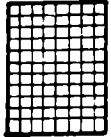
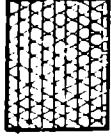

УКЛАДКА				
	РАДИАЛЬНАЯ	ОКРУЖНАЯ	ЗВЕЗДНАЯ	ХАОТИЧЕСКАЯ
				
ХАРАКТЕРИСТИКИ				
χ	0.62	0.61	0.66	0.58
$E_{\theta} 10^{-5} \text{ кгс/см}^2$	0.67	3.64	1.16	1.24
$E_z 10^{-5} \text{ кгс/см}^2$	3.64	0.67	1.16	1.24
$G_{rz} 10^{-5} \text{ кгс/см}^2$	0.17	0.085	0.082	0.335

Таблица 12.

	У К Л А Д К А								
	1:0	1:1	1 ₍₄₅₎ :1 ₍₄₅₎	ЗВЕЗДНАЯ	ХАРОТМЕШК.	6:10 ₍₉₀₎ :6	2:18 ₍₄₅₎ :2	4:14 ₍₄₅₎ :4	3 ₃₈ :18:3 ₃₈
									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Х А Р А К Т Е Р И С Т И К И								
χ	0.53	0.56	0.54	0.51	0.58	0.55	0.59	0.53	0.60
$E_x \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²	3.35	2.33	1.00	1.16	1.24	3.30	2.32	2.80	
$E_y \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²	1.00	2.33	1.00	1.16	1.24	0.75	0.97	1.04	
$G_{xy} \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²	0.400	0.460	0.700	0.600	0.354	0.445	0.563	0.540	0.382
ν_{xy}	0.32	0.15	0.36	0.38	0.24	0.35	0.42	0.40	

круглых пластин исследованы 4 типа укладки армирующих волокон: радиальная и окружная, которые являются однонаправленными, звездная – трансверсально-изотропная – и хаотическая, образующая квазиотропную структуру материала. Прямоугольные пластины имели 9 вариантов симметричной относительно срединной плоскости укладки. У одних пластин способ укладки по толщине h повторялся, у других часть слоев укладывалась под углом к направлению действия нагрузки (вдоль длинной стороны) или образовывала звездный пакет. Пластины с хаотическим армированием имели неориентированную укладку.

Особого внимания заслуживает выбор размеров и материала испытываемых пластин. Он осуществлен таким образом, чтобы влияние варьируемой укладки арматуры значительно превосходило влияние слабого сопротивления поперечному сдвигу. Соотношение размеров при этом характерно для реальных конструкций, а выбор исходного материала (стеклоровница) расширяет диапазон изменения анизотропии.

Изменение схемы армирования и граничных условий могут привести к появлению различных форм волнообразования при потере устойчивости. Поэтому в большинстве случаев принимались меры для стабилизации формы прогиба и исключения ее влияния на механизм разрушения. Такие условия часто реализуются и на практике, например, при продольно-поперечном изгибе

Нагружение в плоскости пластины для каждой из рассматриваемых схем опирания проводилось в два этапа – до относительно невысокого уровня конечных давлений и до потери устойчивости либо разрушения. Измеряемыми величинами при этом являлись давление p ,

прогиб w , фибровые (по терминологии [62]) деформации ϵ . Для определения критической нагрузки использовались кривые $\rho - \epsilon$, которые более чувствительны к критической нагрузке [89]. Принималось, что критическая нагрузка соответствует началу нелинейного участка кривой $\rho - \epsilon$. Погрешность такого приема, как позволяют считать результаты [89], ^{не} превышает погрешность определения исходных характеристик материала. Поэтому нет необходимости прибегать к более точным способам, указанным в [46]. Для круглых пластин в одном из случаев опирания проводилось дополнительное изучение поведения пластин при поперечном нагружении с целью сравнения чувствительности пластин к способу приложения нагрузки.

Все пластины сначала испытывались в условиях свободного опирания. Причем, для прямоугольных пластин это был случай со свободной кромкой. Максимальный прогиб при этих схемах опирания не превышал $0,5 h$. Как правило, в этой области уже удавалось выйти на нелинейную ветвь зависимости $\rho - \epsilon$. После разгрузки у всех пластин не наблюдалось заметных остаточных деформаций и эти же пластины были испытаны в условиях с защемленными кромками. Для круглых пластин не удалось обнаружить явное выпучивание, предшествующее разрушению, а для прямоугольных удалось получить лишь кривые начального этапа нагружения. В последнем случае оценка жесткости производилась путем измерения площадей осциллограмм в определенном диапазоне давлений. Для этого использовался полярный планиметр III-2К.

Для исключения влияния изменения толщины и коэффициента объемного армирования χ в сопоставлении пластин по укла-

оценка основных результатов производилась в приведенных величинах, которые осреднялись по числу испытанных образцов (4-8). Коэффициент вариации при этом не превышал 10% для круглых и 13% для прямоугольных пластин.

13.2. Техника изготовления и характеристики изученных пластин. Исходный материал пластин - предварительно пропитанная стеклоровница АГ-4С. Число укладываемых слоев для круглых пластин - 24, для прямоугольных - 22. Для однонаправленных укладок круглых пластин каждый слой состоял из 8-9 секторов, армированных вдоль или перпендикулярно биссектрисе центрального угла. Звездная укладка имела однонаправленное армирование слоев. Стыки каждого последующего слоя смещались по углу относительно друг друга (этим устранялось наличие явно ослабленных сечений). Для звездной укладки это смещение было определенным - 60° (полученный таким образом материал, как известно, является трансверсально-изотропным). При радиальной и окружной укладке такой способ, конечно, только в известной степени моделирует однонаправленную укладку (окружную укладку с однонаправленной структурой можно было бы получить намоткой, радиальную - подмоткой в радиальном направлении, однако технологические факторы, сопутствующие прессованию и намотке существенно различны. Выбранный же способ близок к технологии изготовления реальных конструкций). В прямоугольных пластинах слои стеклоровницы укладывались в соответствии с табл. 12. Пластины с хаотическим армированием изготавливались из кусков стеклоровницы 3-5 см общим весом равным весу материала пластин с упорядоченными укладками. Эти куски насыпались в прессформу и затем разравнивались.

Прессование проводилось в прессформах соответствующего очертания (см. рис. 28) при температуре 150⁰С, давлении 60 кгс/см² с продолжительностью выдержки в прессформе 40 мин. (Предварительный подогрев без давления в течение 5 мин.). Из полученных заготовок вырезались круглые пластины с внутренним радиусом $R_B = 30$ мм, наружным $R_H = 116$ мм и прямоугольные размерами $a \times b = 240 \times 85$. После изготовления поверхности всех пластин за исключением тех, у которых способ укладки по толщине не меняется, были шлифованы. Окончательные толщины h для круглых пластин находились в пределах 3,8-6,4 мм, для прямоугольных - 5-8 мм.

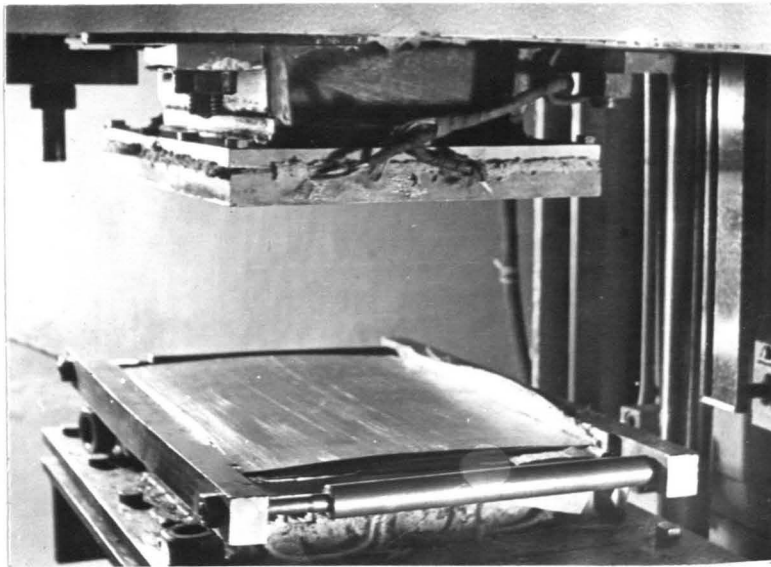
Механические характеристики пластин, определенные по результатам испытаний 4-7 образцов, представлены в таблицах 11 , 12 . Входящие в эти таблицы величины, необходимые для расчета критических нагрузок E_z , E_θ , E_x , E_y (направления осей z , θ , x , y указаны на рис. 31, 32) и модули сдвига G_{zx} определялись по методике [65] путем испытания на изгиб сосредоточенной нагрузкой посередине пролета свободно опертых призматических стержней, вырезаемых из пластин - свидетелей в соответствующем направлении.^{х/}

Здесь определение G_{zx} по изгибу проведено попутно. Полученные данные с учетом замечаний § 10.2 являются предварительными. Однако погрешность, допускаемая при этом при расчете критических нагрузок, как показали некоторые эксперименты по опре-

^{х/} Для случаев 6-9 (см. табл. 12) определялись осредненные по толщине характеристики композита.



a)



б)

Рис. 28.

делению G_{rz} из опытов на кручение по методике [42], приводит к ошибке в безопасную сторону. Пренебрегая некоторой непараллельностью волокон, принято, что модуль E_θ для пластин с радиальной (окружной) укладкой равен модулю E_z для пластин с окружной (радиальной) укладкой. Для проверки этого использовались также сжимаемые наружным давлением p кольца, вырезаемые из трансверсально-изотропных пластин с измерением окружной деформации ϵ_θ на внутреннем радиусе. Найденное при этом с помощью зависимости для толстого кольца [32]

$$E_z = \frac{2\rho k^{\alpha-1}}{\alpha(1-k^{2\alpha})} \epsilon_\theta$$

значение α отличалось от 1 лишь на 6% (см. рис. 29)

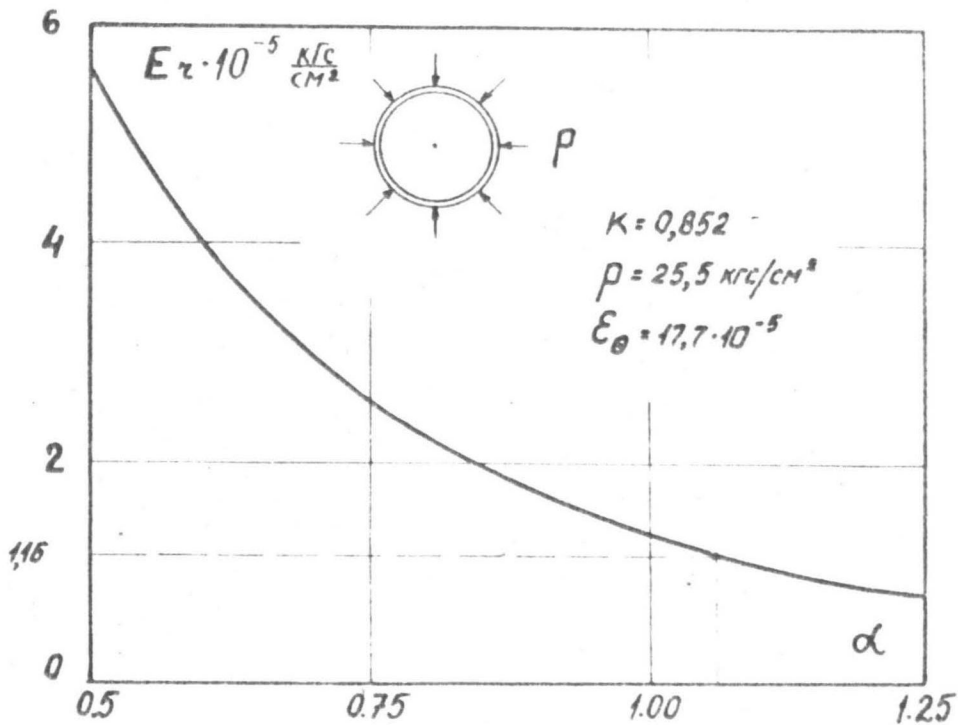


Рис. 29.

Анализ, проведенный во 1-ой и 2-ой главах, показал слабую чувствительность критической нагрузки к изменению коэффициентов Пуассона $\nu = \nu_{\tau\theta}$ (характеризующих сокращение в направлении τ), поэтому их экспериментальное определение для круглых пластин не входило в программу работ. Коэффициенты Пуассона ν_{xy} для каждой укладки в прямоугольных пластинах определены при растяжении призматических образцов, при этом принимались меры для устранения влияния краевых эффектов. Модуль сдвига G_{xy} определялся по методике [86]. Согласно этой методике G_{xy} определяется по формуле
$$G_{xy} = \frac{3P\delta^3}{4h^3\omega_0}$$
 по результатам испытаний на кручение квадратных $\delta \times \delta$ пластин толщиной h . Кручение пластин размерами $85 \times 85 \times h$ осуществлялось на установке (рис. 30) приложением сосредоточенных сил

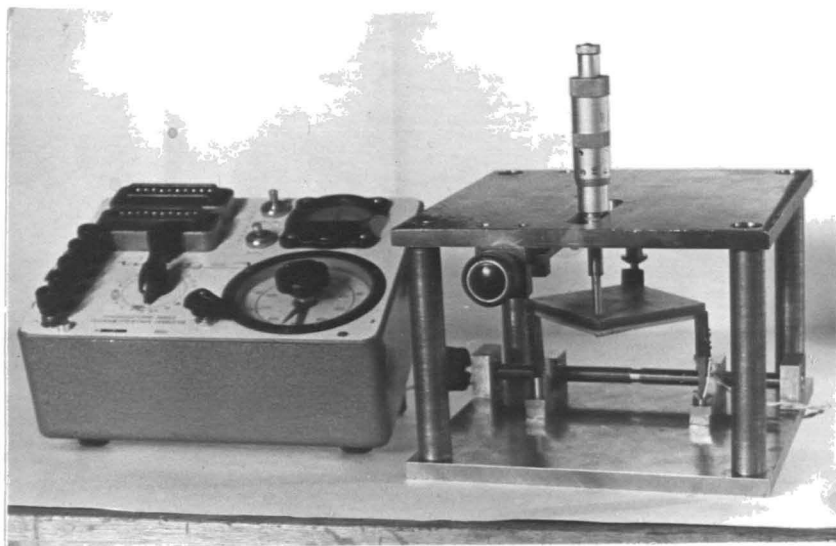
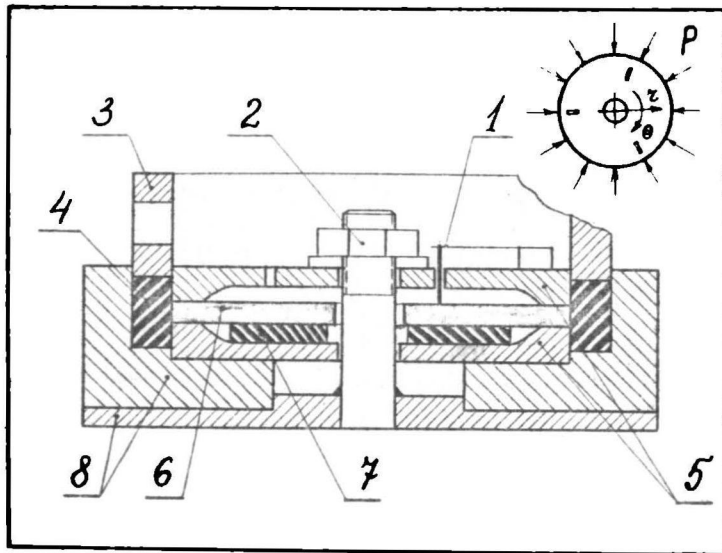


Рис. 30.

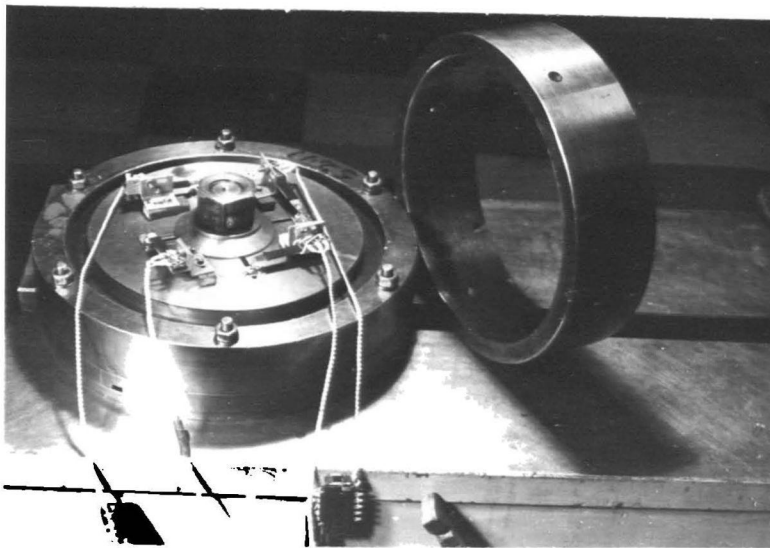
по углам пластины. При этом измерялись прогибы пластины под силой ω_0 и усилие \bar{P} , действующее на одну из опор. Коэффициенты χ определены путем отжига образцов, вырезаемых из пластин с каждой укладкой. вариация χ по площади круглых пластин не превышала 5%. Коэффициенты вариации для E_z , E_x , E_y , G_{xy} не превышали 8%, для ν_{xy} , G_{zz} - 15%.

13.3. Техника эксперимента. С учетом указанного выше были разработаны приспособления, позволяющие изучать два варианта граничных условий с реализацией нагружения в плоскости пластин при помощи упругого тела - резины (схемы и общий вид приведены на рис. 31, 32).

Испытываемая пластина 6 с помощью гаек 2 зажималась между двумя одинаковыми опорными плитами 5. Для каждого приспособления использовались плиты двух типов. У одних ширина зоны контакта с пластиной равнялась 0,1 мм, то есть практически нулю. У других имелись кромки шириной 10 мм (для круглых), либо 6 мм для прямоугольных пластин. Этим моделировались условия свободного опирания и защемления. Испытания проводились на гидравлическом прессе ИПС-500, от которого давление через нажимной пуансон 3 передавалось резиновому вкладышу 4 и далее испытываемой пластине. Для уменьшения влияния трения соприкасающиеся части пластин и приспособления натирались графитом, а постоянство усилия их прижимания (посредством гаек 2) контролировалось с помощью динамометрического ключа (крутящий момент 500 кгс.см и 180 кгс.см для круглых и прямоугольных пластин соответственно). По данным [30] при испытании кольцевых образцов, сжимаемых наружным давлением, в приспособлениях такого

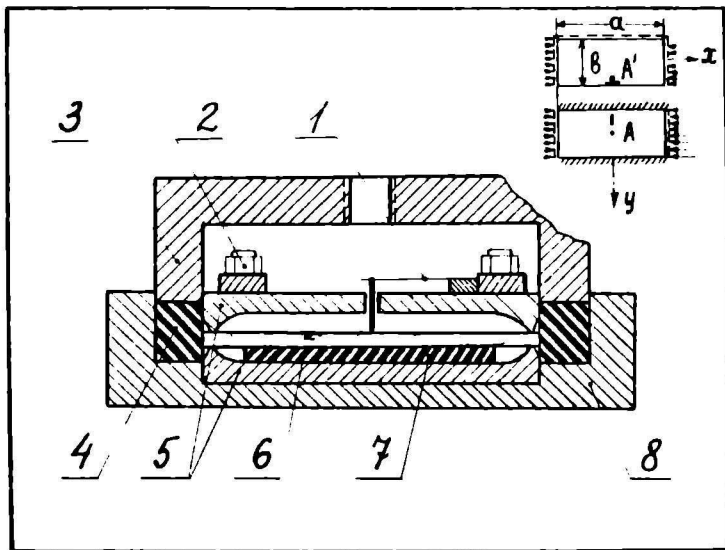


a)

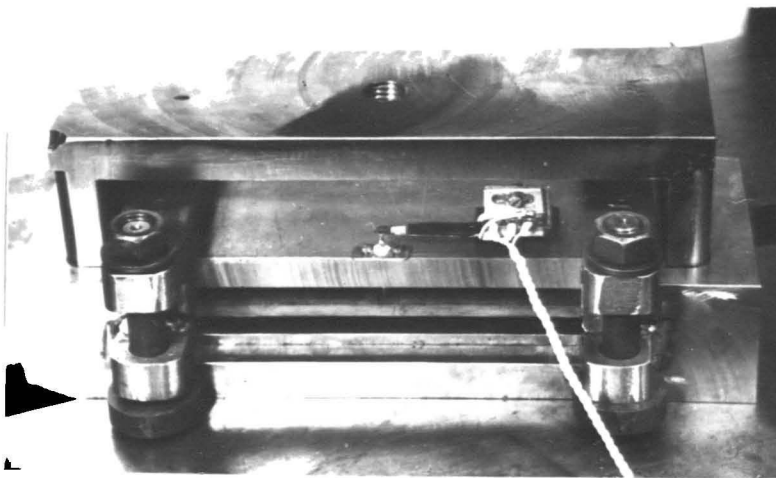


б)

Рис. 31.



a)



б)

Рис. 32.

типа потери на трение без смазки могут достигать 10%. Тем более они должны снизиться для конструкций типа тонкостенных пластин в условиях трения графит по графиту. Таким образом, изменениями потерь на трение, возникающими от различия укладок с высокой точностью, допустимо пренебречь и считать их одинаково малыми, что обеспечивает сопоставимость полученных характеристик.

Коэффициент передачи давления в приспособлениях (рис. 31, 32), определенный согласно [30] по испытанию тонких тарировочных стальных колец с наклеенными на внутренней поверхности тензодатчиками сопротивления, равнялся 0,9. При этих испытаниях был также подтвержден вывод [30] о допустимости пренебрежения влиянием изменения характеристик резинового вкладыша в диапазоне используемых давлений.

Для придания определенного направления выпучивания (вверх) между опорной плитой 5 и пластиной (кроме прямоугольной пластины с заземленными кромками) подкладывалась подушка 7 из губчатой резины малой жесткости.

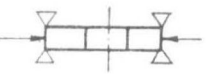
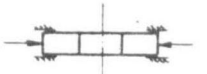
Учитывая существенную неоднородность напряженного состояния круглых пластин (см. 2.22) для наклейки тензодатчиков сопротивления потребовалось оценить координаты и ориентацию максимальных по абсолютной величине фибровых деформаций. Их положение с использованием зависимостей (2.20) определялось численным расчетом радиальных M_z^0 , ϵ_z^0 и окружных M_θ^0 , ϵ_θ^0 приведенных изгибающих моментов и деформаций.

$$\begin{aligned}
 M_z^0 &= a'_1 L \varphi_1 + a'_2 L S_1 + \beta'(\alpha + \nu) \rho_1^{\alpha-1} + \beta'_2 (\nu - \alpha) \rho_1^{-(\alpha+1)} \\
 M_\theta^0 &= a'_1 L \varphi_0 + a'_2 L S_0 + \beta' \alpha (\alpha + \nu) \rho_1^{\alpha-1} + \beta'_2 \alpha (\alpha - \nu) \rho_1^{-(\alpha+1)} \\
 \varepsilon_z^0 &= \frac{1}{E_z} \left(M_z^0 - \frac{\nu}{\alpha^2} M_\theta^0 \right) \\
 \varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{E_\theta} \left(M_\theta^0 - \nu M_z^0 \right)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Результаты вычисления по выражениям (4.1) в области механических характеристик, близких к действительным, представлены в табл. 13. По данным этой таблицы (максимальные значения деформаций выделены) и производилась наклейка тензодатчиков по 3 на каждую пластину, равномерно по окружности. Положение таких датчиков на прямоугольной пластине указано на рис. 32^а

Нагружение и запись измеряемых величин были непрерывными. Использовался шлейфовый осциллограф К9-2I с усилителем 8 АНЧ-7М. У круглых пластин прогибы измерялись в четырех точках, равномерно распределенных по окружности радиуса 63 мм, у прямоугольных в геометрическом центре пластины в точке А или А' (когда кромка $y = b$ свободна) (см. рис. 32^а). Это делалось при помощи тонких стальных пластинок - прогибомеров 1 с наклеенными тензодатчиками сопротивления. Показания прогибомеров на круглых пластинах свидетельствовали об осесимметричности прогиба.

Таблица 13.

		Изгибающие моменты и деформации круглых пластин с укладкой											
		радиальной				звездной				окружной			
		$\alpha = 0,5; \alpha_0 = 0,1; \nu = 0,017$				$\alpha = 1; \alpha_0 = 0,12; \nu = 0,2$				$\alpha = 2; \alpha_0 = 0,15; \nu = 0,2$			
Случай опирания	β_1	M_r^0	M_θ^0	$\varepsilon_r \cdot 10^5$	$\varepsilon_\theta \cdot 10^5$	M_r^0	M_θ^0	$\varepsilon_r \cdot 10^5$	$\varepsilon_\theta \cdot 10^5$	M_r^0	M_θ^0	$\varepsilon_r \cdot 10^5$	$\varepsilon_\theta \cdot 10^5$
 $\kappa = 0,26$ $\lambda = 1,8$	0,26	0	-12,15	0,243	<u>-12,15</u>	0	-31,52	3,5	<u>-17,5</u>	0	-125,3	6,26	-36,8
	0,4	-3,11	-8,07	-0,724	-8,02	-8,26	-22,15	-2,13	-11,4	-35,81	-111,1	-30,3	-30,6
	0,6	-3,07	-5,63	-0,79	-5,58	-8,71	-17,12	-2,92	-8,55	-47,16	-129,0	<u>-40,71</u>	-35,1
	0,8	-1,70	-4,35	-0,412	-4,32	-5,16	-13,59	-1,35	-6,97	-34,85	132,9	-28,2	-37,1
	1,0	0	-3,48	0,069	-3,48	0	-10,1	1,13	-5,61	0	-111,2	5,6	-33,0
 $\kappa = 0,26$ $\lambda = 3,67$	0,26	0	2,72	0,055	<u>2,72</u>	0	25,2	-2,79	<u>14,0</u>	0	362,0	-18,1	106,3
	0,4	-0,29	1,76	-0,12	1,77	4,07	16,91	0,395	8,95	86,4	309,6	70,9	86,0
	0,6	-3,38	0,97	-1,03	1,03	-4,10	9,26	-3,31	5,61	46,27	286,3	31,97	81,5
	0,8	-6,51	0,34	-1,92	0,45	-15,54	1,71	-8,8	2,67	-91,7	160,9	-99,7	52,6
	1,0	-7,84	-0,14	-2,30	-0,01	-23,19	-4,69	-12,4	-0,02	-267,8	-56	<u>-265,0</u>	0,74

§ 14. Круглые пластины.

Экспериментально найденные значения критических напряжений ρ_* , выраженные в долях от критических напряжений ρ_{cr} стальной ($E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см²; $\nu = 0,3$) пластины с теми же размерами (см. табл. 14). значения ρ_{cr} подсчитаны согласно данным, приведенным в [13]. Экспериментально определенные величины сопоставлены с расчетными ρ_0 . Расчет ρ_0 проводился по зависимости (2.26). Эта зависимость учитывает также влияние поперечных сдвигов. Поправка от них в рассматриваемом диапазоне отношений $\frac{E_0}{G_{rz}}$ и относительных толщин $\frac{h}{R_H}$ однако не превысила 5%. Совпадение результатов опыта и расчета в среднем можно признать удовлетворительным. Некоторые отклонения, по-видимому, объясняются разбросом механических свойств от пластины к пластине, а также незначительными изменениями толщины в пределах одной пластины.

Значения критических напряжений для каждого типа укладки при свободном опирании (они приведены к стандартной пластине толщиной 5,5 мм с коэффициентом объемного армирования 0,62 пересчетом по формуле $\rho_*' = \rho_* \left(\frac{5,5}{h}\right)^2 \frac{0,62}{\alpha}$) и значения разрушающего давления при защемлении ρ_p также даны в табл. 14. Там же для полноты информации приведены коэффициенты $K_i = h^3 \omega_i^{-1}$, обратно пропорциональные прогибу пластин и, таким образом, характеризующие их жесткость. Здесь $i = I$ для прогибов свободно опертой по наружной кромке пластины (см. рис. 33) при поперечной нагрузке \bar{P} , равной 17 кгс, равномерно распределенной по внутреннему контуру. (Результаты этих испытаний во всем диа-

Таблица 14

Укладка	радиальная				окружная				звездная				хаотическая	
№ пластины	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
h мм	5,6	5,5	5,4	5,5	3,8	4,5	5,2	5,4	4,7	5,6	5,5	5,6	6,4	5,6
$\rho_*/\rho_{ст}$ %	1,9	2,1	2,4	2,3	12,3	10,5	9,8	7,6	4,2	3,8	5,3	5,5	5,2	5,5
		(2,18)				(10,1)				(4,7)			(5,35)	
ρ_0/ρ_*	1,20	1,17	0,96	0,99	0,88	1,02	1,06	1,37	0,95	1,04	0,78	0,72	0,88	0,81
		(1,08)				(1,08)				(0,87)			(0,85)	
ρ_p кгс/см ²	370	490	-	300	770	770	670	-	520	>850	>850	>850	610	710
		(387)				(739)				(850)			(660)	
ρ_* кгс/см ²		(43)				(202)				(85)			(105)	
K_1 см ⁻⁴		(94)				(278)				(202)			(117)	
K_2 см ⁻⁴		(121)				(825)				(364)			(562)	
K_3 см ⁻⁴		(294)				(1940)				(640)			(980)	

Примечание: в скобках указаны средние величины.



Рис. 33.

пазоне нагружения представлены на рис. 34), $i = 2$ и 3 - для прогибов радиально сжимаемых давлением 46 кгс/см^2 свободно опертой и заземленной пластин соответственно. Изменение в опыте приведенного прогиба $h^3 w$ при нагружении до потери устойчивости представлено на рис. 36 . Этот рисунок дает наглядное представление о существенном влиянии способа укладки арматуры на жесткость рассматриваемых пластин. Видно, что заметные прогибы, по-видимому, вызванные физическими и геометрическими несовершенствами пластин, появляются с началом приложения сжимающих усилий. Это обстоятельство, как найдено Джерардом [83] и оправдывается результатами данной работы, не оказывает значительного влияния на критическую нагрузку. Как видно из табл. 14 и рис. 36 , при свободном опирании наиболее жесткими являются

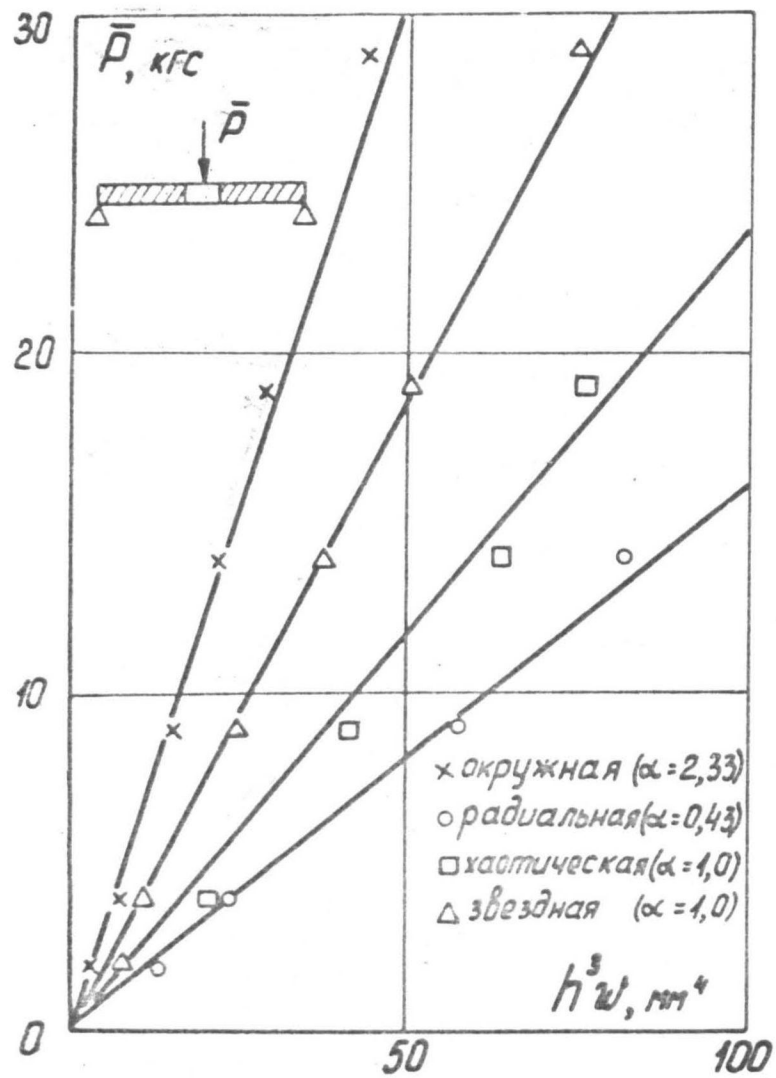


Рис. 34.

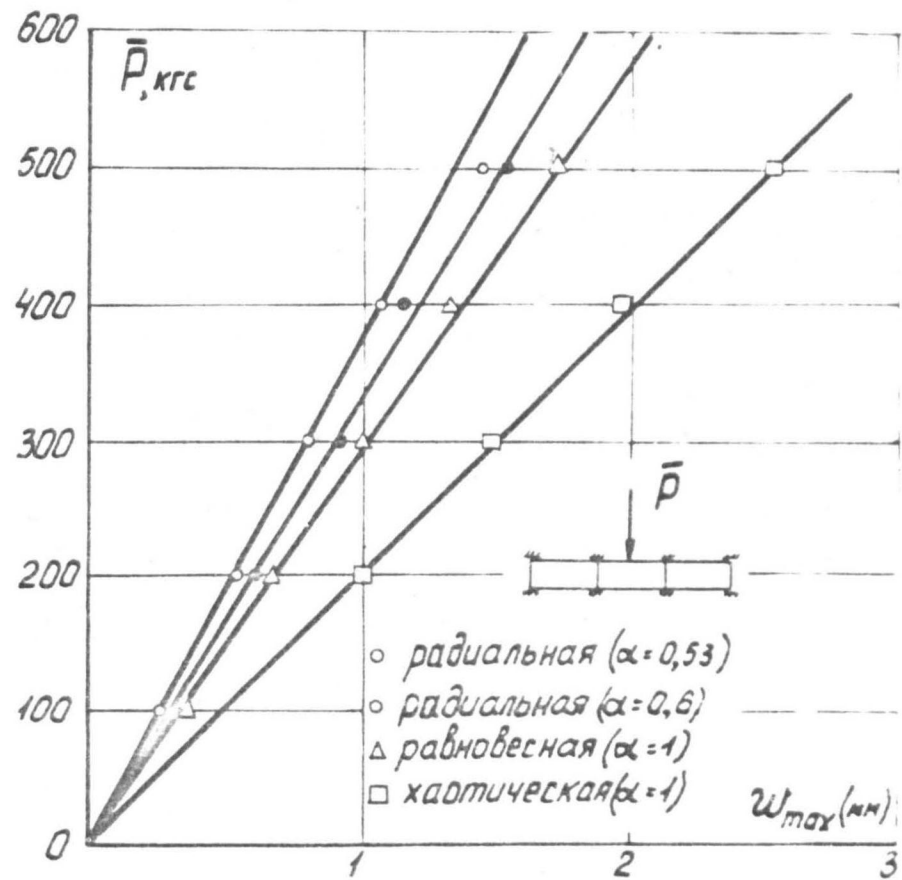


Рис. 35.

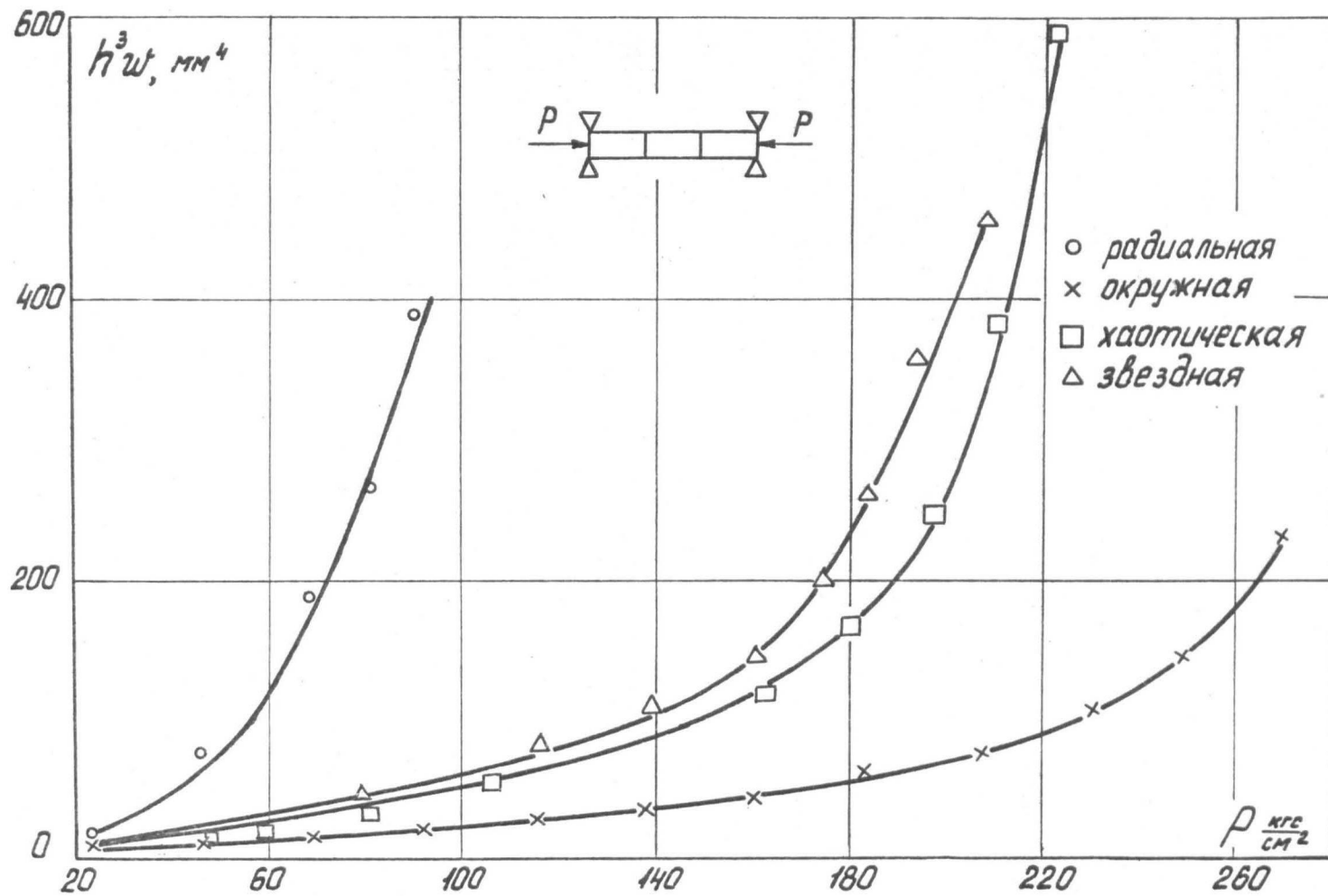


Рис. 36.

пластины с окружным армированием, наименее - с радиальным. Пластины со звездной укладкой занимают промежуточное место. Неожиданно высокие результаты получились при хаотическом армировании. Судя по полученным характеристикам, не исключено, что имеется критическое значение характерного размера кусочков шпона, при котором хаотически армированная пластина по жесткостным характеристикам не уступает пластине со звездной укладкой при одном и том же количестве материала. Этот вывод подтверждает замечание работы [16] о том, что из-за особенностей изготовления такая укладка также образует трансверсально-изотропный материал. О малом влиянии на жесткость пластин в условиях опыта непрерывной длины волокон по сравнению с их ориентацией говорят и данные таблицы 14 для остальных укладок. Это следствие необходимо иметь в виду в случае, когда не удастся армировать непрерывными волокнами.

Предпочтительность окружного армирования осесимметрично изогнутых свободно опертых пластин была предсказана также теорией при поперечном изгибе [27] и при радиальном сжатии (см. § 9) (следует обратить внимание на то, что схема армирования более чувствительна к радиальному сжатию, чем поперечному изгибу). Согласно этой же теории § 9 при жесткой заделке наружного контура и рассматриваемых параметрах анизотропии наименее податливыми являются пластины с радиальной укладкой. Последнее, как видно из сопоставления коэффициентов K_3 , противоречит опыту. Это, по-видимому, объясняется тем, что реализованные в эксперименте условия защемления весьма далеки от теоретических условий жесткой заделки. Такое предположение качественно под-

тверждается попутно проведенным опытом, в котором моделировалось увеличение жесткости заделки за счет поворота опорных кромок в направлении прогиба, а также за счет увеличения затяжки (крутящий момент 1000 кгс.см). При этом податливость радиально армированных пластин ($w_p h_p^3$) уменьшалась в гораздо большей степени, чем ($w_o h_o^3$) податливость пластин с окружной укладкой (см. рис. 37). На этом рисунке обозначения точек (o) соответствуют исходным условиям, (•) – повороту опорных кромок, (Δ) – увеличению затяжки.

О существенной зависимости рациональной схемы армирования от условий опирания и при поперечном изгибе говорит сопоставление рис. 34 и 35. На рис. 35 представлены результаты экспериментального исследования кольцевых пластин с различной укладкой арматуры (в направлениях τ , θ), нагружаемых поперечной нагрузкой, равно распределенной по внутреннему контуру [63]. Пластины имели защемление на обеих кромках, внутренняя кромка была подвижна. В таких условиях наиболее жесткой и прочной оказалась пластина с радиальной укладкой 10 : 1 ($\alpha = 0,53$). Ее прогибы на 25% меньше, а прочность на 22% выше, чем пластины с равновесной укладкой 1 : 1 ($\alpha = 1$). Очевидно, существуют и промежуточные случаи комбинаций граничных условий, когда рациональной может стать любая смешанная укладка. Поэтому трудно согласиться с замечанием в работе [27] о нецелесообразности смешанных укладок.

При радиальном сжатии разрушение, как правило, происходило в плоскостях наименьшего сопротивления материала (см. рис. 38). Характер его был различен. Пластины с радиальной уклад-

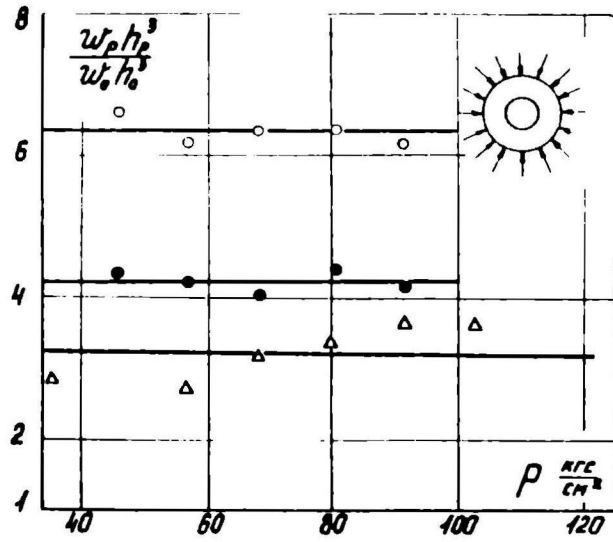


Рис. 37.

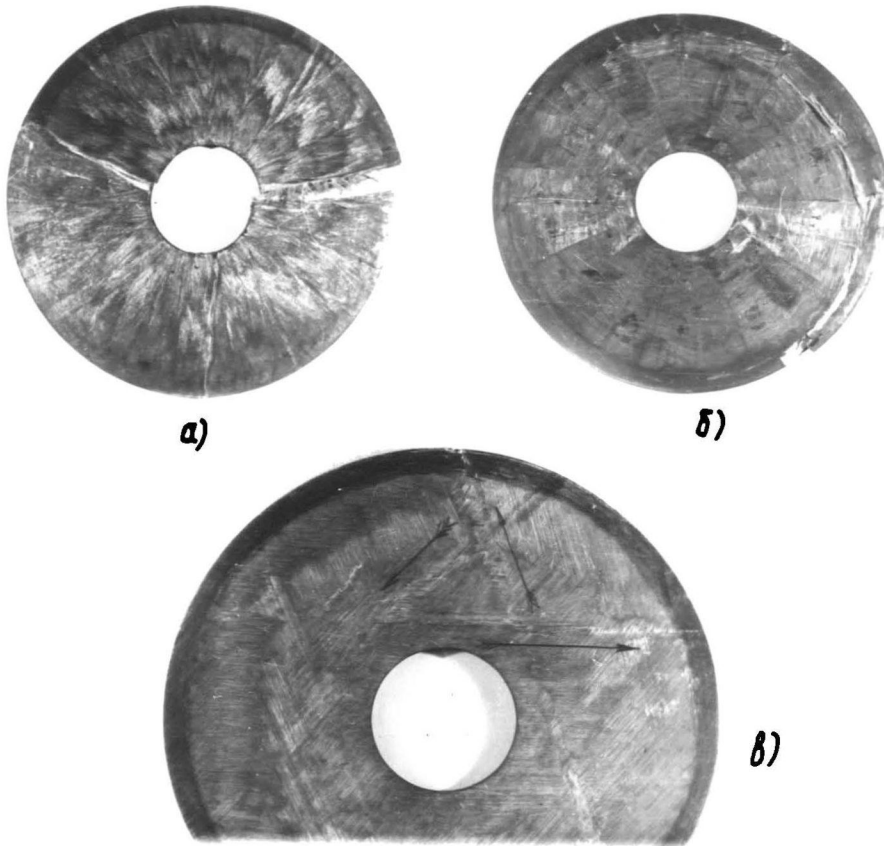


Рис. 38.



кой разрушались на три примерно равных сектора. При окружном армировании наблюдалась окружная трещина вблизи заземления, что хорошо согласуется с данными табл. 13. Пластины со звездной укладкой (за исключением самой тонкой) в данном приспособлении разрушить не удалось. (На рис. 38 в показано на первом этапе развития поверхностных трещин, которые локализируются за счет укладки).

Таким образом, в изученных условиях наихудшей укладкой является радиальная, окружная укладка предпочтительна для свободно опертых пластин, а звездная - при заземлении.

§ 15. Прямоугольные пластины.

Значение критических напряжений ρ_* , ρ'_* , ρ_0 , ρ_{cr} , аналогичные соответствующим значениям для круглых пластин, указаны в табл. 15. Здесь $\rho'_* = \rho_* \left(\frac{b}{h}\right)^2 \left(\frac{0,55}{\chi}\right)$ - приведенное (к пластине, у которой $\chi = 0,55$) критическое напряжение; ρ_0 , ρ_{cr} определены по выражениям работ [32], [62]. Кроме того, экспериментальные данные сопоставлялись с критическими напряжениями ρ'_0 , вычисленными по зависимостям, учитывающим особенности укладки. Расчет ρ'_0 для пластин с одинаковой по толщине укладкой (случаи 2, 3) производился с использованием выражений (3.7), (3.8). Для случаев 6-8 использованы зависимости работы [73], учитывающие положение пакета слоев по толщине. Для пластин, имеющих свободную кромку, приведены коэффициенты $K_\chi = h^{-3} \omega_\chi^{-1}$ при $\rho = 197 \text{ кгс/см}^2$. На примере рис. 39, где показано изменение этих коэффициентов для пластин с диагональной либо равномерной 1 : 1 укладкой, видно, что в диапазоне

Таблица 15

Услови опирания								
	$\rho_*' \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²	ρ_*/ρ_{cr}	$\frac{\rho_0}{\rho_*}$	$\frac{\rho_0'}{\rho_*}$	K_4 см ⁻⁴	K_5 усл. ед.	$\rho_0 \left(\frac{b}{h}\right)^2 \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²	$\rho_0' \left(\frac{b}{h}\right)^2 \cdot 10^{-5}$ кгс/см ²
3	0,536	5,77	1,42	-	26,0	3,96	10,30	-
	0,604	6,28	1,14	1,07	15,3	9,20	11,80	-
	0,765	7,65	1,09	1,68	34,2	6,92	8,33	13,9
	0,604	5,71	1,32	-	16,5	4,90	9,55	-
	0,605	6,52	0,77	-	17,0	4,80	7,16	-
	0,636	6,50	0,88	0,86	23,4	8,10	8,81	11,0
	0,709	7,75	1,08	1,40	40,5	8,40	9,61	9,52
	0,730	7,19	1,19	1,31	28,8	7,55	10,2	10,3
	0,353	3,94	-	-	11,0	5,80	-	-

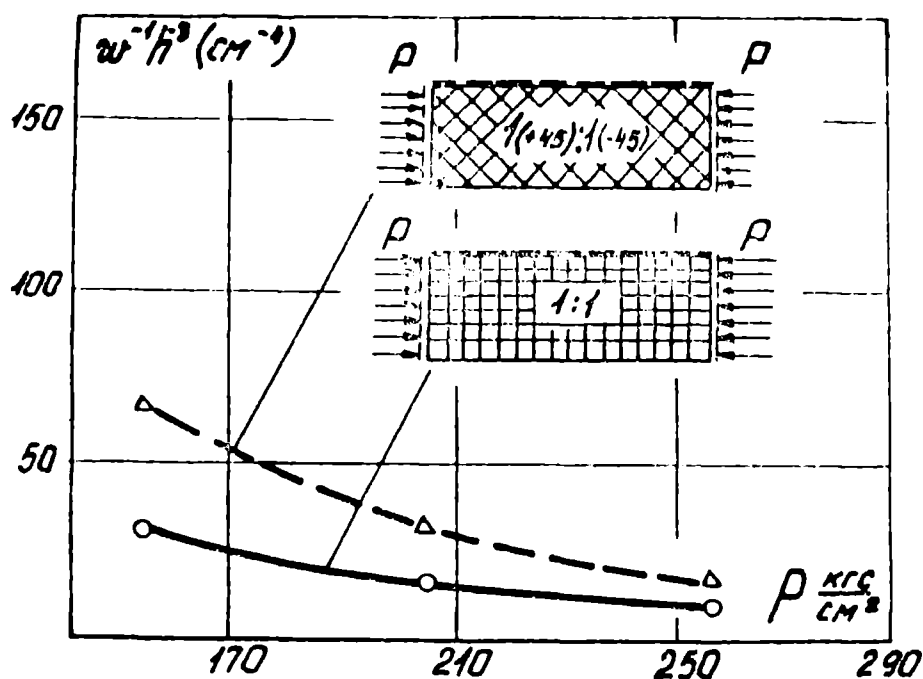


Рис 39

докритических давлений отношение этих коэффициентов можно приближенно считать постоянны

При двух заземленных кромках прогиб носил нерегулярный характер. В этом случае жесткость пластин оценивалась в условных единицах, согласно выражению $K_s = \delta S_w^{-1} h^{-3}$ (S_w - площадь осциллограммы прогиба в условных единицах планиметра на базе шкалы давления 0-640 кгс/см², δ - коэффициент приведения длины осциллограммы или скорости нагружения принятой за базовую).

В случае со свободной кромкой наиболее жесткими оказались пластины, имеющие большую часть или все стороны диагональными. Их жесткость по критическим напряжениям до 40% выше жесткости пластин

тин, у которых большая часть слоев ориентирована в направлении действия нагрузки, что качественно совпадает с выводами §12.2. Однако, погрешность, вносимая с использованием зависимостей (3.7.), (3.8.), полученных в предположении упругой работы материала, может оказаться недопустимой (см. табл. 15). Для качественного объяснения расхождений проводился эксперимент по изгибу призматических образцов, вырезанных из каждой пластины вдоль длинной стороны, сосредоточенной нагрузкой посередине пролета. Максимальный прогиб w_m при этом доходил до 1/10 пролета. Если материал работает линейно упруго, экспериментальные точки, отложенные в координатах $\frac{\sigma_m}{w_m h'} - \sigma_m$ (σ_m, h' - наибольшее напряжение и высота образца соответственно) при прогибах, малых по сравнению с длиной пролета, должны лечь на прямую параллельную оси σ_m . Как видно (см. рис. 40, где номер кривой соответствует номеру укладки табл. 12), положение точки

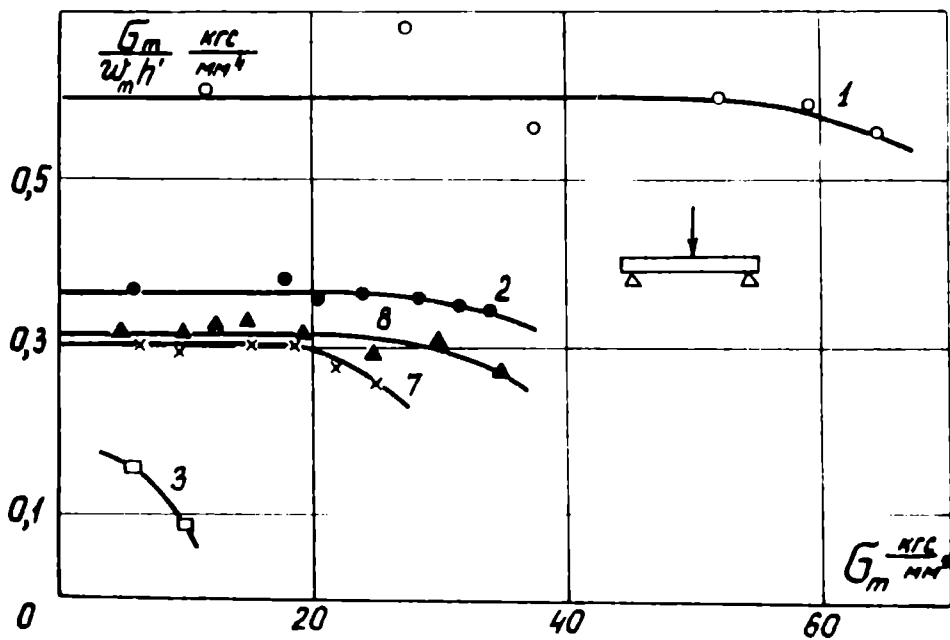


Рис 40.

начала нелинейности определяется количеством диагональных слоев и у чисто диагональных пластин соответствует началу нагружения, что свидетельствует о физической нелинейности материала. Подобное явление при изучении сдвиговых характеристик тканевых стеклопластиков холодного отверждения уже отмечалось в [61]. Небольшая добавка параллельных, ориентированных вдоль действия нагрузки наружных слоев сильно смещает положение этой точки в сторону больших напряжений. При этом критические напряжения ρ_0 , ρ_0' для пластин, имеющих часть слоев диагональными, лучше согласуются между собой и экспериментом. Еще лучшие результаты дает вычисление критических напряжений по характеристикам пластины с данной укладкой, определенным экспериментально.

Из табл. 14, 15 видно, что коэффициенты K_i в первом приближении могут быть приняты за качественную характеристику жесткости при данной укладке. Согласно этому в случае с защемленными кромками наиболее жесткими оказались пластины с равномерной укладкой I : I. Значение ρ_0 для них по сравнению с чисто диагональной укладкой на 40% выше, а значение ρ_0' лишь на 13% меньше. Сравнивая с предыдущей схемой опирания (см. также рис. 39), видим, что в смысле жесткости эти укладки поменялись местами. Близкие величины ρ_0 и ρ_0' для пластин, имеющих часть слоев диагональными в случае с защемлением, по-видимому, объясняются тем, что при заданной схеме армирования критические нагрузки пластин принятых размеров менее чувствительны к изменению механических характеристик. (См. § 12.2). Таким образом, в условиях опыта предпочтительной является параллельно-диагональная укладка в

случае со свободной кромкой (нагрузки в условиях опыта были кратковременными, при длительных нагрузках % параллельных $\varphi = 0$ слоев в рациональной укладке должен, видимо, увеличиться) и равномерная $I : I$ для пластин, имеющих две заземленные кромки.

В Ы В О Д Ы

1. Выбор схемы рациональной укладки для круглых и прямоугольных пластин зависит от условий опирания как при нагружении в плоскости пластины, так и перпендикулярно к плоскости укладки.

2. Чувствительность к укладке в большей степени проявляется при нагружении в плоскости пластины и меньше сказывается при поперечном изгибе.

3. В условиях испытания круглых пластин наилучшей укладкой является радиальная, окружная укладка предпочтительна для свободно опертых пластин, а звездная - при заземлении. Для прямоугольных пластин предпочтительной является параллельно-диагональная укладка в случае со свободной кромкой и равномерная $I : I$ для пластин, имеющих две заземленные кромки.

4. Жесткость пластин с хаотическим армированием может не уступать жесткости пластин со звездной укладкой при одинаковом количестве материала.

5. Предложенные коэффициенты жесткости могут быть использованы для предварительной оценки выбранной схемы армирования

6. Изменением коэффициента объемного армирования от укладки можно пренебречь.

7. Оценены области применимости методики расчета критических нагрузок (изложенной в главах II, III и [73]). Оказалось, что с уточнением условий жесткой заделки эта методика применима к расчету всех исследованных типов укладок круглых пластин. Область применения методов расчета прямоугольных пластин ограничена пластинами, у которых доля слоев, уложенных под углом 45° , менее 50%.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

Все вопросы, рассмотренные в работе, подчинены оценке эффективности управления укладкой арматуры в круглых и прямоугольных пластинах из волокнистых композитов, сжимаемых в плоскости армирования. Для круглых анизотропных пластин поставленная цель потребовала создания методики решения задач устойчивости как при однородном, так и неоднородном докритическом напряженном состоянии. Для прямоугольных пластин главные трудности были связаны с описанием деформативных свойств многонаправленных материалов и выбором метода оптимизации укладки. Был использован метод случайного поиска. Все рассмотренные задачи решены в линейно-упругой постановке в предположении справедливости перехода к сплошной среде. Гипотезы, использованные при создании методов расчета, и полученные схемы рациональной укладки арматуры проверены в экспериментах на серии круглых и прямоугольных пластин. Всего в опытах реализовано 11 схем укладок. Обнаружено хорошее качественное, а в ряде случаев и количественное совпадение. Во всех задачах оценена роль граничных условий, геометрии пластин и анизотропии материала.

Полученные результаты позволяют сделать следующие основные выводы:

1. Установлено, что при оценке критических нагрузок T_k круглых цилиндрически ортотропных пластин необходимо учитывать неоднородность докритического напряженного состояния и влияние сдвигов; в то же время изменением коэффициента Пуассона $\nu_{r\theta}$ можно пренебречь. Наибольшее влияние на T_k в широком диапазоне

исследованных параметров оказывает слабое сопротивление волокнистых композитов межслойному сдвигу.

2. Для кольцевых пластин, находящихся в условиях однородного докритического напряженного состояния, при вычислении критического параметра нагрузки λ_k можно пренеоречь изменением параметра $\alpha_0 = \frac{2H}{R_H} \sqrt{\frac{E_\theta}{G_{r2}}}$ практически во всех рассмотренных случаях опирания. Определение λ_k по предложенным зависимостям резко уменьшает трудоемкость вычисления.

3. Показано, что выбором рациональной схемы армирования можно существенно повысить T_k круглых и прямоугольных пластин. Рациональная укладка, определяемая для круглых пластин параметром $\alpha = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}$, а для прямоугольных - углом армирования φ относительно действующих усилий, во многом определяется геометрией пластин, условиями опирания и параметрами межслойного сдвига.

4. Для круглых пластин определены области рациональных значений α_p . В случае сплошных пластин и жестко защемленных по наружному контуру кольцевых пластин, имеющих внутренний контур свободным α_p , изменяется с возрастанием α_0 от 0, переходя из области $\gamma_{r\theta} < \alpha_p < 1$ в область $1 < \alpha_p < \frac{1}{\gamma_{\theta r}}$. В широком диапазоне кольцевых свободно опертых пластин, имеющих внутреннюю кромку свободной, α_p лежит в области $1 < \alpha_p < \frac{1}{\gamma_{\theta r}}$. Во всех указанных областях T_k возрастает при удалении α_p от 1. Доказано, что в первом приближении допустимо считать G_{r2} независимым от α .

5. Для прямоугольных пластин установлено, что при одноосном сжатии в главном направлении рациональная схема армирования изменяется с увеличением отношения сторон опорного контура $C = \frac{a}{b}$

от параллельной ($\varphi = 0$) к диагональной ($\varphi = \varphi_{opt}$). Условия опирания на кромках, свободных от сжимающих усилий, сказываются на изменении области C , в которой рациональны параллельная и диагональная укладки. В диапазоне отношений $4 \leq \frac{E_x}{E_y} \leq 20$ для исходного слоя влиянием степени анизотропии на рациональную укладку арматуры можно пренебречь в широкой области C .

6. Теоретические результаты качественно, а в ряде случаев и количественно подтверждены экспериментом. В условиях испытания установлено, что для круглых пластин наилучшей укладкой является радиальная, окружная укладка предпочтительна для свободно-опертых пластин, а звездная при защемлении. Для прямоугольных пластин предпочтительной укладкой является параллельно-диагональная в случае со свободной кромкой и равномерная 1:1 для пластин, имеющих две свободные от нагрузки кромки защемленными. Остальные кромки в обоих случаях считаются свободно опертыми. Предложена методика предварительной оценки выбранной схемы армирования.

7. Экспериментально показано, что в ряде случаев опирания и укладки сжимаемых пластин разрушение происходит до достижения критической нагрузки.

- 13 -

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С.Л. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
2. Амбарцумян С.Л. Теория анизотропных пластин. М., Физматгиз, 1967.
3. Болотин В.В. Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов. В сб. Расчеты на прочность. М., Машиностроение, 1966, вып. 12.
4. Болотин В.В., Москаленко В.Н. Пластины и оболочки из армированных материалов - основные уравнения, количественные результаты. В сб. докл. научно-техн. конф. по итогам научн. исслед. работ МЭИ за 1966-67 гг., секция энергомаш, подсекция динам. и прочн. машин. М., 1967.
5. Бруква Н.Ф. Об устойчивости прямоугольных ортотропных пластин. Прикладная механика, 1968, 4, вып. 3.
6. Бруква Н.Ф. Устойчивость прямоугольных ортотропных пластин со свободным краем. В сб. Сопротивление материалов и теория сооружений. Киев, Будивельник, 1969, № 9.
7. Брызгалин Г.И. Об устойчивости тонкой прямоугольной пластины из стеклопластика. Консервный журнал, механика твердого тела, 1966, № 3.
8. Брызгалин Г.И. Проектирование упругого анизотропного тела с равнонапряженной арматурой. В со. Металловедение и прочность материалов. Волгоград, 1968.

9. Брызгалин Г.И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим. *Механика твердого тела*, 1969, № 4.
10. Брызгалин Г.И. Оптимальное проектирование локально-орто-тропных упругих плоских тел со слабым связующим. *Механика твердого тела*, 1971, № 3.
11. Брызгалин Г.И., Немировский Ю.В. О проектировании трех-слойных армированных пластин. В сб. Труды УШ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М., Наука, 1971 (в печати).
12. Бурмистров Е.Ф., Маслов Н.М. Устойчивость круглых кольцевых ортотропных пластинок. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Саратов, 1967, вып. 3.
13. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., Физматгиз, 1967.
14. Виноградов А.И., Дорошенко О.П., Храповицкий И.С. Некоторые направления теории оптимальных стержневых систем. Труды Харьковского института инженеров ж.д. транспорта, 1967, вып. 102.
15. Григоляк Э.Б. Устойчивость круглых кольцевых пластин. Инженерный сборник, 1949, 5, № 2.
16. Дедюхин В.Г., Стэвров В.И. Технология прессования и прочность изделий из стеклопластиков. М., Химия, 1968.
17. Динник А.А. Об устойчивости скатой круглой пластины. Известия Киевского политехнического института, 1911, кн.1.

- ~~SECRET~~
18. Динник А.Н. Применение функций Бесселя к задачам теории упругости. Известия донского политехнического института, 1913, 2.
 19. Иеги Э.М. Оптимальная конструкция и ее проектирование. Труды Таллинского политехнического института, 1967, сер.А, № 257.
 20. Кайзер. Равнонапряженный вращающийся диск, навитый из волокон. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 7.
 21. Киреева Г.Б. Выпучивание круглой радиально-сжатой пластины. Прикладная механика, 1969, 5, вып. 6.
 22. Кичер, Мэнделл. Исследование выпучивания слоистых пластин из композиционных материалов. Ракетная техника и космонавтика, 1971, 9, № 4.
 23. Комаров В.А. О рациональном распределении материала в конструкциях. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 5.
 24. Коминар В.А. Об устойчивости прямоугольной пластинки из стеклопластика. Вестник ВНИИЖТ, 1967, 35, № 2.
 25. Коминар В.А. Влияние схемы армирования на устойчивость прямоугольных пластин из стеклопластика. Механика полимеров, 1967, № 6.
 26. Коминар В.А. Об оптимальном армировании пластинки из стеклопластика. Механика полимеров, 1969,
 27. Корол В.К. Слоистые анизотропные пластинки оболочки из армированных композиц. м., и их проектирование, 1955.

28. Кузнецов А.В. Расчет судовых пластин из стеклопластика различной структуры армирования на изгиб и устойчивость. Труды ЛИИВТ, сб. статей молодых научных работников. Л., 1968, ч.Ш.
29. Кузнецов А.В. Определение минимальной толщины пластин днища и палубы при проектировании судна из стеклопластика. Труды ЛИИВТ, 1969, вып. 122.
30. Лавров А.В., Ривкинд В.Н., Панфилов Н.А. О методике испытания на сжатие в резиновом манжете колец из стеклопластика, изготовленных методом намотки. Труды ЦНИИТС, 1971, вып. 109.
31. Лемприр Б. Коэффициент Пуассона ортотропных материалов. Ракетная техника и космонавтика, 1968, 6, № 11.
32. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957.
33. Лурье А.И. Применение принципа максимума к простейшим задачам механики. Труды Ленинградского политехнического института. Л.-М., Машиностроение, 1965, № 252.
34. Макушин В.М. Об одном случае устойчивости сжатой круглой пластины. В сб. Расчеты на прочность. М., 1960, № 5.
35. Макушин В.М. Некоторые случаи устойчивости сжатой кольцевой пластины. В сб. Расчеты на прочность, М., 1960, № 6.

36. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов (под ред. А.К.Малмейстера). Рига, Зинатне, 1967.
37. Мелконян А.П., Хачатрян А.А. Об устойчивости трансверсально-изотропных пластинок. Известия АН Арм.ССР, Механика, 1966, 19, № 2.
38. Муштари Х.М. К теории изгиба оптимальных по весу пластин из композиционного материала. Прикладная механика, 1967, 3, № 4.
39. Муштари Х.М. К теории изгиба оптимальной круглой пластины переменной толщины. В сб. Некоторые вопросы теории пластин и оболочек. Казань, 1967.
40. Муштари Х.М., Амирханов И.Г. К теории изгиба оптимальной круглой пластины из армированного пластика. В сб. Некоторые вопросы теории пластин и оболочек, 1967.
41. Неман И.Г. Устойчивость бесконечно длинной ортотропной пластины с наклонными главными направлениями упругости. Докт. диссертация. М., 1952.
42. Николаев В.П., Новичков Ю.Н. Экспериментальное определение модулей сдвига стеклопластиков. В сб. Расчеты на прочность, 1968, вып. 13.
43. Образцов И.Ф., Васильев В.В. Некоторые вопросы расчета и проектирования оптимальных конструкций из ориентированных пластиков. В сб. Прочность и устойчивость тонкостенных авиационных конструкций, труды МАИ. М., 1971; вып. 180.

44. Петоян А.Ш. Устойчивость круглой трансверсально-изотропной плиты при сжатии равномерно распределенной по контуру радиальной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1966, 19, № 3.
45. Поляков В.А., Розе А.В., Литров В.В. Осесимметричный изгиб и выпучивание круглых пластин из материалов, армированных волокнами. Труды УП-ой Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Днепропетровск. М., Наука, 1970.
46. Прегер Л.М. Экспериментальное определение критических сил. В сб. Исследования по строительным конструкциям. Труды Томского инж.-строительного института, 1964, II.
47. Прочность, устойчивость, колебания (под ред. И.А.Биргера и Я.Г.Пановко). М., Машиностроение, 1968, 2.
48. Рабинович А.А. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. Труды ИАГи, 1946, № 582.
49. Работнов Ю.Н. Механика твердого тела и пути ее развития. Изв. АН ССР. Механика и машиностроение, 1962, № 2.
50. Растринин Л.А. Случайный поиск. Рига, Зинатне, 1965.
51. Расчеты на прочность в машиностроении (под ред. С.А. Пономарева). М., 1959, 3.
52. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Теория оптимального проектирования в строительной механике, теории упругости и пластичности. В сб. Итоги науки, Упругость и пластичность, ВНИИТИ АН СССР, 1966.

53. Рейтман М.И. Оптимальное проектирование конструкций методами математического программирования. Строительная механика и расчет сооружений, 1969, № 3.
54. Рейтман М.И. Оптимальное проектирование оболочек с помощью принципа максимума. Механика твердого тела, 1971, № 3.
55. Розе А.В. Продольно-поперечный изгиб круглых цилиндрически ортотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу. Механика полимеров, 1968, № 1.
56. Розе А.В., Хитров В.В. Устойчивость кольцевых трансверсально-изотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу. Механика полимеров, 1969, № 5.
57. Розе А.В. Анализ уточнений эйлеровой критической силы ортотропного стержня. Прикладная механика, 1971, 7, вып.5.
58. Розе А.В., Хитров В.В. Экспериментальное изучение радиально-сжатых кольцевых пластин из стеклопластиков. В сб. Труды УШ Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. М., Наука, 1971 (в печати).
59. Саркисян В.С., Мовсисян Л.А. Об одном способе определения критических нагрузок анизотропных пластинок. Инженерный журнал, 1965, 5, № 4.
60. Севереденко В.И., Макушок В.М., Сегал В.Л. Анизотропия пластических свойств слоистых композиционных материалов. В сб. Пластическая деформация и обработка металлов давлением. Минск, 1969.

61. Сидорин Я.С. Экспериментальное исследование анизотропии стеклопластика при сдвиге. Заводская лаборатория, 1966, 32, № 5.
62. Смирнова М.К., Соколов В.П., Сидорин Я.С., Иванов А.П. Прочность корпуса судна из стеклопластика (под ред. М.К.Смирновой). Л., 1965.
63. Ставров В.П., дедюхин В.Г. Об использовании технологической анизотропии стеклопластиков при прессовании силовых деталей. Вестник Машиностроения, 1966, № 2.
64. Тарнопольский Ю.М., Скудра А.М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, Зинатне, 1966.
65. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига, Зинатне, 1969.
66. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Жигун И.Г., Гуняев Г.М. Конструкционные особенности высококомодульных материалов. Механика полимеров, 1971, 4.
67. Тетерс Г.А. Сложное нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов. Рига, Зинатне, 1969.
68. Толоконников Л.А. Критические давления на круглую пластину. Изв. АН СССР, 1958, № 10.
69. Фельдман А.А. Устойчивость кольцевой пластинки со свободным внутренним и зажатым внешним краями при равномерном давлении. В сб. трудов Института строительной механики АН УССР, 1952, № 15.

70. Хачатрян А.А. Устойчивость круговой кольцевой пластины, сжимаемой радиальными силами, приложенными по внешнему контуру. Изв. АН Арм. ССР, 1966, 19, № 6.
71. Хачатурян Т.Т. К теории изгиба и сжатия толстых плит. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, 1963, 16, № 6.
72. Хитров В.В. Влияние укладки арматуры на устойчивость круглых цилиндрически ортотропных пластин, слабо сопротивляющихся сдвигу. Механика полимеров, 1971, № 2.
73. Хитров В.В. Влияние схемы армирования на устойчивость прямоугольных пластин из армированного материала. В сб. Вопросы динамики и прочности, 1972, вып. 22.
74. Хитров В.В., Жмудь Н.П., Бейль А.И. Несущая способность сжимаемых пластин из стеклопластиков с различной укладкой арматуры. Механика полимеров, 1972, № 4 (в печати).
75. Черевацкий С.Б., Сегал В.Л., Макаров В.И. Расчет дисков, изготовленных методом непрерывной намотки нити. В сб. Прочность и динамика авиационных двигателей. М., Машиностроение, 1966, вып. 4.
76. Чжу С.Н., Прагер В. Последние достижения в оптимальном проектировании конструкций. В сб. переводов Механика, 1969, № 6.
77. Ashton J.E., Love T.S. Experimental study of the stability of composite plates. J. Compos. Mater., 1969, 3, April.
78. Brandmaier H.E. Optimum filament orientation criteria. J. Compos. Mater., 1970, 4, July.

79. Brotchie I. A criterion for optimal design of plates. J. Amer. Concrete Inst., 1969, No. 11.
80. Bufler H. Axialsymmetrisches Ausknicken kreisförmiger Verbundplatten. Ingr.-Arch., 1965, 34, N 6.
81. Chamis C.C. Closing materials research structural design cycle. J. Engr. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1965, 95, N 65.
82. Dzieniszewski W. Optimum distribution of materials in the fibrous bodies. Bull. Acad. pol. sci., ser. techn., 1970, 18, No. 8.
83. Gerard G. Minimum weight analysis of orthotropic plates under compressive loading. Aerospace Sciences, 1960, 27, No. 64.
84. Hackman L.E., Stotler C. Laminate optimization for filament composites. Advanced fibrous reinforced composites. North Hollywood, Calif., 1966, I-C 2.
85. Harris G.Z. Reinforced sheets for load envelopes which combine tension and shear. Aeronautical Quarterly, 1967, 18, No. 3.
86. Hashin Z., Shtrickman S. A variational approach to the theory of elastic behavior of multiphase materials. J. of the Mech. and Phys. of Solids, 1963, 4.
87. Hintersdorf G., Bernet I. Dimensionierung von Bauteilen aus glasfaserverstärkten Plasten. Plaste und Kautschuk, 1967, 14, N 1.
88. Mansfield E.H., Carol H. An optimum fibre orientation in an annulus. The Aeronaut. J., 1969, 73, No. 703.
89. Mills A.S. Experiments on the buckling of simply-supported rectangular plates. Aeronaut. J., 1969, 73, No. 703.
90. Mroz Z. On the design of nonhomogeneous technically orthotropic plates. Proc. Sympos. IUTAM, Warsaw 1958.

91. Mroz Z. Optimal design of structures of composite materials. Int. J. Solid Struct., 1970, 6, No. 7.
92. Outwater I.O. Filament wound internal pressure vessels. Modern Plastics, 1963, 40, No. 7.
93. Pandalai K.A., Patel S. Buckling of orthotropic circular plates. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1965, 69, No. 652.
94. Patel S., Broth F. Axisymmetric buckling of orthotropic circular plates with variable thickness. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1967, 71, No. 675.
95. Reissner E., Stavsky Y. Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates. J. Appl. Mech., 1961, 28, No. 3.
96. Roszkowski M. Stateczność kołowej tarczy ortotropowej obciążonej momentem skręcającym. Arch. budowy maszyn, 1964, II, N 4.
97. Rothwell A. Optimum fibre orientations for the buckling of thin plates of composite material. Fibre Science and Technology, 1969, 2, No. 2.
98. Rozvany G.I.N. Optimal design of axisymmetric slabs. Civil engineering Transactions, April 1968, 10, No. 1.
99. Wasiutinski Z., Brandt A. The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. Appl. Mech. Rev., 1963, 16, No. 5.
100. Wegener W., Hausmann K.H. Eigenschaften auf Wölbung beanspruchter grossflächiger Lamine. Kunststoff-Rundschau, 1969, 16, N 5.
101. Wojnowsky-Krieger S. Über die Beulsicherheit von Kreisplatten mit kreiszylindrischer Anisotropie. Ing. Archiv, 1958, 26, N 2.
102. Yamaki N. Buckling of a thin annular plate under uniform

compression. J. Appl. Mech., 1958, 25, No. 2.

103. Zawidzki I., Sawczuk I. Plastic analysis of reinforced plates under axial symmetry. Int. J. Solids and Structures, 1967, 3, No. 3.