LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

# EKSPERTU NOVĒRTĒJUMU AGREGĀCIJA, BALSTOTIES UZ EKVIVALENCES ATTIECĪBU

BAKALAURA DARBS

Autors: **Jana Fedotova**
St. apliecības numurs: jp12055
Darba vadītāja: profesore, Dr. math. Svetlana Asmuss

Rīga 2016

# ANOTĀCIJA

Darbs ir veltīts vispārinātā agregācijas operatora speciālai konstrukcijai, kas balstīts uz nestriktu ekvivalences attiecību. Darba mērķis ir aprakstīt kā var agregēt ekspertu novērtējumus gadījumā, kad starp novērtētiem objektiem pastāv līdzība, kas uzdota ar nestriktu ekvivalences attiecību. Piedāvātā metode ir ilustrētā ar ekonomiska rakstura piemēru.

**Atslēgvārdi:** agregācijas operators, vispārinātais agregācijas operators, t-normas, nestriktas ekvivalences attiecība.

# ANNOTATION

The thesis deals with the special construction of a general aggregation operator based on a fuzzy equivalence relation. The goal of this work is to aggregate experts evaluations in case when there is similarity between evaluated objects, which is given with a fuzzy equivalence relation. Offered method is illustrated with an economic example.

**Keywords:** aggregation operator, general aggregation operator, t-norm, fuzzy equivalence relation.

# SATURS

# IEVADS

Mūsdienās investīciju kompānijas apskata investīciju iespējas par savā starpā ekvivalentiem objektiem. Pirms lēmuma pieņemšanas, šādas kompānijas vēršas pēc riska analītiķa (eksperta) viedokļa. Katrs eksperts izsaka savu novērtējumu par objektiem. Mērķis ir iegūt kopējo novērtējumu par šiem objektiem. Viens variants kā to izdarītu ir aprēķināt ekspertu novērtējumu vidējo vērtību. Tomēr šādi iegūtais novērtējums var būt neprecīzs, jo ir nepieciešams ņemt vērā ka eksperti novērtē līdzīgus objektus.

Lai iegūtu kopējo riska līmeņa novērtējumu darbā tiek pielietotā speciālā agregācijas operatora konstrukcija, kura tika ievesta P. Orlova promocijas darbā (skatīt [1]). Šāda vispārinātā agregācijas operatora konstrukcija ir balstīta uz nestriktas ekvivalences attiecības. Šāda nestrikta ekvivalences attiecība parāda ar kādu pakāpi dotie objekti savā starpā ir līdzīgi.

Darbā būs aprakstīts, kā tiek uzkonstruēta nestriktas ekvivalences matrica. Kā arī būs analizēts kā ekvivalences matrica ietekmē kopējo rezultātu.

Lai parādītu kā praktiski pielietot šādu vispārinātu agregācijas operatoru un kā iegūt nestriktu ekvivalences matricu par objektiem tika paņemtas valstis un savākti šo valstu ekonomiskie rādītāji, ar kuru palīdzību tika iegūta ekvivalences attiecība.

Visiem aprēķiniem tika izmantots MS Excel.

Darbs sastāv no 4 nodaļām. Pirmajā nodaļā ir aprakstīta un ilustrēta ar piemēru uzdevuma nostādne. Otrajā un trešajā nodaļā ir aprakstīti rīki ko lieto, lai risinātu dotu uzdevumu. Ceturtajā nodaļā, no sākuma tika analizēts piemērs no [1], lai saprastu kurus agregācijas operatorus un t-normas izmantot, lai iegūtu labāko rezultātu. Kā arī ceturtajā nodaļā ir apstrādāti reāli dati, ar kura palīdzību tika iegūta ekvivalences attiecību matrica. Tālāk ar šī matrica tika pielietota kopā ar speciālu agregācijas operatora konstrukciju, lai agregētu eksperta novērtējumu. Beigās tika analizēts, kā ekvivalences attiecību matrica ietekmē kopējo riska līmeni.

# 1. PROBLĒMAS NOSTĀDNE

Lēmumu pieņemšanas procesā var rasties situācija, kad ar nestriktām kopām ir uzdoti vairāku ekspertu novērtējumi (turpmāk ekspertu skaitu apzīmēsim ar $n$) objektiem, starp kuriem pastāv līdzība. Šādu līdzību starp objektiem var uzdod ar nestriktu ekvivalences attiecību.

Pieņemsim, ka objekti veido kopu $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, kur $x_1, x_2, \dots$ ir kaut kādi objekti. Vispārīgajā gadījumā kopa $X$ var būt gan galīga, gan bezgalīga. Darbā ir pieņemts, ka eksperti vērtē objektus no galīgas kopas $X$ (objektu skaitu apzīmēsim ar $m$). Katra eksperta objektu novērtējums var būt uzdots kā kopas $X$ nestrikta apakškopa.

**1.1. Definīcija** [1]. Par nestriktu kopu $\mu$ universālā kopā $X$ (kopas $X$ nestriktu apakškopu) sauc attēlojumu $\mu: X \to [0, 1]$. Visu kopas $X$ nestriktu apakškopu kopu apzīmē ar $[0, 1]^X$.

Apskatīsim konkrētu piemēru, ar kuru ir ilustrēts kā eksperta viedokļi var būt uzdoti ar nestriktu kopu palīdzību.

**1.1. Piemērs** [1]. Piemēram aplūkosim, investīciju kompāniju, kura apskata investīciju iespējas dažādās valstīs. Pirms lēmuma pieņemšanas ir nepieciešams iegūt kopējo novērtējumu (riska līmeni) par katru no objektiem. Šo riska līmeņu novērtējums balstās uz riska analītiķa (eksperta) viedokļa. Pieņemsim, ka ir dota kopa, kas sastāv no pieciem objektiem:

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

Pieņemsim, ka ir doti četri eksperti. Katrs eksperts izsaka savu viedokli par katru no objektiem:

$$\mu_i: X \to [0,1], i = 1,2,3,4.$$

Šeit $\mu_i(x)$ ir $i$-tā eksperta atzīme par objektu $x$ no kopas $X$ (jo tuvāk novērtējums ir 1, jo valsts skaitās riskantāka).

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.9 \\ 0.5 \\ 0.9 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 0.5 \\ 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.5 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \mu_4 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.9 \\ 0.3 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Viens no variantiem kā noteikt kopējo novērtējumu (riska līmeni) no ekspertu viedokļiem ir izmantot parasto vidējo vērtību:

$$\bar{\mu}_j(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(x_j)}{n}, j = 1, \dots, m.$$

Veicot aprēķinus, tika iegūts šāds vektors:

$$\bar{\mu} = \begin{pmatrix} 0.48 \\ 0.78 \\ 0.43 \\ 0.75 \\ 0.35 \end{pmatrix}.$$

Tā kā darbā ir pieņemts, ka starp objektiem pastāv līdzība, tad šādu līdzību var aprakstīt ar nestriktas ekvivalences attiecības palīdzību (nestrikta ekvivalences attiecība tiks nodefinēta tālāk). Tā kā šajā darbā objektu kopa $X$ ir galīga, tad nestriktu attiecību $E: X \times X \to [0,1]$ ir ērti uzdod ar matricas palīdzību:

$$E = \left(e_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,m}.$$

Matricas $E$ elementi $e_{ij}$ parāda ar kādu pakāpi objekti $x_i$un $x_j$ $(i, j = 1, \dots, m)$ no kopas $X$ ir savā starpā līdzīgi.

**1.1. Piemērs** (turpinājums). Pieņemsim, ka ir dota šāda nestrikta ekvivalences matrica:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.4 & 0.2 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 & 1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Var redzēt, ka elementi $x_1$ un $x_2$ ir ekvivalenti ar pakāpi 0.9. Tajā pašā laikā novērtējuma $\bar{\mu}$ pirmās divas komponentes ir ļoti atšķirīgas. Būtu pareizi veicot ekspertu novērtējumu agregāciju, ņemt vērā šādu objektu līdzību.

Tālāk darbā tiks aprakstīts kā iegūt riska līmeni, kurš ņems vērā nestriktu ekvivalences attiecību.

# 2. NESTRIKTA EKVIVALENCES ATTIECĪBA

Šajā sadaļā apskatīsim nestriktas ekvivalences attiecības un t-normas definīcijas, ka arī aprakstīsim kā var uzbūvēt ekvivalences attiecību, lietojot metriku.

## 2.1. T-normas

Apskatīsim t-normas definīciju un piemērus, kā arī ar t-normām saistītus rezidijus.

**2.1. Definīcija** [1]. Par t-normu sauc attēlojumu $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, kas apmierina šādus nosacījumus visiem $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$:

$(T1)$ $komutativit\bar{a}te: T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$;

$(T2)$ $asociativit\bar{a}te: T(T(\alpha, \beta), \gamma) = T\big(\alpha, T(\beta, \gamma)\big)$;

$(T3)$ $monotonit\bar{a}te: \alpha \leq \beta \Longrightarrow T(\alpha, \gamma) \leq T(\beta, \gamma)$;

$(T4)$ $1\ ir\ neitr\bar{a}lais\ elements: T(\alpha, 1) = \alpha.$

Ņemot vērā t-normas asociativitāti, var izmantot t-normu $n$ argumentu gadījumā:

$T(\alpha_1, \alpha_2, \dots., \alpha_n) = T(T(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}), \alpha_n)$ visiem $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in [0,1], n \geq 3$.

**2.2. Definīcija** [1]. T-normu $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sauc par pusnepārtrauktu no augšas, ja katrai elementu saimei $(\alpha_i)_{i \in I}$ no $[0,1]$ un katram $\beta \in [0,1]$ ir spēkā:

$$\inf_{i \in I} T(\alpha_i, \beta) = T\left(\inf_{i \in I} \alpha_i\ , \beta\right).$$

**2.3. Definīcija** [1]. T-normu $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sauc par pusnepārtrauktu no apakšas, ja katrai elementu saimei $(\alpha_i)_{i \in I}$ no $[0,1]$ un katram $\beta \in [0,1]$ ir spēkā:

$$\sup_{i \in I} T(\alpha_i, \beta) = T\left(\sup_{i \in I} \alpha_i, \beta\right).$$

**2.4. Definīcija** [1]. T-normu $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sauc par nepārtrauktu, ja tā ir pusnepārtraukta gan no augšas, gan no apakšas.

Apskatīsim dažus t-normu piemērus, kuri tālāk darbā arī tiks izmantoti.

**2.1. Piemērs** [1]. Minimuma t-norma $T_M$:

$$T_M(\alpha, \beta) = \min(\alpha, \beta).$$

**2.2. Piemērs** [1]. Reizinājuma t-norma $T_P$:

$$T_P(\alpha, \beta) = \alpha \cdot \beta.$$

**2.3. Piemērs** [1]. Vajā t-norma $T_W$:

$$T_w(\alpha,\beta) = \begin{cases} \min(\alpha,\beta)\,, ja\max(\alpha,\beta) = 1 \\ 0, ja\max(\alpha,\beta) < 1 \end{cases}.$$

**2.4. Piemērs** [1]. Lukaševiča t-norma $T_L$:

$$T_L(\alpha,\beta) = \max\{\alpha+\beta-1{,}0\}.$$

**2.5. Definīcija** [3]. Par pusnepārtrauktas no apakšas t-normas $T\colon[0{,}1]\times[0{,}1]\to[0{,}1]$ rezidiju sauc attēlojumu $\vec{T}$ tādu, ka visiem $\alpha,\beta\ \in[0{,}1]$:

$$\vec{T}(\alpha|\beta) = \sup\{\lambda\in[0{,}1]|\,T(\lambda,\alpha)\le\beta\}.$$

Aplūkosim sekojošas rezidija pamatīpašības [1]:

$(\vec{T}1)$ $\vec{T}(\alpha|\beta) = 1\ \Leftrightarrow\alpha\le\beta$;

$(\vec{T}2)$ $\vec{T}(1|\beta) = \beta$;

$(\vec{T}3)$ $\vec{T}(0|\beta) = 1$;

$(\vec{T}4)$ rezidijs ir neaugoša funkcija pēc pirmā argumenta un nedilstoša funkcija pēc otrā argumenta:

$$\alpha_1\le\alpha_2\Rightarrow\vec{T}(\alpha_1|\beta)\ge\vec{T}(\alpha_2|\beta);$$

$$\beta_1\le\beta_2\Rightarrow\vec{T}(\alpha|\beta_1)\le\vec{T}(\alpha|\beta_2);$$

$(\vec{T}5)$ $T(\gamma,\alpha)\le\beta\Leftrightarrow\gamma\le\vec{T}(\alpha|\beta)$ (šeit $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\beta,\beta_1,\beta_2,\gamma\in[0{,}1]$).

Aplūkosim dažu t-normu $T_L, T_M$ un $T_P$ rezidijus [1]:

1) $\vec{T}_L(\alpha|\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha\le\beta, \\ 1-\alpha+\beta, & \alpha>\beta; \end{cases}$

2) $\vec{T}_M(\alpha|\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha\le\beta, \\ \beta, & \alpha>\beta; \end{cases}$

3) $\vec{T}_P(\alpha|\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha\le\beta, \\ \frac{\beta}{\alpha}, & \alpha>\beta. \end{cases}$

## 2.2. Nestriktas ekvivalences attiecība

**2.6. Definīcija** [2]. Par nestriktu attiecību $E$ starp kopu $X$ un $Y$ elementiem sauc šo kopu reizinājuma nestriktu apakškopu, t.i.,

$$E\colon X\times Y\to[0{,}1].$$

Gadījumā, ja kopas $X$ un $Y$ ir galīgas, nestriktu attiecību $E\colon X\times Y\to[0{,}1]$ ir ērti uzdod ar matricas palīdzību. Piemēram, ja $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ un $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$, tad matrica

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \end{pmatrix}$$

apraksta nestriktu attiecību $E: X \times Y \to [0,1]$ tādu, ka $E(x_i, y_j) = e_{ij}, i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 4$.

**2.7. Definīcija** [3]. Pieņemsim, ka *T* ir t-norma un *E* ir nestrikta attiecība kopā *X*, t.i., *E* ir $X \times X$ nestrikta apakškopa. Nestriktu attiecību *E* sauc par *t-nestriktu* ekvivalences attiecību, ja visiem $x, y, z \in X$ ir spēkā:

$(E1)$ $E(x,x) = 1$ $(refleksivitāte)$;

$(E2)$ $E(x,y) = E(y,x)$ $(simetrija)$;

$(E3)$ $T(E(x,y), E(y,z)) \leq E(x,z)$ $(T - tranzitivitāte)$.

Uzdodot nestriktu ekvivalences attiecību ar matricu, refleksivitāte nozīme, ka uz galvenās diagonāles būs vieninieki. Simetriskuma īpašība nozīme tieši to, ka attiecīga matrica ir simetriska. Lielāko grūtību sagādā T-transitivitātes pārbaude. T-transitivitāti ir jāpārbauda atkarībā no izvēlētās t-normas.

**2.5. Piemērs** [2]. Apskatīsim nestriktu ekvivalences attiecību:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.8 & 1 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 1 & 0.7 & 0.7 \\ 1 & 0.8 & 0.7 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}.$$

No matricas var uzreiz redzēt, ka izpildās refleksivitāte un simetriskums. Var pārbaudīt, ka šī matrica ir $T_M$-transitīva (t.i., transitīva attiecībā pret minimuma t-normu $T_M$):

$$\min(e_{12}; e_{23}) \leq e_{13},$$

$$\min(e_{23}; e_{34}) \leq e_{24} \text{ utt.}$$

## 2.3. Nestriktas ekvivalences attiecības konstruēšana ar metrikas palīdzību

Šajā sadaļā aprakstīsim kā var uzbūvēt nestriktu ekvivalences attiecību ar metrikas palīdzību.

**2.8. Definīcija:** Par metriku kopā *X* sauc funkciju $d: X \times X \to R$, kurai visiem $x, y, z \in X$ izpildās:

(M1) $d(x,y) \geq 0$ $(nenegativitāte)$;

(M2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(M3) $d(x,y) = d(y,z)$ $(simetrija)$;

(M4) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $(trīsstura\ nevienādība)$.

Lai uzbūvētu nestriktas ekvivalences attiecības matricu, izmantosim formulu:

$$e_{xy} = \frac{1}{1 + d(x,y)}, \qquad x, y \in X \tag{1}$$

Izmantojot formulu (1) iegūtai matricai $E$ neatkarīgi no t-normas izvēles izpildīsies pirmā un otrā īpašība. Grūtības sagādā trešā īpašība $(E3)$, ko vajag pārbaudīt. Piemēram, lietojot formulu, attiecībā pret minimuma t-normu $(T_M)$ īpašība $(E3)$ var neizpildīties, bet vienmēr izpildīsies attiecībā pret Lukaševiča $(T_L)$ un reizinājuma $(T_P)$ t-normām.

**2.6. Piemērs:** Apskatīsim nestriktas ekvivalences attiecības matricu:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.7 \\ 0.5 & 1 & 0.6 \\ 0.7 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apskatot šādu matricu, var pārbaudīt, ka tā ir t-transitīva attiecībā pret Lukaševiča $(T_L)$ un reizinājuma $(T_P)$ t-normām, bet nav $T_M$-transitīva, piemērām no

$$\min(e_{13}, e_{32}) > e_{12}.$$

var redzēt, ka īpašība $(E3)$ neizpildās.

Attiecībā pret Lukaševiča un reizinājuma t-normām, var pārbaudīt tiešā veidā, piemēram:

$$\max(e_{12} + e_{23} - 1, 0) \leq e_{13},$$

$$\max(e_{21} \cdot e_{13} - 1, 0) \leq e_{23} \text{ utt.},$$

un

$$e_{12} \cdot e_{23} \leq e_{13},$$

$$e_{21} \cdot e_{13} \leq e_{23} \text{ utt.},$$

bet tālāk būs pierādīts vispārīgām gadījumam.

**Pamatojums:**

1) Pierādīsim, ka nestrikta attiecība $E$, kas uzdota ar formulu (1), ir $T_P$-transitīva. Pārbaudīsim $(E3)$ īpašību jebkuriem elementiem $x, y, z \in X$. Vajag pierādīt nevienādību:

$$\frac{1}{1 + d(x,y)} \cdot \frac{1}{1 + d(y,z)} \leq \frac{1}{1 + d(x,z)}.$$

Pārrakstām nevienādību formā:

$$\big(1 + d(x,y)\big) \cdot \big(1 + d(y,z)\big) \geq 1 + d(x,z).$$

Kreisajā pusē sareizinām iekavas un saīsinām vieniniekus:

$$d(x,y) + d(y,z) + d(x,y)d(y,z) \geq d(x,z).$$

Pēdējā nevienādība izpildās, jo ir spēkā ceturtā metrikas aksioma (M4), par trīsstūra nevienādību.

2) Pierādīsim, ka izmantojot formulu (1), jebkuriem elementiem $x, y, z \in X$ īpašība $(E3)$ izpildās attiecībā pret Lukaševiča t-normu $(T_L)$. Jāpierāda nevienādību:

$$\min\left(\frac{1}{1 + d(x,y)} + \frac{1}{1 + d(y,z)} - 1, 0\right) \leq \frac{1}{1 + d(x,z)}.$$

Acīmredzami, ka nullei nevienādība izpildās. Jāpārbauda, vai

$$\frac{1}{1+d(x,y)}+\frac{1}{1+d(y,z)}-1 \le \frac{1}{1+d(x,z)}$$

būs spēkā. Pārnesīsim vieninieku uz labo pusi un kreisajā pusē vienādosim saucējus:

$$\frac{2+d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z)} \le \frac{1}{1+d(x,z)}+1.$$

Novērtēsim izteiksmi kreisajā pusē:

$$\frac{2+d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z)} \le \frac{2+d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} =$$

$$= \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)}+1.$$

Tātad būs jāpierāda, ka

$$\frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)}+1 \le \frac{1}{1+d(x,z)}+1.$$

Saīsinām vieniniekus un pārrakstām uz ekvivalentu nevienādību:

$$1+d(x,y)+d(y,z) \ge 1+d(x,z).$$

Saīsinot vieniniekus, sanāk trīsstūra nevienādība, tātad īpašība izpildās.

3) Mēģināsim saprast, kāpēc īpašība $(E3)$ var neizpildīties attiecībā pret $T_M$. Ir jāpārbauda:

$$\min\left(\frac{1}{1+d(x,y)},\frac{1}{1+d(y,z)}\right) \le \frac{1}{1+d(x,z)}.$$

Šis apgalvojums būs spēkā, ja kaut viens no minimuma argumentiem būs mazāks par nevienādības labo pusi, t.i.,:

$$\frac{1}{1+d(x,y)} \le \frac{1}{1+d(x,z)} \text{ vai } \frac{1}{1+d(y,z)} \le \frac{1}{1+d(x,z)}.$$

To var pārrakstīt, kā

$$1+d(x,y) \ge 1+d(x,z) \text{ vai } 1+d(y,z) \ge 1+d(x,z)$$

Vieninieki saīsinās un apgalvojumu var pārrakstīt:

$$d(x,y) \ge d(x,z) \text{ vai } d(y,z) \ge d(x,z).$$

Pēdējo nevienādību var pārrakstīt ekvivalentā formā:

$$\max(d(x,y),d(y,z)) \ge d(x,z)$$

Pēdējā nevienādība neizriet no trīsstūra nevienādības.

## 2.4. Ekspertu novērtējumu agregācijai izmantotā ekvivalences attiecība

Šajā nodaļā tiks aprakstīts, kā tiek uzbūvēta nestrikta ekvivalences matrica, 4. nodaļas riska novērtējuma agregācijai.

**2.7. Piemērs:** Pieņemsim, ka kopa $X$ sastāv no pieciem objektiem. Šajā piemērā par objektiem paņemsim piecas valstis. Apskatīsim piemēru, kad attālums starp valstīm tiks uzdots uz ekonomisko rādītāju pamata. Ņemsim vērā šādus ekonomiskos rādītājus:

1) ekonomiskā izaugsme (IKP ikgadējās izmaiņas %) (angl. *Economic Growth (GPD annual variation in %)*)
2) rūpnieciskā ražošana (ikgadējās izmaiņas %) (angl. *Industrial Production (annual variation in %)*)
3) bezdarba līmenis (angl. *Unemployment Rate*)
4) valsts parāds (% no IKP) (angl. *Public Debt (% of GDP)*)
5) Tekošais konts (% no IKP) (angl. *Current Account (% of GDP)*)

Ekonomisko rādītāju skaitu apzīmēsim ar $K$. Visi savāktie dati par objektiem ir apkopoti 2.1. tabulā.

*2.1. tabula* **Ekonomiskie rādītāji par piecām valstīm**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ekonomiskā izaugsme (IKP, ikgadējās izmaiņas %) | 1.04 | 0.99 | 1.00 | -0.48 | -0.50 |
| Rūpnieciskā ražošana (ikgadējās izmaiņas %) | 1.60 | 0.98 | 1.06 | -0.92 | -1.00 |
| Bezdarba līmenis | 7.00 | 8.02 | 10.72 | 10.00 | 13.50 |
| Valsts parāds (% no IKP) | 83.00 | 100.00 | 19.00 | 77.90 | 95.00 |
| Tekošais konts (% no IKP) | 2.08 | 0.48 | 0.70 | 0.96 | -1.00 |

No 2.1. tabulas var redzēt, ka rādītāji ir ļoti atšķirīgi, tāpēc ir nepieciešams šos rādītājus normēt pēc katra rādītāja vidējās vērtības. Normētie dati ir apkopoti 2.2. tabulā.

*2.2. tabula* **Normētie ekonomiskie rādītāji**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ekonomiskā izaugsme (IKP, ikgadējās izmaiņas %) | 2.54 | 2.41 | 2.44 | -1.17 | -1.22 |
| Rūpnieciskā ražošana (ikgadējās izmaiņas %) | 4.65 | 2.85 | 3.08 | -2.67 | -2.91 |
| Bezdarba līmenis | 0.71 | 0.81 | 1.09 | 1.02 | 1.37 |
| Valsts parāds (% no IKP) | 1.11 | 1.33 | 0.25 | 1.04 | 1.27 |
| Tekošais konts (% no IKP) | 3.23 | 0.75 | 1.09 | 1.49 | -1.55 |

Izejot no 2.2. tabulas, katru objektu uzdosim kā vektoru. Tālāk no šiem datiem ir nepieciešams aprēķināt attālumus (metrikas) starp objektiem. Tā kā objekti pieder Eiklīda telpai, tad metrika var aprēķināt pēc formulas:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{K}(x_k - y_k)^2}, \qquad x,y \in \mathbb{R}^K,$$

(mūsu gadījumā $K = 5$). Iegūtie attālumi ir apkopoti 2.3. tabulā.

*2.3. tabula* **Attālumi starp objektiem**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 3.08 | 2.82 | 8.40 | 9.72 |
| 2 | 3.08 | 0.00 | 1.19 | 6.64 | 7.21 |
| 3 | 2.82 | 1.19 | 0.00 | 6.85 | 7.57 |
| 4 | 8.40 | 6.64 | 6.85 | 0.00 | 3.08 |
| 5 | 9.72 | 7.21 | 7.57 | 3.08 | 0.00 |

Visbeidzot ar formulas (1) palīdzību tika iegūta nestriktas ekvivalences attiecības matrica:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.24 & 0.26 & 0.11 & 0.09 \\ 0.24 & 1 & 0.46 & 0.13 & 0.12 \\ 0.26 & 0.46 & 1 & 0.13 & 0.12 \\ 0.11 & 0.13 & 0.13 & 1 & 0.24 \\ 0.09 & 0.12 & 0.12 & 0.24 & 1 \end{pmatrix}.$$

Var redzēt, ka iegūtajai matricai skaitļi, kas parāda līdzības pakāpi, ir ļoti mazi. Piemēram, var redzēt, ka attālums starp 1. un 2. ir ļoti mazs, t.i., valstis savā starpā ir ļoti līdzīgas. Tas nozīmē, ka ekvivalences pakāpei ir jābūt lielai, bet ekvivalences pakāpe ir vienāda ar 0.24. Ja nenovērš šādu problēmu, tad iegūto matricu nevar efektīvi izmantot.

Lai varētu uzlabot nestrikto ekvivalenci, formulā (1) ir nepieciešams ievest papildus parametru. Šādu parametru apzīmēsim ar $c$. Pēc parametra ieviešanas formula (1) izskatīsies šādi:

$$e_{xy} = \frac{1}{1 + cd(x,y)}, x, y \in X.$$

Lai noteiktu kādam ir jābūt parametram $c$, apskatīsim funkciju:

$$\varphi_c(t) = \frac{1}{1 + ct}, t \geq 0.$$

Šajā funkcijā argumenta $t$ loma būs metrika $d(x,y)$. Intervāls, kurā ir jāapskata doto funkciju ir atkarīgs no intervāla, kurā atrodas metrika $d(x,y)$. Tā kā 2. piemērā metrika atrodas intervālā [0,1]:

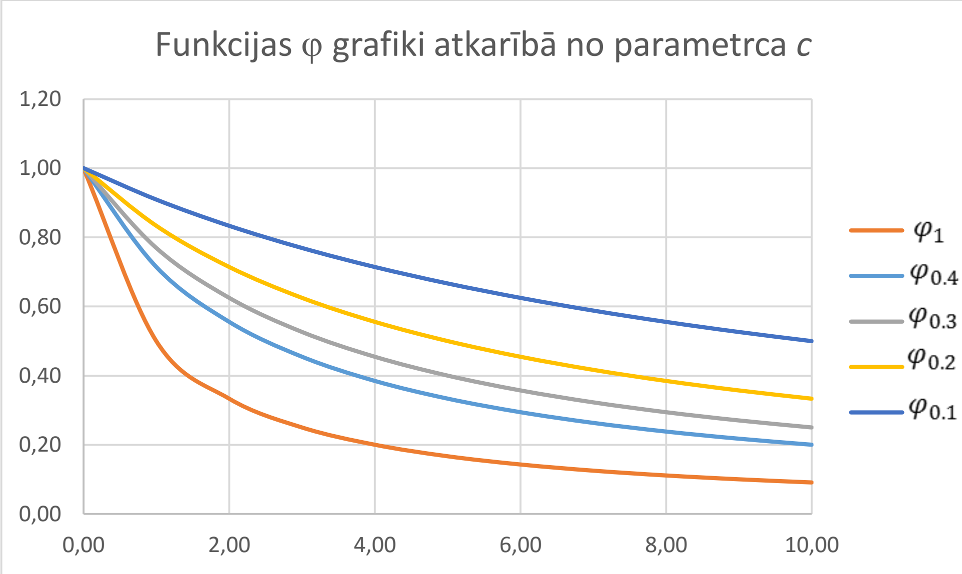
$$0 \leq d(x,y) \leq 10, \text{visiem } x, y \in X,$$

tad funkcijas argumenta $t$ vērtības apskatīsim no intervālā [0,1]. Ka arī paņemsim dažas parametra $c$ vērtības. Funkcijas vērtības var apskatīt 2.4. tabulā.

*2.4. tabula* **Funkcijas $\varphi$ vērtības**

| $t$ | $\varphi_1$ | $\varphi_{0.4}$ | $\varphi_{0.3}$ | $\varphi_{0.2}$ | $\varphi_{0.1}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 | 1.00 |
| 1.00 | 0.50 | 0.71 | 0.77 | 0.83 | 0.91 |
| 2.00 | 0.33 | 0.56 | 0.63 | 0.71 | 0.83 |
| 3.00 | 0.25 | 0.45 | 0.53 | 0.63 | 0.77 |
| 4.00 | 0.20 | 0.38 | 0.45 | 0.56 | 0.71 |
| 5.00 | 0.17 | 0.33 | 0.40 | 0.50 | 0.67 |
| 6.00 | 0.14 | 0.29 | 0.36 | 0.45 | 0.63 |
| 7.00 | 0.13 | 0.26 | 0.32 | 0.42 | 0.59 |
| 8.00 | 0.11 | 0.24 | 0.29 | 0.38 | 0.56 |
| 9.00 | 0.10 | 0.22 | 0.27 | 0.36 | 0.53 |
| 10.00 | 0.09 | 0.20 | 0.25 | 0.33 | 0.50 |

Funkciju $\varphi_c$ grafikus pie 2.4. tabulā apskatītiem parametra $c$ vērtībām var redzēt 2.1. attēlā.




*2.1. att.* **Funkcijas $\varphi$ grafiku atkarībā no parametra $c$**

Grafiki no 2.1. attēla palīdzēs izvēlēties piemērotāko parametra $c$ vērtību.

Lai dotajā piemērā palielinātu ekvivalences pakāpi varētu paņemt parametru $c = 0.2$. Ieviešot parametru $c$, iegūstam jauno nestriktu ekvivalences attiecības matricu:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0.62 & 0.64 & 0.37 & 0.34 \\ 0.62 & 1 & 0.81 & 0.43 & 0.41 \\ 0.64 & 0.81 & 1 & 0.42 & 0.40 \\ 0.37 & 0.43 & 0.42 & 1 & 0.62 \\ 0.34 & 0.41 & 0.40 & 0.62 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ļoti bieži, apstrādājot reālus datus, rodas situācijas, kad iegūtie rezultāti var neatbilst reālai situācijai. Tieši tāpēc tika ievests parametrs $c$, kas ļauj šo situāciju uzlabot.

# 3. AGREGĀCIJAS OPERATORI

Šajā nodaļā tiks dotas definīcijas un piemēri, kas saistītas ar agregācijas operatoriem.

Agregācija ir process, kas apvieno dažādas skaitliskās vērtības vienā vērtībā. Matemātiski agregācijas operatoru definē kā funkciju, kura attēlo vairākas vērtības no vienas kopas uz vienu vērtību no šis kopas.

## 3.1. Klasiskie agregācijas operatori

**3.1. Definīcija** [3]. Attēlojumu $A\colon \cup_n [0,1]^n \to [0,1]$ sauc par agregācijas operatoru, ja izpildās šādi nosacījumi:

$(A1)$ $A(0, \dots, 0) = 0$;

$(A2)$ $A(1, \dots, 1) = 1$;

$(A3)$ $\forall n \ \in N$ un $\forall t_1, \dots, t_n, \tau_1, \dots, \tau_n \in [0,1]$:

$$t_i \leq \tau_i, i = 1, \dots, n \Rightarrow A(t_1, \dots, t_n) \leq A(\tau_1, \dots, \tau_n).$$

Nosacījumus $(A1)$ un $(A2)$ sauc par operatora $A$ robežnosacijumiem, bet $(A3)$ ir $A$ monotonitātes nosacījums.

Tālāk apskatīsim dažādas agregācijas operatora īpašības [1]:

1. **Simetriskums:**

$\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1] \ \forall \pi \ A(t_1, \dots, t_n) = A\big(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}\big)$, kur $\pi\colon N \to N$ ir permutācijas un $N = \{1, \dots, n\}$.

2. **Asociativitāte:**

$$\forall t_1, t_2, t_3 \in [0,1] \ A(t_1, t_2, t_3) = A(A(t_1, t_2), t_3) = A\big(t_1, A(t_2, t_3)\big).$$

3. **Idempotence:**

$$\forall t \in [0,1] \ A(t, t, \dots, t) = t.$$

4. **Absorbējošā elementa eksistence:**

$$\exists a \in [0,1] \quad \forall i \in 1, \dots, n \ \forall t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in [0,1]$$
$$A(t_1, \dots t_{i-1}, a, t_{i+1}, \dots., t_n) = a.$$

5. **Neitrālā elementa eksistence:**

$$\exists u \in [0,1] \quad \forall i \in 1, \dots, n \ \forall t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in [0,1]$$
$$A(t_1, \dots t_{i-1}, u, t_{i+1}, \dots., t_n) = A(t_1, \dots t_{i-1}, t_{i+1}, \dots., t_n).$$

6. **Homogenitāte, reizinot operatoru ar nenegatīvo skaitli:**

$$\forall r \geq 0, \forall t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1] \ \ r \cdot t_i \in [0,1], i = 1, \dots, n \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(r \cdot t_1, \dots, r \cdot t_n) = r \cdot A(t_1, \dots, t_n).$$

7. **Stabilitāte pret nenegatīvu lineāru transformāciju:**

$$\forall r \geq 0, \forall p, t_1, t_2, \dots, t_n \in [0,1] \;\; r \cdot t_i + p \in [0,1], i = 1, \dots, n \implies$$
$$\implies A(r \cdot t_1 + p, \dots, r \cdot t_n + p) = r \cdot A(t_1, \dots, t_n) + p.$$

## 3.2. Agregācijas operatoru piemēri

Šajā nodaļā apskatīsim agregācijas operatoru piemērus, ka arī noteiksim, kādi operatori tiks izmantoti darbā. Šo operatoru argumenti var būt paņemti no jebkura slēgta intervāla uz reālās taisnes [1].

Viens no populārākajiem agregācijas operatoriem ir aritmētiskais vidējais:

$$AVG(t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i.$$

Šīs operators būs izmantots tālāk.

Otrais operators (iepriekš apskatītā operatora $AVG$ vispārinātais gadījums) ir nosvērtais vidējais:

$$W_{w_1,\dots,w_n}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i t,$$

kur $w_1, \dots, w_n \geq 0$ un $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$.

Parametrus $w_i, i = 1, \dots, n$ sauc par svariem. Tālāk aprakstīsim uz operatora $W_{w_1,\dots,w_n}$ pamata uzdotās agregācijas $WAVG$ un $ZAVG$. Lai noteiktu, kādus nosvērtos vidējos operatorus izmantot agregējot vērtības $t_1, \dots, t_n$, ir jānoskaidro, kādus svarus jāizmanto. Bet vispirms sakārtosim vērtības augošā secībā. Lai to izdarītu ieviesīsim permutāciju $\pi: N \to N$ ar nosacījumu

$$t_{\pi(1)} \leq t_{\pi(2)} \leq \dots \leq t_{\pi(n)},$$

kas sakārto skaitļus $t_1, \dots, t_n$ augošā secībā.

Kopā darbā tiks izmantoti divi nosvērtie vidējie operatori ar dažādiem svariem. Pirmajā gadījumā, viedokļiem ar numuriem $\pi(1)$ un $\pi(n)$ svari būs paņemti divreiz mazāki nekā pārējiem viedokļiem, tādā veidā samazinot lielāka un mazākā novērtējuma ietekmi. Tātad, ieviesīsim svarus:

$$w_1 = \alpha$$
$$w_2 = 2\alpha$$
$$\dots$$
$$w_{n-1} = 2\alpha$$

$$w_n = \alpha$$

No svaru īpašības izriet, ka

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 2\alpha + 2\alpha(n-1) = 2\alpha(n-1) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Tātad svari būs:

$$w_1 = \alpha = \frac{1}{2(n-1)},$$

$$w_2 = 2\alpha = \frac{1}{(n-1)},$$

$$\dots$$

$$w_{n-1} = 2\alpha = \frac{1}{(n-1)},$$

$$w_n = \alpha = \frac{1}{2(n-1)}.$$

Turpmāk operatoru ar šādiem svariem apzīmēsim $WAVG$:

$$WAVG(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i t_{\pi(i)}.$$

Otrajā gadījumā tiks izslēgti pirmā un pēdējā eksperta viedokļi, tādā veidā novēršot novērtējumu ar numuriem $\pi(1)$ un $\pi(n)$ ietekmi. Ieviesīsim svarus:

$$w_1 = 0,$$

$$w_i = \alpha, i = 2, \dots, n-1,$$

$$w_n = 0.$$

No svaru īpašības izriet, ka

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 0 + \alpha + \cdots + \alpha + 0 = \alpha(n-2) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{(n-2)}.$$

Tātad svari būs:

$$w_1 = 0,$$

$$w_i = \frac{1}{n-2}, i = 2, \dots, n-1,$$

$$w_n = 0.$$

Tālāk šādu operatoru apzīmēsim ar $ZAVG$:

$$ZAVG(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i t_{\pi(i)}.$$

Turpmāk ērtībai visus operatorus rakstīsim bez argumentiem. Minēsim arī dažus agregācijas operatoru piemērus, kas turpmāk darbā netiks izmantoti.

**3.1. Piemērs** [1]. Ģeometriskais vidējais:

$$A_G(t_1, \dots, t_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{\frac{1}{n}}, t, \dots, t_n \geq 0.$$

**3.2. Piemērs** [1]. Harmoniskais vidējais:

$$A_H(t_1, \dots, t_n) = \frac{n}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}}, \quad t_1, \dots, t_n > 0.$$

## 3.3. Vispārinātais agregācijas operators

Ar $\preccurlyeq$ apzīmēsim daļēju sakartojumu uz $[0,1]^X$. Ar $\tilde{0}$ un $\tilde{1}$ apzīmēsim šī sakārtojuma mazāko un lielāko elementus (kopu $\emptyset$ un $X$ indikatorus):

$$\tilde{0}(x) = 0 \text{ un } \tilde{1}(x) = 1 \text{ visiem } x \in X.$$

**3.2. Definīcija** [3]. Attēlojumu $\tilde{A}: \bigcup_n ([0,1]^X)^n \to [0,1]^X$ sauc par vispārināto agregācijas operatoru, ja izpildās sekojošās aksiomas:

$(\tilde{A}1)$ $\tilde{A}(\tilde{0}, \dots, \tilde{0}) = \tilde{0}$;

$(\tilde{A}2)$ $\tilde{A}(\tilde{1}, \dots, \tilde{1}) = \tilde{1}$;

$(\tilde{A}3)$ $\forall\, n \in N$ un $\forall\, \mu_1, \dots, \mu_n, \eta_1, \dots, \eta_n \in [0,1]^X$:

$$\mu_1 \preccurlyeq \eta_1, \dots, \mu_n \preccurlyeq \eta_n \Longrightarrow \tilde{A}(\mu_1, \dots, \mu_n) \leq \tilde{A}(\eta_1, \dots, \eta_n).$$

Attēlojumu $\tilde{A}: ([0,1]^X)^{\mathrm{n}} \to [0,1]^X$ sauc $n$-āro vispārināto agregācijas operatoru. Šeit $[0,1]^X$ ir visu kopas $X$ nestriktu apakškopu kopa.

Eksistē vairākas metodes kā konstruēt vispārināto agregācijas operatoru $\tilde{A}$ balstoties un parastā agregācijas operatora $A$. Vienkāršākais variants ir agregācijas operatora $A$ punktveida turpinājums [3]:

$$\tilde{A}(\mu_1, \dots, \mu_n)(x) = A(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)),$$

kur $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0,1]^X$ ir nestriktas kopas un $x \in X$.

Plaši izmantota ir vispārinātā agregācijas operatora T-turpinājuma konstrukcija (T it t-norma) [3]:

$$\tilde{A}^T(\mu_1, \dots, \mu_n)(x) = \sup_{x = A(x_1, \dots, x_n)} T(\mu_1(x), \dots, \mu_n(x)),$$

šeit $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0,1]^X$ un $x, x_1, \dots, x_n \in X,$ kur $X = [0,1]$.

## 3.4. Uz nestriktas ekvivalences attiecības balstīts vispārinātais agregācijas operators

Vispārinātais agregācijas operators, kas balstīts uz ekvivalences attiecības ir speciāli uzkonstruētais vispārinātais agregācijas operators.

**3.3. Definīcija** [1]. Ja $A: [0,1]^n \to [0,1]$ ir $n$-ārais agregācijas operators, $T$ ir pusnepārtraukta no apakšas t-norma, $\vec{T}$ ir šīs t-normas rezidijs un $E$ ir $T$-nestrikta ekvivalences attiecība kopā $X$, tad augšējais un apakšējais vispārinātie agregācijas operatori $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ ir definēti attiecīgi:

$$\tilde{A}_{E,T}(\mu_1, \dots, \mu_n)(x) = \sup_{x' \in X} T(E(x,x'), A(\mu_1(x'), \dots, \mu_n(x'))),$$

$$\tilde{A}_{E,\vec{T}}(\mu_1, \dots, \mu_n)(x) = \inf_{x' \in X} \vec{T}(E(x,x'), A(\mu_1(x'), \dots, \mu_n(x'))),$$

kur $x \in X$ un $\mu_1, \dots, \mu_n \in [0,1]^X$.

Šīs konstrukcijas var uzskatīt par augšējo un apakšējo vispārinātā agregācijas operatora $\tilde{A}$ aproksimācijām, kur $\tilde{A}$ ir parastā agregācijas operatora punktveida turpinājums, t.i., $\forall\, \mu_1, \dots, \mu_n \in [0,1]^X$ ir spēkā [1]:

$$\tilde{A}_{E,\vec{T}}(\mu_1, \dots, \mu_n) \le \tilde{A}(\mu_1, \dots, \mu_n) \le \tilde{A}_{E,T}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Turpmāk darbā tiks izmantota vispārinātā agregācijas operatora $\tilde{A}$ augšējā aproksimācija. Atzīmēsim, ka, strādājot ar augšējo vispārināto agregācijas operatoru, var nepieprasīt t-normas T pusnepārtrauktību no apakšas. Šīs nosacījums no 3.3. definīcijas ir nepieciešams tikai apakšējā vispārinātā agregācijas operatora konstrukcijai.

Apskatīsim svarīgākas operatoru $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ īpašības, kas var būt iegūtas no agregācijas operatora $A$ īpašībām [1].

1. **Simetrija**. Pieņemsim, ka $\pi: N \to N$ ir permutācija, kur $N = \{1, \dots, n\}$. Ja visiem $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ ir spēkā:

$$A(t_1, \dots, t_n) = A(t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(n)}),$$

tad ir spēkā vienādības:

$$\tilde{A}_{E,T}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \tilde{A}_{E,T}(\mu_{\pi(1)}, \dots, \mu_{\pi(n)}),$$

$$\tilde{A}_{E,\vec{T}}(\mu_1, \dots, \mu_n) = \tilde{A}_{E,\vec{T}}(\mu_{\pi(1)}, \dots, \mu_{\pi(n)})$$

$\forall \mu_1, \dots, \mu_n \in [0,1]^X$.

**2. Asociativitāte.** Agregācijas operatora $A$ asociativitāte vispārīgajā gadījumā nesaglabājas operatoru $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ konstrukcijās.

**3. Absorbējošais elements.** Pieņemsim, ka $M_{ab}$ ir visu parastā agregācijas operatora $A$ absorbējošo elementu kopa, t.i., $\forall d \in M_{ab} \subset [0,1]$ $\forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ un visiem $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in [0,1]$:

$$A(t_1, \dots, t_{i-1}, d, t_{i+1}, \dots, t_n) = d.$$

Tad katra nestrikta kopa $\tilde{d} \in [0,1]^X$ tāda, ka $\tilde{d}$ ir ekstensionālā attiecībā pret $E$ un $\tilde{d}(x) \in M_{ab}$ $\forall x \in X$, ir opertoru $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ absorbējošais elements.

**4. Neitrālais elements.** Pieņemsim, ka $M_{nu}$ ir visu parastā agregācijas operatora $A$ neitrālo elementu kopa, t.i., $\forall u \in M_{nu} \subset [0,1], \forall i \in \{1, \dots, n\}$ un $\forall t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n \in [0,1]$:

$$A(t_1, \dots, t_{i-1}, u, t_{i+1}, \dots, t_n) = A(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

Tad katra nestrikta kopa $\tilde{u} \in [0,1]^X$ tāda, ka $\tilde{u}$ ir ekstensionālā attiecībā pret $E$ un $\tilde{u}(x) \in M_{nu}$ $\forall x \in X$, ir operatoru $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ neitrālais elements.

**5. Idempotentais elements.** Pieņemsim, ka $M_{id}$ ir visu parastā agregācijas operatora $A$ idempotento elementu kopa, t.i., $\forall t \in M_{id} \subset [0,1]$:

$$A(t, \dots, t) = t.$$

Tad katra nestrikta kopa $\mu \in [0,1]^X$ tāda, ka $\mu$ ir ekstensionālā attiecībā pret $E$ un $\mu(x) \in M_{id}$ $\forall x \in X$ ir operatoru $\tilde{A}_{E,T}$ un $\tilde{A}_{E,\vec{T}}$ idempotentais elements.

# 4. EKSPERTU NOVĒRTĒJUMU AGREGĀCIJA

Šajā nodaļā apskatīsim piemēru, ar kura palīdzību tiks noteikts, kā mainās rezultāts atkarībā no izmantotiem rīkiem (t.i. no parastā agregācijas operatora un izmantotās t-normas).

## 4.1. Izmantojamo rīku izvēle

Piemērs, kas tiks apskatīts tālāk ir aprakstīts [1] avotā. Pieņemsim, ka ir vērtētas 8 valstis. Tātad,

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}.$$

Pieņemsim, ka ir doti piecu ekspertu viedokļi par investīciju riska līmeni katrai no dotām valstīm. Eksperta novērtējumi tika apkopoti vektoros:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \mu_2 = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.8 \\ 0.7 \\ 0.8 \\ 0.4 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.5 \\ 0.1 \\ 0.9 \end{pmatrix}, \mu_4 = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1 \\ 0.9 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.7 \\ 0 \\ 0.8 \end{pmatrix}, \mu_5 = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.6 \\ 0.1 \\ 0.7 \end{pmatrix}.$$

Lai iegūtu kopējo riska līmeni par valstīm, vispirms tika pielietoti agregācijas operatori $\left(\widetilde{AVG},\ \widetilde{WAVG},\ \widetilde{ZAVG}\right)$ (vilnītis augšā nozīme parasto agregācijas operatoru $AVG, WAVG, ZAVG$ punktveida turpinājumus).

$$\widetilde{AVG} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.76 \\ 0.76 \\ 0.68 \\ 0.64 \\ 0.50 \\ 0.06 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \widetilde{WAVG} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.38 \\ 0.39 \\ 0.34 \\ 0.33 \\ 0.24 \\ 0.03 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \widetilde{ZAVG} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.38 \\ 0.37 \\ 0.33 \\ 0.30 \\ 0.28 \\ 0.03 \\ 0.42 \end{pmatrix},$$

(iegūto vektoru apzīmējumi šeit un turpmāk atbilsts pielietotā operatora apzīmējumiem). Lietojot vidējo vērtību ($\widetilde{AVG}$), iegūtais rezultāts var neatbilst patiesībai, jo ekspertu viedokļi var būt neobjektīvi un eksperts var nezināt par objektu līdzību. Vidējās svērtas vērtības samazina ($\widetilde{WAVG}$) vai neņem vērā ($\widetilde{ZAVG}$) ekspertu viedokļu lielāko un mazāko novērtējumu, tādā veidā, iespējams, izslēdzot neobjektīvos novērtējumus. Salīdzinot dažādas vidējās vērtības, redzams, ka $\widetilde{WAVG}$ un $\widetilde{ZAVG}$ operatori samazina valstu novērtējumu, bet savā starpā operatori darbojas līdzīgi.

Tālāk pieņemsim, ka ir dota nestriktas ekvivalences attiecība $E$ matricas formā:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 & 0.8 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 & 0.8 & 1 & 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0.7 & 0{,}7 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 1 & 0.9 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Šī matrica ir refleksīva un simetriska, ka arī T-transitīva attiecībā pret dažādām t-normām $(T_M, T_L, T_P, T_W)$.

Turpmāk būs izmantots augšējais vispārinātais agregācijas operators, kas balstīts uz nestriktas ekvivalences attiecības, ar dažādām t-normām un dažādiem parastiem agregācijas operatoriem.

1) Pirmajā gadījumā aprēķinos tiks izmantota minimuma t-norma $T_M$:

$$\widetilde{AVG}_{E,T_M} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.80 \\ 0.80 \\ 0.80 \\ 0.80 \\ 0.70 \\ 0.82 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \widetilde{WAVG}_{E,T_M} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.44 \\ 0.44 \\ 0.44 \\ 0.44 \\ 0.44 \\ 0.41 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \widetilde{ZAVG}_{E,T_M} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.45 \\ 0.45 \\ 0.45 \\ 0.45 \\ 0.45 \\ 0.42 \\ 0.42 \end{pmatrix}.$$

Var redzēt, ka izmantojot minimuma t-normu, novērtējumi izlīdzinās. Tā kā pirmās sešas valstis ar līdzības pakāpi ne mazāku par 0.7, rezultāts viņām ir līdzīgs. Apskatot pēdējās divas valstis, var redzēt, ka ekspertu viedokļi ir ļoti atšķirīgi, neskatoties uz to ka viņas savā starpā ir līdzīgas. Tāpēc ņemot vērā attiecību $E$ rezultāts izlīdzinās. Operatori $\widetilde{WAVG}_{E,T_M}$ un $\widetilde{ZAVG}_{E,T_M}$ izlīdzina rezultātu, bet salīdzinot ar $\widetilde{AVG}_{E,T_M}$, darbojas sliktāk. Tas notiek tāpēc, ka iepriekš iegūtie (skatīt $\widetilde{WAVG}$ un $\widetilde{ZAVG}$) rezultāti ir mazāki, tāpēc viņu ietekme arī ir mazāka. Šajā gadījumā, vislabāko rezultātu parāda operators $\widetilde{AVG}_{E,T_M}$.

2) Otrajā gadījumā tiks izmantota Lukaševiča t-norma $T_L$:

$$\widetilde{AVG}_{E,T_L} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.78 \\ 0.76 \\ 0.68 \\ 0.68 \\ 0.58 \\ 0.72 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \widetilde{WAVG}_{E,T_L} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.38 \\ 0.39 \\ 0.34 \\ 0.33 \\ 0.24 \\ 0.31 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \widetilde{ZAVG}_{E,T_L} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.38 \\ 0.37 \\ 0.33 \\ 0.30 \\ 0.28 \\ 0.32 \\ 042 \end{pmatrix}.$$

Ar Lukaševiča t-normu rezultāts izskatās vēl patiesāks nekā pirmajā gadījumā. Operatoram $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ atbilstošais rezultāts ir līdzīgs operatora $\widetilde{AVG}$ atbilstošam rezultātam, bet ir izlīdzināts rezultāts starp pēdējām divām valstīm. Vektoriem $\widetilde{WAVG}_{E,T_L}$ un $\widetilde{ZAVG}_{E,T_L}$, salīdzinot ar $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$, skaitļi ir mazāki, bet līdzīgi savā starpā. Šajā gadījumā, vislabāko rezultātu parāda operators $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$.

3) Trešajā gadījumā tiks izmantota reizinājuma t-norma $T_P$:

$$\widetilde{AVG}_{E,T_P} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.79 \\ 0.76 \\ 0.70 \\ 0.70 \\ 0.62 \\ 0.74 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \widetilde{WAVG}_{E,T_P} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 0.39 \\ 0.39 \\ 0.35 \\ 0.35 \\ 0.31 \\ 0.37 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \widetilde{ZAVG}_{E,T_P} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.41 \\ 0.37 \\ 0.36 \\ 0.36 \\ 0.32 \\ 0.38 \\ 0.42 \end{pmatrix}.$$

Ar reizinājuma t-normu iegūtais rezultāts ir līdzīgs kā ar Lukaševiča t-normu ar nebūtisku iegūto rezultātu izmaiņām.

4) Pēdējā gadījumā tiks pielietota vajā t-norma:

$$\widetilde{AVG}_{E,T_W} = \begin{pmatrix} 0.88 \\ 0.76 \\ 0.76 \\ 0.68 \\ 0.64 \\ 0.50 \\ 0.06 \\ 0.82 \end{pmatrix}, \widetilde{WAVG}_{E,T_W} = \begin{pmatrix} 0.44 \\ 038 \\ 0.39 \\ 0.34 \\ 0.33 \\ 0.24 \\ 0.03 \\ 0.41 \end{pmatrix}, \widetilde{ZAVG}_{E,T_W} = \begin{pmatrix} 0.45 \\ 0.38 \\ 0.37 \\ 0.33 \\ 0.30 \\ 0.28 \\ 0.03 \\ 0.42 \end{pmatrix}.$$

Var redzēt, ka vajā t-norma neko nemaina, tāpēc tā vairs netiks izmantota.

**Secinājumi:**

Salīdzinot visus gadījumus, no apskatītā lietojuma viedokļa vislabāk rezultātu apstrādā operatori $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ un $\widetilde{AVG}_{E,T_P}$. Var redzēt, ka šiem operatoriem rezultāts izlīdzinās objektiem $x_7$ un $x_8$. Tas nozīmē, ka ar šādām t-normām ($T_L$ un $T_P$) ekvivalences attiecībai $E$ ietekme uz agregāciju ir lielāka.

## 4.2. Riska novērtējumu agregācijas piemērs

Šajā nodaļā tiks analizēti reālie dati. Šie dati tika savākti no dažādiem interneta resursiem (skatīt [4] un [5]). Apskatīsim 28 dažādas valstis no viena reģiona. Valstu nosaukumi ir aizvietoti ar numuriem, lai nerastos strīdu, gadījumā, ja kaut kādi rādītāji ir nekorekti.

Matricas uzbūvēšanai tika izmantots paņēmiens, kas aprakstīts 2.4. nodaļā. Tika ņemti vērā tādi paši radītāji. Šie rādītāji tika savākti par pieciem gadiem un aprēķināta šo rādītāju vidējā vērtība par pēdējiem pieciem gadiem. Šie rādītāji tika apkopoti 1. pielikumā.

Līdzīgi kā 2.4. nodaļā visi šie dati tika normēti. Normētos datus var apskatīties 2. pielikumā.

Tālāk tika aprēķināti attālumi starp valstīm. Tā kā objektu kopa $X$ ir galīga, tad tika izmantota Eiklīda metrika. Aprēķinātie attālumi ir parādīti 3. pielikumā.

Visbeidzot, izmantojot formulu (1), tika aprēķināta ekvivalences attiecības matrica (skat. 4. pielikumu). Līdzīgi kā 2.6. piemērā, skaitļi, kas parāda objektu līdzības pakāpi, ir ļoti mazi, neskatoties uz to, ka attālums var nebūt liels. Šajā gadījumā par parametru paņemsim $c = 0.2$. Gadījumā, ja šādu parametru neievieš, tad ekvivalences attiecību matrica neietekmēs rezultātu.

Pieņemsim, ka ir doti četru ekspertu novērtējumi. Katrs eksperts izsaka savu viedokli par katru no valstīm, izejot no sava viedokļa. Šoreiz ekspertu novērtējumi apkopoti 4.1. tabulā.

*4.1. tabula* **Ekspertu viedokļi**

| | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\mu_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 0.6 | 0.4 | 0.3 |
| 2 | 0.5 | 0.6 | 0.2 | 0.5 |
| 3 | 0.2 | 0.7 | 0.7 | 0.8 |
| 4 | 0.9 | 0.7 | 0.4 | 0.8 |
| 5 | 0.5 | 0.7 | 0.5 | 0.4 |
| 6 | 0.3 | 0.5 | 0.5 | 0.6 |
| 7 | 0.2 | 0.4 | 0.4 | 0.3 |
| 8 | 0.6 | 0.2 | 0.5 | 0.3 |
| 9 | 0.5 | 0.5 | 0.4 | 0.6 |
| 10 | 0.8 | 0.5 | 0.7 | 0.2 |
| 11 | 0.3 | 0.5 | 0.2 | 0.4 |
| 12 | 0.8 | 0.9 | 0.6 | 0.7 |
| 13 | 0.7 | 0.7 | 0.8 | 0.5 |
| 14 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| 15 | 0.2 | 0.3 | 0.5 | 0.6 |
| 16 | 0.7 | 0.6 | 0.9 | 0.9 |
| 17 | 0.5 | 0.9 | 0.7 | 0.6 |
| 18 | 0.8 | 0.2 | 0.3 | 0.5 |
| 19 | 0.2 | 0.5 | 0.5 | 0.4 |
| 20 | 0.1 | 0.2 | 0.1 | 0.3 |
| 21 | 0.8 | 0.9 | 0.7 | 0.6 |
| 22 | 0.4 | 0.5 | 0.7 | 0.3 |
| 23 | 0.7 | 0.3 | 0.5 | 0.9 |
| 24 | 0.5 | 0.8 | 0.4 | 0.7 |
| 25 | 0.4 | 0.6 | 0.8 | 0.5 |
| 26 | 0.4 | 0.3 | 0.2 | 0.5 |
| 27 | 0.1 | 0.2 | 0.2 | 0.0 |
| 28 | 0.1 | 0.0 | 0.2 | 0.3 |

Tālāk tika aprēķināti vektori $\widetilde{AVG}, \widetilde{AVG}_{E,T_P}, \widetilde{AVG}_{E,T_L}$ (t.i., agregācijas rezultāti lietojot operatorus $\widetilde{AVG}, \widetilde{AVG}_{E,T_P}, \widetilde{AVG}_{E,T_L}$). Šie rezultāti tika apkopoti 4.2. tabulā.

*4.2. tabula* **Iegūtie agregācijas rezultāti**

| | $\widetilde{AVG}$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_P}$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.35 | 0.45 | 0.35 |
| 2 | 0.45 | 0.50 | 0.45 |
| 3 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 4 | 0.70 | 0.70 | 0.70 |
| 5 | 0.53 | 0.53 | 0.53 |
| 6 | 0.48 | 0.51 | 0.48 |
| 7 | 0.33 | 0.38 | 0.33 |
| 8 | 0.40 | 0.54 | 0.48 |
| 9 | 0.50 | 0.50 | 0.50 |
| 10 | 0.55 | 0.55 | 0.55 |
| 11 | 0.35 | 0.36 | 0.35 |
| 12 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| 13 | 0.68 | 0.68 | 0.68 |
| 14 | 0.28 | 0.46 | 0.35 |
| 15 | 0.40 | 0.56 | 0.50 |
| 16 | 0.78 | 0.78 | 0.78 |
| 17 | 0.68 | 0.68 | 0.68 |
| 18 | 0.45 | 0.45 | 0.45 |
| 19 | 0.40 | 0.41 | 0.40 |
| 20 | 0.18 | 0.26 | 0.18 |
| 21 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| 22 | 0.48 | 0.50 | 0.48 |
| 23 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 24 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 25 | 0.58 | 0.58 | 0.58 |
| 26 | 0.35 | 0.62 | 0.58 |
| 27 | 0.13 | 0.36 | 0.20 |
| 28 | 0.15 | 0.44 | 0.35 |

## 4.3. Iegūto rezultātu analīze

Lai analizētu kā ekvivalences attiecību matrica ietekmē iegūto riska līmeni, būs aprakstīts, kas tieši ietekmē katru valsti. Lai saprastu kuras valstis dod maksimālo rezultātu katram gadījumam, visas komponentes bija izrēķinātas atsevišķi. Tālāk katra valsts tika izanalizēta atsevišķi un beigās rezultāts tika apkopots.

1. Lietojot agregāciju ar reizinājuma t-normu, pirmo valsti vienādi ietekmē trešā un trīspadsmitā valstis. Lielāka līdzība šajā gadījumā ir ar trešo valsti (līdzības pakāpe ir 0.75), bet

ar trīspadsmito valsti līdzības pakāpe ir 0.66, bet 13 valstij ir lielāks ekspertu novērtējums. Šajā gadījumā vienādi ietekmē gan ekvivalences attiecība, gan ekspertu viedokļi. Ar Lukaševiča t-normu pirmajai valstij nekas nemainās.

2. Uz otro valsti ietekmē ceturtā valsts, ar kuru līdzības pakāpe ir 0.71, bet tā nav lielāka līdzības pakāpe, kas pastāv 2. valstij. Šajā gadījumā ietekme ir gan no ekspertu viedokļa, gan no ekvivalences attiecības matricas. Agregācija ar Lukaševiča t-normu neko nemaina.

3. Trešajai valstij nekas nemainās, neskatoties uz to diezgan liela ekvivalence ir ar pirmo un sesto valsti, bet šīm valstīm ir zems ekspertu novērtējums, tāpēc tas neietekmē rezultātu.

4. Ceturtās valsts novērtējumi arī nemainās, neskatoties uz to, ka ar 26. valsti ir diezgan liela līdzība (līdzības pakāpe 0.88). Rezultāts nemainās, jo 26. valstij ir diezgan zems ekspertu novērtējums (ekspertu novērtējums 0.35. )

5. Piektajai valstij arī nekas nemainās, neskatoties uz to ka ar 12. valsti pastāv diezgan augsta līdzība 0.67, ka arī 12. valstij ir diezgan augsts riska līmenis (12. valsts riska novērtējums 0.75).

6. Sestajai valstij agregācijā ar reizinājuma t-normu ir neliela palielināšanās, šīs izmaiņas ietekmē 17. valsts, ar kuru ir lielāka ekvivalences pakāpe. Agregācijai ar Lukaševiča t-normu nekas nemainās.

7. Uz septīto valsti ietekmē tikai agregācija ar reizinājuma t-normu. Šī ietekme ir no 25. valsts ar kuru līdzības pakāpe ir 0.66. Bet lielāka ekvivalences pakāpe ir ar 11. valsti. Šī valsts neietekmē rezultātu, jo tai ir zems ekspertu novērtējums.

8. Šoreiz, abos gadījumos ietekme ir no 17. valsts, ar kuru arī ir lielāka ekvivalences pakāpe.

9. Devītajai valstij nekas nemainās, neskatoties uz to ka ar 10. valsti ir diezgan liela ekvivalences pakāpe (9. un 10. valstu ekvivalences pakāpe 0.80).

10. Desmitajai valstij situācija ir tāda pati, kā 9. valstij. Tā kā ekspertu viedokļi nav ļoti atšķirīgi, tāpēc riska līmenis nemaina.

11. Vienpadsmitajai valstij agregācijai ar reizinājuma t-normu ir nelielas izmaiņas. Šīs izmaiņas ietekmē 25. valsts, ar kuru ekvivalences pakāpe ir 0.63. Bet lielāka līdzības pakāpe ir ar 7. valsti. Šajā gadījumā ietekme ir no ekspertu viedokļa. Agregācija ar Lukaševiča t-normu neko nemaina.

12. Divpadsmitajai valstij nekas nemainās, tāpēc, ka ir diezgan augsts ekspertu novērtējums un nav pietiekami lielas ekvivalences pakāpes.

13. Trīspadsmitajai valstij arī nekas nemainās. Situācija ir līdzīga, kā 12. valstij.

14. Četrpadsmitajai valstij abos gadījumos rezultāts palielinās. Šīs izmaiņas ietekmē 13. valsts, ar kuru līdzības pakāpe ir 0.68. Tā kā ekspertu novērtējums 13. valstij ir diezgan liels, tāpēc izmaiņas ir diezgan lielas.

15. Piecpadsmitajai valstij abos gadījumos izmaiņas ietekmē 4. valsts ar kuru ekvivalences pakāpe ir diezgan augsta ( 15. un 4. valstu līdzības pakāpe 0.80). Tik lielas izmaiņas notiek tāpēc, ka 4. valstij arī ir augsts ekspertu novērtējums.

16. Sešpadsmitajai valstij nekas nemainās, neskatoties uz to, ka ar 21. valsti ir ļoti liela ekvivalences attiecība (16. un 21. valstu līdzības pakāpe 0.88). Izmaņas nenotiek tāpēc, ka 16. valstij ir diezgan liela ekspertu novērtējums (16. valsts ekspertu novērtējums 0.78).

17. Septiņpadsmitajai valstij arī abos gadījumos nekas nemainās. Neskatoties uz to ka ar 8. valsti līdzības pakāpe ir 0.80. Nekas nemainās, jo 8. valstij ir zems ekspertu novērtējums un 17. valsts ietekmē 8.

18. Astoņpadsmitajai valstij abos gadījumos nekas nemainās. Tas ir tāpēc, ka ar 18.valsti nav pietiekami lielas ekvivalences pakāpes.

19. Deviņpadsmitajai valstij agregācijai ar t-normu ir neliela palielināšanās, šo nelielu palielināšanos ietekmē 3. valsts ar kuru līdzības pakāpe ir 0.68.

20. Divdesmitajai valstij rezultāts palielinās no agregācijas ar reizinājuma t-normu. Šīs izmaiņas ietekmē 25. valsts ar kuru ekvivalences pakāpe ir tikai 0.44. Tāda palielināšanās notiek tāpēc, ka 25. valstij ekspertu novērtējums ir lielāks nekā 20. valstij.

21. Divdesmit pirmajai valstij abos gadījumos nekas nemainās. Neskatoties uz to, ka ar 16. valsti ir diezgan liela līdzības pakāpe. Šīs valstis neietekmē viens otru, jo abām ir lieli ekspertu novērtējumi.

22. Divdesmit otrajai valstij ir nelielas izmaiņas agregācijas operatoram ar reizinājuma t-normu. Šīs nelielas izmaiņas ietekmē 4. valsts, kurai ir liels ekspertu novērtējums. Agregācijai ar Lukaševiča t-normu nekas nemainās.

23. Divdesmit trešajai valstij abos gadījumos nekas nemainās. Neskatoties uz to, ka lielāka līdzības pakāpe ir ar 21. valsti (23. un 21. valstu līdzības pakāpe 0.77). Rezultāts nemainās, jo abām valstīm ir diezgan augsts ekspertu novērtējums.

24. Divdesmit ceturtajai valstij abos gadījumos nekas nemainās. Tas ir tāpēc, ka šai valstij ir diezgan liels ekspertu novērtējums.

25. Divdesmit piektajai valstij tāpat kā iepriekšējām divām valstīm nekas nemainās.

26. Divdesmit sestajai valstij abos gadījumos ir ļoti liela palielināšanās. Šīs izmaiņas ietekmē 4. valsts ar kuru līdzības pakāpe ir 0.88. Tā kā 4. valstij ir ļoti augsts ekspertu novērtējums, tāpēc arī ir ļoti liela palielināšanās.

27. Divdesmit septītajai valstij abos gadījumos palielināšanos ietekmē 25. valsts. Tā kā 25. un 27. valstis ļoti atšķīrās, ar līdzības pakāpi 0.62 rezultāts izlīdzinās.

28. Divdesmit astoto valsti abos gadījumos ietekmē 16. valsts. Tas notiek tāpēc, ka 16. valstij ir ļoti liels ekspertu novērtējums.

Apkopojot visus rezultātus var redzēt, ka ļoti būtiski rezultātu ietekmē ekspertu novērtējumu vērtības. Ja ekspertu riska novērtējums ir ļoti augsts, tad šie novērtējumu nemainās, bet ietekmē pārējās valstis, kurām ekspertu riska novērtējums nebija tik augsts.

*4.3. tabula* **Agregācijas rezultāts atkarībā no parametra $c$**

| | $c = 0.1$ | | | $c = 0.15$ | | | $c = 0.2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $AVG$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_P}$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ | $AVG$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_P}$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ | $AVG$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_P}$ | $\widetilde{AVG}_{E,T_L}$ |
| 1 | 0.35 | 0.54 | 0.47 | 0.35 | 0.49 | 0.40 | 0.35 | 0.45 | 0.35 |
| 2 | 0.45 | 0.58 | 0.53 | 0.45 | 0.53 | 0.46 | 0.45 | 0.50 | 0.45 |
| 3 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 4 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 | 0.70 |
| 5 | 0.53 | 0.60 | 0.55 | 0.53 | 0.54 | 0.53 | 0.53 | 0.53 | 0.53 |
| 6 | 0.48 | 0.62 | 0.57 | 0.48 | 0.56 | 0.50 | 0.48 | 0.51 | 0.48 |
| 7 | 0.33 | 0.47 | 0.37 | 0.33 | 0.41 | 0.33 | 0.33 | 0.38 | 0.33 |
| 8 | 0.40 | 0.60 | 0.56 | 0.40 | 0.57 | 0.52 | 0.40 | 0.54 | 0.48 |
| 9 | 0.50 | 0.58 | 0.52 | 0.50 | 0.53 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.50 |
| 10 | 0.55 | 0.56 | 0.55 | 0.55 | 0.55 | 0.55 | 0.55 | 0.55 | 0.55 |
| 11 | 0.35 | 0.45 | 0.35 | 0.35 | 0.40 | 0.35 | 0.35 | 0.36 | 0.35 |
| 12 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| 13 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 |
| 14 | 0.28 | 0.55 | 0.48 | 0.28 | 0.50 | 0.41 | 0.28 | 0.46 | 0.35 |
| 15 | 0.40 | 0.62 | 0.59 | 0.40 | 0.59 | 0.55 | 0.40 | 0.56 | 0.50 |
| 16 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 | 0.78 |
| 17 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 | 0.68 |
| 18 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 | 0.45 |
| 19 | 0.40 | 0.53 | 0.45 | 0.40 | 0.45 | 0.40 | 0.40 | 0.41 | 0.40 |
| 20 | 0.18 | 0.35 | 0.20 | 0.18 | 0.30 | 0.18 | 0.18 | 0.26 | 0.18 |
| 21 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 | 0.75 |
| 22 | 0.48 | 0.59 | 0.54 | 0.48 | 0.54 | 0.48 | 0.48 | 0.50 | 0.48 |
| 23 | 0.60 | 0.65 | 0.62 | 0.60 | 0.62 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 24 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 | 0.60 |
| 25 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 | 0.58 |
| 26 | 0.35 | 0.66 | 0.64 | 0.35 | 0.64 | 0.61 | 0.35 | 0.62 | 0.58 |
| 27 | 0.13 | 0.44 | 0.34 | 0.13 | 0.40 | 0.26 | 0.13 | 0.36 | 0.20 |
| 28 | 0.15 | 0.56 | 0.50 | 0.15 | 0.50 | 0.42 | 0.15 | 0.44 | 0.35 |

Apkopojot iegūtos rezultātus, var redzēt, ka vairākos gadījumos izmaiņas notiek agregācijā ar reizinājuma t-normu. Lai palielinātu agregācijas operatora ar Lukaševiča t-normu vajag palielināt ekvivalences attiecību matricas ietekmi. Ar matricas ietekmes palielināšanos, iespējams, rezultāts izlīdzināsies arī tām valstīm, kuras nav ekvivalentas ar pārējām pietiekami augstā līmenī. Lai to izdarītu, ir nepieciešams samazināt parametra $c$ vērtību. Ja ir nepieciešams samazināt ekvivalences attiecības matricas ietekmi, tad parametru $c$ vajag palielināt (jo tuvāk 1 ir parametrs $c$, jo mazāka ir ekvivalences attiecības matricas ietekme). Agregācijas rezultāts atkarībā no parametra $c$ ir apkopots 4.3. tabulā.

No 4.3. tabulas var redzēt, ka ar parametra $c$ samazināšanu, agregācija darbojās labāk. Nemainās rezultāts tām valstīm, kurām lielāka ekvivalences pakāpe ir ar valsti, kurai ir zems ekspertu riska novērtējums. Šādā veidā var kontrolēt kā ekvivalences attiecība ietekmes rezultātu.

# NOBEIGUMS

Darba ir aplūkots kā var iegūt kopējo riska novērtējumu starp līdzīgiem objektiem ar piemēra palīdzību. Analizējot piemērus, tika izstrādātas rekomendācijas, kā uzlabot pielietotās agregācijas darbību. Būtu vēlams šīs rekomendācijas aprobēt uz citiem ar praktiskiem pielietojumiem saistītiem piemēriem. Var atrast arī citus pielietojumu sfēras, kurās var efektīvi izmantot aprakstīto metodi.

# IZMANTOTĀS LITERATŪRAS UN AVOTU SARAKSTS


[1] P. Orlovs, Aggregation of fuzzy structures based on equivalence relations, PhD Thesis, University of Latvia, Riga, 2015.

[2] A. Šostaks, L-kopas un L-vērtīgas struktūras, Latvijas Universitāte, Rīga 2003.

[3] H. Bustince, J. Fernandez, R.Mesiar, T. Calvo, Aggregation Functions in Theory and in Practise, Springer, Spain, 2013.

[4] http://www.tradingeconomics.com/countries [06.06.2016]

[5] http://www.focus-economics.com/countries [06.06.2016]

# PIELIKUMI

1. 28 valstu vidējie ekonomiskie rādītāji par pēdējiem pieciem gadiem.
2. Normētie 28 valstu vidējie ekonomiskie rādītāji par pēdējiem pieciem gadiem.
3. Aprēķinātie 28 valstu attālumi.
4. Iegūtā nestriktas ekvivalences attiecības matrica.
5. Nestrikta ekvivalences attiecību matrica uzlabošana, ieviešot parametru.

*1. pielikums*

**28 valstu vidējie ekonomiskie rādītāji par pēdējiem pieciem gadiem**

| | Ekonomiskā izaugsme (IKP, ikgadējās izmaiņas %) | Rūpnieciskā ražošana (ikgadējās izmaiņas %) | Bezdarba līmenis | Valsts parāds (% no IKP) | Tekošais konts (% no IKP) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.84 | 1.19 | 0.47 | 1.18 | 2.16 |
| 2 | 0.76 | 0.52 | 0.76 | 1.48 | 0.50 |
| 3 | 1.24 | 1.59 | 1.01 | 0.28 | 0.99 |
| 4 | -0.39 | -0.72 | 1.86 | 1.09 | 0.48 |
| 5 | -1.43 | -1.08 | 1.27 | 1.32 | -4.52 |
| 6 | 1.54 | 2.22 | 0.67 | 0.60 | -0.41 |
| 7 | 0.55 | 2.39 | 0.51 | 0.63 | 6.88 |
| 8 | 2.98 | 3.94 | 0.84 | 0.13 | 0.08 |
| 9 | 0.02 | -0.95 | 0.79 | 0.79 | -1.31 |
| 10 | 0.68 | -0.06 | 0.94 | 1.30 | -1.49 |
| 11 | 0.68 | 0.97 | 0.49 | 1.08 | 7.59 |
| 12 | -3.07 | -1.88 | 2.28 | 2.45 | -3.71 |
| 13 | 1.38 | 3.60 | 0.87 | 1.10 | 2.84 |
| 14 | 2.17 | 5.26 | 1.19 | 1.57 | 1.47 |
| 15 | -0.61 | -1.22 | 1.05 | 1.79 | 0.29 |
| 16 | 2.94 | 2.65 | 1.20 | 0.57 | -2.40 |
| 17 | 2.88 | 2.97 | 1.08 | 0.56 | -0.52 |
| 18 | 2.33 | -2.51 | 0.62 | 0.31 | 6.03 |
| 19 | 2.90 | 0.15 | 0.58 | 0.96 | 1.55 |
| 20 | 0.48 | -1.08 | 0.61 | 0.94 | 10.59 |
| 21 | 2.40 | 2.91 | 1.14 | 0.75 | -2.57 |
| 22 | -0.72 | -0.49 | 1.36 | 1.77 | -1.22 |
| 23 | 1.91 | 4.17 | 0.65 | 0.53 | -2.51 |
| 24 | 1.90 | 4.33 | 1.25 | 0.72 | -0.29 |
| 25 | 0.47 | 1.00 | 0.87 | 0.95 | 4.70 |
| 26 | -0.11 | -0.79 | 2.24 | 1.34 | 0.10 |
| 27 | 1.61 | -0.79 | 0.74 | 0.57 | 6.80 |
| 28 | 1.69 | -0.29 | 0.67 | 1.22 | -4.10 |

*2. pielikums*

**Normētie 28 valstu vidējie ekonomiskie rādītāji par pēdējiem pieciem gadiem**

| | Ekonomiskā izaugsme (IKP, ikgadējās izmaiņas %) | Rūpnieciskā ražošana (ikgadējās izmaiņas %) | Bezdarba līmenis | Valsts parāds (% no IKP) | Tekošais konts (% no IKP) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.84 | 1.19 | 0.47 | 1.18 | 2.16 |
| 2 | 0.76 | 0.52 | 0.76 | 1.48 | 0.50 |
| 3 | 1.24 | 1.59 | 1.01 | 0.28 | 0.99 |
| 4 | -0.39 | -0.72 | 1.86 | 1.09 | 0.48 |
| 5 | -1.43 | -1.08 | 1.27 | 1.32 | -4.52 |
| 6 | 1.54 | 2.22 | 0.67 | 0.60 | -0.41 |
| 7 | 0.55 | 2.39 | 0.51 | 0.63 | 6.88 |
| 8 | 2.98 | 3.94 | 0.84 | 0.13 | 0.08 |
| 9 | 0.02 | -0.95 | 0.79 | 0.79 | -1.31 |
| 10 | 0.68 | -0.06 | 0.94 | 1.30 | -1.49 |
| 11 | 0.68 | 0.97 | 0.49 | 1.08 | 7.59 |
| 12 | -3.07 | -1.88 | 2.28 | 2.45 | -3.71 |
| 13 | 1.38 | 3.60 | 0.87 | 1.10 | 2.84 |
| 14 | 2.17 | 5.26 | 1.19 | 1.57 | 1.47 |
| 15 | -0.61 | -1.22 | 1.05 | 1.79 | 0.29 |
| 16 | 2.94 | 2.65 | 1.20 | 0.57 | -2.40 |
| 17 | 2.88 | 2.97 | 1.08 | 0.56 | -0.52 |
| 18 | 2.33 | -2.51 | 0.62 | 0.31 | 6.03 |
| 19 | 2.90 | 0.15 | 0.58 | 0.96 | 1.55 |
| 20 | 0.48 | -1.08 | 0.61 | 0.94 | 10.59 |
| 21 | 2.40 | 2.91 | 1.14 | 0.75 | -2.57 |
| 22 | -0.72 | -0.49 | 1.36 | 1.77 | -1.22 |
| 23 | 1.91 | 4.17 | 0.65 | 0.53 | -2.51 |
| 24 | 1.90 | 4.33 | 1.25 | 0.72 | -0.29 |
| 25 | 0.47 | 1.00 | 0.87 | 0.95 | 4.70 |
| 26 | -0.11 | -0.79 | 2.24 | 1.34 | 0.10 |
| 27 | 1.61 | -0.79 | 0.74 | 0.57 | 6.80 |
| 28 | 1.69 | -0.29 | 0.67 | 1.22 | -4.10 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 1.84 | 1.66 | 3.14 | 7.45 | 2.92 | 4.91 | 4.21 | 4.18 | 3.89 | 5.44 | 8.00 | 2.60 | 4.42 | 3.47 | 5.32 | 3.91 | 5.63 | 2.39 | 8.74 | 5.33 | 4.22 | 5.68 | 4.22 | 2.62 | 3.49 | 5.14 | 6.49 |
| 2 | 1.84 | 0.00 | 1.77 | 2.06 | 5.73 | 2.26 | 6.71 | 4.32 | 2.54 | 2.09 | 7.12 | 6.43 | 3.94 | 5.06 | 2.26 | 4.33 | 3.53 | 6.61 | 2.48 | 10.24 | 4.30 | 2.57 | 4.96 | 4.15 | 4.28 | 2.20 | 6.55 | 4.77 |
| 3 | 1.66 | 1.77 | 0.00 | 3.10 | 6.76 | 1.64 | 6.01 | 3.07 | 3.68 | 3.20 | 6.71 | 7.69 | 2.86 | 4.04 | 3.75 | 3.96 | 2.64 | 6.59 | 2.40 | 10.02 | 4.01 | 3.93 | 4.43 | 3.14 | 3.89 | 3.30 | 6.29 | 5.54 |
| 4 | 3.14 | 2.06 | 3.10 | 0.00 | 5.15 | 3.85 | 7.32 | 5.93 | 2.15 | 2.51 | 7.51 | 5.30 | 5.33 | 6.64 | 1.21 | 5.61 | 5.12 | 6.60 | 3.79 | 10.23 | 5.55 | 1.94 | 6.32 | 5.64 | 4.75 | 0.65 | 6.74 | 5.19 |
| 5 | 7.45 | 5.73 | 6.76 | 5.15 | 0.00 | 6.12 | 12.12 | 8.21 | 3.60 | 3.84 | 12.48 | 2.51 | 9.17 | 9.44 | 4.91 | 6.17 | 7.18 | 11.36 | 7.60 | 15.25 | 5.89 | 3.45 | 6.62 | 7.65 | 9.66 | 4.91 | 11.76 | 3.30 |
| 6 | 2.92 | 2.26 | 1.64 | 3.85 | 6.12 | 0.00 | 7.37 | 2.35 | 3.64 | 2.77 | 8.16 | 7.42 | 3.58 | 3.80 | 4.30 | 2.53 | 1.59 | 8.04 | 3.18 | 11.54 | 2.47 | 3.87 | 2.89 | 2.22 | 5.39 | 3.88 | 7.81 | 4.51 |
| 7 | 4.91 | 6.71 | 6.01 | 7.32 | 12.12 | 7.37 | 0.00 | 7.41 | 8.86 | 8.76 | 1.65 | 12.24 | 4.34 | 6.45 | 7.71 | 9.62 | 7.80 | 5.29 | 6.24 | 5.09 | 9.67 | 8.81 | 9.66 | 7.59 | 2.63 | 7.74 | 3.35 | 11.38 |
| 8 | 4.21 | 4.32 | 3.07 | 5.93 | 8.21 | 2.35 | 7.41 | 0.00 | 5.92 | 5.02 | 8.45 | 9.61 | 3.35 | 2.56 | 6.51 | 2.86 | 1.25 | 8.80 | 4.16 | 11.94 | 2.99 | 6.17 | 2.84 | 1.41 | 6.08 | 5.94 | 8.34 | 6.19 |
| 9 | 4.18 | 2.54 | 3.68 | 2.15 | 3.60 | 3.64 | 8.86 | 5.92 | 0.00 | 1.24 | 9.13 | 4.60 | 6.32 | 7.20 | 2.02 | 4.79 | 4.94 | 7.87 | 4.22 | 11.91 | 4.72 | 1.43 | 5.60 | 5.72 | 6.34 | 2.11 | 8.26 | 3.36 |
| 10 | 3.89 | 2.09 | 3.20 | 2.51 | 3.84 | 2.77 | 8.76 | 5.02 | 1.24 | 0.00 | 9.15 | 5.04 | 5.72 | 6.29 | 2.53 | 3.73 | 3.95 | 8.15 | 3.81 | 12.14 | 3.65 | 1.62 | 4.60 | 4.76 | 6.30 | 2.32 | 8.41 | 2.83 |
| 11 | 5.44 | 7.12 | 6.71 | 7.51 | 12.48 | 8.16 | 1.65 | 8.45 | 9.13 | 9.15 | 0.00 | 12.44 | 5.49 | 7.67 | 7.78 | 10.42 | 8.67 | 4.23 | 6.48 | 3.65 | 10.51 | 9.11 | 10.68 | 8.69 | 2.92 | 7.93 | 2.21 | 11.80 |
| 12 | 7.79 | 6.25 | 7.58 | 5.29 | 2.30 | 7.24 | 12.12 | 9.50 | 4.35 | 4.86 | 12.31 | 0.00 | 9.73 | 10.30 | 4.79 | 7.87 | 8.53 | 11.36 | 8.35 | 14.84 | 7.55 | 3.75 | 8.16 | 8.83 | 9.69 | 5.07 | 11.71 | 5.18 |
| 13 | 2.57 | 3.94 | 2.86 | 5.24 | 9.17 | 3.57 | 4.33 | 3.35 | 6.32 | 5.72 | 5.47 | 9.73 | 0.00 | 2.34 | 5.85 | 5.58 | 3.77 | 7.00 | 3.98 | 9.10 | 5.56 | 6.18 | 5.43 | 3.27 | 3.33 | 5.39 | 5.94 | 7.97 |
| 14 | 4.42 | 5.06 | 4.04 | 6.64 | 9.44 | 3.80 | 6.45 | 2.56 | 7.20 | 6.29 | 7.67 | 10.36 | 2.36 | 0.00 | 7.16 | 4.85 | 3.28 | 9.12 | 5.23 | 11.27 | 4.75 | 6.99 | 4.30 | 2.19 | 5.66 | 6.70 | 8.15 | 7.91 |
| 15 | 3.47 | 2.26 | 3.75 | 1.21 | 4.91 | 4.30 | 7.71 | 6.51 | 2.02 | 2.53 | 7.78 | 4.95 | 5.85 | 7.16 | 0.00 | 6.03 | 5.65 | 6.76 | 4.09 | 10.40 | 5.94 | 1.71 | 6.71 | 6.21 | 5.13 | 1.44 | 7.00 | 5.09 |
| 16 | 5.32 | 4.33 | 3.96 | 5.61 | 6.17 | 2.53 | 9.62 | 2.86 | 4.79 | 3.73 | 10.42 | 7.95 | 5.59 | 4.85 | 6.03 | 0.00 | 1.92 | 9.93 | 4.74 | 13.76 | 0.66 | 5.12 | 1.92 | 2.90 | 7.72 | 5.39 | 9.92 | 3.72 |
| 17 | 3.91 | 3.53 | 2.64 | 5.12 | 7.18 | 1.59 | 7.80 | 1.25 | 4.94 | 3.95 | 8.67 | 8.61 | 3.77 | 3.28 | 5.65 | 1.92 | 0.00 | 8.57 | 3.56 | 12.08 | 2.12 | 5.20 | 2.55 | 1.70 | 6.10 | 5.04 | 8.33 | 5.05 |
| 18 | 5.63 | 6.61 | 6.59 | 6.60 | 11.36 | 8.04 | 5.29 | 8.80 | 7.87 | 8.15 | 4.23 | 11.48 | 7.01 | 9.12 | 6.76 | 9.93 | 8.57 | 0.00 | 5.28 | 5.16 | 10.19 | 8.29 | 10.85 | 9.35 | 4.25 | 6.91 | 2.04 | 10.43 |
| 19 | 2.39 | 2.48 | 2.40 | 3.79 | 7.60 | 3.18 | 6.24 | 4.16 | 4.22 | 3.81 | 6.48 | 8.52 | 3.99 | 5.23 | 4.09 | 4.74 | 3.56 | 5.28 | 0.00 | 9.43 | 5.02 | 4.74 | 5.81 | 4.72 | 4.08 | 3.86 | 5.50 | 5.81 |
| 20 | 8.74 | 10.24 | 10.02 | 10.23 | 15.25 | 11.54 | 5.09 | 11.94 | 11.91 | 12.14 | 3.65 | 14.93 | 9.10 | 11.27 | 10.40 | 13.76 | 12.08 | 5.16 | 9.43 | 0.00 | 13.90 | 11.94 | 14.19 | 12.25 | 6.25 | 10.64 | 3.99 | 14.77 |
| 21 | 5.33 | 4.30 | 4.01 | 5.55 | 5.89 | 2.47 | 9.67 | 2.99 | 4.72 | 3.65 | 10.51 | 7.64 | 5.56 | 4.75 | 5.94 | 0.66 | 2.12 | 10.19 | 5.02 | 13.90 | 0.00 | 4.92 | 1.45 | 2.73 | 7.77 | 5.35 | 10.11 | 3.68 |
| 22 | 4.22 | 2.57 | 3.93 | 1.94 | 3.45 | 3.87 | 8.81 | 6.17 | 1.43 | 1.62 | 9.11 | 3.87 | 6.20 | 6.99 | 1.71 | 5.12 | 5.20 | 8.29 | 4.74 | 11.94 | 4.92 | 0.00 | 5.69 | 5.66 | 6.30 | 1.78 | 8.47 | 3.87 |
| 23 | 5.68 | 4.96 | 4.43 | 6.32 | 6.62 | 2.89 | 9.66 | 2.84 | 5.60 | 4.60 | 10.68 | 8.32 | 5.44 | 4.30 | 6.71 | 1.92 | 2.55 | 10.85 | 5.81 | 14.19 | 1.45 | 5.69 | 0.00 | 2.31 | 8.02 | 6.22 | 10.55 | 4.80 |
| 24 | 4.22 | 4.15 | 3.14 | 5.64 | 7.65 | 2.22 | 7.59 | 1.41 | 5.72 | 4.76 | 8.69 | 8.89 | 3.30 | 2.19 | 6.21 | 2.90 | 1.70 | 9.35 | 4.72 | 12.25 | 2.73 | 5.66 | 2.31 | 0.00 | 6.18 | 5.63 | 8.76 | 6.04 |
| 25 | 2.62 | 4.28 | 3.89 | 4.75 | 9.66 | 5.39 | 2.63 | 6.08 | 6.34 | 6.30 | 2.92 | 9.79 | 3.33 | 5.66 | 5.13 | 7.72 | 6.10 | 4.25 | 4.08 | 6.25 | 7.77 | 6.30 | 8.02 | 6.18 | 0.00 | 5.17 | 3.01 | 8.99 |
| 26 | 3.49 | 2.20 | 3.30 | 0.65 | 4.91 | 3.88 | 7.74 | 5.94 | 2.11 | 2.32 | 7.93 | 5.07 | 5.56 | 6.70 | 1.44 | 5.39 | 5.04 | 6.91 | 3.86 | 10.64 | 5.35 | 1.78 | 6.22 | 5.63 | 5.17 | 0.00 | 7.11 | 4.87 |
| 27 | 5.14 | 6.55 | 6.29 | 6.74 | 11.76 | 7.81 | 3.35 | 8.34 | 8.26 | 8.41 | 2.21 | 11.81 | 5.94 | 8.15 | 7.00 | 9.92 | 8.33 | 2.04 | 5.50 | 3.99 | 10.11 | 8.47 | 10.55 | 8.76 | 3.01 | 7.11 | 0.00 | 10.93 |
| 28 | 6.49 | 4.77 | 5.54 | 5.19 | 3.30 | 4.51 | 11.38 | 6.19 | 3.36 | 2.83 | 11.80 | 5.43 | 7.97 | 7.91 | 5.09 | 3.72 | 5.05 | 10.43 | 5.81 | 14.77 | 3.68 | 3.87 | 4.80 | 6.04 | 8.99 | 4.87 | 10.93 | 0.00 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 0.35 | 0.38 | 0.24 | 0.12 | 0.26 | 0.17 | 0.19 | 0.19 | 0.20 | 0.16 | 0.11 | 0.28 | 0.18 | 0.22 | 0.16 | 0.20 | 0.15 | 0.29 | 0.10 | 0.16 | 0.19 | 0.15 | 0.19 | 0.28 | 0.22 | 0.16 | 0.13 |
| 2 | 0.35 | 1.00 | 0.36 | 0.33 | 0.15 | 0.31 | 0.13 | 0.19 | 0.28 | 0.32 | 0.12 | 0.13 | 0.20 | 0.16 | 0.31 | 0.19 | 0.22 | 0.13 | 0.29 | 0.09 | 0.19 | 0.28 | 0.17 | 0.19 | 0.19 | 0.31 | 0.13 | 0.17 |
| 3 | 0.38 | 0.36 | 1.00 | 0.24 | 0.13 | 0.38 | 0.14 | 0.25 | 0.21 | 0.24 | 0.13 | 0.12 | 0.26 | 0.20 | 0.21 | 0.20 | 0.27 | 0.13 | 0.29 | 0.09 | 0.20 | 0.20 | 0.18 | 0.24 | 0.20 | 0.23 | 0.14 | 0.15 |
| 4 | 0.24 | 0.33 | 0.24 | 1.00 | 0.16 | 0.21 | 0.12 | 0.14 | 0.32 | 0.28 | 0.12 | 0.16 | 0.16 | 0.13 | 0.45 | 0.15 | 0.16 | 0.13 | 0.21 | 0.09 | 0.15 | 0.34 | 0.14 | 0.15 | 0.17 | 0.60 | 0.13 | 0.16 |
| 5 | 0.12 | 0.15 | 0.13 | 0.16 | 1.00 | 0.14 | 0.08 | 0.11 | 0.22 | 0.21 | 0.07 | 0.28 | 0.10 | 0.10 | 0.17 | 0.14 | 0.12 | 0.08 | 0.12 | 0.06 | 0.15 | 0.22 | 0.13 | 0.12 | 0.09 | 0.17 | 0.08 | 0.23 |
| 6 | 0.26 | 0.31 | 0.38 | 0.21 | 0.14 | 1.00 | 0.12 | 0.30 | 0.22 | 0.27 | 0.11 | 0.12 | 0.22 | 0.21 | 0.19 | 0.28 | 0.39 | 0.11 | 0.24 | 0.08 | 0.29 | 0.21 | 0.26 | 0.31 | 0.16 | 0.20 | 0.11 | 0.18 |
| 7 | 0.17 | 0.13 | 0.14 | 0.12 | 0.08 | 0.12 | 1.00 | 0.12 | 0.10 | 0.10 | 0.38 | 0.08 | 0.19 | 0.13 | 0.11 | 0.09 | 0.11 | 0.16 | 0.14 | 0.16 | 0.09 | 0.10 | 0.09 | 0.12 | 0.28 | 0.11 | 0.23 | 0.08 |
| 8 | 0.19 | 0.19 | 0.25 | 0.14 | 0.11 | 0.30 | 0.12 | 1.00 | 0.14 | 0.17 | 0.11 | 0.09 | 0.23 | 0.28 | 0.13 | 0.26 | 0.44 | 0.10 | 0.19 | 0.08 | 0.25 | 0.14 | 0.26 | 0.42 | 0.14 | 0.14 | 0.11 | 0.14 |
| 9 | 0.19 | 0.28 | 0.21 | 0.32 | 0.22 | 0.22 | 0.10 | 0.14 | 1.00 | 0.45 | 0.10 | 0.18 | 0.14 | 0.12 | 0.33 | 0.17 | 0.17 | 0.11 | 0.19 | 0.08 | 0.17 | 0.41 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.32 | 0.11 | 0.23 |
| 10 | 0.20 | 0.32 | 0.24 | 0.28 | 0.21 | 0.27 | 0.10 | 0.17 | 0.45 | 1.00 | 0.10 | 0.17 | 0.15 | 0.14 | 0.28 | 0.21 | 0.20 | 0.11 | 0.21 | 0.08 | 0.22 | 0.38 | 0.18 | 0.17 | 0.14 | 0.30 | 0.11 | 0.26 |
| 11 | 0.16 | 0.12 | 0.13 | 0.12 | 0.07 | 0.11 | 0.38 | 0.11 | 0.10 | 0.10 | 1.00 | 0.07 | 0.15 | 0.12 | 0.11 | 0.09 | 0.10 | 0.19 | 0.13 | 0.22 | 0.09 | 0.10 | 0.09 | 0.10 | 0.26 | 0.11 | 0.31 | 0.08 |
| 12 | 0.11 | 0.14 | 0.12 | 0.16 | 0.30 | 0.12 | 0.08 | 0.10 | 0.19 | 0.17 | 0.08 | 1.00 | 0.09 | 0.09 | 0.17 | 0.11 | 0.10 | 0.08 | 0.11 | 0.06 | 0.12 | 0.21 | 0.11 | 0.10 | 0.09 | 0.16 | 0.08 | 0.16 |
| 13 | 0.28 | 0.20 | 0.26 | 0.16 | 0.10 | 0.22 | 0.19 | 0.23 | 0.14 | 0.15 | 0.15 | 0.09 | 1.00 | 0.30 | 0.15 | 0.15 | 0.21 | 0.12 | 0.20 | 0.10 | 0.15 | 0.14 | 0.16 | 0.23 | 0.23 | 0.16 | 0.14 | 0.11 |
| 14 | 0.18 | 0.16 | 0.20 | 0.13 | 0.10 | 0.21 | 0.13 | 0.28 | 0.12 | 0.14 | 0.12 | 0.09 | 0.30 | 1.00 | 0.12 | 0.17 | 0.23 | 0.10 | 0.16 | 0.08 | 0.17 | 0.13 | 0.19 | 0.31 | 0.15 | 0.13 | 0.11 | 0.11 |
| 15 | 0.22 | 0.31 | 0.21 | 0.45 | 0.17 | 0.19 | 0.11 | 0.13 | 0.33 | 0.28 | 0.11 | 0.17 | 0.15 | 0.12 | 1.00 | 0.14 | 0.15 | 0.13 | 0.20 | 0.09 | 0.14 | 0.37 | 0.13 | 0.14 | 0.16 | 0.41 | 0.12 | 0.16 |
| 16 | 0.16 | 0.19 | 0.20 | 0.15 | 0.14 | 0.28 | 0.09 | 0.26 | 0.17 | 0.21 | 0.09 | 0.11 | 0.15 | 0.17 | 0.14 | 1.00 | 0.34 | 0.09 | 0.17 | 0.07 | 0.60 | 0.16 | 0.34 | 0.26 | 0.11 | 0.16 | 0.09 | 0.21 |
| 17 | 0.20 | 0.22 | 0.27 | 0.16 | 0.12 | 0.39 | 0.11 | 0.44 | 0.17 | 0.20 | 0.10 | 0.10 | 0.21 | 0.23 | 0.15 | 0.34 | 1.00 | 0.10 | 0.22 | 0.08 | 0.32 | 0.16 | 0.28 | 0.37 | 0.14 | 0.17 | 0.11 | 0.17 |
| 18 | 0.15 | 0.13 | 0.13 | 0.13 | 0.08 | 0.11 | 0.16 | 0.10 | 0.11 | 0.11 | 0.19 | 0.08 | 0.12 | 0.10 | 0.13 | 0.09 | 0.10 | 1.00 | 0.16 | 0.16 | 0.09 | 0.11 | 0.08 | 0.10 | 0.19 | 0.13 | 0.33 | 0.09 |
| 19 | 0.29 | 0.29 | 0.29 | 0.21 | 0.12 | 0.24 | 0.14 | 0.19 | 0.19 | 0.21 | 0.13 | 0.11 | 0.20 | 0.16 | 0.20 | 0.17 | 0.22 | 0.16 | 1.00 | 0.10 | 0.17 | 0.17 | 0.15 | 0.17 | 0.20 | 0.21 | 0.15 | 0.15 |
| 20 | 0.10 | 0.09 | 0.09 | 0.09 | 0.06 | 0.08 | 0.16 | 0.08 | 0.08 | 0.08 | 0.22 | 0.06 | 0.10 | 0.08 | 0.09 | 0.07 | 0.08 | 0.16 | 0.10 | 1.00 | 0.07 | 0.08 | 0.07 | 0.08 | 0.14 | 0.09 | 0.20 | 0.06 |
| 21 | 0.16 | 0.19 | 0.20 | 0.15 | 0.15 | 0.29 | 0.09 | 0.25 | 0.17 | 0.22 | 0.09 | 0.12 | 0.15 | 0.17 | 0.14 | 0.60 | 0.32 | 0.09 | 0.17 | 0.07 | 1.00 | 0.17 | 0.41 | 0.27 | 0.11 | 0.16 | 0.09 | 0.21 |
| 22 | 0.19 | 0.28 | 0.20 | 0.34 | 0.22 | 0.21 | 0.10 | 0.14 | 0.41 | 0.38 | 0.10 | 0.21 | 0.14 | 0.13 | 0.37 | 0.16 | 0.16 | 0.11 | 0.17 | 0.08 | 0.17 | 1.00 | 0.15 | 0.15 | 0.14 | 0.36 | 0.11 | 0.21 |
| 23 | 0.15 | 0.17 | 0.18 | 0.14 | 0.13 | 0.26 | 0.09 | 0.26 | 0.15 | 0.18 | 0.09 | 0.11 | 0.16 | 0.19 | 0.13 | 0.34 | 0.28 | 0.08 | 0.15 | 0.07 | 0.41 | 0.15 | 1.00 | 0.30 | 0.11 | 0.14 | 0.09 | 0.17 |
| 24 | 0.19 | 0.19 | 0.24 | 0.15 | 0.12 | 0.31 | 0.12 | 0.42 | 0.15 | 0.17 | 0.10 | 0.10 | 0.23 | 0.31 | 0.14 | 0.26 | 0.37 | 0.10 | 0.17 | 0.08 | 0.27 | 0.15 | 0.30 | 1.00 | 0.14 | 0.15 | 0.10 | 0.14 |
| 25 | 0.28 | 0.19 | 0.20 | 0.17 | 0.09 | 0.16 | 0.28 | 0.14 | 0.14 | 0.14 | 0.26 | 0.09 | 0.23 | 0.15 | 0.16 | 0.11 | 0.14 | 0.19 | 0.20 | 0.14 | 0.11 | 0.14 | 0.11 | 0.14 | 1.00 | 0.16 | 0.25 | 0.10 |
| 26 | 0.22 | 0.31 | 0.23 | 0.60 | 0.17 | 0.20 | 0.11 | 0.14 | 0.32 | 0.30 | 0.11 | 0.16 | 0.15 | 0.13 | 0.41 | 0.16 | 0.17 | 0.13 | 0.21 | 0.09 | 0.16 | 0.36 | 0.14 | 0.15 | 0.16 | 1.00 | 0.12 | 0.17 |
| 27 | 0.16 | 0.13 | 0.14 | 0.13 | 0.08 | 0.11 | 0.23 | 0.11 | 0.11 | 0.11 | 0.31 | 0.08 | 0.14 | 0.11 | 0.12 | 0.09 | 0.11 | 0.33 | 0.15 | 0.20 | 0.09 | 0.11 | 0.09 | 0.10 | 0.25 | 0.12 | 1.00 | 0.08 |
| 28 | 0.13 | 0.17 | 0.15 | 0.16 | 0.23 | 0.18 | 0.08 | 0.14 | 0.23 | 0.26 | 0.08 | 0.16 | 0.11 | 0.11 | 0.16 | 0.21 | 0.17 | 0.09 | 0.15 | 0.06 | 0.21 | 0.21 | 0.17 | 0.14 | 0.10 | 0.17 | 0.08 | 1.00 |

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 0.73 | 0.75 | 0.61 | 0.40 | 0.63 | 0.50 | 0.54 | 0.54 | 0.56 | 0.48 | 0.38 | 0.66 | 0.53 | 0.59 | 0.48 | 0.56 | 0.47 | 0.68 | 0.36 | 0.48 | 0.54 | 0.47 | 0.54 | 0.66 | 0.59 | 0.49 | 0.44 |
| 2 | 0.73 | 1.00 | 0.74 | 0.71 | 0.47 | 0.69 | 0.43 | 0.54 | 0.66 | 0.71 | 0.41 | 0.44 | 0.56 | 0.50 | 0.69 | 0.54 | 0.59 | 0.43 | 0.67 | 0.33 | 0.54 | 0.66 | 0.50 | 0.55 | 0.54 | 0.69 | 0.43 | 0.51 |
| 3 | 0.75 | 0.74 | 1.00 | 0.62 | 0.42 | 0.75 | 0.45 | 0.62 | 0.58 | 0.61 | 0.43 | 0.39 | 0.64 | 0.55 | 0.57 | 0.56 | 0.65 | 0.43 | 0.68 | 0.33 | 0.56 | 0.56 | 0.53 | 0.61 | 0.56 | 0.60 | 0.44 | 0.47 |
| 4 | 0.61 | 0.71 | 0.62 | 1.00 | 0.49 | 0.56 | 0.41 | 0.46 | 0.70 | 0.67 | 0.40 | 0.49 | 0.48 | 0.43 | 0.80 | 0.47 | 0.49 | 0.43 | 0.57 | 0.33 | 0.47 | 0.72 | 0.44 | 0.47 | 0.51 | 0.88 | 0.43 | 0.49 |
| 5 | 0.40 | 0.47 | 0.42 | 0.49 | 1.00 | 0.45 | 0.29 | 0.38 | 0.58 | 0.57 | 0.29 | 0.67 | 0.35 | 0.35 | 0.50 | 0.45 | 0.41 | 0.31 | 0.40 | 0.25 | 0.46 | 0.59 | 0.43 | 0.40 | 0.34 | 0.50 | 0.30 | 0.60 |
| 6 | 0.63 | 0.69 | 0.75 | 0.56 | 0.45 | 1.00 | 0.40 | 0.68 | 0.58 | 0.64 | 0.38 | 0.40 | 0.58 | 0.57 | 0.54 | 0.66 | 0.76 | 0.38 | 0.61 | 0.30 | 0.67 | 0.56 | 0.63 | 0.69 | 0.48 | 0.56 | 0.39 | 0.53 |
| 7 | 0.50 | 0.43 | 0.45 | 0.41 | 0.29 | 0.40 | 1.00 | 0.40 | 0.36 | 0.36 | 0.75 | 0.29 | 0.54 | 0.44 | 0.39 | 0.34 | 0.39 | 0.49 | 0.44 | 0.50 | 0.34 | 0.36 | 0.34 | 0.40 | 0.66 | 0.39 | 0.60 | 0.31 |
| 8 | 0.54 | 0.54 | 0.62 | 0.46 | 0.38 | 0.68 | 0.40 | 1.00 | 0.46 | 0.50 | 0.37 | 0.34 | 0.60 | 0.66 | 0.43 | 0.64 | 0.80 | 0.36 | 0.55 | 0.30 | 0.63 | 0.45 | 0.64 | 0.78 | 0.45 | 0.46 | 0.37 | 0.45 |
| 9 | 0.54 | 0.66 | 0.58 | 0.70 | 0.58 | 0.58 | 0.36 | 0.46 | 1.00 | 0.80 | 0.35 | 0.52 | 0.44 | 0.41 | 0.71 | 0.51 | 0.50 | 0.39 | 0.54 | 0.30 | 0.51 | 0.78 | 0.47 | 0.47 | 0.44 | 0.70 | 0.38 | 0.60 |
| 10 | 0.56 | 0.71 | 0.61 | 0.67 | 0.57 | 0.64 | 0.36 | 0.50 | 0.80 | 1.00 | 0.35 | 0.50 | 0.47 | 0.44 | 0.66 | 0.57 | 0.56 | 0.38 | 0.57 | 0.29 | 0.58 | 0.76 | 0.52 | 0.51 | 0.44 | 0.68 | 0.37 | 0.64 |
| 11 | 0.48 | 0.41 | 0.43 | 0.40 | 0.29 | 0.38 | 0.75 | 0.37 | 0.35 | 0.35 | 1.00 | 0.29 | 0.48 | 0.39 | 0.39 | 0.32 | 0.37 | 0.54 | 0.44 | 0.58 | 0.32 | 0.35 | 0.32 | 0.37 | 0.63 | 0.39 | 0.69 | 0.30 |
| 12 | 0.39 | 0.44 | 0.40 | 0.49 | 0.69 | 0.41 | 0.29 | 0.34 | 0.53 | 0.51 | 0.29 | 1.00 | 0.34 | 0.33 | 0.51 | 0.39 | 0.37 | 0.31 | 0.37 | 0.25 | 0.40 | 0.57 | 0.38 | 0.36 | 0.34 | 0.50 | 0.30 | 0.49 |
| 13 | 0.66 | 0.56 | 0.64 | 0.49 | 0.35 | 0.58 | 0.54 | 0.60 | 0.44 | 0.47 | 0.48 | 0.34 | 1.00 | 0.68 | 0.46 | 0.47 | 0.57 | 0.42 | 0.56 | 0.35 | 0.47 | 0.45 | 0.48 | 0.60 | 0.60 | 0.48 | 0.46 | 0.39 |
| 14 | 0.53 | 0.50 | 0.55 | 0.43 | 0.35 | 0.57 | 0.44 | 0.66 | 0.41 | 0.44 | 0.39 | 0.33 | 0.68 | 1.00 | 0.41 | 0.51 | 0.60 | 0.35 | 0.49 | 0.31 | 0.51 | 0.42 | 0.54 | 0.70 | 0.47 | 0.43 | 0.38 | 0.39 |
| 15 | 0.59 | 0.69 | 0.57 | 0.80 | 0.50 | 0.54 | 0.39 | 0.43 | 0.71 | 0.66 | 0.39 | 0.50 | 0.46 | 0.41 | 1.00 | 0.45 | 0.47 | 0.43 | 0.55 | 0.32 | 0.46 | 0.75 | 0.43 | 0.45 | 0.49 | 0.78 | 0.42 | 0.50 |
| 16 | 0.48 | 0.54 | 0.56 | 0.47 | 0.45 | 0.66 | 0.34 | 0.64 | 0.51 | 0.57 | 0.32 | 0.39 | 0.47 | 0.51 | 0.45 | 1.00 | 0.72 | 0.33 | 0.51 | 0.27 | 0.88 | 0.49 | 0.72 | 0.63 | 0.39 | 0.48 | 0.34 | 0.57 |
| 17 | 0.56 | 0.59 | 0.65 | 0.49 | 0.41 | 0.76 | 0.39 | 0.80 | 0.50 | 0.56 | 0.37 | 0.37 | 0.57 | 0.60 | 0.47 | 0.72 | 1.00 | 0.37 | 0.58 | 0.29 | 0.70 | 0.49 | 0.66 | 0.75 | 0.45 | 0.50 | 0.38 | 0.50 |
| 18 | 0.47 | 0.43 | 0.43 | 0.43 | 0.31 | 0.38 | 0.49 | 0.36 | 0.39 | 0.38 | 0.54 | 0.30 | 0.42 | 0.35 | 0.43 | 0.33 | 0.37 | 1.00 | 0.49 | 0.49 | 0.33 | 0.38 | 0.32 | 0.35 | 0.54 | 0.42 | 0.71 | 0.32 |
| 19 | 0.68 | 0.67 | 0.68 | 0.57 | 0.40 | 0.61 | 0.44 | 0.55 | 0.54 | 0.57 | 0.44 | 0.37 | 0.56 | 0.49 | 0.55 | 0.51 | 0.58 | 0.49 | 1.00 | 0.35 | 0.50 | 0.51 | 0.46 | 0.51 | 0.55 | 0.56 | 0.48 | 0.46 |
| 20 | 0.36 | 0.33 | 0.33 | 0.33 | 0.25 | 0.30 | 0.50 | 0.30 | 0.30 | 0.29 | 0.58 | 0.25 | 0.35 | 0.31 | 0.32 | 0.27 | 0.29 | 0.49 | 0.35 | 1.00 | 0.26 | 0.30 | 0.26 | 0.29 | 0.44 | 0.32 | 0.56 | 0.25 |
| 21 | 0.48 | 0.54 | 0.56 | 0.47 | 0.46 | 0.67 | 0.34 | 0.63 | 0.51 | 0.58 | 0.32 | 0.40 | 0.47 | 0.51 | 0.46 | 0.88 | 0.70 | 0.33 | 0.50 | 0.26 | 1.00 | 0.50 | 0.77 | 0.65 | 0.39 | 0.48 | 0.33 | 0.58 |
| 22 | 0.54 | 0.66 | 0.56 | 0.72 | 0.59 | 0.56 | 0.36 | 0.45 | 0.78 | 0.76 | 0.35 | 0.56 | 0.45 | 0.42 | 0.75 | 0.49 | 0.49 | 0.38 | 0.51 | 0.30 | 0.50 | 1.00 | 0.47 | 0.47 | 0.44 | 0.74 | 0.37 | 0.56 |
| 23 | 0.47 | 0.50 | 0.53 | 0.44 | 0.43 | 0.63 | 0.34 | 0.64 | 0.47 | 0.52 | 0.32 | 0.38 | 0.48 | 0.54 | 0.43 | 0.72 | 0.66 | 0.32 | 0.46 | 0.26 | 0.77 | 0.47 | 1.00 | 0.68 | 0.38 | 0.45 | 0.32 | 0.51 |
| 24 | 0.54 | 0.55 | 0.61 | 0.47 | 0.40 | 0.69 | 0.40 | 0.78 | 0.47 | 0.51 | 0.37 | 0.36 | 0.60 | 0.70 | 0.45 | 0.63 | 0.75 | 0.35 | 0.51 | 0.29 | 0.65 | 0.47 | 0.68 | 1.00 | 0.45 | 0.47 | 0.36 | 0.45 |
| 25 | 0.66 | 0.54 | 0.56 | 0.51 | 0.34 | 0.48 | 0.66 | 0.45 | 0.44 | 0.44 | 0.63 | 0.34 | 0.60 | 0.47 | 0.49 | 0.39 | 0.45 | 0.54 | 0.55 | 0.44 | 0.39 | 0.44 | 0.38 | 0.45 | 1.00 | 0.49 | 0.62 | 0.36 |
| 26 | 0.59 | 0.69 | 0.60 | 0.88 | 0.50 | 0.56 | 0.39 | 0.46 | 0.70 | 0.68 | 0.39 | 0.50 | 0.47 | 0.43 | 0.78 | 0.48 | 0.50 | 0.42 | 0.56 | 0.32 | 0.48 | 0.74 | 0.45 | 0.47 | 0.49 | 1.00 | 0.41 | 0.51 |
| 27 | 0.49 | 0.43 | 0.44 | 0.43 | 0.30 | 0.39 | 0.60 | 0.37 | 0.38 | 0.37 | 0.69 | 0.30 | 0.46 | 0.38 | 0.42 | 0.34 | 0.38 | 0.71 | 0.48 | 0.56 | 0.33 | 0.37 | 0.32 | 0.36 | 0.62 | 0.41 | 1.00 | 0.31 |
| 28 | 0.44 | 0.51 | 0.47 | 0.49 | 0.60 | 0.53 | 0.31 | 0.45 | 0.60 | 0.64 | 0.30 | 0.48 | 0.39 | 0.39 | 0.50 | 0.57 | 0.50 | 0.32 | 0.46 | 0.25 | 0.58 | 0.56 | 0.51 | 0.45 | 0.36 | 0.51 | 0.31 | 1.00 |

Bakalaura darbs „ Ekspertu novērtējumu agregācija, balstoties uz ekvivalences attiecību" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: *(                    )* Jana Fedotova

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: Dr. math. Svetlana Asmuss *(                    )* 08.06.2016.

Recenzents: Asoc. prof. Ingrīda Uļjane

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2016.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

16.06.2016. prot. Nr._____

Komisijas sekretāre: docente Margarita Buiķe