Ученые записки

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ

I

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Кафедра математического анализа

Ученые записки
Латвийского государственного университета
имени Петра Стучки
том 236

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ

Выпуск I

Латвийский государственный университет
Рига 1975

УДК 513.

Топологические пространства и отображения в них, вып.I. Учен.зап.ЛГУ им.П.Стучки, 1975, т.236

Сборник содержит результаты исследований, выполненных на кафедре математического анализа Латвийского государственного университета им.П.Стучки в 1973-74 гг. Результаты относятся к общей теории топологических пространств, теории линейных непрерывных и линейных замкнутых отображений топологических пространств, а также теории ортогональных полиномов.

Сборник предназначен для научных работников в области теории функций, математического анализа и топологии, для аспирантов и студентов старших курсов.

Т $\frac{20203-101\text{у}}{\text{М } 812(11)-75}$ 134-75

УДК 513.83

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ, СВЯЗАННАЯ С РАСХОДЯЩИМИСЯ СЕТЯМИ*

М.А. Гольдман

В статьях [1,2] были охарактеризованы при помощи расходящихся сетей функционально отделимые, тихоновские и отделимые компактные пространства. В настоящей статье тем же методом описываются компактные, нормальные компактные, вполне регулярные, локально компактные и нормальные пространства.

Теорема I.

Условие. $B(S)$ — семейство всех определенных на множестве S ограниченных вещественных функций; $\mathcal{T}^{o}(B)$ — класс всевозможных топологических пространств S, обладающих следующим свойством: для каждой расположенной в S расходящейся сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ существует функция $x\in B(S)$, такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в пространстве $\mathbb{R}$ вещественных чисел, наделенном обычной топологией; $\mathcal{T}_c$ — класс всевозможных компактных пространств.

Утверждение. $\mathcal{T}_c = \mathcal{T}^{o}(B)$.

Доказательство. Пусть $S\in\mathcal{T}_c$. Возьмем в S какую-либо расходящуюся сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ и обозначим через s одну из ее предельных точек. Ввиду расходимости сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ существует окрестность $\mathcal{U}$ точки s, такая, что множество $\{\alpha\in A:\ s_\alpha\in S\setminus\mathcal{U}\}$ конфинально с A. Поскольку s - предельная точка сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, множество $\{\alpha\in A:\ s_\alpha\in\mathcal{U}\}$ тоже конфинально с A. Отсюда следует, что характеристическая функция $x_{\mathcal{U}}$ множества $\mathcal{U}$

---

* Наряду с термином "сеть" в математической литературе встречаются равнозначные с ним термины "обобщенная последовательность" и "направленность".

преобразует сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ в расходящуюся сеть $(x_\mathcal{U}(s_\alpha))_{\alpha\in A}$. Так как $x_\mathcal{U}\in B(S)$, то этим доказано, что $S\in\mathcal{T}_c \Rightarrow S\in\mathcal{T}^\circ(B)$.

Пусть $S\notin\mathcal{T}_c$. Тогда в S найдется сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ без предельных точек. Выделим из $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ универсальную подсеть $(s_{\alpha_\mu})_{\mu\in M}$ (см.[3], стр.116); она, очевидно, расходится. Для любого $x\in B(S)$ сеть $(x(s_{\alpha_\mu}))_{\mu\in M}$ универсальна и ограниченна в $\mathbb{R}$. Следовательно, $(x(s_{\alpha_\mu}))_{\mu\in M}$ сходится в $\mathbb{R}$, какова бы ни была функция $x\in B(S)$. Это доказывает, что $S\notin\mathcal{T}_c \Rightarrow S\notin\mathcal{T}^\circ(B)$.

Замечания.

I. Импликация $S\notin\mathcal{T}_c \Rightarrow S\notin\mathcal{T}^\circ(B)$ может быть установлена без привлечения понятия универсальной сети. Покажем, как это сделать. Предполагая, что $S\notin\mathcal{T}_c$, рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ всевозможных покрытий пространства S, каждое из которых содержит открытое подпокрытие и не содержит конечного подпокрытия. Как можно убедиться с помощью леммы Цорна, в классе $\mathfrak{M}$ существует покрытие $\mathcal{M}=\{E_\alpha:\alpha\in A\}$, не мажорируемое никаким другим покрытием из $\mathfrak{M}$. Легко видеть, что $\bigcup\{E_\alpha:\alpha\in A_0\subset A\}\in\mathcal{M}$, каково бы ни было конечное множество A_0. Частично упорядочим A, полагая $\alpha_1\leq\alpha_2$, если $E_{\alpha_1}\subset E_{\alpha_2}$. В силу только что отмеченного свойства покрытия $\mathcal{M}$ множество A оказывается направлённым. Рассмотрим сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, где s_α - произвольно взятый элемент из $S\setminus E_\alpha$. Эта сеть расходится в S; более того, она не имеет ни одной предельной точки. В самом деле, каждая точка s' из S принадлежит некоторому открытому $E_{\alpha'}$, а множество $\{\alpha\in A:\ s_\alpha\in E_{\alpha'}\}$ не составляет конфинальной части A, так как $s_\alpha\notin E_{\alpha'}$, если $\alpha\geq\alpha'$. Далее покажем, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ сходится, какова бы ни была функция $x\in B(S)$. Этим наша импликация будет доказана. Пусть E - произвольное множество в S, x_E - его характеристическая функция. Если $E \in \mathcal{M}$, т.е. $E = E_{\alpha_0}$, то $\lim\limits_{\alpha \in A} x_E(s_\alpha) = 0$, ибо $s_\alpha \notin E$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$; если $E \notin \mathcal{M}$, то покрытие $\{E\} \cup \mathcal{M}$ содержит подпокрытие $\{E, E_{\alpha_1}\}$, значит, $s_\alpha \in E$ при $\alpha \geqslant \alpha_1$, откуда следует, что $\lim\limits_{\alpha \in A} x_E(s_\alpha) = 1$. Итак, каким бы мы ни взяли $E \subset S$, существует $\lim\limits_{\alpha \in A} x_E(s_\alpha)$. Отсюда заключаем, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ сходится, какова бы ни была функция $x \in B(S)$, ибо каждая функция из $B(S)$ является равномерным пределом последовательности конечных линейных комбинаций характеристических функций подмножеств пространства S (см., например, [4], стр. 285, теорема 10.20).

Приведенный сейчас вывод импликации $S \notin \mathcal{T}_c \Rightarrow S \in \mathcal{T}^\circ(S)$ сделан по образцу доказательства теоремы I в [2].

2. Теорема Тихонова о топологическом произведении компактных пространств равносильна, согласно теореме I, утверждению $\Pi\{S_\mu : \mu \in M\} \in \mathcal{T}^\circ(B) \Leftrightarrow \forall \mu \in M\, [S_\mu \in \mathcal{T}^\circ(B)]$. Доказательство последнего, независимое от теоремы Тихонова, можно получить подобно тому, как доказана теорема 3 в [2].

Лемма I.

Условие. (S, σ) - топологическое пространство; F - непустое замкнутое компактное множество в S.

Утверждение. $\exists s \in F\,(s \in \mathcal{U} \in \sigma \Rightarrow \overline{\{s\}} \subset \mathcal{U})$.

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathcal{A}$ всех непустых замкнутых подмножеств множества F, частично упорядоченное отношением $\supset$. В нем имеется максимальный элемент, ибо если $\mathcal{L}$ - линейно упорядоченная часть $\mathcal{A}$, то в силу компактности F пересечение всех множеств из $\mathcal{L}$ не пусто и, следовательно, является мажорантой в $\mathcal{L}$. Пусть F_0 - максимальный элемент в $\mathcal{A}$. Тогда $F_0 = \overline{\{s\}}$ $\forall s \in F_0$. Легко видеть, что любая точка s из F_0 обладает требуемым свойством: $s \in \mathcal{U} \in \sigma \Rightarrow \overline{\{s\}} \subset \mathcal{U}$.

Пусть S – топологическое пространство и $s_1, s_2 \in S$. Введем символ $O(s_1, s_2)$ для обозначения высказывания "точки s_1 и s_2 отделимы непересекающимися окрестностями", и рассмотрим формулы:

$$\forall s_1 \ \forall s_2 \ \ (s_1 \notin \overline{\{s_2\}} \Rightarrow O(s_1, s_2)), \tag{r'}$$

$$\forall s_1 \ \forall s_2 \ \ (s_1 \notin \overline{\{s_2\}} \Rightarrow s_2 \notin \overline{\{s_1\}}), \tag{$1'$}$$

$$\forall s_1 \ \forall s_2 \ \ (\overline{\{s_1\}} \cap \overline{\{s_2\}} = \varnothing \Rightarrow O(s_1, s_2)). \tag{$2'$}$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{r'}$ (соответственно $\mathcal{T}_{i'}$, $i = 1, 2$) класс всех топологических пространств S, для которых выполняется формула (r') (соответственно (i'), $i = 1, 2$). Очевидно, $\mathcal{T}_{r'} \subset \mathcal{T}_{1'} \cap \mathcal{T}_{2'}$. Обратное включение тоже имеет место, ибо формула $(1')$ влечет формулу $\forall s_1 \forall s_2 (s_1 \notin \overline{\{s_2\}} \Rightarrow \Rightarrow \overline{\{s_1\}} \cap \overline{\{s_2\}} = \varnothing)$. Следовательно, справедливо равенство $\mathcal{T}_{r'} = \mathcal{T}_{1'} \cap \mathcal{T}_{2'}$. Заметим еще, что $\mathcal{T}_{1'} \setminus \mathcal{T}_{2'} \neq \varnothing$ и $\mathcal{T}_{2'} \setminus \mathcal{T}_{1'} \neq \varnothing$.

Пусть $\mathcal{T}_r$ – класс всех регулярных пространств, а $\mathcal{T}_i$ – класс всех пространств, удовлетворяющих i-ой аксиоме отделимости $(i = 1, 2)$. Тогда $\mathcal{T}_r \subset \mathcal{T}_{r'}$, $\mathcal{T}_i \subset \mathcal{T}_{i'}$ $(i=1,2)$.

Лемма 2:

Условие. $C(S)$ – семейство всех определенных на топологическом пространстве S непрерывных вещественных функций; $\mathcal{T}^2(C)$ – класс всевозможных топологических пространств S, обладающих следующим свойством: для каждой расположенной в S расходящейся сети $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$, имеющей не менее двух предельных точек, существует функция $x \in C(S)$, такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в $\mathbb{R}$.

Утверждение. $\mathcal{T}^2(C) \subset \mathcal{T}_{2'}$.

Доказательство. Пусть $s_1, s_2 \in S \in \mathcal{T}^2(C)$ и $\overline{\{s_1\}} \cap \overline{\{s_2\}} = \varnothing$. Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n \in \omega}$, где $s_n = s_1$ при n нечетном и $s_n = s_2$ при n четном.

Сна расходится (в силу условия $\overline{\{S_1\}} \cap \overline{\{S_2\}} = \emptyset$) и имеет две предельные точки (s_1 и s_2); значит, существует функция $x \in C(S)$, такая, что последовательность $(x(s_n))_{n \in \omega}$ расходится в $\mathbb{R}$. Отсюда следует неравенство $x(s_1) \neq x(s_2)$. Оно доказывает нашу лемму, ибо $[x(s_1) \neq x(s_2)] \Rightarrow O(s_1, s_2)$.

Теорема 2.

Условие. $CB(S)$ — семейство всех определенных на топологическом пространстве S непрерывных ограниченных вещественных функций; $\mathcal{T}^\circ(CB)$ — класс всевозможных топологических пространств S, обладающих следующим свойством: для каждой расположенной в S расходящейся сети $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ существует функция $x \in CB(S)$, такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится в $\mathbb{R}$; $\mathcal{T}_{nc}$ — класс всевозможных нормальных компактных пространств.

Утверждение. $\mathcal{T}_{nc} = \mathcal{T}^\circ(CB)$.

Доказательство. Пусть $(S, \sigma) \in \mathcal{T}_{nc}$. Возьмем в S какую-либо расходящуюся сеть $(s_\alpha)_{\alpha \in A}$ и обозначим через F множество всех ее предельных точек. Множество F замкнуто, а так как $S \in \mathcal{T}_c$, то F не пусто и компактно. Согласно лемме I, в F найдется такая точка s, что $s \in \mathcal{U} \in \sigma \Rightarrow \overline{\{s\}} \subset \mathcal{U}$. Отсюда следует (принимая во внимание нормальность пространства S), что для каждой окрестности $\mathcal{U}$ точки s в $CB(S)$ существует функция x, удовлетворяющая условиям: $0 \leq x \leq 1$, $x(s) = 0$ и $x(s') = 1$ для $s' \in S \setminus \mathcal{U}$. Возьмем окрестность $\mathcal{U}$ так, чтобы множество $\{\alpha \in A : s_\alpha \in S \setminus \mathcal{U}\}$ было конфинально с A; тогда сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ окажется расходящейся в $\mathbb{R}$. Это доказывает, что $S \in \mathcal{T}_{nc} \Rightarrow S \in \mathcal{T}^\circ(CB)$ *

Установим обратную импликацию. Пусть $S \in \mathcal{T}^\circ(CB)$; тогда $S \in \mathcal{T}^\circ(B) \cap \mathcal{T}^2(C)$. Так как $\mathcal{T}^\circ(B) = \mathcal{T}_c$

* Эту импликацию доказал А.Х.Кушкулей методом, отличным от приведенного здесь.

(теорема I), а $\mathcal{T}^2(C)\subset\mathcal{T}_{2'}$ (лемма 2), то $S\in\mathcal{T}_C\cap\mathcal{T}_{2'}$. Отсюда следует, что пространство S нормально (доказательство то же, что и в случае, когда $S\in\mathcal{T}_C\cap\mathcal{T}_2$). Таким образом, $S\in\mathcal{T}^0(CB)\Rightarrow S\in\mathcal{T}_{nc}$.

Теорема 3.

Утверждение. $(\Pi\{S_\mu:\mu\in M\})\in\mathcal{T}_{nc}\Leftrightarrow\forall\mu\in M(S_\mu\in\mathcal{T}_{nc})$.

Доказательство. Так как $\mathcal{T}_{nc}=\mathcal{T}^0(CB)$ (теорема 2), то интересующее нас утверждение сводится к высказыванию $(\Pi\{S_\mu:\mu\in M\})\in\mathcal{T}^0(CB)\Leftrightarrow\forall\mu\in M[S_\mu\in\mathcal{T}^0(CB)]$ совпадающему с теоремой 3 в [2].

Теорема 4.

Условие. $\mathcal{T}^1(C)$ (соответственно $\mathcal{T}^1(CB)$) – класс всевозможных топологических пространств S, обладающих следующим свойством: для каждой расположенной в S расходящейся сети $(S_\alpha)_{\alpha\in A}$, имеющей по крайней мере одну предельную точку, существует функция $x\in C(S)$ (соответственно $x\in CB(S)$), такая, что сеть $(x(S_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в R; $\mathcal{T}^1_{1'}(C)\overset{def}{=}\mathcal{T}^1(C)\cap\mathcal{T}_{1'}$; $\mathcal{T}^1_{1'}(CB)\overset{def}{=}\mathcal{T}^1(CB)\cap\mathcal{T}_{1'}$; $\mathcal{T}_{cr}$ – класс всех вполне регулярных пространств.

Утверждение. $\mathcal{T}_{cr}=\mathcal{T}^1_{1'}(C)=\mathcal{T}^1_{1'}(CB)$.

Доказательство. Так как $\mathcal{T}^1(CB)\subset\mathcal{T}^1(C)$, то достаточно установить два включения:

$$\mathcal{T}_{cr}\subset\mathcal{T}^1_{1'}(CB) \quad \text{и} \quad \mathcal{T}^1_{1'}(C)\subset\mathcal{T}_{cr}.$$

Первое из них следует из включений $\mathcal{T}_{cr}\subset\mathcal{T}^1(CB)$ (см. [I], доказательство пункта а) теоремы 2) и $\mathcal{T}_{cr}\subset\mathcal{T}_{1'}$.

Доказательству второго включения предпошлем следующее замечание: $S\in\mathcal{T}_{cr}$ тогда и только тогда, когда для любой точки $s^0\in S$ система $\{\mathcal{U}_\alpha(s^0)\}_{\alpha\in A}$ всех множеств вида $\{s\in S: |x(s)-x(s^0)|\le\varepsilon\}$, где $x\in C(S)$, $\varepsilon>0$, представляет собой базу окрестностей точки s^0.

Предположим, что включение $\mathcal{T}^1_{1'}(C)\subset\mathcal{T}_{cr}$ не имеет места. Значит существует топологическое пространство S, такое, что $S \in \mathcal{T}_1'(C)$ и $S \notin \mathcal{T}_{cr}$. Согласно сделанному выше замечанию, в S найдется точка s° и такая открытая окрестность $\mathcal{V}$ этой точки, что $\mathcal{V}_\alpha(s^\circ) \cap (S \setminus \mathcal{V}) \neq \emptyset$ при любом $\alpha \in A$. Частично упорядочим A отношением $\alpha \leq \alpha'$, означающим, что $\mathcal{V}_\alpha(s^\circ) \supset \mathcal{V}_{\alpha'}(s^\circ)$. Легко видеть, что A — направленное множество (см. доказательство леммы I в [I]). Покажем, что в A нет максимального элемента. Пусть α' — произвольно фиксированный в A элемент и s' - некоторая точка множества $\mathcal{V}_{\alpha'}(s^\circ) \cap (S \setminus \mathcal{V})$. Рассмотрим последовательность $(s_n)_{n \in \omega}$, где $s_n = s'$ при n нечетном и $s_n = s^\circ$ при n четном. Она расходится. В этом легко убедиться, предварительно заметив, что $S = \mathcal{V} \cup (S \setminus \overline{\{s^\circ\}})$ (если $s \in S \setminus \mathcal{V}$, то $\overline{\{s\}} \subset S \setminus \mathcal{V}$, откуда заключаем, учитывая принадлежность S классу $\mathcal{T}_1$, что $s \notin \overline{\{s^\circ\}}$, т.е. $s \in S \setminus \overline{\{s^\circ\}}$). Так как вне $\mathcal{V}$ расположена подпоследовательность $(s_{2n-1})_{n \in \omega}$, а вне $S \setminus \overline{\{s^\circ\}}$ — подпоследовательность $(s_{2n})_{n \in \omega}$, то ни одна точка s из S не является точкой сходимости последовательности $(s_n)_{n \in \omega}$. Поскольку последовательность $(s_n)_{n \in \omega}$ имеет предельную точку (например, s°) и $S \in \mathcal{T}'(C)$, существует функция $x_0 \in C(S)$, такая, что $x_0(s^\circ) \neq x_0(s')$. Можно считать, что $x_0(s^\circ) = 0$ и $x_0(s') = 1$. Положим $\mathcal{V}_{\alpha''}(s^\circ) = \{s \in S : |x_0(s)| \leq \frac{1}{2}\}$. Так как $s' \in \mathcal{V}_{\alpha'}(s^\circ)$ и $s' \notin \mathcal{V}_{\alpha''}(s^\circ)$, то мажоранта множества $\{\alpha', \alpha''\}$ не совпадает с α'. Это показывает, что в A нет максимального элемента.

Пусть B — направленное произведение $A \times A$. Тогда множества $B_1 = \{(\alpha, \alpha) : \alpha \in A\}$ и $B_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in A, \alpha_1 \neq \alpha_2\}$ конфинальны с B (см. лемму 2 в [I], где показано, что B_1 конфинально с B каким бы ни было направленное множество A, а B_2 конфинально с B, если в направленном множестве A нет максимального элемента). Построим в S сеть $(s_\beta)_{\beta\in B}$ следующим образом: если $\beta=(\alpha,\alpha)\in B_1$, то в качестве s_β возьмем некоторый элемент из $\mathcal{V}_\alpha(s^0)\cap\cap(S\setminus\mathcal{V})$; если $\beta\in B_2$, то положим $s_\beta=s^0$. Сеть $(s_\beta)_{\beta\in B}$ имеет предельную точку (например, s^0) и расходится. Последнее можно показать, учитывая конфинальность B_1 и B_2 с B, подобно тому, как выше была установлена расходимость последовательности $(s_n)_{n\in\omega}$.

Теперь легко получить противоречие с тем, что $S\in\mathcal{T}^1(C)$, доказав сходимость сети $(x(s_\beta))_{\beta\in B}$ для любой функции $x\in C(S)$ (см. конец доказательства теоремы 2 в [I]).

Теорема 5.

Условие. S^* - одноточечное компактное расширение топологического пространства S $(S^*=S\cup\{\xi\})$; $\mathcal{T}_{lc}$ — класс всех локально компактных пространств; $\mathcal{T}_{r,lc}\overset{def}{=}\mathcal{T}_r\cap\mathcal{T}_{lc}$.

Утверждение. $S^*\in\mathcal{T}_r\Leftrightarrow S\in\mathcal{T}_{r,lc}$.

Доказательство. Пусть $S^*\in\mathcal{T}_r$; тогда для точки ξ и любой точки $s\in S$ существуют непересекающиеся окрестности, ибо $s\notin\overline{\{\xi\}}$ (поскольку одноточечное множество $\{\xi\}$ замкнуто в S^*). Это показывает, что $S^*\in\mathcal{T}_r\Rightarrow S\in\mathcal{T}_{lc}$. Для получения импликации $S^*\in\mathcal{T}_r\Rightarrow S\in\mathcal{T}_{r,lc}$ нужно еще доказать, что $S^*\in\mathcal{T}_r\Rightarrow S\in\mathcal{T}_r$. Так как $S^*\in\mathcal{T}_c$, то, предположив, что $S^*\in\mathcal{T}_r$, получим $S^*\in\mathcal{T}_{nc}$. Но $\mathcal{T}_{nc}=\mathcal{T}^0(CB)$ (теорема 2), значит $S^*\in\mathcal{T}^0(CB)$. Покажем, что $S\in\mathcal{T}^1(CB)$. Возьмем в S какую-либо расходящуюся сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ с непустым множеством предельных точек, и пусть s - одна из них. Как уже было отмечено выше, s и ξ отделимы непересекающимися окрестностями, значит ξ не является точкой сходимости сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ (рассматриваемой как сеть в S^*). Таким образом, сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ расходится в S^*. Поскольку $S^*\in\mathcal{T}^0(CB)$, существует функция $x\in C(S^*)$ $(=CB(S^*))$, такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в $\mathbb{R}$. Пусть

$x_1 = x|_S$; тогда $x_1 \in CB(S)$ и сеть $(x_1(s_\alpha))_{\alpha \in A}$ расходится. Этим доказано, что $S \in \mathcal{J}^{-1}(CB)$. Более того, $S \in \mathcal{J}^1(CB) \cap \mathcal{T}_{r'}$, так как, очевидно, $S^* \in \mathcal{T}_r \Rightarrow S \in \mathcal{T}_{r'}$. Наконец, пользуясь включением $\mathcal{J}^1(CB) \cap \mathcal{J}_{r'} \subset \mathcal{J}^1_{1'}(CB)$ и равенством $\mathcal{J}^1_{1'}(CB) = \mathcal{T}_{cr}$ (теорема 4), получаем $S^* \in \mathcal{T}_r \Rightarrow$ $\Rightarrow S \in \mathcal{T}_{cr} \cap \mathcal{T}_{lc} \subset \mathcal{T}_{r,lc}$. Заметим, что попутно установлена импликация

$$S^* \in \mathcal{T}_r \Rightarrow S \in \mathcal{T}_{cr}.$$

Доказательство импликации $S \in \mathcal{T}_{r,lc} \Rightarrow S^* \in \mathcal{T}_r$ легко сводится к проверке более простого факта $S \in \mathcal{T}_{r,lc} \Rightarrow S^* \in \mathcal{T}_{r'}$ (так как $S^* \in \mathcal{T}_c$, то $S^* \in \mathcal{T}_{r'} \Rightarrow S^* \in \mathcal{T}_r$). Ввиду несложности этой проверки, мы ее опускаем.

Замечания.

I. Теорема 5 родственна теореме $S^* \in \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow S \in \mathcal{T}_{2,lc}$, где $\mathcal{T}_{2,lc} \overset{def}{=} \mathcal{T}_2 \cap \mathcal{T}_{lc}$ (см. [3], стр.203).

2. Так как $S \in \mathcal{T}_{2,lc} \Leftrightarrow S^* \in \mathcal{T}_2 \Rightarrow S^* \in \mathcal{T}_{r'} \Leftrightarrow S^* \in$ $\in \mathcal{T}_r \Leftrightarrow S \in \mathcal{T}_{r,lc}$ и $S^* \in \mathcal{T}_r \Rightarrow S \in \mathcal{T}_{cr}$, то $\mathcal{T}_{2,lc} \subset$ $\subset \mathcal{T}_{r,lc} \subset \mathcal{T}_{cr}$. Это известные включения (см.[3], стр. 198-199), доказанные здесь лишь другим способом.

Теорема 6.

Условие. $\mathcal{K}(S)$ — семейство всех непрерывных на топологическом пространстве S вещественных функций с компактным носителем; $\{\mathcal{U}_\alpha(s^\circ)\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств вида $\{s \in S : |x(s) - x(s^\circ)| \le \varepsilon\}$, где $x \in \mathcal{K}(S)$, $s^\circ \in S$, $\varepsilon > 0$.

Утверждение. $S \in \mathcal{T}_{r,lc}$ в том и только в том случае, когда для каждой точки $s^\circ \in S$ семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^\circ)\}_{\alpha \in A}$ образует базу всех окрестностей точки s°.

Доказательство. Пусть $S \in \mathcal{T}_{r,lc}$, $s^\circ \in S$ и $\mathcal{U}$ — какая-либо открытая окрестность точки s°. Возьмем открытую окрестность $\mathcal{V}$ точки s° так, чтобы выполнялись следуюние условия: множество $\overline{\mathcal{V}}$ компактно и $\overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$ (это возможно в силу предпосылки $S \in \mathcal{T}_{r,lc}$ (см.[3], стр. 198, теорема 17). Поскольку $S \in \mathcal{T}_{cr}$, существует функция $x \in C(S)$, такая, что $0 \le x \le 1$, $x(s^\circ)=1$ и $x(s)=0$ для $s \in S \setminus \mathcal{V}$. Очевидно, носитель функции x (обозначаемый $\mathrm{supp}\, x$) содержится в $\overline{\mathcal{V}}$, следовательно, $x \in \mathcal{K}(S)$. Так как $\{s \in S: |x(s)-x(s^\circ)| \le \frac{1}{2}\} \subset \mathrm{supp}\, x \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{U}$, то этим показано, что семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^\circ)\}_{\alpha \in A}$ образует базу всех окрестностей точки s°.

Предположим теперь, что для каждой точки $s^\circ \in S$ семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^\circ)\}_{\alpha \in A}$ образует базу всех окрестностей точки s°, и покажем, что $S \in \mathcal{T}_{r,lc}$. Легко видеть, что $S \in \mathcal{T}_r$; что же касается доказательства принадлежности S классу $\mathcal{T}_{lc}$, то достаточно обнаружить, что в S нет такой точки, в которой все функции из $\mathcal{K}(S)$ обращались бы в нуль. Действительно, если $x_0 \in \mathcal{K}(S)$ и $x^\circ(s^\circ) \ne$ $\ne 0$, то множество $\{s \in S: |x_0(s)-x_0(s^\circ)| \le \frac{1}{2}|x_0(s^\circ)|\}$ является замкнутой компактной окрестностью точки s°.

Предположим, что для некоторой точки $s^\circ \in S$ имеет место равенство $x(s^\circ)=0$, какова бы ни была функция $x \in \mathcal{K}(S)$. Пусть $\mathcal{U}$ — произвольная открытая окрестность точки s°. Так как семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^\circ)\}_{\alpha \in A}$ является базой всех окрестностей точки s°, то существует функция $x_0 \in \mathcal{K}(S)$ такая, что $\{s \in S: |x_0(s)| \le 1\} \subset \mathcal{U}$. Следовательно, $S \setminus \mathcal{U} \subset \{s \in S: |x_0(s)| \ge 1\} \subset \mathrm{supp}\, x_0$. Так как множество $S \setminus \mathcal{U}$ замкнуто, а множество $\mathrm{supp}\, x_0$ компактно, то $S \setminus \mathcal{U}$ компактно. Отсюда заключаем, имея в виду произвольность $\mathcal{U}$, что пространство S компактно. Но тогда функция x, равная 1 в каждой точке пространства S, принадлежит $\mathcal{K}(S)$, что противоречит предположению $x(s^\circ)=0$ для любой функции $x \in \mathcal{K}(S)$. Этим доказательство теоремы завершается.

Теорема 7.

Условие. $\mathcal{T}^1(\mathcal{K})$ — класс всевозможных топологических пространств S, обладающих следующим свойством: для каждой расположенной в S расходящейся сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, имеющей по крайней мере одну предельную точку, существует функция $x\in\mathcal{K}(S)$, такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в R; $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{K})\overset{def}{=}\mathcal{T}^1(\mathcal{K})\cap\mathcal{T}_1$.

Утверждение. $\mathcal{T}_{r,\,lc}=\mathcal{T}_1^1(\mathcal{K})$.

Доказательство. Включение $\mathcal{T}_{r,lc}\subset\mathcal{T}_1^1(\mathcal{K})$ легко следует из того факта, что если $S\in\mathcal{T}_{r,lc}$, то для каждой точки $s^o\in S$ семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^o)\}_{\alpha\in A}$ образует базу всех окрестностей точки s^o (см. теорему 6).

Обратное включение $\mathcal{T}_1^1(\mathcal{K})\subset\mathcal{T}_{r,lc}$ можно получить тем же методом, каким доказывается в теореме 4 включение $\mathcal{T}_1^1(C)\subset\mathcal{T}_{cr}$. При этом необходимо воспользоваться следующим обстоятельством: если $S\notin\mathcal{T}_{lc}$, то в S найдется такая точка s^o, что $x(s^o)=0$ для каждого x из $\mathcal{K}(S)$ и семейство $\{\mathcal{U}_\alpha(s^o)\}_{\alpha\in A}$ не образует базы всех окрестностей точки s^o (см. заключительную часть доказательства теоремы 6).

Пусть (S,σ) — топологическое пространство, $S_o\subset S$, $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ — сеть в S. Назовем S_o предельным множеством сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, если из условия $S_o\subset\mathcal{U}\in\sigma$ следует, что множество $\{\alpha\in A:\ s_\alpha\in\mathcal{U}\}$ конфинально с A. Предельное множество S_o сети $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$ назовем собственно предельным, если существует $\mathcal{V}\in\sigma$, такое, что $S_o\subset\mathcal{V}$ и множество $\{\alpha\in A:\ s_\alpha\in S\setminus\mathcal{V}\}$ конфинально с A. Будем говорить, что S_o подчинено пространству $C(S)$, если какова бы ни была расходящаяся в S сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$, для которой S_o является собственно предельным множеством, существует функция $x\in C(S)$ (зависящая, вообще говоря, от $(s_\alpha)_{\alpha\in A}$), такая, что сеть $(x(s_\alpha))_{\alpha\in A}$ расходится в $\mathbb{R}$; если при этом функция x может быть выбрана так, что $x(s)=0$ для любого $s\in S_0$, то будем говорить, что S_0 строго подчинено $C(S)$.

Теорема 8.

Условие. $\mathcal{T}_F(C)$ — класс всевозможных топологических пространств S, в которых каждое замкнутое множество строго подчинено $C(S)$; $\mathcal{T}_{norm}$ — класс нормальных пространств.

Утверждение. $\mathcal{T}_{norm}=\mathcal{T}_F(C)$.

Доказательство. Пусть S — какое-либо топологическое пространство, F — замкнутое множество в S. Обозначим через $\{W_\alpha(F)\}_{\alpha\in A}$ систему всевозможных окрестностей множества F, имеющих вид $\{s\in S: |x(s)|\leq\varepsilon\}$, где $x=C(S)$ и $x=0$ на F, а $\varepsilon>0$. Пространство S нормально тогда и только тогда, когда для каждого замкнутого множества $F\subset S$, система $\{W_\alpha(F)\}_{\alpha\in A}$ образует базу всех окрестностей множества F. С помощью этого утверждения можно получить нужное нам равенство $\mathcal{T}_{norm}=\mathcal{T}_F(C)$, следуя схеме доказательства теоремы 4.

Литература

1. Гольдман М. А. Характеристика функционально отделимых и тихоновских пространств при помощи расходящихся сетей. — "Доклады Академии наук СССР", 1969, т.188, №6, с. 1217 - 1220.
2. Гольдман М.А. Об одном признаке компактности топологических пространств. — "Латвийский математический ежегодник", 8, Рига, "Зинатне", 1970, с. 39 - 41.
3. Келли Дж.Л. Общая топология. М., "Наука", 1968, с.384.
4. Рудин У. Основы математического анализа. М., "Мир", 1966, с.320.

Поступила 9 января 1974 года.

УДК 519. 53.

О НОРМАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

Т. А .Жданок

Понятие нормальной разрешимости уравнений было введено Ф.Хаусдорфом. Оно относилось к уравнению с непрерывным линейным оператором, действующим из одного банахова пространства в другое, и к сопряженному с ним уравнению. М.А.Гольдман ([2]) хаусдорфово понятие нормальной разрешимости распространил на произвольные уравнения.

В настоящей работе изучается нормальная разрешимость уравнений в пространствах с мерой. Осуществляется переход от σ-алгебры пространства с мерой к некоторому полному метрическому пространству путем введения в σ-алгебре соответствующей метрики, что дает возможность использовать развитую в [2] для топологических пространств теорию с той разницей, что рассматриваемые отображения обладают свойством аддитивности. Оказывается, что существуют ограниченные непрерывные аддитивные вещественные функции, различающие точки рассматриваемых метрических пространств: дается одно достаточное условие продолжения такой функции с подпространства на все пространство; доказывается некоторый аналог свойства полной регулярности метрического пространства, соответствующего пространству с мерой.

Пусть ($\mathcal{M}, \Sigma, \mu$) - пространство с мерой. Здесь Σ - σ-алгебра подмножеств множества $\mathcal{M}$, а μ -

- определенная на Σ вещественная счетно-аддитивная функция множества ограниченной вариации:

$$v(\mu, M) < \infty \qquad (1)$$

Напомним, что для каждого $e \in \Sigma$ полная вариация μ на e, обозначаемая через $v(\mu, e)$, по определению, равна

$$v(\mu, e) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(e_i)|, \qquad (2)$$

где верхняя грань берется по всем конечным системам попарно непересекающихся множеств из Σ таких, что $e_i \subseteq e$.

Согласно ([1], стр.173) введем в σ-алгебре Σ метрику таким образом, что соответствующее метрическое пространство $\Sigma(\mu)$ будет полным.

Для каждой пары e, s множеств из Σ определим отношение эквивалентности $e \sim s$ условием $v(\mu, e \Delta s) = 0$, где $e \Delta s$ есть симметрическая разность $(e \cup s) \setminus (e \cap s)$ множеств e и s. Множество $S = \Sigma(\mu)$ всех классов эквивалентности $e(\mu) = \{s \mid s \sim e\}$ является метрическим пространством с расстоянием

$$\rho\big(e(\mu), h(\mu)\big) = v(\mu, e \Delta h) \qquad (3)$$

В метрическом пространстве $\Sigma(\mu)$ можно ввести бинарные операции $s(\mu) \cup e(\mu)$, $s(\mu) \cap e(\mu)$, $s(\mu) \Delta e(\mu)$, и операцию перехода к дополнению $e(\mu) \to e'(\mu)$. Покажем это, например, для операции $s(\mu) \cup e(\mu)$. Суммой элементов $s(\mu)$ и $e(\mu)$ из $\Sigma(\mu)$ назовем класс $g(\mu) = \{g \mid g \sim e_0 \cup s_0\}$ для некоторых $e_0 \in e(\mu)$, $s_0 \in s(\mu)$. Можно легко проверить, что $g(\mu)$ состоит из тех и только тех множеств $g \in \Sigma$,для которых $g = e \cup s$, $e \in e(\mu)$, $s \in S(\mu)$. Нулевым элементом относительно сложения в $S = \Sigma(\mu)$ будет, очевидно, класс $O_S = \{e \mid e \sim \emptyset\}$, где $\emptyset$ - пустое множество в Σ .

В дальнейшем для простоты и удобства мы будем говорить о множествах $e \in \Sigma$ как об элементах из $S = \Sigma(\mu)$. Таким образом, мы будем, например, писать вместо (3):

$$\rho(e, h) = v(\mu, e \Delta h) \qquad (4)$$

Приведем основные результаты, относящиеся к определенному выше метрическому пространству $\Sigma(\mu)$, которые будут использованы нами в дальнейшем (см. [I] , стр. I75-I76).

Лемма 1. Если ($\mathcal{M}$, Σ, μ) - пространство с мерой, то $S = \Sigma(\mu)$ является полным метрическим пространством относительно метрики (4). Аддитивная векторная или скалярная функция, определенная на Σ , в том и только в том случае определена и непрерывна на S , если она абсолютно непрерывна относительно μ . Операции $s \cup e$, $s \cap e$, $s \Delta e$, e' непрерывны относительно s и e . Замыкание в $\Sigma(\mu)$ подалгебры алгебры Σ само является σ-алгеброй.

Заметим, что аддитивная векторная или скалярная функция множества x называется абсолютно непрерывной относительно аддитивной векторной или скалярной функции множества μ , если

$$\lim_{v(\mu, e) \to 0} x(e) = 0 \qquad (5)$$

Теорема 1 - Витали-Хана-Сакса. Пусть (M, Σ, μ) - пространство с мерой, $\{x_n\}_{n\in\omega}$ - последовательность определенных на Σ абсолютно непрерывных относительно μ векторных или скалярных аддитивных функций множества. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(e)$ существует для каждого $e\in\Sigma$, то

$$\lim_{v(\mu,e)\to 0} x_n(e) = 0$$

равномерно относительно $n = 1, 2, \ldots$.

Следствие. В предположениях предыдущей теоремы функция $x(e) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(e)$ счетно аддитивна на Σ.

Для дальнейших рассмотрений нам понадобится также следующая теорема из теории меры (см. [3]):

Теорема 2. Каждая мера x_0, определенная на подалгебре Σ_0 σ-алгебры Σ, может быть продолжена до меры x на всей σ-алгебре Σ таким образом, чтобы множество значений меры x содержалось в замыкании множества значений меры x_0.

Непосредственно из доказательства теоремы 2 можно вывести следующее утверждение:

Следствие. Каждая аддитивная вещественная функция x_0, определенная на подалгебре Σ_0 σ-алгебры Σ, и такая, что

$$|x_0(s_0)| \leq a v(\mu, s_0), \quad a > 0, \; s_0 \in \Sigma_0,$$

имеет аддитивное вещественное продолжение x_1 на всю σ-алгебру Σ такое, что

$$|x_1(s)| \leq a v(\mu, s), \quad s \in \Sigma.$$

Рассмотрим семейство $X = \{x\}$ определенных на $S = \Sigma(\mu)$ непрерывных ограниченных аддитивных вещественных функций, Тогда оказывается справедливым следующее утверждение.

Теорема 3. X является B – пространством.

Доказательство. X есть линейное векторное пространство: очевидно, сумма двух функций из X принадлежит X, и если $x \in X$ и α – скаляр, то и αx содержится в X. Если норму элемента x определить равенством

$$|x| = \sup_{s \in S} |x(s)|$$

то, очевидно, X становится линейным нормированным пространством. Чтобы убедиться в полноте пространства X, предположим, что $\{x_n\}_{n \in \omega}$ есть фундаментальная последовательность в X. Ясно, что для каждого $s \in S$ последовательность $\{x_n(s)\}_{n \in \omega}$ фундаментальна в R, так что $x(s) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(s)$ существует для каждого $s \in S$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем n_ε так, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ при $m, n \geqslant n_\varepsilon$. Тогда $x(s) - x_n(s) = \lim\limits_{m \to \infty} (x_m(s) - x_n(s))$, $s \in S$, откуда следует, что $|x - x_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n_\varepsilon$. Значит, $x_n \underset{n \to \infty}{\to} x$. Остается показать, что $x \in X$. Очевидно, для каждого n функцию x_n можно естественно определить на σ-алгебре Σ, положив для каждого множества из класса эквивалентности s значение функции, равное $x_n(s)$. Тогда для последовательности $\{x_n\}$ будут выполнены все условия теоремы Витали-Хана-Сакса (см. теорему I), а, значит, для данного $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что $|x_n(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, как только $v(\mu, s) < \delta$, $s \in \Sigma$ и $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку $x_n(s) \underset{n \to \infty}{\to} x(s)$ для каждого $s \in \Sigma$, n можно выбрать достаточно большим, чтобы выполнялось неравенство $|x_n(s) - x(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Окончательно получим $|x(s)| \leq$

$\le |x(s)-x_n(s)|+|x_n(s)| < \varepsilon$, как только $v(\mu, s)<\delta$, что и означает абсолютную непрерывность функции x относительно μ на Σ, и, значит, непрерывность x на S (см.лемму I). Очевидно, x будет ограниченной функцией. Наконец, аддитивность x на S обеспечивается следствием из теоремы I.

Подмножество S_0 метрического пространства $S=\Sigma(\mu)$, определяемое равенством

$$S_0 = \Sigma_0(\mu) \qquad (6)$$

где Σ_0 - подалгебра σ-алгебры Σ, с расстоянием, индуцированным расстоянием (4) пространства S, будем называть подпространством нашего метрического пространства $S=\Sigma(\mu)$.

Теорема 4. Если подпространство E метрического пространства $S=\Sigma(\mu)$ обладает свойством, что для любой непрерывной ограниченной аддитивной вещественной функции x, определенной на E, выполняется условие

$$|x(e_0)| \le |x| \frac{v(\mu, e_0)}{v(\mu, M)} \quad \text{для всех } e_0 \in E ,$$

то для каждой функции x существует функция $x_1 \in X$, такая, что $x_1(e_0)=x(e_0)$, $e_0 \in E$, причем

$$|x_1| = |x|$$

Доказательство. Очевидно, для подпространства $E \subset S$ мы можем применить следствие из теоремы 2, так как E и S являются σ-алгебрами. Тогда, полагая $a = \dfrac{|x|}{v(\mu, M)}$ для любой ограниченной непрерывной аддитивной функции x, определенной на E, существует аддитивное продолжение x_1 на все пространство S, такое, что

$$|x_1(e)| \leq a v(\mu, e) = |x| \, \frac{v(\mu, e)}{v(\mu, M)} \qquad \text{для всех } e \in S .$$

Функция x_1, очевидно, будет определена и на σ-алгебре Σ, если положить для каждого множества из S, $s \in S$ значение функции, равное $x_1(S)$. Тогда из неравенства $|x_1(S)| \leq a v(\mu, S)$ следует, что $\lim\limits_{v(\mu,s)\to 0} x_1(s) = 0$, то есть x_1 абсолютно непрерывна относительно μ как функция на Σ, а, значит, по лемме I, непрерывна на S. Из этого же неравенства следует, что

$$|x_1| = \sup_{s \in S} |x_1(S)| \leq |x| \, \frac{\sup\limits_{s\in S} v(\mu, s)}{v(\mu, M)} = |x| \, \frac{v(\mu, M)}{v(\mu, M)} = |x| .$$

С другой стороны, так как x_1 является продолжением функции x на все пространство S, то

$$\sup_{s\in E} |x(S)| \leq \sup_{s\in S} |x_1(s)|$$

и, значит, $|x_1| = |x|$. Поскольку $|x| < \infty$, функция x_1 ограничена.

Теорема 5. Пусть E_0 – замкнутое подпространство пространства $S = \Sigma(\mu)$ и $s_0 \notin E_0$, $s_0 \in S$. Тогда существует функция $x \in X$ такая, что $x(s_0) = 1$, $x(s) = 0$ для всех $s \in E_0$.

Замечание. Мы можем говорить о замкнутом подпространстве пространства $S = \Sigma(\mu)$ в силу последнего результата леммы I.

Доказательство. Рассмотрим подпространство $E \subseteq S$, порожденное E_0 и s_0. Оно состоит из всех элементов $e \in S$, представимых в виде

$e=(e_1\cap S_0)\cup(e_2\cap S_0')$, где $e_1, e_2 \in E_0$ (см. [3]). Определим на E функцию x' формулой

$$x'(e)=\frac{v(\mu,e)-\sup\limits_{e_0\subseteq e,\, e_0\in E_0} v(\mu,e_0)}{v(\mu,S_0)-\sup\limits_{e_0\subseteq S_0,\, e_0\in E_0} v(\mu,e_0)},\quad e\in E .$$

Это определение корректно, так как в силу замкнутости E_0

$$d \overset{\mathrm{def}}{=} v(\mu,S_0)-\sup_{e_0\subseteq S_0,\, e_0\in E_0} v(\mu,e_0)=\inf_{e_0\subseteq S_0,\, e_0\in E_0} v(\mu, S_0\setminus e_0)\geqslant$$

$$\geqslant \inf_{e_0\in E_0} v(\mu, S_0\,\Delta\, e_0)=\rho(E_0,S_0)>0 .$$

Очевидно, $x'(S_0)=1$, $x'(e_0)=0$ для всех $e_0\in E_0$. Покажем, что так определенная функция x' будет аддитивной на E . Пусть $e_1, e_2\in E$, $e_1\cap e_2=\emptyset$. Тогда $v(\mu, e_1\cup e_2)=v(\mu,e_1)+v(\mu,e_2)$ и, очевидно,

$$\sup_{s\subseteq e_1\cup e_2,\, s\in E_0} v(\mu,s)=\sup_{s_1\subseteq e_1,\, s_1\in E_0} v(\mu,s_1)+\sup_{s_2\subseteq e_2,\, s_2\in E_0} v(\mu,s_2),$$

что и будет означать аддитивность x' на E . Так как $x'(e_0)\leq \frac{v(\mu,e_0)}{d}$ для всех $e_0\in E_0$, то по следствию из теоремы 2 существует аддитивная вещественная функция x , определенная на всем пространстве S и такая, что $x(e_0)=x'(e_0)$ для всех $e_0\in E_0$ и $x(e)\leq\frac{v(\mu,e)}{d}$ для всех $e\in E$. Доказательство непрерывности и ограниченности функции x аналогично доказательству непрерывности и ограниченности продолжения в теореме 4.

Отметим здесь также свойства пространства $S=\Sigma(\mu)$ как полного метрического пространства (см. [4] , стр. 215, 219):

1) пространство S является топологическим T_1 пространством (т.е. пространством, удовлетворяющим первой аксиоме отделимости);

2) пространство S отделимо;

3) пространство S нормально;

4) пространство S является пространством Фреше-Урысона.

Перейдем к постановке задачи нормальной разрешимости уравнений в пространствах типа $\Sigma(\mu)$ согласно статье [2].

Пусть (M, Σ, μ) и $(N, \mathcal{T}, \nu)$ - пространства с мерой, $S = \Sigma(\mu)$ и $T = \mathcal{T}(\nu)$ - соответствующие Σ и $\mathcal{T}$ полные метрические пространства, R - поле вещественных чисел, а X и Y - семейства непрерывных ограниченных аддитивных вещественных функций на S и T соответственно.

Рассмотрим отображение $f: S \to T$, непрерывное и аддитивное: для любых $s, e \in S$

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\ f(s \cup e) = f(s) \cup f(e), \\
&\text{б)}\ f(s) \cap f(e) = \emptyset, \quad \text{если } s \cap e = \emptyset.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Покажем, что для всех $y \in Y$ композиция $y \circ f$ принадлежит семейству X. Действительно, для любых $s, e \in S$: $s \cap e = \emptyset$, согласно (7), имеем $f(s) \cap f(e) = \emptyset$, и, значит, $y(f(s \cup e)) = y(f(s) \overset{\circ}{\cup} f(e)) = y(f(s)) + y(f(e))$ для любого $y \in Y$. Так как f - непрерывное отображение S в T, а y - непрерывная ограниченная функция на T, то и композиция $y \circ f$ есть непрерывная ограниченная функция на S.

Определим отображение $A_f : Y \to X$ равенством

$$A_f(y) = y \circ f \tag{8}$$

для всех $y \in Y$.

Рассмотрим следующие два множества:

$$T_f = \{t \mid t \in T,\ A_f(y_1) = A_f(y_2) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t),\ y_1, y_2 \in Y\}, \tag{9}$$

$$X_f = \{x \mid x \in X,\ f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow x(s_1) = x(s_2),\ s_1, s_2 \in S\}. \tag{10}$$

Очевидно, что $T_f = T$, если A_f - инъекция, и $X_f = X$, если f - инъекция.

Так как X и Y - B-пространства (см. теорему 3), то в нашем случае, согласно [2], T_f можно представить в виде

$$T_f = \cap\{y^{-1}(0),\ y \in Y,\ A_f(y) = 0\}. \tag{11}$$

Области значений $R(f)$ и $R(A_f)$ отображений f и A_f удовлетворяют соотношениям $R(f) \subseteq T_f$, $R(A_f) \subseteq X_f$.

Следуя [2], будем говорить, что уравнение $f(s) = t$ нормально разрешимо, если

$$R(f) = T_f. \tag{12}$$

Аналогично, будем говорить, что уравнение $A_f(y) = x$ нормально разрешимо, если

$$R(A_f) = X_f. \tag{13}$$

Изученные выше свойства метрического пространства

$S=\Sigma(\mu)$ позволят нам перенести результаты, полученные в [2] для нормальной разрешимости уравнений в топологических пространствах.

Теорема 6. Пусть $\mathfrak{S}$ – топология поточечной сходимости в X (т.е. топология, индуцированная в X тихоновской топологией в R^s). Тогда

$$\mathcal{R}(A_f)=X_f \Longleftrightarrow \mathcal{R}(A_f)=\overline{\mathcal{R}(A_f)}^{\mathfrak{S}}$$

(см. теорему 5 и [2] , теорема 2).

Теорема 7.

$$\mathcal{R}(A_f)=X_f \Longrightarrow \mathcal{R}(f)=\overline{\mathcal{R}(f)}^{\tau}$$

где τ – топология, индуцированная метрикой (4) в T . (см. св-ва 1) – 4) и [2] , лемма 4).

Теорема 8. $\mathcal{R}(A_f)=X_f \Longrightarrow f$ переводит замкнутое подпространство из S в замкнутое подпространство из T . (Доказательство этой теоремы с использованием теоремы 5 незначительно отличается от доказательства леммы 3 в [2]).

Пусть σ и τ – топологии, индуцированные метриками (4) в S и T соответственно. Положим

$$RQO(S,\sigma;T,\tau)=\{f:S\to T \mid U\in\sigma \wedge f^{-1}(f(U))=U \Longrightarrow \exists\, V\in\tau:\ f(V)=V\cap\mathcal{R}(f)\}.$$

Теорема 9. f – гомоморфизм, $f\in RQO(S;\sigma;T,\tau)$ и $\mathcal{R}(f)$ обладает свойством, указанным в условии теоремы 4 $\Longrightarrow \mathcal{R}(A_f)=X_f$.

(см. теорему 4 и [2] , теорема 1).

Напомним, что отображение f алгебры S в алгебру T называется гомоморфизмом, если оно сохраняет операции объединения, пересечения и взятия дополнения. Очевидно, гомоморфизм является аддитивным отображением (см.(7)) .

Теорема 10. Пусть f - непрерывный гомоморфизм пространства S в T . Тогда

$$\mathcal{R}(f) = T_f \iff \mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}^{\tau} .$$

Доказательство. а) $\mathcal{R}(f) = T_f \Rightarrow \mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}^{\tau}$. Равенство $\mathcal{R}(f) = T_f$ означает, что $\mathcal{R}(f) = \cap \{ y^{-1}(0), y \circ f = 0 \}$ (см.(II)). Поэтому для доказательства импликации а) достаточно установить, что $y^{-1}(0) = \overline{y^{-1}(0)}^{\tau}$ для всех $y \in Y$. Возьмем $t_0 \in \overline{y^{-1}(0)}^{\tau}$. Поскольку T - метрическое пространство, существует последовательность $\{t_n\}_{n \in \omega}$ в $y^{-1}(0)$ такая, что $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = t_0$. Так как для всех $n \in \omega$ $y(t_n) = 0$ и функция y непрерывна, то и $\lim\limits_{n \to \infty} y(t_n) = y(t_0) = 0$, т.е. $t_0 \in y^{-1}(0)$.

б) $\mathcal{R}(f) = \overline{\mathcal{R}(f)}^{\tau} \Rightarrow \mathcal{R}(f) = T_f$.

Предположим, что существует точка $t_0 \in T_f$ такая, что $t_0 \notin \mathcal{R}(f)$. Очевидно, что поскольку f есть гомоморфизм, $\mathcal{R}(f)$ будет подпространством метрического пространства T . Тогда по теореме 5 существует функция $y \in Y$ такая, что $y(t_0) = 1$ и $y(t) = 0$ для всех $t \in \mathcal{R}(f)$. Но тогда для всех $s \in S$ $y(f(s)) = y(t) = 0$, то есть $y \circ f = 0$. Поэтому поскольку $t_0 \in T_f$, должно выполняться равенство $y(t_0) = 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Автор выражает свою благодарность доц. М.А.Гольдману за руководство и помощь при подготовке этой работы.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, т.1. М., ИЛ, 1962.

2. Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уравнений. Латвийский математический ежегодник, 13. Рига, "Зинатне", 1972, с. 52 - 63.

3. Łoš I, Marczevski E. Extensions of measure. Fund.math., 36, 1949, p.267 - 276.

4. Куратовский К. Топология, т.1. М., "Мир", 1966.

Поступила 28 марта 1974 года.

УДК 513.88

О СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ОТОБРАЖЕНИЙ

А.Х.Лиепиньш

Понятие секвенциально компактной аппроксимации отображений ввели и изучили С.Л.Соболев и Г.М.Вайникко и применили при решении некоторых задач вычислительной математики ([1] , [2]).

При секвенциально компактной аппроксимации сохраняются некоторые важные свойства и характеристики аппроксимируемых отображений, например, свойства спектра, индекс, а также вращение отображений ([2] , [3]), поэтому представляют интерес следующие задачи:

1) в рассматриваемом множестве отображений построить такую топологию t , в которой сходится каждая последовательность отображений, секвенциально компактно аппроксимирующая некоторое отображение;

2) выяснить, существует ли для данного отображения f такая окрестность $\mathcal{U}(f)$ в топологии t , что для любого элемента из окрестности $\mathcal{U}(f)$ сохраняется та или другая характеристика отображения f .

Как известно, второму условию удовлетворяет топология b равномерной сходимости на всех ограниченных множествах в пространстве линейных непрерывных отображений, действующих в банаховых пространствах. Но эта топология не удовлетворяет первому условию, если пространства бесконечномерны. Из ранее известных топологий первому условию удовлетворяет топология pc равномерной сходимости на всех предкомпактных множествах, но она не удовлетворяет второму условию.

В этой работе построена отделимая локально выпуклая топология pc', мажорирующая топологию pc и также удовлетворяющая первому условию.

Пусть X и Y в дальнейшем изложении обозначают отделимые локально выпуклые топологические векторные пространства над полем действительных или комплексных чисел K, $\mathcal{L}(X, Y)$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y.

Определение. Последовательность векторов $(y_n)_{n\in N}$ в пространстве Y называется относительно компактной, если для любой ее подпоследовательности $(y_{n_k})_{k\in N}$ существует подпоследовательность $(y_{n_{k_i}})_{i\in N}$, сходящаяся в топологии пространства Y.

Определение. Последовательность отображений $(f_n)_{n\in N}\subset\mathcal{L}(X,Y)$ называется секвенциально компактно аппроксимирующей отображение $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, если выполнены следующие условия:

I) последовательность отображений $(f_n)_{n\in N}$ сходится к отображению f в любой точке пространства X, т.е. $\forall x \in X$ ($\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ в топологии пространства Y),

2) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)_{n\in N}$ в пространстве X последовательность векторов $((f_n - f)(x_n))_{n\in N}$ относительно компактна в пространстве Y.

Пусть векторное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ некоторым образом наделено отделимой локально выпуклой топологией t. Обозначим через S_t векторное пространство всех сходящихся последовательностей топологического векторного пространства $(\mathcal{L}(X,Y), t)$, через S_t^0 - векторное пространство всех последовательностей, сходящихся к нулевому вектору пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. Ясно, что множество S_t^0 однозначно определяет множество S_t. Оказывается, что векторное пространство S_α всех последовательностей векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, секвенциально компактно аппроксимирующих хотя бы одно отображение из $\mathcal{L}(X,Y)$, также однозначно определяется векторным пространством S_α^0 всех последовательностей, секвенциально компактно аппроксимирующих нулевое отображение, причем отношение $S_\alpha^0 \subset S_t^0$ влечет $S_\alpha \subset S_t$ и обратно.

Векторное пространство $\mathcal{S}_{\mathfrak{G}}$ является векторным подпространством векторного пространства $\mathcal{S}_{\alpha}$. Построим топологию $\mathfrak{G}'$ векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, для которой, как и для топологии $\mathfrak{G}$, принадлежность отображений из $\mathcal{L}(X,Y)$ множествам базиса окрестностей начала определено в зависимости от свойств образов ограниченных множеств, но уже имеет место отношение $\mathcal{S}_{\alpha} \subset \mathcal{S}_{\mathfrak{G}'}$.

Пусть $\mathcal{L}(Y,Y)$ - векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства Y в пространство Y, $\mathcal{S}$ - векторное пространство последовательностей, сходящихся к нулевому вектору пространства $\mathcal{L}(Y,Y)$ в топологии равномерной сходимости на всех конечных подмножествах пространства Y, $\mathcal{B}$ - семейство всех ограниченных множеств пространства X, $\mathcal{V}$ - базис окрестностей начала в пространстве Y. Рассмотрим при фиксированных множествах $B \in \mathcal{B}$ и $V \in \mathcal{V}$ и при фиксированной последовательности $(\varphi_n)_{n\in N} \in \mathcal{S}$ для любого натурального числа $j \in N$ множества $W_j(B,V,(\varphi_n)_{n\in N})$, множество $W(B,V,(\varphi_n)_{n\in N})$ и семейство множеств $\mathcal{W}$, определяемые следующим образом:

$$W_j(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}) \stackrel{def}{=} \{g \in \mathcal{L}(X,Y) \mid \bigcap_{n \geq j} (\varphi_n \circ g)(B) \subset V\},$$

$$W(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}) \stackrel{def}{=} \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j(B,V,(\varphi_n)_{n\in N}),$$

$$\mathcal{W} \overset{\mathrm{def}}{=} \left(W(B, V, (y_n)_{n\in N}) \right)_{B\in\mathcal{B}',\, V\in\mathcal{V},\, (y_n)_{n\in N}\in S}.$$

Теорема I. В предположении бочечности пространства $\mathcal{Y}$ существует локально выпуклая топология $\mathcal{B}'$ векторного пространства $\mathcal{L}(X, \mathcal{Y})$, имеющая в качестве базиса окрестностей начала семейство множеств $\mathcal{W}$.

Доказательство. В любом локально выпуклом топологическом векторном пространстве существует базис окрестностей начала $\mathcal{W}$, для которого выполнены следующие условия:

для любых двух множеств $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ существует такое множество $W_0 \in \mathcal{W}$, что $W_0 \subset W_1 \cap W_2$, (a)

для любого множества $W \in \mathcal{W}$ и любого ненулевого скаляра $\alpha \in K$ множество αW принадлежит $\mathcal{W}$, (b)

любое множество $W \in \mathcal{W}$ абсолютно выпукло и поглощающее, (c)

и наоборот, если семейство множеств $\mathcal{W}$ векторного пространства удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), то существует локально выпуклая топология данного векторного пространства, имеющая в качестве базиса окрестностей начала семейство множеств $\mathcal{W}$ ([4], I.3.2, стр.23).

В силу сказанного утверждение теоремы – прямое следствие следующих четырех лемм, при доказательстве которых будем считать, что для базиса окрестностей начала $\mathcal{V}$ в пространстве $\mathcal{Y}$ условия (a), (b) и (c) выполнены.

Лемма I. Для любых двух множеств $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ существует такое множество $W_0 \in \mathcal{W}$, что $W_0 \subset W_1 \cap W_2$.

Доказательство. Произвольные множества $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ в силу выбора семейства множеств $\mathcal{W}$ однозначно определены множествами $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, множествами $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, последовательностью $(\varphi_n^{(1)})_{n\in N} \in S$ и последовательностью $(\varphi_n^{(2)})_{n\in N} \in S$ соответственно как множества $W(B_1, V_1, (\varphi_n^{(1)})_{n\in N})$ и $W(B_2, V_2, (\varphi_n^{(2)})_{n\in N})$.

Рассмотрим множество $B_0 \in \mathcal{B}$, последовательность $(\varphi_n^{(0)})_{n\in N} \in S$, определяемые следующим образом:

$$B_0 \overset{def}{=} B_1 \cup B_2,$$

$$\varphi_n^{(0)} \overset{def}{=} \begin{cases} \varphi_k^{(1)}, & n = 2k-1, \\ \varphi_k^{(2)}, & n = 2k, \end{cases}$$

где $k \in N$ и $n \in N$, и множество $V_0 \in \mathcal{V}$ такое, что $V_0 \subset V_1 \cap V_2$.

Тогда множество $W_0 \in \mathcal{W}$, существование которого требовалось доказать, определяется как множество

$W(B_0, V_0, (\varphi_n^{(0)})_{n\in N})$.

Лемма 2. Для любого множества $W\in\mathcal{W}$ и любого ненулевого скаляра $\alpha\in K$ множество αW принадлежит семейству множеств $\mathcal{W}$.

Доказательство. При произвольном множестве $W\in\mathcal{W}$ и произвольном ненулевом скаляре $\alpha\in K$ установим существование множества $W'\in\mathcal{W}$ такого, что $\alpha W = W'$, и тем самым принадлежность множества αW семейству множеств $\mathcal{W}$.

Рассмотрим множество $B\in\mathcal{B}$, множество $V\in\mathcal{V}$, последовательность $(\varphi_n)_{n\in N}\in\mathcal{S}$, которыми однозначно определено множество $W\in\mathcal{W}$ опять-таки в силу выбора семейства множеств $\mathcal{W}$, и множество $V'\in\mathcal{V}$, определяемое как множество αV.

Тогда в качестве множества $W'\in\mathcal{W}$ служит множество $W(B, V', (\varphi_n)_{n\in N})$.

Лемма 3. Любое множество $W\in\mathcal{W}$ абсолютно выпукло.

Доказательство. При произвольном множестве $W\in\mathcal{W}$ для любых точек $g_1, g_2\in W$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2\in K$, удовлетворяющих неравенству: $|\alpha_1|+|\alpha_2|\leq 1$, имеет место принадлежность множеству $W\in\mathcal{W}$ точки $\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2$, что соответствует свойству абсолютной выпуклости для множества $W \in \mathcal{W}$ ([4] , I.I, стр.I5).

Лемма 4. Если пространство Y бочечно, то любое множество $W \in \mathcal{W}$ поглощающее.

Доказательство. При произвольном множестве $W \in \mathcal{W}$ построим поглощающее множество $W' \subset \mathcal{L}(X,Y)$ такое, что $W' \subset W$, и тем самым установим требуемое для множества $W \in \mathcal{W}$.

Рассмотрим множество $B \in \mathcal{B}$, множество $V \in \mathcal{V}$ и последовательность $(\varphi_n)_{n \in N} \in \mathcal{S}$, однозначно определяющие множество $W \in \mathcal{W}$.

Любое поточечно ограниченное множество векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ в предположении бочечности пространства X равностепенно непрерывно ([5], I.4.2, стр.I07), поэтому для последовательности линейных непрерывных отображений $(\varphi_n)_{n \in N} \in \mathcal{S}$, действующих из пространства Y в пространство Y, сходящейся поточечно, следовательно поточечно ограниченной и таким образом в предположении бочечности пространства Y обладающей свойством равностепенной непрерывности, в силу определения равностепенной непрерывности существует множество $V' \in \mathcal{V}$ такое, что выполнено включение: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n (V') \subset V$.

Тогда множество $W' \subset \mathcal{L}(X,Y)$ определяется следующим образом:

$$W' \stackrel{def}{=} \{g \in \mathcal{L}(X,Y) / g(B) \subset V'\},$$

ибо как множество базиса окрестностей начала в топологии векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ равномерной сходимости на всех ограниченных множествах оно поглощающее и в силу самого определения множества $W' \subset \mathcal{L}(X,Y)$ выполнено включение: $W' \subset W$.

Пусть пространство Y бочечно. Рассмотрим отделимую локально выпуклую топологию векторного пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ pc' - определяемую как верхнюю грань топологий $\mathcal{B}''$ и pc: $pc' \stackrel{def}{=} \sup(\mathcal{B}; pc)$.

Теорема 2. Векторное пространство S_a суть векторное подпространство векторного пространства $S_{pc'}$.

Доказательство. Достаточно ограничиться доказательством отношения $S_a^o \subset S_{pc'}^o$.

Предположим противное.

Тогда существует последовательность линейных непрерывных отображений $(g_n)_{n\in N}$ секвенциально компактно аппроксимирующее нулевой вектор пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ и не сходящаяся к нулевому вектору в топологии pc' пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. В силу свойств секвенциально компактной аппроксимации имеет место сходимость последовательности $(g_n)_{n\in N}$ к нулевому вектору в топологии pc пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, следовательно выполнение противоположного в топологии $\rho c'$ пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ означает существование для последовательности $(g_n)_{n \in N}$ подпоследовательности $(g_{n_k})_{k \in N}$, каждый член которой не содержится в некотором множестве $W \in \mathcal{W}$ базиса окрестностей начала в топологии $\mathcal{B}'$ пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Тем самым установлено существование ограниченной последовательности векторов $(x_k)_{k \in N}$ в пространстве X и последовательности линейных непрерывных отображений $(\varphi_k)_{k \in N} \in \mathcal{S}$ таких, что последовательность векторов $((\varphi_k \circ g_{n_k})(x_k))_{k \in N}$ в пространстве Y такая, что каждый член ее не содержится в некотором множестве $V \in \mathcal{V}$ базиса окрестностей начала в топологии пространства Y.

Но в силу определения секвенциально компактной аппроксимации для последовательности $(g_{n_k}(x_k))_{k \in N}$ существует подпоследовательность $(g_{n_{k_i}}(x_{k_i}))_{i \in N}$ сходящаяся в топологии пространства Y, так как для последовательности линейных непрерывных отображений $(f_n)_{n \in N}$, поточечно сходящейся к некоторому отображению пространства X в пространство Y, и последовательности векторов $(x_n)_{n \in N}$ в пространстве X, сходящейся к некоторому вектору $x \in X$ топологии пространства X, в предположении бочечности пространства X имеет место сходимость последовательности векторов $(f_n(x_n))_{n \in N}$ в пространстве Y

к вектору $f(x) \in Y$ в топологии пространства Y ([3] , I5, стр.9), то в предположении бочечности пространства для последовательности векторов $((\varphi_k \circ g_{\circ k})(x_k))_{k \in N}$ в пространстве Y , целиком не содержащейся в некотором множестве $V \in \mathcal{V}$ базиса окрестностей начала в топологии пространства Y, существует подпоследовательность $((\varphi_{k_i} \circ g_{\circ k_i})(x_{k_i}))_{i \in N}$ сходящаяся к нулевому вектору в топологии пространства Y , что невозможно.

Литература

I. Соболев С.Л. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений.—"Известия А.Н СССР", серия математика, 1956, т.20, № 4,с.413-436.

2. Вайникко Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, 1970.

3. Карклиньш И.В., ЛЕВЧЕНКОВ В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- Латвийский математический ежегодник, I7 (в печати).

4. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1967.

5. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1971.

Поступила I4 мая 1974 года.

УДК 513. 88.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.И.Лабеев

Введение.Предлагаемая работа дополняет исследования Г.М.Вайникко [1], И.В.Карклиньша и В.С.Левченкова [2] и Л.С.Раковщика [3] по изучению свойств секвенциально компактной аппроксимации отображений.Основными в данной работе являются теоремы,характеризующие устойчивость свойств линейных непрерывных или линейных замкнутых отображений в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.К ним относятся теоремы 3,10,11,15,16 17,23, 29,30,31.

Как правило мы будем пользоваться общепринятыми обозначениями.Так N -множество всех натуральных чисел, X , Y , Z -нормированные векторные пространства над полем действительных или комплексных чисел K и если в некотором предложении участвуют два или больше пространств,то все они рассматриваются над одним и тем же полем скаляров. $S_X(a,r)=\{x\in X \mid \|a-x\|=r\}$, $B'_X(a,r)=\{x\in X \mid \|a-x\|\le r\}$. $L(X,Y)$ -векторное пространство всех линейных отображений пространства X в пространство Y , $LC(X,Y)$ -векторное пространство всех линейных непрерывных отображений пространства X в пространство Y .

1.Определение.Пусть X и Y -нормированные векторные пространства.Будем говорить,что последовательность линейных отображений $f_n : X \mapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \mapsto Y$ и писать,что $f_n \xrightarrow{c.k.a.} f \in L(X,Y)$ если:

а) для любого вектора $x\in X$ $fx=\lim_n f_n x$ в пространстве Y ;

б) для любой ограниченной последовательности векторов

$(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y.

2.Отметим следующие свойства секвенциально компактной аппроксимации, которые для линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах приведены Г.М.Вайникко в [1].

а). Если последовательность отображений $(f_n) \subset L(X,Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение $f \in L(X,Y)$, то любая ее подпоследовательность (f_{n_j}) так же секвенциально компактно аппроксимирует отображение $f \in L(X,Y)$.

б) Если последовательность отображений $(f_n) \subset L(X,Y)$ сходится к отображению $f \in L(X,Y)$ по норме в том смысле, что для всех $n \in N$ $f_n - f \in LC(X,Y)$ и $\lim\limits_{N} \| f_n - f \| = 0$, то $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L(X,Y)$.

в). Обратное утверждение не верно (см. [1]). Пусть $X = Y = \ell_2$, $e_n = (\delta_{nm})_{m \in N}$, где δ_{nm} - символ Кронекера. Определим последовательность отображений $(f_n) \subset LC(\ell_2, \ell_2)$ следующим образом:

$$\forall n \in N \ \forall x \in \ell_2 \quad f_n x = (x|e_n) e_1.$$

Тогда $f_n \xrightarrow{c.k.a} 0 \in LC(\ell_2, \ell_2)$, но в то же время для всех $n \in N$ $\| f_n \| = 1$.

г) Если $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{c.k.a} g \in L(X,Y)$, то $\forall \alpha, \beta \in K$ $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{c.k.a} \alpha f + \beta g \in L(X,Y)$.

д) $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $f_n - f \xrightarrow{c.k.a} 0 \in L(X,Y)$.

3.Теорема. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства, последовательность отображений $(f_n) \subset L(X,Y)$ и отображение $f \in LC(X,Y)$ таковы, что для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ ограничена в пространстве Y. Тогда существуют такие числа $n_0 \in N$ и $C > 0$, что для всех

$$n \geq n_0 \quad f_n \in LC(X,Y), \quad \| f_n \| \leq C .$$

Доказательство. Если заключение теоремы 3 не верно, то существует такая подпоследовательность (f_{n_j}) последовательности (f_n) и существует такая последовательность векторов $(x_j) \subset S_X(0,1)$, что

$$\lim_j \| f_{n_j} x_j \| = \infty . \quad (I)$$

Так как отображение f непрерывно

$$\forall j \in N \quad \| f x_j \| \leq \| f \| \cdot \| x_j \| \leq \| f \| ,$$

поэтому в силу равенства (I) получаем, что

$$\lim_j \| f_{n_j} x_j - f x_j \| = \infty .$$

Таким образом последовательность векторов $(f_{n_j} x_j - f x_j)$ не будет ограниченной в пространстве Y, что противоречит условию теоремы.

4.Следствие.Пусть X и Y -нормированные векторные пространства, $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,Y)$.Тогда существует такое число $n_0 \in N$ и такое число $C > 0$, что для всех

$$n \geq n_0 \; f_n \in LC(X,Y) ; \; \| f_n \| \leq C .$$

Доказательство.В силу условия б) определения I для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y и,следовательно,ограничена в Y.Таким образом выполнены все условия теоремы 3.

5.Следствие.Пусть X и Y -нормированные векторные пространства, $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,Y)$ и допустим,что последовательность векторов $(x_n) \subset X$ имеет предел $x \in X$.Тогда

$$\lim_n f_n x_n = f x .$$

Доказательство.В силу следствия 4 существует такое число $n_0 \in N$ и существует такое число $C > 0$, что

$$\forall n \geq n_0 \quad f_n \in LC(X,Y), \; \| f_n \| \leq C .$$

Тогда справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\| f_n x_n - f x \| \leq \| f_n x_n - f_n x \| + \| f_n x - f x \| \leq \| f_n \| \cdot \| x_n - x \| + \| f_n x - f x \| \leq C \| x_n - x \| + \| f_n x - f x \| \quad (2)$$

Так как по условию $\lim_n \| x_n - x \| = 0$, а в силу условия а) определения I $\lim_n \| f_n x - f x \| = 0$, то из неравенств (2) получаем нужное: $\lim_n \| f_n x_n - f x \| = 0$.

6.Предложение.Пусть X, Y и Z -нормированные векторные пространства, $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{c.к.a} g \in LC(Y, Z)$.Тогда

$$g_n \circ f_n \xrightarrow{c.к.a} g \circ f \in LC(X,Z).$$

Доказательство.Пусть вектор $x \in X$ выбран произвольно, тогда в силу условия а) определения I $fx = \lim_n f_n x$, откуда и из следствия 5 $g \circ fx = \lim_n g_n \circ f_n x$. Пусть теперь (x_n) - произвольная ограниченная последовательность векторов из пространства X. Нам нужно показать, что последовательность векторов $(g_n \circ f_n x_n - g \circ f x_n)$ относительно компактна в пространстве Z, т.е. из любой подпоследовательности $(g_{n_j} \circ f_{n_j} x_{n_j} - g \circ f x_{n_j})$ последовательности $(g_n \circ f_n x_n - g \circ f x_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. В силу условия б) определения I последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y. Следовательно, существует такая подпоследовательность $(f_{n_{j_m}} x_{n_{j_m}} - f x_{n_{j_m}})$ подпоследовательности $(f_{n_j} x_{n_j} - f x_{n_j})$ и существует такой вектор $y \in Y$, что

$$y = \lim_m (f_{n_{j_m}} x_{n_{j_m}} - f x_{n_{j_m}}). \quad (3)$$

Так как в силу 2а) $g_{n_{j_m}} \xrightarrow{c.k.c.} g \in LC(Y,Z)$, то из (3) в силу следствия 5

$$gy = \lim_m g_{n_{j_m}} \circ (f_{n_{j_m}} x_{n_{j_m}} - f x_{n_{j_m}}) \quad (4)$$

В силу непрерывности отображения f и ограниченности последовательности векторов $(x_{n_{j_m}})$ последовательность векторов $(f x_{n_{j_m}})$ ограничена в пространстве Y. Следовательно, в силу условия б) определения I последовательность векторов $(g_{n_{j_m}} \circ f x_{n_{j_m}} - g \circ f x_{n_{j_m}})$ относительно компактна в пространстве Z, т.е. существует подпоследовательность $(g_{n_{j_{m_k}}} \circ f x_{n_{j_{m_k}}} - g \circ f x_{n_{j_{m_k}}})$ последовательности $(g_{n_{j_m}} \circ f x_{n_{j_m}} - g \circ f x_{n_{j_m}})$ и существует такой вектор $z \in Z$, что

$$z = \lim_k (g_{n_{j_{m_k}}} \circ f x_{n_{j_{m_k}}} - g \circ f x_{n_{j_{m_k}}}) \quad (5)$$

Тогда из равенств (4) и (5) получаем нужное:

$$gy + z = \lim_k (g_{n_{j_{m_k}}} \circ f_{n_{j_{m_k}}} x_{n_{j_{m_k}}} - g \circ f x_{n_{j_{m_k}}}).$$

7. Замечание. Отметим, что если отображение g - разрывно, то предложение 6, вообще говоря, не верно. Действительно, пусть $X = Z = \ell_2$, $Y = \{(x(n)) \in \ell_2 \mid \sum_n |n x(n)|^2 < \infty\}$ и $\forall n \in N$ $e_n = (\delta_{nm})_{m \in N}$. Последовательность отображений $(f_n) \subset LC(X,Y)$ определим следующим образом:

$$\forall n \in N \quad \forall x \in X \quad f_n x = \frac{1}{n}(x \mid e_1) e_n .$$

Тогда $\lim_n \| f_n \| = 0$ и в силу 2б) $f_n \xrightarrow{c.k.c.} 0 \in LC(X,Y)$. Разрывное отображение $g \in L(Y,Z)$ определим следующим образом:

$$\forall (x(n)) \in Y \quad g(x(n)) = (n x(n)) .$$

Положим $\forall n \in N \ g_n \overset{def}{=} g$. Тогда $g_n \xrightarrow{c.к.a} g \in L(Y,Z)$, но последовательность отображений $(g_n \circ f_n) \subset L(X,Z)$ не сходится даже поточечно к отображению $g \circ f = 0 \in LC(X,Z)$. Действительно, при $x = e_1 \ \forall n \in N \ g_n \circ f_n x = e_n$, а последовательность векторов (e_n) не имеет предела в пространстве ℓ_2.

Отметим, что если $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in L(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{c.к.a} g \in LC(Y,Z)$, то последовательность отображений $(g_n \circ f_n) \subset L(X,Z)$ сходится поточечно к отображению $g \circ f \in L(X,Z)$. Но если отображение f разрывно, то утверждать, что $g_n \circ f_n \xrightarrow{c.к.a} g \circ f \in L(X,Z)$, вообще говоря, нельзя. Действительно, пусть $Y = Z = \ell_2$, $X = \{(x(n)) \in \ell_2 \mid \sum_n |n x(n)|^2 < \infty\}$. Определим отображение $f \in L(X,Y)$ следующим образом:

$$\forall (x(n)) \in X \qquad f(x(n)) = (n x(n))$$

и положим $\forall n \in N \ f_n \overset{def}{=} f$. Тогда $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in L(X,Y)$. Последовательность отображений $(g_n) \subset LC(Y,Z)$ определим следующим образом:

$$\forall n \in N \quad \forall y \in Y \quad g_n y = \frac{1}{n}(y|e_n)e_n .$$

Тогда $\lim_n \|g_n\| = 0$ и поэтому $g_n \xrightarrow{c.к.a} g \in LC(Y,Z)$. Но в то же время для ограниченной последовательности векторов $(e_n) \subset X$ последовательность векторов

$$(g_n \circ f_n e_n) = (n g_n e_n) = (e_n)$$

не будет относительно компактной в пространстве Z.

6. Предложение. Пусть X и Y – нормированные векторные пространства, отображения $(f_n) \subset LC(X,Y)$ и $f \in L(X,Y)$, таковы, что для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ ограничена в пространстве Y. Тогда $f \in LC(X,Y)$ и существует такое число $C > 0$, что

$$\forall n \in N \quad \|f_n\| \le C, \ \|f\| \le C .$$

Доказательство. Если предположить, что отображение f разрывно, то существует такая последовательность векторов $(x_n) \subset S_X(0,1)$, что $\lim_n \|f x_n\| = \infty$. Методом индукции выберем из последовательности (x_n) подпоследовательность

(z_n) так, чтобы

$$\forall n\in N \quad \|fz_n\|\geq n+\|f_n\|.$$

Тогда

$$\forall n\in N \quad \|f_n z_n - f z_n\|\geq \|fz_n\|-\|f_n z_n\|\geq n+\|f_n\|-\|f_n\|=n.$$

Следовательно, последовательность векторов $(f_n z_n - f z_n)$ не ограничена в пространстве Y, что противоречит условию. Таким образом выполнены все предпосылки теоремы 3, поэтому существует такое число $c>0$, что $\forall n\in N \ \|f_n\|\leq c$ и так как число c можно выбрать большим числа $\|f\|$, то и $\|f\|\leq c$.

9. Следствие. Если для некоторого отображения $f\in L(X,Y)$ существует такая последовательность отображений $(f_n)\in L\mathcal{C}(X,Y)$, что $f_n \xrightarrow{c.k.a} f\in L(X,Y)$, то $f\in L\mathcal{C}(X,Y)$ и существует такое число $c>0$, что

$$\forall n\in N \quad \|f_n\|\leq c, \quad \|f\|\leq c.$$

10. Теорема. Пусть X - всюду плотное векторное подпространство нормированного пространства Z, Y - банахово пространство, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X\longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f: X\longmapsto Y$, $g_n: Z\longmapsto Y$ - единственное линейное непрерывное продолжение отображения f_n на Z и $g: Z\longmapsto Y$ - единственное линейное непрерывное продолжение отображения f на Z. Тогда

$$g_n \xrightarrow{c.k.a} g\in L\mathcal{C}(Z,Y).$$

Доказательство. Покажем, что для последовательности отображений $(g_n)\subset L\mathcal{C}(Z,Y)$ и для отображения $g\in L\mathcal{C}(Z,Y)$ выполнено условие а) определения I. Действительно, так как $f_n \xrightarrow{c.k.a} f\in L\mathcal{C}(X,Y)$, то в силу следствия 9

$$\exists c>0: \forall n\in N \quad \|f_n\|\leq c, \quad \|f\|\leq c. \qquad (6)$$

Из неравенств (6) и из того, что $\forall n\in N \ \|g_n\|=\|f_n\|, \|g\|=\|f\|$ следует, что

$$\forall n\in N \quad \|g_n\|\leq c, \quad \|g\|\leq c. \qquad (7)$$

Пусть вектор $z\in Z$ выбран произвольно и пусть ε - произвольное положительное число. Тогда из равенства $\overline{X}=Z$ следует, что

$$\exists x\in X: \|x-z\|\leq\frac{\varepsilon}{4c}. \qquad (8)$$

Из того, что $gx = fx = \lim_n f_n x = \lim_n g_n x$ получаем:

$$\exists n_0 \in N \quad \forall n \geq n_0 \quad \| gx - g_n x \| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (9)$$

Пусть $n \geq n_0$, тогда в силу оценок (7), (8) и (9) получим: $\| gz - g_n z \| \leq \| gz - gx \| + \| gx - g_n x \| + \| g_n x - g_n z \| \leq \| g \| \cdot \| z - x \| + \frac{\varepsilon}{2} + \| g_n \| \cdot \| z - x \| \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} + \frac{\varepsilon}{2} + C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon$, следовательно, $\lim_n g_n z = gz$.

Покажем, что для последовательности отображений (g_n) и отображения g выполнено условие $c)$ определения I. Пусть (z_n) - произвольная ограниченная последовательность векторов в пространстве Z. Тогда в силу равенства $\overline{X} = Z$ существует такая последовательность векторов $(x_n) \subset X$, что

$$\forall n \in N \qquad \| z_n - x_n \| \leq \frac{1}{Cn} \qquad (10)$$

Из неравенства (10) и из ограниченности последовательности векторов (z_n) в Z следует ограниченность последовательности векторов (x_n) в X. Отметим, что

$$\forall n \in N \quad \| g_n z_n - g z_n - g_n x_n + g x_n \| \leq \| g_n \| \cdot \| z_n - x_n \| + \| g \| \cdot \| z_n - x_n \| \leq C \cdot \frac{1}{Cn} + C \cdot \frac{1}{Cn} = \frac{2}{n}.$$

Таким образом

$$\lim_n [(g_n z_n - g z_n) - (g_n x_n - g x_n)] = 0 \qquad (11)$$

Так как последовательность векторов $(g_n x_n - g x_n) = (f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y, то в силу (11) последовательность векторов $(g_n z_n - g z_n)$ относительно компактна в Y. Следовательно, $g_n \xrightarrow{c.k.c.} g \in LC(Z,Y)$.

11. Теорема. Пусть X, Y и Z - нормированные векторные пространства, $f_n \xrightarrow{c.k.n.} 0 \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{c.k.c.} 0 \in LC(Y,Z)$. Тогда

$$\lim_n \| g_n \circ f_n \| = 0 .$$

Доказательство. Мы можем говорить о норме композиции отображений f_n и g_n потому, что в силу следствия 4 существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n \in LC(X,Y)$ и $g_n \in LC(Y,Z)$. Допустим, что утверждение теоремы 11 не верно. Тогда существует такая последовательность строго возрастающих натуральных чисел (n_j), существует такая последовательность векторов $(x_j) \subset S_X(0,1)$ и существует такое число $a > 0$, что

$$\forall j \in N \qquad \| g_{n_j} \circ f_{n_j} x_j \| \geq a. \qquad (12)$$

С другой стороны, так как $f_{n_j} \xrightarrow{с.к.а} 0 \in LC(X,Y)$, то существует такая подпоследовательность $(f_{n_{j_m}} x_{n_{j_m}})$ последовательности $(f_{n_j} x_j)$ и существует такой вектор $y \in Y$ что

$$\lim_m f_{n_{j_m}} x_{j_m} = y \qquad (13)$$

Поскольку $g_{n_{j_m}} \xrightarrow{с.к.а} 0 \in LC(Y,Z)$, то в силу следствия 5 и равенства (13) справедливо следующее равенство

$$\lim_m g_{n_{j_m}} \circ f_{n_{j_m}} x_{j_m} = 0 ,$$

которое противоречит неравенству (12).

12. Следствие. Пусть X -нормированное векторное пространство, $f_n \xrightarrow{с.к.а} 0 \in LC(X,X)$. Тогда $\lim_n \| f_n^2 \| = 0$.

13. Замечание. Если при всех остальных предположениях теоремы 11 $g_n \xrightarrow{с.к.а} g \neq 0 \in LC(Y,Z)$, то нельзя утверждать, что $\lim_n \| g_n \circ f_n \| = 0$. Действительно, пусть $X = Y = Z = \ell_2$, $g_n = g$ -тождественное отображение в ℓ_2 и последовательность отображений $(f_n) \subset LC(\ell_2, \ell_2)$ та же, что в пункте 2в). Тогда $f_n \xrightarrow{с.к.а} 0 \in LC(\ell_2,\ell_2)$ $g_n \xrightarrow{с.к.а} g \in LC(\ell_2,\ell_2)$, но $\lim_n \| g_n \circ f_n \| \neq 0$, так как

$$\forall n \in N \quad \| g_n \circ f_n \| = \| f_n \| = 1 .$$

Если в этом примере поменять местами последовательности отображений $(f_n) \subset LC(\ell_2, \ell_2)$ и $(g_n) \subset LC(\ell_2, \ell_2)$, то видим, что при условии $f_n \xrightarrow{с.к.а} f \neq 0 \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{с.к.а} 0 \in LC(Y,Z)$ утверждение теоремы 11, вообще говоря, не верно.

Однако справедливо следующее утверждение: пусть X, Y и Z -нормированные векторные пространства, $f_n \xrightarrow{с.к.а} f \in LC(X,Y)$ и $g_n \xrightarrow{с.к.а} g \in LC(Y,Z)$. Допустим, что одна из последовательностей отображений (f_n) или (g_n) сходится к нулевому отображению по норме. Тогда

$$\lim_n \| g_n \circ f_n \| = 0 .$$

Действительно, в силу следствия 4 существует такое число $n_0 \in N$ что последовательности чисел $(\| f_n \|)_{n \geq n_0}$ и $(\| g_n \|)_{n \geq n_0}$ ограничены, причем по условию одна из них стремится к нулю, тогда из неравенства $\| g_n \circ f_n \| \leq \| g_n \| \, \| f_n \|$ следует нужное.

14. Предложение. Если в предгильбертовом пространстве X

последовательность линейных самосопряженных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \longmapsto X$, то отображение f является самосопряжённым, начиная с некоторого числа $n_0 \in N$ для всех $n \geq n_0$ отображения $f_n - f \in LC(X, X)$ и $\lim_n \| f_n - f \| = 0$.

Доказательство. В силу поточечной сходимости последовательности самосопряжённых отображений (f_n) к отображению $f \in L(X, X)$, f само является самосопряженным. Поскольку $f_n - f \xrightarrow{c.к.} 0 \in LC(X, X)$, то в силу следствия 4 существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n - f \in LC(X, X)$, а из следствия 12 $\lim_n \| (f_n - f)^2 \| = 0$ Так как отображения f_n и f -самосопряженные, то таким же является отображение $f_n - f$, следовательно, для всех $n \geq n_0$ $\| (f_n - f)^2 \| = \| f_n - f \|^2$. Поэтому $\lim_n \| f_n - f \|^2 = 0$, т.е. $\lim_n \| f_n - f \| = 0$.

15. Теорема. Пусть X -банахово пространство, Y -нормированное векторное пространство и последовательность линейных отображений $f_n : X \longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейный гомеоморфизм $f : X \longmapsto Y$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$ и существует такое число $a > 0$ что для всех $n \geq n_0$ $f_n : X \longmapsto Y$ -линейный гомеоморфизм и

$$\forall n \geq n_0 \ \forall x \in X \qquad \| f_n x \| \geq a \| x \| \qquad (14)$$

Доказательство. Если утверждение теоремы 15 не верно, то существует такая подпоследовательность (f_{n_j}) последовательности (f_n) и существует такая последовательность векторов $(x_j) \subset S_X(0, 1)$, что

$$\lim_j \| f_{n_j} x_j \| = 0 \qquad (15)$$

Из условия б) определения 1 последовательность векторов $(f_{n_j} x_j - f x_j)$ относительно компактна в пространстве Y. Следовательно, существует такая подпоследовательность $(f_{n_{j_m}} x_{j_m} - f x_{j_m})$ последовательности $(f_{n_j} x_j - f x_j)$ и существует такой вектор $y \in Y$, что

$$y = \lim_m (f_{n_{j_m}} x_{j_m} - f x_{j_m}) \qquad (16)$$

В силу равенства (15) из равенства (16) следует, что $\lim_m f x_{j_m} = -y$. Так как X -банахово пространство и $f : X \longmapsto Y$ -линейный гомеоморфизм, то $fX = \overline{fX}$.

Следовательно, $-y \in fX$ и поэтому существует такой вектор $x \in X$, что $fx = -y$. Из того, что $f: X \longmapsto Y$ -гомеоморфизм

$$x = \lim_m x_{j_m} \qquad (17)$$

Откуда в силу следствия 5 и равенства (15)

$$fx = \lim_m f_{n_{j_m}} x_{j_m} = 0 .$$

Но так как $\forall m \in N \ x_{j_m} \in S_X(0,1)$ и $S_X(0,1)$ -замкнутое подмножество в пространстве X, то в силу равенства (17) $x \in S_X(0,1)$. Таким образом $fx = 0$ и $\|x\|=1$, что противоречит тому, что $f: X \longmapsto Y$ -линейный гомеоморфизм.

16. Теорема. Пусть X и Y -банаховы пространства, последовательность линейных отображений $f_n: X \longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейный изоморфизм $f: X \longmapsto Y$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n: X \longmapsto Y$ является изоморфизмом и существует такое число $C > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $\|f_n^{-1}\| \leq C$ и $f_n^{-1} \xrightarrow{c.к.а} f^{-1} \in LC(Y,X)$.

Доказательство. В силу теоремы 25 из [2] существует такое число $n_1 \in N$, что для всех $n \geq n_1$ отображение f_n биекция и тогда из теоремы 15 получаем, что для всех достаточно больших $n \in N$ ($n \geq n_0$) $f_n^{-1} \in LC(Y,X)$, причём в силу (14) для всех $n \geq n_0$ и

$$\forall y \in Y \quad \|f_n^{-1} y\| \leq C \|y\| \qquad .(18)$$

где число $C = \frac{1}{a} > 0$.

Из неравенства (14) следует, что если для некоторой последовательности векторов $(x_n) \subset X$ $\lim_n f_n x_n = 0$, то $\lim_n x_n = 0$. Покажем на основании этого, что если для некоторой последовательности векторов $(z_n) \subset X$ и некоторого вектора $z \subset X$

$$\lim_n f_n z_n = fz \qquad , \qquad (19)$$

то $\lim_n z_n = z$. Пусть $x_n \overset{def}{=} z_n - z$. Тогда, учитывая то, что в силу условия а) определения 1 $\lim_n f_n z = fz$ получим из равенства (19), что $\lim_n f_n x_n = 0$, откуда $\lim_n x_n = 0$ или $z = \lim_n z_n$.

Покажем теперь, что для последовательности отображений

$(f_n^{-1}) \subset LC(Y,X)$ и для отображения $f^{-1} \in LC(Y,X)$ выполнено условие а) определения I . Пусть вектор $y \in Y$ выбран произвольно. Определим вспомогательную последовательность векторов $(z_n)_{n \geq n_0} \subset X$ и вектор $z \in X$ следующим образом:

$$\forall n \geq n_0 \quad z_n = f_n^{-1} y \ , \ z = f^{-1} y \ .$$

Тогда в силу определения последовательности векторов (z_n) и вектора $z \in X$ $\lim\limits_n f_n z_n = f z$, откуда $\lim\limits_n z_n = z$ или $\lim\limits_n f_n^{-1} y = f^{-1} y$.

Пусть ограниченная последовательность векторов $(x_n) \subset X$ и последовательность векторов $(z_n) \subset X$ таковы, что

$$\lim_n (f_n x_n - f z_n) = v \qquad (20)$$

Тогда существует такая подпоследовательность $(x_{n_j} - z_{n_j})$ последовательности $(x_n - z_n)$ и такой вектор $t \in X$, что $\lim\limits_j (x_{n_j} - z_{n_j}) = t$. Действительно, в силу условия б) определения I последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y . Следовательно, существует такая подпоследовательность $(f_{n_j} x_{n_j} - f x_{n_j})$ и существует такой вектор $u \in Y$, что

$$\lim_j (f_{n_j} x_{n_j} - f x_{n_j}) = u. \qquad (21)$$

Тогда из равенств (20) и (21) получаем, что

$$\lim_j f(x_{n_j} - z_{n_j}) = \lim_j (f_{n_j} x_{n_j} - f z_{n_j} - f_{n_j} x_{n_j} + f x_{n_j}) = v - u.$$

Так как $f : X \longmapsto Y$ - изоморфизм, то

$$\lim_j (x_{n_j} - z_{n_j}) = f^{-1}(v - u) = t .$$

Нам осталось показать, что для любой ограниченной последовательности векторов $(y_n) \subset Y$ последовательность векторов $(f_n^{-1} y_n - f^{-1} y_n)_{n \geq n_0}$ относительно компактна в пространстве X . Определим вспомогательные последовательности векторов (x_n) и (z_n) из X следующим образом:

$$\forall n \geq n_0 \quad x_n = f_n^{-1} y_n \ , \ z_n = f^{-1} y_n .$$

Тогда в силу ограниченности последовательности векторов (y_n) в пространстве Y из неравенства (18) последовательность векторов (x_n) ограничена в пространстве X . В силу определения последовательностей векторов (x_n) и (z_n) для любой подпоследовательности $(x_{n_j} - z_{n_j})$ последовательности $(x_n - z_n)$

$$\lim_j (f_{n_j} x_{n_j} - f z_{n_j}) = 0.$$

Тогда существует такая подпоследовательность $(x_{n_{j_m}} - z_{n_{j_m}})$ последовательности $(x_{n_j} - z_{n_j})$ и существует такой вектор $t \in X$, что $\lim\limits_m (x_{n_{j_m}} - z_{n_{j_m}}) = t$ откуда $\lim\limits_m (f^{-1}_{n_{j_m}} y_{n_{j_m}} - f^{-1} y_{n_{j_m}}) = t$. Таким образом мы показали относительную компактность последовательности векторов $(f^{-1}_n y_n - f^{-1} y_n)_{n \geq n_0}$ в пространстве X.

17. Теорема. Пусть X и Y – банаховы пространства и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto Y$. Тогда отображение f – изоморфизм тогда и только тогда, когда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n – изоморфизм и существует такое число $C > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $\|f_n^{-1}\| \leq C$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 16.

Достаточность. Отметим, что

$$\forall x \in X \quad \|fx\| = \lim_n \|f_n x\| \geq \|f_n^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| \geq \frac{1}{C}\|x\| \quad (22)$$

Из (22) следует, что отображение $f \in L(X,Y)$ – линейный гомеоморфизм и в силу полноты пространства X $\overline{fX} = fX$. Поэтому нам осталось показать, что $\overline{fX} = Y$. Пусть $y \in Y$ – произвольно выбранный вектор. Из условия теоремы

$$\forall n \geq n_0 \quad \exists x_n \in X : \quad y = f_n x_n \quad (23)$$

Отметим, что из неравенства $\|x_n\| \leq \|f_n^{-1} y\| \leq C\|y\|$ следует ограниченность последовательности векторов $(x_n) \subset X$. Тогда в силу условия б) определения I последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y. Следовательно, существует такая ее подпоследовательность $(f_{n_j} x_{n_j} - f x_{n_j})$ и такой вектор $z \in Y$, что $\lim\limits_j (f_{n_j} x_{n_j} - f x_{n_j}) = z$. Поэтому в силу (23)

$$\lim_j f x_{n_j} = y - z$$

В силу замкнутости области значений отображения f существует такой вектор $x \in X$, что $fx = y - z$. Покажем, что $x = \lim\limits_j x_{n_j}$. Действительно, в силу (22)

$$\|x - x_{n_j}\| \leq C\,\|f(x - x_{n_j})\| = C\,\|fx - f x_{n_j}\|$$

Откуда, переходя к пределу при $n_j \longrightarrow \infty$, получаем нужное. Теперь нам осталось воспользоваться результатом следствия 5

$$y = \lim_j f_{n_j} x_{n_j} = fx .$$

18.Определение.Пусть X и Y -нормированные векторные пространства,отображение $f \in L(X,Y)$ называется относительно открытым,если существует такое число $b > 0$,что

$$f B'_X(0,1) \supset fX \cap B'_Y(0,b) \quad . \qquad (24)$$

Семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset L(X,Y)$ называется равномерно относительно открытым,если существует такое число $b > 0$,что

$$\forall \alpha \in A \quad f_\alpha B'_X(0,1) \supset f_\alpha X \cap B'_Y(0,b) \quad .$$

19.Предложение.Пусть X и Y -нормированные векторные пространства,отображение $f \in L(X,Y)$ и подпространство $f^{-1}\{0\}$ имеет топологическое дополнение в X ,т.е.X можно представить в виде прямой топологической суммы $f^{-1}\{0\}$ и некоторого замкнутого вектороного подпространства Z : $X = f^{-1}\{0\} \oplus Z$.Тогда отображение f относительно открыто тогда и только тогда,когда для сужения отображения f на Z существует такое число $a > 0$,что

$$\forall z \in Z \quad \| fz \| \geq a \| z \| . \qquad (25)$$

Доказательство.Так как $f^{-1}\{0\} \cap Z = \{0\}$,то сужение отображения f на Z является инъекцией.Следовательно,для любого вектора $z \in Z \setminus \{0\}$.Отметим,что $fz \neq 0$,

$$\frac{b}{\| fz \|} \cdot fz \in B'_Y(0,b) \cap fX \quad ,$$

поэтому в силу (24) существует такой вектор $x \in B'_X(0,1)$, что

$$fx = \frac{b}{\| fz \|} \cdot fz \quad .$$

Из того,что $X = f^{-1}\{0\} \oplus Z$, следует существование линейного непрерывного проектора $p : X \longmapsto X$ на Z вдоль $f^{-1}\{0\}$,т.е. $pX = Z$ и $p^{-1}\{0\} = f^{-1}\{0\}$.Тогда

$$\forall x \in X \quad fx = f \circ px \quad . \qquad (26)$$

В силу (26) $f \circ px = \frac{b}{\| fz \|} \cdot fz$,поэтому $f\left(px - \frac{b}{\| fz \|}\, z\right) = 0$ и так как $px - \frac{b}{\| fz \|} \cdot z \in Z$,то $px - \frac{b}{\| fz \|} \cdot z = 0$. Следовательно, $\| px \| = \frac{b}{\| fz \|} \cdot \| z \|$,т.е.

$$\| fz \| = \frac{b}{\| px \|} \cdot \| z \| \geq \frac{b}{\| p \| \cdot \| x \|} \cdot \| z \| \geq \frac{b}{\| p \|} \| z \| \qquad (27)$$

Достаточность.Покажем,что в качестве радиуса шара $B'_Y(0,b)$ в оценке (24) можно взять число a из неравенства (25).Т.е. покажем,что из (25) следует

$$f B'_X(0,1) \supset fX \cap B'_Y(0,a). \qquad (28)$$

Действительно, пусть $y \in B_Y^1(0,a) \cap fX$ -произвольно взятый вектор. Так как $fX = f \circ PX = fZ$, то существует такой вектор $z \in Z$, что $y = fz$. Покажем, что $z \in B_Z^1(0,1) \subset B_X^1(0,1)$: в силу (25)

$$\|z\| \le \frac{1}{a}\|fz\| = \frac{1}{a}\cdot\|y\| \le 1 \quad .$$

20. Следствие. Пусть X и Y -нормированные векторные пространства, семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A} \subset L(X,Y)$ таково, что $\forall \alpha \in A \quad X = f_\alpha^{-1}\{0\} \oplus Z_\alpha$ и существует такое число $c > 0$, что $\forall \alpha \in A \quad \|P_\alpha\| \le c$, где $P_\alpha : X \longmapsto X$ -линейный непрерывный проектор пространства X на Z_α вдоль $f_\alpha^{-1}\{0\}$. Тогда семейство отображений $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ равномерно относительно открыто тогда и только тогда, когда существует такое число $a > 0$, что

$$\forall \alpha \in A \quad \forall z \in Z_\alpha \quad \|f_\alpha z\| \ge a\|z\| \quad .$$

Доказательство. Необходимость. В силу оценки (27) число $a > 0$ можно взять, например, таким, чтобы

$$\forall \alpha \in A \qquad a \le \frac{b}{\|P_\alpha\|} \quad .$$

В силу условия следствия указанному условию удовлетворяет число $\frac{b}{c}$.

Достаточность. Здесь мы даже не будем пользоваться ограниченностью множества $(\|P_\alpha\|)_{\alpha \in A}$, ибо в силу (28)

$$\forall \alpha \in A \qquad f_\alpha B_X^1(0,1) \supset f_\alpha X \cap B_Y^1(0,a).$$

21. Отметим, что если X и Y -банаховы пространства, $f \in LC(X,Y)$ и ядро отображения f имеет топологическое дополнение Z в пространстве X, то понятия нормальной разрешимости и относительной открытости отображения f равносильны.

Действительно. Если область значений fX замкнута в пространстве Y, то в силу полноты пространства Y, fX- также будет банаховым пространством. Так как Z замкнуто в банаховом пространстве X, то Z - само полное пространство. Теперь в силу равенства $fZ = fX$ и того, что сужение отображения f на Z -инъекция, в силу принципа открытости отображений следует, что существует такое число $a > 0$, что

$$\forall z\in Z \quad \|fz\| \geq a\|z\| .$$

Обратно, в силу полноты подпространства Z, предложения I9 и оценки (25) область значений $fZ = fX$ полна в пространстве Y и, следовательно, замкнута в нем.

22. Пусть X и Y -банаховы пространства, $f_n \xrightarrow{c.k.a} f\in L\mathcal{C}(X,Y)$ отображение f -нормально разрешимо и $\dim f^{-1}\{0\} < +\infty$. Тогда в силу теоремы I9 из [2] существует такое число $n_0\in N$, что для всех $n\geq n_0$ $\dim f_n^{-1}\{0\} \leq \dim f^{-1}\{0\}$. Таким образом, в силу 2I и того, что конечномерное подпространство банахова пространства имеет топологическое дополнение, справедливо следующее утверждение:

если X и Y -банаховы пространства, отображение $f\in L\mathcal{C}(X,Y)$ -относительно открыто, $\dim f^{-1}\{0\} < \infty$ и $f_n \xrightarrow{c.k.a} f\in L\mathcal{C}(X,Y)$, то существует такая последовательность подпространств (Z_n) пространства X, что

$$\forall n\geq n_0 \qquad X = Z_n \oplus f_n^{-1}\{0\}. \qquad (29)$$

23. Теорема. Пусть X и Y -банаховы пространства, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X\longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto Y$ и $\dim f^{-1}\{0\} < \infty$. Тогда $\dim f^{-1}\{0\} = \dim f_n^{-1}\{0\}$ для всех достаточно больших $n\in N$ тогда и только тогда, когда существует такое число $a>0$ и существует такая последовательность подпространств (Z_n) пространства X, удовлетворяющая условию (29), что

$$\forall n\geq n_0 \ \forall z\in Z_n \quad \|f_n z\| \geq a\|z\|. \qquad (30)$$

Доказательство. Необходимость. Так как $\dim f^{-1}\{0\} < +\infty$, то $X = f^{-1}\{0\}\oplus Z$. Обозначим сужение отображения f на Z через g, а сужение отображения f_n на Z через g_n. Тогда отображение $g\in L\mathcal{C}(Z,Y)$ является в силу предложения I9 линейным гомеоморфизмом и $g_n \xrightarrow{c.k.a} g\in L\mathcal{C}(Z,Y)$. Следовательно, в силу теоремы I5 существуют такие числа $n_2\in N$ и $a>0$, что для всех

$$n\geq n_2 \quad \forall z\in Z \quad \|f_n z\| \geq a\|z\| \qquad (3I)$$

Из (3I) следует, что для всех $n\geq n_2$ $Z\cap f_n^{-1}\{0\} = \{0\}$, а так как в силу условия теоремы $Z\oplus f^{-1}\{0\} = X$ и существзует такое число $n_1 \in N$, что для всех $n \geq n_1$ $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$, то для всех $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$

$$X = Z \oplus f_n^{-1}\{0\} \quad .$$

Достаточность. В силу 22 нам нужно показать, что для всех достаточно больших $n \in N$ $\dim f_n^{-1}\{0\} \geq \dim f^{-1}\{0\}$, т.е. в силу (29) показать, что для всех достаточно больших $n \in N$

$$f^{-1}\{0\} \cap Z_n = \{0\} \qquad (32)$$

Допустим, что (32) не верно. Тогда существует такая последовательность векторов $(z_n) \subset X$, что

$$\forall n \in N \qquad z_n \in f^{-1}\{0\} \cap Z_n \cap S_X(0,1) \qquad (33)$$

В силу конечномерности подпространства $f^{-1}\{0\}$ и ограниченности последовательности векторов $(z_n) \subset f^{-1}\{0\}$ существует такая подпоследовательность (z_{n_j}) последовательности (z_n) и существует такой вектор $z \in f^{-1}\{0\}$, что $\lim_j z_{n_j} = z$. Поэтому в силу закнутости сферы $S_X(0,1)$ и в силу условия (33) : $z \in S_X(0,1) \cap f^{-1}\{0\}$.
Тогда в силу следствия 5 $\lim_j f_{n_j} z_{n_j} = fz = 0$. Поэтому в силу (33) и (30) $\lim_j z_{n_j} = 0$, или получено противоречие: $0 = z \in S_X(0,1)$.

24. Если X -гильбертово пространство, Y -банахово пространство, $f \in LC(X,Y)$, то $X = f^{-1}\{0\} \oplus Z$, где Z -ортогональное дополнение подпространства $f^{-1}\{0\}$ в X. Тогда в силу 21 и 20 как следствие теремы 23 получается теорема I из [3] :

пусть X и Y -гильбертовы пространства, последовательность непрерывных отображений $(f_n) \subset LC(X,Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное нормально разрешимое отображение $f \in LC(X,Y)$ и $\dim f^{-1}\{0\} < \infty$. Тогда для того, чтобы для всех достаточно больших $n \in N$ $\dim f_n^{-1}\{0\} = \dim f^{-1}\{0\}$ необходимо и достаточно, чтобы существовали числа $n_0 \in N$ и $a > 0$ такие, что для всех $n \geq n_0$ отображения f_n были нормально разрешимыми и

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in Z_n \quad \|f_n z\| \geq a\|z\| \quad ,$$

где $Z_n \subset X$ -ортогональное дополнение к $f_n^{-1}\{0\}$ в X.

25. Определение. Пусть X и Y -нормированные векторные

пространства, Z -векторное подпространство пространства X, линейное отображение $f: Z \longmapsto Y$ называется замкнутым, если его график является замкнутым векторным подпространством нормированного пространства $X \times Y$.

Если $f: Z \subset X \longmapsto Y$ -линейное отображение, то для его замкнутости необходимо и достаточно выполнения следующего условия: если последовательность векторов $(z_n) \subset Z$ сходится к вектору $z \in X$ и последовательность их образов (fz_n) сходится к вектору $y \in Y$, то $z \in Z$ и $fz = y$.

Если $Z \subset X$ и $f: Z \longmapsto Y$ является замкнутым линейным отображением, то будем писать, что $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$.

26. Отметим, что если X и Y -банаховы пространства, $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$ и $g \in L\mathcal{C}(Z, Y)$, то $f + g \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$. (см. [4] задача 5.6. стр. 209.)

27. Предложение. Пусть X и Y -банаховы пространства, Z -векторное подпространство пространства X, отображение $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$ и $f_n \xrightarrow{c.c.a} f \in L(Z, Y)$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$.

Обратно, если существует такая последовательность отображений $(f_n) \subset L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$, что $f_n \xrightarrow{c.c.a} f \in L(Z, Y)$, то $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$.

Доказательство. Так как $f_n \xrightarrow{c.c.a} f \in L(Z, Y)$, то $f_n - f \xrightarrow{c.c.a} 0 \in L\mathcal{C}(Z, Y)$ и в силу следствия 4 существует такое число $n_0 \in N$ что для всех $n \geq n_0$ $f_n - f \in L\mathcal{C}(Z, Y)$. Поскольку $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$, то в силу 26 для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n = (f_n - f) + f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$.

Обратно, если для всех $n \geq n_0$ $f_n \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$, то отображение $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$, так как $f = f_n + (f - f_n)$ и для всех $n \geq n_0$ $f - f_n \in L\mathcal{C}(Z, Y)$.

28. Пример. Пусть $X = Y = \ell_2$, $Z = \{(x(n)) \in \ell_2 \mid \sum_n |nx(n)|^2 < \infty\}$ и отображение $f \in L(Z, Y)$ определено следующим образом:

$$\forall (x(n)) \in Z \quad f(x(n)) = (nx(n)) .$$

Пусть последовательность отображений $(f_n) \subset L\mathcal{C}(Z, Y)$ определена так:

$$\forall n \in N \quad \forall z \in Z \quad f_n z = (z|e_n)e_1 .$$

Тогда $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$, $f_n + f \xrightarrow{c.\kappa.a} f \in L(Z, Y)$ но последовательность отображений $(f_n + f)$ не сходится к отображению f по норме, так как $\forall n \in N \quad \|f_n\| = 1$.

29. Теорема. Пусть X и Y -банаховы пространства, Z - векторное подпространство пространства X , $f_n \xrightarrow{c.\kappa.a} f \in L(Z, Y)$ и $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y)$. Допустим, что отображение f -инъективно и относительно открыто, тогда существует такое число $a > 0$ и существует такое число $n_0 \in N$, что

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in Z \qquad \|f_n z\| \geq a \|z\| \qquad .$$

т.е. для всех $n \geq n_0$ отображения f_n-инъективны и семейство отображений $(f_n)\ n \geq n_0$ -равномерно относительно открыто.

Доказательство. В силу предложения I9 существует такое число $a_1 > 0$, что

$$\forall z \in Z \qquad \|f z\| \geq a_1 \|z\| \qquad (34)$$

Следуя Секефальви-Надю введем в пространстве Z норму $\| \ \|_1$, определённую следующим образом:

$$\forall z \in Z \qquad \|z\|_1 = \|z\|_X + \|f z\|_Y \qquad (35)$$

Тогда $(Z, \| \ \|_1)$ является банаховым пространством, отображение $f \in L\mathcal{C}((Z, \| \ \|_1), Y)$. Кроме того $f_n \xrightarrow{c.\kappa.a} f \in L\mathcal{C}((Z, \| \ \|_1), Y)$, потому что запас ограниченных множеств в пространстве $(Z, \| \ \|_1)$ меньше, чем в пространстве $(Z, \| \ \|)$. Покажем, что отображение f является линейным гомеоморфизмом пространства $(Z, \| \ \|_1)$ в пространство Y . Действительно, в силу (34)

$$\forall z \in Z \quad \|f z\|_Y \geq \tfrac{1}{2} a_1 \|z\|_X + \tfrac{1}{2} \|f z\|_Y \quad ,$$

откуда и из (35)

$$\forall z \in Z \quad \|f z\|_Y \geq \min(\tfrac{1}{2} a_1, \tfrac{1}{2})(\|z\|_X + \|f z\|_Y) \geq a_2 \|z\|_1 .$$

В силу теоремы I5 существует такое число $n_0 \in N$ и существует такое число $a > 0$, что

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in Z \qquad \|f z\|_Y \geq a \|z_*\|_1 \ .$$

откуда в силу (35)

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall z \in Z \quad \|f z\|_Y \geq a \|z\|_X \quad .$$

30. Теорема. Пусть X и Y -банаховы пространства, Z -

векторное подпространство пространства X и последовательность отображений $(f_n)\subset L\ell(Z\subset X, Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение $f\in L\ell(Z\subset X, Y)$. Допустим, что отображение f биективно и $f^{-1}\in L\ell(Y,Z)$. Тогда существует такое число $n_0\in N$, что для всех $n\geq n_0$ отображение f_n -биективно, $f_n^{-1}\in L\ell(Y, Z)$ и последовательность отображений $(f_n^{-1})_{n\geq n_0}$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение f^{-1}.

Доказательство. Пусть $\|\ \|_1$ -норма в пространстве Z, определенная в условии (35). Тогда $f_n\xrightarrow{c.k.a} f\in L\ell((Z,\|\ \|_1),Y)$ и отображение f -изоморфизм банахова пространства $(Z,\|\ \|_1)$ на банахово пространство Y. Следовательно, в силу теоремы 16 существует такое число $n_0\in N$, что для всех $n\geq n_0$ отображение f_n -биективно, $f_n^{-1}\in L\ell(Y,(Z,\|\ \|_1))$ и

$$f_n^{-1}\xrightarrow{c.k.a} f^{-1}\in L\ell(Y,(Z,\|\ \|_1)) . \qquad (36)$$

Тогда из неравенства $\|z\|_X\leq\|z\|_1$ следует, что для всех $n\geq n_0$ $f_n^{-1}\in L\ell(Y,(Z,\|\ \|_X))$ и так как всякая относительно компактная последовательность векторов из пространства $(Z,\|\ \|_1)$ будет относительно компактной последовательностью в пространстве $(Z,\|\ \|_X)$, то из условия (36) следует, что

$$f_n\xrightarrow{c.k.a} f^{-1}\in L\ell(Y,(Z,\|\ \|_X)).$$

31. Теорема. Пусть X и Y -банаховы пространства, Z - векторное подпространство пространства X и последовательность отображений $(f_n)\subset L\ell(Z\subset X,Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение $f\in L\ell(Z\subset X,Y)$. Тогда отображение f -биекция и $f^{-1}\in L\ell(Y,Z)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $n_0\in N$ и существует такое число $a>0$, что для всех $n\geq n_0$ отображение f_n-биекция, $f_n^{-1}\in L\ell(Y,Z)$ и $\|f_n^{-1}\|\leq a$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 30 и опирается на результат теоремы 17.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю И.В.Карклиньшу за внимание к работе.

Литература

I.Вайникко Г.М.Принцип компактной аппроксимации в теории приближённых методов.-"Журнал вычислительной математики и математической физики",1969,т.9,№4, с.739 - 761.

2.Карклиньш И.В.,Левченков В.С.Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.Латвийский математический ежегодник, I 7 (в печати).

3.Раковщик Л.С.Устойчивость индекса и полуустойчивость дефектных чисел при компактной аппроксимации.-"Сибирский математический журнал",1972,т.12,№3 с.630 - 638.

4.Като Т.Теория возмущений линейных операторов.М, "Мир",1972.

Поступила 22 января 1974 года.

УДК 513. 88.

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВ СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.И.Лабеев

Введение. Устойчивость свойств спектра линейных непрерывных или линейных замкнутых отображений, действующих в банаховых пространствах, на случай когда близость двух отображений определяется посредством нормы отображения или посредством раствора между их графиками, изучалась многими математиками. Предлагаемая работа дополняет исследования Г.М. Вайникко [4], где близость отображений определяется в смысле секвенциально компактной аппроксимации.

Основными в статье являются теоремы 4,6,12,21,23и24, в которых рассматриваются условия непрерывности спектра при секвенциально компактной аппроксимации, или те условия, когда можно говорить о верхней непрерывности спектра. В теоремах 15,17,26 и 28 рассматривается вопрос о секвенциально компактной аппроксимации резольвент линейных отображений в банаховых пространствах.

В статье много ссылок на работу автора [6]. Так как обе статьи находятся в одном сборнике, то это не вызовет затруднений при чтении предлагаемой работы. Что касается основных обозначений, то мы как правило будем пользоваться общепринятыми обозначениями, подробно об этом указано в введении к статье [6].

I. Определение. Пусть X -банахово пространство и $f: X \longmapsto X$ линейное отображение. Если для некоторого числа $\lambda \in K$ отображение $\lambda I - f : X \longmapsto X$, где I -тождественное отображение в пространстве X, является биекцией и отображение $(\lambda I - f)^{-1} \in \mathcal{LC}(X,X)$, то число λ является регулярным числом. Множество всех регулярных чисел называется резольвентным множеством и обозна[illegible] через $\rho(f)$. Таким образом каждому числу $\lambda \in \rho(f)$ мы можем поставить в соответствие линейное непрерывное отображение $(\lambda I - f)^{-1} = R(\lambda; f)$. Определённое таким образом отображение $R(\cdot\,; f)$: $\rho(f) \longmapsto L(X,X)$ называется резольвентой линейного отображения f. Множество всех чисел $\sigma(f) = K \setminus \rho(f)$ называется спектром линейного отображения f.

Отметим, что если $f: X \longmapsto Y$ -линейное непрерывное отображение, то резольвентное множество $\rho(f)$ является открытым подмножеством в K, а спектр $\sigma(f)$ -компактным множеством, причем $\sigma(f) \subset B_K^1(0, \|f\|)$. Число $spr f = \sup|\sigma(f)|$ называется спектральным радиусом линейного отображения f. Отметим, что если f -линейное непрерывное отображение, то $spr f = \lim\limits_n \sqrt[n]{\|f^n\|}$ (см. [2] III.6.2. стр.223.).

Введем следующую классификацию точек спектра (см. [1] стр.620 .) :

а) множество всех таких чисел $\lambda \in \sigma(f)$, для которых отображение $\lambda I - f$ не является инъекцией называется точечным спектром линейного отображения f и обозначается через $\sigma_p(f)$, каждое число множества $\sigma_p(f)$ называется собственным числом отображения f ;

б) множество всех таких чисел $\lambda \in \sigma(f)$, для которых отображение $\lambda I - f$ -инъективно, подпространство $(\lambda I - f)X$ плотно в пространстве X, но не совпадает с X : $X \neq (\lambda I - f)X$, называется непрерывным спектром линейного отображения f и обозначается через $\sigma_c(f)$;

в) множество всех таких чисел $\lambda \in \sigma(f)$, для которых отображение $\lambda I - f$ -инъективно, но подпространство $(\lambda I - f)X$ не плотно в пространстве X, называется остаточным спектром отображения f и обозначается через $\sigma_r(f)$.

Отметим, что множества $\sigma_p(f)$, $\sigma_c(f)$ и $\sigma_r(f)$ не пересекаются и $\sigma(f) = \sigma_p(f) \cup \sigma_c(f) \cup \sigma_r(f)$.

2. Определение. Пусть X и Y -нормированные пространства. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X \longmapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \longmapsto Y$ если:

а) для любого вектора $x \in X$ $fx = \lim\limits_n f_n x$ в пространстве Y;

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y.

В этой ситуации для краткости будем писать:

$$f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L(X,Y) .$$

3.Из результатов § 6 [4] следует,что если X -банахово пространство,последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$ и F -связное компактное подмножество резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f ,то для всех достаточно больших $n \in N$ либо $F \subset \rho(f_n)$. либо $F \subset \mathcal{E}_\tau(f_n)$.

Оказывается,что на случай секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений указанный результат можно уточнить,и справедлива следующая теорема:

4.Теорема.Пусть X -банахово пространство и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$.Тогда для любого открытого множества $V \subset K$,содержащего спектр отображения f существует такое число $n_0 \in N$,что для всех $n \geq n_0$ $V \supset \mathcal{E}(f_n)$.

Другими словами,если рассматривать близость отображений в смысле секвенциально компактной аппроксимации,то из этой теоремы следует верхняя непрерывность спектра.

Если перейти к дополнениям в множестве K ,то мы получим следующее эквивалентное утверждение:если в банаховом пространстве X $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L\mathcal{C}(X,X)$,то для любого замкнутого подмножества M резольвентного множества $\rho(f)$ существует такое число $n_0 \in N$,что для всех чисел $n \geq n_0$ $M \subset \rho(f_n)$.

Доказательство.Так как $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L\mathcal{C}(X,X)$,то в силу следствия 4 из [6] существуют такие числа $n_1 \in N$ и $c > 0$, что для всех $n \geq n_1$

$$\|f_n\| \leq c , \quad \|f\| \leq c$$

Поэтому для всех $n \geq n_1$ множество $\{\lambda \in M \mid |\lambda| > c\}$ содержится в $\rho(f_n)$. Пусть $F = M \setminus \{\lambda \in M \mid |\lambda| > c\}$, тогда F -компактное множество и исходная задача сводится к следующей: если компактное множество F содержится в резольвентном множестве $\rho(f)$ отображения f, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset \rho(f_n)$.

Предположим, что это утверждение не верно. Тогда существует такая последовательность строго возрастающих натуральных чисел (n_j) и такая последовательность чисел (λ_j) из F, что

$$\forall j \in N \qquad \lambda_j I - f_{n_j} \notin Isom(X,X) \quad , \qquad (1)$$

где $Isom(X,X)$ -множество всех изоморфизмов пространства X на X в классе топологических векторных пространств. Из компактности множества F следует существование такой подпоследовательности (λ_{j_m}) последовательности (λ_j) и такого числа $\lambda \in F$, что $\lim_m \lambda_{j_m} = \lambda$. Тогда $\lambda_{j_m} I \xrightarrow{c.к.а} \lambda I \in L\mathcal{C}(X,X)$ и поэтому в силу принадлежности числа λ множеству $\rho(f)$

$$\lambda_{j_m} I - f_{n_{j_m}} \xrightarrow{c.к.а} \lambda I - f \in Isom(X,X). \quad (2)$$

Из условия (2) в силу теоремы 16 из [6] существует такое число $m_0 \in N$, что для всех

$$m \geq m_0 \quad \lambda_{j_m} I - f_{n_{j_m}} \in Isom(X,X) \qquad (3)$$

Но условие (1) противоречит условию (3), следовательно, теорема доказана.

5. Лемма. Если X -банахово пространство и $f_n \xrightarrow{c.к.а} 0 \in L\mathcal{C}(X,X)$, то $\lim_n spr\, f_n = 0$.

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\forall f \in L\mathcal{C}(X,X) \qquad spr f^2 = (spr f)^2 \quad . \qquad (4)$$

Действительно,

$$spr f^2 = \lim_m \sqrt[m]{\|(f^2)^m\|} = \lim_m \sqrt[m]{\|f^{2m}\|} = \left(\lim_m \sqrt[2m]{\|f^{2m}\|}\right)^2 = (spr f)^2.$$

Так как в силу следствия 4 из [6] существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n \in L\mathcal{C}(X,X)$ и в силу следствия 12 из [6] $\lim_n \|f_n^2\| = 0$, то из неравенства $spr f_n^2 \leq \|f_n^2\|$ и из условия (4) получаем нужное.

6.Теорема.Пусть X -банахово пространство,последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$ и для всех $n \in N$ $f_n \circ f = f \circ f_n$. Тогда расстояние $\chi[\sigma(f), \sigma(f_n)]$ между спектрами $\sigma(f)$ и $\sigma(f_n)$ в смысле Хаусдорфа стремится к нулю при $n \to \infty$.

Доказательство.Определим вспомогательную последовательность отображений $(g_n) \subset LC(X, X)$ следующим образом:

$$\forall n \in N \quad g_n \overset{def}{=} f_n - f .$$

Тогда $g_n \xrightarrow{c.к.a} 0 \in LC(X,X)$ и поэтому в силу леммы 5 $0 = \lim\limits_n spr\, g_n$.Отметим,что для любого $n \in N$ $g_n \circ f = (f_n - f) \circ f = f_n \circ f - f \circ f = f \circ f_n - f \circ f = f(f - f_n) = f \circ g_n$.Таким образом выполены все предпосылки теоремы 3.6. (см. [2] стр. 265) .Следовательно,для всех $n \in N$ $\chi[\sigma(f), \sigma(f_n)] \le spr\, g_n$ и так как $f + g_n = f_n$,а $\lim\limits_n spr\, g_n = 0$,то $\lim\limits_n \chi[\sigma(f), \sigma(f_n)] = 0$.

7.Замечание.В теореме 6 условие: для всех $n \in N$ (или для всех достаточно больших $n \in N$) отображение f коммутирует с отображением f_n является существенным.Если оно не выполнено,то даже в случае,когда $\lim\limits_n \| f_n - f \| = 0$ (что как известно,влечет $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,X)$) равенство $\lim\limits_n \chi[\sigma(f), \sigma(f_n)] = 0$ может нарушиться(см.[2] стр.266,пример 3.8.).

При этом дополнительном предположении в теореме 6 доказана непрерывность спектра линейного непрерывного отображения при секвенциально компактной аппроксимации в том смысле,что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in N, \text{что } \forall n \ge n_0 \quad \chi[\sigma(f), \sigma(f_n)] < \varepsilon .$$

8.Предложение.Пусть X -банахово пространство, $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,X)$ и $(\lambda_n) \subset K$ -такая последовательность чисел,что для всех $n \in N$ $\lambda_n \in \sigma(f_n)$.Тогда множество всех предельных точек F последовательности (λ_n) содержится в $\sigma(f)$.

Доказательство.Пусть $\lambda \in F$ -произвольно выбранная точка.Тогда существует такая подпоследовательность (λ_{n_j}) последовательности (λ_n) ,что $\lambda = \lim\limits_j \lambda_{n_j}$.Допустим что $\lambda \notin \mathcal{E}(f)$. Тогда в силу открытости множества $\rho(f)$ существует такая замкнутая окрестность M точки λ, что $M \subset \rho(f)$. Из последнего следует, что существует такое число $j_0 \in N$, что для всех $j \geq j_0$ $\lambda_{n_j} \in M$. В силу теоремы 4 существует такое число $j_1 \geq j_0$, что для всех $j \geq j_1$ $M \subset \rho(f_{n_j})$. Таким образом мы получили, что для всех $j \geq j_1$ $\lambda_{n_j} \in \rho(f_{n_j})$ и в тоже время по условию для любого $j \in N$ $\lambda_{n_j} \in \mathcal{E}(f_{n_j})$ – противоречие.

9. Замечание. Отметим, что утверждать о том, что для любого числа $\lambda \in \mathcal{E}(f)$ существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in \mathcal{E}(f_n)$, что $\lambda = \lim_n \lambda_n$ можно в том случае, когда последовательность отображений $(f_n) \subset LC(X,X)$ коммутирует с отображением $f \in LC(X,X)$, т.е. для любого $n \in N$ $f_n \circ f = f \circ f_n$. В общем случае это утверждение, вообще говоря, не верно. Действительно в примере 3.8(см. [2] стр. 266.) спектр отображения f равен $B_K^1(0,1)$, а спектры аппроксимирующих отображений f_n равны $S_K(0,1)$. Поэтому число $\lambda = 0$ не является предельной точкой для множества $\bigcup_n \mathcal{E}(f_n) = S_K(0,1)$.

10. Пример. Если X – банахово пространство, $f_n \xrightarrow{c.к.?} f \in LC(X,X)$ и для любого $n \in N$ $\lambda_n \in \mathcal{E}_p(f_n)$, а $\lambda = \lim_n \lambda_n$, то число λ не обязательно принадлежит множеству $\mathcal{E}_p(f)$.

Действительно, пусть $X = \ell_2$, определим отображение $f \in LC(\ell_2, \ell_2)$ следующим образом:

$$\forall\, (x(n)) \in \ell_2 \quad f(x(n)) = \left(\tfrac{1}{n} x(n)\right).$$

Пусть для любого $n \in N$ $f_n = f$, тогда $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(\ell_2, \ell_2)$ и для любого $n \in N$ $\lambda_n = \frac{1}{n} \in \mathcal{E}_p(f)$, $0 = \lim_n \lambda_n$, но $0 \in \mathcal{E}_c(f)$.

11. Пример. Если X – банахово пространство, $f_n \xrightarrow{c.к.a} f \in LC(X,X)$, для любого $n \in N$ $\lambda_n \in \mathcal{E}_p(f_n)$ и $\lambda = \lim_n \lambda_n$, то число $\lambda \in K$ не обязательно принадлежит множеству $\mathcal{E}_p(f) \cup \mathcal{E}_c(f)$.

Действительно, пусть $X = \ell_2$, отображение $f \in LC(\ell_2, \ell_2)$ определим следующим образом:

$$f e_1 = e_2 \quad , n \geq 2 \quad f e_n = \frac{1}{n} e_n \quad ,$$

где $(e_n) = (\delta_{nm})_{m \in N}$ – символ Кронекера. Положим для любого $n \in N$ $f_n \stackrel{def}{=} f$. Тогда для любого $n \geq 2$ $\lambda_n = \frac{1}{n} \in \mathcal{E}_p(f_n)$, $0 = \lim_n \lambda_n$

но $0 \in \mathcal{B}_c(f)$.

12. Теорема. Пусть X -банахово пространство и последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f: X \longmapsto X$. Тогда число $\lambda \in \rho(f)$ тогда и только тогда, когда для всех достаточно больших $n \in N$ $\lambda \in \rho(f_n)$ и существует такое число $c > 0$, что для всех достаточно больших $n \in N$ $\|(\lambda I - f_n)^{-1}\| \le c$.

Данная теорема является частным случаем теоремы 17 из [i].

13. Лемма. Пусть X -банахово пространство, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f: X \longmapsto X$ и M -замкнутое подмножество резольвентного множества $\rho(f)$ отображения f . Тогда существуют такие числа $n_0 \in N$ и $C > 0$, что для всех $n \ge n_0$ $M \subset \rho(f_n)$ и

$$\sup_{n \ge n_0} \sup_{\lambda \in M} \|R(\lambda; f_n)\| \le C. \qquad (5)$$

Доказательство. В силу теоремы 4 существует такое число $n_1 \in N$, что для всех $n \ge n_1$ $M \subset \rho(f_n)$. Допустим, что оценка (5) не верна. Тогда, переходя если нужно к подпоследовательности, можно предположить существование такой последовательности чисел $(\lambda_n) \subset M$, что

$$\lim \|R(\lambda_n; f_n)\| = \infty \quad . \qquad (6)$$

Покажем вначале, что последовательность чисел (λ_n) ограничена. Действительно, в силу теоремы 4 из [6] существует такое число $a > 0$, что для всех $n \in N$ $\|f\| \le a$, $\|f_n\| \le a$. Тогда при $|\lambda| > a$ для любого вектора $x \in X$

$$\forall n \in N \quad \|\lambda x - f_n x\| \ge (|\lambda| - a)\|x\|$$

и для любого числа $n \ge n_1$, для любого вектора $x \in X$

$$\|R(\lambda; f_n)x\| \le \frac{1}{|\lambda| - a} \|x\|$$

Поэтому справедлива оценка для всех $|\lambda| > a$

$$\|R(\lambda; f)\| \le \frac{1}{|\lambda| - a} \text{ и } \forall n \ge n_1 \ \|R(\lambda; f_n)\| \le \frac{1}{|\lambda| - a} \qquad (7)$$

Таким образом, если $|\lambda| \ge 2a$, то в силу оценки (7) для всех $n \ge n_1$ $\|R(\lambda; f_n)\| \le \frac{1}{a}$. Поэтому условие (6) может выполниться, если для всех достаточно больших $n \in N$ $\lambda_n \in B_K^1(0,2a)$.

В силу ограниченности последовательности чисел (λ_n) и замкнутости множества M существует такая подпоследовательность (λ_{n_j}) последовательности (λ_n) и существует такое число $\lambda \in M$, что $\lambda = \lim_j \lambda_{n_j}$, и так как $M \subset \rho(f)$, то

$$\lambda_{n_j} I - f_{n_j} \xrightarrow{c.k.a} \lambda I - f \in Isom(X,X).$$

Поэтому в силу теоремы 16 из [6] существует такое число $b > 0$, что для всех $j \in N, j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$\| R(\lambda_{n_j}; f_{n_j}) \| \leq b \quad ,$$

которое противоречит равенству (6).

14. Пусть X -банахово пространство, $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in LC(X,X)$, M -замкнутое подмножество множества $\rho(f)$ и $C_M(X)$ - нормированное векторное пространство всех непрерывных ограниченных (в том смысле, что $\max_{\lambda \in M} \| z(\lambda) \|_X < \infty$) отображений $z : M \longmapsto X$ с нормой

$$\| z \|_{C_M(X)} = \max_{\lambda \in M} \| z(\lambda) \|_X \ .$$

Тогда пространство $C_M(X)$ -банахово. Определим линейное отображение $R_M(f) : X \longmapsto C_M(X)$ следующим образом:

$$\forall x \in X \quad R_M(f)x = R(\lambda; f)\, x \quad .$$

В силу оценки (5) для всех $x \in X$ $\| R_M(f) x \| \leq c \| x \|$, поэтому отображение $R_M(f) \in LC(X, C_M(X))$.

В силу леммы 13 для всех $n \geq n_0$ мы можем аналогичным образом определить линейное отображение $R_M(f_n) : X \longmapsto C_M(X)$:

$$\forall x \in X \qquad R_M(f_n)x = R(\lambda; f_n)\, x \quad .$$

В силу оценки (5) для всех $n \geq n_0$ и для всех $x \in X$ $\| R_M(f_n) x \| \leq c \| x \|$, таким образом последовательность отображений $(R_M(f_n))_{n \geq n_0} \subset LC(X, C_M(X))$. В дальнейшем будем считать, что $n_0 = 1$.

Теорема 15. Пусть X-банахово пространство, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$, M -замкнутое подмножество множества $\rho(f)$. Тогда

$$R_M(f_n) \xrightarrow{c.k.a} R_M(f) \in LC(X, C_M(X)) \quad .$$

Доказательство. Пусть x -произвольно взятый вектор из пространства X. Покажем, что для последовательности отображений $(R_M(f_n)) \subset LC(X, C_M(X))$ и для отображения $R_M(f)$ выполнено условие а) определения 2. Для этого нужно показать, что

$$\lim_n \sup_{\lambda \in M} \| R(\lambda; f_n)x - R(\lambda; f)x \| = 0 .$$

Если это условие не верно, то существует такое число $a > 0$ и такая последовательность чисел $(\lambda_{n_j}) \subset M$, что для некоторой подпоследовательности $(R_M(f_{n_j}))$ последовательности $(R_M(f_n))$ справедливо неравенство:

$$\forall j \in N \quad \| R(\lambda_{n_j}; f_{n_j})x - R(\lambda_{n_j}; f)x \| \geq a . \quad (8)$$

В силу оценки (7) последовательность чисел (λ_{n_j}) ограничена и поэтому для нее существует предельная точка λ, которая в силу замкнутости множества M принадлежит M. Не умаляя общности, можно считать, что $\lambda = \lim_j \lambda_{n_j}$. Тогда в силу теоремы I6 из [6]

$$R(\lambda_{n_j}; f_{n_j}) \xrightarrow{c.k.a} R(\lambda; f) \in LC(X, X)$$

и

$$R(\lambda_{n_j}; f) \xrightarrow{c.k.a} R(\lambda; f) \in LC(X, X)$$

Поэтому

$$R(\lambda_{n_j}; f_{n_j}) - R(\lambda_{n_j}; f) \xrightarrow{c.k.a} 0 \in LC(X, X)$$

и, следовательно, для любого вектора $x \in X$

$$\lim_j [R(\lambda_{n_j}; f_{n_j})x - R(\lambda_{n_j}; f)x] = 0 ,$$

что противоречит оценке (8).

Покажем теперь, что для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(R_M(f_n)x_n - R_M(f)x_n)$ относительно компактна в пространстве $C_M(X)$. В силу полноты пространства $C_M(X)$ нам достаточно показать, что множество векторов $\{R_M(f_n)x_n - R_M(f)x_n\}$ вполне ограничено, т.е. показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ для множества векторов $\{R_M(f_n)x_n - R_M(f)x_n\}$ существует конечная ε-сеть. Пусть для всех $n \in N$ $\|x_n\| \leq b$ и число $b > 1$. Тогда если число $a > 0$ взято из оценки (7) и $|\lambda| \geq (a + \frac{5}{\varepsilon}) b$, то для всех $n \in N$

$$\| R(\lambda; f_n)x_n \| \leq \frac{\varepsilon}{5} , \quad \| R(\lambda, f)x_n \| \leq \frac{\varepsilon}{5} . \quad (9)$$

Рассмотрим компактное множество $F = M \setminus \{\lambda \in K \mid |\lambda| > (a + \frac{5}{\varepsilon}) \cdot b\}$. По аналогии с пространством $C_M(X)$ мы рассмотрим пространство $C_F(X)$ всех непрерывных отображений $z : F \mapsto X$

с нормой:

$$\| z \|_{C_F(X)} = \max_{\lambda \in F} \| z(\lambda) \|$$

По аналогии с отображениями $R_M(f)$ и $R_M(f_n)$ определим линейные непрерывные отображения $R_F(f)$ и $R_F(f_n)$ и покажем, что множество векторов $\{R_F(f_n)x_n - R_F(f)x_n\}$ — вполне ограничено в пространстве $C_F(X)$. В силу теоремы Арцела-Асколи для этого необходимо и достаточно, чтобы семейство отображений $\{R_F(f_n)x_n - R_F(f)x_n\}$ было равностепенно непрерывно и для любого числа $\lambda \in F$ множество векторов $\{R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n\}$ было относительно компактным в пространстве X. Справедливость последнего условия в силу ограниченности последовательности векторов (x_n) в пространстве X и того, что для всех $\lambda \in F$ $R(\lambda; f_n) \xrightarrow{c.k.} R(\lambda, f)$ получаем непосредственно из определения 2. Равностепенная непрерывность семейства отображений $\{R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n\}$ следует в силу тождеств Гильберта для отображений $R(\cdot; f_n)$ и $R(\cdot; f)$:

$$R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n - R(\lambda'; f_n)x_n + R(\lambda'; f)x_n =$$
$$(\lambda' - \lambda)[R(\lambda; f_n)R(\lambda'; f_n)x_n + R(\lambda; f)R(\lambda'; f)x_n],$$

из ограниченности последовательности векторов (x_n) и оценки (5).

Таким образом существует такое конечное множество $\{y_j\}_{1 \le j \le j_0} \subset C_F(X)$, что для любого числа $n \in N$ существует такое число $j(n): 1 \le j(n) \le j_0$, что

$$\| R_F(f_n)x_n - R_F(f)x_n - y_{j(n)} \|_{C_F(X)} < \frac{\varepsilon}{5},$$

поэтому в силу определения нормы в пространстве $C_F(X)$

$$\max_{\lambda \in F} \| R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda, f)x_n - y_{j(n)}(\lambda) \|_X < \frac{\varepsilon}{5} \qquad (10)$$

Продолжим непрерывные отображения $y_j: F \longmapsto X$ на все множество M следующим образом: $\forall \lambda \in F$ $\hat{y}_j(\lambda) = y_j(\lambda)$ и $\forall \lambda \in M \setminus F$ $\hat{y}_j(\lambda) = y_j(\lambda')$, где $\lambda' = \frac{\lambda}{\|\lambda\|}(a + \frac{5}{\varepsilon})b$. Тогда отображения $\hat{y}_j: M \longmapsto X$ непрерывны и ограничены, следовательно, $1 \le j \le j_0$ $\hat{y}_j \in C_M(X)$. Покажем, что множество векторов $\{\hat{y}_j\}_{1 \le j \le j_0}$ образует конечную ε-сеть для множества векторов $\{R_M(f_n)x_n - R_M(f)x_n\}$, т.е. для любого числа $n \in N$ существует такое число $j(n): 1 \le j(n) \le j_0$, что для всех $\lambda \in M$ $\| R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n - \hat{y}_{j(n)}(\lambda) \|_X < \varepsilon$.
В силу (10) для любого числа $n \in N$ существует такое число $j(n): 1 \le j(n) \le j_0$, что для всех $\lambda \in F$

$$\| R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n - y_{j(n)}(\lambda) \| < \frac{\varepsilon}{5} .$$

Покажем, что для всех $\lambda \in M$

$$\| R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n - \hat{y}_{j(n)}(\lambda) \| < \varepsilon .$$

Действительно, если $\lambda \in F$, то нужное получим в силу равенства $\hat{y}_{j(n)}(\lambda) = y_{j(n)}(\lambda)$. Если $\lambda \in M \setminus F$, то в силу оценок (9) и (10) и определения $\hat{y}_{j(n)}(\lambda)$ получаем:

$$\| R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f)x_n - \hat{y}_{j(n)}(\lambda) \|_X \le \| R(\lambda; f_n)x_n \| + \| R(\lambda; f)x_n \| + \| R(\lambda'; f_n)x_n \| + \| R(\lambda'; f)x_n \| + \| R(\lambda'; f_n) - R(\lambda'; f) - y_{j(n)}(\lambda') \| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon .$$

16. Пусть X -банахово комплексное пространство, отображение $f \in LC(X, X)$ и λ_0 -изолированное собственное число отображения f. Допустим, что число $\delta > 0$ ($|\delta| < |\lambda|$) достаточно мало, что в круге $B'_K(\lambda_0; \delta)$ нет других точек $\lambda \in \sigma(f)$, кроме λ_0. Тогда линейное непрерывное отображение $g : X \longmapsto X$, определенное следующим образом:

$$g = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f)\, d\lambda \qquad (11)$$

является проектором. В §149 (см. [3] стр. 435) показано, что $gX = \{x \in X \mid \lim_n \|(\lambda_0 I - f)^n x\|^{\frac{1}{n}} = 0\}$. Таким образом, если при каком-нибудь $n_0 \in N$ для некоторго вектора $x \in X$ $(\lambda_0 I - f)^n x = 0$, то $x \in gX$. Поэтому корневое подпространство, соответствующее собственному числу λ_0 принадлежит gX.

Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$. Тогда в силу компактности сферы $S_K(\lambda_0; \delta)$ из теоремы 4 существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \ge n_0$ $S_K(\lambda_0; \delta) \subset \rho(f_n)$. Поэтому для любого $n \ge n_0$ мы можем определить отображение $g_n : X \longmapsto X$ следующим образом:

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f_n)\, d\lambda . \qquad (12)$$

Отметим, что подпространство $g_n X$ содержит все корневые подпространства отображения $f_n \in LC(X, X)$, которые соответствуют лежащим в круге $B'_K(\lambda_0; \delta)$ собственным числам отображения f_n. Если $B'_K(\lambda_0; \delta) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, то $g_n = 0$

17. Теорема. Пусть X -комплексное банахово пространство, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \longmapsto X$. Допустим, что $\lambda_0 \neq 0$ -изолированное собственное число отображения f, т.е. существует такой круг $B^1_K(\lambda_0; \delta)$, где $0 < \delta < |\lambda_0|$, что $B^1_K(\lambda_0; \delta) \cap \sigma(f) = \{\lambda_0\}$. Тогда последовательность линейных непрерывных отображений $g_n : X \longmapsto X$, определенных равенством (12), секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $g : X \longmapsto X$, определенное равенством (11).

Справедливость этой теоремы следует непосредственно из результата теоремы 16.

18. Следствие. Пусть X -комплексное банахово пространство, $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in LC(X, X)$ и $\lambda_0 \neq 0$ -собственное число отображения f, единственное в некотором круге $B^1_K(\lambda_0; \delta)$. Тогда для всех достаточно больших $n \in N$ пересечение $\sigma(f_n)$ с $B^1_K(\lambda; \delta)$ не пусто и поэтому существует такая последовательность чисел $\lambda_n \in B^1_K(\lambda; \delta) \cap \sigma(f_n)$, что $\lambda_0 = \lim\limits_n \lambda_n$. Если подпространство gX конечномерное, то для всех достаточно больших $n \in N$ пересечение $\sigma(f_n)$ с $B^1_K(\lambda_0; \delta)$ содержит лишь конечное число точек, и каждая из этих точек является собственным значением отображения f_n конечной корневой кратности. Если $\dim gX = 1$, то в $B^1_K(\lambda_0; \delta)$ для всех достаточно больших $n \in N$ существует единственное собственное значение λ_n отображения f_n единичной кратности и $\lambda = \lim\limits_n \lambda_n$.

Доказательство. Если существует такое число δ : $0 < \delta < |\lambda_0|$ и такая подпоследовательность (f_{n_j}) последовательности (f_n), что для всех $j \in N$ $\sigma(f_{n_j}) \cap B^1_K(\lambda_0; \delta) = \varnothing$, то проектор $g_n \in LC(X, X)$, определенный равенством (12), будет нулевым. Так как в силу теоремы 17 $g_{n_j} \xrightarrow{c.k.a} g \in LC(X, X)$, то $g = 0 \in LC(X, X)$, что противоречит условию следствия.

В силу теоремы 17 и теоремы 26 из [5], если $\dim gX < +\infty$, то для всех достаточно больших $n \in N$ $\dim g_n X \leq \dim gX$. Поэтому в силу определения проекторов g_n собственные числа λ_n отображений f_n для всех достаточно больших $n \in N$ могут иметь лишь конечную корневую кратность.

Если $\dim gX = 1$, то в силу неравенства $\dim g_n X \leq \dim gX$ и того, что для всех достаточно больших $n \in N$ $g_n X \neq \{0\}$, получаем, что $\dim g_n X = 1$, поэтому кратность единственного собственного числа λ_n в круге $B^i_K(\cdot, \varepsilon)$ равна 1. .

19. Определение. Пусть X и Y -банаховы пространства, Z -векторное подпространство пространства X. Линейное отображение $f : Z \longmapsto Y$ называется замкнутым если его график является закнутым векторным подпространством банахова пространства $X \times Y$.

В этой ситуации для краткости будем писать:

$$f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, Y) \quad .$$

20. Определение. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X и $f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, X)$. Число $\lambda \in K$ называется регулярным числом линейного замкнутого отображения f если отображение $\lambda I - f$, где I -тождественное отображение в Z, является биекцией и $(\lambda I - f)^{-1} \in L\mathcal{C}(X, Z)$. Как и на случай линейных непрерывных отображений, мы можем ввести понятия спектра и резольвенты линейного замкнутого отображения. Отметим, что в этой ситуации спектр может быть пустым множеством, а может совпадать со всем полем K.

21. Теорема. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X и последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$. Тогда для любого компактного множества $F \subset \rho(f)$ существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset \rho(f_n)$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы 21 не верно. Тогда в силу компактности множества F существует такая последовательность чисел $(\lambda_{n_j}) \subset F$ и существует такое число $\lambda \in F$, что $\lambda = \lim \lambda_{n_j}$ и для всех $j \in N$ $\lambda_{n_j} \in \sigma(f_{n_j})$. С другой стороны, так как $\lambda \in \rho(f)$ и

$$\lambda_{n_j} I - f_{n_j} \xrightarrow{\text{с.к.с.}} \lambda I - f \in L\mathcal{C}\ell(Z \subset X, X) \quad .$$

то в силу теоремы 30 из [6] существует такое число $j_0 \in N$, что для всех $j \geq j_0$ отображения $\lambda_{n_j} I - f_{n_j}$ являются биекциями и $(\lambda_{n_j} I - f_{n_j})^{-1} \in LC(X, Z)$. Таким образом мы получили противоречие: для всех $j \geq j_0$ $\rho(f_{n_j}) \cap \sigma(f_{n_j}) \neq \emptyset$.

22. Замечание. Теорема 21 является аналогом теоремы 4 на случай линейного замкнутого отображения, при более жёстких предположениях: вместо замкнутости множества F мы предполагаем его компактность, т.е. дополнительно требуем ограниченность множества F. Отметим, что без требования ограниченности множества F теорема 21, вообще говоря, не верна. Действительно, пусть $X = \ell_2$, $Z = \{(x(n)) \in \ell_2 \mid \sum_n |n x(n)|^2 < \infty\}$. Определим линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$ следующим образом:

$$\forall m \in N \qquad f e_m = m e_m \quad ,$$

где $e_m = (\delta_{m_j})_{j \in N}$ - символ Кронекера. Пусть для любого $n \in N$ линейное замкнутое отображение $f_n : Z \longmapsto X$ определено следующим образом:

$$f_n e_m = n e_m, \; m < n \quad \text{и} \quad f_n e_m = (m + \tfrac{1}{2m}) e_m, \; m \geq n .$$

Тогда $f_n \xrightarrow{c.k.a} f \in L(Z, X)$ множество $F = \{\lambda \in K \mid \lambda = m + \frac{1}{2m}\}$ является замкнутым и $F \subset \rho(f)$ но в то же время для всех $n \in N$ $F \cap \sigma(f_n) \neq \emptyset$.

23. Теорема. Пусть X - банахово пространство, Z - всюду плотное векторное подпространство пространства X, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$ и пусть для всех $n \in N$ $f_n \circ f = f \circ f_n$, тогда $\lim\limits_{n} \chi[\sigma(f); \sigma(f_n)] = 0$.

Доказательство. Определим последовательность отображений $g_n : Z \longmapsto X$ следующим образом:

$$\forall n \in N \qquad g_n \stackrel{def}{=} f_n - f \quad .$$

Тогда $g_n \xrightarrow{c.k.a} 0 \in LC(Z, X)$ и поэтому существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $g_n \in LC(Z, X)$. Пусть h_n - единственное линейное непрерывное продолжение отображения g_n на X. Тогда в силу теоремы 10 из [6] $h_n \xrightarrow{c.k.a} 0 \in LC(X, X)$, а в силу леммы 5 $\lim\limits_{n} \operatorname{spr} h_n = 0$. Поэтому из неравенства

$spr\, g_n \leq spr\, h_n$ получаем, что $\lim_n spr\, g_n = 0$. Так как $g_n \circ f = f \circ g_n$ и $f \in LCl(Z \subset X, X)$, $g_n \in LC(Z, X)$, то выполненые все предпосылки теоремы 3.6. ([2] стр.265). Следовательно, для всех $n \in N$ $\chi[\sigma(f), \sigma(f + g_n)] \leq spr\, g_n$, поэтому в силу равенств $f_n = f + g_n$ и $\lim_n spr\, g_n = 0$ получаем, что $\lim_n \chi[\sigma(f), \sigma(f_n)] = 0$.

24. Теорема. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X и последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$. Тогда число $\lambda \in \rho(f)$ тогда и только тогда, когда для всех достаточно больших $n \in N$ $\lambda \in \rho(f_n)$ и существует такое число $c > 0$, что для всех достаточно больших $n \in N$ $\|(\lambda I - f_n)^{-1}\| \leq c$.

Предлагаемая теорема является частным случаем теоремы 31 из [6].

25. Лемма. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$ и F -компактное подмножество множества $\rho(f)$. Тогда существует такое число $n_0 \in N$ и существует такое число $c > 0$, что для всех $n \geq n_0$ $F \subset \rho(f_n)$ и

$$\sup_{n \geq n_0} \sup_{\lambda \in F} \|R(\lambda; f_n)\| \leq c \qquad (13)$$

Доказательство. Схема доказательства этой леммы аналогична схеме доказательства подобного утверждения на случай линейных отображений в лемме 13, нужно только в соответствующих местах вместо ссылок на теоремы 4 и 16 из [6] использовать ссылки на теоремы 21 и 30 из [6] соответственно.

26. Теорема. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n : Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f : Z \longmapsto X$, F -компактное подмножество множества $\rho(f)$.

Тогда

$$R_F(f_n) \xrightarrow{c.\kappa.a} R_F(f) \in L\ell(Z, C_F(X)),$$

где отображения $R_F(f_n)$ и $R_F(f)$ определены по аналогии с отображениями $R_M(f_n)$ и $R_M(f)$ в I4.

Доказательство этой теоремы опирается на результаты теоремы 2I и теоремы 30 из [6], а так же на теорему Арцела-Асколи и аналогично доказательству подобного утверждения на случай линейных непрерывных отображений в теореме I5.

27. Пусть X -банахово пространство, Z -векторное подпространство пространства X, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f: Z \longmapsto X$ и $\lambda_0 \neq 0$ -изолированное собственное значение отображения f. Тогда можно условиями (II)и(I2) определить проекторы $g \in L\ell(X, Z)$ и $g_n \in L\ell(X, Z)$. Используя ту же схему доказательства, можно показать справедливость теоремы 28, являющейся аналогом теоремы I7, доказанной на случай линейных непрерывных отображений.

28. Теорема. Пусть X -банахово пространство над полем комплексных чисел, Z -векторное подпространство пространства X, последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f: Z \longmapsto X$. Допустим, что $\lambda_0 \neq 0$ -изолированное собственное число отображения f, т.е. существует такой круг $B'_K(\lambda_0, \delta)$, где $0 < \delta < |\lambda_0|$, что $B'_K(\lambda_0, \delta) \cap \mathcal{G}(f) = \{\lambda\}$. Тогда последовательность линейных непрерывных отображений $g_n: X \longmapsto Z$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $g: X \longmapsto Z$.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю И.В.Карклиньу за внимание к данной работе.

Литература

1.Данфорд Н.,Шварц Дж.Т.Линейные операторы.Общая теория.М., ИЛ, 1962.

2.Като Т.Теория возмущений линейных операторов.М, "Мир",1972.

3.Рисс Ф.,Секкефальви-Надь Б.Лекции по функциональному анализу.М., ИЛ, 1954.

4.Вайникко Г.М.Компактная аппроксимация операторов и приближённое решение уравнений.Тартуский государственный университет.Тарту.1970.

5.Карклиньш И.В.,Левченков В.С.Устойчивость индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.Латвийский математический ежегодник, 17 (в печати).

6.Лабеев В.И.О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - Настоящий сборник, с.39-58.

Поступила 22 января 1974 года.

УДК 513.88.

УСТОЙЧИВОСТЬ СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ ПРЕДКОМПАКТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИИ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО ПРЕДКОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.И.Лабеев

Введение. Понятие секвенциально предкомпактной аппроксимации является обобщением понятия секвенциально компактной аппроксимации. Последнее ввёл и исследовал Г.М.Вайникко (см., например, [2]).

Основными результатами статьи являются теоремы 8 и II об устойчивости секвенциальной предкомпактности отображений при секвенциально предкомпактной и секвенциально компактной аппроксимациях теоремы I5 и I6 об устойчивости компактности резольвенты при секвенциально компактной аппроксимации и теорема I7 о сохранении свойств проектора при секвенциально компактной аппроксимации.

1. Определение. Будем говорить, что последовательность векторов (y_n) в отделимом топологическом векторном пространстве Y предкомпактна, если из любой её подпоследовательности (y_{n_j}) можно выделить подпоследовательность Коши.

2. В работе [3] рассматриваются свойства относительно компактных последовательностей. Отметим, что если пространство Y секвенциально полно, то понятия предкомпактной и относительно компактной последовательностей совпадают.

3. Не трудно убедиться в справедливости следующих свойств предкомпактных последовательностей:

а) любая подпоследовательность предкомпактной последовательности в свою очередь сама является предкомпактной последовательностью;

б) любая предкомпактная последовательность векторов является ограниченной;

в) если некоторая последовательность векторов $(y_n) \subset Y$ является предкомпактной, то множество её членов $\{y \in Y \mid y = y_n, n \in N\}$ является предкомпактным множеством; обратно, пусть Y - метризуемое пространство, тогда из предкомпактности членов последовательности векторов следует её предкомпактность.

4. Определение. Пусть X и Y -отделимые топологические векторные пространства. Отображение $f: X \mapsto Y$ называется секвенциально предкомпактным, если для любого ограниченного множества $\{x_n\} \subset X$ последовательность векторов $(f x_n)$ является предкомпактной в пространстве Y.

5. Определение. Пусть X и Y -отделимые топологические векторные пространства. Отображение $f: X \longmapsto Y$ называется предкомпактным, если для любого вектора $x \in X$ существует такая его окрестность $\mathcal{U}_x$, что $f(\mathcal{U}_x)$ -предкомпактное множество в пространстве Y.

Отметим, что если $f: X \mapsto Y$ -линейное отображение, то из предкомпактности следует непрерывность отображения f.

Действительно, в силу предкомпактности отображения f существует такая окрестность нуля $\mathcal{U}$ пространства X, что $f(\mathcal{U})$ -предкомпактное множество в пространстве Y и, следовательно, множество $f(\mathcal{U})$ ограничено в Y. Поэтому для любой окрестности нуля V пространства Y существует такое число $\lambda \in K$, что $\lambda f(\mathcal{U}) \subset V$. Отсюда и из линейности отображения f получаем нужное включение: $f(\lambda \mathcal{U}) \subset Y$.

Если Y -метризуемое пространство, то из секвенциальной предкомпактности отображения f и из его линейности следует непрерывность отображения f.

Если Y -метризуемое пространство, то из предкомпактности отображения f следует его секвенциальная предкомпактность.

Действительно, если отображение f не является секвенциально предкомпактным, то существует такая ограниченная последовательность векторов $(x_n)\subset X$, что последовательность векторов (fx_n) не является предкомпактной в пространстве Y. В силу 3 в) множество членов последовательности (fx_n) не является предкомпактным в Y. Из ограниченности последовательности (x_n) для любой окрестности нуля $\mathcal{U}$ пространства X существует такое число $\lambda\in K\setminus\{0\}$, что $\lambda(x_n)\subset\mathcal{U}$, откуда $(\lambda x_n)\subset\mathcal{U}$ и поэтому $f\mathcal{U}\supset (f(\lambda x_n))=(\lambda f(x_n))$. Так как $(f(x_n))$ не является предкомпактным множеством в Y, то и множество $f\mathcal{U}$ не будет предкомпактным, что противоречит предкомпактности отображения f.

6. Определение. Пусть X и Y - отделимые топологические векторные пространства. Будем говорить, что последовательность отображений $f_n: X\longmapsto Y$ секвенциально предкомпактно аппроксимирует отображение $f: X\longmapsto Y$, если для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n)\subset X$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ предкомпактна в пространстве Y.

В этой ситуации для краткости будем писать, что

$$f_n \xrightarrow{c.n.a} f .$$

7. Отметим следующие свойства секвенциально предкомпактной аппроксимации:

а) если $f_n\xrightarrow{c.n.a} f$ и $g\xleftarrow{c.n.a} f_n$, то не обязательно $f=g$, но $f-g$ - секвенциально предкомпактное отображение;

б) если $f_n\xrightarrow{c.n.a} f$ и g - секвенциально предкомпактное отображение, то $f_n\xrightarrow{c.n.a} f+g$;

в) если $f_n\xrightarrow{c.n.a} f$ и $g_n\xrightarrow{c.n.a} g$, то для любых чисел λ и γ из K $\lambda f_n+\gamma g_n\xrightarrow{c.n.a}\lambda f+\gamma g$.

Действительно, справедливость свойства а) следует из того, что для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(fx_n-gx_n)=(fx_n-f_nx_n)+(f_nx_n-gx_n)$ как сумма двух предкомпактных последовательностей сама предкомпактна в пространстве Y. Далее, если отображение g - секвенциально предкомпактно и $f_n\xrightarrow{c.n.a} f$, то для любой ограниченной последовательности векторов (x_n)

из X последовательность векторов
$(f_n x_n - f x_n - g x_n) = (f_n x_n - f x_n) + (-g x_n)$
предкомпактна, как сумма предкомпактных последовательностей. Таким образом показана справедливость свойства б).

Справедливость свойства в) следует из того, что для любой ограниченной последовательности векторов $(x_i) \subset X$ последовательность векторов $(\lambda f_n x_n + \gamma g_n x_n - \lambda f x_n - \gamma g x_n) = \lambda (f_n x_n - f x_n) + \gamma (g_n x_n - g x_n)$ предкомпактна, как сумма предкомпактных последовательностей.

8. Теорема. Пусть X и Y отделимые топологические векторные пространства и последовательность секвенциально предкомпактных отображений $f_n : X \longmapsto Y$ секвенциально предкомпактно аппроксимирует отображение $f : X \longmapsto Y$. Тогда отображение f само является секвенциально предкомпактным.

Доказательство. Предположим, что отображение f не является секвенциально предкомпактным. Тогда существует такая ограниченная последовательность векторов (x_n) из пространства X, что последовательность векторов $(f x_n)$ не является предкомпактной в пространстве Y, т.е. для некоторой уравновешанной окрестности нуля $\mathcal{U}$ пространства Y и для любых двух различных натуральных чисел m и n справедливо соотношение:

$$f x_n - f x_m \notin \mathcal{U}. \qquad (1)$$

Методом индукции мы можем построить последовательность $(\mathcal{U}_n)$ уравновешанных окрестностей нуля в пространстве Y, удовлетворяющую следующим включениям:

$$\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}, \forall n \in N \;\; \mathcal{U}_{n+1} + \mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n. \qquad (2)$$

Так как отображение f_1 секвенциально предкомпактно, то существует такая подпоследовательность (x_n^1) последовательности (x_n), что

$$\forall n, m \in N \quad f_1 x_n^1 - f_1 x_m^1 \in \mathcal{U}_1.$$

Далее, предположим, что для некоторого числа $k \in N$ построена такая последовательность векторов $(x_n^k)_{n \in N}$, что (x_n^k) является подпоследовательностью последовательти $(x_n^{k-1})_{n\in N}$ и

$$\forall n,m\in N \quad f_k x_n^k - f_k x_m^k \in \mathcal{U}_k. \qquad (3)$$

Так как отображение f_{k+1} - секвенциально предкомпактно, то существует такая подпоследовательность $(x_n^{k+1})_{n\in N}$ последовательности $(x_n^k)_{n\in N}$, что

$$\forall n,m\in N \quad f_{k+1} x_n^{k+1} - f_{k+1} x_m^{k+1} \in \mathcal{U}_{k+1}.$$

Построим теперь диагональную последовательность векторов (z_n) из пространства X :

$$\forall n\in N \quad z_n \overset{def}{=} x_n^n.$$

Последовательность векторов (z_n) является подпоследовательностью последовательности (x_n) и, следовательно, ограничена в пространстве X. Далее, в силу соотношения (1) для любых различных натуральных чисел n и m

$$f z_n - f z_m \notin \mathcal{U}, \qquad (4)$$

а в силу соотношения (3)

$$\forall k,p\in N \quad f_k z_k - f_k z_{k+p} \in \mathcal{U}_k. \qquad (5)$$

Введём следующее обозначение:

$$\forall n\in N \quad g_n \overset{def}{=} f_n - f.$$

Так как последовательность векторов $(z_{n+1})_{n\in N}$ ограничена в пространстве X, то в силу определения 6 последовательность векторов $(g_n z_{n+1})_{n\in N}$ предкомпактна в пространстве Y. Поэтому существует такая подпоследовательность векторов $(g_n^1 z_{n+1}^1)_{n\in N}$ последовательности $(g_n z_{n+1})_{n\in N}$, что $g_1^1 \neq g_1$ и

$$\forall p\in N \quad g_1^1 z_2^1 - g_p^1 z_{p+1}^1 \in \mathcal{U}_2.$$

Продолжим этот процесс методом индукции. Так как для любого натурального числа $\ell \geqslant 2$ последовательность векторов $(z_{n+\ell})_{n\in N}$ ограничена, то в силу определения 6 последовательность векторов $(g_n z_{n+\ell})_{n\in N}$ предкомпактна в пространстве Y. Следовательно, существует такая подпоследовательность $(g_n^\ell z_{\ell+n}^\ell)_{n\in N}$ последовательности $(g_n^{\ell-1} z_{n+\ell}^{\ell-1})_{n\in N}$, что $g_1^\ell \neq g_1^{\ell-1}$ и

$$\forall p\in N \quad g_1^\ell z_{1+\ell}^\ell - g_p^\ell z_{p+\ell}^\ell \in \mathcal{U}_{\ell+1}. \qquad (6)$$

Таким образом для любого числа $\ell\in N$ мы построили последовательность отображений $(g_n^\ell)_{n\in N}$, удовлетворяющую следующим свойствам:

а) $\forall e\in N$ $(g_n^e)_{n\in N}$ является подпоследовательностью последовательности $(g_n^{e-1})_{n\in N}$, $(g_n^1)_{n\in N}$ – подпоследовательность последовательности (g_n) и, следовательно, $\forall e\in N$ $(g_n^e)_{n\in N}$ – подпоследовательность последовательности (g_n);

б) $\forall e\in N$ $g_1^e \neq g_1^{e+1}$.

Поставим теперь в соответствие каждому числу $e\in N$ такое число $n_e\in N$, которое как индекс имеет член g_1^e в последовательности $(g_n)_{n\in N}$. В силу а) g_1^{e+1} является членом последовательности $(g_n^e)_{n\in N}$, которая в свою очередь является подпоследовательностью последовательности (g_n). Так как g_1^e – первый член последовательности $(g_n^e)_{n\in N}$, то $n_e \leq n_{e+1}$. В силу б) мы получим, что $n_e \neq n_{e+1}$ и, значит, $n_e < n_{e+1}$. Таким образом $(n_e)_{e\in N}$ является строго возрастающей последовательностью натуральных чисел. Отметим, что в силу соотношения (6) и того, что для любых чисел $p\in N$ g_1^{e+p} является некоторым членом последовательности $(g_n^e)_{n\in N}$ справедливо соотношение:

$$\forall p\in N \quad g_{n_e} z_{n_e+e} - g_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e} \in U_{e+p}. \quad (7)$$

Последовательность отображений $(f_{n_e})_{e\in N}$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение f, последовательность векторов $(z_{n_e+e})_{e\in N}$ ограничена в пространстве X и поэтому последовательность векторов

$$(f_{n_e} z_{n_e+e} - f z_{n_e+e})_{e\in N} = (g_{n_e} z_{n_e+e})_{e\in N}$$

предкомпактна в пространстве Y, следовательно, существует такое число $e \geq 2$ и существует такое число $p\in N$, что

$$g_{n_e} z_{n_e+e} - g_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e+p} \in U_1. \quad (8)$$

Из соотношений (7) и (8) получаем, что

$$g_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e} - g_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e+p} \in U_1 - U_{e+1}.$$

Поэтому в силу определения последовательности отображений (g_n) получаем, что $f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e} - f z_{n_{e+p}+e} - f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e+p} + f z_{n_{e+p}+e+p} \in U_1 - U_{e+1}$

Из соотношения (5)

$$f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e} - f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}} \in U_{n_{e+p}}$$

и

$$f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}} - f_{n_{e+p}} z_{n_{e+p}+e+p} \in \mathcal{U}_{e+p}.$$

Следовательно,

$$f z_{n_{e+p}+e} - f z_{n_{e+p}+e+p} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_{e+1} + \mathcal{U}_{n_{e+p}} + \mathcal{U}_{n_{e+p}} \qquad (9)$$

Учитывая соотношение (2) и неравенство $n_e \geq e \geq 2$, получим, что

$$\mathcal{U}_{e+1} \subset \mathcal{U}_3 \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_{n_{e+p}} \subset \mathcal{U}_3$$

Поэтому из соотношения (9) следует, что

$$f z_{n_{e+p}+e} - f z_{n_{e+p}+e+p} \in \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_3,$$

значит,

$$f z_{n_{e+p}+e} - f z_{n_{e+p}+e+p} \in \mathcal{U}.$$

Но последнее противоречит соотношению (4). Таким образом отображение f является секвенциально предкомпактным.

Следствие. Пусть X -нормируемое, Y -метризуемое пространства и последовательность линейных предкомпактных отображений $f_n : X \longmapsto Y$ секвенциально предкомпактно аппроксимирует отображение $f : X \longmapsto Y$. Тогда отображение f само предкомпактно.

Доказательство. В силу 5 для любого числа $n \in N$ отображение f_n является секвенциально предкомпактным и поэтому в силу теоремы 8 отображение f также является секвенциально предкомпактным. В силу нормируемости пространства X существует ограниченная окрестность нуля $\mathcal{U}$ в X. Покажем, что $f\mathcal{U}$ - предкомпактное множество в Y.

Если это не так, то существует такая окрестность нуля V в пространстве Y и такая последовательность векторов (y_n) из $f\mathcal{U}$, что

$$\forall n, m \in N,\ n \neq m \qquad y_n - y_m \notin V. \qquad (10)$$

Так как $(y_n) \subset f\mathcal{U}$, то

$$\forall n \in N \quad \exists x_n \in \mathcal{U} \qquad \text{, что } f x_n = y_n.$$

В силу ограниченности $\mathcal{U}$ последовательность векторов (x_n) сама является ограниченной и из определения секвенциальной предкомпактности последовательности векторов $(y_n) = (f x_n)$ является предкомпактной, что противоречит (10). Аналогично можно показать, что для любого вектора $x \in X$ множество $f(x + \mathcal{U})$ - предкомпактно в пространстве Y. Таким образом, отображение f -предкомпактно.

10. В статье [3] рассматривается понятие секвенциально компактной аппроксимации.

Пусть X и Y - отделимые топологические векторные пространства. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n : X \mapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \mapsto Y$, если:

а) для любого вектора $x \in X$ $fx = \lim_n x_n$ в Y

и

б) для любой ограниченной последовательности векторов (x_n) из пространства X последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в пространстве Y.

В силу этого определения, как следствие теоремы 8, получим следующую теорему:

11. Теорема. Пусть X и Y - отделимые топологические векторные пространства и последовательность линейных секвенциально предкомпактных отображений $f_n : X \mapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f : X \mapsto Y$. Тогда отображение f само секвенциально предкомпактное.

12. Следствие. Пусть X - нормируемое и Y - метризуемое пространства. Последовательность линейных предкомпактных отображений $f_n : X \mapsto Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейные отображений $f : X \mapsto Y$. Тогда отображение f само предкомпактно. Если Y - пространство Фреше, то отображение f - компактно.

13. В монографии [1] рассматриваются отображения с компактной резольвентой, и для этого класса отображений доказана следующая теорема (см. теорему 6.29 стр. 237):

Если Z - векторное подпространство банахова пространства X и $f : Z \mapsto X$ - линейное замкнутое отображение (т.е. график отображения f замкнут в банаховом пространстве $X \times X$), и если для некоторого регулярного числа $\lambda_0 \in K$ отображения f отображение $R(\lambda_0; f) \stackrel{def}{=} (\lambda_0 I - f)^{-1}$ - компактно, то отображение $R(\lambda; f) = (\lambda I - f)^{-1}$ компактно для любого регулярного числа λ отображения f и спектр отображения f состоит из изолированных собственных значений, имеющих конечную корневую кратность.

14. Замечание. Если линейное отображение $f: Z \longmapsto X$, где Z - векторное подпространство банахово пространства X ограничено и для некоторого регулярного числа λ_0 отображения f отображение $R(\lambda_0; f): X \longmapsto X$ - компактно, то пространство X является конечномерным и поэтому следующая теорема не тривиальна и представляет интерес лишь для линейных замкнутых отображений.

15. Теорема. Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства X и последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f: Z \longmapsto X$. Допустим, что для любого числа $n \in N$ отображение f_n имеет компактную резольвенту (т.е. для любого регулярного числа λ отображения f_n отображение $R(\lambda; f_n)$ компактно) Тогда отображение f имеет компактную резольвенту и, следовательно, его спектр состоит их изолированных собственных чисел конечной корневой кратности.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in K$ - произвольное регулярное число отображения f. Тогда в силу теоремы 30 из [4] для всех достаточно больших $n \in N$ λ_0 является регулярным числом отображения f_n и последовательность линейных отображений $R(\lambda_0; f_n): X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $R(\lambda_0; f): X \longmapsto X$. В силу компактности отображения $R(\lambda_0; f_n)$ и в силу следствия 12 отображений $R(\lambda_0; f): X \longmapsto X$ является компактным и поэтому для полного доказательства теоремы нам осталось воспользоваться результатом теоремы 13.

16. Теорема. Пусть Z - векторное подпространство банахова пространства X и последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: Z \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f: Z \longmapsto X$

с компактной резольвентой. Тогда существует такое число $n_0 \in N$ что для всех $n \geqslant n_0$ отображение f_n имеет компактную резольвенту.

Доказательство. Пусть λ - произвольное регулярное число отображения f, тогда в силу 13 отображение $R(\lambda; f): X \longmapsto X$ компактно, а в силу теоремы 30 из [4]

$$\exists n_1 \in N \quad \forall n \geqslant n_1 \quad \lambda \in \rho(f_n).$$

Пусть теперь (x_n) - произвольная ограниченная последовательность векторов из пространства X. Из компактности отображения $R(\lambda; f)$ существует такая подпоследовательность (x_{n_j}) последовательности (x_n) и такой вектор $x \in X$, что

$$\lim R(\lambda; f) x_{n_j} = x. \qquad (11)$$

Так как $f_{n_j} - f \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0: Z \longmapsto X$, то в силу теоремы 5 из из равенства (11) получаем

$$\lim (f_{n_j} - f) \circ R(\lambda; f) x_{n_j} = 0.$$

Отсюда в силу произвольности ограниченной последовательности векторов (x_n) из X справедливо следующее равенство

$$\lim_n \| (f - f_n) \circ R(\lambda; f) \| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_n \| (\lambda I - f_n - \lambda I + f) \circ R(\lambda; f) \| = 0. \qquad (12)$$

В силу равенства (12) существует такое число $n_0 \in N$. $(n_0 \geqslant n_1)$ что для всех $n \geqslant n_0$

$$\| (\lambda I - f_n - \lambda I + f) \circ R(\lambda; f) \| < 1.$$

Положим

$$R_n \stackrel{def}{=} (\lambda I - f_n - \lambda I + f) \circ R(\lambda; f).$$

Тогда из полноты пространства X отображение

$$I + R_n : X \longmapsto X$$

является изоморфизмом для всех $n \geqslant n_0$. Так как $R(\lambda; f) \circ (I + R_n)^{-1} = R(\lambda; f) \circ [I + (\lambda I - f_n - \lambda I + f) \circ R(\lambda; f)]^{-1} = R(\lambda; f) \circ [I + (\lambda I - f_n) \circ R(\lambda; f) - (\lambda I - f) \circ R(\lambda; f)]^{-1} = R(\lambda; f) \circ [I + (\lambda I - f_n) \circ R(\lambda; f) - I]^{-1} = R(\lambda; f) \circ (\lambda I - f) \circ R(\lambda; f_n)$.

Поэтому

$$R(\lambda; f_n) = R(\lambda; f) \circ (I + R_n)^{-1}$$

и отображение $R(\lambda; f)$ является компактным, а отображение $(I + R_n)^{-1}: X \longmapsto X$ - непрерывным. Значит, для всех $n \geqslant n_0$

отображение $R(\lambda; f_n)$ - компактно.

17. Теорема. Пусть X - нормированное пространство и последовательность линейных непрерывных проекторов $p_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $p : X \longmapsto X$. Тогда

а) отображение p само является проектором;

б) если существует такая подпоследовательность проекторов (p_{n_j}), что для всех $j \in N$ $\dim p_{n_j} X < +\infty$, то $\dim pX < +\infty$;

в) если $\dim pX < +\infty$, то существует такое число $n_0 \in N$ что для всех $n \geq n_0$

$$\dim p_n X = \dim pX < +\infty .$$

Доказательство. В силу следствия 9 из [4] отображение p непрерывно и поэтому требование непрерывности в формулировке теоремы не является существенным. Так как из $p_n \xrightarrow{с.к.а.} p$ в силу предложения 6 из [4] следует, что $p_n^2 \xrightarrow{с.к.а.} p^2 : X \longmapsto X$, то в силу равенства

$$\forall n \in N \qquad p_n^2 = p_n ,$$

получаем, что

$$\forall x \in X \quad px = \lim_n p_n x = \lim_n p_n^2 x = p^2 x .$$

Следовательно, отображение p - проектор и таким образом утверждение а) доказано.

Докажем справедливость б). Так как для любого числа $j \in N$ $\dim p_{n_j} X < +\infty$, то отображение $p_{n_j} : X \longmapsto X$ - компактно и в силу следствия 12 отображение $p : X \longmapsto X$ - предкомпактно. Из свойств проектора

$$B_X(0;1) \cap pX = p[B_X(0;1) \cap pX] \subset p[B_X(0,1)] .$$

Поэтому в силу предкомпактности отображения p получаем предкомпактность окрестности $B_X(0;1) \cap pX$ пространства pX, а из последнего в силу теоремы Рисса о конечномерности нормированного пространства следует конечномерность пространства pX.

Для доказательства справедливости условия в) покажем вначале, что для всех достаточно больших $n \in N$

$$\dim p_n X \leq \dim pX . \qquad (13)$$

Допустим, что неравенство (13) не верно. Тогда существует такая подпоследовательность проекторов (p_{n_j}) последовательности (p_n) , что

$$\forall j \in N \quad \dim p_{n_j} X > \dim pX,$$

откуда и из неравенства $\dim pX < +\infty$

$$\forall j \in N \quad p_{n_j} X \cap p^{-1}\{0\} \neq \{0\} \qquad (14)$$

Таким образом, существует такая последовательность векторов $(x_j) \subset S_X(0;1)$, что

$$\forall j \in N \quad x_j \in p_{n_j} X \cap p^{-1}\{0\}. \qquad (15)$$

В силу ограниченности последовательности векторов (x_j) и того, что $p_{n_j} \xrightarrow{\text{с.к.а}} p : X \longmapsto X$, последовательность векторов $(p_{n_j} x_j - p x_j)_{j \in N}$ относительно компактна в пространстве X. Поэтому существует такая подпоследовательность векторов $(p_{n_{j_m}} x_{j_m} - p x_{j_m})_{m \in N}$ последовательности $(p_{n_j} x_j - p x_j)$ и существует такой вектор $x \in X$ что

$$x = \lim_m (p_{n_{j_m}} x_{j_m} - p x_{j_m}).$$

Поэтому из соотношения (15) $x = \lim_m x_{j_m}$.
Тогда в силу следствия 5 из [4] и условия (15)

$$px = \lim_m p_{n_{j_m}} x_{j_m} = \lim_m x_{j_m} = x \in S_X(0,1).$$

С другой стороны, в силу непрерывности отображения p и из условия (15)

$$px = \lim_m p x_{j_m} = 0.$$

Таким образом мы получили противоречие: $0 \in S_X(0;1)$, следовательно, неравенство (13) верно для всех достаточно больших $n \in N$.
Покажем теперь, что для всех достаточно больших $n \in N$

$$\dim p_n X \geq \dim pX. \qquad (16)$$

Если неравенство (16) не верно, то существует такая подпоследовательность проекторов (p_{n_j}) последовательности (p_n) , что

$$\forall j \in N \quad \dim p_{n_j} X < \dim pX.$$

Тогда

$$\forall j \in N \quad p_{n_j}^{-1}\{0\} \cap pX \neq \{0\}$$

и, следовательно,

$$\forall j \in N \quad \exists x_j \in p_{n_j}^{-1}\{0\} \cap pX \cap S_X(0,1). \qquad (17)$$

Так как $S_X(0,1) \cap pX$ - компактное множество, то существует такой вектор $x \in S_X(0;1) \cap pX$ и такая подпоследовательность векторов (x_{j_m}), что

$$x = \lim_m x_{j_m} \qquad (18)$$

Откуда в силу следствия 5 из [4]

$$px = \lim_m p_{n_{j_m}} x_{j_m}.$$

Тогда из (17) $px = 0$. Но с другой стороны, в силу непрерывности проектора p из условий (17) и (18) получаем противоречие:

$$0 = \|px\| = \lim_m \|px_{j_m}\| = \lim_m \|x_{j_m}\| = 1.$$

Следовательно, неравенство (16) верно для всех достаточно больших $n \in N$. Поэтому из неравенств (16) и (13) получаем, что для всех достаточно больших $n \in N$

$$\dim p_n X = \dim pX.$$

18. Следствие. Пусть X – нормированное пространство и последовательность линейных непрерывных проекторов $p_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейный непрерывный проектор $p : X \longmapsto X$. Тогда

а) если существует такая подпоследовательность проекторов $(p_{n_j})_{j \in N}$ последовательности (p_n), что для всех $j \in N$ $\dim p_{n_j} X = \infty$, то и $\dim pX = \infty$;,

б) если $\dim pX = \infty$, то существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\dim p_n X = \infty$.

Действительно, если а) не верно, то в силу условия в) теоремы 17 существует такое число $n_0 \in N$, что для всех $n \geq n_0$ $\dim pX = \dim p_n X < \infty$, а это противоречит условию а) следствия 18.

Если условие б) не верно, значит, существует такая подпоследовательность проекторов (p_{n_j}) последовательности (p_n), что для всех $j \in N$ $\dim p_{n_j} X < +\infty$. Тогда в силу условия б) теоремы 17 $\dim pX < \infty$, что противоречит условию б).

19. Предложение. Пусть X гильбертово пространство, последовательность ортогональных проекторов $p_n : X \longmapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует отображение p. Тогда отображение $p : X \longmapsto X$ само ортогональный проектор и $\lim_n \|p_n - p\| = 0$.

Доказательство. В силу теоремы 17, того что из ортогональности проектора следует его самосопряжённость и того, что в силу предложения 14 из [4] понятия секвенциально компактной аппроксимации и сходимости по норме для самосопряжённых отображений совпадают, нам достаточно показать, что

$$\forall x \in pX, \forall y \in p^{-1}\{0\} \quad (x|y)=0.$$

В силу непрерывности скалярного произведения, того что $p: X \longmapsto X$ - проектор, а для всех $n \in N$ $p_n: X \longmapsto X$ - ортогональный проектор, получаем следующее: для любого вектора $x \in pX$ и для любого вектора $y \in p^{-1}\{0\}$

$$(x|y) = (px|(I-p)y) = \lim_n (p_n x|(I-p_n)y).$$

И так как для всех $n \in N$

$$p_n x \in p_n X, \quad (I-p_n)y \in p_n^{-1}\{0\},$$

то $(x|y)=0$, что и требовалось доказать.

20. Отметим, что если проекторы p_n не ортогональны, то секвенциально компактная аппроксимация не сводится к сходимости проекторов по норме.

Действительно, пусть $X = \ell_2$ и (e_n) - стандартный базис в пространстве ℓ_2. Последовательность проекторов $p_n: \ell_2 \longmapsto \ell_2$ определим следующим образом:

$$\forall n \in N \ \forall x \in \ell_2 \quad p_n x = (x|e_1+e_{n+1})e_1,$$

а проектор $p: \ell_2 \longmapsto \ell_2$:

$$\forall x \in \ell_2 \quad px = (x|e_1)e_1.$$

Тогда $p_n \xrightarrow{c.ka} p$, проектор p - ортогонален, но в то же время для всех $n \in N$ $\|p_n - p\| = 1$, другими словами сходимости по норме нет.

Автор выражает глубокую благодарность и признательность своему научному руководителю И.В.Карклиньшу за внимание к данной работе.

Литература

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М, "Мир", 1972.

2. Вайникко Г.М. Принцип компактной аппроксимации в теории

приближённых методов. "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1969, т.9, №4, с.739-761.

3.Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации. Латвийский математический ежегодник, 17 (в печати).

4.Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. Настоящий сборник. с.39 - 58.

Поступила 30 марта 1974 года.

УДК 513.88

СОХРАНЕНИЕ ИНДЕКСА ЛИНЕЙНЫХ ЗАМКНУТЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПРИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.С.Левченков

В работе [1] доказан ряд теорем, устанавливающих инвариантность индекса при секвенциально компактной аппроксимации для линейных непрерывных отображений, которые заданы на банаховом пространстве и имеют замкнутую область значений. Теоремы 3, 4 и 5 данной работы обобщают теоремы 26, 27 и 28 из [1] для случая линейных замкнутых отображений.

I. Определение. Пусть X, Y - нормированные векторные пространства над полем действительных или комплексных чисел K и f - линейное отображение с областью определения $\mathcal{D}f$, являющейся векторным подпространством пространства X, и с областью значений $\mathcal{R}f$. В этой ситуации сокращенно будем писать $f: \mathcal{D}f \subset X \to Y$. Линейное отображение $f: \mathcal{D}f \subset X \to Y$ называется замкнутым, если его график

$$\{ z \in X \times Y \mid \exists\, x \in \mathcal{D}f \quad z = (x, fx) \}$$

является замкнутым векторным подпространством в произведении $X \times Y$.

Если $f: \mathcal{D}f \subset X \to Y$ - линейное отображение из нормированного векторного пространства X в нормированное пространство Y, то для замкнутости отображения f необходимо и достаточно выполнение следующего условия: если последовательность (x_n) векторов из $\mathcal{D}f$ сходится к $x \in X$ и последовательность (fx_n) сходится к $y \in Y$, то $x \in \mathcal{D}f$ и $y = fx$.

2. Определение. Пусть X и Y - нормированные векторные пространства над полем K, $L\mathcal{C}l(X,Y)$ - множество всех линейных замкнутых отображений из X в Y, области определения которых являются векторными подпространствами пространства X, причем не обязательно совпадающими. Будем говорить, что последовательность линейных замкнутых отображений $(f_n) \subset L\mathcal{C}l(X,Y)$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное замкнутое отображение $f \in L\mathcal{C}l(X,Y)$, если выполнены условия:

1) $\forall n \in N \quad \mathcal{D}f_n = \mathcal{D}f$;

2) $\forall x \in \mathcal{D}f \quad \lim\limits_n f_n x = fx$ в Y;

3) для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset \mathcal{D}f$ последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ относительно компактна в Y.

В этой ситуации кратко будем писать

$$(f_n) \xrightarrow{c.к.a.} f \in L\mathcal{C}l(X,Y) .$$

3. Теорема. Пусть X и Y - банаховы пространства над полем K и $f : \mathcal{D}f \subset X \to Y$ - линейное замкнутое отображение с замкнутой областью значений $\mathcal{R}f$, с конечномерным ядром $\ker f$ и конечномерным коядром $\operatorname{coker} f$. Если $(f_n) \xrightarrow{c.к.a.} f \in L\mathcal{C}l(X,Y)$, то существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$ f_n является отображением с замкнутой областью значений $\mathcal{R}f_n$, с конечно-

мерным ядром $\ker f_n$ и с конечномерным коядром $\operatorname{coker} f_n$, индекс $\operatorname{ind} f_n$ отображения f_n равен индексу $\operatorname{ind} f$ отображения f; $\dim\ker f_n \le \dim\ker f$, $\dim\operatorname{coker} f_n \le \dim\operatorname{coker} f$.

Доказательство. Используем конструкцию Б.Секефальви-Надя из [2] и положим

$$\forall x \in \mathcal{D}f \qquad |x| \overset{def}{=} \|x\|_X + \|fx\|_Y, \tag{1}$$

где через $\| \|_X$, $\| \|_Y$ обозначены нормы в пространствах X и Y. Покажем, что $(\mathcal{D}f, | |)$ - полное нормированное пространство. Возьмем произвольную последовательность Коши (x_n) из $(\mathcal{D}f, | |)$. Так как для всех натуральных чисел n и m из соотношения (1) следует неравенство

$$\|x_n - x_m\|_X \le |x_n - x_m|,$$

то (x_n) является последовательностью Коши в $(\mathcal{D}f, \| \|_X)$ и, следовательно, в $(X, \| \|_X)$. Так как (x_n) - последовательность Коши в полном пространстве $(X, \| \|_X)$, то найдется такой вектор $x \in X$, что

$$\lim_n \|x_n - x\|_X = 0 \quad . \tag{2}$$

Используя равенство (1) и полноту пространства $(Y, \| \|_Y)$, найдем такой вектор $y \in Y$, что

$$\lim_n \|fx_n - y\|_Y = 0 \quad . \tag{3}$$

Так как f - линейное замкнутое отображение, то

$$x \in \mathcal{D}f \quad \text{и} \quad y = fx \quad . \tag{4}$$

Из равенств (1), (2), (3) и (4) следует, что

$$\lim_n |x_n - x| = 0 \quad \text{и} \quad x \in \mathcal{D}f \ ,$$

то есть x является пределом последовательности Коши (x_n) в $(\mathcal{D}f, | |)$. Таким образом, $(\mathcal{D}f, | |)$ - полное пространство.

Так как для всех $x \in \mathcal{D}f$

$$\|fx\|_Y \le |x| ,$$

то линейное отображение $f : (\mathcal{D}f, |\,|) \longrightarrow (Y, \|\,\|_Y)$ непрерывно. В силу того, что запас ограниченных множеств в нормированном векторном пространстве не увеличивается с переходом к мажорирующей норме и $(f_n) \xrightarrow{c.\kappa.a.} f \in L\mathcal{C}\ell(X,Y)$, получаем, что $(f_n) \xrightarrow{c.\kappa.a.} f \in L\mathcal{C}\ell((\mathcal{D}f, |\,|), Y)$ и $f : (\mathcal{D}f, |\,|) \longrightarrow (Y, \|\,\|_Y)$ - линейное непрерывное отображение.

Для всех достаточно больших номеров n

$$f_n : (\mathcal{D}f, |\,|) \mapsto (Y, \|\,\|_Y) -$$

линейное непрерывное отображение. Более того, существует такое число $C > 0$ и существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$

$$\| f_n \| \leq C .$$

Предположим противное, т.е. пусть существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел (n_k) и существует такая последовательность векторов $(z_k) \subset \mathcal{D}f$ с $|z_k| = 1$, что

$$\lim_k \| f_{n_k} z_k \|_Y = +\infty. \tag{5}$$

Так как справедливо равенство

$$f_{n_k} z_k = f z_k + (f_{n_k} z_k - f z_k)$$

и $(f z_k)$, $(f_{n_k} z_k - f z_k)$ - ограниченные последовательности в Y, то найдется такое число $C_1 > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\| f_{n_k} z_k \|_Y \leq C_1. \tag{6}$$

Но соотношение (5) противоречит соотношению (6).

Таким образом, выполнены условия теоремы 26 из [1], следовательно, существует такое натуральное число n_*, что для всех $n \geq n_*$

$$\overline{\mathcal{R} f_n} = \mathcal{R} f_n ,$$
$$\operatorname{ind} f_n = \operatorname{ind} f ,$$
$$\dim \ker f_n \leq \dim \ker f ,$$
$$\dim \operatorname{coker} f_n \leq \dim \operatorname{coker} f.$$

4. Теорема. Пусть X и Y - банаховы пространства над полем K и $f: \mathcal{D}f \subset X \mapsto Y$ - линейное замкнутое отображение с замкнутой областью значений $\mathcal{R}f$ и бесконечномерным ядром, имеющим топологическое дополнение в $\mathcal{D}f$, и конечномерным коядром. Если $(f_n) \xrightarrow{c.\kappa.a.} f \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}\ell(X, Y)$, то существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$ f_n является отображением с замкнутой областью значений $\mathcal{R}f_n$, с бесконечномерным ядром и конечномерным коядром, $\operatorname{ind} f_n = \operatorname{ind} f$, $\dim \ker f_n = \dim \ker f$ и $\dim \operatorname{coker} f_n \leq \dim \operatorname{coker} f$;

Доказательство. Рассмотрим в $\mathcal{D}f$ норму $|\ |$, определяемую равенством (1) из доказательства теоремы 3. Тогда $(\mathcal{D}f, |\ |)$ - полное нормированное пространство и $(f_n) \xrightarrow{c.\kappa.a.} f \in \mathcal{L}\,\mathcal{C}\ell((\mathcal{D}f, |\ |), Y)$. Из условий теоремы непосредственно следует, что отображение $f: (\mathcal{D}f, |\ |) \mapsto (Y, \|\ \|_Y)$ является линейным непрерывным отображением с замкнутой областью значений, с бесконечномерным ядром и конечномерным коядром. Так как свойство замкнутости множества в нормированном пространстве $\mathcal{D}f$ сохраняется при замене исходной нормы $\|\ \|_X$ мажорирующей нормой $|\ |$, отображение $f: (\mathcal{D}f, |\ |) \mapsto (Y, \|\ \|_Y)$ имеет топологическое дополнение в $(\mathcal{D}f, |\ |)$ к своему ядру. В завершении доказательства применим теорему 27 из [1].

5. Теорема. Пусть X и Y - банаховы пространства над полем K и $f: \mathcal{D}f \subset X \mapsto Y$ - линейное замкнутое отображение

с замкнутой областью значений $\mathcal{R}f$, с конечномерным ядром и бесконечномерным коядром, причем подпространство $\mathcal{R}f$ имеет топологическое дополнение в Y. Если $(f_n) \xrightarrow{c.к.а.} f \in LCl(X,Y)$, то существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geq n_0$ f_n является отображением с замкнутой областью значений, с конечномерным ядром и бесконечномерным коядром,

$\dim \ker f_n \leq \dim \ker f$, $\dim \operatorname{coker} f_n \geq \dim \operatorname{coker} f$.

Доказательство. Вводим в $\mathcal{D}f$ норму $|\,|$ и применяем теорему 28 из [1].

В заключение автор благодарит И.В.Карклиньша за внимание к работе.

Литература

1. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- Латвийский математический ежегодник, 17.1975 (в печати).

2. Szokefalvi - Nagy B. On the stability of the index of unbounded linear transformations.- "Acta Math. Acad. Hung." 1952, 3, p.49-51.

Поступила 23 февраля 1974 года.

УДК 513.88

ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С БАЗИСОМ ШАУДЕРА, СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНО АППРОКСИМИРУЕМЫХ ЛИНЕЙНЫМИ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ

В.С. Левченков

В работе [I] доказаны теоремы об устойчивости индекса и полуустойчивости размерностей ядер и коядер для отображений классов Φ, Φ_+ и Φ_-. Аналогичные результаты при других условиях получены в работах [2] и [3].

Устойчивость индексов и полуустойчивость размерностей ядер и коядер в примерах, которые рассматриваются в этой статье, может быть установлена с помощью теорем 26, 27 и 28 из [2], но не может быть получена с помощью теорем 2.5, 7.I и 7.2 из [I].

I. Приступим к построению примеров. Пусть X - бесконечномерное сепарабельное банахово пространство с базисом Шаудера. Как известно ([4], стр. II5-II8) с переходом к другой норме можно построить пространство, изоморфное данному, мы обозначим его той же буквой X), в котором существует базис Шаудера $(e_n)\subset X$, обладающий следующими свойствами:

а) в топологически сопряженном пространстве X' существует последовательность $(e_n')\subset X'$, которая биортогональна последовательности (e_n), т.е. $\forall n,m\in N \quad \langle e_n, e_m'\rangle = \delta_{nm}$ (символ Кронекера);

б) $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n \to +\infty} \| x - \sum\limits_{j=1}^{n} \langle x, e_j' \rangle e_j \| = 0$;

в) $\forall n \in N \quad \| e_n \| = 1, \ \| e_n' \| \leq 2$.

В дальнейших построениях используется пример, который показывает, что из секвенциально компактной аппроксимации не следует сходимость отображений по норме.

Для любого $n \in N$ определим линейное непрерывное относительно открытое отображение $g_n : X \mapsto X$ со следующим правилом соответствия:

$$\forall x \in X \qquad g_n x = 3 \langle x, e_n' \rangle e_1 .$$

(Коэффициент 3 в выражении g_n помогает сравнить результаты статей [I] и [2].)

Так как e_n' - линейная непрерывная форма, то g_n - линейное непрерывное отображение; относительная открытость g_n следует из теоремы Банаха об открытом отображении, так как $g_n X$, как одномерное подпространство, является полным.

Отметим, что

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n \to +\infty} \langle x, e_n' \rangle = 0 . \tag{I}$$

Действительно,

$$\forall m \in N \qquad \lim_{n \to +\infty} \langle e_m, e_n' \rangle = 0$$

в силу а), и в силу б) замыкание линейной оболочки семейства $(e_m)_{m \in N}$ $\overline{\mathcal{L}[(e_m)_{m \in N}]} = X$.

Теперь покажем, что последовательность отображений (g_n) секвенциально компактно аппроксимирует нулевое отображение $0 : X \mapsto X$. Действительно, в силу (I)

$$\forall x \in X \quad \lim_{n \to +\infty} \| g_n x \| = \lim_{n \to +\infty} | \langle x, e_n' \rangle | = 0 .$$

Кроме того, для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность $(g_n x_n - 0 x_n) = (g_n x_n)$ ограничена в одномерном пространстве $\mathcal{L}\{e_1\}$, следовательно, является относительно компактной последовательностью. Таким образом, $(g_n) \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$.

Теперь покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n - 0\| \neq 0$ (если даже этот предел существует . Действительно,

$$\forall n \in N \quad \|g_n - 0\| = \|g_n\| \geq 1,$$

так как $\|e_n\| = 1$ и $\|g_n e_n\| = |\langle e_n, e_n' \rangle| = 1$.

Устойчивость индексов и полуустойчивость размерностей ядер и коядер отображений в следующих примерах 2, 3 и 4 может быть установлена с помощью теорем 26, 27 и 28 из работы [2], но не следует из теорем 2.5, 7.2 и 7.I из работы [I] для случая линейных непрерывных отображений.

2. Пример, относящийся к теореме 26. Пусть X - пространство удовлетворяющее предположениям пункта I, $f: X \mapsto X$ - тождественное отображение пространства X и для любого $n \in N$ $f_n = f + g_n$, где g_n из пункта I. Тогда $\dim \ker f = \dim \operatorname{coker} f = 0$., $(f_n) \xrightarrow{\text{с.к.а.}} f$ (так как $(g_n) \xrightarrow{\text{с.к.а.}} 0$) и $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\| \neq 0$ (так как $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g_n\| \neq 0$, если даже этот предел существует).

3. Пример, относящийся к теореме 27. Пусть X - бесконечномерное сепарабельное гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел с ортонормальной тотальной последовательностью $(e_n) \subset X$. (Как известно, (e_n) является базисом Шаудера в X.) Определим линейное непрерывное открытое сюръективное отображение $f: X \mapsto X$ следующим образом:

$$\forall x \in X \quad fx = \sum_{i=1}^{\infty} (x \mid e_{2i-1}) e_i .$$

Используя критерий Коши и полноту пространства X, покажем, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x \mid e_{2i-1}) e_i$ сходится в X. Действительно, это следует из неравенств

$$\forall m,p\in N\ \forall x\in X\ \ \|\sum_{i=m}^{m+p}(x|e_{2i-1})e_i\|^2=\sum_{i=m}^{m+p}|(x|e_{2i-1})|^2\leq$$

$$\leq\sum_{i=2m-1}^{2m-1+2p}|(x|e_i)|^2=\|\sum_{i=2m-1}^{2m-1+2p}(x|e_i)e_i\|^2,$$

и сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty}(x|e_i)e_i$.

Линейность отображения f проверяется непосредственно по определению.

Непрерывность отображения f следует из неравенства

$$\forall x\in X\quad \|fx\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x|e_{2i-1})|^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}|(x|e_i)|^2=\|x\|^2.$$

Установим сюръективность отображения f. Пусть y - произвольный вектор из пространства X. Так как $y=\sum_{i=1}^{\infty}(y|e_i)e_i$, то вектор $x=\sum_{i=1}^{\infty}(y|e_i)e_{2i-1}$ является прообразом вектора y при отображении f. (Сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty}(y|e_i)e_{2i-1}$ доказывается, используя критерий Коши.)

В силу теоремы Банаха об открытом отображении f- открытая сюръекция.

Так как $\{e_{2n}\,|\,n\in N\}\subset\ker f$, то $\dim\ker f=+\infty$. Подпространство $\ker f$ замкнуто в пространстве X, так как отображение f непрерывно, следовательно, векторное подпространство $\ker f$ имеет топологическое дополнение.

Теперь положим

$$\forall n\in N\quad f_n=f+g_n,$$

где (g_n) - последовательность отображений из пункта I с учётом того, что

$$\forall x\in X\quad \langle x,e_n'\rangle=(x|e_n).$$

Тогда $(f_n)\xrightarrow{c.c.}f$, но последовательность отображений (f_n) не сходится к отображению f по норме.

4. Пример, относящийся к теореме 28. Пусть X - простран-

ство, удовлетворяющее предположениям пункта 3. Определим линейное непрерывное относительно открытое инъективное отображение $f : X \mapsto X$ следующим способом:

$$\forall x \in X \qquad fx = \sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i) e_{2i-1}.$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i) e_{2i-1}$ в X. Так как

$$\forall m, p \in N \ \forall x \in X \ \Big\| \sum_{i=m}^{m+p} (x|e_i) e_{2i-1} \Big\| = \sqrt{\sum_{i=m}^{m+p} \| (x|e_i) e_{2i-1} \|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=m}^{m+p} \| (x|e_i) e_i \|^2} = \Big\| \sum_{i=m}^{m+p} (x|e_i) e_i \Big\|$$

и ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i) e_i$ сходится в X, то в силу полноты пространства X ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (x|e_i) e_{2i-1}$ сходится в Y.

Линейность отображения f проверяется непосредственно по определению.

Непрерывность и инъективность (линейного) отображения f следует из равенства

$$\forall x \in X \qquad \| fx \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_i)|^2} = \| x \| . \tag{2}$$

Относительная открытость инъективного отображения f эквивалентна непрерывности обратного отображения $f^{-1} : fX \mapsto X$ на подпространстве fX, а это следует из равенства

$$\forall y \in fX \qquad \| f^{-1} y \| = \| y \|$$

которое получаем из равенства (2).

Так как множество $\{e_{2n} | n \in N\}$ ортогонально подпространству fX, то $\dim \operatorname{coker} f = +\infty$. Подпространство fX замкнуто в пространстве X, так как отображение f относительно открыто и X - полное нормированное пространство, следовательно, векторное подпространство fX имеет топологическое дополнение в X.

Теперь определим

$$\forall n \in N \qquad f_n = f + g_n ,$$

где (g_n) - последовательность отображений из пункта I с учетом того, что

$$\forall x \in X \qquad \langle x, e_n' \rangle = (x | e_n) .$$

Тогда $(f_n) \xrightarrow{c.k.a.} f$, но последовательность отображений (f_n) не сходится к отображению f по норме.

Автор выражает благодарность И.В. Карклиньшу за постановку задачи.

Литература

1. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов.- Успехи математических наук, 1957, т.12, №2, с.43-118.

2. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- Латвийский математический ежегодник, 17, (в печати).

3. Левченков В.С. Сохранение индекса линейных замкнутых отображений с замкнутой областью значений в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- Настоящий сборник, с.91-96.

4. Дэй М.М. Нормированные линейные пространства. М., ИЛ., 1961.

Поступила 18 мая 1974 года.

УДК 513.88

О СВЯЗИ СЕКВЕНЦИАЛЬНО КОМПАКТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СО СХОДИМОСТЬЮ ПО НОРМЕ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.С. Левченков

Как известно, из сходимости по норме последовательности линейных непрерывных отображений к линейному непрерывному отображению вытекает, что это отображение секвенциально компактно аппроксимируется этой последовательностью (см. [1]). В настоящей статье приводятся условия, при выполнении которых справедливо и обратное.

1. Лемма. Последовательность векторов (x_n) в действительном или комплексном нормированном векторном пространстве X сходится к нулевому вектору тогда и только тогда, когда она слабо сходится к нулевому вектору и является относительно компактной последовательностью в X.

Доказательство. Необходимость условий сразу следует из определений.

Достаточность указанных условий установим методом от противного. Предположим, что существует положительное число $\varepsilon > 0$ и существует подпоследовательность (x_{n_k}) последовательности (x_n) такие, что

$$\forall\, k \in N \qquad \|x_{n_k}\| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Так как (x_n) является относительно компактной последовательностью в X, то для её подпоследовательности (x_{n_k}) существует подпоследовательность $(x_{n_{k_i}})$, сходящаяся к некоторому вектору $x \in X$. Из неравенства (1) следует, что

$$\forall i \in N \quad \|x_{n_{k_i}}\| \geq \varepsilon .$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве получаем, что

$$\lim_i \|x_{n_{k_i}}\| = \|\lim_i x_{n_{k_i}}\| = \|x\| \geq \varepsilon > 0. \qquad (2)$$

С другой стороны, для каждой линейной непрерывной формы x' из топологически сопряжённого пространства X' и

$$\forall i \in N \quad |\langle x, x'\rangle| = |\langle x - x_{n_{k_i}} + x_{n_{k_i}}, x'\rangle| \leq$$

$$\leq |\langle x - x_{n_{k_i}}, x'\rangle| + |\langle x_{n_{k_i}}, x'\rangle| \leq \|x - x_{n_{k_i}}\|\|x'\| + |\langle x_{n_{k_i}}, x'\rangle|. \quad (3)$$

Так как $\lim_i \|x - x_{n_{k_i}}\| = 0$, $\lim_i \langle x_{n_{k_i}}, x'\rangle = 0$, то переходя к пределу в соотношениях (3), получаем, что

$$\forall x' \in X' \quad |\langle x, x'\rangle| \leq 0 ,$$

то есть

$$\forall x' \in X' \quad \langle x, x'\rangle = 0 .$$

Так как пространства X и X' находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle\ ,\ \rangle$, то $x = 0$ и, следовательно, $\|x\| = 0$. Но это противоречит (2).

2. Следствие. Если пространство X конечномерно, то слабая сходимость последовательности векторов в X совпадает с её сходимостью.

3. Теорема. Последовательность линейных непрерывных отображений (f_n) одного действительного или комплексного нормированного векторного пространства X в другое Y сходится к линейному непрерывному отображению f по норме тогда и только тог-

да, когда последовательность (f_n) секвенциально компактно аппроксимирует отображение f и последовательность сопряженных отображений (f_n') сходится к сопряжённому отображению f' поточечно.

Доказательство. Покажем необходимость условий. Если $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$, то в силу теоремы 9 из работы [1] последовательность отображений (f_n) секвенциально компактно аппроксимирует отображение f. Так как

$$\forall y' \in Y' \quad \|(f_n' - f')y'\| = \|y' \cdot (f_n - f)\| \leq \|y'\| \|f_n - f\|$$

и $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$, то последовательность сопряжённых отображений (f_n') поточечно сходится к сопряженному отображению f'.

Для доказательства достаточности условий установим, что для каждой ограниченной последовательности векторов (x_n) из X последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ сходится к нулевому вектору в пространстве Y. Действительно, так как последовательность отображений (f_n) секвенциально компактно аппроксимирует отображение f, то $(f_n x_n - f x_n)$ - относительно компактная последовательность в Y. Так как

$$\forall y' \in Y' \; |\langle f_n x_n - f x_n, y' \rangle| = |\langle x_n, f_n' y' - f' y' \rangle| \leq$$
$$\leq \|x_n\| \|(f_n' - f')y'\| \leq c \|(f_n' - f')y'\|$$

и последовательность отображений (f_n') поточечно сходится к отображению f', то последовательность векторов $(f_n x_n - f x_n)$ слабо сходится к нулевому вектору в пространстве Y. Применяя лемму к последовательности векторов $(f_n x_n - f x_n)$ получаем, что

$$\forall (x_n), x_n \in X, \|x_n\| = 1 \qquad \lim_n \|f_n x_n - f x_n\| = 0 . \tag{4}$$

Для доказательства равенства $\lim\limits_n \|f_n - f\| = 0$ предположим противное, то есть предположим, что существует положительное число

$\varepsilon > 0$ и

$$\exists\ (f_{n_k}) \qquad \| f_{n_k} - f \| \geq \varepsilon . \tag{5}$$

В силу определения $\| f_{n_k} - f \|$ для каждого натурального числа k

$$\exists\ x_k \in X\ ,\ \| x_k \| = 1 \quad \| f_{n_k} - f \| \leq \| f_{n_k} x_k - f x_k \| + \frac{1}{k} . \tag{6}$$

Учитывая равенство (4) и переходя к пределу в неравенствах (6) и (5), получаем противоречие.

4. Следствие. Если последовательность (f_n) линейных непрерывных отображений секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение f, но последовательность (f_n') сопряжённых отображений не сходится поточечно к сопряжённому отображению f', то последовательность (f_n) не сходится по норме к отображению f.

5. Теорема (двойственная к теореме 3). Последовательность (f_n') сопряжённых отображений к линейным непрерывным отображениям f_n одного действительного или комплексного нормированного векторного пространства в другое сходится по норме к отображению f', сопряжённому к линейному непрерывному отображению f, тогда и только тогда, когда последовательность отображений (f_n') секвенциально компактно аппроксимирует отображение f' и последовательность отображений (f_n) поточечно сходится к отображению f.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

6. Замечание. Результаты теорем 3 и 5 справедливы, если

$X = Y$ - действительное или комплексное гильбертово пространство и сопряженное отображение $f' : X \mapsto X$ к отображению $f : X \mapsto X$ определяется равенством

$$\forall\, x, y \in X \qquad (fx \mid y) = (x \mid f'y) .$$

7. Из теоремы 3, учитывая замечание 6, можно получить как следствие известный результат В.И. Лабеева из работы [2].

Пусть X - действительное или комплексное гильбертово пространство и последовательность линейных непрерывных самосопряженных отображений $f_n : X \mapsto X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $f : X \mapsto X$. Тогда последовательность отображений (f_n) сходится по норме к отображению f.

Литература

I. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.- Латвийский математический ежегодник, 17, 1975 (в печати).

2. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах.- Настоящий сборник, с.39-58.

Поступила 27 сентября 1974 года.

УДК 513.831

ШЕЙПЫ В КЛАССАХ КОМПАКТНОСТИ: РЕТРАКТЫ, ЭКСТЕНЗОРЫ, ПОДВИЖНОСТЬ

А.П.Шостак

Подобно тому, как в теории гомотопических типов топологических пространств большую роль играют такие понятия, как ретракт, экстензор, деформационный ретракт, AR, ANR, AE, ANE и т.п.; в теории шейпов соответствующее значение имеют "шейповые", или "фундаментальные", аналоги этих понятий. Создатель теории шейпов К.Борсук в ряде работ ([3],[4],[5]) определяет и изучает аналоги понятий теории ретрактов для шейпов метрических компактов. В частности, К.Борсук показал, что классы FAR и $FANR$ для метрических компактов являются шейповыми инвариантами, расширяющими классы AR и ANR метрических компактов соответственно. В [6],[7] С.Мардешич и Дж.Сегал с помощью т.н. ANR-спектров определяют и изучают шейп бикомпакта; развивая эту теорию в последующих работах ([8],[9]), С.Мардешич с помощью ANR-спектров определяет аналоги понятий теории ретрактов для шейпов бикомпактов, которые в случае метрических компактов совпадают с соответствующими понятиями "шейповой" теории К.Борсука.

В работе [11] определяется понятие шейпа в классе компактности $\mathcal{E}$, при условии, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет некоторым требованиям (см. § 1 1°, 2°). Целью настоящей заметки является определение и изучение аналогов основных понятий теории ретрактов для шейпов в классах компактности. Вводимые здесь понятия в случае класса метрических компактов совпадают с соответствующими понятиями теории К.Борсука,а в случае бикомпактов - с понятиями теории Мардешича.Устанавливается связь между вводимыми понятиями для различных классов компактности.

§ I носит вводный характер; он содержит используемые в дальнейшем определения и теоремы из [10]. Здесь же доказаны теорема 5 и лемма 2,которые потребуются в последующих параграфах.

Условимся сразу все рассматриваемые пространства считать хаусдорфовыми,все отображения - непрерывными.В статье мы будем пользоваться терминологией из [1],[2],[6].

§ I. Шейпы в классах компактности

Пусть $\mathcal{E}$ - некоторый класс топологических пространств, представленный в виде объединения своих подклассов: $\mathcal{E} \underset{def}{=} \cup\{\mathcal{E}_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \mathcal{E}_0$. Сопоставим каждому α некоторое кардинальное число; для системы пространств с зафиксированными мощностями,поскольку это не может вызвать недоразумения,сохраняем обозначение $\mathcal{E}$ $(\mathcal{E} = \{(\mathcal{E}_\alpha \tau_\alpha)_\alpha, \mathcal{E}_0\})$. Через $\pi(\mathcal{E})$ обозначаем совокупность всех таких произведений P пространств класса,что пространства из $\mathcal{E}_\alpha$ входят в P в числе,не превосходящем τ_α.

Определение I. Пространство X называется $\mathcal{E}$-компактным,если найдется такое $P \in \pi(\mathcal{E})$,что X гомеоморфно замкнутому подпространству P. Через $\Omega(\mathcal{E})$ будем обозначать класс всех $\mathcal{E}$-компактных пространств.

Пусть $X, Y \in \Omega(\mathcal{E})$. Рассмотрим некоторые замкнутые вложения i пространства X в P и j пространства Y в Q (под P и Q здесь и в дальнейшем,если не оговорено противное,понимаем пространства класса $\pi(\mathcal{E})$). Обозначим через $\underline{X} = \{U_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ - спектр окрестностей подпространства iX в P (A - направленное множество: $U_{\alpha'} \subset U_\alpha$ при $\alpha' > \alpha$ и $p_{\alpha\alpha'}$ - естественное вложения). Аналогично $\underline{Y} = \{V_\beta, q_{\beta\beta'}, B\}$ некоторый спектр окрестностей jY в Q.

Определение 2. Фундаментальной направленностью из замкнутого вложения i в замкнутое вложение j называется такая система отображений $\underline{f} \underset{df}{=} \{\mathcal{F}, f_\beta\}$, где $\mathcal{F}$ - возрастающая функция из B в A и для каждого β f_β - непрерывное отображение из $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(\beta)}$ в V_β, что для произвольных β и β' ($\beta < \beta'$) диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}_{\mathcal{F}(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"'] & \mathcal{U}_{\mathcal{F}(\beta')} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "f_{\beta'}"] \\ V_\beta & V_{\beta'} \arrow[l, "q_{\beta\beta'}"] \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

Пусть f - отображение в Q, заданное на некоторой окрестности $\mathcal{U}$ пространства iX. Будем говорить, что отображение f порождает фундаментальную направленность $\underline{f}$, если для каждого β, начиная с некоторого момента A, ограничения f на $\mathcal{U}_{\mathcal{F}(\beta)}$ гомотопны в V_β соответствующим отображениям f_β. Ясно, что каждое отображение $f: iX \to jY$ порождает некоторую фундаментальную направленность $\underline{f}: i \to j$.

Определение 3. Пусть $\underline{f}, \underline{g} = \{G, g_\beta\}$ - две фундаментальные направленности из замкнутого вложения i в замкнутое вложение j. Скажем, что $\underline{f}$ и $\underline{g}$ - гомотопные фундаментальные направленности, если для каждого β найдется такое a, $a > \mathcal{F}(\beta), G(\beta)$, что диаграмма:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{U}_a \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p"] & \\ \mathcal{U}_{\mathcal{F}(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"'] & & \mathcal{U}_{G(\beta)} \arrow[dl, "g_\beta"] \\ & V_\beta & \end{tikzcd}$$

гомотопически коммутативна.

Рассмотрим еще замкнутое вложение k пространства $Z \in \Omega(\mathfrak{G})$ в $R \in \Pi(\mathfrak{G})$, и пусть $\underline{Z} = \{Z_\gamma, r_{\gamma\gamma'}, \Gamma\}$ - спектр окрестностей kZ в R. Композицией фундаментальных направленностей $\underline{f}$ из i в j и $\underline{g} = \{G, g_\gamma\}$ из j в k назовем систему отображений $\{fg, G_\gamma \bar{\mathcal{F}}_{G(\gamma)}\}$. Легко проверить, что эта система отображений является фундаментальной направленностью из замкнутого вложения i в замкнутое вложение j. В качестве тождественного отображения вложения i на себя возьмем фундаментальную направленность $1_i = \{1_A, 1_\mathcal{U}\}$, где 1_A - тождественное отображение A на A и для каждого $\mathcal{U} \in \underline{X}$ $1_\mathcal{U}$ - тождественное отображение $\mathcal{U}$ на $\mathcal{U}$. Таким образом, получаем категорию, объектами которой являются замкнутые вложения $\mathfrak{G}$ - компактных пространств в произведения из $\Pi(\mathfrak{G})$, а морфизмами - фундаментальные направленности.

Определение 4. Замкнутые вложения $i: X \to P$ и $j: Y \to Q$ назовем $\mathcal{E}$ - эквивалентными, если найдутся такие фундаментальные направленности $\underline{f}$ из i в j и $\underline{g}$ из j в i, что $\underline{g} \circ \underline{f} \simeq 1_i$, $\underline{f} \circ \underline{g} \simeq 1_j$. В этом случае будем писать $i \underset{\mathcal{E}}{\simeq} j$.

Приведенные до сих пор определения, справедливы для любой системы $\mathcal{E}$, однако для того, чтобы основываясь на этих определениях можно было построить содержательную теорию шейпов в данном классе компактности, нам придется наложить на $\mathcal{E}$ некоторые ограничения. Именно, будем в дальнейшем предполагать, что $\mathcal{E}$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1^0. Каждое пространство $P \in \pi(\mathcal{E})$ является абсолютным окрестностным экстензором для класса $\pi(\mathcal{E})$. Другими словами, $\pi(\mathcal{E}) \subset ANE(\pi(\mathcal{E}))$.

2^0. Класс $\pi(\mathcal{E})$ замкнут относительно произведения на некоторое пространство E, содержащее отрезок J.

При этих условиях справедлива следующая теорема

Теорема I. Пусть X, Y - $\mathcal{E}$-компактные пространства, X гомотопически эквивалентно Y и i, j - некоторые замкнутые вложения X и Y в пространства P и Q соответственно. Тогда вложение i $\mathcal{E}$-эквивалентно вложению j.

Следствие I. Пусть i и i' - два замкнутых вложения X в пространства P и P' класса $\pi(\mathcal{E})$. Тогда $i \underset{\mathcal{E}}{\simeq} i'$.

Из этого следствия видно, что отношение $\mathcal{E}$ - эквивалентности можно рассматривать как отношение эквивалентности в классе $\mathcal{E}$-компактных пространств (а не в классе их замкнутых вложений). Отсюда вытекает корректность следующего определения:

Определение 5. $\mathcal{E}$-компактные пространства X и Y назовем $\mathcal{E}$-эквивалентными, если некоторые (а следовательно, и любые) их замкнутые вложения i и j в пространства P и Q являются $\mathcal{E}$-эквивалентными.

Следствие 2. Класс всех $\mathcal{E}$-компактных пространств делится на классы $\mathcal{E}$-эквивалентных пространств.

Шейпом X относительно $\mathcal{E}$ назовем класс всех $\mathcal{E}$-компактных пространств, $\mathcal{E}$-эквивалентных пространству X, т.е. $sh_{\mathcal{E}} X = \{Y : Y \in \Omega(\mathcal{E}), X \underset{\mathcal{E}}{\simeq} Y\}$.

Пусть пространство X является одновременно $\mathfrak{S}_1$-компактным и $\mathfrak{S}_2$-компактным, где $\mathfrak{S}_1$ и $\mathfrak{S}_2$ – системы топологических пространств, удовлетворяющие условиям $I^0, 2^0$. Тогда определены шейпы X относительно каждой из систем: $sh_{\mathfrak{S}_1} X$ и $sh_{\mathfrak{S}_2} X$. Следующая теорема устанавливает связь между этими шейпами.

Теорема 2. Пусть $X \in \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_1) \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_2)$ и существует некоторая система $\mathfrak{D}$, удовлетворяющая условиям $I^0, 2^0$, такая, что $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ [1]. Тогда $sh_{\mathfrak{S}_1} X \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_2) = sh_{\mathfrak{S}_2} X \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_1)$.

Следствие I. Если $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, то $sh_{\mathfrak{S}_1} X = sh_{\mathfrak{S}_2} X \cap \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_1)$.

Следствие 2. Если $\mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_1) = \mathfrak{Q}(\mathfrak{S}_2)$, то $sh_{\mathfrak{S}_1} X = sh_{\mathfrak{S}_2} X$. Таким образом, шейп в классе компактности зависит только от этого класса компактности и не зависит от способа задания этого класса компактности.

Теорема 3. Если пространства X и Y являются $ANR(\mathfrak{S})$ [2], то X и Y $\mathfrak{S}$-эквивалентны в том и только в том случае, когда они гомотопически эквивалентны.

Установим теперь связь между введенным здесь понятием шейпа в классе компактности и шейпами в смысле К.Борсука [8], С.Мардешича [6], [7] и Р.Фокса [10]. Заметим прежде всего, что

если $\mathfrak{S} = \{(J^{\aleph_0}, 1)\}$, т.е. $\pi(\mathfrak{S}) = \{J^{\aleph_0}\}$, то $\mathfrak{Q}(\mathfrak{S})$ есть класс метрических компактов;

если $\mathfrak{S} = \{J\}$, т.е. $\pi(\mathfrak{S}) = (J^{\tau})_{\tau}$, то $\mathfrak{Q}(\mathfrak{S})$ есть класс бикомпактов;

если $\mathfrak{S} = \{(ANR(M), 1)\}$ т.е. $\pi(\mathfrak{S}) = \{ANR(M)\}$, то $\mathfrak{Q}(\mathfrak{S})$ есть класс метрических пространств. (M – метрические пространства).

Таким образом, каждый из этих классов является классом компактности. Имеет место следующая теорема:

---

1. $\mathfrak{D} \supset \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$ означает $\pi(\mathfrak{D}) \supset \pi(\mathfrak{S}_1) \cup \pi(\mathfrak{S}_2)$.

2. $ANR(\mathfrak{S})$ означает ANR в классе $\mathfrak{S}$-компактных пространств.

Теорема 4.

а) Шейп в классе метрических компактов совпадает с шейпом метрического компакта в смысле К.Борсука;

б) Шейп в классе бикомпактов совпадает с шейпом бикомпакта в смысле С.Мардешича;

в) Шейп в классе метрических пространств совпадает с шейпом метрического пространства в смысле Р.Фокса.

Рассмотрим теперь некоторые другие классы компактности, в которых может быть определен шейп.

1. В [12] показано, что пространство X является полным (в смысле Чеха) финально компактным пространством тогда и только тогда, когда оно $\mathcal{E}_1$-компактно, где $\mathcal{E}_1 = \{(R, \aleph_0), J\}$ (R - вещественная прямая; J - единичный интервал). $\mathcal{E}_1$ удовлетворяет условиям $1^0, 2^0$, следовательно, определен шейп в классе полных финально компактных пространств.

2. В [12] показано, что для того, чтобы пространство X было полным паракомпактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\mathcal{E}_2$-компактным, где $\mathcal{E}_2 = \{(J_\sigma, \aleph_0), J\}$ (J_σ - метрический ёж колючести σ). Система $\mathcal{E}_2$ удовлетворяет условиям $1^0, 2^0$, следовательно, определён шейп в классе полных в смысле Чеха паракомпактов.

3. По теореме Нагата топологическое пространство является P - паракомпактом тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подпространству произведения $ANR(M)$ на тихоновский куб J^τ, т.е. тогда, когда оно $\mathcal{E}_3$ - компактно, где $\mathcal{E}_3 = \{(ANR(M), 1), J\}$. Отсюда следует, что определен шейп в классе P - паракомпактов. (Связь между шейпами в различных классах компактности описывается теоремой 2).

Докажем в заключение этого раздела теорему, характеризующую шейпы одноточечного пространства. Пусть X - $\mathcal{E}$-компактное пространство и i - замкнутое вложение X в P.

Теорема 5. Для того, чтобы $sh_{\mathcal{E}} X = 0$, т.е. чтобы пространство X принадлежало шейпу одноточечного пространства, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности U пространства iX в P, существовала меньшая окрестность

V ,стягиваемая в U в точку.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Пусть X и Y – $\mathcal{E}$-компактные пространства, $Sh_{\mathcal{E}} Y = 0$.Тогда существует единственная фундаментальная направленность $\underline{f}$ из X в Y[1].

Доказательство.

Существование фундаментальной направленности очевидно, ибо всегда можем взять фундаментальную направленность,состоящую из постоянных отображений.Для доказательства единственности рассмотрим сначала случай,когда Y само одноточечно,т.е. $Y=\{*\}$.Одноточечное пространство является $ANR(\mathcal{E})$ в любом классе компактности,поэтому можем рассматривать вместо системы $\mathcal{E}$ эквивалентную ей систему $\mathcal{E}'=\mathcal{E}\cup\{*\}$. Ясно,что существует единственная (с точностью до гомотопии) фундаментальная направленность $\underline{f}$ из каждого замкнутого вложения $i: X \to P$ в замкнутое вложение $j: * \to *$.Пусть теперь $Sh_{\mathcal{E}} Y = Sh_{\mathcal{E}} *$, k -замкнутое вложение Y в Q ; $\underline{f}$ -фундаментальная направленность из k в j , $\underline{\varphi}$ -единственная фундаментальная направленность из k в j и $\underline{\psi}$ - однозначно определенная обратная к ней (т.е. $\underline{\psi}: j \to k$ и $\underline{\psi}\underline{\varphi} \simeq 1_Y$, $\underline{\varphi}\underline{\psi} \simeq 1_*$).

I Пусть i и i' - замкнутые вложения X в P и P' ; j и j' - замкнутые вложения Y в Q и Q' соответственно.Поскольку замкнутые вложения i и i' , j и j' $\mathcal{E}$ -эквивалентны между собой,найдутся фундаментальные направленности $\underline{\lambda}: i \to i'$, $\underline{\mu}: j \to j'$, $\underline{\lambda}': i' \to i$, $\underline{\mu}': j' \to j$, такие,что $\underline{\lambda}'\underline{\lambda} \simeq 1_i$, $\underline{\lambda}\underline{\lambda}' \simeq 1_{i'}$, $\underline{\mu}'\underline{\mu} \simeq 1_j$, $\underline{\mu}\underline{\mu}' \simeq 1_{j'}$. Из теоремы I и ее следствия ясно,что фундаментальные направленности $\underline{f}$ из i в j и $\underline{\mu}\underline{f}\underline{\lambda}'$ из i' в j' при рассмотрении отношения шейповой эквивалентности,шейповых характеристик $\mathcal{E}$ - компактных пространств являются эквивалентными.В этом смысле мы употребляем выражение "фундаментальная направленность из $\mathcal{E}$ -компактного пространства X в $\mathcal{E}$ -компактное пространство Y ,вместо того,чтобы говорить о фундаментальной направленности соответствующих замкнутых вложений".

Очевидно, $\underline{f}=\underline{\psi}\underline{\varphi}\underline{i}$; $\underline{\varphi}\underline{i}$ является единственной фундаментальной направленностью из i в j, следовательно, и фундаментальная направленность $\underline{f}$ из X в Y единственна.

Лемма доказана. Переходим к доказательству теоремы.

Допустим $sh_{\mathcal{E}}X=0$, рассмотрим некоторый спектр окрестностей $\underline{X}$ пространства iX в P, и для каждой $U_\alpha\in\underline{X}$ определим отображение $c_\alpha(U_\alpha)=x_0$, где x_0 – некоторая фиксированная точка X. Таким образом получаем фундаментальную направленность $\underline{c}:X\to X$. Из леммы 2 следует $1_X\simeq\underline{c}$, но это эквивалентно тому, что для каждого α найдется номер $\alpha'\succ\alpha$ такой, что $1_{\alpha'}\simeq c_\alpha|_{U_{\alpha'}}$ в U_α, где $1_{\alpha'}:U_{\alpha'}\to U_{\alpha'}$ – тождественное отображение. Последнее же условие означает как раз, что $U_{\alpha'}$ стягиваемо в U_α в точку.

Обратно, пусть для каждого α найдется $\alpha'\succ\alpha$ такое, что $U_{\alpha'}$ деформируется в U_α в точку; тогда тождественное отображение $1_{\alpha'}$ гомотопно в U_α отображению $c_{\alpha'}:U_{\alpha'}\to x_0$, где x_0 – некоторая точка в X. Рассмотрим одноточечное пространство $*$ и определим фундаментальную направленность из $*$ в X, положив $c_\alpha(*)=x_0$ для каждого α. Пусть $\underline{\varphi}$ – единственная (по лемме) фундаментальная направленность из X в $*$. Нетрудно проверить, что для определенных таким образом фундаментальных направленностей $\underline{c}\underline{\varphi}\simeq 1_X$, с другой стороны, очевидно, $\underline{\varphi}\underline{c}\simeq 1_*$. Отсюда получаем $sh_{\mathcal{E}}X=sh_{\mathcal{E}}*=0$.

Теорема доказана.

§ 2. Фундаментальная ретракция. Фундаментальные абсолютные ретракты. Фундаментальные абсолютные окрестностные ретракты

Определение 6. Пусть X и Y – $\mathcal{E}$-компактные пространства, $X\subsetneqq Y$ и i – соответствующее замкнутое вложение X в Y. Если существует фундаментальная направленность $\underline{r}:Y\to X$ такая, что $\underline{r}\underline{i}\simeq 1_X$, где $\underline{i}$ – фундаментальная направленность, порожденная i, то $\underline{r}$ называется фундаментальной ретракцией Y на X. X в этом случае будем называть фундаментальным ретрактом Y.

Непосредственно из определений легко убедиться в справедливости следующих предложений. (X, Y, Z - $\mathcal{E}$ - компактные пространства):

Предложение I. Если X есть ретракт Y , то X и фундаментальный ретракт Y .

Предложение 2. Если $X \subsetneq_{cl} Y \subsetneq_{cl} Z$, X - фундаментальный ретракт Y , а Y - фундаментальный ретракт Z , то X есть также фундаментальный ретракт Z .

Предложение 3. Пусть $X \subsetneq_{cl} Y \subsetneq_{cl} Z$, i - замкнутое вложение X в Y и j - замкнутое вложение Y в Z . Если X есть фундаментальный ретракт Z и $\underline{r}$ - соответствующая фундаментальная ретракция, то X является также фундаментальным ретрактом Y ; соответствующая фундаментальная ретракция $\underline{r}\,\underline{j}$.

Предложение 4 Понятие фундаментального ретракта в категории бикомпактов совпадает с понятием шейпового ретракта в смысле С.Мардешича (см.[9],опр.4).

Из этого предложения и теоремы II указанной работы Мардешича вытекает <u>следствие</u>. Понятие фундаментального ретракта в категории метрических компактов совпадает с определением фундаментального ретракта, данным К.Борсуком (см.[4]).

Определение 7. $\mathcal{E}$-компактное пространство X назовем фундаментальным абсолютным ретрактом в классе компактности $\mathcal{E}$ ($X \in FAR(\mathcal{E})$), если для каждого $Y \in \mathfrak{A}(\mathcal{E})$ такого, что $X \subsetneq_{cl} Y$, X является фундаментальным ретрактом Y.

Согласно условию I^0§I каждое пространство $P \in \mathcal{P}(\mathcal{E})$ является $ANR(\mathcal{E})$. Предположим, что оно является не только окрестностным, но и абсолютным экстензором; тогда справедлива

Теорема 6. Для того, чтобы $\mathcal{E}$-компактное пространство было $FAR(\mathcal{E})$, необходимо и достаточно, чтобы $sh_{\mathcal{E}} X = 0$. (ф.[9] теорема 4).

Доказательство.

Пусть $X \in FAR(\mathcal{E})$, рассмотрим некоторое замкнутое вложение $i : X \to P$ и пусть $\underline{r}$ -фундаментальная ретракция P на X ; тогда $\underline{r}\,\underline{i} \simeq 1_X$. С другой стороны, по лемме 2 $\underline{i}\,\underline{r} \simeq 1_P$ (ибо $sh_{\mathcal{E}} P = 0$). Так как $X \neq \emptyset$, отсюда получаем $sh_{\mathcal{E}} X = sh_{\mathcal{E}} P = 0$.

Обратно, допустим $sh_{\mathcal{E}} X = 0$ и $X \underset{\mathcal{U}}{\subsetneq} Y$. Воспользуемся опять леммой 2, откуда получаем, что существует единственная фундаментальная направленность $\underline{r}: Y \to X$ и единственная фундаментальная направленность $1_X: X \to X$; отсюда следует $\underline{r}\underline{i} \simeq 1_X$, т.е. X – фундаментальный ретракт Y.

Следствие I. Пусть A – замкнутое подпространство $\mathcal{E}$-компактного пространства X и $Y \in FAR(\mathcal{E})$. Тогда для любой фундаментальной направленности $\underline{f}: A \to Y$ существует продолжение $\underline{F}: X \to Y$, т.е. такая фундаментальная направленность, что $\underline{F}\underline{i} \simeq \underline{f}$, где $\underline{i}$ – фундаментальная направленность, порожденная тождественным вложением $i: A \to X$.

Следствие 2. Для того, чтобы $\mathcal{E}$-компактное пространство X было $FAR(\mathcal{E})$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой окрестности U множества iX в P существовала окрестность V, стягиваемая в U в точку.

Теорема 7. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ – системы топологических пространств, такие, что $\pi(\mathcal{E}_i) \subset AR(\mathcal{E}_i)$ и существует система $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, удовлетворяющая условиям I^0, 2^0 § I. Тогда $FAR(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2) = FAR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$

Доказательство.

Действительно, пусть $X \in FAR(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2)$; по теореме 6 отсюда $sh_{\mathcal{E}_1} X = 0$. По теореме 2 $sh_{\mathcal{E}_2} X \cap \Omega(\mathcal{E}_1) = sh_{\mathcal{E}_1} X \cap \Omega(\mathcal{E}_2)$ поскольку $\{*\} \in \Omega(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2)$, отсюда следует $sh_{\mathcal{E}_2} X = 0$. Применяя опять теорему 6, получаем $X \in FAR(\mathcal{E}_2)$. Итак, доказано $FAR(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2) \subset FAR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$. Обратное включение доказывается точно так же

Следствие. Если $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$ и $\pi(\mathcal{E}_i) \subset AR(\mathcal{E}_i)$, то $FAR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1) = FAR(\mathcal{E}_1)$

Определение 8. $\mathcal{E}$-компактное пространство X назовем фундаментальным абсолютным ретрактом в классе компактности $\mathcal{E}$ ($FANR(\mathcal{E})$), если в каждом $\mathcal{E}$-компактном пространстве Y, таком что $X \underset{\mathcal{U}}{\subsetneq} Y$, найдется $\mathcal{E}$-компактная окрестность V ($X \subset V \subset Y$) такая, что X является фундаментальным ретрактом V.

Теорема 8. Пусть все пространства класса $\pi(\mathcal{E})$ нормальны. Тогда $\mathcal{E}$-компактное пространство X является $FANR(\mathcal{E})$ в том и только в том случае, когда существует

$\mathcal{E}$-компактное пространство Y, содержащее X в качестве замкнутого подпространства, такое, что X есть фундаментальный ретракт Y и Y является замыканием некоторого $ANE(\mathcal{E}_0)$ пространства $Y_0 \supset X$ (ср. теорема 6 из [9]).

Доказательство.

Пусть $X \in FANR(\mathcal{E})$ и $X \hookrightarrow P \in \pi(\mathcal{E})$ - замкнутое вложение. По определению $FANR$ найдется $\mathcal{E}$-компактная окрестность $Y \supset X$ в P такая, что X есть фундаментальный ретракт Y. Положим $Y_0 = Int\, Y$ (внутренность берется в P); ясно, что Y_0 - абсолютный окрестностный экстензор в классе компактности $\mathcal{E}$.

Обратно, пусть X - фундаментальный ретракт Y и $Y_0 \in ANE(\mathcal{E})$, $[Y_0] = Y$. Заметим сразу, что при этих условиях $X \subset Y_0$. Пусть Z - некоторое $\mathcal{E}$-компактное пространство, содержащее X в качестве замкнутого подмножества. Рассмотрим присоединенное пространство $Z \cup_\varphi Y$, где φ - тождественное отображение $X (\subset Z)$ на $X (\subset Y)$. Поскольку Y_0 является $ANE(\mathcal{E})$, отображение φ можно продолжить на некоторую окрестность $Z' \subset Z$; $\tilde{\varphi}: Z' \to Y_0$. При этом, так как пространство Z нормально, окрестность Z' можем выбрать замкнутой (и, следовательно, $\mathcal{E}$-компактной). Определим отображение $\rho: Z' \cup_\varphi Y \to Y$, положив $\rho|_{Z'} = \tilde{\varphi}$, $\rho|_Y = id|_Y$. Легко видеть, что определенное таким образом отображение непрерывно и является ретракцией $Z' \cup_\varphi Y$ на Y. С другой стороны, согласно условию, X есть фундаментальный ретракт Y. По предложениям 1,2 отсюда следует, что X есть фундаментальный ретракт $Z' \cup_\varphi Y$; по предложению 3 X является фундаментальным ретрактом Z'. Теорема доказана.

Согласно условию 1^0 §1 каждое открытое множество в $P \in \pi(\mathcal{E})$ является $ANE(\mathcal{E})$. Интерес представляет случай, когда каждое замкнутое подмножество в P имеет базу из окрестностей, являющихся не только $ANE(\mathcal{E})$, но и $ANR(\mathcal{E})$. Будем в таких случаях для краткости говорить просто, что пространства $\pi(\mathcal{E})$ обладают $ANR(\mathcal{E})$ - базой.

Теорема 9. Пусть пространства класса $\pi(\mathcal{E})$ обладают $ANR(\mathcal{E})$ - базой. Тогда $X \in FANR(\mathcal{E})$ в том и только в том случае, когда X является фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(\mathcal{E})$ пространства Y.

Доказательство.

Достаточность утверждения следует непосредственно из теоремы 8'. Обратно, пусть X есть фундаментальный ретракт $Y' \subset P$, где Y' -некоторая $\mathfrak{G}$-компактная окрестность X в P. Согласно условию, найдется окрестность $Y \supset X$, содержащаяся в Y', такая, что $Y \in ANR(\mathfrak{G})$. По предложению 3 X является фундаментальным ретрактом пространства Y. Теорема доказана.

Следствие I. (Теорема К.Бороука; см.[4]теорема 6.7). Для того, чтобы метрический компакт (MC) X был $FANR(MC)$, необходимо и достаточно, чтобы он был фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(MC)$.

Доказательство.

Класс метрических компактов совпадает с классом $\mathfrak{A}(J^{\aleph_0})$. Как легко видеть, каждое замкнутое множество имеет базу окрестностей вида $C \times J$ где C - некоторый конечный замкнутый полиэдр; ясно, что окрестность такого вида является абсолютным окрестностным ретрактом в классе метрических компактов. Таким образом, $\mathfrak{G} = (J^{\aleph_0})$ обладает $ANR(\mathfrak{G})$-базой. и, следовательно, мы находимся в области действия теоремы 9.

Следствие 2. (Теорема С.Мардешича; см.[9]теорема 6). Для того, чтобы биокомпакт (C) X был $FANR(C)$, необходимо и достаточно, чтобы X был фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(C)$.

Доказательство аналогично доказательству следствия I; база окрестностей замкнутых множеств в J^{τ} имеет вид $C \times J^{\tau}$, где C - конечный замкнутый полиэдр.

Следствие 3. Для того, чтобы метрическое пространство (M) X было $FANR(M)$, необходимо и достаточно, чтобы X было фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(M)$.

Доказательство легко провести, используя теорему Ханнера, утверждающую, что свойство пространства быть $ANR(M)$ наследуется по открытым множествам, теорему Куратовского -Войцславского, утверждающую, что каждое метрическое пространство гомеоморфно замкнутому подпространству некоторого $ANR(M)$, и теорему 8'.

Следствие 4. Для того, чтобы ρ-паракомпакт (ρP) был $\mathcal{F}ANR(\rho P)$, необходимо и достаточно, чтобы X был фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(\rho P)$.

Доказательство.

Поскольку ρ-паракомпактные пространства нормальны и свойство пространства быть ρ-паракомпактом наследуется множествами типа F_σ, нетрудно показать, что каждое замкнутое подмножество ρ-паракомпактного пространства имеет базу ρ-паракомпактных открытых окрестностей. Теперь мы можем воспользоваться теоремой 9.

Следствие 5. Для того, чтобы полный в смысле Чеха паракомпакт (CP) был $FANR(CP)$, необходимо и достаточно, чтобы он был фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(CP)$.

Следствие 6. Для того, чтобы полное в смысле Чеха финально компактное пространство (CL) было $FANR(CL)$, необходимо и достаточно, чтобы оно было фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(CL)$.

Доказательство следствий 5,6 совершенно аналогично доказательству следствия 4.

Теорема 10. Пусть пространства $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ обладают $ANR(\mathcal{E})$-базой, X, Y – $\mathcal{E}$-компактны. Тогда, если $sh_{\mathcal{E}}X \le sh_{\mathcal{E}}Y$ [1] и $Y \in FANR(\mathcal{E})$, то и $X \in FANR(\mathcal{E})$

Доказательство.

Предположим сначала, что $Y \in ANR(\mathcal{E})$, и пусть $\underline{f}: X \to Y$, $\underline{g}: Y \to X$ – такие фундаментальные направленности, что $\underline{g}\underline{f} \simeq \underline{1}_X$. Поскольку $Y \in ANR(\mathcal{E})$, можем считать что $\underline{f}$ состоит из одного отображения $f_\circ: X_{a_0} \to Y$, где X_{a_0} – некоторая окрестность X (ибо в этом случае мы всегда можем рассматривать вместо $\mathcal{E}$ эквивалентную ей систему $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} \cup \{Y\}$, содержащую Y, и замкнутое вложение $j: Y \to Y$). При этом окрестность X_{a_0} можем выбрать $\mathcal{E}$-компактной. Отсюда следует, что $\underline{g}\underline{f}$ можем рассматривать, как фундаментальную направленность из X_{a_0} в X. Обозначим эту фундаментальную направленность $\underline{r}$, т.е. $\underline{r} = \underline{g}\underline{f}: X_{a_0} \to X$.

---

[1] Мы пишем $sh_{\mathcal{E}}X \le sh_{\mathcal{E}}Y$ (шейп пространства Y доминирует шейп пространства X) тогда и только тогда, когда существуют фундаментальные направленности $\underline{f}: X \to Y$ и $\underline{g}: Y \to X$, такие, что $\underline{g}\underline{f} \simeq \underline{1}_X$.

Легко убедиться в том, что $\underline{r}$ есть фундаментальная ретракция: поскольку $\underline{r} \simeq \underline{g}\underline{f} \simeq \underline{1}_X$, следовательно, $\underline{r}\underline{i} \simeq \underline{1}_X \underline{i}$, где $\underline{i}$ -фундаментальная направленность, порождаемая вложением i X в X_{a_0}; в свою очередь $\underline{1}_X \underline{i} = \underline{1_X i} = \underline{1}_X$. Таким образом, получаем $\underline{r}\underline{i} \simeq \underline{1}_X$, т.е. $\underline{r}$ -фундаментальная ретракция и, следовательно, $X \in FANR(\mathcal{E})$.

Пусть теперь Y -произвольный $\mathcal{F}ANR(\mathcal{E})$ и $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$. По теореме 9 Y является фундаментальным ретрактом некоторого $ANR(\mathcal{E})$ пространства Z. Тогда $sh_{\mathcal{E}} Y \le sh_{\mathcal{E}} Z$ и, следовательно, $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Z$; таким образом, X есть фундаментальный ретракт $ANR(\mathcal{E})$ пространства Z. Отсюда, $X \in FANR(\mathcal{E})$. Теорема доказана.

Следствие Пусть пространства $\pi(\mathcal{E})$ обладают $ANR(\mathcal{E})$-базой. Тогда для того, чтобы $\mathcal{E}$-компактное пространство было $FANR(\mathcal{E})$ необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $ANR(\mathcal{E})$ пространство Y, что $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$.

Доказательство. Если $X \in FANR(\mathcal{E})$, то по теореме 9 найдется такое $ANR(\mathcal{E})$ пространство Y, что X есть фундаментальный ретракт Y и, следовательно, $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$. Обратно, если $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$ и $Y \in ANR(\mathcal{E})$, то по теореме 10 $X \in FANR(\mathcal{E})$.

Выясним, наконец, вопрос, как связаны классы $\mathcal{F}ANR(\mathcal{E})$ для различных классов компактности.

Теорема II. Пусть $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ - два класса компактности и существует система $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, удовлетворяющая условиям $1^0, 2^0$ § I. Тогда $FANR(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2) = \mathcal{F}ANR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$.

Доказательство.

Пусть $X \in FANR(\mathcal{D})$ и X - $\mathcal{E}$-компактно; так как $\Omega(\mathcal{E}_i) \subset \Omega(\mathcal{D})$ ($i = 1,2$), то отсюда следует, что $X \in FANR(\mathcal{E}_i)$. Таким образом, $FANR(\mathcal{D}) \cap \Omega(\mathcal{E}_i) \subset FANR(\mathcal{E}_i)$. Покажем, что выполнено и обратное включение.

Если $X \in FANR(\mathcal{E}_i)$, то по теореме 8 существует такое $\mathcal{E}_i$ -компактное пространство Y, содержащее всюду плотное $ANE(\mathcal{E})$ пространство Y_0, что X является фундаментальным ретрактом Y. Более того, из доказательства теоремы 8 следует, что Y можно выбрать как подпространство некоторого $P \in \pi(\mathcal{E})$, а $Y_0 = \mathrm{Int}\, Y$, где внутренность берется в P. Включение $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}_i$ означает, что $\pi(\mathcal{D}) \supset \pi(\mathcal{E}_i)$

следовательно, Y является также и $\mathcal{D}$-компактным. Так как $\pi(\mathcal{D}) \subset ANE(\mathcal{D})$, все пространства $P \in \pi(\mathcal{E}_i)$ являются абсолютными окрестностными экстензорами для класса $\Omega(\mathcal{D})$, следовательно, и $Y_0 \in ANE(\mathcal{D})$. Итак, X есть фундаментальный ретракт $\mathcal{D}$-компактного пространства Y, содержащего всюду плотное $Y_0 \in ANE(\mathcal{D})$. По теореме 8 отсюда $X \in FANR(\mathcal{D})$. Имеем два равенства $FANR(\mathcal{E}_1) = FANR(\mathcal{D}) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$, $FANR(\mathcal{E}_2) = FANR(\mathcal{D}) \cap \Omega(\mathcal{E}_2)$, откуда получаем $FANR(\mathcal{E}_1) \cap \Omega(\mathcal{E}_2) = FANR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$.

Теорема доказана.

Следствие I. Пусть $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$, тогда $FANR(\mathcal{E}_1) = FANR(\mathcal{E}_2) \cap \Omega(\mathcal{E}_1)$

Следствие 2. Если $\Omega(\mathcal{E}_1) = \Omega(\mathcal{E}_2)$, то $FANR(\mathcal{E}_1) = FANR(\mathcal{E}_2)$

Таким образом, свойство пространства быть $FANR(\mathcal{E})$ зависит только от класса компактности, в котором определяется данный $FANR$ и не зависит от способа задания класса компактности.

§ 3. Фундаментальные абсолютные экстензоры. Фундаментальные абсолютные окрестностные экстензоры

Пусть $\mathcal{E}$ – некоторая система топологических пространств в смысле определений § I, и Y – некоторое топологическое пространство. Рассмотрим систему $\mathcal{D}$, для которой $\pi(\mathcal{D}) = \pi(\mathcal{E}) \cup \{Y\}$. (Заметим, что $\mathcal{D}$ вообще говоря, не удовлетворяет условиям I^0, 2^0 § I). Введем следующие определения:

Определение 9. Пространство Y назовем фундаментальным абсолютным экстензором в классе $\Omega(\mathcal{E})$ ($FAE(\mathcal{E})$), если для произвольного $\mathcal{E}$-компактного пространства X каждая фундаментальная направленность $\underline{f}$ из A[1] в Y (рассматриваемая как фундаментальная направленность в $\mathcal{D}$), имеет продолжение $\underline{\tilde{f}}$ из X в Y. При этом под продолжением понимается такая фундаментальная направленность $\underline{\tilde{f}}$, что $\underline{\tilde{f}}\,\underline{i} \simeq \underline{f}$, где $\underline{i}$ – фундаментальная направленность, порождаемая вложением $i: A \to X$ (ср. утверждение следствия I теоремы 6).

I A – замкнутое подмножество пространства X.

Определение 10. Пространство Y называется фундаментальным абсолютным окрестностным экстензором в классе $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ ($FANE(\mathcal{E})$), если для произвольного $\mathcal{E}$-компактного пространства X, его замкнутого подпространства A и произвольной фундаментальной направленности $\underline{f}: A \to Y$ (рассматриваемой как фундаментальная направленность в $\mathcal{D}$) найдется $\mathcal{E}$-компактная окрестность OA и фундаментальная направленность $\underline{\tilde{f}}: OA \to Y$, продолжающая $\underline{f}$.

Теорема 12. Если пространство Y является абсолютным экстензором для класса $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$, то Y есть и фундаментальный абсолютный экстензор в классе $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$. Другими словами, $AE(\mathcal{E}) \subset FAE(\mathcal{E})$.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $Y \in ANE(\mathcal{E})$, $X \in \mathfrak{S}(\mathcal{E})$ и $\underline{f}$-фундаментальная направленность из X в Y[1]. Тогда найдется такое отображение $g: X \to Y$, что фундаментальная направленность $\underline{g}$, порождаемая g, гомотопна фундаментальной направленности $\underline{f}$ ($\underline{f} \simeq \underline{g}$).

Доказательство.

Пусть i и j -такие замкнутые вложения пространств X, Y в $P \in \pi(\mathcal{E})$ и $Q \in \pi(\mathcal{D})$ соответственно, что $\underline{f}$ есть фундаментальная направленность из i в j. Пусть j' -тождественное вложение Y в $Y \in \pi(\mathcal{D})$. Нетрудно видеть, что вложение j гомотопически эквивалентно вложению j'; при этом тождественные отображения $\lambda: jY \to j'Y$ и $\lambda': j'Y \to jY$ порождают фундаментальные направленности $\underline{\lambda}: j \to j'$ и $\underline{\lambda}': j' \to j$ такие, что $\underline{\lambda}'\underline{\lambda} \simeq 1_j$, $\underline{\lambda}\underline{\lambda}' \simeq 1_{j'}$. Поскольку $j'Y = Y$, легко показать, что фундаментальная направленность $\underline{\lambda}\underline{f}: i \to j'$ порождается некоторым отображением $g': iX \to j'Y$. Отсюда следует, что отображение $g = \lambda' g'$ порождает фундаментальную направленность $\underline{g} = \underline{\lambda}'\underline{g}' = \underline{\lambda}'\underline{\lambda}\underline{f} \simeq \underline{f}$. Утверждение леммы доказано.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть $A \underset{cl}{\hookrightarrow} X$, X - $\mathcal{E}$-компактно, $Y \in AE(\mathcal{E})$ и $\underline{f}$ -некоторая фундаментальная направленность из A в Y. Согласно лемме 3 сущест-

---

[1] Здесь и в дальнейшем фундаментальные направленности рассматриваются в $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$.

вует отображение $f': A \to Y$, порождающее фундаментальную направленность $\underline{f}$, т.е. $\underline{f}' \simeq \underline{f}$. Поскольку $Y \in AE(\mathcal{E})$, отображение f' можем продолжить на все X $(\tilde{f}: X \to Y)$. Тогда, как нетрудно видеть, $\underline{\tilde{f}}\,\underline{i} = \underline{f}: A \to Y$, где $\underline{\tilde{f}}$ – фундаментальная направленность, порожденная $\tilde{f}$, а $\underline{i}$ порождается естественным вложением $i: A \to X$. Таким образом, $\underline{\tilde{f}}$ – продолжение фундаментальной направленности $\underline{f}$. Теорема доказана.

Совершенно аналогично, с помощью леммы 3, доказывается следующая

Теорема 12а. Если пространство Y является абсолютным окрестностным экстензором в классе $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, то Y и фундаментальный абсолютный окрестностный экстензор в $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. ($ANE(\mathcal{E}) \subset FANE(\mathcal{E})$.)

Выясним, как связаны между собой классы $\mathcal{F}AR(\mathcal{E})$ и $FAE(\mathcal{E})$. Предположим, что $\pi(\mathcal{E}) \subset AE(\pi(\mathcal{E}))$. Тогда справедлива следующая

Теорема 13. В категории $\mathcal{E}$-компактных пространств понятия фундаментального абсолютного ретракта и фундаментального абсолютного экстензора. Другими словами, $\mathcal{F}AR(\mathcal{E}) = \mathcal{F}AE(\mathcal{E}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Доказательство.

Включение $FAR(\mathcal{E}) \subset FAE(\mathcal{E})$ следует при указанных предположениях из следствия I теоремы 6. Обратно, пусть $X \in FAE(\mathcal{E}) \cap \mathcal{B}(\mathcal{E})$ и X – замкнутое подпространство $\mathcal{E}$-компактного пространства Y. Рассмотрим фундаментальную направленность $\underline{1}_X$, порожденную тождественным отображением X в X. Так как $X \in FAE(\mathcal{E})$, можем $\underline{1}_X$ продолжить до фундаментальной направленности $\underline{r}: Y \to X$. Нетрудно проверить, что $\underline{r}\,\underline{i} \simeq \underline{1}_X$, где i – вложение X в Y; следовательно, X есть фундаментальный ретракт Y и $X \in FAR(\mathcal{E})$.

Следствие I. (К. Борсук). В классе метрических компактов понятия FAR и FAE совпадают.

Следствие 2. (С. Мардешич). В классе бикомпактов понятия FAR и FAE совпадают.

Следствие 3. В классе полных в смысле Чеха паракомпактов понятия FAR и FAE совпадают.

Соотношение между классами $FANR$ и $FANE$ устанавливает

Теорема I4. В категории $\mathcal{E}$-компактных пространств понятия фундаментального абсолютного окрестностного ретракта и фундаментального абсолютного экстензора совпадают. Другими словами, $FANR(\mathcal{E}) = FANE(\mathcal{E}) \cap \mathcal{Q}(\mathcal{E})$.

Доказательство.

Пусть $X \in FANE(\mathcal{E})$, $X \in \mathcal{Q}(\mathcal{E})$ и $\mathcal{E}$-компактное пространство Y содержит X как замкнутое подпространство. Рассмотрим фундаментальную направленность, порожденную тождественным отображением $\underline{1}_X : X(\subset Y) \to X$ и, воспользовавшись тем, что $X \in FANE(\mathcal{E})$, продолжим ее на некоторую окрестность OX в Y; при этом OX можем выбрать $\mathcal{E}$-компактной. Обозначим это продолжение $\underline{r}$ ($\underline{r} : OX \to X$). Если $\underline{i}$ - фундаментальная направленность, порождаемая замкнутым вложением $i : X \to OX$, то, как нетрудно проверить, $\underline{r}\,\underline{i} \simeq \underline{1}_X : X \to X$, т.е. $\underline{r}$ является фундаментальной ретракцией и $X \in FANR(\mathcal{E})$.

Обратно, пусть $X \in FANR(\mathcal{E})$, тогда, согласно теореме 8 найдется такое $\mathcal{E}$-компактное пространство Y, содержащее всюду плотное $ANE(\mathcal{E})$-пространство Y_0, что X является фундаментальным ретрактом Y. Обозначим через $\underline{r}$ соответствующую фундаментальную ретракцию. Пусть A - замкнутое подпространство $\mathcal{E}$-компактного пространства Z и $\underline{f}$ - фундаментальная направленность из A в Y. Поскольку $X \subset Y_0 \subset Y$ мы вправе рассматривать $\underline{f}$ как фундаментальную направленность из A в Y_0; тогда по теореме I2 можем продолжить $\underline{f}$ на некоторую окрестность OA в Z, и пусть $\underline{\tilde{f}}$ - соответствующее продолжение. Таким образом, имеем $\underline{\tilde{f}}\,\underline{i} \simeq \underline{f}$, где $\underline{i}$ - фундаментальная направленность, порожденная вложением $i : A \to OA$. Положим, наконец, $\underline{g} \underset{\mathrm{df}}{=} \underline{r}\,\underline{\tilde{f}} : X \to X$. Как легко видеть, имеет место следующие равенства $\underline{g}\,\underline{i} = \underline{r}\,\underline{\tilde{f}}\,\underline{i} \simeq \underline{f}\,\underline{i} = \underline{f}$. Отсюда, фундаментальная направленность $\underline{g}$ является продолжением фундаментальной направленности $\underline{f}$ на окрестность OA, и следовательно, $X \in FANE(\mathcal{E})$

Теорема доказана.

§ 4. Подвижность

Определение II. $\mathcal{E}$-компактное пространство X называется подвижным при вложении i, где $i: X \to P \in \pi(\mathcal{E})$ если для произвольной окрестности $\mathcal{U}$ пространства iX в P найдется такая окрестность $\mathcal{U}_1$, что для любой меньшей окрестности $\mathcal{U}_2 (\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1)$ существует функция φ из $\mathcal{U}_1$ в $\mathcal{U}_2$, которая гомотопна в $\mathcal{U}$ тождественному отображению $1_{\mathcal{U}_1}: \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_1$. (Другими словами, это означает, что $\mathcal{U}_1$ стягиваема в $\mathcal{U}$ в любую меньшую окрестность $\mathcal{U}_2$.)

Если $\mathcal{E}$-компактное пространство X подвижно при каждом вложении $i: X \to P \in \pi(\mathcal{E})$, то X назовем подвижным в классе компактности $\Omega(\mathcal{E})$.

Справедливы следующие предложения.

Предложение 7 Бикомпакт X подвижен в классе бикомпактов тогда и только тогда, когда он подвижен в смысле С. Мардешича ([9]).

Предложение 8. Метрический компакт подвижен в классе метрических компактов тогда и только тогда, когда он подвижен в смысле Борсука ([3]).

Теорема I5. Пусть X, Y - $\mathcal{E}$-компактные пространства, $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$ и i, j -замкнутые вложения ($i: X \to P$, $j: Y \to Q$, $P, Q \in \pi(\mathcal{E})$). Тогда, если Y подвижен при вложении j, то и X подвижен при вложении i.

Доказательство.

Так как $sh_{\mathcal{E}} X \le sh_{\mathcal{E}} Y$, найдутся фундаментальные направленности $\underline{f}$ из i в j и $\underline{g}$ из j в i такие, что $\underline{g}\underline{f} \simeq \underline{1}_i$, $\underline{f}\underline{g} \simeq \underline{1}_j$. Пусть $\underline{X}$, $\underline{Y}$ -спектры окрестностей iX в P и jY в Q соответственно и $\mathcal{U} \in \underline{X}$. Из того, что $\underline{g}\underline{f} \simeq \underline{1}_i$, следует, что существуют такие $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \underline{X}$, $V_1 \in \underline{Y}$ и такие $f_1 \in \underline{f}$, $g_1 \in \underline{g}$, где $f_1: \mathcal{U}_1 \to V_1$, $g_1: V_1 \to \mathcal{U}_2$, для которых композиция $g_1 f_1$ гомотопна в $\mathcal{U}$ тождественному отображению $1_{\mathcal{U}_1}$.

Пространство Y подвижно при вложении j, следовательно, найдется такая окрестность V_3, что для произвольной $V_4 \subset V_3$ существует функция $\varphi: V_3 \to V_4$, гомотопная 1_{V_3} в V_1. Положим $\mathcal{U}_3 \underset{\text{df}}{=} f_1^{-1}(V_3)$, ограничение функции f_1 на окрестность $\mathcal{U}_3$ обозначим f_3. Пусть окрестность $\mathcal{U}_4$ содержится в $\mathcal{U}_3$; положим $V_4 = g_1^{-1}(\mathcal{U}_4)$ и g_4 – ограничение функции g_1 на $V_4 \subset V_1$. Согласно выбору окрестности V_3, существует функция, $\varphi : V_3 \to V_4$, гомотопная 1_{V_3} в V_1. Отсюда, как легко проверить, следует, что композиция отображений $g_4 \varphi f_3$ гомотопна в окрестности $\mathcal{U}$ тождественному отображению $1_{\mathcal{U}_3}$. Итак, пространство X подвижно при вложении j.

Следствие I. Если $\mathcal{E}$-компактное пространство подвижно при некотором вложении $i : X \to P$, то оно подвижно и во всем классе компактности. Таким образом, понятие подвижности не зависит от выбора замкнутого вложения.

Следствие 2. Если X, Y – $\mathcal{E}$-компактное пространство, $sh_{\mathcal{E}} X \leq sh_{\mathcal{E}} Y$ и Y подвижен в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$, то и X подвижен в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$.

Следствие 3. Если $X \in ANR(\mathcal{E})$, то X подвижен в классе компактности $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$.

Доказательство.

Рассмотрим вместо системы $\mathcal{E}$ систему $\mathcal{E}'$, для которой $\pi(\mathcal{E}') = \pi(\mathcal{E}) \cup \{X\}$. Поскольку $X \in ANR(\mathcal{E})$, система $\mathcal{E}'$ удовлетворяет условиям $I^0, 2^0$ § I. Рассмотрим теперь вложение $i : X \to X \in \pi(\mathcal{E}')$. Очевидно, что X подвижен при вложении i, отсюда по следствию I X подвижен в классе компактности $\mathfrak{K}(\mathcal{E}')$, а следовательно, и в классе компактности $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$.

Пусть пространства класса $\pi(\mathcal{E})$ обладают $ANR(\mathcal{E})$-базой. Тогда из следствий 2,3 и утверждения теоремы 9 получаем.

Следствие 4. Если $X \in FANR(\mathcal{E})$, то X подвижен в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E})$.

Теорема I6. Пусть $X \in \mathfrak{K}(\mathcal{E}_1) \cap \mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$ и существует система $\mathcal{D} \supset \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, удовлетворяющая условиям $I^0, 2^0$ § I. Тогда если X подвижен в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_1)$, то X подвижен и в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$ и наоборот.

Доказательство.

Так как X подвижен в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_1)$ и $\pi(\mathcal{D}) \supset \pi(\mathcal{E}_1)$, то согласно следствию I теоремы I4 пространство X подвижно и в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{D})$. Тогда, очевидно, пространство X подвижно и в классе $\mathfrak{K}(\mathcal{E}_2)$.

Пользуясь случаем, рад выразить глубокую благодарность профессору Ю.М.Смирнову за постоянную помощь в работе, ценные советы и указания.

Литература

1. Борсук К. Теория ретрактов. М. "Мир", 1972.
2. Engelking R. Zarys topologii ogolnej. Warszawa 1968.
3. Borsuk K. A note on the theory of shape of compacta, Fund. Math. 67 /1970/ 265 - 278.
4. Borsuk K. Fundamental retracts and extensions of fundamental sequences, Fund. Math. 64 /1969/ 55 - 85.
5. Borsuk K. On the shape of FANR - sets, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci Math. 17 /1969/ 529 - 532.
6. Mardešić S., Segal J. Shapes of compacta and ANR - systems, Fund. Math. 72 /1971/ 57 - 75.
7. Mardešić S., Segal J. Equivalence of the Borsuk and the ANR - system approach to shapes, Fund. Math. 72 /1971/ 77 - 84.
8. Mardešić S., Segal J. Movable compacta and ANR - systems, Bull. Acad. Polon. SCi. Ser. Sci Math. 18 /1970/ 649 - 654.
9. Mardešić S. Retracts in shape theory. Glasnik Matem. Vol 6 /26/ N1 /1971/ 154 - 163.
10. Fox R.H. On Shape. Fund. Math. 74 /1972/.
11. Шостак А. Шейпы в классах компактности. - ДАН СССР, 1974, т.214, №1.
12. Шостак А. Характеристика класса полных в смысле Чеха паракомпактов как класса $\mathcal{E}$-компактности. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. /1974/. 22 №8

Н.В.Энгеле, Г.К.Энгелис

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ

Последовательностью полиномов в этой статье называется последовательность элементов вида

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x^k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \qquad \text{(I)}$$

где все a_{nk} - действительные числа и все $a_{nn} \neq 0$. Множество всех полиномов от x над полем действительных чисел R обозначим через Π. Билинейный симметричный функционал I, определенный на $\Pi \times \Pi$ со значениями из R, называется скалярным произведением на Π, если из $p \neq 0$ следует $I(p, p) > 0$.

Последовательность полиномов (I) ортогональна по отношению к скалярному произведению I, если из $m \neq n$ следует $I(P_m, P_n) = 0$. Обычно термин "ортогональная последовательность полиномов" применяется только тогда, если

$$I(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) q(x)\, d\sigma(x),$$

где $\sigma(x)$ - неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста и ограниченной вариацией на $(-\infty, +\infty)$. В этом случае скалярное произведение легко продолжается от Π на $\mathcal{L}^2_\sigma$. Мы покажем (используя идею Альтгаммера /I/), что любая последовательность полиномов ортогональна относительно некоторого скалярного произведения, определенного на Π при помощи интегралов. Продолжение такого скалярного произведения в этой статье не рассматривается, но ясно, что в некоторых случаях (например, если в (2) все $\sigma_k(x) = 0$ при $k > K$) оно легко осуществимо.

2. Теорема. Для каждой последовательности полиномов и для какой последовательности положительных чисел D_n существует такая последовательность $\sigma_n(x)$ функций с ограниченной вариацией на $(-\infty, +\infty)$, что

1) функционал

$$I(p,q)=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p^{(k)}(x)\, q^{(k)}(x)\, d\sigma_k(x) \tag{2}$$

является скалярным произведением на Π ($p^{(k)}$ - производная порядка k от p);

2) при $m \neq n$

$$I(P_m, P_n)=0; \tag{3}$$

3) для каждого целого неотрицательного n

$$I(P_n, P_n)=D_n. \tag{4}$$

Доказательство.

а) Факт существования в Π скалярного произведения, относительно которого ортогональна последовательность (I), почти очевиден: достаточно определить билинейный функционал I на множестве всех пар (P_m, P_n) при помощи равенств (3) и (4) и потом продолжить на $\Pi \times \Pi$, используя то обстоятельство, что каждый $p \in \Pi$ представим в виде $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$. Так как из неравенства $\sum_{k=0}^{n} |\alpha_k| \neq 0$ следует

$$I(p,p)=I\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k, \sum_{k=0}^{n}\alpha_k P_k\right)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^2 D_k>0,$$

то I - скалярное произведение на Π.

б) Укажем теперь другой способ задания скалярного произведения I. Так как при каждом натуральном n матрица

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

несингулярна, то существует и

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} b_{00} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

и из (I) следует

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} b_{mk} P_k(x).$$

Но тогда

$$I(x^m, x^n) = c_{mn}, \tag{5}$$

где

$$c_{mn} = \sum_{k=0}^{M} b_{mk} b_{nk} D_k, \quad M = \min\{m, n\}$$

и скалярное произведение $I(p,q)$ полностью характеризуется симметричной бесконечной матрицей $C = (c_{mn})_0^\infty$.

в) Функционал, заданный равенством (5), называется функционалом Ганкеля, если значение элемента c_{mn} зависит только от суммы индексов $m+n$. Покажем, что для каждого симметричного и билинейного функционала I , заданного формулой (5), можно указать такую последовательность функционалов Ганкеля I_j ($j = 0,1,2,\ldots$), что для всех $p,q \in \Pi$

$$I(p,q) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j\left(p^{(j)}, q^{(j)}\right). \tag{6}$$

Для этой цели положим

$$I_j\left(x^m, x^n\right) = c_{m+n}^{(j)};$$

тогда (6) равносильно равенству

$$c_{mn} = \sum_{j=0}^{M} \frac{m!\,n!}{(m-j)!\,(n-j)!}\, c_{m+n-2j}^{(j)},$$

где $M = \min\{m, n\}$. При $n = 0,1,2,\ldots$ это дает

$$c_{m0} = c_m^{(0)}; \quad (m \geqslant 0)$$

$$c_{m1} = c_{m+1}^{(0)} + m\,c_{m-1}^{(1)}; \quad (m \geqslant 1)$$

$$c_{m2} = c_{m+2}^{(0)} + 2m\,c_m^{(1)} + 2m(m-1)\,c_{m-2}^{(2)}; \quad (m \geqslant 2)$$

и т. д., откуда легко найти все $c_m^{(j)}$.

г) Остается еще показать, что для любого функционала Ганкеля найдется такая функция $\sigma(x)$ с ограниченной вариацией на $(-\infty, +\infty)$,что

$$I\left(x^m, 1\right) = c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m\, d\sigma(x) \qquad (m = 0,1,2,\ldots).$$

Известно /2/, что если последовательность чисел c_m позитивная, т.е.

$$\begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \cdots & d_n \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_n & d_{n+1} & \cdots & d_{2n} \end{vmatrix} > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (7)$$

то существует неубывающая функция $\sigma_1(x)$ с бесконечным множеством точек роста и ограниченной вариацией на $(-\infty, +\infty)$, для которой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^m \, d\sigma_1(x) = d_m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots) \quad (8)$$

Покажем, что любая последовательность действительных чисел c_m является разностью двух позитивных последовательностей. Для этого строим индуктивно позитивную последовательность d_m так, чтобы последовательность $d_m + c_m$ тоже была позитивной. Возьмем $d_0 > \max\{0, -c_0\}$ и, если $d_0, d_1, \ldots d_{2n-2}$ уже известны, то d_{2n-1} выбираем произвольно, а от d_{2n} потребуем выполнение двух неравенств: (7) и

$$\begin{vmatrix} c_0+d_0 & c_1+d_1 & \cdots & c_n+d_n \\ c_1+d_1 & c_2+d_2 & \cdots & c_{n+1}+d_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n+d_n & c_{n+1}+d_{n+1} & \cdots & c_{2n}+d_{2n} \end{vmatrix} > 0,$$

что всегда возможно, так как коэффициенты при d_{2n} в обоих неравенствах положительны. Но если выполняется (8) и

$$c_m + d_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \, d\sigma_2(x),$$

то

$$c_m = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m \, d\left(\sigma_2(x) - \sigma_1(x)\right),$$

где $\sigma_2(x) - \sigma_1(x)$ - функция с ограниченной вариацией. Теорема доказана.

3. Из пункта г) доказательства теоремы видно, что выбор функций $\sigma_k(x)$ допускает большую степень произвола. В следующих примерах покажем только по одной допустимой последовательности $\sigma_k(x)$ для каждой рассматриваемой последовательности полиномов.

Пример I. Пусть $P_n(x) = x^n$. Легко убедиться, что можно выбрать $\sigma_k(x)$ следующим образом

$$\sigma_k(x) = \frac{D_k}{2(k!)^2} \operatorname{sgn} x.$$

Пример 2. Пусть $P_n(x)$ - последовательность полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \left(2^n n!\right)^{-1} \left[\left(x^2 - 1\right)^n\right]^{(n)}.$$

Известно /3/, что производные этих полиномов выражается через полиномы Гегенбауэра

$$P_n^{(k)}(x) = (2k-1)!! \, C_{n-k}^{(2k+1)/2}(x),$$

а $C_n^\lambda(x)$ ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $(1-x^2)^{(2\lambda-1)/2}$ и, кроме того,

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{(2\lambda-1)/2} \left[C_n^\lambda(x)\right]^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}\,(2\lambda)_n \, \Gamma(\lambda + \frac{1}{2})}{(n+\lambda)\, n! \, \Gamma(\lambda)}.$$

Отсюда легко следует, что

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(k)}\left[P_n^{(k)}(x)\right]^2 dx = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,(n+\frac{1}{2})}.$$

Поэтому в данном случае можно положить

$$d\sigma_k(x) = \begin{cases} \beta_k(1-x^2)^k dx, & x \in [-1,1] \\ 0, & x \,\bar{\in}\, [-1,1], \end{cases}$$

где числа β_k находятся из системы

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!\,\beta_k}{(n-k)!\,(n+\frac{1}{2})} = D_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 3. Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ и $P_0(x) = 1$, $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. В этом случае можно положить

$$\sigma_0(x) = \frac{D_0}{2}\,\mathrm{sgn}\, x$$

и при $k > 0$

$$d\sigma_k(x) = \left[\sum_{j=1}^{k} \rho_{kj}(x)\right] dx,$$

где функции $\rho_{kj}(x)$ определяются рекуррентно по k из условий

а) $\rho_{kj}(x) = 0$ при $x \,\bar{\in}\, [x_{j-1}, x_j]$;

б) $\sum_{i=j}^{k} (-1)^i \left[P_k^{(i)}(x)\rho_{ij}(x)\right]^{(i)} = 0$ при $x \in [x_{j-1}, x_j]$;

в) $\rho_{k1}^{(i)}(x_0)=0\ ,\ i=0,1,2,\dots,k-2;$

$$\rho_{kj}^{(i)}(x_j)=\rho_{k,j+1}^{(i)}(x_j)\ ;\ i=0,1,2,\dots,k-2,$$
$$j=1,2,3,\dots,k-1;$$

$$\rho_{kk}^{(i)}(x_k)=0\ ,\ i=0,1,2,\dots,k-2;$$

$$(-1)^k k!\prod_{i=0}^{k-1}(x_k-x_i)\,\rho_{kk}^{(k-1)}(x_k)=D_k.$$

(Функции $\rho_{k1},\rho_{k2},\dots,\rho_{kk}$ должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений б), где ρ_{ij} с $i<k$ уже известны, а также граничным условиям в)). Условия существования таких функций ρ_{kj} исследовать здесь не будем. Если постулировать выполнение условий а), б), в), то, используя интегрирование по частым, легко показать, что при $n\geqslant k$

$$I(P_k,P_n)=(-1)^{k-1}k!\,\rho_{kk}^{(k-1)}(x_k)P_n(x_k)$$

и достаточно заметить, что $P_k(x_k)=\prod_{i=0}^{k-1}(x_k-x_i)$ и

$P_n(x_k)=0$, если $n>k$.

Литература

I. Althammer P. Eine Erweiterung des Orthogonalitäts - begriffes bei Polynomen und deren Anwendung auf die beste Approximation. - Journal für die reine und angewandte Mathematik, 211, 1962, No. 3-4, 192-204.

2. Ахиезер Н.И. Классическая проблема моментов. М., Физматгиз, 1961.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., "Наука", 1966.

А Н Н О Т А Ц И И

УДК 513.83.

Характеризация некоторых классов топологических пространств, связанная с расходящимися сетями. Гольдман М.А., Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки 1975г., т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1., стр.3-14.

В статье изучается взаимодействие между топологическими пространствами и определенными на них семействами вещественных функций: ограниченных, непрерывных ограниченных, всех непрерывных и непрерывных с компактным носителем. Средством для выявления этого взаимодействия служат расходящиеся сети. В терминах расходящихся сетей характеризуются компактные, нормальные компактные, вполне регулярные, регулярные локально компактные и нормальные пространства.

Библиогр. - 4 назв.

УДК 519.53.

О нормальной разрешимости уравнений в пространствах с мерой. Жданок Т.А. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки 1975г.т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр.15-27.

С помощью стандартного перехода от пространств с мерой к метрическому пространству на него переносятся известные результаты о нормальной разрешимости уравнений в топологических пространствах с той разницей, что рассматриваемые отображения обладают свойством аддитивности. Исследуется вопрос о продолжении непрерывной аддитивной функции множества.

Библиогр. -4 назв

УДК 513.88.

О секвенциально компактной аппроксимации отображений. Лиепиньш А.Х. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки 1975г.,т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр,28-38.

В работе строится отделимая локально выпуклая топология векторного пространства линейных непрерывных отображений, которая мажорирует топологию равномерной сходимости на всех предкомпактных множествах и в которой сходится каждая последовательность отображений, секвенциально компактно аппроксимирующая некоторое отображение.

Библиогр. - 5 назв.

УДК 513.88.

О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. Лабеев В.И. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки., 1975г.,т.236.

Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр.39-58.

В работе изучается устойчивость непрерывности и замкнутости линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации, вопросы о секвенциально компактной аппроксимации обратных к линейным непрерывным и линейным замкнутым отображениям, необходимое и достаточное условие непрерывной обратимости линейных отображений. Кроме того, выяснено условие эквивалентности секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью по норме.

Библиогр. 4 назв.

УДК 513.88.

Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации в банаховых пространствах. Лабеев В.И. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки., 1975г., т. 236.

Топологические пространства и отображения в них. Вып.1. стр. 59-75.

В работе получены результаты об устойчивости спектральных свойств, дополняющие исследования Г.М.Вайникко на случай линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах, а так же получены аналогичные результаты на случай линейных замкнутых отображений. Кроме того, в статье показана непрерывность спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации. Приведены примеры, иллюстрирующие доказанные теоремы.

Библиогр. -6 назв.

УДК 513.88.

Об устойчивости секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации.

Лабеев В.И. Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки., 1975г., т. 236.

Топологические пространства и отображения в них. Вып.1. стр. 76-90.

Основными результатами статьи являются теоремы о сохранении секвенциальной предкомпактности и предкомпактности отображений при секвенциально предкомпактной и секвенциально компактной аппроксимациях. Кроме того, показана устойчивость компактности резольвенты линейных замкнутых отображений при секвенциально компактной аппроксимации, а так же устойчивость конечномерности и бесконечномерности проекторов при секвенциально компактной аппроксимации в нормированных пространствах.

Библиогр. - 4 назв.

УДК 513.88.

Сохранение индекса линейных замкнутых отображений с замкнутой областью значений в банаховых пространствах при секвенциально компактной аппроксимации.Левченков В.С.Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки.,1975г.,т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр.91-96.

В работе доказан ряд теорем,устанавливающих инвариантность индекса при секвенциально компактной аппроксимации для замкнутых отображений с замкнутой областью значений в случае банаховых пространств.

Библиогр. -2 назв.

УДК 513.88.

Примеры линейных гомоморфизмов в банаховых пространствах с базисом Шаудера,секвенциально компактно аппроксимируемых линейными непрерывными отображениями.Левченков В.С.Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки.,1975г.,т. 236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр.97-102.

В статье строятся примеры линейных гомоморфизмов с конечным или бесконечным индексом банахова пространства с базисом Шаудера в себя,секвенциально компактно аппроксимируемые не сходящимися по норме последовательностями линейных непрерывных отображений.

Библиогр. 4 назв.

УДК 513.88.

О связи секвенциально компактной аппроксимации со сходимостью по норме для последовательностей линейных непрерывных отображений в нормированных пространствах. Левченков В.С.Уч.зап.ЛГУ им.П.Стучки.,1975.,т. 236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1.стр.103-107.

В статье приводится необходимое и достаточное условие для сходимости последовательности линейных непрерывных отображений к линейным непрерывным отображениям по норме в действительном или комплексном нормированном пространстве.

УДК 513.83.

Шейпы в классах компактности: ретракты, экстензоры, подвижность. Шостак А.П. Уч.зап. ЛГУ им.П.Стучки. 1975. т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1. стр.108-128.

Основные понятия борсуковой теории ретрактов распространяются на шейпы в классах компактности, определенных автором ранее (ДАН СССР, т.214, №1). Развивается соответствующая теория.

Библиогр. -12 назв.

УДК 517.51.

Об ортогональности последовательности полиномов. Энгеле Н.В., Энгелис Г.К. Уч.зап. ЛГУ им.П.Стучки 1975. т.236. Топологические пространства и отображения в них. Вып.1. стр.129-137.

Показано, что произвольная последовательность полиномов над R ортогональна относительно некоторого скалярного произведения, определенного при помощи интегралов от произведений, производных от полиномов данной последовательности.

Библиогр. - 3 назв.

A N N O T A T I O N S

UDK 513.83

A characterization of some classes of topological spaces by means of divergent nets. Goldman M.A. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236., .1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 3 - 14.

The connection between topological spaces and some families of real valued functions (bounded, continuous bounded, all continuous, continuous with compact support) is studied in the paper; all the characteristics obtaind are based on the consideration of divergent nets in spaces. By this method the following classes of topological spaces are characterized: compact, normal compact, completely regular, locally compact regular and normal spaces.

Bibliography - 4 names.

UDK 519.53

On On normal solvability of equations in spaces with measure. Ždanok T.A. Učenije zapisky of Latvian State University, vol. 236., ,1975, Topological spaces and their mappings, issue 1 , 15 - 27.

Some known rezults conserning normal solvability of equations in topological spaces are transfered to spaces with measure. The problem when the continuous additive set function may be extended is studied.

Bibliography - 4 names.

UDK 513.88

On sequentially compact approximation of mappings. Liepinš A.H. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236 ,1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 28 - 38.

An example of a Hausdorff locally convex topology in the vector space of linear continuous mappings. This topology is firer, than the one of uniform convergence and every sequence of mappings, which sequencially compact approximizes a mapping, converges in this topology.

Bibliography - 5 names.

UDK 513.88

On some properties of sequentially compact approximation of linear mappings in normed spaces. Labejev V.I. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236. , Topological spaces and their mappings, issue1,39-58.

The stability of various properties of operators (such as continuity, closeness, relative openness and others) is studied in the paper.

Bibliography - 4 names.

UDK 513.88

Stability of spectral properties of linear mappings under sequentially compact approximatin in Banach spaces. Labejev V.I. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol.236. Topological spaces and their mappings, issue 1, 59 - 75.

The converence of spectors and Riss proectors under the compact approximation of operators is studied. The rezults obtained in the paper are associated with the analogous rezults of prof. Vainiko . It is proved also, that the spector of continuous mappings is continuous under sequential approximation. Examples, illustrating the theorems are giver.

Bibliography - 6 names.

UDK 513.88

On stability of sequentially compact mappings in topological vector spaces under sequentially precompact approximation. Labejev V.I. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236. ,1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 76 - 9o.

It is proved that a linear operator having a compact approximation by completely continuous is completly continuous itself. Such properties as finite or infinite range of an projector are invariant under sequentially compact approximation in normed spaces.

Bibliography - 4 names.

UDK 513.88

Invariance of index of linear closed operators with a closed range in Banach spaces under sequentially compact approximation. Levčenkov V.S. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol.236 , 1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 91 - 96.

The rezult formulated in the title is proved.

Bibliography - 2 names.

UDK 513.88

Some examples of linear homemorfisms concerning Banach spaces with Šauder basis which are sequentially compact appriximized by linear continuous operators. Levčenkov V.S. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236. , 1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 97 - 1o2.

Some examples concerning homomorfisms with finite and infinite index are constructed.

Bibliography - 4 names.

UDK 513.88

On connection between sequentially compact approximation and norm convergence ofor sequences of linear continuous operators in normed spaces. Levčenkov V.S. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236 , 1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 1o3 - 1o7.

A necessary and sufficient condition for a sequence of continuous operators to converge to a linear continuous operator is proved.

Bibliography - 2 names.

UDK 513.83

Shapes in classes of compactness: Retracts, extensors, movability. Šostak A.P. Učenije Zapisky of Latvian State University, vol. 236. , 1975, Topological spaces and their mappings, issue 1,1o8-128.

The basic notions of the Borsuk's theory of retracts are extended to shapes in classes of compactness. The corresponding theory is developed.

Bibliography - 12 names.

UDK 517.51

On ortogonality of sequence of polinomials.Engele N.V..Engelis G.K. Učenije Zapisky of Latvian State University,vol. 236. ,1975, Topological spaces and their mappings, issue 1, 129 - 137.

An arbitrary sequence of polinomials is proved to be orthogonal with respect to a scalar product defined by a sum of integrals containing products of derivatives of these polynomials.

Bibliography - 3 names.

СОДЕРЖАНИЕ.

Ученые записки, том 236

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И
ОТОБРАЖЕНИЯ В НИХ
Выпуск I

Редактор Я.Энгельсон
Технический редактор Г.Энгелис
Корректор В.Лабеев

Латвийский государственный университет
Рига 1975

Подписано к печати 08.07.1975. ЯТ I22II Зак.№ 881.
Ф/б 60x84/I6. Бумага №I. Физ.п.л. 9,5. Уч.-и.л. 7,5
Тираж 400 экз. Цена 75 к.

Отпечатано на ротапринте, Рига-50, ул.Вейденбаума,5
Латвийский государственный университет им. П.Стучки

Цена 75 к.

Учен. зап. (ЛГУ им. Петра Стучки), 1975, т.236, I-147