



LATVIJAS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

576

**МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИКА**

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

Matemātiskās analīzes katedra

M A T E M Ā T I K A

Zinātniskie raksti

576.sējums

Latvijas Universitāte

Rīga 1992

MATEMĀTIKA

Matemātika: Zinātniskie raksti / Atb.red. A.Šostaks.
Kuga: LV, 1992. - 576 sēj. - 211 lpp.

Krājumā publicēti zinātniskā darba rezultāti, kas iegūti 1990. - 1991.g. LU matemātikas katedru un LU Matemātikas un informatikas institūta docētāju, darbinieku un aspirantu darbos. Krājumā ir iekļauti arī dažu citu iestāžu un augstskolu speciālistu darbi, kas iegūti ciešā sadarbībā ar LU matemātiķiem. Krājumā ietvertie raksti netiek recenzēti.

В сборник включены результаты научных работ, полученных сотрудниками и аспирантами математических кафедр Латвийского Университета за период 1990 - 1991 гг., Института математики и информатики Латвийского Университета, а также работы специалистов других вузов и учреждений, сотрудничающих с математиками Латвийского университета. Включенные в сборник рукописи, как правило, не рецензируются.

The Transactions contain the results of the investigations made in 1990 - 1991 by lecturers, research workers and post-graduate students of the Department of Mathematics and the Institute of Mathematics and Computer Sciences of the Latvian University. Besides, in the Transactions are included results of the investigations made by some specialists from other Universities and Institutes collaborating with mathematicians of Latvian University. The works included in the Transactions generally are not reviewed by referees.

REDAKCIJAS KOLEĢIJA:

A.Šostaks (atb. redaktors), S.Asmiņš, I.Galiņa, J.Lapiņš

Zinātniskie raksti

LU Matemātiskās
analīzes katedra

LU Matemātikas un
informātikas
institūts

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра. Логика

Булс Я. Моделирование автоматов как частично упорядоченное множество	7
Булс Я. Моделирование автоматов не образует полурешетку	13
Штейнбук В. Множества неподвижных языков и полугруппы эндоморфизмов свободных монотонных	24
Цирулис Я. Сверхдиагонали универсальных алгебр	29

Топология

Агеев С. Об эквивариантном гомотопическом типе	37
Бургин М., Шостак А. К теории дефекта и меры непрерывности для отображений метрических пространств	45
Вектомер Е., Повинцев А. Идемпотентные и полуперзичные идеалы в кольцах непрерывных функций	63
Гольдман М. Сглазыч в пространствах непрерывных функций	75
Заричный М. О некоторых категорных свойствах вероятностных мер	81
Королев А. Некоторые аналоги теоремы Архангельского-Питкеева в S_p -теории	91
Райтун У. Об аппроксимации многозначных отображений	97

Численный анализ

Асчусс С. Об одном экстремальном свойстве сплайн-функций двух переменных	111
Белов М. Асимптотическое решение смешанной параболической задачи с разрывными начальными условиями. 2	127
Цирулис Т. Асимптотические представления остатков квадратурных формул Гаусса	145
Цирулис Т., Нейманис В. Расчет собственных частот и форм ортотропных конических оболочек	157
Мельник С. Исследование невязной линеаризованной разностной схемы для нестационарной задачи Навье-Стокса	167

Дифференциальные уравнения

Каленни Д., Цирулис Т. Фундаментальная система решений для одного уравнения L -ого порядка	181
Цибулис А. Пример, иллюстрирующий некоторые свойства решения системы эллиптических уравнений в двухфазной среде ...	185

Функциональный анализ

Галкина И. О строгой выпуклости	192
Капраде И., Лиспиньш А. О неподвижных точках отображений	199
Калленин С. Об аппроксимации решений однородного уравнения n -сторонней свертки с максимальным индикатором	201
Пономарев В. О неликомпактных операторах	207

SATURA RĀDĪTĀJS

Algebra. Lōkika

J. Buls.	Automātu modelēšana kā daļēji sakārtota kopa	7
J. Buls.	Automātu modelēšana nerada puarežģi	13
V. Šteinbuka.	Nekustīgu valodu kopas un brīvu monoīdu endomorfismu pusgrupas	24
J. Čirulis.	Universālo algebru superdiagonāles	29

Topoloģija

S. Agejevs.	Par ekvivalentu homotopijas tipu	37
M. Burgins, A. Šostaks.	Metrisku telpu attēlojumu nepārtrauktības defekta un mēra teorijas pamati	45
E. Večtomovs, A. Poviševs.	Idempotentie un pusprimārie ideāli nepārtrauktu funkciju gredzenos	63
M. Goldmans.	Splaini nepārtrauktu funkciju telpās	75
M. Zaričņijs.	Par dažām varbūtības mēra kategorijas īpašībām ..	81
A. Korovins.	Daži Arhangel'ska-Pitkejeva teoremas analogi C_p -teoriā	91
U. Raitums.	Par daudzvērtīgu attēlojumu aproksimāciju	97

Skaitliskā analīze

S. Asmuss.	Par divargumentu splain-funkciju vienu ekstremālo īpašību	111
M. Belovs.	Jaukta veida paraboliskas problēmas asimptotisks atrisinājums ar pārtrauktām funkcijām sākuma nosacījumos. 2	127
T. Čirulis.	Gausa tipa kvadrātu formulu atlikumu asimptotika ..	145
T. Čirulis, V. Neimanis.	Ortotropu konisku čaulu īpašfrekvenču un īpašformu aprēķināšana	157
S. Melņiks.	Nestacionārā Navjē-Stoksa uzdevuma netiešās linearizētās diferenciāli shēmas izpēte	167

Diferenciālvienādojumi

D. Kalniņa, T. Čirulis.	Fundamentālā atrisinājumu sistēma n -tās kārtas diferenciālvienādojumam	181
A. Cibulis.	Piemērs, kurš ilustrē eliptisku vienādojumu sistēmas atrisinājuma dažas īpašības divfāzu zonā	185

Funkcionālā analīze

I. Galipa.	Par stingro izliektību	192
I. Koprāne, A. Liepiņš.	Par attēlojumu nekustīgiem punktiem ...	199
S. Kalipins.	Par q -maļu konvolūcijas homogēna vienādojuma atrisinājumu aproksimāciju	201
V. Ponomarejova.	Par deskompaktiem operatoriem	207

CONTENTS

Algebra, Logic

J. Buls.	Automata's simulation as a partially ordered set..	7
J. Buls.	Automata simulation isn't a semilattice	13
V. Shteinbuk.	Sets of fixed languages and endomorphism semi-groups of free monoids	24
J. Cirulis.	Superdiagonals of universal algebras	25

Topology

S. Agheev.	On equivariant homotopy type	37
M. Burgin, A. Šostak.	Towards the theory of continuity defect and continuity measure for mappings of metric spaces	45
E. Vechtomov, A. Poryshev.	Ideмпotent and semiprime ideals in rings of continuous functions	63
A. Goldman.	Splines in spaces of continuous functions	75
M. Zarichnyi.	On some categorial properties of probability measures	81
A. Korovin.	Some analogs of the Arhangel'skii-Pytkeev theorem in C_p -theory	91
U. Raitums.	On the approximation of multivalued maps	97

Numerical Analysis

S. Asauev.	On the extremal property of bivariate spline-functions	111
M. Belov.	The asymptotic solution of a mixed parabolic problem with discontinuous initial conditions. 2	127
T. Cirulis.	Asymptotic of the remainder term of Gaussian quadratures	145
T. Cirulis, V. Meimanis.	Calculation of eigenvalues and eigenfunctions for orthotroph conic hulls	157
S. Meirik.	The investigation of implicit linearized difference scheme for nonstationary Navier-Stokes problem	167

Differential Equations

D. Kalnina, T. Cirulis.	A fundamental system of solutions for an equation of order n	181
A. Cibulis.	The example illustrating some properties of solution of the system of elliptic equations in a dusty region	185

Functional Analysis

I. Galin'a.	On strict convexity	192
I. Kapranov, A. Liepin's.	On fixed points of mappings	199
S. Kalinin.	On the approximation of the solutions of homogeneous equation of the q -lateral convolution with the maximum indicator	201
V. Ionomarev.	On denicompact operators	207

AUTOMATA'S SIMULATION AS A PARTIALLY ORDERED SET

J. Buls

Summary. The relation - simulation of automata defines a preorder. This preorder determines the order in the quotient set $\bar{M}$. Every finite poset can be embedded into the poset $(\bar{M}, \leq)$. AMS Subject classification 68D30.

We should like to remind one classical result. Every partially ordered set (poset) $(N, \leq)$ can be embedded into a fit naturally ordered power-set, i.e., a set of all subsets of N .

A poset $(N, \leq)$ is said to be embedded into a poset $(M, \leq)$ if there exists isomorphism

$$f : (N, \leq) \rightarrow (M', \leq),$$

where $M' \subseteq M$. Recall that each subset M' of a poset M is also ordered: by the restriction of the given order.

The relation - simulation of automata (see below - denoted as $\leq$) in the set $\bar{M}$ of finite deterministic automata defines a preorder. This preorder as anyone [1] determines the order in the quotient set $\bar{M}$. It turns out that every finite poset $(N, \leq)$ can be embedded into the poset $(\bar{M}, \leq)$. That's the aim of this paper. An effective description of the equivalence classes compiling $\bar{M}$ is given in [2].

Now we review basic definitions. An automaton (a finite deterministic automaton) V is a five-tuple $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$, where Q, A, B - finite, nonempty sets, $\varphi : Q \times A \rightarrow Q$, $\psi : Q \times A \rightarrow B$ are maps. The sets Q, A, B are called correspondingly: a set of states, input and output alphabets. Map φ

is called the transition function, but ψ - the output function.

The set of all words over Σ (including the empty word ϵ) is denoted by Σ^* .

Let $h: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ be a map, where Σ, Σ' - alphabets. As a rule we extend the map such that it is defined on Σ^* . We put

$$h(\epsilon) = \epsilon, \quad h(ux) = h(u)h(x)$$

for all $(u, x) \in \Sigma^* \times \Sigma$.

Let $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ be an automaton. We extend φ, ψ on $Q \times A^*$ thus

$$\varphi(q, \epsilon) = q, \quad \varphi(q, ux) = \varphi(\varphi(q, u), x),$$

$$\psi(q, \epsilon) = \epsilon, \quad \psi(q, ux) = \psi(q, u) \psi(\varphi(q, u), x)$$

for all $q \in Q, (u, x) \in A^* \times A$.

Definition. Let $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$, $V' = (Q', A', B', \varphi', \psi')$ be automata. Then V simulates V' by

$$h_1: Q' \rightarrow Q, \quad h_2: A' \rightarrow A, \quad h_3: B \rightarrow B'$$

if diagram

$$\begin{array}{ccc} Q' \times (A')^* & \xrightarrow{\psi'} & (B')^* \\ \downarrow h_1 & & \uparrow h_3 \\ Q \times A^* & \xrightarrow{\psi} & B^* \end{array}$$

is commutative, id est, if

$$\psi'(q', u') = h_3(\psi(h_1(q'), h_2(u')))$$

for all $(q', u') \in Q' \times (A')^*$. We write $V \geq V'$ (h_1, h_2, h_3) if V simulates V' by h_1, h_2, h_3 .

We say V simulates V' and denote $V \geq V'$ if there exists maps h_1, h_2, h_3 such that $V \geq V'(h_1, h_2, h_3)$. Otherwise we say that V can't simulate V' and denote $V \not\geq V'$. We say the automata V, V' are incomparable if $V \not\geq V'$ and $V' \not\geq V$.

We say an automaton V simulates the state $q' \in Q'$ of the automaton V' if there exist a state $q \in Q$ of the automaton V and maps h_2, h_3 such that

$$\psi'(q', u') = h_3(\psi(q, h_2(u')))$$

for all words $u' \in (A')^*$. Otherwise we say that V can't simulate the state q' of the automaton V' . If the automaton V can't simulate a state q' of the automaton V' then $V \not\geq V'$. If in addition the automaton V' can't simulate any state q of the automaton V then the automata V, V' are incomparable.

We consider the automata

$$V_n = (Q_n, \{0\}, \{0, 1\}, \varphi_n, \psi_n),$$

where $Q_n = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$, $\varphi_n(q_i, 0) = q_{(i+1) \bmod n}$,

$$\psi_n(q_i, 0) = \begin{cases} 0, & \text{if } i=0, \\ 1, & \text{if } i \neq 0. \end{cases}$$

Lemma 1. For every $n > m > 1$ automata V_n, V_m are incomparable.

The proof by contradiction goes as follows. Let $V_n \geq V_m(h_1, h_2, h_3)$. Notice that V_n simulates the state $q_0 \in Q_m$. Clearly h_2 is the identity map of the input alphabet $\{0\}$. Therefore there exists a state $q_1 \in Q_n$ such that

$$\psi_m(q_0, 0^s) = h_3(\psi_n(q_1, 0^s))$$

for all non-negative integers s (0^s means a word of exactly s elements 0).

(i) If $i = 0$, then

$$\psi_m(q_0, 00) = 01,$$

$$\psi_n(q_1, 00) = 01.$$

It follows that h_3 - the identity map.

$$\psi_m(q_0, 0^{m+1}) = 01^{m-1}0,$$

$$\psi_n(q_1, 0^{m+1}) = 01^{m-1}1,$$

and equality

$$\psi_m(q_0, 0^{m+1}) = h_3(\psi_n(q_1, 0^{m+1})) \quad (1)$$

is disturbed on the last symbol.

(ii) If $i \geq n-1$, then

$$\psi_m(q_0, 00) = 01,$$

$$\psi_n(q_{n-1}, 00) = 10.$$

It follows that $h_3(0) = 1$ and $h_3(1) = 0$. But

$$\psi_m(q_0, 0^{m+1}) = 01^{m-1}0,$$

$$\psi_n(q_{n-1}, 0^{m+1}) = 10^{n-1}0,$$

and equality (1) is disturbed on the last symbol again.

(iii) If $i \neq 0$ and $i \neq n-1$, then

$$\psi_m(q_0, 00) = 01,$$

$$\psi_n(q_i, 00) = 11.$$

It follows that equality

$$\psi_m(q_0, 00) = h_3(\psi_n(q_i, 00))$$

is disturbed. Notice that h_3 - map.

(iv) Otherwise, if $V_m \geq V_n(h_1, h_2, h_3)$, then

$$\psi_n(q_0, 0^{m+1}) = 10^{m-1}0,$$

$$\psi_m(q_i, 0^{m+1}) = bwb,$$

where $(b, w) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}^*$. It follows that $h_3(b) = 1$ and $h_3(b) = 0$ - contradiction.

Definition. Let $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$, $V' = (Q', A', B', \varphi', \psi')$ be automata and $A = A'$. Let Q'' - a set which cardinal equals the cardinal of the set Q' ; $Q'' \cap Q = \emptyset$ and $h: Q'' \rightarrow Q'$ is a bijection. An automaton $W = (\bar{Q}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{\varphi}, \bar{\psi})$ is said to be a product of automata V, V' if:

$$(i) \quad \bar{Q} = Q \cup Q'', \quad \bar{A} = A = A', \quad \bar{B} = B \cup B';$$

$$(ii) \quad \bar{\varphi}(q, a) = \begin{cases} \varphi(q, a), & \text{if } q \in Q, \\ h^{-1}(\varphi'(h(q), a)), & \text{if } q \in Q''; \end{cases}$$

$$(iii) \quad \bar{\psi}(q, a) = \begin{cases} \psi(q, a), & \text{if } q \in Q, \\ \psi'(h(q), a), & \text{if } q \in Q''. \end{cases}$$

We define the product of automata for every finite collection of automata in the same manner.

Let I - a finite, nonempty index set. The product of

automata V_i , $i \in I$ will be written $\bigsqcup_{i \in I} V_i$.

Lemma 2. Let I, J - finite, nonempty sets of integers greater than 1. Then

$$\bigsqcup_{i \in I} V_i \geq \bigsqcup_{j \in J} V_j \text{ iff } I \supseteq J.$$

Proof. Let $j_0 \in J \setminus I$ and $\bigsqcup_{i \in I} V_i \geq \bigsqcup_{j \in J} V_j$. Then the automaton $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ simulates the automaton V_{j_0} . Clearly $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ simulates the state q_0 of the automaton V_{j_0} . This means there exist a state q of the automaton $\bigsqcup_{i \in I} V_i$ and maps h_2, h_3 such that

$$\psi_{j_0}(q_0, u) = h_3(\bar{\psi}(q, h_2(u)))$$

for each $u \in \{0\}^*$. Here, $\psi_{j_0}, \bar{\psi}$ - the output functions of the automata $V_{j_0}, \bigsqcup_{i \in I} V_i$ respectively.

Hence, there exists $i_0 \in I$ such that an automaton V_{i_0} simulates the state q_0 of the automaton V_{j_0} . But this is contradiction (see Lemma 1).

Conversely, the proof is evident.

Theorem. Every nonempty finite poset $(N, \leq)$ can be embedded into the poset $(\mathcal{M}, \leq)$.

Proof. Let $(N, \leq)$ be a nonempty finite poset. Without further restrictions on $(N, \leq)$ we can assume that N is a subset of integers greater than 1.

Define an interval $I_n = \{k \in N \mid k \leq n\}$ for all $n \in N$.

Define a map $f: N \rightarrow \mathcal{M}$ by letting, for each $n \in N$, an equivalence class contains an automaton $\bigsqcup_{i \in I_n} V_i$.

We may conclude (Lemma 2) that f is an embedding.

The author would like to express appreciation to professor Kudrjatzhev V.B. for good discussion on this subject.

References

1. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М.: 1982.
2. Булс Я.А. Моделирование автоматов Мили // Латв. ун-т - Рига, 1988, - 46 с. - Деп. в Лат. НИИТИ 30.05.88, № 121 - Лз 68.

Я.Булс. Моделирование автоматов как частично упорядоченное множество.

Аннотация. Условие : автомат V моделирует автомат V' , определяет предпорядок. Этот предпорядок на фактормножестве $(M, \leq)$ задает частичный порядок. Любое конечное непустое частично упорядоченное множество вложено в фактормножество $(M, \leq)$. УДК 519.95 + 512.8 + 519.55

J.Buls. Automātu modelēšana kā daļēji sakārtota kopa.

Anotācija. Nosacījums : automāta V modelē automātu V' definē priekšsakārtojumu. Šis priekšsakārtojums faktorkopā $(M, \leq)$ fiksē daļēju sakārtojumu. Katra galīga netukša daļēji sakārtota kopa ietiliekama šai faktorkopā. $(M, \leq)$.

Department of Mathematics
Latvian University
boulevard Rainis, 19
226098, Riga

МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМАТОВ НЕ ОБРАЗУЕТ ПОЛУРЕШЕТКУ

Я. Було

Аннотация. Моделирование автоматов как частично упорядоченное множество не является ни нижней, ни верхней полурешеткой. УДК 519.95 + 512.8 + 519.55.

Наше исследование в основных чертах таково. Мы показываем, что моделирование автоматов (точные определения даны ниже) как частично упорядоченное множество $(M, \geq)$ имеет наименьший элемент. Это обстоятельство наводит на мысль, что $(M, \geq)$ является полурешеткой. Мы показываем, что это заблуждение: $(M, \geq)$ не является ни нижней, ни верхней полурешеткой.

Под автоматом (точнее: неинициальным конечным детерминированным автоматом типа Мили) подразумевается набор $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$, где Q, A, B — конечные непустые множества, $\varphi: Q \times A \rightarrow Q$, $\psi: Q \times A \rightarrow B$ — отображения. Множества Q, A, B называются соответственно множеством состояний, входным алфавитом и выходным алфавитом автомата V . Отображение φ называется функцией переходов, а отображение ψ — функцией выходов автомата V .

Пусть C — некоторый алфавит. Тогда C^* — множество всех слов алфавита C ; как элемент множества C^* употребляется также пустое слово, обозначаемое символом ε .

Пусть $h: C \rightarrow C'$ — отображение некоторого алфавита C в алфавит C' . В дальнейшем, если не оговорено противное, отображение h на C^* доопределяется равенством

$$h(ux) = h(u)h(x)$$

для всех $(u, x) \in C^* \times C$. Для ε положим $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ - автомат. Функция переходов φ на множестве $Q \times A^*$ доопределяется равенством

$$\varphi(q, ux) = \varphi(\varphi(q, u), x)$$

для всех $(u, x) \in A^* \times A$. Для e положим

$$\varphi(q, e) = q.$$

Функция выходов ψ на множестве $Q \times A^*$ доопределяется равенством

$$\psi(q, ux) = \psi(q, u) \psi(\varphi(q, u), x)$$

также для всех $(u, x) \in A^* \times A$. Для e положим

$$\psi(q, e) = e.$$

Определение. Автомат $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ моделирует автомат $V' = (Q', A', B', \varphi', \psi')$ посредством отображений $h_1: Q' \rightarrow Q$, $h_2: A' \rightarrow A$, $h_3: B' \rightarrow B$, если диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q' \times (A')^* & \xrightarrow{\varphi'} & (B')^* \\ \downarrow h_1 \quad \downarrow h_2 & & \uparrow h_3 \\ Q \times A^* & \xrightarrow{\varphi} & B^* \end{array}$$

коммутативна, в символической записи $V \geq V'(h_1, h_2, h_3)$.

Другими словами, для любых $(q', u') \in Q' \times (A')^*$

$$\psi'(q', u') = h_3(\psi(h_1(q'), h_2(u'))).$$

Мы говорим, что автомат V моделирует автомат V' , в символической записи $V \geq V'$, если существуют такие отображения h_1, h_2, h_3 , что $V \geq V'(h_1, h_2, h_3)$. В противном случае мы говорим, что автомат V не моделирует автомат V' , и пишем $V \not\geq V'$. Автоматы V , V' мы называем несравнимыми, если $V \not\geq V'$ и $V' \not\geq V$.

На множестве $\mathcal{M}$ конечных детерминированных автоматов отношение возможности моделирования $\geq$ определяет предпорядок. Этот предпорядок $\geq$ естественным образом на факторизованности $\mathcal{M}$ задает порядок [1]. Что касается деталей и эффективного описания классов эквивалентности, по которым строится порядок на множестве $\mathcal{M}$, заинтересованный читатель отсылается к статье [2].

В дальнейшем мы будем свободно пользоваться диаграммами Мура [3].

Так, диаграмма Мура V_0 :



определяет автомат $V_0 = (\{0\}, \{1\}, \{2\}, \varphi_0, \psi_0)$,

где $\varphi_0: (0, 1) \rightarrow 0$

и $\psi_0: (0, 1) \mapsto 2$.

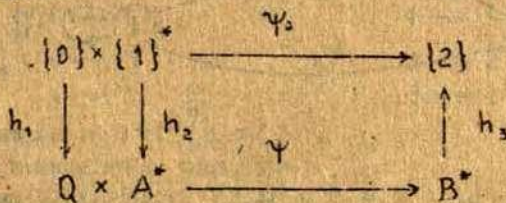
Предложение I. Любой автомат V моделирует автомат V_0 ,

т.е., $V \geq V_0$.

Доказательство. Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ - некоторый автомат и $(q, a) \in Q \times A$.

Пусть $h_1: \{0\} \rightarrow Q$, $h_2: \{1\} \rightarrow A$ - отображения, где $h_1: 0 \mapsto q$ и $h_2: 1 \mapsto a$.

Пусть $h_3: B \rightarrow \{2\}$ - отображение, переводящее каждую букву $b \in B$ в 2. Тогда $V \geq V_0(h_1, h_2, h_3)$. Действительно, диаграмма



коммутативна.

Определение. Состояния q_1, q_2 автомата

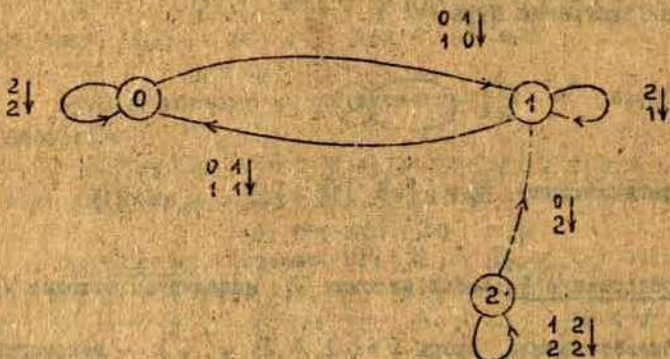
$V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ называются k -отличимыми (обозначается: $q_1 \sim_k q_2$), если найдется слово и длины k в алфавите A такое, что $\psi(q_1, u) \neq \psi(q_2, u)$.

Состояния q_1, q_2 называются отличимыми, если для некоторого k эти состояния k -отличимы.

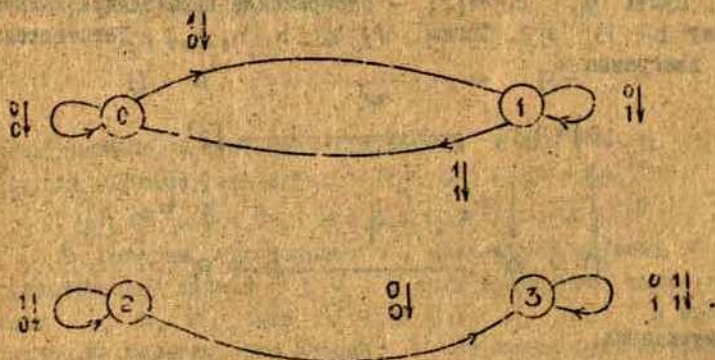
Автомат, у которого все состояния отличимы, называется приведенным автоматом.

Пусть

$$W_1 = (Z_1, X_1, Y_1, \Delta_1, \lambda_1):$$



$$W_2 = (Z_2, X_2, Y_2, \Delta_2, \lambda_2):$$



Тогда автоматы W_1, W_2 приведенные.
Действительно,

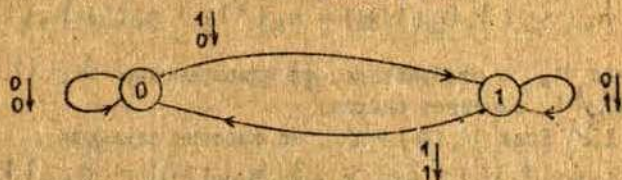
$$\lambda_1(0, 0) = 0, \quad \lambda_1(1, 0) = 1, \quad \lambda_1(2, 0) = 2;$$

$$\lambda_2(0, 10) = 01, \quad \lambda_2(1, 10) = 10,$$

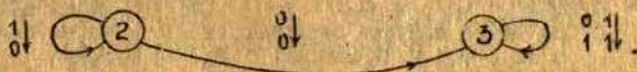
$$\lambda_2(2, 10) = 00, \quad \lambda_2(3, 10) = 11.$$

Пусть

$$V_1 = (Q_1, A_1, B_1, \varphi_1, \psi_1):$$



$$V_2 = (Q_2, A_2, B_2, \varphi_2, \psi_2):$$



Тогда

$$W_1 \geq V_1(h_1'', h_2'', h_3''), \quad W_1 \geq V_2(h_1^{12}, h_2^{12}, h_3^{12}),$$

где

$h_1'': 0 \mapsto 0$	$h_1^{12}: 0 \mapsto 1$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$
$2 \mapsto 0$	$2 \mapsto 0$
$h_2'': 0 \mapsto 2$	$h_2^{12}: 0 \mapsto 0$
$1 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1$
$h_3'': 0 \mapsto 1$	$h_3^{12}: 2 \mapsto 2$
$1 \mapsto 1$	$3 \mapsto 1$

Очевидно $W_2 \geq V_1$ и $W_2 \geq V_2$.

Нам понадобится следующая

Лемма I [2]. Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$, $W = (Z, X, Y, \Delta, \lambda)$ —

автоматы и $V \geq W(h_1, h_2, h_3)$. Если состояния z_1, z_2 автомата W k -отличимы, то

$$h_1(z_1) \neq_k h_1(z_2).$$

Лемма 2. Автоматы W_1, W_2 , а также автоматы V_1, V_2 несравнимы.

Доказательство. Автомат W_1 содержит менее внутренних состояний, чем автомат W_2 . Следовательно, $W_1 \not\geq W_2$ — лемма I.

Так как алфавит Y_1 выходных букв автомата W_1 больше, чем алфавит Y_2 , то $W_2 \not\geq W_1$.

Предположим, что $V_2 \geq V_1(h_1, h_2, h_3)$, тогда $h_1(0) = 3$

или $h_1(1) = 3$ - лемма I.

$$\text{I.1) Если } h_1(0) = 3 \quad \text{то} \quad 01 = \psi_1(0, 11) = \\ = h_3(\psi_2(3, h_1(11))) = h_3(11) = h_3(1) h_3(1).$$

Так как h_3 - отображение, то одновременно $h_3(1) = 0$ и $h_3(1) = 1$ не имеет смысла.

I.2) Если $h_1(1) = 3$, то картина такая же:

$$01 = \psi_1(1, 11) = h_3(\psi_2(3, h_1(11))) = h_3(11).$$

Следовательно, $V_2 \not\geq V_1$.

Предположим, что $V_1 \geq V_2(h_1, h_2, h_3)$, тогда $h_1(2) = 0$ или $h_1(2) = 1$.

$$\text{2.1) Если } h_1(2) = 0, \quad \text{то} \quad 01 = \psi_2(2, 01) = \\ = h_3(\psi_1(0, h_2(00))) = h_3(0) h_3(1).$$

Закладываем, что $h_2(0) = 1$ и $h_3(0) = 0$, $h_3(1) = 1$.

Далее $11 = \psi_2(3, 00) =$

$$= h_3(\psi_1(h_1(3), h_2(00))) = h_3(\psi_1(1, 11)) = h_3(1) h_3(0),$$

получается, что $h_3(0) = 1$ - противоречие.

2.2) Если $h_1(2) = 1$, то

$$01 = \psi_2(2, 00) = h_3(\psi_1(1, h_2(00))).$$

Закладываем, что

$$h_2(0) = 1 \quad \text{и} \quad h_3(1) = 0, \quad h_3(0) = 1.$$

Далее $01 = \psi_2(2, 01) =$

$$= h_3(\psi_1(1, h_2(01))) = h_3(\psi_1(1, 0 h_2(1))) = h_3(1) h_3(1);$$

получается, что $h_3(1) = 1$ - противоречие.

Следовательно, $V_1 \not\geq V_2$.

Итак, мы получили следующую диаграмму:



т.е., $W_1 \not\geq V_1$, $W_1 \not\geq V_2$, $W_2 \not\geq V_1$, $W_2 \not\geq V_2$,

а пары элементов W_1, W_2 и V_1, V_2 несравнимы.

Теперь мы покажем, что следующая диаграмма не имеет места



ни для какого автомата V . Тем самым будет установлено

Предложение 2. $(W, \geq)$ не является ни нижней, ни верхней полурешеткой.

Определение. Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ - автомат. Мы говорим, что автомат V не отличает входные буквы a_1, a_2 алфавита A , если

$$\varphi(q, a_1 u) = \varphi(q, a_2 u)$$

для любых $(q, u) \in Q \times A^*$.

В противном случае, мы говорим, что автомат V отличает букву a_1 от буквы a_2 .

Приведенный автомат V называется особо-приведенным, если автомат V отличает каждую пару входных букв.

Лемма 3. Пусть V - особо-приведенный автомат и $V' \geq V$. Тогда число входных букв автомата V не превышает числа входных букв автомата V' .

Доказательство. Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$.
 $V' = (Q', A', B', \varphi', \psi')$ - автоматы, но V - особо-приведенный автомат.

Пусть $V' \geq V(h_1, h_2, h_3)$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q \times A^* & \xrightarrow{\varphi} & B^* \\ h_1 \downarrow & & \uparrow h_3 \\ Q' \times (A')^* & \xrightarrow{\varphi'} & (B')^* \end{array}$$

коммутативна.

Допустим противное, а именно: пусть число букв алфавита A больше числа букв алфавита A' . Тогда $h_2(a_1) = h_2(a_2)$ для некоторой пары $(a_1, a_2) \in A^2$.

Автомат V — особо-приведенный, следовательно, для некоторой пары $(q, u) \in Q \times A^*$, $\psi(q, a_1 u) \neq \psi(q, a_2 u)$.

С другой стороны, $V \geq V(h_1, h_2, h_3)$; поэтому

$$\begin{aligned}\psi(q, a, u) &= h_3(\psi'(h_1(q), h_2(a, u))) = \\ &= h_3(\psi'(h_1(q), h_2(a_1)h_2(u))) = \\ &= h_3(\psi'(h_1(q), h_2(a_2)h_2(u))) = \psi(q, a_2 u).\end{aligned}$$

Получается, что $\psi(q, a_1 u) = \psi(q, a_2 u)$ — противоречие!

Теперь перейдем непосредственно к доказательству предложения 2.

Пусть $V = (Q, A, B, \varphi, \psi)$ — особо-приведенный автомат.

Из леммы 1 вытекает, что $|Q| \leq 3$, а из леммы 3 — что $|A| \leq 2$.

Из предложения $W_1 \geq V$ следует, что $|B| \leq 2$.

Пусть $V \geq V_1(h_1, h_2, h_3)$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \times A_1^* & \xrightarrow{\psi_1} & B_1^* \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ Q \times A^* & \xrightarrow{\psi} & B^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow h_3 \\ B^* \end{array}$$

коммутативна. Кроме того:

1) h_1 — сюръекция, поэтому $|B| \geq |B_1|$. Следовательно, $|B| = 2$.

2) h_2 — инъекция, ведь V тоже особо-приведенный автомат. Следовательно, $|A_1| \leq |A|$; откуда $|A| = 2$.

3) h_3 — инъекция, V_1 — особо-приведенный автомат.

Имеем в виду, что особо-приведенный автомат рассматривается с точностью до изоморфизма, поэтому правомерно предположить, что $A = B = \{0, 1\} \subseteq Q$, и $h_1 = \text{id}_Q$, $h_2 = \text{id}_A$, $h_3 = \text{id}_B$.

Итак, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Q_1 \times A_1^* & \xrightarrow{\psi_1} & B_1^* \\ \text{id}_Q \downarrow & & \downarrow \text{id}_A \\ Q \times A^* & \xrightarrow{\psi} & B^* \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \text{id}_B \\ B^* \end{array}$$

коммутативна.

Пусть $V \geq V_2(q_1, q_2, q_3)$, тогда диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
 Q_2 \times A_2^* & \xrightarrow{\psi_2} & B_2^* \\
 g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\
 Q \times A^* & \xrightarrow{\psi} & B^*
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 \\
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \\
 g_3 \uparrow
 \end{array}$$

коммутативна, и:

1) g_3 - сюръекция, ведь $|B| = |B_2|$ и g_3 - сюръекция;

2) g_2 - инъекция, ведь V_2 - особо-приведенный автомат;

3) g_1 - инъекция, ведь V_2 - приведенный автомат.

Если уж h_1, g_1 - инъекции, то существует состояние $(q, q_1, q_2) \in Q \times Q_1 \times Q_2$ такие, что $h_1(q_1) = g_1(q_2) = q$, ведь $|Q| \leq 3$. Имеем в виду $q_1 \neq q_2$, заключаем, что $h_2 \neq g_2$ или $h_2 = j_2$.

В противном случае $\psi_1(q_1, u) =$

$$= h_2(\psi(h_1(q_1), h_2(u))) =$$

$$= g_2(\psi(g_1(q_2), g_2(u))) = \psi_2(q_2, u)$$

для любого $u \in \{0, 1\}^*$, т.е., $q_1 \sim q_2$.

Возможна ли ситуация $g_2 = \omega_{A_2}^?$

$$\begin{aligned}
 11 = \psi_2(3, 10) &= g_2(\psi(g_1(3), g_2(10))) = \\
 &= g_2(\psi(g_1(3), 10)),
 \end{aligned}$$

и, так как g_2 - инъекция, то

$$\psi(g_1(3), 10) = a a, \text{ где } a \in \{0, 1\}.$$

Принадлежит ли $g_1(3)$ множеству $\{0, 1\}$?

(i) Если $g_1(3) = 0$, то

$$\psi(0, 10) = \psi_1(0, 10) = 01 \neq aa; \text{ поэтому } g_1(3) \neq 0.$$

(ii) Если $g_1(3) = 1$, то $\psi(1, 10) =$

$$= \psi_1(1, 10) = 10 \neq aa; \text{ поэтому } g_1(3) \neq 1.$$

Итак, $g_1(3) \in \{0, 1\}$.

Принадлежит ли $g_1(2)$ множеству $\{0, 1\}$?

$$011 = \psi_1(2, 010) = g_2(\psi(g_1(2), g_2(010))) =$$

$$= g_2(\psi(g_1(2), 010)) = baa, \text{ где } b, a \in \{0, 1\}.$$

(i) Если $g_1(2) = 0$, то

$\psi(0, 010) = \psi_1(0, 010) = 001 \neq \beta\alpha\alpha$;
 поэтому $g_1(2) \neq 0$.

(ii) Если $g_1(2) = 1$, то

$\psi(1, 010) = \psi_1(1, 010) = 110 \neq \beta\alpha\alpha$;
 поэтому $g_1(2) \neq 1$.

Получается противоречие: $g_1(2) \in \{0, 1\}$, и также
 $g_1(3) \in \{0, 1\}$. Следовательно, $g_2 \neq \text{id}_{A_2}$.

Возможна ли ситуация, что

$g_1: 0 \mapsto 1$ и $g_2: 1 \mapsto 0$?

$$11 = \psi_2(3, 01) = g_3(\psi(g_1(3), g_2(01))) = g_3(\psi(g_1(3), 10)),$$

и, так как g_3 — инъекция, то

$$\psi(g_1(3), 10) = \alpha\alpha, \text{ где } \alpha \in \{0, 1\}.$$

Принадлежит ли $g_1(3)$ множеству $\{0, 1\}$?

(i) Если $g_1(3) = 0$, то

$\psi(0, 10) = \psi_1(0, 10) = 01 \neq \alpha\alpha$;
 поэтому $g_1(3) \neq 0$.

(ii) Если $g_1(3) = 1$, то

$\psi(1, 10) = \psi_1(1, 10) = 10 \neq \alpha\alpha$;
 поэтому $g_1(3) \neq 1$.

Итак $g_1(3) \notin \{0, 1\}$.

Остается последняя возможность, а именно $g_1(2) \in \{0, 1\}$.

$$011 = \psi_2(2, 001) = g_3(\psi(g_1(2), g_2(001))) = \\ = g_3(\psi(g_1(2), 110));$$

и так как g_3 — инъекция, то

$$\psi(g_1(2), 110) = \beta\alpha\alpha, \text{ где } \beta, \alpha \in \{0, 1\}.$$

Принадлежит ли $g_1(2) \in \{0, 1\}$?

(i) Если $g_1(2) = 0$, то $\psi(0, 110) = \psi_1(0, 110) = 010 \neq \beta\alpha\alpha$; поэтому $g_1(2) \neq 0$.

(ii) Если $g_1(2) = 1$, то $\psi(1, 110) = \psi_1(1, 110) = 101 \neq \beta\alpha\alpha$; поэтому $g_1(2) \neq 1$.

Получается противоречие: $g_1(2) \in \{0, 1\}$ и также

$$g_1(3) \in \{0, 1\}$$

У множества $\{0, 1\}$ имеется только две биекции. Следовательно, нет возможности подобрать такое отображение

$$g_2: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}, \text{ чтобы } \forall x \forall y (g_1(x), g_2(y)).$$

Библиографический список

1. Скорняков Л.А. Элементы теории структур. - М., 1982.
2. Було Я.А. Моделирование автоматов Мили // Латв. ун-т - Рига, 1988. - 46 с. - Деп. в Лат. НИИИТИ 30.03.88, № 121 - Ля 88.
3. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. - М., 1985.

J. Buls. Automata's Simulation isn't a Semilattice.

Summary. The relation - simulation of automata defines a preorder. This preorder determines the order in the quotient set $\mathcal{M}$. The poset $(\mathcal{M}, \geq)$ isn't a semilattice.
AMS Subject classification 05A10, 68J30.

J. Buls. Automātu modelēšana nerada pusrežģi.

Anotācija. Nosacījums: automāta V modelis automātu V definē priekšsakārtojumu. Šis priekšsakārtojums faktorkopā $(\mathcal{M}, \geq)$ fikse daļēju sakārtojumu, kas nav nedz apakšējais, nedz augšējais pusrežģis.

Кафедра математического анализа

Латвийский университет

бульв. Райниса, 19

226098 г. Рига

SETS OF FIXED LANGUAGES AND ENDOMORPHISM
SEMIGROUPS OF FREE MONOIDS

V. Shteinbuk

Abstract. It is shown that if the endomorphism semigroups of two free monoids are elementary equivalent then so are the ordered under inclusion sets of fixed languages of these monoids.
AMS Subject classification 20M20.

Let A be a nonempty set, A^* denote a free monoid on the set A , $\text{End } A^*$ be the semigroup of all endomorphisms of A^* . A subset G of A^* is called an expanded subalphabet [3] if for any word $x \in G$ there exists a symbol $a \in A$ such that a occurs precisely once in x and a occurs in no other word in G . This new type of codes was introduced by T.Head [3]; in the same paper he has investigated submonoids of A^* generated by expanded subalphabets. Now we recall the characterization of such submonoids due to T.Head.

Let g be any endomorphism of a free monoid A^* . A set of all fixed points of g is called a fixed language of the endomorphism g .

A language $L \subset A^*$ is a fixed language for some endomorphism $g \in \text{End } A^*$ if and only if L is a submonoid of A^* generated by some expanded subalphabet $G \subset A^*$ [3].

By $\mathcal{L}_A$ we denote the set of all fixed languages of endomorphisms of a monoid A^* . The set $\mathcal{L}_A$ one may consider as a partially ordered set with respect to inclusion. Let $(\mathcal{L}_A, \subset)$ denote the corresponding partially ordered set. The inclusion relation on the set of fixed languages was studied in [2].

It is easy to see that the partially ordered set $(\mathcal{L}_A, \subset)$ is determined by the semigroup $\text{End } A^*$ up to isomorphism. Recall that two models of the same signature Ω are called elementary equivalent if every closed formula of first order predicate calculus with equality in signature Ω which is true for a given

model is also true for other model. There are many papers devoted to investigation of relations between elementary properties (i.e. properties which can be expressed by a first order predicate calculus formula) of cert in mathematical structures and algebraic objects associated with those structures. The problem of elementary definability is one of principal in this direction. The aim of this note is to give an answer for the question of elementary definability of partially ordered set $(\mathcal{L}_A, \subset)$ by means of the semigroup $\text{End } A^*$.

The result of this note has been announced in [4].

Theorem. Let A_1, A_2 be nonempty sets. If the semigroups $\text{End } A_1^*$ and $\text{End } A_2^*$ are elementary equivalent then the partially ordered sets $(\mathcal{L}_{A_1}, \subset)$ and $(\mathcal{L}_{A_2}, \subset)$ are elementary equivalent.

Proof. For any nonempty set A let $\text{Ret } A^*$ denote the set of all idempotents of the semigroup $\text{End } A^*$. Endomorphisms from $\text{Ret } A^*$ are called retractions. Define a binary relation σ in the set $\text{Ret } A^*$ as follows :

$$(\forall x, y \in \text{Ret } A^*) \quad xy \leftrightarrow yx = x.$$

We put $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$. It is easy to see that the relation σ is a quasiorder and ρ is an equivalence relation in $\text{Ret } A^*$.

The quasiorder σ naturally induces a partial order relation in the set of all ρ -classes $\text{Ret } A^* / \rho$. This partial order relation we denote by $\bar{\sigma}$. The set $\text{Ret } A^* / \rho$ endowed with the relation $\bar{\sigma}$ is denoted by $(\text{Ret } A^* / \rho, \bar{\sigma})$.

As it follows from [3], we have

$$\mathcal{L}_A = \{f(A^*) \mid f \in \text{Ret } A^*\}.$$

For every fixed language $L \in \mathcal{L}_A$ we denote

$$\mathbb{R}_L = \{f \in \text{Ret } A^* \mid f(A^*) = L\}.$$

It is obvious that $f_1 f_2 = f_2$, $f_2 f_1 = f_1$, for all $f_1, f_2 \in \mathbb{R}_L$. On the other hand, if f_1, f_2 are retractions and $f_1 f_2 = f_2$, $f_2 f_1 = f_1$ then $f_1(A^*) = f_2(A^*)$. Therefore

$$\text{Ret } A^* / \rho = \{\mathbb{R}_L \mid L \in \mathcal{L}_A\}.$$

Define now a one-to-one mapping ν from $\mathcal{C}_A$ on to $\text{Ret}A^*/\rho$ by letting $\nu(L) = \mathfrak{R}_L$ for each $L \in \mathcal{C}_A$. Take any two fixed languages $L, M \in \mathcal{C}_A$ and choose $f_1 \in \mathfrak{R}_L, f_2 \in \mathfrak{R}_M$. Obviously, $L \subset M$ iff $f_2 f_1 = f_1$. Using the definition of $\bar{\sigma}$ we conclude that $L \subset M$ iff $\mathfrak{R}_L \bar{\sigma} \mathfrak{R}_M$. Hence ν is an isomorphism of partially ordered sets $(\mathcal{C}_A, \subset)$ and $(\text{Ret}A^*/\rho, \bar{\sigma})$.

Assume now that the semigroups $\text{End}A_1^*$ and $\text{End}A_2^*$ are elementary equivalent. Then the partial groupoids $\text{Ret}A_1^*$ and $\text{Ret}A_2^*$ of all idempotents of these semigroups are elementary equivalent. Since the relation σ is defined by a formula of first order predicate calculus with equality it follows that the quasiordered sets $(\text{Ret}A_1^*, \sigma)$ and $(\text{Ret}A_2^*, \sigma)$ are elementary equivalent. Hence according to Ehrenfeucht's [1] criterion of elementary equivalence of model there exists a winning strategy for the player II in the game

$$G_n((\text{Ret}A_1^*, \sigma), (\text{Ret}A_2^*, \sigma))$$

for every natural n .

Using this strategy let us show that there exists a winning strategy for the player II in the game

$$G_n((\text{Ret}A_1^*/\rho, \bar{\sigma}), (\text{Ret}A_2^*/\rho, \bar{\sigma}))$$

for every natural n .

For each $f \in \text{Ret}A^*$ we denote by $\bar{f}$ the class of retractions which are ρ -equivalent to f .

Let us assume that in the move i the player I has chosen the model $(\text{Ret}A_1^*/\rho, \bar{\sigma})$, and an element $\bar{f}_i^{k_i}$ in it ($f_i^{k_i} \in \text{Ret}A_{k_i}^*$, $k_i \in \{1, 2\}$). Let us denote by $\bar{f}_i^{3-k_i}$, where $f_i^{3-k_i} \in \text{Ret}A_{3-k_i}^*$, an element chosen in the move i according to the winning strategy for the player II in the game

$$G_n((\text{Ret}A_1^*, \sigma), (\text{Ret}A_2^*, \sigma))$$

under the condition that the player I has chosen in the move i an element $\bar{f}_i^{k_i}$. Then in the game

$$G_n((RetA_1^*/\rho, \bar{0}), (RetA_2^*/\rho, \bar{0}))$$

the player II must choose the element f^{3-k}_i in the move i .

This strategy is a winning one for the player II. Indeed, if $\bar{f}^1_i \bar{0} \bar{f}^1_j$ ($1 \leq i, j \leq l$) then according to the definition of $\bar{0}$ we have $f^1_i \circ f^1_j$. Since the winning strategy for the player II in the game $G_n((RetA_1^*, 0), (RetA_2^*, 0))$ was used, it follows $f^2_i \circ f^2_j$. Therefore $\bar{f}^2_i \bar{0} \bar{f}^2_j$. In the same way it can be proved that $f^2_i \circ f^2_j$ implies $\bar{f}^1_i \bar{0} \bar{f}^1_j$.

Thus we have constructed the winning strategy for the player II in the considered game. Therefore it follows by Ehrenfeucht's criterion of elementary equivalence that the ordered sets $(RetA_1^*/\rho, \bar{0})$ and $(RetA_2^*/\rho, \bar{0})$ are elementary equivalent. But since, as it was shown above, the ordered sets $(\mathcal{L}_1, <)$ and $(RetA^*/\sigma, \bar{0})$ are isomorphic, we conclude that the ordered sets $(\mathcal{L}_1, <)$ and $(\mathcal{L}_2, <)$ are elementary equivalent.

References

1. Ehrenfeucht A. An application of games to the completeness problem for formalized theories// Fund.Math.- 1961.- V.49.- P.129-141.
2. Forys M., Forys W. A note on some fixed languages with an application to QL-schemes// Zesz. Nauk. Univ. Jagiellon. Pr. Inform.- 1987.- V.3.- P.91-93.
3. Head T. Expanded subalphabets in the theories of languages and semigroups// Intern. J. Computer Math.-1982.-V.12.-P.113-123.
4. Shteinbuk V. On sets of fixed languages// Intern.Algebra Conf. dedicated to the mem. of A.I.Malcev, Abstr. of Rep. in Model Theory and the Theory of Algebr. Syst.- Novosibirsk, 1989.- P.158. (in Russian).

V.Šteinbuka. Nekustīgu valodu kopas un brīvu monoidu endomorfismu pusgrupas.

Anotācija. Parādīts, ka, ja divu brīvu monoidu endomorfismu pusgrupas ir elementāri ekvivalentas, tad sakārtotas attiecībā pret šo monoidu nekustīgu valodu kopas iekļautību, tās arī ir elementāri ekvivalentas.

В.Штейнбук. Множества неподвижных языков и полугруппы эндоморфизмов свободных моноидов.

Аннотация. Показано, что если полугруппы эндоморфизмов двух свободных моноидов элементарно эквивалентны, то упорядоченные относительно включения множества неподвижных языков этих моноидов являются элементарно эквивалентными. УДК 512.534.

V.Šteinbuk
Department of Applied Mathematics
Riga Technical University
226355 Riga, Latvia

SUPERDIAGONALS OF UNIVERSAL ALGEBRAS

Jānis Cīrulis

Abstract. Given a variety $\mathcal{K}$ and the free $\mathcal{K}$ -algebra T on an enumerable set of free generators X , by the superdiagonal of a $\mathcal{K}$ -algebra U we mean the function D that assigns to every "equation" $(s, t) \in T^2$ the set of those "assignments" $\varphi \in U^X$ which "satisfy" it. We show that $\mathcal{K}$ -algebras and $\mathcal{K}$ -homomorphisms can be characterized in terms of superdiagonals. We also present an axiomatic description of superdiagonals of algebras, together with a construction which converts such an abstract superdiagonal into corresponding algebra.

1991 Mathematics Subject Classification: primary 08A62, secondary 03G15, 08B20, 08C05

1. Setting the problem

In what follows, let $\mathcal{K}$ be a variety of algebras of an arbitrary signature Ω , let T be a free $\mathcal{K}$ -algebra with a enumerable set X of free generators, and let T be the carrier of this algebra. Elements of X will be called *variables*, those of T — $\mathcal{K}$ -*terms* or just *terms*. We take the liberty to denote the operation of T corresponding to the operator ω from Ω by the same symbol ω .

Let us assume that a non-void set U is somehow converted into algebra U from $\mathcal{K}$. Then every mapping $\varphi \in U^X$ (an *assignment*) can uniquely be extended to a homomorphism $\tilde{\varphi} : T \rightarrow U$. The function $D : T^2 \rightarrow \mathcal{P}(U^X)$, defined by

$$D_{st} = \{\varphi \in U^X : \tilde{\varphi}s = \tilde{\varphi}t\}$$

(we write D_{st} for $D(s, t)$), will be termed the *superdiagonal* of U (with respect to T). From it, all equations fulfilled in U can be "read": these are precisely the pairs (s, t) for which $D_{st} = U^X$. In general, D_{st} may be

regarded as a validity measure of the equation (s, t) in U . It is easy to check that a superdiagonal contains full information about the algebra determining it.

PROPOSITION 1. *Different algebras from $\mathcal{K}$ have different superdiagonals.*

Proof. Let U, V be two different algebras with a common carrier, and let D', D'' be their superdiagonals. Then, for some operator ω , there must be elements $u_1, \dots, u_m$ in U such that

$$\omega'(u_1, \dots, u_m) \neq \omega''(u_1, \dots, u_m),$$

where ω', ω'' are operations of U and V corresponding to this operator. Select an assignment φ such that $\varphi x_1 = u_1, \dots, \varphi x_m = u_m$ for suitable variables $x_1, \dots, x_m$, and denote by $\tilde{\varphi}', \tilde{\varphi}''$ the extensions of φ to homomorphisms of T into U and V respectively. Then $\tilde{\varphi}'\omega(x_1, \dots, x_m) \neq \tilde{\varphi}''\omega(x_1, \dots, x_m)$.

Now, if y is a variable distinct from all x_i , $t = \omega(x_1, \dots, x_m)$ and $\varphi y = \tilde{\varphi}'t$, then $\varphi \in D'_{yt}$, but not $\varphi \in D''_{yt}$. Therefore, superdiagonals D' and D'' are really different. $\square$

Given the superdiagonal D of an $\mathcal{K}$ -algebra U only, we can easily restore the operation ω' of U corresponding to an operator $\omega \in \Omega$ as follows:

$$\omega'(u_1, \dots, u_m) = v \Leftrightarrow \varphi \in D_{yt},$$

where t, y, φ are selected as in the proof of the Proposition 1, except that $\varphi y = v$. Moreover, not only algebras themselves, but also homomorphisms between them can be characterized in terms of superdiagonals.

PROPOSITION 2. *Let U, V be two $\mathcal{K}$ -algebras, and let D', D'' be their superdiagonals. The mapping $\lambda: U \rightarrow V$ is a homomorphism $U \rightarrow V$ if and only if, for any two terms s, t and all assignments $\varphi \in U^X$,*

$$\varphi \in D'_s \Rightarrow \lambda\varphi \in D''_{\lambda s}. \quad (1)$$

Proof. Suppose first that λ is really a homomorphism. Then $(\lambda\varphi)^{\sim} = \lambda\tilde{\varphi}$ for all $\varphi \in U^X$, since both these homomorphisms $U \rightarrow V$ coincide on X , and we have:

$$\begin{aligned} \varphi \in D'_s &\Rightarrow \tilde{\varphi}s = \tilde{\varphi}t \Rightarrow \lambda(\tilde{\varphi}s) = \lambda(\tilde{\varphi}t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\lambda\tilde{\varphi})s = (\lambda\tilde{\varphi})t \Rightarrow (\lambda\tilde{\varphi})s = (\lambda\tilde{\varphi})t \Rightarrow \lambda\varphi \in D''_{\lambda s}. \end{aligned}$$

Now suppose that, conversely, (1) holds; we must show that

$$\lambda\omega'(u_1, \dots, u_m) = \omega''(\lambda u_1, \dots, \lambda u_m),$$

where ω', ω'' are operations of algebras U and V respectively, corresponding to the operator ω . We may assume that $u_i = \varphi x_i, \dots, u_m = \varphi x_m$. $\omega'(u_1, \dots, u_m) = \varphi y$ for some assignment $\varphi \in U^X$ and mutually distinct variables $x_1, \dots, x_m$. Let, furthermore, $t := \omega(x_1, \dots, x_m)$, and let $\tilde{\varphi}'$ be the extension of φ to a homomorphism $T \rightarrow U$; then $\varphi y = \tilde{\varphi}' t$. By (1), $\lambda\varphi y = (\lambda\varphi)'' t$, where $(\lambda\varphi)''$ is the extension of $\lambda\varphi$ to a homomorphism $T \rightarrow V$, and the needed identity follows. $\square$

Our aim is to characterize abstractly those functions on T^2 which are superdiagonals of algebras, and to give a uniform method of reconstructing the algebra which corresponds to such a function. Main results of the paper were announced in [1] (see also footnote 3). They play a significant role in the proof of the representation theorem for supercylindric algebras – cf. [2,3]¹

2. Superdiagonals

Given $Y \subset X$, we denote by $T[Y]$ the carrier of the subalgebra of T generated by Y . We say that the term t is *independent* of the variable x if $t \in T[Y]$ for some Y not containing x , and denote by Δt the set $\cap \{Y : t \in T[Y]\}$ of all those variables t depends on. Evidently, the latter set is always finite.

Now let us fix some nonvoid set U and denote by A the power set $P(U^X)$. For any $a \in A$ and $x \in X$, we set

$$C_x a = \{\varphi_u^x : \varphi \in a, u \in U\},$$

where φ_u^x is an assignment such that $\varphi_u^x y = \varphi y$ if $y \neq x$, and $\varphi_u^x x = u$. If a function $D : X^2 \rightarrow A$ is defined by

$$D_{xy} = \{\varphi \in U^X : \varphi x = \varphi y\},$$

then the algebra $(A, \cup, \cap, \setminus, C_x, D_{xy})_{x, y \in X}$, is the *full cylindric set algebra with base U* in the sense of [6]. We call such a function the *principal diagonal on U* . By analogy, by a *principal superdiagonal on U* we shall mean the superdiagonal of any algebra from $\mathcal{K}$ with the carrier U .

Every principal superdiagonal D possesses the following properties:

¹This paper is a slightly elaborated version of the one (written a little while after [2]) which had to appear in vol. 36 of *Latvian Mathematical Yearbook* (1992) and which we have referred to in [3]. However, that volume doubtfully will be published for financial difficulties, so we take the opportunity to publish the paper here.

- (a) D is an extension of the principal diagonal,
- (b) $C_y D_{yt} = U^X$, if $y \notin \Delta t$,
- (c) $D_{xt} \cap D_{yt} \subset D_{xy}$, if $x, y \notin \Delta t$,
- (d) $D_{st} = C_x(D_{xs} \cap D_{xt})$, if $x \notin \Delta s \cup \Delta t$,
- (e) $D_{xs} \subset D_{t([s/x]t)}$, if $x \notin \Delta s$, where $[s/x]$ is the endomorphism of T that takes x into t and is constant elsewhere on X .

Any function $D : T^2 \rightarrow A$ having these properties will be called just a *superdiagonal* on U (of course, relatively to T . We shall omit, however, explicit references to the algebra T , since it is fixed.)²

By a *support* of a set $a \in A$ we shall mean any subset $Y \subset X$ such that, for all $\varphi, \psi \in U^X$,

$$\varphi \in a, \varphi|Y = \psi|Y \Rightarrow \psi \in a$$

or, what amounts to the same,

$$\varphi|Y = \psi|Y \Rightarrow (\varphi \in a \Leftrightarrow \psi \in a).$$

An almost word by word repetition of the easy proof of Lemma 3.7 from [4] shows that $S(a)$ is a filter of sets on X , perhaps, improper one. The set a is said to be *finitely dimensional* if it has finite supports. It is reasonable to call a superdiagonal D *finitary* if all D_{st} are finitely dimensional. A principal superdiagonal is always finitary, since in this case $\Delta s \cup \Delta t$ is a support of D_{st} .

We are now prepared to state the main result of the paper. As we saw just above, the "only if" part of it is almost obvious. The proof of its "if" part³ will be postponed to the section 4.

THEOREM 3. *A superdiagonal is principal if and only if it is finitary.*

3. Auxiliary lemmas

We shall need some further properties of superdiagonals.

LEMMA 4. *Suppose that D is a superdiagonal on U . If a term t does not depend on distinct variables y and z then, for all $\varphi \in U^X$ and $u \in U$,*

²In [1,2,3], different, though equivalent, system of axioms for superdiagonals was chosen. The present system looks somewhat weaker, but it has the advantage that it does not involve elements of A not belonging to the range of D . Theorem 3 and Corollary 7 below show, however, that the weakness is apparent.

³The non-trivial part of the theorem has meanwhile appeared in a modified form in [3] as Theorem 4.3. In general outlines, proofs of both theorems are similar. However, finitariness condition used here is simpler than that of regularity in [3]. On the other hand, the theorem in [3] is more suitable for needs of that paper.

- (f) $\varphi \in D_{yt}$ if and only if $\varphi_u^z \in D_{yt}$,
 (g) $\varphi_u^y \in D_{yt}$ if and only if $\varphi_u^z \in D_{zt}$,
 (h) there is exactly one set $v \in U$ such that $\varphi_v^y \in D_{yt}$.

Proof. Assume that t, y and z are selected as indicated. By (d),

$$C_z D_{yt} = C_z C_z (D_{zy} \cap D_{zt}) = C_z (D_{zy} \cap D_{zt}) = D_{yt}, \quad (2)$$

for, evidently, $C_z C_z a = C_z a$. Now, if $\varphi \in D_{yt}$ then $\varphi_u^z \in C_z D_{yt} = D_{yt}$, but if $\varphi_u^z \in D_{yt}$ then $\varphi_u^z \in C_z D_{yt}$ and, furthermore, $\varphi \in D_{yt}$. Therefore, (f) holds. Once again referring to (d), and using (a), (f), we obtain (g):

$$\begin{aligned} \varphi_u^y \in D_{yt} &\Leftrightarrow \varphi_u^y \in C_z (D_{zy} \cap D_{zt}) \Leftrightarrow \exists v \in U (\varphi_{uv}^{yz} \in D_{zy} \ \& \ \varphi_{uv}^{yz} \in D_{zt}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v \in U (v = u \ \& \ \varphi_v^z \in D_{zt}) \Leftrightarrow \varphi_u^z \in D_{zt}. \end{aligned}$$

As to (h), the assumption (b) provides, for any $\varphi \in U^X$, such an element $v \in U$ that $\varphi_v^y \in D_{yt}$. In fact, it is unique: by (g), (f), (c) and (a),

$$\begin{aligned} \varphi_u^y \in D_{yt} \ \& \ \varphi_v^y \in D_{yt} &\Leftrightarrow \varphi_u^y \in D_{yt} \ \& \ \varphi_v^z \in D_{zt} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \varphi_{uv}^{yz} \in D_{yt} \ \& \ \varphi_{uv}^{yz} \in D_{zt} &\Leftrightarrow \varphi_{uv}^{yz} \in D_{yt} \cap D_{zt} \Rightarrow \varphi_{uv}^{yz} \in D_{yz} \Leftrightarrow u = z. \end{aligned}$$

Thus, the lemma is proved. $\square$

Note that the property (e) was not used in the proof. On the strength of this lemma, the equivalence

$$\hat{i}(\varphi) = u \Leftrightarrow \varphi_u^y \in D_{yt}, \quad (3)$$

where $y \notin \Delta t$, correctly defines a function $\hat{i}: U^X \rightarrow U$ for every term t . Obviously, $\hat{i}(\varphi) = \varphi z$. Moreover, by (d) and (3),

$$\begin{aligned} \varphi \in D_{st} &\Leftrightarrow \varphi \in C_y (D_{ys} \cap D_{yt}) \Leftrightarrow \exists u \in U (\varphi_u^y \in D_{ys} \ \& \ \varphi_u^y \in D_{yt}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists u \in U (\hat{s}(\varphi) = u \ \& \ \hat{i}(\varphi) = u) \Leftrightarrow \hat{s}(\varphi) = \hat{i}(\varphi), \end{aligned}$$

i.e., for all s and t ,

$$D_{st} = \{\varphi \in U^X : \hat{s}(\varphi) = \hat{i}(\varphi)\}. \quad (4)$$

In particular, we conclude that $\hat{s} = \hat{i}$ if and only if $D_{st} = U^X$.

LEMMA 5. If the superdiagonal D is finitary, then, for all assignments φ, ψ ,

$$\varphi \mid \Delta t = \psi \mid \Delta t \Rightarrow \hat{i}(\varphi) = \hat{i}(\psi). \quad (5)$$

Proof. Assume that $\varphi \upharpoonright \Delta t = \psi \upharpoonright \Delta t$. Then also $\varphi_u^y \upharpoonright (\{y\} \cup \Delta t) = \psi_u^y \upharpoonright (\{y\} \cup \Delta t)$ for any $y \notin \Delta t$ and all $u \in U$. Let Y be a finite support of $D_{\Delta t}$; without loss of generality, we may assume that $\varphi \upharpoonright (X \setminus Y) = \psi \upharpoonright (X \setminus Y)$ and $y \notin Y$.

Therefore, φ and ψ agree outside a finite set $\{x_1, \dots, x_n\} = Y \setminus \Delta t$; we are only interested in the case $n > 0$. Now if $\varphi_u^y \in D_{\Delta t}$, then $\psi_u^y \in C_{x_1} \dots C_{x_n} D_{\Delta t} = D_{\Delta t}$ (see (2)), and vice versa. So we obtain that, still for all u , $\varphi_u^y \in D_{\Delta t} \Leftrightarrow \psi_u^y \in D_{\Delta t}$. Now (3) leads to $\hat{i}(\varphi) = \hat{i}(\psi)$, as needed. $\square$

Of course, $\Delta x = \{x\}$. It follows from the next lemma that

$$\Delta \omega(t_1, \dots, t_m) \subset \Delta t_1 \cup \dots \cup \Delta t_m. \quad (6)$$

LEMMA 6. *If $\Delta t \subset Y$ and $Y \neq \emptyset$, then $t \in T[Y]$.*

Proof. Let $S(t)$ be the set $\{Y \subset X : \forall \alpha, \beta \in X^X (\alpha \upharpoonright Y = \beta \upharpoonright Y \Rightarrow \hat{\alpha}t = \hat{\beta}t)\}$, where $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ are the extensions of α, β to endomorphisms of T . $S(t)$ is a filter of sets on X (cf. with $S(a)$ in sect. 2). In particular, every finite set Z such that $t \in T[Z]$ belongs to $S(t)$. Hence, Δt can be presented as a meet of a finite number of members of $S(t)$, viz., subsets of such Z . So $S(t)$ contains Δt and, therefore, Y as well. Now let $\alpha : X \rightarrow Y$ be any mapping, identical on Y . Then $\hat{\alpha}X \subset Y$, and $t = \hat{\alpha}t \in T[\hat{\alpha}X] \subset T[Y]$. $\square$

4. Proof of theorem 3.

Suppose that D is a finitary superdiagonal on U . For every operator $\omega \in \Omega$ of arity m , define an operation ω_D on U by setting

$$\omega_D(u_1, \dots, u_m) = \hat{i}(\varphi), \quad (7)$$

where $t = \omega(x_1, \dots, x_m)$ with all x_i mutually distinct, and φ is an assignment which assigns the value u_i to every x_i . This definition may be rewritten in the form

$$\omega_D(\varphi x_1, \dots, \varphi x_m) = \hat{i}(\varphi),$$

where φ is already arbitrary. The operation ω_D does not depend on the choice of φ : if $\psi \in U^X$ and $\psi x_1 = \varphi x_1, \dots, \psi x_m = \varphi x_m$, then, by (5), $\hat{i}(\varphi) = \hat{i}(\psi)$, for $\Delta t \subset \{x_1, \dots, x_m\}$ (cf. (6)). It does not depend also on the choice of $x_1, \dots, x_m$: if $\varphi x_1 = \varphi y_1, \dots, \varphi x_m = \varphi y_m$, then, by (a), $\varphi \in D_{x_1 y_1} \cap \dots \cap D_{x_m y_m}$, hence, by (e), $\varphi \in D_{t'}$, where $t' := \omega(y_1, \dots, y_m)$. Now $\hat{i}(\varphi) = \hat{i}(\varphi)$ according to (4).

Therefore, U is turned into an Ω -algebra U . We now want to show that, for every assignment φ , its extension $\varphi^* : T \rightarrow U$ defined by

$$\varphi^* t = \hat{t}(\varphi) \quad (8)$$

is a homomorphism $T \rightarrow U$. Given a term $s = \omega(t_1, \dots, t_m)$, select mutually distinct variables $x_1, \dots, x_m$ on which the terms $t_1, \dots, t_m$ do not depend, and denote by t the term $\omega(x_1, \dots, x_m)$. By (6), $\Delta t \cap \Delta s = \emptyset$. Now let ψ be an assignment such that, for all $i = 1, \dots, m$,

$$\psi \upharpoonright \Delta t_i = \varphi \upharpoonright \Delta t_i, \quad \psi x_i = \hat{t}_i(\varphi).$$

Then $\hat{t}_i(\psi) = \hat{t}_i(\varphi)$ by (5), so $\psi x_i = \hat{t}_i(\psi)$, i.e. $\psi \in D_{x_i \hat{t}_i}$ for all i (see (4)). Also, $\hat{s}(\psi) = \hat{s}(\varphi)$ by (6) and (5). By multiple use of (e), $\psi \in D_s$ and, furthermore, $\hat{t}(\psi) = \hat{s}(\psi)$. Hence, taking into account the definition (7), we obtain:

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega(t_1, \dots, t_m) &= \hat{s}(\varphi) = \hat{s}(\psi) = \hat{t}(\psi) = \omega_D(\psi x_1, \dots, \psi x_m) = \\ &= \omega_D(\hat{t}_1(\varphi), \dots, \hat{t}_m(\varphi)) = \omega_D(\varphi^* t_1, \dots, \varphi^* t_m), \end{aligned}$$

i.e., φ^* is really a homomorphism.

Thus, the constructed algebra U has the following property: every assignment φ can be extended to a homomorphism $T \rightarrow U$. The class $\mathcal{K}'$ of all such algebras is a variety [5, theorem 24.3], and T , being free over itself, belongs to this class. Therefore, T turns out to be free on an infinite set of generators both in $\mathcal{K}$ and $\mathcal{K}'$. Hence, it generates both these varieties (cf. [5 §66]), and we conclude that $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$ and $U \in \mathcal{K}$. Moreover, $\varphi^* = \tilde{\varphi}$, so D is the superdiagonal of U by (8) and (4). The proof is completed. $\square$

Let us denote by $\mathcal{D}$ the class of all finitary superdiagonals on arbitrary nonvoid sets. We have a mapping $\Phi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{D}$ which correlates with every $\mathcal{K}$ -algebra its superdiagonal. According to Proposition 1, this mapping is injective. Independently of that proposition the proof just above provides another mapping $\Psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{K}$. Evidently, for all $U \in \mathcal{K}$ and $D \in \mathcal{D}$, $\Psi\Phi U = U$ and $\Phi\Psi D = D$. So we get

COROLLARY 7. *Mappings Φ and Ψ are mutually inverse and give rise to a one-to-one correspondence between $\mathcal{K}$ and $\mathcal{D}$.*

References

- [1] Cirulis Ja. *Superdiagonals of universal algebras* (in Russian.) // XIX All-Uni algebraic conference: Abstracts. Part II. - Lvov, 1987. - P. 306.

- [2] Ćirulis Ja. *Relation algebras in databases and generalized cylindric algebras* (in Russian) // Теоретические вопросы программирования. – Riga, Latvian State University, 1988. – P. 100–107.
- [3] Ćirulis J. *An algebraization of first order logic with terms* // Coll. Math. Soc. J. Bolyai. – 1991. – V. 54. – P. 125–146.
- [4] Daigneault A., D. Monk. *Representation theory for polyadic algebras* // Fund. Math. – 1963. – T. 52. – N. 2. – P. 151–176.
- [5] Grätzer G. *Universal algebra*. – N.Y.-Berlin: Springer, 1979.
- [6] Henkin L., D.J. Monk, A. Tarski. *Cylindric set algebras and related structures*. Lect. Notes Math. // 1981. – V. 883. – P. 1–129.

J. Ćirulis. Universālo algebru superdiagonāles.

Kopsavilkums. Fiksēsim varietāti $\mathcal{K}$ un brīvu algebru T tajā ar sammurējamu generatoru kopu X . Ar $\mathcal{K}$ -algebras U superdiagonāli sapratīsim tādu funkciju D , kas katram pārim $(s, t) \in T^2$ piekārto visu to novērtējumu (t.i., funkciju $\varphi \in U^X$) kopu, kurai "apmierina" "vienādojumu" $s = t$. Rakstā parādīts, ka $\mathcal{K}$ -algebras un to homomorfismus var raksturot superdiagonāļu terminos. Dots arī aksiomātisks superdiagonāļu apraksts kopā ar algoritmu, kā pēc patvaļīgas abstraktas superdiagonāles konstruēt tai atbilstošo algebru.

Цирулис Я. Сверхдиагонали универсальных алгебр.

Аннотация. Пусть T – свободная в себе алгебра со счетным множеством свободных образующих X , а $\mathcal{K}$ – порожденное ею многообразие. Под сверхдиагональю алгебры U из $\mathcal{K}$ будем понимать функцию D , которая каждому "уравнению" $(s, t) \in T^2$ сопоставляет множество тех "приписываний" $\varphi \in U^X$, которые ему "удовлетворяют". Показано, что $\mathcal{K}$ -алгебры и их сверхдиагонали могут быть характеризованы в терминах сверхдиагоналей. Даны также аксиоматическое описание сверхдиагоналей алгебр и конструкция, позволяющая по такой абстрактной сверхдиагонали построить соответствующую алгебру.

Department of Physics and Mathematics
University of Latvia
Raņa b. 19
226098 Riga
Latvia

ON EQUIVARIANT HOMOTOPY TYPE

S. M. AGHEEV

Abstract. With help of a new method we prove the complete generalization of James-Segal theorem: "Let G be a compact group. X and Y are metric G -ANE-spaces. Then $f: X \longrightarrow Y$ is a G -homotopy equivalence iff $f^H: X^H \longrightarrow Y^H$ is a homotopy equivalence for every closed subgroup $H \leq G$."

AMS Subject classification 57S15.

1. Introduction

I. M. James and G. B. Segal [8] have proved a very important theorem: let G be a compact Lie group, X and Y ^{m)} are separable metrizable G -ANE-spaces. Then G -map $f: X \longrightarrow Y$ is a G -homotopy equivalence iff for all closed subgroups H in G -maps $f^H: X^H \longrightarrow Y^H$ of H -fixed points are homotopy equivalence.

In this paper we obtain complete generalization of this theorem (for arbitrary compact group). Equivariant version of one of the Hanner theorems [6] (see theorem B) [6] was used as a key to prove. Below we give this generalizations.

Theorem A. Let G be a compact group. X and Y are metric

^{m)} Let's denote G -spaces as X, Y, Z, P , and so on; their orbit spaces as $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{P}$, and so on.

spaces. Then G -map $f: X \longrightarrow Y$ is a G -homotopy equivalence iff for all closed subgroups H in G so that $G/H \in \text{ANE}$, the map $f: X^H \longrightarrow Y^H$ are homotopy equivalence.

Theorem B. Let G be a compact group, X is a metric G -ANE-space. Then for every cover $\alpha \in \text{cov}(X)$ there exist G -CW-complex P and G -maps $f: X \longrightarrow P$ and $g: P \longrightarrow X$ for which the composition $g \circ f$ and 1_X are G -homotopy related to cover α .

2. Preliminaries

Let G be a compact group and we assume that all spaces are Hausdorff.

Main concepts and facts of G -space theory can be found in [5]. Let us remind some of them.

Definition (2.1) G -map $f: A \longrightarrow X$ given on a closed G -subspace of metric G -space Z we call a partial G -map $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$.

Definition (2.2) G -space X is called G -A[N]E-space (in symbols, $X \in G\text{-A[N]E}$) if every partial G -map $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$ can be extended to all Z , e.g. there exists G -map $f': Z \longrightarrow X$, $f'|_A = f$. f' can be extended to some open G -subspace U .

If in the definition (2.2) the extension of f is possible only in case, when $\dim(Z) \leq n$, then the notion of $G\text{-A[N]E}(n)$ arises.

Let's note, that in the class of metric G -spaces the notions of $G\text{-A[N]E}$ and $G\text{-A[N]R}$ coincide where $G\text{-A[N]R}$ means equivariant absolute (neighbourhood) retract for the class of all metric G -spaces (see [4]).

Every point x of G -space X originates the following objects: an orbit $G(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$ and stabilizer $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ which is a closed subgroup in G . Each closed subgroup H in G (in symbols, $H \leq G$) originates a set of H -fixed points $X^H = \{x \in X : H \leq G_x\} = \{x : H \cdot x = x\}$. G -map f carries X^H to Y^H and therefore map $f^H = f|_{X^H}: X^H \longrightarrow Y^H$ is defined.

In the paper [1] the following characterization of metric $\text{ANE}(0)$ -spaces has been proved.

Proposition (2.4) Let X be a metric G -space. Then the conditions (a)-(c) are equivalent.

(a) $X \in \text{ANE}(0)$:

(b) for every point x there exists the convergent sequence $\{x_n\}$ such that $G(x_n) \in \text{ANE}$ and $G_x \subseteq G_{x_n}$;

(c) for any point $x \in K$ and any $\epsilon > 0$ there exist a point $\tilde{x}$ and G -map $\varphi: U \longrightarrow G(\tilde{x})$ for which $\rho(x, \tilde{x}) < \epsilon$, $G(\tilde{x}) \in \text{ANE}$, $\text{diam} \varphi^{-1}(\tilde{x}) < \epsilon$.

And finally we would like to remind some equivariant homotopy notions.

Let X and Y be two G -spaces, ω is a open covering of X , $f_t: X \longrightarrow Y$ ($0 \leq t \leq 1$) is a G -homotopy (e.g. for every $t \in [0, 1]$ f_t is a G -map). Then f_t is called ω - G -homotopy, if for any $x \in X$ can be found an element $V \in \omega$ so that $f_t \in V$ for all $t \in [0, 1]$. It is quite clear that if $\omega = p^{-1}(\omega')$, where $\omega' \in \text{cov}(X)$, hence ω - G -homotopy induces on orbit spaces ω' -homotopy $f: X \longrightarrow Y$.

The following statement characterizes metric G -ANE-spaces by ω - G -homotopy (see [10])

Proposition (2.5) If for every cover $\alpha \in \text{cov} X$ of a metric there exist a G -ANE-space Y and G -maps $f: X \longrightarrow Y$ and $g: Y \longrightarrow X$ so that $g \circ f$ and 1_X are α - G -homotopic, then $X \in G\text{-ANE}$.

We introduce a notion of G -homotopy equivalence as usually. If $f: X \longrightarrow Y$ is a G -homotopy equivalence then $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ and $f^H: X^H \longrightarrow Y^H$ are ordinary homotopy equivalence for any subgroup $H \triangleleft G$.

3. G -CW complex and equivariant theorem of Hanner

T. Matumoto [11, 12] defined a G -CW complex for general topological group and elementary properties of it. In this note G -CW complex will be defined as an ANE-space.

Definition (3.1) Let G be a compact group and H be a closed subgroup of G so that $G/H \in \text{ANE}$. A closed G - n -cell is defined to be the G -space $\bar{e}^n = (G/H) \times \Delta^n$, where Δ^n is n -simplex.

Definition (3.2) A pair (X, K) of G -spaces X and the family of open G -cells in X , $K = \{e_\lambda \subseteq X, \lambda \in \Lambda\}$, is called to be a G -CW complex if:

(a) $K = \bigcup \{e_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$; (b) each G - n -cell e^n has its G -characteristic map of a closed G - n -cell onto its closure, $\sigma: (G/H) \times \Delta^n \longrightarrow \bar{e}^n \subseteq X$, satisfying

(b1) $\sigma|_{(G/H) \times (\Delta^n \times \delta \Delta^n)}$ is equimorphism onto e^n ;

(b2) boundary $\partial e^n = \sigma(G/H \times \delta \Delta^n)$ is contained in the union of a finite number of G -cells e_i^r with $r < n$;

(c) X has the identification topology with respect to the onto G -characteristic maps of X , $\sigma_X: \coprod ((G/H) \times \Delta_\lambda: \lambda \in \Lambda) \longrightarrow X$, where $\coprod$ denotes topologically disjoint union.

It is easy deduced that orbit space X of G -CW complex X has a canonical CW complex structure. Suppose that these CW complex X represents polyhedron with some triangulation τ . Then G -CW complex X is called to be the G -polyhedron.

Using an analogy argument with the full polyhedron let's introduce the notion of a full G -polyhedron. Let $\Sigma = \{G/H_\lambda: \lambda \in \Lambda, G/H_\lambda \in ANE\}$ be a family of homogenous spaces. An arbitrary point of G/H_λ we shall denote as $[g_\lambda]$; G - n -simplex $[g_{\lambda_0}] \cdot [g_{\lambda_1}] \cdot \dots \cdot [g_{\lambda_n}]$ with a given finite number of points $[g_{\lambda_k}] \in G/H_{\lambda_k}$ is called a set of formal sums

$$\{ \sum_k t_k [g \cdot g_{\lambda_k}] : t_k \in (0,1), \sum_k t_k = 1, g \in G \}.$$

It is clear that $[g_{\lambda_0}] \cdot \dots \cdot [g_{\lambda_m}] \leq [g_{\lambda_0}] \cdot \dots \cdot [g_{\lambda_n}]$ when $m \leq n$.

The set $F[\Sigma] = \{ [g_{\lambda_0}] \cdot \dots \cdot [g_{\lambda_n}] : n=0,1,2,\dots, \lambda_k \in \Lambda \}$ of all G - n -simplexes having weak topology regarding to G - n -simplexes is G -polyhedron. $F[\Sigma]$ is called a full G -polyhedron.

Let's consider extensor properties of G -CW complexes.

Theorem (3.3) Any G -CW complex P is a G -ANE-space.

The scheme of the proof of this statement is given bellow.

Lemma (3.4) Any finite G -CW complex is a G -ANE-space.

Lemma (3.5) Let $f: A \longrightarrow P$ be G -map of metric G -space onto G -CW complex P . Then $\{f^{-1}(e^n): e^n \in P\}$ is the open invariant local-finite cover of A .

Lemma (3.6) Let $Z \supseteq A \xrightarrow{f} X$ be a partial G -map from metric G -space Z onto Hausdorff G -space X . Let $X = \bigcup_{\beta} X_{\beta}$ and $\bigcup_{\beta} X_{\beta} \in ANE$ for any finite collection of indexes. If there exists such local-finite cover of A , $\sigma = \{V_\gamma\}$, so that for any γ can be found $\beta: f(V_\gamma) \subseteq X_\beta$, then f may be equivariant extended on some invariant neighbourhood.

Let's devote the left part of this item to the discussion and proof of equivariant Hanner theorem - theorem B.

Let $X \in G\text{-ANE}$. It is known [4] that

(1) X is equivariantly embedded onto some normed linear G -space U , X being closed in U ;

(11) for an open cover $\alpha \text{ cov } X$ there exists an open cover $\beta \text{ cov } X$ such that as soon as G -maps $f_0, f_1: X \longrightarrow X$ are β -closed, then there exist α - G -homotopy F between f_0 and f_1 .

Since $X \in G\text{-ANE}$, hence G -retraction $r: U \longrightarrow X$ of some invariant neighbourhood U exists, where $X=U \cap L$. Let's choose such an open cover $\gamma \text{ cov } U$, consisting of convex sets, whose image is refinement of β , $r(\gamma) \beta$. Let open covers $\sigma_0, \sigma_1 \text{ cov } U$ satisfy the following conditions: $\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_0 = \gamma^*$ (design $"^*$ " denote the star refinement).

According to the proposition (2.4) there exists an open invariant local-finite cover $\{V_\tau\}_{\tau \in I}$, the family of G -maps $\{\varphi_\tau: V_\tau \longrightarrow G/G_\tau\}_{\tau \in I}$ and collection of points $\{x_\tau\}$ such that

(1) $G_\tau = G_{x_\tau}$ (and thus, $G/G_{x_\tau} \in \text{ANE}$);

(2) $\{\varphi^{-1}(e \cdot G_\tau) : \tau \in I\} \sigma_1$;

(3) $x_\tau \in \text{st}_{\sigma_1}(S_\tau)$

Let us fix some invariant partition of the unity $\{\psi_\tau: X \longrightarrow I\}_{\tau \in I}$ inscribed into cover $\{V_\tau\}$.

The family $\Sigma = \{G/G_\tau\}_{\tau \in I}$ of the homogenous spaces originates the full G -CW complex $F[\Sigma]$. Let's consider the following G -CW subcomplex $N \subset F[\Sigma]$, $N = \{[g_{\tau_0}] \cdot \dots \cdot [g_{\tau_k}] : g_{\tau_0} \cdot S_{\tau_0} \cap \dots \cap g_{\tau_k} \cdot S_{\tau_k} \neq \emptyset\}$. The continuous G -map $f: X \longrightarrow N$ is correctly defined by the formula $f(x) = \{ \psi_\tau(x) \cdot \varphi_\tau(x) : \tau \in I \}$. G -map $h: N \longrightarrow X$ can be given by the formula $h(\{ \tau_j \cdot [g \cdot g_{\tau_j}] : j=0, 1, \dots, k \}) = r(\{ \tau_j \cdot g \cdot g_{\tau_j} \cdot x_{\tau_j} : j=0, 1, \dots, k \})$. Since $ng \cdot g_{\tau_j} \cdot S_{\tau_j} = \emptyset$, then $U(g \cdot g_{\tau_j} \cdot S_{\tau_j} : j=0, 1, \dots, k) \in \beta_0$, $U(g \cdot g_{\tau_j} \cdot x_{\tau_j} : j=0, 1, \dots, k) \in \gamma^*$ and, consequently, $\Sigma_j \cdot g \cdot g_{\tau_j} \in H$.

Let's verify that $h \cdot f = 1_X \text{ rel } \alpha$. By property (11) it is quite enough to show that $h \cdot f$ and 1_X are β -close. But $h \cdot f(x) = h(\{ \psi_\tau(x) \cdot \varphi_\tau(x) \}) = r(\{ \psi_\tau(x) \cdot g_\tau \cdot x_\tau \})$, where $g_\tau \cdot G_\tau = \varphi_\tau(x) \in G/G_\tau$. But x and $g_\tau \cdot x_\tau$ are β_0 -close, x and $\psi_\tau(x) \cdot x_\tau$ are γ -close, x and $r(\{ \psi_\tau(x) \cdot g_\tau \cdot x_\tau \})$ are β -close. ■

4. Equivariant homotopy type

Let's enumerate some results, obtained by T. Matumoto [10].

Proposition (4.1) Let $f: X \longrightarrow Y$ be a G -map of G -CW complexes. Then f is G -homotopic to such G -map f' , that f' carries n -skeleton $X^{(n)}$ to n -skeleton $Y^{(n)}$ for every $n \geq 0$.

Proposition (4.2) Let $f: X \longrightarrow Y$ be a G -map of G -spaces. If for every subgroup $H < G$, $G/H \in \text{ANE}$ map f^H of H -fixed points be a weak homotopy equivalence, then for every pair $L \leq K$ of G -CW complexes and for every commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow u & \searrow \tilde{u} & \uparrow v \\ L & \xrightarrow{\quad} & K \end{array}$$

there exists a G -map $\tilde{u}: K \longrightarrow X$, $\tilde{u}|_L = u$, $f \circ \tilde{u} = v$.

Proposition (4.3) Let $f: X \longrightarrow Y$ be a map of G -CW complexes. If for every subgroup $H < G$, $G/H \in \text{ANE}$ the map $f^H: X^H \longrightarrow Y^H$ be a homotopy equivalence, then the G -map f be a G -homotopy equivalence.

Matumoto proved the similar statement for G -maps of pairs of G -CW complexes.

These results of Matumoto are used to prove that a metric G -ANE-space has a G -homotopy type of G -CW complex. The scheme of proof is performed similarly to [10].

Proposition (4.4) let X be a G -space. If $X^H \neq \emptyset$ for some subgroup $H < G$, $G/H \in \text{ANE}$, then there exists such a G -map $f: P \longrightarrow X$ of G -CW complex P , that for every subgroup $N < G$, $G/N \in \text{ANE}$ the map f^N be a weak homotopy equivalence.

Proposition (4.5) Let X be a metric G -ANE-space. Then X be G -homotopy equivalent to some G -CW complex.

This proposition is based on equivariant Hanner theorem (see [10]).

And finally, everything is ready to prove the theorem A. Let $f: X \longrightarrow Y$ be such a G -map of G -ANE-spaces, that f be a homotopy equivalence for every $H < G$, $G/H \in \text{ANE}$. By (4.5) there exist G -homotopy equivalences $u: P \longrightarrow X$ and $v: Q \longrightarrow Y$, where P and Q are G -CW complexes. Then the G -map $h = v \circ f \circ u: P \longrightarrow Q$ be a weak homotopy equivalence, where $v': Y \longrightarrow Q$ and v are homotopic inverse. From (4.3) it follows, that h be a G -homotopy equivalence. Since $f = v \circ h \circ u'$, where u' and u are

G -homotopic inverse, then f be a G -homotopy equivalence, and it completes the proof of the theorem A. ■

Corollary (4.6) If a metric G -ANE-space X is such that $X^H \in AE$ for every subgroup $H < G$, $G/H \in ANE$, then $X \in G-AE$.

Proof. Apply (4.5) to the trivial G -map $f: X \longrightarrow (*)$. ■

Corollary (4.7) Let the pairs of metric G -spaces (X, X_0) and (Y, Y_0) be such that X, X_0, Y, Y_0 be G -ANE-spaces. Then G -map $f: (X, X_0) \longrightarrow (Y, Y_0)$ be a G -homotopy equivalence of G -pairs iff for every subgroup $H < G$, $G/H \in ANE$ map f^H be a homotopy equivalence of the corresponding pairs of spaces.

The proof is performed similarly to the proof of the theorem A with making use of the versions of (4.2), (4.3), (4.4), (4.5), (3.9) for the pairs of G -spaces.

5. Concluding remarks

The equivariant Hanner theorem has some more applications.

Theorem (5.1) If a metric G -space $X \in G-ANE$, then

(1) $X^{(H)} \in G-ANE$ for every $H < G$;

(2) $X/H \in (G/H)-ANE$ for every normal subgroup $H < G$.

For the G -CW complex X this statement be evident. In the common case theorem (5.1) follows from the theorem B and proposition (2.5).

Corollary (5.2) Let $H < G$ be a subgroup of the Abelian group G . If X be a metric G -ANE-space, Y be a metric H -ANE-space, then the crossed product $X \times_H Y$ be a G -ANE-space.

Proof. Consider the following action of group $G \times H$ on X and Y : $(g, h) \cdot x = (g \cdot h^{-1})x$, $(g, h) \cdot y = hy$. It is not difficult to verify that $X \in (G \times H)-ANE$, $Y \in (G \times H)-ANE$. But

$X \times_H Y = (X \times Y) / \{(e) \times H\} \in (G \times H) / \{(e) \times H\} -ANE$, e.g. $X \times_H Y \in G-ANE$. ■

References

1. S. N. Agheev, Equivariant theorem of Dugundji and equivariant extensor in dimension 0 // SISI, M1429-B91(1991).
2. S. M. Agheev, Equivariant theorem of Dugundji // Uspekhi Mat. Nauk 45(5)(1990), 111-112.
3. S. A. Antonian, Retraction properties of opblt spaces // Mat. Sborn. 137(1988), 300-318.
4. S. A. Antonian, S. Mardesic, Equivariant shape // Fund. Math. 127(1987).

213-224.

5. G.B. Bredon, Introduction to compact transformation groups, New York-London, 1972.
6. O. Hanner, Some theorems on absolute neighborhood retracts // Ark. Math. 1(1961), 389-408.
7. S.T. Hu, Theory of retracts, Detroit, Wayne State Univ. Press, 1965.
8. I.M. James, G.B. Segal, On equivariant homotopy type // Topology, 17(1978), 267-272.
9. J.W. Jaworowski, Extensions of G -maps and euclidean G -retracts // Math. Z. 148(1976), 143-148.
10. M. Murayama, On G -ANR's and their G -homotopy types, Osaka J. Math., 20(1983), 479-512.
11. T. Matumoto, On G -CW complexes and theorem of J.H.C. Whitehead // Journal Faculty of Univ. of Tokyo 18(1971), 363-374.
12. T. Matumoto, Equivariant K -theory and Fredholm operators // Journal Faculty of Univ. of Tokyo 18(1971), 109-125.

С.М. Агеев. Об эквивариантном гомотопическом типе.

Аннотация. Основным результатом статьи является обобщение эквивариантной теоремы Ханнера (для произвольной группы). С помощью теоремы Ханнера доказано обобщение теоремы Джеймса-Сегала об эквивариантном гомотопическом типе. УДК 515.12.

S.M. Ageyev. Par ekvivalentu homotopijas tipu.

Анотācija. Iegūts pilnīgs Hanners teorēmas ekvivalentu vispārinājums (patvaļīgai grupai). Vispārināta James-Segala teorēma ekvivalentu homotopijas tipam, kas ir pierādīta ar Hanners teorēmas palīdzību.

Department of Mathematics
Brest Pedagogical Institute
224665 Brest

TOWARDS THE THEORY OF CONTINUITY DEFECT
AND CONTINUITY MEASURE FOR MAPPINGS OF METRIC SPACES

M. Burgin, A. Šostak

Summary. The concept of the continuity defect and the related concept of the continuity measure for a mapping with values in a metric space are introduced and the corresponding theory is being initiated. We consider this theory as a generalization of the classic theory of continuous mappings made in line with the ideas of fuzzy mathematics.

AMS Subject Classification 54A40

When dealing with a mapping of metric spaces, or more generally, with a mapping of topological spaces, of paramount importance is usually the question whether this mapping is continuous or not. This naturally leads to the classification of all mappings between metric (or topological) spaces into "good" - continuous, and "bad" - discontinuous ones. Notice, however, that such a strict, crisp classification being completely in accordance with the traditions of modern mathematics, the reasonings in which are usually based on the two-valued ("classic") logic and are being carried out, explicitly or implicitly, in the setting of the category theory, seems to be not always natural and effective if one aims at applying a given mathematical theory to the study of models of systems and processes in the real world. We mean here first of all that when dealing with real processes one can speak as a rule only about a known approximation to the property of continuity. On the other hand one has to distinguish different degrees of discontinuity - roughly speaking its negligible and non-negligible extents.

Thus there appears the necessity of mathematical concepts and theories which would be flexible enough to deal both with

continuous and discontinuous mappings and to take into account the degree of discontinuity in case of the last ones. The ideological and mathematical basis for these concepts and theories can be Lukasiewicz logic (see e.g. [8],[2]) and the fuzzy set theory (see e.g. [10],[1],[4],[5]) which has experienced a vigorous development in the last twenty five years. In particular, the concept of a fuzzy category introduced in [9], in which morphisms are allowed to be such only to some extent, could suite to these merits.

The aim of this paper is to propose a concrete approach to the problem of measuring the degree of (dis)continuity for mappings with values in metric spaces and to some related problems, to start to develop the corresponding theory and to outline some of its possible applications.

1. The continuity defect and the measure of continuity: definitions and basic properties.

It is well-known that a mapping $f: X \rightarrow Y$ where X and Y are topological spaces, is continuous iff $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ for each subset $M \subset X$. ($\overline{A}$ denotes the closure of a set A in the corresponding topological space) Thus, in case when the topology of Y is induced by metric ϱ , the continuity of f just means that the value $\delta(f, M) := \sup_{y \in f(M)} \varrho(y, \overline{f(M)}) = \sup_{y \in f(M)} \varrho(y, f(M))$ is equal to 0. Moreover, for a discontinuous mapping f the value $\delta(f, M)$ can intuitively be interpreted as the gap at the border of the set M . This reasoning justifies the introduction of the next definition:

(1.1) Definition. Let $(X, \mathcal{T})$ be a topological space and (Y, ϱ) be a metric space. By the defect of continuity, or just by the continuity defect, of a mapping $f: X \rightarrow Y$ we call the value

$$\delta(f) = \sup_{M \subset X} \delta(f, M) \quad \text{where} \quad \delta(f, M) = \sup_{x \in M} \varrho(f(x), f(M))$$

(the case $\delta(f) = \infty$ is not excluded.)

In the sequel in Sections 1, 2 and 3 symbols $X, \mathcal{T}, Y, \varrho$ and f always have the same meaning as in the previous definition, unless special stipulations are made.

Using elementary properties of metrics one can immediately notice the validity of the next statement:

(1.2) Proposition. $\delta(f, M) = \sup_{x \in \bar{M}} \inf_{x' \in M} \varphi(f(x), f(x'))$,

and hence $\delta(f) = \sup_{M \subset X} \sup_{x \in \bar{M}} \inf_{x' \in M} \varphi(f(x), f(x'))$

For practical purposes however it seems more convenient to use another form of the definition of continuity defect (see Definition 1.1') which is based on the given below concept of the (local) continuity defect of a mapping at a point.

(1.3) Definition. By the (local) continuity defect of a mapping f at a point $x_0 \in X$ we call the value

$$\delta(f, x_0) := \sup \{ \varphi(f(x_0), f(M)) : M \subset X, x_0 \in \bar{M} \}.$$

(The case $\delta(f, x_0) = \infty$ is not excluded.)

In other words,

$\delta(f, x_0) \leq \alpha$ where $\alpha \geq 0$, iff for each $M \subset X$ such that $x_0 \in \bar{M}$ and each $\epsilon > 0$ there exists $x \in M$ satisfying the inequality $\varphi(f(x_0), f(x)) < \alpha + \epsilon$.

Notice that the continuity of a mapping f at a point $x_0 \in X$ just means that $\delta(f, x_0) = 0$.

(1.4) Remark. Notice that in general $\delta(f, x_0) \neq \delta(f, \{x_0\})$.

Since obviously $\sup_{x \in X} \delta(f, x) = \sup_{x \in X} \sup_{M \subset X} \sup_{x \in \bar{M}} \varphi(f(x), f(M)) =$

$\sup_{M \subset X} \sup_{x \in \bar{M}} \varphi(f(x), f(M)) = \delta(f)$, we can reformulate Definition

1.1 as follows:

(1.1') Definition. The continuity defect of a mapping f is defined by the equality

$$\delta(f) = \sup_{x \in X} \delta(f, x)$$

Next we shall establish some useful characterizations of continuity defect at a point. By setting $\delta(f, x_0) = 0$ the reader can easily extract from these statements the well-known characterizations of continuous mappings (which, by the way, served as prototypes for our characterizations).

(1.5) Proposition. $\delta(f, x_0) = \sup_{\substack{M \subset X \\ x_0 \in \bar{M}}} \inf_{N \subset M} \varphi(f(x_0), f(N))$.

In other words,

$\delta(f, x_0) \leq a$, where $a \geq 0$, iff for each $M \subset X$ such that $x_0 \in \bar{M}$ there exists a countable set $N \subset M$ for which $\varphi(f(x_0), f(N)) \leq a$.

Proof is obvious.

Let now $\mathcal{N}(x_0)$ denote the set of all neighborhoods of $x_0 \in X$.

(1.6) Proposition. $\delta(f, x_0) = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{M} \\ M \subset X}} \sup_{U \in \mathcal{N}(x_0)} \varphi(f(x_0), f(M \cap U))$

Proof. Let $\Delta(f, x_0)$ stand for the right part of the equality to be proved. Since $x_0 \in \mathcal{N}(x_0)$, it is clear that $\delta(f, x_0) \leq \Delta(f, x_0)$. Conversely, assume that $a < \Delta(f, x_0)$ for some $a \in \mathbb{R}$. Then there exist a set M such that $x_0 \in \bar{M}$ and a neighborhood $U \in \mathcal{N}(x_0)$ satisfying the inequality $\varphi(f(x_0), f(M \cap U)) > a$. Noticing that $x_0 \in \overline{M \cap U}$ we conclude easily that $\delta(f, x_0) > a$. Hence $\delta(f, x_0) = \Delta(f, x_0)$.

Let $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ be a net in the space X . The entry $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \rightarrow x_0$ or just $(x_\gamma) \rightarrow x_0$ will mean that this net converges to x_0 . We write $\varliminf_\gamma x_\gamma$ to denote the lower limit of $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ i.e. the set of all its cluster points (see e.g. [2]). Explicitly, $x \in \varliminf_\gamma x_\gamma$ iff for each $U \in \mathcal{N}(x)$ and each $\gamma_0 \in \Gamma$ there exists $\gamma > \gamma_0$ such that $x_\gamma \in U$. For a real valued net $(\alpha_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ we set $\varlimsup_\gamma \alpha_\gamma$ to denote its upper limit, i.e. $\varlimsup_\gamma \alpha_\gamma = \lim_\gamma \sup \{\alpha_\gamma : \gamma > \delta\}$. (The case $\varlimsup_\gamma \alpha_\gamma = \infty$ is not excluded).

(1.7) Proposition. $\delta(f, x_0) \leq a$, $a \geq 0$, iff for each net (x_γ) converging to x_0 , for each $\varepsilon > 0$, and each $\gamma_0 \in \Gamma$ there exists $\gamma > \gamma_0$ such that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) < a + \varepsilon$.

Proof. Assume that $\delta(f, x_0) > a$. Then according to (1.5) there exist $\varepsilon > 0$ and $M \subset X$ such that $x_0 \in \bar{M}$ and $\varphi(f(x_0), f(M)) \geq a + \varepsilon$. Then having constructed a net $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ contained in M and converging to x_0 we conclude that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) \geq a + \varepsilon$ for all $\gamma \in \Gamma$.

Conversely, let $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ be a net converging to x_0 and such that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) > a$ for a final part of $((\gamma_\gamma))$. Then there exist $\delta_0 \in \Gamma$ and $\varepsilon > 0$ such that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) \geq a + \varepsilon$ for all $\gamma > \delta_0$. Let $M = \{x_\gamma : \gamma > \delta_0\}$. It is easy to notice that $x_0 \in \bar{M}$ and

$\varphi(f(x_0), f(M)) \geq a + \varepsilon$ and hence $\delta(f, x_0) \geq a + \varepsilon > a$.

The previous proposition can be reformulated as follows:

(1.7') Proposition. $\delta(f, x_0) < a$, $a > 0$, iff there exists $\varepsilon > 0$ such that for each net (x_γ) converging to x_0 and each $\gamma_0 \in I$ there exists $\gamma > \gamma_0$ such that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) < a - \varepsilon$.

Since in a compact space each net has a cluster point, from Proposition 1.7 one can easily get the following

(1.8) Corollary. If the space X is compact, then

$$\delta(f, x_0) = \sup_{(x_\gamma) \rightarrow x_0} \varphi(f(x_0), \lim_{\gamma} f(x_\gamma))$$

(1.9) Proposition. $\delta(f, x_0) = \sup_{(x_\gamma) \rightarrow x_0} \lim_{\gamma} \varphi(f(x_0), f(x_\gamma))$

In other words

$\delta(f, x_0) \leq a$ iff for each net $(x_\gamma)_{\gamma \in I}$ converging to x_0 and each $\varepsilon > 0$ there exists γ_0 such that $(f(x_\gamma), f(x_0)) < a + \varepsilon$ for all $\gamma > \gamma_0$.

Proof. Set $\Delta(f, x_0)$ to denote the right part of the equality to be proved and assume that $\delta(f, x_0) > a$. Then according to (1.6) there exist $\varepsilon > 0$, $M \subset X$ with $x_0 \in M$ and $U_0 \in \mathcal{N}(x_0)$ such that $\varphi(f(x_0), f(M \cap U_0)) > a + \varepsilon$. Obviously for each $U \in \mathcal{N}(x_0)$ contained in U_0 the inequality $\varphi(f(x_0), f(M \cap U)) > a + \varepsilon$ is also valid and hence for each $U \in \mathcal{N}(x_0)$ one can find a point $x_U \in M \cap U$ for which $\varphi(f(x_0), f(x_U)) > a + \varepsilon$. Thus a net $(x_U)_{U \in \mathcal{N}(x_0)}$ is obtained where the set $\mathcal{N}(x_0)$ is directed by inclusion: $U < U'$ iff $U' \subset U$. From the construction it is obvious that (x_U) converges to x_0 and $\varphi(f(x_0), f(x_U)) > a + \varepsilon > a$ for each x_U . However, this means that $\delta(f, x_0) > a$ and hence $\Delta(f, x_0) \geq \delta(f, x_0)$.

Conversely, assume that $\Delta(f, x_0) > a$; then there exist $\varepsilon > 0$ and a net (x_γ) converging to x_0 such that for every γ_0 there exists $\gamma > \gamma_0$ satisfying the condition $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) \geq a + \varepsilon$. Let $M = \{x_\gamma : \varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) \geq a + \varepsilon\}$. Since obviously $x_0 \in M$ and $\varphi(f(x_0), f(M)) \geq a + \varepsilon$ it follows that $\delta(f, x_0) > a$ and therefore $\delta(f, x_0) \geq \Delta(f, x_0)$.

In case when the space X is first countable (in particular when it is metrizable) one can easily establish the following

versions of Propositions 1.5 and 1.9.

(1.5^x) Proposition. If X is first countable, then
 $\delta(f, x_0) = \sup \{ \varphi(f(x_0), f(N)) : N \subset X, x_0 \in \bar{N}, |N| \leq \aleph_0 \}.$

(1.9^x) Proposition. If X is first countable, then
 $\delta(f, x_0) = \sup \{ \lim_n \varphi(f(x_0), f(x_n)) : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x_0 \}.$

(1.10) Example. Let X be the unit interval $I = [0, 1]$ endowed with the topology $\mathcal{T} = \{U : U \subset (0, 1]\} \cup \{I \setminus G : G \subset I, |G| \leq \aleph_0\}$ (thus all points of $(0, 1]$ are isolated and the point 0 is considered with co-countable topology), let Y be the same set I but considered in its usual topology, and let $f: X \rightarrow Y$ be the identity mapping. It is easy to notice that $\delta(f, 0) = 1$ while no countable set N contains the point x_0 in its closure, and no sequence from $(0, 1]$ converges to 0 in the space X .

In case when the metric φ is bounded, sometimes it may be reasonable to consider the normed version of Definitions 1.3 and 1.1'.

(1.3^h) Definition. The normed continuity defect of a function f at a point x_0 is defined by the equality

$$\hat{\delta}(f, x_0) = \frac{\delta(f, x_0)}{d},$$

where d is the diameter of the set $f(X)$, i.e. $d = \sup \{ \varphi(y, y') : y, y' \in f(X) \}$.

Obviously, the value $\hat{\delta}(f, x_0)$ can vary from 0 (corresponding to the case when f is continuous at x_0) to 1 (corresponding to the maximal possible gap at x_0).

(1.4^h) Definition. The normed defect of continuity of a mapping f is defined by the equality $\hat{\delta}(f) = \sup_x \hat{\delta}(f, x)$, or equivalently, by the formula $\hat{\delta}(f) = \frac{\delta(f)}{d}$.

We end this section by introducing the concept of the continuity measure of a mapping; for us it will be a derivate of the concept of the continuity defect.

(1.11) Definition. The local continuity measure λ of a mapping f at a point $x_0 \in X$ is defined by the equality

$$\lambda(f, x_0) = \frac{1}{1 + \delta(f, x_0)}.$$

The continuity measure λ of a mapping f is defined by

$\lambda(f) = \inf_x \lambda(f, x)$ or equivalently, by

$$\lambda(f) = \frac{1}{1 + \delta(f)}.$$

In case when the diameter of the set $f(X)$ is finite the following approach to the continuity measure could be preferable:

(1.12) Definition. The (local) continuity measure μ of a mapping f at a point $x_0 \in X$ is defined by the equality $\mu(f, x_0) = 1 - \hat{\delta}(f, x_0)$. The continuity measure μ of a mapping f is defined by $\mu(f) = 1 - \hat{\delta}(f)$ or equivalently, by $\mu(f) = \inf_x \mu(f, x)$.

A reader can easily reformulate the statements of this section in such a way that instead of the continuity defect the measures of continuity λ and μ are used.

2. On the behaviour of continuity defects under various operations

In this section we shall investigate how various operations on mappings - such as the restriction of a mapping, the diagonal of a family of mappings, the product of mappings e.a. can influence the continuity defect. To be more precise, we shall try to estimate to what extent the continuity defect of the initial mapping (or mappings) determines the continuity defect of the resulting mapping.

The proof of the first two statements is obvious and therefore omitted.

(2.1) Proposition. Let X' be a subspace of a space X and $f': X' \rightarrow Y$ be the restriction of a mapping $f: X \rightarrow Y$ to X' . Then $\delta(f') \leq \delta(f)$.

(2.2) Proposition. Let $X_\alpha, \alpha \in A$, be a disjoint family of topological spaces, $X = \bigoplus_\alpha X_\alpha$ their direct sum and $f: X \rightarrow Y$ a mapping. Then $\delta(f) = \sup_\alpha \delta(f_\alpha)$ where f_α is the restriction of f to X_α .

(2.3) Proposition. Let $(Y_1, \rho_1), (Y_2, \rho_2)$ be metric spaces and let (Y, ρ) be their product where $\rho(y, y') = \sqrt{\rho_1^2(y_1, y'_1) + \rho_2^2(y_2, y'_2)}$ ($y = (y_1, y_2), y' = (y'_1, y'_2)$). If $f = f_1 \Delta f_2: X \rightarrow Y_1 \times Y_2$ is the diagonal of mappings $f_i: X \rightarrow Y_i, i=1, 2$, then $\max\{\delta(f_1, x_0), \delta(f_2, x_0)\} \leq \delta(f, x_0) \leq \sqrt{\delta^2(f_1, x_0) + \delta^2(f_2, x_0)}$ for each point $x_0 \in X$ and $\max\{\delta(f_1), \delta(f_2)\} \leq \delta(f) \leq \sqrt{\delta^2(f_1) + \delta^2(f_2)}$.

Proof. Let us denote $\delta(f_i, x_0) = b_i, i=1, 2$ and $a = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. To show the inequality $\delta(f, x_0) \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ we can assume that $b_1, b_2 < \infty, a < \delta(f, x_0)$. Then from (1.3) it is clear that there exist $M \subset X$ the closure of which contains x_0 and a real number $\varepsilon > 0$ such that $\rho(f(x_0), f(M)) > a + \varepsilon$. Choose now $\delta > 0$ satisfying the inequality $\sqrt{(b_1 + \delta)^2 + (b_2 + \delta)^2} < a + \varepsilon$. On the other hand, since $x_0 \in \bar{M}$ and $\delta(f_i, x_0) = b_i$, according to 1.6 for each neighborhood U of x_0 one can find a point $x_U \in M \cap U$ such that $\rho(f_i(x_0), f_i(x_U)) \leq b_i + \delta$. Consider the set $M_1 = \{x_U: U \in \mathcal{N}(x_0)\}$ thus obtained. Obviously, $x_0 \in \bar{M}_1$ and therefore, since $\delta(f_2, x_0) < b_2 + \delta$ according to 1.3 there exists a point $x' \in M_1$ such that $\rho(f_2(x_0), f_2(x')) \leq b_2 + \delta$.

It is easy to notice now that $\rho(f(x_0), f(M)) \leq \rho(f(x_0), f(x')) = \sqrt{\rho_1^2(f_1(x_0), f_1(x')) + \rho_2^2(f_2(x_0), f_2(x'))} \leq \sqrt{(b_1 + \delta)^2 + (b_2 + \delta)^2} < a + \varepsilon$. The obtained contradiction means that $\delta(f, x_0) \leq \sqrt{\delta^2(f_1, x_0) + \delta^2(f_2, x_0)}$.

The inequality $\max\{\delta(f_1, x_0), \delta(f_2, x_0)\} \leq \delta(f, x_0)$ follows easily from the evident inequality $\rho_i(f_i(x), f_i(x')) \leq \rho(f(x), f(x')), i=1, 2$.

Finally, the inequalities estimating the defect $\delta(f)$ follow

easily from the evaluations of the local defect $\delta(f, x_0)$.

(The equality $\delta(f, x_0) = \sqrt{\delta^2(f_1, x_0) + \delta^2(f_2, x_0)}$ generally does not hold. To make sure of this one can consider the following example. Let $X = Y = \mathbb{R}$ (the real line endowed with the usual metric), $c \in \mathbb{R}$ be a fixed point and let functions $f_i: X \rightarrow Y$ be defined as follows:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < c \\ 1, & \text{if } x \geq c \end{cases} \quad \text{and} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq c \\ 1 & \text{if } x > c \end{cases}.$$

It is easy to notice that $\delta(f_i) = \delta(f_i, c) = 1$ for $i=1, 2$, and $\delta(f) = \delta(f, c) = 1$ ($< \sqrt{2}$).

Together with the metric φ used in Proposition 2.3 the product $Y = Y_1 \times Y_2$ is often endowed with other metrics compatible with the product topology. Definite analogues of Proposition 2.3 are valid for these metrics, too. For example, reasoning in a manner quite similar to the one used in the proof of 2.3 it is easy to establish the following facts (X, Y_1, Y_2, Y, f_1, f_2 and f have the same meaning as in Proposition 2.3):

(2.3⁰) Proposition. If Y is endowed with the metric φ^0 where $\varphi^0(y, y') = \varphi_1(y_1, y'_1) + \varphi_2(y_2, y'_2)$, then $\max\{\delta(f_1, x_0), \delta(f_2, x_0)\} \leq \delta(f, x_0) \leq \delta(f_1, x_0) + \delta(f_2, x_0)$ for each point $x_0 \in X$ and $\max\{\delta(f_1), \delta(f_2)\} \leq \delta(f) \leq \delta(f_1) + \delta(f_2)$.

(2.3^K) Proposition. If Y is endowed with the metric φ^K where $\varphi^K(x, y') = \max_{i=1,2} \varphi_i(y_i, y'_i)$, then $\delta(f, x_0) = \max_{i=1,2} \delta(f_i, x_0)$ and $\delta(f) = \max_{i=1,2} \delta(f_i)$.

In an obvious way by induction Proposition 2.3 as well as Propositions 2.3⁰ and 2.3^K can be extended to the case of an arbitrary finite number of factors: $f_i: X \rightarrow Y_i$, $i=1, \dots, n$. Moreover, patterned after the proof of 2.3 it is not difficult to establish the following infinite analogue of Proposition 2.3

(2.4) Proposition. Let (Y_n, φ_n) , $n \in \mathbb{N}$, be a countable family of metric spaces such that $|\varphi_n| \leq 1$, and let (Y, φ) be their product where

$$\varphi(y, y') = \sqrt{\sum_n \frac{1}{2^n} \varphi_n^2(y_n, y'_n)}$$

If $f = \Delta f_n: X \rightarrow Y$ is the diagonal of the mappings $f_n: X \rightarrow Y_n$, $n \in \mathbb{N}$, then $\delta(f, x_0) \leq \sqrt{\sum_n 2^{-n} \delta^2(f_n, x_0)}$ for each point $x_0 \in X$ and $\delta(f) \leq \sqrt{\sum_n 2^{-n} \delta^2(f_n)}$.

(2.5) Proposition. Let (Y_1, ρ_1) , (Y_2, ρ_2) be metric spaces, X_1, X_2 topological spaces and let $f = f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ be the product of mappings $f_i: X_i \rightarrow Y_i$, $i=1, 2$, where $Y_1 \times Y_2$ is endowed with the same metric ρ as in Proposition 2.3. Then $\delta(f) = \sqrt{\delta^2(f_1) + \delta^2(f_2)}$.

Proof. Take a point $x^0 = (x_1^0, x_2^0) \in X_1 \times X_2 = X$ and let $b_1 = \delta(f_1, x_1^0)$, $b_2 = \delta(f_2, x_2^0)$. We shall restrict ourselves in the proof with the case when b_1 and b_2 are finite; the case when one or both of b_i is infinite can be proved similarly and with obvious simplifications.

To prove the inequality $\delta(f, x_0) \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ we assume that $\delta(f, x_0) > a$ and choose $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ such that $\delta(f, x^0) > a + \varepsilon > \sqrt{(b_1 + \delta)^2 + (b_2 + \delta)^2}$. Then applying Proposition 1.9 we can find a net $(x^i)_{i \in I}$ in X converging to x^0 such that $\rho(f(x^0), f(x^i)) > a + \varepsilon$. Besides, as it is clear from 1.9, without loss of generality we can assume this net to be universal (see e.g. [6]).

Since the image of a universal net is universal [6], the coordinate nets $(x_1^i)_{i \in I}$ and $(x_2^i)_{i \in I}$ are universal and besides, they obviously converge to points x_1^0 and x_2^0 respectively. Recalling that $\delta(f_i, x_i^0) = b_i$, $i=1, 2$ and applying again Proposition 1.9 we can conclude that there exist γ_i , $i=1, 2$ such that $\rho(f_i(x_1^0), f_i(x_1^i)) \leq b_i + \delta$ for all $i > \gamma_i$. However, this will easily lead to a contradiction if one takes $i > \gamma^*$, where $\gamma^* > \gamma_1$ and $\gamma^* > \gamma_2$. Hence $\delta(f, x_0) \leq \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

To establish the opposite inequality assume that $\delta(f, x^0) < \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ and choose $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$ in such a way that $\delta(f, x^0) + \varepsilon < \sqrt{(b_1 - \delta)^2 + (b_2 - \delta)^2}$. Then for $i=1, 2$ one can find a set $M_i \subset X_i$

such that $x_1^0 \in M_1$ and $\varphi_1(f(x_1^0), f(M_1)) \geq b_1 - \delta$. Let $M = M_1 \times M_2$. It is easy to notice that $\varphi(f(x^0), f(M)) \geq \sqrt{(b_1 - \delta)^2 + (b_2 - \delta)^2} \geq \delta(f, x^0) + \varepsilon > (f, x^0)$, and hence $\delta(\cdot, x_0) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

To complete the proof notice that $\delta(f) = \sup_{x \in X} \delta(f, x) = \sup_{x_1 \in X_1} \sqrt{\delta^2(f_1, x_1) + \delta^2(f_2, x_2)} = \sqrt{\sup_{x_1 \in X_1} \delta^2(f_1, x_1) + \sup_{x_2 \in X_2} \delta^2(f_2, x_2)} = \sqrt{\delta^2(f_1) + \delta^2(f_2)}$.

Reasoning in a similar way one can establish the analogues of this proposition in case when the metrics $\varphi^0(2.3^0)$ and $\varphi^*(2.3^*)$ are used instead of the metric φ .

Pattern 1 after the proof of Proposition 2.5 it is not difficult to establish also its infinite analogue:

(2.6) Proposition. Let $X_n, n \in \mathbb{N}$, be a family of topological spaces and (Y_n, φ_n) be a family of metric spaces such that $|\varphi_n| \leq 1$.

Let $\varphi(y, y') = \sqrt{\sum_n 2^{-n} \varphi_n^2(y_n, y'_n)}$ be the metric on the product $Y = \prod_n Y_n$, let $X = \prod_n X_n$ and let $f = \prod_n f_n: X \rightarrow Y$ be the product of mappings $f_n: X_n \rightarrow Y_n$. Then $\delta(f, x^0) = \sqrt{\sum_n 2^{-n} \delta^2(f_n, x_n^0)}$ for each point $x^0 \in X$ and $\delta(f) = \sqrt{\sum_n 2^{-n} \delta^2(f_n)}$.

3. The continuity defect in case of a normed algebra

In this section it is assumed additionally that $(Y, \|\cdot\|)$ is a normed algebra.

(3.1) Proposition. For any mappings $f, g: X \rightarrow Y$ the inequalities $\delta(f+g, x_0) \leq \delta(f, x_0) + \delta(g, x_0)$ and $\delta(f+g) \leq \delta(f) + \delta(g)$ hold.

Proof. Notice first that $\varphi((f+g)(x), (f+g)(x')) = \|(f+g)(x) - (f+g)(x')\| \leq \|f(x) - f(x')\| + \|g(x) - g(x')\| = \varphi(f(x), f(x')) + \varphi(g(x), g(x'))$.

Assume now that there exists a point $x_0 \in X$ such that $\delta(f+g, x_0) > a > \delta(f, x_0) + \delta(g, x_0) + 2\delta$ for some $a, \delta > 0$. Then according to Proposition 1.9 there exists a net $(x_i)_{i \in I}$ such that $(x_i) \rightarrow x_0$ and $\varphi((f+g)(x_i), (f+g)(x_0)) > a$ for all $i \in I$. Besides, without loss of generality we may assume that the net is

universal [6]. On the other hand according to 1.9 there exist $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ such that $\varphi(f(x_\gamma), f(x_0)) < \delta(f, x_0) + \delta$ for all $\gamma > \gamma_1$ and $\varphi(g(x_\gamma), g(x_0)) < \delta(g, x_0) + \delta$ for all $\gamma > \gamma_2$. Taking now $\gamma \in \Gamma$ such that $\gamma > \gamma_1$ and $\gamma > \gamma_2$ we get $\varphi((f+g)(x_\gamma), (f+g)(x_0)) > \varphi(f(x_\gamma), f(x_0)) + \varphi(g(x_\gamma), g(x_0))$ but this contradicts the inequality established at the beginning of the proof. The obtained contradiction means that $\delta(f+g, x_0) \leq \delta(f, x_0) + \delta(g, x_0)$.

Taking in the last inequality the supremum when $x_0 \in X$ we easily come to the inequality $\delta(f+g) \leq \delta(f) + \delta(g)$.

Since obviously $\delta(f) = \delta(-f)$ (see e.g. (3.6)), from Proposition 3.1 follows easily

(3.2) Corollary. $\delta(f-g) \geq |\delta(f) - \delta(g)|$ for any mappings $f, g: X \rightarrow Y$.

(3.3) Proposition. For any $f, g: X \rightarrow Y$ and any $x_0 \in X$ the inequality $\delta(f \cdot g, x_0) \leq \delta(f, x_0) \cdot \|g(x_0)\| + \delta(g, x_0) \cdot \|f(x_0)\| + \delta(f, x_0) \cdot \delta(g, x_0)$ holds.

Proof. Notice first that for each point $x \in X$

$$\begin{aligned} \varphi((f \cdot g)(x_0), (f \cdot g)(x)) &= \|(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| \cdot \|g(x)\| + \\ &\quad \|g(x) - g(x_0)\| \cdot \|f(x_0)\| = \varphi(f(x), f(x_0)) \cdot \|g(x)\| + \varphi(g(x), g(x_0)) \cdot \|f(x_0)\| \\ &\leq \varphi(f(x), f(x_0)) \cdot \varphi(g(x), g(x_0)) + \varphi(f(x), f(x_0)) \cdot \|g(x_0)\| + \\ &\quad \varphi(g(x), g(x_0)) \cdot \|f(x_0)\|. \end{aligned}$$

To show the inequality $\delta(f \cdot g, x_0) \leq \delta(f, x_0) \cdot \|g(x_0)\| + \delta(g, x_0) \cdot \|f(x_0)\| + \delta(f, x_0) \cdot \delta(g, x_0)$ assume that there exist positive numbers a, δ such that $\delta(f \cdot g, x_0) > a \geq (\delta(f, x_0) + \delta) \cdot \|g(x_0)\| + (\delta(g, x_0) + \delta) \cdot \|f(x_0)\| + (\delta(f, x_0) + \delta)(\delta(g, x_0) + \delta)$.

Then according to 1.9 there exists a net (x_γ) converging to x_0 and such that for all $\gamma \in \Gamma$ $\varphi(f \cdot g(x_\gamma), f \cdot g(x_0)) > a$. Besides, without loss of generality we may assume that (x_γ) is universal.

Now, applying 1.9 again, we conclude that there exist γ_1 and $\gamma_2 \in \Gamma$ such that $\varphi(f(x_0), f(x_\gamma)) < \delta(f, x_0) + \delta$ for $\gamma > \gamma_1$ and $\varphi(g(x_0), g(x_\gamma)) < \delta(g, x_0) + \delta$ for $\gamma > \gamma_2$. Choose now $\gamma > \gamma_1, \gamma > \gamma_2$. Then, combining the obtained inequalities we easily get

$\varphi((f \cdot g)(x_0), (f \cdot g)(x_1)) > (f(x_1), f(x_0)) \cdot \|g(x_0)\| + \varphi(g(x_1), g(x_0)) \|f(x_0)\| + \varphi(f(x_1), f(x_0)) \cdot \varphi(g(x_1), g(x_0))$. However, this contradicts the inequality established at the beginning of the proof.

If f and g are bounded by constants α and β respectively, then from (3.2) easily follows that $\delta(f \cdot g) \leq \delta(f)\beta + \delta(g)\alpha + \delta(f) \cdot \delta(g)$. However, in this case reasoning similarly as in the proof of (3.2) but with obvious changes one can easily establish a more precise evaluation of $\delta(f \cdot g)$:

(3.4) Proposition. Let $f, g: X \rightarrow Y$ be mappings such that $\|f(x)\| \leq \alpha$ and $\|g(x)\| \leq \beta$ for all $x \in X$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Then $\delta(f \cdot g) \leq \delta(f) \cdot \beta + \delta(g) \cdot \alpha$.

(3.5) Remark. It is easy to find mappings $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\delta(f) = \delta(g) = \alpha$ (where α is an arbitrary positive number), $\delta(f+g) = 2\alpha$ and $\delta(f+(-g)) = 0$. Hence the estimation given by Proposition 3.4 is unimprovable. It is also not difficult to construct examples showing the unimprovability of the estimations given by Propositions 3.3 and 3.4.

(3.6) Proposition. For any mapping $f: X \rightarrow Y$ and any constant $\alpha \in \mathbb{R}$ it holds $\delta(\alpha f) = |\alpha| \delta(f)$. In particular, $\delta(-f) = \delta(f)$.

Proof is obvious and therefore omitted.

(3.7) Remark. Since a function is continuous iff its continuity defect equals to zero, Propositions 3.1, 3.3 and 3.4 immediately imply the well-known theorems of classical mathematical analysis stating that a sum and a product of two continuous functions are continuous.

(3.8) Remark. Obviously, the analogues of statements of this section hold also for the normed continuity defect $\hat{\delta}(f)$.

(3.9) Remark. An interested reader can easily reformulate the statements of this section in such a way that instead of the continuity defect the continuity measures λ and μ are used. For example as it follows easily from Proposition 3.1, for two mappings $f, g: X \rightarrow Y$ the following inequalities hold:

$$\mu(f+g) \geq \mu(f) + \mu(g) - 1$$

and

$$\lambda(f+g) \geq \frac{\lambda(f) \cdot \lambda(g)}{\lambda(f) + \lambda(g) - \lambda(f) \cdot \lambda(g)}$$

4. The non-expandibility defect and the measure of non-expandibility

An essential shortage of the invariant $\delta(f)$ as well as other invariants discussed in the previous sections is that they can be completely destroyed by the operation of composition. For example let the mappings $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by the equalities $f(x) = [x]$ and $g(x) = x^2$. Then, obviously, $\delta(f) = 1$, $\delta(g) = 0$ but $\delta(g \circ f) = \infty$.

This observation means, in particular, that the class of all metric spaces as the class of objects and the class of all mappings between them as the class of potential morphisms together with one of the continuity defects (δ or $\hat{\delta}$) can not be considered as a fuzzy category in the sense of [9]. Essentially better from this point of view behaves itself another invariant - the so called non-expandibility defect of a mapping, which is the subject of this section.

The standard situation in this section is as follows. (X, ϱ_X) , (Y, ϱ_Y) are metric spaces and $f: X \rightarrow Y$ is a mapping.

Recall that a mapping f is called non-expanding if $\varrho_Y(f(x_0), f(x_1)) \leq \varrho_X(x_0, x_1)$ for any $x_0, x_1 \in X$.

(4.1) Definition. A mapping $f: X \rightarrow Y$ is called ε -non-expanding ($\varepsilon \geq 0$) if $\varrho_Y(f(x_0), f(x_1)) \leq \varrho_X(x_0, x_1) + \varepsilon$ for all $x_0, x_1 \in X$.

Let $E_f = \{\varepsilon : \varepsilon \geq 0, f: X \rightarrow Y \text{ is } \varepsilon\text{-non-expanding}\}$. It is easy to notice that

(1) if $\varepsilon \in E_f$ and $\varepsilon' > \varepsilon$, then $\varepsilon' \in E_f$;

(2) $\inf E_f \in E_f$;

(3) if $\varrho_Y \leq 1$, then $1 \in E_f$.

(4.2) Definition. The value $\delta \vee(f) = \inf E_f$ is called the defect of non-expandibility of the mapping f .

(4.3) Remark. Obviously a mapping f is non-expanding iff $\delta \vee(f) = 0$.

However to our opinion more perspective are relative versions of the non-expandibility defects one of which is presented below:

(4.2) Definition. The value $\hat{\delta}\psi(f) = \frac{\delta\psi(f)}{d}$ where d is the diameter of the set $f(X)$ (i.e. $d = \sup\{\rho(f(x), f(x')) : x, x' \in X\}$) is called the normalized non-expandibility defect of the mapping f .

(4.4) Remark. Having fixed the point $x_0 \in X$ in the definitions (4.1), (4.2) and (4.2), we can extract the local versions of these definitions: the notion of ε -non-expandibility of a mapping f at a point x_0 and the defects of non-expandibility $\delta\psi(f, x_0)$ and $\hat{\delta}\psi(f, x_0)$ of a mapping f at a point x_0 .

(4.5) Proposition. $\delta\psi(f) \geq \delta(f)$ and hence $\hat{\delta}\psi(f) \geq \hat{\delta}(f)$ for any mapping $f: X \rightarrow Y$.

Proof. It is sufficient to show that $\delta\psi(f, x_0) \geq \delta(f, x_0)$ for an arbitrary point $x_0 \in X$.

Assume, contrary, that there exists $x_0 \in X$ such that $\delta\psi(f, x_0) = a < \delta(f, x_0)$ and find $\varepsilon > 0$ and $M \subset X$ such that $x_0 \in M$ and $\varphi_Y(f(x_0), f(M)) > a + \varepsilon > \delta\psi(f, x_0)$. Choose a point $x_1 \in M$ satisfying the inequality $\varphi_X(x_0, x_1) < \varepsilon$, then, since $\delta\psi(f, x_0) = a$, it follows that $\varphi_Y(f(x_0), f(x_1)) < a + \varepsilon$ and hence $\varphi_Y(f(x_0), f(M)) \leq a + \varepsilon$.

(4.6) Remark. The converse to the inequality stated in 4.5 generally does not hold: there are plenty of continuous mappings which are ε -non-expandible for no $\varepsilon > 0$ as well as plenty of continuous mappings the non-expandibility defect of which equals to a prescribed value $\varepsilon > 0$.

As it was mentioned above, an important advantage of the defect of non-expandibility to compare with the defect of continuity is its good behaviour in respect of the operation of composition. Here is the precise statement of what do we mean.

(4.7) Proposition. Let (X, φ_X) , (Y, φ_Y) , and (Z, φ_Z) be metric spaces, $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ be mappings and let $g \circ f: X \rightarrow Z$ be their composition. Then $\delta\psi(g \circ f) \leq \delta\psi(g) + \delta\psi(f)$ and hence

$$\widehat{\delta} \nu(g \cdot f) \leq \widehat{\delta} \nu(g) + \widehat{\delta} \nu(f) .$$

Proof is obvious and therefore omitted.

Patterned after the definitions of continuity measures and starting from the defects of non-expandibility we define the non-expandibility measures in the following two different ways:

(4.8) Definition. The non-expandibility measure $\lambda \nu(f)$ of a mapping $f: X \rightarrow Y$ is defined by the formula

$$\lambda \nu(f) = \frac{1}{1 + \widehat{\delta} \nu(f)} .$$

(4.9) Definition. The non-expandibility measure $\mu \nu(f)$ of a mapping $f: X \rightarrow Y$ is defined by the equality $\mu \nu(f) = 1 - \widehat{\delta} \nu(f)$.

(4.10) Proposition. $\lambda \nu(f) < \lambda(f)$ and $\mu \nu(f) < \mu(f)$ for any mapping $f: X \rightarrow Y$.

Proof follows immediately from 4.5.

(4.11) The fuzzy category $\text{METR}_{\mu \nu}$. Let METR be the class of all metric spaces and for any $X, Y \in \text{METR}$ let Y^X denote the set of all mappings from X to Y . Let $\mu \nu: Y^X \rightarrow I$ assign to each mapping $f: X \rightarrow Y$ its measure of non-expandibility $\mu \nu(f)$. Thus a fuzzy category $\text{METR}_{\mu \nu}$ is obtained with METR as the class of objects, with Y^X as the class of potential morphisms from X to Y , and with the measure of non-expandibility $\mu \nu: Y^X \rightarrow I$ as the fuzzy set of morphisms from X to Y .

(For the definition of the fuzzy category and related notions see [9])

Indeed, to conclude that $\text{METR}_{\mu \nu}$ is a fuzzy category one has to notice only that $\mu \nu(\text{id}_X) = 1$ for every identical mapping $\text{id}_X: X \rightarrow X$ and that $\mu \nu(g \cdot f) \geq \mu \nu(g) + \mu \nu(f) - 1$ for any mappings $f: X \rightarrow Y$ and $g: Y \rightarrow Z$ ($X, Y, Z \in \text{METR}$). However, the first fact is evident while the second is an easy corollary of (4.7).

(4.12) The fuzzy category $\text{METR}_{\lambda \nu}$. Starting from the class METR of metric spaces and reasoning in the same way as in 4.11 but using the measure of non-expandibility $\lambda \nu: Y^X \rightarrow I$ instead of $\mu \nu$ we receive another fuzzy category which will be denoted

$\text{METR}_{\lambda\psi}$.

Indeed, the equality $\lambda\psi(\text{id}_X) = 1$ for every identical mapping $\text{id}_X: X \rightarrow X$ is evident and the inequality $\lambda\psi(g \circ f) \geq \lambda\psi(g) + \lambda\psi(f) - 1$ where $f \in Y^X$, $g \in Z^Y$ follows from (4.7) by elementary algebraic transformations.

(4.13) The category METR_{ψ} . The subcategory of $\text{METR}_{\lambda\psi}$ with the same class of objects METR and the sets of morphisms defined by the equality $\text{Hom}(X, Y) = \{f \in Y^X : \lambda\psi(f) = 1\}$ in an obvious way can be identified with the category METR_{ψ} of metric spaces and non-expanding mappings. The category METR_{ψ} can be obtained also from the category $\text{METR}_{\lambda\psi}$ if one restricts himself to the sets of morphisms $\text{Hom}(X, Y) = \{f \in Y^X : \lambda\psi(f) = 1\}$.

(4.14) On the behaviour of the non-expandibility defect. Patterned after the theory of continuity defect developed in Sections 1, 2 and 3 one can work out an analogous theory of the defect of non-expandibility. Some of the crucial points of this theory will be discussed in a subsequent paper.

References

1. C.L. Chang. Fuzzy topological spaces // J. Math. Anal. Appl. - 1968. - V. 24. - P. 182 - 190.
2. C.C. Chang, H.J. Keisler. Continuous Model Theory. - Princeton. New Jersey. - 1966.
3. R. Engelking. General Topology. - Warszawa. - 1977
4. U. Höhle. Monoidal closed categories, weak topoi and generalized logics // Fuzzy Sets and Syst. - V. 42 - V.42. - P.15-35.
5. U. Höhle, L. N. Stout. Foundations of fuzzy sets // Fuzzy Sets and Syst. - 1991. - V. 40. - P. 257 - 296.
6. J.L. Kelley. General Topology. New York. - 1955.
7. R. Lowen. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness // J. Math. Anal. Appl. - 1976. - V. 56. - P. 621 - 633.

8. J. Łukasiewicz, A. Tarski. Untersuchungen über den Aussagenkalkül// Soc. Sci. Lett. Varsovie, C. R., Cl. III. - 1930. - V. 23. - P. 30 - 50.
9. A. Šostak. Towards the concept of a fuzzy category// Proc. Latv. Univ., Ser. Math. - 1991. - V. 562. - P. 85 - 94.
10. L. Zadeh. Fuzzy sets// Inform. and Control. - 1965. - V. 8. - P. 338 - 353.

M. Burgins, A. Šostaks. Metrisku telpu attālojumu nepārtrauktības defekta un mēra teorijas pamati.

Anotācija. Darbā definēti metrisku telpu nepārtrauktības defekta un ar to saistītā nepārtrauktības mēra jēdzieni. Ir iesākta šo koncepciju sistematiska pētīšana. Mes apskatām izstrādāto teoriju kā klasiskās nepārtrauktu attālojumu teorijas vispārinājumu, kas veikts fazi-matemātikas garā un tradīcijās.

М. Бургин, А. Шостак. К теории дефекта и меры непрерывности для отображений метрических пространств.

Аннотация. В работе вводится понятие дефекта непрерывности и связанное с ним понятие меры непрерывности для отображений со значениями в метрическом пространстве и начато систематическое изучение введенных понятий. Полученную при этом теорию мы рассматриваем как обобщение классической теории непрерывных отображений, выполненное в духе идей и с учетом тенденций нечеткой математики.
УДК 515.12

M. Burgin
Suvorova street 8 - 15
Daugavpils
LATVIA

A. Šostak
Department of
Mathematics
Latvian University
Riga 226098
LATVIA

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ И ПОЛУПЕРВИЧНЫЕ ИДЕАЛЫ В КОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. М. Вечтомов, А. Г. Повышев

Аннотация. Статья посвящена теории идеалов колец $C=C(X, F)$ непрерывных функции со значениями в нормированном теле F . Решается вопрос о совпадении идемпотентных и полупервичных идеалов в C . Доказано, что первичные односторонние идеалы колец C являются вписные первичными и двусторонними. Эти результаты переносятся и на подкольцо Гельфанда $C^\#$ кольца C . Кроме того, $(C^\#)^\# = C^\#$. УДК 515.122.3.

0. Введение.

Пусть X - произвольное топологическое пространство и пусть $C=C(X, F)$ - кольцо всех непрерывных функции на X со значениями в фиксированном нормированном теле F . О нормированных телах смотрите в книге Н.Бурбаки [1, глава VI], где вместо слова "норма" используется термин "абсолютное значение". Норма элемента $a \in F$ - это действительное число, обозначаемое $|a|$. Если $f \in C$, то полагаем:

$$|f|(x) = |f(x)| \text{ для каждой точки } x \in X,$$

$$Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \text{ и } \text{coz} f = X \setminus Z(f).$$

Множество $C^\# = C^\#(X, F)$ всех функций $f \in C$, таких, что для любого максимального идеала M кольца C существует элемент $a \in F$, для которого $f - a \in M$, является подкольцом в C , называемым подкольцом Гельфанда кольца C .

Левый идеал I кольца S называется z -идеалом, если $f \in I, g \in S$ и $Z(f) \subseteq Z(g)$ влекут $g \in I$.

Левый идеал I кольца R называется:

- идемпотентным, если $I^2 = I$;
- строго идемпотентным, если для всякого $r \in I$ найдутся такие $s, t \in R$, что $r = st$;
- первичным, если $rR \subseteq I$ влечет $r \in I$ или $s \in I$ для любых $r, s \in R$;
- вполне первичным, если $r \in I$ влечет $r \in I$ или $s \in I$ при любых $r, s \in R$;
- полупервичным, если $rRr \in I$ влечет $r \in I$ для любого $r \in R$.
- вполне полупервичным, если $r^2 \in I$ влечет $r \in I$ для любого $r \in R$.

Двусторонние идеалы будем называть просто идеалами. Нормированные тела действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов обозначаются, как обычно, R, C, H .

В работе [2] для абсолютно выпуклых идеалов колец $S(X, R)$ доказана эквивалентность понятий идемпотентности и полупервичности. В [3] доказано совпадение идемпотентных и полупервичных идеалов в $S(X, R)$. В данной статье этот результат получен для колец $S = S(X, F)$ (теоремы 2,3) и для их подколец $S^* = S^*(X, F)$ (теоремы 5,6) для различных F . Двусторонность максимальных односторонних идеалов установлена одним из авторов [4]. Последнее утверждение распространено нами с максимальных на полупервичные идеалы, а также доказана вполне полупервичность (вполне первичность) полупервичных (первичных) идеалов (теоремы I и I'). Относительно подколец Гельфанда колец S смотрите работу [5] и библиографию к ней.

I. Первичные идеалы

Лемма I. Если $f, g \in S$ и $Z(f) \subseteq Z(g)$, то в S разрешимо уравнение

$$fg = \chi f \quad (gf = f\chi).$$

Доказательство. Определим функцию $h: X \rightarrow F$

$$h = \begin{cases} 0 & \text{на } Z(f) \\ fgf^{-1} & \text{на } \text{coz } f. \end{cases}$$

Ясно, что $hf = fg$. Докажем непрерывность h . Непрерывность h на $\text{coz } f$ и на внутренности $Z(f)$ очевидна. Пусть $x \in Z(f)$ принадлежит границе $\text{coz } f$ и (x_α) — направленность в $\text{coz } f$, сходящаяся к x . Тогда

$$|h(x_\alpha)| = |f(x_\alpha)| |g(x_\alpha)| |f(x_\alpha)|^{-1} = |g(x_\alpha)| \rightarrow 0 = h(x),$$

поскольку $\lim x_\alpha = x \in Z(f) \subseteq Z(g)$.

Теорема I. Пусть F — нормированное тело. Тогда для подмножества I кольца S эквивалентны условия:

- (1) I — первичный идеал;
- (2) I — вполне первичный идеал;
- (3) I — первичный левый (правый) идеал;
- (4) I — вполне первичный левый (правый) идеал.

Доказательство проведем по циклу $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$. Импликации $(2) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$, очевидно, справедливы для любого кольца с единицей.

$(1) \Rightarrow (2)$. Пусть I — первичный идеал в S и $fg \in I$ для $f, g \in S$. В силу леммы I для любых $s, r \in S$ найдется $h \in S$, для которого

$$fsgfsc = hf,$$

откуда $fsgfscg = hfge \in I$. Значит, $fSc \subseteq I$. Следовательно, $f \in I$ или $g \in I$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть I — первичный левый идеал в S , $f \in I$ и $g \in S$. Для любого $s \in S$ по лемме I в S разрешимо уравнение

$$fgcsg = \lambda f.$$

Поскольку $\lambda f \in I$, то и $fg \in I$. Следовательно, I — правый идеал.

Так как полупервичные (вполне полупервичные) идеалы колец суть пересечения первичных (вполне первичных) идеалов, то из теоремы I немедленно вытекает следующая

Теорема I'. Пусть F — нормированное тело. Тогда для подмножества I кольца C эквивалентны условия:

- (1) I — полупервичный идеал;
- (2) I — вполне полупервичный идеал;
- (3) I — полупервичный левый (правый) идеал;
- (4) I — вполне полупервичный левый (правый) идеал.

2. Полупервичность идемпотентных идеалов

Лемма 2. Пусть I — идеал в C , $g \in I$ и $f \in C$. И пусть на некотором открытом множестве $U \subseteq X$, содержащем $Z(g)$, выполняется неравенство

$$|f| \leq |g|^r, \quad r > 1.$$

Тогда в C разрешимо уравнение $\chi g = f$ и, следовательно, $f \in I$.

Доказательство. Если $Z(g) = \emptyset$, то g обратим, $I = C$ и $\chi = fg^{-1}$. Пусть $Z(g) \neq \emptyset$. И пусть

$$h = \begin{cases} 0 & \text{на } Z(f) \\ fg^{-1} & \text{на } \text{coz } f. \end{cases}$$

Непрерывность h на $\text{coz } g$ и на внутренности $Z(g)$ очевидна. Пусть точка $x \in Z(g)$ принадлежит границе $\text{coz } g$ и (x_α) — направленность в $\text{coz } g \cap U$, сходящаяся к точке x . Тогда

$$|h(x_\alpha)| = |fg^{-1}(x_\alpha)| \leq |g^{-r}(x_\alpha)| |g^r(x_\alpha)| = |g^{r-1}| \rightarrow 0,$$

а, следовательно, и $h(x_\alpha) \rightarrow 0$.

Замечание. Для удобства решения h из леммы 2 уравнения $hg=f$ будем обозначать fg^{-1} .

Теорема 2. Пусть F — подтело нормированного тела H кватернионов, замкнутое относительно операции сопряжения. Тогда в левом кольце $S(X, F)$ каждый идемпотентный левый (правый) идеал является полупервичным идеалом.

Доказательство. Возьмем произвольный идемпотентный левый идеал I кольца S и функцию $f \in S$, для которой $f^2 \in I$. В силу идемпотентности I имеем

$$\begin{aligned} |f|^2 = |f^2| &= |\sum_i f_{i1} f_{i2}| \leq \sum_i |f_{i1}| |f_{i2}| \leq \sum_i (|f_{i1}|^2 + |f_{i2}|^2) = \\ &= \sum_j |g_j|^2 = \sum_j |\sum_i \varphi_{ji} \varphi_{ji}|^2 \leq \sum_j (\sum_i (|\varphi_{ji}|^2 + |\varphi_{ji}|^2))^2 = \\ &= \sum_j (\sum_k |h_{jk}|^2)^2 \leq (\sum_j \sum_k |h_{jk}|^2)^2, \end{aligned}$$

где $f_{i1}, f_{i2}, g_j, \varphi_{ji}, \varphi_{ji}, h_{jk} \in I$. Следовательно,

$$|f| \leq \sum_j \sum_k |h_{jk}|^2.$$

Далее, повторяя рассуждения для h_{jk} вместо g_j , получаем

$$|f| \leq (\sum_j \sum_k \sum_l |h_{jkl}|^2)^2 = (\sum_j \sum_k \sum_l \bar{h}_{jkl} h_{jkl})^2,$$

где $h_{jkl} \in I$ и $\bar{h}_{jkl}: X \rightarrow F$ функция, сопряженная функции h_{jkl} .

Поскольку $\sum_j \sum_k \sum_l \bar{h}_{jkl} h_{jkl} \in I$, то по лемме 2 и $f \in I$. Значит,

учитывая теорему 1', I — полупервичный идеал.

3. Идемпотентность полупервичных идеалов.

Теорема 3. Пусть $F = \mathbb{K}, \mathbb{C}, \mathbb{N}$ или F — нормированное тело, значение нормы которого не исчерпывает множество всех положительных чисел. Тогда любой полупервичный идеал кольца $S(X, F)$ строго идемпотентен.

Доказательство. Пусть I — полупервичный идеал в S и $f \in I$. Докажем представимость f в виде произведения двух функций из I .

Если $F = \mathbb{K}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{N}$, то $f = (f|f|^{\frac{1}{2}})|f|^{\frac{1}{2}}$ (см. лемму 2).

Пусть теперь $K = \{r \in \mathbb{R} | r > 0\} \setminus |F| \neq \emptyset$. Ясно, что множество K всюду плотно в $\{r \in \mathbb{R} | r > 0\}$. Если норма на F тривиальна, т.е. принимает только значения 0 и 1, то F дискретно и, очевидно, все идеалы в S строго идемпотентны. Поэтому предполагаем, что найдется ненулевой элемент $\alpha \in F$ с $|\alpha| = \rho < 1$. Пусть (ξ_n) — последовательность чисел из K , такая, что

$$\rho^{2^{n+1}} < \xi_n < \rho^{2^n}$$

для любого натурального n .

Разобьем X на открыто-замкнутое множество следующим образом:

$$A_0 = \{x \mid |f(x)| > \xi_1\} \text{ и}$$

$$A_n = \{x \mid \xi_{n+1} < |f(x)| < \xi_n\} \text{ для натуральных } n.$$

Определим функцию $g: X \rightarrow F$

$$g = \begin{cases} 0, & x \in Z(f) \\ 1, & x \in A_0 \cup A_1 \cup A_2 \\ \alpha^{2^{n-1}}, & x \in A_n, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Очевидно, $g \in C$ и $Z(f) = Z(g)$. На A_n при $n \geq 3$ выполняются неравенства

$$\rho^{n+2} < |f(x)|^{\frac{1}{3}} < \rho^n,$$

$$\rho^{2n+4} < |f(x)|^{\frac{2}{3}} < \rho^{2n}.$$

Откуда

$$|f(x)|^{\frac{2}{3}} < \rho^{2n} < |g(x)| < \rho^{n+2} < |f(x)|^{\frac{1}{3}}, \quad x \in A_n, \quad n \geq 3.$$

Следовательно, на открыто-замкнутом множестве

$$X \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2) = Z(f) \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} A_n \quad \text{имеем}$$

$$|f|^4 < |g|^6 < |f|^2. \quad (*)$$

Из правой части неравенства (*) по лемме 2 $g^6 \in I$ и, в силу полупервичности I , $g \in I$. Из левой части неравенства (*) по лемме 2 получаем $f^4 g^{-6} \in C$ и $f g^{-1} \in C$. Наконец, $f^4 g^{-4} = f^4 g^{-6} g^2 \in I$ и, значит, $f g^{-1} \in I$.

Итак, $f = (f g^{-1}) g$ при $f g^{-1} \cdot g \in I$, что завершает доказательство теоремы.

Следствие. Если $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ или F — подтело нормированного тела $\mathbb{H}$, замкнутое относительно сопряжения и такое, что $|F| \neq \{r \in F | r \geq 0\}$, то для всякого одностороннего идеала I кольца $C(X, F)$ эквивалентны условия:

- 1) I — полупервичный идеал;
- 2) I — идемпотентный левый (правый) идеал;
- 3) I — идемпотентный идеал;
- 4) I — строго идемпотентный левый (правый) идеал;
- 5) I — строго идемпотентный идеал.

Замечание. Теорема 3 верна для произвольного неархимедово нормированного тела F и в случае, когда F — нормированное подтело в $\mathbb{H}$, замкнутое относительно операции сопряжения, и $F \cap \{r \in \mathbb{R} | r \geq 0\}$ замкнуто относительно операции

извлечения корня n -ой степени для некоторого натурального n . Доказательство вполне аналогично приведенному доказательству теоремы 3.

4. Подкольцо Гельфанда

Для нормированного тела F любой максимальный идеал M кольца $C=(X, F)$ является максимальным левым (и правым) идеалом. Поэтому фактор-кольцо C/M является телом. Через M будем также обозначать канонический эпиморфизм

$$M: C \rightarrow C/M, \quad M(f) = f + M \text{ для всех } f \in C.$$

Отождествляя $a \equiv a + M$ для $a \in F$, считаем $F \subset C/M$.

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(C)$ — максимальный спектр кольца C , т.е. множество всех максимальных идеалов в C с топологией Стоуна-Зарисского. Определение подкольца Гельфанда C'' кольца C при этом может быть выражено так

$$C'' = \{f \in C \mid M(f) \in F \text{ для любого } M \in \mathfrak{M}\}.$$

Теорема 4. Пусть F — нормированное тело и максимальные идеалы кольца $C(X, F)$ суть z -идеалы. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) Для любых $f, g \in C$ если $f \in C'', g \in C''$ и $Z(f) \subset Z(g)$, то $g \in C''$.

2) Если для натурального n каждый элемент из F имеет лишь конечное число корней n -ой степени в F , то $\hat{f} \in C''$ влечет $f \in C''$ для любого $f \in C$.

3) В кольце C'' имеют место теоремы 1, 1' и 2 (если вместо C рассматривать C'').

Доказательство. I. Пусть $g \in C, f, g \in C''$ и $Z(f) \subset Z(g)$. Для произвольного максимального идеала M в C

$$M(gf) = M(g)M(f) \text{ и } M(f), M(gf) \in F.$$

Если $M(f)=0$, т.е. $f \in M$, то и $g \in M$ (поскольку M — z -идеал), т.е. $M(g)=0 \in F$. Если же $M(g) \neq 0$, то $M(g)=M(gf)M(f)^{-1} \in F$.

2. Пусть выполнено условие данного утверждения и $f^n \in C^*$ при $f \in C$. Фиксируем максимальный идеал M кольца C . Тогда $f^n - a \in M$ для некоторого $a \in F$. В силу леммы 1[6]

$$\overline{Z(f^n - a)}_M = \{N \in \mathfrak{M} \mid f^n - a \in N\} \ni M,$$

где левая часть есть замыкание $Z(f^n - a)$ в $\mathfrak{M}$, содержащем X при вложении $x = (g \in C \mid g(x) = 0)$. Следовательно, $Z(f^n - a) \neq \emptyset$.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in F$ — все корни n -ой степени из a . Тогда

$$Z(f^n - a) = \bigcup_{i=1}^k Z(f^n - \alpha_i).$$

Откуда

$$M \in \overline{Z(f^n - a)}_M = \bigcup_{i=1}^k \overline{Z(f^n - \alpha_i)}_M.$$

Значит,

$$M \in \overline{Z(f^n - \alpha_i)}_M = \{N \in \mathfrak{M} \mid f^n - \alpha_i \in N\}$$

для некоторого $1 \leq i \leq k$. Таким образом, $f^n - \alpha_i \in M$ для $\alpha_i \in F$ и $f \in C^*$.

3. Из утверждения 1 вытекает справедливость леммы 1 и 2 для C^* . Поэтому в кольце C^* выполняются и теоремы 1, 1' и 2. Относительно теоремы 2 надо только заметить, что C^* вместе с каждой своей функцией f содержит и сопряженную к ней функцию $\bar{f}$. Действительно, если $f^n - a \in M$ при $a \in F$ и $M \in \mathfrak{M}$, то $\bar{f}^n - \bar{a} = \overline{f^n - a} \in M$, ибо $Z(f^n - a) = Z(\bar{f}^n - \bar{a})$ и M — z -идеал.

Следствие. Для $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ в кольце C^* выполняется теорема 3 и $f, |f| \in C^*$, если $f \in C^*$.

Теорема 5. Равенство $[C^*(X, F)]^n = C^*(X, F)$ имеет место для любого топологического тела F , обладающего одним из следующих свойств:

- 1) F — поле, не являющееся алгебраически замкнутым;
- 2) F — некоммутативное тело, в котором существует такой элемент a , что в F неразрешимо уравнение

$$x^n y^n + a = 0$$

при некотором натуральном n .

- 3) Свойство Капланского: существует непрерывный аддитивный гомоморфизм $\gamma: F \rightarrow F$ такой, что

$$a\gamma' + b\delta\gamma' = 0 \Rightarrow a = b = 0 \text{ для любых } a, b \in F.$$

Доказательство. Достаточно показать, что идеалы $M \cap C^*$, $M \in \mathcal{M}$, — это в точности все максимальные идеалы в C^* .

Ясно, что $M \cap C^*$ — идеал в C^* . Если $f \in C^* \setminus M$, то $f - a \in M$ для некоторого ненулевого $a \in F$. Тогда

$$I = f a^{-1} - (f - a) a^{-1} \in C^* + M \cap C^*,$$

что означает максимальность идеала $M \cap C^*$.

Обратно, пусть дан максимальный идеал M^* в C^* . Докажем существование такого $M \in \mathcal{M}$, что $M^* = M \cap C^*$ (при выполнении каждого из условий 1)–3) для F). Рассмотрим z -идеал I в C , порожденный M^* . Если $I \neq C$, то I лежит в каком-то $M \in \mathcal{M}$, и для него $M^* = M \cap C^*$.

Убедимся, что $I \neq C$. Для этого достаточно доказать, что для любых $f, g \in C^*$ найдутся такие $\varphi, \psi \in C^*$, что

$$Z(f) \cap Z(g) = Z(f\varphi + g\psi).$$

- 1) Пусть $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ — многочлен положительной степени с коэффициентами из F , не имеющий корней в поле F . Тогда полагаем

$$\varphi = f^{n-1} \text{ и } \psi = a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1fg^{n-2} + a_0g^{n-1}.$$

2, Полагаем

$$\varphi = f^{n-1} \text{ и } \psi = \pm \alpha g^{n-1}$$

3) Для произвольной функции $f \in C$ определим функцию $f' \in C$ как композицию отображений f и $'$. По свойству Капланского

$$Z(f') = Z(f) \text{ и } Z(ff' + gg') = Z(f) \cap Z(g)$$

для любых $f, g \in C$. Поэтому все максимальные идеалы в C являются z -идеалами (см. [4], теорема I). Тогда принадлежность $f' \in C^*$ для $f \in C^*$ доказывается аналогично включению $f \in C^*$ в пункте 3 теоремы 4.

Замечания. I. В [4] рассмотрены общие условия для топологического тела F , при которых все максимальные односторонние идеалы любого кольца $C(X, F)$ являются z -идеалами и, значит, они совпадают с максимальными идеалами. В частности, это верно для несвязных F .

2. Условия пункта 2 теоремы 4 выполняются для любого поля F . Если F — алгебраически замкнутое поле и $f \in C$ — корень многочлена $f_n t^n + \dots + f_1 t + f_0$ с коэффициентами $f_0, f_1, \dots, f_n \in C^*$, то $f \in C^*$. В самом деле, равенство

$$M(f_n)M(f)^n + \dots + M(f_1)M(f) + M(f_0) = 0$$

влечет $M(f) \in F$.

3. Свойство Капланского имеет место для произвольного топологического подтела $F \subseteq H$, замкнутого относительно операции сопряжения (которая играет роль $'$).

Библиографический список

1. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. — М., 1971.
2. Williams D.R. Intersections of primary ideal in of continuous functions || Can.J.Math. — 1972. — V.24. — P. 502 — 51..

3. Huijsmans C., Pagter B. Ideal theory in f -algebras. // Trans. Amer. Math. Soc. - 1982. - V 269. - P. 225-245.
4. Вечтомов Е.М. О кольцах непрерывных функций со значениями в топологических телах // Мат. исслед. - Кишинев, 1988. - МЮС - С.45-52.
5. Dominguez J.M. Nonarchimedean $C^0(X)$ // Proc. Amer. Math. Soc. - 1986. - V.97. - P. 525-530.
6. Вечтомов Е.М. О некоторых свойствах идеалов колец непрерывных функций // Топол. пространства и их отображения. - Рига, 1989. - С.40-49.

E.M.Vechtomov, A.G.Povyshv. Idempotent and semiprime ideals in rings of continuous functions.

Summary. This paper is concerned with ideal theory in ring $C(X, P)$ of continuous functions with values in a normed (perhaps, noncommutative) field P . We solve the question when idempotent ideals agree with semiprime ideals in C . We have proved that all prime one-sided ideals in C are completely prime and two-sided. This results are true for Gelfand subring $C^\#$ of a ring C also. Moreover, $(C^\#)^\# = C^\#$. AMS Subject Classification 16A66.

E.M.Večtomova, A.G.Poviševa. Idempotentie un pusprimărie idealii nepătrăuților funcțiilor gredzeno.

Anotăcija. Darbā apskatīta nepātrāuķu funkciju ar vērtībām normētā laukā P gredzenā $C = C(X, P)$ ideālu teorija. Tiek atrisināta jautājums par idempotentu un pusprimāru ideālu sakritību gredzenā C . Pierādīts, ka visi primārie vienkusejie ideāli gredzenā C ir pilnīgi primāri un divpusēji. Šie rezultāti ir patieši arī gredzenā C 0 lfanda pusgredzenam $C^\#$, pie tam $(C^\#)^\# = C^\#$.

СПЛАЙНЫ В ПРОСТРАНСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

М.А. Гольдман

Аннотация. Вводится понятие сплайна в пространствах непрерывных функций, определенных на топологических пространствах. Для интерполяционного сплайна устанавливается теорема единственности (два варианта), теорема существования и экстремальное свойство. УДК 515.12.

Пусть U, V, W — топологические пространства, X, Y, Z — пространства всех непрерывных вещественных функций, определенных соответственно на U, V, W ($X = C(U)$, $Y = C(V)$, $Z = C(W)$).

Пусть, далее, $f: V \rightarrow U$ и $g: W \rightarrow U$ — непрерывные отображения, а $T_f: X \rightarrow Y$ и $A_g: X \rightarrow Z$ — линейные операторы, заданные равенствами $T_f x = x \circ f$, $A_g x = x \circ g$, $x \in X$ (т.е. $\forall v \in V$ $(T_f x)(v) = x(f(v))$, $\forall w \in W$ $(A_g x)(w) = x(g(w))$, $x \in X$).

Назовем сплайном, соответствующим операторам T_f и A_g , любую функцию s из X , которая удовлетворяет следующему условию: $\forall x \in N(A_g) \ T_f s \cdot T_f x = \theta_y$, где $N(A_g)$ — ядро оператора A_g , а θ_y — нуль пространства Y ($\forall v \in V \ \theta_y(v) = 0$).

Совокупность всех сплайнов, соответствующих операторам T_f и A_g , обозначим $S(T_f, A_g)$. Так как $(T_f s)(v) = s(f(v))$, $(T_f x)(v) = x(f(v))$, то $S(T_f, A_g) = \{s \in X \mid \forall x \in N(A_g) \ \forall u \in f(V) \ s(u)x(u) = 0\}$.

Замечание. Введенное сейчас понятие сплайна является некоторым аналогом понятия сплайна в гильбертовых пространствах, определяемого следующим образом (см., например, [1], с. 201, Определение 4.5.3). Пусть X, Y, Z — вещественные гильбертовы пространства, $T: X \rightarrow Y$ и $A: X \rightarrow Z$ — непрерывные линейные операторы. Сплайном, соответствующим операторам T и A , называется любой элемент множества $S(T, A) = \{s \in X \mid \forall x \in N(A) \ \langle Ts, Tx \rangle = 0\}$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.

Непосредственно из определения множества сплайнов $S(T_f, A_g)$ следует, что $N(T_f) \subset S(T_f, A_g)$ и что $S(T_f, A_g)$ является векторным подпространством пространства X . Легко видеть, что $S(T_f, A_g)$ замкнуто в топологии поточечной сходимости пространства X .

Рассмотрим понятие интерполяционного сплайна в $S(T_f, A_g)$. Пусть $z \in A_g(X)$. Интерполяционным сплайном, соответствующим функции z , называется сплайн S , для которого $A_g S = z$.

Выясним, при каких условиях интерполяционный сплайн существует и при каких условиях он единствен.

Введем обозначение $U_g = \{u \in U \mid \forall x \in N(A_g) \ x(u) = 0\}$.

Теорема I (единственности интерполяционного сплайна). Если $N(T_f) \cap N(A_g) = \{0_x\}$ и $g(W) = U_g$, то $\forall z \in A_g(X) \ |S(T_f, A_g) z| \leq 1$.

Доказательство. Пусть $s_1, s_2 \in S(T_f, A_g) \cap A_g z$. Тогда $s_1 - s_2 \in N(A_g)$, т.е. $(s_1 - s_2)(g(w)) = 0 \ \forall w \in W$. Покажем, что $s_1 - s_2 \in N(T_f)$. Предположим, что это не так. Тогда $\exists v_0 \in V$: $(s_1 - s_2)(f(v_0)) \neq 0$. Отсюда вытекает, поскольку $s_1 - s_2 \in S(T_f, A_g)$, что $\forall x \in N(A_g) \ x(f(v_0)) = 0$. Это означает, что $f(v_0) \in U_g$. Но $U_g = g(W)$, следовательно, $\exists w_0 \in W$: $f(w_0) = g(w_0)$, а так как $(s_1 - s_2)(f(v_0)) \neq 0$, то получаем неравенство $(s_1 - s_2)(g(w_0)) \neq 0$, противоречащее тому, что $(s_1 - s_2)(g(w)) = 0 \ \forall w \in W$. Таким образом, $s_1 - s_2 \in N(T_f) \cap N(A_g) = \{0_x\}$, откуда следует, что $s_1 = s_2$.

Дадим некоторые пояснения по поводу условий $g(W) = U_g$ и $N(T_f) \cap N(A_g) = \{0_x\}$, фигурирующих в теореме I. Легко видеть, что в любом случае $g(W) \subset U_g$. Что же касается равенства $g(W) = U_g$, то оно имеет место тогда и только тогда, когда $g(W)$ замкнуто в X -топологии пространства U ([2], Теорема 5, с. 62). (Напомним, что предбазу X -топологии на U составляют все множества вида $\{u \in U \mid |x(u) - x(u_0)| < \varepsilon\}$ — при произвольных $u \in U, x \in X, \varepsilon > 0$). В случае, когда пространство U вполне регулярно, $g(W) = U_g$ тогда и только тогда, когда $g(W)$ замкнуто в топологии пространства U (ибо для вполне регулярных пространств топология на U совпадает с X -топологией на U).

Если W — компактное пространство, то $g(W) = U_g$ при условии, что U — функционально отделимое пространство ([2], Следствие 5, с. 62).

Заметим, что при выполнении условия $g(W) = U_g$ имеет место равенство $S(T_f, A_g) = \{s \in X \mid \forall u \in f(V) \setminus g(W) \ s(u) = 0\}$. Действительно, пусть $s \in S(T_f, A_g) = \{s \in X \mid \forall x \in N(A_g) \ \forall u \in f(V) \ s(u)x(u) = 0\}$ и $u \in f(V) \setminus g(W) = W \setminus U_g$. Так как $u \notin U_g$, то $\exists x_0 \in N(A_g) : x_0(u) \neq 0$. Но $s(u)x_0(u) = 0$, следовательно, $s(u) = 0$. Этим доказано, что $S(T_f, A_g) \subset \{s \in X \mid \forall u \in f(V) \setminus g(W) \ s(u) = 0\}$. Обратное включение справедливо и без предположения $g(W) = U_g$, что легко проверяется.

Применяя обозначение $S(f, g) = \{s \in X \mid \forall u \in f(V) \setminus g(W) \ s(u) = 0\}$, можем записать $S(T_f, A_g) \subset S(f, g)$, причем $S(T_f, A_g) = S(f, g)$, если $g(W) = U_g$.

Рассмотрим множество $N(T_f) \cap N(A_g)$. Так как $N(T_f) = \{x \in X \mid x(f(V)) = \{0\}\}$, а $N(A_g) = \{x \in X \mid x(g(W)) = \{0\}\}$, то $x \in N(T_f) \cap N(A_g) \Leftrightarrow x(f(V) \cup g(W)) = \{0\}$. Отсюда следует, что $f(V) \cup g(W) = U \Rightarrow N(T_f) \cap N(A_g) = \{\theta_x\}$.

Покажем, что обратная импликация верна, если V и W — компактные пространства, а U — функционально отделимое пространство. Пусть $f(V) \cup g(W) \neq U$. Возьмем точку

$u_i \in U \setminus (f(V) \cup g(W))$ и зададим функцию $\tilde{x} : f(V) \cup g(W) \cup \{u_i\} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом: $\tilde{x}(u_i) = 1$ и $\forall u \in f(V) \cup g(W) \ \tilde{x}(u) = 0$. Функция $\tilde{x}$ непрерывна. Так как множество $f(V) \cup g(W) \cup \{u_i\}$ компактно, а пространство U функционально отделимо, то функция $\tilde{x}$ может быть непрерывным образом продолжена на все U ([3], Теорема I, с.3-4). Пусть x — одно из таких продолжений функции $\tilde{x}$. Поскольку $x \in N(T_f) \cap N(A_g)$ и $x \neq \theta_x$, то имеем импликацию $f(V) \cup g(W) \neq U \Rightarrow N(T_f) \cap N(A_g) \neq \{\theta_x\}$ или $N(T_f) \cap N(A_g) = \{\theta_x\} \Rightarrow f(V) \cup g(W) = U$.

Принимая во внимание теорему I и текст, помещенный после ее доказательства, можем высказать следующий результат.

Теорема 2. Если пространства V и W компактны, а пространство U функционально отделимо, то при условии, что $f(V) \cup g(W) = U$, $\forall z \in A_g(X) \mid S(f, g) \cap A_g z \mid \leq 1$.

Вяясним условия, при которых $A_g(X) = Z$. Введем обозначение $Z_g = \{z \in Z \mid g(w_1) = g(w_2) = z(w_1) = z(w_2), w_1, w_2 \in W\}$.

Легко видеть, что всегда $A_g(X) \subset Z_g$ и, если g — инъекция, то $Z_g = Z$. Что касается равенства $A_g(X) = Z_g$, то оно имеет место, в случае функциональной отделимости пространства U , тогда и только тогда, когда $A_g(X)$ замкнуто в топологии поточечной сходимости пространства Z ([2], Теорема 2, с. 59)..

Справедливо следующее утверждение. Если W — компактное пространство, а U — функционально отделимое пространство, то $A_g(X) = Z_g$ ([3], Теорема 2, с. 5). Если при этом g — инъекция, то $A_g(X) = Z$.

Принимая во внимание этот результат и теорему 2, можем высказать следующее утверждение.

Теорема 2. Если пространства V и W компактны, а пространство U функционально отделимо, то при условии, что $f(V) \cup g(W) = U$ и g — инъекция, $\forall z \in Z \mid S(f, g) \cap A_g^{-1} z \neq \emptyset$.

Перейдем к теореме существования интерполяционного сплайна.

Теорема 3. Если V и W — компактные пространства, U — функционально отделимое пространство и множество $f(V) \cup g(W)$ замкнуто в U , то $\forall z \in A_g(X) \mid S(f, g) \cap A_g^{-1} z \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольно фиксированный элемент из $A_g^{-1} z$. Обозначим через $\tilde{x}_0$ функцию, определенную на $f(V) \cup g(W)$ равенствами: $\tilde{x}_0(u) = x_0(u)$, если $u \in f(V) \cup g(W)$, и $\tilde{x}_0(u) = 0$, если $u \in g(W)$. Так как $f(V) \cup g(W)$ и $g(W)$ — замкнутые множества, то $\tilde{x}_0$ — непрерывная функция. Ввиду того, что U — функционально отделимое пространство, а множество $f(V) \cup g(W)$ компактно, функция $\tilde{x}_0$ допускает непрерывное продолжение на U . Пусть x_1 — одно из таких продолжений. Так как $x_1(g(W)) = \tilde{x}_0(g(W)) = 0 \forall w \in W$, то $x_1 \in N(A_g)$. Поэтому, полагая $S = x_0 - x_1$, будем иметь $A_g S = A_g x_0 = z$, причем $S(u) = 0 \forall u \in f(V) \cup g(W)$ (ибо x_0 и x_1 совпадают на $f(V) \cup g(W)$). Значит $S \in S(f, g) \cap A_g^{-1} z$. Теорема доказана.

Следующая теорема вытекает из теорем 2 и 3.

Теорема 4. Пусть V и W — компактные пространства, U — функционально отделимое пространство, $f(V) \cup g(W) = U$, множество $f(V) \setminus g(W)$ замкнуто в U и g — инъекция. Тогда $\forall z \in Z \exists! s \in S(f, g): A_g s = z$.

В следующей теореме устанавливается экстремальное свойство интерполяционного сплайна.

Теорема 5. Пусть $g(W) = U_g, z \in A_g(X)$ и $s \in S(f, g) \cap A_g^{-1}z$. Тогда $\forall v \in V \forall x \in N(A_g) |(T_f s)(v)| \leq |(T_f(s+x))(v)|$.

Доказательство. Если $f(v) \in g(W)$, т.е. $f(v) = g(w)$ при некотором $w \in W$, то $s(f(v)) = s(g(w)) = (A_g s)(w)$, а так как $A_g s = z$, то $s(f(v)) = z(w)$; если же $f(v) \notin g(W)$, то $s(f(v)) = 0$ (поскольку $s(u) = 0 \forall u \in f(V) \setminus g(W)$).

Учитывая, что $(T_f s)(v) = s(f(v))$, получаем $(T_f s)(v) = z(w)$, если $f(v) = g(w)$, и $(T_f s)(v) = 0$, если $f(v) \notin g(W)$.

Далее, $\forall x \in N(A_g) x(g(w)) = 0$ при любом $w \in W$, следовательно, $\forall x \in N(A_g) (T_f x)(v) = 0$, если $f(v) \in g(W)$.

Таким образом, $(T_f s)(v) = (T_f(s+x))(v)$, если $f(v) \in g(W)$, и $|(T_f s)(v)| = 0 \leq |(T_f(s+x))(v)| = |(T_f x)(v)| = |x(f(v))|$,

если $f(v) \notin g(W)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Лоран П.-И. Аппроксимация и оптимизация. — М., 1975.
2. Гольдман М.А. О нормальной разрешимости уравнений // Латвийский математический ежегодник. — 1973. — Т. 13. — С. 52-63.
3. Гольдман М.А. Об одном характеристическом свойстве функционально отделимых пространств // Уч. зап. ЛГУ. — 1976. — Т. 257. — Вып. 2. — С. 3-6.

M. Goldman. Splines in spaces of continuous functions.

Summary. Let U, V, W be topological spaces, and X, Y, Z be the spaces of all continuous real-valued functions defined on U, V, W respectively. Let $f: V \rightarrow U$ and $g: W \rightarrow U$ be continuous mappings and let operators $T_f: X \rightarrow Y$ and

$A_g: X \rightarrow Z$ be defined respectively by $T_f x = x \circ f$ and $A_g x = x \circ g$ ($x \in X$). The set $S(T_f, A_g) = \{s \in X \mid \forall x \in M(A_g) \forall u \in f(V) s(u) \times (u) = 0\}$ is called the set of spline corresponding to operators T_f and A_g . By an interpolating spline corresponding to a function $z \in A_g(X)$ we call a spline s such that $A_g s = z$.

For interpolating splines the existence theorem (in two variants), the uniqueness theorem are proved and an extremal property is obtained.

AMS Subject classification 54C35, 65D07.

M. Goldman. Splaīni nepārtrauktu funkciju telpās.

Anotācija. Dots splaīna jēdziens nepārtrauktu funkciju telpās (funkcija definēta patvaļīgās topoloģiskās telpās). Interpolācijas splaīnam pierādīta unitātes teorēma (divos variantos), eksistences teorēma un ekstremitātes īpašība.

Кафедра математического анализа

Латвийский Университет

буль. Райниса, 19

226098 Рига

ON SOME CATEGORICAL PROPERTIES OF PROBABILITY MEASURES

M. Zarichnyi

Summary. It is proved that the probability measure functor P is completely determined by its restriction to the subcategory of finite compacta. The problem of extension of G -symmetric power functors to the Kleisli category of the triple generated by P is considered. AMS Subject Classification 54B30, 18C20.

The probability measure functor P acting in the category Comp of compacta is normal in the sense of E.V. Shchepin [1]. Recall that a functor $P: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ is normal if it is continuous, preserves weight, monomorphisms, epimorphisms, intersections, preimages, singletons, and empty set (see [1] for details). In the first section we prove that the functor P is completely determined within the class of normal functors by its restriction to the subcategory of finite compacta. A similar result for the hyperspace functor is due to E.V. Shchepin [1]. In the second section the triple $P = (P, \eta, \psi)$ with functorial part P is defined and the problem of extension of G -symmetric power functors SP_G^n to the Kleisli category of P is investigated. The main result of this section is announced in [2].

I. On a characterization of the functor P

For each natural number n let $\mathcal{K}_n$ be the full subcategory of Comp , whose objects are compact spaces of cardinality $\leq n$.

We define $(n+1)$ -dimensional simplex functor $\Delta^{n+1}: \mathcal{K}_n \rightarrow \text{Comp}$ by the following manner. Let X be an object

of $\mathcal{K}_n$. Then, by definition, $\Delta^{n+1}X$ is $(|X|+1)$ -dimensional simplex whose vertices are identified with the points of X . A morphism $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{K}$ uniquely determines affine map $\Delta^{n+1}f: \Delta^{n+1}X \rightarrow \Delta^{n+1}Y$. It is easy to check that Δ^{n+1} is normal functor.

Theorem 1. Let $F: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ be a normal functor such that $F|_{\mathcal{K}_n} \cong \Delta^{n+1}$ for each $n \in \mathbb{N}$. Then $F \cong P$.

Proof. It follows from continuity of the functors F and P that $F|_{\text{Comp}_0} \cong P|_{\text{Comp}_0}$ (here Comp_0 denotes the full subcategory of Comp whose objects are zero-dimensional compacta). To simplify denotations, we assume that $F|_{\text{Comp}_0} = P|_{\text{Comp}_0}$.

Let X be an arbitrary compactum and $f: X' \rightarrow X$ be a Milutin map where X' is zero-dimensional compactum (see e.g. [3] for the definition and properties of Milutin maps). Then there exists an affine map $s: PX \rightarrow PX'$ such that $Pf \circ s = 1_{PX'}$. Define the map $\varphi X: PX \rightarrow PX$ as the composition

$$PX \xrightarrow{s} PX' \xrightarrow{Pf} PX.$$

In order to check that φX is correctly defined, remark that φX is uniquely determined on the dense subset $\{\mu \in PX \mid |\text{supp}(\mu)| < \omega\}$, by normality of P and F . It is easy to see that $\varphi = (\varphi X)$ is a natural transformation extending the identity transformation of the restrictions of the functors P and F onto Comp_0 .

Show that for each compactum X the map φX is injective. Assuming the contrary, we obtain that there exist $\mu_1, \mu_2 \in PX$, $\mu_1 \neq \mu_2$, for which $\varphi X(\mu_1) = \varphi X(\mu_2)$. It is not difficult to construct the map $f: X \rightarrow I = [0, 1]$ for which $Pf(\mu_1) \neq Pf(\mu_2)$. Let $A \subset I$ be a closed subset such that $\mu_1(A) \neq \mu_2(A)$ and $g: I \rightarrow I$ be a map such that $g^{-1}(A) = A$. Then $Pg \circ Pf(\mu_1) \neq Pg \circ Pf(\mu_2)$. Consider the sequence of maps $h_i: I \rightarrow I$, $i \in \mathbb{N}$, defined by the formula: $h_i(t) = t^i$, $t \in I$, $i \in \mathbb{N}$.

If ν_1 is a limit point of the sequence

$$(P h_i \circ P g \circ P f(\mu_j))_{i=1}^{\infty}, \quad j = 1, 2,$$

then evidently $\text{supp}(\nu_j) \subset \{0,1\}$, $\nu_1 \neq \nu_2$ but $\varphi I(\nu_1) = \varphi I(\nu_2)$, by zero-dimensionality of $\text{supp}(\nu_1)$ and $\text{supp}(\nu_2)$, and we get a contradiction.

It is obvious that φX is surjective. Theorem is proved.

2. Extensions of G-symmetric power functors to the category $\text{Comp}_{\mathbb{F}}$

Recall that triple $\mathbb{F} = (F, \eta, \mu)$ on a category $\mathcal{C}$ consists of endofunctor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ and natural transformations $\eta: 1_{\mathcal{C}} \rightarrow F$, $\mu: F^2 \rightarrow F$ such that the diagrams

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\eta F} & F^2 & \xleftarrow{F \eta} & F \\ & \searrow \cong & \downarrow \mu & \swarrow \cong & \\ & & F & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F^3 & \xrightarrow{\mu F} & F^2 \\ F \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ F^2 & \xrightarrow{\mu} & F \end{array}$$

are commutative (see [4]).

The Kleisli category $C_{\mathbb{F}}$ of the triple $\mathbb{F}$ is defined in the following manner: $\text{Ob}(C_{\mathbb{F}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, $C_{\mathbb{F}}(X, Y) = C(X, FY)$, and the composition $g \circ f$ of morphisms $f \in C_{\mathbb{F}}(X, Y)$, $g \in C_{\mathbb{F}}(Y, Z)$ is given by $g \circ f = \mu \circ Fg \circ f$.

We have natural functor $I: \mathcal{C} \rightarrow C_{\mathbb{F}}$ which is the identity on objects and $I f = \eta Y \circ f$ for each $f \in C(X, Y)$.

We say that functor $\bar{T}: C_{\mathbb{F}} \rightarrow C_{\mathbb{F}}$ is extension of functor $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ if $\bar{T} I = I T$.

Proposition (see [5]). There exists a bijective correspondence between extensions of functor $T: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ to the category $C_{\mathbb{F}}$ and natural transformations $\xi: T F \rightarrow F T$ such that $\xi \circ T \eta = \eta T$ and $\xi \circ T \mu = \mu T \circ F \xi \circ \xi F$.

Recall that the functor P determines the triple $\mathbb{P} = (P, \eta, \psi)$ on the category Comp [3]. The natural transformations η and ψ are defined as follows: $\eta X(x) = \delta(x)$ (Dirac measure concentrated in x), $x \in X$, $\psi X(M)(f) = M(u_X(f))$, $M \in \Gamma^2 X$, where $u_X(f)(\mu) = \mu(f)$, $\mu \in C(X)$, $\mu \in PX$.

See e.g. [1] for a description of G -symmetric power functors SP_G^n . We denote by $\pi_G: (-)^n \rightarrow SP_G^n$ the canonical natural transformation.

Theorem 2. For every subgroup G of symmetric group S_n there exists unique extension of the functor SP_G^n to the category Comp_P . The natural transformation corresponding, by the above Proposition, to this extension is defined by the formula:

$$\xi X[\mu_0, \dots, \mu_{n-1}]_G = 1/|G| \sum_{\delta \in G} P\pi_G(\mu_{\delta(0)} \otimes \dots \otimes \mu_{\delta(n-1)}), \\ [\mu_0, \dots, \mu_{n-1}]_G \in SP_G^n PX.$$

Proof. It is easy to check that $\xi = (\xi X): SP_G^n P \rightarrow P SP_G^n$ is natural transformation. Show that ξ satisfies the conditions of Proposition.

$$\begin{aligned} \text{If } \pi_G(x_0, \dots, x_{n-1}) = [x_0, \dots, x_{n-1}]_G \in SP_G^n X, \text{ then} \\ \xi X \circ SP_G^n \eta X[x_0, \dots, x_{n-1}]_G = \xi X[\delta(x_0), \dots, \delta(x_{n-1})]_G = \\ = P\pi_G X(1/|G| \sum_{\delta \in G} \delta(x_{\delta(0)}) \otimes \dots \otimes \delta(x_{\delta(n-1)})) = \\ = P\pi_G X(1/|G| \sum_{\delta \in G} \delta(x_{\delta(0)}, \dots, x_{\delta(n-1)})) = \\ = \delta([x_0, \dots, x_{n-1}]_G), \text{ i.e. } \xi \circ SP_G^n \eta = \eta \circ SP_G^n. \end{aligned}$$

It is sufficient to prove the equality

$$\xi X \circ SP_G^n \psi X[M_0, \dots, M_{n-1}]_G = \psi SP_G^n X \circ P \xi X \circ \xi PX[I_0, \dots, I_{n-1}]_G$$

in the case when $M_0, \dots, M_{n-1}$ have finite supports with respect to the functor P^2 . Let $\text{supp}_{P^2}(M_0) \cup \dots \cup \text{supp}_{P^2}(M_{n-1}) = \{x_i | 0 \leq i \leq N\}$,

$$M_1 = \sum_{j(1)=0}^S \alpha_{j(1)} \delta(m_{j(1)}),$$

$$m_{j(1)} = \sum_{k(j(1))=0}^N \beta_{k(j(1))} \delta(x_{k(j(1))}), \text{ then}$$

$$\psi X(M_1) = \sum_{j(1)=0}^S \sum_{k(j(1))=0}^N \alpha_{j(1)} \beta_{k(j(1))} \delta(x_{k(j(1))}) \quad \text{and}$$

$$\begin{aligned} \psi X(M_{\delta(0)}) \otimes \dots \otimes \psi X(M_{\delta(n-1)}) = \\ = \sum_{\substack{j(\delta(0))=0 \\ j(\delta(n-1))=0}}^S \sum_{\substack{k(j(\delta(0)))=0 \\ k(j(\delta(n-1)))=0}}^N \alpha_{j(\delta(0))} \dots \alpha_{j(\delta(n-1))} \end{aligned}$$

$$\times \beta_{k(j(z(0)))} \cdots \beta_{k(j(z(n-1)))} \delta(x_{k(j(z(0)))}, \dots, x_{k(j(z(n-1)))}).$$

This implies that

$$\begin{aligned} & \xi X \circ SP_G^n \psi X[M_0, \dots, M_{n-1}]_G = \\ & = P \pi_G X(I/|G| \sum_{z \in G} (\psi X(M_0) \otimes \dots \otimes \psi X(M_{n-1}))) = \\ & = \sum_{\substack{S \\ j(0)=0 \\ \vdots \\ j(n-1)=0}} \sum_{\substack{H \\ k(j(0))=0 \\ \vdots \\ k(j(n-1))=0}} \alpha_{j(0)} \cdots \alpha_{j(n-1)} \beta_{k(j(0))} \cdots \beta_{k(j(n-1))} \times \\ & \times \delta([x_{k(j(0))}, \dots, x_{k(j(n-1))}]_G). \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned} & \xi PX[M_0, \dots, M_{n-1}]_G = \\ & = P \pi_G PX(I/|G| \sum_{z \in G} M_{z(0)} \otimes \dots \otimes M_{z(n-1)}) = \\ & = \sum_{\substack{S \\ j(0)=0 \\ \vdots \\ j(n-1)=0}} \alpha_{j(0)} \cdots \alpha_{j(n-1)} \delta([m_{j(0)}, \dots, m_{j(n-1)}]_G) \end{aligned}$$

and, since

$$\begin{aligned} & \xi X[m_{j(0)}, \dots, m_{j(n-1)}]_G = \\ & = \sum_{\substack{H \\ k(j(0))=0 \\ \vdots \\ k(j(n-1))=0}} \beta_{k(j(0))} \cdots \beta_{k(j(n-1))} \delta([x_{k(j(0))}, \dots, \\ & x_{k(j(n-1))}]_G). \end{aligned}$$

we immediately obtain the required equality.

Now, show that the natural transformation $\xi: SP_G^n P \rightarrow PSP_G^n$ is completely determined by the property $\xi \circ SP_G^n \eta = \eta SP_G^n$. For each $m \geq 1$ denote by $g_m: \mathbb{A} \rightarrow P(n \times m)$ the map defined by the formula:

$$g_m(i) = \mathbb{I}/m \sum_{j \in m} \delta(i, j).$$

Let $a \in \text{SP}_G^n$ and $\deg(a) = n$. Denoting by $\text{pr}_1: n \times m \rightarrow n$ the projection, we obtain $\text{SP}_G^n \text{pr}_1 \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a) = \text{SP}_G^n \eta_n(a)$, and therefore, $\xi' \circ \text{SP}_G^n \text{pr}_1 \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a) = \eta \text{SP}_G^n(a)$. By naturality of ξ' , $\text{PSI}_G^n \text{pr}_1 \circ \xi'(n \times m) \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a) = \eta \text{SP}_G^n(a)$. Since the element $\xi'(n \times m) \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a)$ is invariant under the maps of $n \times m$ into itself which preserve the first coordinate, we obtain

$$\xi'(n \times m) \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a) = \frac{1}{n!} \sum_{i \in \mathcal{A}} \delta(\text{SP}_G^n i(a)),$$

where $\mathcal{A} = \{i: n \times m \rightarrow n \times m \mid \text{pr}_1 \circ i = \text{id}\}$. Immediate calculations show that the right side is equal to $\xi(n \times m) \circ \text{SP}_G^n \xi_m(a)$.

If $c \in \text{SP}_G^n \text{PX}$ is a point of the form $[\cdot, \dots, m_{n-1}]_G$ where m_1 is a measure with finite support, $i \in n$, and

$$m_1 = \sum_{j=0}^{k_1} \alpha_{1j} \delta(x_{1j}) \text{ where } \alpha_{1j} \in \mathbb{Q}, \text{ then for some}$$

$m \geq 1$ there exists a map $f: n \times m \rightarrow X$ such that $c = \text{SP}_G^n f(\text{SP}_G^n \xi_m(a))$. Hence, $\xi'X(c) = \xi X(c)$.

Since the elements in consideration form a dense subset in $\text{SP}_G^n \text{PX}$ [1], we obtain that $\xi'X = \xi X$ and consequently $\xi' = \xi$. Theorem is proved.

Let $\mathbb{P} = (F, \eta, \mu)$ be a triple on category $\mathcal{C}$ and $T, T': \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ be endofunctors admitting extensions to the category $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$. Given natural transformations $\xi: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}F$,

$\xi': T\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}T'$ corresponding, by Proposition, to these extensions, we say that natural transformation $t: T \rightarrow T'$ is $\mathbb{P}$ -concordant if $t \circ \xi = \xi' \circ t\mathbb{P}$.

Theorem (see [6]). Natural transformation $t: T \rightarrow T'$ is also natural transformation of extended functors in the category $\mathcal{C}_{\mathbb{P}}$ if and only if t is $\mathbb{P}$ -concordant.

Let G, H be subgroups of symmetric group S_n and $H \supset G$. Denote by $\pi_{GH}: \text{SP}_G^n \rightarrow \text{SP}_H^n$ the natural transformation defined by the formula:

$$\pi_{GH}[x_0, \dots, x_{n-1}]_G = [x_0, \dots, x_{n-1}]_H, \quad x_0, \dots, x_{n-1} \in X.$$

Theorem 3. The natural transformation $\mathcal{N}_{GH}: S_{\mathcal{G}}^n \rightarrow S_{\mathcal{H}}^n$ is also the natural transformation of extensions of functors $S_{\mathcal{G}}^n$ and $S_{\mathcal{H}}^n$ to the category $\text{Comp}_{\mathcal{P}}$.

Proof. Apply the above Theorem.

3. Remarks

It is announced in [2] that each normal functor of degree $\leq n$ admitting extension to the category $\text{Comp}_{\mathcal{P}}$ is isomorphic to G -symmetric power functor for some subgroup $G \subset S_n$. Therefore, there exists complete classification of extensions of functors to the category $\text{Comp}_{\mathcal{P}}$ within the class of normal functors of finite degree. It is still unknown whether the functor P admits non-trivial extension to the category $\text{Comp}_{\mathcal{P}}$ (a trivial one is determined by the natural transformation $\eta(P \circ \psi)$).

References

1. Щепин Е.В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. -1981. -Т.36, вып.3. -С.3-62.
2. Zarichnyi M.M. On covariant topological functors, Γ // Q. & A. in Gen. Top.-1990.-V.8, № 2.-P.317-369.
3. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основы конструкции.-М.: МИУ, 1988.
4. Barr M., Wells Ch. Toposes, triples and theories.- New York e.a.: Springer, 1985.
5. Vinárek J. Projective monads and extensions of functors // Math. Centr. Afd.-1983.-№ 195.-P.1-12.
6. Заричний М.М. Продовження природних перетворень на категорії Клейслі // Прикладні питання математики. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. мат.-1991; Вип.36. -С.45-49.

М.Зарицкий. О некоторых катеторных свойствах вероятностных мер.

Аннотация. Доказано, что функтор вероятностных мер P по-прежнему определен своим ограничением на подкатегорию конечных компактов. Рассмотрена задача продолжения функторов G -симметрической степени на категорию Клейсли монады, порожденной функтором P . УДК 515.12+512.58.

M. Zaričij. Par dažām varbūtības mēru kategorijas īpašībām.

Anotācija. Pierādīts, ka varbūtības mēru funktores P ir pilnīgi noteikts ar tā ierobežojumu galīgu kompakto apakškategorijā. Apskatīta problēma par G -simetriskās pakāpes funktores paplašinājumu uz Kleisli monādes, ko radījis funktores P , kategoriju.

Faculty of Mechanics and Mathematics
Lviv University
Universytetska 1
290602 Lviv
Ukraine

SOME ANALOGS OF THE ARHANGEL'SKIĬ-PYTKEEV
THEOREM IN C_p -THEORY

A. Korovin

Summary. In this paper it's given a characterization in terms of C_p of such spaces X that any finite Tychonoff power of X does not contain an uncountable closed and discrete subsets. AMS Subject classification: 54C35.

1. Introduction

All spaces are assumed to be Tychonoff spaces in the paper. For any space X we consider the set $C(X)$ consisting of all real-valued continuous functions on X and the space $C_p(X)$ which is the space of real-valued continuous functions in the topology of pointwise convergence. We also need the extent, the Lindelöf number and the tightness of the space X denoted by $e(X)$, $l(X)$ and $t(X)$ respectively (for the definitions, see [1], [2]).

As in [1], for any cardinal-valued invariant φ we define the following cardinal-valued invariant:

$$\varphi^*(X) = \sup\{\varphi(X^n) : n \text{ is a natural number}\}$$

(where X is a space).

The first infinite cardinal number is denoted by ω .

For any space X , for each subset A of the space X and for every cardinal number τ we use the following notions:

the cardinality of the set A which is denoted by $|A|$;

the closure of the set A in the space X which is denoted by $[A]_X$;

the first successor of the cardinal number τ which is denoted by means of τ^+ .

We also need the sets:

$$[A]^{<\tau} = \{B: B \subset A: |B| < \tau\};$$

$$[A]^{ \leq \tau} = \{B: B \subset A: |B| \leq \tau\};$$

$$[A]^{ = \tau} = \{B: B \subset A: |B| = \tau\}.$$

for any family γ consisting of the space X and for each point $x \in X$ we consider the star of the family γ in the point x (denoted by $\gamma(x)$) and also the following sets:

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \gamma = \{x: x \in X: |\gamma(x)| < \tau\};$$

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \gamma = \{x: x \in X: |\gamma(x)| \leq \tau\};$$

$$\lim_{x \rightarrow \tau} \gamma = \{x: x \in X: |\gamma(x)| \geq \tau\}.$$

Definition 1. Let τ be a cardinal number. A space X has τ -property (strong τ -property) iff for any family γ consisting of open subsets of the space X condition (1) (condition (2) respectively) is fulfilled:

$$[\lim_{x \rightarrow \tau} \gamma]_X \cap \lim_{x \rightarrow \tau} \gamma = \emptyset \quad (1),$$

$$\text{the set } \lim_{x \rightarrow \tau} \gamma \text{ is open in } X \quad (2).$$

Definition 2. For any infinite cardinal number τ we consider the following classes of spaces:

$\mathcal{L}(\tau) = \{X: X \text{ is a space: any set } A \in [X]^{\leq \tau} \text{ has a complete accumulation point in } X\}$

and

$$\mathcal{L}^*(\tau) = \{X: X^n \in \mathcal{L}(\tau) \text{ for any number } n \in \omega\}.$$

Definition 3. Let X be a space, G be a subset of the space $G_p(X)$. The set of functions G "well separates" the space X iff for any open subset U of the space X and for each finite subset K of the set U there exists a function f satisfying the following condition:

$$f \in G; f(K) = \{1\} \text{ and } f(X \setminus U) = \{0\}.$$

2. Two analogs of the Asanov theorem.

The Asanov theorem establishes that $t^*(X) \leq l(G_p(X))$ for any space X (see [1; Theorem I.4.1.; p. 41]; [2]).

We present two analogs of this theorem:

Theorem 1. Let X be a space, τ be an infinite cardinal number, G be such a subspace of the space $G_p(X)$ that $e(G) \leq \tau$ and G "well separates" the space X . Then for any number $n \in \omega$ the space X^n has τ^+ -property.

Theorem 2. Let X be a space, τ be a regular infinite car-

dinal number and G be such a subspace of the space $C_p(X)$ that G "well separates" the space X and $0 \in Z(\tau)$. Then for each number $n \in \omega$ the space X^n has strong τ -property.

Proof of Theorem 1. Let $n \in \omega$, γ be a family consisting of open subsets of the space X^n and let $x = (x_1; \dots; x_n) \in \lim_{\tau} \gamma$.

We shall find such an open neighbourhood W of the point x in the space X^n that the following condition is fulfilled:

$$W \subset \lim_{\tau} \gamma.$$

Thus, property (1) will be proved and it will be shown that the space X^n has τ^+ -property.

Let's pick such open neighbourhoods $V_1; \dots; V_n$ of the points $x_1; \dots; x_n$ in the space X that

$$V_i = V_j \text{ if } x_i = x_j \text{ and } V_i \cap V_j = \emptyset \text{ if } x_i \neq x_j \quad (3)$$

for any numbers $i=1; \dots; r$ and $j=1; \dots; n$.

We consider the neighbourhood $V = V_1 \times \dots \times V_n$ of the point $x = (x_1; \dots; x_n)$ in the space X^n .

Let's choose some one-to-one numerated subfamily

$$\{U_\alpha : \alpha \in \tau^+\}$$

of the family $\gamma(x)$ and for any number $\alpha \in \tau^+$ determine such open neighbourhoods $G_{\alpha;1}; \dots; G_{\alpha;n}$ of the points $x_1; \dots; x_n$ in X that

$$x = (x_1; \dots; x_n) \in G_{\alpha;1} \times \dots \times G_{\alpha;n} \subset (V \cap U_\alpha) \quad (4).$$

We also find a function $f_\alpha \in G$ satisfying the following conditions:

$$f_\alpha(\{x_1; \dots; x_n\}) = \{1\} \quad (5)$$

and

$$f_\alpha(X \setminus (G_{\alpha;1} \cup \dots \cup G_{\alpha;n})) = \{0\} \quad (6),$$

that is possible because the set of functions G "well separates" the space X .

We determine the sets

$$W_{\alpha;i} = f_\alpha^{-1}((0; +\infty)) \cap V_i \text{ (where } i=1; \dots; n) \quad (7)$$

and the set

$$W_\alpha = W_{\alpha;1} \times \dots \times W_{\alpha;n}.$$

Conditions (4) and (6) imply the following properties:

$$f_\alpha(X \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n)) = \{0\} \quad (8)$$

and

$$W_\alpha \subset U_\alpha$$

(9).

Let's consider the set $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha \in \tau^+\}$ and its cardinality.

We have two cases:

First case. $|\mathcal{F}| = \tau^+$. Since $e(J) \leq \tau$, we can choose a limit point f for the set $\mathcal{F}$ in the space C .

We now need the following sets:

$$V_i = f^{-1}((0; +\infty)) \cap W_i \quad (\text{where } i=1; \dots; n) \quad (10)$$

and

$$W = W_1 \times \dots \times W_n.$$

It follows directly from condition (5) and from the definition of the topology of pointwise convergence that

$$f(\{x_1; \dots; x_n\}) = 1.$$

Using condition (10) and taking into consideration the choice of the sets $V_1; \dots; V_n$ it's easy to prove that the set W is a neighbourhood of the point x in the space X^n .

Let's show that $W \subset \lim_{\tau} \gamma$. For any point $y = (y_1; \dots; y_n) \in W$ we consider the set of functions

$$O(y) = \{g: g \in C_p(X); g(y_i) > 0; i=1; \dots; n\}$$

which is an open neighbourhood of the point f in the space $C_p(X)$. Since f is a limit point for the set $\mathcal{F}$, the set $O(y)$ is infinite.

Then the family

$$\sigma = \{U_\alpha : f_\alpha \in (O(y) \cap \mathcal{F}); \alpha \in \tau^+\}$$

is infinite too (because the collection $\{U_\alpha : \alpha \in \tau^+\}$ is one-to-one numerated).

Conditions (3); (7); (8) and (9) now imply that $\sigma \subset \gamma(y)$.

Thus, in the first case we have: $x \in W \subset \lim_{\tau} \gamma$.

Second case. $|\mathcal{F}| < \tau^+$. For any function $f \in \mathcal{F}$ we consider the set

$$Q(f) = \{\alpha : \alpha \in \tau^+ : f = f_\alpha\}.$$

Using the regularity of the cardinal number τ^+ we can pick such a function $g \in \mathcal{F}$ that $|Q(g)| = \tau^+$.

Condition (7) now implies that $W_\alpha = W_\beta$ for any numbers $\alpha \in Q(g)$ and $\beta \in Q(g)$.

Let $W = W_\alpha$ for some number $\alpha \in Q(g)$. Then condition (9) implies the following property:

$$W \subset \lim_{\tau} \gamma < \lim_{\tau} \gamma.$$

The proof of Theorem 2 is similar to the proof of Theorem 1.

3. Two analogs of the Arhangel'skiĭ-Pytkeev theorem

Theorem 3 and Theorem 4, the main results of the paper are analogs of the Arhangel'skiĭ-Pytkeev theorem establishing that for any space X the following equality is fulfilled:

$$l^*(X) = t(C_p(X))$$

(see [1; Theorem I.1.1; p. 54 ; [2]).

Theorem 3. For any space X and for each infinite cardinal number τ the following conditions are equivalent:

- (a) $e^*(X) \leq \tau$;
- (b) the space $C_p(X)$ has τ^+ -property.

Theorem 4. For any space X and for each regular uncountable cardinal number τ the following conditions are equivalent:

- (a) $X \in \mathcal{Z}^*(\tau)$;
- (b) the space $C_p(X)$ has strong τ -property.

We use the following construction in the proofs of Theorem 3 and Theorem 4:

For any space X we consider the reflexion mapping

$$\chi: X \rightarrow C_p(C_p(X)): x \mapsto \chi(x); \chi(x)(f) = f(x).$$

The mapping χ is continuous.

We also need the mappings of pointwise sum, multiplication, maximum and minimum determined on the space $C_p(C_p(X))$. These mappings are denoted by ψ_1 ; ψ_2 ; ψ_3 ; ψ_4 respectively. For any number $i=1; 2; 3; 4$ the mapping

$$\psi_i: C_p(C_p(X)) \times C_p(C_p(X)) \rightarrow C_p(C_p(X))$$

is (jointly) continuous.

We consider the following subspaces of the space $C_p(C_p(X))$:

$$Z = \chi(X) \cup \{ \xi : \xi \in C_p(C_p(X)) : \xi \text{ is a constant function} \};$$

$$C_{0;1} = \psi_1(Z \times Z);$$

$$C_{n;1} = \psi_1(C_{n;1-1} \times C_{n;1-1}) \text{ (where } n \in \omega; i=2; 3; 4);$$

$$C_{n+1;1} = \psi_1(C_{n;4} \times C_{n;4}) \text{ (where } n \in \omega).$$

We define the subspace

$$C = \bigcup \{ C_{n;1} : n \in \omega; i=1; 2; 3; 4 \}$$

of the space $C_p(C_p(X))$.

In the proofs of Theorems 3 and 4 we use the following simple statement:

Proposition 1. Let X be a space, τ be an infinite cardinal number. Then the following conditions are fulfilled:

(a) the subspace G of the space $C_p(C_p(X))$ "well separates" the space $C_p(X)$;

(b) if $e^*(X) \leq \tau$ then $e(G) \leq \tau$;

(c) if τ is a regular uncountable cardinal number and $X \in \mathcal{L}^*(\tau)$ then $G \in \mathcal{L}(\tau)$.

Proof of Theorem 3. Proof (a) $\rightarrow$ (b). It follows directly from Proposition 2 and from condition (a) of the theorem that there exists such a subspace G of the space $C_p(C_p(X))$ that $e(G) \leq \tau$ and G "well separates" the space $C_p(X)$. Theorem 1 now implies condition (b) of the theorem.

Proof (b) $\rightarrow$ (a). Let's assume the contrary. Then we can choose a number $n \in \omega$ and a subset F of the space X^n satisfying the following condition:

F is a discrete and closed in X^n and $|F| = \tau^+$ (11).

We show that condition (1) isn't fulfilled for the cardinal number τ^+ and for the family $\mathcal{U} = \{U(x) : x = (x_1, \dots, x_n) \in F\}$ where

$U(x) = \{f : f \in C_p(X) : f(x_i) > 0 : i = 1, \dots, n\}$ (12).

For any point $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$ we pick an open neighbourhoods $V_1(x), \dots, V_n(x)$ of the points $x_1, \dots, x_n$ and the neighbourhood $V(x) = V_1(x) \times \dots \times V_n(x)$ of the point x satisfying the following condition:

$F \cap V(x) = \emptyset$, if $x \notin F$ and $F \cap V(x) = \{x\}$, if $x \in F$ (13).

Moreover, we choose such a function $f_x \in C_p(X)$ that

$f_x(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{1\}$, $f_x(X) \subset [0; 1]$ and (14)

$f_x(X \setminus (V_1(x) \cup \dots \cup V_n(x))) = \{0\}$

We determine the set

$\mathcal{F}_1 = \{f_x : x \in X^n\}$ (15)

and the set

$\mathcal{F} = \{\max\{f : f \in K\} : K \in [\mathcal{F}_1]^{<\omega}\}$ (16),

consisting of pointwise maxima of all finite subsets of the set $\mathcal{F}_1$.

Conditions (14), (15) and (16) imply that the constant function f_1 ($f_1(X) = \{1\}$) is a limit point for the set $\mathcal{F}$ in the space $C_p(X)$. We have $f_1 \in \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{U}$ because $\mathcal{U}(f_1) = \mathcal{U}$ and $|\mathcal{U}| = \tau^+$ (see conditions (11) and (12)).

Let's show that $\mathcal{F} \subset \lim_{\mathcal{U}} \mathcal{U}$. For any point $f \in \mathcal{F}$ we can

choose by means of (15) and (16) such a finite set $\{z(1); \dots; z(m)\} \subset X^n$ that

$$r = \max\{r_{z(1)}; \dots; r_{z(m)}\}.$$

Condition (12) implies that $\mathcal{U}(r) \subset \mathcal{U}(r_{z(1)}) \cup \dots \cup \mathcal{U}(r_{z(m)})$. Since $|\mathcal{U}(r_z)| \leq 1$ for any point $z \in X^n$ (see conditions (12), (13) and (14)), we have:

$$|\mathcal{U}(r)| \leq m < \omega.$$

Thus, $\mathcal{F} \subset \bigcup_{r \in \mathcal{F}} \mathcal{U}$ and $r \in [\mathcal{F}]_{C_p(X)}$, i.e. the space $C_p(X)$ hasn't τ^+ -property.

Using the scheme of the proof of Theorem 3 it's easy to prove Theorem 4.

4. Some remarks

The impossibility to eliminate the condition of the uncountability of the cardinal number τ in Theorem 4 follows from Proposition 1 and is suggested by the Gal'ko-Haylyova example showing the t -equivalence of the real line and the real single segment (see [1]; [3]).

It follows directly from Theorem 3 that for any infinite cardinal number τ the relation of t -equivalence preserves the following property:

$$e^*(X) \leq \tau.$$

At the first time the latter statement was proved by Okunev in [4].

5. Acknowledgement

The author expresses his deep gratitude to professor A.V. Arhangel'skiĭ and to professor A.P. Shostak for the support and the help.

6. References

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М.: МГУ, 1989.
2. Архангельский А.В. Пространства функций в топологии поточечной сходимости. Часть I. // Общая топология: пространства функций и размерность. М.: МГУ, 1985. с. 1-66.

3. Гулько С.П., Химлёва Т.Е. Компактность не сохраняется отношением t -эквивалентности // Мат. заметки.-1986.-Т. 36.-№ 6.-С. 895-903.
4. Окучев О.Г. О слабой топологии сопряжённого пространства и отношении t -эквивалентности // Мат. заметки.-1989.-Т. 46.-№ 1.-С. 753-80.

Аннотация. В статье даётся характеристика через C_p таких пространств X , что любая конечная степень пространства X не содержит несчётных дискретных замкнутых подмножеств.
УДК 515.12

A. Korovins. Daži Arhangel'ska-Pitkeleva teorēmas analogi C_p teorijā.

Anotācija. Rakstā dots raksturojums C_p jēdzienos tādām telpām X , kuru jebkuras galīgas pakāpes nebatur nesamērējamās diskretas atēgtas apakšgrupas.

ON THE APPROXIMATION OF MULTIVALUED MAPS

U. Raitums

Summary. The paper discusses upper semicontinuous multivalued maps defined on a subset Q of Euclidean space and with convex closed (not necessary bounded) values in another Euclidean space. It is shown that if such a map has an integrable majorant then there exist single valued continuous approximative maps which have analogous majorants. MSC 54C60.

Introduction. In various fields of mathematics, for instance, differential inclusions, optimal control, equations with discontinuous nonlinearities, the multivalued maps are a necessary instrument for investigation. And often here it is necessary to approximate multivalued maps by single valued maps. The existence of such an approximation with continuous functions for the case of compact valued (with some additional properties) maps is obtained, for instance, in [1].

On the other hand, in some situations there is necessary to introduce multivalued maps with convex but, in general, unbounded values. For these case there is important estimates for approximating functions.

In this paper the case of multivalued maps A defined on a subset Q of Euclidean space, $Q = \{(x, z): x \in \Omega, z \in \mathbb{R}^N\}$, with values in the another Euclidean space $\mathbb{R}^m$ is discussed. We assume that the map A is upper semicontinuous with convex values and that the estimate

$$\sup \{ |\lambda| : \lambda \in A(x, z) \} \leq h(x) + g(z), \quad (x, z) \in Q,$$

holds where the function f is continuous and the function h belongs to some Lebesgue space $L_p(\Omega)$.

We show that there exist a sequence $\{\varphi_k\}$ of continuous functions which in some sense approximate the map A and for which an analogous estimate are valid. In the last section of this paper we investigate properties of weak limit elements b_0 of sequences $\{\varphi_k(\cdot, u_k(\cdot))\}$ where the sequence $\{u_k\}$ converges strongly in some Lebesgue space. It is shown that under some natural assumptions there is $b_0(x) \in A(x, u_0(x))$ for a.s. $x \in \Omega$ ($u_k \rightarrow u_0$).

1. Notations and results. Let Y be a linear topological space with elements y . We denote by $\Pi(Y)$ the family of all nonempty subsets of Y . If Y is a metric space with metric ρ then for arbitrary given subsets $Y_1 \subset Y$, $Y_2 \subset Y$ we denote

$$\rho(Y_1, Y_2) := \inf \{ \rho(y_1, y_2) : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2 \},$$

$$d(Y_1, Y_2) := \sup \{ \rho(y, \cdot) : y \in Y_1 \}.$$

We note that $d(Y_1, Y_2)$ is not equal to $d(Y_2, Y_1)$ in general.

Let n, N, m be fixed integers and $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m$ be the corresponding Euclidean spaces with elements x, z, λ respectively. Let Ω be a fixed bounded domain in $\mathbb{R}^n$ which boundary has zero measure and let Q be closed set $Q = \Omega \times \mathbb{R}^N$ with elements $\xi = (x, z)$.

We denote by A a multivalued map, $A: Q \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^m)$. The graph of the map A we denote by G_A , i.e.,

$$G_A := \{ (\xi, \lambda) \in Q \times \mathbb{R}^m : \lambda \in A(\xi) \}.$$

If necessary, for given subset $Q_* \subset Q$ we denote by $G_2 A|_{Q_*}$ the restriction of the $G_2 A$ to the set Q_* , i.e.

$$G_2 A|_{Q_*} = \{(\xi, \lambda) \in Q_* \times \mathbb{R}^m : \lambda \in A(\xi)\}.$$

The same notions we shall use for another multivalued or single valued maps in Euclidean spaces.

For map $A: Q \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^m)$ we introduce the following hypotheses.

H1. For every $\xi \in Q$ the value $A(\xi)$ is a convex closed subset of $\mathbb{R}^m$ (not necessary bounded).

H2. The map A is upper semicontinuous, i.e. for given $\xi_0 \in Q$ and given neighbourhood ω of $A(\xi_0)$ there exists a neighbourhood $\omega' \ni \xi_0$ such that $A(\xi) \subset \omega$ for every $\xi \in \omega' \cap Q$.

H3. There exist a number p , $1 < p < \infty$, a function $h \in L_p(\Omega)$ and continuous monotone increasing nonnegative functions $y_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, N$, such that for all $\xi = (x, z) \in Q$ the estimate

$$\sup \{|\lambda| : \lambda \in A(x, z)\} \leq h(x) + y_1(|z_1|) + \dots + y_N(|z_N|).$$

holds. Here $z = (z_1, \dots, z_N)$.

H4. For some integer ℓ , $1 \leq \ell \leq N$, $\ell \leq m$, there exists a continuous monotone increasing function f_0 , $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, with $f_0(0) = 0$ and an uniformly continuous function f_* , $f_*: Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$,

with values greater than some positive constant such that for given

$$x \in \bar{\Omega}, z' = (t', \tau), z'' = (t'', \tau), \quad t', t'' \in \mathbb{R}^\ell, \tau \in \mathbb{R}^{N-\ell},$$

there exist

$$\lambda' \in A(x, (t', \tau)), \quad \lambda'' \in A(x, (t'', \tau)),$$

$$\lambda' = (\bar{\lambda}', \bar{\lambda}'), \quad \lambda'' = (\bar{\lambda}'', \bar{\lambda}''), \quad \bar{\lambda}', \bar{\lambda}'' \in \mathbb{R}^l$$

such that

$$\langle \bar{\lambda}' - \bar{\lambda}'', t' - t'' \rangle \geq f_*((x, z'), (x, z'')) f_0(|t' - t''|).$$

Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the scalar product in Euclidean spaces.

The main result of the paper is:

Theorem 1. Let the map $A: Q \rightarrow \Pi(\mathbb{R}^m)$ satisfies the hypotheses H1-H5. Then there exist a function $h' \in L_p(Q)$ and a family $\{\varphi_k\}$ of continuous functions $\varphi_k: Q \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k=1, 2, \dots$, such that

$$(i) |\varphi_k(x, z)| \leq h'(x) + f_1(|z_1| + 1/k) + \dots + f_N(|z_N| + 1/k)$$

for all $(x, z) \in Q$ and $k=1, 2, \dots$;

(ii) for every chosen bounded subset $Q_* \subset Q$ there is

$$d(G_1 \varphi_k|_{Q_*}, G_2 A|_{Q_*}) \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty;$$

(iii) if for some constants

$$C_0 > 0, \quad 0 < q_i < q_i < \infty, \quad 1 < q_i, \quad i=1, \dots, N,$$

there is

$$p = \min \{q_i/q_i : i=1, \dots, N\},$$

$$f_i(t) \leq C_0 |t|^{q_i}, \quad i=1, \dots, N,$$

and a sequence $\{u_k\} \subset L_{\bar{q}}(\Omega)$ converges strongly to an element u_0 then the sequence

$$\{b_k(\cdot) := \varphi_k(\cdot, u_k(\cdot))\}$$

is weakly compact in $L_{\bar{p}}(\Omega)$ and every weak limit point b_0 of the sequence $\{b_k\}$ has the following property

$$b_0(x) \in A(x, u_0(x)) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega.$$

Here by $L_{\bar{p}}(\Omega)$ we denote the direct product of N spaces $L_{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, N$, and by $L_{\bar{p}}(\Omega)_m$ we denote the direct product of m spaces $L_p(\Omega)$.

If additionally the map A has a measurable selection which satisfies the hypothesis H4 then all functions φ_k , $k = 1, 2, \dots$, have the same property with function $f_* - 1/k$ instead of f_* .

2. Approximation. In this section we shall give the proofs of the statements (i) and (ii) of the theorem.

For $x \in \Omega$, $\xi \in Q$ and $\ell = 1, 2, \dots$ we denote the sets

$$B(\xi, \ell) := \{\xi' \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N : |\xi'_i - \xi_i| < 1/\ell, \quad i = 1, \dots, n+N\},$$

$$B(x, \ell) := \{x' \in \mathbb{R}^n : |x'_i - x_i| < 1/\ell, \quad i = 1, \dots, n\}$$

with Lebesgue measures $|B(\xi, \ell)|$ and $|B(x, \ell)|$ respectively.

For locally integrable functions φ , defined on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ and values from $\mathbb{R}^m$, we introduce the averaging operators

$$(S_\ell \varphi)(\xi) := \frac{1}{|B(\xi, \ell)|} \int_{B(\xi, \ell)} \varphi(\xi') d\xi'$$

and analogical operators for $\varphi \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$(T_\ell \varphi)(x) := \frac{1}{|B(x, \ell)|} \int_{B(x, \ell)} \varphi(x') dx'$$

It is obvious that the functions $S_\ell \varphi$ and $T_\ell \varphi$ are continuous and if $\varphi \in L_p(\mathbb{R}^n)$ then $T_\ell \varphi \rightarrow \varphi$ as $\ell \rightarrow \infty$ strongly in $L_p(M)$ for every bounded measurable set M . The same property have functions $S_\ell \varphi$.

From the fact that $h \in L_p(\Omega)$ it follows the existence of closed sets $\Omega_s, s=1, 2, \dots$ such that:

- $\Omega_s \subset \Omega_{s+1}$;
- all Ω_s belongs to the interior of Ω ;
- $h(x) \leq s$ on Ω_s ;
- h is continuous on Ω_s ;
- sequence $\{T_\ell h\}$ converges uniformly in Ω_s ;
- for $\Omega'_s := \{x \in \Omega \setminus \Omega_s : h(x) \leq s\}$ there is

$$\text{meas } \Omega'_s \leq 2^{-s} (s+1)^{-p}$$

- $\text{meas } \Omega \setminus \Omega_s \leq 2 s^{-p} \|h\|_{L_p(\Omega)}^p$.

Here and in what follows by $\text{meas } E$ we denote the Lebesgue measure of the set E .

By virtue of the hypotheses H1-H3 there exists a measurable selection Q of the map $\mathcal{H}$, i.e.

Q is a single valued measurable function defined on Q such that $Q(\xi) \in \mathcal{H}(\xi)$ for every $\xi \in Q$. Additionally $|Q| \in L_{ploc}(Q)$.

Let us define on $Q_s := \{(x, z) \in Q : x \in \Omega_s\}$ functions

$$\varphi_l := S_l Q, \quad l = l(s), l(s)+1, \dots,$$

where the number $l(s)$ depends on the distance between Ω_s and the boundary of Ω (we need that φ_l is less than this distance).

After that by means of the first operator of expansion from Stein [2, ch. 6] we expand the functions

φ_l from Q_s to Q as continuous functions φ_{ls} such that for chosen $x \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_s$ there is a $x' \in \Omega_s$ such that

$$|x - x'| \leq 4 d(x, \Omega_s),$$

$$\varphi_{ls}(x, z) = \varphi_l(x', z) \quad \forall l \geq l(s) \quad (2)$$

From the definition of φ_l, φ_{ls} and properties of the operators S_l and T_l it follows that on Q_s

$$|\varphi_{ls}(x, z)| \leq (T_l h)(x) + \beta_1(|z_1| + \varphi_l) + \dots + \beta_N(|z_N| + \varphi_l).$$

From here and the construction of sets Ω_s and functions φ_{ls} we have that

$$|\varphi_{\ell s}(x, z)| \leq h(x) + h_s(x) + \delta_{\ell s} +$$

$$f_1(|z_1| + \frac{1}{\ell}) + \dots + f_N(|z_N| + \frac{1}{\ell}), \quad (x, z) \in Q,$$

where

$$h_s(x) := \begin{cases} s+1, & x \in \Omega'_s, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega'_s, \end{cases}$$

and $\delta_{\ell s} \rightarrow 0$ as $\ell \rightarrow \infty$.

By virtue of properties of Ω_s values of the function

$$h_0(x) := \sup \{ h_s(x) : s = 1, 2, \dots \}$$

for a.e. $x \in \Omega$ are equal to the maximum of only a finite number of $h_s(x)$. Hence, we have

$$\int_{\Omega} |h_0|^p dx \leq \sum_{s=1}^{\infty} (s+1)^p 2^{-s} (s+1)^{-p} < \infty, \quad (3)$$

i.e. the function h_0 belongs to $L_p(\Omega)$.
Therefore

$$|\varphi_{\ell s}(x, z)| \leq h(x) + h_0(x) + \delta_{\ell s} +$$

$$f_1(|z_1| + \frac{1}{\ell}) + \dots + f_N(|z_N| + \frac{1}{\ell}), \quad (x, z) \in Q, \quad (4)$$

$$\ell = \ell(s), \ell(s)+1, \dots,$$

where $\delta_{\ell s} \rightarrow 0$ as $\ell \rightarrow \infty$.

Now we choose $k = k(s)$, $k(s) \geq s$, so large
 that $\delta_{k(s)s} < 1/s$ and define our sequence
 $\{\varphi_k\}$ as

$$\varphi_k := \varphi_{k(s)s}, \quad s = 1, 2, \dots$$

Then from (4) it follows immediately that the sequence
 $\{\varphi_k\}$ satisfies the property (i) (if necessary we
 can renumber the sequence $\{\varphi_k\}$ and start with
 some φ_k as φ_1).

The sequence $\{\varphi_k\}$ satisfies the property
 (ii) too. The proof is based on arguing by contradiction.

Let us suppose that there are a bounded closed
 set $Q_\gamma \subset Q$ and a sequence $\{\xi_k\} \subset Q_\gamma$
 such that

$$d((\xi_k, \varphi_k(\xi_k)), G \cap A|Q_\gamma) \geq \delta_0 > 0$$

for all $k = 1, 2, \dots$

Without loss of generality we can assume that the se-
 quence $\{\xi_k\}$ converges to some $\xi_0 \in Q_\gamma$.

By the construction of the functions φ_k the
 values of $\varphi_k(\xi_k)$ depend only on values of the
 selection α in the set

$$B_k := \{\xi \in Q: |\xi - \xi_0| < c_1 |\xi_k - \xi_0|\}$$

where the constant c_1 depends only on n ,
 N , m and $\|h\|$. But for $\xi \in B_k$
 points $\alpha(\xi)$ belong to the set

$$D_k := \{\lambda \in \mathbb{R}^m: d(\lambda, A(\xi_0)) \leq \tau_k\}, \quad (5)$$

$$\tau_k \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty,$$

by virtue of the hypothesis H2. The sets D_k are convex (hypothesis H1) and from the definition of the functions φ_k and φ_k we have that

$$\varphi_k(\xi_k) \in D_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{too.}$$

Because $\xi_k \rightarrow \xi_0$ as $k \rightarrow \infty$ then from (5) we get that

$$d((\xi_k, \varphi_k(\xi_k)), (\xi_0, A(\xi_0))) \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

what contradicts with the assumption that $\delta_0 > 0$. So, the property (id) is proved.

If the map A has a selection a' for which the hypothesis H4 holds then as the selection a in the construction of functions φ_k we choose this special selection a' . Now, from the properties of the operators S_{φ} it follows that the functions φ_k on Q_k has the same monotonicity property. Because the extension of φ_k from Q_k to Q do not change the argument ξ then the functions φ_k have the needed monotonicity property.

Here we have used the uniform continuity of the function f_+ which allows to estimate values of $S_{\varphi} f_+$.

3. Convergence. Now, let $\{u_k\} \subset L_{\bar{q}}(\Omega)$ and $u_k \rightarrow u_0$ strongly as $k \rightarrow \infty$. From the property (i) of the functions φ_k it follows that the sequence $\{b_k(\cdot) := \varphi_k(\cdot, u_k(\cdot))\}$ is weakly sequentially compact in $L_{\bar{p}}(\Omega)$.

Without loss of generality we can suppose that the sequence $\{b_k\}$ converges weakly to some element b_0 and that the sequence $\{u_k\}$ converges pointwise for a.e. $x \in \Omega$.

To begin with let us suppose that the function u_0 is bounded and continuous on $\bar{\Omega}$ and that the sequence $\{u_k\}$ converges uniformly to u_0 on $\bar{\Omega}$.

Let us define for $\varepsilon \geq 0$ the sets

$$B_\varepsilon := \{ (x, \lambda) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m :$$

$$\lambda \in \mathcal{A}(x, u_0(x) + z), |z| \leq \varepsilon \},$$

$$G_0 := \{ \psi \in L_{\bar{p}}(\Omega) : \psi(x) \in \mathcal{A}(x, u_0(x))$$

$$\text{for a.e. } x \in \Omega \}.$$

By virtue of the hypotheses H1-H3 and the continuity of u_0 the set G_0 is bounded convex and closed.

It is easy to see that $B_0 \subset B_\varepsilon$ for $\varepsilon > 0$ and that

$$d(B_\varepsilon, B_0) \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (6)$$

Indeed, if the relationship (6) doesn't hold then we have a convergent sequence $\{x_k\} \subset \bar{\Omega}$, $x_k \rightarrow x_0$ as $k \rightarrow \infty$ and a sequence $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}^m$ such that $(x_k, \lambda_k) \in B_\varepsilon$ with $\varepsilon = 1/k$ and $d((x_k, \lambda_k), B_0) \geq \delta > 0$ for all $k = 1, 2, \dots$. But this contradicts with the upper semicontinuity of the map $\mathcal{A}$ and continuity of u_0 . Therefore, the relationship (6) is true.

The property (ii) of the sequence $\{\varphi_k\}$ and the uniform convergence $u_k \rightarrow u_0$ as $k \rightarrow \infty$ give that

$$d(G_0, B_k, B_\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } k \rightarrow \infty.$$

Otherwise we should have a convergent sequence

$$\{\xi_k = (x_k, z_k)\} \quad \text{with}$$

$$z_k = u_k(x_k) \quad \text{such that}$$

$$d((\xi_k, \varphi_k(\xi_k)), G_2 A | \{(x, z) : |z - z_k| \leq \varepsilon\}) \geq \delta > 0$$

what contradicts with the property (ii) of the functions

φ_k and the upper semicontinuity of the map A .

These arguments give that

$$d(G_2 b_k, B_0) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad k \rightarrow \infty.$$

From continuity of u_0 and hypothesis H1 it follows that from the estimate

$$d(G_2 b_k, B_0) < \tau, \quad k \geq k(\tau),$$

it follows that

$$d(G_2 \sum \alpha_k b_k, B_0) \leq \delta(\tau)$$

where $\sum \alpha_k b_k$ is a convex combination of the elements b_k with $k \geq k(\tau)$ and $\delta(\tau) \rightarrow 0$ as $\tau \rightarrow 0$.

But this property together with the weak convergence of the sequence $\{b_k\}$ to b_0 and the convexity and closedness of G_0 is enough for the inclusion $b_0 \in G_0$.

In general case of a convergent sequence $\{u_k\}$, $u_k \rightarrow u_0$ as $k \rightarrow \infty$, we argue in the following way.

Let $\varepsilon > 0$ is chosen. For this ε there exists a closed set $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ such that

$$\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \leq \varepsilon;$$

- u_0 is continuous on Ω_ε ;
- $u_k \rightarrow u_0$ uniformly on Ω_ε as $k \rightarrow \infty$.

In the same way as above by using the first operator of expansion we expand u_0 from Ω_ε to Ω as a continuous function v_ε ,

$v_\varepsilon(x) = u_0(x)$, $x \in \Omega_\varepsilon$. Instead of functions u_k we discuss the functions

$$v_k(x) = \begin{cases} u_k(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ v_\varepsilon(x), & x \in \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Then for the sequence $\{v_k\}$ we are in the same situation as above and have that

$$b(v_\varepsilon) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\cdot, v_k(\cdot)),$$

$$b(v_\varepsilon) \in G(v_\varepsilon)$$

where the set $G(v_\varepsilon)$ is defined for v_ε in the same way as the set G_0 for the function u_0 .

But $b(v_\varepsilon)$ is equal to b_0 on the set Ω_ε . Hence, passing $\varepsilon \rightarrow 0$ we get

$$b_0 \in G_0.$$

References

1. G. Anchini, G. Conti, P. Zecca. Approximation and selection for nonconvex multivalued functions in infinite dimensional spaces // Boll. U.M.I. (7), 4-B.-1990.-P.411-422.
2. E. Stein. Singular integrals and differentiability properties of functions. - Princeton University Press. - Princeton, 1970.

У.Райтум. Об аппроксимации многозначных отображений.

Аннотация. В работе рассматриваются многозначные отображения одного евклидова пространства в другое с выпуклыми замкнутыми значениями (не обязательно ограниченными). Показано, что если такое отображение полунепрерывно сверху и имеет интегрируемую мажоранту, то существуют непрерывные функции, которые все имеют аналогичную мажоранту и графики которых в определенном смысле близки к графику начального многозначного отображения. У.Д.К. 517.98

U.Raitums. Par daudznozīmīgu attēlojumu aproksimāciju.

Anotācija. Darbā aplūkoti attēlojumi, kuri definēti vienā Eiklīda telpā un kuru vērtības ir kopas citā Eiklīda telpā. Parādīts, ka, ja šie attēlojumi ir pusnepārtraukti no augšas, to vērtības ir slēgtas izliektas kopas un tiem eksistē integrējamas mažorante, tad šādus attēlojumus var aproksimēt ar nepārtrauktām funkcijām, kurām ir līdzīga mažorante. UDK 517.98, MSC 54C20

Institute of Mathematics and Computer Science
University of Latvia
boulevard Rainis 29
226250 Riga

ОБ ОДНОМ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

С. Асмусс

Аннотация. Доказано экстремальное свойство интерполяционных сплайнов тензорного произведения пространств одномерных полиномиальных сплайнов, определяемых произвольными операторами интерполяции, благодаря чему дана вариационная формулировка задачи интерполяции функций двух переменных такими сплайнами. УДК 517.5.

Своей популярностью, возникшей в 60-е годы, сплайны во многом обязаны обнаруженному Д. Холлидемом экстремальному свойству, связавшему кубические сплайны И. Шенберга с решением задачи о минимуме нормы в L_2 второй производной на множестве функций, принимающих заданные значения в фиксированных точках. Это свойство послужило отправной точкой для создания вариационной теории сплайнов, в рамках которой (см., например, [1]) пространство сплайнов $S(T, A)$, соответствующее линейным непрерывным операторам $T: X \rightarrow Y$ и $A: X \rightarrow Z$, действующим в вещественных гильбертовых пространствах X, Y, Z определяется так:

$$S(T, A) := \{s \in X \mid \forall x \in N(A) \langle Ts, Tx \rangle_Y = 0\}, \quad (1)$$

где $N(A)$ — ядро оператора A , $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ — знак скалярного произведения в пространстве Y . Интерполяционным сплайном, соответствующим элементу $z \in R(A)$, называется такой сплайн $s \in S(T, A)$, что $As = z$. Оказывается, что интерполяционный сплайн, если он существует, является решением вариационной задачи

$$\|Ts\|_Y = \min \{ \|Tx\|_Y \mid x \in X, Ax = z \}, \quad (2)$$

где $\|\cdot\|_Y$ — норма в пространстве Y .

Верно и обратное, поэтому (2) дает эквивалентную формулировку задачи сплайн-интерполяции.

Для определения полиномиальных сплайн-функций на отрезке $[a, b]$ в (1) следует считать

$$X = H^q[a, b], \quad Y = H^q[a, b], \quad Z = R^m, \quad T x = x^{(q)}, \quad (3)$$

где $H^q[a, b]$ — пространство Соболева, образованное функциями $x: [a, b] \rightarrow R$, производная которых $x^{(q-1)}$ абсолютно непрерывна, а $x^{(q)}$ интегрируема по Лебегу в квадрате, и наделенное скалярным произведением

$$\langle x, \tilde{x} \rangle_{H^q[a, b]} := \sum_{l=0}^q \int_a^b x^{(l)}(t) \tilde{x}^{(l)}(t) dt.$$

Оператор A строят в зависимости от типа интерполяционных условий. Если при этом

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(T) = \{0\}, \quad \mathcal{R}(A) = Z, \quad (4)$$

то для каждого вектора $z \in Z$ существует единственный интерполяционный сплайн.

Зарекомендовавшим себя аппаратом сплайн-интерполяции функций двух переменных в прямоугольной области $E = [a, b] \times [a, b]$ является аппарат тензорного произведения. Пусть $S(T^j, A^j), j=1, 2$, — пространство полиномиальных сплайн-функций на отрезке $[a, b]$ ((3) — (4), $q = q_j, m = m_j$), $s_1^j, s_2^j, \dots, s_{m_j}^j$ его базис, состоящий из сплайнов $s_{i,j}^j$, интерполяционных для векторов

$e_{i,j}^j := (\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \dots, \delta_{i_{m_j}}) \in R^{m_j}$ (здесь δ_{il} — символ Кронекера). Тогда функции

$$s_{i_1 i_2}(t^1, t^2) := (s_{i_1}^1 \otimes s_{i_2}^2)(t^1, t^2) := s_{i_1}^1(t^1) s_{i_2}^2(t^2), \quad (t^1, t^2) \in E, \quad l=1, \overline{m_1}, \quad j=1, 2,$$

образуют базис тензорного произведения $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$, а интерполяционный для вектора $z = (z_{i_1 i_2}) \in R^{m_1 m_2}$ сплайн S пространства $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ записывается в виде

$$s(t^1, t^2) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} z_{l_1 l_2} s_{l_1 l_2}(t^1, t^2).$$

В то время как построение таких сплайнов сводится к многократному решению соответствующих одномерных задач, исследование их экстремальных свойств значительно усложняется по сравнению с одномерным случаем. Первая попытка дать вариационную формулировку задачи интерполяции сплайнами тензорного произведения была предпринята авторами монографии [2]. Она заключалась в рассмотрении (2) для оператора $T = \mathcal{H} \psi_1 \psi_2$ (взятия

частной производной порядка q_j по переменной $t_j^i, j=1,2$ в пространстве X , являющееся тензорным произведением $H^{q_1}[a^1, b^1]$ и $H^{q_2}[a^2, b^2]$. Однако при таком построении ядро оператора T бесконечномерно, а следовательно, бесконечномерно и получаемое пространство сплайнов (на этот факт впервые обратил внимание В.С.Завьялов [3]), нас же интересует экстремальное свойство, принадлежащее только сплайнам тензорного произведения. Один подход, свободный от этого недостатка, предложил В.С.Завьялов [3 - 7]. Он обеспечил единственность решения вариационной задачи (2) для $T = Q^{q_1, q_2}$ за счет выбора функционального пространства. Другой, - предложенный А.Имамовым [8], - заключается в усложнении оператора T . Сравнение указанных подходов сделано в [7] и [9].

При всех их достоинствах конструкции А.Имамова и В.С.Завьялова дают вариационную формулировку только для задач сплайн-интерполяции по значениям функции и, может быть, ее производных в фиксированных узлах регулярного разбиения прямоугольной области. Они не могут быть реализованы, если в качестве исходных данных используются, например, локальные средние значения функции двух переменных [10]. В связи с этим возникает вопрос об экстремальном свойстве интерполяционных сплайнов из $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ в случае, когда $S(T^1, A^1)$ и $S(T^2, A^2)$ заданы произвольными операторами интерполяции A^1 и A^2 . Один из возможных ответов на него даёт данная статья, в которой с помощью $S(T^1, A^1)$ и $S(T^2, A^2)$ на основе (I) определено пространство сплайнов $S(T, A)$, совпадающее с $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$.

Пусть $H^{q_1, q_2}(E)$ - пространство функций $x: E \rightarrow \mathbb{R}$, производные которых $\partial^{l_1, l_2} x, l_j = 0, q_j - 1, j=1,2$, абсолютно непрерывны на E по каждой переменной, а $\partial^{l_1, q_2} x, \partial^{q_1, l_2} x \in L_2(E), l_j = 0, q_j, j=1,2$, (последние понимаются в обобщенном (по Соболеву) смысле - см., например, [11], с.140), наделенное скалярным произведением

$$\langle x, \tilde{x} \rangle_{H^{q_1, q_2}(E)} := \sum_{l_1=0}^{q_1} \sum_{l_2=0}^{q_2} \iint_E \partial^{l_1, l_2} x(t, t) \partial^{l_1, l_2} \tilde{x}(t, t) dt^1 dt^2.$$

Известно, что $H^{q_1, q_2}(E) = H^{q_1}[a^1, b^1] \otimes H^{q_2}[a^2, b^2]$ (здесь $\otimes$ -

знак топологического тензорного произведения).

Определим $Q: H^{q_1, q_2}(E) \rightarrow H^{q_1, q_2}(E)$, полагая

$$(Qx)(t^1, t^2) := \iint_E \Omega^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \varphi_{q_1-1}(t^1, \tau^1) \varphi_{q_2-1}(t^2, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 \quad (5)$$

где

$$\varphi_{q-1}(t, \tau) := \frac{1}{(q-1)!} (t-\tau)^{q-1}_+ := \begin{cases} \frac{1}{(q-1)!} (t-\tau)^{q-1}, & t \geq \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что Q — линейный непрерывный оператор.

Поскольку $\Omega^{q_1, q_2} Q = \Omega^{q_1, q_2}$, то $QQ = Q$, а значит, Q является оператором проектирования в $H^{q_1, q_2}(E)$ и область его значений $R(Q)$ замкнута.

Пусть теперь $X := L_0 \oplus L$, где $L := R(Q)$, а $L_0 := (N(T^1) \otimes S(T^2, A^2)) + (S(T^1, A^1) \otimes N(T^2))$ ($L_0 \cap L = \{0\}$, так как $L_0 \subset N(\Omega^{q_1, q_2}) = N(Q)$).

В силу замкнутости подпространства L в X и конечномерности L_0 ($\dim L_0 = q_1 \dim S(T^2, A^2) + \dim S(T^1, A^1) q_2 - q_1 q_2 \dim S(T^1, A^1) = m_j$), пространство X замкнуто в $H^{q_1, q_2}(E)$. Следовательно, оно является гильбертовым. Пусть, далее, $Y := L_1(E)$ и

$Tx := \Omega^{q_1, q_2} x$ для $x \in X$. Легко видеть, что

- 1) $T \in LC(X, Y)$, ибо $\|\Omega^{q_1, q_2} x\|_{L_1(E)} \leq \|x\|_{H^{q_1, q_2}(E)}$,
- 2) $N(T) = L_0$, ибо $N(T) = N(Q) \cap X$, а $N(Q) \cap R(Q) = \{0\}$,
- 3) $R(T) = Y$, ибо $R(T) = T(R(Q)) = \Omega^{q_1, q_2}(R(Q)) = \Omega^{q_1, q_2}(H^{q_1, q_2}(E))$,

где последнее равенство следует из разложения

$$H^{q_1, q_2}(E) = R(Q) + N(\Omega^{q_1, q_2}).$$

Для того, чтобы задать пространство сплайнов $S(T, A)$, остается указать оператор A . Пусть $k_j: H^j[a^1, b^1] \rightarrow \mathbb{R}$, $j=1, 2$ — линейные непрерывные функционалы. Определим функционал

$K := K_1 \otimes K_2: H^{q_1, q_2}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом. Будем считать, что Kx есть результат последовательного действия на функции x функционалов K_1 и K_2 , при котором K_1 действует на $x(\cdot, t^2)$ при произвольно фиксированном значении t^2 , а K_2 — на $x(t^1, \cdot)$ при фиксированном t^1 (будет установлено, что от порядка их действия результат не зависит). Точнее, для $x \in H^{q_1, q_2}(E)$ обозначим через x_{K_j} K_j -сечение функции x :

$$x_{k_1}(t^2) := k_1 x(t^2), t^2 \in [a^2, b^2], \quad x_{k_2}(t^1) := k_2 x(t^1), t^1 \in [a^1, b^1],$$

и определим

$$(K_1 \otimes K_2)x := K_1 x_{K_2} = K_2 x_{K_1}. \quad (6)$$

Далее покажем, что это определение корректно, т.е.

$$1) x_{K_1} \in H^{q_2}[a^2, b^2], \quad x_{K_2} \in H^{q_1}[a^1, b^1], \quad (7)$$

$$2) \text{ в (6) имеет место последнее равенство; } \quad (8)$$

и оно задает на X линейный непрерывный функционал.

Конструкция тензорного произведения $K_1 \otimes K_2$ линейных функционалов K_1 и K_2 , область определения которого есть алгебраическое тензорное произведение областей определения K_1 и K_2 , описана в [12]. Мы не можем воспользоваться ею непосредственно, так как, во-первых, мы имеем дело с топологическим тензорным произведением, а во-вторых, для нас важна непрерывность $K_1 \otimes K_2$. Доказательству (7) - (8) предположим один вспомогательный результат.

Лемма. Всякий линейный непрерывный функционал

$\kappa: H^q[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ "перестановочен" с интегральным оператором

$J_q: H^0[a, b] \rightarrow H^q[a, b]$, где

$$(J_q y)(t) := \int_a^b y(\tau) \varphi_{q-1}(t, \tau) d\tau,$$

в смысле выполнения равенства

$$\kappa J_q y = \int_a^b y(\tau) \kappa \varphi_{q-1}(\cdot, \tau) d\tau.$$

Замечание. Эта формулировка нуждается в уточнении, ибо функционал κ , вообще говоря, не определен на усеченной степенной функции $\varphi_{q-1}(\cdot, \tau)$. Условимся считать, что

$$\kappa \varphi_{q-1}(\cdot, \tau) := -\frac{d}{d\tau} \kappa \varphi_q(\cdot, \tau),$$

если только выражение в правой части равенства определено.

Убедимся, что оно определено почти при всех $\tau \in [a, b]$.

С этой целью представим κ в виде $\kappa x = \langle x_0, x \rangle_{H^q[a, b]}$ (по

теореме Рисса функция $x_0 \in H^q[a, b]$ однозначно определяется последним соотношением). Тогда

$$\kappa \varphi_q(\cdot, \tau) = \sum_{l=0}^q \int_a^b x_0^{(l)}(t) \mathfrak{H}^{l,0} \varphi_q(t, \tau) dt =$$

$$= \sum_{l=0}^{q-1} \int_a^b x_0^{(l)}(t) \varphi_{q-l}(t, \tau) dt + (x_0^{(q-1)}(b) - x_0^{(q-1)}(\tau)).$$

Воспользовавшись теоремой о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, мы получаем, что во всех тех точках отрезка $[a, b]$, где существует производная $x_0^{(q)}$, функция $K(\varphi_{q-1}, \tau)$ дифференцируема и ее производная

$$\frac{d}{d\tau} K(\varphi_{q-1}, \tau) = -\langle x_0, \varphi_{q-1}(\cdot, \tau) \rangle_{H^{q-1}[a, b]} - x_0^{(q)}(\tau)$$

суммируема в квадрате на $[a, b]$.

Доказательство леммы с учетом сделанного замечания заключается в цепочке равенств

$$\begin{aligned} K_{q-1} y &= \sum_{l=0}^q \int_a^b x_0^{(l)}(t) (J_q y)^{(l)}(t) dt = \\ &= \sum_{l=0}^{q-1} \int_a^b \int_a^b x_0^{(l)}(t) y(\tau) D^{l,0} \varphi_{q-l}(t, \tau) d\tau dt + \int_a^b x_0^{(q)}(\tau) y(\tau) d\tau = \\ &= \int_a^b y(\tau) \left(\sum_{l=0}^{q-1} \int_a^b x_0^{(l)}(t) D^{l,0} \varphi_{q-l}(t, \tau) dt + x_0^{(q)}(\tau) \right) d\tau = \\ &= \int_a^b y(\tau) (\langle x_0, \varphi_{q-1}(\cdot, \tau) \rangle_{H^{q-1}[a, b]} + x_0^{(q)}(\tau)) d\tau = \int_a^b y(\tau) K(\varphi_{q-1}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Для доказательства (7) - (8) воспользуемся одним специальным представлением $x \in H^{q_1, q_2}(E)$. Чтобы его получить, рассмотрим $p := x - Qx$. Так как $D^{q_1, q_2} Q = D^{q_1, q_2}$, то $D^{q_1, q_2} p = 0$. Интегрированием этого равенства получаем

$$p(t^1, t^2) = \sum_{l=0}^{q_1-1} (t^1 - a^1)^l f_l^2(t^2) + \sum_{l=0}^{q_2-1} (t^2 - a^2)^l f_l^1(t^1), \quad (9)$$

где f_l^j - некоторые функции из $H^{q_1}[a^1, b^1]$. Поэтому

$$\begin{aligned} x(t^1, t^2) &= \sum_{l=0}^{q_1-1} (t^1 - a^1)^l f_l^2(t^2) + \sum_{l=0}^{q_2-1} (t^2 - a^2)^l f_l^1(t^1) + \\ &\quad + \iint_E D^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \varphi_{q_1-1}(t^1, \tau^1) \varphi_{q_2-1}(t^2, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2, \end{aligned}$$

откуда в силу леммы имеем

$$x_{\kappa_1}(t^2) = \sum_{l=0}^{q_1-1} l! f_l^2(t^2) \kappa_1 \varphi_l(\cdot, a^1) + \sum_{l=0}^{q_2-1} l! \varphi_l(t^2, a^2) \kappa_1 f_l^1 + \\ + \iint_E \Omega^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \varphi_{q_1-1}(t^2, \tau^2) \kappa_1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, \tau^1) d\tau^1 d\tau^2,$$

$$x_{\kappa_2}(t^1) = \sum_{l=0}^{q_1-1} l! \varphi_l(t^1, a^1) \kappa_2 f_l^2 + \sum_{l=0}^{q_2-1} l! f_l^1(t^1) \kappa_2 \varphi_l(\cdot, a^2) + \\ + \iint_E \Omega^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \varphi_{q_1-1}(t^1, \tau^1) \kappa_2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2.$$

Теперь легко видеть, что $x_{\kappa_1} \in H^{q_2}[\alpha^2, \beta^2]$, $x_{\kappa_2} \in H^{q_1}[\alpha^1, \beta^1]$,

$$\kappa_1 x_{\kappa_2} = \kappa_2 x_{\kappa_1} = \sum_{l=0}^{q_1-1} l! \kappa_1 \varphi_l(\cdot, a^1) \kappa_2 f_l^2 + \sum_{l=0}^{q_2-1} l! \kappa_1 f_l^1 \kappa_2 \varphi_l(\cdot, a^2) + \\ + \iint_E \Omega^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \kappa_1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, \tau^1) \kappa_2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2.$$

Итак, определение (б) корректно. Убедимся, что функционал K непрерывен на X . Пусть последовательность

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ сходится к нулю. Представим функции x_n в виде $x_n = p_n + Qx_n$, где $p_n \in L_0$. Для KQx_n с помощью леммы и неравенства Гельдера получим оценку

$$|KQx_n| \leq \|\Omega^{q_1, q_2} x_n\|_{L_2(E)} \|K_1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, \tau^1)\|_{L_2[\alpha^1, \beta^1]} \|K_2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, \tau^2)\|_{L_2[\alpha^2, \beta^2]},$$

из которой сразу следует, что $KQx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Остается пока-

зать, что $Kp_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Непрерывность оператора Q влечет

$$\|Qx_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ а следовательно, } \|p_n\|_X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Это}$$

и доказывает, что $Kp_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, ибо на конечномерном пространстве L_0 линейный функционал K непрерывен.

Описанная конструкция позволяет нам задать A :

$$(Ax)_{ij} := (A_{ij}^1 \otimes A_{ij}^2) x, \quad i_j = \overline{1, m_j}, \quad j=1, 2, \quad (10)$$

где $A_{ij}^j x := (A^j x)_i$ есть i -ая компонента вектора $A^j x$ для $x \in H^{q_j}[\alpha^j, \beta^j]$.

Предложение I. $R(A) = R^{m_1 m_2} \Leftrightarrow R(A^j) = R^{m_j}, \quad j=1, 2.$

Доказательство импликации

$$R(A^j) = R^{m_j}, \quad j=1, 2 \Rightarrow R(A) = R^{m_1 m_2} \quad (11)$$

сводится к проверке включения

$$S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2) \subset X. \quad (12)$$

Действительно, достаточно установить, что для каждого вектора $z \in R^{n_1 n_2}$ вида $z = z^1 \otimes z^2$, где $z^j \in R^{m_j}$, $j=1,2$, (равенство $z = z^1 \otimes z^2$ означает, что $z_{i_1 i_2} = z^1_{i_1} z^2_{i_2}$, $i_j = \overline{1, m_j}$) найдется функция $x \in X$, для которой $Ax = z$. По так как в предположении $R(A^j) = R^{m_j}$ для z^j существует интерполяционный сплайн $s^j \in S(T^j, A^j)$, то остается убедиться, что $x := s^1 \otimes s^2$ есть функция из X . С этой целью разложим s^j по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$s^j(t) = p^j(t) + \int_{a_j}^{b_j} s^{(q_j)}(\tau) \varphi_{q_j-1}(t, \tau) d\tau,$$

где p^j — полином степени $q_j - 1$. Тогда x можно записать в виде $x = s^1 \otimes p^2 + p^1 \otimes s^2 - p^1 \otimes p^2 + Qx$, который свидетельствует о принадлежности x к пространству X , так как $p^j \in N(T^j) \subset S(T^j, A^j)$.

Для проверки обратной (II) импликации укажем преобраз вектора $z^1 \in R^{m_1}$ (для $z^2 \in R^{m_2}$ это делается аналогично) при отображении A^1 — функцию $x^1 \in H^{q_1}[a^1, b^1]$, определив ее при помощи некоторой функции x из $A^1(z^1 \otimes z^2)$ для $z^2 = (1, \dots, 1) \in R^{m_2}$, полагая $x^1(t) := A^1_{\cdot l}(x(t, \cdot))$ (здесь l — произвольно фиксированный индекс).

Предложение 2. $N(A) \cap N(T) = \{0\} \Leftrightarrow N(A^j) \cap N(T^j) = \{0\}, j=1,2.$

Доказательство. Установим импликацию

$$N(A^j) \cap N(T^j) = \{0\}, j=1,2 \Rightarrow N(A) \cap N(T) = \{0\}$$

(обратная очевидна).

Паро $N(T)$ состоит из функций вида

$$f(t_1, t_2) = \sum_{i_1=0}^{q_1-1} \sum_{i_2=0}^{q_2-1} \alpha_{i_1 i_2}(t_1, t_2) + \sum_{i_1=0}^{q_1-1} \sum_{i_2=q_2}^{n_2-1} \alpha_{i_1 i_2}(t_1) \delta_{i_2}(t_2) + \sum_{i_1=q_1}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{q_2-1} \alpha_{i_1 i_2}(t_1) \delta_{i_1}(t_1) + \sum_{i_1=q_1}^{n_1-1} \sum_{i_2=q_2}^{n_2-1} \alpha_{i_1 i_2}(t_1) \delta_{i_1}(t_1) \delta_{i_2}(t_2),$$

где $\alpha_{i_1 i_2}$ — произвольные коэффициенты, а $\delta_{i_1}^j, \delta_{i_2}^j, \delta_{i_1 i_2}^j$ дополняют до базиса пространства $S(T^j, A^j)$ систему функций $1, t_1^{i_1}, (t_1^{i_1})^2, \dots, (t_1^{i_1})^{q_1-1}$ (отметим, что для $n_j := \dim S(T^j, A^j)$ имеет место неравенство $q_j = \dim N(T^j) \leq n_j \leq m_j$, так как

$\mathcal{N}(T^i) \subset S(T^i, A^i)$ и для каждого вектора из R^{m_i} в силу предположения $\mathcal{N}(A^i) \cap \mathcal{N}(T^i) = \{0\}$ в $S(T^i, A^i)$ не существует более одного интерполяционного сплайна). Предположим, что $p \in \mathcal{N}(A)$. Тогда для любой пары индексов (i_1, i_2) имеем

$$0 = (Ap)_{i_1 i_2} = A_{i_1}^1 \left(\sum_{l_1=0}^{q_1-1} A_{i_2}^2 \left(\sum_{l_2=0}^{q_2-1} \alpha_{l_1 l_2} (t^1)^{l_1} (t^2)^{l_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{l_2=q_2}^{n_2-1} \alpha_{l_1 l_2} \zeta_{l_2}^2 (t^2)^{l_2} \right) (t^1)^{l_1} + \sum_{l_1=q_1}^{n_1-1} A_{i_2}^2 \left(\sum_{l_2=0}^{q_2-1} \alpha_{l_1 l_2} (t^1)^{l_1} (t^2)^{l_2} \right) \zeta_{l_1}^1 (t^1) \right). \quad (I3)$$

Зафиксировав индекс i_2 , рассмотрим функции

$$g_{i_2}^1(t^1) := \sum_{l_1=0}^{q_1-1} \beta_{l_1 i_2} (t^1)^{l_1} + \sum_{l_1=q_1}^{n_1-1} \beta_{l_1 i_2} \zeta_{l_1}^1(t^1),$$

где

$$\beta_{l_1 i_2} := A_{i_2}^2 g_{l_1}^2, \\ g_{l_1}^2(t^2) := \begin{cases} \sum_{l_2=0}^{q_2-1} \alpha_{l_1 l_2} (t^2)^{l_2} + \sum_{l_2=q_2}^{n_2-1} \alpha_{l_1 l_2} \zeta_{l_2}^2(t^2), & l_1 = \overline{0, q_1-1}, \\ \sum_{l_2=0}^{q_2-1} \alpha_{l_1 l_2} (t^2)^{l_2}, & l_1 = \overline{q_1, n_1-1}. \end{cases}$$

Равенство (I3) влечёт $A_{i_1}^1 g_{i_2}^1 = 0$, $i_1 = \overline{1, m_1}$,

а так как $g_{i_2}^1 \in S(T^1, A^1)$, то функция $g_{i_2}^1$ тождественно равна нулю как единственный (в силу предположения $\mathcal{N}(A^1) \cap \mathcal{N}(T^1) = \{0\}$) интерполяционный сплайн для нулевого вектора. Так мы получаем, что $\beta_{l_1 i_2} = 0$, $l_1 = \overline{0, q_1-1}$, $i_2 = \overline{1, m_2}$. Поэтому $g_{l_1}^2 \in \mathcal{N}(A^2)$, $l_1 = \overline{0, q_1-1}$. Принимая во внимание, что при этом $g_{l_1}^2 \in S(T^2, A^2)$, приходим к выводу:

$$g_{l_1}^2(t^2) = 0, l_1 = \overline{0, q_1-1}, \quad (I4)$$

так как условие $\mathcal{N}(A^2) \cap \mathcal{N}(T^2) = \{0\}$ гарантирует единственность интерполяционного сплайна для нулевого вектора. Остаётся заметить, что (I4) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты $\alpha_{l_1 l_2}$ равны нулю, т.е. когда $p(t^1, t^2) = 0$.

Так как в случае, когда ядро $\mathcal{N}(T)$ конечномерно, условия (4) являются необходимыми и достаточными для существования

в $S(T, A)$ единственного интерполяционного сплайна для каждого элемента $x \in Z$ ([1], с. 186-187), то из предложений 1 и 2 вытекает

Теорема 1. Задача интерполяции сплайнами из $S(T, A)$ для каждого вектора из R^{m_1, m_2} имеет единственное решение тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждое из пространств: $S(T^1, A^1)$ и $S(T^2, A^2)$.

В дальнейшем будем предполагать выполнении условия существования и единственности решения рассматриваемых интерполяционных задач.

Предложение 3. Функция $s \in X$ является сплайном из $S(T, A)$ тогда и только тогда, когда

$$Q^{q_1, q_2} s(t^1, t^2) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} (A^1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, t^1))_{i_1} (A^2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, t^2))_{i_2}, \quad (15)$$

где $\lambda_{i_1 i_2}$ — какие-либо вещественные числа, удовлетворяющие условию

$$\forall p \in L_0 \quad \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} (Ap)_{i_1 i_2} = 0. \quad (16)$$

Доказательство. Для того, чтобы функция $s \in X$ была сплайном, необходимо и достаточно ([1], с. 206), чтобы нашлись такие коэффициенты $\lambda_{i_1 i_2}$, что

$$\forall x \in X \quad \langle Ts, Tx \rangle_y = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} (Ax)_{i_1 i_2}. \quad (17)$$

Поскольку $L_0 \subset N(T)$, то из (17) немедленно следует:

$$\forall p \in L_0 \quad \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} (Ap)_{i_1 i_2} = 0. \quad (18)$$

С учётом (18) перепишем (17) в виде

$$\forall x \in X \quad \langle Ts, Tx \rangle_y = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \lambda_{i_1 i_2} (AQx)_{i_1 i_2}. \quad (19)$$

По определению оператора A (10) с помощью леммы находим, что

$$(AQx)_{i_1 i_2} = \iint_E Q^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) y_{i_1 i_2}(\tau^1, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 = \langle Tx, y_{i_1 i_2} \rangle_y,$$

$$\text{где } y_{i_1 i_2}(\tau^1, \tau^2) := (A^1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, \tau^1))_{i_1} (A^2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, \tau^2))_{i_2}.$$

Теперь преобразуем (19) так

$$\forall x \in X \quad \langle Tx, Ts - \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \alpha_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2} \rangle y = 0.$$

В силу равенства $R(T) = Y$ отсюда следует, что

$$Ts = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \alpha_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2}.$$

Так как все рассуждения можно повторить в обратной последовательности, то доказательство на этом завершено.

Теорема 2. $S(T, A) = S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$.

Доказательство. Поскольку $\dim S(T, A) = \dim S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$, то достаточно установить включение $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2) \subset S(T, A)$. Рассмотрим функцию S вида $S = S^1 \otimes S^2$, где $S^i \in S(T^i, A^i)$, $i=1, 2$. Сплайн S^i характеризуется равенством

$$S^i(q_j^i)(t) = \sum_{l=1}^{m_i} \alpha_l^i (A_l^i \varphi_{q_j^i-1}(\cdot, t))_i$$

([1], с. 206), где числа α_l^i удовлетворяют условию

$$\forall p \in N(T^i) \quad \sum_{l=1}^{m_i} \alpha_l^i (A_l^i p)_i = 0. \quad (20)$$

Тогда

$$S^{q_1, q_2}(t^1, t^2) = \sum_{l_1=1}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} \alpha_{l_1}^1 \alpha_{l_2}^2 (A_{l_1}^1 \varphi_{q_1-1}(\cdot, t^1))_{l_1} (A_{l_2}^2 \varphi_{q_2-1}(\cdot, t^2))_{l_2}$$

и для S выполняется условие (I5). В этом случае по предложению 3 функция S будет сплайном из $S(T, A)$, если только $S \in X$ и для чисел $\alpha_{i_1 i_2} := \alpha_{i_1}^1 \alpha_{i_2}^2$ будет верно (I5). Принадлежность S пространству X обеспечивается включением (I2). Остается проверить (I6).

Для функции $p \in L_0$ вида $p = p^1 \otimes p^2$, где $p^i \in N(T^i)$, $p^2 \in S(T^2, A^2)$, (аналогично для $p = p^1 \otimes p^2$) находим

$$\sum_{l_1=1}^{m_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} \alpha_{l_1 l_2} (A p)_{l_1 l_2} = \sum_{l_1=1}^{m_1} \alpha_{l_1}^1 (A^1 p^1)_{l_1} \sum_{l_2=1}^{m_2} \alpha_{l_2}^2 (A^2 p^2)_{l_2} = 0$$

(последнее равенство имеет место в силу (20)).

Из теоремы 2 вытекает, что интерполяционный сплайн тензорного произведения $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ совпадает с интерполяционным сплайном пространства $S(T, A)$, а следовательно, является решением вариационной задачи (2).

Теорема 3. Для каждого вектора $\tau \in R^{m_1 m_2}$ единственным решением задачи

$$\| \mathfrak{M}^{q_1, q_2} x \|_{L_2(E)} \rightarrow \min_{x \in X, Ax = \mathfrak{F}}$$

являлся интерполяционным сплайном пространства

$$S(\cdot, A') \otimes S(T^2, A^2).$$

В этой связи встает вопрос описания пространства X , ответ на который дает

Предложение 4. Пространство X состоит из всех функций $x \in H^{q_1, q_2}(E)$, которые вместе со своими частными производными $\mathfrak{M}^{l, 0} x$ (и $\mathfrak{M}^{0, l_2} x$), $l_j = \overline{0, q_j - 1}$, превращаются при $t^1 = a^1$ (соответственно при $t^2 = a^2$) в сплайны из $S(T^2, A^2)$ (соответственно из $S(T^1, A^1)$).

Доказательство. 1) Учитывая, что $X = L_0 \oplus L$, представим функцию $x \in X$ в виде $x = p + Q\tilde{x}$, где $0 \in L_0$, $\tilde{x} \in H^{q_1, q_2}(E)$. Поскольку при $l \leq q_1 - 1$

$$(\mathfrak{M}^{l, 0} Q\tilde{x})(a^1, t) = \iint \mathfrak{M}^{q_1, q_2} \tilde{x}(t^1, t^2) \varphi_{q_1 - l_1}(a^1, t^1) \varphi_{q_2}(t, t^2) dt^1 dt^2 = 0, \quad (21)$$

то $\mathfrak{M}^{l, 0} x(a^1, \cdot) \stackrel{E}{=} \mathfrak{M}^{l, 0} p(a^1, \cdot) \in S(T^2, A^2)$, $l = \overline{0, q_1 - 1}$.

Аналогично $\mathfrak{M}^{0, l} x(\cdot, a^2) = \mathfrak{M}^{0, l} p(\cdot, a^2) \in S(T^1, A^1)$, $l = \overline{0, q_2 - 1}$.

2) Пусть теперь функция $x \in H^{q_1, q_2}(E)$ обладает описанным свойством. Покажем, что в этом случае $p := x - Qx$ принадлежит L_0 . Для этого воспользуемся разложением p по формуле (9), из которой получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{l, 0} p(a^1, t) &= l! f_l^2(t) + \sum_{k=0}^{q_2-1} (t-a^2)^k f_k^{1(l)}(a^1), \quad l = \overline{0, q_1-1}, \\ \mathfrak{M}^{0, l} p(t, a^2) &= l! f_l^1(t) + \sum_{k=0}^{q_1-1} (t-a^1)^k f_k^{2(l)}(a^2), \quad l = \overline{0, q_2-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

с другой стороны, поскольку при $l_j \leq q_j - 1$ $(\mathfrak{M}^{l, 0} Qx)(a^1, \cdot) = (\mathfrak{M}^{0, l_2} Qx)(\cdot, a^2) = 0$ (см. (21)), то

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{l, 0} p(a^1, \cdot) &= \mathfrak{M}^{l, 0} x(a^1, \cdot) \in S(T^2, A^2), \quad l = \overline{0, q_1-1}, \\ \mathfrak{M}^{0, l} p(\cdot, a^2) &= \mathfrak{M}^{0, l} x(\cdot, a^2) \in S(T^1, A^1), \quad l = \overline{0, q_2-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

И. (22) - (23) вытекает, что $f_l^j \in S(T^j, A^j)$, а значит, $p \in L_0$.

Доказательство завершено.

Обратим внимание на тот факт, что в вариационной формулировке задачи интерполяции сплайнами из $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ (теорема 3) участвует пространство функций, на дифференциальные свойства которых накладываются "несимметричные" ограничения: мы требуем, чтобы функции и некоторые их частные производные на прямых $t^1 = a^1$ и $t^2 = a^2$ были сплайнами (предложение 4), выделяя тем самым два "особых" направления. Однако эти направления ничем не выделяются при определении рассматриваемого пространства как тензорного произведения пространств сплайн-функций одной переменной.

Оказывается, что полученный результат можно обобщить.

Зафиксируем произвольную точку $(t_*, t_*) \in E$ и определим в $H^{q_1, q_2}(E)$ оператор Q_{t_*, t_*} :

$$(Q_{t_*, t_*} x)(t^1, t^2) := \iint_E Q^{q_1, q_2} x(\tau^1, \tau^2) \varphi_{q_1-1}^{t_*^1}(t^1, \tau^1) \varphi_{q_2-1}^{t_*^2}(t^2, \tau^2) d\tau^1 d\tau^2 \quad (24)$$

где

$$\varphi_{q-1}^{t_*}(t, \tau) := \begin{cases} \frac{1}{(q-1)!} (t-\tau)^{q-1} \operatorname{sgn}(t-t_*), & \text{если точка } \tau \text{ расположена между } t \text{ и } t_*, \\ 0 & \text{для остальных } \tau. \end{cases} \quad (25)$$

Сопоставляя (24) - (25) с (5), заметим, что $Q = Q_{a^1, a^2}$.

Во всех предыдущих рассуждениях существенными были следующие свойства оператора Q :

- 1) $Q \in LC(H^{q_1, q_2}(E), H^{q_1, q_2}(E))$,
- 2) $D^{q_1, q_2} Q = D^{q_1, q_2}$, а следовательно $QQ = Q$, $N(Q) = N(D^{q_1, q_2})$,
- 3) $(D^{l_1, l_2} Q x)(a^1, \cdot) = 0$, $l_1 = \overline{0, q_1-1}$, $l_2 = \overline{0, q_2}$,
 $(D^{l_1, l_2} Q x)(\cdot, a^2) = 0$, $l_1 = \overline{0, q_1}$, $l_2 = \overline{0, q_2-1}$.

Нетрудно убедиться, что оператор Q_{t_*, t_*} или обладает (следует только точку (a^1, a^2) в 3) заменить на (t_*^1, t_*^2)). Полагая теперь $X_{t_*, t_*} := L_0 \oplus R(Q_{t_*, t_*})$ и повторяя конструкцию в этом функциональном пространстве, гадаем: пространство сплайнов $S(T_{t_*, t_*}^1, A_{t_*, t_*}^1)$ исследования которого почти дословно повторяет исследование $S(T, A)$.

Все утверждения статьи сохраняют силу, если в их формули-

ровках заменить a, a^2, X, T и A на $t^1_*, t^2_*, X_{t^1_*, t^2_*}, T_{t^1_*, t^2_*}$ и $A_{t^1_*, t^2_*}$ соответственно. Мы сформулируем лишь окончательный результат.

Теорема 3. Для каждого вектора $z \in R^{m, m}$ интерполяционный сплайн пространства $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ является единственным решением задачи

$$\|Q^{q_1, q_2} x\|_{L_2(E)} \rightarrow \min_{x \in X_*, Ax = z}, \quad (26)$$

где X_* — пространство всех функций $x \in H^{q_1, q_2}(E)$, для которых можно указать такую точку $(t^1_*(x), t^2_*(x)) \in E$, что $Q^{l, 0} x$ (и $Q^{0, l} x$) при $l_j = \overline{0, q_j - 1}$ превращается на прямой $t^1 = t^1_*(x)$ (соответственно $t^2 = t^2_*(x)$) в сплайны из $S(T^2, A^2)$ (соответственно из $S(T^1, A^1)$).

Для случая, когда рассматривается задача эрмитовой интерполяции функции двух переменных по ее значениям и значениям ее частных производных в узлах регулярного разбиения

$\Delta := \Delta^1 \times \Delta^2$, где $\Delta^i := \{t^i_0, t^i_1, \dots, t^i_{n_j} \mid a^i = t^i_0 < t^i_1 < \dots < t^i_{n_j} = b^i\}$, прямоугольной области E , т.е. когда

$$(A^i x)_{v_i} = x^{(v)}(t^i_i), \quad v = \overline{0, \mu_j - 1}, \quad i = \overline{0, n_j}, \quad \mu_j \leq q_j, \quad (27)$$

и, соответственно,

$$(Ax)_{v_1, v_2, i_1, i_2} = Q^{v_1, v_2} x(t^1_{i_1}, t^2_{i_2}), \quad v_j = \overline{0, \mu_j - 1}, \quad i_j = \overline{0, n_j},$$

В.С.Завьяловым было установлено, что интерполяционный сплайн тензорного произведения $S(T^1, A^1) \otimes S(T^2, A^2)$ является единственным решением задачи (26) на классе X_* функций x из $H^{q_1, q_2}(E)$, обладающих свойствами:

$$Q^{l, 0} x(t^1_i, \cdot) \in S(T^2, A^2), \quad l = \overline{0, q_1 - 1}, \quad i = \overline{0, n_1},$$

$$Q^{0, l} x(\cdot, t^2_i) \in S(T^1, A^1), \quad l = \overline{0, q_2 - 1}, \quad i = \overline{0, n_2}.$$

В связи с этим отметим, что во-первых, доказательство этого факта использовало специфику интерполяционных условий, а во-вторых, теорема 3 и в случае (27) гарантирует для сплайнов

Б тензорного произведения $S(T^1, A^1) \otimes S(T^1, A^2)$ свойство минимальной в $L_2(E)$ нормы Q^{q_1, q_2}_S не более широком классе функций.

Библиографический список

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. - М., 1975.
2. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. - М., 1972.
3. Завьялов Д.С. Экстремальные свойства бикубических многозвенников и задача сглаживания // Вычислит. системы. - Новосибирск, 1970. - вып. 42. - С. 179 - 158.
4. Завьялов Д.С. Интерполирование L_1 -сплайн-функциями многих переменных // Мат. заметки. - 1973. - Т. 14, № 1. - С. 11 - 20.
5. Завьялов Д.С. Сглаживание L_1 -сплайн-функциями многих переменных // Мат. заметки. - 1974. - Т. 15, № 3. - С. 371 - 379.
6. Завьялов Д.С. L_1 -сплайн-функции многих переменных // ДАН СССР - 1974. - Т. 214, № 6. - С. 1247 - 1249.
7. Завьялов Д.С. Экстремальные свойства сплайн-функций многих переменных // Теория приближения функций : Труды междунар. конф. - Калуга, 1975. - М., 1977. - С. 182 - 187.
8. Имамов А. О некоторых экстремальных свойствах сплайнов многих переменных // Вычислит. системы. - Новосибирск, 1975. - вып. 65. - С. 68 - 73.
9. Завьялов Д.С., Имамов А. О вариационных задачах теории сплайнов // Математический анализ и смежные вопросы математики. - Новосибирск, 1978. - С. 27 - 36.
10. Асмусс С.В. Сплайн-функции двух переменных в задаче интерполяции локальных средних // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения : Тезисы докладов 7-го науч. конф. - Киев, 1990. - С. 10.
11. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теорема вложения. - М., 1977.
12. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. - М., 1985.

S. Assmus. On the extremal property of bivariate spline-functions.

Summary. The extremal property of interpolating bivariate splines, constructed as tensor product of univariate polynomial splines, defined by arbitrary type of interpolating conditions, is proved. On this basis the variational approach to interpolating tensor product splines is given.

AMS Subject classification 65D07.

S. Assmus. Par divargumentu splain-funkciju vienu ekstremālo īpašību.

Anotācija. Pierādīta ekstremāla īpašība divargumentu interpolācijas splainiem, kuri konstruēti tenzora reizinājuma shēmā ar vienargumentu polinomiālo splainu palī zību. Pamatojoties uz to, divargumentu funkciju splain-interpolācijas uzdevumam ir dots variācijas formulējums.

Кафедра математического анализа

Навскийский Университет

бульв. Райниса 19

225098 Рига

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ. 2

М. Белоз

Аннотация. Во второй части работы дано обоснование формального асимптотического решения, построенного в первой части. Рассмотрены приложения полученных результатов для: асимптотических разложений — рядов Фурье и некоторых интегралов, алгоритмов устойчивого суммирования рядов Фурье функций с разрывами второго рода, возможных модификаций алгоритмов численного решения параболических задач с разрывными начальными условиями. УДК 519.651

Настоящая работа и её первая часть [1] имеют общую нумерацию формул и параграфов. Ссылки на формулы из [1] приводятся без дополнительных пояснений, как и основные конструкции и понятия из [1].

Во второй части завершается построение формального асимптотического решения (ПАР), проводится обоснование его асимптотического характера и даются некоторые из возможных приложений. Ввиду ограниченности объёма основные результаты работы приводятся без доказательства.

5. Глобальное ПАР и его свойства

Используя построенные выше регулярные ПАР (4.7), локальные ПАР (4.8) — (4.10) и функции согласования (4.12) — (4.14), образуем глобальное $\forall x \in [a, b]$ ПАР задачи (1.1) в виде

$$u_n(x, t) = B(x, t) A_{n, x} U + R_n \quad (t > 0, n = 0, 1, \dots), \quad (5.1)$$

где $R_n = R_{n, 1} + R_{n, 2} + R_{n, 3}$ — функция влияния разрывов:

$$R_{n, \alpha} = (A_{2n+1, 2, \alpha} V_2 - B_{\alpha} A_{n, x} A_{2n+1, 2, \alpha} V_{\alpha}) \theta_{\Delta_{\alpha}}, \quad (5.2)$$

$$R_{n,b} = (A_{2n+1,z_b} V_b - \theta_b A_{n,x} A_{2n+1,z_b} V_b) \theta_{\Delta_b}, \quad (5.2)$$

$$R_{n,j} = (A_{2n+1,z_j} V_j - \theta_j A_{n,x} A_{2n+1,z_j} V_j) \theta_{\Delta_j}; \quad (5.4)$$

$$\theta(x,t) = \theta_a \theta_j \theta_b, \quad \theta_a = \psi_0\left(\frac{x-a}{\sqrt{t}}\right), \quad \theta_b = \psi_0\left(\frac{b-x}{\sqrt{t}}\right),$$

$$\theta_j = \psi_0\left(\frac{x-x_j}{\sqrt{t}}\right), \quad \theta_{\Delta_a} = \psi_{\Delta_a}(x-a), \quad \theta_{\Delta_b} = \psi_{\Delta_b}(b-x),$$

$$\theta_{\Delta_j} = \psi_{\Delta_j}(x-x_j), \quad \Delta_a = x_j - a, \quad \Delta_b = b - x_j, \quad \Delta_j = \min(\Delta_a, \Delta_b); \quad (5.5)$$

$\psi_0(x)$ и $\psi_{\Delta}(x)$ чётные, бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции, такие, что

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad (5.6)$$

а на промежутке $x \in [1/2, 1]$ $\psi_0(x)$ монотонно возрастает от нуля до единицы;

$$\psi_{\Delta}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \Delta/2, \\ 0, & x \geq 3\Delta/4, \end{cases} \quad (5.7)$$

а на промежутке $x \in [\Delta/2, 3\Delta/4]$ $\psi_{\Delta}(x)$ монотонно убывает от единицы до нуля.

Выбор функций ψ неоднозначен. Однако функции ψ не влияют на "количественную сторону" аппроксимации, а введены лишь для достижения более высокой степени гладкости ФАР (5.1).

Для формирования ФАР (5.1) требуется уже меньшая степень гладкости входных функций задачи (1.1), чем это было принято выше при построении ФАР (3.29) — (3.31). Здесь достаточно допустить, что $p, p \in C^{(2n+1)}([a, b])$, $q \in C^{(2n-1)}([a, b])$ (при $n=0$, $q \in C([a, b])$) и $g_a, g_{\pm}, g_b \in C^{(2n+1)}$ на соответствующих промежутках (см. (1.3)). Однако, ниже будем считать, что $p, p, q \in C^{(\infty)}([a, b])$ и $g_a, g_{\pm}, g_b \in C^{(\infty)}$.

Следующие результаты характеризуют свойства ФАР $u_n(x, t)$, определённого формулой (5.1).

Теорема 2. При $x \neq a, x_j, b$ $u_n(x, t) \in C_t^{(\infty)}([0, +\infty[)$, при $x = a, x_j, b$ $u_n(x, t) \in C_t^{(\infty)}([0, +\infty[)$; $u_n(x, t) \in C_{x,t}^{(\infty)}(\Omega)$, где область $\Omega: \{x \in [a, b], t > 0\}$.

□ Если учесть формулы (3.21) и (3.23) для функций $v_{\kappa, \alpha_j}^{\pm}$ и аналогичные формулы для функций $v_{\kappa, \beta_j}^{\pm}$, то представление (4.10) функции $A_{m, \alpha_j} V_j$ можно несколько видоизменить:

$$A_{m, \alpha_j} V_j = t^{\alpha_j/2} \sum_{\kappa=0}^m (\tau_j t)^{\kappa/2} \tilde{v}_{\kappa, \alpha_j}(s_j) + \\ + t^{\beta_j/2} \sum_{\kappa=0}^m (\tau_j t)^{\kappa/2} \tilde{v}_{\kappa, \beta_j}(s_j), \quad s_j = (x - x_j) / \sqrt{\tau_j t}, \quad (5.8)$$

где

$$\tilde{v}_{\kappa, \alpha_j}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{\kappa, n}^{\alpha_j} s^n, \quad \tilde{v}_{\kappa, \beta_j}(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \alpha_{\kappa, n}^{\beta_j} s^n. \quad (5.9)$$

Отсюда уже легко обосновать пригедённую в теореме 2 степень гладкости ДАР u_n в точке $x = x_j$ разрыва функции $f = f(x)$. В частности из (5.8) и (5.9) следует, что

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u_n \Big|_{x=x_j} = \frac{m!}{(\tau_j t)^{m/2}} \left\{ t^{\alpha_j/2} \sum_{\kappa=0}^{2n+1} (\tau_j t)^{\kappa/2} \alpha_{\kappa, m}^{\alpha_j} + \right. \\ \left. + (-1)^m t^{\beta_j/2} \sum_{\kappa=0}^{2n+1} (\tau_j t)^{\kappa/2} \alpha_{\kappa, m}^{\beta_j} \right\} \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (5.10)$$

Аналогично:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u_n \Big|_{x=a} = \frac{m! t^{\alpha/2}}{(\tau_a t)^{m/2}} \sum_{\kappa=0}^{2n+1} (\tau_a t)^{\kappa/2} \alpha_{\kappa, m}^a, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} u_n \Big|_{x=b} = (-1)^m \frac{m! t^{\beta/2}}{(\tau_b t)^{m/2}} \sum_{\kappa=0}^{2n+1} (\tau_b t)^{\kappa/2} \alpha_{\kappa, m}^b. \quad \blacksquare \quad (5.12)$$

Лемма 5. При $x \neq a, x_j, b$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u_n(x, t) = f(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (5.13)$$

Замечание. В общем случае при $x = a, x_j, b$ $\lim_{t \rightarrow +0} u_n(x, t) = \infty$.

Однако, для любой непрерывной функции $\varphi = \varphi(x)$ и любого достаточно малого $\delta > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_a^{a+\delta} I_n(x, t) dx = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{x_j-\delta}^{x_j+\delta} I_n(x, t) dx = \\ = \lim_{t \rightarrow +0} \int_{b-\delta}^b I_n(x, t) dx = 0, \quad (5.14)$$

где $I_n(x, t) = \varphi(x)(u_n(x, t) - f(x))$, т.е. в точках $x = a, x_j$ и b $\lim_{t \rightarrow +0} u_n(x, t)$ имеет интегрируемую особенность ($u_n(x, t)$ при $t \rightarrow +0$

не сходятся к δ -функции).

Лемма 6. Для $\forall n \geq 0$ и $\forall \varepsilon > 0$ при $t \rightarrow +0$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$A_{2n+1, z_a} V_a - \Theta_a \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_a} V_a \sim \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{\omega_{\mu, k}^a t^\mu}{\mu! (x-a)^{2\mu-a-k}} \quad (x \geq a + \varepsilon), \quad (5.15)$$

$$A_{2n+1, z_b} V_b - \Theta_b \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_b} V_b \sim \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{\omega_{\mu, k}^b t^\mu}{\mu! (b-x)^{2\mu-b-k}} \quad (x \leq b - \varepsilon), \quad (5.16)$$

$$A_{2n+1, z_j} V_j - \Theta_j \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_j} V_j \sim \begin{cases} \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{\omega_{\mu, k}^+ t^\mu}{\mu! (x-x_j)^{2\mu-a_j-k}} & (x-x_j \geq \varepsilon), \\ \sum_{k=0}^{2n+1} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{\omega_{\mu, k}^- t^\mu}{\mu! (x_j-x)^{2\mu-\beta_j-k}} & (x_j-x \geq \varepsilon), \end{cases} \quad (5.17)$$

допускающие почленное дифференцирование.

Лемма 7. Для $\forall n \geq 0$ и при достаточно малых $t > 0$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \Theta \cdot A_{n, x} U - \Theta_a \Theta_{\Delta_a} \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_a} V_a = \\ & = \Psi_0 \left(\frac{x-a}{\sqrt{t}} \right) \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k t^k}{k! (x-a)^{2k}} \left[\sum_{\mu=2n+2}^M \omega_{\mu, k}^a (x-a)^\mu + \right. \\ & \left. + O((x-a)^{M+1}) \right] \quad (a \leq x \leq a + \delta_a), \quad (5.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Theta \cdot A_{n, x} U - \Theta_b \Theta_{\Delta_b} \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_b} V_b = \\ & = \Psi_0 \left(\frac{b-x}{\sqrt{t}} \right) \sum_{k=0}^n \frac{(b-x)^k t^k}{k! (b-x)^{2k}} \left[\sum_{\mu=2n+2}^M \omega_{\mu, k}^b (b-x)^\mu + \right. \\ & \left. + O((b-x)^{M+1}) \right] \quad (b - \delta_b \leq x \leq b), \quad (5.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Theta A_{n, x} U - \Theta_j \Theta_{\Delta_j} \cdot A_{n, x} A_{2n+1, z_j} V_j = \\ & = \Psi_0 \left(\frac{x-x_j}{\sqrt{t}} \right) \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_j)^k t^k}{k! (x-x_j)^{2k}} \left[\sum_{\mu=2n+2}^M \omega_{\mu, k}^+ (x-x_j)^\mu + \right. \end{aligned}$$

$$+ O((x-x_j)^{M+1})] \quad (x_j - \delta_j \leq x \leq x_j + \delta_j), \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} & \Theta \cdot A_{n,x} U - \Theta_j \Theta_{\Delta_j} A_{n,x} A_{2n+1,z_j} V_j = \\ & = \Psi_0\left(\frac{x-x_j}{\sqrt{t}}\right) \sum_{k=0}^n \frac{(x_j-x)^{\beta_j} t^k}{k! (x_j-x)^{2k}} \left[\sum_{\mu=2n+2}^M \omega_{k,\mu}^- (x_j-x)^\mu + \right. \\ & \left. + O((x-x_j)^{M+1}) \right] \quad (x_j - \delta_j \leq x \leq x_j), \quad (5.21) \end{aligned}$$

допускающие почленное дифференцирование, причём $\delta_a = (x_j - a)/2$, $\delta_b = (b - x_j)/2$, $\delta_j = \min(\delta_a, \delta_b)$ и $M \geq 2n+2$.

6. Обоснование формального асимптотического решения

Запишем решение задачи (I.I) в виде

$$u(x,t) = u_n(x,t) + z_n(x,t), \quad (6.1)$$

где ФАР $u_n = u_n(x,t)$, определено формулой (5.1). Тогда

Теорема 3. Для $\forall n \geq 0$ невязка $z_n = z_n(x,t)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\rho \frac{\partial z_n}{\partial t} - L z_n = t^{n+\alpha/2} \Omega_n(x,t) \quad (x \in [a,b], t > 0),$$

$$z_n|_{t=+0} = 0, \quad \Lambda_1 z_n|_{x=a+0} = \varphi_1(t), \quad \Lambda_2 z_n|_{x=b-0} = \varphi_2(t), \quad (6.2)$$

где $\alpha = \min(\alpha, \beta_j, \alpha_j, \beta, 0)$, $\Omega_n(x,t) \in C_{x,t}^{(\infty)}(x \in [a,b], t > 0)$ и при $t \rightarrow +0$ $\Omega_n(x,t) = O(1)$ равномерно относительно $x \in [a,b]$; при $h_2 = 0$ ($H_2 = 0$) $\varphi_1 = 0$ ($\varphi_2 = 0$) для $\forall t > 0$, а при $h_2 \neq 0$ ($H_2 \neq 0$) $\varphi_1 = O(h_1 t^{n+(\alpha+1)/2})$, $t \rightarrow +0$ ($\varphi_2 = O(H_1 t^{n+(\beta+1)/2})$, $t \rightarrow +0$).

Теорема 4. Для $\forall n \geq 0$ имеет место оценка:

$$\begin{aligned} z_n(x,t) = & O(s_1 t^{n+1+\alpha/2}) + O(s_2 t^{n+1+\beta/2}) + \\ & + O(t^{n+1+\alpha/2}), \quad t \rightarrow +0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

равномерная относительно $x \in [a,b]$, причём $\alpha = \min(\alpha, \beta_j, \alpha_j, \beta, 0)$; при $h_2 = 0$ ($H_2 = 0$) $s_1 = 0$ ($s_2 = 0$), а при $h_2 \neq 0$ ($H_2 \neq 0$) $s_1 = h_1/h_2$ ($s_2 = H_1/H_2$).

Замечание. Оценка (6.3) остается в силе и при более слабых требованиях к входным функциям задачи (I.I), чем те, которые были приняты выше (см. текст перед теоремой 2). Например,

достаточно потребовать, чтобы $p, p \in C^{(2n+2)}([a, b])$,
 $q \in C^{(2n)}([a, b])$, а g_a, g_b и $g_b \in C^{(2n+2)}$ на соответ-
 ствующих промежутках (см. (I.3)) (при $n=0$ $p, p \in C^{(3)}([a, b])$
 и $q \in C^{(1)}([a, b])$).

Теорема 4 завершает обоснование асимптотического характе-
 ра ФАР (5.1) задачи (I.1).

7. Некоторые приложения

Помимо непосредственных, отметим ещё ряд возможных приложе-
 ний полученных выше результатов.

7.1. Асимптотика ($t \rightarrow +\infty$) ряда Фурье:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) = u_n(x, t) + z_n(x, t), \quad t \rightarrow +\infty, \quad (7.1)$$

где $\{\varphi_k\}_n$ и $\{\lambda_k\}_n$ — полная ортонормированная система
 собственных функций и соответствующих собственных значений за-
 дачи Штурма-Лиувилля:

$$(p\varphi')' - q\varphi + \lambda p\varphi = 0 \quad (x \in]a, b[),$$

$$h_1\varphi(a) + h_2\varphi'(a) = 0, \quad H_1\varphi(b) + H_2\varphi'(b) = 0; \quad (7.2)$$

$$c_k = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_k(x) dx. \quad (7.3)$$

Здесь и ниже функция $u_n = u_n(x, t)$ определена формулой (5.1),
 а оценка остатка $z_n = z_n(x, t)$ дана теоремой 4.

Пример I. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in]a, b[, \quad t > 0),$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=b} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad (7.4)$$

$$f(x) = \begin{cases} B_1 b^{-2\alpha} x^\alpha (x_j - x)^\alpha, & 0 < x < x_j \quad (\alpha > -1), \\ B_2 b^{-2\beta} (x - x_j)^\beta (b - x)^\beta, & x_j < x < b \quad (\beta > -1), \end{cases} \quad (7.5)$$

Здесь $p(x) = 1$, $q(x) = 1$, $\varphi(x) = 0$, $a = 0$, $h_2 = H_2 = 0$,
 $h_1 = H_1 = 1$, $\beta_j = \alpha$, $\alpha_j = \beta$; $B_1, B_2 \in \mathbb{R}$.

Легко показать, что при $t > 0$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \exp\left(-\left(\frac{\kappa \lambda}{\beta}\right)^2 t\right) \sin\left(\frac{\kappa \lambda}{\beta} x\right) \quad (x \in [0, \beta]), \quad (7.6)$$

где

$$c_k = 2\sqrt{\lambda} \left\{ B_1 \left(\frac{\xi_j}{\kappa \lambda} \right)^{\alpha+1/2} \sin \frac{\kappa \lambda \xi_j}{2} \Gamma(\alpha+1) J_{\alpha+1/2} \left(\frac{\kappa \lambda \xi_j}{2} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{k+1} B_2 \left(\frac{1-\xi_j}{\kappa \lambda} \right)^{\beta+1/2} \Gamma(\beta+1) \sin \frac{\kappa \lambda (1-\xi_j)}{2} J_{\beta+1/2} \left(\frac{\kappa \lambda (1-\xi_j)}{2} \right) \right\}, \quad (7.7)$$

и $\xi_j = x_j/\beta$.

Для $\forall t > 0$ ряд (7.6) сходится абсолютно и равномерно относительно $x \in [0, \beta]$. Однако из (7.7) следует, что $c_k = O(1/k^{\alpha+1}) + O(1/k^{\beta+1})$, $k \rightarrow +\infty$. Поэтому, когда $\alpha < 0$ и (или) $\beta < 0$, то вопрос практического суммирования ряда (7.6) при $t \rightarrow +0$ не столь тривиален и становится вообще проблематичным при $\alpha \rightarrow -1+0$ и (или) $\beta \rightarrow -1+0$.

Если же воспользоваться асимптотическим разложением (7.1), то получим асимптотическую ($t \rightarrow +0$) аппроксимацию:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-\left(\frac{\kappa \lambda}{\beta}\right)^2 t} \sin\left(\frac{\kappa \lambda}{\beta} x\right) = \Theta(x, t) A_{n, x} U + R_n + \varepsilon_n \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (7.8)$$

позволяющую практически просуммировать ряд (7.6) при малых t . Из результатов п.5 следует, что

$$A_{n, x} U = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} f^{(2k)}(x) \quad (x \in]0, \beta[, x \neq x_j), \quad (7.9)$$

$\Theta(x, t) = \psi_0(x/\sqrt{t}) \psi_0((x-x_j)/\sqrt{t}) \psi_0((\beta-x)/\sqrt{t})$, где функция среза $\psi_0(x)$ определена (5.6). Функция $\Theta = \Theta(x, t)$ аннулирует регулярную асимптотику $A_{n, x} U$ в окрестностях: $0 \leq x \leq \sqrt{t}/2$, $|x-x_j| \leq \sqrt{t}/2$ и $0 \leq \beta-x \leq \sqrt{t}/2$ особых точек $x=0$, $x=x_j$ и $x=\beta$ функции $f = f(x)$. Функция влияния разрывов $R_n = R_{n,0}(x, t) + R_{n,j}(x, t) + R_{n,\beta}(x, t)$, где

$$R_{n,0}(x, t) = (A_{2n+1, z_0} V_0 - \psi_0(x/\sqrt{t}) A_{n, x} A_{2n+1, z_0} V_0) \psi_{0,0}(x), \quad (7.10)$$

$$R_{n,j}(x, t) = (A_{2n+1, z_j} V_j - \psi_0((x-x_j)/\sqrt{t}) A_{n, x} A_{2n+1, z_j} V_j) \psi_{0,j}(x-x_j), \quad (7.11)$$

$$R_{n,\beta}(x, t) = (A_{2n+1, z_\beta} V_\beta - \psi_0((\beta-x)/\sqrt{t}) A_{n, x} A_{2n+1, z_\beta} V_\beta) \psi_{0,\beta}(\beta-x); \quad (7.12)$$

$$A_{2n+1, z_0} V_0 = \sum_{k=0}^{2n+1} (\varphi_k(\alpha, z_0) - 2\eta_k(\alpha, z_0)) g_k^\alpha t^{\frac{\alpha+k}{2}} \quad (z_0 = \frac{x^2}{4t}), \quad (7.13)$$

$$A_{2n+1, z_\beta} V_\beta = \sum_{k=0}^{2n+1} (\varphi_k(\beta, z_\beta) - 2\eta_k(\beta, z_\beta)) g_k^\beta t^{\frac{\beta+k}{2}} \quad (z_\beta = \frac{(\beta-x)^2}{4t}), \quad (7.14)$$

$$A_{2n+1, z_j} V_j = \begin{cases} \sum_{k=0}^{2n+1} (\varphi_k(\beta, z_j) - \eta_k(\beta, z_j)) g_k^\beta t^{\frac{\beta+k}{2}} + \\ + \sum_{k=0}^{2n+1} \eta_k(\alpha, z_j) g_k^\alpha t^{\frac{\alpha+k}{2}} , & x > x_j \quad (z_j = \frac{(x-x_j)^2}{4t}) , \\ + \sum_{k=0}^{2n+1} \eta_k(\beta, z_j) g_k^\beta t^{\frac{\beta+k}{2}} , & x \leq x_j \quad (z_j = \frac{(x-x_j)^2}{4t}) ; \end{cases} \quad (7.15)$$

$$\varphi_k(s, z) = \frac{e^{-z}}{\sqrt{s}} 2^{s+k} \Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}\right) \bar{\Phi}\left(\frac{s+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right), \quad (7.16)$$

$$\eta_k(s, z) = \frac{e^{-z}}{2\sqrt{s}} \Gamma(s+k+1) \Psi\left(\frac{s+k+1}{2}, \frac{1}{2}; z\right); \quad (7.17)$$

$$g_k^\alpha = \frac{B_1}{\beta^{\alpha+k}} \frac{(-\alpha)_k}{k! \beta_j^{\alpha-k}}, \quad g_k^\beta = \frac{B_2}{\beta^{\beta+k}} \frac{(-\beta)_k}{k! (1-\beta_j)^{\beta-k}}, \quad \beta_j = x_j/\beta; \quad (7.18)$$

$$A_{n,x} A_{2n+1, z_0} V_0 = \sum_{k=0}^{2n+1} x^{\alpha+k} \sum_{m=0}^n \frac{\omega_{k,m}^\alpha}{4^k k! z_0^k}, \quad (7.19)$$

$$A_{n,x} A_{2n+1, z_0} V_0 = \sum_{k=0}^{2n+1} (\beta-x)^{\beta+k} \sum_{m=0}^n \frac{\omega_{k,m}^\beta}{4^k k! z_0^k}, \quad (7.20)$$

$$A_{n,x} A_{2n+1, z_j} V_j = \begin{cases} \sum_{m=0}^{2n+1} (x-x_j)^{\beta+m} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,m}^\beta}{4^k k! z_j^k} & (x > x_j), \\ \sum_{m=0}^{2n+1} (x_j-x)^{\alpha+m} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,m}^\alpha}{4^k k! z_j^k} & (x < x_j), \end{cases} \quad (7.21)$$

$$\omega_{k,m}^\alpha = \frac{B_1}{\beta^{\alpha+m}} \frac{(-\alpha-m)_{2k} (-\alpha)_m}{m! \beta_j^{\alpha-m}}, \quad \omega_{k,m}^\beta = \frac{B_2}{\beta^{\beta+m}} \frac{(-\beta-m)_{2k} (-\beta)_m}{m! (1-\beta_j)^{\beta-m}}, \quad (7.22)$$

а функция срезания $\psi_n(x)$ определена (5.7), причём $\Delta_0 = x_j$, $\Delta_\beta = \beta - x_j$, $\Delta_j = \min(\Delta_0, \Delta_\beta)$.

Из теоремы 4 следует, что погрешность z_n аппроксимации (7.8) имеет оценку: $z_n = O(t^{n+1+\alpha/2})$, $t \rightarrow +0$, $\alpha = \min(\alpha, \beta, 0)$ равномерно относительно $x \in [0, \beta]$.

Проанализируем схему вычисления по асимптотической формуле $u_n(x, t) = \theta(x, t) A_{n,x} U + R_n(x, t)$ в окрестности точки $x=0$.

При $x \in [0, \sqrt{t}/2]$ $u_n(x, t) = A_{2n+1, z_0} V_0$. При $x \in [\sqrt{t}/2, \sqrt{t}]$ приводится следующая группировка слагаемых

$$u_n(x, t) = A_{2n+1, z_0} V_0 + \psi_0(x/\sqrt{t}) (A_{n,x} U - A_{n,x} A_{2n+1, z_0} V_0). \quad (7.23)$$

Из леммы 7 следует, что

$$A_{n,x} U - A_{n,x} A_{2n+1, z_0} V_0 = x^\alpha \sum_{m=2n+2}^{+\infty} \frac{2^m t^{m/2}}{z_0^{n-m/2}} \sum_{k=0}^n \frac{\omega_{k,m}^\alpha}{4^k k! z_0^k}. \quad (7.24)$$

Так как при $x \in [\sqrt{t}/2, \sqrt{t}]$ $z_0 = x^2/(4t) \in [1/16, 1/4]$, то $A_{n,x} U - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0 = O(t^{n+1})$, $t \rightarrow +0$. Следовательно, в (7.23) доминирует $A_{2n+1,z_0} V_0$, а $\psi_0(x/\sqrt{t})(A_{n,x} U - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0)$ имеет порядок погрешности z_n в (7.8), что и позволяет на промежутке $x \in [0, \sqrt{t}/2]$ вообще "срезать" это слагаемое с помощью функции $\psi_0(x/\sqrt{t})$.

На промежутке $x > \sqrt{t}$ ($z_0 = x^2/(4t) > 1/4$) при x близких к $\sqrt{t}$ вычисление $A_{n,x} U - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0$ ведётся по формуле (7.24). Затем при $z_0 \sim 1$ слагаемые асимптотики $u_n(x, t)$ группируются иначе:

$$u_n(x, t) = A_{n,x} U + (A_{2n+1,z_0} V_0 - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0) \psi_{\Delta_0}(x) + R_{n,j}, \quad (7.25)$$

где $A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0$ вычисляется согласно формуле (7.19).

Далее, согласно лемме 6, при $z_0 \rightarrow +\infty$

$$A_{2n+1,z_0} V_0 - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0 \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{2n+1} x^{\alpha+k} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{\omega_{\mu,k}^{\alpha}}{4^{\mu} \mu! z_0^{\mu}}. \quad (7.26)$$

Таким образом, при $z_0 \rightarrow +\infty$ $A_{2n+1,z_0} V_0 - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0$ вычисляется по асимптотической формуле (7.26). Причём из (7.26) следует, что при $x \sim 1$ ($z_0 \sim 1/(4t)$) $A_{2n+1,z_0} V_0 - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0 = O(t^{n+1})$, $t \rightarrow +0$ т.е. $A_{2n+1,z_0} V_0 - A_{n,x} A_{2n+1,z_0} V_0$ имеет порядок погрешности z_n в (7.8), что позволяет в дальнейшем "срезать" это слагаемое функцией $\psi_{\Delta_0}(x)$. Следовательно, при $1 \leq x \leq x_j - 1$ в (7.25) доминирует регулярная асимптотика $A_{n,x} U$.

Аналогичным образом ведётся счёт по асимптотической формуле $u_n(x, t) = \theta(x, t) A_{n,x} U + R_n(x, t)$ и в окрестностях особых точек $x = x_j$ и $x = b$.

7.2. К п. 7.1 примыкает задача построения равномерной асимптотики интегралов вида:

$$I(x, t) = \int_a^b p(\xi) G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi, \quad t \rightarrow +0 \quad (7.27)$$

где

$$G(x, \xi, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) \varphi_k(\xi). \quad (7.28)$$

Из полученных выше результатов следует, что $I(x, t) = u_n(x, t) + z_n(x, t)$, $t \rightarrow +0$ равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Пример 2. Пусть задача (I.1) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (x \in]1, b[, t > 0),$$

$$u|_{x=1} = 0, \quad u|_{x=b} = 0, \quad u|_{t=0} = f(x). \quad (7.29)$$

Здесь $p(x) = 1/x^2$, $r(x) = x^2$, $q(x) = 0$, $a = 1$, а функция $f = f(x)$ типа (I.3). Тогда при $t \rightarrow +0$ (равномерно относительно $x \in [1, b]$) имеем:

$$I(x, t) = \int_1^b G(x, \xi, t) \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi = u_n(x, t) + z_n(x, t), \quad (7.30)$$

причём здесь

$$G(x, \xi, t) = \frac{2b}{b-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \sin \mu_k \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sin \mu_k \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) e^{-\mu_k^2 t}, \quad (7.31)$$

$$\mu_k = \pi k b / (b-1).$$

Получение равномерной асимптотики интеграла такого типа классическими методами отнюдь не очевидно.

7.3. Как отмечено в [3], при численном решении параболических задач влияние гладкости начальных условий весьма существенно. Например, если

$$u|_{t=0} = \begin{cases} 1, & x \in [a, (a+b)/2] \\ 0, & x \in [(a+b)/2, b] \end{cases}, \quad (7.32)$$

то скорость сходимости для кубической конечноэлементной и пяти- или семиточечной конечноразностной схем снижается до второго порядка. Если же в качестве начального условия принималось точное решение задачи даже для "малых" t , то скорость сходимости восстанавливалась.

Построенные асимптотические решения позволяют в качестве начальных условий выбирать не точные значения решения, а асимптотические аппроксимации для "малых" t и таким образом избегать технических осложнений при численном счёте из-за разрывов в начальных условиях.

8. Устойчивое суммирование рядов Фурье

Рассмотрим применение полученных выше асимптотических разложений для построения алгоритмов устойчивого суммирования ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \quad (x \in]a, b[) \quad (8.1)$$

функции $f = f(x)$ с разрывами второго рода по полной ортонормированной системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (7.2).

На практике коэффициенты Фурье c_k , определённые формулой (7.3), обычно не известны, но известны их приближённые значе-

ния $\tilde{c}_k$, причём

$$c_k = \tilde{c}_k + \Delta c_k, \quad (8.2)$$

где Δc_k — погрешность задания коэффициентов Фурье.

Задача же суммирования рядов Фурье относится к классу некорректных [2]. "Сколько угодно малые" вариации входной информации могут соответствовать "как угодно большим" изменениям результата. Поэтому непосредственный численный счёт ряда (8.1) неустойчив — даже "небольшие" погрешности Δc_k в задании коэффициентов Фурье c_k приводят к большой погрешности численного результата (вплоть до полной потери точности).

Для построения устойчивого алгоритма суммирования ряда (8.1) воспользуемся асимптотической формулой (7.1)

$$\Phi(x, t; c_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x) = u_n(x, t) + z_n(x, t), \quad t \rightarrow +0, \quad (8.3)$$

где функция $u_n(x, t)$ определена формулой (5.1), а оценка остатка $z_n(x, t)$ дана теоремой 4. Здесь и ниже предполагается, что функция $f = f(x)$ и функции $p = p(x)$, $q = q(x)$, $r = r(x)$ задачи Штурма — Лиувилля (7.2) удовлетворяют условиям, необходимым для справедливости теоремы 4 (см. формулы (1.2), (1.3) и замечания к теореме 4). В (8.3) введено обозначение $\Phi(x, t; c_k)$ для ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x)$, которое будем использовать и в дальнейшем.

В отличие от (8.1) ряд в формуле (8.3) содержит (при $t > 0$) "быстро убывающий" (при $k \rightarrow +\infty$) множитель $e^{-\lambda_k t}$, так называемый стабилизирующий множитель [2]. Наличие стабилизирующего множителя приводит к тому, что суммирование ряда в формуле (8.3) устойчиво к "малым" вариациям коэффициентов Фурье c_k .

Асимптотическая же формула (8.3) позволяет оценить (при малых $t > 0$) меру отклонения суммы $\Phi(x, t; c_k)$ от функции $f(x)$ и в итоге, согласовав выбор $t > 0$ (здесь t является параметром регуляризации в смысле [2]) с погрешностью задания коэффициентов Фурье, получить устойчивый алгоритм суммирования ряда Фурье (8.1).

Преобразуем (8.3) к следующему виду:

$$\Phi(x, t; c_k) = u_n^*(x, t) + p_n^*(x, t) \quad (t > 0, x \in [a, b], n = 0, 1, \dots),$$

где

$$u_n^*(x, t) = A_{n,x} U + R_n^* = A_{n,x} U + R_{n,a}^* + R_{n,j}^* + R_{n,b}^*, \quad (8.4)$$

$$R_{n,a}^* = (A_{2n+1,z_a} V_a - A_{n,x} A_{2n+1,z_a} V_n) \Theta_{\Delta_a}(x), \quad (8.6)$$

$$R_{n,b}^* = (A_{2n+1,z_b} V_b - A_{n,x} A_{2n+1,z_b} V_b) \Theta_{\Delta_b}(x), \quad (8.7)$$

$$R_{n,j}^* = (A_{2n+1,z_j} V_j - A_{n,x} A_{2n+1,z_j} V_j) \Theta_{\Delta_j}(x), \quad (8.8)$$

$$A_{n,x} U = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} L_*^k f, \quad (8.9)$$

$$p_n^* = u_n(x,t) - u_n^*(x,t) + z_n(x,t) \quad (8.10)$$

Определение и обозначения функций, входящих в формулу (8.6) — (8.10) дано в п.5.

Легко заметить, что при достаточно малых $t > 0$ ($\sqrt{t} \leq \Delta_j/2$, $\Delta_j = \min(\Delta_a, \Delta_b)$, $\Delta_a = x_j - a$, $\Delta_b = b - x_j$) разность между функцией $u_n(x,t)$ и $u_n^*(x,t)$ отлична от нуля лишь при $x \in A_t, B_t$ и D_t^+ , где

$$A_t = [a, a + \sqrt{t}], \quad B_t = [b - \sqrt{t}, b],$$

$$D_t^+ = [x_j, x_j + \sqrt{t}], \quad D_t^- = [x_j - \sqrt{t}, x_j] \quad (8.11)$$

Учитывая лемму 7 и теорему 4, получаем

Лемма 8. Для $\forall n \geq 0$ функция $p_n^* = p_n^*(x,t)$ заданная формулой (8.10), имеет спенку

$$p_n^* = O(\eta(x,t) t^{n+1}), \quad t \rightarrow +0, \quad (8.12)$$

равномерную относительно $x \in [a, b]$, причём

$$\eta(x,t) = |s_1| t^{\alpha/2} + |s_2| t^{\beta/2} + t^{\alpha/2} + (x-a)^{\alpha} \chi_{A_t}(x) + (b-x)^{\beta} \chi_{B_t}(x) + (x-x_j)^{\alpha_j} \chi_{D_t^+}(x) + (x_j-x)^{\beta_j} \chi_{D_t^-}(x), \quad (8.13)$$

где α , s_1 и s_2 определены в теореме 4, $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества A , т.е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \quad (8.14)$$

а множества A_t , B_t и D_t^+ — определены (8.11).

В (8.9) помимо функции $f = f(x)$ присутствуют $L_*^k f$, $k = 1, 2, \dots, n$. Для исключения функций $L_*^k f$ введём операторы $G_t^{(m)}$, действующие на функцию $\varphi = \varphi(t)$ аргумента $t > 0$ согласно при ялу:

$$G_t^{(m)} \varphi(t) = 2 \varphi(t/\sqrt{2}) - \varphi(t) \quad (m=1, 2, \dots) \quad (8.15)$$

и оператор

$$G_t^n \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & n=0 \\ G_t^{(n)} G_t^{(n-1)} \dots G_t^{(1)} \varphi(t), & n>0 \end{cases} \quad (8.16)$$

Лемма 9. Пусть $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ — произвольный полином n -го порядка. Тогда $G_t^n \varphi(t) = a_0$.

Отсюда, учитывая (8.9), теорему I и определение $\bar{z}_a, \bar{z}_\beta$ и $\bar{z}_j$, данные в соотношениях (4.8) — (4.17), получаем

Лемма 10. Для $\forall n \geq 0$ и при $x \in]a, \beta[$ име место следующие соотношения: $G_t^n A_{n,x} U = f(x)$, $G_t^n A_{n,x} A_{2n+1, \bar{z}_a} V_a = T_{2n+1}^a(x)$, $G_t^n A_{n,x} A_{2n+1, \bar{z}_\beta} V_\beta = T_{2n+1}^\beta(x)$ и $G_t^n A_{n,x} A_{2n+1, \bar{z}_j} V_j = T_{2n+1}^j(x)$, где

$$T_{2n+1}^a(x) = \sum_{\mu=0}^{2n+1} g_\mu^a (x-a)^{\alpha+\mu}, \quad T_{2n+1}^\beta(x) = \sum_{j=0}^{2n+1} g_\mu^\beta (\beta-x)^{\beta+\mu}, \quad (8.17)$$

$$T_{2n+1}^j(x) = \sum_{\mu=0}^{2n+1} g_\mu^+ (x-x_j)^{\alpha+\mu}, \quad T_{2n+1}^j(x) = \sum_{\mu=0}^{2n+1} g_\mu^- (x_j-x)^{\beta+\mu}, \quad (8.18)$$

соответственно при $x > x_j$ и при $x < x_j$, а g_μ^a , g_μ^β и $g_\mu^\pm$ определены соотношениями (I.3) — (I.7).

Теперь, подействовав на (8.4) оператором G_t^n , получаем

$$\Phi_n(x, t; c_k) = f(x) - \tilde{R}_n(x, t) + G_t^n \rho_n^*(x, t). \quad (8.19)$$

где

$$\tilde{R}_n(x, t) = (T_{2n+1}^a(x) - G_t^n A_{2n+1, \bar{z}_a} V_a) \Theta_{\Delta_a}(x) + (T_{2n+1}^\beta(x) - G_t^n A_{2n+1, \bar{z}_\beta} V_\beta) \Theta_{\Delta_\beta}(x) + (T_{2n+1}^j(x) - G_t^n A_{2n+1, \bar{z}_j} V_j) \Theta_{\Delta_j}(x), \quad (8.20)$$

$$\Phi_n(x, t; c_k) = G_t^n \Phi(x, t; c_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k G_t^n e^{-\lambda_k t} \varphi_k(x). \quad (8.21)$$

Функцию $\tilde{R}_n(x, t)$ будем называть функцией разрывов, т.е. для её конструктивного построения требуется лишь некоторая априорная информация о структуре разрывов функции $f = f(x)$: числа $\alpha, \beta, \alpha_j, \beta_j, x_j$ и $g_\mu^a, g_\mu^\beta, g_\mu^\pm, \mu = 0, 1, 2, \dots, 2n+1$ (см. формулы (I.3) — (I.7)).

Из (8.16) следует, что $G_t^0 \exp(-\lambda_k t) = \exp(-\lambda_k t)$, $G_t^1 \exp(-\lambda_k t) = 2 \exp(-\lambda_k t/2) - \exp(-\lambda_k t)$, $G_t^2 \exp(-\lambda_k t) = 4 \exp(-\lambda_k t/2^{3/2}) - 2 \exp(-\lambda_k t/\sqrt{2}) - 2 \exp(-\lambda_k t/2) + \exp(-\lambda_k t)$ и т.д.

Лемма II. Для $\forall n \geq 0, \forall k \geq 0$ и $\forall t \in \mathbb{R}$ имеет место представление

где
$$G_t^n e^{-\lambda_k t} = 1 + \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} z_{\mu,n} \frac{(-1)^\mu (\lambda_k t)^\mu}{\mu!}, \quad (8.22)$$

$$z_{\mu,n} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ (-1)^n \prod_{m=1}^n (1 - 2^{1-\mu/m}) & , n > 0. \end{cases} \quad (8.23)$$

Следствие. При $n \rightarrow +\infty$ функция $G_t^n e^{-\lambda_k t} \rightarrow 1$ равномерно относительно $0 \leq |\lambda_k t| \leq T < +\infty$.

Из построений п.3, результатов п.4, формулы (5.8) и леммы 6 следует справедливость следующих двух утверждений.

Лемма 12. Для $\forall n \geq 0$ и $\forall t > 0$ имеют место следующие представления:

$$G_t^n A_{2n+1, z_a} V_a = t^{a/2} \sum_{k=0}^{2n+1} (\tau_a t)^{k/2} v_{n,k,a}^*(z_a) \left(z_a = \frac{(x-a)^2}{\tau_a t} \right), \quad (8.24)$$

$$G_t^n A_{2n+1, z_b} V_b = t^{b/2} \sum_{k=0}^{2n+1} (\tau_b t)^{k/2} v_{n,k,b}^*(z_b) \left(z_b = \frac{(b-x)^2}{\tau_b t} \right), \quad (8.25)$$

$$G_t^n A_{2n+1, z_j} V_j = t^{a_j/2} \sum_{k=0}^{2n+1} (\tau_j t)^{k/2} v_{n,k,\alpha_j}^*(s_j) + t^{\beta_j/2} \sum_{k=0}^{2n+1} (\zeta_j t)^{k/2} v_{n,k,\beta_j}^*(s_j) \quad \left(s_j = \frac{x-x_j}{\sqrt{\tau_j t}} \right), \quad (8.26)$$

$$v_{n,k,a}^*(z) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} \Delta_{n,k,\mu}^a z_{k,\mu}^a z^{\mu/2}, \quad (8.27)$$

$$v_{n,k,b}^*(z) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} \Delta_{n,k,\mu}^b z_{k,\mu}^b z^{\mu/2}, \quad (8.28)$$

$$v_{n,k,\alpha_j}^*(z) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} \Delta_{n,k,\mu}^{\alpha_j} z_{k,\mu}^{\alpha_j} z^{\mu}, \quad (8.29)$$

$$v_{n,k,\beta_j}^*(z) = \sum_{\mu=0}^{+\infty} (-1)^\mu \Delta_{n,k,\mu}^{\beta_j} z_{k,\mu}^{\beta_j} z^{\mu}, \quad (8.30)$$

$$\Delta_{n,k,\mu}^{\gamma} = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 2^{\ell_n} \prod_{s=1}^n \left(1 - 2^{\frac{1}{2s}(\mu + \gamma - \mu) - 1} \right), & n > 0, \end{cases} \quad (8.31)$$

$$\ell_n = n + \frac{1}{2}(\mu - k - \gamma)(1 + 1/2 + \dots + 1/n). \quad (8.32)$$

Замечание. Радиус сходимости степенных рядов (8.27) — (8.30) равен бесконечности.

Лемма 13. Для $V \neq 0$ имеют место следующие асимптотические разложения:

$$G_t^n A_{2n+1, z_a} V_a - T_{2n+1}^a(x) \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{2n+1} (x-a)^{\alpha+k} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{z_{\mu,n} \omega_{\mu,k}^a}{\mu! (z_a z_a)^{\mu}} , \quad z_a = \frac{(x-a)^2}{z_a t} \rightarrow +\infty , \quad (8.33)$$

$$G_t^n A_{2n+1, z_b} V_b - T_{2n+1}^b(x) \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{2n+1} (b-x)^{\beta+k} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{z_{\mu,n} \omega_{\mu,k}^b}{\mu! (z_b z_b)^{\mu}} , \quad z_b = \frac{(b-x)^2}{z_b t} \rightarrow +\infty , \quad (8.34)$$

$$G_t^n A_{2n+1, z_j} V_j - T_{2n+1}^j(x) \sim$$

$$\sim \begin{cases} \sum_{k=0}^{2n+1} (x-x_j)^{\alpha_j+k} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{z_{\mu,n} \omega_{\mu,k}^j}{\mu! z_j^{\mu} s_j^{2\mu}} , & s_j = \frac{x-x_j}{z_j t} \rightarrow +\infty , \\ \sum_{k=0}^{2n+1} (x_j-x)^{\beta_j+k} \sum_{\mu=n+1}^{+\infty} \frac{z_{\mu,n} \omega_{\mu,k}^j}{\mu! z_j^{\mu} s_j^{2\mu}} , & s_j = \frac{x-x_j}{z_j t} \rightarrow -\infty , \end{cases} \quad (8.35)$$

где функции T_{2n+1}^a , T_{2n+1}^b и T_{2n+1}^j определены в лемме 10, а $z_{\mu,n}$ заданы формулой (8.23).

Замечание. Из двух последних лемм следует, что схема вычисления функции разрывов $\tilde{R}_n = \tilde{R}_n(x, t)$ по существу совпадает со схемой счёта по асимптотической формуле $u_n = u_n(x, t)$, разобранной в п.7.1.

Теперь из (8.19), учитывая (8.2), получаем

$$f(x) = \tilde{f}_n(x, t) + \tilde{p}_n(x, t) \quad (x \in [a, b], t > 0, n = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.36)$$

где $\tilde{f}_n(x, t)$ — приближённые значения функции $f = f(x)$, которые определяются формулой:

$$\tilde{f}_n(x, t) = \Phi_n(x, t; \tilde{c}_n) + \tilde{R}_n(x, t) , \quad (8.37)$$

а погрешность аппроксимации

$$\tilde{p}_n(x, t) = \Phi_n(x, t; \Delta c_n) - G_t^n p_n^*(x, t) . \quad (8.38)$$

В дальнейшем будем допускать, что погрешность Δc_n задания коэффициентов Фурье c_n , удовлетворяет оценке

$$\sup_n |\Delta c_n| \leq \varepsilon , \quad (8.39)$$

где параметр $\varepsilon > 0$ характеризует точность определения коэффициентов Фурье C_k .

Учитывая (8.21) и предполагая определённую степень гладкости функций $p = p(x)$, $r = r(x)$ и $q = q(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (7.2), получаем

Лемма 14. Пусть $p(x)$, $r(x) \in C^{(3)}([a, b])$, $q(x) \in C^{(1)}([a, b])$ и $\sup_k |\Delta C_k| \leq \varepsilon$. Тогда

$$\Phi_n(t, x; \Delta C_k) = O(\varepsilon/\sqrt{t}), \quad t \rightarrow +0, \quad (8.40)$$

равномерно относительно $x \in [a, b]$.

Отсюда, учитывая лемму 8 и формулу (8.38), легко получаем оценку погрешности аппроксимации $\tilde{p}_n = \tilde{p}_n(x, t)$.

Теорема 5. Пусть $\sup_k |\Delta C_k| \leq \varepsilon$. Тогда для $\forall n \geq 0$ имеет место оценка

$$\tilde{p}_n(x, t) = O(\varepsilon/\sqrt{t}) + O(t^{n+1} \eta(x, t)), \quad t \rightarrow +0, \quad (8.41)$$

равномерная относительно $x \in [a, b]$, где функция $\eta = \eta(x, t)$ определена формулой (8.13).

Формула (8.36) содержит параметр $t > 0$. Его выбор надо согласовать с погрешностью задания коэффициентов Фурье.

Теорема 6. Пусть $\sup_k |\Delta C_k| \leq \varepsilon$. Если в (8.36) положить

$$t = t(\varepsilon) = \varepsilon^\mu, \quad \mu = 2/(2n+3), \quad (8.42)$$

то при $\varepsilon \rightarrow +0$ (для $\forall n \geq 0$) имеет место следующая оценка погрешности аппроксимации

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n &= |f(x) - \tilde{f}_n(x, t)|_{t=t(\varepsilon)} = \\ &= O(\varepsilon^{(n+1)\mu} \eta(x, t(\varepsilon))), \end{aligned} \quad (8.43)$$

равномерная относительно $x \in [a, b]$, где функция $\eta = \eta(x, t)$ определена формулой (8.13).

Замечания 1. Как при всякой асимптотической аппроксимации с ростом её порядка (т.е. с увеличением n) необходимо увеличивать точность задания коэффициентов Фурье, т.е. уменьшать ε так, чтобы

$$t(\varepsilon) = \varepsilon^\mu, \quad \mu = 2/(2n+3) \quad (8.44)$$

было достаточно мало. Таким образом, если точность задания коэффициентов Фурье невелика, то нет смысла выбирать слишком большое n , а лучше ограничиться случаем $n = 0$.

2. Выше предполагалось существование лишь одной точки внутреннего разрыва $x_j \in]a, b[$. Если таких точек несколько ($j = 1, 2, \dots, M$), то в формуле (8.20), определяющей функции разрывов $\tilde{R}_n$, вклад от точки разрыва $x = x_j$, т.е. функции

$$(T_{2n+1}^j(x) - G_2^n A_{2n+1, z_j} V_j) \Theta_{\Delta_j}(x),$$

следует заменить на сумму таких вкладов от всех внутренних точек разрыва x_j , $j = 1, 2, \dots, M$, определив:

$$\Delta_j = \min(x_j - x_{j-1}, x_{j+1} - x_j) \quad (x_0 = a, x_{M+1} = b, x_{j+1} > x_j), \\ \Delta_1 = x_1 - a, \quad \Delta_M = b - x_M.$$

Итак, получен алгоритм устойчивого суммирования ряда Фурье по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (7.2) для функций $f = f(x)$, имеющих разрывы второго рода. В формировании приближенных значений

$$\tilde{f}_n(x, t) = \Phi_n(x, t; \tilde{c}_n) + \tilde{R}_n(x, t)$$

ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$$

используются как информация о приближенных значениях коэффициентов Фурье $\tilde{c}_k$ (сумма ряда $\Phi_n(x, t; \tilde{c}_n)$, определенного формулой (8.21)) так и дополнительная (априорная) аналитическая информация о структуре разрывов функции $f = f(x)$ (функция разрывов $\tilde{R}_n(x, t)$, определенная формулой (8.20)). Выбор параметра регуляризации $t > 0$ согласован:

$$t = t(\varepsilon) = \varepsilon^\mu, \quad \mu = 2/(2n+3).$$

с погрешностью задания коэффициентов Фурье ($\sup | \Delta c_k | \leq \varepsilon$).

Введение в вычислительный алгоритм дополнительной аналитической информации позволяет получить равномерное приближение к функции $f = f(x)$ не только на участках непрерывности, но и в окрестностях точек разрыва.

Таким образом, без привлечения такой дополнительной аналитической информации невозможно построить устойчивый алгоритм суммирования, дающий равномерную аппроксимацию для достаточно широких классов функций (в частности, для функций, имеющих разрывы первого или второго рода).

Важно отметить, что асимптотические разложения являются здесь тем инструментом, который наиболее естественным образом вводит в численный алгоритм априорную аналитическую информацию о структуре решений.

Библиографический список

1. Белов М.А. Асимптотическое решение смешанной параболической задачи с разрывными начальными условиями. I // Учен. зап. Латвийского университета. - 1991. - Т. 562. - С. 129 - 150.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М., 1979.
3. Элетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. - М., 1988.

M. A. Belovs. Jaukta veida paraboliskās problēmas asimptotiskā atrisinājums ar pārtrauktām funkcijām sākotnējos nosacījumos, 2.

Anotācija. Darbā 2. daļā pamatots formālais asimptotiskais atrisinājums, kas konstruēts pirmajā daļā. Aplūkoti iegūto rezultātu pielietojumi. Turpē rindu un daļu integrāļu asimptotiskās attīstības, stabiles Turpē rindu ar otra veida pārtrauktām summēšanas algoritmos, skaitlisko algoritmu modificēšanai parabolisko problēmu risināšanā ar pārtrauktām funkcijām sākotnējos nosacījumos.

M. Belov. The asymptotic solution of a mixed parabolic problem with discontinuous initial conditions, 2.

Summary. In the second part of the work the justification of the formal asymptotic solution constructed in the first part is given. The obtained results are applied: 1) to construct asymptotic decomposition of Fourier series and some integrals; 2) to construct algorithms for stable summation of Fourier series of functions which may have the second order gaps; 3) to construct possible modifications of algorithms for a numerical solution of parabolic problems with discontinuous initial conditions.

AMS SC 65M, 65T, 65B10.

M. Belov
Department of Mathematics
Latvian University
Riga 226098
Latvia

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСТАТКОВ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССА

Т. Цирулис

Аннотация. Рассматриваются остатки квадратурных формул Гаусса с узлами в нулях полиномов Чебышева. Устанавливается связь этого остатка с асимптотическими представлениями коэффициентов Фурье интегрируемой функции при разложении ее в ряд по полиномам Чебышева. УДК 517.52.

При вычислении интеграла с помощью квадратурной формулы

$$I(f) \equiv \int_a^b f(x) p(x) dx = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k) + R_N(f) \quad (1)$$

и весовой функцией $p(x) > 0$ очень важно для практики найти асимптотическую формулу для остатка $R_N(f)$ при $N \rightarrow +\infty$. Если такое асимптотическое выражение для $R_N(f)$ известно, т.е.,

$$R_N(f) \sim \epsilon_N(f) \quad \text{при } N \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

то вместо приближенной формулы $I(f) \approx S_N(f)$ имеем более точную формулу

$$I(f) \approx S_N(f) + \epsilon_N(f), \quad \text{где } S_N(f) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k f(x_k), \quad (3)$$

так как добавление к квадратурной сумме $S_N(f)$ асимптотики остатка $\epsilon_N(f)$ вообще может улучшить точность приближения.

Для квадратурных формул прямоугольников, трапеций или парабол такие асимптотические выражения для остатка $R_N(f)$ получены в работе [1]. Из этих формул легко увидеть, что дополнительное повышение гладкости функций f для этих квадратур вообще не повышает порядок малости остатка $R_N(f)$ при $N \rightarrow +\infty$. Это свойство в [2] названо насыщенностью метода и является

существенным недостатком этой квадратурной формулы.

Квадратурные формулы высшей алгебраической точности или квадратурные формулы Гаусса не обладают таким свойством насыщенности и на первый взгляд обладают некоторым преимуществом перед квадратурными формулами прямоугольников, трапеций или парабол. Однако на практике в случае сильноосциллирующих, но гладких функций ошибка при применении квадратурных формул Гаусса может оказаться большей, чем, например, ошибка в формуле Симпсона. Целью настоящей статьи является исследование асимптотических формул остатка $R_N(f)$ квадратурных формул Гаусса, в частности, выяснение тех свойств функции f в формуле (I), которые непосредственно влияют на $R_N(f)$.

I. Случай полиномов Чебышева I-го рода.

Пусть $\rho(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $a=-1, b=1$. Тогда система ортогональных полиномов — полиномы Чебышева I-го рода $T_n(x)$. В этом случае узлы x_k и весовые коэффициенты A_k в (I) особенно просты: $x_k = \cos \frac{\pi(2k+1)}{2N}$, $A_k = \frac{\pi}{N}$. В дальнейшем всюду будем считать, что $N \geq 1$, $k=0, 1, \dots, N-1$.

Лемма I.

$$R_N(T_m) = \begin{cases} (-1)^{s-1} \pi, & m = 2Ns \\ 0, & m \neq 2Ns, s=1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

где R_N — остаток квадратурной формулы, определяемой из (I), T_m — полином Чебышева I-го рода.

Доказательство. Из того, что R_N — остаток квадратуры наивысшей алгебраической точности, получаем $R_N(T_m) = 0$, если $m \leq 2N-1$. Найдем $R_N(T_{2N})$. Для этого воспользуемся линейностью оператора R_N и рекуррентным соотношением

$$T_{n+m}(x) = 2T_n(x)T_m(x) - T_{|n-m|}(x). \quad (5)$$

Получаем при $n=m=N$

$$R_N(T_{2N}) = 2R_N(T_N^2) = \int_{-1}^1 \frac{T_N^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi, \quad (6)$$

ибо $\sum_{k=0}^{N-1} T_N^2(x_k) = 0$. Аналогично для $0 < l < 2N$ из (5) получаем

$$\begin{aligned} R_N(T_{2N+l}) &= 2R_N(T_N T_{N+l}) - R_N(T_l) = 0, \\ R_N(T_{4N}) &= 2R_N(T_N T_{3N}) - R_N(T_{2N}) = -\pi. \end{aligned}$$

Если $2N < \ell < 4N$, опять $R_N(T_{2N+\ell}) = 0$, а $R_N(T_{6N}) = \pi$. С помощью математической индукции проверяем правильность формулы (4) для любых m и S . Лемма доказана.

Теорема 1. Если $f \in C[-1, 1]$ и на промежутке $[-1, 1]$ почти всюду существует $f'_{+0}(x)$ ограниченной вариации, то

$$R_N(f) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} C_{2Nk}, \quad (7)$$

где C_n — коэффициенты Фурье разложения функции f в ряд по полиномам T_n , т.е.,

$$C_n = \frac{2}{\varepsilon_n \pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n=0, \\ 1, & n \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Ряд в формуле (7) абсолютно сходится.

Доказательство теоремы получается применением линейного оператора R_N к обеим частям равенства

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(x) \quad (9)$$

и использованием леммы 1.

Аналогичным образом можно доказать более общий результат.

Теорема 2. Если f удовлетворяет условиям теоремы 1, то для любого целого неотрицательного m

$$R_N(f T_m) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} (C_{2Nk+m} + C_{2Nk-m}), \quad (10)$$

где C_n определены формулой (8) и ряд (10) абсолютно сходится. При $m=0$ (10) совпадает с (7).

Следствие 1. При выполнении условий теоремы 1 для квадратурной суммы $S_N(f)$ имеет место представление

$$S_N(f) \equiv \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = \lim_{M \rightarrow +\infty} (-1)^M \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_{2M+1N}(x)}{\sqrt{1-x^2} T_N(x)} dx. \quad (11)$$

Формула (11) легко получается из (7), если в ней C_{2Nk} заменить интегралом (8) и изменить порядок суммирования и интегрирования.

Условия, наложенные на f , по-видимому, можно несколько ослабить или заменить другими достаточными условиями разложимости f в ряд (9) с оценкой $C_n = o(n^{-1-\alpha})$, $n \rightarrow +\infty$, $\alpha > 0$.

На первый взгляд, теоремы 1 или 2 не дают существенной информации об остатке $R_N(f)$, так как коэффициенты Фурье C_n в свою очередь, выражаются интегралом (8), не пресе исследуемого. Однако

для коэффициентов C_n существуют очень эффективные способы получения асимптотических формул, например, в [3]. Заменяя в (7) C_{2Nk} их асимптотическими формулами, находим асимптотику $R_N(f)$ при $N \rightarrow +\infty$. Из результатов работы [3] вытекает

Тесрема 3. Если f - аналитическая функция комплексного переменного в области D , содержащей отрезок $[-1, 1]$, то ряды (7) и (10) одновременно являются асимптотическими при $N \rightarrow +\infty$.

Доказательство этой теоремы следует из того, что при наложенных условиях на функцию f существует такое число $0 < \tau < 1$, что $C_n = O(\tau^n)$ при $n \rightarrow +\infty$. Из этого условия вытекает, что последовательность $(C_{2Nk})_{k=1,2,\dots}$ образует асимптотическую шкалу при $N \rightarrow +\infty$, а остаток ряда (7) имеет необходимую оценку.

Если f неаналитическая на $[-1, 1]$, тогда ряд (7) вообще не асимптотический, но его легко можно преобразовать в асимптотический ряд.

Теорема 4. Пусть при $n \rightarrow +\infty$ коэффициенты Фурье ряда (9) имеют асимптотическое представление

$$C_n \sim \sum_{m=0}^{+\infty} a_m n^{-\mu_m}, \quad 1 < \mu_0 < \mu_1 < \dots, \quad (12)$$

где a_m не зависят от n . Тогда

$$R_N(f) \sim \pi \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_m \eta(\mu_m)}{(2N)^{\mu_m}}, \quad N \rightarrow +\infty, \quad (13)$$

$$\eta(\mu_m) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\mu_m}} = (1 - 2^{-\mu_m}) \zeta(\mu_m), \quad (14)$$

где $\zeta(z)$ - дзета функция Римана.

Доказательство теоремы 4 получается подстановкой асимптотического ряда (12) в (7) и перестановкой порядка суммирования. На практике чаще всего асимптотические формулы вида (12) встречаются в следующих случаях.

а) Коэффициенты Фурье C_n имеют асимптотику (12), если функция f или ее производные имеют скачки в некоторых точках на $]-1, 1[$. Для нахождения разложения (12) можно применить методику расчета, данную в книге [4] для рядов Фурье в случае функции $F(\theta) = f(\cos \theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

б) В случае, когда $f(x)$ в конце $x = -1$ ($x = 1$) имеет интегрируемую особенность, асимптотические разложения коэффициентов

C_n можно найти по методике работы [3].

Из приведенных теорем видно, что главный член асимптотики

$R_N(f)$ при $N \rightarrow +\infty$ в случае аналитической функции f на $[-1, 1]$ совпадает с πC_{2N} . Если функция f неаналитическая на $[-1, 1]$, то асимптотика $R_N(f)$ по порядку совпадает с C_{2N} , но может отличаться от него числовым множителем. Из этих формул также видно, для каких сильноосциллирующих функций остаток $R_N(f)$ квадратуры не мал: число осцилляций вообще должно быть не менее, чем в два раза больше числа узлов N .

2. Случай полиномов Чебышева 2-го рода.

Пусть $a = -1$, $b = 1$, $\rho(x) = (1-x^2)^{1/2}$. Тогда система ортогональных полиномов — полиномы Чебышева I-го рода $U_n(x)$. В этом случае узлы $x_k = \cos \frac{\pi(k+1)}{N+1}$, а весовые коэффициенты $A_k = \frac{\pi}{N+1} \sin^2 \frac{\pi(k+1)}{N+1}$.

Лемма 2. Для любых целых неотрицательных m и s

$$R_N(U_m) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{если } m = 2(s+1)N + 2s, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{если } m = 2(s+1)N + 2s + 2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (I5)$$

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы I, только вместо рекуррентной формулы (5) используются две следующие:

$$\begin{aligned} U_{2N}(x) &= 2U_N(x)T_N'(x) - U_0(x), \\ U_{2N+\ell}(x) &= 2U_N(x)T_{N+\ell}'(x) + U_{\ell-2}(x), \quad \ell \geq 2. \end{aligned} \quad (I6)$$

Из (I6) имеем

$$R_N(U_{2N}) = 2 \int_{-1}^1 U_N(x) T_N'(x) \sqrt{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 U_N^2(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} R_N(U_{2N+2}) &= 2 \int_{-1}^1 U_N(x) T_{N+2}'(x) \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= -2 \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} U_N(x) T_{N+2}'(x) dx = - \int_{-1}^1 \frac{T_{N+2}^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Для $3 \leq \ell \leq 2N$

$$\begin{aligned} R_N(U_{2N+\ell}) &= 2R_N(U_N T_{N+\ell}') + R_N(U_{\ell-2}) = \\ &= 2 \int_{-1}^1 U_N(x) T_{N+\ell}'(x) \sqrt{1-x^2} dx = 2 \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) U_N(x) T_{N+\ell}'(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0. \end{aligned}$$

Для $\ell = 2N+2$ получаем $R_N(U_{4N+2}) = R_N(U_{2N}) = \frac{\pi}{2}$.

Для $\ell = 2N+4$ получаем $R_N(U_{4N+4}) = R_N(U_{2N+2}) = -\frac{\pi}{2}$.

Аналогично для $2N+5 \leq \ell \leq 4N+3$ получаем $R_N(U_{2N+\ell}) = 0$.

С помощью индукции по S устанавливаем справедливость формулы (15). Лемма доказана.

Теорема 5. Если f удовлетворяет условиям теоремы 1, то

$$R_N(f) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} [\beta_{2kN+2(k-1)} + \beta_{2kN+2k}], \quad (17)$$

где

$$\beta_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) U_n(x) \sqrt{1-x^2} dx - \quad (18)$$

коэффициенты Фурье разложения функции f в ряд по полиномам Чебышева второго рода. Ряд (17) абсолютно сходится.

Доказательство теоремы 5 вытекает из леммы 2 и линейности R_N .

Из теоремы 5 можно найти асимптотическое разложение остатка $R_N(f)$ аналогично как для полиномов $T_n(x)$ в пункте I. Соответствующие теоремы и формулы мы здесь не приводим.

Если вместо полиномов Чебышева брать полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, то для $R_N(f)$ также может быть построен сходящийся ряд вида

$$R_N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2N+k} R_N(P_{2N+k}^{(\alpha, \beta)}), \quad (19)$$

из которого можно получить асимптотику $R_N(f)$ при $N \rightarrow +\infty$. Однако в этом случае $R_N(P_{2N+k}^{(\alpha, \beta)}) \neq 0$, $k=0, 1, \dots$. Поэтому все формулы более громоздкие, и мы их здесь не приводим.

3. Примеры.

$$1^\circ f(x) = x \operatorname{tg} x. \quad R_N(f) = \int_{-1}^1 \frac{x \operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k).$$

Для коэффициентов c_n разложения в ряд по полиномам Чебышева I-го рода асимптотические формулы согласно [3] получаются с учетом вклада особых точек функции $z \operatorname{tg} z$, лежащих на конфокальных эллипсах

$$z = z(t) = \frac{1}{2} \left[z_0 e^{it} + \frac{1}{z_0} e^{-it} \right], \quad t \in]-\pi, \pi[\quad (20)$$

с минимальным $z_0 \in]0, 1[$. Воспользуемся следующим результатом из [3]. Пусть $f(z)$ — аналитическая внутри эллипса (20) и на этом

эллипсе имеет особые точки

$$z_k = \frac{1}{2} (z_0 e^{i\alpha_k} + \frac{1}{z_0} e^{-i\alpha_k}) = \frac{1}{2} (s_k + \frac{1}{s_k}), \quad k=1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

в окрестности каждой из которых имеет место представление

$$f(z) = A_k (z - z_k)^{-\mu_k} [1 + \alpha_k (z - z_k) + \dots], \quad A_k \neq 0, \mu_k \neq 0, -1, -2, \dots \quad (22)$$

Тогда при $n \rightarrow +\infty$,

$$C_n \sim \frac{2(n-1)!}{\sqrt{n} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{\Gamma(\mu_k)} (2n)^{\mu_k} (s_k - \frac{1}{s_k})^{-\mu_k} s_k^n, \quad (23)$$

где $s_k = z_0 \exp(i\alpha_k)$, $-\pi < \alpha_k \leq \pi$.

Для нашего примера $z_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $A_{1,2} = \text{Res}[z \operatorname{tg} z; \pm \frac{\pi}{2}] = \mp \frac{\pi}{2}$; $z_0 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$. Из (23) получаем

$$C_n \sim \frac{\pi n! [1 + (-1)^n]}{\sqrt{n} \Gamma(n+\frac{1}{2}) \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right)^n. \quad (24)$$

По теореме I

$$R_N(f) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{(2N)!}{\Gamma(2N+\frac{1}{2})} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right)^{2N} \sim \frac{4\pi}{\sqrt{\pi^2 - 4}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} \right)^{2N} \quad (25)$$

2° $f(x) = \frac{\cos ax}{\sqrt{1+x^2}}$. Особые точки $z_{1,2} = \pm i$ - точки ветвления.

$S_1 = (\sqrt{2}-1) \exp(-\frac{i\pi}{4})$, $S_2 = \bar{S}_1 = (\sqrt{2}-1) \exp(\frac{i\pi}{4})$, $A_1 = \bar{A}_2 = \frac{cha}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{i\pi}{4})$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}$. После аналогичных вычислений получаем

$$C_n \sim \frac{2^{5/4} (n-1)! cha (\sqrt{2}-1)^n \cos \frac{\pi n}{2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \sim \frac{2^{5/4} cha (\sqrt{2}-1)^n \cos \frac{\pi n}{2}}{\sqrt{\pi n}}, \quad (26)$$

$$R_N(f) \sim (-1)^N 2^{3/4} cha \frac{(\sqrt{2}-1)^{2N}}{\sqrt{\pi N}}. \quad (27)$$

3° $f(x) = J_0(x)$, где J_0 - функция Бесселя.

Так как f - целая аналитическая функция порядка I, то по формулам, приведенным в [3], получаем

$$C_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-n+1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(2\ell+n)! \Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{(2\ell)!(n+\ell)!} a_{n+2\ell}, \quad (28)$$

где a_m - коэффициент ряда Тейлора разложения $f(x) = J_0(x)$ в окрестности $x=0$. Подставляя этот коэффициент в (28), получаем

$$C_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-2n+1} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{m\ell} (2\ell+2n)! \Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{(2\ell)!(2n+\ell)!(n+\ell)!^2 4^{1+\ell}}. \quad (29)$$

Ряд в правой части этого равенства можно преобразовать в гипер-

гесметрическую функцию

$$C_{2n} \sim \frac{(-1)^n 2}{16^n (n!)^2} F_2 \left[\begin{matrix} n + \frac{1}{2}; \\ n+1, 2n+1; \end{matrix} -\frac{1}{4} \right] \sim \frac{(-1)^n 2}{16^n (n!)^2}. \quad (30)$$

Таким образом,

$$R_N(f_0) = \int_{-1}^1 \frac{f_0(x) dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_0(x_k) \sim \frac{(-1)^N 2}{16^N (N!)^2}, N \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Список литературы.

1. М.А.Белов, Т.Т.Дирулис. Уточнение квадратурных формул методом асимптотических разложений // Латв. математ. ежегодник.—Рига: Зинатне, 1977.—Вып.21.— С.171-186.
2. К.И.Бабенко. Основы численного анализа.—М.: Наука, 1986.
3. Т.Т.Дирулис. Асимптотические представления коэффициентов Фурье в ряды по классическим ортогональным полиномам. Латв. математ. ежегодник.—Рига: Зинатне, 1979.—Вып.23.— С.37-51.
4. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.III.—Москва, 1968.—655 с.

T.Čirulis. Asymptotic of the remainder term of Gaussian quadratures

Abstracts. This paper deals with asymptotics of the remainder term of Gaussian quadratures. When the number of interpolation points increases unboundedly. The relations between these asymptotics and Fourier coefficients of the function under integration are investigated. The results of the paper can be used to obtain the asymptotics of the remainder from the asymptotics of the Fourier coefficients. AMSSC 65D52.

T.Čirulis. Gausa tipa kvadrātūru formulu atlikumu asimptotika.

Anotācija. Tiek apskatītas Gausa kvadrātūru atlikuma locekļa asimptotiskās izteiksmes, kad mezglu punktu skaits neierobežoti aug, un pierādīts, kā šīs asimptotiskās izteiksmes ir saistītas ar integrējamās funkcijas Furjē koeficientiem. Iegūtie rezultāti dod iespēju kvadrātūru atlikuma asimptotiskās izteiksmes noteikšanai izmantot Furjē koeficientu asimptotiskās formulas.

T.Čirulis

Latvijas Universitāte, Rīga 226098, Latvija

РАСЧЁТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ И ФОРМ ОРТОТРОННЫХ
КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Т.Пирулис, В.Нейманис

Аннотация. Рассмотрен метод аппроксимации с помощью полиномов Чебышева в задаче для отыскания собственных частот и форм усеченной конической оболочки, изготовленной из ортотропного материала, по достаточно точной математической модели Тимошенко, учитывающей как поперечный сдвиг, так и инерцию вращения элемента оболочки. Метод без существенных усложнений может быть применен и к более сложным оболочечным конструкциям.
УДК 519.63 : 539.3

I. Математическая постановка задачи и выбор
безразмерных величин.

Пусть система криволинейных координат (α, φ) конической срединной поверхности оболочки выбрана, как показано на рис. I.

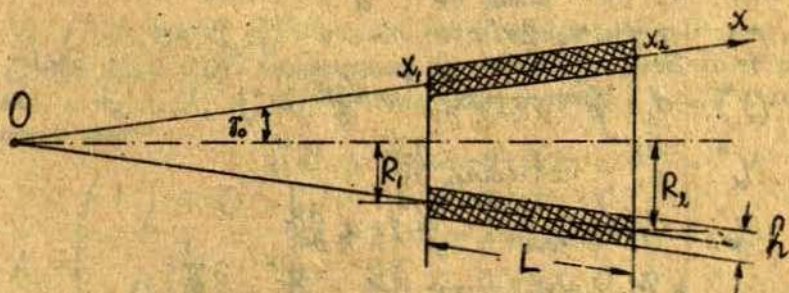


Рис. I.

Тогда перемещение элемента оболочки характеризуется пяти-мерным вектором $(u_\alpha^*, u_\varphi^*, w^*, \psi_\alpha^*, \psi_\varphi^*)$, где $u_\alpha^*, u_\varphi^*, w^*$ — размерные перемещения точек срединной поверхности в направлениях координатной линии α , координатной линии φ и по внутренней нормали оболочки соответственно, а ψ_α^* и ψ_φ^* — углы поворота нормального элемента оболочки.

Как показано в [1] по теории Тимошенко задача колебаний конической оболочки с несосимметричным нагружением сводится к следующей системе 5 уравнений с частными производными.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha N_\alpha^*) - N_\varphi^* + \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial S_{\alpha\varphi}^*}{\partial \varphi} + \frac{\alpha}{\rho h c^2} P_\alpha^* \\ \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 u_\varphi^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha S_{\alpha\varphi}^*) + \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial N_\varphi^*}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta_0 Q_\varphi^* + S_{\alpha\varphi}^* + \frac{\alpha}{\rho h c^2} P_\varphi^* \\ \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha Q_\alpha^*) - \operatorname{ctg} \theta_0 N_\varphi^* + \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial Q_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{\alpha}{\rho h c^2} q^* \\ \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_\alpha^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha M_\alpha^*) + \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial M_{\varphi\alpha}^*}{\partial \varphi} - M_\varphi^* - \frac{12\alpha}{h^2} Q_\alpha^* \\ \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_\varphi^*}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha M_{\alpha\varphi}^*) + \frac{1}{\sin \theta_0} \frac{\partial M_\varphi^*}{\partial \varphi} + M_{\varphi\alpha}^* - \frac{12\alpha}{h^2} Q_\varphi^* \end{aligned} \quad (I)$$

где $(P_\alpha^*, P_\varphi^*, q^*)$ — размерный вектор внешнего нагружения,

$$c^2 = \frac{E_1}{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) \rho},$$

$$\begin{aligned} N_\alpha^* &= \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \alpha} + d_2 \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{u_\alpha^*}{\alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\alpha} w^* \right) \\ N_\varphi^* &= d_2 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \alpha} + d_1 \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{u_\alpha^*}{\alpha} + \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\alpha} w^* \right) \\ S_{\alpha\varphi}^* &= d_4 \left(\frac{\partial u_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi^*}{\alpha} \right) \\ Q_\alpha^* &= d_3 \left(\psi_\alpha^* + \frac{\partial w^*}{\partial \alpha} \right) \\ Q_\varphi^* &= d_5 \left(\psi_\varphi^* + \frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial w^*}{\partial \varphi} - \frac{\operatorname{ctg} \theta_0}{\alpha} u_\varphi^* \right) \\ M_\alpha^* &= \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial \alpha} + d_2 \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial \psi_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{\psi_\alpha^*}{\alpha} \right) \\ M_\varphi^* &= d_1 \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial \psi_\varphi^*}{\partial \varphi} + \frac{\psi_\alpha^*}{\alpha} \right) + d_2 \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial \alpha} \\ M_{\varphi\alpha}^* &= M_{\alpha\varphi}^* = d_4 \left(\frac{1}{\alpha \sin \theta_0} \frac{\partial \psi_\alpha^*}{\partial \varphi} - \frac{\psi_\varphi^*}{\alpha} + \frac{\partial \psi_\varphi^*}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 - параметры физических свойств ортотропной оболочки, выражающиеся через модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона следующим образом:

$$d_1 = \frac{E_1}{E_1}, d_2 = \nu_{12}, d_3 = \frac{\kappa^2 G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1}, d_4 = \frac{G_{12}(1-\nu_{12}\nu_{21})}{E_1}, \quad (3)$$

$$d_5 = \frac{1}{E_1} \kappa^2 G_{23}(1-\nu_{12}\nu_{21}), \quad E_1 = E_\alpha, \quad E_2 = E_\varphi,$$

а κ^2 - коэффициент сдвига, для которого в зависимости от выбранной модели может быть принято одно из следующих значений:

$$\kappa^2 = 1; \frac{5}{6}; \frac{4}{9}.$$

После перехода к безразмерным величинам по формулам

$$\varepsilon = \frac{h^2}{12R^2}, \quad R = \frac{1}{2}(R_1 + R_2),$$

($R_1 < R_2$ - размерные радиусы оснований конической поверхности)

$$x = \frac{\alpha}{R\sqrt{E}}, \quad u = \frac{u^*}{R}, \quad v = \frac{v^*}{R}, \quad w = \frac{w^*}{R}, \quad \theta_x = \psi_\alpha^* \sqrt{E},$$

$$\theta_\varphi = \psi_\varphi^* \sqrt{E}, \quad p_x = \frac{h(1-\nu_{12}\nu_{21})}{12RE_1} p_\alpha^*, \quad p_\varphi = \frac{h(1-\nu_{12}\nu_{21})}{12RE_1} p_\varphi^*, \quad (4)$$

$$q = \frac{h(1-\nu_{12}\nu_{21})}{12RE_1} q^*, \quad r = \frac{tc}{R} = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}$$

Система (1), (2) может быть записана в матричном виде

$$\varepsilon x \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = A_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial U}{\partial x} \right) + A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ A_3 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \varphi} + A_4 \frac{\partial U}{\partial \varphi} + A_5 U + x Q, \quad (5)$$

где $U = (u, v, w, \theta_x, \theta_\varphi)^T$ - искомый безразмерный вектор-столбец, $Q = (p_x, p_\varphi, q, 0, 0)^T$ - безразмерный вектор-столбец внешнего нагружения, а $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ - квадратные матрицы (5×5) следующего вида:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & d_4 & 0 \\ & d_3 & 1 \\ 0 & & & d_4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_2 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_2 x & 0 & 0 & d_3 x & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{1}{x \sin \vartheta_0} \begin{pmatrix} d_4 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & d_4 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$A_4 = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_5 x & 0 & 0 \\ 0 & -a_5 x & 0 & 0 & \frac{d_5 x}{\sin \vartheta_0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 0 & -\frac{d_5 x}{\sin \vartheta_0} & a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$A_5 = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} -d_1 & 0 & -d_1 x & 0 & 0 \\ 0 & -(d_5 x^2 + d_4) & 0 & 0 & d_5 x x \\ -d_1 x & 0 & -d_1 x^2 & d_3 x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(d_1 + d_3 x^2) & 0 \\ 0 & d_5 x x & 0 & 0 & -(d_4 + d_3 x^2) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В матрицах (6) - (9) введены дополнительные обозначения

$$a_1 = \frac{d_1 + d_4}{\sin \vartheta_0}, \quad a_2 = \frac{d_2 + d_4}{\sin \vartheta_0}, \quad a_5 = \frac{d_1 + d_5}{\sin \vartheta_0}, \quad x = \operatorname{ctg} \vartheta_0. \quad (10)$$

Для задачи на собственные частоты и формы конической оболоч-
ки полагают в уравнении (5) $Q \equiv 0$ и $\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = -\omega^2 U$, где ω —
частота колебания. Для удобства дальнейших расчетов применим
еще подстановку $\lambda = \varepsilon \omega^2$, с помощью которой мы избавляемся
от малого параметра ε . Вместо (5) получаем уравнение

$$L_1 U = -\lambda x U, \quad (11)$$

где оператор

$$L_1 = A_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) + A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + A_3 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} + A_4 \frac{\partial}{\partial \varphi} + A_5. \quad (12)$$

К уравнению (II) задаются ещё граничные условия. В теории С.П.Тимошенко все величины, задаваемые на торцах, выражаются через линейную комбинацию перемещений и их первых производных по координатам. Учитывая это, в программах расчета собственных колебаний в неосесимметричном случае целесообразно выбрать некоторое число наиболее употребительных граничных условий, переименовать их, и при пользовании программой счёта указать лишь номер типа граничных условий. Будем считать, что после перехода к безразмерным координатам по формулам (4) на каждом торце $X = X_i = d_i / R(E)$, $i=1,2$, что соответствует уравнению в размерных координатах $\alpha = i$, могут быть заданы 5 из следующих десяти однородных граничных условий:

$$w=0, u=0, v=0, \theta_x=0, \theta_\varphi=0, N_x=0, Q_x=0, M_x=0, S_{x\varphi}=0, M_{x\varphi}=0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \left(\frac{1}{x \sin \theta_0} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{x} + \frac{w}{x \tan \theta_0} \right), \\ M_x &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + d_2 \left(\frac{1}{x \sin \theta_0} \frac{\partial \theta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\theta_x}{x} \right), \\ S_{x\varphi} &= d_4 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \theta_0} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{x} \right), \\ M_{x\varphi} &= d_4 \left(\frac{\partial \theta_\varphi}{\partial x} + \frac{1}{x \sin \theta_0} \frac{\partial \theta_x}{\partial \varphi} - \frac{\theta_\varphi}{x} \right), \\ Q_x &= d_3 \left(\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Нумерация наиболее важных на практике 8 способов закрепления каждого из двух торцов приведена в таблице I.

Таким образом, задача сводится к нахождению собственных значений λ уравнения (II), удовлетворяющего на каждом конце, т.е., при $X = X_1$ и $X = X_2$ одной из систем 5 граничных условий, приведенных в таблице I.

Граничные условия на торце

№	Название способа крепления.	Крайвые условия при $X = X_i$.
1.	Полностью защемленный край	$u = v = w = \theta_x = \theta_\varphi = 0$
2.	Защемленный край, свободный в направлении x	$v = w = \theta_x = \theta_\varphi = N_x = 0$
3.	Опертый край, свободный в тангенциальных направлениях	$w = N_x = M_x = S_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$
4.	Опертый неподвижный край	$u = v = w = M_x = M_{x\varphi} = 0$
5.	Опертый край, свободный в направлении x	$v = w = N_x = M_x = M_{x\varphi} = 0$
6.	Защемленный край, свободный в тангенциальных направлениях	$w = \theta_x = N_x = S_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$
7.	Защемленный край, свободный в направлении φ	$u = w = \theta_x = S_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$
8.	Свободный край	$Q_x = N_x = M_x = S_{x\varphi} = M_{x\varphi} = 0$

Эта двумерная задача сводится к одномерной с помощью подстановки $U = \exp(im\varphi)U_i$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Для избавления в уравнениях от мнимой единицы i применим замену $U_i = \tilde{E}V$, где

$$\tilde{E} = \text{diag}(1, -i, 1, 1, -i), \quad V = (v_1, v_2, \dots, v_5)^T. \quad (15)$$

Тогда вместо (II) получим уравнение

$$LV = -\lambda x V, \quad (16)$$

где

$$L = A_0 \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} \right) + (A_1 + m\tilde{A}_3) \frac{d}{dx} - m\tilde{A}_4 - m^2 A_2 + A_5. \quad (17)$$

Матрицы $\tilde{A}_3 = -i\tilde{E}^{-1}A_3\tilde{E}$, $\tilde{A}_4 = i\tilde{E}^{-1}A_4\tilde{E}$, (18)

а $A_k, k=0,1,\dots,5$, — определены формулами (6) — (9).

Рассмотрим, как меняются от этих замен граничные условия.

После вышевведенных замен переменных вместо (формулы (14) (в которых опущен множитель $\exp(im\varphi)$) имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_x &= \frac{dv_1}{dx} + d_2 \left(\frac{1}{x \sin \theta_0} v_2 + \frac{v_1}{x} + \frac{v_3}{x \tan \theta_0} \right) \\ \tilde{M}_x &= \frac{dv_4}{dx} + d_2 \left(\frac{m}{x \sin \theta_0} v_5 + \frac{v_4}{x} \right) \\ \tilde{S}_{x\varphi} &= -id_4 \left(\frac{dv_2}{dx} - \frac{m}{x \sin \theta_0} v_1 - \frac{v_2}{x} \right) \\ \tilde{M}_{x\varphi} &= -id_4 \left(\frac{dv_5}{dx} - \frac{m}{x \sin \theta_0} v_4 - \frac{v_5}{x} \right) \\ \tilde{Q}_x &= d_3 \left(v_4 + \frac{dv_3}{dx} \right).\end{aligned}\quad (19)$$

Граничные условия к уравнению (16) можно получить из таблицы 1, заменив функции $U, v, w, \theta_x, \theta_\varphi, N_x, M_x, S_{x\varphi}, M_{x\varphi}$ и Q_x на $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4, \tilde{v}_5, \tilde{N}_x, \tilde{M}_x, \tilde{S}_{x\varphi}, \tilde{M}_{x\varphi}$ и $\tilde{Q}_x$ соответственно. В дальнейшем таблицу с так замененными функциями будем называть таблицей 2.

2. Доказательство вещественности собственных значений

Определим скалярное произведение двух вектор-функций $U = \{u_1, u_2, \dots, u_5\}$ и $V = \{v_1, v_2, \dots, v_5\}$ с помощью следующей формулы

$$(U, V) = \int_{x_1}^{x_2} \{U, V\} dx, \quad (20)$$

где
$$\{U, V\} = \sum_{k=1}^5 u_k(x) \overline{v_k(x)}, \quad (21)$$

$\overline{v_k(x)}$ — функция, комплексно-сопряженная с $v_k(x)$.

Теорема I. Для того, чтобы оператор L , определяемый равенством (17), был самосопряженным, т.е., чтобы имело равенство

$$(LU, V) = (U, LV) \quad (22)$$

в классе дважды непрерывно дифференцируемых вектор-функций,

достаточно выполнения условия

$$S \equiv \left(\left\{ A_0 x \frac{dU}{dx}, V \right\} - \left\{ U, A_0 x \frac{dV}{dx} \right\} + \left\{ (A_1 + m A_3) U, V \right\} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \quad (23)$$

Доказательство. Используя определение скалярного произведения, обозначение (21) и представление (17) оператора L после соответствующего интегрирования по частям, получаем формулу $(L, UV) = S + (U, LV)$, из которой следует (23).

Теорема 2. Все собственные значения λ вещественны для уравнения (16) с граничными условиями из таблицы 2 (это таблица 1, в которой функции $u, v, w, \theta_x, \theta_y, N_x, M_x, S_{xy}, M_{xy}$ и Q_x заменены на $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \tilde{N}_x, \tilde{M}_x, \tilde{S}_{xy}, \tilde{M}_{xy}$ и $\tilde{Q}_x$ соответственно).

Для доказательства этого утверждения необходимо проверить, что для любых двух вектор-функций U и V , которые удовлетворяют граничным условиям таблицы 2, имеет место равенство (23), из которого следует самосопряженность оператора L и, следовательно, вещественность λ . Проверку равенства (23) необходимо провести отдельно для каждого из восьми способов закрепления торцов.

Для первого случая, где концы оболочки полностью заземлены, при $x = x_k, k=1,2$, имеет место равенства $U=V=0$ и (23) заведомо выполняется. Для краткости изложения докажем выполнения равенства (23) только для случая 2 (заземленный край, свободный в направлении x) и случая 8 (свободный край), так как в остальных случаях проверка аналогична.

Проверка случая 2. Пусть U и V в точках $x = x_k, k=1,2$, удовлетворяют условиям $u_2 = v_2 = u_3 = v_3 = u_4 = v_4 = u_5 = v_5 = 0$. Из условия $N_x = 0$ и формул (19) вытекают два равенства в точках $x = x_k$:

$$\frac{dv_1}{dx} + d_2 \frac{v_1}{x} = 0, \quad \frac{du_1}{dx} + d_2 \frac{u_1}{x} = 0 \quad (24)$$

и еще два аналогичных равенства относительно комплексно-сопряженных функций. Непосредственным вычислением находим, что в точках $x = x_k$

$$\left\{ A_0 x \frac{dU}{dx}, V \right\} - \left\{ U, A_0 x \frac{dV}{dx} \right\} = x \left(\frac{du_1}{dx} \bar{v}_1 - u_1 \frac{d\bar{v}_1}{dx} \right). \quad (25)$$

Подставляя в правой части формулы (25) вместо производных их значения из (24), получаем, что правая часть (25) в точках X_K , $K=1, 2$, обращается в нуль. Аналогичным расчетом получаем, что в точках $X=X_K$

$$\{(A_1 + m\tilde{A}_3)U, V\} = ma_2[(u_2\bar{v}_1 - u_1\bar{v}_2) + (u_5\bar{v}_4 - u_4\bar{v}_5)] + \\ + d_2x(u_3\bar{v}_1 - u_1\bar{v}_3) + d_3x(u_4\bar{v}_5 - u_5\bar{v}_4) = 0, \quad (26)$$

ибо $u_K = \bar{v}_K = 0$ для $K=2, 3, 4, 5$. Равенство (23) для случая 2 доказано.

Проверка случая 8. Из равенств $\tilde{N}_x = \tilde{M}_x = \tilde{S}_{x\varphi} = \tilde{M}_{x\varphi} = \tilde{Q}_x = 0$ для функций $u_i, v_i, \bar{u}_i$ и $\bar{v}_i$, где $i=1, 2, 3, 4, 5$, получаем равенства (выписываем их только для u_i , остальные аналогичные)

$$\frac{du_1}{dx} + d_2\left(\frac{m}{x\sin\alpha_0}u_2 + \frac{u_1}{x} + \frac{ctg\alpha_0}{x}u_3\right) = 0 \\ \frac{du_4}{dx} + d_2\left(\frac{m}{x\sin\alpha_0}u_5 + \frac{u_4}{x}\right) = 0 \\ \frac{du_2}{dx} - \frac{m}{x\sin\alpha_0}u_1 - \frac{u_2}{x} = 0 \\ \frac{du_5}{dx} - \frac{m}{x\sin\alpha_0}u_4 - \frac{u_5}{x} = 0 \\ \frac{du_3}{dx} + u_4 = 0. \quad (27)$$

Непосредственными расчетами получаем, что

$$\Phi = \{A_0 x \frac{dU}{dx}, V\} - \{U, A_0 x \frac{dV}{dx}\} = x A_0 Z_0, \quad (28)$$

где Z_0 - диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся функции $\frac{du_k}{dx}\bar{v}_k - u_k\frac{d\bar{v}_k}{dx}$, $k=1, 2, 3, 4, 5$. Исключая из правой части (28) производные с помощью равенств (27), получаем после несложных, но несколько громоздких вычислений

$$\Phi = a_1 m(u_1\bar{v}_2 - \bar{v}_1 u_2) + d_2 x(u_1\bar{v}_3 - u_3\bar{v}_1) + d_3 x(u_4\bar{v}_5 - u_5\bar{v}_4) + a_2 m(u_4\bar{v}_5 - u_5\bar{v}_4). \quad (29)$$

Сравнивая (29) с (26), находим, что при $X=X_K$

$$\Phi = -\{(A_1 + m\tilde{A}_3)U, V\}. \quad (30)$$

Равенство (30) эквивалентно (23). Теорема доказана.

Так как одномерный оператор L самосопряжен для любого $m=0, 1, \dots$, то собственные значения двумерной задачи (II) с граничными условиями из таблицы I также вещественны, а разным собо-

твенным значениям соответствующие собственные вектор-функции ортогональны с весом X на промежутке $[x_1, x_2]$ в смысле скалярного произведения (20)

3. Метод аппроксимаций Чебышева для решения задачи (16).

Без ограничения общности, допустим, что $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.
Общий случай к этому приводится подстановкой

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2} y + \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y \in [-1, 1]. \quad (31)$$

Матричное уравнение (16) для удобства в дальнейшем представим в виде

$$A_0 \frac{d^2 V}{dx^2} + B(x) \frac{dV}{dx} + C(x)V = 0, \quad (32)$$

где

$$B(x) = \frac{1}{x} (A_0 + A_1 + m \tilde{A}_3) \quad (33)$$

$$C(x) = \frac{1}{x} (A_5 - m \tilde{A}_4 - m^2 A_2) + \lambda E, \quad (34)$$

а граничные условия -

$$\Gamma_1(x) \left(v_1(x), v_2(x), \dots, v_5(x), \frac{dv_1}{dx}, \dots, \frac{dv_5}{dx} \right)^T \Big|_{x=-1} = 0, \quad (35)$$

$$\Gamma_2(x) \left(v_1(x), v_2(x), \dots, v_5(x), \frac{dv_1}{dx}, \dots, \frac{dv_5}{dx} \right)^T \Big|_{x=1} = 0,$$

где $\Gamma_1(x)$ и $\Gamma_2(x)$ - матрицы порядка 5×10 , составленные из строчек следующей квадратичной матрицы 10 порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_2}{x} & \frac{md_2}{x \sin \bar{\theta}_0} & \frac{d_2}{x \tan \bar{\theta}_0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d_2}{x} & \frac{d_2 m}{x \sin \bar{\theta}_0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{md_4}{x \sin \bar{\theta}_0} & \frac{d_4}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{md_4}{x \sin \bar{\theta}_0} & \frac{d_4}{x} & 0 & 0 & 0 & 0 & -d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Так как каждая строка соответствует одному из разложений функций $U_1(x), \dots, U_5(x), \bar{N}_x, \bar{M}_x, S_{x\varphi}, \bar{M}_{x\varphi}, Q_x$ по $U_k(x)$ и $\frac{dU_k(x)}{dx}$, $k=1, 2, \dots, 5$ согласно формулам (19), то выбор соответствующих строк в матрицах $\Gamma_1(x)$ и $\Gamma_2(x)$ осуществляется в зависимости от вида граничного условия по таблице 2. Например, матрицы $\Gamma_1(x) = \Gamma_2(x)$ составлены из 1 - 5 строки матрицы (36), если на обоих торцах выполняются граничные условия 1; матрица $\Gamma(x)$ составлена из 1 - 5 строки матрицы (36), а $\Gamma_2(x)$ — из 2 - 6 строк матрицы (36), если на торце $x = -1$ выполняется условие 1, а на торце $x = 1$ — условие 2.

Решения $V(x) = (U_1(x), U_2(x), \dots, U_5(x))^T$ задачи (32) и (35) будем искать в приближенном виде

$$V(x) \approx V_n(x) = (U_1^{(n)}(x), U_2^{(n)}(x), \dots, U_5^{(n)}(x))^T, \quad (37)$$

где

$$U_k^{(n)} = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_{kj}(x_j) U_k(x_j) T_n'(x_j)}{\varphi_{kj}(x_j)(x-x_j) T_n'(x_j)}, \quad k=1, 2, \dots, 5. \quad (38)$$

Очевидно, при таком выборе $V_n(x)$ имеет место равенство

$$V(x_l) = V_n(x_l), \quad l=1, 2, \dots, n, \quad (39)$$

где $U_k(x_j)$ — значения искомых функций в нулях полинома Чебышева $T_n'(x)$:

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (40)$$

Функции $\varphi_{kj}(x)$, $k=1, \dots, 5$, $j=1, \dots, n$ выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия (35). Например, если $\varphi_{kj}(x)$ искать в виде

$$\varphi_{kj}(x) = x^2 + p_{kj}x + q_{kj}, \quad (41)$$

то необходимо найти 10 n неизвестных p_{kj}, q_{kj} из системы алгебраических уравнений, полученной приравняв к нулю коэффициенты при $U_k(x_j)$ в системе (35).

Если на обоих торцах выполняются граничные условия 1, тогда для всех $k=1, 2, \dots, 5$ и $j=1, 2, \dots, n$ получаем

$$p_{kj} = 0, \quad q_{kj} = -1, \quad \varphi_{kj}(x) = x^2 - 1. \quad (42)$$

Если на торце $x = -1$ выполняется условие 1, а на торце $x = +1$ — условие 2, то

$$p_{kj} = 0, \quad q_{kj} = -1, \quad \varphi_{kj}(x) = x^2 - 1, \quad k=2, 3, 4, 5, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (43)$$

$$p_{1j} = -\frac{2(1-x_j)}{(2\alpha_2 + 2n^2 + 1)(1-x_j) - 2}, \quad (44)$$

$$\varphi_{1j} = x^2 + p_{1j}x + q_{1j} = -1. \quad (45)$$

Дискретизируя задачу (32), получим систему

$$A_0 \frac{d^2 V(x_\ell)}{dx^2} + B(x_\ell) \frac{dV(x_\ell)}{dx} + C(x_\ell) V(x_\ell) = 0, \quad (46)$$

где $\ell = 1, 2, \dots, n$, $B(x_\ell)$ и $C(x_\ell)$ — матрицы (33) и (34), вычисленные в точке $x = x_\ell$; $V(x_\ell)$ вычислена согласно формуле (39); $\frac{dV(x_\ell)}{dx}$ и $\frac{d^2 V(x_\ell)}{dx^2}$ — матрицы — столбцы, элементы которых определены следующим образом:

$$\frac{dV_\kappa(x_\ell)}{dx} = V_\kappa(x_\ell) \left[\frac{\varphi_{\kappa\ell}'(x_\ell)}{\varphi_{\kappa\ell}(x_\ell)} + \frac{x_\ell}{2(1-x_\ell^2)} \right] + \sum_{j \neq \ell}^n \frac{V_\kappa(x_j) \varphi_{\kappa j}(x_\ell) T_n'(x_\ell)}{\varphi_{\kappa j}(x_j) (x_\ell - x_j) T_n'(x_j)} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V_\kappa(x_\ell)}{dx^2} = & V_\kappa(x_\ell) \left[\frac{\varphi_{\kappa\ell}''(x_\ell)}{\varphi_{\kappa\ell}(x_\ell)} + \frac{x_\ell \varphi_{\kappa\ell}'(x_\ell)}{(1-x_\ell^2) \varphi_{\kappa\ell}(x_\ell)} + \frac{1-x_\ell^2}{3(1-x_\ell^2)^2} + \frac{x_\ell^2}{(1-x_\ell^2)^2} \right] + \\ & + \sum_{j \neq \ell}^n \frac{V_\kappa(x_j) T_n''(x_\ell)}{\varphi_{\kappa j}(x_j) (x_\ell - x_j) T_n'(x_j)} \left[2 \frac{\varphi_{\kappa j}'(x_\ell)}{1-x_\ell^2} + \frac{x_\ell}{1-x_\ell^2} \frac{\varphi_{\kappa j}(x_\ell)}{\varphi_{\kappa j}(x_j)} - \frac{2}{x_\ell - x_j} \frac{\varphi_{\kappa j}(x_\ell)}{\varphi_{\kappa j}(x_j)} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Система (46) состоит из $5n$ линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$v_1(x_1), \dots, v_1(x_n), v_2(x_1), \dots, v_2(x_n), \dots, v_5(x_1), \dots, v_5(x_n).$$

Поскольку матрица (34) содержит слагаемое λE , то систему (46) необходимо решать как задачу на отыскание собственных значений λ_s , $s = 1, 2, \dots, 5n$, и соответствующих им собственных векторов $(v_1^{(s)}(x_1), \dots, v_1^{(s)}(x_n), \dots, v_5^{(s)}(x_1), \dots, v_5^{(s)}(x_n))$, где $v_\kappa^{(s)}(x_j)$ — дискретные значения искомых функций $v_\kappa^{(s)}(x)$ в n узловых точках

$$x_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, 5n.$$

После нахождения безразмерных собственных значений размерные частоты ω_s в Гц конической оболочки вычисляются по формуле

$$\omega_s = \frac{\sqrt{\lambda_s}}{2\pi \sqrt{ER}} \sqrt{\frac{E_1}{\rho(1-\nu_{12}\nu_{21})}}, \quad s = 1, 2, \dots, 5n. \quad (49)$$

4. Численные результаты

Для решения системы (46) по вышеизложенному методу с использованием многочленов Чебышева составлены программы расчёта на ЭВМ типа ЕС на языке "Фортран". Предварительные расчёты проведены для конической оболочки со следующими физическими параметрами: $E_{12} = E_2 = 0,20 \cdot 10^7$ кгс/см²; $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,769 \cdot 10^6$ кгс/см²;

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0,30; \quad \rho = 0,0077 \text{ кг/см}^3; \quad \kappa^2 = 1.$$

В первом варианте граничные условия на обоих торцах — № I

согласно таблице 2; (полностью заземленные края) и во втором варианте граничное условие на левом торце при $X=-1$ - №1, а на правом торце (при $X=1$) - №2 (заземленный край, свободный в направлении X).

Геометрические параметры следующие: высота оболочки $H = 305,0$ мм; радиус нижнего основания оболочки $R_2 = 78,669$ мм; толщина оболочки $h = 0,25$ мм; угол полураствора $\beta'_0 = 1^\circ$ или 5° ; число волн в окружном направлении $m = 5$; безразмерный параметр тонкости оболочки $\varepsilon = 0,9016 \cdot 10^{-5}$; число дискретных значений аргумента согласно данному методу $n = 20$ или 30 .

Размерные частоты ω_s (в Гц) даны в таблице 3. Полученные результаты отличаются от приведенных в [2] с относительной ошибкой не более, чем 0,5%.

Таблица 3.

Размерные частоты ω_s (в Гц) конической оболочки.

	I вариант				2 вариант
	$\beta'_0 = 1^\circ$		$\beta'_0 = 5^\circ$		$\beta'_0 = 5^\circ$
	$R_2 = 78,669$ мм $h = 0,25$ мм $m = 5$ $\varepsilon = 0,9016 \cdot 10^{-6}$		$R_2 = 78,669$ мм $h = 0,25$ мм $m = 5$ $\varepsilon = 0,1220 \cdot 10^{-5}$		$R_2 = 78,669$ мм $h = 0,25$ мм $m = 5$ $\varepsilon = 0,1220 \cdot 10^{-5}$
	$n = 20$	$n = 30$	$n = 20$	$n = 30$	$n = 30$
I	2	3	4	5	6
1	562,5	557,7	564,1	559,3	440,0
2	1262,2	1260,4	1167,5	1164,6	1013,4
3	2155,4	2154,2	1996,6	1993,6	1857,3
4	3118,8	3118,6	2932,3	2931,6	2832,9
5	4074,4	4075,4	3901,4	3901,9	3841,7
6	4965,6	4964,6	4846,7	4845,5	4813,3
7	5759,1	5759,4	5726,0	5726,1	5711,2
8	6445,7	6445,6	6517,0	6516,7	6510,9
9	7030,7	7029,9	7211,9	7211,7	7210,0
10	7524,5	7525,0	7814,6	7813,1	7812,9

Продолжение таблицы 3.

I	2	3	4	5	6
II	7953,2	7943,0	8320,7	8328,8	8328,7
I2	8269,3	8299,2	8847,5	8772,3	8772,0
I3	8758,9	8605,0	9108,5	9153,9	9153,3
I4	9059,1	8869,8	10073,2	9488,6	9487,8
I5	9987,7	9103,6	10470,9	9786,9	9786,2

Библиографический список

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек.- М.: 1972.-432 с.
2. Вибрации в технике: Справочник.-М.: Машиностроение, 1978.- Т.1.-352 с.

T.Cirulis, V.Neimanis Calculation of eigenvalues and eigenfunctions for orthotroph conic hulls.

Abstract. This paper discusses calculation of eigenvalues and eigenfunctions for cutted orthotroph conic hull using approximation with Chebishev polynomials. This is done by means of Timoshenko's model that counts on shiff of hull's element as well as on the rotation. AMSSC 65N25

T.Cirulis, V.Neimanis. Ortotropu konisku čaulu īpašfrekvenču un īpašformu aprēķināšana.

Anotācija. Rakstā ir aplūkots ortotropas koniskās čaulas īpašfrekvenču un īpašformu atrašana, izmantojot aproksimācijas metodi ar Čebiševa polinomiem. Minēto konisko čaulu pietiekami precīzi apraksta Timošenko matemātiskais modelis, kurā čaulas elementam ievērota pārbīde un rotācijas inerces moments.

T.Cirulis, V.Neimanis
Latvijas Universitāte, Rīga 226098, Latvija

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЯВНОЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ НАВЬЕ-СТОКСА

С. И. Мельни.

Аннотация. Доказана устойчивость, получена оценка скорости сходимости неявной линеаризованной разностной схемы для нестационарной задачи Навье-Стокса. Предложен способ решения получающейся системы уравнений. УДК 532.5.

Настоящая работа посвящена анализу неявной линейной разностной схемы для нестационарной задачи Навье-Стокса, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω , являющейся объединением конечного числа прямоугольников с соизмеримыми сторонами, параллельными осям координат, с условиями непротекания и прилипания на границе $\partial\Omega$ [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \sum_{k=1}^n u_k u_{x_k} + \text{grad } p &= F, \\ \text{div } u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $u = (u_1, u_2)$ - вектор скоростей, p - функция

гидростатического давления, ν — коэффициент кинематической вязкости.

Опишем процесс построения разностной схемы. Пусть U — пространство сеточных вектор-функций скорости, P — пространство сеточных функций давления, ортогональных единице. Введем разностные аналоги операторов grad , div и Δ : $\text{grad}^h : P \rightarrow U$, $\text{div}^h : U \rightarrow P$, $\Delta^h = (\Delta_1^h; \Delta_2^h) : U \rightarrow U$, так, чтобы выполнялись следующие свойства:

a). оператор $(-\Delta^h)$ самосопряжен и положительно определен;

b). $(q, \text{div}^h v) = -(\text{grad}^h q, v) \quad \forall v \in U, q \in P$;

c). $\forall v \in U \quad C_1 \|v\|_*^2 \leq \|v\|_1^2 \leq C_2 h^{-2} \|v\|_*^2$,

где $h = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$, C_1 и C_2 — константы, не зависящие от h ;

d). $\|q\| \leq C_0 \sup_{u \in V_1^h} \frac{|(q, \text{div}^h u)|}{\|u\|_1} \quad \forall q \in P$, где

C_0 — константа, не зависящая от h_1 и h_2 , а только от отношения h_1/h_2 , а $\|u\|_1 = (-\Delta^h u, u)^{1/2}$ (такая оценка для широкого класса сеток показана в [2], что и обосновывает это требование).

Введем билинейный оператор $N = (N_1, N_2) : U \times U \rightarrow U$,

аппроксимирующий выражение $\sum_{k=1}^2 u_k u_{x_k}$, обладающий следующими свойствами:

e). если $\text{div}^h u = 0$, то $\forall v, w \in U$

$$(N(u, v), w) = - (N(u, w), v);$$

f). $|(N(u, v), w)| \leq C_3 \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|$;

g). $|(N(u, v), v)| \leq C_3 \|u\| \|v\|_1 \|v\|_1$,

где константа C_3 не зависит от h_1 и h_2 . В дифференциальном случае подобные свойства имеют место [3].

Далее будем использовать обозначения, принятые в [4]:

$v = v^n(x) = v(x, \pi\tau)$, $\hat{v} = v^{n+1}(x)$, $v_t = (\hat{v} - v)/\tau$, где $\tau > 0$ — шаг по времени. Кроме того, будем пользоваться нормами:

$$\|v\|_{-1} = \sup_{u \in U} \frac{(v, u)}{\|u\|_1}; \quad \|v\|_1^2 = \sum_{i=1}^N \tau \|v^i\|_1^2;$$

$$\|v\|_{1,T}^2 = \sum_{i=1}^N \tau \|v^i\|_1^2; \quad \|f\|_{-1,T}^2 = \sum_{i=1}^N \tau \|f^i\|_{-1}^2, \quad \text{где } T = N\tau;$$

$$\|f\|_{1,T} = \left(\sum_{i=1}^N \tau \|f^i\|_1^2 \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим разностную схему

$$v_t = \nu \Delta^h v - N(v, \hat{v}) - \text{grad}^h \hat{q} + \hat{f}, \quad (2)$$

$$\text{div}^h \hat{v} = 0.$$

Получим некоторые априорные оценки ее решения.

Лемма 1. Для решения разностной схемы имеют место оценки

$$\|v^i\|^2 \leq K^2 \quad \forall \quad 1 \leq i \leq N, \quad (3)$$

$$\text{где } K^2 = \max \left\{ \|v^0\|^2; \frac{1}{C_1 \nu^2} \max_{1 \leq j \leq N} \|f^j\|_{-1}^2 \right\};$$

$$\|v\|_{1,T}^2 \leq \frac{1}{\nu} \left[\|v^0\|^2 + \frac{1}{\nu} \|f\|_{-1,T}^2 \right]. \quad (4)$$

Доказательство. Умножим первое уравнение (2) скалярно в U на $2\tau \hat{v}$. Т.к. $\text{div}^h v = 0$, то $(N(v, \hat{v}), \hat{v}) = 0$ и $(\text{grad}^h \hat{q}, \hat{v}) = 0$. Оценивая, приходим к неравенству

$$\|\hat{v}\|^2 + \tau \nu \|\hat{v}\|_1^2 \leq \|v\|^2 + \frac{\tau}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1}^2, \quad (5)$$

суммирование которого по слоям дает оценку (4).

Из (5) вытекает соотношение

$$\|\hat{v}\|^2 (1 + C_1 \tau \nu) \leq \|v\|^2 + \frac{\tau}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1}^2.$$

Следовательно, если $\|v\|^2 \leq \frac{1}{C_1 \nu^2} \|\hat{f}\|_{-1}^2$, то и $\|\hat{v}\|^2 \leq \frac{1}{C_1 \nu^2} \|\hat{f}\|_{-1}^2$, что и доказывает оценку (3). Лемма доказана.

Покажем теперь устойчивость разностной схемы (2). Рассмотрим разностную задачу с другими данными (f_0, v_0^0) ; обозначим ее решение (v_*, q_*) и введем сеточные функции $\rho = f_* - f$, $w = v - v_*$, $\gamma = q - q_*$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{aligned} w_i &= \nu \Delta^h \hat{w} - \text{grad}^h \hat{\gamma} - (N(w, \hat{v}) + N(v_*, \hat{w})) + \hat{\rho}, \\ \text{div}^h \hat{w} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем считать, без потери общности, что функции v_0^0 и f_0 таковы, что выполняется соотношение $K_*^2 \leq K^2$, где

$$K_*^2 = \max \left\{ \|v_0^0\|^2; \frac{1}{C_1 \nu^2} \max_{1 \leq j \leq N} \|f_j^0\|_{-1}^2 \right\}.$$

Теорема 1. Имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\hat{w}^1\|^2 &\leq \exp \left[\frac{C_*^2}{\nu^2} \left(\|v^0\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1, T}^2 \right) \right] \times \\ &\times \left[\|w^0\|^2 + \frac{1}{\nu} \|\rho\|_{-1, T}^2 \right] \quad \forall 1 \leq i \leq N. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказательство. Умножим первое уравнение (6) скалярно в U на $2\tau \hat{v}$. Т.к. $(N(v_*, \hat{w}), \hat{w}) = 0$, то в результате получим $\|\hat{w}\|^2 = \|w\|^2 + \tau^2 \|w_i\|^2 = -2\tau \nu \|\hat{w}\|_1^2 - 2\tau (N(w, \hat{v}), \hat{w}) + 2\tau (\hat{\rho}, \hat{w})$.

Оценивая слагаемые в правой части этого равенства, получим

$$\|\hat{w}\|^2 \leq \|w\|^2 \left[1 + \tau \frac{C_3^2}{\nu} \|\hat{v}\|_1^2 \right] + \frac{\tau}{\nu} \|\hat{\rho}\|_{-1}^2.$$

Применим лемму Гронуолла и придем к соотношению: $\forall 1 \leq i \leq N$

$$\|w^i\|^2 \leq \exp \left[\frac{C_3^2}{\nu^2} \sum_{j=1}^i \tau \|v^j\|_1^2 \right] \left(\|w^0\|^2 + \frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^i \tau \|\rho\|_{-1, \tau}^2 \right)$$

Отсюда и из (4) следует неравенство (7). Теорема доказана.

Вопрос о сходимости разностной схемы (2) требует привлечения каких-либо дополнительных предположений относительно параметров и данных задачи, либо относительно каких-нибудь свойств решения разностной задачи. Мы будем предполагать что коэффициент кинематической вязкости ν ограничен снизу некоторой константой, зависящей только от данных v^0 и f и от области Ω , но не от шагов сетки τ , h_1 , h_2 . Такое предположение позволяет не ограничивать сверху величину шага по времени τ . Прежде всего получим некоторые дополнительные априорные оценки решения разностной схемы (2), в том числе и оценки, связанные с функцией давления.

Лемма 2. Пусть коэффициент ν таков, что

$$\nu > \max \left\{ 2C_3 \|v^0\|^2; \right. \\ \left. (2C_3)^{1/2} C_1^{-1/4} \max_{1 \leq j \leq N} \|f^j\|_{-1}^{1/2} \right\} \quad (8)$$

Отсюда следует, что $\gamma = \nu - 2C_3 K > 0$.

Тогда для решения разностной схемы (2) верны оценки:

$$\|q\|_T^2 \leq 3C_0^2 \left[\frac{\nu^2}{C_1 \gamma} \|v^0\|_1^2 + \frac{2C_3^2}{C_1 \gamma^2 \nu^3} \|f\|_{-1, \tau}^2 + \right. \\ \left. + \frac{2\nu^2}{C_1 \gamma^2} \|f\|_T^2 + \frac{13}{4} \|f\|_{-1, \tau}^2 + \frac{9}{4} \nu \|v^0\|^2 \right]; \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tau \|v_i^1\|^2 \leq \frac{\nu^2}{\gamma} \|v^0\|_1^2 + \frac{2C_2^2}{\gamma^2 \nu^2} \|f\|_{-1, A, T}^2 + \frac{2\nu^2}{\gamma^2} \|f\|_T^2. \quad (10)$$

Доказательство. Умножим первое уравнение (2) скалярно в U на τv_i и получим равенство

$$\tau \|v_i\|^2 = \frac{\nu}{2} \left[\|v\|_1^2 - \|\hat{v}\|_1^2 - \tau^2 \|v_i\|_1^2 \right] - \tau (NC(v, \hat{v}), v_i) + \tau (\hat{f}, v_i).$$

Оценивая величину $\tau (NC(v, \hat{v}), v_i)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} |\tau (NC(v, \hat{v}), v_i)| &= |\tau (NC(\hat{v}, \hat{v}), v_i) - \tau^2 (NC(v_i, \hat{v}), v_i)| \leq \\ &\leq \tau C_2 \|\hat{v}\|_1^2 \|v_i\| + \tau^2 C_2 \|\hat{v}\| \|v_i\|_1^2 \leq \\ &\leq \tau C_2 \|\hat{v}\|_1^2 \|v_i\| + \tau^2 \frac{\nu}{2} \|v_i\|_1^2, \end{aligned}$$

придем к неравенству

$$\tau \|v_i\|^2 \leq \frac{\nu}{2} \left[\|v\|_1^2 - \|\hat{v}\|_1^2 \right] + \tau C_2 \|\hat{v}\|_1^2 \|v_i\| + \tau (\hat{f}, v_i). \quad (11)$$

Отметим, что из (3) и (5) следует соотношение

$$\begin{aligned} \nu \|\hat{v}\|_1^2 &\leq \frac{\|v\|_1^2 - \|\hat{v}\|_1^2}{\tau} + \frac{1}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1}^2 \leq \\ &\leq 2K \|v_i\| + \frac{1}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда следует

$$\tau C_2 \|\hat{v}\|_1^2 \|v_i\| \leq \tau \frac{\nu - \gamma}{\nu} \|v_i\|^2 + \tau \frac{C_2}{\nu^2} \|\hat{f}\|_{-1}^2 \|v_i\|.$$

Применяя эту оценку и ε -неравенство, из (11) получим оценку

$$\tau \frac{\gamma}{\nu} \|v_t\|^2 \leq \nu (\|v\|_1^2 - \|\hat{v}\|_1^2) + \tau \frac{2C_0^2}{\gamma \nu^2} \|\hat{f}\|_{-1}^2 + \tau \frac{2\nu}{\gamma} \|\hat{f}\|^2,$$

суммирование которой по слоям приводит к оценке (10).

Исходя из первого уравнения (2) и свойства d ., получим

$$\begin{aligned} \|\hat{q}\| &\leq C_0 \sup_{u \in \hat{W}_h^n} \frac{|(C-v_t + \nu \Delta \hat{v} - N(v, \hat{v}) + \hat{f}, u)|}{\|u\|_1} \leq \\ &\leq C_0 \left(C_1^{1/2} \|v_t\| + \frac{3}{2} \nu \|\hat{v}\|_1 + \|\hat{f}\|_{-1} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\tau \|\hat{q}\|^2 \leq 3C_0^2 \left(\tau C_1 \|v_t\|^2 + \frac{9}{4} \tau \nu^2 \|\hat{v}\|_1^2 + \tau \|\hat{f}\|_{-1}^2 \right).$$

Суммируем это неравенство по слоям, подставляем в правую часть оценки (4) и (10) и получаем оценку (9). Лемма доказана.

Оценим скорость сходимости разностной схемы (2). Пусть (u, p) - решение дифференциальной задачи (1) - обладает достаточной гладкостью, а именно:

$$u \in C^{4,2}(Q_T), \quad p \in C^{3,2}(Q_T); \quad (13)$$

существует положительная постоянная C_4 , такая, что

$$\int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt \leq C_4. \quad (14)$$

Для решения разностной задачи (2) подобная оценка имеет

место (из (12) вытекает: $\nu \|\hat{v}\|_{1,T}^2 \leq 2K \|v_t\|_T + \frac{1}{\nu} \|\hat{f}\|_{-1,T}^2 \leq C_9$), поэтому условие (14) вполне естественно.

Введем погрешности $z(x) = u(x) - v(x)$, $r(x) = p(x) - q(x)$. Функции $z \in U$ и $r \in P$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} z_t^h &= \nu \Delta^h \hat{z} - \text{grad}^h \hat{r} - (N(z, \hat{u}) + N(v, \hat{z})) + \hat{\zeta}, \\ \text{div}^h \hat{z} &= \hat{\chi}, \quad z^0 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 2. Пусть существует положительная постоянная θ , не зависящая от τ и h , такая, что

$$\nu - \max \left\{ 2C_3 \|v^0\|; (2C_3)^{1/2} C_1^{-1/4} \max_{1 \leq j \leq N} \|r^j\|_{-1}^{1/2}; \right. \\ \left. 2C_3 \sup_{0 < t \leq T} \|u(t)\| \right\} \geq \theta$$

Пусть разностная схема (2) аппроксимирует задачу (1) так, что

$$\|\zeta^1\| = O(\tau + h^{3/2}), \quad \|\chi^1\| = O(h^2), \quad \|\chi_t^1\| = O(\tau + h^2)$$

$\forall 1 \leq i \leq N$. Пусть решение задачи (1) удовлетворяет условиям (13) и (14). Тогда разностная схема (2) сходится со скоростью, определяемой соотношениями: $\|r\|_T = O(\tau^{3/4} + h)$,

$$\|z\|_{1,T} = O(\tau + h^{3/2}), \quad \max_{1 \leq i \leq N} \|z^i\| = O(\tau + h^{3/2}).$$

Доказательство. Из первого уравнения (15) имеем $\|\hat{r}\| \leq$

$$\leq C_0 \sup_{u \in \hat{W}_h} \frac{|(-z_t^h + \nu \Delta^h \hat{z} - N(z, \hat{u}) - N(v, \hat{z}) + \hat{\rho}, u)|}{\|u\|_1} \leq$$

$$\leq C_0 (C_1^{-1/2} \|z_t\| + \frac{3}{2} \nu \|\hat{z}\|_1 + \frac{\nu}{2} \|z\|_1 + \|K\|_{-1}),$$

поскольку $C_3 \|\hat{u}\| \leq \nu/2$ и $C_3 \|v\| \leq \nu/2$.

Отсюда, суммируя по слоям с учетом $z^0 = 0$, получим

$$\|r\|_T^2 \leq C_0^2 \left(4C_1^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \tau \|z_t^i\|^2 + 10 \nu^2 \|z\|_{1,T}^2 + \right. \\ \left. + 4 \|K\|_{-1,T}^2 \right) \quad (16)$$

Оценим слагаемые в правой части этого неравенства. Сначала оценим $\|z\|_{1,T}^2$. Для этого умножим первое уравнение (15) скалярно в U на $2\tau\hat{z}$. Получим, отбрасывая слагаемое $\tau^2\|z_1\|^2$,

$$\|\hat{z}\|^2 - \|z\|^2 \leq -2\tau\nu\|\hat{z}\|^2 + 2\tau(\hat{r}, \hat{\chi}) - 2\tau(N(z, \hat{u}), \hat{z}) + 2\tau(\zeta, \hat{z})$$

Оценим слагаемые в правой части, используя ε -неравенство, и, суммируя по слоям, приходим к оценке

$$\max \left\{ \frac{\nu}{2} \|z\|_{1,T}^2; \max_{1 \leq i \leq N} \|z^i\|^2 \right\} \leq \leq \frac{2}{\nu} \|\zeta\|_{-1,T}^2 + \varepsilon_1 \|r\|_T^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|\chi\|_T^2 \quad \forall \varepsilon_1 > 0. \quad (17)$$

Оценим теперь $\sum_{i=0}^{N-1} \tau \|z_1^i\|^2$. Для этого умножим первое уравнение (15) скалярно в U на τz_1 . Получим

$$\tau \|z_1\|^2 = \frac{\nu}{2} (\|z\|^2 - \|\hat{z}\|^2 - \tau^2 \|z_1\|^2) + \tau (\hat{r}, \chi_1) + + \tau (\zeta, z_1) - \tau (N(z, \hat{u}), z_1) - \tau (N(v, \hat{z}), z_1).$$

Оценим слагаемые в правой части равенства и отбросим слагаемое $\tau^2 \|z_1\|^2$. Получим неравенство, верное при любых $\varepsilon_2 > 0$:

$$\tau \|z_1\|^2 \leq 2\nu (\|z\|^2 - \|\hat{z}\|^2) + 4\tau \|\zeta\|^2 + 4\tau\varepsilon_2 \|\hat{r}\|^2 + + \frac{\tau}{\varepsilon_2} \|\chi_1\|^2 + 4C_3^2\tau \|\hat{u}\|_1^2 \|z\|^2 + 4C_3^2\tau \|\hat{v}\|_1^2 \|\hat{z}\|^2.$$

Суммируем это неравенство по слоям, а результат подставляем вместе с оценкой (17) в неравенство (16) и, полагая

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{80C_0^2\nu}, \quad \varepsilon_2 = \frac{C_1}{64C_0^2}, \quad \text{получим оценку}$$

$$\|r\|_T^2 \leq 2C_0^2 \left[44 \|K\|_{-1,T}^2 + 1000C_0^2 \nu^2 \|x\|_T^2 + \frac{256C_0^2}{C_1} \|\chi_1\|_T^2 + \right. \\ \left. + \frac{16}{C_1} \|K\|_T^2 + \frac{16C_0^2}{C_1} \sum_{i=0}^{N-1} \tau C \|z^i\|_i^2 \|u^{i+1}\|_i^2 + \|z^{i+1}\|_i^2 \|v^i\|_i^2 \right].$$

Поскольку $\|K\|_{-1,T}^2 = 0$ ($\tau^2 + h^2$), $\|K\|_T^2 = 0$ ($\tau^2 + h^2$),

$\|x\|_T^2 = 0$ (h^2), $\|\chi_1\|_T^2 = 0$ ($\tau^2 + h^2$), то имеем

$$\|r\|_T^2 \leq O(\tau^2 + h^2) + C_0 \sum_{i=0}^{N-1} \tau C \|z^i\|_i^2 \|u^{i+1}\|_i^2 + \|z^{i+1}\|_i^2 \|v^i\|_i^2,$$

где $C_0 = 32 C_0^2 C_1^{-1} C_2^2$.

Оценим сумму в этом неравенстве, пользуясь неравенством Коши-Буняковского.

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tau \|z^{i+1}\|_i^2 \|v^i\|_i^2 \leq \left[\sum_{i=0}^N \tau \|z^i\|_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{N-1} \tau \|v^i\|_i^2 \right]^{1/2} \leq \\ \leq \left(C_0^{1/2} + \sqrt{\tau} \|v^0\|_i^2 \right) \left[\sum_{i=1}^N \tau \|z^i\|_i^2 \right]^{1/2}.$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \tau \|z^i\|_i^2 \|u^{i+1}\|_i^2 = (\text{т.к. } u^0 = 0) \leq \\ \leq \left[\sum_{i=1}^N \tau \|z^i\|_i^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{i=2}^N \tau \|u^i\|_i^2 \right]^{1/2} \leq \\ \leq C_0^{1/2} \left[\sum_{i=1}^N \tau \|z^i\|_i^2 \right]^{1/2}.$$

Получим постоянную $C_7 \geq C_0^{-1} \left[C_0^{1/2} + \left(C_0^{1/2} + \sqrt{\tau} \|v^0\|_i^2 \right) \right]$.

Получаем

$$\|r\|_T^2 \leq O(\tau^2 + h^2) + C_7 \left(\sum_{i=1}^N \tau \|z^1\|_i^4 \right)^{1/2} \quad (18)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} C_{10} \left(\sum_{i=1}^N \tau \|z^1\|_i^4 \right)^{1/2} &\leq \frac{C_{10}}{\sqrt{\tau}} \sum_{i=1}^N \tau \|z^1\|_i^2 = \\ &= \frac{C_{10}}{\sqrt{\tau}} \|z\|_{1,T}^2. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (18), применяя оценку (17) и

полагая $\varepsilon_1 = \frac{\nu \sqrt{\tau}}{4 C_7}$, получим

$$\|r\|_T^2 \leq O(\tau^2 + h^2) + \frac{4C_{10}}{\nu \sqrt{\tau}} \left(\frac{2}{\nu} \|z\|_{1,T}^2 + \frac{4C_{10}}{\nu \sqrt{\tau}} \|z\|_T^2 \right).$$

Отсюда, поскольку $\|z\|_{1,T}^2 = O(\tau^2 + h^2)$, $\|z\|_T^2 = O(h^4)$, имеем

$$\|r\|_T^2 = O \left(h^2 + \tau^{2/3} + \frac{h^2}{\sqrt{\tau}} + \frac{h^4}{\tau} \right). \quad (19)$$

Оценим слагаемое $C_7 \left(\sum_{i=1}^N \tau \|z^1\|_i^4 \right)^{1/2}$ в (18) несколько иначе.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^N \tau \|z^1\|_i^4 \right)^{1/2} &\leq \max_{1 \leq i \leq N} \|z^1\|_i \|z\|_{1,T} \leq \\ &\leq \frac{1/2}{h} \max_{1 \leq i \leq N} \|z^1\|_i \|z\|_{1,T} \leq \frac{C_2^{1/2}}{h} \left(\max_{1 \leq i \leq N} \|z^1\|_i^2 + \|z\|_{1,T}^2 \right). \end{aligned}$$

Подставим сюда оценку (17) с $\varepsilon_1 = -\frac{2h\nu}{C_1 C_2^{1/2}(\nu + 2)}$, а

результат подставим в неравенство (18). В итоге, учитывая

$\|z\|_{1,T}^2 = O(\tau^2 + h^2)$, $\|z\|_T^2 = O(h^4)$, получим

$$\|r\|_T^2 = O\left(\tau^2 + \tau^2/h + h^2\right). \quad (20)$$

Перемножим оценки (19) и (20) и применим неравенство Гельдера; в результате имеем оценку

$$\|r\|_T^4 \leq O\left(\tau h^3 + \tau^{3/2} h^2\right) = O\left(\tau^2 + h^4\right), \quad \text{т.е.}$$

$$\|r\|_T = O(\tau^{3/4} + h).$$

Положим в (17) $\varepsilon_1 = h$ и используя оценку (20), получаем

$$\|z\|_{1,T} = O(\tau + h^{3/2}) \quad \text{и} \quad \max_{1 \leq i \leq N} \|z^i\| = O(\tau + h^{3/2}).$$

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о реализации разностной схемы (2). Для решения этой системы уравнений рассмотрим итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \Delta^h \left(\frac{p}{v} - \frac{p^{+1}}{v} \right) + \frac{p^{+1}}{v} - \tau \nu \Delta^h \frac{p^{+1}}{v} = \\ = -\tau \operatorname{grad}^h \frac{p^{+1}}{q} - \tau N(v, \frac{p}{v}) + \tau \hat{f} + v, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\operatorname{div}^h \frac{p^{+1}}{v} = 0.$$

При этом $\frac{p}{v}$ может быть выбрана произвольно, например, $\frac{p}{v} = v$, или, линейно интерполируя по двум предыдущим слоям, $\frac{p}{v} = 2v - v^{i-1}$, лишь бы выполнялось условие $\operatorname{div}^h \frac{p}{v} = 0$.

Исследуем сходимость предложенного итерационного

процесса. Введем обозначения $\hat{s} = \hat{q}^{p+} - \hat{q}^p$, $\hat{y} = \hat{v}^p - \hat{v}$, $\hat{y} = \hat{v}^{p+1} - \hat{v}$. Выпишем уравнения в погрешностях

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} \Delta^h (y - \hat{y}) + \hat{y} - \tau \nu \Delta^h \hat{y} = \\ = -\tau \operatorname{grad}^h \hat{s} - \tau N(v, y) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\operatorname{div}^h \hat{y} = 0.$$

Теорема 3. Существует положительное число

$$\theta_0 = \frac{\tau^2 C_3^2 K^2}{4 (\tau \nu + C_2^{-1} h^2)}$$

такое, что для любого положительного $\theta < \theta_0$ и сеточно-селектанального начального приближения $\hat{v}$ итерационный процесс (21) сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Доказательство. Умножим первое уравнение (22) скалярно в U на $2\hat{y}$. Получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta} (\|\hat{y}\|_1^2 + \|\hat{y} - y\|_1^2 - \|\hat{y}\|_1^2) + \|\hat{y}\|_1^2 + \tau \nu \|\hat{y}\|_1^2 = \\ = -\tau (N(v, y), \hat{y}) = -\tau (N(v, y), \hat{y} - y). \end{aligned}$$

Оценивая слагаемые, получаем неравенство

$$\|\hat{y}\|_1^2 + \left(\frac{1}{\theta} + \tau \nu \right) \|\hat{y}\|_1^2 \leq \left[\frac{1}{\theta} + \tau^2 \frac{C_3^2 \|v\|^2 \theta}{4} \right] \|\hat{y}\|_1^2.$$

Оценивая $\|\hat{y}\|_1^2 \geq C_2^{-1} h^2 \|\hat{y}\|_1^2$ и $\|v\| \leq K$, получаем отсюда

$$\|\hat{y}\|_1 \leq \delta \|\hat{y}\|_1, \quad \text{где } \delta = \left[\frac{\frac{1}{\theta} + \tau^2 \frac{C_3^2 K^2 \theta}{4}}{\frac{1}{\theta} + \tau \nu + C_2^{-1} h^2} \right]^{1/2}.$$

Если $\theta < \theta_0$, то $\delta < 1$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970. - 288 с.
2. Валедицкий В.Д., Кобельков Г.М. О разностном аналоге неравенства $\|p\|_L \leq C \|\operatorname{grad} p\|_{V_E^{-1}}$. [Препринт № 67]. АН СССР, Отдел вычислительной математики. - М. - 1987. - 20 с.
3. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. - М.: Мир, 1981. - 408 с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1989. - 616 с.

S. Melnik. The investigation of implicit linearized difference scheme for non-stationary Navier-Stokes problem.

Summary. The present paper contains the stability proof and the convergence speed estimation of the implicit linearized difference scheme for non-stationary Navier-Stokes problem. The way of obtained equations system decision is proposed too. AMS Subject classification 65M10, 65N20.

S. Melniks. Nestacionārā Navjē-Stoksa uzdevuma netiesās linearizētās diferencu shēmas izpēte.

Anotācija. Pierādīta nestacionārā Navjē-Stoksa uzdevuma netiesās linearizētās diferencu shēmas stabilitāte, kā arī iegūts shēmas konverģences ātruma novērtējums. Norādīts iegūtās vienādojumu sistēmas risināšanas papāmiens.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ ДЛЯ
ОДНОГО УРАВНЕНИЯ n -го ПОРЯДКА

Д.Калныня, Т.Пирулис

Аннотация. Доказывается, что фундаментальная система решения уравнения $y^{(n)} + \lambda xy = 0$ выражается явно через обобщенную гипергеометрическую функцию типа ${}_0F_{n-1}$. Такое представление дает возможность изучить асимптотику решений при $\lambda \rightarrow \infty$ и $x \in \mathbb{C}$. Основные результаты предлагаемой статьи получены Д.Калныней в дипломной работе. УДК 517.512

Как известно, при изучении асимптотических свойств решения уравнения

$$y'' + \lambda \tau(x)y = 0, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

с точкой поворота $x_0 \in]a, b[$ первого порядка, т.е., $\tau(x_0) = 0$ и $\tau'(x_0) \neq 0$, применяется хорошо известный метод ВКБ, с эталонным уравнением

$$y'' + \lambda xy = 0. \quad (2)$$

В настоящей статье рассмотрим метод отыскания фундаментального решения более общего уравнения

$$y^{(n)} + \lambda xy = 0. \quad (3)$$

Теорема I. Пусть $y_k(x), k=0, 1, \dots, n-1$ -система частных решений уравнения (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$y_k^{(m)}(0) = \delta_k^m = \begin{cases} 1, & m=k \\ 0, & m \neq k \end{cases}, \quad m=0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= {}_0F_{n-1} \left[\frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}; -\frac{\lambda x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right], \\
 y_1(x) &= x {}_0F_{n-1} \left[\frac{3}{n+1}, \frac{4}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}; -\frac{\lambda x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right], \\
 &\dots \\
 y_k(x) &= \frac{x^k}{k!} {}_0F_{n-1} \left[\frac{2+k}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}, \dots, \frac{n+k+1}{n+1}; -\frac{\lambda x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right], \quad (5) \\
 &\dots \\
 y_n(x) &= \frac{x^n}{n!} {}_0F_{n-1} \left[\frac{n+2}{n+1}, \frac{n+3}{n+1}, \dots, \frac{2n}{n+1}; -\frac{\lambda x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \right],
 \end{aligned}$$

где

$${}_0F_{n-1}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}; z] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(\alpha_1)_k \dots (\alpha_{n-1})_k k!}, \quad (\alpha)_k = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}, \quad (6)$$

фундаментальная система решений уравнения (3). Каждое частное решение $y_k(x)$ представляет собой целую аналитическую функцию относительно переменного x порядка $1 + \frac{1}{n}$.

Доказательство. Применим для $y_k(x)$ интегральное преобразование Лапласа

$$\bar{y}_k(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} y_k(x) dx \quad \text{или} \quad \bar{y}_k(p) \doteq y_k(x). \quad (7)$$

Тогда из уравнения (3) и условий (4) получаем

$$p^n \bar{y}_k - \lambda y'_k = p^{n-k-1}, \quad \lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p^{k+1} \bar{y}_k(p) = 1. \quad (8)$$

Решением задачи (8) является функция

$$\bar{y}_k(p) = [\lambda(n+1)]^{-\frac{k+1}{n+1}} \exp\left(\frac{p^{n+1}}{\lambda(n+1)}\right) \Gamma\left(\frac{n-k}{n+1}, \frac{p^{n+1}}{\lambda(n+1)}\right), \quad (9)$$

где $\Gamma(\nu, z)$ — неполная гамма-функция. Обозначим $\nu = \frac{n-k}{n+1}$, $\alpha = \frac{1}{\lambda(n+1)}$,

$\rho = \frac{k+1}{n+1}$. Из таблицы интегральных преобразований [1] известно,

что

$$F(p) \equiv p^{\nu-1} \exp\left(\frac{\alpha}{p}\right) \Gamma(\nu, \frac{\alpha}{p}) \doteq \frac{2\alpha^{\frac{\nu}{2}} x^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(1-\nu)} K_{\nu}(2\sqrt{\alpha x}), \quad (10)$$

где K_{ν} — функция Макдональда. Представим $\bar{y}_k(p)$ в виде

$$\bar{y}_k(p) = F(q(p)) G(p), \quad q(p) = p^{-n-1}, \quad G(p) = \alpha p^{-(1-\frac{1}{n+1})} \quad (11)$$

и применим теорему Эбресса [2], по которой

$$F(q(p)) G(p) \doteq \int_0^{+\infty} f(\tau) q(x, \tau) d\tau, \quad (12)$$

где

$$\bar{f}(p) \doteq f(x), \quad \exp[-\tau q(p)] G(p) \doteq q(x, \tau). \quad (13)$$

Функция $f(x)$ определена формулой (10), а $g(x, \tau)$ находим разложением $\exp(-\tau g(\rho)) G(\rho)$ в ряд по степеням ρ и почленным обращением полученного ряда. Для такого оригинала $y_k(x)$ получаем формулу:

$$y_k(x) = \frac{2\alpha^{\frac{1}{2} + \rho}}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{+\infty} K_\nu(2\sqrt{\alpha\tau}) \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m \alpha^m x^{(k+\nu+m)-1}}{m! \Gamma[(n+1)(1-\nu+m)]} \right\} d\tau. \quad (14)$$

Меняя порядок интегрирования и суммирования и вычисляя явно интеграл по переменной τ , находим, что

$$y_k(x) = \frac{x^k}{\Gamma(\frac{k+1}{n+1})} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m [\lambda(n+1)x^{n+1}]^m \Gamma(m + \frac{k+1}{n+1})}{\Gamma[(n+1)(m + \frac{k+1}{n+1})]}. \quad (15)$$

После применения формулы умножения

$$\Gamma(n+1)z = (n+1)^{(n+1)z} (\sqrt{2\pi})^{nz} (n+1)^{-1} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{n}) \dots \Gamma(z + \frac{n}{n+1}) \quad (16)$$

из (15) получаем

$$y_k(x) = \frac{x^k}{k!} F_n \left[\begin{matrix} 1; \\ \frac{k+2}{n+1}, \frac{k+3}{n+1}, \dots, \frac{k+n+1}{n+1}; -\frac{\lambda x^{n+1}}{(n+1)^n} \end{matrix} \right]. \quad (17)$$

(17) совпадает с соответствующей формулой из (5).

Учитывая характер убывания коэффициентов степенного ряда (6), легко проверить, что $F_n[\alpha_1, \dots, \alpha_n, iZ]$ — целая аналитическая функция порядка $1/n$ относительно Z . Поэтому $y_k(x)$, $k=0, \dots, n-1$, — целая аналитическая функция порядка $1 + 1/n$ относительно переменного x .

Фундаментальность системы $(y_k(x))$ следует из того, что определитель Вронского этой системы из условий (4) равен 1 в точке $x=0$. Теорема доказана.

Для обобщенных гипергеометрических функций типа ${}_pF_q$ в [3] приведены асимптотические формулы, из которых можно найти асимптотические разложения при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ и произвольно заданном $\arg \lambda$ (или при фиксированном λ и $x \rightarrow \infty$ в комплексной плоскости). Выпишем только главный член асимптотического разложения для случаев:

- а) $\lambda \rightarrow +\infty$, $x > 0$ (или $\lambda > 0$ и $x \rightarrow +\infty$)
 б) $\lambda \rightarrow -\infty$, $x > 0$ (или $\lambda < 0$ и $x \rightarrow +\infty$).

Из формул работы [3] получаем:

$$y_k(x) \sim A_{n,k} \left(\frac{n+1}{\sqrt{-\lambda}} \right)^{\frac{n+2nk-1}{2(n+1)}} x^{\frac{1-n}{2n}} \exp\left(\frac{nx}{n+1} \sqrt{-\lambda x}\right) \quad (18)$$

$$x > 0, \lambda \rightarrow -\infty;$$

$$y_k(x) \sim 2 A_{n,k} \left(\frac{n+1}{\sqrt{\lambda}} \right)^{\frac{n+2nk-1}{2(n+1)}} x^{\frac{1-n}{2n}} \exp\left(\frac{nx}{n+1} \sqrt{\lambda x} \cos \frac{\pi}{n}\right) \times$$

$$\times \cos\left[\frac{nx}{n+1} \sqrt{\lambda x} \sin \frac{\pi}{n} - \frac{\pi(n+2nk-1)}{2n(n+1)}\right], x > 0, \lambda \rightarrow +\infty,$$

$$A_{n,k} = \frac{(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}}{k! \sqrt{n}} \prod_{m=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{k+m+2}{n+1}\right), k=0,1,\dots,n-1. \quad (20)$$

Библиографический список

1. Г.Ейтмен, А.Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований, том I. - М., 1969. - 343 с.
2. В.А.Диткин, А.П.Прудников. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М., 1961. - 524 с.
3. Ю.Лук. Специальные математические функции, их аппроксимации. - М., 1980. - 608 с.

D.Kalnina, T.Cirulis. A Fundamental System of Solutions for an Equation of Order n .

Abstract. It is proved that the fundamental system of solutions for the equation $y^{(n)} + \lambda xy = 0$ can be explicitly expressed in the terms of a generalized hypergeometric function of the type ${}_nF_{n-1}$. This provides an opportunity to investigate the asymptotic behaviour of solutions if $\lambda \rightarrow \infty$ and $x \in \mathbb{C}$. The main results of the paper were proved by D.Kalnina in her Master Thesis under prof. T.Cirulis.
AMS Subject Classification 34A25; 33C20.

D.Kalnina, T.Cirulis. Fundamentālā atrisinājumu sistēma n -tās kārtas diferenciālvienādojumam

Anotācija. Šajā rakstā ir apskatīts veids, kā diferenciālvienādojuma $y^{(n)} + \lambda xy = 0$ atrisinājumus izteikt ar hipergeometrisko funkciju ${}_nF_{n-1}$ palīdzību. Šāda atrisinājuma reprezentācija dod iespēju vienkārši izpētīt to asimptotiku, ja $\lambda \rightarrow \infty$ un $x \in \mathbb{C}$. Raksta galvenie rezultāti iegūti studentes D.Kalninas diplomdarbā.

THE EXAMPLE ILLUSTRATING SOME PROPERTIES OF SOLUTION
OF THE SYSTEM OF ELLIPTIC EQUATIONS IN A MUSHY REGION

A. Cibulis

Summary. The simple system of elliptic equations with discontinuous nonlinearities in the main coefficients has been constructed with property: its solution is either unique or not depending upon the concept of the solution.
MSC 35J45.

It must be mentioned that the exhaustive answer to the question how to define the solution for systems with discontinuous nonlinearities is unknown.

Let

$\Omega = (0, 1)$; $\lambda_1, \lambda_2 > 0$; $f_i \in L_2(\Omega)$,
 $g \in C(R) \cap L_2(\Omega)$; $Q = \{(t, \tau) \in R \times R : \tau \neq g(t)\}$;
functions α_i let be of the class $C(Q \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2])$
and with the finite limits

$$\alpha_i^\pm(t, -) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \alpha_i(t, \tau), \quad i=1,2.$$

For the system

$$\begin{cases} (\alpha_i(u_1, u_2) u_i')' = f_i, \\ u_i(0) = a_0, \quad u_i(1) = a_1, \quad i=1,2, \end{cases} \quad (1)$$

we introduce the following concepts of solution.

Definition 1. The pair $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ is said to be the solution of the system (1) if the boundary conditions are satisfied and functions $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(\Omega)$ with values on $[0, 1]$ exist such that

$$\int_{\Omega} (\alpha_i^*(\varphi_i) u_i' \eta_i' + f_i \eta_i) dx = 0 \quad \forall \eta_i \in H_0^1 \quad (2)$$

where $\alpha_i^*(\varphi_i) = \alpha_i^+(u_1, u_2) \varphi_i + \alpha_i^-(u_1, u_2) (1 - \varphi_i)$, $i = 1, 2$.

In such a treatment the class of the existence of the solution is too wide. To make it more narrow one can require φ_1, φ_2 are connected in a certain functional way.

Definition 2. The pair $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ is said to be the solution of the system (1) associated with a line $\ell(\alpha(t, \tau), \beta(t, \tau)) = 0$ if the boundary conditions, variational equality (2) and

$$\ell(\alpha_i^*(\varphi_i(x)), \alpha_j^*(\varphi_j(x))) = 0, \quad x \in \Omega,$$

are satisfied.

It turns out that also a restriction of a class of the existence does not guarantee uniqueness even if ℓ is a smooth and monotone.

To prove it let us take the system (1) with

$$f_1 = 3, \quad f_2 = 8, \quad q_0 = 0, \quad a_1 = 3, \quad g(t) = t$$

$$\alpha_1(t, \tau) = \alpha(\tau - t) = \begin{cases} 1, & \tau < t, \\ 2, & \tau > t, \end{cases}$$

$$\alpha_2(t, \tau) = \beta(\tau - t) = \begin{cases} 3, & \tau < t, \\ 4, & \tau > t, \end{cases}$$

and let us choose the line $\ell(\alpha, \beta) = 6\alpha - (\alpha + 1)\beta$.

Such a line arises if one approximates the coefficients α_i , $i = 1, 2$, and considers G - limit.

Let $\rho > 0$ be an arbitrary number such that

$$Z(\rho) = 169 + (108 - 144\rho) \ln\left(\frac{11\rho}{\rho}\right) \geq 0, \quad (3)$$

$$q(\rho) = \frac{\sqrt{2} - 13}{\ln\left(\frac{11\rho}{\rho}\right)} \leq 0, \quad (4)$$

$$\gamma(x, \rho) = \frac{10(x + \rho)}{8x + 8\rho + q} \in [1, 2], \quad x \in [0, 1] \quad (5)$$

For example, $\rho = 1$ and some neighbourhood of it are fit to.

As $Z(1) > 0$, $-2 < q(1) < 0$ and inequalities

$$10(x+1) < 2(8x + 8 + q(1)),$$

$$10(x+1) > 8x + 8 + q(1)$$

hold for all $x \in [0, 1]$ then the requirements (3)-(5) are satisfied in some neighbourhood of the point $\rho = 1$, because of the continuity of the functions Z, q, γ .

The variational equality (2) holds for

$$u_1 = u_2 = \frac{1}{60} \left(72x^2 + (26q + 144\rho)x + q^2 \ln\left(\frac{x+\rho}{\rho}\right) \right),$$

$$\varphi_1 = \gamma - 1, \quad \varphi_2 = \frac{3\gamma - 3}{\gamma + 1}.$$

Indeed,

$$\alpha_1^* = 2\varphi_1 + 1(1-\varphi_1) = 1+\varphi_1 = \varphi$$

$$\alpha_2^* = 4\varphi_2 + 3(1-\varphi_2) = 3+\varphi_2 = \frac{6\varphi}{\varphi+1}$$

and therefore $\ell(\alpha_1^*, \alpha_2^*) = 0$.

Furthermore,

$$u_1(0) = 0, \quad u_1(1) = 3,$$

$$u_1' = \frac{144(x+p)^2 + 252(x+p) + 9}{60(x+p)} = \frac{(8x+8p+9)(18x+18p+9)}{60(x+p)},$$

$$\alpha_2^* = \frac{60(x+p)}{18x+18p+9}$$

and

$$(\alpha_1^* u_1')' = 3, \quad (\alpha_2^* u_2')' = 8.$$

And thus there is a continuum of the solutions of the system

$$\begin{cases} (\alpha(v-u)(u'))' = 3, \\ (\beta(v-u)(v'))' = 8, \\ u(0) = v(0) = 0, \quad u(1) = v(1) = 3, \end{cases} \quad (6)$$

all of which are associated with a smooth, monotone line

$$\beta = \frac{6\alpha}{\alpha+1}.$$

It is known [1] that all the discontinuous coefficients in a case of one equation may be defined in a unified way, i.e., by means of one and the same function. For the system (6) there also exists a solution which is characterized by the one and the same function $\varphi^*: \Omega \rightarrow [0, 1]$ in both coefficients α, β . It is associated with a straight line $\ell(\alpha, \beta) = \beta - \alpha - 2$ going through the points $(\alpha_1^-, \alpha_2^-) = (\alpha^-, \beta^-) = (1, 3)$ and $(\alpha_2^+, \alpha_1^+) = (\alpha^+, \beta^+) = (2, 4)$. The equality (2) and the given boundary values are held in this case for

$$u = v = \frac{5}{4}x^2 + \frac{7}{4}x,$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi^* = \frac{1}{5}.$$

Theorem 1. Let (u, v) be the solution (in the sense of the definition 1) of the system (6). Then $u = v$.

Proof. Let $w = v - u$,

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega : w(x) > 0\},$$

$$\Omega_- = \{x \in \Omega : w(x) < 0\}.$$

We suppose that $\text{meas } \Omega_+ > 0$.

Then the variational equalities

$$\int_{\Omega} (\alpha(v-u)(u')^2 + 3\zeta) dx = 0 \quad \forall \zeta \in H_0^1 \quad (7)$$

$$\int_{\Omega} (\beta(v-u)(v')^2 + 8\zeta) dx = 0 \quad \forall \zeta \in H_0^1 \quad (8)$$

for $\eta = \max \{w; 0\}$ yield

$$\int_{\Omega} (2u'w' + 3w) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (4v'w' + 8w) dx = 0.$$

Hence

$$\int_{\Omega} (2(w')^2 + w) dx = 0$$

that contradicts $\text{meas } \Omega_+ > 0$.

Thus $\text{meas } \Omega_+ = 0$.

Furthermore, let us suppose that $\text{meas } \Omega_- > 0$.

Then equalities (7)-(8) for $\eta = \min \{w; 0\}$ imply

$$\int_{\Omega} (u'w' + 3w) dx = 0,$$

$$\int_{\Omega} (3v'w' + 8w) dx = 0$$

Hence

$$\int_{\Omega} (3(w')^2 - w) dx = 0,$$

that contradict $\text{meas } \Omega_- > 0$.

Thus $\text{meas } \Omega = 0$ and the proof is complete.

Remark 1. The solution of the system (6) associated with a straight line $\beta = \alpha + 2$ is unique.

It follows immediately from the system

$$\begin{cases} (u' + \varphi u')' = 3 \\ (3u' + \varphi u')' = 8. \end{cases}$$

and boundary conditions.

Remark 2. The system (6) has the solution in the sense of the definition 2 for any given continuous line connecting the points (1, 3) and (2, 4).

As the system (6) has the solution $u = V$ for any $\alpha > 0$ and $\beta = 8\alpha/3$ then this assertion follows from the fact that such a line intersects a straight line $\beta = 8\alpha/3$ in some point $(\alpha_0, 8\alpha_0/3)$ where $9/8 \leq \alpha_0 \leq 3/2$.

References

1. Цибулис А.Б. О разрешимости эллиптических уравнений с коэффициентами, терпящими разрывы на поверхностях вида $u = g(x)$ // Латв. мат. ежегодник - 1985. - Вып. 29. - С. 100-111.

A. Cibulis. Пример, иллюстрирующий некоторые свойства решения системы эллиптических уравнений в двухфазной зоне.

Аннотация. Построена простая система эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями в старших коэффициентах такая, что единственность или неединственность ее решения зависит от понятия решения.

A. Cibulis. Piemērs, kurš ilustrē eliptisku vienādojumu sistēmas atrisinājuma dažas īpašības divfāzu zonā.

Konstruēta vienkārša eliptisku vienādojumu sistēma ar pārtrauktām nelīnaritātēm vecākajos koeficientos tāda, ka tās atrisinājuma unitāte vai neunitāte atkarīga no atrisinājuma koncepcijas.

A. Cibulis

Institute of Mathematics
and Computer Science
boulevard Rainis 29
226230 Riga

ON STRICT CONVEXITY

Inese Galin'a

Summary. In this work we'll show some kind of definition of a convex set in a metric space, give concept of a strictly convex metric space, prove that the set of fixed points is convex in such space, for nonexpansive mappings and give new characterization of strictly convex Banach spaces.
AMS Subject Classification 54H25, 47H10.

0. Introduction.

Solving the problem what properties of spaces and its subsets are necessary to guarantee the fixed point property mostly we deal with Banach spaces. Intuitively it seems that in real life more important are metric spaces. Therefore we want to ascertain what properties of metric spaces are essential for nonexpansive mappings to have fixed points. In this article we don't solve these questions, but we get to know some things for metric spaces important in the fixed point theory.

Looking through W.A.Kirk article series on fixed point (for example, [1,2,3]) we can observe that one of the most important properties of sets is convexity. But these articles were concerned with subsets of Banach spaces. Turning attention to metric spaces one has possibility to use the concept of convexity introduced with applying closure operators [4]. However, to my mind, these results are difficult to look through and probably have little pragmatic value. But what does mean the concept of a convex set in a metric space? We try to give answer on this question.

1. Convex sets and strictly convex Banach spaces.

In this section we want to remind probably known facts. We shall do it with purpose to compare new concepts with known facts and see the difference.

Let X be a Banach space and $x, y \in X$.

Definition 1.1. The set of points $z = tx + (1-t)y$, $t \in [0,1]$, is said to be a closed straight line joining x, y .

Definition 1.2. A set $K \subset X$ is said to be convex if for every $x, y \in K$ the closed straight line joining x, y belongs to K .

Every closed ball $B(x, r) = \{y \in X \mid |x - y| \leq r\}$, $x \in X, r \in \mathbb{R}_+$, is convex and an intersection of convex sets is convex. However, as it will be seen afterwards both properties don't hold in metric spaces. Therefore we consider more special condition - strict convexity. In the fixed point theory with this conception we meet in for example [2], this article inspired this attempt to form this concept in a metric space.

Definition 1.3. A Banach space X is said to be strictly convex if all the points of an unit sphere are not inner points of straight lines in an unit ball.

Assertion 1.1.[5] In a Banach space X the following conditions are equivalent:

1. X is strictly convex;
2. $\forall x, y \in B(0, 1) (x \neq y) : |x + y| < 2$;
3. $\forall x, y \in X : |x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x = \lambda y) \vee x = 0 \vee y = 0$.

Note that Hilbert space, l_p and L_p , $p > 1$, are strictly convex. The most exciting is that in strictly convex spaces one can prove :

Theorem 1.1. Let X be a strictly convex Banach space and C is a convex subset of X . If selfmap f is nonexpansive, then the set of fixed points of f is convex.

What do these concepts look like in a metric space?

2. Convex sets and strictly convex metric spaces.

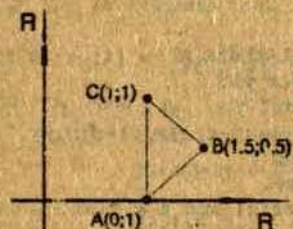
Let (X, d) be a metric space with a distance d .

Definition 2.1. A set $K \subset X$ is said to be convex if for each $x, y \in K$ and for each $t \in [0, 1]$ there exists $z \in K$ satisfying:
 $d(x, z) = td(x, y)$ and $d(z, y) = (1-t)d(x, y)$.

Note that in a mean of the Definition 2.1. in general closed balls aren't convex sets and the intersection of convex sets also isn't always convex.

Example 2.1. Examine X as discrete metric space :

$d(x,y)=0$ if $x=y$ and $d(x,y)=1$ if $x \neq y$ for each $x,y \in X$. Then $B(u,r)=(u)$ if $r < 1$ and $B(u,r)=X$ if $r \geq 1$ for each $u \in X$ and in the second case balls aren't convex sets.



Example 2.2. Examine $\mathbb{R}^2$ with the maximum metric:

$$d(x,y) = \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\},$$

$$\forall x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Then break line ABC (1) is convex and closed straight line AC is convex too, but the intersection $\{A,C\}$ isn't convex.

Definition 2.2. A metric space X is said to be strictly convex if for each $x,y \in X$ and for each $t \in [0,1]$ there exists unique $z \in X$ satisfying:

$$d(x,z)=td(x,y) \text{ and } d(z,y)=(1-t)d(x,y).$$

From the previous Definition 2.2. it follows that $\mathbb{R}^2$ with Euclidean metric is strictly convex, but with the maximum metric isn't.

We can prove following:

Theorem 2.1. If K is a family of convex sets in a strictly convex metric space X , then $\bigcap\{K|K \in K\}$ is convex.

Proof. Let $x,y \in \bigcap\{K|K \in K\}$ and $t \in [0,1]$. Then $x,y \in K$ for each $K \in K$ and there exists such a point $z \in K$ satisfying:

$$d(x,z)=td(x,y) \text{ and } d(z,y)=(1-t)d(x,y).$$

Since X is strictly convex, such a point z is unique. Therefore $z \in \bigcap\{K|K \in K\}$ and the result follows.

In strictly convex metric spaces the following generalizing of Theorem 1.1. is true.

Theorem 2.2. Suppose X is a strictly convex metric space. Let selfmap f of X is nonexpansive: $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y), \forall x,y \in X$. Then the set of all fixed points of f is convex.

Proof. We choose freely two points x and y in the set of all fixed points of f : $x,y \in \text{Fix} f$. Let $t \in [0,1]$. We find the corresponding $z \in X$: $d(x,z)=td(x,y)$ and $d(z,y)=(1-t)d(x,y)$.

which is unique by strict convexity of X .

Examine the distance between images of x and z under f :

$$d(f(z), f(x)) \leq d(z, x) = td(x, y)$$

As $x \in \text{Fix} f$, $d(f(z), x) \leq td(x, y)$.

Similarly:

$$d(f(z), f(y)) \leq d(z, y) = (1-t)d(x, y)$$

$$d(f(z), y) \leq (1-t)d(x, y).$$

Examine the distance between x and y :

$$d(x, y) \leq d(x, f(z)) + d(f(z), y) \leq td(x, y) + (1-t)d(x, y) = d(x, y).$$

It follows: $d(x, f(z)) = td(x, y)$ and

$$d(f(z), y) = (1-t)d(x, y).$$

Strict convexity of X implies that $z=f(z)$ and $z \in \text{Fix} f$.

3. Again on strictly convex Banach spaces.

In the Definition 2.2. of a strictly convex metric spaces we don't use the concept of a ball. Therefore we propose to define strictly convex Banach spaces similarly.

Definition 3.1. A Banach space X is said to be strictly convex if: $\forall x, y \in X \forall t \in [0, 1] \exists! z: \|x-z\| = t\|x-y\|, \|z-y\| = (1-t)\|x-y\|$.

Indeed, Definition 3.1. is equivalent with the previous Definition 1.3.

Assertion 3.1. In a Banach space X the following conditions are equivalent:

1. $\forall x, y \in X: \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow ((\exists) \lambda \in \mathbb{R}_+, x = \lambda y) \vee x = 0 \vee y = 0$;
2. $\forall x, y \in X \forall t \in [0, 1] \exists! z: \|x-z\| = t\|x-y\|, \|z-y\| = (1-t)\|x-y\|$.

Proof. We prove that the first condition implies the second. We choose freely $x, y \in X$ and $t \in [0, 1]$. If $z = (1-t)x + ty$, then:

$$\|x-y\| = \|x - ((1-t)x + ty)\| = t\|x-y\|,$$

$$\|z-y\| = \|(1-t)x + ty - y\| = (1-t)\|x-y\|.$$

Such a point z is unique. Really, suppose that there exist two points $z_1, z_2 (z_{1,2} \in X, z_{1,2} \neq y)$ satisfying:

$$\|x - z_{1,2}\| = t\|x-y\|, \|z_{1,2} - y\| = (1-t)\|x-y\|. \quad (1)$$

Observe that:

$$\|x-y\| = \|x - z_{1,2} + z_{1,2} - y\| \leq \|x - z_{1,2}\| + \|z_{1,2} - y\| = t\|x-y\| + (1-t)\|x-y\| = \|x-y\|.$$

Therefore $\|(x - z_{1,2}) + (z_{1,2} - y)\| = \|x - z_{1,2}\| + \|z_{1,2} - y\|$.

We conclude that:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x - z_1 = \lambda(z_1 - y) \quad \forall x - z_1 = 0 \vee z_1 - y = 0; \quad (2)$$

$$\exists \mu \in \mathbb{R}_+ : x - z_2 = \mu(z_2 - y) \quad \forall x - z_2 = 0 \vee z_2 - y = 0. \quad (3)$$

From (2) it follows that $z_1 = \frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}y$

and from (3) - $z_2 = \frac{1}{\mu+1}x + \frac{\mu}{\mu+1}y$.

Both z_1 and z_2 satisfy the condition (1) therefore

$$\|x - z_1\| = \|x - (\frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}y)\| = \frac{\lambda}{\lambda+1}\|x - y\| = t\|x - y\|.$$

$$\|z_1 - y\| = \|\frac{1}{\lambda+1}x + \frac{\lambda}{\lambda+1}y - y\| = \frac{1}{\lambda+1}\|x - y\| = (1-t)\|x - y\|.$$

It follows that $\lambda = \frac{t}{1-t}$.

Similarly $\mu = \frac{t}{1-t}$.

We conclude that $\lambda = \mu$, consequently $z_1 = z_2$.

Now we prove that the second condition implies the first.

We examine $x, y \in X: \|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.

Let $z \in X$, $u = x+z$ and $v = z-y$. Then $x = u-z$ and $y = z-v$. Hence, $\|u-z\| + \|z-v\| = \|u-z+z-v\| = \|u-v\|$.

There exists such $t \in [0, 1]$ that: $\|u-z\| = t\|u-v\|$,

$$\|z-v\| = (1-t)\|u-v\|.$$

If $z_1 = (1-t)u + tv$, then for z_1 the previous equalities also hold. Therefore $z = z_1 = (1-t)u + tv$.

$$\begin{aligned} \text{Hence, } z &= (1-t)u + tv = (1-t)(x+z) + t(z-y) = \\ &= (1-t)x + (1-t)z + tz - ty = (1-t)x - ty + z. \end{aligned}$$

It follows that $0 = (1-t)x - ty$ and $x = \frac{t}{1-t}y$.

If $t=0$, then $z=u$ and $x=0$, if $t=1$, then $z=v$ and $y=0$.

References

1. Kirk W.A. A fixed point theorem for mappings which do not increase distances // Amer Math. Monthly - 1965. - V. 72. - P. 1004-1006.
2. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed-point theorems for families of contraction mappings // Pacific J. Math. - 1966. - V. 19. - P. 213-218.

3. Assad N.A., Kirk W.A. Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type // Pacific J. Math. - 1972. - V. 43(3) - p. 553-562.
4. Липиниш А.Х. Колебания для маленького тиграка о неподвижных точках. - Топологические пространства и их отображения - Рига-1983.
5. Istra't,escu V.I. Fixed point theory, an Introduction. - Math. and Its Applications - 1981. (7).

И. Галина. О строгой выпуклости.

Аннотация. В работе показано, как можно определить выпуклое множество в метрическом пространстве, дано определение строго выпуклого метрического пространства, доказана теорема о выпуклости множества неподвижных точек для нестягивающегося отображения в таком пространстве и дана новая характеристика строго выпуклых банаховых пространств.
УДК 517.92.

I. Galina. Par stingro izliektību.

Анотācija. Darbā parādīts, ka metriskā telpā var definēt izliektu kopu, dots stingri izliektas metriskās telpas jēdziens, pierādīts, ka šādā telpā neizstiepjama attēlojuma nekustīgo punktu kopa ir izliekta, un dots jauns stingri izliektu Banaha telpu raksturojums.

Department of Mathematics
Latvian University
Boulevard Rainis 19
226008 Riga

ON FIXED POINTS OF MAPPINGS

I. Kapra'ne, A. Liepin's'

Abstract. Existence of fixed points for mappings of R. Kannan's type in a metric space is proved.
AMS Subject Classification 54H25.

We extend the results of [1,2] similarly as the results of [3,2] in [4].

We need the following basic definitions and notations.

Let X be a metric space with a distance d . Let EX be a set of all subsets of X . $B(x, r) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$ for each $x \in X$ and $r \in \mathbb{R}_+$.

Definition. A closure operator on X is a mapping $W: EX \rightarrow EX$ for each $A, B \in EX$ satisfying:

- 1) $A \subseteq B \Rightarrow W(A) \subseteq W(B)$;
- 2) $A \subseteq W(A)$;
- 3) $W(W(A)) = W(A)$.

Let W be a closure operator on X . A subset A of X is said to be S -closed if $A = W(A)$. W -compactness of X is defined in the same manner as in the case of a topological closure operator.

Let f be a selfmap of X . Let $x \in X$ and

$$A(x) := \bigcap \{B \in EX \mid x \in B \text{ \& } B = W(B) \text{ \& } f(B) \subseteq B\}.$$

Theorem. Suppose X is a metric space and W is a closure operator on X . Suppose the following holds:

- 1) X is W -compact;
- 2) $B(x, r)$ is W -closed for each $x \in X$ and $r \in \mathbb{R}_+$.

Let f be a selfmap of X and the following conditions are satisfied:

- 3) $\exists q \in [0, 1] [\forall x, y \in X:$
 $d(f(x), f(y)) \leq \max\{d(x, f(x)), d(y, f(y)), q \operatorname{diam}(A(x) \cup A(y))\};$
- 4) $\forall x \in X (x \neq f(x)) : x(x) := \sup \{d(y, f(y)) \mid y \in A(x) \text{ \& } \operatorname{diam} A(x) < \infty\}.$

Then f has a fixed point.

Proof. Using Zorn's Axiom and W -compactness of X (condition 1) we conclude that there exists a minimal nonempty W -closed and invariant under f subset M of X .

Let $x \in M$ and $x \neq f(x)$. Since $M=A(x)$, $r(x) < \text{diam } M$ by 4. Let $r' := q \text{ diam } M$ and $\max \{ r(x), r' \} =: r$.

Let $B := B(f(x), r) \cap M$. B is nonempty ($f(x) \in B$) and W -closed by 2. Let $y \in B$. By 3:

$d(f(x), f(y)) \leq \max \{ d(x, f(x)); d(y, f(y)); q \text{diam } M \} \leq$
 $\leq \max \{ r(x); r(y); r' \} \leq r$ and $f(y) \in B$. Hence, $f(B) \subset B$, $B=M$,
 $M \subset B(f(x), r)$, $f(x) \in \bigcap_{y \in M} B(y, r) \cap M =: C \neq \emptyset$ and $f(M) \subset C$ as $x \in M$
 was arbitrary. Therefore $f(C) \subset C$ and $C=M$ as C is W -closed by 2
 and M is minimal.

At the same time: $\text{diam } C \leq r < \text{diam } M$.
 The result follows.

Remark. The fixed point of the mapping satisfying the third condition of our theorem is unique if $W(\{x\}) = \{x\}$ for each $x \in X$.

References

1. Kannan R. Fixed point theorems in reflexive Banach spaces // Proc.Amer.Math.Soc.-1974.-V.38.-P.111-118.
2. Liepiņš A. Sūpuldziesma mazajam tīģerēnam par nekustīgajiem punktiem.-Topoloģiskas telpas un to attēlojumi.-Rīga, 1983.
3. Belluce L.P., Kirk W.A. Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings // Proc.Amer.Math.Soc.-1969.-V.20.-P.141-146.
4. Kaprāne I., Liepiņš A. The adventures from Mr.Fixed Point's life: the first adventure.-Problems of pure and applied mathematics.-Tartu.1990.

M.Kaprāne, A.Liepiņš. О неподвижных точках отображений

Аннотация. Доказано существование неподвижных точек для R.Каннана типа отображений в метрическом пространстве.
 УДК 517.98.

I.Kaprāne, A.Liepiņš. Par attēlojumiem nekustīgajiem punktiem.

Анотācija. Pierādīta nekustīgo punktu eksistence R.Kannan tipa attēlojumiem metriskā telpā.

Matemātiskās analīzes katedra
 Latvijas universitāte
 Raiņa bulvāri 19
 226098 Rīga

ОБ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ q-СТОРОННЕЙ СВЕРТКИ С МАКСИМАЛЬНЫМ ИНДИКАТОРОМ

С. И. Калинин

Аннотация. В данной заметке рассматривается однородное уравнение q -сторонней свертки с максимальным индикатором. В предположении полной регулярности роста характеристической функции уравнения вдоль лучей из некоторых множеств приводится описание односвязных областей аппроксимации решений этого уравнения посредством так называемых элементарных решений.
УДК 517.9.

В настоящей статье условимся использовать терминологию и обозначения работ [1]–[3].

1. Постановка задачи

Пусть G – выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$; H – пространство голоморфных в этой области функций с обычной топологией равномерной сходимости на компактах или пространство, ассоциированное с G ; S – аналитический функционал с компактным носителем в G . Известно, что S допускает представление в виде интеграла по мере

$$\langle S, f \rangle = \int_K f(z) d\mu, \quad f \in H, \quad (1)$$

где K – некоторый компакт в области G , μ – комплексная конечно аддитивная мера ограниченной вариации, сосредоточенная на K . Из представления (1) следует, что функционал S можно применять не только к функциям f из пространства H , но и к "малым" сдвигам $f(z+h)$ этих функций, при которых они остаются аналитическими на K . Функцию

$$\sum_{k=0}^{2-1} a_k f(z + \omega^k h), \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

где $\omega = \exp\{2\pi i/q\}$, будем называть q -сторонним сдвигом функции f на h , причем сдвиг (2) назовем равномерным, если $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1}$, и неравномерным — в противном случае. Функцию

$$F(h) = \langle S, \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k f(z + \omega^k h) \rangle,$$

где h достаточно "мало", будем называть q -сторонней сверткой функционала S и функции $f \in H$ и обозначать, следуя [2], $(S \otimes f)(h)$. Рассмотрим однородное уравнение q -сторонней свертки

$$S \otimes f = 0 \quad (f \in H). \quad (3)$$

Приведем введенное в [3] понятие индикатора уравнения (3).

Определение. Поднабор $\ell = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ набора целых чисел $\{0, 1, \dots, q-1\}$, удовлетворяющий условиям

$$1) \quad 0 \leq p_1 < \dots < p_m \leq q-1;$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k \omega^{kp_n} \neq 0, \text{ если } p_n \in \ell,$$

$$\sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k \omega^{kp_n} = 0, \text{ если } p_n \notin \ell,$$

называется индикатором уравнения (3).

В настоящей работе мы будем предполагать, что уравнение (3) имеет максимальный индикатор $\ell = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Множество W решений $f \in H$ уравнения (3) образует замкнутое подпространство в H . Сно, в силу того, что оператор q -сторонней свертки коммутирует с оператором кратного дифференцирования D^q и $\omega^{kq} = 1$, $k \in \mathbb{N}$, является инвариантным относительно оператора D^q . Экспоненциальные полиномы вида

$$e_n(z, \lambda) = \frac{d^n}{d\lambda^n} \left(\sum_{k=0}^{q-1} g_k(\lambda) e^{\lambda \omega^k z} \right) \Big|_{\lambda=\lambda},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$; $g_k(z)$, $k = 0, \dots, q-1$, — функции, голоморфные в точке λ ; $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, называются элементарными экспоненциальными полиномами. Элементарные экспоненциальные полиномы из W , следуя [3], будем называть элементарными решениями уравнения (3). Известно [3, с. 71], что каждое решение $f \in H$ уравнения (3) можно

аппроксимировать в топологии H линейными комбинациями элементарных решений. Настоящая работа посвящена исследованию следующей задачи: пусть решение $f \in H$ уравнения (3) допускает однозначное аналитическое продолжение в односвязную область G' , $G \subset G'$. При каких условиях f можно аппроксимировать комбинациями элементарных решений в топологии пространства H' , ассоциированного с областью G' ?

В следующем пункте в предположении полной регулярности роста характеристической функции $\varphi(h) = \langle S, e^{hz} \rangle$ уравнения (3) вдоль лучей из некоторой множества приводится описание односвязных областей G' , для которых рассматриваемая задача имеет положительное решение. Упомянутые односвязные области представляют собой введенные автором в [1, с.202] "флаговые" области, являющиеся существенно невыпуклыми.

2. Основной результат

Пусть на границе области G существуют допустимые [1] относительно сопряженной диаграммы характеристической функции $\varphi(h)$ дуга $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ ($n \geq 1$). Предположим, что интервалы направлений $[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_n, \beta_n]$, ассоциированные [1] с этими дугами, попарно не имеют общих направлений. Образует флаговую область (см. [1], формула (2))

$$G \cup \left(\bigcup_{k=1}^n S_k \right), \quad (4)$$

порожденную дугами $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, где $S_k - (\alpha_k, \beta_k)$ -направленный флаг [1], пристроенный к хорде, стягивающей концы дуги Γ_k . Следуя [1], флаг S_k будем называть узким, если дуга Γ_k - малая [1, с.201]. Справедливы следующие теоремы

Теорема 1. Пусть характеристическая функция φ уравнения (3) имеет полную регулярность роста вдоль лучей

$\arg z = -\theta$, $\theta \in [\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k] \cup [\beta_k, \beta_k + \varepsilon]$; $k=1, \dots, n$; $\varepsilon > 0$, и решение $f \in H$ этого уравнения допускает однозначное аналитическое продолжение из области G в односвязную область G' , содержащуюся в области (4). Тогда f можно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений в тополо-

гия пространства H' , ассоциированного с G' .

Теорема 2. Пусть характеристическая функция φ уравнения (3) имеет полную регулярность роста вдоль лучей $\arg z = -\alpha_k$, $\arg z = -\beta_k$; $k = 1, \dots, n$, и решение $f \in H'$ этого уравнения допускает однозначное аналитическое продолжение из области G в односвязную область G' , содержащуюся в (4), где все флаги $S_1, \dots, S_n$ — узкие. Тогда утверждение теоремы 1 также имеет место.

Приведенные теоремы можно сформулировать в терминах распространения спектрального синтеза. Известно, что пространство W решений $f \in H'$ уравнения (3) допускает спектральный синтез (см. [3, с. 71]). Последнее означает, что W совпадает с замыканием в H' линейной оболочки элементарных экспоненциальных полиномов, принадлежащих W . Пусть $W' = W \cap H'$, где H' — пространство, ассоциированное с односвязной областью G' ($G \subset G'$). Условимся говорить, что подпространство W допускает распространение спектрального синтеза с области G на область G' , если подпространство $W' \subset H'$ также допускает спектральный синтез. Теоремы 1 и 2 эквивалентны соответственно таким утверждениям

Теорема 3. Пусть характеристическая функция φ уравнения (3) имеет полную регулярность роста вдоль лучей

$$\arg z = -\theta, \quad \theta \in [\alpha_k - \varepsilon, \alpha_k] \cup [\beta_k, \beta_k + \varepsilon], \quad k = 1, \dots, n, \quad \varepsilon > 0,$$

и $G' (G \subset G')$ — односвязная область, содержащаяся в области (4). Тогда подпространство W допускает распространение спектрального синтеза с области G на область G' .

Теорема 4. Пусть характеристическая функция φ уравнения (3) имеет полную регулярность роста вдоль лучей

$$\arg z = -\alpha_k, \quad \arg z = -\beta_k; \quad k = 1, \dots, n,$$

и $G' (G \subset G')$ — односвязная область, содержащаяся в области (4), у которой все флаги — узкие. Тогда утверждение теоремы 2 сокращается.

Отметим, что фигурирующие в теоремах 1, 3 области G' более "широкие", нежели в теоремах 2, 4, но в последних слабее ограничения на характеристическую функцию.

Теоремы 3 и 4 дополняют цитированный выше результат А.Б. Шинкина о спектральном синтезе в пространстве W решений уравнения (3) с максимальным индикатором.

Доказательство теорем 3 и 4 (а значит, и теорем 1 и 2) основывается на том факте (см. [3], предложение 2.4.2), что аннуляторные подмодули [2]–[3] пространств решений W и W' порождаются независимой системой функций

$$h^0 \varphi(h), h^1 \varphi(h), \dots, h^{2-1} \varphi(h).$$

Следовательно, в частности, аннуляторный подмодуль I' подпространстве W' представляет собой замыкание в P' множества функций вида $p(h) \varphi(h)$, где P' – класс всех целых функций экспоненциального типа, у которых ассоциированные по Борелю функции являются аналитическими на дополнении G' до расширенной комплексной плоскости, наделенный отделимой локально выпуклой топологией, индуцированной из пространства H'^* (сильного сопряженного к H') отображением

$$T: \hat{S} \rightarrow \hat{\varphi}(h) = \langle \hat{S}, e^{hz} \rangle,$$

а $p(h)$ – многочлен. Такое строение I' , в силу замечания к теореме 5.1 работы [4], говорит о том, что пространство W' совпадает с пространством решений обычного однородного уравнения свертки

$$\langle S, f(z+h) \rangle = 0 \quad (f \in H'),$$

а значит, является подпространством пространства H , инвариантным относительно оператора D обычного дифференцирования. Но в условиях теорем 3 и 4, в силу теорем А и Б работы [1], W' как подпространство, инвариантное относительно оператора D , допускает спектральный синтез. Значит, подпространство W допускает распространение спектрального синтеза с исходной выпуклой области G на область G' , фигурирующую в формулировках теорем 3 и 4.

3. Иллюстрация теоремы 3

Рассмотрим однородное уравнение двухсторонней свертки

$$\langle S, a_1 f(z+h) + a_2 f(z-h) \rangle = 0 \quad (5)$$

с характеристической функцией $q(h) = \sin \pi h$, заданное в полосе $G = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \alpha, 0 < \alpha < +\infty\}$. Нетрудно видеть, что это уравнение будет иметь максимальный индикатор тогда и только тогда, когда $\alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$. Предположим, что для (5) это условие выполняется. Тогда по теореме 3 пространство решений W уравнения (5), голоморфных в полосе G , допускает распространение спектрального синтеза с G на всякую область $G' = G \cup \Pi$, где $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : y(x) - \pi < \operatorname{Im} z < y(x) + \pi, x \in \operatorname{Re} z\}$ — криволинейная полоса, порожденная непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией $y(x)$.

Библиографический список

1. Калинин С.И. К вопросу об аппроксимации решения однородного уравнения свертки посредством элементарных // Матем. заметки. — 1982. — Т. 32. — Вып. 2. — С. 199–211.
2. Красичков-Торюновский И.Ф., Шимкин А.Б. Спектральный синтез для оператора кратного дифференцирования // ДАН СССР. — 1989. — Т. 307. — № 1. — С. 24–27.
3. Шимкин А.Б. Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования: Дис.... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — М., 1990. — 86 с.
4. Красичков-Торюновский И.Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. — 1972. — Т. 88. — № 1. — С. 3–30.

S.I. Kalinin. On the approximation of the solutions of homogeneous equation of the q -lateral convolution with the maximum indicator.

Summary. This article deals with the homogeneous equation of the q -lateral convolution with the maximum indicator. The description of a singleconnection regions of approximation of the equation solutions by means of the so-called elementary solutions are given in a supposition of the full regularity of a characteristic function growth of this equation along the rays from some sets.

AMS Subject classification

О ДЕМИКОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В. Пономарев

Аннотация. Приводятся достаточные условия для демикомпактности операторов. УДК 517.988.5

В связи с изучением неподвижных точек операторных уравнений в гильбертовом пространстве Petryshyn [1] ввел понятие демикомпактного оператора. Это понятие также привело к интересным результатам (обобщающим ряд известных, см. [2] и указанную там литературу) в теории краевых задач [2-4].

В настоящей работе приводятся утверждения, дающие достаточные условия демикомпактности оператора.

Пусть E , G - нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_G$. Введем определение.

Определение. Оператор (отображение) $f: E \rightarrow G$ назовем демикомпактным, если из условий:

- 1) последовательность (x_k) элементов из E ограничена,
- 2) найдется $a \in G$ такое, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|fx_k - a\|_G = 0.$$

следует, что у последовательности (x_k) существует подпоследовательность (x_{k_i}) и $x_0 \in E$ такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{k_i} - x_0\|_E = 0.$$

Следующий пример показывает, что функционально-дифференциальное уравнение (в частности, обыкновенное дифференциальное уравнение) при весьма естественном условии определяет демикомпактный оператор.

Пример. Определим отображение $F: AC(I, R^n) \rightarrow L(I, R^n)$ с. эдуч.м образом: для любых $x \in AC(I, R^n)$ и $t \in I$ положим

$$(Fx)(t) = x'(t) - (fx)(t), \quad (I)$$

где $f: AC(I, R^n) \rightarrow L(I, R^n)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, $AC(I, R^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x: I \rightarrow R^n$ с нормой $\|x\|_c = \max\{|y_i(t)| \mid (i, t) \in \{1, \dots, n\} \times I\}$, $L(I, R^n)$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $y: I \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|y\|_L = \max\left\{\int_I |y_i(s)| ds \mid i \in \{1, \dots, n\}\right\}.$$

Для $x \in R^n$ полагаем $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$, $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$. Покажем, что если для любого ограниченного множества $A \subset AC(I, R^n)$ найдется суммируемая функция $g \in L(I, R^n)$ такая, что $|f(x)(t)| \leq g(t)$ для любых $x \in A$ и почти для всех $t \in I$, то отображение F , определенное по формуле (I), демикомпактно.

Действительно, пусть (x_k) ограниченная последовательность элементов из $AC(I, R^n)$ такая, что последовательность (Fx_k) сходится к некоторому элементу $a \in L(I, R^n)$ т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Fx_k - a\|_L = 0.$$

Определяя $e_k: I \rightarrow L(I, R^n)$ для любого $k \in \{1, 2, \dots\}$ следующим образом

$$e_k(t) = (Fx_k)(t) - a(t),$$

то имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\|_L = 0,$$

$$x'_k(t) = (fx_k)(t) + a(t) + e_k(t)$$

Последовательность (x_k) равномерно ограничена и равномерно непрерывна. Первое очевидно, а второе следует из следующей оценки, справедливой для любых $k \in \{1, 2, \dots\}$, $t_1 \in I$ и $t_2 \in [t_1, b]$

$$\begin{aligned} |x_k(t_2) - x_k(t_1)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} |x'_k(t)| dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |(fx_k)(t) + \alpha(t) + \varepsilon_k(t)| dt \leq \\ &\int_{t_1}^{t_2} g(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} |\alpha(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_k(t)| dt, \quad (2) \end{aligned}$$

где $g \in L(I, \mathbb{R}^n)$ — функция, существующая согласно условию для множества $\{x_n \mid n \in \{1, 2, \dots\}\}$.

Согласно теореме Асколи (т. 7.5.7 из [5]), существует подпоследовательность (x_{k_i}) последовательности (x_k) , сходящаяся к x_0 . Из оценки (2) следует, что $x_0 \in AC(I, \mathbb{R}^n)$, что и требовалось показать.

Теорема 1. Пусть $F: E \rightarrow G$, $f_0 \in G$ и выполняются условия:

- 1) $F(x) + f_0 \in F(E)$ для любого $x \in E$,
- 2) прообраз $F^{-1}(A)$ любого компактного множества $A \subset \overline{F(E)}$ при отображении F является относительно компактным множеством.

Тогда отображение $x \rightarrow F(x) + f_0$ демикомпактно.

Доказательство. Пусть дана ограниченная последовательность (x_k) элементов из E и элемент $a \in G$ такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F(x_k) + f_0 - a\|_G = 0. \quad (3)$$

Следовательно, последовательность $k \rightarrow F(x_k)$ сходится к элементу $a - f_0$.

В силу условия 1, для любого $k \in \{1, 2, \dots\}$ найдется

$y_k \in E$ такое, что

$$F(y_k) = F(x_k) + f_0. \quad (4)$$

Из (3) получаем, что множество

$$A = \{F(y_k) - f_0 \mid k \in \{1, 2, \dots\}\} \cup \{a - f_0\}$$

компактно и $A \subset \overline{F(E)}$. Поэтому по условию 2 имеем, что множество

$$F^{-1}(A) \quad (5)$$

относительно компактно. Так как для любого $k \in \{1, 2, \dots\}$ согласно (4), элементы y_k принадлежат множеству (5), то из последовательности $k \rightarrow \infty$ можно выделить подпоследовательность $i \rightarrow \infty$, сходящуюся к некоторому элементу $x_0 \in E$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть отображение $F: E \rightarrow G$ объективно и обратное отображение F^{-1} непрерывно, $f_0 \in G$. Тогда отображение $x \rightarrow F(x) + f_0$ демикомпактно.

Доказательство. Из сюръективности F следует выполнение условия I теоремы 1, из объективности F следует существование F^{-1} , которое, будучи по условию непрерывным, переводит относительно компактное множество (теорема 3.17.9 из [5]) в относительно компактное множество, а следовательно, по теореме I получаем требуемое.

Теорема 3. Пусть $A: E \rightarrow G$ линейное, непрерывное, сюръективное отображение, $N(A) = \{x \in E \mid Ax = 0\} = \{0\}$ и $f_0 \in G$

Тогда отображение $x \rightarrow Ax + f_0$ демикомпактно.

Доказательство. Так как множество нулей оператора A состоит только из нулевого элемента, то он инъективен (теорема 1 п.12.1 из [6]), и по теореме Банаха об обратном операторе (теорема 4 п.12.1 из [6]) существует обратный линейно непрерывный оператор, что согласно теореме 2 и означает требуемое.

Библиографический список

1. Petryshyn W.V. Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space // J.Math.Analysis and Applic. - 1966. - 14, N 2. - P.276-284.
2. Пономарев В.Д. Существование и непрерывная зависимость решения системы операторных уравнений // Мат.заметки. - 1982. Т.32, № 1. - С.103-114.
3. Пономарев В.Д. Существование решения системы операторных уравнений // Латв.мат.ежегодник. Т.26.-Рига: Зинатне, 1982. - С.96-100.
4. Пономарев В.Д. Об одной теореме непрерывной зависимости решений операторных уравнений // Латв.мат.ежегодник.Т.29.- Рига: Зинатне, 1985. - С.70-72.
5. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир, 1964. - 430 с.
6. Треногин В.А. Функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 496 с.

V.Ponomarev. On demicompact operators.

Summary. Sufficient conditions for operators' demicompactness are given. AMS Subject classification 47B38.

V.Ponomarjovs. Par demikompaktiem operatoriem.

Anotācija. Tiek doti operatoru demikompaktības nosacījumi.

M A T E M Ā T I K A

Zinātniskie raksti

576.sējums

Recenzenti: L.Jonins, RTU Lietišķās ma-
temātikas kat.doc.;

I.Cepītis, IJ Diferenciāl-
vienādojumu un
tuvināto metožu
kat.doc.

Redaktori: A.Šostaks, N.Terentjeva
Tehniskā redaktore S.Linina
Korektore I.Baloie

Parakstīts iesp. 28.07.92. Reg.apl.Nr.2-0266. Papīra formāts
60x84/16. Papīrs Nr.3. 13,6 fiz.iespiedl.12,6 uzsk.iespiedl.
10,4 uzsk.izdevn.1.Metiens 300 eks.Pasūt.Nr. 312 Maksa 10.00

Latvijas Universitāte
226098 Rīgā, Raiņa bulv. 19
Iespiests IJ rotaprintā
226050 Rīgā, Kalēju ielā 43