Министерство Высшего Образования СССР
Латвийский Государственный университет
им. Петра Стучки

Физико-математический факультет
Кафедра общей математики

Я. Л. Энгельсон

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА
В
ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
Доктор физ.-мат. наук
профессор М.М. Вайнберг

Рига - 1958.

О г л а в л е н и е

Стр.

Введение I

Глава I. Основы теории локально выпуклых пространств 9

§ 1. Линейные топологические локально выпуклые пространства...... 9

§ 2. Операторы в локально выпуклых пространствах 21

§ 3. Некоторые частные виды и свойства локально выпуклых пространств 42

Глава II. Некоторые вопросы теории поля в локально выпуклых пространствах........... 51

§ 4. Дифференциал Гато и градиент функционала 51

§ 5. Интеграл Стильтьеса и его свойства 64

§ 6. Криволинейный интеграл 75

§ 7. Условия потенциальности оператора 87

Глава III. О продолжении некоторых линейных операторов 92

§ 8. Некоторые вспомогательные предложения 92

§ 9. О квадратном корне из линейного ограниченного оператора.... 100

Стр.

§ 10. О квадратном корне из вполне непрерывного оператора и его продолжении 112

Глава IУ. Вопросы вариационной теории нелинейных уравнений 132

§ 11. О функционалах в гильбертовом пространстве 132

§ 12. Теоремы существования решений и собственных векторов 137

§ 13. Примеры 147

Цитированная литература 159

В в е д е н и е

Одним из важных разделов функционального анализа является теория нелинейных операторных уравнений. Основы этой теории были заложены в работах Биркгоффа и Келлога, Ю. Шаудера, Ж. Лерея и В.В. Немыцкого. Эти авторы, а также их многочисленные последователи, применяли для исследования нелинейных уравнений топологические методы. Другой (аналитический) метод, был применен А.М. Ляпуновым, а затем развит в работах Э. Шмидта, А.И. Некрасова, Л. Лихтенштейна и других.

Сравнительно недавно, в тридцатых годах нашего столетия, были опубликованы работы Л. Лихтенштейна, А. Гаммерштейна, М. Голомба и Л.А. Люстерника, которые послужили началом развития вариационных методов исследования нелинейных уравнений и нелинейных операторов. Эти методы получили свое дальнейшее развитие в работах Э. Роте, М.М. Вайнберга, Э.С. Цитланадзе и других авторов. В упомянутых работах нелинейные уравнения изучались в гильбертовом и в некоторых более общих банаховых пространствах (см. [56] , где дано изложение вариационной теории нелинейных уравнений и указана библиография). Изучение нелинейных уравнений в таких пространствах обуславливалось прежде всего тем, что теория этих пространств была хорошо развита в связи с задачами линейного анализа. Однако, как выяснилось в дальнейшем, рамки банаховых пространств оказались узкими для многих задач линейного функционального анализа. В связи с этим, за последние годы усиленно стала развиваться общая теория линейных топологических пространств, начало которой положено А.Н. Колмогоровым. При этом выделился особый класс таких пространств - локально выпуклые пространства. Этот класс пространств, введенный А.Н. Тихоновым и И. фон Нейманом, оказался достаточно широким, чтобы охватить все важные в функциональном анализе пространства. Вместе с тем, в локально выпуклых пространствах сохраняются наиболее важные факты теории банаховых пространств. Ввиду столь удачного сочетания качеств, локально выпуклые пространства подверглись детальному изучению, что привело к созданию стройной теории этих пространств.

В связи с этим, естественно возник вопрос об изучении нелинейных операторных уравнений в локально выпуклых пространствах. Исследования в этом направлении привели к ряду работ (см.[4] , где указана библиография), в которых нелинейные уравнения изучались топологическими методами.

В отличие от этих работ, мы поставили себе целью изучение нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах вариационным методом. Результаты этих исследований опубликованы в [28] и [6] .

В настоящей работе дается полное изложение тех результатов упомянутых работ автора, которые относятся к вариационной теории нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах.

Следуя общим идеям, лежащим в основе вариационной теории нелинейных уравнений в банаховых пространствах, мы рассматриваем сначала круг вопросов, связанных с изучением потенциального поля (глава II) и продолжением некоторых линейных операторов (глава III), а затем переходим к доказательству теорем существования решений уравнений и собственных векторов нелинейных операторов.

При этом, отсутствие нормы и ограниченных окрестностей нуля в общих локально выпуклых пространствах, обуславливает изменение не только методов доказательств, но и формулировок некоторых результатов, полученных для банаховых пространств.

Дело в том, что некоторые понятия и свойства, эквивалентные в случае банаховых пространств, перестают быть эквивалентными в общих локально выпуклых пространствах. Ввиду этого, возникает необходимость выбора тех из них, которые соответствуют нашим целям. Так, например, вместо ограниченности, полной непрерывности и непрерывности операторов, мы часто пользуемся, соответственно, более слабыми требованиями: кваэи ограниченности, квази полной непрерывности и непрерывности оператора по отношению к ограниченному множеству. При этом, для получения окончательных результатов оказывается достаточным использование некоторых предложений, сформулированных и доказанных в этих терминах.

Отметим также, что введенное в § 5 понятие полной вариации абстрактной функции и связанное с ним понятие длины кривой в локально выпуклом пространстве (§ 6) имеют, в отличие от их аналогов в банаховом пространстве, относительный характер, т.е. значения этих величин зависят от выбора окрестности нуля. Однако, эти понятия применяются лишь в теоремах существования (интеграла Стильтьеса, криволинейного интеграла и др.), а поэтому объекты, существование которых доказывается в этих теоремах, сами не приобретают относительного характера.

Можно также заметить, что отказ от формального аппарата нормированных пространств (и, в частности, пространств L^p) и использование техники, естественной для локально выпуклых пространств, дает иногда возможность более рельефно выявить сущность некоторых связей.

Перейдем теперь к краткому обзору содержания настоящей работы по главам и параграфам.

Работа состоит из четырех глав.

В первой главе (§§ 1-3) излагаются основные факты теории локально выпуклых пространств и операторов, действующих в таких пространствах. Доказательства приводятся лишь в тех случаях, когда автору не известны источники, на которые можно сослаться.

В § 1 даются определения основных понятий теории линейных топологических и, в частности, локально выпуклых пространств. При этом выясняется связь между различными понятиями и устанавливаются некоторые предложения.

В § 2 рассматриваются линейные и нелинейные операторы и функционалы, изучается связь между их свойствами и определяются различные топологии в пространствах линейных операторов и функционалов.

В § 3 рассматриваются частные виды локально выпуклых пространств (бочечные, рефлексивные, полные и другие пространства). Устанавливаются некоторые свойства этих пространств.

Вторая глава (§ 4-7) содержит построение теории потенциального поля в локально выпуклых пространствах.

В § 4 вводится понятие градиента функционала и исследуется связь между свойствами градиента и его потенциала. Наиболее важной является лемма 4.4 о том, что из квази бикомпактности градиента вытекает слабая непрерывность его потенциала.

В § 5 вводятся понятие абстрактной функции с ограниченной вариацией и понятие интеграла Стильтьеса для абстрактных функций, отображающих отрезок числовой оси в локально выпуклое пространство. Доказываются теорема существования интеграла Стильтьеса и некоторые предложения о предельном переходе под знаком интеграла. При этом используется введенное понятие полной вариации.

В § 6 вводится понятие кривой в локально выпуклом пространстве, а затем, посредством интеграла Стильтьеса, определяется криволинейный интеграл от оператора вдоль кривой. Доказывается ряд предложений о свойствах кривых и криволинейных интегралов. Наиболее важным из этих предложений является теорема 6.1 о равенстве нулю криволинейного интеграла вдоль замкнутой кривой.

§ 7 содержит основной результат рассматриваемой главы. Здесь с помощью результатов двух предшествующих параграфов доказывается необходимое и достаточное условие потенциальности оператора, действующего из локально выпуклого пространства E в его сильно сопряженное пространство E'.

Глава III (§§ 8-10) посвящена изучению свойств квадратного корня из линейного оператора A и выяснению вопроса о представлении оператора A в виде произведения других операторов.

В § 8 приводятся общие предложения о продолжении тождеств и операторов. Далее, вводятся два класса пространств (условия (χ) и (χ')), свойства которых детально изучаются. Эти два класса пространств лежат в основе всего дальнейшего построения.

§ 9 посвящен изучению свойств операторов, которые могут быть истолкованы как квадратные корни из линейного оператора, действующего из одного локально-выпуклого пространства в другое. Доказывается ряд предложений, связанных с представлением линейного ограниченного оператора в виде произведения двух его различных квадратных корней. Основными являются теоремы 9.3, 9.5 и 9.7.

В § 10 изучаются свойства квадратных корней из линейного вполне непрерывного оператора A, действующего из E' в E, причем для них даются спектральные представления. Основной результат содержат теоремы 10.2 и 10.3. Из этих теорем получается затем окончательный результат (теорема 10.4) о представлении оператора A в виде различных произведений его квадратных корней.

Четвертая глава (§ 11-13) посвящена некоторым вопросам вариационной теории нелинейных уравнений в локально выпуклом пространстве.

В § 11 приводятся некоторые факты из вариационной теории нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем доказываются вспомогательные предложения о функционалах, заданных в гильбертовом пространстве. Эти доказательства используют результаты третьей главы.

В § 12 с помощью результатов второй и третьей глав доказывается ряд теорем (12.1-12.4) о существовании решений для нелинейного уравнения вида

$$x = AF(x)$$

где A - линейный оператор из E' в E, а F - потенциальный оператор, действующий из E в E'. Доказывается также теорема о существовании собственных векторов оператора $\Gamma = AF$.

В последнем, тринадцатом параграфе изучается конкретное нелинейное уравнение в пространстве бесконечно дифференцируемых финитных функций. При помощи теоремы 12.1 доказывается существование решения этого уравнения.

Каждый параграф настоящей работы разбит на пункты, которые нумеруются двумя числами, отделенными друг от друга точкой. Первое из них обозначает номер параграфа, второе - номер пункта в данном параграфе. По такому же принципу построена нумерация формул, теорем, следствий и замечаний.

Ссылки на литературу даны в квадратных скобках.

Автор сердечно благодарит своего научного руководителя профессора М.М. Вайнберга за большое внимание, оказанное им этой работе, а также профессора Д.А. Райкова за полезные советы и консультации во время изучения вопросов общей теории локально выпуклых пространств.

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе даются основные определения и приводятся известные факты из теории линейных топологических пространств (см. [3,10, 11б,20,23,22]), а также некоторые общие предложения, используемые в следующих главах.

§ I. Линейные топологические локально выпуклые пространства

I.I. Определение I.I. Множество E элементов $x, y, z, \ldots$ называется линейным или векторным пространством (элементы $x, y, z, \ldots$ называются также точками или векторами), если выполняются следующие условия:

а) Для каждых двух элементов $x, y \in E$ определена их сумма $x+y$, принадлежащая также множеству E.

б) Для любого вещественного или комплексного числа α и любого $x \in E$ определено произведение αx также принадлежащее множеству E.

в) Эти операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим условиям:

a_1) $x+y = y+x$

a_2) $(x+y)+z = x+(y+z)$

a_3) Существует элемент $\theta \in E$, называемый нулем или нулевым элементом пространства E такой, что $x+\theta = x$ для любого $x \in E$.

a_4) Для каждого элемента $x \in E$ существует элемент $-x \in E$, называемый **противоположным**, такой, что

$б_1$) $1 \cdot x = x$

$б_2$) $\alpha_1(\alpha_2 x) = (\alpha_1\alpha_2)x$

$б_3$) $(\alpha_1+\alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$

$б_4$) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Из приведенного определения следует единственность нуля и единственность противоположного элемента для данного $x \in E$.

Если для элементов $x \in E$ определено умножение лишь на вещественные числа, то E называется **вещественным** пространством; если же в E определено умножение элементов на любые комплексные числа, то линейное пространство E называется **комплексным**.

В дальнейшем будем рассматривать лишь вещественные пространства, ибо переход к комплексным пространствам не сложен.

Рассмотрим некоторые виды множеств в линейном пространстве E .

<u>Определение 1.2.</u> Множество $\mathfrak{M}$ элементов линейного пространства E называется **симметричным**, если $\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}$, т.е. из $x \in \mathfrak{M}$ следует, что $-x \in \mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется **звездно-симметричным**, если из $x \in \mathfrak{M}$ следует $\lambda x \in \mathfrak{M}$ для всех $|\lambda| \leq 1$

Определение 1.3. Пусть $x_1, x_2 \in E$. Множество всех точек вида $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, где $0 \le \lambda \le 1$ называется о т р е з к о м, соединяющим точки x_1 и x_2 .

Определение 1.4. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется в ы п у к л ы м, если, каковы бы ни были точки $x, y \in \mathfrak{M}$, весь отрезок, соединяющий точки x и y , содержится в $\mathfrak{M}$

Определение 1.5. Говорят, что множество $\mathfrak{M} \subset E$ п о г л о щ а е т множество $\mathfrak{N} \subset E$, если существует такое число $\alpha > 0$, что $\lambda \mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ +/ для $|\lambda| \le \alpha$. Множество из E называется п о г л о щ а ю щ и м , если оно поглощает всякое одноточечное множество из E .

1.2. Определение топологического пространства обычно дается посредством введения одного из следующих понятий: открытого множества, замкнутого множества, замыкания множества, а также окрестности точки. Мы будем исходить из последнего понятия.

Определение 1.6. Говорят, что в множестве E элементов (или точек) $x, y, z, \ldots$ определена т о п о л о г и ч е с к а я с т р у к т у р а (или, короче, т о п о л о г и я) $\mathcal{T}$, если каждому элементу $x \in E$ поставлена в соответствие система $\mathfrak{V}(x)$ подмножеств $V \subset E$, называемых о к р е с т н о с т я м и т о ч к и x и удовлетворяющих следующим условиям:

1) Если $V \in \mathfrak{V}(x)$, то $x \in V$;

2) Если $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}(x)$, то пересечение $V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{V}(x)$.

3) Если $V \in \mathfrak{V}(x)$ и $V \subset \mathfrak{M} \subset E$, то $\mathfrak{M} \in \mathfrak{V}(x)$.

+/ $\lambda \mathfrak{N}$ означает множество всех λx , где $x \in \mathfrak{N}$.

4) Если $V \in \mathcal{W}(x)$, то существует $W \in \mathcal{W}(x)$ такое, что $V \in \mathcal{W}(y)$ для всех $y \in W$.

Множество E, в котором определена топология τ, называется топологическим пространством и обозначается (E, τ) или просто E, если ясно о какой топологии идет речь.

При таком задании топологии, открытое множество в топологическом пространстве E можно определить как такое, которое является окрестностью каждой своей точки, замкнутое множество, как дополнение открытого, и замыкание множества $\mathfrak{M}$, как пересечение всех замкнутых множеств, содержащих $\mathfrak{M}$.

На одном и том же множестве E можно ввести различные системы окрестностей, удовлетворяющих определению 1.6, т.е. наделить E различными топологическими структурами. В связи с этим возникает вопрос о сравнении топологий на множестве E.

<u>Определение 1.7</u>. Две топологии τ_1 и τ_2 на E, определяемые системами окрестностей $\mathcal{W}_1(x)$ и $\mathcal{W}_2(x)$, называются эквивалентными или совпадающими, если, каково бы ни было $x \in E$, каждая окрестность $V \subset \mathcal{W}_1(x)$ содержит некоторую окрестность $\mathcal{W}_2(x)$ и наоборот.

Ясно, что, при совпадении топологий τ_1 и τ_2, открытые, а также замкнутые множества одни и те же для обеих топологий.

<u>Определение 1.7[I]</u>. Пусть даны две топологии τ_1 и τ_2, определенные посредством систем окрестностей $\mathcal{W}_1(x)$ и $\mathcal{W}_2(x)$. Если $\mathcal{W}_1(x) \subset \mathcal{W}_2(x)$ для каждой точки $x \in E$, то говорят, что топология τ_2 мажорирует топологию τ_1. Если, кроме того, $\mathcal{W}_1(x) \neq \mathcal{W}_2(x)$, то говорят, что топология τ_2 сильнее топологии τ_1 (или, что топология τ_1 слабее топологии τ_2).

Из этого определения непосредственно следует, что если топология τ_2 мажорирует топологию τ_1, то все множества, открытые (замкнутые) в топологии τ_1, являются открытыми (замкнутыми) также в топологии τ_2. Если топология τ_2 сильнее топологии τ_1, то обратное утверждение не имеет места, т.е. существуют множества, открытые (замкнутые) в топологии τ_2, не являющиеся открытыми (замкнутыми) в топологии τ_1.

<u>Определение 1.8</u>. (ср. [3а], гл. I § 3. п. I). Пусть E, E_1 - два множества и F - отображение E в E_1. Предположим, что E_1 наделено топологией τ_1. Прообразом топологии τ_1 относительно отображения F называется топология на E, для которой окрестностями точек являются прообразы $F^{-1}(V)$ окрестностей V соответствующих точек из E_1.

<u>Определение 1.9</u>. Пусть $\mathfrak{M}$ - множество из топологического пространства (E, τ). Топология $\tau_{\mathfrak{M}}$ на $\mathfrak{M}$ называется индуцированной из (E, τ), если окрестности точки $x \in \mathfrak{M}$ в топологии $\tau_{\mathfrak{M}}$ являются пересечениями окрестностей этой точки в пространстве (E, τ) с множеством $\mathfrak{M}$.

Если множество $\mathfrak{M}$ топологического пространства само наделено некоторой топологией, то можно ввести еще следующее понятие.

Определение 1.10. Говорят, что топологии пространств $\mathfrak{M}$ и E согласованы, если топология пространства $\mathfrak{M}$ мажорирует топологию, индуцированную в $\mathfrak{M}$ из топологического пространства E.

Отметим еще следующие понятия, важные в дальнейшем:

Определение 1.11. Пусть x - элемент топологического пространства E, $\mathfrak{W}(x)$ - система всех окрестностей точки x. Система множеств $\mathfrak{W}_0(x) \subset \mathfrak{W}(x)$ называется фундаментальной системой окрестностей точки x, если для каждой окрестности $V \in \mathfrak{W}(x)$ найдется окрестность $V_0 \in \mathfrak{W}_0(x)$ такая, что $V_0 \subset V$

Определение 1.12. Система $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ множеств пространства E называется покрытием множества $\mathfrak{M} \subset E$, если $\mathfrak{M}$ содержится в объединении множеств $\mathcal{U}_\alpha$, т.е. $\mathfrak{M} \subset \bigcup\limits_\alpha \mathcal{U}_\alpha$.

Определение 1.13. Множество $\mathfrak{M}$ топологического пространства E называется бикомпактным, если из всякого его покрытия, состоящего из открытых множеств, можно выделить конечное покрытие. Множество $\mathfrak{M}$ называется относительно бикомпактным, если его замыкание бикомпактно.

Определение 1.14. Множество $\mathfrak{A}$ элементов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ называется частично упорядоченным, если для некоторых пар его элементов определено соотношение $\alpha \prec \beta$ ("β следует за α "или" α предшествует β "), обладающее следующими свойствами:

1) $\alpha \prec \alpha$

2) Если $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \alpha$, то $\alpha = \beta$;

3) Если $\alpha \prec \beta$ и $\beta \prec \gamma$, то $\alpha \prec \gamma$;

Частично упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ называется направленным, если для всяких $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ существует элемент $\gamma \in \mathfrak{A}$ такой, что $\alpha \prec \gamma$ и $\beta \prec \gamma$.

Определение 1.15. Сетью или обобщенной последовательностью в пространстве E называется функция x_α со значениями в E, аргумент которой α пробегает произвольное направленное множество индексов $\mathfrak{A}$.

Определение 1.16. Сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в топологическом пространстве E называется сходящейся к элементу $x_0 \in E$ ($\lim\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha = x_0$), если для каждой окрестности V точки x_0 существует такой индекс $\alpha_V \in \mathfrak{A}$, что для всех $\alpha > \alpha_V$ имеет место включение $x_\alpha \in V$.

Определение 1.17. Пусть $\mathfrak{B}$ - направленное множество. Множество $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathfrak{B}\}$ называется подсетью сети $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, если $\varphi(\beta) \in \mathfrak{A}$ для всех $\beta \in \mathfrak{B}$ и для каждого $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ существует $\beta_0 \in \mathfrak{B}$ такое, что $\varphi(\beta) > \alpha_0$ для всех $\beta > \beta_0$.

Теперь можно сформулировать следующее определение бикомпактного множества эквивалентное предыдущему [13].

Определение 1.13'. Множество $\mathfrak{M}$ из топологического пространства E называется бикомпактным, если всякая сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}$ содержит подсеть, сходящуюся к элементу из $\mathfrak{M}$.

Отметим еще следующее предложение, используемое в дальнейшем.

Лемма 1.1. Для того, чтобы сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в топологическом пространстве E не сходилась к точке $x_0 \in E$ необходимо и достаточно, чтобы существовали окрестность $V \in \mathfrak{V}(x_0)$ и подсеть $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathfrak{B}\}$ сети $\{x_\alpha\}$ такие, что для всех $\beta \in \mathfrak{B}$ имеет место

$$x_{\varphi(\beta)} \bar{\in} V$$

Доказательство. Достаточность следует из того факта [13], что всякая подсеть сети, сходящейся к x_0 также сходится к x_0. Для доказательства необходимости, предположим, что сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ не сходится к x_0. Тогда существует окрестность V_0 точки x_0 такая, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ найдется по меньшей мере один элемент $\varphi(\alpha) \in \mathfrak{A}$, следующий за α и такой, что $x_{\varphi(\alpha)} \bar{\in} V$. При этом, каково бы ни было $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, для всех $\alpha > \alpha_0$ будет $\varphi(\alpha) > \alpha_0$. Значит множество $\{x_{\varphi(\alpha)}, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ есть подсеть сети $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, причем для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ имеет место $x_{\varphi(\alpha)} \bar{\in} V_0$.

1.3. Объединяя линейную и топологическую структуры множества E, мы приходим к следующему понятию.

Определение 1.18. Множество E называется **линейным топологическим пространством**, если:

1) E является линейным пространством;

2) E является топологическим пространством;

3) Линейная и топологическая структуры E согласованы таким образом, что:

а) Функция $z=x+y$ непрерывна по совокупности аргументов $x,y\in E$, т.е. для любой окрестности W точки $z_0=x_0+y_0\in E$ найдутся окрестности $U\in \mathfrak{W}(x_0)$ и $V\in \mathfrak{W}(y_0)$ такие, что $U+V\subset W$.

б) Функция $z=\lambda x$ непрерывна по совокупности аргументов, $x\in E$ и $\lambda\in R^1$ (R^1 - числовая ось), т.е. для любой окрестности W точки $z_0=\lambda_0 x_0$ найдутся $\varepsilon>0$ и окрестность $U\in \mathfrak{W}(x_0)$ такие, что из $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ следует $\lambda U\subset W$.

Здесь $U+V$ означает множество всех сумм $x+y$, где $x\in U$ и $y\in V$, а λU означает множество всех произведений λx, где $x\in U$.

Из определения 1.18 следует, что для задания топологии в линейном пространстве нет необходимости задавать систему окрестностей для каждой точки пространства E; достаточно задать лишь систему окрестностей нуля θ пространства E. Тогда окрестности точки $x\in E$ получаются "параллельным переносом" и имеют вид $x+V$, где $V\in \mathfrak{W}(\theta)$ (здесь $x+V=\{x\}+V$).

Из непрерывности умножения элементов линейного топологического пространства на число следует, что окрестности нуля являются поглощающими множествами, и что каждая окрестность нуля содержит некоторую звездно-симметричную окрестность нуля. Значит, в каждом линейном топологическом пространстве существует фундаментальная система звездно-симметричных окрестностей нуля.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что линейное топологическое пространство E удовлетворяет следующей аксиоме:

(T_1) Для любой пары различных точек $x, y \in E$ существует окрестность каждой из этих точек, не содержащая другой точки.

Отсюда, в силу того, что линейное топологическое пространство является топологической группой, вытекает выполнение и следующих аксиом ([14] , [22] стр. 114):

(T_2) Для каждой пары точек $x, y \in E$ существует непересекающиеся окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{W}(x)$ и $V \in \mathcal{W}(y)$.

(T_3) Для всякого замкнутого множества $\mathcal{F} \subset E$ и точки $x \in E$, не принадлежащей $\mathcal{F}$, существуют непересекающиеся окрестности множества $\mathcal{F}$ и точки x .

<u>Определение 1.19</u>. Линейное топологическое пространство E , удовлетворяющее а к с и о м а м о т д е л и м о с т и (T_1) , (T_2) и (T_3) называется о т д е л и м ы м или х а у с д о р ф о в ы м .

Рассмотрим некоторые свойства множеств в линейном топологическом пространстве E .

<u>Определение 1.20</u>. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется вполне о г р а н и ч е н н ы м, если для каждой окрестности нуля $\mathcal{U} \subset E$ существует конечное число точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathfrak{M}$ таких, что $\mathfrak{M}$ содержится в объединении $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(x_i + \mathcal{U})$.

<u>Определение 1.21</u>. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется о г р а н и ч е н н ы м , если оно поглощается всякой

окрестностью нуля из E .

Из этих определений следует, что всякое конечное множество и всякое вполне ограниченное множество ограничено. Сумма $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}$, объединение $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{N}$ и пересечение $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ ограниченных множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ также ограничены. Точно так же ограничено замыкание ограниченного множества и произведение числа на ограниченное множество.

1.4. В дальнейшем мы будем рассматривать следующий частный вид линейного топологического пространства:

Определение 1.22. Линейное топологическое пространство называется л о к а л ь н о в ы п у к л ы м, если в нем существует фундаментальная система выпуклых окрестностей нуля $\mathfrak{W}(\theta)$.

Указанная в определении фундаментальная система окрестностей нуля обладает, таким образом, следующими свойствами:

(1) Если $V \in \mathfrak{W}(\theta)$, то V - выпуклое поглощающее множество.

(2) Для любых двух окрестностей $V_1, V_2 \in \mathfrak{W}(\theta)$ существует окрестность $W \in \mathfrak{W}(\theta)$ такая, что $W \subset V_1 \cap V_2$.

(3) Каковы бы ни были окрестность нуля $V \in \mathfrak{W}(\theta)$ и $\varepsilon > 0$, существует окрестность $W \in \mathfrak{W}(\theta)$ такая, что $W \subset \varepsilon V$

(4) Пересечение всех окрестностей нуля $V \subset \mathfrak{W}(\theta)$ состоит из одной лишь точки θ .

Обратно, если система множеств $\mathfrak{W}(\theta)$ в линейном пространстве E удовлетворяет этим четырем условиям, то она определяет на E отделимую локально выпуклую топологию.

В дальнейшем мы можем считать, что окрестности симметричны, ибо, как указывалось выше, каждая окрестность нуля содержит симметричную окрестность.

Примерами локально выпуклых пространств являются банаховы пространства. Фундаментальную систему выпуклых окрестностей в этих пространствах образуют, например, шары с центром в нуле, удовлетворяющие, очевидно, вышеуказанным условиям (1) - (4).

Другими примерами могут служить пространства бесконечно дифференцируемых функций, а также - пространства обобщенных функций ([26а]). Эти пространства не нормируемы.

<u>Пример 1.1</u>. Рассмотрим множество $\mathfrak{D}$ всех финитных+/ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, определенных на n -мерном евклидовом пространстве R^n . Это множество, очевидно, линейно. Топология в нем определяется следующим образом:

Пусть $\{\varepsilon_\nu\}$ - убывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к 0, $\{m_\nu\}$ - неограниченно возрастающая последовательность натуральных чисел, $V(\{\varepsilon_\nu\}, \{m_\nu\})$ - множество всех $\varphi(x) \in \mathfrak{D}$ таких, что $|\mathfrak{D}^p\varphi(x)| \le \varepsilon_\nu$ для всех $p \le m_\nu$ при $\|x\| \ge \nu$, $(\nu = 0, 1, \dots)$, где $\mathfrak{D}^p\varphi(x)$ означает любую частную производную порядка p от функции $\varphi(x)$ по её аргументам $x_1, x_2, \dots, x_n$. В качестве фундаментальной системы окрестностей нуля в $\mathfrak{D}$ бе-

+/ Функция $\varphi(x)$ называется финитной, если ее носитель, т.е. замыкания множества всех точек $x \in R^n$, для которых $\varphi(x) \ne 0$, есть компактное множество.

рем совокупность множеств $V(\{\varepsilon_\nu\},\{m_\nu\})$, соответствующих всевозможным последовательностям $\{\varepsilon_\nu\}$ и $\{m_\nu\}$. При этом условия (1) - (4), очевидно, выполняются. В пространстве $\mathcal{D}$ не существует счетной фундаментальной системы окрестностей нуля ([26а] , стр. 68).

Ограниченное множество $B(\{M_\nu\},\omega)$ в $\mathcal{D}$ определяется компактом $\omega \subset R^n$ и возрастающей последовательностью чисел $\{M_\nu\}$ и состоит из всех функций $\varphi(x)\in\mathcal{D}$ с носителями, содержащимися в ω, таких, что $|\mathcal{D}^p\varphi(x)|\le M_\nu$ для всех $p\le\nu$ и всех $x\in R^n$. Ясно, что так определенное ограниченное множество соответствует определению 1.21.

Примерами не нормируемых локально выпуклых пространств являются также некоторые пространства аналитических функций комплексного аргумента.

Как показал А.Н. Колмогоров [14] , если в линейном топологическом пространстве существует ограниченная выпуклая окрестность нуля, то это пространство нормируемо.

§ 2. Операторы в локально выпуклых пространствах

2.1. Определение 2.1. Если каждому элементу x локально выпуклого пространства E_1 согласно некоторому правилу поставлен в соответствие определенный элемент y локально выпуклого пространства E_2, то это соответствие $x\to y=F(x)$ определяет о п е р а т о р F, д е й с т в у ю щ и й и з п р о с т р а н с т в а E_1 в п р о с т р а н с т в о E_2, т.е. оператор F, заданный на E_1, со значениями $F(x)$ в E_2. Мы будем это записывать следующим образом: $F(E_1 \to E_2)$. Аналогично определяется оператор, действующий из множества $\mathfrak{M} \subset E_1$ в E_2.

Рассмотрим некоторые свойства таких операторов.

Определение 2.2. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если для каждой окрестности нуля $U_2 \subset E_2$ найдется окрестность нуля $U_1 \subset E_1$ такая, что из $x - x_0 \in U_1$ следует $F(x) - F(x_0) \in U_2$.

Определение 2.3. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется непрерывным из E_1 в E_2, если он непрерывен в каждой точке $x \in E_1$.

Определение 2.4. Пусть $\mathfrak{M}$ - множество из E_1. Мы скажем, что оператор F, действующий из $\mathfrak{M}$ в E_2, непрерывен в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$ по отношению к множеству $\mathfrak{M}$, если для каждой окрестности нуля $U_2 \subset E_2$ найдется такая окрестность нуля $U_1 \subset E_1$, что из $x \in (x_0 + U_1) \cap \mathfrak{M}$ следует $F(x) - F(x_0) \in U_2$.

Определение 2.5. Оператор F называется непрерывным по отношению к множеству $\mathfrak{M} \subset E_1$, если он непрерывен по отношению к множеству $\mathfrak{M}$ в каждой точке $x \in \mathfrak{M}$.

Пользуясь понятием сети (определение 1.15) можно дать определения, эквивалентные определениям 2.2 и 2.4.

Определение 2.2^1. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если, какова бы ни была сеть $\{x_\alpha\} \subset E_1$, сходящаяся к x_0, сеть $\{F(x_\alpha)\}$ сходится к $F(x_0)$.

Определение 2.4^1. Оператор F называется непрерывным в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$ по отношению к множеству $\mathfrak{M} \subset E_1$, если, какова бы ни была сеть $\{x_\alpha\} \subset \mathfrak{M}$, сходящаяся к x_0 , сеть $\{F(x_\alpha)\}$ сходится к $F(x_0)$.

Покажем, что определения 2.2 и 2.2^{I} эквивалентны.

Пусть F удовлетворяет определению 2.2 и $\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha = x_0$ Рассмотрим произвольную окрестность нуля $U_2 \subset E_2$. Для нее найдется окрестность нуля $U_1 \subset E_1$ такая, что для всех $x \in x_0 + U_1$ имеет место включение $F(x) \in F(x_0) + U_2$. Так как сеть $\{x_\alpha\}$ сходится к x_0 , то найдется индекс $\alpha_{U_1} \in \mathfrak{A}$ такой, что для всех $\alpha > \alpha_{U_1}$ будет $x_\alpha - x_0 \in U_1$. Поэтому для всех $\alpha > \alpha_{U_1}$ будем иметь $F(x_\alpha) \in F(x_0) + U_2$. Таким образом, оператор непрерывен в смысле определения 2.2^{I}.

Пусть теперь F удовлетворяет определению 2.2^{I}. Допустим, что он не является непрерывным в смысле определения 2.2, т.е., что существует окрестность нуля $U_2 \subset E_2$ такая, что какова бы ни была окрестность нуля $U \subset E_1$, найдется элемент $x_U \in x_0 + U$ такой, что $F(x_U) \bar{\in} F(x_0) + U_2$ Систему окрестностей нуля $U \subset E_1$ можно рассматривать как направленное множество, считая, что $U' > U''$, если $U' \subset U''$. Поэтому множество $\{x_U,\ U \in \mathfrak{W}(\theta)\}$ есть сеть в пространстве E_1 . Эта сеть сходится к x_0 , ибо, если U_0 - заданная окрестность нуля из E_1 , то все элементы x_U , для которых $U > U_0$ (т.е. $U \subset U_0$)принадлежат окрестности U_0 . Но тогда, согласно определению 2.2^{I}, сеть $\{F(x_U),\ U \in \mathfrak{W}(\theta)\}$ сходится к $F(x_0)$, что противоречит допущению.

Такими же рассуждениями доказывается эквивалентность определений 2.4 и 2.4^{I}.

Определение 2.6. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется **равномерно непрерывным по отношению к множеству** $\mathfrak{M} \subset E_1$, если для каждой окрестности нуля $U_2 \subset E_2$ найдется окрестность нуля $U_1 \subset E_1$ такая, что для любых $x', x'' \in \mathfrak{M}$, для которых $x' - x'' \in U_1$, имеет место включение $F(x') - F(x'') \in U_2$.

В дальнейшем будут использованы следующие предложения.

Теорема Кантора. Если оператор F непрерывен по отношению к бикомпактному множеству $\mathfrak{M} \subset E_1$, то он равномерно непрерывен по отношению к $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть дана выпуклая симметричная окрестность нуля $V \subset E_2$. Так как оператор F непрерывен по отношению к $\mathfrak{M}$, то для каждого $x \in \mathfrak{M}$ найдется выпуклая симметричная открытая окрестность нуля $U_x \subset E$ такая, что для любого $y \in (x + U_x) \cap \mathfrak{M}$ имеет место включение $F(y) - F(x) \in \frac{V}{2}$. Тогда для любых двух элементов $y', y'' \in (x + U_x) \cap \mathfrak{M}$ будет

$$F(y') - F(y'') = F(y') - F(x) + F(x) - F(y'') \in \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V \subset V \qquad (2.1)$$

Система всех открытых множеств вида $x + \frac{U_x}{2}$ образует покрытие множества $\mathfrak{M}$. В силу бикомпактности $\mathfrak{M}$, из этого покрытия можно выделить конечное покрытие $\{x_k + \frac{1}{2} U_k,\ k = 1, 2, \ldots, m\}$, где $U_k = U_{x_k}$, так что для любой пары элементов $y', y'' \in (x_k + U_k) \cap \mathfrak{M}$ выполняется (2.1).

Пусть $x', x'' \in \mathfrak{M}$ такие, что $x' - x'' \in \bigcap_{k=1}^{m} \frac{U_k}{2} = U$. Тогда для некоторого k

$$x' \in x_k + \frac{U_k}{2}, \qquad x'' - x' \in U \subset \frac{1}{2} U_k .$$

Следовательно, для этого k имеем

$$x'' - x_k = x'' - x' + x' - x_k \in \frac{1}{2}\mathcal{U}_k + \frac{1}{2}\mathcal{U}_k \subset \mathcal{U}_k$$

т.е. $x'' \in (x_k + \mathcal{U}_k) \cap \mathfrak{M}$. Так как и $x' \in (x_k + \mathcal{U}_k) \cap \mathfrak{M}$, то отсюда и из (2.1) следует, что

$$F(x'') - F(x') \in V$$

Теорема доказана.

Определение 2.7. Сеть операторов $\{F_\alpha(E_1 \to E_2), \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется сходящейся к оператору $F(E_1 \to E_2)$ в каждой точке $x \in E_1$, если сеть $\{F_\alpha(x)\} \subset E_2$ сходится к элементу $F(x) \in E_2$ для каждого $x \in E_1$.

Определение 2.8. Сеть операторов $\{F_\alpha(E_1 \to E_2), \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется равномерно сходящейся к $F(E_1 \to E_2)$ на множестве $\mathfrak{M} \subset E_1$, если для любой окрестности нуля $V \subset E_2$ найдется $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ такое, что для всех $\alpha > \alpha_0$ и всех $x \in \mathfrak{M}$ имеет место включение $F(x) - F_\alpha(x) \in V$.

Определение 2.9. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется функционалом, если E_2 есть числовая ось R^1.

Определение 2.10. Сеть функционалов $\{f_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ называется возрастающей в точке $x \in E$, если для любых $\alpha', \alpha'' \in \mathfrak{A}$ таких, что $\alpha' > \alpha''$, имеет место неравенство $f_{\alpha'}(x) > f_{\alpha''}(x)$. Сеть $\{f_\alpha\}$ называется убывающей в точке $x \in E$, если из $\alpha' > \alpha''$ следует $f_{\alpha'}(x) < f_{\alpha''}(x)$. Возрастающие, а также убывающие сети функционалов называются монотонными.

<u>Теорема Дини</u>. <u>Пусть на бикомпактном множестве</u> $\mathfrak{M} \subset E$ <u>задана монотонная в каждой точке</u> $x \in \mathfrak{M}$ <u>сеть</u> $\{f_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ <u>функционалов, непрерывных по отношению к множеству</u> $\mathfrak{M}$. <u>Если сеть</u> $\{f_\alpha\}$ <u>сходится в каждой точке</u> $x \in \mathfrak{M}$ <u>к непрерывному по отношению к множеству</u> $\mathfrak{M}$ <u>функционалу</u> f, <u>то она сходится к</u> f <u>равномерно на</u> $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть сеть $\{f_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ является возрастающей в каждой точке $x \in \mathfrak{M}$. Допустим, что она не сходится равномерно на $\mathfrak{M}$ к f. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ найдется $x_\alpha \in \mathfrak{M}$, для которого имеет место неравенство

$$f(x_\alpha) - f_\alpha(x_\alpha) \geq \varepsilon$$

Так как множество $\mathfrak{M}$ бикомпактно, то по определению 1.13[1] сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ содержит подсеть $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathfrak{B}\}$, сходящуюся к некоторому элементу $x_0 \in \mathfrak{M}$, причем для всех $\beta \in \mathfrak{B}$ имеем

$$f(x_{\varphi(\beta)}) - f_{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)}) \geq \varepsilon \tag{2.2}$$

Согласно определению 1.17 для произвольного $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ найдется $\beta_0 \in \mathfrak{B}$ такое, что $\varphi(\beta) > \alpha_0$ для всех $\beta > \beta_0$. Поэтому, ввиду возрастания сети $\{f_\alpha(x_{\varphi(\beta)}), \alpha \in \mathfrak{A}\}$ при каждом $\beta \in \mathfrak{B}$, имеем $f_{\alpha_0}(x_{\varphi(\beta)}) < f_{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)})$, и, следовательно, в силу (2.2):

$$f(x_{\varphi(\beta)}) - f_{\alpha_0}(x_{\varphi(\beta)}) \geq \varepsilon, \quad \beta > \beta_0$$

Так как функционалы f_α и f непрерывны, то по определению 2.4[1] в последнем неравенстве можно перейти к пределу по $\beta \in \mathfrak{B}$, откуда получаем

$f(x_0) - f_{\alpha_0}(x_0) \geqslant \varepsilon$ для произвольного $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что противоречит сходимости сети $\{f_\alpha\}$ к f в каждой точке из $\mathfrak{M}$. Теорема доказана.

Определение 2.11. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ назовём G - ограниченным, если он отображает множество $G \subset E_1$ в ограниченное множество из E_2.

Определение 2.12. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ назовём G - бикомпактным, если он отображает множество $G \subset E_1$ в относительно бикомпактное множество из E_2.

Определение 2.13. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется квази ограниченным, если он G - ограничен для всякого ограниченного множества $G \subset E_1$.

Определение 2.14. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется квази бикомпактным, если он G - бикомпактен для любого ограниченного множества $G \subset E_1$.

Определение 2.15. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется квази вполне непрерывным, если он непрерывен и квази бикомпактен.

Определение 2.16. Множество $\mathfrak{F}$ операторов $F(E_1 \to E_2)$ называется равностепенно непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если для каждой окрестности нуля $V \subset E_2$ найдется окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что из $x - x_0 \in U$ следует $F(x) - F(x_0) \in V$ для всех $F \in \mathfrak{F}$.

2.2. Рассмотрим, теперь, частный вид операторов, действующих из локально выпуклого пространства E_1 в локально выпуклое пространство E_2.

Определение 2.17. Оператор $A(E_1 \to E_2)$ называется **линейным оператором**, если для любых $x, y \in E_1$ и любых чисел λ и μ выполняется равенство

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y) \equiv \lambda Ax + \mu Ay$$

Лемма 2.1. Если линейный оператор $A(E_1 \to E_2)$ непрерывен в нулевой точке $\Theta \in E_1$, то он равномерно непрерывен на E_1.

Доказательство. Пусть дана окрестность нуля $V \subset E_2$. В силу непрерывности оператора A в нуле, найдется окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что $A(U) \subset V$. Поэтому для любой пары элементов $x', x'' \subset E_1$, для которых $x' - x'' \in U$, будет $A(x' - x'') = Ax' - Ax'' \subset V$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Из непрерывности линейного оператора $A(E_1 \to E_2)$ следует его квази ограниченность (определение 2.18).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ - ограниченное множество из E_1. Выберем произвольную окрестность нуля $V \subset E_2$. В силу непрерывности оператора A, для неё найдется окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что $A(U) \subset V$. Согласно определению ограниченности, найдется число $\alpha > 0$ такое, что $\lambda \mathfrak{M} \subset U$, $|\lambda| \leq \alpha$. Следовательно $A(\lambda \mathfrak{M}) = \lambda A(\mathfrak{M}) \subset V$ т.е. множество $A(\mathfrak{M})$ поглощается любой окрестностью нуля из E_2, а значит является ограниченным. Лемма доказана.

Определение 2.18. Линейный оператор $A(E_1 \to E_2)$ называется **ограниченным**, если существует окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что оператор A является U - ограниченным (определение 2.11).

Лемма 2.3. Из ограниченности линейного оператора $A(E_1 \to E_2)$ следует его непрерывность.

Доказательство. Пусть U - окрестность нуля из E_1 такая, что $A(U)$ ограничено в E_2. Пусть, далее, задана произвольная окрестность нуля $V \subset E_2$. Тогда существует число $\lambda_0 > 0$ такое, что $\lambda A(U) \subset V$, $|\lambda| \leq \lambda_0$. Отсюда, в силу линейности оператора A, следует, что $A(\lambda U) \subset V$ т.е. окрестность $\lambda U \subset E_1$ отображается в V. Лемма доказана.

Определение 2.19. Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если существует окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что оператор A является U - бикомпактным.

Так как всякое относительно бикомпактное множество вполне ограничено, а вполне ограниченное множество ограничено, то всякий вполне непрерывный линейный оператор ограничен и в силу леммы 2.3, тем более, непрерывен.

Лемма 2.4. Всякий вполне непрерывный линейный оператор A квази вполне непрерывен (определение 2.15).

Доказательство. Согласно только что указанному вполне непрерывный оператор A непрерывен. Пусть U - окрестность нуля из E_1 такая, что $A(U)$ есть относительно бикомпактное множество в E_2. Рассмотрим ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E_1$. Для него найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda \mathfrak{M} \subset U$. Следовательно, $\lambda A(\mathfrak{M}) = A(\lambda \mathfrak{M})$ есть относительно бикомпактное множество, поэтому относительно бикомпактным является также множество $A(\mathfrak{M})$. Лемма доказана.

<u>2.3</u>. Отметим некоторые свойства множества $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства E_1 в локально выпуклое пространство E_2.

Это множество линейно, если для любых $A, B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ и $\lambda \in R^1$ определить $A+B$ равенством $(A+B)x = Ax + Bx$ и λA равенством $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$ для всех $x \in E_1$.

Введем топологию в пространстве $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ следующим образом.

Пусть $\mathfrak{T}$ - система ограниченных множеств в пространстве E_1 такая, что объединение любого конечного числа множеств из $\mathfrak{T}$ принадлежит $\mathfrak{T}$ и объединение всех множеств из $\mathfrak{T}$ плотно в E_1. Окрестность нуля $W(\mathfrak{M}, V) \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ определим как множество всех $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$, для которых $A(\mathfrak{M}) \subset V$, где $\mathfrak{M} \in \mathfrak{T}$ и V есть окрестность нуля в E_2.

<u>Определение 2.20</u>. Топология на $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, для которой множества $W(\mathfrak{M}, V)$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, когда $\mathfrak{M}$ пробегает $\mathfrak{T}$, а V - фундаментальную систему выпуклых окрестностей нуля из E_2, называется $\mathfrak{T}$-**топологией** на $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

Покажем, что $\mathfrak{T}$ - топология на $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ есть отделимая локально выпуклая топология, т.е. что система окрестностей вида $W(\mathfrak{M}, V)$ обладает свойствами (1) - (4) из п. 1.4:

(1) $W(\mathfrak{M}, V)$ выпуклое множество, ибо, если $A_1, A_2 \in W(\mathfrak{M}, V)$, т.е. $A_1(\mathfrak{M}) \subset V$ и $A_2(\mathfrak{M}) \subset V$, то $\lambda A_1(\mathfrak{M}) + (1-\lambda)A_2(\mathfrak{M}) \subset V$ $(0 \le \lambda \le 1)$ в силу выпуклости $V \subset E_2$

Далее, $W(\mathfrak{M}, V)$ - поглощающее множество, ибо для любого $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ множество $A(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M} \in \gamma$ в силу леммы 2.2 ограничено, а поэтому существует $\lambda_0 > 0$ такое, что $\lambda A(\mathfrak{M}) \subset V$, т.е. $\lambda A \in W(\mathfrak{M}, V)$, $|\lambda| \le \lambda_0$.

(2) Пересечение $W_1(\mathfrak{M}_1, V_1) \cap W_2(\mathfrak{M}_2, V_2)$ содержит окрестность нуля $W_3(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2, V_3)$, где $V_3 \subset V_1 \cap V_2$ ибо из $A(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \subset V_3$ следует, что $A(\mathfrak{M}_1) \subset V_1$ и $A(\mathfrak{M}_2) \subset V_2$.

(3) Для данных $W_1(\mathfrak{M}_1, V_1)$ и $\varepsilon > 0$ имеем $W_2(\mathfrak{M}_1, V_2) \subset \varepsilon W_1(\mathfrak{M}_1, V_1)$, если за V_2 взять такую окрестность нуля из E_2, что $V_2 \subset \varepsilon V_1$, ибо тогда из $A(\mathfrak{M}_1) \subset V_2 \subset \varepsilon V_1$ следует, что $\frac{1}{\varepsilon} A(\mathfrak{M}_1) \subset V_1$, т.е. $\frac{1}{\varepsilon} A \in W_1(\mathfrak{M}_1, V_1)$, откуда $A \in \varepsilon W_1(\mathfrak{M}_1 V_1)$.

(4) Пересечение всех окрестностей нуля вида $W(\mathfrak{M}, V)$, т.е. множество линейных операторов, отображающих любое $\mathfrak{M} \in \gamma$ в пересечение всех $V \subset E_2$ содержит лишь нулевой оператор, ибо пересечение всех окрестностей нуля $V \subset E_2$ в силу отделимости пространства E_2 сводится к нулевому элементу, а непрерывный оператор, равный нулю на объединении всех $\mathfrak{M} \in \gamma$, являющемся множеством, плотным в E_2, является нулевым оператором.

Легко видеть, что сходимость сети операторов $\{A_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в γ- топологии означает равномерную сходимость сети $\{A_\alpha x, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на всяком множестве $\mathfrak{M} \in \gamma$.

Самая сильная из γ - топологий в пространстве $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ (называемая топологией ограниченной сходимости) получается, если γ состоит из в с е х ограниченных множеств пространства E_1. Она является, как легко видеть, топологией равномерной сходимости на всех ограниченных замкнутых множествах из E_1. В случае, если E_1 и E_2 банаховы пространства, эта сходимость совпадает со сходимостью по норме оператора.

Самая слабая из $\mathfrak{T}$ - топологий получается, если $\mathfrak{T}$ состоит из в с е х к о н е ч н ы х множеств пространства E_1. Эта топология называется топологией т о ч е ч н о й или п р о с т о й сходимости.

Ограниченным множеством в $\mathfrak{T}$ - топологии является такое множество $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$, что для каждого множества $\mathfrak{M} \in \mathfrak{T}$ объединение $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{H}} A(\mathfrak{M})$ есть ограниченное множество ([3б] , гл. Ш, § 3, п. 4).

Равностепенно непрерывное множество из $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, согласно определению 16.2 есть множество $\mathcal{H}$ такое, что для каждой окрестности нуля $V \subset E_2$ найдется окрестность нуля $U \subset E_1$ такая, что для всех $A \in \mathcal{H}$ имеет место включение $A(U) \subset V$. Такое множество ограничено в любой $\mathfrak{T}$ - топологии пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ([3б] , гл.Ш, § 3, п. 6).

2.4. Важным частным случаем пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ является пространство $\mathcal{L}(E, R^1)$, где R^1 - числовая ось. Элементами этого пространства являются все линейные непрерывные формы, или иначе - л и н е й н ы е н е п р е р ы в н ы е ф у н к ц и о н а л ы , определенные на пространстве E. Пространство $\mathcal{L}(E, R^1)$ обозначается E' и называется с о п р я ж е н н ы м к пространству E.

Для описания γ - топологий в сопряженном пространстве введем понятие поляры множества.

Пусть X - линейное пространство, а Y - линейное пространство, элементами которого являются линейные функции с числовыми значениями, определенные на X. Значение линейной функции $y \in Y$ в точке $x \in X$ будем всюду в дальнейшем обозначать $\langle x, y \rangle$ (или $\langle y, x \rangle$).

<u>Определение 2.21</u>. Пусть дано множество $\mathfrak{M} \subset X$. Множество $\mathfrak{M}^\circ$ всех элементов $y \in Y$ таких, что $|\langle x, y \rangle| \leq 1$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, называется **поляро й множества** $\mathfrak{M}$ **в пространстве** Y. Таким же образом определяется поляра множества $\mathfrak{N} \subset Y$ в пространстве X.

Из этого определения непосредственно вытекают следующие основные свойства поляр:

1) Поляра любого множества есть выпуклое симметричное множество.
2) Если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}^\circ \subset \mathfrak{M}^\circ$.
3) Если $\mathfrak{M} \subset \lambda \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{N}^\circ \subset \lambda \mathfrak{M}^\circ$ и если $\lambda \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, то $\lambda \mathfrak{N}^\circ \subset \mathfrak{M}^\circ$
4) $(\lambda \mathfrak{M})^\circ = \frac{1}{\lambda} \mathfrak{M}^\circ$
5) Поляра объединения множеств $\mathfrak{M}_\alpha$ совпадает с пересечением поляр этих множеств, т.е. $(\bigcup_\alpha \mathfrak{M}_\alpha)^\circ = \bigcap_\alpha \mathfrak{M}_\alpha^\circ$
6) Пусть X - линейное топологическое пространство. Тогда поляра замыкания множества $\mathfrak{M}$ совпадает с полярой самого множества $\mathfrak{M}$, т.е. $(\overline{\mathfrak{M}})^\circ = \mathfrak{M}^\circ$.
7) Если X - линейное топологическое пространство, то $(\overline{\Gamma \mathfrak{M}})^\circ = \mathfrak{M}^\circ$, где $\Gamma \mathfrak{M}$ означает абсолютно выпуклую

обсолочку множества $\mathfrak{M}$, т.е.

$$\Gamma\mathfrak{M} = \{x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \quad , x_k \in \mathfrak{M}, \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leq 1\}$$

8) Пусть X - линейное топологическое пространство, а элементами пространства Y являются линейные непрерывные функционалы на X . Тогда, если $\mathfrak{M}$ - ограниченное множество, то его поляра $\mathfrak{M}^\circ$ есть поглощающее множество, ибо любая линейная непрерывная функция квази ограничена и потому для всякого $y \in Y$ имеем $|y(\mathfrak{M})| \leq \lambda_0$ для некоторого $\lambda_0 > 0$ т.е. $|\langle x, \frac{1}{\lambda_0} y\rangle| \leq 1$ для $x \in \mathfrak{M}$, а значит $\frac{1}{\lambda} y \in \mathfrak{M}^\circ$, $|\frac{1}{\lambda}| \leq \frac{1}{\lambda_0}$

Заметим, теперь, что, так как отрезки $V_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в R^1 , то, согласно определению 2.20, множества вида $W(\mathfrak{M}, V_n)$, где $\mathfrak{M} \in \mathfrak{T}$, образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathfrak{T}$ - топологии пространства E' . Из того, что $V_n = \frac{V_1}{n}$, следует $W(\mathfrak{M}, V_n) = W(n\mathfrak{M}, V_1)$. Значит, если кроме свойств, указанных в начале п. 2.3, система $\mathfrak{T}$ обладает тем свойством, что из $\mathfrak{M} \in \mathfrak{T}$ следует $\lambda\mathfrak{M} \in \mathfrak{T}$ (λ - любое положительное число), то фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathfrak{T}$ - топологии пространства E' образуют множества $W(\mathfrak{M}, V_1)$, где $\mathfrak{M}$ пробегает $\mathfrak{T}$. Но множество $W(\mathfrak{M}, V_1)$ согласно определению 2.21 есть поляра $\mathfrak{M}^\circ$ множества $\mathfrak{M}$ в пространстве E' . Поэтому поляры всех множеств из $\mathfrak{T}$ образуют фундаментальную систему окрестностей нуля в $\mathfrak{T}$ - топологии пространства E' .

Самыми важными $\mathfrak{T}$ - топологиями являются следующие.

Определение 2.22. Если система $\mathfrak{T}$ состоит из всех ограниченных множеств локально выпуклого пространства E, то соответствующая $\mathfrak{T}$ - топология на E' называется с и л ь н о й т о п о л о г и е й пространства E' и обозначается $\beta(E', E)$. Пространство E', наделенное топологией $\beta(E', E)$ называется с и л ь н о с о п р я ж е н н ы м к пространству E.

Определение 2.23. Если система $\mathfrak{T}$ состоит из всех конечных множеств пространства E, то соответствующая $\mathfrak{T}$ - топология называется с л а б о й т о п о л о г и е й пространства E' и обозначается $\sigma(E', E)$. Пространство E', наделенное топологией $\sigma(E', E)$ называется с л а б о с о п р я ж е н н ы м к пространству E.

Заметим, что сходимость сети $\{y_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в сильно сопряженном пространстве E означает равномерную сходимость сети $\{\langle x, y_\alpha \rangle, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ на каждом ограниченном множестве из E; сходимость сети в слабо сопряженном пространстве E или - с л а б а я с х о д и м о с т ь сети означает сходимость $\{\langle x, y_\alpha \rangle\}$ в каждой точке x из E.

Таким образом, посредством пространства E в пространстве E' определяются различные $\mathfrak{T}$ - топологии, причем слабая топология $\sigma(E', E)$ определяется без использования топологии пространства E.

Таким же способом, посредством пространства E', снабженного некоторой $\mathfrak{T}$ - топологией, можно ввести различные $\mathfrak{T}$ - топологии в пространстве E'', сопряженном к пространству E'. В этом случае слабая топология в E'' обозначается $\sigma(E'', E')$, а сильная топология - $\beta(E'', E')$. Пространство E'' называется **вторым сопряженным** к пространству E.

Заметим, что $\langle x, y\rangle$ $(y \in E')$ при фиксированном $x \in E$ является линейной числовой функцией, определенной на E' и непрерывной в слабой, а поэтому и в любой $\mathfrak{T}$ - топологии пространства E'. Значит, каждый элемент $x \in E$ определяет линейный непрерывный функционал на E' и, следовательно, $E \subset E''$, т.е. E является линейным подпространством пространства E''. Топология $\sigma(E'', E)$ индуцирует тогда в E некоторую топологию $\sigma(E, E')$, фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют поляры в E конечных множеств из E' (определения 1.9 и 2.21).

<u>Определение 2.24</u>. Топология $\sigma(E, E')$ на E, для которой поляры в E всех конечных множеств из E' образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, называется **слабой топологией пространства** E.

Слабая топология $\sigma(E, E')$, вообще говоря, отлична от первоначальной топологии пространства E и слабее ее.

Важную роль играет также топология, индуцированная в E сильной топологией $\beta(E'', E')$ пространства E''. Эта топология, вообще говоря, сильнее первоначальной топологии E.

<u>Определение 2.25</u>. Если множество замкнуто (соответственно ограничено или бикомпактно) в слабой топологии рас-

сматриваемого пространства, то оно называется с л а б о з а м к н у т ы м (соответственно, с л а б о о г р а н и ч е н н ы м или с л а б о б и к о м п а к т н ы м).

Имеет место следующее предложение ([1], [3б], гл. IV, § 2, № 2 или 23, стр. 429).

<u>Теорема Алаоглу</u>. <u>Поляра окрестности нуля</u> $U \subset E$ <u>слабо бикомпактна в</u> E', <u>т.е. множество</u> U° <u>бикомпактно в топологии</u> $\sigma(E', E)$.

Отсюда непосредственно следует, что U° слабо ограничено.

Отметим еще следующие свойства поляры.

<u>Лемма 2.5</u>. <u>Если</u> W - <u>множество из</u> E, <u>поглощающее все ограниченные множества из</u> E, <u>то поляра</u> W° <u>ограничена в сильной топологии</u>.

<u>Доказательство</u>. Пусть V - произвольная окрестность нуля в топологии $\beta(E', E)$. Она содержит поляру $\mathfrak{M}^\circ$ некоторого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset E$. Согласно условию теоремы, найдется $\alpha > 0$ такое, что $\lambda \mathfrak{M} \subset W$ для всех $|\lambda| \leq \alpha$, откуда, в силу свойства 3) поляр, имеем $\lambda W^\circ \subset \mathfrak{M}^\circ$. Следовательно, $\lambda W^\circ \subset V$, т.е. V поглощает W°. Лемма доказана.

<u>Следствие 2.1</u>. Поляра всякой окрестности нуля $U \subset E$ ограничена в топологии $\beta(E', E)$.

<u>Лемма 2.6</u>. <u>([3б], гл. IV § 1, предл. 2). Поляра любого множества слабо замкнута</u>.

<u>2.5</u>. В связи с понятиями сильной и слабой топологии в локально выпуклых пространствах, можно рассматривать

специальные виды непрерывности операторов и функционалов.

Определение 2.26. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется слабо непрерывным в точке $x_0 \in E_1$, если он непрерывен в точке x_0, когда пространства E_1 и E_2 наделены слабыми топологиями $\sigma(E_1, E_1')$ и $\sigma(E_2, E_2')$

Определение 2.27. Оператор $F(E_1 \to E_2)$ называется усиленно непрерывным в точке x_0, если он непрерывен в точке x_0, когда E_1 наделено слабой топологией $\sigma(E_1, E_1')$, а пространство E_2 - своей первоначальной топологией.

Ясно, что из усиленной непрерывности оператора $F(E_1 \to E_2)$ следует его непрерывность (когда E_1 также наделено своей первоначальной топологией). Вообще, усиление топологии пространства E_2 или ослабление топологии пространства E_1 уменьшает запас непрерывных операторов из E_1 в E_2. Из непрерывности оператора F, вообще говоря, не следует его слабая непрерывность, но если линейный оператор непрерывен, то он также слабо непрерывен ([11а], стр. 122, теорема 15.).

Так как на числовой оси R^1 все топологии совпадают, то для функционалов определения 2.26 и 2.27 приводят к одному и тому же понятию:

Определение 2.28. Функционал называется слабо непрерывным в точке $x_0 \in E$, если он непрерывен в точке x_0, когда E наделено слабой топологией $\sigma(E, E')$.

Пользуясь понятием сети, можно формулировать это определение в следующем виде.

Определение 2.28[I]. Функционал f называется слабо непрерывным в точке $x_0 \in E$, если какова бы ни была сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset E$, слабо сходящаяся к x_0, т.е. такая, что

$$\lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle x_\alpha, y \rangle = \langle x_0, y \rangle \text{ для всякого } y \in E'$$

сеть $\{f(x_\alpha)\}$ сходится к $f(x_0)$.

В дальнейшем будут использованы еще следующие свойства функционалов.

Определение 2.29. Функционал f называется слабо секвенциально непрерывным в точке $x_0 \in E$, если какова бы ни была последовательность $\{x_n\} \subset E$, слабо сходящаяся к x_0, последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Так как последовательность есть частный вид сети, то из слабой непрерывности функционала следует его слабая секвенциальная непрерывность, но не наоборот.

Определение 2.30. Функционал f, определенный на E, называется полунепрерывным снизу (сверху) в точке x_0, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность нуля $U \subset E$ такая, что для всех $x \in x_0 + U$ имеет место неравенство

$$f(x_0) - f(x) < \varepsilon \qquad (f(x_0) - f(x) > -\varepsilon)$$

Пользуясь понятием сети, получаем эквивалентное определение:

Определение 2.30[I]. Функционал f, определенный на E, называется полунепрерывным снизу (сверху) в точке x_0, если для каждой сети $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset E$, сходящейся к x_0, имеет место неравенство

$$f(x_0) \le \varliminf_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(x_\alpha) \qquad \left(f(x_0) \ge \varlimsup_{\alpha \in \mathfrak{A}} f(x_\alpha) \right)$$

В дальнейшем нам понадобится более слабое требование:

<u>Определение 2.31</u>. Функционал f, определенный на E, называется секвенциально полунепрерывным снизу (сверху) в точке x_0, если для каждой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, имеет место неравенство

$$f(x_0) \le \varliminf_{n \to \infty} f(x_n) \qquad \left(f(x_0) \ge \varlimsup_{n \to \infty} f(x_n) \right)$$

<u>2.6</u>. Пусть E_1 и E_2 - локально выпуклые пространства, E_1' и E_2' - их сильно сопряженные пространства.

<u>Определение 2.32</u>. Пусть задан линейный непрерывный оператор $A(E_1 \to E_2)$. Оператор $A'(E_2' \to E_1')$, определенный равенством

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A'y \rangle \quad \text{для любых } x \in E_1,\ y \in E_2, \tag{2.3}$$

называется сопряженным к оператору A.

Рассмотрим некоторые свойства сопряженного оператора.

<u>Лемма 2.7. Пусть $\mathfrak{M} \subset E_1$ и $\mathfrak{N} \subset E_2$. Тогда из соотношения $A(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{N}$ следует:</u> $A'(\mathfrak{N}') \subset \mathfrak{M}^\circ$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $y \in \mathfrak{N}^\circ$, т.е. для любого $z \in \mathfrak{N}$ выполняется неравенство $|\langle z, y \rangle| \le 1$. Так как $A(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{N}$, то отсюда следует, что для любого $x \in \mathfrak{M}$ выполняется неравенство $|\langle Ax, y \rangle| \le 1$. Но тогда, в силу (2.3) имеем $|\langle x, A'y \rangle| \le 1$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, т.е. $A'y \in \mathfrak{M}^\circ$. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.8. Оператор A' непрерывен</u>.

Доказательство. Пусть V - произвольная окрестность нуля из E_1'. Она содержит поляру $\mathfrak{M}^\circ$ некоторого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset E_1$. Так как согласно определению 2.32 и лемме 2.2. оператор A квази ограничен, то $A(\mathfrak{M}) \subset \mathfrak{N}$ где $\mathfrak{N}$ - некоторое ограниченное множество из E_2, и, в силу леммы 2.7, $A'(\mathfrak{N}^\circ) \subset \mathfrak{M}^\circ$. Следовательно, оператор A' отображает окрестность нуля $\mathfrak{N}^\circ \subset E_2'$ в заданную окрестность нуля $V \subset E_1'$. Лемма доказана.

Лемма 2.9. Оператор A', сопряженный к ограниченному оператору A, ограничен.

Доказательство. Так как оператор A отображает некоторую окрестность нуля $U \subset E_1$ в ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E_2$, т.е. $A(U) \subset \mathfrak{M}$, то, в силу леммы 2.7, имеем $A'(\mathfrak{M}^\circ) \subset U^\circ$, где $\mathfrak{M}^\circ$ - окрестность нуля в E_2', а U°, в силу следствия 2.1, ограничено в E_1'. Лемма доказана.

Замечание. Как показал Д.А. Райков [23], теорема Шаудера о полной непрерывности оператора, сопряженного к вполне непрерывному, имеющая место для банаховых пространств, для локально выпуклых пространств не всегда имеет место. В [23б], однако, указано два класса пространств, для которых эта теорема остается верной.

В частности, теорема Шаудера остается верной, если E_1 - любое локально выпуклое пространство, а E_2 является $(\mathcal{F})$ - пространством (определение 3.11), пространством $\mathcal{D}$ (пример 1.1) или его сильно сопряженным пространством $\mathcal{D}'$.

§ 3. Некоторые частные виды и свойства локально выпуклых пространств

3.I. Как известно, в теории нормированных пространств важную роль играют полные пространства, т.е. такие, где всякая фундаментальная последовательность (или последовательность Коши) сходится. Так/как/ ~~в~~ общих локально выпуклых пространствах топология определяется не сходимостью последовательностей, а сходимостью сетей, (т.е. обобщенных последовательностей), то в теории этих пространств встречаются различные понятия полноты.

Определение 3.I. Сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ в пространстве E называется фундаментальной, если для каждой окрестности нуля $U \subset E$ найдется такое $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, что для любых $\alpha', \alpha'' > \alpha_0$ имеет место включение $x_{\alpha''} - x_{\alpha'} \in U$.

Определение 3.2. Локально выпуклое пространство E называется полным, если в нем каждая фундаментальная сеть сходится к некоторому элементу $x_0 \in E$. Также определяется полнота множества из E.

Более широкий класс пространств удовлетворяет следующему определению:

Определение 3.3. Локально выпуклое пространство E называется квази полным, если в нем каждая ограниченная фундаментальная сеть сходится к некоторому элементу $x_0 \in E$, или, другими словами, если в нем всякое ограниченное замкнутое множество является полным.

Часто достаточным является еще более слабое требование:

Определение 3.4. Пространство E называется п о л у п о л н ы м , если в нем сходится всякая последовательность Коши.

Ясно, что для линейных топологических пространств, обладающих счетной фундаментальной системой окрестностей нуля, и, в частности, для нормированных пространств, определения 3.2, 3.3 и 3.4 дают одно и то же понятие полноты.

Пространство $\mathcal{D}$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, а также его сопряженное пространство $\mathcal{D}'$ всех обобщенных функций являются примерами полных пространств, не имеющих счетной фундаментальной системы окрестностей нуля ([26а], стр. 68, 73).

3.2. Определение 3.6. Выпуклое симметричное поглощающее замкнутое множество локально выпуклого пространства называется б о ч к о й (франц. tonneau).

Из определения локально выпуклого пространства непосредственно следует, что в нем существует фундаментальная система окрестностей нуля, являющихся бочками. Но не для всякой локально выпуклой топологии над линейным пространством E каждая бочка будет окрестностью нуля. Поэтому вводится следующий частный класс локально выпуклых пространств.

Определение 3.7. Локально выпуклое пространство E

называется бочечным (фр. sepace tonnele), если всякая бочка в E является окрестностью нуля.

Более широкий класс пространств определяется следующим образом:

Определение 3.8. Локально выпуклое пространство E называется квази бочечным, если всякая бочка, поглощающая все ограниченные множества из E, является окрестностью нуля в E.

Как указывалось в п. 2.4, топология, индуцируемая в пространстве E топологией $\beta(E'', E')$, вообще говоря, мажорирует первоначальную топологию пространства E. Следующее предложение дает условие совпадения этих топологий.

Лемма 3.1. ([3б] , гл. IУ, § 3, № 4 упр. 6). Для того, чтобы топология, индуцируемая в E топологией $\beta(E'', E')$ совпадала с первоначальной топологией пространства E, необходимо и достаточно, чтобы E было квази бочечным пространством.

Доказательство необходимости. Пусть пересечение с E любой окрестности нуля в топологии $\beta(E'', E')$ есть окрестность нуля в первоначальной топологии пространства E. Пусть, далее, W - бочка в E, поглощающая все ограниченные множества из E. В силу леммы 2.5 поляра W° множества W ограничена в E', а поэтому $(W^\circ)^\circ$ есть окрестность нуля в сильной топологии $\beta(E'', E')$ пространства E'' и, согласно предположению, пересечение $(W^\circ)^\circ \cap E$ есть окрестность нуля в E, наделенном своей первоначальной топологией. По определению бочки, W есть выпуклое замкнутое, а поэтому и слабо замкнутое множество. Следовательно ([36], гл. IV, § 2, п. 3, следствие 2), биполяра $W^{\circ\circ}=(W^\circ)^\circ\cap E$ совпадает с W. Отсюда вытекает, что W есть окрестность нуля в E, т.е. пространство E квази бочечно.

<u>Доказательство достаточности</u>. Пусть U - окрестность нуля в топологии $\beta(E'', E')$. Тогда U содержит поляру $\mathfrak{M}^\circ$ некоторого ограниченного множества $\mathfrak{M}\subset E'$. Пересечение $\mathfrak{M}^\circ\cap E$ является полярой множества $\mathfrak{M}\subset E'$ в пространстве E. В силу свойств 1) и 8) поляр и леммы 2.6, $\mathfrak{M}^\circ\cap E$ есть выпуклое, симметричное, поглощающее и замкнутое множество в E. Таким образом $\mathfrak{M}^\circ\cap E$ является бочкой в E и содержится в $U\cap E$. Пусть $\mathfrak{N}$ - произвольное ограниченное множество из E. Тогда $\mathfrak{N}^\circ$ есть окрестность нуля в E' и поэтому поглощает $\mathfrak{M}$, т.е. существует $\alpha>0$ такое, что $\lambda\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}^\circ(|\lambda|\le\alpha)$, откуда $\lambda(\mathfrak{N}^\circ)^\circ\subset\mathfrak{M}^\circ$. Так как, согласно определению поляры, $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{N}^{\circ\circ}=(\mathfrak{N}^\circ)^\circ\cap E$, то $\lambda\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}^\circ\cap E$ Следовательно, бочка $\mathfrak{M}^\circ\cap E$ поглощает всякое ограниченное множество из E и, в силу квази бочечности пространства E, является окрестностью нуля в E, откуда вытекает, что и $U\cap E$ является окрестностью нуля в E. Лемма доказана.

<u>Следствие 2.1</u>. Если пространство E бочечно или квази бочечно, то поляры в E ограниченных множеств из сильно сопряженного пространства E' являются окрестностями нуля в E.

Отметим, что всякое пространство Фреше (определение 3.11) и, в частности, всякое банахово пространство является бочечным ([3б], гл. III, § 1, п. 1). Бочечными являются также пространства $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ ([3б], гл. III, § 1, п. 2).

В конце п. 2.3 было указано, что всякое равностепенно непрерывное множество из $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ ограничено. Если же E_1 есть бочечное пространство, то имеет место обратное предложение, т.е. всякое ограниченное в любой γ - топологии пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ множество является равностепенно непрерывным ([3б], гл. III, § 3, теор. 2). Отсюда следует, что если E_1 - бочечное пространство, то имеет место следующее предложение ([3б], стр. 27).

Теорема Банаха-Штейнгауза. Пусть E_1 - бочечное пространство, E_2 - произвольное отделимое локально выпуклое пространство. Если последовательность линейных непрерывных операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(E_1, E_2)$ такова, что для каждого $x \in E_1$ последовательность элементов $\{A_n(x)\} \subset E_2$ сходится к элементу $B(x)$, то B есть линейный непрерывный оператор из E_1 в E_2 и последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится к $B(x)$ равномерно на всяком вполне ограниченном множестве из E_1.

С помощью этой теоремы докажем следующее предложение (ср.[3б], гл. III, § 3, № 7, следствие 2).

Лемма 3.2. Пусть E_1 - бочечное пространство, а E_2 - полуполное локально выпуклое пространство. Тогда пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ полуполно в любой γ - топологии, где γ - покрытие пространства E_1.

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность Коши в γ - топологии пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$, т.е. для каждой окрестности нуля $V \subset E_2$ и каждого множества $\mathfrak{M} \subset \gamma$, найдется $n_{\mathfrak{M}}$ такое, что для всех $n > n_{\mathfrak{M}}$ и любого натурального m имеет место включение

$$A_{n+m}(x) - A_n(x) \in V \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{M} \qquad (3.1)$$

Так как γ покрывает пространство E_1, то из (3.1) следует, что для каждого $x \in E_1$ последовательность $\{A_n(x)\}$ есть последовательность Коши в пространстве E_2. Поэтому, в силу полуполноты пространства E_2, последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится в E_2 к некоторому элементу $A(x) \in E_2$ для каждого $x \in E_1$. Отсюда, согласно теореме Штейнгауза-Банаха, следует, что A есть линейный непрерывный оператор из E_1 в E_2, т.е. $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$

Переходя в (3.1) к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$A(x) - A_n(x) \in V \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{M} \quad \text{и} \quad n > n_{\mathfrak{M}} \qquad (3.2)$$

Это значит, что последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится к Ax равномерно на каждом множестве $\mathfrak{M} \in \gamma$, т.е. $\{A_n\}$ сходится к A в γ - топологии пространства $\mathcal{L}(E_1, E_2)$

Лемма доказана.

3.3. Как уже отмечалось выше, локально выпуклое пространство E можно считать вложеным в свое второе сопряженное пространство, т.е. $E \subset E''$. Рассмотрим частный случай, когда $E = E''$.

Определение 3.9. Локально выпуклое пространство называется полурефлексивным или алгебраически рефлексивным, если пространства E и E'' совпадают по запасу элементов, т.е., если каждый линейный непрерывный функционал от $y \in E'$ представим в виде $\langle x, y \rangle$, где $x \in E$. Пространство называется рефлексивным или вполне рефлексивным, если сверх того совпадают топология пространства E и топология $\beta(E'', E')$ пространства E''.

Известно, что всякое локально выпуклое пространство полурефлексивно в слабой топологии ([3б], гл. IV, № 1, предл. I), т.е. пространство, сопряженное к слабо сопряженному к E пространству, совпадает по запасу элементов с пространством E. Если же E'' есть сопряженное пространство к пространству E', наделенному сильной топологией, то, согласно теореме Маккей-Аренса ([2], [18], [23а] или [3б], гл. IV, § 2, теор. I), E'' совпадает с E по запасу элементов (т.е. E полурефлексивно) тогда и только тогда, если всякое ограниченное замкнутое множество из E бикомпактно в слабой топологии $\sigma(E, E')$ ([3б], гл. IV, § 3, теор. I). Ввиду этого, из леммы 3.1 следует

<u>Теорема 3.1</u>. <u>Для того, чтобы локально выпуклое пространство E было рефлексивным, необходимо и достаточно выполнение следующих условий</u>:

1) <u>Пространство E квази бочечно</u>.

2) <u>Каждое ограниченное замкнутое множество из E слабо бикомпактно</u>.

Примерами рефлексивных локально выпуклых пространств являются рефлексивные банаховы пространства. Кроме того существует широкий класс рефлексивных пространств не являющихся банаховыми.

Определение 3.10. Бочечное пространство, в котором каждое ограниченное множество относительно бикомпактно называется пространством Монтеля.

Из этого определения непосредственно видно, что пространства Монтеля удовлетворяют условиям теоремы 3.1, а значит, рефлексивны. Пространства $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$, а также некоторые пространства аналитических функций являются пространствами Монтеля. Однако, ни одно бесконечномерное банахово пространство не является пространством Монтеля.

3.4. Отметим еще один важный класс локально выпуклых пространств.

Определение 3.11. Полное метризуемое локально выпуклое пространство называется пространством Фреше или $(\mathcal{F})$-пространством.

В $(\mathcal{F})$-пространствах существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля ([11б] или [12], п. 3).

Пример 3.1. Рассмотрим множество $\mathcal{D}_\omega$ всех финитных бесконечно дифференцируемых функций, с носителями, содержащимися в некотором компакте $\omega \subset R^n$. Это множество является рефлексивным $(\mathcal{F})$ - пространством [26а], причем фундаментальную систему окрестностей нуля в нем образуют множества $U(m, \varepsilon)$, состоящие из всех функций $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$ таких, что

$$|D^p \varphi(x)| \leq \varepsilon \quad \text{для всех } p \leq m \text{ и } x \in \omega .$$

Ограниченные множества в $\mathcal{D}_\omega$ определяются так же, как в пространстве $\mathcal{D}$ (пример 1.1.).

Пространство $\mathcal{D}'_\omega$, сопряженное к $\mathcal{D}_\omega$, есть пространство обобщенных функций и не является $(\mathcal{F})$- пространством ([12] , п. 7).

В дальнейшем мы воспользуемся следующим предложением:

Лемма 3.3. ([12] , теорема 9). Пусть E_1 - пространство Фреше, а E_2 - рефлексивное пространство Фреше, $B(x,y)$ - билинейный функционал, определенный на топологическом произведении $E_1' \times E_2'$, причем E_1' и E_2' - сильно сопряженные пространства соответственно к E_1 и E_2 . Пусть, далее, выполнены условия:

1) Отображение $y \to B(x,y)$ непрерывно на E_2' для каждого $x \in E_1'$.

2) Когда y пробегает произвольное ограниченное множество из E_2', отображения $x \to B(x,y)$ образуют равностепенно непрерывное множество.

Тогда билинейный функционал $B(x,y)$ непрерывен по совокупности аргументов.

Заметим, что если E_1 и E_2 - локально выпуклые пространства, то из непрерывности билинейного функционала, определенного на $E_1 \times E_2$, по каждому из аргументов, не следует его непрерывность по совокупности аргументов. Например билинейный функционал $\langle x, y \rangle$, где $x \in E$ и $y \in E'$, непрерывный по каждому аргументу, непрерывен по совокупности аргументов лишь в том случае, если E нормируемо ([12] , п. 7).

ГЛАВА П

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Основным предметом изучения в настоящей главе являются потенциальные операторы, которые вводятся исходя из дифференциала Гато функционала. Для потенциальных операторов устанавливаются различные предложения и выясняется связь между свойствами потенциальных операторов и их потенциалов. Для изучения некоторых свойств потенциальных операторов вводятся понятия интеграла Стильтьеса и криволинейного интеграла и устанавливается ряд предложений об этих интегралах.

Основные результаты этой главы, являющиеся обобщением соответствующих результатов М.М. Вайнберга [5б] , опубликованы в работе [28в] .

§ 4. Дифференциал Гато и градиент функционала

4.1. Определение 4.1. Дифференциалом Гато оператора $F(E_1 \to E_\alpha)$ в точке $x_0 \in E_1$ называется предел

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} = \delta F(x_0, h) \quad , \quad h \in E_1$$

если он существует.

Непосредственно из определения видно, что дифференциал Гато является однородным оператором относительно h , действующим из E_1 в E_2, т.е. $\delta F(x_0, \lambda h) = \lambda \delta F(x_0, h)$ и что если F - линейный оператор, то его дифференциал существует в каждой точке $x \in E_1$, и равен Fh. Но в общем случае дифференциал Гато не обязательно является линейным оператором от h. Для того, чтобы $\delta F(x_0, h)$ был линейным непрерывным оператором от h, достаточно выполнения следующих условий ([5б] , [19]):

1° $\delta F(x, h)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывен в точке x_0 при всяком $h \in E_1$.

2° $\delta F(x_0, h)$ есть непрерывный оператор в точке $h = \Theta$

При доказательстве этого факта используется следующее предложение для функционалов, которым в дальнейшем мы будем пользоваться

<u>Теорема Лагранжа</u>. ([5б] , [19]). <u>Если функционал f дифференцируем по Гато на выпуклом множестве $\mathfrak{M} \subset E$, то для всяких $x, x+h \in \mathfrak{M}$ существует число $\vartheta \in (0,1)$ такое, что</u>

$$f(x+h) - f(x) = \delta f(x + \vartheta h, h) \tag{4.1}$$

Если дифференциал Гато оператора $F(E_1 \to E_2)$ является линейным непрерывным оператором от h, то он обозначается $\mathcal{D}F(x, h)$ или $F'(x)h$, где $F'(x) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$. Соответствие $x \to F'(x)$ определяет, следовательно, оператор F', действующий из E_1 в $\mathcal{L}(E_1, E_2)$.

<u>Определение 4.2</u>. Оператор $F'(E_1 \to \mathcal{L}(E_1, E_2))$, определенный равенством

$$\mathcal{D}F(x, h) = F'(x)h \quad \text{для всех } h \in E_1, \tag{4.2}$$

называется п р о и з в о д н о й о п е р а т о р а $F(E_1 \to E_2)$.

В частности, для функционала f, определенного на локально выпуклом пространстве E и обладающего линейным непрерывным относительно h дифференциалом Гато $Df(x,h)$ имеем

Определение 4.3. Оператор $\Phi(E \to E')$, определяемый равенством

$$Df(x,h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \langle \Phi(x), h \rangle \text{ для всех } h \in E, \tag{4.3}$$

называется градиентом функционала f и обозначается так: $grad\, f(x)$ или кратко $grad\, f$.

Определение 4.4. Если оператор $\Phi(E \to E')$ является градиентом некоторого функционала f, то этот оператор называется потенциальным, а функционал f – его потенциалом.

Из определения 4.3 следует, что, если функционал имеет линейный дифференциал Гато, то формула Лагранжа (4.I) может быть записана в следующей форме

$$f(x+h) - f(x) = \langle \Phi(x+\vartheta h), h \rangle \tag{4.I^1}$$

где $x, h \in E$, $0 < \vartheta < 1$ и $\Phi = grad\, f$.

Замечание 4.I. В дальнейшем нам придется рассматривать и тот случай, когда потенциальный оператор действует из E' в E'', т.е. когда его потенциал задан на E'. Так как E'' содержит E, то в некоторых случаях значения градиента, действующего из E' в E'' будут лежать в E.

Теория потенциальных операторов играет важную роль при изучении нелинейных уравнений вариационным методом ([56] и гл. IУ настоящей работы).

4.2. Рассмотрим связь между некоторыми свойствами потенциальных операторов и свойствами их потенциалов. Пространство E' всюду будем считать наделенным сильной топологией $\beta(E',E)$.

Лемма 4.1. Пусть $\mathfrak{M}$ - ограниченное выпуклое множество из E. Тогда из непрерывности оператора $\Phi = \operatorname{grad} f$ в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$ по отношению к множеству $\mathfrak{M}$ следует непрерывность функционала f в точке x_0 по отношению к тому же множеству (определение 2.4).

Доказательство. Для любого $x \in \mathfrak{M}$ имеем по формуле Лагранжа (4.1[1]):

$$f(x) - f(x_0) = \langle \Phi(x_0 + \vartheta(x-x_0)), x - x_0 \rangle =$$

$$= \langle \Phi(x_0 + \vartheta(x-x_0)) - \Phi(x_0), x - x_0 \rangle + \langle \Phi(x_0), x - x_0 \rangle \text{ где } 0 < \vartheta < 1$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим окрестность нуля $\frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ \subset E'$, где $(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ$ - поляра ограниченного множества $\mathfrak{M}-\mathfrak{M}$. В силу непрерывности оператора Φ в точке x_0 по отношению к множеству $\mathfrak{M}$ найдется окрестность нуля $U_1 \subset E$ такая, что для всех $x \in (x_0 + U_1) \cap \mathfrak{M}$ имеет место включение

$$\Phi(x_0 + \vartheta(x-x_0)) - \Phi(x_0) \in \frac{\varepsilon}{2}(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ$$

Так как при этом $x - x_0 \in \mathfrak{M}-\mathfrak{M}$, то для всех $x \in (x_0 + U_1) \cap \mathfrak{M}$ имеет место неравенство

$$|\langle \Phi(x_0 + \vartheta(x-x_0)) - \Phi(x_0), x - x_0 \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Далее, в силу непрерывности линейного функционала $\langle \Phi(x_0), x - x_0 \rangle$ относительно $x - x_0$, найдется окрестность нуля $U_2 \subset E$ такая, что для $x \in x_0 + U_2$ имеет место неравенство

$$|\langle \Phi(x_0),\ x - x_0 \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Из этого и предыдущего неравенства следует, что для всех $x \in (x_0 + U) \cap \mathfrak{M}$, где $U = U_1 \cap U_2$, будет

$$|f(x) - f(x_0)| \le |\langle \Phi(x_0 + \vartheta(x - x_0)) - \Phi(x_0),\ x - x_0 \rangle| + |\langle \Phi(x_0), x - x_0 \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Лемма доказана.

Так как из непрерывности оператора Φ в точке $x_0 \in E$ следует его непрерывность в точке x_0 по отношению к любому ограниченному множеству $\mathfrak{M} \subset E$, содержащему точку x_0, то имеет место

<u>Следствие 4.1</u>. Если оператор $\Phi = \operatorname{grad} f$ непрерывен в точке $x_0 \in E$, то функционал f непрерывен в точке x_0 по отношению к каждому ограниченному множеству из E, содержащему точку x_0.

<u>Следствие 4.2</u>. Если оператор $\Phi = \operatorname{grad} f$ непрерывен из E в E', то функционал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E (определение 2.5).

<u>Лемма 4.2</u>. <u>Если</u> E - <u>квази бочечное пространство (определение 3.8) и</u> $\Phi = \operatorname{grad} f$ <u>есть квази ограниченный оператор (определение 2.13) из</u> E <u>в</u> E', <u>то функционал</u> f <u>равномерно непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из</u> E <u>(определение 2.6)</u>.

<u>Доказательство</u>. Достаточно доказать утверждение теоремы лишь для выпуклых ограниченных множеств, ибо выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена и из равномерной непрерывности f по отношению к выпуклой оболочке множества $\mathfrak{M}$ следует его равномерная непре-

рывность по отношению к $\mathfrak{M}$.

Пусть x', x'' – произвольные элементы из ограниченного выпуклого множества $\mathfrak{M} \subset E$. По формуле Лагранжа имеем

$$f(x'') - f(x') = \langle \Phi(x' + \vartheta(x'' - x')), x'' - x' \rangle \quad , \quad 0 < \vartheta < 1$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу квази ограниченности оператора Φ, множество $\Phi(\mathfrak{M})$ ограничено в E', а поэтому согласно следствию 3.1 множество $\mathcal{U} = (\Phi(\mathfrak{M}))^\circ$ (поляра в E множества $\Phi(\mathfrak{M})$) есть окрестность нуля в E. Следовательно, для любых $x', x'' \in \mathfrak{M}$ таких, что $x'' - x' \in \varepsilon \mathcal{U}$ имеет место неравенство

$$|f(x'') - f(x')| = |\langle \Phi(x' + \vartheta(x'' - x')), x'' - x' \rangle| \leq \varepsilon$$

Лемма доказана.

<u>Лемма 4.3.</u> <u>Пусть</u> x_0 – <u>точка квази бочечного пространства</u> E, $\mathcal{U}$ – <u>некоторая выпуклая окрестность нуля в</u> E. <u>Обозначим</u> $G = x_0 + \mathcal{U}$. <u>Тогда из</u> G – <u>ограниченности (определение 2.11) оператора</u> $\Phi = \operatorname{grad} f$ <u>следует непрерывность функционала</u> f <u>в каждой внутренней точке множества</u> $x_0 + \mathcal{U}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть x – произвольная точка из $G = x_0 + \mathcal{U}$. Напишем формулу Лагранжа (4.1[1]):

$$f(x) - f(x_0) = \langle \Phi(x_0 + \vartheta(x - x_0)), x - x_0 \rangle \quad , \quad 0 < \vartheta < 1$$

Множество $\Phi(G)$ ограничено в E', а поэтому, в силу квази бочечности пространства E, согласно следствию 3.1, его поляра $(\Phi(G))^\circ$ есть окрестность нуля в E. Пусть $\mathcal{U}_1 = \varepsilon (\Phi(G))^\circ \cap \mathcal{U}$. В силу выпуклости множества G, имеем $x_0 + \vartheta(x - x_0) \in G$, а поэтому для всех $x \in x_0 + \mathcal{U}_1$

имеем

$$|f(x)-f(x_0)|=|\langle \Phi(x_0+\vartheta(x-x_0)),\, x-x_0\rangle| \le \varepsilon$$

т.е. функционал f непрерывен в точке x_0 .

Пусть, теперь, x_1 - внутренняя точка множества x_0+U. Тогда x_0+U есть окрестность точки x_1, а $V=x_0+U-x_1$ есть окрестность нуля в E , причем $G=x_0+U=x_1+x_0+U-x_1=$ $=x_1+V$. Повторяя только что приведенные рассуждения, заключаем, что функционал f непрерывен в точке x_1 . Лемма доказана.

Если оператор $\Phi=\operatorname{grad} f$ действует из E' в E , то имеет место следующее предложение, аналогичное лемме 4.3:

<u>Лемма 4.3^I. Пусть $G=x_0+U$, где $x_0\in E'$, а U - некоторая окрестность нуля пространства E' , сильно сопряженного к локально выпуклому пространству E . Тогда из G - ограниченности оператора $\Phi=\operatorname{grad} f$ следует непрерывность функционала f в каждой внутренней точке множества x_0+U .</u>

Доказательство этой леммы проводится точно так же, как доказательство леммы 4.3 с той лишь разницей, что квази бочечность пространства E здесь не нужна, ибо поляра ограниченного множества из E всегда является окрестностью нуля в топологии $\beta(E',E)$.

Если оператор $\Phi=\operatorname{grad} f$ линеен, то требование G - ограниченности, когда G есть окрестность некоторой точки из E , совпадает с требованием его ограниченности (определение 2.18). Поэтому, для линейного потенциального оператора A получаем

<u>Следствие 4.3</u>. Пусть $A = \operatorname{grad} f$ есть линейный ограниченный оператор из E в E', где E - квази бочечное пространство. Тогда функционал f непрерывен на E.

Действительно, существует окрестность нуля $U \subset E$ такая, что A есть U - ограниченный оператор, откуда, согласно лемме 4.3, вытекает, что f непрерывен в каждой внутренней точке из U. Пусть, теперь, x_0 - произвольный элемент из E. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что x_0 есть внутренняя точка для окрестности нуля λU. Так как из U - ограниченности линейного оператора следует также его λU - ограниченность, то, согласно лемме 4.3, функционал f непрерывен в точке x_0.

С помощью тех же рассуждений получаем

<u>Следствие 4.3[1]</u>. Пусть $A = \operatorname{grad} f$ есть линейный ограниченный оператор из E' в E. Тогда функционал f непрерывен на E'.

<u>Лемма 4.4</u>. <u>Если оператор $\Phi = \operatorname{grad} f$ квази бикомпактен (определение 2.14) из E в E', то функционал f слабо непрерывен (определение 2.28) по отношению к каждому ограниченному выпуклому</u>+/ <u>множеству из E</u>.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\mathfrak{M}$ - выпуклое ограниченное множество из E. Предположим, что f не является слабо непрерывным в точке $x_0 \in \mathfrak{M}$ по отношению к $\mathfrak{M}$. Тогда существует сеть $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{M}$ такая, что

$\lim\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \langle x_\alpha, y \rangle = \langle x_0, y \rangle$ для всякого $y \in E'$,

+/Ср. рассуждение в начале доказательства леммы 4.2.

в то время, как

$$\lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} f(x_\alpha) \neq f(x_0)$$

Поэтому, в силу леммы 1.1 существует $\varepsilon > 0$ и подсеть $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta\in\mathfrak{B}\}$ сети $\{x_\alpha\}$ такая, что

$$|f(x_{\varphi(\beta)}) - f(x_0)| \geq \varepsilon \quad \text{для всех } \beta\in\mathfrak{B}\ . \tag{4.4}$$

По формуле Лагранжа (4.1[I]), получаем

$$f(x_{\varphi(\beta)}) - f(x_0) = \langle \Phi(x_0 + \vartheta_{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)} - x_0)),\ x_{\varphi(\beta)} - x_0 \rangle,\quad 0 < \vartheta_{\varphi(\beta)} < 1$$

Так как $\{x_0 + \vartheta_{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)} - x_0),\ \beta\in\mathfrak{B}\}$ есть сеть в ограниченном множестве $\mathfrak{M}$, то, в силу кваси бикомпактности оператора Φ, сеть $\{\Phi(x_0 + \vartheta_{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)} - x_0)),\ \beta\in\mathfrak{B}\}$ принадлежит бикомпактному множеству $\overline{\Phi(\mathfrak{M})} \subset E'$ (т.е. замыканию множества $\Phi(\mathfrak{M})$). Согласно определению 1.13[I], эта сеть содержит подсеть $\{\Phi(x_0 + \vartheta_{\psi(\gamma)}(x_{\psi(\gamma)} - x_0))\ \gamma\in\mathfrak{G}\}$ $(\psi(\gamma)\in\varphi(\mathfrak{B}))$, сходящуюся к некоторой точке $y_0 \in E'$.

Рассмотрим разность

$$f(x_{\psi(\gamma)}) - f(x_0) =$$

$$= \langle \Phi(x_0 + \vartheta_{\psi(\gamma)}(x_{\psi(\gamma)} - x_0)) - y_0,\ x_{\psi(\gamma)} - x_0 \rangle + \langle y_0,\ x_{\psi(\gamma)} - x_0 \rangle \tag{4.5}$$

Сеть $\{x_{\psi(\gamma)}, \gamma\in\mathfrak{G}\}$, как подсеть сети $\{x_\alpha\}$, слабо сходящейся к x_0 также слабо сходится к x_0. Поэтому существует $\gamma_0' \in \mathfrak{G}$ такое, что для всех $\gamma > \gamma_0'$ имеет место неравенство

$$|\langle y_0,\ x_{\psi(\gamma)} - x_0 \rangle| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4.6}$$

Далее, так как сеть $\{\Phi(x_0+\vartheta_{\psi(\gamma)}(x_{\psi(\gamma)}-x_0))-y_0,\ \gamma\in\mathcal{G}\}$ сходится к нулю, то найдется $\gamma_0''\in\mathcal{G}$ такое, что для всех $\gamma>\gamma_0''$ будет

$$\Phi(x_0+\vartheta_{\psi(\gamma)}(x_{\psi(\gamma)}-x_0))-y_0\in\frac{\varepsilon}{3}(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ,$$

где $(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ$ - поляра ограниченного множества $\mathfrak{M}-\mathfrak{M}$, являющаяся окрестностью нуля в E'. Так как $x_{\psi(\gamma)}-x_0\in$ $\in\mathfrak{M}-\mathfrak{M}$, то для $\gamma>\gamma_0''$ имеем

$$|\langle\Phi(x_0+\vartheta_{\psi(\gamma)}(x_{\psi(\gamma)}-x_0))-y_0,\ x_{\psi(\gamma)}-x_0\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}\qquad(4.7)$$

Следовательно, в силу соотношений (4.4), (4.6) и (4.7), для $\gamma>\gamma_0$, где $\gamma_0>\gamma_0'$ и $\gamma_0>\gamma_0''$, имеет место неравенство

$$|f(x_{\psi(\gamma)})-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2\varepsilon}{3}$$

Так как $\psi(\gamma)\subset\varphi(\mathcal{L})$, то последнее неравенство противоречит неравенству (4.4). Лемма доказана.

<u>Лемма 4.4[1]. Если</u> E <u>- квази бочечное пространство и оператор</u> $\Phi=\operatorname{grad} f$ <u>действует из</u> E' <u>в</u> E, <u>то из квази бикомпактности оператора</u> Φ <u>следует слабая непрерывность функционала</u> f <u>по отношению к каждому выпуклому ограниченному множеству из</u> E'.

Доказательство этой леммы проводится так же, как доказательство леммы 4.4, причем тот факт, что $(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^\circ$ есть окрестность нуля в E следует из квази бочечности пространства E.

Из лемм 4.4 и 4.4[1] вытекают

<u>Следствие 4.4</u>. Если $A=\operatorname{grad} f$ - линейный вполне непрерывный оператор из E в E', то функционал f

слабо непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E .

Следствие 4.4[1]. Если E - квази бочечное пространство и $A = grad\, f$ - линейный вполне непрерывный оператор из E' в E , то функционал f слабо непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E' .

4.3. Из определения 4.1 следует, что если функционал f имеет линейный дифференциал Гато $\mathcal{D}f(x, h)$, то имеет место равенство

$$f(x+th) - f(x) = t\,[\mathcal{D}f(x,h) + r(x,t,h)] \qquad (4.8)$$

где $\lim\limits_{t \to 0} r(x,t,h) = 0$

Определение 4.5. Говорят, что функционал f равномерно дифференцируем по Гато на множестве $\mathfrak{M} \subset E$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при $0 < t < \delta$, для всех $x, x+h \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство $|r(x,t,h)| \leq \varepsilon$

Определение 4.6. Говорят, что функционал f имеет локально равномерный дифференциал Гато на множестве $\mathfrak{M} \subset E$, если каждому $\varepsilon > 0$ и произвольному $x_0 \in \mathfrak{M}$ соответствует окрестность нуля $\mathcal{U} \subset E$ и число $\delta > 0$ такие, что для всякого $x \in (x_0 + \mathcal{U}) \cap \mathfrak{M}$ при $0 < t < \delta$ и $x+h \in \mathfrak{M}$ имеет место неравенство $|r(x,t,h)| \leq \varepsilon$.

Лемма 4.5. (ср. [5]). Если оператор $\phi = grad\, f$ равномерно непрерывен по отношению к ограниченному выпуклому множеству $\mathfrak{M} \subset E$, то функционал f равномерно

<u>дифференцируем на</u> $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для произвольного $x \in \mathfrak{M}$ и $h \in E$ такого, что $x + h \in \mathfrak{M}$, запишем (4.8) в виде

$$f(x+th) - f(x) = t\,[\langle \Phi(x_0), h\rangle + r(x,t,h)] \qquad (4.9)$$

где можно считать, что $0 < t \le 1$. С другой стороны, по формуле Лагранжа имеем

$$f(x+th) - f(x) = \langle \Phi(x+\vartheta th), th\rangle = t\,\langle \Phi(x+\vartheta th), h\rangle \qquad (4.10)$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что

$$r(x,t,h) = \langle \Phi(x+\vartheta th), h\rangle - \langle \Phi(x), h\rangle \qquad (4.11)$$

Из равномерной непрерывности оператора Φ по отношению к множеству $\mathfrak{M}$ следует существование выпуклой окрестности нуля $\mathcal{U} \subset E$ такой, что если $\vartheta th \in \mathcal{U}$, то имеет место включение

$$\Phi(x+\vartheta th) - \Phi(x) \in \varepsilon(\mathfrak{M} - \mathfrak{M})^{\circ}, \qquad (4.12)$$

где $(\mathfrak{M}-\mathfrak{M})^{\circ}$ - поляра ограниченного множества $\mathfrak{M} - \mathfrak{M} \subset E$, являющаяся окрестностью нуля в E' .

Далее, из $x \in \mathfrak{M}$ и $x + h \in \mathfrak{M}$ следует, что $h \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}$, а так как $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}$ ограничено, то найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t| \le \delta$ имеет место включение $t(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}) \subset \mathcal{U}$, откуда $\vartheta th \in \mathcal{U}$.

Таким образом для $0 < t \le \delta \le 1$ имеет место включение (4.12), откуда, ввиду того, что $h \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}$, получаем неравенство

$$|\langle \Phi(x+\vartheta th) - \Phi(x), h\rangle| \le \varepsilon$$

Из этого неравенства, в силу соотношения (4.11), следует, что

$$|r(x,t,h)| \le \varepsilon,$$

Лемма доказана.

<u>Лемма 4.6. (ср. [5а]). Если оператор</u> $\Phi = \operatorname{grad} f$ <u>непрерывен по отношению к ограниченному выпуклому множеству</u> $\mathfrak{M} \subset E$ <u>, то функционал</u> f <u>имеет локально равномерный дифференциал Гато на</u> $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Фиксируем $x_0 \in \mathfrak{M}$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности оператора Φ в точке x_0 по отношению к множеству $\mathfrak{M}$, найдется выпуклая окрестность нуля $\mathcal{U}_1 \subset E$ такая, что для всех $x \in (x_0 + \mathcal{U}_1) \cap \mathfrak{M}$ имеет место включение

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) \in \frac{\varepsilon (\mathfrak{M} - \mathfrak{M})^\circ}{2} \qquad (4.13)$$

В силу ограниченности множества $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}$, найдется $\delta > 0$ такое, что из $|t| \le \delta$ следует $t(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}) \subset \frac{\mathcal{U}_1}{2}$, причем можно считать, что $\delta \le 1$. Пусть $x \in \mathfrak{M}$ и $h \in E$ такие, что $x + h \in \mathfrak{M}$. Тогда $h \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}$, а поэтому $\vartheta t h \in \frac{\mathcal{U}_1}{2}$ $(0 \le \vartheta \le 1)$, если $0 \le t \le \delta \le 1$. Следовательно, для всех $x \in (x_0 + \mathcal{U}_1) \cap \mathfrak{M}$ при $0 < t \le \delta$ получаем

$$x + \vartheta t h \in x_0 + \frac{\mathcal{U}_1}{2} + \frac{\mathcal{U}_1}{2} \subset x_0 + \mathcal{U}_1$$

причем, в силу выпуклости множества $\mathfrak{M}$, имеем $x + \vartheta t h \in (x_0 + \mathcal{U}_1) \cap \mathfrak{M}$. Отсюда и из того, что $x \in (x_0 + \frac{\mathcal{U}_1}{2}) \cap \mathfrak{M} \subset (x_0 + \mathcal{U}_1) \cap \mathfrak{M}$, мы, в силу (4.13) и $h \in \mathfrak{M} - \mathfrak{M}$ получаем

$$|\langle \Phi(x) - \Phi(x_0), h \rangle| \le \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\langle \Phi(x + \vartheta t h) - \Phi(x_0), h \rangle| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

Следовательно, из (4.11) вытекает, что при $0 < t \le \delta$ и $x \in x_0 + \frac{\mathcal{U}_1}{2}$ имеет место неравенство

$$|r(x,t,h)| \le |\langle \Phi(x+\theta th)-\Phi(x_0),h\rangle| + |\langle \Phi(x)-\Phi(x_0),h\rangle| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Лемма доказана.

§ 5. Интеграл Стильтьеса и его свойства

5.1. Пусть E - локально выпуклое пространство, E' - пространство сильно сопряженное к E.

Рассмотрим абстрактную функцию $x(t)$, отображающую отрезок $[a,b]$ числовой оси R^1 в пространство E, и абстрактную функцию $y(t)$, отображающую $[a,b]$ в пространство E'. Пусть π - разбиение отрезка $[a,b]$ на n частей посредством точек t_k, причем

$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$$

В каждом промежутке $[t_{k-1},t_k]$, длину которого обозначим Δt_k, выберем точку τ_k. Тогда, так как $y(\tau_k)\in E'$ а $x(t_k)-x(t_{k-1})\in E$, имеет смысл выражение

$$\langle y(\tau_k), x(t_k)-x(t_{k-1})\rangle$$

Определение 5.1. Выражение

$$S_\pi=\sum_{k=1}^{n}\langle y(\tau_k), x(t_k)-x(t_{k-1})\rangle,$$

называется *интегральной суммой Стильтьеса*, соответствующей *разбиению* π *промежутка* $[a,b]$ *от абстрактной функции* $y(t)$ *по абстактной функции* $x(t)$.

Множество Π всевозможных разбиений π отрезка

$[a,b]$ является направленным множеством, если считать, что $\pi_2 > \pi_1$, когда разбиение π_2 является продолжением разбиения π_1. Таким образом, множество $\{S_\pi, \pi \in \Pi\}$ является сетью в пространстве R^1.

Определение 5.2. Если существует предел

$$\lim_{\pi \in \Pi} S_\pi = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \langle y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle, \qquad \lambda = \max_k \Delta t_k$$

не зависящий от выбора точек $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, то этот предел называется интегралом Стильтьеса от $y(t)$ по $x(t)$ и обозначается

$$\int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle$$

5.2. Для получения достаточных условий существования интеграла Стильтьеса, введем следующее понятие:

Определение 5.3. Мы скажем, что абстрактная функция $x(t)([a,b] \to E)$ обладает ограниченной вариацией на $[a,b]$, если существует окрестность нуля $V \subset E'$ и число $M > 0$ такие, что при любом разбиении отрезка $[a,b]$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| \le M \tag{5.1}$$

для всех $y \in V$.

Ясно, что, если $\varepsilon > 0$ и $y \in \varepsilon V$, то из неравенства (5.1) следует неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| \le \varepsilon M$$

Определение 5.4. Пусть дана окрестность нуля $V \subset E'$. Полной вариацией $\overset{\ell}{\underset{a}{W}}(V, x(t))$ функции $x(t)$ на $[a, b]$ относительно окрестности V называется наименьшее из чисел M, для которых неравенство (5.1) выполняется при всяком $y \in V$, или

$$\overset{\ell}{\underset{a}{W}}(V, x(t)) = \sup_{y \in V,\ \pi \in \Pi} \sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| \tag{5.2}$$

Пользуясь этим определением, получаем

Определение 5.3[I]. Абстрактная функция $x(t)$ обладает ограниченной вариацией на $[a, b]$, если существует окрестность нуля $V \subset E'$ такая, что $\overset{\ell}{\underset{a}{W}}(V, x(t)) < \infty$.

Данные здесь определения в случае, когда E - пространство Банаха, совпадают с определениями И.М. Гельфанда [8].

Для иллюстрации введенного понятия, приведем

Пример 5.1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$, а $\varphi_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ числовые функции с ограниченной вариацией на $[a, b]$, причём $\overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi_i)$ - полная вариация функции $\varphi_i(t)$ на $[a, b]$.

Рассмотрим абстрактную функцию

$$x(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) x_i$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей $[t_{k-1}, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда для любого $y \in E'$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| = \sum_{k=1}^{n} |\langle y, \sum_{i=1}^{m} (\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})) x_i \rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\langle y, x_i \rangle| \cdot |\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})| = \sum_{i=1}^{m} |\langle y, x_i \rangle| \cdot \overset{\ell}{\underset{a}{V}}(\varphi_i)$$

Отсюда, если за окрестность нуля $V \subset E'$ взять поляру конечного множества $\{x_i\ ,\ i=1,2,\dots,m\}$, а за число M — сумму $\sum_{i=1}^{m} \overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi_i)$, то для любого разбиения π отрезка $[a,b]$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle| \le M \quad \text{для всех} \quad y \in V.$$

Следовательно, полной вариацией функции $x(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) x_i$ относительно поляры множества $\{x_i\ ,\ i=1,2,\dots,m\}$ является число $\sum_{i=1}^{m} \overset{b}{\underset{a}{V}}(\varphi_i)$. Таким образом функция $x(t)$ обладает ограниченной вариацией.

Из определения 5.4 следуют обычные свойства полной вариации, известные для числовых функций. Например, если промежуток $[a,b]$ разбить на две части точкой $c \in [a,b]$ то

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathcal{V}}}(V, x(t)) = \overset{c}{\underset{a}{\mathcal{V}}}(V, x(t)) + \overset{b}{\underset{c}{\mathcal{V}}}(V, x(t)) \qquad (5.3)$$

5.3. Теорема 5.1. (ср. [7а] или [5б], стр. 39). Если абстрактная функция $y(t)$ $([a,b] \to E')$ непрерывна на $[a,b]$ а абстрактная функция $x(t)$ $([a,b] \to E)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, то $\int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle$ существует.

Доказательство. Пусть $\pi_0 \in \Pi$ — некотрое разбиение отрезка $[a,b]$, $\quad S_{\pi_0} = \sum_{k=1}^{n} \langle y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle$ — соответствующая ему интегральная сумма. Пусть, далее, $\pi_1, \pi_2 \in \Pi$ такие, что $\pi_1, \pi_2 > \pi_0$. Точки деления при разбиениях π_2 и π_2 обозначаем, соответственно $t'_{k,i}$ и $t''_{k,i}$, так что:

$$t_{k-1} = t'_{k,0} < t'_{k,1} < \ldots < t'_{k,i'_{k-1}} < t'_{k,i'_k} = t_k$$
$$t_{k-1} = t''_{k,0} < t''_{k,1} < \ldots < t''_{k,i''_{k-1}} < t''_{k,i''_k} = t_k$$

Интегральные суммы S_{π_1} и S_{π_2} соответствующие разбиениям π_1 и π_2 тогда имеют вид:

$$S_{\pi_1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i'_k} \langle y(\tau'_{k,i}),\ x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1}) \rangle \qquad t'_{k,i-1} \le \tau'_{k,i} \le t'_{k,i},$$

$$S_{\pi_2} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i''_k} \langle y(\tau''_{k,i}),\ x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1}) \rangle \qquad t''_{k,i-1} \le \tau''_{k,i} \le t''_{k,i}.$$

Так как $x(t_k) - x(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{i'_k} [x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1})] = \sum_{i=1}^{i''_k} [x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1})]$, то интегральная сумма S_{π_0} может быть записана следующими способами:

$$S_{\pi_0} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i'_k} \langle y(\tau_k), x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1}) \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i''_k} \langle y(\tau_k), x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1}) \rangle$$

Следовательно,

$$|S_{\pi_1} - S_{\pi_0}| \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i'_k} |\langle y(\tau'_{k,i}) - y(\tau_k),\ x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1}) \rangle| \qquad (5.4)^{I}$$

и

$$|S_{\pi_2} - S_{\pi_0}| \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i''_k} |\langle y(\tau''_{k,i}) - y(\tau_k),\ x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1}) \rangle| \qquad (5.4)^{II}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Так как $x(t)$ обладает ограниченной вариацией, то существует число $M > 0$ и выпуклая окрестность нуля $V \subset E'$ такие, что для всех $y \in V$ при любых $\pi \in \Pi$, а в частности и для π_1 и π_2 имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{i'_k} |\langle y, x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1})\rangle| \le M,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{i''_k} |\langle y, x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1})\rangle| \le M.$$

Отсюда следует, что для всех $y \in \frac{\varepsilon V}{2M}$ имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{i'_k} |\langle y, x(t'_{k,i}) - x(t'_{k,i-1})\rangle| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.5)^{I}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{i''_k} |\langle y, x(t''_{k,i}) - x(t''_{k,i-1})\rangle| \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (5.5)^{II}$$

В силу теоремы Кантора функция $y(t)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на нем, т.е. найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t', t'' \in [a, b]$ таких, что $|t'' - t'| < \delta$ имеет место включение

$$y(t'') - y(t') \in \frac{\varepsilon V}{2M}$$

Выберем разбиение π_0 таким, чтобы $\Delta t_k < \delta$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $|\tau'_{k,i} - \tau_k| < \delta$ и $|\tau''_{k,i} - \tau_k| < \delta$, а поэтому $y(\tau'_{k,i}) - y(\tau_k) \in \frac{\varepsilon V}{2M}$ и $y(\tau''_{k,i}) - y(\tau_k) \in \frac{\varepsilon V}{2M}$. Но тогда из $(5.4)^{I}$, $(5.4)^{II}$, $(5.5)^{I}$ и $(5.5)^{II}$ следует, что

$$|S_{\pi_2} - S_{\pi_1}| \le |S_{\pi_2} - S_{\pi_0}| + |S_{\pi_1} - S_{\pi_0}| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение π_0 такое, что для всех $\pi_1, \pi_2 > \pi_0$ имеет место неравенство

$|S_{\pi_\alpha} - S_{\pi_1}| \leq \varepsilon$ т.е. сеть $\{S_\pi, \pi \in \Pi\}$ есть фундаментальная сеть на числовой прямой R^1. Так как R^1 полно, то $\{S_\pi\}$ сходится, а значит интеграл Стильтьеса $\int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle$ существует. Теорема доказана.

Для интеграла Стильтьеса от абстрактных функций со значениями в локально выпуклых пространствах обычным способом доказываются все основные свойства, известные для интегралов Стильтьеса от числовых функций. Например, если $y(t) = y_0$, то

$$\int_a^b \langle y_0, dx(t)\rangle = \lim_{\pi\in\Pi} \sum_{k=1}^{n} \langle y_0, x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle =$$

$$= \lim_{\pi\in\Pi} \langle y_0, \sum_{k=1}^{n} [x(t_k) - x(t_{k-1})]\rangle = \langle y_0, x(b) - x(a)\rangle \qquad (5.6)$$

Рассмотрим еще случай, когда $x(t) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(t) x_i$ - функция, рассмотренная в примере 5.1. Тогда

$$\int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle = \lim_{\pi\in\Pi} \sum_{k=1}^{n} \langle y(\tau_k), \sum_{i=1}^{m} [\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})] x_i\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lim_{\pi\in\Pi} \sum_{k=1}^{n} \langle y(\tau_k), x_i\rangle [\varphi_i(t_k) - \varphi_i(t_{k-1})] = \sum_{i=1}^{m} \int_a^b \langle y(t), x_i\rangle \, d\varphi_i(t),$$

т.е. мы приходим к сумме интегралов Стильтьеса от непрерывных числовых функций $\langle y(t), x_i\rangle$ по числовым функциям $\varphi_i(t)$ с ограниченной вариацией. В частности, если функции $\varphi_i(t)$ дифференцируемы, получаем

$$\int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \int_a^b \langle y(t), x_i\rangle \varphi_i'(t)\, dt. \qquad (5.7)$$

<u>5.4</u>. В дальнейшем нам понадобятся некоторые предложе-

ния, связанные с предельным переходом под знаком интеграла Стильтьеса:

Лемма 5.1. Если сеть непрерывных абстрактных функций $\{y_\alpha(t),\ \alpha \in \mathfrak{A}\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к непрерывной абстрактной функции $y(t)$, а $x(t)$ – абстрактная функция с ограниченной вариацией, то

$$\lim_{\alpha\in\mathfrak{A}} \int_a^b \langle y_\alpha(t), dx(t)\rangle = \int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle$$

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$\left|\int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle - \int_a^b \langle y_\alpha(t), dx(t)\rangle\right| = \left|\int_a^b \langle y(t)-y_\alpha(t), dx(t)\rangle\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |\langle y(t)-y_\alpha(t), dx(t)\rangle| = \lim_{\pi\in\Pi}\sum_{k=1}^{m} |\langle y(\tau_k)-y_\alpha(\tau_k), x(t_k)-x(t_{k-1})\rangle| \quad (5.8)$$

Так как $x(t)$ – функция с ограниченной вариацией, то при любом разбиении π отрезка $[a,b]$ для всех $y \in \frac{\varepsilon V}{M}$ (V и M – из определения 2.5) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle| < \varepsilon$$

Из равномерной сходимости на $[a,b]$ сети $\{y_\alpha(t)\}$ к $y(t)$ следует существование $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ такого, что для всех $\alpha > \alpha_0$ и всех $t \in [a,b]$ имеем: $y(t) - y_\alpha(t) \in \frac{\varepsilon V}{M}$. Поэтому для любого разбиения π имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y(\tau_k)-y_\alpha(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle| < \varepsilon \quad \text{для всех } \alpha > \alpha_0 .$$

Отсюда, в силу (5.8), следует, что для всех $\alpha > \alpha_\varepsilon$ имеет место неравенство

$$\left| \int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle - \int_a^b \langle y_\alpha(t), dx(t) \rangle \right| < \varepsilon$$

Лемма доказана.

<u>Лемма 5.2</u>. <u>Пусть выполнены условия: 1) Абстрактная функция</u> $y(t)$ <u>непрерывна на</u> $[a, b]$; <u>2) Сеть</u> $\{x_\alpha(t), \alpha \in \mathfrak{A}\}$ <u>функций с ограниченными вариациями сходится в каждой точке</u> $t \in [a, b]$ <u>к функции</u> $x(t)$, <u>3) Существуют окрестность нуля</u> $V \subset E'$ <u>и число</u> $M > 0$ <u>такие, что для всех</u> $\alpha \in \mathfrak{A}$ <u>полные вариации</u> $\overset{b}{\underset{a}{V}}(V, x_\alpha(t)) \leq M$. <u>Тогда</u>

$$\lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \int_a^b \langle y(t), dx_\alpha(t) \rangle = \int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle$$

<u>Доказательство</u>. Из условия 3) леммы следует, что при любом разбиении τ отрезка $[a, b]$ для всех $y \in V$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x_\alpha(t_k) - x_\alpha(t_{k-1}) \rangle| \leq M \qquad \text{для всех } \alpha \in \mathfrak{A} .$$

Переходя к пределу по $\alpha \in \mathfrak{A}$, получаем, что для всех $y \in V$ при любом $\tau \in \Pi$:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| \leq M$$

Следовательно, $x(t)$ есть функция с ограниченной вариацией на $[a, b]$, а значит $\int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle$ существует.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу теоремы Кантора функция $y(t)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, а поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что для любой пары точек $t', t'' \in [a, b]$, для которых $|t' - t''| < \delta$, будет $y(t'') - y(t') \in \frac{\varepsilon V}{3M}$.

Зафиксируем разбиение π_0 отрезка $[a, b]$ на m частей точками t_k такое, что $\Delta t_k < \delta$ для $k = 1, 2, \dots, m$ и напишем

$$\int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle y(t), dx(t) \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle y(t) - y(t_k), dx(t) \rangle + \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle y(t_k), dx(t) \rangle \quad (5.9)$$

В силу (5.6) имеем:

$$\sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle y(t_k), dx(t) \rangle = \sum_{k=1}^m \langle y(t_k), x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle \quad (5.10)$$

Возьмем произвольное разбиение π отрезка $[a, b]$ точками $t_{k,i}$, являющееся продолжением разбиения π_0. Для всех $y \in \frac{\varepsilon V}{3M}$ в силу (5.1) будет выполняться неравенство

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{i_k} |\langle y, x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.11)$$

Если в каждом промежутке $[t_{k,i-1}, t_{k,i}]$ выберем по точке $\tau_{k,i}$, то $\tau_{k,i} \in [t_{k-1}, t_k]$, а поэтому $|\tau_{k,i} - t_k| \leq$ $\leq |t_{k-1} - t_k| < \delta$ и $y(\tau_{k,i}) - y(t_k) \in \frac{\varepsilon V}{3M}$, следовательно, в силу (5.11)

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{i_k} |\langle y(\tau_{k,i}) - y(t_k), x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}) \rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (5.12)$$

Выражения $S_\pi = \sum_{i=1}^{i_k} \langle y(\tau_{k,i}) - y(t_k), x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}) \rangle$ являются интегральными суммами, пределы которых равны $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \langle y(t) - y(t_k), dx(t) \rangle$. Поэтому из (5.12) следует, что

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\langle y(t)-y(t_k), dx(t)\rangle\right| \le \sum_{k=1}^{m}\left|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\langle y(t)-y(t_k), dx\rangle\right| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

Отсюда и из равенств (5.9) и (5.10) следует, что

$$\int_a^b\langle y(t), dx(t)\rangle = \frac{\varepsilon}{3}\eta + \sum_{k=1}^{m}\langle y(t_k), x(t_k)-x(t_{k-1})\rangle, \text{ где } |\eta| \le 1,$$

и аналогично

$$\int_a^b\langle y(t), dx_\alpha(t)\rangle = \frac{\varepsilon}{3}\eta_\alpha + \sum_{k=1}^{m}\langle y(t_k), x_\alpha(t_k)-x_\alpha(t_{k-1})\rangle, \text{ где } |\eta_\alpha| \le 1, \alpha\in\mathfrak{A}$$

Так как m и $t_k\ (k=1,2,\dots,m)$ фиксированы и в каждой $t_k\in[a,b]$ по условию леммы $\lim\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} x_\alpha(t_k) = x(t_k)$, то найдется $\alpha_0\in\mathfrak{A}$ такое, что для всех $\alpha>\alpha_0$

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\langle y(t_k), x_\alpha(t_k)-x_\alpha(t_{k-1})\rangle - \sum_{k=1}^{m}\langle y(t_k), x(t_k)-x(t_{k-1})\rangle\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\left|\langle y(t_k), x_\alpha(t_k)-x(t_k)\rangle\right| + \sum_{k=1}^{m}\left|\langle y(t_k), x(t_{k-1})-x_\alpha(t_{k-1})\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Отсюда и из предыдущего следует, что при $\alpha>\alpha_0$

$$\left|\int_a^b\langle y(t), dx(t)\rangle - \int_a^b\langle y(t), dx_\alpha(t)\rangle\right| < \left|\frac{\varepsilon}{3}\eta - \frac{\varepsilon}{3}\eta_\alpha\right| + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon$$

Лемма доказана.

Лемма 5.3. Если сеть непрерывных функций $\{y_\alpha(t), \alpha\in\mathfrak{A}\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к непрерывной функции $y(t)$, а сеть абстрактных функций $\{x_\alpha(t), \alpha\in\mathfrak{A}\}$ сходится к функции $x(t)$ в каждой точке $t\in[a,b]$ причем существуют окрестность нуля $V\subset E'$ и число $M>0$

такие, что для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ полные вариации

$\bigvee_a^b (V, x_\alpha(t)) \leq M$, то

$$\lim_{\alpha \in \mathfrak{A}} \int_a^b \langle y_\alpha(t), dx_\alpha(t) \rangle = \int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle$$

Доказательство. Напишем

$$\int_a^b \langle y_\alpha(t), dx_\alpha(t) \rangle - \int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle =$$
$$= \int_a^b \langle y_\alpha(t) - y(t), dx_\alpha(t) \rangle + \left[\int_a^b \langle y(t), dx_\alpha(t) \rangle - \int_a^b \langle y(t), dx(t) \rangle \right]$$

Доказательство того, что первый из интегралов в правой части этого равенства сходится к нулю по $\alpha \in \mathfrak{A}$, проводится так же, как доказательство леммы 5.1, а разность интегралов, стоящая в квадратных скобках сходится к нулю по лемме 5.2.

§ 6. Криволинейный интеграл

6.1. Определение 6.1. Пусть абстрактная функция $x(t)$ отображает отрезок $a \leq t \leq b$ числовой оси в локально выпуклое пространство E . Тогда образ L отрезка $[a, b]$ называется кривой (ориентированной) в пространстве E , а функция $x(t)$ - её представлением. Точка $x(a) \in E$ называется началом, а точка $x(b) \in E$ - концом кривой L . Если $x(a) = x(b)$, то кривая L называется замкнутой.

Определение 6.2. Пусть $x(t)$ $([a, b] \to E)$ - представление кривой L, а V - некоторая окрестность нуля из E'. Тогда **длиной** кривой L (соответствующей представлению $x(t)$ и выбранной окрестности V) называется полная вариация $\overset{b}{\underset{a}{\mathcal{W}}}(V, x(t))$ (определение 5.4).

В силу равенства (5.3) длина кривой обладает свойством аддитивности.

<u>Замечание 6.1</u>. Если в представлении $x(t)$ кривой L сделать замену $t = \varphi(s)$, где $\varphi(s)$ - монотонная непрерывная функция на промежутке $[\alpha, \beta]$, причем $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то мы получим другое представление $x(\varphi(s))$ той же кривой (с точностью до ориентации), которому соответствует то же значение длины. При этом, если $\varphi(s)$ - возрастающая функция, то представления $x(t)$ и $x(\varphi(s))$ определяют одну и ту же кривую L; если же $\varphi(s)$ убывает, то $x(\varphi(s))$ определяет кривую $-L$, отличающуюся от L только ориентацией.

<u>Определение 6.3</u>. Кривая называется **непрерывной**, если одно из её представлений есть непрерывная абстрактная функция.

<u>Определение 6.4</u>. Кривая называется **регулярной**, если одно из её представлений есть непрерывная функция с ограниченной вариацией, т.е. кривая непрерывна и имеет ограниченную длину относительно некоторой окрестности нуля V и некоторого представления.

<u>Определение 6.5</u>. Кривая, одно из представлений которой есть

$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ где $0 \le t \le 1$, $x_1, x_2 \in E$, называется **отрезком** $[x_1, x_2]$, соединяющим точки x_1 и x_2 .

Замечание 6.2. Легко видеть, что длина отрезка $[x_1, x_2]$ относительно некоторой окрестности нуля $V \subset E'$ равна $\sup_{y \in V} |\langle y, x_2 - x_1 \rangle|$. Действительно, пусть π - разбиение отрезка $[0,1]$ точками t_k на m частей. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1}) \rangle| = \sum_{k=1}^{m} |\langle y, x_1 + t_k(x_2 - x_1) - x_1 - t_{k-1}(x_2 - x_1) \rangle| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} |\langle y, (x_2 - x_1)(t_k - t_{k-1}) \rangle| = |\langle y, x_2 - x_1 \rangle| \sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) = |\langle y, x_2 - x_1 \rangle|$$

Следовательно $\overset{1}{\underset{0}{D}}(V, x(t)) = \sup_{\pi \in \Pi, y \in V} |\langle y, x_2 - x_1 \rangle| = \sup_{y \in V} |\langle y, x_2 - x_1 \rangle|$

Определение 6.3. Если точки $x_0, x_1, \dots, x_n \in E$ последовательно соединить отрезками $[x_{i-1}, x_i]$, то полученную кривую L_n называют **ломаной** , а отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ - её **звеньями**. Говорят, что ломаная L_n вписана в кривую L_1 , если точки x_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ принадлежат L , причем $x_i = x(t_i)$, где $x(t)$ $([a, b] \to E)$ - представление кривой L_1 и $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

Замечание 6.3. Из свойства аддитивности длины кривой следует, что длина ломаной L_n равна сумме длин её звеньев, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \sup_{y \in V} |\langle y, x_i - x_{i-1} \rangle|$. Отсюда следует, что если ломаная L_n вписана в кривую L , представление которой есть $x(t)$, то длина L_n не превосходит длины кривой L .

Действительно, в силу свойства аддитивности, длина кривой L равна сумме длин ее частей от точки x_{i-1} до точки x_i $(i=1,2,\dots,n)$. Длина такой части равна $\overset{t_i}{\underset{t_{i-1}}{W}}(V,x(t))=$ $=\sup\limits_{\pi\in\Pi_i,\,y\in V}\sum\limits_{k=1}^{m}|\langle y,\, x(t_{i,k})-x(t_{i,k-1})\rangle|$, где Π_i - множество всевозможных разбиений промежутка $[t_{i-1},\ t_i]$ точками $t_{i,k}$. Так как

$$\sup_{y\in V}|\langle y, x(t_i)-x(t_{i-1})\rangle|\le \sup_{\pi\in\Pi_i,\,y\in V}\sum_{k=1}^{m}|\langle y, x(t_{i,k})-x(t_{i,k-1})\rangle|,$$

то имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sup_{y\in V}|\langle y, x_i-x_{i-1}\rangle|\le\sum_{i=1}^{n}\sup_{\pi\in\Pi_i,\,y\in V}\sum_{k=1}^{m}|\langle y, x(t_{i,k})-x(t_{i,k-1})\rangle|=\sum_{i=1}^{n}\overset{t_i}{\underset{t_{i-1}}{W}}(V,x(t))$$

<u>Определение 6.7</u>. Пусть $x(t)\,([a,b]\to E)$ - представление кривой L . Последовательность кривых $\{L_n\}$ называется с х о д я щ е й с я к к р и в о й L , если существуют представления $x_n(t)$ кривых L_n , сходящиеся к $x(t)$ равномерно на $[a,b]$.

<u>Лемма 6.1</u>. <u>Для данной регулярной кривой</u> L , <u>представление которой есть</u> $x(t)$, <u>можно построить последовательность</u> $\{L_n\}$ <u>вписанных в</u> L <u>ломаных, сходящуюся</u> к L .

<u>Доказательство</u>. <u>Разобьем отрезок</u> $[a,b]$ <u>на</u> n <u>равных частей точками</u> $t_k^{(n)}$ $(k=0,1,2,\dots,n)$. Тогда $\Delta t_k^{(n)}=$ $=t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}=\dfrac{b-a}{n}$. Определим ломаную L_n представлением

$$x_n(t)=x(t_{k-1}^{(n)})+\frac{t-t_{k-1}^{(n)}}{t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}}\left(x(t_k^{(n)})-x(t_{k-1}^{(n)})\right),\quad t\in[t_{k-1}^{(n)},t_k^{(n)}]\ (k=1,2,\dots,n)\quad (6.1)$$

При этом $x_n(t_k^{(n)}) = x(t_k^{(n)}) = x_k^{(n)} \in L$

Так как функция $x(t)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$ то, какова бы ни была выпуклая симметричная окрестность нуля $U \subset E$, найдется $\delta > 0$ такое, что для любой пары точек $t', t'' \in [a,b]$, для которой $|t'' - t'| < \delta$, имеет место включение $x(t'') - x(t') \in \frac{U}{2}$. Фиксируем натуральное $n_0 > \frac{b-a}{\delta}$. Тогда $\frac{b-a}{n_0} < \delta$. Поэтому, если $n > n_0$ и $t \in [t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}]$, то $|t - t_{k-1}^{(n)}| < \Delta t_k^{(n)} < \delta$. Следовательно

$$x(t) - x(t_{k-1}^{(n)}) \in \frac{U}{2} \tag{6.2}$$

и, учитывая равенство (6.1),

$$x_n(t) - x(t_{k-1}^{(n)}) = \frac{t - t_{k-1}^{(n)}}{t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}} \left(x(t_k^{(n)}) - x(t_{k-1}^{(n)}) \right) \in \frac{U}{2} \tag{6.3}$$

Из (6.2) и (6.3) следует, что при $n > n_0$ для всех $t \in [a,b]$ имеет место включение

$$x(t) - x_n(t) = x(t) - x(t_{k-1}^{(n)}) + x(t_{k-1}^{(n)}) - x_n(t) \in \frac{U}{2} + \frac{U}{2} \subset U$$

Лемма доказана.

<u>Определение 6.8</u>. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется с в я з н ы м , если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в $\mathfrak{M}$.

<u>Определение 6.9</u>. Множество $\mathfrak{M} \subset E$ называется о д н о с в я з н ы м , если, какова бы ни была непрерывная кривая $L \subset \mathfrak{M}$ и точка $x_0 \in \mathfrak{M}$, существует абстрактная функция $z(t, s)$, непрерывная в прямоугольнике $\{a \le t \le b,\ 0 \le s \le 1\}$, отображающая этот прямоугольник

в $\mathfrak{M}$ и такая, что $z(t,0) = x(t)$ – представление кривой L, а $z(t,1) = x_0$.

В п. 6.2 мы воспользуемся следующим предложением.

Лемма 6.2. Если последовательность $\{L_n\}$ регулярных кривых $L_n \subset E$ сходится к кривой L, то множество $\Omega \subset E$, состоящее из всех точек $z \in E$, принадлежащих кривым L и L_n $(n = 1, 2, \ldots)$, бикомпактно.

Доказательство. Поставим каждой точке $z \in \Omega$ в соответствие выпуклую открытую окрестность нуля $U_z \subset E$. Тогда система множеств $\{z + U_z,\ z \in \Omega\}$ есть покрытие множества Ω. Возьмем те из множеств этого покрытия, которые имеют вид $x(t) + U_{x(t)}$ $(t \in [a,b])$, где $x(t)$ есть представление кривой L. Покроем, теперь, кривую L открытыми множествами вида $x(t) + \frac{1}{2} U_{x(t)}$.

Так как кривая L есть непрерывный образ бикомпактного множества $[a,b]$, то множество её точек бикомпактно, а поэтому из покрытия $\{x(t) + \frac{1}{2} U_{x(t)},\ t \in [a,b]\}$ кривой L можно выделить конечное покрытие $\{x(t_k) + \frac{1}{2} U_{x(t_k)}\}$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Рассмотрим окрестность нуля $U = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \frac{U_{x(t_k)}}{2} \subset E$. Ввиду равномерной сходимости $x_n(t)$ к $x(t)$, найдется натуральное n_0 такое, что при $n > n_0$ будет $x_n(t) - x(t) \subset U \subset \frac{1}{2} U_{x(t_k)}$ для всех $t \in [a,b]$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Но при каждом $t \in [a,b]$ для некоторого k, согласно определению покрытия, имеем

$$x(t) \in x(t_k) + \frac{1}{2} U_{x(t_k)}$$

Значит для каждого $t \in [a,b]$ найдется k такое, что при всех $n > n_0$ имеет место соотношение

$$x_n(t) - x(t_k) = x_n(t) - x(t) + x(t) - x(t_k) \in \frac{1}{2}U_{x(t_k)} + \frac{1}{2}U_{x(t_k)} \subset U_{x(t_k)}$$

Это значит, что множество всех точек кривых $L_{n_0+1}, L_{n_0+2}, \ldots$ и L покрывается конечным числом открытых множеств вида $x(t_k) + U_{x(t_k)}$, выбранных из произвольно взятого покрытия множества Ω. Далее, так как множества точек кривых $L_1, L_2, \ldots, L_{n_0}$ бикомпактны, (ибо они являются непрерывными образами бикомпакта $[a, b]$), то они также покрываются конечным числом множеств из покрытия $\{z + U_z\}$ множества Ω. Лемма доказана.

6.2. Пусть на связном множестве $\mathfrak{M} \subset E$ задан непрерывный оператор $F(\mathfrak{M} \to E')$. Так как $F(x) \in E'$ для $x \in \mathfrak{M}$, то для любой абстрактной функции $x(t)$ $([a,b] \to \mathfrak{M})$ абстрактная функция $y(t) = F(x(t))$ отображает отрезок $[a,b]$ в пространство E'.

Пусть L - кривая, лежащая в $\mathfrak{M}$, а $x(t)$ - ее представление. Тогда, если существует интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b \langle F(x(t)), dx(t) \rangle \tag{6.4}$$

то при замене $t = \varphi(s)$, где $\varphi(s)$ - возрастающая функция, удовлетворяющая условиям, указанным в замечании 6.1, значение этого интеграла не изменится. В силу замечания 6.1, при этой замене получается другое представление той же кривой. Таким образом, интеграл (6.4) зависит от кривой $L \subset \mathfrak{M}$, но не зависит от её представления.

Определение 6.10. Пусть $x(t)$ $([a,b] \to E)$ - представление кривой L, а F - оператор, действующий из E в E'.

Тогда, если существует интеграл Стильтьеса $\int_a^b \langle F(x(t)), dx(t) \rangle$ то он называется криволинейным интегралом от оператора F вдоль кривой L и обозначается

$$\int_L \langle F(x), dx \rangle \tag{6.5}$$

Из теоремы 5.1 следует, что если оператор F непрерывен по отношению к связному множеству $\mathfrak{M} \subset E$, а кривая $L \subset \mathfrak{M}$ регулярна, то интеграл (6.5) существует.

Если оператор F таков, что интеграл (6.5) по любой кривой из $\mathfrak{M}$ не зависит от ее формы, а зависит лишь от ее начала $x(a)$ и конца $x(b)$, то интеграл (6.5) записывается в виде

$$\int_{x(a)}^{x(b)} \langle F(x), dx \rangle$$

и называется независимым от пути интегрирования. В этом случае интеграл по любой замкнутой кривой равен нулю, ибо если $x(a) = x(b)$ то

$$\int_{x(a)}^{x(b)} \langle F(x), dx \rangle = \int_{x(b)}^{x(a)} \langle F(x), dx \rangle = -\int_{x(a)}^{x(b)} \langle F(x), dx \rangle .$$

<u>Лемма 6.3</u>. <u>Пусть оператор</u> $F(E \to E')$ <u>непрерывен по отношению к связному множеству</u> $\mathfrak{M}$. <u>Если последовательность регулярных дуг</u> $\{L_n\} \subset \mathfrak{M}$ <u>сходится к регулярной дуге</u> $L \subset \mathfrak{M}$, <u>причем для представлений</u> $x_n(t)$ <u>дуг</u> L_n <u>существует окрестность нуля</u> $V \subset E'$ <u>и число</u> $M > 0$ <u>такие, что</u> $\bigvee_a^b (V, x_n(t)) \le M$ (<u>т.е. длины кривых</u> L_n <u>ограничены в совокупности</u>), <u>то</u>

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n}\langle F(x), dx\rangle = \int_L \langle F(x), dx\rangle$$

<u>Доказательство</u>. В силу леммы 6.2, множество $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n \cup L$ бикомпактно, поэтому непрерывный по отношению к Ω оператор F, по теореме Кантора, равномерно непрерывен по отношению к Ω. Следовательно, для произвольно выбранной окрестности нуля $U' \subset E'$ найдется окрестность нуля $U \subset E$ такая, что из $x', x'' \in \Omega$ и $x' - x'' \in U$ следует

$$F(x') - F(x'') \in U'$$

В свою очередь, для окрестности нуля $U \subset E$, в силу равномерной сходимости на $[a, b]$ последовательности $\{x_n(t)\}$ к $x(t)$, найдется n_0 такое, что для всех $n > n_0$ и всех $t \in [a, b]$ имеет место включение

$$x_n(t) - x(t) \in U,$$

а следовательно и включение

$$F(x_n(t)) - F(x(t)) \in U'$$

Значит последовательность $\{F(x_n(t))\}$ сходится к $F(x(t))$ равномерно на $[a, b]$. Теперь утверждение леммы следует непосредственно из леммы 5.3.

<u>6.3</u>. <u>Теорема 6.1</u>. <u>(ср. [7a])</u>. <u>Пусть оператор F непрерывен в каждой точке односвязного открытого множества $\mathfrak{M}$. Если криволинейный интеграл $\int_L \langle F(x), dx\rangle$ равен нулю вдоль любого треугольника (т.е. замкнутой ломаной из трех звеньев), выпуклая оболочка которого лежит в $\mathfrak{M}$, то он равен нулю также вдоль любой замкнутой регулярной кривой L, лежащей в $\mathfrak{M}$</u>.

<u>Доказательство</u>. Интеграл $\int\limits_L \langle F(x), dx \rangle$ вдоль любой замкнутой ломаной, лежащей в $\mathfrak{M}$ вместе со своей выпуклой оболочкой, равен нулю, ибо он может быть представлен в виде суммы интегралов вдоль треугольников, лежащих в $\mathfrak{M}$ вместе с их выпуклыми оболочками.

Далее, если замкнутая регулярная кривая L лежит в $\mathfrak{M}$ вместе со своей выпуклой оболочкой, то, в силу леммы 6.1, можно построить последовательность замкнутых ломаных L_n, сходящихся к L и лежащих в выпуклой оболочке кривой L вместе со своими выпуклыми оболочками. Но тогда, согласно замечанию 6.3 и лемме 6.3 имеем:

$$\int\limits_L \langle F(x), dx \rangle = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} \langle F(x), dx \rangle = 0$$

Пусть, наконец, L - произвольная замкнутая регулярная кривая, лежащая в $\mathfrak{M}$ (её выпуклая оболочка может и не принадлежать $\mathfrak{M}$), а $x(t)$ - её представление. Построим замкнутые кривые, лежащие в $\mathfrak{M}$ вместе со своими выпуклыми оболочками и такие, что сумма интегралов вдоль этих кривых равна интегралу вдоль кривой L .

Так как $\mathfrak{M}$ - односвязное множество, то для любой точки $x_0 \in \mathfrak{M}$ найдется функция $z(t,s)$, непрерывная в прямоугольнике $\{a \le t \le b,\ 0 \le s \le 1\}$, и такая, что $z(t,0) = x(t)$ и $z(t,1) = x_0$. Образ прямоугольника $\{a \le t \le b,\ 0 \le s \le 1\}$ при непрерывном отображении $z(s,t)$ есть бикомпактное множество $\Omega \subset \mathfrak{M}$. Так как множество $\mathfrak{M}$ открыто в E , то для каждой точки $x \in \Omega$ найдется открытая выпуклая окрестность нуля $U_x \subset E$ такая, что $x + U_x \subset \mathfrak{M}$. Совокупность всех множеств вида $x + \frac{1}{4} U_x$,

$x \in \Omega$, образует покрытие множества Ω . Из этого покрытия, в силу бикомпактности Ω , можно выделить конечное покрытие $\{ x_k + \frac{1}{2} \mathcal{U}_{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, p \}$, причем

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{p} (x_k + \mathcal{U}_{x_k}) \subset \mathfrak{M}$$

Пусть $\mathcal{U} = \bigcap_{k=1}^{p} \frac{\mathcal{U}_{x_k}}{2}$. Из равномерной непрерывности функции $z(t, s)$ на прямоугольнике $\{a \le t \le b,\ 0 \le s \le 1\}$ вытекает существование числа $\delta > 0$ такого, что из $|t' - t''| < \delta$, $|s' - s''| < \delta$ $(t', t'' \in [a, b];\ s', s'' \in [0, 1])$ следует

$$z(t'', s'') - z(t', s') \in \mathcal{U} \subset \frac{1}{2} \mathcal{U}_{x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, p.$$

При этом $z(t', s') \in \Omega$ и поэтому

$$z(t', s') - x_k \in \frac{1}{2} \mathcal{U}_{x_k} \qquad \text{при некотором } k .$$

Следовательно, для некоторого k имеем

$$z(t'', s'') - x_k = z(t'', s'') - z(t', s') + z(t', s') - x_k \in \frac{1}{2} \mathcal{U}_{x_k} + \frac{1}{2} \mathcal{U}_{x_k} \subset \mathcal{U}_{x_k}$$

Таким образом $z(t', s')$ и $z(t'', s'')$ принадлежат множеству $x_k + \mathcal{U}_{x_k}$ при некотором k . Так как множество $\mathcal{U}_{x_k}$ выпукло, то $x_k + \mathcal{U}_{x_k}$ содержит весь отрезок, соединяющий точки $z(t', s')$ и $z(t'', s'')$, откуда следует, что этот отрезок содержится в $\mathfrak{M}$.

Итак, установлено существование $\delta > 0$ такого, что если $|t' - t''| < \delta$ и $|s'' - s'| < \delta$, то отрезок, соединяющий точки $z(t', s')$ и $z(t'', s'')$ содержится в $\mathfrak{M}$.

Далее, воспользуемся следующей конструкцией ([7а] , [5б]).

Разобьем отрезки $[a, b]$ и $[0, 1]$ на части точками t_i , s_j , $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_\mu = b$; $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_\nu = 1$

так, чтобы для всех $i = 1,2,\ldots,\mu$, $j = 1,2,\ldots,\nu$ выполнялись неравенства $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ и $|s_j - s_{j-1}| < \delta$.

Рассмотрим замкнутые кривые L_{ij}, представления которых $x_{ij}(\tau)\ (0 \le \tau \le 4)$ имеют вид:

$$x_{ij}(\tau) = \begin{cases} z(t_{i-1}, s_{j-1} + \tau(s_j - s_{j-1})) & 0 \le \tau \le 1 \\ z(t_{i-1} + (\tau - 1)(t_i - t_{i-1}), s_j) & 1 \le \tau \le 2 \\ z(t_i, s_j + (\tau - 2)(s_{j-1} - s_j)) & 2 \le \tau \le 3 \\ z(t_i + (\tau - 3)(t_{i-1} - t_i), s_{j-1}) & 3 \le \tau \le 4 \end{cases}$$

Из этих представлений видно, что для каждого $\tau \in [0,4]$ будет $x_{ij} = z(t,s)$, где $t_{i-1} \le t \le t_i$, $s_{j-1} \le s \le s_j$. Поэтому для любых $\tau_1, \tau_2 \in [0,4]$ имеем

$$x_{ij}(\tau_1) = z(t', s'), \quad x_{ij}(\tau_2) = z(t'', s'')$$

причем $t_{i-1} \le t', t'' \le t_i$ и $s_{j-1} \le s', s'' \le s_j$, откуда $|t' - t''| < \delta$ и $|s' - s''| < \delta$. Следовательно, любые две точки кривой L_{ij} соединяются отрезком, лежащим в $\mathfrak{M}$. Это значит, что кривые L_{ij} вместе с их выпуклыми оболочками лежат в $\mathfrak{M}$ и, согласно вышеустановленному,

$$\int_{L_{ij}} \langle F(x), dx \rangle = 0, \quad i = 1,2,\ldots,\mu, \quad j = 1,2,\ldots,\nu$$

Отсюда заключаем, что

$$\int_L \langle F(x), dx \rangle = \sum_{i,j=1}^{\mu,\nu} \int_{L_{ij}} \langle F(x), dx \rangle = 0$$

Теорема доказана.

<u>Следствие 6.1</u>. ([7а] , [5б]). Если оператор $F(E \to E')$ таков, что для любого отрезка $[x_1, x_2]$, лежащего в $\mathfrak{M}$, имеет место равенство

$$\int\limits_{[x_1, x_2]} \langle F(x), dx \rangle = f(x_2) - f(x_1),$$

где f - некоторый функционал, определенный на $\mathfrak{M}$, то для всякой кривой $L \subset \mathfrak{M}$ с концами $x(a) = x_1$ и $x(b) = x_2$, лежащей в $\mathfrak{M}$, имеет место такое же равенство

$$\int\limits_L \langle F(x), dx \rangle = f(x_2) - f(x_1)$$

т.е. криволинейный интеграл от оператора F **н е з а в и с и т о т п у т и и н т е г р и р о в а н и я** в $\mathfrak{M}$.

§ 7. Условия потенциальности оператора

7.1. Как уже указывалось выше, потенциальные операторы играют большую роль в вариационной теории нелинейных операторов. Поэтому важно выяснить, при каких условиях оператор $F(E \to E')$ является потенциальным. На этот вопрос дает ответ

Теорема 7.1. Для того, чтобы непрерывный оператор определенный на связном открытом множестве $\mathfrak{M} \subset E$, со значениями в пространстве E' был потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \langle F(x), dx \rangle \tag{7.1}$$

не зависел от пути интегрирования в $\mathfrak{M}$ (следствие 6.1).

Доказательство необходимости. Пусть $F(x) = \operatorname{grad} f(x)$, т.е.

$$\langle F(x), h \rangle = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \quad x \in \mathfrak{M}, \ h \in E \tag{7.2}$$

Рассмотрим интеграл (7.1), взятый вдоль произвольного отрезка $[x_1, x_2] \subset \mathfrak{M}$, представление которого есть

$$x(\tau) = x_1 + \tau(x_2 - x_1), \qquad 0 \le \tau \le 1$$

Тогда, в силу соотношения (5.7), интеграл (7.1) равен

$$\int_0^1 \langle F(x_1 + \tau(x_2 - x_1)), x_2 - x_1 \rangle d\tau$$

Полагая в равенстве (7.2) $x = x_1 + \tau(x_2 - x_1)$, $h = x_2 - x_1$, получаем

$$\langle F(x_1 + \tau(x_2 - x_1)), x_2 - x_1 \rangle = \lim \frac{f(x_1 + (\tau + t)(x_2 - x_1)) - f(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{t} =$$

$$= \frac{df(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau}$$

Следовательно,

$$\int_{[x_1, x_2]} \langle F(x), dx \rangle = \int_0^1 \frac{df(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau} d\tau = f(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) \Big|_0^1 = f(x_2) - f(x_1)$$

т.е. (следствие 6.1), интеграл (7.1) не зависит от пути интегрирования в $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство достаточности</u>. Пусть интеграл $\int_L \langle F(x), dx \rangle$ не зависит от пути интегрирования в $\mathfrak{M}$. Фиксируя произвольно выбранную точку $x_0 \in \mathfrak{M}$, рассмотрим функционал

$$f_0(y) = \int_{x_0}^{y} \langle F(x), dx \rangle, \qquad y \in \mathfrak{M} \tag{7.3}$$

По любому $y \in \mathfrak{M}$ и $h \in E$ подберем число t так, чтобы отрезок $[y, y + ht]$, представление которого есть

$$z(\tau) = y + \tau t h, \qquad 0 \le \tau \le 1 \tag{7.4}$$

лежал в $\mathfrak{M}$. Пользуясь аддитивностью криволинейного интеграла и его независимостью от пути интегрирования, имеем

$$\frac{f_0(y+ht)-f_0 y}{t} = \frac{1}{t}\left[\int_{x_0}^{y+ht}\langle F(x), dx\rangle - \int_{x_0}^{y}\langle F(x), dx\rangle\right] = \frac{1}{t}\int_{y}^{y+ht}\langle F(x), dx\rangle$$

Далее, в силу равенства (5.6) имеет место равенство

$$\int_{y}^{y+ht}\langle F(y), dx\rangle = \langle F(y), ht\rangle = t\langle F(y), h\rangle$$

Отсюда и из предыдущего равенства следует, что

$$\frac{f_0(y+ht)-f_0(y)}{t} - \langle F(y), h\rangle = \frac{1}{t}\int_{y}^{y+ht}\langle F(x)-F(y), dx\rangle \qquad (7.5)$$

Так как криволинейный интеграл в правой части последнего равенства не зависит от пути интегрирования, то его можно вычислять как интеграл по отрезку $[y, y+ht]$. Тогда, учитывая (5.7), получаем

$$\int_{y}^{y+ht}\langle F(x)-F(y), dx\rangle = \int_0^1\langle F(y+\tau th)-F(y), h\rangle t\,d\tau = t\int_0^1\langle F(y+\tau th)-F(y), h\rangle d\tau$$

Так как оператор F непрывен на $\mathfrak{M}$, то при каждом $y\in\mathfrak{M}$ и $h\in E$ интеграл в правой части последнего равенства стремится к нулю, когда $t\to 0$. Поэтому, в силу равенства (7.5), получаем

$$\lim_{t\to 0}\frac{f_0(y+th)-f_0(y)}{t} = \langle F(y), h\rangle$$

т.е.

$$F(y) = \operatorname{grad} f_0(y) = \operatorname{grad}\int_{x_0}^{y}\langle F(x), dx\rangle$$

Теорема доказана.

<u>Замечание 7.1</u>. Из доказательства теоремы 7.1 видно, что потенциал оператора F, если он существует, определяется равенством (7.3), причем в его выражение входит

произвольный элемент $x_0 \in \mathfrak{M}$. Если вместо x_0 взять другой элемент $x_1 \in \mathfrak{M}$, то формула (7.5) даст потенциал оператора F, отличающийся от f_0 на постоянную

$$\int_{x_1}^{y}\langle F(x), dx\rangle - \int_{x_0}^{y}\langle F(x), dx\rangle = \int_{x_1}^{x_0}\langle F(x), dx\rangle$$

Замечание 7.2. Пусть $y \in \mathfrak{M}$, а x_0 - элемент из $\mathfrak{M}$ такой, что отрезок $[x_0, y]$ лежит в $\mathfrak{M}$. Тогда, интегрируя вдоль этого отрезка и учитывая (5.7), получаем

$$\int_{x_0}^{y}\langle F(x), dx\rangle = \int_0^1\langle F(x_0 + t(y-x_0)), y - x_0\rangle\, dt$$

Значит, потенциал оператора F определяется равенством

$$f(y) = \int_0^1\langle F(x_0 + t(y-x_0)), y - x_0\rangle\, dt + C$$

где C - произвольная постоянная.

7.2. Если оператор $F(E \to E')$ имеет линейный дифференциал Гато, то на локально выпуклые пространства переносится другое необходимое и достаточное условие потенциальности.

Теорема 7.2. Пусть выполнены условия:

1) Оператор F действует из E в E' и имеет линейный относительно h дифференциал Гато $\mathcal{D}F(x,h)$ в каждой точке x выпуклого односвязного множества $\mathfrak{M} \subset E$.

2) В каждой точке $x \in \mathfrak{M}$ функционал $\langle \mathcal{D}F(x,h_1), h_2\rangle$, где $h_1, h_2 \in E$, непрерывен по x.

Тогда для того, чтобы оператор F был потенциальным на $\mathfrak{M}$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого

$x \in \mathfrak{M}$ <u>выполнялось равенство</u>

$$\langle DF(x, h_1), h_2 \rangle = \langle DF(x, h_2), h_1 \rangle \qquad (7.6)$$

Доказательство этой теоремы для локально выпуклого пространства E проводится так же, как в [5а] для банахова пространства.

В более общей формулировке эта теорема доказана в [19] . Результат, более общий, чем теорема 7.1, сформулирован без доказательства в работе [24] , которая появилась после того, как работа [28б] была подготовлена к печати (см. также [7б]).

ГЛАВА III

О ПРОДОЛЖЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Как установлено в работах М.М. Вайнберга (см. напр. [5б]), в вариационной теории нелинейных операторов, действующих в банаховых пространствах, важную роль играют свойства квадратного корня из линейного оператора. Совершенно так же, при изучении некоторых нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах, возникает вопрос о свойствах квадратного корня из линейного оператора и его продолжения. Этот вопрос изучается в настоящей главе (см. также [28 а,б] и [6б]).

§ 8. Некоторые вспомогательные предложения

8.1. Теорема о продолжении тождеств. (см. [3а] , гл. 1, § 6, предл. 10). Пусть F и G - непрерывные отображения топологического пространства E в отделимое топологическое пространство E_1 . Если $F(x) = G(x)$ во всех точках x множества $\mathfrak{M}$, всюду плотного в E , то $F = G$ (т.е. $F(x) = G(x)$ для всех $x \in E$).

Определение 8.1. Пусть на некотором множестве $\mathfrak{M} \subset E$ задан оператор F . Если существует оператор $\widetilde{F}$, определенный на всем пространстве E и такой, что для всех $x \in \mathfrak{M}$ имеет место равенство $\widetilde{F}(x) = F(x)$, то оператор $\widetilde{F}$ называется продолжением оператора F на все пространство E .

В случае, когда E - локально выпуклое пространство, имеет место следующее предложение (ср. [3а] , гл. II, § 3, теорема 1):

Теорема о продолжении операторов. Пусть на множестве $\mathfrak{M}$, всюду плотном в E , определен оператор F , принимающий значения в полном отделимом линейном топологическом пространстве E_1 , и равномерно непрерывный по отношению к множеству $\mathfrak{M}$. Тогда существует равномерно непрерывный на всем пространстве E оператор $\tilde{F}$, являющийся продолжением оператора F .

В частности, в силу равномерной непрерывности линейного непрерывного оператора (лемма 2.1), получаем следующее предложение:

Теорема 8.1. Пусть на линейном множестве $\mathfrak{M}$, всюду плотном в локально выпуклом пространстве E , определен линейный, непрерывный по отношению к множеству $\mathfrak{M}$, оператор A , принимающий значения в полном локально выпуклом пространстве E_1 . Тогда существует линейный оператор $\tilde{A}$, непрерывный из E в E_1 , являющийся продолжением оператора A .

8.2. В дальнейшем мы будем предполагать, что локально выпуклое пространство E удовлетворяет одному из следующих условий:

Условие (χ): Существует гильбертово пространство H такое, что $E \subset H$, причем топологии пространств E и H согласованы (определение 1.10), E плотно в H и H плотно в пространстве E' , наделенном сильной топологией $\beta(E', E)$.

<u>Условие (χ')</u>. Существует гильбертово пространство H такое, что $H \subset E$, причем топологии пространств H и E согласованы и H плотно в E .

<u>Замечание 8.1</u>. Вложение $E \subset H$ (в условии (χ)) понимается в том смысле, что существует линейное взаимно однозначное отображение L пространства E на некоторое линейное подпространство $E_1 \subset H$, причем пространства E и E_1, а также их соответствующие элементы $x \in E$ и $L(x) \in E_1$, отождествляются. Топология пространства H индуцирует топологию в E, являющуюся прообразом (определение 1.8) относительно L топологии, индуцированной в E_1 из H, а значит определяет для любых $x, y \in E$ скалярное произведение (x, y), равное $(L(x), L(y))$. Ввиду того, согласованность топологий означает, что каждое множество элементов $x \in E$ таких, что $(x, x) \le r^2$ (r - любое число), содержит некоторую окрестность нуля первоначальной топологии E. Так как E и E_1 отождествляются, то в дальнейших рассуждениях мы будем считать E подпространством пространства H (имея, однако, в виду вышеуказанный точный смысл включения $E \subset H$). В подобном смысле мы понимаем вложение $H \subset E$ из условия (χ') и другие вложения, встречающиеся в дальнейшем, а также согласованность топологий.

Рассмотрим некоторые свойства пространств E, удовлетворяющих условиям (χ) или (χ').

<u>Лемма 8.1</u>. <u>Пусть пространство E удовлетворяет условию (χ). Тогда имеют место следующие утверждения</u>:

1) $H \subset E'$ и $E'' \subset H$

2) Топологии пространств H и E' согласованы.

Доказательство. Пусть y - фиксированный элемент из H. Тогда скалярное произведение (x, y), где $x \in H$, есть линейный непрерывный функционал на H. Поэтому он будет линейным и на линейном подпространстве $E \subset H$ (точнее, из линейности функционала (x, y) на E_1 и оператора L на E следует линейность функционала $(L(x), y)$ на E). Кроме того, функционал (x, y) непрерывен в первоначальной топологии E, ибо он непрерывен на E в топологии, индуцированной из H, которая, в силу условия (χ), мажорируется первоначальной топологией пространства E (точнее, функционал (x, y) непрерывен относительно $x \in E_1$ в топологии, индуцированной в E_1 из H, а поэтому и относительно $x \in E$ в топологии, являющейся прообразом этой топологии относительно L). Таким образом, (x, y) является линейным непрерывным функционалом на E и, следовательно, может быть записан в виде $\langle x, z \rangle$, где $z \in E'$. Отсюда следует, что если каждый элемент $y \in H$ отождествить с соответствующим ему (согласно равенству $\langle x, z \rangle = (x, y)$, $x \in E$) элементом $z \in E'$, то это отождествление является линейным отображением пространства H на линейное подпространство пространства E'. Обратное соответствие также однозначно, ибо, если $z = \theta \in E'$, то $(x, y) = \langle x, z \rangle = 0$ для всех x из плотного в H множества E, откуда следует, что $y = \theta \in H$. Значит $H \subset E'$.

Покажем, что нормированная топология пространства H и сильная топология пространства E' согласованы.

Пусть V – окрестность нуля в E'. Тогда V содержит поляру B° некоторого ограниченного множества $B \subset E$.

В силу согласованности топологий E и H, пересечение единичного шара $S \subset H$ с пространством E содержит некоторую окрестность нуля $U \subset E$. Согласно определению ограниченного множества, существует $\alpha > 0$ такое, что $\lambda B \subset U \subset S \cap E$, $|\lambda| \leq \alpha$. Отсюда, в силу свойства 3) поляр, получаем $\lambda (S \cap E)^\circ \subset B^\circ$. Заметим теперь, что поляра S° в пространстве H единичного шара $S \subset H$ есть сам шар S. Поэтому из $S \cap E \subset S \subset H$ следует $S = S^\circ \subset (S \cap E)^\circ \subset H$ и $\lambda S \subset \lambda (S \cap E)^\circ \cap H \subset B^\circ \cap H$, т.е. пересечение $B^\circ \cap H$, а значит и $V \cap H$, содержит окрестность нуля $\alpha S \subset H$.

Для доказательства вложения $E'' \subset H$ рассмотрим произвольно выбранный элемент $x \in E''$. Тогда выражение $\langle y, x \rangle$, где $y \in E'$, есть линейный функционал на E', а значит и на его линейном подпространстве H. Так как, по только что доказанному, топология пространства H мажорирует топологию, индуцированную в H из E', то функционал $\langle y, x \rangle$, непрерывный на E', непрерывен также на H. Таким образом, $\langle y, x \rangle$ является линейным непрерывным функционалом на H и может быть записан в виде (y, z'), где $z' \in H$. Отсюда следует, что если каждый элемент $x \in E''$ отождествить с соответствующим ему (согласно равенству $\langle y, x \rangle = (y, z')$, $y \in H$) элементом $z' \in H$, то это отождествление является линейным отображением пространства E'' на линейное подпространство пространства H. Однозначность обратного соответствия между x и z' следует из того, что если $z' = \theta \in H$, то $\langle y, x \rangle = (y, z') = 0$ для всех $y \in H$, т.е. функционал $\langle y, x\rangle$, непрерывный на E', равен нулю на множестве H, плотном в E', а значит $\langle y, x\rangle = 0$ для всех $y \in E'$, откуда $x = \Theta \in E''$. Следовательно $E'' \subset H$. Лемма доказана.

Лемма 8.2. Пусть пространство E удовлетворяет условию (χ'). Тогда

1) $E' \subset H$

2) Сильная топология пространства E' и нормированная топология пространства H согласованы.

Доказательство. Доказательство утверждения 1) проводится так же, как доказательство вложения $E'' \subset H$ в лемме 8.1.

Для доказательства утверждения 2), рассмотрим единичный шар $S \subset H$ как множество в пространстве E. Если U - произвольная окрестность нуля из E, то пересечение $U \cap H$ содержит некоторый шар S_ε радиуса ε из H. Но $\lambda S \subset S_\varepsilon$, $|\lambda| \leq \varepsilon$. Поэтому $\lambda S \subset U \subset E$, $|\lambda| \leq \varepsilon$, т.е. S есть ограниченное множество в E. Поляра множества S в пространстве E' есть окрестность нуля в E' и совпадает с множеством $S^\circ \cap E'$, где S° - поляра единичного шара $S \subset H$, совпадающая, как известно с S. Значит, пересечение $S \cap E'$ единичного шара $S \subset H$ с пространством E' есть окрестность нуля в E', откуда вытекает, что пересечение с E' всякого шара из H содержит некоторую окрестность нуля из E'. Лемма доказана.

Замечание 8.2. Указанное при доказательстве леммы 8.1 вложение $H \subset E'$ (соответственно $E'' \subset H$) означает, что

$$\langle y, x \rangle = (y, x) \tag{8.1}$$

если $x \in E$ (соответственно $x \in E''$), а $y \in E' \cap H$. Аналогично, вложение $E' \subset H$, указанное в лемме 8.2, означает, что (8.1) имеет место, если $x \in E \cap H$, а $y \in E'$. В дальнейшем, говоря о вложениях $E'' \subset H \subset E'$ (при условии (χ)) и $E' \subset H$ (при условии (χ')), мы будем иметь в виду указанные выше вложения.

Очевидными примерами банаховых пространств, удовлетворяющих условиям (χ) или (χ'), соответственно, являются пространства $L^p[a,b]$, где $p > 2$ и $L^p[a,b]$, где $p < 2$. Для этих пространств $H = L^2[a,b]$.

Покажем, что пространство $\mathcal{D}$ (пример 1.1) и сопряженное к нему пространство $\mathcal{D}'$ всех обобщенных функций, не являющиеся банаховыми, удовлетворяют, соответственно, условию (χ) и (χ'). Здесь роль H играет пространство $L^2(R^n)$.

Действительно, каждая бесконечно дифференцируемая финитная функция $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ является квадратично суммируемой, а всякая функция $\psi(x) \in L^2(R^n)$ определяет линейный функционал $\int_{R^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx$ относительно $\varphi \in \mathcal{D}$, т.е. может быть отождествлена с некотрой обобщенной функцией $T \in \mathcal{D}'$. Далее, $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}'$ ([25а], стр. 75), а поэтому и $L^2(R^n)$ плотно в $\mathcal{D}'$. Кроме того, если $\psi \in L^2(R^n)$ и $\int_{R^n} \psi(x)\varphi(x)\,dx = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, то $\psi(x) = 0$ почти всюду ([9], гл. II, § 1, п. 5), откуда следует, что $\mathcal{D}$ плотно в H. Докажем, наконец, согласованность топологий пространств $\mathcal{D}$ и H, откуда, в силу леммы 8.1 будет следовать также согласованность топологий H и $\mathcal{D}'$.

Рассмотрим произвольный шар $S=\{\psi\in L^2(R^n),\ \|\psi\|\le\varepsilon\}$ Покажем, что его пересечение с $\mathcal{D}$, т.е. множество элементов $\varphi\in\mathcal{D}$, для которых $\int_{R^n}\varphi^2(x)\,dx\le\varepsilon$, содержит некоторую окрестность нуля $\mathcal{U}\subset\mathcal{D}$. Такой окрестностью является множество $\mathcal{U}=\mathcal{U}\left(\{\nu\},\left\{\frac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{mes\,R_{\nu,\nu+1}}}\right\}\right)$, $(\nu=0,1,2,\dots)$ т.е. множество всех $\varphi\in\mathcal{D}$ таких, что

$$|\mathcal{D}^p\varphi(x)|\le\frac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{mes\,R_{\nu,\nu+1}}}\quad\text{для всех}\quad p\le\nu,\quad \|x\|\ge\nu$$

(см. пример 1.1), где $R_{\nu,\nu+1}$ есть часть пространства R^n, заключенная между сферами радиусов ν и $\nu+1$. Действительно, для всех $\varphi\in\mathcal{U}$ имеет место неравенство

$$|\varphi(x)|\le\frac{\varepsilon}{2^{\frac{\nu+1}{2}}\sqrt{mes\,R_{\nu,\nu+1}}},\quad \|x\|\ge\nu,\quad \nu=0,1,2,\dots$$

Так как для любой функции $\varphi\in\mathcal{D}$ будет $\int_{R^n}\varphi^2(x)\,dx<\infty$, то для всех $\varphi\in\mathcal{U}$ имеем:

$$\int_{R^n}\varphi^2(x)\,dx=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{R_{\nu,\nu+1}}\varphi^2(x)\,dx\le\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{R_{\nu,\nu+1}}\frac{\varepsilon^2}{2^{\nu+1}\,mes\,R_{\nu,\nu+1}}\,dx=\varepsilon^2\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu+1}}=\varepsilon^2,$$

т.е. $\mathcal{U}\subset S\cap\mathcal{D}$. Значит топология пространства $\mathcal{D}$ мажорирует топологию, индуцированную в $\mathcal{D}$ топологией пространства $L^2(R^n)$.

Ясно, что выполнение условия (χ) для пространства $\mathcal{D}_\omega$ (пример 3.1) и условия (χ') для пространства $\mathcal{D}'_\omega$ проверяется еще проще.

§ 9. О квадратном корне из линейного ограниченного оператора

9.1. **Теорема 9.1.** Пусть выполнено условие (χ) и A – линейный ограниченный оператор из E' в E, сужение на H которого есть самосопряженный и положительный оператор A^H. Тогда положительный корень квадратный $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ из A^H является ограниченным оператором из H в E'' и имеет непрерывное продолжение из E' в H.

Доказательство. Согласно условию теоремы, оператор A отображает некоторую окрестность нуля $V \subset E'$ в ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E$. Так как топологии пространств H и E' согласованы, то в пересечении $V \cap H$ найдется окрестность нуля $S \subset H$, которая отображается оператором A в множество $\mathfrak{M}$. Из согласованности топологий E и H следует, что множество $\mathfrak{M}$, ограниченное в E, ограничено также в пространстве H. Таким образом, линейный оператор A^H ограничен, а значит и непрерывен в H. Но тогда и положительный корень квадратный $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ есть непрерывный самосопряженный оператор в H. Следовательно, для $x \in H$ имеем:

$$\|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\| = \left((A^H)^{\frac{1}{2}} x,\ (A^H)^{\frac{1}{2}} x\right) = (A^H x, x)$$

Рассматривая $x \in H$ как элемент из E' и учитывая замечание 8.2, мы из последнего равенства получаем:

$$\|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle A^H x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \text{ для } x \in H \tag{9.1}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности оператора A из E' в E, найдется окрестность нуля $U_1 \subset E'$ такая, что $A(U_1)$ – ограниченное множество из E, а значит его поляра $(A(U_1))^\circ$ является окрестностью нуля в E', так что для всех $x \in U = \varepsilon[(A(U_1))^\circ \cap U_1]$ будет

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \varepsilon^2$$

Отсюда и из (9.1) следует, что для всех $x \in U \cap H$ имеет место неравенство

$$\|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\| \le \varepsilon \qquad (9.2)$$

Полученное неравенство показывает, что линейный оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$, определенный на линейном множестве H, плотном в E', и принимающий значения в полном пространстве H, непрерывен по отношению к множеству H из E'. Следовательно, согласно теореме 8.1, оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ имеет линейное непрерывное продолжение $A^{\frac{1}{2}}$ на все пространство E'. Этим доказано второе утверждение теоремы.

Рассмотрим билинейную форму $\ell_x(y) = ((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y) = (x, (A^H)^{\frac{1}{2}}y)$ где $x, y \in H$. В силу неравенства (9.2), имеем

$$|\ell_x(y)| = |(x, (A^H)^{\frac{1}{2}}y)| \le \|x\| \cdot \|(A^H)^{\frac{1}{2}}y\| \le \|x\| \cdot \varepsilon$$

для каждого $x \in H$ и произвольного $y \in U \cap H$. Это неравенство показывает, что при каждом $x \in H$ линейный функционал $\ell_x(y)$, определенный на множестве H, плотном в пространстве E', непрерывен по отношению к множеству $H \subset E'$. Применяя теорему 8.1, мы так же, как и выше, заключаем, что при каждом $x \in H$ существует единственное непрерывное продолжение $\tilde{\ell}_x(y)$ функционала $\ell_x(y)$ на все пространство E', а значит $\tilde{\ell}_x(y) = \langle y, z_x\rangle$, где $z_x \in E'' \subset H$, $y \in E'$. Так как для всякого $y \in H$ имеет место равенство

$$\tilde{\ell}_x(y) = \ell_x(y) = ((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y),$$

то

$$((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y) = \langle z_x, y\rangle \quad ; \text{ для всех } y \in H .$$

Согласно замечанию 8.2 имеем $\langle z_x, y\rangle = (z_x, y)$ для всех $y \in H$, откуда

$$((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y) = (z_x, y) \qquad \text{для всех } y \in H .$$

Ввиду того, что $(A^H)^{\frac{1}{2}}x \in H$ и $z_x \in H$, последнее равенство означает, что $(A^H)^{\frac{1}{2}}x = z_x \in E''$, т.е. оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ действует из H в E''.

Докажем, наконец, ограниченность оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ из H в E''.

Так как $(A^H)^{\frac{1}{2}}x \in E''$ при каждом $x \in H$ и $A^{\frac{1}{2}}$ – линейный непрерывный оператор из E' в H, то $\langle (A^H)^{\frac{1}{2}}x, y\rangle$ и $(x, A^{\frac{1}{2}}y)$ являются непрерывными функционалами относительно $y \in E'$ при каждом $x \in H$. Эти функционалы совпадают на множестве H, плотном в E', откуда, согласно теореме о продолжении тождеств (§ 8), следует, что

$$\langle (A^H)^{\frac{1}{2}}x, y\rangle = (x, A^{\frac{1}{2}}y) \qquad \text{для всех } x \in H,\ y \in E' \quad (9.3)$$

Из этого равенства, ввиду того, что $A^{\frac{1}{2}}$ действует непрерывно из E' в H, а оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ действует из H в E'', согласно определению 2.32, следует, что $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ есть оператор, сопряженный к оператору $A^{\frac{1}{2}}$, т.е. $(A^H)^{\frac{1}{2}} = (A^{\frac{1}{2}})'$. Так как, по доказанному, оператор $A^{\frac{1}{2}}$ ограничен (ибо он непрерывен и действует в нормированное пространство H), то, в силу леммы 2.9, оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ также ограничен. Теорема доказана.

<u>Теорема 9.2</u>. <u>Пусть E – квазибочечное пространство, удовлетворяющее условию (χ), и A – линейный ограниченный оператор из E' в E, сужение на H которого есть самосопряженный положительный оператор A^H. Тогда</u>

$A=(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}_{c}A^{\frac{1}{2}}$, __где__ $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}_{c}$ - __сужение оператора__ $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}$ __на множество__ $A^{\frac{1}{2}}(E')$, __значения которого принадлежат пространству__ E .

__Доказательство__. В силу теоремы 9.1, операторы $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}(H\to E'')$ и $A^{\frac{1}{2}}(E'\to H)$ непрерывны, а поэтому по теореме о сложной функции ([3а] , гл. 1, § 4) оператор $C=(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$ непрерывен из E' в E''. С другой стороны, оператор A непрерывен из E' в E , а так как E квази бочечно, то, в силу леммы 3.1, оператор A непрерывен также из E' в E'' . Но для всех $x\in H$ имеет место равенство

$$Cx=(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}x=(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}x=A^{\text{н}}x=Ax$$

т.е. непрерывные на E' операторы C и A совпадают на множестве H , плотном в E' . Поэтому, в силу теоремы о продолжении тождеств,

$$(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}y=Cy=Ay \qquad \text{для всех } y\in E' ,$$

т.е. $A=(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, откуда следует, что $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}$ отображает множество $A^{\frac{1}{2}}(E')$ в пространство E , ибо значения оператора A принадлежат E . Таким образом, оператор A представим в виде произведения двух операторов, из которых первый - $A^{\frac{1}{2}}$ - непрерывен из E' в H , а второй - сужение $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}_{c}$ оператора $(A^{\text{н}})^{\frac{1}{2}}$ на множество $A^{\frac{1}{2}}(E')$ - ограничен из множества $A^{\frac{1}{2}}(E')\subset H$ в пространство E . Теорема доказана.

__Теорема 9.3__. __Пусть__ E - __квази бочечное пространство, удовлетворяющее условию__ (X) __и__ A - __линейный ограниченный оператор из__ E' __в__ E , __сужение на__ H __которого есть самосопряженный положительный оператор__ $A^{\text{н}}$. __Тогда оператор__

A имеет продолжение $\widetilde{A}$, ограниченное из E''' в E'', и представимое в виде произведения $\widetilde{A}=(A'')^{\frac{1}{2}}((A'')^{\frac{1}{2}})'$, где $(A'')^{\frac{1}{2}}$ – ограниченный оператор из H в E'', а $((A'')^{\frac{1}{2}})'$ – его сопряженный оператор, непрерывный из E''' в H.

Доказательство. В силу теоремы 9.1, оператор $(A'')^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E''. Поэтому, согласно лемме 2.8, его сопряженный оператор $((A'')^{\frac{1}{2}})'$ непрерывен из E''' в H и удовлетворяет, по определению 2.32, равенству

$$\langle (A'')^{\frac{1}{2}}x, y\rangle = \langle x, ((A'')^{\frac{1}{2}})'y\rangle = (x, ((A'')^{\frac{1}{2}})'y) \quad \text{для всех } x\in H \text{ и } y\in E'''$$

(так как x и $((A'')^{\frac{1}{2}})'y$ являются элементами пространства H, то для них $\langle x, ((A'')^{\frac{1}{2}})'y\rangle$ означает скалярное произведение). Учитывая (9.8), имеем отсюда для всех $y\in E'\subset E'''$:

$$(x, A^{\frac{1}{2}}y) = \langle (A'')^{\frac{1}{2}}x, y\rangle = (x, ((A'')^{\frac{1}{2}})'y) \text{ при любом } x\in H .$$

Значит, для всякого $y\in E'$ имеет место равенство

$$A^{\frac{1}{2}}y = ((A'')^{\frac{1}{2}})'y$$

т.е. оператор $((A'')^{\frac{1}{2}})'$ является непрерывным продолжением оператора $A^{\frac{1}{2}}$, определенного на E', на все пространство E'''. Отсюда вытекает, что оператор $(A'')^{\frac{1}{2}}((A'')^{\frac{1}{2}})'$ является непрерывным продолжением оператора $(A'')^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$, который в силу теоремы 9.2 совпадает с оператором A. Наконец, так как оператор $((A'')^{\frac{1}{2}})'$ непрерывен из E''' в H, а оператор $(A'')^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'', то произведение $\widetilde{A}=(A'')^{\frac{1}{2}}((A'')^{\frac{1}{2}})'$ ограничено из E''' в E''. Теорема доказана.

Следствие 9.1. Если пространство E рефлексивно, то $\widetilde{A}=A$, т.е. оператор A представим в виде произведения $(A^{н})^{\frac{1}{2}}((A^{н})^{\frac{1}{2}})'$, где $(A^{н})^{\frac{1}{2}}$ - линейный ограниченный оператор из H в E, а $((A^{н})^{\frac{1}{2}})'$ - его сопряженный оператор, ограниченный из E' в H.

Доказанная теорема обобщает теорему В.И. Соболева, установленную им для банаховых пространств [25].

9.2. Пусть пространство E удовлетворяет условию (χ) а линейный ограниченный оператор $A(E'\to E)$ таков, что его сужение $A^{н}$ на H допускает представление $A^{н}=BB^{*}$ где B - линейный оператор, непрерывный в H, а B^{*} - оператор, сопряженный к B. При этих условиях имеют место следующие предложения, аналогичные теоремам 9.1, 9.2 и 9.3, и доказываемые с помощью тех же рассуждений, которые проводились в п. 9.1.

Теорема 9.1'. Оператор B ограничен из H в E'', а оператор B^{*} имеет продолжение $\widetilde{B^{*}}$, непрерывное из E' в H.

Теорема 9.2'. Если пространство E квази бочечно, то $A=B_c\widetilde{B^{*}}$, где B_c - сужение оператора B на множество $\widetilde{B^{*}}(E')$, принимающее значения в E.

Теорема 9.3'. Если пространство E квази бочечно, то оператор A имеет продолжение $\widetilde{A}$, ограниченное из E''' в E'' и представимое в виде $\widetilde{A}=BB'$, где B - ограниченный оператор из H в E'', а B' - его сопряженный оператор, непрерывный из E''' в H.

Следствие 9.1'. Если пространство E рефлексивно, то $A=BB'$, где B' действует из E' в H, а B - из H в E.

9.3. Здесь мы будем предполагать, что пространство является квази бочечным и удовлетворяет условию (χ) .

Покажем, что при этих условиях имеют место предложения, аналогичные теоремам из п.п. 9.1 и 9.2.

Теорема 9.4. Пусть A – линейный ограниченный оператор из E в E' , сужение на H которого есть самосопряженный положительный оператор A^H . Тогда положительный корень квадратный $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ из оператора A^H является ограниченным оператором из H в E' и имеет непрерывное продолжение $A^{\frac{1}{2}}$ из E в H .

Доказательство. Так же, как при доказательстве теоремы 9.1, заключаем, что оператор A^H ограничен в H и оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ есть непрерывный самосопряженный оператор, причем для $x\in H$ получаем

$$\|(A^H)^{\frac{1}{2}} x\|^2 = \langle Ax, x\rangle \qquad (9.1)$$

Пусть задано $\varepsilon>0$. В силу ограниченности оператора A из E в E' , найдется окрестность нуля $\mathcal{U}_1\subset E$ такая, что $A(\mathcal{U}_1)$ – ограниченное множество из E' , а значит, согласно следствию 3.1, поляра $(A(\mathcal{U}_1))^\circ$ является окрестностью нуля в E , так что для всех $x\in \mathcal{U}=\varepsilon\,[(A(\mathcal{U}_1))^\circ\cap\mathcal{U}_1]$ будет

$$|\langle Ax, x\rangle| \le \varepsilon^2$$

Отсюда, такими же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 9.1, выводится существование непрерывного продолжения $A^{\frac{1}{2}}$ оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ на все пространство E .

Рассмотрим, далее, билинейную форму $\ell_x(y)=((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y)=(x,(A^H)^{\frac{1}{2}}y)$, где $x, y\in H$. Для каждого $x\in H$ и всех $y\in \mathcal{U}\cap H$ выводим так же, как при доказательстве теоремы 9.1, неравенство

$$|l_x(y)| \le \|x\| \cdot \varepsilon$$

и существование непрерывного продолжения $\tilde{l}_x(y)$ функционала $l_x(y)$ на все пространство E при каждом $x \in H$. Отсюда $\tilde{l}_x(y) = \langle z_x, y \rangle$, где $z_x \in E' \subset H$, $y \in E$. В силу равенства $((A^H)^{\frac{1}{2}}x, y) = \langle z_x, y \rangle = (z_x, y)$ для всех $y \in H$ при каждом $x \in H$ получаем $(A^H)^{\frac{1}{2}}x = z_x \in E'$, т.е. оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ действует из H в E'.

Отметим теперь, что $\langle (A^H)^{\frac{1}{2}}x, y \rangle$ и $(x, A^{\frac{1}{2}}y)$ являются линейными непрерывными функционалами от $y \in E$, совпадающими на множестве H, плотном в E. Поэтому, в силу теоремы о продолжении тождеств, имеем

$$\langle (A^H)^{\frac{1}{2}}x, y \rangle = (x, A^{\frac{1}{2}}y) \quad \text{для всех } x \in H \text{ и } y \in E,$$

причем $A^{\frac{1}{2}}$ действует из E в H, а $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ - из H в E'. Значит, согласно определению 2.32, оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ является сопряженным к оператору $A^{\frac{1}{2}}$, т.е. $(A^H)^{\frac{1}{2}} = (A^{\frac{1}{2}})'$. Так как оператор $A^{\frac{1}{2}}$ непрерывен, а значит и ограничен, из E в H, то по лемме 2.9, его сопряженный оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'. Теорема доказана.

<u>Теорема 9.5</u>. <u>Пусть выполнены условия теоремы 9.4. Тогда оператор</u> A <u>представим в виде</u> $A = (A^H)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$, <u>где оператор</u> $A^{\frac{1}{2}}$ <u>непрерывен из</u> E <u>в</u> H <u>и</u> $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ <u>ограничен из</u> H <u>в</u> E'.

<u>Доказательство</u>. Из ограниченности операторов $A^{\frac{1}{2}}(E \to H)$ и $(A^H)^{\frac{1}{2}}(H \to E')$ следует, что оператор $C = (A^H)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$ непрерывен из E в E'. Так как оператор A также непрерывен из E в E' и для всех $x \in H$ имеет место равенство

$$C = (A^H)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} x = (A^H)^{\frac{1}{2}} (A^H)^{\frac{1}{2}} x = Ax,$$

то из теоремы о продолжении тождеств следует, что

$$Cx = Ax \quad \text{для всех } x \in E,$$

т.е. $A = (A^H)^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}}$. Теорема доказана.

Теми же рассуждениями, которыми доказаны теоремы 9.4 и 9.5, доказываются более общие предложения:

<u>Теорема 9.4^{I}</u>. <u>Пусть линейный ограниченный оператор A из E в E' имеет сужение A^H на H, представимое в виде $A^H = BB^*$, где B – линейный непрерывный оператор в H, а B^* – его сопряженный оператор. Тогда B является ограниченным оператором из H в E', а B^* имеет непрерывное продолжение $\widehat{B}^*(E \to H)$, причем B есть оператор, сопряженный к $\widehat{B}^*$.</u>

Отметим, что теорема 9.4^{I} обобщает теорему I из [15], установленную для банаховых пространств.

<u>Теорема 9.5^{I}</u>. <u>Пусть выполнены условия теоремы 9.4^{I}. Тогда оператор A представим в виде $A = B\widehat{B}^*$, где $\widehat{B}^*$ непрерывен из E в H, а B ограничен из H в E'.</u>

<u>9.4</u>. Предложения, аналогичные полученным выше, имеют место также, если отказаться от требования положительности сужения A^H оператора A.

Пусть A^H_+ – положительная и A^H_- – отрицательная части оператора A^H. Тогда $|A^H| = A^H_+ + |A^H_-|$ – абсолютное значение оператора A^H, $|A^H|^{\frac{1}{2}} = (A^H_+)^{\frac{1}{2}} + |A^H_-|^{\frac{1}{2}}$ – положительный корень квадратный из абсолютного значения оператора A^H, а $(A^H)^{\frac{1}{2}} = (A^H_+)^{\frac{1}{2}} - |A^H_-|^{\frac{1}{2}}$ – главный корень квадратный из оператора A^H.

<u>Теорема 9.6</u>. <u>Пусть E квазибочечно и удовлетворяет условию (χ) и A – линейный непрерывный оператор из E'</u>

в E, сужение которого на H есть самосопряженный оператор A^H. Пусть, далее, операторы A_+^H и $|A_-^H|$ имеют продолжения A_+ и $|A_-|$, ограниченные из E' в E. Тогда оператор A имеет представление $A=(A^H)_c^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}$, где $|A|^{\frac{1}{2}}$ - продолжение оператора $|A^H|^{\frac{1}{2}}$, непрерывное из E' в H, а $(A^H)_c^{\frac{1}{2}}$ - сужение оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ на множество $|A|^{\frac{1}{2}}(E')$, ограниченное из $|A|^{\frac{1}{2}}(E')\subset H$ в E.

Доказательство. Операторы A_+ и $|A_-|$ удовлетворяют требованиям теоремы 9.1, так как эти операторы ограничены из E' в E, а их сужения A_+^H и $|A_-^H|$ на H являются самосопряженными и положительными операторами. Поэтому, согласно теореме 9.1, операторы $(A_+^H)^{\frac{1}{2}}$ и $|A_-^H|^{\frac{1}{2}}$ ограничены из H в E'' и имеют непрерывные продолжения $A_+^{\frac{1}{2}}$ и $|A_-|^{\frac{1}{2}}$ из E' в H. Отсюда следует, что оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}=(A_+^H)^{\frac{1}{2}}-|A_-^H|^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'', а оператор $|A|^{\frac{1}{2}}=A_+^{\frac{1}{2}}+|A_-|^{\frac{1}{2}}$ непрерывен из E' в H и является продолжением на E' оператора $|A^H|^{\frac{1}{2}}=(A_+^H)^{\frac{1}{2}}+|A_-^H|^{\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим оператор

$$C=(A^H)^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}=((A_+^H)^{\frac{1}{2}}-|A_-^H|^{\frac{1}{2}})(A_+^{\frac{1}{2}}+|A_-|^{\frac{1}{2}})=(A_+^H)^{\frac{1}{2}}A_+^{\frac{1}{2}}+(A_+^H)^{\frac{1}{2}}|A_-|^{\frac{1}{2}}-|A_-^H|^{\frac{1}{2}}A_+^{\frac{1}{2}}-|A_-^H|^{\frac{1}{2}}|A_-|^{\frac{1}{2}}$$

Операторы $(A_+^H)^{\frac{1}{2}}|A_-|^{\frac{1}{2}}$ и $|A_-^H|^{\frac{1}{2}}A_+^{\frac{1}{2}}$ непрерывны из E' в E'' и на множестве H, плотном в E', соответственно равны $(A_+^H)^{\frac{1}{2}}|A_-^H|^{\frac{1}{2}}$ и $|A_-^H|^{\frac{1}{2}}(A_+^H)^{\frac{1}{2}}$. Но

$$(A_+^H)^{\frac{1}{2}}|A_-^H|^{\frac{1}{2}}=|A_-^H|^{\frac{1}{2}}(A_+^H)^{\frac{1}{2}}=0,$$

следовательно $(A_+^H)^{\frac{1}{2}}|A_-|^{\frac{1}{2}}=|A_-^H|^{\frac{1}{2}}A_+^{\frac{1}{2}}=0$ на E'.

Таким образом имеем

$$C=(A_+^H)^{\frac{1}{2}}A_+^{\frac{1}{2}}-|A_-^H|^{\frac{1}{2}}|A_-|^{\frac{1}{2}}$$

Но, в силу теоремы 9.2, имеют место равенства

$$A_+ = (A_+^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}} A_+^{\frac{1}{2}}, \qquad |A_-| = |A_-^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} |A_-|^{\frac{1}{2}}$$

откуда $C = A_+ - |A_-| = A$, т.е.

$$A = (A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}} |A|^{\frac{1}{2}} = (A^{\prime\prime})_c^{\frac{1}{2}} |A|^{\frac{1}{2}}$$

Так как значения оператора A принадлежат E, то $(A^{\prime\prime})_c^{\frac{1}{2}}$ есть сужение оператора $(A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}}$, ограниченное из множества значений $|A|^{\frac{1}{2}}(E') \subset H$ оператора $|A|^{\frac{1}{2}}$ в пространство E. Теорема доказана.

Теорема 9.7. Пусть выполнены условия теоремы 9.6. Тогда существует продолжение $\widehat{A}$ оператора A, ограниченное из E''' в E'' и представимое в виде: $\widehat{A} = (A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}} (|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}})'$ где $(A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}}$ - ограниченный оператор из H в E'', а $(|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}})'$ есть оператор, сопряженный к оператору $|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}}$ $(H \to E'')$, и непрерывный из E''' в H.

Доказательство. Из доказательства теоремы 9.6 следует, что оператор $|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} = |A_+^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} + |A_-^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'', а значит его сопряженный оператор $(|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}})'$ ограничен (лемма 2.9) из E''' в H. Отсюда, так как оператор $(A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E'', произведение $(A^{\prime\prime})^{\frac{1}{2}}(|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}})'$ ограничено из E''' в E''.

Далее, так как $|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} x \in E''$ для $x \in H$, а оператор $|A|^{\frac{1}{2}}$ непрерывен из E' в H, то $(x, |A|^{\frac{1}{2}} y)$ и $\langle |A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} x, y \rangle$ при $x \in H$ являются непрерывными функционалами от $y \in E'$, причем для $y \in H$ будет

$$(x, |A|^{\frac{1}{2}} y) = (x, |A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} y) = (|A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} x, y) = \langle |A^{\prime\prime}|^{\frac{1}{2}} x, y \rangle$$

т.е. упомянутые функционалы совпадают на множестве H, плотном в E'. Отсюда, согласно теореме о продолжении тождеств, следует, что

$$\langle x, |A|^{\frac{1}{2}} y\rangle = \langle |A^*|^{\frac{1}{2}} x, y\rangle \text{ для всех } x\in H \text{ и } y\in E'. \quad (9.4)$$

Так как, по определению сопряженного оператора, имеет место равенство

$$\langle |A^*|^{\frac{1}{2}} x, y\rangle = \langle x, (|A^*|^{\frac{1}{2}})' y\rangle = (x, (|A^*|^{\frac{1}{2}})' y) \text{ для всех } x\in H, \ y\in E'''$$

которое остается верным, в частности, для всех $y\in E'$, то в силу (9.4) для таких y имеем

$$(x, |A|^{\frac{1}{2}} y) = \langle |A^*|^{\frac{1}{2}} x, y\rangle = (x, (|A^*|^{\frac{1}{2}})' y) \text{ для всех } x\in H.$$

Отсюда следует, что для всех $y\in E'$ будет

$$|A|^{\frac{1}{2}} y = (|A^*|^{\frac{1}{2}})' y$$

так что оператор $(|A^*|^{\frac{1}{2}})'$ является продолжением оператора $|A|^{\frac{1}{2}}$, действующего из E' в H, на все пространство E'''.

Следовательно, оператор $(A^*)^{\frac{1}{2}} (|A^*|^{\frac{1}{2}})'$ является непрерывным продолжением $\widehat{A}$ оператора $A=(A^*)^{\frac{1}{2}}_c |A|^{\frac{1}{2}}$, ограниченного из E' в E, на все пространство E'''. Значит

$$\widehat{A} = (A^*)^{\frac{1}{2}} (|A^*|^{\frac{1}{2}})',$$

где оператор $(|A^*|^{\frac{1}{2}})'$ непрерывен из E''' в H, а оператор $(A^*)^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E''. Следовательно, оператор $\widehat{A}$ ограничен из E''' в E''. Теорема доказана.

<u>Следствие 9.2</u>. Если пространство E - рефлексивно, то $\widehat{A}=A$ и оператор A представим в виде $A=(A^*)^{\frac{1}{2}} (|A^*|^{\frac{1}{2}})'$, где оператор $(|A^*|^{\frac{1}{2}})'$ ограничен из E' в H, а оператор $(A^*)^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E.

Замечание 9.1. Теми же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 9.6, можно показать, что оператор A представим в виде: $A = |A^{H}|^{\frac{1}{2}}_{c} A^{\frac{1}{2}}$, где $A^{\frac{1}{2}} = A_{+}^{\frac{1}{2}} - |A_{-}|^{\frac{1}{2}}$ – продолжение оператора $(A^{H})^{\frac{1}{2}}$, непрерывное из E' в H, а $|A^{H}|^{\frac{1}{2}}_{c}$ – сужение оператора $|A^{H}|^{\frac{1}{2}}$ на множество $A^{\frac{1}{2}}(E')$, ограниченное из $A^{\frac{1}{2}}(E') \subset H$ в E. Далее, рассуждая как при доказательстве теоремы 9.7, можно установить существование продолжения $\widehat{A} = |A^{H}|^{\frac{1}{2}}((A^{H})^{\frac{1}{2}})'$ оператора A, действующего из E''' в E''. При этом попутно получается равенство

$$(x, A^{\frac{1}{2}}y) = \langle (A^{H})^{\frac{1}{2}}x, y \rangle, \text{ где } x \in H, \ y \in E', \tag{9.5}$$

аналогичное равенству (9.4).

Кроме того, в случае, когда выполнено условие (χ'), можно получить предложение, аналогичное теореме 9.6.

§ 10. О квадратном корне из вполне непрерывного оператора и его продолжении

1. В этом параграфе мы всюду будем предполагать, что пространство E удовлетворяет условию (χ) и что A – линейный оператор, действующий из пространства E' в пространство E.

Лемма 10.1. *Если A – ограниченный оператор из E' в E, сужение которого A^{H} на пространство H есть самосопряженный оператор, то для любой пары элементов $x, y \in E'$ выполняется равенство*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle \tag{10.1}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала билинейную форму $\langle Ax, y \rangle$ и покажем, что она непрерывна на топологическом произведении $E' \times E'$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности оператора A, существует окрестность нуля $U \subset E$ такая, что $A(U)$ - ограниченное множество в E. Его поляра $(A(U))^\circ$ есть окрестность нуля в E'. Тогда топологическое произведение $U \times \varepsilon (A(U))^\circ$ есть окрестность нуля в $E' \times E'$ ([3а], гл. 1, § 8, п. 1), причем для всех пар из этой окрестности будет

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \varepsilon$$

т.е. функционал $\langle Ax, y \rangle$ непрерывен в точке $(\theta, \theta) \in E' \times E'$, а вследствие его билинейности и в любой точке $(x_0, y_0) \in E' \times E'$. Точно так же доказывается непрерывность отображения $\langle Ay, x \rangle$ пространства $E' \times E'$ в числовую ось R^1. Но в силу самосопряженности сужения A^H оператора A, для всех пар $(x, y) \in H \times H$ имеет место равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay) = (Ay, x)$$

т.е. непрерывные функционалы $\langle Ax, y \rangle$ и $\langle Ay, x \rangle$ совпадают на множестве $H \times H$, плотном в $E' \times E'$. Следовательно, согласно теореме о продолжении тождеств заключаем, что равенство (10.1) имеет место для любых $(x, y) \in E' \times E'$. Лемма доказана.

Обозначим $J(x) = \langle Ax, x \rangle$ - квадратичный функционал, определенный на E'.

Лемма 10.2. Пусть выполнены условия леммы 10.1. Тогда

$$\operatorname{grad} J(x) = \operatorname{grad} \langle Ax, x \rangle = 2Ax$$

Доказательство. Рассмотрим дифференциал Гато функционала

$$\mathcal{D}J(x,h) = \lim_{t\to 0}\frac{\langle A(x+th), x+th\rangle - \langle Ax,x\rangle}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\langle Ax,x\rangle + t[\langle Ah,x\rangle + \langle Ax,h\rangle] + t^2\langle Ah,h\rangle - \langle Ax,x\rangle}{t} =$$

$$= \langle Ah, x\rangle + \langle Ax, h\rangle$$

В силу равенства (10.1), отсюда следует, что

$$\mathcal{D}J(x,h) = 2\langle Ax, h\rangle$$

а потому

$$\operatorname{grad} J(x) = 2Ax$$

Лемма доказана.

10.2. В дальнейшем будем дополнительно предполагать, что сужение A^H оператора A есть вполне непрерывный оператор в H и что он квазиположителен, т.е. имеет счетное число положительных и конечное число отрицательных характеристических чисел. Тогда, как известно ([17], стр. 249), оператор A^H представим в следующем виде

$$A^H x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_k, x)e_k}{|\lambda_k|}\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_k, x)}{\lambda_k}\varphi_k, \quad x\in H \tag{10.2}$$

где φ_k - собственные векторы оператора A^H, соответствующие характеристическим числам λ_k и $e_k = \operatorname{sign}\lambda_k$, причем $|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|$.

Так как оператор A действует из E' в E, то значения его сужения A^H также принадлежат E и, в силу равенства

$$\lambda_k A^H \varphi_k = \varphi_k,$$

собственные векторы φ_k оператора A^H принадлежат E .

Отсюда, в свою очередь, следует, что значения операторов

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x \rangle}{|\lambda_k|} e_k \varphi_k \ , \qquad x \in E' \tag{10.3}$$

также принадлежат пространству E .

Введем еще обозначения

$$\mathcal{J}_n(x) = \langle A_n x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x \rangle^2}{\lambda_k} . \tag{10.4}$$

<u>Лемма 10.3</u>. Пусть A - <u>ограниченный оператор из</u> E' <u>в</u> E , <u>сужение</u> A^H <u>которого есть вполне непрерывный квази положительный оператор в</u> H . <u>Тогда существует</u> n_0 <u>такое, что для всех</u> $n > n_0$ <u>при любом фиксированном</u> $x \in E'$ <u>имеют место неравенства</u>

$$\mathcal{J}_n(x) \le \mathcal{J}_{n+1}(x) \le \mathcal{J}(x) \tag{10.5}$$

<u>Доказательство</u>. Так как число отрицательных характеристических чисел λ_k конечно, то начиная с некоторого $k = n_0$ все λ_k положительны. Значит, для $n \geq n_0$ разность $\mathcal{J}_{n+1}(x) - \mathcal{J}_n(x) = \frac{\langle \varphi_{n+1}, x \rangle^2}{\lambda_{n+1}}$ положительна и для любого $x \in E'$ будет:

$$\mathcal{J}_n(x) \le \mathcal{J}_{n+1}(x)$$

Далее, для $n \geq n_0$ оператор $A^H - A^H_{n+1}$ будет положительным оператором в H , поэтому для всех $x \in H$ имеем

$$\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}_{n+1}(x) = \langle Ax, x \rangle - \langle A_{n+1} x, x \rangle = ((A^H - A^H_{n+1})x, x) \geq 0 ,$$

т.е.

$$\mathcal{J}_{n+1}(x) \le \mathcal{J}(x) \qquad \text{для всех } n \geq n_0 \text{ и } x \in H \tag{10.6}$$

Остается доказать, что последнее неравенство имеет место для любого $x \in E'$. Допустим противное, т.е. что для некоторого элемента $x_0 \in E'$ имеет место равенство

$$\mathcal{J}(x_0) - \mathcal{J}_{n_1}(x_0) = \langle (A - A_{n_1})x_0, x_0 \rangle = -\varepsilon \text{ где } \varepsilon > 0, \quad n_1 > n_0 \qquad (10.7)$$

Пусть x - произвольный элемент из E' и оператор $B_{n_1} = A - A_{n_1}$. Тогда из (10.7) получаем:

$$\begin{aligned} -\varepsilon = \langle B_{n_1} x_0, x_0 \rangle = \langle B_{n_1} x_0, x_0 - x \rangle + \langle B_{n_1} x, x \rangle + \langle B_{n_1}(x_0 - x), x \rangle \geq \\ \geq \langle B_{n_1} x, x \rangle - | \langle B_{n_1} x_0, x_0 - x \rangle + \langle B_{n_1}(x_0 - x), x \rangle | \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Так как оператор B_{n_1} удовлетворяет условиям леммы 10.1, то, применяя равенство (10.1), после умножения неравенства (10.8) на -1, получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq | \langle B_{n_1} x_0, x_0 - x \rangle + \langle B_{n_1} x, x_0 - x \rangle | - \langle B_{n_1} x, x \rangle \leq \\ \leq | \langle B_{n_1} x_0, x - x_0 \rangle | + | \langle B_{n_1} x, x - x_0 \rangle | - \langle B_{n_1} x, x \rangle \end{aligned} \qquad (10.9)$$

Ввиду того, что $B_{n_1} x_0 \in E$, выражение $\langle B_{n_1} x_0, x - x_0 \rangle$ есть линейный непрерывный функционал относительно $x - x_0 \in E'$; поэтому существует выпуклая симметричная окрестность нуля $U_1 \subset E'$ такая, что

$$| \langle B_{n_1} x_0, x - x_0 \rangle | < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для всех } x - x_0 \in U_1 , \qquad (10.10)$$

Далее, в силу ограниченности оператора $B_{n_1} = A - A_{n_1}$ из E' в E, найдется окрестность нуля $U_2 \subset E'$ такая, что множество $B_{n_1}(U_2)$ ограничено в E. Отсюда следует ограниченность множества $B_{n_1}(x_0 + U_2) \subset E$, так что его поляра $(B_{n_1}(x_0 + U_2))^\circ$ есть окрестность нуля в E'. Пусть $x - x_0 \in U = U_1 \cap U_2 \cap \frac{\varepsilon}{4}(B_{n_1}(x_0 + U_2))^\circ$. Тогда выполняется неравенство (10.10). Кроме того $B_{n_1} x \in B_{n_1}(x_0 + U_2)$ и $x - x_0 \in \frac{\varepsilon}{4}(B_{n_1}(x_0 + U_2))^\circ$, откуда

$$| \langle B_{n_1} x, x - x_0 \rangle | < \frac{\varepsilon}{4}$$

Отсюда и из неравенства (10.10), учитывая неравенство (10.9), получаем

$$\varepsilon \le |\langle B_{n_1} x_0, x - x_0\rangle| + |\langle B_{n_1} x, x - x_0\rangle| - \langle B_{n_1} x, x\rangle \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} - \langle B_{n_1} x, x\rangle$$

для всех $x \in x_0 + U$. Так как H плотно в E', в окрестности $x_0 + U$ точки x_0 найдется элемент $x_1 \in H$. Подставляя в последнее неравенство x_1 вместо x, получим:

$$\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{2} - \langle B_{n_1} x_1, x_1\rangle \qquad \text{, где } x_1 \in H \text{ и } n_1 > n_0 .$$

Но тогда, в силу неравенства (10.6), будет $\langle B_{n_1} x_1, x_1\rangle \ge 0$, откуда

$$\varepsilon \le \frac{\varepsilon}{2} ,$$

что невозможно. Лемма доказана.

<u>Лемма 10.4</u>. <u>Пусть</u> A - <u>линейный ограниченный оператор из</u> E' <u>в</u> E, <u>сужение</u> A^H <u>которого есть вполне непрерывный квази положительный оператор в</u> H. <u>Тогда множество функционалов</u> $\{J_n(x),\ n \ge n_0\}$ <u>(где</u> n_0 <u>такое, что</u> $\lambda_k > 0$ <u>для</u> $k \ge n_0$) <u>равностепенно непрерывно в каждой точке</u> $x \in E'$.

<u>Доказательство</u>. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и произвольный элемент $x_0 \in E'$. Для произвольно выбранного $x \in E'$, в силу (10.4), имеем:

$$|J_n(x) - J_n(x_0)| = \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x\rangle^2}{\lambda_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x_0\rangle^2}{\lambda_k} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x + x_0\rangle \langle \varphi_k, x - x_0\rangle}{\lambda_k} \right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle \varphi_k, x + x_0\rangle|}{\sqrt{|\lambda_k|}} \cdot \frac{\langle \varphi_k, x - x_0\rangle}{\sqrt{|\lambda_k|}}$$

Применяя неравенство Коши, отсюда получаем:

$$|J_n(x) - J_n(x_0)| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x + x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\langle \varphi_k, x - x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\mathcal{I}_n(x+x_0) + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x+x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{I}_n(x-x_0) + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x-x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Так как   , то в силу неравенств (10.5), имеем

$$|\mathcal{I}_n(x) - \mathcal{I}_n(x_0)| \le \left(\mathcal{I}(x+x_0) + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x+x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{I}(x-x_0) + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x-x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Далее, в силу тождеств

$$\mathcal{I}(x+x_0) = \langle A(x+x_0), x+x_0 \rangle = \mathcal{I}(x-x_0) + 4\langle A(x-x_0), x_0\rangle + 4\langle Ax_0, x_0\rangle$$

и

$$\langle \varphi_k, x+x_0\rangle^2 = \langle \varphi_k, x-x_0\rangle^2 + 4\langle \varphi_k, x-x_0\rangle\langle \varphi_k, x_0\rangle + 4\langle \varphi_k, x_0\rangle^2$$

имеем

$$|\mathcal{I}_n(x) - \mathcal{I}_n(x_0)| \le \Bigg(\Big\{ \mathcal{I}(x-x_0) + 4\langle A(x-x_0), x_0\rangle + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x-x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} +$$

$$+ 8\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x-x_0\rangle\langle \varphi_k, x_0\rangle}{|\lambda_k|} \Big\} + 4\langle Ax_0, x_0\rangle + 8\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, u_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \left(\mathcal{I}(x-x_0) + 2\sum_{\lambda_k<0} \frac{\langle \varphi_k, x-x_0\rangle^2}{|\lambda_k|} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Из следствия 4.3[I] и леммы 10.2 вытекает, что $\mathcal{I}(x-x_0)$ есть непрерывный функционал от $x-x_0$. Следовательно, выражение в фигурных скобках есть сумма конечного числа непрерывных функционалов от $x-x_0$. Поэтому найдется окрестность нуля $\mathcal{U}_1 \subset E'$ такая, что для $x-x_0 \in \mathcal{U}_1$ выражение в фигурной скобке не превосходит ε. Остальные слагаемые первого множителя дают в сумме некоторое число M. Второй множитель непрерывен относительно $x-x_0$, ибо он является суммой конечного числа непрерывных функций. Поэтому найдется окрестность нуля $\mathcal{U}_2 \subset E'$ такая, что он не превосходит $\frac{\varepsilon}{\sqrt{M+\varepsilon}}$ для всех $x-x_0 \in \mathcal{U}_2$. Тогда для всех $x-x_0 \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ имеем

$$|\mathcal{I}_n(x) - \mathcal{I}_n(x_0)| \le (\varepsilon + M)^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{\sqrt{M+\varepsilon}} = \varepsilon, \quad n \ge n_0$$

Лемма доказана.

Лемма 10.5. Пусть A - ограниченный оператор из E' в E, сужение A^H которого есть вполне непрерывный и квази положительный оператор в H. Тогда для каждого $x \in E'$ имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{J}_n(x) = \mathcal{J}(x)$$

Доказательство. Из леммы 10.3 следует, что для каждого $x \in E'$ числовая последовательность $\{\mathcal{J}_n(x)\}$ при $n \geq n_0$ монотонна и ограничена, а следовательно имеет предел. Обозначим этот предел через $\ell(x)$ и покажем, что функционал $\ell(x)$ непрерывен в произвольно выбранной точке $x_0 \in E'$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Для любого $x \in E'$ имеем:

$$|\ell(x) - \ell(x_0)| \leq |\ell(x) - \mathcal{J}_n(x)| + |\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}_n(x_0)| + |\mathcal{J}_n(x_0) - \ell(x_0)|$$

В силу леммы 10.4 найдется окрестность нуля $\mathcal{U} \subset E'$ такая, что для всех $x \in x_0 + \mathcal{U}$ и $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{J}_n(x) - \mathcal{J}_n(x_0)| < \varepsilon$$

Тогда для каждого $x \in x_0 + \mathcal{U}$ при $n \geq n_0$ будет

$$|\ell(x) - \ell(x_0)| \leq \varepsilon + |\ell(x) - \mathcal{J}_n(x)| + |\mathcal{J}_n(x_0) - \ell(x_0)|$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$|\ell(x) - \ell(x_0)| < \varepsilon$$

Значит, функционал $\ell(x)$ непрерывен на E'.

В силу следствия 4.3[I] и леммы 10.2, функционал $\mathcal{J}(x)$ также непрерывен на E'. Для $x \in H$ имеет место равенство $\lim_{n \to \infty} \mathcal{J}_n(x) = \mathcal{J}(x)$ т.е. $\ell(x) = \mathcal{J}(x)$. Так как H

плотно в E', то отсюда, согласно теореме о продолжении тождеств, имеем: $\ell(x) = \mathcal{J}(x)$ для всех $x \in E'$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}_n(x) = \mathcal{J}(x)$ для каждого $x \in E'$.

Лемма доказана.

10.3. В дальнейшем мы будем дополнительно предполагать, что пространство E бочечно и что оператор A вполне непрерывен из E' в E. Из последнего предположения и согласованности топологий пространств E, H и E' следует, что сужение A^H есть вполне непрерывный оператор в H. Также, как в п. 10.2, предполагается квази положительность оператора .

Теорема 10.1. Пусть E - бочечное пространство и A - линейный вполне непрерывный оператор из E' в E, сужение A^H которого есть квази положительный оператор в H. Тогда для всякого ограниченного слабо замкнутого множества $\mathfrak{M} \subset E'$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in\mathfrak{M}} |\mathcal{J}(x) - \mathcal{J}_n(x)| = 0$$

Доказательство. Так как пространство E бочечно, то множество $\mathfrak{M}$ бикомпактно в топологии $\sigma(E', E)$ ([36], гл. IУ, § 2, теорема 1). Далее, согласно лемме 10.2 и следствию 4.4$^{\mathrm{I}}$, из полной непрерывности оператора A следует, что функционал $\mathcal{J}(x)$ непрерывен в топологии $\sigma(E', E)$ по отношению к множеству $\mathfrak{M}$. Поэтому образ $\mathcal{J}(\mathfrak{M})$ множества $\mathfrak{M}$ есть бикомпактное множество на числовой оси R^1 и, следовательно, функционал $\mathcal{J}(x)$

достигает на множестве $\mathfrak{M}$ своих граней.

В силу конечномерности операторов A_n, такими же рассуждениями можно показать, что функционалы $\mathcal{J}_n(x)$ $(n=1,2,\dots)$ также слабо непрерывны по отношению к $\mathfrak{M}$ и достигают на $\mathfrak{M}$ своих граней. Значит, $\max\limits_{x\in\mathfrak{M}}|\mathcal{J}(x)-\mathcal{J}_n(x)|$ существует при каждом n.

В силу лемм 10.3 и 10.5, последовательность функционалов $\{\mathcal{J}_n\}$ монотонна и сходится к функционалу $\mathcal{J}$ в каждой точке $x\in\mathfrak{M}$, причем в топологии $\sigma(E',E)$ множество $\mathfrak{M}$ бикомпактно и функционалы $\mathcal{J}_n, \mathcal{J}$ непрерывны по отношению к $\mathfrak{M}$. Поэтому, согласно теореме Дини (п. 2.1), последовательность $\{\mathcal{J}_n\}$ сходится к $\mathcal{J}$ равномерно на $\mathfrak{M}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in\mathfrak{M}}|\mathcal{J}(x)-\mathcal{J}_n(x)|=0$$

Теорема доказана.

<u>Следствие 10.1</u>. Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется n_0 такое, что для всех $n>n_0$ и $x\in\mathfrak{M}$ будет иметь место неравенство

$$|\mathcal{J}_{n+m}(x)-\mathcal{J}_n(x)|<\varepsilon,$$

где m - любое натуральное число.

Из теоремы 10.1 следует, что функционалы $\langle A_n x, x\rangle$ сходятся к $\langle Ax, x\rangle$ равномерно на всяком ограниченном множестве $\mathfrak{M}\subset E'$, ибо, согласно этой теореме, сходимость равномерна на его выпуклой слабо замкнутой оболочке, частью которой является $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ - ограниченные множества из E'. Тогда ограничены также множества $\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_1-\mathfrak{M}_2$, причем для $x\in\mathfrak{M}_1$, $y\in\mathfrak{M}_2$ имеем: $\langle A_n x, y\rangle=\frac{1}{4}[\langle A_n(x+y), x+y\rangle-\langle A_n(x-y), x-y\rangle]$, откуда вытекает сходимость $\{\langle A_n x, y\rangle\}$ к $\langle Ax, y\rangle$, равномерная относительно $x\in\mathfrak{M}_1$ и $y\in\mathfrak{M}_2$.

Это означает, что последовательность элементов $\{A_n x\}\in E$ сходится к Ax в топологии, индуцированной в E сильной топологией $\beta(E'', E')$ пространства E'', равномерно относительно $x\in\mathfrak{M}_1$. В силу бочечности пространства E, согласно лемме 3.1, упомянутая топология совпадает с первоначальной топологией пространства E. Значит, последовательность $\{A_n x\}$ сходится в E к Ax равномерно на всяком ограниченном множестве из E', т.е. (см. п. 2.3) последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к оператору A в смысле сильной топологии пространства линейных операторов $\mathcal{L}(E', E)$.

В частности, если E - банахово пространство, полученный результат означает сходимость $\{A_n\}$ к A по норме оператора.

<u>10.4</u>. Как известно из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, главный корень квадратный $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ из вполне непрерывного оператора A^H имеет следующее спектральное представление

$$(A^H)^{\frac{1}{2}}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(g_k, x)}{\sqrt{|\lambda_k|}}e_k g_k \quad \text{, где } x\in H \qquad (10.11)$$

и является вполне непрерывным оператором в H ([5б], стр. 252).

Лемма 10.6. Пусть E - бочечное полуполное (определение 3.4) пространство, удовлетворяющее условию (χ), и A - линейный вполне непрерывный оператор из E' в E, сужение A^H которого есть самосопряженный квази положительный оператор в H. Тогда ряд (10.11) сходится в топологии пространства E к $(A^H)^{\frac{1}{2}}$, равномерно на каждом ограниченном множестве из H, и $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ есть линейный непрерывный оператор из H в E.

Доказательство. Как было указано в начале п. 10.2, собственные векторы φ_k оператора H принадлежат пространству E. Следовательно, имеет место включения

$$\rho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, x)\, e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k \in E$$

и

$$\rho_{n+m}(x) - \rho_n(x) = \rho_{n,m}(x) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(\varphi_k, x)\, e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k \in E$$

где $x \in H$, а n и m - произвольные натуральные числа.

Пусть $x \in S$, где $S = \{x, \|x\| \le 1\}$ - единичный шар из H. Обозначим $(\varphi_k, x) = \xi_k$. Тогда числовая последовательность $\{\xi_k\} = \xi$ есть элемент единичного шара пространства ℓ^2.

Действительно, применяя неравенство Бесселя, имеем:

$$\|\xi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_k, x)^2 \le \|x\|^2 \le 1$$

Пусть $\mathfrak{M}$ - выпуклое ограниченное слабо замкнутое множество из E' и $z \in \mathfrak{M}$. Применяя неравенство Коши, имеем:

$$|\langle \rho_{n,m}(x), z\rangle| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\xi_k e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \langle g_k, z\rangle\Big| \le$$

$$\le \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \xi_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, z\rangle^2}{|\lambda_k|}\Big)^{\frac{1}{2}} \le \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, z\rangle^2}{|\lambda_k|}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

В силу квази положительности A^H, существует n_0 такое, что для $k > n_0$ будет $\lambda_k > 0$. Поэтому, если $n \geqslant n_0$,

$$|\langle \rho_{n,m}(x); z\rangle| \le \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, z\rangle^2}{|\lambda_k|}\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, z\rangle^2}{\lambda_k}\Big)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \big(\mathcal{J}_{n+m}(z) - \mathcal{J}_n(z)\big)^{\frac{1}{2}}$$

Отсюда, в силу следствия 10.1, вытекает, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется натуральное $\mathcal{N} > n_0$ такое, что для всех $n > \mathcal{N}$, $z \in \mathfrak{M}$ и $x \in S$ имеет место неравенство

$$|\langle \rho_{n,m}(x), z\rangle| < \varepsilon$$

Так как вместо $\mathfrak{M}$ можно взять любое ограниченное множество из E', то последнее неравенство означает, что последовательность $\{\rho_{n,m}(x)\}$ из E при $n \to \infty$ сходится к нулю в сильной топологии $\beta(E'', E')$ (равномерно относительно $x \in S$). Ввиду того, что пространство E бочечно, это означает сходимость в первоначальной топологии пространства E (равномерно относительно $x \in S$).

Такой же результат получится, если вместо S взять произвольное ограниченное множество из H. Отсюда следует, что последовательность $\{\rho_n\}$ линейных непрерывных операторов из H в E является последовательностью Коши в сильной топологии пространства $\mathcal{L}(H, E)$. Согласно лемме 3.2, из того, что H бочечное, а E - полуполное пространство, вытекает, что и пространство $\mathcal{L}(H,E)$ полуполно. Следовательно, последовательность $\{p_n\}$ сходится в сильной топологии $\mathcal{L}(H,E)$ к некоторому элементу $B \subset \mathcal{L}(H,E)$. Это означает, что $p_n(x)$ сходится к Bx в топологии пространства E, равномерно на каждом ограниченном множестве из H. Отсюда, в силу согласованности топологий E и H, в частности, вытекает, что $\{p_n(x)\}$ сходится к Bx также в топологии пространства H. Но, в силу равенства (10.11), последовательность $\{p_n(x)\}$ сходится в H к $(A^*)^{\frac{1}{2}} x$. Отсюда, в силу единственности предела, для всех $x \in H$ имеем $Bx = (A^*)^{\frac{1}{2}}x$ Следовательно $B = (A^*)^{\frac{1}{2}}$ и ряд (10.11) сходится к $(A^*)^{\frac{1}{2}}x$ в топологии пространства E, равномерно на каждом ограниченном множестве из H, причем $(A^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(H,E)$ Лемма доказана.

Замечание 10.1. Из доказательства леммы 10.6 видно, что если E - банахово пространство, то последовательность операторов $\{p_n\}$ сходится по норме к оператору $(A^*)^{\frac{1}{2}}$.

Лемма 10.7. В условиях леммы 10.6 оператор $(A^*)^{\frac{1}{2}}$ усиленно непрерывен (определение 2.27) по отношению к каждому шару S_R пространства H.

Доказательство. Пусть дана выпуклая симметричная окрестность нуля $V \subset E$. Так как, в силу леммы 10.6, ряд (10.11) сходится в E равномерно на каждом ограниченном множестве из H, то найдется n_0 такое, что для всех $x \in S_R$ имеет место включение

$$(A^H)^{\frac{1}{2}} x - \rho_n(x) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{(g_k, x)}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k g_k \in \frac{V}{2} \qquad (10.12)$$

Далее, $\left\{ \frac{g_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}, k = 1, 2, \ldots, n_0 \right\}$ - конечное, а значит и ограниченное множество из E. Поэтому найдется $\alpha > 0$ такое, что

$$\beta \frac{g_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} \in \frac{V}{2n_0} \qquad \text{для всех } k = 1, 2, \ldots, n_0 \text{ и } |\beta| \le \alpha .$$

Возьмем окрестность нуля $U \subset H$ в слабой топологии пространства H, состоящую из всех $x \in H$ таких, что

$$|(g_k, x)| \le \alpha , \quad (k = 1, 2, \ldots, n_0)$$

Тогда для всех $x \in U$ имеем

$$\rho_{n_0}(x) = \sum_{k=1}^{n_0} \frac{(g_k, x) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k \in n_0 \frac{V}{2n_0} = \frac{V}{2}$$

Отсюда и из (10.12) следует, что для всех $x \in U \cap S_R$ будет

$$(A^H)^{\frac{1}{2}} x = (A^H)^{\frac{1}{2}} x - \rho_{n_0}(x) + \rho_{n_0}(x) \in \frac{V}{2} + \frac{V}{2} \subset V$$

Лемма доказана.

Теорема 10.2. Пусть E - бочечное полуполное пространство, удовлетворяющее условию (χ), и A - линейный вполне непрерывный оператор из E' в E, сужение которого A^H есть самосопряженный квази положительный оператор в H. Тогда главный корень квадратный $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ из оператора A^H, представимый равенством (10.11), действует вполне непрерывно из H в E.

Доказательство. Как известно, шар S_R в пространстве H слабо бикомпактен. Так как оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$, в силу леммы 10.7, усилено непрерывен по отношению к S_R, то образ $(A^H)^{\frac{1}{2}}(S_R)$ шара S_R есть бикомпактное множество. Таким образом, оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ отображает окрестность нуля $S_R \subset H$ в бикомпактное множество. Теорема доказана.

10.5. В предыдущем пункте мы выяснили, что оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ непрерывен из H в E. Поэтому для любых $x \in H$, $y \in E'$ имеет смысл выражение $\langle (A^H)^{\frac{1}{2}} x, y \rangle$. Далее, так как $\rho_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(g_k, x) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k$ сходится в E к $(A^H)^{\frac{1}{2}} x$ при каждом $x \in H$, то для каждого $x \in H$ и $y \in E'$ последовательность $\langle \rho_n(x), y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{(g_k, x)\langle g_k, y \rangle}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k$ сходится к $\langle (A^H)^{\frac{1}{2}} x, y \rangle$, т.е. имеет место равенство

$$\langle (A^H)^{\frac{1}{2}} x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g_k, x)\langle g_k, y \rangle}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k, \quad x \in H, \ y \in E' \qquad (10.13)$$

Лемма 10.8. Пусть A – ограниченный оператор из E' в E, сужение которого A^H есть вполне непрерывный самосопряженный и квази положительный оператор в H. Тогда оператор $A^{\frac{1}{2}}$, определенный равенством

$$A^{\frac{1}{2}} y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g_k, y \rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k \qquad (10.14)$$

действует из E' в H и является оператором, сопряженным к оператору $(A^H)^{\frac{1}{2}}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$\rho_n'(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle g_k, y \rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k$, где $y \in E'$. Так как $g_k \in E$

и $E \subset H$, то $\rho_n'(y) \in E \subset H$ для каждого $y \in E'$, Поэтому

$$\|\rho_{n,m}'(y)\|^2 = \|\rho_{n+m}'(y) - \rho_n'(y)\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, y\rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k\Big\|^2 =$$

$$= \Big(\sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, y\rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k, \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, y\rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k\Big) = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, y\rangle^2}{|\lambda_k|}$$

Отсюда, для $n > n_0$ (где n_0 таково, что $\lambda_k > 0$ при $k > n_0$) имеем

$$\|\rho_{n,m}'(y)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{\langle g_k, y\rangle^2}{\lambda_k} = \mathcal{J}_{n+m}(y) - \mathcal{J}_n(y)$$

Из леммы 10.5 следует, что для каждого $y \in E'$ последовательность $\{\mathcal{J}_n(y)\}$ есть последовательность Коши. Отсюда и из последнего равенства заключаем, что и $\{\rho_n(y)\}$ является последовательностью Коши для каждого $y \in E'$. Так как H - полное пространство, то отсюда следует, что ряд (10.14) сходится в пространстве H при каждом $y \in E'$, значит, его сумма $A^{\frac12}y$ существует для всех $y \in E'$ и принадлежит H.

Далее, из полученного результата вытекает равенство

$$(x, A^{\frac12}y) = \Big(x, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle g_k, y\rangle e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} g_k\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(g_k, x)\langle g_k, y\rangle}{\sqrt{|\lambda_k|}} e_k \qquad \text{для всех } x \in H, \ y \in E',$$

из которого, в силу (10.13), получаем

$$\langle (A^H)^{\frac12}x, y\rangle = (x, A^{\frac12}y), \quad \text{где } x \in H, \ y \in E'. \tag{10.15}$$

Это означает, что оператор $A^{\frac12}$ является сопряженным к оператору $(A^H)^{\frac12}$, т.е.

$$A^{\frac12} = ((A^H)^{\frac12})' \tag{10.16}$$

Лемма доказана.

Следствие 10.3. Из равенства (10.15), в силу самосопряженности оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ в H и замечания 8.2, следует, что для всех $x, y \in H$ имеет место равенство

$$\langle (A^H)^{\frac{1}{2}} x, y \rangle = ((A^H)^{\frac{1}{2}} x, y) = (x, (A^H)^{\frac{1}{2}} y) = (x, A^{\frac{1}{2}} y),$$

откуда получаем, что

$$(A^H)^{\frac{1}{2}} y = A^{\frac{1}{2}} y \qquad \text{для всех } y \in H \quad .$$

Значит оператор $A^{\frac{1}{2}}$ есть продолжение оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ на все пространство E' .

Замечание 10.2. Если пространство E бочечно и A – вполне непрерывный оператор из E' в E , то из следствия 10.1 и доказательства леммы 10.8 вытекает, что ряд (10.14) сходится равномерно на каждом ограниченном множестве из E' . Поэтому последовательность операторов ρ_n' сходится к линейному непрерывному оператору $A^{\frac{1}{2}}$ в сильной топологии пространства $\mathcal{L}(E', H)$. (В случае, когда E – банахово пространство, это означает, что последовательность $\{\rho_n'\}$ сходится к $A^{\frac{1}{2}}$ по норме оператора).

Теорема 10.3. Пусть E – бочечное полуполное пространство, удовлетворяющее условию (χ) и A – линейный вполне непрерывный оператор из E' в E , сужение которого A^H есть самосопряженный квази положительный оператор в H . Тогда существует продолжение оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ являющееся квази вполне непрерывным оператором из E' в H и представимое рядом (10.14).

Доказательство. Из теоремы 10.2 следует, что оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ ограничен из H в E, а поэтому сопряженный к нему оператор $A^{\frac{1}{2}}$, в силу леммы 2.8, непрерывен из E' в H.

Далее, учитывая замечание 10.2, теми же рассуждения-ми, которые проводились при доказательстве леммы 10.7, можно доказать, что оператор $A^{\frac{1}{2}}$ усиленно непрерывен по отношению к всякому ограниченному множеству $\mathfrak{M} \subset E'$. Как было упомянуто при доказательстве теоремы 10.1, такое множество относительно бикомпактно в топологии $\sigma(E', E)$. Отсюда и из усиленной непрерывности оператора $A^{\frac{1}{2}}$ следует, что образ $A^{\frac{1}{2}}(\mathfrak{M})$ всякого ограниченного множества $\mathfrak{M} \subset E'$ относительно бикомпактен в H. Согласно определению 2.15, это означает, что непрерывный оператор $A^{\frac{1}{2}}$ является квази вполне непрерывным из E' в H. Теорема доказана.

10.6. Легко видеть, что все рассуждения и результаты, содержащиеся в п.п. 10.4 и 10.5 сохраняются, если всюду вместо оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ рассматривать положительный квадратный корень из абсолютного значения оператора A^H, т.е. оператор

$$|A^H|^{\frac{1}{2}} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, x)}{\sqrt{|\lambda_k|}} \varphi_k, \qquad x \in H$$

В силу этого имеют место следующие предложения:

Теорема 10.2[I]. Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Тогда положительный корень квадратный $|A^H|^{\frac{1}{2}}$ из абсолютного значения оператора A^H действует вполне непрерывно из H в E.

Теорема 10.3^{I}. Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Тогда существует продолжение $|A|^{\frac{1}{2}}$ оператора $|A^{*}|^{\frac{1}{2}}$, являющееся оператором, сопряженным к $|A^{*}|^{\frac{1}{2}}(H\to E)$ и квази вполне непрерывным из E' в H. Это продолжение представимо в виде

$$|A|^{\frac{1}{2}}y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\langle g_k,y\rangle}{\sqrt{|\lambda_k|}}g_k$$

Из теорем 10.2, 10.3, 10.2^{I} и 10.3^{I} следует, что произведения $(A^{*})^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}$ и $|A^{*}|^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывны из E' в E. Отсюда, из того, что $A=(A^{*})^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}=|A^{*}|^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$ на множестве H, плотном в E', и из того, что $A^{\frac{1}{2}}=((A^{*})^{\frac{1}{2}})'$ и $|A|^{\frac{1}{2}}=(|A^{*}|^{\frac{1}{2}})'$ вытекает следующая

Теорема 10.4. Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Тогда оператор A представим в виде произведений:

$$A=(A^{*})^{\frac{1}{2}}|A|^{\frac{1}{2}}=(A^{*})^{\frac{1}{2}}(|A^{*}|^{\frac{1}{2}})'=|A^{*}|^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=|A^{*}|^{\frac{1}{2}}((A^{*})^{\frac{1}{2}})'$$

где операторы $(A^{*})^{\frac{1}{2}}$ и $|A^{*}|^{\frac{1}{2}}$ вполне непрерывны из H в E, а операторы $|A|^{\frac{1}{2}}=(|A^{*}|^{\frac{1}{2}})'$ и $A^{\frac{1}{2}}=((A^{*})^{\frac{1}{2}})'$ квази вполне непрерывны из E' в H.

Отметим, что если E есть пространство $\mathcal{D}$ (пример 1.1) или пространство Фреше (определение 3.11), то в силу замечания в конце § 2, операторы $A^{\frac{1}{2}}$ и $|A|^{\frac{1}{2}}$ также вполне непрерывны из E' в H.

ГЛАВА IУ

ВОПРОСЫ ВАРИАЦИОННОЙ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей главе результаты второй и третьей глав применяются к доказательству теорем существования решений нелинейного уравнения и собственных векторов нелинейного оператора определенного вида (ср.[5б]). Полученные общие предложения применяются к изучению конкретного нелинейного уравнения.

§ 11. О функционалах в гильбертовом пространстве

В дальнейшем будут использованы некоторые понятия и предложения для гильбертова пространства, содержащиеся в [5б] .

Определение 11.1. Пусть на гильбертовом пространстве H задан функционал φ . Если существует открытый шар $S_R = \{x \in H, \|x\| < R\}$ такой, что во всех точках его границы $S'_R = \{x \in H, \|x\| = R\}$ имеет место неравенство $\varphi(x) > \varphi(x_0)$, где x_0 - какая нибудь точка из S_R , то говорят, что функционал φ обладает m -свойством.

Определение 11.2. Точка $x_0 \in H$ называется критической точкой функционала φ , заданного в H , если существует $D\varphi(x_0, h)$ и

$$\operatorname{grad} \varphi(x_0) = \Theta, \qquad (\|\Theta\| = 0)$$

Теорема 11.1. ([5б] , теорема 9.3). Пусть на гильбертовом пространстве H задан слабо секвенциально полунепрерывный снизу (определение 2.31) функционал φ, имеющий линейный дифференциал Гато в каждой точке $x \in H$. Тогда, если функционал φ обладает m-свойством, то существует по меньшей мере одна критическая точка этого функционала.

Теорема 11.2. ([56], теорема 9.4). Пусть на гильбертовом пространстве H задан вещественный функционал φ, имеющий линейные дифференциалы Гато первого и второго порядков, причем дифференциал второго порядка $\mathcal{D}^2\varphi(x,h,k)$, $(x,h,k \in H)$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{D}^2\varphi(x,h,h) \geq \|h\|\,\gamma(\|h\|),$$

где $\gamma(t)$ - неотрицательная непрерывная функция, заданая для $t \geq 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \gamma(t) = +\infty$.

Тогда существует по меньшей мере одна критическая точка функционала φ.

Определение 11.3. Пусть F - оператор, действующий в локально выпуклом пространстве E, такой, что $F(\theta)=\theta$. Тогда, если существует число μ_0 и вектор $x_0 \neq \theta$ такие, что $F(x_0) = \mu_0 x_0$, то x_0 называется собственным вектором оператора F, отвечающим собственному значению μ_0.

Теорема 11.3. ([56], теорема 15.1). Пусть во всем вещественном гильбертовом пространстве H задан слабо секвенциально непрерывный функционал φ, градиент которого F позитивен, т.е. $(F(x), x) = (\operatorname{grad} \varphi(x), x) > 0$ если $\|x\| > 0$. Тогда оператор F имеет собственные векторы любой нормы, отвечающие положительным собственным значениям.

11.2. Здесь мы докажем два предложения о слабой непрерывности функционала специального вида.

Лемма 11.1. Пусть выполнены следующие условия

1) Бочечное полуполное пространство E удовлетворяет условию (χ) .

2) A - линейный вполне непрерывный оператор из E' в E , сужение которого A^H есть самосопряженный квази положительный оператор в H .

3) f - функционал, определенный на E и непрерывный по отношению к каждому ограниченному множеству из E .

Тогда функционал $f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)$, где $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ - главный корень квадратный из оператора A^H , слабо непрерывен по отношению к каждому шару пространства H .

Доказательство. Пусть S_R - шар из H . В силу теоремы 10.2, оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ отображает его в относительно бикомпактное, а значит и ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и точка $x_0 \in S_R$. Тогда $y_0 = (A^H)^{\frac{1}{2}}x_0 \in \mathfrak{M}$. В силу условия 3) данной теоремы, существует окрестность нуля $\mathcal{U} \subset E$ такая, что для всех $y \in (y_0 + \mathcal{U}) \cap \mathfrak{M}$ будет $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Далее, в силу леммы 10.7 существует окрестность нуля V пространства H , наделенного слабой топологией, такая, что из $x \in (x_0 + V) \cap S_R$ следует $(A^H)^{\frac{1}{2}}x \in ((A^H)^{\frac{1}{2}}x_0 + \mathcal{U}) \cap \mathfrak{M}$, а поэтому $|f((A^H)^{\frac{1}{2}}x) - f((A^H)^{\frac{1}{2}}x_0)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 11.1. В силу следствия 4.2 и леммы 4.2, условие 3) леммы 11.1 выполняется, в частности, если функционал f является потенциалом непрерывного или квази ограниченного потенциального оператора из E в E'.

Лемма 11.2. Пусть выполнены следующие условия:

1) Пространство E удовлетворяет условию (χ).

2) A – линейный непрерывный оператор из E' в E, сужение которого A^H есть самосопряженный оператор в H, причем операторы A_+^H и $|A_-^H|$ имеют продолжения, ограниченные из E' в E.

3) Функционал f, определенный на E'' слабо непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E''

Тогда функционал $f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)$, где $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ – главный квадратный корень из A^H, слабо непрерывен по отношению к каждому шару пространства H.

Доказательство. Пусть S_k – шар из H. В силу теоремы 9.6 (см. доказательство[+/]) оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ отображает его в ограниченное множество $\mathfrak{M} \subset E''$.

Пусть даны $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in S_k$. Тогда $y_0 = (A^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in \mathfrak{M}$. В силу условия 3) данной теоремы существует окрестность нуля $\mathcal{U}$ пространства E'', наделенного слабой топологией $\sigma(E'', E')$ такая, что для всех $y \in (y_0 + \mathcal{U}) \cap \mathfrak{M}$ имеет место неравенство $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Из ограниченности оператора $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ следует его непрерывность, а значит (см. п. 2.5) и слабая непрерывность по отношению к шару S_k. Поэтому найдется окрестность нуля V пространства

+/ Формулировка теоремы 9.6 содержит требование квази бочечности E, однако доказательство того факта, который здесь используется, не нуждается в этом требовании.

H , наделенного слабой топологией, такая, что из $x \in (x_0+V) \cap S_R$ следует $(A^{H})^{\frac{1}{2}}x \in ((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0 + \mathcal{U}) \cap \mathfrak{M}$, а потому $|f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x) - f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0)| < \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 11.2. В силу леммы 4.4[I], условие 3) леммы 11.2 выполняется, в частности, если функционал f является потенциалом квази бикомпактного оператора из E'' в E' и пространство E' квази бочечно.

11.3. Отметим еще следующее предложение, которое мы используем в дальнейшем.

Лемма 11.3. Пусть выполнены условия 1) и 2) леммы 11.1 (или леммы 11.2). Пусть, далее, оператор $F = \operatorname{grad} f$ действует из E в E' (соответственно, из E'' в E'). Тогда

$$\operatorname{grad} f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x) = A^{\frac{1}{2}} F((A^{H})^{\frac{1}{2}}x), \quad x \in H \tag{11.1}$$

Доказательство. Пусть $x, y \in H$. Положим $(A^{H})^{\frac{1}{2}}x = u$, $(A^{H})^{\frac{1}{2}}y = h$. Тогда, в силу леммы 10.6 (соответственно, теоремы 9.6$^{+/}$), $u, h \in E$ (соответственно, $u, h \in E''$).

Рассмотрим дифференциал Гато функционала $f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x)$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f((A^{H})^{\frac{1}{2}}(x+ty)) - f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(u+th) - f(u)}{t} =$$

$$= \langle F(u), h \rangle = \langle F((A^{H})^{\frac{1}{2}}x), (A^{H})^{\frac{1}{2}}y \rangle$$

Воспользуемся равенством (10.15), которое имеет место при выполнении условий 1) и 2) леммы 11.1. Такое же равенство при условиях 1) и 2) леммы 11.2 имеет место в силу равенства (9.5). Следовательно,

$^{+/}$См. сноску на стр. 135.

$$\langle F'((A^{H})^{\frac{1}{2}}x), (A^{H})^{\frac{1}{2}}y \rangle = (A^{\frac{1}{2}}F'((A^{H})^{\frac{1}{2}}x), y),$$

откуда, согласно определению градиента, получаем равенство (II.I). Лемма доказана.

§ 12. Теоремы существования решений и собственных векторов

12.1. Теорема 12.1. Пусть выполнены следующие условия:

1) Бочечное полуполное пространство E удовлетворяет условию (X).

2) Линейный оператор A вполне непрерывен из E' в E, причем его сужение A^{H} есть самосопряженный и положительный оператор в H.

3) Оператор $F = grad\, f$ действует из E в E', причем его потенциал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E и удовлетворяет неравенству

$$2f(y) \le a(y,y) + b(y,y)^{\frac{\alpha}{2}} + c, \quad y \in E, \tag{12.1}$$

где $a < \lambda_1$ (λ_1 - наименьшее характеристическое число оператора A^{H}), b и c - произвольные вещественные числа и $0 < \alpha < 2$.

Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения

$$y = AF(y) \tag{12.2}$$

принадлежащее E.

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$g(x) = (x,x) - 2f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x), \quad x \in H \tag{12.3}$$

В силу леммы I.II, функционал $f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x)$ слабо непрерывен, а значит и слабо секвенциально непрерывен (определение 2.29) по отношению к каждому шару $S_R \subset H$. Кроме того, как известно ([56]стр. 101), функционал $(x,x)=\|x\|^2$ слабо секвенциально полунепрерывен снизу (определение 2.31) в шаре S_R . Следовательно, функционал φ слабо секвенциально полунепрерывен снизу в каждом шаре S_R пространства H .

Далее, полагая $y=(A^H)^{\frac{1}{2}}x$, где $x\in H$ $(y\in E)$, в силу (12.1), получаем

$$2f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)\le a((A^H)^{\frac{1}{2}}x,(A^H)^{\frac{1}{2}}x)+b((A^H)^{\frac{1}{2}}x,(A^H)^{\frac{1}{2}}x)^{\frac{\alpha}{2}}+c$$

Так как $(A^H)^{\frac{1}{2}}$ есть самосопряженный оператор в H и $(A^H)^{\frac{1}{2}}x\in E\subset H$, то

$$((A^H)^{\frac{1}{2}}x,(A^H)^{\frac{1}{2}}x)=(A^Hx,x)\le\frac{1}{\lambda_1}(x,x)$$

откуда

$$2f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)\le\frac{a}{\lambda_1}(x,x)+\frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}(x,x)^{\frac{\alpha}{2}}+c,$$

а поэтому

$$\varphi(x)\geqslant\|x\|^2-\frac{a}{\lambda_1}\|x\|^2-\frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}\|x\|^{\alpha}-c=$$

$$=\|x\|^{\alpha}\left((1-\frac{a}{\lambda_1})\|x\|^{2-\alpha}-\frac{b}{\lambda_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right)-c.$$

Из полученного неравенства видно, что на границе достаточно большого шара из H значения функционала φ будут больше сколь угодно большого заданного числа, т.е. функционал φ обладает m - свойством (определение 11.1),

Отсюда и из слабой секвенциальной полунепрерывности снизу функционала φ , согласно теореме 11.1, следует существование точки $x_0\in H$ такой, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0)=\operatorname{grad}(x_0,x_0)-2\operatorname{grad}f((A^H)^{\frac{1}{2}}x_0)=\Theta$$

Так как $grad\,(x,x)=2x$, то, в силу равенства (11.1), имеем

$$x_0 = A^{\frac{1}{2}} F((A^{H})^{\frac{1}{2}} x_0)$$

Применяя к обоим частям этого равенства оператор $(A^{H})^{\frac{1}{2}}$, получим

$$(A^{H})^{\frac{1}{2}} x_0 = (A^{H})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} F((A^{H})^{\frac{1}{2}} x_0)$$

Так как A^{H} - положительный оператор, то $|A^{H}|^{\frac{1}{2}} = (A^{H})^{\frac{1}{2}}$. Поэтому, в силу теоремы 10.4, имеем $(A^{H})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$ и, следовательно,

$$y_0 = AF(y_0),$$

где $y_0 = (A^{H})^{\frac{1}{2}} x_0 \in E$. Теорема доказана.

Замечание 12.1. Если выполнены условия теоремы 1.12, то уравнение

$$y = \lambda AF(y), \quad \lambda > 0$$

имеет решение, если $0 \leq \lambda a \leq \lambda_1$, а если $a = 0$, то при любом $\lambda > 0$.

Замечание 12.2. Используя теоремы 9.1, 9.2 и леммы 11.2, 11.3 и учитывая, что $E'' \subset H$ (лемма 8.1), теми же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 12.1, получаем следующее предложение:

Теорема 12.1^{I}. Пусть выполнены следующие условия:

1) Квази бочечное пространство E удовлетворяет условию (χ).

2) Линейный оператор A ограничен из E' в E, причем его сужение A^{H} есть самосопряженный положительный оператор в H.

3) Оператор $F = grad\, f$ действует из E'' в E', причем его потенциал f слабо непрерывен по отношению к

каждому ограниченному множеству из E'' и удовлетворяет неравенству

$$\alpha f(y) \le a(y,y) + b(y,y)^{\frac{\alpha}{2}} + c\,, \quad y \in E'' \qquad (12.1^I)$$

где $a\|A^H\| < 1$, а b, c и α имеют тот же смысл, что в теореме 12.1.

Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения $y = AF(y)$, принадлежащее E.

Теорема 12.2. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 12.1. Пусть, далее потенциальный оператор $F(E \to E')$ имеет линейный дифференциал Гато $\mathcal{D}F(y,s)$, удовлетворяющий неравенству:

$$\langle \mathcal{D}F(y,s), s \rangle \le a(s,s)\,, \quad y, s \in E, \qquad (12.4)$$

где a имеет тот же смысл, что и в теореме 12.1. Тогда уравнение

$$y = AF(y)$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее E.

Доказательство. Пусть $F = \operatorname{grad} f$. Рассмотрим функционал

$$\varphi(x) = (x,x) - 2f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)\,, \quad x \in H \qquad (12.3)$$

Для произвольного $h \in H$ имеем $(A^H)^{\frac{1}{2}} h \in E$. Поэтому

$$\mathcal{D}\varphi(x,h) = 2(x,h) - 2\langle F((A^H)^{\frac{1}{2}}x), (A^H)^{\frac{1}{2}}h \rangle$$

Далее, для произвольного $k \in H$ имеем $(A^H)^{\frac{1}{2}} k \in E$, так что

$$\mathcal{D}^2\varphi(x,h,k) = 2(k,h) - 2\langle \mathcal{D}F((A^H)^{\frac{1}{2}}x, (A^H)^{\frac{1}{2}}k), (A^H)^{\frac{1}{2}}h \rangle,$$

где $(A^H)^{\frac{1}{2}}k$, $(A^H)^{\frac{1}{2}}h \in E$

Отсюда и из неравенства (12.4), где достаточно рассматривать лишь неотрицательные a, при $k = h$ получаем

$$D^2\varphi(x,h,h) \geqslant 2(h,h) - 2a\left((A^H)^{\frac{1}{2}}h, (A^H)^{\frac{1}{2}}h\right) =$$
$$= 2(h,h) - 2a(A^H h, h) \geqslant 2\|h\|^2 - \frac{2a}{\lambda_1}\|h\|^2 = \|h\|\cdot 2\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)\|h\|$$

Таким образом, функционал φ удовлетворяет условиям теоремы 11.2, если в качестве $\gamma(t)$ взять $\gamma(t) = 2\left(1-\frac{a}{\lambda_1}\right)t$. Следовательно, существует $x_0 \in H$ такое, что

$$\operatorname{grad}\varphi(x_0) = \Theta$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 12.1 получаем, что вектор $y_0 = (A^H)^{\frac{1}{2}}x_0 \subset E$ удовлетворяет данному уравнению. Теорема доказана.

Отметим, что в отношении доказанной теоремы справедливо замечание 12.1.

Замечание 12.3. Используя теоремы 9.1, 9.2 и лемму 11.3 и учитывая, что $E'' \subset H$, теми же рассуждениями, как при доказательстве теоремы 12.2, устанавливается

Теорема 12.2[I]. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 12.1[I]. Пусть, далее, потенциальный оператор $F(E'' \to E')$ имеет линейный дифференциал Гато $DF(y,s) \in E'$, удовлетворяющий неравенству

$$\langle DF(y,s), s\rangle \leq a(s,s), \quad y,s \in E'', \quad (a\|A^H\| < 1)$$

Тогда уравнение $y = AF(y)$ имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее E.

Теорема 12.3. Пусть выполнены следующие условия:

1) Бочечное полуполное пространство E удовлетворяет условию (X).

2) Линейный оператор A вполне непрерывен из E в E', причем его сужение A^H есть самосопряженный и ква-

зи отрицательный оператор в H.

3) Оператор $F(y) = \operatorname{grad} f(y)$ действует из E в E', причем его потенциал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E и удовлетворяет неравенству

$$f(y) \geq a(y,y) + b(y,y)^{\frac{\alpha}{2}} + c \quad , \quad y \in E, \qquad (12.5)$$

где $a \geq \lambda_1$ (λ_1 - наибольшее положительное характеристическое число оператора A^H), b и c - произвольные отрицательные числа и $0 < \alpha < 2$. Тогда существует по меньшей мере одно решение уравнения

$$y = AF(y)$$

принадлежащее E.

Доказательство. Пусть H_1 - собственное подпространство оператора A^H, соответствующее его положительным собственным числам. По условию теоремы пространство H_1, конечномерно.

Пусть P_1 - оператор проектирования из H на подпространство H_1, а P_2 - оператор проектирования из H на подпространство $H_2 = H \ominus H_1$. Тогда для любого $x \in H$ имеем: $x = P_1 x + P_2 x$. В силу леммы II.I, функционал $f((A^H)^{\frac{1}{2}} x)$ слабо непрерывен по отношению к любому шару из H. Кроме того, функционал $\|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2$ слабо секвенциально полунепрерывен снизу в любом шаре из H (см.[5б], стр. 116). Следовательно, функционал

$$g(x) = 2f((A^H)^{\frac{1}{2}} x) + \|P_2 x\|^2 - \|P_1 x\|^2, \quad x \in H, \qquad (12.6)$$

слабо секвенциально полунепрерывен снизу в каждом шаре из H.

Далее, из неравенства (12.5) следует, что

$$\varphi(x) \geq 2a\|(A^{H})^{\frac{1}{2}}x\|^2 + 2b\|(A^{H})^{\frac{1}{2}}x\|^{\alpha} + 2c + \|P_2x\|^2 - \|P_1x\|^2 \qquad (12.7)$$

Но

$$\|(A^{H})^{\frac{1}{2}}x\|^2 \geq ((A^{H})^{\frac{1}{2}}P_1x, (A^{H})^{\frac{1}{2}}P_1x) = (A^{H}P_1x, P_1x) \geq \frac{1}{\lambda_1}\|P_1x\|^2$$

поэтому

$$\begin{aligned} 2a\|(A^{H})^{\frac{1}{2}}x\|^2 + \|P_2x\|^2 - \|P_1x\|^2 &\geq \frac{2a}{\lambda_1}\|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 - \|P_1x\|^2 \geq \\ &\geq \|P_1x\|^2 + \|P_2x\|^2 = \|x\|^2 \end{aligned} \qquad (12.8)$$

Пусть μ_1 - наименьшее по абсолютной величине характеристическое число оператора A^{H}. Тогда $((A^{H})^{\frac{1}{2}}x, (A^{H})^{\frac{1}{2}}x) = (A^{H}x, x) \leq \frac{1}{\mu_1}\|x\|^2$. Отсюда и из неравенств (12.7) и (12.8) получаем:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\geq \|x\|^2 - 2|b|\,\|(A^{H})^{\frac{1}{2}}x\|^{\alpha} - 2|c| \geq \|x\| - \frac{2|b|}{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}}\|x\|^{\alpha} - 2|c| = \\ &= \|x\|^{\alpha}\left(\|x\|^{2-\alpha} - \frac{2|b|}{\mu_1^{\frac{\alpha}{2}}}\right) - 2|c|, \end{aligned}$$

откуда видно, что функционал φ обладает m - свойством (определение II.I). Следовательно, в силу теоремы II.I, существует по меньшей мере одна точка $x_0 \in H$, такая, что

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \varphi(x_0) &= 2\operatorname{grad} f((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0) - \operatorname{grad}(\|P_1x_0\|^2 - \|P_2x_0\|^2) = \\ &= 2A^{\frac{1}{2}}F((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0) - 2(P_1x_0 - P_2x_0) = \Theta \end{aligned}$$

или

$$A^{\frac{1}{2}}F((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0) = P_1x_0 - P_2x_0$$

Применяя к обеим частям полученного равенства оператор $|A^{H}|^{\frac{1}{2}}\ (H \to E)$, имеем

$$|A^{H}|^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}F((A^{H})^{\frac{1}{2}}x_0) = |A^{H}|^{\frac{1}{2}}(P_1 - P_2)x_0 \qquad (12.9)$$

В силу теоремы 10.4, имеем $|A^{H}|^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$. Кроме того

$$|A^{H}|^{\frac{1}{2}}(P_1 - P_2) = ((A^{H}_{+})^{\frac{1}{2}} + |A^{H}_{-}|^{\frac{1}{2}})(P_1 - P_2),$$

а так как $(A^{H}_{+})^{\frac{1}{2}} P_1 = (A^{H}_{+})^{\frac{1}{2}}$, $|A^{H}_{-}|^{\frac{1}{2}} P_2 = |A^{H}_{-}|^{\frac{1}{2}}$, $|A^{H}_{-}|^{\frac{1}{2}} P_1 = (A^{H}_{+})^{\frac{1}{2}} P_2 = 0$, то

$$|A^{H}|^{\frac{1}{2}}(P_1 - P_2) = (A^{H}_{+})^{\frac{1}{2}} - |A^{H}_{-}|^{\frac{1}{2}} = (A^{H})^{\frac{1}{2}}$$

Следовательно из (12.9) получаем

$$AF(y_0) = y_0,$$

где $y_0 = (A^{H})^{\frac{1}{2}} x_0 \in E$. Теорема доказана.

<u>Теорема 12.4</u>. <u>Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 12.3. Пусть, далее, потенциальный оператор</u> $F(E \to E')$ <u>имеет линейный дифференциал Гато</u> $\mathcal{D}F(x, s)$, <u>удовлетворяющий неравенству</u>

$$\langle \mathcal{D}F(y, s), s \rangle \geq 2\lambda_1 (s, s), \quad y, s \in E, \qquad (12.10)$$

<u>где</u> λ_1 <u>имеет тот же смысл, что и в теореме 12.3. Тогда уравнение</u>

$$y = AF(y)$$

<u>имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее</u> E.

<u>Доказательство</u>. Пусть $F = \operatorname{grad} f$. Рассмотрим снова функционал φ, определенный равенством (12.6). Для него имеем:

$$\mathcal{D}\varphi(x, h) = 2\langle F((A^{H})^{\frac{1}{2}} x), (A^{H})^{\frac{1}{2}} x\rangle - 2(P_1 x - P_2 x, h), \quad x, h \in H,$$

$$\mathcal{D}^2\varphi(x, h, k) = 2\langle \mathcal{D}F((A^{H})^{\frac{1}{2}} x, (A^{H})^{\frac{1}{2}} k), (A^{H})^{\frac{1}{2}} h\rangle - 2(P_1 k - P_2 k, h), \quad k \in H,$$

Отсюда, полагая $k = h$, в силу неравенства (12.10), имеем

$$\mathcal{D}^2\varphi(x, h, h) \geq 4\lambda_1((A^{H})^{\frac{1}{2}} h, (A^{H})^{\frac{1}{2}} h) - 2(P_1 h, h) + 2(P_2 h, h) =$$

$$= 4\lambda_1 \|(A^{H})^{\frac{1}{2}} h\|^2 - 2(\|P_1 h\|^2 - \|P_2 h\|^2)$$

Так как $\|(A^H)^{\frac{1}{2}}h\|^2 \geq \|P_1 h\|^2$, то отсюда

$$D^2 \varphi(x,h,h) \geq 4\|P_1 h\|^2 - 2\|P_2 h\|^2 + 2\|P_2 h\|^2 = \|h\| \cdot 2\|h\|$$

Следовательно, в силу теоремы 11.2 существует $x_0 \in H$ такое, что

$$grad\ \varphi(x_0) = \Theta .$$

Отсюда так же, как при доказательстве теоремы 12.3, получаем

$$y_0 = AF(y_0)$$

где $y_0 = (A^H)^{\frac{1}{2}} x_0 \in E$. Теорема доказана.

12.2. Теорема 12.5. Пусть выполнены следующие условия:

1) Бочечное полуполное пространство E удовлетворяет условию (χ).

2) Линейный оператор A вполне непрерывен из E' в E, причем его сужение A^H есть самосопряженный и положительный оператор в H.

3) Оператор $F = grad\ f$ действует из E в E' и позитивен, т.е. $\langle F(y), y\rangle > 0$ при $y \neq \Theta$.+/

4) Функционал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из E.

+/ Отсюда следует, что $F(\Theta) = \Theta$. Действительно, для произвольного $y \in E$

$$\frac{df(ty)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(ty+\Delta ty) - f(ty)}{\Delta t} = Df(ty, y) = \frac{\langle F(ty), ty\rangle}{t} > 0$$

при $t > 0$. Следовательно, f растет вдоль любого луча, выходящегося из нуля, т.е. функционал f имеет минимум в точке Θ . Поэтому $\frac{df(\Theta)}{dt} = 0$ и для любого $h \in E$

$$\langle F(\Theta), h\rangle = Df(\Theta, h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(th) - f(\Theta)}{t} = 0$$

откуда, ввиду произвольности выбора h , имеем $F(\Theta) = \Theta$

Тогда, какова бы ни была сфера $\|x\| = R$ пространства H, на ней найдется по меньшей мере один вектор x_R такой, что $y_R = (A^H)^{\frac{1}{2}} x_R \in E$ является собственным вектором оператора AF, соответствующим положительному собственному значению $\mu_R = R^{-2}\langle F(y_R), y_R\rangle$.

Доказательство. В силу леммы 11.1, функционал $f((A^H)^{\frac{1}{2}}x)$ слабо секвенциально непрерывен по отношению к каждому шару пространства H.

Пусть H_0 - подпространство нулей оператора A^H, а $H_1 = H \ominus H_0$. Для $x \in H_1$ при $x \neq \theta$ будет $(A^H x, x) = ((A^H)^{\frac{1}{2}} x, (A^H)^{\frac{1}{2}} x) > 0$, значит $(A^H)^{\frac{1}{2}} x \neq \theta$. Следовательно, для $x \in H$ в силу (11.1) имеем:

$$(\operatorname{grad} f((A^H)^{\frac{1}{2}} x), x) = (A^{\frac{1}{2}} F((A^H)^{\frac{1}{2}} x), x) = \langle F((A^H)^{\frac{1}{2}} x), (A^H)^{\frac{1}{2}} x\rangle > 0, \quad x \neq \theta$$

т.е. $\Phi(x) = \operatorname{grad} f((A^H)^{\frac{1}{2}} x)$ есть позитивный градиент слабо секвенциально непрерывного функционала. Согласно теореме 11.3 оператор $\Phi(x)$ имеет в H_1 собственные векторы с любой нормой, отвечающие положительным собственным значениям, т.е. при любом $R > 0$ будет

$$\mu_R x_R = \Phi(x_R)$$

или

$$\mu_R x_R = A^{\frac{1}{2}} F((A^H)^{\frac{1}{2}} x_R), \text{ где } x_R \in H_1, \ \|x_R\| = R, \quad (12.11)$$

откуда

$$\mu_R (x_R, x_R) = (A^{\frac{1}{2}} F((A^H)^{\frac{1}{2}} x_R), x_R) = \langle F((A^H)^{\frac{1}{2}} x_R), (A^H)^{\frac{1}{2}} x_R\rangle > 0 \quad (12.12)$$

Применяя к обоим частям равенства (12.11) оператор $(A^H)^{\frac{1}{2}} = |A^H|^{\frac{1}{2}}$ и учитывая, что, в силу теоремы 10.4, $|A^H|^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = A$, получаем

$$\mu_R (A^H)^{\frac{1}{2}} x_R = AF((A^H)^{\frac{1}{2}} x_R).$$

Отсюда и из (12.12), имеем

$$\mu_k y_k = AF(y_k) \qquad \text{и} \qquad \mu_k = R^{-2}\langle F(y_k), y_k\rangle ,$$

где $y_k = (A^*)^{\frac{1}{2}} x_k \in E$. Теорема доказана.

§ 13. Примеры

13.1. Пусть X^m и Y^ℓ - конечномерные эвклидовы пространства, а $\omega_x \subset X^m$ и $\omega_y \subset Y^\ell$ - бикомпактные множества. Пусть, далее, $K(x,y)$ - вещественная бесконечно дифференцируемая функция на $X^m \times Y^\ell$, носитель которой содержится в топологическом произведении $\omega_x \times \omega_y$.

Рассмотрим линейный оператор

$$AT = \langle K(x,y), T\rangle \tag{13.1}$$

определенный для всех $T \in \mathcal{D}'_{\omega_y}$, значения которого принадлежат $\mathcal{D}_{\omega_x}$ ([26б] , [29]).

Лемма 13.1. Оператор A , определенный равенством (13.1) вполне непрерывен из $\mathcal{D}'_{\omega_y}$ в $\mathcal{D}_{\omega_x}$.

Доказательство. Заметим сначала, что оператор A непрерывен из $\mathcal{D}'_{\omega_y}$ в $\mathcal{D}_{\omega_x}$.Действительно, пусть дана окрестность нуля $U(\mu,\varepsilon) \subset \mathcal{D}_{\omega_x}$ (см. пример 3.1). Рассмотрим множество $B_K \subset \mathcal{D}_{\omega_y}$, состоящее из функций

$$\psi_{p,x}(y) = \mathcal{D}^p_x K(x,y), \quad p \le \mu , \quad x \in \omega_x .$$

При каждом $p = 0,1,2,\dots,\mu$, множество значений функций $\psi_{p,x}(y)$ ограничено в совокупности, т.е. существует число M_p такое, что $|\psi_{p,x}(y)| = |\mathcal{D}^p_x K(x,y)| \le M_p$, ибо функции $\mathcal{D}^p_x K(x,y)$ непрерывны вместе со всеми своими производными на $\omega_x \times \omega_y$. Но тогда

$$|\Psi_{p,x}(y)| \leq \max_{1 \leq p \leq \mu} M_p = M^{(0)}$$

Точно так же можно установить, что для каждого натурального q :

$$|\mathcal{D}_y^q \Psi_{p,x}(y)| = |\mathcal{D}_y^q(\mathcal{D}_x^p K(x,y))| \leq M^{(q)}, \quad p \leq \mu, \ x \in \omega_x$$

откуда следует, что множество B_k ограничено в $\mathcal{D}_{\omega_y}$. (Примеры 1.1 и 3.1). Тогда множество $V_k = \varepsilon B_k^\circ$, где B_k° - поляра множества B_k, есть окрестность нуля в $\mathcal{D}'_{\omega_y}$, причем для всех $T \in V_k$ имеем $|\langle \mathcal{D}_x^p K(x,y), T\rangle| = |\langle \Psi_{p,x}(y), T\rangle| \leq \varepsilon$ для $p \leq \mu$, т.е. $AT \in \mathcal{U}(\mu, \varepsilon)$.

Рассмотрим, теперь, билинейный функционал $\langle AT, S\rangle$, где $T \in \mathcal{D}'_{\omega_y}$, $S \in \mathcal{D}'_{\omega_x}$. Пусть S пробегает произвольное ограниченное множество $B \subset \mathcal{D}'_{\omega_x}$. Тогда, в силу рефлексивности пространства $\mathcal{D}_{\omega_x}$, поляра B° множества B есть окрестность нуля в $\mathcal{D}_{\omega_x}$ и, в силу непрерывности оператора A, найдется окрестность нуля $V \subset \mathcal{D}'_{\omega_y}$ такая, что из $T \subset V$ следует $AT \subset B^\circ$. Значит, для всех $T \in V$ и $S \in B$ имеет место неравенство $|\langle AT, S\rangle| \leq 1$, т.е., когда S пробегает B, отображения $T \to \langle AT, S\rangle$ образуют равностепенно непрерывное множество. Так как кроме того при каждом $T \in \mathcal{D}'_{\omega_y}$ билинейный функционал $\langle AT, S\rangle$ непрерывен относительно S, а $\mathcal{D}_{\omega_x}$ и $\mathcal{D}_{\omega_y}$ являются рефлексивными пространствами Фреше, то, согласно лемме 3.3, билинейный функционал $\langle AT, S\rangle$ непрерывен на $\mathcal{D}'_{\omega_y} \times \mathcal{D}'_{\omega_x}$ по совокупности аргументов. Следовательно, найдутся окрестности нуля $V_0 \subset \mathcal{D}'_{\omega_y}$ и $W_0 \subset \mathcal{D}'_{\omega_x}$ такие, что для $T \in V_0$ и $S \in W_0$ имеет место $|\langle AT, S\rangle| \leq 1$.

Это значит, что для всех $T \in V_0$ имеет место включение $AT \in (W_0)^\circ$, т.е. оператор A отображает окрестность нуля $V_0 \subset \mathcal{D}'_{\omega_y}$ в ограниченное (в силу следствия 2.1 и рефлексивности $\mathcal{D}_{\omega_x}$) множество $(W_0)^\circ$. Так как ограниченное множество из $\mathcal{D}_{\omega_x}$ относительно бикомпактно ([26a]), то это означает полную непрерывность оператора A. Лемма доказана.

13.2. Для дальнейшего напомним некоторые понятия и предложения из [5б] .

Пусть B - измеримое множество конечной меры s - мерного эвклидова пространства и $g(u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ - действительная функция, заданная для $x \in B$ и $u_\mu \in (-\infty, +\infty)$, $\mu = 1, 2, \dots, n$.

Определение 13.1. ([5б] , опр. 18.2). Говорят, что $g(u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ есть (H) - функция, если она непрерывна по совокупности $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ почти при каждом значении $x \in B$ и измерима по x при фиксированных $(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $u_\nu \in (-\infty, +\infty)$.

Определение 13.2. ([5б] , опр. 18.3). Говорят, что функция $g(u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ обладает усиленным (C) - свойством, если, каково бы ни было $\eta > 0$, найдется такое замкнутое множество $F \subset B$, мера которого больше $mes\, B - \eta$, что на топологическом произведении множества F и n - мерного эвклидова пространства переменных $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ функция $g(u_1, u_2, \dots, u_n, x)$ непрерывна по совокупности всех аргументов.

Теорема 13.1. ([5б] , теор. 18.2). Для того, чтобы функций $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ была (H) - функцией необходимо и достаточно, чтобы она обладала усиленным (C) - свойством.

(H) - функция $g(u_1, u_2, \ldots, u_n, x)$ порождает оператор h, посредством равенства

$$hu = g(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), x)$$

В связи с изучением нелинейных уравнений данный оператор был впервые исследован в работах В.В. Немыцкого [21].

Дальнейшее исследование этого оператора было проведено в работах М.М. Вайнберга и других авторов (см.[5б], где указана библиография). Следуя М.М. Вайнбергу, мы будем оператор h называть оператором В.В. Немыцкого.

Нас будет интересовать вопрос о действии оператора h из пространства бесконечно дифференцируемых финитных функций в пространство суммируемых функций. С этой целью мы воспользуемся следующим предложением, установленным И.В. Шрагиным [27]:

Пусть множество B бикомпактно.

Теорема 13.2. Для того, чтобы оператор Немыцкого $hu = g(u_1(y), \ldots, u_n(y), y)$ действовал из пространства непрерывных векторфункций $C_{n+1}(B)$ в пространство суммируемых функций $L(B)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\Phi_\alpha(y) = \sup\limits_{|u_\mu| \le \alpha} |g(u_1, u_2, \ldots, u_n, y)|$ была суммируема по y на B при любом $\alpha > 0$.

13.3. Пусть $g_\nu(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ являются (H) - функциями для $y \in \omega_y$ и $u_\mu \in (-\infty, +\infty)$ $\mu = 0, 1, \ldots, n$ и удовлетворяют условию

$$\sup_{|u_\mu|\le\alpha} |g_\nu(u_0, u_1, \dots, u_n, y)| = \Phi_{\nu,\alpha}(y) \in L(\omega_y), \qquad (13.2)$$

где ω_y - бикомпактное множество ℓ - мерного пространства Y^ℓ, α - произвольное число и $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, n$

Пусть, далее, $u(y)$ - бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в ω_y, и $n+1$ - число всех ее частных производных по $(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$ до порядка N включительно. Тогда, в силу условия (13.2) и согласно теореме 13.2, функции

$$g_\nu(u(y), Du(y), D^2u(y), \dots, D^N u(y), y)$$

суммируемы по y на ω_y и, следовательно, их производные

$$D^i g_\nu(u(y), Du(y), \dots, D^N u(y), y)$$

являются обобщенными функциями, т.е. принадлежат D'_{ω_y}. Поэтому для любого $w \in D_{\omega_y}$ имеют смысл выражения ([26a]):

$$\langle w(y), D^i g_\nu(u(y), Du(y), \dots D^N u(y), y)\rangle =$$
$$= (-1)^i \langle D^i w(y), g_\nu(u(y), Du(y), \dots, D^N u(y), y)\rangle =$$
$$= (-1)^i \int_{\omega_y} D^i w(y)\, g_\nu(u(y), Du(y), \dots, D^N u(y), y)\, dy$$

Рассмотрим оператор $F(u)$, действующий из пространства D_{ω_y} в пространство D'_{ω_y} и определенный равенством

$$\langle w, F(u)\rangle = \sum_i (-1)^i \langle w(y), D^i g_i(u(y), Du(y), \dots D^N u(y), y)\rangle \qquad (13.3)$$

для всех $u, w \in D_{\omega_y}$. Суммирование по i здесь производится по всем частным производным функций g_i от нулевого до N -го порядка по аргументам $y_1, y_2, \dots, y_\ell$. Число слагаемых, таким образом, равно $n+1$.

<u>Лемма 13.2</u>. <u>Оператор</u> $F(u)$, <u>определенный равенством (13.3), непрерывен из</u> $\mathcal{D}\omega_y$ <u>в</u> $\mathcal{D}'\omega_y$.

<u>Доказательство</u>. Пусть задана окрестность нуля $V \subset \mathcal{D}'\omega_y$. По определению топологии $\beta(\mathcal{D}'\omega_y, \mathcal{D}\omega_y)$, существует ограниченное множество $B(\{M_\nu\}, \omega_y)$ такое, что его поляра $B^\circ \subset V$.

Пусть $u^{(0)}$ - произвольный элемент из $\mathcal{D}\omega_y$. Рассмотрим окрестность нуля $\mathcal{U}_1(N, \varepsilon_1) \subset \mathcal{D}\omega_y$. Так как функции $u^{(0)}(y), \mathcal{D}u^{(0)}(y), \ldots, \mathcal{D}^N u^{(0)}(y)$ непрерывны на ω_y, то они ограничены, т.е. существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для всех $y \in \omega_y$ будет $|\mathcal{D}^j u^{(0)}(y)| \leq \alpha_0$, $j \leq N$.

Так как для всех $u - u^{(0)} \in \mathcal{U}_1(N, \varepsilon_1)$ имеем

$$|\mathcal{D}^p u(y) - \mathcal{D}^p u^{(0)}(y)| \leq \varepsilon_1, \quad p \leq N, \quad y \in \omega_y,$$

то для всех $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}_1(N, \varepsilon_1)$ будет

$$|\mathcal{D}^p u(y)| \leq \alpha_0 + \varepsilon_1, \quad p \leq N, \quad y \in \omega_y$$

Поэтому

$$|g_i(u^{(0)}(y), \mathcal{D}u^{(0)}(y), \ldots, \mathcal{D}^N u^{(0)}(y), y)| \leq \sup_{|u_\mu| \leq \alpha_0} |g_i(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)| = \Phi_{i,\alpha_0}(y) \quad (13.4)$$

а для $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}_1$

$$|g_i(u(y), \mathcal{D}u(y), \ldots, \mathcal{D}^N u(y), y)| \leq \sup_{|u_\mu| \leq \alpha_0+\varepsilon_1} |g_i(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)| = \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y) \quad (13.5)$$

где в силу (13.2) функции $\Phi_{i,\alpha_0}(y)$ и $\Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y)$ суммируемы на ω_y.

Рассмотрим выражение

$$J_m = \sum_i \int_m [g_i(u(y), \mathcal{D}u(y), \ldots, \mathcal{D}^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), \ldots, \mathcal{D}^N u^{(0)}(y), y)] \mathcal{D}^i \varphi(y) dy \quad (13.6)$$

где $\mathfrak{M}$ - измеримое подмножество множества ω_y, $u \in u^{(0)} + U_1(N, \varepsilon_1)$ и $w \in B(\{M_\nu\}, \omega_y)$, а поэтому $|D^i w(y)| \le M_N$ для $i \le N$, $y \in \omega_y$. В силу (13.4) и (13.5), из равенства (13.6) получим:

$$|J_{\mathfrak{M}}| \le M_N \sum_i \int_{\mathfrak{M}} (|g_i(u(y), Du(y), \dots, D^N u(y), y)| + g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \dots, D^N u^{(0)}(y), y)|)\, dy \le$$

$$\le M_N \int_{\mathfrak{M}} \sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))\, dy$$

Так как функция $\sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))$ суммируема на ω_y, то для заданного M_N найдется $\eta > 0$, для которого при любом $\mathfrak{M} \subset \omega_y$ такого, что $\operatorname{mes} \mathfrak{M} < \eta$, будет

$\int_{\mathfrak{M}} \sum_i (\Phi_{i,\alpha_0}(y) + \Phi_{i,\alpha_0+\varepsilon_1}(y))\, dy < \frac{1}{2M_N}$, а значит

$$|J_{\mathfrak{M}}| < \frac{1}{2} \tag{13.7}$$

для всех $u \in u^{(0)} + U_1(N, \varepsilon_1)$ и множеств $\mathfrak{M} \subset \omega_y$ таких, что $\operatorname{mes} \mathfrak{M} < \eta$.

Так как $g_i(u_0, u_1, \dots u_n, y)$ являются (H) - функциями, то, согласно теореме 13.1, найденному $\eta > 0$ соответствует замкнутое множество $F \subset \omega_y$ такое, что $\operatorname{mes} F > \operatorname{mes} \omega_y - \eta$ и на топологическом произведении F и $(n+1)$ -мерного эвклидова пространства переменных $(u_0, u_1, \dots, u_n)$ функции $g_i(u_0, u_1, \dots, u_n, y)$ непрерывны по совокупности всех аргументов.

Для непрерывных на ω_y функций $u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \dots, D^N u^{(0)}(y)$, положим $\beta_i = \max_{y \in \omega_y} |D^i u^{(0)}(y)|$, $\beta = \max \beta_i$ и $\alpha = \beta + 1$.

Топологическое произведение множества F и $(n+1)$-мерного куба $|u_i| \leq \alpha$ есть бикомпактное множество $K \subset R^{n+1}$, поэтому функции $g_i(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)$ равномерно непрерывны на K. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что для любых пар точек $(u_0', u_1', \ldots, u_n', y)$, $(u_0'', u_1'', \ldots, u_n'', y)$, для которых $|u_\mu' - u_\mu''| < \delta$, имеют место неравенства

$$|g_i(u_0', u_1', \ldots, u_n', y) - g_i(u_0'', u_1'', \ldots, u_n'', y)| < \frac{1}{2M_N \cdot n \cdot \operatorname{mes} \omega_y}$$

Возьмем окрестность нуля $\mathcal{U}_2(N, \delta) \subset \mathcal{D}_{\omega_y}$. Для всех $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}_2(N, \delta)$ имеет место неравенство

$|D^p u(y) - D^p u^{(0)}(y)| \leq \delta$ для всех $p \leq N$ и $y \in \omega_y$

Отсюда следует, что для всех $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}_2(N, \delta)$ и $y \in F$ будет:

$$|g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)| < \frac{1}{2M_N n \cdot \operatorname{mes} \omega_y} \tag{13.8}$$

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1(N, \varepsilon_1) \cap \mathcal{U}_2(N, \delta)$. Тогда для всех $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}$ и $w \in B(\{M_\nu\}, \omega_y)$ в силу (13.3), (13.7) и (13.8), имеем:

$$|\langle w, F(u) - F(u^{(0)}) \rangle| =$$

$$= \Big|\sum_i (-1)^i \langle w(y), D^i g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - D^i g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\sum_i \langle D^i w(y), g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\sum_i \int_{\omega_y} [g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)]\, D^i w(y)\, dy \Big| \leq$$

$$\leq \sum_i \int_F |g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) - g_i(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \ldots, D^N u^{(0)}(y), y)| \cdot |D^i w(y)|\, dy +$$

$$+ |J_{\omega_y - F}| < n \int_F \frac{1}{2M_N \cdot n \cdot \operatorname{mes} \omega_y} \cdot M_N\, dy + |J_{\omega_y - F}| < \frac{1}{2} \frac{\operatorname{mes} F}{\operatorname{mes} \omega_y} + \frac{1}{2} < 1,$$

ибо $mes(\omega_y - F) < \eta$. Значит для всех $u \in u^{(0)} + \mathcal{U}$ имеет место включение $F(u) - F(u^{(0)}) \in B^0 \subset V$. Лемма доказана.

Лемма 13.3. Пусть существует функция $G(u_0, u_1, \dots, u_n, y)$ такая, что

$$g_\nu(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, y) = \frac{\partial}{\partial u_\nu} G(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, y), \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, n) \qquad (13.9)$$

Тогда оператор $F(u)$, определенный равенством (13.3) является градиентом функционала

$$f(u) = \int_{\omega_y} G(u(y), Du(y), D^2 u(y), \dots, D^N u(y), y)\, dy,$$

непрерывного по отношению к каждому ограниченному множеству из $D\omega_y$.

Доказательство. Пусть $u^{(0)}, v^{(0)}$ - произвольные элементы из $D\omega_y$. Рассмотрим криволинейный интеграл от оператора F вдоль отрезка $[u^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}]$, представление которого есть $u^{(0)} + t v^{(0)}$ $(0 \le t \le 1)$:

$$J = \int_{[u^{(0)}, u^{(0)} + v^{(0)}]} \langle F(u), du \rangle = \int_0^1 \langle F(u^{(0)} + t v^{(0)}), v^{(0)} \rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 dt \int_{\omega_y} \sum_i g_i (u^{(0)}(y) + t v^{(0)}(y), Du^{(0)}(y) + t D v^{(0)}(y), \dots, D^N u^{(0)}(y) + t D^N v^{(0)}(y), y)\, D^i v^{(0)}(y)\, dy$$

Изменяя порядок интегрирования согласно теореме Фубини и учитывая (13.9), получаем:

$$J = \int_{\omega_y} dy \int_0^1 \frac{d}{dt} G(u^{(0)}(y) + t v^{(0)}(y), Du^{(0)}(y) + t D v^{(0)}(y), \dots, D^N u^{(0)}(y) + t D^N v^{(0)}(y), y)\, dt =$$

$$= \int_{\omega_y} G(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y), D(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y)), \dots, D^N(u^{(0)}(y) + v^{(0)}(y)), y)\, dy -$$

$$- \int_{\omega_y} G(u^{(0)}(y), Du^{(0)}(y), \dots, D^N u^{(0)}(y), y)\, dy = f(u^{(0)} + v^{(0)}) - f(u^{(0)}),$$

где $f(u)=\int\limits_{\omega_y} g(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy$. Значит, согласно теореме 7.1, F является потенциальным оператором. В силу замечания (7.2), его потенциал равен

$$f(u)=\int\limits_0^1 \langle F(u_0+t(u-u_0)), u-u_0\rangle\, dt + C,$$

откуда, с помощью тех же выкладок, которые проводились выше, полагая $u_0=\theta$, получаем

$$f(u)=\int\limits_{\omega_y} g(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy - \int\limits_{\omega_y} g(0,0,\ldots,0,y)\, dy + C$$

Так как C - произвольная постоянная, то можно положить $C=\int\limits_{\omega_y} g(0,0,\ldots,0,y)\, dy$. Значит $F=\operatorname{grad} f$, где

$$f(u)=\int\limits_{\omega_y} g(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy$$

Наконец, учитывая лемму 13.2 и следствие 4.2, заключаем, что функционал f непрерывен по отношению к каждому ограниченному множеству из $D\omega_y$. Лемма доказана.

13.4. В заключение рассмотрим конкретное нелинейное уравнение, к которому мы применим построенную теорию.

Теорема 13.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $K(x,y)$ - *симметричная бесконечно дифференцируемая функция с носителем, содержащимся в множестве* $\omega\times\omega$, *где* ω - *бикомпактное множество* m - *мерного эвклидова пространства, определяющая в* $L^2(\omega)$ *положительный оператор*

$$A^H u=\int\limits_{\omega} K(x,y)\, u(y)\, dy,$$

2) Вещественные функции $g_\nu(u_0, u_1, \ldots, u_n, y)$ являются (H) - функциями (определение 13.1) и удовлетворяют условиям (13.2) и (13.9), причем

$$2\, G(u_0, u_1, \ldots, u_n, y) \leq a\, u_0^2 + b(y)|u_0|^\alpha + c(y) \tag{13.10}$$

где $a < \lambda_1$ (λ_1 - наименьшее характеристическое число оператора A^H); $0 < \alpha < 2$; $0 \leq b(y) \in L^\gamma(\omega)$, $\gamma = \frac{2}{2-\alpha}$; $0 \leq c(y) \in L^1(\omega)$.

Тогда уравнение

$$u(x) = \int_\omega \sum_i D_y^i K(x,y)\, g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy \tag{13.11}$$

имеет по меньшей мере одно решение, принадлежащее пространству D_ω .

Доказательство. Правую часть уравнения (13.11) можно переписать в виде

$$\Gamma u = \sum_i \langle D_y^i K(x,y),\, g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) \rangle =$$

$$= \sum_i (-1)^i \langle K(x,y),\, D^i g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y) \rangle = AF(u)$$

где A - определенный равенством (13.1) линейный оператор, вполне непрерывный из D'_ω в D_ω , а F - непрерывный оператор из D_ω в D'_ω , определенный равенством (13.3), обладающий, в силу леммы 13.3, непрерывным потенциалом

$$f(u) = \int_\omega G(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy$$

Так как пространство D_ω удовлетворяет условию (χ) и бочечно, то для уравнения (13.11) выполнены условия 1) и

2) теоремы 12.1. Для того, чтобы убедиться в выполнении условия 3) теоремы 12.1, остается доказать выполнение неравенства (12.1). С этой целью воспользуемся неравенством (13.10), из которого следует, что

$$2f(u) = 2\int_\omega \mathcal{G}(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy \leq$$

$$\leq a\int_\omega u^2(y)\,dy + \int_\omega b(y)\,|u(y)|^\alpha\,dy + \int_\omega c(y)\,dy$$

Согласно неравенству Гёльдера имеем:

$$\int_\omega b(y)\,|u(y)|^\alpha\,dy \leq \Big(\int_\omega (b(y))^{\frac{2}{2-\alpha}}\,dy\Big)^{\frac{2-\alpha}{2}}\Big(\int_\omega |u(y)|^{\alpha\cdot\frac{2}{\alpha}}\,dy\Big)^{\frac{\alpha}{2}} = b_1\,(u,u)^{\frac{\alpha}{2}}$$

где $b_1 = \Big(\int_\omega (b(y))^{\alpha}\,dy\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$ и $(u,u) = \int_\omega u^2(y)\,dy$. Обозначив, далее $c_1 = \int_\omega c(y)\,dy$, получаем неравенство

$$2f(u) \leq a(u,u) + b_1(u,u)^{\frac{\alpha}{2}} + c_1\,, \qquad u \in \mathcal{D}_\omega,$$

которое совпадает с неравенством (12.1). Таким образом, уравнение (13.11) удовлетворяет всем условиям теоремы 12.1 и, следовательно, имеет решение, принадлежащее пространству $E = \mathcal{D}_\omega$. Теорема доказана.

Подобным образом из теорем 12.2 - 12.5 можно получить соответствующие теоремы о существовании решений уравнений (13.11) и собственных векторов оператора

$$\Gamma u = \sum_i \int_\omega D_y^i\, K(x,y)\, g_i(u(y), Du(y), \ldots, D^N u(y), y)\, dy$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

I. Алаоглу (Alaoglu I.). Weak topologies of normed linear spaces. Ann. Math. т. 41 (1940). 252-267.

2. Аренс (Arens R.). Duality in linear spaces. Duke Math. Journ. т. 14 (1947). 787-794.

3. Бурбаки (Bourbaki N.), Elements de Mathematique. Part I.

а) Livre III: Topologie generale, ch. I-II, Actual. scient. ind., Nr. 858-1142. (Печатается русский перевод).

б) Livre V: Espaces vectoriels topologiques, ch. I-II, III-V, Actual. scient. ind., Nr.1189, 1229, Paris (1953, 1955). (Печатается русский перевод).

4. Броудер (F.E. Browder), No linear functional equations in locally convex spaces, Duke Math. J, т.24 (1957), Nr. 4, 579-589.

5. Вайнберг М.М., а) Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах, УМН, 1952, т. 7, в. 4 (50), 55-102.

б) Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, Москва, 1956.

6. Вайнберг М.М., Энгельсон Я.Л., а) Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах, Матем. сб. т. 45(87):4 (1958), 417-422.

б) О квадратном корне из линейного оператора в локально выпуклых пространствах, ДАН СССР, т. 122, (1958) № 5, 755-758.

7. Гавурин М.К. а) Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. Зап. ЛГУ, сер. матем. т. 19 (1950), 59-154.

б) Об основных теоремах дифференциального и интегрального исчисления в линейных пространствах, Вестник Ленинградского Университета, № 7 (1958), сер. матем., мех. и астрон. в.2, 38-48.

8. Гельфанд И.М., Abstrakte Funktionen und lineare Operationen, Матем. сб. т. 4(46):2 (1938), 235-283.

9. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Обобщенные функции, в. 2; Пространства основных и обобщенных функций, Гос. изд. физ.-мат. литературы, Москва 1958.

10. Диас Сильва (C. da Silva Dias), Espaces vectorias topologicos e sua applicacao na teoria des espacos funcionais analiticos, Thesis, University of Sao Paulo, 1951, 2 + 66 pp.

11. Дьёдонне (J. Dieudonne), а) La dualite dans les espaces vectoriels topologiques, Ann. Ecole Norm. (3) vol. 59 (1942), 107-139.

б) Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc., т. 59 (1953), Nr. 6, 495-512.

12. Дьёдонне, Шварц (J. Dieudonne, L. Schwartz), La dialite dans les espaces (F) et (LF), Ann. Inst.

(Русский перевод: Математика, 2:2 (1958), 77-107).

13. Келли (J.L. Kelly), Convergence in topology, Duke Math. Journ.T. 17 (1950), 277-283.

14. Колмогоров А.Н., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math., T. 5 (1934), 29-33.

15. Красносельский М.А., Крейн С.Г., Условия непрерывности линейного оператора, выраженные в свойствах его квадрата. Тр. семин. по функц. анализу Воронежского университета, в. У (1957), 98-101.

16. Красносельский М.А., Соболев В.И., О расщеплении линейных операторов, УМН, т. ХП, в. 4 (76), 313-317.

17. Люстерник Л.А., Соболев В.И., Элементы функционального анализа, Гостехиздат, М.-Л. 1951.

18. Макки (Mackey G.), а) On infinite - dimensional linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc.T. 57 (1945), 155-207.

б) On convex topological linear spaces. Trans. Amer. Math. Soc.T. 60 (1946), 519-537.

19. Маринеску (Marinescu G.), Differentielles de Gateaux et Frechet dans les espaces localemant convexes, Bull. math. Soc. sci. math. et phys. de la R. P. Romane, т. 1 (1957) Nr. 1, 77-86.

20. Наймарк М.А., Нормированные кольца, Гостехиздат, Москва, 1956.

21. Немыцкий В.В. а) Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. т. 41 (1934), 438-452.

б) Об одном общем классе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. т. 41 (1934), 438-452.

в) Метод неподвижных точек в анализе УМН, вып. I (1936), 141-174.

22. Понтрягин А.С., Непрерывные группы, Гостехиздат, Москва, 1954.

23. Райков Д.А., а) Вполне непрерывные спектры локально выпуклых пространств, Тр. Моск. мат. общ., т. 7 (1958), 413-438.

б) О вполне непрерывности сопряженного оператора, ДАН СССР, 119 (1958), № 3, 446-449.

24. Себасьян-и-Сильва (Sebastiano e Silva J.), Le calcul differential et integral dans les espaces localement convexes, reels ou complexes, Atti Acad. naz. Lincei, Rend. el. Sci. fis., mat. e nat.T. XX, 6 (1956), 743-750; T. xxI, 1-2, (1956), 40-45.

25. Соболев В.И., О расщеплении линейных операторов, ДАН СССР, т. 111 (1956), № 5, 951-954.

26. Шварц (Schwartz L.), а) Theorie des distributions, vol. I. Actual. Scient. ind., Nr. 1091, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg 9, Paris, Hermann, 1950.

б) Espaces de fonctions differentiables a valeurs vectorielles, Journal D'Analyse Mathematique, T. IV, Jerusalem, 1954/55, 88-148.

27. Шрагин, Об одном нелинейном операторе, Научные докл. высшей школы, физ.-мат. науки, № 2 (1958).

28. Энгельсон Я.Л. а) О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах. Уч. Зап. Латв. Г.У., Рига, т. УШ (1956), физ.-мат. науки, вып. 2. 73-79.

б) Некоторые замечания к моей работе "О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах", Уч. Зап. ЛГУ, Рига, т. XX (1958), физ.-мат. науки, вып. 3, 271-273.

в) О потенциальных операторах в линейных топологических пространствах, Уч. Зап. ЛГУ, Рига, т. XX (1958), физ.-мат. науки, вып. 3, 27-45.

г) К вариационной теории нелинейных уравнений в локально выпуклых пространствах, Научные докл. высшей школы, № 4 (1958).

29. Эренпрейс (Ehrenpreis L.). On the theory of kernels of Schwartz. Proc. of the Amer. math. Soc. T. 7 (1956), 4, 713-718.