Latvijas Universitāte

Fizikas un matemātikas fakultāte

Vispārīgās matemātikas katedra

Lilita Regža

DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS KĀ MATEMĀTISKS MODELIS AUGSTĀKĀS MATEMĀTIKAS KURSĀ.

Maģistra darbs

Maģistra darba vadītājs
as. prof. Kārlis Šteiners

Rīga, 2006

Saturs.

Anotācija 3
Ievads.. 6
1. MODEĻI FIZIKĀ UN MATEMĀTIKĀ.. 8
1.1. Modeļa jēdziens. 8
1.2. Matemātisks modelis... 9
2. PIRMĀS KĀRTAS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS KĀ MATEMĀTISKS MODELIS. 12
2.1. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni. 12
2.2. Vienkāršāko 1. kārtas diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes.. 14
2.2.1. Mainīgo atdalīšanas metode.. 14
2.2.2. Pirmās kārtas homogēna diferenciālvienādojuma atrisināšana. 16
2.2.3. Pirmās kārtas lineāra diferenciālvienādojuma atrisināšana. 19
2.3. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir 1. kārtas diferenciālvienādojums. 21
2.3.1. Atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas uzdevumi. 21
2.3.2. Atvasinājuma fizikālās nozīmes uzdevumi 38
2.3.3. Eksponenciālās augšanas un eksponenciālās dilšanas uzdevumi....... 50
2.3.4. Stacionāras siltuma plūsmas aprēķini 76
3. OTRĀS KĀRTAS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS KĀ MATEMĀTISKS MODELIS. 80
3.1. Otrās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni................................ 80
3.2. Otrās. kārtas diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes. 81
3.2.1. Vienādojumi, kuriem var pazemināt kārtu. 81
3.2.2. Lineāri homogēni 2. kārtas diferenciālvienādojumi. 84
3.2.3. Lineāri nehomogēni 2. kārtas diferenciālvienādojumi. 87
3.3. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir 2. kārtas diferenciālvienādojums. 92
3.3.1. Otrās kārtas atvasinājuma fizikālās nozīmes izmantošana................. 92
3.3.2. Mehānisko svārstību diferenciālvienādojums. 107
4. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMA KĀ MATEMĀTISKS MODELIS. 115
4.1. Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas pamatjēdzieni....................... 115
4.2. Lineāras homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas ar konstantiem koeficientiem atrisināšanas Eilera metode 118
4.3. Izslēgšanas metode.. 120
4.4. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir lineāra diferenciālvienādojumu sistēma... 121
Nobeigums.. 130
Izmantotā literatūra. 131
Pielikums.

Anotācija.

Maģistra darbs satur teorijas jautājumu apskatu, praktisko daļu un pielikumu. Teorijas daļā aplūkotas galvenokārt 1. un 2. kārtas diferenciālvienādojumu, kā arī lineāru diferenciālvienādojumu sistēmas atrisināšanas metodes. Praktisko daļu veido diferenciālvienādojumu sastādīšanas uzdevumi ar atrisinājumiem un metodiskiem norādījumiem. Pielikumā ir uzdevumu komplekti studentu patstāvīgam darbam par diferenciālvienādojumu sastādīšanu.

Anotation

Master work contains theoretic questions review, practical part and addition. Theoretical part mainly deals with the first and second order differential equation as well as methods of solution for systems of linear differential equation. Practical part consists of differential equation building tasks with answers and methodical instructs. Inclosed is summed students completions for self - contained works about differential equation composition.

Аннотация.

Работа содержит обзор теоретических вопросов, практическую часть и приложение. В теоретической части рассмотрены основные методы решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка, а также системы линейных дифференциальных уравнений. Практическая часть представляет собой прикладные задачи с решениями и методическими указаниями по составлению дифференциальных уравнений. В приложении включены комплекты задач для самостоятельной работы студентов.

Ievads.

Diferenciālvienādojumu teorijas pirmsākumi meklējami 17.-18. gs. *I.Ņūtona*(1643-1727) pētījumos, kas bija saistīti ar dažādu fizikas, matemātikas un astronomijas parādību matemātisku modelēšanu. Viena no svarīgākajām tā laika problēmām astronomijā bija planētu kustības izskaidrojums. Jau 1609. gadā *J. Keplers* bija noskaidrojis, ka katra planēta pārvietojas pa elipsi, kuras vienā fokusā atrodas Saule. Taču vajadzēja fizikāli izskaidrot, kādas iedarbības rezultātā notiek šī kustība. Izmantojot savu atklāto gravitācijas likumu, Ņūtons izvirzīja hipotēzi, ka šī iedarbība ir debess ķermeņu savstarpējā pievilkšanās. No 2. Ņūtona likuma mehānikā izrietēja secinājums, ka konstants spēks piešķir konstantu paātrinājumu; tātad, zinot iedarbības spēku, var atrast paātrinājumu. Savukārt, pēc zināmā paātrinājuma vajadzēja atrast kustības ātrumu, bet pēc ātruma atrast punkta koordinātas katrā laika momentā. Šo uzdevumu Ņūtons vispārināja – viņš aplūkoja abstraktus, laikā mainīgus lielumus, ko nosauca par *fluentām.* Fluentas izmaiņas ātrumu Ņūtons sauca par *fluksiju* un formulēja divas pamatproblēmas:

- no sakarības starp fluentām atrast sakarību starp fluksijām;
- no sakarības starp fluksijām atrast sakarību starp fluentām.

Lietojot mūsdienu terminoloģiju, pirmā veida uzdevums ir no sakarības starp funkcijām atrast sakarību starp atvasinājumiem, bet otrā veida - no sakarības starp atvasinājumiem atrast sakarību starp funkcijām, t.i., risināt diferenciālvienādojumu. Aplūkojot analogus uzdevumus, G.V.Leibnics(1646.-1716.) izveidoja atvasinājuma, diferenciāļa, integrāļa jēdzienus un ieviesa to apzīmējumus. Tādējādi galvenie matemātiskās analīzes un difereciālvienādojumu jēdzieni vēsturiski radās kā matemātiski modeļi, risinot problēmas, ko izvirzīja tā laika zinātne.

Līdz ar dažādu zinātnes nozaru attīstību paplašinājās arī diferenciālvienādojumu lietojumi tādās jomās, kā elektrotehnika, radiotehnika, ķīmija, bioloģija u.c., kas savukārt prasīja pētījumus diferenciālvienādojumu teorijā.

Tādējādi diferenciālvienādojumu nozarē attīstījās divi galvenie virzieni:

- teorētiski pētījumi un atrisināšanas metožu izstrāde;
- praktiski lietojumi, sastādot diferenciālvienādojumus kā dažādu prakses problēmu un parādību matemātiskus modeļus.

Inženierzinātņu un dabaszinātņu bakalaura studiju augstākās matemātikas programmās galvenokārt ir akcentēts pirmais virziens – diferenciālvienādojumu atrisināšana un atrisināšanas metožu pamatojums. Praktiskie lietojumi parādās vēlāk specialitātes priekšmetos fizikā, elektrotehnikā, teorētiskajā mehānikā, materiālu pretestību u.c. Tomēr matemātikas zināšanu praktiskas izmantošanas iespējas ir viens no motīviem, kas 1. kursa studentiem var radīt interesi par apgūstamo matemātikas programmu. Tāpēc augstākās matemātikas kursā bez diferenciālvienādojumu atrisināšanas prasmju apguves ir svarīgi aplūkot arī vienkāršāko diferenciālvienādojumu sastādīšanas metodes.

Diferenciālvienādojumu sastādīšanas uzdevumu atrisināšanai nevar dot sīki izstrādātu algoritmu, tomēr jāievēro šādi vispārīgi norādījumi

- Uzdevuma nosacījumu analīze; izmantojamo fizikas, mehānikas, ķīmijas, bioloģijas u.c. likumu apzināšana un izpēte.
- Diferenciālvienādojuma sastādīšana, kas modelē aplūkojamo procesu.
- diferenciālvienādojuma atrisināšana, vispārīgā atrisinājuma iegūšana.
- Sākuma nosacījumu noteikšana un partikulārā atrisinājuma iegūšana.
- Risinājumā izmantoto parametru aprēķināšana, izmantojot uzdevumā dotos papildnosacījumus.
- Uzdevuma galīgā atrisinājuma noteikšana un tā izmantošana, aprēķinot meklējamos lielumus.
- Atbildes analīze.

Šo jautājumu metodikai veltīts maģistra darbs.

Maģistra darba pamatuzdevumi ir:

- Aplūkot tādu diferenciālvienādojumu atrisināšanas un sastādīšanas metodes, kādus iegūst kā matemātiskus modeļus, risinot vienkāršākus diferenciālvienādojumu sastādīšanas uzdevumus;
- Sagatavot ar atrisinājumiem uzdevumu komplektus studentu patstāvīgajam darbam augstākajā matemātikā par tēmu *diferenciālvienādojumu sastādīšana*.

1. MODEĻI FIZIKĀ UN MATEMĀTIKĀ.

1.1. Modeļa jēdziens.

Paplašinoties matemātisko metožu pielietojumam zinātnē, tika ieviesti modeļu un modelēšanas jēdzieni. Tos izmanto apmācībā un arī runājot par izziņas procesiem. Modeļi ir efektīva teorētisko uzskatu un priekšstatu izteiksmes forma. Modelēšana jeb modeļa sastādīšana, izpēte, ar modeli iegūto rezultātu pārbaude un interpretācija ir viena no visefektīvākajām izziņas metodēm.

Modelis ir oriģināla vienkāršots attēlojums, t.i., nav ņemti vērā daži elementi un sakarības, kuru nozīme, pētot kādu procesu pēc kāda kritērija, nav būtiska. Svarīgi ir pareizi novērtēt, kādi kritēriji ir būtiski, bet kuri nav tik būtiski, t.i., maz ietekmē modeļa darbību. Modelēšanas pamatā ir pēc iespējas vienkāršāka modeļa iegūšana. Šim modelim jābūt tādam, kura īpašības, darbību un likumsakarības var salīdzinoši viegli pētīt ar mūsu rīcība esošajiem līdzekļiem un metodēm. Liela uzmanība jāpievērš tam, lai modelis būtu pietiekami līdzīgs oriģinālam, lai iegūtos rezultātus varētu vispārināt un pielietot oriģinālam.

Viegli ir modeli pārslogot, tāpēc vienam un tam pašam procesam veidojam dažādus modeļus – no vienkāršāka uz sarežģītāku, aizvien pievienojot jaunus faktorus klāt. *[5]*

Modeļa realizācija ir raksturojums, no kāda materiāla un kādā veidā modelis ir iegūts. Ja veiksmīgi ir izvēlēta modeļa realizācija, tad modeli var izpētīt ar vienkāršākiem līdzekļiem nekā tā oriģinālu. Pēc realizācijas veida visus modeļus var iedalīt šādi:

1) *reālie modeļi* (lidmašīnas modelis, akvārijs kā ūdenskrātuves modelis);
2) *simboliskie modeļi* – oriģināla simbolisks apraksts, kas veidots no simboliem un darbībām ar tiem.

Reālajos modeļos nevar viennozīmīgi pateikt, vai procesi, kas notiek modelī, būs spēkā arī oriģinālā.

Simbolisko modeli sauc par *matemātisku modeli*, ja tā elementi ir matemātiski lielumi (visbiežāk - laika funkcijas), bet modeļa struktūra ir veidota no matemātiskām sakarībām starp šiem mainīgajiem, izmantojot matemātiskas operācijas. *[4]*

1.2. Matemātisks modelis.

Par *matemātisku modeli* var uzskatīt jebkuru vienādojumu, nevienādību, funkciju vai vispārīgi – analītisku izteiksmi, kuru iegūstam, risinot kādu uzdevumu vai pētot kādu parādību. Tātad arī *diferenciālvienādojums*, kurš ir iegūts, risinot kādu problēmu, kurā ir jāizmanto funkcijas atvasinājuma jēdziens, ir matemātisks modelis.

Pirms matemātiskā modeļa veidošanas ir jāsastāda pētāmās objektu sistēmas vai parādības pilnīgs apraksts, jāveic visu faktoru un sakarību rūpīga analīze. Tas ir ļoti darbietilpīgs process. Ir jāņem vērā aplūkojamā procesa būtiskās īpašības. Jābūt ļoti uzmanīgam, atšķirot būtiskās no mazāk svarīgajām īpašībām.

Matemātiskā modeļa veidošanas etapi:

1) Vienkāršotas sistēmas izveidošana, atmetot dotajā sistēmā objektus un sakarības, kas nav būtiskas jeb maz ietekmē pētāmo procesu;
2) Sistēmas aprakstīšana ar matemātisku simbolu, terminu un sakarību palīdzību.

Matemātiskā modelēšana ir matemātiskā modeļa sastādīšana un izmantošana. Tā ir efektīva dažādu procesu un parādību izpētes metode.

Galvenie matemātiskās modelēšanas posmi ir šādi:

1) to objektu apzināšanās un izpēte, kas nosaka aplūkojamo parādību;
2) matemātiskā modeļa (vienādojuma, nevienādības u. tml.) sastādīšana;
3) matemātiskā modeļa atrisināšana;
4) atrisinājuma pētīšana;
5) matemātiskā modeļa koriģēšana un izmantošana praksē. *[3]*

Ļoti vienkāršus matemātiskās modelēšanas piemērus aplūko skolā. Tā ir teksta uzdevuma atrisināšana, kur parasti ir jāveic visas tas darbības, kas atbilst gandrīz visiem matemātiskās modelēšanas posmiem:

- *jāizprot un jāapzina jēdzieni;*
- *jāsastāda vienādojums (vienādojumu sistēma, nevienādība);*
- *jāatrisina vienādojums;*
- *ja atrisinājums satur ar burtiem apzīmētus lielumus, tad parasti jāizpēta, kādām parametra vērtībām atrisinājums ir reāls un pozitīvs;*
- *jāpārbauda, vai atrisinājums atbilst uzdevuma nosacījumiem;*
- *jāveic risinājuma pārbaude.*

Aplūkosim piemēru.

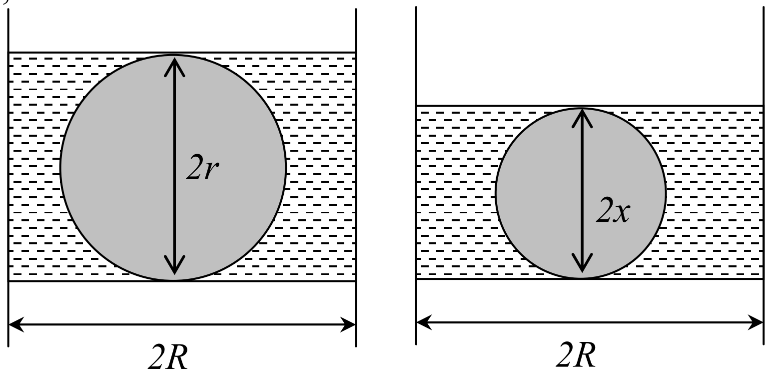
<u>Piemērs.</u>

Uz horizontālas plaknes novietots cilindra veida trauks, kura pamata rādiuss ir R. Traukā ielika metāla lodīti, kuras rādiuss ir r, un ielēja tik daudz ūdens, ka tā līmenis sakrita ar lodītes pieskarplakni. Pēc tam lodīti no trauka izņēma. Noskaidrot, vai var būt lodīte ar citu rādiusu, kuru novietojot uz trauka pamata, tur esošais ūdens līmenis sakritīs ar šīs lodītes pieskarplakni. Kādām sakarībām jāpastāv starp dotajiem lielumiem R un r, lai

a) otrās lodītes rādiuss būtu mazāks nekā pirmās lodītes rādiuss;
b) otrās lodītes rādiuss būtu lielāks nekā pirmās lodītes rādiuss?

Risinājums.

Pieņemsim, ka otrās lodītes rādiuss ir $x \neq r$. *1.1.zīmējumā* attēlots gadījums, kad $x<r$.



1.1. zīm.

Ja traukā ievietotas lodītes rādiuss ir *r,* tad šīs lodītes tilpums ir V_1, bet ūdens un lodītes kopējais tilpums ir V_2, kur

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ un } V_2 = \pi R^2 \cdot 2r.$$

Tādā gadījumā ūdens tilpums ir $V_2 - V_1 = \pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ja aplūko gadījumu, kad traukā ievietotas lodītes rādiuss ir *x,* tad šīs lodītes tilpums ir V_1', bet ūdens un lodītes kopējais tilpums ir V_2', kur

$$V_1' = \frac{4}{3}\pi x^3 \text{ un } V_2' = \pi R^2 \cdot 2x.$$

Tā kā ūdens daudzums nemainās, tad ūdens tilpums ir

$$V_2 - V_1 = V_2' - V_1'.$$

Iegūstam vienādojumu:

$$\pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 \cdot 2x - \frac{4}{3}\pi x^3$$

jeb
$$\frac{4}{3}\pi\left(x^3 - r^3\right) - 2\pi R^2 (x - r) = 0,$$

no kurienes
$$2\pi(x - r)\left(\frac{2}{3}\left(x^2 + xr + r^2\right) - R^2\right) = 0.$$

Tā kā $x \neq r$, tad $x - r \neq 0$ un $\frac{2}{3}\left(x^2 + xr + r^2\right) - R^2 = 0$

jeb
$$2x^2 + 2rx + 2r^2 - 3R^2 = 0.$$

Šī kvadrātvienādojuma saknes ir

$$x_1 = \frac{-r + \sqrt{3\left(2R^2 - r^2\right)}}{2} \text{ un } x_2 = \frac{-r - \sqrt{3\left(2R^2 - r^2\right)}}{2}.$$

Sakne x_2 neatbilst uzdevuma jēgai, jo ir negatīvs skaitlis.

Pābaudīsim, vai sakne x_1 ir pozitīvs skaitlis katram $R \geq r$ vērtībām un $x \neq r$. Tātad sakne x_1 ir reāls pozitīvs skaitlis, ja

$$\begin{cases} 2R^2 > r^2 \\ \sqrt{3\left(2R^2 - r^2\right)} > r \end{cases} .$$

Tā kā *r>0* un *R>0*, tad

$$\begin{cases} R\sqrt{2} > r \\ 6R^2 - 3r^2 > r^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} R\sqrt{2} > r \\ 3R^2 > 2r^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} R\sqrt{2} > r \\ R\sqrt{3} > r\sqrt{2} \end{cases} .$$

Sakne x_1 ir reāls pozitīvs skaitlis, ja

$$\begin{cases} \dfrac{R}{r} > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7 \\ \dfrac{R}{r} > \sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}8 \end{cases} . \tag{1}$$

Atbilstoši uzdevuma jēgai $R \geq r$ jeb $\frac{R}{r} \geq 1$, tad nosacījumi *(1)* ir izpildīti.

Aprēķināsim, kādā gadījumā $x<r$.

Tad
$$\frac{-r + \sqrt{3\left(2R^2 - r^2\right)}}{2} < r,$$

no kurienes
$$\sqrt{6R^2 - 3r^2} < 3r, \quad 6R^2 < 12r^2, \quad R < r\sqrt{2}, \quad \frac{R}{r} < \sqrt{2}.$$

Līdzīgi aplūkojot gadījumu $x>r$, iegūst $\frac{R}{r} > \sqrt{2}.$ Tātad, ja $x=r,$ tad $\frac{R}{r} = \sqrt{2}.$

<u>*Atbilde.*</u>

Traukā ielietā ūdens līmenis sakrīt ar lodītes pieskarplakni, ja lodītes rādiuss $x = \frac{-r + \sqrt{3\left(2R^2 - r^2\right)}}{2}$; ja $1 < \frac{R}{r} < \sqrt{2}$, tad šī lodīte ir mazāka nekā pirmā lodīte; ja $\frac{R}{r} > \sqrt{2}$, tad lielāka; ja $\frac{R}{r} = \sqrt{2}$, tad $x=r$, t.i., uzdevumā aplūkotā situācija ir iespējama tikai ar vienu – sākumā izraudzīto lodīti.

Matemātiskās modelēšanas iespējas ievērojami paplašinās , izmantojot *mainīgos lielumus, funkcijas un to atvasinājumus*. Līdz ar to tradicionālo vidusskolas algebras kursa uzdevumu vietā, kuros kā matemātisku modeli iegūst algebrisku vienādojumu (vai vienādojumu sistēmu), aplūko uzdevumus, kuru *matemātisks modelis ir diferenciālvienādojums*. Nākamajās nodaļās aplūkosim tādu diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes, kādus parasti iegūst, risinot šādus uzdevumus.

2. PIRMĀS KĀRTAS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS KĀ MATEMĀTISKS MODELIS.

2.1. Pirmās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni.

Vienādojumi, kurus aplūko algebrā, satur ar burtu apzīmētu nezināmu skaitli. Atrisināt šādu vienādojumu, nozīmē atrast visas nezināmā lieluma vērtības, ar kurām vienādojums kļūst par identitāti.

Risinot dažādas problēmas matemātikā, fizikā, tehnikā un citās zinātnēs, kā matemātisku modeli iegūst vienādojumus, kas satur ar burtu apzīmētu nezināmu funkciju, šīs funkcijas atvasinājumus un argumentu. Šāda vienādojuma atrisinājums ir funkcija, kura kopā ar saviem atvasinājumiem vienādojumu pārvērš identitātē.

Vienādojumu, kas satur meklējamo (nezināmo) funkciju, šīs funkcijas atvasinājumus un argumentu, sauc par diferenciālvienādojumu.

Ja nezināmā funkcija ir viena argumenta funkcija, tad diferenciālvienādojumu sauc par *parasto diferenciālvienādojumu.*

Ja vienādojums satur vairākargumentu funkciju un tās parciālos atvasinājumus, tad to sauc par *parciālo diferenciālvienādojumu.*

Diferenciālvienādojumā ietilpstošās nezināmās funkcijas atvasinājuma augstāko kārtu sauc par *diferenciālvienādojuma kārtu.*

Vispārīgā veidā *n-tās kārtas parasto diferenciālvienādojumu* pieraksta šādi:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Ja no šī vienādojuma izsaka augstākās kārtas atvasinājumu $y^{(n)}$, tad iegūst n-tās kārtas diferenciālvienādojuma *normālformu*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

1. kārtas diferenciālvienādojuma *vispārīgais veids* ir

$$F\left(x, y, y'\right) = 0.$$

un *normālforma*

$$y' = f\left(x; y\right).$$

1. kārtas diferenciālvienādojuma galvenie pamatjēdzieni ir

- sākuma nosacījums;
- vispārīgais atrisinājums;
- partikulārais atrisinājums;
- Košī uzdevums;
- singulārais atrisinājums;
- integrāllīnijas;
- atrisinājuma eksistence un unitāte.

Aplūkosim šos jēdzienus.

Parasti kopā ar diferenciālvienādojumu ir dota arī nezināmās funkcijas vērtība y_0 kādai noteiktai argumenta vērtībai x_0. Šādu informāciju par meklējamo funkciju sauc par *sākuma nosacījumu* un to pieraksta kā vienādību $y_0=y(x_0)$.

Par *diferenciālvienādojuma atrisinājumu* sauc jebkuru funkciju, kuru kopā ar tās atvasinājumiem ievietojot dotajā diferenciālvienādojumā, iegūst identitāti. *[2]*

Par 1. kārtas diferenciālvienādojuma *vispārīgo atrisinājumu* sauc funkciju $y=\varphi(x,C)$, kas satur vienu brīvi izraudzītu konstanti, un

1) šī funkcija apmierina vienādojumu ar jebkuru konstantes C vērtību;
2) jebkuram sākuma nosacījumam $y_0=y(x_0)$ var atrast atbilstošu konstantes C vērtību.

Ja diferenciālvienādojuma atrisinājumu nevar izteikt atklātas funkcijas veidā, bet to iegūst kā apslēptu funkciju $\Phi(x,y,C)=0$, tad šādu izteiksmi sauc par *diferenciālvienādojuma vispārīgo integrāli.*

Funkciju, ko iegūst, ievietojot vispārīgajā atrisinājumā konstantes vietā noteiktu skaitli, sauc par *partikulāro atrisinājumu.[2]*

Par *Košī uzdevumu* sauc partikulārā atrisinājuma atrašanas uzdevumu, izmantojot vispārīgo atrisinājumu un sākuma nosacījumu.

Par diferenciālvienādojuma *singulārajiem atrisinājumiem* sauc funkcijas, kuras apmierina doto diferenciālvienādojumu, bet tās nevar iegūt no vispārīgā atrisinājuma ne ar kādu konstantes vērtību.

Par *integrāllīnijām* sauc diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu grafikus.

Atrisinājuma eksistences un unitātes teorēma.

Ja diferenciālvienādojuma $y'=f(x,y)$ labās puses funkcija $f(x,y)$ un tās parciālais atvasinājums $f'_y(x,y)$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā xOy plaknes apgabalā, tad caur jebkuru šī apgabala punktu $M_0(x_0,y_0)$ iet tikai viena integrāllīnija, t.i., eksistē tikai viens diferenciālvienādojuma atrisinājums $y=\varphi(x)$.*[1]*

2.2. Vienkāršāko 1. kārtas diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes.

2.2.1. Mainīgo atdalīšanas metode.

Dots pirmās kārtas diferenciālvienādojums $F(x,y,y')=0$, no kura var izteikt 1. kārtas atvasinājumu $y'=f(x,y)$. Ja šīs vienādības labo pusi var sadalīt divos reizinātājos tā, ka viens no reizinātājiem satur tikai mainīgo lielumu *x*, bet otrs – mainīgo lielumu *y*, t.i., $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$, tad saka, ka diferenciālvienādojums ir ar atdalāmiem mainīgiem.

Diferenciālvienādojuma $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ ***atrisināšanas metode.***

● y' aizvieto ar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

● Diferenciālvienādojuma abas puses reizina ar $\frac{dx}{f_2(y)}$, kur $f_2(y)\neq 0$:

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)\,dx$$

● Iegūtais vienādojums ir divu diferenciāļu vienādība un to nenoteiktie integrāļi atšķiras par konstantu saskaitāmo:

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$$

● Rezultātā iegūst $\varphi_1(y)=\varphi_2(x)+C$, kur *C* ir brīvi izraudzīta konstante.

● Izsakot *y* no iegūtās vienādības atrod diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu:

$$y=\varphi(x,C).$$

Ja *y* nevar izteikt atklātā veidā, tad atrisinājumu uzdod ar apslēptu funkciju $\Phi(x,y,C)=0$, t.i., ar vispārīgo integrāli.

Tā kā atdalot mainīgos, pieņem, ka $f_0(y)\neq 0$, tad ir jāpārbauda, vai vienādība $f_2(y)=0$ nesatur singulāros atrisinājumus. Tātad, jāatrod *y* vērtības, atrisinot vienādojumu $f_2(y)=0$, un jāpārbauda, vai tās apmierina doto diferenciālvienādojumu. Turklāt ir jāpārliecinās, vai tās var iegūt no vispārīgā atrisinājuma.

<u>Piemērs.</u> *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $y'-3x\sqrt[3]{y^2}=0$.

Izteiksim y' un aizstāsim to ar $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = 3x\sqrt[3]{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x\sqrt[3]{y^2}$$

Atdalot mainīgos, iegūst:

$$y^{-\frac{2}{3}}dy = 3xdx,$$

no kurienes

$$\int y^{-\frac{2}{3}}dy = \int 3xdx,$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}x^2 + C_1,$$

$$y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)^3.$$

Jāpārbauda singulāro atrisinājumu eksistence. Atdalot mainīgos, vienādojuma abas puses dalījām ar $\sqrt[3]{y^2}$. Šī izteiksme ir vienāda ar nulli, ja *y=0*. Var pārliecināties, ka funkcija *y=0* apmierina doto vienādojumu. Singulārais atrisinājums ir *y=0*, jo to nevar iegūt no vispārīgā atrisinājuma ne ar kādām konstantes vērtībām.

Tātad vispārīgais atrisinājums ir $\underline{\underline{y = \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right)^3}}$, bet singulārais atrisinājums ir $\underline{\underline{y=0}}$.

2.2.2. Pirmās kārtas homogēna diferenciālvienādojuma atrisināšana.

1. *kārtas* diferenciālvienādojumu $y' = f(x,y)$ sauc par *homogēnu attiecībā pret mainīgajiem x un y,* ja šo vienādojumu var pārveidot formā $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$.[1]

Piemēram, diferenciālvienādojums $xyy' = x^2 - 2y^2$ ir homogēns diferenciālvienādojums, jo , dalot abas vienādojuma puses ar *xy*, iegūstam

$$y' = \frac{x}{y} - 2\frac{y}{x} \quad jeb \quad y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} - 2\frac{y}{x} \quad .$$

Atrisināšanas metode.

Lai atrisinātu homogēnu diferenciālvienādojumu $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$, *(1)*

lieto substitūciju $z = \frac{y}{x}$,

no kurienes $y = x \cdot z$

un $y' = (x \cdot z)' = x' \cdot z + x \cdot z' = z + xz'$.

Iegūtās *y* un y' izteiksmes ievieto vienādojumā *(1)* :

$$z + xz' = h(z).$$

Tas ir 1. kārtas diferenciālvienādojums attiecībā pret palīgfunkciju z , kuru var atrisināt ar mainīgo atdalīšanas metodi.

Izsakot z', iegūst:

$$z' = \frac{h(z) - z}{x}$$

jeb $\frac{dz}{dx} = \frac{h(z) - z}{x}$.

Ja $h(z) - z \neq 0$, tad atdalot mainīgos, atrod:

$$\frac{dz}{h(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

no kurienes $\int \frac{dz}{h(z) - z} = \int \frac{dx}{x}$.

Pēc integrēšanas un pārveidojumiem iegūto funkciju apzīmēsim ar $z = \varphi(x, C)$.

Izmantojot substitūciju $y = x \cdot z$, atrod dotā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu:

$$y = \varphi(x, C) \cdot x.$$

Turklāt ir jāpārbauda vai vienādība $h(z)-z=0$, t.i., $h\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}=0$ nesatur singulāros atrisinājumus.

<u>Piemērs.</u> *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $xyy'=x^2-2y^2$.

Izteiksim y': $$y'=\frac{1}{\frac{y}{x}}-2\frac{y}{x}\;.$$

Izmantojot substitūciju $z=\dfrac{y}{x}$,

no kurienes $y=x\cdot z$ *un* $y'=z+xz'$,

iegūst : $z+xz'=\dfrac{1}{z}-2z$ *jeb* $xz'=\dfrac{1}{z}-3z$.

Atrisināsim ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$xz'=\frac{1-3z^2}{z},$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1-3z^2}{z},$$

$$dz\cdot\frac{z}{1-3z^2}=\frac{dx}{x}\;,\;\text{kur}\;\;\frac{1-3z^2}{z}\neq 0$$

Integrējot abas vienādojuma puses, atrod:

$$\int\frac{zdz}{1-3z^2}=\int\frac{dx}{x}\;,$$

$$-\frac{1}{6}\int\frac{d\left(1-3z^2\right)}{1-3z^2}=\int\frac{dx}{x}\;,$$

$$-\frac{1}{6}\ln\left|1-3z^2\right|=\ln|x|-\frac{1}{6}\ln|C_1|\;,$$

$$\ln\left|1-3z^2\right|=\ln|C_1|-6\ln|x|,$$

$$1-3z^2=\frac{C_1}{x^6}\;,$$

$$3z^2=1-\frac{C_1}{x^6}\;,$$

$$z^2=\frac{1}{3}-\frac{C_1}{3x^6}\;.$$

Ņemot vērā , ka $z=\dfrac{y}{x}$, tad

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{1}{3}-\frac{C_1}{3x^6}$$

jeb $$\underline{\underline{y^2=\frac{1}{3}x^2-\frac{C}{x^4}}},\;\;\text{kur}\;\;C=\frac{1}{3}C_1.$$

Tā kā atdalot mainīgos, ir jāņem vērā, ka $\dfrac{1-3z^2}{z}\neq 0$, tad

$$1-3z^2\neq 0 \;\Rightarrow\; 3z^2\neq 1 \;\Rightarrow\; z^2\neq\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; z\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\text{ t.i.,}$$

1) $\dfrac{y}{x}\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ jeb $y\neq\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 2) $\dfrac{y}{x}\neq-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ jeb $y\neq-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Pārbaudīsim, vai šīs funkcijs apmierina doto diferenciālvienādojumu:

$$xyy'=x^2-2y^2$$

1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x\cdot\frac{x}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\overset{?}{=}x^2-2\cdot\frac{x^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}$$

2) $y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$$y'=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\overset{?}{=}x^2-2\cdot\frac{x^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{3}=\frac{x^2}{3}$$

Tātad funkcijas $y=\pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ apmierina diferenciālvienādojumu, bet tās nav singulārie atrisinājumi, jo šīs funkcijas var iegūt no vispārīgā atrisinājuma, ja *C=0*. Tātad diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\underline{\underline{y^2=\frac{1}{3}x^2-\frac{C}{x^4}}}\ .$$

2.2.3. Pirmās kārtas lineāra diferenciālvienādojuma atrisināšana.

Par *1. kārtas lineāru diferenciālvienādojumu* sauc tādu vienādojumu, kas meklējamo funkciju *y(x)* un tās atvasinājumus satur lineāri un vispārīgā veidā pieraksta :

$$y' + g(x)y = h(x), \tag{1}$$

kur *g(x)* un *h(x)* ir nepārtrauktas funkcijas (var būt arī konstantes).

<u>Piemēri</u>:

$$y' + y = 3x$$

$$y' + \left(x^2 - 1\right)y = \frac{1}{e^x}$$

$$2y' + y\sin x = \cos x$$

Pirmās kārtas lineāru diferenciālvienādojumu *(1)* atrisina, lietojot substitūciju

$$y = u(x)\cdot v(x), \tag{2}$$

kur *u(x)* un *v(x)* ir nezināmas funkcijas, kuru reizinājums apmierina diferenciālvienādojumu *(1)* (vai arī ar konstanšu variāciju metodi).

Tad $y' = \left(u(x)\cdot v(x)\right)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ (3)

Ievietosim diferenciālvienādojumā *(1)* iegūtās izteiksmes *(2)* un *(3)* un vienkāršosim :

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + g(x)u(x)v(x) = h(x)$$

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\left(v'(x) + g(x)v(x)\right) = h(x) \tag{4}$$

Izvēlēsimies funkciju *v(x)* tā, lai

$$v'(x) + g(x)v(x) = 0 \tag{5}$$

Atrisinot vienādojumu *(5)* ar mainīgo atdalīšanas metodi, noteiksim *v(x)* :

$$v(x) = \varphi_1(x)$$

(konstanti *C* var ņemt *0*, jo vienādība *(5)* ir spēkā jebkuram partikulāram atrisinājumam).

Iegūto atrisinājumu ievietosim vienādojumā *(4)* un iegūstam:

$$u'(x)\cdot\varphi_1(x) + u(x)\cdot 0 = h(x)$$

Jeb $\quad u'(x)\cdot\varphi_1(x) = h(x)$

Tas ir vienādojums ar atdalāmiem mainīgiem un, atrisinot to, iegūst

$$u(x) = \varphi_2(x, C)$$

Formulā *(2)* ievietosim iegūtās *u(x)* un *v(x)* izteiksmes:

$$y = u(x)\cdot v(x) = \varphi_2(x, C)\cdot\varphi_1(x) \tag{6}$$

tātad esam ieguvuši diferenciālvienādojuma *(1)* vispārīgo atrisinājumu *(6)*.

<u>Piemērs</u>: *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $y' + \dfrac{y}{x} = x^2$. *(1*)*

Tas ir 1. kārtas diferenciālvienādojums, kur $g(x) = \dfrac{1}{x}$ un $h(x) = x^2$.

Lietosim substitūciju: $y = u\cdot v$, (2*)

tad $\quad y' = u'v + uv'$ (3*)

Ievietosim vienādojumā *(1*)* iegūtās izteiksmes *(2*)* un *(3*)* un vienkāršosim:

$$u'v + uv' + \frac{u \cdot v}{x} = x^2$$

jeb
$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = x^2 \qquad (4^*)$$

Izvēlēsimies v tādu, ka $v' + \frac{v}{x} = 0$, tad $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$

un
$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}\ , \qquad (5^*)$$

no kurienes:

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{dx}{x}$$

jeb
$$\ln|v| = -\ln|x|\ ,$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|\ .$$

Tātad
$$v = \frac{1}{x}.$$

Ievietosim $v = \frac{1}{x}$ vienādojumā *(4*)* un vienkāršosim:

$$u' \cdot \frac{1}{x} + u \cdot 0 = x^2, \quad u' \cdot \frac{1}{x} = x^2\ , \quad u' = x^3, \quad \frac{du}{dx} = x^3\ , \quad du = x^3 dx.$$

Integrējot vienādojuma abas puses, iegūst:

$$\int du = \int x^3 dx,$$

$$u = \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Tā kā $y = u \cdot v$, tad atrisinājums ir $y = \left(\frac{1}{4}x^4 + C\right) \cdot \frac{1}{x}$

jeb
$$\underline{\underline{y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{C}{x}}}.$$

2.3. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir 1. kārtas diferenciālvienādojums.

2.3.1. Atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas uzdevumi.

Lai sastādītu diferenciālvienādojumu, bieži tiek izmantota *atvasinājuma ģeometriskā interpretācija,* t.i., funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar funkcijas grafikam punktā $M(x_0, y_0)$ novilktās pieskares virziena koeficientu:

$$k = f(x_0) = tg\alpha,$$

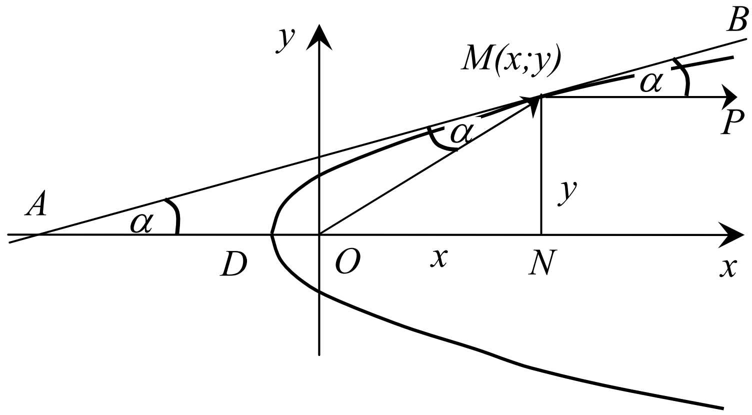
kur α ir pieskares un Ox ass veidotais leņķis.

Aplūkosim piemērus, kur izmanto atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju, sastādot diferenciālvienādojumus. Vienkāršākos gadījumos šādos uzdevumos ir jāatrod līnija (funkcijas grafiks), kuras pieskarei piemīt kāda uzdevuma nosacījumos norādīta īpašība. Risinājuma gaitā ir jāsastāda sakarība starp pieskares virziena leņķa tangensu un pieskaršanās punkta koordinātām $(x;y)$. Šos uzdevumus sauksim par *„standartuzdevumiem”*, jo to risinājumos jāizmanto galvenokārt tikai elementāras ģeometriskas un trigonometriskas sakarības. Atvasinājuma ģeometriskā interpretācija jāizmanto arī dažādos lietišķos uzdevumos, kur matemātiskā modeļa sastādīšana saistīta ar fizikas likumu lietošanu, darbojošos spēku novērtēšanu u.c. speciāliem norādījumiem. Šādus uzdevumus sauksim par *problēmuzdevumiem*.

Atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas problēmuzdevumi.

1. Koordinātu sākumpunktā atrodas gaismas avots. Noteikt spoguļa formu, no kura atstarojoties visi gaismas stari iet paralēli Ox asij. Attālums no gaismas avota līdz spoguļa virsotnei ir a.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.



2.1. zīm.

$y=y(x)$ – spoguļa un xy plaknes šķēluma līnija
$M(x;y)$ – līnijas $y(x)$ punkts
OM – krītošais gaismas stars
MP – atstarotais gaismas stars

AB- pieskare

$\angle BMP=\angle AMO=\alpha$ – gaismas atstarošanas likums

$\angle BMP=\angle MAO=\alpha$ – kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm

ΔAOM – vienādsānu trijstūris: $AO=OM$

ΔONM: $OM=\sqrt{ON^2+NM^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

$AN=AO+ON=\sqrt{x^2+y^2}+x$

ΔANM: $tg\alpha=\frac{MN}{AN}$

$\Rightarrow \qquad y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$ - homogēns 1. kārtas diferenciālvienādojums

$DO=a \quad \Rightarrow \quad y|_{x=-a}=0$ - sākuma nosacījums

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

Pārveido doto vienādojumu homogēna diferenciālvienādojuma normālformā:

$$y'=\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}+1}$$

Substitūcija: $\frac{y}{x}=z$, $y=zx$, $y'=z'x+z$

Iegūst: $z'x+z=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1}$,

$$z'x=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}+1}-z, \quad z'x=\frac{-z\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}+1},$$

$$\frac{dz}{dx}x=\frac{-z\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2}+1}, \quad \int\frac{\sqrt{1+z^2}+1}{z\sqrt{1+z^2}}dz=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{1+z^2-1}{z\sqrt{1+z^2}\left(\sqrt{1+z^2}-1\right)}dz=-\int\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{zdz}{1+z^2-\sqrt{1+z^2}}=-\ln|x|,$$

Atrod integrāli

$$\int\frac{zdz}{1+z^2-\sqrt{1+z^2}}=\begin{bmatrix}1+z^2=t^2, \\ z=\sqrt{t^2-1} \\ dz=\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}\end{bmatrix}=\int\frac{\sqrt{t^2-1}tdt}{\sqrt{t^2-1}\left(t^2-t\right)}=\int\frac{dt}{t-1}=\ln|t-1|+C$$

Tātad $\quad \ln\left|\sqrt{1+z^2}-1\right|=-\ln|x|+\ln|C|, \quad \ln\left|\sqrt{1+z^2}-1\right|=\ln\left|\frac{C}{x}\right|,$

$$\sqrt{1+z^2}-1=\frac{C}{x}, \quad \sqrt{1+z^2}=1+\frac{C}{x}.$$

Tā kā $\frac{y}{x}=z$, tad diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisnājums ir

$$\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=1+\frac{C}{x} \quad \text{jeb} \quad \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\frac{C}{x}+1,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C, \quad x^2+y^2=x^2+2Cx+C^2,$$

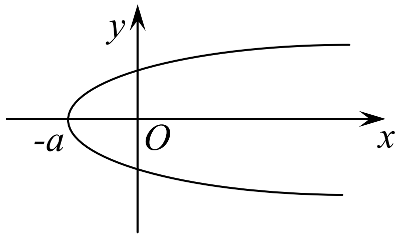
$$y^2=2Cx+C^2.$$

Izmantojot sākuma nosacījumu $\left.y\right|_{x=-a}=0$, atrod C vērtību

$$-2Ca+C^2=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0, \; C_2=2a$$

Partikulārais atrisinājums

$$y^2=0, \; y=0 \text{ vai } \quad y^2=4ax+4a^2$$



2.2. zīm.

Atrisinājuma analīze.

1) $y=0$ neatbilst uzdevuma fizikālai jēgai
2) $y^2=4ax+4a^2$

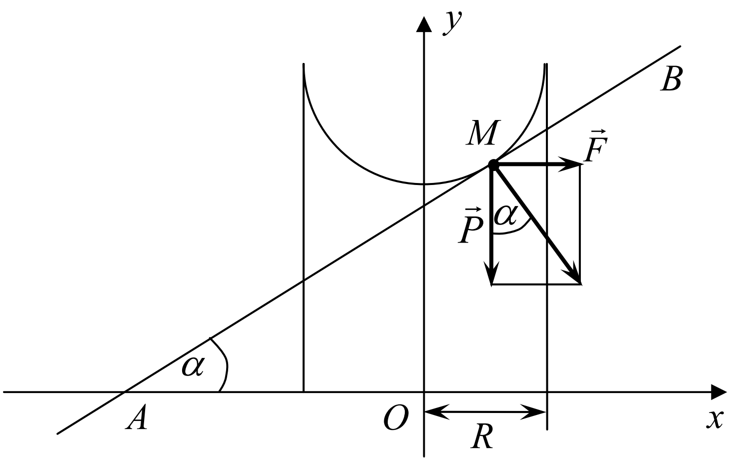
$y^2=4a(x+a)$ - parabola; virsotne punktā *(-a;0),* fokuss punktā *(0;0),* parametrs $p=2a$ (*2.2. zīm*)

Atbilde: spogulim ir rotācijas paraboloīda forma, ko veido parabola $y^2=4a(x+a)$, rotējot ap Ox asi.

2. Cilindrisks trauks ar šķidrumu vienmērīgi rotē ap savu simetrijas asi ar leņķa ātrumu ω. Noteikt šķidruma virsmas formu rotācijas laikā, ja cilindra pamata rādiuss ir R un simetrijas ass – vertikāla.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

Traukam rotējot, šķidruma virsma ieliecas un aksiālšķēlumā veido ap rotācijas asi simetrisku līniju. Izvēlas koordinātu asis tā, kā parādīts *2.3. zīmējumā.*



2.3. zīm.

y=y(x) –šķidruma virsmas un *xy* plaknes šķēluma līnija
M(x;y) – līnijas *y= y(x)* punkts (šķidruma virsmas materiāls punkts ar masu *m*)
AB– līnijas *y= y(x)* pieskare punktā *M*
α – pieskares *AB* virziena leņķis
P=mg – punkta *M* smaguma spēks
x – punkta *M* rotācijas rādiuss

$F = \frac{mv^2}{x}$ - rotācijas centrbēdzes spēks, kas darbojas uz punktu *M*

$\vec{F} + \vec{P}$ - rezultējošais spēks, vērsts perpendikulāri pieskarei *AB*, kad rotējošā šķidruma virsma ir nostabilizējusies

$v = \omega x$ - rotācijas lineārā un leņķa ātruma sakarība

$$F = \frac{mv^2}{x} = \frac{m\omega^2 x^2}{x} = m\omega^2 x$$

$$tg\alpha = \frac{F}{P} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$y' = \frac{\omega^2}{g} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2}{g} x, \quad dy = \frac{\omega^2}{g} xdx, \quad \int dy = \frac{\omega^2}{g} \int xdx,$$

$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$ - diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums

Ja griešanās laikā šķidruma līmenis pie trauka sienas ir augstumā *H*, tad var izmantot sākuma nosacījumu

$$y\big|_{x=R} = H .$$

Tātad $H = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + C,$

no kurienes $C = H - \frac{\omega^2}{2g} R^2$

un $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + H - \frac{\omega^2}{2g} R^2$ - partikulārais atrisinājums.

Atrisinājuma analīze.

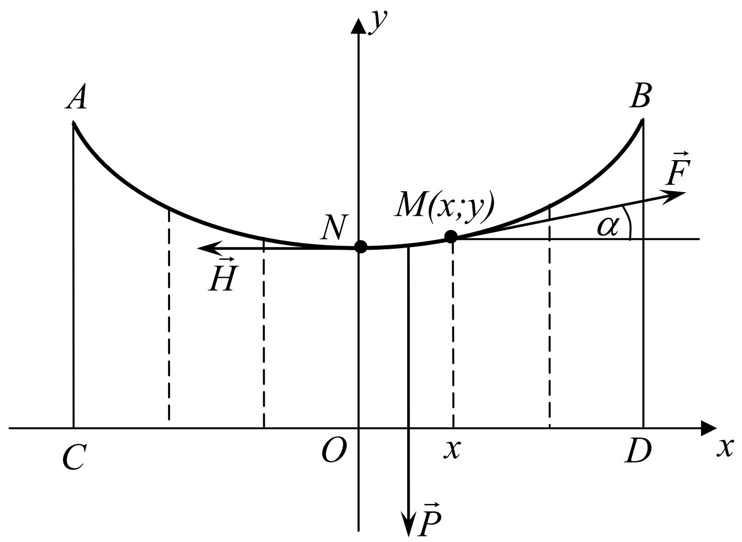
Šķēluma līnija ir parabola, kuras forma ir atkarīga no trauka griešanas leņķa ātruma ω.

Atbilde: Šķidruma virsmai ir rotācijas paraboloīda forma.

3. Tilts iekārts trosē, kuras gali vienādā augstumā nostiprināti. Noteikt troses formu, neievērojot tās svaru, ja attālums no tilta viduspunkta līdz trosei ir *a*.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

Izvēlas koordinātu sistēmu tā, kā parādīts *2.4. zīmējumā*. Atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, trose ir pret *Oy* asi simetriska līnija.



2.4. zīm.

AB– trose, kurai ir līnijas *y= y(x)* forma

CD – tilts

NO=a - attālums no tilta viduspunkta līdz trosei

M(x;y) – troses punkts

NM – troses loks intervālā *[0;x]*

$\vec{F}$ - loka *NM* galapunktam *M* pieliktais loka sastiepuma spēks, atrodas uz līnijas pieskares, kuras virziena leņķis ir α.

$\vec{H}$ - loka *NM* galapunktam *N* pieliktais loka sastiepuma spēks, atrodas uz līnijas minimuma punktā novilktās pieskares, kas paralēla *Ox* asij.

$\vec{P}$ - tilta daļas svars, pielikts loka *NM* viduspunktā, un proporcionāls intervāla *[0;x]* garumam *x*, t.i., $P = kx$.

Spēku projekcijas uz koordinātu asīm:

$$proj_{Ox}\vec{P} = 0,\ proj_{Ox}\vec{F} = F\cos\alpha,\ proj_{Ox}\vec{H} = -H,$$
$$proj_{Oy}\vec{P} = -P,\ proj_{Oy}\vec{F} = F\sin\alpha,\ proj_{Oy}\vec{H} = 0.$$

Spēku līdzsvara nosacījums:

$$\vec{P} + \vec{H} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} proj_{Ox}\left(\vec{P} + \vec{H} + \vec{F}\right) = 0 \\ proj_{Oy}\left(\vec{P} + \vec{H} + \vec{F}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} proj_{Ox}\vec{P} + proj_{Ox}\vec{H} + proj_{Ox}\vec{F} = 0 \\ proj_{Oy}\vec{P} + proj_{Oy}\vec{H} + proj_{Oy}\vec{F} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 - H + F\cos\alpha = 0 \\ -P + 0 + F\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{H}{F} \\ \sin\alpha = \dfrac{P}{F} = \dfrac{kx}{F} \end{cases}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{kx \cdot F}{F \cdot H} = \frac{k}{H}x$$

$$tg\alpha = y', \qquad y' = \frac{k}{H}x$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{H}x, \quad dy = \frac{k}{H}xdx, \quad \int dy = \frac{k}{H}\int xdx$$

$y = \frac{k}{2H}x^2 + C$ - vispārīgais atrisinājums

$y\big|_{x=0} = a$ - sākuma nosacījums

$$a=0+C, \quad C=a$$

$y = \frac{k}{2H}x^2 + a$ - partikulārais atrisinājums (parabola)

Atrisinājuma analīze.

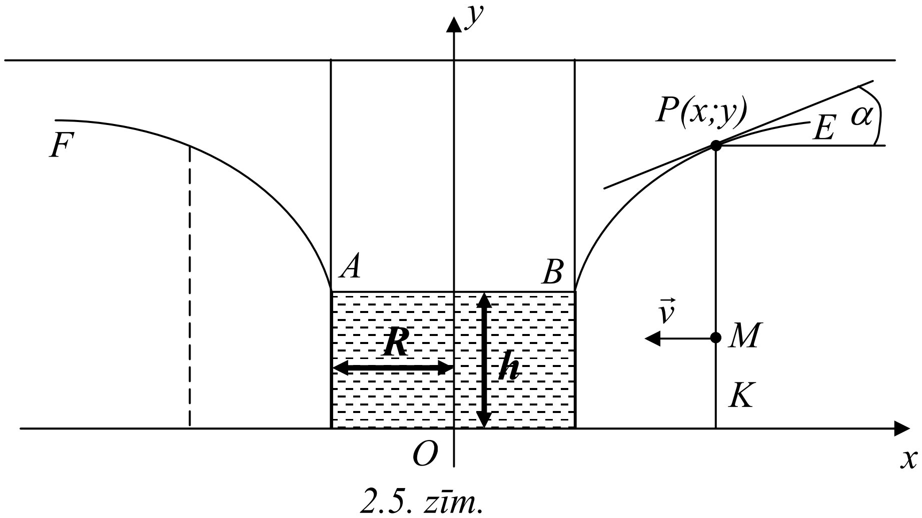
Trosei ir parabolas forma, kas atkarīga no troses sastiepuma spēka tās viduspunktā $\vec{H}$ un proporcionalitātes koeficienta k – vienai garuma vienībai atbilstošās tilta daļas svara.

Atbilde: Trosei ir parabolas $y = \frac{k}{2H}x^2 + a$ forma.

4. Noteikt gruntsūdens virsmas formu ap cilindrisku aku, kuras rādiuss R un ūdens dziļums akā h, ja ūdens daudzums akā ir nemainīgs, t.i., ieplūdušais ūdens daudzums vienāds ar izsmeltā ūdens daudzumu.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

Izvēlās koordinātu sistēmu tā, kā parādīts *2.5. zīmējumā*.



2.5. zīm.

Ja ūdens daudzums akā ir nemainīgs, tad gruntsūdens virsmai ap aku ir noteikta forma.

AB– ūdens līmenis akā

BE, AF - *y= y(x)* gruntsūdens virsmas šķēluma līnijas ar *xy* plakni
P(x;y) – punkts uz gruntsūdens virsmas
v – gruntsūdens filtrēšanās ātrums akas virzienā punktā *M*, kas atrodas zem punkta *P(x;y)*
α - līnijas *y= y(x)* punktā *M* novilktās pieskares virziena leņķis
$v = \lambda tg\alpha$ - gruntsūdens filtrēšanās ātrums visos punktos zem punkta *P* proporcionāls gruntsūdens virsmas slīpuma leņķa tangensam.
Q – ūdens daudzums, kas laika vienībā filtrējas akas virzienā caur cilindrisku virsmu ar veiduli *PK* (saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem – konstants lielums)

$$Q = 2\pi xy \cdot v = 2\pi xy\lambda tg\alpha = 2\pi xy\lambda y'$$

$$xy\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{2\pi\lambda}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$ydy = \frac{Q}{2\pi\lambda}\frac{dx}{x}, \quad \int ydy = \frac{Q}{2\pi\lambda}\int\frac{dx}{x}, \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{Q}{2\pi\lambda}\ln x + \frac{C}{2},$$

$y^2 = \frac{Q}{\pi\lambda}\ln x + C$ - vispārīgais atrisinājums

$y\big|_{x=R} = h$ - sākuma nosacījums

$$h^2 = \frac{Q}{\pi\lambda}\ln R + C, \quad C = h^2 - \frac{Q}{\pi\lambda}\ln R$$

$$y^2 = \frac{Q}{\pi\lambda}\ln x + h^2 - \frac{Q}{\pi\lambda}\ln R = h^2 + \frac{Q}{\pi\lambda}\ln\frac{x}{R}$$

$y = \sqrt{h^2 + \frac{Q}{\pi\lambda}\ln\frac{x}{R}}$ - partikulārais atrisinājums.

Atrisinājuma analīze.

Uzdevuma fizikālai jēgai atbilst nosacījums $x \geq R$.

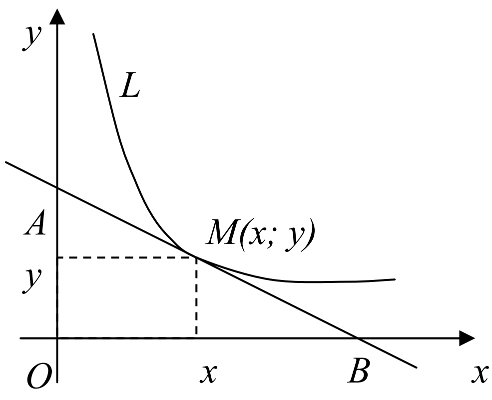
Atbilde: gruntsūdens virsma ir rotācijas virsma, ko veido līnija $y = \sqrt{h^2 + \frac{Q}{\pi\lambda}\ln\frac{x}{R}}$, rotējot ap *Oy* asi intervālā $[R;+\infty]$.

Atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas standartuzdevumi.

1. Atrast līniju, kas iet caur punktu $M(\sqrt{2};2)$, ja tās brīvi izraudzītā punktā novilktās pieskares virzienā koeficents ir divas reizes lielāks nekā šī punkta ordinātes attiecība pret abscisu.

Atrisinājums.

Apzīmēsim nezināmo funkciju ar *y=f(x)* un pieņemsim, ka brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare *AB* (sk. *2.6. zīm*).



2.6. zīm.

Taisnes *AB* pieskares koeficents *k* ir divas reizes lielāks nekā $\frac{y}{x}$ katrā funkcijas *f(x)* punktā, t.i.: $k=2\frac{y}{x}$.

Tā kā $k=tg\alpha = y'$, tad iegūstam diferenciālvienādojumu $y' = 2\frac{y}{x}$.

To var atrisināt ar mainīgo atdalīšanos metodi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

no kurienes $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$

jeb $y=Cx^2$.

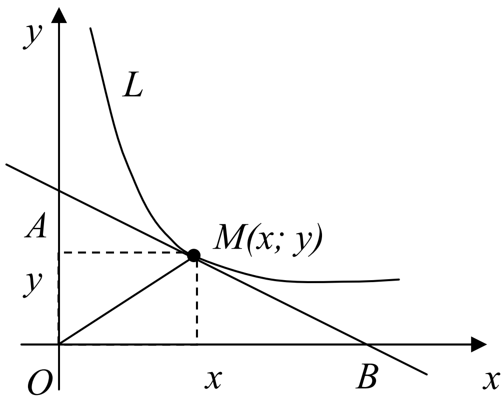
Tā kā funkcijas grafiks iet caur punktu $M(\sqrt{2};2)$, tad iegūstam sākuma nosacījumu $y(\sqrt{2})=2 \quad \Rightarrow 2=(\sqrt{2})^2\cdot C$ jeb $C=1$.

Tad $y=x^2$

Atbilde: meklējamā līnija ir parabola $y=x^2$.

2. Atrast līniju, kuras brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare uz Oy ass atšķeļ nogriezni, kura garums ir vienāds ar pieskaršanās punkta attālumu līdz koordinātu sākumpunktam.

Atrisinājums.



2.7. zīm.

Tātad līknes *L* pieskare ir *AB* (sk. 2.7. zīm.). Pieskares vienādojums ir

$$Y-y= y'(X - x)$$

Ja $X=0$, tad $Y=OA$, kur $AO=OM=\sqrt{x^2 + y^2}$.

Līdz ar to

$$\sqrt{x^2 + y^2} - y = -y'x,$$

no kurienes $$y = \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}. \qquad (1)$$

Tas ir 1. kārtas homogēns diferenciālvienādojums, kuru atrisinot lieto substitūciju :

$$u = \frac{y}{x},$$

tad $$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Ievietojot iegūtās izteiksmes vienādojumā *(1),* iegūst diferenciālvienādojumu ar atdalāmiem mainīgiem:

$$u + x\frac{dy}{dx} = u - \sqrt{1+u^2}$$

jeb $$x\frac{du}{dx} = -\sqrt{1+u^2}\ .$$

Atdalot mainīgos un atrisinot vienādojumu, iegūst:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right| = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = \frac{C}{x},$$

$$1 + u^2 = \frac{C^2}{x^2} - 2\frac{Cu}{x} + u^2,$$

no kurienes $$u = \frac{C^2 - x^2}{2Cx}.$$

Tā kā $u = \dfrac{y}{x}$, tad $y = \dfrac{C^2 - x^2}{2C}$.

Atbilde: tātad meklējamā līnija ir parabola $y = \dfrac{C^2 - x^2}{2C}$.

3. Atrast līniju, kas iet caur punktu *A(0; - 2)*, ja tās brīvi izraudzītā punktā novilktās pieskares virziena koeficients ir 3 reizes lielāks nekā šī punkta ordināta.

Atrisinājums.

Dots: $k = y' = 3y$, $A(0;-2) \in y(x)$

Atrisinot diferenciālvienādojumu $y' = 3y$,

iegūst $$\frac{dy}{dx} = 3y\,, \quad \int\frac{dy}{y} = 3\int dx\,,$$

$$\ln|y| = \ln e^{3x} + \ln|C|,$$

no kurienes $$y = Ce^{3x}.$$

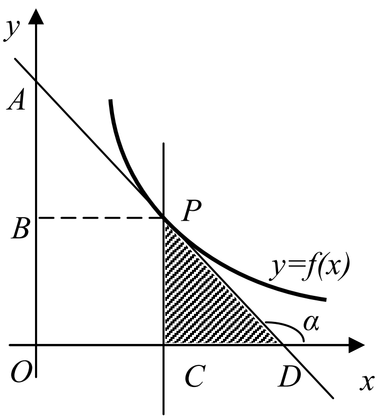
No sākuma nosacījuma $y\big|_{x=0} = -2$

iegūst $$y = -2e^{3x}.$$

Atbilde: meklējamā līnija ir eksponentfunkcijas $y = -2e^{3x}$ grafiks.

4. Pieskare jebkurā līknes punktā *P*, abscisu ass un taisne, kas iet caur punktu *P* paralēli *Oy* asij, veido figūru ar konstantu laukumu a^2. Atrast šo līkni.

Atrisinājums.



2.8. *zīm.*

Dots: $S(PCD) = a^2$ un $PC \parallel Oy$

$$S(PCD) = \frac{1}{2} PC \cdot CD = a^2$$

Tā kā $PC=y$, tad $CD = \frac{2a^2}{y}$.

$$tg\left(180^\circ - \alpha\right) = \frac{PC}{CD}$$

Tādējādi $-tg\alpha = \frac{y^2}{2a^2}$,

no kurienes $y' = -\frac{y^2}{2a^2}$.

Atrisinot diferenciālvienādojumu $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2a^2}$,

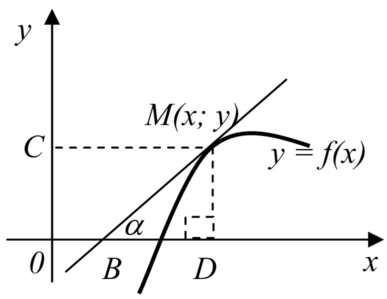
iegūst $-\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2a^2} \int dx$, $\frac{1}{y} = \frac{x}{2a^2} + \frac{C}{2a^2}$,

no kurienes $y = \frac{2a^2}{x + C}$.

Atbilde: meklējamā līnija ir hiperbola $y = \frac{2a^2}{x + C}$.

5. Atrast līknes, kurām jebkurā līknes punktā novilktās pieskares un *Ox* ass krustpunkta abscisa ir *2* reizes mazāka nekā pieskaršanās punkta abscisa.

Atrisinājums.



2.9. *zīm.*

Dots: OB = 0,5OD
OD = x un OC = y

Tā kā $\frac{MD}{BD} = tg\alpha = y'$,

tad $y' = \frac{y}{0,5x}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{0,5x}, \quad \int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x},$$

no kurienes $\ln y = 2\ln x + \ln C$

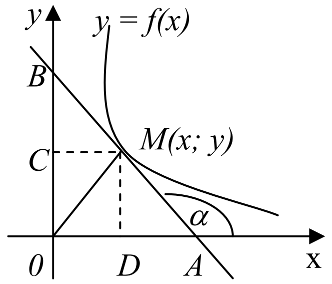
jeb $y = Cx^2$.

Atbilde: meklējamās līknes ir parabola $y = Cx^2$.

6. Atrast līkni, kas iet caur punktu *(2;3),* ja jebkurā tās punktā novilktās pieskares nogrieznis starp koordinātu asīm dalās uz pusēm.

Atrisinājums.

Dots: *AM = MB,* $y\big|_{x=2} = 3$



2.10. zīm.

Tā kā $AM = MB \Rightarrow MD$ - ΔAOB viduslīnija.

Tad $OD = x = \frac{1}{2}OA$ un $OC = y = \frac{1}{2}OB$.

$\Delta AOB: \; \frac{OB}{OA} = tg(180^o - \alpha) = -tg\alpha = -y'$

Tādējādi $y' = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$

jeb $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$

$\ln y = -\ln x + \ln C,$

no kurienes $y = \frac{C}{x}$.

No sākuma nosacījuma $y|_{x=2} = 3$ nosaka konstanti *C:*

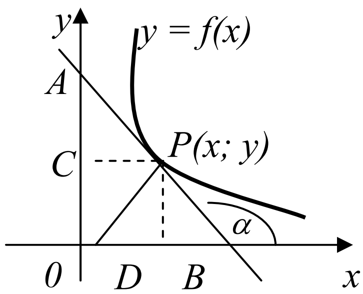
$$3 = \frac{C}{2}, \text{ tad } C = 6.$$

Iegūst meklējamās līknes izteiksmi $y = \frac{6}{x}$

Atbilde: meklējamā līkne ir hiperbola $y = \frac{6}{x}$.

7. Atrast līkni, kas iet caur punktu *(2; 0),* ja jebkurā tās punktā pieskares nogrieznis starp ordinātu asi un pieskaršanās punktu ir konstants lielums, vienāds ar *2*!

Atrisinājums.



2.11. zīm.

Dots: $AP = 2; \; y|_{x=2} = 0$

ΔACP - taisnleņķa

$CP = OD = x$

$AC = \sqrt{2^2 - x^2} = \sqrt{4 - x^2}$

$\Delta AOB \sim \Delta ACP$

$\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{CP} = tg(180^o - \alpha) = -tg\alpha = -y'$

$y' = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}, \quad \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = -\int dy, \quad \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = -y$$

Atradīsim integrāli

$$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx = \begin{bmatrix} t^2 = 4 - x^2, t = \sqrt{4 - x^2} \\ x = \sqrt{4 - t^2}, dx = \frac{-tdt}{\sqrt{4 - t^2}} \end{bmatrix} = \int \frac{-t^2 dt}{4 - t^2} = \int \frac{t^2 dt}{t^2 - 4} = \int \left(1 + \frac{4}{t^2 - 4}\right) dt =$$

$$=\int\left(1+\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=t+\ln|t-2|-\ln|t+2|+C=t+\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|+C=$$

$$=\sqrt{4-x^2}+\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C=\sqrt{4-x^2}+\ln\left|\frac{-x^2}{\left(\sqrt{4-x^2}+2\right)^2}\right|+C=$$

$$=\sqrt{4-x^2}+2\ln\left|\frac{x}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$$

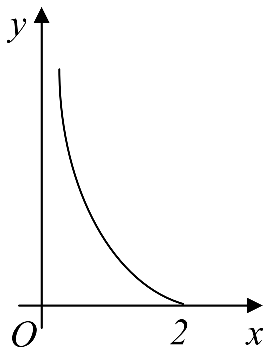
Līdz ar to diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y=-\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{x}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|+C$$

No sākuma nosacījuma $y|_{x=2}=0$ izriet, ka $C=0$.

Tātad meklējamā līnija ir

$$y=-\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{x}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|.$$



2.12. zīm.

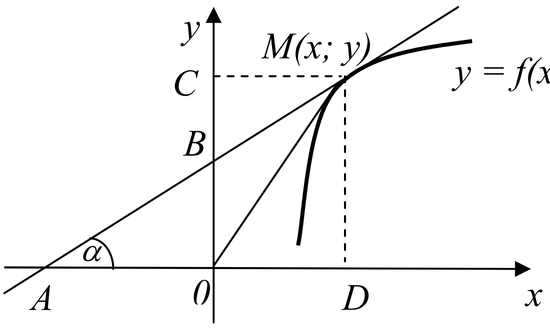
Var pierādīt, ka $\lim\limits_{x\to 0} y=+\infty$.

Šo līniju sauc par *traktrisi* (*2.12. zīm.*).

Atbilde: meklējamā līknija ir traktrise $y=-\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{x}{\sqrt{4-x^2}+2}\right|$.

8. Atrast visas līknes, kurām pieskares nogrieznis starp abscisu asi un pieskaršanās punktu dalās uz pusēm, krustojoties ar ordinātu asi!

Atrisinājums.



2.13. zīm.

Dots: $AB = BM$.

ΔAMD - taisnleņķa, BO - ΔAMD viduslīnija;

$OB=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}MD$ un $OA=OD=x$

$\frac{MD}{AD}=\frac{BO}{AO}=tg\alpha=y'$

Tātad $y'=\frac{y}{2x}$ jeb $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$,

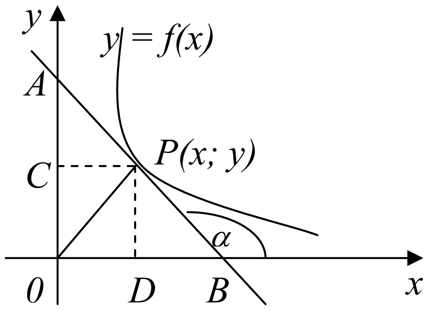
no kurienes $\int\frac{dy}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$, $\ln y=\frac{1}{2}\ln x+\ln C$, $y=C\sqrt{x}$,

$y^2=Cx$

Atbilde : meklējamās līknes vienādojums ir $y^2=Cx$; šī līnija ir parabola.

9. Līknes jebkurā punktā novilktās pieskares krustpunkts ar Ox asi ir vienādā attālumā no pieskaršanās punkta un no koordinātu sākumpunkta. Atrast šo līkni!

Atrisinājums.



2.14. *zīm.*

Dots: $BP = OB$

$\Delta DPB : CO = PD = y;$

$OD = CP = x$

$OB = DB = DB + x$

ΔDPB pēc Pitagora teorēmas:

$PB^2 = y^2 + DB^2$

$(DB + x)^2 = y^2 + DB^2$

$BD^2 + 2DBx + x^2 = y^2 + DB^2$

$$BD = \frac{y^2 - x^2}{2x}$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{PD}{DB} = tg(180^o - \alpha) = -tg\alpha = -y'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\frac{y^2 - x^2}{2x}} \quad \text{jeb} \quad y' = -\frac{2xy}{y^2 - x^2} = -\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}.$$

Iegūto diferenciālvienādojumu risina, lietojot substitūciju $\frac{y}{x} = z$,

tad $y = zx$ un $y' = z'x + x$.

Ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūst

$$z'x + z = -\frac{2z}{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = \frac{-2z - z^3 + z}{z^2 - 1},$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{-z - z^3}{z^2 - 1}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}x = \frac{z(1 + z^2)}{1 - z^2},$$

$$\int \frac{1 - z^2}{z(1 + z^2)} dz = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1 + z^2}\right) dz = \ln x + \ln C,$$

$$\ln z - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(z^2 + 1) = \ln Cx, \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{z^2 + 1} = Cx.$$

Tā kā $\frac{y}{x} = z$, tad

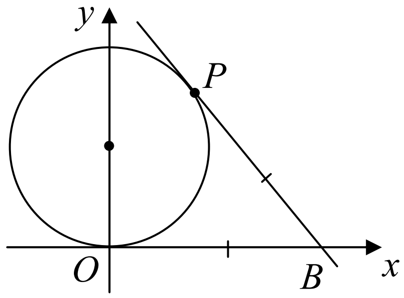
$$\frac{\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} = Cx \quad \text{jeb} \quad y = C(x^2 + y^2),$$

no kurienes

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{C} y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2C} y + \frac{1}{4C^2} = \frac{1}{4C^2},$$

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2C}\right)^2 = \frac{1}{4C^2}.$$



2.15. zīm.

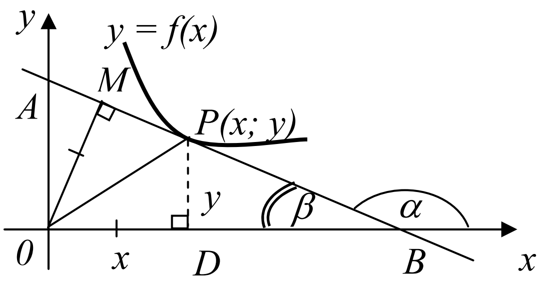
Tad meklētā līnija ir riņķa līnija ar rādiusu $\frac{1}{2C}$ un centru punktā *(0;* $\frac{1}{2C}$*) (2.15.zīm.).*

Tā kā *Ox* ass ir šīs riņķa līnijas pieskare, tad uzdevuma nosacījumi ilustrē teorēmu, ka riņķa līnijas pieskaru nogriežņi ir vienādi, kas vilkti no kopīga punkta *B*, t.i., *OB=PB*.

Atbilde : meklējamā līkne ir riņķa līnija $x^2 + y^2 - \frac{1}{C}y = 0$

10. Atrast līkni, ja zināms, ka attālums no koordinātu sākumpunkta līdz jebkurai šīs līknes pieskarei ir vienāds ar pieskaršanās punkta abscisu.

Atrisinājums.



2.16. zīm.

Dots: $OM \perp AB$, *OM=OD*
OM=OD=x
$\Delta OMP = \Delta ODP$ - kā taisnleņķa trijstūri, kuriem ir kopīga hipotenūza un vienādas divas katetes *OM=OD=x.*

Tātad $\angle MOP = \angle DOP = \frac{1}{2}\angle MOD =$

$= \frac{1}{2}\left(90^\circ - \beta\right) = \frac{1}{2}\left(90^\circ - (180^o - \alpha)\right) =$

$= \frac{\alpha - 90^\circ}{2}$

$$\Delta ODP: \frac{PD}{OD} = tg\angle DOP \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = tg\frac{\alpha - 90^\circ}{2} = -tg\frac{90^\circ - \alpha}{2}.$$

Izmanto formulu $tg\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$.

Tātad $tg\frac{\alpha - 90^\circ}{2} = \frac{1-\cos\left(90^\circ - \alpha\right)}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - tg\alpha = \sqrt{1+tg^2\alpha} - tg\alpha =$

$= \sqrt{1+(y')^2} - y'$

Līdz ar to $\quad -\frac{y}{x} = \sqrt{1+(y')^2} - y'$,

no kurienes $\quad \sqrt{1+(y')^2} = y' - \frac{y}{x}$,

$$1 + (y')^2 = (y')^2 - 2y' \cdot \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2},$$

$$2y'\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}-1,\quad y'=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\frac{y}{x}}.$$

Atrisina, lietojot substitūciju $\frac{y}{x}=z$; $y'=z'x+z$.

$$z'x+z=\frac{z^2-1}{2z},\qquad z'x=\frac{z^2-1}{2z}-z,$$

$$z'x=\frac{-z^2-1}{2z},\qquad \frac{dz}{dx}x=-\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\frac{2zdz}{z^2+1}=-\frac{dx}{x},\qquad \int\frac{2zdz}{z^2+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln\left|z^2+1\right|=-\ln|x|+C,\qquad z^2+1=\frac{C}{x},$$

$$z^2=\frac{C}{x}-1,\qquad \left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{C}{x}+1,$$

$$y^2=x^2+Cx,\qquad y=\sqrt{x^2+Cx}$$

Definīcijas apgabals:

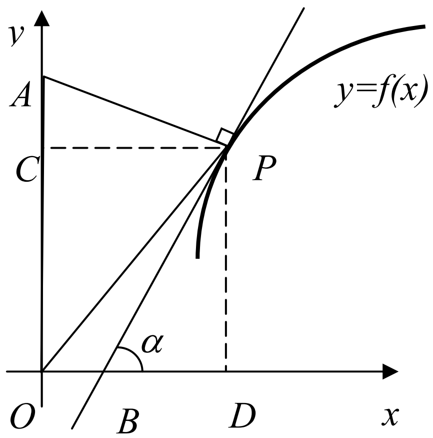
$Cx+x^2\geq 0 \Rightarrow \quad x\in(-\infty;0)\cup(-C;+\infty)$, ja $C<0$

vai $\quad x\in(-\infty;-C)\cup(0;+\infty)$, ja $C>0$

Atbilde: meklējamā līnija ir funkcijas $y=\sqrt{x+Cx^2}$ grafiks.

11. Jebkurā līknes punktā P novilktā normāle krusto Oy asi punktā, kura ordināta vienāda ar punkta P attālumu līdz koordinātu sākumpunktam. Atrast šo līkni.

Atrisinājums.



2.17. zīm.

Dots: $AO=OP$ un $BP\perp AP$

$OD=CP=x$

$PD=OC=y$

$OP=\sqrt{OD^2+PD^2}=\sqrt{x^2+y^2}$

Tā kā $OA=OP$, tad $AC=AO-OC=\sqrt{x^2+y^2}-y$

$\angle PBD=\angle PAC=\alpha$ - kā leņķi ar perpendikulārām malām

$$tgPAC=\frac{PC}{AC}\Rightarrow tg\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}-y}$$

Iegūst diferenciālvienādojumu

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \frac{y}{x}},$$

kuru risina lietojot substitūciju $\frac{y}{x} = z$, tad $y = xz$, $y' = z + xz'$.

Ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūst

$$z + xz' = \frac{1}{\sqrt{1+z^2} - z}, \qquad z + xz' = \frac{\sqrt{1+z^2} + z}{1+z^2 - z^2}, \qquad xz' = \sqrt{1+z^2},$$

$$x\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}, \qquad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}, \qquad \ln\left|z+\sqrt{1+z^2}\right| = \ln|x| + \ln|C|,$$

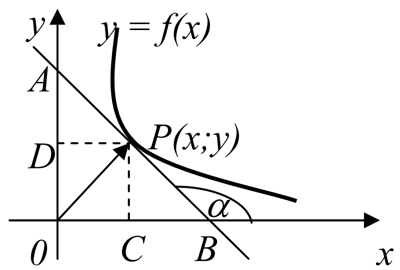
$$z + \sqrt{1+z^2} = xC, \qquad \sqrt{1+z^2} = xC - z, \qquad 1 + z^2 = z^2 - 2zxC + x^2C^2,$$

$$2zxC = x^2C^2 - 1.$$

Tā kā $\frac{y}{x} = z$, tad $\quad 2yC = x^2C^2 - 1 \quad$ jeb $\quad 2y = x^2C - \frac{1}{C}$.

Atbilde: meklējamā līnija ir parabola $y = Cx^2 - \frac{1}{C}$.

12. Pieskare jebkurā līknes punktā *P*, punkta *P* rādiusvektors un *Ox* ass veido trijstūri ar konstantu laukumu a^2. Atrast šo līkni.



2.18.zīm.

Atrisinājums.

Dots: $S(\Delta OPB) = a^2$

$$S(\Delta OPB) = \frac{OB \cdot PC}{2} \quad \Rightarrow \quad a^2 = \frac{OB \cdot y}{2}$$

$$\Delta PCB: \quad \frac{PC}{CB} = tg(180^o - \alpha)$$

Tātad $\quad \frac{y}{\frac{2a^2}{y} - x} = -tg\alpha$

jeb $$y' = -\frac{y^2}{2a^2 - xy}.$$

Tas ir lineārs 1.kārtas diferenciālvienādojums attiecība pret *x* un $\frac{dx}{dy}$.

Atrisinot lieto substitūciju: $x = u \cdot v$, tad $x' = u'v + uv'$

Iegūst $$\frac{dx}{dy} - \frac{xy - 2a^2}{y^2} = 0,$$

$$x' - \frac{x}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}, \qquad u'v + uv' - \frac{uv}{y} = -\frac{2a^2}{y^2}, \qquad u'v + u(v' - \frac{v}{y}) = -\frac{2a^2}{y^2}.$$

Ja $v' - \frac{v}{y} = 0$, tad $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{y}$,

no kurienes $v = Cy$.

Pieņem $C = 1$, tad $v = y$.

Tādējādi $u' y = -\frac{2a^2}{y^2}$,

$$\frac{du}{dy} = -\frac{2a^2}{y^3}, \qquad \int du = -\int \frac{2a^2}{y^3} dy, \qquad u = \frac{a^2}{y^2} + C .$$

Tātad $x = uv = y(\frac{a^2}{y^2} + C) = \frac{a^2}{y} + Cy$.

Atbilde: meklējamā līnija ir $x = \frac{a^2}{y} + Cy$.

2.3.2. Atvasinājuma fizikālās nozīmes uzdevumi.

Daudz diferenciālvienādojumu pielietojumu piemēru ir fizikā un mehānikā. Lai sastādītu mehāniskas kustības matemātisku modeli, parasti ir jānovērtē uz ķermeni darbojušies spēki: smaguma spēks, vides pretestības spēks, spēks, kas rada ķermenim paātrinājumu u.c. Ja *x=x(t)* ir materiāla punkta koordinātas atkarība no laika taisnvirziena kustībā(vienvirziena kustības gadījumā – noietais ceļš), tad $x' = x'(t)$ ir kustības momentānais ātrums *v=v(t).* Savukārt $v' = v'(t) = x''(t)$ ir kustības momentānais paātrinājums.

Tādējādi 2. Ņūtona likumu *F=ma* pieraksta, izmantojot atvasinājumus: $F = mv'$ jeb $F = mx''$. Izmantojot šo spēka *F* izteiksmi spēku līdzsvara vienādībā, kas darbojas uz ķermeni, iegūst diferenciālvienādojumu attiecībā pret kustības ātrumu *v* vai arī attiecībā pret noieto ceļu *x.*

Arī atvasinājuma fizikālās nozīmes piemēros var aplūkot „standartuzdevumos”, kuros jāizmanto vispārzināmas fizikālas idejas un „problēmuzdevumus”, kuru risināšanai tiek doti īpaši norādījumi vai arī nepieciešama speciāla iegūtā atrisinājuma analīze un izvērtēšana. Aplūkosim dažus piemērus.

Atvasinājuma fizikālās nozīmes problēmuzdevumi.

5. Gaisa pretestības spēks krītošam ķermenim ir proporcionāls krišanas ātruma kvadrātam un krišanas virzienā vērstās ķermeņa virsmas laukumam (proporcionalitātes koeficients *k*). Kādam jābūt izpletņa virsmas laukumam *S*, lai krišanas ātrums nepārsniegtu v_1, ja izplētņlēcēja masa ir *m*? Aprēķinos izmantot lielumus: $m=100$ *kg*, $v_1=5$ *m/s*, $k=0{,}55$.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

P=mg – izpletņļēcēja svars,

$F_1 = kSv^2$ - gaisa pretestības spēks,

$F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ - Ņūtona likums.

No spēku līdzsvara vienādības

$$\vec{F} = \vec{P} - \vec{F}_1$$

iegūst: $$m\frac{dv}{dt} = mg - kSv^2 \quad \text{jeb} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{kS}{m}v^2 .$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{g - \dfrac{kS}{m}v^2} = dt, \quad \int \frac{dv}{g - \dfrac{kS}{m}v^2} = \int dt, \quad \int \frac{dv}{\dfrac{kS}{m}\left(\dfrac{mg}{kS} - v^2\right)} = \int dt .$$

Izmantojot apzīmējumu $\dfrac{mg}{kS} = p^2$, iegūst

$$\frac{m}{kS}\int\frac{dv}{p^2-v^2}=\int dt \;\Rightarrow\; t=\frac{m}{2kSp}\ln\left|\frac{p+v}{p-v}\right|+C\,.$$

Pieņemot, ka krišanas sākuma ātrums ir nulle, izmanto sākuma nosacījumu $v\big|_{t=0}=0$. Tad no vispārīgā atrisinājuma atrod:

$$\frac{m}{2kSp}\ln\left|\frac{p}{p}\right|+C=0\,,$$

no kurienes izriet *C=0.*

Tātad diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir

$$\frac{m}{2kSp}\ln\left|\frac{p+v}{p-v}\right|=t \quad \text{jeb} \quad \frac{p+v}{p-v}=e^{\frac{2kSp}{m}t}\,,$$

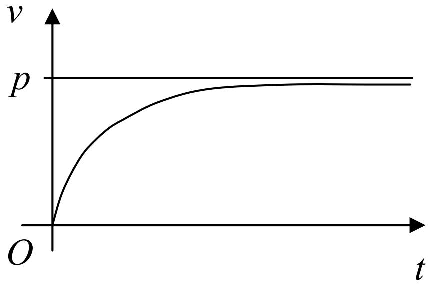
no kurienes
$$v=p\frac{e^{\frac{2kSp}{m}t}-1}{e^{\frac{2kSp}{m}t}+1}=p\,th\!\left(\frac{kSp}{m}t\right).$$

Atrisinājuma pētījums.

Atrod robežu

$$\lim_{t\to+\infty}v=\lim_{t\to+\infty}p\frac{e^{\frac{2kSp}{m}t}-1}{e^{\frac{2kSp}{m}t}+1}=\left[\,\frac{``\infty"}{``\infty"}\,\right]=p\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{2kSp}{m}t}-1\right)'}{\left(e^{\frac{2kSp}{m}t}+1\right)'}=$$

$$=p\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2kSp}{m}e^{\frac{2kSp}{m}t}}{\frac{2kSp}{m}e^{\frac{2kSp}{m}t}}=p=\sqrt{\frac{mg}{kS}}\,.$$



2.19. zīm.

Tātad, palielinoties krišanas laikam, izpletņlēcēja krišanas ātruma robeža ir lielums $\sqrt{\frac{mg}{kS}}$. Eksperimentāli ir noskaidrots, ka jau pēc dažām sekundēm krišanas ātrums ir tuvs šai ātruma robežai (integrāllīnija „ātri tiecas" uz horizontālo asimptotu *y=p*, *2.19. zīm.*).

Tātad krišanas beigu ātrums $v_1\approx\sqrt{\frac{mg}{kS}}$, no kurienes $S\approx\frac{mg}{kv_1^2}$.

Aprēķins un atrisinājuma analīze.

$$S\approx\frac{100\cdot 9{,}8}{0{,}55\cdot 25}\approx 71\left(m^2\right)$$

Risinājumā ir izmantots nereāls pieņēmums, ka krišanas sākuma ātrums ir nulle. Tomēr izpletnis atveras tad, kad izpletņlēcējs, brīvi krītot, ir sasniedzis noteiktu ātrumu v_0. Tātad $v\big|_{t=0} = v_0 \neq 0$ un līdz ar to arī $C \neq 0$. Taču var pierādīt, ka neatkarīgi no tā $\lim\limits_{t\to+\infty} v = \sqrt{\dfrac{mg}{kS}}$.

Atbilde: izpletņa virsmas laukums ir ≈ *71* m^2.

2. Šautenes lode ar ātrumu *500 m/s* ietriecās ierakuma aizsargvalnī. Pēc *0,0002 sekundēm* tās ātrums bija *200 m/s*. Cik biezam jābūt aizsargvalnim, ja tā pretestības spēks lodes kustībai ir tieši proporcionāls lodes ātruma kvadrātam? Aprēķinos pieņemt, ka lodes kustība ir reāli beigusies, kad tās ātrums ir neievērojami mazs, piemēram *1 cm/s*.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$v=v(t)$ – lodes ātrums pēc laika t no tās ietriekšanās aizsargvalnī,

$F_1 = kv^2$ - aizsargvalņa pretestības spēks (k – proporcionālitātes koeficients),

m – lodes masa,

$F = ma = mv'$ - 2. Ņūtona likums

$$mv' = -kv^2 \quad (v'(t) < 0, \text{ jo } v(t) \text{ ir dilstoša funkcija}),$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v^2.$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt, \quad \int\frac{dv}{v^2} = -\int\frac{k}{m}dt, \quad -\frac{1}{v} = -\frac{k}{m}t - C, \quad \frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + C.$$

$v = \dfrac{1}{\frac{k}{m}t + C}$ - vispārīgais atrisinājums,

$v\big|_{t=0} = 500$ - sākuma nosacījums.

$$\frac{1}{C} = 500, \quad C = \frac{1}{500} = 0{,}002.$$

$v = \dfrac{1}{\frac{k}{m}t + 0{,}002}$ - partikulārais atrisinājums,

$v\big|_{t=0{,}0002} = 200$ - papildnosacījums.

$$200 = \frac{1}{\frac{k}{m}\cdot 0{,}0002 + 0{,}002} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{m} = 15$$

$$v = \frac{1}{15t + 0{,}002}$$

Aprēķins.

Atrod, pēc cik ilga laika lodes ātrums valnī būs *0,01 m/s*.

$$0{,}01 = \frac{1}{15t + 0{,}002} \quad \Rightarrow \quad t = 6{,}7(s)$$

Atrod lodes noieto ceļu aizsargvalnī:

$$s = \int_0^{6,7} v(t)dt = \int_0^{6,7} \frac{1}{15t + 0{,}002} dt = \frac{1}{15} \ln|15t + 0{,}002| \Big|_0^{6,7} \approx 0{,}72\,(m).$$

Atbilde: aizsargvalņa biezumam jābūt aptuveni *0,72 m*.

3. Šķidrumā rotējoša diska leņķisko ātrumu samazina berzes spēks, kas proporcionāls leņķiskajam ātrumam. Sākuma momentā rotācijas leņķiskais ātrums bija 12 rad/s, bet pēc 10 sekundēm – 8 rad/s. Noteikt rotācijas ātrumu pēc 1 minūtes. Pēc cik ilga laika no bremzēšanas sākuma disks veiks vienu apgriezienu sekundē?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$\omega = \omega(t)$ –rotācija leņķa ātrums pēc laika t no bremzēšanas sākuma,

$F_1 = k\omega$ - bremzēšanas spēks (k – proporcionālitātes koeficients),

$\frac{d\omega}{dt} < 0$ - rotācijas leņķiskā ātruma izmaiņas ātrums (rotācijas palēninājums).

$$\frac{d\omega}{dt} = -k\omega.$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{d\omega}{\omega} = -kdt, \quad \int \frac{d\omega}{\omega} = -\int kdt, \quad \ln|\omega| = -kt + \ln C, \quad \ln|\omega| = \ln Ce^{-kt},$$

$\omega = Ce^{-kt}$ - vispārīgais atrisinājums,

$\omega_{t=0} = 12$ - sākuma nosacījums.

12=Ce⁰, C=12

$\omega = 12e^{-kt}$ - partikulārais atrisinājums,

$\omega|_{t=10} = 8$ - papildnosacījums.

$$8 = 12e^{-10k}, \quad e^{-10k} = \frac{2}{3}, \quad -10k = \ln\frac{2}{3}, \quad k = \frac{\ln\frac{2}{3}}{-10} \approx 0{,}04$$

$$\omega = 12e^{-0{,}04t}$$

Aprēķins.

1) $\omega|_{t=60} = 12e^{-0{,}04\cdot 60} = 12e^{-2{,}4} \approx 1{,}09(rad/s)$

2) veicot 1 apgriezienu sekundē, rotācijas leņķa ātrums ir 2π rad/s.

$$2\pi = 12e^{-0{,}04t}, \quad e^{-0{,}04t} = \frac{2\pi}{12}, \quad -0{,}04t = \ln\frac{2\pi}{12}, \quad t = \frac{\ln\frac{2\pi}{12}}{-0{,}04} = 16(s)$$

Atbilde: pēc *1 minūtes* no bremzēšanas sākuma diska rotācijas leņķiskais ātrums būs *1,09 rad/s;* pēc *16 sekundēm* no bremzēšanas sākuma disks veic 1 apgriezienu sekundē.

Atvasinājuma fizikālās nozīmes standartuzdevumi.

1. Materiālu daliņu, kuras masa ir *m* un kas pārvietojas ar ātrumu v_0 taisnā virzienā, sāka bremzēt spēks, kas tieši proporcionāls bremzēšanas laikam un apgriezti proporcionāls kustības ātrumam. Pēc cik ilga laika no bremzēšanas sākuma daliņa tiks apstādināta?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$v=v(t)$ –kustības ātrums bremzējot,

t – bremzēšanas laiks,

$F_{pret.} = k\dfrac{t}{v}$ - bremzēšanas spēks

$F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ - 2. Ņūtona likums

$$F = -F_{pret.}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -k\frac{t}{v}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{kt}{mv},\quad \int v dv = -\int \frac{k}{m} t dt,\quad \frac{1}{2}v^2 = -\frac{k}{2m}t^2 + \frac{1}{2}C,\quad v^2 = C - \frac{k}{m}t^2.$$

$v = \sqrt{C - \dfrac{k}{m}t^2}$ - vispārīgais atrisinājums,

$v\big|_{t=0} = v_0$ - sākuma nosacījums.

$$v_0 = \sqrt{C},\quad C = v_0^2.$$

$v = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{k}{m}t^2}$ - partikulārais atrisinājums,

Aprēķins.

Daliņa ir apstādināta tad, kad tās ātrums ir 0.

$$0 = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}t^2} \quad\Rightarrow\quad v_0^2 - \frac{k}{m}t^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad t = \sqrt{\frac{m}{k}}v_0$$

Atbilde: daliņa tiks apstādināta pēc laika $t = \sqrt{\dfrac{m}{k}}v_0$ no bremzēšanas sākuma.

2. Motorlaivai, kas brauca ar ātrumu *18 km/h*, izslēdza motoru. Pēc *1* minūtes no motora izslēgšanas momenta laivas ātrums bija *6 km/h.* Kāds būs laivas ātrums pēc *1,5* minūtēm, ja ūdens pretestības spēks ir proporcionāls laivas ātrumam?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

v=v(t) –kustības ātrums bremzējot,
t – bremzēšanas laiks,
$F_{pret.} = kv$ - bremzēšanas spēks

$F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ - 2. Ņūtona likums

$$F = -F_{pret.}$$

$$m\frac{dv}{dt} = -kv$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v,\quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt\quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{k}{m}dt,\quad \ln|v| = -\frac{k}{m}t + \ln C.$$

$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$ - vispārīgais atrisinājums,
$v|_{t=0} = 18$ - sākuma nosacījums.

$$18 = Ce^0,\quad C = 18.$$

$v = 18e^{-\frac{k}{m}t}$ - partikulārais atrisinājums,
$v|_{t=\frac{1}{60}} = 6$ - papildnosacījums.

$$6 = 18e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{60}},\quad \frac{1}{3} = e^{-\frac{k}{60m}},\quad -\frac{k}{60m} = \ln\frac{1}{3},\quad \frac{k}{m} = 60\ln 3 \approx 65{,}9$$

$v = 18e^{-65{,}9t}$

Aprēķins.

1,5 min$=\dfrac{1{,}5}{60}h = 0{,}025h.$

$v|_{t=0{,}025} = 18e^{-65{,}9\cdot 0{,}025} = 3{,}46(km/h)$

Atbilde: pēc *1,5* minūtēm laivas ātrums būs 3,46 *km/h*.

3. Materiāla daļiņa, kuras masa *m*, iekrita šķidrumā. Atrast daļiņas ātrumu šķidrumā atkarībā no laika, ja šķidruma pretestības spēks proporcionāls daliņas ātrumam un sākuma ātrums ir v_0.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

v=v(t) –daliņas ātrums šķidrumā,
$F_{pret.} = kv$ - šķidruma pretestības spēks
P=mg – daliņas svars

$F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$ - 2. Ņūtona likums

$$\vec{F} = \vec{P} - \vec{F}_{pret.}$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v, \quad \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = dt \quad , \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt, \quad -\frac{m}{k}\ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = \int dt,$$

$$\ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = -\frac{k}{m}t + \ln C, \qquad g - \frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t},$$

$v = \frac{mg}{k} - \frac{Cm}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$ - vispārīgais atrisinājums,

$v\big|_{t=0} = v_0$ - sākuma nosacījums.

$$v_0 = \frac{mg}{k} - \frac{Cm}{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{Cm}{k} = \frac{mg}{k} - v_0$$

$v = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}$ - partikulārais atrisinājums,

Atbilde: daļiņas ātrums, pārvietojoties šķidrumā, ir $v = \frac{mg}{k} - \left(\frac{mg}{k} - v_0\right)e^{-\frac{k}{m}t}$.

4. Cilindrisks trauks, kura pamatā ir caurums, piepildīts ar ūdeni. Trauka augstums ir *H*. Cik ilgā laikā viss ūdens iztecēs no trauka, ja $\frac{3}{4}$ visa ūdens iztek *10* sekundēs? Ūdens iztecēšanas ātrums ir proporcionāls kvadrātsaknei no ūdens līmeņa augstuma aplūkotā laika momentā *t*.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

h=h(t) –ūdens līmeņa augstums iztecēšanas laikā,

$\frac{dh}{dt} < 0$ - ātrums, ar kādu samazinās ūdens līmeņa augstums(iztecēšanas ātrums)

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -kdt, \quad 2\sqrt{h} = -kt + C$$

$h = \frac{(C - kt)^2}{4}$ - vispārīgais atrisinājums,

$h\big|_{t=0} = H$ - sākuma nosacījums.

$$H = \frac{(C - 0)^2}{4} \quad \Rightarrow \quad C = 2\sqrt{H}$$

$$h=\frac{\left(2\sqrt{H}-kt\right)^2}{4}$$ - partikulārais atrisinājums,

$$h\Big|_{t=10}=H-\frac{3}{4}H=\frac{1}{4}H$$ - papildnosacījums

$$\frac{1}{4}H=\frac{\left(2\sqrt{H}-k\cdot 10\right)^2}{4}\quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{10}\sqrt{H}$$

$$h=\frac{\left(2\sqrt{H}-\frac{1}{10}\sqrt{H}t\right)^2}{4}$$ - partikulārais atrisinājums atbilstoši papildnosacījumam

Aprēķins.

Kad viss ūdens ir iztecējis, tad *h(t)=0*.

$$\frac{\left(2\sqrt{H}-\frac{1}{10}\sqrt{H}t\right)^2}{4}=0\quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{H}-\frac{1}{10}\sqrt{H}t=0,$$

t=20(s)

Atbilde: viss ūdens iztecēs *20 sekundēs*.

5. Motorlaiva brauc stāvošā ūdenī ar ātrumu 10 km/h. Braukšanas laikā izslēdza motoru un pēc 20 sekundēm laivas braukšanas ātrums bija 6 km/h. Uzskatot, ka ūdens pretestība ir proporcionāla laivas ātrumam, atrast laivas ātrumu pēc 2 min kopš motora izslēgšanas. Atrast arī attālumu, ko veica laiva 1 min laikā pēc motora izslēgšanas.

Atrisinājums.

Pieņem, ka laivas kustības ātrums laika momentā t ir $v = v(t)$. Pret laivu darbojas bremzēšanas spēks, kas ir tieši proporcionāls laivas ātrumam:

$$F = -kv.$$

Saskaņā ar 2. Ņūtona likumu:

$$F = ma = mv'.$$

Tad $-kv = mv'$,

no kurienes $$-kv=m\frac{dv}{dt},\quad \frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt,\quad \int\frac{dv}{v}=\int-\frac{k}{m}dt,$$

$$\ln|v|=-\frac{k}{m}t+\ln|C|.$$

Iegūst $$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

No sākuma nosacījumiem: $v\big|_{t=0}=10$ un $v\Big|_{t=\frac{1}{180}}=6$:

$$\begin{cases}10=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0}\\ 6=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{180}},\end{cases}\quad \begin{cases}C=10\\ 6=10\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{180}},\end{cases}\quad \begin{cases}C=10\\ -\frac{k}{180m}=-0{,}5.\end{cases}$$

Tātad $v = 10e^{-90t}$.

Laivas ātrums pēc *2 min* būs

$$v\Big|_{\frac{1}{30}} = 10e^{-3} \approx 0{,}5 \; (km/h).$$

Laivas nobrauktais ceļš *1 min* laikā pēc motora izslēgšanas:

$$s = \int_0^{\frac{1}{60}} v(t) = \int_0^{\frac{1}{60}} 10e^{-90t} = -\frac{1}{9}e^{-90t}\Big|_0^{\frac{1}{60}} \approx 0{,}08 \; (km).$$

Atbilde: laivas ātrums pēc 2 min būs aptuveni 0,5 km/h un 1 min laikā pēc motora izslēgšanas tā veiks aptuveni 80 m garu attālumu.

6. Laivas ātrums samazinās ūdens pretestības ietekmē. Ūdens pretestība ir proporcionāla laivas ātrumam. Laivas sākuma ātrums ir *1,5 m/s*, ātrums pēc *4* sekundēm ir *1m/s.* Pēc cik ilga laika laivas ātrums būs *0,01 m/s*? Noteikt laivas nobraukto ceļu līdz apstāšanās momentam!

Atrisinājums.

Pieņem, ka laivas kustības ātrums laika momentā t ir $v = v(t)$. Pret laivu darbojas bremzēšanas spēks, kas ir tieši proporcionāls laivas ātrumam: $F = -kv$.

Saskaņā ar 2. Ņūtona likumu: $F = ma = mv'$.

$$-kv = mv' \Rightarrow -kv = m\frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln|v| = -\frac{k}{m}t + \ln|C|$$

$$v = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$

No sākuma nosacījumiem: $v\big|_{t=0} = 1{,}5$ un $v\big|_{t=4} = 1$:

$$\begin{cases} 1{,}5 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0} \\ 1 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1{,}5 \\ 1 = 1{,}5 \cdot e^{-\frac{4k}{m}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1{,}5 \\ \frac{k}{m} = 0{,}1 \end{cases}$$

Tātad $v = 1{,}5e^{-0{,}1t}$

1) pēc cik ilga laika laivas ātrums būs *0,01 m/s*?

$$0{,}01 = 1{,}5e^{-0{,}1t} \Rightarrow 0{,}0067 \approx e^{-0{,}1t}$$

$$\ln(0{,}0067) \approx -0{,}1t \Rightarrow -0{,}1t \approx -5$$

$$t \approx 50 \; (s)$$

2) laivas nobrauktais ceļu līdz apstāšanās momentam:

pieņem, ka kustība beigusies, kad laivas $v = 0{,}01$ *m/s* :

$$s = \int_0^{50} v(t) = \int_0^{50} 1{,}5e^{-0{,}1t}dt = -15e^{-0{,}1t}\Big|_0^{50} \approx 15 \; (m)$$

Atbilde: laivas ātrums būs *0,01 m/s* pēc aptuveni *50 s* un līdz apstāšanās momentam laiva veiks aptuveni *15 m.*

7. Materiāls punkts ar masu 10^{-3} *kg* spēka F iedarbības rezultātā pārvietojas pa taisni. Spēks F ir tieši proporcionāls laikam t un apgriezti proporcionāls kustības ātrumam. Laika momentā $t = 10$ *s* ātrums ir *0,5 m/s*, bet spēks ir $4 \cdot 10^{-5}$ *N*. Kāds ir kustības ātrums *1 min* pēc kustības sākuma?

Atrisinājums

Pieņem, ka daļiņas kustības ātrums laika momentā t ir $v = v(t)$. Materiālais punkts pārvietojas spēka F, kurš tieši proporcionāls laikam t un apgriezti proporcionāls kustības ātrumam, iespaidā:

$$F = k\frac{t}{v}$$

Saskaņā ar 2. Ņūtona likumu: $F = ma = mv'$.

Tātad $$mv' = k\frac{t}{v} \quad \text{jeb} \quad m\frac{dv}{dt} = k\frac{t}{v}.$$

Atdala mainīgos un integrē:

$$vdv = \frac{kt}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \int vdv = \int \frac{kt}{m}dt$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{kt^2}{2m} + C \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{kt^2 + 2mC}{m}}$$

No sākuma nosacījumiem: $m = 10^{-3}$ *kg*, $v\big|_{t=10s} = 0{,}5 m/s$, $F\big|_{t=10} = 4 \cdot 10^{-5} N$

iegūst

$$\begin{cases} 0{,}5 = \sqrt{\dfrac{100k + 2 \cdot 10^{-3}C}{10^{-3}}} \\ 4 \cdot 10^{-5} = k\dfrac{10}{0{,}5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 100k + 2 \cdot 10^{-3}C = 0{,}25 \cdot 10^{-3} \\ k = 2 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 0{,}025 \\ k = 2 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

Tātad $$v = \sqrt{2 \cdot 10^{-3}t^2 + 0{,}05}.$$

Atrod kustības ātrumu pēc *1 min* no kustības sākuma:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 3600 + 5 \cdot 10^{-2}} \approx 2{,}7(m/s)$$

Atbilde: materiālā punkta ātrums pēc *1 min* no kustības sākuma būs aptuveni *2,7 m/s*.

8. Noteikt ceļu, kādu ķermenis noiet laikā t no kustības sākuma, ja kustības ātrums ir proporcionāls noietajam ceļam un *100 m* ķermenis noiet *10s*, bet *200m – 15s*?

Atrisinājums

Pieņemsim, ka laika momentā t noietais ceļš ir $s = s(t)$. Kustības ātrums ir tieši proporcionāls noietajam ceļam:

$$v = k \cdot s$$

$$\frac{ds}{dt} = k \cdot s\,,\quad \frac{ds}{s} = kdt\,,\quad \int \frac{ds}{s} = \int kdt\,,\quad \ln|s| = kt + \ln|C|$$

$$s = Ce^{kt}$$

Pēc sākuma nosacījumiem, ja $t_1 = 10\ s$, tad noietais ceļš ir $s_1 = 100\ m$

$t_2 = 15\ s$, tad noietais ceļš ir $s_2 = 200\ m$

Abi nosacījumi veido vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} 100 = C \cdot e^{10k} \\ 200 = C \cdot e^{15k} \end{cases} \Rightarrow \frac{100}{200} = \frac{Ce^{10k}}{Ce^{15t}} \Rightarrow 0{,}5 = e^{-5k}$$

$$\ln 0{,}5 = \ln e^{-5k} \Rightarrow -0{,}69 = -5k$$

$$k = 0{,}139$$

$$100 = Ce^{1,39} \Rightarrow C \approx 25$$

Tātad $s \approx 25e^{0,139t}(m)$.

Atbilde: laikā t no kustības sākuma ķermenis noiet aptuveni $25e^{0,139t}$ metrus.

9. Lode ar ātrumu $v_1\ m/s$ ieiet dēlī un iziet no dēļa ar ātrumu $v_2\ m/s$. Noteikt lodes kustības ātruma atkarību no laika t, ja dēļa pretestības spēks ir proporcionāls lodes ātruma kvadrātam.

Atrisinājums.

$v=v(x)$ – lodes ātrums

$v' = a < 0$ - lodes paātrinājums

$F = ma = mv'$ - 2. Ņūtona likums

$F_1 = \lambda v^2$ - pretestības spēks

$$\vec{F} = -\vec{F}_1 \Rightarrow mv' = -\lambda v^2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\lambda v^2$$

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{\lambda}{m}dt \Rightarrow -\int \frac{dv}{v^2} = \frac{\lambda}{m}\int dt \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{\lambda}{m}t + C_1$$

$$v = \frac{1}{kt + C_1},\quad \text{kur } k = \frac{\lambda}{m}.$$

$v\big|_{t=0} = v_1$ un $v\big|_{t=0,01} = v_2$ - sākuma nosacījums un papildnosacījums

$$v_1 = \frac{1}{k \cdot 0 + C_1} \Rightarrow \frac{1}{C_1} = v_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{v_1}$$

$$v_2 = \frac{1}{k \cdot 0{,}01 + \frac{1}{v_1}} \Rightarrow 0{,}01k = \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \Rightarrow k = 100\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{100(v_1 - v_2)}{v_1 v_2}$$

Tātad $v = \dfrac{1}{\dfrac{100(v_1 - v_2)}{v_1 v_2}t + \dfrac{1}{v_1}} = \dfrac{v_1 v_2}{100(v_1 - v_2)t + v_2}$.

Atbilde: Lodes kustības ātrumu dēlī atkarībā no laika izsaka ar funkiju

$$v = \frac{v_1 v_2}{100(v_1 - v_2)t + v_2}.$$

10. Lokomatīve brauc pa horizontālu ceļu ar ātrumu *72 km/h*. Lokomatīvi apstādināta bremzējot. Kāds būs lokomatīves ātrums pēc 5 sekundēm no bremzēšanas sākuma, ja pretestības spēks kustībai ir *0,2* no tās svara.

Atrisinājums,

x=x(t) - lokomatīves noietais ceļš pēc laika *t* no bremzēšanas sākuma

$v = v(x)$ - lokomatīves ātrums laika momentā *t*

m - lokomatīves masa

g – smaguma spēka paātrinājums

$F = ma = mv'$ - *2.* Ņūtona likums

$$\vec{F} = -\vec{F}_p$$

$$m\frac{dv}{dt} = -0{,}2mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -0{,}2g$$

$$dv = -0{,}2gdt$$

$v = -0{,}2gt + C$ – vispārīgais atrisinājums

No sākuma nosacījuma

$$v\big|_{t=0} = 72km/h = 20m/s$$

iegūst $20 = -0{,}2g \cdot 0 + C$,

no kurienes *C=20.*

Tātad $v = -0{,}2gt + 20$ - partikulārais atrisinājums

Lokomatīves ātrums pēc *30* sekundēm būs

$$v = -0{,}2 \cdot 9{,}8 \cdot 5 + 20 = -10 + 20 = 10(m/s) = 36(km/h).$$

Atbilde: Pēc *5* sekundēm lokomatīves ātrums būs *14 m/s.*

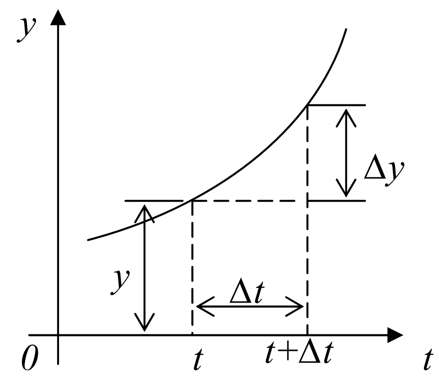
2.3.3. Eksponenciālās augšanas un eksponenciālās dilšanas uzdevumi.

Ne vienmēr ir iespējams tieši izmantot atvasinājuma ģeometrisko vai fizikālo nozīmi, bet bieži ir vajadzīga vispārīgāka pieeja. Aplūkosim tās būtību. Pieņemsim, ka starp mainīgajiem lielumiem x un y pastāv funkcionāla sakarība, kuru nepieciešams modelēt. Modeļa sastādīšanu veic pēc šādas shēmas:

1. Aplūko brīvi izraudzītu intervālu $[x; x+\Delta x]$ un pieņem, ka mainoties lielumam x šajā intervālā, lielums y ir arī mainījies (pieaudzis vai samazinājies) par vērtību Δy.
2. Izmantojot dažādus fizikālus vai ģeometriskus apsvērumus, sastāda aptuvenu vienādību, kas satur Δy, Δx un pašus lielumus – x un y. Pārveido vienādību tā, lai tā satur pieaugumu attiecību $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. Samazinot intervāla $[x; x+\Delta x]$ garumu, t.i., samazinot Δx, aprēķinu kļūda ar aptuveno vienādību samazinās. Tāpēc aplūko robežu, kad $\Delta x \to 0$. Ievērojot, ka $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, iegūst diferenciālvienādojumu.

Daudzas parādības tehnikā, dabā un sabiedrībā noris pēc kopīgas matemātiskas likumsakarības. To var formulēt šādi: kāda mainīgā lieluma y pieaugums Δy, kas radies laika intervālā $[t; t+\Delta t]$, aptuveni ir tieši proporcionāls intervāla ilguma Δt reizinājumam ar y vērtību intervāla sākumpunktā, t.i.,

$$\Delta y \approx ky\Delta t,$$



2.20. zīm.

kur k – proporcionalitātes koeficients (*sk. 2.20. zīm.).* Piemēram, baktēriju un citu mikroorganismu pieaugums barotnē, koksnes masas pieaugums mežā, naudas noguldījuma pieaugums krājkasē, ķīmiskās reakcijas produkta koncentrācijas pieaugums reakcijas laikā ir tieši proporcionāls tās daudzumam laika intervāla sākumpunktā reizinājumam ar tā laika intervāla garumu, kurā šis pieaugums radies. Tātad procesu kopīgā likumsakarība ir: *lieluma y izmaiņas ātrums aplūkojamā laika momentā t ir tieši proporcionāls y vērtībai šajā laika momentā.*

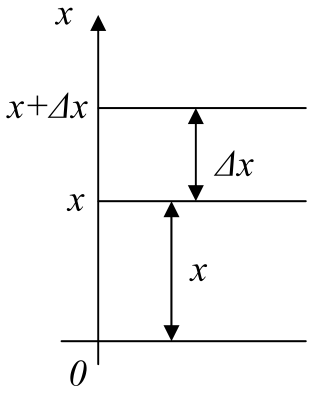
Aplūkosim piemērus, kur, sastādot diferenciālvienādojumu, ir jāizveido aptuvena vienādība starp divu mainīgo lielumu pieaugumu izteiksmēm.

Atmosfēras spiediena aprēķināšana.

Sastādīsim diferenciālvienādojumu, kas modelē atmosfēras spiedienu atkarībā no augstuma virs Zemes. Pieņemsim, ka atmosfēras spiediens uz Zemes virsmas ir p_0.

Izmantosim īpašību, ka gaisa blīvums ir tieši proporcionāls spiedienam:

$$\rho = kp.$$



2.21. *zīm.*

Novelkam koordinātu asi perpendikulāri Zemes virsmai (*sk. 2.21. zīm.*). Brīvi izraudzītā Ox ass punktā atmosfēras spiediens ir funkcija

$$p=p(x),$$

kur x – šī punkta koordināta. Palielinot x, t.i., attālumu no Zemes virsmas, spiediens samazinās.

Brīvi izraudzītā intervālā $[x;\ x+\Delta x]$ spiediens punktā x ir $p(x)$, bet punktā $x+\Delta x$ ir $p(x+\Delta x)$, turklāt $p(x)>p(x+\Delta x)$. Ja attālumu palielina no x līdz $x+\Delta x$, tad spiediens samazinās par lielumu

$$\Delta p=p(x+\Delta x)-p(x).$$

Δp absolūtā vērtība ir vienāda ar tādu gaisa stabiņa svaru, kura augstums ir Δx un pamata laukums ir viena laukuma vienība.

Pieņemsim, ka intervālā $[x;\ x+\Delta x]$ gaisa blīvums ir nemainīgs un tas ir vienāds ar blīvumu punktā x, t.i.,

$$\rho=kp(x),$$

tad
$$\Delta p = \frac{mg}{1} \approx \frac{V\rho g}{1} = 1\cdot \Delta x k p(x) g = kgp(x)\Delta x.$$

Tā kā $\Delta p<0$, tad
$$\Delta p \approx -kgp\Delta x \quad \text{jeb} \quad \frac{dp}{dx} \approx -kgp$$

No pieņēmuma, ka gaisa blīvums intervālā $[x;\ x+\Delta x]$ nemainās, kļūda samazinās, ja Δx ir mazāks.

Aplūkosim robežu, kad $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta p}{\Delta x} \approx -\lim_{\Delta x\to 0} kpg.$$

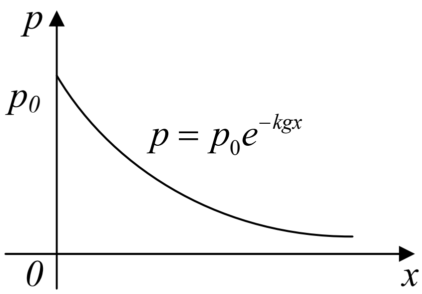
Iegūstam diferenciālvienādojumu

$$\frac{dp}{dx} = -kpg, \tag{1}$$

Kuru atrisināsim ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$\frac{dp}{p} = -kgdx, \qquad \int\frac{dp}{p} = \int -kgdx,$$

$$\ln|p| = -kgx + \ln|C|, \qquad p = Ce^{-kgx}.$$



2.22. *zīm.*

Ņemot vērā sākuma nosacījumu $p(0)=p_0$, iegūst

$$p_0 = Ce^{-kg\cdot 0} \text{ jeb } p_0 = C.$$

Tātad diferenciālvienādojuma *(1)* partikulārais atrisinājums ir

$$p = p_0e^{-kgx}.$$

Tātad, palielinot augstumu virs Zemes, atmosfēras spiediens samazinās pēc dilstošās eksponentfunkcijas likuma (*sk. 2.22. zīm.*).

Organiskās augšanas diferenciālvienādojums.

Pieņemsim, ka kolbā ar barotni atrodas mikroorganismi, kuru daudzums ar laiku palielinās. Novērojuma sākumā mikroorganismu daudzums ir y_0. Noteiksim to daudzumu atkarībā no laika t.

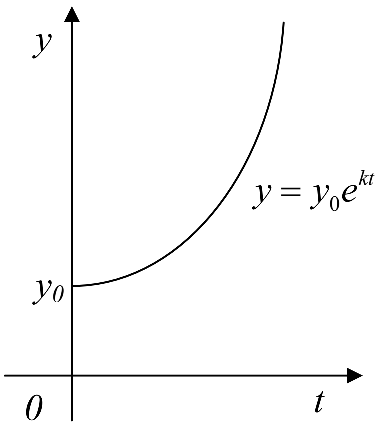
Apzīmēsim $y=y(t)$ mikroorganismu daudzumu laika momentā t, tad mikroorganismu daudzuma izmaiņas ātrums ir

$$y'(t)=\frac{dy}{dt}.$$

Tā kā tas ir proporcionāls lielumam y, tad

$$y'(t)=ky \text{ jeb } \frac{dy}{dt}=ky. \qquad (3)$$

Vienādojumu *(3)* sauc par organiskās augšanas diferenciālvienādojumu. To var atrisināt ar mainīgo atdalīšanas metodi:



2.23. zīm.

$$\frac{dy}{y}=kdt, \ \int\frac{dy}{y}=\int kdt,$$

$$\ln|y|=kt+\ln C, \quad \ln|y|=\ln\left(Ce^{kt}\right),$$

$$y=Ce^{kt} \qquad (4)$$

Lai noteiktu konstanti C, izmanto sākuma nosacījumu $y(0)=y_0$.

Tad $y_0=Ce^{k0}$ jeb $y_0=C$.

Iegūstam partikulāro atrisinājumu

$$y=y_0e^{kt}. \qquad (5)$$

Tādējādi redzam, ka mikroorganismu daudzums pieaug pēc eksponenciālfunkcijas likuma (*sk. 2.23. zīm.*). Ja ir zināms proporcionalitātes koeficients k, tad pēc formulas *(5)* var aprēķināt mikroorganismu daudzumu jebkurā laika momentā. Lai noteiktu šo koeficientu, nosaka mikroorganismu daudzumu pēc zināma laika. Piemēram, ja pēc laika T to daudzums ir pieaudzis 3 reizes, tad izmanto nosacījumu $y(T)=3y_0$. No izteiksmes *(5)* iegūst

$$3y_0=y_0e^{kT},$$

$$3=e^{kT} \text{ jeb } k=\frac{\ln 3}{T}.$$

Tātad $$y=y_0e^{kt}=y_0e^{\frac{\ln 3}{T}t}=y_0\left(e^{\ln 3}\right)^{\frac{t}{T}}=y_0\cdot 3^{\frac{t}{T}}.$$

Radioaktīvās sabrukšanas diferenciālvienādojums.

Radioaktīvās vielas masas m zudums Δm, kas radies laika intervālā $[t; t+\Delta t]$, aptuveni ir tieši proporcionāls intervāla garuma Δt reizinājumam ar reaktīvās vielas masu m intervāla sākumpunktā, t.i.,

$$\Delta m\approx -kmt\Delta t$$

(mīnusa zīme tāpēc, ka $\Delta m<0$).
No aptuvenās vienādības iegūst radioaktīvās sabrukšanas diferenciālvienādojumu

$$m' = -km \text{ jeb } \frac{dm}{dt} = -km. \qquad (6)$$

To atrisina ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$\frac{dm}{m} = -kdt, \qquad \int \frac{dm}{m} = -\int kdt,$$

$$\ln|m| = -kt + \ln C, \quad \ln|y| = \ln\left(Ce^{-kt}\right),$$

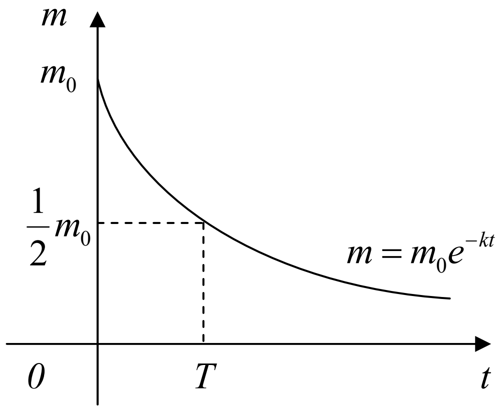
$$y = Ce^{-kt}.$$

Konstantes C noteikšanai izmanto sākuma nosacījumu $m(0)=m_0$.

Tad $$m_0 = Ce^{-k0} \text{ jeb } m_0 = C.$$

Iegūstam partikulāro atrisinājumu

$$m = m_0 e^{-kt}. \qquad (7)$$



2.24. zīm.

Proporcionalitātes koeficienta k aprēķināšanai nosaka vielas masu pēc zināma laika. Piemēram, ja pēc laika T to daudzums ir samazinājies 2 reizes (šo laiku sauc par pussabrukšanas periodu, sk. *2.24. zīm.*), tad izmanto nosacījumu $m(T)=\frac{1}{2}m_0$.

No izteiksmes *(7)* atrod

$$\frac{1}{2}m_0 = m_0 e^{-kT}, \quad \frac{1}{2} = e^{-kT},$$

$$kT = \ln 2, \qquad k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Tādējādi $$m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0\left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Atdzišanas diferenciālvienādojums.

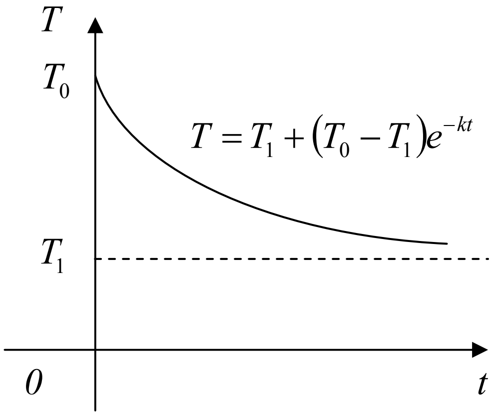
Saskaņā ar Ņūtona likumu atdziestošā ķermeņa temperatūras T zudums ΔT, kas radies laika intervālā $[t; t+\Delta t]$, aptuveni ir tieši proporcionāls intervāla garuma Δt reizinājumam ar temperatūru starpību $T-T_1$, kur T_1 ir apkārtējās vides temperatūra:

$$\Delta T \approx -k\left(T - T_1\right)\Delta t$$

(mīnusa zīme tāpēc, ka $\Delta T<0$), no kurienes iegūst atdzišanas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dT}{dt} = -k\left(T - T_1\right).$$

Šo vienādojumu atrisina, lietojot mainīgo atdalīšanas metodi:



2.25. zīm.

$$\frac{dT}{(T - T_1)} = -kdt, \quad \int \frac{dT}{(T - T_1)} = -\int kdt,$$

$$\ln|T - T_1| = -kt + \ln C,$$

$$T - T_1 = Ce^{-kt},$$

$$T = Ce^{-kt} + T_1.$$

Lai noteiktu konstanti *C*, izmanto sākuma nosacījumu *T(0)=T₀*:

$$T_0 = Ce^{-k0} + T_1,$$

no kurienes $C = T_0 - T_1$.

Iegūstam atdzišanas diferenciālvienādojuma partikulāro atrisinājumu (*sk. 2.25. zīm.*):

$$T = (T_0 - T_1)e^{-kt} + T_1.$$

Pirmās pakāpes ķīmiskās reakcijas diferenciālvienādojums.

Par pirmās pakāpes ķīmisku reakciju sauc tādu reakciju, kuras ātrums ir tieši proporcionāls reaģējošās vielas koncentrācijai.

Ja reakcijas sākumā vielas koncentrācija bija *a*, bet kādā laika momentā *t* reakcijas produktu koncentrācija ir *x*, tad šajā momentā vielas koncentrācija ir

$$a\text{-}x$$

un reakcijas produktu izmaiņas ātrums jeb reakcijas ātrums ir

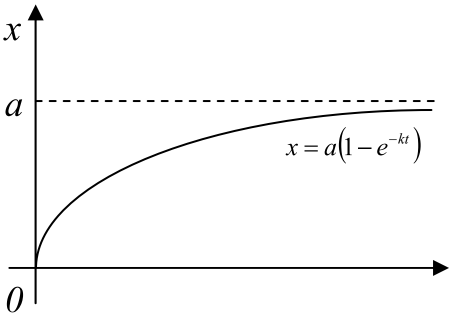
$$\frac{dx}{dt}.$$

Reakcijas ātrums ir tieši proporcionāls starpībai *a-x*.
Iegūst vienādojumu

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x),$$

ko sauc par pirmās pakāpes ķīmiskās reakcijas diferenciālvienādojumu. To var atrisināt ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$\frac{dx}{a - x} = kdt; \quad \int \frac{dx}{a - x} = \int kdt; \quad -\ln|a - x| = kt + \ln|c|; \quad \frac{1}{a - x} = Ce^{kt},$$



2.26. zīm.

no kurienes $x = a - \frac{1}{C}e^{-kt}.$

Konstantes *C* noteikšanai, izmanto sākuma nosacījumu *x(0)=0*.

Tad $0 = a - \frac{1}{C}e^{-k0}$ jeb $C = \frac{1}{a}.$

Līdz ar to ir iegūts diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums *(sk. 2.26. zīm.):*

$$x = a - ae^{-kt} \quad \text{jeb} \quad x = a(1 - e^{-kt}).$$

Otrās pakāpes ķīmiskās reakcijas diferenciālvienādojums.

Par otrās pakāpes ķīmisku reakciju sauc tādu reakciju, kuras ātrums ir tieši proporcionāls divu reaģējošu vielu koncentrāciju reizinājumam (vai vienas reaģējošas vielas koncentrācijas kvadrātam).

Ja reakcijas sākumā vielas koncentrācija bija a un otrās vielas koncentrācija – b, bet kādā laika momentā t reakcijas produktu koncentrācija ir x, tad šajā momentā pirmās vielas koncentrācija ir

$$a\text{-}x$$

un otrās vielas koncentrācija ir

$$b\text{-}x,$$

bet reakcijas ātrums ir

$$\frac{dx}{dt}.$$

Iegūst vienādojumu

$$\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x),$$

ko sauc par otrās pakāpes ķīmiskās reakcijas diferenciālvienādojumu. To var atrisināt ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=kdt;$$

$$\int\frac{dx}{(a-x)(b-x)}=\int kdt.$$

Tā kā
$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x},$$

tad noteiksim koeficientus A un B:

$$A(b-x)+B(a-x)=1,$$

$$\begin{cases}-A-B=0\\ Ab+Ba=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\ -Bb+Ba=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\ B=\dfrac{1}{a-b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-\dfrac{1}{a-b}\\ B=\dfrac{1}{a-b}\end{cases}.$$

Tad
$$\int\left(-\frac{1}{(a-x)(a-b)}+\frac{1}{(b-x)(a-b)}\right)dx=\int kdt,$$

$$-\frac{1}{a-b}\int\frac{1}{(a-x)}dx+\frac{1}{a-b}\int\frac{1}{(b-x)}dx=\int kdt,$$

$$\frac{1}{a-b}\ln|a-x|-\frac{1}{a-b}\ln|b-x|=kt+\ln|C_1|.$$

Lai vienkāršotu izteiksmi, tad, ņemot vērā to, ka C_1 ir brīvi izvēlēta konstante, $\ln|C_1|$ var izteikt šādi:

$$\ln|C_1|=\frac{1}{a-b}\ln|C|.$$

Tādējādi $$\frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{a-x}{b-x}\right| = \ln e^{kt} + \frac{1}{a-b}\ln|C|,$$

$$\ln\left|\frac{a-x}{b-x}\right| = (a-b)\ln e^{kt} + \ln|C|$$

un $$\frac{a-x}{b-x} = Ce^{(a-b)kt}.$$

Konstantes *C* noteikšanai, izmanto sākuma nosacījumu $x(0)=0$.

Tad $$\frac{a-0}{b-0} = Ce^{(a-b)k0} \text{ jeb } C = \frac{a}{b}.$$

Tātad $$\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b}e^{(a-b)kt},$$

no kurienes iegūst $$x = \frac{ab\left(e^{(a-b)kt}-1\right)}{ae^{(a-b)kt}-b}.$$

Aplūkoto organiskās augšanas, radioaktīvās sabrukšanas, atdzišanas, atmosfēras spiediena aprēķināšanas, *1.* un *2.* kārtas ķīmisko reakciju diferenciālvienādojumu atrisinājumus var izmantot kā formulas vienkāršāko „standartuzdevumu" risināšanai. Aplūkojot šādus uzdevumus nav nepieciešams sastādīt un atrisināt matemātisko modeli (diferenciālvienādojumu), bet atbilstoši uzdevuma nosacījumiem jāatrod konstantes, koeficienti, jāuzraksta partikulārais atrisinājums un jāizdara vajadzīgie aprēķini. Aplūkosim šādu uzdevumu piemērus.

Eksponenciālās augšanas un eksponenciālās dilšanas standartuzdevumi.

1. Pētāmajā kalnu iežu paraugā ir *100 mg* urāna un *14 mg* urāna svina, kas rodas urāna radioaktīvās sabrukšanas rezultātā. Aprēķināt iežu parauga vecumu, ja urāna pussabrukšanas periods ir $4{,}5\cdot 10^9$ gadu un, pilnīgi sabrūkot *238 g* urāna, rodas *206 g* urāna svina. Pieņem, ka veidošanās sākumā paraugā nebija urāna svina.

Atrisinājums.

Izmanto radioaktīvās sabrukšanas diferenciālvienādojuma

$$\frac{dm}{m} = -kdt$$

atrisinājumu $$m = m_0 e^{-kt},$$

kur $m=m(t)$ – radioaktīvās vielas daudzums atkarībā no laika,

m_0 – radioaktīvās vielas sākuma daudzums,

$k = \frac{\ln 2}{T}$ - proporcionalitātes koeficients,

T – pussabrukšanas periods.

Noteiksim urāna sākotnējo daudzumu m_0 aplūkotajā paraugā.

Saskaņā ar uzdevuma nosacījumiem, pilnīgi sabrūkot *238 g* urāna, rodas *206 g* urāna svina. Tātad *32 g* ir citi radioaktīvās sabrukšanas produkti. To

daudzums pret svina daudzumu ir $\frac{32}{206} \approx 16\%$. Šī attiecība ir nemainīga visā radioaktīvās sabrukšanas laikā.
Tad dotajā paraugā ir bijis

16% no 14 ≈2,2 mg citu produktu.

Tātad urāna sākotnējā masa

$$m_0=100+14+2,2=116,2(mg)$$

un urāna daudzumu atkarībā no sabrukšanas laika izsaka funkcija

$$m = 116,2e^{-\frac{\ln 2}{4,5\cdot 10^9}t},$$

Līdz ar to parauga vecumu *t* atrod no vienādības

$$100 = 116,2e^{-\frac{\ln 2}{4,5\cdot 10^9}t}.$$

Tad $$t = \frac{-\ln\frac{100}{116,2}\cdot 4,5\cdot 10^9}{\ln 2} \approx 0,975\cdot 10^9 = 975\cdot 10^6(g)$$

Atbilde: parauga vecums ir aptuveni 975 miljoni gadu.

2. Aprēķināt, kāda daļa no radioaktīvās vielas sākotnējā daudzuma m_0 paliks pēc *1000 gadiem*, ja šīs vielas pussabrukšanas periods ir *1550 gadi*.

Atrisinājums.

Pēc radioaktīvās sabrukšanas diferenciālvienādojumu: $\frac{dm}{dt} = -km$,

no kurienes $$\frac{dm}{m} = -kdt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dm}{m} = -\int kdt \quad \Rightarrow \quad \ln|m| = -kt + \ln C$$

$$\ln m = \ln e^{-kt} + \ln C$$

$$m = Ce^{-kt}$$

$$m\big|_{t=0} = m_o \quad \Rightarrow \quad m = m_o e^{-kt}$$

$$k = \frac{\ln 2}{T} = \frac{0,69}{1550} \approx 4,5\cdot 10^{-4}$$

$$m\big|_{t=1000} = m_o \cdot e^{4,5\cdot\cdot 10^{-4}\cdot 1000} \approx 0,6m_o$$

Atbilde: pēc *1000* gadiem būs atlikuši aptuveni *60%* sākotnējās vielas daudzuma.

3. No krāsns izņemtas maizes temperatūra *15 min* samazinājas no *100°* līdz *60°*. Pēc cik ilga laika maizes temperatūra ir *30°*, ja apkārtējā gaisa temperatūra ir *20°*?

Atrisinājums.

Izmantojot ķermeņa atdzišanas diferenciālvienādojuma $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_1)$

atrisinājumu $$T = Ce^{-kt} + T_1,$$

kur $T_1=20°$, $T(0)=100°$, $T(15)=60°$,

iegūst $100 = Ce^{-k\cdot 0} + 20 \quad \Rightarrow \quad C = 80$ un $T = 80e^{-kt} + 20$

Koeficientu k iegūst, izmantojot nosacījumu $T\big|_{t=15} = 60$:

$$60 = 80e^{-k\cdot 15} + 20, \quad 80e^{-k\cdot 15} = 40,$$

$$e^{-k\cdot 15} = \frac{1}{2}, \quad -15k = -\ln 2,$$

$$k = \frac{\ln 2}{15}.$$

Dotā ķermeņa atkarībā no laika :

$$T = 80e^{\frac{-\ln 2}{15}t} + 20 \quad \text{jeb} \quad T = 80\left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{-t}{15}} + 20,$$

no kurienes $T = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{15}} + 20$.

Ja $T=30°$, tad $30 = 80 \cdot 2^{-\frac{t}{15}} + 20$,

no kurienes $2^{-\frac{t}{15}} = \frac{1}{8}, \qquad -\frac{t}{15} = -3$

jeb *t=45 (min).*

Atbilde: pēc *45 minūtēm* maizes temperatūra ir *30°.*

4. Viena ķermeņa temperatūra ir *200°*, bet otra - *100°*. Atrodoties gaisā, kura temperatūra ir *0°,* pirmais ķermenis pēc *10 min* atdziest līdz *100°*, bet otrais – līdz *80°*. Pēc cik ilga laika ķermeņu temperatūra ir vienāda?

Atrisinājums.

Ņemot vērā ķermeņa atdzišanas diferenciālvienādojuma atrisinājumu

$$T = Ce^{-kt} + T_1,$$

kur T_1 – apkārtējās vides temperatūra,

atrodam aplūkojamo ķermeņu temperatūru atkarībā no laika

	1. ķermenis	2. ķermenis
	$T_1=0°$,	$T_1=0°$,
	$T(0)=200°$,	$T(0)=100°$,
	$T(10)=100°$.	$T(10)=80°$.
Iegūst	$200 = Ce^0$,	$100 = Ce^0$,
no kurienes	C=200,	C=100.

Partikulārais atrisinājums

$$T = 200e^{-kt} \qquad\qquad T = 100e^{-kt}$$

Koeficientu k iegūst, izmantojot papildnosacījumu:

$$100 = 200e^{-k\cdot 10}, \qquad\qquad 80 = 100e^{-k\cdot 10},$$

$$\frac{1}{2} = e^{-10t}, \qquad\qquad \frac{4}{5} = e^{-10t},$$

$$-10k = -\ln 2, \qquad\qquad -10k = \ln\frac{4}{5},$$

$$k = \frac{\ln 2}{10}, \qquad k = -\frac{\ln \frac{4}{5}}{10}.$$

Līdz ar to $\quad T = 200e^{\frac{-\ln 2}{10}t}, \qquad T = 100e^{\frac{\ln\frac{4}{5}}{10}t}$

jeb $\quad T = 200 \cdot 2^{-\frac{t}{10}}, \qquad T = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{10}}.$

Ķermeņu temperatūras būs vienādas, ja

$$200 \cdot 2^{-\frac{t}{10}} = 100 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

Tātad $\quad 2^{-\frac{t}{10}} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{2}, \qquad \left(\frac{8}{5}\right)^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{2}, \qquad -\frac{t}{10} = \frac{-\ln 2}{\ln\frac{8}{5}},$

no kurienes $\quad t = \dfrac{10\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5} \approx 14{,}75$

Atbilde: pēc *14,75 min* ķermeņu temperatūra ir vienāda.

5. Ķermenis atrodas gaisā, kura temperatūra ir *18°* un *25* minūtēs atdziest no *90°* līdz *54°*. Par cik grādiem ķermenis atdziest nākamajās *25* minūtēs.

Atrisinājums.

Ņemot vērā iegūto ķermeņa atdzišanas diferenciālvienādojuma atrisinājumu

$$T = Ce^{-kt} + T_1,$$

kur $T_0=90°$, $T_1=18°$, $T(0)=90°$, $T(25)=54°$,

iegūst $\quad 90 = Ce^{-k\cdot 0} + 18 \quad \Rightarrow \quad C = 72.$

Tātad diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir

$$T = 72e^{-kt} + 18$$

Koeficientu k iegūst , izmantojot nosacījumu $T(25)=54$

$$54 = 72e^{-k\cdot 25} + 18, \quad 72e^{-k\cdot 15} = 36,$$

$$e^{-k\cdot 25} = \frac{1}{2}, \quad -25k = -\ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{25}.$$

Dotā ķermeņa temperatūras izteiksme atkarībā no laika ir

$$T = 72e^{\frac{-\ln 2}{25}t} + 18 \quad \text{jeb} \quad T = 72 \cdot 2^{-\frac{t}{25}} + 20.$$

Vēl pēc *25 min* temperatūra būs

$$T(50) = 72 \cdot \frac{1}{4} + 18 = 36^{\circ}.$$

Tad temperatūra izmainījusies par *18°*.

Atbilde: pēc *25 minūtēm* ķermeņa temperatūra ir samazinājusies par *18°*.

6. Baktēriju sākotnējais daudzums kolbā bija *1g*, bet pēc *1* stundas – *1,2g*. Aprēķināt baktēriju daudzumu pēc *5* stundām.

Atrisinājums.

Izmanto organiskās augšanas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

un tā atrisinājumu $y = Ce^{kt}$,

kur *y=y(t)* baktāriju daudzums laika momentā *t*,

k – proporcionalitātes koeficients.

Lai noteiktu konstanti, izmanto nosacījumus

$$y\big|_{t=0} = 1 \text{ un } y\big|_{t=1} = 1{,}2 .$$

Tad $\begin{cases} 1 = Ce^{k\cdot 0} \\ 1{,}2 = Ce^{k\cdot 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = C \\ 1{,}2 = e^{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1 \\ k = \ln 1{,}2 \end{cases}$

Tātad diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums ir

$$y = e^{\ln 1{,}2t} = 1{,}2^{t} .$$

Nosaka baktēriju daudzumu pēc *5* stundām:

$$y = 1{,}2^{5} = 2{,}49(g)$$

Atbilde: pēc *5* stundām būs aptuveni *2,49 g* baktēriju.

7. Rādija pussabrukšanas periods ir *1590* gadu. Pēc cik gadiem paliks $\frac{1}{10}$ rādija sākotnējā daudzuma?

Atrisinājums.

Izmanto radioaktīvās vielas sabrukšanas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dm}{dt} = -km$$

un tā atrisinājumu $m = Ce^{-kt}$.

Ja $m\big|_{t=0} = m_0$, tad $C=m_0$ un $k = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{1590}$, tad

vienādojuma partikulārais atrisinājums ir $m = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}t}$.

Aprēķina, pēc cik gadiem paliks $\frac{1}{10}$ rādija sākotnējā daudzuma:

$$\frac{1}{10} m_0 = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{1590}t}, \qquad 0{,}1 = e^{-\frac{\ln 2}{1590}t}, \qquad -\frac{\ln 2}{1590}t = -\ln 10,$$

$$t = \frac{1590 \cdot \ln 10}{\ln 2} \approx 5281\,(gadi)$$

Atbilde: pēc aptuveni *5281* gadiem paliks $\frac{1}{10}$ rādija sākotnējā daudzuma.

8. *1940. gadā* pasaules iedzīvotāju skaits bija *2,3 miljardi*. Izmantojot organiskās augšanas diferenciālvienādojumu, aprēķināt, cik teorētiski iedzīvotāju būtu *2005. gadā*, ja iedzīvotāju skaits divkāršojas *35* gados.

Atrisinājums.

Izmanto organiskās augšanas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

un tā atrisinājumu $y = Ce^{kt}$,

kur $y=y(t)$ – iedzīvotāju skaits laika momentā t,

k – proporcionalitātes koeficients.

Lai noteiktu konstanti, izmanto nosacījumus

$$y\big|_{t=0} = 2{,}3 \text{ un } y\big|_{t=35} = 4{,}6:$$

$$\begin{cases} 2{,}3 = Ce^{k0} \\ 4{,}6 = Ce^{k\cdot 35} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2{,}3 = C \\ 2 = e^{35k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 2{,}3 \\ k = \dfrac{\ln 2}{35} \end{cases}$$

Vienādojuma partikulārais atrisinājums ir $y = 2{,}3e^{\frac{\ln 2}{35}t}$.

Aprēķina, cik iedzīvotājū būs pēc *2005-1940=65* gadiem:

$$y = 2{,}3e^{\frac{\ln 2}{35}\cdot 65} \approx 8{,}33 \text{(miljardi iedz.)}.$$

Atbilde: 2005. gadā būtu aptuveni *8,33 miljardi* iedzīvotāju.

9. Kādas valsts iedzīvotāju daudzuma pieauguma ātrums proporcionāls iedzīvotāju daudzumam. Pieņemtajās laika atskaites sākuma momentā iedzīvotāju daudzums bija N_o. Pēc *1* gada iedzīvotāju daudzums palielinājās par *p %.* Atrast iedzīvotāju daudzumu pēc *5* gadiem!

Atrisinājums.

Izmanto organiskās augšanas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

un tā atrisinājumu $y = Ce^{kt}$,

kur $y=y(t)$ – iedzīvotāju skaits laika momentā t,

k – proporcionalitātes koeficients.

Lai noteiktu konstanti, izmanto nosacījumus

$$y\big|_{t=0} = N_0 \text{ un } y\big|_{t=1} = \left(\frac{p}{100} + 1\right)N_0:$$

$$\begin{cases} N_0 = Ce^{k0} \\ \left(\dfrac{p}{100} + 1\right)N_0 = Ce^{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_0 = C \\ \left(\dfrac{p}{100} + 1\right)N_0 = N_0 e^{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = N_0 \\ k = \ln\left(\dfrac{p}{100} + 1\right) \end{cases}$$

Vienādojuma partikulārais atrisinājums ir $y = N_0 e^{\ln\left(\frac{p}{100}+1\right)\cdot t} = N_0\left(\frac{p}{100}+1\right)^t$.

Iedzīvotāju daudzums pēc *5* gadiem būs

$$y = N_0\left(\frac{p}{100}+1\right)^5.$$

Atbilde:. pēc pieciem gadiem būs $y = N_0\left(\frac{p}{100}+1\right)^5$ iedzīvotāju.

10. Aprēķināt alus rauga fermenta daudzumu pēc *5* stundām, ja rūgšanas sākumā bija *1g* fermenta, pēc *1* stundas – *1,2g* fermenta(fermenta pieaugšanas ātrums tieši proporcionāls to daudzumam).

Atrisinājums.

x=x(t) – fermenta daudzums pēc laika *t* no rūgšanas sākuma

$\frac{dx}{dt} > 0$ - fermenta daudzuma izmaiņas ātrums

$\frac{dx}{dt} = kx$ - *1*. pakāpes reakcijas diferenciālvienādojums

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \int\frac{dx}{x} = \int kdt, \quad \ln|x| = \ln e^{kt} + \ln C$$

$x = Ce^{kt}$ - vispārīgais atrisinājums

$x\big|_{t=0} = 1$ - sākuma nosacījums

$$1 = Ce^0, \quad C=1$$

$x = e^{kt}$ - partikulārais atrisinājums

$x\big|_{t=1} = 1{,}2$ - papildnosacījums

$$1{,}2 = e^k, \quad k = \ln 1{,}2 \approx 0{,}18$$

$x = e^{0{,}18t}$

$x\big|_{t=5} = e^{0{,}18\cdot 5} = e^{0{,}9} \approx 2{,}46$

Atbilde: Pēc *5* stundām būs *2,46* grami fermenta.

11. Viela *A* reaģē ar citu vielu. Reakcijas ātrums ir tieši proporcionāls vielas *A* daudzumam. Cik daudz vielas *A* bija reakcijas sākumā, ja pēc *1* stundas no reakcijas sākuma bija *100g* šīs vielas, bet pēc *2* stundām – *25* grami?

Atrisinājums.

x=x(t) –vielas daudzums pēc laika *t* no reakcijas sākuma

$\frac{dx}{dt} < 0$ - reakcijas ātrums

$\frac{dx}{dt} = -kx$ - *1*. pakāpes reakcijas diferenciālvienādojums

$$\frac{dx}{x} = -kdt, \quad \int \frac{dx}{x} = -\int kdt, \quad \ln|x| = \ln e^{-kt} + \ln C$$

$x = Ce^{-kt}$ - vispārīgais atrisinājums

$$\begin{cases} x = Ce^{-kt} \\ x\big|_{t=1} = 100 \\ x\big|_{t=2} = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100 = Ce^{-k} \\ 25 = Ce^{-2k} \end{cases} \Rightarrow 4 = e^{k}$$

$$100 = C\left(e^{k}\right)^{-1}, \quad 100 = C \cdot 4^{-1}, \quad C=400$$

$x = 400e^{-kt}$ - patrikulārais atrisinājums

$x\big|_{t=0} = 400e^{0} = 400$

Atbilde: reakcijas sākumā bija *400* gramu vielas *A*.

Ar eksponenciālās augšanas (dilšanas) sakarībām sastopamies arī daudzos „nestandarta” uzdevumos, kad jāsastāda diferenciālvienādojums, izmantojot dažādus speciālus norādījumus un likumus, kas doti uzdevuma nosacījumos. Šādi uzdevumi ir par šķīdumiem, gāzu maisījumiem, ķīmiskām reakcijām u.tml. Analogi kā iepriekš aplūkoto „standartuzdevumu” izvedumos, modelējot uzdevumā aprakstīto procesu, to vispirms aplūko brīvi izraudzītā galīgā laika intervālā $[t; t+\Delta t]$. Pieņem, ka šajā intervālā šķidruma (vai gāzes) koncentrācija nemainās un sastāda aptuvenu vienādību starp mainīgo lielumu pieaugumu izteiksmēm, no kuras, pārejot uz robežu, iegūst diferenciālvienādojumu.

Piemēri:

12. Jonizējot gāzi, tajā katru sekundi vienā tilpuma vienībā veidojas *n* pozitīvu jonu un tikpat daudz negatīvu jonu. Vienlaicīgi notiek rekombinēšanās process(pozitīvo un negatīvo jonu savienošanās), kā rezultātā jonu daudzums samazinās. Rekombināšanās ir neatgriezeniska 2. pakāpes reakcija. Atrast jonu daudzumu vienā tilpuma vienībā atkarībā no laika.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x=x(t) – jonu daudzums laika momentā *t*

kx^2 - par tik samazinās jonu daudzums *1* sekundē rekombinēšanās rezultātā

$n - kx^2$ - jonu daudzuma pieaugums *1* sekundē

$\left(n - kx^2\right)\Delta t$ - jonu daudzuma pieaugums *Δt* sekundēs

Δx>0 – jonu daudzuma pieaugums laika intervālā $[t; t+\Delta t]$

Tātad $\Delta x \approx \left(n - kx^2\right)\Delta t$ jeb $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \approx n - kx^2$.

Ja $\Delta t \to 0$, tad

$$\frac{dx}{dt} \approx n - kx^2 \text{ (jonizācijas procesa diferenciālvienādojums).}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dv}{n-kx^2}=dt,\quad \int\frac{dv}{n-kx^2}=\int dt,\quad \frac{1}{k}\int\frac{dv}{a^2-x^2}=\int dt, \text{ kur } a^2=\frac{n}{k}.$$

Tad $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|=t+C$ - vispārīgais atrisinājums

$x\big|_{t=0}=0$ - sākuma nosacījums

Iegūst: $\frac{1}{2ak}\ln 1=0+C,\quad C=0$

$$\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|=2akt,\quad \left|\frac{a+x}{a-x}\right|=e^{2akt},$$

no kurienes $x=a\frac{e^{2akt}-1}{e^{2akt}+1}$

jeb $x=ath(akt)=\sqrt{\frac{n}{k}}th\left(\sqrt{\frac{n}{k}}\cdot kt\right)=\sqrt{\frac{n}{k}}th\left(\sqrt{nk}t\right)$ - partikulārais atrisinājums

Atrisinājuma analīze.

Atrodam robežu, lietojot Lopitāla likumu

$$\lim_{t\to+\infty}x=\lim_{t\to+\infty}a\frac{e^{2akt}-1}{e^{2akt}+1}=\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}=a\lim_{t\to+\infty}\frac{\left(e^{2akt}-1\right)'}{\left(e^{2akt}+1\right)'}=a\lim_{t\to+\infty}a\frac{2ake^{2akt}}{2ake^{2akt}}=a=\sqrt{\frac{n}{k}}$$

Atbilde: Pozitīvo (arī negatīvo) jonu dudzumu x jonizēšanās procesā atkarībā no laika izsaka hiperboliskā tangensa funkcija $x=\sqrt{\frac{n}{k}}th\left(\sqrt{nk}t\right)$. Jonu daudzuma robeža ir $\sqrt{\frac{n}{k}}$.

13. Divas vielas A un B reaģējot veido trešo vielu C. Vielas A sākotnējais daudzums ir *10 litri*, vielas B – *20 litri*. No katrām divām vielas A tilpuma vienībām un vielas B vienas tilpuma vienības rodas vielas C trīs tilpuma vienības. Atrast vielas C dudzumu atkarībā no reakcijas laika, ja *20 minūtēs* iegūst *6 litri* vielas C.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$x=x(t)$ – vielas C tilpums pēc laika t no reakcijas sākuma

$\frac{dx}{dt}>0$ - reakcijas ātrums

$\frac{2}{3}x$ - tik litru vielas A ir reaģējis laikā t

$10-\frac{2}{3}x$ - tik litru vielas A ir laika momentā t

$\frac{1}{3}x$ - tik litru vielas B ir reaģējis laikā t

$20-\frac{1}{3}x$ - tik litru vielas B ir laika momentā t

Otrās pakāpes ķīmiskajā reakcijā reakcijas ātrums proporcionāls reaģējošo vielu daudzuma (koncentrāciju) reizinājumam.

Tātad
$$\frac{dx}{dt}=k\left(10-\frac{2}{3}x\right)\left(20-\frac{1}{3}x\right)$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\frac{dx}{\left(10-\frac{2}{3}x\right)\left(20-\frac{1}{3}x\right)}=kdt\,, \qquad \int\frac{dx}{\frac{2}{3}(x-15)\frac{1}{3}(x-60)}=\int kdt$$

$$\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-15)(x-60)}=\int kdt \qquad \frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-60}{x-15}\right|=kt+C_1\,,$$

$$\ln\left|\frac{x-60}{x-15}\right|=10kt+\ln C \qquad \ln\left|\frac{x-60}{x-15}\right|=\ln Ce^{10kt}$$

$\frac{x-60}{x-15}=Ce^{10kt}$ - vispārīgais atrisinājums

$x\big|_{t=0}=0$ - sākuma nosacījums

$$\frac{-60}{-15}=Ce^{10k\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C=4$$

$\frac{x-60}{x-15}=4e^{10kt}$ - partikulārais atrisinājums

Koeficienta k aprēķins.

$x\big|_{t=20}=6$ - papildnosacījums

$$\frac{6-60}{6-15}=4e^{200k} \quad \Rightarrow \quad e^{200k}=\frac{3}{2}$$

$$200k=\ln 1{,}5\,, \quad k=\frac{\ln 1{,}5}{200}\approx 0{,}002$$

$$\frac{x-60}{x-15}=4e^{0{,}02t}$$

$$x=\frac{60\left(e^{0{,}02t}-1\right)}{4e^{0{,}02t}-1}$$

Atbilde: Vielas C dudzumu atkarībā no reakcijas laika izsaka funkcija
$$x=\frac{60\left(e^{0{,}02t}-1\right)}{4e^{0{,}02t}-1}.$$

14. Kāda poraina viela, kas satur *3 kg* ūdens, atrodas istabā, kuras tilpums ir *100 m*^{3} un gaisa mitrums *25%*. Piesātināts gaiss šīs istabas temperatūrā satur *0,12 kg* ūdens uz *1 m*^{3} gaisa. Pirmās diennakts laikā viela zaudēja pusi no sava mitruma. Cik daudz mitruma tā zaudēs otrās diennakts laikā? Ūdens iztvaikošanas ātrums no porainas vielas proporcionāls mitruma daudzumam vielā un starpībai starp piesātinātā gaisa mitrumu un gaisa mitrumu telpā aplūkotajā laika momentā.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

Vispirms atrod, cik kilogramu ūdens tvaika satur gaiss istabā sākumā.
Gaisa mitrumu atrod pēc formulas

$$r = \frac{a}{A} \cdot 100\%,$$

kur *a* – ūdens tvaika daudzums gramos *1 m*^{3} gaisa (absolūtais gaisa mitrums)
A – ūdens daudzums gramos piesātinātā tvaikā *1 m*^{3} gaisa

Ja $A = 0{,}12 kg/m^3$ un $r = 25\% = \frac{1}{4}$, tad $\frac{a}{0{,}12} = \frac{1}{4}$ un $a = 0{,}03\left(kg/m^3\right)$, bet *100 m*^{3} satur $100a = 100 \cdot 0{,}03 = 3$ (kg ūdens).

x=x(t) – tik *kg* ūdens nav iztvaikojis no vielas pēc laika *t*
3-x – tik *kg* ūdens ir iztvaitojis
3+(3-x)=6-x – tik *kg* ūdens satur gaiss istabā pēc laika *t*
12-(6-x)=6+x – starpība starp ūdens daudzumu piesātinātā gaisā un esošo ūdens daudzumu

$\frac{dx}{dt} < 0$ - ūdens iztvaikošanas ātrums

$$\frac{dx}{dt} = -kx(x+6) \text{ - iztvaikošanas diferenciālvienādojums}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$\int \frac{dx}{x(x+6)} = -\int k\,dt,$$

$$\int \frac{dx}{x(x+6)} = \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+6}\right)dx = \frac{1}{6}\left(\ln|x| - \ln|x+6|\right) + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| + C$$

$$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right| = -kt + \frac{1}{6}\ln C, \quad \ln\left|\frac{x}{x+6}\right| = -6kt + \ln C$$

$$\frac{x}{x+6} = Ce^{-6kt}$$

$x\big|_{t=0} = 3$ - sākuma nosacījums

$$\frac{3}{9} = C, \; C = \frac{1}{3}$$

$\frac{x}{x+6} = \frac{1}{3}e^{-6kt}$ - partikulārais atrisinājums

$x\big|_{t=1}=\frac{1}{2}\cdot 3=1{,}5$ - papildnosacījums

$$\frac{1{,}5}{1{,}5+6}=\frac{1}{3}e^{-6k},\quad \frac{1{,}5}{7{,}5}=\frac{1}{3}e^{-6k},\quad e^{-6k}=\frac{3}{5},\quad -6k=\ln\frac{3}{5}$$

$\frac{x}{x+6}=\frac{1}{3}e^{\ln\frac{3}{5}t}$ jeb $\frac{x}{x+6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{t}$ - papildnosacījumam atbilstošais partikulārais atrisinājums

$x\big|_{t=2}=?$

$$\frac{x}{x+6}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{2},\quad \frac{x}{x+6}=\frac{3}{25}$$

$$25x=3x+18,\quad 22x=18,\quad x=\frac{9}{11}\approx 0{,}82\ (kg)$$

Atbilde: Pēc *2*. diennakts nav iztvaikojis *0,82 kg* ūdens; tātad *2*. diennakts laikā ir iztvaikojis *1,5-0,82=0,68 kg* ūdens..

15. Traukā, kurā ir *10 l* ūdens, nepārtraukti ieplūst šķidrums ar ātrumu *2 l* minūtē. Ieplūdušais šķidrums, kas satur *0,3 kg* sāls, tiek sajaukts ar ūdeni un maisījums iztek no trauka ar tādu pašu ātrumu. Cik *kg* sāls būs traukā pēc *5 min*.?

Atrisinājums.

x=x(t) – tik *kg* sāls traukā ir laika momentā *t*

$\frac{x}{10}$ - sāls koncentrācija laika momentā *t*

$2\Delta t$ - tik litri šķidruma izplūst laika intervālā $[t;t+\Delta t]$

$2\cdot 0{,}3\Delta t$ - aptuveni tik *kg* sāls ieplūst laika intervālā $[t;t+\Delta t]$

$2\cdot\frac{x}{10}$ - aptuveni tik *kg* sāls izplūst laika intervālā $[t;t+\Delta t]$

$0{,}6\Delta t-0{,}2x\Delta t$ - aptuveni tik *kg* sāls paliek traukā

$$\Delta x\approx(0{,}6-0{,}2x)\Delta t\quad\Rightarrow\quad\frac{dx}{dt}=0{,}2(3-x)$$

$$\frac{dx}{3-x}=0{,}2dt,\quad \int\frac{dx}{x-3}=-0{,}2\int dt,\quad \ln|x-3|=-0{,}2t+\ln C$$

$$\ln|x-3|=\ln Ce^{-0{,}2t},\quad x-3=Ce^{-0{,}2t},\quad x=3+Ce^{-0{,}2t}$$

$$x\big|_{t=0}=0,\quad 0=3+C,\quad C=-3$$

$x=3-3e^{-0{,}2t}$

$$x\big|_{t=5}=3-3e^{-0{,}2\cdot 5}\approx 1{,}9\ (kg)$$

Atbilde: Pēc *5* minūtēm traukā būs *1,9 kg* sāls.

16. Traukā ir *100 l* sāls šķīduma, kas satur *10 kg* sāls. Traukā ar ātrumu *5 l/min* ieplūst ūdens, kurš vienmērīgi samaisās ar šķīdumu. Šķīdums no trauka iztek ar tādu pašu ātrumu. Cik *kg* sāls būs traukā pēc *1* stundas?

Atrisinājums.

$x = x(t)$- tik *kg* sāls traukā ir laika momentā t

$\frac{x}{V} = \frac{x}{100}$ - sāls koncentrācija traukā laika momentā t

$5 \cdot \Delta t$ - tik litri ūdens ieplūst traukā laika intervālā $[t; t + \Delta t]$

$5\Delta t \cdot \frac{x}{100} = \frac{x\Delta t}{20}$ - tik *kg* sāls izplūst intervālā $[t; t + \Delta t]$

$-\frac{x}{20}\Delta t$ - sāls daudzuma pieaugums intervālā $[t; t + \Delta t]$

$$\Delta x \approx -\frac{x}{20}\Delta t,$$

$$dx = -\frac{x}{20}dt, \quad \int \frac{dx}{x} = \int -\frac{1}{20}dt, \quad \ln|x| = -0{,}05t + \ln|C|,$$

$$x = Ce^{-0{,}05t}$$

$x|_{t=0} = 10$ - sākuma nosacījums

$$10 = Ce^{-0{,}05\cdot 0}, \quad C = 10.$$

$$x = 10e^{-0{,}05t}$$

Pēc *1h = 60 min* traukā būs

$$x = 10e^{-0{,}05\cdot 60} \approx \frac{10}{20{,}08} \approx 0{,}5 \ (kg)$$

Atbilde: Pēc *1* stundas traukā būs aptuveni *0,5 kg* sāls šķīduma.

17. Traukā ir *100 l* šķīduma, kas satur *10 kg* sāls. Katru minūti tajā ielej *3 l* ūdens un iztek *2 l* šķīduma, turklāt sāls koncentrācija traukā tiek uzturēta vienmērīga. Cik *kg* sāls paliks traukā pēc *1 h*?

Atrisinājums.

$x = x(t)$- tik *kg* sāls traukā ir laika momentā t

$\frac{x}{V} = \frac{x}{100}$ - sāls koncentrācija traukā laika momentā t

$3 \cdot \Delta t$ - tik litri ūdens ieplūst traukā laika intervālā $[t; t + \Delta t]$

$3\Delta t \cdot \frac{x}{100} - 2\Delta t \frac{x}{100}$ - tik *kg* sāls izplūst intervālā $[t; t + \Delta t]$

$-\frac{x}{100}\Delta t$ - sāls daudzuma pieaugums intervālā $[t; t + \Delta t]$

$$\Delta x \approx -\frac{x}{100}\Delta t, \quad dx = -\frac{x}{100}dt, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1}{100}dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -0{,}01dt, \quad \ln|x| = -0{,}01t + \ln|C|$$

$$x = Ce^{-0,01t}.$$

$x|_{t=0} = 10$ - sākuma nosacījums

$$10 = Ce^{-0,01\cdot 0}, \quad C = 10.$$

$$x = 10e^{-0,01t}.$$

Pēc *60 min* traukā būs $x = 10e^{-0,01\cdot 60} \approx \dfrac{10}{e^{0,6}} \approx 5,5$ *(kg).*

Atbilde: Pēc *1h* traukā būs aptuveni *5,5 kg* sāls.

18. Traukā ir *60 l* šķīduma, kas satur *5 kg* sāls. Katru minūti tajā ielej *3 l* ūdens un iztek *2 l* šķīduma, turklāt sāls koncentrācija traukā tiek uzturēta vienmērīga. Cik *kg* sāls paliks traukā pēc *40 min*?

Atrisinājums.

x = x(t)- tik *kg* sāls traukā ir laika momentā *t*

$\dfrac{x}{V} = \dfrac{x}{60}$ - sāls koncentrācija traukā laika momentā *t*

$3\cdot\Delta t$ - tik litri ūdens ieplūst traukā laika intervālā $[t; t+\Delta t]$

$3\Delta t \cdot \dfrac{x}{60} - 2\Delta t \dfrac{x}{60}$ - tik *kg* sāls izplūst intervālā $[t; t+\Delta t]$

$-\dfrac{x}{60}\Delta t$ - sāls daudzuma pieaugums intervālā $[t; t+\Delta t]$

$$\Delta x \approx -\frac{x}{60}\Delta t, \quad dx = -\frac{x}{60}dt, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{1}{60}dt,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -0,017dt, \quad \ln|x| = -0,017t + \ln|C|$$

$$x = Ce^{-0,017t}.$$

$x|_{t=0} = 5$ - sākuma nosacījums

$$5 = Ce^{-0,017\cdot 0}, \quad C = 5.$$

Tātad $x = 5e^{-0,017t}.$

Pēc *40 min* traukā būs $x = 5e^{-0,017\cdot 40} \approx \dfrac{5}{1,7} \approx 3$ *(kg).*

Atbilde: Pēc *40 min* traukā būs aptuveni *3 kg* sāls.

19. Telpā, kuras tilpums ir *200* m^3, gaiss saturēja *0,15 %,* ogļskābās gāzes CO_2. Ieslēdzot ventilatoru, katru minūti tiek iesūknēti *20* m^3 gaisa, kas satur *0,04 %* CO_2. Cik ilgi jādarbina ventilators, lai CO_2 saturs telpā samazinātos *3* reizes?

Atrisinājums

x...CO_2 daudzums telpā laika momentā *t* (m^3)

$\dfrac{x}{V} = \dfrac{x}{200}$ ...CO_2 koncentrācija laika momentā *t*

Ik minūti no telpas izplūst $\frac{x}{200}\cdot 20=\frac{x}{10}\,m^3\ CO_2$,

bet ventilators iesūknē $\frac{0{,}04}{100}\cdot 20=0{,}008\ m^3\ CO_2$.

Ik minūti CO_2 daudzums izmainās par aptuveni $0{,}008-\frac{x}{10}\,m^3$, bet Δt minūtēs – par

$(0{,}008-\frac{x}{10})\,\Delta t\ m^3$.

Iegūst $\quad \Delta x\approx(0{,}008-\frac{x}{10})\,\Delta t\quad m^3$,

no kurienes $\quad \frac{\Delta x}{\Delta t}\approx 0{,}008-\frac{x}{10},\quad \frac{dx}{dt}=0{,}008-0{,}1x$

$$\frac{dx}{x-0{,}08}=-0{,}1dt,\quad \ln|x-0{,}08|=-0{,}1t+\ln C,$$

$$x=Ce^{-0{,}1t}+0{,}08$$

No sākuma nosacījumiem: $x|_{t=0}=0{,}15\%V=0{,}15\cdot 200:100=0{,}3\,(m^3)$,

$$0{,}3=Ce^{-0{,}1t}+0{,}08\quad\Rightarrow\quad C=0{,}22.$$

Tātad $\quad x=0{,}22e^{-0{,}1t}+0{,}08$

Kad CO_2 daudzums būs samazinājies *3* reizes, tā daudzums būs $0{,}3:3=0{,}1\ m^3$. Tātad jāatrod t no vienādojuma

$$0{,}1=0{,}22e^{-0{,}1t}+0{,}08,$$

$$0{,}09=e^{-0{,}1t},$$

$$t\approx 24\ (min)$$

Atbilde: Lai CO_2 saturs telpā samazinātos *3* reizes, ventilators jādarbina aptuveni *24 min.*

20. Rezervuāram, kura tilpums ir *300 l,* pamats noklāts ar biezu sāls slāni. Rezervuārs piepildīts ar ūdeni. Pieņemot, ka sāls šķīšanas ātrums ir proporcionāls starpībai starp piesātināta sāls šķīduma koncentrāciju *(1 kg sāls uz 3 l ūdens)* un sāls šķīduma koncentrāciju dotajā momentā, un dotais tīra ūdens daudzums izšķīdina $\frac{1}{3}$ *kg* sāls *1 min,* atrast, cik izšķīdušas sāls saturēs ūdens pēc *1* stundas.

Atrisinājums

$x=x(t)$ – tik kg sāls izšķīduši rezervuārā laika momentā t.

Pēc dotajiem nosacījumiem piesātināta sāls šķīduma koncentrācija ir $\frac{1}{3}$ *(kg/l);*

sāls šķīduma koncentrācija dotajā momentā ir

$$\frac{x}{V}=\frac{x}{300}\ (kg/l).$$

Sāls šķīšanas ātrums $v = \frac{dx}{dt} = k(\frac{1}{3} - \frac{x}{300})$,

kur k – proporcionalitātes koeficients.

Atdala mainīgos un integrē:

$$\frac{dx}{dt} = -k(\frac{x-100}{300}),\quad \int \frac{dx}{x-100} = -\int \frac{k}{300}dt$$

$$\ln|x-100| = -\frac{k}{300}t + \ln|C|,\quad \ln\left(\frac{x-100}{C}\right) = -\frac{k}{300}t$$

$$x = Ce^{-\frac{k}{300}t} + 100.$$

No sākuma nosacījumiem: $x|_{t=0} = 0$ un $x|_{t=1} = \frac{1}{3}$:

$$\begin{cases} 0 = Ce^{-\frac{k}{300}\cdot 0} + 100 \\ \frac{1}{3} = Ce^{-\frac{k}{300}\cdot 1} + 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -100 \\ 1 = -300e^{-\frac{k}{300}} + 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -100 \\ \ln\left(\frac{299}{300}\right) = \ln(e^{-\frac{k}{300}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -100 \\ k \approx 1 \end{cases}$$

Tātad $x = -100e^{-\frac{t}{300}} + 100.$

Aprēķina, cik izšķīdušas sāls saturēs ūdens pēc *1h = 60 min*:

$$x = -100e^{-\frac{60}{300}} + 100 = -100e^{-0,2} + 100 \approx -100\cdot 0{,}82 + 100 \approx 18\,\textit{(kg)}$$

Atbilde: Pēc *1* stundas ūdens saturēs aptuveni *18 kg* izšķīdušas sāls.

21. Kādas nešķīstošas vielas porās ir *10 kg* sāls. Ieliekot šo vielu *90 l* ūdens, *1 stundas* laikā izšķīst puse no sāls. Sāls šķīšanas ātrums ir proporcionāls neizšķīdušās sāls daudzumam un starpībai starp piesātināta šķīduma koncentrāciju *(1 kg sāls uz 3 l ūdens t.i.* $\frac{1}{4}$*)* un šķīduma koncentrāciju dotajā momentā. Atrast neizšķīdušā sāls daudzumu atkarībā no laika. Cik ilgā laikā izšķīst *90%* sākotnējā sāls daudzums?

Atrisinājums

$x = x(t)$ – tik *kg* sāls nav izšķīduši ūdenī laika momentā t.

$\frac{dx}{dt}$ - šķīšanas ātrums

$10 - x$ - tik kg sāls ir izšķīduši pēc laika t

$90 + (10 - x) = 100 - x$ - tik *kg* ir kopējais šķīduma daudzums

$\frac{10-x}{100-x}$ - šķīduma koncentrācija momentā t

$\frac{1}{4} - \frac{10-x}{100-x}$ - starpība starp piesātināta šķīduma koncentrāciju un aplūkoto šķīduma koncentrāciju momentā t.

Tātad $$\frac{dx}{dt} = -kx(\frac{1}{4} - \frac{10-x}{100-x}),\quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{4}kx(\frac{x(x+20)}{x-100})$$

$$\int \frac{x-100}{x(x+20)}dx = \frac{3}{4}k\int dt$$

$$-5\ln|x| + 6\ln|x+20| = \ln e^{\frac{3}{4}kt} + \ln C$$

$$\frac{(x+20)^6}{x^5} = Ce^{\frac{3}{4}kt}$$

No sākuma nosacījuma $x\big|_{t=0} = 10$

$$\frac{30^6}{10^5} = C, \quad C = 30\cdot 3^5,$$

$$\frac{(x+20)^6}{x^5} = 30\cdot 3^5 e^{\frac{3}{4}kt}$$

No sākuma nosacījuma $x\big|_{t=1} = 5$

$$\frac{25^6}{5^5} = 30\cdot 3^5 e^{\frac{3}{4}k}, \quad e^{\frac{3}{4}k} = \frac{5^6}{2\cdot 3^6}, \quad \frac{3}{4}k \approx 2{,}3718,$$

Tātad $\dfrac{(x+20)^6}{x^5} = 10\cdot 3^6 e^{2{,}3718t}$.

90% no sākotnējā sāls daudzuma ir $0{,}9\cdot 10 = 9\,kg$.

Atrod laiku, kad ir palikuši *10 – 9 = 1 kg* sāls:

$$\frac{(1+20)^6}{1^5} = 10\cdot 3^6 e^{2{,}3718t}, \quad 21^6 = 10\cdot 3^6 e^{2{,}3718t},$$

no kurienes $t = 3{,}96 \approx 4\,(h)$

Atbilde: 90% sākotnējā sāls daudzuma būs izšķīduši pēc aptuveni *4 stundām.*

22. Laboratorijā, kuras tilpums $V\,m^3$, gaiss saturēja *p%* amonjaka. Ieslēdzot ventilatoru, katru minūti iesūknēja $a\ m^3$ tīra gaisa, kas amonjaku nesatur. Cik ilgi jādarbina ventilators, lai amonjaka saturs samazinātos *2* reizes? Pieņem, ka attīrītais gaiss ar ātrumu $a\ m^3/min$ izplūst no labaratorijas.

Atrisinājums

$x = x(t)$ –amonjaka daudzums (m^3) pēc laika *t* no ventilatora ieslēgšanas

$\dfrac{x}{V}$ - amonjaka koncentrācija laika momentā *t*, kuru pieņem nemainīgu laika intervālā $[t; t+\Delta t]$

$\dfrac{x}{V}a$ - amonjaka daudzums, kas izplūst *1* minūtē

$\dfrac{x}{V}a\Delta t$ - amonjaka daudzums, kas izplūst Δt minūtēs

$\Delta x < 0$ - amonjaka daudzuma izmaiņa laika intervālā $[t; t+\Delta t]$

$$\Delta x \approx -\frac{a}{V}x\Delta t, \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -\frac{a}{V}x$$

Ja $\Delta t \to 0$, tad $$\frac{dx}{dt} = -\frac{a}{V}x.$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{a}{V}dt, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{a}{V}dt, \quad \int\frac{dx}{x} = -\int\frac{a}{V}dt$$

$$\ln|x| = -\frac{a}{V}t + \ln C, \quad \ln|x| = \ln e^{-\frac{a}{V}t} + \ln C,$$

$x = Ce^{-\frac{a}{V}t}$ - vispārīgais atrisinājums

$x\big|_{t=0} = \frac{p}{100}V$ - sākuma nosacījums

$$\frac{p}{100}V = Ce^0, \quad C = \frac{p}{100}V$$

$x = \frac{p}{100}Ve^{-\frac{a}{V}t}$ - partikulārais atrisinājums

$x\big|_{t=t_1} = \frac{1}{2}\frac{p}{100}V$, $t_1=?$

$$\frac{1}{2}\frac{p}{100}V = \frac{p}{100}Ve^{-\frac{a}{V}t_1}, \quad \frac{1}{2} = e^{-\frac{a}{V}t_1}, \quad -\frac{a}{V}t_1 = -\ln 2,$$

$$t_1 = \frac{V\ln 2}{a}$$

Atbilde: Ventilators jādarbina $\frac{V\ln 2}{a}$ minūtes.

23. Cilvēks vidēji ieelpo *18* reizes *1* minūtē, katru reizi izelpojot *2000* cm^3 gaisa, kas satur *4%* CO_2. Cik procentu CO_2 saturēs gaiss auditorijā, kuras tilpums *400* m^3 pēc *30 minūtēm*, ja auditorijā uzturas *50* cilvēki un ventilators iesūknē *40* m^3 svaiga gaisa *1 min*, kas satur *0,04%* CO_2?

Atrisinājums.

CO_2 daudzums auditorijā sākumā, kad tajā neatrodas cilvēki:

0,04% no 400=0,16(m^3).

$x = x(t)$ – CO_2 daudzums (m^3) pēc laika t

$\frac{x}{400}$ - CO_2 koncentrācija laika momentā t, kuru pieņem par nemainīgu laika intervālā $[t; t+\Delta t]$

$\frac{x}{400}\cdot 40 = 0{,}1x$ - CO_2 daudzums, kas *1* minūtē izplūst no telpas

$\frac{0{,}04}{400}\cdot 40 = 0{,}016$ - CO_2 daudzums, ko *1* minūtē iesūknē ventilators

$18 \cdot 50 \cdot \dfrac{2000}{1000000} \cdot \dfrac{4}{100} = 0{,}072$ - CO_2 daudzums *(m^3)*, ko *1* minūtē izelpo *50* cilvēki

$0{,}072 + 0{,}016 = 0{,}088$ - CO_2 kopīgais daudzums, ko *1* minūtē iesūknē ventilators un izelpo *50* cilvēki

$0{,}1x - 0{,}088$ - CO_2 daudzums, kas *1* minūtē paliek auditorijā

$(0{,}1x - 0{,}088)\Delta t$ - CO_2 daudzums, kas paliek auditorijā laika intervālā $[t; t + \Delta t]$

$\Delta x < 0$ - CO_2 daudzums izmaiņa laika intervālā $[t; t + \Delta t]$

$$\Delta x \approx -(0{,}1x - 0{,}088)\Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -(0{,}1x - 0{,}088)$$

Ja $\Delta t \to 0$: $$\frac{dx}{dt} = -(0{,}1x - 0{,}088), \qquad \frac{dx}{dt} = -0{,}1(x - 0{,}88)$$

$$\frac{dx}{x - 0{,}88} = -0{,}1dt, \qquad \int \frac{dx}{x - 0{,}88} = -\int 0{,}1dt$$

$$\ln|x - 0{,}88| = -0{,}1t + \ln C$$

$$\ln|x - 0{,}88| = \ln e^{-0{,}1t} + \ln C$$

$$x - 0{,}88 = Ce^{-0{,}1t}$$

$x = Ce^{-0{,}1t} + 0{,}88$ - vispārīgais atrisinājums

$x\big|_{t=0} = 0{,}16$ - sākuma nosacījums

$0{,}16 = Ce^{0} + 0{,}88$, C=-0,72

$x = -0{,}72e^{-0{,}1t} + 0{,}88$ - partikulārais atrisinājums

Aprēķins.

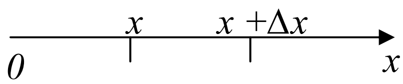
$$x\big|_{t=30} = -0{,}72e^{-3} + 0{,}88 \approx 0{,}84\left(m^3\right)$$

$$\frac{0{,}84}{400} \approx 0{,}002 = 0{,}2\%$$

Atbilde: Pēc *30* minūtēm auditorijā būs *0,2%* CO_2.

24. Vēja ātrums mežā samazinās proporcionāli pārvietojumam un ātrumam pārvietojuma sākumpunktā. Aprēķināt vēja ātrumu *150 m* attālumā no meža malas, ja tā ātrums ārpus meža ir *12 m/s*, bet *1 m* attālumā no meža malas – *11,8 m/s*.

Atrisinājums.



2.27. zīm.

Novelk *Ox* asi vēja virzienā ar koordinātu sākumpunktu *O* meža malā. Tad intervālā *[x; x+*Δ*x]* vēja ātrums samazinās par lielumu $\Delta v<0$, kas proporcionāls ātrumam punktā *x* un intervāla garumam Δx

$$\Delta v \approx - kv\Delta x \text{ jeb } \frac{\Delta v}{\Delta x} \approx -kv.$$

Ja $\Delta x \to 0$, tad $$\frac{dv}{dx} = -kv.$$

Atdala mainīgos un integrē:

$$\frac{dv}{v} = -kdx,$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int kdx,$$

$$lnv = -kx + lnC,$$

$$v = Ce^{-kx}.$$

No sākuma nosacījumiem $$v\big|_{x=0} = 12 \quad \text{un} \quad v\big|_{x=1} = 11{,}8$$

$$\begin{cases} 12 = Ce^{-k \cdot 0} \\ 11{,}8 = Ce^{-k \cdot 1} \end{cases},$$

$$\begin{cases} C = 12 \\ e^{-k} = \dfrac{11{,}8}{12} \approx 0{,}983 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C = 12 \\ -k \approx \ln 0{,}983 \Rightarrow k \approx 0{,}0168 \end{cases}.$$

Tātad $$v = 12e^{-0{,}017x}.$$

Aprēķina vēja ātrumu *150 m* attālumā no meža malas:

$$v\big|_{x=150} = 12e^{-0{,}017 \cdot 150} \approx 12e^{-2{,}52} \approx 0{,}94(m/s)$$

Atbilde: Vēja ātrums *150 m* attālumā no meža malas ir aptuveni *0,94 m/s*.

2.3.4. Stacionāras siltuma plūsmas aprēķini.

Vairākos lietišķa satura uzdevumos jāaprēķina siltuma daudzums, ko apkārtējā vidē izstaro siltuma avots. Šo uzdevumu risinājuma pamatā ir Furjē siltuma vadīšanas likums, kas izriet no šādiem nosacījumiem:

- Telpā ir stacionārs (laikā nemainīgs) temperatūras T sadalījums.
- Aplūko virsmas apgabalu, kura laukums ir S.
- $\vec{n}$ - normāles vektors pret virsmu.
- $\frac{dT}{dn} < 0$ - temperatūras izmaiņas ātrums virsmas normāles virzienā.
- Q – siltuma daudzums, kas vienā laika vienībā (sekundē) izplūst caur virsmu S.
- k – siltuma vadīšanas koeficients aplūkotajā vidē.

Tātad, saskaņā ar Furjē likumu, siltuma daudzums, kas vienā sekundē izplūst caur virsmu, ir tieši proporcionāls virsmas laukumam S un temperatūras izmaiņas (samazināšanās) ātrumam virsmas normāles virzienā, t.i.,

$$Q = -kS\frac{dT}{dn}.$$

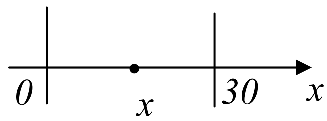
Aplūkosim piemērus.

1. Ķieģeļu sienas biezums ir *30 cm*. Atrast temperatūras atkarību no punkta attāluma līdz ārējai virsmai, ja temperatūra uz sienas iekšējās virsmas ir 20^o, bet uz ārējās virsmas 0^o. Atrast siltuma daudzumu, ko uz ārpusi izstaro $1\ m^2$ sienas diennaktī!

Atrisinājums.

Ja ķermenim ir stacionārs (laikā nemainīgs) temperatūras sadalījums, tad saskaņā ar Furjē siltuma vadīšanas likumu ātrums Q, ar kādu siltums izplatās caur Ox asij perpendikulāru virsmu A, ir

$$Q = -kS\frac{dT}{dx},$$



2.28. zīm.

kur k – dotās vielas siltuma vadāmības koeficients. (šajā gadījumā $k = 0{,}0015\frac{cal}{cm \cdot grad}$),

T – temperatūra,

$\frac{dT}{dx}$ - temperatūras izmaiņas ātrums virsmai S perpendikulārā virzienā,

S – virsmas laukums.

Dotajai ātruma izteiksmei atdala mainīgos un integrē:

$$Q = -kS\frac{dT}{dx}, \quad \int dT = -\frac{Q}{kS}\int dx, \quad T = -\frac{Q}{kS}x + C.$$

No robežnosacījumiem $T\big|_{x=0} = 0^o$ un $T\big|_{x=30} = 20^o$:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{Q}{kS}\cdot 0 + C \\ 20 = -\dfrac{Q}{kS}\cdot 30 + C \end{cases}, \quad \begin{cases} C = 0 \\ -\dfrac{Q}{kS} = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Tātad temperatūras sadalījums atkarībā no x ir $T = \frac{2}{3}x$,

no kurienes $$\frac{dT}{dx} = \frac{2}{3}.$$

Izmantojot diferenciālvienādojumu, iegūst:

$$|Q| = \frac{2}{3}kS.$$

Tā kā $S = 1m^2 = 10000\ cm^2$ un $k = 0,0015$, tad pēc *1* sekundē uz ārpusi izstarotais siltuma daudzums ir

$$Q = \frac{2}{3}\cdot 0,0015\cdot 10000 = 10(cal).$$

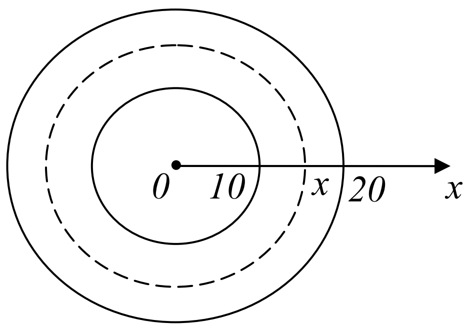
24 stundās jeb vienā diennaktī izstarotais siltuma daudzums ir

$$Q = 10\cdot 24\cdot 3600 = 864000(cal) = 4,2\cdot 864000 \approx 3,6\cdot 10^6(J).$$

Atbilde: siltuma daudzums, ko uz ārpusi izstaro $1\ m^2$ sienas diennaktī, ir aptuveni $3,6\cdot 10^6(J)$.

2. Siltuma maģistrāles caurule, kuras diametrs *20 cm*, pārklāta ar *10 cm* biezu siltuma izolācijas kārtu. Caurules un karstā ūdens temperatūra ir *160°C*, izolācijas kārtas temperatūra - *30°C*. Atrast temperatūras sadalījumu izolācijas kārtā. Cik lielu siltuma daudzumu izdala *1* metru garš caurules posms *1* sekundē un *24* stundās, ja izolācijas materiālu siltumvadības koeficients *k=0,00017*?

Atrisinājums.



2.29. zīm.

Ja ķermenim ir stacionārs (laikā nemainīgs) temperatūras sadalījums, tad *1* sekundē caur virsmu, kuras laukums ir *S* izplūst siltuma daudzums

$$Q = -kS\frac{dT}{dx},$$

kur k –siltuma vadāmības koeficients.,

$\frac{dT}{dx}$ - temperatūras izmaiņas ātrums.

Izolācijas kārtas intervāls *[10; 20]*. Siltums plūst caur cilindrisku virsmu, kuras laukums $S(x) = 2\pi x l$ (l – caurules garums).

$$dT = -\frac{Q}{2\pi lkx}dx \;\Rightarrow\; T = -\frac{Q}{2\pi lk}\ln x + C$$

Robežnosacījumi: $T\big|_{x=10} = 160^o$ un $T\big|_{x=20} = 30^o$

$$\begin{cases} 160 = -\dfrac{Q}{2\pi lk}\ln 10 + C \\ 30 = -\dfrac{Q}{2\pi lk}\ln 20 + C \end{cases} \Rightarrow \quad 130 = -\frac{Q}{2\pi lk}(\ln 10 - \ln 20),$$

$$-\frac{Q}{2\pi lk}\ln\frac{1}{2} = 130, \quad \frac{Q}{2\pi lk} = \frac{130}{\ln 2} \approx 187{,}6,$$

$$Q = 2\pi lk \cdot 187{,}6.$$

$$C=160+187{,}6\ln 10=591{,}9.$$

$T = -187{,}6\ln x + 591{,}9$ - temperatūras sadalījums izolācijas kārtā

Vienu metru garš caurules posms *1* sekundē izdala

$$Q = 2\pi lk \cdot 187{,}6 = 2\pi \cdot 100 \cdot 0{,}00017 \cdot 187{,}6 \approx 20(cal)$$

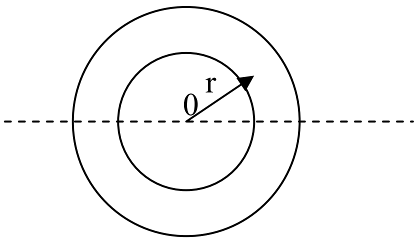
un *24* stundās

$$Q = 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 20 = 1728000(cal).$$

Atbilde: temperatūras sadalījums izolācijas kārtā: $T = -187{,}6\ln x + 591{,}9$ intervālā *[10; 20]*. Siltuma daudzums, ko 24 stundās izdala 1 metru garš caurules posms, ir $1{,}728 \cdot 10^6$ kalorijas.

3. Dzelzs lodei ar tukšu vidu un čaulas rādiusiem *a* un *2a* temperatūra uz iekšējās virsmas ir *100°C*, bet uz ārējās virsmas *20°C*. Noteikt temperatūru čaulas punktos, kuru attālums no centra ir *r (a ≤ r ≤ 2a)*. Aprēķināt temperatūru, ja *r = 1,6a*.

Atrisinājums.



2.30. zīm.

Siltuma plūsma lodē notiek rādiusa virzienā perpendikulāri sfēriskajai virsmai. Attālumā *r* no centra šīs virsmas laukums ir

$$S = 4\pi r^2 \qquad (1)$$

Caur 2 šādām virsmām vienā laika vienībā izplūst vienāds siltuma daudzums *Q*. Tātad *Q* ir siltuma plūsmas ātrums.

Izmanto Furjē siltumvadāmības likumu:

$$Q = -kS\frac{dT}{dr},$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{kS}, \qquad (2)$$

kur T – temperatūra,

k – siltumvadāmības koeficients,

$Q = const$ – siltuma plūsmas ātrums,

$\frac{dT}{dr}$ – temperatūras kritums rādiusa virzienā.

No vienādībām *(1)* un *(2)* iegūst diferenciālvienādojumu:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{4\pi k r^2},$$

kuru atrisina, lietojot mainīgo atdalīšanas metodi:

$$dT = -\frac{Q}{4\pi k r^2}dr, \quad \int dT = -\int \frac{Q}{4\pi k r^2}dr, \quad T = \frac{Q}{4\pi k r} + C.$$

No robežnosacījumiem

$$T\big|_{r=a} = 100^o C \quad \text{un} \quad T\big|_{r=2a} = 20^o C$$

iegūst

$$\begin{cases} 100 = \dfrac{Q}{4\pi k a} + C \\ 20 = \dfrac{Q}{8\pi k a} + C \end{cases},$$

$$80 = \frac{Q}{4\pi k a} - \frac{Q}{8\pi k a} \Rightarrow \frac{Q}{8\pi k a} = 80, \ \frac{Q}{4\pi k} = 160a,$$

$$100 = 160 + C,$$

$$C = -60.$$

Diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums:

$$T = \frac{Q}{4\pi k r} - 60 \quad \text{jeb} \quad T = \frac{160a}{r} - 60.$$

Atrod temperatūru, ja $r = 1,6a$:

$$T\bigg|_{r=1,6a} = \frac{160a}{1,6a} - 60 = 40^o C$$

Atbilde: temperatūra čaulas punktos r ir $T = \dfrac{160a}{r} - 60$ un, ja $r=1,6a$, tad temperatūra $T=40^oC$.

3. OTRĀS KĀRTAS DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMS KĀ MATEMĀTISKS MODELIS.

3.1. Otrās kārtas diferenciālvienādojumu pamatjēdzieni.

2. kārtas diferenciālvienādojumu vispārīgā veidā pieraksta kā vienādību

$$F(x, y, y', y'') = 0 .$$

Šī vienādojuma *normālforma* ir

$$y'' = f(x, y, y').$$

2. kārtas diferenciālvienādojuma *vispārīgais atrisinājums* satur divas konstantes C_1 un C_2 un to pieraksta kā funkciju

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Konstanšu noteikšanai ir nepieciešami divi sākuma nosacījumi

$$y(x_0) = y_0 \text{ un } y'(x_0) = y'_0,$$

t.i. ir dots punkts $M(x_0;y_0)$, caur kuru iet integrāllīnija un integrāllīnijas pieskares virziena koeficients šajā punktā.

Konstantes C_1 un C_2 var noteikt arī, ja doti divi punkti $M_1(x_1;y_1)$ un $M_2(x_2;y_2)$, caur kuriem iet integrāllīnija, t.i., doti nosacījumi $y(x_1) = y_1$ un $y(x_2) = y_2$. Šādu informāciju par meklējamo funkciju $y = \varphi(x)$ sauc par robežnosacījumiem.

Atrisinot Košī uzdevumu, konstanšu C_1 un C_2 noteikšanai izmanto vienādojumu sistēmu, kurā izmanto sākuma nosacījumus vai arī robežnosacījumus. Uzdevumu risina pēc šādas shēmas:

$$\begin{array}{l} y = \varphi(x, C_1, C_2) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2) = y'_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = C_{1_0} \\ C_2 = C_{2_0} \end{array} \Rightarrow y = \varphi(x_0, C_{1_0}, C_{2_0})$$

vai arī

$$\begin{array}{l} y = \varphi(x, C_1, C_2) \\ y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \varphi(x_1, C_1, C_2) = y_1 \\ \varphi(x_2, C_1, C_2) = y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = C_{1_0} \\ C_2 = C_{2_0} \end{array} \Rightarrow y = \varphi(x\ , C_{1_0}, C_{2_0}).$$

2. kārtas diferenciālvienādojumam $y'' = f(x, y, y')$ eksistē viens vienīgs atrisinājums, kas apmierina sākuma nosacījumus $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ja funkcija $f(x; y; y')$ un tās parciālie atvasinājumi $f'_y(x; y; y')$, $f'_{y'}(x; y; y')$ ir nepārtrauktas funkcijas kādā punkta $N_0(x_0, y_0, y'_0)$ apkārtnē.

3.2. Otrās kārtas diferenciālvienādojumu atrisināšanas metodes.

Aplūkosim tādus 2. kārtas diferenciālvienādojumus $F(x,y,y',y'')=0$, no kuriem var izteikt 2. kārtas atvasinājumu $y''=f(x,y,y')$. Apskatīsim dažu speciālgadījumu atrisināšanas metodes.

3.2.1. Vienādojumi, kuriem var pazemināt kārtu.

1) Diferenciālvienādojuma izteiksme nesatur y un y'.

Tad vienādojums ir $y''=f(x)$. (1)

Lai atrisinātu šo vienādojumu, integrē vienādojuma abas puses:

$$\int y''dy=\int f(x)dx \ ,$$

tad $$y'=\int f(x)dx+C_1 .$$

Vēlreiz integrējot vienādojuma abas puses, iegūst

$$\int y'dy=\int \left(f(x)dx+C_1\right)dx+C_2 \ , \tag{2}$$

no kurienes $$y=\int \left(f(x)dx+C_1\right)dx+C_2 . \tag{3}$$

Diferenciālvienādojuma *(1)* vispārīgais atrisinājums ir *(3).*

<u>Piemērs.</u> *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $y''=3\sin x$.

Tātad diferenciālvienādojums nesatur y un y'. Integrējot diferenciālvienādojuma abas puses, iegūst:

$$y'=\int 3\sin x dx=3(-\cos x)+C_1 \quad jeb \quad y'=-3\cos x+C_1 .$$

Vēlreiz integrējot diferenciālvienādojuma abas puses, iegūst:

$$y=\int \left(-3\cos x+C_1\right)dx=-3\sin x+C_1x+C_2 .$$

Diferenciālvienādojuma $y''=3\sin x$ vispārīgais atrisinājums ir

$$\underline{\underline{y=-3\sin x+C_1x+C_2 .}}$$

2) Diferenciālvienādojuma izteiksme nesatur y.

Tātad diferenciālvienādojumu var uzrakstīt veidā $y''=f(x,y')$. Lai atrisinātu šo diferenciālvienādojumu, lieto substitūciju: $y'=z$, kur z ir argumenta x funkcija jeb $z=z(x)$.

Tad $y''=z'$ un, ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūst

$$z'=f\left(x,z(x)\right).$$

Šī diferenciālvienādojuma atrisinājums ir

$$z=\varphi_1\left(x,C_1\right).$$

Ņemot vērā substitūciju $y'=z$, tad

$$y'=\varphi_1\left(x,C_1\right).$$

Integrējot diferenciālvienādojuma abas puses, iegūst vispārīgo atrisinājumu:

$$\int y'dy = \int \varphi_1(x, C_1)dx + C_2$$

un
$$\underline{\underline{y = \int \varphi_1(x, C_1)dx + C_2}}.$$

<u>Piemērs.</u> *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $y'' + 2y' = e^x$.

Dotais diferenciālvienādojums nesatur y. Lietojot substitūciju $y' = z$, no kurienes $y'' = z'$, un ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūst:

$$z' + 2z = e^x. \tag{4}$$

Šis ir 1. kārtas lineārs diferenciālvienādojums, kuru atrisina, lietojot substitūciju $z = u \cdot v$. Tad $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Ievietojot diferenciālvienādojumā *(4)* un vienkāršojot, iegūst:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + 2uv = e^x$$

jeb
$$u' \cdot v + u(v' + 2v) = e^x \tag{5}$$

Izvēlēsimies *v* tādu, lai $v' + 2v = 0$, tad $\frac{dv}{dx} = -2v$ un $\frac{dv}{v} = -2dx$.

Integrējot diferenciālvienādojuma abas puses, iegūst :

$$\ln|v| = -2x \text{ un } v = e^{-2x}.$$

Iegūto rezultātu ievietojot diferenciālvienādojumā (*5)* un integrējot abas diferenciālvienādojuma puses, iegūst:

$$u'e^{-2x} = e^x \text{ jeb } u' = e^{3x},$$

$$u = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1.$$

Tad
$$z = u \cdot v = \left(\frac{1}{3}e^{3x} + C_1\right) \cdot e^{3x} = \frac{1}{3}e^{6x} + C_1e^{3x}.$$

Tā kā $y' = z$, tad $y' = \frac{1}{3}e^{6x} + C_1e^{3x}$

Integrējot diferenciālvienādojuma abas puses vēlreiz, iegūst vispārīgo atrisinājumu:

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{18}e^{6x} + C_2e^{3x} + C_3}}, \text{ kur } C_2 = \frac{C_1}{3}.$$

3) Diferenciālvienādojuma labās puses izteiksme nesatur x jeb vienādojums uzrakstāms veidā $y'' = f(y, y')$. (6)

Šajā gadījumā lieto substitūciju $y' = z$, kur *z* ir funkcija, kas atkarīga no *y*, t.i., *z=z(y).*

Tad
$$y'' = (y')' = (z)' = z'_y \cdot y'_x = z' \cdot z.$$

Ievietojot vienādojumā *(6),* iegūst

$$z' \cdot z = f(y, z).$$

Ja šī vienādojuma atrisinājums ir $z=\varphi_1(y,C_1)$ un $y'=z$, tad iegūst diferenciālvienādojumu $y'=\varphi_1(y,C_1)$, kuru atrisinot, iegūst diferenciālvienādojuma *(6)* vispārīgo atrisinājumu $\underline{\underline{y=\varphi(x,C_1,C_2)}}$.

Piemērs. *Atrisināt diferenciālvienādojumu* $y''+\dfrac{2}{1-y}\cdot(y')^2=0$.

Atrisinājums.
Substitūcija: $y'=z,\ y''=z'z,$

Iegūst: $$z'z+\frac{2}{1-y}\cdot z^2=0 \quad \Big|\ :z\neq 0$$

$$z'=\frac{2}{y-1}\cdot z,\quad \frac{dz}{dy}=\frac{2}{y-1}\cdot z,\quad \int\frac{dz}{z}=\int\frac{2}{y-1}dy,$$

$$\ln|z|=2\ln|y-1|+\ln C_1,$$

$$z=C_1(y-1)^2$$

$$y'=C_1(y-1)^2,\quad \frac{dy}{dx}=C_1(y-1)^2,\quad \int\frac{dy}{(y-1)^2}=C_1\int dx,$$

$$-\frac{1}{y-1}=C_1x+C_2$$

$$y-1=-\frac{1}{C_1x+C_2}$$

$$y=1-\frac{1}{C_1x+C_2}$$ - vispārīgais atrisinājums

3.2.2. Lineāri homogēni 2. kārtas diferenciālvienādojumi.

2. kārtas diferenciālvienādojumu, kur meklējamās funkcijas y atvasinājumus y' un y'' satur lineāri, sauc par lineāru diferenciālvienādojumu. Šāda vienādojuma vispārīgais veids ir:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x),$$

kur $a_1(x), a_2(x)$ un $f(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas vai skaitļi.

Ja *f(x)=0,* tad šādu diferenciālvienādojumu sauc par *homogēnu.*

Tā normālforma ir

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

Lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājuma īpašības:

1) ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma *(1)* atrisinājumi un C ir konstante, tad funkcija:

a) $C\cdot y_1$ arī ir šī diferenciālvienādojuma atrisinājums;

b) y_1+y_2 arī ir šī diferenciālvienādojuma atrisinājums.

Secinājums: ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājumi un C_1 un C_2 ir konstantes, tad funkcija $C_1y_1+ C_2y_2$ arī ir šī diferenciālvienādojuma atrisinājums.

2) ja kompleksa funkcija *u(x)+iv(x)* ir lineāra diferenciālvienādojuma atrisinājums, tad šī diferenciālvienādojuma atrisinājumi ir arī funkcijas *u(x)* un *v(x)*.

Definīcija.

Funkcijas y_1 un y_2 sauc par lineāri atkarīgām kādā intervālā, ja šajā intervālā funkciju attiecība ir konstanta, ja funkciju attiecība nav konstanta, tad funkcijas y_1 un y_2 sauc par lineāri neatkarīgām šajā intervālā.

Pamatteorēma par lineāra homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgā atrisinājuma struktūru.

Ja funkcijas y_1 un y_2 ir lineāri neatkarīgas un apmierina lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu, tad funkcija $C_1y_1+ C_2y_2$ ir šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums. *[1]*

Ja lineāra homogēna 2. kārtas diferenciālvienādojuma koeficienti $a_1(x)$ un $a_2(x)$ ir skaitļi, tad šo diferenciālvienādojumu sauc par 2. kārtas lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu ar konstantiem koeficientiem. Tā normālforma ir

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

kur p un q ir konstantes, bet y ir meklējamā funkcija. Šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y=C_1y_1+ C_2y_2, \qquad (3)$$

kur y_1 un y_2 ir lineāri neatkarīgas funkcijas, kas apmierina šo vienādojumu, bet C_1 un C_2 ir konstantes.

Lai atrastu funkcijas y_1 un y_2, izmanto ***Eilera metodi.***

Saskaņā ar šo metodi, atrisinājumus meklē kā eksponentfunkcija $y = e^{kx}$, kur koeficientu k atrod no nosacījuma, ka šī funkcija apmierina diferenciālvienādojumu *(2).* Ievietojot šajā vienādojumā

$$y = e^{kx},\ y' = ke^{kx}\ ,\ y' = k^2 e^{kx}$$

un izdalot iegūtās vienādības abas puses ar $e^{kx} \neq 0$, iegūst diferenciālvienādojumam *(2)* atbilstošo raksturīgo vienādojumu

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{4}$$

Tās k vērtības, ar kurām e^{kx} apmierina doto diferenciālvienādojumu (*2),* ir vienādojuma *(4)* atrisinājumi.

Atkarībā no raksturīgā vienādojuma *(4)* diskriminanta D vērtības iespējami šādi gadījumi:

1) ***D>0.***

Raksturīgajam vienādojumam *(4)* ir divas reālas dažādas saknes $k_1 \neq k_2$, kurām atbilst diferenciālvienādojuma partikulārie atrisinājumi $y_1 = e^{k_1 x}$ un $y_2 = e^{k_2 x}$.

Acīmredzami šīs funkcijas ir lineāri neatkarīgas intervālā *(-∞; +∞)*, jo

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq const \text{, ja } k_1 \neq k_2 .$$

Tātad ar funkcijām y_1 un y_2 var sastādīt diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} . \tag{5}$$

2) ***D=0.***

Raksturīgajam vienādojumam ir divas vienādas reālas saknes $k_1=k_2$, kurām atbilst tikai viens diferenciālvienādojuma *(2)* partikulārais atrisinājums $y_1 = e^{k_1 x}$. Taču var pierādīt, ka šo vienādojumu apmierina arī funkcija $y_2 = xe^{k_1 x}$.

Funkcijas y_1 un y_2 ir lineāri neatkarīgas, jo

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{xe^{k_1 x}} = \frac{1}{x} \neq const .$$

Līdz ar to šajā gadījumā vispārīgais atrisinājums ir funkcija

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 xe^{k_1 x} \quad \text{jeb} \quad y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

3) ***D<0***.

Raksturīgajam vienādojumam *(4)* saknes ir kompleksi saistīti skaitļi $k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

Izmantojot kompleksa argumenta eksponentfunkcijas pārveidojumu ar Eilera formulu palīdzību un lineāra homogēna diferenciālvienādojuma atrisinājuma īpašību, var pierādīt, ka diferenciālvienādojuma *(2)* partikulārie atrisinājumi ir funkcijas

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ un } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x .$$

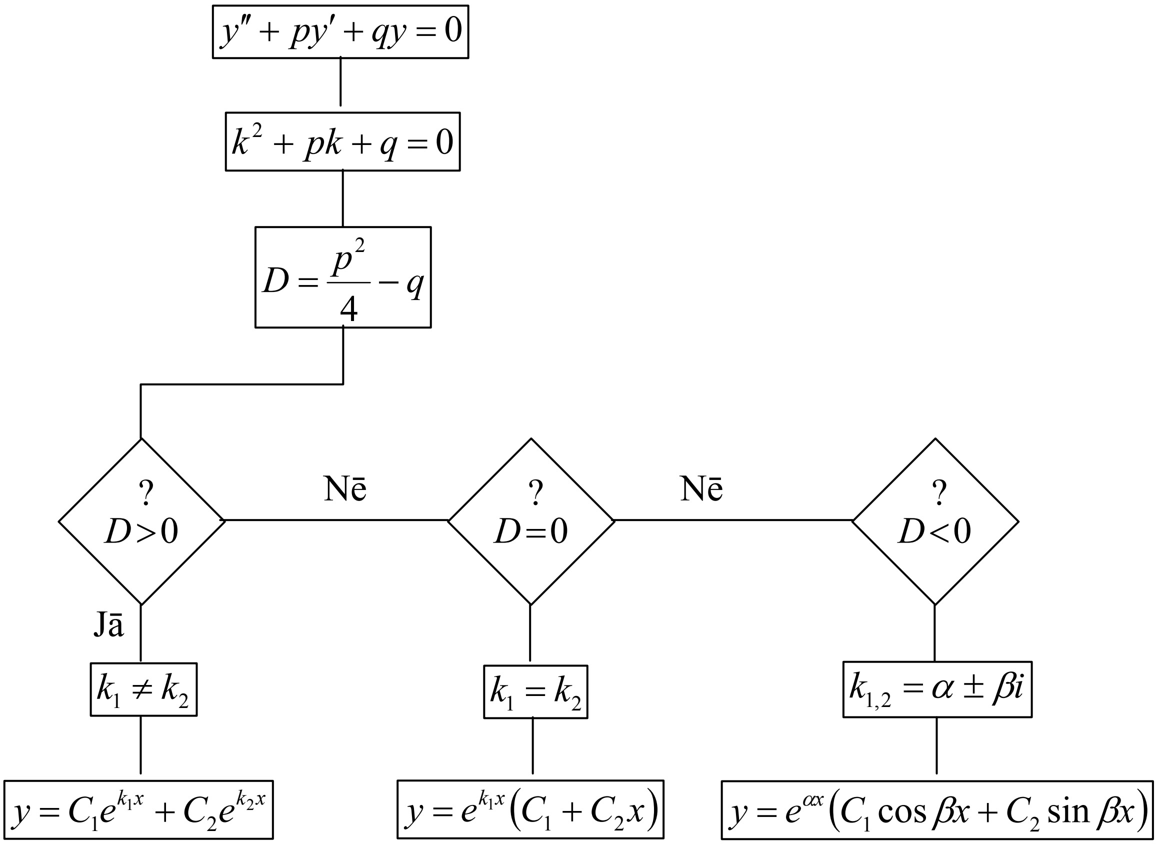
Šīs funkcijas ir lineāri neatkarīgas, jo

$$\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \frac{\cos\beta x}{\sin\beta x} = ctg\beta x \neq const.$$

Tātad šajā gadījumā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ jeb } y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Eilera metodes kopsavilkums attēlots *3.1. shēmā* [1].



3.1. zīm.

3.2.3. Lineāri nehomogēni 2. kārtas diferenciālvienādojumi.

Ja vienādojumā

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

labās puses izteiksme nav vienāda ar *0*, tad vienādojumu sauc par *lineāru nehomogēnu 2. kārtas diferenciālvienādojumu*.

Šī vienādojuma *atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums* ir

$$\bar{y}'' + a_1(x)\bar{y}' + a_2(x)\bar{y} = 0. \tag{2}$$

Konstantu koeficientu gadījumā to var atrisināt ar iepriekš aplūkoto Eilera metodi.

Pamatteorēma par vispārīgā atrisinājuma struktūru.

Ja y^* ir kāda funkcija, kas apmierina lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu *(1)* un $\bar{y}$ ir atbilstošā lineārā homogēnā diferenciālvienādojuma *(2)* vispārīgais atrisinājums, tad $y = \bar{y} + y^*$ ir *lineārā nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums.*

Līdz ar to *2. kārtas lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu atrisina pēc šādas shēmas*:

1) Nehomogēnais vienādojums
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x);$$
2) Atrisina atbilstošo homogēno diferenciālvienādojumu
$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0;$$
3) Homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums
$$\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2;$$
4) Atrod funkciju y^*, kur $(y^*)'' + a_1(x)(y^*)' + a_2(x)y^* = f(x)$;
5) Nehomogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums
$$y = \bar{y} + y^* = C_1y_1 + C_2y_2 + y^*.$$

Tā kā y^* apmierina nehomogēno diferenciālvienādojumu (1), tad tas ir šī vienādojuma partikulārais atrisinājums. Aplūkosim divas metodes, kuras izmanto, lai noteiktu šo atrisinājumu:

1) nenoteikto koeficientu metode;
2) konstanšu variāciju metode.

Nenoteikto koeficientu metode.

To lieto, ja lineārs homogēns diferenciālvienādojums ir ar konstantiem koeficientiem un labā puse *f(x)* ir noteikta veida izteiksme.

Dotais diferenciālvienādojums: $y'' + py' + qy = f(x)$ (3)

Atbilstošais homogēnais diferenciālvienādojums: $\bar{y}'' + p\bar{y}' + q\bar{y} = 0$ (4)

Raksturīgais vienādojums: $k^2 + pk + q = 0$ (5)

Raksturīgā vienādojuma *(5)* saknes k_1 un k_2.

Atkarībā no labās puses *f(x)* izteiksmes aplūko šādus gadījumus:

1. $$f(x)=e^{\alpha x}P_n(x), \qquad (6)$$

kur $P_n(x)$ ir *n-tās* pakāpes polinoms.
Ja skaitlis α nav raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne, tad funkcija y^* ir tāda paša veida izteiksme kā *f(x)*, tikai *n*-tās pakāpes polinomam ir citādi koeficienti nekā polinomam $P_n(x)$.
Tātad $y^*=e^{\alpha x}Q_n(x)$.
Lai atrastu polinoma $Q_n(x)$ koeficientus, kurus apzīmē ar burtiem, funkcijas y^* izteiksmi un tās atvasinājumus $\left(y^*\right)'$ un $\left(y^*\right)''$ ievieto diferenciālvienādojumā *(3)* un pielīdzina koeficientus pie vienādām *x* pakāpēm vienādības labajā un kreisajā pusē. Līdz ar to iegūst vienādojumu sistēmu, kuru atrisinot, nosaka $Q_n(x)$ koeficientus.
Ja skaitlis α ir raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne ar kārtu *r*, tad

$$y^*=x^r e^{\alpha x}Q_n(x).$$

Ja $\alpha=0$, tad $f(x)=P_n(x)$ un, nosakot y^* veidu, jāņem vērā tas, vai *0* ir raksturīgā vienādojuma sakne.

2. $$f(x)=e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x+B\sin\beta x\right) \qquad (7)$$

Ja komplekss skaitlis $\alpha+\beta i$ nav raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne, tad
$y^*=e^{\alpha x}\left(M\cos\beta x+N\sin\beta x\right)$, kur *M* un *N* ir koeficienti, kurus atrod, ievietojot vienādojumā *(3)* funkcijas y^* izteiksmi un tās atvasinājumus un pielīdzinot iegūtās vienādības abās pusēs koeficientus pie *cosβx* un *sinβx*.
Ja skaitlis $\alpha+\beta i$ ir raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne (2. kārtas vienādojumam šī sakne var būt tikai vienkārša), tad

$$y^*=xe^{\alpha x}\left(M\cos\beta x+N\sin\beta x\right).$$

Ja $A=0$ vai $B=0$, tad y^* izteiksme arī jāmeklē pilnajā formā, kas satur abas funkcijas *cosβx* un *sinβx.*

3. $$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (8)$$

kur $P_n(x)$ ir *n*-tās pakāpes polinoms un $Q_m(x)$ – *m*-tās pakāpes polinoms. Lielāko no skaitļiem *n* un *m* apzīmēsim ar *k*, t.i.,

$$k=max(n,m).$$

Ja $\alpha+\beta i$ nav raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne, tad

$$y^*=e^{\alpha x}\left(U_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x\right),$$

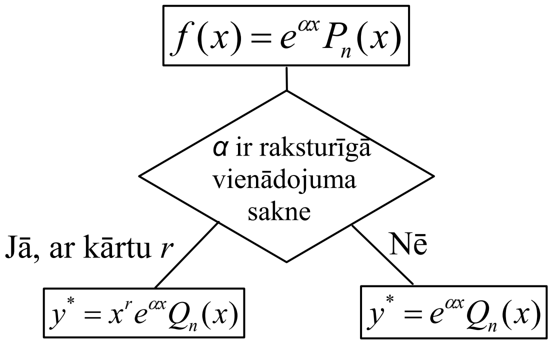
kur $U_k(x)$ un $V_k(x)$ ir *k*-tās pakāpes polinomi ar nezināmiem koeficientiem, kurus atrod līdzīgi kā iepriekšējos gadījumos.
Ja $\alpha+\beta i$ ir raksturīgā vienādojuma *(5)* sakne, tad

$$y^*=xe^{\alpha x}\left(U_k(x)\cos\beta x+V_k(x)\sin\beta x\right).$$

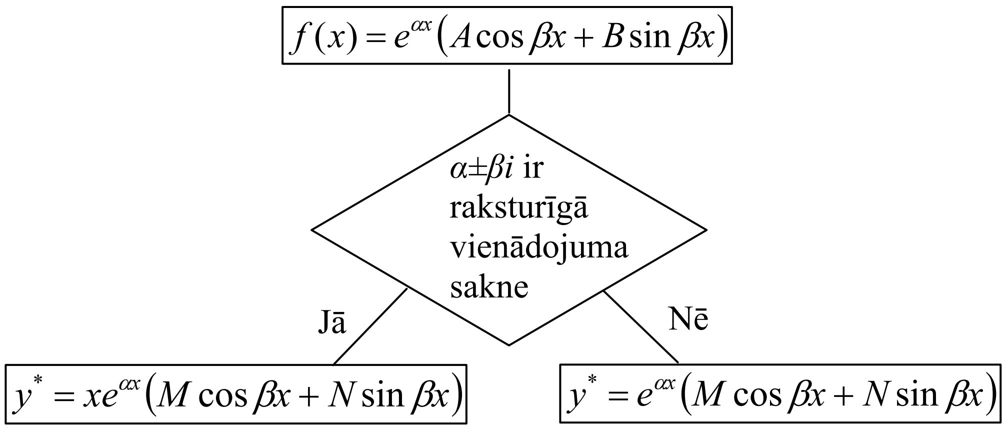
Acīmredzami šis gadījums ir vispārīgs, jo no izteiksmes *(8)* izriet iepriekš apskatītie gadījumi:

1) $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, ja $\alpha \neq 0$ un $\beta = 0$;
2) $f(x)=P_n(x)$, ja $\alpha = 0$ un $\beta = 0$;
3) $f(x)=P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$, ja $\alpha = 0$ un $\beta \neq 0$;
4) $f(x)=e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$, ja $P_n(x)$ un $Q_m(x)$ ir *0*-tās pakāpes polinomi jeb skaitļi.

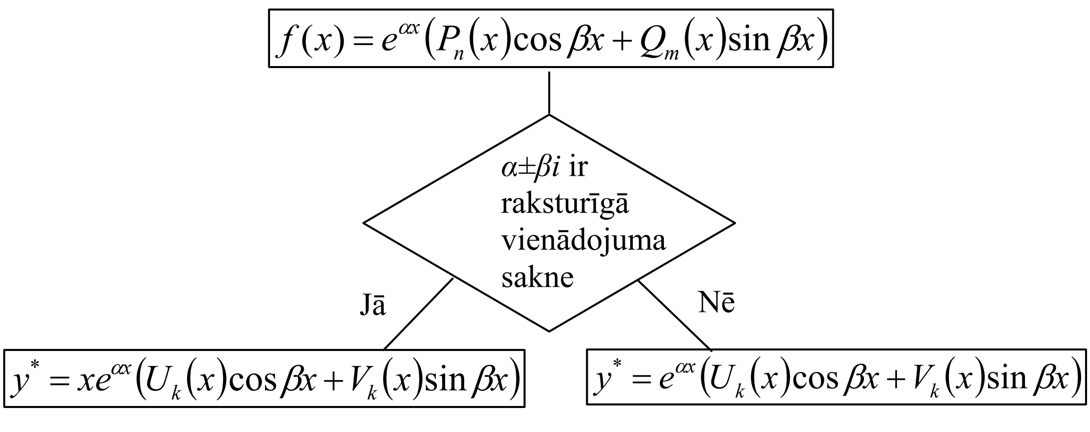
Aplūkoto gadījumu kopsavilkums aplūkots *3.2., 3.3.* un *3.4.* shēmās.



3.2. zīm.



3.3. zīm.



3.4. zīm.

Konstanšu variāciju metode.

Iepriekš aplūkoto nenoteikto koeficientu metodi var lietot, ja ir spēkā šādi nosacījumi:

1) diferenciālvienādojums satur konstantus koeficientus;
2) diferenciālvienādojuma labās puses izteiksme *f(x)* ir noteikta veida izteiksme.

Lai atrastu partikulāro atrisinājumu, ja neizpildās kāds no šiem nosacījumiem, lieto Lagranža konstanšu variāciju metode.

Aplūkosim 2. kārtas diferenciālvienādojumu

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{9}$$

kur $a_1(x)$, $a_2(x)y$ ir nepārtrauktas argumenta x funkcijas vai konstantes;

Atbilstošā homogēnā diferenciālvienādojuma

$$\bar{y}'' + a_1(x)\bar{y}' + a_2(x)\bar{y} = 0 \tag{10}$$

vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{11}$$

kur y_1 un y_2 ir šī vienādojuma lineāri neatkarīgi partikulārie atrisinājumi.

Nehomogēna diferenciālvienādojuma *(9)* partikulāro atrisinājumu y^* meklē kā izteiksmi, kura ir analoga homogēna vienādojuma vispārīgā atrisinājuma izteiksmei *(11),* taču koeficientus C_1 un C_2 neuzskata par konstantēm, bet par argumenta x funkcijām, t.i.,

$$y^* = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2. \tag{12}$$

Nezināmo funkciju $C_1(x)$ un $C_2(x)$ noteikšanai izmanto nosacījumu, ka partikulārais atrisinājums y^* apmierina diferenciālvienādojumu *(9)*, turklāt kādu no nosacījumiem starp šīm funkcijām var brīvi izvēlēties.

Atrodam atvasinājumu

$$(y^*)' = C_1'(x)\cdot y_1 + C_1(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2 + C_2(x)\cdot y_2'.$$

$C_1(x)$ un $C_2(x)$ meklēsim tādas, lai būtu spēkā vienādība

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0. \tag{13}$$

Tādējādi $$(y^*)' = C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2' \tag{14}$$

Atrodam $$(y^*)'' = C_1'(x)\cdot y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)\cdot y_2' + C_2(x)\cdot y_2''. \tag{15}$$

Ievietosim iegūtos rezultātus *(12), (14)* un *(15)* diferenciālvienādojumā *(9):*

$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)\cdot y_2' + C_2(x)\cdot y_2'' + a_1\left(C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2'\right) +$$
$$+ a_2\left(C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2\right) = f(x),$$

no kurienes

$$C_1(x)\left(y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1\right) + C_2(x)\left(y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2\right) + C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x).$$

Ņemot vērā, ka y_1 un y_2 ir homogēna vienādojuma *(10)* atrisinājums, tad

$$y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1 = 0 \text{ un } y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2 = 0,$$

tāpēc $$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \tag{16}$$

Tādējādi no izteiksmēm *(13)* un *(16)* iegūst vienādojumu sistēmu attiecībā pret $C_1'(x)$ un $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases} \qquad (17)$$

Tā kā sistēmas determinants ir Vronska determinants, kas sastādīts no lineāri neatkarīgiem homogēnā diferenciālvienādojuma atrisinājumiem, tad

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Lietojot Krāmera formulu, atrod:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \varphi_1(x) \quad \text{un} \quad C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \varphi_2(x),$$

no kurienes

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_3,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + C_4 .$$

Var izvēlēties $C_3=0$ un $C_4=0$, jo y^* ir jebkurš diferenciālvienādojuma *(9)* partikulārais atrisinājums. Tad no izteiksmes *(12)* iegūstam:

$$y^* = \left(\int \varphi_1(x)dx\right)y_1 + \left(\int \varphi_2(x)dx\right)y_2 .$$

3.3. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir 2. kārtas diferenciālvienādojums.

3.3.1. Otrās kārtas atvasinājuma fizikālās nozīmes izmantošana.

Otrās kārtas diferenciālvienādojumus galvenokārt iegūst, risinot uzdevmus, kuros izmanto 2. kārtas atvasinājuma fizikālo nozīmi, t.i., ja $x=x(t)$ ir materiāla punkta(ķermeņa) kustības likums taisnvirziena kustībā, tad x'' ir kustības momentānais paātrinājums. Līdz ar to 2. Ņūtona likumu izsaka ar 2. kārtas atvasinājuma palīdzību:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{jeb} \quad F = mx''.$$

Aplūkosim piemērus, kuros iegūtos diferenciālvienādojumus var atrisināt, pazeminot to kārtu, vai arī iegūst lineārus diferenciālvienādojumus ar konstantiem koeficientiem.

1. Lokomatīve brauc pa horizontālu ceļu ar ātrumu *72 km/h*. Pēc cik ilga laika un kādā attālumā tā būs apstādināta bremzējot, ja pretestības spēks kustībai no bremzēšanas sākuma ir *0,2* no tās svara.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$s=s(t)$ - lokomatīves noietais ceļš pēc laika t no bremzēšanas sākuma

$v = \frac{ds}{dt}$ - lokomatīves ātrums bremzējot

$a = \frac{d^2x}{dt^2} < 0$ - lokomatīves paātrinājums(palēninājums) bremzējot

m - lokomatīves masa

mg – lokomatīves svars

$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$ - *2.* Ņūtona likums

$F_p = 0{,}2mg$ - pretestības spēks bremzējot

$$\vec{F} = -\vec{F}_p$$

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -0{,}2mg$$

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

$\frac{d^2s}{dt^2} = -0{,}2g$ - 2. kārtas diferenciālvienādojums, kuru var atrisināt 2 reizes integrējot

$$\frac{ds}{dt} = -\int 0{,}2g\,dt = -0{,}2gt + C_1\ , \quad s = -\int (0{,}2gt + C_1)dt$$

$$s = -0{,}1gt^2 + C_1t + C_2 \ \text{– vispārīgais atrisinājums}$$

$$\begin{cases} s\big|_{t=0} = 0 \\ \dfrac{ds}{dt}\Big|_{t=0} = 72km/h = 20m/s \end{cases}$$ - sākuma nosacījumi

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = 20 \end{cases}$$

$s = -0{,}1gt^2 + 20t$ - partikulārais atrisinājums

$v(t) = -0{,}2gt + 20$ - lokomatīves ātrums atkarībā no bremzēšanas laika

Aprēķins.

$v(t) = 0 \Rightarrow \quad -0{,}2gt + 20 = 0$

$t = \dfrac{20}{0{,}2g} \approx \dfrac{20}{0{,}2 \cdot 9{,}8} \approx 10{,}2(s)$ - laiks no bremzēšanas sākuma, kādā lokomatīve apstāsies

$s(10{,}2) \approx 20 \cdot 10{,}2 - 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 10{,}2^2 \approx 102(m)$ - bremzēšanas ceļš

Atbilde: lokomatīve apstāsies pēc *10,2 sekundēm* no bremzēšanas sākuma, bremzējot noietais ceļš – *102 m.*

2. Lode ar ātrumu *200 m/s* ieiet *10 cm* biezā dēlī un iziet no dēļa ar ātrumu *50 m/s.* Cik ilgi turpinājās lodes kustība dēlī, ja dēļa pretestības spēks proporcionāls ātruma kvadrātam?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x=x(t) – lodes pārvietojums dēlī atkarībā no bremzēšanas laika

$\dfrac{dx}{dt} = v(t)$ - lodes ātrums dēlī

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv}{dt} < 0$ - lodes paātrinājums

$F_1 = \lambda v^2 = \lambda\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$ - pretestības spēks lodes kustībai

m - lokomatīves masa

$F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ - *2.* Ņūtona likums

$$\vec{F} = -\vec{F}_1$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \text{ kur } k = \frac{\lambda}{m}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

Atrisina, pazeminot kārtu.

Tā kā $$\frac{ds}{dt} = v \text{ un } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

tad $$\frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad \frac{dv}{v^2} = -kdt, \quad -\int \frac{dv}{v^2} = \int kdt, \quad \frac{1}{v} = kt + C_1,$$

$$v = \frac{1}{kt + C_1}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{kt + C_1}, \quad dx = \frac{dt}{kt + C_1}, \quad \int dx = \int \frac{dt}{kt + C_1},$$

$$x = \frac{1}{k}\ln\left|kt + C_1\right| + C_2.$$

$$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0 \\ \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 200 \end{cases}$$ - sākuma nosacījumi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{k}\ln\left|0 + C_1\right| + C_2 = 0 \\ \dfrac{1}{k \cdot 0 + C_1} = 200 \end{cases} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{200}, \quad C_2 = -\frac{1}{k}\ln C_1 = \frac{1}{k}\ln 200$$

$$x = \frac{1}{k}\ln\left|kt + \frac{1}{200}\right| + \frac{1}{k}\ln 200$$

$x = \dfrac{1}{k}\ln\left|200kt + 1\right|$ - partikulārais atrisinājums

Aprēķins.

Tā kā $$v = \frac{1}{kt + C_1} = \frac{200}{200kt + 1} \quad \Rightarrow \quad 200kt + 1 = \frac{200}{v}$$

un $$x = \frac{1}{k}\ln\left|200kt + 1\right|,$$

tad $$x = \frac{1}{k}\ln\frac{200}{v}.$$

$x\big|_{v=50} = 0{,}1$ - papildnosacījums

Tātad $$0{,}1 = \frac{1}{k}\ln\frac{200}{50} \quad \Rightarrow \quad k = 10\ln 4$$

Līdz ar to $$v = \frac{200}{2000\ln 4 \cdot t + 1},$$

no kurienes $$t = \frac{\frac{200}{v} - 1}{2000\ln 4}.$$

Ja $v=50$, tad $$t = \frac{4 - 1}{2000\ln 4} \approx 0{,}001(s).$$

Atbilde: lode izgāja caur dēli *0,001* sekundēs.

Otrā kosmiskā ātruma aprēķins.

3. Ar kādu ātrumu jāizsviež ķermenis Zemeslodes rādiusa virzienā, lai tas, pārvarot Zemes gravitācijas spēku, nenokristu atpakaļ uz Zemes(gaisa pretestību neievērot)?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

R – Zemes rādiuss
M – Zemes masa
m – ķermeņa masa
$x=x(t)$ – attālums no Zemes centra līdz ķermenim pēc laika t no izsviešanas momenta

$\frac{dx}{dt}$ - kustības momentānais ātrums

$\frac{d^2x}{dt^2}$ -kustības paātrinājums

$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$ - *2.* Ņūtona likums

$\vec{F}_g = k\frac{M \cdot m}{x^2}$ - gravitācijas spēks

$$\vec{F} = -\vec{F}_g$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{M \cdot m}{x^2} \quad \text{jeb} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{kM}{x^2}$$

$x\big|_{t=0} = R$ un $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ - sākuma nosacījumi

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

Iegūtais *2.* kārtas diferenciālvienādojums nestur funkcijas $x=x(t)$ argumentu t, tāpēc, pazeminot vienādojumu kārtu, izmanto substitūciju

$$\frac{dx}{dt} = v(x),$$

no kurienes $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot v.$$

Tātad $$\frac{dv}{dx} \cdot v = -\frac{kM}{x^2}, \quad vdv = -kM\frac{dx}{x^2}, \quad \int vdv = -kM\int\frac{dx}{x^2}.$$

$$\frac{1}{2}v^2 = kM \cdot \frac{1}{x} + C \quad \text{jeb} \quad v = \sqrt{\frac{2kM}{x} + 2C}$$ - vispārīgais atrisinājums

Tā kā $v\big|_{x=R} = v_0$, tad $\frac{1}{2}v_0 = \frac{kM}{R} + C$ un $C = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{kM}{R}$.

Līdz ar to $$v = \sqrt{\frac{2kM}{x} + \left(v_0^2 - \frac{2kM}{R}\right)}$$ - partikulārais atrisinājums

Atrisinājuma analīze un aprēķins.

Tā kā jābūt $\dfrac{2kM}{x}+\left(v_0^2-\dfrac{2kM}{R}\right)\geq 0\ \ \forall x\in[0;+\infty]$, bet $\dfrac{2kM}{x}\to 0$, ja $x\to\infty$, tad

$$v_0^2-\frac{2kM}{R}\geq 0,$$

no kurienes $$v_0^2\geq\frac{2kM}{R},\quad v_0\geq\sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

Ķermeņa svars uz Zemes virsmas ir *P=mg*, kas vienāds ar gravitācijas spēku $k\dfrac{M\cdot m}{x^2}$, kad *x=R*.

Tātad $$mg=k\frac{M\cdot m}{R^2},$$

no kurienes $$kM=R^2g.$$

Līdz ar to $$v_0\geq\sqrt{\frac{2R^2g}{R}}=\sqrt{2Rg}.$$

Aprēķinā izmanto:

R=6400 km

g=9,8m/s²= $9{,}8\cdot 10^{-3}\,km/s^2$

Iegūst: $v_0^2\geq=\sqrt{2\cdot 6{,}4\cdot 10^3\cdot 9{,}8\cdot 10^{-3}}\approx 11{,}2\left({}^{km}/_{s}\right)$

Atbilde: ķermenis jāizsviež ar ātrumu *11,2 km/s* (*2. kosmiskais ātrums*). No izteiksmes $v_0=\sqrt{2Rg}$ var secināt, ka ar šādu ātrumu ķermenis nokrīt uz Zemes, krītot no augstuma, kas vienāds ar Zemes rādiusu(gaisa pretestību neievērojot).

Suspensijas nogulsnēšanās modelis.

4. Materiāla daļiņa, kuras masa *m*, iegremdēta šķidrumā. Atrast tās noieto ceļu atkarībā no laika, ja šķidruma pretestības spēks ir proporcionāls kustības ātrumam(proporcionalitātes koeficients λ, sākuma ātrums *0*).

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x=x(t) – daļiņas noietais ceļš, pēc laika t no iegremdēšanas sākuma

$x'=x'(t)$ - daļiņas ātrums

x'' - daļiņas paātrinājums

$F=mx''$ - 2. Ņūtona likums

$F_p=\lambda x'$ - ūdens pretestības spēks

$P=mg$ - daļiņas svars

$$\vec{F}=\vec{P}-\vec{F}_p\quad\Rightarrow$$
$$mx''=mg-\lambda x'$$

$$x'' + \frac{\lambda}{m} x' = g$$ - 2. kārtas nehomogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

$x\big|_{t=0} = 0$ un $x'\big|_{t=0} = 0$ - sākuma nosacījumi

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

$x = \bar{x} + x^*$ - vispārīgā atrisinājuma struktūra,

kur $\bar{x}$ - atbilstošā homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

x^* - funkcija, kas apmierina nehomogēno vienādojumu

$\bar{x}$=?

$x'' + \frac{\lambda}{m} x' = 0$ - atbilstošais homogēnais vienādojums

$k^2 + \frac{\lambda}{m} k = 0$ - raksturīgais vienādojums

$$k\left(k + \frac{\lambda}{m}\right) = 0$$

$k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{\lambda}{m}$ - raksturīgā vienādojuma saknes – reālas, dažādas

$$\bar{x} = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$\bar{x} = C_1 + C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t}$ - homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

$x^* = ?$

Atrod ar nenoteikto koeficientu metodi.

Tā kā nehomogēnā vienādojuma labā puse

$$f(t) = g = e^{0t} \cdot g,$$

kur $\alpha = 0$ ir raksturīgā vienādojuma sakne un *g=const*,

tad $x^* = At$, $\left(x^*\right)' = A$, $\left(x^*\right)'' = 0$.

Tāpēc $0 + \frac{\lambda}{m} A = g$,

no kurienes $A = \frac{mg}{\lambda}$

un $x^* = \frac{mg}{\lambda} t$.

Tā kā $x = \bar{x} + x^*$,

tad $x = C_1 + C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg}{\lambda} t$ - nehomogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

Atrod *x(t)* atvasinājumu

$$x' = -\frac{\lambda}{m} C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg}{\lambda}$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $x\big|_{t=0} = 0$ un $x'\big|_{t=0} = 0$, iegūst:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -\dfrac{\lambda}{m} C_2 + \dfrac{mg}{\lambda} = 0 \end{cases},$$

no kurienes $$C_2 = \frac{m^2 g}{\lambda^2}, \quad C_1 = -\frac{m^2 g}{\lambda^2}.$$

Līdz ar to partikulārais atrisinājums:

$$x = \frac{m^2 g}{\lambda^2} e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg}{\lambda} t - \frac{m^2 g}{\lambda^2}$$

Atbilde: šķidrumā iegremdētas daļiņas noieto ceļu atrod pēc formulas

$$x = \frac{m^2 g}{\lambda^2} e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg}{\lambda} t - \frac{m^2 g}{\lambda^2}.$$

5. Horizontālā plaknē rotē caurule ap vertikālu rotācijas asi ar leņķa ātrumu ω. Caurulē atrodas lodīte, kas caurulē slīd bez berzes. Atrast lodes kustības likumu, ja rotācijas sākumā lode atrodas uz rotācijas ass un tās sākuma ātrums ir v_o.

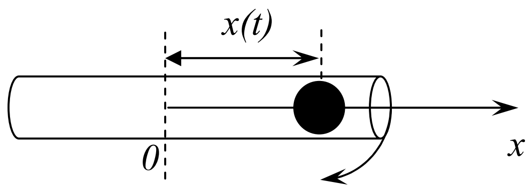
Matemātiskā modeļa sastādīšana.

m – lodītes masa

$x = x(t)$ – lodītes attālums no rotācijas centra pēc laika t no rotācijas sākuma

$x'(t)$ - lodītes lineārais ātrums kustībā pa riņķa līniju

$x''(t)$ - lodītes paātrinājums



3.5. zīm.

$F = m x''$ – 2. Ņūtona likums

$F_c = \dfrac{mv^2}{R} = \dfrac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R$ - centrbēdzes spēks

$F_c = m\omega^2 x$ - lodītes centrbēdzes spēks laika momentā t

$$\vec{F} = \vec{F}_c$$

Tad $$x'' = \omega^2 x.$$

$x'' - \omega^2 x = 0$ - *2.* kārtas homogēns diferenciālvienādojums

$x\big|_{t=0} = 0$ un $x'\big|_{t=0} = v_0$ - sākuma nosacījumi

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

$k^2 - \omega^2 = 0$ - raksturīgais vienādojums

$k_{1,2} = \pm\omega$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$ - vispārīgais atrisinājums

$$x' = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t}$$

$$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0 \\ x'\big|_{t=0} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1\omega - C_2\omega = v_o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{v_o}{2\omega} \\ C_2 = -\dfrac{v_o}{2\omega} \end{cases}$$

$$x = \frac{v_o}{2\omega}e^{\omega t} - \frac{v_o}{2\omega}e^{-\omega t} = \frac{v_o}{\omega}\cdot\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} = \frac{v_o}{\omega} sh\omega t$$

Atbilde: lodītes kustības likums (attālums no rotācijas centra) $x = \frac{v_o}{\omega} sh\omega t$.

6. Horizontālā plaknē rotē caurule ap vertikālu rotācijas asi ar leņķa ātrumu ω. Caurulē atrodas lodīte, kas caurulē slīd bez berzes. Atrast lodes kustības likumu, ja rotācijas sākumā lodītes ātrums bija 0 un tās attālums no rotācijas ass bija *a*.

Atrisinājums.

(skat. iepriekšējā uzdevuma risinājumu)

$$x'' - \omega^2 x = 0$$

$$x\big|_{t=0} = a, \quad x'\big|_{t=0} = 0$$

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$x' = C_1\omega e^{\omega t} - C_2\omega e^{-\omega t}$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1\omega - C_2\omega = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$$

$$x = \frac{a}{2}e^{\omega t} + \frac{a}{2}e^{-\omega t} = a\cdot\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} = ach\omega t$$

Atbilde: lodītes kustības likums (attālums no rotācijas centra) $x = ach\omega t$.

7. Ķēde, kuras garums *l=4 m,* bez berzes slīd no galda. Cik ilgā laikā visa ķēde noslīdēs no galda, ja tā sāk slīdēt laika momentā, kad pār galda malu nokarājas *a=0,5 m* garš ķēdes gabals?

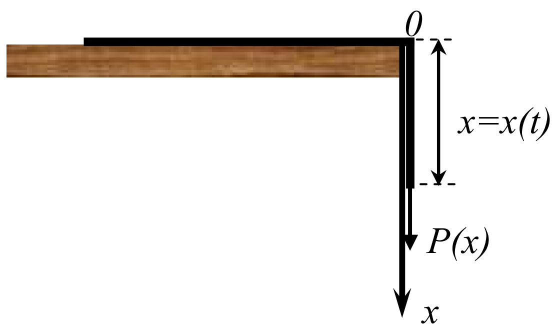
Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x=x(t) – ķēdes posma garums, kas nokarājas pār galda malu pēc laika *t* no slīdēšanas laika

$P = mg$ - visas ķēdes svars

P(x) – spēks, ar kādu visu ķēdi velk ķēdes posms, kas nokarājas pār galda malu (šī ķēdes posma svars)

$\frac{P}{l}$ - visas ķēdes garuma vienības svars



3.6. zīm.

$P(x)=\frac{P}{l}x$ - x garuma vienību svars

x'' - ķēdes gala paātrinājums

$F=mx''$ - *2*. Ņūtona likums

$$\vec{F}=\vec{P}(x)$$

$$mx''=\frac{P}{l}x,\quad x''-\frac{P}{ml}x=0,\quad x''-\frac{mg}{ml}x=0$$

$x''-\frac{g}{l}x=0$ - *2*. kārtas homogēns diferenciālvienādojums

$x\big|_{t=0}=a$ un $x'\big|_{t=0}=0$ - sākuma nosacījumi

Matemātiskā modeļa atrisināšāna.

$k^2-\frac{g}{l}=0$ - raksturīgais vienādojums

$k_1=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad k_2=-\sqrt{\frac{g}{l}}$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$x=C_1e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}+C_2e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ - vispārīgais atrisinājums

$$x'=C_1\sqrt{\frac{g}{l}}e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}-C_2\sqrt{\frac{g}{l}}e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

$$\begin{cases}x\big|_{t=0}=a\\ x'\big|_{t=0}=0\end{cases}\Rightarrow\quad\begin{cases}C_1+C_2=a\\ C_1-C_2=0\end{cases}\Rightarrow\quad C_1=C_2=\frac{a}{2}$$

$$x=\frac{a}{2}e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}+\frac{a}{2}e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}=ach\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Aprēķins un atrisinājuma analīze.

Ja *l=4, a=0,5,* $g\approx 10$,

tad $\quad x=0{,}25\left(e^{\sqrt{2{,}5}t}+e^{-\sqrt{2{,}5}t}\right).$

Ja visa ķēde ir noslīdējusi no galda, tad *x=4*.

Lai noteiktu, cik ilgā laikā visa ķēde ir noslīdējusi, jāatrisina eksponentvienādojums

$$0{,}25\left(e^{\sqrt{2{,}5}t}+e^{-\sqrt{2{,}5}t}\right)=4.$$

Apzīmējam: $e^{\sqrt{2{,}5}t}=y$.

Tad $\quad y+\frac{1}{y}=16,\quad y^2-16y+1=0,$

$$y_1=8+\sqrt{63},\quad y_2=8-\sqrt{63}.$$

1) $e^{\sqrt{2{,}5}t}=8+\sqrt{63}\quad\Rightarrow\quad t=\frac{\ln\left(8+\sqrt{63}\right)}{\sqrt{2{,}5}}\approx 1{,}75(s)$

2) $e^{\sqrt{2,5}t}=8-\sqrt{63}\approx 0,06<1 \quad \Rightarrow \quad t<0$, kas natbilst uzdevuma jēgai.

Atbilde: visa ķēde noslīdēs no galda pēc *1,75* sekundēm.

8. Ķēde pārkārta pār naglu tā, ka vienā pusē ir *8 m* garš gabals, bet otrā pusē *10 m* garš gabals. Ķēdei slīdot slīdes paātrinājums proporcionāls abās naglas pusēs karājošos ķēdes gabalu garumu starpībai(proporcionalitātes koeficients $\lambda=0,72$. Cik ilgā laikā ķēde noslīdēs no naglas?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x=x(t) – ķēdes galapunktu pārvietojums pēc laika *t* no slīdēšanas laika

10+x – garākais ķēdes gabals

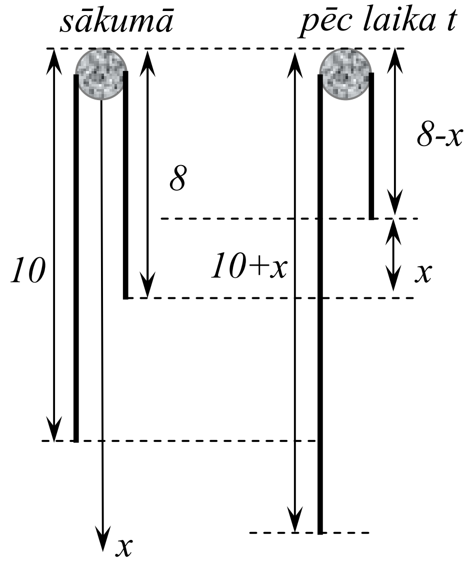
8-x – īsākais ķēdes gabals

(10-x)-(8-x)=2+2x – ķēdes gabalu garumu starpība

x'' - slīdes paātrinājums

$$x''=\lambda(2+2x)$$
$$x''=0,72(2+2x)$$

$x''-1,44x=1,44$ - lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums



3.7. zīm.

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$x=\bar{x}+x^*$ - nehomogēna vienādojuma vispārīgais atrisinājums,

$\bar{x}=?$

$x''-1,44x=0$ - atbilstošais homogēnais vienādojums

$k^2-1,44=0$ - raksturīgais vienādojums

$k_1=1,2, \quad k_2=-1,2$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$\bar{x}=C_1e^{1,2t}+C_2e^{-1,2t}$ - homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

$x^*=?$

$$f(t)=1,44=1,44e^{0t},$$

kur $\alpha=0$ nav raksturīgā vienādojuma sakne,

tad $\quad x^*=A, \quad (x^*)'=0, \quad (x^*)''=0.$

$$0-1,44A=1,44 \quad \Rightarrow \quad A=-1$$
$$x^*=-1$$
$$x=\bar{x}+x^*$$

$x=C_1e^{1,2t}+C_2e^{-1,2t}-1$ - nehomogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

$$x'=1,2C_1e^{1,2t}-1,2C_1e^{-1,2t}$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $x|_{t=0}=0$ un $x'|_{t=0}=0$, iegūst:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 1 = 0 \\ 1{,}2C_1 - 1{,}2C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0{,}5$$

$x = 0{,}5e^{1{,}2t} + 0{,}5e^{-1{,}2t} - 1$ - nehomogēnā vienādojuma partikulārais atrisinājums

Aprēķini un atrisinājuma analīze.

Visa ķēde ir noslīdējusi no naglas , ja *x=8*, t.i.,

$$8 = 0{,}5e^{1{,}2t} + 0{,}5e^{-1{,}2t} - 1.$$

Apzīmē: $e^{1{,}2t} = y$,

tad $0{,}5y + 0{,}5 \cdot \frac{1}{y} - 9 = 0$, $y + \frac{1}{y} - 18 = 0$

$$y^2 - 18y + 1 = 0$$

$$y_1 = 9 + \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}, \quad y_2 = 9 - \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}$$

1) $e^{1{,}2t} = 9 + 4\sqrt{5} \Rightarrow t = \dfrac{\ln\left(9 + 4\sqrt{5}\right)}{1{,}2} \approx 2{,}41(s)$

2) $e^{1{,}2t} = 9 - 4\sqrt{5} \approx 0{,}056 < 1$; tātad $t < 0$, kas neatbilst uzdevuma jēgai.

Atbilde: visa ķēde noslīdēs no galda *2,41* sekundē.

9. Ķēde, kas karājas uz gluda āķa, slīd uz leju. Kustības sākumā vienā āķa pusē ir *10 m* garš ķēdes posms, bet otrā pusē – *8 m* garš ķēdes posms. Neievērojot pretestību, atrast:
   1) cik ilgā laikā no āķa noslīdēs visa ķēde;
   2) kāds būs ķēdes ātrums laika momentā, kad ķēde sāks brīvi krist.

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

(skat. iepriekšējā uzdevuma zīmējumu)

x=x(t) – uz leju slīdošās ķēdes daļas garums pēc laika *t* no kustības sākuma

18-x – uz augšu slīdošās ķēdes daļas garums pēc laika *t* no kustības sākuma

ρ - ķēdes momentānais blīvums

$m_1 = x\rho$ - uz leju slīdošās ķēdes daļas masa

$m_2 = (18 - x)\rho$ - uz augšu slīdošās ķēdes daļas masa

$P_1 = x\rho g$ - uz leju slīdošās ķēdes daļas svars

$P_2 = (18 - x)\rho g$ - uz augšu slīdošās ķēdes daļas svars

$F = P_1 - P_2 = x\rho g - (18 - x)\rho g = \rho g(2x - 18)$ - spēks, kas slīdošai ķēdei rada paātrinājumu x''

$m = 18\rho$ - visas ķēdes masa

$F = ma = 18\rho x''$ - *2.* Ņūtona likums

$$18\rho x'' = \rho g(2x - 18)$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$9\rho x'' = \rho g(x - 9)$$

$x'' - \frac{1}{9}gx = -g$ - lineārs nehomogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

$x = \bar{x} + x^*$

$\bar{x}$=?

$x'' - \frac{1}{9}gx = 0$ - atbilstošais homogēnais vienādojums

$k^2 - \frac{1}{9}g = 0$ - raksturīgais vienādojums

$k_1 = \frac{1}{3}\sqrt{g}$, $k_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{g}$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$\bar{x} = C_1 e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t}$ - homogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

$x^* = ?$

$$f(t) = -g = -ge^{0t},$$

kur $\alpha = 0$ nav raksturīgā vienādojuma sakne,

tad $x^* = A$, $(x^*)' = 0$, $(x^*)'' = 0$.

$$0 - \frac{1}{9}gA = -g \quad \Rightarrow \quad A = 9$$

$$x^* = 9.$$

$x = C_1 e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + C_2 e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + 9$ - nehomogēnā vienādojuma vispārīgais atrisinājums

$$x' = \frac{1}{3}\sqrt{g}C_1 e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} - \frac{1}{3}\sqrt{g}C_2 e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t}$$

Izmantojot sākuma nosacījumus $x|_{t=0} = 10$ un $x'|_{t=0} = 0$, iegūst:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 9 = 10 \\ \frac{1}{3}\sqrt{g}C_1 - \frac{1}{3}\sqrt{g}C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0{,}5$$

$x = 0{,}5e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + 0{,}5e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + 9$ - nehomogēnā vienādojuma partikulārais atrisinājums

Aprēķini un atrisinājuma analīze.

Ja *x=18*, tad visa ķēde ir noslīdējusi

$$18 = 0{,}5e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + 0{,}5e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}t} + 9.$$

Apzīmē: $e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}t} = y$,

tad $0{,}5y + 0{,}5 \cdot \frac{1}{y} - 9 = 0$, $y + \frac{1}{y} - 18 = 0$.

$$y^2 - 18y + 1 = 0$$

$$y_1 = 9 + \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}, \quad y_2 = 9 - \sqrt{80} = 9 + 4\sqrt{5}$$

1) $e^{\frac{1}{3}\sqrt{gt}} = 9 + 4\sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{\ln\left(9 + 4\sqrt{5}\right)}{\frac{1}{3}\sqrt{gt}} \approx 2{,}77(s)$

2) $e^{\frac{1}{3}\sqrt{gt}} = 9 - 4\sqrt{5} \approx 0{,}056 < 1$; tātad $t < 0$, kas neatbilst uzdevuma jēgai.

$$v = x' = \frac{1}{3}\sqrt{g}\cdot 0{,}5e^{\frac{1}{3}\sqrt{gt}} - \frac{1}{3}\sqrt{g}\cdot 0{,}5e^{-\frac{1}{3}\sqrt{gt}} = \frac{1}{6}\sqrt{g}e^{\frac{1}{3}\sqrt{gt}} - \frac{1}{6}\sqrt{g}e^{-\frac{1}{3}\sqrt{gt}}$$

$$v\Big|_{t=2,77} = \frac{1}{6}\sqrt{g}\left(e^{\frac{1}{3}\sqrt{g}\cdot 2,77} - e^{-\frac{1}{3}\sqrt{g}\cdot 2,77}\right) \approx 9{,}38(m/s)$$

Atbilde: visa ķēde noslīdēs pēc *2,77* sekundēm no kustības sākuma. Laika momentā, kad ķēde sāks brīvi krist, krišanas ātrums būs *9,38 m/s*.

10. Materiāla daļiņa, kuras masa ir *50 g*, iegremdēta viskozā šķidrumā. Atrast daļiņas noieto ceļu pēc *1* minūtes no kustības sākuma, ja šķidruma pretestības spēks ir tieši proporcionāls kustības ātrumam (proporcionalitātes koeficients $\lambda = 0{,}5$, daļiņas sākuma ātrums vienāds ar nulli)!

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$x = x(t)$ - daļiņas pārvietojums laikā t no kustības sākuma
$P = mg$ – daļiņas svars
$F_1 = \lambda v = \lambda x'$ – šķidruma pretestības spēks
$F = ma = mx''$ - 2. Ņūtona likums

$$\vec{F} = \vec{P} - \vec{F}_1$$

$$mx'' = mg - \lambda x' \quad \text{jeb} \quad x'' + \frac{\lambda}{m}x' = g$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$x = \bar{x} + x^*$ - diferenciālvienādojuma atrisinājums:

$x'' + \dfrac{\lambda}{m}x' = 0$ - atbilstošais homogēnais vienādojums:

$k^2 + \dfrac{\lambda}{m}k = 0$ tā raksturīgais vienādojums

$k_1 = 0$; $k_2 = -\dfrac{\lambda}{m}$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$\bar{x} = C_1 + C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t}$ - homogēnā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums

Partikulārais atrisinājums: $x^* = At$; $(x^*)' = A$; $(x^*)'' = 0$

$$\frac{\lambda}{m}A = g \quad \Rightarrow \quad A = \frac{mg}{\lambda} \quad \text{un} \quad x^* = \frac{mg}{\lambda}t$$

$$x = C_1 + C_2 e^{-\frac{\lambda}{m}t} + \frac{mg}{\lambda}t = C_1 + C_2 e^{-\frac{0,5}{0,05}t} + \frac{0{,}5}{0{,}5}t = C_1 + C_2 e^{-10t} + t$$

$x' = -10C_2 e^{-10t} + 1$

No sākuma nosacījumiem:

$$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0 \\ x'\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 e^{-25\cdot 0} + 0 \\ 0 = -10C_2 e^{-10\cdot 0} + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -0{,}1 \\ C_2 = 0{,}1 \end{cases}$$

$x = -0{,}1 + 0{,}1e^{-10t} + 1$ - diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums

Aprēķins.

Aprēķina, cik lielu attālumu daļiņa veiks 1 min laikā:

$$x\big|_{t=60} = -0{,}1 + 0{,}1e^{-10\cdot 60} + 1 \approx 0{,}9\,(m)$$

Atbilde: 1 min laikā materiālā daļiņa veiks aptuveni *0,9 m* garu ceļu.

11. Ķermeni, kas atradās *10 m* augstumā, izmeta vertikāli uz augšu ar ātrumu *40 m/s*. Cik augstu ķermenis atradīsies pēc *1* sekundes? Pēc cik sekundēm tas sasniegs visaugstāko punktu virs Zemes?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x = x(t) – noietais ceļš pēc laika *t*

$v = x'$ - ātrums pēc laika *t*

$a = x''$ - paātrinājums pēc laika *t*

P = mg – ķermeņa svars

F = ma = mx'' - 2. Ņūtona likumsa

$$\vec{F} = -\vec{P},$$

$$mx'' = -mg \quad \text{jeb} \quad x'' = -g$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$x' = -\int g\,dt \quad \Rightarrow \quad x' = -gt + C_1$

$x = \int(-gt + C_1)dt \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$

No sākuma nosacījumiem:

$$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 10 \\ x'\big|_{t=0} = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = C_2 \\ 40 = C_1 \end{cases}$$

$x = -\frac{1}{2}gt^2 + 40t + 10$

Aprēķins.

$g \approx 10 \quad \Rightarrow \quad x = -5t^2 + 40t + 10, \qquad x' = -10t + 40$

$$x\big|_{t=1} = -5 + 40 + 10 = 45\,(m)$$

$v=0 \quad \Rightarrow \quad x' = -10t + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad t=4$

$$x\big|_{t=4} = -5\cdot 16 + 40\cdot 4 + 10 = 90\ (m)$$

Atbilde: pēc *1* sekundes ķermenis būs *45 m* virs Zemes; vislielāko augstumu *90 m* sasniegs pēc *4* sekundēm.

12. Bobsleja kamaniņas slīd pa trasi(uzskatīt par slīpu plakni), kuras slīpuma leņķis ir α un berzes koeficients ir μ. Atrast kamaniņu kustības likumu, ja kamaniņu sākuma ātrums ir v_0.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$x=x(t)$ –kamaniņu pārvietojums laika momentā t

$P=mg$ – smaguma spēks

$Q=P\cos\alpha$ - spiediena spēks

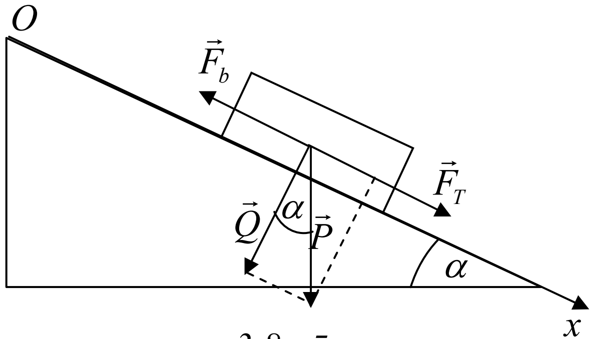
$F_T = P\sin\alpha$ - smaguma spēka tangenciālā komponente

$F_B = \mu Q$ - berzes spēks

$F = mx''$ - 2. Ņūtona likums

$$\vec{F} = \vec{F}_T - \vec{F}_B$$

jeb $mx'' = P\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$



3.8. zīm.

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

$$x'' = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

Iegūto diferenciālvienādojumu atrisina ar tiešu integrēšanu:

$$x' = \int g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1$$

$$x = \int (g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1)dt = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$$

No sākuma nosacījumiem $x\big|_{t=0} = 0$, $x'\big|_{t=0} = v_0$ atrod, ka $C_1 = v_0$ un $C_2 = 0$.

Tātad $$x = \frac{gt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2} + v_0 t$$ - partikulārais atrisinājums

Aprēķins un atrisinājuma analīze.

Kamaniņas slīd, ja $a = x'' > 0 \Rightarrow \sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0$,

$\sin\alpha > \mu\cos\alpha$,

$tg\alpha > \mu$,

$\alpha > arctg\mu$.

Atbilde: kamaniņu kustības likums ir $x = \dfrac{gt^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{2} + v_0 t$.

3.3.2. Mehānisko svārstību diferenciālvienādojums.

Pieņemsim, ka lodītei ar masu *m* ir piestiprināta horizontāli novietota un nostiprināta atspere. Lodīte bez berzes var brīvi slīdēt pa stienīti, kas izvadīta caur urbumu pa lodes diametru (*sk. 3.9. zīm.*)

Izvēlēsimies *Ox* asi tā, lai tā sakrīt ar stienīša simetrijas asi, bet līdzsvara stāvoklī lodītes centrā koordināte *x* ir nulle. Aplūkosim lodītes kustību, ja to atvirza no līdzsvara stāvokļa.

Pieņemsim, ka laika momentā *t* lodītes novirze no līdzsvara stāvokļa ir *x=x(t).* Kustības laikā uz lodīti darbojas divi spēki. Vides pretestības spēks, kas ir tieši proporcionāls ātrumam un vērsts pretēji kustībai, t.i.,

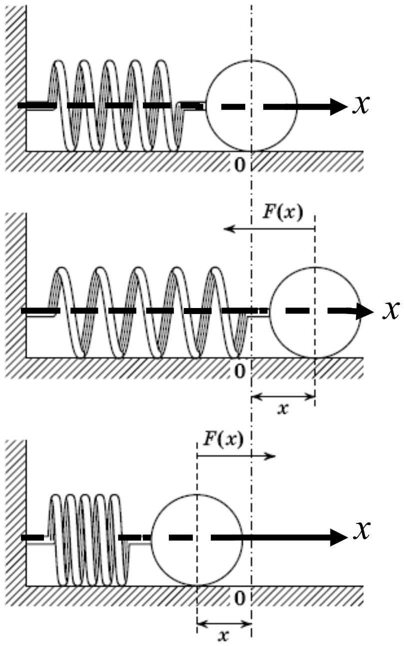
$$F_1 = -\lambda_1 v = -\lambda_1 x'$$

un atsperes elastības spēks, kas ir tieši proporcionāls lodītes novirzei un ir vērsts pretēji lodītes kustībai, t.i.,

$$F_2 = -\lambda_2 x.$$

Saskaņā ar spēku līdzsvara vienādojumu $F = F_1 + F_2$, iegūstam diferenciālvienādojumu:

$$mx'' = -\lambda_1 x' - \lambda_2 x,$$



3.9. zīm.

no kurienes $$x'' + px' + qx = 0, \qquad (1)$$

kur $$p = \frac{\lambda_1}{m} \text{ un } q = \frac{\lambda_2}{m}.$$

Tas ir lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums, kura raksturīgais vienādojums ir

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Diferenciālvienādojumam *(1)* ir iespējami 3 dažādi atrisinājumu veidi.

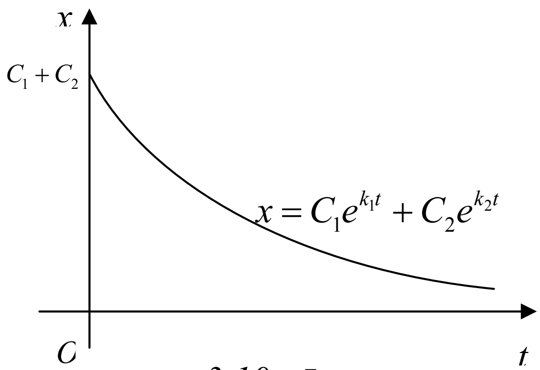
1. $D = \frac{p^2}{4} - q > 0$. Tad $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ un $k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Tā kā *p>0* un *q>0*, tad $k_1 < 0$ un $k_2 < 0$.

Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t}. \qquad (2)$$

Šajā gadījumā lodītes kustībā nav svārstību kustībā *(sk. 3.10. zīm.),* jo tās novirze no līdzsvara stāvokļa tiecās uz 0 .



3.10. zīm.

Tātad $\frac{p^2}{4} > q$, tāpēc lodītes kustības raksturu galvenokārt nosaka vidus pretestības spēki

(p - raksturo vidus pretestības spēks, q - atsperes elastības spēks).

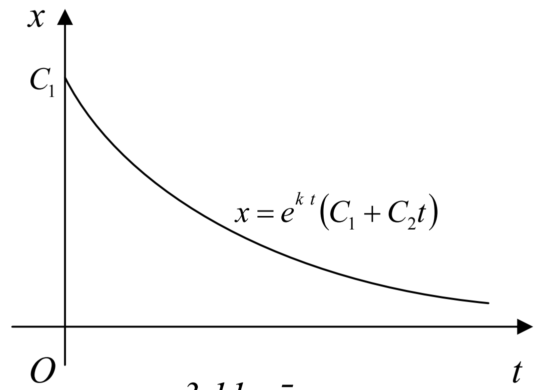
2. $D = \dfrac{p^2}{4} - q = 0$. Tad $k_1 = k_2 = -\dfrac{p}{2} < 0$, jo $p>0$. Diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x = e^{k_1 t}\left(C_1 + C_2 t\right). \tag{3}$$

Ja $t \to \infty$, tad robeža, izmantojot Lopitāla kārtulu, ir

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{p}{2}t}\left(C_1 + C_2 t\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(C_1 + C_2 t\right)}{e^{\frac{p}{2}t}} = \left[\text{"} \frac{\infty}{\infty} \text{"} \right] = \lim_{t\to\infty} \frac{C_2}{\frac{p}{2} e^{\frac{p}{2}t}} = 0.$$

Līdz ar to var secināt, ka šajā gadījumā lodītes kustība nav svārstību kustība (*sk. 3.11. zīm.*), jo novirze no līdzsvara stāvokļa tiecas uz nulli.



3.11. zīm.

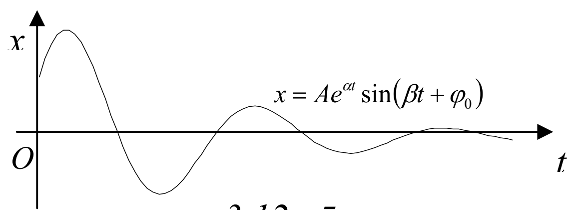
3. $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$. Tad raksturīgajam vienādojumam ir kompleksas saknes $k_{1,2} = \alpha + \beta i$ un diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right), \tag{4}$$

kur $\alpha = -\dfrac{p}{2} < 0$. Tādejādi $e^{\alpha t} \to 0$, ja $t \to \infty$. Tāpēc $e^{\alpha t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right)$ ir bezgalīgi maza funkcija. Tātad lodītes novirze no līdzsvara stāvokļa tiecas uz 0, kad $t \to \infty$, bet sinusa un kosinusa funkcijas $x=x(t)$ izteiksmē liecina par to, ka lodītes kustība ir svārstību kustība. Pārveidojot $C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t$, iegūst

$C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t = A\sin\left(\beta t + \varphi_0\right)$, kur

$A = \sqrt{C_1 + C_2}$, $\dfrac{C_1}{A} = \sin\varphi_0$ un $\dfrac{C_2}{A} = \cos\varphi_0$.



3.12. zīm.

Ņemot vērā pārveidojumu, diferenciālvienādojuma atrisinājumu var pierakstīt veidā

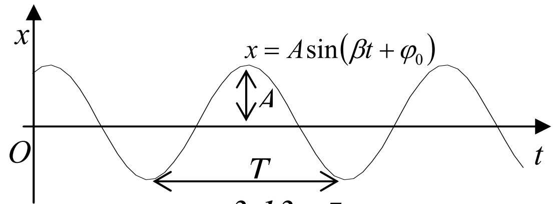
$$x = Ae^{\alpha t}\sin\left(\beta t + \varphi_0\right). \tag{5}$$

Tātad lodītes kustībā ir rimstošas svārstības ap līdzsvara stāvokli (*sk. 3.12. zīm.*)

Ja apkārtējās vides pretestība ir ļoti maza, tad vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x = C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t$$

jeb $$x = A\sin\left(\beta t + \varphi_0\right).$$



3.13. zīm.

Tātad lodītes kustībā ir nerimstošas svārstības ap līdzsvara stāvokli (*sk. 3.13. zīm.*).

Skaitli A sauc par svārstību amplitūdu, β – par frekvenci, φ_0 - par sākuma fāzi, bet $T = \dfrac{2\pi}{\beta}$ – par svārstību periodu.

Matemātiskā svārsta svārstību diferenciālvienādojums.

Par *matemātisko svārstu* sauc neizstiepjamā saite piekārtu materiālo punktu, piemēram, diegā iekārtu lodīti, ja diega garums ir daudzkārt lielāks par lodītes diametru, bet diega masa daudzkārt mazāka nekā lodītes masa (*sk. 3.14. zīm.*).

Aplūkosim tādu matemātisku svārstu, kuram diega garums ir l, bet lodītes masa ir m, sastādīsim diferenciālvienādojumu, kas modelē šī svārsta kustību.

Šo kustību raksturo leņķis x, par kādu svārsts laika momentā t ir novirzījies no līdzsvara stāvokļa. Šis leņķis ir laika funkcija $x=x(t)$, jo tas ir atkarīgs no laika t. Svārsta kustības leņķiskais ātrums ir atvasinājums $x' = x'(t)$.

Tātad lodītes kustības lineārais ātrums pa riņķa līnijas loku ar rādiusu l ir

$$v = x' \cdot l,$$

bet kustības paātrinājums ir

$$a = v' = x''l.$$

Saskaņā ar otro Ņūtona likumu

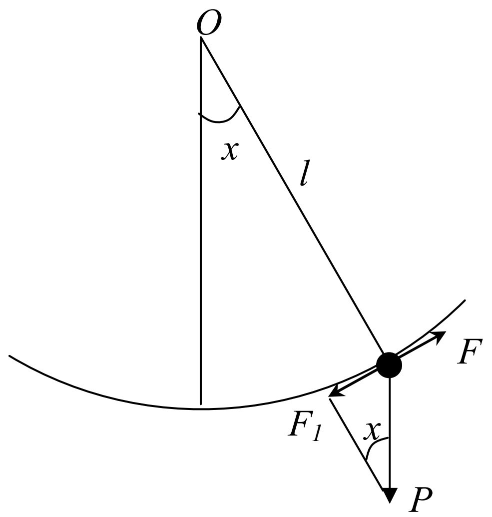
$$F = ma = mx''l.$$

Spēks F ir pretējs spēkam F_1, kas lodīti atgriež līdzsvara stāvoklī, t.i. $F=-F_1$, kur F_1 ir smaguma spēka P projekcija uz riņķa līnijas loka pieskares, t.i.

$$F_1 = P\sin x = mg\sin x$$

Tādejādi $$mx''l = -mg\sin x$$

jeb $$x'' + \frac{g}{l}\sin x = 0.$$



3.14. zīm.

Ja leņķis x ir mazs, tad $\sin x \sim x$ un vienādojums kļūst vienkāršāks:

$$x'' + \frac{g}{l}x = 0$$

Šis vienādojums ir līdzīgs nerimstošo svārstību diferenciālvienādojumam un tā atrisinājums ir

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right),$$

kur A ir svārstību amplitūda, φ_0 - sākuma fāze un $\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ - svārstību frekvence.

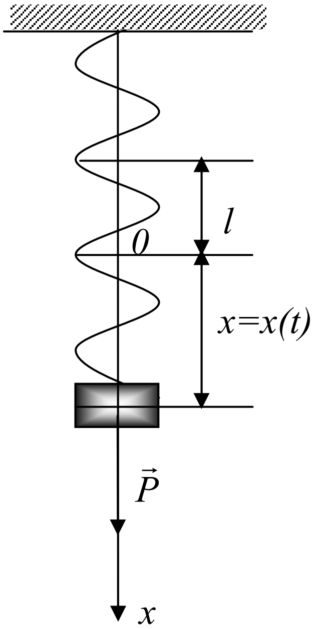
Svārstību periods $T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ir atkarīgs no svārsta garuma l un gravitācijas paātrinājuma g.

Jāņem vērā, ka šī svārstību perioda formula ir spēka svārstībām, kur novirzes leņķis ir mazs, lai var aizstāt *sin x* ar *x*.

Uzdevumi.

1. Vertikālas atsperes galā piestiprinot atsvaru *P*, atspere izstiepās par lielumu l. Pēc tam atsvaru pavilka uz leju par lielumu *a* un atlaida. Noteikt atsvara kustības likumu, neievērojot atsperes svaru un ārējos pretestības spēkus!

Atrisinājums.



3.15. zīm.

Ox – koordinātu ass

O – koordinātu sākumpunkts, sakrīt ar atsvara centru statiskā līdzsvara stāvoklī

x =x(t) – atsvara pārvietojums (koordināta) pēc laika *t*, kad atsvaru pavilka par lielumu *a*

P = mg – atsvara svars

$F_e = kx$ - atsperes elastības spēks(proporcionāls pārvietojumam)

F = ma = mx'' – 2. Ņūtona likums

$$\vec{F}=-\vec{F}_e \quad \text{jeb} \quad mx''=-kx$$

k-?

Statiskā līdzsvara stāvoklī atsperes elastības spēks līdzsvaro atsvara svaru, tātad

$$P=F_e(0) \quad\Rightarrow\quad P=kl \quad\Rightarrow\quad k=\frac{P}{l}$$

Līdz ar to $\quad mx''=-\frac{P}{l}x \quad\Rightarrow\quad mx''+\frac{mg}{l}x=0$

$x''+\frac{g}{l}x=0$ - lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums

$x\big|_{t=0}=a\,,\quad x'\big|_{t=0}=0$ - sākuma nosacījumi

$k^2+\frac{g}{l}=0$ - raksturīgais vienādojums

$k_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{g}{l}}\,;\quad k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$, kur $\alpha=0\,;\quad \beta=\sqrt{\frac{g}{l}}$

$x=C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t$ - vispārīgais atrisinājums

$$x'=-C_1\sqrt{\frac{g}{l}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}t+C_2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

$$\left.x\right|_{t=0}=a \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a=C_1 \\ 0=0+C_2\sqrt{\dfrac{g}{l}} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a=C_1 \\ C_2=0 \end{cases}$$
$$\left.x'\right|_{t=0}=0$$

$$x=a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$$

Atbilde: atsvara kustības likums ir $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t$ (teorētiski – nerimstošas svārstības)

2. Divi vienādi atsvari iekārti atsperē. Atrast viena atsvara kustības likumu, ja noņem otru atsvaru. Atsperes pagarinājums, ja to nostiepj viens atsvars, ir *a*.

Atrisinājums.

Risinājums analoģisks iepriekšējam uzdevumam. Vispirms aplūko gadījumu, kad atsperē iekārts tikai viens atsvars; tad atsperes pagarinājums ir *a* un atsperes elastības spēks līdzsvaro atsvara svaru *P=mg*, t.i., *mg=ka*, no kurienes $k=\frac{mg}{a}$. Piekarot otru atsvaru, atspere tiek pagarināta atkal par lielumu *a*. Pēc tam noņem otru atsvaru, un pirmais atsvars iegūst paātrinājumu, atsperei saīsinoties.

Līdz ar to

$$mx''=-kx,$$

kur $k=\frac{mg}{a}$,

un
$$mx''+\frac{mg}{a}x=0 \quad \text{jeb} \quad x''+\frac{g}{a}x=0$$

$\left.x\right|_{t=0}=a$, $\left.x'\right|_{t=0}=0$.

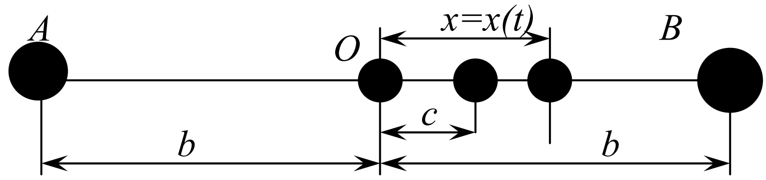
Partikulārais atrisinājums:

$$x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$$

Atbilde: atsvara kustības likums ir $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$.

3. Punktos *A* un *B* nostiprinātas divas vienādas magnetizētas lodītes. Taisnes nogriežņa *AB* punktā, kas atrodas attāluma *c* no *AB* viduspunkta *O*, novieto tērauda lodīti, kuru katra no magnetizētajām lodītēm pievelk ar spēku, kas proporcionāls attālumam līdz tērauda lodītei. Atrast lodītes kustības likumu, ja tās masa *m* un *AB = 2b*.

Atrisinājums.



3.16. zīm.

x = x(t) lodītes attālums no *AB* viduspunkta pēc laika *t* no kustības sākuma
$x''(t)$ - kustības paātrinājums
$F_1 = \lambda(b - x)$ - spēks, ar kādu pievelk magnets punktā *B*
$F_2 = \lambda(b + x)$ - spēks, ar kādu pievelk magnets punktā *A*
$F = mx''$ - 2. Ņūtona likums

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$$

$$mx'' = \lambda(b - x) - \lambda(b + x) = -2\lambda x$$

$$x'' + \frac{2\lambda}{m}x = 0$$ - lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums

$$k^2 + \frac{2\lambda}{m} = 0$$ - raksturīgais vienādojums

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}i$$

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}t$$ - vispārīgais atrisinājums

$$x' = -C_1\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\sin\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}t + C_2\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}\cos\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}t$$

Sākuma nosacījumi:

$$\begin{matrix} x\big|_{t=0} = c \\ x'(t)\big|_{t=0} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c = C_1\cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 0 = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = c \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = c \cdot \cos\sqrt{\frac{2\lambda}{m}}t$$

Atbilde: lodītes kustība ir svārstības ap nogriežņa *AB* viduspunktu.

4. Ķermenis, kura masa ir *0,2 kg*, iekārts atsperē. Ķermeni atvirza no līdzsvara stāvokļa, izstiepjot atsperi par *0,02 m*, un pēc tam palaiž vaļā bez sākuma ātruma. Atrast ķermeņa kustības likumu, ja vides pretestības spēks proporcionāls kustības ātrumam un, kustoties ar ātrumu *0,01 m/s*, vides pretestības spēks ir *0,0008 N.* Atsperes elastības spēks, to izstiepjot par *0,015 m*, jāpārvar *30,00012 N*. Atsperes masu neievērot.

Atrisinājums
x=x(t) - ķermeņa novirze no līdzsvara stāvokļa
$v = x'(t)$ - ķermeņa ātrums
$a = x''(t)$ - ķermeņa paātrinājums

$F_1 = \lambda_1 v = \lambda_1 x'$ - vides pretestības spēks

$F_2 = \lambda_2 x$ - atsperes elastības spēks

$F = ma = mx''$ - 2. Ņūtona likumu

$$\vec{F} = -\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$$

$$mx'' = -\lambda_1 x' - \lambda_2 x$$

$$x'' + \frac{\lambda_1}{m} x' + \frac{\lambda_2}{m} x = 0$$

$$F_1\Big|_{v=0,01} = 0{,}0008 \quad \Rightarrow \quad 0{,}0008 = \lambda_1 \cdot 0{,}001 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0{,}08$$

$$F_2\Big|_{v=0,015} = 30{,}00012 \quad \Rightarrow \quad 30{,}00012 = \lambda_1 \cdot 0{,}015 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2000{,}008$$

$$x'' + \frac{0{,}08}{0{,}2} x' + \frac{2000{,}008}{0{,}2} x = 0$$

$x'' + 0{,}4x' + 10000{,}04x = 0$ - lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem)

$k^2 + 0{,}49k + 24500 = 0$ - raksturīgais vienādojums:

$k_{1,2} = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 - 1000{,}04} = -0{,}2 \pm \sqrt{-10000} = -0{,}2 \pm 100i$

$x = e^{-0{,}2t}(C_1 \cos 100t + C_2 \sin 100t)$ - vispārīgais atrisinājums

$$x' = -0{,}2e^{-0{,}2t}(C_1 \cos 100t + C_2 \sin 100t) + e^{-0{,}2t}(-100C_1 \sin 100t + 100C_2 \cos 100t)$$

$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0{,}02 \\ x'\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ - sākuma nosacījumi

$$\begin{cases} C_1 = 0{,}02 \\ -0{,}2C_1 + 100C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0{,}02 \\ C_2 = 0{,}00004 \end{cases}$$

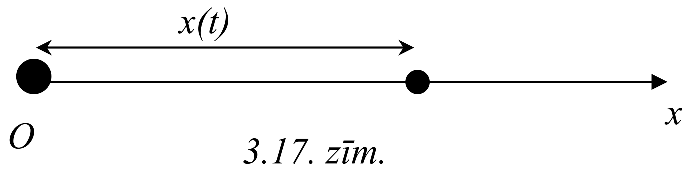
$x = e^{-0{,}2}(0{,}02 \cos 100t + 0{,}00004 \sin 100t)$ - partikulārais atrisinājums

Atbilde: tādējādi ķermeņa kustības vienādojums ir

$$x = e^{-0{,}2}(0{,}02 \cos 100t + 0{,}00004 \sin 100t)$$

5. Materiālu daliņu, kuras masa ir m, pievelk punkts O ar spēku, kas proporcionāls daliņas attālumam no punkta O. Atrast daliņas kustības likumu.

Atrisinājums.



3.17. zīm.

$x = x(t)$ – daliņas attālums no punkta O laika momentā t

$F_p = \lambda x$ - pievilkšanās spēks

$F = mx''$ - 2. Ņūtona likums

$$\vec{F} = -\vec{F}_p$$

$$mx'' = -\lambda x$$

$x'' + \dfrac{\lambda}{m} x = 0$ - lineārs homogēns 2. kārtas diferenciālvienādojums

$k^2 + \dfrac{\lambda}{m} = 0$ - raksturīgais vienādojums

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{\lambda}{m}} = \pm\sqrt{\frac{\lambda}{m}}i = 0 \pm \beta i$$

$$x = e^{0t}\left(C_1 \cos\beta t + C_2 \sin\beta t\right) = C_1 \cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t$$

Pārveido iegūto izteiksmi, izmantojot apzīmējumu

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

$$x = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \frac{C_2}{A}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t\right)$$

Definē palīgleņķi φ ar attiecību $\dfrac{C_1}{A} = \sin\varphi$, $\dfrac{C_2}{A} = \cos\varphi$ jeb $\dfrac{C_1}{C_2} = tg\varphi$.

Tad $$x = A\left(\sin\varphi\cos\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \cos\varphi\sin\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t\right) = A\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}t + \varphi\right)$$

Atbilde: daliņas kustība ir harmoniskas svārstības ap punktu *O,* kustības likums ir $x = A\left(\sin\varphi\cos\sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}t + \cos\varphi\sin\sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}t\right) = A\sin\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{m}}t + \varphi\right)$. Svārstību amplitūda: $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, sākuma fāze: $\varphi = arctg\dfrac{C_1}{C_2}$.

4. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMU SISTĒMA KĀ MATEMĀTISKS MODELIS.

4.1. Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas pamatjēdzieni.

Aplūkojot kādu procesu vai objektu, to raksturo vairākas funkcijas. Līdz ar to, risinot attiecīgo problēmu, iegūst nevis vienu, bet gan vairākus diferenciālvienādojumus, kas satur vairākas nezināmas funkcijas, to atvasinājumus un argumentu. Šādu diferenciālvienādojumu kopu sauc par *diferenciālvienādojumu sistēmu.* Ja diferenciālvienādojumu skaits sakrīt ar nezināmo funkciju skaitu un visi vienādojumi ir 1. kārtas diferenciālvienādojumi, tad diferenciālvienādojumu sistēmu sauc par *1. kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu* un vispārīgi pieraksta šādi:

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0 \\ ... \\ F_{n1}\left(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n'\right) = 0 \ , \end{cases} \tag{1}$$

kur $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ... , $y_n = y_n(x)$ ir nezināmās funkcijas.

Tās *normālforma* ir

$$\begin{cases} y_1' = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ y_2' = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \\ ... \\ y_n' = f_1\left(x, y_1, y_2, ..., y_n\right) \ . \end{cases} \tag{2}$$

1. kārtas diferenciālvienādojumu sistēmai ar n nezināmajiem ir n sākuma nosacījumi – tiek dota katras nezināmās funkcijas vērtība argumenta x_0 vērtībai:

$$y_1(x_0) = y_{1_0}, \ y_2(x_0) = y_{2_0}, \ ..., \ y_n(x_0) = y_{n_0} \ . \tag{3}$$

Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir n funkciju kopa, kur katra funkcija satur n konstantes:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \\ y_2 = \varphi_2\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \\ ... \\ y_n = \varphi_n\left(x, C_1, C_2, ..., C_n\right) \ , \end{cases} \tag{4}$$

un
1) šīs funkcijas apmierina diferenciālvienādojumu sistēmu *(1)* jebkurai konstanšu vērtībai;
2) jebkuriem sākuma nosacījumiem *(3)* var viennozīmīgi atrast atbilstošas konstanšu vērtības.

Diferenciālvienādojumu sistēmu, kas visas nezināmās funkcijas satur lineāri, sauc par *lineāru diferenciālvienādojumu sistēmu.* Lineāru diferenciālvienādojumu sistēmas ar *n* nezināmā funkcijām normālforma ir:

$$\begin{cases} y_1' + a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n = f_1(x) \\ y_2' + a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n = f_2(x) \\ \ldots \\ y_n' + a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n = f_n(x) \end{cases},$$

kur $a_{ij}(x)$ un $f_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$ ir nepārtrauktas funkcijas.

Par *lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu sistēmu* sauc diferenciālvienādojumu sistēmu, kur visas funkcijas

$$f_i(x)=0 \ (i=1, 2, \ldots, n).$$

Par *lineāru nehomogēnu diferenciālvienādojumu sistēmu* sauc tādu sistēmu, ja vismaz viena no šīm funkcijām nav vienāda ar nulli.

Turpmāk aplūkosim divu lineāru diferenciālvienādojumu sistēmas, kurās nezināmās funkcijas apzīmētas ar

$$y=y(x) \text{ un } z=z(x).$$

Tad nehomogēnās diferenciālvienādojumu sistēmas normālforma ir:

$$\begin{cases} y' + a_{11}y + a_{12}z = f_1(x) \\ z' + a_{21}y + a_{22}z = f_2(x) \end{cases} \tag{5}$$

Bet homogēnās sistēmas normālforma ir:

$$\begin{cases} y' + a_{11}y + a_{12}z = 0 \\ z' + a_{21}y + a_{22}z = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Homogēnu sistēmu atrisinājumu īpašības:

1. Ja funkcijas y_1 un z_1 ir homogēnas sistēmas *(6)* atrisinājums, tad funkcijas Cy_1 un Cz_1 ir šīs sistēmas atrisinājumi katrai brīvi izraudzītai konstantei *C.*
2. Ja funkcijas y_1, y_2 un z_1, z_2 ir homogēnas sistēmas *(6)* atrisinājumi, tad summas $y_1 + y_2$ un $z_1 + z_2$ ir šīs sistēmas atrisinājums.

Funkcijas y_1 un y_2 sauc par lineāri neatkarīgām kādā intervālā, ja vienādība

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$$

visos šī intevāla punktos ir spēkā tikai tad, ja $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ vai $\frac{y_1}{y_2} \neq const.$

Divus lineāri neatkarīgus homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas *(6)* partikulāros atrisinājumus y_1, y_2 un z_1, z_2 sauc par šīs sistēmas ***fundamentālo atrisinājumu sistēmu***. *[1]*

Lineārai homogēnai diferenciālvienādojumu sistēmai ar *n* nezināmām funkcijām fundamentālo atrisinājumu sistēma sastāv no *n* lineāri neatkarīgiem partikulāriem atrisinājumiem.

Ja funkcijas y_1, y_2 un z_1, z_2 ir lineāri neatkarīgas homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas *(6)* partikulārie atrisinājumi, tad šīs sistēma vispārīgais atrisnājums ir funkcijas

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Lineāras nehomogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas *(5) vispārīgais atrisinājums* ir funkcijas

$$\begin{aligned} y &= \bar{y} + y^* \\ z &= \bar{z} + z^* \ , \end{aligned}$$

kur $\bar{y}$ un $\bar{z}$ ir atbilstošās homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas *(6)* vispārīgais atrisinājums, bet y^* un z^* ir nehomogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas *(5)* jebkurš partikulārais atrisinājums.

4.2. Lineāras homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas ar konstantiem koeficientiem atrisināšanas Eilera metode.

Ja koeficenti ir konstanti, tad lineāras homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas normālforma ir:

$$\begin{cases} y' + a_{11}y + a_{12}z = 0 \\ z' + a_{21}y + a_{22}z = 0 \end{cases} \tag{1}$$

kur a_{ij} *-const.*

Pēc Eilera metodes sistēmas *(1)* lineāri neatkarīgus partikulāros atrisinājumus meklē ka eksponentfunkcijas

$$y = \lambda e^{kx} \text{ un } z = \mu e^{kx}, \tag{2}$$

kur λ, μ, k ir tādi skaitļi, ka šīs funkcijas apmierina diferenciālvienādojumu sistēmu *(1)*.

Funkcijas (2) un to atvasinājumus $y' = \lambda k e^{kx}$ un $z' = \mu k e^{kx}$ ievieto sistēmā *(1)*:

$$\begin{cases} \lambda k e^{kx} + a_{11}\lambda e^{kx} + a_{12}\mu e^{kx} = 0 \\ \mu k e^{kx} + a_{21}\lambda e^{kx} + a_{22}\mu e^{kx} = 0 \end{cases}.$$

Izdala sistēmas vienādojumu abas puses ar $e^{kx} \neq 0$ un vienkāršo:

$$\begin{cases} \lambda k + a_{11}\lambda + a_{12}\mu = 0 \\ \mu k + a_{21}\lambda + a_{22}\mu = 0 \end{cases} \text{ jeb } \begin{cases} (k + a_{11})\lambda + a_{12}\mu = 0 \\ a_{21}\lambda + (k + a_{22})\mu = 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Tā ir lineāra homogēna algebriska vienādojumu sistēma attiecībā pret nezināmiem lielumiem λ un μ, kurai eksistē netriviāls atrisinājums, ja tās determinants ir vienāds ar nulli.

Tātad
$$\begin{vmatrix} a_{11} + k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + k \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Vienādību *(4)* sauc par diferenciālvienādojumu sistēmas *(1)* raksturīgo vienādojumu

$$(a_{11} + k)(a_{22} + k) - a_{12}\ a_{21} = 0 \quad \text{jeb} \quad k^2 + k(a_{11} + a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0,$$

kur k ir nezināmais lielums.

Risinot šo kvadrātvienādojumu, ir iespējami 3 gadījumi:

1) raksturīgajam vienādojumam ir divas dažādas reālas saknes:

$$k_1 \neq k_2.$$

Līdz ar to, atrisinot sistēmu, lietojot katru no saknēm, iegūstam divas λ un μ vērtības: λ_1, λ_2, μ_1, μ_2.

Ievietojot *k,* λ un μ iegūtās vērtības funkciju *(2)* izteiksmēs, atrodam divus lineāri neatkarīgus diferenciālvienādojumu sistēmas *(1)* partikulāros atrisinājumus:

$$y_1 = \lambda_1 e^{k_1 x}, \quad z_1 = \mu_1 e^{k_1 x} \quad \text{un} \quad y_2 = \lambda_2 e^{k_2 x}, \quad z_2 = \mu_2 e^{k_2 x}$$

Diferenciālvienādojumu sistēmas *(1)* vispārīgais atrisinājums ir funkcijas:

$$\begin{cases} y = c_1\lambda_1 e^{k_1 x} + c_2\lambda_2 e^{k_2 x} \\ z = c_1\mu_1 e^{k_1 x} + c_2\mu_2 e^{k_2 x} \end{cases} \tag{5}$$

2) ***Raksturīgā vienādojuma saknes ir savstarpēji saistīti kompleksi skaitļi.***

$$k_{1,2} = \alpha + \beta i$$

Ievietojot vienādojumu sistēma *(3)* raksturīga vienādojuma sakni $k = \alpha + \beta i$ un atrisinot šo sistēmu,iegūstam λ un μ vērtības:

$$\lambda_1 = a + bi \text{ un } \mu_1 = c + di$$

Ņemot vērā vienādību *(2),* iegūst partikulāros atrisinājumus $\widetilde{y}_1$ un $\widetilde{z}_1$, ko pārveido, izmantojot Eilera formulu.

Saskaņā ar īpašību, ja lineāras homogēnas diferenciālvienādojumu sistēmas partikulārais atrisinājums ir kompleksas funkcijas, tad sistēmu apmierina arī šo funkciju reālās daļas un imaginārās daļas keficienti, iegūst diferenciālvienādojumu sistēmas vispārīgo atrisinājumu:

$$\begin{cases} y = C_1 e^{\alpha x}\left(a\cos\beta x - b\sin\beta x\right) + C_2 e^{\alpha x}\left(a\sin\beta x + b\cos\beta x\right) \\ z = C_1 e^{\alpha x}\left(c\cos\beta x - d\sin\beta x\right) + C_2 e^{\alpha x}\left(c\sin\beta x + d\cos\beta x\right) \end{cases} \tag{6}$$

3) Raksturīgajam vienādojumam ir divas vienādas reālas saknes k_1=k_2.

Ievietojam vienādojumu sistēmā *(3)* raksturīgā vienādojuma sakni *k* un redzam, ka ar šo *k* vērtību sistēmas vienādojumi ir proporcionāli, līdz ar to var atmest vienu vienādojumu, (piemēram, otro). No pirmā vienādojuma izsaka

$$\lambda = -\frac{a_{12}}{a_{11} + k_1}\mu,$$

kur nezināmajam lielumam μ var piešķirt brīvi izraudzītu vērtību, piemēram, μ_1=1.

Tad
$$\lambda_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11} + k_1}\mu.$$

Izmantojot atrastās k_1, μ_1 un λ_1 vērtības, iegūst partikulāro atrisinājumu izteiksmes:

$$y_1 = \lambda_1 e^{k_1 x} \quad \text{un} \quad z_1 = \mu_1 e^{k_1 x}.$$

Lai atrastu lineāri neatkarīgu otru partikulāro atrisinājumu y_2 un z_2, to meklē kā y_1 un z_1 reizinājumus ar 1. pakāpes polinomiem:

$$y_2 = \left(Ax + B\right)\lambda_1 e^{k_1 x} \quad \text{un} \quad z_2 = \left(Mx + N\right)\mu_1 e^{k_1 x}.$$

Kur konstantes *A, B, M* un *N* atrod ar nenoteikto koeficientu metodi, t.i., diferenciālvienādojumu sistēmā *(1)* ievieto funkcijas y_2 un z_2, kā arī to atvasinājumus y_2' un z_2',un pielīdzina koeficientus pie vienādām *x* pakāpēm.

4.3. Izslēgšanas metode.

Dažkārt ir ērti lineāru diferenciālvienādojumu sistēmu(arī nehomogēnu) pārveidot par augstākas kārtas vienādojumu, pakāpeniski izslēdzot no viena sistēmas vienādojuma pārējās nezināmās funkcijas un to atvasinājumus. Aplūkosim šo izslēgšanas metodi divu diferenciālvienādojumu sistēmas gadījumam.

Lai atrisinātu sistēmu $\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases}$: (1)

1) atvasina vienu no sistēmas vienādojumiem(piem., pirmo) pēc x,
ar iegūto vienādību $y'' = h_1(x, y, z, y', z')$
aizvieto sistēmas *(1)* pirmo vienādojumu, iegūst sistēmu:

$$\begin{cases} y'' = h_1(x, y, z, y', z') \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad (2)$$

2) Ievieto sistēmas *(2)* otrā vienādojuma labās puses izteiksmi pirmajā vienādojumā, iegūst

$$y'' = h_1(x, y, z, y', f_2(x, y, z))$$

un pieraksta veidā

$$y'' = H_1(x, y, z, y', z). \qquad (3)$$

No *(1)* un *(3)* iegūst

$$\begin{cases} y'' = H_1(x, y, z, y', z) \\ y' = f_1(x, y, z) \end{cases} \qquad (4)$$

3) No sistēmas (3) otrā vienādojuma izsaka z, iegūst

$$z = F_2(x, y, y'), \qquad (5)$$

kuru ievieto šīs sistēmas pirmajā vienādojumā.
Tādējādi iegūst *2. kārtas diferenciālvienādojumu ar vienu nezināmo funkciju y*:

$$y'' = H_1(x, y, y', F_1(x, y, y'))$$

jeb

$$y'' = g_1(x, y, y').$$

Šī vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y = \varphi_1(x, C_1, C_2).$$

Tā atvasinājums ir

$$y' = \varphi_1'(x, C_1, C_2).$$

Ievieto y un y' vienādībā *(5)* un iegūst otru meklēto funkciju

$$z = \varphi_2(x, C_1, C_2).$$

Izslēgšanas metodi ir ērti izmantot tad, ja no diferenciālvienādojumu sistēmas vienādojumiem var atklātā veidā izteikt tos lielumus, kuru izteiksmes nepieciešams ievietot citos vienādojumos.

4.4. Uzdevumi, kuru matemātiskais modelis ir lineāra diferenciālvienādojumu sistēma.

1. Traukā ir V litri sāls šķīduma, kas sākumā saturēja m kg sāls. Katru minūti traukā iesūknē a litrus ūdens un sajauc ar tur esošo šķīdumu. Ar tādu pašu ātrumu atšķaidīto šķīdumu pārsūknē otrā traukā, kurā sākumā bija V litru ūdens, sajauc un pēc tam izsūknē no trauka. Pēc cik ilga laika abos traukos būs vienāds sāls daudzums?

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$x = x(t)$ - sāls daudzums (kg) 1. traukā laika momentā t

$y = y(t)$ - sāls daudzums (kg) 2. traukā laika momentā t

$\frac{x}{V}$ - sāls koncentrācija 1. traukā

$\frac{y}{V}$ - sāls koncentrācija 2. traukā

$a\Delta t$ - šķīduma daudzums(litros), ko izsūknē laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$

$\frac{x}{V}a\Delta t$ - sāls daudzums, ko izsūknē no 1. trauka laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$ un iesūknē 2. traukā.

$\frac{y}{V}a\Delta t$ - sāls daudzums, ko izsūknē no 2. trauka laika intervālā $[t;\ t+\Delta t]$

$\Delta x \approx -\frac{x}{V}a\Delta t$ - sāls daudzums izmaiņas 1. traukā

$\Delta y \approx \frac{x}{V}a\Delta t - \frac{y}{V}a\Delta t$ - sāls daudzums izmaiņas 2. traukā

$x\big|_{t=0} = m$; $y\big|_{t=0} = 0$ sākuma nosacījumi

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -\frac{a}{V}x \quad \text{un} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -\frac{a}{V}(x-y)$$

Ja $\Delta t \to 0$, tad
$$\begin{cases} x' = -\frac{a}{V}x \\ y' = \frac{a}{V}(x-y) \end{cases}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

Šo sistēmu risina ar izslēgšanas metodi: aizstāj sistēmas otro vienādojumu ar funkcijas y 2. kārtas atvasinājuma izteiksmi:

$$\begin{cases} x' = -\frac{a}{V}x \\ y'' = \frac{a}{V}(x'-y') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{V}{a}y' + y \\ y'' = \frac{a}{V}(-\frac{a}{V}x - y') \end{cases} \Rightarrow \quad y'' = \frac{a}{V}(-y' - \frac{a}{V}y - y')$$

$y''+\frac{2a}{V}y'+\frac{a^2}{V^2}y=0$ - lineārs homogēns 2.kārtas diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem

$k^2+\frac{2a}{V}k+\frac{a^2}{V^2}=0$ - raksturīgais vienādojums

$k_1=k_2=-\frac{a}{V}$ - raksturīgā vienādojuma saknes

$y=C_1e^{-\frac{a}{V}t}+C_2te^{-\frac{a}{V}t}$ - vispārīgais atrisinājums

$y'=-C_1\frac{a}{V}e^{-\frac{a}{V}t}+C_2(e^{-\frac{a}{V}t}-\frac{a}{V}te^{-\frac{a}{V}t})$

Ievieto *y* un *y'* izteiksmes vienādojumā $x=\frac{V}{a}y'+y$, iegūst:

$$x=\frac{V}{a}(-C_1\frac{a}{V}e^{-\frac{a}{V}t}+C_2(e^{-\frac{a}{V}t}-\frac{a}{V}te^{-\frac{a}{V}t})+C_1e^{-\frac{a}{V}t}+C_2te^{-\frac{a}{V}t}=\frac{V}{a}C_2e^{-\frac{a}{V}t}$$

$x|_{t=0}=m \quad \Rightarrow \quad C_2=\frac{am}{V}$

$x=me^{-\frac{a}{V}t}$ - patikulārais atrisinājums

$y|_{t=0}=0 \quad \Rightarrow \quad C_1=0$

$y=\frac{am}{V}te^{-\frac{a}{V}t}$ - patikulārais atrisinājums

$\begin{cases} x=me^{-\frac{a}{V}t} \\ y=\frac{am}{V}te^{-\frac{a}{V}t} \end{cases}$ - diferenciālvienādojumu sistēmas partikulārais atrisinājums

Aprēķins.

Nosaka, pēc cik ilga laika sāls daudzums abos traukos būs vienāds, t.i., $x=y$, tad

$$me^{-\frac{a}{V}t}=\frac{am}{V}te^{-\frac{a}{V}t} \quad \Rightarrow \quad t=\frac{V}{a}$$

Atbilde: sāls daudzuma abos traukos būs vienāds pēc $\frac{V}{a}$ min.

2. Radioaktīva viela, kuras sākuma daudzums ir m_o, sadalās (primārā reakcija). Reakcijas produkts arī sadalās (sekundārā reakcija). Abu reakciju ātrums ir proporcionāls reaģējošās vielas daudzumam. Atrast galaprodukta daudzumu atkarībā no laika.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

m_o – vielas sākuma daudzums

$x = x(t)$ – primārās reakcijas produkta daudzums pēc laika t, ja pieņem, ka nenotiek sekundāra reakcija.

$\frac{dx}{dt}$ - primārās reakcijas ātrums

$m_o - x$ - dotās vielas daudzums pēc laika t.

$y = y(t)$ – sekundārās reakcijas produkta daudzums

$\frac{dy}{dt}$ - sekundārās reakcijas ātrums

$x - y$ - primārās reakcijas produkta daudzums pēc laika t.

$x\big|_{t=0} = 0$; $y\big|_{t=0} = 0$ - sākuma nosacījumi

$$\frac{dx}{dt} = k_1(m_o - x) \quad \text{un} \quad \frac{dy}{dt} = k_2(x - y)$$

Iegūst diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(m_o - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(x - y) \end{cases}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

Pirmo vienādojumu risina ar mainīgo atdalīšanas metodi:

$$\frac{dx}{dt} = k_1(m_o - x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x - m_o} = -k_1 dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x - m_o} = -\int k_1 dt$$

$$\ln|x - m_o| = -k_1 t + \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad x = C_1 e^{-k_1 t} + m_o$$

Ievieto iegūto izteiksmi otrajā vienādojumā:

$$\frac{dy}{dt} = k_2(x - y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = k_2(C_1 e^{-k_1 t} + m_o - y)$$

$$y' + k_2 y = C_1 k_2 e^{-k_1 t} + k_2 m_o$$ - lineārs 1. kārtas diferenciālvienādojums

Risina, lietojot substitūciju:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + k_2 uv = C_1 k_2 e^{-k_1 t} + k_2 m_o$$

$$u'v + u(v' + k_2 v) = C_1 k_2 e^{-k_1 t} + k_2 m_o$$

$v' + k_2 v = 0$

$$\frac{dv}{dt} = -k_2 v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -k_2 dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int k_2 dt \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -k_2 t + C$$

Izvēlas $C = 0 \quad \Rightarrow \quad v = e^{-k_2 t}$

$$u'v = C_1 k_2 e^{-k_1 t} + k_2 m_o \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} e^{-k_2 t} = C_1 k_2 e^{-k_1 t} + k_2 m_o$$

$$du = (C_1 k_2 e^{(k_2 - k_1)t} + k_2 m_o e^{k_2 t})dt$$

$$u = \left(\frac{C_1 k_2}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + m_o e^{k_2 t}\right) + C_2$$

$$y = e^{-k_2 t}((\frac{C_1 k_2}{k_2 - k_1} e^{(k_2 - k_1)t} + m_o e^{k_2 t}) + C_2) = \frac{C_1 k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + m_o + C_2 e^{-k_2 t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-k_1 t} + m_o \\ y = \dfrac{C_1 k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + m_o + C_2 e^{-k_2 t} \end{cases}$$

No sākuma nosacījumiem $x\big|_{t=0} = 0$, $y\big|_{t=0} = 0$ iegūst:

$$\begin{cases} C_1 + m_o = 0 \\ \dfrac{C_1 k_2}{k_2 - k_1} + m_o + C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -m_o \\ C_2 = \dfrac{k_2 m_o}{k_2 - k_1} - m_o \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -m_o e^{-k_1 t} + m_o \\ y = \dfrac{-m_o k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + m_o + (\dfrac{k_2 m_o}{k_2 - k_1} - m_o) e^{-k_2 t} = m_o - m_o e^{-k_2 t} \end{cases}$$

Atbilde: galaprodukta daudzums atkarībā no laika ir $y = m_o - m_o e^{-k_2 t}$.

3. Viela *A* sadalās divās vielās *P* un *Q*. Katras no šīm vielām veidošanās ātrums ir proporcionāls nesadalītās vielas *A* daudzumam, kuras sākotnējais daudzums ir *a*. Atrast vielu *P* un *Q* daudzumu atkarībā no laika *t*.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

$x = x(t)$ - vielas *A* daudzums laika momentā *t*
$y = y(t)$ - vielas *B* daudzums laika momentā *t*
$a - x - y$ - nesadalījušās vielas *A* daudzums laika momentā *t*.
$x\big|_{t=0} = 0$; $y\big|_{t=0} = 0$ - sākuma nosacījumi

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(a - x - y) \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(a - x - y) \end{cases}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

Sistēmu atrisina ar izslēgšanas metodi:

$$\begin{cases} x'' = -k_1(x' + y') \\ y' = k_2(a - x - y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = -k_1(x' + k_2(a - x - y)) \\ x' = k_1(a - x - y) \end{cases}$$

$$k_1 y = -x' + k_1 a - k_1 x$$

$$x'' = -k_1 x' - k_1 k_2 a + k_1 k_2 x + k_1 k_2 y$$

$$x'' = -k_1 x' - k_1 k_2 a + k_1 k_2 x + k_1 k_2 y + k_2(-x' + k_1 a - k_1 x) =$$

$$= -k_1 x' - k_1 k_2 a + k_1 k_2 x - k_2 x' + k_1 k_2 a - k_1 k_2 x$$

$$x'' + (k_1 + k_2)x' = 0$$

$r^2 + (k_1 + k_2)r = 0$ - raksturīgais vienādojums:

$$r_1 = 0\,,\quad r_2 = -(k_1 + k_2)$$

$$x = C_1 + C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$x' = -(k_1 + k_2)C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$$

ievieto 1. vienādojumā:

$$-(k_1 + k_2)C_2 e^{-(k_1+k_2)t} = k_1 a - k_1 (C_1 + C_2 e^{-(k_1+k_2)t}) - k_1 y$$

$$k_1 y = k_1 a - k_1 C_1 + k_2 C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$y = a - C_1 + \frac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1+k_2)t}$$

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-(k_1+k_2)t} \\ y = a - C_1 + \dfrac{k_2}{k_1} C_2 e^{-(k_1+k_2)t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\big|_{t=0} = 0 \\ y\big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 - \dfrac{k_2}{k_1} C_2 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2} \\ C_2 = -\dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2} \end{cases}$$

Atbilde: vielu *P* un *Q* daudzumi atkarībā no laika ir $\begin{cases} x = \dfrac{k_1 a}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}) \\ y = \dfrac{k_2 a}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}) \end{cases}$.

4. Radioaktīvās vielas pārveidošanās ātrums ir proporcionāls vielas daudzumam. Radioaktīvā viela *RaB* pārveidojas par radioaktīvo vielu *RaC* (proporcionalitātes koeficients k_1). Savukārt viela *RaC* pārveidojas par vielu *D,* kas tālāk vairs nepārveidojas(proporcionalitātess koeficients k_2). Atrast vielu *B, C* un *D* daudzumu atkarībā no laika, ja vielas *B* sākuma daudzums ir *a*.

Matemātiskā modeļa sastādīšana.

x = x(t) - vielas *RaB* daudzums laika momentā *t*
y = y(t) - vielas *RaC* daudzums laika momentā *t*
z=z(t) - vielas *D* daudzums laika momentā *t*
Katrā laika momentā $x(t)+y(t)+z(t)=a$

$\dfrac{dx}{dt} < 0$ - vielas *RaB* sabrukšanas ātrums

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x$$

$\dfrac{dz}{dt}$ - vielas *D* veidošānās ātrums, kas vienāds ar *RaC* pārveidošanās ātrumu

$$\frac{dz}{dt} = k_2 y$$

$\frac{dy}{dt}$ - vielas *RaC* veidošanās ātrums, kas vienāds ar vielas *RaB* sabrukšanas ātruma un vielas *D* veidošanās ātruma starpību

$$\frac{dy}{dt}=\left|\frac{dx}{dt}\right|-\left|\frac{dz}{dt}\right|=k_1x-k_2y$$

Iegūst diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=k_1x\\ \frac{dy}{dt}=k_1x-k_2y\\ \frac{dz}{dt}=k_2y\end{cases}$$

ar sākuma nosacījumu $x\big|_{t=0}=a$; $y\big|_{t=0}=0$, $z\big|_{t=0}=0$.

Papildnosacījums: $x+y+z=a$.

Matemātiskā modeļa atrisināšana.

Atrisina sistēmu ar ievietošanas metodi.

No *1*. vienādojuma atrod:

$$\frac{dx}{dt}=-k_1x,\quad \frac{dx}{x}=-k_1dt,\quad \int\frac{dx}{x}=-k_1\int dt,\quad \ln|x|=-k_1t+\ln C,\quad \ln|x|=\ln Ce^{-k_1t}$$

$$x=Ce^{-k_1t}$$

$x\big|_{t=0}=a \quad \Rightarrow \quad C=a$

Tātad $x=ae^{-k_1t}$, ko ievieto sistēmas 2. vienādojumā. Iegūst 1. kārtas lineāru diferenciālvienādojumu

$$y'+k_2y=k_1ae^{-k_1t}.$$

Atrisina, lietojot substitūciju:

$$y=uv \quad \Rightarrow \quad y'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'+k_2uv=k_1ae^{-k_1t}$$

$$u'v+u(v'+k_2v)=k_1ae^{-k_1t}$$

$v'+k_2v=0$

$$\frac{dv}{dt}=-k_2v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v}=-k_2dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v}=-\int k_2dt \quad \Rightarrow \quad \ln|v|=-k_2t+C$$

Izvēlas $C=0 \quad \Rightarrow \quad v=e^{-k_2t}$

Līdz ar to $u'e^{-k_2t}=k_1ae^{-k_1t}$, $\frac{du}{dt}=k_1ae^{(k_2-k_1)t}$, $\int du=k_1a\int e^{(k_2-k_1)t}dt$

$$u=\frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t}+C_1$$

Tā kā $y=u\cdot v$, tad $y=e^{-k_2t}\left(\frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t}+C_1\right).$

Izmantojot sākuma nosacījumu $y\big|_{t=0}=0$, atrod $C_1=-\dfrac{k_1a}{k_2-k_1}$.

Tātad $$y=e^{-k_2t}\left(\frac{k_1a}{k_2-k_1}e^{(k_2-k_1)t}+-\frac{k_1a}{k_2-k_1}\right)=-\frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}\right)$$

Tā kā $\quad x(t)+y(t)+z(t)=a,$

tad $\quad z(t)=a-x(t)-y(t),$

$$z=a-ae^{-k_1t}-\frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}\right)=a\left(1-\frac{k_2}{k_2-k_1}e^{-k_1t}-\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_2t}\right).$$

Atbilde: vielu *B, C* un *D* daudzumu atkarībā no laika atrod, izmantojot funkcijas

$$x(t)=ae^{-k_1t},$$

$$y(t)=-\frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}\right),$$

$$z(t)=a\left(1-\frac{k_2}{k_2-k_1}e^{-k_1t}-\frac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_2t}\right).$$

5. Radioaktīvās vielas pārveidošanās ātrums ir proporcionāls vielas daudzumam. Radioaktīvā viela *RaB* pārveidojas par radioaktīvo vielu *RaC* (proporcionalitātes koeficients k_1) ar tādu ātrumu, ka puse *RaB* daudzuma ir pārveidojusies *27 min*. Savukārt puse vielas *RaC* pārveidojas par vielu *D,* kas tālāk vairs nepārveidojas(proporcionalitātess koeficients k_2), pēc *19,5 min*. Atrast vielu *B, C* un *D* daudzumu pēc *1* stundas, ja vielas *B* sākuma daudzums ir *1*.

Skat. iepriekšējā uzdevuma atrisinājumu, no kura iegūst

$x(t)=ae^{-k_1t}$ - vielas *RaB* daudzums laika momentā *t*

$y(t)=-\dfrac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}\right)$ - vielas *RaC* daudzums laika momentā *t*

$z(t)=a\left(1-\dfrac{k_2}{k_2-k_1}e^{-k_1t}-\dfrac{k_1}{k_2-k_1}e^{-k_2t}\right)$ - vielas *D* daudzums laika momentā *t*

$$k_1=\frac{\ln 2}{T_1},\quad k_2=\frac{\ln 2}{T_2},$$

kur T_1 un T_2 ir attiecīgi vielu *RaB* un *RaC* pussabrukšanas periodi.

$$x(t)+y(t)+z(t)=a$$

Aprēķins.

$k_1=\dfrac{\ln 2}{27}\approx 0{,}026$, $\quad k_2=\dfrac{\ln 2}{19{,}5}\approx 0{,}036$, $\quad a=1, \quad t=60\ (min)$

$$x=e^{-k_1t}=e^{-1{,}54}\approx 0{,}214$$

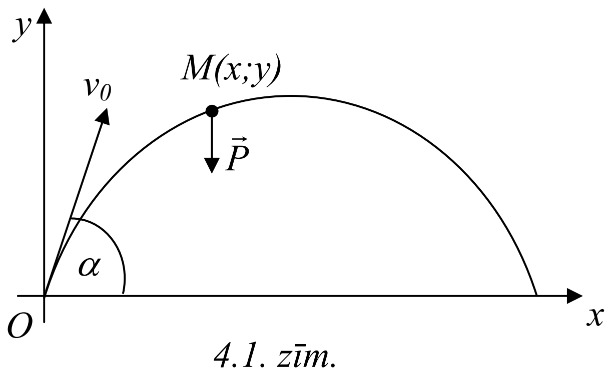
$$y=-\frac{k_1a}{k_2-k_1}\left(e^{-k_1t}-e^{-k_2t}\right)\approx -2{,}375\cdot(0{,}214-0{,}113)=0{,}243$$

$$z = 1 - x - y \approx 1 - 0{,}214 - 0{,}243 = 0{,}543$$

Atbilde: vielu *B, C* un *D* daudzumi pēc *1* stundas attiecīgi būs *0,214, 0,243* un *0,543.*

6. Lode izlido no ieroča ar ātrumu v_0, kas veido leņķi α ar horizontu. Neņemot vērā gaisa pretestību, atrast lodes kustības likumu.

Matemātiskā modeļa sastādīšana



4.1. zīm.

Trajektorijas parametriskie vienādojumi

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ kur } t - \text{laiks.}$$

M(x;y) – lodes trajektorijas punkts, kurā lode atrodas pēc laika *t* no kustības sākuma*; x=x(t), y=y(t).*

P=mg – lodes smaguma spēks

$$\begin{matrix} proj_{Ox}\vec{P} = 0 \\ proj_{Oy}\vec{P} = -P \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mx'' = 0 \\ my'' = -mg \end{cases}$$

Matemātiskā modeļa atrisināšana

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = -g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = C_1 \\ y' = -gt + C_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4 \end{cases}$$

Sākuma nosacījumi: $x\big|_{t=0} = 0$, $x'\big|_{t=0} = v_0 \cos\alpha$

$y\big|_{t=0} = 0$, $y'\big|_{t=0} = v_0 \sin\alpha$

Tādējādi: $C_2 = 0$, $C_3 = v_0 \sin\alpha$

$C_4 = 0$, $C_1 = v_0 \cos\alpha$

Un
$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}$$

Piezīme: Šo uzdevumu var atrisināt, nesastādot diferenciālvienādojumu sistēmu.

Atbilde: lodes trajektorijas parametriskais vienādojums ir $\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$.

7. Lode izlido no ieroča ar ātrumu *800m/s*, kas veido *45°* lielu leņķi ar horizontu. Neņemot vērā gaisa pretestību, atrast vislielāko augstumu, kuru sasniedz lode, un attālumu, kur lode sasniedz zemi.

Skat iepriekšējā uzdevuma atrisinājumu, no kura iegūst

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + xtg\alpha\,.$$

Aprēķins.

$v_0 = 800(m/s)$

$\alpha = 45^\circ$ $\quad\Rightarrow\quad y = -\dfrac{10}{2\cdot 640000\cdot\dfrac{1}{2}}x^2 + x$

$g \approx 10(m/s)$

$$y = -\frac{1}{64000}x^2 + x$$

Lidojuma tālums.

y=0 $\Rightarrow\quad 0 = -\dfrac{1}{64000}x^2 + x, \quad\Rightarrow\quad x\left(-\dfrac{1}{64000}x + 1\right) = 0$

x=0 – sākuma punkts

x=64000(m)=64(km)

Lidojuma augstums.

Funkcijas $y = -\dfrac{1}{64000}x^2 + x$ maksimuma punkta ordināta.

$y' = -\dfrac{1}{32000}x + 1$

$y' = 0 \quad\Rightarrow\quad -\dfrac{1}{32000}x + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad$ *x=32000*

$y_{\max} = -\dfrac{1}{64000}32000^2 + 32000 = -16000 + 32000 = 16000(m) = 16(km)$

Atbilde: vislielākais augstums, ko sasniedz lode, ir *16 km*, un attālums, kur lode sasniedz zemi, ir *64 km*.

Nobeigums.

Šajā maģistra darbā ir aplūkoti galvenokārt tādi uzdevumi, kas neprasa speciālas zināšanas. Ir nepieciešams izmantot likumsakarības atbilstoši vidusskolas fizikas kursa līmenim. Sarežģītāki uzdevumi, kurus risinot nepieciešamas augstākas zināšanas dažādu specialitāšu priekšmetos, nav aplūkoti.

Pielikumā uzdevumu komplekti paredzēti studentu patstāvīgajam darbam. Tie ir izveidoti tā, ka katrā komplektā ir iekļauts:

1. atvasinājuma ģeometriskās interpretācijas standartuzdevums;
2. atvasinājuma fizikālās nozīmes standartuzdevums;
3. eksponenciālās augšanas vai dilšanas standartuzdevums;
4. eksponenciālās augšanas vai dilšanas problēmuzdevums;
5. otrās kārtas atvasinājuma fizikālās nozīmes izmantošanas uzdevums;
6. uzdevums, kuru risinot kā matemātisku modeli iegūst mehānisko svārstību diferenciālvienādojumu vai lineāru diferenciālvienādojumu sistēmu.

Izmantotā literatūra.

1. Augstākā matemātika. K. Šteiners. IV. daļa, Zvaigzne ABC, 1999, 167 lpp.
2. Matemātiskās analīzes elementi. K. Šteiners. Rīga „Zvaigzne” ABC, 1993, 320 lpp.
3. Algebra 10.-12. kl. D. Kriķis, K. Šteiners. VI. daļa, Zvaigzne ABC, 2001, 240 lpp.
4. Modeļi matemātikas un fizikas mācīšanā. U. Grīnfelds, T. Ramanovskis, E. Šilters. Rīga „Zvaigzne” 1983, 104 lpp.
5. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. Dz. Bože, L.Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Rīga „Zvaigzne”, 1986, 320 lpp.
6. Дифференциальные уравнения в приложениях. В.В. Амелькин. Москва, «Наука», 1987, 158 стр.
7. Руководство к решению задач по математическому анализу. Г.И. Запорожец. Государственное издательство «Высшая школа», Москва, 1962, 404 стр.
8. Задачи и упражнения по математическому анализу. Под редакцией Б.П.Демидовича. Москва, «Наука», 1978, 480 стр.
9. Состовление дифференциальных уравнений. К. К. Пономарев. «Вышэйшая школа», Минск, 1973, 560 стр.
10. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. А.Ф.Филиппов. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2000, 176.стр.
11. Сборник задач по курсу математического анализа. Г.Н.Берман. Москва, «Наука», 1975, 416 стр.
12. Математический анализ для решения физических задач. М.А. Шубин. МЦМНО, Москва, 2003, 40 стр.
13. Задачник по курсу математического анализа. ч.2. Под редакцией Н.Я.Виленкина. Москва, «Просвещение», 1971, 336 стр.

Pielikums.

(Uzdevumu komplekti par diferenciālvienādojumu sastādīšanu patstāvīgajam darbam studentiem 10 variantos.)

1. variants.

1. Atrast līniju, kas iet caur punktu $M(\sqrt{2};2)$, ja tās brīvi izraudzītā punktā novilktās pieskares virzienā koeficents ir divas reizes lielāks nekā šī punkta ordinātes attiecība pret abscisu.

(skat. atrisinājumu 27. lpp.)

2. Motorlaiva, kas brauca ar ātrumu *18 km/h*, izslēdza motoru. Pēc *1* minūtes no motora izslēgšanas momenta laivas ātrums bija *6 km/h.* Kāds būs laivas ātrums pēc *1,5* minūtēm, ja ūdens pretestības spēks ir proporcionāls laivas ātrumam?

(skat. atrisinājumu 42. lpp.)

3. Viena ķermeņa temperatūra ir *200°*, bet otra - *100°.* Atrodoties gaisā, kura temperatūra ir *0°,* pirmais ķermenis pēc *10 min* atdziest līdz *100°*, bet otrais – līdz *80°*. Pēc cik ilga laika ķermeņu temperatūra ir vienāda?

(skat. atrisinājumu 58. lpp.)

4. Traukā, kurā ir *10 l* ūdens, nepārtraukti ieplūst šķidrums ar ātrumu *2 l* minūtē. Ieplūdušais šķidrums, kas satur *0,3 kg* sāls, tiek sajaukts ar ūdeni un maisījums iztek no trauka ar tādu pašu ātrumu. Cik *kg* sāls būs traukā pēc *5 min*.?

(skat. atrisinājumu 67. lpp.)

5. Horizontālā plaknē rotē caurule ap vertikālu rotācijas asi ar leņķa ātrumu ω. Caurulē atrodas lodīte, kas caurulē slīd bez berzes. Atrast lodes kustības likumu, ja rotācijas sākumā lode atrodas uz rotācijas ass un tās sākuma ātrums ir v_o.

(skat. atrisinājumu 98. lpp.)

6. Radioaktīva viela, kuras sākuma daudzums ir m_o, sadalās (primārā reakcija). Reakcijas produkts arī sadalās (sekundārā reakcija). Abu reakciju ātrums ir proporcionāls reaģējošās vielas daudzumam. Atrast galaprodukta daudzumu atkarībā no laika.

(skat. atrisinājumu 122. lpp.)

2. variants.

1. Atrast līniju, kuras brīvi izraudzītā punktā novilkta pieskare uz *Oy* ass atšķeļ nogriezni, kura garums ir vienāds ar pieskaršanās punkta attālumu līdz koordinātu sākumpunktam.

(skat. atrisinājumu 28 . lpp.)

2. Materiālu daliņu, kuras masa ir m un kas pārvietojas ar ātrumu v_0 taisnā virzienā, sāka bremzēt spēks, kas tieši proporcionāls bremzēšanas laikam un apgriezti proporcionāls kustības ātrumam. Pēc cik ilga laika no bremzēšanas sākuma daliņa tiks apstādināta?

(skat. atrisinājumu 42. lpp.)

3. Aprēķināt, kāda daļa no radioaktīvās vielas sākotnējā daudzuma m_0 paliks pēc *1000 gadiem*, ja šīs vielas pussabrukšanas periods ir *1550 gadi*.

(skat. atrisinājumu 57. lpp.)

4. Traukā ir *100 l* sāls šķīduma, kas satur *10 kg* sāls. Traukā ar ātrumu *5 l/min* ieplūst ūdens, kurš vienmērīgi samaisās ar šķīdumu. Šķīdums no trauka iztek ar tādu pašu ātrumu. Cik *kg* sāls būs traukā pēc *1* stundas?

(skat. atrisinājumu 68. lpp.)

5. Ķēde pārkārta pār naglu tā, ka vienā pusē ir *8 m* garš gabals, bet otrā pusē *10 m* garš gabals. Ķēdei slīdot slīdes paātrinājums proporcionāls abās naglas pusēs karājošos ķēdes gabalu garumu starpībai(proporcionalitātes koeficients $\lambda = 0{,}72$. Cik ilgā laikā ķēde noslīdēs no naglas?

(skat. atrisinājumu 101. lpp.)

6. Lode izlido no ieroča ar ātrumu *800m/s*, kas veido 45° lielu leņķi ar horizontu. Neņemot vērā gaisa pretestību, atrast vislielāko augstumu, kuru sasniedz lode, un attālumu, kur lode sasniedz zemi.

(skat. atrisinājumu 129. lpp.)

3. variants.

1. Atrast līniju, kas iet caur punktu *A(0; - 2)*, ja tās brīvi izraudzītā punktā novilktās pieskares virziena koeficients ir 3 reizes lielāks nekā šī punkta ordināta.

(skat. atrisinājumu 29. lpp.)

2. Cilindrisks trauks, kura pamatā ir caurums, piepildīts ar ūdeni. Trauka augstums ir *H*. Cik ilgā laikā viss ūdens iztecēs no trauka, ja $\frac{3}{4}$ visa ūdens iztek *10* sekundēs? Ūdens iztecēšanas ātrums ir proporcionāls kvadrātsaknei no ūdens līmeņa augstuma aplūkotā laika momentā *t*.

(skat. atrisinājumu 44. lpp.)

3. Rādija pussabrukšanas periods ir *1590* gadu. Pēc cik gadiem paliks $\frac{1}{10}$ rādija sākotnējā daudzuma?

(skat. atrisinājumu 60. lpp.)

4. Kāda poraina viela, kas satur *3 kg* ūdens, atrodas istabā, kuras tilpums ir $100\ m^3$ un gaisa mitrums *25%*. Piesātināts gaiss šīs istabas temperatūrā satur *0,12 kg* ūdens uz $1\ m^3$ gaisa. Pirmās diennakts laikā viela zaudēja pusi no sava mitruma. Cik daudz mitruma tā zaudēs otrās diennakts laikā? Ūdens iztvaikošanas ātrums no porainas vielas proporcionāls mitruma daudzumam vielā un starpībai starp piesātinātā gaisa mitrumu un gaisa mitrumu telpā aplūkotajā laika momentā.

(skat. atrisinājumu 66. lpp.)

5. Materiāla daļiņa, kuras masa *m*, iegremdēta šķidrumā. Atrast tās noieto ceļu atkarībā no laika, ja šķidruma pretestības spēks ir proporcionāls kustības ātrumam(proporcionalitātes koeficients λ, sākuma ātrums *0*).

(skat. atrisinājumu 96. lpp.)

6. Materiālu daliņu, kuras masa ir *m*, pievelk punkts *O* ar spēku, kas proporcionāls daliņas attālumam no punkta *O*. Atrast daliņas kustības likumu.

(skat. atrisinājumu 113. lpp.)

4. variants.

1. Pieskare jebkurā līknes punktā P, abscisu ass un taisne, kas iet caur punktu P paralēli Oy asij, veido figūru ar konstantu laukumu a^2. Atrast šo līkni.

(skat. atrisinājumu 29. lpp.)

2. Laivas ātrums samazinās ūdens pretestības ietekmē. Ūdens pretestība ir proporcionāla laivas ātrumam. Laivas sākuma ātrums ir *1,5 m/s*, ātrums pēc *4* sekundēm ir *1m/s.* Pēc cik ilga laika laivas ātrums būs *0,01 m/s*? Noteikt laivas nobraukto ceļu līdz apstāšanās momentam!

(skat. atrisinājumu 46. lpp.)

3. *1940. gadā* pasaules iedzīvotāju skaits bija *2,3 miljardi*. Izmantojot organiskās augšanas diferenciālvienādojumu, aprēķināt, cik teorētiski iedzīvotāju būtu *2005. gadā*, ja iedzīvotāju skaits divkāršojas *35* gados.

(skat. atrisinājumu 61. lpp.)

4. Divas vielas A un B reaģējot veido trešo vielu C. Vielas A sākotnējais daudzums ir *10 litri*, vielas B – *20 litri*. No katrām divām vielas A tilpuma vienībām un vielas B vienas tilpuma vienības rodas vielas C trīs tilpuma vienības. Atrast vielas C dudzumu atkarībā no reakcijas laika, ja *20 minūtēs* iegūst *6 litri* vielas C.

(skat. atrisinājumu 64. lpp.)

5. Ar kādu ātrumu jāizsviež ķermenis Zemeslodes rādiusa virzienā, lai tas, pārvarot Zemes gravitācijas spēku, nenokristu atpakaļ uz Zemes(gaisa pretestību neievērot)?

(skat. atrisinājumu 95. lpp.)

6. Traukā ir V litri sāls šķīduma, kas sākumā saturēja m *kg* sāls. Katru minūti traukā iesūknē a litrus ūdens un sajauc ar tur esošo šķīdumu. Ar tādu pašu ātrumu atšķaidīto šķīdumu pārsūknē otrā traukā, kurā sākumā bija V litru ūdens, sajauc un pēc tam izsūknē no trauka. Pēc cik ilga laika abos traukos būs vienāds sāls daudzums?

(skat. atrisinājumu 121. lpp.)

5. variants.

1. Atrast līknes, kurām jebkurā līknes punktā novilktās pieskares un *Ox* ass krustpunkta abscisa ir *2* reizes mazāka nekā pieskaršanās punkta abscisa.

(skat. atrisinājumu 30. lpp.)

2. Materiāla daļiņa, kuras masa *m*, iekrita šķidrumā. Atrast daļiņas ātrumu šķidrumā atkarībā no laika, ja šķidruma pretestības spēks proporcionāls daliņas ātrumam un sākuma ātrums ir v_0.

(skat. atrisinājumu 43. lpp.)

3. Viela *A* reaģē ar citu vielu. Reakcijas ātrums ir tieši proporcionāls vielas *A* daudzumam. Cik daudz vielas *A* bija reakcijas sākumā, ja pēc *1* stundas no reakcijas sākuma bija *100g* šīs vielas, bet pēc *2* stundām – *25* grami?

(skat. atrisinājumu 62. lpp.)

4. Kādas nešķīstošas vielas porās ir *10 kg* sāls. Ieliekot šo vielu *90 l* ūdens, *1 stundas* laikā izšķīst puse no sāls. Sāls šķīšanas ātrums ir proporcionāls neizšķīdušās sāls daudzumam un starpībai starp piesātināta šķīduma koncentrāciju *(1 kg sāls uz 3 l ūdens t.i.* $\frac{1}{4}$*)* un šķīduma koncentrāciju dotajā momentā. Atrast neizšķīdušā sāls daudzumu atkarībā no laika. Cik ilgā laikā izšķīst *90%* sākotnējā sāls daudzums?

(skat. atrisinājumu71. lpp.)

5. Materiāla daļiņa, kuras masa ir *50 g*, iegremdēta viskozā šķidrumā. Atrast daļiņas noieto ceļu pēc *1* minūtes no kustības sākuma, ja šķidruma pretestības spēks ir tieši proporcionāls kustības ātrumam (proporcionalitātes koeficients $\lambda = 0,5$, daļiņas sākuma ātrums vienāds ar nulli)!

(skat. atrisinājumu 104. lpp.)

6. Ķermenis, kura masa ir *0,2 kg*, iekārts atsperē. Ķermeni atvirza no līdzsvara stāvokļa, izstiepjot atsperi par *0,02 m*, un pēc tam palaiž vaļā bez sākuma ātruma. Atrast ķermeņa kustības likumu, ja vides pretestības spēks proporcionāls kustības ātrumam un, kustoties ar ātrumu *0,01 m/s*, vides pretestības spēks ir *0,0008 N.* Atsperes elastības spēks, to izstiepjot par *0,015 m*, jāpārvar *30,00012 N*. Atsperes masu neievērot.

(skat. atrisinājumu 112. lpp.)

6. variants.

1. Atrast līkni, kas iet caur punktu *(2;3),* ja jebkurā tās punktā novilktās pieskares nogrieznis starp koordinātu asīm dalās uz pusēm.

(skat. atrisinājumu 30. lpp.)

2. Motorlaiva brauc stāvošā ūdenī ar ātrumu *10 km/h*. Braukšanas laikā izslēdza motoru un pēc *20* sekundēm laivas braukšanas ātrums bija *6 km/h*. Uzskatot, ka ūdens pretestība ir proporcionāla laivas ātrumam, atrast laivas ātrumu pēc *2 min* kopš motora izslēgšanas. Atrast arī attālumu, ko veica laiva *1 min* laikā pēc motora izslēgšanas.

(skat. atrisinājumu 45. lpp.)

3. Kādas valsts iedzīvotāju daudzuma pieauguma ātrums proporcionāls iedzīvotāju daudzumam. Pieņemtajās laika atskaites sākuma momentā iedzīvotāju daudzums bija N_o. Pēc *1* gada iedzīvotāju daudzums palielinājās par *p %.* Atrast iedzīvotāju daudzumu pēc *5* gadiem!

(skat. atrisinājumu 61. lpp.)

4. Cilvēks vidēji ieelpo *18* reizes *1* minūtē, katru reizi izelpojot $2000\ cm^3$ gaisa, kas satur *4%* CO_2. Cik procentu CO_2 saturēs gaiss auditorijā, kuras tilpums $400\ m^3$ pēc *30 minūtēm*, ja auditorijā uzturas *50* cilvēki un ventilators iesūknē $40\ m^3$ svaiga gaisa *1 min*, kas satur *0,04%* CO_2?

(skat. atrisinājumu 73. lpp.)

5. Ķēde, kuras garums *l=4m,* bez berzes slīd no galda. Cik ilgā laikā visa ķēde noslīdēs no galda, ja tā sāk slīdēt laika momentā, kad pār galda malu nokarājas *a=0,5m* garš ķēdes gabals?

(skat. atrisinājumu 99. lpp.)

6. Viela *A* sadalās divās vielās *P* un *Q*. Katras no šīm vielām veidošanās ātrums ir proporcionāls nesadalītās vielas *A* daudzumam, kuras sākotnējais daudzums ir *a*. Atrast vielu *P* un *Q* daudzumu atkarībā no laika *t*.

(skat. atrisinājumu 124. lpp.)

7. variants.

1. Atrast visas līknes, kurām pieskares nogrieznis starp abscisu asi un pieskaršanās punktu dalās uz pusēm, krustojoties ar ordinātu asi!

(skat. atrisinājumu 32. lpp.)

2. Materiāls punkts ar masu 10^{-3} *kg* spēka F iedarbības rezultātā pārvietojas pa taisni. Spēks F ir tieši proporcionāls laikam t un apgriezti proporcionāls kustības ātrumam. Laika momentā $t = 10\ s$ ātrums ir *0,5 m/s*, bet spēks ir $4 \cdot 10^{-5}\,N$. Kāds ir kustības ātrums *1 min* pēc kustības sākuma?

(skat. atrisinājumu 47. lpp.)

3. Aprēķināt alus rauga fermenta daudzumu pēc *5* stundām, ja rūgšanas sākumā bija *1g* fermenta, pēc *1* stundas – *1,2g* fermenta(fermenta pieaugšanas ātrums tieši proporcionāls to daudzumam).

(skat. atrisinājumu 62. lpp.)

4. Rezervuāram, kura tilpums ir *300 l,* pamats noklāts ar biezu sāls slāni. Rezervuārs piepildīts ar ūdeni. Pieņemot, ka sāls šķīšanas ātrums ir proporcionāls starpībai starp piesātināta sāls šķīduma koncentrāciju *(1 kg sāls uz 3 l ūdens)* un sāls šķīduma koncentrāciju dotajā momentā, un dotais tīra ūdens daudzums izšķīdina $\frac{1}{3}$ *kg* sāls *1 min,* atrast, cik izšķīdušas sāls saturēs ūdens pēc *1* stundas.

(skat. atrisinājumu 70. lpp.)

5. Horizontālā plaknē rotē caurule ap vertikālu rotācijas asi ar leņķa ātrumu ω. Caurulē atrodas lodīte, kas caurulē slīd bez berzes. Atrast lodes kustības likumu, ja rotācijas sākumā lodītes ātrums bija 0 un tās attālums no rotācijas ass bija a.

(skat. atrisinājumu 99. lpp.)

6. Radioaktīvās vielas pārveidošanās ātrums ir proporcionāls vielas daudzumam. Radioaktīvā viela *RaB* pārveidojas par radioaktīvo vielu *RaC* (proporcionalitātes koeficients k_1). Savukārt viela *RaC* pārveidojas par vielu *D,* kas tālāk vairs nepārveidojas(proporcionalitātess koeficients k_2). Atrast vielu *B, C* un *D* daudzumu atkarībā no laika, ja vielas *B* sākuma daudzums ir a.

(skat. atrisinājumu 125. lpp.)

8. variants.

1. Līknes jebkurā punktā novilktās pieskares krustpunkts ar *Ox* asi ir vienādā attālumā no pieskaršanās punkta un no koordinātu sākumpunkta. Atrast šo līkni!

(skat. atrisinājumu 32. lpp.)

2. Lode ar ātrumu v_1 *m/s* ieiet dēlī un iziet no dēļa ar ātrumu v_2 *m/s*. Noteikt lodes kustības ātruma atkarību no laika *t*, ja dēļa pretestības spēks ir proporcionāls lodes ātruma kvadrātam.

(skat. atrisinājumu 48. lpp.)

3. No krāsns izņemtas maizes temperatūra *15 min* samazinājas no *100°* līdz *60°*. Pēc cik ilga laika maizes temperatūra ir *30°*, ja apkārtējā gaisa temperatūra ir *20°*?

(skat. atrisinājumu 57. lpp.)

4. Traukā ir *100 l* šķīduma, kas satur *10 kg* sāls. Katru minūti tajā ielej *3 l* ūdens un iztek *2 l* šķīduma, turklāt sāls koncentrācija traukā tiek uzturēta vienmērīga. Cik *kg* sāls paliks traukā pēc *1 h*?

(skat. atrisinājumu 68. lpp.)

5. Ķēde, kas karājas uz gluda āķa, slīd uz leju. Kustības sākumā vienā āķa pusē ir *10 m* garš ķēdes posms, bet otrā pusē – *8 m* garš ķēdes posms Neievērojot pretestību, atrast:

1) cik ilgā laikā no āķa noslīdēs visa ķēde;
2) kāds būs ķēdes ātrums laika momentā, kad ķēde sāks brīvi krist.

(skat. atrisinājumu 102. lpp.)

6. Radioaktīvās vielas pārveidošanās ātrums ir proporcionāls vielas daudzumam. Radioaktīvā viela *RaB* pārveidojas par radioaktīvo vielu *RaC* (proporcionalitātes koeficients k_1) ar tādu ātrumu, ka puse *RaB* daudzuma ir pārveidojusies *27 min*. Savukārt puse vielas *RaC* pārveidojas par vielu *D,* kas tālāk vairs nepārveidojas(proporcionalitātess koeficients k_2), pēc *19,5 min*. Atrast vielu *B, C* un *D* daudzumu pēc *1* stundas, ja vielas *B* sākuma daudzums ir *1*.

(skat. atrisinājumu 127. lpp.)

9. variants.

1. Jebkurā līknes punktā P novilktā normāle krusto Oy asi punktā, kura ordināta vienāda ar punkta P attālumu līdz koordinātu sākumpunktam. Atrast šo līkni.

(skat. atrisinājumu 35. lpp.)

2. Noteikt ceļu, kādu ķermenis noiet laikā t no kustības sākuma, ja kustības ātrums ir proporcionāls noietajam ceļam un $100\ m$ ķermenis noiet $10s$, bet $200m - 15s$?

(skat. atrisinājumu 47. lpp.)

3. Ķermenis atrodas gaisā, kura temperatūra ir $18°$ un 25 minūtēs atdziest no $90°$ līdz $54°$. Par cik grādiem ķermenis atdziest nākamajās 25 minūtēs.

(skat. atrisinājumu 59. lpp.)

4. Labaratorijā, kuras tilpums $V\, m^3$, gaiss saturēja $p\%$ amonjaka. Ieslēdzot ventilatoru, katru minūti iesūknēja $a\ m^3$ tīra gaisa, kas amonjaku nesatur. Cik ilgi jādarbina ventilators, lai amonjaka saturs samazinātos 2 reizes? Pieņem, ka attīrītais gaiss ar ātrumu $a\ m^3/min$ izplūst no labaratorijas.

(skat. atrisinājumu 72. lpp.)

5. Ķermeni, kas atradās $10\ m$ augstumā, izmeta vertikāli uz augšu ar ātrumu $40\ m/s$. Cik augstu ķermenis atradīsies pēc 1 sekundes? Pēc cik sekundēm tas sasniegs visaugstāko punktu virs Zemes?

(skat. atrisinājumu 105. lpp.)

6. Punktos A un B nostiprinātas divas vienādas magnetizētas lodītes. Taisnes nogriežņa AB punktā, kas atrodas attāluma c no AB viduspunkta O, novieto tērauda lodīti, kuru katra no magnetizētajām lodītēm pievelk ar spēku, kas proporcionāls attālumam līdz tērauda lodītei. Atrast lodītes kustības likumu, ja tās masa m un $AB = 2b$.

skat. atrisinājumu 111. lpp.)

10. variants.

1. Pieskare jebkurā līknes punktā *P*, punkta *P* rādiusvektors un *Ox* ass veido trijstūri ar konstantu laukumu a^2. Atrast šo līkni.

(skat. atrisinājumu 36. lpp.)

2. Lokomatīve brauc pa horizontālu ceļu ar ātrumu *72 km/h*. Lokomatīvi apstādināta bremzējot. Kāds būs lokomatīves ātrums pēc 5 sekundēm no bremzēšanas sākuma, ja pretestības spēks kustībai ir *0,2* no tās svara.

(skat. atrisinājumu 49. lpp.)

3. Baktēriju sākotnējais daudzums kolbā bija *1 g*, bet pēc *1* stundas – *1,2 g*. Aprēķināt baktēriju daudzumu pēc *5* stundām.

(skat. atrisinājumu 60. lpp.)

4. Traukā ir *60 l* šķīduma, kas satur *5 kg* sāls. Katru minūti tajā ielej *3 l* ūdens un iztek *2 l* šķīduma, turklāt sāls koncentrācija traukā tiek uzturēta vienmērīga. Cik *kg* sāls paliks traukā pēc *40 min*?

(skat. atrisinājumu 69. lpp.)

5. Bobsleja kamaniņas slīd pa trasi(uzskatīt par slīpu plakni), kuras slīpuma leņķis ir α un berzes koeficients ir μ. Atrast kamaniņu kustības likumu, ja kamaniņu sākuma ātrums ir v_0.

(skat. atrisinājumu 106. lpp.)

6. Vertikālas atsperes galā piestiprinot atsvaru *P*, atspere izstiepās par lielumu l. Pēc tam atsvaru pavilka uz leju par lielumu *a* un atlaida. Noteikt atsvara kustības likumu, neievērojot atsperes svaru un ārējos pretestības spēkus!

(skat. atrisinājumu 110. lpp.)