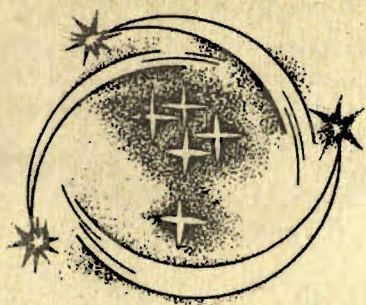




**ИРРЕГУЛЯРНЫЕ
СИЛЫ
В ДВИЖЕНИИ
КОМЕТ**

AR DARBA SARKANĀ KAROGA ĪRDENI APBALVOTĀ
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

ЛАТВИЙСКИЙ ОрдЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ

ZINĀTNISKO RAKSTU KRĀJUMS

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ

137

SĒJUMS

RĪGA 1970 РИГА

А Н Н О Т А Ц И Я

В настоящем сборнике научных статей рассмотрена проблема соударений комет с астероидами. Учитывая достаточно большую вероятность соударений и наличие негравитационных сил, устанавливается наиболее вероятная эволюция орбиты кометы Даниэля и устраняется противоречие в данных об изменении ее яркости. В связи с этим решены также следующие задачи: определены минимальные расстояния между орбитами, найдены приближенные формулы для определения возмущений в обратных величинах больших полуосей и найдены распределения величин, входящих в эти формулы.



✓ 1986. 14. 40

200021058

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 137, ВЫПУСК 5, 1970

К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне

О НАИБОЛЕЕ ВЕРОЯТНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ОРБИТЫ
КОМЕТЫ ДАНИЭЛЯ 1909 IV

Комета Даниэля /1909 IV/ была открыта З. Даниэлем 6 декабря 1909 г. как довольно яркая туманность. Так как комету открыли спустя неделю после прохождения через перигелий, когда она удалялась от Земли, яркость ее быстро убывала, уже через месяц после открытия комета была недоступна телескопам большинства обсерваторий, и только в Алжире и Ницце ее удалось проследить до середины марта 1910 г. Фотографические наблюдения велись до начала апреля. Материалы наблюдений, собранные на 30 обсерваториях с 6 декабря 1909 г. до 11 апреля 1910 г., состоял из 202 визуальных микрометрических и 37 фотографических наблюдений. Это достаточно богатый материал и промежуток времени 4 месяца наблюдений также соответствует достаточно большой дуге, чтобы получить вполне уверенную орбиту. Элементы, полученные А. Д. Дубяго [1], легли в основу исследований Н. А. Беллева [2] об эволюции орбиты кометы Даниэля за 400 лет /1660 - 2060 г.г./. Учитывая только гравитационные силы, Н. А. Беллев исследовал комету с 1660 по 1909 год и показал, что она имела наибольшее сближение в 1711 году, когда с нею Юпитер сблизился на расстояние $\Delta_m = 0,20$ а.е. Ясно, что при столь больших значениях Δ_m никакие катастрофические изменения не произошли и она оставалась все время в сфере видимости. С. Г. Маковер [3] обратил внимание на то, что яркость кометы Даниэля в 1664 г. должна была

быть столь большой, что ее надо было видеть невооруженным глазом. По мнению С.Г.Маковера, комета Даниэля принадлежит к числу тех комет, у которых процесс деинтеграции, а также связанный с ним процесс векового уменьшения блеска, происходит особенно быстро. По данным каталога С.К.Всехсвятского [13] комета в 1909 году была $9^m,5$, а в 1950 г. $12^m,8$. С.Г.Маковер считал, что вековое изменение абсолютной величины кометы происходит линейно со скоростью $0,1$ звездной величины в год, и на основе этого предположения получил, что она в 1679 году, /предполагая расстояние 1 а.е. от Земли/, должна была иметь $-11^m,0$, т.е. ее блеск должен был бы сравним с блеском Луны. Следовательно, она должна была бы быть открытой, но это не произошло.

В настоящей статье мы предложим наиболее вероятную эволюцию кометы Даниэля, учитывая негравитационные силы в движении кометы, и постараемся объяснить фотометрический парадокс установленный С.Г.Маковером.

§ 1. Чтобы выявить ускорение и замедление негравитационного характера применяются разные методы. Ярким, положительным примером установления негравитационных сил в движении кометы Аренда-Ролана 1957 III, для которой на основе 500 астрономических наблюдений, которые производились с ноября 1956 г. по апрель 1958 г., вычислялись 9 орбит по последовательно-частично перекрывающимся дугам. На основе упомянутых вычислений З.Секанина [4] получил систематическое уменьшение значения $\frac{1}{d}$. Установлено, что за промежуток времени в два года $\frac{1}{d}$ уменьшилось на $187 \cdot 10^{-6} / \text{а.е.}^{-1}$. Столь большое изменение обратного значения большой полуоси кометы Аренда-Роланга объясняется тем, что эта комета является новой, т.е. впервые пришедшей в Солнечную систему.

В 1968 г. З.Секанина [5] привел список 27 комет с периодом обращения до 15 лет, у которых обнаружены эффекты негравитационных сил, и установил общие закономерности, вызванные ими. Из общих свойств, приведенных З.Секанином, отметим те, которые, по нашему

мнению, имеют космогоническое значение, а именно:

1. Негравитационные ускорения и замедления движения встречаются одинаково часто.

2. Неизвестно ни одной кометы, у которой замедлениеменялось на ускорение и наоборот.

Кроме того, на основе данных, приведенных З.Секанином, и на основе величины замедления у кометы Аренда-Ролана, мы можем сделать следующее заключение:

3. Чем моложе комета, тем больше у нее ускорение или замедление.

Относительно третьего свойства сделаем следующее замечание. Результаты определений запаздываний за большие промежутки времени связаны с ошибками каталогов. Особенно большие систематические изменения в $\frac{1}{a}$ могут вносить ошибки в определение собственных движений. Поэтому заключения об изменениях $\frac{1}{a}$ за долгие промежутки времени мало надежны. Б.Марсден [6] выявление негравитационных сил осуществлял при помощи введения добавочных членов в уравнение движения И.Ньютона. Он вводил силу, модуль которой обратно пропорционален некоторой степени расстояния кометы до Солнца. Его вычисления велись главным образом для целей эфемеридной службы, т.е., чтобы по возможности согласовать наблюдения с теорией и, экстраполируя соответствующие вычисления, более точно предвидеть появление кометы. Б.Марсдену [6, 7, 8] удалось подтвердить вышеупомянутые свойства. Трансверсиальная составляющая определяется коэффициентом A_2 и, следовательно, A_2 определяет в основном изменения $\frac{1}{a}$ негравитационного характера, если считать, что негравитационный импульс приложен в перигелии перпендикулярно радиус-вектору. Б.Марсден [6] рассмотрел также негравитационные силы у кометы Аренда-Ролана и получил

$$A_1 = (+3,1987 \pm 0,3126) \cdot 10^{-5}, \quad A_2 = (+1,5765 \pm 0,4960) \cdot 10^{-6},$$

а для кометы Даниэля

$$A_1 = (+8,6734 \pm 0,6283) \cdot 10^{-5}, \quad A_2 = (+5,4463 \pm 0,1405) \cdot 10^{-6}.$$

Приведенные данные показывают, что замедление у кометы Аренда-Ролана и кометы Даниэля примерно одинаковы. Отсюда следует, учитывая работу З.Секанины, что изменение обратной полуоси орбиты кометы Даниэля за один оборот должно быть порядка $\Delta \frac{1}{a} = 0,0002$. Это примерно на порядок больше, чем у остальных короткопериодических комет. Такие заключения кажутся нам преждевременными. Действительно, у кометы Даниэля за промежуток времени 1937, 1943-1944 и 1950-1951 г. сделанные наблюдения, по которым определено значение A_2 , плохо представляются теорией даже при учете членов негравитационного характера. Б.Марсден предположил, что наблюдения, сделанные в Казане 26 X и 20 X1 1943 г. неправильно отнесены к эпохе 1940 года. Проверка редукции Казанских наблюдений Н.А.Беляевым показала, что предположения Марсдена справедливы. Общее число наблюдений 26 - слишком мало, чтобы точно определить значение A_1 и A_2 , к тому же имеется расхождение между наблюдениями и теорией. Мы просто будем считать, что Б. Марсдену не удалось установить численное значение замедления кометы Даниэля. Если даже допустить, что Б.Марсден нашел правильное значение A_2 , то оно должно быть признано чрезвычайно большим и следует объяснить почему это так.

§ 2. Так как мы считаем, что замедление в движении кометы Даниэля не удастся достаточно точно установить, то для исследования влияния негравитационных сил на движение этой кометы используем средние данные. Предполагая, что имеет место закон прямой пропорциональности, сможем легко рассмотреть и другие случаи. Если предположить, что импульс приложен в периферии перпендикулярно к радиусу-вектору, то меняется только a и e , причем $q = \text{const.}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} 2v \delta v &= -\kappa^2 \delta \frac{1}{a}, \\ \delta e &= -q \delta \frac{1}{a}. \end{aligned} \quad (1)$$

Если взять средние данные из работы З.Секанины [5], то среднее значение изменения обратной величины большой полуоси орбиты кометы равно 0,00002. К.А.Штейном [9] оценена дисперсия негравитационных сил согласно теории диффузии равной 0.00005.

Эта оценка получена следующим образом. К.А.Штейнс предположил, что негравитационные силы изменяют $\frac{1}{a}$ случайным образом согласно нормальному закону распределения, только приращения имеют в разных оборотах у одной кометы один определенный знак. К.А.Штейнс в теории диффузии учитывал как гравитационные, так и негравитационные силы, а также дезинтеграцию комет. Сравнивая теорию с наблюдениями, он пришел к заключению, что для объяснения относительного числа почти-параболических комет следует предположить, что существуют кометы с очень коротким временем существования и кометы, возраст которых равен 100 оборотам. Имеются некоторые трудности в согласовании числа комет с прямым и обратным движением с большими полуосями орбит в пределах 65 - 40 а.е. Введением негравитационных сил это несогласие не устраняется, т.е., если предполагать, согласно наблюдениям, что нет комет с обратным движением, у которых значения больших полуосей орбит находятся в пределах от 40 до 65 а.е., то получается, примерно, вдвое меньшее количество с прямым движением по сравнению с наблюдениями. Предположение больших негравитационных эффектов ведет к полному несоответствию теории и наблюдений. К. Штейнс показал, что если предположить, что негравитационные силы во всех оборотах определяются нормальным законом распределения с одной и той же дисперсией, то при $\sigma = 0,00005$ теоретические данные не ухудшаются по сравнению с теорией без учета негравитационных сил. Далее покажем, что это соответствует значению полученному на основе работы З.Секанины.

Следуя методике К.Штейна, рассмотрим негравитационные приращение $\Delta \frac{1}{a}$ типа $\frac{A_1}{n}$ и $\frac{A_2}{n^2}$, где A_1 и A_2 некоторые постоянные, а $n = 1, 2, \dots$, т.е. номер оборота

кометы. Значение $n = 1$ предполагается для новей кометы. Результаты вычислений следующие. Во-первых, следует отметить, что вариант A_1/n дает очень малый верхний предел. Например, уже при $A_1 = \sigma(n=1) = 0.0003$ получаются худшие результаты, чем в случае, если допустить, что негравитационные силы отсутствуют. Это значение противоречит данным для кометы Аренда-Ролана 1957 III. Вариант A_2/n^2 приводит к более интересным результатам. Так, например, при возрасте $n = 100$ оборотам и $A_2 = \sigma(n=1) = 0.006$, в интервале $0.015 < \frac{1}{n} < 0.025$ имеются соответственно 4 и 1 кометы для прямого и обратного движения. Таким образом видно, что с точки зрения теории диффузии можно допустить для новых комет весьма большие значения негравитационных эффектов, т.е. примерно на порядок или два порядка больше, чем у старых комет в среднем. Если предположить, что для кометы Аренда-Ролана 1957 III имеем максимальный эффект негравитационных сил, то мы должны признать, что вариант A_2/n^2 допускает завышенные значения. Поэтому мы считаем целесообразным рассмотреть вариант $A_3/n^{3/2}$, где A_3 следует согласовать с значением $\Delta \frac{1}{a}$ для кометы Аренда-Ролана.

§ 3. В настоящее время нет определенного мнения о том, как происходит воздействие негравитационных сил, непрерывно по всей орбите или скачкообразно в перигелии. В связи с этим мы рассмотрим в настоящем параграфе связь между суммой независимых положительных случайных чисел, их дисперсией и числом слагаемых. Таким образом, откроется возможность распределить импульсы по всей орбите или по отдельным прохождениям через перигелий и получить в среднем предполагаемый эффект. Чтобы избежать сложных выкладок в области теории вероятностей, были проведены числовые испытания методом моделирования случайных процессов. Мы построили суммы положительных случайных чисел распределенных по нормальному закону с данной дисперсией по стандартным программам ЭВМ и нашли статистику сумм

Суммы абсолютных значений случайных величин,
распределенных по нормальному закону

$\sigma = 0.0003$				$\sigma = 0.00003$			
$i = 50$		$i = 100$		$i = 50$		$i = 100$	
значе- ние суммы	их чис- ло	значе- ние суммы	их чис- ло	значе- ние суммы	их чис- ло	зна- чение суммы	их чис- ло
0.004	7	0.009	2	0.0004	7	0.0009	2
0.005	34	0.010	10	0.0005	34	0.0010	10
0.006	46	0.011	37	0.0006	46	0.0011	37
0.007	10	0.012	37	0.0007	11	0.0012	37
0.008	3	0.013	9	0.0008	2	0.0013	9
0.009		0.014	5	0.0009		0.0014	5
0.010		0.015		0.0010		0.0015	
среднее значе- ние	0.006	0.012		0.0006		0.0011	
$i = 150$		$i = 200$		$i = 150$		$i = 200$	
0.015	3	0.021	8	0.0015	3	0.0021	1
0.016	9	0.022	10	0.0016	9	0.0022	8
0.017	25	0.023	16	0.0017	25	0.0023	10
0.018	40	0.024	26	0.0018	40	0.0024	16
0.019	20	0.025	17	0.0019	20	0.0025	26
0.020	3	0.026	15	0.0020	3	0.0026	18
0.021		0.027	5	0.0021		0.0027	14
		0.028				0.0028	
среднее значе- ние	0.018	0.024		0.0018		0.0023	

Каждый эксперимент повторялся 100 раз. На основе этих опытов мы пришли к следующим заключениям:

1. Максимальные, минимальные и средние значения сумм пропорциональны числу слагаемых.

2. Максимальные, минимальные и средние значения сумм пропорциональны величине дисперсии.

3. Среднее значение сумм равно $0,4n\sigma$, где σ — дисперсия, а n — число слагаемых.

Интересно, что эта закономерность справедлива в очень большом интервале значений n и σ . В таблице 1 мы приводим значения σ равные тем, которые имеются в случае негравитационных сил для $\Delta \frac{1}{a}$. Очевидно, что формула $0,4n\sigma$ весьма хорошо представляет данные численного эксперимента. Сравнивая средние значения, легко проверить все перечисленные свойства суммы абсолютных значений случайных величин, распределенных по нормальному закону

Чтобы выявить свойства варианта $\frac{A_2}{n^{1/2}}$, заметим следующее. Если предположить, что в процессе эволюции орбит комет почти параболические кометы преобразуются постепенно в короткопериодические, то, очевидно, этот процесс происходит в течение многих оборотов — по крайней мере в течение 100. Однако преобразование почтипараболических орбит в орбиту с $a \approx 40$ а.е. происходит в случае, если перигелий кометы равен примерно 5,2 а.е. Согласно К.А. Штейну дезинтеграция на расстоянии Юпитера от Солнца происходит примерно в 3 раза медленнее, чем на расстоянии 1 а.е. Таким образом, суммирование для короткопериодических комет надо начинать с $n = 30$, что, очевидно, приведет к меньшим значениям суммы, чем в случае, если предположить, что негравитационные силы действуют во всех оборотах одинаково.

Если же предположить, что короткопериодические кометы произошли вследствие извержения с поверхности Юпитера, то суммирование надо начинать с $n = 1$. Однако и в этом случае не получится значения суммы значительно больше, чем в случае равномерного действия не-

гравитационных сил. Это потому, что большие эффекты негравитационных сил действуют очень короткое время, что выражается формулой

$$\sum A_3 \frac{n}{n^{3/2}} = A_3 \sum \frac{1}{n^{1/2}}.$$

В случае кометы Даниэля имеем

$$\sum_{n=1}^{30} A_3 \frac{n}{n^{3/2}} = 0,0019,$$

а в случае равномерного действия негравитационных сил имеем для максимального воздействия со средним значением $\sigma = 0,00005$

$$\sum_{n=1}^{30} 0,4 n \sigma = 0,0006.$$

Таким образом, случай с учетом постепенного уменьшения действия негравитационных сил для кометы Даниэля дает в 3 раза больший эффект, чем в случае равномерного действия.

§ 4. Чтобы получились катастрофические изменения орбиты кометы, комета должна подойти очень близко к Юпитеру. Как мы уже отметили, Н.А.Беляев, учитывая только гравитационные силы, нашел, что в 1711 г., т.е. еще до открытия, комета Даниэля имела самое тесное сближение с Юпитером, а именно $\Delta_m = 0,20$ а.е., а после этого наиболее тесное сближение было в 1853 году, однако тогда комета и Юпитер находились на расстоянии 0,39 а.е. Без всяких вычислений ясно, что никакого захвата или извержения в 1853 году состояться не могло. Мы постараемся выяснить, могут ли негравитационные силы настолько изменить путь кометы, чтобы можно было бы предположить, что в 1711 году происходили катастрофические изменения или извержения. Для этого необходимо, чтобы, после учета негравитационных сил, $\Delta_m \approx 0$. Учитывая, что

$$\Delta_m^2 = d^2 + h^2 \sin^2 \theta,$$

изменение в Δm можно оценить по изменениям величин h и d . Займемся оценкой изменений этих величин.

Сперва оценим изменения ΔM за 30 оборотов, т.е. с 1909 по 1711 год. Среднее суточное движение

$$\mu = \frac{\kappa}{a^{3/2}}.$$

Его изменение

$$\delta \mu = \frac{3}{2} \frac{\kappa}{a^{5/2}} \delta a$$

действует в зависимости от того, при каком по порядку прохождении оно было сообщено комете, поэтому сумму следует разделить на 2, т.е. учитывая сказанное в § 3 имеем

$$\Delta M = \frac{1}{2} 0,4 n \sigma P^{3/2} \frac{\kappa}{a^{5/2}},$$

где P — период обращения кометы в днях. Подставляя значения для кометы Даниэля, получим ($\sigma = 0.00005$)

$$\Delta M = 3 \cdot 10^{-4} n.$$

Найдем теперь, на сколько а.е. добавочно переместится комета по своей орбите. Для этого используем формулу

$$\Delta S = \kappa \sqrt{\frac{2}{\tau} - \frac{1}{a}} \cdot \Delta t = a^{3/2} \sqrt{\frac{2}{\tau} - \frac{1}{a}} \Delta M.$$

В афелии $\tau = a(1+e)$, следовательно,

$$\Delta S = a \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \Delta M.$$

За 30 оборотов имеем

$$\Delta h = 0,02.$$

Используя результаты работы К.А. Штейна и И.В. Залькал-не [12], получим

$$\Delta d_0 = 0,01.$$

Очевидно, что, если предположить вариант извержения, т.е. примерно в три раза большие изменения, то соударения кометы с Юпитером не получается. Следует отме-

тять, что тесные сближения или соударения с Юпитером в 1711 году не решают фотометрическую проблему, т.к. по расчетам С.Г.Маковера до этого времени комета стала очень яркой. Мы можем предположить, что после захвата, скажем в 1711 году, с нею произошли некоторые бурные изменения, в итоге которых увеличился и блеск и несколько изменилась ее орбита. Нами доказано [10 - 11], что таким событием могло быть соударение кометы Даниэля с микропланетой или малой планетой. Предположение, что A_2 для кометы Даниэля Б.Марсден определил правильно, ведет к тому же заключению, ибо очень большие значения замедления имеются только у молодых комет, а возраст кометы Даниэля, по нашему мнению, следует считать с момента соударения с малой планетой или микропланетой.

Л и т е р а т у р а

1. A. D. Doubiago. A.J. 88, 52, 1943.
2. Н. А. Беляев. Бюллетень ИТА, т.10, № 10, 696, 1967.
3. С. Г. Маковер. Бюллетень ИТА, т.XI, № 2, 123, 1967.
4. Z. Sekanina. Bull. of the Astr.Inst.of Czechoslov.vol.19, No 6, 343, 1968.
5. Z. Sekanina. Bull. of the Astr.Inst.of Czechoslov.vol.19, No 6, 351, 1968.
6. B. G. Marsden. A.J. vol. 74, No 5, 720, 1969.
7. B. G. Marsden. A.J. vol. 75, No 1, 75, 1970.
8. B. G. Marsden. A.J. vol. 73, No 5, 367, 1968.
9. К. А. Штейнс. Доклад прочитанный на симпозиуме МАС №45 в Ленинграде. Тезисы доклада 1970.
10. К. А. Штейнс и И. Э. Залькаalne. См.наст.сборник стр. 15.

11. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне.
Доклад прочитанный на симпозиуме МАС № 45 в Ленинграде. Тезисы доклада 1970.
12. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне.
См. настоящий сборник стр. 74.
13. С. К. Всехсвятский И. Физические характеристики комет. 48, 1958.

K o r s a v i l k u m s

K. Š t e i n s u n I. Z a ģ k a l n e

VISVARBŪTĪGĀKĀ DANIELA KOMĒTAS 1909 IV ORBĪTAS

EVOLŪCIJA

Parādīts, ka Daniela komēta 1711. gadā sagūstījās Jupitera, un pēc vairākiem desmit gadiem tā sadūrusies ar kādu no mazām planētām. Tās spozums pieaudzis un orbita nedaudz izmainījusies. Lai to pierādītu, ņemti vērā negravitācijas spēki.

S u m m a r y

K. Š t e i n s a n d I. Z a ģ k a l n e

ON THE MOST PROBABLE EVOLUTION OF THE ORBIT OF

DANIEL'S COMET 1909 IV

It is shown that Daniel's comet was captured by Jupiter in 1711 and many tens of years later it had a collision with one of asteroids. The brightness of the comet increased and its orbit was only little perturbed. To show this the non-gravitational forces have been taken into account.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 137 ВЫПУСК 5, 1970

К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне
О ЧАСТОТЕ СОУДАРЕНИЙ КОМЕТЫ ДАНИЭЛЯ С МАЛЫМИ
ПЛАНЕТАМИ И МИКРОПЛАНЕТАМИ

§ 1. Нами был рассмотрен вопрос о частоте соударений кометы Даниэля с микропланетами и доложен на международном симпозиуме МАС № 45 по движению, эволюции орбит и происхождению комет, который состоялся 4-11 августа 1970 г. в Ленинграде [1]. Решая эту проблему, было необходимо знать микроструктуру дуг микропланет в окрестности орбиты кометы Даниэля. Было предположено, что их распределение представляется совокупностью различных направленных пучков взаимно параллельных дуг. Из этого следовало, что плотность распределения минимальных расстояний дуг до орбиты кометы является постоянной. В настоящем параграфе мы рассматриваем более простую схему, где планеты считаются неподвижными и, следовательно, не надо вводить столь гипотетические предположения относительно распределения орбит микропланет.

Для грубой оценки столкновений предположим, что кольцо астероидов является тором со средним радиусом $R = 3$ а.е. и радиусом поперечного сечения $r_0 = 0,5$ а.е., а также, что все астероиды неподвижны и распределены по тору с равномерной плотностью. Тогда среднее число астероидов в единице объема, считая, что масса меньшего астероида m_μ , будет [2]

$$\frac{N}{V} = \frac{\int_{m_\mu}^{m_k} - \frac{2,3 \cdot 10^{-14}}{m^{2,28}} dm}{2\pi^2 r_0^2 R} \approx \frac{1,2 \cdot 10^{-15}}{m_\mu^{1,28}}, \quad (1)$$

где V — объем тора, N — число всех астероидов в интервале масс (m_r, m_k) . Если путь кометы проходит перпендикулярно оси тора, через его ось, то длина пути кометы через тор будет 2%. Допустим, что путь кометы лежит в цилиндре, высота которого 2%, а объем 1. Тогда будем считать, что столкновение кометы с планетой может произойти в том случае, если площадь основания цилиндра минус сумма площадей проекций сфер всех астероидов, находящихся в цилиндре, на основание цилиндра, приведенная к одной планете, равна площади проекции сферы кометы на основание цилиндра. Таким образом условие одного столкновения кометы с планетой имеет следующий вид:

$$\frac{S - S_1}{\frac{N}{V}} = \pi \varrho_k^2$$

где ϱ_k — радиус кометы, S — площадь основания цилиндра, $S = 1$, S_1 — сумма площадей проекций сфер астероидов на основание цилиндра. Вообще говоря, такое условие нельзя считать очень надежным, так как площади проекций сфер малых планет могут пересекаться и вместе с тем S_1 будет гораздо меньше. Однако в нашем случае, т.е. когда рассматриваем микропланеты, которые намного меньше кометы, это условие достаточно хорошее и ввиду малости S_1 можно пренебречь этой величиной. Тогда условие соударимости будет следующее:

$$\frac{m_r^{1.28}}{1.2 \cdot 10^{-15}} = \pi \varrho_k^2.$$

Из этого выражения найдем, что масса микропланеты, с которой может столкнуться комета Даниэля ($\varrho_k = 1.3 \cdot 10^{-9}$ а.е.) при одном прохождении через кольцо астероидов, будет $1,4 \cdot 10^{-26}$ солнечных масс, т.е. комета может иметь столкновение с планетой, у которой радиус примерно 2,1 м. В работе [1] мы получили 0,9 м. Здесь, конечно, и не следовало ожидать полного совпадения результатов, полученных по двум совершенно разным схемам. Но такой

очень близкий результат, полученный по столь упрощенной модели, какую мы рассмотрели в этом параграфе, только подтверждает правильность схемы столкновения кометы с микропланетами, опираясь на формулу Х.А. Ньютона и используя методы теории вероятностей.

§ 2. Рассмотрим следующий вопрос: за сколько оборотов у кометы Даниэля с достаточно большой вероятностью произойдет столкновение с одной из малых планет, масса которой больше, чем масса этой кометы. Соответствующая вероятность не будет уточнена и ее можно будет примерно оценить из способа подсчета. Для решения проблемы используем распределения следующих величин: d — минимального расстояния между орбитой кометы Даниэля и орбитами малых планет, h — расстояния, которое должен пройти астероид до точки наибольшего сближения орбит, когда комета в этой точке уже находится. Соответствующие данные возьмем из работы [2]. Условие, при котором произойдут соударения, есть

$$\Delta_m^2 = d^2 + h^2 \sin^2 \theta \leq (\rho_r + \rho_k)^2, \quad (2)$$

где θ угол между скоростью астероида и относительной скоростью кометы, ρ_r , ρ_k — соответственно радиусы планеты и кометы, которые считаются сферами. Массу и радиус астероида связывает следующее выражение [2]

$$\rho_r = 3,42 \cdot 10^{-3} m_r^{1/3} = a m_r^{1/3}. \quad (3)$$

Следовательно,

$$d^2 + h^2 \sin^2 \theta \leq (a m_r^{1/3} + \rho_k)^2. \quad (4)$$

Масса астероидов меняется в пределах от массы кометы $m_k = 7,8 \cdot 10^{-20}$ до $m_{\max} = 2,8 \cdot 10^{-11}$. Следовательно, радиусы меняются в пределах от $\rho_k = a m_k^{1/3}$ до $\rho_r = a m_{\max}^{1/3}$. Область интегрирования D находится между плоскостями $m = m_{\max}$, $m = m_k$, $d = 0$ и поверхностью (4) при $d > 0$. Границы области интегрирования показаны на рисунках 1а и 1б.

1986. 14. 40



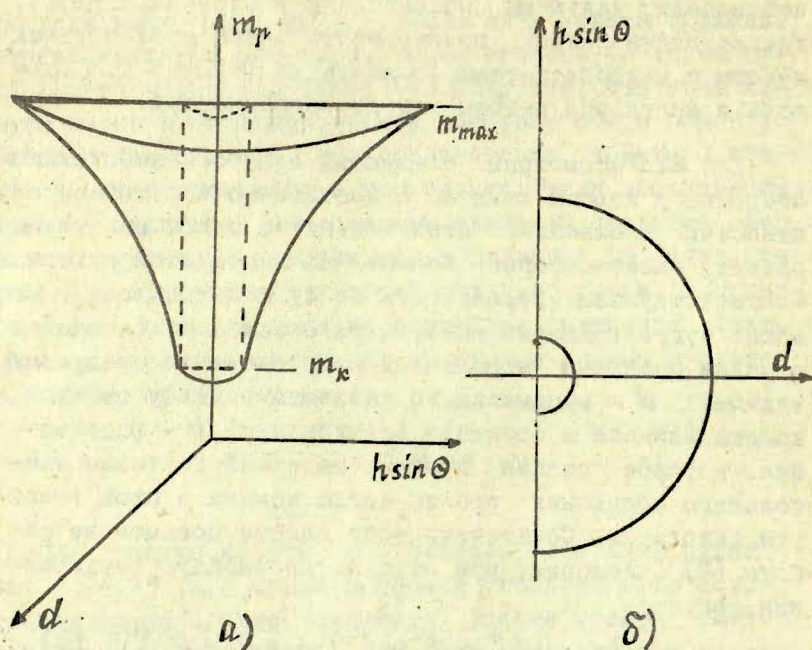


Рис. 1

Соответствующая вероятность ($\sin \theta = 1$)

$$\begin{aligned}
 P(D) &= \iiint_D \frac{\mu_1(d) \mu_2(h)}{\sin \theta} N dd dh \sin \theta dm = \\
 &= 4,6 \cdot 10^{-14} c_1 c_2 \left[\int_{m_k}^{m_{\max}} \frac{dm}{m^{2.28}} \int_0^{2g_k} dd \int_0^{\sqrt{4g_k^2 - d^2}} d(h \sin \theta) + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2g_k}^{g_k + g_p} \frac{\sqrt{(am_{\max}^{1/3} + g_p)^2 - d^2}}{\sqrt{4g_k^2 - d^2}} \int_{m_k}^{\frac{(\sqrt{(d^2 + h^2 \sin^2 \theta)^2 - g_k^2})^3}{a}} m^{-2.28} dm, \right. \\
 &\quad \left. \int_0^{\sqrt{4g_k^2 - d^2}} d(h \sin \theta) \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

где c_1 и c_2 являются факторами приводящими к плотностям распределений $\mu_1(d)$ и $\mu_2(h)$, т.е.

$$C_1 = \frac{13}{1735 \cdot 0,1} = 0,075,$$

т.к. в интервале $\alpha \in [0; 0,1 \text{ а.е.}]$ из 1735 малых планет попадают 13, и

$$C_2 = \frac{1}{\pi a} = 0,055,$$

т.к. планета, считая ее орбиту окружностью, должна находиться с одинаковой распределенной вероятностью в интервале $2\pi a$. Множители C_1 и C_2 приводят подсчет к области $1 (\text{а.е.})^2$.

Интегрирование первой части дает

$$\rho_1(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \left[\frac{2\pi}{1,28} \vartheta_K^2 \left(\frac{1}{m_K^{1,28}} - \frac{1}{m_{\max}^{1,28}} \right) \right],$$

но так как $m_K \ll m_{\max}$, то $m_K^{-1,28} \gg m_{\max}^{-1,28}$ и

$$\rho_1(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \frac{2\pi \vartheta_K^2}{1,28} m_K^{-1,28}.$$

Для интегрирования второй части переходим на полярную систему координат, т.е.

$$\rho_2(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \left[\int_{2\vartheta_K}^{\vartheta_r + \vartheta_K} r dr \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{m_K}^{\left(\frac{r-\vartheta_K}{a}\right)^3} m^{-2,28} dm \right] =$$

$$= 1,9 \cdot 10^{-16} \left\{ \frac{\pi r^2}{5,12 m_K^{1,28}} \Big|_{2\vartheta_K}^{\vartheta_r + \vartheta_K} - \frac{\pi a^{3,84}}{2,56} \left[\frac{1}{1,84 (r - \vartheta_K)^{1,84}} - \frac{\vartheta_K}{2,84 (r - \vartheta_K)^{2,84}} \right] \Big|_{2\vartheta_K}^{\vartheta_r + \vartheta_K} \right\}.$$

Учитывая, что $\vartheta_r \gg \vartheta_K$ получим

$$\rho_2(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \left[\frac{\pi \vartheta_r^2}{5,12 m_K^{1,28}} - \frac{0,896 a^2 \pi m_K^{0,667}}{2,56 m_K^{1,28}} \right] =$$

$$= 1,9 \cdot 10^{-16} \left[\frac{a^2 \pi m_{\max}^{0,667}}{5,12 m_K^{1,28}} - \frac{0,896 a^2 \pi m_K^{0,667}}{2,56 m_K^{1,28}} \right].$$

Так как $m_{\max} \gg m_K$, то с достаточной точностью имеем

$$P_2(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \frac{\pi \vartheta_K^2}{5,12 m_K^{1,28}}.$$

Но

$$P(D) = P_1(D) + P_2(D) =$$

$$= 1,9 \cdot 10^{-16} \left[\frac{2\pi \vartheta_K^2}{1,28 m_K^{1,28}} + \frac{\pi \vartheta_K^2}{5,12 m_K^{1,28}} \right],$$

учитывая ранее сказанное, получим

$$P(D) = 1,9 \cdot 10^{-16} \frac{\pi \vartheta_K^2}{5,12 m_K^{1,28}}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) численные значения выходит, что

$$P(D) = 3,64 \cdot 10^{-4}.$$

Деля $P(D)$ на число малых планет с массой, большей чем масса кометы, получаем среднее взвешенное значение по m_K вероятности того, чтобы получилось соударение за один оборот. Следовательно, равенство

$$\frac{100 K P}{N} = 1$$

определяет число комет, которое необходимо, чтобы за 100 оборотов с одной из них получилось столкновение.

Вычисления дают

$$K = 27 \text{ /комет/}$$

Так как в настоящее время известно около 60 короткопериодических комет, и у этих комет максимальное время существования меньше 100 оборотов, то можно предположить, что одна из них погибла вследствие соударения с малой планетой.

Л и т е р а т у р а

1. "Движение, эволюция орбит и происхождение комет".
Программа и резюме. 1970 г. Ленинград.
2. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне. Рас-
пределение величин, входящих в формулу Х.А. Ньютона.
Настоящий сборник, стр. 60.

K o r s a v i l k u m s

K. S t e i n s u n I. Z a l k a l n e

PAR DANIELA KOMETAS SADURSMĒM AR ASTEROIDIEM UN
MIKROASTEROIDIEM

Sadursmju biežums aprēķināts pieņemot, ka mikroastero-
idi nekustās. Parādīts, ka kometa var sadurties vienā ap-
griezienā ar mikroplanētu, kuras radijs ir 2,1 m. Nosakot
sadursmju biežumu Daniela kometai ar asteroidiem pieņemts,
ka minimālie attālumumi starp kometas un mazo planētu orbi-
tām sadalās vienmērīgi. Parādīts, ka viena no atklātām īspe-
rioda kometām varētu būt sadūrusies ar kādu mazo planētu.

Summary

K. Steins and I. Zalkalne

ON THE DANIEL'S COMET COLLISIONAL FREQUENCY WITH
ASTEROIDS AND MICROASTEROIDS

The collisional frequency is calculated, assumed that microasteroids are stationary. The result is that comet may meet in one revolution a microplanet with radius 2,1 m. The collisional frequency of Daniel's comet with asteroids is calculated on the bases of hypotheses, that distribution of minimum distances between cometary and planetary orbits is uniform. It is shown that one of the discovered short-period comets may being collided with an asteroid.

К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне

УПРОЩЕННАЯ ФОРМУЛА Х.А.НЬЮТОНА И ОЦЕНКА
ЕЕ ТОЧНОСТИ

§ 1. Вывод упрощенной формулы Х.А. Ньютона при помощи разложения в ряды по степеням времени координат

Если комета при своем движении имеет тесные сближения с какой-либо планетой, то возмущающая сила этой планеты может изменить элементы ее орбиты. Так как орбита кометы в Солнечной системе проходит через кольцо малых планет, то она, очевидно, может встретить большое число малых планет и с некоторыми довольно тесно сблизиться. Точное вычисление возмущений невозможно, так как не все малые планеты еще известны, а также учет каждой малой планеты вызвал бы очень громоздкие расчеты. Поэтому в небесной механике созданы методы приближенного подсчета возмущений [1], [2], [3], так как в космогонии при сравнении теории с наблюдениями во многих случаях от вычислений не требуется очень большой точности. Х.А. Ньютон вывел сравнительно простую формулу для определения приращений обратной величины большой полуоси орбиты $\Delta \frac{1}{a}$ [4]. нас интересует вопрос, насколько точна формула Х.А. Ньютона, чтобы с полной уверенностью можно было ее применять. Для этого результаты, полученные по этой формуле, необходимо сравнить с данными, добытыми другим путем, но описывающими один и тот же процесс. Чтобы по-

лучить такую возможность, вывод формулы Х.А.Ньютона произведем другим методом, который состоит в том, что координаты точек в задаче двух тел выразим как простые функции времени, т.е. разложим их в ряды по степеням времени и посмотрим, сколько членов необходимо брать, чтобы получить удовлетворительную точность результата. Упрощенный вид формулы Х.А.Ньютона получается, если в степенных рядах для координат брать только члены первого порядка, т.е.

$$\begin{cases} x_p = x_1 + \dot{x}_1(t-t_1), \\ y_p = y_1 + \dot{y}_1(t-t_1), \\ z_p = z_1 + \dot{z}_1(t-t_1), \end{cases} \begin{cases} x_k = x_2 + \dot{x}_2(t-t_2), \\ y_k = y_2 + \dot{y}_2(t-t_2), \\ z_k = z_2 + \dot{z}_2(t-t_2), \end{cases} \quad (1)$$

где (x_p, y_p, z_p) и (x_k, y_k, z_k) — координаты планеты и кометы в любой момент t , (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) — координаты планеты и кометы в ближайших точках между их орбитами в моменты t_1 и t_2 /см.рис.1/.

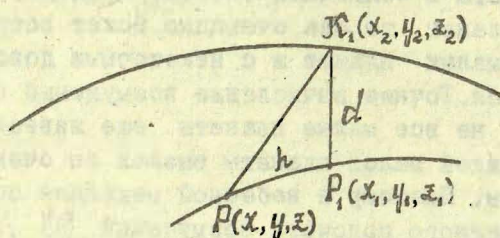


Рис. 1

Значительные возмущения со стороны планеты на движение кометы следует ожидать тогда, когда есть возможность планете и комете тесно сблизиться, т.е. в области минимального расстояния d между орбитами. Но вряд ли может так случиться, что комета и планета одновременно будут в точках K_1 и P_1 . Допустим, что когда комета находится в точке K_1 , планета или же не дошла еще до точки P_1 , или уже ее прошла, т.е. $t_2 = 0$, а $t_1 < 0$ или $t_1 > 0$.

Возьмем дифференциальное уравнение Эйлера для

большой полуоси орбиты кометы [5]

$$\kappa^2 a^{-2} \frac{da}{dt} = 2(\dot{x}_\kappa F_x + \dot{y}_\kappa F_y + \dot{z}_\kappa F_z),$$

или для $\frac{1}{a}$

$$-\kappa^2 \frac{d\frac{1}{a}}{dt} = 2(\dot{x}_\kappa F_x + \dot{y}_\kappa F_y + \dot{z}_\kappa F_z), \quad (2)$$

где

$$F_x = \kappa^2 m_p \frac{x_p - x_\kappa}{\Delta^3}, \quad F_y = \kappa^2 m_p \frac{y_p - y_\kappa}{\Delta^3}, \quad F_z = \kappa^2 m_p \frac{z_p - z_\kappa}{\Delta^3},$$

$$\Delta^2 = (x_p - x_\kappa)^2 + (y_p - y_\kappa)^2 + (z_p - z_\kappa)^2, \quad (3)$$

m_p — масса планеты. Таким образом, учитываем только главный член возмущающей функции $m_p F$, а не учитываем, что система с началом, помещенным в центре Солнца, не является инерциальной, т.е. не учитываем, что Солнце притягивается планетой. Подставим в (3) для (x_p, y_p, z_p) их выражения из (1), тогда

$$\Delta^2 = d^2 - 2(t^2 - t_1 t + t_2 t + t_1 t_2) v_1 v_2 \cos u + (t - t_1)^2 v_1^2 + (t - t_2)^2 v_2^2 = d^2 + t^2 v_\eta^2 + 2ht v_\eta \cos u + h^2,$$

где $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ — минимальное расстояние между орбитами кометы и планеты, $h = t_1 v_1^2$ — расстояние, которое планета прошла от точки наибольшего сближения орбит P_1 /или должна пройти до P_1 , $h < 0$ / , когда комета находится в точке K_1 , v_p и v_κ — скорости планеты и кометы, которые в точках наибольшего сближения орбит обозначены v_1 и v_2 , u — угол между вектором скорости планеты и кометы, v_η — относительная скорость кометы,

$$v_\eta^2 = v_p^2 - 2v_p v_\kappa \cos u + v_\kappa^2,$$

что следует из рис.2.

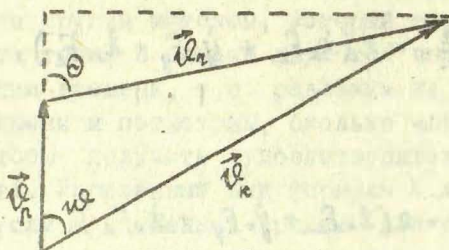


Рис. 2

На основе свойств минимального расстояния имеют место следующие соотношения:

$$\dot{x}_1(x_1 - x_2) + \dot{y}_1(y_1 - y_2) + \dot{z}_1(z_1 - z_2) = 0,$$

$$\dot{x}_2(x_1 - x_2) + \dot{y}_2(y_1 - y_2) + \dot{z}_2(z_1 - z_2) = 0.$$

Теперь правую часть уравнения (2) можно представить как явную функцию времени t , причем скорость кометы будем брать равной ее скорости в точке K_1 , т.е. $v_k = v_1$. Значит дифференциальное уравнение, определяющее обратную величину большой полуоси кометы, следующее:

$$-\frac{d\frac{1}{a}}{dt} = 2m_p \frac{at + b}{(ct^2 + et + g)^{3/2}}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a &= v_2(v_1 \cos \omega - v_2), & b &= -h v_2 \cos \omega, \\ c &= v_2^2, & e &= 2h v_2 \cos \theta, \\ g &= d^2 + h^2, \end{aligned} \quad (5)$$

а θ — угол между вектором скорости планеты v_p и относительной скоростью кометы v_r . Из рис. 2 видно, что

$$\cos \omega = \frac{v_r \cos \theta + v_1}{v_2}. \quad (6)$$

Приращение обратной величины большой полуоси орбиты кометы от воздействия на нее гравитационной силы планеты получим при помощи интегрирования выражения (4):

$$-\Delta \frac{1}{a} = 2m_p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{at + b}{(ct^2 + et + g)^{3/2}} dt = 2m_p \times 4 \frac{ae - 2cb}{(4cq - e^2)\sqrt{c}}$$

или в силу соотношений (5)

$$-\Delta \frac{1}{a} = 4m_p \frac{v_2}{v_2} h \frac{(\cos u_2 - v_2) \cos \theta + v_2 \cos u_2}{d^2 + h^2 \sin^2 \theta},$$

что после учета (6) дает упрощенную формулу Х.А. Ньютона, в которой большая полуось относительной орбиты кометы $A = 0$,

$$\Delta \frac{1}{a} = - \frac{4m_p}{S} \frac{h \sin^2 \theta}{d^2 + h^2 \sin^2 \theta}, \quad (7)$$

где $S = \frac{v_2^2}{v_1^2}$. Случай, когда $A = 0$, т.е. A мала по сравнению с h и d , нас вполне устраивает, так как значительная часть сферы действия лежит внутри малых планет. Эту же методику подобным образом применим опять, но только в степенных рядах (1) добавим еще один член высшего порядка, т.е.

$$\begin{aligned} x_p &= x_1 + \dot{x}_1(t-t_1) + \frac{1}{2} \ddot{x}_1(t-t_1)^2, \\ y_p &= y_1 + \dot{y}_1(t-t_1) + \frac{1}{2} \ddot{y}_1(t-t_1)^2, \\ z_p &= z_1 + \dot{z}_1(t-t_1) + \frac{1}{2} \ddot{z}_1(t-t_1)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

и то же самое для кометы. Из только что указанных формул (8) следует, что в невозмущенном движении

$$\begin{aligned} \dot{x}_\kappa &= \dot{x}_2 - \kappa^2 x_2 \tau_2^{-3} t, \\ \dot{y}_\kappa &= \dot{y}_2 - \kappa^2 y_2 \tau_2^{-3} t, \\ \dot{z}_\kappa &= \dot{z}_2 - \kappa^2 z_2 \tau_2^{-3} t, \end{aligned}$$

так как

$$\ddot{x}_2 = -\kappa^2 x_2 \tau_2^{-3},$$

$$\ddot{y}_2 = -\kappa^2 y_2 \tau_2^{-3},$$

$$\ddot{z}_2 = -\kappa^2 z_2 \tau_2^{-3},$$

где $\tau_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$. Поступая как и прежде и уже пренебрегая членами с t в третьей и выше степени, уравнение (2) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{d\frac{1}{a}}{dt} = \frac{2m_p}{\Delta^3} \{ (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2)t + (\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{y}_1\dot{y}_2 + \\ + \dot{z}_1\dot{z}_2)(t-t_1) - \frac{\kappa^2}{\tau_2^3} t [(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2 + z_2\dot{z}_2)t + (x_2\dot{x}_1 + \\ + y_2\dot{y}_1 + z_2\dot{z}_1)(t-t_1) + x_2(x_1-x_2) + y_2(y_1-y_2) + z_2(z_1-z_2)] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из выражения (9) видно, что при учете членов второго порядка в решении уравнений невозмущенного движения в форме степенных рядов имеется еще дополнительный член $At^2 + Bt$, где

$$A = + \frac{2\kappa^2 m_p}{\tau_2^3 \Delta^3} [(x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2 + z_2\dot{z}_2) - (x_2\dot{x}_1 + y_2\dot{y}_1 + z_2\dot{z}_1)],$$

$$B = + \frac{2\kappa^2 m_p}{\tau_2^3 \Delta^3} [x_2(x_1-x_2) + y_2(y_1-y_2) + z_2(z_1-z_2) + (x_2\dot{x}_1 + y_2\dot{y}_1 + z_2\dot{z}_1)t_1]$$

и

$$-d\frac{1}{a} = 2m_p \frac{At^2 + (a+B)t + b}{(ct^2 + et + q)^{3/2}} dt. \quad (10)$$

Функция будет иметь максимум, если выражение $ct^2 + et + q = f$ будет минимальное. Условие минимальности $\frac{df}{dt} = 0$ выполняется, если $t = -\frac{e}{2c}$. Влияние планеты на движе-

ние кометы будет проявляться в небольшом промежутке времени, так как сфера действия планеты слишком мала. Поэтому интегрирование уравнения (10) выполним только вблизи максимального сближения тел, т.е. от $t_1^0 = -\frac{e}{2c} - \frac{1}{k}$ до $t_2^0 = -\frac{e}{2c} + \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned} \Delta \frac{1}{a} &= -2m_p \int_{t_1^0}^{t_2^0} \frac{At^2 + (a+B)t + b}{(ct^2 + et + g)^{3/2}} dt = \\ &= -\frac{4m_p}{S} \frac{h \sin^2 \Theta}{d^2 + h^2 \sin^2 \Theta} + A \left[\frac{2[2h^2 \cos^2 \Theta - (d^2 + h^2)]}{k v_2^2 (d^2 + h^2 \sin^2 \Theta) \sqrt{\frac{v_2^2}{k^2} + (d^2 + h^2 \sin^2 \Theta)}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v_2^3} \ln \left(2 v_2 \sqrt{\frac{v_2^2}{k^2} + d^2 + h^2 \sin^2 \Theta} + \frac{2 v_2^2}{k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{v_2^3} \ln \left(2 v_2 \sqrt{\frac{v_2^2}{k^2} + d^2 + h^2 \sin^2 \Theta} - \frac{2 v_2^2}{k} \right) \right] + \\ &\quad + B \cdot \frac{2 h \epsilon \cos \Theta}{k v_2^2 (d^2 + h^2 \sin^2 \Theta) \sqrt{\frac{v_2^2}{k^2} + d^2 + h^2 \sin^2 \Theta}}. \end{aligned} \quad (11)$$

§ 2. Оценка точности приближенной формулы Х.А. Ньютона

Наша задача — оценить ошибку, которая допускается при вычислениях по упрощенной формуле Х.А. Ньютона (7) и выяснить, есть ли необходимость усложнять вычисления и применять формулу (11). Для этого мы определяли $\Delta \frac{1}{a}$ по формулам (7) и (11) и для сравнения вычисляли $\Delta \frac{1}{a}$ методом численного интегрирования уравнения Эйлера (2), которое возьмем в следующем в небесной механике обычно применяемом виде:

$$-\frac{d \frac{1}{a}}{dt} = 2 e_k \sin v_k S' + 2 p r_k^{-1} T',$$

где

$$S' = \frac{\kappa m_p}{\sqrt{r_k}} \left(\frac{\xi_p - r_k}{\Delta_1^3} - \frac{\xi_p}{r_p^3} \right), \quad T' = \frac{\kappa m_p}{\sqrt{r_k}} \left(\frac{z_p}{\Delta_1^3} - \frac{z_p}{r_p^3} \right)$$

-компоненты возмущающего ускорения в так ориентированной системе координат, что ось ξ направлена по радиус-вектору r_k возмущаемого тела в сторону увеличения r_k , ось z - по перпендикуляру к радиус-вектору r_k в плоскости орбиты кометы, ось ξ - по перпендикуляру к плоскости орбиты кометы, а ξ_p, z_p, ξ_p - координаты возмущающей планеты, причем

$$\begin{cases} \xi_p = x_p \cos u_p + y_p \sin u_p, \\ z_p = -x_p \sin u_p + y_p \cos u_p, \\ \xi_p = z_p, \end{cases}$$

$$r_p^2 = \xi_p^2 + z_p^2 + \xi_p^2,$$

$$\Delta_1^2 = (\xi_p - r_k)^2 + z_p^2 + \xi_p^2.$$

Для решения поставленной нами задачи была составлена программа для электронно-вычислительной машины. За исходные данные мы взяли средние элементы орбиты кометы Даниэля $\omega_k = 7^\circ$; $\Omega_k = 70^\circ$; $i_k = 20^\circ$; $\varphi = 35^\circ$; $a_k = 3,6 \text{ а.е.}$ и элементы орбит малых планет из "Эфемериды малых планет на 1969 год" [6].

В первом блоке программы определяются минимальные расстояния между орбитами кометы и малых планет по методу, описанному в работе [7], величины истинных аномалий u_p и u_k для кометы и планет в точках наибольшего сближения их орбит и координаты точек H_1, P_1 , в которых расстояние между кометой и малой планетой минимальное, по формулам

$$x_k = r_k (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin \Omega_k \cos i_k),$$

$$y_k = r_k (\cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos \Omega_k \cos i_k),$$

$$z_k = r_k \sin u_k \sin i_k,$$

для кометы и подобным образом для планеты, причем

$$u_k = v_k + \omega_k \quad \text{и} \quad u_p = v_p + \omega_p.$$

Далее вычисляются также производные $\dot{x}_r, \dot{y}_r, \dot{z}_r$ и $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k$ через мгновенные элементы по формулам небесной механики [5].

Во втором блоке программы методом численного интегрирования решается уравнение

$$d\frac{1}{a} = -\frac{2km_r}{\sqrt{r_k}} \left[e_k \sin u_k \left(\frac{\dot{x}_k - \dot{r}_k}{\Delta^3} - \frac{\dot{z}_k}{r_k^3} \right) + \frac{r_k}{\Delta^3} \left(\frac{\dot{z}_k}{\Delta^3} - \frac{\dot{r}_k}{r_k^3} \right) \right] dt. \quad (12)$$

За шаг интегрирования Δt , мы брали 1 день и вычисляли $\Sigma \Delta \frac{1}{a}$ в интервале времени $(-360 \text{ дней}, +360 \text{ дней})$. Интервал времени больше нет надобности брать, так как за начальный момент $t=0$ мы считаем момент, когда комета и планета находятся в точках наибольшего сближения их орбит, со временем расстояние между кометой и планетой увеличивается и $\Delta \frac{1}{a}$ на каждом шагу уменьшается. Для каждого шага определяется величина истинной аномалии кометы и планеты по уравнениям Кеплера [5], а также новые координаты и $\Delta \frac{1}{a}$. Здесь следует заметить, что мы различали три случая: 1/ когда комета и планета одновременно находятся в точках K_1 и P_1 наибольшего сближения орбит, т.е. $h=t, \varphi=0$, 2/ когда комета находится в точке K_1 , а планета должна еще до этой точки пройти некоторое расстояние h , т.е. $t_1 < 0$, 3/ когда планета уже прошла точку P_1 на некоторое расстояние h , т.е. $t_1 > 0$, а комета находится в точке K_1 . Для упрощения вычислений мы брали $h = \Delta t \varphi_k$.

В третьем блоке запрограммировано вычисление формулы Х.А.Ньютона и формулы (11), в которых единственная в первых двух блоках программы невычисленная величина — это угол θ . Результаты вычислений для двух малых планет (667) и (791) сопоставлены в таблице 1.

Исходя из вычислений, сделаем следующий вывод: если комета и планета подходят друг к другу очень близко, то с уверенностью можно пользоваться упрощенной формулой Х.А.Ньютона, а при больших расстояниях она вносит заметные ошибки. Причем уточненная формула дает результат примерно на 10% точнее, если считать данные численного интегрирования за критерий.

667 планета $d = 0.0471$				791 планета $d = 0.0343$			
h	$m_r' \Delta^1/a$			h	$m_r' \Delta^1/a$		
	по форму- ле (2)	численным интегр.	по форму- ле (9)		по форму- ле (2)	численным интегр.	по форму- ле (9)
0	0	5.61	0	0	0	6.67	0
0.0098	52.06	57.47	54.18	0.0038	181.3	186.2	185.1
0.0197	83.50	88.34	85.58	0.0176	181.4	186.3	184.9
0.0296	94.20	98.35	96.18	0.0264	148.5	152.5	150.1
0.0394	93.25	96.75	95.15	0.0312	121.0	124.5	123.3

§ 3. Обобщение формулы

Х. А. Ньютона на движение
тела с ненулевой массой

Х.А.Ньютон вывел формулу [2] для ограниченной круговой задачи трех точек /Солнце, Юпитер и комета с нулевой массой/, считая, что система с центром, находящимся в центре Юпитера, инерциальна. Он считал это приближение весьма надежным, т.к., во-первых, массы комет гораздо меньше массы Юпитера и, во-вторых, комета через сферу действия Юпитера проходит за промежуток времени, который мал по сравнению с периодом обращения Юпитера вокруг Солнца. Мы рассмотрим возмущения со стороны астероидов на движение кометы. Массы наибольших астероидов m_r гораздо больше массы комет m_c , но имеются астероиды, у которых масса гораздо меньше массы кометы. Предпосылки доказательства Х.А. Ньютона в случае движения тела с ненулевой массой несостоятельны. Мы предлагаем аналогичный вывод, однако рассматриваем движение тел /Юпитера и кометы/ вокруг общего центра масс. Точность вывода получается примерно такой же, как у Х.А.Ньютона, т.к. движение центра масс можно считать инерциальным, ибо сферы действия малых планет и кометы весьма малы.

Если абсолютные скорости астероида обозначить через $\vec{v}_r$, а кометы через $\vec{v}_c$, то скорость центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{m_c \vec{v}_c + m_r \vec{v}_r}{m_c + m_r} \quad (13)$$

Если считать, что центр масс вокруг Солнца в течение весьма короткого промежутка времени движется равномерно по прямой, то система, связанная с центром масс и движущаяся поступательно, является инерциальной. В этой системе координат, если пренебречь притяжением Солнца, комета и планета будут описывать кривые конических сечений, лежащие в одной плоскости, и радиус-векторы в данный момент времени будут являться продолжением друг друга, т.е.

$$\eta_k = \frac{r_k}{1 + e_k \cos(\varphi_k - \omega_k)}, \quad \eta_p = \frac{r_p}{1 + e_p \cos(\varphi_p - \omega_p)},$$

где η_k, η_p — соответственно радиус-векторы кометы и планеты, $\varphi_k - \omega_k = -\pi + (\varphi_p - \omega_p)$, $\omega_k = \pi + \omega_p$, $\varphi_k = \varphi_p$, r_k, r_p — параметры, e_k, e_p — линейные эксцентриситеты, φ_k, φ_p — истинные аномалии, ω_k, ω_p — долготы перигелиев.

Так как по определению центра масс

$$m_k \eta_k = m_p \eta_p,$$

то из (13) следует

$$\begin{aligned} m_k r_k &= m_p r_p, \\ e_k &= e_p, \end{aligned} \quad (14)$$

т.е.

$$m_k A_k = m_p A_p,$$

$$m_k B_k = m_p B_p,$$

где A_k, A_p, B_k, B_p — большие и малые полуоси кометы и планеты соответственно. Так как

$$\begin{aligned} \vec{r}'_p &= \vec{r}_p - \vec{r}_c = \frac{m_k (\vec{r}_p - \vec{r}_k)}{m_k + m_p}, \\ \vec{r}'_k &= \vec{r}_k - \vec{r}_c = \frac{m_p (\vec{r}_k - \vec{r}_p)}{m_k + m_p}, \end{aligned} \quad (15)$$

то значения углов между относительной скоростью и скоростью центра масс Θ_k и Θ_p отличаются на π . Так как минимальные расстояния так же относятся как $m_k : m_p$, то учитывая, что Θ_k и Θ_p различаются на π , из формулы [4]

$$m_k^2 B_k^2 = m_k^2 \Delta_{mk}^2 = m_k^2 d_k^2 + m_k^2 h_k^2 \sin^2 \theta_k = \\ = m_p^2 B_p^2 = m_p^2 \Delta_{mp}^2 = m_p^2 d_p^2 + m_p^2 h_p^2 \sin^2 \theta_p$$

следует, что $m_k h_k = m_p h_p$, где h_k, h_p — расстояния от кометы и планеты до точек наибольшего сближения орбит кометы и планеты с орбитой центра масс в момент, когда центр масс находится в точке наибольшего сближения. Отношения относительных скоростей к переносной определяются формулами

$$S_p = \frac{|\vec{v}_p'|}{|\vec{v}_c|} = \frac{m_k |\vec{v}_c - \vec{v}_k|}{|m_k \vec{v}_k + m_p \vec{v}_p|}, \quad S_k = \frac{|\vec{v}_k'|}{|\vec{v}_c|} = \frac{m_p |\vec{v}_k - \vec{v}_p|}{|m_k \vec{v}_k + m_p \vec{v}_p|}. \quad (16)$$

Следовательно

$$m_p S_p = m_k S_k. \quad (17)$$

Таким образом, мы убедились, что при движении вокруг центра масс величины размерности длины и отношение скоростей, входящие в формулу Х.А. Ньютона для планеты и кометы, относятся как $m_p : m_k$, а тригонометрические функции углов по модулю p равны.

Идея вывода формулы для изменения обратной величины большой полуоси кометы с ненулевой массой у нас следующая. Мы предполагаем, что большие возмущения можно определить по формуле, которая соответствует притяжению кометы и планеты центром масс. Мы применяем формулу Х.А. Ньютона для движения кометы вокруг центра масс, а потом переходим из величины, характеризующие движение планеты вокруг центра масс. При малых значениях массы астероида величины, характеризующие движение кометы относительно центра масс, совпадают примерно с величинами, характеризующими движение относительно кометы. Гипотеза движения тела с малой массой относительно большой приближенно себя оправдывает, ибо формула Х.А. Ньютона дает неплохие результаты. Мы предполагаем добавочно, что по этой схеме можно определить также возмущения тела с боль-

шей массой, притом следует рассматривать движения его вокруг центра масс.

Движение двух взаимно притягивающихся тел в системе координат, начало которой находится в равномерно двигающемся центре масс, и оси которой движутся поступательно, описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} &= - \frac{\kappa^2 m_p m_k \vec{r}_p}{r_{pk}^2 r_p}, \\ m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} &= - \frac{\kappa^2 m_p m_k \vec{r}_k}{r_{pk}^2 r_k}. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая равенство

$$\vec{r}_{pk} = \vec{r}_k - \vec{r}_p = - \frac{m_p + m_k}{m_k} \vec{r}_p = \frac{m_p + m_k}{m_p} \vec{r}_k,$$

уравнения (18) могут быть переписаны в следующем виде

$$\begin{aligned} m_p \frac{d^2 \vec{r}_p}{dt^2} &= - \frac{\kappa^2 m_p m_k^3}{(m_p + m_k)^2} \frac{\vec{r}_p}{r_p^3}, \\ m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} &= - \frac{\kappa^2 m_p^3 m_k}{(m_p + m_k)^2} \frac{\vec{r}_k}{r_k^3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из формул (19) следует, что комета движется вокруг центра масс, если в центр масс поместить массу, равную

$$\frac{m_p^3}{(m_p + m_k)^2}$$

таким же образом, как и в том случае, когда ее притягивает планета с массой m_p , помещенная на расстоянии r_{pk} . Следует отметить, что если $m_k \approx 0$, то в центре масс должна быть помещена масса m_p .

Было уже отмечено, что в случае ненулевой массы изменения обратной величины большой полуоси кометы мы будем определять по формуле Х.А. Ньютона, относя ее

к движению кометы вокруг центра масс, т.е.

$$\Delta \frac{1}{a_k} = \frac{m_p^3}{S_k (m_p + m_k)^2} \frac{A_k \cos \theta_k - h_k \sin^2 \theta_k}{A_k^2 + d_k^2 + h_k^2 \sin^2 \theta_k}. \quad (20)$$

Заменяя $A_k, h_k \dots$ на соответствующие величины планеты, мы получаем

$$\Delta \frac{1}{a_k} = \frac{m_p m_k^2}{S_p (m_p + m_k)^2} \frac{A_p \cos \theta_p - h_p \sin^2 \theta_p}{A_p^2 + d_p^2 + h_p^2 \sin^2 \theta_p}. \quad (21)$$

Если же $m_p \ll m_k$, то $A_p = A \dots$ и, следовательно, при малых значениях m_p имеем

$$\Delta \frac{1}{a} = \frac{m_p}{S} \frac{A \cos \theta - h \sin^2 \theta}{A^2 + d^2 + h^2 \sin^2 \theta}. \quad (22)$$

В A входит масса кометы, т.к. движение происходит вокруг кометы как центрального тела.

Л и т е р а т у р а

1. E. E v e r h a r t . A.J., 74, No 5, 735, 1969.
2. H. A. N e w t o n . National Academy of Science, Memoirs, vol. VI, 1893.
3. И. П. Т а р а ш а ш в и л и . А.Ж. вып. 5, 66, 1939.
4. A. W o e r k o m . Bull. Astron. Inst. of Netherl. 399, 445, 1948.
5. М. Ф. С у б б о т и н . Введение в теоретическую астрономию, 1968.
6. Эфемериды малых планет на 1969 год. Изд. "Наука", 1968 г.
7. К. А. Ш т е й н с и И. Э. В а л ь к а л н е .
Наст. сб. стр. 74.

K o p s a v i l k u m s

K. S t e i n s u n I. Z a l k a l n e

H.A. NUTONA FORMULAS VIENKĀRSOSANA UN TĀS PRECIZITĀTES
NOVĒRTĒSANA

Vienkāršotā Nūtona formula izvesta izvirzot koordinātes laika intervalu pakāpju rindā gadījumam, ja punkts, kura masa ir nulle, kustās pa taisni. Atšķirības no skaitliskās integrācijas rezultātiem sastāda ap 10⁰/. Ja ņem vērā otrās pakāpes locekļus, tad iegūst precīzākus rezultātus, bet sakarā ar to, parādās jauni parametri. Vispārinātā H.A. Nūtona formula galīgas masas ķermeņu kustībai tiek izvesta pieņemot, ka divu ķermeņu inerces centrs kustās pēc inerces to aktivitātes sfērās.

S u m m a r y

K. S t e i n s a n d I. Z a l k a l n e

SIMPLIFICATION OF H.A. NEWTON'S FORMULA AND ESTIMATION
OF ITS PRECISION

The simplified Newton's formula on the bases of expansion of coordinates in power series in time interval is derived for case, when motions of body with zero mass is rectilinear. The differences from results of numerical integration and that of new formula is about 10⁰/. If the second powers is taken into account more precise results are obtained, but it is connected with the appearance of more parameters. It is assumed that the center of masses of two bodies moves inertially in the sphere of activity. H.A. Newton's generalized formula is derived on the bases of this hypothesis.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 137 ВЫПУСК 5, 1970

Л. К. Лауцениекс

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ОРБИТ ИСЗ
МЕТОДАМИ МИНИМИЗАЦИИ

Определение орбиты ИСЗ, как и всякого другого небесного тела, обычно проводят в два этапа. Сначала по небольшому числу наблюдений вычисляют невозмущенную орбиту, называемую первоначальной. Эта орбита, как правило, недостаточно точна и представляет последующие наблюдения тем хуже, чем дальше они от наблюдений, использованных при вычислении орбиты. Поэтому в дальнейшем орбиту улучшают по методу наименьших квадратов с учетом возмущений. В качестве исходного приближения используется первоначальная орбита.

Улучшение орбиты не связано с какими-либо принципиальными трудностями, если выполнены условия сходимости — наблюдения достаточно хорошо распределены /определитель нормальной системы не близок к нулю/ и начальное приближение близко к искомому результату. Вычисление первоначальной орбиты является более трудным, так как об орбите заранее почти ничего неизвестно.

Существующие методы определения первоначальной орбиты тесно связаны с тем, какого характера наблюдения используются при вычислениях. Так, например, известные методы Гаусса и Лапласа были разработаны специально для оптических наблюдений, охватывающих малую дугу орбиты. В случае радиотехнических /дальномерных и доплеровских/ измерений аналогичные методы не разработаны. Не разработаны также методы определения первоначальных орбит в тех случаях, когда

возмущениями пренебрегать нельзя.

Частный характер существующих методов определения первоначальной орбиты и серьезные ограничения в области их применимости заставляют думать о более универсальных методах вычисления орбит. Разработка таких универсальных методов особенно важна для вычислений на ЭВМ. В данной статье рассмотрен один из таких методов, основанный на использовании суммы квадратов отклонений измеренных значений траекторных параметров от вычисленных значений параметров как функции качества. Метод удобен тем, что позволяет обрабатывать любое число наблюдений, учитывая возмущения и, наконец, вести вычисления по единой методике независимо от характера наблюдений. При применении метода мы делаем единственное ограничение, что ИСЗ движутся по эллиптическим орбитам. Однако это ограничение несущественно, так как его можно снять ценой усложнения алгоритма вычисления функции качества.

Идея рассматриваемого метода заключается в том, что истинной орбите должен соответствовать абсолютный минимум функции качества близкий к нулю. Поиск значений элементов орбиты, дающих абсолютный минимум функции качества, мы ведем общими методами минимизации — методом слепого поиска и методом оврага. Этим достигается единообразие метода.

При применении методов минимизации всегда имеется опасность спуска в локальный /неабсолютный/ минимум. Вероятность такого ложного результата снижается при повторении спуска из различных удаленных друг от друга точек. В статье приведено несколько примеров вычисления орбиты методом минимизации с использованием фиктивных наблюдений.

§ 1. Постановка задачи

Рассматривается задача об определении первоначальной орбиты из наблюдений. Будем считать, что для всех моментов времени t наблюдения могут дать значения только одного из трех перечисленных ниже типов:

1/ прямые восхождения α и склонения δ , (1)

2/ расстояния ρ , 3/ радиальные скорости $\dot{\rho}$

в топоцентрической системе координат. Считаем также, что эти наблюдения уже исправлены за рефракцию, абerrацию, прецессию и другие возможные поправки /Вейс, 1967; Меллер, 1967/.

Определение орбиты - это нахождение таких параметров, которые характеризуют движение ИСЗ в соответствии с известными законами небесной механики и наилучшим образом удовлетворяют наблюдениям. Так как ИСЗ движутся по эллиптической траектории, то нам необходимо определить шесть параметров, элементов, эллиптической орбиты:

большую полуось a , эксцентриситет e , наклон i , долготу восходящего узла Ω , аргумент перигея ω , среднюю аномалию M_0 . (2)

Хорошо известно, что наблюдаемые величины (1) являются функциями параметров орбиты (2) /Субботин, 1968; Дубошин, 1968/.

Пусть даны некоторые значения параметров оскулирующей эллиптической орбиты ИСЗ в момент времени t_0 , т.е. $a_0, e_0, i_0, \Omega_0, \omega_0, M_0$. Если будем учитывать вековые возмущения первого порядка от сжатия Земли и торможения в атмосфере, то значения оскулирующих элементов в любой момент времени t будут /Сочилина, 1961/

$$\begin{aligned} a &= a_0, \quad e = e_0, \quad i = i_0, \\ \Omega &= \Omega_0 + \dot{\Omega}'(t - t_0), \\ \omega &= \omega_0 + \dot{\omega}'(t - t_0), \\ M &= M_0 + (n + M')(t - t_0) + n'(t - t_0)^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$M' = \frac{1}{2} \mathfrak{F} \frac{1}{a_0^2} n_0 \frac{3 \cos^2 i_0 - 1}{(1 - e_0)^{3/2}},$$

$$\varpi' = -\mathcal{J} \frac{1}{a_0^2} n_0 \frac{\cos i_0}{(1-e_0^2)^2}, \quad (4)$$

$$\omega' = \frac{1}{2} \mathcal{J} \frac{1}{a_0^2} n_0 \frac{5 \cos^2 i_0 - 1}{(1-e_0^2)^2}, \quad n_0 = \frac{f m}{a^{3/2}},$$

$f m = 398603 \text{ км}^3/\text{сек}^2$ — произведение постоянной Гаусса на массу Земли; $\mathcal{J} = 0,0016238$ — коэффициент второй зональной гармоники разложения потенциала Земного притяжения в ряд по сферическим функциям; n' — коэффициент векового изменения средней аномалии, учитывающий торможение спутника в атмосфере.

Геоцентрические прямоугольные экваториальные координаты ИСВ можно вычислить по формулам /Субботин, 1968/

$$\begin{aligned} X &= A_x (\cos E - e) + B_x \sin E, \\ Y &= A_y (\cos E - e) + B_y \sin E, \\ Z &= A_z (\cos E - e) + B_z \sin E, \\ \dot{X} &= \frac{f m}{a \sqrt{a}} (-A_x \sin E + B_x \cos E), \\ \dot{Y} &= \frac{f m}{a \sqrt{a}} (-A_y \sin E + B_y \cos E), \\ \dot{Z} &= \frac{f m}{a \sqrt{a}} (-A_z \sin E + B_z \cos E), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A_x &= a (\cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i), \\ A_y &= a (\sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i), \\ A_z &= a \sin \omega \sin i, \\ B_x &= a \sqrt{1-e^2} (-\cos \Omega \sin \omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i), \\ B_y &= a \sqrt{1-e^2} (-\sin \Omega \sin \omega + \cos \Omega \cos \omega \cos i), \\ B_z &= a \sqrt{1-e^2} \cos \omega \sin i, \\ \eta &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ E &= M + e \sin E. \end{aligned} \quad (6)$$

Геоцентрические координаты наблюдательных станций определяются по формулам

$$\begin{aligned} X &= R \cos \varphi' \cos s, & \dot{X} &= -2\pi(1+\mu)Y, \\ Y &= R \cos \varphi' \sin s, & \dot{Y} &= 2\pi(1+\mu)X, \\ Z &= R \sin \varphi', & \dot{Z} &= 0, \end{aligned}$$

где R — геоцентрическое расстояние, φ' — геоцентрическая широта, s — местное звездное время, $\mu = 0,00273791$.

Переходим далее к топоцентрической прямоугольной системе координат по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= x - X, & \dot{\xi} &= \dot{x} - \dot{X}, \\ \eta &= y - Y, & \dot{\eta} &= \dot{y} - \dot{Y}, \\ \zeta &= z - Z, & \dot{\zeta} &= \dot{z} - \dot{Z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Последние формулы дают возможность получить значения наблюдаемых величин $\alpha, \delta, \varphi, \dot{\varphi}$, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, & \dot{\varphi} &= \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2}, \\ \delta &= \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, & \alpha &= \arcsin \frac{\zeta}{\varphi \cos \delta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления наблюдаемых величин можно использовать также алгоритм, данный в работе А.С.Сочиной /1963/.

Вычисленные по формулам (8) значения $\alpha, \delta, \varphi, \dot{\varphi}$ на моменты наблюдений будут отличаться от наблюдаемых значений по многим причинам. Во-первых, наблюдаемые значения содержат случайные ошибки, во-вторых, параметры орбиты, служащие для вычисления $\alpha, \delta, \varphi, \dot{\varphi}$ по формулам (3) — (8), известны, как правило, весьма неточно, и, в-третьих, учет возмущений по формулам (3), (4) также недостаточно точен, так как при этом не учитываются короткопериодические возмущения. В результате разности

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \alpha_{\text{набл.}} - \alpha_{\text{выч.}}, & \Delta \varphi &= \varphi_{\text{набл.}} - \varphi_{\text{выч.}}, \\ \Delta \delta &= \delta_{\text{набл.}} - \delta_{\text{выч.}}, & \Delta \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_{\text{набл.}} - \dot{\varphi}_{\text{выч.}}. \end{aligned} \quad (9)$$

будут отличны от нуля.

Соответственно каждому типу наблюдений (1) теперь можно составить выражения /функции качества/

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\delta} &= \sum_{i=1}^N \sigma_i [\cos^2 \delta_{i\text{набл.}} (\Delta \alpha_i)^2 + (\Delta \delta_i)^2], \\ Q_{\varphi} &= \sum_{i=1}^N \sigma'_i (\Delta \varphi_i)^2, & Q_{\dot{\varphi}} &= \sum_{i=1}^N \sigma''_i (\Delta \dot{\varphi}_i)^2. \end{aligned} \quad (10)$$

где N — общее число наблюдений, большее или равное необходимому числу наблюдений и где $\sigma_i, \sigma'_i, \sigma''_i$ — число-

вые коэффициенты, значения которых выбираются в зависимости от априорной точности наблюдений /веса наблюдений/. Если о точности наблюдений ничего не известно, или все наблюдения имеют одинаковую точность, следует выбрать $\sigma_1 = 1$, $\sigma_1' = 1$, $\sigma_1'' = 1$.

Насколько известно автору, функция Q_j до сих пор использовалась только при улучшении орбит. Но функцию Q_j можно также использовать непосредственно для определения первоначальных орбит. Очевидно, что в последнем случае необходимо поставить задачу о нахождении абсолютного минимума функции Q_j , равного нулю или близкого к нулю.

Таким образом, задача об определении параметров сводится к минимизации функции Q_j , т.е. нахождению таких значений параметров, при которых функция Q_j /которая очевидно зависит от параметров/ достигает своего минимального значения, близкого к нулю.

§ 2. М е т о д м и н и м и з а ц и и ф у н к ц и и Q

Для минимизации функций нескольких переменных существует уже достаточно большое множество методов и алгоритмов. Подробный анализ этих методов дан в работе Б.Т.Поляка /1967/.

Поставленную нами задачу, мы решали в два этапа. Сначала для нахождения приближенных значений параметров применялся метод слепого поиска /Растрингин, 1969/, а затем для уточнения найденных приближенных значений применялся метод оврага /Гельфанд, 1966/.

Дадим кратко общую схему обоих методов.

а/ Метод слепого поиска.

Пусть известны границы области определения параметров орбиты E_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). В этой области случайным образом выбирается точка, в которой вычисляется значение функции $Q = Q_1$. Затем также случайно выбирается другая точка и вычисленное для нее значение функции $Q = Q_2$ сравнивается с предыдущим. Если новое зна-

чение Q_2 меньше предыдущего Q_1 , то запоминаются как новая точка /совокупность элементов/, так и новое значение Q_2 . Если новое значение Q_2 больше предыдущего, то сохраняются предыдущая точка и старое значение Q_1 , т.е.

$$Q_{\min} = Q_1, \text{ если } Q_1 < Q_2, Q_{\min} = Q_2, \text{ если } Q_1 > Q_2. (11)$$

После того, как найдена точка с меньшим значением Q , случайным образом выбирается следующая точка, и процесс выбора точек и сравнение значений Q повторяется до тех пор, пока значение для какой-либо из точек не станет меньше заранее выбранного малого числа ε . Вычисления прекращаются и полученные значения параметров, координат точки, считаются искомым результатом.

б/ Метод оврага.

Метод состоит из двух последовательных процессов: спуска с покоординатными пробами или градиентного спуска и движения с обратным шагом.

Спуск с покоординатными пробами заключается в следующем. Пусть известны приближенные значения параметров $E_i^{(0)}$ — начальная точка, в которой вычисляется значение функции качества. Из этой точки делаем пробу по первой координате ($i=1$) с длиной шага $\Delta > 0$, т.е. вычисляется Q в точке $E_1 + \Delta, E_i$ ($i=1,2,3,4,5,6$). Если при этом значение функции Q уменьшается, то совершается переход к следующей координате ($i=2$); если значение функции увеличивается, то делаем пробу с шагом $\Delta > 0$ по той же координате в противоположном направлении. Если и в противоположном направлении значение Q увеличивается, то начальный пробный шаг $\Delta > 0$ по данной координате сокращаем в два раза, т.е. берем $\Delta/2$ вместо Δ и переходим к следующей координате ($i=2$), с которой процедура вычисления повторяется. Спуск с покоординатными пробами прекращаем, когда для всех координат пробные шаги не превосходят некоторого заранее выбранного значения $\varepsilon < \Delta$, т.е. когда

$$\frac{\Delta}{2^n} < \varepsilon \quad (12)$$

где n — число неудачных проб по каждой координате. Точка, которая получается в результате спуска с покоординатными пробами, называется спущенной из начальной точки $E_i^{(0)}$ и обозначается $\bar{E}_i^{(n)}$. Проводим спуск с покоординатными пробами из другой точки $\bar{E}_i^{(n)}$ близкой к $E_i^{(0)}$, получим другую спущенную точку $\bar{E}_i^{(n)}$. По координатам спущенных точек $\bar{E}_i^{(n)}$ и $\bar{E}_i^{(n)}$ вычисляем единичный вектор $\bar{\rho}$ прямой, проходящей через эти точки в направлении убывания функции Q . Пусть $Q(\bar{E}_i^{(n)}) > Q(\bar{E}_i^{(n)})$. На прямой $\bar{\rho}$ на расстоянии $h > 0$ от точки с меньшим значением функции берется точка $E_i^{(2)} = \bar{E}_i^{(n)} + h\bar{\rho}$. Длина h овражного шага выбирается таким образом, чтобы значение функции качества в точке $E_i^{(2)}$ уменьшалось, т.е.

$$Q(\bar{E}_i^{(n)} + h\bar{\rho}) < Q(\bar{E}_i^{(n)}). \quad (13)$$

После этого выбирается точка $E_i^{(2)}$, из которой снова делается спуск с покоординатными пробами; получаем спущенную точку $\bar{E}_i^{(2)}$. Через точки $\bar{E}_i^{(n)}$ и $\bar{E}_i^{(2)}$ снова проводится прямая, вычисляется вектор $\bar{\rho}$ и производится новый овражный шаг, длина которого выбирается, как описано выше. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будет сделано заданное число овражных шагов, если при этом функция Q не стала меньше заданной константы.

§ 3. Примеры практического применения метода минимизации для определения орбиты ИСЗ

Важную роль при минимизации играет правильное задание области определения параметров. Чтобы выяснить не находим ли мы описанным выше методом локальный, а не абсолютный минимум ($Q_{\min} > \varepsilon_m$), использовался метод оврагов для нескольких начальных значений параметров /случайно выбранных/. При этом нам пришлось расширить область определения параметров. Очевидно,

что истинные значения параметров ИСЗ всегда лежат в пределах:

$$\begin{aligned} 1 < a < a_{\max}, & 0 \leq \omega < 2\pi, \\ 0 < e < e_{\max}, & 0 \leq M_0 < 2\pi, \\ 0 \leq i < \pi, & a(1-e) > 1 \\ 0 \leq \Omega < 2\pi, \end{aligned} \quad (14)$$

которые можно назвать основной областью определения параметров. Экспериментальные вычисления по методу оврагов показали, что основную область целесообразно расширить следующим образом:

$$\begin{aligned} 1 < \bar{a} < a_{\max}, & -2\pi < \bar{\omega} < 4\pi, \\ -e_{\max} < \bar{e} < e_{\max}, & -2\pi < \bar{M}_0 < 4\pi, \\ -\pi < \bar{i} < 2\pi, & \bar{a}(1-|\bar{e}|) > 1. \\ -2\pi < \bar{\Omega} < 4\pi, \end{aligned} \quad (15)$$

Переход из расширенной области (15) на основную (14) осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega &= \bar{\omega} \pm \pi, \quad M_0 = \bar{M}_0 \pm \pi, \quad e = -\bar{e}, \text{ если } \bar{e} < 0, \\ i &= -\bar{i}, \quad \Omega = \bar{\Omega} \pm \pi, \text{ если } \bar{i} < 0, \\ i &= 2\pi - \bar{i}, \quad \Omega = \bar{\Omega} \pm \pi, \text{ если } \bar{i} > \pi, \\ \Omega &= \bar{\Omega} \pm 2\pi, \text{ если } \bar{\Omega} < 0 \text{ или } \bar{\Omega} > 2\pi, \\ \omega &= \bar{\omega} \pm 2\pi, \text{ если } \bar{\omega} < 0 \text{ или } \bar{\omega} > 2\pi, \\ M_0 &= \bar{M}_0 \pm 2\pi, \text{ если } \bar{M}_0 < 0 \text{ или } \bar{M}_0 > 2\pi. \end{aligned} \quad (16)$$

Знак + или - выбирается из условия, чтобы значения элементов находились внутри основной области (14).

Во всех проведенных нами экспериментах по вычислению орбит ИСЗ методами минимизации функции Q решение существовало для всех точек, произвольно выбранных в основной области, и это решение было единственным в основной области определения параметров, если промежуток времени между крайними наблюдениями был достаточно большой.

Предварительный анализ соотношений, характеризующих движение по эллиптической орбите, показал, что в действительности $Q < \varepsilon_m$ не обеспечивает однозначности решения, если дуга малая, т. е. если интервал вре-

мени мал. При малой дуге целесообразно определить круговую орбиту, т.е. положить $e=0$ и $\omega=0$, так как наши эксперименты при малых интервалах времени показывали, что хорошо определяются следующие параметры:

i — наклон, Ω — долгота восходящего узла,
 $\omega_0 = \omega + M_0$ — угловое расстояние от восходящего узла в момент t_0 , $r_0 = a(e - \cos E_0)$ — геоцентрическое расстояние в момент t_0 , которые и характеризуют движение по круговой орбите.

Это, очевидно, связано с тем, что хотя положение ИСЗ в пространстве определяется довольно хорошо, небольшие отклонения в них влекут за собой большие изменения в компонентах скорости, и тем больше, чем меньше интервал времени и больше топоцентрическое расстояние. Небольшие изменения в компонентах скорости в свою очередь дают неопределенность в элементах a, e, ω, M_0 .

$$\begin{aligned} \text{Соотношения} \quad x - X &= \varrho \cos \delta \cos \alpha, & (17) \\ y - Y &= \varrho \cos \delta \sin \alpha, \quad z - Z = \varrho \sin \delta \end{aligned}$$

после несложных преобразований и с учетом, что все наблюдения равноточны и что

$$\frac{x - X}{\varrho} \leq 1, \quad \frac{y - Y}{\varrho} \leq 1, \quad \frac{z - Z}{\varrho} \leq 1,$$

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta u$$

дают приближенную оценку для точности положения спутника в пространстве

$$\Delta u \leq \frac{\varrho}{2} \sqrt{\frac{Q}{N}}. \quad (18)$$

Последнее соотношение дает возможность оценить точность компонентов скорости, т.е.

$$\Delta \dot{u} \leq \frac{\varrho}{2\vartheta} \sqrt{\frac{Q}{3N}}, \quad \text{где } \vartheta = f m (t - t_0). \quad (19)$$

Соотношения (18) и (19) и характеризуют ошибки определения орбиты при увеличении ϱ и уменьшении ϑ .

Для проверки изложенной выше методики было выбрано несколько вариантов орбит фиктивных ИСЗ со следующими элементами:

Таблица 1

$\mathbb{P}$	α	e	i	Ω	ω	M_0	Примечания
1	1.05	0.10	1.20	6.20	5.70	1.50	P
2	1.10	0.10	1.20	6.20	5.70	1.50	P
3	2.00	0.10	1.20	6.20	5.70	1.50	P
4	1.10	0.10	1.20	6.20	5.70	1.50	У, P

где дано в радиусах Земли, i, Ω, ω, M_0 — в радианах. В колонке "примечания" указано, какие станции участвуют в наблюдениях данного объекта. Для координат наблюдательных станций принято приближенно:

Таблица 2

Станция	φ	λ_E	h
P	57°	01 ^h 36 ^m	0.0 м
У	49°	01 ^h 28 ^m	0.0 м

где φ — астрономическая широта, λ_E — восточная долгота, h — высота над эллипсоидом Красовского.

Для вариантов, указанных в таблице 1, были вычислены значения α, δ для станций, указанных в колонке "примечания", для ряда моментов времени 31 декабря 1968 года, охватывающих одно прохождение спутника в зоне видимости станций. Эти значения α, δ вместе с прямоугольными координатами станций на соответствующие моменты с моментами времени и с разностями $t - t_0$ приведены в таблице 3 /разности $t - t_0$ даны в сутках/.

Приведенные в таблице 3 α, δ рассматривались затем как результат наблюдений, по которым необходимо было определить элементы орбиты изложенным выше методом.

В таблицах 4, 5, 6, 7 приведены значения исходных элементов, выбранных наугад, с которых начина-

Таблица 3

№		UT	$t - t_0$	α
1	1	17 ^h 59 ^m 15 ^s	-0.5208333 10^{-3}	23 ^h 13 ^m 15 ^s .868
	2	17 59 30	-0.3472222 10^{-3}	23 18 09.389
	3	17 59 45	-0.1736111 10^{-3}	23 25 20.120
	4	18 00 00	0.00	23 37 35.569
	5	18 00 15	0.1736111 10^{-3}	00 05 07.148
	6	18 00 30	0.3472222 10^{-3}	02 03 07.849
2	1	17 54 00	-0.4166667 10^{-2}	22 52 09.762
	2	17 55 00	-0.3472222 10^{-2}	22 58 47.804
	3	17 56 00	-0.2777778 10^{-2}	23 06 11.440
	4	18 04 00	0.2777778 10^{-2}	10 40 57.752
	5	18 05 00	0.3472222 10^{-2}	10 51 40.298
	6	18 06 00	0.4166667 10^{-2}	10 59 15.575
3	1	17 59 15	-0.5208333 10^{-3}	01 48 32.328
	2	17 59 30	-0.3472222 10^{-3}	01 51 32.601
	3	17 59 45	-0.1736111 10^{-3}	01 54 37.897
	4	18 00 00	0.00	01 57 48.401
	5	18 00 15	0.1736111 10^{-3}	02 01 04.301
	6	18 00 30	0.3472222 10^{-3}	02 04 25.792
4	1	17 54 00	-0.4166667 10^{-2}	21 56 57.633
	2	17 55 00	-0.3472222 10^{-2}	21 54 55.973
	3	17 56 00	-0.2777778 10^{-2}	21 48 50.869
	4	18 04 00	0.2777778 10^{-2}	10 40 57.752
	5	18 05 00	0.3472222 10^{-2}	10 51 40.298
	6	18 06 00	0.4166667 10^{-2}	10 59 15.575

Таблица 3 /продолжение/

δ	χ	ψ	z
18° 08' 27".39	0.4524146	0.3055418	0.8350249
23 03 40.11	0.4520802	0.3060365	0.8350249
35 52 23.01	0.4517452	0.3065308	0.8350249
51 23 49.69	0.4514096	0.3070247	0.8350249
67 55 58.69	0.4510735	0.3075183	0.8350249
82 03 39.59	0.4507366	0.3080115	0.8350249
-26 12 13.32	0.4593130	0.2950701	0.8350249
-21 38 33.45	0.4580176	0.2970769	0.8350249
-15 52 11.39	0.4567134	0.2990779	0.8350249
45 22 03.67	0.4459675	0.3148775	0.8350249
39 37 53.04	0.4445855	0.3168257	0.8350249
35 06 50.38	0.4431951	0.3187678	0.8350249
55 10 20.64	0.4224146	0.3055418	0.8350249
55 45 23.03	0.4520802	0.3060365	0.8350249
56 20 04.00	0.4517452	0.3065308	0.8350249
56 54 22.58	0.4514096	0.3070247	0.8350249
57 28 17.77	0.4510735	0.3075183	0.8350249
58 01 48.50	0.4507366	0.3080115	0.8350249
-18 50 10.02	0.5650907	0.3357577	0.7510911
-10 34 41.17	0.5636162	0.3382269	0.7510911
01 25 29.02	0.5621310	0.3406896	0.7510911
45 22 03.67	0.4459675	0.3148775	0.8350249
39 37 53.04	0.4445855	0.3168257	0.8350249
35 06 50.38	0.4431951	0.3187678	0.8350249

Таблица 4 /Вариант 1/

N	a	e	i	Ω
1a	1.30	0.20	0.10	3.00
1б	1.2623519	0.1902435	1.2020476	6.2012656
2a	2.00	0.10	1.00	1.00
2б	1.0992125	0.1076191	1.2005102	6.2002458
3a	2.00	0.20	1.50	4.00
3б	1.0674412	0.1005385	1.2001297	6.1999682
4a*	1.36	0.088	1.135	6.014
4б	1.1581354	0.1315472	1.2049104	6.2096027

Таблица 5 /Вариант 2/

N	a	e	i	Ω
1a	1.10	0.05	0.10	0.10
1б	1.1001218	0.1000038	1.2000035	6.2000009
2a	1.30	0.20	0.10	3.00
2б	1.1076875	0.0999699	1.2000848	6.2000809
3a	1.10	0.10	1.94	3.04
3б	1.1002554	0.0999323	1.1999978	6.1999958
4a	2.00	0.20	1.50	4.00
4б	1.0987187	0.1000104	1.1999854	6.1999903
5a*	1.132	0.096	1.238	6.209
5б	1.1261888	0.1031137	1.2004090	6.2002780

Таблица 4 /продолжение/

ω	M_0	μ_0	τ_0	Q
0.10	6.00			41.018598
0.4575034	0.4494998	0.9070032	1.0574596	0.00000027
3.00	1.00			29.223928
6.1167908	1.0813729	0.9149774	1.0542657	0.00000009
1.00	2.00			68.947990
5.8588518	1.3407808	0.9164473	1.0535431	0.00000006
0.371	0.615			0.86246225
0.1768880	0.7367146	0.9130626	1.0557562	0.00000004

Таблица 5 /продолжение/

ω	M_0	μ_0	τ_0	Q
0.10	0.10			17.531573
5.7010874	1.4988962	0.9167983	1.1032021	0.00000000
0.10	6.00			32.771598
5.7678464	1.4318548	0.9165159	1.1033343	0.00000026
3.72	4.78			50.550323
5.7022554	1.4978231	0.9168932	1.1032041	0.00000000
1.00	2.00			78.875936
5.6886533	1.5114632	0.9169312	1.1032015	0.00000001
0.16	0.944			0.42294284
5.9249251	1.2704216	0.9121614	1.1032483	0.00000000

Таблица 6 /вариант 3/

N	a	e	i	Ω
1a	1.10	0.05	0.10	0.10
1б	2.4127204	0.1501412	1.2008180	6.2005599
2a	2.00	0.20	1.50	4.00
2б	1.8129597	0.1921442	1.1963414	6.1929628
3a	2.00	0.10	2.00	2.00
3б	2.1289269	0.0554797	1.1999458	6.1994167
4a*	1.586	0.139	1.53	3.76
4б	2.5132776	0.1744407	1.2009426	6.2006032

Таблица 7 /вариант 4/

N	a	e	i	Ω
1a	1.10	0.05	0.10	0.10
1б	1.1001812	0.1000064	1.2000066	6.2000028
2a	1.50	0.15	1.5707463	3.1415426
2б	1.1004630	0.1000001	1.2000020	6.1999755
3a	1.30	0.20	0.10	3.00
3б	1.1002867	0.1000060	1.2000004	6.1999873
4a	2.00	0.10	2.00	2.00
4б	1.1013761	0.1002011	1.2000253	6.2000090
5a*	1.04	0.02	1.29	0.095
5б	1.1026009	0.1001223	1.2000241	6.1998923

Таблица 6 /продолжение/

ω	M_0	μ_0	η_0	Q
0.10	0.10			54.881738
0.7743264	0.2509564	1.0262828	2.0660366	0.00000000
1.00	2.00			16.195046
3.2900823	4.4561718	1.4630688	1.9583953	0.00000008
1.00	1.00			42.365760
0.5330220	0.5246787	1.0577008	2.0285054	0.00000002
2.117	0.019			0.07427029
0.9856167	0.0903312	1.0759479	2.0774250	0.00000001

Таблица 7 /продолжение/

ω	M_0	μ_0	η_0	Q
0.10	0.10			18.245856
5.7015986	1.4983759	0.9167892	1.1001812	0.00000000
3.1415426	3.1415426			20.421952
5.7040996	1.4958707	0.9177850	1.1032142	0.00000000
0.10	6.00			29.822126
5.7025159	1.4974568	0.9167874	1.1032135	0.00000000
1.00	1.00			13.147005
5.7119863	1.4876274	0.9164284	1.1032705	0.00000004
5.61	1.72			0.70083837
5.7228453	1.4768782	0.9165382	1.1032845	0.00000213

лись вычисления методом оврага. Индексом (а) при номере системы элементов в этих таблицах обозначен тот факт, что данная система взята как начальная для вычислений методом оврага. Индексом (б) обозначена система, являющаяся результатом вычислений по методу оврага. Звездочкой отмечены те системы элементов, которые являлись результатом метода слепого поиска и использовались затем как начальные для вычислений уже по методу оврага. В таблицах 4, 5, 6, 7 графы $\omega + M_0$, графы η_0 - геоцентрические расстояния ИСЗ в момент t_0 , Q - значения функции качества.

Из таблиц 4, 5, 6, 7 видно, что вычисления методом оврага резко уменьшают функцию качества в большинстве случаев и получаемые элементы в случае большой дуги, охваченной наблюдениями, не очень сильно отличаются от истинных. В случае очень малой дуги /вариант 1,3/ решение неопределенное из-за сильной корреляции элементов, поэтому определение всех элементов сразу приводит к большим ошибкам последних. В этом случае, по-видимому, целесообразнее фиксировать по одному элементу из групп i , Ω или e , ω соответственно /см. статью А.С.Сочиной, 1966/, или же просто определять круговую орбиту. Круговая орбита во всех рассмотренных нами сомнительных случаях определялась надежно.

З а к л ю ч е н и е

В данной статье мы рассмотрели вопрос об определении орбиты ИСЗ методом минимизации некоторого функционала /функции качества Q /. Этот метод обладает многими преимуществами перед другими известными методами определения орбит. Прежде всего он обладает большой общностью и позволяет единообразно обрабатывать наблюдательный материал различного происхождения /оптический, радиотехнический, лазерный/, он не накладывает никаких ограничений на число наблюдений и, наконец, он позволяет при вычислении орбиты учи-

тивать возмущения. Возможность использования одновременно многих наблюдений особенно привлекательна, так как позволяет избегать ложных решений, неизбежных в случае минимального количества наблюдений. Минимизация функции качества при определении орбиты производилась двумя методами — методом слепого поиска и методом оврага. Метод оврага в свою очередь состоит из двух разных процессов — спуска с по координатными пробами и движения по дну оврага с овражным шагом.

Проведенные нами экспериментальные вычисления орбит ИСЗ изложенным методом, результаты которых указаны в таблицах 4, 5, 6, 7, показали, что этот метод вполне эффективен, имеет достаточно широкую область сходимости, дает вполне надежные результаты и может быть использован в практике вычисления начальных приближенных орбит.

Л и т е р а т у р а

1. Г. Вейс. Геодезическое использование искусственных спутников. Изд. "Недра", М. 1967.
2. И. Меллер. Введение в спутниковую геодезию. Изд. "Мир", М. 1967.
3. М. Ф. Субботин. Введение в теоретическую астрономию. Изд. "Наука", М. 1968.
4. Г. Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд. "Наука", М. 1968.
5. А. С. Социлина. О вычислении эфемерид искусственных спутников Земли. Бюлл. ИТА, т.8, № 2 /95/. 1961.
6. А. С. Социлина. Улучшение орбитальных элементов искусственных спутников Земли. Бюлл. ИТА, т.9, № 5 /108/. 1963.
7. А. С. Социлина. О точности элементов орбит

искусственных спутников Земли. Бюлл. ИТА, т.11, № 1/124/. 1967.

8. Б. Т. П о л я к. Методы минимизации функций многих переменных. Экономика и математические методы, т.3, вып. 6. 1967.
9. Л. А. Р а с т р и г и н. Теория и применение случайного поиска. Изд. "Зинатне", Рига. 1969.
10. И. М. Г е л ь ф а н д, Е. Б. В у л, С. Л. Г и н-в б у р г. Метод оврагов в задачах рентгеноструктурного анализа. Изд. "Наука", М. 1966.

L. L a u c e n i e k s

MZF ORBĪTU APRĒĶINĀŠANA AR MINIMIZĀCIJAS METODĒM

MZF orbītas aprēķināšana tiek reducēta uz noteiktas funkcijas absolūtā minimuma atrašanu. Tāda pieeja orbītu aprēķināšanā ļauj apstrādāt, ievērojot perturbācijas, novērojumus, kas iegūti lielā orbītas lokā. Skaitļošana ir vienkārša un ērti piemērojama elektronu skaitļojamām masīnām. Metode ilustrēta ar piemēriem.

S u m m a r y

L. L a u t s e n i e k s

DETERMINATION OF PRELIMINARY ORBITS OF AES
BY METHODS OF MINIMIZATION

Determination of the AES orbits is considered to be a problem of minimization of some quality function. Such a look on the orbit determination problem allows to use the observations covering large arcs of the orbit and even to take the perturbations into consideration. The method of computation is convenient for the use on the electronic computers and doesn't depend on the type of observations. Some numerical examples illustrate the possibilities of the method.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 137 ВЫПУСК 5, 1970

К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН, ВХОДЯЩИХ В ФОРМУЛУ
Х. А. НЬЮТОНА

§ 1. Распределение минималь-
ных расстояний между ор-
битой кометы Даниэля и
орбитами астероидов

Данная работа выполнена на основе вычислений, сделанных в работе [1], т.е. взяты статистические данные вычисленных минимальных расстояний d между орбитой кометы Даниэля и орбитами всех малых планет по элементам, которые даны в "Эфемериды малых планет на 1969 год", т.е. 1735 малых планет. В этой работе, а также и впредь мы будем придерживаться общепринятой точки зрения и экстраполировать полученные статистические данные открытых астероидов на все астероиды, т.е. и на еще не открытые. Поэтому сейчас рассмотрим только небольшой статистический материал, а именно, рассмотрим астероиды с минимальными расстояниями до 0,1 а.е. /см.табл.1/. Если бы мы могли вполне положиться на этот статистический материал, то без затруднений можно было бы утверждать, что распределение минимальных расстояний между орбитой кометы Даниэля и орбитами астероидов равномерное. Но помимо того, если рассмотреть статистику уже для большего числа астероидов, например, хотя бы с d до 0,3 а.е. наше утверждение о равномерности распределения нужно будет от-

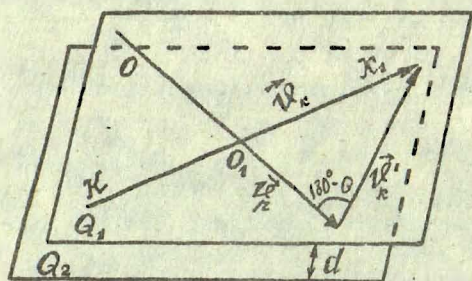
Таблица 1

№	Название	d
1656	1942 EC	0,0014
1620	Geographos	0,0299
791	Ani	0,0343
909	Ulla	0,0410
1303	Luthera	0,0451
667	Denise	0,0471
1362	Brigida	0,0511
780	Armenia	0,0599
719	Albert	0,0776
1036	Ganymed	0,0782
781	Hartvelia	0,0899
1143	Odysseus	0,0910
1170	Siva	0,0946

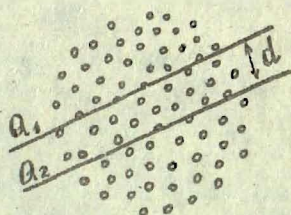
вергнуть. Но мы будем впредь рассматривать микроструктуру, т.е. такие орбиты астероидов, которые очень близко подходят к орбите кометы. Значит у таких астероидов есть возможность очень близко подойти к комете, вплоть до столкновения, и этим повлиять на ее движение. К сожалению, от известных астероидов мы не можем получить уверенное статистическое представление о такой микроструктуре d . Лучше всего ее должны представлять данные по возможности в малом интервале и поэтому мы выбрали интервал $[0; 0,1]$.

Этот вопрос рассмотрим также чисто теоретическим путем. Допустим следующую микроструктуру орбит малых планет. В небольшой области будем орбиты астероидов рассматривать как отдельные однородные пучки параллельных прямых, которые пересекает прямая, т.е. орбита кометы. Минимальные расстояния между орбитой кометы KK_1 /см.рис. 1а/ и орбитами астероидов OO_1 , равны расстоянию от параллельных прямых до плоскости Q_1 , проходящей через KK_1 // путям планет. Малые расстояния

d будут находиться между плоскостью Q_1 и близкой ей параллельной плоскостью Q_2 /см.рис.1, где показано сечение перпендикулярной плоскостью пучка параллельных прямых, т.е. орбит астероидов, а также плоскости Q_1 , на которой лежит прямая орбиты кометы, и ей // плоскости Q_2 /. Число орбит, находящихся между двумя параллельными плоскостями Q_1 и Q_2 , пропорционально расстоянию между этими плоскостями, т.е. d . Значит распределение d равномерное. Равномерное распределение получится также, если прямая орбиты кометы пересечет не только один пучок параллельных прямых, как мы выше рассматривали, но и несколько таких пучков, состоящих из // траекторий. Наша статистика показывает, что 13 астероидов из 1735 известных могут быть с $d \in [0; 0,1]$. Учитывая это и доказанное нами равномерное распределение d , мы сможем определить плотность распределения минимальных расстояний после того, как нам будет известно возможное число всех астероидов.



a)



б)

Рис. 1

§ 2. Р а с п р е д е л е н и е м а с с м а л ы х п л а н е т

Наша задача определить распределение масс всех малых планет и микропланет. Для этого мы можем применить только такие методы, в которых необходимо знать данные, которые определены для большинства малых планет. Такой параметр, определенный для всех малых планет, — абсолютная величина q , т.е. абсолютная яркость малой планеты, выраженная в звездных величинах, которую имела бы планета на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца и от Земли. К сожалению, статистические данные малых планет искажены селекцией наблюдений, т.е. не все планеты с данным q открыты. Если q известны, то можно определить размеры планет, а потом и массы. Видимые размеры малых планет очень малы, лишь четыре первые малые планеты имеют заметные маленькие диски. Поэтому для этих четырех малых планет принимались первые попытки непосредственно определить диаметры [2], [3]. По блеску этих малых планет был определен альbedo. Для определения диаметров всех остальных малых планет выбирают другой путь — косвенное определение на основании фотометрических наблюдений, т.е. задаются каким-либо вероятным значением альbedo и по блеску находят размеры малой планеты. Для этой цели обычно используются данные планеты Марс [4]. Формула определения радиуса малых планет имеет следующий вид:

$$\lg r = 3.3135 - \frac{1}{5} q \quad (1)$$

где r — радиус малой планеты в км. По этой формуле полученные результаты будут лишь приближительными, так как не для всех малых планет известны значения истинной величины альbedo, а берется некоторое среднее значение. К тому же малые планеты считаются шарообразными телами, однако значительная часть малых планет имеет неправильную форму.

Зная линейные размеры малых планет, можно опре-

делить их объем V :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (2)$$

и массу m_r

$$m_r = \rho V \quad (3)$$

где ρ — плотность малых планет. Относительно численного значения ρ сделаем следующее замечание. Вычисляя общую массу малых планет, в связи с выдвинутой гипотезой происхождения малых планет путем разрыва одной большой планеты, разными путями, различные авторы считают, что вероятная средняя плотность малых планет примерно $3,5 \text{ г/см}^3$ [5], [6] . Итак, мы выяснили, каким образом определяются массы малых планет, если известны их абсолютные яркости q .

Рассмотрим теперь статистику абсолютных яркостей. Этим вопросом занимался Г.П.Койпер [7] . Чтобы учесть селекцию наблюдений q , Койпер осуществил подсчет малых планет на фотопластинках. Он подсчитывал число малых планет на одной пластинке независимо несколько раз, не имея до того представления о возможном числе или местонахождении малых планет. Часть малых планет получилась дважды зарегистрированной, часть только раз. Койпер определил по наблюдаемому отношению числа малых планет, дважды найденных, к числу малых планет, найденных один раз, так называемый фактор внимания, т.е. отношение числа найденных малых планет на пластинке к числу всех находящихся там малых планет. К тому же подсчет производился еще и следующим образом: находились малые планеты на фотопластинке и сравнивались с планетами из "эфемериды малых планет". Если малую планету на пластинке найти не удавалось, то считалось, что ее положение определено ошибочно и объект потерян. Койпер считал, что планеты наблюдаются в поясе $\pm 20^\circ$ от эклиптики, причем в поясе $\pm 5^\circ$ малые планеты подсчитывались дважды. Оба метода для учета пока неоткрытых малых планет данной величины давали примерно одинаковые результаты. В ре-

в результате обработки экспериментальных данных он показал, что зависимость между $\lg N$ и q выражается формулой:

$$\lg N = c + b q$$

где N — число малых планет данной абсолютной величины q . Для определения коэффициентов c и b возьмем следующие уравнения метода наименьших квадратов:

$$\begin{cases} n c + b \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n \lg N_i = 0, \\ c \sum_{i=1}^n q_i + b \sum_{i=1}^n q_i^2 - \sum_{i=1}^n q_i \lg N_i = 0 \end{cases} \quad (5)$$

откуда

$$c = \sum_{i=1}^n \lg N_i - \frac{\left\{ n \sum_{i=1}^n q_i \lg N_i - \left(\sum_{i=1}^n \lg N_i \sum_{i=1}^n q_i \right) \right\} \sum_{i=1}^n q_i}{n \sum_{i=1}^n q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2},$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^n q_i \lg N_i - \sum_{i=1}^n \lg N_i \sum_{i=1}^n q_i}{n \sum_{i=1}^n q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2}.$$

Подставляя данные Г.П.Койпера в эти формулы, получим следующее уравнение прямой для максимального числа по Койперу:

$$\lg N = -4,69 + 0,77 q,$$

где N число малых планет в интервале $(q; q + 0,5)$ или учитывая (1)

$$\lg N = 8,07 - 3,85 \lg q. \quad (6)$$

Между числом астероидов и их радиусом получится следующая связь:

$$N = \frac{1,17 \cdot 10^8}{\eta^{3,85}},$$

где η в единицах длины км. Но радиус и массу связывает зависимость

$$\eta^3 = \frac{3m_r}{4\pi \rho} = 0,068 m_r,$$

значит распределение массы астероидов можно найти по следующему выражению /масса в граммах/

$$N = \frac{6,57 \cdot 10^{28}}{m_r^{1,28}}. \quad (7)$$

N - дает число астероидов при данной m_r в интервале изменения q от q_0 до $q_0 + 0^m, 5$. Если же перейти на более распространенное в астрономии определение массы астероидов в единицах массы Солнца, то получим:

$$N = \frac{1,57 \cdot 10^{-14}}{m_r^{1,28}} \quad (7_1)$$

в том же интервале $(q_0; q_0 + 0^m, 5)$.

Постараемся в нашей полученной формуле (7) перейти на единичный интервал, чтобы более удобно было определять число астероидов в любом интервале изменения их масс. Абсолютные величины q астероидов и их массу связывает следующее выражение:

$$q = -\frac{5}{3} \lg m_r - 11,98, \quad (8)$$

откуда видно, что

$$\frac{dq}{dm_r} = -0,72 \frac{1}{m_r}$$

И

$$N dg = - N(m_p) \frac{0.72}{m_p} dm_p .$$

По данным Г.П.Койпера число астероидов в интервале dm_p есть

$$N_{max} dm_p = - \frac{2.3 \cdot 10^{-14}}{m_p^{2.28}} dm_p . \quad (9)$$

Из (9) следует, что плотность распределения масс астероидов следующая:

$$p(N) = \frac{1.28}{m_p^{2.28}} \frac{(m_o M_o)^{1.28}}{M_o^{1.28} - m_o^{1.28}} \quad (10)$$

для интервала масс (m_o, M_o) .

§ 3. Р а с п р е д е л е н и е в е л и ч и н н
 θ , т. е. угла между скоростью
 планеты v_p и относительной
 скоростью кометы v'_k

В формулу Х.А.Ньютона входят величины $\sin \theta$ и $\cos \theta$. Угол θ вообще может меняться от 0° до 180° . Но как показывает статистика, то θ меняется всего лишь в небольшом интервале. $\sin \theta$ остается все время > 0 , $\cos \theta$ меняет знак, поэтому выгоднее здесь рассматривать не сам угол θ , а распределение $\cos \theta$. Рассматривая статистику 117 астероидов, т.е. астероидов, у которых $d < 0,3$ а.е., видно, что распределение $\cos \theta$ близко к нормальному. В таблице 2 даны подсчеты; в 1 столбце — интервалы изменения $\cos \theta$, во 2 — число астероидов с $\cos \theta$ в данном интервале, в 3 — вероятность того, что астероиды будут с $\cos \theta$ именно в данном интервале.

Таблица 2

$\cos \theta_i$	n_i	$p_i = \frac{n_i}{n}$
-0,4 - -0,3	4	0,025
-0,3 - -0,2	21	0,179
-0,2 - -0,1	29	0,248
-0,1 - -0,0	22	0,188
0,0 - 0,1	18	0,154
0,1 - 0,2	9	0,077
0,2 - 0,3	10	0,085
0,3 - 0,4	4	0,025

Определим параметры нормального распределения: m_x - математическое ожидание, и σ - среднее квадратическое отклонение или дисперсию

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

где для нашего случая $x_i = \cos \theta_i$ и $m_x = -0,05085$. Тогда

$$D_x = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (m_x)^2 = 0,028$$

$$\sigma = 0,168.$$

Значит величина $\cos \theta$ имеет следующую плотность распределения

$$f(\cos \theta) = \frac{1}{0,168 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\cos \theta + 0,051)^2}{0,056}}.$$

Такое изменение угла θ около 90° объясняется тем, что орбита кометы Даниэля пересекает кольцо астероидов примерно под углом в 45° /см.рис. 2/, к тому же скорость кометы несколько больше скорости астероидов.

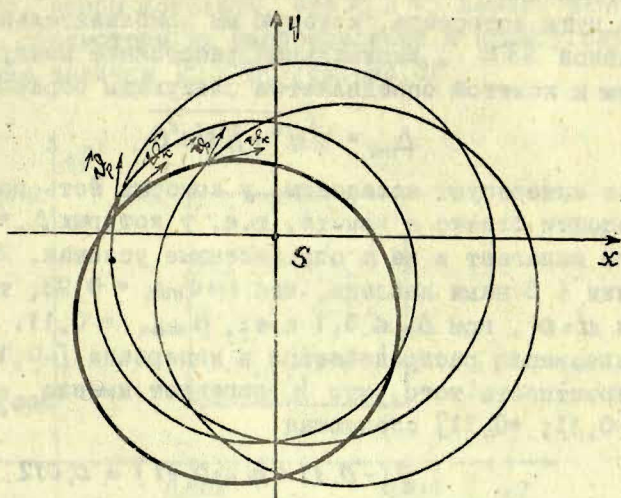


Рис. 2

§ 4. Р а с п р е д е л е н и е в е л и ч и н ы h

При выводе формулы Х. А. Ньютона допускалось, что в то время, когда планета и комета находятся вблизи точек, где их орбиты имеют наибольшее сближение, они движутся по прямым. Тогда d - минимальное расстояние между орбитами, а h - расстояние, которое астероид прошел от точки наибольшего сближения орбит, когда комета в этой точке находится /если $h < 0$, то h - расстояние, которое астероид должен пройти до точки наибольшего сближения орбит, когда комета уже находится в этой точке/. Лучшая аппроксимация орбит кометы и астероидов есть окружность, небольшие дуги которой мы могли заменить прямыми. Тогда, если среднее значение большой полуоси астероида есть 2,9 а.е., путь астероида можно считать длиной $2\pi a = 18,2$ а.е. Величина h распределяется равномерно. Действительно, если комета находится как раз в точке наибольшего сближения орбит кометы и астероида, то астероид с одинаковой вероятностью может находиться в любой точке на

окружности, т.е. вероятности один соответствует длина пути астероида, которую мы приблизительно считаем равной $2\pi a$. Минимальное расстояние между астероидом и кометой определяется следующим образом [8]

$$\Delta_m = \sqrt{d^2 + h^2 \sin^2 \theta}.$$

Нас интересуют астероиды, у которых есть возможность подойти близко к комете, т.е. у которых $\Delta_m \leq 0,1$ а.е. Это налагает и на h определенные условия. Из статистики § 3 нами найдено, что $\sin \theta_{\min} = 0,92$, тогда, если $d=0$, при $\Delta_m \leq 0,1$ а.е., $h_{\max} = 0,11$. Значит h равномерно распределяется в интервале $[-0,11; +0,11]$. Вероятность того, что h попадает именно в интервал $[-0,11; +0,11]$ следующая

$$p(-0,11 < h < +0,11) = 0,012.$$

§ 5. Распределение величин v_p и v'_k , т.е. скорости астероидов и относительных скоростей кометы

Статистика показывает, что величины v_p и v'_k распределяются примерно равномерно: v_p - в интервале $[0,008 - 0,015]$, v'_k - в интервале $[0,003 - 0,010]$ /см. таб.3/

Таблица 3

v_{pi}	n_i	v'_{ki}	n_i
0,008 - 0,009	10	0,003 - 0,004	9
0,009 - 0,010	17	0,004 - 0,005	15
0,010 - 0,011	18	0,005 - 0,006	23
0,011 - 0,012	17	0,006 - 0,007	22
0,012 - 0,013	20	0,007 - 0,008	20
0,013 - 0,014	19	0,008 - 0,009	13
0,014 - 0,015	16	0,009 - 0,010	15

Для того, чтобы доказать, что φ_μ и φ'_κ независимые величины, рассмотрим их распределение в прямоугольнике изменения величин φ_μ и φ'_κ / см. рис. 3/

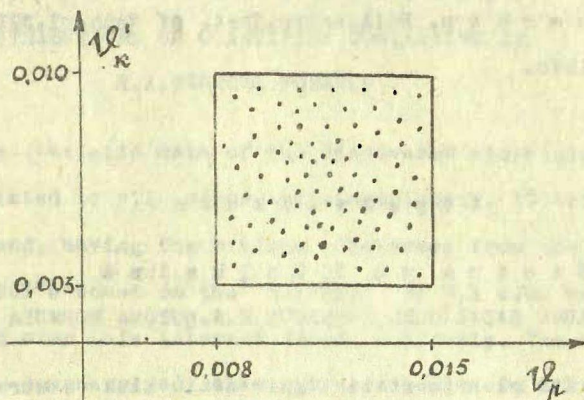


Рис. 3

Случайные величины независимы, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Как видно из рис. 3 между φ_μ и φ'_κ никакой функциональной зависимости не может быть.

Л и т е р а т у р а

1. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне. Наст. сб. стр. 74.
2. E. Vargard. Micrometrical determinations of the diameters of the Minor Planets, M. N., 56, 55, 1896.
3. М. Наму. Bulletin Astronomique, 16, 257, 1899.
4. Н. С. Самойлова - Яхонтова. Малые планеты. Успехи Астрон. наук, т. 5, 136, 1950.
5. В. Г. Фесенков. Метеорная материя в межпланетном пространстве. 1947.
6. К. У. Аллен. Астрофизические величины. 1960.

7. G. P. Kuiper et al. Survey of asteroids. The Astroph. Journal, Suppl, No 32, vol. 3, 289 - 428, 1958.

8. A. W o e r k o m. Bull.Astrn.Inst. of Netherl.399, 445, 1948.

K o p s a v i l k u m s

K. Š t e i n s un I. Z a ģ k a l n e

LIELUMU SADALĪJUMS, KO SATUR H.A. NUTONA FORMULA

atklāto planētu statistiskie dati tiek ekstrapolēti uz visām mazām planetām un mikroplanetām. Atrastas 13 orbītas, kuru minimālie attālumī līdz Daniela kometas orbītai atrodas intervālā $[0; 0,1 \text{ a.v.}]$, tie sadalās pa šo intervālu gandrīz vienmērīgi. Sadalījuma vienmērība tiek pārādita teoretiski. Balstoties uz G.P. Koipera pētījumiem, iegūts mazo planētu skaita sadalījums atkarībā no masām. Lēgāis starp kometas un mazo planētu ātrumiem, kā arī paši ātrumi mainās āsursā intervālā.

Summary

K. S t e i n s a n d I. Z a l k a l n e

DISTRIBUTIONS OF QUANTITIES CONTAINING IN

H.A. NEWTON'S FORMULA

The statistic data of the discovered minor planets are extrapolated to all minor and microplanets. 13 orbits have been found, having the minimum distances from the orbit of the Daniel's comet on the interval $0; 0,1$ a.u. and distributed over this interval almost uniformly. The uniformity is demonstrated also theoretically. On the bases of estimations by G.P. Kuiper the distribution of number of minor planets according to the value of masses is obtained. It is shown that the interval of variation of angle between velocities of the planet and of the Daniel's comet and interval of variations of these velocities is small.

ЛАТВИЙСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ 137 ВЫПУСК 5, 1970

К. А. Штейнс и И. Э. Залькалне

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАЛЬНЫХ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ
ОРБИТАМИ КОМЕТЫ И АСТЕРОИДОВ

§ 1. О методах определения
минимальных расстояний
между орбитами

Точный учет возмущений со стороны астероидов на движение кометы невозможен, так как, во-первых, астероидов очень много и, во-вторых, не все они к настоящему времени уже открыты. Поэтому целесообразно различать два вида возмущений: регулярные возмущения, т.е. возмущения, которые получаются от всех астероидов вместе взятых, т.е. от астероидного кольца, и, во-вторых, возмущения, которые создаются при близких сближениях кометы и астероида. Последние, т.н. иррегулярные возмущения, определяются главным членом возмущений, который обратно пропорционален расстоянию от астероида до кометы. Необходимое, но недостаточное условие больших иррегулярных возмущений есть — малые расстояния между орбитами астероида и кометы. Иррегулярные возмущения должны учитываться методом теории вероятностей, так как орбиты астероидов недостаточно точно известны и так как большинство астероидов к настоящему времени еще не открыто. На основе данных об известных астероидах мы определим распределение минимальных расстояний d между орбитами данной кометы и астероидов и будем предполагать, что свойства этого распределения имеет место и для неизвестных еще нам

астероидов. Распределение d необходимо знать для определения возмущений со стороны астероидов на движение кометы.

Определением минимальных расстояний между орбитами планет и комет занимались уже Г.Н.Рассель [1], Г.Фейе [2], К.А.Штейнс [3] и Л.П.Лазович [4]. При определении минимальных расстояний учитывалось, что минимальное расстояние перпендикулярно как к орбите астероида, так и к орбите планеты. Так как орбиты больших планет /кроме Плутона/ мало отличаются от окружностей, то минимальные расстояния лежат в плоскости большого круга, который проведен перпендикулярно к плоскости орбиты планеты. Таким образом, возможно свести задачу к задаче одного переменного, т.е. к отысканию большого круга, перпендикулярного к орбите кометы. Этот метод, разновидности которого до сих пор часто применялись, мы будем называть методом одного параметра. Однако метод одного параметра также требует много машинного времени и поэтому целесообразно указать те места, где примерно находится минимальное расстояние. Здесь мы укажем на два признака, имеющие место также для кометы Даниэля, которую мы в дальнейшем будем исследовать.

Если взаимная наклонность плоскостей орбит кометы и астероида J достаточно большая, то точки орбит P_1^0 и P_2^0 , расстояние между которыми является минимальным, находятся вблизи линии узлов, так как перигелийные расстояния орбит кометы и астероида сравнительно большие.

Большую практическую выгоду дает также переход на систему координат, помещенную в плоскости орбиты кометы. В таком случае линия узлов, т.е. место, где примерно находится минимальное расстояние, определяется автоматически:

$$\begin{aligned} v_1 &= -\Pi \quad \text{или для нисходящего узла} \quad v_1 = \pi - \Pi, \\ v_1' &= -\Pi' \quad \text{или для нисходящего узла} \quad v_1' = \pi - \Pi', \end{aligned} \quad (1)$$

где Π и Π' — расстояния перигелиев от линии узлов, v' , v — истинные аномалии кометы и астероида /см.рис. 1/

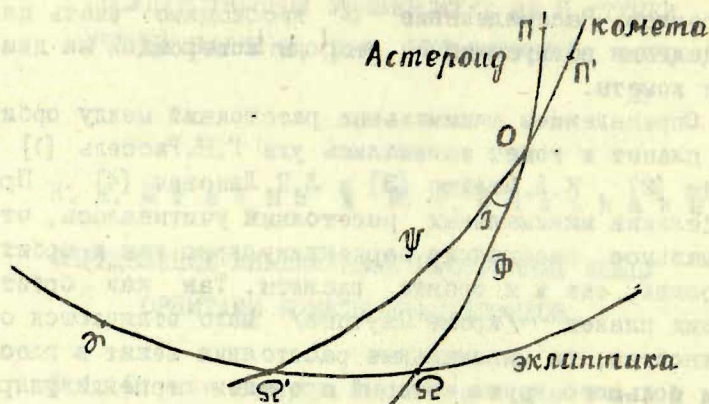


Рис. 1

Элементы взаимного расположения орбит астероидов и кометы находим по общим формулам:

$$\begin{aligned} \sin \frac{J}{2} \sin \frac{\Psi + \Phi}{2} &= \sin \frac{\Omega - \Omega'}{2} \sin \frac{i + i'}{2}, \\ \sin \frac{J}{2} \cos \frac{\Psi + \Phi}{2} &= \cos \frac{\Omega - \Omega'}{2} \sin \frac{i - i'}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \sin \frac{\Psi - \Phi}{2} &= \sin \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i + i'}{2}, \\ \cos \frac{J}{2} \cos \frac{\Psi - \Phi}{2} &= \cos \frac{\Omega - \Omega'}{2} \cos \frac{i - i'}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где Ω , Ω' — долготы восходящих узлов над эклиптической, i , i' — наклонность орбит над эклиптической, Ψ и Φ — отрезки орбит астероида и кометы, заключенные между точкой узла на эклиптике Ω и Ω' и точкой пересечения орбит O . Из уравнений (2) находим величину взаимной наклонности плоскостей J орбит кометы и астероида. При чем

$$\begin{aligned} \Pi &= \omega - \Phi, \\ \Pi' &= \omega' - \Psi, \end{aligned}$$

где ω и ω' — долготы перигелиев.

Если же J имеет небольшие значения, то точки P_1^0 и P_2^0 можно приблизительно найти, считая, что обе орбиты находятся в одной общей плоскости и приближен-

ные параметры минимального расстояния определяются следующим образом. Допустим, что в этой плоскости орбиты пересекаются. Тогда в точке пересечения орбит $\frac{1}{q} = \frac{1}{q'}$, где q — радиус орбиты астероида и q' — радиус орбиты кометы, которые определяем по следующим формулам:

$$q = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \quad (3)$$

$$q' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e'\cos v'}. \quad (4)$$

Значит, в случае $J \approx 0$

$$\frac{1+e\cos v}{a(1-e^2)} = \frac{1+e'\cos v'}{a'(1-e'^2)} \quad (5)$$

и если считать, что орбиты заданы в эклиптической системе координат, то

$$v + \omega + \Omega = v' + \omega' + \Omega'.$$

Вычислим для этой точки приближенные величины v и v' . Исходя из формулы (5), получим

$$\frac{1+e\cos v}{a(1-e^2)} = \frac{1+e'\cos(v+\omega+\Omega-\omega'-\Omega')}{a'(1-e'^2)}.$$

Вводим следующее обозначение $\omega - \omega' + \Omega - \Omega' = \Delta\tilde{\omega}$, тогда

$$-\frac{e\cos v}{a(1-e^2)} + \frac{e'\cos(v+\Delta\tilde{\omega})}{a'(1-e'^2)} = -\frac{e\cos v}{a(1-e^2)} +$$

$$+ \frac{e'}{a'(1-e'^2)} [\cos v \cos \Delta\tilde{\omega} - \sin v \sin \Delta\tilde{\omega}] =$$

$$= \left[-\frac{e}{a(1-e^2)} + \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \cos \Delta\tilde{\omega} \right] \cos v - \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \sin \Delta\tilde{\omega} \sin v,$$

или

$$\frac{\frac{1}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a'(1-e'^2)}}{-\frac{e}{a(1-e^2)} + \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \cos \Delta \tilde{\omega}} = \cos \vartheta - \frac{\frac{e' \sin \Delta \tilde{\omega}}{a'(1-e'^2)}}{-\frac{e}{a(1-e^2)} + \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \cos \Delta \tilde{\omega}} \sin \vartheta \quad (6)$$

Если введем обозначение

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{e' \sin \Delta \tilde{\omega}}{a'(1-e'^2)}}{-\frac{e}{a(1-e^2)} + \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \cos \Delta \tilde{\omega}},$$

то формулу (6) можно переписать следующим образом

$$\frac{\frac{1}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a'(1-e'^2)}}{-\frac{e}{a(1-e^2)} + \frac{e'}{a'(1-e'^2)} \cos \Delta \tilde{\omega}} \cos \alpha = \cos(\alpha + \vartheta) = \beta. \quad (7)$$

После чего по формуле (1) легко найти величины истинных аномалий ϑ , ϑ' . Переходя на систему координат в плоскости кометы, имеем

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \arccos \beta - \alpha & \text{или} & & \vartheta_2 &= -\arccos \beta - \alpha, \\ \vartheta'_1 &= \Pi - \Pi' + \vartheta_1 & \text{или} & & \vartheta'_2 &= \Pi - \Pi' + \vartheta_2. \end{aligned} \quad (8)$$

§ 2. Метод одного параметра

В нашем случае ни орбиту кометы, ни орбиту астероида в общем нельзя считать окружностью. Поэтому мы выводим формулы для определения точки, где перпендикулярная плоскость к орбите кометы пересекает орбиту астероида. При выводе этих формул предполагаем, что плоскость системы координат помещена в плоскости орбиты кометы, а ось x -ов направлена по линии узлов; начало координат находится в центре Солнца. Минимальное расстояние между орбитами L к обеим орбитам, следовательно, его можно искать среди перпенди-

куляров к касательной орбиты астероида. Условие перпендикулярности можно записать как скалярное произведение двух векторов - направляющего вектора касательной орбиты и вектора $\vec{P}_1^0 \vec{P}_2^0$:

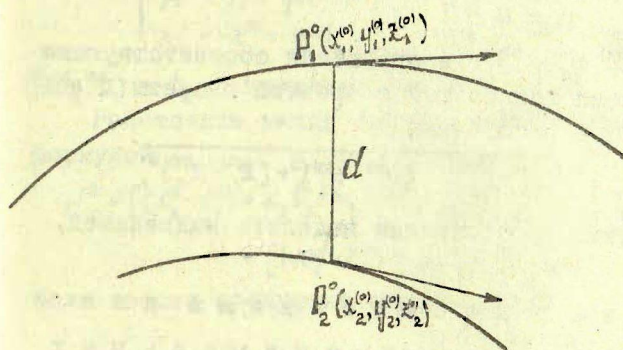


Рис. 2

$$\alpha_1(\eta \cos u - x_2^{(0)}) + \beta_1(\eta \sin u \cos J - y_2^{(0)}) + \gamma_1 \eta \sin u \sin J = 0, \quad (9)$$

$$u = v + \Pi,$$

где $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)} \neq 0)$ - точка орбиты кометы, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ - направляющие косинусы касательной астероида в точке P_1 .

Уравнение (9) после замены η^{-1} на $\mu^{-1}[1 + e \cos(u - \Pi)]$ напомним в следующем виде:

$$A \sin u + B \cos u = C, \quad (10)$$

где

$$A = \beta_1 \mu \cos J - \alpha_1 x_2^{(0)} e \sin \Pi - \beta_1 y_2^{(0)} e \sin \Pi + \gamma_1 \mu \sin J,$$

$$B = \alpha_1 \mu - \alpha_1 x_2^{(0)} e \cos \Pi - \beta_1 y_2^{(0)} e \cos \Pi,$$

$$C = \alpha_1 x_2^{(0)} + \beta_1 y_2^{(0)}.$$

В равенстве (10) имеется только один неизвестный параметр u . После введения обозначения

$$\tan \alpha = \frac{B}{A}$$

уравнение (10) принимает следующий вид

$$\sin(\alpha + \mu) = \frac{C}{A} \cos \alpha,$$

откуда легко найти μ , а следовательно и ν , так как

$$\nu = \mu - \Pi.$$

Меняя точку $(x_2^{(n)}, y_2^{(n)}, z_2^{(n)})$ и определяя соответствующие точки пересечения плоскостей с орбитой планеты $(x_1^{(n)}, y_1^{(n)}, z_1^{(n)})$ и соответствующие расстояния

$$d = \sqrt{(x_1^{(n)} - x_2^{(n)})^2 + (y_1^{(n)} - y_2^{(n)})^2 + (z_1^{(n)} - z_2^{(n)})^2},$$

можно между этими расстояниями выделить наименьшее.

§ 3. Метод касательных для определения минимальных расстояний между орбитами

В методе одного параметра отыскивание минимального расстояния при помощи небольшого шага в одну или в другую сторону от найденной вначале точки требует много машинного времени, поэтому нами был разработан новый более эффективный метод. Так как для астероидов значения больших полуосей орбит в среднем равны 3.0 а.е. и эксцентриситеты небольшие, то достаточно большую дугу можно аппроксимировать касательной. Нами предлагаемый метод состоит в том, что определяются минимальные расстояния между касательными вместо минимальных расстояний между орбитами. За первое приближение берут указанные в § 1 значения истинной аномалии. Так как первое приближение может оказаться недостаточно точным, то точки на касательных, соответствующие минимальному расстоянию, проецируются на орбиты и проводится второе приближение и т.д. Метод проверен на практике и оказался весьма эффективным.

Пусть в точке орбиты астероида $(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ направляющие косинусы есть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Соответствующие данные для кометы $(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Уравнения касательных

тельных, проведенных в точках $P_1^0(x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)})$ и $P_2^0(x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)})$, следующие

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + \alpha_1 t_1, & \begin{cases} x_2 = x_2^{(0)} + \alpha_2 t_2, \\ y_2 = y_2^{(0)} + \beta_2 t_2, \\ z_2 = z_2^{(0)} + \gamma_2 t_2, \end{cases} \end{cases} \quad (11)$$

где t_1 и t_2 — произвольные параметры.

Расстояние между точками определяется следующей формулой

$$d_o^2 = [(x_2^{(0)} - x_1^{(0)}) + \alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1]^2 + [(y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) + \beta_2 t_2 - \beta_1 t_1]^2 + [(z_2^{(0)} - z_1^{(0)}) + \gamma_2 t_2 - \gamma_1 t_1]^2. \quad (12)$$

Если ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} (d^0)^2 &= (x_2^{(0)} - x_1^{(0)})^2 + (y_2^{(0)} - y_1^{(0)})^2 + (z_2^{(0)} - z_1^{(0)})^2, \\ d_1 &= \alpha_1 (x_2^{(0)} - x_1^{(0)}) + \beta_1 (y_2^{(0)} - y_1^{(0)}) + \gamma_1 (z_2^{(0)} - z_1^{(0)}), \\ d_2 &= \alpha_2 (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) + \beta_2 (y_1^{(0)} - y_2^{(0)}) + \gamma_2 (z_1^{(0)} - z_2^{(0)}), \\ \delta &= \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2, \end{aligned} \quad (13)$$

то (12) примет более простой вид, т.е.

$$d_o^2 = (d^0)^2 - 2t_2 d_2 - 2t_1 d_1 - 2t_1 t_2 \delta + t_1^2 + t_2^2. \quad (14)$$

Чтобы найти t_1 и t_2 для минимального расстояния, продифференцируем (12) по t_1 и t_2 и приравняем нулю

$$\frac{d(d_o^2)}{dt_1} = -2d_1 - 2t_2 \delta + 2t_1 = 0,$$

$$\frac{d(d_o^2)}{dt_2} = -2d_2 - 2t_1 \delta + 2t_2 = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{d_1 + d_2 \delta}{1 - \delta^2}, \quad t_2 = \frac{d_2 + d_1 \delta}{1 - \delta^2}, \quad (15)$$

Подставляя выражения (15) в (14), находим, что

$$d_o^2 = (d^o)^2 - \frac{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2\delta}{1 - \delta^2}. \quad (16)$$

Если подставить значения t_1 и t_2 из (15) в (11), то получим координаты точек на касательной, которые будут необходимы в следующем, т.е. первом приближении. Эти координаты обозначим через x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 . В нулевом приближении координаты точек орбит $x_1^{(0)}, y_1^{(0)}, z_1^{(0)}$; $x_2^{(0)}, y_2^{(0)}, z_2^{(0)}$, которые входят в формулы (11), можно определить по значениям элементов орбит и значению истинной аномалии v по общепринятым формулам [5]:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned} \quad (17)$$

где $u = v + \omega$.

Если ось x -сов, как мы указали в § 1, направить по прямой узлов и плоскость орбиты кометы совместить с плоскостью xy , то для астероида

$$\begin{aligned} x_1^{(0)} &= r \cos u, \\ y_1^{(0)} &= r \sin u \cos J, \\ z_1^{(0)} &= r \sin u \sin J, \end{aligned} \quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v}, \quad (18_1)$$

а для кометы

$$\begin{aligned} x_2^{(0)} &= r' \cos u', \\ y_2^{(0)} &= r' \sin u', \\ z_2^{(0)} &= 0, \end{aligned} \quad r' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e' \cos v'}. \quad (18_2)$$

В выражениях (11) и (12) необходимо знать также направляющие косинусы касательных как к орбите кометы, так и к орбите планеты. Займемся их определением.

Как известно, если линия дана при помощи параметрических уравнений

$$x = \xi(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t),$$

то направляющий вектор касательной к линии будет

$$\vec{\eta} = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\}.$$

В нашем случае направляющий вектор касательной к орбите, заданной уравнениями (18), будет

$$\vec{\eta}_v = \left\{ \frac{dx}{dv}, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right\}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= -r \sin u + r \frac{e \sin v \cos u}{1 + e \cos v}, \\ \frac{dy}{dv} &= r \cos u \cos J + r \frac{e \sin v \sin u \cos J}{1 + e \cos v}, \\ \frac{dz}{dv} &= r \cos u \sin J + r \frac{e \sin v \sin u \sin J}{1 + e \cos v}. \end{aligned} \quad (20)$$

Направляющие косинусы вектора (19) будут

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

где

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

Так как

$$\frac{ds}{dv} = \frac{r}{1 + e \cos v} \sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}$$

и вводя следующие обозначения

$$A = \frac{1 + e \cos v}{\sqrt{1 + 2e \cos v + e^2}}, \quad A_1 = \frac{e \sin v}{a(1 - e^2)},$$

находим, что

$$\begin{aligned}\alpha &= A (A_1 x - \sin u), \\ \beta &= A (A_1 y + \cos u \cos J), \\ \gamma &= A (A_1 z + \cos u \sin J).\end{aligned}\quad (21)$$

Если первое приближение недостаточно точно, то необходимо провести второе приближение. Для этого устанавливаем, который из направляющих косинусов касательной имеет по абсолютной величине наибольшее значение, по этому значению определяем Δv , т.е. находим истинную аномалию для точки касания во втором приближении. Пусть α имеет наибольшее абсолютное значение. Тогда, так как

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dv}}{\frac{ds}{dv}} = \frac{dx}{dv} \frac{A}{r},$$

или, заменяя дифференциалы на разности, соответствующие первому и нулевому приближению, получим

$$\Delta v = v_1 - v_0 = \frac{A}{r} \frac{x_1 - x_0}{\alpha}.$$

Значит, для нахождения следующего α , проводим касательную в точке, у которой

$$v_2 = v_0 + \Delta v.$$

Процесс последовательных приближений продолжаем до тех пор, пока достигнем необходимую точность, т.е. пока

$$|\alpha_n - \alpha_{n+1}| < \varepsilon.$$

§ 4. Каталог минимальных расстояний между орбитой кометы Даниэля и орбитами астероидов

Нами были определены минимальные расстояния d между средней орбитой кометы Даниэля, т.е. орбитой с элементами $\Omega = 70^\circ$, $i = 20^\circ$, $\omega = 7^\circ$, $\varphi = 35^\circ$, $a = 3,6$ а.е. и орбитами всех астероидов из помещенных в "Эфемериды малых планет на 1969 г." [6] с соответствующими элементами. Кроме d на быстро действующей электронно-вычислительной машине вычислены следующие данные: $\cos \theta$ — косинус угла между скоростью малой планеты v_p и относительной скоростью кометы v_k' , скорость малой планеты v_p и относительная скорость кометы v_k' . В каталог помещены данные для малых планет, у которых минимальные расстояния $d < 0,15$ а.е. Оказалось, что в каталог входят данные 42 комет. Так как для определения соударений v_p , v_k' и $\cos \theta$ не играет роли, а при оценке возмущений со стороны малых планет на движение кометы эти величины надо знать весьма приближенно, то количество 42 вполне достаточно. Что же касается минимальных расстояний, то их распределение играет самую существенную роль при рассмотрении вышеупомянутых вопросов. Однако нас интересует распределение при очень малых значениях d , но такое имеет лишь одна планета, т.е. 1942 ЕС, у которой $d = 0,0014$. Таким образом, введение большего числа астероидов в каталог нецелесообразно. С другой стороны, отсутствие очень малых значений для минимальных расстояний определяет точность для d .

Результаты вычислений проверялись другими известными методами определения кратчайших расстояний между орбитами. И.П.Лазович [4] предложил метод определения минимального расстояния d между двумя эллиптическими орбитами и, применяя этот метод к паре известных астероидов 589 *Croatia* и 1564 *Srbija*, опре-

делил наименьшее расстояние ρ между астероидами $\rho = 0,0005$ а.е. Чтобы проверить результаты и тем самым наш метод, мы использовали эти же элементы орбит и получили кратчайшее расстояние между орбитами $d = 0,0005$ а.е.

Таблица 1

№	Название	d	φ_p	φ'_κ	$\cos \theta$
6	Hebe	0.1123	0.0136	0.0075	-0.0132
18	Melpomene	0.1291	0.0141	0.0077	0.0347
148	Gallia	0.1407	0.0087	0.0065	-0.0904
183	Istria	0.1261	0.0143	0.0076	-0.2278
234	Barbara	0.1050	0.0136	0.0092	-0.1235
286	Iclea	0.1475	0.0093	0.0066	0.2720
290	Bruna	0.1315	0.0145	0.0069	0.0869
357	Ninina	0.1245	0.0088	0.0061	-0.1682
391	Jungeborg	0.1418	0.0145	0.0099	0.2334
413	Erbus ja	0.1349	0.0149	0.0075	-0.1491
482	Petrina	0.1496	0.0103	0.0081	-0.3573
593	Titania	0.1223	0.0121	0.0044	0.1151
652	Jubilatrix	0.1378	0.0122	0.0035	-0.0108
667	Denise	0.0471	0.0098	0.0063	-0.1981
705	Erminia	0.1481	0.0097	0.0069	-0.1854
719	Albert	0.0476	0.0160	0.0701	0.0228
747	Winchester	0.1106	0.0139	0.0061	-0.0580
751	Faina	0.1358	0.0125	0.0056	0.0321
780	Armenia	0.0599	0.0090	0.0069	0.0321
781	Kantvelia	0.0899	0.0076	0.0074	-0.2810
791	Ani	0.0343	0.0088	0.0075	0.0578
907	Rhoda	0.1334	0.0085	0.0067	0.1215
909	Ulla	0.0410	0.0082	0.0077	-0.0576
1019	Strackea	0.1471	0.0123	0.0093	-0.1015
1025	Riema	0.1150	0.0119	0.0094	-0.0294
1036	Ganymed	0.0782	0.0166	0.0102	-0.0424
1104	Syringa	0.1129	0.0152	0.0061	0.0742
1127	Mimi	0.1056	0.0137	0.0059	0.0643

№	Название	d	r_p	r_k	$\cos \Theta$
1139	<i>Atami</i>	0.1222	0.0160	0.0093	-0.1574
1143	<i>Odysseus</i>	0.0910	0.1070	0.0033	0.0410
1170	<i>Siva</i>	0.0946	0.0135	0.0062	0.1263
1192	<i>Prisma</i>	0.1092	0.0146	0.0082	-0.1481
1235	<i>Schorla</i>	0.1233	0.0127	0.0066	0.1027
1303	<i>Luthera</i>	0.0451	0.0088	0.0064	-0.2107
1310	<i>Villigera</i>	0.1224	0.0155	0.0067	-0.1295
1318	<i>Neuha</i>	0.1127	0.0130	0.0098	-0.1520
1345	<i>Potomac</i>	0.1107	0.0081	0.0042	-0.3910
1357	<i>Khama</i>	0.1499	0.0084	0.0055	-0.1210
1362	<i>Grigua</i>	0.0511	0.0132	0.0064	-0.2082
1620	<i>Geographos</i>	0.0299	0.0118	0.0095	0.2760
1627	<i>Ivar</i>	0.1387	0.0133	0.0103	-0.1160
1656	1942 EC	0.0014	0.0132	0.0096	-0.0550

§ 5. Зависимость минимальных расстояний от элементов орбиты кометы и их изменения

В настоящем параграфе будет найдена зависимость минимального расстояния между орбитами кометы и планеты d в явном виде, как функция от большой полуоси и эксцентриситета орбиты кометы.

В связи с этим разлагаем координаты планеты /индекс 1/ и координаты кометы /индекс 2/ в ряд Тейлора так, чтобы в выражении для квадрата расстояния были учтены все малые члены второго порядка включительно, предполагая, что точки, между которыми — расстояние минимальное, удалены от линии узлов на малые расстояния первого порядка. Разложение ведем, считая за исходное положение линию нисходящего узла, т.е.

$$u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = \pi.$$

Координаты Юпитера и кометы рассмотрим в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= r_1 \cos u_1, & x_2 &= r_2 \cos u_2, \\ y_1 &= r_1 \sin u_1 \cos J, & y_2 &= r_2 \sin u_2, \\ z_1 &= r_1 \sin u_1 \sin J, & z_2 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где r_i — радиус вектор, $u_i = \vartheta_i + \omega_i$, ϑ_i — истинная аномалия, J — наклон плоскости орбиты планеты к плоскости кометы, ω_i — долгота перигелия, считаемая от узла, через который проходит ось X .

Для разложения координат планеты имеем следующие формулы:

$$x_1 = x_1^{(0)} + \left(\frac{dr_1}{du_1} \cos u_1^{(0)} - r_1^{(0)} \sin u_1^{(0)} \right) \Delta \vartheta_1 - \frac{1}{2} \frac{(r_1^{(0)})^2}{r_1} \frac{x_1^{(0)}}{r_1^{(0)}} (\Delta \vartheta_1)^2,$$

$$y_1 = \left(\frac{dr_1}{du_1} \sin u_1^{(0)} \cos J + r_1^{(0)} \cos u_1^{(0)} \cos J \right) \Delta \vartheta_1,$$

$$z_1 = \left(\frac{dr_1}{du_1} \sin u_1^{(0)} \sin J + r_1^{(0)} \cos u_1^{(0)} \sin J \right) \Delta \vartheta_1,$$

где индекс „ (0) ” указывает, что за начальное положение считаем точку $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = \pi$. Имея в виду планету Юпитер, можно считать, что $\frac{dr_1}{du_1} = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{(r_1^{(0)})^2}{r_1} \frac{x_1^{(0)}}{r_1^{(0)}} (\Delta \vartheta_1)^2, \\ y_1 &= -r_1^{(0)} \cos J \Delta \vartheta_1, \\ z_1 &= -r_1^{(0)} \sin J \Delta \vartheta_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Орбита Юпитера есть почти окружность, поэтому минимальное расстояние расположено в плоскости большого круга, проведенного перпендикулярно к плоскости Юпитера. Величины u_1 и u_2 на малые величины первого порядка отличаются от π . Следовательно, с точностью до $(\Delta \vartheta_1)^2$ включительно

$$\Delta \vartheta_1 = \Delta \vartheta_2 \cos J.$$

Имеем

$$x_1 = x_1^{(0)} - \frac{1}{2} \frac{(\eta_1^{(0)})^2}{r_1} \frac{x_1^{(0)}}{\eta_1^{(0)}} \cos^2 J (\Delta \vartheta_2)^2,$$

$$y_1 = -\eta_1^{(0)} \cos^2 J \Delta \vartheta_2,$$

$$z_1 = -\eta_1^{(0)} \sin J \cos J \Delta \vartheta_2.$$

Для кометы ($J=0$, $\frac{dr_2}{du_2} \neq 0$)

$$\begin{aligned} x_2 &= x_2^{(0)} - \frac{dr_2}{du_2} \Delta \vartheta_2 + \frac{1}{2} \frac{(\eta_2^{(0)})^2}{r_2} (\Delta \vartheta_2)^2, \\ y_2 &= -\eta_2^{(0)} \Delta \vartheta_2, \quad z_2 = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Квадрат расстояния с точностью до малых величин $(\Delta \vartheta_2)^2$ равен

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1^{(0)} - x_2^{(0)})^2 + 2(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \frac{dr_2}{du_2} \Delta \vartheta_2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \left[\frac{(\eta_2^{(0)})^2}{r_2} - \frac{(\eta_1^{(0)})^2}{r_1} \cos^2 J \right] (\Delta \vartheta_2)^2 + \\ &+ (\eta_1^{(0)} \sin J \cos J)^2 (\Delta \vartheta_2)^2 + \left(\frac{dr_2}{du_2} \right)^2 (\Delta \vartheta_2)^2 + (\eta_2^{(0)} - \eta_1^{(0)} \cos^2 J)^2 (\Delta \vartheta_2)^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Хотя и в формуле (25) численно $x_1^{(0)} \approx x_2^{(0)} \approx \eta_1^{(0)} \approx \eta_2^{(0)}$, однако мы соответствующие упрощения не будем осуществлять, так как наша цель найти $d_0 = d_0(a_2, e_2)$ и от соответствующего выражения взять производную по a_2 и e_2 . Очевидно, что при этом необходимо различать $\eta_1^{(0)}$, которое является постоянной, от $\eta_2^{(0)} = \eta_2^{(0)}(a_2, e_2)$.

Дифференцируя d^2 по $\Delta \vartheta_2$ и приравняв производную нулю, получим

$$\Delta \vartheta_2 = \frac{-(x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \frac{dr_2}{du_2}}{\left(\frac{dr_2}{du_2} \right)^2 + (\eta_2^{(0)} - \eta_1^{(0)} \cos^2 J)^2 + (\eta_1^{(0)} \sin J \cos J)^2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \left[\frac{(\eta_2^{(0)})^2}{r_2} - \frac{(\eta_1^{(0)})^2}{r_1} \cos^2 J \right]}.$$

Подставляя $\Delta \vartheta_2$ в выражение для d^2 , получим для мини-

мального расстояния d_0 следующее выражение

$$d_0 = \pm (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \sqrt{1 - \frac{1}{S} \left[\frac{e_2 a_2 (1+e_2) \sin \omega_2}{1-e_2} \right]^2},$$

где

$$S = \left[\frac{e_2 a_2 (1+e_2) \sin \omega_2}{1-e_2} \right]^2 + (\tau_2^{(0)} - \tau_1^{(0)} \cos^2 J)^2 + \\ + (\tau_1^{(0)} \sin J \cos J)^2 - (x_1^{(0)} - x_2^{(0)}) \left[\frac{(\tau_2^{(0)})^2}{\mu_2} - \frac{(\tau_1^{(0)})^2}{\mu_1} \cos^2 J \right].$$

Подставляя средние значения для кометы Даниэля и Юпитера за промежуток времени с 1909 г. по 1713 г., получаем следующее выражение для d_0

$$d_0 = \pm (5.3 - a_2(1+e_2)) \sqrt{1 - \frac{C}{A}}, \quad (26)$$

где

$$C = \left[\frac{a_2 e_2 (1+e_2) \sin \omega_2}{1-e_2} \right]^2$$

$$A = C + 5.3 \frac{a_2(1+e_2)}{1-e_2} - \frac{a_2^2(1+e_2)^2}{1-e_2} + a_2^2(1+e_2)^2 - 0.2 a_2(1+e_2) + 0.1.$$

Подсчитаем изменение d_0 при постоянном a_1 , т.е. когда $\delta e_2 = -a_2(1-e_2) \delta \frac{1}{a_2}$,

$$\delta d_0 = \pm \left\{ 2 a_2^2 \sqrt{1 - \frac{C}{A}} - \frac{a_2(5.3 - a_2(1+e_2))}{2 A^2 \sqrt{1 - \frac{C}{A}}} [a_2(C'_{a_2} A - A'_{a_2} C) + \right. \\ \left. + (1-e_2)(C'_{e_2} A - A'_{e_2} C)] \right\} \delta \frac{1}{a_2},$$

где

$$C'_{a_2} = 2 a_2 \left(\frac{e_2(1+e_2)\sin\omega_2}{1-e_2} \right)^2,$$

$$C'_{e_2} = \frac{2(1+e_2)(1+2e_2-e_2^2)e_2 a_2^2 \sin^2\omega_2}{(1-e_2)^3},$$

$$A'_{a_2} = C'_{a_2} + 5,3 \frac{1+e_2}{1-e_2} - 2a_2 \frac{(1+e_2)^2}{1-e_2} - 0,2(1+e_2) + 2a_2(1+e_2)^2,$$

$$A'_{e_2} = C'_{e_2} - 11 \frac{a_2 e_2}{(1-e_2)^2} - \frac{a_2^2(1+e_2)(1-3e_2)}{(1-e_2)^2} + 2a_2^2(1+e_2) - 0,2a_2.$$

В результате подстановки численных средних данных для кометы Даниеля, получаем

$$\delta\alpha_0 = \pm 25 \delta \frac{1}{a_2}. \quad (27)$$

Л и т е р а т у р а

1. H. N. Russell. On the origin of periodic comets.
Astronomical Journal, vol. 33, No 7, 48, 1920.
2. G. F a u e t. Bull. Astr. 28. 145 - 171, 1911.
3. К. А. Ш т е й н с. Распределение комет группы Юпитера Ш. Астр.журн. т.9, вып.5, 915, 1962 г.
4. И. П. Л а в о в и ч. Определение кратчайшего расстояния между орбитами астероидов с малым взаимным наклоном. Бюлл. ИТА, т. 11, № 1 /124/, 57. 1967.
5. М. Ф. С у с б о т и н. Введение в теоретическую астрономию. Изд. "Наука" 1968.
6. Эфемериды малых планет на 1969 г. Изд. "Наука" 1968.

K o p s a v i l k u m s

K. S t e i n s u n I. Z a l k a l n e

MINIMĀLO ATTĀLUMU APRĒĶINĀŠANA STARP KOMETAS UN
ASTEROIDU ORBITĀM

Diskutētas viena parametra metodes minimālo attālumu aprēķināšanai starp kometas un asteroidu orbitēm. Dota jauna metode, kurā mazākā attālumā apkārtņē orbitas tiek apmēģinātas ar to tangentēm. Aprēķināti minimālie attālumi 1735 mazām planetēm līdz Daniela kometas orbitai, kā arī leņķi starp kometas un planetu ātrumiem un pašī šie ātrumi.

S u m m a r y

K. S t e i n s a n d I. Z a l k a l n e

DETERMINATION OF MINIMAL DISTANCES BETWEEN ORBITS
OF COMET AND ASTEROIDS

One parameter methods for calculations of minimal distances between orbits of asteroids and a cometary orbit is discussed. New method is derived in which orbits are approximated by their tangents near the points their closest approach. Minimal distances between the mean orbit of Daniel's comet and orbits of 1735 minor planets, as well as the angle between the planets and comet velocities is calculated and the values of them.

УДК 521.4

Упрощенная формула Х.А.Ньютона и оценка ее точности. К.А.Штейнс и И.Э.Залькалне. "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г., том 137, вып.5. 23.

Упрощенная формула Х.А.Ньютона получена при помощи разложения координат в ряды по степеням времени для случая, если точка, масса которой нуль, движется по прямой. Результаты, полученные по этой формуле, отличаются от результатов численного интегрирования на 10%. Учитывая в рядах члены второго порядка, результаты получаются точнее, но появляются новые параметры. Показано, что если на тело действуют силы со стороны другого тела с меньшей массой, то формула Х.А.Ньютона остается в силе, только большая полуось орбиты определяется телом с большей массой. Таблиц - 1, иллюстр.2, библиогр.7 назв.

УДК 523.44

Распределение величин, входящих в формулу Х.А.Ньютона. К.А.Штейнс и И.Э.Залькалне. "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г., том 137, вып.5. 60.

Статистические данные открытых малых планет экстраполированы на все еще не открытые малые планеты и микропланеты. Найдено, что 13 орбит малых планет, у которых минимальные расстояния до орбиты кометы Даниеля меняются в интервале $0 ; , 0,1$ а.е. распределяются по этому интервалу почти равномерно. Равномерное распределение обосновано также теоретически. Распределение малых планет по величине масс определено на основании исследований Г.П.Койпера. Углы между скоростями кометы и малых планет, а также сами скорости меняются сравнительно мало. Таблиц - 3, иллюстр.3. библиогр. 8 назв.

УДК 523.44

Определение минимальных расстояний между орбитами кометы и астероидов. К.А.Штейнс и И.Э.Залькалне, "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г., том 137, вып.5. 74.

Рассмотрены методы одного параметра для определения минимальных расстояний между орбитами кометы и малых планет и указаны эффективные значения для первого приближения. Дан новый метод, в котором в окрестности минимальных расстояний орбиты аппроксимируются касательными. Определены минимальные расстояния до орбиты кометы Даниэля для 1735 малых планет, а также углы между скоростями кометы и малых планет и сами скорости. Найдено минимальное расстояние как функция от элементов орбиты кометы. Таблиц - 1, иллюстр. 2, библиогр. 6 назв.

УДК 523.44

О частоте соударений кометы Даниэля с малыми планетами и микропланетами. К.А.Штейнс и И.Э.Залькалне, "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г. том 137, вып.5. 15.

Частота соударений определена, допуская, что микропланеты неподвижны. Показано, что комета может столкнуться при одном обороте с микропланетой, радиус у которой 2,1 м. При определении частоты соударений допускается, что минимальные расстояния между орбитами кометы и малых планет распределяются равномерно. Определено, что одна из открытых короткопериодических комет могла бы столкнуться с одной из малых планет. Иллюстр. 1, библиогр. 2 назв.

УДК 521.31

Вычисление первоначальных орбит ИСЗ методами минимизации. Л.К.Лауцениекс. "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г., том 137, вып.5. 39.

Вычисление орбит ИСЗ сводится к нахождению абсолютного минимума некоторой функции качества. Вычисления единообразны и позволяют учитывать возмущения, если наблюдения охватывают большую дугу орбиты. Метод иллюстрирован примерами. Таблиц 7, библиогр. 10 назв.

УДК 523.61

О наиболее вероятной эволюции орбиты кометы Даниэля 1909 1У. К.А.Штейнс и И.Э.Залькалне, "Ученые записки Латвийского государственного университета", 1970 г., том 137, вып.5. 3.

Наиболее вероятно предположить, что орбита кометы Даниэля в 1711 году катастрофически изменилась. Спустя много десятков лет комета Даниэля столкнулась с некоторой малой планетой. Чтобы это доказать, определяются изменения негравитационного характера в минимальном расстоянии между кометой и Юпитером для 1711 года, внесенные за промежуток времени от 1909 г. по 1711 г.

С о д е р ж а н и е

1. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалане. О наиболее вероятной эволюции орбиты кометы Даниэля 1909 IV	3
2. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалане. О частоте соударений кометы Даниэля с малыми планетами и микропланетами	15
3. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалане. Упрощенная формула Х. А. Ньютона и оценка ее точности	23
4. Л. К. Лауценекс. Вычисление первоначальных орбит ИСЗ методами минимизации	39
5. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалане. Распределение величин, входящих в формулу Х.А.Ньютона	60
6. К. А. Штейнс и И. Э. Залькалане. Определение минимальных расстояний между орби- тами кометы и астероидов	74

C o n t e n t s

1. K. S t e i n s and I. Z a ĭ k a l n e. On the most probable evolution of the orbit of Daniel's comet 1909 IV	3
2. K. S t e i n s and I. Z a ĭ k a l n e. On the Daniel's comet collisional frequency with asteroids and microasteroids	15
3. K. S t e i n s and I. Z a ĭ k a l n e. Simplification of H.A. Newton's formula and estimation of its precision	23
4. L. L a u t s e n i e k s. Determination of preliminary orbits of AES by methods of minimization	39
5. K. S t e i n s and I. Z a ĭ k a l n e. Distributions of quantities containing in H.A. Newton's formula	60
6. K. S t e i n s and I. Z a ĭ k a l n e. Determination of minimal distances between orbits of comet and asteroids	74

ИРРЕГУЛЯРНЫЕ СИЛЫ В ДВИЖЕНИИ КОМЕТ

Ученые записки, т. м 137

Редактор Э. Кауцуп

Корректор Р. Кихель

Подписано к печати 19/X 1970 ЯТ 04247 Зак. № 684.
 Ф/б 60x84/16. Писчая № I. Физ. п. д. 6,3. Уч.-и. л 4,5.
 Тираж 500 экз. Цена 46 коп.

Отпечатано на ротационной машине, г. Рига-Ц, бульв. Райниса, 19
 Латвийский государственный университет им. Петра Стучки.

LU bibliotēka



200021058

PT-75
137

ЦЕНА 48 коп.