LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

LINEĀRĀS PROGRAMMĒŠANAS PIEEJA PSEIDOLINEĀRU OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMU RISINĀŠANAI

MAĢISTRA DARBS

Autors: **Reinis Lāma**
Studenta apliecības Nr.: rl11040
Darba vadītājs: prof. Svetlana Asmuss

RĪGA 2017

ANOTĀCIJA

Darbs ir veltīts optimizācijas problēmām ar dažādām pseidolineārām nosacījumu sistēmām un to risināšanas algoritmiem. Ir aprakstīts, kā atrast lineāras nosacījumu sistēmas, kas ir ekvivalentas dotām pseidolineārām nosacījumu sistēmām. Ir atrastas lineāras nosacījumu sistēmas, kuras ir ekvivalentas maksimuma-minimuma, maksimuma-reizinājuma un maksimuma-t-normas nosacījumu sistēmām ar dažām t-normām. Piedāvātā metode ir ilustrēta ar piemēriem.

Atslēgvārdi: optimizācijas uzdevums, summas-minimuma nosacījumi, maksimuma-minimuma nosacījumi, maksimuma-reizinājuma nosacījumi, maksimuma-t-normas nosacījumi, lineārā programmēšana

ABSTRACT

The thesis is devoted to optimizing an objective function subject to pseudo-linear inequality constraints. A way of finding linear inequality constraints which are equivalent to the given pseudo-linear inequality constraints is described and used to find equivalent linear constraints for pseudo-linear constraints with max-min, max-product and max-t-norm composition for some t-norms. The proposed technique is ilustrated by numerical examples.

Keywords: optimization problem, addition-min constraints, max-min constraints, max-product constraints, max-t-norm constraints, linear programming

SATURS

IEVADS

Lineārās programmēšanas uzdevums matemātikā pazīstams jau ļoti ilgu laiku un ir izstrādāti efektīvi algoritmi tā risināšanai. Protams, ne visus procesus var viegli aprakstīt ar lineārām sistēmām. Šajā darbā turpināsim bakalaura darbā [1] aplūkoto tēmu un aplūkosim optimizācijas uzdevumus ar dažādām nosacījumu sistēmām, kuras pēc uzbūves ir līdzīgas lineārās programmēšanas uzdevuma nosacījumiem, bet summas un reizinājuma operācijas vietā tiek izmantotas t-konormas un t-normas. Šādus uzdevumus matemātikā aplūko jau kopš 20. gadsimta 70-ajiem gadiem, kad tos pirmo reizi aprakstījis Sančezs (*E. Sanchez*) [2]. Kopš tā laika matemātiķi pievērsuši daudz uzmanības šāda tipa uzdevumiem. Literatūrā visbiežāk tiek izmanotota maksimuma t-konorma, jo tieši šai t-konormai ir visvairāk praktisko lietojumu. Savukārt par t-normu parasti izmantota minimuma t-norma vai reizinājuma t-norma, bet dažkārt arī Lukasieviča t-norma vai vājā t-norma. 2014. gadā Fangs (*S.-J. Fang*) aplūkoja optimizācijas uzdevumu ar summas-minimuma nosacījumiem, kurš apraksta bieži izmantoto vienādranga tīkla (*peer-to-peer*, turpmāk, P2P) datu pārraides modeli. Šādas nosacījumu sistēmas atrisinājumu kopai ir būtiski atšķirīgas īpašības nekā iepriekš minētajām t-normām un t-konormām.

Lai arī pseidolineārie optimizācijas uzdevumi pēc uzbūves ir līdzīgi lineārās programmēšanas uzdevumam, to īpašības ir ļoti atšķirīgas atkarībā no nosacījumu veida, līdz ar to lineārās programmēšanas uzdevumu risināšanas algoritmus tiešā veidā šīm sistēmām nelieto. Šajā darbā aplūkosim dažādus pseidolinārus optimizācijas uzdevumus un ar elementārām metodēm atradīsim tiem ekvivalentus lineārās programmēšanas uzdevumus.

Pirmajā nodaļā aplūkosim t-normas un t-konormas definīcijas un piemērus, kā arī aplūkosim augstāk minēto optimizācijas uzdevumu izpētes vēsturi. Otrajā nodaļā pievērsīsimies optimizācijas uzdevumam ar summas-minimuma nosacījumu sisēmu un atradīsim tai ekvivalentu lineārās programmēšanas uzdevumu. Trešajā nodaļā aplūkosim optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-minimuma nosacījumiem un tam ekvivelento uzdevumu ar lineāriem nosacījumiem. Ceturtajā nodaļā apskatīsim optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem un atradīsim šiem nosacījumiem ekvivalentus lineārus nosacījumus. Savukārt piektajā nodaļā apskatīsim optimizācijas uzdevumus ar maksimuma-t-normas nosacījumiem, par t-normu ņemot Lukasieviča un vājās t-normas un atradīsim arī šiem uzdevumiem ekvivalentus uzdevumus ar lineārām nosacījumu sistēmām. Sestajā nodaļā aplūkosim izvēlēto t-normu un t-konormu ietekmi uz pseidolineāra optimizācijas uzdevuma plānu kopu.

1. PSEIDOLINEĀRI OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMI

Pseidolineāri optimizācijas uzdevumi, lai arī pēc izskata vienkārši, var būt ļoti grūti atrisināmi. Tāpat arī vispārīgā definīcija atļauj pašai uzdevumu klasei būt visnotaļ plašai, tādēļ arī pseidolineāriem optimizācijas uzdevumiem ir pielietojumi dažādās nozarēs un dažādu problēmu risināšanai, sākot no cilvēku uzvedības prognozēšanas un lēmumu pieņemšanas līdz pat datu pārraides modeļiem globālajā tīmeklī. Šajā nodaļā iezīmēsim pseidolineāro optimizācijas uzdevumu biežāk apskatītos veidus un veiksim nelielu ieskatu dažādu veidu uzdevumu risināšanas algoritmu attīstībā un lietojumos.

Pirmajā apakšnodaļā aplūkosim dažas pamatdefinīcijas un pamatīpašības, kas ir nepieciešamas šajā darbā. Tālākajās apakšnodaļās aplūkosim pseidolineāru optimizācijas uzdevumu īpašus gadījumus: otrajā apakšnodaļā – uzdevumu ar maksimuma-t-normas nosacījumu sistēmu; trešajā apakšnodaļā – optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-minimuma nosacījumiem; ceturtajā apakšnodaļā – optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem, bet piektajā apakšnodaļā – optimizācijas uzdevumu ar summas-minimuma nosacījumiem.

1.1. Pamatdefinīcijas

Šajā darbā tiek aplūkota lineārās programmēšanas pieeja pseidolineāriem optimizācijas uzdevumiem, līdz ar to ir dabiski, ka sāksim tieši ar šo terminu definīcijām.

1. definīcija. Lineārs programmēšanas uzdevums.

Uzdevumu minimizēt vai maksimizēt lineāru funkciju f pie lineāru nevienādību un vienādību nosacījumu sistēmas sauc par lineāru programmēšanas uzdevumu.

Ir zināms, ka katru lineārās programmēšanas uzdevumu ir iespējams reducēt uz problēmu šādā formā:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

kur $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\} : a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ un $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ir lineāra funkcija.

Ja koeficienti a_{ij} un b_i ir nenegatīvi, nosacījumus ir iespējams normēt, tādējādi panākot, ka $a_{ij} \in [0,1]$ un $b_i \in [0,1]$.

Lai definētu pseidolineāru optimizācijas uzdevumu, no sākuma mums nepieciešams definēt t-normu un t-konormu. Sekojošajām definīcijām, izmantosim [3] un [4].

2. definīcija. t-norma.

Funkciju $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sauc par t-normu, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) $\forall x, y \in [0,1] \quad T(x,y) = T(y,x);$

2) $\forall x, y, z \in [0,1] \quad y \leq z \Longrightarrow T(x,y) \leq T(x,z);$

3) $\forall x, y, z \in [0,1] \quad T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z);$

4) $\forall x \in [0,1] \quad T(x,1) = x.$

Definēsim dažas biežāk lietotās t-normas.

3. definīcija. Minimuma t-norma.

Funkciju

$$T_M(x,y) = x \wedge y,$$

kur $x \wedge y \coloneqq \min\{x,y\}$ sauc par minimuma t-normu.

4. definīcija. Reizinājuma t-norma.

Funkciju

$$T_P(x,y) = xy,$$

sauc par reizinājuma t-normu.

5. definīcija. Lukasieviča t-norma.

Funkciju

$$T_L(x,y) = (x + y - 1) \vee 0,$$

kur $a \vee b = \max\{a,b\}$,sauc par Lukasieviča t-normu.

6. Definīcija. Fodora t-norma.

Funkciju

$$T_F(x,y) = \begin{cases} x \wedge y, ja\ x + y > 1 \\ 0, ja\ x + y \leq 1 \end{cases}$$

sauc par Fodora t-normu.

7. definīcija. Vājā t-norma.

Funkciju

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x, ja\ y = 1 \\ y, ja\ x = 1 \\ 0, ja\ x \vee y < 1 \end{cases}$$

sauc par vājo t-normu.

8. definīcija. Arhimēda t-norma.

Par Arhimēda t-normu sauc tādu t-normu T, kurai izpildās Arhimēda īpašība:

$$\forall x, y \in]0,1[\ \ \exists k \in \mathbb{N}:\ \ T\Big(\underbrace{x, x, \dots, x}_{k\ reizes}\Big) < y,$$

kur $T(x, x, \dots, x) = T(T(\dots T(T(x, x), x), \dots, x), x)$.

9. definīcija. t-konorma.

Funkciju $S: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ sauc par t-konormu, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) $\forall x, y \in [0,1] \quad S(x, y) = S(y, x)$;

2) $\forall x, y, z \in [0,1] \quad y \le z \Rightarrow S(x, y) \le S(x, z)$;

3) $\forall x, y, z \in [0,1] \quad S\big(x, S(y, z)\big) = S(S(x, y), z)$;

4) $\forall x \in [0,1] \quad S(x, 0) = x$.

Definēsim dažas biežāk lietotās t-konormas.

10. definīcija. Summas t-konorma.

Funkciju

$$S_L(x, y) = (x + y) \wedge 1$$

sauc par summas t-konormu.

11. definīcija. Maksimuma t-konorma.

Funkciju

$$S_M(x, y) = x \wedge y$$

sauc par maksimuma t-konormu.

12. definīcija. Saistītas t-normas un t-konormas.

t-normu T un t-konormu S sauc par saistītām, ja

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Tagad, kad esam definējuši t-normas un t-konormas, varam definēt pseidolineāru optimizācijas uzdevumu.

13. definīcija. Pseidolineārs optimizācijas uzdevums.

Optimizācijas uzdevumu

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

$$\begin{cases} (a_{11} \otimes x_1) \oplus (a_{12} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{1n} \otimes x_n) \ge b_1, \\ (a_{21} \otimes x_1) \oplus (a_{22} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{2n} \otimes x_n) \ge b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \otimes x_1) \oplus (a_{m2} \otimes x_2) \oplus \dots \oplus (a_{mn} \otimes x_n) \ge b_m, \end{cases}$$

kur $\otimes$ ir t-norma un $\oplus$ ir t-konorma, sauc par pseidolineāru optimizācijas uzdevumu.

Turpmākajā darbā pieņemsim, ka

1) ir zināmi skaitļi m un n, ar I apzīmēsim kopu $I \coloneqq \{1, 2, \dots, m\}$, ar J apzīmēsim kopu $J \coloneqq \{1, 2, \dots, n\}$;

2) nosacījumu sistēmas koeficienti pieder intervālam [0,1], t.i.,

$$\forall i \in I \; \forall j \in J \; a_{ij} \in [0,1] b_i \in (0; 1];$$

3) katram $j \in J$ $x_j \in [0,1]$.

Šādā veidā varam pierakstīt vispārīgu pseidolineāru optimizācijas uzdevumu. Tā kā šādu vispārīgu uzdevumu ir ļoti sarežģīti izpētīt, nav iegūti nozīmīgi rezultāti vai uzdevuma risināšanas algoritmi vispārīgam gadījumam. Vēl jo vairāk, atkarībā no izvēlētajām t-normām un t-konormām, nosacījumu sistēmas atrisinājumu kopa var būt vai nebūt izliekta. Līdz ar to pārsvarā tiek pētīti uzdevumi, kuros tiek aplūkoti uzdevumi ar konkrētu t-normu vai t-konormu. Parasti tiek aplūkoti pseidolineāru optimizācijas uzdevumi, ņemot konkrētu t-konormu. Visvairāk izpētītie uzdevumi ir uzdevumi, kuros tiek izmantota maksimuma t-konorma. Atsevišķos gadījumos ir aplūkoti arī uzdevumi, kuros izmantota summas t-konorma. Ņemot vērā izvirzīto nosacījumu, ka $b_i \in [0,1]$, summas t-konorma reducējas uz saskaitīšanu. Bieži, lai varētu veikt detalizētu analīzi un izveidot uzdevuma risināšanas algoritmu, nepieciešams izvēlēties arī konkrētu t-normu. Pārsvarā literatūrā tiek aplūkoti uzdevumiar minimuma t-normu vai reizinājuma t-normu, bet dažkārt arī uzmanību tiek pievērsta uzdevumiem ar citām plaši izmantotām t-normām, piemēram, Lukasieviča t-normu vai vājo t-normu.

1.2. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-t-normas nosacījumiem

Lai varētu attīstīt pseidolineāru optimizācijas uzdevumu risināšanas algoritmus, bieži tiek izvēlēta konkrēta t-konorma, kas atvieglo uzdevuma risināšanu. Visbiežāk izmantotā t-konorma, kas arī atbilst visplašākajam praktisko pielietojumu klāstam, ir maksimuma t-konorma, kā rezultātā nonākam pie optimizācijas uzdevuma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$
$$\begin{cases} (a_{11} \otimes x_1) \vee (a_{12} \otimes x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \otimes x_n) \geq b_1, \\ (a_{21} \otimes x_1) \vee (a_{22} \otimes x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \otimes x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \otimes x_1) \vee (a_{m2} \otimes x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \otimes x_n) \geq b_m, \end{cases}$$

kur $\otimes$ ir t-norma.

Viens no galvenajiem rezultātiem šādiem uzdevumiem ir, ka nosacījumu sistēmas ar maksimuma-t-normas nosacījumiem atrisinājumu kopa var nebūt izliekta un to var aprakstīt ar vienu maksimālo atrisinājumu un galīgu skaitu minimālajiem atrisinājumiem, kas pamatots rakstos [5] un [6]. Lins (*J. L. Lin*) rakstā [7] parāda, ka problēmas ar maksimuma-t-normas nosacījumiem, kur t-norma ir Arhimēda t-norma, ir sarežģītības ziņā ekvivalentas pārklāšanas problēmai, tātad tās ir NP-grūtas.

Literatūrā ir aplūkoti dažādi praktiski uzdevumi lietojot dažādas t-normas. Rakstos [8]-[11] aplūkots uzdevums ar nepārtrauktu t-normu vienādību nosacījumu sistēmu un tā lietojumi attēlu saspiešanā, piemēram, rakstā [11] attēls tiek sadalīts apgabalos un katrs apgabals tiek saspiests, izmantojot t-normu. Darba rezultātā, tiek izdarīts secinājums, ka šādam attēlu saspiešanas modelim, visprecīzāk atbilst Lukasieviča t-norma. Rakstā [12] katrs vienas krāsas attēls tiek aplūkots kā pseidolineāra sistēma, kur ievades parametri ir normalizētas pikseļu vērtības. Citi lietojumi, uzdevuma īpašības un risināšanas algoritmi aplūkoti rakstos [13]-[16].

Šī darba piektajā nodaļā piedāvāsim veidu kā maksimuma-t-normas nosacījumu sisēmai uzrakstīt ekvivalentu lineāru nosacījumu sistēmu, kur par t-normu izmanto Lukasieviča t-normu un vājo t-normu.

1.3. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-minimuma nosacījumiem

Lai arī optimizācijas uzdevumi ar maksimuma-t-normas nosacījumiem ir vieglāk risināmi, arī šiem uzdevumiem ir grūti izveidot spēcīgus risināšanas algoritmus, kā rezultātā bieži tiek izvēlēta arī konkrēta t-norma. Literatūrā visbiežāk lietotā t-norma ir minimuma t-norma, ko lietot šķiet ļoti dabīgi kā ar maksimuma t-konormas saistīto t-normu. Līdz ar to nonākam pie šāda optimizācijas uzdevuma:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$
$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) \geq b_1, \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) \geq b_m. \end{cases} \tag{2}$$

No pseidolineārajiem optimizācijas uzdevumiem tieši uzdevums ar maksimuma-minimuma nosacījumu sistēmu ir literatūrā visvairāk aplūkotais uzdevums. Kopš Fangs (*S.-C. Fang*) un Li (*G. Li*) 1999. gadā rakstā [17] parādīja veidu, kā optimizācijas uzdevumam ar lineāru mērķa funkciju un maksimuma-minimuma vienādību nosacījumu sistēmu atrast ekvivalentu 0-1 diskrētu programmēšanas uzdevumu, kas pēc tam tiek risināts ar sazarošanās un robežu algoritmu, tieši šāda pieeja tiek izmantota kā pirmā, lai risinātu uzdevumus ar šo nosacījumu sistēmu un dažādām mērķa funkcijām. Arī uzdevumam ar lineāru mērķa funkciju reti tiek meklēti jauni algoritmi, bet vairāk tieši uzlabots sākotnēji izveidotais algoritms. Tā, piemēram, 2002. gadā Vu (*Y.-K. Wu*), Gu (*S.-M. Guu*) un Liu (*J. Y.-C. Liu*) [18] uzlaboja Fanga (*S.-C. Fang*) un Li (*G. Li*) izstrādāto metodi algoritma aprēķinos pievienojot augšējo robežu. Savukārt 2005. gadā Vu (*Y.-K. Wu*) un Gu (*S.-M. Guu*) rakstā [19] uzlaboja izmantoto augšējo robežu, tādējādi vēl nedaudz samazinot algoritma darbības laiku. Uzdevumi ar maksimuma-minimuma nosacījuma sistēmu ir plaši aplūkoti literatūrā – aplūkoti daudzi lietojumi, kā arī ir plašs rakstu klāsts ar dažādām īpašībām un algoritmiem atkarībā no mērķa funkcijām, piemēram, [20]-[25].

Šī darba ceturtajā nodaļā aplūkosim vienu no praktiskajiem lietojumiem optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-minimuma nosacījumiem, kā arī Fanga (*S.-C. Fang*) un Li (*G. Li*) 1999. gadā izstrādāto algoritmu šādas problēmas risināšanai. Pēc tam tiks piedāvāts veids, kā optimizācijas uzdevumu pārveidot lineārā programmēšanas uzdevumā, un aplūkoti piemēri, kas ilustrēs pārveidojumus.

1.4. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem

Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-minimuma nosacījumiem atbilst konservatīvai situācijai, t.i., kāda augsta vērtība nevar kompensēt citu zemu vērtību. Dzīvē bieži šāda kompensācija ir daļēji pieļaujama, tādēļ atsevišķas situācijās maksimuma-minimuma nosacījumus aizstāj ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem, iegūstot:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \qquad (3)$$

Šādi nosacījumi atļauj daļēji kompensēt zemu a_{ij} vērtību palielinot atbilstošo x_j vērtību, lai varētu izpildīt atbilstošo nosacījumu.

Loetamonfongs (*J. Loetamonphong*), Fangs (*S.-C. Fang*) 1999. gadā [26], līdzīgi kā uzdevumam ar maksimuma-minimuma nosacījuma sistēmu, aprakstīja, kā uzdevumam ar lineāru mērķa funkciju un maksimuma-reizinājuma vienādību nosacījumu sistēmu atrast ekvivalentu 0-1 diskrētu programmēšanas uzdevumu. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-reizinājuma nosacījumu sistēmu ir ļoti līdzīgs iepriekš apskatītajiem uzdevumiem ar maksimuma-minimuma nosacījumiem. Tieši šī iemesla dēļ lielākā daļa no literatūrā pieejamās informācijas ir dažādi praktiski lietojumi un situācijās, ar pamatojumiem, kādēļ maksimuma-reizinājuma nosacījuma sistēma atbilstošo situāciju apraksta precīzāk nekā maksimuma-minimuma sistēma, piemēram, raksti [27]-[31].

Darba trešajā nodaļā aplūkosim vienu no praktiskajiem lietojumiem optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-reizinājuma nosacījumu sistēmu. Aplūkosim Loetamonfonga (*J. Loetamonphong*) un Fanga (*S.-C. Fang*) [26] piedāvāto algoritmu šādas sistēmas atrisināšanai, ja mērķa funkcija ir lineāra funkcija, kā arī piedāvāsim lineāru nosacījumu sistēmu, kas ir ekvivalenta maksimuma-reizinājuma nosacījumu sistēmai.

1.5. Optimizācijas uzdevums ar summas-minimuma nosacījumiem

Viens no visjaunākajiem pseidolineārajiem optimizācijas uzdevumiem, kas apskatīts literatūrā, ir uzdevums ar summas-minimuma nosacījumiem, t.i.,

$$
F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow min
$$

$$
\begin{cases}
(a_{11} \wedge x_1) + (a_{12} \wedge x_2) + \dots + (a_{1n} \wedge x_n) \geq b_1, \\
(a_{21} \wedge x_1) + (a_{22} \wedge x_2) + \dots + (a_{2n} \wedge x_n) \geq b_2, \\
\dots \\
(a_{m1} \wedge x_1) + (a_{m2} \wedge x_2) + \dots + (a_{mn} \wedge x_n) \geq b_m.
\end{cases} \tag{4}
$$

Pirmie, kas aplūkoja šāda veida pseidolineāru optimizācijas uzdevumu, bija Li (*J.-X. Li*) un Jangs (*S.-J. Yang*), kuri 2012. gadā [32] un 2014. gadā [33] aprakstīja P2P datu pārraides modeli un parādīja, ka šis modelis atbilst summas-minimuma nosacījumu sistēmai. Pieņemot, ka datu pārraides rezultātā radušās izmaksas atbilst lineārai funkcijai, tiek piedāvāts risināšanas algoritms. Piedāvātajā algoritmā nosacījumu sistēmai tiek atrasti pseidominimālie indeksi un pēc tam katram no šiem indeksiem tiek sastādīts atbilstošs lineārās programmēšanas uzdevums. Atrisinot visus lineārās programmēšanas uzdevumus un izvēloties labāko no atrisinājumiem, tiek iegūts sākotnējas problēmas atrisinājums. Vēlāk, 2015. gadā Jangs (*X.-P. Yang*), Cao (*B.-Y. Cao*) un Žu (*X.-G. Zhou*) aplūkoja līdzīgu uzdevumu, bet mainot mērķa funkciju. Rakstā [34] šie autori aplūko daudzlīmeņu optimizācijas uzdevumu, kur katrā līmenī tiek optimizēts viens no mainīgajiem. Aprakstītais algoritms ļauj minimizēt mainīgo vērtības izvēlētā secībā. Šāds modelis atbilstu situācijai, kurā ir būtiski ne tikai samazināt visu mainīgo vērtības, bet samazināt konkrētas vērtības, piemēram, visnoslogotākos iesaistītos P2P datu pārraides modelī. Jangs (*X.-P. Yang*), Žū (*X.-G. Zhou*) un Cao (*B.-Y. Cao*) 2016. gadā [35] aplūkoja uzdevumu ar mērķa funkciju, kura pierakstīta maksimuma-minimuma formā, t.i., uzdevumā tiek minimizēta lielākā no mainīgo vērtībām, tādējādi pieprasot, lai katram no iesaistītajiem P2P datu apmaiņā atrastu viszemāko nepieciešamo datu pārraides līmeni, ar kuru tiek izpildītas visas pārraides prasības. Savukārt Gu (*S.-M. Guu*), Vu (*Y.-K. Wu*) [36] piedāvā veidu kā summas-minimuma nosacījumu sistēmai atrast ekvivalentu lineāru sistēmu līdz ar to pārveidojot uzdevumu ar summas-minimuma nosacījumiem un lineāru mērķa funkciju par lineāru programmēšanas uzdevumu.

Otrajā nodaļā aprakstīsim kā P2P datu pārraides modelis atbilst summas-minimuma nosacījumu sistēmai. Pēc tam aprakstīsim Li (*J.-X. Li*), Janga (*S.-J. Yang*) izmanototo pseidominimālo indeksu pieeju un Gu (*S.-M. Guu*), Vu (*Y.-K. Wu*) izstrādāto algoritmu, kā arī ilustrēsim algoritmu darbību ar piemēriem.

2. OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMS AR SUMMAS-MINIMUMA NOSACĪJUMIEM

Šī nodaļa ir veltīta optimizācijas uzdevumam ar summas-minimuma nosacījumu sistēmu. Pirmajā apakšnodaļā aplūkosim praktisko lietojumu, otrajā apakšnodaļā aprakstīsim pseidominimālo indeksu pieeju šī optimizācijas uzdevuma risināšanai. Savukārt trešajā un ceturtajā apakšnodaļā aplūkosim lineāras programmēšanas pieeju optimizācijas uzdevuma ar summas-minimuma nosacījumiem risināšanai un piemērus, kas ilustrēs nodaļā aprakstīto algoritmu darbību.

2.1. Datu pārraides P2P modelis

Viens no literatūrā aprakstītajiem praktiskajiem lietojumiem optimizācijas problēmai ar summas-minimuma nosacījumiem ir P2P datu pārraides modelis. P2P datu pārraides modelī katrs lietotājs ir reizē klients un serveris, t.i., katrs lietotājs gan saņem, gan pārraida datus citiem lietotājiem. Apskatīsim situāciju, kurā n lietotāji $A_1, A_2, \dots, A_n$ lejupielādē vienu un to pašu datni, izmantojot P2P datu pārraides modeli. Ar b_i apzīmēsim datu pārraides ātrumu, kas nepieciešams, lai i-tais lietotājs saņemtu datni. Lietotājs A_j pārraida datus ar ātrumu x_j. Savukārt datu pārraides ātrumu starp lietotājiem A_i un A_j apzīmēsim ar a_{ij}. Ierobežojumu dēļ, faktiskais datu pārraides ātrums starp lietotājiem A_i un A_j ir $a_{ij} \wedge x_j$. Līdz ar to, lai i-tais lietotājs varētu saņemt datni, ir jāizpildās nosacījumam

$$a_{i1} \wedge x_1 + a_{i2} \wedge x_2 + \dots + a_{ii-1} \wedge x_{i-1} + a_{ii+1} \wedge x_{i+1} + \dots + a_{in} \wedge x_n \geq b_i$$

Lai vienkāršotu pierakstu, nevienādības kreisajai pusei pievienojam $a_{ii} \wedge x_i$, kur $a_{ii} = 0$. Pieprasot, lai m lietotāji saņemtu datni, iegūstam nosacījumu sistēmu

$$\begin{cases} a_{11} \wedge x_1 + a_{12} \wedge x_2 + \dots + a_{1n} \wedge x_n \geq b_1, \\ a_{21} \wedge x_1 + a_{22} \wedge x_2 + \dots + a_{2n} \wedge x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \wedge x_1 + a_{m2} \wedge x_2 + \dots + a_{mn} \wedge x_n \geq b_m. \end{cases} \tag{5}$$

Lai arī P2P modelis ir ļoti efektīvs datu pārraides modelis, pārraidot lielus datu apjomus, piemēram, dažādu sporta sacensību tiešraidēs, var rasties interneta pārslodze. Līdz ar to, lai optimāli izmantotu interneta resursus un pēc iespējas izvairītos no tīkla pārslodzes, tiek risināts optimizācijas uzdevums. Tā kā mums ir nepieciešams, lai visi lietotāji varētu saņemt datni, tad optimizācijas uzdevumu nosacījumu sistēma būs sistēma (5). Savukārt mērķa funkcija ir funkcija F, kas raksturotu interneta noslodzi atkarībā no katra lietotāja datu pārraides ātruma $x_j, j \in J$. Līdz ar to, iegūstam šādu optimizācijas modeli

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow min$$

$$\begin{cases} a_{11} \wedge x_1 + a_{12} \wedge x_2 + \cdots + a_{1n} \wedge x_n \geq b_1, \\ a_{21} \wedge x_1 + a_{22} \wedge x_2 + \cdots + a_{2n} \wedge x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \wedge x_1 + a_{m2} \wedge x_2 + \cdots + a_{mn} \wedge x_n \geq b_m. \end{cases}$$

2.2. Janga pseidominimālo indeksu algoritms

Pirmo algoritmu šāda optimizācijas uzdevuma risināšanai piedāvāja S.-J. Jangs. Rakstā [33] Jangs piedāvā pseidominimālo indeksu pieeju, lai risinātu uzdevumu

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow min$$

$$\begin{cases} a_{11} \wedge x_1 + a_{12} \wedge x_2 + \cdots + a_{1n} \wedge x_n \geq b_1, \\ a_{21} \wedge x_1 + a_{22} \wedge x_2 + \cdots + a_{2n} \wedge x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1} \wedge x_1 + a_{m2} \wedge x_2 + \cdots + a_{mn} \wedge x_n \geq b_m, \end{cases} \tag{6}$$

kur $\forall j \in J\ c_j \in \mathbb{R}, c_j > 0$. Metodē no sākuma tiek atrasti pseidominimālie indeksi, tad katram no pseidominimālajiem indeksiem tiek sastādīts atbilstošais lineāras programmēšanas uzdevums, kura atrisinājums apmierina uzdevuma (6) nosacījumus. Problēmas (6) atrisinājums tiek iegūts ņemot labāko no atrisinājumiem, kas atrasts lineārajiem programmēšanas uzdevumiem.

Jangs izmanto īpašību, ka, ja nosacījumu sistēmai eksisē atrisinājums x, tad ir spēkā nevienādības

$$\forall i \in I, \forall j \in J\ \ x_j \geq b_i - \sum_{k \in J \setminus \{j\}} a_{ik} \wedge x_k \geq b_i - \sum_{k \in J \setminus \{j\}} a_{ik}, \tag{7}$$

šādi ierobežojot katru x_j no apakšas. Pēc tam tiek izveidoti vektori D_j, kas satur pēc formulas (7) iegūto x_j apakšējo robežu un visas a_{ij} vērtības, kas ir lielākas par šo apakšējo robežu. Pie tam vērtības ir sakārtotas augošā secībā. Indeksu vektoram $i_J = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ atbilstošais vērtību vektors ir $d(i_J) = (D_1(i_1), D_2(i_2), \dots, D_n(i_n))$.

14. definīcija.

Indeksu vektoru $\hat{\imath}^* = (\hat{\imath}_1^*, \hat{\imath}_2^*, \dots, \hat{\imath}_n^*)$ sauc par pseidominimālu indeksu, ja atbilstošais vektors $d(\hat{\imath}^*)$ apmierina uzdevuma (6) nosacījumus, bet visiem $i_J^* = (i_1^*, i_2^*, \dots\ i_n^*)$ $d(i_J^*)$ neapmierina uzdevuma (6) nosacījumus, kur $\forall j \in J\ i_j^* < \hat{\imath}_j^*$,

Līdz ar to, katram pseidominimālam indeksam varam izveidot atbilstošo uzdevumu, uzdevuma (6) nosacījumu sistēmai pievienojot nosacījumus

$$\forall j \in J\ \ x_j \leq d_j(\hat{\imath}^*),$$

$$\forall j \in J\ \ x_j \geq d_j(i^*),$$

kur $\hat{\imath}^*$ ir pseidominimālais indekss, bet $i^* = (\hat{\imath}_1^* - 1, \hat{\imath}_2^* - 1, \dots, \hat{\imath}_n^* - 1)$, šeit, ja $\hat{\imath}_j^* = 1$, tad ņemam $i_j^* = 1$. Izmantojot papildu nosacījumus, varam $\forall i \in I\ \ \forall j \in J$ noteikt $a_{ij} \wedge x_j = a_{ij}$ vai $a_{ij} \wedge x_j = x_j$, līdz ar to nosacījumu sistēma kļūst lineāra. Tātad katram pseidolineārājam indeksam atbilstošais uzdevums ir lineāras programmēšanas uzdevums. Rakstā [33] arī pamatots, ka uzdevuma (6) atrisinājums, ir arī kāds no atbilstošo pseidolineāro uzdevumu atrisinājumiem, līdz ar to, aplūkojot visus pseidolineāros uzdevumus, un izvēlētos labāko atrisinājumu, iegūsim arī uzdevuma (6) atrisinājumu.

Janga piedāvātajam algoritmam ir vairāki trūkumi. Pirmkārt, ir nepieciešams atrast visus pseidominimālos indeksus, kas pats par sevi jau ir diezgan ilgs process. Otrkārt, katram no atrastajiem pseidolineārajiem indeksiem jārisina atbilstošos lineārās programmēšanas uzdevumus, līdz ar to uzdevuma risināšana var paņemt ievērojamus resursus.

Aplūkosim piemēru, kas ilustrēs algoritma darbību:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0{,}5 \wedge x_1 + 1 \wedge x_2 \geq 1; \\ 1 \wedge x_1 + 0{,}2 \wedge x_2 \geq 0{,}6; \\ 0{,}8 \wedge x_1 + 0{,}5 \wedge x_2 \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{8}$$

No sākuma, izmantojot (7), varam aprēķināt mainīgo x_j apakšējās robežas. Redzams, ka

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 - 1 = 0; \\ x_1 \geq 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}4; \\ x_1 \geq 0{,}5 - 0{,}8 = -0{,}3; \\ x_2 \geq 1 - 0{,}5 = 0{,}5; \\ x_2 \geq 0{,}6 - 1 = -0{,}4; \\ x_2 \geq 0{,}5 - 0{,}5 = 3. \end{cases}$$

Tātad $x_1 \geq 0{,}4$ un $x_2 \geq 0{,}5$. Līdz ar to varam sastādīt vektorus $D_1 = (0{,}4; 0{,}5; 0{,}8; 1)$ un $D_2 = (0{,}5; 1)$. Līdz ar to varam izveidot indeksu vektorus:

$$i_J^1 = (1{,}1), i_J^2 = (1{,}2), i_J^3 = (2{,}1),$$
$$i_J^4 = (2{,}2), i_J^5 = (3{,}1), i_J^6 = (3{,}2),$$
$$i_J^7 = (4{,}1), i_J^8 = (4{,}2),$$

un atbilstošos

$$d\left(i_J^1\right) = (0{,}4; 0{,}5), d\left(i_J^2\right) = (0{,}4; 1), d\left(i_J^3\right) = (0{,}5; 0{,}5), d\left(i_J^4\right) = (0{,}5; 1),$$
$$d\left(i_J^5\right) = (0{,}8; 0{,}5), d\left(i_J^6\right) = (0{,}8; 1), d\left(i_J^7\right) = (1; 0{,}5), d\left(i_J^8\right) = (1; 1).$$

Redzams, ka tikai $d\left(i_J^1\right)$ neapmierina sistēmas (8) nosacījumus. Līdz ar to, vienīgais pseidominimālais indekss būs $i^* = (2{,}2)$ un tam atbilstošais uzdevums ir:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0{,}5 \wedge x_1 + 1 \wedge x_2 \geq 1; \\ 1 \wedge x_1 + 0{,}2 \wedge x_2 \geq 0{,}6; \\ 0{,}8 \wedge x_1 + 0{,}5 \wedge x_2 \geq 0{,}5\,; \\ 0{,}4 \leq x_1 \leq 0{,}5; \\ 0{,}5 \leq x_2 \leq 0{,}8. \end{cases}$$

Šo uzdevumu, izmantojot pievienotās nevienādības, varam pārveidot:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1; \\ x_1 + 0{,}2 \geq 0{,}6; \\ x_1 + x_2 \geq 0{,}5; \\ 0{,}4 \leq x_1 \leq 0{,}5; \\ 0{,}5 \leq x_2 \leq 0{,}8. \end{cases}$$

Atrisinot šo lineāro programmēšanas uzdevumu, iegūstam problēmas atrisinājumu $x^* = (0{,}5; 0{,}5)$ un optimālo vērtību $f^* = 3{,}5$. Kā redzam, tad pat piemērā, kur $n = 2$ un $m = 3$ veicamie aprēķini ir visnotaļ apjomīgi, tādēļ aplūkosim lineārās programmēšanas pieeju šim uzdevumam.

2.3. Lineārās programmēšanas pieeja

Gu (*S.-M. Guu*) un Vu (*Y.-K. Wu*) [36] piedāvā lineārās programmēšans pieeju uzdevuma ar summas-minimuma nosacījumiem risināšanai. Izmantojot elementārus pārveidojumus, summas-minimuma sistēmai tiek atrasta ekvivalenta lineāra nosacījumu sistēma. Līdz ar to, nav nepieciešams meklēt pseidominimālos indeksus un risināt katram no tiem atbilstošo lineāro uzdevumu, bet pietiek atrisināt vienu lineāru uzdevumu ar lielāku mainīgo skaitu.

Aplūkosim vienu nosacījumu sistēmas (4) nosacījumu

$$a_{i1} \wedge x_1 + a_{i2} \wedge x_2 + \cdots + a_{in} \wedge x_n \geq b_i. \tag{9}$$

Nevienādību (9) varam pārrakstīt kā

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \geq b_i, \tag{10}$$

kur $z_{ij} \leq a_{ij} \wedge x_j, j \in J$, ko savukārt varam pārrakstīt kā nosacījumus

$$\begin{cases} z_{ij} \leq a_{ij}, j \in J, \\ z_{ij} \leq x_j, j \in J. \end{cases} \tag{11}$$

Ņemot vērā (10) un (11), varam optimizācijas uzdevumu (4) pārrakstīt kā

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \geq b_i, i \in I, \\ z_{ij} \leq a_{ij}, j \in J, i \in I, \\ z_{ij} \leq x_j, j \in J, i \in I. \end{cases} \tag{12}$$

Ja funkcija $F(x)$ ir lineāra funkcija, tad optimizācijas uzdevums (12) ir lineārs programmēšanas uzdevums. Pierādīsim, ka no optimizācijas uzdevuma (12) atrisinājuma var iegūt arī optimizācijas uzdevuma (4) atrisinājumu.

1. teorēma.[36]

Ja (x^*, z^*), kur $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ un $z^* = (z_{ij}^*)_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$, ir optimizācijas uzdevuma (12) atrisinājums, tad x^* ir arī problēmas (4) atrisinājums.

Pierādījums.[36]

Pirmkārt, ievērosim, ka $\forall i \in I \;\; \forall j \in J$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij}^* \geq b_i,$$
$$z_{ij}^* \leq x_j^* \wedge a_{ij}.$$

Līdz ar to

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \wedge x_j^* \geq \sum_{i=1}^{n} z_{ij}^* \geq b_i,$$

kas nozīmē, ka x^* apmierina optimizācijas uzdevuma (4) nosacījumus un atliek parādīt, ka x^* ir arī optimizācijas uzdevuma atrisinājums. Pieņemsim pretējo, t.i., $\exists y^* = (y_j^*)_{j \in J}$ tāds, ka $F(y^*) < F(x^*)$. Definēsim $t = (t_{ij})_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$, kur $t_{ij} = a_{ij} \wedge y_j^*$. Skaidrs, ka (y^*, t) ir problēmas (12) atrisinājums. Tā kā $F(y^*) < F(x^*)$, tad x^* vairs nav problēmas (12) atrisinājums, kas ir pretruna ar doto. Līdz ar to x^* ir arī optimizācijas uzdevuma (4) atrisinājums.

Līdz ar to esam atraduši lineāru optimizācijas uzdevumu, kas ir ekvivalents ar optimizācijas uzdevumu ar summas-minimuma nosacījumiem. Aplūkosim piemēru, kuru jau risinājām iepriekš ar pseidominimālo indeksu algoritmu:

$$f = 3x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 0{,}5 \wedge x_1 + 1 \wedge x_2 \geq 1; \\ 1 \wedge x_1 + 0{,}2 \wedge x_2 \geq 0{,}6; \\ 0{,}8 \wedge x_1 + 0{,}5 \wedge x_2 \geq 0{,}5. \end{cases}$$

Izmantojot (10)-(12), varam šo uzdevumu pārrakstīt:

$$f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} z_{11} + z_{12} \geq 1; \\ z_{21} + z_{22} \geq 0{,}6; \\ z_{31} + z_{32} \geq 0{,}5; \\ z_{11} \leq 0{,}5; z_{21} \leq 1; z_{31} \leq 0{,}8; \\ z_{12} \leq 1; z_{22} \leq 0{,}2; z_{32} \leq 0{,}5; \\ z_{11} \leq x_1; z_{12} \leq x_1; z_{13} \leq x_1; \\ z_{21} \leq x_2; z_{22} \leq x_2; z_{23} \leq x_2. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu ar MATLAB, iegūstam atrisinājuma vektoru

$$(x^*, z^*) = (0{,}5; 0{,}5; 0{,}5; 0{,}5; 0{,}4227; 0{,}1773; 0{,}3655; 0{,}2827)$$

un optimālo vērtību

$$f^* = 3{,}5.$$

Redzam, ka iegūtais atrisinājums sakrīt ar rezultātu, ko ieguvām, izmantojot pseidominimālo indeksu algoritmu.

3. OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMS AR MAKSIMUMA-REIZINĀJUMA NOSACĪJUMIEM

Šī nodaļa ir veltīta optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-reizinājuma nosacījumu sistēmu izpētei. Pirmajā apakšnodaļā aplūkosim praktisko lietojumu, otrajā apakšnodaļā aprakstīsim visbiežāk izmantoto algortimu šāda optimizācijas uzdevuma risināšanai. Trešajā apakšnodaļā piedāvāsim lineāras programmēšanas pieeju optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem risināšanai, bet ceturtajā apakšnodaļā – piemērus, kas ilustrēs nodaļā aprakstīto algoritmu darbību.

3.1. Bezvadu mobilo telekomunikāciju datu pārraides modelis

Viens no šādas sistēmas pielietojumiem ir bezvadu komunikācijas modelī. Pārsvarā tiek izmantots modelis ar vairākiem sakaru torņiem, no kuriem tiek raidīts elektromagnētisks signāls. Jo spēcīgāks ir signāls, jo labāki sakari, bet arī spēcīgāka radiācija, kas kaitē cilvēka veselībai. Līdz ar to mūsu mērķis ir minimizēt signāla stiprumu, pie nosacījuma, ka ir pieejami labi sakari. Pieņemsim, ka mums ir n stacijas $A_1, A_2, \dots, A_n$, kuras raida signālu un atrodas dažādās vietās, un j-tā stacija raidīs signālu ar intensitāti $x_j > 0$. Sakaru kvalitāti nosaka pieejamais signāla stiprums konkrētās vietās. Lai izpildītu sakaru kvalitātes prasības, tiek aplūkotas m testa pozīcijas $B_1, B_2, \dots, B_m$,, kurās tiek pārbaudīts signāla stiprums. Šādā gadījumā signāla stiprumu testa pozīcijā B_i no stacijas A_j apzīmēsim ar r_{ij}. Ir skaidrs, ka signāla stiprums testa pozīcijā B_i būs mazāks vai vienāds ar signāla stiprumu stacijā, bet lielāks par 0, t.i., $\forall j \in \{1,2, \dots, n\}\ \forall i \in \{1,2, \dots, m\}\ r_{ij} \in [0; x_j]$. Patiesībā signāla stiprums testa pozīcijā ir atkarīgs no attāluma līdz stacijai. Vēl jo vairāk, eksistē skaitļi $a_{ij} \in [0; 1]$, ka $r_{ij} = a_{ij}x_j$. Tad elektromagnētiskā signāla intensitāte jeb sakaru kvalitāte testa pozīcijā B_i ir vienāda ar $a_{i1}x_1 \vee a_{i2}x_2 \vee \dots \vee a_{in}x_n$. Lai nodrošinātu kvalitatīvus sakarus, ir nepieciešams, lai sakaru kvalitāte katrā no testa pozīcījām sasniegtu noteiktu līmeni $b_i, i \in I$. Kā rezultātā iegūstam nosacījumus, lai nodrošinātu kvalitātīvus sakarus visās testa pozīcijās:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

Uzdevuma mērķis ir pēc iespējas samazināt potenciālo kaitējumu cilvēka veselībai. Tā kā cilvēka veselībai nodarītais kaitējums ir atkarīgs no elektromagnētiskā signāla intensitātes, varam ieviest no mainīgajiem $x_1, x_2, \dots, x_n$ atkarīgu funkciju, kas aprakstīs, kaitējumu, kas tiek nodarīts cilvēka veselībai. Ņemot vērā, ka ir nepieciešams nodoršināt pietiekami kvalitatīvus mobilos sakarus, tajā pašā laikā pēc iespējas samazinot cilvēka veselībai nodarīto kaitējumu, nonākam pie optimizācijas modeļa:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n \geq b_m. \end{cases}$$

3.2. Problēmas reducēšana uz 0-1 diskrēto problēmu

Rakstā [26] Fangs (*S.-C. Fang*) un Loetamonfongs (*J. Loetamonphong*) piedāvā algoritmu, kā optimizācijas uzdevumu ar lineāru mērķa funkciju un maksimuma-reizinājuma vienādību nosacījumu sistēmu, pārveidot par ekvivalentu diskrētu problēmu. Aplūkosim viņu piedāvāto algoritmu.

Optimizācijas uzdevums, kas tiek risināts rakstā [26], ir

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \in [0,1], j \in J. \end{cases} \tag{13}$$

No sākuma problēma (13) tiek sadalīta divās apakšproblēmās. Lai to izdarītu, $\forall j \in J$ apzīmējam

$$c'_j = \begin{cases} c_j, ja\ c_j \geq 0, \\ 0, ja\ c_j < 0, \end{cases}$$

$$c''_j = \begin{cases} c_j, ja\ c_j < 0, \\ 0, ja\ c_j \geq 0. \end{cases}$$

Apzīmēsim $J' = \{j \in J | c_j \geq 0\}$ un $J'' = \{j \in J | c_j < 0\}$. Acīmredzami, ka $c_j = c'_j + c''_j$. Līdz ar to, lai iegūtu problēmas (13) atrisinājumu, varam risināt problēmu

$$f_1 = c'_1 x_1 + c'_2 x_2 + \dots + c'_n x_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n = b_m, \\ 0 \leq x_j \leq 1, j \in J, \end{cases} \tag{14}$$

un problēmu

$$f_2 = c''_1 x_1 + c''_2 x_2 + \dots + c''_n x_n \to min$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \vee a_{12}x_2 \vee \dots \vee a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 \vee a_{22}x_2 \vee \dots \vee a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \vee a_{m2}x_2 \vee \dots \vee a_{mn}x_n = b_m, \\ 0 \le x_j \le 1, j \in J, \end{cases} \tag{15}$$

un iegūtos atrisinājumus apvienot šādā veidā

$$x_j^* = \begin{cases} x_{1,j}^*, ja\ c_j \ge 0, \\ x_{2,j}^*, ja\ c_j < 0, \end{cases} \tag{16}$$

kur $x_{1,j}^*$ ir problēmas (14) atrisinājuma j-tais elements un $x_{2,j}^*$ ir problēmas (15) atrisinājuma j-tais elements. Rakstā [26] pamatots, ka šādā veidā iegūts vektors $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ ir problēmas (13) atrisinājums. Skaidrs, ka problēmas (15) atrisinājums būs nosacījumu sistēmas maksimālais atrisinājums visām vērtībām $j \in J''$, t.i.,

$$x_{1,j}^* = \bigwedge_{i \in I} (a_{ij} \circledast b_i), \tag{17}$$

kur

$$a_{ij} \circledast b_i = \begin{cases} 1, ja\ a_{ij} \le b_i, \\ b_i / a_{ij}, ja\ a_{ij} > b_i. \end{cases}$$

Līdz ar to, lai atrisinātu problēmu (13), atliek atrisināt probēmu (14).

Lai atrisinātu problēmu (14), tiek ieviesti jauni mainīgie $x_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J$, kuri apraksta, vai $a_{ij}x_j$ tiek izmantoti, lai apmierinātu nosacījumu sistēmu. Izmantojot šos jaunos mainīgos, problēmu (14) var pārrakstīt kā

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n} (c'_j \cdot \bigvee_{i \in I} \frac{b_i}{a_{ij}} x_{ij}) \to min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in I, \forall j \in J, \\ x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i \in I, \forall j \in J, \\ x_{ij} = 0, ja\ j \notin J_i, \end{cases} \tag{18}$$

kur $J_i = \{j \in J | a_{ij} \cdot x_{1,j}^* = b_i\}$. Izmantojot problēmas (18) atrisinājumu, varam iegūt problēmas (14) atrisinājumu:

$$x_{1,j}^* = \bigvee_{i \in I} b_i / a_{ij} \cdot x_{ij}.$$

Aplūkosim piemēru ar tādiem pašiem koeficientiem un mērķa funkciju kā iepriekš summas-minimuma nosacījumu gadījumā, t.i.,

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 \vee x_2 = 1; \\ x_1 \vee 0{,}2x_2 = 0{,}6; \\ 0{,}8x_1 \vee 0{,}5x_2 = 0{,}5. \end{cases} \tag{19}$$

Ievērosim, ka koeficienti c_1 un c_2 ir pozitīvi, līdz ar to problēma nav jāsadala divās apakšproblēmās. Atradīsim nosacījumu sistēmas maksimālo atrisinājumu, izmantojot (17):

$$x_{1,1}^* = (0{,}5 \circledast 1) \wedge (1 \circledast 0{,}6) \wedge (0{,}8 \circledast 0{,}5) = 1 \wedge \frac{0{,}6}{1} \wedge \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}6;$$

$$x_{1,2}^* = (1 \circledast 1) \wedge (0{,}2 \circledast 0{,}6) \wedge (0{,}5 \circledast 0{,}5) = 1/1 \wedge 1 \wedge 1 = 1.$$

Izmantojot atrasto maksimālo atrisinājumu, varam atrast indeksu kopas

$$J_1 = \{2\}, J_2 = \{1\}, J_3 = \{1, 2\}.$$

Līdz ar to, varam pārrakstīt uzdevumu (19):

$$f_3 = 3 \bigvee_{i \in \{1,2,3\}} \frac{b_i}{a_{i1}} x_{i1} + 4 \bigvee_{i \in \{1,2,3\}} \frac{b_i}{a_{i2}} x_{i2} \to min$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1; \\ x_{21} + x_{22} = 1; \\ x_{31} + x_{32} = 1; \\ x_{11} = 0;\ x_{22} = 0; \\ x_{ij} \in \{0{,}1\}. \end{cases}$$

Šo varam vienkāršot, iegūstot

$$f_3 = 3\left(\frac{0{,}6}{1} x_{21} \vee \frac{0{,}5}{0{,}8} x_{31}\right) + 4\left(\frac{1}{1} x_{12} \vee \frac{0{,}5}{0{,}5} x_{32}\right) \to min$$

$$\begin{cases} x_{12} = 1; \\ x_{21} = 1; \\ x_{31} + x_{32} = 1; \\ x_{ij} \in \{0{,}1\}. \end{cases}$$

Izmantojot sazarošanās un robežu algoritmu, mums jāapsakata tikai divi gadījumi:

1) $x_{12} = x_{21} = x_{31} = 1$. Šādā gadījumā

$$f_3 = 3\left(\frac{0{,}6}{1} \vee \frac{0{,}5}{0{,}8}\right) + 4\left(\frac{1}{1}\right) = 5{,}875$$

2) $x_{12} = x_{21} = x_{32} = 1$. Šādā gadījumā

$$f_3 = 3\left(\frac{0{,}6}{1}\right) + 4\left(\frac{1}{1} \vee \frac{0{,}5}{0{,}5}\right) = 5{,}8.$$

Tātad atrisinājums ir $x_{12} = x_{21} = x_{32} = 1$. Tātad problēmas (19) atrisinājums ir

$$x^* = (0{,}6; 1);$$

$$f^* = 5{,}8.$$

3.3. Lineārās programmēšanas pieeja

Optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem un lineāru mērķa funkciju arī ir iespējams atrast ekvivalentu lineāru programmēšanas uzdevumu. Lai to izdarītu, aplūkosim nosacījumu sistēmas (3) vienu nosacījumu:

$$a_{i1}x_1 \vee a_{i2}x_2 \vee \dots \vee a_{in}x_n \geq b_i. \tag{20}$$

Ievērosim, ka ieviešot indikatoru $\forall i \in I \ \forall j \in J \ y_{ij} \in \{0, 1\}$, kas norāda, vai nevienādība $a_{ij}x_j \geq b_i$ izpildās, varam nevienādību (20) pārveidot šādi:

$$\begin{cases} a_{ij}x_j \geq b_i y_{ij}, j \in J, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, \\ y_{ij} \in \{0,1\}, j \in J. \end{cases}$$

Pielietojot šādu pārēju visiem nosacījumiem, varam pārrakstīt optimizācijas uzdevumu (3) kā

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

$$\begin{cases} a_{ij}x_j \geq b_i y_{ij}, j \in J, i \in I, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, i \in I, \\ y_{ij} \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I, \\ y_{ij} \geq 0, y_{ij} \leq 1, \ j \in J, i \in I. \end{cases} \tag{21}$$

Ņemot lineāru mērķa funkciju redzam, ka optimizācijas udevums (21) ir lineārās programmēšanas uzdevums. Pamatosim, ka no problēmas (21) atrisinājuma var iegūt arī problēmas (3) atrisinājumu un otrādi.

2. teorēma.

Ja (x^*, y^*) kur $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ un $y^* = (y_{ij}^*)_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$, ir optimizācijas uzdevuma (21) atrisinājums, tad x^* ir arī problēmas (3) atrisinājums.

Pierādījums.

Ievērosim, ka, ja (x^*, y^*) ir problēmas (21) atrisinājums, tad $\forall i \in I \ \exists j_i \in J : y_{ij_i}^* = 1$. Tātad $a_{ij_i}x_{j_i} \geq b_i$ un $a_{i1}x_1^* \vee a_{i2}x_2^* \vee \dots \vee a_{in}x_n^* \geq b_i$. Tātad x^* apmierina problēmas (3) nosacījumus. Atliek pierādīt, ka x^* ir arī problēmas (3) atrisinājums. Pieņemsim pretējo, t.i., $\exists z^* = (z_j^*)_{j \in J}$ tāds, ka z^* apmierina problēmas (3) nosacījumus un $F(z^*) < F(x^*)$. Tā kā z^* ir problēmas (3) atrisinājums, tad tas apmierina problēmas nosacījumus, tātad $\forall i \in I \ \exists j_i \in J : a_{ij_i}z_{j_i}^* \geq b_i$, līdz ar to, ieviešot vektoru $t = (t_{ij})_{\substack{j \in J \\ i \in I}} = t_{ij} \in \{0,1\} \ \forall i \in I \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1$. Līdz ar to (z^*, t^*) apmierina arī problēmas (21) nosacījumus. Tā kā $F(z^*) < F(x^*)$, tad x^* nav problēmas atrisinājums, kas ir pretrunā ar doto. Tātad x^* ir problēmas (3) atrisinājums.

Lai arī šajā apakšnodaļā aplūkotās problēmas nosacījumu sistēma satur nevienādības, ekvivalentus pārveidojumus var veikt arī gadījumā, ja nosacījumu sistēma satur vienādības. Aplūkosim piemēru ar līdzīgiem koeficientiem kā iepriekš:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 \vee x_2 \geq 1; \\ x_1 \vee 0{,}2x_2 \geq 0{,}6; \\ 0{,}8x_1 \vee 0{,}5x_2 \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{22}$$

Uzdevumu (22) varam pārrakstīt kā

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$
$$\begin{cases} 0{,}5x_1 \geq y_{11}; \\ x_2 \geq y_{12}; \\ x_1 \geq 0{,}6y_{21} \\ 0{,}2x_2 \geq 0{,}6y_{22} \\ 0{,}8x_1 \geq 0{,}5y_{31}; \\ 0{,}5x_2 \geq 0{,}5y_{32}; \\ y_{11} + y_{12} \geq 1; \\ y_{21} + y_{22} \geq 1; \\ y_{31} + y_{32} \geq 1; \\ y_{ij} \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Risinot šo uzdevumu ar MATLAB iebūvēto procedūru *inlinprog* iegūstam atrisinājumu un optimālo vērtību

$$(x^*, y^*) = (0{,}6; 1; 0; 1; 1; 0; 0; 1),$$
$$f^* = 5{,}8.$$

Redzam, ka šajā situācijā atrisinājumi optimizācijas uzdevumiem sakrīt. Vispārīgā gadījumā uzdevuma (22) minimālais atrisinājums var dot labāko optimālo vērtību nekā uzdevuma (19) atrisinājums, jo uzdevuma (22) plāna kopa ir plašāka.

4. OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMS AR MAKSIMUMA-MINIMUMA NOSACĪJUMIEM

Šī nodaļa ir veltīta optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-minimuma nosacījumu sistēmu izpētei. Pirmajā apakšnodaļā aplūkosim praktisko lietojumu, otrajā apakšnodaļā aprakstīsim visbiežāk izmantoto algortimu šāda optimizācijas uzdevuma risināšanai. Trešajā apakšnodaļā piedāvāsim lineāras programmēšanas pieeju optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-minimuma nosacījumiem risināšanai, bet ceturtajā apakšnodaļā – piemērus, kas ilustrēs nodaļā aprakstīto algoritmu darbību.

4.1. Datu pārraide, izmantojot trīs pakāpju modeli

Mūsdienās ir pierasts, ka varam tiešraidē skatīties pārraides globālajā tīmeklī. Lai nodrošinātu tiešraides, daudziem lietotājiem bieži tiek izmantots trīs pakāpju pārraides modelis, t.i., tiešraides dati tiek pārraidīti uz serveriem, no kuriem savukārt datus saņem lietotāji.

Pieņemsim, ka mums ir n serveri $A_1, A_2, \dots, A_n$, kuri pārraida datus ar ātrumu x_j, un m lietotāji $B_1, B_2, \dots, B_m$. Interneta pārraides ātrumu ierobežojumu dēļ, maksimālais datu pārraides ātrums starp lietotāju B_i un serveri A_j ir a_{ij}. Lai nodrošinātu nepieciešamo video kvalitāti, lietotājam B_i ir nepieciešams, lai saņemto datu pārraides ātrums būtu ne mazāks kā b_i. Pieņemot, ka dati, kas saņemti no dažādiem serveriem nav apvienojami, lietotāja B_i saņemto datu kvalitāte ir $(a_{i1} \wedge x_1) \vee (a_{i2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge x_n)$. Līdz ar to, lai visi lietotāji saņemtu pietiekami kvalitatīvus datus, ir jāizpildās nosacījumiem, ka

$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) \geq b_1, \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) \geq b_m. \end{cases}$$

Pievienojot iegūtajai nosacījumu sistēmai mērķa funkciju $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kas varētu būt gan izmaksu funkcija, gan serveru noslodzes funkcija, iegūstam optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-minimuma nosacījumiem:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \longrightarrow min$$

$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) \geq b_1, \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) \geq b_m. \end{cases}$$

4.2. Problēmas reducēšana uz 0-1 diskrēto problēmu

Rakstā [17] Fangs (*S.-C. Fang*) un Li (*G. Li*) piedāvā algoritmu, kā optimizācijas uzdevumu ar lineāru mērķa funkciju un maksimuma-minimuma vienādību nosacījumu sistēmu pārveidot uz ekvivalentu diskrētu problēmu. Aplūkosim viņu piedāvāto algoritmu.

Atrisināmais optimizācijas uzdevumus tiek pierakstīts šādi:

$$f = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to min$$
$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) = b_1, \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) = b_2, \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) = b_m, \\ 0 \leq x_j \leq 1, j \in J. \end{cases} \tag{23}$$

No sākuma dotā problēma tiek sadalīta divās apakšproblēmās, atkarībā no koeficientiem c_j. Lai iegūtu šīs apakšproblēmas, $\forall j \in J$ apzīmējam

$$c'_j = \begin{cases} c_j, ja\ c_j \geq 0, \\ 0, ja\ c_j < 0, \end{cases}$$

$$c''_j = \begin{cases} c_j, ja\ c_j < 0, \\ 0, ja\ c_j \geq 0. \end{cases}$$

Apzīmēsim $J' = \{j \in J | c_j \geq 0\}$ un $J'' = \{j \in J | c_j < 0\}$. Acīmredzami, ka $c_j = c'_j + c''_j$. Līdz ar to, lai iegūtu problēmas (23) atrisinājumu, varam risināt problēmas

$$f_1 = c'_1 x_1 + c'_2 x_2 + \cdots + c'_n x_n \to min$$
$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) = b_1 \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) = b_2 \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) = b_m \\ 0 \leq x_j \leq 1, j \in J \end{cases} \tag{24}$$

$$f_2 = c''_1 x_1 + c''_2 x_2 + \cdots + c''_n x_n \to min$$
$$\begin{cases} (a_{11} \wedge x_1) \vee (a_{12} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{1n} \wedge x_n) = b_1 \\ (a_{21} \wedge x_1) \vee (a_{22} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{2n} \wedge x_n) = b_2 \\ \dots \\ (a_{m1} \wedge x_1) \vee (a_{m2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{mn} \wedge x_n) = b_m \\ 0 \leq x_j \leq 1, j \in J \end{cases} \tag{25}$$

un iegūtos atrisinājumus apvienot šādā veidā

$$x_j^* = \begin{cases} x_{1,j}^*, ja\ c_j \geq 0, \\ x_{2,j}^*\ , ja\ c_j < 0, \end{cases} \tag{26}$$

kur $x_{1,j}^*$ ir problēmas (24) atrisinājuma j-tais elements un $x_{2,j}^*$ ir problēmas (25) atrisinājuma j-tais elements. Rakstā [17] pamatots, ka šādā veidā iegūtais atrisinājums $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ ir problēmas (23) atrisinājums. Skaidrs, ka problēmas (25) atrisinājums būs tās maksimālais atrisinājums visām vērtībām $j \in J''$, kas ir viegli atrodams pēc formulas

$$x^*_{1,j} = \bigwedge_{i \in I} (a_{ij} @ b_i), \tag{27}$$

kur

$$a_{ij} @ b_i = \begin{cases} 1, ja\ a_{ij} \le b_i, \\ b_i, ja\ a_{ij} > b_i. \end{cases}$$

Līdz ar to, lai atrisinātu (23), atliek atrisināt probēmu (24).

Lai atrisinātu problēmu (24), tiek ieviesti jauni mainīgie $x_{ij} \in \{0,1\}, i \in I, j \in J$, kuri apraksta, vai $a_{ij} \wedge x_j$ tiek izmantoti, lai apmierinātu nosacījumu sistēmu. Izmantojot šos jaunos mainīgos problēmu (24) var pārrakstīt kā

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n} (c'_j \cdot \bigvee_{i \in I} b_i x_{ij}) \to min$$
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in I, \forall j \in J, \\ x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall i \in I, \forall j \in J, \\ x_{ij} = 0, ja\ j \notin J_i, \end{cases} \tag{28}$$

kur $J_i = \{j \in J | a_{ij} \wedge x^*_{1,j} = b_i\}$. Aplūkosim piemēru, lai ilustrētu algoritma darbību:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$
$$\begin{cases} (0{,}5 \wedge x_1) \vee (1 \wedge x_2) = 1; \\ (1 \wedge x_1) \vee (0{,}2 \wedge x_2) = 0{,}6; \\ (0{,}8 \wedge x_1) \vee (0{,}5 \wedge x_2) = 0{,}5. \end{cases} \tag{29}$$

Līdzīgi kā iepriekš, redzam, ka $c_1 > 0$ un $c_2 > 0$ līdz ar to problēma nav jādala apakšproblēmās. Vispirms atradīsim problēmas (29) maksimālo atrisinājumu:

$$x^*_{1,1} = (0{,}5@1) \wedge (1@0{,}6) \wedge (0{,}8@0{,}5) = 1 \wedge 0{,}6 \wedge 0{,}5/0{,}8 = 0{,}6;$$

$$x^*_{1,2} = (1@1) \wedge (0{,}2@0{,}6) \wedge (0{,}5@0{,}5) = 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1.$$

Tādā gadījumā varam aprēķināt indeksu kopas:

$$J_1 = \{2\}, J_2 = \{1\},\ J_3 = \{1{,}2\}$$

un pārrakstīt uzdevumu

$$f_3 = \sum_{j=1}^{n} (c'_j \cdot \bigvee_{i \in I} b_i x_{ij})$$
$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 1; \\ x_{21} + x_{22} = 1; \\ x_{31} + x_{32} = 1; \\ x_{11} = 0; x_{22} = 0; \\ x_{ij} \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Savukārt šo uzdevumu var vienkāršot un iegūt

$$f_3 = 3 \cdot (0{,}6x_{21} \vee 0{,}5x_{31}) + 4 \cdot (x_{12} \vee 0{,}5x_{32})$$
$$\begin{cases} x_{12} = 1; \\ x_{21} = 1; \\ x_{31} + x_{32} = 1; \\ x_{ij} \in \{0{,}1\}. \end{cases}$$

Izmantojot sazarošanās un robežu algoritmu, mums jāapskata divi gadījumi:

1) $x_{12} = x_{21} = x_{31} = 1$
$$Z = 3 \cdot (0{,}6 \vee 0{,}5) + 4 \cdot (1 \vee 0) = 5{,}8;$$
2) $x_{12} = x_{21} = x_{32} = 1$
$$Z = 3 \cdot (0{,}6 \vee 0) + 4 \cdot (1 \vee 0{,}5) = 5{,}8.$$

Tātad neatkarīgi no x_{31} un x_{32} optimālais atrisinājums nemainās:
$$x^* = (0{,}6; 1), f^* = 5{,}8.$$

4.3. Lineārās programmēšanas pieeja

Optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-minimuma nosacījumiem un lineāru mērķa funkciju arī ir iespējams atrast ekvivalentu lineārās programmēšanas uzdevumu. Aplūkosim vienu no nosacījumu sistēmas (2) nosacījumiem:
$$(a_{i1} \wedge x_1) \vee (a_{i2} \wedge x_2) \vee \dots \vee (a_{in} \wedge x_n) \geq b_i. \tag{30}$$
Ievērosim, ka, ja $a_{ij} < b_i$, tad arī $a_{ij} \wedge x_j < b_i$. Savukārt ja $a_{ij} \geq b_i$, tad $a_{ij} \wedge x_j \geq b_i$ tad un tikai tad, ja $x_j \geq b_i$. Līdz ar to nosacījumu (30) varam aizstāt ar nosacījumiem
$$z_{i1} \vee z_{i2} \vee \dots \vee z_{in} \geq b_i,$$
kur
$$\forall j \in J, z_{ij} = \begin{cases} 0, ja\ a_{ij} < b_i, \\ x_j, ja\ a_{ij} \geq b_i. \end{cases}$$
Savukārt šo nosacījumu, līdzīgi kā iepriekš maksimuma-reizinājuma gadījumā, var pārveidot par
$$\begin{cases} z_{ij} \geq b_i y_{ij}, j \in J, i \in I, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, i \in I, \\ y_{ij} \in \mathbb{Z}, j \in J, i \in I, \\ y_{ij} \geq 0, y_{ij} \leq 1,\ \ j \in J, i \in I, \end{cases}$$
kur
$$\forall j \in J\ \ \forall i \in I\ \ z_{ij} = \begin{cases} 0, ja\ a_{ij} < b_i, \\ x_j, ja\ a_{ij} \geq b_i. \end{cases}$$
Pielietojot šādu pārēju visiem nosacījumiem, varam optimizācijas uzdevumu (2) pārrakstīt kā

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$
$$\begin{cases} z_{ij} \geq b_i y_{ij}, j \in J, i \in I, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, i \in I, \\ y_{ij} \in \mathbb{Z}, \\ y_{ij} \geq 0, y_{ij} \leq 1, j \in J, i \in I, \end{cases} \tag{31}$$

kur

$$\forall j \in J \;\; \forall i \in I \;\; z_{ij} = \begin{cases} 0, ja\ a_{ij} < b_i, \\ x_j, ja\ a_{ij} \geq b_i. \end{cases}$$

Ņemot lineāru mērķa funkciju redzam, ka optimizācijas udevums (31) ir lineārās programmēšanas uzdevums. Pamatosim, ka no problēmas (31) atrisinājuma var iegūt arī problēmas (2) atrisinājumu un otrādi.

3. teorēma.

Ja (x^*, y^*, z^*), kur $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$, $y^* = (y_{ij}^*)_{\substack{j \in J \\ i \in I}}$ un $z^* = (z_{ij}^*)_{\substack{j \in J, \\ i \in I}}$ ir optimizācijas uzdevuma (31) atrisinājums, tad x^* ir arī problēmas (2) atrisinājums.

Pierādījums.

Ievērosim, ka, ja (x^*, y^*, z^*), ir problēmas (31) atrisinājums. Tādā gadījumā

$$\forall i \in I \;\; \exists j_i \in J : y_{ij_i}^* = 1,$$

bet tas nozīmē, ka $x_{j_i}^* \geq z_{ij_i}^* \geq b_i$ un $a_{i1} \wedge x_1^* \vee a_{i2} \wedge x_2^* \vee \dots \vee a_{in} \wedge x_n^* \geq b_i$. Tātad x^* apmierina problēmas (2) nosacījumus. Atliek pierādīt, ka x^* ir arī problēmas (2) atrisinājums. Pieņemsim pretējo, t.i., $\exists u^* = (u_j^*)_{j \in J}$ tāds, ka u^* apmierina problēmas (2) nosacījumus un $F(u^*) < F(x^*)$. Tad $\forall i \in I \;\; \exists j_i \in J : a_{ij_i} \wedge u_{j_i}^* \geq b_i$. Tādā gadījumā $a_{ij_i} \geq b_i$, līdz ar to spēkā ir vienādība $z_{ij_i} = u_{j_i}^* \geq b_i$. Līdz ar to, ieviešot $t = (t_{ij})_{\substack{j \in J \\ i \in I}} = t_{ij} \in \{0,1\}$, kur

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, ja\ a_{ij} \wedge u_j^* \geq b_i, \\ 0, ja\ a_{ij} \wedge u_j^* < b_i, \end{cases}$$

iegūstam, ka

$$\forall i \in I \;\; \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \geq 1.$$

Līdz ar to (u^*, t) apmierina arī problēmas (31) nosacījumus. Tā kā $F(u^*) < F(x^*)$, tad x^* nav problēmas (31) atrisinājums, kas ir pretrunā ar doto. Tātad x^* ir problēmas (2) atrisinājums.

Lai arī šajā apakšnodaļā aplūkotās problēmas nosacījumu sistēma satur nevienādības, ekvivalentus pārveidojumus var veikt arī gadījumā, ja nosacījumu sistēma satur vienādības. Aplūkosim piemēru ar līdzīgiem koeficientiem, kā iepriekš:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} (0{,}5 \wedge x_1) \vee (1 \wedge x_2) \geq 1; \\ (1 \wedge x_1) \vee (0{,}2 \wedge x_2) \geq 0{,}6; \\ (0{,}8 \wedge x_1) \vee (0{,}5 \wedge x_2) \geq 0{,}5. \end{cases} \tag{32}$$

Izmantojot (31), varam šo problēmu pārrakstīt:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 0 \geq y_{11}; \\ x_2 \geq y_{12}; \\ x_1 \geq 0{,}6y_{21}; \\ 0 \geq 0{,}6y_{22}; \\ x_1 \geq 0{,}5y_{31}; \\ x_2 \geq 0{,}5y_{32}; \\ y_{11} + y_{12} \geq 1; \\ y_{21} + y_{22} \geq 1; \\ y_{31} + y_{32} \geq 1; \\ y_{ij} \in \{0;\ 1\}. \end{cases}$$

Šo uzdevumu varam risināt ar MATLAB *intlinprog* procedūru un iegūt atrisinājumu un optimālu funkcijas vērtību:

$$(x^*, y^*) = (0{,}6; 1; 0; 1; 1; 0; 1; 1);$$

$$f^* = 5{,}8.$$

Redzam, ka šajā situācijā atrisinājumi optimizācijas uzdevumiem sakrīt. Vispārīgā gadījumā uzdevuma (32) minimālais atrisinājums var dot labāko optimālo vērtību nekā uzdevuma (29) atrisinājums, jo uzdevuma (32) plāna kopa ir plašāka.

5. OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMS AR MAKSIMUMA-T-NORMAS NOSACĪJUMIEM

Šī nodaļa ir veltīta optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-t-normas nosacījumu sistēmu. Pirmajā apakšnodaļā aplūkosim optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem, piedāvāsim lineārās programmēšanas pieeju šāda uzdevuma risināšanai un aplūkosim piemēru, kas ilustrēs lineārās programmēšanas pieeju. Savukārt otrajā apakšnodaļā aplūkosim optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem.

5.1. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem

Šajā nodaļā aplūkosim, kā atrast lineārās programmēšanas uzdevumu, kas ir ekvivalents optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem.

Optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem varam pierakstīt šādi:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$
$$\begin{cases} T_L(a_{11}, x_1) \vee T_L(a_{12}, x_2) \vee \dots \vee T_L(a_{1n}, x_n) \geq b_1, \\ T_L(a_{21}, x_1) \vee T_L(a_{22}, x_2) \vee \dots \vee T_L(a_{2n}, x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ T_L(a_{m1}, x_1) \vee T_L(a_{m2}, x_2) \vee \dots \vee T_L(a_{mn}, x_n) \geq b_m, \end{cases} \tag{33}$$

kur T_L ir Lukasieviča t-norma. Aplūkosim i-to nosacījumu sistēmas nevienādību:

$$T_L(a_{i1}, x_1) \vee T_L(a_{i2}, x_2) \vee \dots \vee T_L(a_{in}, x_n) \geq b_i.$$

Ievietojot Lukasieviča t-normas formulu no 5. definīcijas, iegūstam

$$((a_{i1} + x_1 - 1) \vee 0) \vee ((a_{i2} + x_2 - 1) \vee 0) \vee \dots \vee ((a_{in} + x_n - 1) \vee 0) \geq b_i. \tag{34}$$

Ņemot vērā, ka $b_i > 0$, varam vienkāršot (34) un iegūt

$$(a_{i1} + x_1 - 1) \vee (a_{i2} + x_2 - 1) \vee \dots \vee (a_{in} + x_n - 1) \geq b_i. \tag{35}$$

Šādā formā pierakstītu nosacījumu, līdzīgi kā maksimuma-reizinājuma un maksimuma-minimuma nosacījumu gadījumā, varam pārveidot par

$$\begin{cases} a_{ij} + x_j - 1 \geq b_i y_{ij}, j \in J, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, \\ y_{ij} \in \{0,1\}, j \in J. \end{cases} \tag{36}$$

Izmantojot (34)-(36), varam pārveidot optimizācijas uzdevumu (33) šādā formā:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min \tag{37}$$

$$\begin{cases} a_{ij} + x_j - 1 \geq b_i y_{ij}, i \in I, j \in J, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, i \in I, \\ y_{ij} \in \mathbb{Z}, i \in I, j \in J, \\ y_{ij} \geq 0, y_{ij} \leq 1, i \in I, j \in J. \end{cases}$$

Redzams, ka, ja fukcija F ir lineāra, tad iegūtais optimizācijas uzdevums ir lineārās programmēšanas uzdevums. Pamatosim, ka optimizācijas uzdevuma (33) atrisinājumu var iegūt no problēmas (37) atrisinājuma un otrādi.

4. teorēma.

Ja (x^*, y^*), kur $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$ un $y^* = (y_{ij}^*)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, ir problēmas (37) atrisinājums, tad x^* ir problēmas (33) atrisinājums.

Pierādījums.

Pāris (x^*, y^*) ir problēmas (37) atrisinājums, tātad $\forall i \in I \ \exists j_i \in J : \ y_{j_i}^* = 1$ jeb $\forall i \in I \ \exists j_i \in J : \ a_{ij_i} + x_{j_i}^* - 1 \geq b_i$. Līdz ar to x^* izpilda problēmas (33) nosacījumus. Atliek pamatot, ka x^* ir arī problēmas atrisinājums. Pieņemsim pretējo, t.i., $\exists z^* = (z_j^*)_{j \in J}$ tāds, ka $F(z^*) < F(x^*)$ un z^* apmierina problēmas (33) nosacījumus. Tad

$$\forall i \in I \ \exists j_i \in J : \ a_{ij_i} + z_{j_i}^* - 1 \geq b_i.$$

Tādā gadījumā varam ieviest $t = (t_{ij})_{\substack{j \in J \\ i \in I}} = t_{ij} \in \{0,1\}$, kur

$$t_{ij} = \begin{cases} 1, ja\ a_{ij} \wedge z_j^* \geq b_i, \\ 0, ja\ a_{ij} \wedge z_j^* < b_i, \end{cases}$$

un tādā gadījumā

$$\forall i \in I \ t_{ij_i} = 1$$

no kā seko, ka (z^*, t) apmierina problēmas (37) nosacījumus. Tā kā $F(z^*) < F(x^*)$, tad x^* nav problēmas (37) atrisinājums, kas ir pretrunā ar doto. Tātad x^* ir problēmas (33) atrisinājums.

Lai arī šajā apakšnodaļā aplūkotās problēmas nosacījumu sistēma satur nevienādības, ekvivalentus pārveidojumus var veikt arī gadījumā, ja nosacījumu sistēma satur vienādības.

Aplūkosim ilustrējošu piemēru. Piemēram ņemsim jau iepriekš izmantotos koeficientus un mērķa funkciju:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} T_L(0{,}5; x_1) \vee T_L(1; x_2) \geq 1; \\ T_L(1; x_1) \vee T_L(0{,}2; x_2) \geq 0{,}6; \\ T_L(0{,}8; x_1) \vee T_L(0{,}5; x_2) \geq 0{,}5. \end{cases}$$

Pārveidojot šo uzdevumu, izmantojot (37), iegūstam

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} 0{,}5 + x_1 - 1 \geq y_{11}; 1 + x_2 - 1 \geq y_{12}; \\ 1 + x_1 - 1 \geq 0{,}6y_{21}; 0{,}2 + x_2 - 1 \geq 0{,}6y_{22}; \\ 0{,}8 + x_1 - 1 \geq 0{,}5y_{31}; 0{,}5 + x_2 - 1 \geq 0{,}5y_{32}; \\ y_{11} + y_{12} \geq 1; y_{21} + y_{22} \geq 1; \\ y_{31} + y_{32} \geq 1; y_{ij} \in \{0; 1\}. \end{cases}$$

Risinot šo uzdevumu ar MATLAB procedūru *intlinprog*, iegūstam atrisinājumu un optimālo funkcijas vērtību:

$$(x^*, y^*) = (0{,}6; 1; 0; 1; 1; 0; 1), f^* = 5{,}8.$$

5.2. Optimizācijas uzdevums ar maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem

Šajā nodaļā aplūkosim kā atrast lineārās programmēšanas uzdevumu, kas ir ekvivalents optimizācijas uzdevumam ar maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem.

Optimizācijas uzdevumu ar maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem varam pierakstīt šādi:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow min$$

$$\begin{cases} T_W(a_{11}, x_1) \vee T_W(a_{12}, x_2) \vee \dots \vee T_W(a_{1n}, x_n) \geq b_1, \\ T_W(a_{21}, x_1) \vee T_W(a_{22}, x_2) \vee \dots \vee T_W(a_{2n}, x_n) \geq b_2, \\ \dots \\ T_W(a_{m1}, x_1) \vee T_W(a_{m2}, x_2) \vee \dots \vee T_W(a_{mn}, x_n) \geq b_m, \end{cases} \quad (38)$$

kur $T_W(a, b)$ ir vājā t-norma. Aplūkosim problēmas (38) vienu nosacījumu

$$T_W(a_{i1}, x_1) \vee T_W(a_{i2}, x_2) \vee \dots \vee T_W(a_{in}, x_n) \geq b_i.$$

Šo nosacījumu varam pārrakstīt kā:

$$\begin{cases} T_W(a_{ij}, x_j) \geq y_{ij} b_i, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, \\ y_{ij} \in \{0,1\}. \end{cases} \quad (39)$$

Savukārt $T_W(a_{ij}, x_j) \geq y_{ij} b_i$ tad un tikai tad, ja

$$(a_{ij} = 1 \text{ un } x_j \geq y_{ij} b_i) \text{ vai } (x_j = 1, a_{ij} \geq y_{ij} b_i).$$

Līdz ar to, varam nevienādību $T_W(a_{ij}, x_j) \geq y_{ij} b_i$ pārrakstīt kā

$$x_j \geq y_{ij} b_i, ja\ a_{ij} = 1;$$

$$\begin{cases} a_{ij} t_{ij} \geq y_{ij} b_i, \\ t_{ij} \in \{0,1\} \quad , \qquad ja\ a_{ij} < 1 \\ x_j \geq t_{ij}, \end{cases}$$

Līdz ar to (39) varam pārrakstīt šādi:

$$\begin{cases} a_{ij}t_{ij} \geq y_{ij}b_i, j \in J_i, \\ x_j \geq t_{ij}, j \in J_i, \\ t_{ij} \in \{0,1\}, j \in J_i, \\ x_j \geq y_{ij}b_i, j \in J \setminus J_i, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, \\ y_{ij} \in \{0,1\}, j \in J, \end{cases}$$

kur $J_i = \{j \in J | a_{ij} < 1\}$. Līdz ar to varam uzdevumu (38) pārrakstīt kā

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \to min$$

$$\begin{cases} a_{ij}t_{ij} \geq y_{ij}b_i, j \in J_i, i \in I, \\ x_j \geq t_{ij}, j \in J_i, i \in I, \\ t_{ij} \in \{0,1\}, j \in J_i, i \in I, \\ x_j \geq y_{ij}b_i, j \in J \setminus J_i, i \in I, \\ \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \geq 1, i \in I, \\ y_{ij} \in \{0,1\}, j \in J, i \in I. \end{cases} \tag{40}$$

Ja funkcija F ir lineāra, tad optimizācijas uzdevums (40) ir lineārās programmēšanas uzdevums. Pamatosim, ka optimizācijas uzdevuma (40) atrisinājumu var iegūt no problēmas (38) atrisinājuma un otrādi.

5. teorēma.

Ja (x^*, y^*, t^*), kur $x^* = (x_j^*)_{j \in J}$, $y^* = (y_{ij}^*)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ un $t^* = (t_{ij}^*)_{\substack{i \in I \\ j \in J_i}}$, ir problēmas (40) atrisinājums, tad x^* ir arī problēmas (38) atrisinājums.

Pierādījums.

Tā kā (x^*, y^*, t^*) ir problēmas (40) atrisinājums, tad

$$\forall i \in I \;\; \exists j_i \in J : \; y_{ij_i}^* = 1.$$

Ja $j_i \in J_i$, tad

$$x_{j_i}^* \geq t_{ij_i}^* \geq a_{ij_i}t_{ij_i}^* \geq y_{ij_i}^* b_i = b_i > 0,$$

tātad $x_{j_i}^* = t_{ij_i}^* = 1$ un $T_W\left(a_{ij_i}, x_{j_i}^*\right) = a_{ij_i} \geq b_i$.

Savukārt, ja $j_i \notin J_i$, tad $a_{ij_i} = 1$ un $x_{j_i}^* \geq y_{ij_i}^* b_i = b_i$. Tātad $\forall j_i \in J$: $T_W\left(a_{ij_i}, x_{j_i}^*\right) \geq b_i$. Tātad x^* apmierina problēmas (38) nosacījumus. Pieņemsim, ka x^* nav problēmas (38) atrisinājums. Tātad eksistē $u^* = (u_j^*)_{j \in J}$, kas apmierina problēmas (38) nosacījumus un $F(u^*) < F(x^*)$. Ja u^* apmierina problēmas (38) nosacījumus, tad

$$\forall i \in I \;\; \exists j_i \in J : \; T_W\left(a_{ij_i}, u_{j_i}^*\right) \geq b_i.$$

Ja $j_i \in J_i'$, tad no tā, ka $T_W\left(a_{ij_i}, u_{j_i}^*\right) \geq b_i$, seko $u_{j_i}^* = 1$. Ja $j_i \notin J_i'$, tad no tā, ka $T_W\left(a_{ij_i}, u_{j_i}^*\right) \geq b_i$, seko $u_{j_i}^* \geq b_i$. Līdz ar to, ņemot

$$v_{ij}^* = \begin{cases} 1, ja\ j = j_i, \\ 0, ja\ j \neq j_i, \end{cases}$$

$$w_{ij}^* = \begin{cases} 1, ja\ j = j_i\ un\ j \in J_i, \\ 0, ja\ j \neq j_i\ un\ j \in J_i, \end{cases}$$

vektors (x^*, v^*, w^*) apmierina problēmas (40) nosacījumus. Tā kā $F(u^*) < F(x^*)$, tad (x^*, y^*, t^*) nav problēmas (40) atrisinājums, kas ir pretrunā ar doto. Tātad x^* ir problēmas (38) atrisinājums.

Aplūkosim ilustrējošu piemēru. Piemēram izmantosim jau iepriekš izmantotos koeficientus un mērķa funkciju:

$$f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow min$$

$$\begin{cases} T_W(0{,}5; x_1) \vee T_W(1; x_2) \geq 1; \\ T_W(1; x_1) \vee T_W(0{,}2; x_2) \geq 0{,}6; \\ T_W(0{,}8; x_1) \vee T_W(0{,}5; x_2) \geq 0{,}5. \end{cases}$$

Redzam, ka $J_1 = \{1\}, J_2 = \{2\}$ un $J_3 = \{1; 2\}$

$$\begin{cases} 0{,}5t_{11} \geq y_{11};\ 0{,}2t_{22} \geq 0{,}6y_{22}; \\ 0{,}8t_{31} \geq 0{,}5y_{31};\ 0{,}5t_{32} \geq 0{,}5y_{32}; \\ x_1 \geq t_{11};\ x_2 \geq t_{22}; \\ x_1 \geq t_{31};\ x_2 \geq t_{32}; \\ t_{11} \geq 0; t_{11} \leq 0; t_{11} \in \mathbb{Z}; \\ t_{22} \geq 0; t_{22} \leq 0; t_{22} \in \mathbb{Z}; \\ t_{31} \geq 0; t_{31} \leq 0; t_{31} \in \mathbb{Z}; \\ t_{32} \geq 0; t_{32} \leq 0; t_{32} \in \mathbb{Z}; \\ x_2 \geq y_{12}; x_1 \geq 0{,}6y_{21;} \\ y_{11} + y_{12} \geq 1;\ y_{21} + y_{22} \geq 1;\ y_{31} + y_{32} \geq 1; \\ y_{ij} \geq 0;\ y_{ij} \leq 1;\ y_{ij} \in \mathbb{Z}; i = 1, 2, 3; j = 1, 2. \end{cases}$$

Risinot uzdevumu ar MATLAB procedūru *intlinprog*, iegūstam atrisinājumu (x^*, y^*, t^*) un optimālo vērtību:

$$x^* = (0{,}6; 1);$$

$$y^* = (0; 1; 1; 0; 0; 1);$$

$$t^* = (0; 0; 0; 1);$$

$$f^* = 5{,}8.$$

6. PSEIDOLINEĀRU OPTIMIZĀCIJAS UZDEVUMU PLĀNU KOPAS UN TO ILUSTRĀCIJAS

Lai arī iepriekšējās nodaļās apskatītajos piemēros optimizācijas uzdevumiem ar vienādiem koeficientiem un mērķa funkciju, bet dažādām t-normām, ieguvām vienādus optimālos atrisinājumus un optimālās vērtības, ir skaidrs, ka tas ne vienmēr tā būs. Šī nodaļa ir veltītā iepriekš apskatīto pseidolineāro uzdevumu veidu plāna kopas aplūkošanai.

Izprast pseidolineāru optimizācijas uzdevumu plānu kopu dažādām t-normām un t-konormām ir ļoti būtiski, jo izvēloties nepareizu t-normu vai t-konormu, t.i., tādu, kas izvirza pārāk spēcīgus nosacījumus, sistēma var kļūt neatrisināma. Tajā pašā laikā, izvēloties pārāk vājo t-normu, t.i., tādu, kas izvirza vājus nosacījumus, varam aprēķinu rezultātā iegūt zemas mērķa funkcijas vērtības, kuras neatbilst aplūkotajai situācijai.

Aplūkosim šajā darbā izmantotās nosacījumu sistemas un salīdzināsim, cik spēcīgus nosacījumus izvirza katra no t-normām un t-konormām. Pirmkārt jau ievērosim, ka

$$a_{i1} \wedge x_1 + a_{i2} \wedge x_2 + \cdots + a_{in} \wedge x_n \geq (a_{i1} \wedge x_1) \vee (a_{i2} \wedge x_2) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge x_n).$$

Pie tam vienādība izpildās tad un tikai tad, ja visas vērtības $a_{ij} \wedge x_j = 0$, izņemot vienu. Tātad summas-minimuma nosacījumi ir daudz vājāki par maksimuma-minimuma nosacījumiem.

Ir zināms, ka

$$T_M(a_{ij}; x_j) \geq T_L(a_{ij}; x_j) \geq T_W(a_{ij}; x_j).$$

Līdz ar to esam salīdzinājuši visus izmantotos nosacījumu sistēmu veidus, izņemot maksimuma-reizinājuma nosacījumus. Ņemot vērā, ka $a_{ij}, x_j \in [0,1]$

$$a_{ij} \wedge x_j \geq a_{ij} x_j,$$

tātad maksimuma-reizinājuma nosacījumi ir spēcīgāki par maksimuma-minimuma nosacījumiem.

Salīdzinot maksimuma-reizinājuma nosacījumus ar maksimuma-Lukasieviča nosacījumiem, iegūstam šādu nevienādību:

$$a_{ij} x_j - T_L(a_{ij}; x_j) \geq a_{ij} x_j - a_{ij} - x_j + 1 = (a_{ij} - 1)(x_j - 1) \geq 0,$$

Tātad maksimuma-reizinājuma nosacījumi ir vājāki par maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem un, līdz ar to, arī vājāki par maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem.

Lai labāk saprastu augstāk aprakstīto, aplūkosim piemēru. Ņemsim šādu pseidolineāru nosacījumu sistēmu:

$$\begin{cases} (0{,}7 \otimes x_1) \oplus (0{,}4 \otimes x_2) \geq 0{,}5; \\ (0{,}4 \otimes x_1) \oplus (0{,}2 \otimes x_2) \geq 0{,}1; \\ (0{,}6 \otimes x_1) \oplus (0{,}8 \otimes x_2) \geq 0{,}7. \end{cases} \tag{41}$$

Šeit $\otimes$ ir t-norma un $\oplus$ ir t-konorma. Atgādināsim, ka, pēc pieņēmuma, $x_1, x_2 \in [0,1]$.

Vispirms aplūkosim nosacījumu sistēmu (41) t-konormas un t-normas vietā ņemot attiecīgi maksimuma t-konormu un minimuma t-normu:

$$\begin{cases}(0{,}7 \wedge x_1) \vee (0{,}4 \wedge x_2) \geq 0{,}5;\\ (0{,}4 \wedge x_1) \vee (0{,}2 \wedge x_2) \geq 0{,}1;\\ (0{,}6 \wedge x_1) \vee (0{,}8 \wedge x_2) \geq 0{,}7.\end{cases}$$

Aplūkojot sistēmu varam secināt, ka to iespējams vienkāršot šādi:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}5;\\ x_1 \geq 0{,}1 \; vai \; x_2 \geq 0{,}1;\\ x_2 \geq 0{,}7;\end{cases}$$

jeb vēl vienkāršojot

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}5;\\ x_2 \geq 0{,}7.\end{cases}$$

Nosacījumi ilustrēti grafiski 6.2. attēlā (6.2.att).

Savukārt t-konormas un t-normas vietā, ņemot maksimuma t-konormu un reizinājuma t-normu, sistēmu (41) varam pierakstīt

$$\begin{cases}0{,}7x_1 \vee 0{,}4x_2 \geq 0{,}5;\\ 0{,}4x_1 \vee 0{,}2x_2 \geq 0{,}1;\\ 0{,}6x_1 \vee 0{,}8x_2 \geq 0{,}7.\end{cases}$$

Šie nosacījumi izpildīsies tad un tikai tad, ja izpildīsies šādi nosacījumi:

$$\begin{cases} x_1 \geq 5/7\,;\\ x_1 \geq 1/4 \;\; vai \; x_2 \geq 1/2\,;\\ x_2 \geq 7/8\end{cases}$$

jeb vienkāršojot

$$\begin{cases} x_1 \geq 5/7\,;\\ x_2 \geq 7/8\,.\end{cases}$$

Nosacījumi ilustrēti grafiski 6.3. attēlā (6.3.att).

Līdzīgi apskatot nosacījumu sistēmu (41) maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumu gadījumā:

$$\begin{cases}T_L(0{,}7; x_1) \vee T_L(0{,}4; x_2) \geq 0{,}5;\\ T_L(0{,}4; x_1) \vee T_L(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1;\\ T_L(0{,}6; x_1) \vee T_L(0{,}8; x_2) \geq 0{,}7.\end{cases}$$

Ņemot vērā Lukasieviča t-normas īpašības, ir skaidrs, ka

$$T_L(0{,}4; x_2) < 0{,}5;$$

un

$$T_L(0{,}6; x_1) < 0{,}7.$$

Līdz ar to, varam pārrakstīt nosacījumus

$$\begin{cases} T_L(0{,}7; x_1) \geq 0{,}5;\\ T_L(0{,}4; x_1) \vee T_L(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1;\\ T_L(0{,}8; x_2) \geq 0{,}7;\end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} x_1 - 0{,}3 \geq 0{,}5; \\ x_1 - 0{,}6 \vee x_2 - 0{,}8 \geq 0{,}1; \\ x_2 - 0{,}2 \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Pārveidojot iegūstam, ka maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumu gadījumā uzdevuma (41) plānu kopu varam aprakstīt ar nevienādībām:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}8; \\ x_2 \geq 0{,}9. \end{cases}$$

Nosacījumi ilustrēti grafiski 6.4. attēlā (6.4.att).

Apskatīsim sistēmu (41) t-konormas un t-normas vietā ņemot attiecīgi maksimuma t-konormu un vājo t-normu:

$$\begin{cases} T_W(0{,}7; x_1) \vee T_W(0{,}4; x_2) \geq 0{,}5; \\ T_W(0{,}4; x_1) \vee T_W(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1; \\ T_W(0{,}6; x_1) \vee T_W(0{,}8; x_2) \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Ņemot vērā, ka visi koeficienti nosacījumu sistēmā ir mazāki par 1, vājā t-norma atšķirsies no 0 tad un tikai tad, ja $x_j = 1$. Līdz ar to, lai izpildītos pirmais nosacījums ir nepieciešams, lai $x_1 = 1$ savukārt, lai izpildītos trešais nosacījums, $x_2 = 1$. Tātad maksimuma un vājās t-normas gadījumā, sistēmas (41) atrisinājuma kopa satur tikai vienu punktu $x_1 = x_2 = 1$. Nosacījumus grafiski skatīt 6.5. attēlā (6.5.att).

Apskatīsim arī nosacījumu sistēmu (41), izmantojot summas-minimuma nosacījumus, t.i.,

$$\begin{cases} (0{,}7 \wedge x_1) + (0{,}4 \wedge x_2) \geq 0{,}5; \\ (0{,}4 \wedge x_1) + (0{,}2 \wedge x_2) \geq 0{,}1; \\ (0{,}6 \wedge x_1) + (0{,}8 \wedge x_2) \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Šādu nosacījumu sistēmu varam pārrakstīt kā:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}1;\ x_1 + x_2 \geq 0{,}5; \\ x_1 + x_2 \geq 0{,}1; \\ x_2 \geq 0{,}1;\ x_1 + x_2 \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Vienkāršojot šo nosacījumu sistēmu, iegūstam:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}1; \\ x_2 \geq 0{,}1; \\ x_1 + x_2 \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Nosacījumi ilustrēti grafiski 6.1. attēlā (6.1.att).

Aplūkosim arī šo pašu piemēru, izmantojot maksimuma t-konormu un Fodora t-normu:

$$\begin{cases} T_F(0{,}7; x_1) \vee T_F(0{,}4; x_2) \geq 0{,}5; \\ T_F(0{,}4; x_1) \vee T_F(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1; \\ T_F(0{,}6; x_1) \vee T_F(0{,}8; x_2) \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Ņemot vērā, ka $T_F(a; b) \leq a \wedge b$, varam pārrakstīt nosacījumu sistēmu šādi:

$$\begin{cases} T_F(0{,}7; x_1) \geq 0{,}5; \\ T_F(0{,}4; x_1) \vee T_F(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1; \\ T_F(0{,}8; x_2) \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Tā kā prasām, lai nosacījumu sistēma izpildītos, no pirmā un trešā nosacījuma iegūstam, ka

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}5; \\ x_2 \geq 0{,}7. \end{cases}$$

Savukārt, lai izpildītos otrais nosacījums, nepieciešami un pietiekami, ka $T_F(0{,}4; x_1) \geq 0{,}1$ vai arī ka $T_F(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1$. Pārveidojot nevienādību $T_F(0{,}4; x_1) \geq 0{,}1$, iegūstam, ka

$$\begin{cases} 0{,}4 \wedge x_1 \geq 0{,}1; \\ x_1 + 0{,}4 > 1. \end{cases}$$

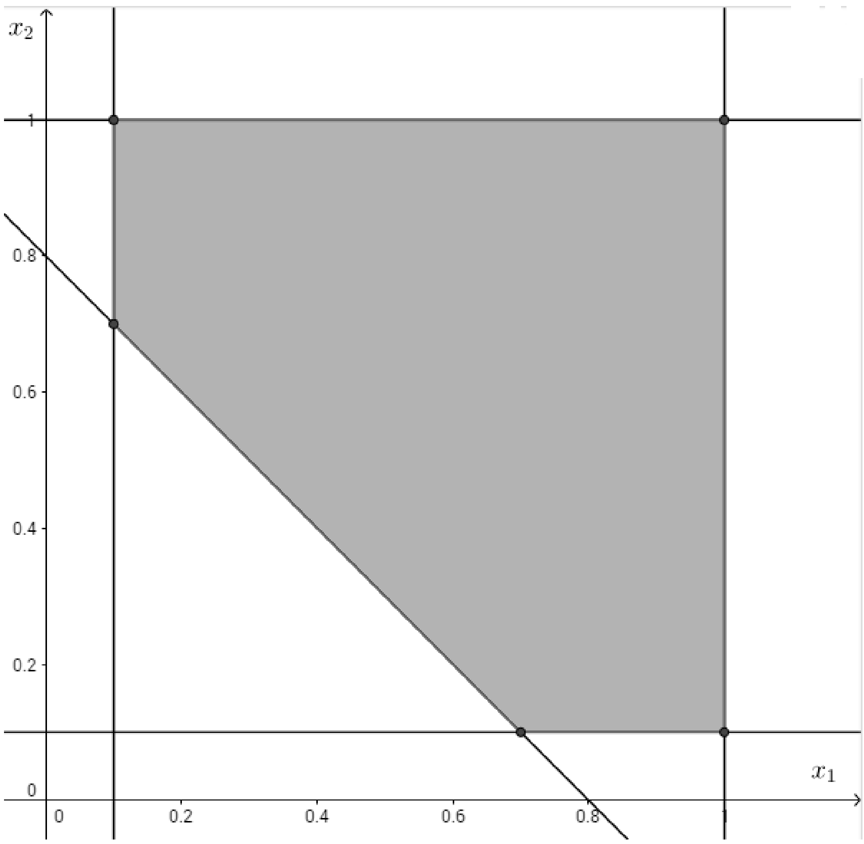
Tātad nevienādība $T_F(0{,}4; x_1) \geq 0{,}1$ ir ekvivalenta nevienādībai $x_1 > 0{,}6$. Savukārt, pārveidojot nevienādību $T_F(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1$, iegūstam

$$\begin{cases} 0{,}2 \wedge x_2 \geq 0{,}1; \\ x_2 + 0{,}2 > 1. \end{cases}$$

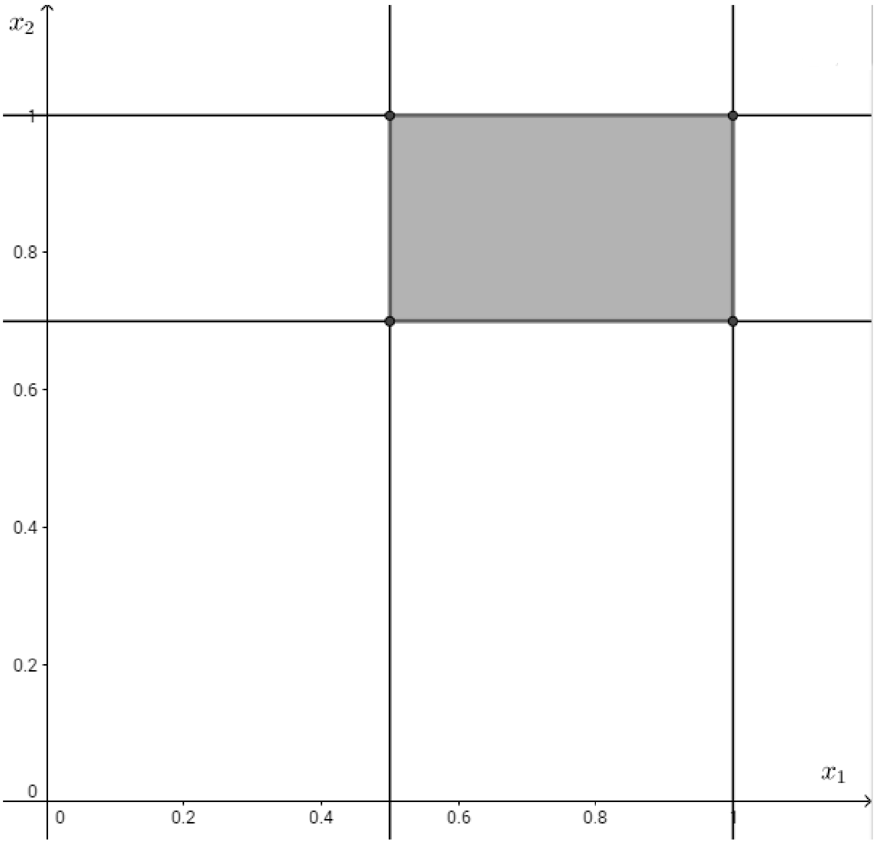
Tātad nevienādība $T_F(0{,}2; x_2) \geq 0{,}1$ ir ekvivalenta ar nevienādību $x_2 > 0{,}8$. Apvienojot līdz šim aplūkoto, esam vienkāršojoši nosacījumu sistēmu (41) maksimuma-Fodora t-normas gadījumā uz šādiem nosacījumiem:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0{,}5; \\ x_2 \geq 0{,}7; \\ x_1 > 0{,}6 \; vai \; x_2 > 0{,}8. \end{cases}$$

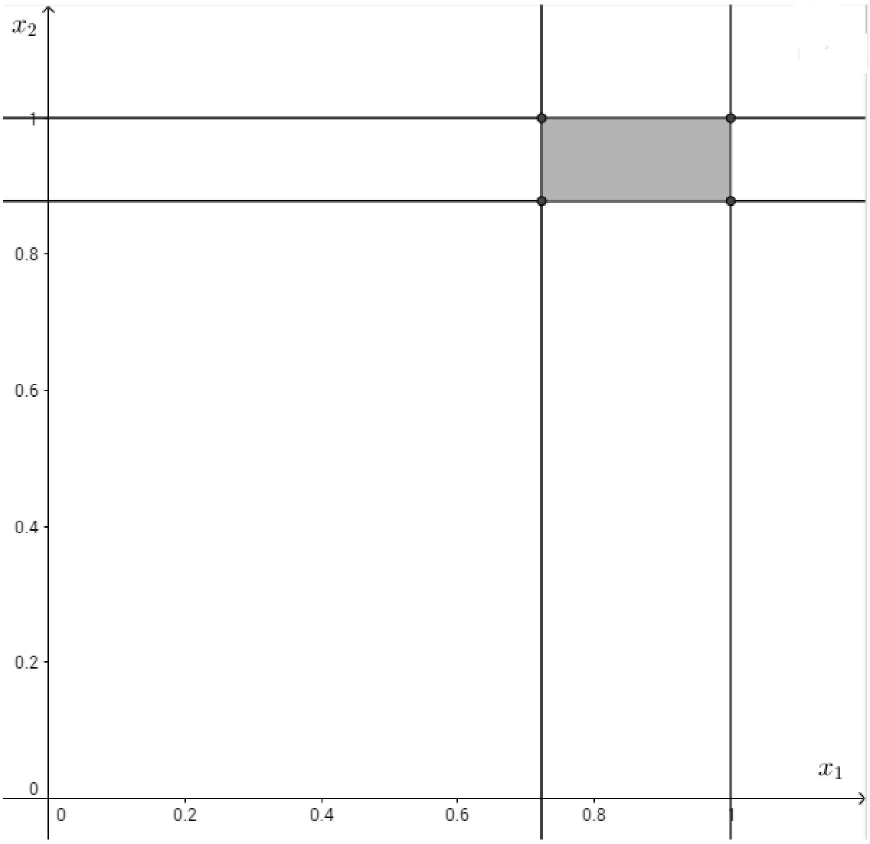
Nosacījumus grafiski skatīt 6.6. attēlā (6.6.att).



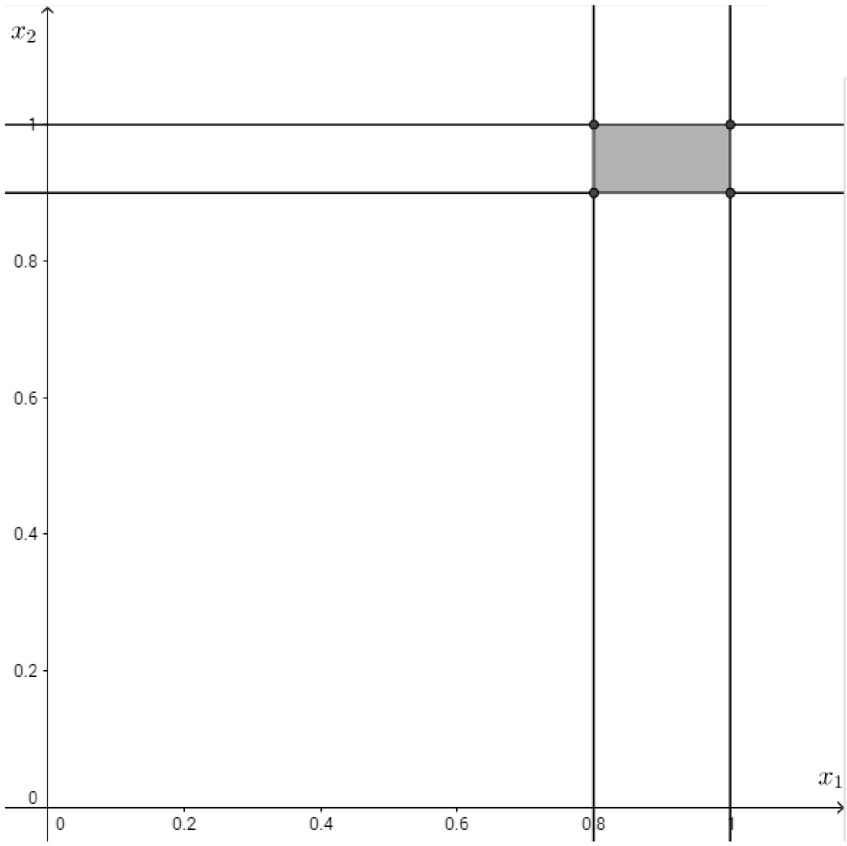
6.1.att. **Optimizācijas uzdevuma ar summas-minimuma nosacījumiem plāna kopa**



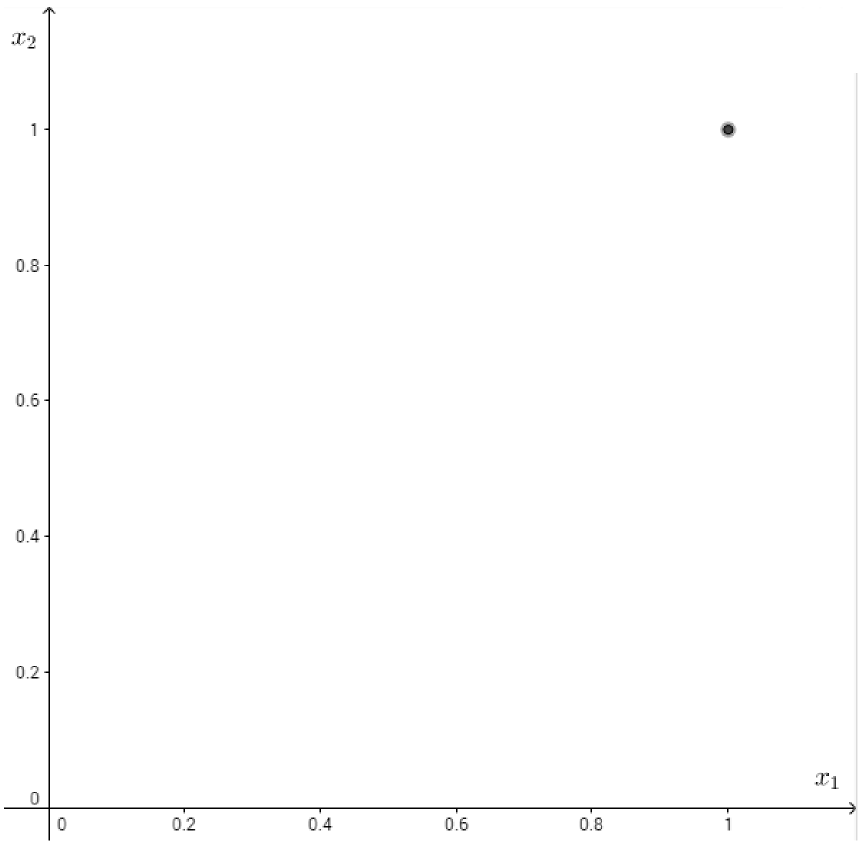
6.2.att. **Optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-minimuma nosacījumiem plāna kopa**



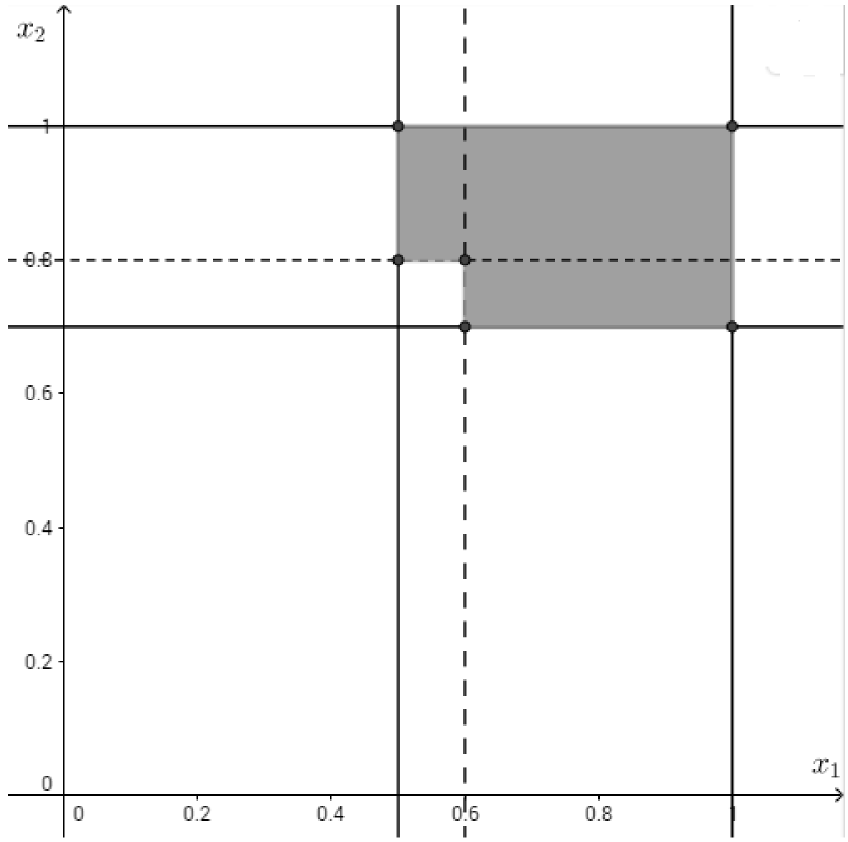
6.3.att. **Optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-reizinājuma nosacījumiem plāna kopa**



6.4.att. **Optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-Lukasieviča t-normas nosacījumiem plāna kopa**



6.5.att. **Optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem plāna kopa**



6.6.att. **Optimizācijas uzdevuma ar maksimuma-Fodora t-normas nosacījumiem plāna kopa**

Grafiski salīdzinot izvēlētās nosacījumu sistēmu atrisinājums, viegli redzams, ka visplašākais plāns, ir optimizācijas uzdevumam ar summas-minimuma nosacījumiem (6.1.att). No šajā darbā apskatītajām nosacījumu sistēmām, otrs plašākais plāns ir maksimuma-minimuma nosacījumiem (6.2.att.). Ceturtā plašākā atrisinājumu kopa ir nosacījumiem ar maksimuma-reizinājuma kompozīciju (6.3.att.). Nākamā ir maksimuma-Lukaševiča t-normas nosacījumu sistēma (6.4.att). Visšaurākā atrisinājuma kopa viennozīmīgi ir maksimuma-vājās t-normas nosacījumiem (6.5.att), kuriem pie izvēlētās sistēmas, atrisinājuma kopa sastāv no viena punkta.

Savukārt, aplūkojot maksimuma-Fodora t-normas nosacījumus (6.6.att), redzam, ka, minimālais atrisinājums var neeksistēt, jo plānu kopa nav slēgta. Piemēram, ja mērķa funkcija $f = x_1 + 2x_2$, tad $\inf_x f(x) = 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}7 = 2$, bet šis punkts nepieder plānu kopai. Līdz ar to, neeksistē funkcijas minimums.

NOBEIGUMS

Galvenais darba rezultāts ir iegūtie lineārās programmēšanas modeļi, kurus lietot pseidolineāru uzdevumu risināšanā, kā arī ideja izmantot elementārus pārveidojumus, lai no pseidolineārām nosacījumu sistēmām iegūtu lineāras nosacījumu sistēmas. Lai arī iegūtie lineārie programmēšanas uzdevumi algoritma darbības ātruma ziņā nepārspēj jau esošos algoritmus, izveidotā pieeja ļauj tos atrisināt, izmantojot standarta risināšanas metodes. Vēl jo vairāk, izmantotos pārveidojumus neietekmē atbilstošā optimizācijas uzdevuma mērķa funkcija, tādēļ šo pieeju var izmantot jebkurai mērķa funkcijai, kā rezultātā izstrādātās metodes var pielietot plašai problēmu klasei, tai skaitā, problēmām, kurām līdz šim nav izveidoti risināšanas algoritmi. Darbā arī izpētīta t-normas un t-konormas izvēles ietekme uz pseidolineārā optimizācijas uzdevuma plāna kopu, kas palīdz izvēlēties modelim vislabāk atbilstošās t-normas un t-konormas.

Ņemot vērā jau esošo plašo pseidolineāru problēmu lietojumu klāstu, ir būtiski izveidot pēc iespējas spēcīgus un vispārīgus problēmu risināšanas algoritmus. Turpmāko darbību var veltīt jau iegūto sistēmu vienkāršošanā, lai uzlabotu algoritma darbības ātrumu, citu t-normu un t-konormu aplūkošanā vai arī jau esošo pārveidojumu vispārināšanā, kā arī citu, iespējami labāku, pārveidojumu meklēšanā.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

[1] R. Lāma, *Lineāras mērķa funkcijas optimizācija pie pseidolineāriem nosacījumiem*, Bakalaura darbs, Latvija, Latvijas Universitāte, Rīga, 2015.

[2] E. Sanchez, *Resolution of composite fuzzy relation equations*, Information and Control, 30, 1976, 38-48.

[3] A. Šostaks, *L-kopas un L-vērtīgas struktūras*, Latvija, Latvijas Universitāte, Rīga, 2003, 98-122.

[4] A. Piegat, *Fuzzy Modeling and Control*, Germany, Heidelberg, Springer, 2001, .

[5] E. Czogala, J. Drewniak, W. Pedrycz, *Fuzzy relation equations on a finite set*, Fuzzy Sets and Systems, 7, 1982, 89-101.

[6] M. Higashi, G. J. Klir, *Resolution of finite fuzzy relation equations*, Fuzzy Sets and Systems, 13, 1984, 65-82.

[7] J. L. Lin, *On the relation between fuzzy max-Archimedean t-norm relational equations and the covering problem*, Fuzzy Sets and Systems, 160, 2009, 2328-2344.

[8] K. Hirota, W. Pedrycz, *Fuzzy relational compression*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B, (3), 1999, 407-415.

[9] H. Nobuhara, W. Pedrycz, K. Hirota, *Fast solving method of fuzzy relational equation and its application to lossy image compression*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 8 (3), 2000, 325-334.

[10] V. Loia, W. Pedrycz, S. Sessa, *Fuzzy relation calculus in the compression and decompression of fuzzy relations*, International Journal of Image and Graphics, 2, 2002, 1-15.

[11] F. Di Martino, V. Loia, S. Sessa, *A method in the compression/decompression of images using fuzzy equations and fuzzy similarities*, Proceedings of Conference IFSA 2003, Istanbul, Turkey, 2003, 524-527.

[12] H. Nobuhara, K. Hirota, W. Pedrycz, *Relational image compression: optimizations through the design of fuzzy coders and YUV colour space*, Soft Computing, 9, 2005, 471-479.

[13] S.-M. Guu, Y.-K. Wu, *Minimizing a linear objective function under a max-t-norm fuzzy relational equation constraint*, Fuzzy Sets and Systems, 161, 2010, 285-297.

[14] P. Li, S.-C. Fang, *On the resolution and optimization of a system of fuzzy relational equations with sup-T composition*, Fuzzy Optimization and Decision Making, 7, 2008, 169-214.

[15] B.-S. Shieh, *Minimizing a linear objective function under a fuzzy max-t-norm relation equation constraint*, Information Sciences, 181, 2011, 832-841.

[16] Y.-K. Wu, S.-M. Guu, *An efficient procedure for solving a fuzzy relational equation with max-Archimedean t-norm composition*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 16 (1), 2008, 73-84.
[17] S.-C. Fang, G. Li, *Solving fuzzy relation equations with a linear objective function*, Fuzzy Sets and Systems, 103, 1999, 107-113.
[18] Y. K. Wu, S. M. Guu, J. Y.-C. Liu, *An accelerated approach for solving fuzzy relation equations with a linear objective function*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 10, 2002, 552-558.
[19] Y.-K. Wu, S.-M. Guu, *Minimizing a linear function under a fuzzy max-min relational equation constraint*, Fuzzy Sets and Systems, 150, 2005, 147-162.
[20] L. Chen, P. P. Wang, *Fuzzy relation equations (i): the general and specialized solving algorithms*, Soft Computing, 6 (6), 2002, 428-435.
[21] L. Chen, P. P. Wang, *Fuzzy relation equations (ii): The branch-point-solutions and the categorized minimal solutions*, Soft Computing, 11 (1), 2007, 33-40.
[22] C.-W. Chang, B.-S. Shieh, *Linear optimization problem constrained by fuzzy max-min relation equations*, Information Sciences, 234, 2013, 71-79.
[23] A. Ghodousian, E. Khorram, *Fuzzy linear optimization in the presence of the fuzzy relation inequality constraints with max-min composition*, Information Sciences, 178, 2008, 501-519.
[24] G. J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, 1995.
[25] C.-T. Yeh, *On the minimal solutions of max–min fuzzy relational equations*, Fuzzy Sets and Systems, 159 (1), 2008, 23-39.
[26] J. Loetamonphong, S.-C. Fang, *An efficient solution procedure for fuzzy relation equations with max-product composition*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 7, 1999, 441-445.
[27] D. Dubois, H. Prade, *New results about properties and semantics of fuzzy set-theoretic operators*, Fuzzy Sets, Plenum Press, New York, 1986, 59-75.
[28] U. Thole, H.-J. Zimmermann, P. Zysno, *On the suitability of minimum and product operators for intersection of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, 2, 1979, 167-180.
[29] H.-J. Zimmermann, P. Zysno, Latent connectives in human decision-making, Fuzzy Sets and Systems, 4, 1980, 37-51.
[30] S. M. Guu, Y. K. Wu, *Minimizing a linear objective function with fuzzy relation equation constraints*, Fuzzy Optimization and Decision Making, 1, 2002, 347-360.

[31] R. Bellman, L. A. Zadeh, *Decision-making in a fuzzy enviromnent*, Managment Science, 17, 1970, 141-164.

[33] S. J. Yang, *An algorithm for minimizing a linear objective function subject to the fuzzy relation inequalities with addition-min composition*, Fuzzy Sets and Systems, 255, 2014, 41-51.

[32] J.-X. Li, S.-J. Yang, *Fuzzy relation inequalities about the data transmission mechanism in BitTorrent-like Peer-to-Peer file sharing systems*, Proceedings 2012 9th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery FSKD 2012, Sichuan, China, 2012, 452-456.

[34] X.-P. Yang, X.-G. Zhou, B.-Y. Cao, *Multi-level linear programming subject to addition-min fuzzy relation inequalities with application in Peer-to-Peer file sharing system*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 28, 2015, 2679-2689.

[35] X.-P. Yang, X.-G. Zhou, B.-Y. Cao, *Min-max programming problem subject to addition-min fuzzy relation inequalities*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 24 (1), 2016, 111-119.

[36] S.-M. Guu, Y.-K. Wu, *A linear programming approach for minimizing a linear function subject to fuzzy relational inequalities with addition-min composition*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, doi:10.1109/TFUZZ.2016.2593496.

Maģistra darbs „Lineārās programmēšanas pieeja pseidolineāru optimizācijas uzdevumu risināšanai" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Reinis Lāma _______________

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: profesore Dr. mat. Svetlana Asmuss __________

Recenzents: profesors Dr.mat. Jānis Buls

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2017.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

15. 06.2017. prot. Nr._____

Komisijas sekretāre: lektore Maruta Avotiņa