

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

DAŽI NEKLASISKI EKSTRĒMU UZDEVUMI

MAĢISTRA DARBS

Autors: **Diāna Mežecka**

Stud. apl. dm10064

Darba vadītājs: prof. Dr.math. Andrejs Cibulis

RĪGA 2018

Anotācija

Darbā aplūkoti vairāki netriviāli ekstrēmu uzdevumi, kuru risināšanā iespējams izmantot elementāras metodes. Starp šādiem uzdevumiem ir Tomaševska problēma, kura vispārīgā gadījumā joprojām ir neatrisināta matemātikas problēma, daži ģeometriskā satura uzdevumi, kā arī augstas grūtības pakāpes uzdevumi no starptautiskām skolēnu olimpiādēm.

Atslēgas vārdi: ekstrēmu uzdevumi, Tomaševska problēma, elementāras metodes, neatrisinātas problēmas.

Abstract

This master thesis deals with several non-trivial extremum problems that can be solved using elementary methods. Among such problems is the Tomaszewski's problem, which in general still remains an unsolved problem of mathematics, along with some geometric tasks, as well as challenges of high difficulty from the international mathematical Olympiads.

Keywords: extremum, Tomaszewski's problem, elementary methods, unsolved problems.

Saturs

Ievads	4
1 Tomaševska problēma	5
1.1 Boguslavs Tomaševskis	5
1.2 Pētāmās problēmas apraksts	6
1.3 Pierādījums, ja $n = 2$	6
1.4 Pierādījums, ja $n = 3$	7
1.5 Turpmāk izmantotie pieņēmumi	9
1.6 Pierādījums, ja $n = 4$	10
1.7 Pierādījums, ja $n = 5$	10
1.8 Pierādījums, ja $n = 6$	12
1.9 Gadījums $n = 7$	14
2 Uzdevumi ar ģeometrisku jēgu	19
2.1 Uzdevums par taisnstūri	19
2.2 Uzdevums par pialu	22
2.2.1 Līdzsvara stāvokļa meklēšana.	23
2.2.2 Attiecības r/l meklēšana uzdotam leņķim x	25
2.2.3 Leņķa x iespējamās vērtības	26
2.2.4 Uzdevuma interpretācija	27
2.2.5 Uzdevums par riņķa segmentā ievilkto taisnstūri	29
2.3 Uzdevums par nevienādību	30
3 Ekstrēmu uzdevumi starptautiskos konkursos	34
3.1 Starptautiskā matemātikas olimpiāde (IMO)	34
3.2 Eiropas meiteņu matemātikas olimpiāde (EGMO)	35
3.3 Risinājumi	36
3.3.1 IMO, 2016. gads, 5. uzdevums	36
3.3.2 IMO, 2013. gads, 2. uzdevums	37
3.3.3 EGMO, 2016. gads, 1. uzdevums	38
3.3.4 EGMO 2016. gads, 3. uzdevums	39
3.3.5 EGMO, 2016. gads, 5. uzdevums	40
3.3.6 EGMO, 2012. gads, 2. uzdevums	43
Nobeigums	44
Izmantotā literatūra un avoti	45

Ievads

Pētot dažādus procesus, bieži nākas saskarties ar maksimizācijas vai minimizācijas jeb ekstrēmu uzdevumiem. Dažas vienkāršākās ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes māca jau skolā, tiesa, tajās risinājuma ideja balstīta galvenokārt uz kvadrātfunkciju pētīšanu. Daudzu ekstrēmu uzdevumu risināšanā tiek lietotas tā saucamās universālās metodes, kas aizgūtas no matemātiskās analīzes. Nereti universālās metodes (atvasinājumu izmantošana) nav tas vienkāršākais līdzeklis dažāda satura uzdevumu risināšanā. Sevišķi tas attiecas uz skolas matemātiku. Turklāt šo metožu lietošana sagādā papildu grūtības, lai pamatotu, ka atrastais ekstrēms ir nevis lokāls, bet arī globāls.

Bez uzdevumiem, kuros maksimizējamais vai minimizējamais lielums aprakstīts funkcijas veidā, pastāv vēl daudzi citi ekstrēmu uzdevumi, kuros attiecīgā funkcija netiek uzdots atklātā veidā, vai arī no šādas funkcijas mākslīgas uzdošanas nav nekāda praktiska labuma. Kā piemērus var minēt uzdevumus, kas saistīti ar Tomaševska problēmas risināšanu, kad jānosaka maksimālais izteiksmju skaits, kurām piemīt kādas uzdotas īpašības.

Vairākus neklasiskus ekstrēmu uzdevumus izdodas atrisināt ar elementārām metodēm, turklāt daļai šādu uzdevumu risinājumi, kuros izmantoti diferenciālrēķini, būtu garāki un sarežģītāki. Atzīmēsim, ka ekstrēmu uzdevumos minimizējamā (maksimizējamā) funkcija ne vienmēr ir diferencējama.

Maģistra darba mērķis ir atrisināt dažus ekstrēmu uzdevumus, kuru risināšanā standarta metodes nav pielietojamas vai arī diferenciālrēķinu izmantošana būtu ļoti apgrūtināta. Minētie uzdevumi tiek risināti, izmantojot elementāras metodes.

Darbs sastāv no trīs nodaļām. Pirmajā nodaļā ir pētīta Tomaševska problēma. Ir pieejami vairāki avoti, kuros problēmas izpēte veikta, izmantojot varbūtību teorijas metodes un datorprogrammas, taču vispārīgā gadījumā Tomaševska izvirzītā hipotēze nav pierādīta. Izstrādājot maģistra darbu, tika izmantoti vairāki maģistrantūras studentu aprakstīti risinājumi. Pēc rūpīgas pārbaudes tajos ir atrastas nepilnības vai pat grūti izlabojamas kļūdas.

Otrajā nodaļā risināti daži ģeometriskā rakstura uzdevumi, bet trešā nodaļa veltīta neklasiskiem ekstrēmu uzdevumiem, kuri ir tikuši piedāvāti starptautiskās skolēnu matemātikas olimpiādēs pēdējo 10 gadu laikā.

Darbā ir 11 attēli un 11 bibliogrāfijas avoti, kuri kārtoti atsaukšanās secībā.

1 Tomaševska problēma

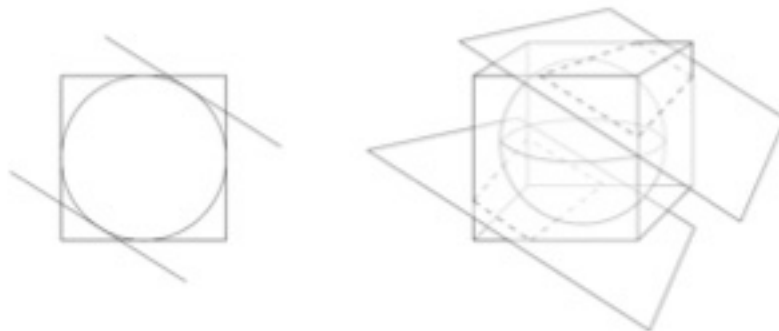
1.1 Boguslavs Tomaševskis

Boguslavs Tomaševskis (Boguslaw Tomaszewski) ir poļu matemātiķis. 1976. gadā beidzis Varšavas Universitāti, iegūstot 1. vietu Polijas Matemātikas biedrības rīkotajā konkursā par labāko studentu darbu matemātikā. Kādu laiku strādājis Varšavas Universitātē, bet vēlāk devies uz ASV, kur 1984. gadā Viskonsīnas Universitātē ieguvis doktora grādu. 1985. gadā Tomaševskis sācis strādāt Ņujorkas Universitātē. Kā liecina raksts laikrakstā "Albany Student Press", 1985. gada numuros, pirmajā gadā problēmas sagādājusi atšķirība starp izglītības sistēmu Polijā un ASV, kā arī valodas barjera, kas radījusi grūtības izskaidrot studentiem sarežģītākas nianšes uzdevumu risinājumos [1]. Neskatoties uz sākotnējām grūtībām, Tomaševskis arī vēlāk strādājis dažādās ASV augstskolās.

1991. gadā žurnālā *The American Mathematical Monthly* aprakstīts jautājums, ko 1986. gadā formulējis Tomaševskis: "pieņemot, ka doti n reāli skaitļi a_1, \dots, a_n , kas apmierina $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, vai iespējams, ka no visām 2^n izteiksmēm $\sum \pm a_i$, tādu kurām $|\sum \pm a_i| > 1$ ir vairāk nekā tādu, kurām $|\sum \pm a_i| \leq 1$?" [2]. Hipotēze vispārīgā gadījumā nav pierādīta. 1992. gadā Holcmans un Kleitmens (R. Holzman, D. J. Kleitman) snieguši novērtējumu apakšējai robežai ($3/8$). Holcmans turpinājis pētīt šo problēmu, bet ilgu laiku rezultāts bija palicis nepārspēts. Ievērojami uzlabojumi iegūti tikai 2017. gadā, Holcmanam sadarbojoties ar Bopanu (R. B. Boppana) [3].

Tomaševska problēmas pierādījums fiksētam mainīgo skaitam vairākkārt meklēts, izmantojot datorprogrammu palīdzību. 2017. gadā tādā veidā pierādīts, ka hipotēze ir patiesa [4], ja $n = 9$.

Tomaševska problēmas ģeometrisku reprezentāciju ir izveidojis Heijmens (F. Heymann) [5]. Viņš šo problēmu aprakstījis, izmantojot n -dimensiju Eiklīda lodi un tai apvilktu n -dimensiju kubu. Vismaz puse no kuba virsotnēm atrodas starp jebkurām divām paralēlām lodes pieskarplaknēm vai uz kādas no tām (skatīt Att. 1.1).



Att. 1.1: Tomaševska problēmas ģeometriskā reprezentācija

Arī studenti vairākkārt mēģinājuši ar vienkāršām metodēm pierādīt Tomaševska problēmu zināmam mainīgo skaitam. Pārsvārā jau 6 mainīgo gadījumā atrodamie risinājumi ir ļoti gari un pierādīšanas gaitā manāmi nevajadzīgi pieņēmumi un citas nepilnības. Kādā maģistra darbā problēma ir risināta arī 7 mainīgajiem. Šajā risinājumā izmantotas divas datorprogrammas, taču abu sniegtie rezultāti ir kļūdaini, līdz ar to nav iespējams novērtēt, vai pati pierādījuma ideja novestu pie problēmas risinājuma.

1.2 Pētāmās problēmas apraksts

Šajā nodaļā aplūkosim Tomaševska problēmu šādā formulējumā [2]:

Ja doti n reāli skaitļi x_1, x_2, \dots, x_n , kuriem

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1, \quad (1.2.1)$$

tad no visām izteiksmēm $\left| \sum_{i=1}^n \pm x_i \right|$ vismaz puse nepārsniedz 1.

Ja $n = 1$ – triviāli.

1.3 Pierādījums, ja $n = 2$

Ja $n = 2$, tad jāpārbauda, vai no $x_1^2 + x_2^2 = 1$ izriet, ka vismaz viena no nevienādībām $|x_1 + x_2| \leq 1$ un $|x_1 - x_2| \leq 1$ ir patiesa.

Pierādījums. Pieņem pretējo:

$$|x_1 + x_2| > 1 \quad \text{un} \quad (1.3.1)$$

$$|x_1 - x_2| > 1. \quad (1.3.2)$$

Tā ka nevienādībām abas puses ir nenegatīvas, var tās kāpināt kvadrātā, iegūstot

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 > 1 \quad \text{un}$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 1.$$

Saskaitām pēdējās divas nevienādības:

$$2x_1^2 + 2x_2^2 > 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 > 1.$$

Pretruna, jo $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Tātad hipotēze ir pierādīta, ja $n = 2$.

1.4 Pierādījums, ja $n = 3$

Ja $n = 3$, tad pārbauda, vai vismaz divas no izteiksmēm $|x_1 + x_2 + x_3|$, $|x_1 + x_2 - x_3|$, $|x_1 - x_2 + x_3|$, $|x_1 - x_2 - x_3|$ nepārsniedz 1 pie nosacījuma, ka $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Pierādījums. Pieņem pretējo: trīs no minētajām izteiksmēm ir lielākas nekā 1.

1. gadījums. Pieņem, ka

$$|x_1 + x_2 - x_3| > 1 \quad (1.4.1)$$

$$|x_1 - x_2 + x_3| > 1 \quad (1.4.2)$$

$$|-x_1 + x_2 + x_3| > 1. \quad (1.4.3)$$

Nevienādībai (1.4.1) abas puses kāpinot kvadrātā, iegūst

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 > 1$$

$$1 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 > 1$$

$$x_1x_2 > x_1x_3 + x_2x_3. \quad (1.4.4)$$

Līdzīgi no (1.4.2) iegūst

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 > 1$$

$$1 + 2x_1x_3 > 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 1$$

$$x_1x_3 > x_1x_2 + x_2x_3. \quad (1.4.5)$$

No (1.4.3) izriet

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 > 1$$

$$x_2x_3 > x_1x_2 + x_1x_3. \quad (1.4.6)$$

Nevienādības (1.4.4), (1.4.5) un (1.4.6) pa pāriem saskaita. No (1.4.4) un (1.4.5) iegūst

$$x_1x_2 + x_1x_3 > x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2 + x_2x_3$$

$$0 > 2x_2x_3$$

$$x_2x_3 < 0. \quad (1.4.7)$$

No (1.4.4) un (1.4.6) līdzīgi iegūst

$$x_1x_3 < 0. \quad (1.4.8)$$

No (1.4.5) un (1.4.6) iegūst

$$x_1x_2 < 0. \quad (1.4.9)$$

Taču, ja izpildās (1.4.7) un (1.4.8), tad $x_2x_3 \cdot x_1x_3 > 0$ jeb $x_1x_2 \cdot x_3^2 > 0$, tātad $x_1x_2 > 0$, kas ir pretrunā ar nevienādību (1.4.9). Līdz ar to nevienādības (1.4.1), (1.4.2) un (1.4.3) nevar vienlaicīgi būt patiesas.

2. gadījums

1. gadījumā izdarītajā pieņēmumā kādai no nevienādībām kreisās puses izteiksmi aizstājam ar $|x_1 + x_2 + x_3|$. Simetrijas dēļ nav būtiski, kura izteiksme tiek aizstāta. Pieņemsim, ka izpildās (1.4.1) un (1.4.2), bet nevienādību (1.4.3) aizstāsim ar

$$|x_1 + x_2 + x_3| > 1. \quad (1.4.10)$$

Tāpat kā iepriekš, kāpinām abas puses kvadrātā. Iegūst

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 > 1$$

jeb

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 > 0. \quad (1.4.11)$$

Atcerēsimies, ka no nevienādībām (1.4.1) un (1.4.2) izriet nevienādības (1.4.4), (1.4.5) un (1.4.7). Saskaitot (1.4.4) un (1.4.11), iegūst

$$x_1x_2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 > x_1x_3 + x_2x_3$$

$$x_1x_2 > 0, \quad (1.4.12)$$

bet no (1.4.5) un (1.4.11) līdzīgi var iegūt

$$x_1x_3 > 0. \quad (1.4.13)$$

Tas nozīmē, ka $x_1x_2 \cdot x_1x_3 > 0$ jeb $x_1^2 \cdot x_2x_3 > 0$, tātad $x_2x_3 > 0$, kas ir pretrunā ar (1.4.7). Tātad vismaz divas no izteiksmēm $|x_1 + x_2 + x_3|$, $|x_1 + x_2 - x_3|$, $|x_1 - x_2 + x_3|$, $|x_1 - x_2 - x_3|$ nepārsniedz 1. Hipotēze ir pierādīta gadījumā, kad $n = 3$.

1.5 Turpmāk izmantotie pieņēmumi

Aprakstītajos problēmas risinājumos, mainīgo skaitam nepārsniedzot 3, nebija svarīgi, kāda zīme ir katram mainīgajam. Iztikām arī bez mainīgo salīdzināšanas savā starpā. Kaut arī risinājumi bija samērā vienkārši, tos būtu iespējams ievērojami saīsināt, ja izdarītu papildus pieņēmumus par mainīgo zīmēm un sakārtojumu.

Pierādot hipotēzi lielākam mainīgo skaitam, izdarīsim pieņēmumus, nesašaurinot pašu pētāmo problēmu. Simetrijas dēļ varam uzskatīt, ka $|x_1| \geq |x_2| \geq \dots \geq |x_n|$.

Nezaudējot vispārīgumu, var arī pieņemt, ka

$$1 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0. \quad (1.5.1)$$

Pamatojums. Ja kāds no mainīgajiem pārsniegtu skaitli 1, tad arī kvadrātu summa būtu lielāka nekā 1.

Ar k apzīmējam kādu naturālu skaitli no intervāla $[1; n]$. No visām iespējamām izteiksmēm $\left| \sum_{i=1}^n \pm x_i \right|$ izvēlamies vienu uz labu laimi. Izvēlēto izteiksmi iespējams pierakstīt kā $|A + x_k|$, kur A vērtība atkarīga no zīmju izvēles tiem lielumiem x_i , kuru koeficienti atšķiras no k . Moduļa dēļ nav svarīgi, kāda zīme izvēlētajā izteiksmē atrodas pirms lieluma x_k . Droši varam apgalvot, ka starp visām izteiksmēm $\left| \sum_{i=1}^n \pm x_i \right|$ atradīsies arī izteiksme $|A - x_k|$. Tātad, mainot zīmi mainīgajam x_k , skaits izteiksmēm, kas nepārsniedz 1, neizmainīsies. Arī nosacījumā $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$ mainīgā x_k zīme nav svarīga. Līdz ar to varam pieņemt, ka x_k ir nenegatīvs, jebkurai pieļaujamai k vērtībai.

Visas iespējamās izteiksmes $\sum_{i=1}^n \pm x_i$ iespējams sadalīt pa pāriem tā, ka katrā pāri izteiksmes pēc moduļa ir vienādas, jo abās izteiksmēs pie katra mainīgā ir ņemtas pretējas zīmes. Šī iemesla dēļ turpmāk apzīmējumus ieviesīsim tikai tām izteiksmēm, kurās pie mainīgā x_1 ir plusa zīme.

1.6 Pierādījums, ja $n = 4$

Ja $n = 4$, lietojam apzīmējumus

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, & u_5 &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4, \\ u_2 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4, & u_6 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4, \\ u_3 &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4, & u_7 &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4, \\ u_4 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4, & u_8 &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Jāpārbauda, vai no izteiksmēm $|u_1|, |u_2|, \dots, |u_8|$ četras noteikti nepārsniedz 1.

Pierādījums. Ievērosim, ka $u_1, u_2, \dots, u_6 \geq 0$ un

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \max\{u_4, u_5\} \geq \min\{u_4, u_5\} \geq u_6 \geq u_7 \geq u_8.$$

Izteiksmes u_4 un u_5 nevar vienlaicīgi pārsniegt 1, jo $u_4 + u_5 = 2x_1 \leq 2$. Tāpēc izteiksmes $\min\{u_4, u_5\}$, u_6 , u_7 , u_8 nepārsniedz 1, turklāt, ja kāda no tām skaitli 1 pārsniedz pēc moduļa, tad tā var būt tikai izteiksme u_8 jeb $-u_8 > 1$. Radzams, ka $-u_8 = -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq u_5$, tāpēc arī izteiksmei u_5 būtu jāpārsniedz 1. Tādā gadījumā

$$(-u_8)^2 + u_5^2 > 2,$$

$$1 + 2(-x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + 1 + 2(-x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + x_3x_4) > 2,$$

$$x_3x_4 > x_1x_2,$$

kas nav iespējams. Tātad $|u_8| \leq 1$ un ir atrastas četras izteiksmes, kas nepārsniedz 1: tās ir $\min\{|u_4|, |u_5|\}$, $|u_6|$, $|u_7|$ un $|u_8|$. Hipotēze pierādīta, ja $n = 4$.

1.7 Pierādījums, ja $n = 5$

Ja $n = 5$, lieto apzīmējumus

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, & u_9 &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ u_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5, & u_{10} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5, \\ u_3 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5, & u_{11} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5, \\ u_4 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5, & u_{12} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5, \\ u_5 &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5, & u_{13} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_6 &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5, & u_{14} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5, \\
u_7 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5, & u_{15} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5, \\
u_8 &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5, & u_{16} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5.
\end{aligned}$$

1. apgalvojums. $1 \geq u_{11} \geq u_k \geq u_{15} \geq -1$, $k = 12, 13, 14$.

Pamatojums: $u_{11} \leq x_1 \leq 1$, jo $-x_2 + x_3 \leq 0$ un $-x_4 + x_5 \leq 0$.

Pieņemsim, ka $u_{15} < -1$. Tad $u_{15}^2 > 1$ jeb

$$-x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 - x_2x_5 + x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 > 0. \quad (1.7.1)$$

Tā ka

$$(-x_1x_2 + x_2x_3) + (-x_1x_3 + x_2x_4) + (-x_1x_4 + x_3x_4) \leq 0, \quad (1.7.2)$$

tad

$$x_1x_5 - x_2x_5 - x_3x_5 - x_4x_5 > 0. \quad (1.7.3)$$

Pārveidojot (1.7.3) kreisās puses izteiksmi, iegūst $x_5(x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = x_5(u_{15} - x_5)$.

Tā ka nevienādība (1.7.3) apgalvo, ka šī izteiksme ir pozitīva, un $x_5 > 0$, tad $u_{15} - x_5 > 0$ jeb $u_{15} > x_5 > 0$. Tas ir pretrunā ar pieņēmumu, tāpēc $u_{15} \geq -1$.

Sakarība $u_{11} \geq u_k \geq u_{15}$, kad $k = 12, 13, 14$ ir acīm redzama mainīgo sakārtojuma dēļ.

2. apgalvojums. Vismaz viena no katrām divām izteiksmēm $(u_6, |u_{16}|)$, (u_7, u_{10}) , (u_8, u_9) nepārsniedz 1.

Pamatojums: Pieņemsim, ka $u_6 > 1$ un $|u_{16}| > 1$, tādā gadījumā

$$u_6^2 + u_{16}^2 > 2. \quad (1.7.4)$$

Pārveidojot šo sakarību, iegūst

$$x_2x_4 + x_3x_5 > x_1x_3 + x_1x_5. \quad (1.7.5)$$

Ir zināms, ka $x_2x_4 \leq x_1x_3$ un $x_3x_5 \leq x_1x_5$, tātad nevienādība (1.7.5) ir aplama. Tas nozīmē, ka vismaz viena no izteiksmēm u_6 un $|u_{16}|$ nepārsniedz skaitli 1.

Tā ka $u_7 + u_{10} = u_8 + u_9 = 2x_1 \leq 2$, tad pāros (u_7, u_{10}) un (u_8, u_9) katrā vismaz viena izteiksme nepārsniedz 1. Turklāt no tām neviena nav mazāka par $u_{15} \geq -1$.

No 1. un 2. apgalvojuma izriet, ka starp izteiksmēm $|u_6|, \dots, |u_{16}|$ noteikti atradīsies astoņas, kas nepārsniedz 1. Līdz ar to hipotēze ir pierādīta, ja $n = 5$.

1.8 Pierādījums, ja $n = 6$.

Ja $n = 6$, lietojam apzīmējumus

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, & u_{17} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6, \\
 u_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6, & u_{18} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6, \\
 u_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6, & u_{19} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6, \\
 u_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6, & u_{20} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6, \\
 u_5 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6, & u_{21} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6, \\
 u_6 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6, & u_{22} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6, \\
 u_7 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6, & u_{23} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6, \\
 u_8 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6, & u_{24} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6, \\
 u_9 &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6, & u_{25} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6, \\
 u_{10} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6, & u_{26} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6, \\
 u_{11} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6, & u_{27} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6, \\
 u_{12} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6, & u_{28} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6, \\
 u_{13} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6, & u_{29} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6, \\
 u_{14} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6, & u_{30} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6, \\
 u_{15} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6, & u_{31} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6, \\
 u_{16} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6, & u_{32} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6.
 \end{aligned}$$

3. apgalvojums. $1 \geq u_{22} \geq u_k \geq u_{30} \geq -1$, $k = 23, 24, 26, 27, 28, 29$.

Pamatojums: $u_{22} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - x_6 \leq x_1 \leq 1$

Pieņemsim, ka $u_{30} < -1$. Tā ka $x_1 - x_2 \geq 0$ un $x_5 - x_6 \geq 0$, tad $x_3 + x_4 > 1$ un $x_3^2 + x_4^2 + 2x_3x_4 > 1$. Zināms, ka $x_1^2 \geq x_2^2 \geq x_3x_4$, tātad

$$1 \geq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geq x_3^2 + x_4^2 + 2x_3x_4 > 1. \quad (1.8.1)$$

Ir iegūta pretruna. Līdz ar to $u_{30} \geq -1$. Sakarība $u_{22} \geq u_k \geq u_{30}$, kad $k = 23, 24, 26, 27, 28, 29$, ir acīm redzama mainīgo sakārtojuma (1.5.1) dēļ.

4. apgalvojums. Vismaz viena no katrām divām izteiksmēm $(|u_{11}|, |u_{31}|)$ un $(|u_m|, |u_{33-m}|)$, kur $m = 8, 13, 14, 15, 16$, nepārsniedz 1.

Pamatojums: Vienlaicīgi nevar izpildīties $(-u_{31}) > 1$ un $u_{11} > 1$. No pretējā: saskaitot abas puses, iegūst $x_2 + x_4 > 1$. Tad $x_2^2 + x_4^2 + 2x_2x_4 > 1$. Tā ka $x_2^2 + x_4^2 \leq x_1^2 + x_3^2$, tad

$x_2^2 + x_4^2 \leq 0,5$ un $2x_2x_4 > 0,5$. Tas nav iespējams, jo vidējais ģeometriskais nevar pārsniegt vidējo aritmētisko.

$u_m + u_{33-m} = 2x_1 \leq 2$, tātad vismaz viena no izteiksmēm u_m un u_{33-m} nepārsniedz 1, turklāt neviena no tām nav mazāka par $u_{30} \geq -1$.

5. apgalvojums. No izteiksmēm $|u_{32}|$, u_{12} un u_{21} vismaz divas nepārsniedz 1.

Pamatojums:

- 1) $u_{12} + u_{21} = 2x_1 \leq 2$, tātad kāda no izteiksmēm u_{12} , u_{21} nepārsniedz 1.
- 2) $u_{32} \leq 1$, tāpēc pieņem, ka $-u_{32} > 1$ un $u_{12} > 1$. Saskaitot šīs nevienādības, iegūst $x_2 + x_4 > 1$. Pie 4. apgalvojuma ir pamatots, ka tā nevar būt.
- 3) Pieņem, ka $-u_{32} > 1$ un $u_{21} > 1$.

$$x_1 + x_6 > u_{21} > 1 \Rightarrow x_1 > 1 - x_6.$$

Tā ka $x_1^2 + 5x_6^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1$, tad

$$\begin{aligned} (1 - x_6)^2 + 5x_6 &< 1 \\ 6x_6^2 - 2x_6 &< 0 \\ 0 < x_6 &< \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{1.8.2}$$

No pieņēmuma izriet, ka $u_{21} - u_{32} > 2$ jeb

$$x_3 + x_5 + x_6 > 1 \tag{1.8.3}$$

No (1.8.2), (1.8.3) un pieņēmuma par mainīgo sakārtojumu izriet

$$x_2 + x_4 \geq x_3 + x_5 > \frac{2}{3} \tag{1.8.4}$$

Izteiksmes u_{21} un u_{32} kāpinām kvadrātā. No $u_{32}^2 + u_{21}^2 > 2$ izriet, ka

$$x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_6 > x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_6 + x_4x_6. \tag{1.8.5}$$

Novērtējam nevienādības (1.8.5) abas puses.

$$x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_6 \leq \frac{x_1^2 + x_6^2}{2} + \frac{x_2^2 + x_4^2}{2} + \frac{x_3^2 + x_6^2}{2} \leq 0,5 \tag{1.8.6}$$

un

$$x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_6 + x_4x_6 = (x_1 + x_6)(x_2 + x_4) > \frac{2}{3} \tag{1.8.7}$$

No (1.8.5), (1.8.6) un (1.8.7) iegūstam

$$\frac{2}{3} < 0,5$$

tātad pieņēmums ir aplams un kāda no izteiksmēm u_{21} un $(-u_{32})$ nepārsniedz 1.

No 3., 4. un 5. apgalvojuma izriet, ka vienmēr var atrast tādas 16 izteiksmes, kuru vērtības nepārsniedz 1. Hipotēze ir pierādīta, kad $n = 6$.

1.9 Gadījums $n = 7$

Kad $n = 7$, apzīmē

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & u_{33} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 & u_{34} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_3 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 & u_{35} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 & u_{36} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_5 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 & u_{37} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_6 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 & u_{38} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_7 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 & u_{39} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_8 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 & u_{40} &= x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_9 &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & u_{41} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{10} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 & u_{42} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{11} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 & u_{43} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{12} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 & u_{44} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_{13} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 & u_{45} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{14} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_7 & u_{46} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{15} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 & u_{47} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{16} &= x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 & u_{48} &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_{17} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & u_{49} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{18} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 & u_{50} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{19} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 & u_{51} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{20} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 & u_{52} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_{21} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 & u_{53} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{22} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 & u_{54} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{23} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 & u_{55} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{24} &= x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 & u_{56} &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_{25} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 & u_{57} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{26} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 & u_{58} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{27} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 & u_{59} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{28} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 & u_{60} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 \\
 u_{29} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 & u_{61} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 \\
 u_{30} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_7 & u_{62} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_7 \\
 u_{31} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 & u_{63} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 \\
 u_{32} &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7 & u_{64} &= x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 - x_7
 \end{aligned}$$

- Katrā pāri (u_i, u_{65-i}) , kur $i \in \{1, 2, \dots, 32\}$, vismaz viena izteiksme nepārsniedz 1,

jo norādītajām i vērtībām $u_i + u_{65-i} = 2x_1 \leq 2$.

Sekas: Ja $u_{64} \geq -1$, tad $\forall i \in \{1, 2, \dots, 32\} : \min\{|u_i|, |u_{65-i}|\} \leq 1$, jo no visām apzīmētajām izteiksmēm u_{64} ir pēc vērtības vismazākā.

- Jebkurām mainīgo vērtībām $\forall i \in B = \{43, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 58, 59\} : |u_i| \leq 1$ (13 izteiksmes).

Pamatojums:

$$u_{43} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - (x_6 - x_7) \leq x_1 \leq 1, \quad (1.9.1)$$

jo $x_k - x_{k+1} \geq 0$, $k = 1, \dots, 6$. Turklāt $u_{43} = \max u_i$, $i \in B$ jo izteiksmē u_{43} negatīvo saskaitāmo summa ir vismazākā. Līdzīgi

$$u_{59} = x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 \geq -x_3 - x_4. \quad (1.9.2)$$

Iepriekš tika pamatots, ka $x_2 + x_4 \leq 1$, bet $x_3 + x_4 \leq x_2 + x_4$, tāpēc

$$u_{59} \geq -(x_3 + x_4) \geq -1. \quad (1.9.3)$$

Bez tam $u_{59} = \min u_i$, $i \in B$, jo izteiksmē u_{59} negatīvo saskaitāmo summa ir vislielākā. Tātad $\forall i \in B : -1 \leq u_i \leq 1$.

- Izteiksmes, kuru vērtība var būt mazāka par -1 : ir u_i , kur $i \in \{32, 48, 56, 60 \dots 64\}$.
Pamatojums: viegli pamanāms, ka

$$\min(u_1, \dots, u_{31}) = u_{31} \geq -x_5 - x_6 \geq -1; \quad (1.9.4)$$

$$\min(u_{33}, \dots, u_{47}) = u_{47} \geq -x_5 - x_6 \geq -1 \quad (1.9.5)$$

un

$$\min(u_{49}, \dots, u_{55}, u_{57}, \dots, u_{59}) = u_{59} \geq -x_3 - x_4 \geq -1. \quad (1.9.6)$$

Tas nozīmē, ka bez minētajām, nevienai citai izteiksmei vērtība nevar būt < 1 .

Parādīsim, ka uzskaitītās izteiksmes var iegūt vērtību, kas mazāka par -1 . Ja

$$x_1 = \dots = x_7 = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

tad

$$u_{32} = u_{48} = u_{56} = u_{60} = u_{62} = u_{63} = -\frac{3\sqrt{7}}{7} < -1$$

un

$$u_{64} = -\frac{5\sqrt{7}}{7} < -1.$$

Ja

$$x_1 = \dots = x_5 = \frac{\sqrt{5}}{5}; \quad x_6 = x_7 = 0,$$

tad

$$u_{61} = -\frac{3\sqrt{5}}{5} < -1.$$

- Ja $u_{32} < -1$, tad $\forall i \in \{8, 12, 14, \dots, 16, 20, 22, \dots, 24, 26, \dots, 31, 36, 38, 39, 61\}$:
 $|u_i| \leq 1$.
Pamatojums: Ja $-u_{32} > 1$, tad u_8 nepārsniedz 1, jo $-u_{32} + u_8 = 2(x_3 + x_4)$. Iepriekš jau tika noskaidrots, ka $x_3 + x_4 \leq 1$, tātad $-u_{32} + u_8 \leq 1$, tāpēc u_8 nevar būt lielāks par 1.
No visām izteiksmēm u_i , kur $i \in \{8, 12, 14, \dots, 16, 20, 22, \dots, 24, 26, \dots, 31, 36, 38, 39, 61\}$, vislielākā ir u_8 .
Sekas: Minētās 19 izteiksmes nepārsniedz 1. Iepriekš tika minētas vēl 13 izteiksmes, kas pieņem vērtības tikai no intervāla $[-1; 1]$, tātad vismaz puse no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.
- Ja $u_{61} < -1$, tad $\forall i \in \{21, \dots, 31, 37, \dots, 42, 49, 50\} : |u_i| \leq 1$.
Pamatojums: visām minētajām i vērtībām izpildās $u_i + (-u_{61}) \leq 2x_2 + 2x_4 \leq 2$. Līdz ar to, ja $-u_{61} > 1$, tad $u_i < 1$.
Sekas: Ja $u_{61} < -1$, tad 19 minētās izteiksmes pēc moduļa nepārsniedz 1. Līdzīgi kā iepriekšējā punktā, arī šeit varam apgalvot, ka vismaz puse no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.
- Ja $u_{48} < -1$, tad $\forall i \in \{2, 12, 14, 15, 16, 20, 22, 23, 24, 26, \dots, 31, 36, 38, 39, 40, 42, 50\} : |u_i| \leq 1$, jo visām norādītajām i vērtībām izpildās $u_i + (-u_{48}) \leq 2x_2 + 2x_4 \leq 2$, tāpēc $u_i \geq -1$. Tika norādīta 21 izteiksme u_i , tātad vismaz $21 + 13 = 34$ no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.
- Ja $u_{56} < -1$, tad $\forall i \in \{20, 22, 23, 24, 26, \dots, 32, 36, 38, 39, 40, 42, 48, 50, 61\}$:
 $u_i + (-u_{56}) \leq 2x_2 + 2x_4 \leq 2$.
Pamatojums. No šīm izteiksmēm u_i , mazākas par -1 varētu būt tikai u_{32}, u_{48} un u_{61} . Iepriekš tika pamatots, ka, ja kāda no tām ir mazāka par -1 , tad vismaz puse no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1. Ja neviena no tām nav mazāka par -1 , tad 19 norādītās izteiksmes u_i pēc moduļa nepārsniedz 1, tātad arī šajā gadījumā vismaz puse no apskatāmajām izteiksmēm nepārsniedz 1.
- Ja $u_{60} < -1$, tad $\forall i \in \{20, 22, 23, 24, 26, \dots, 32, 36, 38, 39, 40, 42, 48, 50, 56, 61\}$:
 $u_i + (-u_{60}) \leq 2$.
Pamatojuma ideja tāda pati kā iepriekš: ja $-u_{60} > 1$, tad $u_i \leq 1$, bez tam izteiksmes, kas varētu būt mazākas par -1 , ir apskatītas iepriekš, tādēļ šeit pieņemam, ka neviena nav mazāka par -1 . Apskatītajā i vērtību kopā ir 20 elementi. Ja $u_{60} < -1$, tad vismaz $20 + 13 = 33$ no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1 pie nosacījuma, ka neviena no izteiksmēm nav mazāka par -1 . Ja no šī nosacījuma atsakāmies, tad iepriekš pierādīts, ka vismaz 32 izteiksmes iegūst vērtības no intervāla

$[-1; 1]$.

- Ja $u_{62} < -1$ tad $\forall i \in \{22, 23, 24, 26, \dots, 32, 38, 39, 40, 42, 48, 50, 56, 60, 61\}$:
 $u_i \leq 1$, jo $u_i + (-u_{62}) \leq 2$ un varam pieņemt, ka neviena no minētajām izteiksmēm nav mazāka par -1 . Tika norādītas 19 vērtības lielumam i , tāpēc vismaz puse no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.

- Ja $u_{50} > 1$, tad $u_{64} \geq -1$.

Pamatosim, ka izteiksmes $u_8, u_{12}, u_{14}, u_{20}, u_{22}, u_{26}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{50}, u_{64}$ nevar vienlaicīgi pēc moduļa pārsniegt 1. Lai to pamatotu, izmantosim pierādījumu no pretējā. Pieņemsim, ka $\min |u_i| > 1$, kur $i \in \{8; 12; 14; 20; 22; 26; 36; 38; 42; 50; 64\}$. Visas norādītās izteiksmes u_i kāpinām kvadrātā. Pamanīsim, ka, izkāpinot izteiksmi u_i kvadrātā, iegūsim visu mainīgo kvadrātu summu kā arī divkāršos reizinājumus visām mainīgo kombinācijām pa divi. Dažādām izteiksmēm atšķirsies tikai zīmes pie divkāršajiem mainīgo reizinājumiem, tāpēc tās attēlotas tabulā.

Tabula 1.1: Divkāršo reizinājumu zīmes.

u_i	x_1x_2	x_1x_3	x_1x_4	x_1x_5	x_1x_6	x_1x_7	x_2x_3	x_2x_4	x_2x_5	x_2x_6	x_2x_7	x_3x_4	x_3x_5	x_3x_6	x_3x_7	x_4x_5	x_4x_6	x_4x_7	x_5x_6	x_5x_7	x_6x_7
u_8	+	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	+	+
u_{12}	+	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	-	+
u_{14}	+	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-
u_{20}	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	+	-	-	-	-	+
u_{22}	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-
u_{26}	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-	-
u_{36}	-	+	+	+	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	-	-	-	-	+
u_{38}	-	+	+	-	+	-	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	-
u_{42}	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-
u_{50}	-	-	+	+	+	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	+	-	-
u_{64}	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Ja visi norādītie mainīgie lielāki par 1, tad arī to kvadrāti lielāki par 1, tāpēc

$$u_8^2 + u_{12}^2 + u_{14}^2 + u_{20}^2 + u_{22}^2 + u_{26}^2 + u_{36}^2 + u_{38}^2 + u_{42}^2 + u_{50}^2 + 2u_{64}^2 > 12. \quad (1.9.7)$$

Izmantojot tabulu, pārveidojam šo nevienādību:

$$12(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2) - 12x_1x_7 > 12$$

$$12 - 12x_1x_7 > 12$$

$$x_1x_7 < 0,$$

kas nav iespējams, jo visi mainīgie ir nenegatīvi. Līdz ar to $\min |u_i| \leq 1$, kur $i \in \{8; 12; 14; 20; 22; 26; 36; 38; 42; 50; 64\}$. Tā ka $u_{50} = \min(u_8, u_{12}, u_{14}, u_{20}, u_{22}, u_{26}, u_{36}, u_{38}, u_{42}, u_{50})$ un pieņemām, ka $u_{50} > 1$, tad vienīgā izteiksme, kas var nepārsniegt skaitli 1, ir izteiksme $|u_{64}|$. Iepriekš tika pamatots, ka gadījumā, kad $u_{64} \geq -1$, vismaz puse no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.

- Ja $u_{64} < -1$ un $\min u_j \geq -1$ ($j \in \{32, 48, 56, 60, 61, 62\}$), tad $\forall i \in \{24, 28, 30, 31, 32, 40, 48, 56, 60, 61, 62\}$: $u_i + (-u_{64}) \leq 2$, līdz ar to $|u_i| \leq 1$. Pāros (u_{16}, u_{49}) , (u_{23}, u_{42}) , (u_{26}, u_{39}) , (u_{27}, u_{38}) un (u_{29}, u_{36}) katrā vismaz viena izteiksme nepārsniedz 1 pēc moduļa. Kopā ar 13 izteiksmēm, kas nekādām mainīgo vērtībām nevar pārsniegt 1, ir pamatots, ka vismaz 30 no izteiksmēm $|u_k|$, kur $k = 1, \dots, 64$, nepārsniedz 1.

2 Uzdevumi ar ģeometrisku jēgu

2.1 Uzdevums par taisnstūri

Problēmas formulējums.

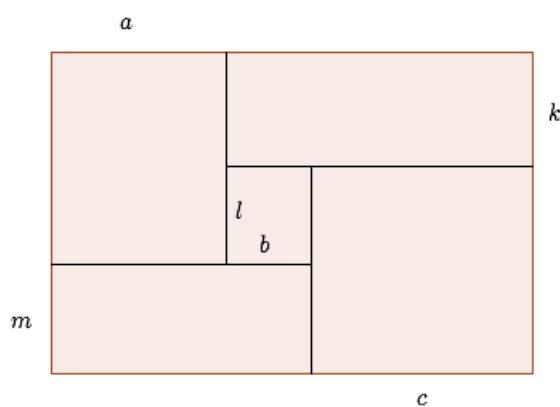
Atrast minimālā laukuma taisnstūri, kuru var sadalīt tādos taisnstūros, ka to visi malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi.

Risinājums

Sadalot taisnstūri 2, 3 vai 4 taisnstūros, kāds no malu garumiem noteikti atkārtosies. Aplūkojam taisnstūri, kas sadalīts 5 taisnstūros tā, ka to malu garumi ir atšķirīgi. Atsevišķiem malu garumiem ieviešu apzīmējumus, kā norādīts zīmējumā.

Šajā gadījumā sākotnējā taisnstūra malu garumi ir $a+b+c$ un $k+l+m$. Pēc griešanas iegūtajiem taisnstūriem malu garumi ir a , b , c , $a+b$ un $b+c$ vienā virzienā un k , l , m , $k+l$ un $l+m$ otrā virzienā. Tātad visām šīm desmit izteiksmēm jābūt ar atšķirīgām vērtībām.

Tā kā a , b un c (un arī k , l , m) ir atšķirīgi skaitļi, tad sākotnējā taisnstūra malas garums ir ne mazāks kā $1+2+3=6$.



Att. 2.1: Princips taisnstūra sagriešanai piecos taisnstūros.

Izvēlamies 10 mazākos naturālos skaitļus, sareizinām tos pa pāriem un noskaidrojam šo reizinājumu summu. No sakārtojuma nevienādības izriet, ka iegūtais rezultāts būs vismaz $1 \cdot 10 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 10 + 18 + 24 + 28 + 30 = 110$.

Lai pārbaudītu, vai taisnstūri ar laukumu 110 iespējams sagriezt piecos taisnstūros, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, sadalām skaitli 110 reizinātājos:

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11 = 10 \cdot 11 = 22 \cdot 5 = 2 \cdot 55$$

Tā ka skaiļi 2 un 5 neder kā lielā taisnstūra malu garumi, pārbaudīsim, vai taisnstūris ar malu garumiem 10 un 11 apmierina uzdevuma nosacījumus. Izvēlas $a + b + c = 10$ un $k + l + m = 11$. Noskaidro visus naturālo skaitļu trijniekus, kas dod vajadzīgās summas. Skaitlim 10 tie ir $\{1; 2; 7\}$, $\{1; 3; 6\}$, $\{1; 4; 5\}$ un $\{2; 3; 5\}$, bet skaitlim 11 – $\{1; 2; 8\}$, $\{1; 3; 7\}$, $\{1; 4; 6\}$, $\{2; 3; 6\}$ un $\{2; 4; 5\}$. Skaitļu trijnieki jāizvēlas tā, lai tajos cipari neatkārtotos. Tātad ir jēga apskatīt tikai šādas skaitļu trijnieku kombinācijas:

- 1) $\{1; 3; 6\}$ ar $\{2; 4; 5\}$;
- 2) $\{1; 4; 5\}$ ar $\{2; 3; 6\}$;
- 3) $\{2; 3; 5\}$ ar $\{1; 4; 6\}$.

Noskaidrosim, vai katrā no gadījumiem ir iespējams skaitļiem a, b, c, k, l, m vērtības piešķirt tā, ka attiecīgās vērtības un $a + b$, $b + c$, $k + l$ un $l + m$ ir savā starpā atšķirīgi skaitļi. Izveidoju tabulu, kurā no katra trijnieka skaitļi pa pāriem saskaitīti.

Tabula 2.1: Skaitļu trijnieku (1; 3; 6), (1; 4; 5) un (2; 3; 5) pārbaude

1. skaitļu trijnieks	summas pa pāriem	2. skaitļu trijnieks	summas pa pāriem	atšķirīgo skaitļu skaits
1; 3; 6	4; 7; 9	2; 4; 5	6; 7; 9	8
1; 4; 5	5; 6; 9	2; 3; 6	5; 8; 9	8
2; 3; 5	5; 7; 8	1; 4; 6	5; 7; 9	9

Nevienā no gadījumiem nav iespējams iegūt 10 atšķirīgus taisnstūra malu garumus. Tātad taisnstūri ar laukumu 110 nav iespējams sagriezt piecos taisnstūros ar atšķirīgiem naturāliem malu garumiem.

Arī taisnstūri ar laukumu 111 nav iespējams sagriezt pēc uzdevuma nosacījumiem, jo skaitļa 111 pirmreizinātāji ir 3 un 37, bet taisnstūra katras malas garumam ir jābūt vismaz 6.

Pārbaudām, vai var izveidot taisnstūri ar laukumu 112, kas atbilstu prasībām.

$$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

Ja malas garumam jābūt vismaz 6, tad jāapskata divi gadījumi – taisnstūris ar malu garumiem 7 un 16; taisnstūris ar malu garumiem 8 un 14.

1) Ņem $a + b + c = 7$ un $k + l + m = 16$. Skaitli 7 var uzrakstīt kā trīs atšķirīgu naturālu skaitļu summu tikai vienā kombinācijā: $7 = 1 + 2 + 4$. Skaitli 16 dalīsim saskaitāmajos tā, lai starp tiem nebūtu 1, 2 un 4. Iegūstam divus skaitļu trijniekus: $\{3;5;8\}$ un $\{3;6;7\}$. Šajā gadījumā viegli pārlicināties, ka nav iespējams sadalīt a , b un c vērtības tā, lai iegūtu derīgus malu garumus $a + b$ un $b + c$, jo skaitļus 1, 2 un 4 pa pāriem saskaitot iegūst 3, 5 un 6. Katrā no atrastajiem skaitļu trijniekiem ar summu 16, ietilpst divi no šiem skaitļiem.

2) Ņem $a + b + c = 8$ un $k + l + m = 14$. Līdzīgi kā iepriekš veidojam skaitļu trijniekus ar attiecīgo summu. Skaitlim 8: $\{1;2;5\}$ un $\{1;3;4\}$. Skaitlim 14 veido skaitļu trijniekus bez skaitļa 1: $\{2;3;9\}$, $\{2;4;8\}$, $\{2;5;7\}$, $\{3;4;7\}$, $\{3;5;6\}$. Atmetam tās kombinācijas, kurās skaitļi atkārtojas un apskatām tikai $\{1;2;5\}$ ar $\{3;4;7\}$ un $\{1;3;4\}$ ar $\{2;5;7\}$.

Tabula 2.2: Skaitļu trijnieku (1; 2; 5) un (1; 3; 4) pārbaude

1. skaitļu trijnieks	summas pa pāriem	2. skaitļu trijnieks	summas pa pāriem	atšķirīgo skaitļu skaits
1; 2; 5	3; 6; 7	3; 4; 7	7; 10; 11	9
1; 3; 4	4; 5; 7	2; 5; 7	7; 9; 12	8

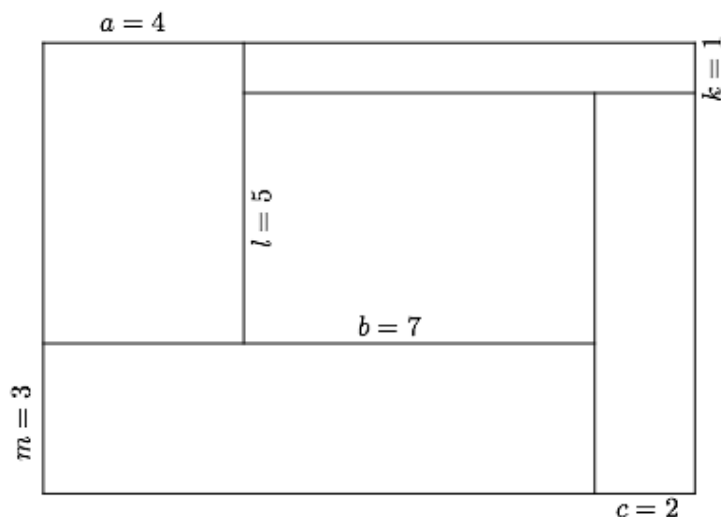
Arī šajā gadījumā nevar iegūt 10 atšķirīgus malu garumus jaunajiem taisnstūriem, tātad taisnstūris ar laukumu 112 nevar tikt sagriezts piecos taisnstūros tā, kā prasīts uzdevuma nosacījumos.

113 ir pirmskaitlis, tāpēc neder kā sākotnējā taisnstūra laukums.

$114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$, tāpēc vērts apskatīt tikai malu garumus 6 un 19. Ja $a + b + c = 6$, tad a, b, c vērtībām jābūt 1, 2 un 3 (ne pēc kārtas). Tādā gadījumā $a + b$ un $b + c$ vērtībām jābūt 4 un 5. Līdz ar to $k, l, m \geq 6$ un $k + l + m \geq 6 + 7 + 8 = 21 > 19$. Secinām, ka 114 neder kā sākotnējā taisnstūra laukums.

$115 = 5 \cdot 23$ un $116 = 2 \cdot 2 \cdot 29$. Abos gadījumos nav iespējams izveidot taisnstūri ar naturāliem malas garumiem, kas nav mazāki par 6.

Ir iespējams izveidot taisnstūri ar laukumu $117 = 9 \cdot 13$ un sadalīt tā, kā prasīts. Var ņemt $a = 4$, $b = 7$, $c = 2$, $a + b = 11$, $b + c = 9$, $k = 1$, $l = 5$, $m = 3$, $k + l = 6$, $l + m = 8$.



Att. 2.2: Malu garumi, griežot taisnstūri ar laukumu 117.

Ja taisnstūri dalītu vairāk nekā piecos taisnstūros tā, kā prasīts uzdevuma formulējumā, tad tā laukums nevarētu būt mazāks par $1 \cdot 12 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = 182 > 117$, līdz ar to iepriekš aprakstītais taisnstūris ir optimāls.

Atbilde. Mazākais laukums taisnstūrim, kuru var sadalīt tādos taisnstūros, ka to visi malu garumi ir dažādi naturāli skaitļi, ir 117.

2.2 Uzdevums par pialu

Kādā 1985. gada matemātiskās analīzes mācību grāmatā [6] ir sniegts uzdevums par līdzsvara stāvokļa meklēšanu.

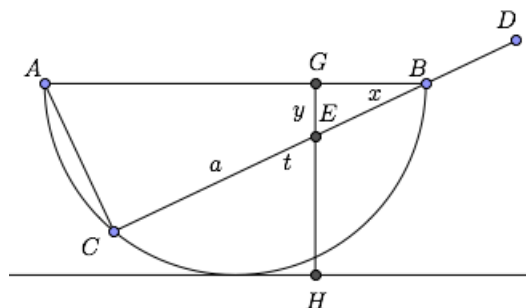
Uzdevums. *Nekustīgi nostiprinātā tasītē (puslodē ar rādiusu r) ievieto homogēnu stieni ar garumu l , $2r < l < 4r$. Atrast stieņa līdzsvara stāvokli – stieņa smaguma centru jāiegūst zemākais iespējamais novietojums.*

Minētajā grāmatā ir sniegts uzdevuma risinājums, izmantojot diferenciālrēķinus. Izmantojot trigonometriskas funkcijas un lielumus l un r , ir izteikts lielums, kam jāmeklē ekstrēms. Risinājumā ir izmatots pirmās un otrās kārtas atvasinājums. Taču šo uzdevumu ir iespējams atrisināt arī ar elementārām metodēm. Apskatīsim vienu no šādiem risinājumiem, bez minētā uzdevuma aplūkojot arī šādu papildjautājumu.

Papildjautājums. *Kādai attiecībai jāpastāv starp r un l , lai leņķis x starp puslodes diametru un stieni līdzsvara stāvoklī būtu 1) 45° ; 2) 30° ?*

2.2.1 Līdzsvara stāvokļa meklēšana.

Skaidrs, ka punktiem, kuros saskaras piala un stienis, jāatrodas vertikālā plaknē, kas iet caur puslodes centru. Tas ļauj situāciju vienkāršot, apskatot plaknes figūras. Apskatām pusapli, kura diametrs AB novietots horizontāli. Stieņa galapunkts, kas pieskaras pialai apzīmēts ar C , otrs stieņa galapunkts ir D , bet stieņa viduspunkts - E (skatīt Att. 2.3). Caur E novilkta taisne $GH \perp AB$.



Att. 2.3: Pialā ievietota stieņa līdzsvara stāvokļa meklēšanā izmantotie apzīmējumi.

Stieņa CD smaguma centram atbilst punkts E . Ja punktam E ir jāatrodas pēc iespējas zemāk, tad attiecīgi lielumam $y = GE$ ir jāiegūst lielākā iespējamā vērtība. Tā ka uzdevumā ir prasīta puslodes rādiusa un stieņa garuma attiecība, tad varam izvēlēties, ko pieņemt par vienību. Kā vienību izvēlos puslodes diametru, tātad $AB = 1$. Apzīmēju $CE = a$, $CB = t$. Līdz ar to $EB = t - a$.

Tā ka $2r < l < 4r$, tad $1 < 2a < 2$ un

$$0,5 < a < 1. \quad (2.2.1)$$

Savienojot C un A , iegūst taisnleņķa trijstūri ABC , jo AB ir diametrs. Arī $\triangle EGB$ ir taisnleņķa. Abiem šiem trijstūriem $\angle ABC$ ir kopīgs leņķis, līdz ar to $\triangle ACB \sim \triangle EGB$ un

$$\frac{AC}{AB} = \frac{EG}{EB}, \quad (2.2.2)$$

turklāt $AC = \sqrt{1 - CB^2} = \sqrt{1 - t^2}$. Iegūstam, ka

$$\frac{\sqrt{1 - t^2}}{1} = \frac{y}{t - a} \quad (2.2.3)$$

$$y = (t - a) \cdot \sqrt{1 - t^2} \quad (2.2.4)$$

Maksimizējamā funkcija $y(t) = (t - a) \cdot \sqrt{1 - t^2}$ apraksta smaguma centra attālumu līdz pialas augšējās maliņas plaknei, atkarībā no tā, cik tālu stienis "ieslidināts" pialā. No dotajiem varam secināt, ka $t - a > 0$ un $1 > t$, tātad visi reizinātāji labajā pusē ir pozitīvi. Kāpinām funkciju $y(t)$ kvadrātā:

$$y^2 = (t - a)(t - a)(1 - t)(1 + t) \quad (2.2.5)$$

Labo pusi pareizinu un izdalū ar izteiksmi $m(2+m)$, kur m ir kāds reāls, pozitīvs skaitlis. Vēlāk precizēsīm, kāda m vērtība palīdzēs funkciju (2.2.5) maksimizēt. Iegūstam

$$y^2 = \frac{(t-a)(t-a)(2+m-t(2+m))(m+tm)}{m(2+m)} \quad (2.2.6)$$

Jebkurai m vērtībai skaitītājā esošo reizinātāju summa ir konstanta, jo

$$t-a+t-a+2+m-t(2+m)+m+tm = -2a+2+2m. \quad (2.2.7)$$

Tā ka saucējs ir konstants, tad t vērtību, kas maksimizē $y(t)$, tas neietekmē. Funkcija $y^2(t)$ vislielāko vērtību iegūs, kad visi reizinātāji skaitītājā būs vienādi, ja šāda vienādība ir iespējama. Meklējam tādu m vērtību, ar kuru $t-a = 2+m-t(2+m) = m+tm$.

$$t-a = m+tm$$

$$t(1-m) = m+a$$

$$t = \frac{m+a}{1-m} \quad (2.2.8)$$

$$2+m-t(2+m) = m+tm$$

$$t(m+2+m) = 2+m-m$$

$$t = \frac{2}{2m+2} = \frac{1}{m+1} \quad (2.2.9)$$

No sakarībām (2.2.8) un (2.2.9) iegūstam, ka

$$\frac{m+a}{1-m} = \frac{1}{m+1}$$

$$m^2 + m(a+1) + a = 1 - m$$

$$m^2 + m(a+2) + a - 1 = 0$$

$$m = \frac{-a-2 \pm \sqrt{a^2+4a+4-4a+4}}{2}$$

Tā ka m vērtībai jābūt pozitīvai, tad ņemam

$$m = \frac{-a-2 + \sqrt{a^2+8}}{2} \quad (2.2.10)$$

Vēl jāpārbauda, vai no šādas m vērtības iegūstam t vērtību, kas apmierina uzdevuma nosacījumus. Izsakām optimāto t vērtību (apz. t_0), izmantojot (2.2.9).

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{\frac{-a-2+\sqrt{a^2+8}}{2} + 1} = \frac{2}{-a-2 + \sqrt{a^2+8} + 2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{a^2+8} - a} = \frac{2 \cdot (\sqrt{a^2+8} + a)}{a^2+8 - a^2} \end{aligned}$$

$$t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4}. \quad (2.2.11)$$

Pārbaudām, vai iegūtā t_0 vērtība ir robežās starp a un $2a$, izpildoties (2.2.1).

$$\begin{aligned} a &< \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4} < 2a \\ 4a &< \sqrt{a^2 + 8} + a < 8a \\ 3a &< \sqrt{a^2 + 8} < 7a \\ 9a^2 &< a^2 + 8 < 49a^2 \\ 8a^2 &< 8 < 48a^2 \\ a^2 &< 1 < 6a^2 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Visām pieļaujamām a vērtībām iegūtā nevienādība ir patiesa. Tātad līdzsvara stāvoklis tiek sasniegts tad, kad attālums starp stieņa un pialas saskaršanās punktiem ir

$$t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4}.$$

2.2.2 Attiecības r/l meklēšana uzdotam leņķim x .

Attiecība r/l , ja $x = 45^\circ$.

Ja $x = 45^\circ$, tad $t_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Meklējam lielumu a .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{a^2 + 8} + a &= 2\sqrt{2} \\ \sqrt{a^2 + 8} + a &= \sqrt{8}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Jebkurai pozitīvai a vērtībai $\sqrt{a^2 + 8} + a > \sqrt{8}$ un vienādība nav iespējama. Tātad stieņa līdzsvara stāvoklis nekad netiks sasniegts, ja $x = 45^\circ$.

Attiecība r/l , ja $x = 30^\circ$.

Ja $x = 30^\circ$, tad $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Meklējam a .

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{a^2 + 8} + a &= 2\sqrt{3} \\ a &= 2\sqrt{3} - \sqrt{a^2 + 8} \\ a^2 &= 12 + a^2 + 8 - 4\sqrt{3(a^2 + 8)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\sqrt{3(a^2 + 8)} &= 20 \\
\sqrt{3(a^2 + 8)} &= 5 \\
a^2 + 8 &= \frac{25}{3} \\
a^2 &= \frac{25}{3} - 8 = \frac{1}{3} \\
a &= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

$$\frac{r}{l} = \frac{0,5}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \tag{2.2.15}$$

Līdzsvara stāvoklis leņķim $x = 30^\circ$ tiks sasniegts, ja

$$\frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

2.2.3 Leņķa x iespējamās vērtības

Meklējot attiecību r/l , pie kuras līdzsvara stāvoklis tiktu sasniegts ar leņķi $x = 45^\circ$, secinājām, ka tāds leņķis līdzsvara stāvoklī nevar būt. Kādā maģistrantūras studenta mājas darbā, pētot šo problēmu, ir izteikts apgalvojums, ka leņķis x līdzsvara stāvoklī nevar būt arī 15° . Šis apgalvojums ir apšaubāms, jo, samazinot a vērtību, arī leņķis x samazinās, nav pamata domāt, ka šī sakarība ir pārtraukta funkcija, un, ņemot pēc patikas mazu a vērtību, šķiet, ka x vērtībai vajadzētu tiekties uz 0. Pārbaudīsim, vai minētie izteikumi ir patiesi, un noskaidrosim, kādas x vērtības iespējamās līdzsvara stāvoklī.

Noteiksim $t_0(a)$ vērtību kopu, izmantojot (2.2.11) pie nosacījuma (2.2.1). Redzms, ka funkcija $t_0(a)$ ir monotona un nepārtraukta, turklāt

$$\lim_{a \rightarrow 0,5} t_0(a) = \frac{\sqrt{8,25} + 0,5}{4} = \frac{\sqrt{33} + 1}{8}; \tag{2.2.16}$$

$$\lim_{a \rightarrow 1} t_0(a) = \frac{\sqrt{9} + 1}{4} = 1. \tag{2.2.17}$$

Tas nozīmē, ka

$$\frac{\sqrt{33} + 1}{8} < t_0 < 1. \tag{2.2.18}$$

Trijstūrī ABC mala $BC = AB \cdot \cos \angle ABC$, tātad līdzsvara stāvoklī

$$t_0 = \cos x. \tag{2.2.19}$$

Pirmā kvadranta leņķiem kosinusa funkcija ir dilstoša, tāpēc

$$\arccos 1 < x < \arccos \left(\frac{\sqrt{33} + 1}{8} \right).$$

(2.2.20)

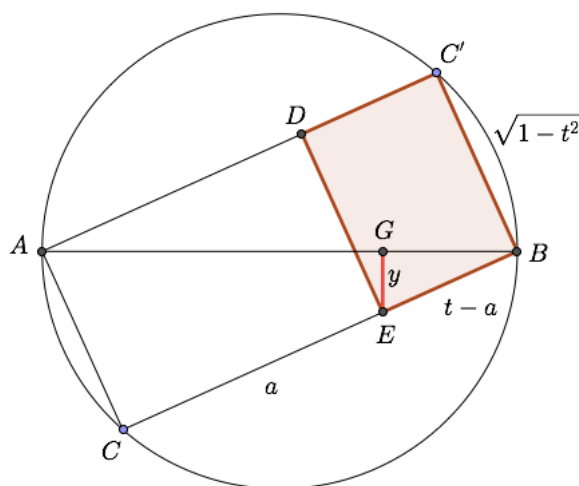
Secinājums. Tā ka $\arccos 1 = 0$, tad varam apgalvot, ka līdzsvara stāvoklī x var būt jebkurš pozitīvs leņķis, kas nepārsniedz $\arccos\left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}\right) \approx 32,534^\circ$.

2.2.4 Uzdevuma interpretācija

Apskatīsim sakarību (2.2.4). No tās maksimizējamo lielumu y varam pierakstīt kā

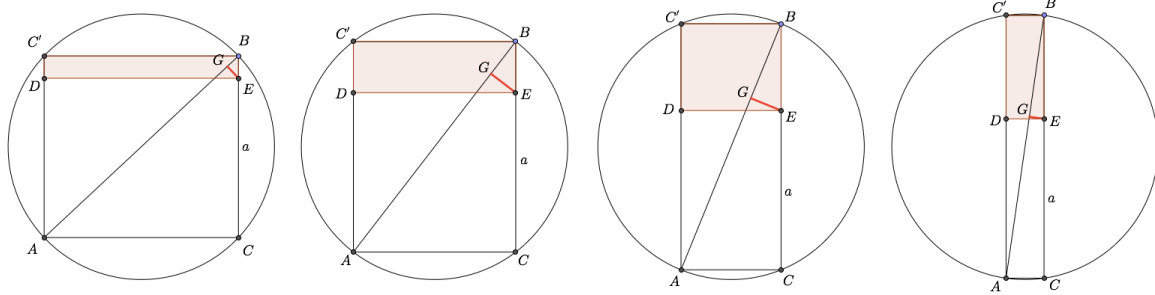
$$y = EB \cdot AC \quad (2.2.21)$$

Parādīsim, kāda ir šī reizinājuma ģeometriskā jēga. Iepriekš izmantoto Att. 2.3 papildinām ar pusapļa un nogriežņu AC un BC attēlu centrālajā simetrijā pret AB viduspunktu. Iegūto riņķa līniju apzīmējam ar ω_1 . Centrālās simetrijas īpašību dēļ skaidrs, ka $ACBC'$ ir taisnstūris ar malu garumiem t un $\sqrt{1-t^2}$. Caur punktu E velk perpendikulu ED pret malu AC' . Iegūstam taisnstūri $EDC'B$, kura laukums ir $(t-a)\sqrt{1-t^2} = y$ (skatīt Att. 2.4).



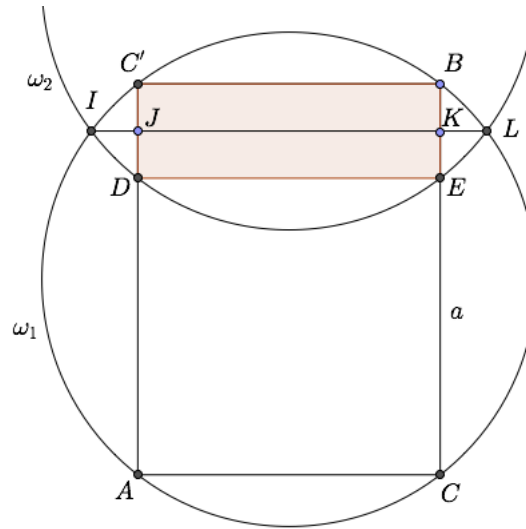
Att. 2.4: Ar centrālās projekcijas attēlu papildināts zīmējums no uzdevuma par stieņa līdzsvara stāvokļa meklēšanu.

Tā ka y vērtības maksimizēšana dos lielāko $EDC'B$ laukumu (un otrādi), noskaidrosim, kādi ir visi iespējamie taisnstūri $EDC'B$. Pagriežam Att. 2.4 par $(90^\circ - x)$ un apskatām iespējamās punktu E un D atrašanās vietas. (skatīt Att. 2.5)



Att. 2.5: Iespējamais punktu D un E novietojums riņķī.

Neatkarīgi no t lieluma, $CE = a$, tāpēc varam apgalvot, ka visas iespējamās E un D punktu atrašanās vietas atrodas uz riņķa līnijas, kas iegūta ω_1 pārvietojot paralēlajā pārnēsē pa vektoru $(0; a)$. Iegūto riņķa līniju apzīmēsim ar ω_2 .



Att. 2.6: Riņķa līnija ω_2 un ar to saistītie elementi.

Tā ka riņķa līnijām ω_1 un ω_2 rādiusi ir vienādi, tad horda IL sadala taisnstūri $EDC'B$ divos vienādos taisnstūros. Taisnstūra $KLC'B$ laukuma maksimizēšanas problēma ir ekvivalenta pialā ievietota stieņa līdzsvara stāvokļa meklēšanas problēmai. Taisnstūris $KJC'B$ ir ievilkts riņķa segmentā ar augstumu

$$\frac{2r - a}{2} = \frac{1 - a}{2},$$

līdz ar to rezultāti, kas iegūti, risinot uzdevumu par pialu, ir pielietojami, lai maksimizētu riņķa segmentā ievilkta taisnstūra laukumu pie nosacījuma (2.2.1)

Vispārināsim iegūtos rezultātus, lai tie būtu izmantojami jebkuram riņķa segmentam ar rādiusu r un augstumu h . Ja $AB = 1$ un $EC = a$, tad optimālais BC garums

$$t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4}.$$

Lai izprastu situāciju, kad rādiuss ir r , visus garumus reizina ar $2r$. Ja $AB = 2r$ un $EC = 2ar$, tad optimālais BC garums ir

$$BC_{\text{optimālais}} = \frac{\sqrt{a^2 + 8} + a}{4} \cdot 2r. \quad (2.2.22)$$

Segmenta augstums ir

$$h = \frac{2r - 2ar}{2} = r(1 - a). \quad (2.2.23)$$

No (2.2.23) izsaka a un ievieto izteiksmē (2.2.22):

$$a = 1 - \frac{h}{r} \quad (2.2.24)$$

$$\begin{aligned} BC_{\text{optimālais}} &= \frac{\sqrt{(1 - \frac{h}{r})^2 + 8} + 1 - \frac{h}{r}}{2} \cdot r = \\ &= \frac{r}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{h^2}{r^2} - 2 \cdot \frac{h}{r} + 9} + 1 - \frac{h}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Optimālā taisnstūra $KJC'B$ augstums

$$\begin{aligned} BK &= \frac{BC - EC}{2} = \frac{r}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{h^2}{r^2} - 2 \cdot \frac{h}{r} + 9} + 1 - \frac{h}{r} \right) - \left(1 - \frac{h}{r} \right) \cdot r \\ h_{\text{taisnstūrim}} &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{h^2 - 2hr + 9r^2} - 3r + 3h \right). \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Atcerēsimies, ka uzdevumā par pialu bija ierobežojumi attiecībā uz lielumu a (2.2.1), tāpēc šie rezultāti ir spēkā tikai tad, kad $0 < h < \frac{r}{2}$.

Secinājumi.

Pialā ievietota homogēna stieņa līdzsvara stāvokļa meklēšana ir reducējama uz riņķa segmentā ievilkta taisnstūra laukuma maksimizēšanas problēmu. Riņķa segmentā ar rādiusu r un augstumu $h < 0,5r$ ievilkta taisnstūra laukums ir vislielākais, ja taisnstūra augstums ir $\frac{1}{4}(\sqrt{h^2 - 2hr + 9r^2} - 3r + 3h)$.

2.2.5 Uzdevums par riņķa segmentā ievilkto taisnstūri

Iepriekš norādītā formula (2.2.26) tika pierādīta tādā gadījumā, ja riņķa segmenta augstums nepārsniedz pusi no riņķa rādiusa. Šāds ierobežojums tika aizgūts no stieņa līdzsvara stāvokļa meklēšanas uzdevuma. Pārāk garam stienim smaguma centrs atrastos ārpus lodes, tāpēc līdzsvara stāvoklis neiestātos no stieņa ieslidināšanas puslodē.

Noskaidrosim, vai formula (2.2.26) ir pielietojama arī riņķa segmentā, kurā attiecība $\frac{h}{r}$ ir lielāka nekā $\frac{1}{2}$.

Pieņem, ka riņķa ar rādiusu r segmenta augstums ir h , $h < r$, un šajā sementā ievilkts taisnstūris (viena taisnstūra mala atrodas uz segmenta pamata) ar maksimālo laukumu L_{max} , turklāt riņķa centrs atrodas koordinātu sākumpunktā. Aprēķināsim L_{max} . Pieņemsim, ka horda, kas no riņķa nodala aplūkojamo segmentu, ir horizontāla un ka segments atrodas virs šīs hordas. To taisnstūra virsotni, kas uz riņķa līnijas atrodas 1. kvadrantā, apzīmēsim ar (x, y) .

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Taisnstūra malu garumi ir attiecīgi $2x$ un $y-c$, kur $c = r-h$ un laukums $L = 2x(y-c)$. Maksimumu var noteikt ar elementārām metodēm:

$$P(y) = L^2 = 4x^2(y-c)^2 = 4(r^2 - y^2)(y-c)^2.$$

Ceturtās pakāpes polinomam P ir divkāršā sakne un tā ekstrēma punkts apmierina šādu kvadrātvienādojumu:

$$2y^2 - yc - r^2 = 0. \quad (2.2.27)$$

Tā ka pirmajā kvadrantā y vērtība ir pozitīva, tad sakne, kas mums interesē, ir

$$y = \frac{r-h + \sqrt{9r^2 + h^2 - 2rh}}{4}. \quad (2.2.28)$$

Taisnstūra augstums ir

$$y - (r-h). \quad (2.2.29)$$

Izteiksmē (2.2.29) ievietojot y vērtību no (2.2.28), iegūsim (2.2.26). Tātad jebkuram riņķa segmentam, kas nepārsniedz pusapli, pēc formulas (2.2.26) ir nosakāms augstums tādām ievilkta taisnstūrim, kura laukums ir maksimālais.

2.3 Uzdevums par nevienādību

1993. gadā Rumānijā, gatavojot izlasi dalībai starptautiskā olimpiādē, tika uzdots šāds uzdevums: atrast vislielāko reālo skaitli a , ka visiem pozitīviem reāliem x, y, z ir spēkā nevienādība

$$\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} > a. \quad (2.3.1)$$

Formulējums liek domāt, ka minimums neeksistē un ir jāmeklē infīms. Ja $x = y = z$, tad izteiksmes vērtība ir $\frac{3}{\sqrt{2}}$, taču, ja $x = y$, bet z vērtība tiecas uz nulli, tad izteiksmes vērtība tiecas uz $2 < \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Pierādījuma pamatā izmanto šādu ideju:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+z^2}} \geq 2. \quad (2.3.2)$$

Idejas realizācija.

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > \frac{\sqrt{x^2+z^2}-x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{\sqrt{y^2+z^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}}. \quad (2.3.3)$$

Var uzskatīt, ka $x \geq y \geq z$. Tad

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{y^2+z^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}} &\geq \frac{\sqrt{x^2+z^2}-x}{\sqrt{y^2+z^2}} \Leftrightarrow y(y-\sqrt{y^2+z^2}) \geq x(x-\sqrt{x^2+z^2}) \Leftrightarrow \\ &y(x+\sqrt{x^2+z^2})(-z^2) \geq x(y+\sqrt{y^2+z^2})(-z^2) \Leftrightarrow \\ &z^2(x\sqrt{y^2+z^2}-y\sqrt{x^2+z^2}) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &x^2z^2 \geq y^2z^2. \end{aligned}$$

Atliek pierādīt, ka

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} &\geq \frac{2(\sqrt{y^2+z^2}-y)}{\sqrt{x^2+z^2}} \Leftrightarrow \\ z(\sqrt{y^2+z^2}+y)\sqrt{x^2+z^2} &\geq 2z^2\sqrt{x^2+y^2}, \\ (\sqrt{y^2+z^2}+y)\sqrt{x^2+z^2} &\geq 2y\sqrt{x^2+z^2} \geq 2z\sqrt{x^2+y^2} \\ y^2(x^2+z^2) &\geq z^2(x^2+y^2) \Leftrightarrow y^2x^2 \geq z^2x^2. \end{aligned}$$

Vienādība nav iespējama. Lai iegūtu vienādību, nepieciešams ņemt $y = z$, bet tad

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{2(\sqrt{z^2+z^2}-z)}{\sqrt{x^2+z^2}} \Rightarrow z = 2(\sqrt{z^2+z^2}-z) = 2(\sqrt{2}-1)z.$$

Līdz ar to ir pierādīts, ka lielākais reālais skaitlis a , kas apmierina nevienādību (2.3.1) visiem reāliem pozitīviem x, y, z , ir skaitlis 2.

Modifikācijas.

1. variants. Apzīmē: $\frac{y}{x} = a, \frac{x}{z} = b, \frac{z}{y} = c$. Tad jāmeklē infims funkcijai

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{(ac)^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{(bc)^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{(ab)^2+b^2}} = \\ &= \frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} \mapsto \inf, \quad abc = 1. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

2. variants. Apzīmē: $y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = c^2$. Tad uzdevums reducējas uz

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}{b} + \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a} \mapsto \inf. \quad (2.3.5)$$

3. variants. Cits veids, kā samazināt mainīgo skaitu – lietojot sfēriskās koordinātas:

$$x = r \cos u \sin v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos v. \quad (2.3.6)$$

$$F(u, v) = \frac{\cos u \sin v}{\sqrt{\sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v}} + \frac{\sin u \sin v}{\sqrt{\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 v}} + \frac{\cos v}{\sin v} = f(u, v) \sin v + \frac{\cos v}{\sin v},$$

$$f(u, v) := \frac{\cos u}{\sqrt{\sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 v}} + \frac{\sin u}{\sqrt{\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 v}} \geq f\left(\frac{\pi}{4}, v\right). \quad (2.3.7)$$

4. variants. Aplūkojam vēl vienu veidu, kā samazināt mainīgo skaitu. Apzīmēju

$$G(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.3.8)$$

Skaidrs, ka $\max(|x|, |y|, |z|) > 0$. Pieņemsim, ka $z \neq 0$.

$$\begin{aligned} G\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) &= \frac{\frac{x}{z}}{\sqrt{\frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{z^2}}} + \frac{\frac{y}{z}}{\sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{z^2}{z^2}}} + \frac{\frac{z}{z}}{\sqrt{\frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}}} = \\ &= \frac{\frac{1}{z} \cdot x}{\sqrt{y^2 + z^2}} + \frac{\frac{1}{z} \cdot y}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{\frac{1}{z} \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = G(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

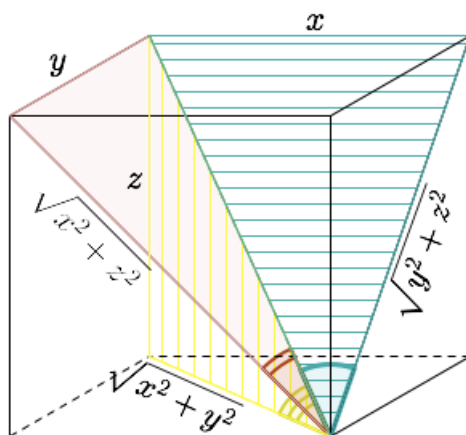
tātad meklēt funkcijas $G(x, y, z)$ infīmu var, meklējot infīmu funkcijai

$$G(a, b, 1) = \frac{a}{\sqrt{b^2 + 1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (2.3.10)$$

kur $a = \frac{x}{z}$, $b = \frac{y}{z}$.

Uzdevuma ģeometriskā jēga.

Apskatām funkciju (2.3.8), lielumus x , y un z uztverot kā taisnstūra paralēlskaldņa malu garumus. Saucēju izteiksmes apraksta skaldņu diagonāļu garumus (skatīt Att. 2.7).



Att. 2.7: Paralēlskaldņa elementu saistība ar nevienādību (2.3.1)

Attēlā 2.7 redzams, ka funkcijā $G(x, y, z)$ katrs no trim saskaitāmajiem apraksta tangensu leņķim, kas veidojas starp paralēlskaldņa diagonāli un tā skaldnes diagonāli. No iepriekš veiktajiem aprēķiniem varam secināt, ka visu šādu tangensu summa ir vismazākā, ja taisnstūra paralēlskaldnis ir regulāra prizma, kuras augstums tiecas uz nulli.

3 Ekstrēmu uzdevumi starptautiskos konkursos

3.1 Starptautiskā matemātikas olimpiāde (IMO)

Starptautiskā matemātikas olimpiāde (*The International Mathematical Olympiad*, turpmāk IMO) ir matemātikas sacensības, kurās piedalās vidusskolas skolēni no visas pasaules. Pirmo reizi šīs sacensības notika 1959. gadā Rumānijā. Tajās piedalījās 52 skolēni no 7 valstīm. Kopš tā laika katru gadu jūlijā IMO tiek rīkota citā valstī. Pēdējos gados tajā piedalās vairāk nekā 500 dalībnieki no vairāk nekā 100 valstīm [7]. Aplūkosim pēdējo 10 gadu laikā IMO risinātos ekstrēmu uzdevumus.

Uzdevumi

2016. gads, 5. uzdevums

Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums

$$(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-2016) = (x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-2016) \quad (3.1.1)$$

ar 2016 lineāriem reizinātājiem katrā pusē. Kāda ir mazākā iespējamā skaitļa k vērtība, ja zināms, ka ir iespējams nodzēst tieši k no šiem 4032 lineāriem reizinātājiem tā, lai katrā pusē paliktu vismaz viens reizinātājs un gala vienādojumam nebūtu atrisinājuma reālos skaitļos?

2013. gads, 2. uzdevums

Par *kolumbisku* sauksim tādu 4027 punktu konfigurāciju plaknē, kas sastāv no 2013 sarkaniem un 2014 ziliem punktiem un nekādi tās trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes. Uzzīmējot dažas taisnes, plakne tiek sadalīta apgabalos. Taišņu saimi sauksim par *labu* kolumbiskai konfigurācijai, ja tā apmierina sekojošus divus nosacījumus:

- neviena taisne neiet caur punktu, kas pieder konfigurācijai;
- neviens apgabals nesatur abu krāsu punktus.

Atrast mazāko k vērtību, tādu, ka katrai kolumbiskai 4027 punktu konfigurācijai var atrast labu taišņu saimi, kas sastāv no k taisnēm.

3.2 Eiropas meiteņu matemātikas olimpiāde (EGMO)

Līdzīgi kā IMO arī Eiropas meiteņu matemātikas olimpiāde (*European Girls' Mathematical Olympiad*, turpmāk EGMO) ir starptautiskas matemātikas sacensības. To mērķis ir atbalstīt un veicināt meiteņu iesaistīšanos matemātikā, jo starp IMO dalībniekiem apmēram 90 % ir zēnu. Šīs sacensības pirmo reizi notika 2012. gadā Kembridžā (Apvienotajā Karalistē). Dalībai EGMO valsts var pieteikt 4 meiteņu komandu. Līdz šim visās EGMO ir startējušas arī Latvijas komandas. 2018. gadā EGMO Itālijā piedalījās 195 dalībnieces 52 komandās. Dalībiece no Latvijas (Anete Valnere) ieguvusi bronzas medaļu. [8]

Uzdevumi

2016. gads, 1. uzdevums

Skaitlis n ir naturāls nepāra skaitlis un x_1, x_2, \dots, x_n ir nenegatīvi reāli skaitļi. Pierādiet, ka

$$\min_{i=1, \dots, n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1, \dots, n} (2x_j x_{j+1}), \quad (3.2.1)$$

kur $x_{n+1} = x_1$.

2016. gads, 3. uzdevums

Dots naturāls skaitlis m . Aplūkosim $4m \times 4m$ rūtiņu laukumu. Teiksim, ka rūtiņa ir *saistīta* ar citu rūtiņu, ja abas rūtiņas atrodas vai nu vienā rindā vai vienā kolonnā. Nekādas citas rūtiņas nav saistītas savā starpā, tai skaitā, rūtiņa nav saistīta pati ar sevi.

Dažas rūtiņas nokrāsotas zilā krāsā tā, ka katra laukuma rūtiņa ir saistīta ar vismaz divām zilām rūtiņām. Nosakiet mazāko iespējamo zilo rūtiņu skaitu.

2016. gads, 5. uzdevums

Doti veseli skaitļi k un n tādi, ka $k \geq 2$ un $k \leq n \leq 2k - 1$. Uz šaha galda ar izmēriem $n \times n$ tiek izvietotas taisnstūra veida figūras ar izmēriem $k \times 1$ vai $1 \times k$, tā ka katra figūra pārklāj precīzi k blakus esošus lauciņus, un nekādas divas figūras savstarpēji nepārklājas. Figūras šādi tiek izvietotas tik ilgi, līdz vairs nav iespējams izvietot nevienu no abu veidu figūrām. Nosakiet katram k un n minimālo figūru skaitu šādam izvietojumam.

2012. gads, 2. uzdevums

Naturālam skaitlim n atrast lielāko iespējamo veselo skaitli m , kuram izpildās īpašība: tabulā ar m rindām un n kolonnām ir iespējams tā ierakstīt reālus skaitļus, lai jebkurām

divām dažādām tabulas rindām $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ un $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ būtu patiesa izteiksme:

$$\max(|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|, \dots, |a_n - b_n|) = 1 \quad (3.2.2)$$

(Lai izteiktu m , var tikt izmantota izteiksme, kura atkarīga no n .)

3.3 Risinājumi

Olimpiāžu uzdevumu rīkotāji olimpiādes oficiālajā mājas lapā publicē uzdevumu formulējumus, kā arī piedāvātos risinājumus. Ar tiem iespējams iepazīties [9], [10], [11]

3.3.1 IMO, 2016. gads, 5. uzdevums

Atbilde. $k = 2016$

1) Ja vienādojuma abās pusēs paliks nenodzēsta izteiksme $(x - t)$, kur $1 \leq t \leq 2016$, tad skaitlis t derēs kā vienādojuma atrisinājums, tāpēc katrai t vērtībai vismaz viena no izteiksmēm $x - t$ ir jānodzēš. Tātad $k \geq 2016$.

2) Apskata šādu vienādojumu, kurā ir izsvītrotas tieši 2016 izteiksmes:

$$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\dots(x-2013)(x-2016) = (x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\dots(x-2014)(x-2015) \quad (3.3.1)$$

Ja $x = 1; 2; 3; \dots; 2016$, tad vienā vienādojuma pusē iegūst nulli, bet otrā vērtība no nulles atšķiras, tātad šie skaitļi nav vienādojuma saknes. Bez tam citām x vērtībām kādā no vienādojuma pusēm iegūt nulli nav iespējams.

Apskatām vienādojuma (3.3.1) kreisās un labās puses zīmes intervālos ($j = 1, 2, \dots, 504$).

	< 1	$(4j - 3, 4j - 2)$	$(4j - 2, 4j - 1)$	$(4j - 1, 4j)$	$(4j, 4j + 1)$	> 2016
kreisā puse	+	-	-	-	+	+
labā puse	+	+	-	+	+	+

Intervāli, kuros kreisās un labās puses zīmes atšķiras, nesatur vienādojuma saknes.

Atliek pārbaudīt intervālus $(-\infty, 1)$, $(4j - 2, 4j - 1)$, $(4j, 4j + 1)$ un $(2016, +\infty)$.

Pārrakstām vienādojumu (3.3.1) citā formā:

$$\prod_{j=1}^{504} (x - 4j + 3)(x - 4j) = \prod_{j=1}^{504} (x - 4j + 2)(x - 4j + 1)$$

$$\prod_{j=1}^{504} (x^2 + x(-8j + 3) + 16j^2 - 12j) = \prod_{j=1}^{504} (x^2 + x(-8j + 3) + 16j^2 - 12j + 2) \quad (3.3.2)$$

Ja $x \neq 1; 2; \dots; 2016$, abas vienādojuma (3.3.2) puses dala ar tā kreisās puses izteiksmi. Iegūst

$$1 = \prod_{j=1}^{504} \left(1 + \frac{2}{x^2 + x(-8j + 3) + 16j^2 - 12j} \right) \quad (3.3.3)$$

Visām naturālām j vērtībām, kas nepārsniedz 504, saucēja izteiksme ir pozitīva, kad $x \in (-\infty, 4j - 3) \cup (4j, +\infty)$. Šo intervālu šķēlumā katrs labās puses reizinātājs pārsniedz 1, tāpēc tādām mainīgā vērtībām vienādība (3.3.3) nevar izpildīties. Līdz ar to intervāli $(-\infty, 1)$, $(4j, 4j + 1)$ un $(2016, +\infty)$ nesatur vienādojuma (3.3.1) saknes.

Apskatot gadījumu, kad $x \in (4j - 2, 4j - 1)$, kur $j = 1, 2, \dots, 504$, dalām vienādojuma (3.3.1) abas puses ar kreisās puses izteiksmi. Iegūstam

$$1 = \frac{(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\dots(x-2013)(x-2016)}{(x-2)(x-3)(x-6)(x-7)\dots(x-2014)(x-2015)}. \quad (3.3.4)$$

Šajā gadījumā x noteikti ir starp 2 un 2015, galapunktus neskaitot. Tas nozīmē, ka $0 < x - 2 < x - 1$ un $x - 2016 < x - 2015 < 0$, tāpēc $\frac{x-1}{x-2} > 1$ un $\frac{x-2016}{x-2015} > 1$.

$$\frac{(x-4)(x-5)(x-8)\dots(x-2013)}{(x-3)(x-6)(x-7)\dots(x-2014)} = \prod_{j=1}^{503} \frac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)} =$$

$$\prod_{j=1}^{503} \frac{x^2 - x(8j+1) + 16j^2 + 4j}{x^2 - x(8j+1) + 16j^2 + 4j - 2} = \prod_{j=1}^{503} \left(1 + \frac{2}{x^2 - x(8j+1) + 16j^2 + 4j - 2} \right)$$

Katrai j vērtībai saucējs pozitīvs, ja $x \in (-\infty, 4j - 1) \cup (4j + 2, +\infty)$ un attiecīgais reizinātājs ir lielāks nekā 1. Visu šādu intervālu šķēlumā reizinājums pārsniedz skaitli 1. Šis šķēlums iekļauj intervālus $x \in (4j - 2, 4j - 1)$ ($j = 1, 2, \dots, 504$). Tāpēc vienādojumam (3.3.4) labās puses izteiksme ir lielāka nekā 1 un apskatītajos intervālos vienādojumam (3.3.1) nav sakņu.

Līdz ar to ir pierādīts, ka iespējams izvītrot 2016 lineārus reizinātājus, iegūstot vienādojumu, kam nav reālu sakņu, tātad $k = 2016$.

Piebilde. Doto uzdevumu var pārveidot, ņemot citu iekavu skaitu. Uzdevums, kurā sākumā būtu doti vienādi iekavu pāri, iekavu trijnieki vai četrus iekavu komplekti abās vienādojuma pusēs, būtu izmantojams kā pētniecisks uzdevums skolā, mācoties par lineāriem un kvadrātviēnādojumiem un dažādām vienādojumu risināšanas metodēm. Šajā gadījumā atrisinājums būtu uzskatāmi pamatojams, izmantojot grafisko metodi.

3.3.2 IMO, 2013. gads, 2. uzdevums

Atbilde $k = 2013$.

Ar piemēra palīdzību parādīsim, ka $k \geq 2013$. Uz riņķa līnijas atliekam 2013 sarkanus uz 2013 zilus punktus tā, lai vienas krāsas punkti neatrastos blakus. Vēl vienu zilo punktu atliekam kaut kur plaknē – tā atrašanās vieta šajā gadījumā nebūs svarīga. Uz riņķa līnijas atliktie punkti to sadala 4026 lokos, bez tam katram lokam galapunkti ir atšķirīgās krāsās. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, vajadzētu, lai katru loku šķērso

kāda taisne no uzdevuma formulējumā pieminētās taisņu saimes. Viena taisne var šķērsot ne vairāk kā divus lokus, tātad nepieciešamas vismaz 2013 taisnes.

Vēl jāpierāda, ka ar 2013 taisnēm pietiek, lai izpildītu uzdevuma nosacījumus. Jebkurus divus punktus no visiem pārējiem iespējams nodalīt ar divām taisnēm, jo nekādi trīs punkti neatrodas uz vienas taisnes.

Ar P apzīmēsim izliektu daudzstūri ar virsotnēm atzīmētajos punktos, kuram visi pārējie atzīmētie punkti atrodas iekšpusē. Šķirojam divus gadījumus.

1. gadījums. Daudzstūrim P ir kāda sarkana virsotne A . Sākumā novelk taisni, kas atdala punktu A no visiem pārējiem punktiem. Tad pārējos 2012 sarkanos punktus sadala pa pāriem. Iepriekš jau tika minēts, ka divus punktus no pārējiem var atdalīt ar divām taisnēm. Tas nozīmē, ka 1006 sarkano punktu pārus no zilajiem punktiem var atdalīt ar 2012 taisnēm.

2. gadījums. Daudzstūrim P visas virsotnes ir zilas. Tā kā daudzstūrim ir vismaz 3 virsotnes, tad varam izvēlēties divas un ar vienu taisni tās nodalīt no visiem sarkanajiem punktiem. Atliek 2012 zili punkti, ko nodalīt. To darām līdzīgi kā pirmajā gadījumā – sadalām zilos punktus pa pāriem un katram pārim velkam divas taisnes, kas tās nošķir no visiem pārējiem punktiem.

Abos gadījumos pietiek ar 2013 taisnēm, lai šo taisņu saime būtu *laba* attiecīgajai kolumbiskajai konfigurācijai.

3.3.3 EGMO, 2016. gads, 1. uzdevums

Lai pierādītu nevienādību (3.2.1), pietiek atrast tādus pārus (x_i, x_{i+1}) , $i = 1; \dots; n$ un (x_j, x_{j+1}) , $j = 1; \dots; n$, kuriem

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 \leq 2x_j x_{j+1}. \quad (3.3.5)$$

Ja $n = 1$ - triviāli.

Ja $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, tad (3.2.1) izpildās vienādība.

Turpmāk aplūkosim gadījumu, kad $\max x_i \neq \min x_j$, $i, j = 1; 2; \dots; n$ un $n \geq 3$.

Apgalvojums. Tā kā n ir nepāra skaitlis, tad virknē x_1, x_2, \dots, x_{n+2} , kur $x_{n+1} = x_1$ un $x_{n+2} = x_2$, noteikti atradīsies 3 pēc kārtas esoši elementi, kas ir vai nu nedilstošā vai arī neaugošā secībā.

Pierādīsim no pretējā. Pieņemsim, ka virknē x_1, \dots, x_{n+2} izvēloties jebkurus trīs pēc kārtas esošu elementu, vidējais būs vai nu lielāks par abiem pārējiem vai arī mazāks par pārējiem. Tādā gadījumā, ja $x_1 > x_2$, tad $x_2 < x_3; \dots; x_n > x_{n+1}; x_{n+1} < x_{n+2}$ - pretruna, jo $x_{n+1} = x_1 > x_2 = x_{n+2}$. Līdzīgā veidā pie pretrunas nonāktu, ja pieņemtu, ka $x_1 < x_2$. Tātad ir iespējams atrast 3 pēc kārtas esoši elementi, kas ir vai nu nedilstošā vai arī neaugošā secībā.

Izvēlamies šos trīs elementus un apzīmējam ar $a \geq b \geq c$. Virknē x_1, x_2, \dots, x_{n+2} tie varēja atrasties arī pretējā secībā, taču pierādījumā svarīgi ir tikai tas, ka (a, b) un (b, c) ir blakus esošu elementu pāri. Ir redzams, ka

$$c^2 + b^2 \leq 2b^2 \leq 2ab. \quad (3.3.6)$$

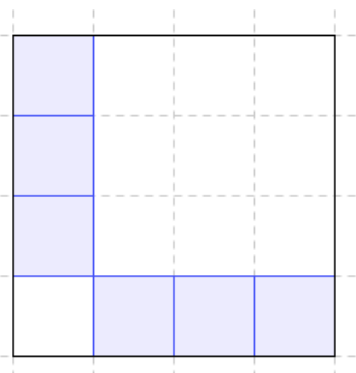
Līdz ar to ir atrasti elementi, kam izpildās (3.3.5), tātad arī pierādāmā nevienādība (3.2.1) ir patiesa.

3.3.4 EGMO 2016. gads, 3. uzdevums

EGMO mājas lapā [10] piedāvāta šāda risinājuma ideja.

Risinājums

Ar $6m$ zilām rūtiņām pietiek, lai uzdevuma nosacījumi tiktu apmierināti. Visu laukumu sadala 4×4 rūtiņu lielos kvadrātos. No šiem kvadrātiem izveidojas jauns $m \times m$ izmēra laukums. Izvēlas vienu no šī jaunā laukuma diagonālēm un katrā diagonāles kvadrātā krāsošanu veic pēc principa, kas norādīts attēlā 3.1.



Att. 3.1: Viena 4×4 kvadrāta izkrāsošana

Uz diagonāles izvietoti m kvadrāti izmērā 4×4 rūtiņas, bez tam katrā kvadrātā ir 6 zilas rūtiņas, tātad kopējais zilo rūtiņu skaits ir $6m$. Viegli pārlicināties, ka ikviena rūtiņa, kas nav zila, atrodas vienā rindā un arī vienā kolonnā ar kādu zilu rūtiņu. Toties katra zilā rūtiņa ir saistīta ar divām zilām rūtiņām vai nu no tās pašas rindas vai arī kolonnas.

Pamatosim, ka zilo rūtiņu skaits nevar būt mazāks par $6m$. Ar m_1^r apzīmēsim kopējo zilo rūtiņu skaitu tajās rindās, kurās ir tikai viena zila rūtiņa (jeb to rindu skaitu, kurās ir pa vienai zilai rūtiņai); m_2^r - kopējo zilo rūtiņu skaitu tajās rindās, kurās ir pa divām zilām rūtiņām; m_3^r - zilo rūtiņu skaitu tajās rindās, kurās ir vismaz 3 zilas rūtiņas. Pēc tāda paša principa ieviešam apzīmējumus m_1^k , m_2^k un m_3^k , kur skaitām zilās rūtiņas pa kolonnām.

Ja kāda rūtiņa ir vienīgā zilā rūtiņa savā rindā (vai kolonnā), tad kolonnā (attiecīgi rindā), kurā tā atrodas, ir jābūt vismaz divām citām zilām rūtiņām. Tas nozīmē, ka

$$m_1^r \leq m_3^k; \quad m_1^k \leq m_3^r. \quad (3.3.7)$$

Ja kādā rindā (vai kolonnā) nebūtu nevienas zilas rūtiņas, tad katrā kolonnā (attiecīgi, rindā) vajadzētu būt vismaz divām zilām rūtiņām. Zilo rūtiņu skaits tādā gadījumā būtu vismaz $4m \cdot 2 = 8m > 6m$. Meklējot mazāko zilo rūtiņu skaitu, ir skaidrs, ka katrā rindā un kolonnā kādai zilai rūtiņai jābūt.

Novērtēsim rindu (kolonnu) skaitu, izmantojot ieviestos apzīmējumus.

$$m_1^r + \frac{m_2^r}{2} + \frac{m_3^r}{3} \geq 4m; \quad (3.3.8)$$

$$m_1^k + \frac{m_2^k}{2} + \frac{m_3^k}{3} \geq 4m. \quad (3.3.9)$$

Tā ka mēs vēlamies pārbaudīt, vai iespējams, ka zilo rūtiņu skaits ir mazāks par $6m$, pieņemsim, ka ir. Novērtējam zilo rūtiņu skaitu, izmantojot ieviestos apzīmējumus.

$$m_1^r + m_2^r + m_3^r < 6m \quad (3.3.10)$$

$$m_1^k + m_2^k + m_3^k < 6m \quad (3.3.11)$$

Nevienādībai (3.3.8) abas puses pareizina ar 3, nevienādībai (3.3.10) abas puses pareizina ar (-2) un iegūtās nevienādības saskaita. Iegūst

$$\begin{aligned} m_1^r - \frac{m_2^r}{2} - m_3^r &> 0, \\ m_1^r - m_3^r &> \frac{m_2^r}{2} \geq 0, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

tātad $m_1^r > m_3^r$. Līdzīgi iegūst sakarību $m_1^k > m_3^k$.

Šos rezultātus apvienojot ar (3.3.7), iegūst

$$m_1^r \leq m_3^k < m_1^k \leq m_3^r < m_1^r \quad (3.3.13)$$

Ir iegūta pretruna no pieņēmuma, ka zilo rūtiņu skaits var būt mazāks par $6m$. Līdz ar to ir pierādīts, ka mazākais zilo rūtiņu skaits, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir $6m$.

3.3.5 EGMO, 2016. gads, 5. uzdevums

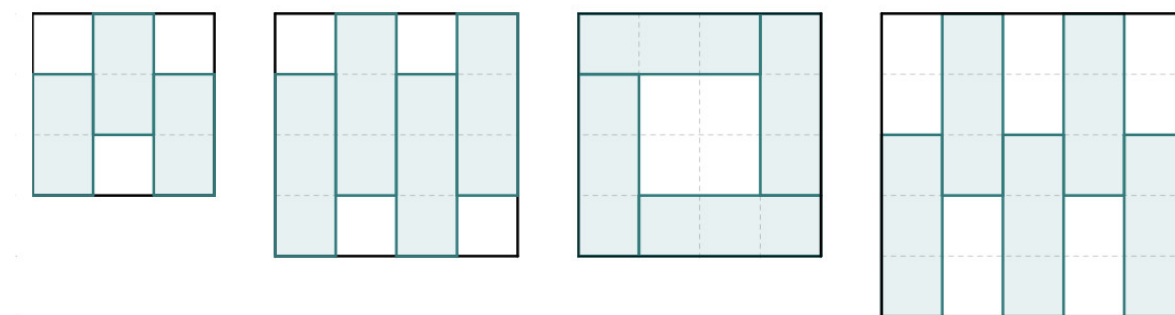
Ja $n = k$, tad minimālais figūru skaits ir n (jeb k). Lai vai kā novietotu pirmo figūru, pārējās varēs novietot tikai tādā pašā virzienā. Katra figūra aizņem tieši vienu pilnu rindu (vai kolonnu), tāpēc atradīsies vieta n figūrām.

Ja $n > k$, sākumā apskatīsim situāciju dažām izvēlētām k un n vērtībām, sākot ar mazākajām.

1) $k = 2; n = 3$, tad pietiek ar 3 figūrām (skatīt Att. 3.2). Ja ievietotu tikai divas figūras, tad nenosegtas paliktu 5 rūtiņas. Vienīgais veids, kā izvēlēties 5 rūtiņas tā, lai jebkuras divas neatrastos blakus, ir, ja ņem stūra rūtiņas un vidējo rūtiņu, taču pēc divu figūru ievietošanas šāds pārpalikums nevar izveidoties. Līdz ar to, ja $k = 2; n = 3$, tad minimālais figūru skaits ir 3.

2) Ja $k = 3; n = 4$, tad ar 4 figūrām iespējams panākt, ka vēl vienai figūrai vairs nav vietas (skatīt Att. 3.2). Izvietojot 3 figūras noteikti būs vieta vēl vismaz vienai. Ja divas pirmās novietotās figūras ir ar vienādu platumu (tātad abas novietotas vertikāli vai arī abas – horizontāli), tad atliek vieta vismaz divām figūrām ar tādu pašu platumu. Ja pirmās divas figūras ir ar dažādiem platumiem, tad skatāmies, vai kāda no tām pārklāj kādu iekšējo lauciņu (lauciņu, kas neatrodas pie kvadrāta robežas). Ja jā, tad šai figūrai paralēli var likt vēl 3 citas figūras. Ja neviens no četriem iekšējiem lauciņiem netiek nosegts un arī trešā figūra tiek likta tā, ka nenosedz iekšēju lauciņu, tad ir atrodams nenosegts apgabals ar izmēriem 2×3 . Tajā ir iespējams ievietot figūru. Ja 3. figūra tiek likta tā, ka nosedz iekšēju lauciņu, tad vieta vēl vienai figūrai atradīsies blakus trešajam lauciņam. Tātad mazāk kā 4 figūras nav iespējamas.

3) Ja $k = 3; n = 5$, pietiek ar 5 figūrām (skatīt Att. 3.2). To, ka mazāks figūru skaits neder, pamatosim, apskatot vispārīgo gadījumu.

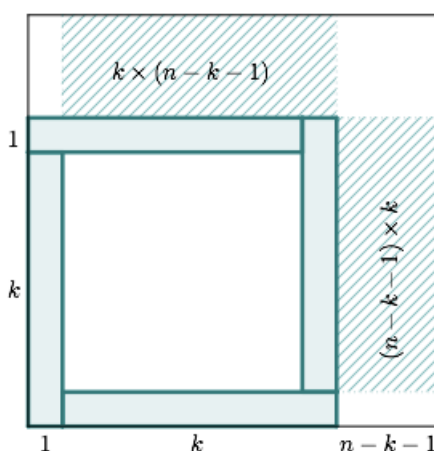


Att. 3.2: Figūru izvietojums, ja $k = 2; n = 3$; divi varianti figūru izvietojumam, ja $k = 3; n = 4$, un figūru izvietojums, ja $k = 3; n = 5$

Attēlos redzamais figūru izvietojums gadījumā, kad $k = 3; n = 4$ vai $k = 3; n = 5$ nav vienīgais iespējamais. Tajos ir redzamas divas atšķirīgas pieejas figūru izvietošanai – likot figūras blakus vienu otrai, malās atrstājot ne vairāk kā $k - 1$ secīgas brīvas rūtiņas, vai arī izvietojot 4 figūras gar kvadrāta ārējo malu, ja $k = n - 1$. Kad $k = n - 1$ un $n \geq 4$, mazāk kā 4 figūras nevar būt. Pamatojums līdzīgs kā iepriekš apskatītajā gadījumā "2)" punktā.

Varam novērot, ka nepieciešamais figūru skaits nepārsniedz n , jo figūras vienmēr iespējams salikt blakus, neatstājot k secīgas nenosegtas rūtiņas. Tas izpildās tāpēc, ka $n \leq 2k - 1$.

EGMO mājas lapā [10] piedāvāts šāds risinājums. Ja $k < n < 2k - 1$, tad nepieciešamas $2n - 2k + 2$ figūras. Parādīsim, ka ar šādu skaitu pietiek. Sākumā četras figūras izvietojam vietās $[0, 1] \times [0, k]$, $[1, k + 1] \times [0, 1]$, $[k, k + 1] \times [1, k + 1]$ un $[0, k] \times [k, k + 1]$. Tiek izveidots $k \times k$ rūtiņu kvadrāts, kurā nevienu citu figūru nav iespējams ievietot. Palikušos brīvos laukumus $[k + 1, n] \times [1, k + 1]$ un $[1, k + 1] \times [k + 1, n]$ aizpilda vienu ar vertikālām un otru – horizontālām figūrām (skatīt Att. 3.3). Katrā ievietojamas $n - k - 1$ figūras. Kopā ievietotas $4 + 2n - 2k - 2 = 2n - 2k + 2$ figūras.



Att. 3.3: Kvadrātas $n \times n$ un tajā ievietotu $2n - 2k + 2$ figūru izvietojums.

Ja $n = 2k - 1$, tad $n < 2n - 2k + 2$, tāpēc pietiek ar n figūrām.

Vēl jāpierāda, ka mazāks figūru skaits nav iespējams. Ar r un c apzīmē to rindu un attiecīgi kolonnu skaitu, kuras nesatur nevienu veselu figūru. Ja $r = 0$ vai $c = 0$, tad noteikti ir izvietotas vismaz n figūras. Ja $r \cdot c > 0$, esam pierādījuši, ka kvadrātā vismaz $2n - 2k + 2$ figūras ir iespējams ievietot, citai figūrai neatstājot vietu.

Pieņemsim, ka rindas (un, attiecīgi, kolonnas), kas nesatur veselu figūru, atrodas blakus viena otrai. To, ka šāds pieņēmums ir spēkā, pamatosim nedaudz vēlāk. Izdarītais pieņēmums ļauj secināt, ka veidojas taisnstūris ar izmēriem $c \times r$, kurā neviens lauciņš nav nosegts. Šī iemesla dēļ ir skaidrs, ka $r < k$ un $c < k$. No tā izriet, ka $n - r \geq n - k + 1$ rindās ir pa horizontālai figūrai. Līdzīgi secinām, ka $n - c \geq n - k + 1$ kolonnās ir pa vertikālai figūrai, tātad kopā ir vismaz $2n - 2k + 2$ figūras.

Pierādīsim, ka iepriekš izdarītais pieņēmums ir patiess, apskatot rindas. Iegūtie rezultāti būs spēkā arī kolonnām. Izvēlamies vienu horizontāli novietotu figūru un apzīmējam to ar T . Tā kā $n < 2k$, tad attālums no figūras līdz tuvākajai kvadrāta horizontālajai

malai nepārsniedz $k - 1$ rūtiņas. Visas rindas, kas atrodas starp T un tuvāko kvadrāta horizontālo malu, šķeļ tās k kolonnas, kas iet caur figūru T . Izveidojas taisnstūrveida apgabals, kurā nevar ievietot nevienu vertikālu figūru. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, katrā rindā starp T un tuvāko kvadrāta horizontālo malu jāievieto horizontāla figūra. Tā kā šie spriedumi ir spēkā pie jebkuras T izvēles, tad visas rindas, kas nesatur veselu figūru, atrodas secīgi viena virs otras. Līdzīgi var spriest par kolonnām. Tātad pieņēmums ir pierādīts un no tā izrietošie secinājumi ir spēkā.

Atbilde. Ja $n = k$, tad mazākais izvietojamo figūru skaits ir n . Ja $k < n \leq 2k - 1$, tad mazākais izvietojamo figūru skaits ir $\min(n, 2n - 2k + 2)$.

3.3.6 EGMO, 2012. gads, 2. uzdevums

Apskatām kādu tabulu, kurā izpildās uzdevuma nosacījumi. Jebkuri divi elementi, kas atrodas vienā kolonnā, atšķiras ne vairāk kā par 1. Uz labu laimi izvēlamies kādu elementu, kas nav ne lielāks ne mazāks savā kolonnā. Šo skaitli aizstājam ar kolonnas lielāko vai mazāko elementu. Pēc šādas aizstāšanas uzdevuma nosacījumi vēl aizvien tiek apmierināti. Šāda darbība nemainīs vērtību tiem a_i, b_i , kuriem izpildās $|a_i - b_i| = 1$. Atkārtojam aizstāšanas darbību tik reižu, cik tas ir iespējams. Rezultātā iegūstam jaunu tabulu, kurai katrā kolonnā ir ne vairāk kā divas atšķirīgas vērtības – sākotnējās tabulas attiecīgās kolonnas lielākā un mazākā vērtība. Līdz ar to, zinot kādam ir jābūt lielākajam un mazākajam skaitlim katrā kolonnā, ir 2^n dažādi varianti, kā izveidot vienu tabulas rindu. Pēc uzdevuma nosacījumiem ir skaidrs, ka visām tabulas rindām jābūt atšķirīgām, jo pretējā gadījumā neizpildītos (3.2.2). Tātad m vērtība nevar pārsniegt skaitli 2^n .

Pārbaudīsim, vai iespējams tabulu ar n kolonnām un 2^n rindām aizpildīt, apmierinot uzdevuma nosacījumus. Kolonnu, kuras kārtas skaitlis ir k (zināms, ka $1 \leq k \leq 2^n$ aizpilda pēc šāda principa. Skaitli $k - 1$ pieraksta binārā pierakstā, izmantojot n ciparus – ja nepieciešams, skaitļa sākumā lieto nulles. Pierakstā izmantotos ciparus secīgi ieraksta katru savā k -tās rindas šūnā. Iegūtajā tabulā visas rindas būs atšķirīgas un tabula apmierinās uzdevuma nosacījumus.

Atbilde. Lielākais iespējamais rindu skaits $m = 2^n$.

Nobeigums

Pētot Tomaševska problēmu tika novērots, ka, palielinoties mainīgo skaitam, pierādījums kļūst ievērojami sarežģītāks. Mainīgo skaitu palielinot par 1, apskatāmo izteiksmju skaits palielinās divas reizes. Salīdzinot pierādījumu sešu un septiņu mainīgo gadījumā, būtiski atšķiras pierādījuma ideja. Ja sešiem (un mazāk) mainīgajiem pietika pierādīt, ka izteiksmju pāri vienlaicīgi nevar pēc vērtības pārsniegt skaitli 1, tad septiņu mainīgo gadījumā jāmeklē lielāki izteiksmju komplekti. Tomaševska problēmai ir vairākas interpretācijas – ģeometriskā, varbūtiskā, kombinatoriskā. Pagaidām neviena no šīm pieejām nav novedusi pie vispārīga atrisinājuma.

Tomaševska problēma ir labs avots olimpiāžu uzdevumiem par nevienādībām.

Risinot uzdevumu par taisnstūra sadalīšanu vairākos taisnstūros ar atšķirīgiem naturāliem malu garumiem, radās jautājums, vai problēmu varētu arī atrisināt telpiskā gadījumā. Pārnesot plaknes gadījumu uz telpu, uzdevuma formulējums būtu šāds: Kāds ir mazākais tilpums konteineram, kuru iespējams piepildīt ar kastēm $a_k \times b_k \times c_k$, kur visi a_k, b_k, c_k ir atšķirīgi naturāli skaitļi.

Arī aplūkotojos olimpiāžu uzdevumos ir tādi, kurus varētu pētīt vispārinātā gadījumā, piemēram, kāds ir mazākais lineāro reizinātāju skaits, kas jāizsvītro, lai vienādojumam
$$\sum_{i=1}^n (x-1) = \sum_{i=1}^n (x-1)$$
 nebūtu atrisinājuma.

Uzdevumā par minimālā skaita taisnstūru ievietošanu kvadrātā, atsakoties no nosacījuma $n < 2k$, iegūst neatrisinātu matemātikas problēmu, kuras atsevišķus gadījumus ir pētījuši skolēni savos zinātniski – pētnieciskajos darbos.

Izmantotā literatūra un avoti

- [1] B. Jacob. Students demand quality teaching. *Albany Student Press*, 72:5, 18, 1985.
- [2] R.K. Guy. Any answers anent these analytical enigmas? *American Mathematical Monthly*, 93:279–281, 1986.
- [3] R. B Boppana and R Holzman. Tomaszewski’s problem on randomly signed sums: breaking the $3/8$ barrier, 2017.
- [4] Hendriks H and Zuijlen M. C. A.; Linear combinations of Radamacher random variables, 2017.
- [5] F Heymann. Ideas for an Old Analytic Enigma about the Sphere that Fail in Intriguing Ways, 2012. [Tiešsaiste] Pieejams: http://ta.twi.tudelft.nl/wst/users/hey mann/Paper/Cube_around_sphere.pdf [Skatīts: 31-05-2018].
- [6] Сендов Б. Х., Ильин В. А., Садовничий В. А. *Математический анализ 1*. Московского Университета, Москва, 1985.
- [7] International Mathematical Olympiad. [Tiešsaiste] Pieejams: <https://www.imo-official.org/default.aspx> [Skatīts: 30-05-2018].
- [8] Girls’ Mathematical Olympiad: EGMO 2018 in Italy. [Tiešsaiste] Pieejams: <https://www.egmo.org/egmos/egmo7/> [Skatīts: 30-05-2018].
- [9] International Mathematical Olympiad: Solutions. [Tiešsaiste] Pieejams: <https://www.imo-official.org/problems.aspx> [Skatīts: 31-05-2018].
- [10] EGMO 2016 Solutions. [Tiešsaiste] Pieejams: <https://www.egmo.org/egmos/egmo5/solutions.pdf> [Skatīts: 30-05-2018].
- [11] EGMO 2012 Solutions. [Tiešsaiste] Pieejams: <https://www.egmo2012.org.uk/competition/> [Skatīts: 23-05-2018].

Pielikums. Tomaševska problēma. Izteiksmju salīdzinājums, ja $n = 7$

Indekss izteiksmei, kas ir vismaz u_i	u_i	Indekss izteiksmei, kas nepārsniedz u_i
-	1	visi
1	2	3...64
1,2	3	4...64
1...3	4	6...8,10...16,18...32, 34...63
1...3	5	6...64
1...5	6	7,8, 10...16, 18...32, 34...63
1...6	7	8, 11...16, 19...32, 35...62
1...7	8	12, 14...16, 20, 22...24, 26...32, 36, 38...40, 42...48, 50...62
1...3,5	9	10...64
1...7, 9	10	11...16, 18...32, 34...63
1...7, 9, 10	11	12...16, 19...32, 35...62
1...11	12	14...16, 20, 22...24, 26...32, 36, 38...40, 42...48, 50...62
1...7, 9...11	13	14...16, 21...32, 37...62
1...13	14	15, 16, 22...24, 26...32, 38...40, 42...48, 50...62
1...14	15	16, 23, 24, 27...32, 39, 40, 43...48, 51...62
1...15	16	24, 28, 30...32, 40, 44, 46...48, 52, 54...56, 58...62
1...3, 5, 9	17	18...64
1...6, 9, 10, 17	18	19...32, 34...63
1...7, 9...11, 17, 18	19	20...32, 35...62
1...12, 17...19	20	22...24, 26...32, 36, 38...40, 42...48, 50...62
1...7, 9...11, 13, 17...19	21	22...32, 37...62
1...14, 17...21	22	23, 24, 26...32, 38...40, 42...48, 50...62
1...15, 17...22	23	24, 27...32, 39, 40, 43...48, 51...62
1...23	24	28, 30...32, 40, 44, 46...48, 52, 54...56, 58...62
1...7, 9...11, 13, 17...19, 21	25	26...32, 41...62
1...14, 17...22, 25	26	27...32, 42...62
1...15, 17...23, 25, 26	27	28...32, 43...48, 51...62
1...27	28	30...32, 44, 46...48, 52, 54...56, 58...62
1...15, 17...23, 25...27	29	30...32, 45...48, 53...62
1...29	30	31, 32, 46...48, 54...56, 58...62
1...30	31	32, 47, 48, 55, 56, 59...62
1...31	32	48, 56, 60, 62
1...3, 5, 9, 17	33	34...64
1..6, 9, 10, 17, 18, 33	34	35..63
1..7, 9..11, 17..19, 33, 34	35	36..62
1..12, 17..20, 33..35	36	38..40, 42..48, 50..62
1..7, 9..11, 13, 17..19, 21, 33..35	37	38..62
1..14, 17..22, 33..37	38	39, 40, 42..48, 50..62
1..23, 33..38	39	40, 43..48, 51..62
1..24, 33..39	40	44, 46..48, 52, 54..56, 58..62
1..7, 9..11, 13, 17..19, 21, 25, 33..35, 37	41	42..62
1..14, 17..22, 25, 26, 33..38, 41	42	43..48, 50..62
1..15, 17..23, 25..27, 33..39, 41, 42	43	44..48, 51..62
1..28, 33..43	44	46..48, 53, 54..56, 58..62
1..15, 17..23, 25..27, 29, 33..39, 41..43	45	46..48, 53..62
1..30, 33..45	46	47,48,54..56, 58..62
1..31, 33..46	47	48,55,56,59..62
1..47	48	56, 60, 62
1..7, 9..11, 13, 17..19, 21, 25, 33..35, 37, 41	49	50..62
1..14, 17..23, 25, 26, 33..38, 41, 42, 49	50	51..62
1..15, 17..23, 25..27, 33..39, 41..43, 49, 50	51	52..62
1..28, 33..44, 49..51	52	54..56, 58..62
1..15, 17..23, 25..27, 29, 33..39, 41..43, 45, 49..51	53	54..62
1..30, 33..46, 49..53	54	55, 56, 58..62
1..31, 33..47, 49..54	55	56, 58..62
1..55	56	60, 62..62
1..15, 17..23, 25..27, 29, 33..39, 41..43, 45, 49..51, 53	57	58..62
1..30, 33..46, 49..54, 57	58	59..62
1..31, 33..47, 49..55, 57, 58	59	60..62
1..59	60	62
1...31, 33...47, 49...55, 57...59	61	62
1...61	62	-
1..6, 9, 10, 17, 18, 33, 34, 64	63	-
1..3, 5, 9, 17, 33	64	63

Maģistra darbs "Daži neklasiski ekstrēmu uzdevumi" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: _____ Diāna Mežecka

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: prof. Dr.math. Andrejs Cibulis _____ 01.06.2018.

Recenzents: prof. Dr.math. Inese Bula

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2016.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē
07.06.2018 prot. Nr _____

Komisijas sekretāre: Maruta Avotiņa