

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

**METODISKIE MATERIĀLI ATVASINĀJUMA
MĀCĪŠANAI VIDUSSKOLĀ**

BAKALAURA DARBS

Autors: **Guna Brenda Pogule**

Stud. apl. nr.: gp16022

Darba vadītājs: docents Dr. Math. Raivis Bēts

RĪGA 2020

ANOTĀCIJA

Šī gada 1. septembrī visos izglītības līmeņos sāks realizēt pilnveidoto mācību saturu un pieeju. To paredz jaunie valsts izglītības standarti. Vidusskolā ir plānotas būtiskas izmaiņas – skolēniem būs iespēja izvēlēties, kādā līmenī apgūt mācību priekšmetus. Matemātikā viena no augstākā līmeņa tēmām ir atvasinājums.

Darba mērķis ir izstrādāt stundu plānus un materiālus atvasinājuma mācīšanai vidusskolā atbilstoši jaunā standarta prasībām. Rezultātā ir izstrādāts tematiskais plāns, pēc kura apgūt robežu, atvasinājuma rēķinus un tā pielietojumu. Kopā izstrādāti četri pārbaudes darbi, 25 stundu plāni un materiāli, kuros tiek realizētas atbilstošas mācību metodes, lai īstenotu standartā definētos sasniedzamos rezultātus. Izstrādātais darbs ir kā atbalsts skolotājiem, kuri septembrī sāks mācīt matemātiku augstākajā līmenī.

Atslēgvārdi: atvasinājums, stundu plāni, stundu materiāli, izglītības standarts.

ABSTRACT

Every level of education will start to implement new and improved curriculum on the 1st of September 2020 which is provided by the Cabinet of Ministers. Secondary school students will have an option to choose subjects based on the desired level of complexity. Students who choose to study math at the highest level will have to learn about the derivative.

This thesis is focused on creating plans and materials for teaching the derivative to secondary school students appropriately to the requirements of the new standard. A total of four tests, plans and materials for 25 lessons were created. These lessons are according to the new standard and implement methods to reach defined learning outcomes. Math teachers can use this thesis for teaching the derivative to secondary school students.

Keywords: derivative, plans for lessons, materials, curriculum.

SATURA RĀDĪTĀJS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS.....	6
IEVADS.....	7
1. ATVASINĀJUMA TEORIJAS IZKLĀSTS.....	9
1.1. Funkcijas jēdziens.....	9
1.2. Robežas.....	11
1.2.1. Robežas definīcija.....	11
1.2.2. Robežu īpašības.....	14
1.2.3. Robežu aprēķināšana.....	15
1.2.4. Nepārtrauktas funkcijas.....	17
1.3. Atvasinājums.....	19
1.3.1. Atvasinājuma definīcija.....	19
1.3.2. Atvasinājuma ģeometriskā nozīme.....	21
1.3.3. Atvasinājuma kārtulas.....	22
1.3.4. Elementāru funkciju atvasināšana.....	25
1.4. Atvasinājuma pielietojums.....	28
1.4.1. Funkciju pētīšana.....	29
1.4.1.1. Ekstrēmi.....	30
1.4.1.2. Ieliektība un izliektība.....	31
1.4.2. Atvasinājuma fizikālā jēga.....	31
1.4.3. Atvasinājuma nozīme ekonomikā.....	32
1.4.4. Robežu aprēķināšana.....	33
2. METODIKA.....	35
2.1. Stundu struktūra.....	35
2.2. Pētnieciskie uzdevumi.....	36
2.3. Pašvadītā mācīšanās.....	39
2.4. Atgriezeniskā saite.....	41
2.5. Informācijas tehnoloģijas.....	42
2.6. Uzdevumu veidi.....	45
2.7. Stundu plānu aprobācija.....	47
3. STUNDU PLĀNU SATURS.....	50
3.1. Temats “Virtnes robeža”.....	50
3.2. Temati “Funkcijas robeža” un “Robežu rēķini”.....	52

3.3. Temats “Atvasinājums”	53
3.4. Temati “Funkcijas pētīšana” un “Atvasinājuma pielietojums”	54
SECINĀJUMI.....	56
PATEICĪBAS.....	57
IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI.....	58
PIELIKUMI.....	60

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

AS – atgriezeniskā saite

C – konstante

$C(x)$ – izmaksu funkcija

IT – informācijas tehnoloģijas

N – kārtas numurs

\mathbb{N} – naturālo skaitļu kopa

$P(x)$ – peļņas funkcija

\mathbb{R} – reālo skaitļu kopa

$R(x)$ – ienākumu funkcija

U_δ – δ -apkārtnē

U_ε – ε -apkārtnē

\dot{U}_δ – caurdurtā δ -apkārtnē

\mathbb{Z} – veselo skaitļu kopa

δ, ε – pēc patikas mazs pozitīvs skaitlis

x_n – virknes vispārīgais loceklis

(x_n) – virknes locekļi

\forall – katrs

\exists – eksistē

\in – pieder

Δx – argumenta pieaugums

Δy – funkcijas pieaugums

\rightarrow – tiecas uz

\Rightarrow – tad

\Leftrightarrow – tad un tikai tad

IEVADS

Pēdējos gadu desmitos sabiedrībā un darba tirgū arvien vairāk tiek novērtētas loģiskās domāšanas un problēmrisināšanas prasmes. No zināmu algoritmu pielietošanas nepieciešams pāriet uz kompleksu situāciju analīzi un jaunu risinājumu veidošanu. Lai skolēni veiksmīgāk apgūtu nepieciešamās prasmes, jāmainās arī mācību saturam un pieejai. Pēdējo reizi Latvijas vidējās izglītības standarts tika mainīts 2013. gadā. [1] Septiņus gadus vēlāk, 2020. gada 1. septembrī, stāsies spēkā jaunizveidotie vispārējās izglītības standarti, turpinot uzlabot mācību saturu un pieeju. Reformas tiks ieviestas visās izglītības pakāpēs reizē, sākot ar pirmsskolu un beidzot ar vidusskolu. [2]

Jaunais vidusskolas modelis paredz mācību satura apguvi trīs līmeņos: vispārīgajā, optimālajā un augstākajā. Matemātikas jomas augstākajā apguves līmenī ir iekļauti matemātiskās analīzes jautājumi, lai veidotu izpratni par atvasinājumu, integrāli un to lietojumu dažādu problēmu risināšanā. [3]

Jaunais vidusskolas standarts ir pieejams un stāsies spēkā šī gada 1. septembrī. Programma un metodiskie materiāli matemātikas jomas augstākajā līmenī vēl nav izstrādāti. Atvasinājums ir viens no matemātiskās analīzes pamata elementiem, kas sevī ietver funkcijas un robežas. Vidusskolā ir ieteicams apgūt atvasinājuma jēdzienu un pielietojumu, jo to var izmantot dažādu skolā apskatīto problēmu risināšanā un jaunu situāciju analīzē.

Darba ietvaros tiek risināta problēma, ka nav pieejami mācību materiāli un metodiskie ieteikumi, lai mācītu matemātiku vidusskolēniem augstākajā līmenī atbilstoši jaunā standarta prasībām.

Darba mērķis ir izstrādāt tematisko plānu, stundu plānus un materiālus atvasinājuma mācīšanai vidusskolā atbilstoši jaunā standarta prasībām.

Darba uzdevumi:

- izpētīt mācību literatūru par funkciju, robežu un atvasinājuma skaidrojumu;
- apskatīt atvasinājuma lietojumu un tā nozīmi dažādu jomu problēmās;
- izstrādāt tematisko plānu robežu un atvasinājuma mācīšanai;
- izstrādāt stundu plānus un materiālus tematiem “Virsknes robeža”, “Atvasinājums”, “Funkcijas pētīšana” un “Atvasinājuma pielietojums”;
- izstrādāt pārbaudes darbus un to vērtēšanas kritērijus iepriekš minētajiem tematiem;
- aprobēt izstrādātos tematus “Virsknes robeža” un “Atvasinājums”;
- izvērtēt izstrādāto stundu plānu atbilstību standartā definētajiem sasniedzamajiem rezultātiem un pilnveidotajai mācību pieejai.

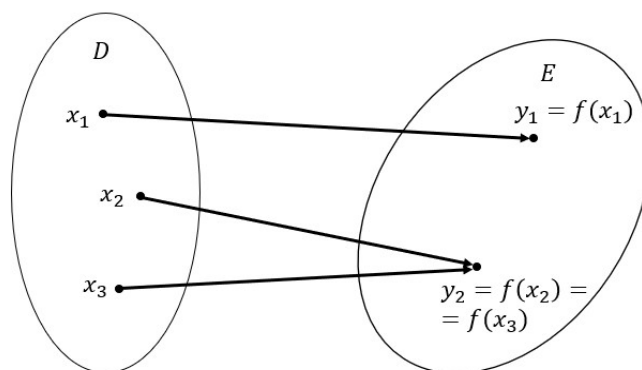
Darbs sastāv no 3 nodaļām. Pirmajā nodaļā tiek apskatīts atvasinājuma skaidrojums. Nodaļa sākas ar funkcijas un robežas skaidrojumu un beidzas ar atvasinājuma pielietojumu. Nākamajā nodaļā tiek aprakstīta izmantotā metodika izvērīto sasniedzamo rezultātu īstenošanai izstrādātajās stundās. Trešajā nodaļā ir stundu plānu un materiālu izvērtējums atbilstoši vidusskolas standartā izvērītajiem augstākā līmeņa sasniedzamajiem rezultātiem. Darba pielikums satur izstrādātos materiālus: tematisko plānu sešu tematu apguvei, 25 stundu plānus ar materiāliem četrus tematu apguvei un to pārbaudes darbus.

1. ATVASINĀJUMA TEORIJA IZKLĀSTS

Lai skaidrotu atvasinājumu, vispirms jāaplūko robežu skaidrojums un funkcijas jēdziens, kā arī to īpašības un elementārās funkcijas, no kurām var izveidot dažādas saliktas funkcijas.

1.1. Funkcijas jēdziens

Matemātikā par funkciju sauc atbilstības likumu f , pēc kura katram skaitlim x no kopas D jeb definīcijas apgabala piekārto vienu vienīgu skaitli y no kopas E jeb vērtību apgabala [4, 137. lpp.]. Pieņemts skaitļus x saukt par argumentiem, bet skaitļus y – par funkcijas vērtībām, un lietot pierakstu: $y=f(x)$. Vizuals attēlojums redzams 1.1.1. attēlā.



1.1.1. att. Funkcijas vizualizācija [5, 10. lpp.]

Literatūrā tiek izdalītas elementārās pamatfunkcijas:

1. Pakāpes funkcija $y=x^a$, kur $a \in \mathbb{R}$.
2. Eksponentfunkcija $y=a^x$, kur $a > 0, a \neq 1$.
3. Logaritmiskās funkcija $y=\log_a x$, kur $a > 0, a \neq 1$.
4. Trigonometriskās funkcijas $y=\sin x, y=\cos x, y=\operatorname{tg} x, y=\operatorname{ctg} x$.
5. Ciklometriskās funkcijas $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\operatorname{arctg} x, y=\operatorname{arcctg} x$. [6, 45. lpp.]

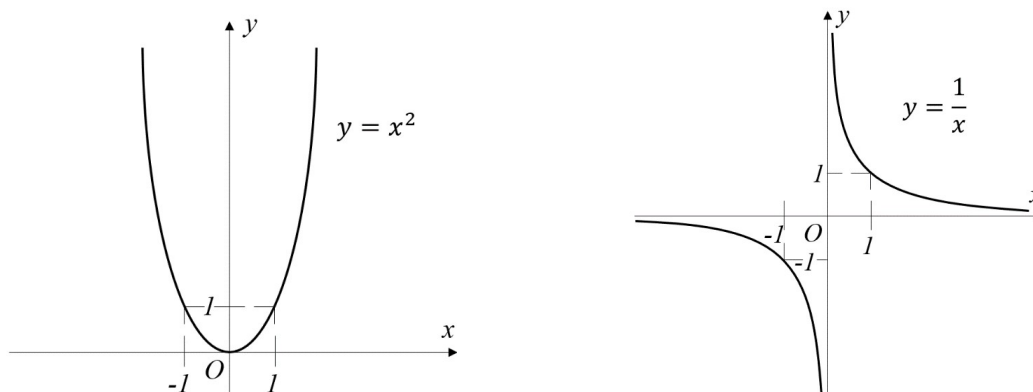
Buli savā grāmatā pie elementārajām pamatfunkcijām pieskaita arī konstantu funkciju $y=C$ [7, 137. lpp.], kur $C \in \mathbb{R}$, tomēr tā ir jau minētā pakāpes funkcija, ja $a=0$. Eksponentfunkcija un logaritmiskā funkcija, kā arī trigonometriskās un ciklometriskās funkcijas savā starpā ir inversās funkcijas – pieņem bijušo argumentu par funkcijas vērtību, bet funkcijas vērtību – par argumentu. Simboliski to var pierakstīt, ka funkcijai $y=f(x)$ inversā funkcija ir $x=\varphi(y)$. [6, 49. lpp.]

Funkciju pētīšanā izmanto vairākus terminus, kas raksturo to īpašības: monotonitāti, periodiskumu, nepārtrauktību, ekstrēma punktus, paritāti, ieliektību un izliektību. Darbā apskatītas tikai tās īpašības, kuru pētīšanā tiek izmantots atvasinājums.

Funkcijas monotonitāti visbiežāk apraksta termini: augoša un dilstoša. Tiek lietoti arī tādi termini kā nedilstoša un neaugoša funkcija – katrām argumenta vērtībām x_1 un x_2 , kurām $x_1 < x_2$, izpildās attiecīgi nevienādības $f(x_1) \leq f(x_2)$ un $f(x_1) \geq f(x_2)$. [5, 12. lpp.]

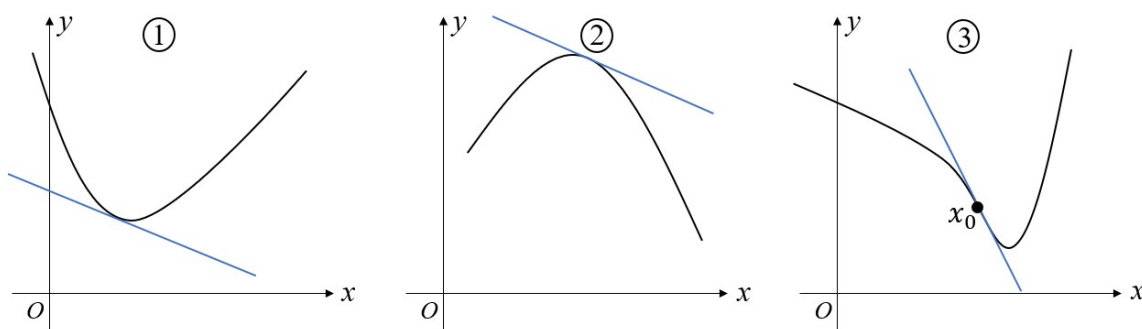
Funkcijas $y=f(x)$ lielākā vērtība kādā intervālā ir punktā x_0 , ja vērtība šajā punktā ir lielāka nekā apkārtnes punktos jeb $f(x_0) > f(x)$. Punktu x_0 sauc par maksimuma punktu un $f(x_0)$ – par maksimumu. Analogiski var aprakstīt arī funkcijas mazāko vērtību jeb minimuma punktu. Minimumus un maksimumus sauc par ekstrēmiem [4, 195. lpp.], bet minimuma un maksimuma punktus – par ekstrēma punktiem [5, 121. lpp.].

Funkcija ir nepārtraukta, ja, pakāpeniski mainoties argumentam, pakāpeniski, bez lēcieniem, mainās arī funkcijas vērtība. Intuitīvi šī īpašība saistās ar funkcijas grafiku kā nepārtrauktu līniju. Pretējā gadījumā funkciju sauc par pārtrauktu. Argumenta vērtības, pie kurām funkcija ir pārtraukta, sauc par pārtraukuma punktiem, kas var būt dažāda veida, bet par to sīkāk izklāsts sekos 1.2.4. nodaļā pēc robežu teorijas apskates. 1.1.2. attēlā redzama nepārtrauktas un pārtrauktas funkcijas (pārtraukuma punkts $x=0$) grafiki. [6, 42. lpp.]



1.1.2. att. Nepārtrauktas funkcijas $y=x^2$ un pārtrauktas funkcijas $y=\frac{1}{x}$ grafiki

Tālāk tiek apskatītas vēl dažas funkciju īpašības. Funkciju sauc par izliektu kādā intervālā, ja grafiks atrodas zem jebkuras grafika pieskares minētajā intervālā. Analogiski var definēt arī ieliektu funkciju – funkcija, kuras grafiks atrodas virs jebkuras grafika pieskares dotajā intervālā. Toties funkcijas punktu sauc par pārliekuma punktu, ja tas atdala grafika izliekto daļu no ieliektās. [7, 69. lpp.] Visas trīs definīcijas ir attēlotas 1.1.3. attēlā, ① grafikā attēlota ieliekta funkcija, ② grafikā – izliekta funkcija, bet ③ grafikā atzīmēts pārliekuma punkts x_0 , caur kuru iet taisne, kas atdala grafika ieliekto daļu no izliektās.



1.1.3. att. Ieliekta un izliekta funkcijas grafiki, pārliekuma punkts [7, 69. lpp.]

1.2. Robežas

Iepriekšējā nodaļā ir apskatīts funkcijas jēdziens un galvenie termini, kurus izmanto atvasinājuma skaidrojumā un lietojumā. Vēl nepieciešams aplūkot robežas jēdzienu, detalizētāku nepārtrauktas funkcijas skaidrojumu un robežu aprēķināšanas paņēmienus.

Vispirms aplūkosim terminus, kurus izmanto robežas definīcijā. Par punkta apkārtni sauc vaļēju intervālu, kurš satur pašu punktu x_0 [8, 56. lpp.]. Intervālu $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ sauc par punkta x_0 δ -apkārtni un apzīmē ar $U_\delta(x_0)$. Robežas definīcijā lieto terminu punkta x_0 caurdurtā δ -apkārtne. To var uzrakstīt kā intervālu apvienojumu $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ un apzīmē $\dot{U}_\delta(x_0)$. [8, 102. lpp.] Izvēloties pietiekami mazu punkta x_0 δ -apkārtni $x \in U_\delta(x_0)$, funkcijas vērtības $f(x)$ var atšķirties no kāda skaitļa A pēc patikas maz, ko apzīmē ar ε – jebkurš pēc patikas mazs pozitīvs skaitlis. Simboliski to pieraksta: $f(x) \in (A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ jeb $|f(x) - A| < \varepsilon$. Intervālu $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ sauc par punkta A ε -apkārtni un apzīmē ar $U_\varepsilon(A)$. Tātad $f(x) \in U_\varepsilon(A)$, ja $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ jeb $\forall x$, kuriem $0 < |x - x_0| < \delta$, ir $|f(x) - A| < \varepsilon$. [5, 27. lpp.]

1.2.1. Robežas definīcija

Miškis mainīgā lieluma $f(x)$ robežu definē kā skaitli A , ja A ir patstāvīgs lielums un $f(x)$ kādā procesā neierobežoti tuvojas lielumam A [6, 92. lpp.], tomēr citi autori robežas definīcijā izmanto iepriekš aprakstītos terminus. Skaitli A sauc par funkcijas robežu, kad x tiecas uz punktu x_0 jeb $x \rightarrow x_0$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu pozitīvu skaitli δ , ka visām x vērtībām izpildās nosacījums: ja argumenta vērtības x pieder punkta x_0 caurdurtajai δ -apkārtnei, tad attiecīgās funkcijas $f(x)$ vērtības pieder skaitļa A ε -apkārtnei. [7, 25. lpp.]. Simboliski to var pierakstīt kā:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

jeb, apkārtnu vietā izmantojot nevienādības,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. [5, 27. lpp.]$$

Iepriekš tika izskatīts gadījums, ka arguments x var būt jebkura vērtība no punkta x_0 caurdurtās δ -apkārtnes, bet bieži ir jāpēta funkcijas izturēšanās, kad $x \rightarrow x_0$ tikai no vienas puses. Šādas funkcijas robežas sauc par vienusējām robežām jeb attiecīgi par:

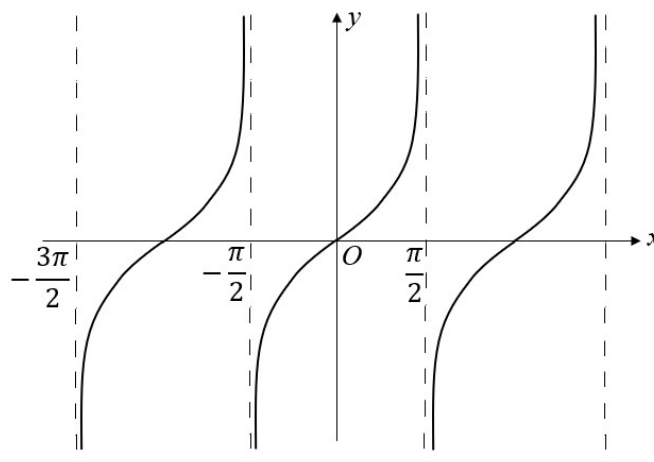
a) robežu no labās puses, pieraksta: $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x),$

b) robežu no kreisās puses, pieraksta: $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$ [5, 28. lpp.]

Ja abas vienusējās robežas nav vienādas, tad saka, ka $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ neeksistē, savukārt

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, tad un tikai tad $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ [4, 144. lpp.]. Piemēram, 1.2.1.1 attēlā

redzama funkcija, kurai ir atšķirīgas vienusējās robežas un tā neeksistē, kad $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

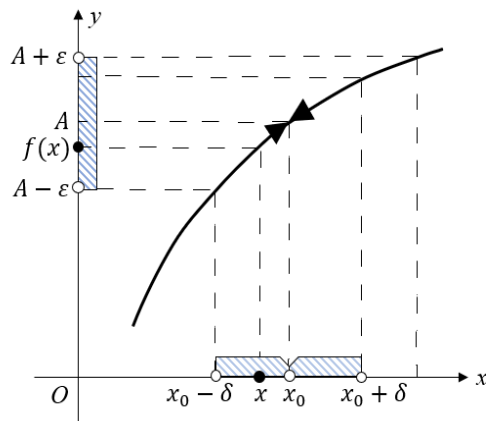


1.2.1.1. att. Funkcijas $y = \text{tg } x$ grafiks

Apskatījām funkcijas robežas definīciju, kad arguments tiecas uz skaitli x_0 , līdzīgi var apskatīt vēl 3 gadījumus:

1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ jeb funkcijas robeža ir skaitlis A , kad arguments tiecas uz skaitli x_0

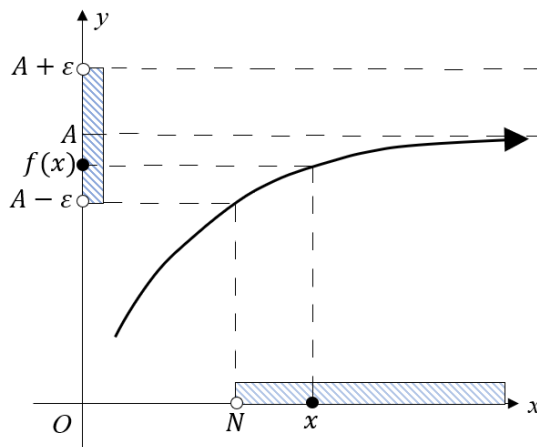
(1.2.1.2. att.) [5, 26. lpp.],



1.2.1.2. att. Robežas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ilustrācija [5, 26. lpp.]

- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ jeb funkcijas robeža ir skaitlis A , kad arguments tiecas uz bezgalību.

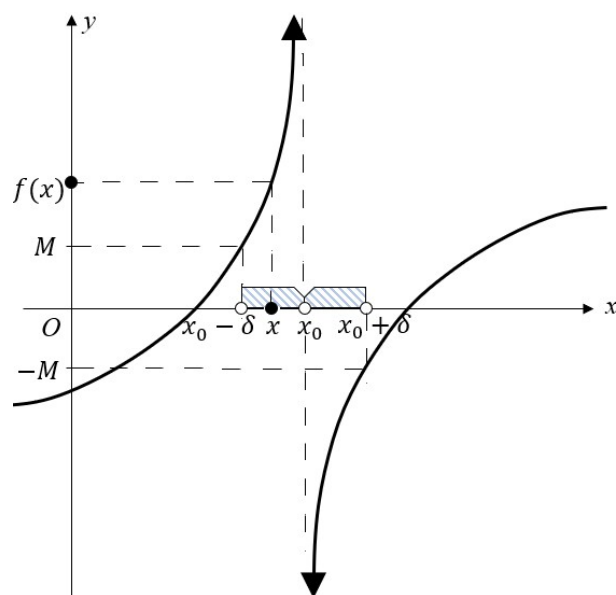
(1.2.1.3. att.) [5, 30. lpp.],



1.2.1.3. att. Robežas $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ilustrācija [5, 30. lpp.]

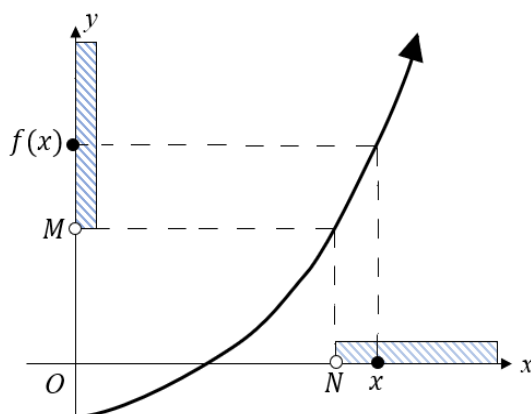
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ jeb funkcijas robeža ir bezgalība, kad arguments tiecas uz skaitli x_0 .

(1.2.1.4. att.) [5, 33. lpp.],



1.2.1.4. att. Robežas $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ilustrācija [5, 33. lpp.]

- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ jeb funkcijas robeža ir bezgalība, kad arguments tiecas uz bezgalību (1.2.1.5. att.) [5, 34. lpp.].



1.2.1.5. att. Robežas $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ilustrācija [5, 34. lpp.]

1.2.2. Robežu īpašības

Buli apskata aritmētiskās darbības ar robežām, robežpāreju nevienādībās [7, 33.-36. lpp.], Šteiners aplūko teorēmas par funkciju robežām [5, 37.-39. lpp.], bet saturs zem šiem nosaukumiem ir vienāds, ko Miškis un Volodko izvēlas saukt par robežu īpašībām [6, 93.-95. lpp.], [4, 145. lpp.].

Robežu īpašības, ja $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ un $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$:

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B.$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ ja } B \neq 0. [5, 113. \text{ lpp.}]$$

$$4. \text{ Ja kādā punkta } a \text{ apkārtnē } f(x) < M, \text{ tad } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq M \text{ jeb } A \leq M.$$

$$5. \text{ Ja kādā punkta } a \text{ apkārtnē } f(x) < g(x), \text{ tad } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ jeb } A \leq B.$$

$$6. \text{ Ja kādā punkta } a \text{ apkārtnē } f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ un } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A, \text{ tad arī}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A. [5, 37.-39. \text{ lpp.}] \text{ Šo īpašību sauc arī par robežpāreju nevienādībās}$$

[7, 36. lpp.].

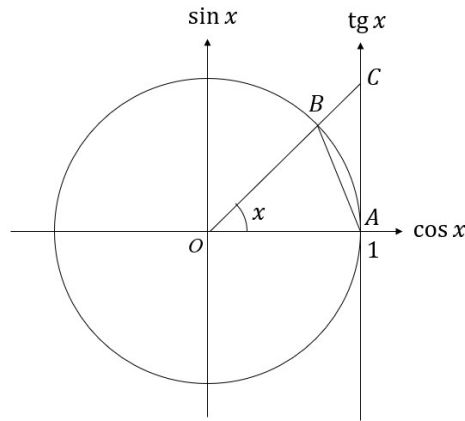
Miškis īpašību sarakstu papildina ar vairākiem punktiem, kas citos avotos aplūkotas kā atsevišķas teorēmas vai robežu īpašību sekas, piemēram:

- Eksistē ne vairāk kā viena funkcijas robeža, $x \rightarrow a$.
- Konstantes robeža ir pati konstante jeb $\lim_{x \rightarrow a} C = C, C \in \mathbb{R}. [6, 93.-94. \text{ lpp.}]$
- Konstantu reizinātāju var iznest pirms robežas zīmes jeb $\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), C \in \mathbb{R} [6, 93.-94. \text{ lpp.}]$, ko var neuzskatīt par atsevišķu īpašību, bet 2. īpašības sekām vai secinājumu. [5, 38. lpp.]

1.2.3. Robežu aprēķināšana

Aprēķinot robežas, bieži vien var rasties situācijas, kad var noderēt ievērojamās robežas un vairāki paņēmieni, kā novērst nenoteiktības. Vispirms aplūkosim divas ievērojamās robežas.

Pirmā ievērojamā robeža $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tās pierādījumā izmanto trigonometrisko vienības riņķa I kvadrantu, kur novelk loku AB ar garumu x (1.2.3.1. attēls). Novelkam hordu AB un tangensa līniju AC jeb $AB \perp AC$, tad $AC = \operatorname{tg} x$.



1.2.3.1. att. Vienības riņķis

No zīmējuma redzams, ka ir patiesa nevienādība $S_{\Delta OBA} < S_{\text{sekt.} OBA} < S_{\Delta OCA}$. (1)

Tā kā $S_{\Delta OBA} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$, $S_{\Delta OCA} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, bet $S_{\text{sekt.} OBA} = \pi \frac{1^2 \cdot x}{2\pi} = \frac{1}{2} x$,

taud no nevienādības (1) seko, ka $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$ jeb $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. (2)

Dalot nevienādības visus locekļus ar $\sin x > 0$, iegūst: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ jeb $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Izmantosim robežu 6. īpašību, kad $x \rightarrow +0$. Tā kā $\lim_{x \rightarrow +0} \cos x = 1$ un $\lim_{x \rightarrow +0} 1 = 1$, taud no

nevienādībām (2) izriet, ka arī $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Nepieciešams pierādīt arī, ka $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Lietojot substitūciju $x = -t$, ja $x \rightarrow -0$, taud

$t \rightarrow +0$ un $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{-\sin(t)}{-t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1$. Tātad esam pierādījuši arī

robežu no kreisās puses un $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. [5, 44.-45. lpp.]

Otrā ievērojamā robeža: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ vai $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Lietojot substitūciju $\frac{k}{x} = t$,

kaud $x \rightarrow \infty$, taud $t \rightarrow 0$, iegūsim vēl vienu noderīgu robežu:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{k}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left((1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^k = e^k$. [8, 134.-135. lpp.]

Apskatot gan pirmo, gan otro ievērojamo robežu, var iepazīties ar nenoteiktības jēdzienu. Tā kā $\sin 0 = 0$, taud $\frac{\sin x}{x}$, kaud $x \rightarrow 0$, ir nenoteikta izteiksme " $\frac{0}{0}$ ". Vispārīgā gadījumā

lieto pierakstu: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ vai $\left(\frac{0}{0}\right)$, kad $f(x)$ un $g(x)$ ir bezgalīgi mazas funkcijas, un lasa

“nenoteiktība $\frac{0}{0}$ ”. [5, 41. lpp.] Ir iespējamās arī citas nenoteiktības, kā $\left(\frac{\infty}{\infty}\right), (0 \cdot \infty), (\infty - \infty),$

$(0^0), (\infty^0), (1^\infty)$ [4]. Kā tika minēts, arī no otrās ievērojamās robežas var iegūt nenoteiktību:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty). \text{ [5, 49. lpp.]}$$

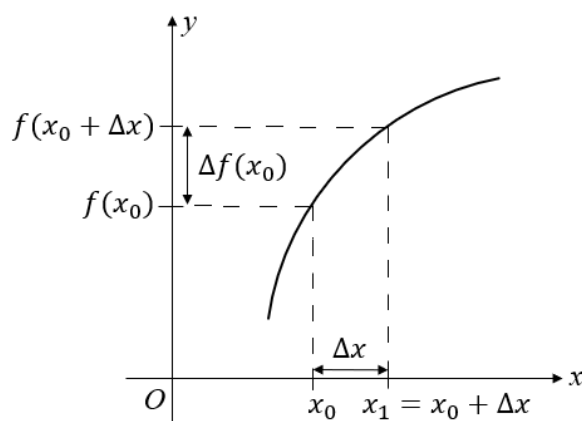
Robežu aprēķināšanā var izmantot apskatītās ievērojamās robežas. Pastāv arī paņēmieni, lai novērstu nenoteiktības:

- Lai novērstu nenoteiktību $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, skaitītāja un saucēja izteiksmi (ja tie ir polinomi) dala ar x^n , kur n ir saucēja polinoma lielākā pakāpe.
- Lai novērstu $\left(\frac{0}{0}\right)$, sadala izteiksmes reizinātājos.
- Lai novērstu $(\infty - \infty)$ un $\left(\frac{0}{0}\right)$, reizina skaitītāju un saucēju ar skaitītāja (vai saucēja) saistīto izteiksmi. Ja kāda no izteiksmēm satur kvadrātsakni, bieži vien ir izdevīgi reizināt ar tās saistīto izteiksmi.

1.2.4. Nepārtrauktas funkcijas

Vēlreiz atgriezīsimies pie nepārtrauktas funkcijas definīciju saistībā ar robežām un apskatīsim jēdzienus, kas rosinās arī atvasināšanas jēdziena izpratni. Funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā x_0 , ja $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ [7, 37. lpp.]. Apakšnodaļas mērķis ir aplūkot citus šīs definīcijas formulējumus, lai virzītos uz atvasinājuma skaidrojumu.

Starpību starp divām argumenta vērtībām x_1 un x_0 sauc par argumenta pieaugumu un apzīmē ar simbolu Δx . Savukārt starpību starp divām funkcijas vērtībām šajos punktos sauc par funkcijas pieaugumu punktā x_0 un apzīmē ar simbolu $\Delta f(x_0)$ jeb Δy . Funkcijas pieaugumu var uzrakstīt, izmantojot $\Delta x = x_1 - x_0$: $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Aprakstītais ir grafiski attēlots 1.2.4.1. attēlā. [5, 59. lpp.]



1.2.4.1. att. Argumenta un funkcijas pieauguma ilustrācija [5, 59. lpp.]

Izmantojot tikko aprakstītos jēdzienus, funkcijas nepārtrauktību definē šādi: funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0 , ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums, t. i., $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f(x_0) = 0$, [4, 157. lpp.]. Pretējā gadījumā punktu x_0 sauc par pārtraukuma punktu [6, 98. lpp.]. Izmantojot iepriekš definēto funkcijas pieaugumu, iegūst, ka $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = 0$, no kurienes izriet, ka $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0 + \Delta x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$. Tā kā $f(x_0)$ ir konstants lielums, tad $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, ko definējam jau apakšnodaļas sākumā. Arī apgrieztais apgalvojums ir patiess. No tā iegūstam teorēmu, ka $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. [5, 37. lpp.]

Funkciju, kas ir nepārtraukta kādā intervālā katrā punktā, sauc par nepārtrauktu šajā intervālā [6, 99. lpp.]. Kā tika minēts, punktu x_0 , kurā neizpildās nepārtrauktības nosacījumi, sauc par pārtraukuma punktu. Izdala divu veidu pārtraukuma punktus:

- Punktu sauc par 1. veida pārtraukuma punktu, ja pārtraukuma punktā eksistē abas vienaspusējās robežas. [8, 157. lpp.]
- Ja pārtraukuma punktā vismaz viena no vienaspusējām robežām neeksistē, tad šo punktu sauc par otrā veida pārtraukuma punktu [8, 157. lpp.].

Nepārtrauktām funkcijām ir vairākas īpašības. Piemēram, ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad šajā intervālā tā ir ierobežota un vismaz vienā intervāla punktā sasniedz savu minimālo un maksimālo vērtību. Kā arī, ja funkcija ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$ un vienā no intervāla galapunktiem funkcijas vērtība ir pozitīva, bet otrā – negatīva, tad vismaz vienā intervāla iekšējā punktā funkcijas vērtība ir nulle. [5, 64.-65. lpp.]

Darbā tiks izmantota nepārtrauktas funkcijas īpašība par robežpāreju: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$ [6, 99. lpp.].

1.3. Atvasinājums

Līdz šim esam apskatījuši gan funkcijas, gan robežas jēdzienu un ar to saistītos terminus un sakarības, kas nepieciešamas atvasinājuma skaidrojumā. Aplūkosim atvasinājuma definīciju, tā ģeometrisko interpretāciju, atvasināšanas kārtulas un gan elementāru, gan saliktu funkciju atvasināšanu.

1.3.1. Atvasinājuma definīcija

Par funkcijas atvasinājumu punktā x_0 sauc funkcijas pieauguma un argumenta attiecības robežu šajā punktā, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli. To apzīmē: $f'(x_0), y'|_{x=x_0}$ vai

$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$. [5, 67. lpp.] Atvasinājuma atrašanas darbību sauc par atvasināšanu vai diferencēšanu.

Darbā lietots termins atvasināšana. Atvasinājuma definīciju punktā x_0 var pierakstīt ar

iepriekš aplūkotajiem simboliem: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ jeb $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

[7, 49. lpp.] Zorihs atvasinājumu definē šādi: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ [8, 179. lpp.], kas

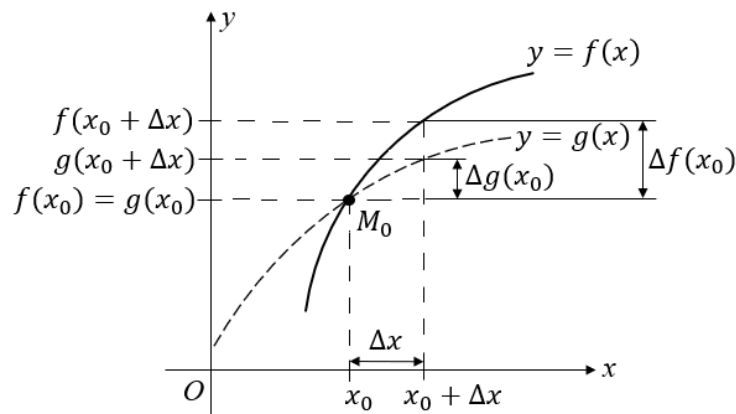
atbilst jau minētajai atvasinājuma definīcijai. No robežas definīcijas izriet, ka, lai eksistētu atvasinājums punktā x_0 , abām vienpusējām robežām jābūt vienādām:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad [5, 76. \text{lpp.}]$$

Attiecību $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ sauc par funkcijas izmaiņas vidējo ātrumu intervālā $[x_0; x_0 + \Delta x]$.

1.3.1.1. attēlā redzami divu funkciju grafiki un tas, ka $f(x_0 + \Delta x) > g(x_0 + \Delta x)$ un $\Delta f(x_0) > \Delta g(x_0)$. Tātad funkcija $f(x)$ punktā x_0 aug straujāk nekā funkcija $g(x)$. Lai to

aprstātu funkcijas izmaiņas ātrumu, izmanto minēto attiecību $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. [5, 67. lpp.]



1.3.1.1. att. Funkcijas izmaiņas ātruma ilustrācija [5, 67. lpp.]

Ja atvasinājumu meklē mainīgai x vērtībai, tad atvasinājums ir argumenta x funkcija, ko pieraksta ar simboliem $f'(x)$, y' vai arī $\frac{dy}{dx}$. Tādējādi funkcijas $y=f(x)$ definīciju var

pierakstīt šādi: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ vai $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. [5, 68.

lpp.] Zorihs atvasinājuma apzīmēšanā ievieš vēl citu pierakstu $\frac{df(x)}{dx}$, bet mehānikā papildu tiek lietots simbols $\dot{x}(t)$, kur t apzīmē laiku [8, 180. lpp.].

Tā kā funkcijas atvasinājumu definē ar robežas palīdzību, var runāt par atvasinājuma saistību ar funkcijas nepārtrauktību. Ja funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad

funkcija ir nepārtraukta punktā x_0 . To pierāda, izmantojot identitāti $\Delta f(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x$.

Robežai no dotās izteiksmes jābūt vienādai ar nulli, definējot, ka funkcija ir nepārtraukta:

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, kas bija jāpierāda. [5,

77. lpp.] Būli šīs teorēmas pierādījumā izmanto šo pašu ideju, tikai pierādot, ka

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Pierādījumā izmanto identitāti $f(x) = f(x_0) - f(x_0) + f(x) = f(x_0) - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$.

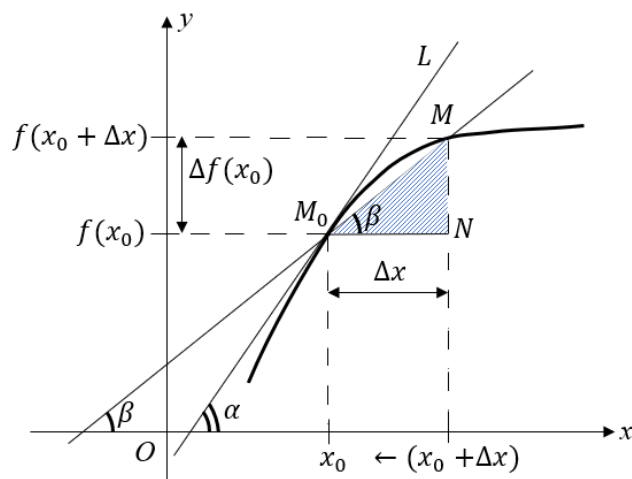
Tā kā $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ un $x - x_0 = \Delta x$, tad tālākais pierādījums ir analogisks jau apskatītajam. [7, 50. lpp.] Lai gan skaidrojumi ir analogiski, pirmais jeb Šteinera piedāvātais ir uzskatāmāks.

Līdzīgi kā funkcijai $y=f(x)$ var apskatīt atvasinājumu $f'(x)$, tā arī var meklēt funkcijas $f'(x)$ pieauguma $\Delta f'(x)$ un argumenta pieauguma Δx attiecības robežu, kad $\Delta x \rightarrow 0$. Ja

eksistē robeža $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} = (f'(x))'$, tad to sauc par funkcijas otrās kārtas atvasinājumu un apzīmē ar simboliem y'' , $f''(x)$ vai $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Otrās kārtas atvasinājums ir pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājums jeb $y'' = (y')'$. Analogiski definē n -tās kārtas atvasinājumu $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. [5, 93. lpp.]

1.3.2. Atvasinājuma ģeometriskā nozīme

Vairumā izpētītās literatūras tiek apskatīta atvasinājuma ģeometriskā nozīme. Tā dod gan lielāku atvasinājuma izpratni, gan jau tā pielietojumu ģeometrijā. Turpmākajam skaidrojumam izmantosim 1.3.2.1. attēlā redzamo funkcijas $y=f(x)$ grafiku, kurā attēlots noteikts punkts $M_0(x_0, y_0)$ un mainīgais punkts $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. [6, 113. lpp.]



1.3.2.1. att. Atvasinājuma ģeometriskās nozīmes ilustrācija [5, 72. lpp.]

Taisni MM_0 sauc par sekanti, un, ja punktu M izvēlas tuvāk punktam M_0 , mainās sekantes MM_0 stāvoklis. Ja argumenta pieaugums Δx tiecas uz nulli, tad $M_0 \rightarrow M$ pa grafiku un mainās sekantes stāvoklis. Sekante griežas ap punktu M_0 un tiecas uz “robežstāvokli” – taisnes M_0L stāvokli, ko sauc par līknes pieskari punktā M_0 . Pie dotā nosacījuma, ka $\Delta x \rightarrow 0$, arī ar abscisu sekantes veidotais leņķis β tiecas uz leņķi α , ko veido pieskare M_0L un Ox ass. [5, 72. lpp.]

Aplūkojot 1.3.2.1. attēlā redzamo taisnleņķa trijstūri M_0MN , kura malu garumi ir Δx un $\Delta f(x_0)$ un šaurais leņķis β , iegūstam sakarību, ka $\operatorname{tg} \beta = \frac{MN}{M_0N} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Aplūkojot atvasinājuma definīciju un to, ka $\beta \rightarrow \alpha$, ja $\Delta x \rightarrow 0$, iegūstam vēl vienu sakarību:

$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$. Tā kā taisnes un abscisu ass veidotā leņķa tangensu sauc par taisnes virziena koeficientu k_p , esam ieguvušu atvasinājuma ģeometrisku interpretāciju – funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar pieskares punktā $(x_0, f(x_0))$ virziena koeficientu: $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k_p$. [5, 72. lpp.]

No tā pieskares vienādojums ir $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, bet normāles vienādojums ir $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$, jo, ja taisnes ir perpendikulāras kādā punktā, to virziena koeficientu reizinājums ir -1 , tātad un $k_n = -\frac{1}{k_p}$. [6, 113. lpp.] Esam apskatījuši gan atvasinājuma ģeometrisku nozīmi, gan jau tā pielietojumu, lai atrastu pieskares un normāles vienādojumus.

1.3.3. Atvasinājuma kārtulas

Lai veiksmīgi darbotos ar atvasinājumiem un aprēķinātu to rezultātus, nepieciešams izmantot arī vairākas atvasināšanas kārtulas [5, 77. lpp.] jeb likumus [7, 54. lpp.]

1. $C' = 0$, $C \in \mathbb{R}$, jeb konstantas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli.

Ja $f(x) = C$, tad arī $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$, tātad

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0. \text{ [5, 77. lpp.]}$$

Nākamajās piecās īpašībās ir jāizpildās nosacījumam, ka $f(x)$ un $g(x)$ ir atvasināmas funkcijas.

2. $f(x) \equiv g(x) \Rightarrow f'(x) \equiv g'(x)$ jeb, ja divas funkcijas ir identiskas, tad arī to atvasinājumi ir identiski.

To pierāda ar atvasinājuma definīciju: ja abas funkcijas ir identiskas, tad arī $f(x + \Delta x) \equiv g(x + \Delta x)$ un $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \equiv g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta g(x)$. Tā kā

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}, \text{ tad } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}. \text{ Tātad } f'(x) \equiv g'(x). \text{ [5, 78. lpp.]}$$

3. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.

Apzīmēsim funkciju summu ar jaunu funkciju $y(x) = f(x) + g(x)$ un apskatīsim izveidotās funkcijas pieaugumu: $(f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x) = \Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x))$. Tātad $(f(x) + g(x))' = y'(x) =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) + \Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} =$$

$= f'(x) + g'(x)$, kas bija jāpierāda. Analogiski var pierādīt starpības atvasināšanas kārtulu.
[6, 114.-115. lpp.]

4. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Ja $y = f(x) \cdot g(x)$, tad $\Delta y = (f(x) + \Delta f(x))(g(x) + \Delta g(x)) - f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot \Delta g(x) + \Delta f(x) \cdot g(x) + \Delta f(x) \cdot \Delta g(x)$. Tātad $(f(x) \cdot g(x))' = y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) \cdot \Delta f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} f(x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x) \cdot 0 = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

kas bija jāpierāda. [6, 115. lpp.]

No konstantas funkcijas un reizinājuma atvasināšanas kārtulām izriet, ka $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$. [5, 79. lpp.]

5. $\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, kur $g(x) \neq 0$.

Apskatītajā literatūrā ir vairāki veidi, kā pierādīt dalījuma atvasināšanas kārtulu: gan ar definīciju, gan izmantojot jau apskatīto reizinājuma atvasinājumu. Miškis piedāvā apskatīt

pierādījumu, izmantojot definīciju: ja $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, tad $\Delta y = \frac{f(x) + \Delta f(x)}{g(x) + \Delta g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$
 $= \frac{\Delta f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \Delta g(x)}{g(x)(g(x) + \Delta g(x))}$. Uzrakstot saucējā $\Delta g(x)$ kā $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x$, iegūstam, ka

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}}{g(x) \left(g(x) + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \Delta x \right)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)(g(x) + g'(x) \cdot 0)} =$$

$$= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$
, kas bija jāpierāda. [6, 116. lpp.]

Buli vispirms atrod funkcijas $\frac{1}{g(x)}$ atvasinājumu un tad izmanto reizināšanas

atvasinājuma kārtulu:
$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x+\Delta x) \cdot g(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+\Delta x)} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)}$$

$\cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} = -g'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$. No iegūtā seko, ka $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' =$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{-g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$
 kas bija

jāpierāda. [5, 55.-56. lpp.]

Savukārt Šteiners izmanto jau iegūto reizinājuma atvasināšanas kārtulu, izsakot $f(x)$ no funkcijas $y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Tātad $f(x) = y(x) \cdot g(x)$. Ja funkcijas ir identiskas, tad arī to atvasinājumi ir identiski (pēc 2. kārtulas), tātad $f'(x) = (y(x) \cdot g(x))' = y'(x) \cdot g(x) + y(x) \cdot g'(x)$.

Izsakām no tā nepieciešamās funkcijas atvasinājumu: $y'(x) = \frac{f'(x) - y(x) \cdot g'(x)}{g(x)}$. Tā kā

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ tad } y'(x) = \frac{f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)},$$
 kas bija jāpierāda. [5,

79. lpp.]

6. Ja funkcija g ir atvasināma punktā x un funkcija f ir atvasināma punktā $g(x)$, tad salikta funkcija $y = f(g(x))$ ir atvasināma punktā x un $y'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ [7, 81. lpp.] jeb saliktas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar ārējās funkcijas atvasinājuma un iekšējās funkcijas atvasinājuma reizinājumu [5, 81. lpp.].

Funkcijas $y = f(g(x))$ iekšējā funkcija ir $g(x)$. Izmainot argumentu par pieaugumu Δx , iegūstam funkcijas pieaugumu $\Delta g(x) = g(x+\Delta x) - g(x)$. Iegūtais $\Delta g(x)$ ir argumenta pieaugums ārējai funkcijai, ka $\Delta y(g) = \Delta f(g) = f(g+\Delta g) - f(g)$. Veidojam attiecību,

pieņemot, ka $\Delta g \neq 0$: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Tā kā funkcijai $g(x)$ eksistē atvasinājums, tad tā punktā

x ir nepārtraukta, tātad, ja $\Delta x \rightarrow 0$, tad $\Delta g \rightarrow 0$. Iegūstam, ka

$$y'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'_g \cdot g'_x, \text{ kas bija jāpierāda. [5, 81. lpp.]}$$

Saliktu funkciju atvasināšanas algoritmu sauc pa ķēdes likumu: ja funkciju veido vairākas atvasināmas funkcijas $y_1=f_1(x), y_2=f_2(y_1), \dots, y_n=f_n(y_{n-1})$, tad $f'_n(x) = f'_n(y_{n-1}) \cdot f'_{n-1}(y_{n-2}) \cdot \dots \cdot f'_1(x)$. [8, 198. lpp.]

7. Ja funkcijas $y=f(x)$ un $x=\varphi(y)$ ir inversas un tās ir atvasināmas atbilstoši punktos x_0

$$\text{un } y_0, \text{ un } f'(x_0) \neq 0, \text{ tad } \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} \text{ jeb } x'_y = \frac{1}{y'_x}. \text{ [6, 117. lpp.]}$$

$$\text{Pierādījumā no identitātes } \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \text{ iegūstam, ka } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}. \text{ Tātad } x'_y = \frac{1}{y'_x}, \text{ kas bija jāpierāda. [5, 87. lpp.]}$$

1.3.4. Elementāru funkciju atvasināšana

Apskatīsim elementāru funkciju atvasināšanas formulas un dažas no tām pierādīsim, lai parādītu, kā dažādos veidos var darboties ar atvasinājumiem un robežām. Pēc logaritmiskās funkcijas atvasināšanas spēsim apskatīt vēl vienu paņēmieni, kā atvasināt sarežģītākas funkcijas – logaritmisko atvasināšanu.

$$1. (\sin x)' = \cos x$$

Apskatītajā literatūrā ir atrodami divi veidi, kā pierādīt šo formulu. Pirmajā no tiem izmanto trigonometrijas formulu $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ un pirmo ievērojamo

$$\text{robežu } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Ja } f(x) = \sin x, \text{ tad } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x, \text{ kas bija jāpierāda [8,$$

186. lpp.]. Būli arī izmanto pirmo ievērojamo robežu, bet citu trigonometrisko formulu:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. & \text{Tātad} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \\ & & & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \cos x \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\sin x \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right) = \\ & & & = -\sin x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -\sin x \cdot 0 + \cos x = \cos x, \text{ kas bija jāpierāda [7, 57.} \end{aligned}$$

lpp.]. Abi formulas pierādījumi ir vienlīdz saprotami un vienkārši.

$$2. \cos(x)' = -\sin x$$

Kosinusa atvasinājumu var pierādīt vairākos veidos. Zorihs un Buli to pierāda Analogiski $\sin x$ atvasinājumam, izmantojot katrs savu trigonometrisko formulu un 1. ievērojamo robežu. [8, 186. lpp.], [7, 57. lpp.] Šteiners izvēlas lietot saliktas funkcijas atvasināšanu un redukcijas formulas, no kurām $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ un $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Tātad $\cos x' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1) = -\sin x$, kas bija jāpierāda. [5, 86. lpp.]

$$3. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Tangensa atvasinājumu ir viegli pierādīt, izmantojot dalījuma atvasināšanu un jau apskatītos atvasinājumus: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, kas bija jāpierāda. Analogiski iegūst arī kotangensa atvasinājumu. [8, 196. lpp.]

$$4. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$5. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Tā kā funkcijas $y = \arcsin x$ inversā funkcija ir $x = \sin y$, tad pierādījumā arī tiek izmantota inversas funkcijas atvasināšanas kārtula, no kuras iegūstam, ka

$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, kas bija jāpierāda. Analogiski atrod arī funkcijas $\arccos x$ atvasinājumu. [7, 140. lpp.]

$$6. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Pierādījumā ērti izmantot inverso funkciju atvasināšanu, kad funkcijai $y = \arctg x$

inversā funkcija ir $x = \operatorname{tg} y$. Tātad $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\operatorname{tg}' y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$, kas bija

jāpierāda. Analogiski pierāda arī arkkotangensa atvasināšanas formulu. [8, 201. lpp.]

$$8. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$9. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Pierādījumā jāizmanto logaritma īpašība $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$, substitūcija un otrā

ievērojamā robeža $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Pārveidojumos izmantosim arī nepārtrauktas funkcijas

īpašību par robežpāreju aiz funkcijas zīme. Tātad $(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{Substitūcija:} \\ \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{t}, \Delta x = \frac{x}{t} \\ \text{ja } \Delta x \rightarrow 0, \text{ tad } t \rightarrow \infty \end{array} \right] = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{x}} = \ln \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}, \quad \text{kas bija}$$

jāpierāda. [5, 81.-82. lpp.]

Apskatījām naturālā logaritma funkcijas atvasināšanu, no kuras izriet arī paņēmiens, kā ērti atvasināt vairāku funkciju reizinājumu, dalījumu vai arī pakāpes gadījumā, kad bāze un kāpinātājs ir funkcija. Šo paņēmienu sauc par logaritmisko atvasināšanu – pirms atvasināšanas funkciju logaritmē un atrod funkcijas logaritma atvasinājumus. Piemēram, pie funkcijas $y = f(x)$, abas tā puses logaritmē: $\ln y = \ln f(x)$. Pēc tam šo identitāti atvasina pēc x ,

lietojot saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulu: $(\ln y)'_x = (\ln f(x))'_x \Rightarrow \frac{1}{y} y'_x = (\ln f(x))'_x \Rightarrow y'_x = y (\ln f(x))'_x$. Tā kā $y = f(x)$, varam atrast funkcijas atvasinājumu $y'_x = f(x) (\ln f(x))'_x$.

$$10. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Logaritmiskās funkcijas, kuras bāze ir skaitlis $a > 0, (a \neq 1)$, atvasinājumu atrod, izmantojot logaritma bāzes maiņas formulu, ka $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \ln x$, kur $\frac{1}{\ln a}$ ir konstante.

Tādējādi $(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a} \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$, kas bija jāpierāda. [5, 82. lpp.]

$$11. (a^x)' = a^x \ln a$$

Eksponentfunkcijas atvasinājumu var pierādīt vairākos veidos. Miškis piedāvā izmantot eksponentfunkcijas inverso funkciju – logaritmisko funkciju. Ja $y = a^x$ un tai inversā funkcija

ir $x = \log_a y$, tad $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$ [6, 120. lpp.]. Šteiners pierādījumā izmanto

logaritmisko atvasināšanu: $\ln y = \ln a^x = x \ln a$. Atvasinot iegūst $(\ln y)'_x = (x \ln a)'_x \Rightarrow \frac{1}{y} y'_x = \ln a$, no kā $y'_x = y \cdot \ln a = a^x \ln a$, kas bija jāpierāda. [5, 84. lpp.] Būli apskata vēl trešo variantu, kurā jau ir jāizmanto, ka $(e^x)' = e^x$ un sakarība $a^x = e^{x \ln a}$. Tātad $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a$. [7, 137. lpp.] Visi pierādījumi ir īsi un viegli saprotami.

$$12. (e^x)' = e^x$$

Naturālās eksponentfunkcijas atvasinājuma formula izriet no eksponentfunkcijas atvasinājuma, jo $\ln e = 1$.

$$13. (x^n)' = n x^{n-1}, \text{ kur } n \in \mathbb{R}$$

Pakāpes funkcijas atvasinājumu var pierādīt līdzīgi eksponentfunkcijas atvasinājumam: gan ar logaritmisko atvasināšanu, gan, izmantojot sakarību, ka $x^n = e^{n \ln x}$. Tas ir, ja $y = x^n$, tad

$\ln y = \ln x^n = n \ln x$, ko atvasinām: $(\ln y)'_x = (n \ln x)'_x \Rightarrow \frac{1}{y} y'_x = n \frac{1}{x} \Rightarrow y'_x = y \cdot n \cdot \frac{1}{x}$, tātad $y'_x = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = n x^{n-1}$ [5, 84. lpp.]. Vai arī $(x^n)' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = n x^{n-1}$ [7, 138. lpp.].

1.4. Atvasinājuma pielietojums

Iepriekšējās nodaļās esam apskatījuši, kā no funkcijas jēdziena var nonākt līdz atvasinājumam. Aplūkosim arī atvasinājuma lietojumu dažādās jomās.

Piemēram, 1.3.2. nodaļā par atvasinājuma ģeometrisku nozīmi apskatījām, ka ar atvasinājuma palīdzību var iegūt līknes pieskares un normāles vienādojumus. Izmantojot

pieskares vienādojumu, var iegūt arī formulu, kā tuvināti aprēķināt funkciju vērtības. Tā kā $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, tad $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. [5, 111. lpp.] Tālāk aplūkosim arī citus gadījumus, kuros tiek izmantots atvasinājums.

1.4.1. Funkciju pētīšana

Ar atvasinājuma palīdzību var pētīt funkciju īpašības, kuras apskatījām jau 1.1. nodaļā. Vienu no tām mēs jau apskatījām 1.3.1. nodaļā par nepārtrauktību: ja funkcijai $f(x)$ punktā x_0 eksistē atvasinājums, tad funkcija ir nepārtraukta punktā x_0 . Tālāk apskatīsim arī citas funkciju īpašības, kuru pētīšanā izmanto atvasinājumu. Funkciju pētīšana ir noderīga, jo procesus apraksta funkcijas un ir izdevīgi atrast, piemēram, ekstremālās vērtības.

- Monotonitāte

Ja funkcija $y = f(x)$ ir nepārtraukta un atvasināma kādā intervālā, tad starp funkcijas atvasinājumu un funkciju yšajā intervālā izpildās sakarības:

- $f'(x) > 0 \Rightarrow y$ ir augoša $\Rightarrow f'(x) \geq 0$,
- $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow y$ ir nedilstoša,
- $f'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow y \equiv C, C \in \mathbb{R}$,
- $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow y$ ir neaugoša,
- $f'(x) < 0 \Rightarrow y$ ir dilstoša $\Rightarrow f'(x) \leq 0$. [8, 236. lpp.]

Lai pierādītu šīs sakarības, jāizmanto Lagranža teorēma (vidējās vērtības teorēma): ja funkcija $f(x)$ intervālā $[a; b]$ ir nepārtraukta un atvasināma vismaz intervāla iekšējos punktos,

tad intervālā $(a; b)$ eksistē vismaz viens tāds punkts c , ka $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Ja izvēlamies

divus patvaļīgus punktus $x_1, x_2 \in (a; b)$, ka $x_2 > x_1$, tad no Lagranža teorēmas iegūstam, ka

$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Tā kā visiem $x \in (a; b)$ ir spēkā $f'(x) > 0$, tad arī $f'(c) > 0$. No tā, ka

$x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0$, izriet, ka $f(x_2) > f(x_1)$, tātad funkcija ir augoša. Analogiski var apskatīt, kā no atvasinājuma zīmes var noteikt monotonitāti. [7, 68. lpp.]

Lai pierādītu, ka no funkcijas monotonitātes var noteikt atvasinājuma zīmi, apskatīsim gadījumu, kad funkcija ir augoša, x ir brīvi izraudzīts intervāla punkts un Δx ir argumenta

pieaugums. Ja $\Delta x > 0$, tad $f(x + \Delta x) > f(x)$ un $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) > 0$. Tātad $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$. Ja

$\Delta x < 0$, tad $f(x + \Delta x) < f(x)$ un $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) < 0$. Tātad $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$ neatkarīgi no

argumenta pieauguma zīmes. No tā izriet, ka $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$, kas bija jāpierāda.

Analoģiski var apskatīt, ka dilstošai funkcijai $f'(x) \leq 0$. [5, 120. lpp.]

1.4.1.1. Ekstrēmi

Apskatīsim nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu, kas nodrošina, ka punkts x_0 ir funkcijas $y = f(x)$ ekstrēma punkts.

- Nepieciešamais nosacījums: ja punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ ekstrēma punkts, tad $f'(x_0) = 0$ vai $f'(x_0)$ neeksistē.

Šādus punktus sauc par kritiskajiem punktiem [4, 195. lpp.]. Var būt, ka kritiskais punkts nav ekstrēma punkts. Šis nosacījums pamatojas uz Fermā teorēmu: ja funkcija $y = f(x)$ ir atvasināma kādā intervālā un tā savu ekstremālo vērtību sasniedz intervāla iekšējā punktā c , tad $f'(c) = 0$. [7, 65. lpp.]

- Pietiekamais nosacījums: kritiskais punkts x_0 ir funkcijas $f(x)$ ekstrēma punkts kādā intervālā, ja, argumentam ejot caur šo punktu, atvasinājums maina zīmi. Turklāt, ja tas maina zīmi no “+” uz “-”, tad punkts x_0 ir maksimuma punkts, ja no “-” uz “+”, tad x_0 – minimuma punkts. [4, 195. lpp.]

Teorēmas pierādījums: ja $\forall x \in (a; x_0)$ ir spēkā $f'(x) > 0$, tad funkcija f ir augoša intervālā $(a; x_0)$. Ja $\forall x \in (x_0; b)$: $f'(x) < 0$, tad funkcija f ir dilstoša intervālā $(x_0; b)$. Tad $\forall x \in (a; b)$, kuram $x \neq x_0$, izpildās, ka $f(x) < f(x_0)$. Tātad $f(x_0)$ ir funkcijas maksimums, bet x_0 – maksimuma punkts. Analoģiski var aplūkot otru apgalvojumu. [7, 72. lpp.]

Izmantojot nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu, lai atrastu ekstrēmus slēgtā intervālā, var rīkoties divos veidos:

- 1) atrod funkcijas atvasinājumu $f'(x)$;
- 2) atrisina vienādojumu $f'(x) = 0$ un atrod kritiskos punktus;
- 3) aprēķina funkcijas vērtību kritiskajos punktos, kuri ietilpst intervālā;
- 4) aprēķina funkcijas vērtību intervāla galapunktos;
- 5) no aprēķinātajām vērtībām atrod funkcijas maksimumu un minimumu. [4, 196. lpp.]

VAI

- 3) atliek kritisko punktus uz koordinātu ass un nosaka atvasinājuma zīmes intervālos starp kritiskajiem punktiem;

4) aprēķina funkcijas vērtības un iegūst ekstrēmus. [7, 68. lpp.]

1.4.1.2. Ieliektība un izliektība

Ja funkcijai $f(x)$ intervālā $(a; b)$ eksistē 2. kārtas atvasinājums un $\forall x \in (a; b)$ ir spēkā $f''(x) < 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir izliekts, bet, ja $f''(x) > 0$, tad grafiks ir ieliekts. [5, 126. lpp.]

Punkti, kuros funkcijas otrās kārtas atvasinājums ir vienāds ar 0 vai neeksistē, ir potenciālie pārlietuma punkti. Līdzīgi kā pie ekstrēma punktu atrašanās, visus iespējamus pārlietuma punktus ir jāatliek uz koordinātu ass un jānosaka zīmju maiņa. Ja, ejot cauri kādam no šiem punktiem, otrais atvasinājums maina zīmi, tad tas ir pārlietuma punkts. [7, 71. lpp.]

Ar otrās kārtas atvasinājuma palīdzību arī var atrast ekstrēma punktus, ja punkts x_0 ir kritiskais punkts (tātad $f'(x_0) = 0$). Ja $f''(x_0) > 0$, tad punkts x_0 ir minimuma punkts; ja $f''(x_0) < 0$, tad x_0 – maksimuma punkts. Ja $f''(x_0) = 0$, tad ar šo metodi nevar atrast ekstrēmu un jāizmanto nepieciešamais vai pietiekamais nosacījums. Volodko šo teorēmu nosauc par ekstrēma eksistences otro pietiekamo nosacījumu. [4, 195.-196. lpp.]

1.4.2. Atvasinājuma fizikālā jēga

Vairākus fizikālus procesus apraksta attiecība, kas tiek izmantota atvasinājuma definīcijā – funkcijas izmaiņas vidējo ātrumu intervālā $[x_0; x_0 + \Delta x]$, tas ir, $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Šī iemesla dēļ atvasinājumu var izmantot vairāku fizikālu procesu aprakstīšanai. Aplūkosim dažus no tiem.

1. Kustības punkta momentānais ātrums $v = x'(t)$ jeb $v = \frac{dx}{dt}$, ja funkcija $x = x(t)$

apraksta materiāla punkta kustības koordinātas atkarību no laika.

Šī punkta stāvokļa izmaiņa laika intervālā $[t; t + \Delta t]$ ir punkta pārvietojums

$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Tātad kustības vidējais ātrums laika intervālā Δt ir $v_{\text{vid}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Par

momentāno ātrumu v sauc laika momentā t vidējā ātruma robežu, kad $\Delta t \rightarrow 0$. Fizikā bieži lieto jau 1.3.1. nodaļā minēto pierakstu $v = \dot{x}(t)$. [5, 69.-70. lpp.]

2. Kustības paātrinājums $a = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$ jeb $a = \frac{dv}{dt}$, ja funkcija $v = v(t)$

apraksta kustības ātruma atkarību no laika.

Ātruma izmaiņa laika intervālā $[t; t + \Delta t]$ ir $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$. Tā kā ar $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ definē vidējo

paātrinājumu šajā intervālā, tad $v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ ir kustības paātrinājums laika momentā t , kuru apzīmē ar a . [5, 95. lpp.]

3. Strāvas stiprums $I = q'(t)$ jeb $I = \frac{dq}{dt}$, ja funkcija $q = q(t)$ apraksta lādiņnesēju daudzumu, kas laika momentā t ir izplūst caur vadītāja šķērs griezumam.

Analoģiski iepriekš apskatītajam koordinātas vienādojumam var apskatīt, kā veidojas lādiņa atvasinājums. Tātad $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ ir lādiņš, kas izplūdis caur vadītāja šķērs griezumam laika intervālā $[t; t + \Delta t]$. Ar attiecību $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ definē vidējo strāvas stiprumu I_{vid} , bet ar šīs attiecības robežu, kad $\Delta t \rightarrow 0$, raksturo momentāno strāvas stiprumu. [5, 70.-71. lpp.]

No aplūkotajiem piemēriem var secināt: ja funkcija, kuras arguments ir laiks, apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir šī procesa norises ātrums. [5, 71. lpp.]

1.4.3. Atvasinājuma nozīme ekonomikā

Mūsdienās ekonomiski lēmumi arvien vairāk balstās uz matemātiskiem apsvērumiem. Aplūkosim dažus piemērus, kā atvasinājumu izmanto un ko tas nozīmē ekonomikas jomā. Tālākajos piemēros arguments x apzīmēs vienības, kas ir saražotas un tas pieņems tikai nenegatīvas vērtības konteksta dēļ, jo nav vajadzības runāt par negatīva skaita pārdotām vienībām. [9]

Izmaksu funkciju (*cost function*) apzīmē ar $C(x)$. Tā apraksta to, kādas būs izmaksas atkarībā no saražoto vienību skaita. Izmaksu funkcijas atvasinājuma jēga ir robežizmaksu (jeb galējo izmaksu) funkcija (*marginal cost*) $C'(x)$, kas apraksta, par cik palielinās kopējās izmaksas, ražojot vienu papildu jeb galējo produkcijas vienību. Izmaksu funkcija parasti ir trešās pakāpes funkcija, kas nozīmē, ka robežizmaksu funkcijas $C'(x)$ grafiks būs parabola, no kā var noteikt funkcijas minimumu. [9]

Līdzīgi var aplūkot ienākumu funkciju (*revenue function*) $R(x)$, kas apraksta ienākumus atkarībā no pārdoto vienību skaita. Analoģiski arī ienākuma funkcijas atvasinājums $R'(x)$ apraksta, par cik palielināsies ieņēmumi, pārdodot vienu vienību vairāk – robežieņēmumi. Atrodot ekstrēma punktus, varam iegūt vienību skaitu, pie kura sasniegsim vislielāko peļņu jeb funkcijas $R(x)$ maksimumu. Līdzīgi var aplūkot arī peļņas funkciju (*profit function*) $P(x) = R(x) - C(x)$. [9]

1.4.4. Robežu aprēķināšana

Lai novērstu nenoteiktības, iepriekš apskatījām vairākas metodes. Jāspēj saprast, kura no tām katrā piemērā būs īstenojama, bet dažas robežas ērtāk ir aprēķināt, izmantojot atvasinājumu. To apraksta Lopitāla kārtula, ar kuru var novērst nenoteiktības $\left(\frac{0}{0}\right)$ un $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

- ja $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \lim_{x \rightarrow u} g(x) = 0$ un $\lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistē kā galīgs skaitlis vai $\pm\infty$, tad

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ kur } u \text{ var būt } -\infty, +\infty, a, a^-, a^+ (a \in \mathbb{R}). [7, 80. \text{ lpp.}]$$

- ja $\lim_{x \rightarrow u} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow u} |g(x)| = +\infty$ un $\lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ eksistē kā galīgs skaitlis vai $\pm\infty$, tad

$$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ kur } u \text{ var būt } -\infty, +\infty, a, a^-, a^+ (a \in \mathbb{R}). [7, 82. \text{ lpp.}]$$

Ja teorēmu nosacījumus apmierina gan funkcijas $f(x)$ un $g(x)$, gan arī to atvasinājumi $f'(x)$ un $g'(x)$, tad Lopitāla kārtulu var lietot atkārtoti, tas ir,

$\lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f''(x)}{g''(x)}$, kur u var būt $-\infty, +\infty, a, a^-, a^+ (a \in \mathbb{R})$. Algoritmu var turpināt tik ilgi, kamēr funkcijas apmierina Lopitāla kārtulas nosacījumus. [5, 102.-103. lpp.]

Ar Lopitāla kārtulu var novērst arī citas nenoteiktības, kā $(0 \cdot \infty)$ un $(\infty - \infty)$. Ja $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = 0$ un $\lim_{x \rightarrow u} g(x) = \infty$, reizinājumā $f(x) \cdot g(x)$ vienu no funkcijām pārveidojam, lai

varētu lietot Lopitāla kārtulu: $\lim_{x \rightarrow u} (f(x) \cdot g(x)) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f'(x)}{\left(\frac{1}{g(x)}\right)'} \text{ vai arī}$

$\lim_{x \rightarrow u} (f(x) \cdot g(x)) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{g'(x)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)'}$. Ja $\lim_{x \rightarrow u} f(x) = \infty$ un $\lim_{x \rightarrow u} g(x) = \infty$, lai

atbrīvotos no nenoteiktības $(\infty - \infty)$, vispārīgā gadījumā rīkojas šādi:

$$\lim_{x \rightarrow u} (f(x) - g(x)) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow u} \left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} \right) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow u} \frac{\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right)'}{\left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \right)'}$$

Jāpiemin, ka ne vienmēr šo divu nenoteiktību novēršanai izdevīgi ir lietot Lopitāla kārtulu, jo var izveidoties sarežģītas izteiksmes. Tādā gadījumā ērtāk ir izmantot jau iepriekš apskatītās metodes. [5, 104. lpp.]

2. METODIKA

Izstrādātie stundu plāni tika veidoti kā atbalsts skolotājam, kurš mācīs matemātiku augstākajā līmenī atbilstoši jaunajam standartam. Izglītības reforma koncentrējas ne tikai uz satura izmaiņām, bet arī mācību procesu kopumā, liekot uzsvāru uz mācīšanas metodēm, dažādu uzdevumu veidiem un stundu struktūru. Darba otrā nodaļa veltīta minēto metodikas elementu aplūkošanai, un kā tie realizējas izstrādātajos stundu plānos.

Stundu plānu izveidē tika izmantotas vairākas mācību grāmatas. Pētnieciskie uzdevumi tika veidoti, izmantojot mācību grāmatu *Mathematics: Analysis and approaches, standard level* [10] un *Mathematics for the international student* [11]. Lai skolēniem būtu iespēja praktizēties, dažādi piemēri tika atlasīti galvenokārt no mācību grāmatas *Matemātiskās analīzes elementi* [12] un uzdevumu krājuma *Diferencēti uzdevumi matemātikā* [13].

2.1. Stundu struktūra

Galvenais pilnveidotā mācību satura un pieejas mērķis ir attīstīt skolēnos lietpratību - “spēja kompleksi lietot zināšanas, prasmes un paust attieksmes, risinot problēmas mainīgās reālās dzīves situācijās” [14]. To mācību procesā var sasniegt ar mācīšanos iedziļinoties, tāpēc tiek izvirzīti četri galvenie uzsvāri: skaidrs sasniedzamais rezultāts, jēgpilni uzdevumi un atbalsts, skolēnu apzināta mācīšanās un atgriezeniskā saite. Kā jēgpilni uzdevumi uzskatāmi tādi, kuros skolēniem ir iespēja radīt jaunas zināšanas, kā arī izmantoti dažādi konteksti un situācijas. No tā arī izriet, ka skolēni darbojas vairāk paši, nekā notiek frontāls darbs klasē. Skolotāja loma ir mācību procesa vadīšana, nevis gatavu zināšanu nodošana un to atprasīšana. [15]

Uz tādiem principiem ir arī izstrādāti stundu plāni. Daļai stundu ir līdzīga stundas struktūra, kas palīdz īstenot pilnveidoto mācību saturu un pieeju. Piemēram, stunda tiek sadalīta daļās, kā aktualizācija, apjēgšana, lietošana un atgriezeniskā saite. Aktualizācijas daļā skolēni atkārti iepriekš apgūtās zināšanas, kas būs nepieciešamas šajā stundā, vai sāk ar pētniecisko uzdevumu, kas ievada stundas tematā. Katrai stundai ir definēti skolēnam sasniedzamie rezultāti, kurus parasti dara zināmus skolēniem aktualizācijas laikā. Izstrādātajos stundu plānos nav atsevišķi izcelts, ka skolēniem rāda konkrētos sasniedzamos rezultātus, bet gan tos pārfrāzē, piemēram 5.1. temata stundā (skatīt 2.1.1. attēlu).

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Skaidro funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju.
Atrod funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājumu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Uzdevums uz tāfeles: no grafika noteikt augšanas un dilšanas intervālu, noteikt pieskares virziena koeficientu punktā un uzzīmēt to pieskari (**1. uzdevums**)

Skolotāja: *Šodien mēs apskatīsim, kā šīs divas lietas ir saistītas: pieskares virziena koeficients jeb funkcijas atvasinājums un funkcijas monotonitāte.*

2.1.1. att. 5.1. temata stundas fragments (4. pielikums 109. lpp.)

Visi stundu plāni nav veidoti pēc vienas struktūras. Lai sasniegtu dažādus sasniedzamos rezultātus, ir nepieciešamas dažādas pieejas un stundas uzbūve. Piemēram, visos plānos nav atsevišķi izdalīta stundas daļa, kurā skolēni iegūst atgriezenisko saiti par savu sasniegto, jo tā var būt visas stundas laikā dažādos stundas brīžos, piemēram, uzdevumu pildīšanas laikā vai pēc 1. uzdevuma. Stundas daļā apjēgšana skolēni iegūst jaunas zināšanas, bet lietošanā tās praktizē. Abās stundas daļās var tikt izmantoti dažāda veida uzdevumi, kā arī sarunas ar skolēniem, tā nonākot līdz secinājumiem. Galvenais uzdevumu veids, ar kuru var realizēt skolēnu pašu darbošanos un secinājumu veikšanu ir pētnieciskie uzdevumi, par ko būs nākamajā apakšnodaļā.

2.2. Pētnieciskie uzdevumi

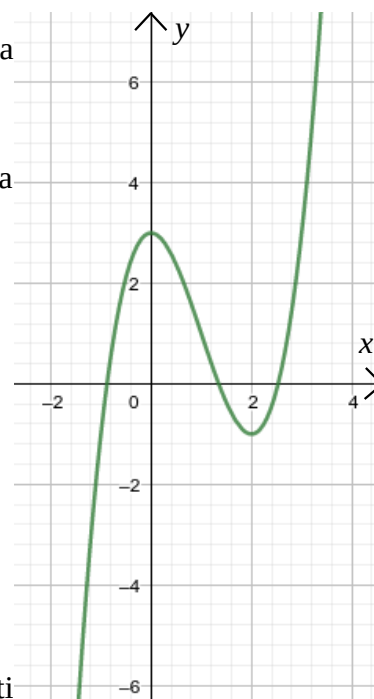
Kā norādīts *Noteikumos par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās izglītības programmu paraugiem*, viens no augstākā apguves līmeņa sasniedzamajiem rezultātiem ir saskatīt starpdisciplināras likumsakarības [3, 8.3. punkts]. Pie caurviju prasmēm norādītas kritiskās domāšanas un problēmrisināšanas prasmes [3, 5.2.1. punkts]. Izstrādātajos stundu plānos galvenais uzsvars tiek likts uz pētnieciskajiem uzdevumiem, kurus pildot, skolēni saskata sakarības gan matemātikas jomas ietvaros, gan arī starpdisciplināras sakarības, piemēram, starp matemātiku un fiziku. Pildot šādus uzdevumus, skolēni attīsta kritiskās domāšanas un problēmrisināšanas prasmes. Pētnieciskie uzdevumi atbilst iepriekš minētajam kritērijam jēgpilnai mācīšanas pieejai – skolēni paši rada jaunas zināšanas, saskatot sakarības un veicot secinājumus.

Izstrādātajos materiālos pētnieciskie uzdevumi ir veidoti, galvenokārt izmantojot Starptautiskā bakalaurāta programmai paredzētu mācību grāmatu *Mathematics: Analysis and approaches, standard level*. [10] Starptautiskā bakalaurāta daži galvenie matemātikas apgūšanas mērķi ir problēmrisināšanas prasmes un sakarību saskatīšana [16, 28.-31. lpp.]. Pētniecības tipa uzdevumi ir veidoti, apskatot kādu matemātisku vai reālās dzīves situāciju, par kuru tiek doti uzdevumi un jautājumi, lai nonāktu līdz konkrētam rezultātam. Izpildot šādu uzdevumu, ir sagaidāmi divi rezultāti: skolēni saskata likumsakarības starp vismaz divām iepriekš atsevišķi apgūtām lietām vai iegūst jaunu aprēķinu algoritmu. Piemēram 5.2. temata stundā skolēni, pildot 2. uzdevumu (skatīt 2.2.1. attēlu), soli pa solim tuvojas stundas sasniedzamajam rezultātam: *Atklāj, kā ar funkcijas atvasinājumu var noteikt funkcijas ekstrēmus*. Skolēni saskata sakarību starp funkcijas atvasinājumu un ekstrēma punktiem. No dotā praktiskā piemēra tiek veikti vispārīgi secinājumi. Lai arī konkrētajā gadījumā netika apskatīts teorētisks pierādījums, skolēniem darba gaitā rodas priekšstats par to, no kā veidojas nepieciešamais un pietiekamais nosacījums par atvasinājuma saistību ar funkcijas ekstrēma punktiem.

2. uzdevums

Dota funkcija $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

1. Nosaki funkcijas lokālā maksimuma un minimuma koordinātas!
2. Uzzīmē funkcijas atvasinājuma $f'(x)$ grafiku.
3. Kāds ir funkcijas atvasinājums minimuma un maksimuma punktos?
4. Kāda ir atvasinājuma zīme no maksimuma punkta pa kreisi?
pa labi?
5. Kāda ir atvasinājuma zīme no minimuma punkta pa kreisi?
pa labi?



Dota funkcija $f(x) = |x|$.

6. Nosaki funkcijas minimumu!
7. Kāds ir atvasinājums šajā punktā?
8. Kāda ir atvasinājuma zīme no minimuma punkta pa kreisi?
pa labi?

Secini:

9. Kāds ir atvasinājums ekstrēma punktos? Vai ir iespējami citi gadījumi?
10. Kā atvasinājums palīdz noteikt ekstrēma punktus?

2.2.1. att. 5.2. temata stundas fragments (4. pielikums 113. lpp.)

1. uzdevums

1. daļa. Izpildi norādītās darbības, lai varētu veikt atvasināšanu. Aizpildi tukšās vietas ar “summu, reizinājumu, dalījumu”!

a) Atver iekavas, izkāpinot tās. $y = (3x - 1)^2 =$
 Atvasini kā _____. $y' =$

b) Izmanto logaritma īpašību. $y = \log_2 x^{14} =$
 Atvasini kā _____. $y' =$

c) Izmanto logaritma īpašību. $\log_2 \frac{x}{4} =$
 Atvasini kā _____. $y' =$

d) Izmanto trigonometrijas formulu. $y = \sin 2x =$
 Atvasini kā _____. $y' =$

e) Izmanto pakāpju īpašību. $y = 2^{x+3} =$
 Atvasini kā _____. $y' =$

2. daļa. **Saliktas funkcijas atvasinājums.** Aizpildi tabulu pēc soļiem!

		$y = (3x - 1)^2$	$y = \log_2 x^{14}$	$\log_2 \frac{x}{4}$	$y = \sin 2x$	$y = 2^{x+3}$
1.	Uzraksti funkcijas kā saliktas funkcijas $y = f(g(x))$ daļas $g(x)$ un $f(x)$.	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$
2.	Pieņemsim, ka $u = g(x)$. Atrodi $\frac{du}{dx}$.					
3.	Ja $u = g(x)$, tad $y = f(g(x)) = f(u)$. Uzraksti $y = f(u)$. Atrodi $\frac{dy}{du}$.					
4.	Izmantojot 2. un 3. punktu, aprēķini $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.					

Salīdzini 1. daļā un 2. daļā iegūtos rezultātus!

Kā var atrast saliktas funkcijas $y = f(g(x))$ atvasinājumu?

Skolēni, izpildot pētniecisko uzdevumu (skatīt 2.2.2. attēlu) 4.6. temata stundā, iegūst saliktas funkcijas atvasināšanas algoritmu. Teorētiskais pierādījums stundā netiek apskatīts, tomēr skolēni uzdevuma ietvaros ir pārlicinājušies par ķēdes likumu, ieraudzījuši tā pielietošanas ērtumu, kā arī pa solim praktizējuši piecu saliktu funkciju atvasināšanu.

Lai pētnieciskie uzdevumi būtu interesanti un jēgpilni skolēniem, daļa pētniecisko uzdevumu ir veidoti ar reālās dzīves kontekstu. Piemēram, 1.1. temata stundā (2. pielikums 66. lpp.) skolēni virknes terminu sāk apgūt ar datiem, kā mašīna bremzē atkarībā no laika, ja sākuma ātrums ir 90 km/h. Kā arī 4.1. temata stundā (3. pielikums 87. lpp.) skolēniem dots uzdevums ar datiem par Useina Bolta 100 metru skrējienam. Tā izpildes laikā skolēnam sagaidāmais secinājums ir, ka no dotajiem datiem iespējams aprēķināt Bolta vidējo ātrumu, bet ne momentāno. Pēc tam skolēni kopā ar skolotāju nonāk pie robežas un atvasinājuma definīcijas. Ar uzdevuma palīdzību skolēni nonāk gan līdz atvasinājuma definīcijai, gan tā fizikālajai jēgai. Reālās dzīves konteksts atrodams ne tikai pētnieciskajos uzdevumos, bet arī teksta uzdevumos, īpaši 6. tematā (5. pielikums 131. lpp.), jo tas veltīts atvasinājuma pielietojumam ģeometrijā, fizikā un ekonomikā.

2.3. Pašvadītā mācīšanās

Izglītības standartā kā viena no caurviju prasmēm tiek minēta pašvadītā mācīšanās. Tās ietvaros skolēns pats spēj apzināti vadīt savu mācību procesu, izvirzīt sev sasniedzamos rezultātus un izvērtēt savu veikumu. Pilnveidotās mācību pieejas viens no uzdevumiem ir iemācīt skolēnam domāt par savu mācīšanos, gan iesaistot viņus mācību procesā un lēmumu pieņemšanā, gan rosinot izvērtēt savu sniegumu un pašu mācību procesu. [3, 5.2.3. punkts], [15] Šajā apakšnodaļā būs izklāstīts, kā izstrādātajos stundu plānos ir ietverti minētie uzsvāri mācību procesā.

Lai veicinātu skolēnu atbildību par savu darbu un arī dotu iespēju mācīties katram savu spēju līmenī, stundās tiek piedāvāti uzdevumi, kuriem ir pieejami skolotāja sagatavoti atrisinājumi un atbildes. Stundu plānos nav izstrādāti paši uzdevumu risinājumi, bet skolotājam ir iespējams sagatavot atsevišķi risinājumus un atsevišķi tikai atbildes (piemēram, uz tāfeles). Tad skolēniem ir iespēja salīdzināt iegūto rezultātu ar atbildi un, ja nepieciešams, paša spēkiem meklēt kļūdu vai aplūkot skolotāja sagatavoto risinājumu. Izmantojot jau sagatavotus risinājumus, skolotājs var ieviest dažādus noteikumus, piemēram, pie risinājuma lapas skolēni iet bez pierakstiem, tā veicinot skolēnu iedziļināšanos atrisinājumā. Patstāvīgi risinot uzdevumus un salīdzinot rezultātus, skolēni paši vada savu mācību procesu. Skolotājs šādā procesā ir tikai konsultants, kā arī skolēni var skaidrot uzdevumu risinājumus viens

otram vai kopīgi nonākt pie rezultāta. Aprakstītais mācību process tiek izmantots, piemēram, 6.4. temata stundā (5. pielikums 99. lpp.), gatavojoties pārbaudes darbam. Nākamais solis, lai veicinātu skolēnu pašvadīto mācīšanos, ir ievietot uzdevumu risinājumus arī e-klasē, kur tie ir pieejami skolēniem arī pēc stundām. Ja kāds skolēns nav paspējis visu atrisināt stundā, tad viņam ir iespēja turpināt mācību procesu mājās, ja to uzskata par nepieciešamu.

Stundu plānā 4.7. tematā (3. pielikums 103. lpp.), gatavojoties pārbaudes darbam, tiek piedāvāti uzdevumi, kuri sadalīti trīs līmeņos. Skolēniem ir iespēja izvirzīt sev mērķi, kuru līmeni vēlas sasniegt. Attiecīgi viņi izvēlas, kurus uzdevumus risināt. Skolēniem jāspēj uzstādīt sev mērķis, lai izvēlētos uzdevumus. Mērķis var būt nostiprināt jau esošās zināšanas un prasmes vai pretēji – pildīt tos uzdevumus, kuri klasē iepriekš nav aplūkoti. Iespējams pildīt uzdevumus no dažādiem līmeņiem, ja tas atbilst skolēna izvirzītajam mērķim. Līmeņu izvēle var būt arī tikai vienā vai dažos uzdevumos, nevis visa darba ietvaros. Kā piemēram, 5.7. temata stundā skolēni (4. pielikums 125. lpp.) atkārtoti tematā apgūto, pildot divus uzdevumus, no kuriem otrajā jāizvēlas vienu no divām funkcijām, kuru izpētīt un konstruēt tās grafiku.

Jebkādam patstāvīgajam skolēnu darbam ieteicams sagatavot visu uzdevumu atrisinājumus. Skolēniem ir iespēja ne tikai pašvadīti mācīties, bet arī novērtēt savas pašreizējās prasmes un zināšanas pirms pārbaudes darba. Lai to papildus veicinātu, dažos stundu plānos ir ieteikums skolēniem ar citu krāsu atzīmēt tos uzdevumus vai piemērus, kurus vēl nepieciešams apskatīties, atkārtot, saprast vai nu mājās, vai konsultācijā. Tādā veidā skolēni novērtē savu veikumu, sniedz par to atgriezenisko saiti paši sev, kā arī izvirza nākamās mērķus.

Lai skolēnus rosinātu domāt par savu mācīšanos no sasniedzamo rezultātu puses, viens no uzdevumiem 5.7. temata stundā (4. pielikums 125. lpp.) ir atzīmēt, uz kuru sasniedzamo rezultātu katrs piemērs attiecas. Ir doti visi tematā sasniedzamie rezultāti. Skolēni ne tikai tos izlasa vai dzird, bet apzinās, ko katrs no tiem nozīmē, atrodot uzdevumus, kas ved uz konkrētu sasniedzamo rezultātu.

Minētie piemēri par pašvadīto mācīšanos rosināšanu izstrādātajos plānos ir atkārtojuma stundās. Tomēr līdzīgi elementi ir iestrādāti arī citās stundās, piemēram, 1.5. temata (2. pielikums 75. lpp.) un 4.5. temata (3. pielikums 97. lpp.) stundās ir 10 – 20 minūšu paškontroles darbi. Tie var būt dažādās formās – uz lapas atrisināmi uzdevumi vai elektronisks tests, ar kuru skolēnam arī ir iespēja konstatēt savu prasmju un zināšanu līmeni.

Pašvadītā mācīšanās ir cieši saistīta gan ar skolēna pašvērtējumu, gan ar skolotāja sniegtu atgriezenisko saiti. Ar tās palīdzību skolotājs var izvērtēt, kāds atbalsts skolēnam

nepieciešams, kā arī regulāri komunicēt par viņa sniegumu, lai to uzlabotu. Tāpēc nākamā apakšnodaļa veltīta skolotāju un citu skolēnu sniegtai atgriezeniskajai saitei.

2.4. Atgriezeniskā saite

Atgriezeniskā saite ir daļa no ikdienas formatīvās vērtēšanas, kas ir viena no trīs norādītajiem vērtēšanas veidiem izglītības standartā [3, 17. punkts]. Atgriezenisko saiti var sniegt gan skolotājs, gan citi skolēni. Latviešu valodā atgriezeniskās saites sniegšanas prasme ir viens no sasniedzamajiem rezultātiem [3, 2. pielikums]. Šo prasmi var attīstīt arī citās stundās, tā sniedzot citiem skolēniem noderīgu atgriezenisko saiti. Atgriezeniskajā saitē var iekļaut atbildes uz trīs jautājumiem:

- Kas man izdodas – ko jau labi protu?
- Kas pagaidām vēl neizdodas, kāpēc?
- Ko un kā darīt turpmāk? [17]

Stundu plānos ir iestrādāti brīži, kad gan skolotājs, gan skolēni viens otram sniedz atgriezenisko saiti. Tās forma arī var atšķirties – komentāri mācību procesa laikā, pārbaudes darbā, patstāvīgajos darbos vai arī izmantojot kādu platformu vai lietotni, piemēram, *Padlet* vai *Homestudy*. Piemēram, 5.3. temata stundas beigās skolēniem ir dots īss uzdevums (skatīt 2.4.1. attēlu), lai pārliecinātos par stundā apgūto. Uzdevuma atbildes ir jānodod skolotājam. Lai skolēniem viņu darbs paliktu pierakstos un vienmēr pieejams, skolēni varētu izpildīt savu darbu un tā fotogrāfiju nosūtīt skolotājam, piemēram, lietotnē *Whatsapp*. Šāda darbība skolēnam prasa ļoti mazu piepūli. Skolotājs var sniegt katram atgriezenisko saiti gan rakstiski, gan balss ziņas veidā, skolēni pēc tās saņemšanas var uzlabot savu darbu pierakstos. Atšķirībā no uzdevumu izpildes uz lapām vai burtnīcās, paveiktais darbs ir vienkopus ar visiem pierakstiem, atgriezenisko saiti ir viegli saņemt tajā pašā dienā, kā arī skolotājam ir mazāk papīra lapiņu vai burtnīcu, kuras jāpārvieta un jāuzglabā.

**Lietošana un
AS**

Uzdevums individuāli uz lapiņām (vai arī skolēni var pildīt kladē un pēc izpildes nosūtīt skolotājam *Whatsapp* čātā vai citā veidā – skolotājs var dot AS par izpildi.).

1. Vai funkcija $y=x^2$ ir izliekta vai ieliekta?
2. Nosaki pārlietuma punktus funkcijai $y=\frac{2}{3}x^3-2x^2$!

2.4.1. att. 5.3. temata stundas fragments (4. pielikums 114. lpp.)

Atgriezenisko saiti var sniegt par apgūto saturu attiecībā pret stundā izvirzītajiem sasniedzamajiem rezultātiem vai arī citām prasmēm. Piemēram, 6.1. - 6.3. temata stundās (5.

pielikums 131. lpp.) skolēnu pāriem jāvada stundas par atvasinājuma pielietojumu dažādās jomās. Katras stundas beigās skolēni dod atgriezenisko saiti stundas vadītājiem, izmantojot 3P metodi: Pasklavē! Pajautā! Piedāvā! Skolotāja var norādīt, uz ko koncentrēties, sniedzot atgriezenisko saiti – stundas vadīšana, matemātiskās zināšanas, skaidrošana. Šajās stundās noderīgi būtu sniegt stundas vadītājiem novērtējumu par stundas vadīšanu un skaidrošanas prasmēm, jo tās netiek uzsvērtas tik bieži kā matemātiskās zināšanas un prasmes. Skolēni un arī skolotāja stundas laikā vai stundas beigās uz, piemēram, līmlapiņām uzraksta iepriekš minētās trīs lietas pēc 3P metodes un atdod stundu vadītājiem. Tā skolēni ne tikai pasaka, kas bija labi un izdevās (Pasklavē!), vai norāda uz nepilnībām, uzdodot jautājumu (Pajautā!), bet arī dot ieteikumus nākamajai reizei (Piedāvā!). Metodes izpilde var aizņemt dažas minūtes, bet stundas vadītāji saņem plašu atgriezenisko saiti. Ja iespējams, vairāki skolēni var skaļi izteikt uzslavas, jautājumus un ieteikumus. Īpaši noderīgi ir veidot sarunu, kā varētu uzlabot darbu, tāpēc jautājumu uzdošanai varētu būt prioritāte, jo jautājumu uzdevējs un atbildētājs joprojām ir vienuviet.

Pie atgriezeniskās saites sniegšanas iespējām jau tiek pieminēta IT lietošana. Nākamajā apakšnodaļā tiek izklāstīts, kā izstrādātajos stundu plānos paredzēts izmantot IT iespējas gan uzdevumu risināšanā, gan rezultātu pārbaudīšanā, gan mācīšanās procesā.

2.5. Informācijas tehnoloģijas

Digitālā prasme ir viena no uzskaitītajām caurviju prasmēm izglītības standartā [3, 5.2.6. punkts]. To var veiksmīgi attīstīt un pielietot matemātikā. Mācoties par atvasinājumu, skolēni var izmantot jau zināmus informācijas tehnoloģijas rīkus, kā arī iemācīties izmantot jaunus. Izstrādātajos stundu plānos ir daži piemēri, kā gan skolēni, gan skolotājs var izmantot IT mācību procesā.

Viens no mērķiem, kam var izmantot IT, ir rezultātu pārbaudīšana. Ne vienmēr skolēni var iegūt risināšanas gaitu, tomēr vienmēr ir iespējams salīdzināt savu iegūto rezultātu. Dažkārt tie var būt attēloti citā pierakstā, nekā ir skolēnam. Tādā gadījumā skolēns izmanto identiskus pārveidojumus, lai pārliecinātos par rezultātu sakritību. Tā var gadīties, pārbaudot funkcijas atvasinājumu. Piemēram, 4.7. temata (3. pielikums 102. lpp.) stundas sākumā skolēniem ir jāatrisina klases biedra izveidota salikta funkcija. Ja rezultāti nesakrīt un nav atrodama kļūda paša spēkiem, skolotāja var ieteikt izmantot *atvasināšanas kalkulatoru (derivative calculator)*, kuru sameklē interneta pārlūkā. Skolotāja pāris soļos var visai klasei parādīt, kā ar tādu jādarbojas. Ja skolēni iepriekš par tādu nezināja, turpmāk viņiem būs iespēja pārbaudīt savus rezultātus, kā arī iespējamo risinājumu. Kā standartā ir norādīts,

skolēniem jāanalizē IT ieguvumi un riski. Pie šī sasniedzamā rezultāta var piekārtot to, ka skolēni kritiski izvērtē kalkulatora piedāvāto risinājumu, jo tie ne vienmēr ir izdevīgākie, ir zināmas efektīvākas metodes, kā atvasināt.

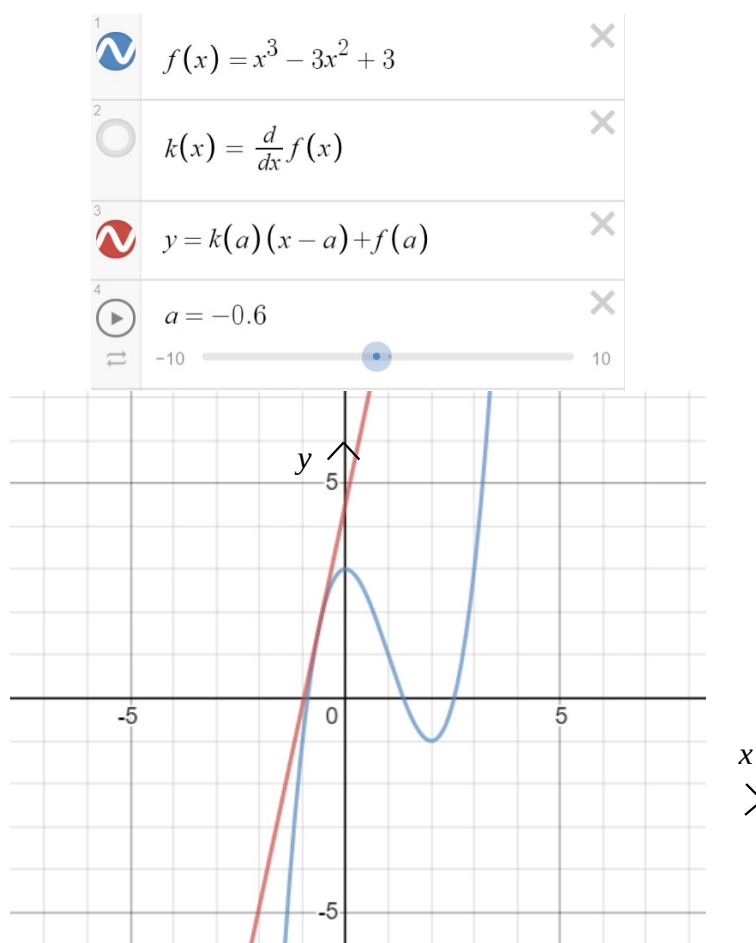
1. Izveido Excel'ī tabulu un grafikus, attēlojot virknes pirmos 20 locekļus! Pārlicinies, vai virkne ir augoša, dilstoša, oscilējoša vai konstanta! Tabulā veido vienkāršotu virknes pierakstu un ieskicē virknes veidoto grafiku!				
Nr. p. k.	Vispārīgā locekļa formula	Grafika skice	Virknes locekļi	Augoša/ dilstoša/ oscilējoša/ konstanta/ ierobežota no augšas/ ierobežota no apakšas
a)	$x_n = \frac{3n-2}{2n+1}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
b)	$b_n = 3^n$		$(b_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
c)	$x_n = \frac{n+1}{n^2}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
d)	$a_n = \frac{1}{3^{2n}}$		$(a_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
e)	$x_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
f)	$f_n = 1^n$		$(f_n) = (\quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	

2.5.1. att. 1.2. temata stundas fragments (2. pielikums 69. lpp.)

IT var izmantot arī jaunu zināšanu ieguvei, ne tikai rezultātu pārbaudīšanai. Viens no tādiem piemēriem ir aprakstīts 1.2. temata stundā. Stundā tiek izmantoti datori, tāpēc tā var notikt datorklasē vai klases telpā, kurā ir pieejami portatīvie datori. Skolēniem jāizmanto datorprogramma *Excel*. Visticamāk skolēniem jau ir prasmes darboties ar šo programmu. Ir pieejama arī instrukcija, kā ar programmu darboties, lai izpildītu stundas uzdevumus. 2.5.1. attēlā redzams uzdevums, kurā skolēni programmā *Excel* attēlo virknes locekļus un izveido grafiku. No tā nepieciešams veikt secinājumus par virknes monotonitāti un ierobežotību. Augošas, dilstošas, maiņzīmju, konstantas un ierobežotas virknes definīcijas iepriekš nav aplūkotas, bet sagaidāms, ka skolēni tās intuitīvi saprot no iepriekšējās pieredzes par funkciju

īpašībām, terminu nosaukumiem un doto virknes locekļu grafikiem. Definīcijas ir dotas arī darba lapā, bet tajās ir jāaizpilda tukšās vietas. Izstrādātā stunda ir labs piemērs, kā skolēni apgūst dažādas definīcijas un terminus, paši darbojoties ar IT un balstoties uz saskatītām sakarībām no iepriekš apgūtā, terminu nosaukumiem un vizuālo attēlojumu.

Dažādus IT rīkus skolotājs var izmantot demonstrējumiem, lai ar to palīdzību tiktu iegūtas jaunas zināšanas vai rasta izpratne par kādu matemātisku sakarību. 5.1. temata stundā (4. pielikums 111. lpp.) skolēni ar pētnieciskā uzdevuma palīdzību iegūst sakarību starp funkcijas atvasinājuma zīmi un monotonitāti. Pēc tam skolotāja demonstrē, piemēram, interneta vietnē desmos.com, kāda ir sakarība starp pieskares virzienu un monotonitāti. Tā kā pieskares virzienu nosaka virziena koeficients, kas ir vienāds ar funkcijas atvasinājuma vērtību punktā, skolēniem rodas vizuāls pamatojums iegūtajām sakarībām. Interneta vietnē izveidotā sistēma demonstrējumam redzama 2.5.2. attēlā. Ar funkciju $k(x)$ apzīmēta atvasinājuma funkcija. Pēc tam tiek aprēķināta atvasinājuma vērtība funkcijas punktā a un tā tiek izmantota kā pieskares virziena koeficients. Skolēniem jau ir zināmas minētās sakarības. Mainot punktu $x=a$, kurā tiek zīmēta pieskare, var attēlot, kā mainoties funkcijas monotonitātei, mainās pieskares virziens jeb atvasinājuma vērtība.



2.5.2. att. Funkcijas pieskare punktā, izmantojot atvasinājumu

Iepriekšējās apakšnodaļās tiek apskatīti dažādi metodikas elementi, kuri nepieciešami pilnveidotās pieejas realizēšanai, kā arī tie tiek uzsvērti Ministru kabineta noteikumos par izglītības standartu. Nākamajā apakšnodaļā tiks aplūkoti dažādi uzdevumu veidi, kas palīdz apgūt atvasinājumu un arī īstenot mācīšanos iedziļinoties.

2.6. Uzdevumu veidi

Augstākās matemātikas neatņemama daļa ir pierādījumu veikšana. Skolēnos šo prasmi var attīstīt, frontāli kopā ar klasi pierādot kādu sakarību, balstoties uz skolēnu idejām un palīdzot virzīties uz īsto ceļu, vai arī skolēniem pašiem uzdot pierādīt sakarību. Pierādījumos bieži vien tiek izmantotas dažādas sakarības, kuras var būt no dažādām matemātikas nozarēm un skolā apgūtas pirms vairākiem mēnešiem vai gadiem. Lai dotu iespēju katram skolēnam uzrakstīt sarežģītu pierādījumu, izstrādātajos stundu plānos ir izveidoti soļi, kuriem skolēns var sekot un pierādīt sakarību. Tādi soļi (skatīt 2.6.1. attēlu) ir izveidoti 4.3. temata stundā, lai pierādītu naturāllogaritma un pakāpes funkcijas atvasinājuma formulas. Doto pierādījumu var uzdot gan individuāli, gan pāros.

Funkcijas $y = \ln x$ atvasinājums.

Dota funkcija $y = \ln x$.

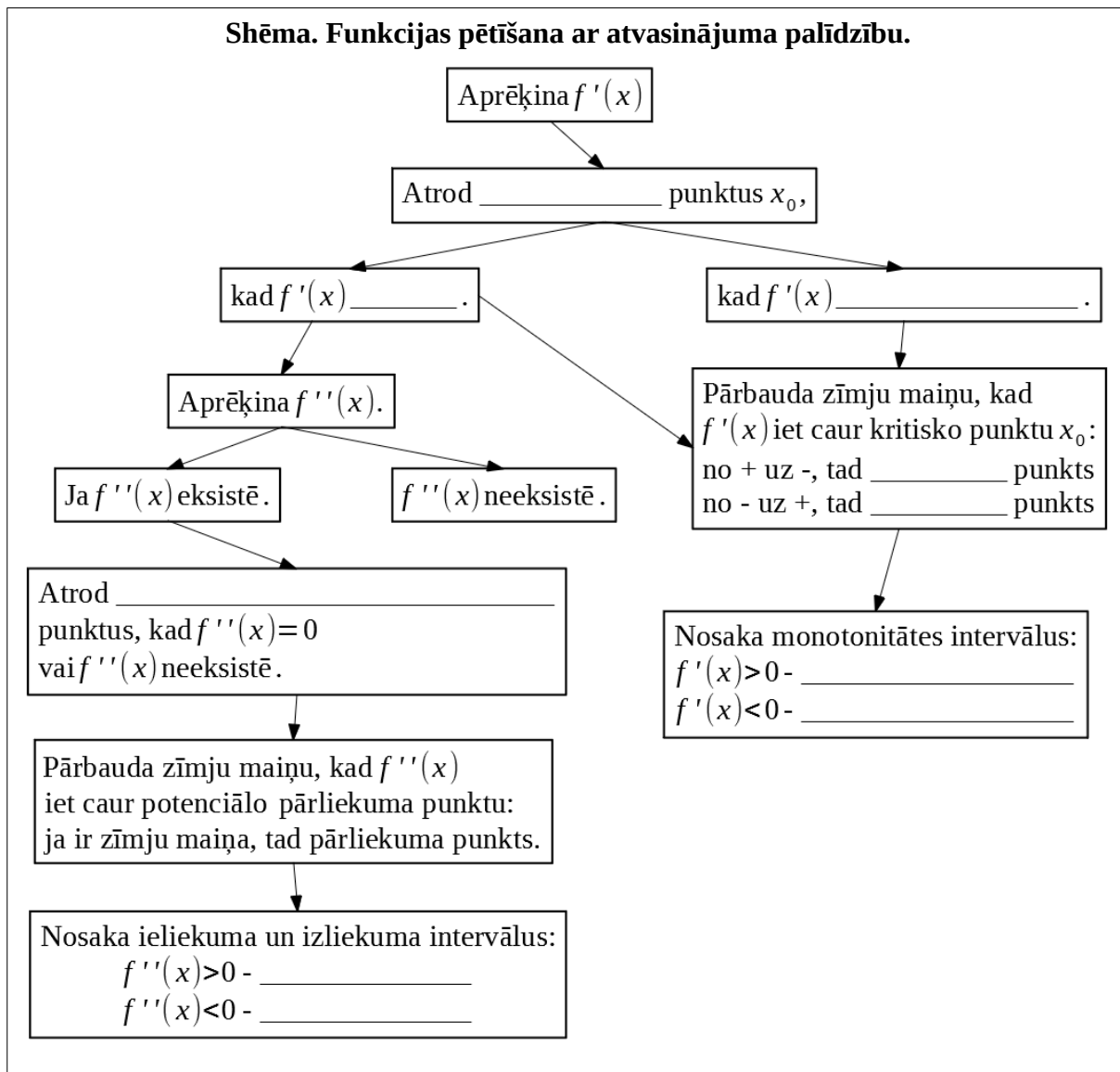
Uzdevums: Atrast un pierādīt $(\ln x)'$.

- | | |
|---|--|
| 1. Uzraksti atvasinājuma definīciju ar $\ln x$! | $(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ |
| 2. Izmanto logaritma starpības īpašību skaitītājā! | = |
| 3. Uzraksti visu daļu kā 2 daļu reizinājumu
(piemēram, $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2$)! | = |
| 4. Izmanto logaritma īpašību $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$! | = |
| 5. Sadali naturāllogaritma izteiksmi
divos saskaitāmajos (piemēram, $\frac{4+3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$)! | = |
| 6. \ln zīmi var iznest pirms robežas zīmes. | = |
| 7. Izmanto 2. ievērojamo robežu! | = |
| 8. Aprēķini naturāllogaritma vērtību! | = |

2.6.1. att. 4.3. temata stundas fragments (3. pielikums 91. lpp.)

Skolēnam ļoti svarīgi ir saskatīt kopsakarības un saistību ar citām nozarēm. Papildu jau apskatītajiem piemēriem iepriekšējās apakšnodaļās, kopējās sistēmas un sakarību saskatīšanai

un nostiprināšanai var izmantot shēmas un kopsavilkumus. Piemēram, 5.4. temata stundas beigās skolēni visu iegūto informāciju par funkcijas pētīšanu ar atvasinājuma palīdzību apkopo jau sagatavotā shēmā, kura redzama 2.6.2. attēlā. Pēc tukšo vietu aizpildīšanas katram skolēnam būs pieejams kopsavilkums par visu apgūto saistībā ar atvasinājumu un funkcijas pētīšanu.



2.6.2. att. 5.4. temata stundas fragments (4. pielikums 118. lpp.)

Turpinot funkciju pētīšanu nākamajās stundās, 5.6. tematā (4. pielikums 122. lpp.) par funkcijas grafika konstruēšanu, skolēni kopā ar skolotāju izveido plānu, kā to darīt. Kopsavilkums jeb plāna soļi par funkcijas grafika konstruēšanu tiek veidots pēc tam, kad viss nepieciešams jau ir apgūts, aptverot gan jauniegūtās zināšanas saistībā ar atvasinājumu, gan jau pamatskolā iegūtās zināšanas par definīcijas apgabala noteikšanu, paritāti un krustpunktus ar x asi. Pēc 5. tēmas apgūšanas sagaidāms, ka skolēni spēj konstruēt funkciju grafikus un

viņiem nepieciešams vien ieskatīties izveidotajos plāna soļos un shēmā par atvasinājumu zīmi punktā un tā saistību ar grafiku.

Lai attīstītu skolēnu skaidrošanas un patstāvīgās mācīšanās prasmes, 6. tēmas (5. pielikums 131. lpp.) ietvaros skolēniem ir iespēja vadīt stundas par atvasinājuma pielietojumu ģeometrijā, fizikā un ekonomikā. Stundas ieteicams vadīt skolēnu pārim. Lai sniegtu atbalstu stundu gatavošanā, ir atlasīti materiāli (5. pielikums 133.-147. lpp.), no kuriem skolēni var apgūt tematu, kā arī atlasīt uzdevumus stundai. Skolēni var meklēt materiālus un uzdevumus paši. Šādiem darbiem ļoti svarīgi ir darīt zināmus kritērijus, kas ir jāiekļauj stundā un kā tā jāvada. Pēc izstrādātajiem kritērijiem (5. pielikums 132. lpp.) iespējams arī izlikt atzīmi par skolēnu vadītajām stundām.

Lai dažādotu stundu uzbūvi, stundu plānos ir iestrādāti daži spēļu elementi, lai atkārtotu zināšanas. Piemēram, 4.5. temata (3. pielikums 95. lpp.) stundas sākumā, lai atkārtotu atvasinājuma formulas, skolēniem dotas lapiņas ar dažādām funkcijām un to iespējamām atvasinājuma formulām. Uzdevums ir salikt kopā funkcijas ar to atbilstošajām atvasinājuma formulām, paļaujoties tikai uz savu atmiņu. Ir dotas arī liekas atbildes. Uz 5.2. temata stundu (4. pielikums 112. lpp.) ir paredzēts mājas darbs – katrs skolēns uz lapiņas uzraksta saliktu funkciju un pierakstos to atvasina. Stundas sākumā skolēni ar lapiņām savā starpā samainās, atvasina uzrakstītās funkcijas un pārbauda, vai rezultāti sakrīt. Ja nepieciešams – skolēni meklē kļūdu risinājumos un lieto IT. Dotais piemērs ir veids, kā mācību procesā iesaistīt skolēnus un veidot produktīvu sarunu starp viņiem par matemātiku.

2.7. Stundu plānu aprobācija

Iepriekš tiek aplūkotas dažādas metodes, kā īstenot pilnveidoto mācību saturu un pieeju. Daļa izstrādāto stundu plānu un materiālu tika aprobēti Rīgas Valsts 1. un 2. ģimnāzijā. Pēc aprobācijas tika veikti secinājumi, kā uzlabot stundu plānus un vai izmantotās metodes palīdz nonākt līdz sasniedzamajiem rezultātiem.

1. temata (2. pielikums 64.-75. lpp.) pirmos piecus izstrādātos stundu plānus veiksmīgi izdevās aprobēt Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā. Pēc to realizācijas 11. klases skolēni rakstīja temata “Virknēs robeža” pārbaudes darbu (2. pielikums 80. lpp.), vienīgi 2. uzdevumā ir papildus pievienots pēdējais jautājums par virknēs robežas simbolisko pierakstu. Galvenais secinājums no 1. temata aprobācijas ir par atšķirību starp izglītības standarta un ģimnāzijas prasībām jeb sasniedzamajiem rezultātiem, tāpēc arī nākamās realizētās stundas pēc 1.5. temata Rīgas Valsts 1. ģimnāzijā atšķiras no izstrādātajiem plāniem. Detalizētāk par izstrādāto stundu plānu sasniedzamajiem rezultātiem tiek aplūkots nākamajā nodaļā.

Viens no secinājumiem, kas ietekmēja nākamo stundu izstrādi, ir tāds, ka mācību stundā pirms pārbaudes darba ieteicams atkārtot arī temata sākumā apskatītos terminus un teoriju. Tematā par virknes robežu tie būtu dažādu virkņu veidi un uzdevumi par tiem, ne tikai koncentrēties uz uzdevumiem par skaitļa N aprēķināšanu un monotonitātes vai ierobežotības aprēķināšanu, kas arī tiek iekļauts 1.7. temata stundā (2. pielikums 79. lpp.).

Iespējama izmaiņa, kura nav iekļauta stundu plānā, ir 1.4. tematā (2. pielikums 72. lpp.), kura ir par skaitļa ε -apkārtni, stundu sākt ar virknes robežas definīciju. Tādējādi skolēniem tiek radīts izbrīns un interese par to, kas ir ε un skaitļa apkārtne. Tālāk var virzīties pēc izstrādātā plāna. Šajā stundā skolotājam jāuzsver ne tikai termins *punkta apkārtne* vai *skaitļa apkārtne*, bet arī konkrēta skaitļa apkārtne, piemēram, *skaitļa 1 apkārtne* vai *mūsu virknes robežas 1 apkārtne*.

Šī temata aprobētajos stundu plānos tiek izmantotas dažādas iepriekš aprakstītās metodes – pašpārbaudes darbs (patstāvīgs darbs), pētnieciskais darbs datorklasē ar IT, patstāvīgu secinājumu veikšana pēc darba izpildes, darba lapu pildīšana, pašvadītā mācīšanās ar rezultātu un risinājumu salīdzināšanu. Visas sagatavotās stundas izdevās veiksmīgi īstenot, kā arī skolēni apguva norādītos sasniedzamos rezultātus. Par to var spriest pēc pārbaudes darba rezultātiem.

Rīgas Valsts 1. ģimnāzijas 29 skolēni pēc izstrādāto stundu plānu realizācijas rakstīja pārbaudes darbu. Vissliktāk ir veicies ar 2. uzdevumu, kurā tiek prasītas zināšanas no šī temata pirmajām divām stundām. Uzdevumi, kas atsaucas uz aprēķiniem, kurus praktizēja pēdējās stundās, ir labāk izpildīti. Tas liek secināt, ka skolēni pirms pārbaudes darba nav atkārtējuši pirmajās stundās veikto, kā arī vēlāko stundu laikā vairs netika pildīti līdzīga rakstura uzdevumi vai apskatīti sākumā aplūkotie termini.

Vislabāk ir veicies ar 3. un 4. uzdevumu, kurā jāpierāda monotonitāte un ierobežotība. Pārbaudes darbs ir uzrakstīts ļoti labi, aritmētiskais vidējais ir 81%. Ģimnāzijas klasēm šāds vērtējums ir atbilstošs, tomēr pārbaudes darbs neatlasa spējīgākos skolēnus. Sagaidāms, ka klasēs, kurās nav atlasīti jaunieši ar tik spēcīgam matemātikas zināšanām, pārbaudes darba rezultātu aritmētiskais vidējais būs zemāks un atlasīs arī spējīgākos skolēnus.

Rīgas Valsts 2. ģimnāzijā tika aprobēti tikai 4. temata (3. pielikums 85.-89. lpp.) pirmās divas stundas. Ārkārtas stāvokļa iestāšanās dēļ aprobāciju nebija iespējams turpināt, jo izstrādātie materiāli nav paredzēti attālinātam mācību procesam. Tomēr šo divu stundu laikā tika realizēta metode, kurai ir uzsvars daudzos stundu plānos – pētniecisko uzdevumu pildīšana. No tā tika veikts secinājums, ka skolēniem praktisku un pētniecisku uzdevumu

veikšana aizņem ilgāku laiku, nekā sākotnēji bija paredzēts vai arī temats tiktu apgūts frontāli. Tas tika ņemts vērā pārējo stundu plānu izstrādē.

Abās ģimnāzijās veikto aprobāciju laikā skolēni bija atsaucīgi, pildot dažādu veidu uzdevumus. Izmantotās metodes palīdzēja nonākt līdz sasniedzamajiem rezultātiem. Par to liecina pārbaudes darba rezultāti, kā arī mācību procesā sniegtās skolēnu atbildes un veiktie secinājumi.

3. STUNDU PLĀNU SATURS

Izstrādātie stundu plāni balstās uz Ministru kabineta noteikumiem Nr. 416 “Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem”, kas stājas spēkā 2020. gada 1. septembrī [3]. Tā 6. pielikumā ir uzskaitīti plānotie skolēnam sasniedzamie rezultāti matemātikas mācību jomā, tai skaitā augstākajā apguves līmenī. Tā kā izstrādātie stundu plāni un materiāli ir paredzēti, lai apgūtu augstākajā apguves līmenī tematus par virknēm, robežām un atvasinājumu, trešajā nodaļā ir atlasīti attiecināmie standarta sasniedzamie rezultāti. Kā jau tiek minēts iepriekš, izstrādātajos plānos daži sasniedzamie rezultāti pārsniedz standartā uzstādītos. Nodaļā papildus tiks uzskaitīti kurās stundās ir izvirzīti tādi sasniedzamie rezultāti, kas pārsniedz standarta prasības.

Visos izstrādātajos stundu plānos sagaidāms, ka skolēni sasniedz tālāk minēto rezultātu, kas nav specifisks tikai minētajiem tematiem:

- 1.2.3. Raksturo iespējas koordinātu plaknē attēlotu līniju/plaknes figūru aprakstīt analītiski un otrādi – vienādojumu ar diviem mainīgajiem attēlot koordinātu plaknē; veido spriedumus, vienu un to pašu matemātisko modeli attēlojot koordinātu plaknē un pierakstot analītiski.

Skolēniem regulāri jāattēlo analītiski uzrakstītais matemātiskais modelis arī grafiski, piemēram, attēlojot virknes locekļus koordinātu plaknē 1. tematā un funkciju grafikus 2. – 6. tematā. No izveidotajiem grafikiem skolēni veic secinājumus gan par virknes ierobežotību, gan dažādām sakarībām starp funkcijas atvasinājumu un funkcijas monotonitāti, ekstrēmiem un izliektību. Attēlojot oscilējošu funkciju analītiski un grafiski, skolēni veic spriedumus par oscilējošas funkcijas īpašībām un to, kā turpmāk pierakstīt jebkuru maiņzīmju virkni.

3.1. Temats “Virknes robeža”

Vidējās izglītības standartā 4.1. temata “Virknes” augstākajā apguves līmenī atrodami divi sasniedzamie rezultāti, kas attiecas uz izstrādāto tematu “Virknes robeža”:

- 4.1.2. Nosaka virknes robežu, spriežot, modelējot uz skaitļu ass, izmantojot grafisko attēlu un kritiski izvērtējot tā lietojumu konkrētajā situācijā.
- 4.1.3. Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un formulē pieņēmumu par skaitli e kā

$$\text{virknes } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ robežu, ja } n \rightarrow +\infty.$$

Rezultāts 4.1.2. tiek realizēts visa temata laikā. Sākotnēji skolēni apgūst virknes ierobežotību un gan no grafiskajiem attēliem, gan vairākiem aprēķinātiem virknes locekļiem nosaka

virtnes ierobežotību no augšas un no apakšas. Jau temata trešajā stundā skolēniem ir jāpierāda, ka virtnes ir ierobežotas ar konkrētu vērtību no augšas vai apakšas. Jau šajā brīdī parādās dažādi lielumi, ar kādiem viena un tā pati virtnes var būt ierobežota. Tādējādi skolēni novēro un izvērtē grafiskā paņēmiena lietojumu dažādās situācijās. 1.6. temata stundā skolēni iepazīstas ar virtnes robežas jēdzienu. Tādējādi veidojas pāreja no virtnes ierobežotības uz tās robežu.

Sasniedzamais rezultāts 4.1.3. nav aplūkots pie temata “Virtnes robeža”, bet to paredzēts apgūt 3.4. temata stundā, veicot pētniecisko darbu par otro ievērojamo robežu (6. pielikums 156. lpp.). Toties 1.2. temata stundā (2. pielikums 67. lpp.) tiek īstenots viens no standarta sasniegtajiem rezultātiem par matemātisko valodu:

- 1.1.1. Lasa daļēji pazīstama satura izvērstu matemātisku tekstu, nepazīstamu jēdzienu, simbolu vai apzīmējumu nozīmi noskaidro papildu avotos vai par to secina, izmantojot izpratni par teksta saturu kopumā, raksturo teksta mērķi un kritiski izvērtē satura atbilstību tam.

Stundas laikā skolēniem ir jāpapildina gan jau pazīstamas, gan nepazīstamas definīcijas vārdiski un simboliski pēc intuitīvās izpratnes un praktiskiem piemēriem. Pēc tam ar šiem jēdzieniem jāapraksta iepriekš apskatītie piemēri.

Papildu standarta sasniegtajiem rezultātiem 1. temata izstrādātajos stundu plānos uzstādīti šādi rezultāti:

- Pierāda, ka funkcijas ir augošas, dilstošas, ierobežotas no augšas un apakšas.
- Nosaka skaitli N jeb virtnes kārtas numuru, ar kuru visi locekļi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ atradīsies punkta A ϵ -apkārtnē.

Pierādot virtnes monotonitāti un ierobežotību, skolēni nepaļaujas tikai uz grafiskiem attēlojumiem. Izvēloties, ar kādu lielumu virtnes varētu būt ierobežota, skolēni arī pierāda, vai izvēlētais lielums ir atbilstošs. Kā arī skolēni temata ietvarā nonāk līdz precīzai virtnes robežas definīcijai. Lai arī skolēni nepierāda virtnes robežu pēc definīcijas, sagaidāms, ka viņiem būs izpratne par punkta A jeb robežas ϵ -apkārtni un kā tā tiek izmantota robežas definīcijā.

Tā kā virtnes ir funkcija, tikai tās arguments pieder naturālo skaitļu kopai, tad nākamais solis pēc virtnes robežas aplūkošanas ir pāriet uz vispārīgāku gadījumu – funkcijas robeža. Tāpēc tematiskajā plānā nākamie apgūstamie temati ir par funkcijas robežu un dažādiem robežu rēķiniem.

3.2. Temati “Funkcijas robeža” un “Robežu rēķini”

Lai gan 2. un 3. tematam “Funkcijas robeža” un “Robežu rēķini” netika izstrādāti stundu plāni un materiāli, tematiskajā plānā (1. pielikums 60. lpp.) temati ir sadalīti stundās un tām attiecīgi sarakstīti sasniedzamie rezultāti. Šie divi temati visvairāk atšķiras no vidējās izglītības standarta. Kopā tiem ir atvēlētas 13 stundas, un tiek īstenoti visi trīs standarta sasniedzamie rezultāti, kas attiecas uz tematiem:

- 3.1.1. Skaidro skaitli e , izmantojot virknes robežu; definē un lieto naturāllogaritm.
- 4.1.3. Veic aprēķinus, lietojot izklājlapas, un formulē pieņēmumu par skaitli e kā virknes $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ robežu, ja $n \rightarrow +\infty$.
- 4.3.1. Nosaka funkcijas robežu, spriežot, izmantojot funkcijas grafika īpašības; skaidro un vizuāli interpretē funkcijas nepārtrauktību.

Standartā nav norādīti rezultāti, kas attiektos uz robežu aprēķināšanu un nenoteiktību novēršanu, kam galvenokārt veltīti abi temati. Standartā nav ietverta arī 1. ievērojamā robeža, tā nav paredzēta arī darba autora izstrādātajā tematiskajā plānā. Standarta rezultāts 4.1.3. sakrīt ar 3.4. temata stundas sasniedzamo rezultātu: veic secinājumus par 2. ievērojamo robežu no pētnieciskā darba. Lai gan pētnieciskajā darbā (6. pielikums 156. lpp.) ir paredzēts detalizētāk aplūkot dažādu izteiksmju pārveidošanu, lai iegūtu 2. ievērojamo robežu, tas ietver arī funkcijas robežas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ noteikšanu no praktiskiem aprēķiniem. Tā kā virkne ir funkcija, tikai arguments pieņem naturālas vērtības, tad 4.1.3. sasniedzamais rezultāts tiek realizēts. No tā tiek sasniegts arī rezultāts 3.1.1., tikai skaitlis e tiek skaidrots vispārīgāk – izmantojot funkcijas robežu.

2. temata stundās, īpaši temata sākumā, skolēni funkcijas robežas nosaka no grafiskā attēlojuma, kā arī veic secinājumus par robežām $\frac{1}{0}$ un $\frac{1}{\infty}$. 2.3. temata stundā skolēniem jāveic secinājumi par funkcijas nepārtrauktības saistību ar vienas pusējām robežām, izmantojot gan robežu aprēķinus, gan grafisko attēlojumu. Tādējādi tiek īstenots standarta 4.3.1. rezultāts.

Abu tematu ietvaros paredzēts apgūt vairākus sasniedzamos rezultātus, kas pārsniedz standarta prasības. Viens no tiem jau ir 2. ievērojamās robežas aplūkošana kā funkcijas

$y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ robeža, kā arī tās izmantošana robežu aprēķinos. Vidējās izglītības standartā nav

neviena rezultāta, kurā tiek norādīta prasme aprēķināt robežas vērtību. Darba autora izstrādātajā tematiskajā plānā paredzēts apgūt dažādus sasniedzamos rezultātus, kas attiecas uz robežu rēķināšanu vai to izmantošanu:

- Rēķina vienusējās robežas.
- Veic secinājumus par nepārtrauktas funkcijas saistību ar vienusējām robežām.
- Rēķina vienusējās robežas.
- Zīmē funkcijas grafika fragmentus no vienusējām robežām.
- Nosaka horizontālo un vertikālo asimptoti.
- Nosaka, vai funkcija konverģē vai diverģē.
- Novērš nenoteiktības $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; \infty - \infty$.
- Izmanto 2. ievērojamo robežu aprēķinos.

Robežu rēķināšana ir prasme, kas noder arī nākamajos tematos. Ar robežas palīdzību ir iespējams precīzi definēt atvasinājumu, iegūt un pierādīt dažādu funkciju atvasinājuma formulas. Tas arī ir galvenais iemesls, kāpēc izstrādātajā tematiskajā plānā tiek iekļauti robežu rēķini – skolēniem ir iespēja iegūt matemātiskus pierādījumus par atvasinājuma formulām, kā arī attīstīt pierādīšanas prasmi.

3.3. Temats “Atvasinājums”

Tematā, kurā skolēni iepazīstas ar atvasinājuma definīciju, ģeometrisko un fizikālo interpretāciju un atvasinājuma aprēķināšanu, skolēniem paredzēts sasniegt vairākus rezultātus, kas ir definēti vidējās izglītības standartā:

- 1.2.5. Skaidro atvasinājumu un integrāli, izmantojot gan to fizikālo, gan ģeometrisko nozīmi.
- 4.3.2. Interpretē atvasinājumu kā veiktā ceļa izmaiņas ātrumu; skaidro funkcijas atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju; nosaka vienkāršu funkciju, piemēram, $y=4$, $y=6x$, $y=3x^2$ atvasinājumu, izmantojot definīciju, un formulē vispārīgus secinājumus.
- 4.3.3. Atvasina pakāpes funkciju, funkcijas $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=e^x$ un $f(x)=\ln x$, lieto likumus funkciju summas, reizinājuma un dalījuma atvasināšanai, atvasina saliktu funkciju formā $f(ax+b)$, ja f ir kāda no nosauktajām funkcijām.
- 4.3.4. Skaidro nosacījumus atvasinājuma eksistencei punktā, atšķir kritiskos punktus un ekstrēma punktus; skaidro ekstrēmu, funkcijas monotonitāti, pārlietuma punktu,

grafika izliekumu un ieliekumu, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisko interpretāciju.

Daži no sasniedzamajiem rezultātiem temata ietvaros tiek realizēti daļēji, piemēram, rezultāta 1.2.5. pirmā daļa par atvasinājumu. Rezultāts 4.3.4. tiek sadalīts divu tematu ietvaros, 4.4. temata stundā (3. pielikums 93. lpp.) apgūst tā pirmo daļu par atvasinājuma eksistenci punktā.

Papildu rezultātam 4.3.2. izstrādātajos plānos skolēni ne tikai formulē vispārīgus secinājumus par funkciju atvasinājumu formulām, bet arī daļu no tām pierāda ar dažādām metodēm (pēc atvasinājuma definīcijas, logaritmējot abas puses un izmantojot 2. ievērojamo robežu). Tematiskajā plānā attiecībā pret minēto tiek definēti šādi sasniedzamie rezultāti:

- Pierāda $(\ln x)'$, $(x^n)'$ pēc aprakstītiem soļiem.
- Pierāda $(e^x)'$.

Standartā tiek uzskaitītas funkcijas, kuras skolēnam jāprot atvasināt: $f(x)=x^n$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$, $f(x)=e^x$, $f(x)=\ln x$. Izstrādātajos stundu plānos sagaidāms, ka skolēni atvasinās vēl citas funkcijas: $f(x)=a^x$, $f(x)=\log_a x$, $f(x)=\operatorname{tg} x$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$. Atsevišķi tiek izdalīts arī pakāpes funkcijas specgadījums $f(x)=\sqrt{x}$. Skolēni atvasina arī jebkādas saliktas funkcijas, tomēr standartā tiek minēts tās viens gadījums $f(ax+b)$. Kā atsevišķs sasniedzamais rezultāts 4.6. temata stundā (3. pielikums 99. lpp.) ir “Saskata sakarību, kā atvasināt saliktu funkciju”. Pētnieciskajā uzdevumā (3. pielikums 100. lpp.), kura laikā jāskata saliktas funkcijas atvasināšanas algoritms, jau tiek izmantoti dažādas saliktas funkcijas, kas atšķiras no standartā minētā modeļa $f(ax+b)$, piemēram, $y=\log_2 x^{14}$, $y=\log_2 \frac{x}{4}$.

3.4. Temati “Funkcijas pētīšana” un “Atvasinājuma pielietojums”

Bieži vien skolēni vēlas zināt, kur var izmantot apgūtās zināšanas un prasmes. Atvasinājumu var izmantot gan matemātikā, gan citās jomās. Izstrādāto plānu 5. temats (4. pielikums 109. lpp.) tiek veltīts tam, kā atvasinājumu var izmantot, lai pētītu funkciju. Divi standarta sasniedzamie rezultāti, kuri attiecas uz atvasinājuma pielietojumu, ir par funkcijas pētīšanu:

- 4.3.4. Skaidro nosacījumus atvasinājuma eksistencei punktā, atšķir kritiskos punktus un ekstrēma punktus; skaidro ekstrēmu, funkcijas monotonitāti, pārliekuma punktu,

grafika izliekumu un ieliekumu, izmantojot atvasinājuma punktā ģeometrisku interpretāciju.

- 4.3.5. Lieto funkcijas atvasinājumu, pētot polinomiālu funkciju un daļveida funkciju īpašības, zīmējot to grafikus, nosakot funkcijas vislielāko/vismazāko vērtību matemātiskos un citu mācību jomu kontekstos.

Temata ietvaros tiek sasniegti visi minētie rezultāti, īpašu uzmanību veltot funkcijas atvasinājuma ģeometriskajai interpretācijai punktā un tā saistībai ar funkcijas monotonitāti, ekstrēma punktiem. Tiek pētītas polinomiālas un daļveida funkcijas, nosakot ekstrēmus, tomēr papildus tiek izvirzīts vēl viens sasniedzamais rezultāts, lai detalizētāk izpētītu funkcijas: “Nosaka funkcijas horizontālo un vertikālo asimptotu”.

Funkciju īpašību pielietošana dažādu jomu kontekstos tiek aplūkota nākamajā tematā. Atvasinājuma pielietojumi tiek apskatīti trīs jomās: dažādu kontekstu uzdevumi, kas reducējas uz ģeometrisku modeli, ekonomikā un fizikā. Tādējādi tiek pilnībā realizēts standarta rezultāts 4.3.5. izstrādātajos plānos 6. tematā (5. ielikums 131. lpp.). Kā atsevišķs rezultāts tiek izvirzīts, ka skolēni vada mācību stundas. Tematam atvēlētajā laikā visi skolēni nevar sasniegt šo rezultātu. Tiek paredzēts, ka 3 skolēnu pāri vada stundu par katru no jomām, kurās var izmantot atvasinājumu.

Darba ietvaros izstrādātajā tematiskajā plānā un stundu plānos ir paredzēts realizēt visus sasniedzamos rezultātus, kas definēti Ministru kabineta noteikumiem Nr. 416 par vidējās izglītības standartu un kuri attiecas uz izstrādātajiem tematiem. Vairāki rezultāti tiek sasniegti divu tematu garumā, kā arī daži tiek sasniegti vispārīgā gadījumā, kas joprojām ietver standartā norādītos rezultātus. Lai detalizētāk apgūtu tematus, izstrādātajos materiālos ir paredzēts sasniegt rezultātus, kas pārsniedz standarta prasības. Dažviet šīs papildu zināšanas tiek izmantotas, lai ar matemātiskiem pierādījumiem apgūtu nākamos tematus.

SECINĀJUMI

Darbā ir aplūkots funkcijas robežas un atvasinājuma skaidrojums, kā arī to rēķini, teorēmu un formulu pierādījumi un atvasinājuma pielietojums vairākās jomās. Ir izveidots tematiskais plāns, lai vidusskolā sešu tematu ietvaros apgūtu minētās matemātikas tēmas. Darba rezultātā ir izstrādāti četri temati, kas sastāv no 25 stundu plāniem ar visiem nepieciešamajiem materiāliem un pārbaudes darbiem divos variantos.

Izstrādātais darbs ļauj izvirzīt galvenos secinājumus:

1. Literatūrā ir atrodami vairāki veidi, kā pierādīt vai skaidrot teorēmas.
2. Atvasinājuma galvenais pielietojums ir funkcijas ekstrēmu atrašana, kas sniedz informāciju par konkrēto problēmu matemātikā, fizikā un ekonomikā.
3. Izstrādātajos stundu plānos ir iekļauti visi standarta augstākā līmeņa sasniedzamie rezultāti, kas attiecas uz robežu un atvasinājuma mācīšanu.
4. Daži sasniedzamie rezultāti pārsniedz standartā uzstādītos, galvenokārt papildu tiek apskatīti robežu rēķini un nenoteiktību novēršana.
5. Stundu plānos ir iestrādātas vairākas metodes un uzdevumu veidi: pašvadītā mācīšanās, atgriezeniskās saites sniegšana, pētnieciskie uzdevumi, pierādījuma uzdevumi un kopsavilkumi.
6. Izstrādātajās stundās nepieciešams izmantot informācijas tehnoloģijas trīs mērķiem: rezultātu pārbaudīšanai, jaunu zināšanu ieguvei caur pētnieciskiem uzdevumiem un demonstrējumiem.
7. Stundu aprobācijā tika novērots, ka pirms pārbaudes darba nepieciešams atkārtot gan aprēķinus, gan teorijas jautājumus, un ka pētniecisko uzdevumu izpilde aizņem vairāk laika, nekā sākotnēji paredzēts. Novērojumi tika ņemti vērā turpmāko materiālu izveidē.

Lai izstrādātais materiāls būtu pilnīgs, nepieciešams izstrādāt tematus "Funkcijas robeža" un "Robežu rēķini". Tālākā darba pilnveidošanā nepieciešams aprobēt visus stundu plānus.

PATEICĪBAS

Darba autors izsaka lielu pateicību darba izstrādāšanā:

- darba vadītājam Raivim Bētam par ieteikumiem un komentāriem pusotra gada laikā, sākot ar pirmajiem soļiem darba izstrādē;
- Rīgas Valsts 1. un 2. ģimnāzijas skolotājām Maijai Balodei un Kaivai Treijai par iespēju aprobēt izstrādātos stundu plānus 11. klasēs un ieteikumiem, kā tos uzlabot;
- Ernestam Einbergam par padomiem un nenovērtējamo atbalstu;
- LU FMOF darbiniekiem.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

- [1] Ministru kabinets, "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu, mācību priekšmetu standartiem un izglītības programmu paraugiem". *LIKUMI.LV*, 2013. <https://likumi.lv/ta/id/257229> [skatīts: 26.05.2020.].
- [2] Valsts izglītības satura centrs, "Standarti un vadlīnijas". *Valsts izglītības satura centrs*, 2020. Pieejams: <https://visc.gov.lv/vispizglitiba/saturs/standarti.shtml> [skatīts: 26.05.2020.].
- [3] Ministru kabinets, "Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu un vispārējās vidējās izglītības programmu paraugiem". *LIKUMI.LV*, 2019. <https://likumi.lv/ta/id/309597> [skatīts: 30.05.2020.].
- [4] I. Volodko, *Augstākā matemātika*. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2007.
- [5] K. Šteiners, *Augstākā matemātika III*. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 1998.
- [6] A. Miškis, *Augstākā matemātika*. Rīga: Izdevniecība "Zvaigzne", 1968.
- [7] I. Bula and J. Buls, *Matemātiskā analīze ar ģeometrijas un algebras elementiem I daļa*. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2003.
- [8] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*. Vācija: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.
- [9] "Applications of Derivates to Business and Economics." Pieejams: http://math.hawaii.edu/~mchyba/documents/syllabus/Math499/extracredit.pdf?fbclid=IwAR3_i5b6uHbMMteFG-595abhBTIEU9GTKpWXYW3BOs0uOMZ87fantiS2-lo [skatīts: 30.05.2020.].
- [10] A. Aits u. c., *Mathematics: analyses and aproaches, standard level*. Oxford University Press, 2019.
- [11] J. Owen, R. Haese, S. Haese, un M. Bruce, *Mathematics for the international student*. Haese & Harris Publications, 2004.
- [12] K. Šteiners, *Matemātiskās analīzes elementi*. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 1993.
- [13] D. Kriķis, P. Zariņš, un V. Ziobrovskis, *Diferencēti uzdevumi matemātikā, 1. daļa*. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 1996.
- [14] Skola2030, "Mērķis: lietpratība". *Skola2030*, 2019. <http://skola2030.lv/lv/macibu-saturs/macibu-satura-pilnveide/merkis-lietpratiba> [skatīts: 26.05.2020.].
- [15] Skola2030, "Mācīšanās iedziļinoties". *Skola2030*, 2019. Pieejams: <https://www.skola2030.lv/lv/istenosana/macibu-pieeja/macisanas-iedzilinosies> [skatīts: 10.05.2020.].

- [16] International Baccalaureate Organization, “IB and the Common Core State Standards. Mathematics standards”. 2013. Pieejams: <https://www.ibo.org/globalassets/digital-toolkit/country-specific-materials/common-core-math-en.pdf> [skatīts: 30.05.2020.]
- [17] Skola2030, “Formatīvā vērtēšana - kas tas ir?”. *Domāt. Darīt. Zināt.*, 2018, 15. lpp.
Pieejams: https://www.skola2030.lv/admin/filemanager/files/1/NL2_Skola2030_Decembris_pdf.pdf [skatīts: 30.05.2020.]

PIELIKUMI

1. pielikums

Tematiskais plāns

Tematiskais plāns

Nr. p. k.	Temats	SR	Piezīmes
1. Virknes robeža			
1.1.	Virknes definīcija, uzdošanas veidi, vispārīgā locekļa formula.	Zina skaitļu virknes definīciju, uzdod virkni dažādos veidos (aprakstoši, ar tabulu, grafiski, analītiski). Nosaka virknes vispārīgā locekļa formulu, aprēķina n-to locekli pēc vispārīgā locekļa formulas.	<u>Mājas darbs:</u> izdomāt vai atrast vispārīgā locekļa formulu Fibonači virknei.
1.2.	Augoša, dilstoša, ierobežota virkne.	Excel'ī aprēķina virknes vērtības pēc vispārīga locekļa formulas. Nosaka, vai virkne ir augoša, dilstoša, oscilējoša vai konstanta, ierobežota no augšas vai no apakšas; izprot definīcijas.	
1.3.	Uzdevumi par augošām, dilstošām un ierobežotām virknēm.	Pierāda, ka virknes ir augošas, dilstošas, ierobežotas no augšas un apakšas.	
1.4.	Punkta ε -apkārtnē.	Nosaka skaitli N jeb virknes kārtas numuru, ar kuru visi locekļi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ atradīsies punkta A ε -apkārtnē.	
1.5.	Atkārtojuma uzdevumi par virknes monotonitāti, ierobežotību un ε -apkārtni.	Patstāvīgi pierāda, ka virknes ir augošas, dilstošas, ierobežotas no augšas un apakšas, aprēķina skaitli N pie dota ε .	
1.6.	Virknes robežas definīcija.	Skaidro virknes robežas definīciju. Novērtē virknes robežas noteikšanu no grafiskā attēlojuma.	
1.7.	Atkārtojums.	Nosaka virknes vispārīgo locekli. Nosaka un pierāda virknes monotonitāti un ierobežotību. Aprēķina skaitli N, ar kuru locekļi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ atradīsies punkta A ε -apkārtnē.	
1.8.	Pārbaudes darbs.		

2. Funkcijas robeža			
2.1.	Heines definīcija, $\frac{1}{0}; \frac{1}{\infty}$.	Zīmē funkcijas un nolasa no tās grafika robežu. Veic secinājumus par $\frac{1}{0}; \frac{1}{\infty}$ no grafiskā attēlojuma.	
2.2.	Vienpusējās robežas.	Rēķina vienpusējās robežas.	
2.3.	Nepārtrauktas funkcijas definīcija.	Rēķina vienpusējās robežas. Veic secinājumus par nepārtrauktas funkcijas saistību ar vienpusējām robežām.	
2.4.	Asimptota. Funkcijas konverģence un diverģence.	Zina, kas ir funkcijas asimptota. Nosaka, vai funkcija konverģē vai diverģē.	
2.5.	Atkārtojums.	Rēķina vienpusējās robežas. Zīmē funkcijas grafika fragmentus no vienpusējām robežām. Nosaka horizontālo un vertikālo asimptoti.	
2.6.	Pārbaudes darbs.		
3. Robežu rēķini			
3.1.	Nenoteiktības $\frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}$.	Novērš nenoteiktības.	
3.2.	Nenoteiktības $\frac{0}{0}; \infty - \infty$.	Novērš nenoteiktības.	
3.3.	Paškontroles darbs.	Novērš nenoteiktības.	
3.4.	2. ievērojamā robeža.	Veic secinājumus par 2. ievērojamo robežu no pētnieciskā darba.	<u>Mājas darbs:</u> atrast papildu informāciju par skaitli e .
3.5.	2. ievērojamās robežas izmantošana robežu rēķinos.	Izmanto 2. ievērojamo robežu aprēķinos.	
3.6.	Atkārtojums.	Novērš nenoteiktības. Izmanto 2. ievērojamo robežu aprēķinos.	
3.7.	Pārbaudes darbs.		
4. Atvasinājums			
4.1.	Atvasinājuma definīcija. Fizikālā jēga.	Caur praktisku fizikas uzdevumu veic secinājumus par fizikālo jēgu. Skaidro atvasinājuma definīciju.	
4.2.	Atvasinājuma ģeometriskā jēga.	Caur pētniecisko uzdevumu veic secinājumus par atvasinājuma ģeometrisko jēgu.	
4.3.	Konstantes un summas kārtu-	Pierāda $(\ln x)'$, $(x^n)'$ pēc aprakstī-	<u>Neobligātais</u>

	<p>lu izvedums. Reizinājuma un dalījuma kārtulas. $(\ln x)'$ izvedums. $(x^n)'$ izvedums.</p>	<p>tiem soļiem. Atvasina x^n pie dažādiem n. Izmanto atvasinājuma kārtulas.</p>	<p><u>mājas darbs:</u> pierādīt $(x^n)'$ pēc definīcijas. <u>Mājas darbs:</u> $(\sin x)'$ atvasinājuma grafiks.</p>
4.4.	<p>$(\sin x)', (\cos x)', (tg x)', (ctg x)', (a^x)', (\sqrt{x})', (\log x)'$. $(e^x)'$ izvedums. Atvasinājuma eksistence punktā.</p>	<p>Pierāda $(e^x)'$. Aprēķina atvasinājumu konkrētā punktā. Uzskaita gadījumus, kad atvasinājums neeksistē punktā.</p>	<p><u>Mājas darbs:</u> uztaisīt formulu lapu.</p>
4.5.	<p>Atvasinājuma rēķini.</p>	<p>Atvasina funkcijas, kas veidotas ar algebriskām darbībām no $\ln x, \log x, x^n, \sqrt{x}, e^x, a^x, \sin x, \cos x, tg x, ctg x$, izmantojot konstantes, summas, reizinājuma un dalījuma kārtulas un atvasinājuma formulas.</p>	
4.6.	<p>Saliktas funkcijas izvedums.</p>	<p>Saskata sakarību, kā atvasināt saliktu funkciju. Atvasina saliktu funkciju.</p>	<p><u>Mājas darbs:</u> katram uzrakstīt uz lapiņas savu saliktu funkciju un atvasināt klādē.</p>
4.7.	<p>Atkārtojums.</p>	<p>Atvasina funkcijas un saliktas funkcijas, izmantojot konstantes, summas, reizinājuma un dalījuma, saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulas un atvasinājuma formulas. Nosaka funkcijas pieskares virziena koeficientu dotā punktā.</p>	<p>Uzdevumi pa līmeņiem.</p>
4.8.	<p>Pārbaudes darbs.</p>		
5. Funkcijas pētīšana			
5.1.	<p>Funkcijas monotonitāte.</p>	<p>Skaidro funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju. Atrod funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājumu.</p>	
5.2.	<p>Funkcijas ekstrēmi.</p>	<p>Atklāj, kā ar funkcijas atvasinājumu var noteikt funkcijas ekstrēmus. Atrod un atšķir kritiskos un ekstrēma punktus, izmantojot atvasinājumu.</p>	
5.3.	<p>2. kārtas atvasinājums.</p>	<p>Aprēķina funkcijas 2. kārtas atvasinā-</p>	

	Funkcijas izliekums, ieliekums. Pārlikuma punkti.	jumu. Atrod funkcijas izliekuma un ieliekuma intervālus, pārlikuma punktu.	
5.4.	Atvasinājuma izmantojums funkcijas pētīšanā.	Atrod funkcijas pārlikuma punktus, izmantojot 2. kārtas atvasinājumu. Izmanto 1. un 2. kārtas atvasinājumu funkciju pētīšanā.	
5.5.	Funkcijas grafika konstruēšana. Horizontālā un vertikālā asimptota.	Zīmē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu. Nosaka funkcijas horizontālo un vertikālo asimptotu.	
5.6.	Funkcijas grafika konstruēšana. Slīpā asimptota.	Uzraksta soļus funkcijas pētīšanai. Konstruē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu.	
5.7.	Atkārtojums.	Nosaka funkcijas monotonitātes intervālus, kritiskos un ekstrēma punktus, izmantojot funkcijas 1. kārtas atvasinājumu. Nosaka funkcijas pārlikuma punktus un izliektību, ieliektību, izmantojot funkcijas 2. kārtas atvasinājumu. Nosaka funkcijas pārtraukuma punktus un horizontālās asimptotas, ja tādas ir. Konstruē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu.	
5.8.	Pārbaudes darbs.		
6. Atvasinājuma pielietojums			
6.1.	Ģeometrijā.	Skolēni paši vada stundas, iepazīstinot klases biedrus ar atvasinājuma izmantošanu ģeometrijā.	
6.2.	Ekonomikā.	Skolēni paši vada stundas, iepazīstinot klases biedrus ar atvasinājuma izmantošanu ekonomikā.	<u>Skolēni gatavo stundas</u> – iespēja nopelnīt atzīmi.
6.3.	Fizikā.	Skolēni paši vada stundas, iepazīstinot klases biedrus ar atvasinājuma izmantošanu fizikā.	
6.4.	Atkārtojums	Risina dažādu kontekstu uzdevumus, izmantojot funkcijas atvasinājumu.	
6.5.	Pārbaudes darbs.		

1. temata “Virknēs robeža” stundu plāni un materiāli

1.1. temats: Virknēs definīcija, uzdošanas veidi, vispārīgā locekļa formula.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts	Zina skaitļu virknēs definīciju, uzdod virkni dažādos veidos (aprakstoši, ar tabulu, grafiski, analītiski). Nosaka virknēs vispārīgā locekļa formulu, aprēķina n-to locekli pēc vispārīgā locekļa formulas.
---	--

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija un mērķa formulēšana	Skolotāja rāda tabulu, kurā attēloti dati, funkcija, kā mašīna bremzē atkarībā no laika, ja sākuma ātrums ir 90 km/h. <i>Jāņem vērā, ka vēl ir reakcijas laiks ~1,5 sekundi, kuru laikā nobrauc ~38 m.</i> $\left(90 \frac{km}{h} = 25 \frac{m}{s}; 1,5 \cdot 25 = 37,5 m\right)$
t, s	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x(t), m	21.5 36 43.5 44 37.5 24 3.5 -24 -58.5 -100
	<p>Jautājumi klasei (frontāli):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Kad mašīna nobremzēs un apstāsies? – <i>Pie aptuveni 4 sekundēm. Un ar reakcijas laiku – 5,5 sekundēm.</i> 2) Cik metrus mašīna būs nobraukusi, kad apstāsies (kopā ar reakcijas laiku)? – <i>~82 metrus.</i> <p>Skolotāja: <i>Zinu, ka daudzi tieši 11. klases beigās liek tiesības. Matemātika jāizmanto arī uz ceļa. Ja kāds būs šo 80 m tuvumā, viņam būs tikai 5,5 – 6 sekundes, lai izvairītos no mašīnas, bet mašīna ātrāk un īsākā ceļa posmā nenobremzēs.</i></p> <ol style="list-style-type: none"> 3) Šo sakarību izsaka funkcija $x(t) = 25t - 3,5t^2$. Kas vēl pieترūkst, lai pilnībā aprakstītu doto sakarību tabulā? – <i>Vispārīgi laiks ir nepārtraukts, bet mūsu tabulā arguments ir naturāli skaitļi, turklāt intervālā [1;10].</i>

Apjēgšana	<p>Definīcijas dotas prezentācijā. Skolēniem, kuriem nepieciešams, pieraksta. Skolotāja norāda, ka tikko arī apskatījām virkni.</p> <p><u>Skaitļu virkne</u> – funkcija, kuras definīcijas apgabals ir naturālo skaitļu kopa \mathbb{N} vai kāda šīs kopas apakškopa.</p> <p>Virkne ir <u>bezgalīga</u>, ja tā definēta visu naturālo skaitļu kopā \mathbb{N}.</p> <p>Virkne ir <u>galīga</u>, ja tā definēta kopas \mathbb{N} apakškopā.</p> <p>Uz tāfeles redzams: $x_n = f(n)$, $D(f) = \mathbb{N}$ vai $D(f) = N_1 \subset \mathbb{N}$. Pieraksta nosaukumus: n – <u>virknēs locekļa kārtas numurs (indekss)</u>, x_n – <u>virknēs vispārīgais loceklis jeb n-tais loceklis</u>. Un funkcijas vērtības</p>
------------------	---

--

$f(1), f(2), \dots$ – virknes locekļi.

Skolēni pieraksta vispārīgi doto virkni.

Skolotāja: *Kāds būs trešā virknes locekļa arguments?* – 3.

Virknes uzdošanas veidi un lietošana
Patstāvīga lietošana

Skolotāja: *Virknī var uzdot 4 veidos. Kādi tie varētu būt? Tāpat kā funkcijas var uzdot.*

1. Ar tabulu. Sākumā bija dota tabula. Argumenta vērtības var arī nerakstīt. Kāpēc? – locekļa kārtas numurs ir atbilstošs ar argumenta vērtību.

Tā kā argumentus var nerakstīt, varam veidot vienkāršotu pierakstu $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$. Katrs mūsu tabulu pieraksta tādā veidā.

2. Analītiski. Mēs jau to apskatījām. Ar vispārīgā locekļa formulu. Piemēram, $a_n = 2n - 1$. Virknes $a_n = 2n - 1$ virknes locekļi ir $(1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots)$.
3. Aprakstoši. Uzdevums (**1. uzdevums**) pierakstos:
4. Grafiski. Uzdevums (**2. uzdevums**) klasē mutiski:

Skolotāja: *Atgriezīsimies pie 1. uzdevuma. Pamēģiniet uzrakstīt vispārīgā locekļa formulas!*

a) $x_n = 99 + n, n \in (1; 900)$

b) $x_n = -n$

- c) $x_n = x_{n-1} \cdot 2, x_1 = 3$ – rekurences formula, virknes locekļi ir rekurenti – virknes locekļi tiek izteikti ar vienu vai vairākiem iepriekšējās virknes locekļiem. Jānorāda viens vai vairāki pirmie virknes locekļi.

Skolotāja iepazīstina ar rekurences formulu. *Kā šo virkni var uzdot ar vispārīgā locekļa formulu?* – izmantojot ģeometrisku progresiju.

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, b_1 = 1, q = 2$$

$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

d) $x_n = n^2$

Skolotāja: *Vai kāds var nosaukt zināmu rekurentu virkni?* – Fibonači virkne.

Fibonači skaitļu virknē katrs nākamais loceklis ir vienāds ar divu iepriekšējo locekļu summu. Virkne tiek definēta šādi:

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ un } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \text{ ja } n \geq 2.$$

Mājās: izdomāt vai atrast vispārīgā locekļa formulu Fibonači virknei uz nākamo stundu.

Skolēni pilda 3. un 4. uzdevumu no darba lapas. Klasē salīdzina mutiski.

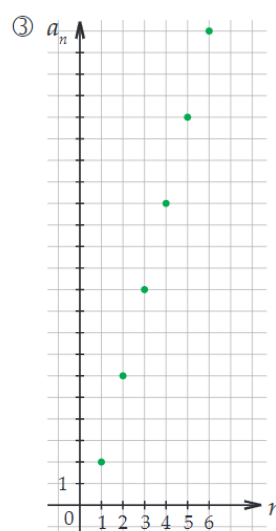
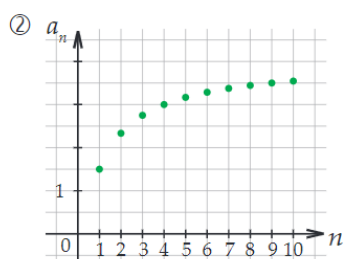
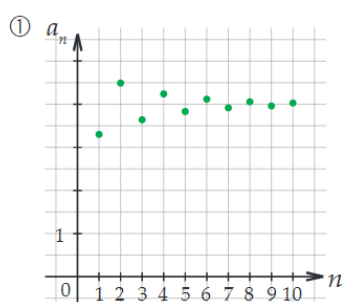
Uzdevumi par virknēm

1. Uzraksti dotās virknes pirmos četrus locekļus.
 - a) Virknes locekļi ir visi trīsciparu naturālie skaitļi.
 - b) Veselo negatīvo skaitļu virkne.
 - c) Virknes pirmais loceklis ir 3, bet pārējos locekļus iegūst, iepriekšējo locekli reizinot ar 2.
 - d) Virknes locekļi ir visu kvadrātu laukumu lielumi, ja kvadrāta malas garums ir naturāls skaitlis.

2. Dotas virknes:

a) $a_n = 4n - 2$;	b) $a_n = \frac{4n-1}{n+1}$;	c) $a_n = 4 + (-0,7)^n$.
---------------------	-------------------------------	---------------------------

Nosaki, kurš no attēliem — ①, ②, un ③ — visprecīzāk atbilst katras dotās virknes grafikam.



3. Dota virkne $a_n = 4n + 1$. Aprēķini n , ja $a_n = 81$, un nosaki, cik virknē ir tādu locekļu, kuru vērtība ir mazāka par 100.

4. Nosaki, vai dotā virkne ir galīga vai bezgalīga virkne.
 - a) Pāra skaitļu virkne.
 - b) Naturālu četrsciparu skaitļu virkne.
 - c) Virkne, kuras elementi ir visas vieglās automašīnas, kas reģistrētas Latvijā.
 - d) Veselo negatīvo skaitļu virkne.

1.2. temats: Augoša, dilstoša, ierobežota virkne.

Laiks: 40 min

Vieta: datorklase

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Excel'ī aprēķina virknes vērtības pēc vispārīga locekļa formulas. Nosaka, vai virkne ir augoša, dilstoša, oscilējoša vai konstanta, ierobežota no augšas vai no apakšas; izprot definīcijas.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Mērķa formulēšana

Skolotāja: *Šodien apskatīsim virknes ģeometrisko attēlojumu un dažas jau zināmus un jaunus terminus.*

Pētnieciskā darbība

Dota darba lapa, kurā doti uzdevumi (jāizmanto Excel) un definīcijas, kurās jāaizpilda tukšās vietas. Skolotāja iepazīstina ar uzdevumiem, skolēni individuāli aizpilda, var konsultēties ar klases biedriem vai skolotāju. Jau no dotajām un pašu izveidotajām definīcijām jānosaka virknes veids.

Skolotāja izdala arī instrukcijas, kā rīkoties ar programmu Excel.

Skolotāja konsultē vai nu frontāli vai individuāli, skolēni pilda darba lapu.

AS par saturu

10 min pirms zvana salīdzina definīcijas, grafika skices, virknes locekļus un īpašības. Skolotājai sagatavota prezentācija.

Skolotāja: *Vai saprotami visi apzīmējumi? – \exists eksistē.* Izrunā citus neskaidros jautājumus.

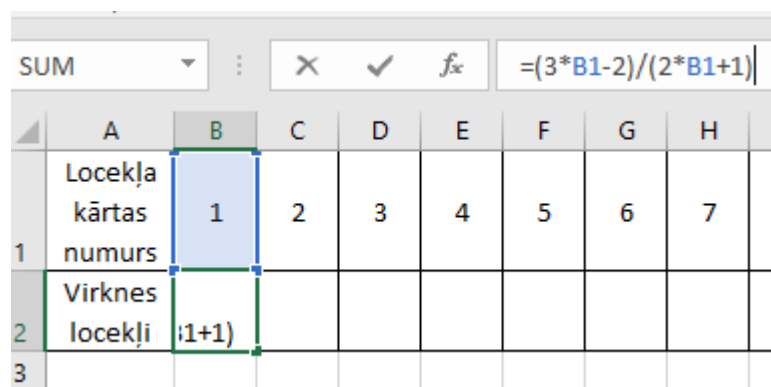
Instrukcija

Izveidot tabulu.

1. Saraksti virknes locekļa kārtas numurus jeb argumentu vērtības: 1, 2, 3, ... , 20.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
Locekļa kārtas numurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Virknes locekļi																				

2. Ieraksti šūnā B2 virknes locekļa formulu, kā argumentu izmantojot locekļa kārtas nr. 1 jeb šūnu B1! Atceries, ka formulu sāk ar = !



SUM

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Locekļa kārtas numurs	1	2	3	4	5	6	7
2	Virknes locekļi	=1+1)						
3								

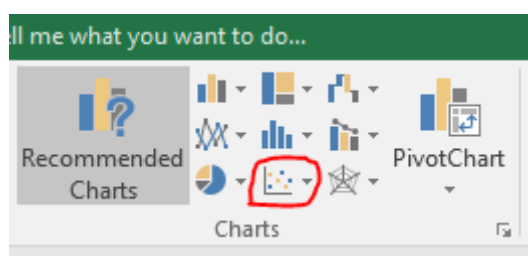
3. Pārvelk formulu uz pārējām šūnām aiz šūnas stūra!

Izveidot grafiku.

1. Iezīmē visu tabulu!

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Locekļa kārtas numurs	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Virknes locekļi	0.333	0.8	1	1.111	1.182	1.231	1.267	1.294	1.316	1.333	1.348	1.36	1.37	1.379	1.387	1.394	1.4	1.405	1.41	1.415	

2. Izpilda komandas: *Insert* → *Charts* → *Scatter* → *Scatter*.



Monotonas un ierobežotas virknes

1. Izveido Excel'ī tabulu un grafikus, attēlojot virknes pirmos 20 locekļus! Pārlicinies, vai virkne ir augoša, dilstoša, oscilējoša vai konstanta! Tabulā veido vienkāršotu virknes pierakstu un ieskicē virknes veidoto grafiku!
2. Definīcijās aizpildi tukšās vietas! Izmanto vārdus uz matemātisko simbolus kā lielāks, mazāks, vienāds, ar pretējām zīmēm, <, >, =!

Definīcija. Virkni sauc par **augošu**, ja katrs tās loceklis ir _____ nekā nākamais loceklis, t.i., ja $\forall n \in \mathbb{N}$ ir x_n _____ x_{n+1} .

Definīcija. Virkni sauc par **dilstošu**, ja katrs tās loceklis ir _____ nekā nākamais loceklis, t.i., ja $\forall n \in \mathbb{N}$ ir x_n _____ x_{n+1} .

Definīcija. Virkni sauc par **oscilējošu** jeb **mainzīmju virkni**, ja katri divi blakus locekļi ir ar _____.

Definīcija. Virkni sauc par **konstantu**, ja visi tās locekļi ir _____ ar vienu un to pašu skaitli, t.i., ja $\forall n \in \mathbb{N}$ ir x_n _____ x_{n+1} .

Definīcija. Virkni sauc par **ierobežotu no augšas**, ja eksistē tāds skaitlis M, ka visi virknes locekļi ir _____ nekā M vai vienādi ar M, t. i., $\exists M$, ka $\forall n \in \mathbb{N}$ ir x_n _____ M.

Definīcija. Virkni sauc par **ierobežotu no apakšas**, ja eksistē tāds skaitlis m, ka visi virknes locekļi ir _____ nekā m vai vienādi ar m, t. i., $\exists m$, ka $\forall n \in \mathbb{N}$ ir x_n _____ M.

- 1) Virknes $b_n = 3^n$ visi locekļi ir _____ nekā skaitlis _____ (vai vienādi ar _____).
- 2) Virknes $x_n = \frac{3n-2}{2n+1}$ visi locekļi ir _____ nekā skaitlis $\frac{1}{3}$ (vai vienādi ar $\frac{1}{3}$), bet _____ nekā skaitlis _____.

Definīcija. Ja virkne ir ierobežota gan no augšas, gan no apakšas, tad to sauc par **ierobežotu virkni**, t. i., virkne ir ierobežota, ja $\exists m$ un M , ka $\forall n \in \mathbb{N}$ ir $m \leq x_n \leq M$.

Nr. p. k.	Vispārīgā locekļa formula	Grafika skice	Virknes locekļi	Augoša/ dilstoša/ oscilējoša/ konstanta/ ierobežota no augšas/ ierobežota no apakšas
a)	$x_n = \frac{3n-2}{2n+1}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
b)	$b_n = 3^n$		$(b_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
c)	$x_n = \frac{n+1}{n^2}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
d)	$a_n = \frac{1}{3^{2n}}$		$(a_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
e)	$x_n = (-1)^n \frac{1}{2n}$		$(x_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	
f)	$f_n = 1^n$		$(f_n) = (\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \dots , \quad , \dots)$	

1.3. temats: Uzdevumi par augošām, dilstošām un ierobežotām virknēm.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Pierāda, ka virknes ir augošas, dilstošas, ierobežotas no augšas un apakšas.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija un mērķa formulēšana

Atkārtot terminus no iepriekšējās stundas ar vienkāršiem virkņu attēlojumiem no iepriekšējās stundas.

Vēl apskatāms termins:

Par monotonām virknēm sauc augošas un dilstošas virknes.

Apjēgšana

Skolotāja: *Paņemsim piemēru no iepriekšējās stundas. Kā varētu pierādīt šīs virknes īpašības?*

Kopīgi apskata:

Pierādi, ka virkne $x_n = \frac{3n-2}{2n+1}$ ir

a) augoša;

b) ierobežota!

Skolotāja mudina atsaukties uz augošas un ierobežotas virknes definīcijām.

Lietošana

Skolēni rēķina uzdevumus.

Skolotāja sagatavojusi elektroniski apskatāmus risinājumus un atbildes, skolēni, kam sokas ātrāk risināšana, var salīdzināt vai meklēt tur palīdzību. Tikmēr skolotāja kopā ar daļu klases risina pie tāfeles, frontāli, aicina skolēnus pie tāfeles.

Monotonas un ierobežotas virknes. Uzdevumi. [2]

1. Pierādīt, ka dotā virkne ir augoša:
 - a) $a_n = n^3 - n^2$
 - b) $a_n = \frac{2^n}{2n+1}$
2. Pierādīt, ka dotā virkne ir dilstoša:
 - a) $x_n = \frac{1}{n^2 + 2n + 4}$
 - b) $x_n = \frac{3n^2 + 2}{3n^2 + 1}$
3. Pierādīt, ka virkne ir ierobežota:
 - a) $x_n = 100 - \sqrt{n}$ – no augšas,
 - b) $x_n = x^2 - 5$ – no apakšas,
 - c) $x_n = 7 - 2n - n^2$ – no augšas
- * 4. Pierādīt, ka virkne $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ ir dilstoša.

1.4. temats: Punkta ε -apkārtnē.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Nosaka skaitli N jeb virknes kārtas numuru, ar kuru visi locekļi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ atradīsies punkta A ε -apkārtnē.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija un mērķa formulēšana

Dota virkne

$$a) (x_n) = \left(3; 1; \frac{5}{9}; \frac{6}{16}; \frac{7}{25}; \frac{8}{36}; \frac{9}{49}; \frac{10}{64}; \frac{11}{81}; \frac{12}{100}; \dots; \dots \right).$$

- Jānosaka vispārīgā locekļa formula.
- Jānosaka, kā virkne ir ierobežota (pierādot apakšējo robežu).

Skolotāja: *Uz ko virkne tiecas, kam tuvojas locekļi? – Saka, ka virknes locekļi neierobežoti tuvojas skaitlim 0, kad $n \rightarrow \infty$. Jeb virknes robeža ir 0. Bet matemātikā skaidri ir jānodedinē robežas definīcija. Šodien apskatīsim dažus terminus, kurus vēlāk izmantosim precīzā robežas definīcijā*

Apjēgšana ε -apkārtnē un skaitlis N

Skolotāja darbojas frontāli uz tāfeles, veido zīmējumus, uzdod skolēniem jautājumus.

Atliek uz ass virknes locekļus.

Skolotāja: *Paņemsim lielumu 0,25 uz abām pusēm no mūsu robežas 0, kāds izveidojas intervāls? $(-0,25; 0,25)$*

Kā to iegūst? $(0 - 0,25; 0 + 0,25)$

Cik virknes locekļu atrodas ārpus šī intervāla? – 4. Ar kalkulatoru aprēķina virknes locekļus decimāldaļās.

Cik v. loc. atrodas iekšā intervālā? – bezgalīgi daudz.

S: To sauc par punkta apkārtni – simetriski ap punktu izvēlēts intervāls.

Skolotāja to attēlo zīmējumā, skolēni pierakstos.

Ja izvēlas apkārtni ar intervāla garumu 0,2, kāds būs punkta 0 apkārtnes intervāls?

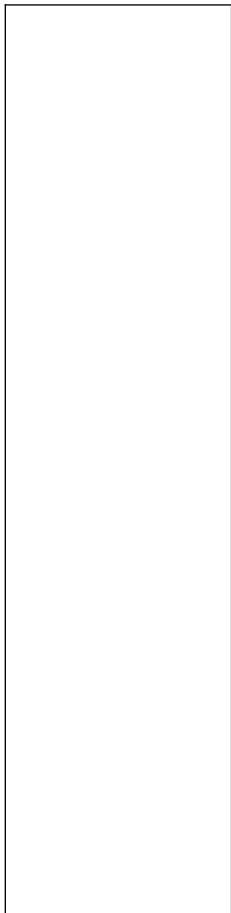
Cik virknes locekļu atradīsies ārpus šīs apkārtnes? – 11.

Cik apkārtnē?

Vai ir kāda punkta 0 apkārtnē, kurā neiegūsim līdzīgu rezultātu – galīgu virknes locekļu skaitu ārpus apkārtnes, bet bezgalīgi daudz apkārtnē iekšā?

Apskata b) virkni, kuras locekļi ir $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$

Kāda ir vispārīgā locekļa formula? $\frac{n}{n+1}$



Kāda varētu būt robeža? 1
 Ja Intervāla garums būs 0,26, kāds būs intervāls?
 $(1-0,13; 1+0,13) \Rightarrow (0,87; 1,13)$

Vispārīgais pieraksts:
 Prezentācijā: *Vispārīgi robežu apzīmē ar burtu A, bet šī punkta apkārtni par ε -apkārtni. Pieraksta ε -apkārtnes intervālu: $(A-\varepsilon; A+\varepsilon)$.
 Kādi ir ε a) un b) piemērā, ko apskatījām? $\varepsilon=0,25; \varepsilon=0,1; \varepsilon=0,13$*

Prezentācijā: *Mēs varam noteikt skaitli N jeb virknes locekļa kārtas numuru, ar kuru visi locekļi, kuriem $n \leq N$, būs ārpus punkta A ε -apkārtnes, t.i., $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots$ nepieder punkta A ε -apkārtnei. Un visi virknes locekļi ar kārtas numuru $n > N$ pieder punkta A ε -apkārtnei, t. i., $x_{N+1}, x_{N+2}, x_{N+3}, \dots \in (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$ jeb $A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x_n - A < \varepsilon$ jeb $|x_n - A| < \varepsilon$.*

Šādu pierakstu matemātiskajā analizē lieto bieži.
 Kāds dotajos piemēros bija N?

- a) $\varepsilon=0,25; N=3$
 $\varepsilon=0,1; N=11$
- b) $\varepsilon=0,13; N=6$

**Lietošana
 Skaitļa N
 aprēķināšana**

Matemātikā parasti ε izvēlas ļoti mazu. Neskaitīsim jau locekļus ārpus intervāla, ja $\varepsilon=0,001$. Tāpēc apskatīsim, kā to aprēķināt.

Apskata, kā aprēķina N jau dotajam piemēram, ja $\varepsilon=0,001$ jeb virknes locekļa kārtas numurus, kuriem $|x_n - A| < 0,001$ virknei $\frac{n}{n+1}$.

1.5. temats: Atkārtojuma uzdevumi par virknes monotonitāti, ierobežotību un ε -apkārtni.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Patstāvīgi pierāda, ka virknes ir augošas, dilstošas, ierobežotas no augšas un apakšas, aprēķina skaitli N pie dota .

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Mērķa formulēšana

Skolotāja: Šodien atkārtosim vēlreiz visu, saliksim punktus uz i par augošām, dilstošām, ierobežotām virknēm no augšas un apakšas un punkta ε -apkārtni.

Apjēgšana

Skolotāja: Paņemsim piemēru no mūsu otrās stundas, kad bijām datorklasē.

Kopīgi atkārtojot apskata:

a) Dotajai virknei $\frac{3n-2}{2n+1}$ noteikt to virknes locekļu numurus,

kuriem $\left| x_n - \frac{3}{2} \right| < 0,01$.

b) Virknei $\frac{8n-6}{4n+3}$ noteikt robežu A un to virknes locekļu numurus, kuriem $|x_n - A| < 0,02$.

Kas paspēj ātrāk var pildīt arī d) piemēru. Risinājums pieejami elektroniski, piemēram, Google Diskā.

Pēc tam apskata dažus piemērus no 3. un 5. uzdevuma, piemēram:

Pierādīt norādīto īpašību:

- $x_n = 100 - \sqrt{n}$ – ierobežota no augšas,
- $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ – dilstoša.

Patstāvīga lietošana

Skolēni pilda paškontroles darbu.

5 – 10 min pirms zvana salīdzina rezultātus un risinājumus.

Paškontroles darbs. Virknes robeža.

1. Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n+5}{2n-1}$ ir dilstoša!
2. Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n-3}{5n+2}$ ir ierobežota no augšas!
3. Virknes vispārīgā locekļa formula ir $x_n = \frac{7n-2}{n+1}$. Nosaki to virknes locekļu numurus, kuriem $|x_n - 7| < 0,01$!

1.6. temats: Virknes robežas definīcija.

Laiks: 40 min

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Skaidro virknes robežas definīciju.
Novērtē virknes robežas noteikšanu no grafiskā attēlojuma.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija

Aktualizē vēlreiz terminus un to jēgu: liek katram padomāt, ko no iepriekšējām 2 stundām saprata:

- a) virknes robeža
- b) punkta apkārtne
- c) lielums ε
- d) ε -apkārtne
- e) skaitlis N
- f) $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$
- g) $|x_n - A| < \varepsilon$

Pāros 2 min laika pārrunāt, kas ir saprasts, kas nav, ko katra lieta nozīmē.

Frontāli izrunā šos terminus un apzīmējumus. Skolēni skaidro, ja nepieciešams, skolotāja palīdz, uzdod jautājumus.

Apjēgšana. Virknes robežas definīcija

Skolotāja: *Esam apskatījuši visus terminus, lai iepazītos ar precīzu robežas definīciju. Uz tāfeles parāda definīciju:*

Skaitli A sauc par virknes x_n robežu un raksta $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N , ka visiem virknes locekļiem, kuru kārtas numuri $n > N$, ir spēkā nevienādība $|x_n - A| < \varepsilon$.

Skolotāja vēlreiz to attēlo zīmējumā ar skaitļa apkārtni. *Kāpēc $n \rightarrow \infty$?*

Tā tad robežu pieraksta: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$

Skolotāja: *Kāpēc apzīmējums \lim ? – latīņu valodā “limes” nozīmē robežu.*

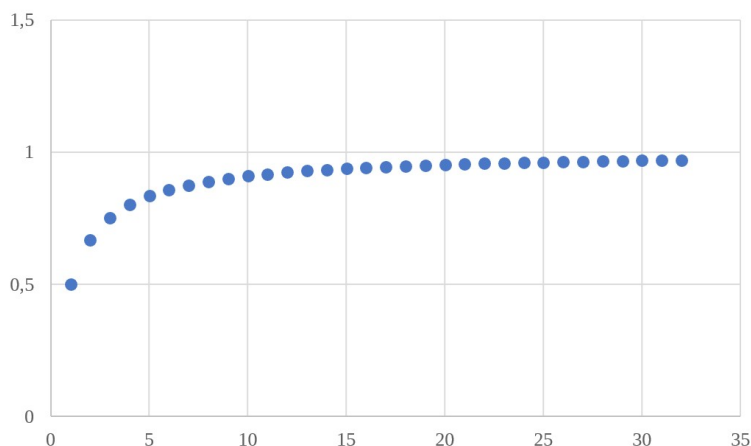
Apskata piemēru. *Kāda varētu būt virknes $x_n = \frac{n}{n+1}$ robeža? (dots virknes locekļu grafiks) – 1.*

Jā, robeža patiešām ir viens. Kā precīzi aprēķināt robežas, mācīsimies nākamajos tematos. Šobrīd pierakstīsim šo piemēru:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Skolotāja kopā ar skolēniem apskata vizuāli dotā piemēra virknes robežu ar robežas definīciju.

Ja atskatāmies uz robežas definīciju, tad skaitli N mēs protam aprēķināt, ja ir zināms ε . Bet sīkāk šo definīciju neaplūkosim, tas lai paliek augstskolai.



Kopsavilkums

Skolēniem pāros dots uzdevums atbildēt uz 2 jautājumiem, atbildes ierakstot arī pierakstos:

1. Kāda ir atšķirība starp virknes ierobežotību un robežu?
2. Kādi ir plusi un mīnusi, nosakot virknes robežu no grafiskā attēlojuma?

Pēc tam skolēni izsaka savas atbildes un pieraksta, ja kaut ko jaunu dzird. Ja nepieciešams, skolotāja uzdod uzvedinošus jautājumus, lai nonāktu līdz svarīgam secinājumam.

Galvenās idejas, kurām jāpievērš uzmanība:

1. Virknes robeža ir konkrēta vērtība, bet virkne var būt ierobežota ar dažādām vērtībām. Ja virknes robeža ir skaitlis, tad virkne noteikti ir ierobežota ar to vērtību.
 2. Plusi – neaprēķinot precīzu robežu, var noteikt vismaz aptuvenu vērtību. Bieži vien var noteikt precīzu robežu, izmantojot IT un izveidojot grafisku attēlojumu.
- Mīnusi – var gadīties, ka noteiktā robeža nav precīza. Dažām virknēm var nākties aprēķināt diezgan daudz locekļu, lai noteiktu vismaz aptuveno robežu.

1.7. temats: Atkārtojums.

Laiks: 40 min

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Nosaka virknes vispārīgo locekli. Nosaka un pierāda virknes monotoni-tāti un ierobežotību. Aprēķina skaitli N , ar kuru locekļi $x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots$ atradīsies punkta A ε -apkārtnē.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija

Skolēniem izdala šodienas uzdevumus, kuros aptverts viss temats. Skolotāja: *Apskatiet uzdevumus un apdomājiet, vai zināt, kā tos atrisināt. Vai ir kas tāds, kas pavisam aizmirsies. Pierakstiet vai atzīmējiet sev pierakstos vai uzdevumu lapā, kādus uzdevumus jūs šajā stundā pildīsiet, lai atkārtotu tematu.*

Lietošana

Skolēni pilda uzdevumus. Katram ir iespēja izvēlēties, kurus uzdevumus pildīt un kādā secībā, ņemot vērā stundas sākumā izvirzītos mērķus. Ir sagatavoti atrisinājumi vai nu elektroniski pieejami, piemēram, Google Diskā, vai uz lapas, ar kuriem salīdzināt risinājumus vai ieskaitīties, ja nav zināms, kā atrisināt. Skolotāja konsultē. Skolotāja iesaka vispirms meklēt pierakstos, kā iepriekšējās stundās ir risināti šādi uzdevumi vai ko nozīmē termini.

AS pret saturu

Skolotāja: *Paņemiet citu krāsu un uzdevumos atzīmējiet tos uzdevumus vai piemērus, kurus vēl nepieciešams mājās apskatīties, iemācīties, sa-prast.*

Gatavošanās pārbaudes darbam.

Virknes robeža.

1. Kad virkne ir galīga un bezgalīga? *Atceries par matemātiski pareizu pierakstu!*
2. Dota bezgalīga virkne 1, 5, 9, 13,
 - a) vai tā ir ierobežota?
 - b) uzraksti virknes locekļu rekurences formulu,
 - c) uzraksti tās vispārīgā locekļa formulu!
3. Nosaki virkņu n-tā locekļa formulu!
 - a) $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots;$
 - b) $\frac{3}{5}, \frac{7}{11}, \frac{11}{17}, \frac{15}{23}, \dots;$
 - c) $\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots$
4. Aprēķini pirmos piecus virknes locekļus, atzīmēt tos uz skaitļus ass un pierādīt norādītās īpašības:
 - a) $x_n = \frac{n-1}{n}$ – augoša, ierobežota no augšas;
 - b) $x_n = \frac{2n+3}{3n-2}$ – dilstoša, ierobežota no apakšas.
5. Virknes vispārīgā locekļa formula ir $\frac{4n-5}{n+1}$. Uzdevumi:
 - a) nosaki to virknes locekļu numurus, kuriem $|x_n - 4| < 0,02$,
 - b) uzraksti virknes robežu!
- * 6. Pierādi, ka virkne $x_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$ ir augoša!

Pārbaudes darbs
Virsknes robeža
1. variants

1. uzdevums (____/3 punkti)

Novērtē, vai apgalvojums ir patiess! Ievelc krustiņu attiecīgajā ailītē!

Apgalvojums	Patiess	Aplams
Skaitļu virsknes definīcijas apgabals vienmēr ir naturālo skaitļu kopa.		
Ja virskne ir dilstoša, tad $x_n > x_{n+1}$.		
Virskne $a_n = 2^n$ ir ierobežota virskne.		

2. uzdevums (____/7 punkti)

Uzraksti uzdevumu atbildes!

Uzdevums	Atbilde
Uzraksti rekurentas virsknes vienu piemēru!	
Kad skaitļu virskne ir galīga?	
Dota virskne $x_n = f(n)$. Kā sauc x_n ?	
Doti virsknes locekļi: 1,5; 3,5; 5,5; Nosaki n-tā locekļa formulu!	
Doti virsknes locekļi: 3; 6; 11; 18; 27; 38; 51; Pieraksti virskni dotajā formā, nosakot arī n-to locekli!	$a_n = (\quad ; \quad ; \quad ; \dots ; \quad ; \dots)$
Doti virsknes locekļi: $-\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{12}; \dots$. Nosaki n-tā locekļa formulu!	
Doti virsknes locekļi: $2; \frac{8}{3}; \frac{12}{4}; \frac{16}{5}; \dots$. Nosaki n-tā locekļa formulu!	
Virsknes $\frac{2n+3}{5n-4}$ robeža ir $\frac{2}{5}$. Pieraksti to simboliski!	

3. uzdevums (____/6 punkti)

Pierādi, ka virskne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n+4}{3n-1}$, ir dilstoša un ierobežota no apakšas!

4. uzdevums (_____/6 punkti)

Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n-5}{5n+1}$, ir augoša un ierobežota no augšas!

5. uzdevums (_____/4 punkti)

Virknes vispārīgā locekļa formula ir $x_n = \frac{2n-1}{n+2}$. Nosaki to virknes locekļu numurus, kuriem $|x_n - 2| < 0,01$!

6. uzdevums (_____/4 punkti)

Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $x_n = 3\sqrt{n+5}$, ir augoša!

Pārbaudes darbs
Virsknes robeža
2. variants

1. uzdevums (____/3 punkti)

Novērtē, vai apgalvojums ir patiess! Ievēl krustiņu attiecīgajā ailītē!

Apgalvojums	Patiess	Aplams
Virskne $a_n = n - 2$ ir ierobežota virskne.		
Ja virskne ir ierobežota no augšas ar skaitli M , tad $x_n > M$.		
Skaitļu virsknes definīcijas apgabals ir naturālo skaitļu kopa vai tās apakškopa.		

2. uzdevums (____/7 punkti)

Uzraksti uzdevumu atbildes!

Uzdevums	Atbilde
Uzraksti rekurentas virsknes vienu piemēru!	
Dota virskne $x_n = f(n)$. Kā sauc x_n ?	
Kad skaitļu virskne ir bezgalīga?	
Doti virsknes locekļi: 4; 7; 10; 13, ... Nosaki n -tā locekļa formulu!	
Doti virsknes locekļi: 0; 3; 8; 15; 24; 35; 48; ... Pieraksti virskni dotajā formā, nosakot arī n -to locekli!	$a_n = (\quad ; \quad ; \quad ; \dots ; \quad ; \dots)$
Doti virsknes locekļi: $-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \dots$. Nosaki n -tā locekļa formulu!	
Doti virsknes locekļi: $3; \frac{12}{3}; \frac{18}{4}; \frac{24}{5}; \dots$. Nosaki n -tā locekļa formulu!	
Virsknes $\frac{3n-5}{7n+2}$ robeža ir $\frac{3}{7}$. Pieraksti to simboliski!	

3. uzdevums (____/6 punkti)

Pierādi, ka virskne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n+5}{3n-2}$, ir dilstoša un ierobežota no apakšas!

4. uzdevums (____/6 punkti)

Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $a_n = \frac{n-3}{4n+1}$, ir augoša un ierobežota no augšas!

5. uzdevums (____/4 punkti)

Virknes vispārīgā locekļa formula ir $x_n = \frac{3n-1}{n+1}$. Nosaki to virknes locekļu numurus, kuriem $|x_n - 3| < 0,001$!

6. uzdevums (____/4 punkti)

Pierādi, ka virkne, kuras vispārīgais loceklis ir $x_n = 2\sqrt{2n+3}$, ir augoša!

Pārbaudes darba kritēriji

Uzd. nr.	Kritērijs	Punkti	Kopā punkti
1.	Nosaka apgalvojuma patiesumu.	1·3	3
2.	Uzraksta uzdevumu atbildes.	1·7	7
3.	Uzraksta izteiksmi " $a_n - a_{n+1}$ " ar vispārīgā locekļa formulām.	1	6
	Vienkāršo izteiksmi (kopīgo saucēju, savelk līdzīgos).	1	
	Veic secinājumu par izteiksmes vērtību (> 0).	1	
	Nosaka skaitli m , ar kuru ierobežots no apakšas.	1	
	Uzraksta ar " $a_n - m$ " izteiksmi ar vispārīgā locekļa formulu.	1	
	Veic secinājumu par izteiksmes vērtību (≥ 0).	1	
4.	Uzraksta izteiksmi " $a_n - a_{n+1}$ " ar vispārīgā locekļa formulām.	1	6
	Vienkāršo izteiksmi (kopīgo saucēju, savelk līdzīgos).	1	
	Veic secinājumu par izteiksmes vērtību (< 0).	1	
	Nosaka skaitli M , ar kuru ierobežots no augšas.	1	
	Uzraksta ar " $a_n - m$ " izteiksmi ar vispārīgā locekļa formulu.	1	
	Veic secinājumu par izteiksmes vērtību (≤ 0).	1	
5.	Uzraksta " $ x_n - A < \varepsilon$ " ar vispārīgā locekļa formulu un dotajiem lielumiem.	1	4
	Vienkāršo izteiksmi (kopīgo saucēju, savelk līdzīgos).	1	
	Uzraksta bez moduļa zīmes izteiksmi.	1	
	Nosaka n .	1	
6.	Uzraksta izteiksmi " $a_n - a_{n+1}$ " ar vispārīgā locekļa formulām.	1	4
	Reizina izteiksmi ar skaitītāja saistīto izteiksmi.	1	
	Vienkāršo skaitītāju (savelk līdzīgos saskaitāmos).	1	
	Veic secinājumu par izteiksmes vērtību (> 0).	1	

4. temata "Atvasinājums" stundu plāni un materiāli

4.1. temats: Atvasinājuma definīcija. Fizikālā jēga.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Caur praktisku fizikas uzdevumu veic secinājumus par atvasinājuma ģeometrisko un fizikālo jēgu. Skaidro atvasinājuma definīciju.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija. Atvasinājuma fizikālā jēga.

Atkārto šodien nepieciešamos terminus: *sekante, pieskare, funkcijas pieaugums, argumenta pieaugums, robeža, leņķa tangenss, taisnes virziena koeficients, ātrums.*

Doti attēlojumi, skaidrojumi vai termina nosaukums. Pāros jāpārrunā, kas tas ir vai kā to aprēķina. Pēc tam klasē pārbauda, salīdzina. Apskata sakarību starp leņķa tangensu un taisnes virziena koeficientu.

Dots uzdevums (**1. uzdevums**). To pārrunā pēc izpildes. Kopīgi papildina zīmējumu, lai attēlotu laika pieaugumu Δt un pārvietojuma pieaugumu Δs .

Skolotāja: *Tāpat kā Bolta vidējo ātrumu var aprakstīt ar funkcijas un argumenta pieauguma attiecību, tā arī var aprakstīt pašas funkcijas vidējo izmaiņu starp funkcijas f diviem punktiem x_1 un x_2 :*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \text{ Ja funkcija ir taisne, šī attiecība ir vienāda ar}$$

taisnes virziena koeficientu jeb $\operatorname{tg} \alpha$.

Apjēgšana. Atvasinājuma definīcija.

Skolotāja jautā: *Kā visprecīzāk var noteikt ātrumu konkrētā brīdī? Kā fizikā to sauc? - momentānais ātrums, ņemot pēc iespējas mazāku laika intervālu.*

Skolotāja: *Un kādu matemātisku darbību izmantojam, ja jāaprēķina, kad kaut kas tiecas uz 0? - robežu.*

Uzraksta uz tāfeles, ka momentānais ātrums ir vienāds ar

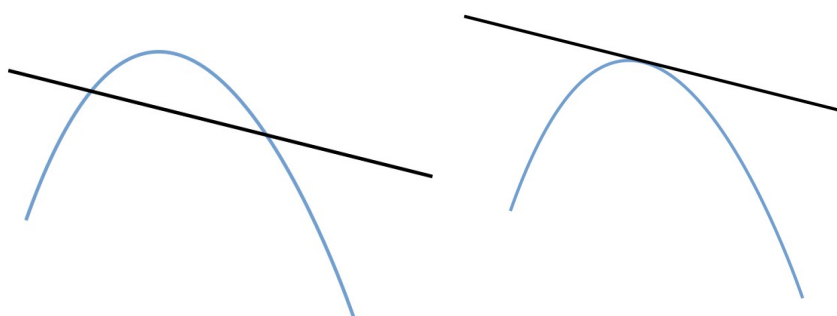
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = v_{\text{moment}} \text{ un pasaka, ka šī izteiksme definē arī atvasinājumu matemātiskā.}$$

Tāpat jebkurai funkcijai $y=f(x)$ var aprakstīt, cik strauji funkcija izmainīsies patvaļīgā punktā: atvasinājums ir

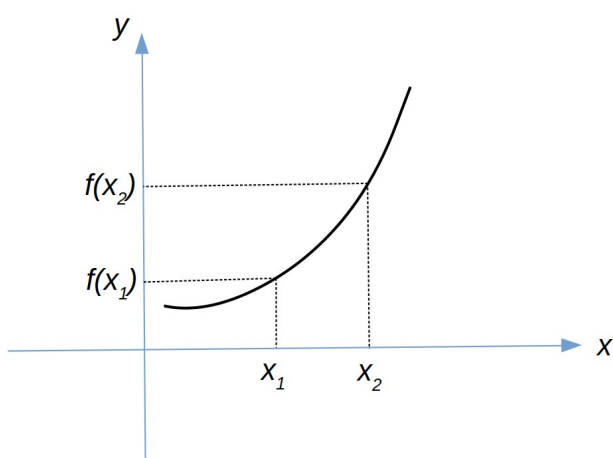
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Var lietot dažādus pierakstus: $f'(x)$; y' ; $\frac{dy}{dx}$.

1. Kura ir pieskare un kura sekante?



2. Uzraksti argumenta un funkcijas pieaugumu!



$$\Delta x =$$

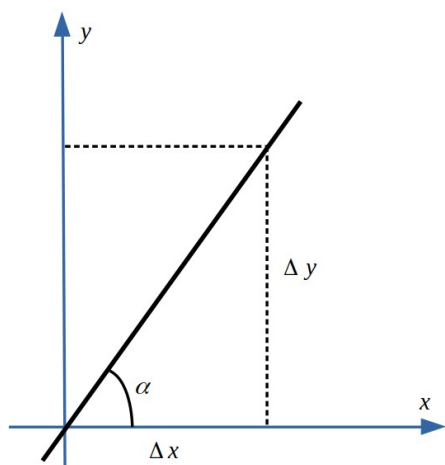
$$\Delta f(x) = \Delta y =$$

Izsaki no argumenta pieauguma x_2 un funkcijas pieaugumā aizvieto x_2 ar iegūto izteiksmi!

$$x_2 =$$

$$\Delta y =$$

3. Aprēķini! $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x - 3} =$



4. Uzraksti, kā aprēķina taisnes virziena koeficientu (vienāds ar norādītā leņķa α tangensu)! Atceries, ka taisnes vienādojums ir $y = kx + b$.

$$k = \operatorname{tg} \alpha =$$

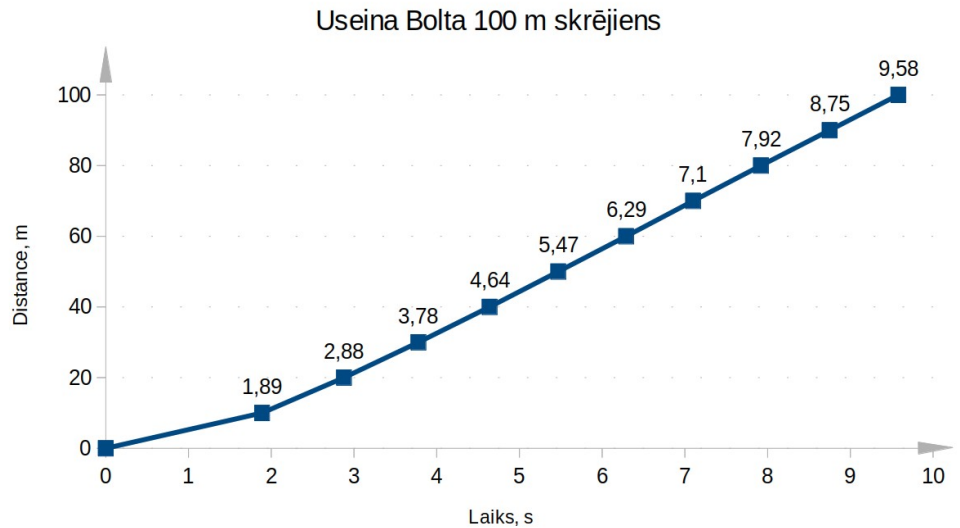
5. Dots pārvietojums s un laiks t . Kā aprēķin ātrumu v ?

$$v =$$

1. uzdevums

Grafikā attēlots Useina Bolta 100 m skrējiena distances (attēlots uz x -asi) atkarība no laika attēlots uz x -asi) 2009. gadā (pasaules rekords)

1. Aprēķini Bolta vidējo ātrumu!
2. Aprēķini Bolta vidējo ātrumu katrā 10 metru intervālā un atrodi tos 10 metrus, kurus Bolts noskrēja visātrāk!
3. Salīdzini tikko iegūto lielāko ātrumu ar Bolta vidējo ātrumu! Ja Tev būtu jānosaka Bolta ātrums jebkurā skrējiena brīdī, kurš no abiem ātrumiem būtu tuvāks tam ātrumam, kādā skrien Bolts tieši tajā brīdī?
4. Vai no dotās informācijas ir iespējams noteikt, kāds ir Bolta ātrums jebkurā konkrētā laika momentā, piemēram, skrējiena trešajā sekundē?
5. Kāda sakarība starp funkcijas un argumenta vērtībām apraksta vidējo ātrumu?



Atbildes: 1. 10,3 m/s 2. Starp 60 un 70 m 3. Vidējais ātrums būtu tuvāks konkrētā brīža ātrumam. Piemēram, tikai vienā brīdī Bolts skrēja visātrāk. 4. Nē, mēs aprēķinām tikai vidējos ātrumus. Tas nav tas pats, kas momentālais ātrums. 5. Vidējo ātrumu apraksta funkcijas un argumenta pieauguma attiecība $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

4.2. temats: Atvasinājuma ģeometriskā jēga.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Caur pētniecisko uzdevumu veic secinājumus par atvasinājuma ģeometrisko jēgu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija

Skolotāja: Šodien turpināsim iepriekšējā stundā iesākto.

Skolēniem pāros jāpārrunā atbildes uz jautājumiem (ja nezina atbildi, var ieskaitīties pierakstos):

1. Kāda ir atvasinājuma fizikālā jēga?
2. Kāda ir atvasinājuma definīcija?
3. Ar ko ir vienāds taisnes virziena koeficients?

Pēc tam pārrunā ar klasi atbildes, uzsverot galveno, kas būs nepieciešams šajā stundā. Skolotāja pārrunāšanas laikā var uz tāfeles uzrakstīt atvasinājuma definīciju un taisnes virziena koeficienta atkarību no α , Δx un Δy .

Skolotāja: Šodien uzzināsim, kāda ir atvasinājuma ģeometriskā jēga.

Atvasinājuma ģeometriskā jēga.

Pilda pētniecisko uzdevumu (**2. uzdevums**), lai apskatītu funkcijas izmaiņas.

Apskatot uzdevumu, skolotāja vēlreiz norāda uz to, ka taisnes virziena koeficients ir funkcijas un argumenta izmaiņas attiecība.

Pēc tam pārrunā uzdevumu.

Skolotāja: *Kāds ir sekantes virziena koeficients? Kad $\Delta x \rightarrow 0$, sekante kļūst par pieskari. Kāds tad ir pieskares virziena koeficients?*

Veic kopā secinājumu, vēlreiz vizuāli to attēlojot uz tāfeles, ka

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = k_p.$$

Lietošana

Skolotāja: *Apskatīsim vienu piemēru ar atvasinājuma fizikālo jēgu. Vēlāk, kad apgūsim dažādu funkciju atvasinājumus, varēsim pilnvērtīgi izmantot arī tā fizikālo un ģeometrisku jēgu.*

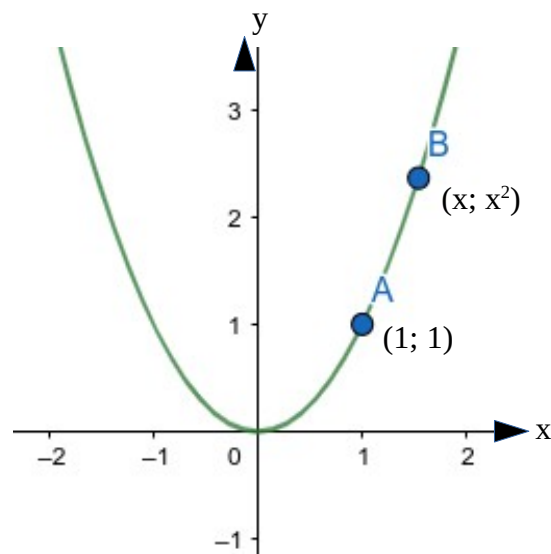
Uzdevums: *Noteikt daļiņas momentāno ātrumu 3. sekundē ar atvasinājuma definīcijas palīdzību, ja tā pārvietojas pēc likuma $x(t) = 6x$.*

2. uzdevums

Dota funkcija $f(x) = x^2$. Punktam dotas koordinātas $A(1; 1)$, bet punkts B ir patvaļīgs funkcijas punkts $B(x, x^2)$. Taisne AB, kas savieno punktus A un B, ir sekante.

1. Aprēķini sekantes AB virziena koeficientu katrai dotajai x vērtībai!

x	$B(x, f(x))$	Sekantes AB virziena koeficients $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
2	(2; 4)	$\frac{4-1}{2-1} = 3$
1,5		
1,1		
1,01		
1,001		



Tabulā punkta B argumenta vērtības tuvojas 1 no labās puses, kas ir punkta A x -koordināta, tādējādi punkts $B(x, f(x))$ tuvojas tuvāk un tuvāk punktam A.

2. Ko var pamanīt par sekantes AB virziena koeficientu, kad argumenta vērtības tuvojas 1 no labās puses?

3. Atkārti 1. uzdevumu, bet šoreiz x tuvojas 1 no kreisās puses! Izmanto x vērtības: 0; 0,8; 0,9; 0,999!

x	$B(x, f(x))$	Sekantes AB virziena koeficients $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

Ko var pamanīt par sekantes AB virziena koeficientu, kad argumenta vērtības tuvojas 1 no kreisās puses?

4. Kāda ir sakarība starp sekanti AB un pieskari punktā A, kad $\Delta x \rightarrow 0$?

4.3. temats: Atvasinājuma kārtulas. Funkciju $\ln x, x^n$ atvasinājums.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Pierāda $(\ln x)'$, $(x^n)'$ pēc aprakstītiem soļiem.
Atvasina x^n pie dažādiem n .
Izmanto atvasinājuma kārtulas.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Uz tāfeles uzzīmēts jau iepriekšējās stundās līdzīgi apskatīts zīmējums, kurā attēlots funkcijas grafiks, atzīmēti $\Delta x, \Delta y$.

Skolotāja jautā: *Kas tad bija funkcijas atvasinājums?* Frontāli atbild.
Skolotāja uz tāfeles vēlreiz uzraksta atvasinājuma definīciju.

Skolotāja: *Un kāda ir atvasinājuma ģeometriskā jēga?* - uz tāfeles papildina zīmējumu ar pieskari un pieraksta, ka atvasinājums vienāds ar pieskaries virziena koeficientu.

**Apjēgšana.
Atvasinājuma
kārtulas.**

Skolotāja: *Nosauciet kādu piemēru, kad funkcija ir konstante! Kā izskatīsies grafiks un tā pieskare?* - secina, ka pieskare sakrīt ar taisni un $tg \alpha = tg 0 = 0$. Tātad, $f(x) = C$ un $C' = 0$.

Skolotāja: *Pierādīsim to pēc atvasinājuma definīcijas!* - frontāli apskata pierādījumu. Kopīgi apskata arī summas atvasinājuma kārtulu.

Skolotāja: *Ir arī reizinājuma un dalījuma kārtulas, tās nepierādīsim.* - pieraksta kārtulas. Pieraksta un izrunā arī reizinājuma un konstantes kārtulu sekas $(C \cdot f)' = C \cdot f'$.

**$(\ln x)', (x^n)'$
izvedums.**

Skolēni pāros pierāda $(\ln x)'$ pēc aprakstītiem soļiem. Pēc tam salīdzina.

Līdzīgi ar $(x^n)'$ izvedumu. Kopīgi izrunā pirmo soli, atkārto, ko nozīmē logaritmēt abas puses.

Skolotāja: *Tālāk pierādījuma 4. solī redzama piebilde. Šobrīd izmantosim tur uzrakstīto sakarību, bet pamatojumu tai apskatīsim pēc dažām stundām.*

Lietošana.

Pilda **1. uzdevumu**, izmantojot jauniegūtās atvasinājuma formulas un atvasinājuma kārtulas. Dažus pirmos piemērus apskata kopā. Uz tāfeles dotas gala atbildes, ar kurām salīdzināt.

Mājas darbs.

Uztaisīt $(\sin x)'$ grafiku excel'ī, $x \in (0; 7)$.

Skolotāja: *Jo mazāku deltu izvēlēties, jo precīzāks būs grafiks.*

		x	$\sin x$	$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$	
		0,1			
		0,2			
		...			

Funkcijas $y = \ln x$ atvasinājums.

Dota funkcija $y = \ln x$.

Uzdevums: Atrast un pierādīt $(\ln x)'$.

- Uzraksti atvasinājuma definīciju ar $\ln x$! $(\ln x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$
- Izmanto logaritma starpības īpašību skaitītājā! =
- Uzraksti visu daļu kā 2 daļu reizinājumu
(piemēram, $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot 2$)! =
- Izmanto logaritma īpašību $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$! =
- Sadali naturāllogaritma izteiksmi divos
saskaitāmajos (piemēram, $\frac{4+3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$)! =
- ln zīmi var iznest pirms robežas zīmes. =
- Izmanto 2. ievērojamo robežu! =
- Aprēķini naturāllogaritma vērtību! =

Funkcijas $y = x^n$ atvasinājums.

Dota funkcija $y = x^n$.

Uzdevums: Atrast un pierādīt $(x^n)'$.

$$y = x^n$$

- Logaritmē abas puses!
- Izmanto logaritma īpašību $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$
vienādības labajā pusē!
- Uzraksti abas puses kā atvasinājumu!
- Atvasini abas puses! Piebilde:
 $y = f(x)$, tāpēc $\ln y$ – salikta funkcijas, $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'$!
- Izsaki y' ! $y' =$
- Vienādības labajā pusē izsaki y ar x
(atceries, kāda funkcija ir y)! $y' =$
- Izmanto pakāpju īpašības, lai vienkāršotu izteiksmi! $y' =$

1. uzdevums Aprēķini funkcijas atvasinājumu!

a) $f(x) = x^6$

b) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$

d) $f(x) = \frac{4}{x} + 2$

e) $f(x) = \frac{3x+2}{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x^3}$

g) $f(x) = \ln x \cdot \sqrt{x}$

h) $f(x) = \frac{x^2 \ln x}{\sqrt{x^5}}$

4.4. temats: Eksponentfunkcijas atvasinājuma izvedums. $(\sin x)', (\cos x)', (tg x)', (ctg x)'$.
Atvasinājuma eksistence punktā. Atvasinājuma vērtība punktā.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Pierāda e^x atvasinājuma formulu.
Skaidro atvasinājuma eksistenci punktā.
Aprēķina atvasinājuma vērtību punktā, izmantojot atvasinājuma kārtulas.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Sāk ar mājas darbu. Pāros pārrunā, salīdzina, kas ir sanācis un veic secinājumus, kāds varētu būt funkcijas $\sin x$ atvasinājums. Pēc tam kopīgi to apspriež.

Secinājums: funkcijas $\sin x$ atvasinājuma grafiks līdzinās funkcijas $\cos x$ grafikam.
Skolotājs: *Tā arī ir, $(\sin x)' = \cos x$. Nepierāda, bet iedod arī pārējo trigonometrisko funkciju atvasinājuma formulas.*
 $(\cos x)', (tg x)', (ctg x)'$.

e^x
atvasinājums.

Skolotāja parāda funkcijas a^x atvasinājuma formulu un uzdod atrast specgadījuma e^x atvasinājumu. Dod 1-2 minūtes laika, pēc tam salīdzina.

Lietošana.

Atvasina visas funkcijas līdz šim, izmantojot arī atvasinājuma kārtulas (**1. uzdevums**).

Pēdējos piemēros parādās cits pieraksts – jāaprēķina atvasinājuma vērtība konkrētā punktā. Kopā ar skolotāju izrunā, kā to darīt – *līdzīgi kā aprēķina funkcijas vērtību konkrētā punktā.*

Skolēni, kas pabeidz ātrāk, var palīdzēt citiem skolēniem.

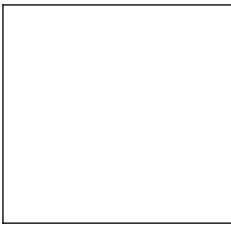
Atvasinājuma eksistence punktā.

Pēdējā no piemēriem nevar aprēķināt atvasinājumu.
Skolotāja: *Nevar aprēķināt vērtību šajā punktā. Atvasinājums punktā eksistē, ja vienpusējās robežas ir vienādas. Vai šajā piemērā tā ir? - nē.* Pieraksta likumu par vienpusējām robežām.

Iespējami ir vairāki gadījumi, kad konkrētā punktā neeksistē atvasinājums. Izrunāsim tos. Dod uzdevumu (2. uzdevums), kurā ir vairākas funkcijas un to grafiki. Uzdevums: atrast, kurā punktā atvasinājums neeksistē un kāpēc.

Skolotāja: *Atceramies, kāda ir atvasinājuma ģeometriskā jēga.*

- funkcija nav definēta punktā (nevar novilkt pieskari),
- funkcija ir pārtraukta punktā (piemēram, funkcija uzdota frag-



mentiem) – vienpusējās robežas nav vienādas,

- lauzuma punktus, jo var novilkt bezgalīgi daudz pieskaru (piem., moduļa funkcija),
- funkcija ir definēta, bet atvasinājums neeksistē punktā (piem., pieskare ir perpendikulāra x asij, $\sqrt[3]{x}$).

Mājas darbs

Mājas darbs: uztaisīt atvasināšanas formulu lapu, tajā iekļauj kārtulas, formulas.

Tāpēc iedod vēl $(\sqrt{x})'$, $(\log x)'$ formulas.

S: Varat atstāt vietu vēl vienai atvasināšanas kārtulai, kuru apskatīsim pēc nākamās stundas.

1. uzdevums. Aprēķini funkcijas atvasinājumu!

a) $(\sin x + \cos x)'$

b) $(x - \sin x)'$

c) $\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)'$

d) $(e^x \sin x)'$

e) $\left(\frac{2^x}{\cos x}\right)'$

f) $\left(\frac{36^x}{\ln 6}\right)'$

g) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) =$

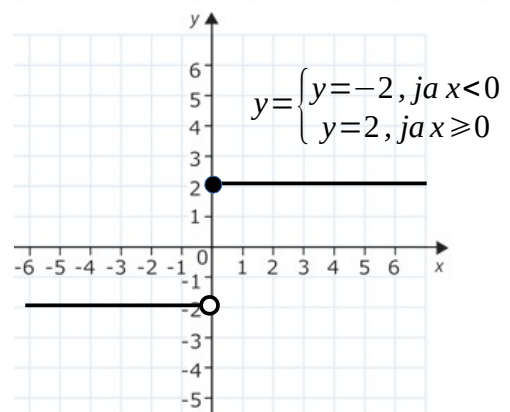
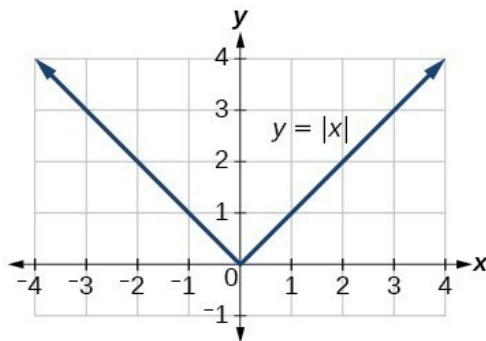
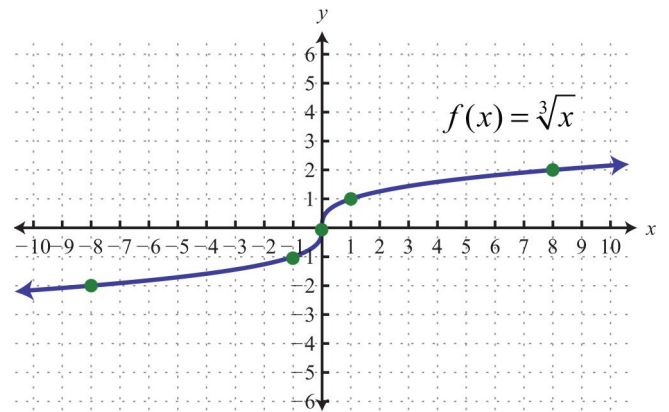
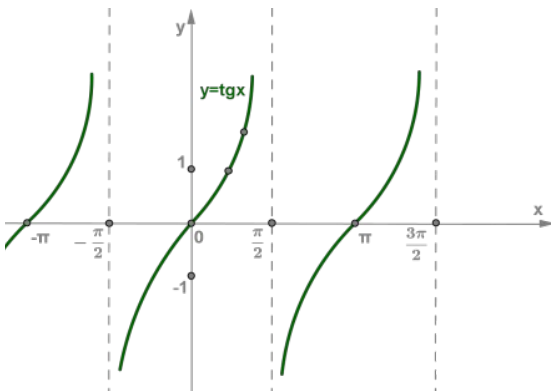
h) $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$

$f'(-0,5) =$

i) $f(x) = 1 - \operatorname{tg} x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

2. uzdevums. Kuros katras funkcijas punktos atvasinājums neeksistē? Kāpēc tā varētu būt?



4.5. temats: Atvasinājuma rēķini.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Atvasina funkcijas, kas veidotas ar algebriskām darbībām no $\ln x, \log x, x^n, \sqrt{x}, e^x, a^x, \sin x, \cos x, tg x, ctg x$, izmantojot konstantes, summas, reizinājuma un dalījuma kārtulas un atvasinājuma formulas

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Skolotāja: *Lai veicinātu atvasinājuma formulu atcerēšanos, dots uzdevums.*

Uz pāra viens komplekts (**spēle “Atvasinājuma formulas”**). Neskatoties nekur, saliek pareizas atvasinājuma formulas. Ir arī liekas atbildes. Pēc tam pārbauda, vai ir pareizi.

Lietošana.

Rēķina **1. uzdevumu**.

Paškontrolē.

Paškontroles darbs (piemēram, tests) – apmēram 10 minūtes.

Izvērtējums, AS pret saturu.

Izrunā neskaistos jautājumus.
Skolēns katrs pats sev pieraksta, kas vēl ir jāmācās.

Spēle “Atvasinājuma formulas”

$(\sin x)'$	$\cos x$
$(\cos x)'$	$-\sin x$
$(tg x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$(ctg x)'$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}$
$(\log_a x)'$	$\frac{1}{x \ln a}$
$(a^x)'$	$a^x \ln a$
$(e^x)'$	e^x
$(x^n)'$	$n x^{n-1}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\sin x$
$-\cos x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$
$-\frac{1}{\cos^2 x}$
x
$\frac{x}{\ln a}$
$a \ln a$
$e^x \ln a$
$n x^{n+1}$
$\frac{2}{\sqrt{x}}$

1. uzdevums. Aprēķini funkcijas atvasinājumu!

a) $y = \frac{1+3x^3}{x}$

b) $y = \frac{2x^3+x^4-6x^5+x^7}{2x^4}$

c) $y = \frac{(x+2)^2}{\sqrt{x+2}}$

d) $y = (x^3+x^2+x+1)(x-1)$

e) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

f) $y = 6 \sin x + 8 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{7} \cos x$

g) $y = 2x^4 - \frac{1}{x} + 10\sqrt[5]{x^4} + 12$

h) $y = 1 - \operatorname{ctg} x$

i) $y = x \sin x$

j) $y = \frac{\cos x}{x}$

k) $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$

l) $y = 2x^2 - 15$
 $y'(2)$

m) $y = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$
 $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

n) $y = x^2 + 2x \sin x \cos x$
 $y'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

o) $y = e^x \ln x$
 $y'(1)$

Paškontrole (tests izveidots quizziz.com)

1.

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2$$

$$f'(x) =$$

a) $4x^3 - 3x^2$

b) $x^3 - 3x^2$

c) $\frac{1}{4}x^3 - x^2$

d) $x^3 - 3x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 3x^2 - 5$

$$f'(x) =$$

a) $x^4 - 2x$

b) $\frac{2}{10}x^4 - 6x$

c) $2x^4 - 6x$

3. $g(x) = 3x - \frac{1}{x^2}$

$$g'(x) =$$

a) $3 - \frac{2}{x^3}$

b) $3 + \frac{2}{x}$

c) $3 - \frac{2}{x}$

d) $3 + \frac{2}{x^3}$

4. $y = 4x - \frac{2}{x^2}$

$$y' =$$

a) $4 + \frac{4}{x}$

b) $4 - \frac{4}{x^3}$

c) $4 - \frac{4}{x}$

d) $4 + \frac{4}{x^3}$

5. $\phi(x) = 3 \operatorname{tg} x$

$$\phi'(x) =$$

a) $\frac{3}{\cos^2 x}$

b) $\frac{1}{3 \cos^2 x}$

c) $-\frac{3}{\cos^2 x}$

d) $\frac{3}{\sin^2 x}$

6. $h(x) = \frac{1}{3} \cos x$

$h'(x) =$

a) $\frac{\sin x}{3}$

b) $-\frac{\sin x}{3}$

c) Nav norādīta pareizā atbilde.

7. $y = x - 2 \ln x$

$y' =$

a) $x - \frac{2}{x}$

b) $1 - \frac{1}{x}$

c) $1 - \frac{2}{x}$

d) $1 - 2x$

8. $f(x) = x \sin x$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

a) 0

b) 0,5

c) 1

d) 2

9. $z(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$

$z'(-1) =$

a) -1

b) 1

c) -3

d) 3

Atbildes:

1. b

4. d

7. c

2. c

5. a

8. c

3. d

6. b

9. d

4.6. temats: Saliktas funkcijas atvasinājums.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Saskata sakarību, kā atvasināt saliktu funkciju.
Atvasina saliktu funkciju.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Uzdevums atvasināt 4 funkcijas (saliktas), izmantojot pārveidojumus un atvasinājuma kārtulas (**1. uzdevums** 1. daļa)

Apjēgšana.

Atvasina tās pašas funkcijas kā saliktu funkciju (**1. uzdevums** 2. daļa).
1. piemēru apskata kopīgi pa soļiem.

Uzraksta sakarību, kā aprēķināt saliktas funkcijas atvasinājumu:

Ja $y=f(u)$ un $u=g(x)$, tad $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

VAI

Ja $y=f(g(x))$, tad $y'=f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

S: To sauc arī par ķēdes likumu. Līdzīgi notiek arī sarežģītāku funkciju atvasināšana, kas piemēram sastāv no 3 funkcijām. Šādi var atvasināt jebkuru (galīgu skaitu) saliktu funkciju.

Apskata piemēru $\sin^3(x+4)$. Uzsver, ka $\sin^3(x+4) = (\sin(x+4))^3$.

Lietošana.

Praktizē (**2. uzdevums**).

Mājas darbs

Katrs skolēns izdomā savu piemēru saliktai funkcijai uz lapiņas un to atvasina kladē.

1. uzdevums

1. daļa. *Izpildi norādītās darbības, lai varētu veikt atvasināšanu. Aizpildi tukšās vietas ar "summu, reizinājumu, dalījumu"!*

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) Atver iekavas, izkāpinot tās.
Atvasini kā _____. | $y = (3x - 1)^2 =$
$y' =$ |
| b) Izmanto logaritma īpašību.
Atvasini kā _____. | $y = \log_2 x^{14} =$
$y' =$ |
| c) Izmanto logaritma īpašību.
Atvasini kā _____. | $y = \log_2 \frac{x}{4} =$
$y' =$ |
| d) Izmanto trigonometrijas formulu.
Atvasini kā _____. | $y = \sin 2x =$
$y' =$ |
| e) Izmanto pakāpju īpašību.
Atvasini kā _____. | $y = 2^{x+3} =$
$y' =$ |

2. daļa. Saliktas funkcijas atvasinājums. *Aizpildi tabulu pēc soļiem!*

		$y = (3x - 1)^2$	$y = \log_2 x^{14}$	$y = \log_2 \frac{x}{4}$	$y = \sin 2x$	$y = 2^{x+3}$
1.	Uzraksti funkcijas kā saliktas funkcijas $y = f(g(x))$ daļas $g(x)$ un $f(x)$.	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$	$g(x) =$ $f(x) =$
2.	Pieņemsim, ka $u = g(x)$. Atrodi $\frac{du}{dx}$.					
3.	Ja $u = g(x)$, tad $y = f(g(x)) = f(u)$. Uzraksti $y = f(u)$. Atrodi $\frac{dy}{du}$.					
4.	Izmantojot 2. un 3. punktu, aprēķini $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.					

Salīdzini 1. daļā un 2. daļā iegūtos rezultātus!

Kā var atrast saliktas funkcijas $y = f(g(x))$ atvasinājumu?

2. uzdevums. Nosaki saliktas funkcijas atvasinājumu!

a) $y=(x^3-1)^6$

b) $y=x^2\sqrt{2x-1}$

c) $y=\cos 4x$

d) $y=3^{2x}$

e) $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg} x-x$

f) $y=2\sin^3 x^2$

g) $y=\log_{0,5}^2 x$

h) $y=(ax^2+bx+c)^n$

i) $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}$

4.7. temats: Atkārtojums. Funkcijas atvasinājums.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Atvasina funkcijas un saliktas funkcijas, izmantojot konstantes, summas, reizinājuma un dalījuma, saliktas funkcijas atvasināšanas kārtulas un atvasinājuma formulas.
Nosaka funkcijas pieskares virziena koeficientu dotā punktā.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Mājās bija uzdots uz lapiņas uzrakstīt savu saliktu funkciju un to atvasināt kladē.

Pāros samainās ar piemēriem un atrisina, pēc tam salīdzina, pārrunā, ja nesakrīt. Ja nepieciešams, skolotāja vai klases biedri palīdz vai arī pārbauda internetā, Google meklētājā ierakstot *derivative calculator* – skolēni uzzina par iespēju pārbaudīt savus rezultātus arī mājās.

Gatavošanās pārbaudes darbam.

Doti uzdevumi 3 līmeņos, lai gatavotos pārbaudes darbam. Skolēniem pieejami risinājumi, ar kuriem salīdzināt vai paskatīties, kas jādara tālāk.

3. līmeņa 3. uzdevuma veids iepriekš nav ticis apskatīts, mērķis: skolēni patstāvīgi sagatavojas pārbaudes darba grūtākajam uzdevumam. Skolotāja konsultē individuāli.

Skolotāja: *Katra līmeņa 3. uzdevums ir specifiskāks, ne tikai funkcijas atvasināšana, tos iesaku visiem apskatīties.*

AS pret saturu.

Skolotāja: *Paņemiet citu krāsu un uzdevumos atzīmējiet tos uzdevumus vai piemērus, kurus vēl nepieciešams mājās apskatīties, iemācīties, sa-
prast.*

1. līmenis

1. Nosaki funkcijas atvasinājumu!

a) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{2x}$

c) $y = 3^{\frac{1}{x}}$

b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$

d) $f(x) = 3 - 2e^{3-x}$

2. Aprēķini funkcijas atvasinājuma vērtību punktā!

a) $f(x) = \frac{2x^3 + x^4 - 6x^5 + x^7}{2x^4}, f'(2)$

b) $f(x) = \frac{4}{x+1}, f'(-2)$

c) $\varphi(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right), \varphi'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

3. Nosaki pieskares virziena koeficientu norādītajā punktā!

a) $f(x) = \frac{4}{x^2}, x_0 = -2$

b) $g(x) = 6\sqrt{x}, x_0 = 4$

2. līmenis

1. Nosaki funkcijas atvasinājumu!

a) $y = \frac{x^2}{2\sqrt[3]{x}}$

b) $h(x) = \frac{(2-x)^2}{x^3}$

c) $f(x) = (3x^2 + 1)(2x^2 + 3)$

d) $g(x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$

e) $g(x) = x^2 + \cos(x-1)$

2. Aprēķini funkcijas atvasinājuma vērtību punktā!

a) $x(t) = 3t^5 - \sqrt{t} + \frac{4}{t} - \frac{5t^6}{6} + 7, x'(1)$

b) $f(x) = \ln(3x+2), f'(-1)$

3. Pamato, kāpēc dotajos punktos neeksistē atvasinājums?

a) $f(x) = |2x-1|, x_0 = \frac{1}{2}$

b) $g(x) = \begin{cases} y=x, & \text{ja } x \geq 1 \\ y=x^2, & \text{ja } x < 1 \end{cases}, x_0 = 1$

c) $h(x) = \sqrt[3]{x+2}, x_0 = -2$

3. līmenis

1. Nosaki funkcijas atvasinājumu!

a) $y = \left(\frac{x}{1-x}\right)^3$

b) $y = 5^{\cos^2 \sqrt{x}}$

c) $f(x) = x^3 \ln x + \ln 4$

d) $f(x) = \ln(x \sin x)$

e) $g(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$

f) $f(x) = au^{3x} + \frac{2\sqrt{x}}{au} + \frac{u}{a^3}, f'(x)$

g) $f(u) = au^{3x} + \frac{2\sqrt{x}}{au} + \frac{u}{a^3}, f'(u)$

2. Aprēķini funkcijas atvasinājuma vērtību punktā!

a) $g(x) = \cos^3 x \sin x, g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) $f(x) = 3^{\ln x} + 3 \ln x + \frac{3}{\ln x}, f'(e)$

3. Izmantojot atvasinājuma definīciju, aprēķināt funkcijas atvasinājumu!

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$

b) $f(x) = \frac{-3}{x}$

Kritēriji

<i>Uzd. nr.</i>	<i>Kritērijs</i>	<i>Pun- kti</i>	<i>Kopā punkti</i>
1.	Nosaka apgalvojuma patiesumu.	1·6	6
2.	Uzraksta uzdevumu atbildes.	1·6	6
3.	a) Aprēķina funkcijas atvasinājumu.	1	20
	b) Aprēķina funkcijas atvasinājumu.	1	
	c) - k) Aprēķina funkcijas atvasinājumu bez kļūdām – 2 punkti. Aprēķinos pieļauta 1 kļūda – 1 punkts. Ir pieļautas vairāk kā 1 kļūda – 0 punkti.	2·9	
4.	a) Atvasina funkciju.	1	9
	Ievieto funkcijas atvasinājumā doto vērtību.	1	
	Aprēķina funkcijas atvasinājuma vērtību punktā.	1	
	b) Vērtēšana tāda pati, kā a) piemērā.	1·3	
c) Vērtēšana tāda pati, kā a) piemērā.	1·3		
5.	Ievieto atvasinājuma definīcijā doto funkciju.	1	3
	Vienkāršo izteiksmi.	1	
	Nosaka funkcijas atvasinājumu, aprēķinot robežu.	1	

5. temata "Funkcijas pētīšana" stundu plāni un materiāli

5.1. temats: Funkcijas monotonitāte.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Skaidro funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju.
Atrod funkcijas monotonitāti, izmantojot atvasinājumu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Uzdevums uz tāfeles: no grafika noteikt augšanas un dilšanas intervālu, noteikt pieskares virziena koeficientu punktā un uzzīmēt to pieskari
(1. uzdevums)

Skolotāja: Šodien mēs apskatīsim, kā šīs divas lietas ir saistītas: pieskares virziena koeficients jeb funkcijas atvasinājums un funkcijas monotonitāte.

Apjēgšana.

Skolēni pilda uzdevumu **(2. uzdevums)**, veic jau secinājumus par atvasinājuma saistību ar funkcijas monotonitāti.

Skolotāja parāda demonstrējumu (<https://www.desmos.com/calculator/p1ne3pj5as>), kā pieskare punktā ir saistīta ar funkcijas monotonitāti, kas ir vizuālais papildinājums 2. uzdevumam.

Frontāli izrunā sakarību starp funkcijas augšanu un dilšanu un atvasinājuma vērtību.

Skolotāja: Šī sakarība izpildās arī uz otru pusi jeb, ja atvasinājums ir negatīvs, tad funkcija dilst.

Skolēni pieraksta sakarības (pirmā dota pēc pilnā pieraksta, līdzīgi var rakstīt visas sakarības vai arī ar skolēniem vienoties par pierakstu):

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a; b) \Leftrightarrow f(x) \text{ ir augoša} \quad \forall x \in (a; b)$$

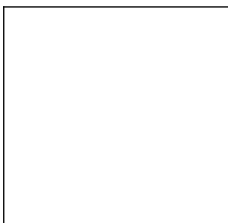
$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ ir dilstoša}$$

S: Ja ir nevis augoša, bet nedilstoša funkcija, kāda būs pieskare tajos punktos, kur funkcija ir konstanta? - paralēla x asij, tātad atvasinājums ir 0. Kopā ar skolēniem frontāli veic secinājumu par neaugošas un nedilstošas funkcijas sakarību ar atvasinājumu.

Uz tāfeles (skolēni vispirms paši uzraksta sakarības pēc iepriekšējā parauga):

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow$$



$f'(x)=0 \Leftrightarrow$
Pēc tam salīdzina:
 $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ir nedilstoša
 $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f(x)$ ir neaugoša
 $f'(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=C, C \in \mathbb{R}$

Lietošana.

Skolēni pilda **3. uzdevumu**, kurā nosaka monotonitāti funkcijai (1. piemēram uzraksta arī soļus, kas jāveic). Soļus salīdzina vispirms pāros, tad frontāli.

Iespēja, kā veidot pierakstu:

a) $f(x)=x^3-3x+4$

$$f'(x)=3x^2-x$$

$$f'(x)=3(x-1)(x+1)=0$$

$$x=\pm 1$$

$x \in (-\infty; -1)$	$x \in (-1; 1)$	$x \in (1; +\infty)$
-----------------------	-----------------	----------------------

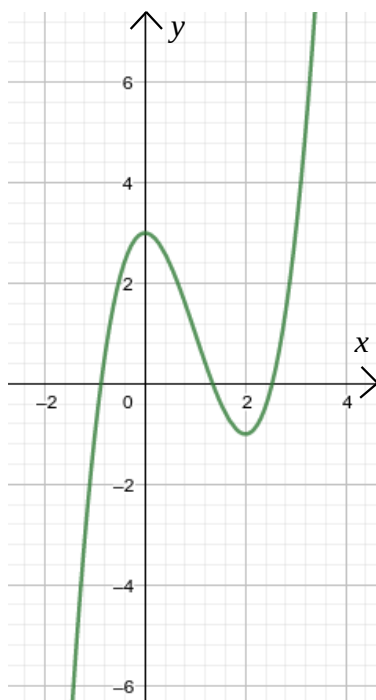
$f'(-2) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
--------------	-------------	-------------

$f(x)$ aug	$f(x)$ dilst	$f(x)$ aug
------------	--------------	------------

Soļi:

- 1) atvasina funkciju;
- 2) pielīdzina funkcijas atvasinājumu nullei un izveido intervālus;
- 3) nosaka atvasinājuma zīmi intervālos;
- 4) nosaka funkcijas monotonitāti intervālos.

1. uzdevums



1. Nosaki funkcijas $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ augšanas un dilšanas intervālus!

2. Nosaki pieskares virziena koeficientu punktā $x_0 = 3$!

3. Uzzīmē funkcijas pieskari punktā $x_0 = 3$!

2. uzdevums

1. Aizpildi tabulu, atvasinot funkciju $y = x^3 - 3x^2 + 3$ un nosakot tā vērtības dotajos punktos.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x)$						

2. Ko var novērot par atvasinājuma zīmi funkcijas augšanas intervālos?

3. Ko var novērot par atvasinājuma zīmi funkcijas dilšanas intervālā?

4. Kādu sakarību saskati starp funkcijas atvasinājuma zīmi un funkcijas monotonitāti?

3. uzdevums Atrodi intervālus, kuros funkcija aug un dilst! Pie a) piemēra uzraksti soļus!

a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$

$f'(x) =$

Soļi:

1) atvasina funkciju;

2)

3)

4)

b) $f(x) = -x^3$ c) $f(x) = 2x^2 - 4$

d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

e) $f(x) = \sqrt{x} - 3x$

5.2. temats: Funkcijas ekstrēmi.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Atklāj, kā ar funkcijas atvasinājumu var noteikt funkcijas ekstrēmus. Atrod un atšķir kritiskos un ekstrēma punktus, izmantojot atvasinājumu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Atkārtoti, atklāj terminus: *maksimuma punkts, minimuma punkts, maksimums, minimums, lokālais maksimums, lokālais minimums, ekstrēmi, ekstrēma punkts*. (Dotas definīcijas un skaidrojumi, kas jāsaliek pretī viens otram – var būt gan fiziski izgrieztas papīra lapiņas, gan elektroniski izveidota aktivitāte, piemēram, Classflow)
(1. uzdevums).

Apjēgšana.

Skolotāja: *Izmantosim iepriekš aplūkoto funkciju $y = x^3 - 3x^2 + 3$ un tās grafiku. Ko mēs iepriekš pētījām šai funkcijai? - monotonitāti.*

Tagad aplūkosim arī ekstrēmus ar atvasinājuma palīdzību.

2. uzdevums pāros vai individuāli. Pēc tam kopīgi veic secinājumus par atvasinājuma saistību ar ekstrēmiem.

Ja funkcijas f atvasinājums $f'(x_0) = 0$ vai neeksistē un

- $f'(x)$ ejot caur punktu x_0 maina zīmi no + uz –, tad $f(x_0)$ ir maksimums un x_0 - maksimuma punkts;
- $f'(x)$ ejot caur punktu x_0 maina zīmi no – uz +, tad $f(x_0)$ ir minimums un x_0 - minimuma punkts.

Skolotāja parāda pretpiemēru ar $y = x^3$, tāpēc nonāk pie secinājuma, ka nosacījumus var sadalīt nepieciešamajā un pietiekamajā nosacījumā un apskata kritisko punktu definīciju.

Punkti, kuros $f'(x) = 0$ vai $f'(x)$ neeksistē, ir kritiskie punkti.

Lietošana.

3. un 4. uzdevums.

AS pret saturu

Katram individuāli dots uzdevums:

Nosaki funkcijas ekstrēma punktus! $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$

1. uzdevums

maksimuma punkts	Funkcijas $f(x)$ punkts x_0 , ja šajā punktā $f(x_0) \geq f(x)$ visiem x .
minimuma punkts	Funkcijas $f(x)$ punkts x_0 , ja šajā punktā $f(x_0) \leq f(x)$ visiem x .
(globālais) maksimums	Funkcijas vērtība $f(x_0)$, ja $f(x_0) \geq f(x)$ visiem x .
(globālais) minimums	Funkcijas vērtība $f(x_0)$, ja $f(x_0) \leq f(x)$ visiem x .
lokālais maksimums	Funkcijas $f(x)$ punkts x_0 , ja eksistē tāda punkta x_0 apkārtnē, kurā $f(x_0) \geq f(x)$ visiem x no punkta apkārtnes.
lokālais minimums	Funkcijas $f(x)$ punkts x_0 , ja eksistē tāda punkta x_0 apkārtnē, kurā $f(x_0) \leq f(x)$ visiem x no punkta apkārtnes.
ekstrēmi	Jebkuri funkcijas $f(x)$ maksimumi un minimumi (globāli un lokāli).
ekstrēma punkts	Funkcijas globālā vai lokālā maksimuma vai minimuma punkts.

2. uzdevums

Dota funkcija $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

1. Nosaki funkcijas lokālā maksimuma un minimuma koordinātas!
2. Uzzīmē funkcijas atvasinājuma $f'(x)$ grafiku.
3. Kāds ir funkcijas atvasinājums minimuma un maksimuma punktos?
4. Kāda ir atvasinājuma zīme no maksimuma punkta pa kreisi?

pa labi?

5. Kāda ir atvasinājuma zīme no minimuma punkta pa kreisi?

pa labi?

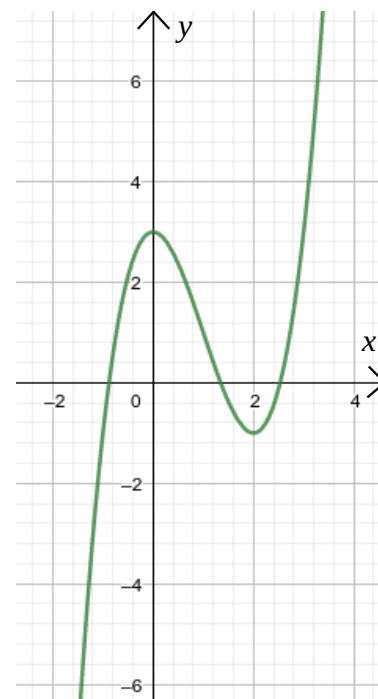
Dota funkcija $f(x) = |x|$.

6. Nosaki funkcijas minimumu!
7. Kāds ir atvasinājums šajā punktā?
8. Kāda ir atvasinājuma zīme no minimuma punkta pa kreisi?

pa labi?

Secini:

9. Kāds ir atvasinājums ekstrēma punktos? Vai ir iespējami citi gadījumi?
10. Kā atvasinājums palīdz noteikt ekstrēma punktus?



3. uzdevums. Kuri no punktiem -3 ; -2 ; -1 ; 2 ; 3 un 5 ir funkcijas $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ kritiskie punkti?

4. uzdevums. Nosaki funkcijas ekstrēma punktus! Atbildi pārbaudi, izmantojot IT!

a) $f(x) = 4x^2 - 8$

b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 1$

c) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$

*d) $f(x) = x + 4 \cos \frac{x}{2}$

5.3. temats: 2. kārtas atvasinājums. Funkcijas izliekums, ieliekums. Pārlietuma punkti.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Aprēķina funkcijas 2. kārtas atvasinājumu.
Atrod funkcijas izliekuma un ieliekuma intervālus, pārlietuma punktus.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Skolotāja: Šodien stunda tiks sadalīta divās daļās. Sāksim ar to, kas jau jums ir zināms. Ko no šīm lietām protam aprēķināt? Uzdevumi doti uz tāfeles, skolēni individuāli kladē atrisina uzdevumus, kurus prot:

- ✓ Aprēķini funkcijas $y = \sin^3 2x$ atvasinājumu y' !
- ✓ Nosaki funkcijas $f(x) = \frac{x^2+9}{3x}$ kritiskos punktus!
- ✓ Aprēķini y'' funkcijai $y = \frac{3}{2} \ln^2 x$!
- ✓ Noskaidro, vai funkcija $y = \ln(x^2-1)$ punktā $x_0 = -2$ ir augoša vai dilstoša?
- ✓ Aprēķini y' funkcijai $y = \frac{3}{2} \ln^2 x$!
- ✓ Nosaki, vai punkts $x_0 = 0$ ir funkcijas $f(x) = \frac{x^4+3}{2}$ ekstrēms!

Apjēgšana.

Salīdzina uzdevumu izpildi (skolotājs var parādīt tikai rezultātus, ja skolēniem nav jautājumu).

Jautā, vai kāds atrisināja arī $\left(\frac{3}{2} \ln^2 x\right)''$ (iespējams, kāds intuitīvi jau atrisināja, tad ļauj pastāstīt pārējiem).

Otrās kārtas atvasinājums ir pirmās kārtas atvasinājuma atvasinājums. Pieraksta: y'' ; $f''(x)$; $\frac{d^2 y}{dx^2}$ vai $y^{(2)}$.

Skolotāja: Kad eksistē 2. kārtas atvasinājums? Kā izskatīsies 2. kārtas atvasinājums pēc atvasinājuma robežas? -

$$f''(x) = (f'(x))' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Līdzīgi definē arī augstāku kārtu atvasinājumus! Piemēram, y'''' ; y^{iv} ; y^v ; $y^{(18)}$; $y^{(n)}$.

Lietošana.

Aprēķini funkcijas norādītās kārtas atvasinājumus!

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 5$, $f''(x)$

b) $y=e^x, y^{(29)}(5)$ - S pajautā, kāds būtu $y^{(n)}$.

Aktualizācija

Skolotāja: *Tagad sāksies stunda 2. daļa. Aplūkosim dažus terminus, kurus būs nepieciešams zināt.*

Skolēni pēc izpratnes savieno definīcijas ar grafikiem, kas dotas uz tāfeles, un pieraksta definīcijas kladē kopā ar grafiku skicēm **(1. uzdevums)**.

Apjēgšana

Skolotāja iedod teorēmas, kā noteikt funkcijas ieliektības, izliektības intervālus un pārlietuma punktu.

Ja funkcijai $y=f(x)$ intervālā $(a; b)$ eksistē $f''(x)$ un visiem x ir spēkā, ka

- $f''(x) < 0$, tad grafiks šajā intervālā ir izliekts,
- $f''(x) > 0$, tad grafiks šajā intervālā ir ieliekts.

Skolotāja: *Kas varētu būt, ja $f''(x_0)=0$? - Punkts x_0 , kurā otrās kārtas atvasinājums ir 0 vai neeksistē, ir potenciālais pārlietuma punkts. Jāpārbauda, vai notiek $f''(x)$ zīmju maiņa, ejot cauri punktam x_0 .*

Kopīgi ar klasi apskata piemēru, kuru apskatīja iepriekš pie monotoni-tātes un ekstrēmiem.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0, \text{ ja } x = 1$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	-	0	+

Tātad $x=1$ ir pārlietuma punkts, funkcijas grafiks intervālā $(-\infty; 1)$ ir izliekts, bet intervālā $(1; +\infty)$ - ieliekts.

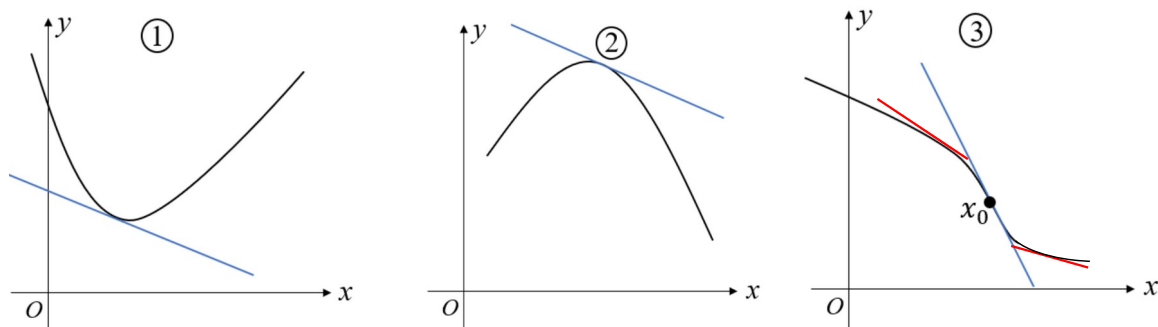
Skolotāja rosina apskatīties iepriekšējā stundā zīmēto grafiku un ievērot, kurā vietā ir pārlietuma punkts šai funkcijai.

Lietošana un AS

Uzdevums individuāli uz lapiņām (vai arī skolēni var pildīt kladē un pēc izpildes nosūtīt skolotājam *Whatsapp* čatā vai citā veidā – skolotājs var dot AS par izpildi.).

1. Vai funkcija $y=x^2$ ir izliekta vai ieliekta?
2. Nosaki pārlietuma punktus funkcijai $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$!

1. uzdevums



1. Funkcijas $y=f(x)$ grafiku sauc par ieliektu kādā intervālā, ja tas novietots virs pieskares, kas vilkta katrā intervāla punktā.
2. Funkcijas $y=f(x)$ grafiku sauc par izliektu kādā intervālā, ja tas novietots zem pieskares, kas vilkta katrā intervāla punktā.
3. Punktu, kurā mainās ieliektības un izliektības intervāli, sauc par pārliekuma punktu.

5.4. temats: Atvasinājuma pielietojums funkcijas pētīšanā.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Atrod funkcijas pārliekuma punktus, izmantojot 2. kārtas atvasinājumu.
Novērtē, vai ir iespējams izmantot 2. kārtas atvasinājumu funkcijas pētīšanā.
Izmanto 1. un 2. kārtas atvasinājumu funkciju pētīšanā.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija.

Stundu sāk ar uzdevumu pāros, lai atsvaidzinātu zināšanas (ieteicams, skolēniem pašiem meklēt kladē aprēķinu gaitu, ja neatceras, kā tos veic):

Dota funkcija $y = x^3 + 6x^2 + 9x$. Nosaki:

- $\frac{d^2 y}{dx^2}$,
- pārliekuma punktu,
- izliekuma un ieliekuma intervālus!

S: *Ko mēs vēl protam noteikt šai funkcijai?* - augšanas un dilšanas intervālus, ekstrēma punktus.

Nosaka visas nosauktās lietas. Īpašu uzmanību pievērš pierakstam, ko iespējams veidot ar tabulas palīdzību (zemāk redzams paraugs). Funkciju var arī uzskicēt pēc izpētītajiem datiem.

Lietošana.

1. uzdevums.

Kopsavilkums

Skolēni apkopo visu informāciju, kā var pētīt funkciju ar atvasinājuma palīdzību, aizpildot shēmu.

Paraugš. Iespējamais pieraksts funkciju pētīšanā.

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$y' = 0, \text{ ja } x = 0, x = 2$$

$$y'' = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$y'' = 0, \text{ ja } x = 1$$

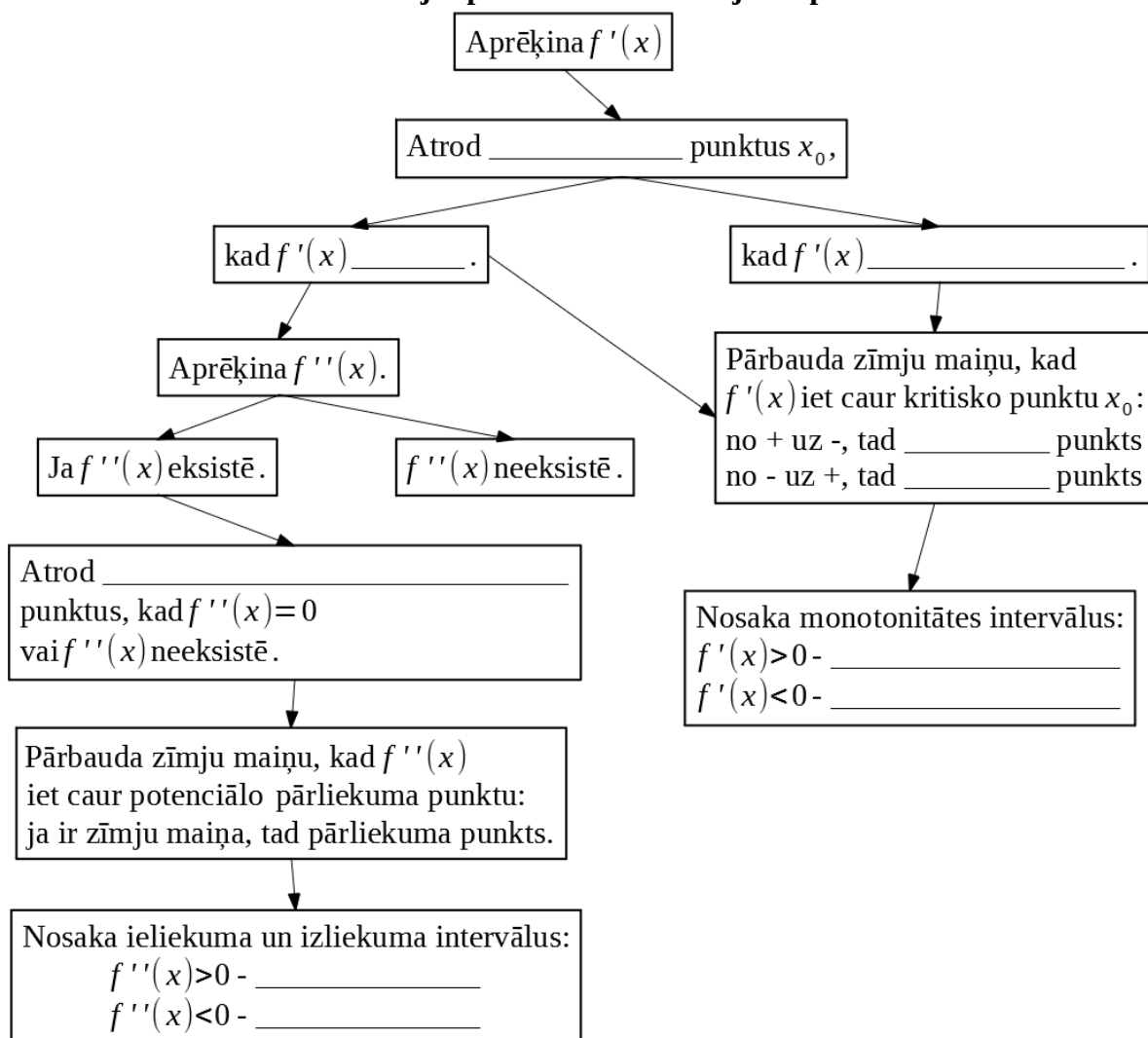
x	$(-\infty; 0)$	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	-	-	-	0	+
y''	-	-	-	0	+	+	+
secinājumi	aug izliekts	max punkts	dilst izliekts	pārliekuma punkts	dilst ieliekts	min punkts	aug ieliekts

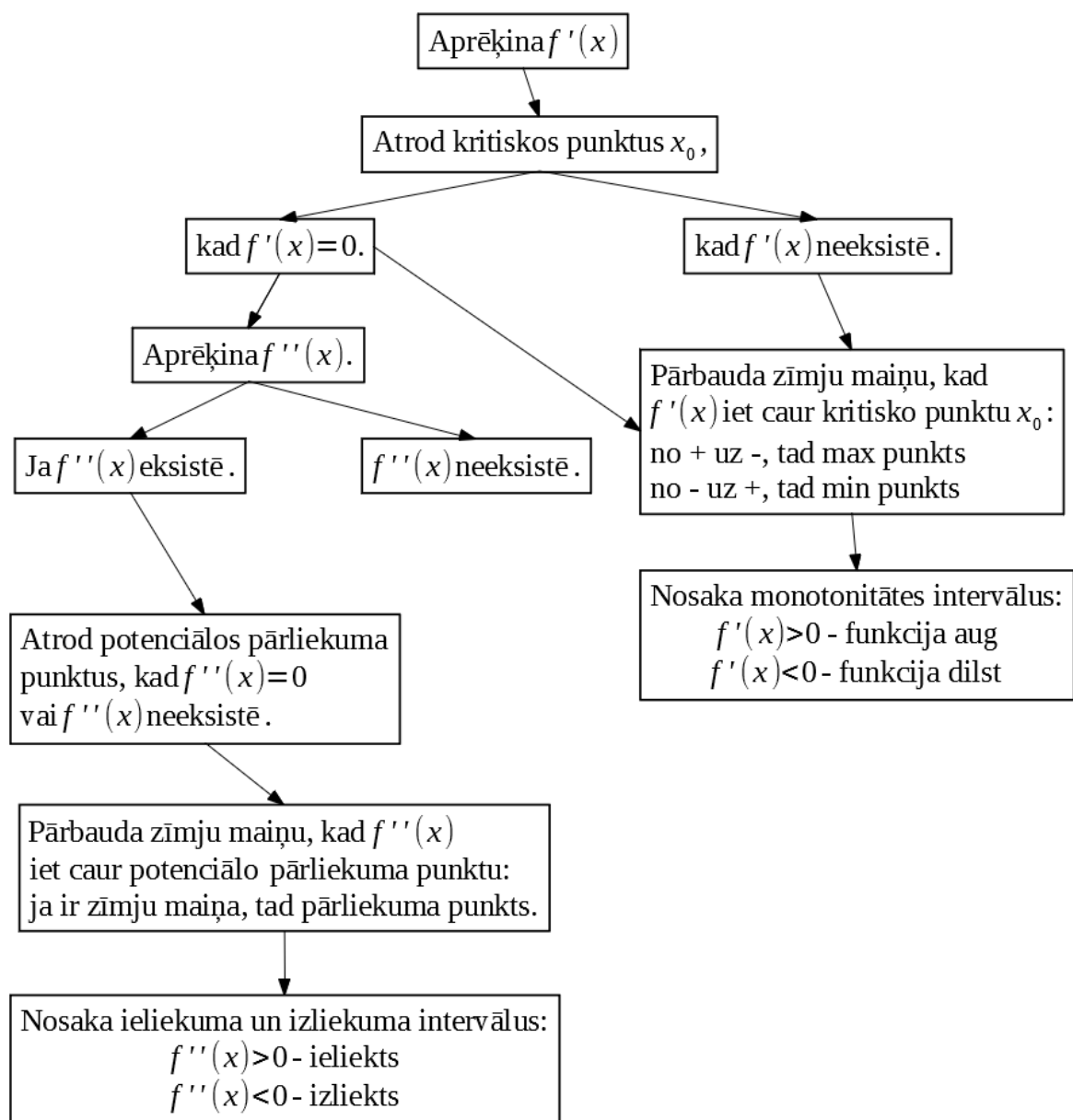
1. uzdevums. Nosaki funkcijas ekstrēmumus un pārliekuma intervālus!

a) $y = 2x^3 - x^4$

b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Shēma. Funkcijas pētīšana ar atvasinājuma palīdzību.





5.5. temats: Funkcijas grafika konstruēšana. Horizontālā un vertikālā asimptota..

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Zīmē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu.
Nosaka funkcijas horizontālo un vertikālo asimptotu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija

Skolotāja: *Kā parasti pēta funkcijas grafikus?* Skolēni pāros atceras un pieraksta kladē, pēc tam pārrunā klasē (var iet pa vienam uzrakstīt uz tāfeles, līdz viss ir uzrakstīts).

Nosaka:

- $D(f)$ jeb definīcijas apgabalu,
- paritāti,
- minimumus un maksimumus,
- monotonitāti (augšanas un dilšanas intervālus).

Skolotāja: *Ko mēs varam noteikt ar atvasinājuma palīdzību?*

Tiek pārrunāts, ka ar atvasinājumu prot atrast ekstrēma punktus, noteikt monotonitāti un vēl papildu arī pārlikuma punktus. Vērtību apgabalu atrod, apskatot tās x vērtības, ar kurām funkcija neeksistē.

Skolotāja: *Līdzīgi pēc šāda plāna darbosimies arī šodien ne tikai, lai noteiktu šīs visas lietas, bet arī konstruētu funkcijas grafiku.*

Apjēgšana

Frontāli apskata piemēru:

a) $f(x) = 4x^2 - 0,5x^4$

Horizontālā un vertikālā asimptota

Dots piemērs:

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$

Skolēni patstāvīgi nosaka ekstrēmus, pārlikuma punktus un monotonitāti.

Skolotāja: *Kā ir ar vērtību apgabalu?*

Nosaka, ka saucējs nevar būt 0, tātad $x \neq 0$. Skolēni uzzīmē koordinātu plakni un, kā jau iepriekš zināms, uzzīmē taisni $x=0$ ar pārtrauktu līniju.

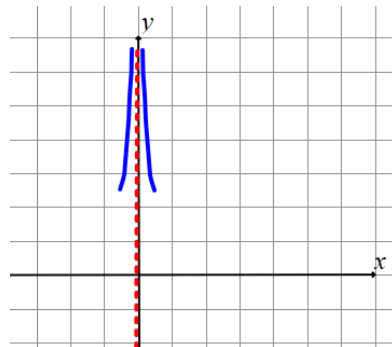
Skolotāja: *Lai uzzīmētu grafiku, jānoskaidro, kā funkcija uzvedas, kad tā tiecas uz šo punktu. Kā mēs to varam noskaidrot?* – ar robežu.

Turklāt jāaplūko divpusējās robežas, piemēram funkcijai $y = \operatorname{tg} x$ divpusējās robežas ir dažādas. Skolotāja uzskatāmībai uzzīmē fragmentu

no funkcijas $y = \operatorname{tg} x$ grafika.

Apskata dotajam piemēram divpusējās robežas, kad $x \rightarrow 0-0$ un $x \rightarrow 0+0$ (skolēniem var atgādināt, ka pie funkcijas robežām jau tika runāts par vertikālo asimptotu).

Skolēni kopā ar skolotāju frontāli konstruē grafiku no visa zināmā.



Nonāk pie secinājuma, ka nav zināms, līdz kādai funkcijas vērtībai dilst grafika labā puse vai no kurienes sāk augt kreisā puse.

Skolotāja: *Kā tad varam noteikt, kā funkcijas uzvedas, kad $x \rightarrow +\infty$ un $x \rightarrow -\infty$? – ar robežu.*

Aplūko funkcijas abas robežas un nonāk pie secinājuma, ka tiecas uz 1. Ar to arī papildina grafika konstrukciju.

Pieraksta definīcijas:

Funkcijas $y = f(x)$ vertikālā asimptota ir taisne $x = a$, ja:

1) $a \notin D(f)$

2) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$ vai $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$

Funkcijas horizontālā asimptota ir taisne $y = b$, ja $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Mājas darbs

Dota funkcija. Nosaki tās horizontālās un vertikālās asimptotas.

c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 18}$

5.6. temats: Funkcijas grafika konstruēšana. Slīpā asimptota.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Uzraksta soļus funkcijas pētīšanai.
Konstruē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Mājas darbs

Bija dots mājas darbs: Dota funkcija. Nosaki tās horizontālās un vertikālās asimptotas.

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 18}$$

Klasē salīdzina atbildes un risinājumu un pārbauda, piemēram, desmos.com, noteiktās asimptotas.

Skolotāja: *Turpināsim aplūkot, kā konstruēt funkcijas grafiku. Stundas beigās pēc dažādiem piemēriem uzrakstīsim plānu, kā konstruēt funkcijas grafiku.*

Slīpā asimptota

Apskatīsim gadījumu, kad nav horizontālā asimptota un $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ nesasnāk konstante b .

$$d) f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

Jāsaprot, kā funkcija uzvedas, kad $x \rightarrow +\infty$ un $x \rightarrow -\infty$. Aplūko robežas, kuras iznāk $\pm\infty$.

Skolotāja parāda, piemēram, desmos.com, kā izskatās grafiks un norāda, ka tur atrodas slīpā asimptota. Skolēni pieraksta, ka ir iespējama slīpā asimptota.

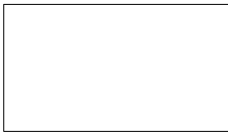
S: *Šādus gadījumus sīkāk neapskatīsim. Mūsu pārējie piemēri būs ar vertikālo un horizontālo asimptotu.*

S: *Ir arī gadījumi, kad robežas ir $\pm\infty$, bet nav slīpās asimptotas. Piemēram, visiem zināma funkcijas ir $y=x^2$, $y=x^3$ un robežas ir $\pm\infty$, bet slīpo asimptotu nav.*

Kopsavilkums

Frontāli tiek izveidots plāns, kā konstruēt funkcijas grafiku:

- 1) nosaka $D(f)$,
- 2) nosaka paritāti ($f(-x)=f(x)$ vai $f(-x)=-f(x)$),
- 3) nosaka krustpunktus ar asīm,
- 4) nosaka ekstrēma punktus ar $y'=0$ un monotonitātes intervālus,
- 5) nosaka pārliekuma punktus ar $y''=0$ un izliektības un ieliektības intervālus,



- 6) nosaka vertikālās asimptotas,
- 7) nosaka horizontālās asimptotas,
- 8) uzzīmē grafiku.

Lietošana

Konstruēt funkcijas grafiku:

d) $y = \frac{x}{4+x^2}$.



Kopīgi izpilda visus soļus ar precīzu pierakstu un grafika konstruēšanu.

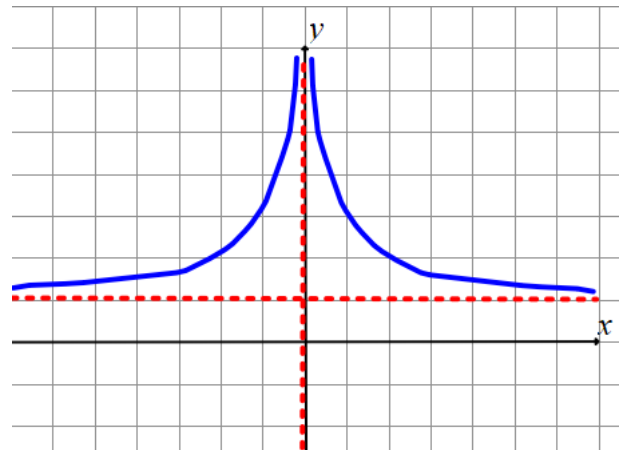
Risināšanas paraugs

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^2}$$

- 1) $D(f) \quad x \neq 0$
- 2) $f(-x) = \frac{(-x)^2+2}{(-x)^2} = \frac{x^2+2}{x^2}$ – pāra funkcija
- 3) $\frac{x^2+2}{x^2} = 0$
 $x^2+2=0, x \in \emptyset$ – nav krustpunktu ar asīm
- 4) $y' = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)' = 2 \cdot (-2) \cdot x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$
 $-\frac{4}{x^3} = 0, x \in \emptyset$ – nav ekstrēmu
- 5) $y'' = \left(-\frac{4}{x^3}\right)' = (-4) \cdot (-3) \cdot x^{-4} = \frac{12}{x^4}$
 $\frac{12}{x^4} = 0, x \in \emptyset$ – nav pārliekuma punktu
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x^2+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-0} 1 + \frac{2}{x^2} = +\infty$
 paritātes dēļ tāpat jābūt arī, kad $x \rightarrow 0+0$:
 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x^2+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0+0} 1 + \frac{2}{x^2} = +\infty$
- 7) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = (1+0) = 1$

8) Jāuzzīmē grafiks.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y'	+	Pārtraukuma punkts	-
y''	+		+
Sec.	aug ieliekts 		dilst ieliekts 



5.7. temats: Atkārtojums. Funkcijas pētīšana.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts	Nosaka funkcijas monotonitātes intervālus, kritiskos un ekstrēma punktus, izmantojot funkcijas 1. kārtas atvasinājumu. Nosaka funkcijas pārlietuma punktus un izliektību, ieliektību, izmantojot funkcijas 2. kārtas atvasinājumu. Nosaka funkcijas pārtraukuma punktus (vertikālās asimptotas) un horizontālās asimptotas, ja tādas ir. Konstruē funkcijas grafiku, izmantojot atvasinājumu.
---	---

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija	Skolēniem tiek izdalīta darba lapa Gatavošanās pārbaudes darbam . Skolēni izlasa <i>Sasniedzamos rezultātus</i> . Skolotāja jautā, vai visi termini un uzrakstītais ir saprotams. Ja nepieciešams, paskaidro.
Lietošana	Skolēni individuāli pilda uzdevumus. Pēc 1. uzdevuma tiek salīdzinātas atbildes, izrunātas neskaidrās lietas. 2. uzdevumā skolēni izvēlas, kuru grafiku konstruēt (a piemērs ir vieglāks, bet b piemērs – grūtāks). 2. uzdevuma izveidotos grafikus skolēni salīdzina ar skolotājas sagatavotu zīmējumu. Ja nepieciešams, meklē kļūdu risinājumā, salīdzinot arī risinājumu.
AS pret saturu	Skolēni pie katra uzdevuma pieraksta, uz kuru <i>Sasniedzamo rezultātu</i> attiecas konkrētais piemērs. Stundas beigās skolotāja var likt skolēniem apvilkt tos piemērus, kuri sagādāja grūtības.

**Gatavošanās pārbaudes darbam.
Funkcijas pētīšana ar atvasinājumu.**

Sasniedzamie rezultāti:

1. Nosaku funkcijas monotonitātes intervālus, kritiskos un ekstrēma punktus, izmantojot funkcijas 1. kārtas atvasinājumu.
2. Nosaku funkcijas pārlietuma punktus un izliektību, ieliektību, izmantojot funkcijas 2. kārtas atvasinājumu.
3. Nosaku funkcijas pārtraukuma punktus (vertikālās asimptotas) un horizontālās asimptotas, ja tādas ir.

Pildot uzdevumus, pie katra piemēra pieraksti, uz kuru sasniedzamo rezultātu tas ir attiecināms!

1. uzdevums. Uzraksti atbildi!



a)	Izmantojot funkcijas atvasinājuma grafiku, nosaki funkcijas augšanas intervālus.	
b)	Izmantojot funkcijas atvasinājuma grafiku, nosaki funkcijas dilšanas intervālus.	
c)	Izmantojot funkcijas atvasinājuma grafiku, nosaki funkcijas ekstrēma punktus.	
d)	Izmantojot funkcijas atvasinājuma grafiku, nosaki funkcijas kritiskos punktus.	
e)	Kāda atšķirība ir starp jēdzieniem <i>funkcijas ekstrēma punkts</i> un <i>funkcijas ekstrēms</i> ?	
f)	Ar kādu $f''(x)$ vērtību (poz./neg.) funkcijas grafiks ir ieliekts?	
g)	Nosaki funkcijas $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$ pārlietuma punktu.	
h)	Kāda ir funkcijas $f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 9}$ grafika horizontālā asimptota?	

2. uzdevums. Konstruē dotās funkcijas grafiku!

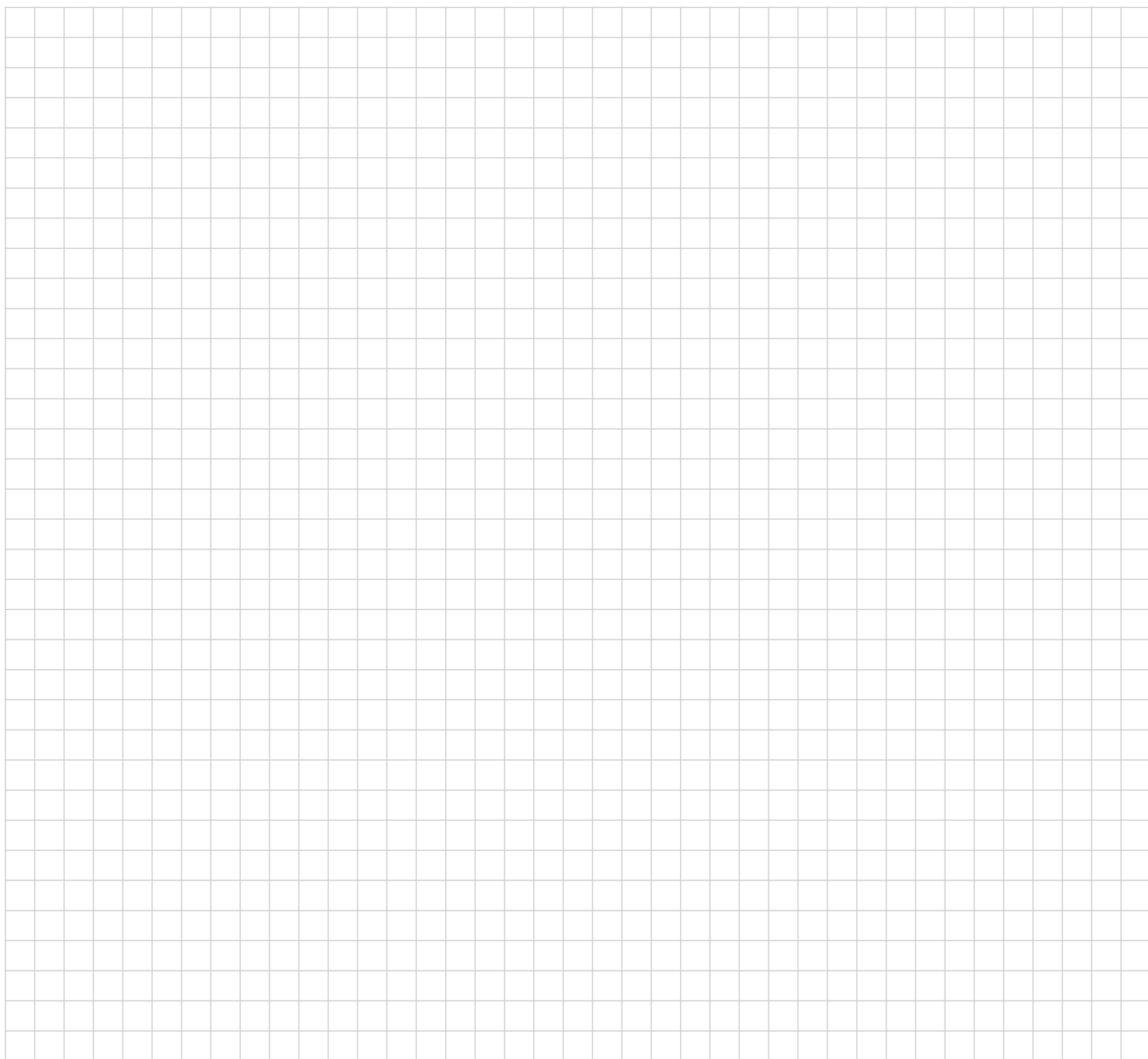
a) $f(x) = -x^3 + 3x + 2$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x^2}$

2. uzdevums (____/ 21 punkti)

Konstruē dotās funkcijas grafiku! Parādi visus aprēķinus!

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$$



3. uzdevums (____/ 3 punkti)

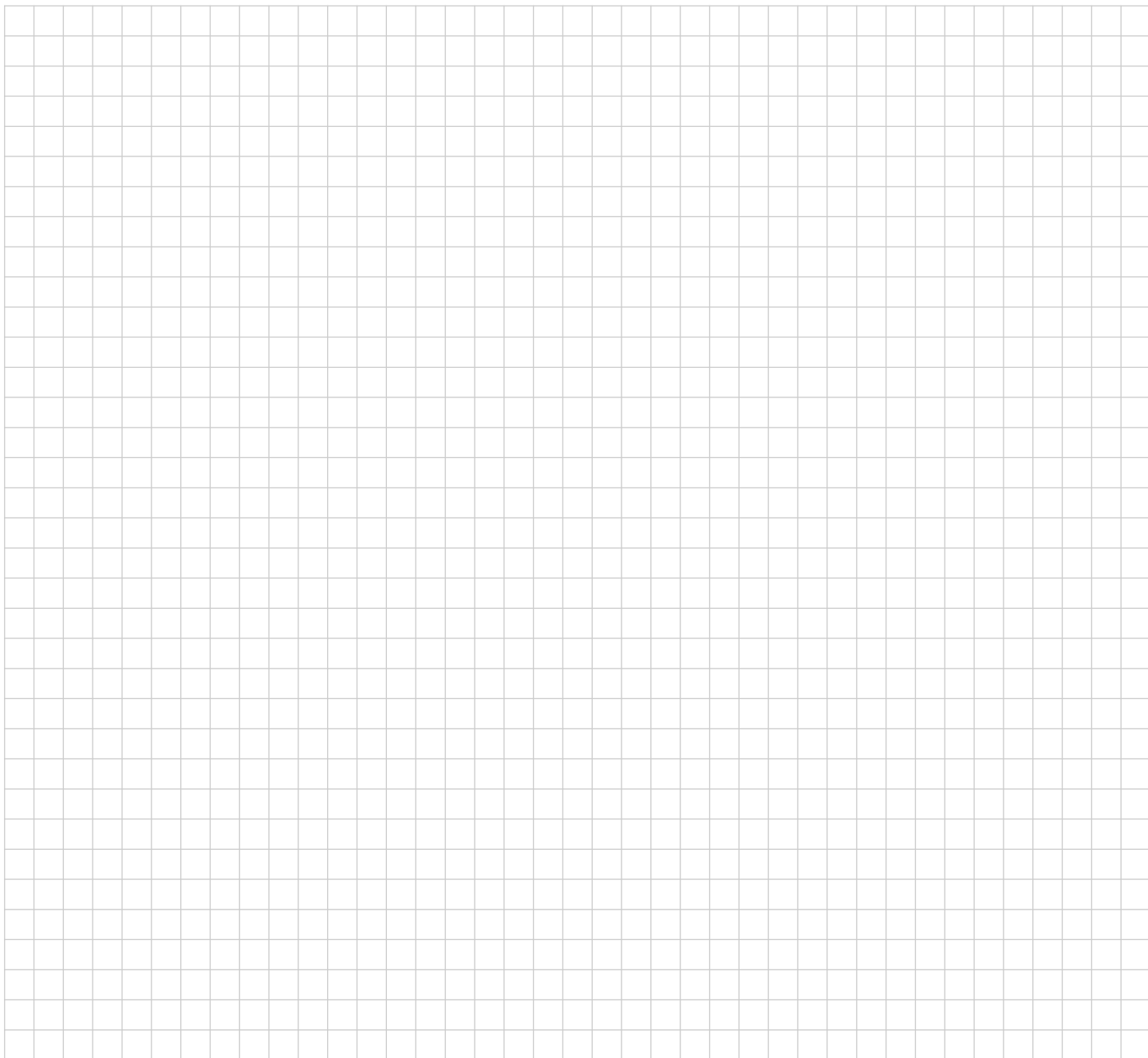
Pierādi, ka visām reālām x vērtībām funkcija $f(x) = 3x - \sin x$ ir augoša!



2. uzdevums (____/ 21 punkti)

Konstruē dotās funkcijas grafiku! Parādi visus aprēķinus!

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3$$



3. uzdevums (____/ 3 punkti)

Pierādi, ka visām reālām x vērtībām funkcija $f(x) = \sin x - 3x$ ir dilstoša!



Kritēriji

<i>Uzd . nr.</i>	<i>Kritērijs</i>	<i>Punkti</i>	<i>Kopā punkti</i>
1.	Nosaka augšanas (dilstanas) intervālus no atvasinājuma grafika.	1·2	8
	Nosaka kritiskos punktus no atvasinājums grafika (par katriem diviem – 1 punkts).	1·2	
	Nosaka ekstrēma punktus no atvasinājums grafika.	1	
	Nosaka funkcijas vertikālās asimptotas.	1	
	Nosaka, ar kādu $f''(x)$ vērtību funkcijas ir izliekta (ieliekta).	1	
	Nosaka funkcijas horizontālo asimptotu.	1	
2.	Nosaka funkcijas grafika krustpunktus ar x asi.	1	21
	Aprēķina funkcijas 1. kārtas atvasinājumu.	1	
	Nosaka kritiskos punktus.	1	
	Aprēķina funkcijas 2. kārtas atvasinājumu.	1	
	Nosaka iespējamās pārliekuma punktus.	1	
	Sakārto intervālus un visus kritiskos punktus, kurus jāizpēta (piemēram, tabulā).	1	
	Nosaka $f'(x)$ zīmi intervālos starp kritiskajiem punktiem.	1·3	
	Nosaka $f''(x)$ zīmi intervālos starp iespējamajiem pārliekuma punktiem.	1·3	
	Veic secinājumus par visiem kritiskajiem punktiem.	1·3	
	Veic secinājumus par intervāliem starp kritiskajiem punktiem (nosaka monotonitāti un ieliektību, izliektību).	1·4	
Aprēķina funkcijas vērtību ekstrēma un pārliekuma punktos.	1		
Konstruē funkcijas grafiku.	1		
3.	Atvasina funkciju.	1	3
	Pierāda, ka funkcijas visiem reāliem x ir augoša (dilstoša), pamatojot ar sakarību starp 1. kārtas atvasinājumu un funkcijas monotonitāti un kāpēc iegūtā izteiksme $f'(x)$ vienmēr būs pozitīva (negatīva) (2 punkti – pilnīgs pamatojums, 1 punkts – daļējs pamatojums, 0 punkti – nav pamatojuma vai tas ir nepareizs).	2	

6. temata "Atvasinājuma pielietojums" stundu plāni un materiāli

6.1. – 6.3. temats: Atvasinājuma pielietojums ģeometrijā, fizikā, ekonomikā.

Laiks: 3 stundas pēc kārtas, 120 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Vada stundu.
Skaidro atvasinājuma pielietojumu konkrētajā jomā.
Izmanto atvasinājumu konkrētās jomas uzdevumos.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Stundu vadīšana.

Skolotāja kādā no iepriekšējām stundām (ieteicams vismaz nedēļu pirms šīs stundas) pastāsta skolēniem, ka ir iespējams nopelnīt atzīmi, vadot stundu (ieteicams pāros, ja nav gribētāju – pa vienam). Iespējams ir novadīt 3 stundas. Skolēniem tiek izdalīti kritēriji, kā jāveido stunda. Skolotājs ir sagatavojis materiālus, ar kuriem skolēni var gatavoties stundai.

Skolēnu pāris vada stundu.

AS pret stundas vadīšanu.

3-5 minūtes pirms stundas skolēni un arī skolotāja uz lapiņām uzraksta stundas vadītājiem 3 lietas pēc metodes 3P: Paspalv, Pajautā, Piedāvā. Kādas no idejām var tikt izteiktas skaļi.

Kritēriji stundas vadīšanai

- ✓ Skolēns var izmantot ieteiktos materiālus, kā arī meklēt papildu informāciju.
- ✓ Klasei jāapgūst ideja, **kā** un **kāpēc** atvasinājumu izmanto konkrētajā jomā?
- ✓ Stundā jāapskata arī praktiski vismaz 2 aprēķinu uzdevumi.
- ✓ Stundas beigās stundas vadītājiem jāpārlicinās, vai skolēni saprata stundas tematu: mazs tests, uzdevums, pāru darbs, viktorīna, jautājumi u.c.
- ✓ Sasniedzamie rezultāti skolēniem: skaidro atvasinājuma pielietojumu konkrētajā jomā; izmanto atvasinājumu konkrētās jomas uzdevumos.

Vērtēšanas kritēriji

<i>Kritēriji</i>	<i>Balles</i>
Ir sagatavoti visi nepieciešamie materiāli (prezentācija, izdrukas materiāli, uzskates līdzekļi u. c.)	1
Tiek izstāstīta ideja, kāpēc un kā atvasinājumu var izmantot konkrētajā jomā.	1
Tiek apskatīti praktiski vismaz 2 aprēķinu uzdevumi (ja tiek apskatīts 1 uzdevums – 1 balle).	2
Stundas vadītāji zina, kā atrisināt uzdevumu (ja daļēji zina – 1 balle).	2
Stundas vadītāji palīdz skolēniem tikt galā ar uzdevumiem, uzdod uzvedinošus jautājumus u.c.	1
Stundas beigās pārbauda, vai skolēni saprata stundas tematu.	1
Stundas vadītāji izmanto pareizu latviešu valodu ar matemātikas terminiem.	1
Stunda ir saplānota un iekļaujas laikā.	1

Materiāli

1. stunda. Atvasinājuma pielietojums ģeometrijā.

No mācību grāmatas: *Mathematics: analyses and approaches, standard level*. Awada N. u.c. Oxford University Press. 260. - 262. lpp.

5.5 Application of differential calculus: optimization and kinematics

Optimization

Investigation 19

Soft drink beverages are often packaged in cylindrical cans made from aluminium. The standard volume of such a can is 330 ml [this may vary among countries]. Companies are always interested in minimizing production costs in order to maximize profits. Are companies using the least amount of aluminium in order to produce the 330 ml cans?

Your task is to find the height and diameter of a 330 ml can that will minimize the can's surface area.

- 1 Write down an expression for the surface area A of a cylinder. This expression should contain two variables. Which variables are these?
- 2 Write down an expression, containing the same two variables as used in question 1, for the volume V of a cylinder. Equate your expression to 330 cm^3 , since the volume of a can must be 330 cm^3 .
- 3 Use the expression for V [from question 2] to rewrite the expression for A [from question 1] in terms of r , and state a reasonable domain for r .
- 4 Differentiate your expression for A with respect to r . Hence, find the values of r and h which minimize the surface area of the can, and find the surface area in this case.
- 5 Check your answers graphically.
- 6 **Conceptual** What is optimization in calculus?
- 7 Research actual dimensions and surface areas of your favorite beverages, and deduce whether or not companies are using the least amount of material in order to have the desired volume of 330 ml.
- 8 If companies are using more than the necessary amount of aluminium, give some reasons as to why this might be so. What other considerations might they need to make in the production of the size and shape of the can?



The primary purpose of applied mathematics is to investigate, explain and solve real-life problems. This process is called mathematical modelling, and in investigation 19 you used mathematical modelling to investigate the optimum dimensions of a soft drink can. Some of the steps involved in creating and using a mathematical model are the same, no matter what the problem is:

- If possible, draw a diagram to represent the problem visually. Label all the known elements, as well as the unknown elements, that you need to find (for the soft drink can, you were asked to find the height and radius of a can with volume 330 cm^3 which would minimize the surface area).

- Identify the independent variable(s) and their constraints (for the soft drink can, this was the radius of the can, which had domain $r > 0$).
- Identify all other constraints on the problem (for the soft drink can, you were told that the volume must be 330 cm^3).
- Translate the real-life problem into a mathematical function(s) (you used expressions for the area and volume of a cylinder).
- Carry out the mathematics necessary in order to solve the problem (you needed to differentiate the expression for A with respect to r , and find the value of r which minimized A).
- Reflect on the reasonableness of your results (using your GDC to check your results can be helpful. You then compared your theoretical results against the actual dimensions of a soft drink can).
- Apply your methods to other similar problems (what other problems could the mathematical model for the surface area of a soft drink can be applied to?).

In particular, optimization problems deal with finding the most efficient and effective solutions to real-life problems.

Atbildes:

Investigation 19

Conceptual understanding:

Optimization in Calculus uses mathematical models, or functions, to provide largest and least-value solutions to real-life problems.

1 $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$; radius and height of the cylinder

2 $V = \pi r^2 h = 330$

3 $h = \frac{330}{\pi r^2} \Rightarrow A = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$; $r > 0$

4 $\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{660}{r^2} = 0$ for min

Solving gives $r = 3.74 \text{ cm}$; $h = 7.49 \text{ cm}$; $A = 264 \text{ cm}^2$

6 **Conceptual:** What is optimization in Calculus?

Answer (this is the conceptual understanding): Optimization in Calculus uses mathematical models, or functions, to provide largest and least-value solutions to real-life problems.

7 E.g., cola can: $r = 6.63 \text{ cm}$; $h = 11.5 \text{ cm}$; $A = 376 \text{ cm}^2$

8 Some considerations might be: average hand-size of soft drink consumers, stacking costs on shelves, cost of buying aluminium in bulk, desired aesthetics of can, etc.

Investigation 20

You have 20 m of fencing to enclose a part of your yard as an outdoor, rectangular-shaped enclosure for your rabbits. You want to enclose the largest possible area with this amount of fencing.

- 1 Draw a suitable diagram to represent this scenario. Letting x represent the width of the enclosure, express the sides of the rectangle in terms of x .
- 2 Write down an expression for the area of the enclosure in terms of x . State the domain of x and explain why it has this domain.
- 3 Find the dimensions of the enclosure which maximizes its area, and find the maximum area.
- 4 Comment on the geometric significance of the dimensions of the largest enclosure.
- 5 Show that for any rectangular enclosure with fixed perimeter P , the maximum area will always be the same geometric shape as that which you found in question 3.
- 6 Repeat questions 1–3 to find the maximum area that can be enclosed by an isosceles triangle with a perimeter of 20 m. What can you say about the three sides of the triangle?
- 7 **Conceptual** How does finding a mathematical model for a general case help you apply solutions to particular cases?

Atbildes:

Investigation 20

Conceptual understanding:

Finding a mathematical model for a general case allows for multiple applications to specific cases.

- 2 $A = x(10 - x)$; domain $0 < x < 10$. $x > 0$ because width cannot be negative, and $x < 10$ in order that the length of the enclosure is non-zero.
- 3 length = width = 5m; Area = 25m^2
- 4 The largest enclosure is a square.
- 5 If width = x , then length = $\frac{P - 2x}{2}$ and hence $A = \frac{1}{2}x(P - 2x)$.

Differentiating this: $\frac{dA}{dx} = \frac{P}{2} - 2x$.

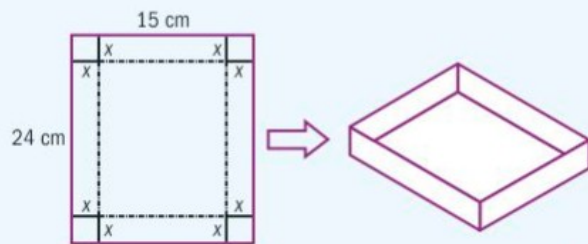
Setting equal to zero: $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}$. Hence, all sides of the rectangle are equal, therefore the rectangle is a square.

- 6 Letting x be the base of the triangle gives 19.2 cm^2 ; equilateral triangle.
- 7 **Conceptual:** How does finding a mathematical model for a general case help you apply solutions to particular cases?

Answer (this is the conceptual understanding): Finding a mathematical model for a general case allows for multiple applications to specific cases.

Example 26

A cardboard box manufacturer makes open boxes by cutting equal squares of side length x cm from the corners of a rectangular piece of cardboard measuring 15 cm by 24 cm. The sides are then folded up, as shown in the diagram. Find x so that the volume of the box is maximized, and find the maximum volume of the box. Check your answers graphically.



length: $24 - 2x$

width: $15 - 2x$

$x > 0$

$24 - 2x > 0 \Rightarrow x < 12$

$15 - 2x > 0 \Rightarrow x < 7.5$

So, $0\text{ cm} < x < 7.5\text{ cm}$

$$\begin{aligned} \text{Volume } V &= \text{length} \times \text{width} \times \text{height} \\ &= (24 - 2x) \times (15 - 2x) \times x \\ &= (360 - 48x - 30x + 4x^2)x \\ &= (360x - 78x^2 + 4x^3)\text{cm}^3 \end{aligned}$$

$$\frac{dV}{dx} = 360 - 156x + 12x^2$$

$$\frac{dV}{dx} = 12(x - 10)(x - 3) \quad \frac{dV}{dx} = 0 \text{ when } x = 3 \text{ or } x = 10$$

$x = 10$ is not within the domain of possible x .

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -156 + 24x.$$

The length and width of the base of the box are the original dimensions of the piece of cardboard, minus the box sides.

In this context, all side lengths must be positive. You can use this to find the domain of x .

Find an expression for the volume of the box in terms of x .

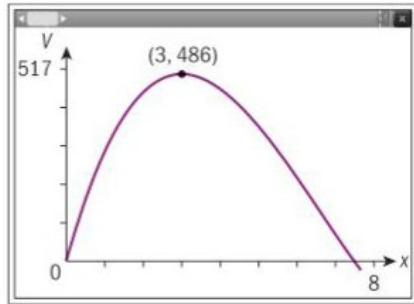
To maximize the volume, we need to find the maximum point on the graph of V . Hence, find $\frac{dV}{dx}$.

Set $\frac{dV}{dx} = 0$ to find the turning points.

When $x = 3$ $\frac{d^2V}{dx^2} = -84 < 0 \Rightarrow V$ has a local
maximum at $x = 3$

Hence, $V_{\max} = 360(3) - 78(3)^2 + 4(3)^3$

$V_{\max} = 486 \text{ cm}^3$



The graph shows that the maximum volume
 $V_{\max} = 486 \text{ cm}^3$ occurs when $x = 3 \text{ cm}$.

Recall that $0 \text{ cm} < x < 7.5 \text{ cm}$.

Find $\frac{d^2V}{dx^2}$ and use it to determine the nature of the turning point at $x = 3$.

Substitute $x = 3$ into the equation for V and calculate the maximum volume.

Use your GDC to plot a graph of V against x for $0 \text{ cm} < x < 7.5 \text{ cm}$.

Check that V has a maximum at $(3, 486)$.

Resurs: <https://dc.edu.au/mathematics-2-unit-geometric-applications-of-calculus/>, nodaļa *Maximisations and Minimisations problems*, skatīts 19.04.2020.

Maximisation and Minimisation problems

We now will look at some problems involving maximisation and minimisation of a certain quantity. In this topic, we simply set up a certain dependent variable as a function of another independent variable, which allows us to obtain a maximum or minimum value of the dependent variable, for some value of the independent variable, within the domain of the independent variable. A number of these questions also require some form of extra information, given in the question, to express the independent variable in terms of a single variable, rather than several variables.

Questions in this topic typically involve real life physical problems, but may at times involve other phenomena such as economic fluctuations, and in those cases, one will be given the relation between the independent and dependent variable. The table below illustrates the steps required to complete such questions.

- Draw a realistic and accurate diagram.
- Find the variable that is to be maximised/minimised (dependent variable), and any other related variables (independent variables). Allocate appropriate pronumerals to these variables.
- Express the maximised/minimised variable in terms of the other variables.
- If the expression for your maximised/minimised variable is in terms of several variables, look through the question to find a further relationship between the independent variables involved within the expression for the maximised/minimised variable.
- Apply calculus by maximising/minimising the dependent variable. Check that your answer is in fact a maxima or minima (by using the second derivative test or a table of values).
- Finally check that the value is indeed the **global** maxima/minima for the domain of the dependent variable (check that your answer makes physical sense, and that there are no values which are larger/smaller than that value – often a good method to check is to draw a quick sketch (if possible) of the relation between the independent and dependent variables).

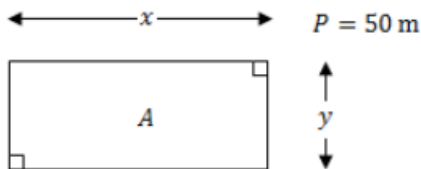
We shall illustrate this algorithm in the example below.

Example 9

What is the largest area of land that may be enclosed by a 50 metre length of rope, provided that the area of land must be rectangular (or square)?

Solution 9

Firstly, we draw a diagram, depicting the situation.



Firstly we note the differing variables within this problem and allocate variables to them.

A = Area of Land (square metres)

x = Length of one side (metres)

y = Length of other side (metres)

We also have that the perimeter (P) is equal to 50 metres.

Now, since the area of a rectangle is length by breadth, we have that

$$A = xy$$

Now, since A , the dependent variable is in terms of two variables, we must find a relationship between x and y . The perimeter is 50 metres. Using this and the general expression for the perimeter of a rectangle we have that,

$$2x + 2y = 50$$

$$\Rightarrow y = 25 - x$$

Hence we have that,

$$A = x(25 - x) = 25x - x^2$$

So, to obtain the maximum value, we simply differentiate A with respect to x .

$$\frac{dA}{dx} = 25 - 2x$$

We shall set dA/dx to zero to find any possible maxima.

$$25 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{25}{2}$$

Now, we find the second derivative to show that the above is a maxima.

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -2 < 0$$

Hence we have that there exists a maxima at $x = 25/2$.

(In fact, this maxima is a globular maxima, since the curve is always concave down and continuous and hence any maxima becomes automatically a globular maxima. The same applies for the case of a minima on a concave up curve – This argument is one way to show that a maxima/minima is in fact a globular counterpart)

So, since $x = 25/2$ makes physical sense, and is definitely the globular maxima on the domain of $A(x)$, it follows that the maximum area is given by,

$$\max(A) = \left(\frac{25}{2}\right)\left(25 - \frac{25}{2}\right) = \frac{625}{4} = 156.25m^2$$

Hence the maximum area enclosed by the rope is 156.25 m^2 .

2. stunda. Atvasinājuma pielietojums fizikā.

No mācību grāmatas: *Mathematics: analyses and approaches, standard level*. Awada N. u.c. Oxford University Press. 265. - 267. lpp.

- Velocity, $v(t)$, is the derivative of the displacement function $s(t)$.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \text{ or } s'(t)$$

- Acceleration, $a(t)$, is the derivative of the velocity.

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \text{ or } s''(t)$$

When v and a have the same sign, an object is speeding up [accelerating].

When v and a have different signs, an object is slowing down [decelerating].

Example 28



A particle moves in a horizontal line so that its position from a fixed point after t seconds, where $t \geq 0$, is s metres, where $s(t) = 5t^2 - t^4$.

- Find the position, velocity and acceleration of the particle after 1 second.
- Determine whether the particle is speeding up or slowing down at $t = 1$.
- Find the values of t when the particle is at rest.
- Find the time intervals on which the particle is speeding up, and the intervals on which it is slowing down.
- Find the total distance the particle travels in the first 3 seconds.

a $s(1) = 5(1) - 1 = 4 \text{ m}$
 $v(t) = s'(t) = 10t - 4t^3 \text{ m s}^{-1}$
 $v(1) = 6 \text{ m s}^{-1}$
 $a(t) = v'(t) = 10 - 12t^2 \text{ m s}^{-2}$
 $a(1) = -2 \text{ m s}^{-2}$

- b** Since v and a have opposite signs at $t = 1$, the particle is slowing down.

c $10t - 4t^3 = 0$
 $2t(5 - 2t^2) = 0$

$$t = 0, t = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Find the value of $s(1)$.

Differentiate s to get an expression for v , and evaluate at $t = 1$.

Differentiate v to get an expression for a , and evaluate at $t = 1$.

The particle is at rest when $v = 0$.

Reject the negative value of the square root, since $t \geq 0$.

d $10 - 12t^2 = 0$

$$t = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

t	$0 < t < \sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{6}} < t < \sqrt{\frac{5}{2}}$	$t > \sqrt{\frac{5}{2}}$
Sign of v	+	+	-
Sign of a	+	-	-

Find the places at which the acceleration changes sign. Again, ignore the negative value for t .

Compare the signs of velocity and acceleration each time at each interval on which one of them changes.

Both v and a have the same sign on these intervals.

The particle is speeding up when

$$0 < t < \sqrt{\frac{5}{6}} \text{ and } t > \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

The particle is slowing down when

$$\sqrt{\frac{5}{6}} < t < \sqrt{\frac{5}{2}}.$$

- e Distance is always positive, so you must find the distance the particle travels in one direction, and then the distance it travels the other direction, and add these together.
 $s(0) = 0$

$$s\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 5\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^4 = 6.25 \text{ m}$$

Particle travels $6.25 - 0 = 6.25$ m in the positive direction.

$$s(3) = 5(3)^2 - (3)^4 = -36 \text{ m}$$

Particle travels $6.25 - (-36) = 42.25$ m in the negative direction.

So total distance travelled in first 3 seconds = $6.25 + 42.25 = 48.5$ m.

v and a have different signs on this interval.

Initially the particle is at 0.

Find the displacement of the particle when it changes direction at $t = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Find the displacement of the particle after 3 seconds.

Find distance particle travels in the negative direction.

Add the two distances together.

Resurs: <https://www.siyavula.com/read/maths/grade-12/differential-calculus/06-differential-calculus-07>, sadaļa *Rates of change*, skatīts 25.04.2020.

We have learnt how to determine the average gradient of a curve and how to determine the gradient of a curve at a given point. These concepts are also referred to as the average rate of change and the instantaneous rate of change.

$$\text{Average rate of change} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

$$\text{Instantaneous rate of change} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

When we mention rate of change, the instantaneous rate of change (the derivative) is implied. When average rate of change is required, it will be specifically referred to as average rate of change.

Velocity is one of the most common forms of rate of change:

$$\text{Average velocity} = \text{Average rate of change}$$

$$\begin{aligned} \text{Instantaneous velocity} &= \text{Instantaneous rate of change} \\ &= \text{Derivative} \end{aligned}$$

Velocity refers to the change in distance (s) for a corresponding change in time (t).

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Acceleration is the change in velocity for a corresponding change in time. Therefore, acceleration is the derivative of velocity

$$a(t) = v'(t)$$

This implies that acceleration is the second derivative of the distance.

$$a(t) = s''(t)$$

WORKED EXAMPLE 23: RATE OF CHANGE

QUESTION

The height (in metres) of a golf ball t seconds after it has been hit into the air, is given by $H(t) = 20t - 5t^2$. Determine the following:

1. The average vertical velocity of the ball during the first two seconds.
2. The vertical velocity of the ball after 1,5 s.
3. The time at which the vertical velocity is zero.
4. The vertical velocity with which the ball hits the ground.
5. The acceleration of the ball.

SOLUTION

Step 1: Determine the average vertical velocity during the first two seconds

$$\begin{aligned}v_{\text{ave}} &= \frac{H(2) - H(0)}{2 - 0} \\&= \frac{[20(2) - 5(2)^2] - [20(0) - 5(0)^2]}{2} \\&= \frac{40 - 20}{2} \\&= 10 \text{ m.s}^{-1}\end{aligned}$$

Step 2: Calculate the instantaneous vertical velocity

$$\begin{aligned}v(t) &= H'(t) \\&= \frac{dH}{dt} \\&= 20 - 10t\end{aligned}$$

Velocity after 1,5 s:

$$\begin{aligned}v(1,5) &= 20 - 10(1,5) \\&= 5 \text{ m.s}^{-1}\end{aligned}$$

Step 3: Determine the time at which the vertical velocity is zero

$$\begin{aligned}v(t) &= 0 \\20 - 10t &= 0 \\10t &= 20 \\t &= 2\end{aligned}$$

Therefore, the velocity is zero after 2 s

Step 4: Find the vertical velocity with which the ball hits the ground

The ball hits the ground when $H(t) = 0$

$$\begin{aligned}20t - 5t^2 &= 0 \\5t(4 - t) &= 0 \\t &= 0 \text{ or } t = 4\end{aligned}$$

The ball hits the ground after 4 s. The velocity after 4 s will be:

$$\begin{aligned}v(4) &= H'(4) \\&= 20 - 10(4) \\&= -20 \text{ m.s}^{-1}\end{aligned}$$

The ball hits the ground at a speed of 20 m.s^{-1} . Notice that the sign of the velocity is negative which means that the ball is moving downward (a positive velocity is used for upwards motion).

Step 5: Acceleration

$$\begin{aligned}a &= v'(t) = H''(t) \\&= -10 \\ \therefore a &= -10 \text{ m.s}^{-2}\end{aligned}$$

Just because gravity is constant does not mean we should necessarily think of acceleration as a constant. We should still consider it a function.

3. stunda Atvasinājuma pielietojums ekonomikā.

No mācību grāmatas: *Mathematics: analyses and approaches, standard level*. Awada N. u.c. Oxford University Press. 263. - 264. lpp.

Optimization techniques are used throughout industry, since the goal is to maximize profits. A company's profit is the amount left over after the costs of production have been subtracted from the company's total income (sometimes called *revenue*). In other words, profit is the difference between revenues and costs. If profit is represented by $p(x)$, revenue by $r(x)$ and costs by $c(x)$, then $p(x) = r(x) - c(x)$.

TOK

How can you justify the raise in tax for plastic containers eg plastic bags, plastic bottles etc. using optimization?

Example 27

A small company manufactures and sells fishing poles. The cost of manufacturing fishing poles can be modelled by the function $c(x) = 7x + 3$, where x is the number of batches (each containing 1000 poles) manufactured. Revenue is modelled by $r(x) = x^3 - 10x^2 + 20x$. The company has enough workers to produce a maximum of 1200 fishing poles.

- a State the domain of both the cost and revenue functions.
- b Find the number of fishing poles that the company should manufacture in order to maximize its profits.

The company introduces a new process which allows them to produce 6000 poles.

- c Find the number of poles that would cause the company to minimize profits (or maximizes losses).
- d By graphing the cost and revenue functions, find the number of poles which should be manufactured if the company is to just break even (that is, the production level at which the costs and revenues are equal).
- e It would not maximize the company's profits to produce as many poles as workers are capable of producing. Use your graph to explain why.

a For both functions, $0 \leq x \leq 1.2$

b
$$p(x) = (x^3 - 10x^2 + 20x) - (7x + 3)$$
$$= x^3 - 10x^2 + 13x - 3$$

$$p'(x) = 3x^2 - 20x + 13$$

$$3x^2 - 20x + 13 = 0 \Rightarrow x_1 = 0.730;$$
$$x_2 = 5.94$$

$$p''(x) = 6x - 20$$

$$p''(0.730) < 0 \Rightarrow x = 0.730 \text{ is a maximum}$$

Since x is in thousands of units, the production level necessary to maximize profits is 730 fishing poles.

- c $p''(5.94) > 0 \Rightarrow x = 5.94$ is a minimum, so at $x = 5.94$, the profit function p has an absolute minimum in its domain. The production level that would maximize losses is 5940 fishing poles.

The company can produce a maximum of 1200 poles, which is 1.2 thousand units.

$$p(x) = r(x) - c(x)$$

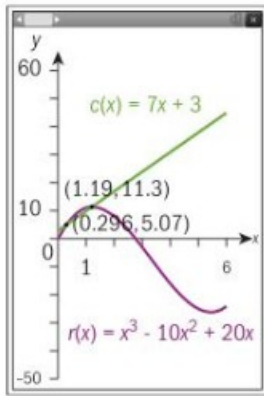
Find the x -values where $p'(x) = 0$.

You can use the polynomial root finder on your GDC to find when $p'(x) = 0$.

Use the second derivative to determine the nature of these points.

Interpret your answer in the context of the problem.

- d The company will break even at 296 fishing poles and at 1190 fishing poles.



- e The company's revenues decrease, despite the costs continuing to increase. This may be because of lack of demand for so many poles; which would mean they cannot sell them all.

The company breaks even when costs equal revenues. From the graph that is at $x = 0.296$ (that is, 296 fishing poles) or at $x = 1.19$ (that is, 1190 fishing poles).

Exercise

- 2 The profit, \$ y , generated from the sale of x laptops is given by the formula $y = 600x + 15x^2 - x^3$. Find the number of laptops, x , which maximizes profit, and determine the maximum profit.

No mācību grāmatas: *Mathematics for the international student. Mathematics SL third edition.* Haese R., Haese S., Haese M. u. c. Izdevējs: Haese Mathematics. 425. lpp.

Example 4

Self Tutor

The cost in dollars of producing x items in a factory each day is given by

$$C(x) = \underbrace{0.00013x^3 + 0.002x^2}_{\text{labour}} + \underbrace{5x}_{\text{raw materials}} + \underbrace{2200}_{\text{fixed costs}}$$

- Find $C'(x)$, which is called the marginal cost function.
- Find the marginal cost when 150 items are produced. Interpret this result.
- Find $C(151) - C(150)$. Compare this with the answer in **b**.

- a** The marginal cost function is
 $C'(x) = 0.00039x^2 + 0.004x + 5$ dollars per item.

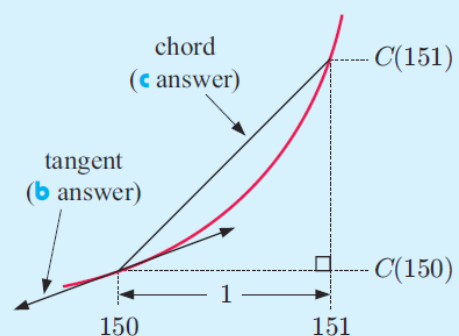
- b** $C'(150) = \$14.38$

This is the rate at which the costs are increasing with respect to the production level x when 150 items are made per day.

It gives an estimate of the cost increase in total cost from making the 151st item.

- c** $C(151) - C(150) \approx \$3448.19 - \$3433.75$
 $\approx \$14.44$

This is the actual increase in total cost from making the 151st item each day, so the answer in **b** gives a good estimate.



In recent years, economic decision making has become more and more mathematically oriented. Faced with huge masses of statistical data, depending on hundreds or even thousands of different variables, business analysts and economists have increasingly turned to mathematical methods to help them describe what is happening, predict the effects of various policy alternatives, and choose reasonable courses of action from the myriad of possibilities. Among the mathematical methods employed is calculus. In this section we illustrate just a few of the many applications of calculus to business and economics. All our applications will center on what economists call the *theory of the firm*. In other words, we study the activity of a business (or possibly a whole industry) and restrict our analysis to a time period during which background conditions (such as supplies of raw materials, wage rates, and taxes) are fairly constant. We then show how derivatives can help the management of such a firm make vital production decisions.

Management, whether or not it knows calculus, utilizes many functions of the sort we have been considering. Examples of such functions are

$C(x)$ = cost of producing x units of the product,

$R(x)$ = revenue generated by selling x units of the product,

$P(x) = R(x) - C(x)$ = the profit (or loss) generated by producing and (selling x units of the product.)

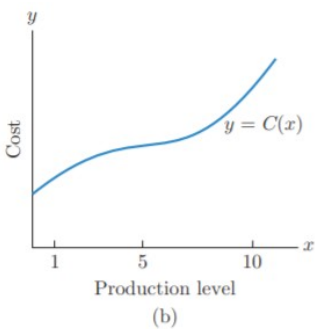
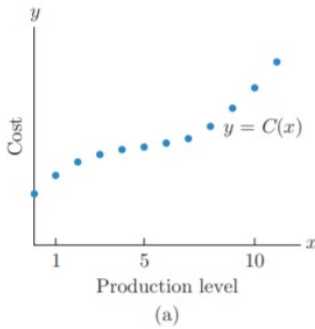


Figure 1 A cost function.

Note that the functions $C(x)$, $R(x)$, and $P(x)$ are often defined only for nonnegative integers, that is, for $x = 0, 1, 2, 3, \dots$. The reason is that it does not make sense to speak about the cost of producing -1 cars or the revenue generated by selling 3.62 refrigerators. Thus, each function may give rise to a set of discrete points on a graph, as in Fig. 1(a). In studying these functions, however, economists usually draw a smooth curve through the points and assume that $C(x)$ is actually defined for all positive x . Of course, we must often interpret answers to problems in light of the fact that x is, in most cases, a nonnegative integer.

Cost Functions If we assume that a cost function, $C(x)$, has a smooth graph as in Fig. 1(b), we can use the tools of calculus to study it. A typical cost function is analyzed in Example 1.

EXAMPLE 1

Marginal Cost Analysis Suppose that the cost function for a manufacturer is given by $C(x) = (10^{-6})x^3 - .003x^2 + 5x + 1000$ dollars.

- (a) Describe the behavior of the marginal cost.
- (b) Sketch the graph of $C(x)$.

SOLUTION

The first two derivatives of $C(x)$ are given by

$$C'(x) = (3 \cdot 10^{-6})x^2 - .006x + 5$$

$$C''(x) = (6 \cdot 10^{-6})x - .006.$$

Let us sketch the marginal cost $C'(x)$ first. From the behavior of $C'(x)$, we will be able to graph $C(x)$. The marginal cost function $y = (3 \cdot 10^{-6})x^2 - .006x + 5$ has as its graph a parabola that opens upward. Since $y' = C''(x) = .000006(x - 1000)$, we see that the parabola has a horizontal tangent at $x = 1000$. So the minimum value of $C'(x)$ occurs at $x = 1000$. The corresponding y -coordinate is

$$(3 \cdot 10^{-6})(1000)^2 - .006 \cdot (1000) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2.$$

The graph of $y = C'(x)$ is shown in Fig. 2. Consequently, at first, the marginal cost decreases. It reaches a minimum of 2 at production level 1000 and increases thereafter.

This answers part (a). Let us now graph $C(x)$. Since the graph shown in Fig. 2 is the graph of the derivative of $C(x)$, we see that $C'(x)$ is never zero, so there are no relative extreme points. Since $C'(x)$ is always positive, $C(x)$ is always increasing (as any cost curve should). Moreover, since $C'(x)$ decreases for x less than 1000 and increases for x greater than 1000, we see that $C(x)$ is concave down for x less than 1000, is concave up for x greater than 1000, and has an inflection point at $x = 1000$. The graph of $C(x)$ is drawn in Fig. 3. Note that the inflection point of $C(x)$ occurs at the value of x for which marginal cost is a minimum.

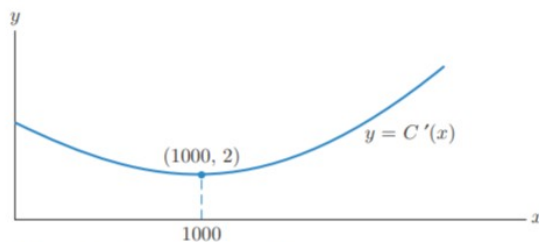


Figure 2 A marginal cost function.

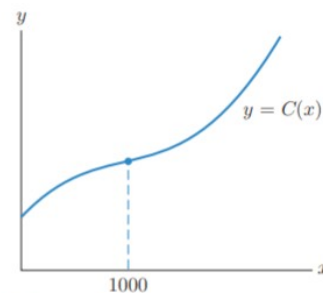


Figure 3 A cost function.

► Now Try Exercise 1

Actually, most marginal cost functions have the same general shape as the marginal cost curve of Example 1. For when x is small, production of additional units is subject to economies of production, which lowers unit costs. Thus, for x small, marginal cost decreases. However, increased production eventually leads to overtime, use of less efficient, older plants, and competition for scarce raw materials. As a result, the cost of additional units will increase for very large x . So we see that $C'(x)$ initially decreases and then increases.

Revenue Functions In general, a business is concerned not only with its costs, but also with its revenues. Recall that, if $R(x)$ is the revenue received from the sale of x units of some commodity, then the derivative $R'(x)$ is called the *marginal revenue*. Economists use this to measure the rate of increase in revenue per unit increase in sales.

If x units of a product are sold at a price p per unit, the total revenue $R(x)$ is given by

$$R(x) = x \cdot p.$$

If a firm is small and is in competition with many other companies, its sales have little effect on the market price. Then, since the price is constant as far as the one firm is concerned, the marginal revenue $R'(x)$ equals the price p [that is, $R'(x)$ is the amount that the firm receives from the sale of one additional unit]. In this case, the revenue function will have a graph as in Fig. 4.

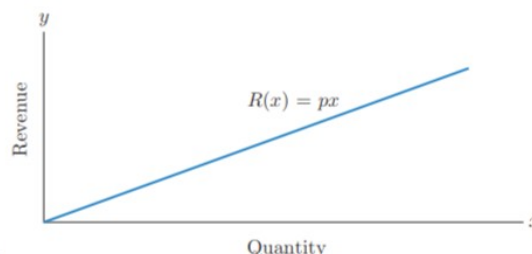


Figure 4 A revenue curve.

An interesting problem arises when a single firm is the only supplier of a certain product or service, that is, when the firm has a monopoly. Consumers will buy large amounts of the commodity if the price per unit is low and less if the price is raised.

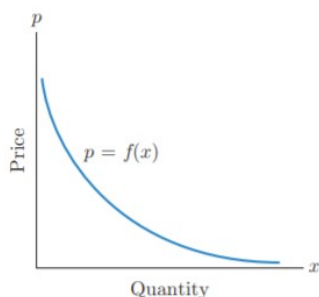


Figure 5 A demand curve.

For each quantity x , let $f(x)$ be the highest price per unit that can be set to sell all x units to customers. Since selling greater quantities requires a lowering of the price, $f(x)$ will be a decreasing function. Figure 5 shows a typical demand curve that relates the quantity demanded, x , to the price, $p = f(x)$.

The *demand equation* $p = f(x)$ determines the total revenue function. If the firm wants to sell x units, the highest price it can set is $f(x)$ dollars per unit, and so the total revenue from the sale of x units is

$$R(x) = x \cdot p = x \cdot f(x). \quad (1)$$

The concept of a demand curve applies to an entire industry (with many producers) as well as to a single monopolistic firm. In this case, many producers offer the same product for sale. If x denotes the total output of the industry, $f(x)$ is the market price per unit of output and $x \cdot f(x)$ is the total revenue earned from the sale of the x units.

EXAMPLE 2

Maximizing Revenue The demand equation for a certain product is $p = 6 - \frac{1}{2}x$ dollars. Find the level of production that results in maximum revenue.

SOLUTION

In this case, the revenue function $R(x)$ is

$$R(x) = x \cdot p = x \left(6 - \frac{1}{2}x \right) = 6x - \frac{1}{2}x^2$$

dollars. The marginal revenue is given by

$$R'(x) = 6 - x.$$

The graph of $R(x)$ is a parabola that opens downward. (See Fig. 6.) It has a horizontal tangent precisely at those x for which $R'(x) = 0$ —that is, for those x at which marginal revenue is 0. The only such x is $x = 6$. The corresponding value of revenue is

$$R(6) = 6 \cdot 6 - \frac{1}{2}(6)^2 = 18 \text{ dollars.}$$

Thus, the rate of production resulting in maximum revenue is $x = 6$, which results in total revenue of 18 dollars. ▶ **Now Try Exercise 3**

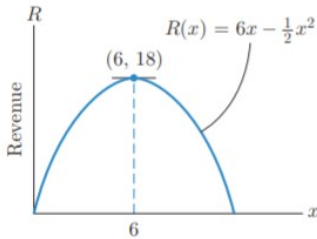


Figure 6 Maximizing revenue.

EXAMPLE 4

Maximizing Profits Suppose that the demand equation for a monopolist is $p = 100 - .01x$ and the cost function is $C(x) = 50x + 10,000$. Find the value of x that maximizes the profit and determine the corresponding price and total profit for this level of production. (See Fig. 9.)

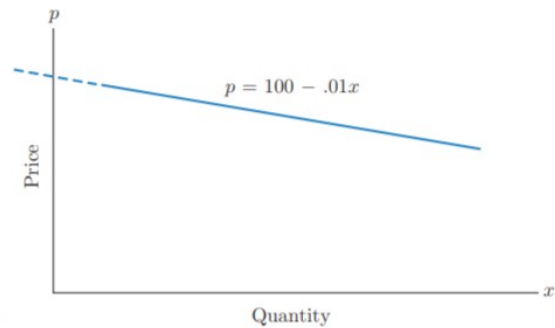


Figure 9 A demand curve.

SOLUTION

The total revenue function is

$$R(x) = x \cdot p = x(100 - .01x) = 100x - .01x^2.$$

Hence, the profit function is

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 100x - .01x^2 - (50x + 10,000) \\ &= -.01x^2 + 50x - 10,000. \end{aligned}$$

The graph of this function is a parabola that opens downward. (See Fig. 10.) Its highest point will be where the curve has zero slope, that is, where the marginal profit $P'(x)$ is zero. Now,

$$P'(x) = -.02x + 50 = -.02(x - 2500).$$

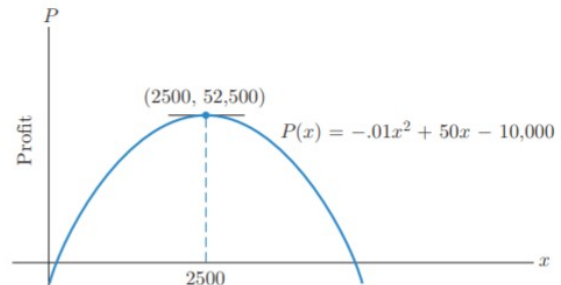


Figure 10 Maximizing profit.

So $P'(x) = 0$ when $x = 2500$. The profit for this level of production is

$$P(2500) = -.01(2500)^2 + 50(2500) - 10,000 = 52,500 \text{ dollars.}$$

Finally, we return to the demand equation to find the highest price that can be charged per unit to sell all 2500 units:

$$p = 100 - .01(2500) = 100 - 25 = 75 \text{ dollars.}$$

Thus, to maximize the profit, produce 2500 units and sell them at \$75 per unit. The profit will be \$52,500. ▶ **Now Try Exercise 17**

6.4. temats: Atkārtojums. Funkcijas atvasinājums pielietojums.

Laiks: 40 min.

Plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts

Risina dažāda konteksta uzdevumus, izmantojot funkcijas atvasinājumu.

Nodarbības gaita: soļi, kas tiek īstenoti.

Aktualizācija

Skolēni 1-2 minūtes pāros izrunā, kur un kā izmanto atvasinājumu. Pēc tam frontāli izrunā, ko skolēni atceras. Galvenās divas atziņas, līdz kurām jānonāk:

- *Ar pirmās kārtas atvasinājumu var atrast ekstrēma punktus, piemēram, maksimālo laukumu, peļņu u.c.*
- *Ja ir dots koordinātas vienādojums $x(t)$, tad $x'(t)$ ir ķermeņa ātrums (jeb cita procesa izmaiņas ātrums), bet $x''(t)$ - paātrinājums.*

Lietošana

Skolēni patstāvīgi risina **uzdevumus**. Pēc nepieciešamības konsultējas ar skolotāju vai klases biedriem.

Ja nepieciešams, skolotājs kādu uzdevumu izrunā frontāli vai frontāli iesāk tā risināšanu (piemēram, 3. uzdevumu, jo tieši tāda veida uzdevums iepriekšējās stundās nav aplūkots).

Skolotāja iepriekš ir sagatavojusi uzdevumu risinājumus pa soļiem. Uz tāfeles var uzrakstīt tikai atbildes, ar kurām skolēni var salīdzināt savus rezultātus.

Gatavošanās pārbaudes darbam Atvasinājuma pielietojums

1. uzdevums

400 m² lielu taisnstūrveida zemes gabalu ierobežo žogs, kura garums ir vismazākais. Aprēķini žoga garumu.

2. uzdevums

Pirmais ķermenis kustas pēc likuma $x_1(t)=2t^3-4t^2+5t$, bet otrais – pēc likuma $x_2(t)=2t^3-1,5t^2$. Aprēķini šo ķermeņu paātrinājumus laika momentos, kad to ātrumi ir vienādi.

3. uzdevums (var izmantot kalkulatoru)

Skaitli 48 uzraksti kā divu pozitīvu skaitļu summu tā, lai pirmā skaitļa kuba un otrā skaitļa kvadrāta summa būtu vismazākā.

4. uzdevums

Ražošanas kompānija pārdod velosipēdus. Ražošanas izmaksas apraksta funkcija $c(x)=20x+0,0025x^2$, bet ienākumus - funkcija $r(x)=60x+0,005x^2$. Uzdevumi:

- a) nosaki, pie kāda pārdotā velosipēdu daudzuma peļņa būs vislielākā,
- b) aprēķini, par cik palielinās kopējās izmaksas, ražojot 8001. velosipēdu.

5. uzdevums

Ķermenis pārvietojas pēc sakarības $x(t)=3t^2-t^3$, kur x ir pārvietojums metros, bet t – laiks sekundēs. Uzdevumi:

- a) nosaki laika momentus, kuros ķermenis nekustās,
- b) nosaki laika intervālus, kuros ķermeņa ātrums palielinās un samazinās,
- c) aprēķini ķermeņa veikto ceļu pirmajās 4 sekundēs.

6. uzdevums

Jāizgatavo koniska piltuve, kuras veidule $l=10$ cm. Cik lielam jābūt piltuves pamata rādiusam, lai tās tilpums būtu vislielākais?

Pārbaudes darbs
Atvasinājuma pielietojums
2. variants

1. uzdevums (___/ 7 punkti)

Skaitli 18 sadali divos saskaitāmos tā, lai to divkāršota pirmā saskaitāmā un otrā saskaitāmā kvadrāta summa būtu vismazākā!



2. uzdevums (___/ 9 punkti)

Daļiņa kustas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = 4t^3 - 12t^2$, x dots metros, t - sekundēs. Uzdevumi:

- uzraksti funkciju, kas izsaka daļiņas ātrumu,
- uzraksti funkciju, kas izsaka daļiņas paātrinājumu,
- nosaki, kad daļiņas ātrums ir nulle,
- nosaki, kad daļiņa maina kustības virzienu,
- aprēķini daļiņas ātrumu laika momentā, kad tās paātrinājums ir 72 m/s^2 ,
- aprēķini daļiņas veikto ceļu pirmajās 3 sekundēs!



Kritēriji

Uzd. nr.	Kritērijs	Punkti	Kopā punkti
1.	Uzraksta 2 skaitļu summu un pielīdzina to dotajam skaitlim.	1	7
	Izveido funkciju, kas apraksta doto situāciju.	1	
	Izsaka vienu nezināmo un ievieto funkcijā.	1	
	Atvasina iegūto funkciju.	1	
	Iegūto atvasinājumu pielīdzina 0, lai iegūtu ekstrēma punktus.	1	
	Aprēķina pirmo skaitli.	1	
	Aprēķina otro skaitli.	1	
2.	Uzraksta funkciju, kas izsaka ātrumu ($x'(t)$).	1	9
	Uzraksta funkciju, kas izsaka paātrinājumu ($x''(t)$).	1	
	Nosaka, kad daļiņas ātrums ir nulle ($x'(t)=0$).	1	
	Nosaka, kad daļiņas ātrums ir nulle (otrais laika brīdis, kad ātrums ir nulle).	1	
	Pielīdzina paātrinājuma vienādojumu dotajam paātrinājumam.	1	
	Nosaka t , kad paātrinājums ir 18 m/s^2 (92 m/s^2).	1	
	Aprēķina daļiņas ātrumu ar iegūto t .	1	
	Aprēķina veikto ceļu līdz laika brīdim, kad daļiņa maina virzienu.	1	
	Aprēķina kopā veikto ceļu, saskaitot veikto ceļu līdz laika brīdim, kad daļiņa maina virzienu un atpakaļveikto ceļu līdz koordinātu sākumpunktam.	1	
3.	Iegūst peļņas funkciju $p(x)$.	1	9
	Atvasina peļņas funkciju.	1	
	Atvasinājumu pielīdzina nullei, lai iegūtu ekstrēma punktus.	1	
	Nosaka, kurš no ekstrēmiem ir lokālais maksimums jeb x vērtība, ar kuru peļņa būs vislielākā.	1	
	Nosaka zīmuļu daudzumu, ar kuru peļņa būs vislielākā, izmantojot, ka x ir 1000 zīmuļu palete.	1	
	Aprēķina peļņas funkcijas vērtību pie iegūtā lokālā maksimuma.	1	
	Aprēķina vislielāko iespējamo peļņu, izmantojot, ka peļņas funkcijas rezultāts ir simtos eiro.	1	

	Nosaka, kurš no ekstrēmiem ir lokālais minimums jeb x vērtība, ar kuru peļņa būs vismazākā.	1	
	Nosaka zīmuļu daudzumu, ar kuru peļņa būs vismazākā, izmantojot, ka x ir 1000 zīmuļu palete.	1	
4.	Uzraksta vienādojumu, kas izsaka malas un augstuma garuma summu (perimetru).	1	7
	No vienādojuma izsaka augstumu (vienu no aksiālšķēluma malām).	1	
	Uzraksta, ar ko vienāds ir prizmas pamata augstums (cilindra augstums).	1	
	Izveido funkciju, kas izsaka tilpuma atkarību no prizmas pamata malas (vienas cilindra aksiālšķēluma malas).	1	
	Atvasina tilpuma funkciju.	1	
	Atvasinājumu pielīdzina nullei un atrod ekstrēma punktus.	1	
	Izvēlas ekstrēma punktu, kas nav vienāds ar nulli, un aprēķina vislielāko iespējamo tilpumu.	1	
5.	Uzraksta vienādojumu, kas izsaka perimetru.	1	8
	Aprēķina trapeces sānu malu atkarībā no augstuma.	1	
	Veic secinājumu, ka trijstūris starp sānu malu un augstumu ir vienādsānu trijstūris un pamata daļa, ko atšķēļ augstums, ir vienāda ar augstumu.	1	
	No perimetra vienādojuma izsaka abu pamatu summu $(a + b)$, kas būs nepieciešama trapeces laukuma funkcijai $S = \frac{a+b}{2} h$.	1	
	Izveido trapeces laukuma funkciju atkarībā no trapeces augstuma.	1	
	Atvasina laukuma funkciju.	1	
	Atvasinājuma pielīdzina nullei.	1	
	Atrod ekstrēma punktu jeb augstumu, ar kuru trapeces laukums būtu vislielākais.	1	

2. ievērojamā robeža

$A(n) = A_0(1+i)^n$ – salikto procentu formula, kur $A(n)$ – daudzums beigās

A_0 – daudzums sākumā

i – procentu likme attiecīgajā periodā

n – periodu skaits

Uzdevums: Jānoskaidro, kāds būs daudzums beigās ar dažādām n vērtībām, pieļaujot ļoti lielas n vērtības.

Darba gaita:

1. Pieņemsim, ka € 1000 ir ieguldīti uz 4 gadiem ar fiksētu procentu likmi – 6% gadā. Nosaki ieguldījuma summu ceturktā gada beigās, ja procentu likme tiek pieskaitīta:

a) katra gada beigās (katru gadu, tātad $n=4, i=6\%=0,06$),

b) katra ceturkšņa beigās (četras reizes gadā, tātad $n=4 \cdot 4=16, i=\frac{6\%}{4}=0,015$),

c) katra mēneša beigās,

d) katras nedēļas beigās (52 nedēļas),

e) katras dienas beigās (365 dienas),

f) katras stundas beigās,

g) katras minūtes beigās,

h) katras sekundes beigās.

2. Uzrasti savus novērojumu par ieguldījumu summu ceturktā gada beigās dažādiem procentu pieskaitīšanas veidiem.

3. Ja r ir gada procentu likme, t – gadu skaits, N – procentu izmaksu skaits gadā, tātad $i = \frac{r}{N}$ un $n = Nt$.

Salikto procentu formula kļūst: $A(n) = A_0 \left(1 + \frac{r}{N}\right)^{Nt}$.

a) parādi, ka $A(n) = A_0 \left(1 + \frac{1}{\frac{N}{r}}\right)^{\frac{N}{r} \cdot rt}$,

b) apzīmē $\frac{N}{r} = \alpha$ un parādi, ka $A(n) = A_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha rt}$.

4. Nepārtrauktajam pieaugumam procentu izmaksu skaits gadā, N , palielinās.

a) paskaidro, kāpēc α ir liels lielām N vērtībām,

b) aizpildi tabulu, uzrādot pēc iespējas lielāku ciparu skaitu aiz komata:

α	$\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$
10	
100	
1000	
10000	
100000	

5. Atrodi skaitļa e vērtību (piemēram, ar kalkulatoru)!

6. Nosaki $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha =$

7. Ko vēl esi uzzinājis par skaitli e ?

Bakalaura darbs „Metodiskie materiāli atvasinājuma mācīšanai vidusskolā” izstrādāts LU Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā noslēguma darba elektroniskā versija parakstīta ar drošu elektronisko parakstu.

Autors: Guna Brenda Pogule

Rekomendēju/nerekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: docents Dr. Math. Raivis Bēts (*personiskais paraksts*) 02.06.2020.

Recenzents: Mg. Math. Maruta Avotiņa

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā 02.06.2020.

Dekāna pilnvarotā persona: metodiķe Lāsma Štāle (*personiskais paraksts*)

Darbs aizstāvēts Valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

_____. prot. Nr._____.

Komisijas sekretāre: studiju metodiķe Aira Kumerdanka (*personiskais paraksts*)