



**LATVIJAS UNIVERSITĀTES
ZINĀTNISKIE RAKSTI**

ACTA UNIVERSITATIS LATVIENSIS

577

**MATEMĀTIKA
DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI**

LATVIJAS UNIVERSITĀTE

**МАТЕМАТИКА
ДИФЕРЕНЦИАЛВИЕНĀDOJUMI
 zinātniskie raksti**

**MATHEMATICS
DIFFERENTIAL EQUATIONS
 Proceedings**

**МАТЕМАТИКА
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
 Научные труды**

577. sējums

**Latvijas Universitāte
Rīga 1992**

PI-95
577

UDK 517.81(082)

MATEMĀTIKA. DIFERENCIĀLVIENĀDOJUMI

Matemātika. Diferenciālvienādojumi: zinātniskie raksti/ Atb. red. J.Klokovs.- 577. sējums.- Rīga: LU, 1992.- 138 lpp.

Rakstu krājuma satur zinātniskos rakstus, kuri veltīti parasto diferenciālvienādojumu teorijai. Pētīti jautājumi par diferenciālvienādojumu atrisinājumu eksistenci un īpašībām. Daži raksti veltīti konkrēto problēmu izpētes metodēm.

Rakstu krājums paredzēts zinātniekiem, pasniedzējiem un studentiem, kuri nodarbojas ar parasto diferenciālvienādojumu un to atrisinājumu pētīšanu.

MATHEMATICS. DIFFERENTIAL EQUATIONS

The collection contains articles on the qualitative theory of ordinary differential equations. The problems of existence of solutions as well as their properties are investigated. Several articles are devoted to developing of methods of investigation of applied problems.

The collection is destined for researchers and students in the field.

МАТЕМАТИКА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Сборник содержит научные статьи по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследуются вопросы существования решений, изучаются их свойства. Ряд статей посвящен разработке методов исследования конкретных практических задач.

Сборник предназначен для научных сотрудников, преподавателей и студентов, которые занимаются исследованиями в области обыкновенных дифференциальных уравнений.

Redakcijas koleģija:

J.Klokovs (atbildīgais redaktors), M.Adjutovs (atbildīgais sekretārs), J.Cepītis, A.Cibulis, B.Kalis, A.Lepins, U.Raitums, A.Reinfelds, V.Ponomarevs.

Latvijas Universitāte,
1992

LU ZINĀTNISKĀ
BIBLIOTĒKA
93-1763

SOLVABILITY OF THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR
DIFFERENTIAL EQUATION WITH SINGULARITIES

J. Cepitis

Summary. There are formulated sufficient conditions which ensure solvability of certain initial value problem for the n -th order differential equation having unsummable singularities.
1991 MSC 34A34

Consider differential equation

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (1)$$

where $n \geq 2$, for some $\sigma \in (0, +\infty)$ and any $\delta \in (0, \sigma)$, function $f: [\delta, \sigma] \times F^n \rightarrow R$ satisfies Caratheodory's condition, but has, may be, unsummable singularities if $t = 0$.

Assume for $k = 1, \dots, n-1$ existence of functions

$$\gamma_k: (0, \sigma) \rightarrow [0, +\infty)$$

having for all $\delta \in (0, \sigma)$ on $[\delta, \sigma]$ absolutely continuous derivatives of the order $n-k$ such that

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \gamma_k(t) = +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}} \exp\left(-\int_t^\sigma \gamma_k(\tau) d\tau\right) < +\infty. \quad (3)$$

For fixed $l \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ we introduce the initial conditions

$$\lim_{t \rightarrow 0+} x^{(i)}(t) = 0, \quad i = 0, \dots, l, \quad (4_l)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \exp\left(\int_t^\sigma \gamma_{l+1}(\tau) d\tau\right) x^{(l)}(t) = c_l, \quad (5_l)$$

where $c_l \in R$, and shall investigate the solvability of the initial value problem (1), (4_l), (5_l).

As a solution of the initial value problem (1), (4_l), (5_l)

we mean a function x which for some $\tau \in (0, \sigma)$ is defined and has absolutely continuous derivative of the $(n-1)$ st order on $[0, \tau]$, satisfies conditions $(4_1), (5_1)$ and for every $\delta \in (0, \tau)$ almost everywhere in $[\delta, \tau]$ differential equation (1). Therefore these solutions belong to the class of functions which usually designates with $AC_{n-1}([0, \tau])$.

Use designations

$$L_1 x = x' - \gamma_1(t)x, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$D_1 x = L_{n-1} x, \quad D_k x = D_{k-1} L_{n-k} x, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

let $c: (0, \sigma] \rightarrow [0, +\infty)$ is bounded function such that

$$\lim_{t \rightarrow 0} c(t) = 0,$$

$$I_n(t) = \int_t^\sigma \int_{\xi_1}^\sigma \dots \int_{\xi_{n-2}}^\sigma c(\xi_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-2} \exp\left(\int_{\xi_{n-i}}^{\xi_{n-i-1}} \gamma_{n-i}(\tau) d\tau\right) \times \\ \times \exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau) d\tau\right) d\xi_{n-1} \dots d\xi_1, \quad \text{if } n > 2,$$

$$I_2(t) = \int_t^\sigma c(\xi_1) \exp\left(\int_{\xi_1}^t \gamma_1(\tau) d\tau\right) d\xi_1.$$

Definition. We say that the condition c_1 is held if

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_t^\sigma \exp\left(\int_t^\tau \gamma_{1,1}(\tau) d\tau\right) \frac{d}{dt} I_n(t) < +\infty, \quad (6)$$

for some $M \in (0, +\infty)$, any $\delta \in (0, \sigma)$, $\tau \in (\delta, \sigma]$ and solution $x: [\delta, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$ of the differential equation (1) which satisfies estimate

$$|x(t)| \leq M, \quad t \in [\delta, \tau],$$

the inequality

$$|D_{n-1} x(\delta)| \leq c(\delta)$$

ensures validity in $[\delta, \tau]$ of the inequality

$$|D_{n-1} x(\tau)| \leq c(\tau).$$

Theorem 1. Let the condition c_1 is held. Then the initial value problem $(1), (4_1), (5_1)$ has a solution x which in the domain of its definition satisfies estimate (7).

Proof. Let $c_1 \in \mathbb{R}$ is fixed. Introduce auxiliary functions

$$\mu_0(t) = c_0 \exp\left(-\int_t^\sigma \gamma_1(\tau) d\tau\right) + (-1)^{n-1} I_n(t),$$

$$\mu_1(t) = -c_1 \int_t^\sigma \exp\left(\int_t^{\xi_1} \gamma_2(\tau) d\tau\right) \exp\left(\int_t^\tau \gamma_1(\tau) d\tau\right) d\xi_1 + (-1)^{n-1} I_n(t),$$

$$\text{for } l \geq 2, \mu_l(t) = (-1)^l c_l \int_t^\sigma \int_{\xi_1}^\sigma \dots \int_{\xi_{l-1}}^\sigma \exp\left(\int_t^{\xi_l} \gamma_{l+1}(\tau) d\tau\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{l-1} \exp\left(\int_{\xi_{i-1}}^{\xi_i} \gamma_{i+1}(\tau) d\tau\right) \exp\left(\int_t^\tau \gamma_1(\tau) d\tau\right) d\xi_1 \dots d\xi_{l-1} + (-1)^{n-1} I_n(t).$$

According to (2), (3), (6) we have

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_l^{(i)}(t) = 0, \quad i = 0, \dots, l.$$

It is clear that for some $s_i \in (0, \sigma]$ inequalities

$$-M < \mu_l(t) < M, \quad t \in (0, s_l]$$

are true.

Choose series of numbers $k = s_k, k = t_k$ such that

$$s_1 \in (0, \sigma), \quad s_{k+1} \in (0, s_k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0, \quad t_k \in (s_k, \sigma]$$

and solutions of the differential equation (1) $x_k: [s_k, t_k] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the initial conditions

$$x_k^{(i)}(s_k) = \mu_l^{(i)}(s_k), \quad i = 0, \dots, n-1, \quad (8)$$

and inequalities

$$-M < x_k(t) < M, \quad t \in [s_k, t_k]. \quad (9)$$

Notice that μ_l is the unique solution of the differential equation

$$D_{n-1} x = c(t)$$

which satisfies first $(n-1)$ conditions of (8), thus

$$|D_{n-1} x_k(s_k)| = c(t),$$

and according to condition c_1

$$|D_{n-1} x_k(t)| \leq \varepsilon(t), \quad t \in (s_k, t_k]. \quad (10)$$

If t_k are chosen maximum right as possible, then one of the next three expressions

$$-M \leq x_k(t_k), x_k \leq M, t_k \rightarrow \sigma$$

is true at least.

Let $s = \inf_k \{t_k\}$. Since (9) and (10) $s \in (0, \sigma)$. Further, from (2), (3), (6) and (10) we may deduce that sequences of functions

$$k \cdot x_k, k \cdot x'_k, k \cdot x_k^{(n-1)}$$

are uniformly bounded and equicontinuous. This allows select for any $\delta \in (0, s)$ in $[\delta, s]$ uniformly convergent subsequence x_{k_m} limit of which is the solution of the differential equation (1).

Function $x: [0, s] \rightarrow R$ which is defined consequently

$$x(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{k_m}(t), t \in (0, s), x(t) = 0, t = 0$$

is the solution of the differential equation (1), satisfies conditions (4₁), (5₁) and also estimate (7). The theorem is proved.

Let by extension

$$s \in (0, \sigma), c_1^{(1)} \in R, c_1^{(2)} \in [c_1^{(1)}, +\infty),$$

and solutions of initial value problem (1), (4₁), (5₁) for every $c_1 \in [c_1^{(1)}, c_1^{(2)}]$ are continuable on $[0, s]$. We say that $x \in S_1([c_1^{(1)}, c_1^{(2)}])$ if $x \in AC_{n-1}([0, s])$ is a solution of the differential equation (1) and for some $c_1 \in [c_1^{(1)}, c_1^{(2)}]$ satisfies conditions (4₁), (5₁).

Connectedness of the set $S_1([c_1^{(1)}, c_1^{(2)}])$ in the space of functions $AC_{n-1}([0, s])$ has the important meaning in investigation of boundary value problems for the differential equation (1), therefore we note the next result.

Theorem 2. Let the condition c_1 is held. Then the set $S_1([c_1^{(1)}, c_1^{(2)}])$ is connected in $AC_{n-1}([0, s])$.

Proof. Assume contrary, namely that x^1, x^2 are arbitrary solutions of the differential equation (1) which belong to various connected components of the set $S_1([c_1^{(1)}, c_1^{(2)}])$. Then for all $t_k \in (0, s)$ are found $\nu_k \in [0, 1]$ such that there are no solutions of the differential equation (1) which satisfy equality

$$\alpha_k^{(i)} = \nu_k x_k^{(i)}(t_k) + (1-\nu_k) x_k^{(i)}(t_k), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

for some $\alpha_k \in R^n$.

Let $k \rightarrow t_k$ is the sequence of numbers such that

$$t_{k+1} \in (0, t_k), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = 0$$

and x_k are solutions of the differential equation (1) which satisfy the initial conditions

$$x_k^{(i)}(t_k) = \alpha_k^{(i)}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

As the condition c_1 is held we can from the sequence $k \rightarrow x_k$ select the subsequence $m \rightarrow k_m \rightarrow x_{k_m}$ which converges to the solution of the initial value problem (1), (4₁), (5₁) for some $c_1 \in [c_1^{(1)}, c_1^{(2)}]$. The proof completes by standard opinions (see [2]) now.

Example. Consider together with conditions (4₁), (5₁) the differential equation

$$\frac{d}{dt} L_{n-1} x + g(t) D_{n-1} x = f(t, x_1), \quad (11)$$

where function $g : (0, \sigma) \rightarrow R$ such that for all $\delta \in (0, \sigma)$ g is summable on $[\delta, \sigma]$ and for some $c \in [0, +\infty)$ negative part of the function $t \rightarrow (g(t)+c/t)$ is summable on $[0, \sigma]$,

$$x_1 = (x, \dots, \exp(\int_t^\sigma \gamma_{1,1}(\tau) d\tau) \frac{d}{dt} \exp(\int_t^\sigma \gamma_{1,1}(\tau) d\tau) x^{(1,1)}, \dots, \frac{d^{n-1-1}}{dt^{n-1-1}} \exp(\int_t^\sigma \gamma_{1,1}(\tau) d\tau) x^{(n-1)}),$$

function $t \rightarrow t^{-c} f(t, x)$ satisfies the Caratheodory's condition on $[0, \sigma] \times R^n$.

Notice that particular case of this problem, where

$$n = 2, \quad \gamma_1(t) = p/t, \quad g(t) = (1+q)/t; \quad p \geq 1, \quad q > -2,$$

has been examined in the paper [1].

If the point $x_1(0)$ is determined by the initial conditions (4₁), (5₁) and $\rho : [0, \sigma] \rightarrow R$ is summable function which overwhelms function $t \rightarrow t^{-c} f(t, x)$ in some interior of the point $x_1(0)$, then choose

$$x(t) = t^c \int_0^t \rho(\xi) \exp(\frac{1}{2} \int_\xi^t (|g(s)+c/s| - (g(s)+c/s)) ds) d\xi$$

and repeat opinions from the paper [3] we easily convince of validity of the condition c_1 , if only inequality (6) is true.

At the end notice that the differential operator

$$\sum_{i=0}^n \frac{\alpha_i d^{n-i}}{t^i dt^{n-i}} x$$

where $\alpha_i \in R$, is often visible in applications. It can be expressed in the form of the left side of the differential equation (11) by functions

$$\gamma_i(t) = p_i/t, \quad g(t) = q/t; \quad q, p_i \in R, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

The conditions of the theorem 1 in such case are expressed by inequalities tying the values q, p_1, \dots, p_{n-1} .

References

1. Гриванс Г. П., Клоков В. А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Латв. мат. ежегодник. - Рига: Зинатне, 1984. - Вып. 28. - С. 14-24.
2. Липин А. Я., Пономарев В. Д. Связность множества решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве непрерывных функций // Латв. мат. ежегодник. - Рига: Зинатне, 1976. - Вып. 17. - С. 187-192.
3. Цепитис Я. В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью // Дифференциальные уравнения: 1983. - Т. 19. - С. 2071-2075.

J. Cepītis. Sākumvērtību problēmas atrisināmība diferenciālvienādojumam ar singularitātēm.

Anotācija. Formulēti pietiekamie nosacījumi kādai sākumvērtību problēmai klasei n -tās kārtas diferenciālvienādojumam ar neintegrējamām singularitātēm.

Я. Цепитис. Разрешимость начальной задачи для дифференциального уравнения с особенностями.

Аннотация. Приведены достаточные условия разрешимости начальных задач одного класса для дифференциального уравнения n -того порядка с несуммируемыми особенностями.

УДК 517.911.

ЕДИНСТВЕННОСТЬ И НЕЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ф.И. Садырбаев, А.Б. Шибулис

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений вида

$$(\lambda(u, x)u')' = f(x), \quad (1)$$

а также для систем, состоящих из двух уравнений вида (1). Приведены условия, обеспечивающие единственность решения, и некоторые примеры неединственности.

УДК 519.21

1. Рассматриваются краевые задачи для эллиптических уравнений и систем с непрерывными нелинейностями при старших производных. Системы такого вида возникают, например, из термодиффузионной задачи в квазистационарном случае [1, 2], когда разрывные нелинейности сглаживаются непрерывными функциями. Оказывается, что уже для простейших уравнений (и тем более для систем) такого вида решение краевых задач, вообще говоря, не единственно даже в классе гладких функций. Ниже приводятся примеры неединственности, а также некоторые условия, обеспечивающие единственность решения.

2. Пусть заданы числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, A, B , функции $\lambda \in C(R \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2])$, $f \in L_2(a, b)$ и ищется решение задачи

$$(\lambda(u)u')' = f, \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B. \quad (2)$$

Пример 1. Покажем, что задача (1)–(2) может иметь бесконечно много решений. Для этого рассмотрим функцию

$$u(x) = x + \ln(1 + \gamma x e^x). \quad (3)$$

Для любого $\gamma \neq 0$ она удовлетворяет соотношениям

$$u(0)=0, \quad u'(1)=1,$$

$$(e^u u')' = (e^u)' = ((1+\gamma x e^{-x})e^x)' = (e^x + \gamma x)' = e^x.$$

Отсюда следует, что при $f=e^x$, $a=A=0$, $b=B=1$ существуют $\lambda_2 > 1$ и гладкая функция $\lambda: R \rightarrow [1, \lambda_2]$ такая, что задача (1), (2) имеет бесконечно много решений вида (3).

3 случае условий

$$u'(a)=A, \quad u'(b)=B \quad (4)$$

решение уравнения (1) может быть не единственно даже при линейном коэффициенте λ . Например, для $\lambda=1$, $f=\cos x$, $a=A=B=0$, $b=\pi$ решениями задачи (1), (4) являются функции $u=c-\cos x$, где c - произвольная постоянная.

В случае же условий Дирихле справедливо

Предложение 1. Уравнение (1) при условиях

$$u(a)=A, \quad u(b)=B \quad (5)$$

может иметь не более одного решения в классе W_2^1 [3].

Доказательство проведем от противного, т.е. пусть u, v ($u \neq v$) - два решения задачи (1), (5).

Положим

$$\kappa(v) = \int_0^v \lambda(t) dt \quad (6)$$

Тогда из (1) и того, что $(\kappa(v))' = \lambda(v)v'$, получим $\kappa(u) - \kappa(v) = c_1 x + c_2$. В силу условий (5) имеем: $c_1 = c_2 = 0$, и следовательно, $\kappa(u) = \kappa(v)$. Отсюда, $u=v$, так как функция κ монотонна.

Предложение 2. Пусть

$$(\lambda(t) - \lambda(\tau))(t - \tau) \leq 0 \quad t, \tau \in R. \quad (7)$$

Тогда задача (1), (2) может иметь не более одного решения в классе W_2^1 .

Доказательство. Пусть u, v - различные решения задачи (1), (2). Тогда из (1), (2) и (6) получаем

$$\kappa(u) - \kappa(v) = c(x-a) \quad (8)$$

$$(\lambda(u(b)) - \lambda(v(b)))B = c, \quad (9)$$

где c — некоторая постоянная.

Рассмотрим случай $c > 0$. Случай $c < 0$ рассматривается вполне аналогично, а при $c = 0$ так же, как и при доказательстве предложения 1, получаем $u \equiv v$.

Из (3) имеем $\kappa(u) > \kappa(v)$, $x \in (a, b)$, и вследствие монотонности κ : $u(b) > v(b)$. Учитывая последнее неравенство, из (7) заключаем, что $(\lambda(u(b)) - \lambda(v(b))) \geq 0$, а это противоречит соотношению (9).

Замечание 1. В доказательствах единственности, приведенных выше, нигде не использовалась непрерывность функции λ . Вопросы разрешимости в классе W_2^1 эллиптических уравнений и систем с разрывными нелинейностями рассмотрены в [2, 4].

Предложение 3. Пусть $f \in L_2$, $\lambda: R \times [a, b] \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda_1 > 0$, является липшицевой по первому аргументу, т.е. существует $c \in R$ такая, что

$$|\lambda(t, x) - \lambda(\tau, x)| \leq c|t - \tau|, \quad t, \tau \in R, \quad x \in [a, b].$$

Тогда уравнение

$$(\lambda(u, x)u')' = f \quad (10)$$

при условиях (5) может иметь не более одного решения в классе W_2^1 .

Доказательство. Пусть u, v ($u \neq v$) — решения вариационного неравенства (BP)

$$\int_a^b (\lambda(u, x)u' \xi' + f \xi) dx = 0 \quad \forall \xi \in \overset{\circ}{W}_2^1, \quad (11)$$

соответствующего задаче (1), (5).

Положим

$$k(x) = \begin{cases} \frac{\lambda(u, x) - \lambda(v, x)}{u - v} \cdot v', & u \neq v \\ 0, & u = v \end{cases}$$

и относительно $v \in \overset{\circ}{W}_2^1$ рассмотрим следующее BP:

$$\int_a^b (\lambda(u, v)v' + kv) \xi' dx = 0 \quad \forall \xi \in \overset{\circ}{W}_2^1. \quad (12)$$

Решение $v = 0$ является его единственным решением. Это вытекает,

например, из [4], поскольку $k \in L_2$, а функция v на $W_2^1(a, b)$ является гельдеровой [3].

С другой стороны, из ВР (11) получаем

$$0 = \int_a^b (\lambda(u, v)u' - \lambda(v, x)v') \xi' dx =$$

$$= \int_a^b (\lambda(u, x)(u-v)' + k(u-v)) \xi' dx,$$

т.е. что решением ВР (12) является функция $v=u-v$. Итак, пришли к противоречию: $u=v$.

Оказывается, что в задаче (10), (5) липшицевость коэффициента λ существенна для единственности решения.

Пример 2. Пусть $a=A=B=0$, $b=\Pi$, $f=\sin x - 3\sin^3 x$. В качестве λ возьмем непрерывную функцию такую, что

$$\lambda(t, x) = \begin{cases} 1+t^2, & t \leq \sin x, \\ 1, & t \geq \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x. \end{cases}$$

Тогда уравнению (10) и условиям (5) удовлетворяют функции $u=\sin x$ и $u=\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x$.

3. Перейдем к рассмотрению задачи Дирихле для системы эллиптических уравнений

$$\begin{cases} (\alpha(u, v)u')' = f, \\ (\beta(u, v)v')' = g. \end{cases} \quad (13)$$

Приведем два примера неединственности решения системы (13) с условиями Дирихле, которые получаются из примера 2 неединственности решения задачи (10), (5).

Пример 3. Пусть $a=0$, $b=\Pi$, $u(a)=v(a)=u(b)=0$, $v(b)=\Pi$, $g=0$, $\beta=1$, а α - произвольная непрерывная функция такая, что

$$\alpha(t, \tau) = \begin{cases} 1+t^2, & t \leq \sin \tau, \\ 1, & t \geq \sin \tau + \frac{1}{3}\sin^3 \tau. \end{cases} \quad (14)$$

Тогда решениями системы (13) являются следующие пары функций:

$$(u_1, v_1) = (\sin x, x), \quad (u_2, v_2) = (\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x, x).$$

Пример 4. Пусть $g=f=\sin x - 3\sin^3 x$, $a=0$, $b=\pi$,

$$u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=0, \quad (15)$$

α - произвольная непрерывная функция такая, что

$$\alpha(t, \tau) = \begin{cases} 1+t^2, & t \leq \tau, \\ 1, & t \geq \tau + \frac{1}{3} \tau^4, \end{cases} \quad (16)$$

а $\beta(t, \tau) = \alpha(t, \tau)$. Тогда системе (13) удовлетворяют следующие пары функций:

$$(u_1, v_1) = (\sin x, \sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x), \quad (u_2, v_2) = (v_1, u_1).$$

Замечание 2. Липшицевы функции не могут удовлетворять соотношениям (14) или (16). Вопрос о единственности решения краевой задачи Дирихле для системы (13) в случае липшицевых коэффициентов α , β остается открытым.

В заключение приведем некоторые условия, обеспечивающие единственность решения системы (13), (15).

Предложение 4. Пусть хотя бы одна из функций f , g есть тождественный нуль.

Тогда задача (13), (15) имеет единственное решение в классе $W_2^1 \times W_2^1$.

Доказательство существования решения можно провести, например, по принципу Шаудера, а для доказательства единственности, без ограничения общности, предположим, что $f=0$. Тогда из равенства

$$\int_a^b \alpha(u, v) u' \xi' dx = 0 \quad \forall \xi \in W_2^1,$$

взяв в качестве ξ функцию u и учитывая, что $\alpha(u, v) > 0$, получаем $u = \text{const}$. Отсюда, в силу краевых условий, $u=0$. Теперь из предложения 1 следует, что решение v уравнения $(\beta(0, v)v')' = g$ определяется однозначно.

Предложение 4 справедливо также при замене нулевых условий

(15) следующими:

$$u(a)=u(b)=A, \quad v(a)=v(b)=B. \quad (17)$$

Если же одна из функций u , v в концах интервала принимает различные значения, то предложение 4, вообще говоря, неверно (см. пример 3).

Предложение 5. Пусть

(i) система (13) удовлетворяет условию однозначной разрешимости задачи Коши;

(ii) выражение $\alpha(u, v)du + \beta(u, v)dv$ является полным дифференциалом.

Тогда задача (13), (17) может иметь не более одного решения (u, v) в классе $C^2 \times C^2$.

Доказательство. Пусть (u_j, v_j) , $j=1, 2$, — различные решения. По условию (ii) существует функция Q такая, что $dQ = \alpha du + \beta dv$.

Складывая уравнения системы (13), получаем $Q' = f + g$, поэтому $Q(u_1, v_1) - Q(u_2, v_2) = c_1 x + c_2$. В силу краевых условий (17) $c_1 = c_2 = 0$, и следовательно, $Q(u_1, v_1) = Q(u_2, v_2)$. Отсюда и из строгой монотонности $Q(u, v)$ по каждой из переменных следует

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{и} \quad v_1(t) = v_2(t), \quad t \in [a, b]. \quad (18)$$

Далее рассмотрим равенства

$$\begin{cases} \alpha(u_1, v_1)u_1' - \alpha(u_2, v_2)u_2' = c_1, \\ \beta(u_1, v_1)v_1' - \beta(u_2, v_2)v_2' = c_2, \end{cases} \quad (19)$$

которые получаются из (13).

Отметим, что

$$0 = Q'(u_1, v_1) - Q'(u_2, v_2) = c_1 - c_2. \quad (20)$$

При $c_1 = 0$ из (20) получаем также $c_2 = 0$. Тогда $u_1'(a) = u_2'(a)$, $v_1'(a) = v_2'(a)$ и, согласно условию (i), $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Пусть $c_1 > 0$ (случай $c_1 < 0$ рассматривается аналогично). Тогда из (17) и (19) получаем $u_1'(a) > u_2'(a)$, $u_1'(b) > u_2'(b)$. Это значит, что существует $t_0 \in (a, b)$ такое, что $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, причем $u_1'(t_0) > u_2'(t_0)$. Из (18) следует, что $v_1(t_0) = v_2(t_0)$. Тогда из (19) получаем, что $c_1 \leq 0$, но это противоречит предположению.

Доказательство завершено.

Литература

1. Авдонин Н.А. Математическое описание процессов кристаллизации. - Рига: Зинатне, 1980. - 178 с.
2. Цибулис А.Б. О предельном переходе в одной системе эллиптических уравнений при сглаживании разрывных нелинейностей // Латв.мат.ежегодник. - 1988. - Вып.32. - С.50-54.
3. Ладъженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. - М: Наука, 1973. - 576 с.
4. Цибулис А.Б. Разрешимость эллиптических уравнений с разрывными нелинейностями // Дифференц.уравнения. - 1986. - Т.22. - N 8. - С.1435-1441.

F.Sadyrbaev, A.Cibulis. Uniqueness and nonuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations.

Summary. Two-point boundary value problems for an equation

$$(\lambda(u, x)u')' = f(x), \quad (1)$$

as well as for the system of two equations of type (1), are considered. The conditions ensuring uniqueness of solution and some nonuniqueness examples are given.

1991 MSC 34B15

F.Sadirbajevs, A.Cibulis. Atrisinājumu unitāte un neunitāte nelineāriem eliptiskiem vienādojumiem.

Anotācija. Aplūkotas robežproblēmas eliptiskam vienādojumam

$$(\lambda(u, x)u')' = f(x), \quad (1)$$

un sistēmām, kas sastāv no šāda tipa vienādojumiem. Uzrādīti nosacījumi, kas garantē atrisinājuma unitāti, kā arī neunitātes piemēri.

Институт математики и информатики

Поступила 10.04.92

Латвийского университета

Рига, б.Райня, 29

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ДВУХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭМДЕНА-ФАУЛера

Г.П.Гризанс

Аннотация. Исследуется область разрешимости двухточечной краевой задачи для системы уравнений типа Эмдена-Фаулера. Рассмотрены некоторые примеры.
УДК 517.927.4

Рассмотрим краевую задачу для системы двух уравнений типа Эмдена-Фаулера

$$x'' + \frac{k}{\tau} x' + P_n(x, y) = 0, \quad (1)$$

$$y'' + \frac{k}{\tau} y' + Q_m(x, y) = 0,$$

$$x'(0) = y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$x(\tau) = x_1, \quad y(\tau) = y_1, \quad (3)$$

где $k > -1$, P_n, Q_m - однородные полиномы степени n и m , $n, m > 1$, $x_1, y_1 \geq 0$, $\tau > 0$.

Задача (1)-(3) разрешима при любых x_1, y_1 лишь для очень узкого класса полиномов P_n, Q_m , в частности, если

$$P_n(x, y) = Q_m(x, y) \quad \text{и} \quad P_n(x, x) = \text{const.}$$

В общем случае, как правило, задача (1)-(3) разрешима не для всех x_1, y_1 .

Отметим, что в статье [1] полностью изучена область разрешимости краевой задачи

$$x'' + \frac{k}{\tau} x' + a_0 \tau^p x^n = 0, \quad (4)$$

$$x'(0) = 0, \quad x(\tau) = x_0, \quad (5)$$

где $p, k > -1$, $n > 1$, $a_0, \tau, x_0 > 0$, $x(\tau) > 0$. Здесь мы постараемся использовать эти результаты для исследования задачи (1)-(3).

Очевидно, что если существует $z_0 \neq 0$ такое, что

$$P_n(z_0, 1) - z_0 Q_m(z_0, 1) = 0, \quad (6)$$

то тогда с помощью замены $x = z_0 y$ система (1) сводится к уравнению (4), где $p=0$, $a \in \mathbb{R}$.

Однако для разрешимости задачи (1)-(3) необходимо также

$$x_1 = z_0 y_1.$$

В этом случае можно использовать теоремы, доказанные в работе [1].

I. Пусть $n=m=2$. Найдем условия, когда систему (1) линейным преобразованием можно свести к виду

$$u'' + \frac{k}{\xi} u' + T_2(u, v) = 0, \quad (7)$$

$$v'' + \frac{k}{\xi} v' + a_0 v^2 = 0, \quad (8)$$

то есть к системе, где одно уравнение содержит лишь одну неизвестную функцию.

Имеет

$$x'' + \frac{k}{\xi} x' + Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0,$$

$$y'' + \frac{k}{\xi} y' + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0.$$

Сделав замену

$$\begin{aligned} x &= au + bv, \\ y &= cu + dv, \end{aligned} \quad (9)$$

где $ad \neq bc$, получаем систему

$$u'' + \frac{k}{\xi} u' + A_1 u^2 + B_1 uv + C_1 v^2 = 0,$$

$$v'' + \frac{k}{\xi} v' + D_1 u^2 + E_1 uv + F_1 v^2 = 0.$$

Потребуем, чтобы

$$D_1 = E_1 = 0,$$

или

$$Da^3 + (E-A)a^2c + (F-B)ac^2 - Cc^3 = 0, \quad (10)$$

$$2Da^2b + Ea^2d + (E-2A)abc + (2F-B)acd - Bc^2b - 2Cc^2d = 0.$$

Заметим, что первое уравнение совпадает с уравнением (6),

если положить $z_0 = \frac{a}{c}$. Обозначим через $v_0 = \frac{b}{d}$ и заметим, что $d \neq 0$. Тогда (10) можно переписать в виде

$$Dz_0^3 + (E-A)z_0^2 + (F-B)z_0 - C = 0,$$

$$(2Dz_0^2 + (E-2A)z_0 - B)v_0 = 2C - (2F-B)z_0 - Ez_0^2,$$

или

$$(2Dz_0^2 + (E-2A)z_0 - B)z_0 = 2C - (2F-B)z_0 - Ez_0^2,$$

$$(2Dz_0^2 + (E-2A)z_0 - B)v_0 = 2C - (2F-B)z_0 - Ez_0^2.$$

Учитывая необходимость $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$ или $z_0 \neq v_0$, получим:

$$2Dz_0^2 + (E-2A)z_0 - B = 0, \tag{11}$$

$$Ez_0^2 + (2F-B)z_0 - 2C = 0.$$

Следовательно, если коэффициенты A, B, C, D, E, F такие, что система (11) имеет решение $z_0 \in \mathbb{R}$, то возможна замена (9), которая сводит систему (1) к виду (7), (8), причем $a = z_0 c$ и

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0.$$

Теперь рассмотрим задачу

$$u'' + \frac{k}{l}u' + T_2(u, v) = 0 \tag{12}$$

$$v'' + \frac{k}{l}v' + a_0 v^2 = 0$$

$$u'(0) = v'(0) = 0,$$

$$u(\tau) = u_1, \quad v(\tau) = v_1. \tag{13}$$

Очевидны следующие утверждения:

1. Если v_1 такое, что задача

$$v'' + \frac{k}{l}v' + a_0 v^2 = 0, \tag{14}$$

$$v'(0) = 0, \quad v(\tau) = v_1,$$

не имеет решения, то и задача (12), (13) не имеет решения.

2. Если задача (14) имеет решение $v(t)$ такое, что $\forall t > 0$

$$0 < v(t) < Ct^{-2}, \quad \text{где } C > 0, \tag{15}$$

и для всех $v \in (0, Ct^{-2})$ существуют верхняя и нижняя функции для

первого уравнения системы (12), удовлетворяющие крайним условиям (13), то задача (12), (13) имеет решение [2, с.95, т.1.1].

Отметим, что из результатов работы [1] вытекает, что в зависимости от параметров задача (14) может иметь любое наперед заданное число решений, удовлетворяющих условию (15).

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример:

$$u'' + \frac{k}{t}u' + Au^2 + Bv^2 = 0, \quad (16)$$

$$v'' + \frac{k}{t}v' + a_0v^2 = 0,$$

$$u'(0) = v'(0) = 0, \quad (17)$$

$$u(\tau) = u_1, \quad v(\tau) = v_1,$$

где $A < 0$, $B > 0$, $a_0, u_1, v_1 > 0$, $k \in (5, 9 + 4\sqrt{2})$.

Из теоремы 2 [1] следует, что для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется v_1 такое, что задача (14) будет иметь ровно m решений, в частности, при $v_1 = \frac{2(k-3)a_0}{\tau^2}$ задача (14) имеет бесконечное число решений. Легко показать разрешимость уравнения (16), если выбрать в качестве верхней и нижней функций $\beta(t) = u_1$, $\alpha(t) = 0$. Следовательно, задача (16), (17) имеет не менее m решений, если k , a_0 , v_1 , τ такие, что задача (14) имеет m решений.

II. Пусть $n = m = 3$. Имеем

$$x'' + \frac{k}{t}x' + Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = 0,$$

$$y'' + \frac{k}{t}y' + Ey^3 + Fx^2y + Gxy^2 + Hy^3 = 0.$$

Необходимо, чтобы после преобразования

$$x = au + bv,$$

$$y = cu + dv,$$

$$ad = cb$$

второе уравнение имело бы вид

$$v'' + \frac{k}{t}v' + H_1v^3 = 0.$$

Соответственно необходимо

$$E_1 = F_1 = G_1 = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & E z_0^4 + (F-A) z_0^3 + (G-B) z_0^2 + (H-C) z_0 - D = 0, \\ (3E z_0^3 + (2F-3A) z_0^2 + (G-2B) z_0 - C) v_0 &= 3D + (2C-3H) z_0 + (B-2G) z_0^2 - F z_0^3, \\ (3E z_0^2 + (F-3A) z_0^2 - B) v_0^2 + (2F z_0^2 + (2G-2B) z_0 - 2C) v_0 &= \\ &= 3D + (C-3H) z_0 - G z_0^2. \end{aligned}$$

Можно показать, что если система

$$\begin{aligned} 3E z_0^3 + (2F-3A) z_0^2 + (G-2B) z_0 - C &= 0, \\ F z_0^3 - (B-2G) z_0^2 + (2C-3H) z_0 - 3D &= 0 \end{aligned}$$

имеет решение $z_0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\left(F z_0^3 + (G-B) z_0 - C \right) = \left(3D + (C-3H) z_0 - G z_0^2 \right) \left(3E z_0^3 + (F-3A) z_0 - B \right),$$

то с помощью замены (9) систему (1) можно преобразовать к виду (7), (8).

Аналогично можно рассматривать случай $n=m=4$ и так далее. Однако отметим, что при росте показателей степени полиномов резко возрастает сложность расчета условий относительно коэффициентов полиномов.

Литература

1. Гризанс Г.П. Область существования решения одной краевой задачи для уравнения Эмдена-Фاولера // Дифференц. уравнения. - 1988. - Т.24. - С.563-566.
2. Гудков В.В., Клоков Ю.А., Лепин А.Я., Пономарев В.Д. Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига, 1973.

G.Grīzans. On a boundary value problem for the system of Emden-Fowler type.

Summary. The domain of the existence of BVP for Emden-Fowler type system is investigated. Some examples are given. 1991 MSC 34B99

G.Grīzāns. Par kādu robežproblēmu divu Emdena-Faulera tipa

vienādojumu sistēmai..

Anotācija. Rakstā tiek pētīts Emdena-Faulera tipa sistēmas robežproblēmas atrisinājuma eksistences apgabals. Izskaitīti daži piemēri.

Институт математики и информатики

Поступила 20.04.92

Латвийского университета

Рига, 6.Райня, 29

ЛОКАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ,
МОНОТОННЫЕ ВДОЛЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ, IV.

А. Каневский

Аннотация. Для дифференциального уравнения без единственности решений разработано достаточное условие существования ограниченной локально липшицевой функции с отрицательно определенной производной в силу уравнения. Область определения функции является окрестность множества $M \times J$, где M -компактное множество из R^n , а $J \subset R$.
УДК 517.925

0. Введение

Настоящая статья продолжает цикл работ автора [1]–[3] по исследованию необходимых и достаточных условий существования функций Ляпунова и Ляпунова-Красовского. Для дифференциальных уравнений без единственности решений используется семейство функций $I(\varphi)$, включающее в себя и семейство решений. Для уравнений с единственностью решений использовались лишь решения уравнения.

В этой статье рассматривается вопрос о существовании функции Ляпунова – Красовского в окрестности некоторого множества $M \times J$, где M – компактное множество из R^n , а $J = (a, b)$, $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$.

За основу взят метод и определения, предложенные Я. Курцвейлем и И. Врочечем в [4].

1. Обозначения и определения

1.1. Обозначим $J = (a, b)$, где $a \geq -\infty$, $b \leq +\infty$. Символ $|\cdot|$ применяется для обычной евклидовой нормы в R^n и sup-нормы для функций. Кроме того, $\text{dist}(x, y) = |x - y|$; $\text{dist}(X, Y) = \inf\{|x - y| : x \in X, y \in Y\}$ (расстояние); $\alpha(X, Y) = \max\{\sup\{\text{dist}(x, Y) : x \in X\}, \sup\{\text{dist}(y, X) : y \in Y\}\}$ (отклонение). Для r -окрестности множества M будем писать

$U(M, r)$.

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = P(x, t) \quad (1.1)$$

$P \in C$, $x \in G \subset \mathbb{R}^n$, G — открытое ограниченное множество, $t \in J$. Решение уравнения (1.1) обозначается через $x(\cdot)$, множество кусочно гладких C^1 функций $y(\cdot) : [\lambda_y, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda_y \in J$ — через C' , график функции $y(\cdot)$ — через Γ_y .

Всюду будем считать, что некоторое компактное множество M является частью G , т.е. $M \subset G$ и $U(M, H) \subset G$ для некоторого $H > 0$. Через S будем обозначать открытое множество, такое, что $M \subset S$, $C \cap S \subset U(M, H)$.

Указанные окрестности S и $U(M, H)$ существуют в силу того, что пространство \mathbb{R}^n нормально.

Обозначим

$$A(r, h) = \{x \in S : \text{dist}(M, x) \leq r, \text{dist}(\partial S, x) \geq h\}.$$

Ниже всюду r и h считаются такими, что $A(r, h)$ не пусто.

1.2. Определение. Функцию $\psi : C \cap S \times J \rightarrow \mathbb{R}^+$ назовем допустимой, если она непрерывна и положительна для $x \in S \setminus M$ и $\psi(x, t) = 0$ для $x \in \partial S \cup M$.

Обозначим для $y(\cdot) \in C'$, $y(t_0) = x_0$,

$$\Phi_y(x_0, t_0) = \int_{t_0}^b \psi(y(\tau), \tau) | \dot{y}(\tau) - P(y(\tau), \tau) | d\tau.$$

Для допустимой функции введем семейство $I(\psi) \subset C'$. Считается, что $y(\cdot) \in I(\psi)$, $I_2(\psi)$, если

из $y(t') \in \partial S \cup M$ для некоторого $t' \in J$ следует $y(t) = y(t')$ для всех $t \in [t', b]$ и

$$\Phi_y(y(\lambda_y), \lambda_y) < 1 \quad (\Phi_y(y(\lambda_y), \lambda_y) < 1/2).$$

1.3. Обозначим верхнюю правую производную Дини функции $V : G \times J \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ вдоль решения $x(\cdot)$ через $D^+_{(1.1)} V(x_0, t_0)$, нижнюю правую, верхнюю левую и нижнюю левую производные будем записывать с помощью символов D_+ , D^- , D_- .

Для локально липшицевых функций V значение этих производных не зависит от выбора решения $x(\cdot)$ с начальными

данными $x(t_0)=x_0$. Будем обозначать все четыре производные общим символом \dot{V} (1.1). Применение в высказывании символа \dot{V} (1.1) означает, что высказывание истинно с любой из четырех производных.

1.4. Определение. Функцию $V:G \times J \rightarrow R^+$ назовем отрицательно определенной относительно $M \times J$, если существует возрастающая функция $a:R^+ \rightarrow R^+$ такая, что $a(0)=0$ и $V(x,t) \leq -a(\text{dist}(x,M))$.

1.5. Сформулируем теперь условия, о которых пойдет речь в основной теореме.

Условие C0. Для любого открытого множества S такого, что $M \subset S$, $C1 \subset C \cup (M, N)$ существует допустимая функция $\psi: C1 \times J \rightarrow R^+$, для которой при любых $r, h > 0$ существует $T > 0$ такое, что для всех $y(\cdot) \in I(\psi)$

$$\mu\{t \in J: \text{dist}(y(t), M) \geq r \text{ и } \text{dist}(y(t), \partial S) \geq h\} < T,$$

где μ - мера Лебега.

Условие M0. Для любого открытого множества D такого, что $M \subset D \subset C1 \subset C \cup (M, N)$ существует ограниченная локально липщцевая функция $V: (D \setminus M) \times J \rightarrow R^+$ с отрицательно определенной относительно $M \times J$ производной \dot{V} (1.1).

2. Предварительные результаты

2.1. Определение. Для некоторой допустимой функции $\psi: C1 \times J \rightarrow R^+$ и семейства $\{f_y(y(\cdot), \cdot)\}$, $y(\cdot) \in C'$ функций

$$f_y: \Gamma_y \rightarrow R \quad (2.1)$$

определим функции

$$V_y(x_0, t_0) = (1 - \psi_y(x_0, t_0)) f_y(x_0, t_0), \quad (2.2)$$

(где $x_0 = y(t_0)$) и функцию $V: (S \setminus M) \times J \rightarrow R$

$$V(x_0, t_0) = \sup\{V_y(x_0, t_0): y(\cdot) \in I(\psi), \lambda_y = t_0, y(t_0) = x_0\} \quad (2.3)$$

2.2. Лемма. Пусть для некоторого множества S (см. пункт 1.1) и допустимой функции $\psi \in C^1$ при $x \in S \setminus M$ и такой, что

$$\psi(x, t) \leq \max\left\{\frac{2}{\text{dist}(x, M)} + 1, \frac{2}{\text{dist}(x, \partial S)} + 1\right\} \quad (2.4)$$

задано семейство (2.1) такое, что для некоторого $m > 0$

$$3m \leq f_y(x_0, t_0) \leq 4m.$$

Тогда заданная с помощью (2.3) функция V ограничена и

$$\sup\{f_y(x_0, t_0): y(\cdot) \in I(\psi), \lambda_y = t_0, y(t_0) = x_0\} = V(x_0, t_0) \leq \dots \quad (2.5)$$

В частности,

$$3m \leq V(x_0, t_0) \leq 4m \quad (2.6)$$

Доказательство. Правые неравенства в (2.5) и (2.6) сразу следуют из (2.3). Для доказательства левых неравенств выбираем решение $x(\cdot)$ с $x(t_0) = x_0$. Тогда

$$V(x_0, t_0) \geq V_x(x_0, t_0) = f_x(x_0, t_0) \geq 3m.$$

Лемма доказана.

2.3. Лемма. Пусть выполнены все условия леммы 2.2. Тогда

$$V(x_0, t_0) = \sup\{V_y(x_0, t_0) : y(\cdot) \in I_2(\varphi), \lambda_y = t_0, y(t_0) = x_0\}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Для любых $\varepsilon \in (0; m)$ и $(x, t) \in (S \setminus M) \times J$ найдется функция $y(\cdot) \in I(\varphi)$ такая, что при $\lambda_y = t_0, y(t_0) = x_0$,

$$V_y(x_0, t_0) \geq V(x_0, t_0) - \varepsilon \geq 3m - \varepsilon$$

Используя $f_y(x_0, t_0) \leq 4m$, имеем

$$\Phi_y(x_0, t_0) < 1 - \frac{3m - \varepsilon}{4m} < \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

2.4. Лемма. Для допустимой функции φ , удовлетворяющей (2.4) и любой $(x, t) \in (S \setminus M) \times J$ найдутся числа $\delta, \eta_1, \eta_2, 0 < \delta < \min\{1; (t_0 - a)/2; (b - t_0)/10\}$ и $0 < \eta_1 < \eta_2$, зависящие только от (x_0, t_0) и P , такие, что из $|(x_0, t_0) - (x_1, t_1)| < \delta$ и $y(\cdot) \in I(\varphi), y(t_1) = x_1 \in S$ следует

$$\text{dist}(y(t), M) > \eta_1, \text{dist}(y(t), \partial S) > \eta_2, \quad (2.8)$$

на $[t_1, t_0 + 5\delta]$.

Доказательство. Положим $\varepsilon = \min\{1; (t_0 - a)/2; (b - t_0)/10, 1 - \max\{|P(x, t) + 1| : x \in \text{Cl}S, t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + 5\varepsilon]\}, \delta = \min\{\text{dist}(x_0, \partial S)/481; \text{dist}(x_0, M)/481; \varepsilon\}$, $\eta_1 = \text{dist}^+(x_0, M)/4$, $\eta_2 = \text{dist}(x_0, \partial S)/4$. Пусть на $[t', t''] \subset [t_1, t_0 + 5\delta]$ имеем $\text{dist}(y(t'), \partial S) = \text{dist}(x_1, \partial S)$ и $\text{dist}(x_0, \partial S)/4 \leq \text{dist}(y(t), \partial S) = \text{dist}(x_1, \partial S)$, $y(t) \in S$.

Предположим теперь, что $\text{dist}(y(t''), \partial S) = \text{dist}(x_0, \partial S)/4$.

Тогда

$$\frac{2}{\text{dist}(x_1, \partial S)} \int_{t_1}^{t_2} |y(\tau) - P(y(\tau), \tau)| d\tau < 1,$$

$$|y(t'') - y(t')| < \text{dist}(x_1, \delta S) / 2 + \int_{t'}^{t''} |P(y(\tau), \tau)| d\tau$$

Так как $|y(t'') - y(t')| \geq \text{dist}(y(t'), \delta S) - \text{dist}(y(t''), \delta S)$, то

$$\text{dist}(y(t''), \delta S) \geq \text{dist}(x_1, \delta S) / 2 - \int_{t'}^{t''} |P(y(\tau), \tau)| d\tau \geq$$

$$\text{dist}(x_1, \delta S) / 2 - |x_1 - x_0| / 2 - \int_{t'}^{t''} |P(y(\tau), \tau)| d\tau \geq$$

$$\text{dist}(x_0, \delta S) / 2 - 6\delta(1 + \max\{|P(x, t)| : t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0 + 5\varepsilon, x \in \text{Cl}S\}) > \text{dist}(x_0, \delta S) / 4.$$

Полученное противоречие доказывает правильность выбора η_2 . Рассуждения относительно η_1 аналогичны.

2.5. Лемма. Пусть выполнены все условия леммы 2.2. Если дополнительно для каждого $K = A(r, r) \times [t', t'']$ с $r > 0$ и $t', t'' \in J$ существует число L_K , такое, что для любых $u(\cdot), v(\cdot), z(\cdot) \in I(\varphi)$, для которых $\Gamma_u \cap \Gamma_v = \Gamma_z$, $\Gamma_u \setminus \Gamma_z \subset K$, $\Gamma_v \setminus \Gamma_z \subset K$,

$$\alpha(\Gamma_u \setminus \Gamma_z, \Gamma_v \setminus \Gamma_z) \leq |(u(\lambda_u), \lambda_u) - (v(\lambda_v), \lambda_v)|$$

имеет место неравенство

$$|f_u(u(\lambda_u), \lambda_u) - f_v(v(\lambda_v), \lambda_v)| \leq L_K (|u(\lambda_u) - v(\lambda_v)| + |\lambda_u - \lambda_v| + |\lambda_v - \lambda_z|),$$

то заданная с помощью (2.3) функция V локально липшицева.

Доказательство. Выберем точку $(x_0, t_0) \in (S \setminus M) \times J$, а для нее числа δ, η_1, η_2 согласно лемме 2.4.

Понятно, что $|\varphi(x, t) - \varphi(x^*, t^*)| \leq L_1 |(x, t) - (x^*, t^*)|$, $|\varphi(x, t)| \leq L_2$, $|P(x, t)| \leq L_2$, для (x, t) и (x^*, t^*) из окрестности $A(\eta_1, \eta_2) \times [t_0 - \delta; t_0 + 5\delta]$ точки (x_0, t_0) . Числа L_1 и L_2 некоторые константы для данной окрестности.

Положим теперь $\delta_1 = \min\{\delta; 1/(4L+1); \eta_1/2; \eta_2/2\}$, где $L = L_1 + L_2 + 4L_2^2$. Понятно, что неравенства (2.8) остаются верными и на множестве $A(\eta_1, \eta_2) \times [t_0 - \delta_1; t_0 + 5\delta_1]$.

Рассмотрим точки $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ из δ_1 -окрестности точки (x_0, t_0) . Положим $t_3 = t_1 + 2|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)|$. Следовательно, истинны неравенства

$$|t_1 - t_3| \leq 2|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| < 4\delta_1 \quad (2.9)$$

$$|t_2 - t_3| \leq 3|(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| < 6\delta_1 \quad (2.10)$$

Зададим любое $\varepsilon > 0$. Найдется функция $u(\cdot): [t_1, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u(\cdot) \in I_2(\varphi)$, $u(t_1) = x_1$ такие, что

$$V(x_1, t_1) < V_u(x_1, t_1) + \varepsilon$$

Согласно лемме 2.4 для $t \in [t_1, t_3]$ имеем

$$\text{dist}(u(t), M) > \eta_1, \quad \text{dist}(u(t), \partial S) > \eta_2.$$

Зададим функции $\sigma(\cdot): [t_2, t_3] \rightarrow [t_1, t_3]$

$$\sigma(t) = t_3 + \frac{(t_1 - t_3)(t - t_3)}{(t_2 - t_3)}$$

и $w(\cdot): [t_1, t_3] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v(\cdot): [t_2, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$w(t) = u(t) + (x_2 - x_1) \frac{t - t_3}{t_1 - t_3},$$

$$v(t) = w(\sigma(t)) \quad \text{для } t \in [t_2, t_3],$$

$$v(t) = u(t) \quad \text{для } t \in [t_3, b]$$

Имеем $v(t_2) = x_2$. Кроме того, $|w(t) - u(t)| = |x_2 - x_1|$. Поэтому в силу выбора $\delta_1 = \eta/2$, $\delta_2 = \eta/2$ для $t \in [t_1, t_3]$ получаем

$$\text{dist}(w(t), M) \geq \eta_1/2, \quad \text{dist}(w(t), \partial S) \geq \eta_2/2. \quad (2.11)$$

Зададим $z(\cdot) \in I(\varphi)$, как ограничение $u(\cdot)$ на $[t_3, b]$. Тогда

$$\alpha(\Gamma_u \setminus \Gamma_z, \Gamma_v \setminus \Gamma_z) \leq |(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| \quad (2.12)$$

Делая замену переменных $\tau = \sigma(t)$ в интеграле

$$\Phi_v(x_2, t_2) = \int_{t_2}^b \varphi(v(t), t) |\dot{v}(t) - P(v(t), t)| dt$$

и учитывая, что $\dot{v}(t) = \dot{w}(\sigma(t)) \dot{\sigma}(t)$ для $\tau \in [t_1, t_3]$, получаем

$$|\Delta_1| = |\Phi_v(x_2, t_2) - \Phi_u(x_1, t_1)| \leq$$

$$\int_{t_1}^{t_3} |\varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau))| \dot{u}(\tau) + \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_3} - P(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} -$$

$$- P(u(\tau), \tau) + P(u(\tau), \tau) - \int_{t_1}^{t_3} \varphi(u(\tau), (\tau)) |\dot{u}(\tau) - P(u(\tau), \tau)| d\tau \leq$$

$$\int_{t_1}^{t_3} |\varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) - \varphi(u(\tau), (\tau))| |\dot{u}(\tau) - P(u(\tau), \tau)| d\tau +$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) \left| \frac{x_2 - x_1}{t_1 - t_3} \right| d\tau +$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) |P(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau))| \frac{t_2 - t_3}{t_1 - t_3} d\tau +$$

$$\int_{t_1}^{t_3} \varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) |P(u(\tau), \tau)| d\tau \leq$$

$$\int_{t_1}^{t_3} |\varphi(w(\tau), \sigma^{-1}(\tau)) - \varphi(u(\tau), (\tau))| |\dot{u}(\tau) - P(u(\tau), \tau)| d\tau +$$

$$L_2 |x_2 - x_1| + L_2^2 (|t_2 - t_3| + |t_1 - t_3|)$$

Из $\varphi(x, t) \geq 1$ для $x \in M \cup \delta S$, $u(\cdot) \in I(\varphi)$ следует

$$\int_{t_1}^{t_3} |\dot{u}(\tau) - P(u(\tau), \tau)| d\tau < 1$$

и из (2.9), (2.10) теперь вытекает, что

$$|\Delta| \leq L |(x_1, t_1) - (x_2, t_2)| \quad (2.13)$$

Так как $u(\cdot) \in I_2(\varphi)$, то $\Phi_u(x_1, t_1) < 1/2$, используя то, что $\delta_1 < 1/(4L+1)$, из (2.13) получаем

$$\Phi_v(x_2, t_2) \leq \Phi_u(x_1, t_1) + 2L\delta_1 < 1$$

Таким образом, $\Phi_v(x_2, t_2) < 1$. Это неравенство вместе со способом задания $v(\cdot)$ и (2.11) позволяет утверждать, что $v(\cdot) \in I_2(\varphi)$.

Отсюда $V(x_2, t_2) > v_v(x_2, t_2)$, и в силу условий леммы 2.3,

настоящей леммы, а также неравенств (2.9) - (2.13) получаем

$$\begin{aligned} V(x_1, t_1) - V(x_2, t_2) &< V_u(x_1, t_1) - V_v(x_2, t_2) + \varepsilon = \\ &(1 - \Phi_v(x_2, t_2)) |f_u(x_1, t_1) - f_v(x_2, t_2)| + |A| f_u(x_1, t_1) + \varepsilon = \\ &L_K (|x_1 - x_2| + |t_1 - t_3| + |t_2 - t_3|) \\ &+ 4mL(|x_1, t_1| - |x_2, t_2|) + \varepsilon, \end{aligned}$$

причем L_K и L зависят только от (x_0, t_0) и P . Поскольку ε выбирается произвольным и аналогичную оценку можно получить для разности $V(x_2, t_2) - V(x_1, t_1)$, то лемма 2.5 доказана.

2.6. Лемма. Пусть выполнены все условия лемм 2.2 и 2.5. Пусть также все функции $f_y(y(\cdot), \cdot)$, $y(\cdot) \in I(\varphi)$ невозрастающие. Если дополнительно существует непрерывная функция $\beta: (S \setminus M) \times J \rightarrow R^+$ такая, что $v y(\cdot) \in I(\varphi)$, и для почти всех $t_0 \in [\lambda_y, b)$ производные оцениваются

$$\left. \frac{d}{dt} f_y(y(t), t) \right|_{t=t_0} \leq -\beta(x_0, t_0); \quad (2.14)$$

где $x_0 = y(t_0)$ и выполнено еще одно условие:

$$\forall u(\cdot), v(\cdot) \in I(\varphi) \text{ из } \Gamma_u \subset \Gamma_v \text{ следует } f_v|_{\Gamma_u} = f_u, \quad (2.15)$$

то для заданной с помощью (2.3) функции V существуют производные $\dot{V}_{(1.1)}(x_0, t_0)$ на $(S \setminus M) \times J$ и

$$\dot{V}_{(1.1)}(x_0, t_0) \leq - \frac{\beta(x_0, t_0)}{2}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку (x_1, t_1) , $x_1 \in S \setminus M$, $t_1 \in (a, b)$ и решение $x(\cdot)$ с начальными данными $x(t_1) = x_1$. (Согласно лемме 2.5 функция V локально липшицева. Следовательно, производные Дини, как было упомянуто в 1.3, не зависят от выбора решения с начальными данными (x_1, t_1)). Пусть $t_2 > t_1$ и $x(t) \in S \setminus M$ на $[t_1, t_2]$. Обозначим $x(t_2) = x_2$.

Для любой функции $y(\cdot) \in I(\varphi)$, для которой $\lambda_y = t_2$, $y(t_2) = x_2$ поставим в соответствие функцию $\bar{y}(\cdot) \in I(\varphi)$,

$$\bar{y}(t) = x(t) \text{ на } [t_1, t_2]$$

$$\bar{y}(t) = y(t) \text{ на } [t_2, b).$$

Тогда согласно (2.14) для всех $y(\cdot) \in I(\varphi)$, для которых $y(t_2) = x_2$,

$$f_{\bar{y}}(x_1, t_1) \approx f_y(x_2, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \beta(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Так как $x(\cdot)$ решение уравнения (1.1), то $\phi_{\bar{y}}(x_1, t_1) = \phi_y(x_2, t_2)$. Согласно (2.15), $f_{\bar{y}}(x_2, t_2) \approx f_y(x_2, t_2)$. Следовательно,

$$V_{\bar{y}}(x_1, t_1) = (1 - \phi_{\bar{y}}(x_1, t_1)) f_{\bar{y}}(x_1, t_1) \approx (1 - \phi_y(x_2, t_2)) (f_y(x_2, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \beta(x(\tau), \tau) d\tau).$$

По лемме 2.3 получаем

$$V(x_1, t_1) \approx \sup\{V_{\bar{y}}(x_1, t_1) : y(\cdot) \in I_2(\varphi), \lambda_y = t_2, y(t_2) = x_2\} \approx$$

$$V(x_2, t_2) + \inf\{(1 - \phi_y(x_2, t_2)) : y(\cdot) \in I_2(\varphi), \lambda_y = t_2,$$

$$y(t_2) = x_2\} \int_{t_1}^{t_2} \beta(x(\tau), \tau) d\tau \approx V(x_2, t_2) + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \beta(x(\tau), \tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$D_{+(1.1)} V(x_1, t_1) \approx D_{(1.1)}^+ V(x_1, t_1) \approx -\frac{1}{2} \beta(x_1, t_1) \quad (2.16)$$

Если выбрать с самого начала $t_2 < t_1$ такими, что $x(t) \in S \setminus M$ на $[t_2, t_1]$, то получим вместо (2.16)

$$D_{-(1.1)} V(x_1, t_1) \approx D_{(1.1)}^- V(x_1, t_1) \approx -\frac{1}{2} \beta(x_1, t_1).$$

Тем самым лемма доказана.

3. Основная теорема

Приведем доказательство основной теоремы.

3.1. Теорема. $CO \rightarrow MO$.

Доказательство. Пусть D — некоторое открытое множество, выбранное согласно условию MO . Тогда найдется открытое множество S такое, что

$$ClD \subset S \subset ClS \subset U(M, N).$$

Зададим гладкую на $(S \setminus M) \times J$ допустимую функцию $\varphi: \text{Cls} \times J \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\varphi(x, t) = \max\left\{\psi(x, t), \frac{2}{\text{dist}(x, M)} + 1, \frac{2}{\text{dist}(x, \partial S)} + 1\right\}$$

для $x \in S \setminus M$, $\varphi(x, t) = 0$ для $x \in M \cup \partial S$. Поскольку $I(\varphi) \subset I(\psi)$, то для семейства $I(\varphi)$ условие $C0$ тоже выполнено.

Покажем, что существует непрерывная функция $g: \text{Cls} \rightarrow [0, 1]$, обеспечивающая для всех $y(\cdot) \in I(\varphi)$ выполнение неравенства

$$\int_{\lambda_y}^b g(y(\tau)) d\tau < 1$$

и являющаяся положительно определенной на D относительно M . Для этого выберем убывающие последовательности $\{r_i\}$, $\{g_i\}$ $i \in \mathbb{N}$, такие, что $r_i > 0$, $0 < g_i < 1$, $r_i \rightarrow 0$, $g_i \rightarrow 0$ и

$$\sum_{i=1}^{\infty} g_i T_i < 1,$$

где T_i соответствует кольцу $A(r_i, r_{i+1})$ по условию $C0$.

Если $\{X_i\}$, $i \in \mathbb{N}$ разбиение единиц подчиненное системе $\{A_i\}$, где $A_1 = \text{Int}A(r_2, r_2)$, $A_i = \text{Int}(A(r_{i+1}, r_{i+1}) \setminus A(r_{i-1}, r_{i-1}))$ для $i \geq 2$, то функция

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g_{i+1} X_i(x) & \text{для } x \in S \setminus M, \\ g(x) = 0 & \text{для } x \in \partial S \cup M \end{cases}$$

является исконой.

Рассмотрим семейство функций $f_y(y(\cdot), \cdot): \Gamma_y \rightarrow \mathbb{R}$, $y(\cdot) \in I(\varphi)$

$$f_y(x_0, t_0) = m \left(3 + \int_{t_0}^b g(y(t)) dt \right).$$

Так как $3m \leq f_y(x_0, t_0) \leq 4m$, то функция V , заданная с помощью (2.3), является, согласно лемме 2.2, ограниченной.

Пусть $u(\cdot), v(\cdot), z(\cdot) \in I(\varphi)$ и $\Gamma_u \cap \Gamma_v = \Gamma_z$. Тогда

$$|f_u(u(\lambda_u), \lambda_u) - f_v(v(\lambda_v), \lambda_v)| =$$

$$\int_{\lambda_u}^{\lambda_z} g(u(t)) dt - \int_{\lambda_v}^{\lambda_z} g(v(t)) dt \leq |\lambda_u - \lambda_z| + |\lambda_v - \lambda_z|.$$

Следовательно, функция V , заданная с помощью (2.3), является согласно 2.5, локально липшицевой.

Покажем, что функции $f_y(\cdot, \cdot)$ невозрастающие. Если $t \geq t_1$, то

$$f_y(x_0, t_0) = f_y(y(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} g(y(t)) dt$$

$$f_y(y(t_1), t_1) - f_y(x_0, t_0) = - \int_{t_0}^{t_1} g(y(t)) dt.$$

Таким образом, функция $f_y(\cdot, \cdot)$ невозрастающая и для почти всех $t \in (\lambda_y, b)$

$$\left. \frac{d}{dt} f_y(y(t), t) \right|_{t=t_0} = -g(x_0).$$

Следовательно, применяя лемму 2.6 с $\beta(x_0, t_0) = g(x_0)$, получаем, что функция $\tilde{V}_{(1.1)}$, заданная с помощью (2.3), является отрицательно определенной относительно $M \times J$.

Таким образом, ограничение функции V , заданной с помощью (2.3) на $(D \setminus M) \times J$, является искомым.

Литература

1. Каневский А.Я. Локальные функции, монотонные вдоль интегральных кривых, I. Препринт ЛАФН - 095, Саласпилс, 1986, 28 с.
2. Каневский А.Я. Локальные функции, монотонные вдоль интегральных кривых, II. Препринт ЛАФН -125, Саласпилс, 1987, 26 с.
3. Каневский А.Я. Локальные функции, монотонные вдоль интегральных кривых, III // Латв. математический ежегодник (в печати).
4. Курцвейль Я., Вржоч М. Об обращении теоремы Ляпунова об

устойчивости и теоремы Персидского о равномерной устойчивости.
 //Чехословацкий матем. журнал.-1957.- Т. 7(82). -С. 254 - 272.

A. Kanevsky. Local functions monotone along integral curves, IV.

Summary. Differential equation without uniqueness of solutions are considered in the article. Sufficient condition is given for existence of bounded locally Lipschitzian function with negative definite derivative along integral curves. The function is defined in the neighborhood of the set $M \times J$, where M is compact set of R^n and $J \subset R$.
 1991 MSC 34D20

A. Kaņevskis. Lokālās funkcijas, kuras monotoni mainās gar integrāllīknēm, IV.

Anotācija. Rakstā ir apskatīts diferenciālvienādojums bez atrisinājuma unitātes. Atrasts pietiekamais nosacījums, lai eksistētu ierobežota lokāla Lipšica funkcija ar negatīvi definītu atvasinājumu saskaņā ar diferenciālvienādojumu. Funkcijas definīcijas apgabals ir kopas $M \times J$ apkārtnē, kur M ir R^n kompakta kopa un $J \subset R$.

Институт Математики
 Латвийской Академии Наук,
 г.Рига, ул.Тургенева, 19

Поступила 06.05.92

**СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

Ф.Х.Садырбаев

Аннотация. Указывается случай влияния асимметрии в уравнении на существование решений в периодической краевой задаче для уравнения второго порядка.
УДК 517.927

0. Введение. Известно, что в ряде случаев асимметрия в дифференциальном уравнении ведет к неединственности решений нелинейных краевых задач. Примером могут служить "скачущие" нелинейности в краевых задачах для уравнений типа

$$x'' + g(x) = p(\tau),$$

где поведение функции $g(x)$ при значениях $x \rightarrow +\infty$ и значениях $x \rightarrow -\infty$ различается. При этом существенным оказывается взаимодействие поведения функции $g(x)/x$ при больших значениях переменной x со спектром задачи, порожденной линейным уравнением

$$x'' + \lambda x = 0,$$

и соответствующими краевыми условиями (см., например, [3], [4]).

Другим примером могут служить результаты из [1], гл.15, где доказывается ряд теорем о существовании нескольких решений в нелинейных краевых задачах для дифференциальных систем второго порядка. Причиной неединственности здесь является различное поведение уравнения для больших значений зависимой переменной и вблизи тривиального решения.

Значительно сложнее случаи уравнения порядка выше второго и периодической краевой задачи для уравнения второго порядка. Для периодической краевой задачи это во многом объясняется тем, что собственные значения линеаризованной задачи могут иметь

кратность 2 и фактически такая задача имеет порядок 4.

Наш подход к доказательству существования нетривиальных решений периодической краевой задачи следующий:

уравнение второго порядка путем преобразования независимой переменной на различных частях интервала приводится к системе двух (независимых) уравнений второго порядка, но при этом периодические краевые условия становятся разделенными.

В связи с этим в части 2 рассматривается двухточечная краевая задача для системы четвертого порядка.

1. Рассмотрим нелинейную задачу

$$x'' = f(t, x), \quad (1)$$

$$x(a) = x(b), \quad x'(a) = x'(b) \quad (2)$$

на конечном интервале $[a, b]$ в предположении непрерывности функции f вместе с частной производной f_x .

Обозначим $(b-a)/2 = k$. Переходя от уравнения (1) к системе

$$x' = y, \quad y' = f(t, x)$$

и применяя преобразование из [2, с. 239]

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t-a \\ k-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t), \quad a \leq t \leq k,$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-t \\ b-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (t), \quad k \leq t \leq b,$$

приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} u'' &= k^2 f((k-a)\tau + a, u), \\ v'' &= k^2 f((k-b)\tau + b, v), \end{aligned} \quad 0 \leq \tau \leq 1, \quad (3)$$

где $u = u_1$, $v = v_1$.

При этом периодические краевые условия переходят в разделенные:

$$\begin{aligned} u(0) &= v(0), & u(1) &= v(1) \\ u'(0) &= v'(0), & u'(1) &= v'(1). \end{aligned} \quad (4)$$

Условия при $\tau=1$ получаются из требования непрерывной стыковки решения $x(t)$ на отрезках (a, k) и (k, b) .

2. В данной части рассмотрим систему четвертого порядка

$$u''=g(\tau, u), \quad v''=h(\tau, v) \quad (5)$$

с краевыми условиями (4).

Предположим, что функции g, h удовлетворяют условиям:

(i) существуют непрерывные частные производные g_u, h_v ;

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad g(\tau, u) &= r_1(\tau)u + \delta_1(\tau, u), \\ h(\tau, v) &= r_2(\tau)v + \delta_2(\tau, v), \end{aligned} \quad (6)$$

причем $\delta_1(\tau, s)/s \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$ равномерно по τ в интервале $[0, 1]$;

(iii) для решений задач Коши

$$\begin{aligned} u'' &= r_1(\tau)u, & u(0) &= 0, & u'(0) &= 1, \\ v'' &= r_2(\tau)v, & v(0) &= 0, & v'(0) &= 1, \end{aligned} \quad (7)$$

выполняется соотношение

$$\operatorname{arctg} \frac{u'(1)}{u(1)} < \operatorname{arctg} \frac{v'(1)}{v(1)}; \quad (8)$$

(iv) существует $n=1, 3, 5, \dots$ такое, что для всех τ выполняется

$$\Pi^2(n-1)^2 < r_1(\tau) < \Pi^2(n-\frac{1}{2})^2, \quad i=1, 2, \quad (9)$$

$$\Pi^2(n-1)^2 < g_u(\tau, 0) < h_v(\tau, 0) < \Pi^2(n-\frac{1}{2})^2; \quad (10)$$

$$\text{(v)} \quad g(\tau, 0) = h(\tau, 0) = 0, \quad (11)$$

$$g(\tau, u) = -g(\tau, -u), \quad (12)$$

$$h(\tau, v) = -h(\tau, -v).$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия (i)-(v). Тогда задача (5), (4) имеет решение.

Доказательство. Для конкретности рассмотрим случай $n=1$ в условии (iv). Рассмотрим систему (5) с начальными условиями

$$u(0) = v(0) = 0, \quad u'(0) = v'(0) = \alpha \quad (13)$$

при $\alpha > 0$. Пусть $\varphi(\alpha, \tau)$ - угловая функция решения $u(\alpha, \tau)$, т.е. функция, определяемая соотношениями

$$u(\tau) = \rho \cdot \cos \varphi(\alpha, \tau), \quad u'(\tau) = \rho \cdot \sin \varphi(\alpha, \tau).$$

Аналогично $\theta(\alpha, \tau)$ - угловая функция решения $v(\alpha, \tau)$.

Поведение решений начальных задач (5), (13) для малых значений α определяется линейными задачами для уравнений в вариациях

$$\begin{aligned} u'' &= g_u(\tau, 0)u, & u(0) &= 0, & u'(0) &= 1, \\ v'' &= h_v(\tau, 0)v, & v(0) &= 0, & v'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Ввиду условия (10) и предположения, что $\mu=1$, для малых значений α имеем

$$\varphi(\alpha, \tau) > \theta(\alpha, \tau).$$

Отсюда получаем, что при $\tau=1$

$$u(\alpha, 1) < v(\alpha, 1).$$

С другой стороны, при $\alpha \rightarrow +\infty$ ввиду условия (11) поведение решений $u(\alpha, \tau)$, $v(\alpha, \tau)$ определяется поведением решений линейных задач (7). Отсюда и из (8), (9) следует, что

$$0 < \varphi(\alpha, 1) < \theta(\alpha, 1) < \pi/2,$$

а это значит, что $u(\alpha, 1) > v(\alpha, 1)$. Поскольку в силу гладкости функций g , h решения начальных задач (5), (13) непрерывно зависят от начальных данных и, следовательно, разность $u(\alpha, 1) - v(\alpha, 1)$ непрерывно зависит от параметра α , найдется значение α , при котором $u(\alpha, 1) = v(\alpha, 1)$. Пусть α_0 - максимальное из подобных значений α .

Пусть для определенности, $u'(\alpha_0, 1) = v'(\alpha_0, 1)$. Повторяя рассуждения для начальных задач (5), (13) с отрицательными значениями α и используя нечетность функций g , h по второй переменной, заключаем, что для $\alpha = -\alpha_0$ выполняется

$$u(-\alpha_0, 1) = v(-\alpha_0, 1), \quad u'(-\alpha_0, 1) = v'(-\alpha_0, 1).$$

Из соображений непрерывности отсюда следует, что существует угол $\omega \in [-\pi/2, \pi/2]$ и число $\alpha > 0$ такие, что решения системы (5), определяемые начальными условиями

$$\begin{aligned} u(\alpha, 0) &= \alpha \cos \omega, & u'(\alpha, 0) &= \alpha \sin \omega, \\ v(\alpha, 0) &= \alpha \cos \omega, & v'(\alpha, 0) &= \alpha \sin \omega, \end{aligned}$$

удовлетворяют также условиям

$$u(\alpha, 1) = v(\alpha, 1), \quad u'(\alpha, 1) = v'(\alpha, 1).$$

Это означает, что задача (5), (4) имеет решение при данном $\omega \in [-\pi/2, \pi/2]$, и, в силу нечетности правых частей системы (5), также симметричное решение при $-\omega$.

3. Переходя теперь к периодической задаче (1), (2), как следствие имеем следующий результат.

Теорема 2. Пусть функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(t, 0) = 0$, $f(t, x) = -f(t, -x)$;

2) для функций

$$g(\tau, u) = k^2 f((k-a)\tau + a, u),$$

$$h(\tau, v) = k^2 f((k-b)\tau + b, v),$$

при $0 \leq \tau \leq 1$ выполняются условия (i)-(iv) предыдущего параграфа.

Тогда существует нетривиальное решение задачи (1), (2).

Доказательство получается комбинацией результатов параграфа 2 с преобразованием системы (1) к виду (3).

Литература

1. Красносельский М.А., Перов А.И., Поволоцкий А.И., Забрейко П.П. Векторные поля на плоскости. - М., 1963.
2. Ascher U., Russell R.D. Reformulation of boundary value problems into "standard" form. SIAM Review. - Vol.23 (1981), N 2. - P.238-254.
3. Fu ik S. Boundary value problems with jumping nonlinearities // Casopis pest.mat. - Vol.101 (1986). - P.69-87.
4. Hart D.C., Lazer A.C., McKenna P.J. Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems // SIAM J.Math.Anal. - Vol.17 (1986), N 6. - P.1332-1338.

F.Sadyrbaev. Existence of nontrivial solutions in periodic boundary value problem for second order equations.

Summary. The case is pointed out of influence of asymmetry in equation on the solvability of periodic boundary value problem for second order equation.

1991 MSC 34B15

F.Sadīrbajevs. Netriviālo atrisinājumu eksistence periodiskai robežproblēmai otrās kārtas diferenciālvienādojumam.

Anotācija. Aplūkotas asimetrijas ietekmes gadījums uz otrās kārtas diferenciālvienādojuma periodiskas robežproblēmas atrisināmību.

Институт математики и информатики

Поступила 20 04.92

Латвийского университета

Рига, б.Райņa, 29

ON THE SOLVABILITY OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM
MODELLING BIOCHEMICAL REACTIONS

J. Cepitis, I. Minkeviča

Summary. Solvability of boundary value problem

$$x'' + \frac{2}{t} x' = \frac{x}{a + bx + cx^2}, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = \kappa,$$

while values of κ are small, is discussed.

1991 MSC 34B15

Distribution of the substratum concentration in a spherical particle which situated in the biochemical reactor is described in the stationary case by the differential equations

$$x'' + \frac{2}{t} x' = f_j(x), \quad j = 1, 2, \quad (1_j)$$

where the variables t, x are normalized and

$$f_1(x) = \frac{x}{a + bx}, \quad a, b \in (0, +\infty) \text{ (see [1])},$$

but in the report [2], improving the model,

$$f_2(x) = \frac{x}{a + bx + cx^2},$$

$$a \in (0, +\infty), \quad c \in (a, +\infty), \quad b \in (-2\sqrt{ac}, \frac{c^2}{a} - 3c).$$

These restrictions on values of the coefficients warrant the continuity and the succeeding properties of the function f_2 :

$$f_2(0) = 0, \quad f_2(x) > 0, \quad x \in (0, 1],$$

f_2' in the domain $(0, 1]$ has zero and so f_2 has the local maximum only in the point $x_0 = \sqrt{a/c}$, f_2'' in the domain $(0, 1]$ has zero and so f_2 has the point of inflection only in the one point $x_1 \in (x_0, 1)$.

Note that practical meaning have the solutions of the differential equation (1_j) which satisfies inequalities

$$0 \leq x(t) \leq 1, \quad t \in [0, 1].$$

Therefore henceforth we shall interest only about such solutions of the differential equation (1_j) .

Consider the conditions

$$x'(0) = 0, \quad x(1) = \delta, \quad (2)$$

$$\int_0^1 t^2 f_1(x(t)) dt = \kappa, \quad (3_1)$$

where $\delta \in (0,1)$, but $\kappa \in (0, +\infty)$ is determined by experimental observations of the process productivity.

Problem to find solution of the differential equation (1_1) and number $\delta \in (0,1)$ such that conditions (2) and (3_1) are satisfied is equivalent to the Neumann's problem for the differential equation (1_1) with the conditions

$$x'(0) = 0, \quad x'(1) = \kappa. \quad (4)$$

Indeed, consequence of (1_1) is the equality

$$(t^2 x')' = t^2 f_1(x),$$

integration from 0 to 1 and first equality of the conditions (2) give $x'(1) = \kappa$. On the other hand, it is easy to check, that every solution x of the differential equation (1_1) which satisfies conditions $x(1) = \delta$, $x'(1) = \kappa$ has $x'(0) = 0$ only in the case of validity (3_1) .

We shall show in this paper that Neumann's problem $(1_1), (4)$ has a solution if κ is sufficiently small and shall draw attention to circumstance that the boundary value problem $(1_2), (4)$ be able to have more then one solution. To prove the solvability we shall make use lower and upper functions (see [3]) which for the differential equations with unsummable singularities should be applied according to paper [4]. Notice also that following estimates of the boundary value problems solutions are useful for hastening of numerical methods.

First of all consider the boundary value problem $(1_1), (2)$ for arbitrary $\delta \in (0,1)$. On the solvability of these problems we can convince by choosing lower function $\alpha_0(t) = 0$, $t \in [0,1]$, and upper function $\beta_0(t) = \delta$, $t \in [0,1]$. Estimate of the solutions by lower function is not difficult to improve.

For example, we can search lower function α_1 in the shape

$$\alpha_1(t) = \delta + \lambda \frac{t^2 - 1}{6}, \quad t \in [0,1],$$

where $\lambda \in [0,6\delta]$ ensure inequalities

$$0 \leq \alpha_1(t) \leq 1, \quad t \in [0,1].$$

Indeed, as

$$\alpha_1''(t) + \frac{2}{t} \alpha_1'(t) = \lambda,$$

that, if holds inequality

$$\lambda \geq f_1(\alpha_1(t)), \quad t \in [0, 1], \quad (5_1)$$

α_1 is the lower function of the differential equation (1_1) .

If $a \geq \frac{1}{\delta}$, it is easy to find $\lambda_1^* \in (0, 6\delta)$ such that (5_1) are true for all $\lambda \in [\lambda_1^*, 6\delta]$.

Further, if $a \geq 1$, then lower function of the differential equation (1) is

$$\alpha_2(t) = \frac{2e\delta}{e^2 - 1} \frac{\text{sh}t}{t}, \quad t \in [0, 1],$$

for which holds $\alpha_2(1) = \delta$, $\alpha_2(t) \leq \beta(t)$, $t \in [0, 1]$ also.

For the proof of solvability of Neumann's problem (1_1) , (4) these lower and upper functions are not suitable, because are not true necessary inequalities

$$\alpha'(1) \leq \kappa \leq \beta'(1). \quad (6)$$

Theorem 1. The boundary value problem (1_1) , (4) has a solution, if κ is sufficiently small.

Proof. Notice that $f_1'(0) = \frac{1}{a}$, $f_1''(x) < 0$, $x \in [0, 1]$,

$$f_2''(x) < 0, \quad x \in [0, x_1], \quad f_2'(x) < 0, \quad x \in [x_1, 1],$$

therefore

$$\frac{1}{a}x \geq f_1(x), \quad x \in [0, 1]$$

and so solutions of the differential equation

$$x'' + \frac{2}{t}x' = \frac{1}{a}x$$

are lower functions of the differential equation (1_1) .

Let $\delta \in (0, 1)$ is chosen that

$$\delta_1(a^{-1/2} \text{cth} a^{-1/2} - 1) \leq \kappa,$$

then for the lower function

$$\alpha(t) = \delta_1 \frac{\text{sh} a^{-1/2}t}{t \text{sh} a^{-1/2}}$$

we have

$$0 < \alpha(t), \quad t \in [0, 1], \quad \alpha'(0) = 0, \quad \alpha'(1) \leq \kappa.$$

For every $\nu \in (0, \pi)$ the equation

$$f_1(x) = \nu^2 - \nu^2 x$$

has the root $x_\nu \in (0, 1)$ such that

$$f_1(x) \geq \nu^2 - \nu^2 x, \quad x \in [x_\nu, 1],$$

therefore solutions of the differential equation

$$x'' + \frac{2}{t}x' = \nu^2 - \nu^2 x$$

which has values in the domain $[x_\nu, 1]$ are upper functions of the differential equation (1_1) .

Let $\delta \in (\delta, 1)$ is chosen that

$$[1 + (\delta_2 - 1) \frac{\nu}{\sin \nu}, \delta_2] \subset [x_\nu, 1],$$

$$\kappa = (\delta_2 - 1)(\nu \operatorname{ctg} \nu - 1),$$

then for the upper function

$$\beta(t) = 1 + (\delta_2 - 1) \frac{\sin \nu t}{t \sin \nu}$$

we have

$$\alpha(t) = \beta(t) = 1, \quad t \in [0, 1], \quad \beta'(0) = 0, \quad \beta'(1) = \kappa.$$

Since for constructed lower and upper functions inequalities (6) are true, standard opinions allow to establish solvability of the boundary value problem (1₁), (4) and the solution x satisfies estimates

$$\alpha(t) = x(t) = \beta(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (7)$$

The theorem is proved.

Theorem 2. Let $\nu^2 \in (0, \pi)$, $\mu \in (\nu^2, \frac{1}{a+b+c} + \nu^2)$, equation $f_2(x) = \mu - \nu^2 x$ has three real roots: $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (x_1, 1)$, $x_3 \in (x_2, 1)$ and inequalities

$$x_j = (x_{j+1} - \frac{\mu}{\nu^2}) \frac{\nu}{\sin \nu} + \frac{\mu}{\nu^2}, \quad j = 1, 2, \quad (8)$$

are held. Then if

$$\kappa \in ((x_3 - \frac{\mu}{\nu^2})(\nu \operatorname{ctg} \nu - 1), (x_2 - \frac{\mu}{\nu^2})(\nu \operatorname{ctg} \nu - 1)) \quad (9)$$

the boundary value problem (1₂), (4) has at least two solutions.

Proof. According to the conditions of the theorem we have

$$(-1)^{j+1} f_2(x) = (-1)^{j+1} (\mu - \nu^2 x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 1, 2,$$

so inequalities (8) allow to choose

$$\alpha_0(t) = (x_3 - \frac{\mu}{\nu^2}) \frac{\sin \nu t}{t \sin \nu} + \frac{\mu}{\nu^2}, \quad t \in [0, 1],$$

as the lower function of the differential equation (1₂) and

$$\beta(t) = (x_2 - \frac{\mu}{\nu^2}) \frac{\sin \nu t}{t \sin \nu} + \frac{\mu}{\nu^2}, \quad t \in [0, 1],$$

as the upper function of the differential equation (1₂), but the lower function α of the differential equation (1₂) we can choose in the same way as in the preliminary theorem. Notice that inequalities (6),

$$\alpha_0'(1) < \kappa < \beta'(1), \quad (10)$$

and $\alpha(t) = \beta(t) = \alpha_0(t)$, $t \in [0, 1]$, hold.

We have the solution x of the boundary value problem (1₂), (4) which satisfies the estimates (7). Suppose that u_j , $j=1, 2$ are solutions of the differential equation (1₂)

which satisfies the conditions

$$u_j(1) = x_{j+1}, \quad u_j'(1) = \kappa.$$

Let us show, that for all $t \in (0, 1)$

$$u_1(t) > \beta(t), \quad u_2(t) < \alpha_0(t). \quad (11)$$

Inequalities (11) are true for some $t_1 \in (0, 1)$ in $(t_1, 1)$, because (10) holds. If, for example, finds $t_0 \in (0, t_1)$ such that

$$u_1(t_0) = \beta(t_0),$$

then the differential equation

$$x'' + \frac{2}{t}x' = \mu - \nu^2 x \quad (12)$$

in the domain $[t_0, 1]$ has u_1 as the lower function and α_0 as the upper function and we obtain two different solutions of the differential equation (12) which satisfy the conditions

$$x(t_0) = \beta(t_0), \quad x(1) = x_2.$$

These solutions are β and β_1 and inequalities

$$\beta(t) < u_1(t) \leq \beta_1(t) \leq \alpha_0(t), \quad t \in (t_0, 1).$$

show they difference, but since $\nu \in (0, \pi)$ it is not possible. The second of the inequalities (11) is established alike, because (8), (9) imply that u_2 is the upper function of the differential equation (12) in any subinterval of $(0, 1)$.

Repeating opinions from the paper [5] we now obtain that the boundary value problem $(1_2), (4)$ has a second solution u which differs from x and satisfies inequalities

$$x(1) < x_2 \leq u(1) \leq x_3$$

The theorem is proved.

References

1. Baleš V., Rajniak P. Mathematical simulation of fixed bed reactor using immobilized enzymes. Chem. Papers 40 (1986), pp. 329-338.
2. Baleš V., Polakovič M., Štáfuca V. Performance of packed bed bioreactor with immobilized cells. Mathematical Modelling in Biotechnology. Proceedings of the International Symposium on Biotechnology, Bratislava June 28-30, 1989, Amsterdam, 1990, pp. 251-261
3. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. - Рига: Зинатне, 1988-212с.

4. Цепитис Я.В. Разрешимость краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с несуммируемой особенностью // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т. 19. - С. - 2071-2075.
5. Цепитис Я.В. О разрешимости краевой задачи одного типа, встречающейся в приложениях // Латв. мат. ежегодник. - Рига: Зинатне, 1983. - Вып. 27. - С. 122-130.

J. Cepitis, I. Minkeviča. Par kādas bioķīmisku reakciju modelējošas robežproblēmas atrisināmību.

Аnotācija. Rakstā iztirzāta robežproblēmas

$$x'' + \frac{2}{t} x' = \frac{x}{a+bx+cx^2}, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = k$$

atsisināmība mazā parametra k vērtībām.

Я. Цепитис, М. Минкевича. О разрешимости краевой задачи, моделирующей биохимические реакции.

Аннотация. Изучается разрешимость краевой задачи

$$x'' + \frac{2}{t} x' = \frac{x}{a+bx+cx^2}, \quad x'(0) = 0, \quad x'(1) = k$$

при малых значениях параметра k .

УДК 517.917

Latvian university
Riga, boulevard Rainis 19

Received 27.04.92

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЯМИ

М.М.Адытов

Аннотация. Для начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с особенностями по независимой переменной и искомой функции установлена область разрешимости в пространстве параметров и доказаны теоремы о свойствах положительного решения.
УДК 517.911

1. В настоящей статье рассматривается начальная задача

$$x'' + \frac{px'}{t} = x^\alpha f(t, x, x'), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^p x'(t) = 0, \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = 0, \quad (3)$$

где $p > -1$, $\alpha \in (-1, 1)$, $f(t, x, x') \in C((0, a]^3)$ для некоторого $a > 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, x(t), x'(t)) = f_0 > 0 \quad (4)$$

для всех дважды непрерывно дифференцируемых и положительных вместе с первой производной в некоторой правой полуокрестности нуля функций $x(t)$, для которых выполняются условия (2), (3). Такие функции $x(t)$ будем считать решением задачи, если они в той же окрестности удовлетворяют уравнению (1).

Эта задача весьма актуальна в математической физике (см., например, [1]). Уравнение (1) имеет несуммируемую особенность по t при $t \rightarrow 0^+$ и особенность по x при $x \rightarrow 0^+$, если $\alpha \in (-1, 0)$, или для правой части не выполняется условие Липшица, если $\alpha \in (0, 1)$. Отдельно особенности по t изучались многими авторами (см. монографию [2], статью [3], а также приведенный в них список литературы). Если условие (3) заменить на условие

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x_0 > 0,$$

то доказано, что задача имеет единственное решение для $p > -1$ и не имеет решения для $p = -1$. Если же в (2) и (3) заменить $t \rightarrow 0+$ на $t \rightarrow t_0+$, где $t_0 > 0$, то такого рода задача рассмотрена в работе [4], в которой доказаны существование и единственность положительного решения для $\alpha \in (-1, 1)$. Несложно заметить, что задача (1)-(3) является предельным случаем первой задачи при $x_0 \rightarrow 0+$ и второй задачи при $t_0 \rightarrow 0+$.

2. Первая из теорем ограничивает область параметров α и p , для которых существует решение. Вторая теорема дает характеристику поведения решения в окрестности нуля.

Теорема 1. Если $\alpha < 0$ и $p = -(1+\alpha)(1-\alpha)^{-1}$, то задача (1)-(3) не имеет решения.

Доказательство. Умножив (1) на t^p , получаем

$$(t^p x')' = t^p x^\alpha f(t, x, x'). \quad (5)$$

Интегрируем (5) на интервале $[0, t]$, учитывая (2):

$$t^p x' = \int_0^t s^p x^\alpha f(t, x(s), x'(s)) ds.$$

Левая часть равенства стремится к нулю при $t \rightarrow 0+$, поэтому интеграл сходится. Из сходимости интеграла и условия (4) получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^\alpha t^p}{t^{-1}} = 0$$

или

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{x}{t^{\frac{1+p}{\alpha}}} \right)^\alpha = 0.$$

Так как $\alpha < 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\frac{1+p}{\alpha}}}{x} = 0.$$

По правилу Лопиталю получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{\frac{1+p}{\alpha} - 1}}{x'} = 0.$$

Сравнивая это равенство с (2), находим

$$\frac{1+p}{\alpha} - 1 > -p,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 2. Если решение задачи (1)-(3) существует, то для него справедливо

$$\lim_{t \rightarrow 0} x'(t) = 0. \quad (6)$$

Доказательство. Из (4) следует, что функцию f можно записать в виде

$$f(t, x, x') = f_0(1 + \varepsilon_1(t)),$$

где ε_1 - непрерывная функция и $\varepsilon_1(0) = 0$. Умножим (5) на $t^p x'$:

$$(t^p x')' t^p x' = t^{2p} x^\alpha x' f_0(1 + \varepsilon_1(t)) \quad (7)$$

и проинтегрируем на интервале $[0, t]$:

$$(t^p x')^2 = 2 \int_0^t s^{2p} x^\alpha x' f_0(1 + \varepsilon_1(s)) ds. \quad (8)$$

Интегралы $\int_0^t s^{2p} x^\alpha x' f_0(1 + \varepsilon_1(s)) ds$ и $\int_0^t s^{2p} x^\alpha x' f_0 ds$ в силу свойств функции ε_1 сходятся одновременно. По правилу Лопитала их отношение стремится к единице при $t \rightarrow 0+$, поэтому (8) может быть записано в виде

$$(t^p x')^2 = 2f_0(1 + \varepsilon_2(t)) \int_0^t s^{2p} x^\alpha x' ds, \quad (9)$$

где ε_2 - непрерывная функция и $\varepsilon_2(0) = 0$. Докажем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{2p} x^{\alpha+1} = 0. \quad (10)$$

Для $p \geq 0$ это очевидно следует из (3). При $p < 0$ получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x^{\alpha+1}}{t^{-2p}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\alpha+1)x^\alpha x'}{-2pt^{-2p-1}} = -\frac{\alpha+1}{2p} \lim_{t \rightarrow 0} t^{2p} x^\alpha x' t = 0.$$

Последнее равенство следует из сходимости интеграла (9).

Учитывая (10), интегрируем (9) по частям:

$$(t^p x')^2 = \frac{2}{1+\alpha} f_0(1 + \varepsilon_2(t)) (t^{2p} x^{\alpha+1} - 2p \int_0^t s^{2p-1} x^{\alpha+1} ds).$$

Интеграл сходится, так как все остальные слагаемые стремятся к нулю при $t \rightarrow 0+$. Разделим уравнение на t^{2p} :

$$x'^2 = \frac{2}{1+\alpha} f_0(1+\varepsilon_2(t)) (x^{\alpha+1} - 2pt^{-2p} \int_0^t s^{2p-1} x^{\alpha+1} ds).$$

Осталось показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{-2p} \int_0^t s^{2p-1} x^{\alpha+1} ds = 0.$$

Для $p \leq 0$ это очевидно. При $p > 0$ справедливость выражения легко устанавливается с помощью правила Лопитала.

Следствие. В некоторой правой полуокрестности нуля для любого решения задачи (1)-(3) выполняется неравенство

$$\frac{x(t)}{x'(t)} < t. \quad (11)$$

Действительно,

$$\frac{x(t)}{x'(t)} = \frac{\int_0^t x'(s) ds}{x'(t)} < \frac{tx'(t)}{x'(t)} = t.$$

3. Получим априорные оценки для решения и его производной:

$$c_* t^{\frac{2}{1-\alpha}} < x(t) < c^* t^{\frac{2}{1-\alpha}},$$

$$C_* t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} < x'(t) < C^* t^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},$$

где c_* , c^* , C_* и C^* - положительные постоянные, независимые от решения. После получения априорных оценок существование решения задачи (1)-(3) может быть доказано аналогично тому, как это делалось, например, в [5], поэтому доказательство здесь опускаем. Априорные оценки получим в такой последовательности:

- 3.1) $p \geq 0$ - оценка снизу;
- 3.2) $p \geq 0$ - оценка сверху;
- 3.3) $-1 < p < 0$ - оценка снизу;
- 3.4) $-1 < p < 0$, $0 < \alpha < 1$ - оценка сверху;

3.5) $-1 < p < 0$, $-1 < \alpha < 0$ - оценка сверху.

Рассмотрим подряд все случаи.

3.1. Возьмем представление (9) уравнения (1) и оценим интеграл, используя следствие теоремы 2:

$$\int_0^t s^{2p} x^\alpha x' ds = \frac{1}{1+\alpha} t^{2p} x^{\alpha+1} - \frac{2p}{1+\alpha} \int_0^t s^{2p-1} x^{\alpha+1} ds = \frac{1}{1+\alpha} t^{2p} x^{\alpha+1} -$$

$$- \frac{2p}{1+\alpha} \int_0^t s^{2p-1} \frac{x}{x'} x^\alpha x' ds > \frac{1}{1+\alpha} t^{2p} x^{\alpha+1} - \frac{2p}{1+\alpha} \int_0^t s^{2p} x^\alpha x' ds,$$

$$\left(1 + \frac{2p}{1+\alpha}\right) \int_0^t s^{2p} x^\alpha x' ds > \frac{1}{1+\alpha} t^{2p} x^{\alpha+1}.$$

Подставив эту оценку в (9), получаем

$$(t^p x')^2 > \frac{2}{1+\alpha+2p} f_0(1+c_2(t)) t^{2p} x^{\alpha+1}.$$

Обозначим

$$m = \min f_0(1+c_2(t)), \quad (12)$$

$$M = \max f_0(1+c_2(t))$$

на некотором отрезке $[0, t_0]$ и будем рассматривать $t \in [0, t_0]$.

Тогда

$$x'^2 > \frac{2mx^{\alpha+1}}{1+\alpha+2p}.$$

Извлекая квадратный корень и интегрируя, получаем искомые оценки.

3.2. Из (1) находим

$$x'' \leq x^\alpha f(t, x, x').$$

Учитывая (12) и теорему 2, дважды интегрируем на отрезке $[0, t]$ и получаем оценку сверху.

3.3. Эта оценка получается аналогично 3.2, так как при $p \in (-1, 0)$ неравенство поменяет знак:

$$x'' > x^\alpha f(t, x, x').$$

3.4. Из (5) и (12) находим

$$(t^p x')' < M t^p x^\alpha, \quad (13)$$

$$(t^p x')' (t^p x')^{-\alpha} < M t^{p(1-\alpha)} \left(\frac{x}{t}\right)^\alpha.$$

Далее воспользуемся следствием теоремы 2:

$$\left((t^p x')^{1-\alpha}\right)' < (1-\alpha) M t^{p(1-\alpha)+\alpha}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем требуемые оценки.

3.5. В неравенстве (13) воспользуемся уже полученной в 3.3 оценкой снизу:

$$(t^p x')' < M t^p \left(c_* t^{\frac{2}{1-\alpha}}\right)^\alpha.$$

Двукратное интегрирование завершает нахождение последней из априорных оценок.

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режим с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. - 480 с.
2. Кигурадзе И.Т. Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. - Тбилиси: Изд-во ТГУ, 1975. - 352 с.
3. Гризак Г.П., Клоков Ю.А. Об одной начальной задаче для уравнения второго порядка с несуммируемой особенностью// Латв. матем. ежегодник, вып. 28. - Рига: Зинатне, 1984. - С.14-28.
4. Адытов М.М. Единственность положительного решения задачи Коши при отсутствии условия Липшица// Теоретические и численные исследования краевых задач. - Рига: ЛГУ им. П.Стучки, 1989. - С.112-120.
5. Демидов М.А., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. О некоторых сингулярных задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. - 1987. - Т.23. - №7. - С.1278-1282.

M. Aduyotov. The initial value problem for the second-order ordinary differential equation with singularities.

Summary. The initial value problem for the second-order

ordinary differential equation with singularities with respect to independent variable and unknown function is considered. The domain of parameters for which solutions exist is established. Some theorems on property of positive solutions are proved.
1991 MSC 34A12

M. Adjuņovs. Koši problēma otrās kārtas diferenciālvienādojumam ar singularitātēm.

Anotācija. Apskatīta Koši problēma otrās kārtas diferenciālvienādojumam ar singularitātēm. Noteikts parametru apgabals, kuriem eksistē atrisinājums. Pierādītas teorēmas par pozitīvo atrisinājumu īpašībām.

Институт математики и информатики

Поступила 01.04.92

Латвийского университета

Рига, 6. Райņa, 29

**ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЙ
СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ**

В. Д. Пономарев

Аннотация. Приводятся условия, при которых решение системы операторных уравнений дифференцируемо по параметру. Рассмотрены примеры.

УДК 517.927.4+517.988.5.

Рассмотрим краевую задачу

$$F(x, \mu) = 0, \quad \Phi(x, \mu) = 0, \quad (1)$$

где $F: E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$, $\Phi: E_1 \times E_2 \rightarrow E_4$,

E_i - вещественно нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_i$, $i=1, \dots, 4$.

В работе приводятся условия, при которых решение системы операторных уравнений (1) дифференцируемо по параметру.

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1 (теорема 8.6.2 из [1] и теорема 2 гл. 12 п^о3 и [2]). Пусть E, G - нормированные пространства над полем действительных чисел и $f: E \rightarrow G$ дифференцируемо в каждой точке сегмента S , соединяющего точки $a, b \in E$. Тогда для каждого $x_0 \in E$ такого, что $f'(x_0)$ существует, имеем

$$\|f(b) - f(a) - f'(x_0)(b-a)\|_G \leq \|b-a\|_E \sup_{x \in S} \|f'(x) - f'(x_0)\|,$$

где $\|\cdot\|_G, \|\cdot\|_E$ - нормы пространств E, G соответственно, а $\|\cdot\|$ - операторная норма.

Лемма 2. Пусть $F_0: E_1 \rightarrow E_2$, $\Phi_0: E_1 \rightarrow E_3$, $f_0 \in E_2$, $\varphi_0 \in E_3$, $u: \{1, 2, \dots\} \rightarrow E_1$, $g \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

1) оператор $x \rightarrow F_0(x) + f_0$ демикомпактен и оператор F_0 непрерывен на $B(0, r)$;

$$2) \lim_{k \rightarrow \infty} \|F_0(u_k) + f_0\|_2 = 0;$$

3) для любого $k \in \{1, 2, \dots\}$ $u_k \in B(0, r)$.

Тогда найдутся подпоследовательности $i \rightarrow u_{k_i}$, последовательности $k \rightarrow u_k$ и u_0 такие, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u_{k_i} - u_0\|_1 = 0, \quad F_0(u_0) + f_0 = 0.$$

Если выполняются условия 1-3 леммы 2 и 4), оператор Φ_0 непрерывен на $B(0, r)$,

$$5) \lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_0(u_k) + \varphi_0\|_2 = 0, \text{ то } \Phi_0 u_0 + \varphi_0 = 0.$$

Доказательство. В силу демикомпактности оператора $x \rightarrow F_0(x) + f_0$ существует подпоследовательность $i \rightarrow u_{k_i}$, сходящаяся к некоторому элементу $u_0 \in E_1$. Далее,

$$\begin{aligned} \|F_0(u_0) + f_0\|_2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|F_0(u_0) - F_0(u_k) + F_0(u_k) + f_0\|_2 \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|F_0(u_0) - F_0(u_k)\|_2 + \lim_{k \rightarrow \infty} \|F_0(u_k) + f_0\|_2 = 0, \end{aligned}$$

т.е. $F_0(u_0) + f_0 = 0$. Аналогично, $\Phi_0(u_0) + \varphi_0 = 0$, что и завершает доказательство.

Теорема 1. Пусть $I, \mu_0 \in E_2$, $\delta, r \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

1) существует функция $x: (-\delta, \delta) \rightarrow E_1$, $x(-\delta, \delta) \subseteq B(x(0), r)$, для которой для любого $s \in (-\delta, \delta)$

$$F(x(s), \mu_0 + sI) = 0, \quad \Phi(x(s), \mu_0 + sI) = 0$$

и

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|x(s) - x(0)\|_1 = 0; \quad (2)$$

2) отображения $x \rightarrow F(x, \mu_0)$ и $x \rightarrow \Phi(x, \mu_0)$ дифференцируемы в $x(0)$, а отображения $\mu \rightarrow F(x, \mu)$ и $\mu \rightarrow \Phi(x, \mu)$ дифференцируемы на

$$M = \left\{ \mu \in E_2 \mid (\exists s \in (-\delta, \delta)) (\mu = \mu_0 + sI) \right\}$$

для любых $x \in B(x(0), r)$ и

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow \mu_0 \\ \mu \in M^0}} \left(\|D_2 F(x(s), \mu) - D_2 F(x(0), \mu_0)\| + \|D_2 \Phi(x(s), \mu) - D_2 \Phi(x(0), \mu_0)\| \right) = 0;$$

3) операторы $x \rightarrow D_1 F(x(0), \mu_0)(x)$, $x \rightarrow D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(x) + D_2 F(x(0), \mu_0)(I)$ демикомпактны;

4) краевая задача

$$D_1 F(x(0), \mu_0)(u) = 0, \quad D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(u) = 0 \quad (3)$$

имеет единственное решение.

Тогда существует предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(s) - x(0)}{s} = u_0 \in E_1$$

и

$$D_1 F(x(0), \mu_0)(u_0) + D_2 F(x(0), \mu_0)(1) = 0, \quad (4)$$

$$D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(u_0) + D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(1) = 0.$$

Доказательство. Определим для любого $s \in (-\delta, \delta)$ функции $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s) \in E_3$ и $\psi(s)$, $\psi_1(s)$, $\psi_2(s) \in E_4$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= F(x(s), \mu_0 + s1) - F(x(s), \mu_0) - D_2 F(x(s), \mu_0)(s1), \\ \varphi_1(s) &= F(x(s), \mu_0) - F(x(0), \mu_0) - D_1 F(x(0), \mu_0)(x(s) - x(0)), \\ \varphi_2(s) &= (D_2 F(x(s), \mu_0) - D_2 F(x(0), \mu_0))(s1) + \varphi(s), \\ \psi(s) &= \Phi(x(s), \mu_0 + s1) - \Phi(x(s), \mu_0) - D_2 \Phi(x(s), \mu_0)(s1), \\ \psi_1(s) &= \Phi(x(s), \mu_0) - \Phi(x(0), \mu_0) - D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(x(s) - x(0)), \\ \psi_2(s) &= (D_2 \Phi(x(s), \mu_0) - D_2 \Phi(x(0), \mu_0))(s1) + \psi(s). \end{aligned}$$

Тогда из

$$\begin{aligned} F(x(s), \mu_0 + s1) &= 0, & \Phi(x(s), \mu_0 + s1) &= 0, \\ F(x(0), \mu_0) &= 0, & \Phi(x(0), \mu_0) &= 0 \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} D_1 F(x(0), \mu_0)(x(s) - x(0)) + D_2 F(x(0), \mu_0)(s1) + \\ + \varphi_1(s) + \varphi_2(s) &= 0, \\ D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(x(s) - x(0)) + D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(s1) + \\ + \psi_1(s) + \psi_2(s) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для функции φ на основании леммы 1 имеем следующую оценку, справедливую для любых $s \in (-\delta, \delta)$

$$\|\varphi(s)\|_3 \leq \|s1\|_2 \sup_{\mu \in S} \|D_2 F(x(s), \mu) - D_2 F(x(s), \mu_0)\|,$$

где S - сегмент, соединяющий точки $\mu_0 + s1$ и μ_0 . Так как

$$\begin{aligned} \|D_2 F(x(s), \mu) - D_2 F(x(s), \mu_0)\| \leq \\ \leq \|D_2 F(x(s), \mu) - D_2 F(x(0), \mu_0)\| + \|D_2 F(x(0), \mu_0) - D_2 F(x(s), \mu_0)\|, \end{aligned}$$

то имеем

$$\|\varphi_2(s)\|_3 = O(\|s\|_2). \quad (6)$$

Из дифференцируемости отображения $x \rightarrow F(x, \mu_0)$ имеем

$$\|\varphi_1(s)\|_3 = O(\|x(s) - x(0)\|_1). \quad (7)$$

Аналогично получаем

$$\|\psi_1(s)\|_4 = O(\|x(s) - x(0)\|_1), \quad \|\psi_2(s)\|_4 = O(\|s\|_2). \quad (8)$$

Определим функцию $z: (-\delta, \delta) \setminus \{0\} \rightarrow E_1$ следующим образом:

$z(s) = (x(s) - x(0))s^{-1}$. Тогда из (5) имеем

$$D_1 F(x(0), \mu_0)(z(s)) + D_2 F(x(0), \mu_0)(1) + \varphi_1^*(s) + \varphi_2^*(s) = 0, \quad (9)$$

$$D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(z(s)) + D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(1) + \psi_1^*(s) + \psi_2^*(s) = 0,$$

где $\varphi_i^* = \varphi_i \cdot s^{-1}$, $\psi_i^* = \psi_i \cdot s^{-1}$, $i=1, 2$.

Из (6), (8) имеем

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|\varphi_2^*(s)\|_3 = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \|\psi_2^*(s)\|_4 = 0. \quad (10)$$

Из (7), (8) для любой последовательности $s: \{1, 2, \dots\} \rightarrow (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$ и $\|z(s_k)\|_1 \neq 0$, имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\varphi_1^*(s_k)\|_3}{\|z(s_k)\|_1} = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\psi_1^*(s_k)\|_4}{\|z(s_k)\|_1} = 0. \quad (11)$$

Кроме того, отметим, что

$$(\forall s_0 \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}) (\|z(s_0)\|_1 = 0 \rightarrow \|\varphi_1^*(s_0)\|_3 = 0 \wedge \|\psi_1^*(s_0)\|_4 = 0).$$

Для доказательства того, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|\varphi_1^*(s)\|_3 = 0, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \|\psi_1^*(s)\|_4 = 0, \quad (12)$$

покажем, что

$$\sup_{s \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}} \|z(s)\|_1 < \infty.$$

Предполагая противное, найдем последовательность

$$s: \{1, 2, \dots\} \rightarrow (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0, \quad \|z(s_k)\|_1 \neq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|z(s_k)\|_1 = \infty.$$

Определяя последовательность $u: \{1, 2, \dots\} \rightarrow E_1$ следующим образом.

$$u_k = z(s_k) \cdot \|z(s_k)\|_1^{-1},$$

имеем из (9)

$$\begin{aligned} D_1 F(x(0), \mu_0)(u_k) + \varphi_0(s_k) &= 0, \\ D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(u_k) + \psi_0(s_k) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(s_k) &= (D_2 F(x(0), \mu_0)(1) + \varphi_1^*(s_k) + \varphi_2^*(s_k)) \cdot \|z(s_k)\|_1^{-1}, \\ \psi_0(s_k) &= (D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(1) + \psi_1^*(s_k) + \psi_2^*(s_k)) \cdot \|z(s_k)\|_1^{-1}, \end{aligned}$$

причем, с учетом (10), (11) ограниченности операторов $D_2 F(x(0), \mu_0)$, $D_2 \Phi(x(0), \mu_0)$, получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_0(s_k)\|_3 = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_0(s_k)\|_4 = 0.$$

Поэтому из (12) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_1 F(x(0), \mu_0)(u_k)\|_3 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_0(s_k)\|_3 = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(u_k)\|_4 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\psi_0(s_k)\|_4 = 0. \end{aligned}$$

На основании леммы 2 существует решение u_0 системы (3) со свойством $\|u_0\|_1 = 1$, что противоречит единственности решения системы (3). Следовательно, соотношения (12) доказаны.

Докажем теперь существование предела

$$\lim_{s \rightarrow 0} z(s) = \lim_{s \rightarrow 0} (x(s) - x(0))s^{-1}.$$

Пусть последовательность $s: \{1, 2, \dots\} \rightarrow (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = 0$. Из (6) имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D_1 F(x(0), \mu_0)(z(s_k)) + D_2 F(x(0), \mu_0)(1)\|_3 = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(z(s_k)) + D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(1)\|_4 = 0.$$

Тогда для $f_0 = D_1 F(x(0), \mu_0)$, $f_0 = D_2 F(x(0), \mu_0)(1)$, $\Phi_0 = D_1 \Phi(x(0), \mu_0)$, $\Phi_0 = D_2 \Phi(x(0), \mu_0)(1)$, $u_k = z(s_k)$ выполняются все условия леммы 2. Поэтому существует подпоследовательность $i \rightarrow u_{k_i}$

последовательности $k \rightarrow u_k$ и $u_0 \in E_1$ такие, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_0\|_1 = 0$ и u_0 - решение системы (4). По условию 4 теоремы u_0 - единственное решение системы (4), что дает $\lim_{k \rightarrow \infty} \|u_k - u_0\|_1 = 0$, а тем самым $\lim_{s \rightarrow 0} z(s) = u_0$.

Замечание. Условие 2) в теореме 1 можно заменить на следующее:

2*) отображения $x \rightarrow F(x, \mu_0 + s1)$ и $x \rightarrow \Phi(x, \mu_0 + s1)$ дифференцируемы на $B(x(0), r)$ для любого $s \in (-\delta, \delta)$, а отображения $\mu \rightarrow F(x(0), \mu)$ и $\mu \rightarrow \Phi(x(0), \mu)$ дифференцируемы в μ_0 и

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x(0)}} \left(\|D_1 F(x, \mu_0 + s1) - D_1 F(x(0), \mu_0)\| + \|D_2 \Phi(x(s), \mu) - D_2 \Phi(x(0), \mu_0)\| \right) = 0.$$

Для доказательства одной модификации теоремы 1 нам потребуются следующие леммы. Рассмотрим задачи

$$f_0 x = 0, \quad g_0 x = k_0,$$

$$f x = 0, \quad g x = k,$$

где $f_0, f: \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2$, $g_0, g: \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_3$, $k_0, k \in \bar{E}_3$, \bar{E}_i - нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_i$, $i=1, 2, 3$. Положим

$$N(f, g, k) = \left\{ x \in \bar{E}_1 \mid f x = 0, g x = k \right\}.$$

Лемма 3 (теорема 1 из [3]). Пусть $x_0 \in \bar{E}_1$, и выполняются условия:

- 1) $x_0 \in N(f_0, g_0, 0)$;
- 2) операторы f_0 и g_0 дифференцируемы в x_0 ;
- 3) оператор $f'(x_0)$ демикомпактен;
- 4) система уравнений

$$f'_0(x_0)(u) = 0, \quad g'_0(x_0)(u) = 0$$

имеет единственное решение.

Тогда существует $\rho_1 \in (0, +\infty)$ такое, что для любого $x_1 \in B(x_0, \rho_1)$ из $x_1 \in N(f_0, g_0, 0)$ следует $x_1 = x_0$.

Лемма 4 (следствие 1 из [4]). Пусть $\rho \in (0, +\infty)$, $x_0 \in \bar{E}_1$ и

- 1) $N(f_0, g_0, k_0) \cap B(x_0, \rho) = \{x_0\}$;
- 2) f_0, g_0 непрерывны на $B(x_0, \rho)$;
- 3) отображение f_0 демикомпактно.

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, +\infty)$ найдется $\bar{\delta} \in (0, +\infty)$ такое, что для любых $f: \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_2, g: \bar{E}_1 \rightarrow \bar{E}_3, k \in B(k_0, \bar{\delta})$ и $x \in N(f, g, k) \cap B(x_0, \rho)$ из выполнимости

$$\|f_0 x\|_2 < \bar{\delta} \quad \text{и} \quad \|g_0 x - g x\|_3 < \bar{\delta} \quad (14)$$

для любого $x \in N(f, g, k) \cap B(x_0, \rho)$ следует $\|x_0 - x\|_1 < \varepsilon$.

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1, кроме соотношения (2), а также условия:

- 1) отображения $x \rightarrow F(x, \mu_0)$ и $x \rightarrow \Phi(x, \mu_0)$ непрерывны на $B(x(0), \gamma)$;
- 2) отображение $x \rightarrow F(x, \mu_0)$ демикомпактно;
- 3) отображения $s \rightarrow F(x(s), \mu_0), s \rightarrow \Phi(x(s), \mu_0)$ ограничены на $(-\delta, \delta)$, т.е.

$$\sup \left\{ \|F(x(s), \mu_0)\|_3 + \|\Phi(x(s), \mu_0)\|_4 \mid s \in (-\delta, \delta) \right\} < +\infty.$$

Тогда справедливо заключение теоремы 1.

Доказательство. Для справедливости теоремы 2, очевидно, достаточно проверить выполнимость соотношения (2):

$$\lim_{s \rightarrow 0} \|x(s) - x(0)\|_1 = 0. \quad (2)$$

Положим $k_0 = k = 0, x_0 = x(0)$,

$$\bar{\delta} = \sup \left\{ \|F(x(s), \mu_0)\|_3 + \|\Phi(x(s), \mu_0)\|_4 \mid s \in (-\delta, \delta) \right\},$$

для любых $x \in E_1$ и $s \in (-\delta, \delta)$:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= F(x, \mu_0), & f(x(s)) &= F(x(s), \mu_0 + s1) \\ f(x) &= F(x, \mu_0) \text{ при } x = x(s), \\ g_0(x) &= \Phi(x, \mu_0), & g(x(s)) &= \Phi(x(s), \mu_0 + s1) \\ g(x) &= \Phi(x, \mu_0) \text{ при } x = x(s). \end{aligned}$$

По лемме 3 найдем ρ_1 такое, что решение x_0 локально единственно. Легко проверяется справедливость включения

$$N(f, g, 0) \cap B(x_0, \rho) \subset \{x(s) \mid s \in (-\delta, \delta)\},$$

что дает выполнимость соотношений (14). Следовательно, по лемме

4 получаем требуемое.

Ниже приводятся два примера, иллюстрирующие теорему 1. В первом примере находится производная Фреше от оператора, задаваемого функционально-дифференциальным уравнением, а во втором примере выписывается вид первого уравнения из системы (4) для функционально-дифференциального уравнения, зависящего от параметра.

Пример 1. Пусть $(Ax)(t) = x'(t) - (Fx)(t)$, т.е. $Ax = x' - Fx$, где $F: AC(I, R^n) \rightarrow L(I, R^n)$, $AC(I, R^n)$ - пространство абсолютно непрерывных на $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, функций $x: I \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x\| = \sup \left\{ |x_i(t)| \mid (i, t) \in \{1, \dots, n\} \times I \right\};$$

$L(I, R^n)$ - пространство суммируемых по Лебегу функций $x: I \rightarrow R^n$ с нормой

$$\|x\| = \sup \left\{ \int_a^b |x_i(t)| dt \mid i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Найдем производную Фреше от оператора A в точке x_0 . Имеем

$$A(x_0 + h) = (x_0 + h)' - F(x_0 + h) = x_0' + h' - F(x_0 + h),$$

$$Ax_0 = x_0' - Fx_0.$$

Тогда

$$A(x_0 + h) - Ax_0 = x_0' + h' - F(x_0 + h) - x_0' + Fx_0 =$$

$$h' - F(x_0 + h) + Fx_0 = h' - F'_{x_0} h + \omega_{x_0}(h),$$

где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\omega_{x_0}(h)\|}{\|h\|} = 0,$$

F'_{x_0} - производная Фреше от оператора F в точке x_0 .

Отсюда

$$A'_{x_0} h = h' - F'_{x_0} h,$$

т.е. это дифференциал оператора A в точке x_0 при приращении h :

$$dA(x_0, h) = h' - F'_{x_0} h,$$

или можно сказать, что оператор A имеет в каждой точке x_0

производную Фреше A'_{x_0} , задаваемую формулой

$$(A'_{x_0} h)(t) = h'(t) - (F'_{x_0} h)(t),$$

где h - произвольный элемент из $AC(I, R^n)$.

Пример 2. Пусть $F(x, \mu) = x' - f(x, \mu)$, где $f: AC(I, R^n) \times R^m \rightarrow L(I, R^n)$. Тогда согласно примеру 1 имеем

$$D_1 F(x_0, \mu)(h) = h' - D_1 f(x_0, \mu)(h)$$

для любого $h \in AC(I, R^n)$ и любого $\mu \in R^m$ и

$$D_2 F(x, \mu_0)(p) = -D_2 f(x, \mu_0)(p)$$

для любого $p \in R^m$ и любого $x \in AC(I, R^n)$. Поэтому первое уравнение из системы (4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} D_1 F(x_0, \mu_0)(u) + D_2 F(x_0, \mu_0)(l) = \\ = u' - D_1 f(x_0, \mu_0)(u) + D_2 f(x_0, \mu_0)(l) = 0. \end{aligned}$$

Литература

1. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир, 1964. - 430 с.
2. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. - М.: Наука, 1965. - 424 с.
3. Пономарев В.Д. Локальная единственность решения системы операторных уравнений // Математика. Дифференциальные уравнения. - Рига: Изд-во Латв. ун-та, 1992. - С.66-71.
4. Пономарев В.Д. Существование и непрерывная зависимость решения системы операторных уравнений // Математические заметки. - 1982. - 32, N 1. - С.103-114.

V.Ponomarev. Differentiability on parameters of solutions of a system of operator equations.

Summary. Conditions are provided under which solutions of a system of operator equations are differentiable with respect to parameter. Examples are given.

1991 MSC 34B99+47B99

V.Ponomarjovs. Operatoru vienādojumu sistēmas diferenciamība pēc parametra.

Anotācija. Formulēti nosacījumi, pie kuru izpildes operatoru vienādojumu sistēmas atrisinājums ir diferencējams

рѣс параметра. Doti piemēri.

Институт математики и информатики

Поступила 05.02.92

Латвийского университета

Рига, б. Райня, 29

О СВЯЗИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ
ВАРИАЦИОННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С СУЩЕСТВОВАНИЕМ
ПРОИЗВОДНОЙ ОТ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

В. Д. Пономарев

Аннотация. Доказывается, что единственность решения вариационной краевой задачи при определенных условиях эквивалентна существованию производной от решения по параметру.
УДК 517.927.4+517.988.5

Рассматривается система операторных уравнений

$$F(x, \mu) = 0, \quad \Phi(x, \mu) = 0, \quad (1)$$

где $F: E_1 \times E_2 \rightarrow E_3$, $\Phi: E_1 \times E_2 \rightarrow E_4$, E_i - нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_i$, $i=1, \dots, 4$.

Следующая теорема показывает, что единственность решения краевой задачи

$$D_1 F(x(0), \mu_0)(u) = 0, \quad D_1 \Phi(x(0), \mu_0)(u) = 0$$

в определенном смысле эквивалентна дифференцируемости решения по параметру краевой задачи (1).

Для $\mu_0, l_{\xi\eta} \in E_2$, $\delta \in (0, \infty)$ и $(\xi, \eta) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$ положим

$$M_{\xi\eta} = \left\{ \mu \in E_2 \mid (\exists s \in (-\delta, \delta)) (\mu = \mu_0 + s l_{\xi\eta}) \right\}.$$

Теорема. Пусть $\{l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1n}, l_{21}, \dots, l_{2n}\}$ - базис E_2 , $x_0 \in E_1$, $\mu_0 \in E_2$, $r, \delta \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

- 1) $F(x_0, \mu_0) = 0$, $\Phi(x_0, \mu_0) = 0$;
- 2) существует функция $x: \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\} \times (-\delta, \delta) \rightarrow B(x_0, r)$ такая, что для любых $(\xi, \eta, s) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\} \times (-\delta, \delta)$ выполняется

$$F(x(\xi, \eta, s), \mu_0 + s l_{2\eta}) = 0, \quad \Phi(x(\xi, \eta, s), \mu_0 + s l_{\xi\eta}) = 0$$

и существуют пределы

$$\lim_{s \rightarrow 0} (x(\xi, \eta, s) - x_0)^{-s} = u_{\xi\eta} \in E_1 \quad (2)$$

для любых $(\xi, \eta) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$;

- 3) отображения $x \rightarrow F(x, \mu_0)$ и $x \rightarrow \Phi(x, \mu_0)$ дифференцируемы в x_0 , а отображения $\mu \rightarrow F(x, \mu)$ и $\mu \rightarrow \Phi(x, \mu)$ дифференцируемы на $N_{2\eta}$ и $M_{\xi\eta}$ соответственно для любых $(\xi, \eta) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$ и $x \in B(x_0, r)$ и для любых $(\xi, \eta) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow \mu_0 \\ \mu \in N_{2\eta}^0}} \|D_2 F(x(\xi, \eta, s), \mu) - D_2 F(x_0, \mu_0)\| = 0,$$

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \mu \rightarrow \mu_0 \\ \mu \in M_{\xi\eta}^0}} \|D_2 \Phi(x(\xi, \eta, s), \mu) - D_2 \Phi(x_0, \mu_0)\| = 0;$$

- 4) операторы $x \rightarrow D_1 F(x(0), \mu_0)(x)$, $x \rightarrow D_1 F(x(0), \mu_0)(x) + D_2 F(x(0), \mu_0)(I_{2\eta})$ для любого $\eta \in \{1, \dots, n\}$ демиккомпактны;
- 5) отображение $D_2 \Phi(x_0, \mu_0)$ инъективно;
- 6) пространство решений уравнения

$$D_1 F(x_0, \mu_0)(u) = 0 \quad (3)$$

n -мерно.

Тогда краевая задача

$$D_1 F(x_0, \mu_0)(u) = 0, \quad D_1 \Phi(x_0, \mu_0)(u) = 0 \quad (4)$$

имеет единственное решение.

Доказательство. В силу существования пределов (2) можно показать точно так же, как это было сделано в теореме 1 из [1], что для любых $(\xi, \eta) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, n\}$ выполняются

$$D_1 F(x_0, \mu_0)(u_{\xi\eta}) + D_2 F(x_0, \mu_0)(I_{2\eta}) = 0; \quad (5)$$

$$D_1 \Phi(x_0, \mu_0)(u_{\xi\eta}) + D_2 \Phi(x_0, \mu_0)(I_{2\eta}) = 0. \quad (6)$$

Из (5) следует, что функции $u_{1\eta} - u_{2\eta}$ для любого $\eta \in \{1, \dots, n\}$ являются решениями уравнения (3).

Покажем, что система

$$\{u_{11} - u_{21}, \dots, u_{1n} - u_{2n}\} \quad (7)$$

является базисом пространства решений уравнения (3). Так как размерность пространства решений уравнения (3) равна n , то достаточно показать, что система (7) линейно независима. Допустим противное, т.е. что существуют элементы $\alpha_\eta \in P$ (E_1 - пространство над полем P), $\eta=1, \dots, n$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{\eta=1}^n \alpha_\eta (u_{1\eta} - u_{2\eta}) = 0. \quad (8)$$

Из (6) имеем

$$D_1 \Phi(x_0, \mu_0) \left(\sum_{\eta=1}^n \alpha_\eta (u_{1\eta} - u_{2\eta}) \right) + D_2 \Phi(x_0, \mu_0) \left(\sum_{\eta=1}^n \alpha_\eta (I_{1\eta} - I_{2\eta}) \right) = 0.$$

Учитывая линейность отображения $D_1 \Phi(x_0, \mu_0)$, формулу (8) и условие 4, получаем

$$\sum_{\eta=1}^n \alpha_\eta (I_{1\eta} - I_{2\eta}) = 0,$$

что противоречиво. Следовательно, (7) - базис пространства решений уравнения (3).

Предположим, что краевая задача (4) имеет ненулевое решение v . Тогда существуют числа β_η , $\eta=1, \dots, n$, не все равные нулю, такие, что

$$v = \sum_{\eta=1}^n \beta_\eta (u_{1\eta} - u_{2\eta}).$$

Из (6) имеем

$$D_1 \Phi(x_0, \mu_0) \left(\sum_{\eta=1}^n \beta_\eta (u_{1\eta} - u_{2\eta}) \right) + D_2 \Phi(x_0, \mu_0) \left(\sum_{\eta=1}^n \beta_\eta (I_{1\eta} - I_{2\eta}) \right) = 0.$$

Отсюда, с учетом того, что v удовлетворяет граничному условию краевой задачи (4), получаем

$$D_2 \Phi(x_0, \mu_0) \left(\sum_{\eta=1}^n \beta_\eta (I_{1\eta} - I_{2\eta}) \right) = 0.$$

Условие 4 дает:

$$\sum_{\eta=1}^n \beta_\eta (I_{1\eta} - I_{2\eta}) = 0,$$

что противоречиво. Следовательно, краевая задача (4) имеет только нулевое решение.

В качестве приложения полученного результата рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения с

функциональным граничным условием:

$$x' = f(t, x), \quad \Phi x = \alpha,$$

где $f \in \text{Car}(I \times R^n, R^n)$, $\Phi: AC(I, R^n) \rightarrow R^n$, $\alpha \in R^n$, $\text{Car}(I \times R^n, R^n)$ - множество функций $f: I \times R^n \rightarrow R^n$, удовлетворяющих условию Каратеодори, $AC(I, R^n)$ - множество абсолютно непрерывных функций $x: I \rightarrow R^n$.

Предполагается, что у функции $f: I \times R^n \rightarrow R^n$ существуют частные производные $D_i f_j \in \text{Car}(I \times R^n, R^1)$, где $i=2, \dots, n+1$, $j=1, \dots, n$.

Нам потребуются следующие два вспомогательных результата. Первый является следствием теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $\{l_1, \dots, l_n\}$ - базис R^n , $x_0 \in AC(I, R^n)$, $\alpha_0 \in R^n$, $\gamma, \delta \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

- 1) $x_0'(t) = f(t, x_0(t))$, $\Phi x_0 = \alpha_0$;
- 2) существует функция $x: (1, \dots, n) \times (-\delta, \delta) \rightarrow B(x_0, \gamma)$ такая, что для любых $(\eta, s) \in (1, \dots, n) \times (-\delta, \delta)$ выполняется

$$x_{\eta s}'(t) = f(t, x_{\eta s}(t)), \quad \Phi x_{\eta s} = \alpha_0 + s l_\eta.$$

существуют пределы

$$\lim_{s \rightarrow 0} (x_{\eta s} - x_0) s^{-1} = u_\eta \in AC(I, R^n)$$

для любых $\eta \in (1, \dots, n)$;

- 3) отображение $x \rightarrow \Phi x$ дифференцируемо в x_0 .

Тогда краевая задача

$$u' = (D_i f_j(t, x_0(t)))u, \quad (\Phi' x_0)u = 1,$$

где $i=2, \dots, n+1$, $j=1, \dots, n$, имеет единственное решение.

Лемма 1 (теорема 3 из [2]). Пусть $x_0 \in AC(I, R^n)$, $l, \alpha_0 \in R^n$, $\gamma \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

- 1) $x_0'(t) = f(t, x_0(t))$, $\Phi x_0 = \alpha_0$;
- 2) отображение $x \rightarrow \Phi x$ дифференцируемо на $B(x_0, \gamma)$ и отображение $x \rightarrow \Phi' x$ непрерывно в x_0 ;
- 3) краевая задача

$$u' = (D_i f_j(t, x_0(t)))u, \quad (\Phi' x_0)u = 0,$$

где $i=2, \dots, n+1$, $j=1, \dots, n$, имеет единственное решение.

Тогда существуют $\delta_0 \in (0, \infty)$, функция $x: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow B(x_0, \gamma)$

такая, что для любого $s \in (-\delta_0, \delta_0)$ выполняется

$$x'_s(t) = f(t, x_s(t)), \quad \Phi x_s = \alpha_0 + sl,$$

и существует предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} (x_s - x_0) s^{-1} = u_0 \in AC(I, R^n),$$

являющийся решением краевой задачи

$$u'_0 = (D_1 f_j(t, x_0(t))) u_0, \quad (\Phi' x_0) u_0 = 1.$$

Из следствия 1 и леммы 1 получаем утверждение об эквивалентности единственности решения вариационной краевой задачи и существования производной от решения по параметру.

Теорема 2. Пусть $x_0 \in AC(I, R^n)$, $\alpha_0 \in R^n$, $\gamma \in (0, \infty)$ и выполняются условия:

- 1) $x'_0(t) = f(t, x_0(t))$, $\Phi x_0 = \alpha_0$;
- 2) отображение $x \rightarrow \Phi x$ дифференцируемо на $B(x_0, \gamma)$ и отображение $x \rightarrow \Phi' x$ непрерывно в x_0 .

Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Краевая задача

$$u' = (D_1 f_j(t, x_0(t))) u, \quad (\Phi' x_0) u = 1,$$

где $i=2, \dots, n+1$, $j=1, \dots, n$, имеет единственное решение.

2. Для любого $l \in R^n$ существует $\delta \in (0, \infty)$, функция $x: (-\delta_0, \delta_0) \rightarrow B(x_0, \gamma)$ такая, что для любого $s \in (-\delta, \delta)$ выполняется

$$x'_s(t) = f(t, x_s(t)), \quad \Phi x_s = \alpha_0 + sl,$$

и существует предел

$$\lim_{s \rightarrow 0} (x_s - x_0) s^{-1} = u_0 \in AC(I, R^n),$$

являющийся решением краевой задачи

$$u'_0 = (D_1 f_j(t, x_0(t))) u_0, \quad (\Phi' x_0) u_0 = 1.$$

Литература

1. Пономарев В.Д. О дифференцируемости решения системы операторных уравнений по параметру // Математика. Дифференциальные уравнения. - Рига; Изд-во Латв.ун-та, 1992. (в наст. сборнике).
2. Пономарев В.Д. Дифференцируемость по параметру решений

краевых задач // Латв.мат.ежегодник, 16. - Рига: Зинатне,
1975. - С.218-224.

V.Ponomarev. On connection between uniqueness of solution of variational boundary value problem and existence of derivative of solution with respect to parameter.

Summary. It is proved that under definite conditions uniqueness of solutions of variational boundary problem is equivalent to existence of derivative of solution with respect to parameter.

1991 MSC 34B99+47H99

V.Ponomarevs. Par sakaru starp variācijas robežproblēmas atrisinājuma unitāti un atrisinājuma atvasinājuma pēc parametra eksistenci.

Анонсація. Pierādīts, ka variācijas robežproblēmas atrisinājuma unitāte pie noteiktiem nosacījumiem ekvivalenta atrisinājuma atvasinājuma pēc parametra eksistencei.

Институт математики и информатики

Поступила 27.02.92

Латвийского университета

Рига, б.Райня, 29

EQUIVALENCE OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH IMPULSE EFFECT IN BANACH SPACE

"MATHEMATICS.

DIFFERENTIAL EQUATIONS"

A. Reinolds, L. Sermone

Summary. In the present paper the question of global strongly dynamically equivalence of nonlinear equations with impulse effect at fixed moments in Banach space is considered. The investigation is carried out by means of piecewise continuous map which is analogous of Green's function.
1991 MSC 34A37

0. Introduction

For mathematical descriptions of evolution of real processes with short-term perturbations it is often convenient to consider these perturbations as momentary. Such idealization reduces to the necessity to investigate differential equations with impulse effect [1].

The problems of classification and equivalence in the theory of ordinary differential equations without impulse effect are explored by Ph. Hartman [2], D.M. Grobman [3] and other mathematicians [4-6]. In this paper, we shall discuss the equivalence problem of nonlinear differential equations with impulse effect [7,8].

1. Preliminaries

Let us consider two nonlinear differential equations with impulse effect at fixed moments in the Banach space X :

$$dx/dt = A(t)x + f_1(t, x), \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_1} = x(\tau_1 + 0) - x(\tau_1 - 0) = B_1 x(\tau_1 - 0) + I_1(x(\tau_1 - 0))$$

and

$$dx/dt = A(t)x + f_2(t, x), \quad (2)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_1} = x(\tau_1 + 0) - x(\tau_1 - 0) = B_1 x(\tau_1 - 0) + K_1(x(\tau_1 - 0)),$$

where :

a) map $A : \mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(X)$ is locally integrable in the Bochners sense;

b) maps $f_1 : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ and $f_2 : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ are locally integrable in the Bochners sense with respect to t for fixed x ,

$$|f_1(t, x) - f_2(t, x)| < N < +\infty \quad (3)$$

and in addition satisfy Lipschitz conditions

$$|f_1(t, x) - f_1(t, x')| \leq c|x - x'|, \quad (4)$$

$$|f_2(t, x) - f_2(t, x')| \leq c|x - x'|; \quad (5)$$

c) $I \in \mathbb{Z}$, $B_1 \in \text{Hom}(X)$, maps $I_1, K_1 : X \rightarrow X$ satisfy inequalities

$$|I_1(x) - K_1(x)| < N < +\infty, \quad (6)$$

$$|I_1(x) - I_1(x')| \leq c|x - x'|, \quad (7)$$

$$|K_1(x) - K_1(x')| \leq c|x - x'|; \quad (8)$$

d) maps $x \rightarrow x + B_1 x$, $x \rightarrow x + B_1 x + I_1(x)$, $x \rightarrow x + B_1 x + K_1(x)$ are homeomorphisms;

e) sequence of the moments τ_i is strictly increasing.

Definition. A solution of differential equation with impulse effect (1) is called a piecewise absolutely continuous map with discontinuities of the first kind at the points $t = \tau_i$ which for almost all t satisfies equation and for $t = \tau_i$ satisfies the condition of "jump".

Let us introduce the notation $x_1(\cdot, t_0, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow X$ for the solution of the equation (1), $x_2(\cdot, t_0, x_0) : \mathbb{R} \rightarrow X$ for the solution of the equation (2), which satisfies the initial condition where $x_1(t_0 + 0, t_0, x_0) = x_2(t_0 + 0, t_0, x_0) = x_0$. At the break points τ_i the values for all solutions are taken at $\tau_i + 0$ if it is not other specified.

Let us note that the solution of (1) for $t \geq t_0$ is given by formul :

$$x_1(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))d\tau + \sum_{t_0 < \tau \leq t} X(t, \tau)I_1(x_1(\tau - 0, t_0, x_0)),$$

the solution of (2) for $t \geq t_0$ is given by formula

$$x_2(t, t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau)f_2(\tau, x_2(\tau, t_0, x_0))d\tau + \sum_{0 < \tau_1 < t} X(t, \tau_1)K_1(x_2(\tau_1 - 0, t_0, x_0)).$$

where $X(t, \tau)$ is evolul. . . ator of the linear equation

$$dx/dt = A(t)x,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_1} = x(\tau_1 + 0) - x(\tau_1 - 0) = B_1 x(\tau_1 - 0).$$

Definition. Equations (1) and (2) are globally strongly dynamically equivalent if there is such homeomorphism $H(t_0, \cdot): X \rightarrow X$ that

$$H(t, x_1(t, t_0, x_0)) = x_2(t, t_0, H(t_0, x_0)).$$

Let us assume the existence of piecewise continuous map $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Hom}(X)$ such as:

a) $G(\cdot, \tau): t \mapsto G(t, \tau)$ is absolutely continuous when $t \neq \tau$, $t \neq \tau_1$ and it almost everywhere satisfies the equation:

$$dx/dt = A(t)x,$$

$$b) G(\tau_1 + 0, \tau) - G(\tau_1 - 0, \tau) = B_1 G(\tau_1 - 0, \tau), \quad \tau \neq \tau_1,$$

$$G(\tau + 0, \tau) - G(\tau - 0, \tau) = E, \quad \tau \neq \tau_1,$$

$$G(\tau_1 + 0, \tau_1) - G(\tau_1 - 0, \tau_1) = E + B_1 G(\tau_1 - 0, \tau_1),$$

$$c) \sup_{t_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| d\tau + \sum_{1=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_1)| \right) = M < +\infty.$$

(E is the identity operator in the space X).

2. The main theorem

Theorem. Let G be piecewise continuous, $M\epsilon < 1$ and inequalities (3-8) be fulfilled. Then equations (1) and (2) are globally strongly dynamically equivalent.

Proof. Let us consider operator \mathfrak{J} , defined by formula:

$$\mathfrak{J}h(t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau)(f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0)))d\tau + \sum_{1=-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_1)(K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) - I_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))).$$

Let us take arbitrary $h \in PC$, where PC is the space of bounded maps, piecewise continuous in t with first kind breaks for $t = \tau_1$ and continuous in x . The space PC is supplied with the supremum norm. Boundedness of differences $f_1 - f_2$ and $I_1 - K_1$, conditions (5) and (8) and the conditions of the theorem involve $\mathfrak{J}h \in PC$.

Further,

$$\begin{aligned}
 |\delta h(t_0, x_0) - \delta h'(t_0, x_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau) (f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + \right. \\
 &+ h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + h'(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) \Big| dt + \\
 &+ \sum_{1, \dots, m} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_1) (K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) - \\
 &- K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + h'(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0)))) \Big| dt + \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0)) - h'(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))| dt + \\
 &+ c \sum_{1, \dots, m} |G(t_0, \tau_1)| |h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0)) - \\
 &- h'(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))| \leq c \|h - h'\| \sup_{t_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| dt + \right. \\
 &+ \sum_{1, \dots, m} |G(t_0, \tau_1)| \Big) = cH \|h - h'\|.
 \end{aligned}$$

From the last inequality it follows that δ is a contraction. It involves in PC there is only one solution satisfying the functional equation $\delta h = h$.

We have for $t \geq t_0$

$$\begin{aligned}
 h(t, x_1(t, t_0, x_0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) (f_2(\tau, x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0)) + \\
 &+ h(\tau, x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0)))) - f_1(\tau, x_1(\tau, t, x_1(t, t_0, x_0))) \Big| dt + \\
 &+ \sum_{1, \dots, m} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_1) (K_1(x_1(\tau_1 - 0, t, x_1(t, t_0, x_0)) + h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - \\
 &- 0, t, x_1(t, t_0, x_0)))) - I_1(x_1(\tau_1 - 0, t, x_1(t, t_0, x_0)))) \Big| dt + \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) (f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - \\
 &- f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) dt + \sum_{1, \dots, m} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_1) (K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + \\
 &+ h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) - I_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) = \\
 &= X(t, t_0) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau) (f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - \right. \\
 &- f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) dt + \sum_{1, \dots, m} \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_1) (K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + \\
 &+ h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) - I_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) \Big\} + \\
 &+ \int_{t_0}^t X(t, \tau) (f_2(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0) + h(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) - \\
 &- f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) dt + \sum_{0, \tau_1} X(t, \tau_1) (K_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + \\
 &+ h(\tau_1 - 0, x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) - I_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))).
 \end{aligned}$$

Let us check that $\eta(t) = X(t, t_0)x_0 + h(t, x_1(t, t_0, x_0))$ satisfies the equation (2).

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= X(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X(t, \tau) f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0)) dt + \\
 &+ \sum_{0, \tau_1} X(t, \tau_1) I_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0) + X(t, t_0)h(t_0, x_0) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t X(t, \tau) (f_2(\tau, \eta(\tau)) - f_1(\tau, x_1(\tau, t_0, x_0))) d\tau + \\
& + \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t} X(t, \tau_1) (K_1(\eta(\tau_1 - 0)) - f_1(x_1(\tau_1 - 0, t_0, x_0))) = \\
& = X(t, t_0) \eta(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, \tau) f_2(\tau, \eta(\tau)) d\tau + \\
& + \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t} X(t, \tau_1) K_1(\eta(\tau_1 - 0))
\end{aligned}$$

Therefore $x_1(t, t_0, x_0) + h(t, x_1(t, t_0, x_0)) = x_2(t, t_0, x_0) + h(t, x_0)$. The case $t < t_0$ is considered analogously.

Changing the roles of f_1 and f_2 , and K_1 and I_1 we prove, in the same way, the existence of h' , which satisfies the equality $x_2(t, t_0, x_0) + h'(t, x_2(t, t_0, x_0)) = x_1(t, t_0, x_0) + h'(t_0, x_0)$.

Designating $H(t_0, x_0) = x_0 + h(t_0, x_0)$, $H'(t_0, x_0) = x_0 + h'(t_0, x_0)$, we get $H' \circ H(t, x_1(t, t_0, x_0)) = x_1(t, t_0, H' \circ H(t_0, x_0))$ and $H \circ H'(t, x_2(t, t_0, x_0)) = x_2(t, t_0, H \circ H'(t_0, x_0))$. Taking into account uniqueness of mapping $H' \circ H = id$ and $H \circ H' = id$ in PC we have $H' \circ H = id$ and $H \circ H' = id$ and therefore H is homeomorphism, establishing strong global dynamical equivalence of equations (1) and (2).

Acknowledgment

This work has been completed with the financial support of the Science Council of Latvia under grant 90.224.

References

1. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища школа, 1987. - 288 с.
2. Hartman Ph. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. // Proc. Amer. Math. Soc. - 1960. - Vol.11, N 4. - P. 610-620.
3. Гробман Д.М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n -мерном пространстве // Мат. сб. - 1962. - Т. 56(98). - No. 1. - С. 77-94.
4. Palmer K.J. A generalization of Hartman's linearization theorem. // J. Math. Anal. Appl. - 1973. - Vol.41, N 3. - P. 753-758.
5. Рейнфелд А.А. Обобщенная теорема Гробмана - Хартмана //

Латв. мат. ежегодник. - 1985. - Вып.29. - С. 84-88.

6. Pugl С.С. On the theorem of P.Hartman. // Amer. J. Math. - 1969. - Vol. 91, N 2. - P. 363-367.
7. Сермоне Л.Д., Рейнфельд А.А. Эквивалентность дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. // Математика. Дифференциальные уравнения : Научные труды. - Рига: ЛУ, 1990. - No.553. - С. 124- 130.
8. Reinfelds A., Sermone L. Dynamical equivalence of differential equations with impulse effect in Banach space. // Second International Colloquium on Differential Equations, Plovdiv, Bulgaria, 19-24 August, 1991. Abstracts. - Plovdiv, 1991. - P. 25 .

А.Рейнфельд, Л.Сермоне. Эквивалентность нелинейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве.

Аннотация. В данной статье исследуется строгая динамическая эквивалентность в целом и линейных уравнений в банаховом пространстве с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Исследование проводится с помощью кусочно-непрерывного отображения аналогичного функции Грина.

УДК 517.938.4

A.Reinfelds, L.Sermone. Nelineāru diferenciālvienādojumu ar impulsu iedarbību ekvivalence Banaha telpā.

Аnotācija. Šajā rakstā ir pētīta nelineāru diferenciālvienādojumu ar impulsu iedarbību fiksētos laika momentos stingrā, globālā, dinamiskā ekvivalence Banaha telpā. Pierādījumā lietots gabaliem nepārtraukts atēlojums analogs Grīna funkcijai.

Institute of Mathematics
Latvian Academy of Sciences
19 Turgeneva St., 226524 Riga
Latvia

Received 12.05.92

КОНТИНУАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

О. Юдруп

Аннотация. В настоящей статье доказано, что множество классов континуально эквивалентных динамических систем, траектории которых пересекают меридианы тора в одном направлении, имеет мощность континуума.

УДК 517.938

Проблема классификации динамических систем является одной из интереснейших задач качественной теории динамических систем. В настоящее время хорошо изучена топологическая эквивалентность динамических систем и известно, что структурно устойчивые, а также Ω -устойчивые системы не типичны. В работе [1] исследуется гомотопная эквивалентность динамических систем на плоскости. Оказалось, что и эта эквивалентность слишком тонка для глобального изучения динамических систем, поскольку множество классов гомотопно эквивалентных динамических систем имеет мощность континуума. В настоящей статье продолжается исследование континуальной эквивалентности [2] динамических систем на двумерных многообразиях, начатое в работе [3] на двумерной сфере.

Рассмотрим динамические системы ϕ на гладком n -мерном многообразии M . Положим $\phi \neq \psi$, если существует непрерывное сюръективное отображение $F: M \rightarrow M$ такое, что

$$F(\phi(R, \cdot)) = \psi(R, F(\cdot)).$$

т.е. F отображает траектории системы ϕ на траектории системы ψ при условии, что сохраняется направление движения на траекториях.

Под требованием сохранения отображением F направления движения на траекториях мы понимаем существование отображения

$T: \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$ со свойствами:

- а) $T(t, x)$ непрерывно;

б) $T(0, x) = 0$;

в) $T(\cdot, x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ монотонно возрастающая функция;

г) $F \cdot \phi(t, x) = V(T(t, x), \dot{X}(x))$.

Согласно Н.Бурбаки [4], соотношение $\phi \geq \psi$ является соотношением предпорядка в множестве динамических систем $\mathfrak{M}(M)$, определенных на многообразии M . Очевидно, соотношение ($\phi \geq \psi$ и $\psi \geq \phi$) не влечет за собой с необходимостью $\phi = \psi$, следовательно, соотношение $\phi \geq \psi$ не является соотношением порядка. Согласно [4] соотношение ($\phi \geq \psi$ и $\psi \geq \phi$) является соотношением эквивалентности.

Динамические системы ϕ и ψ называются биконтинуально эквивалентными, если справедливо соотношение

$$(\phi \geq \psi \text{ и } \psi \geq \phi).$$

Это соотношение эквивалентности обозначим через H (в работе [1] оно имело название - гомотопная эквивалентность динамических систем).

Как известно, соотношение предпорядка $\phi \geq \psi$ индуцирует некоторое соотношение порядка $X \} Y$, где $X \in \mathfrak{M}(M)/H$, $Y \in \mathfrak{M}(M)/H$ и $(3\phi)(3\psi)((\psi \in X \text{ и } \psi \in Y) \text{ и } \phi \geq \psi)$. Мы говорим, что $X \} Y$ есть соотношение порядка на фактормножестве $\mathfrak{M}(M)/H$, ассоциированное с $\phi \geq \psi$. Для каждого $X \in \mathfrak{M}(M)/H$ существует не менее одного множества $V_x \in \mathfrak{M}(M)/H$, на котором $\}$ является соотношением совершенного порядка, и X является наибольшим элементом множества V_x . Обозначим через γ_x минимальный элемент множества V_x , а через Ω_x - множество минимальных элементов класса X . Предположим, что на рассматриваемом многообразии для каждого V_x существует минимальный элемент X_x (в работе [3] существование X_x доказано на сфере S^2).

Множество V_x линейно упорядочено, следовательно, в каждом множестве V_x существует не более одного элемента X_x , а для каждого X существует не менее одного множества V_x .

Скажем, что $X, Y \in \mathfrak{M}(M)/H$ континуально эквивалентны, если $\Omega_x = \Omega_y$. Континуальная эквивалентность, очевидно, является отпущением эквивалентности и индуцирует некоторую эквивалентность динамических систем, которую также назовем континуальной эквивалентностью.

Динамические системы $\phi \in X$ и $\psi \in Y$ называются континуально

эквивалентными, если X и Y являются континуально эквивалентными классами множества \mathfrak{M}/N .

Динамическую систему ω назовем минимальной, если $\omega \in X_n$, где X_n - минимальный элемент некоторого множества Y .

В дальнейшем положим $M = \mathbb{R}^2$ и докажем существование минимальных динамических систем на торе.

Рассмотрим динамическую систему ϕ на плоскости \mathbb{R}^2 , определенную уравнением

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

где $x = (x^1, x^2)$, $f(x) = (f^1(x), f^2(x))$, $f \in C$, $f(x^1, x^2) = f(x^1 + 1, x^2) = f(x^1, x^2 + 1)$ и функция f удовлетворяет условию единственности решения уравнения (1). Предположим, что $f^1(x) > 0$. Решение уравнения (1) обозначим через $\phi(t, x_0)$, $\phi(0, x_0) = x_0$, а траекторию, проходящую через точку x_0 , - через ϕ_{x_0} . Согласно условию $f^1(x) > 0$, имеем $\phi^1(t, x_0) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, система не имеет точек покоя.

Пусть $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ - накрытие. Тогда динамическая система ϕ определяет динамическую систему $h\phi$ на торе T^2 . Для таких систем известно, что существует предел

$$\mu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi^2(t, x_0)}{\phi^1(t, x_0)},$$

не зависящий от x_0 и называемый числом вращения.

Если $x_k = \phi^2(t_k, 0)$, где $\phi^1(t_k, 0) = k$, то

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k^2}{k}.$$

Пусть $h\phi = h\psi$. Тогда отображение $F: T \rightarrow T$ индуцирует непрерывное сюръективное отображение $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \xrightarrow{F} & T^2 \\ h \uparrow & & \uparrow h \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

коммутативна. В частности $H(\phi(\mathbb{R}, \cdot)) = \psi(\mathbb{R}, H(\cdot))$, а в силу сюръективности F имеем $H(x^1 + 1, x^2) = (H^1(x) + m, H^2(x) + n)$, $H(x^1, x^2 + 1) = (H^1(x) + p, H^2(x) + q)$, где m, n, p, q - целые числа. Итак, имеем $\phi = \psi$.

Лемма 1. Если $\phi \approx \psi$, то справедливо соотношение

$$\mu^* = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где μ, μ^* являются числами вращения соответственно систем ϕ, ψ , а числа m и n, p и q взаимно просты.

Доказательство. Пусть $H(R, 0) = \alpha_1, H(0) = 0, H(m, n) \in \alpha_1$. Рассмотрим траекторию ϕ_0 системы ϕ . Соответствующая траектория системы ψ будет $H(\phi_0) = \psi_0$, так как $H(0) = 0$. Пусть $x_0 = 0, x_k = \phi_0 \cap k \times R$, тогда $x_k = H(x_k) \in \alpha_0 + (km, kn)$, где $\alpha_0 = H(0, R)$, а выражение $\alpha_0 + (km, kn)$ обозначает кривую α_0 , сдвинутую на km по направлению оси x^1 и на kn - по направлению оси x^2 . Пусть далее $x_k \in R \times (s_k, s_k + 1)$, где $s_k = [x^2]$ ($[\cdot]$ означает целую часть). Тогда x_k^* находится между линиями $\alpha_1 + (ps_k, qs_k)$ и $\alpha_1 + ((s_k + 1)p, (s_k + 1)q)$, т.е. $x_k^* = (km + ps_k + \xi_k^1, kn + qs_k + \xi_k^2)$, где $|\xi_k^1| < |p|, |\xi_k^2| < |q|$. Поэтому в силу равенства

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k}{k}$$

имеем

$$\mu^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{kn + qs_k + \xi_k^2}{km + ps_k + \xi_k^1} = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

чем и закончено доказательство леммы.

Лемма 2. Для любой сингулярной системы ϕ существует эргодическая система $\psi \approx \phi$.

Доказательство. Пусть ϕ сингулярная динамическая система, определенная на торе T^2 . Для системы ϕ на T^2 существует глобальная секущая - подмногообразие $S = h(0, R)$, и пусть g - диффеоморфизм последования, определенный системой ϕ . Пусть $f: S \rightarrow S$ канторовая функция [5], которая непрерывна на смежных интервалах. Определим гомеоморфизм $u: S \rightarrow S$, полагая $u(x) = f \cdot g \cdot f^{-1}(x)$. Пусть ψ является надстройкой гомеоморфизма u . Тогда отображение $F: T^2 \rightarrow T^2$ имеет вид

$$F(x) = \psi(t, f(\phi(-t, x))),$$

где $\phi(-t, x) \in h(0, R)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для любой динамической системы ϕ с числом вращения μ существует динамическая система $\psi \approx \phi$ с числом вращения

$$\mu^* = \frac{n + q\mu}{m + p\mu},$$

где m, n, p, q - целые числа и $|mq - np| \geq 1$.

Доказательство. В работе [6] при условии $|mq - pr| = 1$ построен гомеоморфизм $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, который отображает траектории системы ϕ на траектории системы ψ . Оказалось, что таким образом построенное отображение является гомеоморфизмом и при $|mq - pr| > 1$, но отображение $F: T^2 \rightarrow T^2$, $F(x) = h \cdot H \cdot h^{-1}(x)$, которое отображает траектории системы $h\phi$ на траектории системы $h\psi$, гомеоморфизмом уже не является, если $|mq - pr| > 1$.

Лемма 4. Если ϕ, ψ -эргодические системы на торе T^2 и $\phi \geq \psi$, то $\psi \geq \phi$.

Доказательство. Пусть μ и μ^* числа вращения систем ϕ и ψ . Согласно лемме 1 имеем

$$\mu^* = \frac{p + q\mu}{m + r\mu},$$

где m, n, p, q - целые числа, но

$$\mu = \frac{n - m\mu^*}{-q + r\mu^*},$$

и в силу леммы 3 имеем $\psi \geq \phi$.

Теорема 1. Эргодические системы являются минимальными системами для динамических систем на торе с иррациональным числом вращения.

Доказательство. Пусть ϕ - эргодическая система с числом вращения μ , для которой существует минимальная система $\omega \leq \phi$ и соотношение $\phi \leq \omega$ не истинно. Согласно лемме 4 существует некоторая система $\psi \leq \omega$ с числом вращения μ . Системы ϕ и ψ имеют одинаковые числа вращения μ , а согласно [6] такие системы топологически эквивалентны, следовательно, $\omega \geq \psi \geq \phi$ и эргодические системы являются минимальными. В силу леммы 2 эти системы являются минимальными и для сингулярных динамических систем.

Теорема 2. Множество классов континуально эквивалентных динамических систем на торе имеет мощность континуума.

Доказательство. В силу леммы 1 множество биконтинуально эквивалентных эргодических динамических систем счетно, но множество эргодических систем с иррациональным числом вращения имеет мощность континуума. В силу теоремы 1 эргодические системы являются минимальными системами для систем с иррациональным

числом вращения. Следовательно, множество классов континуально эквивалентных динамических систем имеет мощность континуума.

Теорема 3. Динамические системы с рациональным числом вращения имеют только три класса континуально эквивалентных систем.

Доказательство. Пусть система ϕ имеет рациональное число вращения. Тогда существует система ψ с числом вращения $\mu = 0$, которая топологически эквивалентна системе ϕ . Согласно лемме 14.1 работы [7], для динамической системы ψ существует глобальное сечение многообразие S и отображение последования π на S . Пусть на T^2 существует открытое множество A незамкнутых траекторий системы ψ , предельное множество которых состоит из замкнутых траекторий ψ_x, ψ_y , где $x, y \in S$. Допустим, что $x \neq y$ и рассмотрим непрерывное отображение $f: S \rightarrow S, f(0) = f(1)$:

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & , \text{если } \theta \in [0, \theta_2] \\ p(\theta) & , \text{если } \theta \in [\theta_2, 1], \end{cases}$$

где $0, \theta_2$ являются координатами точек x, y . Если координата $\theta \in [0, \theta_2]$, то ей соответствующая точка $x \in B \cap S$, где B - множество точек траекторий $\psi_x \in A$. Отображение $p: (\theta_2, 1) \rightarrow S, p(1) = p(\theta_2)$ является гомеоморфизмом со свойством: для каждого $\theta \in (\theta_2, 1)$, справедливо $p(\theta) \neq \theta$. Положим $v(x) = f \circ \pi \circ f^{-1}(x)$, где $x \in S$. Пусть ω_1 является надстройкой гомеоморфизма v . Система ω_1 имеет только одну замкнутую траекторию.

Если положить, что множество A содержит только замкнутые траектории, то аналогично получим систему ω_2 , которая содержит только замкнутые траектории. Очевидно, системы ω_1 и ω_2 являются минимальными. Легко показать, что других минимальных систем для $\mu = 0$ не существует. Следовательно, имеем только три класса континуально эквивалентных систем.

Литература

1. Юдрупс О.М. Сравнение эквивалентностей динамических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т.12, № 7. - С.1247-1255.
2. Юдрупс С.М. Континуальная эквивалентность динамических систем // Латвийский математический ежегодник. - 1976 - Вып.

20 - С.138-140.

3. Юдрупс О.М. Континуальная эквивалентность динамических систем на сфере // Дифференц. уравнения. - 1978. - Т. 14, № 4. - С.753-754.
4. Бурбаки Н. Теория множеств. - М.: Мир, 1965.-455 с.
5. Дьедонне К. Основы современного анализа. - М.: Мир, 1964.-430 с.
6. Рейзинь Л.Э. Топологическая классификация динамических систем без точек покоя на торе // Латвийский математический ежегодник. - 1969. - Вып. 5. - С.113-121.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970.-720 с.

O. Judrups. Continual equivalence of dynamical systems on 2 - dimensional manifold.

Summary. The classes of continual equivalence of dynamical systems on 2 - dimensional torus all trajectories of which intersect meridian in one and some direction are considered. It is proved that the set of such classes has the cardinality of continuum.

1991 MSC 34C35

O. Judrups. Dinamisko sistēmu kontinuālā ekvivalence uz 2 - dimensionālām varietātēm.

Anotācija. Šajā rakstā ir apskatītas dinamisko sistēmu, kuru trajektorijas šķērso 2 - dimensionāla tora meridiānu vienā virzienā, kontinuālās ekvivalences klases. Pierādīts, ka šādu klašu kopai ir kontinuumu apjoms.

Институт математики

Поступила 12.05.92.

АН и ЛУ

Рига, ул. Тургенева 19.

EXISTENCE OF CENTRAL MANIFOLD FOR DIFFERENTIAL
EQUATIONS WITH IMPULSES IN A BANACH SPACE

"MATHEMATICS.

DIFFERENTIAL EQUATIONS"

A. Reinfelds

Summary. A theorem of existence of central manifold of system of differential equations with impulses in a Banach space is proved under the assumption that system splits into two parts one of which has Green's type map and its nonlinear terms satisfy Lipschitz conditions with small constant.
1991 MSC 34A57

0. Introduction

Differential equations with impulses provide an adequate mathematical models of evolutionary processes which suddenly change their state at certain moments.

The development of the mathematical theory of differential equations with impulses began with the work of A.D. Myshkis and V.D. Mil'man [1], while the work of D.D. Bainov et al. [2] marked the beginning of the mathematical theory of the same equations in abstract spaces.

In the present paper, a theorem of the existence of central manifold for systems with impulses is proved under the assumption that the system splits into two equations for one of which there exists the Green's type map. In D.D. Bainov et al. [3] the existence of integral manifold is proved in the case when linear operators of differential equation and condition of "jump" commute with each other. A.M. Samoilenko and N.A. Perestyk investigate the existence of integral manifolds in finite dimensional space [4,5] under the assumption that the spectrum does not intersect the imaginary axis.

1. Statement of the problem

Let X and Y be the complex Banach spaces, $\mathcal{L}(X)$ and $\mathcal{L}(Y)$ be the Banach spaces of linear bounded operators. Consider the following system of differential equations with impulse effect at fixed moments

$$\begin{cases} dx/dt = A(t)x + f(t, x, y), \\ dy/dt = B(t)y + g(t, x, y), \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta x|_{t=\tau_1} = x(\tau_1+0) - x(\tau_1-0) = C_1 x(\tau_1-0) + I_1(x(\tau_1-0), y(\tau_1-0)),$$

$$\Delta y|_{t=\tau_1} = y(\tau_1+0) - y(\tau_1-0) = D_1 y(\tau_1-0) + K_1(x(\tau_1-0), y(\tau_1-0)), \quad (2)$$

where :

a) maps $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ and $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ are locally integrable in the Bochners sense;

b) maps $f : \mathbb{R} \times X \times Y \rightarrow X$ and $g : \mathbb{R} \times X \times Y \rightarrow Y$ are locally integrable in the Bochners sense with respect to t for fixed x and y , and in addition satisfy conditions

$$|f(t, x, y) - f(t, x', y')| \leq c(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$|g(t, x, y) - g(t, x', y')| \leq c(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$\sup_{t, x} |g(t, x, 0)| < +\infty;$$

c) $I \in \mathbb{Z}$, $C_1 \in \mathcal{L}(X)$, $D_1 \in \mathcal{L}(Y)$, maps $I_1 : X \times Y \rightarrow X$, $K_1 : X \times Y \rightarrow Y$ satisfy inequalities

$$|I_1(x, y) - I_1(x', y')| \leq c(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$|K_1(x, y) - K_1(x', y')| \leq c(|x - x'| + |y - y'|),$$

$$\sup_{t, x} |K_1(x, 0)| < +\infty;$$

d) maps $(x, y) \mapsto (x + C_1 x + I_1(x, y), y + D_1 y + K_1(x, y))$, $(x, y) \mapsto (x + C_1 x, y + D_1 y)$ are homeomorphisms;

e) the moments τ_i of impulse effect form a strictly increasing sequence

$$\dots < \tau_{-2} < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty \text{ as } n \rightarrow +\infty.$$

Definition. A solution of system with impulses is called a piecewise absolutely continuous map with discontinuities of the first kind at the points $t = \tau_i$ which, for almost all t , satisfies system (1) and, for $t = \tau_i$, satisfies the condition of a "jump" (2).

Let $(x(\cdot, t_0, x_0, y_0), y(\cdot, t_0, x_0, y_0)) : \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$ be the

solution of the system (1), where $(x(t_0 + 0, t_0, x_0, y_0), y(t_0 + 0, t_0, x_0, y_0)) = (x_0, y_0)$. At the break points τ_1 the values for all solutions are taken at $\tau_1 + 0$ if it is not otherwise specified.

Let $U(t, \tau)$ and $V(t, \tau)$ be Cauchy evolutionary operators of the homogeneous linear equations with impulse effect

$$du/dt = A(t)u,$$

$$\Delta u|_{t=\tau_1} = u(\tau_1 + 0) - u(\tau_1 - 0) = C_1 u(\tau_1 - 0)$$

and respectively

$$dv/dt = B(t)v, \quad (3)$$

$$\Delta v|_{t=\tau_1} = v(\tau_1 + 0) - v(\tau_1 - 0) = D_1 v(\tau_1 - 0).$$

Let us introduce map $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ by the formula

$$G(t, \tau) = \begin{cases} V(t, s)PV(s, \tau) & , \text{if } t \geq \tau \\ V(t, s)(P-E)V(s, \tau) & , \text{if } t < \tau. \end{cases}$$

where $P: Y \rightarrow Y$ is a projection ($P^2 = P$) and $E: Y \rightarrow Y$ is a identity operator.

Definition. A map $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ is called the *Green's map* of the homogeneous linear equation with impulse effect (3) if inequality

$$\sup_{t_0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_i)| \right) = M < +\infty$$

holds.

Definition. The integral manifold of system with impulses (1), (2) which are described by equation in the form

$$y = h(t, x)$$

is called a *central manifold*.

The map h satisfies functional equation

$$h(t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau) g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_i) K_i(z(\tau_i - 0), h(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))),$$

where $z: \mathbb{R} \rightarrow X$ is the solution of equation with impulses

$$dz/dt = A(t)z + f(t, z, h(t, z)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (4)$$

$$\Delta z|_{t=\tau_1} = z(\tau_1 + 0) - z(\tau_1 - 0) = C_1 z(\tau_1 - 0) + I_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))).$$

The solution of (4) for $t \geq t_0$ can be represented in the form

$$z(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)f(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau)))d\tau + \\ + \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t} U(t, \tau_1)I_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))),$$

and for $t < t_0$

$$z(t) = U(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t U(t, \tau)f(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau)))d\tau - \\ - \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t_0} U(t, \tau_1)I_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))).$$

Here, for shortening, we use notation $z(t) = z(t, t_0, x_0)$.

2. Auxiliary lemma

Let \mathcal{PC} be the linear space of bounded maps $h: \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$, which are piecewise continuous in t with first kind breaks for $t = \tau_1$ and are continuous in x . The space \mathcal{PC} is supplied with the supremum norm. For $p > 0$ let $\mathfrak{M}(p)$ be the set of maps $h \in \mathcal{PC}$ which satisfies inequality $|h(t, x) - h(t, x')| \leq p|x - x'|$. Then $\mathfrak{M}(p)$ is closed subset in \mathcal{PC} .

Let us note

$$N = \sup_{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\tau, t)| |U(t, \tau)| dt + \sup_{\tau} \sum_{1=-\infty}^{+\infty} |G(\tau, \tau_1)| |U(\tau_1 - 0, \tau)|$$

In the proof of the main theorem we shall use the following lemma.

Lemma. Let $h \in \mathfrak{M}(p)$, $h' \in \mathcal{PC}$ and let $\varepsilon(1+p)N < 1$. Then following estimate is valid

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, t)| |z(t) - z'(t)| dt + \\ + \sum_{1=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_1)| |z(\tau_1 - 0) - z'(\tau_1 - 0)| \leq \\ \leq N(1 - \varepsilon(1+p)N)^{-1} (|x_0 - x'_0| + \varepsilon N \|h - h'\|).$$

Proof. Using the estimates on f and I_1 we get for $t \geq t_0$

$$|z(t) - z'(t)| \leq |U(t, t_0)| |x_0 - x'_0| + \varepsilon(1+p) \left[\int_{t_0}^t |U(t, \tau)| \times \right. \\ \times |z(\tau) - z'(\tau)| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t} |U(t, \tau_1)| |z(\tau_1 - 0) - z'(\tau_1 - 0)| \left. \right] + \\ + \varepsilon \|h - h'\| \left[\int_{t_0}^t |U(t, \tau)| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_1 \leq t} |U(t, \tau_1)| \right]. \quad (5)$$

Multiplying with $G(t_0, t)$ and integrating from t_0 to $+\infty$, we obtain

$$\int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, t)| |z(t) - z'(t)| dt \leq \\ \leq |x_0 - x'_0| \int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, t)| |U(t, t_0)| dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \sup_{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\tau, t)| |U(t, \tau)| dt \left[c(1+p) \left(\int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |z(\tau) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - z'(\tau)| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_1} |G(t_0, \tau_1)| |z(\tau_1 - 0) - z'(\tau_1 - 0)| \right) + \right. \\
& \quad \left. + c|h - h'| \left(\int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_1} |G(t_0, \tau_1)| \right) \right].
\end{aligned}$$

The case $t < t_0$ is considered analogously. Next we obtain the inequality

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, t)| |z(t) - z'(t)| dt \leq \\
& \leq \sup_{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\tau, t)| |U(t, \tau)| dt \left[|x_0 - x'_0| + \right. \\
& \quad \left. + c(1+p) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |z(\tau) - z'(\tau)| d\tau + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_j)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)| \right) + cN|h - h'| \right].
\end{aligned}$$

Multiplying (5) with $G(t_0, \tau_j)$ and summing for all j with respect $t_0 < \tau_j$, we obtain

$$\begin{aligned}
& \sum_{t_0 < \tau_j} |G(t_0, \tau_j)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)| \leq \\
& \leq |x_0 - x'_0| \sum_{t_0 < \tau_j} |G(t_0, \tau_j)| |U(\tau_j - 0, t_0)| + \\
& \quad + \sup_{\tau} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(\tau, \tau_j)| |U(\tau_j - 0, \tau)| \times \\
& \quad \times \left[c(1+p) \left(\int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |z(\tau) - z'(\tau)| d\tau + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{t_0 < \tau} |G(t_0, \tau)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)| \right) + \right. \\
& \quad \left. + c|h - h'| \left(\int_{t_0}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| d\tau + \sum_{t_0 < \tau_1} |G(t_0, \tau_1)| \right) \right].
\end{aligned}$$

The case $t < t_0$ is considered analogously. As a result, we obtain the estimate

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_j)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)| \leq \\
& \leq \sup_{\tau} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(\tau, \tau_j)| |U(\tau_j - 0, \tau)| \left[|x_0 - x'_0| + \right. \\
& \quad \left. + c(1+p) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |z(\tau) - z'(\tau)| d\tau + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_j)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)| \right) + cN|h - h'| \right].
\end{aligned}$$

Denote

$$\begin{aligned}
\Phi & = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, t)| |z(t) - z'(t)| dt + \\
& + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_j)| |z(\tau_j - 0) - z'(\tau_j - 0)|.
\end{aligned}$$

From the above inequalities we obtain inequality

$$\Phi \leq N(1 - c(1+p)N)^{-1} (|x_0 - x'_0| + cN|h - h'|).$$

3. Main result

Theorem. Let G be piecewise continuous, $4Nc \leq 1$ and $2cN < 1 + \sqrt{1 - 4cN}$. Then system with impulses (1), (2) has a central manifold.

Proof. We now define an operator $I: PC \rightarrow PC$ by the formula

$$(Ih)(t_0, x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau) g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) d\tau + \\ + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_i) K_i(z(\tau_i - 0), h(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))).$$

Let us take arbitrary $h \in \mathfrak{M}(p)$ and $h' \in PC$. Conditions of the theorem involve $Ih, Ih' \in PC$. Further

$$\begin{aligned} |(Ih)(t_0, x_0) - (Ih')(t_0, x'_0)| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| \times \\ &\times |g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) - g(\tau, z'(\tau), h'(\tau, z'(\tau)))| d\tau + \\ &+ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_i)| |K_i(z(\tau_i - 0), h(\tau_i - 0, z(\tau_i - 0))) - \\ &\quad - K_i(z'(\tau_i - 0), h'(\tau_i - 0, z'(\tau_i - 0)))| \leq \\ &\leq c(1+p) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau)| |z(\tau) - z'(\tau)| d\tau + \right. \\ &\left. + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |G(t_0, \tau_i)| |z(\tau_i - 0) - z'(\tau_i - 0)| \right] + cN \|h - h'\|. \end{aligned}$$

If $4Nc \leq 1$, then there is $p > 0$ satisfying inequality

$$cN(1+p)(1 - c(1+p)N)^{-1} \leq p.$$

We choose $p = (2cN)^{-1}(1 - 2cN - \sqrt{1 - 4cN})$. Then $p + 1 = 2(1 + \sqrt{1 - 4cN})^{-1}$ and $2c(1+p)N \leq 1$.

Using the result of lemma, we obtain

$$\begin{aligned} |(Ih)(t_0, x_0) - (Ih')(t_0, x'_0)| &\leq \\ &\leq cN(1+p)(1 - c(1+p)N)^{-1} |x_0 - x'_0| + \\ &+ cN (cN(1+p)(1 - c(1+p)N)^{-1} + 1) \|h - h'\| = \\ &= p|x_0 - x'_0| + cN(1+p) \|h - h'\|. \end{aligned}$$

If $2cN < 1 + \sqrt{1 - 4cN}$, we get $cN(1+p) < 1$. We obtain that I is a contraction on $\mathfrak{M}(p)$. It involves in $\mathfrak{M}(p)$ there is only one solution satisfying the functional equation of central manifold. In addition, map h also is unique map in PC satisfying functional equation $Ih = h$.

It remains to verify that $y = h(t, x)$ is equation of integral manifold. It should be noted that $z(t) = z(t, t_0, x_0)$, $z(\tau) = z(\tau, t_0, x_0) = z(\tau, t, z(t, t_0, x_0))$.

Let $\eta(t) = h(t, z(t))$ and $t \geq t_0$.

$$\begin{aligned}
 \eta(t) &= h(t, z(t)) = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau) g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) d\tau + \\
 &+ \sum_{1=-\infty}^{+\infty} G(t, \tau_1) K_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))) = \\
 &= V(t, t_0) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau) g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) d\tau + \right. \\
 &+ \left. \sum_{1=-\infty}^{+\infty} G(t_0, \tau_1) K_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))) \right\} + \\
 &+ \int_{t_0}^t V(t, \tau) g(\tau, z(\tau), h(\tau, z(\tau))) d\tau + \\
 &+ \sum_{0 < \tau_1 \leq t} V(t, \tau_1) K_1(z(\tau_1 - 0), h(\tau_1 - 0, z(\tau_1 - 0))) = \\
 &= V(t, t_0) \eta(t_0) + \int_{t_0}^t V(t, \tau) g(\tau, z(\tau), \eta(\tau)) d\tau + \\
 &+ \sum_{0 < \tau_1 \leq t} V(t, \tau_1) K_1(z(\tau_1 - 0), \eta(\tau_1 - 0)).
 \end{aligned}$$

It means, that $(z(\cdot), \eta(\cdot)) : \mathbb{R} \rightarrow X \times Y$ is solution of (1), (2) satisfying initial conditions $z(t_0) = x_0$, $\eta(t_0) = h(t_0, x_0)$. From the uniqueness of the solution we get for all $t \in \mathbb{R}$

$$h(t, x(t, t_0, x_0, h(t_0, x_0))) = y(t, t_0, x_0, h(t_0, x_0)).$$

Theorem is proved.

Acknowledgment

This work has been completed with the financial support of the Science Council of Latvia under grant 90.224.

References

1. Мильман В.Д., Мышкис А.Д. Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб.мат.журн. - 1960. - Т.1, No.2. - С. 233-237.
2. Bainov D.D., Kostadinov St.I., Myshkis A.D. Bounded and periodic solutions of differential equations with impulse effect in a Banach space. // Differential Integral Equations - 1988. - Vol. 1, N 2. - P. 223-230.
3. Bainov D.D., Kostadinov S.I., Nguyen Hong Thai, Zabreiko P.P. Existence of integral manifolds for impulsive differential equations in a Banach space // Internat. J. Theoret. Phys. - 1989. - Vol.28, N 7. - P. 815-833.

4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. - Киев: Вища школа, 1987. - 288 с.
5. Перестюк Н.А. Инвариантные множества одного класса разрывных динамических систем // Укр.мат.журн. - 1984. - No.1. - С. 63-68.

A.Reinfelds. Существование многообразия центра для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве.

Аннотация. Доказана теорема существования центрального многообразия для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в банаховом пространстве, если система расщепляется на две системы, одна из которых имеет отображение типа Грина и нелинейные члены удовлетворяют условиям Липшица с достаточно малой постоянной.
УДК 517.938.4

A.Reinfelds. Centra varietātes eksistence diferenciālvienādojumam ar impulsu iedarbību Banaha telpā.

Анотācija. Pierādīta teorēma par centra varietātes eksistenci diferenciālvienādojumu sistēmai ar impulsu iedarbību Banaha telpā, ja sistēma sadalās divās daļās, vienai no kurām ir Grīna tipa attēlojums un sistēmas nelineārie locekļi apmierina Lipšica nosacījumus ar mazu konstanti.

Institute of Mathematics
Latvian Academy of Sciences
19 Turgeneva St., 226524 Riga
Latvia

Received 06.05.92

**CERTAIN PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE
COMPLETELY INTEGRABLE EQUATION**

G. Pettere

Summary. Homogeneous Pfaff's differential equation and its blow-up system on the unit sphere are considered in this article. The definition of right upper and lower type numbers along the definite way are given here and some properties of the solutions of the blow-up system and type numbers are proved further on.

1991 MSC 34C11

Let us consider a completely integrable equation

$$dx = P(x)dt \quad (1)$$

where $P: G \rightarrow R^{n \times m}$, G is an open domain in R^n , $P \in C^1$, $P(cx) = c^q P(x)$, $q > 1$ and satisfies the condition of complete integrability:

$$DP_j(x)P_i(x) = DP_i(x)P_j(x)$$

and regards the solution of this equation (1) as a function

$$\varphi(\cdot, x_0): Q(x_0) \rightarrow R^n$$

where $\varphi(0, x_0) = x_0$, $Q(x_0) \subset F_\alpha(R^m)$, $F_\alpha(R^m)$ is a many-sheeted space multiplier covering the Euclidean space R^m , α in the multiplicity of covering $p: F_\alpha(R^m) \rightarrow R^m$, $1 \leq \alpha \leq \infty$. The existence and the uniqueness of a solution $\varphi(\cdot, x_0)$ is proved, thanks to such definition of $Q(x_0)$ in [1].

System (1) may be blown-up in the usual way by introducing the distance variable, $r = |x|$, the unit direction vector, $u = x/r$, $r \neq 0$, and a rescaled time, $d\tau = r^{q-1} dt$. Then the blow-up system is

$$\begin{cases} du = (P(u) - uu^T P(u)) d\tau \\ dr = ru^T P(u) d\tau, \quad |u| = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Let us designate with the $\hat{u}(\cdot, u_0)$, $\hat{u}(0, u_0) = u_0$ the solution of first equation and with the $\hat{r}(\cdot, r_0)$, $\hat{r}(0, r_0) = r_0$ the solution of the second equation of the system (2).

Note that τ is a function from t and x_0 : $\bar{\tau} = \tau(t, x_0)$.

Lemma. The function $\bar{\tau}$ has the following property:

$$\bar{\tau}(t\alpha^{1-q}, \alpha x_0) = \bar{\tau}(t, x_0).$$

Proof. By the definition of τ is seen that

$$\begin{aligned} d\bar{\tau}(t\alpha^{1-q}, \alpha x_0) &= |\varphi(t\alpha^{1-q}, \alpha x_0)|^{q-1} \alpha^{1-q} dt = \\ &= |\alpha \varphi(t, x_0)|^{q-1} \alpha^{1-q} dt = |\varphi(t, x_0)|^{q-1} dt = \bar{\tau}(t, x_0). \end{aligned}$$

That proves the lemma.

Let us designate with

$$\bar{u}(t, x_0) = \frac{\varphi(t, x_0)}{|\varphi(t, x_0)|}$$

and

$$\bar{r}(t, x_0) = |\varphi(t, x_0)|.$$

Lemma. The solutions of the system of differential equations (2) satisfy the following equalities:

$$\hat{u}(\tau, u_0) = \bar{u}(t, x_0)$$

and

$$\hat{r}(\tau, r_0) = \bar{r}(t, x_0)$$

if t is substituted by $\hat{t}(\cdot, x_0)$, where $\hat{t}(\cdot, x_0)$ is the inverse function of $\bar{\tau}(\cdot, x_0)$.

Proof. Let us do the proof for the first case. Note that at first both functions have equal beginning conditions:

$$\hat{u}(0, u_0) = u_0 = x_0 / |x_0|$$

and

$$\bar{u}(0, x_0) = \varphi(0, x_0) / |\varphi(0, x_0)| = x_0 / |x_0|.$$

Next, let us show that the function $\bar{u}(\cdot, x_0)$ satisfies the same differential equation that the function $\bar{u}(\cdot, x_0)$:

$$\begin{aligned} d\bar{u}(t, x_0) &= d \left(\frac{\varphi(t, x_0)}{|\varphi(t, x_0)|} \right) = \\ &= \left(\frac{P(\varphi(t, x_0)) \varphi(t, x_0) \varphi^T(t, x_0) P(\varphi(t, x_0))}{|\varphi(t, x_0)|^3} \right) \frac{dt}{|\varphi(t, x_0)|^{q-1}} = \\ &= \left(\frac{P(\varphi(t, x_0)) \varphi(t, x_0) \varphi^T(t, x_0) P(\varphi(t, x_0))}{|\varphi(t, x_0)|^q} \right) dt \end{aligned}$$

So we shall obtain the result using the definition of function $\bar{u}(\cdot, x_0)$ and the property of function P :

$$d\bar{u} = (P(\bar{u}) - \bar{u}\bar{u}^T P(\bar{u})) d\tau.$$

We obtain the needed result because the uniqueness theorem has been proved in [1].

The proof for the second function is an analogy.

Conclusion. The solution $\bar{u}(\cdot, x_0)$ satisfies the following equalities:

$$1) \bar{u}(t\alpha^{1-q}, \alpha x_0) = \bar{u}(t, x_0)$$

where $\alpha > 0$ and α is a constant and

$$2) \bar{u}(t_1 + t_2, x_0) = \bar{u}(t_1, \varphi(t_2, x_0)).$$

Proof. To prove these equalities we can use the equalities of definition of the function \bar{u} . Then the needed properties follow automatically.

Let us choose a way $\tau = f(s)$, $f:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$, which tends to the boundary of definition domain but not to the branching point or to the positive infinity, and $\int_0^s |Df(s)| ds$ diverges.

Definition. The right upper type number of the solution $\varphi(\cdot, x_0)$ along the way f is

$$\lambda_f^+ = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^s \hat{U}^T(f(s), u_0) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s) ds}{\int_0^s |Df(s)| ds}$$

and the right lower type number is

$$\lambda_f^- = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^s \hat{U}^T(f(s), u_0) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s) ds}{\int_0^s |Df(s)| ds}$$

Lemma. The following equalities are right:

$$\lambda_f^+ = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \hat{P}(f(s), r_0)}{\int_0^s |Df(s)| ds}$$

and

$$\lambda_f^- = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \hat{P}(f(s), r_0)}{\int_0^s |Df(s)| ds}$$

Proof. Consider the integral:

$$\int_0^s \hat{U}^T(f(s), u_0) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s) ds =$$

$$= \int_0^s \frac{\hat{P}(f(s), r_0) \hat{U}^T(f(s), u_0) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s)}{\hat{P}(f(s), r_0)} ds =$$

$$= \int_0^s \frac{d \ln \hat{P}(f(s), r_0)}{ds} ds = \ln \hat{P}(f(s), r_0) - \ln \hat{P}(f(0), r_0).$$

The needed result is obtained putting the received expression in the formula of definition λ_f^+ . The second equality is proof of analogy.

Lemma. The right type numbers are limited from above by $M = \max_{u \in S_1^{n-1}(0)} |u^T P(u)|$ and from below by $-M$.

$$u \in S_1^{n-1}(0)$$

Proof. As $P(\cdot) \in C(R^{n-1})$ and $S_1^{n-1}(0)$ is the compact set, then $M = \max_{u \in S_1^{n-1}(0)} |u^T P(u)|$ exists.

$$u \in S_1^{n-1}(0)$$

Function $\hat{U}^T(f(\cdot)) P(\hat{U}(f(\cdot), u_0)) Df(\cdot)$ is a scalar product. Therefore

$$-M |Df(s)| \leq \hat{U}^T(f(\cdot)) P(\hat{U}(f(\cdot), u_0)) Df(\cdot) \leq M |Df(\cdot)|.$$

Then using the definition of the type numbers, the needed results is evidently given:

$$-M \leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^s \hat{U}^T(f(s)) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s) ds}{\int_0^s |Df(s)| ds} \leq$$

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^s \hat{U}^T(f(s)) P(\hat{U}(f(s), u_0)) Df(s) ds}{\int_0^s |Df(s)| ds} \leq M.$$

Theorem. If the right lower type number is $\lambda_f^- > 0$, then the solution $\varphi(\cdot, x_0)$ of the differential equation (1) tends to the positive infinity along the way f .

Proof. The existing sequence of s_n for which

$$\lim_{s_n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \hat{P}(f(s_n), r_0)}{\int_0^{s_n} |Df(s)| ds} = \lambda_f^-$$

is followed from the definition of the upper limit. For arbitrary $\varepsilon > 0$ the function $S(\varepsilon)$ with following property is founded: if $s_n > S(\varepsilon)$ then under the condition $\lambda_f^- > \varepsilon > 0$

$$\frac{\ln \hat{A}(\tau f(s_n), r_0)}{\int_0^{s_n} |Df(s)| ds} > \lambda_f^- - \epsilon$$

and $\ln \hat{A}(\tau f(s_n), r_0) > (\lambda_f^- - \epsilon) \int_0^{s_n} |Df(s)| ds$.

Then

$$\hat{A}(\tau f(s_n), r_0) > e^{(\lambda_f^- - \epsilon) \int_0^{s_n} |Df(s)| ds}$$

as $\lambda_f^- > 0$ and ϵ can be chosen less than λ_f^- then the needed result is evident.

Theorem. If the right upper type number is $\lambda_f^- < 0$, then the solution $\phi(\cdot, x_0)$ of the differential equation (1) tends to the zero along the way f .

The proof for this theorem is analogy to proof of the previous theorem.

References.

1. L. Reizinsh. Theory of Completely Integrable Equations. Equadiff 7. Proceedings of the 7th Czechoslovak Conference on Differential Equations and their Applications held in Prague, 1989, Leipzig, BSB Teubner, 1990, p. 110-113.

G. Pettere. Pilnīgi integrējamu vienādojumu atrisinājumu dažas īpašības.

Anotācija. Rakstā apskatīts diferenciālvienādojums $dx = P(x)dt$, kur $P: G \rightarrow R^{n \times m}$, G ir vaļējs apgabals telpā R^n , $P \in C^1$, $P(cx) = c^q P(x)$, $q > 1$ un $DP_j(x)P_i(x) = DP_i(x)P_j(x)$. Tiek apskatīta atbilstošā diferenciālvienādojumu sistēma uz vienības sfēras. Rakstā ir pierādītas dažas iegūtās diferenciālvienādojumu sistēmas atrisinājumu īpašības, definēti tipu skaitļi dotā vienādojuma atrisinājumiem un parādīts sakars starp tipu skaitļu zīmi un atrisinājuma izturēšanos.

Г. Петтере. Некоторые свойства решений вполне интегрируемых уравнений.

Аннотация. В статье рассматривается однородное вполне интегрируемое дифференциальное уравнение $d(x) = P(x)dt$, где $P: G \rightarrow R^{n \times m}$, G является открытой областью в R^n , $P \in C^1$, $P(cx) = c^q P(x)$, $q > 1$ и $DP_j(x)P_i(x) = DP_i(x)P_j(x)$. Рассматривается соответствующая система на единичной сфере. В статье доказываются некоторые свойства решений

полученной дифференциальной системы, определены типовые числа для решения данного дифференциального уравнения и некоторая связь между знаком типового числа и поведением решения.

Riga Technical University

1 Kalku street, Riga

Received 15.04.92.

**О ЕДИНСТВЕННОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-ЦУЗУКИ
А.И.Звягинцев**

Аннотация. Доказано, что при выполнении неравенств $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$, $1 < \sqrt{\frac{1}{2}(1+c_1^2)}$ уравнение Курамото-Цузуки в случае стационарного режима

$$(1+ic_1)v'' + v - (1+ic_2)|v|^2v = 0, \\ v'(0) = v'(1) = 0$$

имеет единственное решение, тождественно равное нулю.
УДК 517.927

В работе Курамото и Цузуки [6] было рассмотрено уравнение, описывающее поведение многих открытых диссипативных систем в окрестности точки бифуркации:

$$W_t = W + (1+ic_1)W_{xx} - (1+ic_2)|W|^2W, \\ W(x, 0) = W_0(x), \quad x \in [0, 1], \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = 0. \quad (1)$$

Исследование этой краевой задачи проводилось в работах [7-9]. Для анализа решений задачи (1) в малых областях Ахромеевой Т.С. и Малинецкого Г.Г. была предложена и изучена двумодовая система [1-4].

В настоящей работе рассматривается случай стационарного режима $W_t = 0$. Полагая $W = u + iv$ и $W_t = 0$, от задачи (1) перейдем к краевой задаче для вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(1+ic_2)u'' = -u - c_1v + (u^2 + v^2)((1+c_1c_2)u + (c_1 - c_2)v), \quad (2)$$

$$(1+ic_1)v'' = -c_1u - v + (u^2 + v^2)((1+c_1c_2)v + (c_1 - c_2)u), \quad (3)$$

$$u'(0) = v'(0) = u'(1) = v'(1) = 0, \quad (4)$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $1 \in (0, +\infty)$.

Ясно, что краевая задача (2)-(4) имеет тривиальное решение $u(x)=0$, $v(x)=0$. Положим

$$A = \frac{(2+c_1)(1+c_1 c_2) + |c_1 - c_2|}{(1+c_1^2)(1+c_1 c_2)^{3/2}}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{1+c_1 c_2}}.$$

Лемма 1. Пусть $c_1 \geq 0$, $c_2 \geq 0$ и $u(x)$, $v(x)$ - решение краевой задачи (2)-(4). Тогда для $x \in [0, 1]$ выполняются неравенства:

$$0 \leq u^2(x) + v^2(x) \leq B^2, \quad (5)$$

$$|u(x)| \leq B, \quad |v(x)| \leq B, \quad (6)$$

$$|u'(x)| \leq 1A, \quad |v'(x)| \leq 1A. \quad (7)$$

Доказательство. Сложив уравнение (2), умноженное на $u(x)$, с уравнением (3), умноженным на $v(x)$, получим уравнение

$$(u^2 + v^2)' = \frac{2(u^2 + v^2)}{1+c_1} \left((1+c_1 c_2)(u^2 + v^2) - 1 \right) + 2(u')^2 + 2(v')^2. \quad (8)$$

Пусть $x_0 \in [0, 1]$ - точка, в которой

$$u^2(x_0) + v^2(x_0) = \max_{0 \leq x \leq 1} (u^2(x) + v^2(x)).$$

Для доказательства неравенства (5) достаточно показать, что $u^2(x_0) + v^2(x_0) \leq B^2$. Если предположить противное, то из уравнения (8) тогда следует, что

$$(u^2(x) + v^2(x))'_{x=x_0} > 0. \quad (9)$$

В случае $0 < x_0 < 1$ необходимо

$$(u^2(x) + v^2(x))'_{x=x_0} = 0, \quad (u^2(x) + v^2(x))''_{x=x_0} \leq 0,$$

что противоречит (9). Если же $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$, то в силу (4) $(u^2(x) + v^2(x))'_{x=x_0} = 0$, а неравенство (9) противоречит максимальной точке x_0 . Полученное противоречие доказывает неравенства (5), а вместе с ними и оценки (6).

Поскольку $u'(0) = 0$, $v'(0) = 0$, то из результатов Дж.Бринка (5) следует неравенства

$$|u'|_{[0,1]} \leq 1 |u''|_{[0,1]}, \quad |v'|_{[0,1]} \leq 1 |v''|_{[0,1]}, \quad (10)$$

где $|f|_{[0,1]} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$. На основании оценок (5), (6) из уравнений (2), (3) имеем $|u''|_{[0,1]} \leq 1$, $|v''|_{[0,1]} \leq 1$. Отсюда в силу (10) получаем неравенства (7). Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$. Тогда краевая задача (2)-(4), за исключением тривиального решения, не имеет решения $u(x)$, $v(x)$ такого, что для всех $x \in [0,1]$ сумма $u^2(x) + v^2(x)$ равна константе.

Доказательство. Предположим противное. Пусть $u(x)$, $v(x)$ - нетривиальное решение краевой задачи (2)-(4) и

$$u^2(x) + v^2(x) = k,$$

где $k > 0$. Тогда система (2), (3) принимает вид:

$$\begin{cases} (1+c_1^2)u'' = (k(1+c_1c_2)-1)u + (k(c_1-c_2)-c_1)v, \\ (1+c_1^2)v'' = -(k(c_1-c_2)-c_1)u + (k(1+c_1c_2)-1)v. \end{cases} \quad (11)$$

Так как на основании (5) $k \leq 1$, то

$$k(c_1-c_2)-c_1 < 0.$$

Общее решение системы (11) имеет вид:

$$u(x) = i \begin{pmatrix} -D_1 e^{\lambda_1 x} & -D_2 e^{-\lambda_1 x} & D_3 e^{\lambda_2 x} & D_4 e^{-\lambda_2 x} \end{pmatrix},$$

$$v(x) = D_1 e^{\lambda_1 x} + D_2 e^{-\lambda_1 x} + D_3 e^{\lambda_2 x} + D_4 e^{-\lambda_2 x},$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{k(1+c_1c_2)-1+i(k(c_1-c_2)-c_1)},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{k(1+c_1c_2)-1-i(k(c_1-c_2)-c_1)}.$$

Из краевых условий (4) для нахождения констант D_1, D_2, D_3, D_4 получаем однородную линейную систему алгебраических уравнений, определитель которой равен

$$\Delta = 4\lambda_1^2 \lambda_2^2 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & -e^{-\lambda_1} \\ e^{\lambda_2} & -e^{-\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -\lambda_2 \\ \lambda_1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ и $2\operatorname{Re}\lambda_1 \operatorname{Im}\lambda_1 = k(c_1 - c_2) - c_1 < 0$, то $\Delta \neq 0$.

Следовательно, $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0$ и $u^2(x) + v^2(x) = 0$, что противоречит предположению $k > 0$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть $c_1 \neq 0$, $c_2 > 0$ и выполняется неравенство

$$1 < \sqrt{\frac{1}{2}(1+c_1^2)}. \quad (12)$$

Тогда краевая задача (2)–(4) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует решение $u(x)$, $v(x)$ краевой задачи (2)–(4), не равное тождественно нулю. Обозначим

$$f(x) = \left[u'(x) \right]^2 + \left[v'(x) \right]^2.$$

Отметим, что в силу краевых условий (4) и леммы 2 функция $f(x)$ не равна тождественно константе.

Из доказательства леммы 1 следует, что

$$z(x) = u^2(x) + v^2(x)$$

является решением краевой задачи

$$z'' = \frac{2(1+c_1c_2)}{1+c_1^2} z^2 - \frac{2}{1+c_1^2} z + 2f(x), \quad (13)$$

$$z'(0) = z'(1) = 0. \quad (14)$$

В силу лемм 1 и 2

$$0 \leq z(x) \leq \frac{1}{1+c_1c_2}, \quad x \in [0, 1], \quad (15)$$

и функция $z(x)$ не равна тождественно константе.

Обозначив $z_0 = z(0)$, из (15) имеем $0 \leq z_0 \leq \frac{1}{1+c_1c_2}$. Если $z_0 = 0$, то $u(x)$, $v(x)$ являются решением дифференциальной системы (2), (3) с начальными условиями

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad v(0) = v'(0) = 0. \quad (16)$$

Но задача Коши (2), (3), (16) в силу теоремы единственности имеет только нулевое решение, что противоречит предположению о функциях $u(x)$, $v(x)$.

Рассмотрим случай $0 < z_0 \leq \frac{1}{1+c_1c_2}$. Если $0 < z_0 < \frac{1}{1+c_1c_2}$, то,

учитывая на основании (4) равенство $f(\zeta)=0$, из (13) получаем $z''(0)<0$. Следовательно, существует интервал $(0, \tau) \subset [0, 1]$ такой, что $z'(x)<0$ для $x \in (0, \tau)$ и $z'(\tau)=0$. Если же $z_0 = \frac{1}{1+c_1 c_2}$, то в силу (15) функция $z(x)$ убывает на некотором интервале $(0, \tau) \subset [0, 1]$, т.е. также $z'(x)<0$ для $x \in (0, \tau)$ и $z'(\tau)=0$. Обозначим $z_\tau = z(\tau)$. Ясно, что $0 \leq z_\tau < z_0$.

Так как $f(x) \geq 0$ для $x \in [0, 1]$, то из (13) следует неравенство

$$z''(x) \geq \frac{2(1+c_1 c_2)}{1+c_1^2} z^2(x) - \frac{2}{1+c_1^2} z(x).$$

Для $x \in [0, \tau]$, умножая это неравенство на $z'(x) \leq 0$ и интегрируя затем его от 0 до x , получаем

$$(z'(x))^2 \leq \frac{4}{1+c_1^2} \left[\frac{1+c_1 c_2}{3} (z^3(x) - z_0^3) - \frac{1}{2} (z^2(x) - z_0^2) \right].$$

Поскольку $z'(x) \leq 0$ на отрезке $[0, \tau]$, то для $x \in [0, \tau]$ имеем

$$z'(x) \geq - \sqrt{\frac{4(1+c_1 c_2)}{3(1+c_1^2)} (z(x) - z_0)(z(x) - z_1)(z(x) - z_2)}, \quad (17)$$

где для $j=1, 2$

$$z_j = \frac{3}{2(1+c_1 c_2)} \left(\frac{1}{2} - \frac{1+c_1 c_2}{3} z_0 + (-1)^j \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+c_1 c_2}{3} (z_0 - (1+c_1 c_2) z_0^2)} \right). \quad (18)$$

Интегрируя неравенство (17) по x от 0 до τ , получаем

$$\tau \geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1 c_2)}} \int_{z_\tau}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(z_0 - z)(z - z_1)(z_2 - z)}}. \quad (19)$$

Рассмотрим сперва случай $0 \leq z_\tau \leq \frac{1}{2} z_0$. Тогда, используя очевидные неравенства $1 \geq \tau$ и $z_1 \leq 0 < z_0 \leq z_2$, из (19) имеем

$$l \geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1c_2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(z_0-z_1)z_2}} \int_{z_\tau}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z_0-z}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)z_0}{2(1+c_1c_2)(z_0-z_1)}}.$$

Отсюда с учетом оценок

$$\frac{1}{2}z_0 \leq -z_1 \leq z_0, \quad \frac{1}{1+c_1c_2} \leq z_2 \leq \frac{3}{2(1+c_1c_2)}, \quad (20)$$

которые в силу (18) справедливы при $0 \leq z_0 \leq \frac{1}{1+c_1c_2}$, получаем неравенство $l \geq \sqrt{\frac{1}{2}(1+c_1^2)}$, противоречащее (12).

Осталось рассмотреть случай $\frac{1}{2}z_0 < z_\tau < z_0$. Поскольку $z'(x) < 0$ при $0 < x < \tau$ и $z'(0) = z'(\tau) = 0$, то $z''(\tau) \geq 0$, и из уравнения (13) следует, что

$$f(\tau) \geq \frac{z_\tau}{1+c_1^2} \left(1 - (1+c_1c_2)z_\tau \right). \quad (21)$$

С другой стороны, на основании леммы 1 для $f(\tau)$ получаем оценку сверху

$$f(\tau) \leq |f|_{[0,\tau]} \leq |u'|_{[0,\tau]}^2 + |v'|_{[0,\tau]}^2 \leq 2\tau^2\lambda^2. \quad (22)$$

Таким образом, из (21) и (22) имеем

$$\tau \geq \frac{\sqrt{z_\tau(1-(1+c_1c_2)z_\tau)}}{\lambda \sqrt{2(1+c_1^2)}}. \quad (23)$$

Если $0 < z_0 \leq \frac{2}{3(1+c_1c_2)}$, то из (23) вытекает, что $\tau \geq \varphi(z_0)$, где

$$\varphi(z_0) = \frac{\sqrt{z_\tau(2-(1+c_1c_2)z_0)}}{\lambda \sqrt{8(1+c_1^2)}}.$$

Полагая $z_\varphi = z(\varphi(z_0))$, в силу монотонного убывания функции $z(x)$ на интервале $(0, \tau)$ имеем $z_0 > z_\varphi > z_\tau$. Из неравенства (19) получаем

$$1 \geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1c_2)}} \int_{z_\varphi}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(z_0-z)(z-z_1)(z_2-z)}} \geq$$

$$\geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1c_2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(z_0-z_1)z_2}} \int_{z_\varphi}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z_0-z}}.$$

Отсюда, используя оценки (20), приходим к неравенству

$$1 \geq \sqrt{(1+c_1^2)\left(1-\frac{z_\varphi}{z_0}\right)}. \quad (24)$$

Исследуем функцию $g(z_0) = 1 - \frac{z(\varphi(z_0))}{z_0}$. Так как при $z_0 \rightarrow 0$ и значения $\varphi(z_0)$, $z(\varphi(z_0))$, $z'(\varphi(z_0))$, $z''(\varphi(z_0))$ тоже стремятся к нулю, то, дважды применив правило Лопиталя, получаем

$\lim_{z_0 \rightarrow 0} g(z_0) = 1$. Поскольку $\varphi'(z_0) > 0$ для $z_0 \in \left[0, \frac{2}{3(1+c_1c_2)}\right]$ и $z'(x) = 0$

для $x \in [0, \tau]$, то $\frac{dg}{dz_0} < 0$. Следовательно, на отрезке $\left[0, \frac{2}{3(1+c_1c_2)}\right]$ функция $g(z_0)$ возрастает и $g(z_0) \geq 1$. Таким образом, из (24) получаем $1 \geq \sqrt{1+c_1^2}$, что противоречит (12).

Если $\frac{2}{3(1+c_1c_2)} \leq z_0 \leq \frac{1}{1+c_1c_2}$, то из (23) следует, что $\tau = \psi(z_0)$, где

$$\psi(z_0) = \frac{\sqrt{z_0(1-(1+c_1c_2)z_0)}}{\Delta \sqrt{2(1+c_1^2)}}.$$

Полагая $z_\psi = z(\psi(z_0))$, в силу монотонного убывания функции $z(x)$ на интервале $(0, \tau)$ имеем $z_0 > z_\psi > z_\tau$.

Покажем, что для $z_0 \in \left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2}\right]$ справедливы оценки

$$0 \leq \frac{dz_\psi}{dz_0} \leq 1. \quad (25)$$

Так как $\psi'(z_0) = \frac{1-2(1+c_1c_2)z_0}{2\lambda\sqrt{2(1+c_1^2)z_0(1-(1+c_1c_2)z_0)}} < 0$ для $z_0 \in \left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2} \right]$ и $z'(x) \leq 0$ для $x \in [0, \tau]$, то левое неравенство (25) очевидно. Для доказательства правого неравенства (25), умножив неравенство (17) на $\psi'(z_0) < 0$, получаем при $x = \psi(z_0)$

$$\frac{dz_\psi}{dz_0} \leq \frac{2(1+c_1c_2)z_0^{-1}}{\lambda(1+c_1^2)\sqrt{6}} \sqrt{\frac{(1+c_1c_2)(z_0-z_\psi)(z_\psi-z_1)(z_2-z_\psi)}{z_0(1-(1+c_1c_2)z_0)}}.$$

Отсюда, используя оценки $2(1+c_1c_2)z_0^{-1} \leq 1$, $z_0 - z_\psi \leq z_0/2$, $z_\psi - z_1 \leq \frac{2}{1+c_1c_2}$, имеем

$$\frac{dz_\psi}{dz_0} \leq \frac{1}{\lambda(1+c_1^2)\sqrt{6}} \sqrt{\frac{z_2 - z_\psi}{1 - (1+c_1c_2)z_0}}. \quad (26)$$

Исследуем функцию $y(z_0) = \frac{z_2 - z(\psi(z_0))}{1 - (1+c_1c_2)z_0}$ на отрезке

$\left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2} \right]$. Так как при $z_0 \rightarrow 1/(1+c_1c_2)$ значения $\psi(z_0)$, $z'(\psi(z_0))$, $z''(\psi(z_0))$ стремятся к нулю и $z(\psi(z_0)) \rightarrow 1/(1+c_1c_2)$, то,

дважды применив правило Лопиталья, получаем

$\lim_{z_0 \rightarrow 1/(1+c_1c_2)} y(z_0) = \frac{1}{1+c_1c_2}$. Поскольку $z_\psi > \frac{z_0}{2}$, то в силу (20) имеем

$$\lim_{z_0 \rightarrow 2/(3+c_1c_2)} y(z_0) \leq \lim_{z_0 \rightarrow 2/(3+c_1c_2)} \frac{z_2 - \frac{1}{2}z_0}{1 - (1+c_1c_2)z_0} \leq \frac{7}{2(1+c_1c_2)}.$$

Следовательно, на концах отрезка $\left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2} \right]$ в силу (26) выполняется правое неравенство (25). Если функция $y(z_0)$ имеет

точку экстремума $z_0 \in \left(\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2} \right)$, то необходимо

$$\left(\frac{dz_2}{dz_0} - \frac{dz_\psi}{dz_0} \right) \left(1 - (1+c_1c_2)z_0 \right) + (1+c_1c_2)(z_2 - z_\psi) = 0.$$

Тогда неравенство (26) принимает вид

$$\frac{dz_\psi}{dz_0} < \frac{1}{\lambda(1+c_1^2)\sqrt{6(1+c_1c_2)}} \sqrt{\frac{dz_\psi}{dz_0} - \frac{dz_2}{dz_0}}.$$

Так как в силу (18) $\frac{dz_2}{dz_0} \geq 1$, то получаем

$$\frac{dz_\psi}{dz_0} \leq \sqrt{\frac{1}{6} \left(\frac{dz_\psi}{dz_0} + 1 \right)}.$$

Отсюда, учитывая ранее доказанное свойство $\frac{dz_\psi}{dz_0} \geq 0$, следует,

что $\frac{dz_\psi}{dz_0} \leq \frac{1}{2}$. Тем самым доказано правое неравенство (25).

Из неравенства (19) получаем

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1c_2)}} \int_{z_\psi}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{(z_0-z)(z-z_1)(z_2-z)}} \\ &\geq \sqrt{\frac{3(1+c_1^2)}{4(1+c_1c_2)(z_0-z_1)z_2}} \int_{z_\psi}^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z_0-z}}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя оценки $z_0 - z_1 \leq 2z_0 \leq \frac{2}{1+c_1c_2}$, $z_2 \leq \frac{3}{2(1+c_1c_2)}$, имеем

$$1 \geq \sqrt{(1+c_1^2)(1+c_1c_2)(z_0-z_\psi)}. \quad (27)$$

Исследуем на отрезке $\left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2} \right]$ функцию $h(z_0) = z_0 - z(\psi(z_0))$. Поскольку $\psi(z_0) = \psi(z_0)$ в точке $z_0 = 2/(3+3c_1c_2)$ и (как было раньше для функции $g(z_0)$ доказано) $z_0 - z_\psi \geq z_0$, то

$h\left(\frac{2}{3(1+c_1c_2)}\right) \geq \frac{2}{3(1+c_1c_2)}$. Так как $\frac{dh}{dz_0} \geq 0$ в силу (25), то

$h\left(\frac{2}{3(1+c_1c_2)}\right) \geq \frac{2}{3(1+c_1c_2)}$ для всех $z_0 \in \left[\frac{2}{3(1+c_1c_2)}, \frac{1}{1+c_1c_2}\right]$. Тогда

из (27) получаем $1 \geq \sqrt{\frac{2}{3(1+c_1^2)}}$, что противоречит (12). Теорема доказана.

Литература

1. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Колебательные процессы в нелинейных диссипативных средах. О некоторых упрощенных моделях. [Препринт ИПМ АН СССР]. - М., 1982. - N 53.
 2. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. Двухкомпонентные системы в окрестности точки бифуркации. Поведение решений в малых областях. [Препринт ИПМ АН СССР]. - М., 1983. - N 29.
 3. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. О новых свойствах нелинейных диссипативных систем. [Препринт ИПМ АН СССР]. - М., 1983. - N 118.
 4. Ахромеева Т.С., Малинецкий Г.Г. О диффузионном хаосе. [Препринт ИПМ АН СССР]. - М., 1983. - N 140.
 5. Brink J. Inequalities involving $\|f\|_p$ and $\|f^{(m)}\|_q$ for f with n zeros // Pacific J. Math. - 1972. - V.42, N 2. - P.289-311.
 6. Kuramoto Y., Tsuzuki T. On the Formation of Dissipative Structures in Reaction - Diffusion Systems // Progress of Theoretical Physics - 1975. - V.54, N 3. - P.687-699.
 7. Kuramoto Y., Yamada T. Turbulent State in Chemical Reactions // Progress of Theoretical Physics - 1976. - V.56, N 2. - P.679-681.
 8. Kuramoto Y. Diffusion - Induced Chaos in Reaction Systems // Supplement of the Progress of Theoretical Physics - 1978. - N 64. - P.346-366.
 9. Kuramoto Y., Koga B. Turbulized Rotating Chemical Waves // Progress of Theoretical Physics - 1981. - V.66, N 3. - P.1081-1083.
- A. Zvyagintsev. On the uniqueness of stationary solution of Kuramoto-Tsuzuki equation.
Summary. It is proved that Kuramoto-Tsuzuki equation in

stationary case

$$(1+ic_1)v''+v-(1+ic_2)|v|^2v=0,$$

$$v'(0)=v'(1)=0$$

has only trivial solution if the following conditions are satisfied: $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$, $1 < \sqrt{\frac{1}{2}(1+c_1^2)}$.

1991 МРС 34В30

A. Zvjagincev. Par stacionāra atrisinājuma unitāti Kuramoto-Cuzuki vienādojumam.

Anotācija. Apskatīta atrisinājuma eksistence Kuramoto-Cuzuki problēmai

$$(1+ic_1)v''+v-(1+ic_2)|v|^2v=0,$$

$$v'(0)=v'(1)=0,$$

kur $c_1 \geq 0$, $c_2 > 0$, $1 < \sqrt{\frac{1}{2}(1+c_1^2)}$.

Институт математики и информатики

Поступила 04.04.92

Латвийского университета

Рига, б. Райņa, 29

О ЗАДАЧЕ Е.И.ЗОЛОТАРЕВА

А.И.Звягинцев, И.В.Филипенкова

Аннотация. В случае $n=2$ для задачи Е.И.Золотарева

$$\gamma_{2p}(\sigma) = \inf_{a \in R} \|x^2 - \sigma x + a\|_{L_p^{(-1,1)}}$$

приводится решение в терминах бэта-функций.
УДК 517.5

Для получения априорных оценок решений обыкновенных дифференциальных уравнений иногда требуется вычислить норму многочлена, наименее уклоняющегося от нуля (см., например, [5]). В этой связи интерес представляет решение задачи Е.И.Золотарева.

Задачей Е.И.Золотарева называют задачу о нахождении многочленов с двумя старшими фиксированными коэффициентами вида

$$z_n(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} a_j x^j, \quad (1)$$

где $\sigma \in R$, которые доставляют минимум величине $\|z_n\|_{L_p^{(-1,1)}}$. Другими словами, требуется найти наименьшее уклонение

$$\gamma_{np}(\sigma) = \inf_{a_0, \dots, a_{n-2} \in R} \|z_n\|_{L_p^{(-1,1)}}$$

где $n \in \{2, 3, \dots\}$, $1 \leq p \leq \infty$. Хорошо известно, что при $1 \leq p < \infty$ существует единственный многочлен $z_{np}(x, \sigma)$ вида (1), для которого $\|z_{np}(\cdot, \sigma)\|_{L_p^{(-1,1)}} = \gamma_{np}(\sigma)$.

Первой работой по этой тематике явился memoir Е.И.Золотарева [3], в котором рассматриваемая задача полностью решена при $p = \infty$. Многочлены $z_{n\infty}(x, \sigma)$ называются многочленами Золотарева. Кроме этого случая, в настоящее время известно полное решение задачи при $p=1$ [1, 2] и при $p=2$ [4, с. 98].

В статье рассматривается случай $n=2$ и $1 < p < \infty$, то есть

задача о нахождении величины

$$\gamma_{2p}(\sigma) = \inf_{a \in \mathbb{R}} \|x^2 - \sigma x + a\|_{L_p(-1,1)}.$$

Отметим, что замена x на $-x$ позволяет ограничиться только случаем $\sigma \geq 0$.

Из ранее полученных результатов известно, что при $p=1$ для $0 \leq \sigma < 1$

$$z_{21}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x + \frac{\sigma^2 - 1}{4}, \quad \gamma_{21}(\sigma) = \frac{\sigma^2 + 1}{2}$$

и для $\sigma \geq 1$

$$z_{21}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x, \quad \gamma_{21}(\sigma) = \sigma,$$

а при $p=\infty$ для $0 \leq \sigma < 2$

$$z_{2\infty}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x + \frac{1}{8}(\sigma^2 - 4\sigma - 4), \quad \gamma_{2\infty}(\sigma) = \frac{(\sigma+2)^2}{8}$$

и для $\sigma \geq 2$

$$z_{2\infty}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x - 1, \quad \gamma_{2\infty}(\sigma) = \sigma.$$

Лемма. Пусть

$$\beta_c(d, b) = \int_c^1 t^{d+1} (1-t)^{b-1} dt,$$

где $b > 1$, $d+b=1$ и $d > 1$ при $c=0$ или $d \neq 0$ при $0 < c \leq 1$.

Тогда

$$\beta_c(d, b) = -\frac{c^d (1-c)^{b-1}}{d+b-1} + \frac{b-1}{d+b-1} \beta_c(d, b-1), \quad (2)$$

$$\beta_c(d, b) = -\frac{c^{d-1} (1-c)^b}{d+b-1} + \frac{d-1}{d+b-1} \beta_c(d-1, b). \quad (3)$$

Доказательство. Используя тождество

$$t^d (1-t)^{b-2} = t^{d-1} (1-t)^{b-2} - t^{d-1} (1-t)^{b-1}$$

и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \beta_c(d, b) &= \frac{1}{d} \int_c^1 (1-t)^{b-1} dt^d = \\ &= -\frac{c^d (1-c)^{b-1}}{d} + \frac{b-1}{d} \beta_c(d, b-1) - \frac{b-1}{d} \beta_c(d, b). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2).

Используя тождество

$$t^{d-2}(1-t)^b = (1-t)^{b-1} t^{d-2} - (1-t)^{b-1} t^{d-1}$$

и формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \beta_c(d, b) &= -\frac{1}{b} \int_c^1 t^{d-1} d(1-t)^b = \\ &= \frac{c^{d-1}(1-c)^b}{b} + \frac{d-1}{b} \beta_c(d-1, b) - \frac{d-1}{b} \beta_c(d, b). \end{aligned}$$

Отсюда следует (3). Лемма доказана.

Отметим, что $\beta_0(c, b)$ является обычной бэта-функцией $\beta(d, b)$.

Теорема. Пусть $1 < p < \infty$, $\sigma > 0$, $4a \leq \sigma^2$,

$$\alpha(a) = \frac{2\sqrt{\sigma^2 - 4a}}{2 + \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4a}}, \quad \beta(a) = \frac{2\sqrt{\sigma^2 - 4a}}{2 - \sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4a}}, \quad \gamma(a) = \frac{\sigma - 2 + \sqrt{\sigma^2 - 4a}}{2\sqrt{\sigma^2 - 4a}}$$

и $\sigma_0 \in (0, 2)$ есть единственный корень уравнения

$$\beta_{1-\frac{\sigma_0}{2}}(1-2p, p) - \beta(p, p) = 0.$$

Тогда для $0 < \sigma < \sigma_0$

$$\gamma_{2p}(\sigma) = (2+4p) \frac{1}{P} \left[(1+a_0+\sigma)^P (2+\sigma) + (1+a_0-\sigma)^P (2-\sigma) \right]^{\frac{1}{P}},$$

где a_0 — единственный корень уравнения

$$\beta_{\alpha(a)}(1-2p, p) - \beta(p, p) + \beta_{\beta(a)}(1-2p, p) = 0,$$

а для $\sigma > \sigma_0$

$$\gamma_{2p}(\sigma) = (2+4p) \frac{1}{P} \left[(1+a_0+\sigma)^P (2+\sigma) + (\sigma-1-a_0)^P (2-\sigma) \right]^{\frac{1}{P}},$$

где a_0 — единственный корень уравнения

$$\beta_{\alpha(a)}(1-2p, p) - \beta(p, p) + \beta_{\gamma(a)}(p, p) = 0.$$

Доказательство. Поскольку экстремальный многочлен $Z_{2p}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x + a_0$ существует и единственен, то необходимо коэффициент a_0 является единственным корнем уравнения

$$\int_{-1}^1 |x^2 - \sigma x + a_0|^{p-1} \operatorname{sign}(x^2 - \sigma x + a_0) dx = 0. \quad (4)$$

Из (2) следует, что по крайней мере один нуль многочлена $z_{2p}(x, \sigma)$ принадлежит интервалу $(-1, 1)$. Поскольку нулями многочлена $z_{2p}(x, \sigma)$ являются

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4a_0} \right), \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4a_0} \right),$$

то обязательно $4a_0 < \sigma^2$, $-1 < x_1 < 1$.

В случае, когда оба нуля x_1 и x_2 содержатся в интервале $(-1, 1)$, равенство (4) эквивалентно равенству

$$\int_{-1}^{x_1} (x_1 - x)^{p-1} (x_2 - x)^{p-1} dx - \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)^{p-1} (x_2 - x)^{p-1} dx + \\ + \int_{x_2}^1 (x - x_1)^{p-1} (x - x_2)^{p-1} dx = 0,$$

или после несложных преобразований

$$\beta_{\alpha(a_0)}(1-2p, p) - \beta(p, p) + \beta_{\beta(a_0)}(1-2p, p) = 0. \quad (5)$$

Если только один нуль многочлена $z_{2p}(x, \sigma)$ лежит в интервале $(-1, 1)$, то (4) эквивалентно равенству

$$\int_{-1}^{x_1} (x_1 - x)^{p-1} (x_2 - x)^{p-1} dx - \int_{x_1}^1 (x - x_1)^{p-1} (x_2 - x)^{p-1} dx = 0 \quad (5')$$

или

$$\beta_{\alpha(a_0)}(1-2p, p) - \beta_{\gamma(a_0)}(1-2p, p) = 0. \quad (6)$$

Аналогично получаем в случае $x_1, x_2 \in (-1, 1)$

$$\|z_{2p}(\cdot, \sigma)\|_{L_p(-1, 1)} = (\sigma^2 - 4a_0)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}} \left[\beta_{\alpha(a_0)}(-1-2p, p+1) + \right. \\ \left. + \beta(p+1, p+1) + \beta_{\beta(a_0)}(-1-2p, p+1) \right]^{\frac{1}{p}} \quad (7)$$

и в случае $x_1 \in (-1, 1)$, $x_2 \geq 1$

$$\|z_{2p}(\cdot, \sigma)\|_{L_p(-1,1)}^{-(\sigma^2 - 4a_0)} \left[\beta_{\alpha(a_0)}(-1-2p, p+1) + \beta_{\gamma(a_0)}(-1-2p, p+1) \right]^{\frac{1}{2p}} \quad (8)$$

На основании леммы имеем

$$\beta_c(-1-2p, p+1) = \frac{c^{-1-2p}(1-c)^p(2-c)}{2(1+2p)} - \frac{p}{2(1+2p)} \beta_c(1-2p, p),$$

$$\beta(p+1, p+1) = \frac{p}{2(1+2p)} \beta(p, p),$$

$$\beta_c(p+1, p+1) = \frac{c^p(1-c)^p(1-2c)}{2(1+2p)} + \frac{p}{2(1+2p)} \beta_c(p, p).$$

Тогда из (7) в силу (5) следует, что при $x_2 \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \|z_{2p}(\cdot, \sigma)\|_{L_p(-1,1)}^{-(\sigma^2 - 4a_0)} & \left[\frac{\alpha(a_0)^{-1-2p}(1-\alpha(a_0))^p(2-\alpha(a_0))}{2(1+2p)} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta(a_0)^{-1-2p}(1-\beta(a_0))^p(2-\beta(a_0))}{2(1+2p)} - \frac{p}{2(1+2p)} \left(\beta_{\alpha(a_0)}(1-2p, p) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta(p, p) + \beta_{\beta(a_0)}(1-2p, p) \right) \right]^{\frac{1}{2p}} = \\ & = (2+4p)^{\frac{1}{2p}} \left[(1+a_0+\sigma)^p(2+\sigma) + (1+a_0-\sigma)^p(2-\sigma) \right]^{\frac{1}{2p}}, \end{aligned}$$

а из (8) в силу (6) следует, что при $x_2 \geq 1$

$$\begin{aligned} \|z_{2p}(\cdot, \sigma)\|_{L_p(-1,1)}^{-(\sigma^2 - 4a_0)} & \left[\frac{\alpha(a_0)^{-1-2p}(1-\alpha(a_0))^p(2-\alpha(a_0))}{2(1+2p)} + \right. \\ & \left. + \frac{\gamma(a_0)^p(1-\gamma(a_0))^p(2-\gamma(a_0))}{2(1+2p)} - \frac{p}{2(1+2p)} \left(\beta_{\alpha(a_0)}(1-2p, p) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \beta_{\gamma(a_0)}(p, p) \right) \right]^{\frac{1}{2p}} = (2+4p)^{\frac{1}{2p}} \left[(1+a_0+\sigma)^p(2+\sigma) + \right. \end{aligned}$$

$$+ (\sigma - 1 - a_0)^P (2 - \sigma) \Big] \frac{1}{P}.$$

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $x_2 < 1$ при $\sigma < \sigma_0$ и $x_2 \geq 1$ при $\sigma \geq \sigma_0$. Прежде всего докажем, что в случае $x_2 \geq 1$ выполняется неравенство

$$1 + a_0 \geq 0. \quad (9)$$

Предположив противное: $1 + a_0 < 0$, имеем

$$\begin{aligned} |z_{2P}(-1, \sigma)| &= 1 + a_0 + \sigma < \sigma - 1 - a_0 = |z_{2P}(1, \sigma)|, \\ -1 &< z_1 < 0. \end{aligned}$$

Возьмем $\delta > 0$ столь малым, чтобы

$$\begin{aligned} 1 + a_0 + \sigma + \delta &< \sigma - 1 - a_0 - \delta, \\ -1 &< \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4(a_0 + \delta)} \right) < 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя теорему Лагранжа, получаем

$$\begin{aligned} &|x^2 - \sigma x + a_0 + \delta|_{L_P(-1, 1)}^P - |x^2 - \sigma x + a_0|_{L_P(-1, 1)}^P \\ &= \delta P \int_{-1}^1 |x^2 - \sigma x - a_0 + c|^{P-1} \operatorname{sign}(x^2 - \sigma x + a_0 + c) dx = \\ &= \delta P \left(\int_{-1}^{\alpha} (x^2 - \sigma x + a_0 + c)^{P-1} dx - \int_{\alpha}^1 (-x^2 + \sigma x - a_0 - c)^{P-1} dx \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $0 < c < \delta$, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4(a_0 + c)} \right)$.

Так как на интервале $(-1, \alpha)$ функция $x^2 - \sigma x + a_0 + c$ выпукла вниз, а на интервале $(\alpha, 1)$ функция $-x^2 + \sigma x - a_0 - c$ выпукла вверх, то для $x \in (-1, \alpha)$

$$x^2 - \sigma x + a_0 + c < \frac{1 + \sigma + a_0 + c}{1 + \alpha} (\alpha - x)$$

и для $x \in (\alpha, 1)$

$$-x^2 + \sigma x - a_0 - c > \frac{\sigma - 1 - a_0 - c}{1 - \alpha} (x - \alpha).$$

Тогда

$$\int_{-1}^{\alpha} (x^2 - \sigma x + a_0 + c)^{p-1} dx < \left(\frac{1 + \sigma + a_0 + c}{1 + \alpha} \right)^{p-1} \int_{-1}^{\alpha} (x - \alpha)^{p-1} dx = \\ = \frac{1 + \alpha}{p} (1 + \sigma + a_0 + c)^{p-1}, \\ \int_{\alpha}^1 (-x^2 + \sigma x - a_0 - c)^{p-1} dx > \left(\frac{\sigma - 1 - a_0 - c}{1 - \alpha} \right)^{p-1} \int_{\alpha}^1 (x - \alpha)^{p-1} dx = \\ = \frac{1 - \alpha}{p} (\sigma - 1 - a_0 - c)^{p-1}.$$

Из (11) следует, что

$$|x^2 - \sigma x + a_0 + \delta|_{L_p(-1,1)}^p - |x^2 - \sigma x + a_0|_{L_p(-1,1)}^p < \\ < \delta \left[(1 + \alpha)(1 + \sigma + a_0 + c)^{p-1} - (1 - \alpha)(\sigma - 1 - a_0 - c)^{p-1} \right].$$

Так как $0 < \delta < \delta$ и $-1 < \alpha < 0$, то в силу (10) заключаем, что

$$|x^2 - \sigma x + a_0 + \delta|_{L_p(-1,1)}^p - |x^2 - \sigma x + a_0|_{L_p(-1,1)}^p < 0,$$

что противоречит минимальности многочлена $z_{2p}(x, \delta)$. Полученное противоречие доказывает неравенство (9).

Дифференцируя равенство (5) по σ , получаем

$$\frac{d(\sqrt{\sigma^2 - 4a_0})}{d\sigma} = \frac{(1 + a_0 + \sigma)^{p-1} - (1 + a_0 - \sigma)^{p-1}}{(1 + a_0 + \sigma)^{p-1} (2 + \sigma) + (1 - \sigma + a_0)^{p-1} (2 - \sigma)} \cdot \sqrt{\sigma^2 - 4a_0}.$$

Учитывая, что в случае $x_1, x_2 \in (-1, 1)$

$$z_{2p}(-1, \sigma) = 1 + a_0 + \sigma > 0, \quad z_{2p}(1, \sigma) = 1 + a_0 - \sigma > 0,$$

$$\text{имеем } \frac{d(\sqrt{\sigma^2 - 4a_0})}{d\sigma} > 0.$$

Дифференцируя равенство (6) по σ , получаем

$$\frac{d(\sqrt{\sigma^2 - 4a_0})}{d\sigma} = \frac{(1 + a_0 + \sigma)^{p-1} + (\sigma - 1 - a_0)^{p-1}}{(1 + a_0 + \sigma)^{p-1} (2 + \sigma) + (\sigma - 1 - a_0)^{p-1} (2 - \sigma)} \cdot \sqrt{\sigma^2 - 4a_0}.$$

Учитывая, что в случае $x_1 \in (-1, 1)$, $x_2 \geq 1$ справедливо неравенство (9) и

$$z_{2p}(-1, \sigma) = 1 + a_0 + \sigma > 0, \quad z_{2p}(1, \sigma) = 1 + a_0 - \sigma \leq 0,$$

также имеет: $\frac{d(\sqrt{\sigma^2 - 4a_0})}{d\sigma} > 0.$

Поскольку при $\sigma=0$ в силу симметрии многочлена $z_{2p}(x, 0)$ оба нуля x_1 и x_2 принадлежат интервалу $(-1, 1)$ и $x_2 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4a_0})$ монотонно возрастающая по σ функция, а при $\sigma=2$ $x_2 > 1$, то у многочлена $z_{2p}(x, \sigma)$ при малых σ оба нуля содержатся в интервале $(-1, 1)$, а при достаточно больших σ только один нуль $x_1 \in (-1, 1)$. Наконец, $x_2 = 1$ в случае $\sqrt{\sigma^2 - 4a_0} = 2 - \sigma$. Тогда $\alpha(a_0) = 1 - \frac{\sigma}{2}$, $\beta(a_0) = 1$, $\gamma(a_0) = 0$ и равенства (5), (6) эквивалентны

$$\beta_{1-\frac{\sigma}{2}}(1-2p, p) - \beta(p, p) = 0.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим, что равенство (5) эквивалентно (6), если $(-1)^p = 1$. Действительно, в (5'), прибавляя и вычитая интеграл

$$\int_1^{x_2} (x_2 - x)^{p-1} (x - x_1)^{p-1} dx,$$

после преобразования получается

$$\beta_{\alpha(a_0)}(1-2p, p) - \beta(p, p) + (-1)^p \beta_{\beta(a_0)}(1-2p, p) = 0.$$

В частности, при $p=2$

$$z_{22}(x, \sigma) = x^2 - \sigma x - \frac{1}{3}, \quad \gamma_{22}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{3}\sigma^2 + \frac{8}{45}}.$$

Авторы признательны профессору Б.И. Буренкову за внимание к работе.

Литература

1. Галеев Э.М. Задача Золотарева в метрике $L_1[-1, 1]$ // Матем. заметки. - 1975. - Т.17, № 1. - С.13-20.
2. Геронимус Я.Л. Sur quelques propriétés extrémales de polynômes, dont les coefficients premiers sont donnés // Зап. Харьк. матем. об-ва. - 1936. - Т.12. - С.49-59.
3. Золотарев Е.И. Приложение эллиптических функций к вопросам о

функциях, наименее и наиболее уклоняющихся от нуля // Записки
С.-Петербургской Акад. наук. - 1877. - Т.30, № 5. - С.1-58.

4. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. - М.:
Изд-во МГУ, 1976. - 304 с.
5. Ялини А.Я. Априорная ограниченность производных для системы
дифференциальных неравенств // Дифференц. уравнения. - 1989. -
Т.25, № 7. - С.1129-1135.

A.Zvyagintsev, I.Philipenkova. On Zolotarev problem.

Summary. The Zolotarev problem is considered in the case

$$r_{zp}(\sigma) = \inf_{a \in R} \|x^2 - \sigma x + a\|_{L_p(-1,1)}$$

1991 MSC 26C05

A.Zvjaginseva, I.Filipenkova. Par Zolotarjeva problēma.

Ānotācija. Aprēķināta atrisinājuma eksistence Zolotarjeva
problēmāi

$$r_{zp}(\sigma) = \inf_{a \in R} \|x^2 - \sigma x + a\|_{L_p(-1,1)}$$

Институт математики и информатики

Поступила 05.04.92

Латвийского университета

Рига, Б.Райя, 29

**О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
С УСЛОВИЕМ ВРЕДЕРА**

А.Я. Лепин

Аннотация. Для краевой задачи

$$x''=f(t, x, x'), \quad H_1 x=h_1, \quad H_2 x=h_2,$$

$$\alpha x \leq \beta, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a),$$

где α - нижняя функция, а β - верхняя функция, указаны условия для существования решения.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$x''=f(t, x, x'), \quad H_1 x=h_1, \quad H_2 x=h_2,$$

(1)

$$\alpha x \leq \beta, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a),$$

где $f \in \text{Car}(I \times R^2, R)$, $I=[a, b]$, $a \in R$, $b \in (a, \infty)$, $H_1, H_2 \in C(S(I, R), R)$, $h_1, h_2 \in R$, $\alpha \in A(I, R)$, $\beta \in B(I, R)$, $\text{Car}(I \times R^2, R)$ - множество функций, удовлетворяющих условию Каратеодори, $S(I, R) = S_f(I, R)$ - множество решений $x: I \rightarrow R$ уравнения $x''=f(t, x, x')$ с топологией из $C(I, R)$, $A(I, R) = A_f(I, R)$ - множество нижних функций уравнения $x''=f(t, x, x')$ и $B(I, R) = B_f(I, R)$ - множество верхних функций уравнения $x''=f(t, x, x')$ (см. [1, с.9 и 23]). В работе [2] был изложен подход к обобщению базовых теорем работы [1]. Наша цель - получить обобщение теоремы 15 работы [2] при наличии условия Вредера: для любых $t_1 \in (a, b)$, $t_2 \in (t_1, b)$ и любого решения $x: (t_1, t_2) \rightarrow R$ уравнения $x''=f(t, x, x')$ из $\alpha(t) \leq x(t) \leq \beta(t)$, $t \in (t_1, t_2)$ следует $\sup\{|x'(t)| : t \in (t_1, t_2)\} < \infty$. Условие $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ существенно усложняет исследование краевой задачи (1). Если это условие опустить или заменить на условие $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$ или на условия $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$, $\alpha'(b) \leq x'(b) \leq \beta'(b)$, то доказательство соответствующих теорем существования решения существенно упрощается (см. [3], теоремы 3-5).

Пусть $\delta(x, y, z) = (x + |x - y| - |y - z| + z) \cdot 2^{-1}$. Из условия Шредера следует существование $M \in (0, \infty)$ такого, что для

$$f_x(t, x, x') = f(t, \delta(\alpha(t), x, \beta(t)), \delta(-M, x', M))$$

$\alpha \in A_{f_x}(I, R)$, $\beta \in B_{f_x}(I, R)$ и

$$\{x \in S(I, R) : \alpha \leq x \leq \beta\} = \{x \in S_{f_x}(I, R) : \alpha \leq x \leq \beta\}.$$

В дальнейшем будем считать, что $f = f_x$. Нам потребуются следующие леммы, доказательство которых аналогично доказательству соответствующих мест в работах [4-5]. Существование минимальных и максимальных решений, которые встречаются в дальнейшем, следует из работы [6].

Лемма 1. Пусть $q, z \in S(I, R)$, $q \leq z$, $q'(a) \geq z'(a)$, $q(b) = z(b)$, r - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = q'(a), \quad x(b) = z(b), \quad q \leq x \leq z, \quad (2)$$

$q \neq r$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 \in (\lambda_1, \infty)$ и для любых $t \in I$, $x_0, x_1 \in R$ решение задачи Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(\tau) = x_0, \quad x'(\tau) = x_1 \quad (3)$$

единственно. Тогда существует инъективное непрерывное отображение $s: [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow S(I, R)$ такое, что $s_{\lambda_1} = q$, $s'_{\lambda_1}(a) = q'(a)$, $q(a) < s_{\lambda_1}(a) < r(a)$, $s_{\lambda_1} \leq r$ или $s_{\lambda_1}(b) = z(b)$, $s'_{\lambda_1}(a) < q'(a)$, $r'(b) < s'_{\lambda_1}(b) < q'(b)$, $q \leq s_{\lambda_1}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $s_{\lambda_2} = r$.

Лемма 2. Пусть $y, z \in S(I, R)$, $y < z$, v - минимальное, а w - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = y(a), \quad x(b) = z(b), \quad y \leq x \leq z, \quad (4)$$

$v \neq w$, $\lambda_1 \in R$, $\lambda_2 \in (\lambda_1, \infty)$ и для любых $t \in I$, $x_0, x_1 \in R$ решение задачи Коши (3) единственно. Тогда существует инъективное непрерывное отображение $s: [\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow S(I, R)$ такое, что $s_{\lambda_1} = v$, $s_{\lambda_1}(a) = y(a)$, $v'(a) < s'_{\lambda_1}(a) < w'(a)$, $s_{\lambda_1} \leq w$ или $s_{\lambda_1}(b) = z(b)$, $w'(b) < s'_{\lambda_1}(b) < v'(b)$, $v \leq s_{\lambda_1}$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $s_{\lambda_2} = w$.

Теорема. Пусть $\alpha < \beta$, $\alpha'(a) < \beta'(a)$, краевые задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta, \quad (5)$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

не имеют решения, выполняется условие Шредера, и для любого $x \in S(I, R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2, \quad (6)$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) \leq \beta'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \leq h_1, \quad (7)$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge \left(x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b)) \right) \rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2, \quad (8)$$

$$\left(x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta(b)) \right) \wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \leq h_2, \quad (9)$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \quad (10)$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x'(a) \geq \alpha'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \geq h_1, \quad (11)$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge \left(x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \right) \rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \quad (12)$$

$$\left(x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \right) \wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \geq h_2. \quad (13)$$

Тогда существует решение краевой задачи (1).

Доказательство. Предварительно докажем теорему при следующих дополнительных условиях: $\alpha < \beta$ и для любых $t \in I$, $x_0, x_1 \in R$ решение задачи Коши (3) единственно. Пусть y - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

а z - минимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \beta(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad y \leq x \leq \beta,$$

v - минимальное, а w - максимальное решение краевой задачи (4),

$L_\varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и $L = \{L_\varphi : \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Из единственности решения задачи Коши следует $y < z$. Покажем, что для любого $s \in S(I, R)$ из $\alpha \leq s \leq \beta$ и $s(b) = \alpha(b)$ следует $s'(a) < \beta'(a)$. Предположим противное: $s'(a) = \beta'(a)$. Пусть $\alpha_1 = s$. Тогда краевая задача

$$x''=f(t, x, x'), \quad x'(a)=\beta'(a), \quad x(b)=\alpha_1(b), \quad \alpha_1 \leq x \leq \beta, \quad (14)$$

имеет решение, что противоречит отсутствию решений у краевых задач (5). Аналогично доказывается, что для любого $s \in S(I, R)$ из $\alpha \leq s \leq \beta$ и $s(b)=\beta(b)$ следует $\alpha'(a) < s'(a)$. Из определения y и z имеем $\alpha'(a) \leq y'(a) < \beta'(a)$ и $\alpha'(a) < z'(a) \leq \beta'(a)$. Покажем, что для любого $s \in S(I, R)$ из $s \leq z$, $s(a)=y(a)$ и $s'(a) > y'(a)$ следует $s(t) > y(t)$, $t \in (a, b)$. Предположим противное. Тогда найдется $t \in (a, b)$ такое, что $s(t)=y(t)$ и $s(t) > y(t)$, $t \in (a, t)$. Пусть $\alpha_1(t)=s(t)$, $t \in [a, t]$ и $\alpha_1(t)=y(t)$, $t \in [t, b]$. Тогда краевая задача

$$x''=f(t, x, x'), \quad x(a)=\alpha_1(a), \quad x(b)=\alpha_1(b), \quad \alpha_1 \leq x \leq z \quad (15)$$

имеет решение, что противоречит максимальнойности y . Аналогично доказывается, что для любого $s \in S(I, R)$ из $s \geq y$, $s(b)=z(b)$ и $s'(b) > z'(b)$ следует $s(t) < z(t)$, $t \in (a, b)$. Покажем, что для любого $s \in S(I, R)$ из $s \leq z$, $s(a) > y(a)$ и $s'(a) = \beta'(a)$ следует $s > y$. Предположим противное. Тогда найдется $t \in (a, b)$ такое, что $s(t)=y(t)$ и $s(t) > y(t)$, $t \in [a, t]$. Пусть $\alpha_1(t)=s(t)$, $t \in [a, t]$ и $\alpha_1(t)=y(t)$, $t \in [t, b]$. Тогда краевая задача (14) имеет решение, что противоречит отсутствию решений у краевых задач (5). Покажем, что для любого $s \in S(I, R)$ из $s(a)=y(a)$ и $y'(a) < s'(a) < v'(a)$ следует $y(t) < s(t) < v(t)$, $t \in (a, b)$. Предположим противное. Если найдется $t \in (a, b)$ такое, что $s(t)=y(t)$ и $y(t) < s(t) < v(t)$, $t \in (a, t)$, то пусть $\alpha_1(t)=s(t)$, $t \in [a, t]$ и $\alpha_1(t)=y(t)$, $t \in [t, b]$. Тогда краевая задача (15) имеет решение, что противоречит максимальнойности y . Если найдется $t \in (a, b)$ такое, что $s(t)=v(t)$ и $y(t) < s(t) < v(t)$, $t \in (a, t)$, то пусть $\beta_1(t)=s(t)$, $t \in [a, t]$ и $\beta_1(t)=v(t)$, $t \in [t, b]$. Тогда краевая задача

$$x''=f(t, x, x'), \quad x(a)=\beta_1(a), \quad x(b)=\beta_1(b), \quad y \leq x \leq \beta_1 \quad (15)$$

имеет решение, что противоречит минимальности v . Аналогично доказывается, что для любого $s \in S(I, R)$ из $s(b)=z(b)$ и $z'(b) < s'(b) < w'(b)$ следует $w(t) < s(t) < z(t)$, $t \in (a, b)$.

Построим инъективное непрерывное отображение $\Phi: L \rightarrow S(I, R)$ со следующими свойствами. Для $x_\varphi = \Phi(L_\varphi)$ $y \leq x_\varphi \leq z$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $x_0 = y$, найдутся $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi)$ такие, что $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и

$$x_\varphi(a) = \alpha(a) \wedge x'_\varphi(a) < \beta'(a), \quad \varphi \in (0, \varphi_1),$$

$$x_{\varphi_1}(a) = \alpha(a) \wedge \left(x'_{\varphi_1}(a) = \beta'(a) \vee (x'_{\varphi_1}(a) < \beta'(a) \wedge x_{\varphi_1}(b) = \beta(b)) \right),$$

$$\left(x_{\varphi_1}(a) = \alpha(a) \vee x_{\varphi_1}(b) = \beta(b) \right) \wedge x'_{\varphi_1}(a) < \beta'(a), \quad \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), \quad (17)$$

$$x_{\varphi_2}(a) = \alpha(a) \wedge \left(x'_{\varphi_2}(a) = \beta'(a) \vee (x'_{\varphi_2}(a) < \beta'(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = \beta(b)) \right),$$

$$x'_{\varphi_2}(a) = \beta'(a) \vee \left(x'_{\varphi_2}(a) < \beta'(a) \wedge x_{\varphi_2}(b) = \beta(b) \right), \quad \varphi \in (\varphi_2, \Pi),$$

$x_{\Pi} = z$, найдутся $\varphi_3, \varphi_4 \in (\Pi, 2\Pi)$ такие, что $\varphi_3 \leq \varphi_4$ и

$$x_{\varphi_3}(a) = \beta(a) \wedge x'_{\varphi_3}(a) > \alpha'(a), \quad \varphi \in (\Pi, \varphi_3),$$

$$x_{\varphi_3}(a) = \beta(a) \wedge \left(x'_{\varphi_3}(a) = \alpha'(a) \vee (x'_{\varphi_3}(a) > \alpha'(a) \wedge x_{\varphi_3}(b) = \alpha(b)) \right),$$

$$\left(x_{\varphi_3}(a) = \beta(a) \vee x_{\varphi_3}(b) = \alpha(b) \right) \wedge x'_{\varphi_3}(a) > \alpha'(a), \quad \varphi \in (\varphi_3, \varphi_4), \quad (18)$$

$$x_{\varphi_4}(a) = \beta(a) \wedge \left(x'_{\varphi_4}(a) = \alpha'(a) \vee (x'_{\varphi_4}(a) > \alpha'(a) \wedge x_{\varphi_4}(b) = \alpha(b)) \right),$$

$$x'_{\varphi_4}(a) = \alpha'(a) \vee \left(x'_{\varphi_4}(a) > \alpha'(a) \wedge x_{\varphi_4}(b) = \alpha(b) \right), \quad \varphi \in (\varphi_4, 2\Pi).$$

Пусть $K \subset R^2$ лежит внутри простой замкнутой кривой $L_* = \{(x_{\varphi}(a), x'_{\varphi}(a)) : \varphi \in [0, 2\Pi]\}$. Тогда для $t = a$ и любых $(x_0, x_1) \in K$ решение x задачи Коши (3) удовлетворяет неравенствам $y \leq x \leq z$ и $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$.

Построим инъективное непрерывное отображение $u: [0, \lambda_*] \rightarrow S(I, R)$ такое, что $y \leq u_{\lambda} \leq z$, $\lambda \in [0, \lambda_*]$, $u_0 = y$, найдутся $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \lambda_*)$ такие, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и

$$u_{\lambda}(a) = \alpha(a) \wedge u'_{\lambda}(a) < \beta'(a), \quad \lambda \in (0, \lambda_1),$$

$$u_{\lambda_1}(a) = \alpha(a) \wedge \left(u'_{\lambda_1}(a) = \beta'(a) \vee (u'_{\lambda_1}(a) < \beta'(a) \wedge u_{\lambda_1}(b) = \beta(b)) \right),$$

$$\left(u_{\lambda_1}(a) = \alpha(a) \vee u_{\lambda_1}(b) = \beta(b) \right) \wedge u'_{\lambda_1}(a) < \beta'(a), \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2), \quad (19)$$

$$u_{\lambda_2}(a) = \alpha(a) \wedge \left(u'_{\lambda_2}(a) = \beta'(a) \vee (u'_{\lambda_2}(a) < \beta'(a) \wedge u_{\lambda_2}(b) = \beta(b)) \right),$$

$$u'_\lambda(a) = \beta'(a) \vee \left(u'_\lambda(a) = \beta'(a) \wedge u_\lambda(b) = \beta(b) \right), \quad \lambda \in (\lambda_2, \lambda_n),$$

и $u_{\lambda_n} = z$. Обозначим через ρ_λ , σ_μ , τ_ν решения задач Коши

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \alpha(a), \quad x'(a) = \lambda,$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(b) = \beta(b), \quad x'(b) = \mu,$$

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x(a) = \nu, \quad x'(a) = \beta'(a).$$

Рассмотрим случай Я, когда $\beta'(a) \geq \nu'(a)$. Пусть $p = \rho_{\beta'(a)}$. Если $\beta'(a) = \nu'(a)$, то $p = \nu$. Если $\beta'(a) < \nu'(a)$, то $y(t) < p(t) < \nu(t)$, $t \in (a, b)$. Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\mu_1(\lambda) = \nu'(a) + \lambda(p'(a) - \nu'(a))$, $u_\lambda = \rho_{\mu_1(\lambda)}$, $\lambda \in [0, \lambda_2]$. Если $p(b) = \beta(b)$, то $\lambda^1 = \lambda_2$ и $q = p$. Если $p(b) < \beta(b)$, то $\mu_2(\lambda) = \alpha(a) + (\lambda - \lambda_2)(\beta(a) - \alpha(a))$,

$$\lambda^1 = \sup \left\{ \lambda_0 \in [\lambda_2, \lambda_2 + 1] : (\forall \lambda \in [\lambda_2, \lambda_0]) (\tau_{\mu_2(\lambda)} < z) \right\},$$

$q = \tau_{\mu_2(\lambda^1)}$, $u_\lambda = \tau_{\mu_2(\lambda)}$, $\lambda \in [\lambda_2, \lambda^1]$. Из единственности решения задачи Коши следует $q(b) = \beta(b)$. Пусть $\alpha_1 = q$ и γ - максимальное решение краевой задачи

$$x'' = f(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = z(b), \quad \alpha_1 \leq x \leq z. \quad (20)$$

Если $\gamma = q$, то $\lambda^2 = \lambda^1$. Если $\gamma \neq q$, то $\lambda^2 = \lambda^1 + 1$ и $u_\lambda = s_\lambda$, $\lambda \in (\lambda^2, \lambda^1)$, где s_λ находится по лемме 1 и удовлетворяет условиям $s_\lambda = q$ и $s_{\lambda^2} = \gamma$. Если $\gamma = z$, то $\lambda_n = \lambda^2$. Если $\gamma \neq z$, то $\lambda_n = \lambda^2 + 1$, $\mu_3(\lambda) = \gamma'(b) + (\lambda - \lambda^2)(z(b) - \gamma'(b))$ и $u_\lambda = \sigma_{\mu_3(\lambda)}$, $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_n]$. Ясно, что $u_0 = y$ и $u_{\lambda_n} = z$. Докажем неравенства $u_\lambda \leq z$, $\lambda \in (0, \lambda_n)$. Для $u_{\lambda^2} = p$, $u_{\lambda^1} = q$ и $u_{\lambda^2} = \gamma$ это очевидно. Для $\lambda \in (0, \lambda_2)$ из $y'(a) < u'_\lambda(a) < \nu'(a)$ следует $y(t) < u_\lambda(t) < \nu(t)$, $t \in (a, b)$. Если $p \neq q$, то $y < u_\lambda < z$, $\lambda \in (\lambda_2, \lambda^1)$. Действительно, по определению λ^1 имеем $u_\lambda < z$, $\lambda \in (\lambda_2, \lambda^1)$. Следовательно, $y < u_\lambda$, $\lambda \in (\lambda_2, \lambda^1)$. Если $q \neq \gamma$, то для $\lambda \in (\lambda^1, \lambda^2)$ по лемме 1 имеем $u'_\lambda(a) = \beta'(a)$, $q(a) < u_\lambda(a) < \gamma(a)$, $u_\lambda \leq \gamma$ или $u_\lambda(b) = \beta(b)$, $u'_\lambda(a) < \beta'(a)$, $(b) < u'_\lambda(b) < q'(b)$, $q \leq u_\lambda$. В первом случае $y < u_\lambda$, а во втором $u_\lambda(t) < z(t)$, $t \in [a, b)$. Если $\gamma \neq z$, то $\gamma(t) < u_\lambda(t) < z(t)$, $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_n)$, $t \in [a, b)$. Предположим противное. Если найдутся $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_n)$ и $t \in [a, b)$ такие, что $u_\lambda(t) = z(t)$ и

$\gamma(t) < u_\lambda(t) < z(t)$, $t \in (\tau, b)$, то пусть $\beta_1(t) = z(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\beta_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача (16) имеет решение, что противоречит минимальности z . Если найдутся $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_*)$ и $t \in [a, b)$ такие, что $u_\lambda(t) = \gamma(t)$ и $\gamma(t) < u_\lambda(t) < z(t)$, $t \in (\tau, b)$, то пусть $\alpha_1(t) = \gamma(t)$, $t \in [a, \tau]$ и $\alpha_1(t) = u_\lambda(t)$, $t \in [\tau, b]$. Тогда краевая задача (20) имеет решение, что противоречит максимальнойности γ . Для $\lambda \in [0, \lambda^2]$ условия (19) следуют из построения u_λ . Покажем, что $u'_\lambda(a) < \beta'(a)$, $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_*)$. Предположим, что найдется $\lambda \in (\lambda^2, \lambda_*)$ такое, что $u'_\lambda(a) \geq \beta'(a)$. Пусть $\alpha_1 = u_\lambda$. Тогда краевая задача (20) имеет решение, что противоречит максимальнойности γ .

Рассмотрим случай, когда $v'(a) < \beta'(a)$. Пусть $\lambda_1 = 1$, $u_\lambda(\lambda) = v'(a) + \lambda(v'(a) - v'(a))$ и $u_\lambda = \rho_{\mu_\lambda}(\lambda)$, $\lambda \in [0, \lambda_1]$. Ясно, что $\gamma(t) < u_\lambda(t) < v(t)$, $t \in (a, b)$, $\lambda \in (0, \lambda_1)$ и условия (19) выполняются для $\lambda \in [0, \lambda_1]$. Если $v = w$, то $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_\beta(\lambda) = v'(b) - (\lambda - \lambda_2)(z'(b) - v'(b))$, $\lambda^1 \in (\lambda_2, \lambda_2 + 1]$ находится из условий $\sigma'_{\mu_\beta}(\lambda^1)(a) = \beta'(a)$ и $\sigma'_{\mu_\beta}(\lambda)(a) < \beta'(a)$, $\lambda \in (\lambda_2, \lambda^1]$, $u_\lambda = \sigma_{\mu_\beta}(\lambda)$, $\lambda \in [\lambda_2, \lambda^1]$, $\sigma = u_{\lambda^1}$ и дальнейшее построение u_λ совпадает со случаем, когда $\beta'(a) \leq v'(a)$. Ясно, что $w(t) < u_\lambda(t) < z(t)$, $t \in [a, b)$, $\lambda \in (\lambda_2, \lambda^1)$ и условия (19) выполняются для $\lambda \in [\lambda_2, \lambda^1]$. Если $v \neq w$, то по лемме 2 находим s_λ , $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_1 + 1]$ такое, что $s_{\lambda_1} = v$, $s_\lambda(a) = v(a)$, $v'(a) < s'_\lambda(a) < v'(a)$, $s_\lambda = w$ или $s_\lambda(b) = z(b)$, $v'(a) < s'_\lambda(b) < v'(b)$, $v \leq s_\lambda$ для $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + 1)$ и $s_{\lambda_1 + 1} = w$. Ясно, что $v \leq s_\lambda \leq z$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_1 + 1]$. Если найдется $\lambda_2 \in (\lambda_1, \lambda_1 + 1]$ такое, что $s'_{\lambda_2}(a) = \beta'(a)$, $s'_{\lambda_2}(a) < \beta'(a)$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ и $s_{\lambda_2}(a) = w(a)$, то $\rho = s_{\lambda_2}$, $u_\lambda = s_\lambda$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и дальнейшее построение u_λ совпадает со случаем, когда $\beta'(a) \leq v'(a)$. Ясно, что условия (19) выполняются для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Если найдется $\lambda^1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + 1]$ такое, что $s'_{\lambda^1}(a) = \beta'(a)$, $s'_{\lambda^1}(a) < \beta'(a)$, $\lambda \in (\lambda_1, \lambda^1)$ и $w(a) < s'_{\lambda^1}(a)$, то

$$\lambda_2 = \sup \left\{ \lambda \in [\lambda_1, \lambda^1] : s_\lambda(a) = w(a), s_\lambda(a) = \beta(b) \right\},$$

$u_\lambda = s_\lambda$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$, $\sigma = u_{\lambda^1}$ и дальнейшее построение u_λ совпадает со случаем, когда $\beta'(a) \leq v'(a)$. Ясно, что условия (19) выполняются для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda^1]$. Если $s'_{\lambda^1}(a) < \beta'(a)$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_1 + 1]$, то $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$,

$u_\lambda = s_\lambda$, $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ и дальнейшее построение u_λ совпадает со случаем, когда $v = w$. Ясно, что условия (19) выполняются для $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

Пусть $\Phi(L_\varphi) = u_{\lambda_\varphi} \Pi^{-1} \varphi$, $\varphi \in [0, \Pi]$ и $\varphi_i = \lambda_\varphi^{-1} \Pi \lambda_i$, $i=1,2$. Тогда условия (17) следуют из условий (19), а неравенства $y \leq x \leq z$, $\varphi \in [0, \Pi]$ из неравенств $y \leq u_\lambda \leq z$, $\lambda \in [0, \lambda_\varphi]$. Для $\varphi \in [\Pi, 2\Pi]$ построение Φ проводится аналогично. При этом получаются условия (18) и неравенства $y \leq x \leq z$, $\varphi \in [\Pi, 2\Pi]$. Инъективность $\Phi_\varphi = \Phi(L_\varphi)$ для интервалов $[0, \Pi]$ и $[\Pi, 2\Pi]$ следует из построения. Для любых $\psi_1 \in [0, \Pi]$ и $\psi_2 \in [\Pi, 2\Pi]$ из $\Phi_{\psi_1} = \Phi_{\psi_2}$ и условий (17)-(18) следует $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 2\Pi$ или $\psi_1 = \psi_2 = \Pi$. Непрерывность Φ очевидна из построения. Из условий (17)-(18) следует, что $\alpha'(a) \leq x'_\varphi(a) \leq \beta'(a)$, $\varphi \in [0, 2\Pi]$. Из этих неравенств и условий (17)-(18) для любой точки (x_0, x_1) , лежащей внутри L_φ , решение x задачи Коши (3) при $\tau = a$ удовлетворяет неравенствам $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$. Покажем, что $y \leq x \leq z$. Предположим противное. Рассмотрим случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $z(t_0) < x(t_0)$. Множество

$$M = \left\{ (y(a), y'(a)) : y \in S(I, R) \wedge x(t_0) \leq y(t_0) \right\}$$

неограниченно и связно. Следовательно, $L_\varphi \cap M \neq \emptyset$. Пусть $(y_0, y_1) \in L_\varphi \cap M$. Тогда для решения s задачи Коши (3) при $\tau = a$, $x_0 = y_0$ и $x_1 = y_1$ имеем $z(t_0) < x(t_0) \leq s(t_0)$, что противоречит неравенству $z \leq s$. Аналогично рассматривается случай, когда найдется $t_0 \in I$ такое, что $x(t_0) < y(t_0)$.

Для $(x_0, x_1) \in R^2$ обозначим через s_{x_0, x_1} решение задачи Коши (3) при $\tau = a$. Если в некоторой точке L_φ векторное поле $H(x_0, x_1) = (H_1 s_{x_0, x_1} - h_1, H_2 s_{x_0, x_1} - h_2)$ обращается в нуль, то существует решение краевой задачи (1). Пусть векторное поле H на L_φ не обращается в нуль. Покажем, что вращение векторного поля H на L_φ отлично от нуля, что гарантирует существование решения краевой задачи (1). Из (6)-(13) и (17)-(18) следует, что для $H_\varphi = H(x_\varphi(a), x'_\varphi(a))$ H_0 не лежит в первом квадранте, при $\varphi \in (0, \varphi_1)$ H_φ не сонаправлен с $(1, 0)$, H_{φ_1} не лежит во втором квадранте, при $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ H_φ не делает ни одного полного

оборота, H_{φ_2} не лежит во втором квадранте, при $\varphi \in (\varphi_2, \Pi)$ H_{φ} не сонаправлен с $(0, -1)$, H_{Π} не лежит в третьем квадранте, при $\varphi \in (\Pi, \varphi_3)$ H_{φ} не сонаправлен с $(-1, 0)$, H_{φ_3} не лежит в четвертом квадранте, при $\varphi \in (\varphi_3, \varphi_4)$ H_{φ} не делает ни одного полного оборота, H_{φ_4} не лежит в четвертом квадранте, при $\varphi \in (\varphi_4, 2\Pi)$ H_{φ} не сонаправлен с $(0, 1)$. Таким образом отличие от нуля вращения векторного поля доказано.

Перейдем к доказательству теоремы в общем случае. Пусть $\beta_k = \beta + k^{-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\beta_k \in B(I, R)$ и $\alpha < \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$. Теперь аппроксимируем правую часть так, чтобы была единственность решения задачи Кови. Пусть для $k \in \mathbb{N}$, $m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$, $n \in \{m, m+1, \dots\}$, $t \in I$, $x, y, z \in R$

$$\varphi(z) = 2^{-1} |z-2| - |z-1| + |z+1| - 2^{-1} |z+2|,$$

$$\psi(z) = 2^{-1} (|z-2| - |z-1| - |z+1| + |z+2|),$$

$$\varphi_m(z) = m^{-1} \varphi(mz), \quad \psi_m(z) = \psi(mz),$$

$$f_{km}(t, x, y) = f(t, x - \varphi_m(x - \alpha(t)), \psi_m(y - \alpha'(t))) -$$

$$- \varphi_m(x - \beta_k(t)) \psi_m(y - \beta'(t)), y - \varphi_m(y - \alpha'(t)) \psi_m(x - \alpha(t)) -$$

$$- \varphi_m(y - \beta'(t)) \psi_m(x - \beta_k(t)),$$

$$f_{kmn}(t, x, y) = (2n)^{-2} \int_{x-1/n}^{x+1/n} \int_{y-1/n}^{y+1/n} f_{km}(t, u, v) du dv.$$

При фиксированном $t \in I$ функция f_{km} отличается от f только в $2m^{-1}$ окрестностях точек $(\alpha(t), \alpha'(t))$, $(\beta_k(t), \beta'(t))$, равна $f(t, \alpha(t), \alpha'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\alpha(t), \alpha'(t))$ и $f(t, \beta_k(t), \beta'(t))$ в m^{-1} окрестности точки $(\beta_k(t), \beta'(t))$. Функция f_{kmn} удовлетворяет обобщенному условию Липшица по второму и третьему аргументам, $\alpha \in A_{f_{kmn}}(I, R)$ и $\beta_k \in B_{f_{kmn}}(I, R)$.

Рассмотрим случай, когда найдется $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для $k \in \{k_0, k_0+1, \dots\}$, $m \in \{4k, 4k+1, \dots\}$ и $n \in \{m, m+1, \dots\}$ выполняются следующие условия. Краевые задачи

$$x'' = f_{kml}(t, x, x'), \quad x'(a) = \beta'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta_k,$$

$$x'' = f_{kmp}(t, x, x'), \quad x'(a) = \alpha'(a), \quad x(b) = \beta_k(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta_k,$$

не имеют решения и для любого $x \in S_{f_{kml}}(I, R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta_k$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2,$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) = \beta'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge \left[x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta_k(b)) \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \geq h_2,$$

$$\left[x'(a) = \beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b) = \beta_k(b)) \right] \wedge$$

$$\wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \geq h_2,$$

$$x(a) = \beta_k(a) \wedge x(b) = \beta_k(b) \rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2, \quad (21)$$

$$x(a) = \beta_k(a) \wedge x'(a) \geq \alpha'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \geq h_1,$$

$$x(a) = \beta_k(a) \wedge \left[x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \leq h_2,$$

$$\left[x'(a) = \alpha'(a) \vee (x'(a) > \alpha'(a) \wedge x(b) = \alpha(b)) \right] \wedge$$

$$\wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \leq h_2.$$

Тогда по уже доказанному существует решение x_{kml} краевой задачи

$$x'' = f_{kml}(t, x, x'), \quad H_1 x = h_1, \quad H_2 x = h_2,$$

$$\alpha \leq x \leq \beta_k, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a).$$

Из x_{kml} можно выделить сходящуюся последовательность $x_i \rightarrow x \in S(I, R)$ такую, что $\alpha \leq x \leq \beta$, $H_1 x = h_1$, $H_2 x = h_2$ и $\alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a)$.

Рассмотрим случай, когда найдется последовательность

$x_i \in S_{f_{k_i m_i n_i}}(I, R)$, $i=1, 2, \dots$ такая, что $k_i \rightarrow \infty$, $4k_i \leq m_i \leq n_i$,

$\alpha \leq x_i \leq \beta_{k_i}$, $i=1, 2, \dots$ и $x_i \rightarrow x \in S(I, R)$, для которой не выполняются

условия (21). Без ограничения общности можно считать, что нарушается одно из условий (21). Если $x_i(a)=\alpha(a)$, $x_i(b)=\alpha(b)$, $N_1x_i > h_1$ и $N_2x_i > h_2$ для $i=1,2,\dots$, то x - решение краевой задачи (1). Действительно, $x(a)=\alpha(a)$, $x(b)=\alpha(b)$, $N_1x \geq h_1$, $N_2x \geq h_2$ и $\alpha'(a) \leq x'(a) < \beta'(a)$. Из условия (6) имеем $N_1x \leq h_1$ или $N_2x \leq h_2$. Следовательно, $N_1x = h_1$ или $N_2x = h_2$. Если $N_1x = h_1$, то из условия (13) следует $N_2x \leq h_2$. Следовательно, $N_2x = h_2$. Если $N_2x = h_2$, то из условия (7) следует $N_1x \leq h_1$. Следовательно, $N_1x = h_1$. Если $x_i(a)=\alpha(a)$, $x_i'(a)=\beta'(a)$, $N_2x_i = h_2$ и $N_1x_i > h_1$ для $i=1,2,\dots$, то x - решение краевой задачи (1). Действительно, $x(a)=\alpha(a)$, $x'(a)=\beta'(a)$, $N_2x = h_2$ и $N_1x \geq h_1$. Из условия (7) имеем $N_1x \leq h_1$. Следовательно, $N_1x = h_1$. Если для $i=1,2,\dots$

$$x_i(a)=\alpha(a) \wedge \left(x_i'(a)=\beta'(a) \vee (x_i'(a) < \beta'(a) \wedge x_i(b)=\beta(b)) \right) \wedge \\ \wedge N_1x_i > h_1 \wedge N_2x_i \geq h_2,$$

то x - решение краевой задачи (1). Действительно,

$$x(a)=\alpha(a) \wedge \left(x'(a)=\beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b)) \right) \wedge \\ \wedge N_1x \geq h_1 \wedge N_2x = h_2.$$

Из условия (8) имеем $N_1x \leq h_1$ или $N_2x \geq h_2$. Следовательно, $N_1x = h_1$ или $N_2x = h_2$. Если $N_1x = h_1$, то из условия (9) следует $N_2x \geq h_2$. Следовательно, $N_2x = h_2$. Если $N_2x = h_2$, то из условия (7) следует $N_1x \leq h_1$. Следовательно, $N_1x = h_1$. Если для $i=1,2,\dots$

$$\left(x_i'(a)=\beta'(a) \vee (x_i'(a) < \beta'(a) \wedge x_i(b)=\beta(b)) \right) \wedge \\ \wedge N_1x_i = h_1 \wedge N_2x_i \geq h_2,$$

то x - решение краевой задачи (1). Действительно,

$$\left(x'(a)=\beta'(a) \vee (x'(a) < \beta'(a) \wedge x(b)=\beta(b)) \right) \wedge \\ \wedge N_1x = h_1 \wedge N_2x \geq h_2.$$

Из условия (9) имеем $N_2x \geq h_2$. Следовательно, $N_2x = h_2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Следствие. Пусть $\alpha \leq \beta$, $\alpha'(a) < \beta'(a)$, краевые задачи

$$x''=f(t, x, x'), \quad x'(a) > \alpha'(a), \quad x(b) = \alpha(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta,$$

$$x''=f(t, x, x'), \quad x'(a) < \beta'(a), \quad x(b) = \beta(b), \quad \alpha \leq x \leq \beta$$

не имеют решения, выполняется условие Шредера и для любого $x \in S(I, R)$ из $\alpha \leq x \leq \beta$ следует

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x(b) = \alpha(b) \rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2,$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) \leq \beta'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \leq h_1,$$

$$x(a) = \alpha(a) \wedge x'(a) = \beta'(a) \rightarrow H_1 x \leq h_1 \vee H_2 x \leq h_2,$$

$$x'(a) = \beta'(a) \wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \geq h_2,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x(b) = \beta(b) \rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x'(a) \geq \alpha'(a) \wedge H_2 x = h_2 \rightarrow H_1 x \geq h_1,$$

$$x(a) = \beta(a) \wedge x'(a) = \alpha'(a) \rightarrow H_1 x \geq h_1 \vee H_2 x \geq h_2,$$

$$x'(a) = \alpha'(a) \wedge H_1 x = h_1 \rightarrow H_2 x \leq h_2.$$

Тогда существует решение краевой задачи (1).

Литература

1. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка - Рига: Зинатне, 1988. - 211 с.
2. Лепин А.Я. Разрешимость краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им. П. Стучки, 1988. - С. 69-78.
3. Лепин А.Я. Краевые задачи для уравнения второго порядка // Доклады расширенных заседаний семинара Института прикладной математики им. И.Н. Веква - Тбилиси, 1988. - Т. 3, N 3. - С. 83-86.
4. Лепин А.Я., Лепин Л.А. Обобщенная разрешимость одной двухточечной краевой задачи // Латв. мат. ежегодник, 30. - Рига: Зинатне, 1986. - С. 63-68.
5. Лепин А.Я. // Латв. мат. ежегодник, 33. - Рига: Зинатне, 1989. - С. 39-46.

6. Лепина Э.И. О максимальных решениях краевых задач для уравнения второго порядка // Актуальные вопросы краевых задач. Теория и приложения. - Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1988. - С.131-139.

A.Lepin. On boundary value problem for second order differential equation satisfying Schrader condition.

Summary. For boundary value problem

$$x''=f(t,x,x'), \quad H_1 x=h_1, \quad H_2 x=h_2,$$

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a),$$

where α is a lower function and β is an upper function the conditions for existence of solution are given.

1991 MSC 34B15

A.Lepins. Par robežproblēmu otrās kārtas vienādojumam ar Šredera nosacījumu.

Anotācija. Robežproblēmai

$$x''=f(t,x,x'), \quad H_1 x=h_1, \quad H_2 x=h_2,$$

$$\alpha \leq x \leq \beta, \quad \alpha'(a) \leq x'(a) \leq \beta'(a),$$

kur α - apakšējā funkcija, β - augšējā funkcija, doti atrisinājuma eksistences nosacījumi.

Институт математики и информатики

Поступила 04.05.92

Латвийского университета

Рига, б.Райня, 29

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ГАЗСВОЙ ДИНАМИКИ

Н. И. Васильев

Аннотация. Для задачи

$$mx'''' + 2xx'' - x'^2 + 2k = 0, \quad 0 < t < \Delta,$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\Delta) = 1/2, \quad x'(\Delta) + mx''(\Delta) = 1,$$

где $k > 0$, $m > 0$, доказаны существование и единственность решения, а также численно изучены зависимости $\Delta = \Delta(k)$, m - фиксировано и $k = k(m)$, Δ - фиксировано.

УДК 517.927

Рассмотрим краевую задачу

$$mx'''' + 2xx'' - x'^2 + 2k = 0, \quad 0 < t < \Delta, \quad (1)$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\Delta) = 1/2, \quad x'(\Delta) + mx''(\Delta) = 1. \quad (2)$$

Уравнение (1) вместе с граничными условиями (2) получается при рассмотрении течения вязкого газа в окрестности критической липы затупленного осесимметричного тела при обтекании его гиперзвуковым потоком газа [1]. Положительные параметры m и k считаются известными. Параметр k - отношение плотности набегающего газа к плотности газа сразу за скачком, параметр m равен обратной величине параметра разреженности. Параметр Δ определяет безразмерный отход ударной волны и должен быть найден в результате нахождения решения задачи (1), (2). Уравнение (1) является следствием уравнения импульсов, спроектированного на касательную плоскость к обтекаемой поверхности тела. Первые два краевых условия выражают условия непротекания и прилипания на поверхности, соответственно; краевое условие $x(\Delta) = 1/2$ есть следствие закона сохранения массы; краевое условие $x'(\Delta) + mx''(\Delta) = 1$ есть следствие сохранения импульса при переходе через ударную волну.

В такой постановке задача (1), (2) изучалась как аналитически [1], так и численно [2]. В частности, в [1]

доказано, что при достаточно малых $m > 0$ и $0 < k < 1/2$ задача (1), (2) имеет единственное решение, и для таких k , когда m - малый параметр, дано асимптотическое представление решения.

В работе [2], используя метод последовательных приближений, доказано существование - по крайней мере - одного решения задачи (1), (2) при любом $m > 0$ и $k > 19 + 6m + (36m^2 + 307m + 324)^{1/2}$, а также при любом $k > 0$ и достаточно больших m .

В этой работе мы докажем, что краевая задача (1), (2) имеет единственное решение при любых положительных m и k . Также для решений этой краевой задачи численно на ЭВМ изучены зависимости $\Delta = \Delta(k)$, m - фиксировано; $k = k(m)$, Δ - фиксировано.

Пусть $x_\alpha(t, k)$ - решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_\alpha(0, k) = x'_\alpha(0, k) = 0, \quad x''_\alpha(0, k) = \alpha. \quad (3)$$

Тогда очевидно, что для любых t , при которых решение $x_\alpha(t, k)$ существует, имеет место

$$x_\alpha(t, k) = \frac{t^2 \alpha}{2} - \frac{k}{m} \int_0^t (t-s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi, k) d\xi\right) ds. \quad (4)$$

Предварительно сформулируем две леммы, которые легко доказываются с использованием соотношения (4).

Лемма 1. Пусть $x_\alpha(t, k_1)$ и $x_\beta(t, k_2)$ - решения соответствующих задач Коши (1), (3), причем $m > 0$,

$$0 < \alpha < \beta, \quad 0 < k_2 < k_1, \quad \beta - \alpha + k_1 - k_2 > 0. \quad (5)$$

Тогда $x_\alpha(t, k_1) < x_\beta(t, k_2)$ для всех $t \in (0, \tau)$, при которых $x_\alpha(t, k_1) > 0$.

Доказательство. Из уравнения (1) и условия (5) следует, что для всех достаточно малых $t > 0$

$$x_\alpha(t, k_1) < x_\beta(t, k_2). \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо для всех $t > 0$, при которых $x_\alpha(t, k_1) > 0$. Предполагаем противное, т.е. что при некотором $t_1 > 0$

$$x_\alpha(t_1, k_1) = x_\beta(t_1, k_2),$$

причем $x_\alpha(t, k_1) < x_\beta(t, k_2) \quad \forall t \in (0, t_1)$. Тогда с учетом (4) имеем

$$\begin{aligned}
0 &= x_\alpha(t_1, k_1) - x_\beta(t_1, k_2) = \frac{t_1^2}{2} (\alpha - \beta) - \\
&- \frac{k_1}{m} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi, k_1) d\xi\right) ds + \\
&+ \frac{k_2}{m} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds = \\
&= \frac{t_1^2}{2} (\alpha - \beta) - \frac{k_1 - k_2}{m} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds < 0.
\end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Следствие 1. Пусть выполняются условия леммы 1 и существует $\Delta_1 > 0$ такое, что $x_\alpha(\Delta_1, k_1) = 1/2$, $0 < x_\alpha(t, k_1) < 1/2$ $\forall t \in (0, \Delta_1)$. Тогда найдется Δ_2 , $0 < \Delta_2 < \Delta_1$, такое, что $x_\beta(\Delta_2, k_2) = 1/2$, $0 < x_\beta(t, k_2) < 1/2$ $\forall t \in (0, \Delta_2)$.

Следствие 2. Пусть $x_\alpha(t, k)$ - решение задачи (1), (3) такое, что существует $\Delta > 0$, при котором $x_\alpha(\Delta, k) = 1/2$. Тогда $\Delta = \Delta_1(\alpha)$ является непрерывной монотонно убывающей функцией, а $\Delta = \Delta_2(k)$ - является непрерывной монотонно возрастающей функцией.

Лемма 2. Пусть $x_\alpha(t, k_1)$ и $x_\beta(t, k_2)$ - решения соответствующих задач Коши (1), (3) такие, что

$$\begin{aligned}
x_\alpha(\Delta_1, k_1) &= 1/2, & 0 < x_\alpha(t, k_1) < 1/2 & \quad \forall t \in (0, \Delta_1); \\
x_\beta(\Delta_2, k_2) &= 1/2, & 0 < x_\beta(t, k_2) < 1/2 & \quad \forall t \in (0, \Delta_2)
\end{aligned}$$

и $0 < \alpha < \beta$, $0 < k_2 = k_1$, причем

$$\alpha - \beta + k_2 - k_1 < 0.$$

Тогда

$$x'_\alpha(\Delta_1, k_1) < x'_\beta(\Delta_2, k_2),$$

$$x''_\alpha(\Delta_1, k_1) < x''_\beta(\Delta_2, k_2).$$

Доказательство. Согласно следствию 1 $\Delta_1 > \Delta_2$. При этом $x_\alpha(t, k_1) < x_\beta(t, k_2)$ $\forall t \in (0, \Delta_2)$. Далее имеем

$$x'_\beta(\Delta_2, k_2) - x''_\alpha(\Delta_1, k_1) = \beta - \alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2k_1}{m} \int_0^{\Delta_1} \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi, k_1) d\xi\right) ds - \\
& - \frac{2k_2}{m} \int_0^{\Delta_2} \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds > \\
& > \beta - \alpha + 2 \frac{k_1 - k_2}{m} \int_0^{\Delta_2} \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds > 0,
\end{aligned}$$

т.е. $x''_\alpha(\Delta_1, k_1) < x''_\beta(\Delta_2, k_2)$.

Учитывая условия $x_\alpha(\Delta_1, k_1) = 1/2$, $x_\beta(\Delta_2, k_2) = 1/2$, получаем

$$\begin{aligned}
\alpha &= \Delta_1^{-2} \left(1 + \frac{2k_1}{m} \int_0^{\Delta_1} (\Delta_1 - s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi, k_1) d\xi\right) ds \right), \\
\beta &= \Delta_2^{-2} \left(1 + \frac{2k_2}{m} \int_0^{\Delta_2} (\Delta_2 - s)^2 \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds \right).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
& x'_\beta(\Delta_2, k_2) - x'_\alpha(\Delta_1, k_1) = \Delta_2^{-1} - \Delta_1^{-1} + \\
& + \frac{2k_1}{m} \int_0^{\Delta_1} \frac{s\Delta_1 - s^2}{\Delta_1} \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi, k_1) d\xi\right) ds - \\
& - \frac{2k_2}{m} \int_0^{\Delta_2} \frac{s\Delta_2 - s^2}{\Delta_2} \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds > \\
& > \Delta_2^{-1} - \Delta_1^{-1} + \frac{2}{m\Delta_1\Delta_2} \int_0^{\Delta_2} \left((k_1 - k_2)\Delta_1\Delta_2 - s(k_1\Delta_2 - \right. \\
& \left. - k_2\Delta_1) \right) s \cdot \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\beta(\xi, k_2) d\xi\right) ds > 0,
\end{aligned}$$

т.е. $x'_\alpha(\Delta_1, k_1) < x'_\beta(\Delta_2, k_2)$, что завершает доказательство леммы 2.

Следствие 3. Пусть $x_\alpha(t, k)$ - решение задачи Коши (1), (3) такое, что $x_\alpha(\Delta, k) = 1/2$, причем $0 < x_\alpha(\Delta, k) < 1/2 \forall t \in (0, \Delta)$. Тогда при фиксированных m и k функция

$$\varphi(\alpha) = x'_\alpha(\Delta, k) + \mu x''_\alpha(\Delta, k) - 1$$

является непрерывной монотонно возрастающей по α .

Теорема. Краевая задача (1), (2) имеет единственное решение при любых положительных k и μ .

Доказательство. Рассмотрим задачу (1), (3). Покажем, что при любых $k > 0$, $\mu > 0$ существует единственное значение α_0 такое, что решение $x(t)$ уравнения (1) с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = \alpha_0$ при соответствующем $\Delta_0 > 0$ удовлетворяет также условиям

$$x(\Delta_0) = 1/2, \quad x'(\Delta_0) + \mu x''(\Delta_0) = 1,$$

причем $0 < x(t) < 1/2 \quad \forall t \in (0, \Delta_0)$. Заметим, что при $\alpha > 0$ решение $x_\alpha(t, k)$ задачи (1), (3) при $t > 0$ имеет только один экстремум — положительный максимум в некоторой точке $t_0 > 0$, при этом $x_\alpha(t, k) < \alpha^2/2$, $x'_\alpha(t, k) < \alpha t$, $x''_\alpha(t, k) < \alpha$ для тех t , при которых $x_\alpha(t, k)$ определена.

Правая часть уравнения (1) ([3], [4]) удовлетворяет условию Бернштейна. По лемме 4 главы 5 ([4]) для достаточно большого $\alpha = \bar{\alpha}$ будем иметь, что соответствующее решение $x_{\bar{\alpha}}(t, k)$ задачи (1), (3) пересекает прямую $x = 1/2$ при некотором $t = \bar{\Delta}$, при этом $\bar{\Delta} > 0$. В то же время существует $\underline{\alpha} > 0$ такое, что при некотором $\bar{\Delta} > \Delta$

$$x_{\underline{\alpha}}(\bar{\Delta}, k) = 1/2, \quad x'_{\underline{\alpha}}(\bar{\Delta}, k) = 0, \quad x''_{\underline{\alpha}}(\bar{\Delta}, k) \leq 0,$$

т.е. $\varphi(\underline{\alpha}) < 0$. Заметим, что если $\alpha > 0$ достаточно мало, то функция $\varphi(\alpha)$ не определена, так как соответствующее решение $x_\alpha(t, k)$ в силу непрерывной зависимости от начальных данных не пересекает прямую $x = 1/2$ и уходит в область $x < 0$.

Учитывая непрерывность $\varphi(\alpha)$, из следствия 3 получаем, что существует единственное значение $\alpha_0 \in (\underline{\alpha}, \bar{\alpha})$ такое, что $x_{\alpha_0}(t, k)$ при некотором $\Delta_0 \in (\bar{\Delta}, \bar{\Delta})$ удовлетворяет крайним условиям (2), что завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема остается в силе, если вместо условий (2) заданы крайние условия

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x(\Delta) = \gamma_1, \quad \gamma_2 x'(\Delta) + \gamma_3 x''(\Delta) = \gamma_4, \quad (2')$$

где $\gamma_1, \gamma_4 > 0$, $\gamma_2, \gamma_3 \geq 0$, $\gamma_2 + \gamma_3 > 0$.

Рассмотрим далее два частных случая значений параметров k и m .

Пусть $k=0$, $m>0$. Тогда уравнение (1) имеет вид

$$mx'''' + 2xx' - x'^2 = 0, \quad (7)$$

и решение краевой задачи (7), (2) легко находится в явном виде. В самом деле, пусть $x_1(t)$ - решение (7), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0) = x_1'(0) = 0, \quad x_1''(0) = 1. \quad (8)$$

Тогда решение $x_\alpha(t)$ уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям $x_\alpha(0) = x_\alpha'(0) = 0$, $x_\alpha''(0) = \alpha$, выражается через $x_1(t)$:

$$x_\alpha(t) = \alpha^{1/3} x_1(\alpha^{1/3} t).$$

Отсюда, учитывая, что $x_1(t) = t^2/2$, имеем явный вид решения краевой задачи (7), (2)

$$x(t) = \frac{t^2}{1+2m+\sqrt{1+4m}}, \quad \Delta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1+4m} \right). \quad (9)$$

В случае $m=0$, $k>0$ уравнение (1) принимает вид

$$2xx'' - x'^2 + 2k = 0, \quad (10)$$

и условие $x'(0) = 0$ выпадает. Искомое решение в этом случае имеет вид

$$x(t) = \sqrt{2k}t + \frac{1-2k}{2}t^2, \quad \Delta = \frac{1}{1+\sqrt{2k}}. \quad (11)$$

Для численного нахождения решения $x(t)$ задачи (1), (2) в случае $k>0$, $m>0$ удобно использовать баллистический метод. При этом желательно, по возможности, более точно определить $\alpha_0 = x''(0)$. Чтобы получить априорную оценку $0 < \alpha_0 < \bar{\alpha}$, воспользуемся краевым условием $x'(\Delta) + mx''(\Delta) = 1$. Отсюда имеем

$$\alpha_0 = \frac{1}{\Delta+m} \left(1 + \frac{2k}{m} \int_0^\Delta (\Delta-s+m) \exp\left(\frac{2}{m} \int_0^s x(\xi) d\xi\right) ds \right). \quad (12)$$

Так как решение $x(t)$ задачи (1), (2) является монотонно возрастающей функцией, причем $0 \leq x(t) \leq 1/2 \forall t \in [0, \Delta]$, то из (12) заключаем следующую априорную оценку для величины α_0 :

$$0 < \alpha_0 \leq \frac{1 + 2k\Delta + \frac{1}{m}\Delta^2}{\Delta + m}. \quad (13)$$

Однако удобнее использовать более грубую оценку

$$0 < \alpha_0 < \frac{1}{m} + \frac{2k}{m}\Delta, \quad (14)$$

которая получается из условия $x'(\Delta) = 0$. В оценки (13) и (14) входит неизвестная величина Δ . Априорная оценка для величины Δ вида $0 < \Delta < \bar{\Delta}$ может быть найдена, исходя из условий $x_\alpha(\bar{\Delta}) = 1/2$, $x'_\alpha(\bar{\Delta}) = 0$, что приводит к соотношению

$$\frac{m}{2k} = \int_0^{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}s - s^2) \exp\left(-\frac{2}{m} \int_0^s x_\alpha(\xi) d\xi\right) ds. \quad (15)$$

Учитывая, что $0 \leq x_\alpha(t) \leq 1/2 \quad \forall t \in [0, \bar{\Delta}]$, имеем

$$\frac{m}{2k} \geq \int_0^{\bar{\Delta}} (\bar{\Delta}s - s^2) \exp\left(-\frac{s}{m}\right) ds. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь относительно $\bar{\Delta}$ трансцендентное уравнение

$$2km\bar{\Delta}\left(1 + \exp\left(-\frac{\bar{\Delta}}{m}\right)\right) - 4km^2\left(1 - \exp\left(-\frac{\bar{\Delta}}{m}\right)\right) - 1 = 0. \quad (17)$$

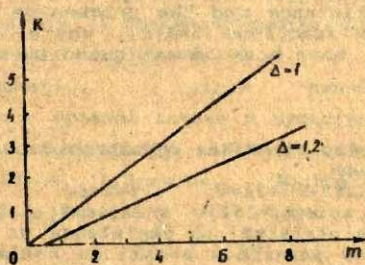
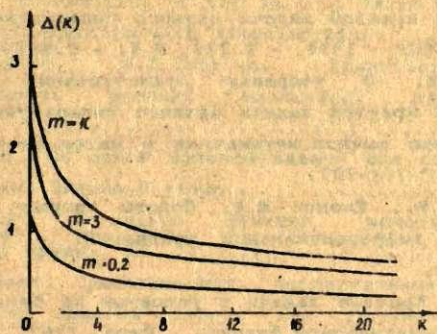
Легко видеть, что уравнение (17) имеет единственный положительный корень $\bar{\Delta}$. Отсюда получаем искомую априорную оценку на величину α_0

$$0 < \alpha_0 < \bar{\alpha}, \quad \text{где} \\ \bar{\alpha} = \frac{1}{m} + \frac{2k}{m}\bar{\Delta}, \quad (18)$$

а $\bar{\Delta}$ — положительный корень уравнения (17).

Имея оценку (18), баллистическим методом для любых положительных k и m легко находится решение краевой задачи (1), (2). При этом для нахождения соответствующих решений $x_\alpha(t)$ задачи Коши (1), (2) можно использовать какой-либо из эффективных разностных методов, например, Рунге-Кутты.

На рисунках 1 и 2 для решений краевой задачи (1), (2) как результаты численного эксперимента приведены зависимости, соответственно, $\Delta = \Delta(k)$, m фиксировано, и $k = k(m)$, Δ — фиксировано. Монотонный характер этих зависимостей теоретически обосновать не удалось.



Литература

1. Разумейко Б.Г., Тирский Г.А., Тренкин Г.А. Теоремы существования и единственности и асимптотические решения для автомодельной краевой задачи вязкого гиперзвукового ударного слоя // ДАН СССР. - 1974. - Т.219, № 4. - С.825-828.
2. Титов О.В. О теоремах существования решения для автомодельной краевой задачи вязкого гиперзвукового ударного слоя // Журнал вычисл. математики и матем. физики. - 1979. - Т.19, № 3. - С.701-707.
3. Васильев Н.М., Клоков В.А. Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. - Рига: Знание, 1978. - 189 с.
4. Клоков Ю.А. Краевые задачи с условием на бесконечности для уравнений математической физики. - Рига, 1963. - 107 с.

H. Vasilyev. On a certain boundary value problem arising in gas dynamics.

Summary. For the problem

$$mx'''+2xx''-x'^2+2k=0, \quad 0 < t < \Delta,$$

$$x(0)=x'(0)=0, \quad x(\Delta)=1/2, \quad x'(\Delta)+mx''(\Delta)=1,$$

where $k > 0$, $m > 0$, the existence and the uniqueness of solution have been proved. The functions $\Delta = \Delta(k)$, where m is fixed, $k = k(m)$ and Δ is fixed, have been investigated by carrying out numerical calculations.

1991 MSC 34B15

H. Vasiļjevs. Par kādu gāzu dinamikas robežproblēmu.

Anotācija. Uzdevumam

$$mx'''+2xx''-x'^2+2k=0, \quad 0 < t < \Delta,$$

$$x(0)=x'(0)=0, \quad x(\Delta)=1/2, \quad x'(\Delta)+mx''(\Delta)=1,$$

kur $k > 0$, $m > 0$, pierādīta atrisinājuma eksistence un unitāte, kā arī skaitliski izpētītas sakarības $\Delta = \Delta(k)$ un $k = k(m)$ attiecīgi fikseštam m un Δ .

Институт математики и информатики

Поступила 08.05.92

Латвийского университета

Рига, 6. Райна, 29

SATURA RĀDĪTĀIS

1. J.Cepītis. Solvability of the initial value problem for differential equation with singularities.....3
2. Ф.И.Садырбаев, А.Б.Шибунис. Единственность и неединственность решений нелинейных эллиптических уравнений.....9
3. Г.П.Гризанс. Об одной краевой задаче для системы двух уравнений типа Эддена-Фаулера.....16
4. А.Каневский. Локальные функции, монотонные вдоль интегральных кривых, IV.....22
5. Ф.И.Садырбаев. Существование нетривиальных решений в периодической краевой задаче для уравнения второго порядка.....4
6. J.Cepītis, I.Minkeviča. On the solvability of the boundary value problem modelling biochemical reactions.....39
7. М.М.Адъятов. Разрешимость начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с особенностями..45
8. В.Д.Пономарев. Дифференцируемость по параметру решений системы операторных уравнений.....52
9. В.Д.Пономарев. О связи единственности решения вариационной краевой задачи с существованием производной от решения по параметру.....62
10. A.Reinfelds, L.Sermone. Equivalence of nonlinear differential equations with impulse effect in Banach space.....68
11. О.Ндрупс. Континуальная эквивалентность динамических систем на двумерных многообразиях.....74
12. A.Reinfelds. Existence of central manifold for differential equations with impulses in a Banach space.....81
13. G.Petters. Certain properties of the solutions of the completely integrable equation.....89
14. А.И.Звягинцев. О единственности стационарного решения уравнения Курамото-Сузуки.....95
15. А.И.Звягинцев, И.В.Филипенкова. О задаче Е.И.Золотарева.....106

16. А.Я.Лепин. О краевой задаче для уравнения второго порядка с условием Шредера.....115
17. Н.И.Васильев. Об одной краевой задаче газовой динамики..128