

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

Matemātikas maģistra studiju programmas

2. kursa studente

**Anna Levicka**

Stud. apl. Nr.: a117104

**VARBŪTĪBU TEORIJAS PRAKTISKIE UZDEVUMI  
VIDUSSKOLAI TRĪS LĪMEŅOS**

**MAĢISTRA DARBS**

Darba zinātniskais vadītājs

asoc. prof.

J. Mencis

RĪGA 2019

## **Anotācija**

Maģistra darbs satur 3 nodaļas un 1 pielikumu, kurās ir gan teorētiskais materiāls varbūtību teorijā un statistikā vidusskolai, gan uzdevumu daļa. Praktiskais materiāls ir izveidots trīs sarežģītības līmeņos *Microsoft Power Point* veidnē. Tiek pētītas mācību standarta topošas izmaiņas, tajā skaitā, kādēļ ir svarīgi sadalīt praktiskus uzdevumus matemātikā trīs grūtības pakāpēs. Praktiskā daļa ir izstrādāta radošā, skolēnam saprotamā veidā, ir sagatavoti nestandarta uzdevumi, saistoši ar citām nozarēm kā bioloģijā, ķīmijā un fizikā, kas ļauj skolēnam sajūst tiešo saikni starp matemātiku un reālo dzīvi. Dažos uzdevumos tika izveidoti ieteikumi risināšanai. Mācību pieeja atbilst jaunā mācību satura prasībām.

## **Annotation**

The work consists of 3 chapters and 1 annex, which contains both theoretical material of probability theory and statistics for secondary school and practical part. Tasks in three levels of complexity are created in the *Microsoft Power Point* template. Expecting changes in the standard of teaching have been analyzed in the work i. e. why it is important to divide practical tasks in mathematics into three levels of complexity. The practical part is designed in a creative and understandable way to the student. Non-standard tasks are prepared in binding with other fields such as biology, chemistry and physics that allow students to feel the direct link between mathematics and real life. For some tasks recommendations for solving have been prepared. The learning approach meets the requirements of the new training content.

# SATURS

<b>Anotācija</b> .....	1
<b>Annotation</b> .....	2
<b>Ievads</b> .....	5
<b>1. AKTUĀLO UN TOPOŠO MĀCĪBU STANDARTU SALĪDZINĀJUMS</b> .....	8
<b>2. TEORIJA</b> .....	11
<b>2.1. Kombinatorikas pamatformulas</b> .....	11
<b>2.1.1. Faktoriāla jēdziens</b> .....	11
<b>2.1.2. Permutācijas</b> .....	12
<b>2.1.3. Kombinācijas</b> .....	13
<b>2.1.4. Variācijas</b> .....	14
<b>2.2. Paskāla trijstūris</b> .....	15
<b>2.3. Klasiskās varbūtības formula</b> .....	16
<b>2.4. Ģeometriskās varbūtības formula</b> .....	16
<b>2.5. Notikumu algebra</b> .....	17
<b>2.5.1. Apvienojums</b> .....	17
<b>2.5.2. Šķēlums</b> .....	17
<b>2.5.3. Pretējais notikums</b> .....	17
<b>2.5.4. Notikumu starpība</b> .....	18
<b>2.6. Varbūtības saskaitīšanas un reizināšanas likums</b> .....	18
<b>2.6.1. Saskaitīšanas likums</b> .....	18
<b>2.6.2. Reizināšanas likums</b> .....	19
<b>2.7. Varbūtība notikt vismaz vienam no <math>n</math> neatkarīgiem notikumiem</b> .....	20
<b>2.8. Pretējā notikuma varbūtība</b> .....	20
<b>2.9. Pilnās varbūtības formula</b> .....	21
<b>2.10. Bernulli formula</b> .....	22
<b>2.11. Muavra-Laplasa lokālā teorēma</b> .....	22
<b>2.11.1. Gausa funkcijas vērtības</b> .....	23
<b>2.12. Muavra-Laplasa integrālā teorēma</b> .....	24
<b>2.12.1. Muavra-Laplasa funkcijas grafiks</b> .....	24
<b>2.12.2. Muavra-Laplasa funkcijas vērtības</b> .....	25
<b>2.13. Puasona formula</b> .....	25
<b>2.14. Diskrēts gadījuma lielums</b> .....	26
<b>2.15. Nepārtraukts gadījuma lielums</b> .....	26
<b>2.16. Korelācija un regresija</b> .....	28

<b>3. DARBA LAPAS UN PREZENTĀCIJA .....</b>	<b>29</b>
<b>3.1. Pirmā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (A līmenis) .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2. Otrā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (A līmenis) .....</b>	<b>32</b>
<b>3.3. Trešā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (C līmenis) .....</b>	<b>33</b>
<b>3.4. Ceturtā darba lapa. Bernulli formula (B un C līmenis attiecīgi) .....</b>	<b>34</b>
<b>3.5. Piektā darba lapa. Diskrēts gadījuma lielums (C līmenis) .....</b>	<b>35</b>
<b>3.6. Sestā darba lapa. Nepārtraukts gadījuma lielums (C līmenis) .....</b>	<b>37</b>
<b>3.7. Septītā darba lapa. Laplasa teorēma (C līmenis) .....</b>	<b>39</b>
<b>3.8. Astotā darba lapa. Pilnās varbūtības formula (B līmenis) .....</b>	<b>40</b>
<b>3.9. Devītā darba lapa. Reizināšanas likums (A līmenis) .....</b>	<b>42</b>
<b>3.10. Desmitā darba lapa. Saskaitīšanas likums (A līmenis) .....</b>	<b>43</b>
<b>3.11. Prezētācija .....</b>	<b>44</b>
<b>Nobeigums .....</b>	<b>54</b>
<b>Izmantotā literatūra .....</b>	<b>55</b>
<b>1. pielikums .....</b>	<b>55</b>

## Ievads

Tēma ir aktuāla tādēļ, ka, mainās skolas standarts, konkrēti – mācību saturs būs pasniegts trīs mācību satura apguves līmeņos – vispārīgajā, optimālajā un augstākajā [8].

Vispārīgajā līmenī skolēniem tiek piedāvāti standarta uzdevumi no pazīstamām situācijām, kurus viņi parasti risina kopā ar skolotāju. Šie uzdevumi skaitās kā „iesildīšanās” uzdevumi. Vispārīgajā līmenī attīstās tādas prasmes kā atpazīšana (problēmu), iegaumēšana (formulu), aprakstīšana (situāciju). Šajā līmenī mācību saturs ir obligātā mācību satura daļa.

Optimālajā līmenī skolēns pārsvara nodarbojas patstāvīgi, aktīvi izmantojot jauno faktu zināšanu un lietojot nesen apgūtas formulas un algoritmus. Optimālajā līmenī attīstās prasmes kā definēšana (situāciju), skaidrošana (algoritmu), lietošana. Šajā līmenī mācību saturs tiek vispusīgi un plaši apgūts.

Augstākajā līmenī skolēni jau risina nestandarta uzdevumus, kuri prasa padziļināto mācību satura apguvi. Šeit vislabāk var attīstīt radošumu. Tiek attīstītas prasmes kā plānošana (problēmu risināšanas), analizēšana (situāciju/algoritmu), salīdzināšana (metožu), kritizēšana un izvērtēšana, interpretēšana (kādu problēmu uz citu situāciju). Mācību saturs šeit tiek apgūts padziļināti un paplašināti.

Darba mērķis ir paaugstināt mācīšanas efektivitāti tēmā „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika” ar jaunajiem, nestandarta uzdevumiem un uzskatāmiem risinājumiem.

Darba uzdevumi ir:

1. Iepazīties ar priekšmeta „Matemātika” mācību satura plānotām izmaiņām vidusskolā;
2. Iepazīties ar standarta uzdevumiem tematā „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika”;
3. Saplānot jauno mācību materiālu izveidi attiecībā pret izmainīto mācību standartu;
4. Izveidot jaunus, nestandarta uzdevumus, kas visi ir saistīti ar reālo dzīvi un daži – ar citām mācību nozarēm kā ķīmija, bioloģija un fizika (ja uzdevumi ir ņemti no vispāratzītu autoru grāmatām, tad pārliccināties, ka risinājums tajās ir uzrakstīts korekti);
5. Noformēt uzdevumus programmā *Microsoft Power Point* (ja nepieciešams, dažus uzdevumus atrisināt un noformēt palīgprogrammās (piem., uzdevums par korelāciju veidnē *Microsoft Excel*);

6. Izveidot teorijas bloku „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika” ar nepieciešamām formulām, pierādījumiem, grafikiem un uzdevumu piemēriem;

7. Izveidot darba lapas dažiem aplūkotajiem uzdevumiem;

8. Uzrakstīt secinājumus par darba izpildi un nozīmīgumu.

Piedāvātie uzdevumi ir izveidoti veidnē *Microsoft Power Point*, kuru skolotāji var izmantot savās nodarbībās. Uzdevumi ir noformēti ar skaistam attēliem un animācijām, dažos uzdevumos ir izveidoti matemātiskie modeļi. Katram uzdevumam ir risinājums, pie tam, to nevar redzēt uzreiz: katrs solis parādās pēc „peles klikšķa”, kas ļauj skolēniem nevis norakstīt visu risinājumu, bet domāt patstāvīgi. Dažos uzdevumos ir uzrakstīti tikai ieteikumi, kā tos risināt soli pa solim.

Viens liels uzdevums matemātiskajā statistikā ir piedāvāts gan veidnē, kur tas ir pildīts (*Microsoft Excel*), gan izskaidrots veidnē *Microsoft Power Point*, kur pa soļiem pastāstīts, kura funkcija ir jālieto, kam jāsanāk utt.

Vēl vienam uzdevumam (uzdevums varbūtību teorijā par Paskāla trijstūri) ir izveidots programmas kods, kas palīdz izrēķināt dažus Paskāla trijstūra koeficientus. Pats kods atrodas pielikumā.

Izveidotie uzdevumi jau ir sadalīti trīs sarežģītības līmeņos, kuri vienkāršības pēc tiek nosaukti, subjektīvi, par A, B, C līmeni, kur A – vispārīgais līmenis, B – optimālais līmenis, C – augstākais līmenis. Daži C līmeņa uzdevumi ir ņemti no tēmām, kurus, pārsvarā, apgūst augstskolā (piem., *Muavra-Laplasa teorēmas*), bet daži – vienkārši sarežģīti un grūti uztverami uzdevumi, kuros ir jālieto standarta skolas formulas. Protams, var gadīties, ka daži skolēni vai skolotāji uztvers piedāvātus uzdevumus savādākos līmeņos.

Daži uzdevumi ir ņemti no vispāratzīto autoru grāmatām, daži ir šī darba autores izveidotie uzdevumi. Lai parādītu skolēniem reālo saikni starp matemātiku un citām nozarēm, autore centās sagatavot uzdevumus „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika”, kas ir saistīti ar fiziku, ķīmiju, ģenētiku. Uzdevumus no *Microsoft Power Point* prezentācijas, kurus autore ir ņēmusi no pazīstamo autoru grāmatām, var apskatīt sekojošas mājas lapās: [1] [2] [3] [4] [7]

Teorija ir izveidota *Microsoft Word* dokumentā. Tajā ir aplūkots materiāls „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika”, t.i. formulas (daži – ar pierādījumiem); pēc katras formulas – uzdevumu piemērs ar risinājumu; diagrammas, grafiki, tabulas, apzīmējumi. Materiāls veidots tādēļ, lai skolēnam nav jāšķirsta grāmata un jāmeklē teorija, bet tā jāpaskatās tikai dažās *Microsoft Word* lapās.

Darba lapas ir izveidotas tikai dažām tēmām, tajā skaitā, kuram grūti izveidot uzskatāmās attēli (piem., „*Nepārtraukts gadījuma lielums*”). Uzdevumi darba lapās ir noformēti savādāk, nekā tie paši prezentācijā. Prezentācijā var parādīt visu risinājumu, bet darba lapās skolēnam ir jāraksta pareizās atbildes brīvās vietās. Visi soļi ir strukturēti, kas palīdz skolēnam „sabūvēt” pareizo risinājumu un beigās pierakstīt atbildi. Pašās darba lapās arī, vairākos gadījumos, ir attēli, shēmas, matemātiskie modeļi.

# 1. AKTUĀLO UN TOPOŠO MĀCĪBU STANDARTU SALĪDZINĀJUMS

Jaunais mācību standarts tika ieviests no 2020. līdz 2023. gadam un paredz dažas izmaiņas.

Šajā nodaļā autore apkopojusi īso salīdzinājumu starp tagadējo un turpmāko mācību standartu, lai parādītu šī darba aktualitāti.

Galvenā doma, uz kuras balstās motivācija uzlabot aktuālo mācību standartu, ir, īstenībā, ar Mariju Montessori līdzīgs ieskats uz mācīšanās procesu: censties nevis mācīt bērnus, bet palīdzēs viņiem patstāvīgi mācīties. Skolēniem - aktīvi iesaistīties mācību satura apgūvē, darīt, atklāt, eksperimentēt, skolotājiem - ļaut skolēniem pašiem tikt līdz atbildēm, nevis dod tās gatavas – to visu paredz jaunais mācību standarts.

Viens no būtiskiem pamatojumiem pilnveidot mācību saturu un pieeju, ir pārliecība, ka mūsdienas skolēnam labi padodas risināt problēmas, kas rodas pazīstamās situācijās, bet trūkst prasmju pieņemt lēmumus jaunos apstākļos [9]. Iespējams, viņam trūkst radošuma. Pašlaik mūsdienu bērniem nepieciešams rādīt vidi, kur viņš var labāk attīstīt tādas svarīgas prasmes kā darboties komandā, veidot sakarības starp teorētiski apgūto un reāli dzīvē pieredzēto, analizēt paveikto un izvirzīt mērķus nākamajiem darbiem [9].

Lai saprastu, kam ir jāpaliek mācību standartā, bet kas ir jāuzlabo, Latvijas skolotāji, augstskolu mācītspēki, izglītības jomas speciālisti ir veikuši vairākus pētījumus, analīzes. Analizējot mācību pieejamus materiālus, autore ir apkopojusi būtiskās atšķirības starp aktuālo un topošo mācību standartu [11] [12]:

*1.1. tabula.*

<b>Aktuālais mācību standarts</b>	<b>Topošais mācību standarts</b>
<b>Detalizēts, fragmentēts</b> katra priekšmetā	<b>Kompleksais</b> , kas apvieno zināšanas, prasmes, attieksmes
Sasniedzamie rezultāti – definēti <b>katrā priekšmetā</b>	Sasniedzamie rezultāti – <b>sadalīti septiņās integrētās jomās</b> : valodas, sociālajā, pilsoniskajā, kultūras izpratnes, dabaszinātnes, matemātikas, tehnoloģiju, kā arī veselības un fiziskās aktivitātes jomā
Otrā svešvaloda – no <b>6.</b> klases	Otrā svešvaloda – no <b>4.</b> klases
Pasaules vēsture mācīta <b>paralēli</b> ar Latvijas	Pasaules vēsture mācīta <b>kopā</b> ar Latvijas

vēsturi	vēsturi
Priekšmets „ <b>Mājturība</b> un tehnoloģijas”	Priekšmets „ <b>Dizains</b> un tehnoloģijas”
Sporta skaits nedēļā – <b>2</b> stundas	Sporta skaits nedēļā – <b>3</b> stundas
Vidējais ieteicamais stundu skaits <b>vienā</b> gadā.	Vidējais ieteicamais stundu skaits <b>trīs</b> gados.
Priekšmets „Sports”	Priekšmets „Sports <b>un veselība</b> ”
Jauns modulis - <i>Drāma</i> , kas ļaus skolēniem apgūt oratora un uzstāšanās prasmes	
Stundās – vairāk iekļaut tehnoloģiju izmantošanu	
Pamatskolā – jauns priekšmets – <i>Datorika</i> , kurā varēs attīstīt programmēšanas prasmes	
7. klasē – <i>Inženierzinātnes</i>	
Pamatskolā – mazāk priekšmetu skaits un vairāk laika dziļākai temata apguvei	
Vidusskolā – augstākā līmeņa izvēles kursi, kurus kārtos eksāmenus, lai iestāties augstskolā	

Vēl saturs būs papildināts ar tādām prasmēm, kas palīdzēs skolēnam iemācīties mācīties. Kā vienas no svarīgām prasmēm būs vairāk attīstīta kritiskā domāšana, problēmrisināšana, jaunrade, uzņēmējspēja, sadarbība, pilsoniskā līdzdalība, digitālās prasmes.

Kā bija minēts, mācību praktiskais materiāls būs veidots trīs grūtības līmeņos [8]. Dažās mājas lapās, piem., kā [www.siic.lu.lv](http://www.siic.lu.lv) ir izstrādāti metodiskie materiāli, kuri palīdz skolotājiem organizēt stundas, un tur var redzēt uzdevumus, kas ir sadalīti trīs grūtības pakāpēs. Tas nav tas pats, kas plānots ieviest par mācību satura apguvi trīs sarežģītības līmeņos, jo šie materiāli ir tikai palīgs stundas organizēšanai un nekādā veidā nav likums. Bet tas, kas plānots, ir Standarts jeb Valsts likums.

Jaunā satura organizēšana trīs grūtības pakāpēs dod dažas priekšrocības:

- 1) padziļina un vispārina pamatizglītībā apgūto;
- 2) ļauj skolēniem mācīties un praktizēties atbilstoši savām zināšanām un prasmēm;
- 3) dod iespēju skolēniem, kuri apguva pamatlīmeni un optimālo līmeni, mācīties dziļāk;
- 4) palīdz skolotājiem novērtēt skolēnu zināšanas un prasmes.

Balstoties uz rakstu „Izglītība mūsdienīgai lietpratībai: mācību satura un pieejas apraksts”, pamatlīmenī skolēns sistematizē un paplašina pamatskolā apgūtās matemātiskās un domāšanas prasmes, lietojot matemātiskos modeļus praktiskos, reālos kontekstos [9].

Optimālajā līmenī skolēns saskaras ar jaunām matemātikas problēmām, pilnveidojot domāšanas prasmes.

Augstākajā līmenī skolēns padziļina izpratni par matemātiskajiem modeļiem, saskaršoties ar grūtiem nestandarta uzdevumiem. Augstākajā līmenī skolēns attīsta attieksmes, zināšanas un

prasmes, kas nepieciešamas, lai turpinātu studijas tajās augstskolā, kurās jāapgūst arī augstākās matemātikas kurss.

Attēlā zemāk ir aplūkotas mācību jomas un priekšmeti trīs apguves līmeņos vispārējās vidējās izglītības pakāpē [9]:

Mācību joma	VIDUSSKOLA (pamatlīmenis)	VIDUSSKOLA (optimālais)	VIDUSSKOLA (augstākais)
Valodu*	Latviešu valoda un literatūra	Latviešu valoda un literatūra	Latviešu valoda padziļinātā līmenī (piemēram, radošā rakstšana; latviešu valoda un tehnoloģijas.)
	Svešvaloda 1	Svešvaloda 1	Svešvaloda 1, 2; CLIL; Akadēmiskā valoda
	Svešvaloda 2	Svešvaloda 2	
Sociālā un pilsoniskā	Sociālās zinības un vēsture (tiesības, politika, ekonomika, filozofija, reliģija, psiholoģija, vēsture)	Vēsture un humanitārās studijas (vēsture, filozofija, reliģija, psiholoģija)	Vēsture un humanitārās studijas (vēsture, filozofija, reliģija, psiholoģija)
		Vēsture un sociālās studijas (vēsture, politika, tiesības, filozofija)	Vēsture un sociālās studijas (vēsture, politika, tiesības, filozofija)
		Sociālās un ekonomikas studijas (ekonomika, politika, tiesības, ģeogrāfija)	Sociālās un ekonomikas studijas (ekonomika, politika, tiesības, ģeogrāfija)
Kultūras izpratnes un pašizpaušmes mākslā	Māksla (vizuālā māksla, mūzika, drāma)	Kultūras studijas un māksla (kultūras studijas un izvēle: mūzika, drāma, vizuālā māksla)	Kultūras studijas
	Kultūras studijas		
Dabaszinātņu	Fizika	Fizika	Fizika
	Ķīmija	Ķīmija	Ķīmija
	Bioloģija	Bioloģija	Bioloģija
	Ģeogrāfija		
	Dabaszinības		
Matemātikas	Matemātika	Matemātika	Matemātika, t. sk. matemātiskā analīze
Tehnoloģiju	Tehnoloģijas	Tehnoloģijas padziļinātā līmenī (piemēram, elektronika, robotika, inženierzinības, programmēšana u.c.)	Tehnoloģijas padziļinātā līmenī (piemēram, elektronika, robotika, inženierzinības, programmēšana u.c.)
Veselības un fiziskās aktivitātes**	Sports/veselība/drošība***	Sports/veselība/drošība	

### 1.1. attēls. Mācību jomas un priekšmeti trīs apguves līmeņos vispārējās vidējās izglītības pakāpē

Kā redzams, matemātikā, augstākajā līmenī, svars likts uz matemātisko analīzi.

Nākamajā tabulā tiks redzēta daļa no aptuvena plāna vidusskolas posmam par tēmu „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika” sadalīšanu trīs grūtības pakāpēs [10].

### 1.2. tabula.

Pamatlīmenis	Optimālais līmenis	Augstākais līmenis
1) Apkopo statistiskus datus un analizē tos, lietojot pamatskolā apgūtās zināšanas par datu kopas vidējiem lielumiem, kā arī datu	1) Lieto pamatskolā apgūtās zināšanas par varbūtību jaunās situācijās; nosaka statistisko un ģeometrisku varbūtību;	1) Skaidro, kas ir nesavienojami un neatkarīgi notikumi; aprēķina nesavienojamu notikumu summas un reizinājuma

kopas izkļiedes mēru kā korelāciju. Nosaka datu amplitūdu, standartnovirzi, korelācijas raksturlielumus.	2) Nosaka notikumu skaitu, lietojot kombinatoriskus spriedumus vai formulas.	varbūtību; 2) Saskata saistību starp kombinatoriskiem un algebriskiem modeļiem.
--	--	--

## 2. TEORIJA

### 2.1. Kombinatorikas pamatformulas

#### 2.1.1. Faktoriāla jēdziens

Faktoriāls ir visu naturālo skaitļu no 1 līdz  $n$  reizinājums. To izrēķina pēc formulas:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 \quad (1)$$

Piemērs: Izrēķināt  $5!$ .

Risinājums:  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Piemērs: Izrēķināt  $100!$ .

Risinājums: šeit ir jāizmanto Stīrlinga formula:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (2)$$

Doto izteiksmi pārveidosim pēc pakāpju īpašībām:

$$n! \approx (2\pi n)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Logaritmēsīm abas puses:

$$\ln(n!) \approx \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + n \cdot \ln(n) - n \cdot \ln(e)$$

Ievietosim mūsu skaitli 100, atcerojoties, ka  $\ln(e) = 1$ :

$$\ln(100!) \approx \frac{1}{2} \ln(2 \cdot 3,14 \cdot 100) + 100 \cdot \ln(100) - 100$$

Izrēķināsim labo pusi:

$$\ln(100!) \approx 363,319$$

Atcerojoties logaritmu īpašību

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

Pārveidosim  $\ln(100!)$  par decimāllogaritmu:

$$\log_{10} 100! = \frac{\ln(100!)}{\ln(10)} = \frac{363,319}{2,3026} = 157,969$$

Izrēķināsim aptuveno  $100!$  vērtību:

$$100! \approx 10^{157,969}$$

## 2.1.2. Permutācijas

Aprēķinot permutāciju skaitu, nosaka, cik veidos var pārkārtot kopas elementus, nemainot to skaitu.

Permutāciju skaitu apzīmē ar simbolu  $P_n$ , kur  $n$  - elementu skaits kopā.

$$P_n = n! \quad (3)$$

Ja daži elementi atkārtojas, tad permutāciju skaitu izrēķina ar formulu:

$$P_n(k_1; k_2; \dots; k_n) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} \quad (4)$$

Piemērs: Cik veidos var sakārtot uz vienas līnijas trīs augļus – apelsīnu, ābolu un bumbieru?

Risinājums: Izmantosim trešo formulu:

$$P_n = n!$$

$$P_3 = 3! = 6$$

Atbilde: 6 veidos.

Piemērs: Cik vārdus var izveidot, samainot burtus vārdā „matemātika”?

Risinājums: Tā kā burts „m” atkārtojas 2 reizes, burts „a” atkārtojas 2 reizes, burts „t” – 2 reizes, tad jāizmanto (4) formula:

$$P_{10}(2; 2; 2; 1; 1; 1; 1) = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453\,600$$

Atbilde: 453 600 vārdus.

### 2.1.3. Kombinācijas

Par kombinācijām no  $n$  elementiem pa  $m$  elementiem ( $m \leq n$ ) sauc nesakārtotu dotās kopas  $m$  elementu izlasi.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (5)$$

Kombinācijas ar atkārtojumiem:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m \quad (6)$$

Piemērs: Organiskajā molekulā ir 6 dažādas vietas, kur halogēna atomi (hlora, broma un joda) var pievienoties neatkarīgi viens no otra. Noteikt, cik veidos var pievienoties molekulai hlora atoms un broma atoms.

Risinājums:

Cl	Br				
----	----	--	--	--	--

$$C_6^1 \cdot C_5^1 = 6 \cdot 5 = 30$$

Atbilde: 30 veidos.

Piemērs: Skolas ēdnīcā ir iespējams iegādāties biežpienmaizītes, maizīti ar āboliem un maizīti ar ķiršiem. Cik veidos var iegādāties 5 maizītes?

Risinājums:

Novērosim, ka  $m > n$  jeb nopirkto maizīšu skaits ir lielāks par piedāvāto maizīšu grupu skaitu (tas nozīmē, ka nopirktais maizītes noteikti atkārtosies), tādēļ izmanto (6) formulu:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$$

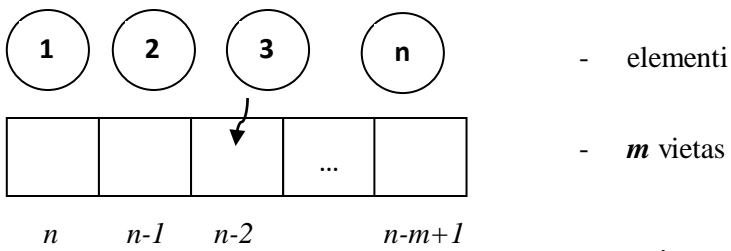
$$\bar{C}_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = 21$$

Atbilde: 21 veidos.

## 2.1.4. Variācijas

Par variāciju no  $n$  elementiem pa  $m$  elementiem ( $m \leq n$ ) sauc sakārtotu dotās  $n$  elementu kopas  $m$  elementu izlasi. Katras divas variācijas savstarpēji atšķiras vai nu ar pašiem elementiem, vai to secību.

Pieņemsim, ka ģenerālkopa satur  $n$  elementus, bet izlases apjoms ir  $m$ . Bez atkārtošānās [6]:  $m \leq n$

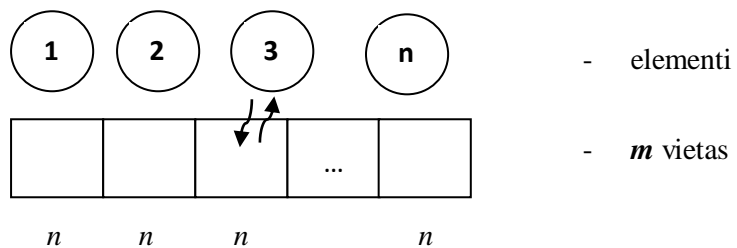


- elementi

-  $m$  vietas

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (7)$$

Ar atkārtošānās:



- elementi

-  $m$  vietas

$$\bar{A}_n^m = n^m \quad (8)$$

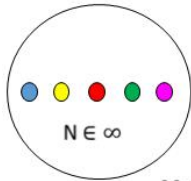
Piemērs: Ir 9 cipari, no 1 līdz 9. Cik veidos var sastādīt trīsciparu numuru?

Risinājums: Tā kā šeit ir svarīga secība, tad izmantosim (7) formulu:

$$A_9^3 = \frac{9!}{6!} = 504$$

Atbilde: 504 numuri.

Piemērs: Tiek aplūkota sistēma no  $N$  daļiņām, katra no kurām var atrasties  $k$  stāvokļos. Noteikt pilno stāvokļu skaitu, kuros sistēma var atrasties.



1. gadījums:

**Maksvela-Bolcmana sistēma.**

- Daļiņas – dažādas;
- Daļiņu skaits – neierobežots;
- Sakārtota izlase no  $N$  elementiem, kuri var atkārtoties;
- Formula :  $\bar{A}_n^m = n^m$
- Atbilde :  $\bar{A}_k^N = k^N$

## 2.2. Paskāla trijstūris

### Binomiālie koeficienti

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, 0 \leq m \leq n$$

Simetrijas kārtula:  $C_n^m = C_n^{n-m}$

Paskāla kārtula:  $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

Tiešām, ja  $0 < m < n + 1$ , tad

$$C_n^m + C_n^{m-1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = C_{n+1}^m$$

Izmantojot šo īpašību, binomiālos koeficientus var sakārtot **Paskāla trijstūrī**:

0										1
1									1	1
2								1	2	1
3							1	3	3	1
4						1	4	6	4	1
5					1	5	10	10	5	1
6				1	6	15	20	15	6	1
7			1	7	21	35	35	21	7	1
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	1

2.1. attēls. Paskāla trijstūris

$n$ -tās rindas  $m$ -tajā vietā:  $C_n^m, m = 0, 1, 2, \dots, n$ .

### 2.3. Klasiskās varbūtības formula

Ja mēģinājuma visi rezultāti ir vienādi iespējami, tad notikuma  $A$  varbūtību aprēķina:

$$P(A) = \frac{\text{labvēlīgo notikumu skaits}}{\text{visu iespējamo notikumu skaits}} = \frac{m}{n} \quad (9)$$

Piemērs: Ķīmijas laboratorijā ir 100 paraugi, no kuriem - 30 sāļi, 40 sārmi un 30 skābes. Uzrakstīt izteiksmi, kas atspoguļo varbūtību, ka izlasē no 10 paraugiem būs 3 sāļi, 4 sārmi un 3 skābes.

Risinājums:

- 1) Kombinācijas no 3 sāļiem:  $C_{30}^3$
- 2) Kombinācijas no 4 sārmiem:  $C_{40}^4$
- 3) Kombinācijas no 3 skābēm:  $C_{30}^3$
- 4) Kombinācijas no 10 jebkuriem paraugiem:  $C_{100}^{10}$
- 5) Varbūtība, ka starp 10 paraugiem būs 3 sāļi, 4 sārmi un 3 skābes:  $P = \frac{C_{30}^3 \cdot C_{40}^4 \cdot C_{30}^3}{C_{100}^{10}}$

### 2.4. Ģeometriskās varbūtības formula

Pieņemsim, ka plaknē dotas figūras  $D$  un  $d$ , pie kam, figūra  $D$  ietver sevī figūru  $d$ . Uz labu laimi izvēlas punktu no figūras  $D$ . Varbūtība, ka izvēlētais punkts piederēs arī figūrai  $d$ , ir:

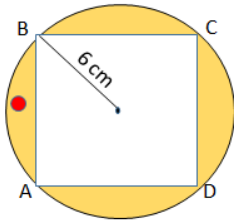
$$P(A) = \frac{\text{mes } d}{\text{mes } D}, \quad \text{kur} \quad (10)$$

$\text{mes } d$  ir iekšējās figūras laukums;

$\text{mes } D$  ir ārējās figūras laukums.

Piemērs: Dots regulārs četrstūris, kas ievilkts riņķa līnijā. Riņķa līnijas rādiuss ir 6 cm. Ar aizvērtām acīm atliek punktu zīmējumā. Kāda varbūtība, ka atzīmētais punkts neatrodas četrstūrī?

Risinājums:



- 1) Klasiskā varbūtības formula:  $P = \frac{m}{n}$
- 2) Atradīsim visu iespējamo laukumu (riņķa līnijas laukums):  
 $mes D = S_{R.l.} = \pi r^2 = 36\pi \text{ cm}^2$
- 3) Atradīsim labvēlīgo laukumu (laukums starp riņķa līniju un kvadrātu):  
 $mes d = S_{starp.} = S_{R.l.} - S_{kvadr.}$
- 4) Izmanto laukuma formulu rombam (kvadrāts – romba speciālgad-s):  
 $S_{rombam} = S_{kvadr.} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$

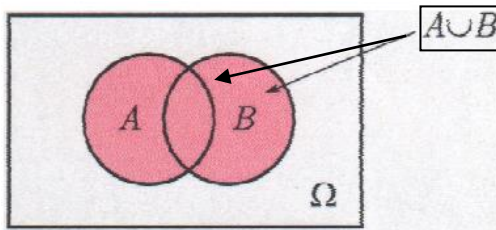
$$P = \frac{mes d}{mes D} = \frac{S_{starp.}}{S_{R.l.}} = \frac{36\pi - 72}{36\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Atbilde:  $P = \frac{\pi - 2}{\pi}$

## 2.5. Notikumu algebra

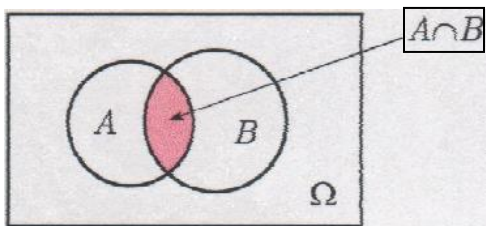
Pieņemsim, ka A – notikums „būs lietus”; B – notikums „būs sniegs”.

### 2.5.1. Apvienojums



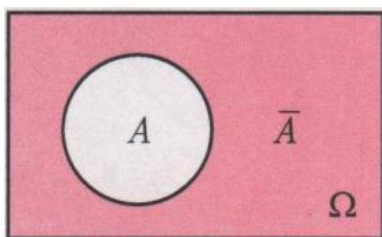
*Būs lietus vai sniegs*

### 2.5.2. Šķēlums



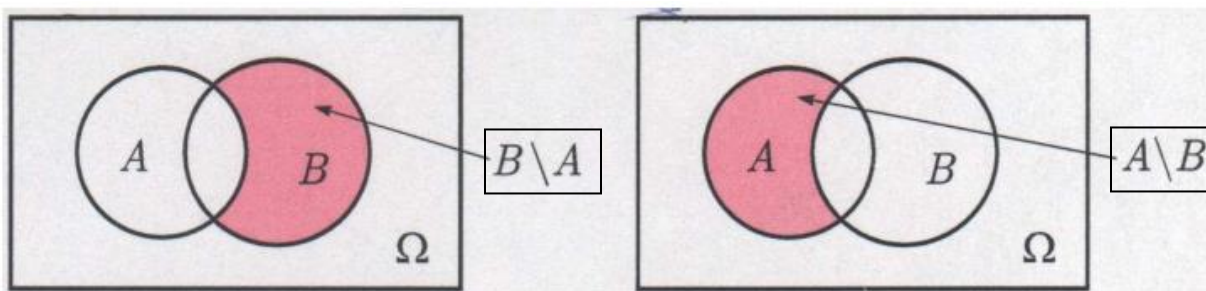
*Būs lietus un sniegs*

### 2.5.3. Pretējais notikums



*Būs ne lietus (sniegs, vējš utt.)*

## 2.5.4. Notikumu starpība



*Būs sniegs*

*Būs lietus*

## 2.6. Varbūtības saskaitīšanas un reizināšanas likums

### 2.6.1. Saskaitīšanas likums

Divu nesavienojamu notikumu  $A$  un  $B$  summas varbūtība vienāda ar šo notikumu varbūtību summu:

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Vispārinot,  $n$  nesavienojamu notikumu  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  summas varbūtība ir vienāda ar šo notikumu varbūtību summu:

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

Pierādījums. Lietosim varbūtību klasisko definīciju. Pieņemsim, ka  $n$  ir visu vienlīdz iespējamo notikumu skaits,  $m_1$  ir notikumam  $A$  labvēlīgo notikumu skaits,  $m_2$  ir notikumam  $B$  labvēlīgo notikumu skaits. Tad:

$$P(A + B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B). \quad \blacksquare$$

Piemērs: Met spēļu kauliņu, kāda varbūtība, ka uzkrītīs 3 vai 5?

Risinājums: Šie notikumi ir nesavienojami, jo nevar realizēties vienlaicīgi.

$$\text{Tātad, } P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Atbilde: Varbūtība, ka uzkritīs 3 vai 5 ir vienāda ar  $\frac{1}{3}$ .

## 2.6.2. Reizināšanas likums

Divu neatkarīgu notikumu  $A$  un  $B$  reizinājuma varbūtība ir vienāda ar šo notikumu varbūtību reizinājumu:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Pierādījums.

$n_1$  – visu iespējamo gadījumu skaits, kuros  $A$  var vai nu notikt, vai nu nenotikt,

$m_1$  – notikumam  $A$  labvēlīgo notikumu skaits ( $m_1 < n_1$ ),

$n_2$  – visu iespējamo gadījumu skaits, kuros  $B$  var vai nu notikt, vai nu nenotikt,

$m_2$  – notikumam  $B$  labvēlīgo notikumu skaits ( $m_2 < n_1$ ).

Visu to gadījumu skaits, kuros  $A$  un  $B$  var vai nu notikt, vai nu nenotikt, ir  $n_1 \cdot n_2$ . No šī skaita  $m_1 \cdot m_2$  gadījumi labvēlīgi notikumam  $A \cdot B$ . Tad notikumam  $A \cdot B$  varbūtība ir vienāda ar:

$$P(A \cdot B) = \frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} = P(A) \cdot P(B) \quad \blacksquare$$

Piemērs: Piemērs: Urnā 10 zilas, 15 zaļas un 5 sarkanas lodītes. Uz labu laimi ņem 2 lodītes. Kāda varbūtība, ka lodītes būs zila un zaļa?

Risinājums:

$$\text{Notikums A – izvilkt zilu lodīti, } P(A) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Notikums B – izvilkt zaļu lodīti, } P(B) = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cdot B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$$

Atbilde: Varbūtība, ka izvilktās lodītes ir zila un zaļa ir  $\frac{3}{50}$ .

## 2.7. Varbūtība notikt vismaz vienam no $n$ neatkarīgiem notikumiem

Varbūtību  $P(A)$ , ka notiks vismaz viens no neatkarīgiem  $n$  notikumiem  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , aprēķina no 1 atņemot visu pretējo notikumu varbūtību reizinājumu:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (11)$$

Piemērs: 2 šāvēji šauj mērķī. Pirmā šāvēja trāpījuma (notikums  $A$ ) varbūtība  $P(A) = 0,7$ , otrā (notikums  $B$ ) –  $P(B) = 0,6$ . Kāda varbūtība, ka, katram šāvējam izdarot pa 1 šāvienam mērķī būs vismaz viens trāpījums?

Risinājums:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,6 = 0,4$$

$$P(T) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0,3 \cdot 0,4 = 0,88$$

Atbilde: Varbūtība, ka, katram šāvējam izdarot pa 1 šāvienam mērķī būs vismaz viens trāpījums ir 0,88.

## 2.8. Pretējā notikuma varbūtība

Pretēju notikumu varbūtību summa ir 1:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (12)$$

Piemērs: Groziņā ir 100 sanumurētas bumbiņas. Kāda varbūtība, ka neizņems bumbiņu ar numuru 6?

Risinājums: Notikums  $A$  - izņem bumbiņu ar numuru 6. Notikums  $\bar{A}$  - izņemtai bumbiņai nav numurs 6.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

Atbilde: Varbūtība, ka uzkrītīs 3 vai 5 ir vienāda ar  $\frac{99}{100}$ .

## 2.9. Pilnās varbūtības formula

Pieņemsim, ka gadījuma notikums  $A$  var iestāties tikai tad, ja iestājas kāds no notikumiem  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , kuri veido pilnu notikumu grupu. Notikuma  $A$  varbūtību  $P(A)$  sauc par pilno varbūtību un aprēķina šādi:

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A) \cdot P(B_n) \quad (13)$$

Pierādījums: Tā kā hipotēzes  $B_1, B_2, \dots, B_n$  veido pilno grupu, tad notikums  $A$  var iestāties tikai kombinācijā ar kādu no hipotēzēm:

$$A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots + A \cdot B_n$$

Tā kā hipotēzes ir nesavienojamas, tad kombinācijas  $A = A \cdot B_1 + A \cdot B_2 + \dots + A \cdot B_n$  ir arī nesavienojamas. Pielietojot saskaitīšanas likumu, iegūst:

$$P(A) = P(A \cdot B_1) + P(A \cdot B_2) + \dots + P(A \cdot B_n)$$

Pielietojot reizināšanas likumu, iegūst:

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + \dots + P_{B_n}(A) \cdot P(B_n) \blacksquare$$

Pieņemsim, ka notikums  $A$  ir jau iestājies. Tad notikuma  $B_i$  varbūtību, ja notikums  $A$  ir iestājies, aprēķina pēc Beijesa formulas:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(A)} \quad (14)$$

Piemērs: Zirgs A-Marants ar numuru 1 piedalās sacensībās. No visām sacensībām, kur piedalās zirgs, 40% aizņem reģionālas sacensības, 35% - valsts, 25% - pasaules sacensības. Varbūtība, ka zirgs zaudēs reģionālajās sacensībās ir 0,04, valsts - 0,06, pasaules - 0,03. Avīzē tika rakstīts apkopojums par šī zirga rezultātiem gada garumā, kur bija viens zaudējums. Atrast varbūtību, ka šis zaudējums bija a) reģionālajās sacensībās, b) valsts sacensībās, c) pasaules sacensībās.

### Risinājums:

Varbūtība, ka zirgs piedalīsies:

- reģionālajās sacensībās:  $P(B_1) = 0,4$
- valsts sacensībās:  $P(B_2) = 0,35$
- pasaules sacensībās:  $P(B_3) = 0,25$

Varbūtība, ka zirgs zaudēs:

- reģionālajās sacensībās:  $P_{B_1}(A) = 0,04$
- valsts sacensībās:  $P_{B_2}(A) = 0,06$
- pasaules sacensībās:  $P_{B_3}(A) = 0,03$

Varbūtība, ka zirgs pieļaus kļūdu:

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = 0,0445.$$

## 2.10. Bernulli formula

Pieņemsim, ka notiek  $n$  neatkarīgi izmēģinājumi. Katrā no tiem var iestāties vai neiestāties notikums  $A$  ar vienu un to pašu varbūtību  $P(A) = p$  un pretējā notikuma varbūtību  $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ . Varbūtību  $P_n(m)$ , ka  $n$  izmēģinājumos notikums  $A$  iestāsies  $m$  reizes, aprēķina ar Bernulli formulu:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \quad (15)$$

Īpašie gadījumi:

- Ja  $m = n$ , t.i. labvēlīgo notikumu skaits ir vienāds ar kopējo notikumu skaitu:

$$P_n(n) = p^n$$

- Ja  $m = 0$ , t.i. labvēlīgo notikumu skaits ir vienāds ar nulli:

$$P_n(0) = q^n$$

- Ja  $m = 1$ , t.i. labvēlīgo notikumu skaits ir vienāds ar viens:

$$P_n(1) = n \cdot p \cdot q^{n-1}$$

Piemērs: Tiek pārbaudīts jauns medikaments – ārstē 10 slimas pelītes. Varbūtība, ka tiks iegūts pozitīvs rezultāts ir 0,8. Kāda varbūtība, ka vismaz 7 pelītes būs izārstētas?

Risinājums:

$$1) p = 0,8 \quad q = 0,2$$

$$2) P_{10}(k \geq 7) = P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = C_{10}^7 \cdot p^7 \cdot q^3 + C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot q^2 + C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1 + C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot q^0 = 0,879$$

$$\text{Atbilde: } P_{10}(k \geq 7) = 0,879.$$

## 2.11. Muavra-Laplasa lokālā teorēma

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ kur} \quad (16)$$

$\varphi(x)$  – Gausa funkcija;

$n$  – visu elementu/notikumu skaits kopā;

$k$  - labvēlīgo elementu/notikumu skaits kopā;

$p$  – labvēlīgā notikuma varbūtība;

$q$  – pretējā notikuma varbūtība.

Piebilde: Ja  $n$  ir ļoti liels, tad Bernulli formulu nav racionāli izmantot, jo tad ir jāreķina kombinācijas no lieliem skaitļiem. Tādēļ sanāk neprecizitāte. Laplasa lokālā teorēma palīdz aprēķināt tieši  $k$  labvēlīgo notikumu skaitu. Jo lielāks  $n$ , jo precīzākā atbilde.

## 2.11.1. Gausa funkcijas vērtības

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3980	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1845	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	989	973	957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0033	0024	0017	0012	0009	0006	0004	0003	0002
4,0	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

2.2. attēls. Funkcijas  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  (Gausa funkcijas) vērtības

Piemērs: Varbūtība trāpīt mērķī, izdarot šāvienu vienu reizi, ir 0,5. Atrast varbūtību trāpīt mērķī tieši 50 reizes, ja tika izdarīti 100 šāvienu?

Risinājums:

1)  $n = 100$     $p = 0,5$     $q = 0,5$     $k = 50$

2)  $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right)$

$$3) P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi\left(\frac{50 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) \approx 0,0798$$

Atbilde: Varbūtība trāpīt mērķī tieši 50 reizes, ja tika izdarīti 100 šāvienu, ir 0,0798.

## 2.12. Muavra-Laplasi integrālā teorēma

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ kur} \quad (17)$$

$\Phi(x)$  – Laplasi funkcija;

$n$  – visu elementu/notikumu skaits kopā;

$k_1; k_2$  – robežas;

$p$  – labvēlīgā notikuma varbūtība;

$q$  – pretējā notikuma varbūtība.

Piebilde: Šī teorēma ir līdzīga lokālai teorēmai, tikai šeit vajadzēs atrast labvēlīgo notikumu intervālu (intervālu galapunkti ir, attiecīgi,  $k_1$  un  $k_2$ ).

Piemērs: Ir zināms, ka vidēji 5 % studentu nēsā brilles. Kāda varbūtība, ka starp 200 studentiem izrādīsies ne mazāk kā 10 %, kas nēsā brilles?

Laplasi integrāla teorēma:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ kur } \Phi - \text{Laplasi funkcija.}$$

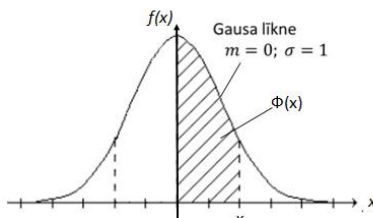
$$n = 200 \quad p = 0,05 \quad q = 0,95 \quad k_1 = 10\% = 20 \text{ stud.} \quad k_2 = 100\% = 200 \text{ stud.}$$

$$P_{200}(20; 200) \approx \Phi\left(\frac{200 - 200 \cdot 0,05}{\sqrt{200 \cdot 0,05 \cdot 0,95}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 200 \cdot 0,05}{\sqrt{200 \cdot 0,05 \cdot 0,95}}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(61,7) - \Phi(3,25) \approx 0,5 - 0,49942 \approx 0,00058.$$

Atbilde: varbūtība, ka starp 200 studentiem izrādīsies ne mazāk kā 10 %, kas nes brilles ir 0,00058.

### 2.12.1. Muavra-Laplasi funkcijas grafiks



2.3. attēls. Muavra-Laplasi funkcijas grafiks

## 2.12.2. Muavra-Laplasa funkcijas vērtības

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.	0.	0.31	0.12172	0.62	0.23237	0.93	0.32381	1.24	0.39251
0.01	0.00399	0.32	0.12552	0.63	0.23565	0.94	0.32639	1.25	0.39435
0.02	0.00798	0.33	0.1293	0.64	0.23891	0.95	0.32894	1.26	0.39617
0.03	0.01197	0.34	0.13307	0.65	0.24215	0.96	0.33147	1.27	0.39796
0.04	0.01595	0.35	0.13683	0.66	0.24537	0.97	0.33398	1.28	0.39973
0.05	0.01994	0.36	0.14058	0.67	0.24857	0.98	0.33646	1.29	0.40147
0.06	0.02392	0.37	0.14431	0.68	0.25175	0.99	0.33891	1.3	0.4032
0.07	0.0279	0.38	0.14803	0.69	0.2549	1.	0.34134	1.31	0.4049
0.08	0.03188	0.39	0.15173	0.7	0.25804	1.01	0.34375	1.32	0.40658
0.09	0.03586	0.4	0.15542	0.71	0.26115	1.02	0.34614	1.33	0.40824
0.1	0.03983	0.41	0.1591	0.72	0.26424	1.03	0.34849	1.34	0.40988
0.11	0.0438	0.42	0.16276	0.73	0.2673	1.04	0.35083	1.35	0.41149
0.12	0.04776	0.43	0.1664	0.74	0.27035	1.05	0.35314	1.36	0.41309
0.13	0.05172	0.44	0.17003	0.75	0.27337	1.06	0.35543	1.37	0.41466
0.14	0.05567	0.45	0.17364	0.76	0.27637	1.07	0.35769	1.38	0.41621
0.15	0.05962	0.46	0.17724	0.77	0.27935	1.08	0.35993	1.39	0.41774
0.16	0.06356	0.47	0.18082	0.78	0.2823	1.09	0.36214	1.4	0.41924
0.17	0.06749	0.48	0.18439	0.79	0.28524	1.1	0.36433	1.41	0.42073
0.18	0.07142	0.49	0.18793	0.8	0.28814	1.11	0.3665	1.42	0.4222
0.19	0.07535	0.5	0.19146	0.81	0.29103	1.12	0.36864	1.43	0.42364
0.2	0.07926	0.51	0.19497	0.82	0.29389	1.13	0.37076	1.44	0.42507
0.21	0.08317	0.52	0.19847	0.83	0.29673	1.14	0.37286	1.45	0.42647
0.22	0.08706	0.53	0.20194	0.84	0.29955	1.15	0.37493	1.46	0.42785
0.23	0.09095	0.54	0.2054	0.85	0.30234	1.16	0.37698	1.47	0.42922
0.24	0.09483	0.55	0.20884	0.86	0.30511	1.17	0.379	1.48	0.43056
0.25	0.09871	0.56	0.21226	0.87	0.30785	1.18	0.381	1.49	0.43189
0.26	0.10257	0.57	0.21566	0.88	0.31057	1.19	0.38298	1.5	0.43319
0.27	0.10642	0.58	0.21904	0.89	0.31327	1.2	0.38493	1.51	0.43448
0.28	0.11026	0.59	0.2224	0.9	0.31594	1.21	0.38686	1.52	0.43574
0.29	0.11409	0.6	0.22575	0.91	0.31859	1.22	0.38877	1.53	0.43699
0.3	0.11791	0.61	0.22907	0.92	0.32121	1.23	0.39065	1.54	0.43822

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1.55	0.43943	1.76	0.4608	1.97	0.47558	2.36	0.49086	2.78	0.49728
1.56	0.44062	1.77	0.46164	1.98	0.47615	2.38	0.49134	2.8	0.49744
1.57	0.44179	1.78	0.46246	1.99	0.4767	2.4	0.4918	2.82	0.4976
1.58	0.44295	1.79	0.46327	2.	0.47725	2.42	0.49224	2.84	0.49774
1.59	0.44408	1.8	0.46407	2.02	0.47831	2.44	0.49266	2.86	0.49788
1.6	0.4452	1.81	0.46485	2.04	0.47932	2.46	0.49305	2.88	0.49801
1.61	0.4463	1.82	0.46562	2.06	0.4803	2.48	0.49343	2.9	0.49813
1.62	0.44738	1.83	0.46638	2.08	0.48124	2.5	0.49379	2.92	0.49825
1.63	0.44845	1.84	0.46712	2.1	0.48214	2.52	0.49413	2.94	0.49836
1.64	0.4495	1.85	0.46784	2.12	0.483	2.54	0.49446	2.96	0.49846
1.65	0.45053	1.86	0.46856	2.14	0.48382	2.56	0.49477	2.98	0.49856
1.66	0.45154	1.87	0.46926	2.16	0.48461	2.58	0.49506	3.	0.49865
1.67	0.45254	1.88	0.46995	2.18	0.48537	2.6	0.49534	3.2	0.49931
1.68	0.45352	1.89	0.47062	2.2	0.4861	2.62	0.4956	3.4	0.49966
1.69	0.45449	1.9	0.47128	2.22	0.48679	2.64	0.49585	3.6	0.49984
1.7	0.45543	1.91	0.47193	2.24	0.48745	2.66	0.49609	3.8	0.49993
1.71	0.45637	1.92	0.47257	2.26	0.48809	2.68	0.49632	4.	0.49997
1.72	0.45728	1.93	0.4732	2.28	0.4887	2.7	0.49653	4.5	0.5
1.73	0.45818	1.94	0.47381	2.3	0.48928	2.72	0.49674	5.	0.5
1.74	0.45907	1.95	0.47441	2.32	0.48983	2.74	0.49693	5.5	0.5
1.75	0.45994	1.96	0.475	2.34	0.49036	2.76	0.49711	6.	0.5

## 2.4. attēls. Muavra-Laplasa funkcijas vērtības

## 2.13. Puasona formula

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ kur} \quad (18)$$

$n$  – visu elementu/notikumu skaits kopā;

$k$  - labvēlīgo elementu/notikumu skaits kopā;

$\lambda = np$ .

Piebilde: Šī teorēma ir izmantojama, ja  $n$  ir ļoti liels, bet  $p$  – ļoti mazs.

Piemērs: Mašīna dienā izgatavo 10 000 detaļas. Varbūtība, ka detaļa būs brāķēta, ir 0,0002.

Atrast varbūtību, ka dienā būs saražotas 5 brāķētas detaļas.

Risinājums:

$$n = 10\,000 \quad p = 0,0002 \quad q = 0,998 \quad k = 5$$

$$P_{10\,000}(5) \approx \frac{2^5}{5!} e^{-2} = 0,036$$

Atbilde: Varbūtība, ka dienā būs saražotas 5 brāķētas detaļas ir 0,036.

## 2.14. Diskrēts gadījuma lielums

- ✓ Diskrētam gadījuma lielumam matemātiskās cerības formula:

$$M(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n \quad (19)$$

- ✓ Diskrētam gadījuma lielumam dispersijas formula:

$$D(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - M(x))^2 \cdot p_k = M(x^2) - (M(x))^2 \quad (20)$$

Piemērs: Aprēķināt matemātisko cerību un dispersiju diskrētam gadījuma lielumam, ja dots sadalījuma likums::

$x_i$	-2	1	4	5
$p_i$	0,1	0,3	0,2	?

Risinājums:

- 1) Atradīsim pēdējo varbūtību:

$$p_5 = 1 - 0,1 - 0,3 - 0,2 = 0,4$$

- 2) Atradīsim  $M(x)$ :

- Izmantosim formulu nr. (19):

$$M(x) = -2 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,4 = 2,9$$

- 3) Atradīsim  $D(x)$ :

- Izmantosim formulu nr. (20):

$$M(x^2) = -2^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,4 = 13,9$$

$$D(x) = 13,9 - 2,9^2 = 5,49$$

Atbilde:  $p_5 = 0,4$ ;  $M(x) = 2,9$ ;  $D(x) = 5,49$ .

## 2.15. Nepārtraukts gadījuma lielums

- ✓ Nepārtrauktam gadījuma lielumam matemātiskās cerības formula:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx \quad (21)$$

✓ Nepārtrauktam gadījuma lielumam dispersijas formula:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2 \quad (22)$$

➤ Var izmantot likumu, ka integrālis no blīvuma funkcijas robežās no  $-\infty$  līdz  $\infty$  ir vienāds ar 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (23)$$

➤ Sadalījuma funkcijas formula:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \quad (24)$$

Piemērs: Nepārtraukts gadījuma lielums uzdots ar varbūtību sadalījuma funkciju:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x < 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + 1), & \text{ja } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{ja } x > 2 \end{cases}$$

Atrast  $M(x)$  un  $D(x)$ .

1) Atradīsim  $M(x)$ :

➤ Izmantosim formulu nr. (21):

$$M(x) = \frac{1}{10} \int_0^2 x \cdot (3x^2 + 1) dx = \frac{1}{10} \int_0^2 (3x^3 + x) dx = \frac{1}{10} \left( \frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \left( \frac{48}{4} + \frac{4}{2} \right) = \frac{7}{5}.$$

2) Atradīsim  $D(x)$ :

➤ Izmantosim formulu nr. (22):

$$D(x) = \frac{1}{10} \int_0^2 x^2 \cdot (3x^2 + 1) dx - \left( \frac{7}{5} \right)^2 ;$$

$$* \int_0^2 x^2 \cdot (3x^2 + 1) dx = \int_0^2 (3x^4 + x^2) dx = \left( \frac{3x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{3 \cdot 32}{5} + \frac{8}{3} = \frac{328}{15}$$

$$D(x) = \frac{1}{10} \cdot \frac{328}{15} - \left( \frac{7}{5} \right)^2 = \frac{17}{75} \approx 0,23$$

## 2.16. Korelācija un regresija

- Korelācijas koeficienta formula:

$$r_{x,y} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n} \quad (25)$$

- Regresijas koeficienta formula:

$$R_{y/x} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2} \quad (26)$$

### 3. DARBA LAPAS UN PREZENTĀCIJA

Šajā nodaļā ir piedāvātas darba lapas un uzdevumi tēmā „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika”. Uzdevumi ir attēloti no *Microsoft Power Point* prezentācijas.

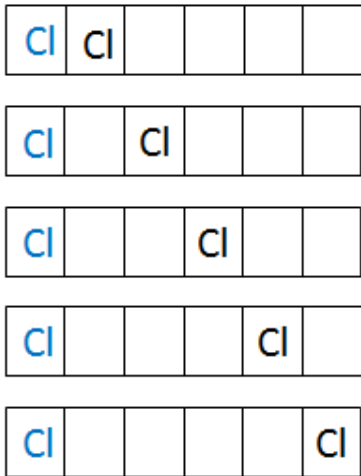
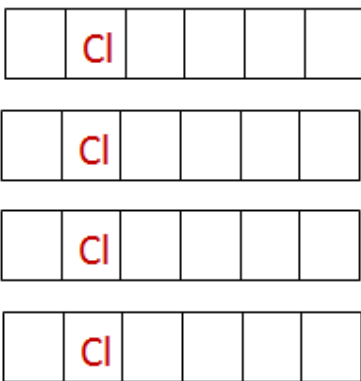
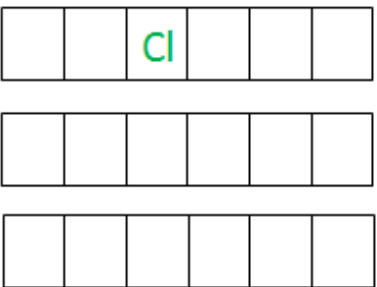
Katras darba lapas sākumā ir uzrakstīta tēma, no kuras būs piedāvātais materiāls un grūtības līmenis (pēc autores viedokļa). Darba lapās katrs uzdevums ir izveidots tā, lai skolēns pats „būvētu” loģisko un pakāpenisko risinājumu. Dažos uzdevumos ir izpildīts pirmais solis, lai skolēnam būtu paraugs. Katrā darba lapā uzreiz ir uzrakstītas formulas, kuras ir jāizmanto.

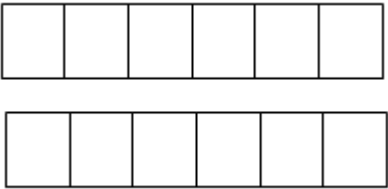

Uzdevumi no prezentācijas arī ir sadalīti trīs grūtības līmeņos pēc autores viedokļa. Protams, skolotāji un skolēni var uztvert piedāvātus uzdevumus atbilstoši citiem līmeņiem. Katrā uzdevumā ir risinājums, kas pašā prezentācijā parādās pa soļiem, ar matemātiskiem modeļiem un animācijām.

### 3.1. Pirmā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (A līmenis)

Organiskajā molekulā ir 6 dažādas vietas, kur halogēna atomi (hlora, broma un joda) var pievienoties neatkarīgi viens no otra. Noteikt, cik veidos var pievienoties molekulai: a) 2 hlora atomi; b) hlora atoms un broma atoms; c) 4 hlora atomi, broma atoms un joda atoms.

a) Noskaidrosim visus iespējamus gadījumus, kur var atrasties 2 hlora atomi:

<p>Izveidotās molekulas 1. veids. Šajā gadījumā viens no hlora atomiem ir pirmajā vietā, bet otrs hlora atoms – attiecīgi otrajā, trešajā, ceturtajā, piektajā un sestajā vietā.</p>	
<p>Izveidotās molekulas 2. veids. Šajā gadījumā viens no hlora atomiem ir otrajā vietā, bet otrs hlora atoms – attiecīgi ...</p>	
<p>Izveidotās molekulas 3. veids.</p>	

Izveidotās molekulas 4. veids.	
Izveidotās molekulas 5. veids.	
Saskaitīsim iegūto kombināciju skaitu un pārbaudīsim to ar formulu:	Cik sanāca kombinācijas: _____ $C =$

b) Šo un nākamo gadījumu rēķināsim tikai ar formulu:

$$C \cdot C =$$

c)

$$C \cdot C \cdot C =$$

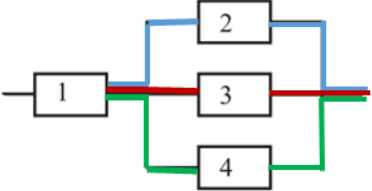
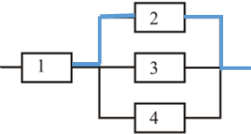
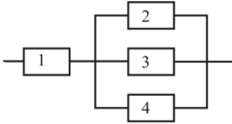
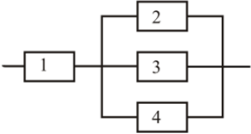
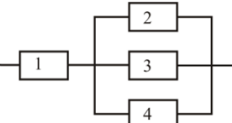
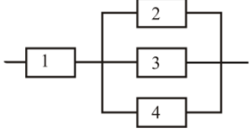
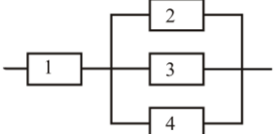
Atbilde uzdevumam:

- 2 hlora atomi var pievienoties molekulai \_\_\_\_ veidos;
- hlora atoms un broma atoms var pievienoties molekulai \_\_\_\_ veidos;
- 4 hlora atomi, broma atoms un joda atoms var pievienoties molekulai \_\_\_\_ veidos.

### 3.2. Otrā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (A līmenis)

Ķēdē ir iekļauti 4 elementi. Darbības laikā jebkurš no elementiem var tikt salauzts. Uzrakstīt notikumu A {ķēde strādā} katram elementam.

Ar trim krasām atzīmēsim uz shēmas visus iespējamus gadījumus, kad ķēde strādās un paralēli uzrakstīsim (arī ar dažādām krasām), kam ir jāizpildās, lai notikums A {ķēde strādā} īstenotos.

<p>Pirmajā gadījumā, kā piemērs, uzzīmēta shēma, kad strādā visi četri elementi. Šajā gadījumā ķēde strādās, ja strādās pirmais elements un kāds no elementiem 2., 3. vai 4. Apzīmēsim notikumus <math>B_i</math> {i-tais elements strādā}. Tad:</p> $A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 \cdot B_4$	
	
	
$A = B_1 \cdot B_4$	
	
$A = B_1 \cdot B_2 \cdot B_4$	
	

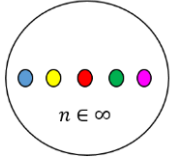
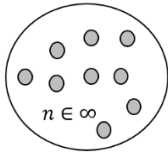
### 3.3. Trešā darba lapa. Atkārtojums par kombinatoriku (C līmenis)

#### 1. uzdevums

Tiek aplūkota sistēma no  $N$  daļiņām, katra no kurām var atrasties  $k$  stāvokļos. Noteikt pilno stāvokļu skaitu, kuros sistēma var atrasties.

Risinājums:

1) Izšķirsim divus gadījumus:

<i>Maksvela-Bolcmana sistēma</i>	<i>Boze-Einšteina sistēma</i>
	
Daļiņas (pasvītro vajadzīgo): a) dažādas; b) neatšķiramas.	Daļiņas: a) dažādas; b) neatšķiramas.
Daļiņu skaits: a) ierobežots; b) neierobežots.	Daļiņu skaits: a) ierobežots; b) neierobežots.
<u>Sakārtota</u> izlase no $N$ elementiem, kuri var atkārtoties.	<u>Nesakārtota</u> izlase no $N$ elementiem, kuri var atkārtoties.
Formula : $\bar{A}_n^m = n^m$	Formula : $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$
Atbilde : $\bar{A} =$	Atbilde : $\bar{C} = C$

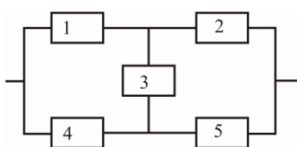
#### 2. uzdevums

Ķēdē ir iekļauti 5 elementi, katrs no kuriem var tikt salauzts darbības laikā. Tiek aplūkoti notikumi, kad divi  $i$ -tie elementi nestrādā. Uzrakstīt notikumu  $A$  {ķēde nestrādā}.

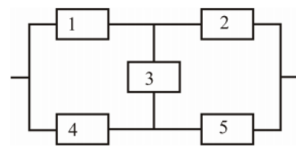
Risinājums:

1) **Ķēde nestrādās, kad:** \_\_-s un \_\_-s elements nestrādā VAI \_\_-s un \_\_-s elements nestrādā.

2) Abos gadījumos nosvītro elementus, kuri nestrādā un apakšā uzraksti notikumu  $A$  {ķēde nestrādā}, nestrādājošus elementus uzrakstot ar svītru augšā!



$$A_1 = \bar{B}_1 \cdot B_2 \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots$$



$$A_2 = \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots$$

### 3.4. Ceturtā darba lapa. Bernulli formula (B un C līmenis attiecīgi)

#### 1. uzdevums

Divi līdzvērtīgi pretinieki spēlē šahu. Kas iespējamākais – uzvarēt divas partijas no četrām vai trīs no sešām? (neizšķirtas partijas neskaitās)

Risinājums:

- 4) Atradīsim varbūtību uzvarēt divas partijas no četrām:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot p^2 \cdot q^2 =$$

- 5) Atradīsim varbūtību uzvarēt trīs partijas no sešām:

$$P(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot p^3 \cdot q^3 =$$

Atbilde: sanāk, ka uzvarēt divas partijas no četrām ir \_\_\_\_\_ varbūtība, nekā trīs partijas no sešām.

#### 2. uzdevums

Divi līdzvērtīgi pretinieki spēlē šahu. Kāda varbūtība uzvarēt vienu partiju no vienas? Vienu no divām? 50 no 100? Vai rezultāti atšķirsies? (neizšķirtas partijas neskaitās)

- 2) Atradīsim varbūtību uzvarēt vienu partiju no vienas:

$$P_1(1) = C_1^1 \cdot p^1 \cdot q^{1-1} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot p \cdot q =$$

- 3) Atradīsim varbūtību uzvarēt vienu partiju no divām:

$$P(1) = C_2^1 \cdot p \cdot q = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot p \cdot q =$$

- 4) Atradīsim varbūtību uzvarēt 50 partijas no 100:

$$P(50) = C_{100}^{50} \cdot p^{50} \cdot q^{50} = \frac{100!}{50! \cdot 50!} \cdot p^{50} \cdot q^{50} =$$

Piebilde: lielus faktoriālus rēķinām ar Stirlinga formulu:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$100! \approx \sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 100} \cdot \left(\frac{100}{2,7}\right)^{100} \approx (*)$$

Atbilde:

varbūtība uzvarēt vienu partiju no vienas ir \_\_\_\_;

varbūtību uzvarēt vienu partiju no divām ir \_\_\_\_;

varbūtību uzvarēt 50 partijas no 100 ir \_\_\_\_.

$$(*) \quad n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Doto izteiksmi pārveidosim pēc pakāpju īpašībām:

$$n! \approx (2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{n^n}{e^n}$$

Logaritmēsīm abas puses:

$$\ln(n!) \approx -\ln(2\pi n) + n \cdot \ln(n) - n \cdot \ln(e)$$

Ievietosim mūsu skaitli 100, atcerojoties, ka  $\ln(e) = 1$ :

$$\ln(100!) \approx -\ln(2 \cdot 3,14 \cdot 100) + 100 \cdot \ln(100) - 100$$

Izrēķināsim labo pusi:

$$\ln(100!) \approx 363,319$$

Atcerojoties logaritmu īpašību

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

Pārveidosim  $\ln(100!)$  par decimāllogaritmu:

$$\log_{10} 100! = \frac{\ln(100!)}{\ln(10)} = \dots =$$

Izrēķināsim aptuveno 100! vērtību:

$$100! \approx 10^{\dots}$$

### 3.5. Piectā darba lapa. Diskrēts gadījuma lielums (C līmenis)

Aprēķināt matemātisko cerību un dispersiju diskrētam gadījuma lielumam, ja dots sadalījuma likums::

$x_i$	-2	1	4	5
$p_i$	0,1	0,3	0,2	?

4) Atradīsim pēdējo varbūtību:

$$p_5 = 1 - \dots - \dots - \dots =$$

5) Atradīsim  $M(x)$ :

➤ Diskrētām gadījuma lieluma matemātiskās cerības formula:

$$M(x) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot p_k = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

$$M(x) = -2 \cdot \dots + 1 \cdot \dots + 4 \cdot \dots + 5 \cdot \dots =$$

6) Atradīsim  $D(x)$ :

➤ Diskrētām gadījuma lieluma dispersijas formula:

$$D(x) = \sum_{k=1}^n (x_k - M(x))^2 \cdot p_k = M(x^2) - (M(x))^2$$

$$M(x^2) = -2^2 \cdot \dots + 1 \cdot \dots + \dots + \dots =$$

$$D(x) = \dots - \quad^2 =$$

Atbilde:

$$p_5 =$$

$$M(x) =$$

$$D(x) =$$

### 3.6. Sestā darba lapa. Nepārtraukts gadījuma lielums (C līmenis)

#### 1. Uzdevums:

Nepārtraukts gadījuma lielums uzdots ar varbūtību sadalījuma funkciju:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x < 0 \\ \frac{1}{10}(3x^2 + 1), & \text{ja } 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{ja } x > 2 \end{cases}$$

Atrast  $M(X)$  un  $D(X)$ .

➤ Nepārtrauktam gadījuma lielumam matemātiskās cerības formula:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

➤ Nepārtrauktam gadījuma lielumam dispersijas formula:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - (M(X))^2$$

$$M(X) = \frac{1}{10} \int_0^2 x \cdot (3x^2 + 1) dx = \frac{1}{10} \int_0^2 \dots \dots \dots dx = \frac{1}{10} \left( - + - \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{10} \left( - + - \right) = -.$$

$$D(X) = \frac{1}{10} \int_0^2 x^2 \cdot (3x^2 + 1) dx - \left( - \right)^2 = \frac{1}{10} \int_0^2 \dots \dots \dots dx - \left( - \right)^2 = \frac{1}{10} \left( - + - \right) \Big|_0^2 - \left( - \right)^2 = -.$$

## 2. Uzdevums:

Nepārtraukta gadījuma lieluma  $X$  varbūtību blīvuma funkcija ir uzdota veidā:

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Noteikt:

- 1) Koeficientu  $A$ ;
- 2) Varbūtību, ka nepārtraukts gadījuma lielums atradīsies intervālā  $(0; 5)$ ;
- 3) Sadalījuma funkciju.

➤ Var izmantot likumu, ka integrālis no blīvuma funkcijas robežās no  $-\infty$  līdz  $\infty$  ir vienāds ar 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

➤ Sadalījuma funkcijas formula:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1+x^2} dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{1+x^2} dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = A \cdot \dots \Big|_{-\infty}^{\infty} = A(\dots - \dots) = A \cdot \dots$$

$$\Rightarrow A \cdot \dots = 1 \Rightarrow A = \dots \Rightarrow f(x) = \dots$$

$$P(0 \leq x \leq 5) = \int_0^5 \frac{A}{1+x^2} dx = \int_0^5 \frac{1}{1+x^2} dx = \dots \int_0^5 \frac{dx}{1+x^2} = \dots (\dots) \Big|_0^5 = \dots$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{A}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+x^2} dx = \dots \int_{-\infty}^x \frac{dx}{1+x^2} = \dots (\dots) \Big|_{-\infty}^x = \dots$$

### 3.7. Septītā darba lapa. Laplasa teorēma (C līmenis)

#### 1. uzdevums

Ir zināms, ka viduvēji 5 % studentu nes brilles. Kāda varbūtība, ka starp 200 studentiem izrādīsies ne mazāk kā 10 %, kas nēsā brilles?

Risinājums:

6) Izmantosim Laplasa integrālo teorēmu:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ kur } \Phi - \text{Laplasa funkcija.}$$

7)  $n = \underline{\quad}$   $p = \underline{\quad}$   $q = \underline{\quad}$   $k_1 = 10\% = 20 \text{ stud.}$   $k_2 = \underline{\quad}\% = \underline{\quad} \text{ stud.}$

8)

$$\begin{aligned} P(20; 200) &\approx \Phi\left(\frac{200 - \cdot}{\sqrt{\cdot \cdot \cdot}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - \cdot}{\sqrt{\cdot \cdot \cdot}}\right) \approx \\ &\approx \Phi(\cdot) - \Phi(\cdot) \approx \cdot \end{aligned}$$

Atbilde: varbūtība, ka starp 200 studentiem būs ne mazāk kā 10 %, kas nēsā brilles ir

\_\_\_\_\_.

#### 2. uzdevums

Teātrim, kurā ietilpst 1000 cilvēku, ir 2 dažādas ieejas, katru no kurām skatītājs var izmantot ar vienādu varbūtību. Blakus katrai ieejai ir sava garderobe. Cik vietas ir jābūt katrā garderobē, lai ar varbūtību 0,99 skatītājs varētu noģērbties tajā garderobē, kurā iegāja uzreiz pēc ienākšanas teātrī?

1) Izmantosim Laplasa integrālo teorēmu:

$$P_1(1) = C_1^1 \cdot p^1 \cdot q^{1-1} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot \quad =$$

2)  $n = \underline{\quad}$   $p = \underline{\quad}$   $q = \underline{\quad}$   $k_1 = 0 \text{ (min.)}$   $k_2 = ? \text{ (max.)}$

3)

$$P_{1000}(0; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - 500}{15,8}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 500}{15,8}\right);$$

$$0,99 \approx \Phi\left(\frac{k_2 - \cdot}{\cdot}\right) + \Phi(\cdot);$$

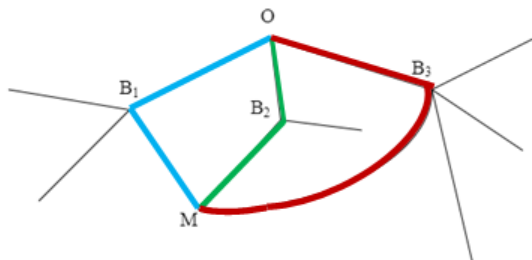
$$\Phi\left(\frac{k_2 - \cdot}{\cdot}\right) \approx;$$

$$\frac{k_2 - \cdot}{\cdot} \approx \Rightarrow k_2 \approx \cdot$$

Atbilde: katra garderobe ir jābūt \_\_\_\_\_ vietas.

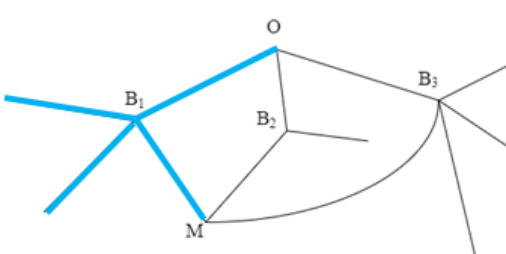
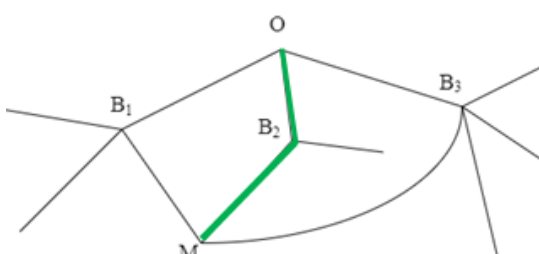
### 3.8. Astotā darba lapa. Pilnās varbūtības formula (B līmenis)

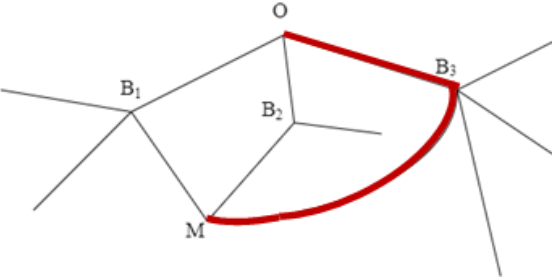
Zīmējumā attēlota ceļu shēma. Tūristi iziet no punkta O. Kāda varbūtība, ka viņi nonāks punktā M?



1) Kāda ir varbūtība nonākt punktā  $B_1, B_2, B_3$ ?

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

<p>Atradīsim varbūtību nonākt no punkta M uz punktu <math>B_1</math>:</p> 	$P_{B_1}(A) = \text{—}$
<p>Atradīsim varbūtību nonākt no punkta M uz punktu <math>B_2</math>:</p> 	$P_{B_2}(A) = \text{—}$

<p>Atradīsim varbūtību nonākt no punkta M uz punktu <math>B_3</math>:</p> 	$P_{B_3}(A) = \text{—}$
<p>Pēc pilnās varbūtības formulas atradīsim varbūtību nonākt punktā M:</p>	$P(A) = P(A) \cdot P(\quad) \cdot P(A) \cdot P(\quad) \cdot P(A) \cdot P(\quad) =$

Piebilde: Pilnās varbūtības formula:

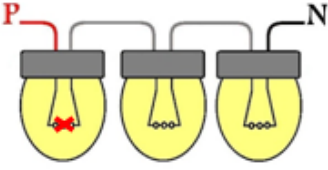
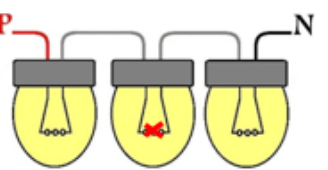

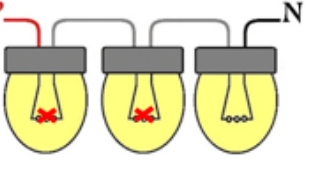

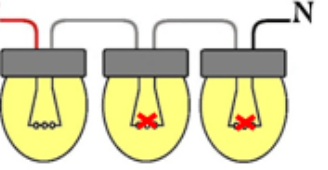

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3)$$

Atbilde: Varbūtība, ka tūristi nonāks punktā M ir vienāda ar \_\_\_\_.

### 3.9. Devītā darba lapa. Reizināšanas likums (A līmenis)

Trīs elektriskās spuldzes virknes slēgumā pieslēgtas tīklam. Varbūtība, ka spuldze pārdeg, spriegumam pārsniedzot nominālo, katrai spuldzei ir  $q = 0,7$ . Aprēķināt varbūtību, ka spriegumam pārsniedzot nominālo, strāva ķēdē neplūst.

Zem katra zīmējuma uzrakstīt attiecīgās varbūtības:

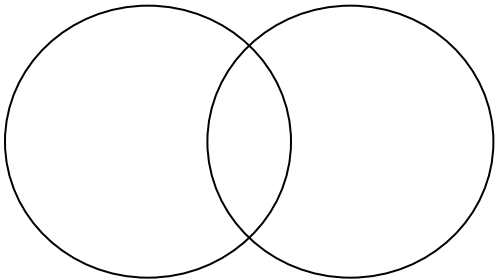
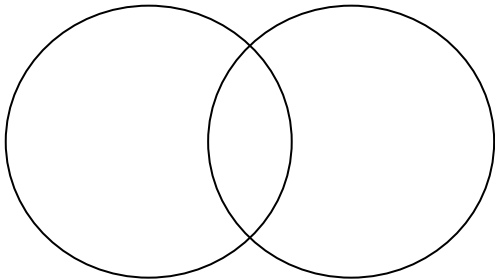
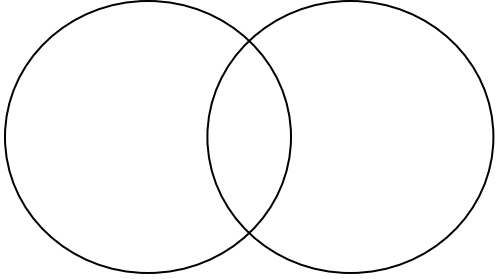
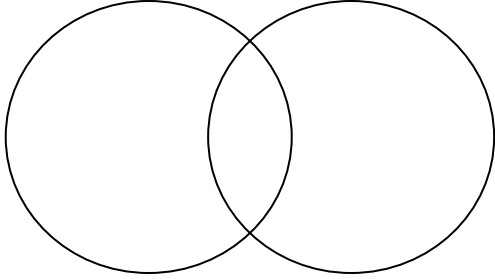
 <p>Nedeg pirmā.</p> <p><math>P =</math></p>	 <p>Nedeg otrā.</p> <p><math>P =</math></p>
 <p>Nedeg trešā.</p> <p><math>P =</math></p>	 <p>Nedeg pirmā un otrā.</p> <p><math>P =</math></p>
 <p>Nedeg pirmā un trešā.</p> <p><math>P =</math></p>	 <p>Nedeg otrā un trešā.</p> <p><math>P =</math></p>
 <p>Nedeg pirmā, otrā un trešā.</p> <p><math>P =</math></p>	<p>1. Uzrakstīt „kopējo” varbūtību (t.i. varbūtību, ka strāva neplūst. To iegūst, saskaitot visas «mazas» varbūtības):</p> <p><math>P =</math></p>

### 3.10. Desmitā darba lapa. Saskaitīšanas likums (A līmenis)

Sakarā ar meteoroloģisko prognozi varbūtība, ka brīvdienās būs lietus ir 0,4; ka būs sniegs – 0,7.  
Atrast varbūtību, ka būs vai nu lietus vai nu sniegs.

Risinājums:

1. Eilera-Venna diagrammā nosvītrosim to daļu, kas atspoguļos, ka būs:

a) lietus: 	b) sniegs: 
c) lietus <u>un</u> sniegs: 	d) lietus <u>vai</u> sniegs: 

2. Aprēķināsim attiecīgās varbūtības:

$P(A_1)$  – būs lietus – ...

$P(A_2)$  – būs vējš – ...

$P(A_3)$  – būs lietus un vējš – ...


$P(A)$  – būs lietus vai vējš =  $P(\dots) + P(\dots) - P(\dots) =$

Atbilde:

---

### 3.11. Prezentācija

1. Tika atrasts bojājums uz dzelzceļa sliežu ceļiem no Vīnes līdz Insbrukai. Tas var būt jebkurā vietā. Kopējā ceļa garums ir 100 km. Dzelzceļa darbinieki nolēma pārbaudīt intervālus [27-34] un [51-62] km. Kāda varbūtība, ka tie atradis bojājumu?



Klasiskā varbūtības formula:  $P = \frac{m}{n}$

1) Atrāsim labvēlīgo notikumu skaitu:

$$m_1 = 34 - 27 = 7 \text{ km}$$

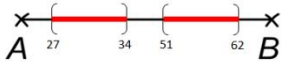
$$m_2 = 62 - 51 = 11 \text{ km}$$

$$m = 7 + 11 = 18 \text{ km}$$

2) Atrāsim visu iespējamo notikumu skaitu:

$$n = 100 \text{ km}$$

3)  $P = \frac{m}{n} = \frac{18}{100} = 0,18$



Klasiskā varbūtības formula (A) Atbilde:  $P = 0,18$ . 2

2. Sakarā ar meteoroloģisko prognozi varbūtība, ka brīvdienās būs lietus ir 0,4; ka būs sniegs – 0,7. Atrast varbūtību, ka būs vai nu lietus vai nu sniegs.



Būs lietus...

Saskaitīšanas likums (A)

2. Sakarā ar meteoroloģisko prognozi varbūtība, ka brīvdienās būs lietus ir 0,4; ka būs sniegs – 0,7. Atrast varbūtību, ka būs vai nu lietus vai nu sniegs.



Būs sniegs...

Saskaitīšanas likums (A)

2. Sakarā ar meteoroloģisko prognozi varbūtība, ka brīvdienās būs lietus ir 0,4; ka būs sniegs – 0,7. Atrast varbūtību, ka būs vai nu lietus vai nu sniegs.




Būs lietus un sniegs ...

Saskaitīšanas likums (A)

2. Sakarā ar meteoroloģisko prognozi varbūtība, ka brīvdienās būs lietus ir 0,4; ka būs sniegs – 0,7. Atrast varbūtību, ka būs vai nu lietus vai nu sniegs.

$P(A_1)$  – būs lietus – 0,4  
 $P(A_2)$  – būs vējš – 0,7  
 $P(A_3)$  – būs lietus un vējš – 0,4 · 0,7  
 $P(A)$  – būs lietus vai vējš – ?  
 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_3) =$   
 $0,4 + 0,7 - 0,4 \cdot 0,7 = 0,82$

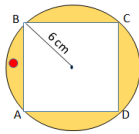
Atbilde:  $P(A) = 0,82$ .



Būs lietus vai sniegs ...

Saskaitīšanas likums (A)

3. Dots regulārs četrstūris, kas ievilkts riņķa līnijā. Riņķa līnijas rādiuss ir 6 cm. Ar aizvērtām acīm atliek punktu zīmējumā. Kāda varbūtība, ka atzīmētais punkts neatrodas četrstūrī?



1) Klasiskā varbūtības formula:  $P = \frac{m}{n}$

2) Atrāsim visu iespējamo laukumu (riņķa līnijas laukums):  
 $mes D = S_{R.L.} = \pi r^2 = 36\pi \text{ cm}^2$

3) Atrāsim labvēlīgo laukumu (laukums starp riņķa līniju un kvadrātu):  
 $mes d = S_{starp.} = S_{R.L.} - S_{kvadr.}$

4) Izmanto laukuma formulu rombam (kvadrāts – romba speciālgad-s):  
 $S_{rombam} = S_{kvadr.} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$

$$P = \frac{mes d}{mes D} = \frac{S_{starp.}}{S_{R.L.}} = \frac{36\pi - 72}{36\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

Atbilde:  $P = \frac{\pi - 2}{\pi}$

Geometriskā varbūtība (A)

4. Lifts ar 7 cilvēkiem paceļas augšā un apstājas 10 stāvos. Kāda ir varbūtība, ka ne vairāk kā viens cilvēks neizies vienā stāvā? (V. Feller, 44.lpp)

Klasiskā varbūtības formula

(B)

8

**Atbilstošs** variants, jo katrs cilvēks ir atsevišķā stāvā.

**Neatbilstošs** variants, jo dažos stāvos ir vairāk, nekā viens cilvēks.

(A)

9

4. Lifts ar 7 cilvēkiem paceļas augšā un apstājas 10 stāvos. Kāda ir varbūtība, ka nekādi divi cilvēki neizies vienā stāvā? (V. Feller, 44.lpp)

1) Klasiskā varbūtības formula:  $P = \frac{m}{n}$

2) Atradīsim labvēlīgo notikumu skaitu:  $m = A_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

3) Atradīsim visu iespējamo notikumu skaitu:  $n = A_{10}^7 = 10^7$

4)  $P = \frac{m}{n} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{10^7} = 0,06048$

Atbilde:  $P = 0,06048$

(A)

10

5. 25 studentu grupai prakse notiek trīs vietās: 6 studentiem Amsterdamā, 10 studentiem Parīzē un 9 studentiem Rīgā. Atrast varbūtību notikumam, ka trīs studenti A, D un F praksē būs kopā (viena pilsētā), ja prakses vietas sadala ložējot. (D. Bože)

Saskaitīšanas likums

(A)

11

1) Atradīsim varbūtību, ka studenti A, D un F atrodas Amsterdamā:



$m = C_{22}^3$

$n = C_{25}^6$

$P_1 = \frac{m}{n} = 0,00869$

(A)

12

2) Atradīsim varbūtību, ka studenti A, D un F atrodas Parīzē:



$m = C_{22}^3$

$n = C_{25}^{10}$

$P_2 = \frac{m}{n} = 0,05217$

(A)

13

3) Atradisim varbūtību, ka studenti A, D un F atrodas Rīgā:



S R T L K



H Ü Š M  
L O P Z J K



A F N T V  
D C B U

$$m = C_{22}^6$$

$$n = C_{25}^9$$

$$P_3 = \frac{m}{n} = 0,03652$$

A

Kopēja varbūtība tiks iegūta, saskaitot trīs «mazās» varbūtības:

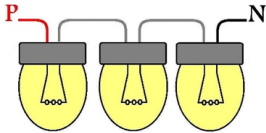
$$P = P_1 + P_2 + P_3 \approx 0,09$$

A

15

6. Trīs elektriskās spuldzes virknes slēgumā pieslēgtas tīklam. Varbūtība, ka spuldze pārdeg, spriegumam pārsniedzot nominālo, katrai spuldzei ir  $q = 0,7$ . Aprēķināt varbūtību, ka spriegumam pārsniedzot nominālo, strāva ķēdē neplūst. (D. Bože)

1. Risinājums (pretējā notikuma varbūtība):



- 1) Vieglāk atrast pretējā notikuma varbūtību.
- 2) Varbūtība katrai spuldzei, ka tā nepārdegs ir  $p = 1 - 0,7 = 0,3$ .
- 3) Lai strāva plūstu, visām spuldzēm ir jābūt degošām vienlaikus. Varbūtība šim notikumam būs:  $Q = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,3^3$  (reizināšanas likums)
- 4) Savukārt, varbūtība, ka strāva neplūst ir:  $P = 1 - 0,3^3 = 0,973$ .

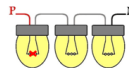
Atbilde:  $P = 0,973$

Reizināšanas likums  
Pretējā notikuma varbūtība

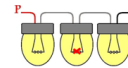
A

16

2. Risinājums (reizināšanas likums):



Nedeg pirmā.  
 $p_1 = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3$



Nedeg otrā.  
 $p_2 = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3$



Nedeg trešā.  
 $p_3 = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7$



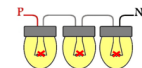
Nedeg pirmā un otrā.  
 $p_4 = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3$



Nedeg pirmā un trešā.  
 $p_5 = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7$



Nedeg otrā un trešā.  
 $p_6 = 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7$



Nedeg pirmā, otrā un trešā.  
 $p_7 = 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$

Varbūtību, ka strāva neplūst iegūst, saskaitot visas «mazas» varbūtības.

Reizināšanas likums  
Pretējā notikuma varbūtība

A

17

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 = 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,973$$

18

7.1 Divi līdzvērtīgi pretinieki spēlē šahu. Kas iespējamākais – uzvarēt divas partijas no četrām vai trīs no sešām? (neizšķirtas partijas neskaitās) (D. Bože)



1) Atradisim varbūtību uzvarēt divas partijas no četrām:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,5^2 \cdot 0,5^2 = 0,375$$

2) Atradisim varbūtību uzvarēt trīs partijas no sešām:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^3 = 0,3125$$

Atbilde: var secināt, ka uzvarēt divas partijas no četrām ir lielākā varbūtība, nekā trīs partijas no sešām.

Bernulli formula

B

19

7.2 Divi līdzvērtīgi pretinieki spēlē šahu. Kāda varbūtība uzvarēt vienu partiju no vienas? Vienu no divām? 50 no 100? Vai rezultāti atšķirsies? (neizšķirtas partijas neskaitās) (D. Bože)



1) Atrādīsim varbūtību uzvarēt vienu partiju no vienas:

$$P_1(1) = C_1^1 \cdot p^1 \cdot q^{1-1} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot 0,5^1 = 0,5$$

2) Atrādīsim varbūtību uzvarēt vienu partiju no divām:

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot p^1 \cdot q^{2-1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} \cdot 0,5^1 \cdot 0,5^1 = 0,5$$

3) Atrādīsim varbūtību uzvarēt 50 partijas no 100:

$$P_{100}(50) = C_{100}^{50} \cdot p^{50} \cdot q^{100-50} = \frac{100!}{50! \cdot 50!} \cdot 0,5^{50} \cdot 0,5^{50} = 0,0795$$

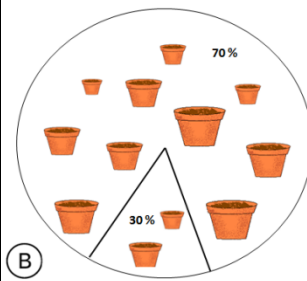
Lielus faktoriālus izrēķinām ar Stirlinga formulu:  $n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

20

Bernulli formula

(B)

8. Kāda auga sēklu dīgļspēja ir 70 %. Aprēķināt, ka no 6 sēklām uzdīgs vismaz četras. (D. Bože)



1)  $p = 0,7$        $q = 0,3$

2) Atrādīsim varbūtību, ka no 6 sēklām uzdīgs vismaz 4:

$$P_6(k \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^{6-4} + C_6^5 \cdot p^5 \cdot q^{6-5} + C_6^6 \cdot p^6 \cdot q^{6-6} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,7^4 \cdot 0,3^2 + \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0,7^5 \cdot 0,3^1 + \frac{6!}{0! \cdot 6!} \cdot 0,7^6 \cdot 0,3^0 = 0,744$$

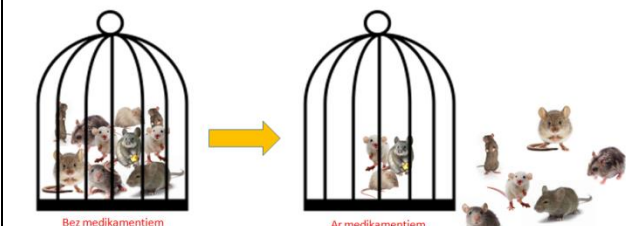
Atbilde:  $P_6(k \geq 4) = 0,744$ .

(B)

Bernulli formula

21

9. Tiek pārbaudīts, kā jaunais medikaments ārstē 10 slimas pelītes. Varbūtība, ka tiks iegūts pozitīvs rezultāts ir 0,8. Kāda varbūtība, ka vismaz 7 pelītes būs izārstētas? (L. Gringzags)



Bernulli formula

(B)

22

9. Tiek pārbaudīts jauns medikaments – ārstē 10 slimas pelītes. Varbūtība, ka tiks iegūts pozitīvs rezultāts ir 0,8. Kāda varbūtība, ka vismaz 7 pelītes būs izārstētas? (L. Gringzags)

1)  $p = 0,8$        $q = 0,2$

$$P_{10}(k \geq 7) = P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) = C_{10}^7 \cdot p^7 \cdot q^3 + C_{10}^8 \cdot p^8 \cdot q^2 + C_{10}^9 \cdot p^9 \cdot q^1 + C_{10}^{10} \cdot p^{10} \cdot q^0 = 0,879$$

Atbilde:  $P_{10}(k \geq 7) = 0,879$ .

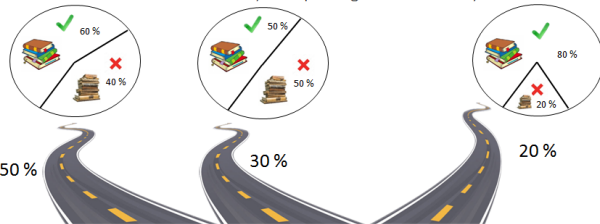


Bernulli formula

(B)

23

10. Ir jānopērk noteiktā grāmata. Ir tikai trīs veikalā, kur to var nopirkt. Varbūtība, ka grāmata būs nopirktā pirmajā veikalā – ir 50 %, otrajā – 30 %, trešajā – 20 %. Pirmajā veikalā brāķētu grāmatu skaits ir 40 %, otrajā veikalā – 50 % bet trešajā veikalā – 20 %. Atrast varbūtību, ka nopirktā grāmata būs brāķēta.



Pilnās varbūtības formula

(B)

24

10. Ir jānopērk noteiktā grāmata. Ir tikai trīs veikalā, kur to var nopirkt. Varbūtība, ka grāmata būs nopirktā pirmajā veikalā – ir 50 %, otrajā – 30 %, trešajā – 20 %. Pirmajā veikalā brāķētu grāmatu skaits ir 40 %, otrajā veikalā – 50 % bet trešajā veikalā – 20 %. Atrast varbūtību, ka nopirktā grāmata būs brāķēta.

Varbūtība, ka grāmata būs nopirktā:

- pirmajā veikalā:  $P(B_1) = 0,5$
- otrajā veikalā:  $P(B_2) = 0,3$
- trešajā veikalā:  $P(B_3) = 0,2$

Varbūtība nopirkt brāķētu grāmatu:

- pirmajā veikalā:  $P_{B_1}(A) = 0,4$
- otrajā veikalā:  $P_{B_2}(A) = 0,5$
- trešajā veikalā:  $P_{B_3}(A) = 0,2$

•  $P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = 0,39$ .

(B)

25

11. Zirgs *A-Marants* ar numuru 1 piedalās sacensībās. No visām sacensībām, kur piedalās zirgs, 40% aizņem reģionālās sacensības, 35% - valsts, 25% - pasaules sacensības. Varbūtība, ka zirgs zaudēs reģionālajās sacensībās ir 0,04, valsts - 0,06, pasaules - 0,03. Avīzē tika rakstīts apkopojums par šī zirga rezultātiem gada garumā, kur bija viens zaudējums. Atrast varbūtību, ka šis zaudējums bija a) reģionālajās sacensībās, b) valsts sacensībās, c) pasaules sacensībās.



**Varbūtība, ka zirgs piedalīsies:**

- reģionālajās sacensībās:  $P(B_1) = 0,4$
- valsts sacensībās:  $P(B_2) = 0,35$
- pasaules sacensībās:  $P(B_3) = 0,25$

**Varbūtība, ka zirgs zaudēs:**

- reģionālajās sacensībās:  $P_{B_1}(A) = 0,04$
- valsts sacensībās:  $P_{B_2}(A) = 0,06$
- pasaules sacensībās:  $P_{B_3}(A) = 0,03$

**Varbūtība, ka zirgs pieļaus kļūdu:**

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = 0,0445.$$

Pilnās varbūtības formula  
Bejesa formula

(B)

26

11. Zirgs *A-Marants* ar numuru 1 piedalās sacensībās. No visām sacensībām, kur piedalās zirgs, 40% aizņem reģionālās sacensības, 35% - valsts, 25% - pasaules sacensības. Varbūtība, ka zirgs pieļaus kļūdu reģionālajās sacensībās ir 0,04, valsts - 0,06, pasaules - 0,03. Avīzē tika rakstīts apkopojums par šī zirga rezultātiem gada garumā, kur bija viens zaudējums. Atrast varbūtību, ka šis zaudējums bija a) reģionālajās sacensībās, b) valsts sacensībās, c) pasaules sacensībās.



➤ **Varbūtība, ka zirgs pieļaus kļūdu:**

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = 0,0445.$$

➤ **Varbūtība, ka kļūda bija pieļauta:**

○ **Reģionālajās sacensībās:**

$$P_A(B_1) = \frac{P_{B_1}(A) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,04}{0,0445} = 0,359$$

○ **Valsts sacensībās:**

$$P_A(B_2) = \frac{P_{B_2}(A) \cdot P(B_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,06}{0,0445} = 0,471$$

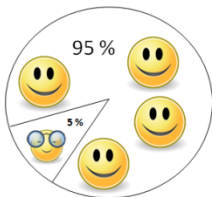
○ **Pasaules sacensībās:**

$$P_A(B_3) = \frac{P_{B_3}(A) \cdot P(B_3)}{P(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,03}{0,0445} = 0,168$$

(B)

27

12. Ir zināms, ka vidēji 5% studentu nēsā brilles. Kāda varbūtība, ka starp 200 studentiem izrādīsies ne mazāk kā 10%, kas nēsā brilles?



**Laplasa integrāla teorēma:**

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ kur } \Phi - \text{Laplasa funkcija.}$$

$$n = 200 \quad p = 0,05 \quad q = 0,95 \quad k_1 = 10\% = 20 \text{ stud.} \quad k_2 = 100\% = 200 \text{ stud.}$$

$$P_{200}(20; 200) \approx \Phi\left(\frac{200 - 200 \cdot 0,05}{\sqrt{200 \cdot 0,05 \cdot 0,95}}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 200 \cdot 0,05}{\sqrt{200 \cdot 0,05 \cdot 0,95}}\right) \approx \Phi(6,17) - \Phi(3,25) \approx 0,5 - 0,49942 \approx 0,00058.$$

Atbilde: varbūtība, ka starp 200 studentiem izrādīsies ne mazāk kā 10%, kas nes brilles ir 0,00058.

Laplasa integrāla teorēma

(C)

28

13. Teātrim, kurā ietilpst 1000 cilvēku, ir 2 dažādas ieejas, katru no kurām skatītājs var izmantot ar vienādu varbūtību. Blakus katrai ieejai ir sava garderobe. Cik vietas ir jābūt katrā garderobē, lai ar varbūtību 0,99 skatītājs varētu noģērbties tajā garderobē, kurā iegāja uzreiz pēc ienākšanas teātrī?



Laplasa integrāla teorēma

(C)

29

13. Teātrim, kurā ietilpst 1000 cilvēku, ir 2 dažādas ieejas, katru no kurām skatītājs var izmantot ar vienādu varbūtību. Blakus katrai ieejai ir sava garderobe. Cik vietas ir jābūt katrā garderobē, lai ar varbūtību 0,99 skatītājs varētu noģērbties tajā garderobē, kurā iegāja uzreiz pēc ienākšanas teātrī?

$$n = 1000 \quad p = 0,5 \quad q = 0,5 \quad k_1 = 0 (\text{min.}) \quad k_2 = ? (\text{max.})$$

$$P_{1000}(0; k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - 500}{15,8}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 500}{15,8}\right);$$

$$0,99 \approx \Phi\left(\frac{k_2 - 500}{15,8}\right) + \Phi(31,6);$$

$$\Phi\left(\frac{k_2 - 500}{15,8}\right) \approx 0,49;$$

$$\frac{k_2 - 500}{15,8} \approx 2,33 \Rightarrow k_2 \approx 536,8 \approx 537.$$

Atbilde: katrā garderobē ir jābūt 537 vietām.



$k_1 = 0$

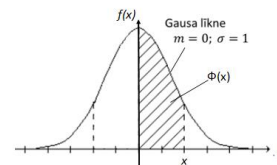


$k_2 = ?$

(C)

30

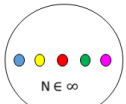
**Muavra-Laplasa funkcijas grafiks**



31



18. Tiek aplūkota sistēma no  $N$  daļiņām, katra no kurām var atrasties  $k$  stāvokļos. Noteikt pilno stāvokļu skaitu, kuros sistēma var atrasties. (V. Popovs)



$N \in \infty$

1. gadījums:

**Maksvela-Bolcmana sistēma.**

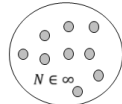
- Daļiņas – dažādas;
- Daļiņu skaits – neierobežots;
- Sakārtota izlase no  $N$  elementiem, kuri var atkārtoties;

• Formula :  $\bar{A}_n^m = n^m$

• Atbilde :  $\bar{A}_k^N = k^N$



Atkārtojums par kombinatoriku



$N \in \infty$

2. gadījums:

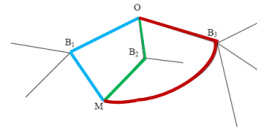
**Boze-Einšteina sistēma.**

- Daļiņas – neatšķiramas;
- Daļiņu skaits – neierobežots;
- Nesakārtota izlase no  $N$  elementiem, kuri var atkārtoties;

• Formula :  $\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$

• Atbilde :  $\bar{C}_k^N = C_{k+N-1}^N$

19. Zīmējumā attēlota ceļu shēma. Tūristi iziet no punkta  $O$ . Kāda varbūtība, ka viņi nonāks punktā  $M$ ? (G. Bezdudnijs)



- Varbūtība, ka tūristi izies no punktu  $B_1, B_2, B_3$  :

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

- Varbūtība, ka tūristi nonāks punktā  $M$  no punkta  $B_1$  :

$$P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}$$

- Varbūtība, ka tūristi nonāks punktā  $M$  no punkta  $B_2$  :

$$P_{B_2}(A) = \frac{1}{2}$$

- Varbūtība, ka tūristi nonāks punktā  $M$  no punkta  $B_3$  :

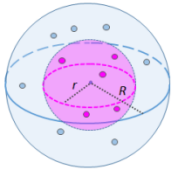
$$P_{B_3}(A) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) = P_{B_1}(A) \cdot P(B_1) + P_{B_2}(A) \cdot P(B_2) + P_{B_3}(A) \cdot P(B_3) = \frac{13}{36}$$

Pilnās varbūtības formula



20. Sfērā ar rādiusu  $R$  atrodas  $n$  gāzes molekulas. Atrast varbūtību, ka tieši  $m$  molekulas atradīsies attālumā, kas ir mazāks par  $\theta = \frac{r}{R}$  no šīs sfēras centra. ( $m \leq n$ ;  $\theta \leq 1$ ). (T. Agekjans)



1) Sfēras tilpuma formula :  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$

2) Tā ka sfēru ar rādiusu  $r$  un sfēru ar rādiusu  $R$  tilpumu attiecība ir  $\theta^3$ , tad varbūtība, ka kāda molekula atradīsies attālumā, kas ir mazāks par  $r$  no centra, ir  $\theta^3$ .

3) Tas nozīmē, ka varbūtība, ka tieši  $m$  molekulas atradīsies attālumā, kas ir mazāks par  $\theta = \frac{r}{R}$  no sfēras centra, ir:

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot (\theta^3)^m \cdot (1 - \theta^3)^{n-m}$$



Bernulli formula

21. Dots tetraedrs. Metot to, tas nokrit uz jebkuras no četrām virsmām ar tādu pašu varbūtību, kas ir  $\frac{1}{4}$  un iekrāsojas trīs krāsās. Viena skaldne ir sarkanā krāsā (iznākums  $\omega_1 = s$ ), otra - zailā ( $\omega_2 = za$ ), treša - zilā ( $\omega_3 = zi$ ) un ceturta ( $\omega_4 = miks$ ) sadalās trīs daļās, no kurām katra ir iekrāsota ar savu krāsu – sarkanā, zailā un zilā. (I. Volodins)

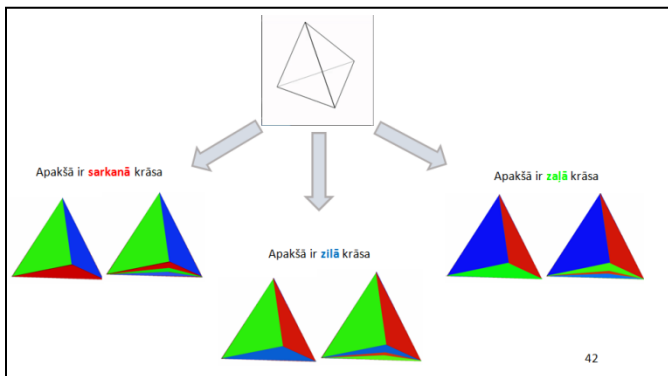
Noteikt, vai:

1) notikumi  $A\{s, miks\}$  – tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur sarkano krāsu;  $B\{za, miks\}$  – tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur zailo krāsu;  $C\{zi, miks\}$  - tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur zilā krāsu; ir savstarpēji atkarīgi.

2) notikumi  $A\{s, miks\}$  – tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur sarkano krāsu;  $B\{za, miks\}$  – tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur zailo krāsu;  $C\{zi, miks\}$  - tetraedrs nokrita uz skaldni, kas satur zilā krāsu; ir pa pāriem neatkarīgi.



Klasiskā varbūtība. Reizināšanas likums.



- Katrs no šiem notikumiem satur divus vienādi iespējamus iznākumus:

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/2.$$

- Ja notikumi neatkarīgi, tad ir jāizpildas:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) = 1/8.$$

- Bet mūsu gadījumā visi trīs iznākumi var izildīties, ja izpildās elementārs notikums ( $\omega_4 = miks$ ). Tādēļ:

$$P(A \cap B \cap C) = p(miks) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$$

- Tādēļ notikumi  $A, B, C$  ir atkarīgi.
- Vienlaikus, tie ir pa pāriem neatkarīgi. Tiešām:

$$P(A \cap B) = p(miks) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

- To pašu var pateikt par notikumu citiem pāriem.

22. Melnās krāsas gēns liellopiem dominē attiecībā pret brūnās krāsas gēnu. Kādi pēcnācēji  $F_1$  būs, šķērsojot tīršķirnes melno buļļu ar sarkanām govīm? Kādi pēcnācēji  $F_2$  būs šķērsojot hibridus? (V. Krestjaninovs)

**A** – melnās krāsas gēns  
**a** – brūnās krāsas gēns

Brūnas govīs ir recesīvā tipa => genotips – **aa**.  
Melnais bulis ir dominējošā tipa => genotips – **AA**.

P: ♀aa sarkanās × ♂AA melnais

gametas: a, A

$F_1$ : Aa melnie (100%)

$F_1$  gametas: A, a

$F_2$ : AA Aa Aa aa (75% melnie, 25% sarkanie)

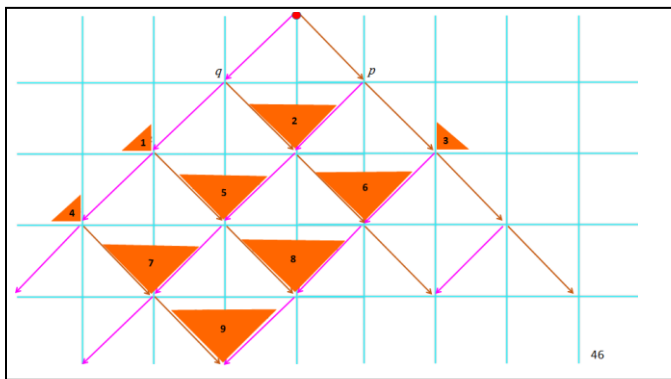
Klasiskā varbūtība **(B)**

44

23. Varbūtība iet pa labi uz leju ir  $p$ , bet varbūtība iet pa kreisi uz leju ir  $q$ . Sastādīt programmu datorā, kas atrod visus iespējamus ceļus un to varbūtības no piramīdas virsotnes līdz kādam noteiktam «ceļu» krustpunktam.

Klasiskā varbūtība Saskaistīšanas un reizināšanas likums **(C)**

45



• Ja tā turpināsim, iegūsim koeficientus no Paskāla trijstūra:

```

      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

```

47


24. Vai pastāv sakarība starp vidējo olas masu un cāļu dzimstību? Noteikt korelācijas koeficientu un sastādīt regresijas līkni.

• Korelācijas koeficienta formula:

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

• Regresijas koeficienta formula:

$$R_{y/x} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2}$$



Korelācija un regresija **(C)**

48

• Uzdevumu visērtāk pildīt programmā *Microsoft Excel*;

Dota izlase:

1) Vispirms ir jāaprēķina aritmētiskais vidējais abās kolonnās.

Komanda: AVERAGE

Vidējā olas masa, X, g	Cāļu dzimstība, Y, %
52	91
55	89
60	83
63	78
61	82
53	90
51	90
57	88
58	88
59	85
56	88
56.81818182	86.54545455

49

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

2) Rēķinām skaitītāju (iekavas): no katras vērtības atņemam vidējo vērtību. Vidējo vērtību fiksējam ar "S" zīmi.

$X - \bar{X}$	$Y - \bar{Y}$
-4.818181818	4.454545455
-1.818181818	2.454545455
3.181818182	-3.545454545
6.181818182	-8.545454545
4.181818182	-4.545454545
-3.818181818	3.454545455
-5.818181818	3.454545455
0.181818182	1.454545455
1.181818182	1.454545455
2.181818182	-1.545454545
-0.818181818	1.454545455

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

3) Rēķinām skaitītāju (summu): sareizinām pa pāriem kolonnas un saskaitām rezultātus.

**Komanda:** SUMPRODUCT

$\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
-144.9090909
Skaitītājs

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

4) Rēķinām saucēju (iekavas kvadrātā): šīs iekavas jau bija izrēķinātas, tie tikai jākāpina kvadrātā.

**Komanda:** ^2

$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
23.21487603	19.84297521
3.305785124	6.024793388
10.12396694	12.57024793
38.21487603	73.02479339
17.48760331	20.66115702
14.5785124	11.9338843
33.85123967	11.9338843
0.033057851	2.115702479
1.396694215	2.115702479
4.760330579	2.388429752
0.669421488	2.115702479

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

5) Rēķinām saucēju (kvadrātsakne no summas): Izvelkam kvadrātsakni no katrās kolonnas summas.

**Komanda:** SQRT(SUM)

$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
23.21487603	19.84297521
3.305785124	6.024793388
10.12396694	12.57024793
38.21487603	73.02479339
17.48760331	20.66115702
14.5785124	11.9338843
33.85123967	11.9338843
0.033057851	2.115702479
1.396694215	2.115702479
4.760330579	2.388429752
0.669421488	2.115702479
12.15057051	12.83461229

$\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2}$	$\sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}$
------------------------------	------------------------------

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

6) Rēķinām saucēju (kvadrātsakņu reizināšana): sareizinām kvadrātsaknes.

**Komanda:** \*

155.9478616
$\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}$

$$r_{xy} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum(Y - \bar{Y})^2}} \cdot \frac{n-1}{n}$$

7) Rēķinām korelācijas koeficientu: dalām skaitītāju ar saucēju un pareizinām ar 10/11, jo izlasē ir mazāk par 30 datiem.

**Komanda:** /

r
-0.844740901

$$R_{y/x} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2}$$

8) Rēķinām regresijas koeficientu: skaitītājs tāds pats, kā korelācijas koeficientam. Saucēju ieguvām, izrēķinot summu no jau izmantotās kolonnas:

**Komanda:** SUM

$(X - \bar{X})^2$
23.21487603
3.305785124
10.12396694
38.21487603
17.48760331
14.5785124
33.85123967
0.033057851
1.396694215
4.760330579
0.669421488
12.15057051

$$\sum (X - \bar{X})^2 = 147.6363636$$

56

$$R_{y/x} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2}$$

8) Rēķinām regresijas koeficientu: dalām skaitītāju ar saucēju:

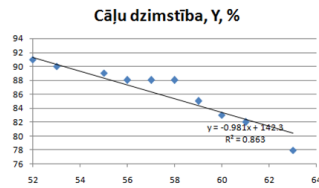
**Komanda:** /

R
-0.981527094

57

$$R_{y/x} = \frac{\sum(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})}{\sum(X - \bar{X})^2}$$

9) Zīmējam regresijas līkni:



10) Secinājums: korelācija ir negatīva, t.i. jo lielāka olas masa, jo mazāk cāju piedzimst.

58

## Nobeigums

Maģistra darba laikā tika analizētas mācību standarta topošas izmaiņas, izstrādāti jaunie mācību materiāli atbilstoši jaunajai metodei – uzdevumu sadalīšanai trīs sarežģītības pakāpēs. Tika izveidots tēmai „Varbūtību teorija un matemātiskā statistika” teorijas kopums ar uzdevumu risināšanas paraugiem un darba lapas.

Piedāvātie uzdevumi ir izveidoti veidnē *Microsoft Power Point*. Katrā uzdevumā ir risinājums, kas parādās pakāpeniski, lai skolēni varētu risināt paši un tikai salīdzināt atbildes.

Teorijā ir aplūkotas galvenās varbūtību teorijas un statistikas formulas ar uzdevumiem zem katrās.

Darba lapas ir veidotas uzskatāmā un saprotamā veidā, ar norādījumiem, lai skolēni varētu pakāpeniski „būvēt” loģisko uzdevumu risināšanas stratēģiju.

Esmu strādājusi pie šī darba, lai palīdzētu matemātikas skolotājiem ar materiālu kopumu izveidi tēmai ”Varbūtību teorijā un matemātiskajā statistikā”.

Varu apgalvot, ka esmu gandarīta, izpildot šo darbu un noteikti strādāšu tālāk, veidojot jaunus, nestandarta uzdevumus mūsdienu skolēniem.

## Izmantotā literatūra

1. **Т., Агекян.** *Теория вероятностей для астрономов и физиков.* Москва : Наука, 1974.
2. **И., Володин.** *Лекции по теории вероятностей и математической статистике.* Казань : Издательство Казанского государственного университета, 2006.
3. **В.Ю., Крестьянинов.** files/File/Sbornik\_zadach\_po\_genetike\_s\_resheniyami.pdf.  
<http://www.public-liceum.ru/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 15 Maijs 2019 r.]  
[http://www.public-liceum.ru/files/File/Sbornik\\_zadach\\_po\\_genetike\\_s\\_resheniyami.pdf](http://www.public-liceum.ru/files/File/Sbornik_zadach_po_genetike_s_resheniyami.pdf).
4. **М., Мусин.** *Сборник задач по теории вероятностей для химиков.* Москва : Ленанд, 2017.
5. **В., Попов.** *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.* Казань : Издательство Казанского государственного университета, 2008.
6. **Ј., Smotrovs.** *Varbūtību teorija un matemātiskā statistika. 1. daļa.* Latvija : Zvaigzne ABC, 2004-2007.
7. **В., Феллер.** *Введение в теорию вероятностей и её приложения. Том 1.* Москва : Мир, 1967.
8. vidusskola. <https://www.skola2030.lv/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 2019. gada 15. Maijs.]  
<https://www.skola2030.lv/vidusskola>.
9. Mācību satura apraksts. <https://domaundari.lv/cepure/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 2019. gada 15. Maijs.]  
<https://domaundari.lv/cepure/Macibu%20satura%20un%20pieejas%20apraksts.pdf>.
10. latvija/izglitiba-karjera/. <https://nra.lv/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 2019. gada 15. Maijs.]  
<https://nra.lv/latvija/izglitiba-karjera/260602-kadas-novitates-skolas-ienesis-jaunais-pamatizglitibas-standarts.htm>.
11. uzzini-lielakas-izmainas-stundu-saraksta-jaunais-izglitibas-standarts-kritizets-tomer-pienemts. <http://www.la.lv/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 2019. gada 15. Maijs.]  
<http://www.la.lv/uzzini-lielakas-izmainas-stundu-saraksta-jaunais-izglitibas-standarts-kritizets-tomer-pienemts>.
12. Vidējā izglītība. <https://domaundari.lv/cepure/>. [Tiešsaiste] [Aplūkots: 2019. gada 15. Maijs.] <https://domaundari.lv/cepure/index.php?joma6=1&izg=2>.

**Programma uzdevumam par Paskāla trijstūri**

```

package main

import ("fmt"
        "strings"
        "math")

var start float64 = 1
var q float64 = 0.33
var p float64 = 0.66
var qx int = 2
var py int = 3
var path string

func main() {
    path = strings.Repeat("q", qx) + strings.Repeat("p", py)
    fmt.Println("Base path: " + path)
    d := permutations(path)
    d = removeDuplicatesUnordered(d)
    fmt.Println("Total available paths: ", len(d))
    fmt.Println("All available paths: ", d)
    var result float64
    result = start * float64(len(d))
    if qx > 0 {
        result = result * math.Pow(q, float64(qx))
    }
    if py > 0 {
        result = result * math.Pow(p, float64(py))
    }
    fmt.Println("Result: ", result)
}

func join(ins []rune, c rune) (result []string) {
    for i := 0; i <= len(ins); i++ {
        result = append(result, string(ins[:i])+string(c)+string(ins[i:]))
    }
}

```

```

    }
    return
}

func permutations(testStr string) []string {
    var n func(testStr []rune, p []string) []string
    n = func(testStr []rune, p []string) []string {
        if len(testStr) == 0 {
            return p
        } else {
            result := []string{}
            for _, e := range p {
                result = append(result, join([]rune(e), testStr[0])...)
            }
            return n(testStr[1:], result)
        }
    }
    output := []rune(testStr)
    return n(output[1:], []string{string(output[0])})
}

func removeDuplicatesUnordered(elements []string) []string {
    encountered := map[string]bool{}
    // Create a map of all unique elements.
    for v := range elements {
        encountered[elements[v]] = true
    }
    // Place all keys from the map into a slice.
    result := []string{}
    for key, _ := range encountered {
        result = append(result, key)
    }
    return result
}

```

Maģistra darbs „VARBŪTĪBU TEORIJAS PRAKTISKIE UZDEVUMI VIDUSSKOLAI  
TRĪS LĪMEŅOS” izstrādāts LU Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā  
norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: (*personiskais paraksts*) Anna Levicka

Rekomendēju/nerekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: asoc. prof. J. Mencis (*personiskais paraksts*)

Recenzents: Maruta Avotiņa

Darbs iesniegts Vispārīgās Matemātikas katedrā ..... 06.2019.

Vecākā metodiķe: Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts valsts gala pārbaudījuma komisijas sēdē

11.06.2019. prot. Nr. ....

Komisijas sekretāre: (personiskais  
paraksts)