

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
ĶĪMIJAS FAKULTĀTE

Materiāls skolotājiem par tematu “Kvadrātvienādojumi” 9. klasē

BAKALaura DARBS

Autore: **Andra Annemarija Krūmiņa**

Studenta apliecības Nr.: ak17208

Darba vadītāja: Mg.math. Maruta Avotiņa

RĪGA 2021

Anotācija

Laikā, kad notiek pāreja uz jauno vispārējās izglītības saturu un pieeju mācīšanai, ir būtiski analizēt, kādas ir izmaiņas konkrētajā mācību priekšmeta standartā un programmā un kāpēc tieši šādas izmaiņas ir veiktas. Autore ir izvēlējusies bakalaura darbā apskatīt veiktās izmaiņas tematā par kvadrātviņņadojumiem pamatskolā.

Bakalaura darba "Materiāls skolotājiem par tematu "Kvadrātviņņadojumi" 9. klasē" mērķis ir izveidot materiālu pamatskolas matemātikas skolotājiem par tematu "Kvadrātviņņadojumi", kas atbilst projekta *Skola2030* programmas paraugā dotajai temata apguves norisei un kompetencēs balstītai pieejai mācību satura apgūvē. Izveidotais materiāls aprobēts 8. klases skolēniem, kā arī izveidotas atgādnēs, kuru nepieciešamību autore saskatīja aprobācijas laikā.

Atslēgasvārdi: matemātikas priekšmeta standarts, matemātikas programmas paraugs *Skola2030*, kvadrātviņņadojums, kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos, diskriminants, binoma kvadrāta atdalīšana.

Annotation

At time of transition to the new curricula and approach of teaching in the secondary education, it is important to analyze what kind of changes are in curricula of a particular subject, as well as why exactly these changes have been developed. The author of this bachelor thesis has chosen to view and investigate the changes made in the topic of quadratic equations at the elementary school.

The goal of the bachelor thesis “Teaching material for teachers about quadratic equations for the 9th grade” is to create a material for elementary school teachers about quadratic equations that will meet the process of learning and the competence-based approach to learning the content in the model of *Skola2030*. The created material is approved for the 8th grade students. During the approbation, the author felt the need to create ”reminders”, i.e., material with briefer content of the theme for students to use in case if something has been forgotten.

Key words: mathematics curricula, project *Skola2030*, quadratic equations, trinomial factorization into multipliers, discriminant, binomial square separation.

Saturs

Ievads.....	5
1. Valsts pamatizglītības standarts un programma matemātikā 7. – 9. klasei.....	6
1.1. Temats “kvadrātvienādojumi” un “kvadrātfunkcija” esošajā programmu paraugā.....	9
1.2. Temats “kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātvienādojumu, kvadrātfunkciju?” Jaunajā programmas paraugā.....	12
1.3. Galvenās atšķirības programmu paraugos	15
2. Temats “kvadrātvienādojumi” mācību grāmatās	20
3. Materiāls skolotājiem par tematu “kvadrātvienādojumi”	26
3.1. Temats “kvadrātvienādojumi”	26
3.3. Materiāla aprobācija	39
Secinājumi	44
Izmantoto avotu un literatūras saraksts	45
Pielikumi.....	47

Ievads

Lielākā daļa Latvijā strādājošo skolotāju 2020./2021. mācību gadā sastapās ar izaicinājumu - pāreju no 2013. un 2014. gadā apstiprinātajiem mācību priekšmetu standartiem (pamatskolai [13] un vidusskolai [12]), uz Valsts izglītības satura centra (VISC) īstenotā projekta “Kompetenču pieeja mācību saturā” (*Skola2030*) izstrādāto jauno standartu. Pārejas process radīja lielu sašutumu un neapmierinātību pedagogu vidū, jo līdz ar mācību gada sākumu nebija pieejami pilnvērtīgi mācību materiāli un pārbaudes darbu paraugi, ar kuriem strādāt skolotājiem un skolēniem. Pedagogiem bija jāizmaina līdz šim izveidotā mācību prakse, ko ir ļoti grūti realizēt pat, ja darbs notiek klātienē, bet vēl lielāks izaicinājums, ja mācību process notiek attālināti (Covid-19 dēļ no oktobra beigām vairums skolēnu mācījās attālināti).

Jaunā standarta izveide bija nepieciešama, lai mācīšana un mācīšanās tiktu padarītas aktuālas, novērstu satura sadrumstalotību, tā dublēšanos un — lai skolēniem sniegtu dažādu kopsakarību izpratni un spēju iegūtās zināšanas pielietot reālās dzīves situācijās. Lielākais uzsvars tiek likts uz skolēnu pašvadītu mācīšanos, pārejot no skolēnu pasīvas mācīšanās un faktoloģiskās materiāla iegaumēšanas uz aktīvu izziņas procesu pedagoga vadībā, palīdzot skolēniem radīt jaunradi un attīstot izpratni matemātikas mācību stundās. Ņemot vērā aktuālās izmaiņas, autore — kā savu bakalaura darba tematu izvēlējās “Materiāls skolotājiem par tematu “Kvadrātviņņadojumi” 9. klasē”, jo tas ir aktuāls ne tikai autorei, kas māca pamatskolas klases, bet arī var noderēt citiem matemātikas skolotājiem Latvijā.

Bakalaura darba mērķis ir izveidot materiālu skolotājiem par kvadrātviņņadojumiem pamatskolā.

Mērķa sasniegšanai izvirzīti šādi darba uzdevumi:

1. izpētīt *Skola2030* izstrādāto matemātikas mācību priekšmeta standartu un programmas paraugu 7.-9. klasei;
2. salīdzināt *Skola2030* programmas parauga tematu “Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātviņņadojumiem, kvadrātfunciju” ar iepriekšējo programmas paraugu;
3. salīdzināt, kā tematu “Kvadrātviņņadojumi” apraksta dažādās mācību grāmatās;
4. izveidot materiālu matemātikas skolotājiem;
5. aprobēt izveidoto materiālu.

Darbs sastāv no trīs nodaļām, 5 apakšnodaļām, 8 tabulām, 20 attēliem un 2 pielikumiem.

1. VALSTS PAMATIZGLĪTĪBAS STANDARTS UN PROGRAMMA

MATEMĀTIKĀ 7. – 9. KLASEI

Valsts pamatizglītības standarts [14] nosaka pamatizglītības programmu - primāros mērķus, uzdevumus un obligāto saturu, kas sevī ietver obligātos mācību priekšmetus un to standartus, pamatizglītības vērtēšanas principus un kārtību. Ņemot vērā valstī noteikto pamatizglītības standartu tiek veidotas mācību priekšmetu programmas, kas sastāv no mācību priekšmeta mērķa un uzdevumiem, satura un tā apguves norises principiem, mācību sniegumu vērtēšanas formas, metodisko un mācību darba organizācijas ieteikumiem. Skolotājs var izvēlēties strādāt pēc *Skola2030* izveidotā programmas parauga matemātikā (skat. [22]) vai arī veidot pats savu programmu, kurā var veikt izmaiņas tematu apguves secībā pēc saviem ieskatiem, ievērojot mācību priekšmeta standarta prasības.

Jaunā standarta izveide bija nepieciešama, lai mācības tiktu padarītas aktuālas, novērstu satura sadrumstalotību, tā dublēšanos un, lai skolēniem tiktu veicināta dažādu kopsakarību izpratne un spēja iegūtās zināšanas pielietot reālās dzīves situācijās. Tādēļ lielākie uzsvāri mācību pieejā ir likti tā, lai notiku veiksmīga pāreja no skolēnu pasīvas mācīšanās un faktoloģiskās materiāla iegaušanās uz aktīvu izziņas procesu pedagoga, kas vairāk tiek uztverts kā konsultants nevis lektors, vadībā, palīdzot skolēniem pielietot esošās zināšanas, lai radītu jaunas. Apgūstamās zināšanas un prasmes tiek sasaistītas ar reālo dzīvi, bet dažādu priekšmetu apgūvē tiek lietota starpdisciplināra pieeja, kas palīdz novērst tematu sadrumstalotību un veicinās pedagoga sadarbību mācību procesa organizēšanā. [15] Bakalaura darbā tiks analizētas un salīdzinātas pamatskolas matemātikas mācību programmas – līdzšinējā [13] un jaunā *Skola2030* programma, kura no 2020./2021. mācību gada tiek ieviesta 1., 4., 7. un 10. klašu skolēniem visā Latvijā. [21] Pēc tam pakāpeniski uz jauno standartu pāries arī citas klašu grupas (skat. 1. att.).

12. klase	12. klase	12. klase	12. klase
11. klase	11. klase	11. klase	11. klase
10. klase	10. klase	10. klase	10. klase
9. klase	9. klase	9. klase	9. klase
8. klase	8. klase	8. klase	8. klase
7. klase	7. klase	7. klase	7. klase
6. klase	6. klase	6. klase	6. klase
5. klase	5. klase	5. klase	5. klase
4. klase	4. klase	4. klase	4. klase
3. klase	3. klase	3. klase	3. klase
2. klase	2. klase	2. klase	2. klase
1. klase	1. klase	1. klase	1. klase
Pirmsskola	Pirmsskola	Pirmsskola	Pirmsskola
2019./20. m.g.	2020./21. m.g.	2021./22. m.g.	2022./23. m.g.

● Jaunie valsts pārbaudes darbi / eksāmeni būs 2022./23. m.g. pavasarī

1. att. Pakāpeniska pilnveidotā mācību satura un pieejas īstenošana [17]

Valsts izglītības un satura centra 2011. gadā sagatavotā matemātikas mācību programmā 7.–9. klasei (skat. [18]), pēc kuras līdz 2020. gada septembrim tika veidots mācību saturs, tiek uzskaitīti matemātiskie modeļi (algebriskie, ģeometriskie un diskrētie modeļi, funkcijas), kuri ir jāapgūst šajā laika posmā. Atsevišķa sadaļa veltīta pētnieciskajai darbībai, kā arī cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskajiem aspektiem. Sadalījums pa klasēm ir strukturēts tāpat kā materiāla sākumā, uzskaitot matemātiskos modeļus, pētniecisko darbību un mijiedarbības matemātiskos aspektus (skat. 2. att.). Pēc visu trīs klašu uzskaites ir nodaļa, kurā ir aprakstītas mācību sniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni, kas ietver, formatīvo un summatīvo vērtēšanu, sīkāk to iedala, piemēram, aprakstot vērtēšanas mērķi un to, cik bieži atbilstošā vērtēšana ir jāveic. Pēc vērtēšanas formām ir uzskaitītas dažādas mācību metodes, to skaidrojumi un mācību organizācijas formas.

Sasniedzamais rezultāts			Mācību līdzekļi
Matemātiskie modeļi	Pētnieciskā darbība	Cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskie aspekti	
8.8. Kvadrātvienādojumi (26 stundas)			
1. Izprot jēdzienus: <i>kvadrātvienādojums, pilnais kvadrātvienādojums, nepilnais kvadrātvienādojums, kvadrātvienādojuma saknes, diskrimināts, kvadrātrinoms, kvadrātrinoma saknes.</i> 2. Lieto diskriminānta, kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas un formulu kvadrātrinoma sadalīšanai reizinātājos. 3. Pārbauda, vai konkrētie skaitļi ir dotā kvadrātvienādojuma saknes. 4. Atrīsina kvadrātvienādojumus, nosakot dotā kvadrātvienādojuma veidu un izvēloties konkrētai situācijai atbilstošo risināšanas paņēmieni.	5. Pētnieciskā ceļā iegūst vienādojumu $x^2 = t$ un $(x + m)(x + n) = 0$ atrisinājumu. 6. Pētot reducētā kvadrātvienādojuma saknes un koeficientus, iegūst Vjeta teorēmu. 7. Izveido kopsavilkumu par kvadrātvienādojumu veidiem atkarībā no tā koeficientiem. 8. Izprot atšķirību starp vienādojuma atrisinājumu un reālās problēmas atrisinājumu.	9. Atrīsina praktiska satura uzdevumus, izmantojot kvadrātvienādojumu. 10. Iegūst priekšstatu par kvadrātvienādojumu atrisināšanas vēsturi.	<u>Interaktīvās tafeles materiāls:</u> <i>Kvadrātvienādojums</i> M_08_08_VM_01 <u>Animācijas:</u> <i>Kvadrātvienādojuma koeficienti</i> M_08_08_VM_02 <i>Vjeta teorēma</i> M_08_08_VM_03

2. att. 2011. gadā izveidotās matemātikas programmas paraugs tematā “Kvadrātvienādojumi”

Projekta *Skola2030* matemātikas mācību priekšmeta programmas paraugs 1.– 9. klasei tiek iesākts ar programmas mērķiem, uzdevumiem un saturu. Salīdzinot ar iepriekšējo programmu, mācību sniegumu vērtēšanas formas un metodiskie paņēmieni ievietoti jau materiāla sākumā aiz mācību satura, kam tālāk seko ieteikumi mācību darba organizācijai un mācību satura apguves secība. Nākamās nodaļas sadalītas pa blokiem 1.–3. klase, 4.–6. klase un 7. –9. klase, kur katrs no tematiem tiek veidots pēc 3. att. redzamās temata struktūras. [22]

Temata ietvara struktūras paraugs

Temata numurs un nosaukums	Temata numurs un nosaukums	Temata numurs un nosaukums	Temata numurs un nosaukums	Temata numurs un nosaukums
Temata apguvei ieteicamais laiks				
Temata apguves mērķis – tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu kopums un apguves pamatojums.				
Sasniedzamie rezultāti				
Zināšanas		Prasmes		
Apraksta nozīmīgākās temata apguves rezultātā iegūtās zināšanas un izpratni par mācību jomas ietilpšošajām idejām, iekavās norādīts kods standarta attiecīgās mācību jomas plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu tabulā, uz kuru šī ideja attiecas konkrēti zinā.		Mācību priekšmetam specifiskās un vispārīgās jeb caurviju prasmes, ko skolēns apgūš attiecīgajā tematā.		
Komplekss sasniedzamais rezultāts		Ieradumi		
Skolēna spēja koordinēti lietot zināšanas, prasmes un ieradumus jaunās, neierastās situācijās, iekavās norādīts kods no standarta attiecīgās mācību jomas plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu tabulas. Ja tematā tiek sasniegts tabulā minētais plānotais skolēnam sasniedzamais rezultāts pilnībā, pirms koda iekļauta vienādības zīme.		Vērtībās balstīti ieradumi, kuru attīstīšanai plānots pievērst pastiprinātu uzmanību attiecīgajā tematā.		
Jēdzieni – nozīmīgākie jēdzieni, par kuriem skolēns gūs izpratni tieši šajā tematā.				
Temata apguves norise				
Temata vienuma nosaukums	Tematā plānoto skolēnam sasniedzamo rezultātu apguvei nepieciešamās skolēna darbības. Tabula veidota, grupējot apgūstamos sasniedzamos rezultātus un katrai sasniedzamo rezultātu grupai jeb tematā vienumam piedāvājot nepieciešamās skolēna darbības. Tabulā nav uzskaitītas visas iespējamās skolēna darbības, norādīts uzdevumu skaits, vingrināšanās ilgums vai intensitāte. Galvenā uzmanība pievērsta skolēna darbību veidiem un būtībai.			
Temata vienuma nosaukums				
Temata vienuma nosaukums				
Mācību līdzekļi – tieši šī temata apguvei nepieciešamo mācību līdzekļu uzskaitījums.				
Storppriekšmetu saikne – norāda, kā skolēns apgūs ar attiecīgo tematu saistītus sasniedzamos rezultātus kontekstā ar citiem mācību priekšmetiem.				
Metodiskais komentārs – attiecīgi mācību priekšmeta nozīmīgu saturisku vai metodisku jautājumu skaidrojums, kas aktuāls tieši šī temata apgūvē.				
Papildspējas – papildu idejas un ieteikumi, kā vēl paplašināt un padziļināt skolēna mācīšanās pieredzi attiecīgajā tematā, piemēram, ieteikumi mācību ekskursijām, pētniecības projektiem.				

3. att. Temata ietvara struktūras paraugs [22]

Pēc pēdējā 9. klases mācību temata ir pielikumu sadaļa, kas ietver, piemēram, paraugos lietotos kodus, plānotos sasniedzamos rezultātus caurviju prasmēs, beidzot 3., 6. un 9. klasi un mācību satura apguvei izmantojamie mācību līdzekļi.

1.1. Temats “Kvadrātviensādojumi” un “Kvadrātfunkcija” esošajā programmu paraugā

Palīgmateriālā pedagogiem [19] pieejams temata sasniedzamo rezultātu ceļvedis, kurā dotie sasniedzamie rezultāti ir sadalīti pa mācību stundām, esošajā programmā tematam “Kvadrātviensādojumi” ir atvēlētas 26 mācību stundas. Sasniedzamie rezultāti tiek iedalīti trīs daļās: matemātiskie modeļi, pētnieciskā darbība un cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskie aspekti. Tālāk, balstoties uz [19], aprakstīta temata “Kvadrātviensādojumi” norise.

Pie katras no daļām ir uzskaitīti virzienam atbilstošie sasniedzamie rezultāti un pie numurētajiem punktiem ir kopā apvienoti vairāki sasniedzamie rezultāti, kuri temata izklāstā ir

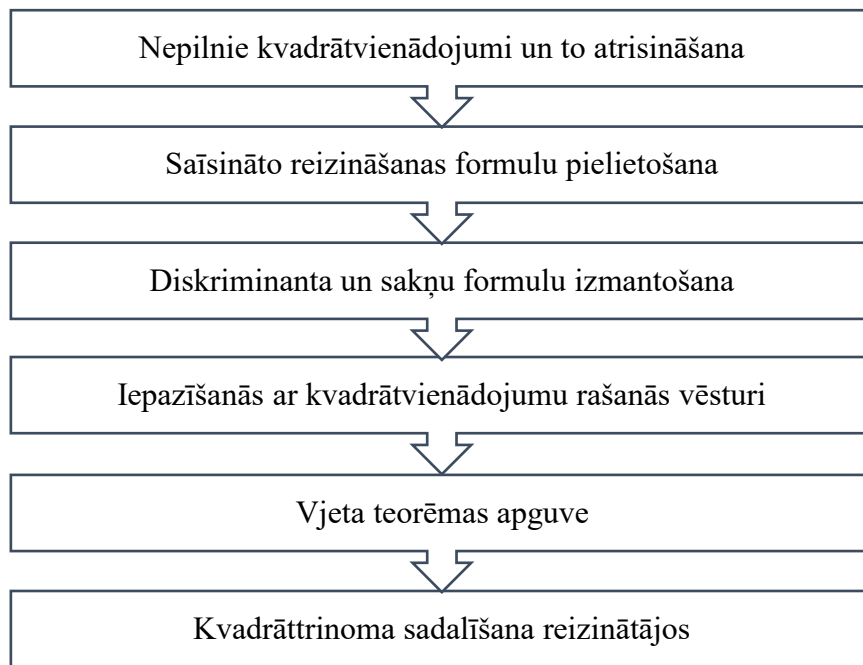
sadalīti sīkāk pa mācību stundām. Apskatot sadaļu “Matemātiskie modeļi”, izdalīti četri sasniedzamie rezultāti:

1. jēdzienu (*kvadrātvienādojums, pilnais kvadrātvienādojums, nepilnais kvadrātvienādojums, kvadrātvienādojuma saknes, diskriminants, kvadrātrinoms un tā saknes*) apgūšana, šis sasniedzamais rezultāts tiek sasniegts pakāpeniski visa temata laikā;
2. jāapgūst formulu (diskriminanta, kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas un kvadrātrinoma sadalīšanas reizinātājos formulas) pielietošana;
3. pārbaudīšana, vai dotā vērtība ir kvadrātvienādojuma sakne;
4. kvadrātvienādojumu atrisināšana, izvēlēties konkrētajai situācijai atbilstošo risināšanas paņēmieni – nepilno kvadrātvienādojumu atrisināšana, pilno kvadrātvienādojumu atrisināšana, izmantojot diskriminanta un sakņu formulas vai Vjeta teorēmu.

Pētnieciskās darbības sasniedzamie rezultāti ir īsāki un atbilst proporcionāli mazākam stundu skaitam. Pirmais no tiem atbilst temata apguves pirmajām stundām, kurās skolēni pētnieciskā ceļā iegūst vienādojuma $x^2 = t$ un $(x + m)(x + n) = 0$ atrisinājumus, tas ir, iegūst nepilno kvadrātvienādojumu atrisināšanas formulas. Nākamais sasniedzamais rezultāts balstīts uz formulu un sakarību iegūšanu pētnieciskās darbības rezultātā, kur tiek pētītas reducētā kvadrātvienādojuma saknes, koeficienti un tiek iegūta Vjeta teorēma. Savukārt kvadrātvienādojuma veidu kopsavilkumam atvēlēta viena mācību stunda un, lai izprastu vai skolēni izprot atšķirību starp vienādojuma atrisinājumu un reālu problēmu atrisinājumiem, plānots veltīt vienu mācību stundu.

Temata pēdējie divi sasniedzamie rezultāti tiek atvēlēti cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskajiem aspektiem, kas ietver praktiska satura uzdevumu risināšanu, izmantojot kvadrātvienādojumus un priekšstata iegūšanu par kvadrātvienādojumu atrisināšanas vēsturi.

Līdzšinējās programmas kvadrātvienādojumu apguves shēma dota 1. tabulā.



Kvadrātfuncijas tematam programmā 9. klasē atvēlētas 23 mācību stundas. Tā kā šo atbalsta materiālu [20] pedagogiem ir veidojuši tie paši eksperti, kas 8. klases atbalsta materiālu, tad temata sasniedzamie rezultāti ir iedalīti pēc tāda paša principa, tikai viena iedalījuma nosaukums ir paplašināts – matemātiskie modeļi, praktiskā un pētnieciskā darbība, un cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskie aspekti.

Pirmo apskatīsim matemātisko modeļu grupu, kurā ir četri sasniedzamie rezultāti, no kuriem pirmais ietver plašu zināšanu loku, jo tas atspoguļo, kā skolēni prot izmantot jau dotus funkciju grafikus un nolasīt informāciju no tiem, šajā gadījumā sasniedzamais rezultāts balstīts uz kvadrātfuncijas īpašībām, piemēram, funkcijas augšanas un dilšanas intervālu noteikšana. Skolēni var demonstrēt savas zināšanas, kas tika iegūtas, apgūstot lineāru funkciju tematu 7. klasē. [18] Nākamais sasniedzamais rezultāts nosaka, ka skolēniem ir jāprot uzzīmēt kvadrātfuncijas grafiks, no kura skolēni pēc tam var nolasīt prasītos datus vai - informāciju. Šajā sasniedzamo rezultātu iedalījumā skolēni mācās aprēķināt kvadrātfuncijas grafika jeb parabolas virsotnes koordinātas un grafika krustpunktus ar koordinātu asīm, kā arī risināt kvadrātnevienādības.

Plašākā sasniedzamo rezultātu sadaļa ir praktiskā un pētnieciskā darbība:

1. jēdzienu lietošana, kas ietver, *funkciju, funkcijas grafiku, funkcijas nulles, funkcijas vērtību apgabalu, augošu un dilstošu funkciju*, pie šī sasniedzamā rezultāta ir plānots, ka skolēni šos jēdzienus lietos, raksturojot funkcijas īpašības konkrētos uzdevumos;

2. sadarbība ar klasesbiedriem, kopā pētot, kā parametri ietekmē kvadrātfunkcijas grafiku un tā novietojumu koordinātu plaknē;
3. kvadrātfunkcijas grafika skiču un ekvivalentus pārveidojumu lietošana, risinot uzdevumus;
4. kvadrātnevienādības atrisinājumu pierakstīšana divos dažādos veidos un pāriešana no skaitļu intervāla uz skaitļu asi.

Noslēdzot devītās klases sasniedzamos rezultātus, temata “Kvadrātfunkcija”- sadaļā cilvēka, sabiedrības un vides mijiedarbības matemātiskie aspekti- ir viens sasniedzamais rezultāts, ka skolēni spēj saskatīt iespējas ar kvadrātfunkciju modelēt reālus procesus un tos izskaidrot, ja ir dots, piemēram, grafiks.

Līdzšinējā programmā tika apskatīti visi svarīgākie jēdzieni, kuri uzskaitīti pie sasniedzamajiem rezultātiem, bet šobrīd apvienotajā tematā jaunajā standartā par pietiekami būtiskiem tiek uzskatīti četri no tiem, tas ir, kvadrātviendojums, kvadrātnevienādība, diskriminants un funkcijas nulles, atsaucoties uz [22] avotu, bet pietiekami svarīgi būtu, ja skolēni izprastu arī tādus jēdzienus kā pilnais un nepilnais kvadrātviendojums, jo ja tie nezinās atšķirību starp tiem, tie uzskatīs, ka visi kvadrātviendojumi ir viens uz tas pats, kas ir pretruna ar matemātikas teoriju, jo kvadrātviendojumi tiek iedalīti sīkāk, tas ir, pilnie un nepilnie kvadrātviendojumi, atsaucoties uz [18] avotu. Jaunajā programmā par daļa no satura, kas tika mācīts līdz šim, tagad tiek uzskatīts par pašsaprotamu, tas varētu būt iemesls, kāpēc šie sasniedzamie rezultāti un saturs nav tikuši iekļauti pie sasniedzamajiem rezultātiem.

1.2. Temats “Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātviendojumu, kvadrātfunkciju?” jaunajā programmas paraugā

Jaunajā programmā abi iepriekš minētie temati “Kvadrātviendojums” un “Kvadrātfunkcija” ir apvienoti vienā, ar nosaukumu “Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātviendojumu, kvadrātfunkciju?” un tematam ir ieteicams veltīt no 20 līdz 24 mācību stundām. Šajā apakšnodaļā apskatīsim jaunā standarta [22] sasniedzamos rezultātus, kuri ir sadalīti trīs iedaļās – prasmes, komplekss sasniedzamais rezultāts un ieradumi. Attiecīgi pa sadaļām sasniedzamo rezultātu skaits ir atšķirīgs, visvairāk to ir pie prasmju apgūšanas, jo paraugā tam ir paredzēti 6 sasniedzamie rezultāti, bet tikai 2 sasniedzamie rezultāti pie ieradumiem. Jaunums blakus sasniedzamajiem rezultātiem ir sadaļa “Ziņas”, kas nav paredzēta, lai aizstātu terminus, bet gan, lai parādītu faktus

un idejas, ko jāizprot un jāzina skolēniem. Tālāk seko temata apguves norise, kas ir sadalīta trīs galvenajās daļās:

1. kvadrātvienādojumu atrisināšana, izmantojot sakņu formulu,
2. kvadrātfunkciju grafika uzzīmēšana, izmantojot virsotnes formulu,
3. kvadrātnevienādību risināšana,

kam seko īsi metodiskie komentāri par mācību procesa organizēšanu un mācību metožu izmantošanu.

Ziņas sniedz ieskatu par tematu un uzsver svarīgāko, par ko jābūt izpratnei. Programmas paraugā [22] par kvadrātvienādojumu dotas šādas ziņas:

- Katru kvadrātrinomu var pierakstīt kā binoma kvadrāta un skaitļa summu (starpību), šo sakarību var izmantot, lai pamatotu sakņu formulu. (M.Li.2., M.Li.4.)
- Kvadrātvienādojuma sakņu eksistenci un skaitu var noteikt, izmantojot atbilstošās funkcijas grafiku vai aprēķinot diskriminanta skaitlisko vērtību. (M.Li.4)
- Kvadrātvienādojumu var atrisināt dažādi – spriežot, izmantojot grafiku, ar sakņu formulām. (M.Li.2., M.Li.4.)
- Dažkārt ar kvadrātvienādojumiem ir jāveic ekvivalenti pārveidojumi, lai iegūtu vienādojumus, kuru atrisināšana ir zināma. (M.Li.4.)

Programmā minētās prasmes galvenokārt balstītas uz formulu lietošanu, piemēram, lai realizētu pirmo caurviju prasmi, noteikt kvadrātvienādojuma sakņu skaitu, ir jāizmanto diskriminanta vērtības aprēķināšanas formula, nākamais solis pēc diskriminanta vērtības aprēķināšanas, ja tā ir vienāda vai lielāka par nulli, ir jāizmanto sakņu formula, lai iegūtu kvadrātvienādojuma atrisinājumu. Skolēniem temata laikā ir jāapgūst svarīga prasme – kvadrātfunkcijas grafika uzzīmēšana, izmantojot formulas, lai iegūtu virsotnes punktu un funkcijas nulles, iegūstot precīzāku zīmējumu koordinātu plaknē. Un pēdējās divas caurviju prasmes balstās uz kvadrātnevienādību, nevienādību sistēmu un situāciju uzdevumu atrisināšanu.

Jaunajā programmā ir sadaļa – “Komplekss sasniedzamais rezultāts”, kas iekļauj sarežģītāka līmeņa sasniedzamos rezultātus, kur skolēniem ir jāapvieno vairākas prasmes un jādarbojas jaunā situācijā, piemēram, formulē kvadrātnevienādību atrisināšanas algoritmu, izmantojot kvadrātfunkcijas grafiku. Šīs sadaļas sasniedzamie rezultāti ir vērsti, lai skolēni mācītos argumentēt un pētīt, radot jaunas idejas, piemēram, viens no sasniedzamajiem rezultātiem ir, ka skolēni izmantojot digitālos rīkus, pēta sakarības starp funkciju grafiku novietojumu koordinātu plaknē un argumentē kvadrātfunkcijas dažāda pieraksta veidu priekšrocības grafika zīmēšanai. Pēdējais šīs

sadaļas sasniedzamais rezultāts – veido praktiskas problēmas matemātisko modeļi, kur skolēnam jāskatās virziens, kā pielietot teorētiskās zināšanas uzdevumu risināšanai, kas saistīts ar kādu praktisku problēmu.

Pēdējā sadaļa ir ieradumi, kurā aprakstītas darbības, kurām mācību procesā būtu jāklūst par pašsaprotamām un lietojamām bez atgādinājuma. Tematam, kas saistīti ar kvadrātviņņādojumiem, doti divi ieradumi, tie balstīti uz korektu spriedumu izpildīšanu, darba plānošanu, vadīšanu un pareizu matemātisko simbolu lietošanu. Zem sasniedzamo rezultātu tabulas ir doti jēdzienu, kurus ir svarīgi apgūt šī temata laikā – *kvadrātviņņādojums, kvadrātneviņņādība, diskriminants un funkcijas nulles*.

Pēc piedāvātā temata norises plāna, darba autore izplānoja, ka nepilnājiem kvadrātviņņādojumiem paredzētas viena līdz divas mācību stundas, bet šajos sasniedzamajos rezultātos vārdi “nepilnie kvadrātviņņādojumi” nav iekļauti, jo svarīgākais ir nevis zināt nosaukumu, bet gan izprast risināšanas metodi. Sadarbībā ar klasesbiedriem ir jāatrisina piemēri, kurus tie spēj atrisināt, izvēloties atbilstošo metodi un izslēdzot tos piemērus, kurus viņi nemāk (pēc viņu domām) atrisināt. Tālāk divas mācību stundas tiek apgūta kvadrātviņņādojumu risināšana, lietojot zināšanas par binoma kvadrātu summu un starpību. Pēc pirmajām trīs līdz četrām mācību stundām šajā tematā, kurā skolēniem ir iespējams demonstrēt savas līdzšinējās zināšanas, tie sāk apgūt jaunu jēdzienu diskriminants, diskriminanta un sakņu aprēķināšanas formulas, to lietojums un jaunās risināšanas metodes sasaistīšana ar kvadrātfuncijas grafiku, kam tiek plānots veltīt divas līdz trīs mācību stundas. Kvadrātfuncijas grafiku pēc jaunās programmas apskata jau 8. klasē pavasara semestrī tematā “Kā dažādas funkcijas izmanto matemātiskai modelēšanai” [22]. Savukārt viena mācību stunda pēc ieteikumiem būtu jāvelta, lai trenētos atrisināt nepilnos kvadrātviņņādojumus, izvēloties piemērotāko risināšanas metodi, un viena mācību stunda, lai risinātu uzdevumus, izmantojot ekvivalentus pārveidojumus. Vēl viena līdz divas mācību stundas ir paredzētas, lai apgūtu ģeometriska satura uzdevumus un tos risinātu, izmantojot kvadrātviņņādojumus, un risinātu uzdevumus, kuros ir saistība ar citām mācību jomām.

Tā kā pēc jaunās programmas ir paredzēts, ka skolēni funkcijas, to zīmēšanu un īpašību nolasīšanu apgūst 8. klasē, tad šajā tematā tiek atvēlēts ļoti īss laika periods, lai apgūtu kvadrātfuncijas un kvadrātviņņādojumu saistību. Viena mācību stunda būtu jāvelta tam, lai skolēni saskatītu, kā var pielietot zināšanas un prasmes par kvadrātviņņādojumu, lai atvieglotu kvadrātfunciju skicēšanu vai konstruēšanu un saskatītu sakarības starp grafika krustpunktiem ar abscisu asi. Viena mācību stunda būtu jāparedz, lai skolēni varētu vingrināties zīmēt grafikus un

no tiem nolasīt funkcijas īpašības un, spētu pielietot, piemēram virsotnes formulu, tāpat vienu nodarbību būtu jāvelta, lai trenētu prasmes darboties ar dažādiem digitālajiem rīkiem un novērtētu to priekšrocības un trūkumus. Tālāk pēc plāna pa vienai mācību stundai būtu jāparedz, lai skolēni spētu noteikt identiskas jeb ekvivalentas izteiksmes, sadarbojoties ar klasesbiedriem analizētu dažādos veidos pierakstītas kvadrātfunkcijas un raksturotu dažādus kvadrātfunkcijas lielumus, un līdzīgi kā bija ar kvadrātvienādojumiem, kvadrātfunkciju izmantotu reālu procesu uzdevumu atrisināšanai un kā matemātisko modeli. [22]

Kvadrātnevienādībām šajā tematā tiek veltīts īsākais laika periods, t.i., aptuveni piecas mācību stundas, kas sevī ietver vienu mācību stundu, lai skolēni ar vārdiem formulētu kvadrātnevienādību atrisināšanas algoritmu un spriestu par izteiksmes vērtībām, piemēram, tās ir pozitīvas vai negatīvas. Aptuveni divas mācību stundas būtu jāvelta tam, lai skolēni noteiktu un pierakstītu atrisinājumus dažādām nevienādībām, skaidrojot soļus, kas tika veikti, un sadarbojoties formulē kvadrātnevienādību risināšanas algoritmu. Pēc tā vienu mācību stundu jāvelta vingrināšanās uzdevumiem un jālieto ekvivalenti pārveidojumi, lai risinātu uzdevumus. Pa vienai mācību stundai būtu jāvelta, lai apskatītu kvadrātnevienādību atrisināšanu, izmantojot spriešanu un lineāras nevienādības, un skaidrojot matemātisko modeli – kvadrātnevienādību un lineāru nevienādību sistēmu, paskaidrojot savu darbību, piemēram to, kā tiek veidots korekts pieraksts.

1.3. Galvenās atšķirības programmu paraugos

Apskatot temata “Kvadrātvienādojumi” sasniedzamos rezultātus, ir redzams, ka gan līdzšinējā, gan jaunajā programmā sasniedzamie rezultāti ir paredzēti tam, lai tematu apgūtu pakāpeniski, bet jaunajā, tiek bieži pieņemts, ka skolēni jau prot veikt dažādas prasmes, piemēram, atrisināt nepilnos kvadrātvienādojumus un daļa līdz šim apgūto sasniedzamo rezultātu nav iekļauti šajā tematā, atsaucoties uz pieejamo jaunās programmas informāciju [22] avotā. Jau pirmajās temata nodarbībās skolēniem ir paredzēts, ka tie veic pētniecisko darbību, atrisinot tos nepilnos kvadrātvienādojumus, ko tie spēj atrisināt, nonākot pie konkrētiem risināšanas algoritmiem, formulām, lai arī sasniedzamos rezultātus salīdzinot abās programmās ir nepieciešams saskatīt dažādus kvadrātvienādojumu atrisināšanas algoritmus, kādi ir arī nepilnajiem kvadrātvienādojumiem. Jaunajā programmā sasniedzamais rezultāts pie plānotās temata norises par vingrināšanos risināt nepilnos kvadrātvienādojumus parādās brīdī, kad jau ir apgūta gan diskriminanta, gan sakņu formula, kas nozīmē, ka šajā brīdī ir jānostiprina ne tikai nepilno kvadrātvienādojumu zināšanas un prasmes, bet arī pilno. Šis sasniedzamais rezultāts būtu jārealizē

divās mācību stundās nevis tikai vienā, bet pēc piedāvātā stundu daudzuma šajā tematā, to nebūs viegli realizēt, ja vien pedagogam nav ilga pieredze pedagoģiskajā darbā un tematu plānošanā, lai citus tematus pārplānotu tā, lai izbrīvētu papildus mācību stundas tam, lai skolēni varētu papildus vingrināties šī temata zināšanu nostiprināšanā un pielietošanā, balstoties uz piedāvāto *Skola 2030* programmu [22] avotā.

Ja kvadrātvienādojuma koeficients pie mainīgā kvadrāta ir vienādas ar skaitli 1, tad tā atrisināšanai var izmantot Vjeta teorēmu, kam līdzšinējā programmā tika veltītas apmēram trīs mācību stundas, lai apgūtu, kas ir Vjeta teorēma un kā to pielietot, atsaucoties uz [18] avotu, bet jaunajā programmā tā ir izņemta ārā un skolēni apgūst par vienu kvadrātvienādojumu atrisināšanas veidu mazāk, šo teorēmu izmantojot, skolēni ātrākā laikā ar īsāku pierakstu varēja tik līdz kvadrātvienādojuma atrisinājumam. Autore uzskata, ka Vjeta teorēma ir jāatstāj programmā, kā viens no pēdējiem temata pētnieciskajiem darbiem grupās. Lai arī jau sākotnēji salīdzinot programmas ir redzams, ka veiktas sasniedzamo rezultātu izmaiņas, ir tādi sasniedzamie rezultāti, kuri ir nemainīgi vai arī tiem ir izmainīts formulējums, piemēram, ka skolēni prot izmantot diskriminanta un sakņu aprēķināšanas formulas, kā arī, izmantojot diskriminantu, prot noteikt sakņu skaitu, kas ir pamatformulas, lai atrisinātu jebkuru pilno kvadrātvienādojumu. [22]

Jaunā programma ir radīta tam, lai veidotu starppriekšmetu saikni, tāpēc pretrunīga šķiet kvadrātvienādojumu vēstures izņemšana no tās, jo līdz šim viena mācību stunda tika veltīta tam, lai skolēni iepazītos ar to, kā mēs esam tikuši līdz šādām formulām un kas tās ir radījis. [18] Tā bija iespēja ieinteresēt skolēnus, kuriem, piemēram, padodas vēsture, bet matemātika nepadodas un otrādi. Lai arī tā ir viena mācību stunda, meklējot un analizējot informāciju, tiek ne tikai papildinātas skolēnu zināšanas, bet arī erudīcija, bet jaunajā programmas plānā šāda mācību stunda nav paredzēta, vai arī pedagogiem pēc savas pašiniciatīvas ir jāpārveido temata plāns, lai to iekļautu temata apguves norisē, atsaucoties uz jauno matemātikas programmu [22] avotā.

Abās programmās līdzīgi ir tie sasniedzamie rezultāti, kuros ir rakstīts, ka tiek atrisināti kvadrātvienādojumi izmantojot atbilstošo metodi un risinot praktiska satura, problēmu uzdevumus, bet jaunajā programmā daudz mazāk tiek veltīts laiks, lai skolēni trenētos risināt konkrētā satura uzdevumus, atsaucoties uz [22] avotā pieejamajiem sasniedzamajiem rezultātiem, jo, ja tie trenējas maz vai netrenējas vispār, tiem netiek dota iespēja nostiprināt savas zināšanas un prasmi pielietot formulas. Jaunā programma ir balstīta, lai skolēni paši atklātu, bet nav garantijas, ka visi skolēni pēc vienreizējas algoritma vai formulas atklāšanas spēs to pielietot, jo tiem ir nepieciešams papildu

treniņš tam, ko paši ir atklājuši, jo tiem ir jātrenē ieradums konkrētā veida uzdevumus risināt pēc formulas, algoritma, kas ne vienmēr ir vienas mācību stundas apjoms. [16]

Savukārt salīdzinot kvadrātfunkciju sasniedzamos rezultātus ar jauno programmu, ir atstāti tādi sasniedzamie rezultāti, kas ir saistīti ar funkciju īpašībām, to saskatīšanu un nolasīšanu no grafika, prasmi uzzīmēt grafiku un konkrētos uzdevumos tos skicēt, lai iegūtu uzdevumu atrisinājumus. Lai atvieglotu funkcijas grafika uzzīmēšanu un to padarītu precīzāku, iepriekš ir jāatrod funkcijas virsotne un funkcijas nulles, abās programmās šie jēdzieni un to formulas ir iekļautas. Tāpat nemainīgi ir atstāts sasniedzamais rezultāts par grafika novietojumu atkarībā no parametriem, kas tiek sasaistīts ar pētniecību un sadarbību ar klasesbiedriem, tāpat šo sasniedzamo rezultātu var veiksmīgi apgūt, izmantojot digitālos rīkus, piemēram, lietotni *symbolab*. [22]

Salīdzinot veiktās pārmaiņas tās vairāk ir veiktas tieši saistībā ar kvadrātvienādojumu apgūšanu un pielietošanu, jo lielākā daļa sasniedzamo rezultātu saistībā ar kvadrātfunkciju ir atstāti, tikai formulēti mazliet citādāk, bet šeit, protams, jāmin fakts, lai arī kvadrātfunkciju sasniedzamie rezultāti nav tik krasi izmainīti kā kvadrātvienādojumiem, šo apjomu ir grūti apgūt, ja stundu skaits ir samazināts gandrīz divas reizes, atsaucoties uz [22] avotā paredzēto stundu skaitu tematam, un šī programma neparedz tematu kopsavilkumus, kā tas bija iepriekš. Iemesls, kāpēc kvadrātfunkcijas sadaļai tiek atvēlētas mazāk nekā 10 mācību stundas, ir tamdēļ, ka astotajā klasē jaunā programma paredz, ka skolēni pavasara semestrī apgūst funkcijas un kvadrātfunkcijas. [22] Pārlicību nerada visi sasniedzamie rezultāti, kuros ir minēta sadarbība ar klasesbiedriem, jo sadarbības process ne vienmēr liecina par visu skolēnu sasniegto zināšanu līmeni, jo grupās attiecīgi viens skolēns var visu saprast un izdarīt, un grupas vārdā prezentēt, tāpēc ne vienmēr un ne visos apstākļos būtu nepieciešami grupu un pāru darbi, protams, tie ir nepieciešami, bet tādā daudzumā, lai tas netraucētu to skolēnu izglītības kvalitātei, kuriem ir grūti strādāt grupās, vai ir grūti tikt līdz tempam, kādā strādā skolēnu grupa. [7]

Praktiski un teorētiski gadījumā, ja stundu skaits tiek samazināts uz pusi, tad arī satura daudzums, kas ir jāapgūst, ir jāsamazina proporcionāli tāpat, kā tas ir ar stundu skaitu, jo programmā veiktās izmaiņas norāda uz to, ka apgūstamais saturs ir ļoti līdzīgs tam, kā tas ir bijis līdz šim, bet šīs programmas mērķis ir, lai skolēni paši atklāj, bet veidojot programmu nav ierēķināts fakts, ka gadījumā, kad skolēni paši pēta, iegūst algoritmus un rezultātus, tas paņems divas reizes vairāk laika, nekā tas būs bijis līdz šim. Ir iespējams veidot pētnieciskos darbus par tematiem, kas skolēniem ir aktuāli iesaistot reālo dzīvi, kas skolēniem radītu interesi un veicinātu

to pētniecības tempu, bet ir jāņem vērā, ka skolēni un to radošais izpausmes ātrums ir atšķirīgs. [10]

Līdzšinējā [13] programma ir balstīta uz to, ka skolēni iegaumē un izpilda algoritmiskus soļus pēc dotajām formulām, bet jaunā programma [22] ir vērsta uz to, lai skolēni attīstītu savas pētnieciskās prasmes, paši nonākot līdz sakarībām, tās pielietojot, strādājot patstāvīgi, pāros vai grupās un, attīstot sadarbības prasmi ar klasesbiedriem, ko pēc sasniedzamajiem rezultātiem var apskatīt 2. tabulā. Jaunajā programmā tiek bieži pieņemts, ja daļa temata ir bijusi iepriekš, ka visiem skolēniem ir pietiekamas zināšanas šajā tematā, lai tie jau temata apguves sākumā varētu veikt patstāvīgus spriedumus, nonākot pie risināšanas algoritmiem. Pati galvenā atšķirība ir temata pārceļšana uz 9. klasi un tā apvienošana ar kvadrātfunkcijām un kvadrātnevienādībām, jo kvadrātnevienādojumu temats līdz šim tika apgūts 8. klasē. Līdzšinējā programmā - tika uzsvērts katrs apakštemats, arī tie, kas iepriekš ir tikuši mācīti, bet jaunajā programmā galvenais akcents tiek likts tikai uz jaunām zināšanām, nostiprinot līdzšinējās un veltot mazāk laika, lai trenētos formulu lietošanā, kas ir pretēji salīdzinot ar līdzšinējo programmu. Ja [13] programmā skolotājs aktīvi piedalījās mācību procesā bieži vien kā lektors, tad jaunajā pieejā skolotājs ir tikai kā konsultants, kas skolēnus, pēc nepieciešamības, virza uz priekšu.

2. tabula. Pamatprasības mācību priekšmeta apguvei

Pamatprasības mācību priekšmeta apguvei, beidzot 9.klasi no [13], kas saistītas ar kvadrātnevienādojumiem	Sasniedzamie rezultāti matemātikas mācību jomā, beidzot 9. klasi no [22], kas saistīti ar kvadrātnevienādojumu
14.6.2. pārbaudīt, vai skaitlis ir viena mainīgā polinoma sakne; 14.6.3. noteikt kvadrāttrinoma saknes 4.7.1. noteikt atšķirību starp identitāti un vienādojumu; 14.7.2. pārveidot vienādojumu vai vienādojumu sistēmu, iegūstot tiem ekvivalentas izteiksmes; 14.7.3. atrisināt lineāru vienādojumu un kvadrātnevienādojumu; 14.8.4. risināt praktiskus uzdevumus, kas saistīti ar sadzīves, dabaszinātņu, vides un veselības jautājumiem, sastādot vienādojumus, to sistēmas,	4.3.1. Skaidro (korekti lietojot jēdzienus un simbolus) ar pakāpēm, monomiem, polinomiem, vienādojumiem, nevienādībām, to sistēmām saistītos jēdzienus un pārveidojumus, piemēram, ko nozīmē izteiksmi sadalīt reizinātājos, ko nozīmē atrisināt vienādojumu. 4.3.3. Veic darbības ar monomiem un polinomiem, lieto pakāpju īpašības, sadala polinomus reizinātājos, iznesot kopīgo reizinātāju pirms iekavām un lietojot

<p>noteikt atšķirību starp teksta uzdevuma atrisinājumu un atbilstošā vienādojuma vai vienādojumu sistēmas atrisinājumu;</p> <p>14.8.5. mērķtiecīgi pilnveidot algebrisku praktisku uzdevumu risināšanas prasmi, izvērtēt uzdevumu teksta saturu;</p> <p>16.12. pētīt matemātisko sakarību un iegūtos rezultātus interpretēt reālās problēmas atrisinājumā.</p>	<p>saīsinātās reizināšanas formulas (kvadrātu starpība, summas/starpības kvadrāts).</p> <p>4.3.4. Atrisinā lineāru vienādojumu, kvadrātvienādojumu, to sistēmas, vienādojumu $\frac{a}{x} = b$ (x – nezināmais), atrisinā lineāru nevienādību un kvadrātnevienādību, izvēloties sev piemērotāko vai situācijai atbilstošāko risinājuma paņēmieni.</p> <p>4.4.1. Modelē ar algebriskām izteiksmēm, vienādojumiem (tai skaitā proporcijām) un to sistēmām, nevienādībām situāciju ar matemātisku, citu mācību jomu un reālu kontekstu.</p>
---	--

2. TEMATS “KVADRĀTVIENĀDOJUMI” MĀCĪBU GRĀMATĀS

Šobrīd vēl nav sagatavotas mācību grāmatas atbilstoši *Skola2030* izstrādātajiem programmu paraugiem, tāpēc skolotājam ir jāizmanto un jāpielāgo pieejamās mācību grāmatas un materiāli, no katra paņemot labāko un noderīgāko. Šajā nodaļā tiks apskatītas četras biežāk lietotās mācību grāmatas pamatskolai (sakārtotas pēc izdošanas gada):

- France, G. Lāce, L. Pickaine, A. Miķelsone. Matemātika 8. klasei. Lielvārds, 2008. (skat. 4. att, kur dots grāmatas vāka attēls);
- I. Čečina, T. Matrosova, E. Teterovska. Matemātika 8. klasei. Pētergailis, 2009. (skat. 5. att.)
- B. Āboltiņa, S. Januma. Matemātika 8. klasei 2. daļa. Apgāds Zvaigzne ABC, 2014. (skat. 6. att.)
- I. France, G. Lāce, L. Pickaine, E. Slokenberga. Matemātika 8. klasei. Lielvārds, 2017. (skat. 7. att.)



4. att.



5. att.



6. att.



7. att.

Mācību grāmatā [4] temata ievadā tiek parādīti gan pilnie, gan nepilnie kvadrātviņņādojumi, tomēr pirmais lielais punkts, kas tiek apgūts ir pilnie kvadrātviņņādojumi, ja ir zināmi koeficienti un sakņu aprēķināšana pēc diskriminanta un sakņu formulām. Šajā apakštematā ir ļoti daudz un dažādi uzdevumi, lai pakāpeniski apgūtu pilnos kvadrātviņņādojumus, veicot arī ekvivalentos pārveidojumus. Tālāk tiek apgūti nepilnie kvadrātviņņādojumi, iekļauti ļoti pārskatāmi paraugi nepilno kvadrātviņņādojumu atrisināšanai, tomēr skatoties uz uzdevumiem, to varētu būt arī vairāk,

to ir pietiekami, jo ņemot vērā, piemēram, diferencētu mācību procesu, ar tiem varētu nepietikt. Nākamais apakštemats šajā grāmatā ir “Kvadrātrinoma sadalīšana reizinātājos”, tā ievadā dots īss teorētisks atgādinājums par polinomu sadalīšanu reizinātājos, kas tika apgūts 7. klases otrajā semestrī. Šim apakštematam uzdevumi nav uzreiz pēc teorijas un paraugiem, bet tālāk tiek apskatīta Vjeta teorēma un tikai pēc tās ir uzdevumi par abiem iepriekš minētajiem apakštematiem. Uzdevumi ir pietiekamā daudzumā, lai uztvertu un apgūtu šos apakštematus, bet, apskatot sīkāk Vjeta teorēmas uzdevumus, tie noteikti varētu būt vairāk. Nākamie divi apakštemati ir “Kvadrātviendājuma grafiskā risināšana” un “Kvadrātviendājumu izmantošana teksta uzdevumu risināšanā”. Abu apakštematu teorija un paraugi ir viens pēc otra un pēc tam ir liels klāsts ar uzdevumiem par šiem pēdējiem apakštematiem un pēc tiem, skolēniem ir iespēja izpildīt paškontroles darbu, lai pārbaudītu savas zināšanas par apgūto tematu.

Mācību grāmatā [3] temata apguve tiek iesākta ar ļoti īsu aprakstu par kvadrātviendājumiem un pirmais apakštemats ir nepilnie kvadrātviendājumi un to atrisināšana. Tāpat kā [4], ir pieejams teorijas konspekts un risināšanas piemēri, doti vairāk nepilno kvadrātviendājumu atrisināšanas uzdevumi nekā bija iepriekšējā grāmatā. Tālāk tiek apgūta pilno kvadrātviendājumu atrisināšana, sākot ar diskriminanta vērtības aprēķināšanu, sakņu skaita noteikšanu un sakņu aprēķināšanas formulu. Grāmatā piedāvātie uzdevumi ir labi, to daudzums ir pietiekams, bet prasītos lielāka dažādība, lai skolēniem būtu interesantāks mācību process, nevis vienveidīgi uzdevumi. Nākamais apakštemats “Kvadrātviendājuma sakņu skaita noteikšana atkarība no parametra” ir ļoti īss, jo pamatprasme atrisināt kvadrātviendājumus tika apgūta iepriekš, tagad klāt nāk parametri, kur aprēķinot diskriminantu ir jāapskata visi iespējamie gadījumi, kad diskriminants ir vienāds, lielāks vai mazāks nekā nulle. Šeit uzdevumu ir maz, bet tie ir tādā daudzumā, lai šo īso tematu gan paspētu apgūt, gan vingrināties zināšanu nostiprināšanai. Tālākie divi apakštemati ir par kvadrātrinomiem un to sadalīšanu reizinātājos. Teorija ir īsa, jo polinomu sadalīšana reizinātājos tiek apgūta jau 7. klasē, tādēļ šis apakštemats skolēniem ir zināms un nav jāapgūst no pamatiem. Atbilstoši apakštematam uzdevumi ir pietiekamā daudzumā, bet tie ir vienveidīgi, šeit būtu nepieciešams iekļaut arī kādu netradicionālāku uzdevumu, kur skolēni varētu attīstīt prasmi risināt nestandarta piemērus. Tālāk tiek apgūta kvadrātviendājumu grafiskā atrisināšana, kas pēc grāmatas materiāla ir vienai mācību stundai, doti divi piemēru risināšanas paraugi un patstāvīgai risināšanai ir viens uzdevums, ar kuru var apgūt šo apakštematu, bet noteikti būtu nepieciešams vēl kāds uzdevums, ko uzdot skolēniem patstāvīgai pildīšanai, lai nostiprinātu prasmi zīmēt funkcijas grafiku. Nākamais apakštemats ir veltīts Vjeta teorēmai, kas ir viens no tematiem, kur ir ļoti plašs uzdevumu

klāsts, kā arī tie ir ļoti daudzveidīgi. Un pēdējais apakštemats ir par teksta uzdevumu risināšanu ar kvadrātviņņadojuma palīdzību, no teorijas puses viss ir īsi un ļoti konkrēti, jo šeit galvenā ideja ir teksta uzdevumu atrisināšanas algoritms. Uzreiz pēc īsā piemēra un risināšanas algoritma ir pieejami daudz un dažādi teksta uzdevumi. Tāpat kā iepriekšējā grāmatā, arī šeit temata noslēgumā ir pieejams paškontroles darbs, lai pārbaudītu savas iegūtās zināšanas.

2014. gadā izdotajā mācību grāmatā [2] temats "Kvadrātviņņadojumi" sākas ar nepilnajiem kvadrātviņņadojumiem, kur atsevišķi katram no veidiem ir sava apakšnodaļa, pie katras no tām ir atsevišķi uzdevumi par konkrēto nepilnā kvadrātviņņadojuma veidu. Tālāk tiek lietotas saīsinātās reizināšanas formulas, piemēram, lai atdalītu pilno kvadrātu, šis apakštemats skolēniem jau ir pazīstams, jo 8. klases pirmais temats ir polinomu sadalīšana reizinātājos, kurā bija jāpielieto saīsinātās reizināšanas formulas. Pirms sākas pilnā kvadrātviņņadojumu atrisināšanas apguve, tiek pildīti praktiska satura uzdevumi, kas ir saistīti ar skolēnu ikdienu, piemēram, bumbas mešana, kas ietver fizikas mācību saturu, vietu skaita aprēķināšana zālē. Nākamie trīs apakštemati ir par pilnajiem kvadrātviņņadojumiem, to koeficientiem, kvadrātviņņadojumu izveidošanu no tiem, diskriminanta vērtības un sakņu aprēķināšanas formulām, kā arī par kvadrātviņņadojuma sakņu skaita noteikšanu, izmantojot diskriminanta vērtību. Visiem apgūstamajiem soļiem ir savs apakštemats un beigās katrā no tiem ir pa pieciem dažādiem uzdevumiem, kas palīdz apgūt šo tematu un vēl papildus vingrināties formulu lietošanu. Viens apakštemats tiek veltīts kvadrātviņņadojumu atrisināšanai, veicot ekvivalentus pārveidojumus, lai atgādinātu, ko nozīmē veikt ekvivalentus pārveidojumus, ir parādīti triviāli piemēri un pēc tiem ir parādīti trīs risināšanas paraugi dažāda veida piemēriem. Uzdevumu skaits ir pietiekams, lai veiksmīgi apgūtu tematu, uzdevumu ir dažādu grūtības līmeņu, tos būtu viegli izmantot diferencētās mācību stundās. Nākamajā apakštematā apgūst teksta uzdevumu risināšanu pēc algoritma, kas ir dots apakšnodaļas sākumā un pēc tā uzreiz seko viens risināšanas paraugs un vairāk nekā viena lapa ar risināmiem teksta uzdevumiem, šie uzdevumi ir sakārtoti pēc grūtības pakāpes, no vieglākiem uz grūtākiem. Tālāk seko apakštemats, kurš ir iekļauts tikai šajā grāmatā, kas ir kvadrātviņņadojumu risināšanas vēsture, zem kura ir arī četri uzdevumi, bet pats apakštemats balstās uz grāmatas un interneta resursu analīzi par to, kā radušies kvadrātviņņadojumi. Tālāk seko divi apakštemati, kas ir par Vjeta teorēmu un tās izmantošanu. Uzdevumu ir ļoti daudz un ar tiem pietiek, lai apgūtu Vjeta teorēmu. Pēc Vjeta teorēmas ir apgūti visi kvadrātviņņadojumu atrisināšanas veidi, tāpēc pēc tiem seko kopsavilkums un to risināšana ar atbilstošāko metodi, bet pēc tās ir kvadrāttrinomu sadalīšana reizinātājos. Nākamais ir vēl viens apakštemats par teksta uzdevumiem, bet tagad tas ir aprakstīts

kā situāciju analīze. Ir ļoti daudz uzdevumu, kas ir sadalīti teksta uzdevumos par praktisku saturu, skaitļiem un finansēm, pirms dotajiem uzdevumiem, katrā no nosauktajiem virzieniem ir pieejami risinājumu paraugi. Pēdējais apakštemats ir kvadrātviņņadojumi ar parametru, šeit uzdevumu ir maz, tikai divi, arī iepriekšējā grāmatā šajā apakštematā bija maz šāda veida uzdevumu. Iepriekšējās grāmatās temata noslēgumā paškontroles uzdevumi, bet šajā grāmatā vispirms ir nodaļas pārskata uzdevumi, kurus skolēni var izmantot kā papildus materiālu arī temata apguves laikā, un pēc tam paškontroles uzdevumi. [2]

2017. gadā tika izdota 2008. gada grāmatas [4] — pārstrādātā versija [3]. Pārstrādātās grāmatas materiāls ir nepārskatāms, ar maz risinājuma paraugiem, kas skolēniem ir nepieciešami, lai pašvirzīti apgūtu tematu. Pirmais apakštemats, kas tiek apskatīts ir kvadrātviņņadojumu risināšana grafiski, šo pirmo apakštematu izskaidro iepriekšējie lielā temata punkti, kur skolēniem ir jāapgūst kvadrātfunkcijas grafika zīmēšana. Tālāk seko tādi apakštemati kā — diskriminanta vērtību un sakņu aprēķināšana, sakņu skaita noteikšana, kas ir visās grāmatās un ir pieņemami, bet tālākie apakštemati nav nodalīti kā apakštemati, ar maziem burtiem lapu malās ir rakstīts, kas tiks apgūts ar konkrētajiem uzdevumiem, bet trūkst risinājuma paraugu, lai skolotājiem būtu vieglāk diferencēt mācību saturu, jo skolēniem ar zemāka līmeņa zināšanām ir nepieciešami papildu materiāli, kas šajā gadījumā būtu uzdevumu risināšanas paraugi. Salīdzinot ar iepriekšējo grāmatas versiju, tad atbilstoši jaunajai programmai, būtu parocīgāk izmantot [4] grāmatu, jo tajā ir skaidri paskaidrota teorija, doti pārskatāmi risināšanas paraugi. Dotas 7 lappuses ar uzdevumiem, kuros nav nodalīts, kad sākas jauns apakštemats, piemēram, sadalīšana reizinātājos. Tāpat kā iepriekšējā grāmatā, arī šajā ir sadaļa zināšanu pārbaudei, kur ir iekļauti uzdevumi par visu, kas tika apgūts šajā tematā. [5]

Apskatot apakštematu secību visās grāmatās, pēc autores domām, I.Čečinas, T. Matrosovas un E. Teterovskas 2008.gada mācību grāmata 8. klasei [4], ir pārskatāmāka un labāk strukturēta nekā pārējās, skatīt 8. att. Vismazāk praktiska grāmata (skat. 9. att.) ir 2017. gadā izdotā [5], jo skolēniem mācoties pašvirzīti ir nepieciešams kāds atbalsta punkts mācību procesā, bet šajā tematā to ir maz un tos ir grūti ieraudzīt.

6. Kvadrātvienādojumi 105–132

Pilnie kvadrātvienādojumi	108
Nepilnie kvadrātvienādojumi	113
Vienādojums $ax^2 + c = 0$	113
Vienādojums $ax^2 + bx = 0$	114
Vienādojums $ax^2 = 0$	115
Kvadrātrinoma sadalīšana reizinātājos	118
Vjeta teorēma	119
Kvadrātvienādojuma grafiskā risināšana	124
Kvadrātvienādojumu izmantošana teksta uzdevumu risināšanā	126

4. Kvadrātfunkcija un kvadrātvienādojumi	94
Kvadrātfunkcija, tās grafiks — parabola	96
Kvadrātvienādojuma atrisināšana	104
Atklāj teorēmu!	114
Dažādi kvadrātvienādojumu atrisināšanas veidi	118
Es protu	120

8. att. Kvadrātvienādojumu satura secība avotā [4]

9. att. Kvadrātvienādojumu satura secība avotā [3]

Pārējās grāmatas būtu piemērotas pašvirzītam procesam, lai skolēni paši dara, jo šīs grāmatas ir strukturētas, ir skaidrs, kurā lappusē skatīties, jo tas ir iekļauts saturā, kā arī grāmatās ir redzami konkrētie virsraksti, kuri iztrūkst jaunākajā grāmatā. Savukārt, apskatot grāmatas no temata sakārtotības un sadrumstalotības viedokļa visnepraktiskākā grāmata ir 2014. gadā izdotā, jo temats ir izstieps ļoti gari (skat. 10. un 11. att.) un, piemēram, apakštematus par teksta uzdevumiem un praktiska satura uzdevumiem varētu apvienot zem viena liela apakštemata, to pašu būtu nepieciešams izdarīt arī ar nepilnajiem kvadrātvienādojumiem un kvadrātrinomu sadalīšanu reizinātājos, ko varētu apvienot ar saīsināto reizināšanas formulu apakštematu, šāda tematu apvienošana novērstu temata sadrumstalotību, pie kā šobrīd tiek strādāts jaunajā standartā matemātikā, atsaucoties uz [2] avotu. Visās grāmatās ir plašs klāsts ar uzdevumiem, bet ir tādi apakštemati, kuros būtu nepieciešams novērst uzdevumu vienvēidību, piemēram, 2009. gada mācību grāmatā pie polinomu sadalīšanas reizinātājos [3]. Nevienā no grāmatām nav parādīts, kā tiek iegūtas formulas - diskriminanta un sakņu. Formulas un piemēru risināšanas paraugi ir, bet skolēniem nav priekšstata par to, kā formulas ir rodas, jo tās jau ir dotas priekšā.

8. nodaļa. Kvadrātvienādojumi	86
8.1. Vienādojumi $x^2 = t$ un $ax^2 = t$	88
8.2. Vienādojums $(x + k)^2 = t$	90
8.3. Reizinājuma vienādība ar nulli	92

10. att. Kvadrātvienādojumu satura secība avotā [2]

8.4. Saisināto reizināšanas formulu lietošana vienādojumu atrisināšanā.....	95
8.5. Praktiska satura uzdevumi.....	97
8.6. Vispārīgais kvadrātviendājums.....	98
8.7. Vispārīgā kvadrātviendājuma atrisināšanas formula.....	101
8.8. Kvadrātviendājuma sakņu skaits.....	103
8.9. Kvadrātviendājumu atrisināšana, veicot ekvivalentus pārveidojumus.....	105
8.10. Teksta uzdevumi.....	107
8.11. Kvadrātviendājumu atrisināšanas vēsture.....	110
8.12. Vjeta teorēma.....	112
8.13. Vjeta teorēmas izmantošana.....	115
8.14. Kopsavilkums par kvadrātviendājumu veidiem.....	117
8.15. Kvadrātviendājumu sastādīšana un atrisināšana ar atbilstošu metodi.....	119
8.16. Kvadrāttrinoma sadalīšana reizinātājos.....	121
8.17. Situāciju analīze, izmantojot kvadrātviendājumus.....	126
*8.18. Kvadrātviendājumi ar parametru.....	131
8. nodaļas pārskata uzdevumi.....	133

11. att. Kvadrātviendājumu satura secība avotā [2]

3. MATERIĀLS SKOLOTĀJIEM PAR TEMATU “KVADRĀTVIENĀDOJUMI”

3.1. Temats “Kvadrātvienādojumi”

Materiāls izstrādāts balstoties uz Skola2030 ieteikto temata apguves secību (skat. 3. tabulu).

3. tabula. Temata apguves secība

Nepilnie kvadrātvienādojumi un to atrisināšana	Saīsināto reizināšanas formulu pielietošana	Kvadrātrinoma sadalīšana reizinātājos	Diskriminanta un sakņu formulu izmantošana	Ģeometriskā satura uzdevumi	*Vjeta teorēmas apguve
--	---	---------------------------------------	--	-----------------------------	------------------------

Apgūstot tematu, atsaucoties uz [22], uzsvars ir jāliek uz šādām Skola2030 piedāvātajām “ziņām”:

- katru kvadrātrinomu var pierakstīt kā binoma kvadrāta un skaitļa summu (starpību); šo sakarību var izmantot, lai pamatotu sakņu formulu. (M.Li.2., M.Li.4.)
- kvadrātvienādojuma sakņu eksistenci un skaitu var noteikt, izmantojot atbilstošās funkcijas grafiku vai aprēķinot diskriminanta skaitlisko vērtību. (M.Li.4.)
- kvadrātvienādojumu var atrisināt dažādi – spriežot, izmantojot grafiku, ar sakņu formulām. (M.Li.2., M.Li.4.)
- dažkārt ar kvadrātvienādojumiem ir jāveic ekvivalenti pārveidojumi, lai iegūtu vienādojumus, kuru atrisināšana ir zināma. (M.Li.4.)

Plānojot mācību procesā risināmos uzdevumus, jāņem vērā apgūstamās prasmes:

- nosaka kvadrātvienādojuma sakņu skaitu, izmantojot diskriminanta skaitlisko vērtību;
- lieto sakņu formulu, lai atrisinātu kvadrātvienādojumu;
- veic ekvivalentus pārveidojumus, lai kvadrātvienādojumu pārveidotu pamatformā;
- atrisina situāciju uzdevumus, izmantojot kvadrātvienādojumu.

Sasniedzamais rezultāts - sadarbojas, analizē dotos kvadrātvienādojumu piemērus, atlasa tos, par kuriem ir droši, ka jau prot atrisināt, stāsta par atrisināšanas paņēmieni vai vairākiem paņēmieniem, grupē vienādojumus un skaidro izvēlēto pazīmi.

Lai sasniegtu plānoto stundas mērķi, skolēniem jāpiedāvā dažādi vienādojumi un jārosina diskusija. Uzdevumi skolēniem varētu būt:

1. Sašķiro dotos vienādojumus (skat. 4. tabulu) divās kaudzēs – vienā kaudzē vienādojumi, kurus māki atrisināt, bet otrā – kurus nemāki atrisināt!
2. Sagrupē piemērus, kurus proti atrisināt, pēc risināšanas metodes!

Skolotājs var darbu organizēt gan kā pāru, gan kā grupu darbu, gan arī kā diskusiju un kopīgu piemēru analizēšanu. Vērojot skolēnu darbu, nepieciešamības gadījumā dažiem var piedāvāt atkārtotuma darba lapu par sadalīšanu reizinātājos (skat. 1. pielikumu).

Ja nepieciešams, tad skolotājs var pateikt risināšanas metodes:

- sadalīšana reizinātājos un reizinājuma pielīdzināšana 0;
- divu kvadrātu vienādība.

4. tabula. Piemēri grupu darbam

$x^2 = 9$	$x(x - 2) = 0$	$x^2 - 16 = 0$
$(x + 3)^2 = 4$	$x^2 + 2x + 1 = 0$	$x^2 + x = 0$
$1 + 4x^2 = 0$	$20x^2 = 0$	$4x^2 + 2x - 3 = 0$
$2x^2 + 4x - 3 = 0$	$2x^2 - 162 = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 1$
$x^2 - 6x + 9 = 100$	$x^2 - 6x + 8 = 0$	$1,3x^2 = 17$
$-5x^2 + 4x = 0$	$5x^2 = 20x$	$0,7x^2 = 2,8$

Principā skolēniem ir visas nepieciešamās priekšzināšanas (sadalīšana reizinātājos un spriedums par reizinājuma vienādību ar 0; binoma kvadrāta atdalīšana un spriedums par kvadrāta vienādību ar kādu skaitli), lai atrisinātu visus piedāvātos piemērus, bet, iespējams, ka vairums skolēnu nespēs patstāvīgi nonākt līdz šādam secinājumam un piemēru atrisināšanai.

Piemēri ir izvēlēti tā, lai rosinātu skolēniem domāt par risināšanas veidu, piemēram, var pamanīt secību un norādes:

- $x^2 = 9$;
- $(x + 3)^2 = 4$;
- $x^2 + 2x + 1 = 0$;
- $x^2 - 6x + 9 = 100$;
- $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Pēc skolēnu patstāvīgas darbošanās kopīgi tiek izrunātas vispārīgās metodes (izmantots avots [2]), kā risināt nepilnos kvadrātvienādojumus. Piemērus treniņam var atrast avotā [8].

Vienādojums $x^2 = t$

Ja vienādojums ir dots formā $x^2 = t$, kur $t \geq 0$, tad atrisinājums būs gan \sqrt{t} , gan tās pretējais skaitlis $-\sqrt{t}$, jo $(\sqrt{t})^2 = t$ un arī $(-\sqrt{t})^2 = (-1 \cdot \sqrt{t})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{t})^2 = 1 \cdot t = t$.

Tātad abi skaitļi \sqrt{t} un $-\sqrt{t}$ ir vienādojuma $x^2 = t$ atrisinājumi. Pirmo atrisinājumu apzīmējam ar x_1 , bet otro – ar x_2 . Īsāk pierakstot:

$$x^2 = t \quad (t \geq 0)$$

$$x_1 = \sqrt{t} \text{ un } x_2 = -\sqrt{t}$$

$$\text{jeb } x = \pm\sqrt{t}.$$

Vienādojums formā $ax^2 = t, (a \neq 0)$

Risinot vienādojumu, kura pamatā ir formula $ax^2 = t, (a \neq 0)$, saknes iegūsim, ja vienādojuma abas puses izdalīsim ar lielumu a :

$$ax^2 = t \quad | : a \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 = \frac{t}{a},$$

kur atrisinājums eksistēs tikai tad, ja izteiksme $\frac{t}{a}$ ir nenegatīva.

Jāatceras, ja:

- $\frac{t}{a} > 0$, tad vienādojumam ir divas saknes $x_1 = \sqrt{\frac{t}{a}}$ un $x_2 = -\sqrt{\frac{t}{a}}$;
- $\frac{t}{a} < 0$, tad vienādojumam sakņu nav;
- $t = 0$, tad vienādojumam $ax^2 = t$ ir tikai viena sakne:

$$ax^2 = 0 \quad | : a \quad (a \neq 0)$$

$$x^2 = \frac{0}{a}; x^2 = 0$$

$$x = 0.$$

Vienādojums $(x + k)^2 = t$

Ja dots vienādojums, kura pamatforma ir $(x + k)^2 = t$, tad to risina līdzīgi kā vienādojumu $x^2 = t$. Šajā gadījumā jāievēro, ka mainīgā x vietā ir $x + k$:

$$(x + k)^2 = t$$

$$x + k = \pm\sqrt{t}.$$

Tā kā tiek izmantots simbols “±”, tad būs jāatrisina divi lineāri vienādojumi:

$$x + k = \sqrt{t} \text{ un } x + k = -\sqrt{t}$$

$$x_1 = -k + \sqrt{t} \text{ un } x_2 = -k - \sqrt{t}$$

Gadījumā, ja $t < 0$, tad vienādojumam nav sakņu, bet ja $t = 0$, tad tam ir viena sakne $x = -k$.

Vienādojums $ax^2 + bx = 0$

Pēdējā metode, kā atrisināt nepilnos kvadrātvienādojumus, ir vienādojuma kreisās puses sadalīšana reizinātājos, ko pieraksta formā $ax^2 + bx = 0$, kur ($a \neq 0$ un $b \neq 0$).

Kreiso pusi sadalot reizinātājos iegūstam:

$$x(ax + b) = 0$$

Tālāk katru reizinātāju pielīdzina nullei (jo reizinājumā var iegūt 0 tikai tad, ja kāds no reizinātājiem ir 0):

$$x_1 = 0 \quad ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

Tātad iegūstam, ka vienādojumam $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$ un $b \neq 0$) ir divas saknes $x_1 = 0$ un $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Sasniedzamais rezultāts - sadarbojas, dotos trinomus cenšas pierakstīt kā binoma kvadrāta un skaitļa summu (starpību); apmainās ar informāciju, formulē secinājumus (kādās situācijās ir vieglāk, kādās – grūtāk pierakstīt, vai pierakstīt šādā formā var katru trinomu u. tml.)

Lai sasniegtu sasniedzamo rezultātu, skolēni trenējas formulu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ un $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ saskatīšanā un lietošanā. Mācību stundas laikā jāpievērš uzmanība pareizai matemātiskajai valodai, lietojot terminus “summas kvadrāts” un “starpības kvadrāts”.

Uzdevumi pašvirzītai temata apguvei varētu būt šādi:

- 1) Ieraksti trūkstošo monomu, lai identitāte būtu patiesa!

Ievadā skolēniem var dot šāda veida uzdevumu no [2] grāmatas (skat. 5. tabulu).

5. tabula. Uzdevums par binoma kvadrāta formulām

a) $4d^2 + 4d + \underline{\hspace{1cm}} = (2d + 1)^2$	d) $(0,4 + 3b)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$
b) $9m^2 + \underline{\hspace{1cm}} + 4 = (3m + 2)^2$	e) $(0,4 + 3b)^2 = \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}$
c) $\underline{\hspace{1cm}} - 10y + 25 = (y - 5)^2$	f) $36k^2 - 24k + \underline{\hspace{1cm}} = (6k - \underline{\hspace{1cm}})^2$

2) Pārveido dotos trinomus par binoma kvadrātu. [6]

a) $u^2 + 2uv + v^2$

e) $4n^2 - 12n + 9$

b) $a^2 + 2a + 1$

f) $b^2 + 1,4b + 0,49$

c) $4y^2 + 12y + 9x^2$

g) $1 + 2m + 0,25m^2$

d) $100c^2 + 20ac + a^2$

h) $16x^4 + 24x^3 + 9x^2$

Sasniedzamais rezultāts - mēģina vienkāršos gadījumos izmantot binoma kvadrāta formulu pilno kvadrātviņņadojumu atrisināšanai.

Mācību stundas mērķa realizēšanai, skolēniem tiek iedoti uzdevumi, kuros jāatdala binoma kvadrāts un jāspriež par viņņadojuma atrisināšanas metodi.

Atrisināt viņņadojumu $x^2 + 4x + 3 = 0$, atdalot binoma kvadrātu.

Sāksim ar formulas $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ izveidošanu:

$$x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 4 + 3 = 0$$

$$(x + 2)^2 - 1 = 0$$

Abām viņņādības pusēm pieskaitām 1 un iegūstam

$$(x + 2)^2 = 1$$

Lai iegūtu 1, kvadrātā ir jākāpina 1 vai -1 . Līdz ar to ir iespējami divi gadījumi:

1) $x + 2 = 1$ jeb $x = -1$,

2) $x + 2 = -1$ jeb $x = -3$.

Tātad dotajam viņņadojumam ir divas saknes $x_1 = -1$ un $x_2 = -3$.

Metode der arī gadījumos, ja kvadrātviņņadojuma saknes ir iracionālas. Piemēram,

$$x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 - 4 = 0$$

$$(x + 2)^2 = 5$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{5}$$

Lai trenētu prasmi saskatīt summas vai starpības kvadrāta formulas un atrisināt kvadrātviņņadojumus, var risināt uzdevumu no [8].

Uzdevums. Pārveidot viņņadojumu formā $(x + k)^2 = t$ un to atrisināt.

Norāde. $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$; $(x - 2)^2 = 1$

1) $x^2 + 6x + 8 = 0$

5) $9x^2 - 12x + 8 = 0$

9) $x^2 + 3x + 2 = 0$

- 2) $x^2 - 10x + 24 = 0$ 6) $4x^2 + 4x - 3 = 0$ 10) $x^2 - 7x + 6 = 0$
 3) $x^2 - 3x - 4 = 0$ 7) $25x^2 - 20x + 8 = 0$ 11) $x^2 - 8x + 15 = 0$
 4) $x^2 + 9x - 10 = 0$ 8) $4x^2 - 4x - 15 = 0$ 12) $x^2 - 18x - 40 = 0$

Sasniedzamais rezultāts - klausās skolotāja spriedumus, veicot pārveidojumus ar vispārīgā veidā pierakstītu trinomu, skolotāja stāstījuma laikā meklē atbildes uz konkrētiem jautājumiem, piemēram, "kā pierakstīt lielumu $\frac{b}{a}$ citādi, lai tas saturētu reizinātāju 2?", pieraksta starprezultātus, diskriminanta izteiksmes un sakņu formulas.

Lai sasniegtu sasniedzamo rezultātu, skolotāja skolēnus iepazīstina ar konkrēta risinājuma paraugu, skatīt 12. att. Pēc tā skolēni kopā ar skolotāju nonāk pie vispārīgā kvadrātvienādojuma atrisinājuma, pieņemot gadījumu, kurā diskriminants ir lielāks nekā nulle (skat. 12. att., kur dota autores ieteiktā formulas iegūšanas gaita).

The image shows a handwritten mathematical derivation. On the left, a specific quadratic equation $2x^2 - 9x + 10 = 0$ is solved by dividing by 2 to get $x^2 - \frac{9}{2}x + 5 = 0$. The coefficient of x is circled, and a note indicates it should be multiplied by 2 to get $2x \cdot \frac{9}{4}$. This leads to completing the square: $x^2 - 2x \cdot \frac{9}{4} + 5 = 0$, then $x^2 - 2x \cdot \frac{9}{4} + (\frac{9}{4})^2 - (\frac{9}{4})^2 + 5 = 0$. This simplifies to $(x - \frac{9}{4})^2 - (\frac{9}{4})^2 + 5 = 0$, then $(x - \frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} - 5$, then $(x - \frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} - \frac{80}{16}$, then $(x - \frac{9}{4})^2 = \frac{1}{16}$. Taking the square root gives $x - \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$ or $x - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$, leading to $x_1 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ and $x_2 = \frac{8}{4} = 2$. On the right, the general case is shown: $ax^2 + bx + c = 0$ is divided by a to get $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. The coefficient of x is circled, and a note indicates it should be multiplied by 2 to get $2x \cdot \frac{b}{2a}$. This leads to $x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{c}{a} = 0$, then $x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = 0$. This simplifies to $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$. The discriminant $D = b^2 - 4ac$ is highlighted in blue. The discriminant formula is given as $D = b^2 - 4ac$. The quadratic formula is then derived: $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}$, then $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{D}{4a^2}}$, then $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}$, leading to $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

12. att. Risināšanas paraugs skolēniem un vispārīgs gadījums diskriminanta un sakņu formulu iegūšana

Nevienā no jaunākajām šobrīd skolā izmantotajām grāmatām ([2],[3],[4],[5]) nav parādīts, kā iegūst sakņu aprēķināšanas formulas. Formulu izvedumus var atrast divās senāk izdotās grāmatās [11] un [9]. Sakņu formulas izvedums no [9] dots 13. att.

***Vispārīgā kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ sakņu aprēķināšanas formulas pierādījums**

Formulu

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Iegūst, vienādojuma kreisajā pusē izdalot binoma kvadrātu. Tam nepieciešami vairāki ekvivalenti pārveidojumi.

- 1) Vienādojuma abas pušes izdalām ar a (jo $a \neq 0$):

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$
- 2) otro saskaitāmo reizinām un dalām ar 2:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a};$$
- 3) vienādojuma abām pusēm pieskaitām vienu un to pašu skaitli $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2;$$
- 4) vienādojuma kreiso puši uzrakstām kā binoma kvadrātu:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \text{ jeb } \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$
- 5) pieņemot, ka $b^2 - 4ac \geq 0$, izsakām binomu $x + \frac{b}{2a}$:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}; \quad x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$
- 6) izsakām mainīgo x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ jeb } x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ kur}$$

$$D = b^2 - 4ac.$$

13. att. Sakņu aprēķināšanas formulas izvedums [9]

Spējīgākajiem skolēniem var piedāvāt pētniecisko darbu par kvadrātvienādojuma atrisināšanas pāru formulu, kad dots gan [11], gan [9].

Kvadrātvienādojuma atrisināšanas pāru formula

Ja kvadrātvienādojumā $ax^2 + bx + c = 0$ koeficients pie mainīgā x ir pāra skaitlis, tas ir, $b = 2k$ (kur k — jebkurš vesels skaitlis), tad vienādojumu var uzrakstīt šādi:

$$ax^2 + 2kx + c = 0,$$

bet vienādojuma saknes aprēķināt pēc pāru formulas:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Jāievēro, ka **vienādojumam reālas saknes eksistē tikai tad, ja zemsaknes izteiksme (diskriminants) ir lielāks nekā nulle.**

Sakņu aprēķināšanas formulu iegūst no vispārīgā kvadrātvienādojuma sakņu aprēķināšanas formulas, b vietā rakstot $2k$, un iegūto izteiksmi vienkāršojot:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Piemēram, lai atrisinātu kvadrātvienādojumu $8x^2 - 2x - 1 = 0$, ievērojam, ka koeficients pie mainīgā x ir pāra skaitlis -2 ; tātad $2k = -2$; $k = -2 : 2 = -1$, un saknes aprēķinām, izmantojot pāru formulu:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 8 \cdot (-1)}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{8} = \frac{1 \pm 3}{8}$$
$$x_1 = \frac{1 + 3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - 3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Sasniedzamais rezultāts – vingrinās ar sakņu formulu atrisināt kvadrātvienādojumu, iegūst veiklību risināšanā.

Lai skolēni vingrinātos lietot iegūtās formulas un pēc diskriminanta vērtības iegūšanas noteiktu sakņu skaitu, var izmantot šādus uzdevumus:

- 1) Skolēniem tiek iedoti trīs piemēri, kuru diskriminanta vērtība salīdzinot ar nulli ir lielāka, vienāda vai mazāka nekā nulle.

Piemēram, $3x^2 + 5 - 2 = 0$; $9x^2 + 6x + 1 = 0$ un $4y^2 - 3y + 2 = 0$. Skolēni skolotājas virzīti nonāk pie secinājumiem par sakņu skaitu atkarībā no diskriminanta vērtības, iegūtās zināšanas pielieto tālākā uzdevuma izpildē.

- 2) Skolēni vingrinās pielietot diskriminanta formulu, sakārtojot dotos kvadrātvienādojumus pa grupām – divas saknes, viena sakne un sakņu nav (skat. 6. tabulu).

6. tabula. Piemēri risināšanai

$x^2 + 4x + 4 = 0$	$4x^2 + 5x + 2 = 0$	$3c^2 + 3c - 6 = 0$
$5y^2 + y - 6 = 0$	$6v^2 + 10v + 5 = 0$	$9b^2 - 6b + 1 = 0$
$3a^2 + 2a + 1 = 0$	$x^2 + 8x + 16 = 0$	$-2x^2 + 6x + 8 = 0$

Piemērs no prezentācijas materiāla grupēšanai, ja ir pieejama interaktīvā tāfele. Uzdevuma sākumā uz programmas *PowerPoint* var atvērt iepriekš sagatavotu tukšu tabulu (skat. 14. att.), zem kuras ir redzami dotie uzdevuma piemēri. Skolēni pa vienam var iet un ievietot kvadrātvienādojumus pie atbilstošā sakņu daudzuma.

D<0 Sakņu nav	D=0 Viena sakne	D>0 Divas saknes
$6v^2 + 10v + 5 = 0$	$x^2 + 4x + 4 = 0$	$-2x^2 + 6x + 8 = 0$
$5y^2 + y - 6 = 0$ $3a^2 + 2a + 1 = 0$	$4x^2 + 5x + 2 = 0$ $x^2 + 8x + 16 = 0$	$3c^2 + 3c - 6 = 0$ $9b^2 - 6b + 1 = 0$

14. att. Ekrānuņņēmums no *PowerPoint* prezentācijas

Skolēni ir apguvuši prasmi lietot diskriminanta un sakņu formulas, lai šajā stundā sasniegtu mērķi, ieteiktu dot dažāda veida uzdevumus, kurus vingrināties, uzsvaru liekot uz to, ka saskaitāmie var būt jauktā secībā, kā arī mainīgos var apzīmēt ar citiem burtiem, nevis tikai ar burtu "x". Uzdevumi, kurus var izmantot, lai iegūtu prasmi risināt kvadrātvienādojumus.

1) Aprēķini kvadrātvienādojumu saknes!

Uzdevumā iekļaujam piemērus, kuros saskaitāmie ir jau sakārtoti pareizā secībā (sākot ar augstāko mainīgā pakāpi), gan piemērus, kuros saskaitāmie ir samainīti ar vietām un burts "x" ir nomainīts uz citiem burtiem (skat. 7. tabulu).

7. tabula. Piemēri risināšanai

$-14b + 5b^2 = -8$	$8 + 7e = e^2$	$3k^2 - 11k + 6 = 0$
$2y^2 - 9y + 7 = 0$	$-16t + t^2 + 64 = 0$	$5x^2 + 5x + 1 = 0$
$6 + 9a + 5a^2 = 0$	$6v + 8 = -5v^2$	$-12g + 4 + 9g^2 = 0$

2) Skolēniem, kuriem ar sakņu aprēķināšanu ir grūtības, var dot palīgmateriālu pašvirzītai sakņu aprēķināšanas apguvei (skat. 15. att.).

1) $3x^2 - 5x + 2 = 0$	2) $7s^2 + 11s + 4 = 0$	3) $y^2 + 7y - 60 = 0$
$a = 3; b = -5; c = \dots$	$a = 7; b = \dots; c = \dots$	$a = \dots; b = \dots; c = \dots$
$D = b^2 - 4ac =$	$D = b^2 - 4ac =$	$D = \dots =$
$= (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = \dots$	$= 11^2 - 4 \cdot \dots = \dots$	$= \dots - 4 \cdot 1 \cdot (-60) = \dots$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$s = \frac{-b \pm \sqrt{\dots}}{2 \cdot \dots}$	$y = \frac{\dots \pm \sqrt{\dots}}{\dots}$
$x = \frac{-(-5) \pm \dots}{2 \cdot 3}$	$s = \frac{-\dots \pm \dots}{2 \cdot 7}$	$y = \frac{-\dots \pm \dots}{\dots}$
$x_1 = \dots$	$s_1 = \dots$	$y_1 = \dots$
$x_2 = \dots$	$s_2 = \dots$	$y_2 = \dots$

15. att. Palīgmateriāls skolēniem

Sasniedzamais rezultāts - izvēlas paņēmieni, lai atrisinātu nepilno kvadrātvienādojumu, uzklausu citu veidotos risinājumus, argumentus paņēmiena izvēlei.

Ņemot vērā temata apguves plānoto secību, šo sasniedzamo rezultātu autore paplašinātu tā, lai šajās mācību stundās tiktu atrisināti ne tikai nepilnie kvadrātvienādojumi, bet arī pilnie kvadrātvienādojumi, vai arī šo sasniedzamo rezultātu realizētu uzreiz pēc nepilno kvadrātvienādojumu apguves. Vingrināšanās uzdevumi, kurus var izmantot, nepilno un pilno kvadrātvienādojumu atrisināšanai:

1) Atrisini vienādojumus! [4]

Dot tādus piemērus, kuros ir sajaukti dažāda risināšanas veida piemēri.

a) $2x^2 - 162 = 0;$	d) $1 - 25a^2 = 0;$	g) $7y^2 - 5y - 2 = 0;$
b) $\frac{2}{5}x^2 + x = 0;$	e) $2s^2 + 5s + 3 = 0;$	h) $25x^2 + 20x + 4 = 0;$
c) $y^2 - 11 = 0;$	f) $-5g^2 + g - 9 = 0;$	i) $2y^2 - 8y + 10,4 = 0.$

2) Atrisini kvadrātvienādojumus! [3]

a) $x^2 - 900 = 0;$	d) $4t^2 - 3t = 0;$	g) $4z^2 - 16z + 15 = 0;$
b) $y^2 - 9y = 0;$	e) $x^2 + 6x - 7 = 0;$	h) $p^2 + 3p - 1 = 0;$
c) $4y = 16y^2;$	f) $v^2 - 2v + 1 = 0;$	i) $16y^2 - 24y - 7 = 0.$

Sasniedzamais rezultāts - lieto un skaidro ekvivalentos pārveidojumus, lai kvadrātvienādojumu pārveidotu pamatformā.

Lai skolēni sekmīgāk sasniegtu šo sasniedzamo rezultātu, mācību stundas sākumā ir jāatkārto, kas ir ekvivalenti pārveidojumi. Tiem skolēniem, kuriem ir grūtības tos atcerēties, tiek izsniegta ekvivalentu pārveidojumu atgādne, kuru var apskatīt 2. pielikumā. Lai attīstītu prasmi risināt vienādojumus, kuros ir jāveic ekvivalenti pārveidojumi. Mācību stundu laikā jālieto pareiza matemātiskā valoda, piemēram, abām vienādojuma pusēm pieskaitām vai atņemam vienu un to pašu skaitli (nevis “Pārnesam uz otru pusi, mainot zīmi.”).

- 1) Atsaucoties uz [2] avota materiālu, skolēniem vingrinoties var dot vieglāka līmeņa ekvivalentu pārveidojumu piemērus.

Atrisini vienādojumus!

a) $x^2 + \frac{2}{3}x + 2 = 0$; c) $7x - 2x^2 = 6$; e) $-0,6t^2 + 0,6t + 3,6 = 0$;
b) $y^2 = 12y - 11$; d) $\frac{2}{5}m^2 + 1\frac{4}{5}m - 1 = 0$; f) $-\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{8}{9}x - 2\frac{2}{3} = 0$.

- 2) Kad skolēni pamatlīmeņa uzdevumus ir apguvuši, var dot tiem grūtākus piemērus.

Atrisini vienādojumus! [2]

a) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$; c) $\frac{3y-y^2}{2} = \frac{7y-2y^2}{6}$
b) $\frac{x^2-x}{7} + \frac{3x-5}{21} = \frac{x-1}{3}$; d) $\frac{2t^2+3t}{3} = 13 - \frac{2t^2+2t}{6}$

Sasniedzamais rezultāts - sastāda kvadrātvienādojumu, modelējot ģeometriskā satura problēmu, atrisina kvadrātvienādojumu, nosaka atrisinājuma atbilstību kontekstam.

Sasniedzamais rezultāts - risina situāciju uzdevumus ar praktisku, citu mācību jomu kontekstu, izveidojot un atrisinot kvadrātvienādojumu.

Lai sasniegtu sasniedzamos rezultātus skolotāja skolēniem uzdod risināt teksta uzdevumu, skolēni salīdzina savus risinājumus un kopīgi nonāk pie ērtākā pieraksta veida, kas ir pareizi noformēts un labi uztverams. Pēc algoritma izveides skolēni vingrinās risināt dažāda veida ģeometriskā un praktiskā satura uzdevumus, izmantojot kvadrātvienādojumu atrisināšanu. Uzdevumi sasniedzamo rezultātu sasniegšanai, 1.-3. uzdevums ir par ģeometriskā satura problēmām, bet 4.-6. uzdevums par citu mācību jomu kontekstu:

- 1) Taisnstūra perimetrs ir $20 m$, bet laukums ir vienāds ar $21 m^2$. Aprēķināt taisnstūra malu garumus! [3]

- 2) Lai realizētu savu ieceri, māksliniecei jāuzglezno divas gleznas: vienai būs kvadrāta forma, bet otrai – taisnstūra. Aprēķini šo gleznu izmērus, ja taisnstūrveida gleznas viena mala būs par 10 cm garāka, bet otra par 8 cm īsāka nekā kvadrātveida gleznai, turklāt abām gleznām ir nepieciešams audekls, kura kopplatība ir 3200 cm^2 , ir jau sagatavots. [2]
- 3) Uz taisnstūrveida lapas, kuras perimetrs bija 42 dm, Aigars uzzīmēja plakātu. Lai plakātu nodotu izstādei, Aigars to uzlīmēja uz balta taisnstūrveida kartona tā, ka apkārt visam plakātam palika 5 cm plata mala. Kartona laukums bija 130 dm^2 . Aprēķini plakāta izmērus pēc dotā plāna. [2]
- 4) Andis, Līga un Rita kolekcijā kompaktus diskus. Līgai disku ir divreiz vairāk nekā Ritai, bet Andim tik, cik ir Līgas disku skaits kvadrātā. Pavisam viņiem ir 22 diski. Cik disku ir Andim? [3]
- 5) Divu pozitīvu skaitļu attiecība ir 3:5. Ja pirmo skaitli palielina par 3, bet otru samazina par 5, tad abu skaitļu kvadrātu summa ir 450. Aprēķini šos skaitļus! [2]
- 6) Izmantojot treniņnoguldījumu “Ozols” ar nemainīgu procentu likmi, Kaspars bankā noguldīja 5000 eiro. Pēc diviem gadiem Kaspars saņēma 5408 eiro. Kāda bija bankas procentu likme gadā? [2]

Sasniedzamais rezultāts - Vjeta teorēmas iegūšana praktiskā ceļā un tās pielietošana.

Jaunajā standartā nav iekļauta kvadrātviendājumu risināšana ar Vjeta teorēmu, bet autora iesaka to saturā atstāt, tādēļ tas ir pēdējais sniedzamais rezultāts, ko var realizēt ar skolēnu pētniecisko darbu. (skat. 8. tabulu) Apgūstot tematu skolēnus var sadalīt grupās, gan pa pāriem, lai realizētu praktisko darbu, kurā skolēni paši nonāks līdz hipotēzei par Vjeta teorēmu. Lai skolēni nostiprinātu zināšanas tiem tiek iedoti papildus uzdevumi, lai – pašvirzīti vingrinātos atrisināt reducētos kvadrātviendājumus ar Vjeta teorēmu, skatīt 8. att.

Kvadrātvienādojums	Saknes		Sakņu reizinājums	Sakņu summa
$x^2 - 10x + 25 = 0$				
$x^2 - 5x + 6 = 0$				
$x^2 - 6x + 8 = 0$				
$x^2 - 16x + 48 = 0$				
$x^2 + 3x - 4 = 0$				
$x^2 - x - 56 = 0$				
$x^2 - 2x - 15 = 0$				
$x^2 + 5x + 4 = 0$				
$x^2 - 9x + 20 = 0$				

Pēc tabulas aizpildīšanas skolēni salīdzina iegūtos rezultātus ar reducētā kvadrātvienādojuma koeficientiem, izvirza hipotēzi par kvadrātvienādojuma saknēm, ja koeficients $a = 1$.

Lai skolēni pašvirzīti apgūtu Vjeta teorēmu, var dot šāda veida piemērus, kuros ar katru nākamo piemēru ir dots nepilnīgāks risinājums, kas skolēniem ir jāpabeidz. (skat. 16. att.)

1) $x^2 + 7x + 6 = 0$	2) $x^2 + 10x + 16 = 0$	3) $x^2 + 3x - 88 = 0$
$x_1 \cdot x_2 = 6$	$x_1 \cdot x_2 = 16$	$x_1 \cdot x_2 = -88$
$x_1 + x_2 = -7$	$x_1 + x_2 = -10$	$x_1 + x_2 = \dots$
$x_1 = -1$	$x_1 = \dots$	$x_1 = \dots$
$x_2 = -6$	$x_2 = \dots$	$x_2 = \dots$
4) $x^2 + 6x + 8 = 0$	5) $x^2 - 13x + 36 = 0$	6) $x^2 - 21x - 46 = 0$
$x_1 \cdot x_2 = \dots$	$x_1 \cdot x_2 = \dots$	$x_1 \cdot x_2 = \dots$
$x_1 + x_2 = \dots$	$x_1 + x_2 = \dots$	$x_1 + x_2 = \dots$
$x_1 = \dots$	$x_1 = \dots$	$x_1 = \dots$
$x_2 = \dots$	$x_2 = \dots$	$x_2 = \dots$

16. att. Vingrināšanās lapa pašvirzītai Vjeta teorēmas apguvei

Izmantojot [1] pamatosim, ka Vjeta teorēma ir spēkā jebkuram vienādojumam formā $x^2 + bx + c = 0$.

Vjeta teorēmu jeb Vjeta formulas izmanto, lai ātrāk iegūtu reducēto kvadrātvienādojumu saknes. Šo teorēmu atklāja franču matemātiķis Fransuā Vjets (*François Viète*, 1540-1603). Vjeta

formulas veidojas, saskatot sakarību starp kvadrātvienādojuma saknēm un koeficientiem. Ja dots kvadrātvienādojums $x^2 + bx + c = 0$, kura saknes ir p un q , tad to varam pierakstīt šādi:

$$x^2 + bx + c = (x - p)(x - q)$$

Uzmanība jāpievērš, ka, izmantojot Vjeta teorēmu ir x^2 , nevis ax^2 , jo koeficients a reducētajiem kvadrātvienādojumiem ir 1. Izmantojam distributīvo īpašību, lai pārveidotu vienādojuma labo pusi:

$$x^2 + ax + b = x^2 - (p + q)x + pq$$

Tālāk jāveic spriedums par divu polinomu vienādību — divi polinomi ir vienādi, ja to koeficienti pie mainīgā pakāpēm ir vienādi, tādēļ ka $b = -(p + q)$ un $c = pq$. Vienādojuma sakņu reizinājums ir vienāds ar koeficienta c vērtību un sakņu summa ir vienāda ar koeficientam b pretējo skaitli [1]:

$$x_1 + x_2 = -b \text{ un } x_1 \cdot x_2 = c.$$

Piezīme. Vjeta teorēmu var izmantot arī vispārīgā kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ sakņu noteikšanai (jāizmanto palīgvienādojums $y^2 + by + ac = 0$, kuram uzmin saknes y_1 un y_2 , dotā vienādojuma saknes ir $x_1 = \frac{y_1}{a}$ un $x_2 = \frac{y_2}{a}$), kā arī līdzīgas formulas var iegūt arī augstākas pakāpes vienādojumiem.

3.3. Materiāla aprobācija

Realizējot pirmo sasniedzamo rezultātu, autore saskārās ar situāciju, ka skolēniem ir nepietiekamas zināšanas par polinomu sadalīšanu reizinātajos. Šī iemesla dēļ tika izveidota atkārtojuma lapa, lai skolēni savas zināšanas varētu nostiprināt (skat 1. pielikumu). Dažiem skolēniem sadalīšana reizinātajos nesagādāja grūtības, piemēram, 17. att. var apskatīt skolēna risinājuma fragmentu, kurā ļoti veiksmīgi tiek parādīts, kā notiek sadalīšana reizinātajos.

$$b) 18x + x^2 = 0$$

$$x(18 + x) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad 18 + x = 0$$

$$x_2 = -18$$

$$c) -6m + 48m^2 = 0$$

$$-6 \cdot m + 6 \cdot 8 \cdot m \cdot m = 0$$

$$-6m(1 - 8m) = 0$$

$$-6m = 0 \quad 1 - 8m = 0$$

$$m = 0 \quad -8m = -1 \quad |:(-8)$$

$$m = \frac{1}{8}$$

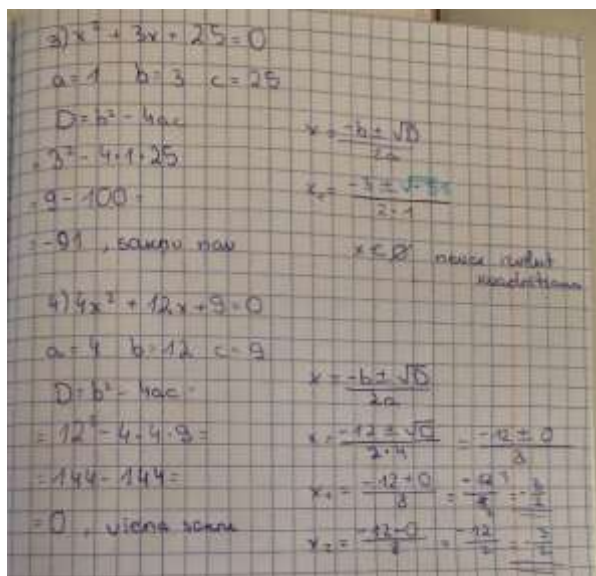
17. att. Skolēna risinājuma fragments

Lai apgūtu nepilnos kvadrātvienādojumus autore bija plānojusi tiem veltīt divas mācību stundas, bet, ņemot vērā skolēnu zināšanu līmeni, mācību process tika mainīts un apakštemata apguve realizējās trīs mācību stundās. Nākamajos sasniedzamos rezultātus par saīsinātajām reizināšanas formulām izdevās realizēt daļēji pēc plānotā, jo skolēni formulas zināja un prata pabeigt, ja bija dota viena puse formulas, bet neprata pielietot vienādojumu risināšanā, tādēļ vairāk laika bija nepieciešams, lai skolēni trenētos pielietot formulas (summas kvadrāts, starpības kvadrāts).

Sasniedzamais rezultāts, kuru skolēniem sasniegt bija visgrūtāk, bija par diskriminanta un sakņu formulu iegūšanu. Bija plānots, ka skolēni autores vadībā nonāks līdz vispārīgajam gadījumam, bet tā kā līdz šim mācību grāmatās daļai formulu nebija izvedumu, skolēni ir pieraduši, ka tās jau tiek iedotas gatavas un nav pašiem nekas jāiegūst, tādēļ plānu nācās mainīt un attālināti neizdevās realizēt visu plānoto.

Ļoti veiksmīga stunda izdevās apgūstot sakņu skaita atkarību no diskriminanta vērtības, kur skolēni ļoti aktīvi iesaistījās mācību stundā, lai arī tā notika attālināti *MS Teams* vidē. Vienīgā palīdzība, kas skolēniem bija nepieciešama, bija to virzīšana uz sakarību par diskriminanta vērtību. Pēc sakarības iegūšanas, skolēni to veiksmīgi lietoja, risinot 18. att. redzamo uzdevumu. Nākamā sasniedzamo rezultātu izdevās realizēt pēc plānotā, skolēni aktīvi iesaistījās mācību procesā un tiem palīdzēja papildu dotais materiāls, skat. 14. att. Skolēniem problēmas neradīja arī kvadrātvienādojuma lieluma “x” nomainīšana uz citiem burtiem, kas parasti skolēniem rada šaubas un neizpratni, jo tur vairs nav lieluma “x”. Tālāk skolēni trenējās risināt ne tikai pilnos

kvadrātvienādojumus, bet arī nepilnos kvadrātvienādojumus, kur arī iepļānotais veiksmīgi tika realizēts. 18. att. var apskatīt cita skolēna risinājumu, kurā skolēniem bija obligāts nosacījums pēc diskriminanta aprēķināšanas norādīt, cik sakņu būs dotajiem kvadrātvienādojumiem.



18. att. Fragments no skolēna risinājuma

Kā nākamais sasniedzamais rezultāts bija jāapgūst ekvivalentu pārveidojumu lietošana kvadrātvienādojumu risināšanā. Lai gan ekvivalentie jeb identiskie pārveidojumi skolēniem jau ir zināmi, tomēr ne visi skolēni uzreiz tos spēja nosaukt un pielietot, tā rezultātā skolēniem *MS Teams* vidē tika nosūtīta ekvivalentu pārveidojumu atgādne. Bija veiksmīga mācību stunda, bet bija skolēni, kuriem nepietiekamo zināšanu dēļ ekvivalentu pārveidojumu apgūšana prasīja ilgāku laiku nekā pārējiem skolēniem. Tālāk tika realizēti 2 sasniedzamie rezultāti par teksta uzdevumu risināšanu gan ar ģeometrisku saturu, gan ar praktisku saturu no citām mācību jomām. Plānotais tika realizēts, skolēni labāk uztvēra ģeometriskā satura uzdevumus, ko tie varēja uzskicēt, lai labāk izprastu prasīto, skat. 19. att. redzamo skolēna risinājumu, kas ir veikts ļoti labi, tikai beigās nosakot otru plakāta malu iegūtā sakne bija jāatņem no 21.

a) plakāta viena mala = x $-22x + x^2 - 22 + x + 130 = 0$

b) plakāta otra mala = $21 - x$ $a = 1, b = -21, c = 108$

c) karstona viena mala = $x + 1$ $\Delta = (-21)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 108 = 441 - 432 = 9$
karstona otra mala = $21 - x + 1$ $x_1 = \frac{21 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{21 + 3}{2} = \underline{\underline{12}}$

d) $(x+1)(21-x+1) = 130$ $x_2 = \frac{21 - 3}{2} = \underline{\underline{9}}$
 $(x+1)(22-x) = 130$
 $22x - x^2 + 22 - x - 130 = 0 \quad | \cdot (-1)$
Atbilde. Viena plakāta mala ir 9 dm, otra - 12 dm

19. att. Skolēna risinājums

Kopā apskatot vienu uzdevumu, skolēni paši nonāca pie risināšanas algoritmiem, ko tālāk veiksmīgi izmantoja, risinot dažādus teksta uzdevumus, skolēna risinājumus skatīt 20. att.

x pirmo rezultātu
 $x+1$ otro rezultātu
 $x+2$ trešo rezultātu

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 110$$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 2x + 4 = 110$$

$$3x^2 + 4x - 105 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-105) = 1296$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{1296}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 36}{6} = \underline{\underline{5}}$$

$$x_2 = \frac{-6 - 36}{6} = \underline{\underline{-5}} \quad \text{nelik}$$

$x = \underline{\underline{5}}$ $5^2 + 6^2 + 7^2 = 110$
 $x+1 = \underline{\underline{6}}$
 $x+2 = \underline{\underline{7}}$

20. att. Skolēna risinājums

Temata pēdējais sasniedzamais rezultāts ir par Vjeta teorēmas apguvi, kur skolēni grupā caur *MS Teams* veica praktisko darbu, kura rezultātā tie paši nonāca pie Vjeta teorēmas sakarībām. Klasē ir 32 skolēni, līdz ar to tie tika sadalīti 10 grupās, no tām tikai 2 grupas nespēja nonākt pie

sakarībām, pēc šī praktiskā darba skolēni, kam jau bija izdevies sasniegt sasniedzamo rezultātu stāstīja klasesbiedriem savas idejas, formulējot Vjeta teorēmas formulas.

Temata laikā lielākoties izdevās realizēt plānoto, bet stundas, kas skolēniem šķita sarežģītākas un formulas nebija dotas priekšā, salīdzinot ar iepriekš apgūto un kā tas tika pasniegts, skolēni tiešsaistē izmantoja iespēju neieslēgt mikrofonu un nerunāt. Skolēnu negribēšanu runāt tiešsaistēs autore centās nepieļaut, katru uzrunājot individuāli, kas veicināja attālināto mācību stundu sekmīgu realizāciju.

Secinājumi

1. Jaunajā *Skola2030* programmā lielāks uzsvars tiek likts uz pētniecību un pašvirzītas mācīšanās prasmju apguvi, bet mazāks uzsvars tiek likts uz jēdzienu apguvi, kas ir zināšanu pamats, un risināšanas prasmju trenēšanu.
2. Jaunajā programmā tematā “Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātviņņadojumu, kvadrātfunkciju?” ir apvienoti trīs apakštemati “Kvadrātviņņadojumi”, “Kvadrātfunkcija” un “Kvadrātneviņņādība” to kopējais temata apgūšanas laiks ir samazinājies gandrīz divas reizes, salīdzinot ar iepriekšējo programmas paraugu.
3. Jaunajā standartā un programmā, veltot daudz laika pētniecībai, tiek samazināts laiks, lai skolēni varētu vingrināties pielietot formulas un nostiprinātu savas zināšanas.
4. Jaunajā programmā skolēniem nav paredzēts apgūt Vjeta teorēmu, kuru var lietot ātrākai uzdevumu risināšanai, izmantojot īsāku pierakstu nekā tas ir ar diskriminanta un sakņu formulām. Autore iesaka to iekļaut procesā kā pētniecisko darbu.
5. Šobrīd vēl nav pieejami materiāli skolotājiem par tematu “Kā skaidro un izmanto formulas darbā ar kvadrātviņņadojumu, kvadrātfunkciju?”, tāpēc autores izveidotais teorētiskais materiāls ir aktuāls un var noderēt matemātikas skolotājiem.
6. Izveidotajā materiālā autore iekļāvusi kvadrātviņņadojuma sakņu aprēķināšanas formulu izvedumus, kas nav pieejami mācību grāmatās, pēc kurām šobrīd mācās vairums skolēnu, kā arī iekļāvusi piemērus un uzdevumus prasmju trenēšanai par kvadrātviņņadojumu risināšanu, izmantojot binoma kvadrāta atdalīšanu, kas līdz šim nav lietota matemātikas stundās.

Izmantoto avotu un literatūras saraksts

1. AoPS, 2021. Art of Problem Solving. ACS WASC Accredited School. Pieejams: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Vieta%27s_Formulas [Aplūkots 30.05.2021.]
2. Āboltiņa, B., Januma, S., 2014. *Matemātika 8. klasei 2. daļa*. Apgāds Zvaigzne ABC, 86. – 133. lpp
3. Čečina, I., Matrosova, T., Teterovska, E., 2009. *Matemātika 8. klasei*. Izdevniecība “Pētergailis”, 122. – 144. lpp
4. France, I., Lāce, G., Pickaine, L., Miķelsone, A., 2008. *Matemātika 8. klasei*. Lielvārds, 105. – 132. lpp
5. France, I., Lāce, G., Slokenberga, E., 2017. *Matemātika 8. klasei*. Lielvārds, 104. – 120. lpp
6. Grunsberga, S., Dzērve, I., 2002. *Standartuzdevumi algebrā ar risinājumu piemēriem 7. klase*. Lielvārds.
7. Hammar Chiriac, E., 2014. Group work as an incentive for learning – students’ experiences of group work. *Front. Psychol.* 5:558. Pieejams: [doi: 10.3389/fpsyg.2014.00558](https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00558) [Aplūkots 12.05.2021.]
8. Januma, S., 2015. *Uzdevumu krājums matemātikā 8. klasei*. Zvaigzne ABC.
9. Januma, S., Lude, I., 2003. *Algebra katrai stundai 8. klasei*. Zvaigzne ABC.
10. Kalniņa, D., 2010. Promocijas darbs “Skolēna pētnieciskās prasmes attīstība dabaszinību mācību procesā pamatskolā (5.-6. klasē)”, darba vadītāja Dr. Habil. Paed. Prof. Irēna Žogla. Pieejams: https://dspace.lu.lv/dspace/bitstream/handle/7/4878/37773-Daiga_Kalnina_2011.pdf?sequence=1 [Aplūkots 25.05.2021.]
11. Mencis, J. (sen.), Kārkliņa, V., Mencis, J. (jun.), Mihailovs, D., Skia, A., 1995. *Algebra pamatskolai 2. daļa*. Zvaigzne ABC.
12. Ministru kabineta, 2013. Noteikumi par valsts vispārējās vidējās izglītības standartu, mācību priekšmetu standartiem un izglītības programmu paraugiem. *Latvijas Vēstnesis*, 107, 05.06.2013. <https://likumi.lv/ta/id/257229/redakcijas-datums/2020/05/01> [Aplūkots 12.05.2021.]

13. Ministru kabineta, 2014. Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu, pamatizglītības mācību priekšmetu standartiem un pamatizglītības programmu paraugiem". Latvijas Vēstnesis, 165, 22.08.2014. <https://likumi.lv/ta/id/268342/redakcijas-datums/2019/09/01> [Aplūkots 12.05.2021.]
14. Ministru kabinets. 2018. Noteikumi par valsts pamatizglītības standartu un pamatizglītības programmu paraugiem. Latvijas Vēstnesis, 249, 19.12.2018. Pieejams: <https://likumi.lv/ta/id/303768> [Aplūkots 05.12.2020.]
15. *Skola2030*. Pamatizglītība. Būtiskākās mācību satura un pieejas pārmaiņas. Pieejams: <https://www.skola2030.lv/lv/skolotajiem/izglitibas-pakapes/pamatizglitiba> [Aplūkots 29.04.2021.]
16. *Skola2030*. Atmiņa kā dzīvē lietojamu zināšanu pamats. Pieejams: <https://www.skola2030.lv/lv/jaunumi/blogs/atmina-ka-dzive-lietojamu-zinasanu-pamats> [Aplūkots 20.05.2021.]
17. *Skola2030*. Pakāpeniska pilnveidotā mācību satura un pieejas īstenošana. Pieejams: <https://www.skola2030.lv/lv/istenosana/izglitibas-pakapes/ieviesanas-grafiks> [Aplūkots 16.05.2021.]
18. Valsts izglītības satura centrs, 2011. *Matemātika. 7.-9. klase*. Mācību priekšmeta programma. Eiropas Sociālā fonda projekts “Dabaszinātnes un matemātika”, 14.lpp
19. Valsts izglītības satura centrs, 2011. *Matemātika. 8. klase*. Skolotājiem. Eiropas Sociālā fonda projekts “Dabaszinātnes un matemātika”, 115. – 116.lpp
20. Valsts izglītības satura centrs, 2011. *Matemātika. 9. klase*. Skolotājiem. Eiropas Sociālā fonda projekts “Dabaszinātnes un matemātika”, 26.lpp
21. Valsts izglītības satura centrs. Kompetenču pieeja mācību saturā. *Skola2030*. Pieejams: <https://www.skola2030.lv/lv/jaunumi/3/valdiba-pienemts-valsts-pamatizglitibas-standarts> [Aplūkots 16.12.2020.]
22. Valsts izglītības satura centrs. *Matemātika 1. – 9. klasei*. Mācību priekšmeta programmas paraugs. ESF projekts Nr.8.3.1.1/16/I/002 Kompetenču pieeja mācību saturā. 277.-281.lpp, 303.-306.lpp Pieejams: <https://mape.skola2030.lv/resources/159> [Aplūkots 05.12.2020.]

Pielikumi

1. pielikums – atkārtojuma lapa

Atkārtojuma lapa par sadalīšanu reizinātājos

Polinoma pārveidošanu par divu vai vairāku polinomu reizinājumu sauc par polinoma sadalīšanu reizinātājos.

Principi, kas jāievēro:

- polinoma locekļi ir jāsadala tā, lai kāds no reizinātājiem būtu kopīgs;
- kopīgais reizinātājs jāiznes pirms iekavām.

Piemēram, apskatot polinomu $12b^2x - 30cx$, varam ievērot, ka katrs loceklis satur reizinātāju $6x$, tātad šo polinomu mēs varam pierakstīt arī šādi:

$$12b^2x - 30cx = 6x \cdot 2b^2 - 6x \cdot 5c.$$

Iznesot kopīgo reizinātāju iegūstam:

$$6x \cdot 2b^2 - 6x \cdot 5c = 6x(2b^2 - 5c).$$

Tātad doto polinomu var izteikt kā monoma $6x$ un binoma $2b^2 - 5c$ reizinājumu:

$$12b^2x - 30cx = 6x(2b^2 - 5c).$$

Sadalīt reizinātājos var arī, izmantojot kvadrātu starpības formulu:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

Tā ir identitāte, tāpēc labo un kreiso pusi var mainīt ar vietām:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Divu skaitļu kvadrātu starpība ir vienāda ar šo skaitļu starpības un summas reizinājumu. Ja formula ir uzrakstīta šādā veidā, tad to var izmantot, lai divu skaitļu kvadrātu starpību sadalītu reizinātājos.

Piemēram,

$$4x^2 - 25 = 2^2x^2 - 5^2 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

EKVIVALENTI PĀRVEIDOJUMI

ABĀM PUSĒM
PIESKAITA VAI ATŅEM
VIENU UN TO PAŠU
SKAITLI

$$1) x^2 + 3x = -2 \quad | +2$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$2) 9x^2 - 2x = 7 \quad | -7$$

$$9x^2 - 2x - 7 = 0$$

ABAS PUSES SAREIZINA
VAI IZDALA VIENU UN
TO PAŠU SKAITLI, KAS
NAV NULLE

$$3) -2x^2 - 6x + 8 = 0 \quad | :(-2)$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$4) \frac{1}{3}x^2 + 2x + \frac{5}{3} = 0 \quad | \cdot 3$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Bakalaura darbs „Materiāls skolotājiem par tematu “Kvadrātvienādojumi” 9. klasē”
izstrādāts LU Ķīmijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie
informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Andra Annemarija Krūmiņa _____ 02.06.2021.
vārds, uzvārds paraksts datums

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: Mg. math. Maruta Avotiņa _____
amats, zina. grāds, vārds, uzvārds paraksts

Recenzents: Mg. paed. Aira Kumerdanka _____
amats, zina. grāds, vārds, uzvārds paraksts

Darbs iesniegts Ķīmijas fakultātē _____ 02.06.2021.
datums

Dekāna pilnvarotā persona, sekretāre: _____ Inita Šneidere
paraksts

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

09.06.2021. prot. Nr. _____
datums

Komisijas sekretāre: metodiķe Aira Kumerdanka _____
amats, zina. grāds, vārds, uzvārds paraksts