

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
DATORIKAS FAKULTĀTE

Multistarpības

BAKALaura DARBS

Autore: Dace Rāviņa
Stud. apl. dr 07010
Vadītājs: Asociētais profesors Juris
Smotrovs

RĪGA 2011

ANOTĀCIJA

Šajā darbā pētīta kombinatoriska problēma – multistarpībukopu būvēšana. Multistarpībukopas, līdzīgi kā starpībukopas, var plaši pielietot dažādās dzīves sfērās – fizikā, signālu apstrādē, kriptogrāfijā, pat astronomijā. Joprojām pastāv atklāta problēma, pie kādiem parametriem eksistē multistarpībukopas. Darbā tiek aprakstītas multistarpībukopas un to zināmie konstrukciju veidi, kā arī tiek pētīti iespējamie multistarpībukopu parametri. Ar datorprogrammas palīdzību tika atlasītas parametru vērtības, pie kurām multistarpībukopas iespējamās pēc diviem kritērijiem, tālāk tika atsijātas tās parametru vērtības, kurām tiešām zināms, ka multistarpībukopas pastāv, un atsijātas tās vērtības, kurām multistarpībukopas nepastāv pēc smalkākiem neeksistences kritērijiem. Rezultātā tika atrasta jauna multistarpībukopu klase un tai piemeklēta vispārīga konstruēšanas metode. Tika atrasti arī vairāki parametri, pie kuriem komutatīvā grupā multistarpībukopa neeksistē.

Atslēgvārdi: Multistarpībukopa, starpībukopa, komutatīva grupa, grupu gredzens.

ABSTRACT

In this work we study a combinatorial problem – construction of difference multisets. Similarly to difference sets, difference multisets can be widely applied in various spheres of life – in physics, signal processing, cryptography, even astronomy. It is still an open problem for which parameters difference multisets exist. In this work we describe difference multisets and their known structural types, as well as study possible difference multiset parameters. With the help of a computer program, the parameter values, for which difference multisets are possible according to two criteria, were found. Afterwards, the parameter values for which difference multisets are known to exist, and those for which (according to more delicate non-existence criteria) difference multisets do not exist were dropped out. As a result, a new difference multiset class and general construction method for this class was found. In addition, several parameters for which difference multisets in commutative groups do not exist were by computer search found.

Keywords: difference set, difference multiset, commutative group, group ring.

SATURS

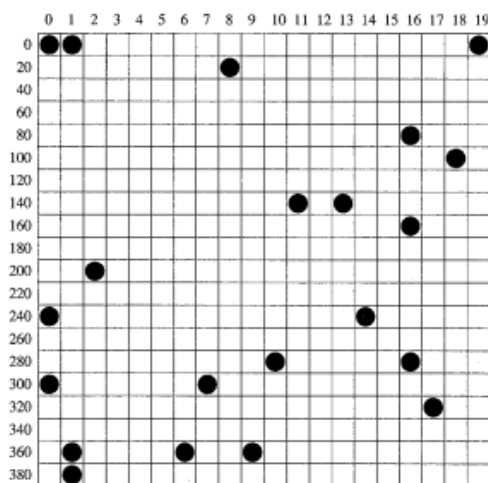
1.	IEVADS.....	5
2.	PROBLĒMAS ESOŠAIS STĀVOKLIS.....	7
2.1.	Vispārīgs ievads par kopām.....	7
2.2.	Grupu gredzeni.....	7
2.3.	Starpībkopas.....	10
2.4.	Multistarpībkopas.....	12
2.4.1	<i>Ievads multistarpībkopās</i>	12
2.4.2	<i>Konstruēšanas veidi</i>	14
2.4.3	<i>Neeksistence</i>	18
3.	UZDEVUMA FORMULĒJUMS.....	20
3.1.	Uzdevuma izvēles pamatojums.....	20
3.2.	Uzdevuma mērķis un formulējums.....	20
4.	DATOREKSPERIMENTI.....	23
4.1.	Izveidoto datorprogrammu mērķis un apraksts.....	23
4.2.	Datorprogrammā izmantotie risinājumi un teorēmas.....	24
4.2.1	<i>Ležandra teorēma</i>	24
4.2.2	<i>MSK meklēšana</i>	26
4.2.3	<i>MSK meklēšana darbojoties ar atlikumu kortežiem</i>	28
4.3.	Datoreksperimentu rezultāti.....	29
5.	IEGŪTO REZULTĀTU ANALĪZE.....	32
5.1.	Parametru, pie kuriem MSK var uzkonstruēt, analīze.....	32
5.1.1	<i>Atšķirīgo gadījumu atrašana</i>	32
5.1.2	<i>MSK spoguļattēls</i>	34
5.1.3	<i>Analīze izmantojot atrastās $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības</i>	35
5.1.3.1	<i>Gandrīz MSK</i>	36
5.1.3.2	<i>Jauna MSK klase</i>	38
5.2.	Parametru, pie kuriem MSK nevar uzkonstruēt, analīze.....	43
6.	REZULTĀTI.....	46
7.	NOSLĒGUMS.....	47
8.	IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI.....	48
9.	PIELIKUMI.....	50

1. IEVADS

Starpībkopas tiek pētītas jau kopš 1938. gada, kad Zingers (Singer) publicēja savus atklājumus šajā jomā [3]. Multistarpībkopām pētījumi tiek veikti salīdzinoši nesen, kā viens no pirmajiem publicētajiem zinātniskajiem rakstiem ir publicēts 1997. gadā [3].

Lai arī multistarpībkopas ir maz pētītas, tomēr ir izdarīti vairāki atklājumi. Ir atrastas vairākas multistarpībkopu konstrukcijas metodes, daudzas no tām ir veidotas, balstoties uz parastajām starpībkopām, ir atrastas dažas formulas un konkrēti multistarpībkopu parametri, pēc kuriem var noteikt, ka šādu kopu nevar uzkonstruēt, taču konkrētas, visaptverošas formulas vēl nav atrastas. Kā viens no pirmajiem zinātnisko darbu autoriem šajā jomā ir uzskatāms Marko Burrati darbā [3]. Nedaudz vēlāk pētījumus veikuši arī K.T. Arasu, Surinders Sēgals, Ašvani K. Bandars un Siu – Lun Ma [1][2].

Multistarpībkopas, līdzīgi kā parastās starpībkopas, var izmantot kriptogrāfijā, kur eksistē tādi algoritmi, ar kuru palīdzību var uzkonstruēt maskas (maska – neliels daudzums datu, kurus var izmantot kā šablonu, lai iegūtu informāciju no citiem datiem ar tādu pašu datu struktūru [17]), izmantojot divdimensiju starpībkopas. Starpībkopas tiek pielietotas arī akustikā un signālu apstrādē, neitronu spektroskopijā, astronomijā. Dažas konstrukciju metodes izmanto cikliskās starpībkopas, kur, pielietojot konkrētus algoritmus, iespējams iegūt lineāras maskas. Kā piemēru masku konstrukcijai skatīt *1.1 attēlu*. [4]



1.1 Attēls. Maska 20 x 20, bāzēta uz starpībkopu ar parametriem (381, 20, 1)[4]

Darba galvenais mērķis bija dziļāk izpētīt multistarpībkopas, kas līdz šim īpaši daudz nav pētītas. Autores galvenie uzdevumi bija :

- Ar datorprogrammas palīdzību atrast tādas multistarpībukopu parametrus (ν, k, λ) pie nelieliem datu apjomiem, ka izpildās multistarpībukopu parametru pamatsakarības;
- Atlasīt tos multistarpībukopu parametrus, kuriem pastāv multistarpībukopas pēc jau atrastām konstruēšanas metodēm;
- Atrast multistarpībukopu parametru trijniekus, kuri neatbilst nevienai no atrastajām metodēm, un izpētīt atrastos parametrus, mēģināt noskaidrot, vai ar šādiem parametriem var uzbūvēt multistarpībukopu veselo skaitļu atlikumiem;
- Ja šādu multistarpībukopu nevar uzbūvēt pie konkrētajiem parametriem, tad pārbaudīt, vai to nevar izdarīt, darbojoties ar atlikumu kortežiem;
- Ja multistarpībukopu var uzbūvēt, tad analizēt konkrētos gadījumus un mēģināt tos vispārināt.

Šajā darbā tiek apskatītas multistarpībukopas, to konstrukciju metodes. Autore darbā aplūko tikai komutatīvas grupas, var būt arī multistarpībukopas ar konkrētajiem parametriem nekomutatīvās grupās. Darbā ir ieskats arī parastajās starpībukopās, jo apskatītā tēma un tās pielietojumi ir cieši saistīti. Darbā autore mēģina sasniegt izvirzītos mērķus un iegūt plašākas zināšanas multistarpībukopās. Darbs sastāv no 4 pamatdaļām – teorētiskā ieskata starpībukopās un multistarpībukopās, datoreksperimentiem, to analīzes un sasniegtajiem rezultātiem.

2. PROBLĒMAS ESOŠAIS STĀVOKLIS

2.1. Vispārīgs ievads par kopām

Pirms ķerties klāt pie mūsu apskatāmās problēmas un tās skaidrojuma, nedaudz ieskatīsimies kopu teorijas pašos pamatos.

Katras kopas raksturīgākā īpatnība ir tā, ka tās satur viena veida elementus un nesatur citus. Par priekšmetiem, kurus satur kāda kopa, saka, ka tie ir šīs kopas elementi, jeb elementi pieder kopai. Kā kopu piemērus var minēt – naturālo skaitļu kopu, Latvijā aizsargājamo dzīvnieku kopa, visu neatrisināmo kvadrātvienādojumu kopa u.c.

Definīcija: Kopa ir jebkuras dabas dažādu objektu (kopas elementu) kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselumu.

Kopas var saturēt nevienu, daudz vai par bezgalīgi daudz elementu. Kopu, kas nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšo kopu*.

Ja kopa A satur galīgu skaitu elementu, tad to sauc par *galīgu kopu* un tās elementu skaitu apzīmē ar pierakstu $|A|$, pretējā gadījumā kopu sauc par *bezgalīgu kopu*. Piemēram, veselo skaitļu kopa robežās $[1, 5]$ ir galīga kopa $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, mēs varam visus šos elementus uzskaitīt. Bet visa veselo skaitļu kopa ir bezgalīga, jo mēs nevaram uzskaitīt visus veselos skaitļus, kas ir kopā. [12]

Definīcija: Multikopa ir jebkuras dabas dažādu objektu (kopas elementu) kopums, kurā katrs elements var arī atkārtoties vairākas reizes. Piemēram, $K = \{1, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}$, multikopu veido arī, ja veidojam apkopojumu, kurā par katru cilvēku ierakstām viņa vārdu. [12]

2.2. Grupu gredzeni

Pirms apskatām multistarpībkopas un starpībkopas, ieskatīsimies, kas ir grupu gredzeni, jo tie tiek plaši izmantoti, apskatot dotās problēmas.

Definīcija: Gredzens ir kāda objektu kopa R un divas divvietīgas operācijas $+$ un $*$ šai kopā, kas vienmēr ir izpildāmas (t.i. ja a, b pieder R , tad $a+b$ un $a*b$ eksistē, ir vienīgie, un pieder R un kam piemīt šādas īpašības [e]10):

1. Saskaitīšana ir asociatīva: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2. Saskaitīšana ir komutatīva: $a + b = b + a$;
3. Eksistē nulles elements 0: visiem a, $0 + a = a$;
4. Katram a eksistē pretējais elements b: $a + b = 0$;
5. Reizināšana ir asociatīva: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
6. Eksistē elements - vieninieks 1: visiem a, $1 * a = a * 1 = a$;
7. Distributīvie likumi (divi):

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c);$$

$$(b + c) * a = (b * a) + (c * a).$$

Definīcija: Grupa ir kāda objektu kopa G un viena divvietīga operācija * šai kopā (parasti to sauc par reizināšanu), kas vienmēr ir izpildāma (t.i. ja a, b pieder G, tad ab eksistē, ir vienīgs, un pieder G), un kam piemīt šādas īpašības [e]10):

1. Operācija ir asociatīva: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. Eksistē elements-vieninieks : visiem a,

$$1 * a = a * 1 = a;$$
3. Katram a eksistē apgrieztais elements b:

$$a * b = b * a = 1$$

Noderīgi būtu zināt arī, kas ir komutatīva grupa, jo mūsu apskatāmajā problēmā šis ir bieži lietots jēdziens.

Komutatīva grupa – Ja grupas operācija ir komutatīva, tad šādu grupu sauc par komutatīvu grupu, jeb Ābela grupu. Bināru operāciju „*” kopā S sauc par komutatīvu, ja jebkuriem diviem kopas S elementiem x un y izpildās īpašība $x * y = y * x$. [15]

Definīcija: Dots, ka G ir grupa un R ir gredzens. Tad $R[G]$ ir gredzens (saka grupas G gredzens pār R), kura elementi formāli pierakstāmi kā $\sum_{x \in G} a_x x$, kur $a_x \in R$. Saskaitīšanas un reizināšanas operācijas RG ir definētas sekojoši [7]:

$$\sum_{x \in G} a_x x + \sum_{x \in G} b_x x = \sum_{x \in G} (a_x + b_x) x$$

$$\sum_{x \in G} a_x x * \sum_{y \in G} b_y y = \sum_{z \in G} \sum_{x * y = z} (a_x b_y) z$$

Mūsu gadījumā izmantosim gredzenu, kura elementi ir veseli skaitļi. Ja grupas darbību apzīmē ar „+”, tad lieto saskaitīšanas terminoloģiju, ja grupas darbību apzīmē ar „*”, tad lieto

reizināšanas terminoloģiju. Saskaitīšanas terminoloģiju parasti lieto tikai tad, ja grupa ir komutatīva.

Apskatīsim dažus vienkāršus piemērus [14], kā varam uzrakstīt grupu gredzenus. $G = \mathbf{Z}_3$ grupā ir trīs elementi. \mathbf{Z}_3 - ir veselo skaitļu atlikumu, dalot ar 3, saskaitīšanas grupa. Taču, lai grupas operācija-saskaitīšana nejuktu ar gredzena saskaitīšanas operāciju, grupas elementus apzīmēsim 1, a un a^2 un lietosim reizināšanas apzīmējumus un terminoloģiju. Elementu r no $\mathbf{Z}[G]$ varam uzrakstīt:

$$r = z_1 + z_2a + z_3a^2$$

kur z_1, z_2 un z_3 ir no \mathbf{Z} (tas ir, veseli skaitļi). Citu elementu s varam uzrakstīt kā:

$$s = w_1 + w_2a + w_3a^2$$

r un s summa ir:

$$r + s = z_1 + w_1 + (z_2 + w_2)a + (z_3 + w_3)a^2$$

un to reizinājums:

$$rs = z_1w_1 + z_2w_3 + z_3w_2 + (z_1w_2 + z_2w_1 + z_3w_3)a + (z_1w_3 + z_3w_1 + z_2w_2)a^2$$

Darbā grupu gredzeni tiks izmantoti, lai aprakstītu kopas un multikopas un lai darbotos ar tām. Kā gredzens tiek izmantots veselo skaitļu gredzens. Grupas elementu apakškopu var aprakstīt kā apakškopas elementu summu. Multikopu ar elementiem no grupas var aprakstīt kā summu no grupas elementiem, pareizinātiem ar skaitli, kas norāda, cik reizes elements sastopams multikopā.

Apzīmējums: ja $D = \sum_{x \in G} a_x x$, tad $D^{(n)} = \sum_{x \in G} a_x x^n$.

2.3. Starpībkopas

Pirms tiek apskatītas multistarpībkopas, būtu noderīgi zināt, kas vispār ir parastās starpībkopas (SK). Multistarpībkopām ir cieša saistība ar SK, pat daudzas multistarpībkopu konstruēšanas metodes balstās uz parastajām SK.

Definīcija: Par starpībkopu ar parametriem (v, k, λ) komutatīvā grupā G , kuras operāciju saucim par saskaitīšanu, $|G| = v$, sauc tādu G elementu apakškopu ar k elementiem x_1, \dots, x_k , ka starp visām starpībām $x_i - x_j$, kur $1 \leq i, j \leq k$ un $i \neq j$, katrs G elements, izņemot 0 , parādās tieši λ reizes. Elements 0 neparādās ne reizi. [8]

Pēc definīcijas SK ir trīs parametri (v, k, λ) , kur v – grupas elementu skaits; k – starpībkopas elementu skaits; λ – skaitlis, kas apzīmē, cik reizes katrs nenulles atlikums parādās kā starpībkopas elementu netriviāla starpība $(x_i - x_j)$, kur $i \neq j$. Jāatceras arī tas, ka nedrīkstam konkrēto kopas elementu atņemt pašu no sevis, un to, ka atņemšana notiek abos virzienos, piemēram, $x_1 - x_2$ un $x_2 - x_1$.

Lai parametri (v, k, λ) veidotu starpībkopu, tad jāizpildās šādai vienādībai [6] :

$$\lambda(v-1) = k(k-1)$$

Tālāk varam pielietot Bruck – Ryser – Chowla teorēmu par starpību kopām[6]:

- ja v ir pāra skaitlis, tad $k - \lambda$ ir jābūt vienādam ar kāda skaitļa kvadrātu;
- ja v ir nepāra skaitlis, tad eksistē tādi veseli x, y, z , vismaz viens no kuriem nav 0 , ka izpildās nosacījums: $x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2$

Apskatīsim starpībkopas piemēru:

Pieņemsim, ka mums ir dota kopa $\{1, 2, 4\}$, ko iegūstam no atlikumiem, dalot ar skaitli 7 (mod 7).

Tātad uzreiz varam noteikt, ka iespējamā starpībkopa būs ar parametriem $v = 7$, jo aplūkojamā kopa ir atlikumi, dalot ar 7 , $k = 3$, jo kopā mums ir trīs elementi.

Tālāk apskatām visas iespējamās starpības starp katriem kopas elementiem. Jāatceras, ka konkrēto kopas elementu pašu no sevis neatņemam. Vēl viena svarīga lieta, kā veicam atņemšanu starp kopas elementiem, konkrēto kopu varam iegūt pēc formulas :

$$(kopas_elements1 - kopas_elements2) \bmod (v) = \\ = (kopas_elements1 - kopas_elements2) \bmod (7)$$

$$\begin{array}{lll} 1 - 2 = 6; & 2 - 1 = 1; & 4 - 1 = 3 \\ 1 - 4 = 4; & 2 - 4 = 5; & 4 - 2 = 2 \end{array}$$

Tagad saskaitām, cik reizes katrs nenulles atlikums parādās kā starpība :

1 – parādās 1 reizi;

2 – parādās 1 reizi;

3 – parādās 1 reizi;

4 – parādās 1 reizi;

5 – parādās 1 reizi;

6 – parādās 1 reizi.

Tā kā katra iegūtā starpība parādās vienu un to pašu reižu skaitu, kas šajā gadījumā ir viena reize, tad esam ieguvuši korektu starpībkopu ar parametriem $(v, k, \lambda) = (7, 3, 1)$.

Planāra starpībkopu – Ja starpībkopā ar parametriem (v, k, λ) , parametrs $\lambda = 1$, tad šādu starpībkopu sauc par planāru. [5]

Pazīstamākās starpībkopas ir ar parametriem [7][16]:

- **Paley tipa starpībkopu** – Starpībkopu tiek saukta par Paley – Hadamard, ja tās parametri atbilst $(4n - 1; 2n - 1; n - 1)$ [7]
- $(4n^2; 2n^2 - n; n^2 - n)$;
- $\left(\frac{3^{n+1}(3^{n+1} - 1)}{2}, \frac{3^n(3^{n+1} + 1)}{2}, \frac{3^n(3^n + 1)}{2} \right)$;
- $(2^{d+1} - 1; 2^d - 1; 2^{d-1} - 1)$;
- $(n^2 + n + 1; n + 1; 1)$;
- **Zingera (Singer) tipa starpībkopu** – starpībkopu, kuras parametri ir $\left(\frac{q^d - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-2} - 1}{q - 1} \right)$, kur q ir pirmskaitļa pakāpe;
- **Mcfarland starpībkopu** – Ja starpībkopā ar parametriem $(v, k, \lambda) = (q^{d+1}(q^d + q^{d-1} + \dots + q + 2); q^d(q^d + q^{d-1} + \dots + q + 1); q^d(q^{d-1} + q^{d-2} + \dots + q + 1))$, kur q ir pirmskaitļa pakāpe. [e]4

- $\left(\frac{4q^{2n}(q^{2n}-1)}{q-1}, \frac{q^{2n-1}(1+2(q^{2n}-1))}{q+1}, \frac{q^{2n-1}(q^{2n-1}+1)(q-1)}{q+1} \right);$
- $\left(\frac{q^{n+1}(1+(q^{n+1}-1))}{q-1}, \frac{q^n(q^{n+1}-1)}{q-1}, \frac{q^n(q^n-1)}{q-1} \right)$

2.4. Multistarpībkopas

2.4.1 Ievads multistarpībkopās

Darbības notiek ar galīgām multikopām.

Definīcija: Par multistarpībkopu (MSK) ar parametriem (v, k, λ) grupā G , kuras operāciju saucim par saskaitīšanu, $|G|=v$, sauc tādu G elementu multikopu ar k elementiem $\{x_1, \dots, x_k\}$, ka starp visām starpībām $x_i - x_j$, kur $1 \leq i, j \leq k$ un $i \neq j$, katrs G atlikums, ieskaitot 0, parādās tieši λ reizes. [8]

Pēc definīcijas MSK ir trīs parametri (v, k, λ) , kur v – grupas elementu skaits; k – iegūtās multikopas elementu skaits; λ – skaitlis, kas apzīmē, cik reižu katrs elements parādīsies kā MSK elementu netriviāla starpība ($x_i - x_j$, kur $i \neq j$).

Piemērs,

Pieņemam, ka mums ir multikopa $\{0, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 4\}$, ko iegūstam no atlikumiem, dalot ar skaitli 7 (mod 7).

Tātad $v = 7$, jo mod 7;

$k = 8$, jo multikopā $\{0, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 4\}$ ir 8 elementi.

Tagad atradīsim visas starpības, ko veido dotie elementi :

Jāatceras:

- *ja iegūtā starpība ir mazāka par 0, tad jāpieskaita rezultātam skaitlis v , jo starpībai jābūt nenegatīvam skaitlim, , atlikumam mod 7, piemēram , $0 - 1 = -1$, tā kā negatīvs skaitlis, tad pieskaita $v = 7$, tātad $(-1) + 7 = 6$;*
- *multikopas elementus pašus no sevis neatņemam.*

$0 - 0 = 0;$	$0 - 0 = 0;$	$1 - 0 = 1;$	$1 - 0 = 1;$
$0 - 1 = 6;$	$0 - 1 = 6;$	$1 - 0 = 1;$	$1 - 0 = 1;$
$0 - 1 = 6;$	$0 - 1 = 6;$	$1 - 1 = 0;$	$1 - 1 = 0;$
$0 - 2 = 5;$	$0 - 2 = 5;$	$1 - 2 = 6;$	$1 - 2 = 6;$
$0 - 2 = 5;$	$0 - 2 = 5;$	$1 - 2 = 6;$	$1 - 2 = 6;$
$0 - 4 = 3;$	$0 - 4 = 3;$	$1 - 4 = 4;$	$1 - 4 = 4;$
$0 - 4 = 3;$	$0 - 4 = 3;$	$1 - 4 = 4;$	$1 - 4 = 4;$

$2 - 0 = 2;$	$2 - 0 = 2;$	$4 - 0 = 4;$	$4 - 0 = 4;$
$2 - 0 = 2;$	$2 - 0 = 2;$	$4 - 0 = 4;$	$4 - 0 = 4;$
$2 - 1 = 1;$	$2 - 1 = 1;$	$4 - 1 = 3;$	$4 - 1 = 3;$
$2 - 1 = 1;$	$2 - 1 = 1;$	$4 - 1 = 3;$	$4 - 1 = 3;$
$2 - 2 = 0;$	$2 - 2 = 0;$	$4 - 2 = 2;$	$4 - 2 = 2;$
$2 - 4 = 5;$	$2 - 4 = 5;$	$4 - 2 = 2;$	$4 - 2 = 2;$
$2 - 4 = 5;$	$2 - 4 = 5;$	$4 - 4 = 0;$	$4 - 4 = 0;$

Tagad saskaitām, cik reizes parādās katra iegūtā starpība :

0 – parādās 8 reizes;

1 – parādās 8 reizes;

2 – parādās 8 reizes;

3 – parādās 8 reizes;

4 – parādās 8 reizes;

5 – parādās 8 reizes;

6 – parādās 8 reizes;

No visa seko, ka katra starpība parādās vienādu reižu skaitu, kur $\lambda = 8$ (katrs elements parādās tieši 8 reizes), tātad šī ir MSK ar parametriem $(v, k, \lambda) = (7, 8, 8)$.

Lai izteiktu, cik daudz atņemšanas operācijas būs jāveic MSK ar parametriem (v, k, λ) lietojam formulas:

$$\text{Atņemšanas darbību skaits} = k(k - 1) \text{ vai arī ar variācijām pēc formulas } A_k^2 = \frac{k!}{(k - 2)!},$$

kur k ir konkrētās multikopas elementu skaits.

Skatoties pēc parametriem (v, k, λ) , lai veidotos multistarpība, ir jāizpildās šādai formulai : $k(k-1) = \lambda v$. [3] Ja šī vienādība izpildās, tālāk var pielietot Bruck – Ryser – Chowla teorēmu, pielabotu multistarpībām.

Teorēma (Bruck – Ryser – Chowla): Ja D ar parametriem (v, k, λ) , ir starpību kopa komutatīvā grupā, tad izpildās [1]:

- ja v ir pāra skaitlis, tad k ir jābūt vienādam ar vesela skaitļa kvadrātu;
- ja v ir nepāra skaitlis, tad eksistē tādi veseli x, y, z , vismaz viens no kuriem nav 0, ka izpildās nosacījums: $x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2$

2.4.2 Konstruēšanas veidi

Pašlaik ir atklāti daži paņēmieni, pēc kuriem var noteikt, vai ir iespējams uzbūvēt multistarpību koku. Šie konstruēšanas veidi vēlāk tiks izmantoti, lai atlasītu tos MSK parametrus, kuriem pēc šīm metodēm MSK var uzbūvēt.

Konstruēšanas veidi:

1. Ja D ir starpība kopa komutatīvā grupā G ar parametriem (v, k, λ) un $a = \frac{k}{k-\lambda}$ ir vesels skaitlis, tad mēs varam uzbūvēt MSK ar parametriem $(v, ak, a^2 \lambda)$. [8] Tātad, ja mums ir SK ar parametriem (v, k, λ) , tad izrēķinām mainīgo a . Ja skaitlis a sanāk vesels, tad droši var apgalvot, ka var uzbūvēt MSK ar $(v, ak, a^2 \lambda)$.
2. Ja D ir starpība kopa grupā G ar parametriem $(p^n, \frac{p^n-1}{2}, \frac{p^n-3}{4})$, kur p ir pirmskaitlis un $p^n \equiv 3 \pmod{4}$ un $D \cup D^{(-1)} \cup \{0\} = G$, tad $E = \{0\} \cup 2D$ ir MSK ar parametriem $(p^n, p^n, p^n - 1)$. Ja G ir galīgā lauka $GF(p^n)$ saskaitīšanas grupa, tad par D var ņemt lauka kvadrātu koku, apzīmēsim to $GFK(p^n)$. [8] Šis nosacījums jau izskatās grūtāk, jo mums jāpārlicinās, ka SK parametrus (v, k, λ) var izteikt kā:

$$v = p^n, k = \frac{p^n-1}{2}, \lambda = \frac{p^n-3}{4}$$
, kur p – ir pirmskaitlis, tātad jāmeklē pirmskaitļa

pakāpe, piemēram, ja $p^n = 9$, skaitlis 9 ir pirmskaitļa pakāpe, jo 3 ir pirmskaitlis un $3^3 = 9$. Vēl jāpārlicinās, vai p^n , dalot ar skaitli 4, atlikums ir 3. Ja SK šie nosacījumi izpildās, tad var uzbūvēt MSK ar parametriem $(p^n, p^n, p^n - 1)$.

3. Ja p ir pirmskaitlis un $p^n \equiv 1 \pmod{4}$, tad $E = \{0\} \cup 2GF(p^n)$ ir MSK ar parametriem $(p^n, p^n, p^n - 1)$. [8] Šo gadījumu varam skatīt arī šādi: pārbaudām, vai $k = v$ un $\lambda = v - 1$. Tad skatāmies, vai v ir pirmskaitļa pakāpe un izdalām ar 4. Ja atlikums, dalot ar 4, ir 1, tad ar šiem parametriem varam uzbūvēt MSK.

4. Ja p ir pirmskaitlis un $p^n \equiv 3 \pmod{4}$, tad $E = 2(\{0\} \cup GF(p^n))$ ir MSK ar parametriem $(p^n, p^n + 1, p^n + 1)$. [8] Vienkāršāk, ja $k = v + 1$ un $\lambda = v + 1$, tad skatāmies vai p^n ir pirmskaitļa pakāpe un izdalām ar 4, ja atlikums, dalot ar 4, ir 3, tad ar šiem parametriem varam uzbūvēt MSK.

5. Ja $p^r - q^s = 2$, kur p un q ir pirmskaitļi, tad var uzbūvēt MSK ar parametriem $(p^r q^s, p^r q^s + 1, p^r q^s + 1)$. [8] Mums jāatrod divu pirmskaitļu pakāpju reizinājums, kas ir vienāds ar v ($v = \text{skaitlis, ar kuru dalot iegūstam atlikumus}$). Un svarīgi arī pārbaudīt vai atņemot šos skaitļus, kas ir pirmskaitļa pakāpes, starpība būtu 2.

6. Ja q ir pirmskaitlis un D ir Singer tipa SK ar parametriem $(\frac{q^d - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-2} - 1}{q - 1})$, tad var uzbūvēt MSK ar parametriem $(\frac{q^d - 1}{q - 1}, q^d, q^d(q - 1))$. [8] Ja skatāmies no MSK puses, tad var sākt pārbaudīt, vai k ir pirmskaitļa pakāpe ($k = q^d$).

7. Ja D ir SK ar parametriem (v, k, λ) komutatīvā grupā G , tad veseliem pozitīviem a un $b, c = ak + b(v - k) : E = aD + b(G - D)$ ir MSK ar parametriem $(v, c, \frac{c-1}{v})$ tad un tikai tad, ja $(a - b)^2(k - \lambda) = c$

No šī var pierādīt šādas konstrukcijas [8]:

a) Ja D ir planāra SK ar parametriem $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ grupā G , tad $E = (4n^3 + 6n^2 + 4n)D + (4n^3 + 8n^2 + 7n + 2)(G - D)$ ir MSK (tās parametri ir polinomi).

b) Ja D ir Paley SK ar parametriem $(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-3}{4})$, tad $E = (16q^2 + 12q - 4)D + (16q^2 + 20q - 4)(G - D)$ ir MSK ar parametriem $(q, 16q^2(q+1), 16q(q+1)(16q^3 + 16q^2 - 1))$

c) Ja D ir Adamāra SK ar parametriem $(4n^2, 2n^2 - n, n^2 - n)$, tad $E = (4n^2 - 2n - 1)D + (4n^2 + 2n - 1)(G - D)$ ir MSK ar parametriem $(4n^2, 16n^4, 4n^2(4n - 1)(4n + 1))$

d) Ja D ir Singer tipa SK ar parametriem $(\frac{q^d - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1}, \frac{q^{d-2} - 1}{q - 1})$, kur q – pirmskaitļa pakāpe un $d \geq 3$. Ja šie nosacījumi izpildās, tad $E = (2q^{d-1} + 4q^{d-2} \frac{q^d - 1}{q - 1})D + ((1 + 2q^{d-2})(q + 2 \frac{q^d - 1}{q - 1}))(G - D)$ ir MSK.

e) Ja D ir McFarland SK ar parametriem $(q^d(1 + \frac{q^d + 1}{q + 1}), q^{d-1} \frac{q^d - 1}{q - 1}, q^{d-1} \frac{q^{d-1} - 1}{q - 1})$, kur q – pirmskaitļa pakāpe un $d \geq 3$, tad $E = (4q^d(1 + \frac{q^d - 1}{q - 1}) - 2(q^d + q - 1))D + (4q^d(1 + \frac{q^d - 1}{q - 1}) - 2 \frac{q^d - 1}{q - 1})(G - D)$ ir MSK.

8. Katram veselam skaitlim m , kas lielāks par 0, komutatīvā grupā eksistē MSK ar parametriem $(m(m+1), m^2, m(m-1))$ [1]. Mūsu gadījumā, skatoties no MSK parametriem, atliek pārbaudīt, vai parametrs k ir kāda skaitļa kvadrāts, $k = m^2$, un aprēķināt m vērtību;

9. Ja E ir SK ar parametriem $(4t - 1, 4t, t)$ komutatīvā grupā G , tad $D = 2E$ ir MSK ar parametriem $(4t - 1, 4t, 4t)$. [1] Mūsu gadījumā, ja ir atrasti MSK parametri, kas atbilst $v = 4t - 1$, $k = 4t$ un $\lambda = 4t$, tad mums jāmeklē, vai eksistē SK, kas atbilst formulai.;

10. Ja G ir aditīva grupa pēc $n+1$, tad eksistē MSK ar parametriem $(n+1, n^2, n^2(n-1))$. [3]; Mūsu gadījumā jāpārbauda, vai parametrs k ir kvadrāts, ja tā, tad pārējos parametrus var samērā viegli izteikt un aprēķināt.
11. MSK ar parametriem (q, k, λ) eksistē tad, ja $q \equiv 3 \pmod{4}$ un $k = \frac{q(b^2 + qa^2)}{4}$, kur q ir pirmskaitļa pakāpe, a un b veseli pāra skaitļi [9]. Iesākumā jāpārbauda, vai q ir pirmskaitlis kādā pakāpē, tad, vai, to dalot ar 4, iegūstam atlikumu 3. Visbeidzot pārbaudām k : ja $4k$ nedalās ar q , tad šis gadījums uzreiz atkrīt, pretējā gadījumā meklējam a un b pāra skaitļus, lai izpildītos sakarība;
12. MSK ar parametriem (q, k, λ) eksistē tad, ja $q \equiv 3 \pmod{4}$ un $k = \frac{q(4a + b^2 + qa^2)}{4} + 1$, kur q ir pirmskaitļa pakāpe, a un b veseli pāra skaitļi [9]. Šajā gadījumā rīkojamies līdzīgi kā iepriekš, bet, ja $4(k-1)$ nedalās ar q , tad šis gadījums atkrīt, pretējā gadījumā meklējam tādas pāra a un b , ka izpildās sakarība;
13. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe un $q \equiv 1 \pmod{4}$, tad eksistē MSK ar parametriem (q, a^2, λ) , katram pozitīvam veselam skaitlim a tādām, ka $a(a+1)$ dalās ar q [9]. Pārbauda, vai MSK parametrs k ir kāda skaitļa kvadrāts, tad pārbauda, vai q ir kāds pirmskaitlis pakāpē, ja tā, tad pārbauda, vai q dod atlikumu 1, ja to dala ar 4, visbeidzot pārlicināmies, vai $a(a+1)$ dod atlikumu 0, dalot ar q ;
14. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe un $q \equiv 1 \pmod{4}$, tad eksistē MSK ar parametriem $(q, (a+1)^2, \lambda)$, katram pozitīvam veselam skaitlim a tādām, ka $a(a+1)$ dalās ar q [9]. Šī nosacījuma pārbaudīšanai rīkojamies līdzīgi kā iepriekš;
15. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe un $q \equiv 1 \pmod{4}$, tad eksistē MSK ar parametriem $(q, a^2q, a^2(a^2q-1))$, kur a vesels skaitlis [9]. Mūsu gadījumā skatāmies, vai q ir kāds pirmskaitlis pakāpē, tad pārbauda, vai tas dod atlikumu 1, dalot ar 4. Lai pārbaudītu k , skatāmies, vai k dalās ar q un vai dalījums ir kāda skaitļa kvadrāts;
16. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe formā $q = p^{2r}$, kur $p \equiv 2 \pmod{3}$, tad eksistē MSK ar parametriem $(q, q^2u^2, qu^2(q^2u^2-1))$, kur u vesels skaitlis [9]. Mūsu gadījumā

pārbaudām, vai q ir kāda pirmskaitļa pakāpe, kur pakāpe ir vismaz 2, tad, ja šis pirmskaitlis, dalot ar 3, dod atlikumu 2, skatāmies tālāk. Pārbaudām, vai k dalās ar q kvadrātā un dalījums arī ir kāda skaitļa kvadrāts. Līdz ar to esam ieguvuši arī u vērtību un viegli varam pārbaudīt pēdējo vērtību;

17. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe formā $q = s^2 + 4t^2$ un, ja izpildās šādi nosacījumi: $q = 5 \pmod{8}$, $s = 1 \pmod{4}$, $\text{LKD}(s, q) = 1$, tad eksistē MSK ar parametriem (q, k, λ) , ar vērtību $k = 1 + (2 + s^2u^2)u^2q$, kur u vesels skaitlis [9]. Pārbauda, vai q , dalot ar 8, dod atlikumu 5, tad ar pārslasi meklējam tādas s un t kvadrātus, lai izpildītos sakarība;
18. Ja q ir pirmskaitļa pakāpe formā $q = s^2 + 4t^2$ un, ja izpildās šādi nosacījumi: $q = 5 \pmod{8}$, $s = 1 \pmod{4}$, $\text{LKD}(s, q) = 1$, tad eksistē MSK ar parametriem (q, k, λ) , ar vērtību $k = 1 + (1 + t^2u^2)u^2q^2$, kur u vesels skaitlis [9];
19. Ja q var izteikt formā $q = s^3 + 3t^2$, kur q ir pirmskaitlis kādā pakāpē, tā ka $q = 7 \pmod{12}$, $s = 1 \pmod{3}$ un $\text{LKD}(s, q) = 1$ tā, ka 2 ir kubs galīgā laukā. Ņemot u , kas ir pozitīvs vesels skaitlis tāds, ka $2(1 + 3ut^2)$ dalās ar s , tad eksistē MSK ar parametriem (q, k, λ) , kur $k = \frac{(5s^2 + 12t^2)(1 + uq)^2}{s^2}$. [9] Lai pārbaudītu šo gadījumu, tad, pirmkārt, jāpārbauda, vai parametrs q ir pirmskaitlis kādā pakāpē, ja tas izpildās, tad pārbauda, vai q dod atlikumu 7, dalot ar 12. Ja abas īpašības izpildās, tad ar pārslasi meklē tādas s un t vērtības, ka izpildās pirmā vienādība. Pārbauda, vai s un q ir savstarpēji pirmskaitļi un vai s dalot ar 3 ir atlikums 1. Ja viss izpildās atrodam tādu u , ka izpildās vienādība un tā dalās ar s . Tad pārbaudām, vai k atbilst dotajai sakarībai, un visbeidzot pārbauda vai 2 ir kubs. Lai pārbaudītu vai 2 ir kubs galīgā laukā q , tad ir jāizpildās šādai sakarībai :
- $$2^{\frac{q-1}{3}} = 1 \pmod{p}, \text{ kur } q = p^n.$$

2.4.3 Neeksistence

Kaut arī MSK parametri (v, k, λ) atbilst sadaļā 2.4.1 Ievads multistarpībkopās minētajiem nosacījumiem, ne vienmēr šie parametri veidos MSK. Tādēļ apskatīsim nosacījumus un atrastos gadījumus, kad MSK neveidojas.

Parametri, pie kuriem neeksistē MSK [1]:

- 1) Cikliskā grupā MSK neeksistē ar parametriem $(m^2(m \pm 1); m^2; m \mp 1)$;
- 2) Cikliskā grupā MSK neeksistē ar parametriem $(m^2; m^2; m^2 - 1)$;
- 3) Visiem t , kas dala $(m+1)$, cikliskā grupā neeksistē MSK ar parametriem $\left(\frac{m^2(m+1)}{t}; m^2; t(m-1)\right)$.

2.4.3.1 Teorēma : Cikliskā grupā MSK ar parametriem $(v, k, 2)$ eksistē tad un tikai tad, ja $(v, k) = (6, 4)$ vai $(3, 3)$. [1]

2.4.3.2 Teorēma : Pieņemsim, ka $X = (m\{0\}, n\{1\})$ ir multikopa ar k elementiem pār Z_2 . Tādā gadījumā X ir MSK tad un tikai tad, ja k ir kvadrāts un $\{m, n\} = \left\{\frac{k - \sqrt{k}}{2}, \frac{k + \sqrt{k}}{2}\right\}$. [3] Precizējot iepriekš uzrakstīto, $v = 2$, X ir multikopa ar k elementiem, m apzīmē skaitu, cik reižu multikopā X atrodas 0 , bet n apzīmē skaitu, cik reižu multikopā X sastopams 1 , līdz ar to $k = m + n$.

2.4.3.3 Teorēma: MSK ar parametriem (v, k, λ) komutatīvā grupā eksistē tikai tad, ja parametrs λ ir pāra skaitlis. [1]

2.4.3.4 Teorēma: Ja (v, k, λ) ir MSK parametri komutatīvā grupā G . Pieņemam, ka ir tāds pirmskaitlis p , ka v dalās ar p , un S ir grupas G Silova p -apakšgrupa, bet U ir tāda G apakšgrupa, ka $|U \cap S| = 1$, un parametrs k dalās ar p^{2a} . Ja pirmskaitlis p ir paškonjugēts pēc faktorgrupas G/U eksponentes moduļa (pirmskaitlis p ir paškonjugēts pēc moduļa v – ja eksistē tāds vesels skaitlis r , ka $p^r \equiv -1 \pmod{v}$), kur $v = p^s v'$, $s \geq 0$ un $\text{LKD}(v', p) = 1$), tad apakšgrupas S eksponente ir mazāka vai vienāda par $\frac{|U|}{p^a} * |S|$. [1]

3. UZDEVUMA FORMULĒJUMS

3.1. Uzdevuma izvēles pamatojums

Tā kā multistarpībkopas ir sāktas pētīt samērā nesen un nav izdarīti visi iespējamie atklājumi šajā jomā, tad autore nolēma, ka ir vērts mēģināt apgūt nepieciešamos teorijas pamatus un censties atrast jaunus risinājumus, kas palīdzētu zinātnei virzīties uz priekšu. Izvirzītā problēma ir cieši saistīta ar jau diezgan plaši pētītajām starpībkopām, kuras izmanto daudzās nozarēs, tādēļ multistarpībkopas var pielietot līdzīgi.

Turpmākajās sadaļās tiks apskatīti autores izvirzītie uzdevumi un to realizēšanas metodes. Uzdevums tiks aprakstīts viegli uztveramā un pieejamā formā, lai arī cilvēks bez īpašām zināšanām un teorētiskās bāzes varētu to saprast un izdarīt līdzīgus spriedumus. Autore uzskata, ka uzdevuma formulējums ir pietiekoši saprotams, īss un nav tik sarežģīts, kā varētu šķist pirmajā brīdī.

Uzdevuma atrisinājumus un iegūtos rezultātus būs iespējams izmantot tālākos problēmas risinājumos un citos pētījumos.

3.2. Uzdevuma mērķis un formulējums

Darba galvenais mērķis bija dziļāk izpētīt multistarpībkopas, kas līdz šim īpaši daudz nav pētītas. Autores galvenie uzdevumi bija:

- Ar datorprogrammas palīdzību atrast tādas multistarpībkopu parametrus (v, k, λ) pie nelieliem datu apjomiem, ka izpildās multistarpībkopu parametru pamatformulas;
- Atlasīt tos multistarpībkopu parametrus, kuriem atbilst multistarpībkopas pēc jau atrastām konstruēšanas metodēm;
- Atrast multistarpībkopu parametru trijniekus, kuri neatbilst nevienai no atrastajām metodēm, un izpētīt atrastos parametrus, mēģināt noskaidrot, vai ar šādiem parametriem var uzbūvēt multistarpībkopu veselo skaitļu atlikumiem;
- Ja šādu multistarpībkopu nevar uzbūvēt pie konkrētajiem parametriem, tad pārbaudīt, vai to nevar izdarīt, darbojoties ar atlikumu kortežiem;
- Ja multistarpībkopu var uzbūvēt, tad analizēt konkrētos gadījumus un mēģināt tos vispārināt.

Precizējot uzdevumu pirmo punktu, mums jāapskata visi iespējamie (v, k, λ) , kas varētu atbilst MSK parametriem.

Tā kā visus šādus parametrus atrast nav iespējams, tad uzdevumu samazināsim, nosakot robežu : $\lambda v \leq 300$;

Kad esam atraduši visus iespējamus parametrus līdz robežai $\lambda v \leq 300$, tad mums jāatmet visi tie parametri, kas neatbilst vienādībai : $k(k-1) = \lambda v$.

Piemēram,

$(2, 4, 5)$ – metam ārā, jo $4 * (4 - 1) = 2 * 5$ vienādība neizpildās, $12 \neq 10$;

$(2, 4, 6)$ – atstājam, jo $4 * (4 - 1) = 2 * 6$ vienādība izpildās $12 = 12$;

$(2, 4, 7)$ – metam ārā, jo $4 * (4 - 1) = 2 * 7$ vienādība neizpildās $12 \neq 14$.

Tādā veidā turpinot, atbrīvojamiem no tiem parametriem, kas noteikti neatbilst MSK.

Kad no liekajiem parametriem esam atbrīvojušies, tad skatāmies tālāk :

- ja v ir pāra skaitlis, tad k ir jābūt vienādam ar kāda skaitļa kvadrātu;
- ja v ir nepāra skaitlis, tad jābūt tādiem veseliem, nenulles x, y, z , ka izpildās

$$\text{nosacījums: } x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2.$$

Ja kāds no šiem nosacījumiem neizpildās, to parametru trijnieku metam ārā. Atstājam tikai tos parametrus, kam izpildās minētās sakarības. Piemēram,

$(2, 4, 6)$ – atstājam, jo $v = 2$ (pāra skaitlis) un $k = 4$, kas ir kāds skaitlis kvadrātā, šajā gadījumā: 2^2

$(3, 4, 4)$ – atstājam, jo eksistē tādi nenulles x, y, z pēc Ležandra teorēmas (sīkāk skatīt sadaļu 4.2).

$(10, 6, 3)$ – metam ārā, jo $v = 10$ (pāra skaitlis), bet $k = 6$, kas nav kāda skaitļa kvadrāts.

Šādā veidā atbrīvojamiem no lielas daļas lieko parametru, kas noteikti neveidos MSK. Tad no atlikušajiem parametriem, kurus neesam izmetuši, pārbaudām, vai tie atbilst kādai no jau atrastajām MSK konstruēšanas metodēm (sīkāk skatīt sadaļu 2.4.2 Konstruēšanas veidi). Šajā vietā esam nonākuši jau pie otrā izvirzītā uzdevuma.

Galvenās konstruēšanas metožu formulas, īsi uzrakstot, ir šādas (ja nepārbauda precīzi sarežģītākos nosacījumus):

- $(v, ak, a^2 \lambda)$;
- $(p^n, p^n, p^n - 1)$;
- $(p^n, p^n + 1, p^n + 1)$;

- $(p^r q^s, p^r q^s + 1, p^r q^s + 1)$;
- $(\frac{q^d - 1}{q - 1}, q^d, q^d (q - 1))$;
- $(v, c, \frac{c - 1}{v}) \Leftrightarrow (a - b)^2 (k - \lambda) = c$

(Sīkāk aprakstīts sadaļā 2.4.2 *Konstruēšanas veidi*)

Šie ir galvenie uzdevumi, kas ir jāveic. Kā jau minēts, tad viens no mērķiem ir atrast tādus MSK parametrus, kam neatbilst neviens no jau atrastajiem konstruēšanas veidiem, tad šos parametrus iespējams pētīt tālāk un skatīties, vai ir vispār iespējams uzbūvēt MSK ar šādiem parametriem vai nav. Ja šādiem parametriem izdosies uzbūvēt MSK, tad jāmēģina konstrukciju vispārināt, iegūstot jaunu, agrāk nezināmu MSK klasi. Aprakstīto parametru atlasīšanai tiks izveidota datorprogramma.

4. DATOREKSPERIMENTI

4.1. Izveidoto datorprogrammu mērķis un apraksts

Darba rezultātā tika izveidotas datorprogrammas, kas bija nepieciešamas, lai izpildītu galvenos bakalaura darba uzdevumus:

- Ar datorprogrammas palīdzību atrast tādus multistarpībkopu parametrus (v , k , λ) pie nelieliem datu apjomiem, ka izpildās multistarpībkopu parametru pamatsakarības;
- Atlasīt tos multistarpībkopu parametrus, kuriem pastāv MSK pēc jau atrastām konstruēšanas metodēm;
- Pārbaudīt, vai iespējams uzbūvēt multistarpībkopu tiem parametriem, kuri neatbilst jau vispārzināmajām konstruēšanas metodēm;
- Ja multistarpībkopu nevar uzbūvēt pie konkrētajiem parametriem, tad pārbaudīt, vai to nevar izdarīt, darbojoties ar atlikumu kortežiem.

Pirmkārt, tika uzrakstīta datorprogramma, kas atrod visus MSK parametrus (v , k , λ) tādus, ka :

- $\lambda v \leq 300$;
- $k(k-1) = \lambda v$

Mērķis ir apskatīt tādus MSK parametrus, kas nav īpaši lieli skaitļi, tādēļ autore noteica robežu $\lambda v \leq 300$; . Gadījumā, ja vēlamais rezultāts netiks panākts, tad šī robeža tiks palielināta. Ar augstāk minēto formulu palīdzību tika atsijāta liela daļa pārlases veidā iegūtās informācijas. Parametru (v , k , λ) atrašanai tika izmantota pilnā pārlase, jo tā ir visātrāk un visvieglāk noprogrammējama. Tos iespējamus MSK parametrus, kas atbilda formulām, autore pārbaudīja ar Bruck – Ryser – Chowla teorēmu :

- ja v ir pāra skaitlis, tad k ir jābūt vienādam ar kāda skaitļa kvadrātu;
- ja v ir nepāra skaitlis, tad eksistē tādi veseli, nenulles x , y , z , ka izpildās nosacījums:

$$x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2$$

Tālāk ar datorprogrammas palīdzību tika atrasti tie MSK parametri, kuriem jau ir atrastas konstruēšanas metodes. Dažās konstruēšanas metodēs netika apskatīti paši sarežģītākie nosacījumi.

Autores galvenais mērķis ar datorprogrammas palīdzību bija atrast tādus MSK parametrus, kas neatbilst nevienai no jau atrastām konstruēšanas metodēm, un pārbaudīt vai ar šiem parametriem var uzbūvēt multistarpībkopu.

4.2. Datorprogrammā izmantotie risinājumi un teorēmas

Datorprogrammā tika izmantotas MSK konstruēšanas formulas, ar kuru palīdzību autore meklēja, vai katrs konkrētais MSK parametru trijnieks atbilst kādai no šīm formulām. Dažos MSK konstruēšanas veidos netika pārbaudīti paši sarežģītākie gadījumi.

4.2.1 Ležandra teorēma

Lai pārbaudītu Bruck – Ryser – Chowla teorēmas pirmo punktu, kur, ja v ir nepāra skaitlis, tad eksistē tādi veseli x, y, z , vismaz viens no kuriem nav 0, ka izpildās nosacījums :

$x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2$, autore izmantoja Ležandra teorēmu. Teorēma pasaka, vai eksistē šādi veseli x, y, z , kas visi nav vienādi ar 0.

Ležandra teorēma: Vienādojumam $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$, kura koeficienti a, b, c ir veseli skaitļi un nav visi ar vienādām zīmēm, ir nenulles racionāls atrisinājums tad un tikai tad, ja izpildās [13] :

- $x^2 \equiv -bc(\text{mod}|a|)$;
- $x^2 \equiv -ca(\text{mod}|b|)$;
- $x^2 \equiv -ab(\text{mod}|c|)$.

Apskatīsim teorēmas pielietojumu uz kāda konkrēta piemēra ar MSK parametriem.

Piemērs:

Doti parametri $(v, k, \lambda) = (21, 15, 10)$. Izmantojot Bruck – Ryser – Chowla teorēmu, mums jāatrod, vai eksistē tādi veseli x, y, z , vismaz viens no kuriem nav 0, ka izpildās

$$x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2.$$

Ieliekam formulā mums zināmos v , k un λ :

$$x^2 = 15y^2 + (-1)^{\frac{21-1}{2}} * 10z^2 \Rightarrow x^2 = 15y^2 + 10z^2$$

Pārnesam visus vienādojuma elementus uz vienu pusi:

$$x^2 - 15y^2 - 10z^2 = 0$$

Esam ieguvuši vienādojumu, kas atbilst Ležandra teorēmā apskatītajam, kur $a = 1$, $b = -15$ un $c = -10$. Tagad apskatām Ležandra teorēmas nosacījumus:

$$x^2 \equiv -bc \pmod{|a|} \Rightarrow$$

$$x^2 = (-(-15) * (-10)) \pmod{|1|} \Rightarrow$$

$$x^2 = -150 \pmod{1} \Rightarrow$$

$$x^2 = 0$$

Tagad mums jāmeklē tāda skaitļa kvadrāts, kuram atlikums, dalot ar $a = 1$, būtu vienāds ar tikko aprēķināto atlikumu 0. Viegli saskaņīt, ka šāds skaitļa kvadrāts eksistē : $0 = 0^2 \pmod{1}$.

$$x^2 \equiv -ca \pmod{|b|} \Rightarrow$$

$$x^2 = (-(-10) * 1) \pmod{|-15|} \Rightarrow$$

$$x^2 = 10 \pmod{15} \Rightarrow$$

$$x^2 = 10$$

Skatāmies, vai ir kāda skaitļa kvadrāts, kuru, dalot ar 15, atlikumā iegūsim 10. Šāds skaitļa kvadrāts ir : $10 = 5^2 \pmod{15}$.

$$x^2 \equiv -ab \pmod{|c|} \Rightarrow$$

$$x^2 = (-1 * (-15)) \pmod{|-10|} \Rightarrow$$

$$x^2 = 15 \pmod{10} \Rightarrow$$

$$x^2 = 5$$

Skatāmies, vai ir kāda skaitļa kvadrāts, kuru, dalot ar 10, atlikumā iegūsim 5. Šāds skaitļa kvadrāts ir : $5 = 5^2 \pmod{10}$.

Rezultātā visos gadījumos mēs varējām atrast tādus skaitļu kvadrātus, kurus dalot ar attiecīgo skaitli, ieguvām vajadzīgo atlikumu, tātad eksistē tādi veseli skaitļi x , y , z , kas nav visi vienādi ar 0.

Tā kā konkrētajā situācijā tiks apskatīti MSK parametri, kas veidos tikai šāda veida vienādojumus: $x^2 = ky^2 + (-1)^{\frac{v-1}{2}} * \lambda z^2$, tad autore secināja, ka, izmantojot Ležandra teorēmu,

koeficients a vienmēr būs vienāds ar 1. Līdz ar to nav vajadzības apskatīt pirmo gadījumu Ležandra teorēmā, jo tas vienmēr izpildīsies.

4.2.2 MSK meklēšana

Kad atrasti MSK parametri, kas neatbilst nevienai no jau zināmajām konstruēšanas metodēm, tad tālākai izpētei nepieciešams atrastos parametrus pārbaudīt, vai no tiem ir iespējams uzkonstruēt MSK vai nav iespējams. Sākumā MSK tika meklētas vienkārši atlikumu pēc naturāla skaitļa moduļa saskaitīšanas grupās. Lai uzlabotu programmatūras ātrdarbību, neveiktu primitīvu pilno pārlassi un nepārbaudītu katru iegūto starprezultātu starpības, uzdevuma sasniegšanai tika izmantota vienādojumu sistēma.

Vienādojumu sistēmas lielums atkarīgs no iespējamo MSK parametriem v un k . Parametrs v apzīmē grupas elementu skaitu, citiem vārdiem sakot, arī visus iespējamus atlikumus. Parametrs k apzīmē elementu skaitu multikopā. Tātad varam izsecināt, ka mums jāņem katrs atlikums pēc parametra v tik reizes, lai to kopīgais skaits būtu vienāds ar k . No šī seko vienādojums :

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1} = k,$$

kur a_i ir visu iespējamo atlikumu no 0 līdz $(v - 1)$ skaiti pēc parametra v .

Katram atlikumam starpībās jāparādās tieši λ reizes. Tātad apskatām, cik veidos mēs varam iegūt kā starpību atlikumu 0, cik veidos atlikumu 1, utt.

Lai iegūtu MSK, mēs konkrēto elementu pašu no sevis neatņemam. Tātad netriviālo atlikumu 0 mēs varam iegūt atņemot divus vienādus atlikumus, piemēram, mums ir šāda multikopa - $\{0_1, 0_2, 1_1, 1_2\}$, tad atlikumu 0 mēs varam iegūt $(0_1 - 0_2)$, $(0_2 - 0_1)$, $(1_1 - 1_2)$, $(1_2 - 1_1)$. Kopsummā mums šiem atlikumiem jābūt λ skaits, tātad varam uzrakstīt nākošo vienādojumu :

$$a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + \dots + a_{v-1}(a_{v-1} - 1) = \lambda,$$

kur a ir visu iespējamo atlikumu no 0 līdz $(v - 1)$ skaiti pēc parametra v . Šis vienādojums apzīmē visu nulļu atlikumu kopskaitu. Vienādojumu daļa $a(a - 1)$ arī nosaka, ka konkrēto skaitli pašu no sevis neatņem.

Līdzīgi meklējam, cik veidos varam iegūt atlikumu 1, 2 utt., piemēram, atlikumu 1 varam iegūt, no katra atlikuma atņemot iepriekšējo atlikumu, piemēram, mums ir šāda multikopa - $\{0, 0, 1\}$, tad atlikumu 1 mēs varam iegūt $(1 - 0)$, $(1 - 0)$, $(0 - 1)$ un $(0 - 1)$.

Kopsummā mums šiem atlikumiem jābūt λ skaits, tātad varam uzrakstīt nākošo vienādojumu :

$$a_1 * a_0 + a_2 * a_1 + \dots + a_{v-1} * a_{v-2} + a_0 * a_{v-1} = \lambda$$

Līdzīgi turpinot apskatīt pārējos atlikumus līdz $v-1$, iegūsim vairākas vienādības, kuras ir savā starpā saistītas. Šīs vienādības arī veido vienādojumu sistēmu :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1} = k \\ a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + \dots + a_{v-1}(a_{v-1} - 1) = \lambda \\ a_1 * a_0 + a_2 * a_1 + \dots + a_{v-1} * a_{v-2} + a_0 * a_{v-1} = \lambda \\ \dots\dots\dots \\ a_{v-1} * a_0 + a_0 * a_1 + \dots + a_{v-2} * a_{v-1} = \lambda \end{cases}$$

Lai viss tikko apskatītais liktos daudz saprotamāks apskatīsim piemēru. Pieņemsim, ka mums ir MSK ar parametriem $(v, k, \lambda) = (3, 3, 2)$.

- Tā kā $v = 3$, tad visu iespējamo atlikumu skaitu apzīmēsim šādi – $\{a_0, a_1, a_2\}$, kur a_0 ir visu 0 atlikumu skaits multikopā, utt. Jāpiebilst, ka katrs a var būt lielāks vai vienāds ar 0;
- Visu šo atlikumu kopsummai jābūt vienādai ar k , kas arī apzīmē elementu skaitu multikopā. Tātad, pirmais vienādojums būs :

$$a_0 + a_1 + a_2 = 3;$$

- Apskatām cik veidos mēs varam iegūt atlikumu 0, neaizmirstot, ka, lai veidotos MSK, atlikumu skaitam jābūt vienādam ar λ .

$$a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) = 2;$$

- Apskatām cik veidos mēs varam iegūt atlikumu 1, neaizmirstot, ka, lai veidotos MSK, atlikumu skaitam jābūt vienādam ar λ .

$$a_1 a_0 + a_2 a_1 + a_0 a_2 = 2;$$

- Apskatām cik veidos mēs varam iegūt atlikumu 2, neaizmirstot, ka, lai veidotos MSK, atlikumu skaitam jābūt vienādam ar λ .

$$a_2 a_0 + a_0 a_1 + a_1 a_2 = 2;$$

- Rezultātā ir iegūta vienādojumu sistēma :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 3 \\ a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + a_2(a_2 - 1) = 2 \\ a_1 a_0 + a_2 a_1 + a_0 a_2 = 2 \\ a_2 a_0 + a_0 a_1 + a_1 a_2 = 2 \end{cases}$$

Ja šādu vienādojumu sistēmu var atrisināt, tad MSK var uzbūvēt ar parametriem $(3, 3, 2)$, pretējā gadījumā MSK ar šādiem parametriem nevar uzbūvēt. Uzzinot a_0, a_1, a_2 vērtības, var redzēt, kādam skaitam konkrēto atlikumu jābūt, lai no multikopas varētu izveidot MSK.

Apskatītajā piemērā sistēma ir atrisināma, ja vērtības $(a_0, a_1, a_2) = (1, 2, 0)$. Tas nozīmē, ka multikopa ir šāda $\{0, 1, 1\}$ un tā veido MSK.

4.2.3 MSK meklēšana darbojoties ar atlikumu kortežiem

Iepriekšējā sadaļā (skat. 4.2.2) tika apskatīts, kā tika pārbaudīti konkrētie parametri, vai pie tiem var uzbūvēt MSK, izmantojot veselus atlikumus. Taču, lai pilnīgi droši varētu pārliecināties, ka MSK ar konkrētiem parametriem komutatīvā grupā nevar uzbūvēt, jāpārbauda arī atlikumu korteži (visas galīgās komutatīvās grupas ir izomorfas atlikumu vai atlikumu kortežu saskaitīšanas grupām). Atlikumu kortežus veido, balstoties uz Silova p -apakšgrupām.

Silova (Sylov) p -apakšgrupa – ja grupas G elementu skaitu var izteikt kā $p^m s$, kur s ar p nedalās, tas ir, atrod lielāko pirmskaitļa pakāpi, ar kuru elementu skaits dalās, tad grupā G ir tieši viena apakšgrupa ar p^m elementiem (tā sastāv no visiem elementiem, kuru kārtā ir kāda pirmskaitļa pakāpe). [11]

Ja galīgas komutatīvas grupas elementu skaitu sadala pirmreizinātājos, tad grupa ir izomorfa atbilstošo pirmskaitļu Silova p -apakšgrupu Dekarta reizinājumam. Savukārt Silova p -apakšgrupa ir izomorfa atlikumu kortežiem, kur katrs elements ir atlikums pēc kādas pirmskaitļa p pakāpes. [11]

Piemēram, atlikumu grupu pēc moduļa 8 varam sadalīt kā $Z_8, Z_4 \times Z_2$ un $Z_2 \times Z_2 \times Z_2$. Līdz ar to šajā gadījumā, no šādām Silova apakšgrupām varam iegūt kortežus garumā divi un garumā trīs. Korteži garumā divi būs atlikumi pēc moduļiem $(4, 2)$. MSK gadījumā ir jāiegūst visi iespējamie atlikumu korteži, kuriem pirmā komponente ir pēc atlikuma, dalot ar 4, bet otrā komponente pēc atlikuma, dalot ar 2. Gadījumu Z_8 varam neskatīties, jo tas ir ekvivalents jau apskatītajiem iepriekš apskatītajiem gadījumiem, darbojoties ar vienkārši atlikumiem.

Ja grupas elementu skaits ir dažādu pirmskaitļu reizinājums, tad šis gadījums ir pielīdzināms jau apskatītajam gadījumam, kad darbības notiek ar veseliem atlikumiem.

Piemēram, atlikumu grupu pēc moduļa 15 varam sadalīt kā $Z_3 \times Z_5$, bet tā kā 3 un 5 ir savstarpēji pirmskaitļi ($\text{LKD}(3, 5) = 1$), tad šis gadījums ir pielīdzināms atlikumiem pēc moduļa 15. Šādus gadījumus atsevišķi nav nepieciešams pārbaudīt.

Darbojoties ar atlikumu kortežiem, lai sanāktu MSK, multikopā esošo kortežu skaitam jābūt vienādam ar MSK parametra k vērtību, un starpību rezultātā jāparādās visiem iespējamajiem kortežiem λ reizes.

Piemērs:

Iespējamā MSK ar parametriem $(v, k, \lambda) = (8, 9, 9)$. Parametram v var atbilst trīs būtiski dažādas Silova p -apakšgrupas: Z_{2^3} (šis gadījums jau aplūkots kā atlikumi mod 8), $Z_{2^2} \times Z_{2^1}$ un $Z_{2^1} \times Z_{2^1} \times Z_{2^1}$. Vispirms jāapskata visi atlikumu korteži garumā 2, tātad pēc moduļa (4, 2), pēc tam visi atlikumu korteži garumā trīs.

Visi iespējamie atlikumu korteži pēc moduļa (4, 2) ir : $(0,0); (0,1); (1,0); (1,1); (2,0); (2,1); (3,0); (3,1)$.

Sākotnējā atlikumu kortežu multikopa izskatās, piemēram, šādi:

$\{(0,0); (0,0); (0,1); (0,1); (3,0); (3,0); (3,1); (3,1); (1,1)\}$, redzam, ka kortežu skaits multikopā ir 9 (elementu skaits multikopā vienāds ar k).

Lai veidotos MSK, tad jādarbojas tāpat kā iepriekš – katrs kortežs viens no otra jāatņem un rezultātā katram atlikumu kortežam jāparādās tieši λ reizes. Netriviālo starpību starp kortežiem iegūst līdzīgi kā darbojoties ar vienu atlikumu, tikai kortežus atņemot pa komponentēm.

Piemēram,

$$(0, 1) - (3, 0) = (1, 1), \text{ kur netriviālās starpības pirmā komponente veidojas } 0 - 3 = -3; \\ (-3) = 1 \pmod{4}, \text{ bet rezultāta otrā komponente veidojas } 1 - 0 = 1; 1 = 1 \pmod{2}.$$

Lai pārbaudītu, vai no konkrētajiem parametriem var uzbūvēt MSK, tika izmantota vienādojumu sistēma, līdzīgi kā 4.2.2 sadaļā, tikai darbības notiek ar atlikumu kortežiem un a_i vērtība apzīmē konkrētā atlikuma kortežu skaitu multikopā.

4.3. Datoreksperimentu rezultāti

Datoreksperimentu rezultātā tika atrasti vairāki tādi MSK parametri (v, k, λ) , kas atbilst prasītajiem meklēšanas kritērijiem. Daļai no parametriem tika atrasts, pēc kādiem konstruēšanas veidiem tādas MSK iespējams uzbūvēt. Iegūtie rezultāti tika pārbaudīti, vai

kādi no parametriem atbilst vispārīgajām neeksistences formulām [Neeksistences formulas skatīt sadaļā 2.4.3].

Tā kā rezultātā tika atrasti vairāki multistarpībukopu parametri, kuri neatbilst nevienai konstruēšanas metodei un vispārīgajām neeksistences formulām, tad autore veica dažus eksperimentus, lai pārbaudītu, vai iespējams vispār uzbūvēt MSK ar šādiem parametriem.

Iegūtie rezultāti ir apkopoti tabulā *Tabula 4.1 Iegūtie rezultāti*.

Tabula 4.1 Iegūtie rezultāti

(v, k, λ)	Rezultāts	Komentāri
(2,4,6)	IR izņēmumgadījums	Izpildās pēc 2.4.3.2 teorēmas
(2,9,36)	6.gadījums	
(3,3,2)	2. gadījums	
(3,4,4)	4. gadījums	
(3,7,14)	6. gadījums	
(3,10,30)	NAV	-
(4,4,3)	NEEK SISTĒ	Pēc 2) neeksistences formulas
(4,9,18)	6. gadījums	
(5,5,4)	3. gadījums	
(5,6,6)	NAV	-
(6,4,2)	IR izņēmumgadījums	Izpildās pēc 2.4.3.1 teorēmas
(6,9,12)	7. gadījums pie SK(6,5,4) A = 1, B =4	
(7,7,6)	2. gadījums	
(7,8,8)	4. gadījums	
(8,9,9)	NAV	Pēc 2.4.3.3 teorēmas
(9,10,10)	NAV	-
(12,4,1)	NEEK SISTĒ	Pēc 1) neeksistences formulas
(12,9,6)	8. gadījums	
(15 6 2)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.1 teorēmas
(15 10 6)	NAV	-
(18 9 4)	NEEK SISTĒ	Pēc 1) neeksistences formulas
(21 7 2)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.1 teorēmas
(24 9 3)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.3 teorēmas
(36 9 2)	NEEK SISTĒ	Pēc 1) neeksistences formulas
(72 9 1)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.3 teorēmas
(2 16 120)	IR pie (10, 6), (6,10)	Izpildās pēc 2.4.3.2 teorēmas
(3 12 44)	11. gadījums	
(3 13 52)	6.gadījums	
(3 16 80)	6.gadījums	
(4 16 60)	7.gadījums SK(4,3,2) a = 3 b = 7	
(5 11 22)	6.gadījums	
(5 16 48)	6.gadījums	
(6 16 40)	7.gadījums SK(6,5,4) a = 2 b = 6	
(7 14 26)	IR pie (1,1,2,1,2,2,5) u.c.	Šobrīd nav atrasts konstruēšanas veids
(7 15 30)	NAV	-
(8 16 30)	NEEK SISTĒ	Pēc 3) neeksistences formulas
(10 16 24)	IR pie (2,2,2,4,0,2,2,2,0,0) un (2,2,2,0,4,2,2,2,0)	Šobrīd nav atrasts konstruēšanas veids

(v, k, λ)	Rezultāts	Komentāri
(11 11 10)	2. gadījums	
(11 12 12)	4. gadījums	
(12 16 20)	7. gadījums SK(12,11,10) a = 1 b = 5	
(13 13 12)	3. gadījums	
(13 14 14)	NAV	-
(15 15 14)	NAV	-
(15 16 16)	5. gadījums	
(16 16 15)	NEEK SISTĒ	Pēc 2) neeksistences formulas
(17 17 16)	3. gadījums	
(20 16 12)	8. gadījums	
(21 15 10)	NAV	-
(24 16 10)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.4 teorēmas
(30 16 8)	nav	-
(33 12 4)	nav	-
(35 15 6)	nav	-
(39 13 4)	nav	-
(40 16 6)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.4 teorēmas
(48 16 5)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.4 teorēmas
(55 11 2)	NEEK SISTĒ	Pēc 2.4.3.1 teorēmas

5. IEGŪTO REZULTĀTU ANALĪZE

No iegūtajiem datoreksperimentu rezultātiem ir redzams, ka dažiem no (v, k, λ) parametriem ir iespējams uzbūvēt MSK un līdz šim nav atrasta vienota konstruēšanas metode, bet ir arī parametri, kuriem nav iespējams uzkonstruēt MSK. Tas paver jaunas iespējas katru konkrēto gadījumi analizēt tālāk.

5.1. Parametru, pie kuriem MSK var uzkonstruēt, analīze

Šajā sadaļā tiks apskatīti MSK parametri, pie kuriem autorei izdevās uzbūvēt MSK. Ar šiem atrastajiem rezultātiem autore centīsies atrast kādas sakarības, no kurām varētu izveidot jaunu MSK konstruēšanas veidu.

Sākumā analīzei tiks izmantoti sadaļā 4.2.2 *MSK meklēšana* aprakstītās vienādojumu sistēmas rezultāti.

5.1.1 Atšķirīgo gadījumu atrašana

Datoreksperimentu rezultātos atklājās, ka dažas MSK var uzbūvēt dažādos veidos, līdz ar to autorei vajadzēs apskatīt visus šos veidus. Tātad tiks apskatīti dažādie $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ gadījumi, kur a apzīmē katra atlikuma no v līdz $v-1$ skaitu multikopā. (Kā iegūst konkrētos mainīgos a skatīt sadaļā 4.2.2 *MSK meklēšana*.)

Tagad tiks apskatīts, kā saprast, vai iegūtie atrisinājumi ir dažādi. Lai to visu vieglāk saprast apskatīsim piemēru.

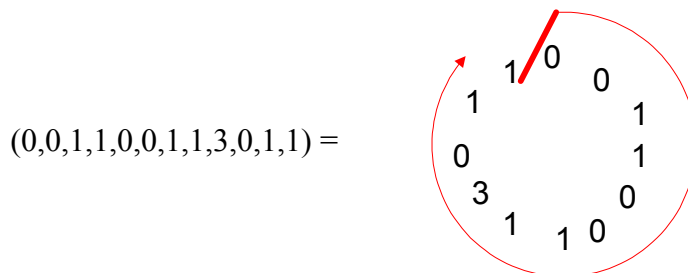
Ņemsim MSK ar parametriem (12, 9, 6). Ar datoreksperimentu palīdzību tika iegūts, ka MSK ar šādiem parametriem var uzkonstruēt, šādos gadījumos (skat. *Tabula 5.1 Mainīgo a vērtības*):

Tabula 5.1 Mainīgo a vērtības

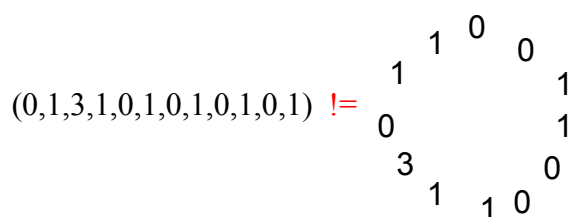
$(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$
(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)
(0,0,1,1,0,0,1,1,3,0,1,1)
(0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1,0)
(0,1,3,1,0,1,0,1,0,1,0,1)
.... u. c.

Lai gan izskatās, ka visi gadījumi ir līdzīgi, tomēr tā nav. Šajā piemērā mēs varam atrast divus dažādus gadījumus, kas varbūt pirmajā brīdī nešķiet tik viegli saskatāmi. Gadījumi $(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)$ un $(0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1,0)$ ir līdzīgi, $(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)$ un $(0,1,3,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ ir atšķirīgi, bet $(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)$ un $(0,0,1,1,0,0,1,1,3,0,1,1)$ ir spoguļattēli viens pret otru.

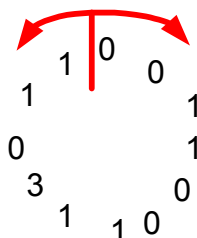
. Par to viegli varam pārliecināties sarakstot visus konkrētā gadījuma a vērtības pa riņķi. Izvēlamies pulksten rādītāju virzienu un skatāmies pa riņķi izvietotajiem skaitļiem, ja varam atrast tādu kombināciju, tad gadījumi ir līdzīgi, ja nevaram, tad atšķirīgi.



Tagad var viegli redzēt, ka gadījumu $(0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1,0)$ varam atrast pa riņķi izvietotajos skaitļos, bet gadījumu $(0,1,3,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ nevar atrast šajā riņķī. Līdz ar to gadījums $(0,1,3,1,0,1,0,1,0,1,0,1)$ ir atšķirīgs no gadījumiem $(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)$ un $(0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1,0)$. Tos gadījumus, kurus varam atrast riņķī ir līdzīgi, jo tos varam iegūt ar ciklisku nobīdi, tādēļ šos līdzīgos gadījumus varam arī neapskatīt sīkāk.



Līdzīgi varam noteikt arī to, vai konkrētais gadījums ir spoguļattēls pret doto gadījumu. To var viegli pamanīt, skatoties pa riņķi izvietotās vērtības: ja konkrēto gadījumu varam atrast pa riņķi, tikai skatoties pretēji pulksteņa rādītāja virzienam, tad gadījums ir dotā gadījuma spoguļattēls.



Tagad viegli redzams, ka $(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)$ un $(0,0,1,1,0,0,1,1,3,0,1,1)$ ir spoguļattēli, pirmo gadījumu varam iegūt, skatoties pa riņķi pulksteņa rādītāja virzienā, bet otro – skatoties pa riņķi pretēji pulksteņa rādītāja virzienam.

5.1.2 MSK spoguļattēls

Izmantojot datoreksperimentu rezultātus, autore novēroja, ka katrai MSK arī spoguļattēls ir MSK. Līdz ar to var secināt, ka arī šie gadījumi nav būtiski atšķirīgi un tos var sīkāk neapskatīt.

Pierādījums:

Pierādījums, ka katrai MSK arī spoguļattēls ir MSK, nav tik sarežģīts. Pierādījumam tiks izmantota sadaļā 4.2.2 MSK meklēšana aprakstītā vienādojumu sistēma:

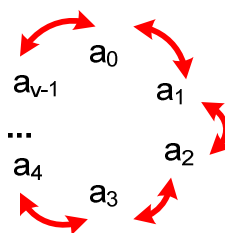
$$\begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1} = k \\ a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + \dots + a_{v-1}(a_{v-1} - 1) = \lambda \\ a_1 * a_0 + a_2 * a_1 + \dots + a_{v-1} * a_{v-2} + a_0 * a_{v-1} = \lambda \\ \dots \\ a_{v-1} * a_0 + a_0 * a_1 + \dots + a_{v-2} * a_{v-1} = \lambda \end{cases}$$

Tā kā kopumā spoguļattēla a vērtību summa nemainās, tad izpildās arī pirmais vienādojums $a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1} = k$, tas ir, elementu skaits multikopā ir vienāds ar k , kur k ir MSK (v, k, λ) parametrs.

Atlikumu 0 MSK var iegūt tikai tad, ja $a_i > 1$. Kopumā a vērtības mums nemainās, tad arī atlikumu 0 varam iegūt tieši tādā pašā skaitā, kā pamata gadījumā. Līdz ar to izpildās arī vienādojums $a_0(a_0 - 1) + a_1(a_1 - 1) + \dots + a_{v-1}(a_{v-1} - 1) = \lambda$.

Lai iegūtu pārējos atlikumus, tiek izmantota divu a vērtību reizinājumu summa. Jau pēc vienādojumu sistēmas varam pamanīt, ka, lai iegūtu atlikumus 1, 2 ... $v - 1$, a vērtību reizinājums veidojas ar ciklisku nobīdi.

Lai pierādītu, ka kāda gadījuma spoguļattēlam veidojas tieši tāds pats vienādojums kā pamata gadījumam, izmantosim a vērtības, kas izkārtotas pa riņķi :



Konkrētajā gadījumā ir attēlots veids, kā varam iegūt visus a vērtību reizinājumus, lai atlikums būtu 1. Tagad viegli redzams, ka, izpildot šīs darbības gan pamata gadījumam, gan tā spoguļattēlam, a vērtību reizinājums būs tieši tāds pats. Apskatot gadījumus, kad meklē atlikumus 2 līdz $v - 1$, iegūsim līdzīgu situāciju. Līdz ar to redzam, ka MSK spoguļattēls veido tieši tādas pašas vienādojumu sistēmas vērtības kā pamata attēls, tātad spoguļattēls arī veidos MSK.

5.1.3 Analīze izmantojot atrastās $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības

Autore, mēģinot atrast vienotu konstruēšanas metodi atrastajām multistarpībkopām, sākumā pētīja atrasto MSK atlikumu skaitu, jeb atrastās $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības.

Iesākumā autore noskaidroja atšķirīgos $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ gadījumus. Arī tiem gadījumiem, kuriem jau ir atrastas MSK konstruēšanas metodes, tika pamanīti vairāki atšķirīgi $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ gadījumi, kurus arī vajadzētu paanalizēt, jo iespējams starp tiem arī slēpjas vēl kāda neatklāta MSK konstruēšanas metode. (Skat. **Tabula 5.2 Zināmo MSK atšķirīgie gadījumi**)

Tabula 5.2 Zināmo MSK atšķirīgie gadījumi

(v, k, λ)	$(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$
(5,5,4)	(2,1,2,0,0)
	(2,2,0,1,0)

(6,9,12)	(1,0,1,3,1,3)
	(2,0,2,0,2,3)
	(1,1,1,1,1,4)
(12,9,6)	(0,0,1,1,0,0,1,1,0,3,1,1)
	(0,1,3,1,0,1,0,1,0,1,0,1)
(4,16,40)	(5,5,5,1)
	(7,3,3,3)
(5,11,22)	(4,3,2,2,0)
	(3,2,4,2,0)
(17,17,16)	(0,0,0,2,0,2,2,1,2,2,0,2,0,0,2,2)
	(0,0,1,0,0,2,0,2,2,2,0,0,2,2,0,2)
(20, 16, 12)	(1,1,1,0,0,1,1,1,4,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,0)
	(1,1,4,1,0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,0,1,1,0,1,0)

Tabulā *Tabula 5.3 Atrasto MSK a vērtības* attēlotas atrasto MSK a vērtības, kuras neatbilda zināmajām konstruēšanas metodēm.

Tabula 5.3 Atrasto MSK a vērtības

(v, k, λ)	$(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$
(10, 16, 24)	(2,2,2,4,0,2,2,2,0,0)
(7, 14, 26)	(1,1,2,1,2,2,5)

Atrastās $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības autore pareizināja ar x , kur x ir robežās no 2 līdz 100, tad šīs vērtības pārbaudīja izmantojot sadaļā 4.2.2 *MSK meklēšana* aprakstīto vienādojumu sistēmu, lai redzētu, vai joprojām, ja katru vērtību tiek ņemta x reizes vairāk, veidojas MSK. Protams, šajā gadījumā λ vērtību mēs nezinām. Vienādojumu sistēma tiek balstīta uz to, ka visas vienādojumu summas sistēmā ir vienādas, izņemot pirmo, kas apzīmē elementu skaitu multikopā - $a_0 + a_1 + \dots + a_{v-1} = k$.

Rezultātā gan šī metode nevainojās ar panākumiem, ņemot katru atlikumu multikopā x reizes vairāk, MSK neveidojās. Līdz ar to var secināt, ka no konkrētiem MSK parametriem (v, k, λ) nevar iegūt vispārīgu MSK konstruēšanas metodi, kas ir $(v, xk, a \lambda)$, kur x robežās [2, 100].

5.1.3.1 Gandrīz MSK

Apskatot MSK ar parametriem (10, 16, 24), viegli pamanīt, ka katra a vērtība dalās ar 2, līdz ar to ir vērts pārbaudīt, kas notiek šajā gadījumā. Tātad $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1}) = (2,2,2,4,0,2,2,2,0,0)$, izdalot katru a vērtību ar 2, iegūst $(1,1,1,2,0,1,1,1,0,0)$. Pārbaudot, vai ar šādiem parametriem var uzbūvēt MSK, atklājās, ka veidojas gandrīz MSK, visi atlikumi

izņemot 0, parādās vienādu reižu skaitu, kas ir 6, bet atlikums 0 parādās 2 reizes. Līdz ar to autore ievieš jaunu jēdzienu – gandrīz multistarpība ar parametriem $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$, kur k' – elementu skaits multikopā, λ_1 – cik reizes kā starpība parādās katras nenulles atlikums, λ_2 – cik reizes parādās nulles atlikums.

Lemma 1: Ja var uzbūvēt MSK un visas $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības dalās ar kādu skaitli s , kur $s > 1$, tad, izdalot visus elementu skaitus ar šo vērtību s , iegūst gandrīz MSK ar parametriem $(v, k', \lambda_1, \lambda_2) = \left(v, \frac{k}{s}, \frac{\lambda}{s^2}, \frac{k}{s} \left(\frac{k}{s} - 1 \right) - (v-1)\lambda_1 \right)$.

Ja mums ir zināmi MSK parametri (v, k, λ) un šāda vērtība s , tad no šiem mainīgajiem var izteikt gandrīz MSK parametrus $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$. Parametrs k' izsakās, kā $k' = k/s$, jo katru a vērtību mēs izdalām ar s , līdz ar to multikopas kopējais elementu skaits samazināsies s reizes. Autore, izpētot līdzīgus gadījumus, kad no MSK veidojas gandrīz MSK, secināja, ka nulles atlikumu skaitu gandrīz MSK var izteikt, kā $\lambda_1 = \frac{\lambda}{s^2}$. Gandrīz MSK parametrus $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$ saista sakarība: $(v-1)\lambda_1 + \lambda_2 = k'(k'-1)$. Sakarības otrā daļa $k'(k'-1)$ izsaka, cik pavisam starpības iespējams iegūt starp multikopas elementiem, bet sakarības pirmā daļa izsaka, cik reizes katrs atlikums atkārtojas – visu atlikumu skaits, izņemot atlikumu 0, ir $(v-1)$ un katram šādam atlikumam jāparādās λ_1 reizes, līdz ar to kopējais visu nenulles atlikumu skaits būs $(v-1)\lambda_1$, tam, pieskaitot nulles atlikumu skaitu, iegūstam visu iespējamo starpību skaitu starp multikopas elementiem. Izmantojot tikko atrasto sakarību, viegli var izteikt parametru λ_2 :

$$\lambda_2 = k'(k'-1) - (v-1)\lambda_1$$

Tātad no MSK parametriem (v, k, λ) un s var iegūt gandrīz MSK ar parametriem

$$\left(v, \frac{k}{s}, \frac{\lambda}{s^2}, k'(k'-1) - (v-1)\lambda_1 \right).$$

Lemma 2: Ja ir gandrīz MSK ar parametriem $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$ un $s = \frac{k'}{k'^2 - v\lambda_1}$ ir vesels pozitīvs skaitlis, tad, paņemot katru atlikumu multikopā s reizes vairāk, var uzbūvēt MSK ar parametriem $(v, sk, s^2\lambda_1)$.

Tālāk tiks parādīts, kā izsakās MSK, ja eksistē gandrīz MSK ar parametriem $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$, kurai starp elementiem izpildās $(v-1)\lambda_1 + \lambda_2 = k'(k'-1)$ sakarība. Lai no

gandrīz MSK varētu izteikt multistarpībkopu, tad ir jāaprēķina s vērtība – cik reizes jāpareizina katrs atlikumu skaits multikopā, lai veidotos MSK. Šo s vērtību varam aprēķināt, izmantojot gandrīz MSK sakarību, kas iegūta no MSK parametriem. Ja gandrīz MSK parametri ir $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$, tad MSK mēs arī varam izteikt ar četriem parametriem – $(v, ks, \lambda_1 s^2, \lambda_1 s^2)$, jo MSK visi atlikumi ir vienādu reižu skaitu, arī atlikums 0 , līdz ar to parametru pēdējās divas vērtības būs vienādas. Tā kā, lai iegūtu MSK no gandrīz MSK katru a vērtību jāpalielina s reizes, līdz ar to kopējais elementu skaits multikopā palielināsies s reizes un $k = k's$.

Piemēram, ir dota MSK ar parametriem $(10, 16, 24)$, tad to varam uzrakstīt arī kā $(10, 16, 24, 24)$, jo visu atlikumu, izņemot 0 , skaits ir 24 , un atlikuma 0 skaits MSK arī ir 24 .

Tā kā $\lambda_1 = \frac{\lambda}{s^2}$, tad lambda izsakās, kā $\lambda = \lambda_1 s^2$, un varam uzrakstīt sakarību :

$(v-1)\lambda_1 s^2 + \lambda_1 s^2 = k's(k's-1)$, no kuras var izteikt s vērtību.

$$(v-1)\lambda_1 s^2 + \lambda_1 s^2 = k's(k's-1)$$

$$s^2((v-1)\lambda_1 + \lambda_1) = k's(k's-1)$$

$$sv\lambda_1 = k'(k's-1)$$

$$sv\lambda_1 = k'^2 s - k'$$

$$sv\lambda_1 - k'^2 s = -k'$$

$$s = \frac{-k'}{v\lambda_1 - k'^2}$$

$$s = \frac{k'}{k'^2 - v\lambda_1}$$

5.1.3.2 Jauna MSK klase

Kā jau sadaļā 5.1.3.1 Gandrīz MSK minēts, ka autores atklātā MSK ar parametriem $(10, 16, 24)$ veido gandrīz MSK, ja katru a vērtību izdala ar skaitli s , kas šajā gadījumā ir vienāds ar 2 . Tātad $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1}) = (2, 2, 2, 4, 0, 2, 2, 2, 0, 0)$, izdalot katru a vērtību ar 2 , iegūst gandrīz MSK ar šādām a vērtībām - $(1, 1, 1, 2, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$. Var pamanīt, ka šīs visas a vērtības it kā sastāv no divām daļām - $(1, 1, 1, 2, 0)$ un $(1, 1, 1, 0, 0)$. Autore eksperimentēja ar šīm a vērtībām, vienmērīgi palielinot vieninieku skaitu abās iedomātajās daļās. Iegūtos eksperimentu rezultātus skatīt *Tabula 5.4 Eksperimenti ar gandrīz MSK*.

Tabula 5.4 Eksperimenti ar gandrīz MSK

$(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$	Rezultāts	s	MSK
(111120111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (12,10,8,2)	$s = 10/4$	Tā kā s nav vesels skaitlis, tad MSK neveidojas.
(11111201111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (14,12,10,2)	$s = 3$	Tā kā s vesels pozitīvs skaitlis, tad var iegūt MSK ar parametriem (14,36,90)
(1111112011111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (16,14,12,2)	$s = 14/4$	Tā kā s nav vesels skaitlis, tad MSK neveidojas.
(111111120111111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (18,16,14,2)	$s = 4$	Tā kā s vesels pozitīvs skaitlis, tad var iegūt MSK ar parametriem (18,64,224)
(11111111201111111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (20,18,16,2)	$s = 18/4$	Tā kā s nav vesels skaitlis, tad MSK neveidojas.
(1111111112011111111100)	Gandrīz MSK ar parametriem (22,20,18,2)	$s = 5$	Tā kā s vesels pozitīvs skaitlis, tad var iegūt MSK ar parametriem (22,100,450)

Šādi turpinot, autore ieguva līdzīgus rezultātus, kur katrs otrais rezultāts no gandrīz MSK veidoja MSK. Iegūtie MSK parametri tika pārbaudīti, izmantojot datorprogrammas palīdzību, un rezultātā atrastie parametri tiešām veidoja MSK. Līdz ar to autore ir atklājusi jaunu MSK klasi: (10, 16, 24); (14, 36, 90); (18, 64, 224); (22,100, 450) u.c.

Tagad autorei, zinot jaunās MSK klases parametrus, vajadzētu atrast vispārīgu formulu, kas noteiktu, vai no konkrētajiem (v, k, λ) parametriem var uzbūvēt MSK. Redzot iegūtos rezultātus, redzam, ka s ar katru reizi, kad veidojas MSK pieaug par vienu (skat. *Tabula 5.5 s vērtību pieaugums*).

Tabula 5.5 s vērtību pieaugums

(v, k, λ)	S
(10, 16, 24)	2
(14, 36, 90)	3
(18, 64, 224)	4
(22,100, 450)	5

Tā kā s pieaug, tad to var ņemt kā galveno parametru, un izteikt MSK (v, k, λ) parametrus kā funkcijas no s . Šādi, izsakot MSK parametru vērtības, autore uzrakstīja šādu teorēmu.

Teorēma : Katrai naturālai s vērtībai, kur $s \geq 2$, pastāv MSK ar parametriem $(4s + 2, 4s^2, (4s - 2)s^2)$.

Pierādījums:

Ja atrastās funkcijas, kas izsaka (v, k, λ) parametrus, ir pareizas, tad jāizpildās šādai vienādībai $v\lambda = k(k - 1)$. Pārbaudām, vai tā izpildās:

$$(4s + 2)(4s - 2)s^2 = 4s^2(4s^2 - 1)$$

$$(16s^2 - 4)s^2 = 4s^2(4s^2 - 1)$$

$$16s^4 - 4s^2 = 16s^4 - 4s^2$$

Redzam, ka vienādība izpildās, līdz ar to (v, k, λ) vērtības ir izteiktas pareizi.

Kā jau iepriekš aprakstīts, tad šādu MSK klasi var uzkonstruēt no gandrīz MSK, no kurām aprēķinot s vērtību, ja tā sanāk vesels pozitīvs skaitlis, tad, ņemot katru atlikumu skaitu s reizes vairāk, iegūstam MSK.

Piemēram, $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1}) = (111111120111111100)$, tas veido gandrīz MSK ar parametriem (18,16,14,2). Zinot šos parametrus, varam aprēķināt s vērtību pēc formulas

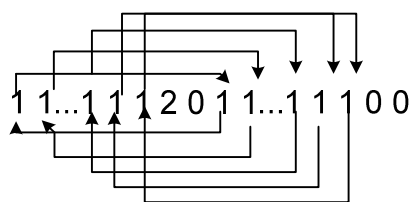
$$s = \frac{k'}{k'^2 - v\lambda_1} \text{ (sīkāk skatīt sadaļu 5.1.3.1 Gandrīz MSK). } s = \frac{16}{16^2 - 18 \cdot 14} = \frac{16}{4} = 4, \text{ tā kā } s \text{ ir}$$

vesels pozitīvs skaitlis, tad, pareizinot katru a vērtību s reizes, iegūsim MSK a vērtības.

$(111111120111111100) * s = (444444480444444400)$. No katras gandrīz MSK var iegūt MSK, ja s vesels pozitīvs skaitlis. (skatīt sadaļā 5.1.3.1 Gandrīz MSK).

Tā kā tiek apskatītas a vērtības, kas ir 11...1112011...11100, kopējais vieninieku skaits ir $4s - 2$, līdz ar to, iedomāti pārdalot virkni divās daļās, katrā daļā vieninieku skaits ir $2s - 1$. Vispārīgi a vērtību virkne sastāv, kā $2s - 1$ vieninieki, 2, 0, $2s - 1$ vieninieki, 0, 0.

Kopā mēs iegūstam atlikumus no 0 līdz $4s - 1$. Neatkarīgi no šādas virknes garuma, atlikumu 0 varam iegūt tikai divas reizes, jo tikai viena a vērtība ir lielāka par viens, $2*(2 - 1) = 2$ - tik ir atlikumu nulle starp starpībām. Atlikumu $2s + 1$ var iegūt šādi :



Lai iegūtu atlikumu $2s+1$, starp divām sareizinātajām a vērtībām ir $2s$ citas vērtības, sanāk, ka, iedomāti sadalot virkni divās vienādās daļās, iegūsim abu virkņu vienādās pozīcijās esošo elementu reizinājumu. Elementa a ar vērtību $a = 2$ reizinājumu šajā gadījumā mēs nevaram iegūt, jo to sanāk reizināt ar 0 . Tātad redzam, ka starpību $2s+1$ varam iegūt tikai no vieninieku reizinājumiem, līdz ar to atlikums $2s + 1$ parādīsies tik reizes, cik ir vieninieki šajā virknē, tas ir, $(4s - 2)$ reizes.

Tā kā mainās tikai vieninieku skaits virknē, tad a vērtības 2 un 0 vienmēr ir blakus. Ja gribam iegūt atlikumu 1 , tad mums jā sareizina blakus esošās a vērtības. Tā kā katrā iedomātajā virknes pusē ir $2s - 1$ vieninieki, tad blakus esošo vieninieku reizinājums katrā daļā būs $(2s - 1) \cdot 1$. Tāpat arī otrā virknes daļā, līdz ar to kopējais reizinājumu skaits starp vieniniekiem būs $((2s-1)-1) \cdot 2$. Reizinājumu $(2 \cdot 1)$ varam iegūt tikai vienu, jo blakus divniekam vienmēr pa labi būs nulle, bet pa kreisi vienmēr būs viens. Tātad kopējais starpību skaits, kas dod atlikumu viens, ir $((2s-1)-1) \cdot 2 + 2 = 4s - 2$.

$$1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

Tagad apskatīsim, cik reizes varam iegūt atlikumus i , kur i ir no 2 līdz $2s - 1$. Lai iegūtu atlikumu 2 , starp a vērtībām ir 1 cita, tātad reizinājumu $(2 \cdot 1)$ varam iegūt 2 reizes, jo blakus esošos skaitļus nereizina, un no divnieka pa labi un pa kreisi, izlaižot vienu vērtību, noteikti būs vērtība viens. Tāpat, turpinot līdz atlikumam $2s - 1$, mēs iegūsim divas reizes $(2 \cdot 1)$ reizinājumus, jo vienmēr trāpīsim no divnieka uz vieninieka, nevis nulles.

$$1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \dots 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

Tātad $(2 \cdot 1) \cdot 2$ tik starpības, kur a vērtība 2 , iegūsim pie atlikumiem i , kur i no 2 līdz $2s - 1$. Tagad saskaitīsim, cik reizinājumi veidosies, starp vieniniekiem katrā iedomātajā virknes pusītē. Ja meklējam starpības, kas dod atlikumu i , tad starp abu a vērtību reizinājumu mums jāizlaiž $(i - 1)$ a vērtības. Katrā iedomātajā virknes daļā būs $((2s - 1) - i)$ vieninieku reizinājums, piemēram, ja $s = 3$ un $i = 3$, tad katrā iedomātajā virknes daļā veidosies divu vieninieku reizinājums.

$$1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

Tātad kopā abās iedomātajās virknes daļās būs $((2s - 1) - i) \cdot 2$ vieninieku reizinājumi. Tagad saskaitām cik būs vieninieku reizināji, kas veidojas no abu iedomāto virknes pušu vieniniekiem. Šis reizinājumu skaits būs $(i - 2)$, jo kā redzam, tad abas virknītes daļas ir līdzīgas $11\dots111XX11\dots111XX$, tātad pa vidu starp vieniniekiem ir 2 citas a vērtības, kuras

izlaižam, tādēļ $(i - 2)$, piemēram, ja $s = 3$ un $i = 3$, tad veidosies tikai viens $(I * I)$ reizinājums attiecībā pret katras virknītes pusi, kur katrs vieninieks ir no savas virknītes puses:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0$$

Tātad kopumā šādu $(I * I)$ reizinājumi būs $(i - 2) * 2$, reizinām ar 2, jo attiecīgi pret katras virknītes vieniniekiem.

Līdz ar to, starpību skaits, no kurām varam iegūt atlikumu i , kur i no 2 līdz $2s - 1$ ir :

$$((2s - 1) - i) * 2 + (i - 2) * 2 + (2 * I) * 2 = 4s - 2.$$

Apskatīsim gadījumus, kuros varam iegūt atlikumu $2s$. No pirmā vieninieka virknītē līdz vajadzīgajai a vērtībai, starpā jāizlaiž $(2s - 1)$ a vērtības, tā kā iedomātā puse no virknītes ir $2s + 1$ gara, tad secinām, ka pirmais vieninieks būs jāreizina ar 0. Tātad a vērtību reizinājumi $(I * I)$, būs tikai ar otrās virknītes puses vieniniekiem, tātad šādu vieninieku reizinājums būs $(2s - 2) * 2$, reizina ar 2, jo attiecīgi pret katru virknītes pusi.

$$1\ 1 \dots 1\ 1\ 1\ 2\ 0\ 1\ 1 \dots 1\ 1\ 1\ 0\ 0$$

Pēc nobīdēm redzam, ka a vērtību $(2 * I)$ reizinājums būs tikai viens. Tātad, lai iegūtu atlikumu $2s$, ir nepieciešamas $(2s - 2) * 2 + 2 = 4s - 2$ starpības

Atlikumu $(2s + 2)$ var iegūt analogi gadījumam, kad atlikums ir $2s$, atlikumus no $2s + 3$ līdz $4s$ iegūst tāpat, kā gadījumā, kur atlikumi ir no 2 līdz $2s - 1$, un atlikumu $4s + 1$ var iegūt tāpat, kā gadījumā, kad atlikums ir 1. Līdz ar to atlikumus no $(2s + 2)$ līdz $(4s + 1)$ var iegūt no $4s - 2$ starpībām.

Elementu skaits gandrīz MSK sanāk $k' = (2s - 1) * 2 + 2$, kur $2s - 1$ apzīmē vieninieku skaitu vienā virknes daļā, tā kā abās daļās vieninieku skaits vienāds, tad pareizina ar 2, tad vieninieku skaitam pieskaita vienīgo divnieku, jo virknes modifikāciju rezultātā mainās tikai vieninieku skaits. Grupas elementu skaits gandrīz MSK ir $v = (2s - 1) * 2 + 1 + 3$, kur $(2s - 1) * 2$ apzīmē vieninieku skaitu virknē, tam pieskaitām 1, jo virknē ir tikai viens divnieks, un pieskaitām 3, jo virknē ir trīs nulles, kuras arī virknes modifikācijas rezultātā nemainās. Katrs nenulles atlikums gandrīz MSK parādīsies $\lambda_1 = 4s - 2$ reizes. Ievietojot visus atrastos

parametrus formulā $\frac{k'}{k'^2 - v\lambda_1}$, iegūstam veselu pozitīvu vērtību s .

$$\frac{(2s-1) \cdot 2 + 2}{((2s-1) \cdot 2 + 2)^2 - ((2s-1) \cdot 2 + 4) \cdot (4s-2)} =$$

$$= \frac{4s}{16s^2 - (16s^2 - 8s + 16s - 8s + 4 - 8)} = \frac{4s}{4} = s$$

5.2. Parametru, pie kuriem MSK nevar uzkonstruēt, analīze

Datoreksperimentu rezultāti parāda, ka vairākiem (v, k, λ) parametriem MSK uzbūvēt nevar, un tie neatbilst līdz šim zināmajiem neeksistences kritērijiem. Pilnīgi droši teikt, ka ar šādiem parametriem MSK uzbūvēt nav iespējams, vēl nevar teikt, jo autore pārbaudījusi tikai iespējamās MSK parametrus, izmantojot veselus atlikumus. Lai pilnīgi droši varētu apgalvot, ka ar šādiem (v, k, λ) parametriem MSK komutatīvā grupā uzbūvēt nevar jāpārlicinās, ka to nevar izdarīt, darbojoties ar kortežiem.

Sīkāk par MSK meklēšanu izmantojot atlikumu kortežus skatīt sadaļā 4.2.3 *MSK meklēšana darbojoties ar atlikumu kortežiem*. Pārbaudīti tiks tikai būtiski atšķirīgās Silova apakšgrupas, kuras iepriekš netika apskatītas.

- $(3, 10, 30)$ $v = 3$, tā kā 3 ir pirmskaitlis un sīkāk sadalīt nevar, tad MSK pie šiem parametriem uzbūvēt nevar;
- $(5, 6, 6)$ $v = 5$, tā kā 5 ir pirmskaitlis un sīkāk sadalīt nevar, tad MSK pie šiem parametriem uzbūvēt nevar;
- $(9, 10, 10)$ $v = 9$, būtiski atšķirīgie gadījumi ir šādi:

$$Z_9 = Z_3 \times Z_3$$

Šajā gadījumā jāpārbauda ir visi iespējamie pāriši $(0..2, 0..2)$, kur pirmā un otrā komponente ir pēc atlikuma 3.

Datorpārlases rezultāts: Pie šāda sadalījuma MSK ar šādiem parametriem uzbūvēt nevar, līdz ar to var secināt, ka MSK komutatīvā grupā ar parametriem $(9, 10, 10)$ neeksistē.

- $(15, 10, 6)$ $v = 15$, būtiski atšķirīgie gadījumi ir šādi:

$$Z_{15} = Z_5 \times Z_3$$

Tā kā 5 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $Z_5 \times Z_3$ gadījums ir pielīdzināms jau apskatītajam gadījumam, darbojoties ar veseliem atlikumiem, līdz ar to nav nepieciešams pārbaudīt šo gadījumu.

Datorpārlases rezultāts: MSK komutatīvā grupā ar parametriem (15, 10, 6) neeksistē.

- (7, 15, 30) $v = 7$, tā kā 7 ir pirmskaitlis un sīkāk sadalīt nevar, tad MSK pie šiem parametriem uzbūvēt nevar.

Datorpārlases rezultāts: MSK komutatīvā grupā ar parametriem (7,15, 30) neeksistē.

- (8, 16, 30) $v = 8$, būtiski atšķirīgie gadījumi ir šādi:

$$Z_8 = Z_4 \times Z_2$$

$$Z_8 = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$$

Šajā gadījumā jāpārbauda ir visi iespējamie pāriši (0...3, 0..1), kur pirmā komponente ir pēc atlikuma 4 un otrā komponente – pēc atlikuma 2.

Datorpārlases rezultāts: Pie sadalījuma $Z_8 = Z_4 \times Z_2$ MSK nevar uzbūvēt.

Otrs gadījums, kas jāpārbauda ir visi iespējamie skaitļu trijnieki (0..1, 0..1, 0..1), kur katra komponente ir pēc atlikuma 2.

Datorpārlases rezultāts: Pie sadalījuma $Z_8 = Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ MSK nevar uzbūvēt.

Secinājums: MSK komutatīvā grupā ar parametriem (8, 16, 30) neeksistē.

- (13, 14, 14) $v = 13$, tā kā 13 ir pirmskaitlis un sīkāk sadalīt nevar, tad MSK pie šiem parametriem uzbūvēt nevar;

Datorpārlases rezultāts: MSK komutatīvā grupā ar parametriem (13, 14, 14) neeksistē.

- (15, 15, 14) $v = 15$, būtiski atšķirīgie gadījumi ir šādi:

$$Z_{15} = Z_5 \times Z_3$$

Tā kā 5 un 3 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad $Z_5 \times Z_3$ gadījums ir pielīdzināms jau apskatītajam gadījumam, darbojoties ar veseliem atlikumiem, līdz ar to nav nepieciešams pārbaudīt šo gadījumu.

Datorpārlases rezultāts: MSK komutatīvā grupā ar parametriem (15, 15, 14) neeksistē.

- $(21, 15, 10) \nu = 21$, būtiski atšķirīgie gadījumi ir šādi:

$$Z_{21} = Z_7 \times Z_3$$

Redzam, ka 7 un 3 savstarpēji pirmskaitļi, tad $Z_7 \times Z_3$ gadījums ir pielīdzināms jau apskatītajam gadījumam, darbojoties ar veseliem atlikumiem, līdz ar to nav nepieciešams pārbaudīt šo gadījumu.

Datorpārlases rezultāts: MSK komutatīvā grupā ar parametriem $(21, 15, 10)$ neeksistē.

6. REZULTĀTI

Bakalaura darba uzdevums bija izpētīt iespējamo MSK parametrus un, ja izdosies atrast MSK, kura neatbilst līdz šim zināmajiem konstruēšanas veidiem, tad izpētīt šo MSK un censties atrast jaunu MSK klasi. Datoreksperimentu un izpētes rezultātā galvenais mērķis tika sasniegts. Autore atklāja jaunu MSK klasi ar parametriem $(4s + 2, 4s^2, (4s - 2)s^2)$, kas līdz šim zināmajos autores pētītajos literatūras avotos netika atspoguļota.

Autore darbā atrada un pierādīja šādas lemmas:

- Katrai multistarpībkopai vienmēr arī spoguļattēls būs multistarpībkopa;
- Ja ir gandrīz MSK ar parametriem $(v, k', \lambda_1, \lambda_2)$, kurai starp parametriem izpildās $(v-1)\lambda_1 + \lambda_2 = k'(k'-1)$ sakarība, tad paņemot katru elementu multikopā s reizes vairāk, kur $s = \frac{k'}{k'^2 - v\lambda_1}$ ir vesels pozitīvs skaitlis, sanāk MSK ar parametriem $(v, sk', s^2\lambda_1)$.;
- Ja visi MSK ar parametriem (v, k, λ) multikopas atlikumu skaiti $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ dalās ar kādu naturālu skaitli s , kur $s > 1$, tad, izdalot visas $(a_0, a_1, \dots, a_{v-1})$ vērtības ar šo skaitli, iegūst gandrīz MSK ar parametriem $\left(v, \frac{k}{s}, \frac{\lambda}{s^2}, k'(k'-1) - (v-1)\lambda_1\right)$, kur $k' = \frac{k}{s}$.

Izmantojot datoreksperimentu rezultātus, tika atrasta arī MSK ar parametriem $(7, 14, 26)$, kura arī neatbilda nevienam no zināmajiem MSK konstruēšanas veidiem. Autore arī atrada vairākus MSK parametrus, pie kuriem MSK nevar uzbūvēt, darbojoties ar veseliem atlikumiem, tādēļ šie parametri tika pārbaudīti arī, darbojoties ar atlikumu kortežiem. Rezultātā autore secināja, ka komutatīvā grupā MSK ar parametriem $(3, 10, 30)$, $(5, 6, 6)$, $(9, 10, 10)$, $(15, 10, 6)$, $(7, 15, 30)$, $(8, 16, 30)$, $(13, 14, 14)$, $(15, 15, 14)$, $(21, 15, 10)$ neeksistē.

7. NOSLĒGUMS

Šajā darbā autore iepazīstināja ar multistarpībkopām, to konstruēšanas veidiem, kā arī tika veidots ieskats parastajās starpībkopās un grupu gredzenos. Autores uzstādītie uzdevumi tika sasniegti. Ar datoreksperimentu palīdzību tika ģenerēti iespējamie multistarpībkopu parametri, kuri pēc tam tika pārbaudīti ar jau atrastajām multistarpībkopu konstruēšanas metodēm. Tika atrasti tādi multistarpībkopu parametri, kas neatbilda nevienai konstruēšanas metodei, tādēļ tie tika pārbaudīti, vai no tiem var uzkonstruēt MSK. Rezultātā tika atrastas divas MSK un vairāki parametri, pie kuriem MSK komutatīvā grupā uzkonstruēt nevar. Tālāk pētot atrastās MSK, tika atrasta jauna MSK klase, kas līdz šim autorei zināmajos literatūras avotos nebija aprakstīta.

Rakstot darbu, autore secināja, ka daudzas multistarpībkopas ir uzkonstruējamas no parasto starpībkopu parametriem, līdz ar to pastāv iespēja, ka eksistē tādas multistarpībkopas, kurām vēl nav pamanīti līdzīgi risinājumi, ko varētu atvasināt no parastajām starpībkopām.

Nākotnē autore cer turpināt iesākto darbu gan, izmantojot datoreksperimentu rezultātus, gan, paplašinot problēmas pētāmo apjomu, veikt dziļāku analīzi arī citiem MSK parametriem. Ar šādas analīzes rezultātiem autore cer veikt pilnīgāku multistarpībkopu parametru klasifikāciju, meklējot tādus parametrus, pie kuriem multistarpībkopas neeksistē vai arī atrodot jaunus risinājumus, formulas, kuras ļauj viennozīmīgi atrast eksistējošus multistarpībkopu parametrus.

Turpinot iesākto darbu, autore vēlas plašāk iepazīties ar starpībkopu un multistarpībkopu teorētiskajām zināšanām, to konstrukcijas veidiem, kā arī apgūt padziļinātākas zināšanas bloku dizainu teorijā.

8. IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. **K.T. Arasu, S. Sehgal** „*Cyclic Difference Covers*” , to appear in Australasian J. Combinatorics (2002)
2. **K.T. Arasu, S. Sehgal, K.B. Ashwani and Siu – Lun Ma** „*Regular Difference Covers*”, Kyungpook Math. J. 45(2005), [137. – 152. lpp]
3. **M. Burrati** „*Old and New Designs via Difference Multisets and Strong Difference Families*” J. Combin. Des., 7 (1999)
4. **T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz** „*Design Theory*” Volume1 , 2nd Edition, Cambridge University Press, (1999), [297. – 455. lpp] un [946. – 956. lpp].
5. **D.M. Gordon** „*Some Restrictions on Orders of Abelian Planar Difference Sets*”, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 29 (1999), [241.-246. lpp]
6. **M. Hall** „*Combinatorial Theory*” 2nd Edition , Wiley, (1986), [133. lpp; 147. – 170. lpp]
7. **J. Ionin and S. Shrikhande** „*Combinatorics of Symmetric Designs*” New mathematical monographs : 5, Cambridge University Press, (2006), [289. – 319. lpp]
8. **J. Iraids** „*3 rakstu kopsavilkums par multistarpībkopām*” , Latvijas Universitāte, (2010).
9. **K. Momihara** „*Strong difference families, difference covers, and their applications for relative difference families*”, „*Designs, Codes and Cryptography*” Volume 51, Nr. 3, (2009), [253. – 273. lpp].
10. **K. Podnieks** <http://www.ltn.lv/~podnieks/slides/algebra/algebra.htm> mācību materiāli, (tēma – Grupa, gredzens)
11. **H.E. Rose** „*A Course on Finite Groups*”, Universitext Series, (2009), [113. – 137. lpp]
12. **J. Smotrovs** <http://estudijas.lu.lv/mod/resource/view.php?id=2450> mācību materiāli, (tēma: Kopa un kopas elements)
13. Encyclopaedia of Mathematics : <http://eom.springer.de/L/1058070.htm> , (tēma - Ležandra teorēma)
14. Vikipēdija interneta enciklopēdija : http://en.wikipedia.org/wiki/Group_ring , (tēma – grupu gredzeni)
15. Vikipēdija interneta enciklopēdija : <http://lv.wikipedia.org/wiki/Komutativit%C4%81te>, (tēma - komutativitāte, komutatīva grupa)

16. Vikipēdija interneta enciklopēdija : http://en.wikipedia.org/wiki/Difference_set (*tēma-starpībkopas*)
17. Vikipēdija interneta enciklopēdija :
[http://lv.wikipedia.org/wiki/Maska_\(datorzin%C4%81tn%C4%93\)](http://lv.wikipedia.org/wiki/Maska_(datorzin%C4%81tn%C4%93)), (*tēma - maskas datorzinātne*)

9. PIELIKUMI

Pielikumā iekļauti daži datoreksperimentu programmas koda fragmenti. Izmantotās programmas tika rakstītas valodā C++, jo tā ir plaši pazīstama programmēšanas valoda un tajā varēja realizēt visas nepieciešamās metodes, lai atrastu un pārbaudītu MSK parametrus.

```

/*****
/* Funkcija paredzeta , lai atrastu visas iespējamās skaitļu kombinācijas,
   kuru summa ir k. Kombinācijas tiek mekletas funkcijai padotajā "garums"
   garuma. Piemēram, k= 7,garums = 3, tad bus (2,2,3), (1,3,3) utt.
*/
/*****
int* sapludināsana (int* dalitaji, int garums , int k, int v, int lambda,
int a){

    int y = k -garums +1; //kombinācijas pēdējā vērtība
    int *mas2 = vieninieki(garums,k);
    int *arr = copy(mas2, garums); // arr = mas2

    if (y > 2){

        int mas [y-2][2];
        int a = 1, b = y; //pēdējās 2 vērtības masīva, a sākotnēji ir 1

        // sākotnēji (11113)->(11122)->(11131)
        for(int i = 0; i< y-2; i++){
            b--;
            a++;
            mas[i][1] = b; //masīva saglabājam pēdējās 2 vērtības
            mas[i][0] = a;
            cout<<mas[i][0]<<" "<<mas[i][1]<<endl;

        }
        for (int i = 0; i<y-2; i++){

            //katru izpludināto vērtību parkopejam kopeja masīva
            mas2[garums -1] = mas[i][1];
            mas2[garums -2] = mas[i][0];

            //parbauda vai izpildās v-jumu sistēma
            apvienot(dalitaji,mas2, v,garums,lambda,a);

            //(11142)->(11232)->(12222)
            for(int j = garums -2; j> 0; j--){
                for(int n = garums -3; n>=0; n--){

                    while((mas2[j]-1)>=(mas2[n]+1)){
                        mas2[j]--;
                        mas2[n]++;
                    }

                    if(salidzinat(mas2, arr, garums)==false){
                        apvienot(dalitaji, mas2, v,garums,lambda,a);
                        arr = copy(mas2, garums);
                    }
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        // masivu aizpilda ar 1-niekiem
        mas2 = vieninieki(garums, k);
    }
    return mas2;
}

/*****
//funkcija izveido galveno kombinaciju masivu garuma v, tuksas vietas
//aizpildot ar nullem
*****/

void apvienot(int* dalitaji, int* mas2, int v, int garums, int lambda,
int a){

    int *masivs = new int[v];
    for (int i = 0; i<v; i++){ //nonulle masivu
        masivs[i] = 0;
    }

    if(v == garums){
        permut(dalitaji,mas2, v, lambda,a); //parbauda v-jumu sistemu
    }

    else{
        //apvienojam masivus
        for(int i = 0; i< garums; i++){
            masivs[i] = mas2[i];
        }
        permut(dalitaji,masivs, v, lambda,a);
    }
}

/*****
funkcija izveido masivu garuma "garums" un aizpilda to ar 1-niekiem, bet
masiva pedeja vieta ieraksta skaitli, lai summa butu vienada ar k
*****/

int* vieninieki (int garums , int k){

    int y = k;
    int *mas2 = new int [garums];
    // sarakstam, piemeram, 111114
    for(int i = 0; i<garums; i++){

        if(i!= garums-1){
            if(y!=0){
                mas2[i] = 1;
                y--;
            }
            else{break;}
        }
        else{
            mas2[i] = y;
        }
    }
    return mas2;
}

```

```

/*****
funkcija atgriez true, ja vienādojumu sistēma izpildās, vienadojumu sistema
aprakstīta bakalaura darba 4.2.2 sadalā
masīva karteži glabājas visi iespējamie atlikumi karteži, masīva mas
glabājas visas konkrēta gadījuma a vērtības
*****/

bool sistema(int** karteži, int* dalītāji, int* mas, int size, int lambda,
int a){
    int sum1 = 0;
    int sum2 = 0;

    // apņēma cik nulles atlikumus varam iegūt no padotajam a vērtībam
    for (int i =0; i< size; i++){

        sum1 = sum1 + (mas[i] * (mas[i] - 1));
    }

    if (sum1 == lambda){ // ja nullu skaits ir vienāds ar lambda
        //i norāda vienādojumu sistēmas nākoso vienādojumu

        for (int i = 1; i< size; i++){

            sum2 = vienādojums(karteži,dalītāji,mass, size, i, a);
            if (sum2 != lambda){
                return false;
            }
        }

        // ja visi atlikumi parādās tieši lambda reizes, tad izdrukā
        // konkrēta gadījuma visas a vērtības

        for(int s = 0; s<size; s++){
            cout<< mas[s]<<" ";
        }
        return true;
    }
    else{
        return false;
    }
}

/*****
funkcija risina vienādojumu sistēmas konkrēto vienādojumu un atņēma
si vienādojuma summu
*****/

int vienādojums (int** karteži, int* dalītāji, int* mas, int size, int
atstarpe, int a){
    int sum2 = 0;
    int sk = 0;
    int ll;

    for (int i = 0; i< size; i++){ // apstāigajam a vērtību masīvu

        for(int k = size -1; k >= 0; k--){

            sk = 0;
            if (i!= k){ //ja nav viens un tas pats elements
                //ja a konkrēta a vērtība vienāda ar 0,...
                //..tad divu a vērtību reizinājums bus 0

                if ((mas[i]!=0) && (mas[k]!=0)) {

```

```

//atrod netrivialo starpību starp korteziem
for(int t = 0; t<a; t++){

    ll = atlikums((kortezs[i][t] -
kortezs[k][t]),dalitaji[t]);

    if(ll == kortezs[atstarpe][t]){
        sk++; //saskaita atlikumu skaitu
    }
}
// aprekina konkrēto atlikumu skaitu MSK
if(sk == a){

    sum2 = sum2 + (mas[i]*mas[k]);
}
}
}
return sum2;
}

```

```

/*****
funkcija uzgenere visus iespējamus kortezus ar dotajām vērtībām
funkcijai tiek padots masīvs dalitaji, kas satur visus konkrēta korteza
visus dalitājus, piemēram, Z8 = Z4 x Z2 tas bus {4, 2}. a - masīva
dalitāji garums
*****/

```

```

int** generet (int *dalitaji, int v, int a){

    //izveido 2d masīvu
    int** mas = new int*[v];
    for (int i = 0; i<=v; i++)
        mas[i] = new int [a];
    int sk;
    int s = 0;
    int reizinajums = v;

    /* kortezi tiek generēti tā, ka visu kortezu skaitu izdala ar
    pirmo dalitāju,
    iegūstam skaitli, cik reizes pēc kartas atkartosies katrs konkrētais
    atlikums pēc konkrētas komponentes. Līdzīgi turpina apstrādāt visas
    korteza komponentes */

    for(int n = 0; n< a; n++){ //pa visiem dalitājiem

        // atlikuma lielāka vērtība pēc konkrētas komponentes
        s = dalitaji[n]-1;
        reizinajums = reizinajums / dalitaji[n];
        sk = 0; //cik reizes ir ierakstīts konkrētais atlikums

        for (int k = 0; k< v; k++){ //pa visiem korteziem

            if(sk < reizinajums){

                mas[k][n] = s; //masīva ieraksta vajadzīgo atlikumu
                sk++;
            }
            else{
                s--; // skatāmies nākamā atlikumu
                sk = 0;
                k--;

                if(s<0){ //ja nākosais atlikums -1, tad ...
                    //...uzstāda atlikumu uz sakuma vērtības
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        s=dalitaji[n]-1;
    }
}

return mas; //atgriez masivu ar visiem iespējamiem kortežiem
}

/*****
funkcija izveido galveno kombināciju masivu garuma v, tukšas vietas
aizpildot ar nullem
*****/
void apvienot(int* dalitaji, int* mas2, int v, int garums, int lambda,
int a){

    int *masivs = new int[v];

    //nonulle masivu
    for (int i = 0; i<v; i++){
        masivs[i] = 0;
    }

    //j nav nepieciešams aizpildīt ar nullem
    //samaisa un pārbauda v-jumu sistemu ar sadam vertikāli
    if(v == garums){
        permut(dalitaji,mas2, v, lambda,a);
    }
    else{
        //apvienojam masivus
        for(int i = 0; i< garums; i++){
            masivs[i] = mas2[i];
        }
        //samaisa un pārbauda v-jumu sistemu ar sadam vertikāli
        permut(dalitaji,masivs, v, lambda,a);
    }
}

/*****/

```

DOKUMENTĀRĀ LAPA

Bakalaura darbs „Multistarpībkopas”

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autore: Dace Rāviņa _____ 30.05.2011.

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: Asociētais profesors Juris Smotrovs _____

Recenzents: Ēvalds Ikaunieks

Darbs iesniegts Datorikas fakultātē 30.05.2011.

Metodiķe: _____

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____ vērtējums

(Darba aizstāvēšanas datums)

Komisijas sekretārs: _____