

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**VALŪTAŠ KURSA VOLATILITĀTES
PROGNOZĒŠANA, IZMANTOJOT GARCH
MODEĻUS**

BAKALAURA DARBS

Autors: **Alina Bagautdinova**
Studenta apliecības Nr.: ab13136
Darba vadītājs: asoc.prof. Jānis Valeinis

RĪGA 2017

ANOTĀCIJA

Valūtas kursa prognozēšana ir daudzu pētījumu objekts. Pasaulē viss mainās un cenas finanšu tirgū nav izņēmums, un nepieciešamība prognozēt tās izmaiņas kļuva vēl lielāka. Tādi tradicionālie modeļi kā ARMA ne vienmēr var adekvāti aprakstīt finanšu laikrindu ar tās īpatnībām. Tādēļ ir nepieciešams paplašināt tādus modeļus. Viena no valūtas kursa īpatnībām ir volatilitāte. Šis termins ir lietots, lai aprakstītu cenu svārstības. Vispārinātie nosacītas heteroskedastivitātes autoregresijas modeļi (GARCH) bieži tiek lietoti volatilitātes pētījumiem, lai atklātu sviras efektus, asimetrijas efektus vai klasteru veidošanas efektus. Darbā tiek izveidoti un aplūkoti GARCH, EGARCH un TGARCH modeļi trim valūtu pāriem: eiro-ASV dolārs(EUR/USD), eiro-Kanādas dolārs(EUR/CAD) un ASV dolārs-Japānas jena (USD/JPY) 4 gadu periodā (no 1. marta 2013. gada līdz 1.martam 2017. gada).

Atslēgvārdi: valūtas kurss, volatilitāte, GARCH, EGARCH, TGARCH.

ABSTRACT

Exchange rate's forecasting is a subject of recent research. Everything is changing in the world and prices are not an exclusion, and it has become more important to forecast their changes. Sometimes it is not enough to use traditional ARMA models for financial timeseries due to their properties. A volatility is one of the exchange rate's properties, which is used for the price surges' description. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity (GARCH) models are often used for analysing a market volatility, for example, to detect leverage effects, volatility clustering and asymmetric response to return shocks. The task of this thesis is to choose the most suitable GARCH model for each from three currency pairs: EUR/USD, EUR/CAD and USD/JPY.

Keywords: exchange rate, volatility, GARCH, EGARCH, TGARCH.

SATURS

Ievads.....	1
1. Valūtas kurss un volatilitātei raksturīgie efekti.....	2
2. Volatilitātes novērtēšanas modeļi.....	3
2.1. ARMA modelis.....	4
2.2. Tests uz ARCH efektiem.....	5
2.3. ARCH modelis.....	5
2.4. GARCH modelis.....	6
2.5. EGARCH modelis.....	7
2.6. TGARCH modelis.....	7
2.7. Nosacītā un nenosacītā dispersija.....	8
2.8. GARCH modeļa parametru atrašana.....	9
2.9. Modeļu novērtēšana.....	10
2.10. Prognozēšana ar GARCH.....	11
3. Modeļu izveide EUR/USD valūtu pārim.....	13
3.1. GARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD.....	13
3.2. EGARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD.....	20
3.3. TGARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD.....	23
4. Rezultāti.....	25
4.1. Rezultāti EUR/USD valūtu pārim.....	25
4.2. Rezultāti EUR/CAD valūtu pārim.....	26
4.3. Rezultāti USD/JPY valūtu pārim.....	28
4.4. Prognozēšana, izmantojot GARCH.....	30
Secinājumi.....	33
Izmantotā literatūra un avoti.....	34
Pielikumi.....	35

IEVADS

Dažādu aktīvu volatilitātes pētījumi ir liels ieguldījums mūsdienu finanšu tirgu izpratnē. Volatilitāti uzskata par riska mēru, tāpēc tās izpēte ir svarīga, lai paredzētu, piemēram, valūtas kursa izmaiņas, jo investori pieprasa, lai sagaidāmais ienesīgums no riskantiem darījumiem būtu lielāks. Formāli volatilitāti var uzskatīt par mainīgā dispersiju, bet dažreiz var ievērot dispersijas izmaiņas dažādos novērojumu laika intervālos, un tādu parādību sauc par heteroskedastivitāti. Volatilitātes modelēšanai tika izstrādāti dažādi ekonometriskie modeļi, bet šajā darbā tiks apskatīti vispārinātie autoregresīvie nosacītās heteroskedastivitātes modeļi (GARCH).

Sākumā R.Ingls (R. Engle) 1982. gadā piedāvāja nosacītās heteroskedastivitātes autoregresijas modeli (ARCH), bet jau 1986. gadā ekonomists Bollerslev piedāvāja ARCH modeļa vispārinājumu: GARCH modeli. Bet pētījumi turpinājās, un Nelsons (1991) izstrādāja EGARCH modeli. Nosacītās heteroskedastivitātes autoregresijas modeļi ir populārie savas labas prognozēšanas spējas dēļ.

Vēl viens iemesls pielietot GARCH modeļus – spēja modelēt volatilitātei raksturīgus efektus, piemēram, klasterizācijas efektu, sviras efektu, asimetrisko reakciju uz negatīviem vai pozitīviem pagātnes šokiem.

Darba mērķis ir iepazīties ar GARCH, EGARCH un TGARCH modeļiem un pielietot modeļus valūtas kursa volatilitātes modelēšanai un prognozēšanai. Modeļi tiks pielietoti trim valūtu pāriem: eiro-ASV dolārs, eiro-Kanādas dolārs un ASV dolārs-Japānas jena. Darba uzdevums ir izvēlēties vispiemērotāko modeļi katram no trim valūtu pāriem un prognozēt volatilitāti, izmantojot GARCH.

Darbs sastāv no ievada, 4 nodaļām, secinājumiem un pielikumiem.

1. VALŪTAS KURSS UN VOLATILITĀTEI RAKSTURĪGIE EFEKTI

Valūtas kurss un volatilitāte

Valūtas kurss – noteiktās valsts vienas naudas vienības cena, kura ir izteikta citu valstu naudas vienībās. Kurss var mainīties atkarībā no darījumiem, proti, no valūtas pirkuma vai pārdošanas. Tas savā veidā atspoguļo uzticību valūtai. Piemēram, ja cilvēki vairāk uzticas Japānas jeni, nekā amerikāņu dolāram, tad amerikāņu dolārus konvertē Japānas jenās. Tādēļ amerikāņu dolāra vērtība samazinās pret Japānas jenu, t.i. USD/JPY attiecība.

Valūtas kursa volatilitāte ir valūtas kursa svārstīguma mērs. Volatilitāte arī ir zināma kā riska mērs, piemēram, aktīvu cenām, portfeļa optimizācijai, opciju cenām vai valūtas kursam. To var izmērīt stundai, dienai, nedēļai, mēnesim vai gadam. Volatilitāte sniedz priekšstatu par to, cik daudz valūtas kurss mainījās noteiktajā laika periodā. Valūtas kursa, tāpat kā citu finanšu aktīvu, volatilitāte parasti tiek aprēķināta kā standartnovirze no valūtas kursa ienesīgumu dispersijas. Skaidrs, ka tas var mainīties, un tāpēc tā vērtējums ir aktuāls jautājums. Šajā darbā volatilitāte tiek aprēķināta pēc formulas:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2}, \quad (1.1)$$

kur r_t ir ienesīgums t dienā un μ ir vidējais ienesīgums, T -apskatītais periods.

Svira efekts

Svira efekts nozīmē, ka valūtas kursam ir negatīva korelācija ar volatilitāti, t.i. ja valūtas kursa cenas krit, tad volatilitāte paaugstunās. Turklāt, volatilitāte pēc negatīvajām izmaiņām ir lielāka nekā pēc pozitīvajām ar tādu pašu apjomu.

Klasterizācijas efekts

Vēl viens raksturīgais efekts volatilitātei - grupēšanas efekts. Tas nozīmē, ka ja volatilitāte ir liela, tad tā būs liela vēl kādu laiku. Un otrādi - mazām izmaiņām seko mazā volatilitāte. Pirmo reizi to izteica Mandelbrots (1963). Tas liecina par to, ka ir nepieciešams laiks, lai akumulētu jauno informāciju.

2. VOLATILITĀTES NOVĒRTĒŠANAS MODEĻI

Definīcija [5] ε_t sauc par balto trokšņu procesu, ja:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \forall t, \quad (2.1)$$

$$var(\varepsilon_t) = \sigma^2, \forall t, \quad (2.2)$$

$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, \forall s \neq 0. \quad (2.3)$$

Definīcija [2] Gadījuma procesu $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ sauc par stacionāru stingrā nozīmē, ja tā galīgdimensionālie sadalījumi paliek nemainīgi pie patvaļīgas laika nobīdes, t.i., ja $\forall n \geq 1$, $\forall t_1, t_2, \dots, t_n$ un $\forall h$ n-dimensionālū gadījums vektoru $(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$ un $(x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_n+h})$ sadalījuma funkcija sakrīt:

$$F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.4)$$

Apgalvojums. [2] Ja process $\{x_t, t \in T\}$ ir stacionārs stingrā nozīmē, un $Ex_t^2 < \infty$ (no tā seko arī $E|x_t| < \infty$), tad $\{Ex_t = const, Dx_t = const\}$ visiem t .

Definīcija. [2] Par gadījuma procesa $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ kovariāciju funkciju sauc lielumu

$$cov(x_{t_1}, x_{t_2}) = E(x_{t_1} - E(x_{t_1}))(x_{t_2} - E(x_{t_2})), \quad (2.5)$$

kovariāciju funkcijas vērtība pie $t_1 = t_2$ uzdod gadījuma procesa dispesiju $Dx_t = cov(x_t, x_t)$.

Definīcija. [2] Par standartnovirzi sauc kvadrātsakni no gadījuma procesa dispersijas.

Definīcija. [2] Par gadījuma procesa $\{x_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ korelāciju funkciju sauc lielumu

$$corr(x_{t_1}, x_{t_2}) = \frac{cov(x_{t_1}, x_{t_2})}{\sqrt{Dx_{t_1} Dx_{t_2}}}. \quad (2.6)$$

Definīcija. [2] Ja funkcija $cov(x_t, x_{t+\tau})$ tiek apskatīta kā mainīgā $\tau = t_1 - t_2$ funkcija, tad mēs to saucam par autokovariāciju funkciju:

$$\sigma(\tau) = cov(x_t, x_{t+\tau}) = E(x_t - \mu)(x_{t+\tau} - \mu). \quad (2.7)$$

Definīcija. [2] Autokorelāciju jeb seriālās korelācijas koeficientu pie laika atstarpes τ , $\rho(\tau)$,

definē kā

$$\rho(\tau) = \text{corr}(x_t, x_{t+\tau}) = \frac{\sigma(\tau)}{\sigma(0)} (-\infty < \tau < \infty). \quad (2.8)$$

Definīcija.[2] Ja ρ_τ tiek apskatīta kā mainīga τ funkcija, tad ρ_τ tiek saukta par procesa autokorelāciju funkciju.

Definīcija.[2] Parciālās korelācijas koeficientu starp x_t un x_{t-k} bieži apzīmē ϕ_{kk} :

$$\phi_{kk} =: r(x_t, x_{t-k} | x_{t-1}, \dots, x_{t-k-1}). \quad (2.9)$$

Definīcija.[2] Par parciālās korelācijas koeficientu pie laika atstarpes k sauc pēdējo koeficientu x_{t+1} lineārā projekcijā uz procesa k pēdējām vērtībām:

$$\hat{x}_{t+1|t} - \mu = \phi_{k1}(x_t - \mu) + \phi_{k2}(x_{t-1} - \mu) + \dots + \phi_{kk}(x_{t-k+1} - \mu), \quad (2.10)$$

kur $\mu = Ex_t$, ϕ_{kk} - k -tās kārtas parciālās korelācijas koeficients.

Definīcija.[2] Virkni $\{\phi_{kk}\}$ kā funkciju no atstarpes k sauc par parciālo autokorelāciju funkciju (PACF).

2.1. ARMA modelis

Autoregresīvais slīdošā vidējā modelis jeb ARMA(p,q) modelis sastāv no diviem modeļiem - autoregresīvā modeļa jeb AR(p) modeļa un slīdošā vidējā modeļa jeb MA(q) modeļa.

Definīcija 1. Par AR(p) modeli sauc:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \dots + a_p r_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.11)$$

kur r_t -logaritmiskie ienesīgumi, ε_t -baltais troksnis, $a_i \in \mathbf{R}, i = 1 \dots p$.

Definīcija. Par MA(q) modeli sauc:

$$r_t = \mu + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad (2.12)$$

kur r_t -ienesīgums, ε_t -baltais troksnis, $\mu, b_i \in \mathbf{R}, i = 1 \dots q$. Apvienojot AR(p) un MA(q) modeļus, iegūst ARMA(p,q).

Definīcija. Par ARMA(p,q) modeli sauc:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \dots + a_p r_{t-p} + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad (2.13)$$

kur r_t -logaritmiskie ienesīgumi, ε_t -baltais troksnis, $a_i \in \mathbf{R}, i = 1 \dots p, j = 1 \dots q$. Gadījumā ja $p = 0$, tad $\text{ARMA}(0,q)=\text{MA}(q)$, savukārt ja $q = 0$, tad $\text{ARMA}(p,0)=\text{AR}(p)$. Šajā darbā ARMA modelis tiks izmantots kā GARCH modeļa vidējās vērtības vienādojuma forma.

2.2. Tests uz ARCH efektiem

Piemērs.[1] Apskatīsim sekojošo lineāro regresiju:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t, \quad (2.14)$$

saglabājot atlikumus \hat{u}_t . Kapināsim kvadrātā atlikumus un izveidosim tos regresiju uz q lagiem, lai veiktu testu uz ARCH ar kārtu q :

$$\hat{u}_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \gamma_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \gamma_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t, \quad (2.15)$$

kur v_t ir kļūda. Iegūsim R^2 regresijai. Testa statistika definēta kā TR^2 , (kur T - novērojumu skaits) no pēdējās regresijas un sadalīta pēc $\chi^2(q)$. Nulles un alternatīva hipotēze ir:

$$H_0 : \gamma_1 = 0 \text{ un } \gamma_2 = 0 \text{ un } \dots \text{ un } \gamma_q = 0;$$

$$H_1 : \gamma_1 \neq 0 \text{ un } \gamma_2 \neq 0 \text{ un } \dots \text{ un } \gamma_q \neq 0.$$

2.3. ARCH modelis

Definīcija.[2] Gadījuma lielumus ar pastāvīgu nosacītu dispersiju

$$h_t = E[(Y_t - m_t)^2 | F_{t-1}] \quad (2.16)$$

sauc par homoskedastiskiem aktķirībā no heteroskedastiskiem. Ja dispersija nav pastāvīga, tad laikrinda nav stacionāra. Bet ir iespējams gadījums, kad beznosacījuma dispersija ir pastāvīga, bet ir periodi, kuros nosacītā dispersija neregulāri mainās.

Piemērs.[2] Nosacītā dispersija tiek aprakstīta kā AR(1) process, tad ilglaicīga dispersija ir pastāvīga, bet $D(t)$ ir atkarīga no $D(t - 1)$. Šāda veida laikrindas sauc par nosacīti heteroskedastiskām.

Definīcija.[1] Par nosacīto dispersiju gadījuma lielumam u_t sauc:

$$\sigma_t^2 = D(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = E[(u_t - E(u_t))^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots]. \quad (2.17)$$

Bieži tiek pieņemts, ka $E(u_t) = 0$, tādā gadījumā

$$\sigma_t^2 = D(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = E[u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots]. \quad (2.18)$$

Definīcija. Par nosacītās heteroskedastivitātes autoregresijas modeli (ARCH) sauc:

$$r_t = \mu_t + u_t, \quad (2.19)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2, \quad (2.20)$$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.21)$$

kur r_t - logaritmiskie ienesīgumi, u_t - kļūdas, ε_t - baltais troksnis, σ_t^2 - kļūdas locekļa nosacītā dispersija, $\alpha_0 > 0$ un $\alpha_i \geq 0, i > 0$ un $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$.

Viena no problēmām, kas saistīti ar ARCH modeļa formulējumu, ir tas, ka α_i ir jābūt nenegatīviem, lai nosacītā dispersija vienmēr būtu pozitīva. Tomēr, gadījumā, ja modelis ir augstas kārtas, kas ir nepieciešams, modelējot dažus ekonomikas procesus, nenegativitātes ierobežojums var tikt pārkāpts. Bet Bollerslevs (1986) vispārinājis ARCH-modeli, iekļaujot tajā iepriekšējas nosacītās dispersijas vērtības, lai novērstu ARCH(1) modeļa daudz soļu struktūru [2].

2.4. GARCH modelis

Definīcija.[1] Par GARCH(p,q) modeli sauc:

$$r_t = \mu + u_t, \quad (2.22)$$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.23)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2, \quad (2.24)$$

kur r_t - logaritmiskie ienesīgumi, u_t - kļūdas, ε_t - baltais troksnis, σ_t^2 - kļūdas locekļa nosacītā dispersija, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta \geq 0$ un $\sum_{i=1}^m \alpha_i(p,q)(\alpha_i + \beta_i) < 1$. Pieņemts, ka $\alpha_i = 0$, ja $i > q$, un $\beta_j = 0$, ja $j > p$.

Visvienkāršākais un visbiežāk pielietotais GARCH modelis ir GARCH(1,1) modelis.

Definīcija. Par GARCH(1,1) modeli sauc:

$$r_t = \mu + u_t, \quad (2.25)$$

$$u_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (2.26)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (2.27)$$

kur r_t - logaritmiskie ienesīgumi, u_t - kļūdas, ε_t - baltais troksnis, σ_t^2 - kļūdas locekļa nosacītā

dispersija, $\alpha_0 > 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Šajā darbā tiek apskatīts tieši GARCH(1,1) modelis. Šo specifikāciju bieži izmanto finanšu kontekstā gadījumā, ja aģents vai tirgotājs prognozē šī perioda dispersiju, ko veido vidējais svērtais no ilgtermiņa vidēja (konstanti), prognozēta dispersija no iepriekšēja perioda (GARCH), un novērotā volatilitāte iepriekšējā periodā (ARCH). Ja aktīvu ienesīgums bija negaidīti liels vai nu augšup vai nu lejup, tad tirgotājs palielinās dispersijas novērtējumu nākamajam periodam. Šis modelis arī atbilst volatilitātes klasterizācijai [7]. Parasti GARCH(p,q) modeļi netiek apskatīti. Tā vietā tiek pielietoti citi modeļi, piemēram, EGARCH vai TGARCH, kuriem tiek pievienoti vai mainīti parametri. Šajā darbā arī tiks aplūkoti šādi modeļi.

2.5. EGARCH modelis

Nelson (1991) piedāvāja eksponenciālo GARCH modeli jeb EGARCH.

Definīcija.[7] Par EGARCH(1,1) modeli sauc:

$$r_t = \mu + u_t, \quad (2.28)$$

$$u_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (2.29)$$

$$\log(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \left| \frac{u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \sum_{j=1}^q \beta_j \log(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{k=1}^r \gamma_k \frac{u_{t-k}}{\sigma_{t-k}}, \quad (2.30)$$

kur r_t - logaritmiskie ienesīgumi, u_t - kļūdas, ϵ_t - baltais troksnis, σ_t^2 - kļūdas locekļa nosacītā dispersija.

EGARCH modelim ir dažas priekšrocības pret GARCH modeli. Pirmkārt, gan ja koeficienti ir negatīvi, σ_t^2 garantēti būs pozitīva, jo tiek aprēķināts $\log(\sigma_t^2)$. Tādēļ nav nepieciešamības ievest nenegativitātes ierobežojumus koeficientiem. Turklāt, pēc nosacītās dispersijas logaritma var secināt, ka sviras efekts būs eksponenciālais. Otrkārt, šis vienādojums apraksta reakciju asimetriju volatilitātē uz pozitīviem un negatīviem šokiem [7].

2.6. TGARCH modelis

Definīcija.[1] Par TGARCH(1,1) modeli sauc:

$$r_t = \mu + u_t, \quad (2.31)$$

$$u_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad (2.32)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^r \gamma_k u_{t-k}^2 I_{t-k}, \quad (2.33)$$

kur r_t - logaritmiskie ienesīgumi, u_t - kļūdas, ε_t - baltais troksnis, σ_t^2 - kļūdas locekļa nosacītā dispersija, $\alpha_0 > 0, \alpha > 0, \beta \geq 0$. Nav nepieciešams, lai γ būtu vienmēr pozitīvs, pietiekami, lai $\alpha_1 + \gamma \geq 0$. $I_t = 1$, ja $u_t < 0$ un $I_t = 0$, ja $u_t \geq 0$. Šajā gadījumā labas ziņas ir $u_{t-i} > 0$ un sliktas ziņas ir $u_{t-i} < 0$. Sliktajām un labajām ziņām ietekme uz nosacīto dispersiju ir atšķirīga. Labajām ir α_i ietekme un sliktajām - $\alpha_i + \gamma_i$. Sviras (*leverage*) efekts ir novērojams, ja $\gamma_i > 0$, un ja $\gamma_i \neq 0$, tad ietekme ir asimetriska [7].

Piemērs.[1] Lai pielietotu TGARCH modeli, apskatīsim mēneša S&P500 ienesīgumus no 1979. gada decembra līdz 1998. gada jūnijam. Rezultāts ir sekojošs:

$$r_t = 0.172, \quad (2.34)$$

$$\sigma_t^2 = 1.243 + 0.015u_{t-1}^2 + 0.498\sigma_{t-1}^2 + 0.604u_{t-1}^2 I_{t-1}. \quad (2.35)$$

Šajā gadījumā γ ir pozitīvs. Lai parādītu, ka volatilitāte aug vairāk pēc lielā negatīva šoka, nevis pēc lielā pozitīva šoka, mēs pieņemsim, ka $\sigma_{t-1}^2 = 0.823$ un $\hat{u}_{t-1}^2 = \pm 0.5$. Ja $\hat{u}_{t-1}^2 = +0.5$, tad $\sigma_t^2 = 1.65$. Bet ja šoks ir $\hat{u}_{t-1}^2 = -0.5$, tad $\sigma_t^2 = 1.80$. Tagad mēs redzam, ka volatilitāte pēc negatīva šoka ir lielāka.

2.7. Nosacītā un nenosacītā dispersija

Nosacīto dispersiju u_t apzīmē σ_t^2 un tā ir definēta vienādojumos (2.17) un (2.18). ARCH modelī nosacītā kļūdas dispersija σ_t^2 ir atkarīga no iepriekšējās kļūdas vērtības kvadrātā:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 u_{t-1}^2. \quad (2.36)$$

GARCH modelis var būt izteikts formā, kura rāda, ka tas ir ARMA modelis nosacītājai dispersijai. Lai to parādītu, apskatīsim vienādojumu:

$$\varepsilon_t = u_t^2 - \sigma_t^2 \quad (2.37)$$

vai

$$\sigma_t^2 = u_t^2 - \varepsilon_t, \quad (2.38)$$

un, ievietojot vienādojumā (2.5), iegūsim

$$u_t^2 = \omega + (\alpha_1 + \beta)u_{t-1}^2 + \varepsilon_t, \quad (2.39)$$

un tas ir ARMA(1,1) process kļūdu kvadrātiem. Nenosacītā u_t dispersija modelī paliek nemainīga.

Definīcija. Par nenosacīto dispersiju sauc:

$$\text{var}(u_t) = \frac{\alpha_0}{1 - (\alpha_1 + \beta)}, \quad (2.40)$$

ja $\alpha_1 + \beta < 1$. Ja $\alpha_1 + \beta \geq 1$, tad nenosacītā dispersija nav definēta un tas var saukties par "dispersijas nestacionaritāti". Gadījumu, kad $\alpha_1 + \beta = 1$, sauc par "dispersijas vienības sakni" jeb par integrēto GARCH [1].

2.8. GARCH modeļa parametru atrašana

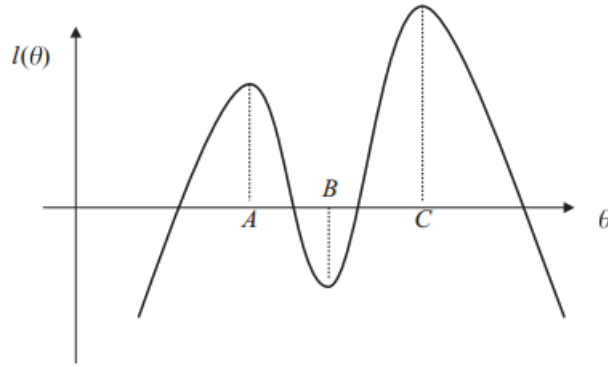
Lai atrastu parametrus GARCH modelim, kuri visticamāk apraksta datus, tiek izmantota maksimālā ticamības funkcija. Tas tiek veidots ar log-ticamības funkcijas palīdzību un tiek meklēti parametri, kuri maksimizē šo funkciju.

Definīcija. Nosacītās heteroskedasticitātes modelis ir

$$r_t = \mu + \gamma r_{t-1} + u_t, \quad (2.41)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2). \quad (2.42)$$

Kļūdu dispersija vairs nav konstante σ^2 , bet ir mainīga nosacītā dispersija σ_t^2 . Homoskedastiska modeļa dispersija ir $T/2 \log \sigma^2$, bet heteroskedastiskam modelim tā būs laikā mainīga dispersija $1/2 \sum_{t=1}^T \log \sigma_t^2$. Lai maksimizētu log-ticamības funkciju, pieprasa minimizēt $\sum_{t=1}^T \log \sigma_t^2$ un $\sum_{t=1}^T ((r_t - \mu - \gamma r_{t-1})^2 / \sigma_t^2)$. Ja šie locekļi tiek minimizēti, tad arī kļūdu dispersija tiek minimizēta. Diemžēl, log-ticamības funkcijas maksimizēšana modeļiem ar mainīgām laikā dispersijām ir sarežģītāka nekā homoskedastiskiem modeļiem. Tika izvesti analītiskie log-ticamības funkcijas atvasinājumi attiecībā pret parametriem, bet tikai vienkāršajām GARCH specifikācijām. Turklāt, formulas ir sarežģītās, tādēļ bieži tiek izmantots skaitlisks risinājums funkcijas maksimizācijai. Bieži nelineāro modeļu gadījumā (piemēram, GARCH) log-ticamībai funkcijai varētu būt vairākie lokālie maksimumi un dažādi algoritmi var atrast dažādus maksimumus un rezultātā koeficienti arī var atšķirties. Pieņemsim, ka modelī ir tikai viens parametrs, θ , un log-ticamības funkcija tiek maksimizēta attiecībā pret šo parametru.



2.1. att. Log-ticamības funkcijas grafiks

Attēlā (2.1) log-ticamības funkcijas vērtība katram θ ir $l(\theta)$. Tātad, $l(\theta)$ sasniedz globālo maksimumu, kad $\theta = C$, un lokālo maksimumu, kad $\theta = A$. Tagad mēs redzam, ka ir diezgan grūti atrast īsto maksimuma punktu [1].

2.9. Modeļu novērtēšana

Definīcija.[2] Par Akaike informācijas kriteriju (AIC) sauc

$$AIC = -2L + 2k, \quad (2.43)$$

kur k - novērtējamo parametru skaits, T - parametru novērtēšanai lietojamo novērojumu skaits (faktiski T ir vienāds ar atlikumu skaitu) un L - logaritmiskā ticamības funkcija [2]. Vispiemērotākais modelis tiek izvēlēts pēc vismazākas AIC vērtības.

Lai novērtētu, cik efektīvi modelis apraksta datus, mēs varam aprēķināt kļūdas, salīdzinot reālo standartnovirzi ar modeli noteikto standartnovirzi. Šim nolūkam tiek izmantoti daži kriterij, piemēram, kvadrātsakne no vidējās kvadrātiskās kļūdas vai vidējā absolūta kļūda.

Definīcija.[3] Par kvadrātsakni no vidējās kvadrātiskās kļūdas sauc

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_{f,i} - \sigma_{a,i})^2}, \quad (2.44)$$

kur n -novērojumu skaits, $\sigma_{f,i}$ - ar modeli noteikta standartnovirze, $\sigma_{a,i}$ - reālā standartnovirze.

Definīcija.[3] Par vidējo absolūtu kļūdu sauc

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\sigma_{f,i} - \sigma_{a,i}|, \quad (2.45)$$

kurn-novērojumu skaits, $\sigma_{f,i}$ - ar modeli noteikta standartnovirze, $\sigma_{a,i}$ - reālā standartnovirze.

Lai pārbaudītu, vai starp regresijas kļūdām nepastāv autokorelācija, tiek veikts Darbina-Vatsona (*Durbin – Watson*) tests. Tiek pārbaudīta hipotēze par parametra ρ vērtību vienādojumā $u_t = \rho u_{t-1} + e_t$:

$$H_0 : \rho = 0;$$

$$H_1 : \rho > 0 \text{ vai } \rho < 0.$$

Definīcija.[6] Darbina-Vatsona testa statistika ir

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}, \quad (2.46)$$

kur u_t un u_{t-1} ir regresijas kļūdu locekļi un n ir novērojumu skaits. Ja DW ir tuvs nullei, tad ρ ir tuvs vieniniekam, ja DW ir tuvs 2, tad starp regresijas kļūdām nepastāv autokorelācija, un, ja DW ir tuvs 4, tad ρ ir tuvs -1 [6].

ARMA modeļa atlikumiem tika veikts *Ljung – Box* tests. Boksa-Ljunga statistika pārbauda hipotēzi

$$H_0 : \rho(1) = \rho(2) = \dots = \rho(k) = 0$$

pret

$$H_1 : \text{vismaz viens } \rho(i) \neq 0 (1 \leq i \leq k).$$

Definīcija.[2] Par Boksa-Ljunga Q-statistiku sauc:

$$Q = N(N + 2) \sum_{i=1}^k \frac{r^2(i)}{N - i} \sim \chi_k^2, \quad (2.47)$$

kur N - novērojumu skaits, $r(i)$ - i -tās kārtas autokorelācija, k - pārbaudes lagu skaits.

2.10. Prognozēšana ar GARCH

Šajā darbā prognozēšana tika veikta, izmantojot GARCH(1,1) modeli. GARCH(1,1) modelis ir definēts:

$$y_t = \mu + u_t \quad (2.48)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2, \quad (2.49)$$

kur $\alpha_0, \alpha_1, \beta > 0$ un $\alpha_1 + \beta < 1$.

No vienādojuma (2.40) ir zināms, ka GARCH(1,1) modelim nenosacītā kļūdu dispersija ir $E[\sigma^2] = \alpha_0/(1 - \alpha_1 - \beta)$, tad vienādojumu (2.49) mēs varam pierakstīt šādi:

$$\sigma_t^2 = (1 - \alpha_1 - \beta)E[\sigma^2] + \alpha_1\alpha_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 \quad (2.50)$$

Var secināt, ka nākamā perioda nosacītā dispersija ir nosvarota kombinācija no ienesīgumu nenosacītās dispersijas, $E[\sigma^2]$, iepriekšēja perioda kļūdu kvadrātiem u_{t-1}^2 un nosacītās dispersijas σ_{t-1}^2 ar svāriem $(1 - \alpha_1 - \beta)$. Tātad, mēs varam definēt prognozi nākamajam periodam, $\hat{\sigma}_{t+1}^2$.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t+1}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 E[u_t^2 | I_{t-1}] + \beta \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_t^2 + \beta \sigma_t^2 \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) \sigma_t^2 \\ &= \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta)(\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t+2}^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 E[u_{t+1}^2 | I_{t-1}] + \beta E[\sigma_{t+1}^2 | I_{t-1}] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) \hat{\sigma}_{t+1}^2 \\ &= \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta)(\hat{\sigma}_{t+1}^2 - \sigma^2) \\ &= \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta)^2(\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

...

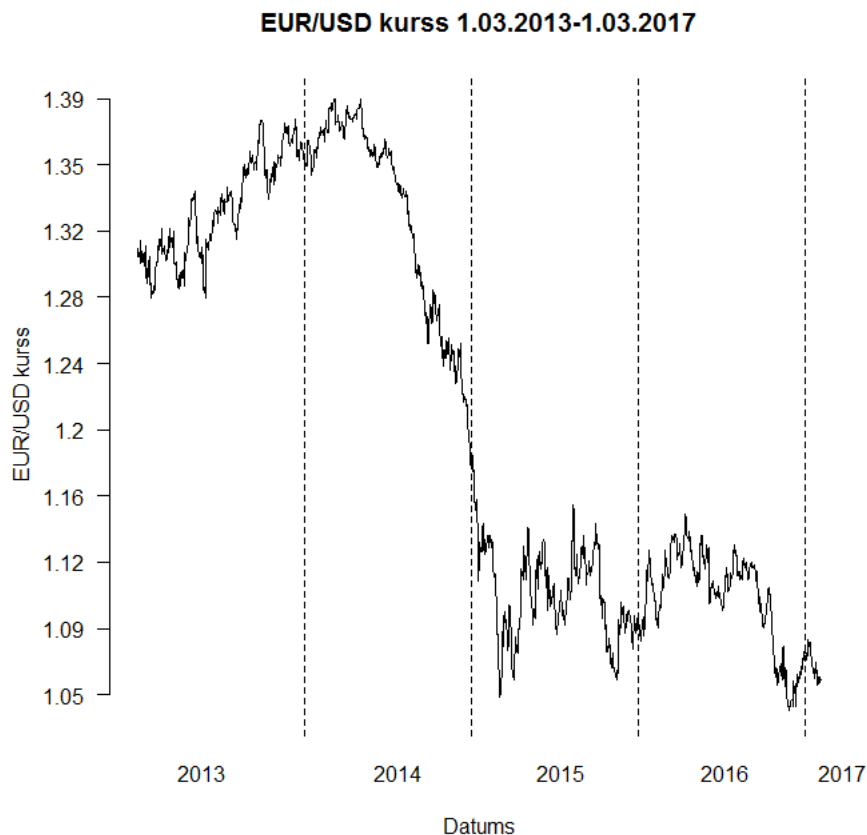
$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{t+l}^2 &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta) \hat{\sigma}_{t+l-1}^2 \\ &= \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta)(\hat{\sigma}_{t+l-1}^2 - \sigma^2) \\ &= \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta)^l(\sigma_t^2 - \sigma^2) \end{aligned} \quad (2.53)$$

kur $\sigma^2 = \alpha_0/(1 - \alpha - \beta)$ [4].

3. MODEĻU IZVEIDE EUR/USD VALŪTU PĀRIM

Lai izveidotu modeļi, bija nepieciešams iegūt valūtas kursu datus. Tika nolemts apskatīt trīs valūtu pārus: eiro-ASV dolārs (EUR/USD), ASV dolārs-Japānas jena (USD/JPY) un eiro-Kanādas dolārs (EUR/CAD). Darbā tika izmantoti četrus gadu dati (no 2013. gada 1. marta līdz 2017. gada 1. martam). Dati iekļauj sevī katras dienas slēgšanas cenas. Dati tika sadalīti divās izlasēs: apmācošā un testu izlasē. Tas ir nepieciešams, lai izveidotu modeļi, izmantojot datus no apmācošās izlases, un uz testa izlases ir jāpārbauda, cik efektīvi tas apraksta datus, jo modelis var “pielāgoties” datiem, uz kuriem tas tiek veidots. Visi aprēķini un modeļu izveidošana tika veikti ar programmas ”R” palīdzību.

3.1. GARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD

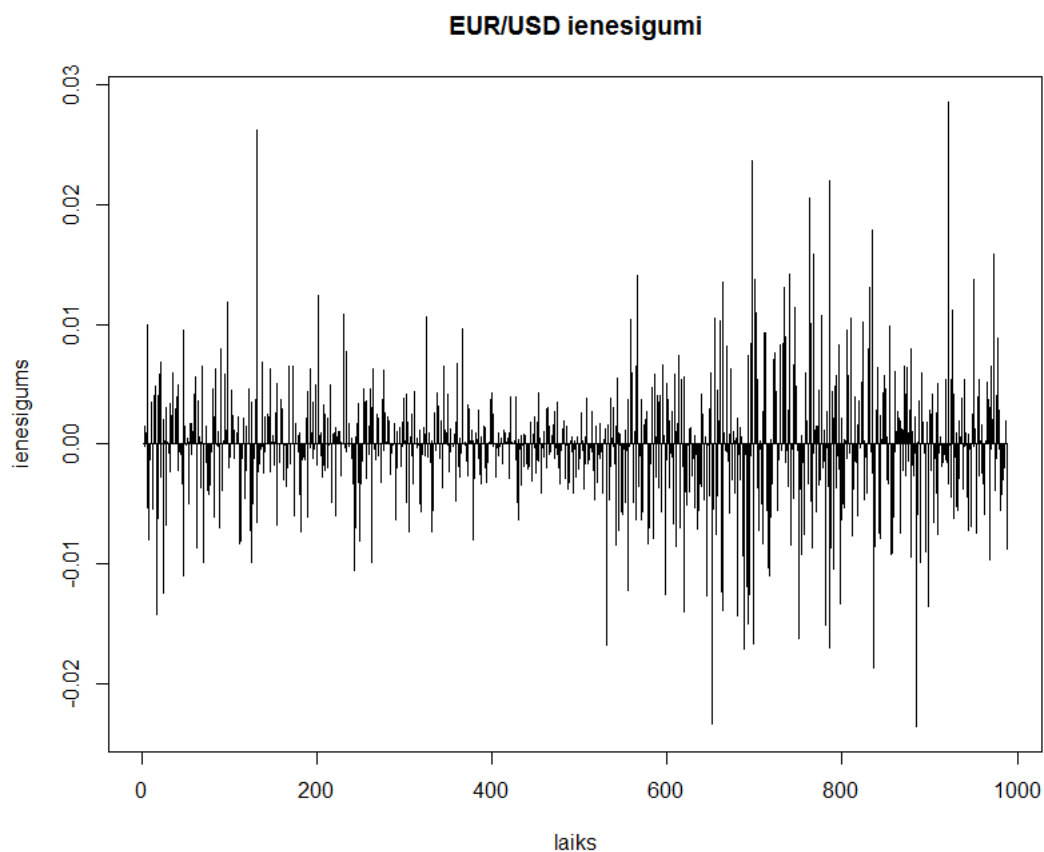


3.1. att. EUR/USD kursa izmaiņas 4 gadu periodā

Plašāk aplūkosim modeļu izveidi pārim eiro-ASV dolārs (EUR/USD). Citiem pāriem modeļu izveidošanas ir līdzīgas. Modeļu izveidei tika izmantoti trīs gadu dati (in sample) un, lai novērtētu modeli, tika izmantoti pēdēja gada dati (out-of sample). Lai pārietu pie modeļu izveidošanai, sākumā ir nepieciešams aprēķināt ienesīgumus pēc formulas:

$$R_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right) \quad (3.1)$$

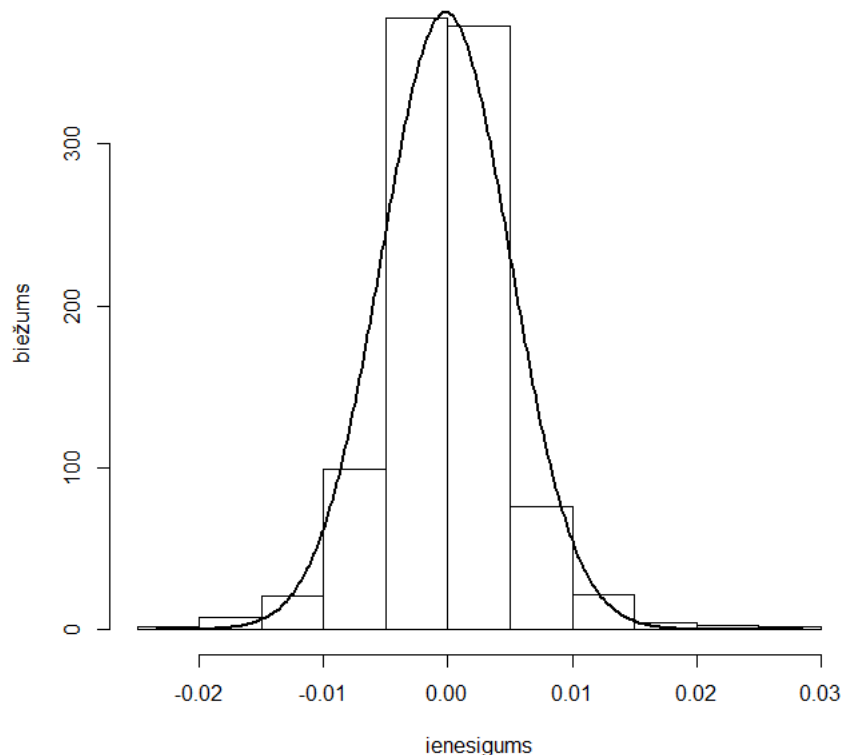
kur R_t - ienesīgums un P_t ir dienas slēgšanas cena.



3.2. att. EUR/USD ienesīgumi

Tālāk tiek aplūkota ienesīgumu histogramma un daži statistiskie rādītāji:

EUR/USD dienas ienesīgumu histogramma



3.3. att. **EUR/USD ienesīgumu histogramma**

3.1. tabula **Ienesīgumu statistiskie rādītāji**

Mean	Max	Min	sd	skewness	kurtosis
-0.0001617196	0.02855067	-0.02355232	0.005033719	0.1987979	3.999805

Ir zināms, ka sadalījuma asimetrijas koeficients (skewness) normālājam sadalījumam ir 0. Šajā gadījumā sadalījuma asimetrijas koeficients ir nedaudz lielāks par 0, kas nozīmē, ka sadalījums ir mazliet nobīdīts pa kreisi un var spriest, ka pārim EUR/USD šajā periodā ienesīgums biežāk bija negatīvs, nekā pozitīvs. Runājot par ekscesa koeficientu (kurtosis), ir redzams, ka tas nedaudz lielāks par normālājam sadalījumam raksturīgo ekscesu, kas ir vienāds ar 3, un sadalījumam var ievērot pīķi, kā arī pietuvinātas asim sadalījuma astes. Pēc tam tika pārbaudīta ienesīgumu rindas stacionaritāte. Parasti valūtas kursa rinda ir nestacionāra, bet ienesīgumi ir stacionāri. Tātad, Dickey-Fuller tests rāda sekojošo rezultātu:

data: r

Dickey-Fuller = -11.096, Lag order = 10, p-value = 0.01 alternative hypothesis: stationary

Warning message: In adf.test(r) : p-value smaller than printed p-value

kas nozīmē, ka hipotēze par vienības saknes esamību tiek noraidīta un laukrinda ir stacionāra.

Kā jau bija minēts, GARCH modeļi sastāv no vidējās vērtības un kļūdu dispersijas vienādojumiem. Tāpēc pirms GARCH modeļa veidošanas ir nepieciešams apskatīt dažus AR(p), MA(q) un ARMA(p,q) modeļus uz izvēlēties vispiemērotāko, lai atrastu vidējās vērtības vienādojumu GARCH modelim. Tabulā ir apkopoti rezultāti:

3.2. tabula ARMA(p,q) modeļu novērtēšana

AR	p=1	p=2	p=2
MA	m=1	m=1	m=2
a_0	-0.00013	-0.000295	-0.0001382
p-vērtība	0.23620	0.220944	0.842
a_p	-0.35066	-0.016387	0.3793736
p-vērtība	0.00020	0.641304	0.824
m_p	0.27073	0.709161	-0.3677386
p-vērtība	0.00140	0.000346	0.842
AIC	-10131.82	-10129.06	-10127.22

Tātad, tabulā (3.2) redzams, ka tieši ARMA(1,1) ir vispiemērotākais vidējās vērtības vienādojums: Akaike informācijas kritērijs (AIC) ir vismazākais, kā arī koeficienti ir statistiski nozīmīgi. Tādēļ ARMA(1,1) tiks izmantots GARCH modelī kā vidējās vērtības vienādojums. Lai turpinātu darbu, tika pārbaudīts, vai ir novērojāmi ARCH efekti. Testa rezultāts ir sekojošs:

ArchTest(res1)

ARCH LM-test; Null hypothesis: no ARCH effects data: res1 Chi-squared = 57.667, df = 12, p-value = 5.988e-08

kas nozīmē, ka nulles hipotēze, kas apgalvo, ka atlikumiem nav ARCH efektu, tiek noraidīta. Tālāk tika veikti Durbin-Watson un Ljung-Box testi atlikumiem:

durbinWatsonTest(res1)

[1] 2.01324

> AutocorTest(res1)

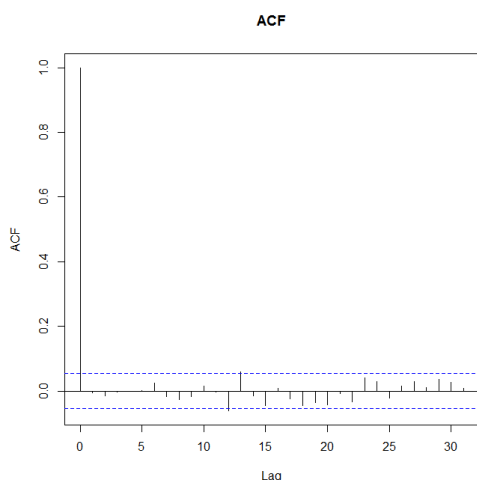
Box-Ljung test

data: res1

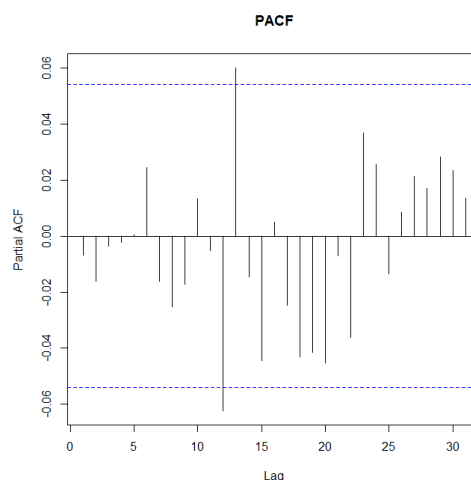
X-squared = 2.4426, df = 8, p-value = 0.9644

Testa rezultāti rāda, ka atlikumi nav autokorelēti. Turklāt, tika aplūkoti ACF un PACF

grafiki:



3.4. att. ARMA(1,1) atlikumu ACF grafiks



3.5. att. ARMA(1,1) atlikumu PACF grafiks

Tātad, ar programmas R palīdzību tika izveidots GARCH(1,1) modelis. Tika iegūti sekojoši koeficienti, kuri ir statistiski nozīmīgi ar 95% ticamību:

3.3. tabula EUR/USD 3 gadu perioda GARCH(1,1) modeļa koeficienti

ω	α	β
0.006726361	0.02518	0.97271
(0.0)	(0)	(0)

Tagad mēs varam pierakstīt modeli vienādojumu formā:

$$R_t = -0.00013 - 0.35066R_{t-1} + 0.27073u_{t-1} + u_t \quad (3.2)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.3)$$

$$\sigma_t^2 = 0.00672636 + 0.02518u_{t-1} + 0.97271\sigma_{t-1}^2 \quad (3.4)$$

kur R_{t-1} - ienesīgums, u_t - kļūda, σ_t^2 - dispersija.

Kad mums ir zināmi koeficienti un vidējas vērtības vienādojums, mēs varam manuāli aprēķināt modeļa dispersiju vērtības četru gadu datiem (in sample datiem un out-of sample datiem). Par sākotnējo standartnovirzi σ_{t-1} tika ņemta kvadrātsakne no vidējas dienas dispersijas ienesīgumiem, bet reālās standartnovirzes tika aprēķinātas kā kvadrātsakne no dis-

persijas:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2 \quad (3.5)$$

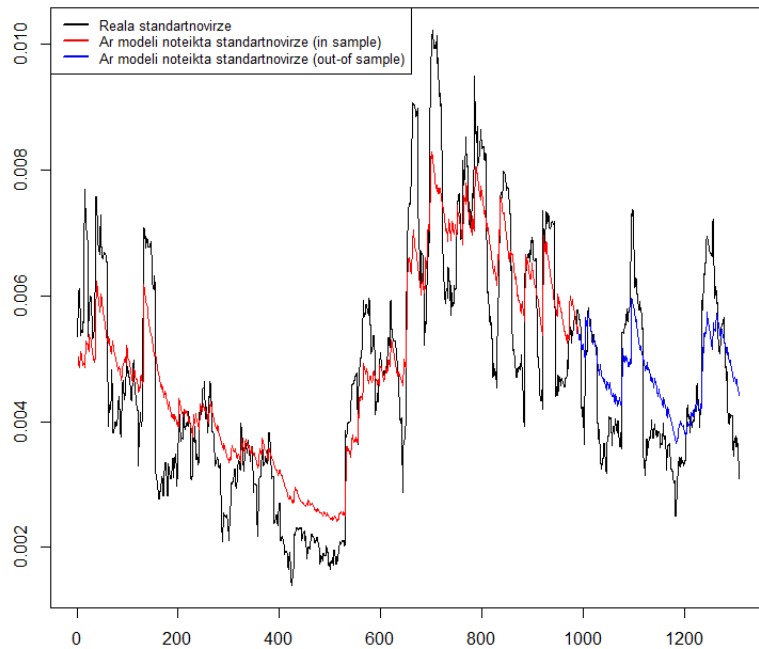
kur σ_t^2 - dispersija, T - 23 dienu laika intervāls, r_t - ienesīgums laikā t un \bar{r} - vidējais ienesīgums.

Modeļa novērtēšanai tiek aprēķinātas vidējā absolūtā kļūda (MAE) un kvadrātsakne no vidējās kvadrātiskās kļūdas (RMSE). Ja kļūdas ir mazās, tad tas nozīmē, ka starpība starp reālo standartnovirzi un ar modeli novērtēto standartnovirzi ir maza. Tā kā modelis tika izveidots, izmantojot trīs gadu datus, tad MAE un RMSE kļūdas tiek rēķinātas, salīdzinot novērtēto standartnovirzi ar reālajām standartnovirzēm ceturta gada datiem.

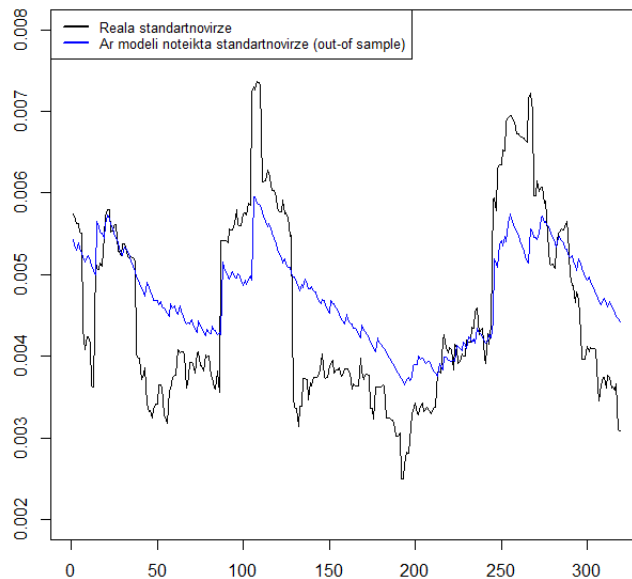
3.4. tabula Modelim GARCH(1,1) aprēķinātas kļūdas

	MAE	RMSE
in sample dati	0.07304222	0.08879575
out of sample dati	0.06778256	0.08045791

Izrādījās, ka kļūdas, aprēķinātas out-of sample datiem ir pat mazākās, nekā kļūdas in-sample datiem. Var apgalvot, ka modelis efektīvi apraksta datus. Tālāk tiek izveidots grafiks, kurā redzams, kā atšķirās ar modeli novērtēta standartnovirzē ar reālo standartnovirzi:



3.6. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums 4 gadu periodā

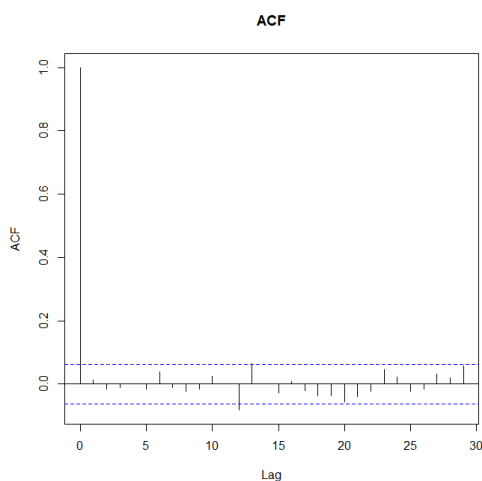


3.7. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums "out of sample" datiem

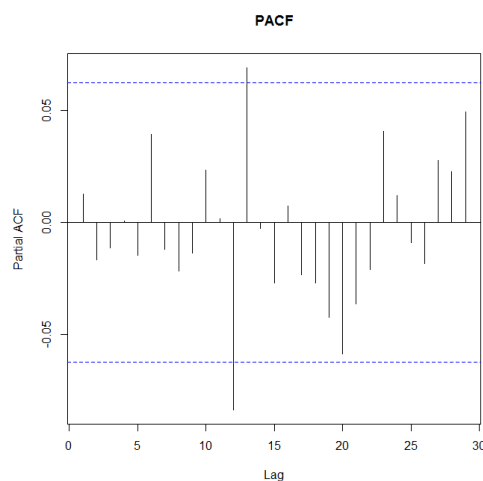
Grafikos var redzēt, ka ar GARCH(1,1) aprēķināta standartnovirze diezgan stipri atšķiras no reālās standartnovirzes. Bet kopumā var ievērot līdzīgas izmaiņas: reālā un ar modeli

novērtēta volatilitātes mainās vienā virzienā. Pēc tam tika analizēti modeļa atlikumi, pielie-
tojot Durbin-Watson un Ljung-Box testus, lai apstiprinātos, ka atlikumi ir nekorelēti:

```
durbinWatsonTest(ress)
[1] 1.971427
> AutocorTest(ress)
Box-Ljung test
data: ress
X-squared = 2.3951, df = 7, p-value = 0.9348
```



3.8. att. GARCH(1,1) atlikumu ACF grafiks



3.9. att. GARCH(1,1) atlikumu PACF grafiks

3.2. EGARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD

EGARCH(1,1) modeļa izveida ir līdzīga GARCH(1,1) modeļa izveidei, bet EGARCH(1,1) modelim tiek ieviests vēl viens koeficients - γ . Tabulā parādīti iegūtie koeficienti:

3.5. tabula **EUR/USD 3 gadu perioda EGARCH(1,1) modeļa koeficienti**

ω	α	β	γ
-0.022773	-0.051796	0.997834	0.000597
(0)	(0)	(0)	(0.835923)

Ir redzams, ka visi koeficienti, izņemot γ , ir statistiski nozīmīgi. EGARCH modeli no-
sacītā dispersija vienmēr būs pozitīva, jo šajā gadījumā tā ir $e^{\ln(\sigma^2)}$. Iegūto EGARCH(1,1)
modeli var uzrakstīt šādi:

$$R_t = -0.00023 - 0.277139R_{t-1} + 0.212445u_{t-1} + u_t \quad (3.6)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.7)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = -0.022773 - 0.051796 \left| \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + 0.997834 \ln(\sigma_{t-1}^2) + 0.000597 \frac{u_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \quad (3.8)$$

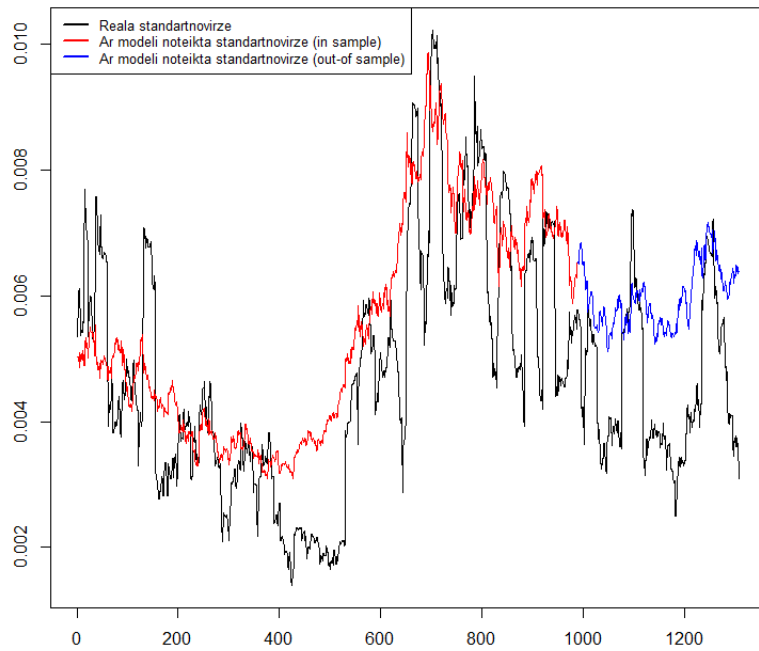
kur R_{t-1} - ienesīgums, u_t - kļūda, σ_t^2 - dispersija.

EGARCH modelis var aprakstīt volatilitātes asimetrisko reakciju un negatīviem vai pozitīviem šokiem pagatnē. Dispersijas logaritms garantē, ka dispersija būs pozitīva, kā arī nosaka eksponenciālo sviras efektu. Ja γ ir mazāks par 0, tad var novērot sviras efektus. Volatilitāte var reaģēt uz labajām un sliktajām ziņām asimetriski, ja γ nav vienāda ar nulli. Mūsū modelī γ ir tuvināta 0 un ir statistiski nenozīmīga. Var konstatēt, ka šis EGARCH modelis neefektīvi apraksta EUR/USD pāri.

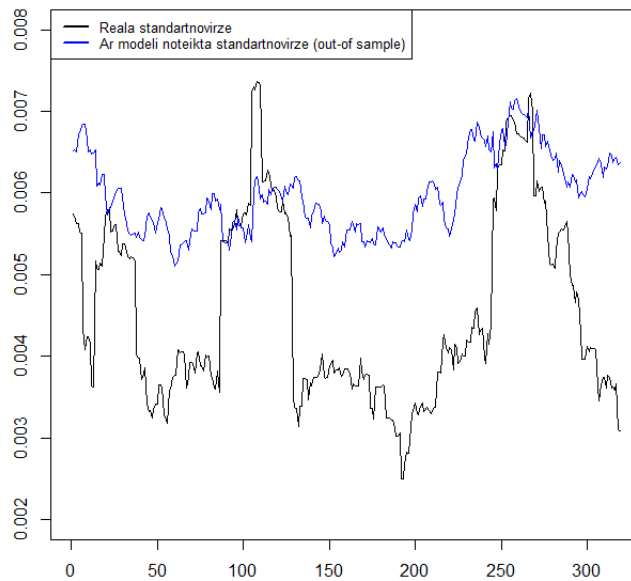
3.6. tabula Modelim EGARCH(1,1) aprēķinātas kļūdas

	MAE	RMSE
in sample dati	0.1138668	0.08879575
out of sample dati	0.1517131	0.1759116

Tabulā (3.6) var redzēt, ka modelim EGARCH kļūdas ir jau lielākas, nekā GARCH modelim, turklāt "out of sample" datiem kļūdas ir lielākas, nekā aprēķinātas kļūdas "in sample" datiem. Šis fakts apstiprina to, ka modelis ir mazāk efektīvs.



3.10. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums 4 gadu periodā



3.11. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums "out of sample" datiem

3.3. TGARCH(1,1) modeļa izveide pārim EUR/USD

Modeļa TGARCH(1,1) izveide ir līdzīga modeļā EGARCH(1,1) izveidei, bet vēl ir pievienots loceklis I_t , kas nosaka asimetriju. Tātad, ja ziņa ir slikta ($u_{t-1} < 0$), tad loceklis $I_t = 1$ un preteajā gadījumā $I_t = 0$. Tādējādi sliktas ziņas palielina dispersiju. Šajā gadījumā slikta vai laba ziņa varētu būt attiecīgi eiro valūtai, jo tā ir pamatvalūta pāri EUR/USD. Tātad, pievienojot u_{t-1} vērtības pārbaudi, mēs ieguvām modeli:

$$R_t = -0.000148 - 0.272294R_{t-1} + 0.193154u_{t-1} + u_t \quad (3.9)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (3.10)$$

$$\sigma_t^2 = 0.000076u_{t-1}^2 + 0.982582\sigma_{t-1}^2 + 0.032566u_{t-1}^2I_t \quad (3.11)$$

kur R_{t-1} - ienesīgums, u_t - kļūda, σ_t^2 - dispersija, $I_t = 1$, ja $u_{t-1} < 0$ un $I_t=0$, ja $u_{t-1} \geq 0$.

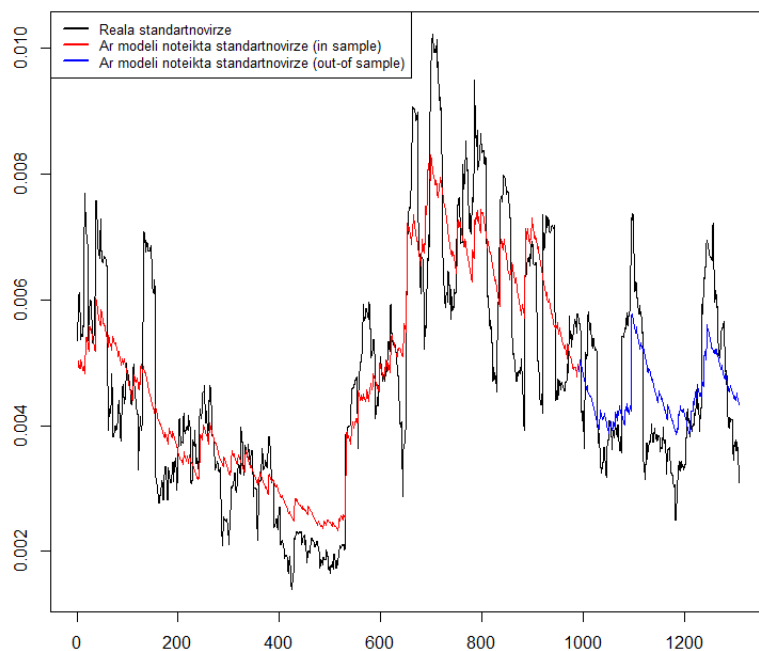
3.7. tabula **EUR/USD 3 gadu perioda TGARCH(1,1) modeļa koeficienti**

ω	α	β	γ
0	0.000076	0.982582	0.032566
(0.29261)	(0)	(0)	(0)

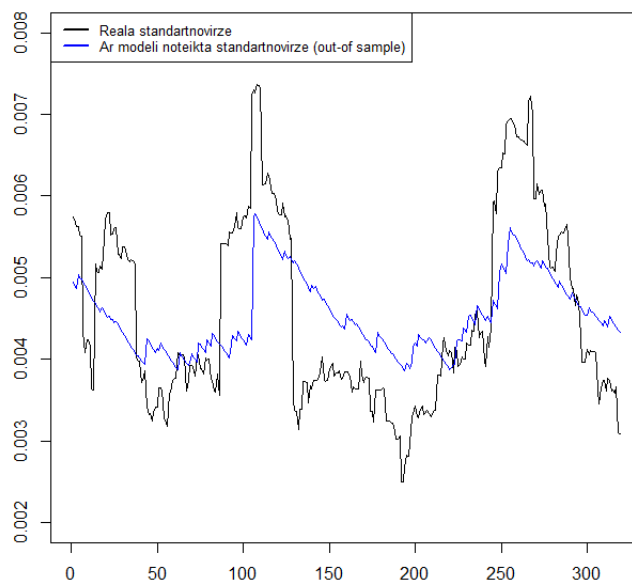
Modelim TGARCH(1,1) arī tika aprēķinātas RMSE un MAE kļūdas, kuras ir nedaudz mazākas par GARCH(1,1) modeļa kļūdam, un atkal kļūdas "out of sample" datiem ir pat mazākas, nekā "in sample" datiem:

3.8. tabula **Modelim TGARCH(1,1) aprēķinātas kļūdas**

	MAE	RMSE
in sample dati	0.07779081	0.08879575
out of sample dati	0.07658083	0.08045791



3.12. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums 4 gadu periodā



3.13. att. EUR/USD volatilitātes salīdzinājums "out of sample" datiem

4. REZULTĀTI

Šajā nodaļā tiek apkopoti un apskatīti volatilitātes modelēšanas rezultāti visiem trim valūtu pāriem: eiro-ASV dolārs (EUR/USD), ASV dolārs-Japānas jena (USD/JPY) un eiro-Kanādas dolārs (EUR/CAD). Katram no pāriem tika izveidotas GARCH, EGARCH un TGARCH modeļi. Rezultāti doti tabulās.

4.1. Rezultāti EUR/USD valūtu pārim

4.1. tabula Modeļu rezultāti pārim EUR/USD

eur/usd	GARCH(1,1)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)
	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums
α_0	-0.00013	-0.00023	-0.00015
<i>p-vērtība</i>	0.23620	0.00015	0.17172
α_1	-0.35066	-0.27714	-0.27229
<i>p-vērtība</i>	0.00020	0.03719	0.05409
β_0	0.27073	0.21245	0.19315
<i>p-vērtība</i>	0.00140	0.00124	0.00002
	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums
ω	0.00673	-0.02277	0.00000
<i>p-vērtība</i>	0.00001	0.00000	0.29261
α	0.02518	-0.05180	0.00008
<i>p-vērtība</i>	0.00000	0.00000	0.00000
β	0.97271	0.99783	0.98258
<i>p-vērtība</i>	0.00000	0.00000	0.00000
γ		0.00060	0.03257
<i>p-vērtība</i>		0.83592	0.00000
MAE	0.06778	0.15171	0.07658
RMSE	0.08046	0.17591	0.08046
AIC	-7.86440	-7.93240	-7.90650
DW	1.97143	1.99831	1.96957

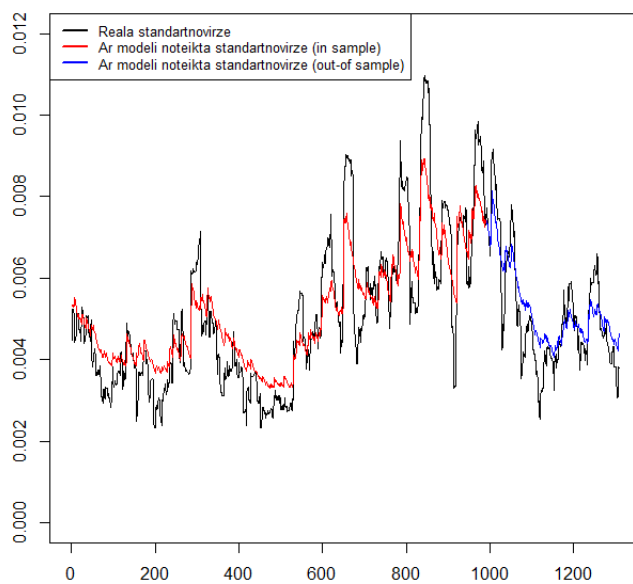
Kā redzams tabulā (4.1), vismazākas MAE un RMSE kļūdas ir GARCH(1,1) modelim, bet ja mēs paskatīsimies uz AIC vērtību, tad vismazāka vērtība ir EGARCH(1,1) modelim. Kā mēs jau apskatījām 3. nodaļā, kļūdas EGARCH modelim ir ļoti lielas, turklāt, DW testa statistika ir vistuvāka divniekam. Bet koeficients γ ir statistiski nenozīmīgs šajā modelī. Pēc kļūdām var spriest, ka GARCH(1,1) visefektīvāk apraksta pāri EUR/USD, kas nozīmē, ka var novērot klasteru veidošanos. Ņemot vērā to, ka EGARCH modelis ir vislabākais pēc AIC, tad mēs varam apskatīt iespēju, ka pārim EUR/USD ir raksturīgas asimetriskās reakcijas uz negatīviem un pozitīviem šokiem pagātnē.

4.2. Rezultāti EUR/CAD valūtu pārim

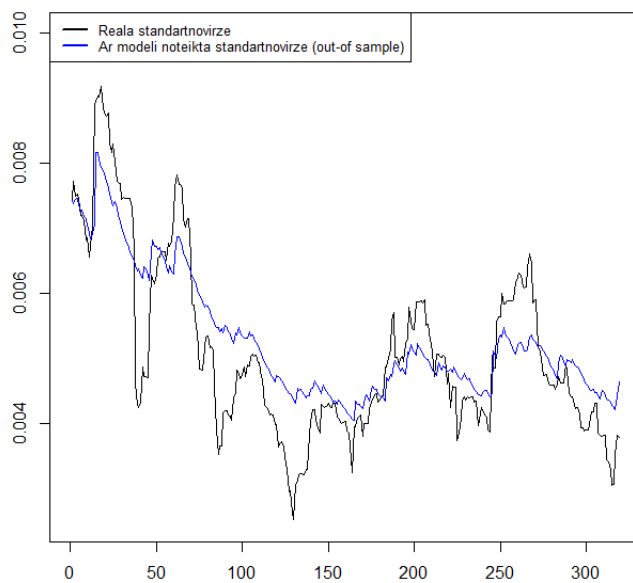
4.2. tabula Modeļu rezultāti pārim EUR/CAD

eur/cad	GARCH(1,1)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)
	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums
α_0	-0.000001	0.00007	0.00002
<i>p-vērtība</i>	0.95531	0.43572	0.83395
α_1	0.85608	0.92662	0.88009
<i>p-vērtība</i>	0.00029	0.00000	0.00000
β_0	-0.87348	-0.94992	-0.90960
<i>p-vērtība</i>	0.00007	0.00000	0.00000
	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums
ω	0.00000	-1.41293	0.00000
<i>p-vērtība</i>	0.00080	0.05354	0.00900
α	0.19454	0.07715	0.03531
<i>p-vērtība</i>	0.00007	0.01379	0.00000
β	0.65355	0.86400	0.96793
<i>p-vērtība</i>	0.00000	0.00000	0.00000
γ		0.30828	-0.01746
<i>p-vērtība</i>		0.00006	0.09544
MAE	0.09492	0.38240	0.05821
RMSE	0.12357	0.39788	0.12357
AIC	-7.69748	-7.72190	-7.72430
DW	1.970057	2.014284	2.002931

Kā redzams tabulā (4.2), valūtu pārim EUR/CAD vispiemērotākais modelis ir TGARCH(1,1), tikai γ modelī ir nenozīmīga. MAE un RMSE kļūdas ir vismazākas, salīdzinot ar citiem modeļiem, kā arī AIC vērtība ir vismazāka un DW testa statistika ir 2. Tā kā TGARCH modelī ir iekļauts mainīgais I_t , kas palielina slikto ziņu ietekmi uz volatilitāi, mēs varam secināt, ka pārim EUR/CAD dotajā periodā bija rakstutīgi asmiterijas efekti, jo γ ir negatīva, bet nav vienāda ar nulli.



4.1. att. EUR/CAD volatilitātes salīdzinājums 4 gadu periodā



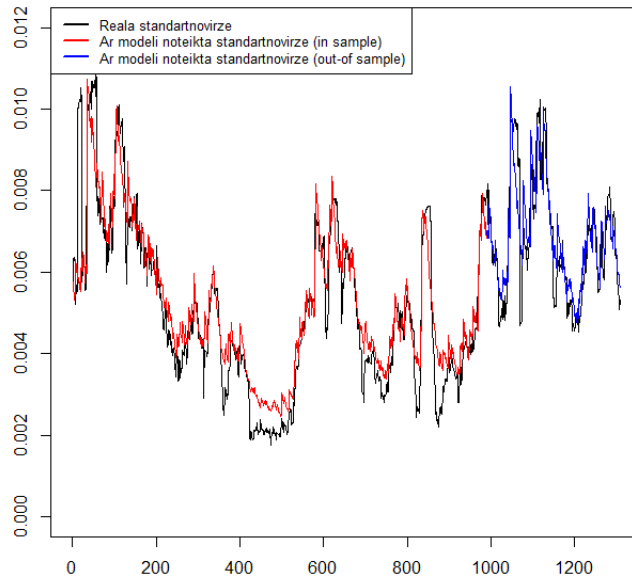
4.2. att. EUR/CAD volatilitātes salīdzinājums "out of sample" datiem

4.3. Rezultāti USD/JPY valūtu pārim

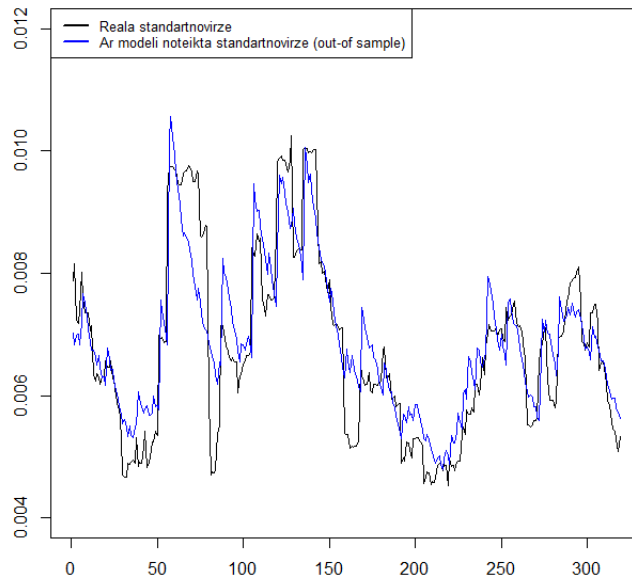
4.3. tabula Modeļu rezultāti pārim USD/JPY

usd/jpy	GARCH(1,1)	EGARCH(1,1)	TGARCH(1,1)
	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums	Vidējās vērtības vienādojums
α_0	0.000263	0.000122	0.000183
<i>p-vērtība</i>	0.390000	0.435723	0.175480
α_1	0.301540	0.332525	0.278973
<i>p-vērtība</i>	0.000000	0.000000	0.000000
β_0	-0.298540	-0.317594	-0.271089
<i>p-vērtība</i>	0.000000	0.000000	0.000000
	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums	Nosacītās dispersijas vienādojums
ω	0.000000	-0.103874	0.000000
<i>p-vērtība</i>	0.045900	0.053539	0.044051
α	0.058372	-0.006601	0.050511
<i>p-vērtība</i>	0.000001	0.510105	0.000000
β	0.938625	0.988984	0.950642
<i>p-vērtība</i>	0.000000	0.000000	0.000000
γ		0.124700	-0.004955
<i>p-vērtība</i>		0.000011	0.072373
MAE	0.05460949	0.3824033	0.0584848
RMSE	0.07061776	0.3978768	0.0709269
AIC	-7.75891	-7.7219	-7.5902
DW	2.002268	2.014284	1.998134

Kā redzams tabulā (4.3), valūtu pāri USD/JPY visefektīvāk apraksta modelis GARCH(1,1). Kļūdas MAE un RMSE ir vismazākas, kā arī AIC vērtība. DW statistika ir vistuvāka divniekam salīdzinot ar citu modeļu vērtībām. Tātad, varam secināt, ka pārim USD/JPY ir raksturīgs klasteru veidošanas efekts.



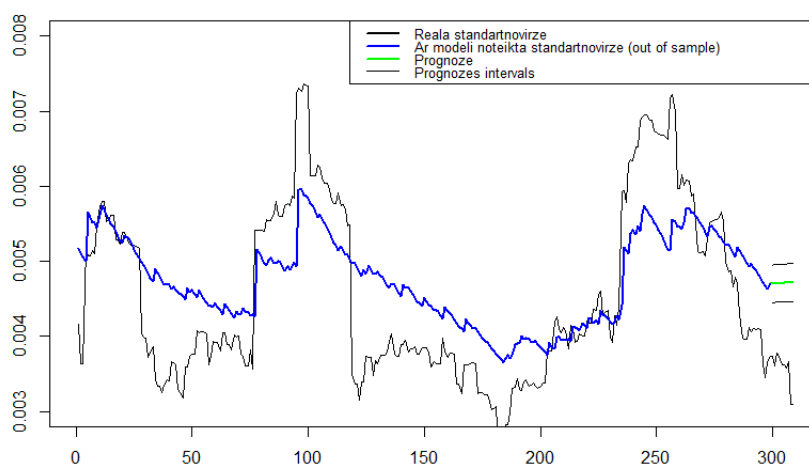
4.3. att. USD/JPY volatilitātes salīdzinājums 4 gadu periodā



4.4. att. USD/JPY volatilitātes salīdzinājums "out of sample" datiem

4.4. Prognozēšana, izmantojot GARCH

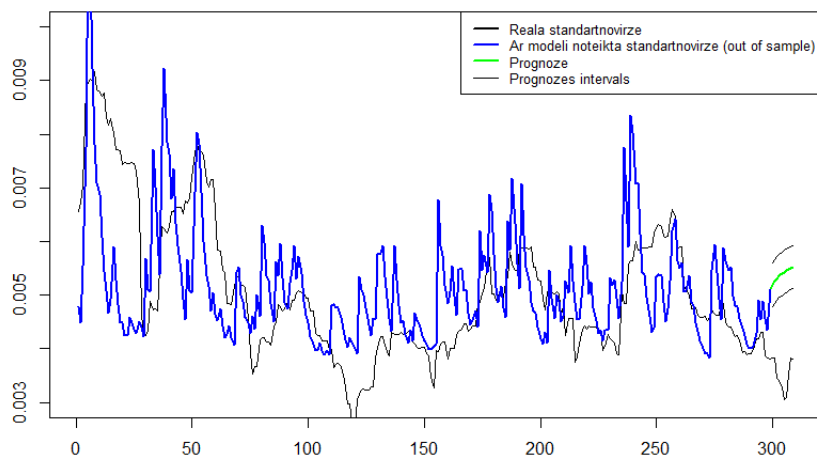
Šajā darbā tiek prognozēta volatilitāte trim valūtu pāriem uz 10 soļiem uz priekšu. Lai aprēķinātu prognozēšanas kļūdu, tika aprēķinātas MAE un RMSE kļūdas, kā arī aprēķināts un pievienots grafikam prognozes intervāls.



4.5. att. EUR/USD kursa volatilitātes prognoze

4.4. tabula Prognozēšanas kļūdas pārim EUR/USD

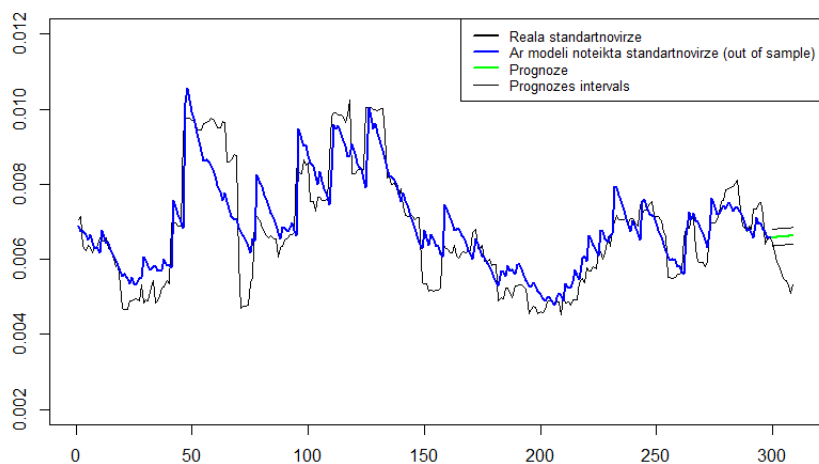
RMSE	MAE
0.1181714	0.115672



4.6. att. EUR/CAD kursa volatilitātes prognoze

4.5. tabula Prognozēšanas kļūdas pārim EUR/CAD

RMSE	MAE
0.19064428	0.1877635



4.7. att. USD/JPY kursa volatilitātes prognoze

4.6. tabula **Prognozēšanas kļūdas pārim USD/JPY**

RMSE	MAE
0.1036276	0.09455326

Skatoties uz prognozēšanas rezultātiem, varam secināt, ka vismazākas kļūdas ir pāra ASV dolārs-Japānas jena prognozei. Kopumā katram no trim valūtu pāriem prognozes vērtības atrodas prognozes intervālā. Vislielākas prognozēšanas kļūdas ir pārim EUR/CAD, bet ir svarīgi atzīmēt, ka prognozētas vērtības aug tā pat, ka reālās volatilitātes vērtības, ko mēs nevaram pateikt par prognozētām vērtībām citiem pāriem, jo attēlos (4.5) un (4.7) mēs varam redzēt, ka prognozētas vērtības ir gandrīz vienādas, kamēr reāla volatilitāte krit.

SECINĀJUMI

Darba mērķis bija iepazīties ar GARCH, EGARCH un TGARCH modeļiem, pielietojot tos valūtu pāru volatilitātes analīzei.

Darbam ir šādi galvenie rezultāti:

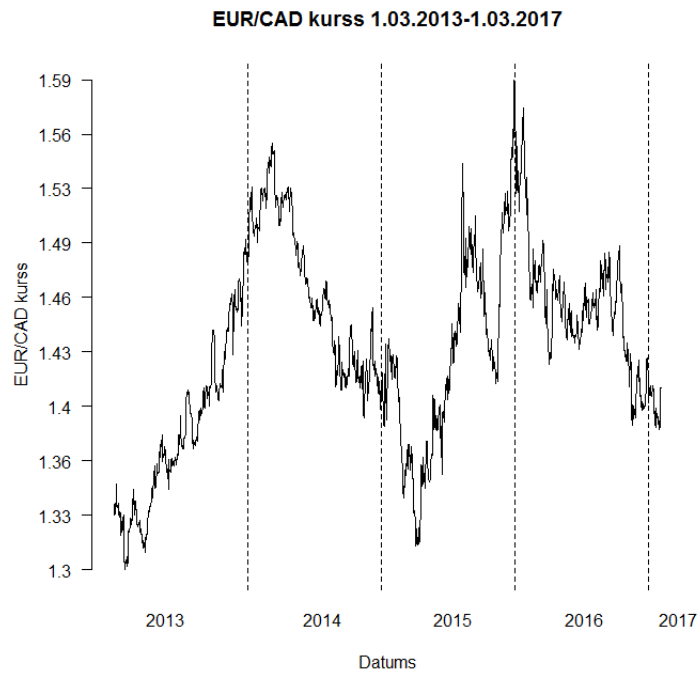
- Valūtu pāri eiro-ASV dolārs laika periodā 1.03.2013-1.03.2017 visefektīvāk apraksta GARCH(1,1) modelis, kas nozīmē, ka pārim ir raskturīga volatilitātes klasteru veidošana. Var arī pieņemt, ka EGARCH(1,1) modelis arī apraksta datus un datiem raksturīgs sviras efekts.
- Valūtu pāri eiro-Kanādas dolārs laika periodā 1.03.2013-1.03.2017 visefektīvāk apraksta TGARCH(1,1) modelis, kas nozīmē, ka pāris asimetriski reaģē uz pozitīviem un negatīviem šokiem no pagātnes.
- Valūtu pāri ASV dolārs-Japānas jena laika periodā 1.03.2013-1.03.2017 visefektīvāk apraksta GARCH(1,1) modelis, kas nozīmē, ka pārim ir raskturīga volatilitātes klasteru veidošana.
- Katram EGARCH(1,1) modelim ir daudz lielākas kļūdas, nekā citiem modeļiem, tādēļ var uzskatīt, ka modelim ir kādi trūkumi.
- Visprecizāka volatilitātes prognozēšana, izmantojot GARCH, ir valūtu pārim USD/JPY.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

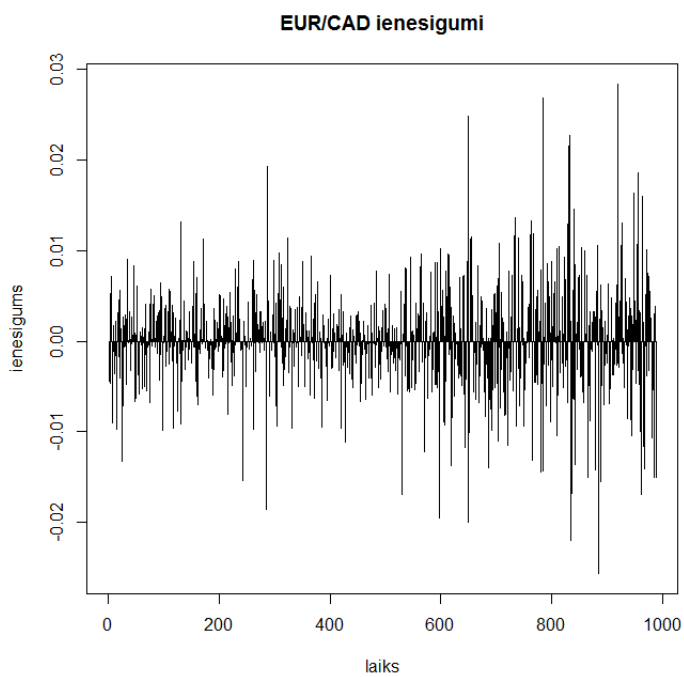
1. **Chris Brooks**, Introductory Econometrics for Finance, 2002.
2. **N. Siņenko**, Laikrindu analīze
3. **E.Balaban, A.Bayar** Forecasting Stock Market Volatility: Evidence From Fourteen Countries
4. **Rob Reider**, Volatility Forecasting I: GARCH Models, 2009
5. Fundamental Concepts of Time-Series Econometrics
6. **N. Siņenko**, Ekonometriskās analīzes matemātiskie pamati
7. **Enrico Foscolo**, Analysis of Financial Time Series

PIELIKUMI

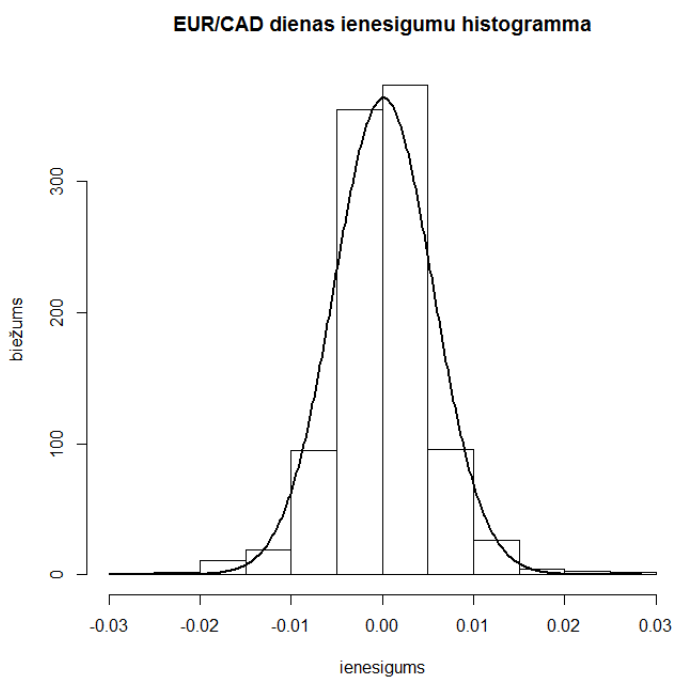
1. pielikums EUR/CAD kursa izmaiņas 4 gadu periodā



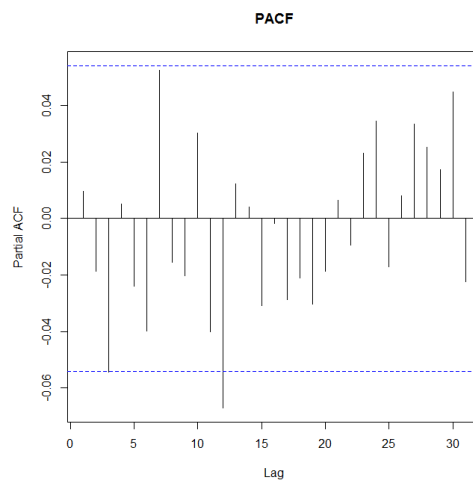
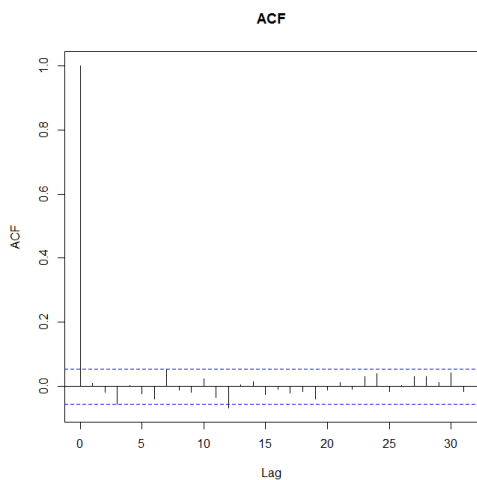
2. pielikums EUR/CAD ienesīgumi



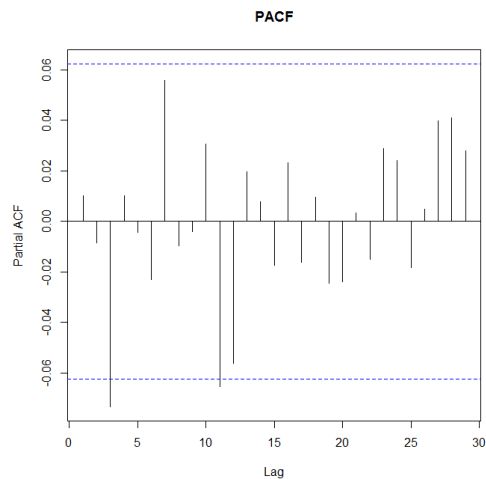
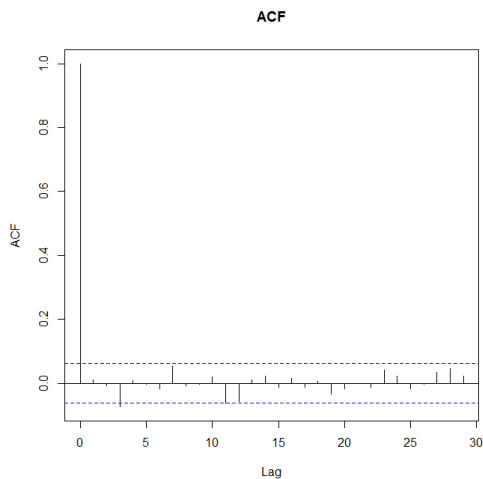
3. pielikums EUR/CAD ienesīgumu histogramma



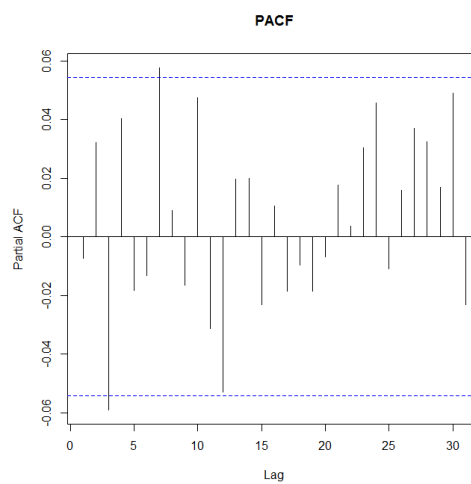
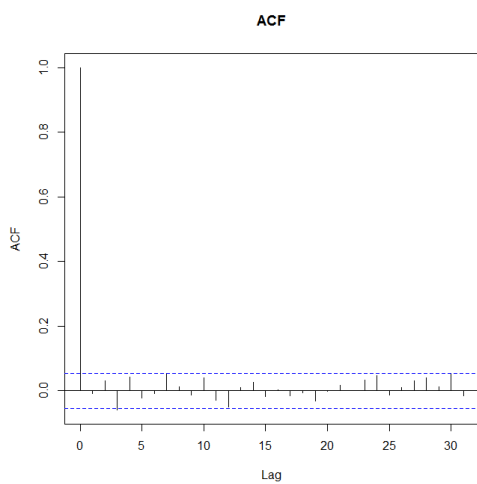
4. pielikums EUR/CAD ACF un PACF grafiki ARMA(1,1) modelim



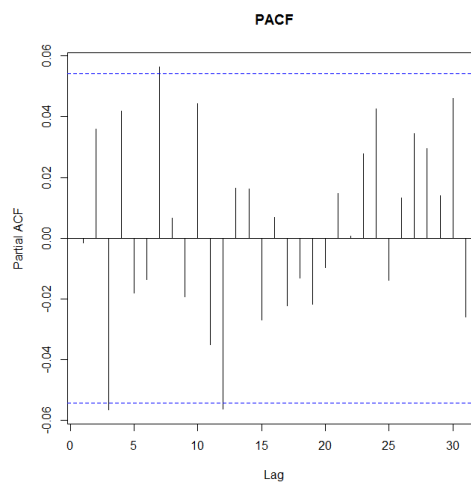
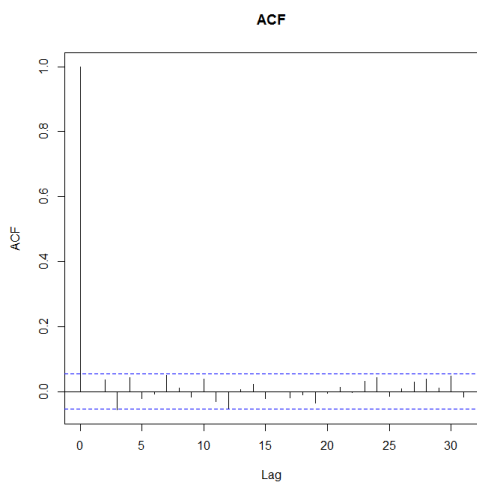
5. pielikums EUR/CAD ACF un PACF grafiki GARCH(1,1) modelim



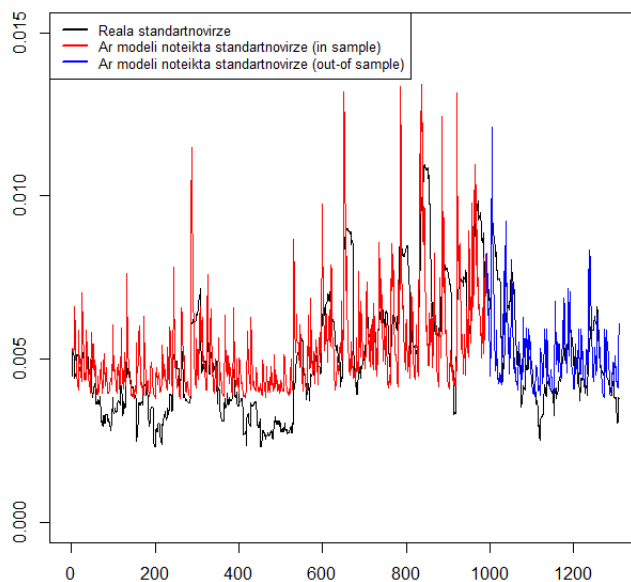
6. pielikums EUR/CAD ACF un PACF grafiki EGARCH(1,1) modelim



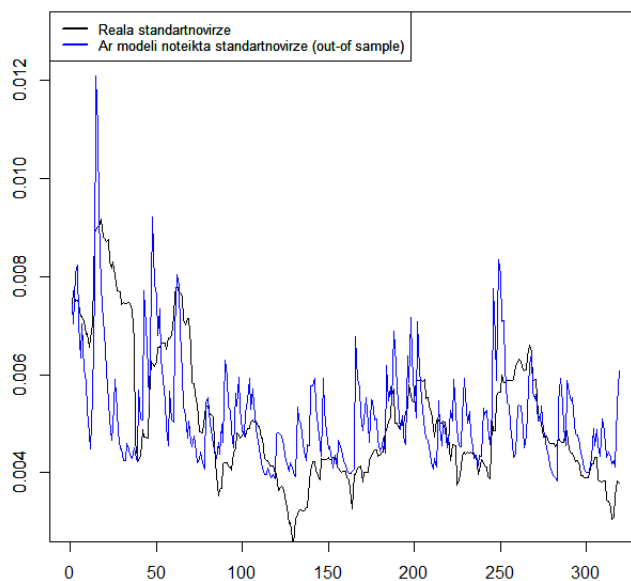
7. pielikums EUR/CAD ACF un PACF grafiki TGARCH(1,1) modelim



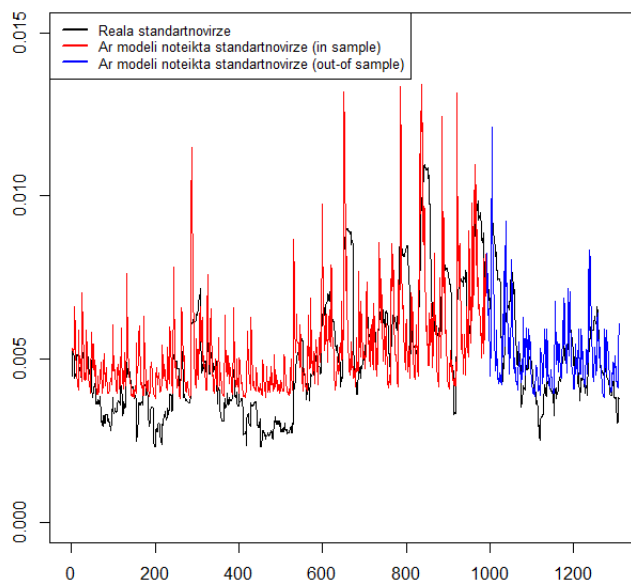
8. pielikums EUR/CAD volatilitāte pēc GARCH(1,1) modeļa



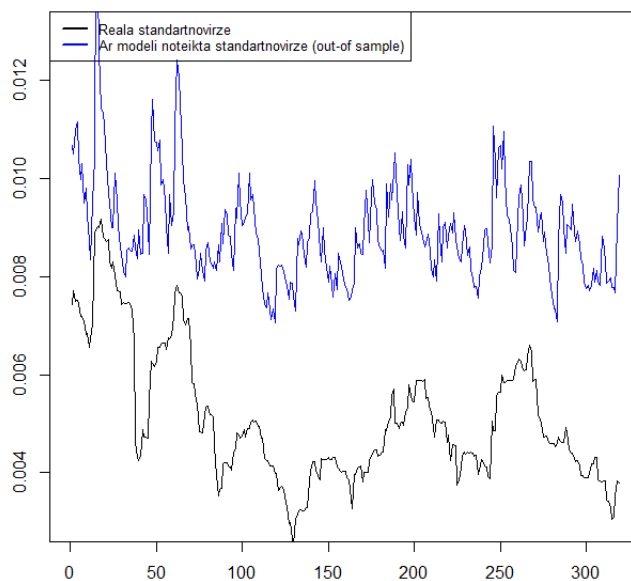
9. pielikums EUR/CAD volatilitāte pēc EGARCH(1,1) modeļa



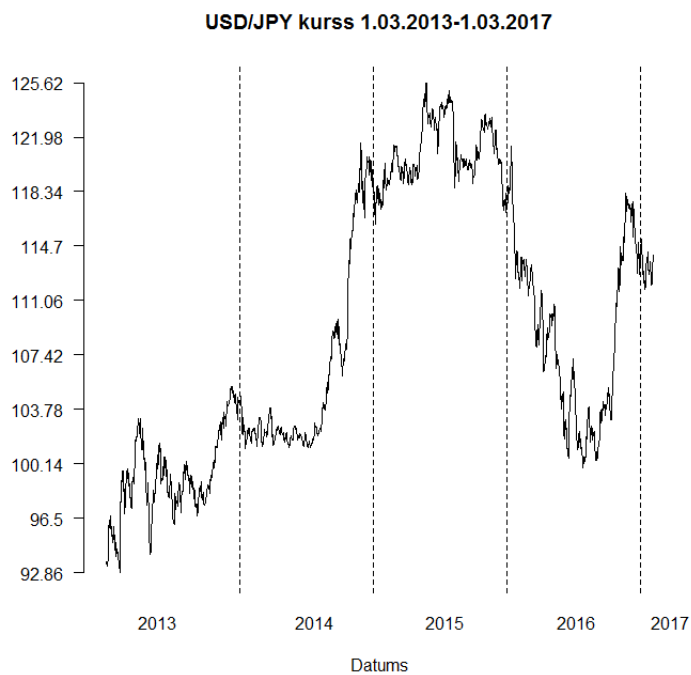
10. pielikums EUR/CAD volatilitāte pēc GARCH(1,1) modeļa (out of sample)



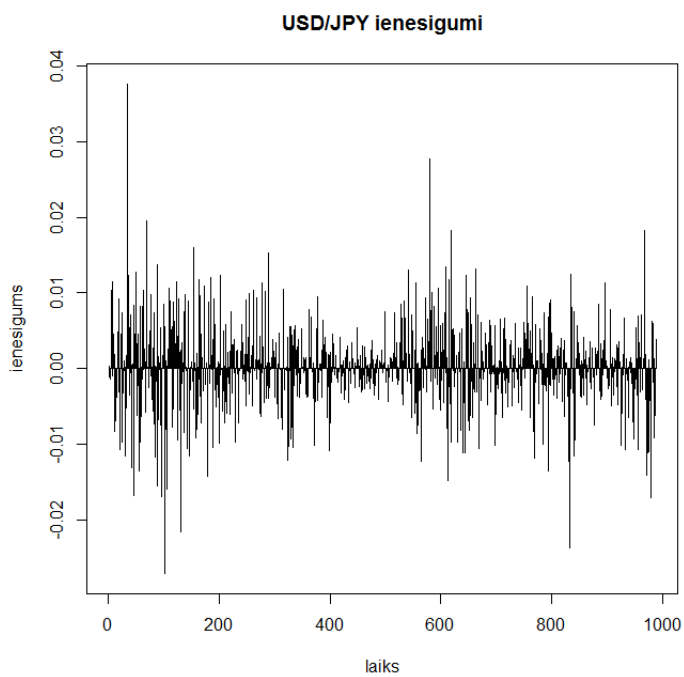
11. pielikums EUR/CAD volatilitāte pēc EGARCH(1,1) modeļa (out of sample)



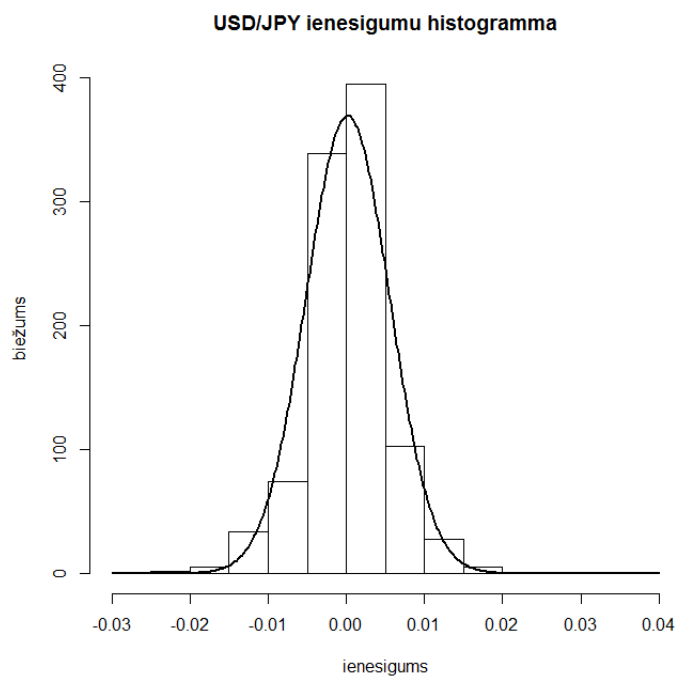
12. pielikums USD/JPY kursa izmaiņas 4 gadu periodā



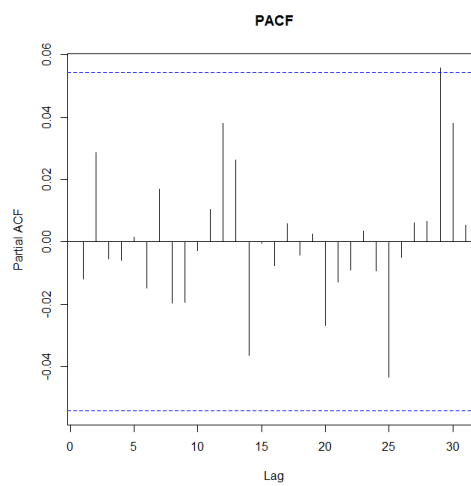
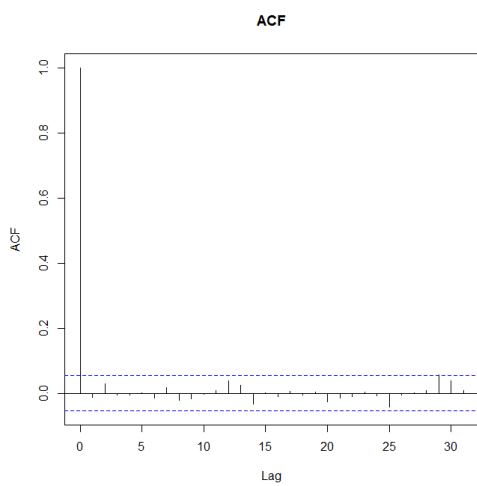
13. pielikums USD/JPY ienesīgumi



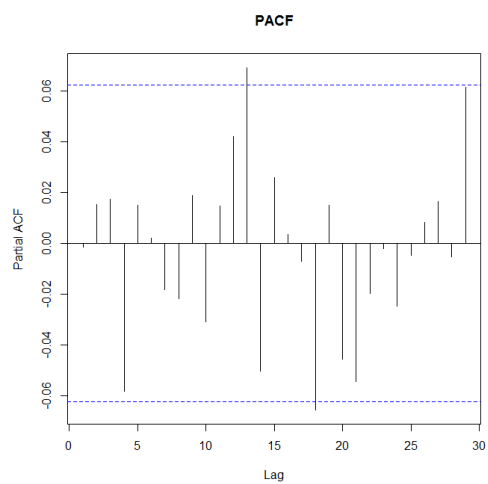
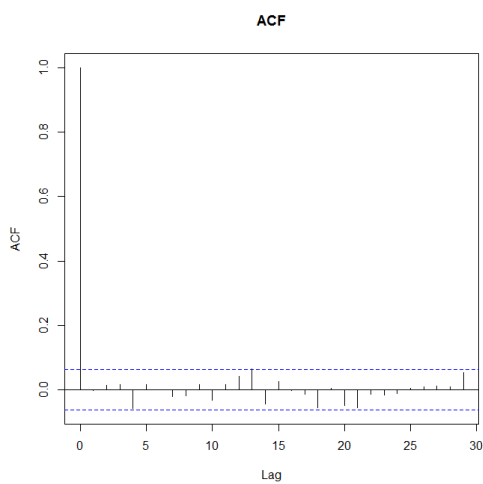
14. pielikums USD/JPY ienesīgumu histogramma



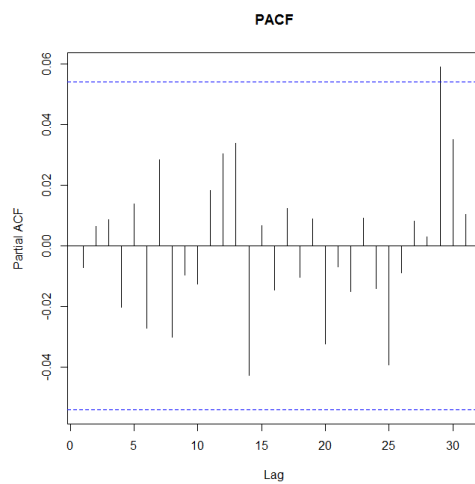
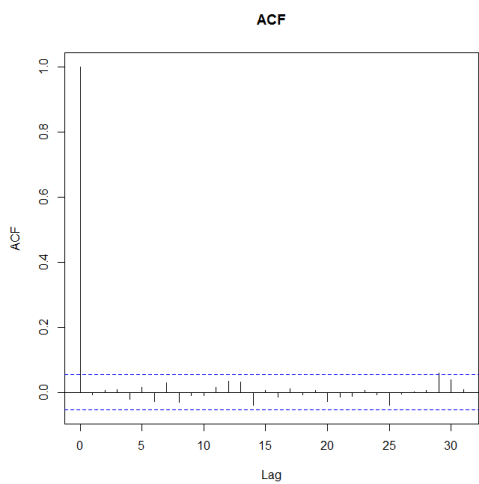
15. pielikums USD/JPY ACF un PACF grafiki ARMA(1,1) modelim



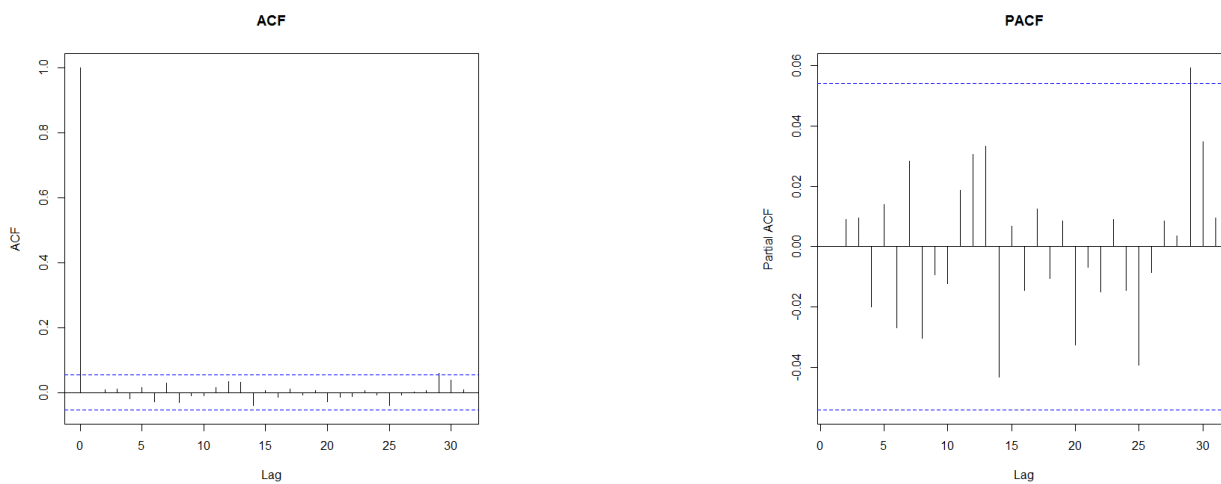
16. pielikums USD/JPY ACF un PACF grafiki GARCH(1,1) modelim



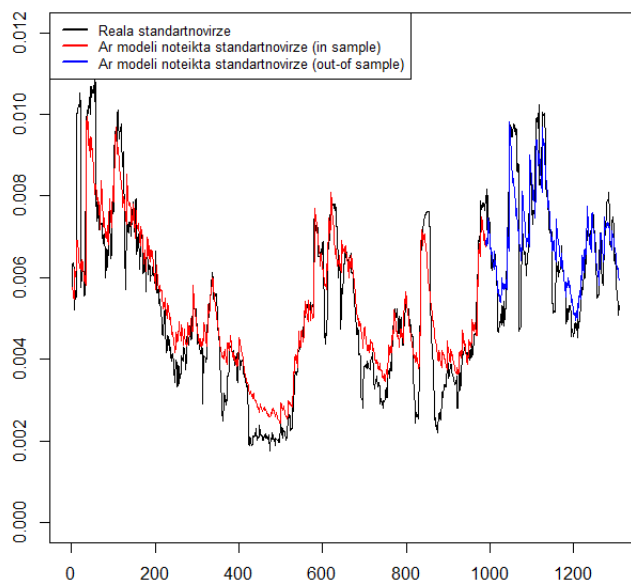
17. pielikums USD/JPY ACF un PACF grafiki EGARCH(1,1) modelim



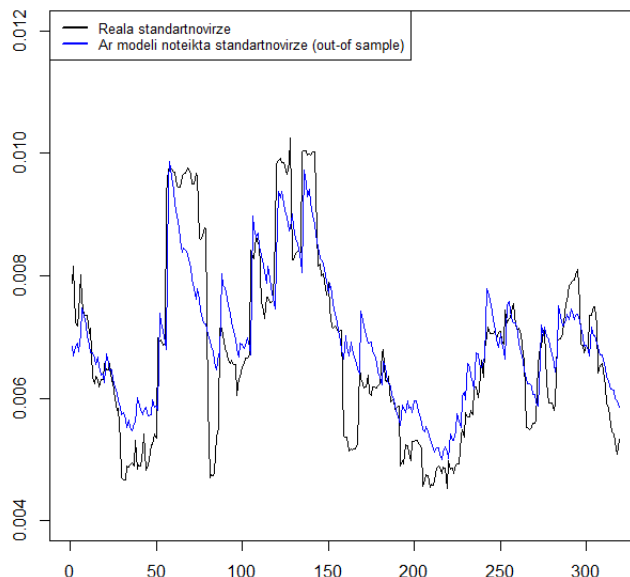
18. pielikums USD/JPY ACF un PACF grafiki TGARCH(1,1) modelim



19. pielikums USD/JPY volatilitāte pēc TGARCH(1,1) modeļa



20. pielikums USD/JPY volatilitāte pēc TGARCH(1,1) modeļa (out of sample)



20. pielikums R kods

```
dati<-read.csv("eurusd.csv")
x<-dati[1:989,5]
r <- diff(log(x))
d = as.timeSeries(r)
t = length(d)
#####PLOTS#####

h<-hist(r,main=NULL, xlab='ienesigums',ylab='biežums')
title('EUR/USD 3 gadu dienas ienesigumu histogramma')
xfit<-seq(min(r),max(r),length=400)
  yfit<-dnorm(xfit,mean=mean(r),sd=sd(r))
  yfit <- yfit*diff(h$mids[1:2])*length(r)
  lines(xfit, yfit, col="black", lwd=2)

plot(r, type="l")
plot(r, type="h", main="EUR/USD ienesigumi", xlab='laiks', ylab='ienesigums')

#####
```

```

mean(r)
max(r)
min(r)
sd(r)
kurtosis(r)
skewness(r)
adf.test(r)
#####ARMA MODELS#####
n=1309
x<-dati[1:n,5]
r <- diff(log(x))
d = as.timeSeries(r)
t = length(d)

g1<-arma(r,order=c(1,1))
summary(g1)
g2<-arma(r,order=c(2,1))
summary(g2)
g3<-arma(r,order=c(1,2))
summary(g3)
g4<-arma(r,order=c(2,2))
summary(g4)
g5<-arma(r,order=c(3,2))
summary(g5)
#####CHOOSE ARMA(1,1)#####
res1<-g1$residuals
shapiro.test(res1)
hist(res1,main='Atlikumu histogramma',xlab='atlikumi',ylab='biežums')
acf(res1[2:(n-1)],main='ACF')
pacf(res1[2:(n-1)],main='PACF')
durbinWatsonTest(res1[2:(n-1)])
AutocorTest(res1[2:(n-1)])
ArchTest(res1)
#####REAL VOLALITILITY#####
n<-1309
real<-c()

```

```

for(i in n:23) {real[i]<-sd(r[i:(i-23)])}
for (i in 1:22) {real[i]<-sd(r[i:(i+22)])}

#####GARCH(1,1)#####
ff = garchFit(~arma(1,1)+ garch(1,1), data=d[1:988], cond.dist="norm")
summary(ff)
ress<-ff@residuals
shapiro.test(ress)
hist(ress,main='Atlikumu histogramma',xlab='atlikumi',ylab='biežums')
acf(ress,main='ACF')
pacf(ress,main='PACF')
acf(ress^2)
pacf(ress^2)
durbinWatsonTest(ress)
AutocorTest(ress)
#####in sample calculated volatility#####
omega<-coef(ff)[4]
alpha<-coef(ff)[5]
beta<-coef(ff)[6]
sigma11<-c()
sigma11[2]<-sqrt(var(r))

for (i in 3:1309)
{
sigma11[i]<-sqrt(omega+alpha*(r[i-1]-g1$fitted[i-1])^2+beta*sigma11[i-1]^2)
}
sigma11

n<-989
theta1<-sigma11[2:n] # forecast value
theta<- real[2:n] # actual value
theta1
theta

MSE1<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
RMSE1<-sqrt(MSE1)

```

```

MAE1<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

MSE1*100
RMSE1*100
MAE1*100

#####out of sample calculated volatility#####
n<-320
theta1<-sigma11[990:1308] # forecast value
theta<- real[990:1308] # actual value
theta1
theta

MSE2<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
RMSE2<-sqrt(MSE2)
MAE2<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

MSE2*100
RMSE2*100
MAE2*100

plot(real[1:1308],type="l",xlab="",ylab="")
points((sigma11[1:1308]), type="l",col='blue',lwd=1)
points((sigma11[1:989]), type="l", col='red',lwd=1)
legend('topleft',c("Reala standartnovirze","Ar modeli noteikta standartnovirze
(in sample)","Ar modeli noteikta standartnovirze (out-of sample)"),
lty=c(1,1,1), lwd=c(2,2,2),
col=c("black","red","blue"),cex=0.8)

#####EGARCH#####

spec = ugarchspec(variance.model = list(model = "eGARCH", garchOrder =
c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE))
fitmodel <- ugarchfit(data = r, spec = spec)
coef(fitmodel)

```

```

eres<-as.numeric(residuals(fitmodel))
hist(eres)
acf(eres)
acf(eres)
pacf(eres)
acf(eres^2)
pacf(eres^2)
durbinWatsonTest(eres)
AutocorTest(eres)
mu1<-coef(fitmodel)[1]
omega1<-coef(fitmodel)[4]
alpha1<-coef(fitmodel)[5]
beta1<-coef(fitmodel)[6]
nu1<-coef(fitmodel)[7]

sigma2<-c()
sigma2[2]<-sqrt(var(r))

for (i in 3:1309)
{
sigma2[i]<-sqrt(exp(omega1+(alpha1*(r[i-1]-g1$fitted[i-1])+
nu1*abs(r[i-1]-g1$fitted[i-1]))/sigma2[i-1]+beta1*log(sigma2[i-1]^2)))

}
sigma2
#####in sample calculated volatility#####

n<-989
theta1<-sigma2[2:n] # forecast value
theta<- real[2:n] # actual value
theta1
theta

eMSE1<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
eRMSE1<-sqrt(MSE1)
eMAE1<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

```

```

eMSE1*100
eRMSE1*100
eMAE1*100

#####out of sample calculated volatility#####
n<-320
theta1<-sigma2[990:1308] # forecast value
theta<- real[990:1308] # actual value
theta1
theta

eMSE2<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
eRMSE2<-sqrt(eMSE2)
eMAE2<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

eMSE2*100
eRMSE2*100
eMAE2*100

plot(real[1:1308],type="l")
points((sigma2[1:1308]), type="l",col='blue',lwd=1)
points((sigma2[1:989]), type="l",col='red',lwd=1)

#####TGARCH#####
spec2 = ugarchspec(variance.model = list(model = "gjrGARCH",
  garchOrder = c(1,1)), mean.model = list(armaOrder = c(1,1),
include.mean = TRUE), distribution.model="norm")
tg <- ugarchfit(data = r, spec = spec2)
coef(tg)
tres<-as.numeric(residuals(tg))
hist(tres)
acf(tres)
acf(tres)
pacf(tres)
acf(tres^2)

```

```

pacf(tres^2)
durbinWatsonTest(tres)
AutocorTest(tres)

mu2<-coef(tg)[1]
omega2<-coef(tg)[4]
alpha2<-coef(tg)[5]
beta2<-coef(tg)[6]
nu2<-coef(tg)[7]

sigma3<-c()
sigma3[2]<-sqrt(var(r))
for (i in 3:1309)
{
  if (((r[i-1]-g1$fitted[i-1]))<0)
  { sigma3[i]<-sqrt(omega2 + alpha2 * (r[i-1]-g1$fitted[i-1])^2 +
beta2*sigma3[i-1]^2 + nu2*(r[i-1]-g1$fitted[i-1])^2*1)}
  else {sigma3[i]<-sqrt(omega2 + alpha2 * (r[i-1]-g1$fitted[i-1])^2 +
beta2*sigma3[i-1]^2 + nu2*(r[i-1]-g1$fitted[i-1])^2*0)}
}
sigma3

#####in sample calculated volatility#####

n<-989
theta1<-sigma3[2:n] # forecast value
theta<- real[2:n] # actual value
theta1
theta

tMSE1<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
tRMSE1<-sqrt(MSE1)
tMAE1<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

tMSE1*100
tRMSE1*100

```

```

tMAE1*100

#####out of sample calculated volatility#####
n<-320
theta1<-sigma3[990:1308] # forecast value
theta<- real[990:1308] # actual value
theta1
theta

tMSE2<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
tRMSE2<-sqrt(MSE2)
tMAE2<-1/n*sum(abs(theta1-theta))

tMSE2*100
tRMSE2*100
tMAE2*100

plot(real[1:1308],type="l")
points((sigma3[1:1308]), type="l",col='blue',lwd=1)
points((sigma3[1:989]), type="l",col='red',lwd=1)
#####GARCH FORECAST#####
ped<-sigma11[1298]
s2<-sqrt(omega/(1-alpha-beta))
sigma11[1299]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)*(ped^2-s2^2))
sigma11[1300]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^2*(ped^2-s2^2))
sigma11[1301]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^3*(ped^2-s2^2))
sigma11[1302]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^4*(ped^2-s2^2))
sigma11[1303]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^5*(ped^2-s2^2))
sigma11[1304]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^6*(ped^2-s2^2))
sigma11[1305]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^7*(ped^2-s2^2))
sigma11[1306]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^8*(ped^2-s2^2))
sigma11[1307]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^9*(ped^2-s2^2))
sigma11[1308]<-sqrt(s2^2+(alpha+beta)^10*(ped^2-s2^2))

theta1<-sigma11[1299:1308] # forecast value
theta<- real[1299:1308] # actual value

```

```

MSE3<- 1/n*sum((theta1-theta)^2)
x1<-c()
x2<-c()

for (i in 1:10){
x1[i]<-sigma11[1298+i]+(-2.306004)*sqrt(MSE3*
(1+1/10+((real[1298+i]-mean(real[1299:1308]))^2)/(var(real[1299:1308]*9))))}
for (i in 1:10){
x2[i]<-sigma11[1298+i]-(-2.306004)*sqrt(MSE3*
(1+1/10+((real[1298+i]-mean(real[1299:1308]))^2)/(var(real[1299:1308]*9))))}

plot(real[1000:1308],type="h")
points((sigma11[1000:1309]), type="l",col='green',lwd=4)
points((sigma11[1000:1299]), type="l",col='blue',lwd=4)
points(x1,x=c(300:309),type="l",lwd=3)
points(x2,x=c(300:309),type="l",lwd=3)

```