

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
FIZIKAS NODAĻA

**DIAGRAMMU VALODA AUGSTA LĪMEŅA KVANTU PROCESU
REPREZENTĀCIJAI**

BAKALĀURA DARBS

Autors: Agnese Ķerubiņa

Stud. apl. ak11523

Darba vadītājs: Dr. fiz. Vjačeslavs Kaščejevs

RĪGA – 2015

Anotācija

Pēdējo gadu laikā Oksfordas Universitātē profesora Boba Koekes vadībā ir uzsākta jaunas diagrammu valodas izveide un attīstīšana. Diagrammu valodas iecerētais pamatpielietojums – kvantu procesu attēlošana tādā veidā, lai uzskatāmi atainotu kvantu informācijas plūsmu un kvantu algoritmu struktūru, kā arī lai sniegtu intuitīvu priekšstatu par kvantu parādību norisi.

Darbā diagrammu formālisms ir nevis aprakstīts no abstraktā, matemātiski pašpietiekamā skatpunkta, bet gan skaidroti galvenie darbības principi, balstoties uz labi zināmo Diraka formālismu. Rezultātā iegūta pirmā mācību literatūra latviešu valodā. Darbā apkopotā informācija sniedz labu zināšanu bāzi, lai, iepazīstoties ar darba saturu, būtu iespēja vieglāk uztvert jaunākās publikācijas šajā nozarē un, cerams, iegūt svaigu skatu uz kvantu mehānikas galvenajiem elementiem.

Atslēgvārdi: Diraka formālisms, kategoriskā kvantu mehānika, diagrammu formālisms, sapītība, blīvuma matricas.

Abstract

During the past few years there has been an assertive work going on in Oxford University under the guidance of Professor Bob Coecke to develop a new diagrammatic language. The intended purpose of this new language is a portrayal of quantum processes in such a way to distinctly depict the information flow in entangled quantum systems as well as give an intuitive feel for the underlying physics.

Within this paper the new notation is explained based on the well-known Dirac mathematical formalism rather than introduced in a complicated yet mathematically correct way. This is the first textbook type literature regarding this topic in Latvian language. The information summarized in this work is sufficient to give the necessary knowledge platform for further reading of papers as well as broadens the view on main elements of modern quantum mechanics.

Keywords: Dirac formalism, categorical quantum mechanics, diagrammatic language, entanglement, density matrices.

Saturs

Ievads	4
1 Diraka bra-ket apzīmējumi kvantu mehānikā	7
1.1 Ket-vektoru telpa	7
1.2 Bra-vektoru telpa	8
1.3 Skalārais reizinājums	9
1.4 Ortonormēta bāze	9
1.5 Lineārie operatori	10
1.5.1 Vienības operators	11
1.5.2 Projekcijas operators	11
1.5.3 Diraka formālisms matricu reprezentācijā	12
2 Kubits – daļiņa ar spinu 1/2	13
2.1 Spins kā divu stāvokļu kvantu sistēma	13
2.1.1 Šterna-Gerlaha mērījumu sērijas	13
2.1.2 Spina stāvokļa vektors	15
2.1.3 Piecu eksperimentu rezultāti Hilberta telpā	15
2.1.4 Matricu reprezentācija	16
2.2 Mērījums	16
2.3 Bloha sfēra	17
2.4 Operatori	17
2.4.1 Vidējā vērtība	18
2.4.2 Sistēmas izmaiņas laikā	19
2.5 Kubits	21
3 Vairāku daļiņu sistēmas	22
3.1 Divas nesaistītas sistēmas	22
3.1.1 Tenzoriālais reizinājums	22
3.1.2 Matricu reprezentācija	23

3.2	Sapītie stāvokļi	24
3.3	Blīvuma matricas	25
3.3.1	Definīcija	25
3.3.2	Blīvuma matricas elementu interpretācija	26
3.3.3	Sajauktie stāvokļi uz Bloha sfēras	27
3.3.4	Blīvuma operatora evolūcija laikā	27
3.3.5	Reducētais blīvuma operators	27
4	Hilberta telpa diagrammu reprezentācijā	28
4.1	Vienas daļiņas sistēma	28
4.1.1	Bra-Ket vektori un skalārais reizinājums	29
4.1.2	Lineārie operatori	32
4.2	Divu daļiņu sistēmas	35
4.2.1	Divas nesaistītas sistēmas	35
4.2.2	Vienas daļiņas - divu daļiņu duālisms	36
4.2.3	Procesi vairāku daļiņu telpā	38
4.3	Operatora-vektora duālisms	39
4.3.1	Operators \mapsto vektors	39
4.3.2	Vektors \mapsto operators	40
5	Kvantu sistēmas diagrammās	42
5.1	Tīro stāvokļu diagrammas	42
5.1.1	Bra-Ket vektori un varbūtības aprēķins	43
5.1.2	Krūzīte un cepurīte	44
5.1.3	Operācijas dubultdiagrammās	45
5.1.4	Mērījums	45
5.2	Sajaukto stāvokļu diagrammas	46
5.2.1	Iznīcināšanas operācija	47
5.2.2	Sajaukto stāvokļu blīvuma matrica	48
5.2.3	Blīvuma matricas pēda	50
6	Klasiskā informācija diagrammās	51
6.1	Mērījums	51
6.2	Dekoherence	52
6.3	Šterna-Gerlaha mērījumu sērija diagrammās	53

6.4 Interferences eksperiments	56
Rezultāti	58
Secinājumi	60
Pateicības	62
Izmantotā literatūra un avoti	63

Ievads

1900. gadā Makss Planks ar savu atklājumu, ka daba ir kvantēta, “sabojāja” to fiziku, kāda tā bija pazīstama līdz 20.gs. sākumam [1]. Turpmāko 30 gadu laikā cits citam strauji sekoja milzīgs daudzums atklājumu un tikpat daudz Nobela prēmiju. Visbeidzot 1932.gadā kā vairāku vīru kopdarbs varēja tikt uzskatīta par pabeigtu kvantu fizikas formālisma pamatstruktūras definēšana. Punktu (patiesībā gan komatu) pieliekot ar Diraka–von Neimana aksiomām, kas kvantu mehāniku aprakstīja ar operatoriem un Hilberta telpu [2].

Par sapītības (angliski – *entanglement*) fenomenu 1935. gadā satraucās Alberts Einšteins, Boriss Podoļskis un Natans Rozens, savā publikācijā aprakstot, ka kvantu fizikas teorija joprojām nav pabeigta – teorijai trūkst slēpti mainīgie, kuru ieviešana kvantu fizikas sapratni padarītu klasisku [3]. Šo problēmu 1964. gadā risināja Džons Bels [4], parādot, ka šādi mainīgie kvantu teorijā nav ieviešami. Tas prasīja vairākus gadus, lai zinātnieki beidzot, šķiet, spētu pieņemt, ka pasaules uzbūves kvantu daba ir fundamentāla parādība, kas jāpieņem kā fakts, nevis jācenšas skaidrot, kāpēc tā tāda ir.

Pēc 1980. gada zinātnieki sāka interesēties, vai kvantu algoritmi (kas kā informācijas pārnēsēju izmanto kubitu) varētu būt efektīvāki par klasiskajiem (pirmais ar ideju nāca klajā Jurijs Manins [5], patstāvīgi un padziļinātāk arī Ričards Feinmans 1982. gadā [6]), taču tos fenomenus, kas balstās uz daudzu daļiņu sistēmas kā viena vesela kvantu īpašībām, sāka atklāt un eksperimentāli pierādīt tikai no 1993. gada, kad tika parādīta kvantu teleportācija [7].

Kāpēc bija nepieciešams tik ilgs laiks no kvantu fizikas formālisma pabeigšanas līdz saskatīšanai starp sapītām daļiņām – teleportācijai? Pirmkārt, protams, kvantu īpašības nav intuitīvas, ikdienā sastopamās sistēmas ir induktīvi un deduktīvi saprotamas – ir iespējams no vispārīga objekta nonākt pie tā sastāvdaļām un otrādi. Savukārt sapītie kvantu stāvokļi nav viennozīmīgi aprakstāmi, izmantojot informāciju tikai par atsevišķajām daļām vai visu sistēmu – ir iespējams zināt kopīgo leņķisko momentu, bet nav informācijas par to, kurā virzienā telpā ir orientēts katrs atsevišķais spins. Otrkārt, Diraka formālisms ir veidots, balstoties uz klasisko izpratni par daļiņu sistēmām – domājot par katru daļiņu kā neatkarīgu komponenti. Šāda veida

domāšana, iespējams, nav labākais veids, kā aprakstīt kvantu sistēmas. Bobs Koeke uz šo jautājumu atbild [8], apgalvojot, ka līdzšinējie kvantu formālismi ir kā zema līmeņa programmēšanas valoda, kas neļauj saskatīt sakarības un neļauj uzdot pareizos jautājumus.

Matemātiķiem ideja par to, kā formāli varētu uz matemātiskām struktūrām raudzīties „no augšas“ jeb kategoriju teorija radās salīdzinoši nesen. Laikā no 1942. līdz 1945. gadam Semjuels Eilenbergs un Saunders Makleins ieviesa to kā daļu no sava darba, kas saistīts ar topoloģiju ar mērķi savu darbu labāk izprast intuitīvi [9]. Kategoriju matemātikas pamatideja ir pētīt matemātisko aparātu struktūrās, abstrahējoties no nevajadzīgām detaļām – objekta darbības principi ir nesvarīgi, nozīmīgi ir tas, kā objekts saistās ar citiem objektiem savā kategorijā. Piemēram, reālus skaitļus var konstruēt ļoti daudzos veidos – Košī kritērijs [10, lpp. 190], Dedekinda šķēlumi [10, lpp. 9] utml., tie ir dažādi objekti, bet pēc būtības tie neatšķiras. Kategoriju matemātikā tie gluži vienkārši ir dažādi atrisinājumi vienai universālai problēmai. Šāds domāšanas veids varētu būt piemērotāks kvantu mehānikas problēmu risināšanā, jo ļautu vieglāk pārraudzīt kvantu sistēmas un to, kā tās pārnes informāciju.

Pirmais solis kategoriskās kvantu mehānikas izveidē tika sperts 2003. gadā, kad Samsons Abramskajs un Bobs Koeke saprata, kā ietvert kvantu informāciju kategorijās [11]. Šī darba rezultātā Koeke pirmais ķērās pie kvantu mehānikas diagrammu formālisma izveides [12], kura saprašanai kategoriju teorijas zināšanas vairs nav nepieciešamas. Pēc tā ir sekojuši vairāki pētījumi par to, kā šīs idejas par diagrammu valodu attīstīt un izmantot dažādās ar kvantu fiziku saistītās nozarēs. Līdz šim pētītās tēmas – uz mērījumiem balstīta kvantu skaitļošana [13], kvantu nelokalitāte [14], kvantu algoritmi [15] u.c.

Darba mērķis

Darba mērķis ir izveidot sistemātisku izklāstu diagrammu valodai, kas ir derīga kvantu sistēmu kvantitatīvajam aprakstam, izmantojot matemātiskās kategoriju teorijas elementu divdimensionālus attēlojumus.

Darba uzdevumi

1. Iepazīties ar kvantu mehānisko sistēmu lineāro telpu matemātisko aprakstu Diraka bra-ket apzīmējumus.
2. Iepazīties ar sajaukto stāvokļu apraksta metodēm, t.sk. blīvuma matricām.

3. Izveidot sistemātisku konspektu divdimensionālo kategoriju teorijas diagrammu pielietojumam kvantu mehānisko procesu aprakstam tīro (angliski – *pure*) un sajaukto (angliski – *mixed*) stāvokļu gadījumā.
4. Izvērtēt kategoriju kvantu mehānikas diagrammu valodas priekšrocības fizikālu eksperimentu aprakstam.

Darba struktūra

Šajā darbā izpratne par diagrammām tiek veidota, balstoties uz līdz šim ļoti labi zināmo Diraka formālismu. Tas ir vieglāk uztverams veids, kā pasniegt kategoriju teorētiku iegūtos abstraktos rezultātus, jo balstās uz kaut ko ļoti labi pazīstamu. Diagrammu korektu matemātisku ieviešanu, balstoties uz pašizveidotu aksiomu bāzi, varēs lasīt vēl neiznākušā grāmatā [16].

Nodaļas 1–3 kalpo kā īss nepieciešamo zināšanu bāzes izklāsts, lai saprastu šajā darbā iekļautās diagrammas (lai saprastu kādu abstrakciju, ir ļoti labi jāizprot, ko abstrahē). Skaidrojumi ir konspektīvi, tāpēc pirmo reizi saskaroties ar tēmu, būtu nepieciešams risināt uzdevumus vai apskatīt papildus literatūru ar plašākiem skaidrojumiem ([17], [18], [19]).

1. nodaļā aprakstīta Hilberta telpa un Diraka formālisma pamatidejas, 2. nodaļa skaidro kvantu sistēmu – kubitu, daļiņu ar pusveselu spinu. Īpaši jāatzīmē, ka 2.1.1. apakšnodaļas apskatītie domu eksperimenti tiks izmantoti kā piemērs arī 6. nodaļā. 3. nodaļā lasītāju iepazīstina ar matemātisko aparātu, kas tiks lietots un paskaidro fiziku divu kubitu gadījumā.

Nodaļās 4–6 aprakstīts diagrammu formālisms, uzsverot tās kvantu īpašības, kas diagrammās ir uzskatāmākas. Līdz galam matemātiski korekti šeit nekas netiks pierādīts (kas labai sapratnei pat nav nepieciešams), bet ir ilustrēti galvenie diagrammu valodas ieguvumi. Šīs izpratnes iegūšanai autors izmantojis visus līdz šim minētos literatūras avotus, īpaši [16], [20], [8].

4. nodaļa dod vispārīgu priekšstatu par Hilberta telpas objektu diagrammu apzīmējumiem, kā arī izpratni par vektoru un operatoru¹ būtību diagrammās. 5. nodaļa aprakstīta diagrammu reprezentācija gadījumos, kad *a priori* paredz Borna likuma izpildīšanos, aprēķinot procesu. 6. nodaļā paskaidrota klasisko un kvantu procesu apvienošana diagrammās.

¹Formāli operators un operatora matricas reprezentācija nav viens un tas pats. Nodaļās 1.-3., kad operators tiek reprezentēts ar matricu, tiks lietots $\hat{\circ}$. Idejiski abi matemātiskie objekti diagrammās nozīmē vienu un to pašu, tādēļ nodaļās 4.-6. abi termini tiks brīvi lietoti.

1. nodaļa

Diraka bra-ket apzīmējumi kvantu mehānikā

Lai matemātiski varētu aprakstīt visas līdz šim zināmās kvantu fizikas īpatnības, fizikāļiem stāvokļiem piekārtu stāvokļa vektorus no komplekso vektoru telpas, kas nav nekas cits kā lineārā telpa. Šāda telpa bija pazīstama matemātiķiem vēl pirms kvantu mehānikas rašanās, taču to, kādā veidā to lieto liela daļa fiziķu, un kādā veidā to lietosim arī šeit, kvantu fizikā ieviesa P. A. M. Diraks [21].

Šīs nodaļas konspekts balstīts uz [19], kur var atrast plašākus skaidrojumus par šo tēmu.

1.1. Ket-vektoru telpa

Lai atrastu likumsakarības starp dažādiem eksperimentu rezultātiem, kvantu stāvokļa un procesa jēdzienu vispārina, definējot matemātisku struktūru – lineāro telpu. Kvantu mehānikā izmanto komplekso vektoru telpu, kur tās elementus – stāvokļa vektorus – apzīmē ar $|\alpha\rangle$ un sauc par **ket-vektoriem** jeb ketiem.

Vektoru telpa, kuru lietosim, ir **lineārā telpa**. To definē ar tām pašām aksiomām.

1. Telpā ir definēta saskaitīšanas operācija starp vektoriem:

(a) Ket-vektorus var saskaitīt. To summa arī ir ket-vektors. $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$

(b) Vektoru saskaitīšana ir komutatīva. $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$

(c) Vektoru saskaitīšana ir asociatīva. $(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle = |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$

(d) Eksistē nulles vektors $|null\rangle$, kam izpildās $|\alpha\rangle + |null\rangle = |\alpha\rangle$.

(e) Eksistē pretēji vērsts vektors, tāds, kam izpildās $|\alpha\rangle + (-|\alpha\rangle) = |null\rangle$.

2. Telpā ir definēta reizināšanas operācija vektoram ar kompleksu skaitli ($a, b, c \in \mathbb{C}$):

(a) Vektorus var reizināt ar jebkuru kompleksu skaitli. Rezultāts ir jauns ket-vektors.

$$c|\alpha\rangle = |\beta\rangle$$

(b) Katram telpas vektoram izpildās:

i. $a(b|\alpha\rangle) = (ab)|\alpha\rangle$;

ii. $1|\alpha\rangle = |\alpha\rangle$.

(c) Reizināšanas operācija ir distributīva

i. $c(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = c|\alpha\rangle + c|\beta\rangle$;

ii. $(a + b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$.

2. aksiomu daļa ir iemesls, kāpēc šādu ket-vektoru telpu sauc par lineāru. Īpašības, kas izriet no aksiomām, šeit neapskatīsim – svarīgi ir atcerēties, ka telpa sastāv no ket-vektoriem un tajā ir definētas divas operācijas.

1.2. Bra-vektoru telpa

Elegantākam matemātiskajam aprakstam izmanto divas komplekso vektoru telpas (piemēram, skalārajam reizinājumam). Katram ket-vektoram var viennozīmīgi piekārtot vektoru no citas komplekso vektoru telpas – **bra-vektoru**.

Bra-vektorus jeb bra apzīmē ar $\langle\alpha|$. Par bra-vektoriem ir jāatceras sekojošais:

1. Bra-vektoriem izpildās tās pašas aksiomas, kuras ket-vektoriem;

2. Piekārtošanas operāciju sauc par **Erimita saistīšanu** un apzīmē ar \dagger ($|\alpha\rangle^\dagger = \langle\alpha|$). Šai operācijai izpildās šādas aksiomas:

(a) Tā ir viennozīmīga. ($\langle\alpha|^\dagger)^\dagger = \langle\alpha|$

(b) Tā ir distributīva ($c \in \mathbb{C}$):

i. $(|\alpha\rangle + |\beta\rangle)^\dagger = |\alpha\rangle^\dagger + |\beta\rangle^\dagger$,

ii. $(c|\alpha\rangle)^\dagger = c^*|\alpha\rangle^\dagger$.

Savā ziņā bra var uzskatīt par ketu „spoguļattēlu“.

1.3. Skalārais reizinājums

Skalārā reizinājuma operāciju Diraka ket-vektoru telpai definē līdzīgi kā lineārajā telpā, taču tā vietā, lai kompleksu skaitli piekārtotu diviem vienas telpas elementiem, to piekārtu visiem bra un ketu pāriem.

Skalārais reizinājums ir operācija, kas jebkuram ket-vektoram $|\alpha\rangle$ un jebkuram bra-vektoram $\langle\beta|$ piekārtu $c \in \mathbb{C}$:

$$c = \langle\alpha|\beta\rangle.$$

Skalārajam reizinājumam izpildās sekojošas aksiomas:

1. $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^*$;
2. Skalārā reizinājuma operācija ir lineāra – $(\langle\alpha| + \langle\beta|)|\gamma\rangle = \langle\alpha|\gamma\rangle + \langle\beta|\gamma\rangle$;
3. $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$ un vienādība izpildās tad un tikai tad, ja $|\alpha\rangle = |null\rangle$.

1.4. Ortonormēta bāze

No lineārās algebras kursa ir zināms, ka jebkuru lineārās telpas vektoru var uzrakstīt kā *lineāri neatkarīgu* vektoru *lineāro kombināciju*. Ja, šiem lineāri neatkarīgajiem vektoriem, pievienojot jebkuru citu vektoru, tā vairs nav lineāri neatkarīga, tad tā veido **telpas bāzi**.

Ar skalārā reizinājuma palīdzību īpaši izcelsim dažus vektorus mūsu telpā, ieviešot divas definīcijas:

- Divus vektorus $|\alpha\rangle$ un $|\beta\rangle$ sauc par **ortogonāliem**, ja $\langle\alpha|\beta\rangle = 0$.
- Ja $|\alpha\rangle$ nav nulles kets, mēs varam izveidot **normalizētu** ketu $|\hat{\alpha}\rangle$, kur $|\hat{\alpha}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}}\right)|\alpha\rangle$, ar īpašību $\langle\hat{\alpha}|\hat{\alpha}\rangle = 1$.

Vektoru kopu, kuriem atbilst abas definīcijas, sauc par ortonormētiem. Vienmēr varēs atrast tādu telpas bāzi, kuras vektori savā starpā ir ortonormēti. (Procedūru, ar kādu atrod šādus vektorus, sauc par *Grāma-Šmidta ortogonalizācijas procesu*.) Tāpēc jebkuru ket-vektoru telpas vektoru $|\Phi\rangle$ var uzrakstīt kā šīs telpas bāzes vektoru lineāro kombināciju:

$$|\Phi\rangle = \sum_i \alpha_i |a_i\rangle \tag{1.1}$$

kur $|a_i\rangle$ ir bāzes vektori. α_i sauc par **vektora komponentēm** jeb **amplitūdām**. Turpmāk visas apskatītās bāzes būs ortonormētas.

Vēl viens labs iemesls, kāpēc ieviest bra vektorus – ar to palīdzību var viegli atrast vektora komponentes. Ja bāzes vektori ir ortonormēti, komponenti α_j var atrast, izteiksmi (1.1) sareizinot ar bāzes keta $|a_j\rangle$ Ermita saistīto bāzes bra $\langle a_j|$ –

$$\langle a_j|\Phi\rangle = \sum_i \alpha_i \langle a_j|a_i\rangle.$$

Tā kā bāze ir ortonormēta $\langle a_j|a_i\rangle = \delta_{ji}$ iegūstam nepieciešamo –

$$\langle a_j|\Phi\rangle = \alpha_j \tag{1.2}$$

Lineāro telpu, kurai ir definēts skalārais reizinājums, sauc par **Eiklīda telpu**. Ja telpai var būt bezgalīga dimensija un vēl papildus izpildās nosacījums par *telpas pilnumu* [22], to sauc par **Hilberta telpu**. Tātad Eiklīda telpa ir Hilberta telpas speciālgadījums. Tā kā fizikālo procesu aprakstam izmanto arī bezgalīgu dimensiju, lietoto telpu biežāk sauc par Hilberta telpu. Tāpēc arī turpmāk lietosim nosaukumu „Hilberta telpa“, lai gan mums būs svarīga tikai galīgas dimensijas telpa.

1.5. Lineārie operatori

Rezultātā tas, kas jāpanāk ar lineārās telpas elementiem (vektoriem), ir pilns fizikālās sistēmas apraksts. Taču ne tikai to, kāda tā ir kādā konkrētā laika momentā, bet arī to, kā tā mainās laikā, kā arī iespējamās eksperimentu rezultātus. To panāk, ieviešot funkcijas. Atceroties lineārās algebras kursu, funkcijas lineārajā telpā sauc par **operatoriem**. Pilnam operatoru aprakstam, kuri mums būs nepieciešami, pietiks ar **lineāriem operatoriem**. Visas operatoru aksiomas un īpašības šeit neapskatīsim.

Lineārie operatori \hat{A} piekārto lineāras telpas \mathbf{M} vektoram (piemēram $|\alpha\rangle \in \mathbf{M}$) tikai vienu vektoru no citas lineāras telpas \mathbf{N} (piemēram $|\beta\rangle \in \mathbf{N}$):

$$\hat{A}(|\alpha\rangle) = |\beta\rangle,$$

kā arī tiem izpildās sekojošais:

$$\hat{A}(a|\alpha_1\rangle + b|\alpha_2\rangle) = a\hat{A}(|\alpha_1\rangle) + b\hat{A}(|\alpha_2\rangle).$$

Analogi ar operatoru var iedarboties arī uz bra vektoru:

$$(\langle\alpha|)\hat{A} = \langle\gamma|.$$

Taču ne vienmēr $|\beta\rangle$ un $|\gamma\rangle$ būs viens un tas pats vektors. Lai no $\langle\alpha|$ iegūtu $|\beta\rangle^\dagger = \langle\beta|$ uz bra vektoru ir jāiedarbojas ar Ermita saistītu operatoru \hat{A}^\dagger .

$$(\hat{A}(|\alpha\rangle))^\dagger = (\langle\alpha|)\hat{A}^\dagger$$

Operators uz bra un ket vektoriem darbojas asociatīvi, t.i. -

$$(\langle\alpha|)\hat{A}|\delta\rangle = \langle\alpha|\hat{A}(|\delta\rangle),$$

tāpēc tam, uz kuru vektoru darbojas \hat{A} , nav nozīmes, un iekavas, kas apzīmētu, uz kuru vektoru darbojas operators, pavisam atmet. Šādu skalāro reizinājumu tad pieraksta formā $\langle\alpha|\hat{A}|\delta\rangle$.

Operatorus, kam izpildās

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger,$$

sauc par **Ermita operatoriem**.

1.5.1. Vienības operators

Ar vienādojuma (1.2) palīdzību vienādojumu (1.1) var pārrakstīt formā

$$|\Phi\rangle = \sum_i \langle a_i|\Phi\rangle |a_i\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i|\Phi\rangle. \quad (1.3)$$

$\langle a_i|\Phi\rangle$ ir vienkārši skaitlis, tāpēc tā atrašanās vienādojumā var mainīt. Varam secināt, ka darbība $\sum_i |a_i\rangle \langle a_i|$ piekārtu vektoram $|\Phi\rangle$ tādu pašu vektoru $|\Phi\rangle$, jeb:

$$\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = 1. \quad (1.4)$$

Šo darbību sauc arī par **vienības operatoru**.

1.5.2. Projekcijas operators

Par **projekcijas operatoru** sauc sekojošu operatoru:

$$\hat{P}_\Psi \equiv |\Psi\rangle \langle\Psi|,$$

kur $|\Psi\rangle$ ir ortonormēts vektors. Iedarbojoties ar šādu operatoru uz kādu vektoru, iegūst šī vektora projekciju gar $|\Psi\rangle$.

Šim operatoram ir divas īpašības - tas ir Ermita, kā arī atkārtoti iedarbojoties ar šādu operatoru, iegūs tādu pašu rezultātu:

$$\hat{P}_\Psi \hat{P}_\Psi |\Phi\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle = |\Psi\rangle \langle\Psi|\Phi\rangle = \hat{P}_\Psi |\Phi\rangle.$$

1.5.3. Diraka formālisms matricu reprezentācijā

Lai aprakstītu lineāros operatorus matricu reprezentācijā, pielieto vienības operatoru:

$$\hat{A} = \sum_i \sum_j |a_i\rangle \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \langle a_j |$$

$\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle$ izmanto, lai definētu patvaļīga lineāra operatora \hat{A} matricu. $\langle a_i |$ vektora indekss i ir rindas numurs un $|a_j\rangle$ vektora indekss j ir kolonnas numurs. Izvērsti \hat{A} matricas formā pieraksta sekojoši:

$$\hat{A} \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1 | \hat{A} | a_1 \rangle & \langle a_1 | \hat{A} | a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1 | \hat{A} | a_n \rangle \\ \langle a_2 | \hat{A} | a_1 \rangle & \langle a_2 | \hat{A} | a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2 | \hat{A} | a_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n | \hat{A} | a_1 \rangle & \langle a_n | \hat{A} | a_2 \rangle & \cdots & \langle a_n | \hat{A} | a_n \rangle \end{pmatrix}$$

Lai aprakstītu vektoru matricu reprezentācijā, izmantosim operatora definīciju - veicot operāciju ar kādu telpas ket-vektoru, iegūst citas telpas ket-vektoru:

$$\hat{A}|\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad (1.5)$$

Matricu reprezentāciju iegūsim (1.5) skalāri sareizinot ar $\langle a_i |$ un izmantojot vienības operatoru:

$$\langle a_i | \beta \rangle = \langle a_i | \hat{A} | \alpha \rangle = \sum_j \langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle \langle a_j | \alpha \rangle \quad (1.6)$$

Tā kā $\langle a_i | \hat{A} | a_j \rangle$ ir kvadrātveida matricas reprezentācija, tad ievēro, ka sākotnējo ketu $|\alpha\rangle$ un rezultātu $|\beta\rangle$ matricu reprezentācijā pieraksta kā:

$$|\alpha\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1 | \alpha \rangle \\ \langle a_2 | \alpha \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n | \alpha \rangle \end{pmatrix}, \quad |\beta\rangle \doteq \begin{pmatrix} \langle a_1 | \beta \rangle \\ \langle a_2 | \beta \rangle \\ \vdots \\ \langle a_n | \beta \rangle \end{pmatrix}.$$

Matricu reprezentācijā Hermita saistīšana nozīmē matricas transponēšana un tās elementu kompleksa saistīšana. Tātad var parādīt, ka bra-vektora matrica ir transponēta un kompleksi saistīta ket-vektora matrica.

2. nodaļa

Kubits – daļiņa ar spinu $1/2$

Fizikālā sistēma, uz kuras tiks balstīta sapratne par diagrammām, būs visvienkāršākā kvantu sistēma – no apkārtējās vides izolēta daļiņa (elektrons) ar pusveselu spinu. Šī ir kvantu sistēma, ar kuru sāk daudzās mūsdienu kvantu mehānikas grāmatas (piemēram, Sakurai [19], Bess [23]), jo ar šo vienkāršo piemēru var uzskatāmi parādīt, ar ko kvantu fizika atšķiras no klasiskās fizikas, kā arī pašus kvantu fizikas svarīgākos jēdzienus – *superpozīciju*, *evolūciju laikā* un *mērījumu*.

Šajā nodaļā ir īss izklāsts tam, kā interpretēt daļiņu ar pusveselu spinu un kā ar to var veikt operācijas. Nodaļa balstīta uz [24] un [18]. Īpaši jāatzīmē, ka 2.1.1. apakšnodaļas apskatītie domu eksperimenti tiks izmantoti kā piemērs arī 6 nodaļā.

2.1. Spins kā divu stāvokļu kvantu sistēma

Viens no eksperimentiem, kas uzskatāmi parāda gan pusvesela spina daļiņu dabu, gan kvantu fizikas īpatnības, ir Šterna-Gerlaha eksperiments ar sudraba atomiem [25]. Ar šī eksperimenta palīdzību iepazīsimies, kā interpretēt spinu $1/2$ un kas ir mērījums.

2.1.1. Šterna-Gerlaha mērījumu sērijas

Veiksim 5 secīgus domu eksperimentus, izmantojot Šterna-Gerlaha eksperimentā lieto to iekārtu, kas ģenerē nehomogēnu magnētisko lauku spinu sadalīšanai, taču oriģinālo eksperimentu mazliet izmainot – mums būs vairāk par vienu šādu iekārtu, kā arī varēsim mainīt iekārtai virzienu, kurā tā dala atomus divos kūļos. Šo gradienta virzienu sauksim par „iekārtas virzienu“.

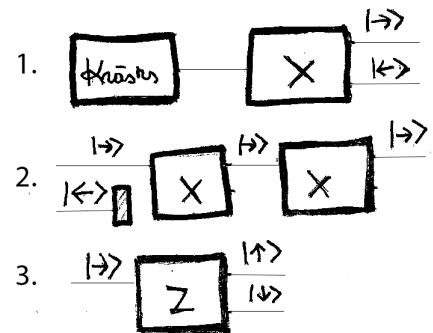
1. eksperiments. Pirms no krāsniņas izšautie atomi nav izlaisti cauri iekārtai, par to valences elektronu spina stāvokli neko nezinām (visi spina virzieni ir vien-

līdz varbūtiski). Sāksim ar vienu iekārtu orientētu x ass virzienā un izlaidīsim elektronu kūli tai cauri. Ja izmēra abu iegūto kūļu intensitāti, var secināt, ka tā ir vienāda. Ar bāzes vektoriem ket-vektoru telpā apraksta fizikāli pilnīgi atšķirīgus stāvokļus. Tāpēc eksperimenta aprakstam gar x asi izvēlēsimies divdimensionālu ket-vektoru telpu: spinu ass virzienā ar bāzes vektoru $|\rightarrow\rangle$ un spinu pretēji asij ar bāzes vektoru $|\leftarrow\rangle$.

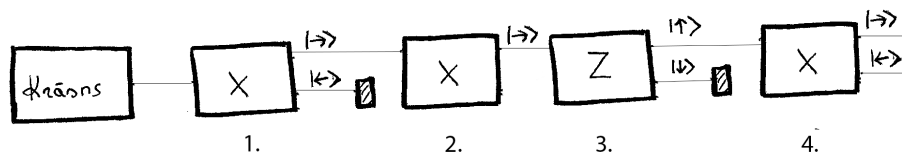
2. eksperiments. Liksim sudraba atomu kūlim, kas jau vienreiz ir gājis cauri eksperimenta iekārtai, vēlreiz likt iet cauri iekārtai. Arī šo iekārtu orientēsim x ass virzienā, taču nofiltrēsim $|\leftarrow\rangle$ atomus, ļaujot cauri 2. iekārtai iet tikai $|\rightarrow\rangle$. Rezultāts – atomi divos kūļos nesadalās. Visi cauri izgājušie atomi ir $|\rightarrow\rangle$ stāvoklī. Šim pašam kūlim varētu vairākkārt likt iet cauri x ass virzienā noorientētam aparātam, un rezultāts būs tāds pats.

3. eksperiments. Tagad šim pašam $|\rightarrow\rangle$ kūlim liksim iet cauri aparātam, kas ir orientēts z ass virzienā. Rezultāts – tas sadalās divos vienādas intensitātes kūļos. Šiem kūļiem atbilst divi tīri stāvokļi tai pašā divdimensionālajā ket-vektoru telpā, kurus apzīmēsim ar $|\uparrow\rangle$ un $|\downarrow\rangle$.

4. eksperiments. Nofiltrēsim $|\downarrow\rangle$ atomus un $|\uparrow\rangle$ kūlim liksim iziet cauri vēl vienam x ass virzienā orientētam aparātam. Tas atkal sadalās divos vienādas intensitātes kūļos: $|\rightarrow\rangle$ un $|\leftarrow\rangle$. Tā it kā spins būtu „aizmirsis kā uzvesties“ uz x ass.



2.1. att. Šterna-Gerlaha aparātu shēma domu eksperimentiem 1. - 3.



2.2. att. Šterna-Gerlaha aparātu shēma 4. domu eksperimentam

5. eksperiments. Līdzīgi 4. eksperimentam, sagatavosim $|\uparrow\rangle$ atomu kūli un liksim tam iziet cauri aparātam, kas ir orientēts nejaušā n ass virzienā – θ grādu leņķī no z ass, tad var eksperimentāli secināt divus faktus:

1. Atomu kūļa intensitāte ar spinu n ass virzienā ir $\cos^2(\theta/2)$ no oriģinālās, bet ar pretējā virziena spinu: $\sin^2(\theta/2)$
2. Vidējā magnētiskā momenta projekcijas vērtība gar n asi katram spinam pēc izešanas cauri iekārtai ir $\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2 = \cos \theta$.

2.1.2. Spina stāvokļa vektors

Pēc (1.2), patvaļīgu spina tiro stāvokli var uzrakstīt kā superpozīciju:

$$|\Psi\rangle = \alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle. \quad (2.1)$$

Amplitūdām $\alpha_{\uparrow} = \langle\uparrow|\Psi\rangle$ un $\alpha_{\downarrow} = \langle\downarrow|\Psi\rangle$ arī ir fizikāla interpretācija. Skaitlis $\alpha_{\uparrow}\alpha_{\uparrow}^*$ ir vienāds ar varbūtību spinu atrast vērstu z ass virzienā, bet $\alpha_{\downarrow}\alpha_{\downarrow}^*$ – varbūtība spinam atrasties pretēji z ass virzienam.

Lai ar amplitūdām šādi varētu izteikt varbūtības, ir jāizpildās nosacījumam

$$\alpha_{\uparrow}\alpha_{\uparrow}^* + \alpha_{\downarrow}\alpha_{\downarrow}^* = 1, \quad (2.2)$$

kas ir ekvivalents izteiksmei $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$. Tādējādi $|\Psi\rangle$, kas apraksta kādu fizikālās sistēmas stāvokli vienmēr ir vienības vektors ket-vektoru telpā – stāvokļa vektora garumam nav fizikālas nozīmes, tikai tā virzienam.

2.1.3. Piecu eksperimentu rezultāti Hilberta telpā

3. eksperimenta rezultātu Hilberta telpā var aprakstīt sekojoši:

$$\begin{aligned} |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle, \\ |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

kur 2. vienādojums apraksta situāciju, ja 3. eksperimentu veiktu ar $|\leftarrow\rangle$ spiniem. Var pārliecināties, ka $\{|\rightarrow\rangle, |\leftarrow\rangle\}$ veido ortonormētu bāzi.

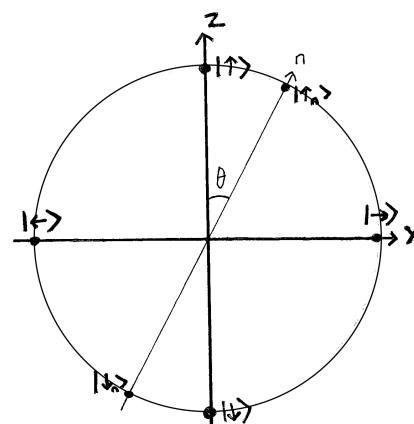
Ja 3. eksperiments būtu veikts ar atomiem, kas pirms tam būtu izgājuši caur iekārtai orientētai y ass virzienā, tad rezultāta aprakstam var konstruēt šādus vektorus:

$$\begin{aligned} |+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle, \\ |-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Var pārbaudīt, ka arī šī ir ortonormēta bāze.

5. eksperimenta „vispārīgos” rezultātus analogiski spriežot, var aprakstīt ar

$$\begin{aligned} |\uparrow_n\rangle &= \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)|\downarrow\rangle, \\ |\downarrow_n\rangle &= \sin(\theta/2)|\uparrow\rangle - \cos(\theta/2)|\downarrow\rangle, \end{aligned} \quad (2.5)$$



2.3. att. Šterna-Gerlaha aparāta virziena un tā sagatavotā stāvokļa ilustrācija.

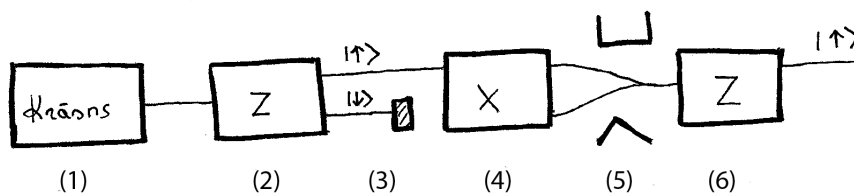
2.1.4. Matricu reprezentācija

Zinot, ka ket-vektorus var izteikt kā kolonnas matricas, uzrakstīsim 2.1.3. nodaļas piemērus kā lineārās kombinācijas no $|\uparrow\rangle$ un $|\downarrow\rangle$ matricu veidā.

$$\begin{array}{l} |\uparrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| \begin{array}{l} |\rightarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\leftarrow\rangle \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} |+\rangle \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ i \end{pmatrix} \\ |-\rangle \doteq \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -i \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} |\uparrow_n\rangle \doteq \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ |\downarrow_n\rangle \doteq \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

2.2. Mērījums

Veiksim vēl vienu domu eksperimentu, lai ilustrētu to, kas ir **mērījums**. Šterna-Gerlaha aparātu shēma ir redzama 2.4. attēlā. Izlaižot sudraba atomus cauri šādai shēmai, rezultāts ir



2.4. att. Šterna-Gerlaha aparātu shēma 6. domu eksperimentam

sekojošs – krāsniņa sagatavo spinus patvaļīgos virzienos (1). Izlaižam atomus cauri iekārtai orientētai z ass virzienā (2). $|\downarrow\rangle$ kūlis tiek nofiltrēts (3). Tātad otram kūlim ir spini tieši virzienā $|\uparrow\rangle$. Šim kūlim atkal liekam iziet cauri iekārtai orientētai x ass virzienā (4). Šoreiz nevienu kūli nenofiltrējam, bet ar nehomogēna magnētiskā lauka palīdzību tos atkal sabīdam kopā (5). Jauniegūtajam staram liekam atkal iziet cauri iekārtai orientētai z ass virzienā (6). Rezultātā iegūstam tikai vienu $|\uparrow\rangle$ kūli.

Punktā (3) tiek veikts **mērījums**. (2) katrs atoms ir kādā superpozīcijā starp stāvokļiem $|\uparrow\rangle$ un $|\downarrow\rangle$. Kad nofiltrējam $|\downarrow\rangle$ (3), tiek veikts mērījums uz šiem atomiem – tiek sagrauta superpozīcija, kā rezultātā iegūstam tīru stāvokļu kūli, kuram visi spini ir vērsti $|\uparrow\rangle$ virzienā, ar kuru varam turpināt eksperimentu.

2.3. Bloha sfēra

Divdimensionāls vektors, kam ir kompleksas amplitūdas, nav intuitīvi uztverams, jo tam ir četras brīvības pakāpes. Lai vizualizētu vienu spinu, izmanto ģeometrisku interpretāciju – Bloha sfēru, ar kuras palīdzību tad arī top skaidra (2.3) un (2.4) izvēle.

Vienu brīvības pakāpi varam atņemt, atceroties, ka līdz šim par stāvokļa vektoriem minētas divas sakarības – (2.1) un (2.2). Šos divus nosacījumus pilnībā apmierina spina stāvoklis ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \cos(\theta/2)e^{ia}|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{ib}|\downarrow\rangle, \\ &= e^{ia}(\cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i(b-a)}|\downarrow\rangle) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Eksperimentāli e^{ia} nav nosakāms (t.s. fāzu reizinātājs). Tā kā tam nav fizikālas interpretācijas, šo vienu brīvības pakāpi atmetīsim. Rezultātā iegūst vienādojumu ar divām brīvības pakāpēm:

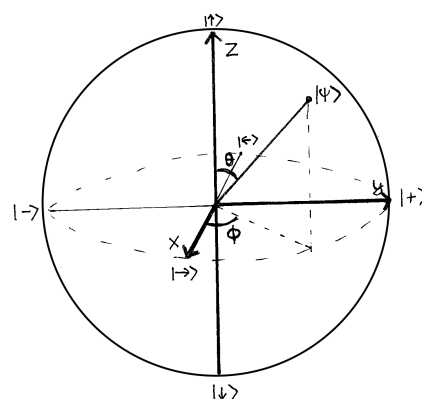
$$|\Psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle, \quad (2.7)$$

kur $-\pi \leq \theta \leq \pi$ un $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Šim vienādojumam ģeometriski atbilst trīsdimensionāla sfēra (skat. 2.5. att.) – leņķi ϕ un θ atbilst Šterna-Gerlaha eksperimenta aparāta pagriešanai). Uz šīs ģeometriskās interpretācijas tad var ļoti labi novērot to, kas izpildās eksperimentāli, kā arī bāzes vektoru izvēli gar asīm.

Jāatceras, ka telpā, kurā notiek eksperiments, abi spina stāvokļi ir vērsti pretējos virzienos, taču ket-vektoru telpā tie ir ortogonāli stāvokļi, jo ir fizikāli pilnīgi atšķirami. Šis ir arī iemesls, kādēļ formulā (2.7) izmanto $\theta/2$, nevis pilnu leņķi. Bloha sfēru sauc par *projektīvu* Hilberta telpu, jo stāvokļa vektori $|\Psi\rangle$ un $e^{ia}|\Psi\rangle$ atrodas vienuviet.

2.4. Operatori

Ar lineāru operatoru palīdzību ir iespējams aprakstīt operācijas, kādas var veikt ar pusvesela spina daļiņu. Šeit apskatīsim eksperimentu vidējo vērtību un spina virziena maiņu ar magnētiskā lauka palīdzību.



2.5. att. Spina ģeometriskā interpretācija uz Bloha sfēras.

2.4.1. Vidējā vērtība

Līdz šim veikto domu eksperimentu rezultāti ir paredzējuši ne tikai spina virzienu, bet arī mērījumu sēriju vidējo vērtību (skatīt 2.1.1. nodaļas 5. eksperimentu). Vidējo vērtību var aprēķināt ar formulu

$$\sum_i \lambda_i P(|\lambda_i\rangle),$$

kur λ_i ir stāvokļa vērtība un $P(|\lambda_i\rangle)$ ir varbūtība iegūt stāvokli ar šādu vērtību. Atceroties lineāra operatora īpašību – iedarbojoties ar operatoru uz patvaļīgu ket-vektoru, kas ir izteikts operatora īpašvektoru bāzē, iegūst:

$$\hat{X}|\Psi\rangle = \hat{X} \sum_i \alpha_i |\lambda_i\rangle = \sum_i \alpha_i \lambda_i |\lambda_i\rangle. \quad (2.8)$$

α_i ir attiecīgā bāzes vektora amplitūda, λ_i ir operatora īpašvērtība (spina leņķiskā momenta projekcijas mērījuma gadījumā $\lambda_1 = \frac{1}{2}\hbar$ un $\lambda_2 = -\frac{1}{2}\hbar$) un $|\lambda_i\rangle$ ir īpašvektors. Vidējā vērtība tad ir aprēķināma šādi:

$$\langle X \rangle = \langle \Psi | X | \Psi \rangle = \sum_i \alpha_i \alpha_i^* \lambda_i. \quad (2.9)$$

$\langle X \rangle$ ir bieži lietots vidējās vērtības apzīmējums.

Spina Operatori

Var uzkonstruēt tādus operatorus, kuru īpašvektori ir gar izvēlētu asi uz Bloha sfēras un kuri īpašvektoram, kurš nozīmē spinu gar asi, piekārto īpašvērtību „+1“, bet vektoram pretēji asij piekārto „-1“. Šādus operatorus var uzkonstruēt no tā sauktajām **Pauli matricām**.

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\hat{\sigma}_z$ matricas īpašvektori uz Bloha sfēras ir $|\uparrow\rangle$ un $|\downarrow\rangle$. Šī matrica piekārtos $|\uparrow\rangle$ vērtību „+1“, bet $|\downarrow\rangle$ vērtību „-1“:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z |\uparrow\rangle &= |\uparrow\rangle, \\ \hat{\sigma}_z |\downarrow\rangle &= -|\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Tātad, lai šāda matrica varētu tikt izmatota formulā (2.9) vidējās vērtības paredzēšanai leņķiskā momenta projekcijas mērījumiem gar z asi, tā ir tikai jāpareizina ar $\lambda = \frac{1}{2}\hbar$. Analogiski $\hat{\sigma}_x$ darbojas gar x asi un $\hat{\sigma}_y$ gar y asi.

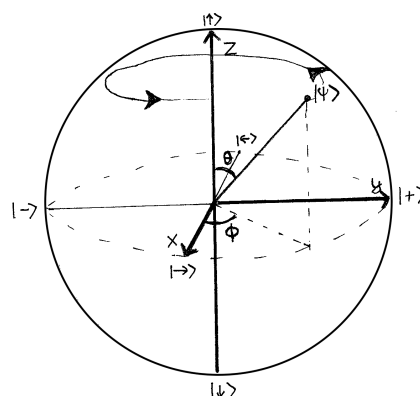
Operatoru gar patvaļīgu asi n iegūst pēc formulas $\hat{\sigma}_n = \hat{\sigma} \cdot \vec{n}$, saskaitot kopā visas Pauli matricas, iegūst

$$\hat{\sigma}_n = \begin{pmatrix} n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & -n_z \end{pmatrix}$$

n_x, n_y, n_z ir mērījuma ass projekcija uz attiecīgajām Bloha sfēras asīm.

2.4.2. Sistēmas izmaiņas laikā

Ja uz spinu nedarbojas nekādi ārējie lauki, tas ideālos apstākļos savu virzienu telpā, laikam ritot, nemaina. Bet kad tam kādā virzienā pieliek magnētisko lauku, spins ap šo asi sāk precesēt ar Larmora frekvenci. Tātad spinu var griezt pa Bloha sfēru. Lai to panāktu, būtu jāaprēķina, cik ilgi un kāds magnētiskais lauks ir jāpieliek, lai iegūtu vēlamo leņķi. Kā arī – kādam operatoram tas atbilst?



Šrēdingera vienādojums

Sistēmas stāvokļa $|\Psi(t)\rangle$ izmaiņu laikā apraksta no laika atkarīgais Šrēdingera vienādojums:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle.$$

Vienādojuma formālais atrisinājums ir

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right] |\Psi(0)\rangle. \quad (2.10)$$

Iegūtais laika evolūcijas operators

$$\hat{U} = \exp\left[\frac{-i\hat{H}t}{\hbar}\right]$$

ir unitārs operators. Par **unitāriem** sauc tādus operatorus \hat{U} , kam izpildās sekojoša vienādība:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$$

Ja atrod operatora \hat{H} īpašvektorus ($|\Psi_i\rangle$) un īpašvērtības (E_i)

$$\hat{H} |\Psi_i\rangle = E_i |\Psi_i\rangle,$$

tad (2.10) var pārrakstīt īpašvektoru bāzē ($|\Psi(0)\rangle = \sum_i \alpha_i |\Psi_i\rangle$):

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_i \alpha_i e^{\frac{-iE_i t}{\hbar}} |\Psi_i\rangle.$$

2.6. att. $|\Psi\rangle$ Larmora precesija Bloha sfērā, ja magnētiskais lauks ir pielikts gar z asi.

Spins magnētiskajā laukā

Vispārīgi sistēmas Hamiltoniānis spinam homogēnā magnētiskajā laukā ir formā

$$H = -\frac{e}{2m}(B_x\hat{\sigma}_x + B_y\hat{\sigma}_y + B_z\hat{\sigma}_z)$$

Hamiltoniāņa īpašvērtības $E = \pm \frac{\hbar e}{2m} \cdot B$, kur m ir daļiņas masa, e – daļiņas lādiņš.

Apskatīsim konkrētu piemēru. Ja sākumā bija stāvoklis

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha_1|\uparrow\rangle + \alpha_2|\downarrow\rangle,$$

un mēs tam pieliekam magnētisko lauku z ass virzienā, iegūstam

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\frac{eBt}{2m}}\alpha_1|\uparrow\rangle + e^{i\frac{eBt}{2m}}\alpha_2|\downarrow\rangle.$$

Tā kā kopīgajai fāzei nav fizikālas jēgas

$$|\Psi(t)\rangle = \alpha_1|\uparrow\rangle + e^{i\frac{eBt}{2m}}\alpha_2|\downarrow\rangle.$$

Uz Bloha sfēras šāds stāvoklis atbilst (ja $\alpha_1 = \cos(\theta/2)$ un $\alpha_2 = \sin(\theta/2)e^{i\phi}$) –

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i(\phi+\frac{eBt}{2m})}|\downarrow\rangle.$$

Tātad sistēma precesē gar z asi, precesijas ātrums atkarīgs no magnētiskā lauka stipruma. Analogiski var spriest arī par pārējām asīm. Tātad, manipulējot ar magnētisko lauku, spinu varam sagrozīt uz jebkuru punktu uz Bloha sfēras. Vispārīgā gadījumā gar n asi rotāciju pa $\Delta\gamma = \frac{eBt}{2m}$ grādiem realizē operators:

$$e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} = e^{-i\frac{\hat{\sigma}\cdot\vec{n}}{\hbar}\Delta\gamma}. \quad (2.11)$$

Spina precesijas operatori

Apskatīsim matricas formu operatoriem, kas realizē Larmora precesiju. Var pierādīt [26], ja patvaļīgam operatoram $\hat{\alpha}$ izpildās $\hat{\alpha}^2 = \hat{I}$, tad ir spēkā vienādība

$$e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\alpha}} = \cos\frac{\phi}{2}\hat{I} - \sin\frac{\phi}{2}\hat{\alpha}. \quad (2.12)$$

Visām trim Pauli matricām izpildās (2.12), tātad ar šo formulu var iegūt *rotācijas operatorus* (ϕ ir rotācijas leņķis gar konkrēto asi)–

$$R_x(\phi) \equiv e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_x} = \cos\frac{\phi}{2}\hat{I} - \sin\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & -i\sin\frac{\phi}{2} \\ -i\sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_y(\phi) \equiv e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_y} = \cos\frac{\phi}{2}\hat{I} - \sin\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2} & -\sin\frac{\phi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2} & \cos\frac{\phi}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_z(\phi) \equiv e^{-i\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z} = \cos\frac{\phi}{2}\hat{I} - \sin\frac{\phi}{2}\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

Rotācijai gar patvaļīgu asi:

$$R_n(\phi) \equiv e^{-i\frac{\phi}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})} = \cos\frac{\phi}{2}\hat{I} - \sin\frac{\phi}{2}(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})$$

2.5. Kubits

Kvantu daļiņu matemātiskās īpatnības izmanto nozarē, ko sauc par kvantu skaitļošanu. Klasiskās skaitļošanas informācijas viena vienība ir bits, kura vērtība ir vai nu 1 vai 0. Savukārt kvantu skaitļošanas informācijas vienība ir divu līmeņu kvantu sistēma, kuru sauc par **kubitu** [27]. Arī kubitam var būt divi stāvokļi – vai nu $|1\rangle$ vai $|0\rangle$, taču atšķirība no klasiskā bita ir tāda, ka kubits arī var būt lineāra kombinācija no šiem stāvokļiem:

$$\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle.$$

Šai nozarei svarīgas ir tikai kubita matemātiskās īpašības, jo tiek meklēti algoritmi, kas ar kubitiem veic aprēķinus efektīvāk, nekā klasiskie algoritmi. Kādai fizikālai sistēmai atbilst kubits un vai to vispār var realizēt, ir atstāts fiziķiem. Ja kubits ir fotons [28], tad stāvoklis $|1\rangle$ nozīmētu polarizāciju horizontālā virzienā, stāvoklis $|0\rangle$ – polarizāciju vertikālā virzienā. Kā kubitu var izmantot arī jau apskatīto kvantu sistēmu ar pusveselu spinu – gan elektrona [29], gan atoma kodola spinu [30]. Tad attiecīgi $|1\rangle$ nozīmētu spinu uz augšu, bet $|0\rangle$ spinu uz leju.

3. nodaļa

Vairāku daļiņu sistēmas

Līdz šim tika apskatīta viena kubita „uzvedība“, taču interesantais sākas tad, ja ir vairāk par vienu kvantu sistēmu. Intuitīvi šķiet, ka neko jaunu uzzināt nevar – ja zinām visu par sistēmas atsevišķajām daļām, zinām visu, ko var paveikt ar sistēmu kopumā. Kas ir taisnība klasiskās fizikas mērogos. Uz kvantu mehāniku šis princips neattiecas.

Šajā nodaļā īsi apskatīsim divu daļiņu telpu, ar to saistītās dīvainības, kā arī rīku, ar kuru aprakstīt daļiņu sistēmu, par kuru mums nav pilnas informācijas – *blīvuma matricu*. Konspekts balstīts uz [17].

3.1. Divas nesaistītas sistēmas

Sāksim ar diviem kubitiem, taču nesauksim vienu kvantu sistēmu par A un otru par B , bet gan turpmākos eksperimentus uzticēsim Alisei un Bobam, kas ir bieži izmantoti varoņi zinātnieku domu eksperimentos.

3.1.1. Tenzoriālais reizinājums

Alisei ir savs kubīts un Bobam ir savs kubīts. Abi kubiti ir pilnīgi viens no otra izolēti un savā starpā nesaistīti (viņi abi, protams, telpas virzienus saprot vienādi). Alise kā īpaši sagatavo savu kubitu un apraksta ar stāvokļa vektoru

$$|A\rangle = \alpha_1 |\uparrow\rangle + \alpha_2 |\downarrow\rangle.$$

To pašu izdara arī Bobs ar savu kubitu (tikai kādā citā stāvoklī)–

$$|B\rangle = \beta_1 |\uparrow\rangle + \beta_2 |\downarrow\rangle.$$

Šobrīd katram kubitam atbilst sava lineārā telpa. Var definēt tādu operāciju, kas abus stāvokļa vektorus ieliek vienā telpā [17, lpp. 71].

Ja divu lineāro telpu **A** un **B** bāzes vektori ir $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_n\rangle\}$ un $\{|b_1\rangle, |b_2\rangle, \dots, |b_m\rangle\}$, tad par šo divu telpu **tenzoriālo reizinājumu** $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ sauc tādu $n \cdot m$ -dimensionālu lineāro telpu, kuras bāzes vektori ir formā $|a\rangle \otimes |b\rangle$.

Bieži vien tenzoriālā reizinājuma zīmi neraksta, tā vietā lietojot pārskatāmākus apzīmējumus, piemēram, $|a\rangle \otimes |b\rangle = |a\rangle|b\rangle = |ab\rangle$.

Tenzoriālais reizinājums apmierina šādas īpašības [17, lpp. 73]:

1. Ja $c \in \mathbb{C}$, tad

$$(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (c|b\rangle); \quad (3.1)$$

2. $(|a_i\rangle + |a_j\rangle) \otimes |b\rangle = |a_i\rangle \otimes |b\rangle + |a_j\rangle \otimes |b\rangle$;

3. $|a\rangle \otimes (|b_i\rangle + |b_j\rangle) = |a\rangle \otimes |b_i\rangle + |a\rangle \otimes |b_j\rangle$.

Tātad Alises un Boba kubitu telpām var piekārtot jaunu telpu, kurā stāvokļa vektors, kurš aprakstīs abu kubitu stāvokli, ir formā:

$$|A\rangle \otimes |B\rangle = (\alpha_1|\uparrow\rangle + \alpha_2|\downarrow\rangle) \otimes (\beta_1|\uparrow\rangle + \beta_2|\downarrow\rangle) \quad (3.2)$$

$$|AB\rangle = \alpha_1\beta_1|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha_1\beta_2|\uparrow\downarrow\rangle + \alpha_2\beta_1|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_2\beta_2|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (3.3)$$

Šī ir vienota matemātiska struktūra diviem pilnīgi nesaistītiem objektiem. Jāatceras, ka šajā stāvokļa vektorā pirmais pēc kārtas ir Alises kubits, otrais – Boba kubits (piemēram, $|\uparrow\downarrow\rangle$ nozīmētu Alises kubitu stāvoklī $|\uparrow\rangle$, kamēr Boba kubits ir stāvoklī $|\downarrow\rangle$). Alise var arī šajā telpā iedarboties uz savu kubitu ar kādu operatoru un iegūt tādus rezultātus, it kā Boba kubits nemaz neeksistētu. Protams, gan Alises, gan Boba kubitu amplitūdām izpildās normēšanas nosacījums ($\alpha_1\alpha_1^* + \alpha_2\alpha_2^* = 1$ un $\beta_1\beta_1^* + \beta_2\beta_2^* = 1$). Var parādīt, ka ar to pietiek, lai (3.3) vienmēr būtu normēts.

3.1.2. Matricu reprezentācija

Uzkonstruēsim matricas formā operatorus, ar kādiem varam iedarboties uz (3.3). Konstruēsim tādas matricas, lai izpildās

$$(\hat{X} \otimes \hat{Y})(|A\rangle \otimes |B\rangle) = \hat{X}|A\rangle \otimes \hat{Y}|B\rangle$$

jeb, lai Alise tiešām varētu operēt ar savu kubitu, nedomājot par to, vai Bobs ar savu kubitu vispār eksistē. Viens veids, kā iegūt matricas ar šādu īpašību – analogiski vienas sistēmas gadījumam. Vispārīgā gadījumā matricas elementus aprēķina kā

$$\hat{X} \otimes \hat{Y} \doteq \begin{pmatrix} \langle \uparrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\uparrow \rangle \\ \langle \uparrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\downarrow \rangle & \langle \uparrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\uparrow \rangle \\ \langle \downarrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\uparrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\uparrow \rangle \\ \langle \downarrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\uparrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \uparrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\downarrow \rangle & \langle \downarrow\downarrow | \hat{X}\hat{Y} | \downarrow\uparrow \rangle \end{pmatrix}$$

Identisks veids, kā iegūt šādas matricas ir ar *Kronekera reizinājumu* [17, lpp. 74]. Ja ir divas matricas

$$\hat{X} \doteq \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \hat{Y} \doteq \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

tad Kronekera reizinājums divu 2×2 matricu gadījumā ir šāds:

$$\hat{X} \otimes \hat{Y} \doteq \begin{pmatrix} x_{11}\hat{Y} & x_{12}\hat{Y} \\ x_{21}\hat{Y} & x_{22}\hat{Y} \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} x_{11}y_{11} & x_{11}y_{12} & x_{12}y_{11} & x_{12}y_{12} \\ x_{11}y_{21} & x_{11}y_{22} & x_{12}y_{21} & x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} & x_{21}y_{12} & x_{22}y_{11} & x_{22}y_{12} \\ x_{21}y_{21} & x_{21}y_{22} & x_{22}y_{21} & x_{22}y_{22} \end{pmatrix}.$$

Ja ir dotas divas matricas

$$|A\rangle \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, |B\rangle \doteq \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

tad Kronekera reizinājums divu 2×1 matricu gadījumā ir šāds:

$$|A\rangle \otimes |B\rangle \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1|B\rangle \\ \alpha_2|B\rangle \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 \\ \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_2 \end{pmatrix}.$$

3.2. Sapītie stāvokļi

Jaunievietajā lineārajā telpā ir krietni vairāk struktūras nekā tikai vieta Alises un Boba diviem absolūti nesaistītiem stāvokļiem. Gan šajā telpā, gan fizikālajā realitātē ir iespējams realizēt tādus stāvokļus, kurus nevar sadalīt tenzoriālajā reizinājumā.

Viens no piemēriem stāvokļiem, ko nevar sadalīt tenzoriālajā reizinājumā ir *singleta stāvoklis*:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (3.4)$$

Ar ko šādi stāvokļi ir īpaši? (3.4) satur pilnu informāciju par sistēmas stāvokli – neko vairāk par to nav iespējams uzzināt. Par katru atsevišķo daļiņu nav nekādas informācijas. Ir vēl trīs stāvokļi ar šādu īpašību un tos sauc par *tripleta stāvokļiem*:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle); \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle); \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Singleta un tripleta stāvokļus īpaši atšķir, jo singletam kopējais leņķiskais moments ir 0, taču tripletiem ir 1 (\hbar vienībās). Labu aprakstu par to, kā to aprēķina, var atrast [18, lpp. 149]. Stāvokļus (3.5) un (3.4) sauc arī par **Bela stāvokļiem**. Šie 4 stāvokļi veido ortonormētu bāzi divu daļiņu Hilbera telpā.

Ir iespējams uzkonstruēt tād mērījumu, kurš atšķir, kurā no Bela stāvokļiem ir sapītas daļiņas. Šādu mērījumu sauc par **Bela mērījumu** [31], [32].

3.3. Blīvuma matricas

Kāda ir starpība starp kubitu ar noteiktu stāvokļa vektoru $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle$ (*tīrais stāvoklis*) un kubitu, kuram zinām tikai to, ka ar varbūtību 0.5 tas atradīsies stāvoklī $|\uparrow\rangle$ un ar varbūtību 0.5 stāvoklī $|\downarrow\rangle$ (*sajauktais stāvoklis*)? Pagriežot vienu kubitu par $\theta = 90^\circ$ uz Bloha sfēras, iegūsim stāvokli $|\downarrow\rangle$, taču pagriežot otru kubitu, iegūsim stāvokli ar varbūtību 0.5 būt $|\uparrow\rangle$ un varbūtību 0.5 būt $|\downarrow\rangle$. Respektīvi, par pirmo kubitu mēs zinām absolūti visu (tā orientāciju telpā) - tāpat tas ir aprakstāms ar viļņa funkciju, bet par otro absolūti neko - tāpat šādam vienam kubitam viļņa funkciju uzrakstīt nevarēsim.

Šo situāciju var atrisināt, ieviešot citu sistēmas stāvokļa aprakstu, kas ir ekvivalents līdz šim ieviestajam - *blīvuma matricas*.

3.3.1. Definīcija

Blīvuma operatoru definē sekojoši:

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (3.6)$$

p_i ir varbūtība atrast sistēmu stāvoklī $|\psi_i\rangle$. **Blīvuma matricas** elementus definē ar vienādojumu

$$\rho_{mn} = \langle \alpha_m | \rho | \alpha_n \rangle,$$

kur $|\alpha_i\rangle$ veido ortonormētu bāzi. Blīvuma matricām izpildās sekojošas īpašības:

1. pēda ir vienāda ar 1;
2. tās ir Hermita saistītas, respektīvi, $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$;
3. operatora īpašvērtības ir nenegatīvas.

Tīri un sajaukti stāvokļi

Par **tīru stāvokli** (angliski – *pure state*) sauc tādu stāvokli, kuram $\text{Tr } \hat{\rho}^2 = 1$. Jo tos vienmēr varēs uzrakstīt formā $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Par **sajauktu stāvokli** (angliski – *mixed state*) sauc tādu stāvokli, kuram $0 < \text{Tr } \hat{\rho}^2 < 1$.

Vidējā vērtība

Vidējo vērtību operatoram \hat{A} , stāvoklī, kas aprakstāms ar blīvuma matricu ρ var aprēķināt

$$\langle\hat{A}\rangle = \text{Tr } \hat{\rho}\hat{A}. \quad (3.7)$$

3.3.2. Blīvuma matricas elementu interpretācija

Ja mēs gribētu patvaļīgam kvantu stāvoklim $|\Psi\rangle = \alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle$ aprēķināt varbūtību atrasties stāvoklī $|\uparrow\rangle$, ir jāaprēķina vidējā vērtība projekcijas operatoram $\hat{P}_{\uparrow} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$:

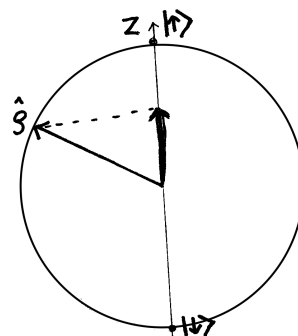
$$\langle\hat{P}_{\uparrow}\rangle = \left[\alpha_{\uparrow}\langle\uparrow| + \alpha_{\downarrow}\langle\downarrow| \right] |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \left[\alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle \right] = \alpha_{\uparrow}\alpha_{\uparrow}^*.$$

Izmantojot (3.7), varam aprēķināt vidējo vērtību ne tikai stāvoklim, bet arī patvaļīgai blīvuma matricai:

$$\langle\hat{P}_{\uparrow}\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_{\uparrow}) = \text{Tr} \left(\begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & \rho_{\uparrow\downarrow} \\ \rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \rho_{\uparrow\uparrow}.$$

No tā var secināt, ka varbūtību iegūt kādu no stāvokļiem mērījuma rezultātā dod diagonālie elementi.

Nediagonālie elementi raksturo stāvokļa *koherenci*. Nekad nevar nodrošināt perfektus eksperimentālos apstākļus, tāpēc apkārtnes ietekmē stāvoklis var zaudēt savu koherenci, blīvuma matricai kļūstot diagonālai kādā bāzē, [33]. Attēlā 3.1. ir attēlots dekoherences process viena spina sistēmas gadījumā. Ja pirms dekoherences procesa spina vidējā vērtība gar kādu asi bija 1 (esam sagatavojuši spinu kādā konkrētā virzienā), tad pēc šī procesa vidējā vērtība ir kļuvusi mazāka (pazaudējām informāciju par spina stāvokli).



3.1. att. Viena spina sistēmas dekoherence gar z asi.

3.3.3. Sajauktie stāvokļi uz Bloha sfēras

Var pierādīt [17, lpp. 105], ka jebkuru blīvuma matricu var uzrakstīt formā

$$\rho = \frac{I + \frac{1}{2}\vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2},$$

kur \vec{r} ir *Bloha vektors* Bloha sfērā ar garumu $\|\vec{r}\| \geq 1$.

$$\text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}\left(\frac{I + 2\vec{r} \cdot \vec{\sigma} + (\vec{r} \cdot \vec{\sigma})^2}{4}\right) = \text{Tr}\left(\frac{I\vec{r}}{4}\right) = \frac{1 + |\vec{r}|^2}{4}$$

Tīrajiem stāvokļiem Bloha vektora garums ir 1. Sajauktie stāvokļi savukārt atrodas Bloha sfēras iekšienē. Par **maksimāli sajauktu stāvokli** sauc tādu stāvokli, kura Bloha vektora garums ir vienāds ar 0, respektīvi Bloha sfērā tas ir ir punkts centrā.

3.3.4. Blīvuma operatora evolūcija laikā

Ja sistēma sākotnēji atradās stāvoklī $|\psi_i\rangle$ ar varbūtību p_i (aprakstāma ar blīvuma operatoru $\hat{\rho}(0)$) un sistēmas izmaiņu apraksta unitārs operators \hat{U} , tad pēc izmaiņas sistēma atradīsies stāvoklī $\hat{U}|\psi_i\rangle$ ar varbūtību p_i . Šāda stāvokļa operatoru apraksta vienādojums [17, lpp. 99]:

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i \hat{U}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{U}^\dagger = \hat{U}\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger.$$

3.3.5. Reducētais blīvuma operators

Tā kā ar blīvuma operatoru ir iespējams aprakstīt ne tikai vienu daļiņu, bet arī vairāku daļiņu sistēmu, tad būtu ļoti noderīgi atrast veidu, kā aprakstīt daļu no sistēmas, zinot visas sistēmas blīvuma operatoru. To panāk ar *reducēto blīvuma operatoru*.

Ja mums ir divas fizikālas sistēmas α un β , kas aprakstītas ar vienotu blīvuma operatoru $\hat{\rho}_{\alpha\beta}$, tad **reducēto blīvuma operatoru**, kas aprakstītu pilnībā tikai sistēmu α definē sekojoši:

$$\hat{\rho}_\alpha \equiv \text{Tr}_\beta(\hat{\rho}_{\alpha\beta}),$$

kur Tr_β ir **daļēja pēda**. To definē sekojoši:

$$\text{Tr}_\beta(|\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \otimes |\beta_1\rangle\langle\beta_2|) \equiv |\alpha_1\rangle\langle\alpha_2| \text{Tr}(|\beta_1\rangle\langle\beta_2|),$$

kur $|\alpha_1\rangle$ un $\langle\alpha_2|$ ir jebkuri divi stāvokļa vektori α stāvokļu vektoru telpā, bet $|\beta_1\rangle$ un $\langle\beta_2|$ ir jebkuri divi stāvokļa vektori β stāvokļu vektoru telpā.

Tas, ka $\hat{\rho}_\alpha$ ir pilns sistēmas α apraksts, nav triviāls apgalvojums, bet turpmāko nodaļu sapratnei tas arī nav tik būtiski. Izcilu skaidrojumu var atrast [17, lpp. 105].

4. nodaļa

Hilberta telpa diagrammu reprezentācijā

Vissvarīgākais ieguvums, apskatot kvantu mehāniku no kategoriju teorijas puses, ir laba sapratne par to, kā formālismu aprakstīt maksimāli vienkāršoti – kā teoriju, kas sastāv tikai no objektiem, ko sauc par *procesiem*, un to, kā šie procesi ir savā starpā saistīti. Kategoriju teorijas abstraktās dabas dēļ procesam patiesībā var atbilst absolūti jebkas, kas ienāk prātā, taču kvantu mehānikas kontekstā ar procesiem saprot *operatorus* un *vektorus*.

Vispirms apskatīsim, kā Hilberta telpa tiek izteikta diagrammu valodā. Šajā nodaļā apskatītās diagrammas saucim par **lineārajām diagrammām**. Tiks parādīts pirmais netriviālais diagrammu ieguvums, t.s. **duālisms** – kā divi matemātiski šķietami ļoti atšķirīgi objekti (kam fizikāli ir zināmas līdzības) var dot vienādu skaitlisku rezultātu. Šajā nodaļā apskatīsim vienas daļiņas sistēmas un vairāku daļiņu sistēmas duālismu, kā arī vektora un operatora duālismu.

Diagrammas tiek lasītas no apakšas uz augšu, nevis kā ierasts lasīt Diraka formālismu – labās uz kreiso. Kā arī diagrammās ar lasīšanas virzienu saprot daļiņas evolūciju laikā – apakšā ir daļiņa sākuma momentā, virzienā uz augšu pierakstīti notikumi ar to laikā, augšā – notikums ar daļiņu beigu momentā. Šajā sadaļā aprakstāmā Hilberta telpa atbilst no apkārtējās vides izolētām daļiņām ar pusveselu spinu, jeb kubiti, ar kuriem varam veikt unitāras operācijas vai mērījumus.

4.1. Vienas daļiņas sistēma

Vienas daļiņas gadījumā nekas jauns netiks pielikts klāt, tikai iepazīsimies ar jauniem apzīmējumiem vecajam Diraka formālismam.

4.1.1. Bra-Ket vektori un skalārais reizinājums

Stāvokļa vektorus jeb **ket-vektorus** $|\Psi\rangle$ diagrammu valodā apzīmē ar:



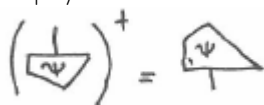
To var saprast kā procesu ar nevienu ievadu un vienu izvadu – *stāvoklis* jeb sagatavošanas procedūra, kurā kubits tiek inicializēts kādā noteiktā tīrā stāvoklī.

Kompleksos skaitļus apzīmē ar ($\lambda \in \mathbb{C}$):



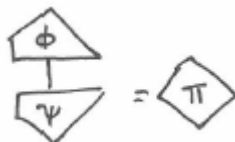
Tas ir process bez ievadiem un izvadiem. Amplitūdas, no kurām konstruē gala iznākumu (varbūtību).

Bra-vektors $\langle\Psi|$ jeb ket-vektora $|\Psi\rangle$ Ermita saistītais vektors ir formā:



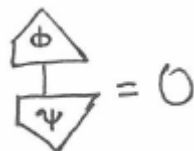
Diagrammās tas ir process ar vienu ievadu un nevienu izvadu. Par to var domāt kā par *efektu* - pēc tam, kad tas ir noticis, mēs sistēmu iznīcinām.

Diagrammās **skalārais reizinājums** $\langle\Phi|\Psi\rangle = \Pi$ tiek realizēts, savienojot keta izvadu ar bra ievadu:



kur $\pi \in \mathbb{C}$. Bra-vektora pielikšanu ket-vektoram (skalāro reizinājumu) no diagrammām *varētu saprast kā testu* tam, vai esam ieguvuši attiecīgo stāvokli (Vai vektorā $|\Psi\rangle$ ir kāda komponente, kas ir kolineāra ar vektoru $|\Phi\rangle$?). Ar šādu skalāro reizinājumu vien nepietiek, lai aprēķinātu varbūtību $|\Psi\rangle$ stāvoklim kļūt vienādam ar $|\Phi\rangle$ pēc kāda mērījuma, kur $|\Phi\rangle$ ir viens no mērījuma virziena bāzes vektoriem, jo varbūtība ir $|\Pi|^2$. Tas tiks atrisināts nākamajā nodaļā, ieviešot papildus struktūru diagrammās.

Diagrammās stāvokļa vektori $|\Phi\rangle$ un $|\Psi\rangle$ ir **ortogonāli**, ja



Vektors $|\Psi\rangle$ ir **normēts**, ja

Varētu arī rakstīt, ka $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$, taču skaitlis 1 sareizināts ar citiem skaitļiem neietekmē rezultātu, tāpēc tas diagrammās ir kā „tukšums“.

Ja vektoru kopa **B** –

$$B = \{ |1\rangle, \dots, |n\rangle \}$$

veido ortonormētu bāzi, tad jebkuru ket-vektoru var izteikt bāzes vektoru lineāro kombināciju:

Analoģiski izsaka bra-vektorus.

Vektoru kompleksā saistīšana

Ievēro, ka Bloha sfēras vektoru pieraksts ir atkarīgs no tā, kādā virzienā ir izvēlēts pieraksts

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; |\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

2.3. nodaļā aprakstītajai Bloha sfērai šo divu vektoru izvēlētais virziens ir gar z asi. Tas tikpat labi varētu būt jebkurš cits virziens telpā.

Par **skaitļošanas bāzi** sauc tādu ortonormētu bāzi, kura ir gar šo telpā izvēlēto virzienu (izvēlēts sekojošs pieraksts – katram skaitļošanas bāzes vektoram ir viens matricas elements vienāds ar 1 un pārējie elementi vienādi ar 0).

Darba mērķa dēļ īpaši izcelsim Hilberta telpas apakštelpu, kuras vektori, pierakstīti ar skaitļošanas bāzi, ir tikai ar reālām amplitūdām. Vektori ar šādu īpašību Bloha sfērā atrodas zx plaknē. Kā līdz šim, tā arī turpmāk izvēlētais virziens skaitļošanas bāzei būs z ass.

Par **ket-vektora kompleksu saistīšanu** sauksim tādu operāciju, kas kompleksi saistīs šī vektora komponentes, uzrakstītas ar skaitļošanas bāzi. Piemēram, ja ir dots vektors

$$|\Psi\rangle = \alpha_{\uparrow}|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}|\downarrow\rangle,$$

tad tā kompleksi saistītais vektors ir formā

$$|\Psi\rangle^* = \alpha_{\uparrow}^*|\uparrow\rangle + \alpha_{\downarrow}^*|\downarrow\rangle.$$

Diagrammās šī operācija tiek īpaši ilustrēta:

$$\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \downarrow \\ \psi \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} \psi \\ \uparrow \end{array} \right)^* = \begin{array}{c} \psi \\ \uparrow \end{array}$$

Ketus (stāvokļus) un bra (efektus) zīmē ar „stūri“, lai varētu izsekot tam, kā dažādas darbības mainīs vektora amplitūdas. Jāievēro, ka kompleksā saistīšana atšķiras no Hermita saistīšanas.

Par **pašsaistīts vektoru** sauc tādu vektoru, kura amplitūdas ir reālas, t.i. –

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \pi \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow \\ \pi \end{array}$$

tā kā izmantojot šādus vektorus kompleksās saistīšanas darbība zaudē jēgu, jebkuru pašsaistītu $|\Pi\rangle$ apzīmē ar

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \pi \end{array}$$

Analogi apzīmē arī pašsaistītus bra-vektorus.

Skalārā reizinājuma (testa) veikšanas piemērs

Tika minēts, ka diagrammās kets ir stāvoklis, bet bra – efekts, bet to skalārais reizinājums – tests. Apskatīsim, kā šobrīd ideja par testu darbojas. Dots:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle; \tag{4.2}$$

$$\langle\Phi| = \langle\uparrow|.$$

Veiksim *testu* - kāda ir varbūtība, mērot $|\Psi\rangle$ z bāzē, iegūt $|\Phi\rangle$?

$$\begin{array}{c} \phi \\ \downarrow \\ \psi \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \phi \\ \downarrow \\ \tau_i \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ i \end{array} = \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} + \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array}$$

Filosofija par skalāro reizinājumu kā testu nestrādā „pareizi“ – rezultāts ir amplitūda, nevis varbūtība, tātad diagrammām šobrīd trūkst struktūras (kas ir Diraka formālisma „vaina“).

No piemēra var mācīties diagrammu reprezentācijas īpatnības, kas, iespējams, šobrīd šķiet pašsaprotamas, taču par to nedrīkst aizmirst, jo ir pats pamats kvantu procesu saprašanai diagrammu valodā –

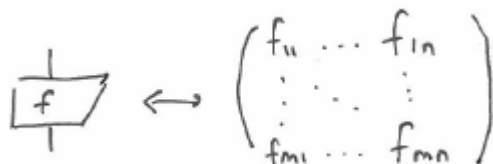
- Summas zīme diagrammā nozīmē superpozīciju starp iespējamajiem notikumiem. Kamēr diagrammā neparādās summas zīme, diagramma attēlo procesu kopumā (piemēram, viena

kubita stāvokļa vektora pārrakstīšana kādā bāzē ir sadalīšana divos iespējamajos notikumos).

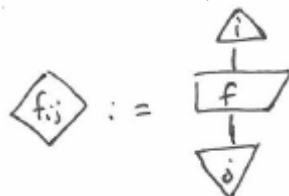
- Pirms summēšanas uzsākšanas visi skaitļi, kas izveidojas diagrammā, tiks sareizināti. Var secināt, ka pirms summēšanas uzsākšanas :
 - skaitļa atrašanās vietai diagrammā nav nozīmes;
 - summas simbola atrašanās vietai diagrammā nav nozīmes.

4.1.2. Lineārie operatori

Lineārs operators ir kāds process ar vienu ievadu un vienu izvadu (ja tas ir operators, kas iedarbojas uz vienu kubitu) un ir ekvivalents $n \times m$ matricai –

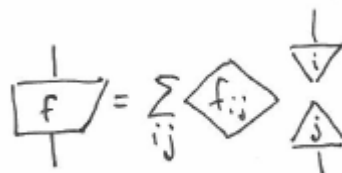


Operatoram ieejā var pielikt kādu procesu, aprakstāmu ar n -dimensionālas ortonormētas bāzes ievadu, kā arī izejā kādu procesu, aprakstāmu ar m -dimensionālu ortonormētu bāzi. Katrs matricas elements nosaka, kā jāmainās bāzes vektoram, t.i.



Mēs apskatīsim tikai kvadrātveida matricas, taču diagrammās ir vieta arī plašākai struktūrai.

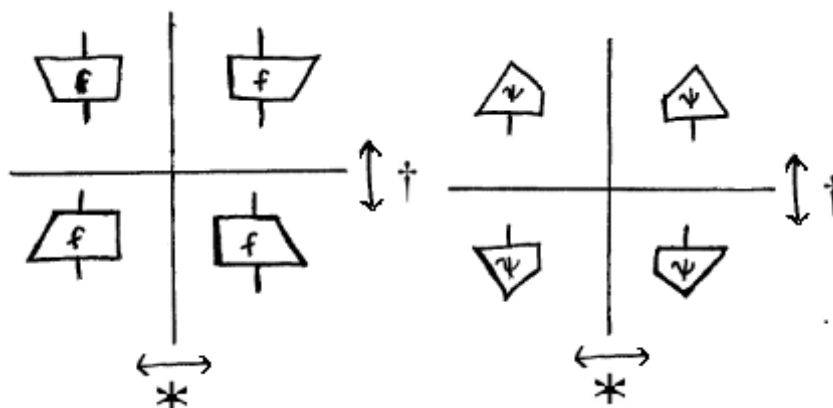
Izmantojot abstrakta operatora \hat{f} matricas reprezentāciju skaitļošanas bāzē $\hat{f} = \sum_{ij} f_{ij} |i\rangle\langle j|$ varam pierakstīt atbilstošu diagrammu izteiksmi:



Atceroties to, ka summas zīme diagrammā nozīmē superpozīciju starp iespējamajiem notikumiem, šāda reprezentācija kļūst skaidra – f_{ij} ir amplitūda bāzes vektoram $|j\rangle$ kļūt par $|i\rangle$.

Procesus, analogi bra-ket vektoriem, arī zīmē ar „nošķeltu galu“, lai varētu atšķirt divas operācijas – Ermita saistīšanu (matricu transponē un tās elementus kompleksi saista) un Kom-

plekso saistīšanu (matricas elementus kompleksi saista). To var ļoti uzskatāmi parādīt ar šādu shēmu -



Pagriezt procesu spoguļattēlā uz augšu vai uz leju nozīmē veikt Ermita saistīšanu, bet pagriezt spoguļattēlā pa labi vai pa kreisi - veikt komplekso saistīšanu.

Vienības operators

Diagrammās procesu, kas stāvokli neizmaina, apzīmē ar taisnu vadu. Tradicionālajos formāļismos šo procesu sauca par vienības operatoru. Diraka formāļismā $\sum_i |i\rangle\langle i|$ un matricu reprezentācijā tā ir matrica, kuras diagonālie elementi ir vienādi ar 1, bet nediagonālie ar 0. Tā kā $f_{ij} = \delta_{ij}$, diagrammās vienības operators ir formā:

$$I = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ |i\rangle \\ \uparrow \\ \langle i| \end{array}$$

„Vada pārraušanas“ operācija ir no bāzes izvēles neatkarīgs process, t.i. rezultāts nemainās atkarībā no bāzes izvēles (tāpat kā vienības operatoram).

Unitāri operatori

Unitārs operators ir tāds operators, kam izpildās

$$\begin{array}{c} \text{U} \\ \downarrow \\ \text{U} \end{array} = I \quad \text{un} \quad \begin{array}{c} \text{U} \\ \downarrow \\ \text{U} \end{array} = I$$

Unitāras operācijas veikšana viena kubita gadījumā ir kubita rotācija pa Bloha sfēru, kuras rezultātā kubita amplitūdas fiksētā bāzē izmainās. Taču uz to var ekvivalenti raudzīties arī kā uz koordinātu sistēmas rotāciju.

Diagrammās var uzsvērt tieši bāzes mainīšanās aspektu. Jebkuru unitāru matricu var pārrakstīt formā

$$\sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array}$$

ja

$$\{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \}_i \text{ un } \{ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \end{array} \}_i$$

ir ortonormētas bāzes ar vienādu skaitu elementu. Var viegli pārlicināties, ka operatori šādā formā ir unitāri.

Apskatīsim piemēru. Ir dots patvaļīgs kubits z bāzē $|\Psi\rangle = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle$. Uz šo kubitu kādu brīdi iedarbosimies ar magnētisko lauku vērstu y ass virzienā tā, lai rezultējošais precesijas leņķis būtu γ . Šādu pagriezienu realizē matrica (kā apskatīts nodaļā 2.4.2.):

$$\hat{n}_y = \begin{pmatrix} \cos \gamma/2 & -\sin \gamma/2 \\ \sin \gamma/2 & \cos \gamma/2 \end{pmatrix}$$

Pēc operācijas veikšanas kubitu var pārrakstīt formā:

$$\hat{n}_y(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) = \alpha(\cos \gamma/2|\uparrow\rangle + \sin \gamma/2|\downarrow\rangle) + \beta(-\sin \gamma/2|\uparrow\rangle + \cos \gamma/2|\downarrow\rangle)$$

Ievēro, ka vektori $\cos \gamma/2|\uparrow\rangle + \sin \gamma/2|\downarrow\rangle$ un $-\sin \gamma/2|\uparrow\rangle + \cos \gamma/2|\downarrow\rangle$ ir ortogonāli. Rotācijas operāciju var saprast ne tikai kā koeficientu maiņu z bāzē (vai tajā bāzē, kurā sākotnēji kubits tika pierakstīts), bet arī kā bāzes maiņu nemainīgām amplitūdām α un β .

Diagrammās piemērs ir eleganti atrisināms. Ja B_z ir bāzes vektoru kopa pirms rotācijas veikšanas un B_γ ir bāzes vektoru kopa pēc rotācijas veikšanas

$$B_\gamma = \{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \}$$

$$B_z = \{ \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array}, \dots, \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \}$$

tad operatoru \hat{n}_γ var izteikt formā

$$\hat{n}_\gamma = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array}$$

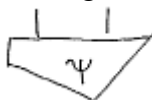
Bāzes maiņa diagrammās tiek izteikta sekojoši:

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \sum_k \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \downarrow \end{array}$$

4.2. Divu daļiņu sistēmas

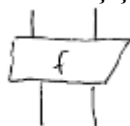
Pirmā būtiskā atšķirība diagrammās no līdz šim lietotajiem formālismiem parādās tieši vairāku daļiņu aprakstā - tās daudz uzskatāmāk parāda tenzoriālā reizinājuma būtību.

Ieviesīsim divus abstraktus apzīmējumus, kas turpmāk tiks izmantoti divu daļiņu kontekstā. Pirmais ir divu daļiņu stāvokļa vektors. Diagrammās tas ir formā:



Divas daļiņas – process ar nevienu ievadu un diviem izvadiem. Tas varētu būt jebkāds stāvokļa vektors, gan sapīts, gan nesapīts. Bra-vektoru apzīmē analogiski – Ermita saistot šo diagrammu.

Otrs – lineārs operators, kas darbojas uz divām daļiņām:



Tas ir process ar diviem ievadiem un diviem izvadiem. Arī šādiem procesiem (kā arī procesiem, kas izmanto n ievadus un m izvadus ($n, m \in \mathbb{N}_0$)) var smalki aprakstīt veicamās darbības, kas ir izdarīts [16], taču tās ir ļoti līdzīgas darbībām ar vienas daļiņas procesiem un šī darba mērķiem nav nepieciešamas.

4.2.1. Divas nesaistītas sistēmas

Lineārajās diagrammās divu ketu tenzoriālo reizinājumu $|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle$ attēlo kā



Vienkārši viens kets tiek piezīmēts blakus otram.

Sekojoš stingrai tenzoriālā reizinājuma definīcijai – ja mums ir divas Hilberta telpas \mathbf{H} un \mathbf{K} , kuru bāzes ir attiecīgi

$$\{ |i\rangle \}_i \quad \text{un} \quad \{ |\alpha\rangle \}_\alpha$$

tad visi stāvokļi $\Phi \in (\mathbf{H} \otimes \mathbf{K})$ ir uzrakstāmi formā

$$|\Phi\rangle = \sum_{i,\alpha} c_{i,\alpha} |i\rangle |\alpha\rangle$$

un šo telpu tenzoriālā reizinājuma jaunā bāze ir formā:

$$\{ |i\rangle |\alpha\rangle \}_{i,\alpha}$$

Diagrammu reprezentācijā tenzoriālajam reizinājumam izpildās tās pašas aksiomas, kuras Hilberta telpā. Diagrammās uzskatāmi izpildās (3.1) – skaitļu atrašanās vietai nav nozīmes:

$$c(|a\rangle \otimes |b\rangle) = (c|a\rangle) \otimes |b\rangle = |a\rangle \otimes (c|b\rangle)$$

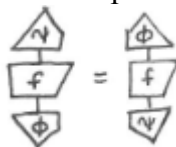
$$c \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \\ \downarrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \end{array}$$

4.2.2. Vienas daļiņas - divu daļiņu duālisms

Diraka formālismā vienu un to pašu var uzrakstīt dažādi:

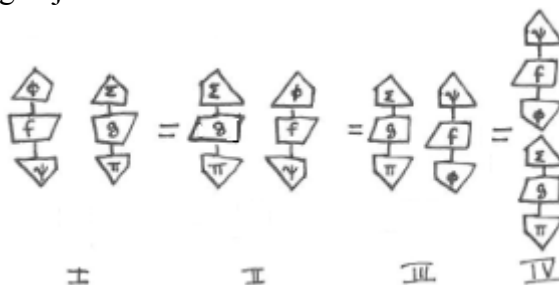
$$\langle \Psi | f | \Phi \rangle = (\langle \Phi | f^\dagger | \Psi \rangle)^* = \langle \Phi |^* f^T | \Psi \rangle^*$$

Rezultāts ir skaitlis. Atceroties diagrammu īpašību, ka skaitli diagrammā var grozīt kā grib, tas nemainīsies, tad šādi Diraka formālisma dažādie pieraksti ir tautoloģija –



Diagrammu pieraksts ļauj ļoti viegli izsekot Ermita un kompleksajai saistīšanai.

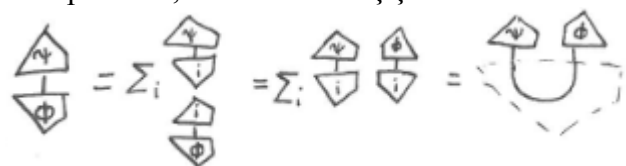
Kā ir divu sistēmu gadījumā?



Visi četri pieraksta veidi dos vienu un to pašu rezultātu. Ievēro IV pierakstu - tā varētu būt arī tikai vienas daļiņas sistēma, uz kuru kādā brīdī papildus iedarbojas ar kaut kādu operatoru formā $|\Sigma\rangle\langle\Phi|$. Ierastais Diraka formālisma vienas rindiņas pieraksts neļauj saskatīt tik viegli šādas sakarības.

Krūzītes un cepurītes operācijas

Apskatīsim vēl vienu piemēru, vienas-divu daļiņu sistēmu duālismam:



Kā izrādās, varam divējādi interpretēt vienu un to pašu. No vienas puses, esam aprēķinājuši skalaro reizinājumu stāvokļiem $|\Psi\rangle$ un $|\Phi\rangle$ – notikumi ar vienu daļiņu, bet, no otras puses tās ir divas

sapītas daļiņas. Iztrūkst tikai nomēšanas koeficients, ja tas būtu, tad no otras puses diagramma nozīmētu procesu ar vienu no Bela stāvokļiem –

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$$

Šāda darbība – pāreja no vienas daļiņas sistēmas uz divu ar vienības operatora palīdzību turpmāk diagrammās būs viena no svarīgākajām operācijām, kas atsegs vairākas saprotamas, taču matemātiski grūti pamanāmas sakarības, tāpēc ieviesīsim tai speciālu apzīmējumu kā saliektu vienības operatoru – **krūzīti** (angliski - *cup*):

$$\cup = \left(\sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right) = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}$$

Tā kā vienības operators ir no bāzes neatkarīgs, ir vairāki varianti, kā „atplēst“ vadu. Protams, tas pats ir izdarāms arī otrā virzienā. Šādu operāciju saucim par **cepurīti** (angliski - *cap*):

$$\cap = \left(\sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \right) = \sum_i \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array}$$

Fizikāli par krūzīti var domāt kā par divām sagatavotām daļiņām sapītā stāvoklī, par cepurīti – kā Bela mērījumu (protams, atbilstība nav precīza).

Skaidrs, ka abas jaunās operācijas ir Ermita saistītas, (jo vienības operators ir Ermita):

$$(\cap)^{\dagger} = \cup$$

tātad tām izpildās sekojoša interesanta īpašība –

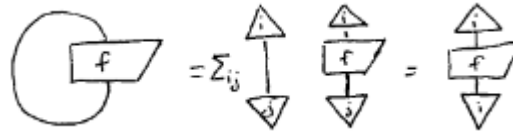
$$\sim = \sum_i \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} = |$$

Respektīvi, no cepurītes un krūzītes var salikt trīs daļiņu sistēmu, kas ir identiska pēc būtības vienas daļiņas vienības operatoram. No šī visa var gūt svarīgu atziņu – *sapītas daļiņas matemātiski uzvedas kā viens vesels*.

Var secināt arī to, ka diagrammās vienības operators uzvedas kā striķis, kuru var locīt kā vēlas, un izveidot no vienas daļiņas vairākas, gala rezultātu neietekmējot. Piemēram, var pierādīt, ka patiesa ir šāda vienādība –

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \\ \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \\ \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \\ \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \\ \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \\ \text{Diagram 29} \\ \text{Diagram 30} \\ \text{Diagram 31} \\ \text{Diagram 32} \\ \text{Diagram 33} \\ \text{Diagram 34} \\ \text{Diagram 35} \\ \text{Diagram 36} \\ \text{Diagram 37} \\ \text{Diagram 38} \\ \text{Diagram 39} \\ \text{Diagram 40} \\ \text{Diagram 41} \\ \text{Diagram 42} \\ \text{Diagram 43} \\ \text{Diagram 44} \\ \text{Diagram 45} \\ \text{Diagram 46} \\ \text{Diagram 47} \\ \text{Diagram 48} \\ \text{Diagram 49} \\ \text{Diagram 50} \\ \text{Diagram 51} \\ \text{Diagram 52} \\ \text{Diagram 53} \\ \text{Diagram 54} \\ \text{Diagram 55} \\ \text{Diagram 56} \\ \text{Diagram 57} \\ \text{Diagram 58} \\ \text{Diagram 59} \\ \text{Diagram 60} \\ \text{Diagram 61} \\ \text{Diagram 62} \\ \text{Diagram 63} \\ \text{Diagram 64} \\ \text{Diagram 65} \\ \text{Diagram 66} \\ \text{Diagram 67} \\ \text{Diagram 68} \\ \text{Diagram 69} \\ \text{Diagram 70} \\ \text{Diagram 71} \\ \text{Diagram 72} \\ \text{Diagram 73} \\ \text{Diagram 74} \\ \text{Diagram 75} \\ \text{Diagram 76} \\ \text{Diagram 77} \\ \text{Diagram 78} \\ \text{Diagram 79} \\ \text{Diagram 80} \\ \text{Diagram 81} \\ \text{Diagram 82} \\ \text{Diagram 83} \\ \text{Diagram 84} \\ \text{Diagram 85} \\ \text{Diagram 86} \\ \text{Diagram 87} \\ \text{Diagram 88} \\ \text{Diagram 89} \\ \text{Diagram 90} \\ \text{Diagram 91} \\ \text{Diagram 92} \\ \text{Diagram 93} \\ \text{Diagram 94} \\ \text{Diagram 95} \\ \text{Diagram 96} \\ \text{Diagram 97} \\ \text{Diagram 98} \\ \text{Diagram 99} \\ \text{Diagram 100} \end{array}$$

Ar krūzītes un cepurītes operācijām var aprēķināt **operatora pēdu** diagrammās:



Tāču abas operācijas vienkārši saliekot kopā iegūst **telpas dimensiju D**:



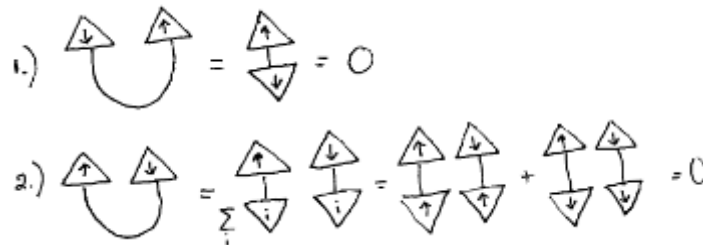
Salīdzinājums starp Diraka formālismu un līdz šim ieviestajām diagrammām

Apskatīsim triviālu uzdevumu Diraka un diagrammu formālos. Doti divi kubiti Bela stāvoklī

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle).$$

Kāda ir varbūtība vienu kubitu nomērīt stāvoklī $|\uparrow\rangle$, bet otru $|\downarrow\rangle$? (Normēšanas koeficientus šoreiz neņemsim vērā.)

Diagrammās tas var tikt aprēķināts divējādi, 1. gadījumā izmantojot to, ka šis Bela stāvoklis ir līdzīgs identitātes matricai – diagrammās ir lokāms vadiņš (iegūstot vienkāršu skalāro reizinājumu), 2. gadījumā godīgi apskatot abas sapītās daļiņas atsevišķi (apskatot uzdevumu no tenzoriālā reizinājuma puses):



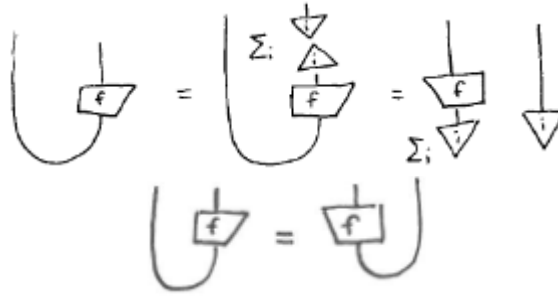
Tas, ka vienības operators un $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$ uzvedas līdzīgi nav tik uzskatāmi, izmantojot Diraka formālismu :

1. $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = \sum_i \langle\uparrow|i\rangle\langle i|\downarrow\rangle = \langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle + \langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle = 0$
2. $\sum_i (\langle\uparrow|\otimes\langle\downarrow|)(|i\rangle\otimes|i\rangle) = \sum_i (\langle\uparrow|i\rangle\otimes\langle\downarrow|i\rangle) = \langle\uparrow|\uparrow\rangle\otimes\langle\downarrow|\uparrow\rangle + \langle\uparrow|\downarrow\rangle\otimes\langle\downarrow|\downarrow\rangle = 0$

4.2.3. Procesi vairāku daļiņu telpā

Ieviešot krūzītes un cepurītes operācijas, top skaidrs, kāpēc operatorus, bra-vektorus un ket-vektorus ir izvēlēts zīmēt tieši ar šādiem nošķeltiem galiem.

Divu daļiņu sistēmās operatora **komplekso saistīšanu** var veikt šādi:



Savukārt **transponēšanas operāciju** var definēt kā:

$$\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{f} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right)^T := \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{f} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right) = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ \text{f} \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array}$$

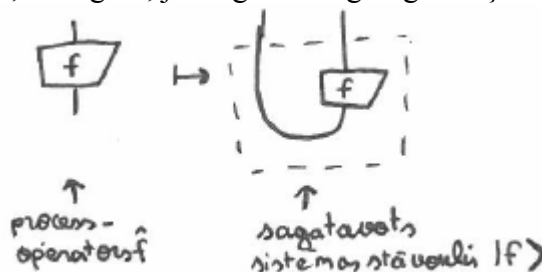
Tāpat operatoru var „bīdīt” pa vadu un tas skaitlisko rezultātu neietekmēs.

4.3. Operatora-vektora duālisms

Izmantojot krūzītes un cepurītes operāciju, var atklāt kādu svarīgu īpašību - operators un vektors ir duāli viens otram. Konceptuāli tas it kā ir saprotams. Operators varētu būt vektors, jo vektors ir kādas fizikālas sistēmas stāvoklis, bet ar operatoriem tiek iegūts jauns sistēmas stāvoklis. Savukārt vektors varētu būt operators, ja vektors ir divu daļiņu stāvoklis, piemēram, α un β . α varētu atbilst kādas daļiņas γ sākuma stāvoklim, savukārt β varētu atbilst γ beigu stāvoklim. Taču matemātiskie aparāti, ko lieto operatora un vektora aprakstam par šādu atbilstību neliecina.

4.3.1. Operators \mapsto vektors

Ar krūzītes operācijas palīdzību no operatora \hat{f} varam izveidot divu daļiņu stāvokli, neizmainot skaitlisko rezultātu, ko iegūtu, ja diagrammu godīgi izrēķinātu:



Šāds pārveidojums nav īsti korekts un apskatot konkrētu piemēru taps skaidrs kāpēc. Pārveidosim σ_x matricas par stāvokli. Diagrammās σ_x attēlojas sekojoši –

$$\boxed{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \uparrow 0 \end{array} + \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \uparrow 1 \end{array}$$

šāda matrica realizē viena kubita pagriezienu par 180 grādiem uz Bloha sfēras.

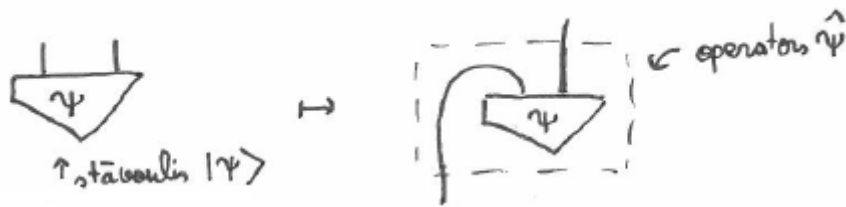
Kāds būs tā duālais vektors? Kā izrādās, lai no operatora iegūtu vektoru trūkst tikai skaitlis – normēšanas koeficients.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \boxed{\sigma_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \uparrow 1 \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \uparrow 0 \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \downarrow 0 \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \downarrow 1 \end{array}$$

Šī diagramma nozīmē to, ka esam sagatavojuši Bela stāvokli $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$ (nevis $\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$).

4.3.2. Vektors \mapsto operators

Ar cepurītes operācijas palīdzību no divu daļiņu stāvokļa vektora $|\Psi\rangle$ varam iegūt operatoru, neizmainot skaitlisko rezultātu:



Kā piemēru apskatīsim vienu no Bela stāvokļiem:

$$\boxed{B_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \end{array} \right)$$

Šo stāvokli ir viegli pārveidot uz unitāru operāciju, izmantojot vienas-divu daļiņu duālistma principu:

$$\begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \end{array} \mapsto \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \downarrow 0 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \downarrow 1 \end{array} = \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \uparrow 0 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \uparrow 1 \end{array}$$

$$\boxed{\sigma_z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ \uparrow 0 \end{array} - \begin{array}{c} \downarrow 1 \\ \uparrow 1 \end{array}$$

tikai ir jānoņem normēšanas koeficients. Iegūstam σ_z matricu.

Ko no tā var mācīties? Vektors un matrica savā matemātiskajā uzbūvē ir ļoti līdzīgi – tajā, kā tie „procesē” skaitļus. Vienīgi ir jāņem vērā – ja vēlas iegūt pavisam korektu rezultātu, jāseko līdz normēšanas koeficientiem. Taču šie koeficienti (skaitļi) nav tas pats būtiskākais. Kā procesi skaitļi ir pavisam neinteresanti, jo tos diagrammā nekādi nevar ietekmēt (tikai sareizināt ar citu skaitli).

5. nodaļa

Kvantu sistēmas diagrammās

Ar lineāro diagrammu izpēti kategoriskās kvantu mehānikas pētījumi neapstājās. 2007. gadā ar [34] tika sperts pirmais solis „augšup“. Respektīvi, tika iegūta laba sapratne par to, kā diagrammas pacelt vēl augstākā līmenī, lai, tās aprēķinot skaitliski, uzreiz iegūtu varbūtību. Jauniegūtās teorijas princips ir tikpat vienkāršs. Tā vēl joprojām ir teorija par procesiem un to saistību, taču procesi šoreiz ir *blīvuma matricas* un *operācijas ar tām*.

Šajā nodaļā tiks apskatīta tikai pāreja no lineārajām diagrammām uz šīm augstāka līmeņa diagrammām (sauksim tās par **dubultdiagrammām**) un viens no šo diagrammu galvenajiem ieguvumiem – blīvuma matricas kā stāvokļa apraksts.

5.1. Tīro stāvokļu diagrammas

Tīra stāvokļa $|\Psi\rangle$ blīvuma operators, kā noskaidrots nodaļā 3.3.1., ir formā:

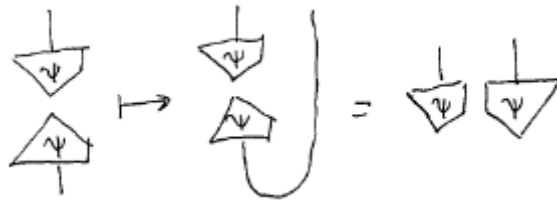
$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|.$$

jeb diagrammās



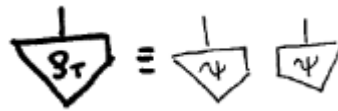
Ja vēlas aprēķināt blīvuma matricas elementus, tie aprēķināmi tieši tāpat, kā ierastajā formālismā – ievietojot vienības operatorus:

Jāatceras iepriekšējā nodaļā viens no apskatītajiem rezultātiem – stāvokļa-vektora duālisms. Tāpēc šīs diagrammas apakšējo daļu varam pagriezt (transponēt), nemainot skaitlisko rezultātu:



Taču jāatceras, ka viss, kas tiks pierakstīts operatoram kreisajā pusē šādā reprezentācijā arī būs jāraksta transponēts.

Tātad tīra stāvokļa blīvuma operatoram atbilst stāvokļa forma (ρ_t), kam ieviesīsim jaunu apzīmējumu:



Šāda vektoru (un arī operatoru) dubultošana būs par pamatu **dubulldiagrammām**.

5.1.1. Bra-Ket vektori un varbūtības aprēķins

Kā piemērā ar stāvokļu (4.2) skalāro reizinājumu tika noskaidrots – ideja par to, ka ir tests stāvoklim īsti nedarbojas, jo, lai aprēķinātu varbūtību stāvoklim $|\Psi\rangle$ atrasties stāvoklī $|\Phi\rangle$, Diraka formālismā stāvokļu skalārajam reizinājumam jāpiereizina tā kompleksais saistītais skaitlis:

$$P = \langle \Psi | \Phi \rangle \langle \Phi | \Psi \rangle = |\langle \Psi | \Phi \rangle|^2.$$

Respektīvi, *katra amplitūda* ir jāsaizina ar tās kompleksi saistīto skaitli. Atceroties diagrammu pamatprincipu, kas tika ilustrēts tajā pašā stāvokļu (4.2) piemērā, ka bilde diagrammā ir uztverama kā „notikumi ar vienu amplitūdu“ (katra alternatīvā diagramma, kas rodas izvēršot summas ir skatāms kā alternatīvais notikums), laba doma varētu šķist katrai diagrammai piekārtot tās kompleksi saistīto diagrammu. Šādi iegūsim diagrammas, kas aprakstīs tīros stāvokļus.

Turpmāk apskatītajiem vektoriem izpildīsies normēšanas nosacījums (2.2):

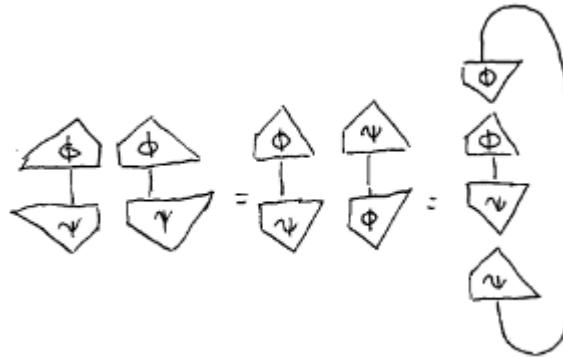
$$\sum_i \begin{array}{c} \triangleup \\ \Psi \\ \triangleleft \end{array} = 1$$

ir kāds telpas stāvoklis, taču vektori veido šīs telpas ortonormētu bāzi.

Varbūtība stāvoklim $|\Psi\rangle$ pāriet stāvoklī $|\Phi\rangle$ ar līdz šim lietoto formālismu ir uzrakstāms ļoti dažādi:

$$|\langle \Psi | \Phi \rangle|^2 = \langle \Psi | \Phi \rangle \langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi | \Psi \rangle^* \langle \Phi | \Psi \rangle = \text{tr}(P_{|\Phi\rangle} \rho_{|\Psi\rangle}),$$

kur $P_{|\Phi\rangle}$ ir projekcijas operators, bet $\rho_{|\Psi\rangle}$ blīvuma matrica. Tā atkal ir tautoloģija Diraka formālmā, jo tie ir ļoti dažādi apzīmējumi vienam un tam pašam. Diagrammās to pašu izsaka sekojoši:

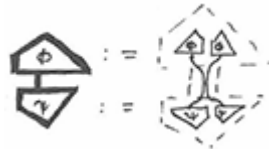


Lai diagrammās uzreiz ieliktu varbūtības aprēķinu, katram bra-vektoram un katram ket-vektoram piekārto tā kompleksi saistīto vektoru. Lai būtu ērtāk, tam ievieš jaunus apzīmējumus (sauksim tos par **dubultketiem** un **dubultbra**)



Kā 5.1. sākumā tika noskaidrots, *dubultkets ir tīra stāvokļa blīvuma matrica*.

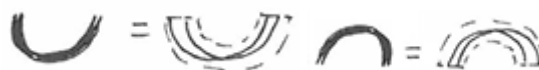
Dubultketa un dubultbra skalārais reizinājums uzreiz piekārto $\langle\Psi|\Phi\rangle$ tā kompleksi saistīto:



Ir vērts atzīmēt, ka šādas dubultošanas rezultātā pilnībā pazūd fāzu reizinātājs.

5.1.2. Krūzīte un cepurīte

Dažas operācijas dubultdiagrammās uzvedas un izskatās tāpat kā lineārajās diagrammās. Saglabājas ne tikai bra un ket forma, bet arī **krūzītes** un **cepurītes** operācijas, ja **dubultkrūzīti** un **dubultcepurīti** definē šādi:

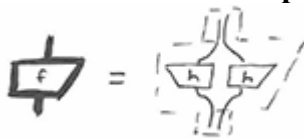


Dubultkrūzīte un dubultcepurīte vēl jo projām ir Ermita saistītas operācijas, tāpēc arī dubultdiagrammu vads arī ir lokāms kā labpatīkas:

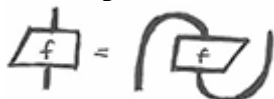


5.1.3. Operācijas dubultdiagrammās

Arī matricām piekārto kompleksi saistīto. **Dubultoperatorus** definē sekojoši:



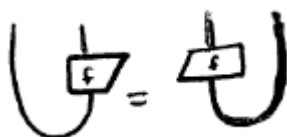
Operācijas ar dubultoperatoriem ir tādā pat formā kā lineārajās diagrammās ar operatoriem. Var pierādīt, ka dubultoperatoru **transponēšana** ir formā:



Ermita saistīšana:

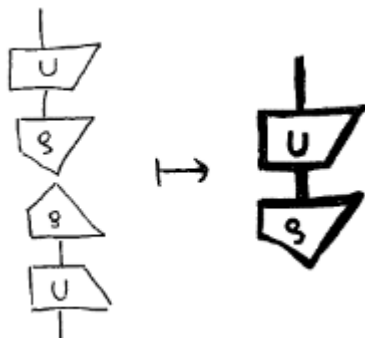


kā arī **kompleksā saistīšana:**



Tātad arī dubultoperatorus var bīdīt pa vadu un skaitliskais rezultāts no tā nemainīsies.

Kā rezultātā 3.3.4. nodaļā aprakstītā blīvuma matricas evolūcija laikā ir aprakstāma tā it kā blīvuma matrica būtu stāvoklis. Tīram stāvoklim:



5.1.4. Mērījums

Dubltdiagrammās ir viegli izteikt mērījuma rezultātu – varbūtību atrast kādu stāvokli:



ja $|\Psi\rangle$ ir patvaļīgs ket-vektors kādā galīgas dimensijas Hilberta telpā \mathbf{H} un $|i\rangle$ ir šīs telpas bāzes vektori. Piemēram, ja sagatavojam kādu spina stāvokļa vektoru

$$|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array} + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array}$$

tad mērījuma rezultāts – varbūtība atrast spinu stāvoklī $|\uparrow\rangle$ ir:

$$\begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \Psi \\ \hline \end{array} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

Var ievērot īpašību, kas bija patiesa lineārajās diagrammās, bet vairs neizpildās lineārajās diagrammās. Ja vektoru kopa $\sum_i |i\rangle$ veidoja bāzi lineārajās diagrammās, tad šo vektoru dubultketi un dubultbra nav bāzes vektori dubultdiagrammās, jo līdz ar „mērījuma veikšanu“ pazūd fāzu reizinātājs, kas atšķir atšķirīgus stāvokļus. Kā piemēru apskatīsim divus atšķirīgi sagatavotus spina stāvokļa vektorus:

$$\begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \uparrow \\ \hline \end{array} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array}$$

Ja apskatām, kāda komponente šo abu vektoru dubultketiem ir kopīga ar dubultketu $|\downarrow\rangle$, iegūstam:

$$\begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \rightarrow \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \downarrow \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \leftarrow \\ \hline \end{array} = \frac{1}{2}$$

Tādu pašu rezultātu iegūst arī ar $|\uparrow\rangle$. Tātad ar dubultotu bāzi $\{|\uparrow\rangle; |\downarrow\rangle\}$ dubultdiagrammās nevar izteikt divus pilnīgi atšķirīgus stāvokļus. Ir iespējams atrast bāzi dubultdiagrammās, kas nebūs ortonormēta, taču turpmākajām nodaļām šis nebūs būtiski.

5.2. Sajaukto stāvokļu diagrammas

Ja ir dots patvaļīgs ket-vektors

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i \begin{array}{|c|} \hline i \\ \hline \end{array}$$

(ieviesīsim sekojošu apzīmējumu:

$$\downarrow_{\psi_i} = \alpha_i \downarrow_i$$

ērtības labad) ievēro, ka dubultket-vektora (jeb tīra stāvokļa blīvuma matricas) pārrakstīšana kādā bāzē ir sekojoša:

$$\downarrow_{\Psi} = \sum_i \alpha_i \downarrow_i = \sum_i \alpha_i \downarrow_i \uparrow_i$$

Respektīvi summēšanas zīme paliek diagrammu iekšpusē. Ja summas zīmi mēģinātu iznest „ārpus raustītajām līnijām“, tad iegūtu sekojošo:

$$\sum_i \downarrow_{\psi_i} = \sum_i \downarrow_{\psi_i} \uparrow_i = \sum_i \alpha_i \downarrow_i \uparrow_i$$

Atsaucoties uz apskatīto 3.3.2. nodaļā – tīrajiem stāvokļiem ir arī nediagonālie elementi (ij). Tātad summas izvilkšanu ārpus diagrammas varētu saistīt ar to, ka stāvoklis ir *sajaukts*. Tikai šobrīd mūsu ieviestajās dubultdiagrammās nav operācijas, kas novāktu diagonālos elementus jeb iznestu summu „ārpusē“. Šajā nodaļā ieviesīsim šādu operāciju (sauksim to par *iznīcināšanas operāciju*) un apskatīsim sekas, kas no tā izriet. Pirmo reizi ideja par šādu operāciju ir minēta [35]. Šīs operācijas ieviešanas rezultātā kā stāvokli dubultdiagrammās var aprakstīt gan tīra, gan sajaukta stāvokļa blīvuma matrica.

5.2.1. Iznīcināšanas operācija

Ieviesīsim jaunu operāciju – **iznīcināšanu**:

$$\bar{\downarrow} = \downarrow \uparrow = \sum_i \downarrow_i \uparrow_i$$

Par iznīcināšanu to sauksim tāpēc, ka, ja to pielieto tīram stāvoklim $|\Psi\rangle$, tad:

$$\bar{\downarrow}_{\Psi} = \downarrow_{\Psi} \uparrow_{\Psi} = 0$$

sareizinām to pašu ar sevi – tātad šāds stāvoklis diagrammu neietekmē. Iznīcināšanas operācija patiesībā nav nekas cits, kā blīvuma matricas pēdas aprēķins:

$$\bar{\downarrow} = \downarrow \uparrow = \downarrow \uparrow \downarrow \uparrow = \text{tr}(\rho)$$

Maksimāli sajauktu stāvokli var iegūt sekojoši (t.i. tādu stāvokli, kura blīvuma matricai ir tikai vienādi diagonālie elementi):

$$\langle \frac{1}{D} \rangle = \langle \frac{1}{D} \rangle U = \langle \frac{1}{D} \rangle \sum_i |i\rangle \langle i|$$

kur D ir telpas dimensija. Piemēram, ja ir dota blīvuma matrica Bela stāvoklim (tīrs stāvoklis):

$$\langle \frac{1}{2} \rangle \cup$$

Tad veicot iznīcināšanas operāciju uz vienu no divām daļiņām iegūstam absolūti sajauktu stāvokli:

$$\langle \frac{1}{2} \rangle \cup = \langle \frac{1}{2} \rangle \perp$$

5.2.2. Sajaukto stāvokļu blīvuma matrica

Kā aprakstīts nodaļā 3.3.1., blīvuma operators tiek definēta sekojoši:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \tag{5.1}$$

p_i ir varbūtība atrast sistēmu stāvoklī $|\psi_i\rangle$. Respektīvi, pēc definīcijas blīvuma matrica kādā bāzē ir diagonāla:

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i \langle i \rangle \langle i \rangle$$

Izmantojot krūzītes operāciju diagrammās jebkurš process ir pārvēršams par stāvokli:

$$\langle f \rangle = \sum_i p_i \langle i \rangle \langle i \rangle$$

$$\langle \psi \rangle = \sum_i p_i \langle i \rangle \langle i \rangle$$

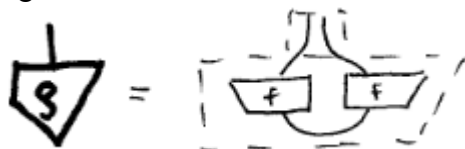
Tātad jau lineārajās diagrammās blīvuma matrica ir aprakstāma stāvokļa veidā.

Blīvuma matricas stāvoklis kā patvaļīga operācija uz maksimāli sajauktu stāvokli

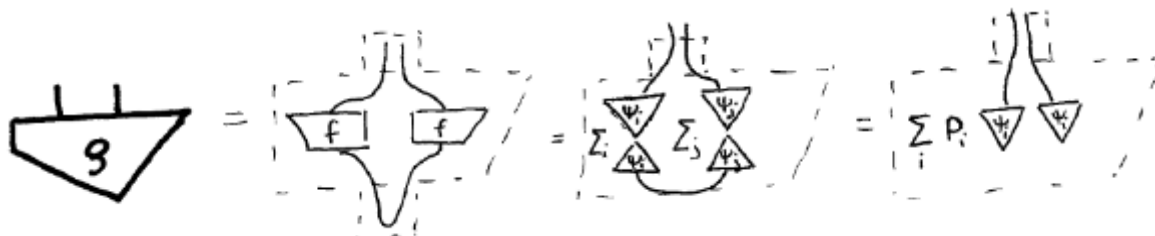
Kā šādu patvaļīgu sajaukta stāvokļa blīvuma matricu izteikt dubultdiagrammās? Uz maksimāli (nenormētu) sajauktu stāvokli iedarbojoties ar kādu procesu:

$$\langle f \rangle \perp$$

Tātad blīvuma matrica vispārīgi ir izsakāma formā



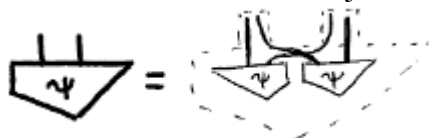
Lai iegūtu sajauktu stāvokli, operators \hat{f} vienkārši būs diagonālmatrixa, taču, lai iegūtu tīru, tas var būt projekcijas operators:



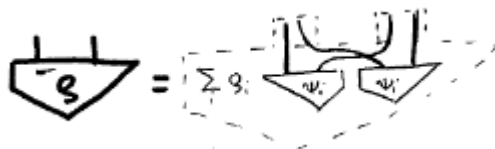
Tas nozīmē to, ka *vada trūkums* starp stāvokļiem blīvuma matricā nozīmē *tīru stāvokli*, bet ja vads eksistē, tad, iespējams, stāvoklis ir sajaukts (atkarīgs no pieliktā patvaļīgā procesa).

Reducētais blīvuma oprators

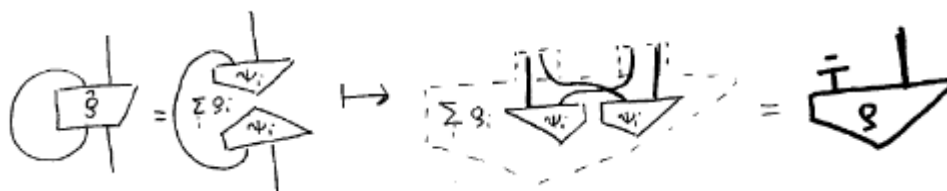
Divu daļiņu stāvoklim dubultkets tiek definēts sekojoši:



Sajaukta stāvokļa blīvuma matricas dubultketu tad var uzrakstīt sekojoši:



Izmantojot iznīcināšanas operāciju, varam aprakstīt reducēto blīvuma operatoru (apskatīts 3.3.5. nodaļā):



Pirmā daļiņa tiek iznīcināta, jeb izvilkta daļēja pēda, atstājot tikai otrās daļiņas blīvuma matricu.

5.2.3. Blīvuma matricas pēda

Tīriem stāvokļiem, kā tika minēts nodaļā 3.3., izpildās $Tr(\rho^2) = 1$. Diagrammās tas izskatās sekojoši:

$$\left(\begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \right)^2 = \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array}$$

Pierādījums:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} = \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array}$$

Sajauktiem stāvokļiem savukārt izpildās nevienādība $Tr(\rho^2) \leq Tr(\rho)^2$. Diagrammās tas izskatās sekojoši:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \leq \left(\begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \right)^2$$

Pierādījums:

$$\sum_{ij} \rho_i \rho_j \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} = \sum_i \rho_i^2 \leq \left(\sum_i \rho_i \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \begin{array}{c} \triangle \\ \nabla \end{array} \right)^2 = \sum_i \rho_i^2 + \sum_{i \neq j} \rho_i \rho_j$$

6. nodaļa

Klasiskā informācija diagrammās

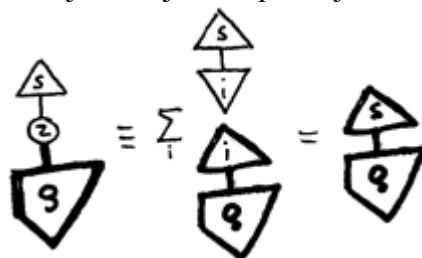
Nākamais solis diagrammu formālismā bija abas līdz šim minētās valodas – lineārās diagrammas un dubultdiagrammas – apvienot [36], jo lineārās diagrammas ir pietiekošas, lai aprakstītu *klasiskus procesus*, t.i. procesus ar *varbūtībām*, bet dubultdiagrammas – *kvantu procesus*, t.i. procesus ar *amplitūdām*. Neviens no līdzšinējiem formālismiem klasiska rakstura informāciju nekad nav iekļāvis, parasti šis tiek pierakstīts ar vārdiem blakus pierādījumam. Taču, kā izrādās, arī klasisko informāciju diezgan veikli var iekļaut diagrammās, tās nesarežģot. Turpmākajā nodaļā apskatīsim divus procesus, kas iznīcina amplitūdas – *mērījumu* un *dekoherenci*.

6.1. Mērījums

Ja mums ir kubits, kurš ir stāvoklī, aprakstāmā ar blīvuma operatoru $\hat{\rho}$, tad varbūtība nomērot $\hat{\rho}$ atrast $|i\rangle$ diagrammās ir izsakāma sekojoši:



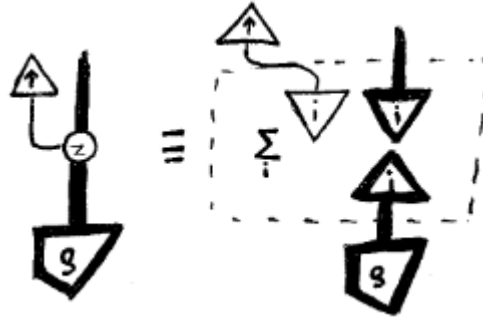
Mērījums ir klasiska darbība, jo tās rezultātā iegūstam varbūtību un pazaudējam informāciju par amplitūdām. Tāpēc ieviesīsim mērījumam jaunu apzīmējumu:



Uz apļa atzīmēsim kādā bāzē tiek veikts mērījums – aplī tiek „ieslēpti“ vektori tikai šajā bāzē. Ar vektoru $|s\rangle$ atzīmē, kādam iznākumam gribam aprēķināt varbūtību.

Kā tika aprakstīts 2.2. apakšnodaļā, tad ar nomērīto kubītu varam eksperimentu turpināt.

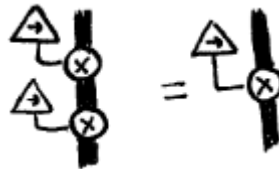
Viena rezultāta filtru diagrammās apraksta sekojoši:



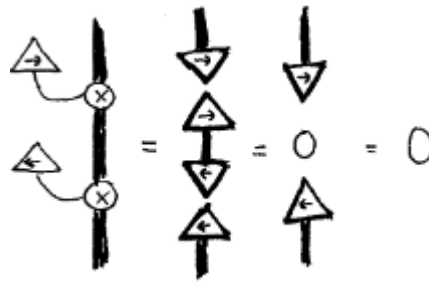
Tādejādi eksperiments šajā diagrammā tiktu turpināts tikai ar $|\uparrow\rangle$ kubītiem.

Šādai rezultātu filtrēšanai ir sekojošas īpašības:

1. Divas vienādas filtrēšanas operācijas ir tas pats, kas viena:

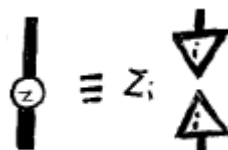


2. Ja viena pēc otras seko filtrēšanas operācijas ortogonālos virzienos, iegūstam maksimāli sajauktu stāvokli.
3. Ja pēc kārtas seko divas filtrēšanas operācijas gar vienu asi, taču nofiltrē ortogonālus stāvokļus, rezultāts visai diagrammai ir nulle:



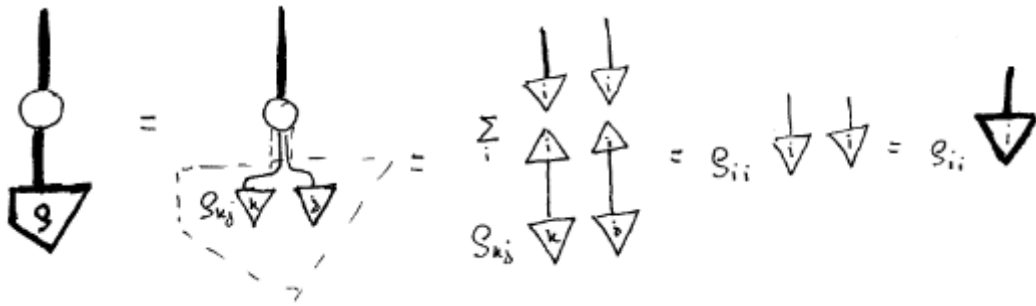
6.2. Dekoherece

Ja rezultātu filtrēšanas diagrammai nofiltrē nevienu rezultātu, tad iegūstam **Dekoherences** diagrammu. To definē sekojoši:



Apzīmējums apļa vidū nozīmēs to, gar kuru asi notiek dekoherence.

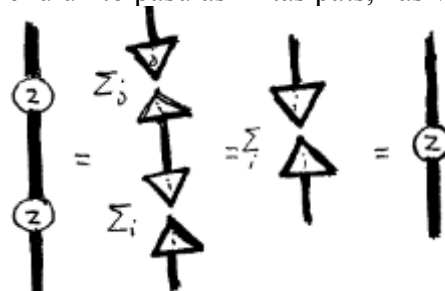
Kā tika minēts nodaļā 3.3.2., dekoherence nozīmē blīvuma matricas diagonālo elementu pazūšanu:



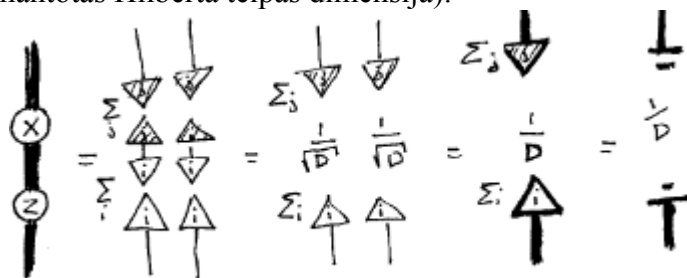
Protams, ja dekoherence notiek gar kādu n asi un spins arī ir bijis sagatavots n ass virzienā, dekoherence spina stāvokli neizbojā.

Izcelsim divas dekoherences operācijas īpašības.

1. Divas dekoherences gar vienu un to pašu asi ir tas pats, kas viena:



2. Ja viena pēc otras seko dekoherences ortogonālos virzienos, iegūstam maksimāli sajauktu stāvokli (D ir izmantotās Hilberta telpas dimensija):



6.3. Šterna-Gerlaha mērījumu sērija diagrammās

Tagad mums ir visi nepieciešamie rīki, lai aprakstītu 2. nodaļas Šterna-Gerlaha 5 eksperimentu sēriju.

1. eksperiments

Krāsns sagatavo sudraba atomus ar elektronu spiniem nejaušos virzienos – par to virzieniem mums pilnīgi nekas nav zināms – elektronu spini ir maksimāli sajauktos stāvokļos:



Šajā eksperimentā tiek veikts mērījums gar x asi:

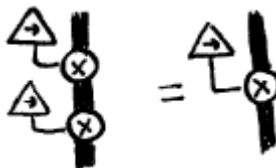
$$\frac{1}{2} \sum_i \uparrow_i = \frac{1}{2} \rightarrow + \frac{1}{2} \leftarrow$$

2. eksperiments

Turpinām eksperimentu, izdalot tikai elektronus ar spiniem vēršiem $|\rightarrow\rangle$ virzienā:



Nofiltrētie elektroni tiek vēlreiz izlaisti cauri Šterna-Gerlaha aparātam vēršam x ass virzienā:



Taču kūļa intensitāte nemainās, tāpēc tik pat labi varējām izmantot tikai vienu Šterna-Gerlaha aparātu, nevis divus.

3. un 4. eksperiments

3. eksperimentā tika izmantots Šterna-Gerlaha aparāts orientēts z ass virzienā un 4. eksperimentam izfiltrēti elektroni ar spiniem orientētiem $|\uparrow\rangle$ virzienā:



Nofiltrētie elektroni tiek vēlreiz izlaisti cauri Šterna-Gerlaha aparātam vēršam x ass virzienā.

5. eksperiments

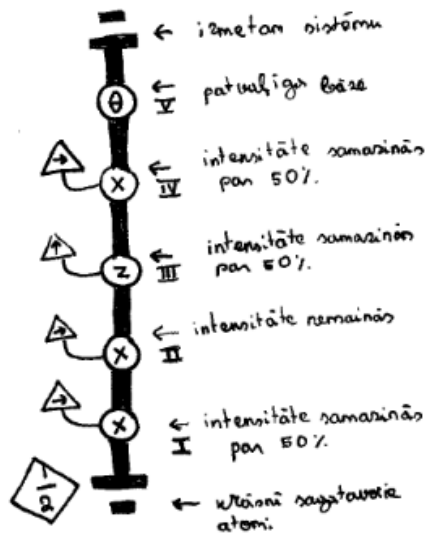
Veiksim nelielu izmaiņu. Piektais eksperiments 2. nodaļā tika veikts ar aparātu orientētu gar patvaļīgu asi – θ leņķī pret z asi un ar $|\uparrow\rangle$ spiniem. Šoreiz veiksīm to ar $|\rightarrow\rangle$ spiniem:



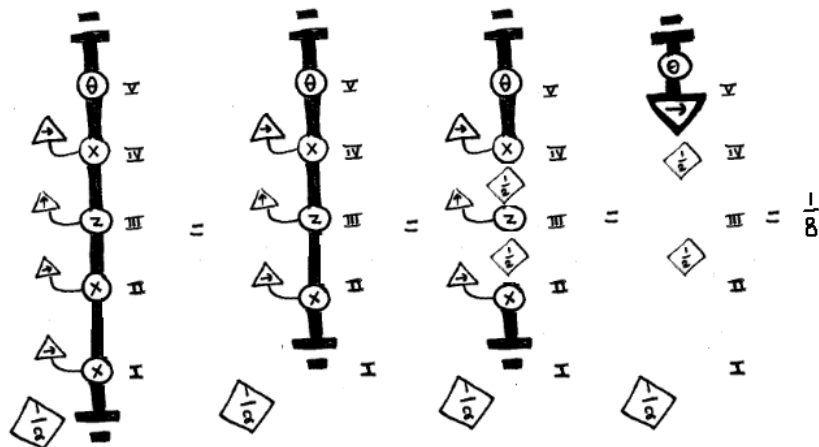
Tā kā eksperimentus ar sistēmu tālāk neturpinām, uz to varam iedarboties ar iznīcināšanas operāciju.

Visi 5 eksperimenti vienā diagrammā

Visus 5 eksperimentus varam apvienot diagrammā:



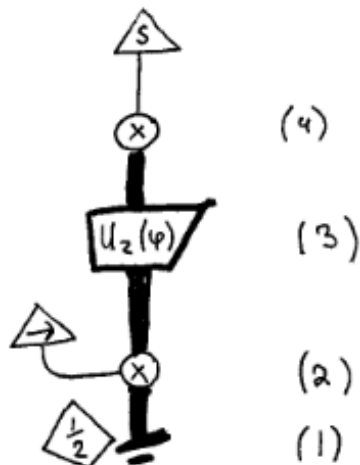
Diagrammu izrēķinot, var iegūt kūļa intensitāti 5. eksperimentā jeb varbūtību elektronam nonākt līdz eksperimenta beigām.



Tā kā 5. eksperimentā atomu kūlis netiek sadalīts atkarībā no spinu orientācijas, intensitāti ietekmē tikai pirmie četri eksperimenti.

6.4. Interferences eksperiments

Apskatīsim, kā diagrammu formālismā izskatās interferences eksperiments. Krāsniņā tiks sagatavoti elektroni (1) un nofiltrēti tie, kuru spina virziens ir $|\rightarrow\rangle$ (2). Tad iedarbosimies uz kūli ar magnētisko lauku, vērstu z ass virzienā (3), t.i. pagriezīsim par φ grādiem gar z asi. Tad veiksīm mērījumu tam, vai esam ieguvuši stāvokli $|s\rangle$ (4).



Rezultātā būtu jāiegūst varbūtība šādam iznākumam, eksperimentu veicot ar vienu elektronu, vai kūļa intensitāte, veicot eksperimentu ar vairākiem. Ievērojot diagrammu likumus, diagrammu var pārrakstīt formā:

$$I_s(\varphi) = \begin{array}{c} \triangle S \\ \circ \times \\ | \\ \square U_z(\varphi) \\ | \\ \triangle \rightarrow \\ \square \frac{1}{2} \end{array} = \begin{array}{c} \triangle S \\ \square \frac{1}{2} \\ | \\ \square U_z(\varphi) \\ | \\ \triangle \rightarrow \end{array} = \text{dublētots} \left(\begin{array}{c} \triangle S \\ \square \frac{1}{2} \\ | \\ \square U_z(\varphi) \\ | \\ \triangle \rightarrow \end{array} \right)$$

baltie keti ir bāzes vektori gar x asi, iekrāsotie – bāzes vektori gar z asi. Pēc nodaļas 2.4.2. zināms, ka rotāciju gar z asi veic operators:

$$R_z(\varphi) = e^{-i\frac{\varphi}{2}\hat{\sigma}_z} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$$

Tātad diagramma ir jāaprēķina sekojoši, ja $|s\rangle = |\rightarrow\rangle$:

$$\begin{aligned}
 I_{\rightarrow}(\varphi) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \square_{\frac{1}{2}(\varphi)} \\ \rightarrow \end{array} \right) = \text{dubultots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \square_i \\ \rightarrow \end{array} \right) \right) = \text{dubultots} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \left(\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \square_i \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right) \right) = \\
 &= \text{dubultots} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} (\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi + i \sin \varphi) \right) = \text{dubult} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

Iegūstam, ka $I_{\rightarrow}(\varphi) = \frac{1}{2} \cos^2(\frac{\varphi}{2})$. Analogiski aprēķinot $|s\rangle = |\leftarrow\rangle$, iegūst $I_{\leftarrow}(\varphi) = \frac{1}{2} \sin^2(\frac{\varphi}{2})$.

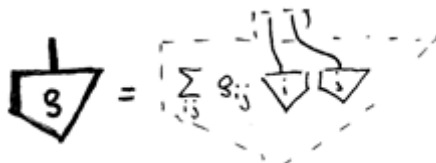
Rezultāti

Ir apgūts diagrammu formālisms ar fiziķa zināšanu bāzi un izstrādāta pirmā mācību literatūra latviešu valodā. Darbā diagrammas ir nevis aprakstītas no matemātiķa skatupunkta, pa solim visu smalki pierādot, bet gan no citas perspektīvas – tika parādīti to galvenie darbības principi, balstoties uz fiziķim pazīstamo Diraka formālismu.

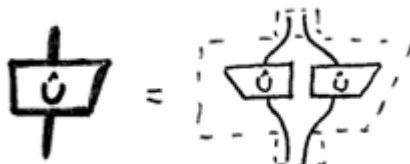
Kā rezultāts ir iegūta un diagrammās attēlota izpratne tam, kā uz sapītām daļiņām raudzīties kā uz vienu veselu (4.2.2. apakšnodaļa) – t.s. vienas-divu daļiņu duālisms. Aprakstīts, kā divus atšķirīgus matemātiskus objektus var saprast kā „vienu un to pašu” (4.3. apakšnodaļa), kā rezultātā saprasts, kā blīvuma matrica var būt stāvoklis, ne tikai operators (5. nodaļa). Ir apskatīti vairāki piemēri, kas ilustrē šīs idejas – Šterna-Gerlaha eksperimenta diagrammu apraksts (6.3. apakšnodaļa) un daļiņas evolūcija laikā (6.4. apakšnodaļa), kas ne tikai ir uzskatāmi, bet uzreiz ir arī matemātiski precīzi aprēķināmi.

Darbā aplūkoto dubultdiagrammu rezultātā var aprakstīt kvantu stāvokli, tā evolūciju laikā un mērījuma protokolu, ieskaitot apakšsistēmu mērījumus. Īss kopsavilkums:

1. Varam inicializēt jebkuru kvantu stāvokli, kas aprakstāms ar blīvuma matricu (5. nodaļa) gan tīru, gan sajauktu:



2. Evolūciju laikā apraksta unitāri operatori (5.1.3. apakšnodaļa)



3. Uz šo sistēmu pēc tam ir iespējams veikt mērījumu (5.1.4. apakšnodaļa) – aprēķināt atbilstošā diagramma izvēlēta mērījumu iznākuma $|s\rangle$ varbūtību:



4. Tīrā stāvokļa inicializācija ir izsakāma kā projektīvais mērījums. Piemēram, varam iegūt tīrā stāvoklī esošām $|\uparrow\rangle$ daļiņām, pārējām uzliekot filtru (6.1. apakšnodaļa) :



5. Ar kvantu stāvokli var notikt dekoherence kādā telpas virzienā (6.2. apakšnodaļa)



kuras rezultātā blīvuma matrica (šī telpas virziena bāzē) pazaudē diagonālos elementus.

Secinājumi

Diagrammu formālisma izmantošanai ir zināmas priekšrocības. Kā minēts ievadā, kategoriju teorija tika izveidota kā rīks, lai intuitīvi izprastu formāli ļoti sarežģītu matemātiku. Matemātiskā aparāta vienkāršošana atvieglo fizikālās parādības būtības uztveri. Jebkāda veida īsinājumi matemātikas formālismā ir derīgi, jo ļauj vieglāk saskatīt sakarības starp matemātiskiem simboliem, mazina iespēju kļūdīties utt. Diagrammu formālisms ļauj iegūt ļoti labu intuīciju par sapītības fenomenu. Sapinums diagrammās būtībā ir taisnais vads – vadu var locīt pēc patikas, iegūstot cik vien sapītas daļiņas vēlamies, sapinums ir jāsaprot kā vienots veselums. Tātad formālisms ļoti labi apraksta vairāku daļiņu sistēmas.

Aprakstītais Šterna-Gerlaha eksperiments diagrammās nodaļā 6.3. ne tikai ļoti uzskatāmi parāda, kas notiek eksperimentā (kurā brīdī notiek kvantu, kurā klasisks process), bet ir arī matemātiski korekta valoda, kas ļauj viegli veikt aprēķinus, ja zināmi diagrammu likumi.

6.4. apakšnodaļā apskatītais piemērs vienas daļiņas evolūcijai laikā uzskatāmi parāda, kā darbojas augstāka līmeņa valoda – zem diagrammām var slēpties sarežģīts matemātisks aprēķins. Taču jāatzīst, ka ar darbā apskatītajām diagrammām nekas īpaši elegantāks par to, ko var izdarīt arī Diraka formālisms, nenotiek, jo diagramma neizceļ būtisko – kā tieši griežas spins? Pēdējos gados arī šai problēmai ir atrasts risinājums. Darbā neizdevās iekļaut un aprakstīt pēdējo interesanto rezultātu, ko kvantu kategoriju teorijas pētnieki ir paveikuši – tā sauktos zirnekļus (angliski - *spiders*), kas eleganti apraksta procesus ar kvantu informāciju tikai ar divām rotācijas operācijām – gar x un z asīm. Šāda ideja pirmoreiz aprakstīta 2008. gadā [13], bet pētījumi ar šādām diagrammām norit vēl šobrīd, kā piemēru var minēt neseno [37]. Kopumā darbā apkopotā informācija ir laba zināšanu bāze, lai jaunākās publikācijas šajā jomā būtu lasāmas, kas arī bija galvenais darba uzdevums.

Kā turpmāko pētījuma virzienu un šobrīd nepaveicamo diagrammu formālismā ir jāatzīmē tas, ka diagrammas nav pielietojamas bezgalīgas dimensijas Hilberta telpai [16]. Bezgalīgas dimensijas ir šobrīd pētīts virziens kategoriskajā kvantu mehānikā, taču publikāciju iztrūkums

liecina, ka nekas ļoti nozīmīgs šajā virzienā pagaidām nav atklāts. Līdz šim izveidotais diagrammu formālisms ir derīgs tikai manipulācijām ar diskreto kvantu informāciju.

Pateicības

Paldies maniem vislieliskākajiem darba redaktoriem Sandrai Liniņai un Elzai Liniņai.

Miļš paldies Elīnai Potaņinai un vēlreiz Elzai Liniņai par morālo pabalstu. Paldies Antonam Baronovam par *Low Roar* un dzīvības glābšanu divas dienas pirms darba nodošanas. Sabīnei Ļaminai par to, ka nav pazaudējusi prasmi uzrasties man pie durvīm dienās, kad man būtu visvairāk jāmācās. Nekad nebūtu uzzinājusi, ka tajās vislabāk bija atpūsties.

Esmu bezgalīgi pateicīga Jānim Timošenko un Arnim Katkevičam par vērtīgajiem padomiem darba rakstīšanā.

Vislielākā pateicība manam darba vadītājam Vjačeslavam Kaščejevam, kurš iedrošināja darīt to, par ko es biju vienkārši ziņkārīga, un par iegūtajām zināšanām, ko vienos bakalaura darba vākos iesiet nemaz nav iespējams.

Izmantotā literatūra un avoti

- [1] M. Planck, “On the Theory of the Energy Distribution Law of the Normal,” *Verhandl. Dtsch. Phys. Ges.*, vol. 2, no. 1900, p. 237, 1900.
- [2] J. Von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, vol. 72 of *Princeton landmarks in mathematics and physics*. Princeton University Press, 1955.
- [3] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Phys. Rev. 47, 777 (1935): Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?,” *Phys. Rev.*, vol. 47, pp. 777–780, 1935.
- [4] J. S. Bell, “On the einstein-podolsky-rosen paradox,” *Physics*, vol. 1, no. 3, pp. 195–200, 1964.
- [5] . Манин, *Вычислимое и невычислимое*. Москва: Советское Радио, 1980.
- [6] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 6-7, pp. 467–488, 1982.
- [7] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels,” *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 13, pp. 1895–1899, 1993.
- [8] B. Coecke, “Kindergarten Quantum Mechanics,” *Quantum Theory: Reconsiderations of the Foundations III*, pp. 81–98, 2005.
- [9] S. Eilenberg and S. MacLane, “General theory of natural equivalences,” *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 58, pp. 231–231, 1945.
- [10] W. F. Trench, *Introduction to Real Analysis*. 2013.
- [11] S. Abramsky and B. Coecke, “Physical traces: Quantum vs. classical information processing,” *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 69, no. 4, pp. 5–26, 2003.

- [12] B. Coecke, “The logic of entanglement,” *Horizons of the Mind. A Tribute to Prakash Panangaden.*, pp. 250–267, 2004.
- [13] B. Coecke and R. Duncan, “Interacting Quantum Observables: Categorical Algebra and Diagrammatics,” *New Journal of Physics*, vol. 13, no. 043016, 2011.
- [14] B. Coecke, B. Edwards, and R. W. Spekkens, “Phase groups and the origin of non-locality for qubits,” *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 270, no. 2, pp. 15–36, 2011.
- [15] J. Vicary, “Topological Structure of Quantum Algorithms,” *2013 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 93–102, 2013.
- [16] B. Coecke and A. Kissinger, *Picturing quantum processes*. Vēl nav iznākusi – izmantota ar autora atļauju.
- [17] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 10 anvi ed., 2002.
- [18] L. Susskind, *Quantum Mechanics: The Theoretical Minimum*. Allen Lane, 2014.
- [19] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*. Addison Wesley, 1 ed., 1993.
- [20] B. Coecke, “Quantum picturalism,” *Contemporary Physics*, 2009.
- [21] P. a. M. Dirac, “A new notation for quantum mechanics,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 35, no. 03, p. 416, 1939.
- [22] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. New York: Wiley, 1978.
- [23] D. R. Bes, *Quantum mechanics: a modern and concise introductory course*. Springer, 2nd ed., 2007.
- [24] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics, Vol. III: The New Millennium Edition: Quantum mechanics*. Basic Books, 2011.
- [25] B. Friedrich and D. Herschbach, “Stern and Gerlach: How a Bad Cigar Helped Reorient Atomic Physics,” *Physics Today*, vol. 56, no. 12, p. 53, 2003.
- [26] C. Moler and C. Van Loan, “Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later,” *SIAM Review*, vol. 45, no. 1, pp. 3–49, 2003.

- [27] B. Schumacher, “Quantum coding,” *Physical Review A*, vol. 51, no. 4, pp. 2738–2747, 1995.
- [28] G. M. D. Ariano, C. Macchiavello, L. Maccone, and A. Pavia, “Quantum Computations with Polarized Photons,” *Fortschr. Phys.*, vol. 48, no. 5 - 7, pp. 573–578, 2000.
- [29] R. A. Žak, R. A. Žak, B. Röthlisberger, B. Röthlisberger, S. Chesi, S. Chesi, D. Loss, and D. Loss, “Quantum Computing with Electron Spins in Quantum Dots,” pp. 1–61, 2009.
- [30] B. E. Kane, “A silicon-based nuclear spin quantum computer,” *Nature*, vol. 393, no. 6681, pp. 133–137, 1998.
- [31] P. Kwiat and H. Weinfurter, “Embedded Bell-state analysis,” *Physical Review A*, vol. 58, no. 4, pp. R2623–R2626, 1998.
- [32] N. Pienti, C. P. E. Gaebler, and T. W. Lynn, “Distinguishability of hyperentangled Bell states by linear evolution and local projective measurement,” *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 84, no. 2, pp. 1–5, 2011.
- [33] M. Schlosshauer, “Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 76, no. 4, pp. 1267–1305, 2004.
- [34] B. Coecke, “De-linearizing Linearity: Projective Quantum Axiomatics From Strong Compact Closure,” *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 170, pp. 49–72, 2007.
- [35] B. Coecke, “Axiomatic Description of Mixed States From Selinger’s CPM-construction,” *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, vol. 210, no. C, pp. 3–13, 2008.
- [36] B. Coecke, E. O. Paquette, and D. Pavlovic, “Classical and quantum structuralism,” *Semantic Techniques in Quantum Computation*, pp. 29–69, 2010.
- [37] M. Backens, “The ZX-calculus is complete for stabilizer quantum mechanics,” *New Journal of Physics*, vol. 093021, p. 26, 2013.

Bakalaura darbs "Diagrammu valoda augsta līmeņa kvantu procesu reprezentācijai" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums ir veikts patstāvīgi, izmantoti tikai norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā versija atbilst izdrukai.

Autors: Agnese Ķerubiņa

(paraksts, datums)

Rekomendēju/nerekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Dr. fiz. Vjačeslavs Kaščejevs

(paraksts, datums)

Recenzents: Dr. habil. fiz. Mārcis Auziņš

(paraksts, datums)

Darbs iesniegts Fizikas nodaļas sekretariātā. Ar savu parakstu apliecinu, ka darba elektroniskā versija ir augšupielādēta LU informatīvajā sistēmā.

Dekāna pilnvarotā persona: metodiķe Dzintra Holsta

(paraksts, datums)

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

(datums, prot. nr., vērtējums)

Komisijas sekretārs: Ivars Driķis

(paraksts)