

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

Uz B-splainiem balstītas augstākas kārtas F-transformācijas

MAGISTRA DARBS

Autors: **Mārtiņš Kokainis**

Studenta apliecības Nr.: mk09014

Darba vadītājs: profesore Dr. math. Svetlana Asmuss

Rīga, 2015

Anotācija

Tiešā F -transformācija ir lineārs attēlojums no universā X (šajā darbā – intervāls $[a; b]$) definētām nepārtrauktām funkcijām uz vektoru telpu, kur vektora vērtības apraksta funkciju atbilstoši universa X nestriktam sadalījumam. Inversā F -transformācija attēlo tiešās F -transformācijas rezultātā iegūto vektoru par funkciju, kas aproksimē oriģinālo funkciju. Šis pieejas vispārinājums ir augstākas kārtas F -transformācijas, kad tiešās transformācijas rezultātā iegūst vektoru ar polinomiālām komponentēm.

Tiešās un inversās transformācijas īpašības ir būtiski atkarīgas no izvēlētajā universa nestriktā sadalījuma. Šajā darbā tiek aplūkotas transformāciju īpašības, kad nestrikto sadalījumu iegūst ar B-splainu palīdzību; tiek parādīts, ka aprakstītā sadalījuma izvēle ļauj būtiski paaugstināt aproksimācijas kvalitāti, aproksimējot funkciju ar tās inverso F^m -transformāciju.

Atslēgvārdi: nestrikts sadalījums, F -transformācija, B-splaini

Abstract

The direct F -transform is a linear mapping from the set of continuous functions over the universe X (in this paper an interval $[a; b]$) to a vector space, where the components of the vector characterizes the function accordingly to the chosen fuzzy partition of X . The inverse F -transform maps the vector, obtained by the direct transform, to a function which approximates the original function. A generalization of this approach is F -transform of higher degree which produces a vector of polynomial components.

The properties of the direct and inverse F -transforms heavily depend on the chosen fuzzy partition of X . In this paper we consider transformations' properties when the fuzzy partition is generated by B-splines; it is shown that the proposed choice of partition allows one to significantly increase the quality of approximation of a function, approximating it with its inverse F^m -transform.

Keywords: fuzzy partition, F -transformation, B-splines

SATURS

Apzīmējumu saraksts	1
Ievads	3
1. Nestrikte sadalījumi	5
1.1. Nestrikta kopas jēdziens	5
1.2. Nestrikta sadalījuma definīcija	7
1.3. Vispārinātie nestrikte sadalījumi	10
1.4. Uz B-splainiem balstīti vispārinātie nestrikte sadalījumi	12
B-splaina jēdziens	12
B-splainu īpašības	15
Rekurentā sakarība nepāra pakāpes centrālo B-splainu konstrukcijai	16
Nestriktā sadalījuma konstrukcija	18
2. F-transformācijas	20
2.1. F -transformācijas jēdziens	20
Tiešā F -transformācija	20
Inversā F -transformācija	20
2.2. Augstākas kārtas F -transformācijas	20
Telpa $L_2(A_i)$	20
Tiešā F^m -transformācija	21
Inversā F^m -transformācija	22
2.3. Ruspini nosacījums	22
3. Uz B-splainiem balstītas F-transformācijas	24
3.1. Ruspini nosacījums	28
3.2. B-splainu īpašības 1-vienmērīga režģa gadījumā	29
3.3. Polinomu aproksimācija, izmantojot uz B-splainiem balstīto F^m - transformāciju	36
4. Aproksimācijas īpašības	43
4.1. Aproksimācijas kvalitāte, izmantojot inverso F^m -transformāciju . .	43

4.2. Atvasinājumu aproksimācija	48
Nobeigums	58
Izmantotā literatūra un avoti	59
Pielikumi	62
1. pielikums. Funkcijas $f(x) = \exp(x) - 1$ un tās atvasinājumu aproksimācija	62
2. pielikums. Funkcijas $f(x) = \sin(\sqrt{17}\pi x)$ un tās atvasinājumu aproksimācija	68
3. pielikums. Funkcijas $f(x) = \sin(\exp(7x))$ un tās atvasinājumu aproksimācija	74

Apzīmējumu saraksts

χ_A	Kopas A indikatorfunkcija	5
μ_A	Nestrikta kopas A karakteristikā funkcija	5
$[n..m]$	Veselo skaitļu kopa $\{n, n+1, \dots, m\}$	7
A_i	Nestrikta sadalījuma i -tā bāzes funkcija	7
N	Parametrs, kas raksturo nestrikto kopu A_0, \dots, A_N skaitu aplūkojamajā nestrikta sadalījumā	7
E_i	Kopa, kurā bāzes funkcija A_i pieņem pozitīvas vērtības	10
\bar{E}_i	Kopas E_i slēgums	10
t_+^n	Nošķeltās pakāpes funkcija	12
B_i^n	B-splains ar pakāpi n un mezgliem $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n+1}$	12
ϕ_n	Centrālais B-splains ar pakāpi n	12
F_i	F -transformācijas i -tā komponente	20
$\mathcal{F}(f, t)$	Inversās F -transformācijas funkcijai f vērtība punktā t	20
$L_2(A_i)$	Funkciju telpa $L_2(A_i)$	20
$\langle \cdot, \cdot \rangle_i$	Skalārais reizinājums telpā $L_2(A_i)$	21
$\ \cdot\ _i$	Norma telpā $L_2(A_i)$	21
$L_2(A_0, \dots, A_N)$	Funkciju telpa $L_2(A_0, \dots, A_N)$	21
$L_2^m(A_i)$	Telpas $L_2(A_i)$ lineārā apakštelpa, kuras bāzi veido polinomu $\{1, t, t^2, \dots, t^m\}$ sašaurinājumi uz \bar{E}_i	21
P_i^l	Telpas $L_2^m(A_i)$ ortogonālās bāzes polinoms ar pakāpi l	21
F_i^m	F^m -transformācijas i -tā komponente	21
$c_{i,l}$	Koeficients pie P_i^l F^m -transformācijas i -tajā komponentē	22
\mathbb{P}_m	Polinomu telpa, kuru pakāpe nepārsniedz m	22
$\mathcal{F}^m(f, t), \mathcal{F}^m(t)$	Funkcijas f inversās F^m -transformācijas vērtība punktā t	22
$[\hat{a}, \hat{b}]$	Intervāls, kurā nestriktais sadalījums apmierina Ruspini nosacījumu	22
k	Parametrs, kas raksturo nestrikto sadalījumu ģenerējošā splaina ϕ_{2k-1} pakāpi	24
$L_2(A)$	Funkciju telpa $L_2(A)$, kur $A = \phi_{2k-1}$	24

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalārais reizinājums telpā $L_2(A)$	24
$\ \cdot\ $	Norma telpā $L_2(A)$	24
$L_2^m(A)$	Funkciju telpas $L_2(A)$ apakštelpa, kuras bāzi veido polinomi $\{1, t, t^2, \dots, t^m\}$, ierobežoti kopā $[-k, k]$	24
P^l	Telpas $L_2^m(A)$ ortogonālas bāzes polinoms ar pakāpi l	24
Δ	Diferences operators: $\Delta f(t) = f(t) - f(t-1)$	29
R_n	n -tās pakāpes polinoms ar vecāko koeficientu 1, kura saknes sakrīt ar splaina ϕ_n mezgliem	31
ρ	Polinoms R_{2k-1}	32
D	Atvasināšanas operators: $Df(x) = f'(x)$	35
T_a	Nobīdes (par a) operators: $T_a f(x) = f(x+a)$	35
$p_r(f, \cdot)$	Funkcijas f Teilora polinoms ar pakāpi r	43
$I_r(f, \cdot)$	Funkcijas f Teilora polinoma atlikuma loceklis	43
$K_{r,s}(\tau)$	Funkcija $\frac{1}{r!}(\tau-s)_+^r$	44
$Z_{m,r}(\cdot)$	L_1 norma lielumam $K_{r,s}(\cdot) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, \cdot)$ intervālā $[a; b]$	45
$q_{r,s}(t)$	Polinoms $\frac{1}{r!}(t-s)^r$	45
$Z_{m,r,n}(\cdot)$	L_1 norma lielumam $K_{r-n,s}(\cdot) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, \cdot)$ intervālā $[a; b]$	50
$\mathcal{E}_m^n(f)$	L_∞ normas novērtējums lielumam $\frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(t) - f^{(n)}(t)$	52

Ievads

2001. gadā Irina Perfilieva (Ostravas universitāte, Čehija) ieviesa [1] F -transformācijas jēdzienu, saistot klasiskās transformāciju metodes ar nestriktās matemātikas pieeju. 2006. gadā tiek publicēts plašāks raksts par F -transformācijām un to īpašībām [2]. Izmantojot F -transformācijas (tiešā F -transformācija ar konstantiem koeficientiem), iespējams raksturot nepārtrauktas funkcijas ar vektoru, kas satur informāciju par šo funkciju (vektora komponentes var interpretēt kā funkcijas vidējās vērtības pār apskatāmā intervāla nestriktā sadalījuma kopām). Vienlaikus iespējams runāt par inverso F -transformāciju, kas, izmantojot tiešās transformācijas rezultātā iegūto vektoru, dod sākotnējās funkcijas aproksimāciju. F -transformācijām ir rasti pielietojumi attēlu apstrādē [3, 4, 5], parasto un parciālo diferenciālvienādojumu risināšanā [6, 7] un laikrindu analīzē [8, 9].

Kā tika parādīts [10], parastās F -transformācijas ar konstantiem koeficientiem jēdziens var tikt paplašināts uz augstākas kārtas F -transformācijām jeb F^m -transformācijām ($m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$) ar polinomiālām komponentēm. Šī pieeja vispārina parasto F -transformāciju jēdzienu, jo tās var tikt uzskatītas par F^0 -transformācijām. F^m -transformācijas ļauj aproksimēt arī funkcijas atvasinājumus [11]. F^m -transformāciju metodei ir vairāki vispārinājumi: diskrētās F^m -transformācijas [12], F^m -transformācijas vairākargumentu funkcijām [13], F^m -transformācijas attiecībā pret vispārinātu nestriktu sadalījumu.

F -transformāciju pamatā ir t.s. bāzes funkcijas, kas ir nestrikta kopas, kas veido apskatāmā intervāla nestrikto sadalījumu. Parasto F -transformāciju gadījumā nestriktā sadalījuma vispārinājumu piedāvāja L. Stefanini [14, 15]. Šajā pieejā bāzes funkcijas varēja pārklāt vairākus blakusesošus intervāla sadalījuma intervālus; tādējādi tika iegūts blīvāks nestriktais sadalījums, kas ļauj uzlabot inversās F -transformācijas gluduma īpašības un aproksimācijas kvalitāti. Šo pieeju attīstīja un pilnveidoja I. Perfilieva ar līdzautoriem, pētot vispārinātā nestriktā sadalījuma jēdzienu [16, 17].

Šajā darbā tiek aplūkotas F^m -transformāciju īpašības, kad tiek izmantots vispārinātais nestriktais sadalījums, kurā bāzes funkcijas nosaka nepāra pakāpes centrālie B-splaini. Nestrikta sadalījumi, kas balstīti uz splainiem, ir apskatīti jau iepriekš; piemēram, B. Bede un J. Rudas [18] aplūkoja gadījumu, kad nestrikto sadalījumu nosaka B-splaini; I. Kodrane un S. Asmuss [19] izstrādāja jauna veida nestrikto sadalījumus, kas balstās uz splainiem, un ieguva aproksimācijas kvalitātes novērtējumus, aproksimējot funkciju ar tās inverso F -transformāciju attiecībā pret šiem sadalījumiem. Abos gadījumos aplūkotus

parastās F -transformācijas.

Šajā maģistra darbā tiek pētītas F^m -transformācijas īpašības, par nestrikto sadalījumu izvēloties vienmērīgu vispārināto nestrikto sadalījumu, kuru uzdod centrālie B-splaini ar pakāpi $2k - 1$. Tiek parādīts, ka inversā F^m -transformācija ir precīza visiem polinomiem kuru pakāpe nepārsniedz $2m + 1$, pie $m \leq k - 1$. Balstoties uz šo rezultātu, tiek pierādīt kļūdu novērtējumi, aproksimējot funkciju ar tās inverso F^m -transformāciju (attiecībā pret aprakstīto nestrikto sadalījumu).

Darbs izklāstīts četrās nodaļās. Pirmajā nodaļā aplūkotas nestrikto sadalījumu (parasto un vispārināto) definīcijas, kā arī vispārinātā nestriktā sadalījuma konstrukcija, izmantojot B-splainus. 1. nodaļā aplūkojam arī B-splainu definīciju un galvenās īpašības. Otrajā nodaļā izklāstīts F -transformācijas un saistītie jēdzieni – inversā F -transformācija, augstākas kārtas (tiešā un inversā) F -transformācija, funkciju telpas $L_2(A_i)$ un $L_2^m(A_i)$. Šajā nodaļā definēts Ruspini nosacījums, kas nepieciešams, lai inversā F -transformācija aproksimētu sākotnējo funkciju.

Atlikusī darba daļa veltīta rezultātu izklāstam, kad nestriktais sadalījums ir konstruēts ar B-splainu palīdzību. Trešajā nodaļā izklāstītas galvenās uz šī sadalījuma balstīto F -transformāciju īpašības un pierādīta teorēma, kas raksturo polinomu pakāpi, kuriem to inversā F^m -transformācija ir precīza. Balstoties uz šajā nodaļā iegūtajiem rezultātiem, darba ceturtajā nodaļā tiek raksturota aproksimācijas kvalitāte un iegūti aproksimācijas kļūdas novērtējumi, funkciju no telpas $C^{r+1}([a; b])$ aproksimējot ar tās inverso F^m -transformāciju. Šajā nodaļā tiek arī parādīts, ka inversā F^m -transformācija aproksimē arī sākotnējās funkcijas atvasinājumus.

Darbs satur trīs pielikumus; tajos tiek prezentēti attēli 4. nodaļā aprakstītajiem piemēriem.

Darbā izklāstītie rezultāti prezentēti konferencē *20th International Conference on Mathematical Modelling and Analysis (MMA2015)*, kā arī tiks prezentēti *2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE 2015)* konferencē.

1. NESTRIKTIE SADALĪJUMI

Klasiskajā matemātikā, aproksimējot reālvērtīgu funkciju intervālā $[a; b]$, tiek ņemts šī intervāla sadalījums, t.i., intervāls ar mezglu palīdzību tiek sadalīts mazākos intervālos. Nestriktajā matemātikā, un jo īpaši F -transformāciju kontekstā, šī pieeja tiek vispārināta, izmantojot t.s. nestriktos sadalījumus (fuzzy partitions). Tos veido nestrikti intervāli, uzdoti ar indikatorfunkcijām. Šī iemesla dēļ darbu sāksim ar nestrikta kopas definīciju.

1.1. Nestrikta kopas jēdziens

Klasiskajā teorijā kopai $A \subset X$ ir stingri noteiktas robežas: katrs universa X elements x vai nu pieder kopai A , vai arī nepieder. Attiecīgi, kopas A indikatorfunkcija $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$, definēta ar

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & x \in A \\ 1, & x \notin A \end{cases}, \quad x \in X,$$

var pieņemt tikai divas vērtības; turklāt kopu A var identificēt ar funkciju χ_A .

Nestriktā matemātika piedāvā šīs pieejas vispārinājumu, pieļaujot universa X elementu *daļēju piederību* kopai A . Šādas kopas iespējams definēt, pieļaujot indikatorfunkcijas, kas pieņem vērtības intervālā $[0; 1]$, nevis tikai tā galapunktos.

Nestrikta kopas šeit tiek definētas atbilstoši avotam [20].

1.1. definīcija. Par nestriktu kopu $A \subset X$ sauc kopu $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$, kur $\mu_A : X \rightarrow [0; 1]$; vērtību $\mu_A(x)$ sauc par elementa $x \in X$ *piederības pakāpi* nestriktajai kopai A , bet funkciju μ_A – par kopas A *harakteristisko funkciju*.

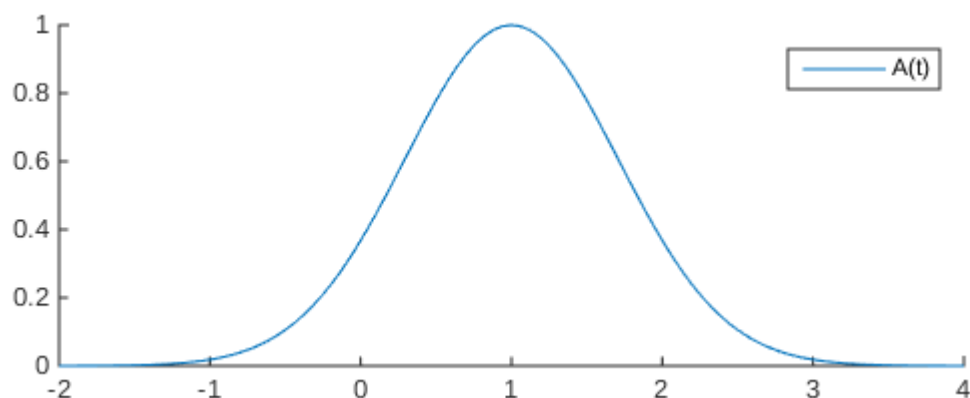
Kopu A mēdz identificēt tikai ar tās *harakteristisko funkciju*, t.i., runā par nestriktu kopu $A : X \rightarrow [0; 1]$, kur $A(x) := \mu_A(x)$.

1.2. piemērs. Pieņemsim, ka $X = \mathbb{R}$. Nestrikta kopa $A \subset X$ uzdots ar *harakteristisko funkciju*

$$A(x) = e^{-(x-1)^2}.$$

Nestrikto kopu A šajā piemērā interpretējam tā, ka A satur tos skaitļus, kas ir "tuvu" vieniniekam.

1. attēlā attēlots kopas A karakteristikās funkcijas grafiks.



1. att.: Nestriktā kopa A

1.3. piemērs. Pieņemsim, ka $X = [a; b] \subset \mathbb{R}$ un izvēlēti skaitļi $h \in (0; 1]$, $p \in (a; b)$, $q_l \in [a; p)$ un $q_r \in (p; b]$. Aplūko nestriktu kopu, kas uzdots ar indikatorfunkciju

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; q_l]; \\ h \left(1 - \frac{x-p}{q_l-p}\right), & x \in (q_l; p]; \\ h \left(1 - \frac{x-p}{q_r-p}\right), & x \in [p; q_r); \\ 0, & t \in [q_r; b]. \end{cases}$$

Šādu nestriktu kopu sauc par trīsstūrveida nestriktu kopu.

Piezīme. Kopu A sauksim par trīsstūrveida kopu arī degenerētajos gadījumos, t.i., ja

- $q_l = p \neq q_r$, t.i.,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; p); \\ h \left(1 - \frac{x-p}{q_r-p}\right), & x \in [p; q_r); \\ 0, & t \in [q_r; b]. \end{cases}$$

- $q_l \neq p = q_r$, t.i.,

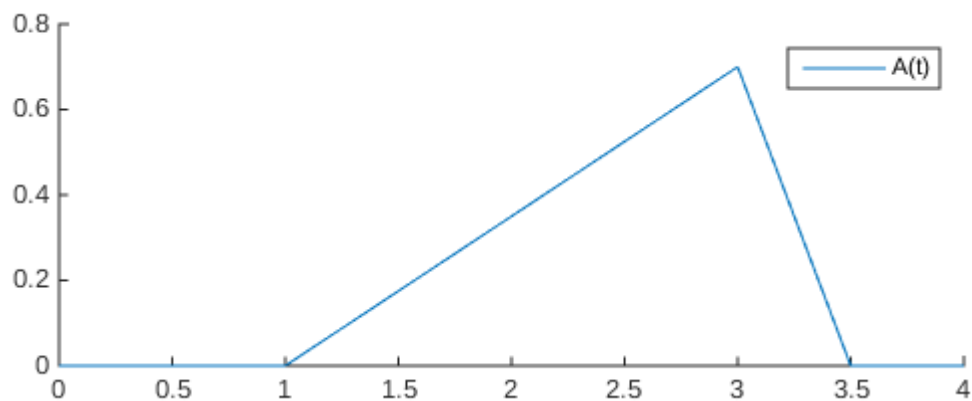
$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; q_l]; \\ h \left(1 - \frac{x-p}{q_l-p}\right), & x \in (q_l; p); \\ 0, & t \in (p; b]. \end{cases}$$

- $q_l = p = q_r$, t.i.,

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; p); \\ 1, & x = p; \\ 0, & t \in (p; b]. \end{cases}$$

Šajos gadījumos, ja turklāt $p = a$, vai $p = b$, tad $A(p) := 1$.

2. attēlā attēlots trīsstūrveida nestrikta kopas A charakteristiskās funkcijas grafiks, kad $a = 0$, $b = 4$, $q_l = 1$, $p = 3$, $q_r = 3.5$ un $h = 0.7$.



2. att.: Trīsstūrveida nestrikta kopa

1.2. Nestrikta sadalījuma definīcija

Pieņemsim, ka $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, un $N \in \mathbb{N}$. Fiksēsim mezglus t_0, \dots, t_N tā, lai $a = t_0 < \dots < t_N = b$.

Šeit un turpmāk ar $[n..m]$, kur $n, m \in \mathbb{Z}$, sapratīsim kopu $\{n, n+1, \dots, m\}$.

1.4. definīcija. Saka, ka nestrikta kopas $A_0, \dots, A_N : [a; b] \rightarrow [0; 1]$ veido intervāla $[a; b]$ nestrikto sadalījumu, ja izpildās šādi nosacījumi:

- 1) $A_i : [a; b] \rightarrow [0; 1]$, $A_i(t_i) = 1$, visiem $i \in [0..N]$;

- 2) $A_i(t) = 0$, ja $t \notin (t_{i-1}, t_i)$, kur $t_{-1} := a$, $t_{N+1} := b$, visiem $i \in [0..N]$;
- 3) A_i is nepārtraukta funkcija, visiem $i \in [0..N]$;
- 4) A_i ir augoša intervālā $[t_{i-1}, t_i]$, ja $i \in [1..N]$, un A_i ir dilstoša intervālā $[t_i, t_{i+1}]$, ja $i \in [0..N-1]$.
- 5) $\sum_{i=0}^N A_i(t) > 0$, visiem $t \in (a, b)$.

Funkcijas jeb nestriktās kopas A_i tiek sauktas par bāzes funkcijām.

1.5. definīcija. Pieņemsim, ka nestriktas kopas $A_0, \dots, A_N : [a; b] \rightarrow [0; 1]$ veido intervāla $[a; b]$ nestrikto sadalījumu. Šo sadalījumu sauc par vienmērīgu, ja izpildās šādi nosacījumi:

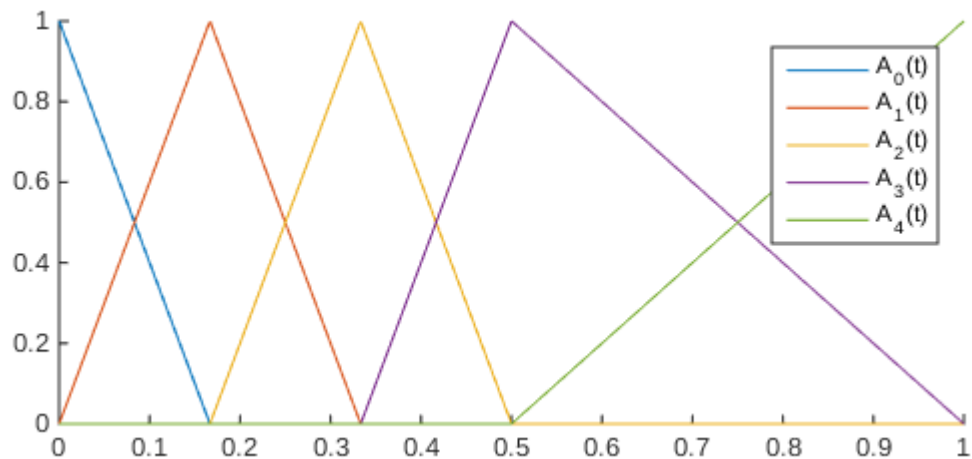
- 1) $t_i = a + ih$, visiem $i \in [0..N]$, kur $h := (b - a)/N$;
- 2) $A_i(t_i - t) = A_i(t_i + t)$, visiem $i \in [1..N-1]$ un $t \in [0, h]$;
- 3) $A_i(t) = A_{i-1}(t - h)$ un $A_i(t - h) = A_{i+1}(t)$ visiem $i \in [1..N-1]$ un $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

1.6. piemērs. Pieņemsim, ka $a = t_0 = 0$, $b = t_4 = 1$ un vēl izvēlēti mezgli $t_1 = 1/6$, $t_2 = 1/3$, $t_3 = 1/2$. Atbilstošās nestriktās kopas ir definētas kā

$$\begin{aligned}
 A_0(t) &= \begin{cases} 1 - 6t, & t \in [0, \frac{1}{6}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{6}, 1]; \end{cases} & A_1(t) &= \begin{cases} 6t, & t \in [0, \frac{1}{6}], \\ 2 - 6t, & t \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{3}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{3}, 1]; \end{cases} \\
 A_2(t) &= \begin{cases} 6t - 1, & t \in [\frac{1}{6}, \frac{1}{3}], \\ 3 - 6t, & t \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ 0, & t \in [0, \frac{1}{6}) \cup (\frac{1}{2}, 1]; \end{cases} & A_3(t) &= \begin{cases} 6t - 2, & t \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2t, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & t \in [0, \frac{1}{3}), \end{cases} \\
 A_4(t) &= \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ 2t - 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tad nestriktās kopas A_i , $i \in [0..4]$, veido intervāla $[0; 1]$ nestrikto sadalījumu. Bāzes funkcijas A_i , $i \in [0..4]$, sauc par trīsstūrveida bāzes funkcijām, jo atbilstošās kopas ir trīsstūrveida nestriktas kopas.

3. attēlā attēloti šo kopu charakteristisko funkciju grafiki.



3. att.: Intervāla $[0; 1]$ nestriktais sadalījums ar kopām A_0, \dots, A_4

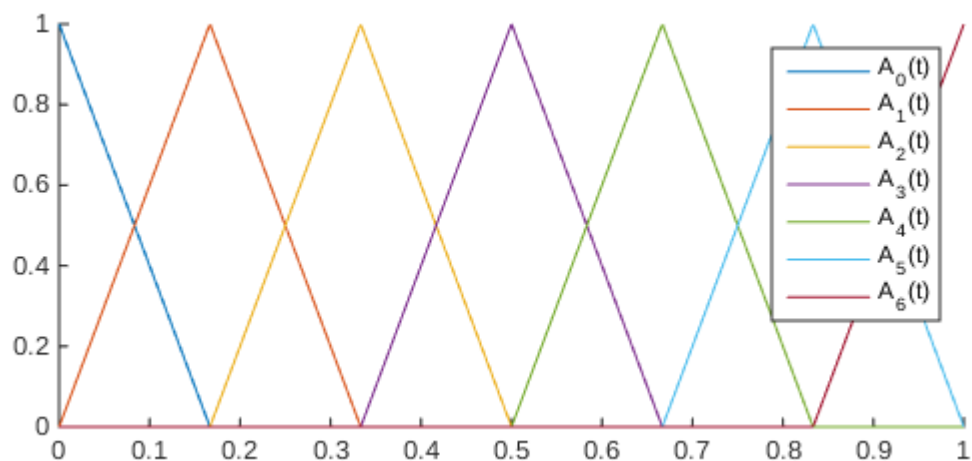
1.7. piemērs. Pieņemsim, ka $[a; b] = [0; 1]$ un izvēlēti mezgli $t_i = i/6, i \in [0..6]$. Atbilstošās nestriktās kopas ir definētas kā

$$A_i(t) = \begin{cases} 6t + 1 - i, & t \in [\frac{i-1}{6}, \frac{i}{6}], \\ 1 + i - 6t, & t \in (\frac{i}{6}, \frac{i+1}{6}], \\ 0, & t \in [0, \frac{i-1}{6}) \cup (\frac{i+1}{6}, 1], \end{cases} \quad i \in [1..5]$$

un

$$A_0(t) = \begin{cases} 1 - 6t, & t \in [0, \frac{1}{6}], \\ 0, & t \in (\frac{1}{6}, 1], \end{cases} \quad A_6(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{5}{6}), \\ 6t - 5, & t \in [\frac{5}{6}, 1]. \end{cases}$$

Tad nestriktās kopas A_0, \dots, A_6 veido intervāla $[0; 1]$ vienmērīgu nestriktu sadalījumu. 4. attēlā attēloti šo kopu charakteristisko funkciju grafiki.



4. att.: Intervāla $[0; 1]$ vienmērīgs nestriktais sadalījums ar kopām A_0, \dots, A_6

1.3. Vispārinātie nestrikte sadalījumi

Pieņemsim, ka $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, un $N \in \mathbb{N}$. Fiksēsim mezglus t_0, \dots, t_N tā, lai

$$a \leq t_0 < \dots < t_N \leq b.$$

Visiem $i \in [0..N]$ izvēlēti nenegatīvi reāli skaitļi h'_i, h''_i tā, ka vienlaikus izpildās šādi nosacījumi:

- $h'_i + h''_i > 0$,
- $\bar{E}_i \subset [a; b]$, kur apzīmēts $E_i := (t_i - h'_i, t_i + h''_i)$ un $\bar{E}_i := [t_i - h'_i, t_i + h''_i]$;
- $\bigcup_{j=0}^N \bar{E}_j = [a, b]$.

1.8. definīcija. Saka, ka nestrikta kopas $A_0, \dots, A_N : [a; b] \rightarrow [0; 1]$ veido intervāla $[a; b]$ vispārināto nestrikto sadalījumu (ar mezgliem t_i un robežām h'_i, h''_i , $i \in [0..N]$), ja izpildās šādi nosacījumi:

- 1) $A_i(t) > 0$, ja $t \in E_i$, un $A_i(t) = 0$, ja $t \in [a, b] \setminus E_i$, visiem $i \in [0..N]$;
- 2) A_i is nepārtraukta funkcija kopā \bar{E}_i , visiem $i \in [0..N]$;
- 3) $\sum_{i=0}^N A_i(t) > 0$, visiem $t \in (a, b)$.

Darbā tiks izmantoti šādā veidā definēti vienmērīgie nestrikte sadalījumi:

1.9. definīcija. Pieņemsim, ka $h > 0$ un $h' > h/2$. Tad (vispārinātais nestriktais intervāla $[a; b]$) sadalījums tiek saukts par (h, h') -vienmērīgu, ja izpildās sekojošas īpašības:

- $t_{i+1} = t_i + h$ visiem $i \in [0..N-1]$ un $h'_i = h''_i = h'$ visiem $i \in [0..N]$;
- $A_i(t_i - t) = A_i(t_i + t)$ visiem $t \in [0, h']$, $i \in [0..N]$;
- $A_i(t) = A_{i+1}(t + h)$ visiem $t \in \bar{E}_i$ un $i \in [0..N-1]$.

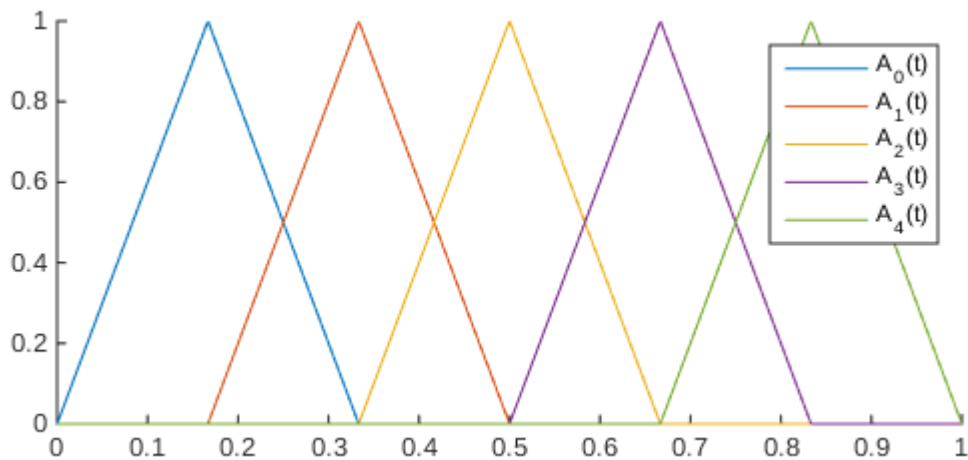
Šajā gadījumā $E_i = (t_i - h', t_i + h')$.

Viegli redzēt, ka tad eksistē tāda pāra funkcija $A : [-H, H] \rightarrow \mathbb{R}$, $H := h'/h$, ka visiem $i \in [0..N]$ un $t \in \bar{E}_i$ izpildās $A_i(t) = A\left(\frac{t-t_i}{h}\right)$. Funkciju A sauc par sadalījuma A_0, \dots, A_N *ģenerējošo funkciju*.

1.10. piemērs. Pieņemsim, ka $[a; b] = [0; 1]$ un izvēlēti mezgli $t_i = (i+1)/6$, $i \in [0..4]$. Atbilstošās nestriktās kopas ir definētas kā

$$A_i(t) = \begin{cases} 6t - i, & t \in \left[\frac{i}{6}, \frac{i+1}{6}\right], \\ 2 + i - 6t, & t \in \left(\frac{i+1}{6}, \frac{i+2}{6}\right], \\ 0, & t \in \left[0, \frac{i}{6}\right) \cup \left(\frac{i+2}{6}, 1\right], \end{cases} \quad i \in [0..4].$$

Tad nestriktās kopas A_0, A_1, A_2 un A_3 veido intervāla $[0; 1]$ vienmērīgu vispārināto nestriktu sadalījumu. 5. attēlā attēloti šo kopu charakteristisko funkciju grafiki.



5. att.: Intervāla $[0; 1]$ vispārinātais vienmērīgs nestriktais sadalījums ar kopām A_0, \dots, A_4

Var ievērot, ka

$$A_i(t) = A(6(t - t_i)) = A(6t - i - 1),$$

kur

$$A(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0], \\ 1 - x, & x \in (0, 1], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

1.4. Uz B-splaiņiem balstīti vispārinātie nestrikte sadalījumi

B-splaina jēdziens

B-splaiņi šajā darbā ir definēti atbilstoši avotam [21] (skat. arī [22]).

1.11. definīcija. Pieņemsim, ka $n \geq 0$ ir vesels skaitlis. Par nošķeltās pakāpes funkciju t_+^n sauc sekojošu funkciju:

$$t_+^n = \begin{cases} t^n, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka

$$\psi_n(t, \tau) = (-1)^{n+1} (n+1) (t - \tau)_+^n$$

un uzskatīsim, ka doti mezgli $-\infty < t_i < t_{i+1} < \dots < t_{i+n+1} < +\infty$.

Funkciju B_i^n , definētu kā funkcijas $\psi_n(t, \tau)$ $(n+1)$ -ās kārtas dalīto diferenci attiecībā pret mainīgo τ un $n+2$ mezgliem $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n+1}$, sauc par B-splaiņu (ar pakāpi n un mezgliem $t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+n+1}$).

Ar ϕ_n apzīmēsim centrālo B-splaiņu [21], kuru iegūst, izvēloties $t_i = -\frac{n+1}{2}$ un $t_{i+j} = t_i + j$, $j \in [0..n+1]$.

1.12. piemērs. Pieņemsim, ka izvēlēti mezgli $t_i = ih, i \in \mathbb{N}, h > 0$. Tad

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq t_i \\ \frac{1}{h} \left(1 + \frac{t-t_{i+1}}{h}\right), & t \in (t_i; t_{i+1}] \\ \frac{1}{h} \left(1 - \frac{t-t_{i+1}}{h}\right), & t \in (t_{i+1}; t_{i+2}] \\ 0, & t > t_{i+2}. \end{cases}$$

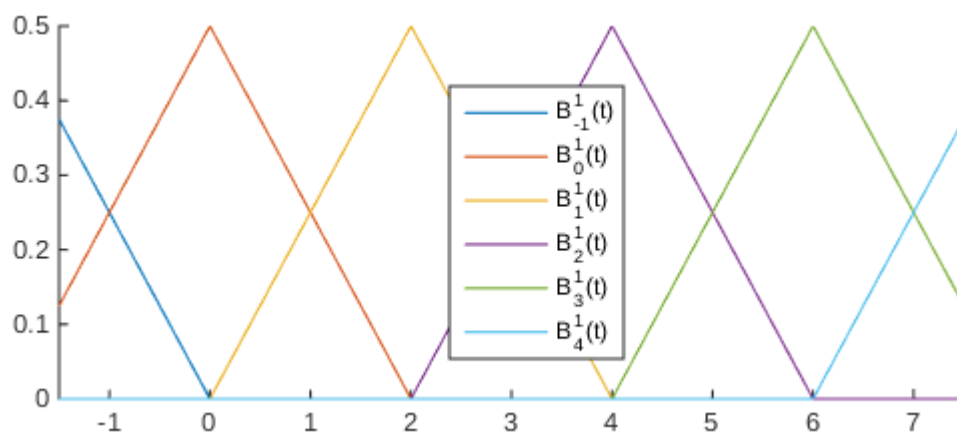
Var ievērot, ka

$$B_i^1(t) = \frac{1}{h} \phi_1\left(\frac{t-t_i}{h}\right),$$

kur

$$\phi_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

6. attēlā redzami B_i^1 grafiki, kad $h = 2, i \in [-1..4]$.



6. att.: 1. pakāpes B-splaini B_i^1

Speciālgadījumā, kad $h = 1$, iegūstam $t_i = i$ un

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq i \\ t - i, & t \in (i; i + 1] \\ i + 2 - t, & t \in (i + 1; i + 2] \\ 0, & t > i + 2. \end{cases}$$

1.13. piemērs. Pieņemsim, ka izvēlēti mezgli $t_i = ih$, $i \in \mathbb{N}$, h . Tad kvadrātiskie B-splaini B_i^2 ir uzdoti ar

$$B_i^2(t) = \frac{1}{h} \phi_2\left(\frac{t - t_i}{h}\right),$$

kur

$$\phi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right)^2, & x \in \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \frac{3}{4} - x^2, & x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2, & x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] \end{cases}$$

7. attēlā redzami B_i^2 grafiki, kad $h = 1/3$, $i \in [0..4]$.

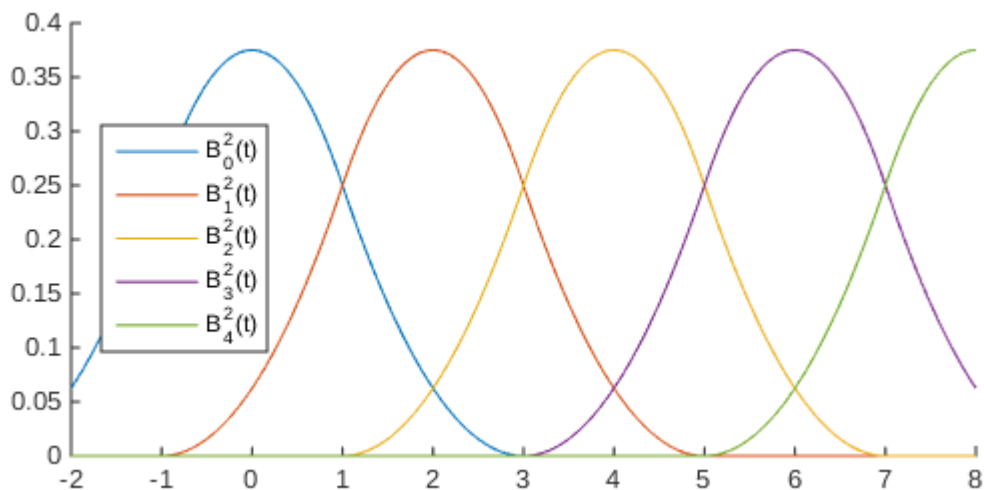
Kubiskie B-splaini B_i^3 ir uzdoti ar

$$B_i^3(t) = \frac{1}{h} \phi_3\left(\frac{t - t_i}{h}\right),$$

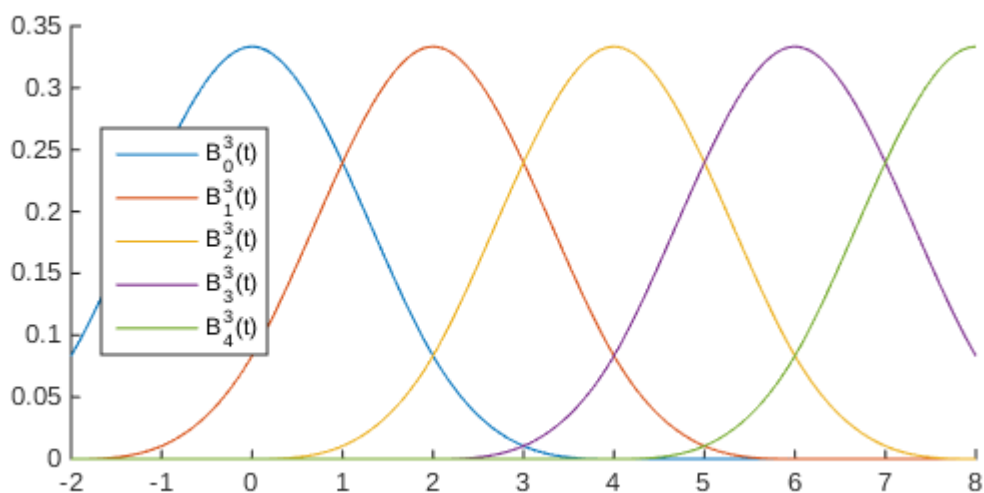
kur

$$\phi_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x + 2)^3, & x \in [-2, -1) \\ -\frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}, & x \in [0, 1) \\ -\frac{1}{6}(x - 2)^3, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \notin [-2, 2]. \end{cases} \quad (1)$$

8. attēlā redzami B_i^3 grafiki, kad $h = 2$, $i \in [0..4]$.



7. att.: 2. pakāpes B-splaini B_i^2



8. att.: 3. pakāpes B-splaini B_i^3

B-splainu īpašības

Funkcijas B_i^n apmierina šādas īpašības:

- intervālā $(t_{i+j}, t_{i+j+1}]$, $j \in [0 .. n]$, funkcija B_i^n ir polinoms;
- $B_i^n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$;
- $B_i^n(t) > 0$ ja $t \in (t_i, t_{i+n+1})$;
- $B_i^n(t) = 0$ ja $t \notin (t_i, t_{i+n+1})$.

B-splainus var konstruēt ar šādas rekurentās sakarības palīdzību [23]:

$$\frac{n}{n+1} B_i^n(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+n+1} - t_i} B_i^{n-1}(t) + \frac{t_{i+n+1} - t}{t_{i+n+1} - t_i} B_{i+1}^{n-1}(t), \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

ņemot vērā, ka $B_i^0(t) = 1/(t_{i+1} - t_i)$ visiem $t \in (t_i; t_{i+1})$.

Savukārt centrālie B-splaini ϕ_n apmierina arī šādas īpašības:

- ϕ_n ir pāra funkcija;
- ϕ_n ir nedilstoša intervālā $(-\infty; 0)$ un neaugoša intervālā $(0; +\infty)$;
- ja $n = 2k - 1$ ir naturāls nepāra skaitlis, tad splaina ϕ_{2k-1} mezgli ir veseli skaitļi $-k, \dots, k$.

Pieņemsim, ka $i + n \leq j$ un $-\infty < t_i < t_{i+1} < \dots < t_j < +\infty$. Tad visiem $z \in \mathbb{R}$ un $x \in (t_{i+n}; t_{j+1}]$ izpildās šāda vienādība [24]:

$$(z - x)^n = \sum_{l=i}^j \frac{t_{l+n+1} - t_l}{n+1} \prod_{s=l+1}^{l+n} (z - t_s) B_l^n(x). \quad (3)$$

Vienkāršas sekas no šīs identitātes [24] ir vienādība $\sum_{l=i}^j \frac{t_{l+n+1} - t_l}{n+1} B_l^n(x) = 1$, kas ir spēkā visiem $x \in (t_{i+n}, t_{j+1})$.

Speciālgadījumā, ja $t_{i+l+1} = t_{i+l} + 1$ visiem $l \in [0..j-i]$, tad izpildās vienādība $B_{i+l}^n(x) = B_i^n(x-l)$, līdz ar to šajā gadījumā iegūstam

$$\sum_{l=0}^{j-i} B_i^n(x-l) = 1, \quad \text{visiem } x \in (t_{i+n}, t_{j+1}). \quad (4)$$

Ja $n \geq 1$, šī vienādība ir spēkā arī pie $x = t_{i+n}$ un $x = t_{j+1}$.

Izvēloties $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$ un $t_i = -n$, $j = i + n$, $t_{l+1} = t_l + 1$ (visiem $l \in [i..j]$) vienādībā (3), iegūstam

$$(z - x)^{2k-1} = \sum_{l=1-k}^k \rho(z-l) \phi_{2k-1}(x-l), \quad (5)$$

kas izpildās visiem $z \in \mathbb{R}$ un $x \in [0; 1]$, kur $\rho(z) := z \prod_{j=1}^{k-1} (z^2 - j^2)$.

Rekurentā sakarība nepāra pakāpes centrālo B-splainu konstrukcijai

No (2) viegli redzēt, ka centrālie B-splaini apmierina šādu sakarību visiem $n \in \mathbb{N}$:

$$\phi_n(t) = w_{n,t}^0 \phi_{n-1}(t+0.5) + w_{n,t}^1 \phi_{n-1}(t-0.5), \quad (6)$$

kur $t \in \mathbb{R}$,

$$w_{n,t}^0 := \frac{n+1+2t}{2n}, \quad w_{n,t}^1 := \frac{n+1-2t}{2n},$$

un $\phi_0(t) = 1$, $t \in (-0.5; 0.5)$. Piemēram, var aprēķināt, ka

$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & t \in (-1, 1); \\ 0, & t \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1). \end{cases} \quad (7)$$

Fiksē $k \in \mathbb{N}$. Kā tika minēts iepriekš, centrālā B-splaina $\phi_{2k-1} \in C^{2k-2}(\mathbb{R})$ mezgli ir skaitļi $-k, \dots, k$.

No vienādības (6) seko

$$\phi_{2k+1}(t) = w_{2k+1,t}^0 \phi_{2k}(t+0.5) + w_{2k+1,t}^1 \phi_{2k}(t-0.5)$$

un

$$\begin{aligned} \phi_{2k}(t+0.5) &= w_{2k,t+0.5}^0 \phi_{2k-1}(t+1) + w_{2k,t+0.5}^1 \phi_{2k-1}(t), \\ \phi_{2k}(t-0.5) &= w_{2k,t-0.5}^0 \phi_{2k-1}(t) + w_{2k,t-0.5}^1 \phi_{2k-1}(t-1). \end{aligned}$$

Tas nozīmē, ka $\phi_{2k+1}(t)$ var tikt pierakstīts formā

$$\omega_1 \phi_{2k-1}(t+1) + \omega_0 \phi_{2k-1}(t) + \omega_{-1} \phi_{2k-1}(t-1),$$

kur

$$\begin{aligned} \omega_1 &= w_{2k+1,t}^0 w_{2k,t+0.5}^0, \\ \omega_0 &= w_{2k+1,t}^0 w_{2k,t+0.5}^1 + w_{2k+1,t}^1 w_{2k,t-0.5}^0, \\ \omega_{-1} &= w_{2k+1,t}^1 w_{2k,t-0.5}^1. \end{aligned}$$

Vienkāršojot šīs izteiksmes, iegūstam, ka

$$\phi_{2k+1}(t) = \sum_{i=-1}^1 \omega_i \phi_{2k-1}(t+i), \quad (8)$$

kur

$$\omega_{\pm 1} = \frac{(k+1 \pm t)^2}{2k(2k+1)}, \quad \omega_0 = \frac{k^2 + k - t^2}{k(2k+1)}. \quad (9)$$

Vienādības (7)–(9) dod iespēju rekursīvi konstruēt nepāra pakāpes centrālos B-splainus.

Nākamajā paragrāfā aprakstīta vispārināta nestrikta sadalījuma konstrukcija, kas balstīta uz nepāra pakāpes centrālo B-splainu ϕ_{2k-1} . No vienādojuma (7) seko, ka piedāvātā konstrukcija vispārina bieži lietotu vienmērīgu nestrikto sadalījumu, kura ģenerējošā funkcija ir trīsstūrveida funkcija [10].

Nestriktā sadalījuma konstrukcija

Pieņemsim, ka fiksēti naturāli skaitļi N, k . Ar A apzīmēsim centrālo B-splainu ar pakāpi $2k - 1$.

Lai konstruētu nestrikto sadalījumu, izmantosim paņēmieni, kas tika ieviests darbā [15], un ņemsim tādas bāzes funkcijas A_i , kas nosedz vairāk nekā divus blakusesošus intervālus (mūsu gadījumā, katra bāzes funkcija nosegs $2k$ intervālus). Šis paņēmieni arī prasa izvēlēties papildus mezglus t_i ar indeksiem $i < 0$ un $i > N$.

Pieņemsim, ka izvēlēts intervāls $[a; b]$. Apzīmē $h = (b - a)/(N + 2k)$.

Ar t_i apzīmēsim vienmērīgi sadalītus mezglus $t_i = a + h(i + k)$, $i \in [-k .. N + k]$; tad

$$a = t_{-k} < t_0 < t_N < t_{N+k} = b.$$

Ar $A_i(t)$ apzīmēsim funkciju $A\left(\frac{t-t_i}{h}\right)$, $i \in [0 .. N]$.

Tad (vispārināto) nestrikto intervāla $[a; b]$ sadalījumu veido funkcijas A_0, \dots, A_N . Var ievērot, ka šis sadalījums ir (h, hk) -vienmērīgs.

1.14. piemērs. Pieņemsim, ka $[a; b] = [0; 1]$ un $N = 5$, $k = 2$, t.i., intervālam $[0; 1]$ konstruēsim vienmērīgu nestrikto pārklājumu ar kubiskajiem B-splainiem. Tad $h = 1/9$ un

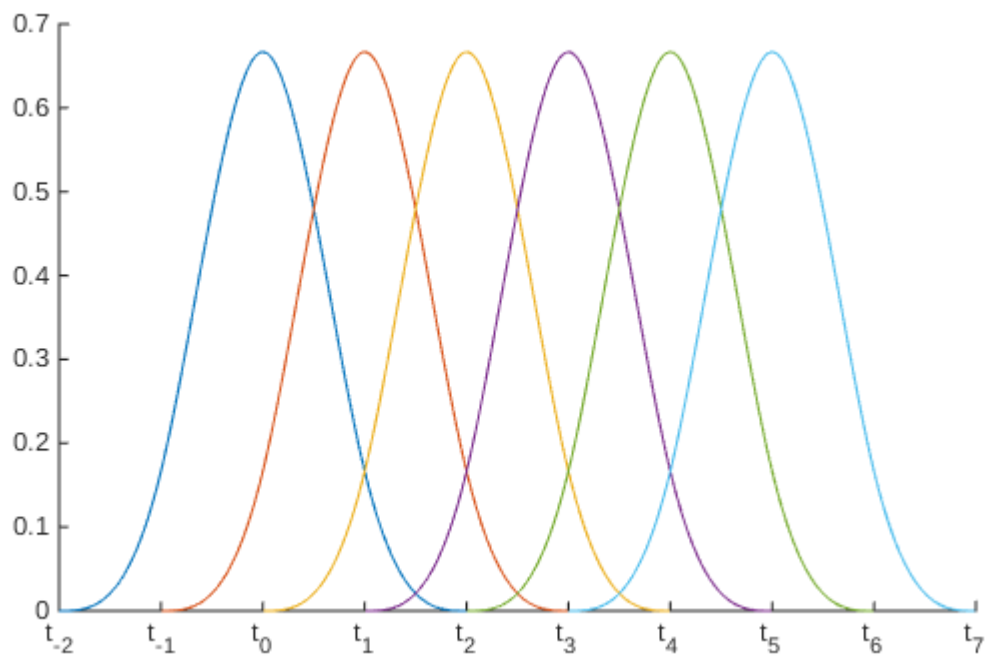
$$t_i = \frac{i + 2}{9}, \quad i \in [-2 .. 7].$$

Nestriktās kopas definētas kā

$$A_i(t) = \phi_3(9t - i - 2), \quad i \in [0 .. 5],$$

kur ϕ_3 uzdots ar (1).

9. attēlā redzami kopu A_i , $i \in [0 .. 5]$, charakteristisko funkciju grafiki.



9. att.: Nestrikto kopu A_0, \dots, A_5 charakteristiskās funkcijas

2. F -TRANSFORMĀCIJAS

2.1. F -transformācijas jēdziens

Aplūko intervālu $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ un fiksē $N \in \mathbb{N}$ un $N + 1$ mezglus t_0, \dots, t_N tā, lai

$$a = t_0 < \dots < t_N = b.$$

Pieņemsim, ka nestrikas kopas $A_0, \dots, A_N : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ veido intervāla $[a, b]$ vispārināto nestrikto sadalījumu (ar mezgliem t_i un robežām h'_i, h''_i , $i \in [0..N]$).

Tiešā F -transformācija

2.1. definīcija. Par funkcijas $f \in C([a, b])$ tiešo F -transformāciju (attiecībā pret vispārināto nestrikto sadalījumu A_0, \dots, A_N) sauc vektoru $(F_0, \dots, F_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, kur

$$F_i = \frac{\int_a^b f(t) A_i(t) dt}{\int_a^b A_i(t) dt}, \quad i \in [0..N].$$

Inversā F -transformācija

Pieņemsim, ka fiksēta $f \in C([a, b])$, kuras tiešā F -transformācija ir (F_0, \dots, F_N) .

2.2. definīcija. Par funkcijas f inverso F -transformāciju (attiecībā pret vispārināto nestrikto sadalījumu A_0, \dots, A_N) sauc funkciju $\mathcal{F}(f, \cdot) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, kas definēta ar vienādību

$$\mathcal{F}(f, t) = \sum_{i=0}^N F_i A_i(t), \quad t \in [a; b].$$

2.2. Augstākas kārtas F -transformācijas

Telpa $L_2(A_i)$

Fiksēsim patvaļīgu $i \in [0..N]$.

Ar $L_2(A_i)$ apzīmēsim Hilberta telpu, kas sastāv no visām kvadrātiski integrējamām funkcijām $f : \bar{E}_i \rightarrow \mathbb{R}$ un kurā skalārais reizinājums $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ (līdz ar to arī ir inducēta norma $\|f\|_i := \langle f, f \rangle_i^{0.5}$) ir uzdots ar sakarību

$$\langle f, g \rangle_i = \int_{\bar{E}_i} f(t)g(t)A_i(t) dt.$$

Piezīme: faktiski šādā veidā telpā $L_2(A_i)$ ir uzdots seminorma $\|\cdot\|_i$. Lai būtu definēta norma, telpu faktorizē, t.i., funkcijas f un g , kuras ir gandrīz visur vienādas (t.i., $\|f - g\|_i = 0$), tiek identificētas kā vienādas. Šādā veidā $\|\cdot\|_i$ kļūst par normu, bet pusdefinītā bilineārā forma (*semidefinite bilinear form*) $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ par skalāro reizinājumu.

Ar $L_2(A_0, \dots, A_N)$ apzīmē telpu, kas sastāv no visām tādām funkcijām $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ka $f|_{\bar{E}_i} \in L_2(A_i)$, katram $i \in [0..N]$.

Telpu $L_2^m(A_i)$ definē kā lineāro apakštelpu telpai $L_2(A_i)$, kuras elementi ir polinomu $\{1, t, t^2, \dots, t^m\}$ (ierobežoti kopā \bar{E}_i) lineāras kombinācijas.

Analogiski kā [10], telpā $L_2^m(A_i)$ konstruē ortogonālu bāzi $\{P_i^0, \dots, P_i^m\}$ sekojošā veidā:

$$P_i^0(t) \equiv 1;$$

$$P_i^{l+1}(t) = \chi^l(t) - \sum_{j=0}^l \lambda_{j,i}^l P_i^j(t), \quad l \in [0..m-1],$$

kur $\lambda_{j,i}^l = \langle \chi^l, P_i^j \rangle_i \|P_i^j\|^{-2}$ un $\chi^l(t) = t^{l+1}$.

Tiešā F^m -transformācija

2.3. definīcija. Pieņemsim $f \in L_2(A_0, \dots, A_N)$. Ar F_i^m apzīmē funkcijas $f|_{\bar{E}_i}$ ortogonālo projekciju uz apakštelpu $L_2^m(A_i)$, $i \in [0..N]$. Tad vektoru (F_0^m, \dots, F_N^m) sauc par funkcijas f tiešo F^m -transformāciju f attiecībā pret sadalījumu A_0, \dots, A_N .

Var ievērot, ka funkcijas f tiešās F^m -transformācijas komponentes var aprēķināt kā

$$F_i^m(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l} P_i^l(t), \quad i \in [0..N], \quad (10)$$

kur

$$c_{i,l} := \frac{\langle f, P_i^l \rangle_i}{\|P_i^l\|_i^2}, \quad l \in [0..m], \quad i \in [0..N] \quad (11)$$

Vēl jo vairāk, ja $f \in \mathbb{P}_m$ (kur ar $\mathbb{P}_>$ saprotam polinomu telpu, kuru pakāpe nepārsniedz m), tad katram fiksētam $i \in [0..N]$ to var izteikt formā $f(t) = \sum_{l=0}^m a_{i,l} P_i^l(t)$ un līdz ar to $c_{i,l} = a_{i,l}$ visiem $l \in [0..m]$.

Inversā F^m -transformācija

2.4. definīcija. Pieņemsim, ka $f \in L_2(A_0, \dots, A_N)$ un tās tiešā F^m -transformācija ir (F_0^m, \dots, F_N^m) . Tad funkciju $\mathcal{F}^m(f, \cdot) : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, kas definēta ar vienādību

$$\mathcal{F}^m(f, t) = \sum_{i=0}^N F_i^m(t) A_i(t)$$

sauc par funkcijas f inverso F^m -transformāciju.

Ja no konteksta būs skaidrs, par kuru funkciju f ir runa, izmantosim arī apzīmējumu $\mathcal{F}^m(t)$.

Var ievērot, ka f inversā F^m -transformācija ir pierakstāma formā

$$\mathcal{F}^m(f, t) = \sum_{i=0}^N F_i^m(t) A_i(t) = \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^m c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t), \quad t \in [a; b].$$

2.3. Ruspini nosacījums

Pieņemsim, ka $[\hat{a}, \hat{b}] \subset [a, b]$, $\hat{a} < \hat{b}$, ir tāds intervāls, ka

$$\sum_{i=0}^N A_i(t) = 1, \quad \text{visiem } t \in [\hat{a}, \hat{b}].$$

Tad saka, ka intervāla $[a, b]$ sadalījums A_0, \dots, A_n apmierina Ruspini nosacījumu intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$. Analogiski 8. lemai darbā [10] var tikt pierādīts šāds apgalvojums:

2.5. apgalvojums. Visiem $p \in \mathbb{P}_m$ polinoma p inversā F^m -transformācija $\mathcal{F}^m(p, \cdot)$ sakrīt ar p intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, t.i., $p(t) = \mathcal{F}^m(p, t)$ visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Pierādījums.

Brīvi fiksē $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Ar $I \subset [0 .. N]$ apzīmē tādu indeksu i kopu, ka $A_i(t) > 0$; tad $\sum_{i \in I} A_i(t) = 1$ un

$$\mathcal{F}^m(p, t) = \sum_{i \in I} F_i^m(p, t) A_i(t). \quad (12)$$

Visiem $i \in I$ funkcija $F_i^m(p, \cdot)$ ir polinoma $p|_{\bar{E}_i}$ ortogonālā projekcija uz apakštelpu $L_2^m(A_i)$. Taču, tā kā $p \in \mathbb{P}_m$, jau izpildās $p|_{\bar{E}_i} \in L_2^m(A_i)$.

Līdz ar to $F_i^m(p, \cdot) \equiv p|_{\bar{E}_i}$. Tā kā visiem $i \in I$ izpildās $t \in \bar{E}_i$, tad no tā izriet, ka

$$F_i^m(p, t) = p(t), \quad \text{visiem } i \in I. \quad (13)$$

Sakarības (12) un (13) dod vienādību

$$\mathcal{F}^m(p, t) = \sum_{i \in I} p(t) A_i(t) = p(t) \sum_{i \in I} A_i(t) = p(t),$$

kas pierāda vajadzīgo. □

3. UZ B-SPLAINIEM BALSTĪTAS F -TRANSFORMĀCIJAS

Turpmāk darbā fiksēsim intervālu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, un naturālus skaitļus $k, N \in \mathbb{N}$.

Mezglus t_0, \dots, t_N definē tā, lai

$$t_i = a + hi, \quad i \in [-k .. N + k],$$

kur $h := (b - a)/N$.

Ar A apzīmē centrālo B-splainu ar pakāpi $2k - 1$; ar $A_i(t)$ apzīmē funkcijas $A\left(\frac{t-t_i}{h}\right)$, $i \in [0 .. N]$. Turpmāk darbā tiks izmantots intervāla $[a; b]$ vispārinātais nestriktais (h, hk) -vienmērīgais sadalījums, ko veido nestriktās kopas A_0, \dots, A_N .

Ar $L_2(A)$ apzīmēsim Hilberta telpu, ko veido kvadrātiski integrējamās funkcijas $f : [-k, k] \rightarrow \mathbb{R}$, ar skalāro reizinājumu $\langle \cdot, \cdot \rangle$, kuru uzdod vienādība

$$\langle f, g \rangle = \int_{-k}^k f(x)g(x)A(x) dx,$$

un atbilstošo normu $\|f\| = \langle f, f \rangle^{0.5}$. Telpu $L_2^m(A)$ definē kā telpas $L_2(A)$ lineāro apakš-telpu, kuras bāzi veido polinomi $\{1, t, t^2, \dots, t^m\}$ (ierobežoti kopā $[-k, k]$).

Analoģiski [10] konstrukcijai, ortogonāla telpas $L_2^m(A)$ bāze $\{P^0, \dots, P^m\}$ tiek izveidota sekojoši:

$$P^0(x) \equiv 1; \tag{14}$$

$$P^{l+1}(x) = \chi^l(x) - \sum_{j=0}^l \lambda_j^l P^j(x), \quad l \in [0 .. m - 1], \tag{15}$$

kur $\lambda_j^l = \langle \chi^l, P^j \rangle \|P^j\|^{-2}$.

Atzīmēsim, ka polinomi P^l , kas definēti kā ortogonālo polinomu sistēma attiecībā pret svāra funkciju A , var tikt aprēķināti ar t.s. trīs locekļu rekursijas formulu (three-term recurrence relation) [25]:

$$P^l(x) = (x - c_l)P^{l-1}(x) - \lambda_l P^{l-2}(x), \quad l \geq 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

kur $P_{-1} \equiv 0$ un, visiem $l \geq 1$ (var redzēt, ka λ_1 var izvēlēties patvaļīgi),

$$c_l = \frac{\int_{-k}^k x(P^{l-1}(x))^2 A(x) dx}{\int_a^b (P^{l-1}(x))^2 A(x) dx},$$

$$\lambda_{l+1} = \frac{\int_{-k}^k (P^l(x))^2 A(x) dx}{\int_a^b (P^{l-1}(x))^2 A(x) dx}.$$

Ievēro, ka c_l izteiksmes skaitītājā ir integrālis no nepāra funkcijas pār simetrisku intervālu; tātad $c_l = 0$ visiem l . Līdz ar to P^l iespējams konstruēt šādi:

$$P^l(x) = xP^{l-1}(x) - \frac{\|P^{l-1}\|^2}{\|P^{l-2}\|^2} P^{l-2}(x), \quad l \geq 2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

kur $P^0 \equiv 1$, $P^1(x) = x$.

Induktīvi (un izmantojot faktu, ka A ir pāra funkcija, bet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ir definēts kā integrālis pār simetrisku intervālu) var parādīt, ka P^l ir nepāra funkcija, ja l ir nepāra, un P^l ir pāra funkcija, ja l ir pāra. Cita acīmredzama, taču svarīga īpašība ir, ka P^l ir ortogonāls (attiecībā pret skalāro reizinājumu $\langle \cdot, \cdot \rangle$) visiem polinomiem, kuru pakāpe ir mazāka par l .

Pieņemsim, ka $i \in [0..N]$ ir fiksēts un aplūko telpu $L_2(A_i)$. Tad skalārais reizinājums $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ var tikt iegūts no $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sekojošā veidā:

$$\langle f, g \rangle_i = \int_{t_i-k}^{t_i+k} f(t)g(t)A_i(t) dt = h \int_{-k}^k f(xh+t_i)g(xh+t_i)A(x) dx = h \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle,$$

kur ar $\tilde{f}(x)$ un $\tilde{g}(x)$ apzīmētas attiecīgi funkcijas $f(xh+t_i)$ un $g(xh+t_i)$.

Līdz ar to telpas $L_2^m(A_i)$ bāzi veido polinomi P_i^l , $l \in [0..m]$, kur

$$P_i^l(t) = P^l\left(\frac{t-t_i}{h}\right) = P^l\left(\frac{t-a}{h} - i\right). \quad (17)$$

turklāt

$$\|P_i^l\|_i^2 = h \|P^l\|^2. \quad (18)$$

3.1. piemērs. Apskata situāciju, kad intervāla $[a; b] = [0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar kubiskajiem B-splainiem un $N = 5$, $k = 2$ (t.i., kā 1.14. piemērā).

Var aprēķināt, ka

$$P^0(x) \equiv 1, \quad P^1(x) = x, \quad P^2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P^3(x) = x^3 - \frac{9x}{10}$$

un

$$\|P^0\|^2 = 1, \quad \|P^1\|^2 = \frac{1}{3}, \quad \|P^2\|^2 = \frac{17}{90}, \quad \|P^3\|^2 = \frac{283}{2100}.$$

No šejienes redzam, ka, piemēram,

$$P_i^1(t) = P^1(9(t - t_i)) = P^1(9t - i - 2) = 9t - i - 2.$$

Ja $f \in L_2(A_0, \dots, A_5)$, tad F^1 -transformācijas komponentes aprēķināmas kā

$$F_i^1(t) = c_{i,0} + c_{i,1}(9t - i - 2), \quad (19)$$

kur

$$c_{i,0} = \frac{\langle f, P_i^0 \rangle_i}{\|P_i^0\|_i^2} = \frac{\langle \tilde{f}, P^0 \rangle}{\|P^0\|^2} = \langle \tilde{f}, P^0 \rangle;$$

$$c_{i,1} = \frac{\langle f, P_i^1 \rangle_i}{\|P_i^1\|_i^2} = \frac{\langle \tilde{f}_i, P^1 \rangle}{\|P^1\|^2} = 3 \langle \tilde{f}_i, P^1 \rangle$$

un $\tilde{f}_i(x) = f(xh + t_i) = f((x + i + 2)/9)$.

Pieņemsim, ka $f(t) = t^3 + t^2 + t + 1$, tad

$$\tilde{f}_i(x) = \frac{x^3 + (3i + 15)x^2 + (3i^2 + 30i + 129)x + (i^3 + 15i^2 + 129i + 935)}{729}$$

un

$$\langle \tilde{f}, P^0 \rangle = \frac{i + 5}{243} \underbrace{\langle x^2, 1 \rangle}_{=\langle x, x \rangle = 1/3} + \frac{i^3 + 15i^2 + 129i + 935}{729} \langle 1, 1 \rangle = \frac{i^3 + 15i^2 + 130i + 940}{729};$$

$$3 \langle \tilde{f}, P^1 \rangle = \frac{1}{243} \underbrace{\langle x^3, x \rangle}_{=\langle x^2, x^2 \rangle = 3/10} + \frac{i^2 + 10i + 43}{81} \langle x, x \rangle = \frac{10i^2 + 100i + 433}{2430}.$$

Ievietojot atrastās vērtības vienādībā (19) pie $i \in [0..5]$, iegūstam, ka tiešā F^1 -

transformācija funkcijai f ir

$$(F_0^1, \dots, F_5^1) = \left(\frac{433t}{270} + \frac{3401}{3645}, \frac{181t}{90} + \frac{1991}{2430}, \frac{673t}{270} + \frac{2302}{3645}, \frac{823t}{270} + \frac{515}{1458}, \frac{331t}{90} - \frac{13}{405}, \frac{1183t}{270} - \frac{3943}{7290} \right).$$

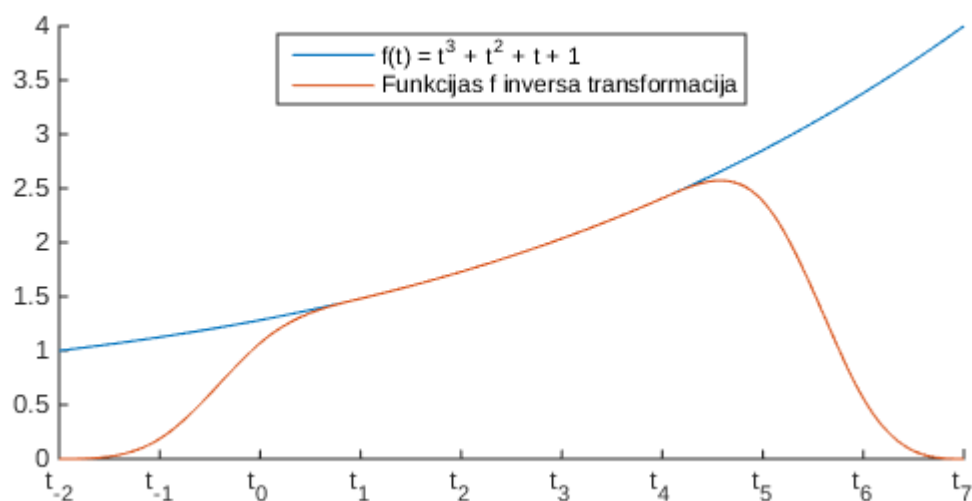
Tā kā

$$\mathcal{F}^1(t) = \sum_{i=0}^N F_i^1(t) A_i(t),$$

tad varam aprēķināt, ka inversā F^1 -transformācija ir

$$\mathcal{F}^1(t) = \begin{cases} \frac{t^3(11691t+6802)}{60}, & t \in [t_{-2}, t_{-1}) \\ -\frac{1701t^4}{5} - \frac{311t^3}{5} + \frac{4417t^2}{45} - \frac{3341t}{270} + \frac{4247}{8748}, & t \in [t_{-1}, t_0) \\ \frac{3087t^4}{20} - \frac{199t^3}{6} - \frac{1016t^2}{15} + \frac{3181t}{90} - \frac{5591}{1620}, & t \in [t_0, t_1) \\ t^3 + t^2 + t + 1, & t \in [t_1, t_4) \\ -\frac{12537t^4}{20} + \frac{41977t^3}{30} - \frac{16858t^2}{15} + \frac{3415t}{9} - \frac{16939}{405}, & t \in [t_4, t_5) \\ \frac{5751t^4}{5} - 3083t^3 + \frac{129809t^2}{45} - \frac{19189t}{18} + \frac{5081009}{43740}, & t \in [t_5, t_6) \\ -\frac{(31941t-3943)(t-1)^3}{60}, & t \in [t_6, t_7]. \end{cases}$$

10. attēlā redzams funkcijas $f(t)$ un tās inversās F^1 -transformācijas $\mathcal{F}^1(t)$ grafiki.



10. att.: Funkcijas $f(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ un tās inversās F^1 -transformācijas grafiki

3.1. Ruspini nosacījums

Apzīmē

$$t_{k-1} = \hat{a}, \quad t_{N-k+1} = \hat{b}, \quad (20)$$

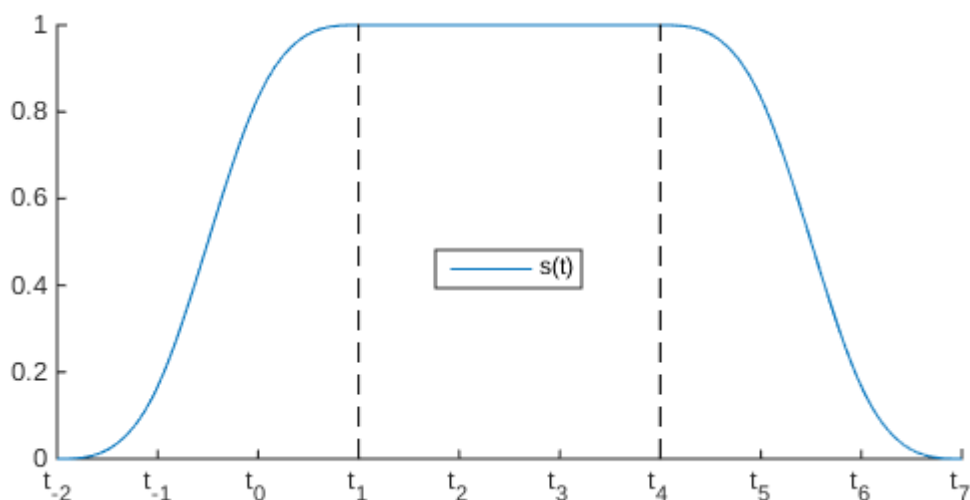
tad $[\hat{a}, \hat{b}] \subset [a, b]$ un visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ izpildās

$$\sum_{i=0}^N A_i(t) = \sum_{i=0}^N A(x-i) = 1, \quad x := \frac{t-t_0}{h}, \quad (21)$$

kur pēdējā nevienādība izriet no (4). Līdz ar to no 2.5. apgalvojuma izriet, ka katram $p \in \mathbb{P}_m$ tā inversā F^m -transformācija sakrīt ar p intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$.

3.2. piemērs. Apskata situāciju, kad intervāla $[a; b] = [0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar kubiskajiem B-splainiem un $N = 5, k = 2$ (t.i., kā 1.14. un 3.1. piemērā).

Definē $s(t) = \sum_{i=0}^N A_i(t)$. Tad $s(t) = 1$ visiem $t \in [t_1, t_4] = [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, tātad šajā intervālā izpildās Ruspini nosacījums. 11. attēlā redzams funkcijas $s(t)$ grafiks.



11. att.: Funkcijas $s(t) = \sum_{i=0}^N A_i(t)$ grafiks

Ievērosim, ka 3.1. piemērā redzējām, ka intervālā $[t_1, t_4]$ funkcija $f(t) = t^3 + t^2 + t + 1$ sakrīt ar savu inverso F^1 -transformāciju, lai arī $f \in \mathbb{P}_3$.

Tālāk parādīsim, ka inversā F^m -transformācija, kas balstīta uz aprakstīto nestrikto sadalījumu, ir precīza polinomiem arī ar augstāku kārtu par m ; taču šim mērķim būs vajadzīgas vairākas B-splainu īpašības, par kurām runāts nākamajā apakšnodaļā.

3.2. B-splainu īpašības 1-vienmērīga režģa gadījumā

Apskata gadījumu, kad mezgli t_i veido vienmērīgu režģi ar soli 1, t.i.,

$$t_i - t_{i-1} = 1, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Tad ir spēkā šādas īpašības:

- 1) $B_{i+1}^n(t) = B_i^n(t - 1)$.
- 2) Simetrija: funkcija $B_i^n(t + c_{i,n})$ ir pāra funkcija ϕ_n (centrālais B-splains), kur

$$c_{i,n} := 0.5(t_i + t_{i+n+1}) = t_i + 0.5(n + 1) = t_{i+n+1} - 0.5(n + 1).$$

- 3) Rekurence: ja $n \geq 1$, tad no (2) seko, ka

$$n B_i^n(t) = (t - t_i) B_i^{n-1}(t) + (t_{i+n+1} - t) B_{i+1}^{n-1}(t). \quad (22)$$

- 4) Atvasinājums: ja $n \geq 1$ un $t \neq t_j$, $j = i, i + 1, \dots, i + n + 1$, tad

$$B_i^n(t)' = \Delta B_i^{n-1}(t), \quad (23)$$

kur apzīmējam

$$\Delta f(t) := f(t) - f(t - 1).$$

Pierādījums.

Pierādījums ar indukciju pēc n . Ja $n = 1$, tad indukcijas bāze acīmredzami izpildās.

Pieņem, ka apgalvojums pierādīts pie $n \geq 1$. Saskaņā ar rekurento sakarību (22),

$$(n + 1) B_i^{n+1}(t)' = (t - t_i) B_i^n(t)' + (t_{i+n+2} - t) B_{i+1}^n(t)' + B_i^n(t) - B_{i+1}^n(t).$$

Pēc induktīvās hipotēzes,

$$B_i^n(t)' = B_i^{n-1}(t) - B_{i+1}^{n-1}(t)$$

un

$$B_{i+1}^n(t)' = B_{i+1}^{n-1}(t) - B_{i+2}^{n-1}(t).$$

Tātad

$$\begin{aligned} & (n+1) B_i^{n+1}(t)' = \\ & = (t-t_i) \left(B_i^{n-1}(t) - B_{i+1}^{n-1}(t) \right) + (t_{i+n+2} - t) \left(B_{i+1}^{n-1}(t) - B_{i+2}^{n-1}(t) \right) + B_i^n(t) - B_{i+1}^n(t). \end{aligned}$$

No otras puses, saskaņā ar rekurento sakarību (22),

$$(t-t_i) B_i^{n-1}(t) + (t_{i+n+2} - 1 - t) B_{i+1}^{n-1}(t) = n B_i^n(t)$$

un

$$(t-t_i-1) B_{i+1}^{n-1}(t) + (t_{i+n+2} - t) B_{i+2}^{n-1}(t) = n B_{i+1}^n(t).$$

Secinām, ka

$$(n+1) B_i^{n+1}(t)' = \left(n B_i^n(t) + B_{i+1}^{n-1}(t) \right) - \left(B_{i+1}^{n-1}(t) + n B_{i+1}^n(t) \right) + B_i^n(t) - B_{i+1}^n(t)$$

jeb

$$(n+1) B_i^{n+1}(t)' = (n+1) (B_i^n(t) - B_{i+1}^n(t)),$$

kas pierāda induktīvo soli.

Visbeidzot, ņemot vērā 1. īpašību,

$$B_i^{n+1}(t)' = B_i^n(t) - B_{i+1}^n(t) = B_i^n(t) - B_i^n(t-1) = \Delta B_i^n(t).$$

□

Tagad centrālajiem B-splainiem $\phi_n(t) = B_i^n(t + c_{i,n})$ varam pamatot šādas īpašības:

1) Rekurence: rekursīvo sakarību (6) var pārrakstīt formā

$$n\phi_n(t) = \left(t + \frac{n+1}{2} \right) \phi_{n-1}(t+0.5) + \left(\frac{n+1}{2} - t \right) \phi_{n-1}(t-0.5). \quad (24)$$

2) Atvasinājums: $\phi_n'(t) = \Delta\phi_{n-1}(t+0.5)$.

Pierādījums.

Izmantojot (23), iegūstam

$$\begin{aligned}
\phi_n'(t) &= B_i^n (t + c_{i,n})' = \\
&= B_i^{n-1} (t + c_{i,n}) - B_i^{n-1} (t + c_{i,n} - 1) = \\
&= B_i^{n-1} (t + c_{i,n-1} + 0.5) - B_i^{n-1} (t + c_{i,n-1} - 0.5) = \\
&= \phi_{n-1} (t + 0.5) - \phi_{n-1} (t - 0.5).
\end{aligned}$$

□

3) Vispārinot iepriekšējo īpašību,

$$\phi_n^{(j)}(t) = \Delta^j \phi_{n-j} \left(t + \frac{j}{2} \right), \quad j \leq n-1. \quad (25)$$

Definēsim n -tās pakāpes polinomu R_n , kura saknes ir

$$-\frac{n-1}{2}, -\frac{n-2}{2}, \dots, \frac{n-2}{2}, \frac{n-1}{2};$$

precīzāk,

$$R_n(x) = \begin{cases} x \prod_{j=1}^{(n-1)/2} (x^2 - j^2), & n - \text{nepāra}; \\ \prod_{j=1}^{n/2} (x^2 - (j-0.5)^2), & n - \text{pāra}. \end{cases}$$

Piezīme: uzskatām, ka $R_0 \equiv 1$.

Atzīmēsim šādas R_n īpašības:

1) Rekurence: ja $n \geq 1$, tad

$$R_n(x) = \left(x - \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1}(x+0.5) = \left(x + \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1}(x-0.5). \quad (26)$$

2) Diference: $\Delta R_n(x+0.5) = n \cdot R_{n-1}(x)$, ja $n \geq 1$.

Pierādījums.

Jāpierāda, ka

$$R_n(x+0.5) - R_n(x-0.5) = n \cdot R_{n-1}(x).$$

Saskaņā ar rekursīvo sakarību (26),

$$R_n(x + 0.5) = \left((x + 0.5) + \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1} \left((x + 0.5) - 0.5 \right)$$

un

$$R_n(x - 0.5) = \left((x - 0.5) - \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1} \left((x - 0.5) + 0.5 \right).$$

Atņemot abas vienādības, iegūst vajadzīgo. □

3) Vispārinot iepriekšējo īpašību,

$$\Delta^j R_n \left(x + \frac{j}{2} \right) = \frac{n!}{(n-j)!} R_{n-j}(x), \quad j \leq n. \quad (27)$$

Tālāk fiksēsim $n = 2k - 1$ kādam naturālam k un apzīmēsim $\rho(x) = R_n(x)$.

3.3. apgalvojums. *Visiem $y \in \mathbb{R}$ izpildās*

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(y-x)A(x) dx = y^{2k-1},$$

kur A ir centrālais B -splains ar pakāpi $2k - 1$ un

$$\rho(x) = x(x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2) \dots (x^2 - (k-1)^2).$$

Pierādījums.

Vajadzīgo parādīsim, pamatojot, ka

$$\frac{d^j}{dy^j} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(y-x)A(x) dx \right) \Big|_{y=0} = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \dots, 2k-2, \\ (2k-1)!, & j = 2k-1, \\ 0, & j \geq 2k. \end{cases}$$

Ievēro, ka

$$\frac{d^j}{dy^j} \left(\int_{\mathbb{R}} \rho(y-x)A(x) dx \right) \Big|_{y=0} = (-1)^{j+1} \int_{\mathbb{R}} \rho^{(j)}(x)A(x) dx.$$

Tātad pierādāmais apgalvojums ir līdzvērtīgs šādam:

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^{(j)}(x)A(x) dx = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \dots, 2k - 2, \\ (2k - 1)!, & j = 2k - 1, \\ 0, & j \geq 2k. \end{cases}$$

Gadījumā, ja $j = 2k - 1$, acīmredzami, ka $\rho^{(j)}(x) \equiv (2k - 1)!$. Tātad šajā gadījumā

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^{(2k-1)}(x)A(x) dx = (2k - 1)! \int_{\mathbb{R}} A(x) dx = (2k - 1)!$$

Gadījumā, ja $j \geq 2k$, tad $\rho^{(j)}(x) \equiv 0$ un apgalvojums ir acīmredzami patiess. Atliek pierādīt, ka pie $j \leq 2k - 2$ izpildās vienādība

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^{(j)}(x)A(x) dx = 0. \quad (28)$$

Brīvi fiksē $j \in [0 .. 2k - 2]$. Parciāli integrējot un ņemot vērā, ka $\text{supp } A \subset [-k, k]$, iegūstam, ka

$$\int_{\mathbb{R}} \rho^{(j)}(x)A(x) dx = (-1) \int_{\mathbb{R}} \rho^{(j-1)}(x)A'(x) dx = \dots = (-1)^j \int_{\mathbb{R}} \rho(x)A^{(j)}(x) dx.$$

Tātad, saskaņā ar (25), vienādība (28) ir ekvivalenta vienādībai

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \Delta^j \phi_{2k-1-j} \left(x + \frac{j}{2} \right) dx. \quad (29)$$

No otras puses, apzīmējot $v(x) = \Delta^{j-1} \phi_{2k-1-j} \left(x + \frac{j-1}{2} \right)$, (29) labā puse ir formā

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \rho(x) \Delta v(x+0.5) dx &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(x) v(x+0.5) dx - \int_{\mathbb{R}} \rho(x) v(x-0.5) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(x-0.5) v(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \rho(x+0.5) v(x) dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \Delta \rho(x+0.5) v(x) dx. \end{aligned}$$

Tātad

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \Delta^j \phi_{2k-1-j} \left(x + \frac{j}{2} \right) dx = - \int_{\mathbb{R}} \Delta \rho(x+0.5) \Delta^{j-1} \phi_{2k-1-j} \left(x + \frac{j-1}{2} \right) dx.$$

Analoģiski turpinot, parāda, ka

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \Delta^j \phi_{2k-1-j} \left(x + \frac{j}{2} \right) dx = (-1)^j \int_{\mathbb{R}} \Delta^j \rho \left(x + \frac{j}{2} \right) \phi_{2k-1-j}(x) dx.$$

Līdz ar to (29) ir ekvivalenta šādai vienādībai:

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \Delta^j \rho \left(x + \frac{j}{2} \right) \phi_{2k-1-j}(x) dx.$$

Nemot vērā (27), to var pārrakstīt šādi:

$$0 = \frac{n!}{(n-j)!} \int_{\mathbb{R}} R_{2k-1-j}(x) \phi_{2k-1-j}(x) dx,$$

kas ir ekvivalenta vienādībai

$$0 = \int_{\mathbb{R}} R_n(x) \phi_n(x) dx, \tag{30}$$

kur $n = 2k - 1 - j$.

Lai parādītu (30) pie $n \geq 1$, izmanto rekurentās sakarības (24) un (26), no kurām izriet

$$\begin{aligned}
n \int_{\mathbb{R}} \phi_n(x) R_n(x) dx &= \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{n+1}{2} + x \right) \phi_{n-1}(x+0.5) \cdot \left(x - \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1}(x+0.5) dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{n+1}{2} - x \right) \phi_{n-1}(x-0.5) \cdot \left(x + \frac{n-1}{2} \right) R_{n-1}(x-0.5) dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{n}{2} + t \right) \phi_{n-1}(t) \cdot \left(t - \frac{n}{2} \right) R_{n-1}(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{n}{2} - t \right) \phi_{n-1}(t) \cdot \left(t + \frac{n}{2} \right) R_{n-1}(t) dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(t^2 - \frac{n^2}{4} \right) \phi_{n-1}(t) R_{n-1}(t) dt - \int_{\mathbb{R}} \left(t^2 - \frac{n^2}{4} \right) \phi_{n-1}(t) R_{n-1}(t) dt = 0.
\end{aligned}$$

□

Mums būs vajadzīgs arī sekojošais apgalvojums. Lai gan ir ticami, ka literatūrā šis fakts ir labi zināms un jau pamatots, citējamu atsauci atrast neizdevās.

3.4. apgalvojums. *Pieņemsim, ka p ir polinoms ar pakāpi n un ir doti $n+1$ dažādi skaitļi $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Tad $n+1$ funkcijas*

$$p(x + x_j), \quad j \in [0..n]$$

veido telpas \mathbb{P}_n bāzi.

Pierādījums.

Apzīmēsim ar T_a nobīdes operatoru (par a), t.i., $T_a f(x) = f(x+a)$, kur $f \in \mathbb{P}$, $\mathbb{P} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_n$. Ar D apzīmēsim atvasināšanas operatoru, t.i., $Df(x) = f'(x)$. Tad ir labi zināms fakts, ka

$$T_a = e^{aD} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j D^j}{j!}.$$

To var viegli pierādīt, izmantojot Teilora izvērījumu polinomam $f \in \mathbb{P}$: pieņem, ka $a \in \mathbb{R}$, tad visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f(x+a) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} f^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} D^j f(x) = e^{aD} f(x).$$

Ja p ir n -tās pakāpes polinoms, tad $D^{n+1}p \equiv 0$. Līdz ar to

$$T_a p(x) = \sum_{j=0}^n \frac{a^j D^j p(x)}{j!}.$$

Tātad

$$p(x + x_k) = T_{x_k} p(x) = \sum_{j=0}^n x_k^j p_j(x),$$

kur $p_j(x) := \frac{p^{(j)}(x)}{j!}$.

Polinomi $p_0(x) = p(x)$, $p_1(x) = p'(x)$, $p_2(x) = 0.5p''(x)$, ..., $p^{(n)}(x) = (n!)^{-1}p^{(n)}(x)$ ir lineāri neatkarīgi, jo $\deg(p_j) = n - j$; tātad tie veido \mathbb{P}_n bāzi.

Izsakot funkcijas $\{p(x + x_j) \mid j = 0 \dots n\}$ šajā bāzē un izveidojot atbilstošo koeficientu matricu, funkciju sistēmas lineārā neatkarība ir ekvivalenta šīs matricas nesingularitātei. Tā kā iegūtā matrica ir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ & & & \ddots & \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Vandermonda matrica, tā ir nesingulāra, jo skaitļi x_j ir dažādi pēc dotā. □

3.5. sekas. Funkciju sistēma $\{\rho(x + j) \mid j = -k + 1 \dots k - 1\}$ veido polinomu telpas \mathbb{P}_{2k-1} bāzi.

3.3. Polinomu aproksimācija, izmantojot uz B-splainiem balstīto F^m -transformāciju

3.6. apgalvojums. Pieņemsim, ka p ir patvaļīgs polinoms, kura pakāpe apmierina nosacījumu $\deg p \leq \min\{l - 1, 2k - 1 - l\}$. Tad visiem $\tau \in [0, 1]$ un $l \in [0 \dots 2k - 1]$ ir spēkā vienādība

$$\sum_{j=1-k}^k p(j) \cdot P^l(\tau - j) A(\tau - j) = 0. \quad (31)$$

Šeit P^l , $l \in [0 \dots 2k - 1]$, ir ortogonālie polinomi, kas uzdoti ar vienādībām (14)-(15) un A ir centrālais B-splains ar pakāpi $2k - 1$.

Pierādījums.

Brīvi fiksē $l \in [0 .. 2k - 1]$. No 3.3. apgalvojuma seko, ka visiem $y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$\int_{-k}^k \rho(y - x)A(x) dx = y^{2k-1}.$$

Ievietojot $z = y - \alpha$ un $x = -\alpha$ vienādībā (5) patvaļīgam $\alpha \in [-1, 0]$, iegūst

$$y^{2k-1} = \sum_{j=1-k}^k \rho(y - j - \alpha)A(-j - \alpha).$$

No abām vienādībām (un fakta, ka A ir pāra, bet ρ nepāra funkcija) secinām, ka

$$\int_{-k}^k \rho(x - y)A(x) dx = \sum_{j=1-k}^k \rho(j + \alpha - y)A(j + \alpha),$$

kas izpildās visiem $\alpha \in [-1, 0]$ un $y \in \mathbb{R}$. Turklāt, ievietojot $y = -i$, $i \in [-k .. k]$, iegūstam sakarības

$$\int_{-k}^k \rho(x + i)A(x) dx = \sum_{j=1-k}^k \rho(j + \alpha + i)A(j + \alpha). \quad (32)$$

Pieņemsim, ka $f \in \mathbb{P}_{2k-1}$. Tā kā $\deg \rho = 2k - 1$, tad, atbilstoši 3.4. apgalvojumam, eksistē reāli skaitļi f_i , $i \in [-k .. k]$, ka izpildās

$$f(x) = \sum_{i=-k}^k f_i \rho(x + i), \quad \text{visiem } x \in \mathbb{R}. \quad (33)$$

Izmantojot (33) un integrāļa linearitāti, iegūst

$$\int_{-k}^k f(x)A(x) dx = \sum_{i=-k}^k f_i \int_{-k}^k \rho(x + i)A(x) dx;$$

no (32) seko

$$\sum_{i=-k}^k f_i \int_{-k}^k \rho(x + i)A(x) dx = \sum_{i=-k}^k f_i \sum_{j=1-k}^k \rho(j + \alpha + i)A(j + \alpha);$$

atkal izmantojot (33), iegūstam vienādību

$$\sum_{i=-k}^k f_i \sum_{j=1-k}^k \rho(j + \alpha + i) A(j + \alpha) = \sum_{j=1-k}^k f(j + \alpha) A(j + \alpha).$$

Tātad

$$\int_{-k}^k f(x) A(x) dx = \sum_{j=1-k}^k f(j + \alpha) A(j + \alpha). \quad (34)$$

Definē $f(x) = p(x - \alpha) \cdot P^l(x)$, kur p ir tāds polinoms, kura pakāpe apmierina nosacījumu $\deg p \leq \min \{l - 1, 2k - 1 - l\}$. Tad $f \in \mathbb{P}_{2k-1}$ un no (34) seko

$$\int_{-k}^k p(x - \alpha) P^l(x) A(x) dx = \sum_{j=1-k}^k p(j) \cdot P^l(j + \alpha) A(j + \alpha).$$

Tā kā $p \in \mathbb{P}_{l-1}$, tad tas ir ortogonāls pret P^l (attiecībā pret skalāro reizinājumu $\langle \cdot, \cdot \rangle$) un vienādības (34) kreisā puse ir 0. Līdz ar to

$$\sum_{j=1-k}^k p(j) \cdot P^l(j + \alpha) A(j + \alpha) = 0, \quad \alpha \in [-1, 0]. \quad (35)$$

Ievieto $\tau = -\alpha \in [0, 1]$. Ņemot vērā, ka P^l ir vai nu pāra, vai nepāra funkcija, bet A ir pāra funkcija, ir pierādīts vajadzīgais. \square

3.7. teorēma. Pieņemsim, ka $f \in \mathbb{P}_{2k-1}$ un m ir tāds nenegatīvs vesels skaitlis, ka $2m + 1 \geq \deg f$.

Tad f sakrīt ar savu inverso F^m -transformāciju $\mathcal{F}^m(f, \cdot)$ (attiecībā pret (h, hk) -vienmērīgo vispārināto nestrikto sadalījumu, kas balstīts uz centrālajiem B -splainiem ar pakāpi $2k - 1$) intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, kas uzdots ar (20).

Pierādījums.

Fiksē patvaļīgu $f \in \mathbb{P}_{2k-1}$ un pieņemsim, ka $\deg f = r \leq 2k - 1$. Izvēlas veselu skaitli $m \geq \frac{r-1}{2}$. Apskatīsim gadījumu, kad $m < r$, citādi apgalvojums triviāli izriet no inverso F^m -transformāciju īpašībām.

Tā kā polinomi $\{P_i^0, \dots, P_i^r\}$ jebkuram $i \in [0..N]$ veido telpas \mathbb{P}_r bāzi, tad polinomu f var izteikt formā

$$f(t) = \sum_{l=0}^r c_{i,l} P_i^l(t) \quad (36)$$

kur $c_{i,l}$ ir reāli koeficienti, $l \in [0..r]$, $i \in [0..N]$.

Tad funkcijas f tiešās F^m -transformācijas i -to komponenti var pierakstīt kā

$$F_i^m(f, t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l} P_i^l(t), \quad t \in [a; b],$$

katram $i \in [0..N]$. Tātad polinoma f inversā F^m -transformācija ir pierakstāma kā

$$\mathcal{F}^m(f, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^m c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t), \quad t \in [a; b].$$

Lai pierādītu teorēmu, pietiekami parādīt, ka visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ un $l \in [m+1..r]$ izpildās vienādība

$$\sum_{i=0}^N c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t) = 0. \quad (37)$$

Var parādīt, ka katram $l \in [0..r]$ eksistē tāds polinoms $p_l \in \mathbb{P}_{r-l}$ ka $c_{i,l} = p_l(i)$ visiem $i \in [0..N]$:

- Apzīmē $Q^l(t) := P_0^l(t) = P^l\left(\frac{t-a}{h}\right)$, $l \in [0..r]$; pierakstām šo polinomu formā

$$Q^l(t) = \sum_{s=0}^l q_{s,l} t^s.$$

- No (17) izriet, ka $P_i^l(t) = Q^l(t-i)$. Tātad (36) var pārrakstīt formā

$$f(t) = \sum_{l=0}^r c_{i,l} Q^l(t-i). \quad (38)$$

- Ievietojot $i=0$ vienādībā (38), iegūstam

$$f(t) = \sum_{l=0}^r c_{i,0} Q^l(t), \quad i \in [0..N].$$

- Secinām, ka visiem $i \in [0..N]$ ir spēkā

$$\sum_{l=0}^r c_{i,l} Q^l(t-i) = \sum_{l=0}^r c_{0,l} Q^l(t). \quad (39)$$

- Visiem $l \in [0..r]$ ir spēkā $\deg(Q^l) = l$; tātad katram $s \in [0..l]$ polinomu t^s var

izteikt kā Q^u , $u \in [0..s]$, lineāru kombināciju:

$$t^s = \sum_{u=0}^s \alpha_{s,u} Q^u(t).$$

- Izteiksim $Q^l(t+i)$ bāzē $Q^j(t)$, $j \in [0..l]$, $l \in [0..r]$, $i \in [0..N]$:

$$Q^l(t+i) = \sum_{j=0}^l d_{j,l}^i Q^j(t). \quad (40)$$

- Aizvietojojt vienādībā (40) argumentu t ar $t-i$, iegūst vienādību

$$Q^l(t) = \sum_{j=0}^l d_{j,l}^i Q^j(t-i). \quad (41)$$

- Izmantojot Q^l izvirzījumu ar koeficientiem $q_{s,l}$, Ņūtona binoma formulu un vairāk-kārt mainot summācijas kārtību, nonākam pie šādas izteiksmes:

$$\begin{aligned} Q^l(t+i) &= \sum_{s=0}^l q_{s,l} (t+i)^s = \\ &= \sum_{s=0}^l q_{s,l} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} i^{s-j} t^j = \\ &= \sum_{s=0}^l q_{s,l} \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} i^{s-j} \sum_{r=0}^j \alpha_{j,r} Q^r(t) = \\ &= \sum_{s=0}^l \sum_{j=0}^s \sum_{u=0}^j \binom{s}{j} \alpha_{j,u} q_{s,l} i^{s-j} Q^u(t) = \\ &= \sum_{s=0}^l \sum_{u=0}^s \sum_{j=u}^s \binom{s}{j} \alpha_{j,u} q_{s,l} i^{s-j} Q^u(t) = \\ &= \sum_{u=0}^l \sum_{s=u}^l \sum_{j=u}^s \binom{s}{j} \alpha_{j,u} q_{s,l} i^{s-j} Q^u(t), \end{aligned}$$

kur $l \in [0..r]$ un $i \in [0..N]$.

- Apzīmē

$$h_{u,l}(z) = \sum_{s=u}^l \sum_{j=u}^s \binom{s}{j} \alpha_{j,u} q_{s,l} z^{s-j} \in \mathbb{P}_{l-u}, \quad u \in [0..l], \quad l \in [0..r],$$

tad ir parādīts, ka visiem $l \in [0..r]$ un $i \in [0..N]$ izpildās

$$Q^l(t+i) = \sum_{u=0}^l h_{u,l}(i) Q^u(t).$$

- No iegūtās vienādības un (40) izriet

$$\sum_{u=0}^l (h_{u,l}(i) - d_{u,l}^i) Q^u(t) \equiv 0.$$

- Tā kā Q^u ir lineāri neatkarīgi polinomi, tad secinām, ka

$$d_{u,l}^i = h_{u,l}(i), \quad i \in [0..N], \quad u \in [0..l], \quad l \in [0..r]. \quad (42)$$

- Izmantojot (41), pārveido vienādības (39) labo pusi:

$$\sum_{l=0}^r c_{i,l} Q^l(t-i) = \sum_{l=0}^r \sum_{j=0}^l c_{0,l} d_{j,l}^i Q^j(t-i) = \sum_{j=0}^r \sum_{l=j}^r c_{0,l} d_{j,l}^i Q^j(t-i).$$

jeb

$$\sum_{l=0}^r c_{i,l} Q^l(t-i) = \sum_{l=0}^r \sum_{j=l}^r c_{0,j} d_{l,j}^i Q^l(t-i), \quad i \in [0..N]. \quad (43)$$

- Katram $l \in [0..r]$ apzīmē

$$p_l(z) = \sum_{j=l}^r c_{0,j} h_{l,j}(z) \in \mathbb{P}_{r-l},$$

tad, saskaņā ar (42), visiem $i \in [0..N]$ ir spēkā

$$p_l(i) = \sum_{j=l}^r c_{0,j} d_{l,j}^i$$

un no (43) izriet

$$\sum_{l=0}^r (c_{i,l} - p_l(i)) Q^l(t-i) \equiv 0,$$

katram fiksētam $i \in [0..N]$. Tā kā $Q^l(t-i)$, $l \in [0..r]$, ir lineāri neatkarīgi polinomi, tad secinām, ka ir pamatots vajadzīgais:

$$c_{i,l} = p_l(i), \quad i \in [0..N], \quad l \in [0..r]. \quad (44)$$

- Atzīmēsim, ka gadījumā, kad $l > m$, polinoma p_l pakāpe apmierina nosacījumus

$$\deg p_l \leq r - l \leq 2k - 1 - l \quad \text{un} \quad \deg p_l \leq r - (m + 1) \leq m \leq l - 1.$$

Fiksē patvaļīgus $l \in [m + 1 .. r]$ un $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Eksistē tāds indekss $j \in [k - 1 .. N - k]$, ka $t \in [t_j, t_{j+1}]$ (piezīme: tādi indeksi var būt vairāki, t.i., $t = t_i$ kādam $i \in [k .. N - k - 1]$); tad var izvēlēties jebkuru no pieļaujamām j vērtībām, piemēram, $j = i$).

Tad $A_i(t) = 0$ visiem $i \notin [j - k + 1 .. j + k]$, līdz ar to

$$\sum_{i=0}^N c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t) = \sum_{i=j+1-k}^{j+k} p_l(i) P_i^l(t) A_i(t).$$

Šīs vienādības labā puse, izmantojot A_i definīciju un vienādību (17), var tikt pārrakstīta kā

$$\sum_{i=1-k}^k p_l(i+j) P^l\left(\frac{t-t_{i+j}}{h}\right) A\left(\frac{t-t_{i+j}}{h}\right).$$

Apzīmē $\tau = (t - t_j)/h \in [0, 1]$, tad $(t - t_{i+j})/h = \tau - i$ visiem $i \in [1 - k .. k]$ un esam parādījuši, ka

$$\sum_{i=0}^N c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t) = \sum_{i=1-k}^k p_l(i+j) P^l(\tau - i) A(\tau - i).$$

Apzīmē $p(x) = p_l(x+j)$, tad p pakāpe ir $\deg p = \deg p_l$, līdz ar to $\deg p \leq \min\{l - 1, 2k - 1 - l\}$ un no 3.6. apgalvojuma izriet

$$\sum_{i=0}^N c_{i,l} P_i^l(t) A_i(t) = \sum_{i=1-k}^k p(i) P^l(\tau - i) A(\tau - i) = 0,$$

kas pierāda vienādību (37).

Tātad visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ polinoma f inversā F^m -transformācija ir vienāda ar

$$\sum_{j=0}^N \sum_{l=0}^r c_{j,l} P_j^l(t) A_j(t) = \sum_{j=0}^N f(t) A_j(t) = f(t),$$

kur pēdējā vienādība izriet no Ruspini nosacījuma (21). □

4. APROKSIMĀCIJAS ĪPAŠĪBAS

4.1. Aproximācijas kvalitāte, izmantojot inverso F^m -transformāciju

Sekojošā teorēma dod funkcijas f aproximācijas kvalitātes novērtējumu, aproksimējot f ar tās inverso F^m -transformāciju.

4.1. teorēma. Pieņemsim, ka $k \in \mathbb{N}$ un nenegatīvi veseli skaitļi r, m apmierina $m \leq k-1$, $r \leq 2m+1$.

Ja $f \in C^{r+1}([a, b])$ un $\mathcal{F}^m(f, \cdot)$ ir tās inversā F^m -transformācija attiecībā pret (h, hk) -vienmērīgo vispārināto nestrikto sadalījumu (kuru uzdod centrālie B-splaini ar pakāpi $2k-1$), tad visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ (kur intervāla galapunkti ir definēti ar (20)) izpildās novērtējums

$$|f(t) - \mathcal{F}^m(f, t)| \leq O(h^{r+1}).$$

Pierādījums.

Pierādījumā ar $c_{i,l}(g)$ tiks apzīmēts koeficients (definēti ar (11)) pie P_i^l funkcijas $g \in L_2(A_0, \dots, A_n)$ tiešās F^m -transformācijas i -tajā komponentē.

Pielietojot funkcijai f Teilora formulu ar atlikuma locekli integrālajā formā,

$$f(t) = p_r(f, t) + \frac{1}{r!} \int_a^t f^{(r+1)}(\tau) (t - \tau)^r d\tau,$$

kur $p_r(f, \cdot) \in \mathbb{P}_r$ ir funkcijas f Teilora polinoms un a ir izvirzījuma punkts.

Šo vienādību var pārrakstīt kā

$$f(t) = p_r(f, t) + I_r(f, t),$$

atlikuma locekli $I_r(f, \cdot)$ pierakstot formā

$$I_r(f, t) = \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^r}{r!} ds.$$

Ņemot vērā, ka pie dotajiem nosacījumiem visiem $p \in \mathbb{P}_r$ intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$ izpildās

$\mathcal{F}^m(p, \cdot) \equiv p$, secinām, ka visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ ir spēkā

$$f(t) - \mathcal{F}^m(f, t) = I_r(f, t) - \mathcal{F}^m(I_r(f, \cdot), t).$$

Ievērosim, ka visiem $l \in [0 .. m]$, $i \in [0 .. N]$ izpildās

$$\begin{aligned} c_{i,l}(I_r(f, \cdot)) &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{\mathbb{R}} I_r(f, \tau) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^\tau f^{(r+1)}(s) \frac{(\tau-s)^r}{r!} ds \right) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b f^{(r+1)}(s) \frac{(\tau-s)_+^r}{r!} ds \right) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_a^b f^{(r+1)}(s) K_{r,s}(\tau) ds \right) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_a^b f^{(r+1)}(s) \left(\int_{\mathbb{R}} P_i^l(\tau) A_i(\tau) K_{r,s}(\tau) d\tau \right) ds = \\ &= \int_a^b f^{(r+1)}(s) c_{i,l}(K_{r,s}) ds, \end{aligned}$$

kur

$$K_{r,s}(\tau) := \frac{(\tau-s)_+^r}{r!}.$$

Tad

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^m(I_r(f, \cdot), t) &= \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^m c_{i,l}(I_r(f, \cdot)) P_i^l(t) A_i(t) = \\ &= \int_a^b f^{(r+1)}(s) \sum_{i=0}^N \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P_i^l(t) A_i(t) ds = \\ &= \int_a^b f^{(r+1)}(s) \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds \end{aligned}$$

un

$$f(t) - \mathcal{F}^m(f, t) = \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^r}{r!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds \quad (45)$$

visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Ievērosim, ka (45) var pārrakstīt formā

$$f(t) - \mathcal{F}^m(f, t) = \int_a^b f^{(r+1)}(s) \left(K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \right) ds \quad (46)$$

visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Saskaņā ar Holdera (Hölder) nevienādību,

$$|f(t) - \mathcal{F}^m(f, t)| \leq \|f^{(r+1)}\|_\infty Z_{m,r}(t), \quad (47)$$

kur

$$Z_{m,r}(t) := \int_a^b |K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)| ds, \quad t \in [\hat{a}, \hat{b}].$$

Apskatīsim $K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)$ kad $s \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ kādam fiksētam $i_0 \in [-k..N + k - 1]$.

Izmantosim šādu pierakstu visiem $i \in [0..N]$:

$$H_i(t) := \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P_i^l(t),$$

$$G_i(t) := \sum_{l=0}^m c_{i,l}(q_{r,s}) P_i^l(t),$$

kur $q_{r,s}(t) = \frac{(t-s)^r}{r!} \in \mathbb{P}_r$. Tad

$$\mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) = \sum_{i=0}^N H_i(t) A_i(t)$$

un

$$\frac{(t-s)^r}{r!} = \mathcal{F}^m(q_{r,s}, t) = \sum_{i=0}^N G_i(t) A_i(t).$$

pie $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Ja $i \leq i_0 - k$, tad $A_i(t) = 0$ pie $t \geq t_{i_0}$. Tātad visiem $i \leq i_0 - k$ izpildās

$$A_i(t) K_{r,s}(t) = 0, \quad \text{visiem } t \in \mathbb{R},$$

$$c_{i,l}(K_{r,s}) = 0, \quad \text{visiem } l \in [0..m],$$

līdz ar to $H_i(t) = 0$.

Analoģiski, ja $i > i_0 + k$, tad $A_i(t) = 0$ visiem $t \leq t_{i_0+1}$. Tātad pie $i > i_0 + k$ izpildās

$$\begin{aligned} c_{i,l}(K_{r,s}) &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{t_{i_0+1}}^{t_i+k} K_{r,s}(\tau) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{t_{i_0+1}}^{t_i+k} q_{r,s}(\tau) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = c_{i,l}(q_{r,s}), \end{aligned}$$

visiem $l \in [0..m]$, un līdz ar to $H_i(t) = G_i(t)$.

Ņemot vērā šos novērojumus, iegūstam, ka pie $t > t_{i_0+2k}$ izpildās

$$\sum_{i=0}^N H_i(t) A_i(t) = \sum_{i>i_0+k} H_i(t) A_i(t) = \sum_{i>i_0+k} G_i(t) A_i(t) = q_{r,s}(t) = K_{r,s}(t),$$

un pie $t < t_{i_0-2k+1}$ izpildās

$$\sum_{i=0}^N H_i(t) A_i(t) = \sum_{i \leq i_0-k} H_i(t) A_i(t) = 0 = K_{r,s}(t).$$

Esam pamatojuši, ka

$$K_{r,s}(t) = \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \quad (48)$$

kad $t \notin [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$. Tātad starpību

$$K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) = K_{r,s}(t) - \sum_{i=\max\{i_0-k+1,0\}}^{\min\{i_0+3k-1,N\}} H_i(t) A_i(t) \quad (49)$$

nepieciešams novērtēt tikai gadījumā, kad $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$.

Pierādīsim, ka pie $s \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ un $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$ ir spēkā

$$\begin{aligned} K_{r,s}(t) &= O(h^r), \\ H_i(t) &= O(h^r), \quad \text{ja } i_0 - k + 1 \leq i \leq i_0 + 3k - 1. \end{aligned}$$

Pirmais novērtējums seko no tā, ka pie šādiem nosacījumiem

$$|t - s| \leq t_{i_0+2k} - t_{i_0} = 2kh,$$

līdz ar to

$$|K_{r,s}(t)| \leq \frac{1}{r!} |t-s|^r \leq \frac{(2k)^r}{r!} h^r = O(h^r).$$

Otrajā novērtējumā izmanto

$$H_i(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P_i^l(t),$$

kur

$$c_{i,l}(K_{r,s}) = \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \int_{t_{i-k}}^{t_{i+k}} K_{r,s}(\tau) P_i^l(\tau) A_i(\tau) d\tau = \frac{1}{\|P_i^l\|_i^2} \langle K_{r,s}, P_i^l \rangle_i.$$

Nemot vērā arī (17) un (18), šo var pārrakstīt kā

$$H_i(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P^l \left(\frac{t-t_i}{h} \right). \quad (50)$$

kur

$$c_{i,l}(K_{r,s}) = \frac{1}{h \|P^l\|^2} \cdot \langle K_{r,s}, P_i^l \rangle_i.$$

Saskaņā ar Košī nevienādību,

$$\langle K_{r,s}, P_i^l \rangle_i \leq \|K_{r,s}\|_i \|P_i^l\|_i,$$

kur $\|P_i^l\|_i = \sqrt{h} \|P^l\|$ un

$$\|K_{r,s}\|_i = \langle K_{r,s}, K_{r,s} \rangle_i^{0.5} = \left(\int_{t_{i-k}}^{t_{i+k}} K_{r,s}^2(\tau) A_i(\tau) d\tau \right)^{0.5}.$$

Saskaņā ar vidējās vērtības teorēmu, eksistē tāds $\tau_0 \in [t_{i-k}, t_{i+k}]$, ka

$$\int_{t_{i-k}}^{t_{i+k}} K_{r,s}^2(\tau) A_i(\tau) d\tau = 2kh \cdot K_{r,s}^2(\tau_0) A_i(\tau_0).$$

Tā kā $s \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ un $i_0 - k + 1 \leq i \leq i_0 + 3k - 1$, tad

$$|K_{r,s}(\tau_0)| \leq \frac{1}{r!} |\tau_0 - s|^r < \frac{(4kh)^r}{r!} = O(h^r);$$

turklāt $A_i(\tau_0) \in [0, 1]$. Secinām, ka

$$\|K_{r,s}\|_i = O(h^{r+0.5}),$$

līdz ar to

$$c_{i,l}(K_{r,s}) = \frac{1}{h} \frac{\langle K_{r,s}, P^l \rangle_i}{\|P^l\|^2} = O(h^r). \quad (51)$$

Lai parādītu, ka $H_i(t) = O(h^r)$, pietiekami vēl parādīt, ka $P^l \left(\frac{t-t_i}{h} \right) = O(1)$. Taču, tā kā $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$ un $i_0 - k + 1 \leq i \leq i_0 + 3k - 1$, tad

$$|t - t_i| < 5kh = O(h),$$

tātad $\frac{t-t_i}{h} = O(1)$. Ņemot vērā, ka P^l nav atkarīgs no h , tas nozīmē, ka arī $P^l \left(\frac{t-t_i}{h} \right) = O(1)$. Līdz ar to no (50) tagad izriet, ka $H_i(t) = O(h^r)$ pie dotajiem nosacījumiem.

Ņemot vērā, ka $A_i(t) = O(1)$, no (49) tagad izriet, ka

$$\begin{aligned} |K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)| &= O(h^r), \\ K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) &= 0 \quad \text{pie } |t - s| \geq 2kh, \end{aligned}$$

visiem $s \in [a, b]$ un $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Līdz ar to visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ izpildās

$$Z_{m,r}(t) = \int_a^b |K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)| \, ds \leq \max_{s \in [t-2kh, t+2kh] \cap [a, b]} |K_{r,s}(t) - \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)| \cdot 4kh$$

un

$$Z_{m,r}(t) \leq O(h^{r+1}),$$

kas, ņemot vērā (47), noslēdz pierādījumu. \square

4.2. Atvasinājumu aproksimācija

Līdzīgi ir iespējams novērtēt funkcijas f atvasinājumu aproksimācijas kvalitāti, aproksimējot tos ar tās inversās F^m -transformācijas atvasinājumiem.

4.2. teorēma. *Pieņemsim, ka $k \in \mathbb{N}$ un nenegatīvi veseli skaitļi r, m apmierina $m \leq k-1$, $r \leq 2m+1$.*

Ja $f \in C^{r+1}([a, b])$ un $\mathcal{F}^m(f, \cdot)$ ir tās inversā F^m -transformācija attiecībā pret

(h, hk) -vienmērīgo vispārināto nestrikto sadalījumu (kuru uzdod centrālie B-splaini ar pakāpi $2k - 1$), tad visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ (kur intervāla galapunkti ir definēti ar (20)) un visiem $n \in [0..r]$ izpildās novērtējums

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} f(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(f, t) \right| \leq O(h^{r+1-n}).$$

Pierādījums.

Ievērosim, ka gadījums $n = 0$ ir pierādīts ar iepriekšējo teorēmu, tādēļ var pieņemt, ka $n \geq 1$.

Līdzīgi kā iepriekš, apzīmēsim

$$K_{r,s}(t) = \frac{(t-s)_+^r}{r!} \in C^{r-1}(\mathbb{R}),$$

tad, saskaņā ar (45),

$$f(t) - \mathcal{F}^m(f, t) = \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^r}{r!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds,$$

visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Atvasina šo izteiksmi pēc t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^r}{r!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds \right) &= \\ &= 1 \cdot f^{(r+1)}(t) \frac{(t-t)^r}{r!} + \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \frac{d}{dt} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds = \\ &= \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^{r-1}}{(r-1)!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \frac{d}{dt} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds. \end{aligned}$$

Līdzīgi turpinot, iegūst

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(f, t) = \int_a^t f^{(r+1)}(s) \frac{(t-s)^{r-n}}{(r-n)!} ds - \int_a^b f^{(r+1)}(s) \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) ds,$$

jeb

$$\frac{d^n}{dt^n} f(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(f, t) = \int_a^b f^{(r+1)}(s) \left(K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \right) ds,$$

visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

Saskaņā ar Holdera nevienādību,

$$\left| \frac{d^n}{dt^n} f(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(f, t) \right| \leq \|f^{(r+1)}\|_C Z_{m,r,n}(t), \quad (52)$$

kur

$$Z_{m,r,n}(t) = \int_a^b \left| K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \right| ds, \quad t \in [\hat{a}, \hat{b}].$$

Atkal pieņem, ka $s \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ kādam fiksētam $i_0 \in [-k..N + k - 1]$. Apskata gadījumu, kad $t \notin [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$. Tad $t \neq s$, tāpēc $K_{r,s}$ ir diferencējama n reizes punktā t un

$$\frac{d^n}{dt^n} K_{r,s}(t) = K_{r-n,s}(t).$$

Atvasina vienādību (48) n reizes, iegūstot

$$K_{r-n,s}(t) = \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t), \quad (53)$$

visiem $t \notin [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$. Tātad starpība

$$K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t)$$

jānovērtē tikai intervālā $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$.

Līdzīgi kā iepriekš, visiem $i \in [0..N]$ izmanto pierakstu

$$H_i(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P_i^l(t).$$

Ievēro, ka pie $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$ izpildās

$$\mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) = \sum_{i=\max\{i_0-k+1, 0\}}^{\min\{i_0+3k-1, N\}} H_i(t) A_i(t)$$

un

$$\frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) = \sum_{i=\max\{i_0-k+1, 0\}}^{\min\{i_0+3k-1, N\}} \frac{d^n}{dt^n} \left(H_i(t) A_i(t) \right).$$

Saskaņā ar Leibnica reizinājuma likumu,

$$\frac{d^n}{dt^n} \left(H_i(t) A_i(t) \right) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_i^{(j)}(t) A_i^{(n-j)}(t).$$

Ievēro, ka, saskaņā ar A_i definīciju,

$$A_i(t) = A \left(\frac{t - t_i}{h} \right);$$

tātad

$$A_i^{(n-j)}(t) = \frac{1}{h^{n-j}} A^{(n-j)} \left(\frac{t - t_i}{h} \right).$$

Līdz ar to jānovērtē starpība

$$K_{r-n,s}(t) - \sum_{i=\max\{i_0-k+1,0\}}^{\min\{i_0+3k-1,N\}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{1}{h^{n-j}} H_i^{(j)}(t) A_i^{(n-j)} \left(\frac{t - t_i}{h} \right), \quad (54)$$

kad $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$.

Pierādīsim, ka pie $s \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$ un $t \in [t_{i_0-2k+1}, t_{i_0+2k}]$ ir spēkā

$$K_{r-n,s}(t) = \frac{(t-s)_+^{r-n}}{(r-n)!} = O(h^{r-n}),$$

$$H_i^{(j)}(t) = O(h^{r-j}), \quad \text{ja } i_0 - k + 1 \leq i \leq i_0 + 3k - 1.$$

Pirmais apgalvojums seko no tā, ka pie šādiem nosacījumiem

$$\frac{(t-s)_+^{r-n}}{(r-n)!} \leq \frac{1}{(r-n)!} |t-s|^{r-n} \leq \frac{1}{(r-n)!} (2kh)^{r-n} = O(h^{r-n}).$$

Lai pamatotu otru apgalvojumu, izmantosim iepriekš pierādīto vienādību (50) un novērtējumu (51), no kā izriet

$$H_i(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) P^l \left(\frac{t - t_i}{h} \right),$$

kur $c_{i,l}(K_{r,s}) = O(h^r)$. Atvasinot šo vienādību pēc t , iegūst

$$H_i^{(j)}(t) = \sum_{l=0}^m c_{i,l}(K_{r,s}) \cdot \frac{1}{h^j} (P^l)^{(j)} \left(\frac{t - t_i}{h} \right).$$

Ņemot vērā, ka $c_{i,l}(K_{r,s}) = O(h^r)$, bet $\frac{t-t_i}{h} = O(1)$ un $(P^l)^{(j)}$ nav atkarīgs no h , iegūst $H_i(t) = O(h^{r-j})$.

Tā kā $A^{(n-j)}$ nav atkarīgs no h , tad $A^{(n-j)} = O(1)$ un ir pamatots novērtējums

$$\frac{1}{h^{n-j}} H_i^{(j)}(t) A^{(n-j)} \left(\frac{t-t_i}{h} \right) = O(h^{r-n}).$$

Tātad izteiksme (54) pēc absolūtās vērtības novērtējama no augšas ar $O(h^{r-n})$.

Esam parādījuši, ka

$$\left| K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \right| \leq O(h^{r-n}),$$

$$K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) = 0 \quad \text{pie } |t-s| \geq 2kh,$$

visiem $s \in [a, b]$ un $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$. Līdz ar to visiem $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ izpildās

$$Z_{m,r,n}(t) \leq \max_{s \in [t-2kh, t+2kh] \cap [a,b]} \left| K_{r-n,s}(t) - \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(K_{r,s}, t) \right| \cdot 4kh$$

un

$$Z_{m,r,n}(t) \leq O(h^{r+1-n}),$$

kas, ņemot vērā (52), noslēdz pierādījumu. □

4.3. piemērs. Apskata situāciju, kad intervāla $[a; b] = [0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar kubiskajiem B-splainiem. Aplūkosim funkcijas $f(t) = \exp(t) - 1$ (un tās atvasinājumu) aproksimāciju ar tās inverso F^1 -transformāciju (un tās atvasinājumiem), kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$ un parametrs N pieņem vērtības $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

Šeit un turpmāk ar $\mathcal{E}_m^n(f)$ (vai \mathcal{E}_m^n , ja no konteksta ir skaidrs, par kuru funkciju f ir runa) apzīmēsim lieluma $\left\| \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(t) - f^{(n)}(t) \right\|_\infty$ novērtējumu.

1. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie šīm N vērtībām.

1. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^1 kļūdu novērtējumi

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2
5	$1.5288 \cdot 10^{-5}$	$7.5844 \cdot 10^{-5}$	$6.0202 \cdot 10^{-3}$
50	$1.5541 \cdot 10^{-8}$	$4.0466 \cdot 10^{-7}$	$2.2046 \cdot 10^{-4}$
500	$2.1521 \cdot 10^{-12}$	$5.0936 \cdot 10^{-10}$	$2.6594 \cdot 10^{-6}$

Aplūkosim šo pašu piemēru, kad intervāla $[0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar piektās pakāpes B-splainiem (t.i., $k = 3$) un $f(t) = \exp(t) - 1$ tiek aproksimēta ar inverso F^2 -transformāciju \mathcal{F}^2 . Tādā gadījumā iespējams aplūkot arī f trešās un ceturtās pakāpes atvasinājumu aproksimācijas kļūdas $\frac{d^3}{dt^3}\mathcal{F}^2(t) - f^{(3)}(t)$ un $\frac{d^4}{dt^4}\mathcal{F}^2(t) - f^{(4)}(t)$, kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

2. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

2. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^2 kļūdu novērtējumi, $k = 3$

N	\mathcal{E}_2^0	\mathcal{E}_2^1	\mathcal{E}_2^2	\mathcal{E}_2^3	\mathcal{E}_2^4
5	$1.44452 \cdot 10^{-8}$	$3.43009 \cdot 10^{-8}$	$1.6565 \cdot 10^{-6}$	$1.0081 \cdot 10^{-4}$	$1.1929 \cdot 10^{-2}$
50	$1.23279 \cdot 10^{-12}$	$1.02873 \cdot 10^{-11}$	$3.51231 \cdot 10^{-9}$	$1.1273 \cdot 10^{-6}$	$6.6073 \cdot 10^{-4}$
500	$2.47132 \cdot 10^{-18}$	$1.67574 \cdot 10^{-16}$	$5.70257 \cdot 10^{-13}$	$1.6646 \cdot 10^{-9}$	$8.7604 \cdot 10^{-6}$

Pielikumā var aplūkot f un \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 grafikus (attiecīgi 12. un 13. attēls 1. pielikumā), funkcijas vērtību aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (14.–16. attēls 1. pielikumā), funkcijas pirmā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (17.–19. attēls 1. pielikumā), funkcijas otrā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (20.–22. attēls 1. pielikumā), kā arī $k = 3$ un $m = 2$ gadījumā funkcijas trešā un ceturtā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus (23. un 24. attēls 1. pielikumā).

4.4. piemērs. Apskata situāciju, kad intervāla $[a; b] = [0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar kubiskajiem B-splainiem un $f(t) = \sin(\sqrt{17}\pi t)$, bet parametrs N pieņem vērtības $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

Aplūkosim funkcijas f un tās atvasinājumu aproksimācijas kļūdas $f(t) - \mathcal{F}^1(t)$, $\frac{d^1}{dt^1}\mathcal{F}^1(t) - f'(t)$ un $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}^1(t) - f''(t)$, kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

3. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie šīm N vērtībām.

3. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^1 kļūdu novērtējumi

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2
5	$1.433 \cdot 10^{-1}$	2.2605	$6.3453 \cdot 10$
50	$1.6829 \cdot 10^{-4}$	$4.6731 \cdot 10^{-3}$	2.3955
500	$2.2418 \cdot 10^{-8}$	$5.2949 \cdot 10^{-6}$	$2.7704 \cdot 10^{-2}$

Aplūkosim šo pašu piemēru, kad intervāla $[0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar piektās pakāpes B-splainiem (t.i., $k = 3$) un $f(t) = \sin(\sqrt{17}\pi t)$ tiek aproksimēta ar inverso F^2 -transformāciju \mathcal{F}^2 . Tādā gadījumā iespējams aplūkot arī f trešās un ceturrtās pakāpes atvasinājumu aproksimācijas kļūdas $\frac{d^3}{dt^3}\mathcal{F}^2(t) - f^{(3)}(t)$ un $\frac{d^4}{dt^4}\mathcal{F}^2(t) - f^{(4)}(t)$, kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

4. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

4. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^2 kļūdu novērtējumi, $k = 3$

N	\mathcal{E}_2^0	\mathcal{E}_2^1	\mathcal{E}_2^2	\mathcal{E}_2^3	\mathcal{E}_2^4
5	$1.7621 \cdot 10^{-2}$	$3.6707 \cdot 10^{-1}$	2.8029	$2.2656 \cdot 10^2$	$1.1323 \cdot 10^4$
50	$2.3249 \cdot 10^{-6}$	$3.5643 \cdot 10^{-5}$	$6.2639 \cdot 10^{-3}$	2.1344	$1.2235 \cdot 10^3$
500	$4.3402 \cdot 10^{-12}$	$2.9552 \cdot 10^{-10}$	$9.9995 \cdot 10^{-7}$	$2.9231 \cdot 10^{-3}$	$1.5368 \cdot 10$

Pielikumā var aplūkot f un \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 grafikus (attiecīgi 25. un 26. attēls 2. pielikumā), funkcijas vērtību aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (27.–29. attēls 2. pielikumā), funkcijas pirmā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (30.–32. attēls 2. pielikumā), funkcijas otrā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (33.–35. attēls 2. pielikumā), kā arī $k = 3$ un $m = 2$ gadījumā funkcijas trešā un ceturrtā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus (36. un 37. attēls 2. pielikumā).

4.5. piemērs. Apskata situāciju, kad intervāla $[a; b] = [0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar kubiskajiem B-splainiem un $f(t) = \sin(\exp(7t))$, bet parametrs N pieņem vērtības $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

Aplūkosim funkcijas f un tās atvasinājumu aproksimācijas kļūdas $f(t) - \mathcal{F}^1(t)$, $\frac{d^1}{dt^1}\mathcal{F}^1(t) - f'(t)$ un $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{F}^1(t) - f''(t)$, kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

5. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie šīm N vērtībām.

5. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^1 kļūdu novērtējumi

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2
5	1.0182	$7.2571 \cdot 10^2$	$5.4293 \cdot 10^5$
50	1.0482	$5.1870 \cdot 10^3$	$2.7038 \cdot 10^7$
500	1.0426	$7.3389 \cdot 10^3$	$5.4109 \cdot 10^7$

No 5. tabulas redzam, ka kļūdu novērtējumi, palielinot N un samazinot soļa h lielumu, nesamazinās, bet tieši pretēji – pieaug. To var saistīt ar faktu, ka funkcija lieliem t strauji oscilē; palielinot N , paplašinās arī intervāls, kur izpildās Ruspini nosacījums, taču paplašinātajā intervālā arī strauji pieaug funkcijas atvasinājumi, kas ietekmē kļūdas lielumu. Šo apsvērumu dēļ korektāk būtu salīdzināt aproksimācijas kļūdu novērtējumus viena un tā paša intervāla ietvaros.

6. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi, kad kļūdas novērtētas sašaurinātā intervālā $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, t.i., mainīgais t pieder intervālam, kurā izpildās Ruspini nosacījums pie $N = 5$. Redzam, ka pie $N = 50$ aproksimācijas kļūdas ir apmēram tikpat lielas kā pie $N = 5$ un tikai pie $N = 500$ kļūdu kārtā sāk samazināties.

To var izskaidrot ar faktu, ka tabulēta maksimālā kļūda, bet $O(h^{r+1-n})$ novērtējumi 4.2. teorēmā ir iegūti fiksētam punktam t no intervāla $[\hat{a}; \hat{b}]$; līdz ar to apskatītā intervāla labajā galapunktā, kur funkcijas atvasinājumi strauji oscilē un pieņem lielas vērtības, konstante pirms h^{r+1-n} ir liela, tāpēc pie apskatītajām N vērtībām nav novērojams kļūdas samazinājums. Vērts atzīmēt, ka kļūda straujāk samazinās apskatītā intervāla kreisajā galapunktā. Iespējams, lietderīgāk būtu bijis aplūkot nevis \mathcal{E}_n^m , bet lieluma $\left\| \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}^m(t) - f^{(n)}(t) \right\|_1$ novērtējumu, par ko liek domāt 38. un 38. attēli.

6. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^1 kļūdu novērtējumi intervālā $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2
5	1.0182	$7.2571 \cdot 10^2$	$5.4293 \cdot 10^5$
50	1.0482	$7.2569 \cdot 10^2$	$5.4293 \cdot 10^5$
500	$1.4959 \cdot 10^{-1}$	$1.2073 \cdot 10^2$	$2.0288 \cdot 10^5$

7. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi, kad kļūdas novērtētas sašaurinātā intervālā $[\frac{1}{18}; \frac{17}{18}]$, t.i., mainīgais t pieder intervālam, kurā izpildās Ruspini nosacījums pie $N = 50$. Redzam, ka pie $N = 500$ aproksimācijas kļūdas ir apmēram tikpat lielas kā pie $N = 50$.

7. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^1 kļūdu novērtējumi intervālā $[\frac{1}{18}; \frac{17}{18}]$

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2
50	1.0482	$5.1870 \cdot 10^3$	$2.7038 \cdot 10^7$
500	1.0402	$5.1854 \cdot 10^3$	$2.6767 \cdot 10^7$

Aplūkosim šo pašu piemēru, kad intervāla $[0; 1]$ nestriktais sadalījums uzdots ar piektās pakāpes B-splainiem (t.i., $k = 3$) un f tiek aproksimēta ar inverso F^2 -transformāciju \mathcal{F}^2 . Tādā gadījumā iespējams aplūkot arī f trešās un ceturtās pakāpes atvasinājumu aproksimācijas kļūdas $\frac{d^3}{dt^3}\mathcal{F}^2(t) - f^{(3)}(t)$ un $\frac{d^4}{dt^4}\mathcal{F}^2(t) - f^{(4)}(t)$, kad $t \in [\hat{a}, \hat{b}]$.

8. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$.

8. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^2 ($k = 3$) kļūdu novērtējumi

N	\mathcal{E}_2^0	\mathcal{E}_2^1	\mathcal{E}_2^2	\mathcal{E}_2^3	\mathcal{E}_2^4
5	1.0067	$3.0787 \cdot 10^2$	$1.0141 \cdot 10^5$	$2.9439 \cdot 10^7$	$1.0227 \cdot 10^{10}$
50	1.0230	$4.0859 \cdot 10^3$	$1.6789 \cdot 10^7$	$6.8336 \cdot 10^{10}$	$2.8263 \cdot 10^{14}$
500	1.0235	$7.1335 \cdot 10^3$	$5.1189 \cdot 10^7$	$3.6450 \cdot 10^{11}$	$2.6237 \cdot 10^{15}$

9. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi, kad kļūdas novērtētas sašaurinātā intervālā $[\frac{5}{11}; \frac{6}{11}]$, t.i., mainīgais t pieder intervālam, kurā izpildās Ruspini nosacījums pie $N = 5$. Redzam, ka pie $N = 50$ aproksimācijas kļūdas ir apmēram tikpat lielas kā pie $N = 5$ un tikai pie $N = 500$ kļūdu kārta sāk samazināties.

9. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^2 ($k = 3$) kļūdu novērtējumi intervālā $[\frac{5}{11}; \frac{6}{11}]$

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2	\mathcal{E}_2^3	\mathcal{E}_2^4
5	1.0067	$3.0787 \cdot 10^2$	$1.0141 \cdot 10^5$	$2.9439 \cdot 10^7$	$1.0227 \cdot 10^{10}$
50	1.0230	$3.0778 \cdot 10^2$	$1.0136 \cdot 10^4$	$2.9470 \cdot 10^7$	$1.0230 \cdot 10^{10}$
500	$7.8454 \cdot 10^{-4}$	$2.6947 \cdot 10^{-1}$	$2.1469 \cdot 10^2$	$5.1178 \cdot 10^5$	$2.74509 \cdot 10^9$

10. tabulā redzami aproksimācijas kļūdu novērtējumi, kad kļūdas novērtētas sašaurinātā intervālā $[\frac{5}{56}; \frac{51}{56}]$, t.i., mainīgais t pieder intervālam, kurā izpildās Ruspini nosacījums pie $N = 50$. Redzam, ka pie $N = 500$ aproksimācijas kļūdas ir apmēram tikpat lielas kā pie $N = 50$.

10. tabula: Funkcijas $f(t)$ aproksimācijas ar \mathcal{F}^2 kļūdu novērtējumi intervālā $[\frac{5}{56}; \frac{51}{56}]$

N	\mathcal{E}_1^0	\mathcal{E}_1^1	\mathcal{E}_1^2	\mathcal{E}_2^3	\mathcal{E}_2^4
50	1.0230	$4.0859 \cdot 10^3$	$1.6789 \cdot 10^7$	$6.8336 \cdot 10^{10}$	$2.8263 \cdot 10^{14}$
500	1.0227	$4.0859 \cdot 10^3$	$1.6789 \cdot 10^7$	$6.8336 \cdot 10^{10}$	$2.8263 \cdot 10^{14}$

Pielikumā var aplūkot f un \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 grafikus (attieci 38. un 39. attēls 3. pielikumā), funkcijas vērtību aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (40.–42. attēls 3. pielikumā), funkcijas pirmā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (43.–45. attēls 3. pielikumā), funkcijas otrā atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus abos gadījumos pie $N = 5$, $N = 50$ un $N = 500$ (46.–48. attēls 3. pielikumā), kā arī $k = 3$ un $m = 2$ gadījumā funkcijas trešā un ceturta atvasinājuma aproksimācijas kļūdu grafikus (49. un 50. attēls 3. pielikumā).

Nobeigums

Šajā darbā esam aprakstījuši augstākas kārtas F -transformācijas gadījumā, kad atbilstošais (vispārinātais (h, hk) -vienmērīgais) nestriktais sadalījums ir uzdots ar nepāra pakāpes centrālo B-splainu palīdzību. Tika demonstrētas rekursīvās sakarības šo splainu konstruēšanai; tāpat aprakstīts, kā, izmantojot aplūkojamā sadalījuma vienmērīgumu, iegūt ortogonālo polinomu sistēmas P_i^l , $l \in [0 .. m]$, ja ir zināmi polinomi P^l , $l \in [0 .. m]$.

Darbā parādīts, ka pie izvēlētajā konstrukcijas inversā F^m -transformācija ir precīza visiem polinomiem \mathbb{P}_{2m+1} (pie nosacījuma, ka $2m + 1$ nepārsniedz ģenerējošā B-splaina pakāpi) intervālā, kur izpildās Ruspini nosacījums. Salīdzinājumam, patvaļīga nestrikta sadalījuma gadījumā līdz šim literatūrā bija zināms, ka inversā F^m -transformācija ir precīza visiem polinomiem \mathbb{P}_m .

Izmantojot šo rezultātu, izdevies pamatot, ka B-splainu izmantošana par bāzes funkcijām vienmērīgā nestriktā sadalījumā ļauj uzlabot aproksimācijas kvalitāti, aproksimējot funkciju ar tās inverso F^m -transformāciju. Atbilstoši iegūtajiem rezultātiem, fiksētam m aproksimācija būs precīzākā, ja tiks izvēlēti B-splaini ar pakāpi $2m + 1$ vai augstāku un aproksimētas funkcijas no telpas $C^{2m+2}([a; b])$. Šajā gadījumā ir pamatots, ka aproksimācijas kļūda novērtējama ar $O(h^{2m+2})$, kur h raksturo vienmērīgā režģa soli.

Analoģiski izdevies arī pierādīt, ka inversās F^m -transformācijas atvasinājumi aproksimē dotās funkcijas atvasinājumus intervālā, kur izpildās Ruspini nosacījums. Precīzāk, ja izvēlēti B-splaini ar pakāpi $2m + 1$ vai augstāku un funkcija no telpas $C^{2m+2}([a; b])$, tad n -tā atvasinājuma ($n \in [0 .. 2m + 1]$) aproksimācijas kļūda novērtējama ar $O(h^{2m+2-n})$.

Iespējams aplūkot arī vairākargumentu funkcijas aproksimācijas problēmu; no teorijas ir zināms, ka pastāv vairākargumentu F -transformācija [13] un arī vairākargumentu B-splaini [26, 27]. Var jautāt, vai ir iespējams uzlabot zināmos aproksimācijas kļūdu novērtējumus, apvienojot šīs abas pieejas. Līdzīgi, literatūrā ir aplūkotas arī diskrētās F -transformācijas [12]; dabiski jautāt, vai šeit ir iespējams izmantot darbā aprakstītās idejas, lai panāktu labāku aproksimācijas kvalitāti.

Vispārīgāk, var aplūkot situāciju, kad citādi definē telpu $L_2^m(A_i)$. Piemēram, aproksimējot periodiskas funkcijas, dabiska izvēle šķiet trigonometrisko polinomu telpa ar bāzi $1, \cos(jx), \sin(jx)$, $j \in [1 .. m]$. Ņemot vērā, ka literatūrā ir pazīstami arī trigonometriskie (arī vairākargumentu trigonometriskie) B-splaini [28, 29], arī šajā virzienā pastāv iespēja apvienot F -transformāciju pieeju ar jau labi zināmām metodēm.

Izmantotā literatūra un avoti

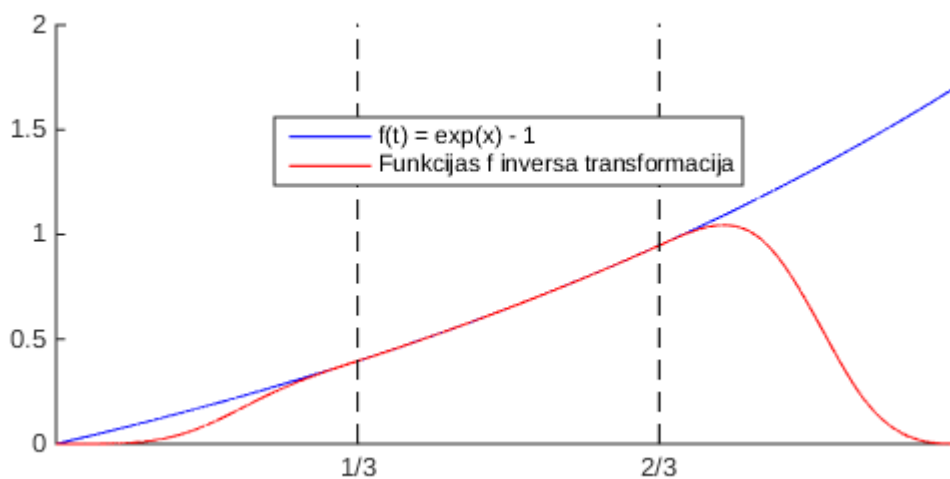
- [1] I. Perfilieva and E. Haldeeva, “Fuzzy transformation,” *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, vol. 4, pp. 1946–1948, 2001.
- [2] I. Perfilieva, “Fuzzy transforms: Theory and applications,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, no. 8, pp. 993–1023, 2006.
- [3] I. Perfilieva, “Fuzzy transforms and their applications to image compression,” in *Fuzzy logic and applications. 6th international workshop, WILF 2005, Crema, Italy, September 15–17, 2005. Revised selected papers*, ser. LNCS (LNAI), I. Bloch, A. Petrosino and A. G. B. Tettamanzi, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2006, vol. 3849, pp. 19–31.
- [4] M. Daňková and R. Valášek, “Full fuzzy transform and the problem of image fusion.” *Journal of Electrical Engineering*, vol. 57, no. 7/S, pp. 82–84, 2006.
- [5] F. Di Martino, V. Loia and S. Sessa, “A segmentation method for images compressed by fuzzy transforms,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 161, no. 1, pp. 56–74, 2010.
- [6] S. Bhattacharya (Halder) and P. Das, “A method for approximating solution of ordinary differential equations by using fuzzy transforms,” *Journal of Nonlinear Analysis and Optimization*, vol. 5, no. 1, pp. 81–87, 2014.
- [7] M. Stepnicka and R. Valasek, “Numerical solution of partial differential equations with help of fuzzy transform,” in *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 2005, pp. 1104–1109.
- [8] V. Novák, I. Perfilieva, M. Holčapek and V. Kreinovich, “Filtering out high frequencies in time series using F-transform,” *Information Sciences*, vol. 274, pp. 192–209, 2014.

- [9] V. Novak, V. Pavliska, I. Perfilieva and M. Stepnicka, “F-transform and fuzzy natural logic in time series analysis,” in *Proceedings of the 8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Atlantis Press, 2013, pp. 40–47.
- [10] I. Perfilieva, M. Daňková and B. Bede, “Towards a higher degree F-transform,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 180, no. 1, pp. 3–19, 2011.
- [11] I. Perfilieva and V. Kreinovich, “Fuzzy transforms of higher order approximate derivatives: A theorem,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 180, pp. 55–68, 2011.
- [12] M. Holcapek and T. Tichy, “Discrete fuzzy transform of higher degree,” in *2014 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, 2014, pp. 604–611.
- [13] P. Hodakova and I. Perfilieva, “ F^1 -transform of functions of two variables,” in *Proceedings of the 8th conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology*. Atlantis Press, 2013, pp. 547–553.
- [14] L. Stefanini, “Fuzzy transform and smooth function,” in *Proceedings of IFSA/EUSFLAT 2009, Lisbon, Portugal*, vol. 9, 2009, pp. 579–784.
- [15] L. Stefanini, “F-transform with parametric generalized fuzzy partitions,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 180, no. 1, pp. 98–120, 2011.
- [16] M. Holčapek, I. Perfilieva, V. Novák and V. Kreinovich, “Necessary and sufficient conditions for generalized uniform fuzzy partitions,” *Fuzzy Sets and Systems*, 2014 (in press).
- [17] I. Perfilieva, “F-transform,” in *Handbook of Computational Intelligence*, J. Kacprzyk and W. Pedrycz, Eds. Springer Berlin Heidelberg, 2015 (in press).
- [18] B. Bede and I. J. Rudas, “Approximation properties of fuzzy transforms,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 180, pp. 20–40, 2011.
- [19] I. Kodorane and S. Asmuss, “On approximation properties of spline based F-transform with respect to fuzzy m-partition,” in *Proceedings of EUSFLAT 2013, Milan, Italy*, ser. Advances in Intelligent Systems Research, J. Montero, G. Pasi and D. Ciucci, Eds. Atlantis Press, 2013, vol. 32, pp. 772–779.
- [20] H. J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory - and Its Applications*. Springer, 1996.
- [21] I. J. Schoenberg, *Cardinal Spline Interpolation*, ser. CBMS. SIAM, 1973, vol. 12.
- [22] I. J. Schoenberg, “On interpolation by spline functions and its minimal properties,” in *On Approximation Theory*, ser. ISNM. Birkhäuser, 1964, vol. 5, pp. 109–129.

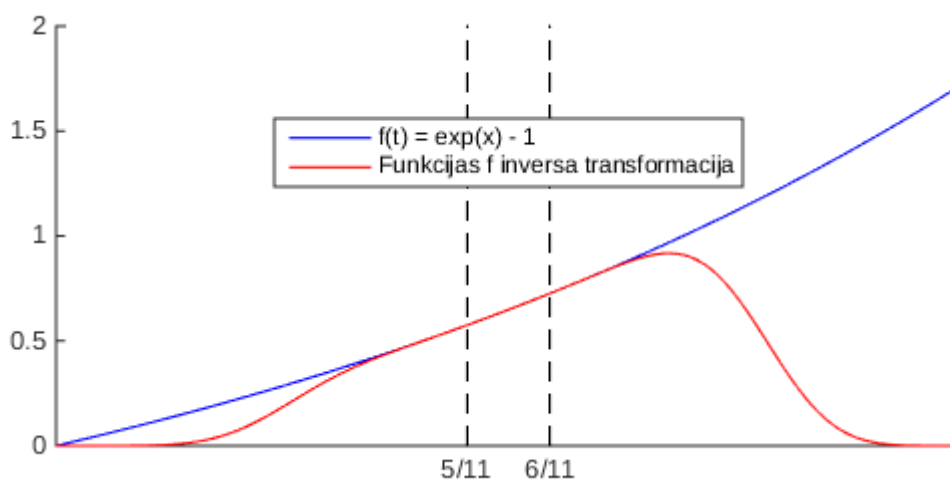
- [23] C. de Boor, *A Practical Guide to Splines - Revised Edition*, ser. Applied Mathematical Sciences. Springer, 2001, vol. 115.
- [24] M. J. Marsden, “An identity for spline functions with applications to variation-diminishing spline approximation,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 3, no. 1, pp. 7–49, 1970.
- [25] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, ser. Mathematics and its Applications. Gordon and Breach, 1978, vol. 13.
- [26] T. I. Mueller, “Geometric Modelling with multivariate B-splines,” Ph.D. dissertation, University of Utah, 1986.
- [27] C. de Boor, “What is a multivariate spline?” in *ICIAM '87: Proceedings of the First International Conference on Industrial and Applied Mathematics*, ser. Proceedings in Applied Mathematics Series, J. McKenna and R. Temam, Eds. SIAM, 1988, pp. 90–101.
- [28] T. Lyche and R. Winther, “A stable recurrence relation for trigonometric B-splines,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 25, no. 3, pp. 266–279, 1979.
- [29] P. E. Koch, “Multivariate trigonometric B-splines,” *Journal of Approximation Theory*, vol. 54, no. 2, pp. 162–168, 1988.

Pielikumi

1. pielikums. Funkcijas $f(x) = \exp(x) - 1$ un tās atvasinājumu aproksimācija

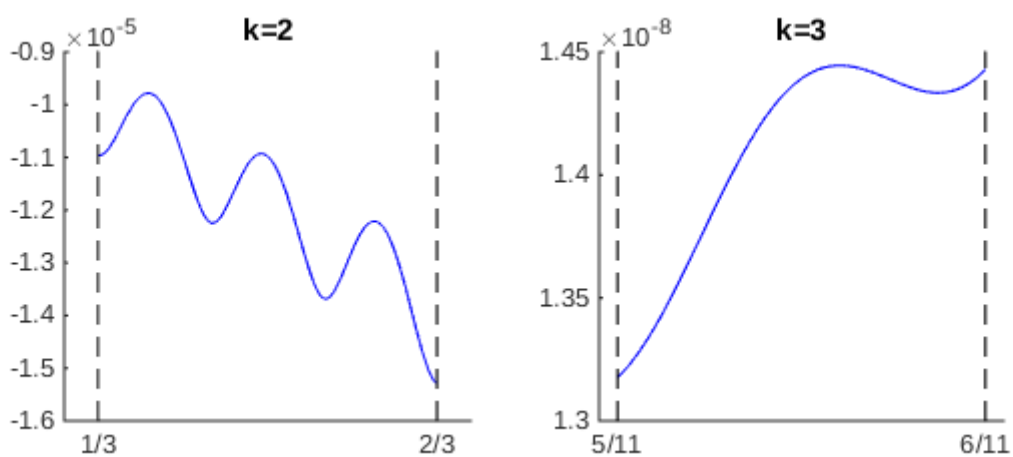


12. att.: Funkciju $f(t) = \exp(t) - 1$ un \mathcal{F}^1 grafiki, $N = 5$, $k = 2$

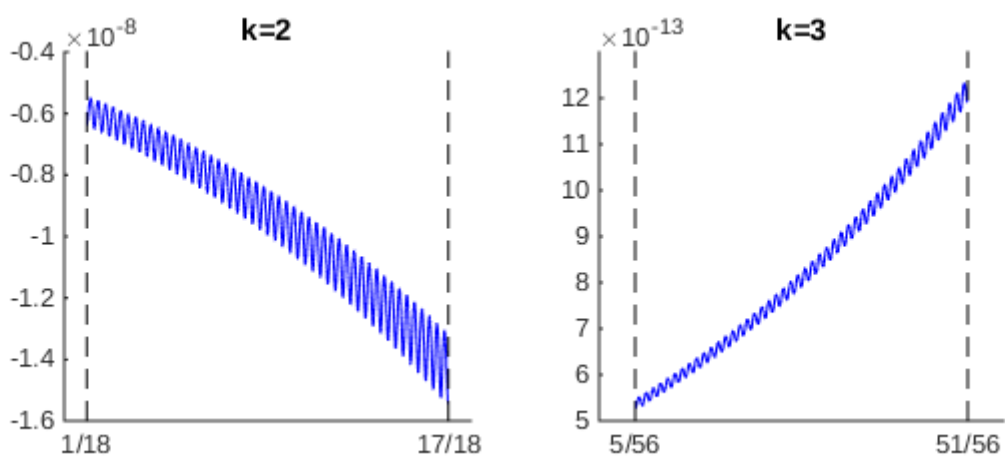


13. att.: Funkciju $f(t) = \exp(t) - 1$ un \mathcal{F}^2 grafiki, $N = 5$, $k = 3$

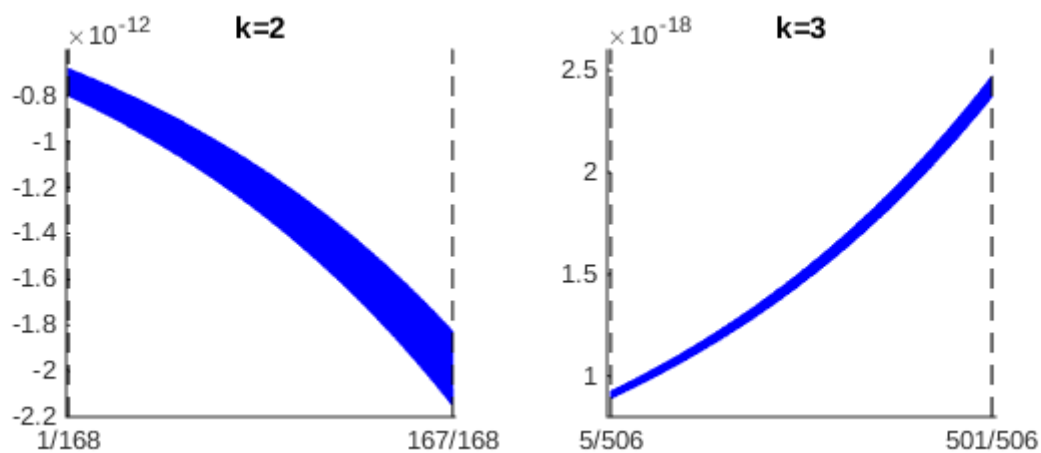
Funkcijas vērtību aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



14. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

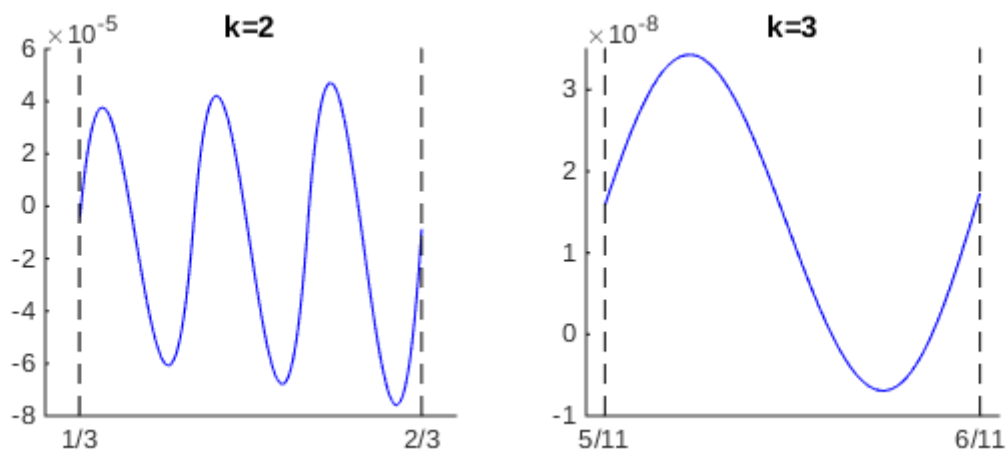


15. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

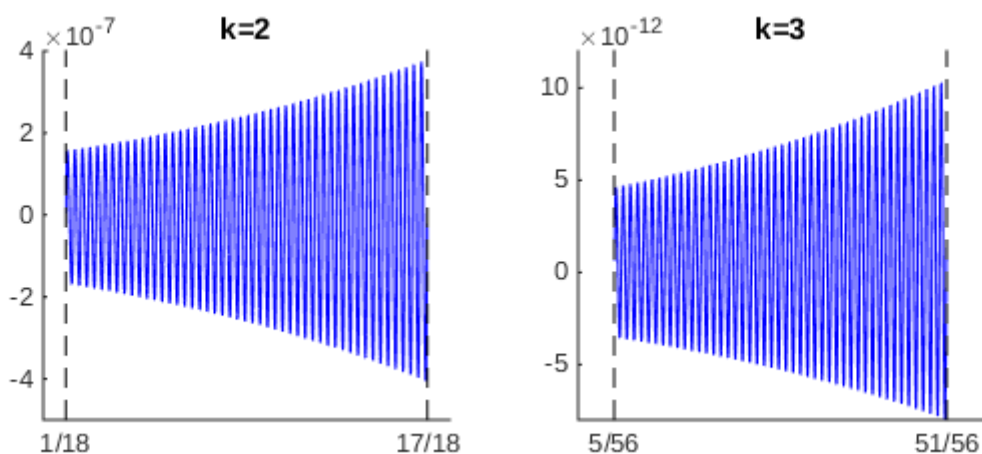


16. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

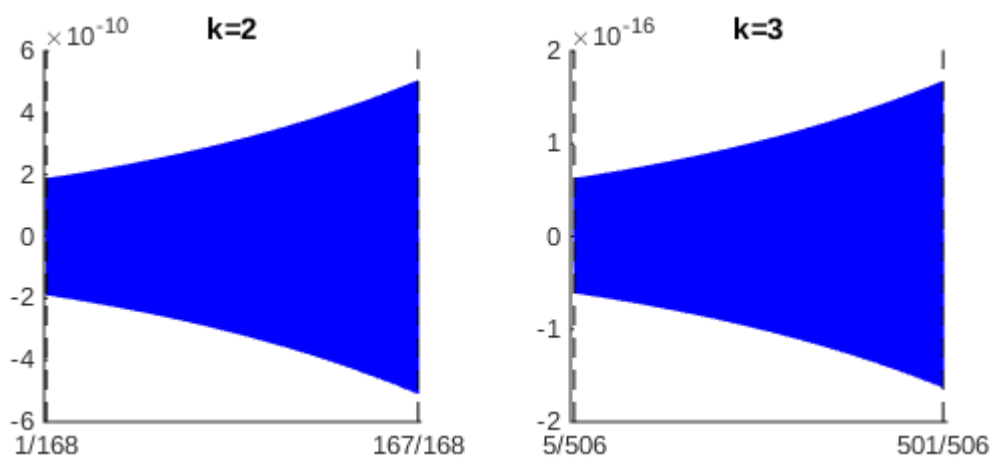
Funkcijas 1. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



17. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

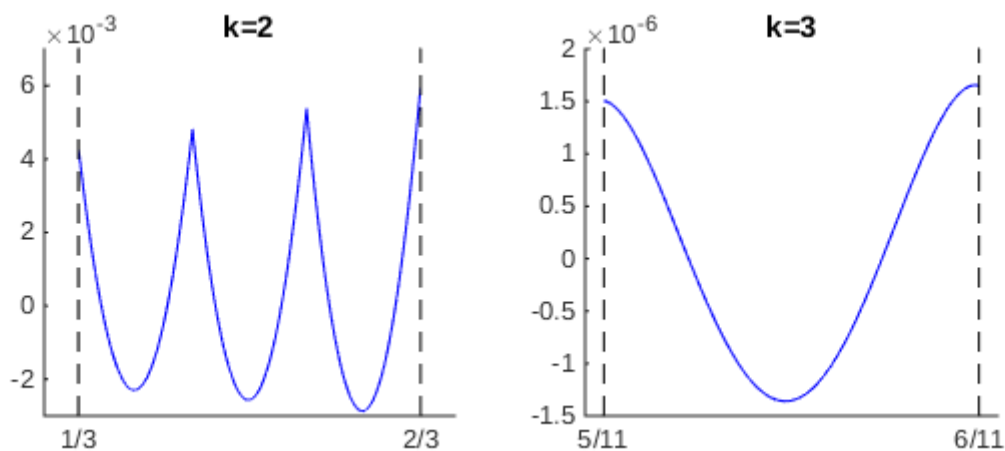


18. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

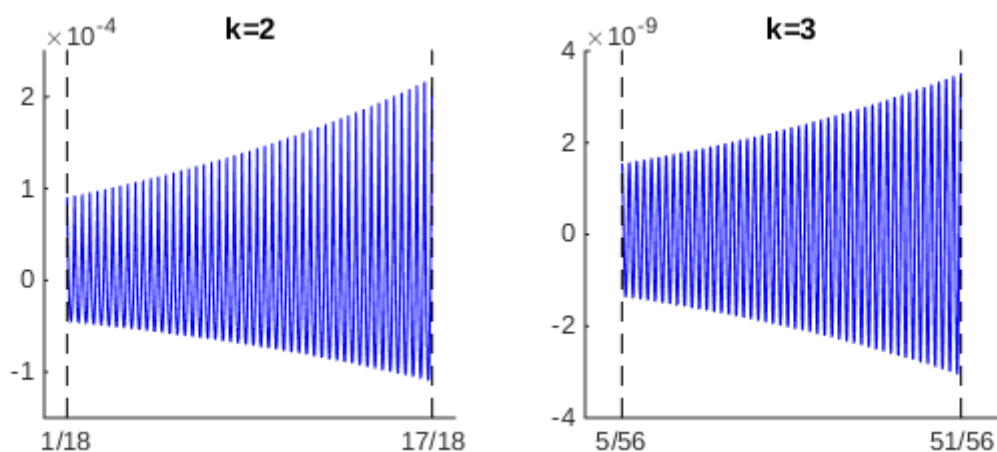


19. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

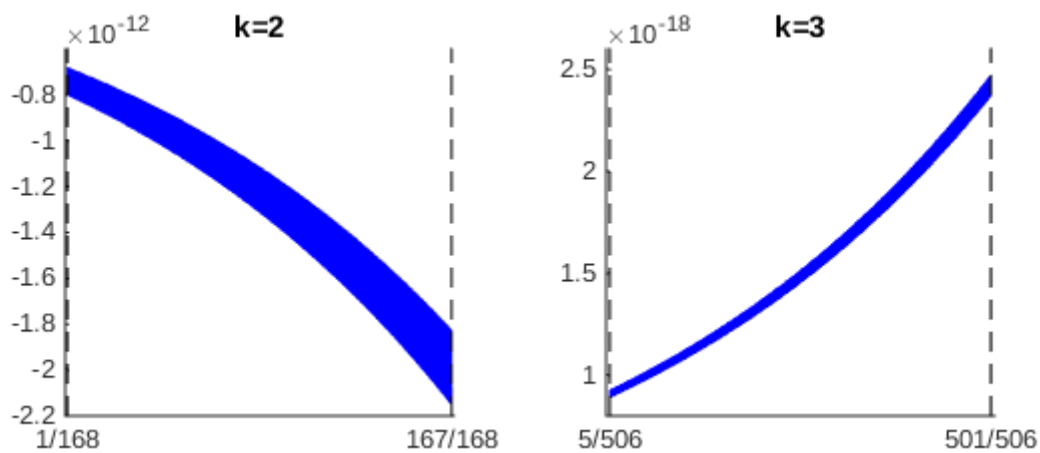
Funkcijas 2. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



20. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

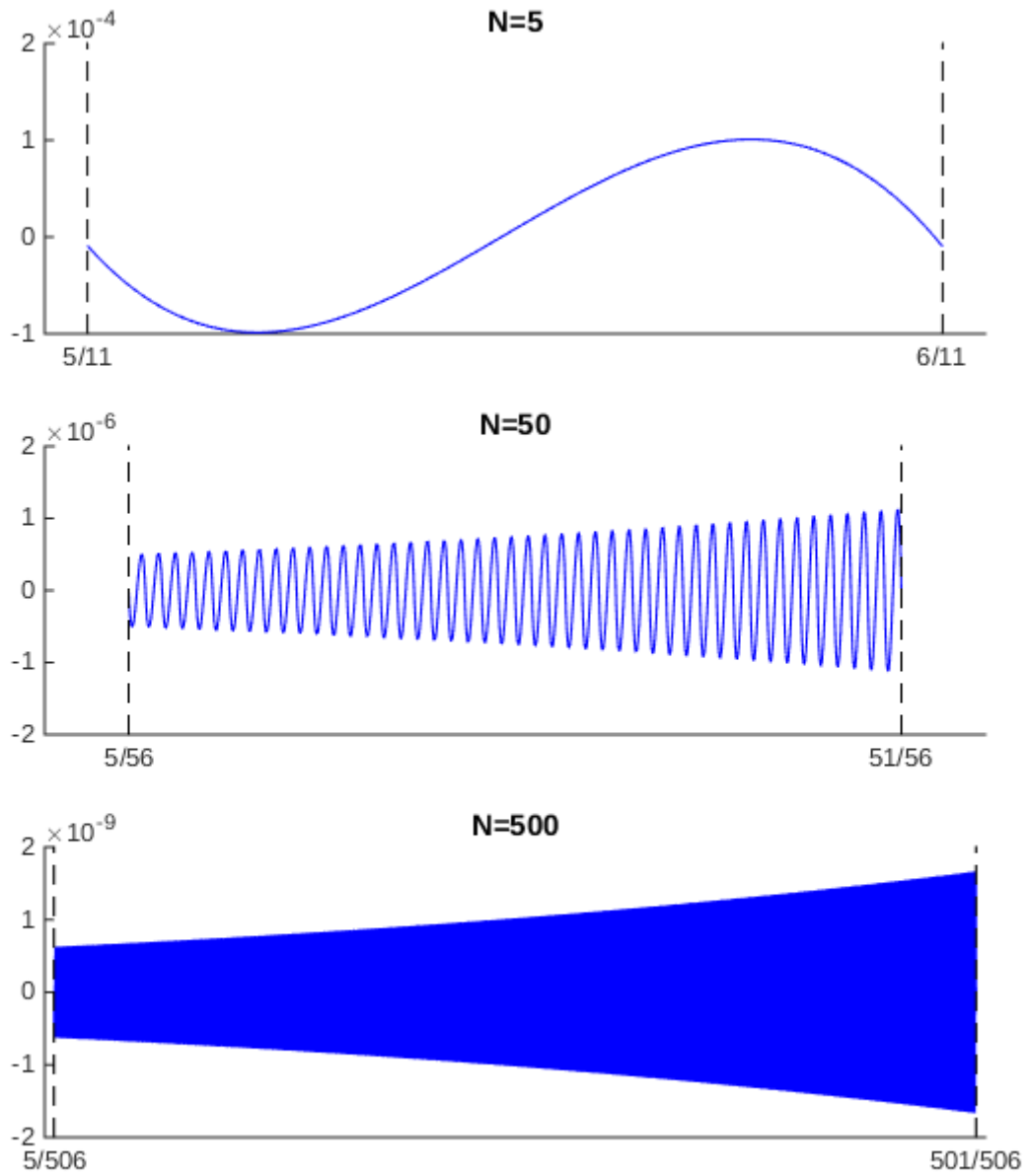


21. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

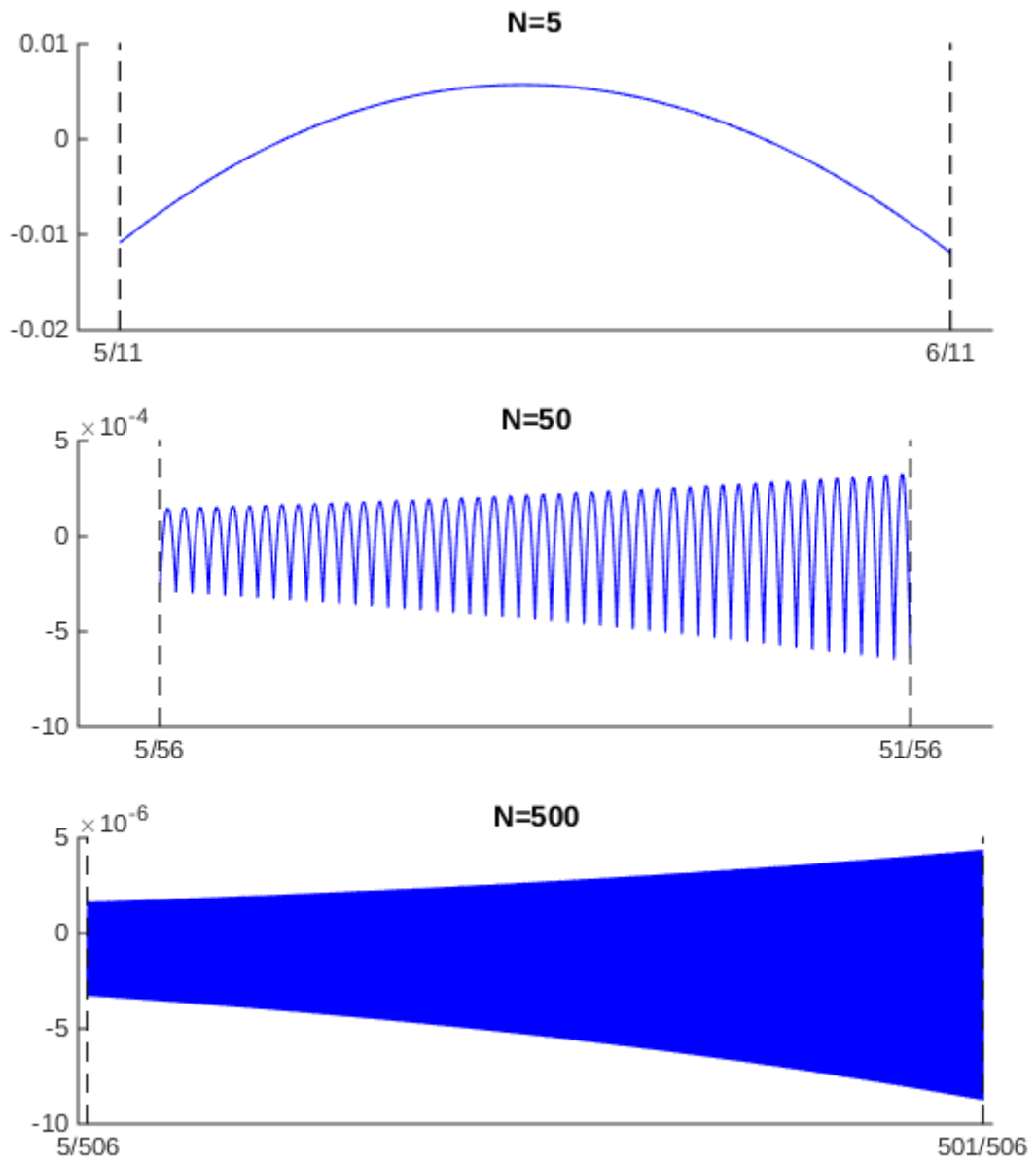


22. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

Funkcijas augstākas kārtas atvasinājumu aproksimācija pie $k = 3$

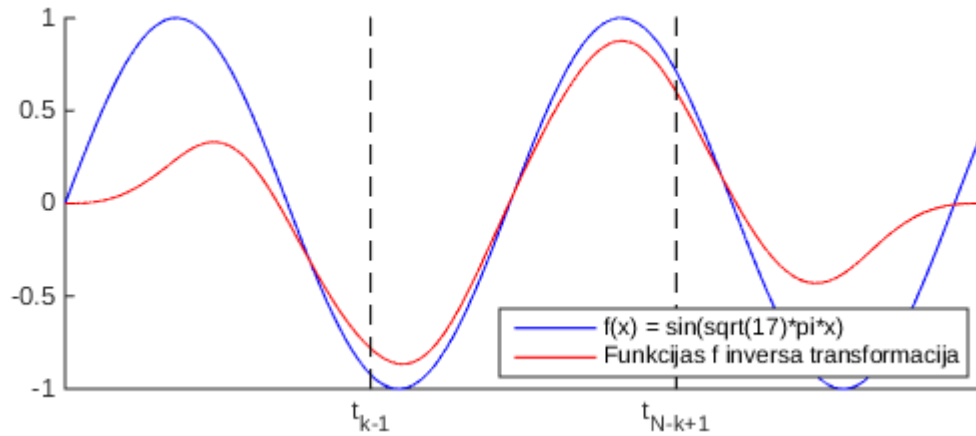


23. att.: $f^{(3)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$

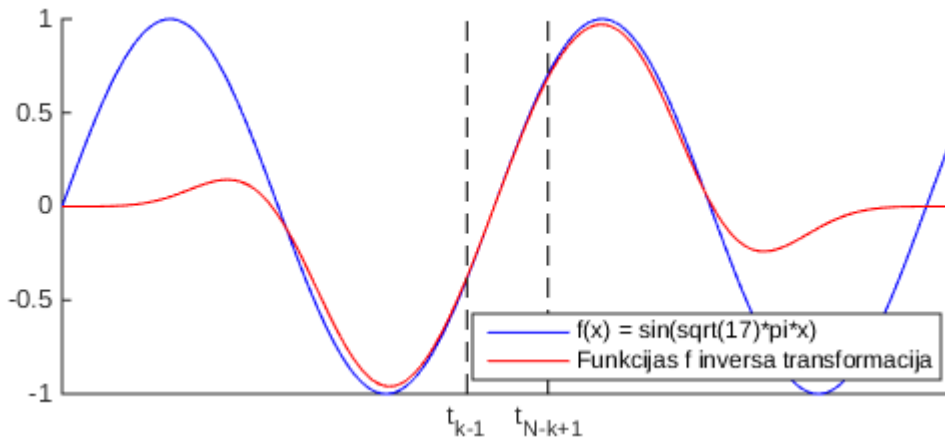


24. att.: $f^{(4)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$

2. pielikums. Funkcijas $f(x) = \sin(\sqrt{17}\pi x)$ un tās atvasinājumu aproksimācija

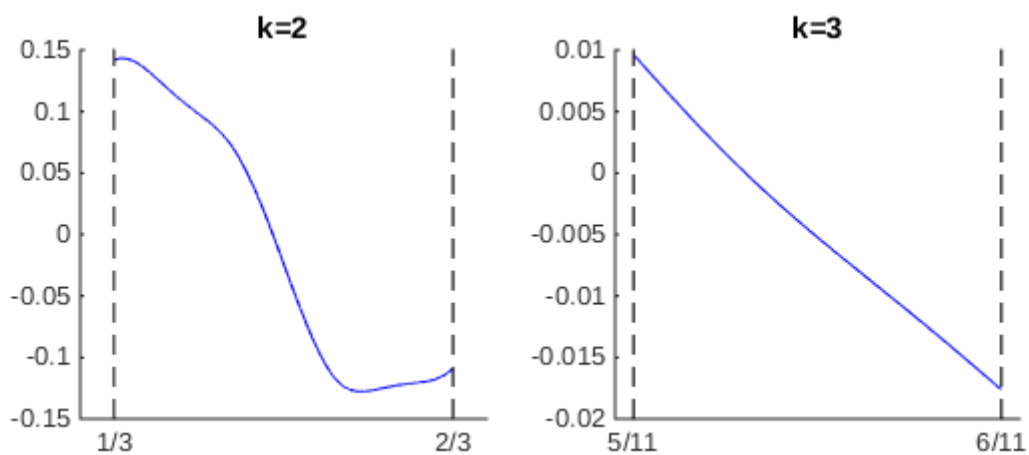


25. att.: Funkciju $f(t) = \sin(\sqrt{17}\pi t)$ un \mathcal{F}^1 grafiki, $N = 5$, $k = 2$

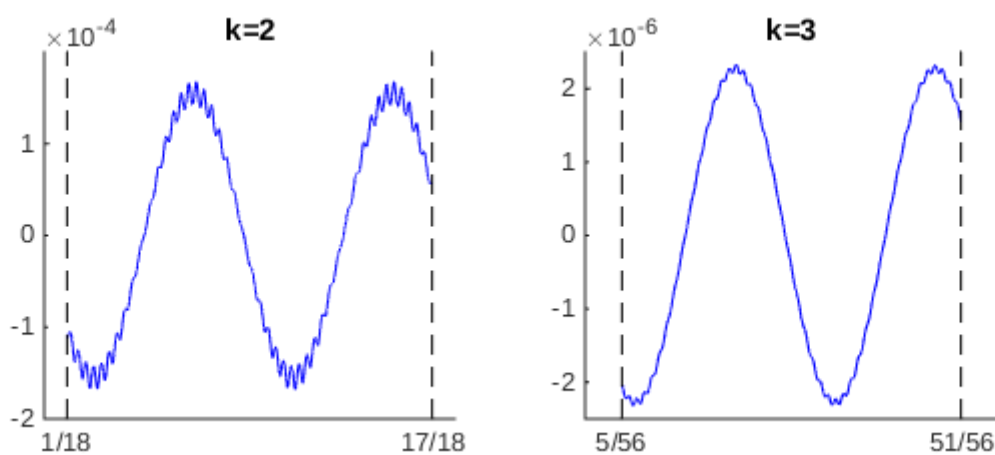


26. att.: Funkciju $f(t) = \sin(\sqrt{17}\pi t)$ un \mathcal{F}^2 grafiki, $N = 5$, $k = 3$

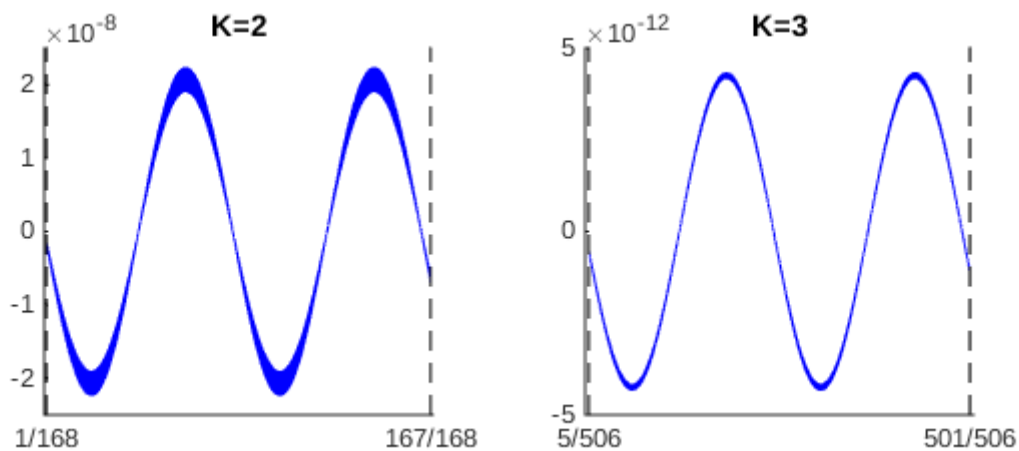
Funkcijas vērtību aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



27. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

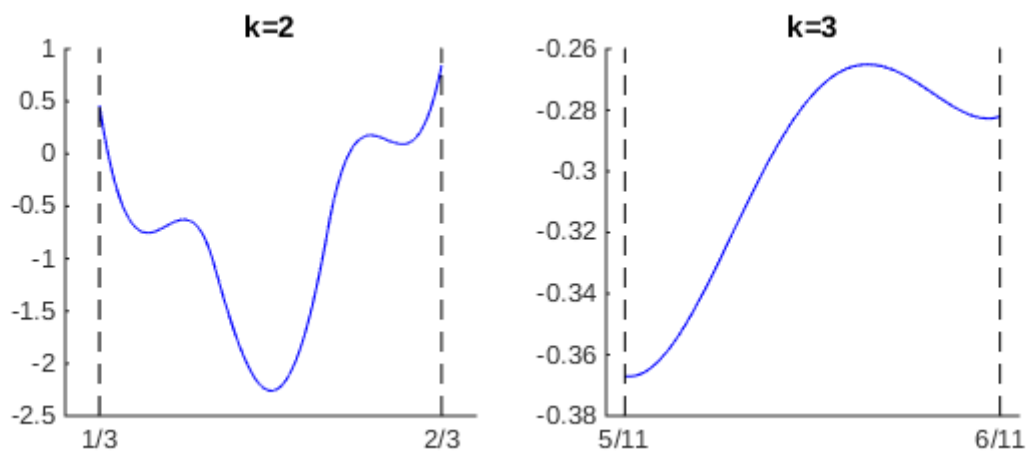


28. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

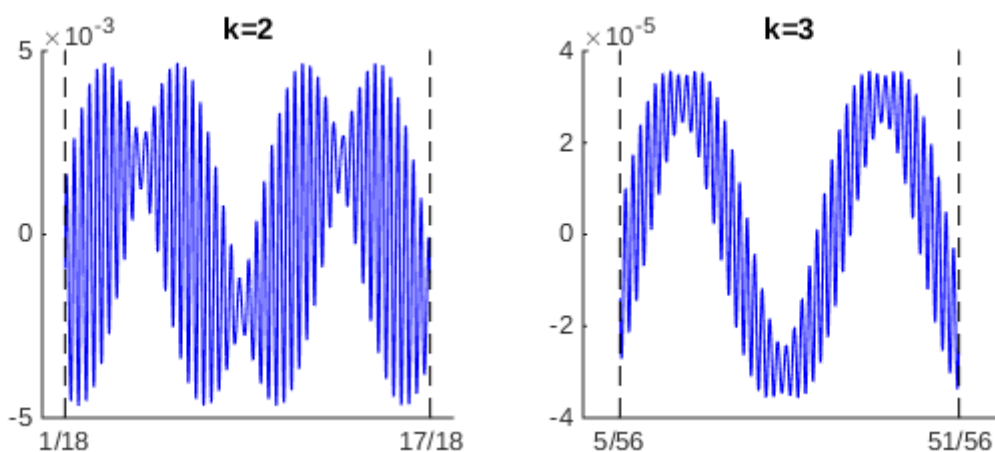


29. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

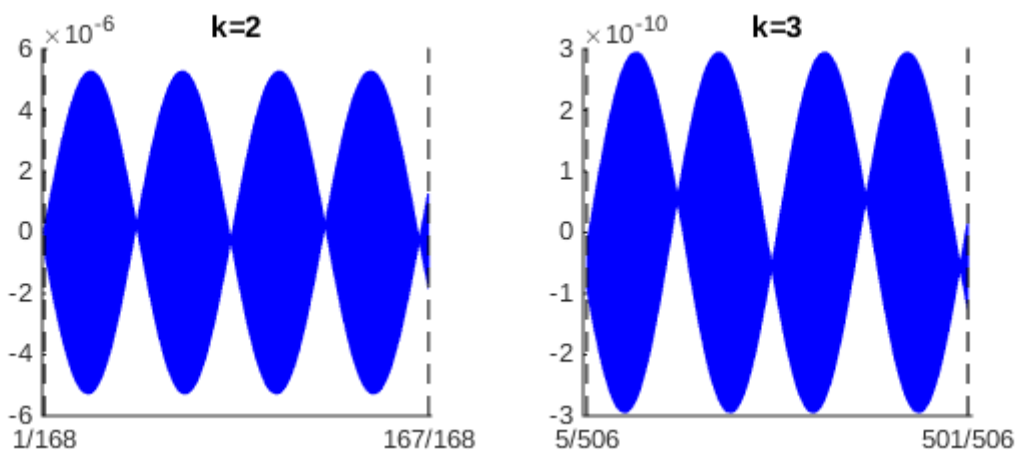
Funkcijas 1. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



30. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

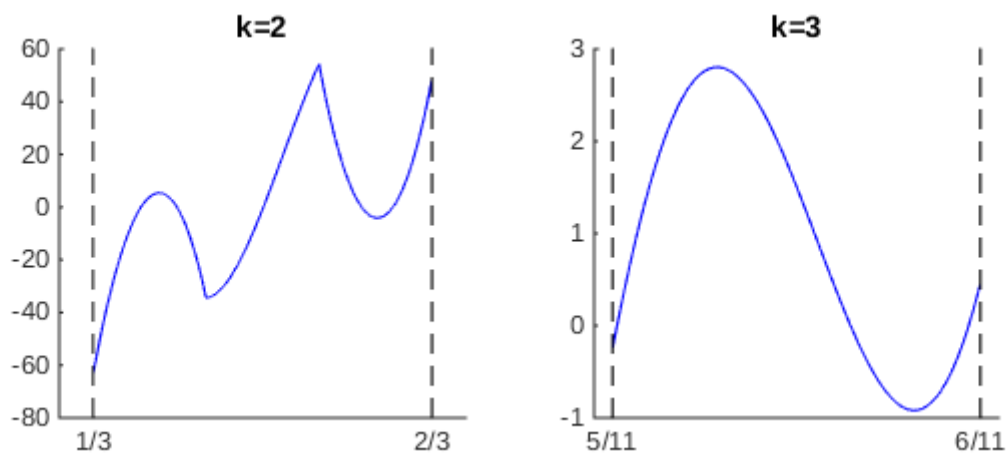


31. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

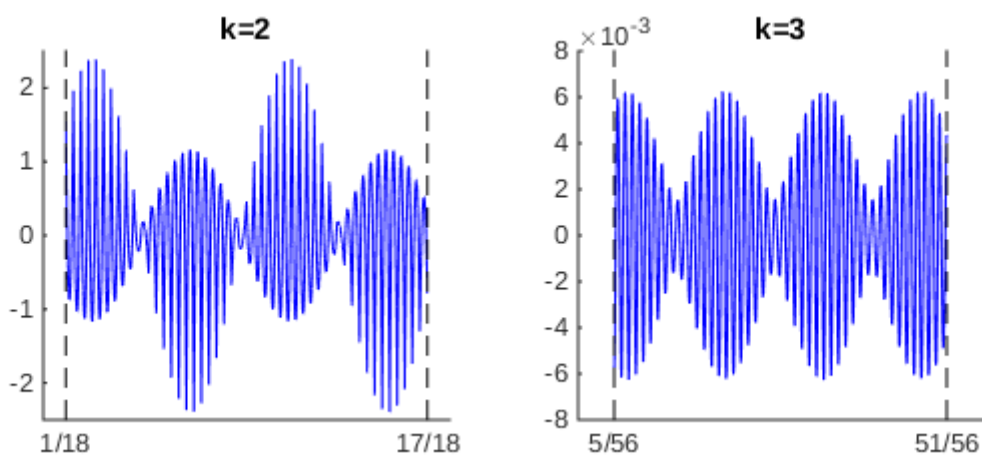


32. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

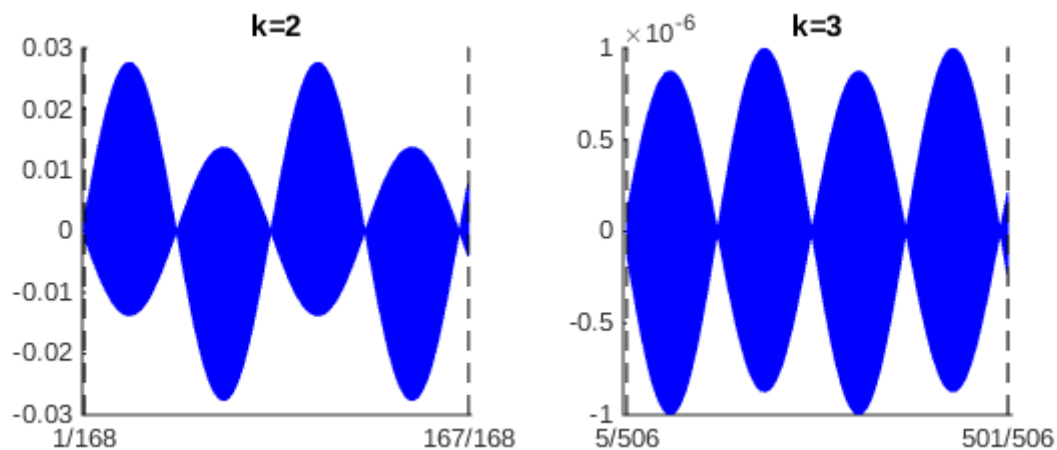
Funkcijas 2. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



33. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

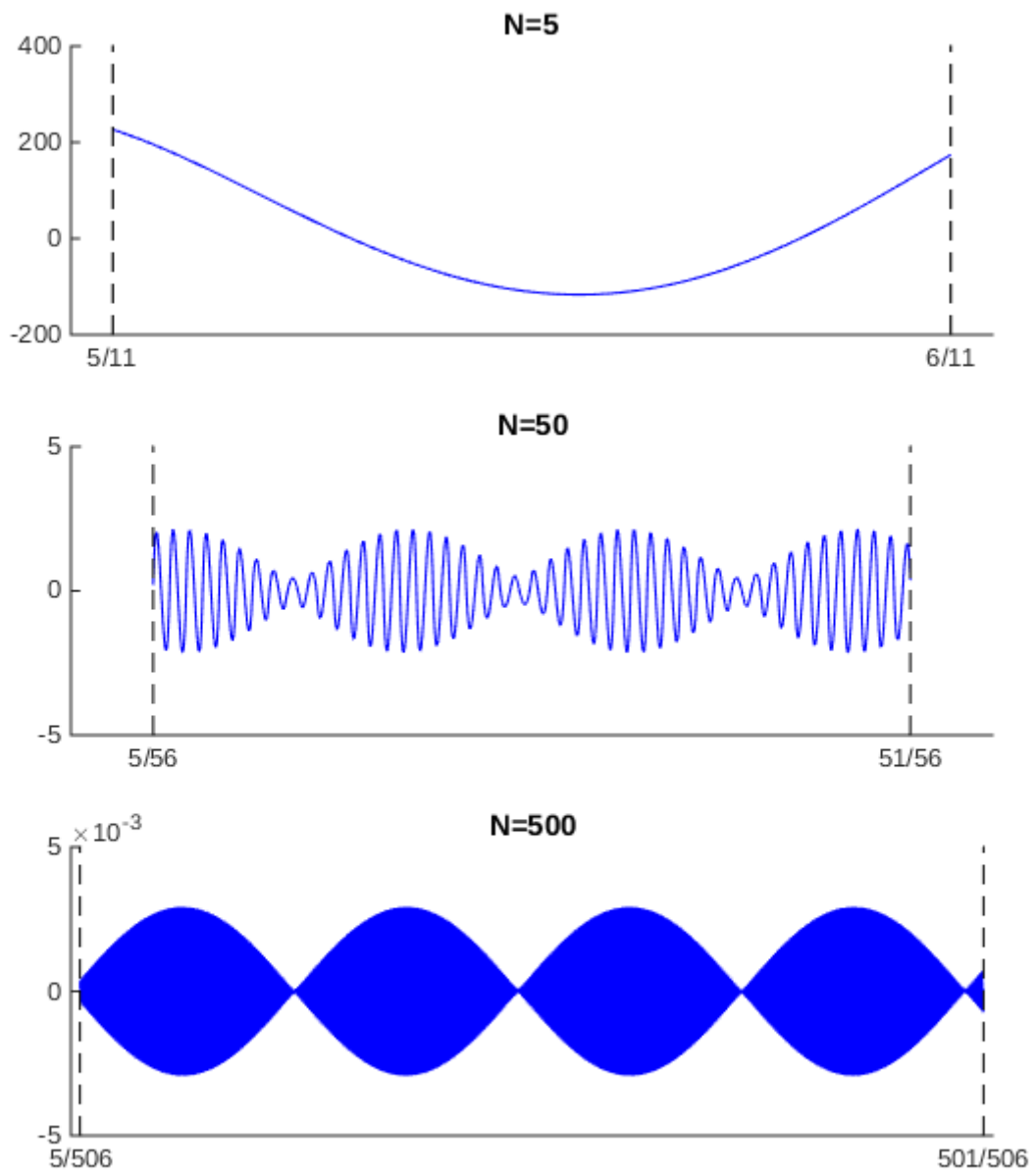


34. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

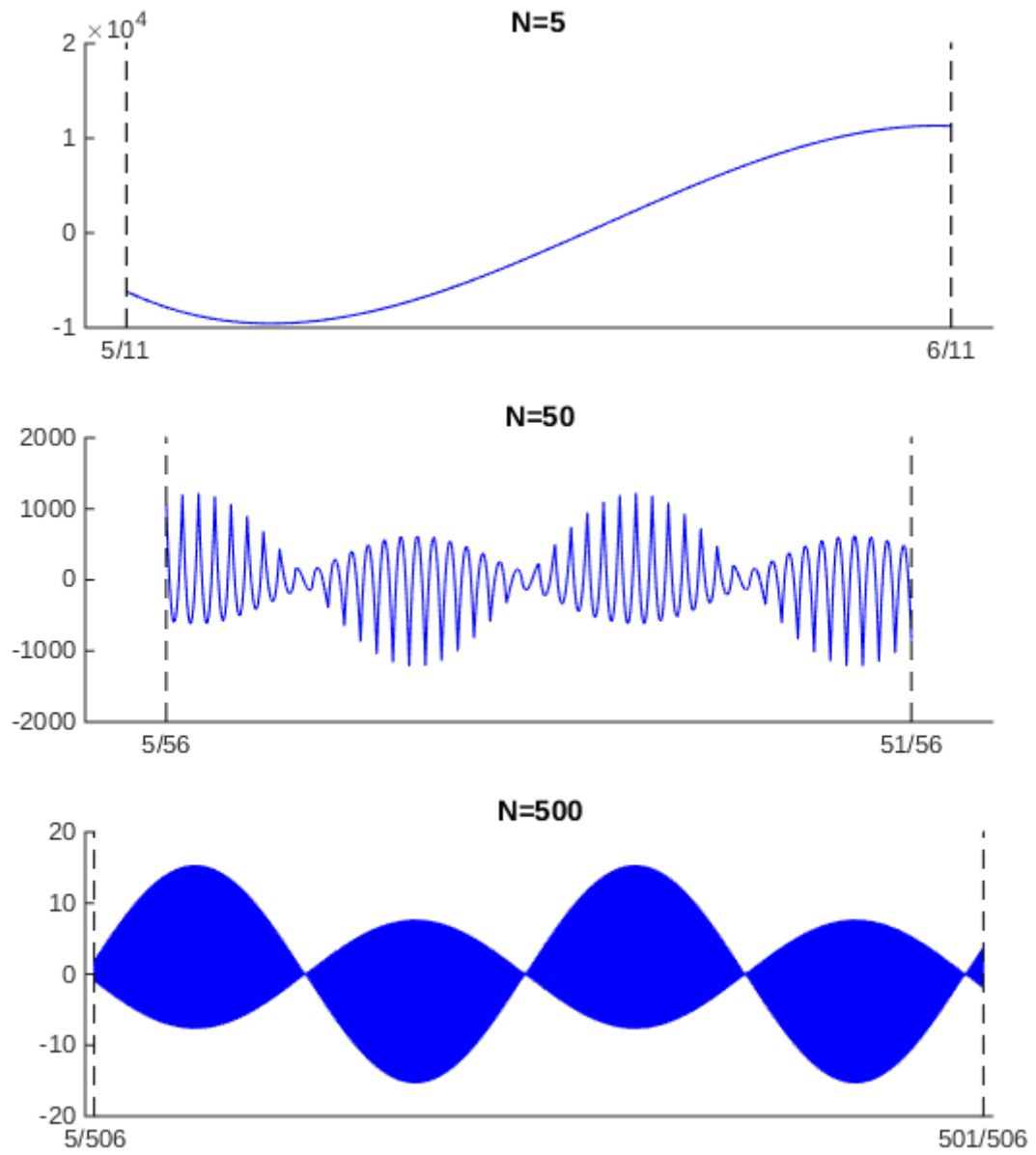


35. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

Funkcijas augstākas kārtas atvasinājumu aproksimācija pie $k = 3$

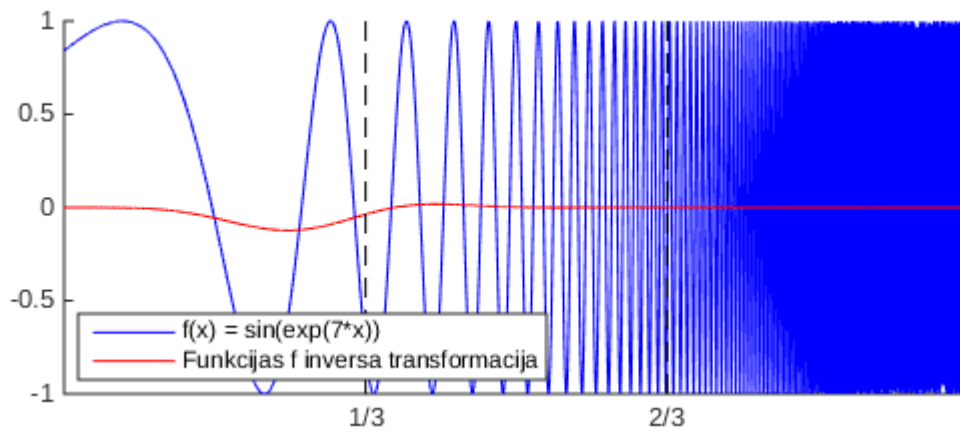


36. att.: $f^{(3)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$

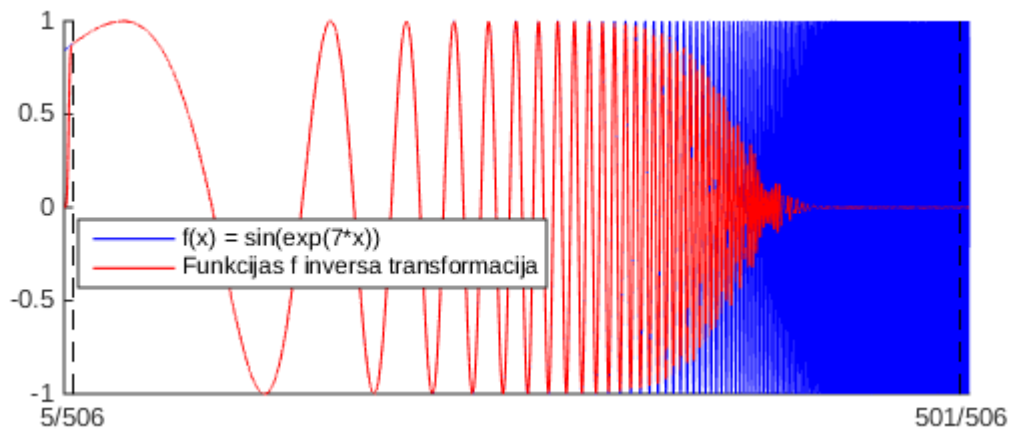


37. att.: $f^{(4)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$

3. pielikums. Funkcijas $f(x) = \sin(\exp(7x))$ un tās atva- sinājumu aproksimācija

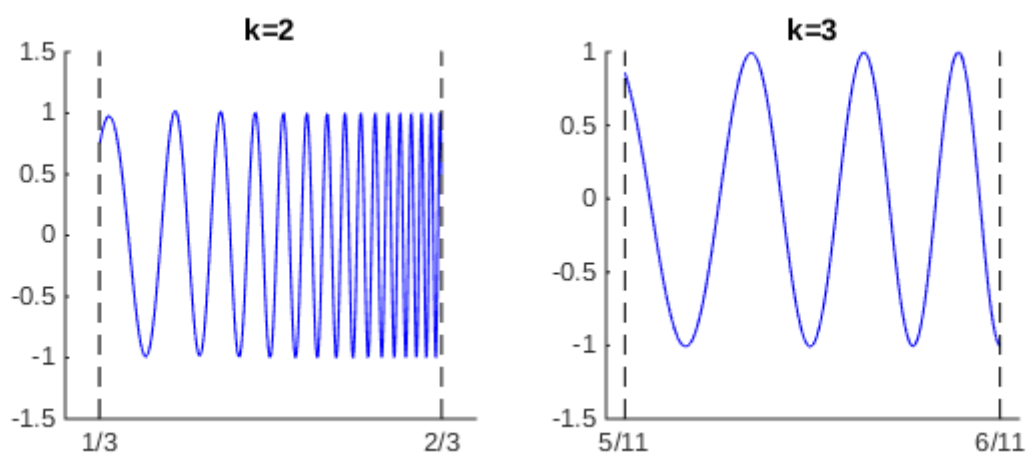


38. att.: Funkciju $f(t) = \sin(\exp(7t))$ un \mathcal{F}^1 grafiki, $N = 5$, $k = 2$

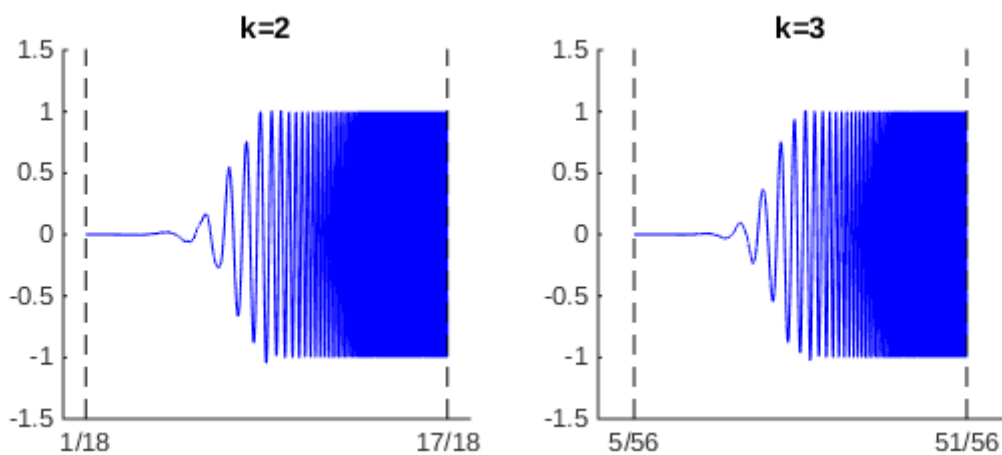


39. att.: Funkciju $f(t) = \sin(\exp(7t))$ un \mathcal{F}^2 grafiki, $N = 500$, $k = 3$

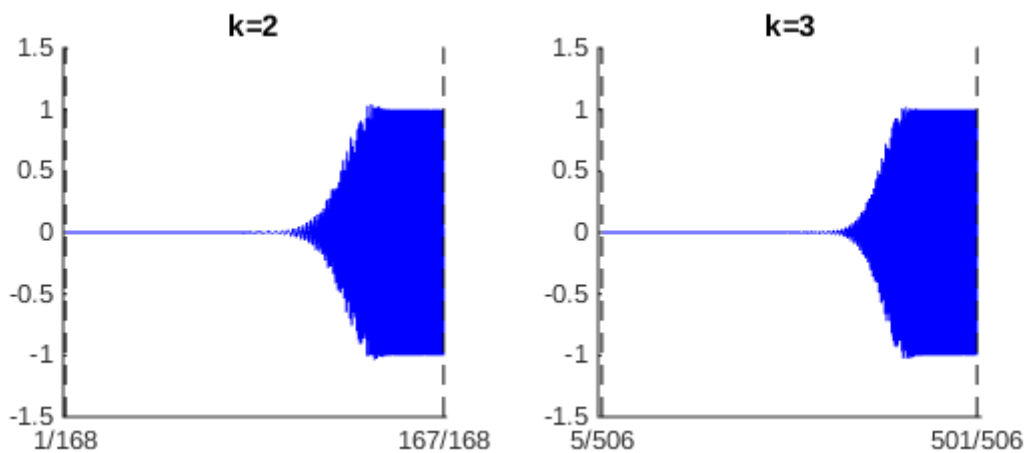
Funkcijas vērtību aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



40. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

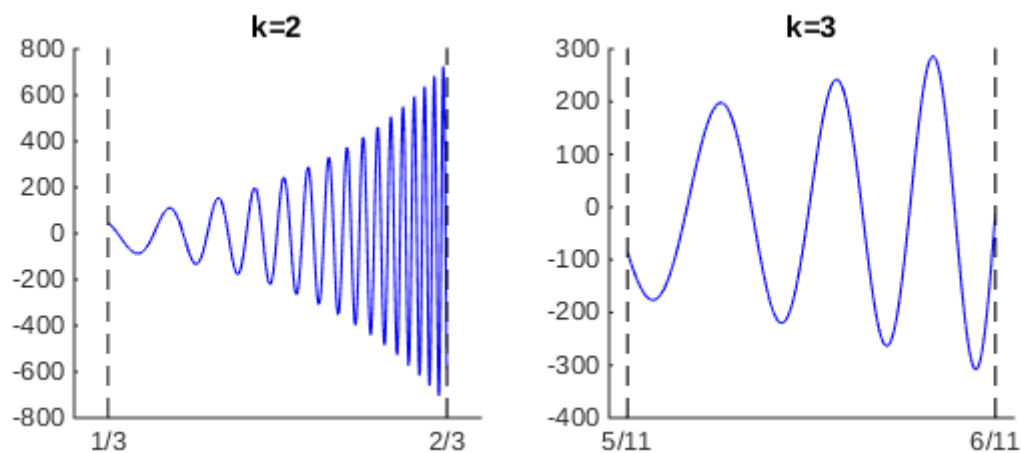


41. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

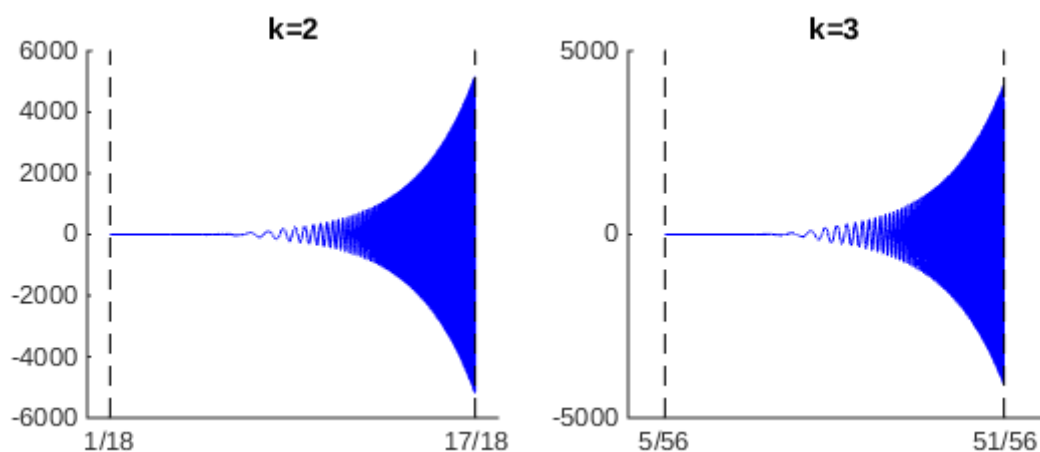


42. att.: f aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

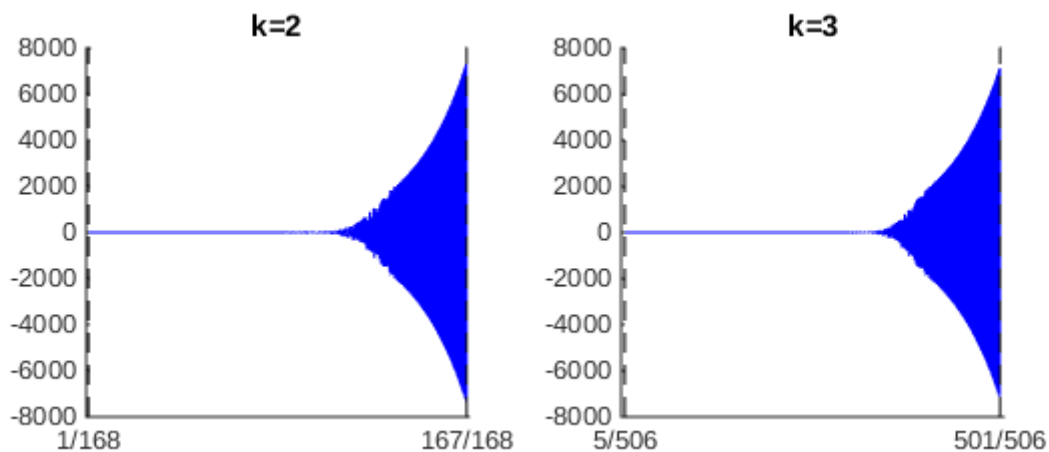
Funkcijas 1. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



43. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

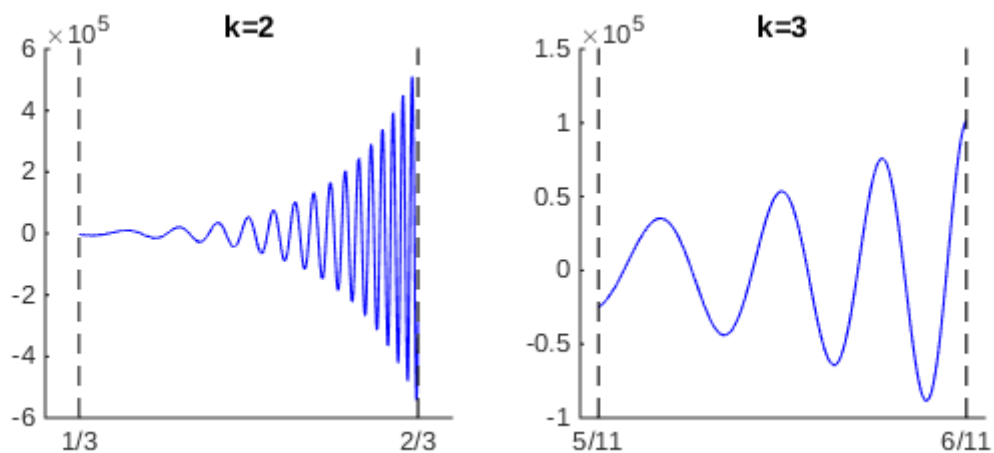


44. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

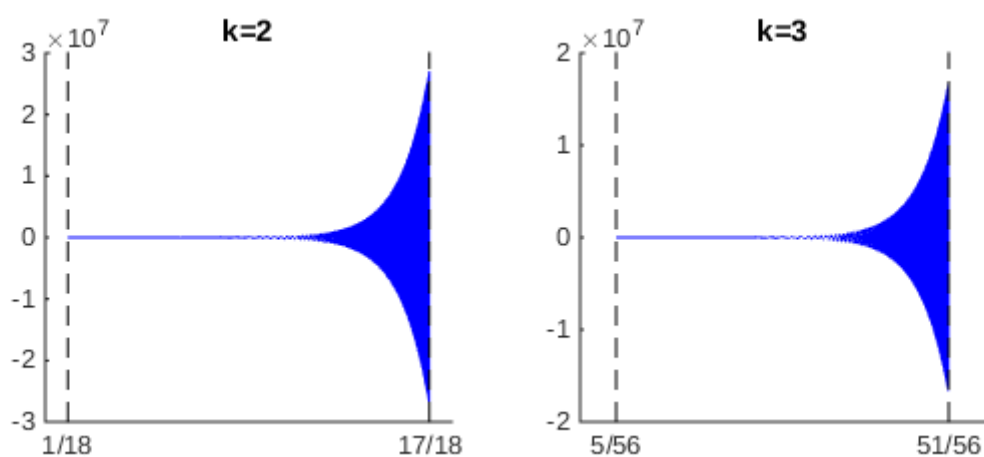


45. att.: f' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

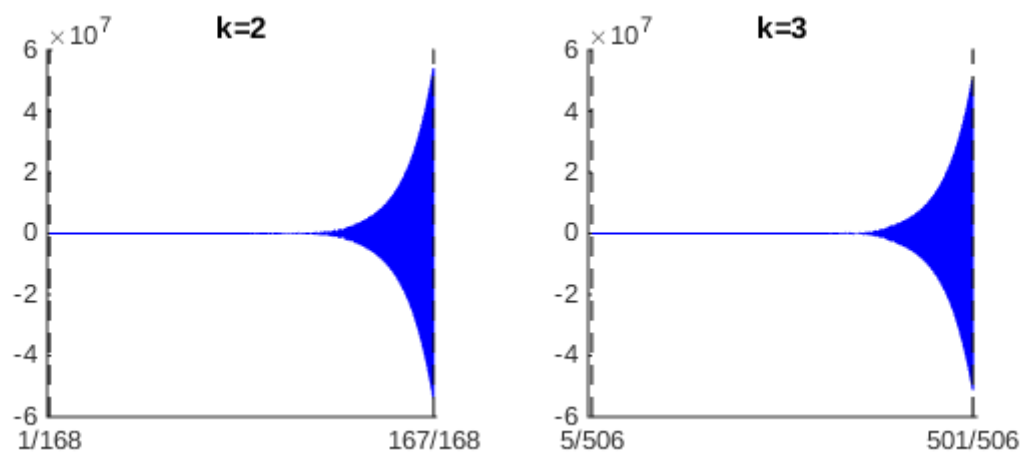
Funkcijas 2. atvasinājuma aproksimācija pie dažādām N un k vērtībām



46. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 5$

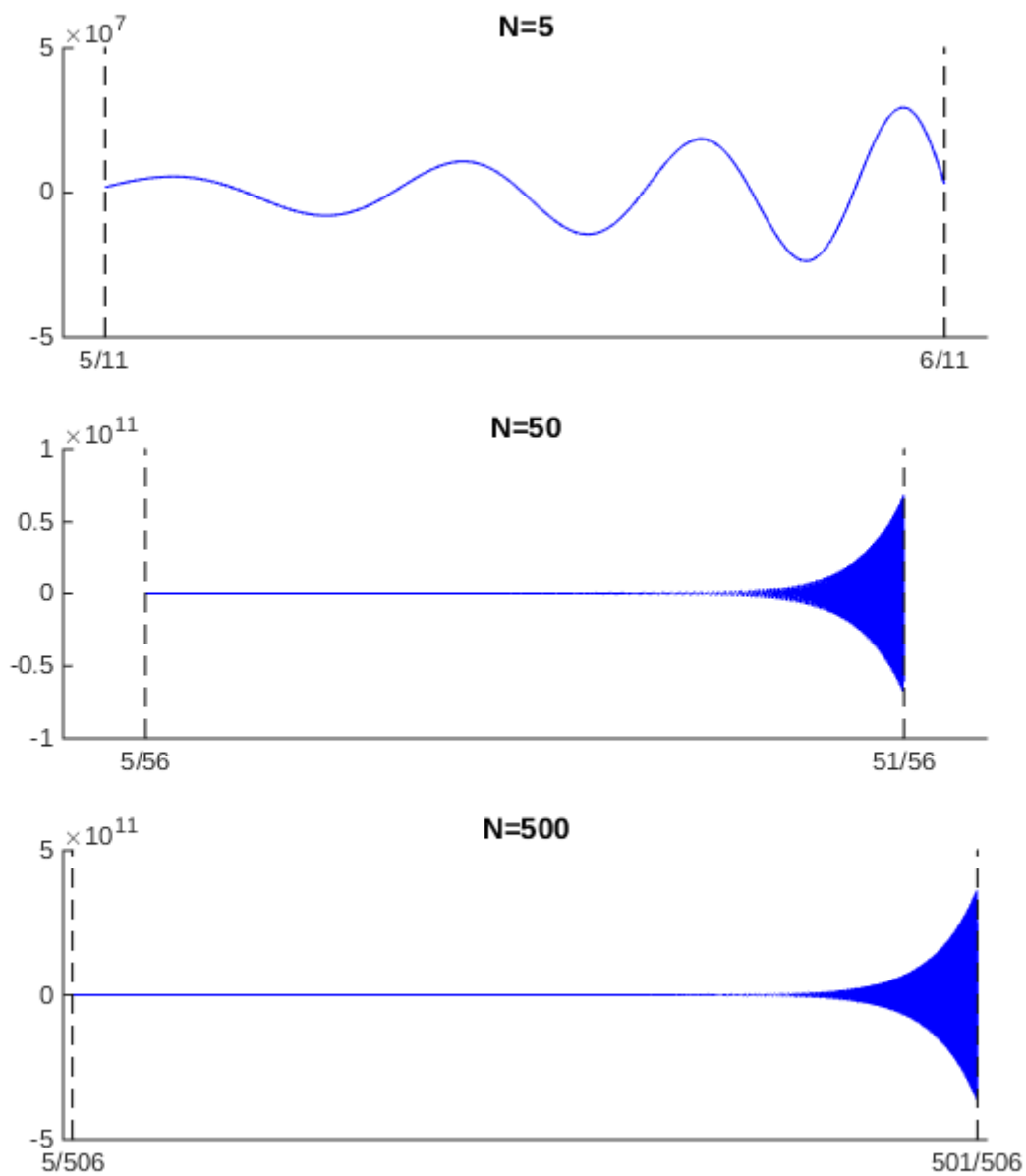


47. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 50$

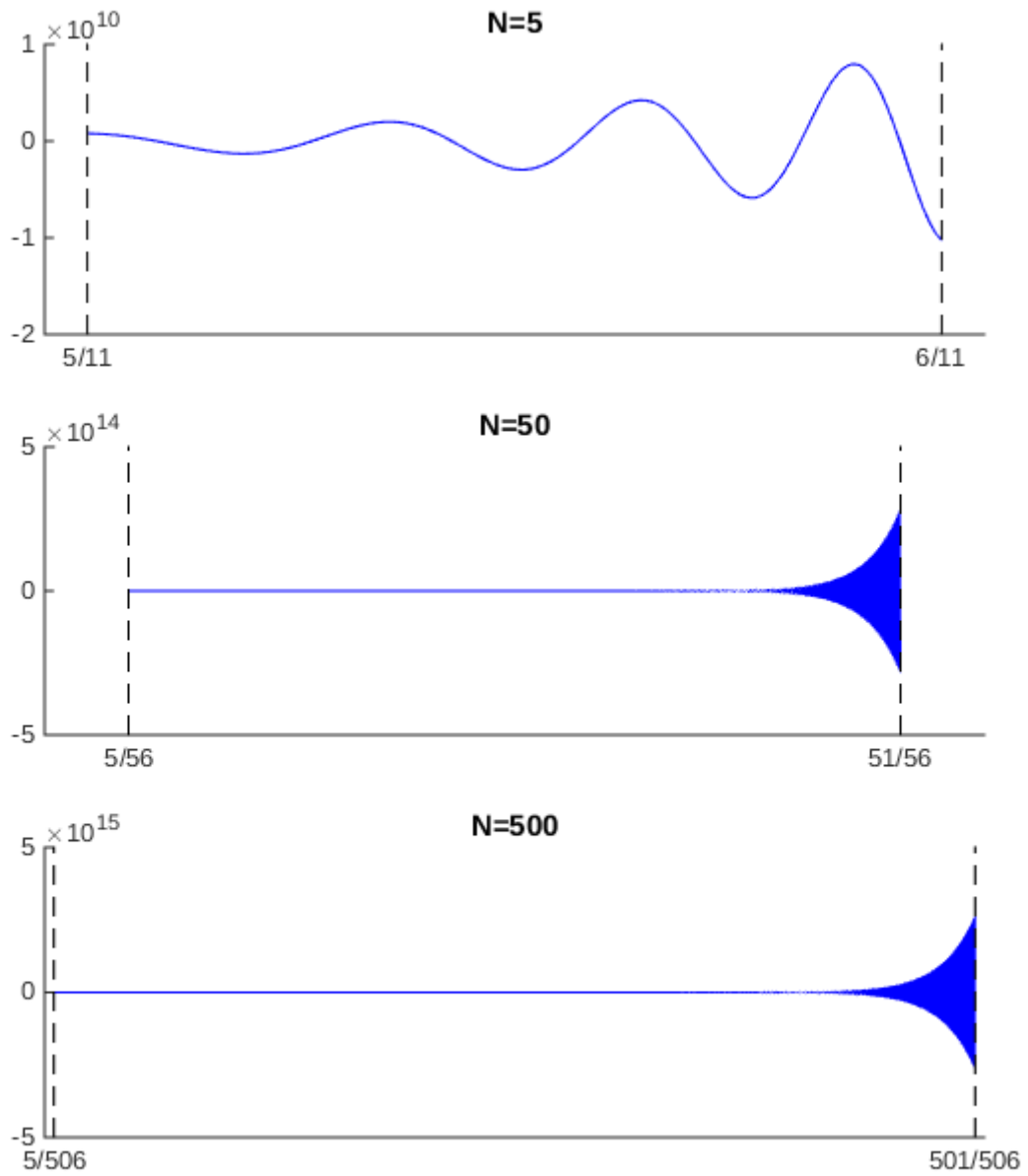


48. att.: f'' aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$, $N = 500$

Funkcijas augstākas kārtas atvasinājumu aproksimācija pie $k = 3$



49. att.: $f^{(3)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$



50. att.: $f^{(4)}$ aproksimācijas kļūda intervālā $[\hat{a}, \hat{b}]$

Maģistra darbs "Uz B-splainiem balstītas augstākas kārtas F-transformācijas"
izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā
norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Mārtiņš Kokainis

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: profesore Dr. math. Svetlana Asmuss

(paraksts)

(datums)

Recenzents: Dr.math. Nataļja Budkina

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā _____

(datums)

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: _____

(Vārds, Uzvārds)