

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ПОЛИМЕРОВ

В.П. Тамуж

ВАРИАНТ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТАЛОСТИ  
И РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

( 01.02.03 - Сопротивление материалов и  
строительная механика )

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук



Научный консультант  
член-корр. АН СССР

А.К. Малмейстер

Рига, 1973г.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	7
ГЛАВА I. Усталость полимерных материалов при циклическом нагружении в режиме растяжения - сжатия.	
I.1. Обзор экспериментальных исследований по усталости полимерных материалов. . . . .	12
I.1.1. Поведение жестких полимерных материалов при циклическом нагружении. . . . .	12
I.1.2. Результаты "физических" опытов по определению уровня разрушенности в процессе статической усталости . . . . .	27
I.1.3. Изменение механических свойств пластмасс в процессе усталости . . . . .	31
I.2. Методика экспериментального исследования . . . . .	38
I.2.1. Форма и размеры образцов, испытательная машина и установка образцов на ней . . . . .	38
I.2.2. Измерение деформаций, рассеяния энергии и температуры . . . . .	43
I.3. Результаты исследования . . . . .	50
I.3.1. Изменение деформативных свойств стеклопластика ЭФС при циклическом нагружении . . . . .	50
I.3.2. Рассеяние энергии в стеклопластике ЭФС при циклическом растяжении-сжатии . . . . .	58
I.3.3. Изменение механических свойств и температуры при циклическом нагружении других полимерных материалов . . . . .	70

I.3.4.	Усталость стеклотекстолита при воздействии повторных ударных нагрузок . . . . .	72
I.4.	Расчет температурных полей с учетом изменения диссипации энергии во времени . . . . .	76
I.4.1.	Постановка задачи . . . . .	76
I.4.2.	Решение для равномерного распределения температуры по образцу . . . . .	79
I.4.3.	Решение для бесконечного цилиндра с конвективностью на боковой поверхности. . . . .	85
I.5.	Модель разрушения при одноосном нагружении . . . . .	94
I.5.1.	Введение меры повреждения . . . . .	94
I.5.2.	Расчет долговечности с учетом статистического распределения перенапряжений . . . . .	99
I.6.	Краткое резюме результатов . . . . .	107

## Г Л А В А П. Теория прочности, учитывающая процесс накопления повреждений.

2.1.	Обзор некоторых теорий прочности и пластичности . . . . .	110
2.1.1.	Статистические теории кратковременной прочности . . . . .	110
2.1.2.	Общие вопросы и взаимосвязь теорий длительной прочности и пластичности . . . . .	120
2.1.3.	Статистические теории пластичности . . . . .	124
2.1.4.	Теории длительной прочности, учитывающие накопление повреждений . . . . .	132

2.2.	Разработка одного варианта теории разрушения . . . . .	138
2.2.1.	Основные гипотезы . . . . .	138
2.2.2.	Аппроксимация функций на сфере трехмерными тензорами . . . . .	142
2.2.3.	Зависимость функции на сфере от тензора напряжений . . . . .	152
2.2.4.	Условия местного разрушения . . . . .	153
2.3.	Разрушение и прочность при сложном напряженном состоянии . . . . .	156
2.3.1.	Использование критерия разрушения $\max \Pi_2 = const$ . . . . .	156
2.3.2.	Расчет разрушения при сложном нагружении. Пример Л.М. Качанова . . . . .	163
2.3.3.	Пример расчета длительной прочности с использованием критерия разрушения $\int_s \Pi_2 ds = const$ . . . . .	165
2.4.	Сравнение предложенного подхода с другими теориями прочности . . . . .	177
2.4.1.	Теория Н.Н. Афанасьева . . . . .	177
2.4.2.	Теория С.С. Хсиао . . . . .	183
2.5.	Расчет прочности при неоднородном напряженном состоянии . . . . .	187
2.5.1.	Учет перераспределения напряжений и распространения фронта разрушения . . . . .	187
2.5.2.	Усталость образца при циклическом изгибе . . . . .	189
2.6.	Развитие теории для анизотропных сред . . . . .	202
2.6.1.	Сферические инварианты . . . . .	202
2.6.2.	Частные случаи анизотропных сред . . . . .	208

2.6.3. Использование критерия $\max \Pi_2 = \text{const}$ для анизотропных сред . . . . .	212 . .
2.7. Краткое резюме результатов . . . . .	217 . .
ГЛАВА III. Разрушение полимерных материалов при скоростном растяжении	
3.1. Постановка задачи и методика испытаний . . . . .	219 . .
3.1.1. Постановка задачи . . . . .	219 . .
3.1.2. Методика статических испытаний на одно- осное растяжение и выбор формы образцов . . . . .	221 . .
3.1.3. Методика скоростных испытаний при одно- осном растяжении . . . . .	223 . .
3.2. Сопоставление длительной и кратковременной прочности стеклопластика . . . . .	229 . .
3.3. Разрушение ориентирующихся полимерных мате- риалов при растяжении . . . . .	234 . .
3.3.1. Результаты экспериментальных исследо- ваний и постановка задачи . . . . .	234 . .
3.3.2. Расчетная модель разрушения ориентирую- щихся полимеров . . . . .	238 . .
3.4. Краткие результаты и выводы по главе 3.	254 . .
ГЛАВА IV. Некоторые особенности разрушения стекло- пластиков как композиционного материала	
4.1. О корреляции разрушения стеклотекстолита при усталостном и статическом нагружении . . . . .	255 . .
4.1.1. Постановка задачи . . . . .	255 . .

4.1.2. Связь между статической и циклической деформативностью . . . . .	258
4.1.3. Связь между статической и циклической долговечностью . . . . .	262
4.2. Влияние технологии изготовления стеклотекстолита на его вибрационную стойкость . . . . .	270
4.2.1. Постановка задачи и результаты усталостных испытаний . . . . .	270
4.2.2. Микроструктурные исследования и соотношения между изучаемыми величинами . . . . .	275
4.3. Выводы по главе . . . . .	282
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	284

## В В Е Д Е Н И Е

В настоящее время существуют два основных подхода к исследованию явления разрушения.

Первый подход, линейная механика разрушения, начало которой уходит к классическим исследованиям Гриффитса рассматривает разрушение как прорастание трещины через неповрежденный материал.

Второй подход, который можно назвать континуальной теорией разрушения, основан на концепции, "накопления повреждений" и учитывает изменение механических свойств материалов под действием приложенного напряжения в процессе нагружения. Прорастание макротрещины здесь рассматривается лишь как заключительный этап разрушения.

Введение понятия "накоплений повреждений" относится к двадцатым годам (Палмгрен). Дальше этот подход получил применение в работах Лангера, Бейли, Майнера, Робинсона, (в тридцатых и сороковых годах), а также был всесторонне развит применительно к ползучести в работах Л.М. Качанова.

Однако новое качественное развитие континуальная теория разрушения получает лишь в последние годы. Прогресс в этой области объясняется двумя причинами: во-первых, в последнее время появились исследования, показывающие фактическое существование "объемного" или "дисперсного" разрушения в разных материалах задолго до окончательного разрушения его. В числе последних работ, здесь можно отметить исследование субмикротрещин в ориентированных полимерах (Слуцкер, Куксенко), фиксирование акустического излучения при нагружении армированных

пластиков (Тутанс, Уржумцев) , а также исследования, фиксирующие изменение механических свойств материалов в процессе усталости.

Второе обстоятельство, способствующее развитию континуальной теории разрушения связано с усиленным развитием теории пластичности в пятидесятых годах.

Поскольку континуальная теория разрушения рассматривает разрушение как необратимый процесс, в рамках сплошной среды, то идеи, развитые в теории пластичности, где также основу явления составляют необратимые процессы, быстро нашли применение в теории разрушения. В этой связи можно отметить теорию Ю.Н. Работнова, где учитывается влияние повреждений на процесс ползучести и дан эффективный метод решения плоских задач разрушений путем введения параметра повреждения в уравнения теории идеальной пластичности , теория В.В. Новожилова, где параметр повреждения тесно связан с путем пластического деформирования, теория А.А. Ильшина, где введено понятие тензора повреждений - во всех этих подходах плодотворно использованы идеи теории пластичности.

Феноменологическая теория пластичности в настоящее время имеет несколько хорошо развитых направлений (теория течения, деформационная теория, статистические теории), которые друг друга не исключают, а дополняют. В то же время, "физическая" теория пластичности основанная на учете и усреднении микродеформаций дислокационного характера до сих пор, вследствие чрезвычайной сложности явления, не доведена до практи-

ческих расчетов.

Аналогичный путь развития можно предсказать и для теории континуального разрушения, поскольку физическая картина возникновения и развития повреждений в материале является настолько сложным явлением, что для получения практически применимой теории в настоящее время остается лишь феноменологический путь, опирающийся на результаты экспериментов. При этом можно ожидать сосуществование разных подходов, аналогично тому, как это имеет место в теории пластичности.

Настоящая работа посвящена развитию одного варианта феноменологической теории континуального разрушения, имеющего своим аналогом в теории пластичности статистические теории и позволяющего учесть особенности сложного нагружения на процесс разрушения.

Общие принципы изложенного подхода не ограничиваются рамками какого-либо определенного материала, но поставленные эксперименты были проведены на полимерных материалах. В основном исследовалась усталостная прочность этих материалов в режиме циклического деформирования, но в отдельных случаях было изучено разрушение при статическом и высокоскоростном нагружении.

Построение работы следующее.

В первой главе дан краткий обзор экспериментальных результатов усталостных испытаний. Эти исследования показывают главные особенности длительного и циклического разрушения полимерных материалов, изменение их свойств во время нагружения, а также их разогрев. Полученные результаты дают

возможность остановиться в дальнейшем на теории континуального или дисперсного разрушения материалов. Здесь же попутно дан расчет температурных полей материала при циклическом испытании с учетом изменения механических свойств его.

Вторая глава, которая является центральной в теоретическом отношении, посвящена построению основ теории разрушения с учетом сложного напряженного состояния и сложного нагружения.

В заключительной части работы, т.е. в третьей и четвертой главах, на основе концепции накопления повреждений сопоставляются результаты испытаний на прочность и долговечность полимерных материалов при разных режимах нагружения (циклическая и статическая усталость, высокоскоростное растяжение).

В третьей главе для описания особенностей высокоскоростного разрушения с учетом ориентации материала в процессе нагружения применен вариант изложенной теории разрушения.

Разрушение композитных материалов имеет свои особенности, которые еще далеко не изучены и могут составить предмет отдельных исследований.

В четвертой главе затронуты некоторые частные вопросы этой проблемы, касающиеся особенностей корреляции между статической усталости и циклической долговечности для композитного материала. Попутно рассмотрено влияние геометрии армирования на усталостную долговечность.

В работе обобщены результаты теоретических и экспериментальных исследований, проведенных диссертантом лично и

под его руководством в лаборатории динамических свойств  
Института механики полимеров Академии Наук Латвийской ССР  
за период 1966 - 1972 годы.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному  
консультанту проф. А.К. Малмейстеру за постоянное внимание  
к работе.

## ГЛАВА I.

Усталость полимерных материалов при циклическом нагружении в режиме растяжения-сжатия.

I.1. Обзор экспериментальных исследований по усталости полимерных материалов.

I.1.1. Поведение жестких полимерных материалов при циклическом нагружении/I.1/.

Усталостные исследования являются одним из основных видов динамических испытаний всех конструкционных материалов, в том числе полимерных. Усталость полимерных материалов изучена значительно меньше по сравнению с металлами, по которым накоплено огромное количество экспериментальных данных /I.2/, однако в последние годы количество работ в этой области механики полимеров сильно возросло. При этом исследованиями охватывается все большее количество разных материалов и изделий, а также все больший интервал частот и видов нагружения.

Первые публикации по испытаниям пластических масс при циклическом нагружении относятся к концу тридцатых годов /I.3, I.4/. Подробный обзор исследований по усталости полимерных материалов, проведенных за рубежом до 1943 г., опубликован в 1944 г. /I.5/. Поэтому работ этого периода мы не рассматриваем. В статье Диллона /I.6/ дан обзор результатов, полученных за рубежом до 1950 г. Автор уделяет основное вни-

мание усталости резин и волокон, но рассматривает также вопросы испытания жестких пластмасс.

Первый обзор работ советских исследователей был подготовлен в 1960 г. С.Б. Ратнером с сотрудниками /I.7/. Позже весьма краткий обзор был дан в /I.8/, а в /I.9-I.II/ были приведены сводные данные по результатам ряда экспериментов. Из работ последнего времени следует отметить книгу /I.I2/, а также двухтомник под редакцией П.Огибалова /I.I3/, где усталости и разрушению конструкционных полимеров, а в особенности методике их испытаний, посвящены несколько глав.

Настоящий обзор не претендует на исчерпывающую полноту рассмотрения библиографии по интересующему нас вопросу. Как следует из названия, работа в основном ограничивается рассмотрением жестких полимерных материалов; резины и волокна, по возможности, не рассматриваются. Необходимо отметить, что даже по вопросам поведения жестких полимерных материалов под действием циклических нагрузок данный параграф не претендует на полный обзор всех литературных данных. В ней обсуждаются только основные результаты, полученные в последние годы, причем изложение следует обзору автора /I.I/, дополненному некоторыми исследованиями, проведенными после опубликования этого обзора.

Исследования по усталости полимерных материалов развиваются, во-первых, по линии более полного изучения механических свойств вновь созданных полимерных материалов и, во-вторых, по линии исследования самого процесса усталости

полимерных материалов.

Работы первого направления охватывают широкий круг вопросов, начиная с исследований, ограничивающихся только получением кривой долговечности конкретных полимерных материалов, и кончая работами, посвященными изучению факторов, влияющих на усталость полимерных материалов. Все эти работы дают необходимые для практических расчетов данные, но по методике в основном повторяют аналогичные исследования по усталости металлов, и специфические для полимерных материалов свойства выявляются в них на основе сопоставления с металлами. Это относится к температуре, частоте нагружения, обдуву, влиянию "отдыха", вида испытания (изгиб, растяжение - сжатие, разная асимметрия цикла), среды, размеров образца, а также анизотропии материала на циклическую долговечность.

К этим работам можно также отнести исследования по влиянию структуры полимерных материалов на их усталостные свойства. Помимо рекомендаций производству, в работах содержатся результаты, проясняющие механизм усталостного разрушения полимеров.

Исследования экспериментального и теоретического характера по усталостному разрушению направлены в основном на изучение постепенного накопления повреждений в материале, распространения усталостных трещин и на выяснении роли саморазогрева в усталостном разрушении пластмасс.

Кратко рассмотрим исследования по воздействию различных факторов на усталостную прочность. Хорошо известно /I.II/

существенное влияние на деформирование полимеров температуры и скорости нагружения, поэтому значительный интерес представляет изучение воздействия этих факторов и на усталостную прочность. Влияние частоты на циклическую долговечность пластмасс исследовано в работах /I.14-I.21/.

Во всех статьях отмечается, что увеличение частоты повышает разогрев материала и снижает его долговечность. В /I.19/ указывается на совпадение числа циклов до разрушения при разных частотах.

Поскольку усталостные испытания полимеров всегда сопровождаются разогревом материала и пластмассы значительно более чувствительны к повышению температуры, чем металлы, почти все исследования по усталости полимеров затрагивают вопросы влияния температуры на долговечность. Отдельно следует рассматривать работы, посвященные воздействию температуры окружающей среды и изучению разогрева пластмасс в результате вибраций. Влияние температуры среды рассматривалось в /I.22-I.27/. Во всех работах отмечен отрицательный эффект температуры на циклическую долговечность. В /I.26/ указывается на линейное падение усталостной прочности полиэфирного стеклопластика с повышением температуры.

Поскольку разогрев в процессе усталостных испытаний значительно уменьшает долговечность и затрудняет анализ экспериментальных результатов, исследователи старались исключить его из опытов различными способами. Наиболее часто применялся для этих целей обдув образцов сжатым воздухом /I.10,

28, 29/ и др. Уменьшением частоты деформирования /I.30/ и применением микрообразцов /I.31, 32/ также достигалось определенное снижение температуры разогрева. Результаты этих работ показали, что ни в одном случае не удалось полностью избежать влияния разогрева. Тем не менее, исключение разогрева имеет существенное значение, поскольку таким образом наиболее четко можно выяснить процесс развития повреждений в полимерном материале при циклическом нагружении.

В работе /I.22/ была успешно применена установка с системой охлаждения жидким азотом с обратной связью. С помощью установки удалось сохранить практически постоянную температуру (от  $-190$  до  $+80^{\circ}\text{C}$ ).

Исследование влияния отдыха в процессе динамической усталости на долговечность полимерных материалов проведено в работах /I.33 - 36/. Периодический отдых увеличивает усталостную прочность /I.34, 36/, причем отмечается положительная роль охлаждения образца при отдыхе. У ориентированных волокон, где разогрев практически отсутствовал /I.33/, отдых на усталость не влиял и долговечность волокон была такая же, как при непрерывном нагружении.

Размеры образца на результаты усталостных испытаний у полимеров влияют аналогично, как у металлов. Так, увеличение диаметра однонаправленного стеклопластика от 7,5 до 14 мм при изгибе с вращением снижает долговечность в два-три раза. Аналогичные результаты получены в /I.15, 18,20/. В снижении прочности, вероятно, играет роль как большее число дефектов

в образце, так и более затрудненный теплоотвод в образце больших размеров.

Влияние концентрации напряжений для разных пластмасс различно /I.18, 36-40/. Стеклопластик, по имеющимся данным, мало чувствителен к концентрации напряжений /I.36, I.37/. Полиметилметакрилат весьма чувствителен к надрезам. Гладкие образцы могут подвергнуться тепловому разрушению, в то время как наличие концентратора может привести к хрупкому усталостному излому /I.36/. Уменьшение усталостной прочности полиформальдегида пропорционально коэффициенту концентрации напряжений /I.40/.

Снижение усталостной прочности полимеров под действием разных сред исследовалось в /I.41/, а также в /I.42/, где данный вопрос рассматривался в связи с требованиями нефтедобычи. Отрицательное воздействие обычной и морской воды, а также влияние масла на усталостную долговечность судостроительных стеклопластиков исследовано В.Захаровым /I.43/. Отметим, что время старения пластиков в агрессивных средах в опытах В.Захарова было до 5 лет.

Существенной особенностью полимерных материалов, главным образом стеклопластиков, является резко выраженная анизотропия. Влияние ее на усталостные свойства стеклопластиков исследовано в /I.29, 30, 38, 39/. В работе /I.29/ приведены исследования усталостной прочности СВМ и стеклотекстолита на смоле ПН-1. Так же как и в исследованиях /38,39/, был обнаружен предел выносливости СВМ при растяжении - сжатии в диа-

гональном направлении, в то время как в направлении вдоль волокон предел выносливости не обнаруживается. При испытаниях стеклотекстолита анизотропия усталостной прочности оказалась существенно ниже анизотропии статической прочности.

Наиболее полно влияние анизотропии СВМ на усталостные свойства исследованы Н.Е. Саркисяном /I.44-45/. Им построены поверхности усталостной прочности, полученные для разных долговечностей в режиме растяжения-сжатия. Образцы в виде лопаток вырезались под разными углами к направлению укладки арматуры.

Неоднократно указывалось /I.46/, что полимерные материалы имеют разные механические свойства при растяжении и сжатии. Поэтому представляет интерес исследование воздействия асимметрии цикла нагружения при испытаниях на усталостную прочность. Данному вопросу посвящены работы /I.22, 39, 47, 48/.

Влияние структуры полимеров на процесс усталости рассмотрено в статьях /I.49-I.51/. В /I.49/ при испытаниях поликапролактама в режиме  $\varepsilon = \text{const}$  наблюдалось установление температуры саморазогрева образца, уровень которой существенно зависел от характера надмолекулярной структуры материала, причем при более мелкой и равномерной структуре наблюдалась меньшая температура разогрева. Эти результаты коррелируют с выводами в /I.50, 51/, где исследовалось влияние разных добавок на усталостную прочность капрона при повторном ударном нагружении. Было замечено, что противоутомительные свойства добавок зависят в основном от их способности образовывать

однородную структуру, способствующую равномерному распределению напряжений в материале.

Большой экспериментальный материал по исследованию влияния стабилизации структуры полимера на его усталостные свойства содержится в брошюре М.Новака /I.52/. Там показано, что после старения и стабилизации структуры усталостная долговечность существенно повышается.

В диссертации И.Барейшиса /I.53/ было установлено упрочнение поликапроамида в процессе вибрационного нагружения с частотой 320 ц/мин. Это явление объясняется стабилизацией структуры и удалением влаги из образцов в процессе испытаний.

Как было отмечено выше, усталостные испытания полимерных материалов всегда (если не применять специальных охлаждающих устройств) сопровождаются разогревом, значительно осложняющим испытания на усталость. Необратимые энергетические потери у жестких пластмасс в застеклованном состоянии в несколько раз больше, чем у металлов, а теплопроводность на два порядка меньше. Сочетание этих свойств нередко приводит к местному разогреву до температур перехода полимера в высокоэластическое состояние. В сочетании с сильной зависимостью диссипации энергии от температуры разогрева пластмасс за счет рассеяния энергии приобретает весьма важное значение.

Уже в первых работах по усталости полимеров /I.5/ было показано, что разогрев пластмасс значителен, и это является главной причиной снижения модуля упругости. В /I.3/ приведе-

ны, вероятно, первые опытные данные по кинетике разогрева фенольного пластика, полученные при испытании на усталость.

Попутно с результатами испытаний на усталостную прочность стеклопластиков в ряде работ были получены экспериментальные данные по их разогреву /I.8, 30, 54/. В /I.8/ отмечено влияние асимметрии цикла на величину температуры разогрева; в /I.30/ установлено, что наибольший разогрев имеют образцы, вырезанные под углом  $45^{\circ}$  к основе ткани.

Подробные данные по разогреву и усталости стеклопластиков были получены в /I.55/. В работе экспериментально установлено, что интенсивность разогрева зависит от частоты, амплитуды, нагрузки, формы образца и температуры окружающей среды. Испытания проводились в режимах постоянной нагрузки и постоянной деформации. При этом кривая роста  $T$  образца в режимах  $\sigma_a = const$  непрерывно повышается до момента разрушения, а в режимах  $\varepsilon_a = const$  кривая имеет максимум, после которого температура уменьшается. Опыты с промежуточным отдыхом показали, что разогрев после каждого отдыха в режиме  $\sigma_a = const$  возрастает все интенсивнее от первого к последнему. Авторы приходят к выводу о том, что усталостное разрушение стеклопластика имеет термическую и механическую природу.

Систематическое исследование разогрева изотропных пластмасс как причины разрушения проведено в работах /I.35, 56 - 59/. В /I.35/ экспериментально исследован разогрев ряда изотропных пластмасс при симметричном консольном изгибе с вращением на машине обращенного типа, позволяющей измерять температуру неподвижного образца в режиме заданной по-

стоянной амплитуды нагрузки. Опыты позволили установить, что температура быстро стабилизировалась, причем разогрев материала зависел от амплитуды, размеров и формы шейки образца, а также от условий теплоотвода.

При исследовании капролона температура не стабилизировалась и при достижении некоторого критического значения быстро возрастала, приводя образец к разрушению.

Экспериментальные исследования /I.57, 58/, как и в /I,35/, проводились при симметричном консольном изгибе с частотой нагружения 600 - 3000 цикл/мин. Опытами показано, что интенсивность разогрева образцов зависит от условий теплоотвода, амплитуды нагрузки, частоты и температуры окружающей среды.

Однако интенсивное разрушение всех испытанных пластмасс (всего 16 видов) происходило после достижения определенной критической температуры разогрева  $T_{кр}$ , инвариантной по отношению к указанным условиям деформирования.

В 1965-1966г.г. появился ряд работ, посвященных теоретическому исследованию температурного режима вязко-упругого материала при циклическом деформировании /I.60-65, 57/. В /I.57/ исследовалась температура образца с малым поперечным сечением при допущении, что по сечению температура не меняется. Тогда уравнение теплопроводности приближенно можно записать:

$$\rho c V \frac{dT}{dt} = \alpha \sigma_a^2 V \left( \frac{1}{T} \right) - \alpha S (T - T_0) \quad (1.1.1)$$

где  $T$  - температура,  $T_0$  - температура окружающей среды;  
 $\zeta$  - плотность;  $C$  - удельная теплоемкость;  $V$  - объем;,  
 $\bar{\sigma}_a$  - амплитудное значение приложенного напряжения;  $\kappa$  - коэффициент теплообмена;  $S$  - поверхность;  $\alpha$  - коэффициент, зависящий от частоты, формы цикла, вида нагружения,  $J''(T)$  - податливость потерь, зависящая от температуры. Если температурная зависимость  $J''(T)$  достаточно сильная, то уравнение /I.I.I/ имеет в зависимости от величины коэффициентов в правой части установившееся или неустойчивое решение. Случай неустойчивого решения соответствует тепловому разрушению полимера. Было указано на аналогию рассматриваемого явления с так называемым "тепловым взрывом" /I.66/.

Критическое значение разогрева  $T_{кр}$ , выше которого начинается неустойчивый режим разогрева, определяется решением системы двух уравнений.

$$Q_+ = Q_- ; \quad \frac{dQ_+}{dT} = \frac{dQ_-}{dT} \quad /I.I.2/$$

где  $Q_+$  и  $Q_-$  - выделение и потери тепла в единицу времени, определяемыми членами правой части выражения /I.I.I/. Решение системы /I.I.2/ показывает, что  $T_{кр}$  зависит только от температуры  $T_0$  и свойств материала. В работе подчеркивается, что специфика нелинейной зависимости  $J''(T)$  обуславливает наличие двух устойчивых температурных режимов, названных низко- и высокотемпературными режимами.

В работе /I.60/ исследуется аналогичная задача о тепловом режиме круглого образца при виброползучести с учетом гра-

диента температуры по поперечному сечению образца. Получен критический размер образца; в образцах большего размера начинается быстрый рост температуры.

В /I.62 - 65/ решаются отдельные задачи по определению установившегося и неустойчившегося температурного поля в пластинах и цилиндрах. Решение задач в /I.63, 64/ проведено вариационным методом.

Все рассмотренные выше задачи имеют в виду определение некоторого критического температурного режима, выше которого начинается неустойчившийся процесс. Во всех перечисленных работах имеется одно существенное допущение: принимается, что теплоприход в данном режиме нагружения зависит только от температуры, т.е. не меняется с накоплением дефектов в материале. В то же время при усталостном нагружении в полимерном материале происходит процесс постепенного разрушения, вызывающий структурные изменения материала. Сведений о физической или химической природе этих изменений материала в настоящее время еще недостаточно, и получение их следует рассматривать как одну из важнейших задач в развитии теории усталостной прочности полимеров.

Следует отметить работу /I.67/, где описаны установка и результаты исследований по изменению надмолекулярной структуры аморфно-кристаллических полимеров в условиях циклического нагружения. Структура полимеров изучалась методом дифракции рентгеновских лучей под малыми углами непосредственно во времени приложения нагрузки. Авторы пришли к выводу о

"квазистатическом" характере структурных изменений при циклическом нагружении.

В механических исследованиях изменение свойств или повреждаемость образца обычно фиксируется по изменению прочности /I.70/ модуля упругости /I.68/, рассеяния энергии в материале /I.72/ или визуально /I.68, 69/.

Более подробно индикация повреждений по измерению механических свойств материала описана в параграфе /I.I.3/.

Можно считать установленным, что разрушение при усталостном испытании не наступает мгновенно, а является процессом, длящимся все время нагружения и завершающимся разделением материала на части или потерей им несущей способности и вследствие размягчения или "размочаливания" (как бывает у стеклопластиков). В этом отношении разрушение при циклическом нагружении принципиально не отличается от разрушения при длительном статическом нагружении.

Следует различать два разных в механическом смысле вида разрушения - путем распространения одной или нескольких трещин и равномерное разрушение связей в некотором макрообъеме материала. Последнее будем называть дисперсным разрушением.

Очевидно, что если разрушение происходит путем распространения единичной трещины, то прочность образца падает значительно, но изменение модуля упругости, замеренное на достаточно большой базе должно быть малозаметным. С другой стороны, падение модуля упругости во время нагружения, ви-

димо, свидетельствует о равномерном распределении по объему рвущихся связей или дисперсном разрушении.

Результаты работ, проведенных в лаборатории динамических свойств Института механики полимеров и изложенных в первой главе диссертации, показали, что необратимое падение модуля происходит за все время циклического нагружения, что свидетельствует о преобладании в данном случае роли дисперсного разрушения. Особенно наглядно это проявляется в нагружении стеклопластиков, где распространение трещин затруднено. Наблюдаемая в полиметилметакрилате усталостная трещина в изломе также не может объяснить необратимого падения модуля, которое также частично вызывается объемным разрушением. Ранее аналогичное падение модуля у полиметилметакрилата было отмечено в /1.73/ для случая статического нагружения с повторными разгрузками.

В этой работе частота нагружения выбиралась столь малой, чтобы можно было полностью пренебречь повышением температуры образца вследствие разогрева. Оказалось, что периодический отдых значительно укорачивает срок жизни образца и увеличивает падение модуля. Это явление можно объяснить наличием релаксационных процессов в материале во время отдыха.

Вопрос прогнозирования циклической долговечности при сложном напряженном состоянии по результатам испытаний на одноосное нагружение, несмотря на его очевидную актуальность, исследован мало даже для металлов. Для полимеров такие исследования только начинаются.

Любая предложенная феноменологическая теория усталостной прочности требует подробного экспериментального подтверждения. Но если по циклической долговечности металлов при сложном напряженном состоянии экспериментальные данные есть, то для полимеров такие данные в настоящее время практически отсутствуют. Их накопление является необходимым для развития теории усталости полимерных материалов. Кроме испытаний на растяжение - сжатие и изгиб имеется лишь несколько работ, посвященных исследованию циклической долговечности при кручении /I.74, I.75/. Результаты, приведенные в /I.75/, свидетельствуют о значительно меньшей циклической прочности пластмасс при кручении по сравнению с прочностью при циклическом плоском изгибе с вращением. Особенно большая разница в циклической прочности отмечалась для анизотропных материалов - фенолформальдегидных стеклопластиков.

#### I.I.2. Результаты физических опытов по определению уровня разрушенности в процессе статической усталости.

Разработка физических представлений о природе разрушения полимеров в работах значительного числа исследователей основывается в настоящее время на представлениях о разрушении как кинетическом процессе, развивающемся в теле с момента приложения нагрузки вплоть до его разрыва на части /I.76/. Элементарными актами процесса разрушения, согласно этим представлениям, являются термофлуктуационные разрывы

межатомных связей (химических и межмолекулярных), активируемые приложенным напряжением. Исходя из подобной кинетической концепции, разрушение и прочностные свойства тела следует характеризовать не каким-либо критическим напряжением  $\sigma$ , а некоторой скоростью накопления нарушений (скоростью разрыва межатомных связей или скоростью накопления и роста трещин).

Наряду с феноменологическими исследованиями, позволяющими получать определенную информацию о природе процесса разрушения, в работах физиков все большую роль приобретают микроскопические исследования, в которых изучение разрушения на различных уровнях (начиная с атомного) ведется рядом современных тонких прямых методов: инфракрасной спектроскопии (ИКС), электронного парамагнитного резонанса (ЭПР), масс-спектрометрии (МС), ядерного магнитного резонанса (ЯМР), рентгеновской дифракции под малыми (МРД) и большими (БРД) углами, рассеяния света, электронной и оптической микроскопии и др. Этими методами удается получать детальные сведения о ходе разрушения и строить обоснованную прямыми данными картину разрушения. Методом ИКС обнаруживается появление высоких локальных перенапряжений на макромолекулах /1.77, 78/. Экспериментально прослеживаются термофлуктуационные разрывы этих молекул по химическим связям (методами ИКС, ЭПР, МС), а затем и образование субмикротрещин (методом МРД) /1.79 - 1.83/, которые могут возникать в результате цепных реакций, инициируемых активными свободными радикалами, возникающими на концах разорванных молекул (регистрируемых методами ЭПР и ИКС). Первичные трещины сливаясь образуют более крупные

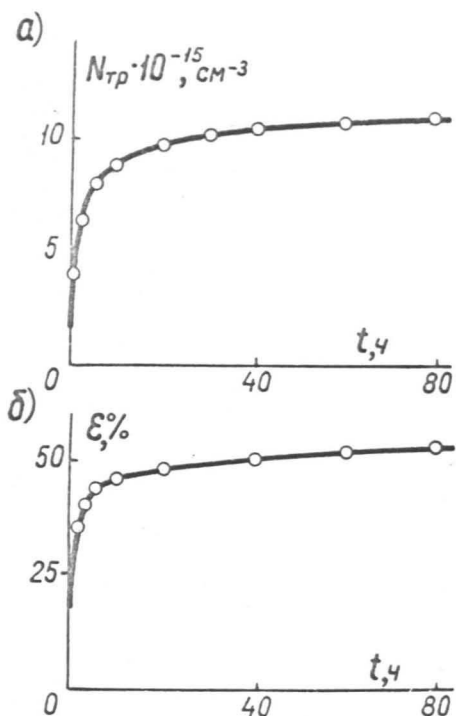


Рис. I.1.

Нарастание концентрации субмикротрещин (а) и ход деформации (б) во времени под действием постоянного растягивающего напряжения ( $\sigma = 20 \text{ кгс/см}^2$ ) для ориентированного капрона.

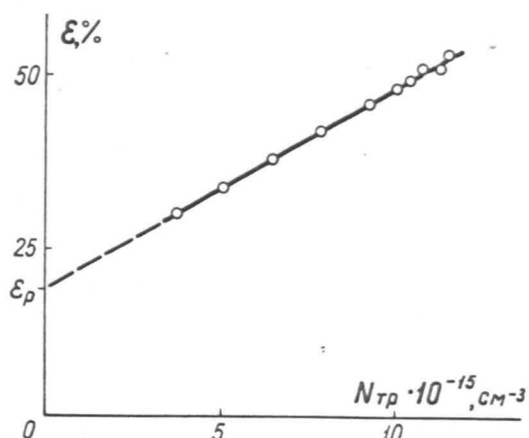


Рис. I.2.

Сопоставление деформации с концентрацией трещин в образце из ориентированного капрона под действием постоянного растягивающего напряжения.

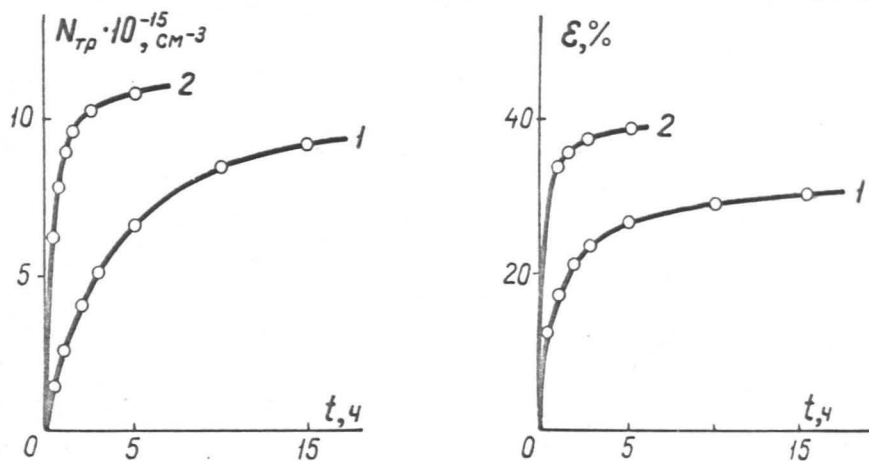


Рис. I.3.

Нарастание концентрации трещин (а) и ход деформации (б) во времени под действием постоянного растягивающего напряжения для ориентированного капрона: 1- напряжение приложено впервые; 2- то же напряжение приложено вторично после полной разгрузки и отдыха материала.

трещины (что прослеживается ффрактографически) и в конечном счете магистральную, которая растет (за чем можно следить пользуясь микрокиносъёмкой), ускоряя перед своей вершиной перечисленные процессы, и в конце концов разрывает образец. Для неориентированных аморфных полимеров картина разрушения может отличаться (в них можно ожидать большего участия распада межмолекулярных, а не химических связей), но возможность построения детальной картины пока хотя бы и для ориентированных аморфнокристаллических полимеров несомненно важна /I.85/.

Более подробно остановимся на кинетике разрушения ориентированной капроновой пленки /I.83/ при постоянном растягивающем напряжении.

Под действием растягивающей (вдоль оси ориентации) нагрузки в образцах возникали дископодобные по форме трещины диаметром 200–300 Å. Размеры трещин в основном этапе нагружения не менялись, однако концентрация резко возрастала во времени, (рис Ia.)

Поэтому концентрация субмикротрещин могла быть принята за показатель повреждаемости, причем эта концентрация достигает больших значений  $N_{тр} = 10^{15} - 10^{16} \text{ 1/см}^3$ .

В той же статье показано, что нарастание деформации прямо коррелирует с увеличением числа субмикротрещин  $N_{тр}$  (рис. I.16 и рис. I.2).

Как видно из последнего рисунка, зависимость  $\varepsilon \sim N_{тр}$  экстраполирует при  $N_{тр} = 0$  к некоторому значению  $\varepsilon_0$ .

Этот факт подтверждает естественную мысль, что деформация в полимерах складывается из двух частей — деформация за счет распрямления молекул и деформация трещинообразования.

Ответственность трещин за нарастание деформации можно подтвердить, рассматривая повторные нагружения, после разгрузки, когда трещины раскрываются более интенсивно и так же растут деформации (рис. I.3 а, б/. Последующие разгрузки и нагружения уже не меняют хода нарастания концентрации трещин по сравнению с кривой 2 рис. I.3а. Эти результаты показывают правомерность и необходимость рассматривания стадии дисперсного разрушения полимеров по крайней мере в исследуемом случае. Они показывают и плодотворность применения физических методов исследования процессов разрушения.

Но физические методы имеют и свои ограничения. С их помощью пока исследуются только микрообразцы в виде пленок или нитей, причем исследуются только прозрачные высокоориентированные материалы.

В макрообразцах конструкционных полимерных материалов непосредственно наблюдать кинетику разрушения затруднительно. Тут остается другой путь исследования: судить о повреждаемости (или разрушенности) образца по изменению его механических свойств, которые должны быть функциями изменения внутренней структуры материала.

### Г.Г.З. Изменение механических свойств пластмасс в процессе усталости

До последнего времени большинство испытаний на длительное циклическое нагружение проводится лишь с одной целью - получения кривой усталости (кривой Велера). Такие испытания, конечно, необходимы для расчета конструкций, но при тоннах сломанного металла или пластмасс они дают очень мало информации о природе и причинах усталостного процесса.

Как было показано, для исследования этого процесса плодотворно проведение тонких физических измерений, позволяющих установить количество свободных радикалов, возникающих при разрыве связей материала, количество микротрещин и т.д. С другой стороны необходимы также "механические" измерения, т.е. измерение макровеличин (циклического модуля, формы и величины петли гистерезиса, температуры образца), которые функционально связаны с более тонкими изменениями структуры. В нашей работе мы придерживаемся только "механического" подхода.

Рассмотрим те работы, где процесс усталости изучался индикацией таких "механических" характеристик материала.

Исследования кинетики рассеяния энергии при усталостных испытаниях металлов показывают, что эта характеристика изменяется во времени по двум типичным диаграммам /Г.88 - Г.90/. На рис. Г.4 воспроизведены результаты исследования кинетики рассеяния энергии за цикл тепловым методом /Г.86/, (по работе /Г.89/).

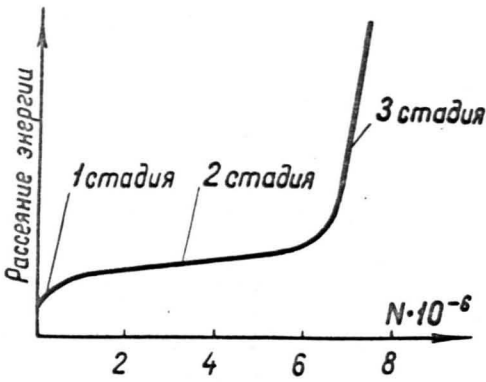
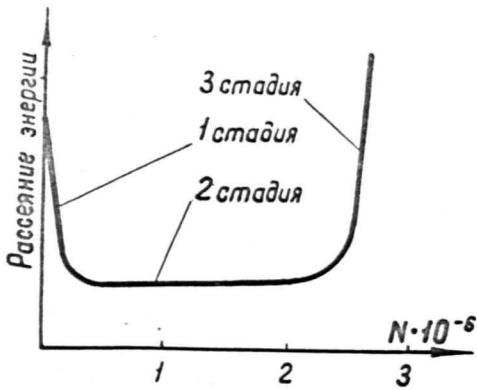


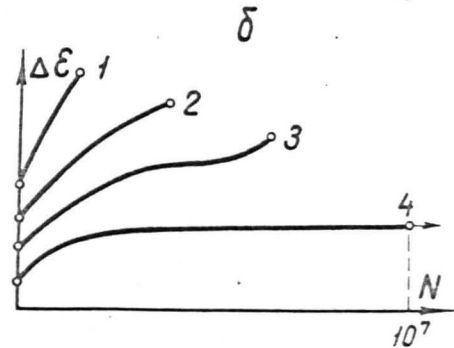
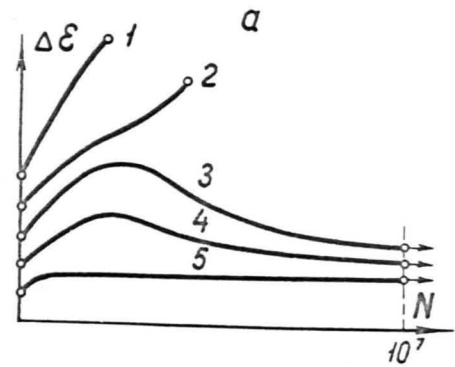
Рис. I.4.

Изменение рассеяния энергии за цикл при усталостных испытаниях мягких (а) и твердых (б) металлов /I.89/.

Рис. I.5.

Кинетика рассеяния энергии при циклическом нагружении металлов для разных уровней напряжения /I.90/:

- а- с преобладанием упрочняющих факторов;
- б- с преобладанием разупрочняющих факторов.



Первый тип диаграмм (рис. I.4а) получен при испытании мягких металлов (медь, бронза, отожженная углеродистая сталь); второй тип (рис. I.4б) – при испытании твердых сталей. Как видно из рисунков, типичные диаграммы отличаются между собой начальной стадией. Мягкие металлы на первой стадии с ростом числа циклов уменьшают гистерезисные потери (рис. I.4а), а твердые металлы наоборот – увеличивают (рис. I.4б). Уменьшение и увеличение в обоих типах диаграмм происходит до определенного уровня, после чего наступает медленный рост рассеяния энергии на второй стадии. На третьей стадии в обоих случаях происходит резкое нарастание гистерезисных потерь вплоть до момента разрушения образца (стадия разрыхления). Диаграммы рис. I.4 получены в режиме постоянной нагрузки при напряжении близком к пределу усталости на базе  $N = 10^7$  циклов.

По представлениям И.А. Одингга /I.90/ при циклическом нагружении металлов протекают одновременно два вида противоположных процессов: процессы, вызывающие упрочнение материала и процессы разупрочнения. При высоких уровнях нагрузки преобладают процессы разупрочнения, приводя материал к быстрому разрушению. При уровнях нагрузки, близких к пределу усталости, появляется различие в кинетике рассеяния энергии. Для металлов с преобладанием упрочняющих факторов (рис. I.5а) гистерезис с ростом числа циклов проходит через максимум. У металлов с преобладанием разупрочняющих факторов потери возрастают от начала до момента разрушения образца при любом уровне напряжения (рис. I.5б). На рис. I.5 рассеяние энергии характери-

зовано величиной ширины петли гистерезиса  $\Delta \xi$ .

В известном критерии разрушения Кофина /I.9I/ применяемом для расчета малоциклового усталости металлов входит величина ширины петли гистерезиса безотносительно к ее изменению в усталостном процессе.

Обзор по исследованиям рассеяния энергии в металлах дан в книге В.Т.Троценко /I.72/. Там описана также аппаратура (уже серийная) для фиксации рассеяния энергии методом динамической петли гистерезиса и полученные результаты. Сведения о некоторых других методах измерения  $\Delta \omega$ , (метод Кимбалла-Лазана, калориметрический метод) также можно получить из монографии /I.72/.

Рассмотрим теперь данные по зависимости  $E, \Delta \omega(N)$  для жестких полимеров. В наиболее ранних работах /I.4, 5,92/ была исследована зависимость  $E = E(N)$  при одновременном измерении температуры разогрева образца. опыты показали, что  $E$  пластмасс уменьшается с ростом числа циклов. Особенно интенсивно жесткость падала при высоких уровнях нагрузки. При этом снижение  $E$  коррелировала с подъемом температуры гистерезисного разогрева, как это видно из рис. I.6, на котором представлена кинетика  $\varepsilon_a$  и  $T$  фенольного пластика, испытанного при  $\omega = 1800$  цикл./мин. в режиме  $M_{изг} = const.$

/I.5/. Корреляция кривых  $\varepsilon_a$  и  $T$  привела авторов к выводу, что основной причиной снижения  $E$  является температура разогрева, хотя есть и влияние необратимых повреждений. Последнее доказывалось снижением остаточной статической проч-



ности пластика после длительного циклического нагружения при практически постоянной температуре образца. Так как  $T = T(\Delta\psi)$ , то данные по кинетике температуры, показанные на рис. I.6 отражают и характер изменения  $\Delta\psi = \Delta\psi(n)$

Наиболее обстоятельными опытами за границей по исследованию повреждаемости стеклопластика являются, вероятно, исследования /I.68, 69/, проведенные в 1968 - 1972 годы. В этих исследованиях показано, что в полиэфирном стеклопластике под действием вибрационной нагрузки наблюдается падение модуля, а также появляется множество видимых микротрещин.

Измерения рассеяния энергии при длительном циклическом нагружении стеклопластиков были проведены в /I.93/. Испытания проводились на специальной установке с  $\omega = 15 \text{ ч.с.}$  в режиме  $\varepsilon_a = \text{const}$  при плоском изгибе. Для измерения декремента колебаний  $\delta$  испытания прерывались на несколько секунд через определенное число циклов.

В опытах отсутствовал заметный разогрев, измерявшийся на поверхности образца. Рассеяние увеличивалось с ростом числа циклов для всех уровней нагрузки, кроме наиболее низкого. Повышение  $\delta$  во времени автор объясняет разогревом в микрообъемах за счет рассеяния энергии, замечая, что сама по себе тренировка материала циклической нагрузкой либо не влияет на  $\delta$ , либо это влияние было незначительно. В качестве доказательства этой точки зрения приводятся данные по влиянию отдыха на  $\delta$  тренированного материала. Два вида стеклопластиков, подвергнутых циклическому нагружению при малых

$\xi_a$  после 1,5 ÷ 2 час. отдыха полностью возвратили свои исходные диссипативные свойства. Таким образом, по /I.93/ увеличение  $\delta$  связано с повышением температуры стеклопластика и практически не зависит от повреждаемости, накапливаемой при тренировке.

В работе /I.94/ также показана значительная роль разогрева в снижении упругих свойств винилпласта и капролита при циклическом нагружении.

В свою очередь в ранее упомянутой работе /I.55/ авторы пришли к выводу, что разогрев и, следовательно, диссипация в стеклопластике зависит не только от достигнутого уровня температуры, а также от числа циклов.

В работе /I.95/ подробно исследовано рассеяние энергии в ПММА при циклическом кручении. Прямыми калориметрическими измерениями показано, что на разогрев образца уходит  $\approx 65\%$  общей диссипированной энергии. По нашим представлениям эта цифра является заниженной, но само сопоставление тепловой и диссипированной энергии для пластмасс здесь, вероятно, проведено впервые.

В начальном этапе наших исследований были поставлены задачи, которые вытекают из общей цели работы и имеющихся исследований.

В основном режиме усталостных испытаний - циклическом растяжении-сжатии исследовать изменение механических свойств (циклического модуля и диссипации энергии) как характеристик поврежденности в зависимости от числа циклов и разогрева образца, а также попутно исследовать отношение тепловой энергии к общей рассеянной энергии.

## I.2. Методика экспериментального исследования

### I.2.1. Форма и размеры образцов, испытательная машина и установка образцов на ней.

Испытания проводились на установке ЦДМ-ЮПу в режиме циклического растяжения-сжатия.

Стандарты на образцы для усталостных испытаний на растяжение-сжатие отсутствуют. Образец для испытаний на статическую прочность по ГОСТ 4649-55 нельзя использовать при наличии сжимающих напряжений вследствие неизбежных искажений в осевых деформациях от продольного изгиба. Согласно стандартам, приведенным в /I.96/ при испытании изотропных полимеров на сжатие можно допустить длину образца до  $2 \div 3$  размеров толщины.

Нами испытывались плоские образцы с длиной прямолинейного участка шейки равной 10 мм, позволяющей применять циклы пульсирующего сжатия.

Величина радиуса закругления шейки образца для каждого материала подбиралась экспериментально с таким условием, чтобы разрушение образцов при любом характере нагружения (статическом и динамическом) на растяжение и сжатие происходило в пределах прямолинейного участка шейки. На рис. I.7 показан чертеж образца из эпоксифенольного стеклопластика со всеми исполнительными размерами. В таблице I.1 приводятся размеры шейки основных испытанных образцов.

Таблица I.I

Размеры шейки образцов

Материал	Толщина, мм	Ширина, мм	Радиус перехода, мм	Площадь попереч- ного се- чения, мм <sup>2</sup>
Стеклотекстолит ЭФС	8,6	18	65	154
Стеклотекстолит ВФТ-С:				
по основе	10	15	75	150
по утку	10	16	65	160
Капролон В <sub>I</sub>	16	16	50	256

Свободная длина образца (вне захватов) находилась в пределах 45 ÷ 50 мм. Как видно из таблицы I.I., в принятых образцах соотношение между свободной длиной образцов и наименьшим размером поперечного сечения было близким к рекомендуемым для испытаний на сжатие.

Примененный нами образец (рис. I,7), призматический с симметрично расположенными пазами в головках, технологичен при обработке резанием, так как имеет призматическую форму и самоустанавливается соосно подобно образцу с клиновидной головкой (с помощью металлических клиньев);

Для проверки влияния краевого эффекта на образцах с такой укороченной рабочей частью были изготовлены образцы из стеклотекстолита с удлиненными шейками (с прямолинейным участком равным 50 мм) и образцы по чертежу (рис. I.7).

Прочность на разрыв удлиненных образцов оказалась равной

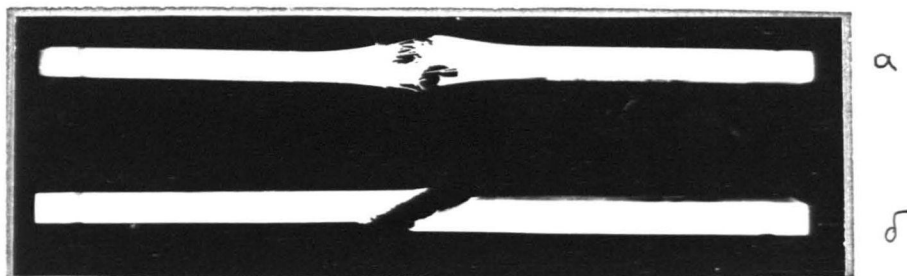


Рис. 1.8.

Разрушение образцов стеклотекстолита при статическом растяжении (а) и сжатии (б).

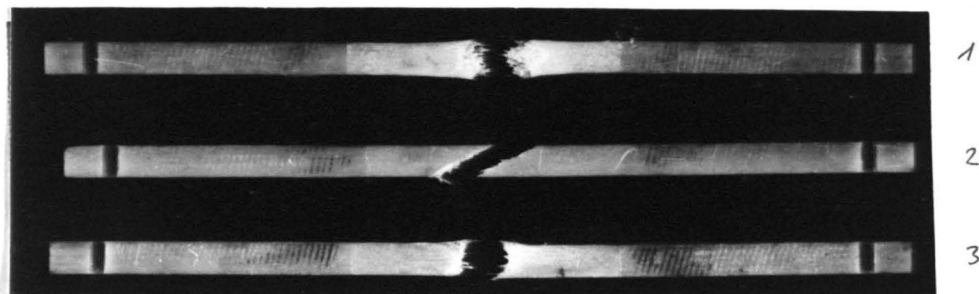


Рис. 1.9.

Разрушение образцов ЭФС при циклическом нагружении с частотой  $\omega = 200$  ц/мин:  
1)  $\tau = 0$ ; 2)  $\tau = -\infty$ ; 3)  $\tau = -I$ .

19,8 кгс/мм<sup>2</sup>, а коротких (рис. I.7) 20,4 кгс/мм<sup>2</sup> с коэффициентом вариации 3% в обоих случаях. Практически равная прочность обоих типов образцов указывает на отсутствие влияния краевого эффекта.

В практике статических и динамических испытаний образцы принятой формы, как правило, разрушались на линейном участке шейки. На рис. I.8 показаны образцы, разрушенные при статическом растяжении и сжатии, а на рис. I.9 – разрушенные в циклическом режиме при разных асимметриях цикла. В редких случаях, обычно связанных с некачественной фрезеровкой шейки, разрыв происходил по началу радиуса перехода шейки к головке, но такие опыты не принимались во внимание.

Заготовки образцов вырезались из листового материала либо блоков фрезой. Особое внимание обращалось на качество фрезерования шейки, от которого в основном зависит начальная повреждаемость материала. При обработке резанием не допускался нагрев образцов более 40°C. Все образцы каждого из испытанных материалов изготовлены из одной партии материала, что исключило влияние отклонений в технологии изготовления материала на результаты опытов.

Из армированных материалов исследовался стеклотекстолит на эпоксифенольном связующем, армированный стеклотканью Т-90, а также стеклопластик ВФТС.

Из изотропных материалов исследовался капролон и блочный ПММА.

Испытания производились на гидропульсаторе ЦДМ-10 Пу в режиме нагружения  $\sigma_a = \text{const}$ . Циклическое нагружение происходило по синусоидальному закону. Частота пульсации была 900 цикл/мин.

Образцы на испытательной машине устанавливались с помощью промежуточных захватов. На рис. 1.10 изображены захваты с образцом в рабочем положении. На верхнем захвате снята крышка для показа его внутреннего устройства.

Корпусы захватов I с помощью специального шаблона соосно выставлялись и закреплялись в зажимах гидропульсатора. Образец 2 своими пазами находился в сцеплении с клиньями 3, лежащими на сегментах 4, которые опирались на поверхность корпуса. Задней плоскостью образец плотно прижимался к корпусу крышкой 5 с помощью гаек. При статических испытаниях на сжатие, а также в режимах пульсации торцы образца поджимались клинами 6. В боковой плоскости образец самоцентрировался сегментами 4.

Измерение нагрузки и контроль асимметрии цикла производились с помощью тензодатчиков 16, включенных в мостовую схему, подающую сигнал нагрузки на шлейфовый осциллограф. Величина переменной нагрузки и коэффициент асимметрии цикла при длительных испытаниях выдерживались с точностью до 3% /1.97/.

### I.2.2. Измерение деформаций, рассеяния энергии и температуры

Для измерения деформаций был опробован способ наклейки тензодатчиков непосредственно на шейку образца (из стеклопластика). Оказалось, что этот способ в условиях циклического нагружения может быть использован лишь при непродолжительных испытаниях ( $N < 80$  тыс. циклов) и при относительных деформациях  $\varepsilon_a < 0,35\%$ . За пределами этих условий датчики быстро разрушаются.

Окончательно деформации измерялись с помощью тензометрического устройства /I.98/ установленного на шейке образца (измерительная база равна 16 мм). Устройство (рис. I.10) состояло из верхней 8 и нижней 9 двухконсольных планок, механически не связанных между собой. На нижней укреплены два упругих элемента 10 с тензодатчиками, опирающиеся свободными концами на винты 11. Усиленный сигнал тензодатчика подавался затем на шлейфовый и электронный осциллографы. При этом 1 мм на экране осциллографов соответствовал напряжению  $0,03 \div 0,08$  кгс/мм<sup>2</sup> и деформации  $4 \cdot 10^{-5} \div 8 \cdot 10^{-5}$ .

Основная тарировка деформационного устройства производилась на специальном приспособлении, где с помощью микрометрического винта создавался прогиб упругих элементов. Контроль перемещения производился с точностью до 1 мк по прибору Листова. При тарировке устанавливался предел линейной зависимости показания устройства от величины прогиба и масштаб измерений при различных усилениях первичного сигнала.

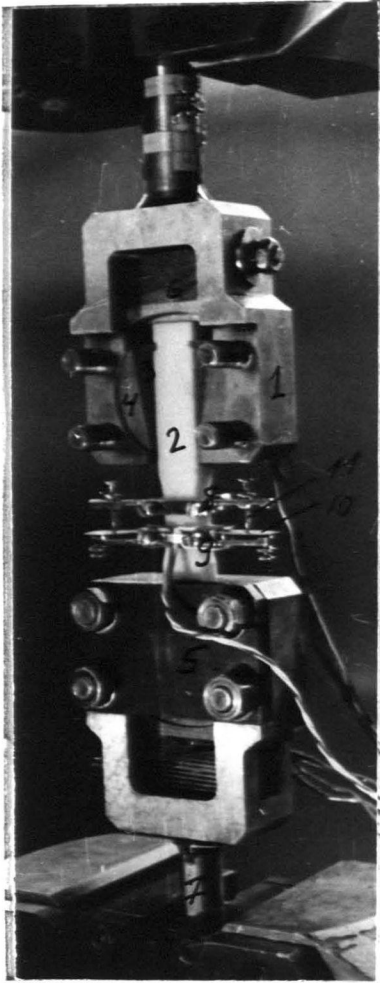


Рис. I. I0.

Образец в захватах с прикрепленным к нему приспособлением для измерения деформаций.

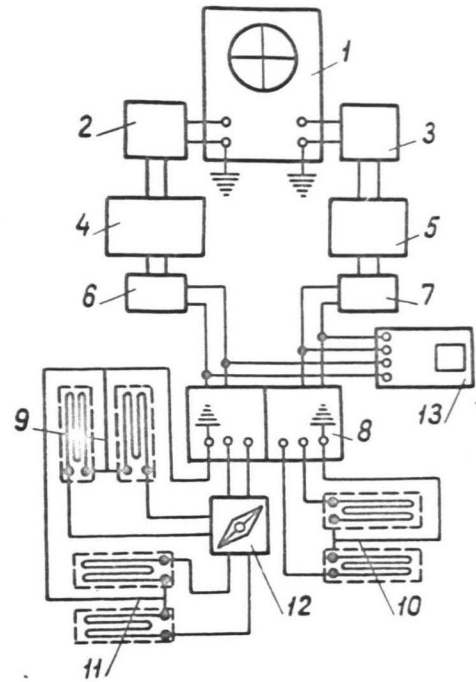


Рис. I. II.

Блок-схема аппаратуры для регистрации величины деформации и рассеяния энергии.

Собственная частота колебаний упругих элементов, как показал элементарный расчет, находится выше 50 гц, что в три раза выше частоты, на которой проводились эксперименты.

Точность измерения деформации проверялась путем сравнения показаний прибора и наклеенных датчиков. При кратковременном циклическом нагружении результаты по обоим методам совпали.

Рассеяние энергии исследовалось методом динамической петли гистерезиса, позволяющим непрерывно наблюдать петли на экране электронного осциллографа. За основу было принята схема регистрации петель гистерезиса, описанная в работах /1.72, 99/.

На рис. 1.11 представлена принципиальная блок-схема примененной аппаратуры. Схема включает: 1- электронный осциллограф типа С-1 или ЭО-7; фильтры - 2,3,6 и 7; усилитель низкой частоты - 4; фазовращатель - 5; тензометрическую станцию - 8; типа УТС1-ВТ-12; 9 - датчики сопротивления, наклеенные на упругих элементах устройства для измерения деформаций; 10 и 11 - датчики нагрузки, наклеенные на основном динамометре (верхнем промежуточном захвате); 12 - пакетный переключатель, 13- шлейфовый осциллограф типа МПО2.

В принятой схеме оригинал нагрузки, снимаемый с датчиков 10, после соответствующего усиления подается на вертикальный канал осциллографа С-1, а сигнал деформации от датчиков 9 подается на горизонтальный канал. Для проверки отсутствия сдвига фаз в электронной аппаратуре, с помощью пе-

реключателя подаются синфазные сигналы одновременно на горизонтальные и вертикальные каналы осциллографа от датчиков IО и II, расположенных на одном динамометре. При этом на экране С-I должна появиться прямая наклонная линия. Если же на экране появилась петля, то ее выбирают фазовращателем. После этого электронная аппаратура подготовлена к измерению петель, для чего пакетным переключателем надо подать на горизонтальный канал сигнал деформации. В процессе длительного циклического нагружения такая проверка настройки производится периодически, что гарантирует достоверность измерений.

Фотографированием петель сразу определяем основные динамические характеристики материала. Это — несомненное преимущество метода, определившее его использование в работе, несмотря на ряд недостатков, а именно: невысокую чувствительность ( $\psi = \frac{2 \Delta \omega}{\sigma_a \varepsilon_a} > 0,05$ ) и точность измерений (до 10%), техническую сложность и громоздкость обработки результатов.

Для достоверности измерений было проверено, что до амплитуд нагрузки, превышающих рабочие в три-пять раз, в системе крепления образца на испытательной машине конструкционный гистерезис отсутствовал. Наличие сдвига фаз вызываемого электронной аппаратурой, входящей в измерительную схему, проверялось перед каждым фотографированием петель с экрана осциллографа и при необходимости устранялось фазовращателем. Решение уравнения захвата для принятой в данном исследовании частоты 900 цикл/мин. с учетом упруго-вязких свойств системы образец-динамометр показал, что погрешность, вносимая в сдвиг фаз

между силой и деформацией, вследствие пренебрежения массой захвата и образца на два-три порядка меньше наблюдаемых средних величин диссипации энергии в материале образца.

Результаты опытов показали хорошую применимость этого метода для исследования рассеяния энергии в пластмассах /I.100-103/.

Температура разогрева образцов измерялась с помощью нихромконстантановых термопар, изготовленных из проволочки  $\phi$  0,15 мм. Температура непрерывно регистрировалась на диаграммной ленте шестиканального электронного потенциометра типа ЭШ-0,9-1М. Спаи термопар приклеивался нитроклеем или клеем БФ-2 к поверхности образца.

Для измерения температуры в теле образца на соответствующую глубину сверлились отверстия  $\phi$  1,2 мм, в которых крепились спаи термопар с помощью клея БФ-2 или нитроклея. Засверловка термопар применялась только для материалов слабо чувствительных к подобному концентратору напряжения (капролон, стеклопластик), что устанавливалось предварительными опытами.

У материалов, сильно чувствительных к концентратору напряжения (например, оргстекло при пульсирующем растяжении), внутренняя температура определялась по следующей методике. Первые образцы оснащались одновременно внутренней и наружной термопарами. Испытания для определения соотношения между внутренней и наружной температурами проводились при пульсирующем сжатии, при котором материал менее чувствителен к концентратору в виде отверстия под термопару. Одновременная запись

кривых температуры давала возможность установить соотношение между внутренней и наружной температурами от начала до момента разрушения образца. После этого о внутренней температуре при других циклах нагружения можно было судить по термопарам, приклеенным на поверхности образца.

Следует подчеркнуть, что в пластмассах из-за локальности разогрева температура образца может сильно различаться в зависимости от расположения термопары относительно места разрушения. Измерение температуры считалось нормальным в том случае, когда разрушение образца происходило в пределах 4мм от центра шейки, где размещалась основная термопара.

На рис. I.12 показан образец кривой температуры, записанной на ЭПП-09-1М при циклических испытаниях.

Тарировка термопар проводилась в трубчатой муфельной печи при нагреве и охлаждении с сохранением монтажных проводов, применяемых во время экспериментов, и с записью температуры на ЭПП-09-1М.

Более подробно все вопросы методики эксперимента приведены в кандидатской диссертации П.П. Олдырева /I.36/.

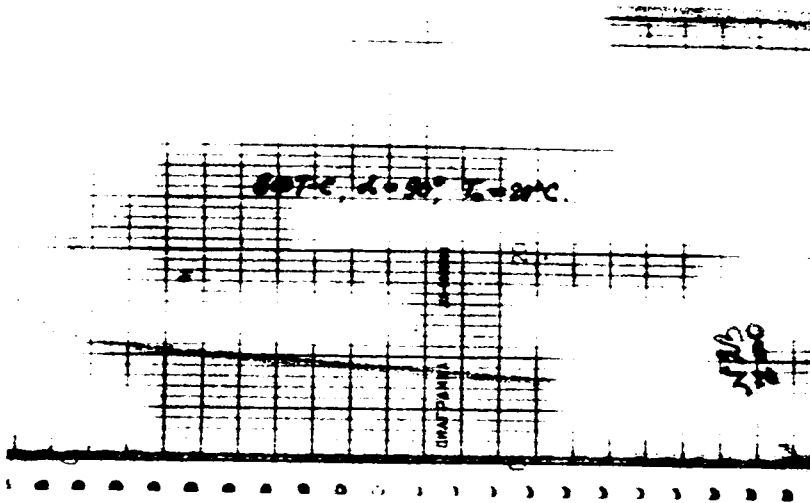


Рис. I.I2.

Образец записи температуры разогрева при испытаниях.

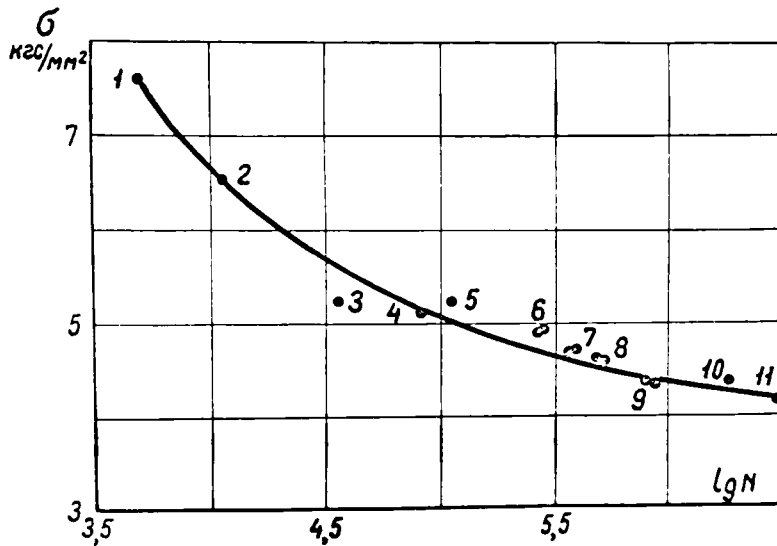


Рис. I.I3.

Кривая усталостной долговечности для стеклопластика ЭФС ( $\gamma = -1$ ,  $\omega = 900$  ц/мин).

### 1.3. Результаты экспериментального исследования и обсуждение

#### 1.3.1 Изменение деформативных свойств стеклопластика при циклическом нагружении /1.97/

Исходные механические свойства стеклотекстолита при статических испытаниях со скоростью нагружения  $650 \text{ кгс/см}^2$  в минуту и температуре  $20 \pm 3^\circ\text{C}$  приведены в таблице 1.2.

Таблица 1.2.

Деформация	Предел прочности		Деформация разрушения, %	Модуль упругости по линейному участку	
	кгс/мм <sup>2</sup>	коэффициент вариации		кгс/мм <sup>2</sup>	коэффициент вариации
Растяжение	20,4	0,03	1,5	1980	0,055
Сжатие	18,1	0,025	1,1	2015	0,05

Кинетика изменения механических и диссипативных свойств изучалась при непрерывном циклическом нагружении образцов до разрушения их на базах  $N \leq 10^6$  циклов.

Кривая Велера для симметричного нагружения ( $r = -1$ ) приведена на рис. 1.13.

На рис. 1.14 показаны для различных уровней нагрузки кривые изменения температуры разогрева  $T$ , амплитуды деформации  $\epsilon_a$  и коэффициента поглощения  $\psi$  с ростом числа циклов нагрузки при симметричном цикле. (Коэффициент поглощения  $\psi$ , представляет собой отношение рассеянной энергии за цикл  $\Delta W_k$

наибольшей потенциальной энергии цикла  $\mathcal{W}$ :  $\psi = \frac{\Delta \mathcal{W}}{\mathcal{W}} = \frac{2 \Delta \mathcal{W}}{\sigma_a \varepsilon_a}$ .  
 Ход кривых  $T$ ,  $\varepsilon_a$ , и  $\psi$  как видно из рисунков, остается одинаковым для различных уровней нагрузки. При долговечностях  $N > 3 \cdot 10^4$  циклов на кривых имеется участок пологого, почти линейного подъема, вырождающийся с повышением амплитуды напряжения  $\sigma_a$  и уменьшением долговечности. Аналогичные опыты были проведены также при пульсирующем растяжении и пульсирующем сжатии. Характер изменения  $\varepsilon_a$ ,  $\psi$  и  $T$  для различных уровней нагрузки при этих видах циклов таков же, как и при  $\nu = -1$ . Однако из-за наличия среднего напряжения цикла при  $\nu = 0$  и  $\nu = -\infty$  деформация ползучести  $\varepsilon_n$  возрастает с числом циклов наряду с ростом  $\varepsilon_a$ . На рис. I.15 для иллюстрации показан ход кривых изменения  $\varepsilon_a$  и  $\varepsilon_n$  для одного уровня нагрузки при пульсирующем растяжении.

Как видно из кривой Велера (рис. I.13) напряжения для получения долговечностей  $10^4 - 10^6$  циклов меняются в узком диапазоне. В этом диапазоне напряжений оказалось, что температура  $T$ ,  $\varepsilon_a$  и  $\psi$  практически сохраняют постоянное значение в начале интенсивного разрушения (см. рис. I.14).

В таблице I.3 приведены критические величины  $T$ ,  $\varepsilon_a$ ,  $\psi$  для разных асимметрий цикла, определенные по соответствующим кривым, как точка пересечения продолжения линейного участка с абсциссой долговечности.

Влияние условий теплообмена на кинетику изменения изучалось в опытах с обдувом образца сжатым воздухом. Характер изменения  $\psi$ ,  $\varepsilon_a$  при обдуве воздухом, как показали испы-

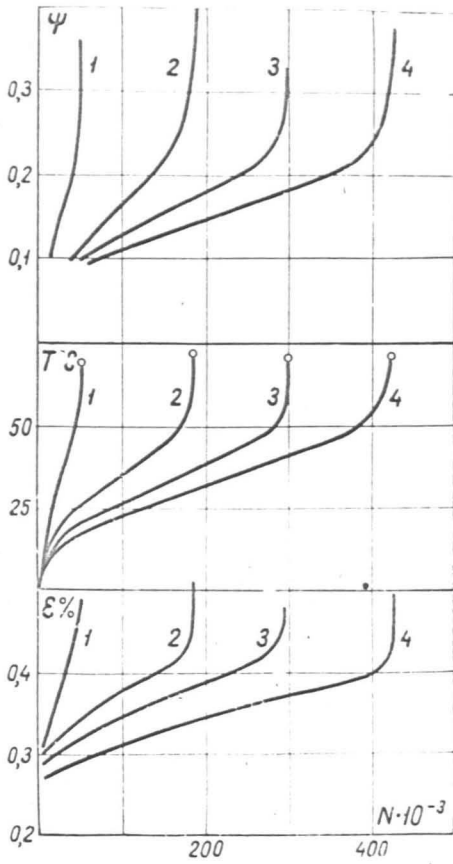


Рис. I.I4.

Кинетика изменения  $\psi, T, \epsilon_a$   
стеклотекстолита э.ф.с.

$\tau = - I; T = 20 \pm 3^\circ C.$

1 -  $\sigma_a = 6,3 \text{ кгс/мм}^2;$

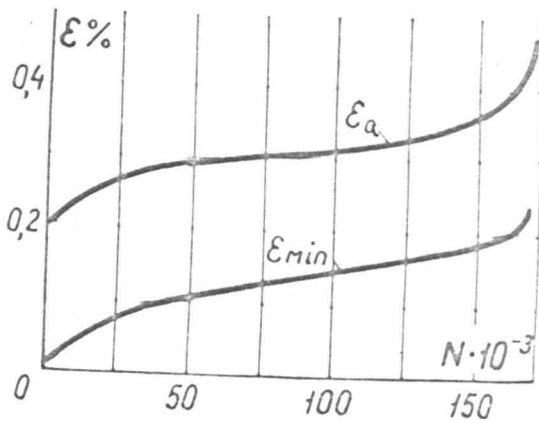
2 -  $\sigma_a = 5,85 \text{ кгс/мм}^2;$

3 -  $\sigma_a = 5,65 \text{ кгс/мм}^2;$

4 -  $\sigma_a = 5,4 \text{ кгс/мм}^2;$

Рис. I.I5.

Изменение  $\epsilon_a$  и  $\epsilon_n$  при  
 $\tau = 0$  и  $\sigma_a = 3,9 \text{ кгс/мм}^2.$



тания при  $z = -1$  на различных уровнях нагрузки, остается прежним, как на рис. I.14, но критические значения их заметно изменяются (см. табл. I.3). Критическая величина механических потерь оказалась ниже, а деформативность - выше, чем при испытаниях без обдува воздухом. При этом существенно снизилось и критическое значение температуры (табл. I.3). Повышение критической деформации при снижении критической температуры разогрева связано с тем, что на спонтанное разрушение влияет как температура, так и достигнутый уровень повреждаемости. При меньшей температуре уровень повреждаемости, характеризующийся значением циклического модуля должен быть соответственно выше.

ТАБЛИЦА I.3

Критические значения  $\psi, T, \varepsilon_a, \varepsilon_n$ 

	При испытаниях без обдува			С обдувом воздуха
	$z = -1$	$z = 0$	$z = -\infty$	$z = -1$
$T, ^\circ\text{C}$	$72 \pm 2$	$53 \pm 2$	$47 \pm 1,5$	54
$\psi$	$0,23 \pm 0,02$	$0,15 \pm 0,01$	$0,13 \pm 0,01$	0,2
$\varepsilon_a \%$	$0,42 \pm 0,02$	$0,33 \pm 0,02$	$0,34 \pm 0,02$	0,49
$\varepsilon_n \%$	-	$0,2 \pm 0,02$	$0,05 \pm 0,01$	-

I.3  
Из таблицы видно, что между критическими значениями  $\psi$  и  $T$  как и следовало ожидать, существует корреляция. По средним значениям этих величин для всех асимметрий цикла в опытах

без обдува воздухом отношение  $T/\psi = const$  соблюдается с точностью  $\pm 7\%$ , что практически находится в пределах точности измерения рассеяния энергии методом динамической петли гистерезиса.

Таким образом, при циклическом деформировании стеклотекстолита с ростом числа циклов непрерывно возрастает необратимо рассеянная энергия и связанный с ней разогрев материала, а упругая ~~податливость~~<sup>жесткость</sup> материала непрерывно падает. Известно, что у стеклопластиков при повышении температуры увеличивается рассеяние энергии и снижается модуль упругости. Однако, при циклическом нагружении возрастание диссипативных свойств и снижение модуля упругости происходят не только по причине роста температуры разогрева. Ниже будет показано, что длительный рост температуры при непрерывном циклическом деформировании, подобный изображенному на рис. I.14, возможен только при изменении диссипативных свойств материала вследствие накопления повреждаемости.

Для выяснения отдельного влияния температуры и повреждаемости на диссипацию энергии и деформативность стеклотекстолита были проведены опыты при повышенных температурах. Ненагруженный образец нагревался до определенной температуры в пределах от  $T_0$  до  $T_p$ , где  $T_p$  — температура разогрева, при которой происходит разрушение при непрерывном циклическом деформировании с  $\nu = -1$ . Нагретый образец быстро нагружался до определенной амплитуды  $\sigma_a$  при  $\nu = -1$ , после чего немедленно производилось фотографирование петель гистерезиса и синусоид  $\varepsilon_a$  и  $\sigma_a$ . До момента фотографирования образец

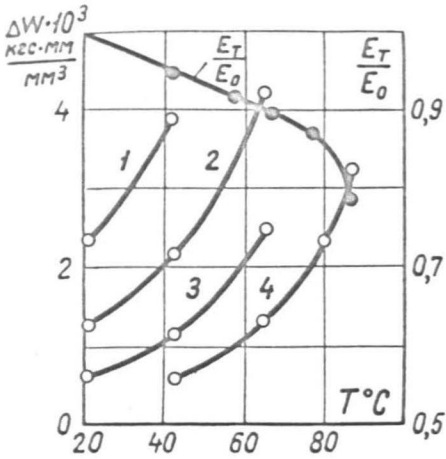


Рис. I.I6.

Зависимость рассеяния энергии и модуля стеклотекстолита от температуры для разных уровней нагрузки;  $\tau = -I$ .  
 1 -  $\sigma_a = 9 \text{ кгс/мм}^2$ ;  
 2 -  $\sigma_a = 8 \text{ кгс/мм}^2$ ;  
 3 -  $\sigma_a = 7 \text{ кгс/мм}^2$ ;  
 4 -  $\sigma_a = 6 \text{ кгс/мм}^2$ .

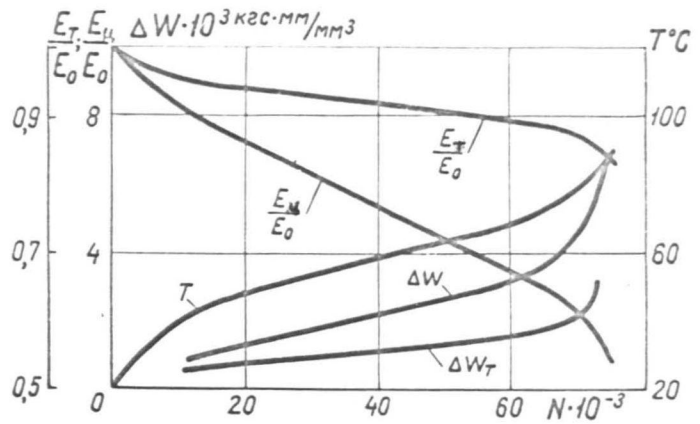


Рис. I.I7.

Изменение рассеяния энергии и податливости стеклотекстолита от нагрева и при непрерывном циклическом деформировании. В обоих случаях  $\tau = -I$ ;  $\sigma_a = 6,1 \text{ кгс/мм}^2$ .

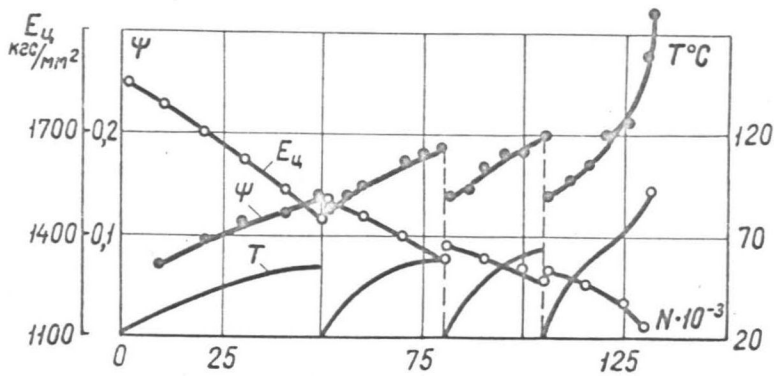


Рис. I.I8.

Влияние "отдыха" на  $E_c$ ;  $\psi$  и  $T$  при циклическом деформировании стеклотекстолита ЭФС.  $\tau = -I$ ;  
 $\sigma_a = 5,6 \text{ кгс/мм}^2$ .

получал не более 500 циклов нагрузки, а температура разогрева за это время поднималась не более чем на  $2^{\circ}\text{C}$ . Таким методом для ряда температур и уровней  $\sigma_a$  были найдены значения рассеянной энергии  $\Delta\omega$  и податливости  $J_T'$  (или  $\frac{E_T}{E_0}$ ), относящиеся к практически неповрежденному материалу (рис. I.16).

Характер изменения рассеяния энергии и упругой податливости стеклотекстолита от нагрева и при непрерывном циклическом деформировании показан на рис. I.17. На этом рисунке кривые  $\frac{E_T}{E_0}$ , где  $E_0$  - податливость при статическом растяжении при  $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$  и  $\Delta\omega_T$  характеризуют изменение этих величин только от роста температуры (взяты по рис. I.16). Кривые  $\frac{E_y}{E_0}$  и  $\Delta\omega$  получены при непрерывном циклическом нагружении образца, когда повышение температуры (кривая T) идет за счет разогрева.

Из рис. I.17 видно, что величина  $\Delta\omega_T$  для неповрежденного материала несколько ниже значений  $\Delta\omega$  для образца, доведенное до соответствующей температуры разогрева при непрерывном циклическом деформировании, когда наряду с тепловым воздействием происходит накопление повреждаемости во времени. Еще более существенное различие между упругими податливостями . В данном интервале температур, как видно, деформативность стеклотекстолита значительно слабее изменяется в зависимости от температуры, чем от совместного воздействия температуры и повреждаемости. Следовательно, механические свойства стеклотекстолита при циклическом деформировании изменяются как от разогрева за счет диссипации энергии, так и

вследствие накопления повреждений в материале.

Для проверки необратимости изменения механических и диссипативных свойств стеклотекстолита в процессе циклического нагружения были проведены опыты с отдыхом. Типичные результаты испытаний с тремя перерывами продолжительностью  $25 \div 30$  мин., достаточными для полного охлаждения образца, представлены на рис. I.18. Как видно из рисунка, циклический модуль упругости  $E_c = \sigma_a / \varepsilon_a$  непрерывно снижается с ростом числа циклов и не восстанавливается до исходного значения после отдыха. Более заметно в количественном отношении отдых сказывается на величине коэффициента поглощения  $\psi$ . Однако и величина  $\psi$  после отдыхов никогда не снижается до своего исходного значения. Необратимое изменение  $E_c$  и  $\psi$  в опытах с отдыхом указывает на развитие необратимых повреждений в стеклотекстолите с самого начала циклического деформирования.

Приведенные опытные данные позволяют сделать вывод о закономерностях изменения механических свойств стеклотекстолита в условиях циклического деформирования с постоянной амплитудой нагрузки. Для стеклотекстолита при циклическом нагружении характерны непрерывное увеличение упругой податливости, рост механических потерь и повышение температуры разогрева. При уровнях нагрузки, соответствующих долговечностям  $N > 4 \cdot 10^4$  циклов, характер изменения  $\psi$  и  $\varepsilon_a$  на основном участке долговечности линейный или близкий к линейному.

Рост упругой податливости указывает на преобладание

разупрочнения с самого начала циклического деформирования стеклотекстолита. Возможная причина разупрочнения - рост микротрещин, заканчивающийся появлением микротрещин с последующим быстрым разрушением материала. Накопление микротрещин в режимах  $\sigma_a = const$  приводит к повышению действующего эффективного напряжения вследствие уменьшения эффективной площади сечения образца, что в свою очередь вызывает рост механических потерь и повышение температуры разогрева. Поэтому в первом приближении можно полагать, что интенсивность подъема кривых  $\Delta\omega$ ,  $T$  и  $\varepsilon_a$  на линейных участках является мерой интенсивности накопления повреждаемости.

По данным рис. I.17 можно построить функцию повреждаемости по изменению  $\Delta\omega$  или  $E_y$  с ростом числа циклов.

Постоянство критических значений  $\varepsilon_a$ ,  $\Delta\omega$  и  $T$ , при которых наступает разрушение материала, позволяет использовать каждый из них в качестве приближенного критерия разрушения при циклическом деформировании и сохранении данного вида напряженно деформированного состояния условий теплоотвода.

### I.3.2. Рассеяние энергии в стеклотекстолите при циклическом растяжении-сжатии /I.101,102/

В предыдущем параграфе было показано, что рассеяние энергии в стеклотекстолите характеризуется монотонным увеличением коэффициента поглощения  $\psi$  в процессе утомления и разогрева материала. Установлено также влияние асимметрии цикла на величину механических потерь.

В настоящем параграфе приведем количественные расчеты соотношения общих потерь энергии и энергии превращающейся в тепло. Нам известна лишь одна работа аналогичного характера по полимерным материалам. В /Г.95/ показано, что при знакопеременном кручении ПММА с частотой 30–200 цикл/мин на тепловые потери уходит только 59–69% энергии рассеяния. Каких-либо данных о количественном распределении механических потерь в армированных пластиках не публиковалось.

Испытывались образцы из стеклотекстолита ЭФС, форма и размеры которых показаны на рис. I.7, а механические свойства материала даны в таблице I.2. Переменная нагрузка изменялась по синусоидальному закону. Применялись три вида циклов: симметричный ( $\nu = -1$ ), пульсирующее <sup>растя</sup>напряжение ( $\nu = 0$ ) и пульсирующее сжатие ( $\nu = -\infty$ ). Режим нагружения – мягкий ( $\sigma_a = \text{const}$ ); база испытаний – до  $10^6$  циклов.

Форма и величина петель гистерезиса. На рис. I.19 показан вид петель гистерезиса, полученных при симметричном цикле с постоянной амплитудой нагрузки через различное число циклов. Аналогичную форму имеют петли в циклах пульсирующего растяжения и сжатия. Из рис. I.19 видно, что петли гистерезиса имеют примерно эллиптическую форму. Для количественной оценки эллиптичности на инструментальном микроскопе были замерены ширина и длина петель, а площади их определены планиметром. Обработка большого числа измерений показала, что для всех асимметрий цикла от начала испытаний до момента интенсивного разрушения образцов, т.е. практически за все время

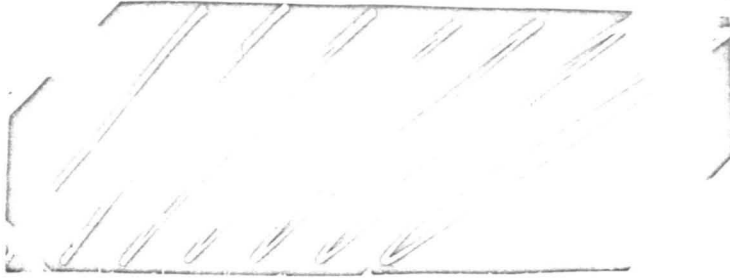


Рис. I.19.

Вид петель гистерезиса через 20, 40, 60, 67, 72, 75, 75,5 тыс. циклов нагружения  
 $\sigma_a = 6 \text{ кгс/мм}^2$ ;  $\nu = -1$ ;  $N = 76 \cdot 10^3$ .

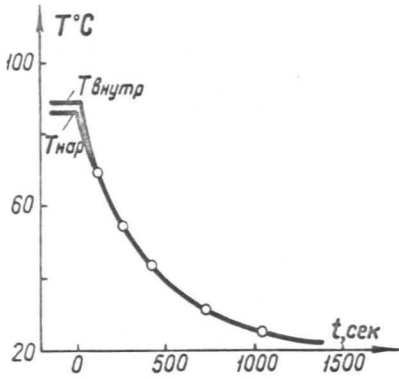


Рис. I.20.

Температура образца при охлаждении.

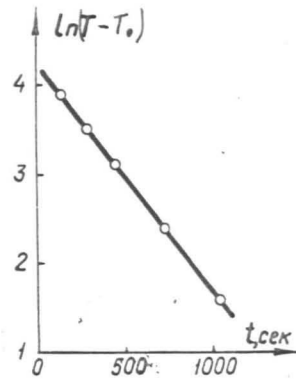


Рис. I.21.

График охлаждения в полулогарифмических координатах.

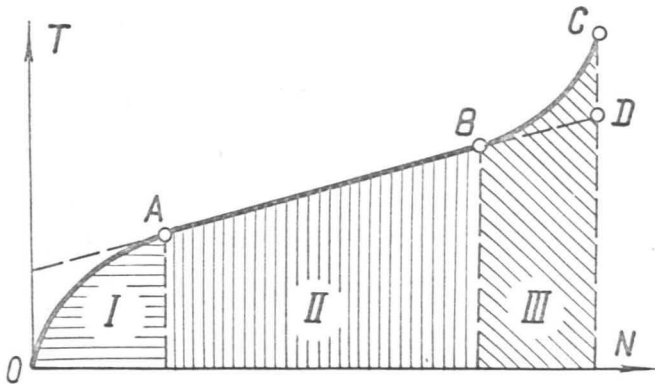


Рис. I.22.

К расчету энергии на тепловые потери.

испытаний, площадь петель гистерезиса описывается выражением

$$\Delta W = 1,06 \pi a b \quad (I.31)$$

где  $a, b$  - полуоси петли.

Незначительное отклонение площади полученных петель от площади эллипса может быть объяснено отклонением от формы чистой синусоиды переменной нагрузки, типичным для машин гидравлического действия, и слабой нелинейностью материала.

С ростом числа циклов нагрузки изменяется наклон петель гистерезиса (см. рис. I.19) за счет увеличения амплитуды  $\varepsilon_a$ . Наряду с ростом  $\varepsilon_a$  увеличивается ширина и площадь петель.

Величина механических потерь на единицу объема материала за один цикл в любой момент испытаний вычислялась в абсолютных величинах  $\Delta W$ , а также оценивалась коэффициентом  $\psi$ . Для симметричного цикла при нагрузках, соответствующих выносливости от  $3 \cdot 10^4$  до  $10^6$  циклов,  $\psi$  в начале нагружения составляет от 8% до 4%, а в момент разрушения образцов доходит до 40%. В начале интенсивного разрушения материала для всех уровней нагрузки  $\psi \approx 23\%$ .

Потери энергии в асимметричных циклах меньше, чем в симметричном, и для момента начала разрушения образцов указаны в таблице I.3.

#### Соотношение механических и тепловых потерь энергии.

В § I.3.1 было показано, что снижение динамического модуля упругости и повышение коэффициента поглощения с ростом числа циклов нагрузки нельзя объяснить однозначно ростом температуры разогрева образца. Естественно предположить, что и энергетические потери на нагрев должны отличаться от механических потерь, замеренных по петлям гистерезиса.

Суммарные потери механической энергии  $\Sigma \Delta W$  за определен-

ный промежуток испытаний определялись умножением  $\Delta \mathcal{W}$  на число циклов. При этом расчет велся по средним арифметическим величинам ранее вычисленных  $\psi$  и  $\varepsilon_a$  за данный период. Такой метод расчета соответствует второму приближению при разложении в ряд интеграла

$$\sum \Delta \mathcal{W} = \int_0^t \frac{\psi(t) \sigma_a^2}{2 E_y(t)} dt \quad (1.3.2)$$

если принять, что  $\psi(t)$  и  $E_y(t)$  — линейные функции. Нетрудно убедиться, что, если модуль  $E_y$  в процессе нагружения изменяется на 20% от первоначального значения, то остаточный член разложения составит меньше 5% от второго приближения. Это находится в пределах точности эксперимента.

Работа, затраченная на деформацию ползучести, значительно (на два порядка) меньше энергии гистерезисных потерь. Поэтому в расчетах эта составляющая затраченной работы не учитывается.

Доля рассеянной энергии в единице объема за время  $t$ , идущей на тепловые потери, состоит из двух слагаемых:

$$\sum \Delta \mathcal{W}_T = \mathcal{W}_H + \int_0^t \dot{\mathcal{W}}_- dt \quad (1.3.3)$$

где  $\mathcal{W}_H$  — часть тепловой энергии, ушедшая на разогрев материала до конечной температуры, а  $\dot{\mathcal{W}}_-$  — скорость диссипации тепловой энергии в окружающую среду за счет теплообмена.

Одна часть энергии —  $\mathcal{W}_H$  — равна:

$$\mathcal{W}_H = m \rho c (T - T_0) \quad (1.3.4)$$

где  $m$  - механический эквивалент теплоты;  $\rho$  - плотность и  $c$  - удельная массовая теплоемкость материала образца;  $T_0$  - температура окружающей среды;  $T$  - температура разогрева.

Для определения второго слагаемого формулы (1.3.3.) необходимо знать коэффициент теплоотдачи, который определяется по охлаждению образца в условиях, идентичных условиям испытания под нагрузкой. Образцы при этом нагревались до температур, равных фактическим температурам разогрева. На рис. 1.21-а показаны типичные кривые охлаждения, замеренного термометрами, расположенными снаружи и внутри образца. Кривые охлаждения с большой точностью аппроксимируются линейной зависимостью в полулогарифмических координатах (рис. 1.21 б) во всем интервале изменения температуры по уравнению  $dT = -\alpha(T - T_0)dt$  с решением при начальных условиях  $T = T^*$  в момент времени  $t = 0$ :  
 $\ln \frac{T - T_0}{T^* - T_0} = -\alpha t$ . Величина коэффициента  $\alpha$  по пяти опытам оказалась равной  $\alpha = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$  <sup>X)</sup>.

Определенный таким образом коэффициент  $\alpha$  не является характеристикой материала, а интегрально учитывает особенности теплоотвода от образца в данных условиях испытания. Температура разогрева на основном участке долговечности для данных образцов довольно равномерно по сечению (§ 1.4); охлаждение тоже происходит равномерно по сечению (см. рис. 1.21-а). Это позволяет записать дифференциал тепловой энергии, уходящей в окружающую среду, таким образом :

$$dW_{\text{от}} = m c \rho \alpha T(t) dt$$

X) Величина  $\alpha$  получена при охлаждении разгруженного образца. Наличие вибрации при охлаждении, как показали специальные опыты, увеличивает  $\alpha$  на 4 - 5%, что находится в пределах точности измерений.

а тепловые потери энергии на единицу объема:

$$W_{\Sigma} = mc\varrho\alpha \int_0^t T(t) dt \quad (I.3.5)$$

Функцию  $T(t)$ , как видно из рис. I.22 нельзя описать простым выражением. Для приближенных расчетов и достаточной выносливости образцов ( $N > 50$  тыс. циклов) кривую температуры можно аппроксимировать линейной функцией, так как участок кривой температуры разогрева АВ (рис. I.22) составляет основную часть долговечности. Уравнение (I.3.5) принимает вид:

$$W_{\Sigma} = mc\varrho\alpha \int_0^t (at + b) dt \quad (I.3.6)$$

где  $a$  и  $b$  определяются из температурных кривых, полученных при испытании данного образца.

При более точном учете теплопотерь в окружающую среду кривая  $T(t)$  делилась на три участка - I, II, III (см. рис. I.22). На участке II потери  $W_{\Sigma}$  - определялись расчетом (I.3.6), на I и III замерялись графически.

Теплоемкость  $C$  определялась для данного материала калориметрическим методом в интервале температур 20-60°C. Ее значение, полученное при пяти измерениях,  $c = 0,24$  град, согласуется с известными данными для эпоксифенольных стеклопластиков /I.8/.

При определении теплосодержания в образце по формуле /I.3.4/ принималась температура разогрева в конце данной

этапа испытания. На участке III (см. рис. I.22) в момент разрушения в расчет принята средняя температура по толщине образца, так как различие между внешней и внутренней температурой было существенным /§ I.4/.

В приближенных расчетах конечная температура определялась графически, как температура в точке D (см.рис. I.22). Соответственно и данные по  $\psi$  и  $E_c$  определялись аналогично конечной температуре.

В табл. I.4 представлены типичные результаты определения тепловых и механических потерь энергии в стеклотекстолите по трем периодам нагружения (см. рис. I.22) для симметричного и двух пульсирующих циклов.

ТАБЛИЦА № I.4

МЕХАНИЧЕСКАЯ И ТЕПЛОВАЯ ЭНЕРГИЯ, кгс . мм/мм<sup>3</sup>

$\zeta$	$\sigma_a$ [кгс/мм <sup>2</sup> ]	$N \cdot 10^{-3}$	I участок			II участок			III участок			$\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$ по I и II ур.
			$\sum \Delta W$ [кгс.мм/мм <sup>3</sup> ]	$\sum \Delta W_T$	$\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$	$\sum \Delta W$	$\sum \Delta W_T$	$\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$	$\sum \Delta W$	$\sum \Delta W_T$	$\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$	
-I	5,95	81	19,2	16,3	0,85	68	48,7	0,72	64,6	41,8	0,65	0,74
0	3,92	170	11,4	9,4	0,82	60,2	46,4	0,77	66,6	41,4	0,62	0,78
-∞	5,4	94	12,7	9,6	0,76	45,7	31,6	0,69	35,8	21,8	0,61	0,70

Из данных таблицы видно, что во всех периодах нагружения энергия, затраченная на нагрев, составляет основную часть

механических потерь. Наибольший удельный вес тепловая энергия имеет в первом периоде испытаний (76 - 85%), когда материал интенсивно нагревается. В третьем периоде, когда интенсивность разогрева больше, чем в начале испытаний, доля энергии, идущей на нагрев, несмотря на абсолютный рост теплотерь, составляет наименьшую величину (61 - 65%). Если положить, что теплофизические константы материала остаются неизменными за весь период испытаний, то снижение доли тепловых потерь от первого до третьего периода нагружения указывает на рост разрушительных процессов в материале с увеличением числа циклов нагрузки, сопровождающихся поглощением механической энергии. К числу таких процессов в первую очередь следует отнести образование микро - и макротрещин. Именно в третьем периоде идет интенсивное макроразрушение стеклотекстолита.

В последней графе табл. I.4 дается соотношение  $\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$  для первых двух участков, продолжительностью которых практически исчерпывается работоспособность материала при циклическом деформировании. Из этих данных, а также данных по основному, второму, участку видно, что доля тепловых потерь слабо зависит и от асимметрии цикла. Для получения более точных данных были определены значения  $\frac{\sum \Delta W_T}{\sum \Delta W}$  по пяти образцам, испытанным на разных уровнях нагрузки, для второго участка каждого вида цикла (табл. I.5).

Таблица I.5

СООТНОШЕНИЕ  $\frac{\sum \Delta w_T}{\sum \Delta w}$   
ДЛЯ ВТОРОГО УЧАСТКА

коэффициент асимметрии цикла $\tau$	$\frac{\sum \Delta w_T}{\sum \Delta w}$	коэффициент вариации, %
- I	0,72	4,0
0	0,77	6,0
- ∞	0,66	5,5

Небольшое различие в доле тепловых потерь, возможно связано с особенностями механизма разрушения тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии.

Зависимость  $\sum \Delta w_{от}$  выносли-  
вости.

Механические потери энергии в металлах давно пытаются

использовать в качестве критерия усталостного разрушения.

Действительно, если бы соблюдалось условие  $\sum \Delta w = const$  для различных уровней нагрузки, то стало бы возможным прогнозирование выносливости по результатам кратковременных испытаний.

В табл. I.6 представлены результаты подсчета суммарной рассеянной энергии для образцов, испытанных до разрушения в симметричном цикле. на различных уровнях нагрузки. Расчет

ТАБЛИЦА № I.6

РАСЧЕТ СУММАРНОЙ РАССЕЯННОЙ ЭНЕРГИИ

$\sigma_a$ кгс/мм <sup>2</sup>	Число цик- лов до раз- рушения $N \cdot 10^{-3}$	$b, ^\circ C$	$a \cdot 10^3$ $^\circ C/сек$	$\sum \Delta w$ кгс·мм/мм <sup>3</sup>	$\sum \Delta w_T$ $\sum \Delta w_p$	$\frac{\sum \Delta w_T}{\sum \Delta w}$
6	76	18	7,1	126	100 26	0,77
5,95	81	18,5	6,2	136	100 36	0,74
5,85	182	15	3,04	290	200 90	0,70
5,65	300	13	1,95	450	320 130	0,72
5,4	424	12	1,41	560	440 120	0,79
5,2	744	10	0,85	940	750 190	0,80

сделан приближенно, с линейной аппроксимацией кривых  $T, \psi, \varepsilon_a$  как отмечалось выше.

Из данных табл. I.6 видно, что  $\sum \Delta \psi$  увеличивается с ростом числа циклов до разрушения. Имеющиеся опытные данные по пульсирующим циклам  $\nu=0$  и  $\nu=-\infty$  показывают аналогичную зависимость  $\sum \Delta \psi(N)$ . Аналогичное непостоянство  $\sum \Delta \psi$  для металлов отмечено в книге /I.72/.

К настоящему времени нет исчерпывающих данных о физической природе внутреннего рассеяния энергии в полимерных материалах. Известно, что некоторая часть механических потерь, кроме расхода на теплообразование, идет на активацию химических реакций /I.103/. Вероятно, есть и другие необратимые процессы, вызывающие рассеяние энергии. Но если условно принять, что часть рассеянной энергии, не связанная с теплообразованием, идет на разрушение материала, т.е.  $\sum \Delta \psi - \sum \Delta \psi_T = \sum \Delta \psi_p$ , то, как следует из таблицы I.6, энергия разрушения с увеличением выносливости возрастает. Отсюда следует, что  $\sum \Delta \psi$  и  $\sum \Delta \psi_p$  не могут служить критерием усталостного разрушения стеклотекстолита без дополнительной корректировки их с помощью эмпирических коэффициентов.

Отношение  $\sum \Delta \psi_T / \sum \Delta \psi$  оказалось постоянным для всех уровней нагрузки. Как видно из табл. I.6, для симметричного цикла  $\sum \Delta \psi_T / \sum \Delta \psi \approx 0,15$ . Следовательно, на разрушение материала и прочие необратимые процессы в этом случае ушло  $\approx 1/4$  механических потерь.

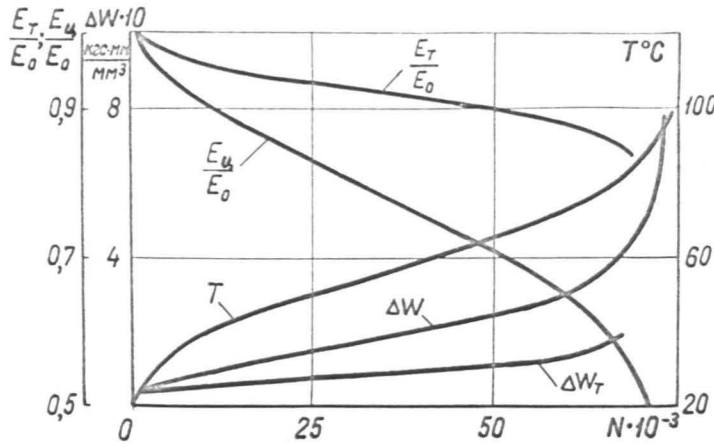


Рис. I.23.

Изменение динамических характеристик стеклотекстолита ВФТ-С (по утку) от нагрева и от совместного действия нагрева и повреждаемости;  $\tau = - I$ ;  
 $\sigma_a = 4 \text{ кгс/мм}^2$ .

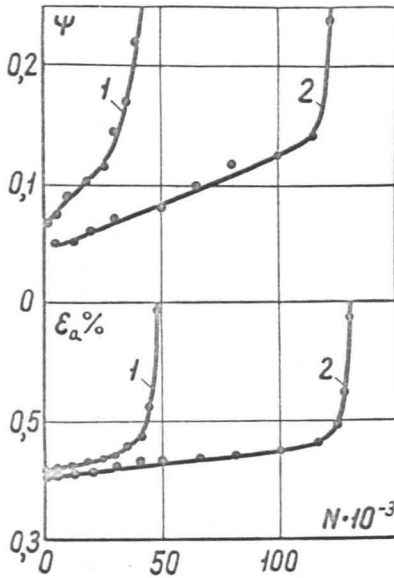
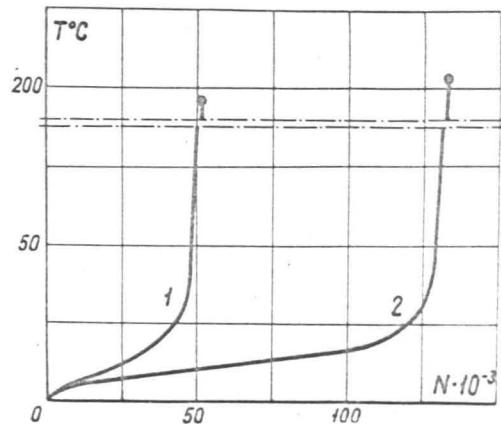


Рис. I.24.

Кинетика  $\epsilon_a$  и  $\psi$  капролона  $V_1$  при  $\tau = - I$ ;  
 $T_0 = 18^\circ\text{C}$ ; 1 -  $\sigma_a = 1,86 \text{ кгс/мм}^2$ ;  
 2 -  $\sigma_a = 1,76 \text{ кгс/мм}^2$ .

Рис. I.25.

Кинетика разогрева капролона.  $\tau = - I$ ; толщина образца - 16 мм;  $\omega = 900$  цикл/мин;  $T_0 = 18^\circ\text{C}$ ; 1 -  $\sigma_a = 1,86 \text{ кгс/мм}^2$ ; 2 -  $\sigma_a = 1,76 \text{ кгс/мм}^2$ .



### 1.3.3. Изменение механических свойств и температуры при циклическом нагружении других полимерных материалов

Кроме основного материала - стеклопластика ЭФС с тканью Т-90 была исследована циклическая прочность при растяжении-сжатии и изменение механических свойств в процессе испытания двух других полимерных материалов - стеклопластика ВФС и капролона. Результаты качественно совпадают с изложенными выше, но имеются количественные отличия. Поэтому ограничимся лишь кратким изложением полученных результатов. Форма образцов была подобна образцу на рис. 1.7. Размеры образцов указаны в табл. 1.1.

Для ВФС изменение динамических характеристик от нагрева и от повреждаемости было подобно описанным выше. Характерные окончательные результаты приведены на рис. 1.23.

Для капролона внешняя картина изменения деформаций и коэффициента рассеяния оказалась аналогичной, но здесь более существенная зависимость механических свойств от температуры. На рис. 1.24 показано изменение амплитуды деформации и коэффициента рассеяния в процессе испытания, на рис. 1.25 соответствующее изменение температуры. Хотя изменение деформации и  $\psi$  в процессе испытания существенно, но здесь отличить изменение, вызванное температурой и поврежденностью значительно труднее, чем в случае стеклопластика. На рис. 1.26 показаны кривые изменения  $\Delta \psi$  и  $E_c$  от температуры и в процессе испытания. Достоверных качественных данных о влиянии повреждаемости на модуль и рассеяние энергии для капролона

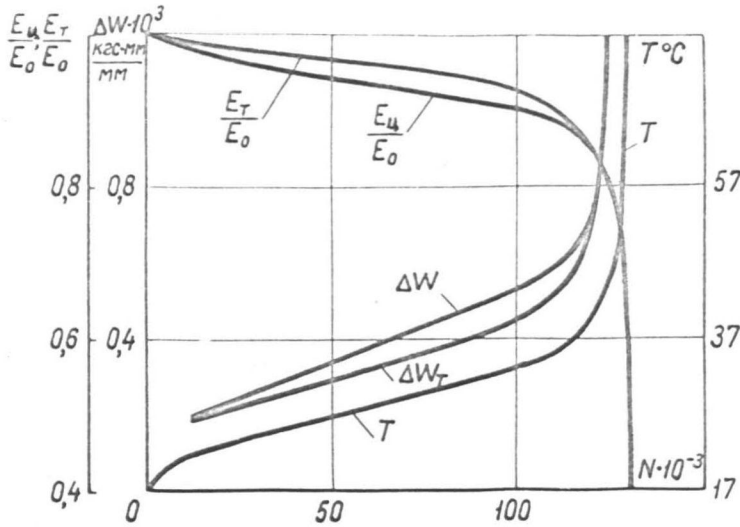


Рис. I.26.

Изменение динамических характеристик капролона В<sub>1</sub> от нагрева и от совместного действия нагрева и повреждаемости.  $\tau = - I$ ;  $\sigma_a = 1,75 \text{ кгс/мм}^2$ .

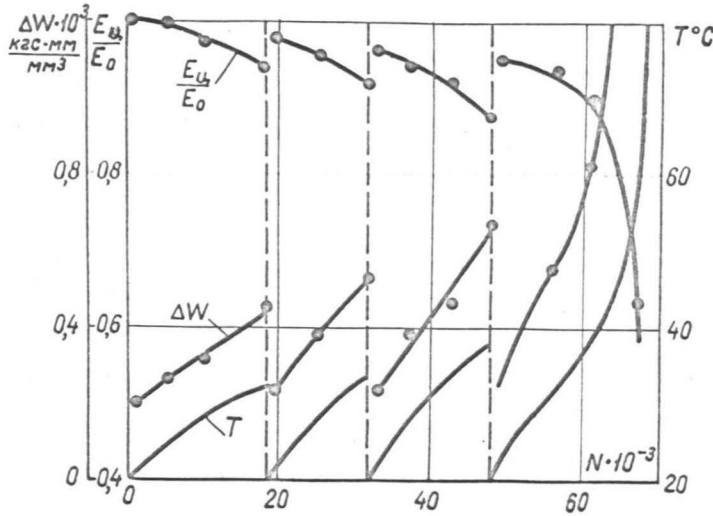


Рис. I.27.

Влияние "отдыха" на  $E_u, \Delta W, T$  при циклическом деформировании капролона.  $\tau = - I$ ;  $\sigma_a = 1,9 \text{ кгс/мм}^2$ .

отсюда получить затруднительно, поскольку разница между значениями  $\Delta\omega_T$  и  $\Delta\omega_n$  и  $E_T$  и  $E_n$  находится на пределе точности эксперимента. Однако наличие влияния повреждаемости на упруго-вязкие свойства капролона подтверждается серией опытов с отдыхом и охлаждением образца, аналогично тому как были проведены опыты на стеклопластике ЭФС (§ I.3.1). Результаты показаны на рис. I.27. Влияние предварительного нагружения на кривые изменения модуля и температуры ясно заметно.

#### I.3.4. Усталость стеклопластика при воздействии повторных ударных нагрузок /I.104/

Кроме испытания с синусоидальным циклом нагружения, осуществляемом на установке ЦДМ-30Пу, с целью выяснения возможных качественных особенностей была проведена небольшая серия исследования процесса усталости стеклотекстолита при воздействии повторных растягивающих ударных нагрузок, т.е., в условиях серии ударов постоянной энергии. Опыты проводились на образцах из стеклопластика ЭФС той же марки, что описано выше. Использовался копер типа ДСО, обеспечивающий пределы энергии удара от 15 до 125 кгс/см при частоте 450 или 600 ударов/мин., а также обеспечивающий осциллографирование во время удара зависимости "сила-деформация" при помощи пьезоэлектрического измерительного устройства ПМ-1.

Форма образцов для испытаний на долговечность определялась конструкцией копра; часть из них изготовлена соглас-

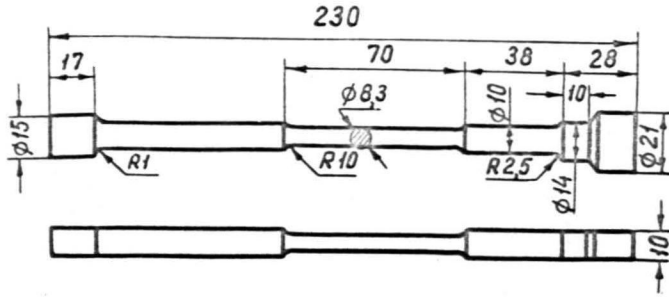


Рис. I.28.

Образец стеклопластика, применяемый в испытаниях на ударную вязкость.

Рис. I.29.

Относительное изменение жесткости стеклопластикового образца при испытаниях на ударную усталость. 1—гладкий образец, 2—образец с заранее определенным местом разрушения.

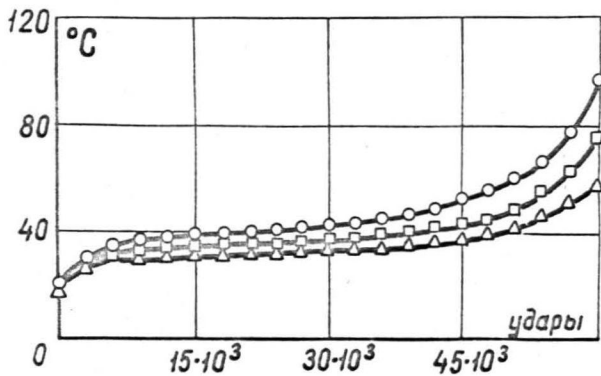
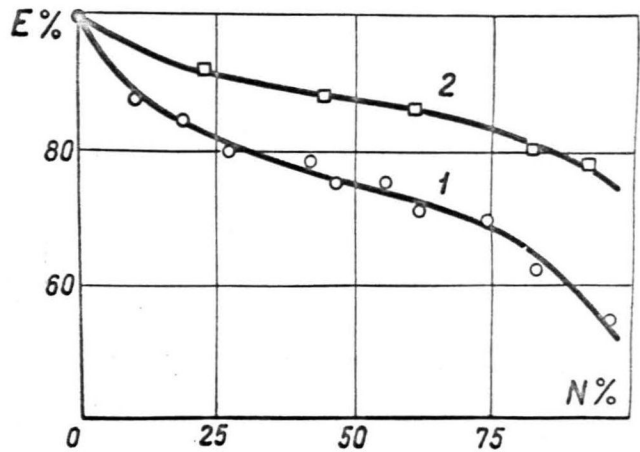


Рис. I.30.

Типичные кривые возрастания температуры в трех различных сечениях образца.

но размерам, приведенным на рис. I.28., другая часть имела все те же размеры, за исключением длины рабочей части, которая у них равнялась не 70 мм, а 10 мм. Все образцы были ориентированы вдоль направления утка стеклоткани.

Изменение упругих свойств стеклотекстолитовых образцов в процессе утомления определялось по изменению наклона линейной части зависимости "сила - деформация" после расшифровки фотографий с экрана осциллографа. Подробная методика, а также результаты эксперимента изложены в статье /I.104/.

На рис. I.29 в качестве примера приведены типичные кривые изменения условного модуля упругости (т.е., отношение силы удара к удлинению всего образца при данном ударе) для образцов с короткой и удлиненной рабочей частью. По оси абсцисс отложена степень утомления образца в процентах от его долговечности, а по оси ординат - условный модуль упругости в процентах от его исходного значения, замеренного при осуществлении первых 10-20 ударов. Кривые аналогичны изменению модуля в прежних параграфах.

Для образцов с удлиненной рабочей частью, в 18 испытаниях из 20, разрушение образца наступило, когда отношение конечного модуля к начальному находилось в пределах 45-65% (точное значение конечного условного модуля фиксировать фотографированием невозможно, так как заранее неизвестно, на каком именно ударе произойдет разрушение, поэтому полученные значения конечных условных модулей были определены в диапазоне от нескольких десятков до нескольких сот ударов

перед разрушением образца).

Для образцов с короткой рабочей частью во всех 10 проведенных испытаниях наступило разрушение, когда соотношение условных модулей находилось в пределах 60-75%, причем, как уже отмечалось, само разрушение образца всегда было локализовано на малом участке рабочей части образца. Истинное изменение модуля упругости не было зафиксировано, поскольку не удалось измерить деформацию образца на рабочей базе. Температура разогрева была одинакова или лишь несколько выше чем в синусоидальном режиме нагружения (рис. I.30). (Эта разница могла быть вызвана разными условиями теплоотвода. В копре ДСО образец находится в закрытом корпусе машины).

Из сопоставления изменения модуля и температуры и учитывая, что данное изменение модуля зафиксировано на всем образце, в то время как разрушение локализуется в некотором объеме можно сделать вывод, что в этом режиме изменение упругих свойств вследствие повреждаемости образца не меньше чем в выше описанных опытах.

## 1.4. Расчет температурного поля в полимерных материалах при вибрационном нагружении /1.105/

### 1.4.1. Постановка задачи

Во всех работах, где рассчитываются температурные поля при вибрационном нагружении /1.60 - 64/ определялся некоторый критический температурный режим, выше которого устойчивый тепловой процесс невозможен. В качестве граничных условий обычно берется постоянство температуры на границе образца, которое на практике не наблюдается. Все перечисленные работы имеют существенное допущение, что тепловой приход при данных условиях испытания определяется лишь температурой, т.е. не меняется с накоплением в материале дефектов. В действительности при усталостном нагружении материала происходит его постепенное разрушение, которое для некоторых материалов (как показано в § 1.3) может вызвать изменение скорости диссипации энергии и возрастание выделения тепла.

В данном параграфе проведен расчет температурного поля образцов с учетом зависимости скорости диссипации  $\dot{W}$  от уровня повреждаемости (или в случае непрерывного нагружения с учетом зависимости  $\dot{W}$  от времени).

В общем случае задача сводится к исследованию уравнения:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + \dot{W}(t, T, x, y, z) \quad (1.4.1)$$

с начальным условием

$$T|_{t=0} = T_0 \quad (1.4.2)$$

и конвективным условием теплоотвода на границе

$$\frac{\partial T}{\partial n}|_s = -k(T - T_0)|_s \quad (1.4.3)$$

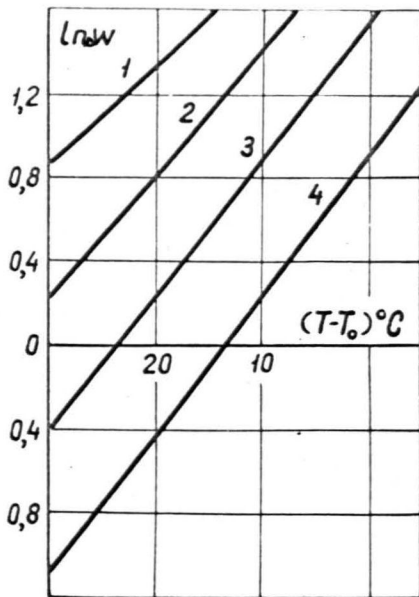


Рис. I.31.

Зависимость рассеяния энергии от температуры для стеклотекстолита (графики рис. I.16 в полулогарифмических координатах).

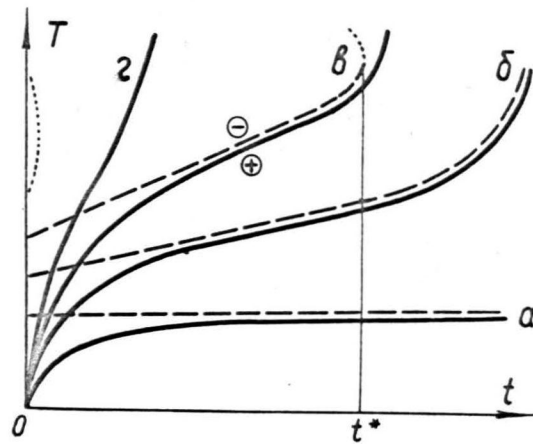


Рис. I.32.

Схема кинетики разогрева пластмасс при циклическом деформировании.

При этом плотность  $\rho$ , теплоемкость  $c$ , теплопроводность  $\lambda$ , коэффициент теплоотдачи и зависимость  $\dot{w}(t, T)$  должно быть определено из результатов экспериментов, изложенных в § 1.3.

Зависимость  $\Delta w(T)$  можно найти из опытов, результаты которых изображены на рис. 1.16. В полупологарифмических координатах эти кривые с большой степенью точности аппроксимируются прямыми рис. 1.31, т.е.

$$\Delta w = a e^{\beta(T - T_0)} \quad (1.4.4)$$

причем для конкретного материала  $\beta = 0,034$  1/град. Зависимость  $a$  от амплитуды напряжения  $\sigma_a$  оказалась отличной от ожидаемой для линейного упруго вязкого тела. Оказалось, что с ростом  $\sigma$  энергия, рассеянная в образце в единицу времени возрастает пропорционально пятой степени  $\sigma_a$ :

$$a = 0,45 \cdot 10^{-7} \sigma_a^5 \quad (1.4.4^*)$$

Эту же зависимость можно аппроксимировать также квадратичным выражением, но с учетом некоторого "предела усталости"  $\sigma_0$ ,

$$a = a_1 (\sigma_a - \sigma_0)^2$$

Укажем, что в работе /1.106/ для металлов при относительно низких уровнях напряжений, также получено аналогичное возрастание функции диссипации.

Зависимость  $\dot{w}$  от числа циклов, как следует из экспериментальных результатов § 1.3. на большей части долговечности может рассматриваться как приближенно линейная. Поэтому конкретные расчеты этого параграфа приведены для следующего выражения:

$$\dot{w} = a(\sigma, \omega) (1 + \eta t) e^{\beta(T - T_0)} \quad (1.4.4'')$$

I.4.2. Решение для равномерного распределения температуры по образцу

Рассмотрим тепловой расчет в неограниченном цилиндре, в предположении, что поперечные размеры образца настолько малы, что можно пренебречь изменением температуры по сечению. Тогда уравнение (I.4.I) принимает простейший вид:

$$sc \frac{dT}{dt} = \dot{w}(\sigma, \omega, T, t) - \alpha'(T - T_0) \quad (I.4.5)$$

с начальным условием  $T|_{t=0} = T_0$ .

В статье /I.107/ был дан качественный анализ решения уравнения (I.4.5). Приведем эти рассуждения.

Рассмотрим кривые " теплового баланса ", которые получим, приравнявая к нулю правую часть уравнения (I.4.5):

$$\dot{w}(\sigma, \omega, T, t) - \alpha' T = 0 \quad (I.4.6)$$

(Здесь и дальше буквой  $T$  фактически обозначена разность  $T - T_0$  C°).

Поскольку в каждом опыте  $\sigma_a, \omega$  и  $\alpha'$  остаются постоянными, то уравнение (I.4.6) в неявном виде определяет кривую теплового баланса  $T(t)$ . Полагаем, что при циклическом нагружении не происходит уменьшения рассеяния энергии, т.е.  $\frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \geq 0$ . Это допущение не противоречит результатам проведенных опытов. Тогда кривая теплового баланса  $T(t)$  монотонна, так как производная  $\frac{dT}{dt}$  не может менять знак, проходя через нуль:

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{\frac{\partial \dot{w}}{\partial t}}{\frac{\partial \dot{w}}{\partial T} - \alpha'} \quad (I.4.7)$$

потому что числитель в выражении (I.4.7) не меняет знака. Если знаменатель в (I.4.7) обращается в нуль:

$$\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial T} = \alpha' \quad (\text{I.4.8})$$

то кривая теплового баланса, разрешенная относительно  $T$ , имеет экстремум.

На рис. I.32 пунктиром показаны четыре возможных, качественно различных варианта решения уравнения (I.4.6): кривая  $a$  соответствует неизменяемости диссипативных свойств от времени  $\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial t} = 0$  при циклическом нагружении;  $b$  - монотонному возрастанию кривой  $T(t)$  при  $\frac{\partial \dot{A}}{\partial t} > 0$ ;  $c$  - случаю, когда  $t(T)$  имеет максимум, причем место возврата  $t$  на кривой теплового баланса определяется условием (I.4.8);  $d$  - включает случаи, когда при данных условиях нагружения тепловой баланс невозможен, т.е. всегда  $\dot{\psi} > \alpha' T$ .

Если кривая теплового баланса (I.4.6) возрастающая, то на ней согласно (I.4.7)  $\frac{\partial \dot{\psi}}{\partial T} < \alpha'$ . Поэтому при температурах, расположенных ниже ее  $\dot{\psi} > \alpha' T$ , а выше кривой  $\dot{\psi} < \alpha' T$ . На рис. (I.32) знаки теплоприхода для примера отмечены на кривой  $c$ .

Так как в начале нагружения согласно (I.4.6)  $\dot{\psi} - \alpha' T > 0$ , то начало координат кривых теплового баланса не может находиться в отрицательной области, поэтому приведенные на рис. I.4.2 четыре графика исчерпывают все возможные варианты расположения кривой теплового баланса. Эти графики в свою очередь определяют верхние границы возможных решений уравнения (I.4.5), поскольку эти решения будут сверху ограничиваться пунктирными кривыми.

Качественные решения дифференциального уравнения (I.4.5) на рис. I.32 показаны сплошными линиями. В случае неизменяемости диссипативных свойств материала при циклическом нагружении решение (I.4.5) асимптотически приближается к горизонтальной прямой  $a$ . Интенсивный подъем  $T$  (кривая  $\nu$ ) характерен для режимов с высокими уровнями  $\sigma_a$  или при затрудненном теплоотводе. Но длительный линейный подъем  $T$ , характерный для описанных выше опытов, возможен только тогда, когда диссипативные свойства материала изменяются в процессе нагружения вследствие накопления повреждаемости. При этом возможен случай, когда тепловой баланс с некоторого момента  $t$  не может установиться и произойдет резкий подъем  $T$  (кривая  $\nu$ ). Если тепловой баланс сохраняется до момента разрушения, то кинетика  $T$  изображается кривой  $\delta$ . В наших опытах со стеклотекстолитом характер разогрева в основном соответствует последним двум случаям.

Какому случаю действительно соответствует кинетика разогрева в конкретных исследованиях, можно выяснить из рассмотрения уравнения (I.4.5) с подстановкой в нем численных параметров.

Уравнение (I.4.5) с учетом (I.4.4) и полагая  $\eta = 0$  в безразмерном виде выглядит

$$\frac{du}{d\tau} = A e^u - B u, \quad u|_{\tau=0} = 0 \quad (I.4.9)$$

здесь  $u = \beta(T - T_0)$ ,  $\tau = \frac{t}{t_0}$ ,  $A = \frac{\alpha t_0 \beta}{\rho c}$ ,  $B = \frac{\alpha'}{\rho c} t_0 = \alpha' t_0$ ,  $t_0$  - характерное время, например, период нагрузки.

Условие возникновения стационарного температурного поля дается решением уравнения:

$$e^u - k u = 0 \quad (I.4.10)$$

где 
$$K = \frac{B}{A} = \frac{\alpha \rho c}{a \beta}$$

Легко рассчитать при каких значениях коэффициента поглощения  $\psi$  и амплитуды напряжения  $\sigma_a$  уравнение (I.4.10) имеет решение, т.е. может возникнуть стационарное температурное поле. Численные значения коэффициентов (см. выше) следующие:

$$\rho = 1,8 \text{ г/см}^3; \quad c = 0,24 \text{ кал/град}; \quad \beta = 0,034 \text{ I/град};$$

$$\alpha = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ I/сек}; \quad a = \dot{\omega}_{|T=T_0} = \frac{\sigma_a^2 \omega}{2 E_u} \psi_{|T=T_0}$$

$$\omega = 15 \text{ I/сек}; \quad E_u = 2 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^3;$$

Если  $\sigma_a = 6 \text{ кгс/мм}^2$ , то для возможности стационарного температурного поля необходимо иметь  $\psi_{|T=T_0} = 0,04$ , если  $\sigma_a = 5,4 \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$ , то  $\psi \leq 0,055$ .

Точность применяемой аппаратуры не позволяла надежно фиксировать  $\psi < 0,05$ , поэтому значение  $\psi_{|T=T_0}$  приходится находить экстраполяцией по замеренному значению  $\psi$  (или  $\Delta \omega$ ) при более высоких  $T^0$  и постоянном значении  $\sigma_a$ , или при постоянной  $T^0$  и более высоком значении  $\sigma_a$ . Используя кривые на рис. I.14 для  $\psi$  и экстраполируя их согласно уравнению  $\Delta \omega = a e^{\beta(T-T_0)}$  к значению  $T = T_0$ , получаем значения  $\psi$  в пределах  $0,05 \div 0,045$ , т.е. при  $\sigma = 6 \text{ кгс/мм}^2$  имеем условия теплового разрушения, при  $\sigma = 5,4 \text{ кгс/мм}^2$  уже должно установиться тепловое равновесие. Аналогичные результаты получаются при экстраполяции экспериментально замеренных значений  $\Delta \omega$  рис. I.31 на область меньших напряжений посредством выражения (I.4.4<sup>\*</sup>)

На рис. I.33 показаны графические решения уравнения (I.4.10) с учетом выше определенных численных значений констант

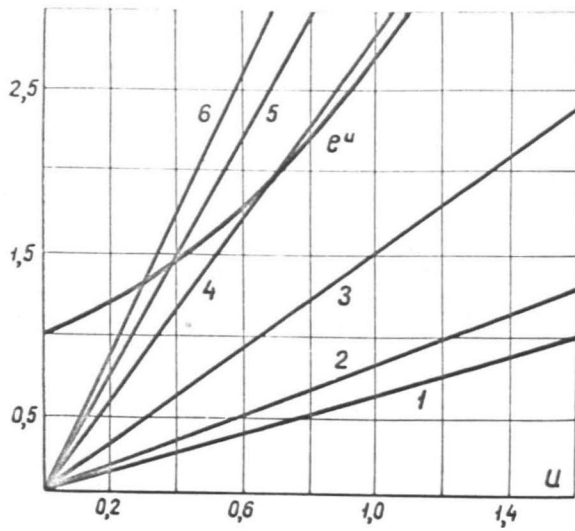


Рис. I.33.

К определению условий стационарного температурного режима.

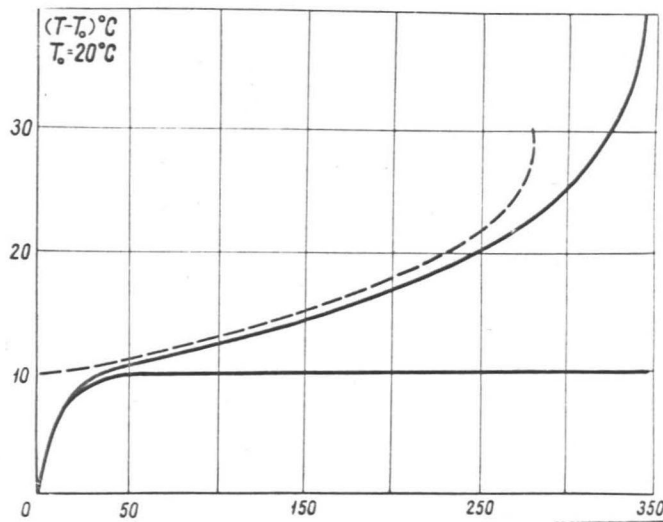


Рис. I.34.

Результаты расчета однородного температурного поля: 1 - кривая устойчивого температурного режима (решение уравнения I.4.9); 2 - решение уравнения I.4.I2; 3 - кривая "теплового баланса" для уравнения I.4.I2.

и напряжений 9; 8; 7; 5,85; 5,65; 5,4 кгс/мм<sup>2</sup> для прямых I ÷ 6 соответственно.

По графику находим, что стационарный температурный режим устанавливается при температуре  $T^{\text{ж}} - T_0 = 21^\circ$ ; для  $\sigma_a = 5,85$  кгс/мм<sup>2</sup>; ( $u^* = 0,68$ );  $T^{\text{ж}} - T_0 = 12^\circ$ ; для  $\sigma_a = 5,65$  кгс/мм<sup>2</sup>; ( $u^* = 0,41$ );,  $T^{\text{ж}} - T_0 = 9^\circ\text{C}$  для  $\sigma_a = 5,4$  кгс/мм<sup>2</sup>; ( $u^* = 0,31$ ).

Время, необходимое для достижения температуры, составляющей 90% от  $u^*$ , определяется по формуле:

$$t = \frac{1}{A} \int_0^{0,9u^*} \frac{du}{e^u - Ku} \quad (\text{I.4.II})$$

При нагрузке  $\sigma_a = 5,65$  кгс/мм<sup>2</sup> это время составляет  $\approx 20$  мин. или  $N \approx 2 \cdot 10^4$  циклов.

На рис. I.I4 для кривых температуры выше полученные значения температуры и времени приблизительно соответствуют выходу на участок стационарного подъема температуры. По этим сообщениям можем заключить, что при  $\sigma_a > 6$  кг/мм<sup>2</sup> действительно имеется чисто тепловое разрушение, при  $\sigma_a < 6$  кг/мм<sup>2</sup> разогрев определяется не только зависимостью  $\dot{\psi}(T)$ , а также влиянием повреждаемости на величину  $\dot{\psi}(T, t)$ . Поэтому дальнейшие расчеты проводятся, используя выражение (I.4.4") для  $\dot{\psi}$ . (Величина коэффициента  $\gamma$  определялась исходя из совпадения расчетной и экспериментальной долговечностей) :  $\gamma = 0,2 \cdot 10^{-5}$ .

Конкретные графики решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(1 + \gamma t)e^u - Bu, \quad (\text{I.4.I2})$$

кривой "теплового баланса" для этого уравнения и устой-

чивого температурного режима ( $\gamma = 0$ ) показаны на рис. I.34. Решение было получено на ЭВМ стандартной программой методом Рунге - Кутты.

### I.4.3. Решение для бесконечного цилиндра с конвективностью на боковой поверхности

Для круглого цилиндра радиуса  $R$  уравнение (I.4.I) с учетом выражения (I.4.4'') для  $\dot{\psi}$  имеет следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = B \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + A (1 + \gamma \tau) e^u \quad (I.4.I3)$$

с начальным условием  $u|_{\tau=0} = 0$  (I.4.I4)

и граничным условием  $\frac{\partial u}{\partial z} |_{z=1} = -k u |_{z=1}$  (I.4.I5)

где  $z$  - безразмерный радиус, а  $A, B, k$  выражаются через теплофизические константы, а именно:

$$B = \frac{\lambda t_0}{\rho c R^2} ; \quad A = \frac{\alpha \beta t_0}{\rho c} ; \quad k = \frac{h R}{\lambda} \quad , \text{ где } h$$

/  $\frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \text{сек град}}$  / - коэффициент теплоотдачи,  $\lambda$

/  $\frac{\text{кал}}{\text{см сек град}}$  / - коэффициент теплопроводности, Использо-

зую значение интегрального коэффициента  $\alpha$  /I/сек/, определенного выше, имеем для  $h$  выражение  $h = \frac{\alpha \rho c V}{S} = \frac{\alpha \rho c R}{2}$

откуда  $k = \frac{\alpha \rho c R^2}{2 \lambda}$ .

Подстановкой:  $u = -2 \ln v$  (I.4.I6)

приведем уравнение (I.4.I3) к виду:

$$V \frac{\partial V}{\partial \tau} = B \left( \frac{V}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) - \frac{A}{2} (1 + \gamma \tau) \quad (I.4.17)$$

После подстановки (I.4.I6) начальное условие для функции  $V$  запишется:

$$V|_{t=0} = 1 \quad (I.4.I8)$$

а граничное условие приведет к виду:

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \kappa V \ln V |_{z=1} = 0 \quad (I.4.I9)$$

Вторым граничным условием будет ограниченность решения в центре цилиндра (при  $z=0$ ). Будем искать решение в виде степенного ряда по радиусу /I.I07/. Вследствие четности уравнения (I.4.I3) по радиусу и ограниченности решения в нуле, решение запишем:

$$V = 1 + \sum_{\kappa=0}^{\infty} b_{\kappa}(\tau) z^{2\kappa} \quad (I.4.20)$$

После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях, получаем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка для временных функций  $b_{\kappa}(\tau)$ :

$$(1 + b_0) \frac{\partial b_0}{\partial \tau} = B [4b_1(1 + b_0)] - \frac{A}{2} (1 + \gamma \tau); \quad (I.4.21)$$

$$b_1 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} + b_1 \frac{\partial b_1}{\partial \tau} + (1 + b_0) \frac{\partial b_2}{\partial \tau} = B [4b_1 b_2 + 36b_3 \times (1 + b_0)];$$

$$b_1 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} + (1 + b_0) \frac{\partial b_1}{\partial \tau} = B [16b_2(1 + b_0)];$$

$$b_3 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} + b_2 \frac{\partial b_1}{\partial \tau} + b_1 \frac{\partial b_2}{\partial \tau} + (1 + b_0) \frac{\partial b_3}{\partial \tau} =$$

$$\begin{aligned}
 &= B [16 b_1 b_3 + 64 b_4 (1 + b_0)]; \\
 &b_4 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} + b_3 \frac{\partial b_1}{\partial \tau} + b_2 \frac{\partial b_2}{\partial \tau} + b_1 \frac{\partial b_3}{\partial \tau} + (1 + b_0) \frac{\partial b_4}{\partial \tau} = \\
 &= B [36 b_1 b_4 + 4 b_2 b_3 + 100 b_5 (1 + b_0)] \\
 &b_5 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} + b_4 \frac{\partial b_1}{\partial \tau} + b_3 \frac{\partial b_2}{\partial \tau} + b_2 \frac{\partial b_3}{\partial \tau} + b_1 \frac{\partial b_4}{\partial \tau} + \\
 &+ (1 + b_0) \frac{\partial b_5}{\partial \tau} = B [64 b_1 b_5 + 16 b_2 b_4 + 144 b_6 (1 + b_0)] \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Из начального условия (I.4.18) для функций  $b_k$  следуют нулевые начальные условия:

$$b_k |_{\tau=0} = 0 \quad k = 1, 2, \dots \quad (I.4.22)$$

Если оборвать ряд в выражении (I.4.16) на  $n$ -ом члене, то после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях  $\tau$ , получаем систему, состоящую из  $n-1$  дифференциального уравнения.

Последнее  $n$ -ое дифференциальное уравнение получаем из граничного условия (I.4.19). Для этого граничное условие дифференцируем по времени и выразим  $b_n$  через остальные  $b_k$ , где

$k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , а значения  $\frac{\partial b_k}{\partial \tau}$  выразим через соответствующие уравнения системы (I.4.21). Окончательная система дифференциальных уравнений при обрывании ее на  $b_n$ , выглядит:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 1 + b_0 \\
 \frac{\partial b_0}{\partial \tau} &= S_2 = 4B b_1 - \frac{A}{2} (1 + \gamma \tau) / S_1 \\
 \frac{\partial b_1}{\partial \tau} &= S_3 = 16B b_2 - b_1 S_2 / S_1 \\
 \frac{\partial b_2}{\partial \tau} &= S_4 = 36B b_3 + (4B b_1 b_2 - b_1 S_3 - b_2 S_2) / S_1 \\
 \frac{\partial b_3}{\partial \tau} &= S_5 = 64B b_4 + (16B b_1 b_3 - b_3 S_2 - b_2 S_3 - b_1 S_4) / S_1
 \end{aligned} \quad (I.4.22')$$

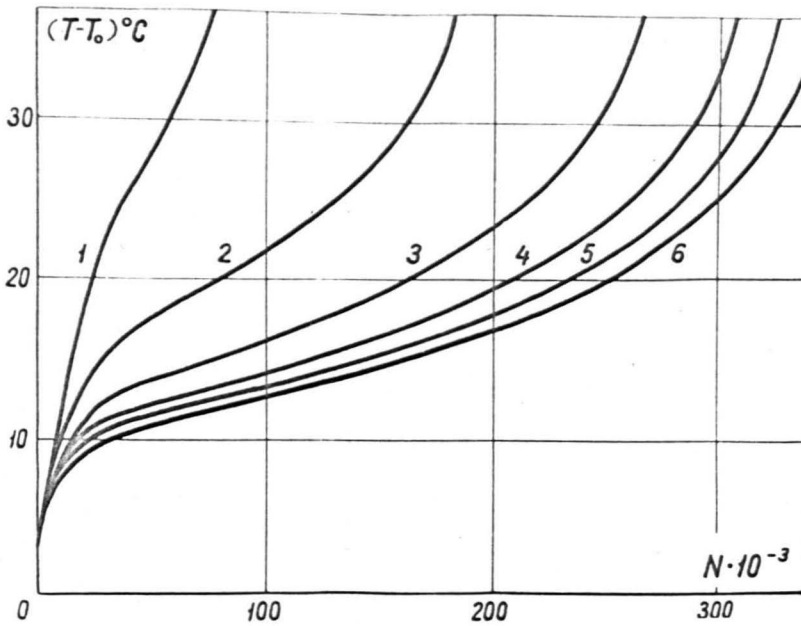


Рис. I.35.а.

Графики зависимости разогрева (в центре образца) от времени при различных размерах образцов: 1 -  $R = 15,8$  мм; 2 - 11 мм; 3 - 7,5 мм; 4 - 5 мм; 5 - 3,3 мм; 6 - равномерное распределение  $T$  по радиусу.

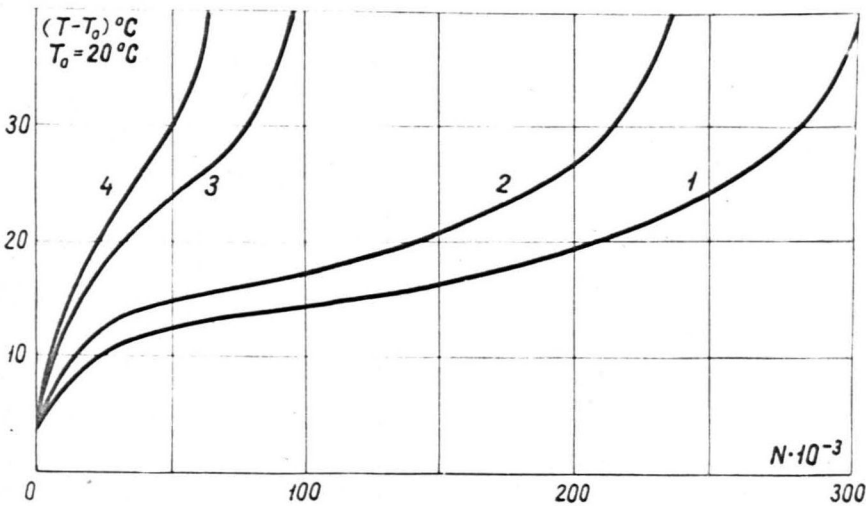


Рис. I.35б.

Зависимость разогрева в центре от времени при различных амплитудах нагрузки  $\sigma_a$ : 1 - 5,4 кгс/мм<sup>2</sup>; 2 - 5,65 кгс/мм<sup>2</sup>; 3 - 5,85 кгс/мм<sup>2</sup>; 4 - 5,9 кгс/мм<sup>2</sup>.

$$\frac{\partial b_4}{\partial \tau} = S_6 = 100B \cdot b_5 + 36B b_1 b_4 / s_1 + 4B b_2 b_3 / s_1 -$$

$$- (b_4 s_2 + b_3 s_3 + b_2 s_4 + b_1 s_5) / s_1$$

$$\frac{\partial b_5}{\partial \tau} = S_7 = 144B b_6 + 116 b_1 b_5 / s_1 + 16 b_2 b_4 / s_1 -$$

$$- 36B b_3^2 / s_1 - (b_5 s_2 + b_4 s_3 + b_3 s_4 + b_2 s_5 + b_1 s_6) / s_1$$

$$\frac{\partial b_6}{\partial \tau} = - [S_2 \cdot S_8 + (2 + S_8) S_3 + (4 + S_8) S_4 + (6 + S_8) S_5 +$$

$$+ (8 + S_8) S_6 + (10 + S_8) S_7] / (12 + S_8)$$

$$S_8 = K [\ln(1 + b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6) + 1]$$

Счет системы дифференциальных уравнений по методу Рунге-Кутты оказался устойчивым, и полученные зависимости при различных радиусах образца представлены на рис. I.35а. Кривая 6 здесь соответствует равномерному распределению температуры по сечению образца (уравнение (I.4.I2), что физически означает случай бесконечно тонкого образца.

На рис. I.35б показаны кривые нарастания температуры для образца радиусом 5 мм при различных уровнях напряжений. Полу-

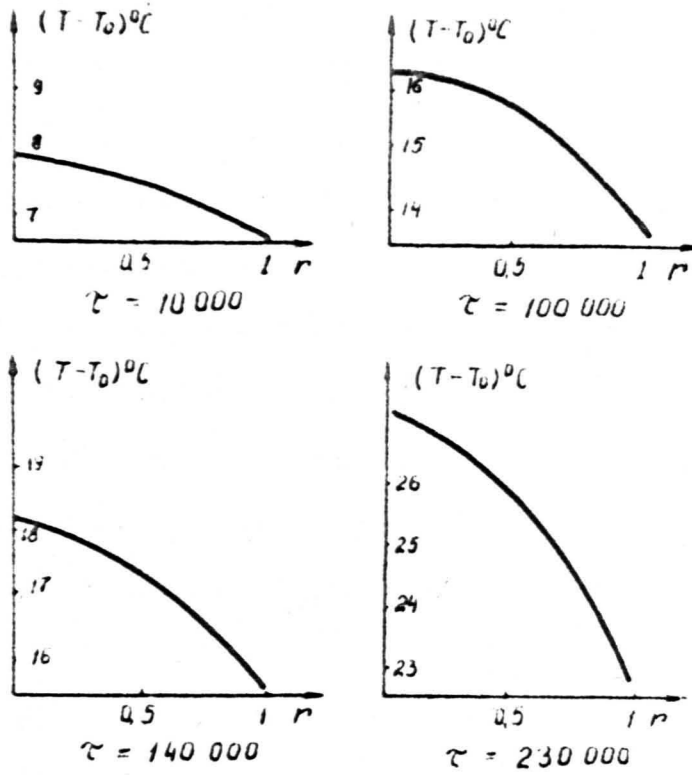


Рис. I.36.

Тепловые поля в цилиндрическом образце  $R = 7,5\text{ мм}$   
 ( $\sigma_a = 5,65\text{ кгс/мм}^2$ ) в различных моментах деформирования. Количество циклов до разрушения  $N = 2,7 \cdot 10^5$ .

ченные решения удовлетворительно согласуются с экспериментально фиксированным нарастанием разогрева (§ I.3.1). Экспериментально наблюдаемый более резкий подъем температуры перед разрушением может быть объяснен фактической нелинейностью  $\dot{\psi}(r)$ , наступающей уже после изменения ее на 10-20%.

На рис. I.36. показано распределение температуры по сечению образца для радиуса 7,5 мм и долговечности  $2,7 \cdot 10^5$  циклов. Полученные графики качественно совпадают с экспериментально замеренным (по выше описанной методике) распределением температуры для образца прямоугольного сечения (рис. I.37 ).

Сходимость рассматриваемого метода решения не была доказана и проверялась по совпадению последовательных приближений. Практически сходимость решения оказалась очень хорошей - (температура по восьмому приближению от четвертого отличается меньше чем 0,5% по всему сечению образца за все время вплоть до разрушения).

В заключение отметим, что верхнюю оценку решения дифференциального уравнения (I.4.13) можно получить выше изложенным методом "кривой теплового баланса".

"Уравнение теплового баланса" получается приравнованием правой части (I.4.13) к нулю. Тогда получаем следующую краевую задачу:

$$B \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + A(1 + \gamma \tau) e^u = 0 \quad (I.4.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Big|_{z=0}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -k u \Big|_{z=1}$$

Общее решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial a}{\partial \xi} \right) + H e^a = 0 \quad (I.4.24)$$

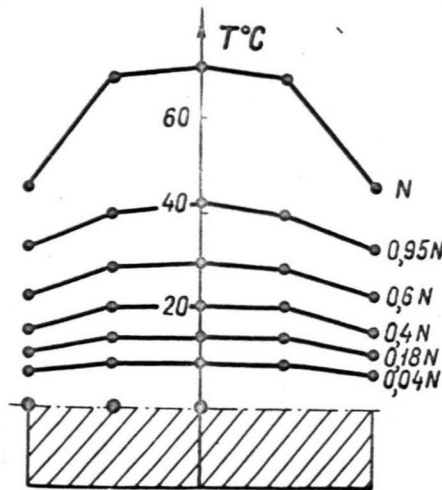


Рис. I.37.

Изменение температурного поля разогрева по ширине шейки образца ЭФС. Сечение шейки  $8,6 \times 18 \text{ мм}^2$ ;  $\tau = -1$ ;  $\sigma_a = 5,7 \text{ кгс/мм}^2$ ;  $\gamma = 2,55 \cdot 10^5$ . Измерения производились тремя термопарами в местах, отмеченных на рисунке.

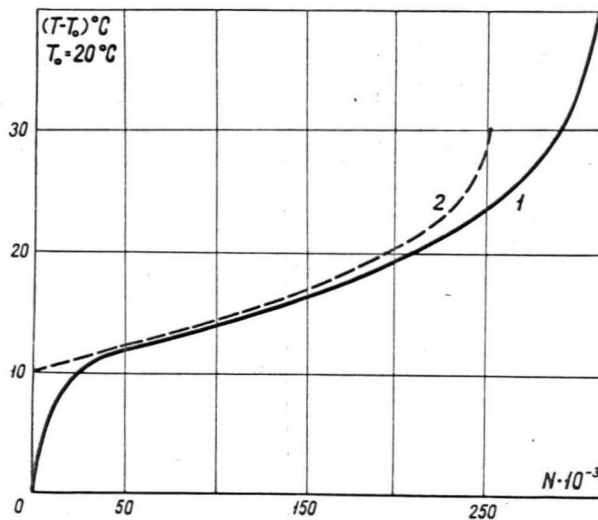


Рис. I.38.

1 - график зависимости температуры от времени в центре цилиндра (решение уравнения I.4.13); 2 - кривая теплового баланса (по уравнению I.4.28).

где  $H = \text{const}$ , было найдено Лемке в 1913 году. Оно имеет следующий вид /I.108/:

$$Q = \ln \frac{8 - \beta}{H} - 2 \ln \left( \alpha \xi^{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha} \xi^{\alpha_2} \right) \quad (\text{I.4.25})$$

$\alpha, \beta$  - константы интегрирования, а  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются корнями уравнения:

$$\alpha^2 - 2\alpha + \frac{\beta}{8} = 0 \quad (\text{I.4.26})$$

Из условия  $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0$  при  $\xi = 0$  можно получить, что  $\beta = 0$ , но тогда из уравнения (I.4.26) находим, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно равны нулю и двум. Решение уравнения (I.4.24) в этом случае имеет вид:

$$Q = \ln \frac{8}{H} - 2 \ln \left( \alpha \xi^2 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{I.4.27})$$

В нашем случае для уравнения (I.4.23) решение записывается в виде:

$$u = \ln \frac{8B}{A(1+\gamma\tau)} - 2 \ln \left( \alpha v^2 + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (\text{I.4.28})$$

Постоянная интегрирования  $\alpha$  определяется из второго граничного условия. Для  $\alpha$  имеем следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{4\alpha^2}{\alpha^2 + 1} + K 2 \ln \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - \ln \frac{8B}{A(1+\gamma\tau)} = 0 \quad (\text{I.4.29})$$

Время  $\tau$  - в уравнение (I.4.29) входит как параметр. Уравнение решалось численно на ЭВМ. Найденные значения  $\alpha$  подставлялись в выражение (I.4.28). На рис. I.38 представлен вид "кривой теплового баланса"  $T(t)$ , которая задается уравнением (I.4.28).

## I.5. Модели разрушения при одноосном нагружении

### I.5.1. Введение меры повреждения

Для характеристики разрушенности материала в уравнения состояния часто вводят дополнительный параметр  $\Pi$  - меру поврежденности. Точный физический смысл параметра поврежденности  $\Pi$  не всегда указывается и даже не может быть однозначно определен.

Как выше было показано, в эксперименте можно наблюдать, что под действием вибрационной нагрузки изменяется значение модуля упругости, увеличивается петля гистерезиса. Известно, что при этом изменяются скорость распространения ультразвука в материале, его плотность и объемная деформация. Эти и другие характеристики успешно используются для установления степени поврежденности образца. В зависимости от способа индикации меняется приписываемый величине  $\Pi$  конкретный физический смысл. Наиболее часто  $\Pi$  идентифицируется с плотностью микротрещин в окрестности рассматриваемой точки или относительным количеством разрушенных связей. Весьма приближению  $\Pi$  можно интерпретировать как разрушенную площадь образца. Тогда в процессе нагружения величина  $\Pi$  должна изменяться в пределах отрезка  $[0, 1]$ . При соответствующем нормировании допустимо принять, что в тех же пределах эта величина изменяется и в том случае, если параметру приписывается другой физический смысл.

Для функции  $\Pi$  необходимо составить дополнительное уравнение, определяющее кинетику разрушения. В общем случае скорость разрушения  $\dot{\Pi}$  является функцией многих аргументов:

$$\dot{\Pi} = \dot{\Pi}(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij} \dots \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij} \dots t, \Pi, A) \quad (I.5.1)$$

где  $A$  обозначает константы материала.

В наиболее простом варианте можно принять

$$\dot{\Pi} = \dot{\Pi}(\sigma, \Pi) \quad (\text{I.5.2})$$

Грубо схематическое описание процесса растрескивания будет получено при допущении, что

$$\dot{f} = -f^\alpha \varphi\left(\frac{\sigma}{f}\right) \quad (\text{I.5.3})$$

или для простейшего конкретного расчета

$$\dot{f} = -\frac{a}{n} f^\alpha \left(\frac{\sigma}{f}\right)^n \quad (\text{I.5.3}')$$

где  $f = 1 - \Pi$ ,  $\alpha$ ,  $a$ ,  $n$  — константы. Здесь принято, что скорость разрушения  $-\dot{f}$  в основном инициируется "истинным" напряжением  $\frac{\sigma}{f}$  на неразрушенной площади  $f = 1 - \Pi$ .

С учетом начальных условий  $f=1$ ,  $t=0$ , получим для  $\alpha=1$ :

$$f = \sqrt[n]{1 - \sigma^n a t} \quad (\text{I.5.4})$$

Для упругого материала деформация вычисляется

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E f} = \frac{\sigma}{E \sqrt[n]{1 - \sigma^n a t}} \quad (\text{I.5.5})$$

В случае линейного суммирования повреждений вместо (I.5.2) используется соотношение

$$\dot{f} = \dot{f}(\sigma) \quad (\text{I.5.6})$$

т.е. предполагается, что скорость повреждений не зависит от достигнутого уровня повреждения и если  $\sigma = \text{const}$ , то за одинаковые интервалы времени накапливается одинаковое количество повреждений. (При усталостном нагружении вместо  $\sigma$  берут амплитудное значение  $\sigma_a$ ). Перепишав (I.5.6) в виде  $df = \dot{f}(\sigma) dt$  про-

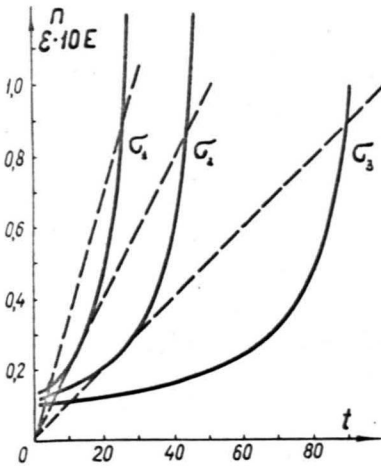


Рис. I.39.

Схематические графики  $P=I - \varphi$  и деформации разрушения для разных уровней  $\sigma$  при линейном законе накопления повреждений согласно (I.5.9),  $n = 8$ . Сплошные кривые  $\varepsilon(t)$ , пунктирные -  $P(t)$ ;  
 $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 1,4$ ;  $\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = 1,2$ .

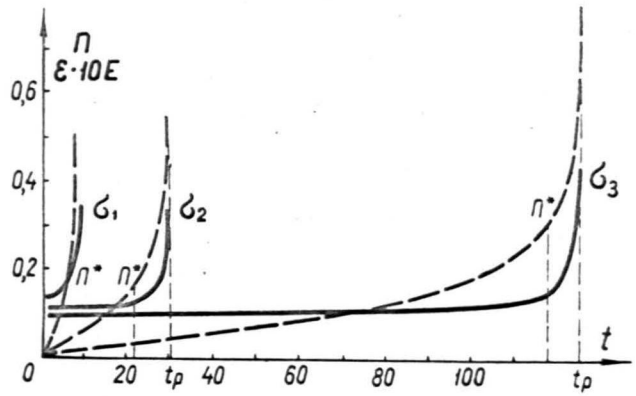


Рис. I.40.

Схематические графики  $P=I - \varphi$  и  $\varepsilon(t)$  для разных уровней при нелинейном законе накопления повреждений согласно (I.5.4) и (I.5.5),  $n = 8$ . (обозначения те же, что и на рис. I.39).

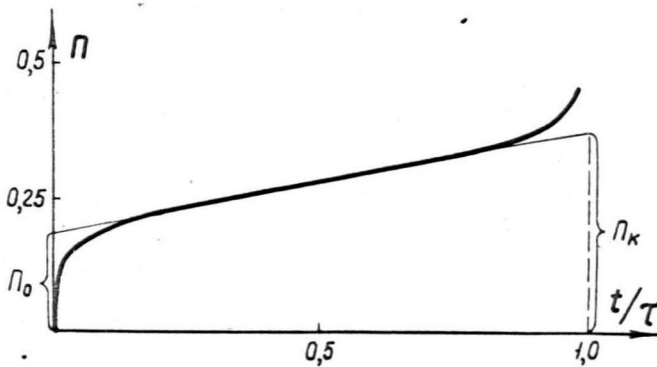


Рис. I.41.

Схематическая кривая роста повреждений.

интегрировав от нуля до времени разрушения  $t_p$ , в случае переменного  $\sigma$  получаем следующую формулу:

$$\int_0^{t_p} f(\sigma) dt = 1 \quad (I.5.7)$$

Но из условия  $\sigma = const$  следует, что  $f(\sigma) = \frac{1}{t_p(\sigma)}$ , и (I.5.7) преобразуется к выражению линейного закона суммирования повреждений /I.IIO/:

$$\int_0^{t_p} \frac{dt}{t_p[\sigma(t)]} = 1 \quad (I.5.8)$$

Заметим, что для определения неизвестной функции (I.5.3) или (I.5.6) можно использовать кривую длительной или усталостной прочности  $t_p = t_p(\sigma)$ , однако степень нелинейности в процессе накопления повреждений этой кривой не определяется.

Например, как уравнение (I.5.3'), так и линейное уравнение

$$\dot{f} = -\sigma^n a$$

с решением

$$f = -\sigma^n a t + 1 \quad (I.5.9)$$

приводят к кривой Веллера:

$$t_p = \frac{1}{a\sigma^n} \quad (I.5.10)$$

Степень нелинейности накопления повреждений должна определяться путем измерения характеристик материала в процессе нагружения или серией опытов с программным нагружением.

Типичные кривые роста повреждений и деформации при линейном и нелинейном росте повреждений, соответствующие зависимостям (I.5.4), (I.5.5), (I.5.9) показаны на рис. I.39 и I.40.

При интегрировании уравнений кинетики повреждений следует учитывать, что в начальный момент нагружения уже имеются некоторые повреждения, т.е.  $f < 1$  при  $t = 0$ , а в конечный момент

происходит разрыв образца, пока еще  $f > 0$ . Поэтому интеграл (I.5.8) может отличаться от единицы, а деформации в момент разрушения будут конечными.

Практически значения деформации разрушения будут еще меньше, поскольку рассеянное разрушение не определяет процесс разрушения за все время нагружения образца. В конце испытаний преимущественное значение имеет слияние дисперсных дефектов в магистральную трещину и ее распространение. При этом деформация, замеренная на конечной базе образца, будет меньше истинной деформации в очаге разрушения.

Однако рис. I.40 показывает, что при нелинейном суммировании повреждений абсцисса точки, в которой повреждения достигают критического значения  $\Pi^* < 1$ , мало отличается от абсциссы, где  $\Pi = 1$  и  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Это дает основание считать временем до разрушения время достижения кривой деформации ее асимптоты, т.е. принимать  $\Pi = 1$  или  $f = 0$ , когда  $t = t_p$ .

При линейном законе суммирования повреждений (см. рис. I.39) ошибка, вносимая этим допущением, может значительно увеличиться.

Следует оговорить, что приведенная модель разрушения является только простейшим приближением, однако сам факт наличия меры повреждения может служить достаточно надежной основой для дальнейшего развития расчетов в рамках концепции дисперсного разрушения.

I.5.2. Расчет долговечности с учетом статического распределения перенапряжений на связях/I.109/

Если скорость роста повреждений определяется истинными напряжениями  $\frac{\sigma}{1-\pi}$ , то кривая  $\pi(t)$  оказывается вогнутой, т.е. рост повреждений является самоускорением. В частности, если скорость повреждений  $\dot{\pi}$  пропорциональна количеству оставшихся связей  $1-\pi$ , и инициируется истинными напряжениями на оставшихся связях, то кинетическое уравнение для  $\dot{\pi}$  принимает вид:

$$\dot{\pi} = (1-\pi) f\left(\frac{\sigma}{1-\pi}\right) \quad (1.5.3'')$$

Время жизни определяется интегралом

$$t_p(\sigma) = \int_0^1 \frac{d\pi}{(1-\pi) f\left(\frac{\sigma}{1-\pi}\right)} \quad (1.5.II)$$

Введением новой переменной  $x = \frac{\sigma}{1-\pi}$ , получим:

$$t_p(\sigma) = \int_x^{\infty} \frac{dx}{x f(x)}$$

Продифференцировав обе части по  $\sigma$ , после преобразования получим:

$$f(\sigma) = - \frac{1}{\sigma t_p'(\sigma)} \quad (1.5.I2)$$

Тогда с учетом (1.5.I2) формула (1.5.3'') переписывается в виде:

$$\dot{\pi} = \frac{1-\pi}{\frac{\sigma}{1-\pi} t_p'\left(\frac{\sigma}{1-\pi}\right)} \quad (1.5.I3)$$

Если  $t_p = A\sigma^{-\kappa}$ , то, подставив это выражение в (1.5.I3) получим:

$$\dot{\pi} = \frac{(1-\pi)^{1-\kappa}}{A\kappa \sigma^{-\kappa}} \quad (1.5.I4)$$

Так как  $\kappa$  всегда больше 1, то из рассмотрения (1.5.I4) следует, что кривая  $\pi(t)$  расположена вогнутостью вверх.

Если время разрушения принять по формуле кинетической

теории прочности:

$$t_p = \tau_0 \exp \frac{u - \sigma_0 \delta}{kT} \quad (I.5.I5)$$

то из (I.5.I3) получим:

$$\dot{\Pi} = \frac{(1 - \Pi)^2}{\frac{\tau_0 \sigma_0 \delta}{kT} \exp \left[ \frac{u}{kT} - \frac{\sigma_0 \delta}{(1 - \Pi)kT} \right]} \quad (I.5.I6)$$

Легко убедиться, что и в этом случае при  $\frac{\sigma_0 \delta}{kT} > 2$  (что выполняется для реальных материалов) кривая  $\Pi(t)$  вогнута, т.е. рост повреждений с самого начала разрушения является самоускоренным.

В то же время кривая изменения числа микротрещин под нагрузкой /I.83/, а также изменения модуля упругости при усталости (§ I.3), подобна кривым ползучести, т.е. эти кривые в начальном участке выпуклы. Это явление можно объяснить наличием некоторого количества перенапряженных связей, которые в начале нагружения разрушаются наиболее интенсивно. Когда на оставшиеся связи напряжение выравнивается, наступает монотонное разрушение, которое только в конце испытания переходит в лавиннообразный процесс.

В данном параграфе предложена модель и сделан соответствующий расчет долговечности и кинетики накопления повреждений в материале с учетом статистического распределения перенапряжений на связях.

(Отметим, что идея учета статистического распределения перенапряжений на связях для расчета скорости разрушения полимерных фибрилл был использован и в работе /I.III/).

Сформулируем свойства предлагаемой модели.

I. Длительную прочность для многих материалов в широком диапазоне долговечностей можно описать формулой кинетической теории прочности (I.5.I5), где коэффициент перенапряжения  $\gamma$  является некоторой константой для данного процесса. В предпологаемой модели предполагается, что отдельных связей коэффициент перенапряжения  $\gamma_*$  различный, причем плотность распределения  $P(\gamma_*)$  на связях принята в виде распределения Вейбула:

$$\begin{cases} P(\gamma_*) = \frac{\gamma}{s} \left( \frac{\gamma_* - M}{s} \right)^{\gamma-1} \exp \left[ - \left( \frac{\gamma_* - M}{s} \right)^\gamma \right] & \text{для } \gamma_* \geq M \\ P(\gamma_*) = 0 & \text{для } \gamma_* < M \end{cases} \quad (I.5.I7)$$

где  $s > 0$ ;  $\gamma > 0$ ;  $0 \leq M \leq \gamma$ ;

Последнее неравенство объясняется тем, что

а) при  $M < 0$  имелось бы некоторое число связей с отрицательным  $\gamma_*$ , что физически невозможно;

б) при  $M > \gamma$  все связи были бы наделены  $\gamma_*$  большим, чем  $\gamma$  и при одном и том же приложенном усилии модель показала бы более быстрое разрушение, чем формула (I.5.I5). Отметим, что, согласно определению,

$$\int_M^\infty P(\gamma_*) d\gamma_* = 1$$

2. Время жизни  $\tau_*$  ансамбля связей с постоянным перенапряжением  $\gamma_* \sigma$  определяется формулой, аналогичной (I.5.I5)

$$\tau_* = \tau_0 \exp \frac{U_* - \gamma_* \sigma}{kT} \quad (I.5.I8)$$

причем коэффициент  $U_*$  для всех связей в данном материале одинаков.

3. Считается, что среднее напряжение  $\sigma$  в образце зависит от уровня поврежденности, т.е.

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 - \Pi} \quad (I.5.19)$$

где  $\Pi$  относительное число всех разрушенных связей. Поэтому напряжение на связях в процессе нагружения меняется и время жизни связи  $\tau_*$  определяется обычной формулой суммирования повреждений, что с учетом (I.5.18) и (I.5.19) можно записать.

$$\int_0^{\tau_*} \frac{dt}{\tau_0 \left[ \exp \frac{u_*}{kT} - \frac{\gamma_* \sigma}{kT [1 - \Pi(t)]} \right]} = 1 \quad (I.5.20)$$

Если в момент времени  $t_1$ , для связи, наделенной коэффициентом  $\gamma_1$ , выполняется условие (I.5.20), то относительное число разрушенных связей  $\Pi$  равно

$$\Pi(t_1) = \int_{\gamma_1}^{\infty} \rho(\gamma_*) d\gamma_*$$

С учетом (I.5.17) получим:

$$\Pi(t_1) = \exp - \left( \frac{\gamma_1 - \mu}{s} \right)^\gamma \quad (I.5.21)$$

Таким образом, модель материала характеризуется набором четырех параметров: константы  $u_*$  и трех констант  $\mu$ ,  $s$ ,  $\gamma$ , характеризующих плотность распределения связей по  $\gamma_*$ .

Решение задачи разрушения при заданных параметрах  $u_*$ ,  $\mu$ ,  $s$ ,  $\gamma$  и приложенном растягивающем напряжении  $\sigma_0$  сводится к определению функции  $\Pi(t)$  из совместного решения уравнений (I.5.20) и (I.5.21). Причем время разрушения  $t_p$  определяется из соотношения:

$$\Pi(t_p) = 1$$

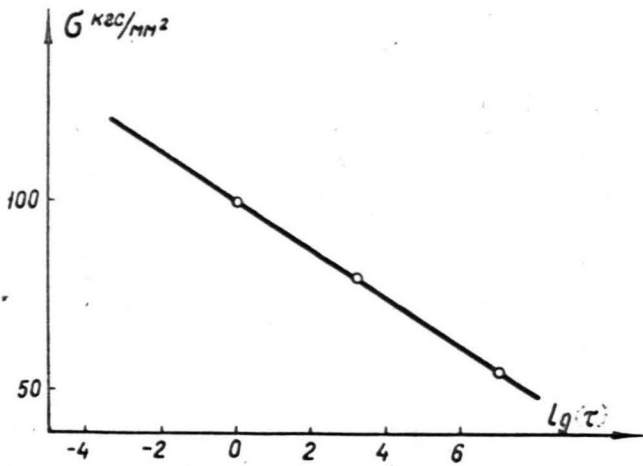


Рис. I.42.

Кривая длительной прочности для высокоориентированного капрона: сплошная линия - экспериментальные данные /I.II2/; кружки - расчет согласно распределения 2 на рис. I.43 и  $\alpha^* = 2,66 \cdot 10^{-17}$  кгс.мм.

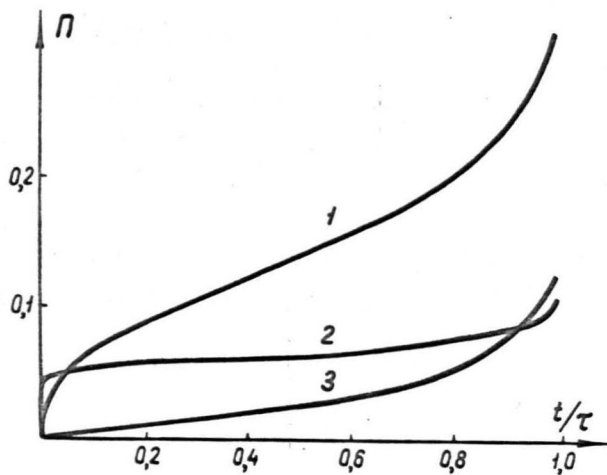


Рис. I.43.

Кривые накопления повреждений при  $\sigma_a = 80 \text{ кгс/мм}^2$ . 1 - для распределения I рис. I.44 и  $\alpha^* = 2,66 \cdot 10^{-17}$  кгс/мм; 2 - для распределения 2 рис. I.44 и  $\alpha^* = 2,70 \cdot 10^{-17}$  кгс.мм; 3 - согласно уравнения (I.5.I6) ( $\alpha = 2,72 \cdot 10^{-17}$  кгс/мм;  $\gamma = 1,48 \cdot 10^{-19} \text{ мм}^3$ ).

Путем варьирования параметров  $u_*$ ,  $\mu$ ,  $s$ ,  $\gamma$  можно исследовать влияние распределения перенапряжений на кинетику разрушения и долговечность материала. Задача решалась численно на ЭВМ.

В результате решения оказалось: 1) график долговечности в полулогарифмических координатах остается очень близок к прямой (см. рис. 1.42); 2) кинетика разрушения имеет все три стадии: интенсивное разрушение, участок стационарной скорости разрушения и лавинообразное разрушения.

В качестве численного примера рассмотрим кинетику разрушения сильно ориентированного капронового волокна. Распределение плотностей связей  $\rho(\nu_*)$  и  $u_*$  выбиралось так, чтобы длительная прочность, определяемая из модели, соответствовала экспериментальной, приведенной в /1.112/ ( $\tau_0 = 10^{-13}$  сек;  $K = 1,4 \cdot 10^{-21}$  кгс.мм/град;  $T = 293^\circ\text{K}$ ;  $u = 2,72 \cdot 10^{-17}$  кгс.мм/;  $\gamma = 1,48 \cdot 10^{-19}$  мм<sup>3</sup>), при этом варьировались значения начального  $\Pi_0$  и конечного  $\Pi_K$  значений на стационарном участке разрушения (см. рис. 1.41). Результаты показаны на рис. 1.42-45. В случае значительного возрастания повреждений на стационарном участке (кривая 1 рис. 1.43) распределения Вейбула имеет колоколообразную форму (кривая 1 рис. 1.44). В случае выполаживания кривой  $\Pi(t)$  на стационарном участке, распределение качественно меняется (кривая 2 на рис. 1.43 и 1.44 соответственно).

Величина коэффициента  $u_*$  при этом мало отличается от значения  $u = 2,72 \cdot 10^{-17}$  кгс.мм (см. подпись под рис. 1.43).

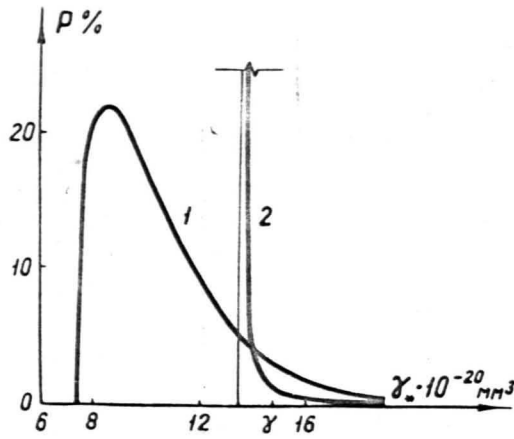


Рис. I.44.

Распределение плотностей связей по  $\gamma^*$   
 1 - для  $\mu = 7,39$ ;  $s = 3,33$ ;  $\gamma = 1,31$ ;  
 2 - для  $\mu = 13,60$ ;  $s = 1,40 \cdot 10^{-5}$ ;  
 $\gamma = 0,0777$ .

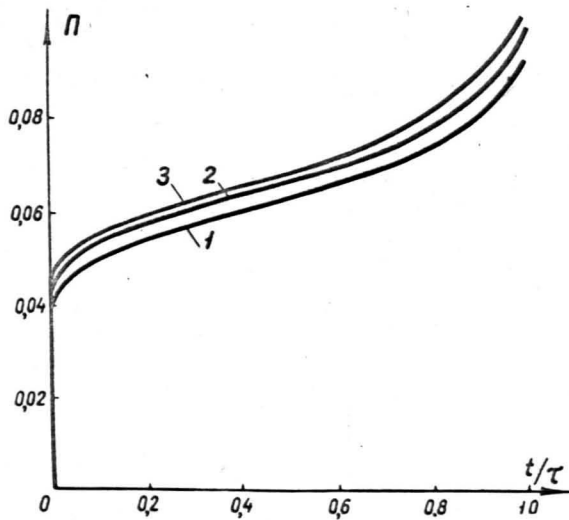


Рис. I.45.

Кривые накопления повреждений для распре-  
 деления 2 на рис. I.43 и  $\mu^* = 2,70 \cdot 10^{-17}$  кгс.мм.  
 1 -  $\sigma = 56,1$  кгс/мм<sup>2</sup>; 2 -  $\sigma = 80,0$  кгс/мм<sup>2</sup>;  
 3 -  $\sigma = 100$  кгс/мм<sup>2</sup>.

Отметим, что распределение 2 на рис. 1.44 качественно соответствует экспериментально замеренному распределению перенапряжений в /1.113/.

Кривые накопления повреждений I,2 (рис. 1.43) качественно соответствуют экспериментальным кривым накопления нарушений (рис. 1.1, 17, 23). Для сравнения на рис. 1.43 приведена кривая  $\Pi(t)$ , согласно уравнению (1.5.16).

На рис. 1.45 приведены кривые  $\Pi(t)$  для распределения 2 (рис. 1.43) при разных напряжениях. Кривые на рис. 45 также качественно соответствуют кривым накопления субмикротрещин /1.82/.

Недостатком данной модели является пренебрежение концентрацией напряжения вокруг разрушенных связей. Вследствие этого, на наш взгляд, на данной модели не может быть объяснен тот факт, что лавинообразное разрушение начинается при наличии значительного числа неразрушенных сильно перенапряженных связей /1.113/.

## I-6. Краткое резюме результатов первой главы

1. В процессе циклической, а также статической усталости ряда полимеров в них развиваются дисперсные дефекты, предшествующие окончательному разделению образца на части. Эти дефекты (или повреждаемость) может быть фиксированы физическими методами исследования (инфракрасной спектроскопией, методом рассеивания рентгеновских лучей под малыми углами, измерением акустической эмиссии для стеклопластика и др.).

2. Повреждаемость может быть фиксирована также, если следить за изменением механических свойств в процессе нагружения. Основные параметры, которые показывают накопление повреждений, являются изменение модуля упругости (или циклического модуля) и изменением диссипации энергии.

3. Измерено изменение механических свойств стеклотекстолита при его циклическом растяжении-сжатии. Показано, что эти изменения вызваны частично температурой, а частично имеют необратимый характер. Необратимое изменение деформативных свойств может служить индикатором повреждений.

4. Показано, что характер изменения температуры, а также изменение упругих и вязких свойств в процессе нагружения аналогично кривым ползучести и состоит из трех участков - ускоренного развития повреждений в начале испытаний, длительного периода установившегося линейного изменения свойств и быстрого окончательного разрушения в конце испытаний.

5. Для прогнозирования времени жизни образца при вибрационном нагружении необходимо знать, какие значения принимают

разогрев, деформация и коэффициент поглощения энергии в конце второго периода, т.е. перед ускоренным разрушением материала. Показано, что в исследованном диапазоне изменения напряжений, критические величины этих параметров сохраняют приблизительно одинаковые значения для каждой исследованной асимметрии цикла.

6. Измерено, какая часть  $\Delta W_T$  общей энергии  $\Delta W$  расходуется на увеличение температуры образца. Для стеклотекстолита ЭФС в данных испытаниях найдено, что  $\Delta W_T \approx 0,75 \Delta W$ , причем это соотношение меняется в зависимости от участка разрушения. В третьем периоде ускоренного разрушения доля энергии, идущая на разогрев материала, наименьшая.

7. Аналогичные исследования (п.п. 3-6) проведены и для некоторых других материалов (стеклопластика ВФТС, капролона) и другом виде нагружения - повторном ударном растяжении. Выводы качественно аналогичны выше изложенным, однако для капролона влияние разогрева значительно превосходит изменение свойств вследствие повреждений. Рассеянная энергия в капролоне с точностью до ошибок измерения  $\approx 5\%$  расходуется на разогрев материала.

8. Проведен расчет разогрева и разрушения полимерных материалов при вибрационном нагружении с учетом возникающей в материале повреждаемости. Влияние повреждаемости учитывается линейным изменением диссипации энергии от числа циклов, что соответствует экспериментально наблюдаемому изменению во втором установившемся периоде разрушения. Показано, что такое изменение диссипации от повреждений всегда вызывает нелинейное повышение температуры перед разрушением. Рассчитанные

тепловые поля качественно согласуются с экспериментально замеренными. Фактически наблюдаемое более резкое изменение температуры в конце испытания может быть объяснено неучтенной нелинейностью .

9. Ускоренный рост повреждений в начале испытаний объясняется неравномерным нагружением связей в материале и первоочередным разрушением наиболее перенапряженных связей. Предполагая статистическое распределение перенапряжений в форме распределения Вейбула и кинетическое уравнение разрушения типа формулы Журкова, получено развитие повреждений, согласующееся с экспериментально наблюдаемым развитием. При этом форма распределения перенапряжений также оказывается похожей на экспериментально замеренное.

## ГЛАВА II.

### ТЕОРИЯ ПРОЧНОСТИ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ПРОЦЕСС НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

#### 2.1. Обзор некоторых теорий кратковременной прочности и пластичности

##### 2.1.1. Статистические теории кратковременной прочности

Изучение процесса разрушения при одноосном растяжении или сжатии имеет первостепенное значение для выяснения основных закономерностей разрушения материалов. Однако в настоящее время нельзя ограничиваться только такими исследованиями. Большинство конструкций и несущих деталей практически работают в условиях сложного напряженного состояния и сложного нагружения. В настоящем разделе поставлена задача создать феноменологическую модель длительного разрушения твердого тела, основываясь на концепции постепенного развития повреждений в материале в процессе разрушения при сложном напряженном состоянии. Поскольку накопление повреждений есть временный процесс, зависящий от вида напряженного состояния, то в рамках разрабатываемой теории возможно рассчитать накопление повреждений, когда вид напряженного состояния меняется во времени, т.е. учесть влияние сложного нагружения.

Подход, развитый в этой главе, основан на статистическом учете равномерно распределенных по рассматриваемому объему, но разным образом ориентированных повреждений.

Стремления использовать статистические методы в теории пластичности и теории кратковременной прочности встречаются уже в конце двадцатых годов. Естественно, что первые попытки

при этом были направлены на установление условий текучести с учетом пределов текучести отдельных зерен/монокристаллов. В этой связи следует упомянуть работы Г.Захса /2.1/ и А. Рейсса /2.2/. Г.Захс впервые решил частную задачу определения пределов текучести поликристалла гранецентрированной кубической решетки для случаев осевого растяжения и кручения, используя графический метод усреднения по стереографическим проекциям.

Диапазон использования статистических методов в тридцатые годы расширили Д.Бруггеман /2.3/, А.Губер /2.4/, В. Боас, Е. Шмидт /2.5/ и В.Вейбулл /2.6/. Наряду со статистическим способом определения упругих и пластических свойств поликристаллических тел большое внимание было уделено также вопросам кратковременной прочности и циклической прочности. В. Вейбулл /2.6/ предполагал существование статистического распределения механических свойств по отдельным элементам материала. Принимая при этом гипотезу разрушения по слабейшему звену, можно было на каждом уровне напряжений оценить вероятность разрушения детали. Непосредственно из данного подхода следует возможность учета "масштабного эффекта" при нагружении деталей разного объема. Такая теория была развита также Я.И.Френкелем и Т.А. Конторовой /2.7/ и В.В.Болотиным /2.8 - 10/.

В 1938 г. на конференции по строительной механике в Академии Наук СССР Н.К.Снитко изложил результаты своих исследований по статистической теории пластичности, в частности по прочности с учетом внутрикристаллической структуры -/2.II-I4/. Это направление развито им и в работе /2.I5/.

Подробнее из исследований этого периода остановимся на теории Н.Н.Афанасьева /2.16/, поскольку его подход имеет наиболее близкое отношение к нашему.

Н.Н. Афанасьев в 1940 году выдвинул гипотезу, что усталостное разрушение в металлах вызывают касательные напряжения, действующие по плоскостям скольжения отдельных кристаллитов. Во-вторых, предполагалось, что металл квазиизотропен, т.е. кристаллиты в рассматриваемой макрочастице расположены так, что все направления плоскостей скольжения равновероятны (т.е. в любом телесном угле  $d\Omega$  располагается одинаковое количество нормалей  $n d\Omega$  ) плоскостей скольжения кристаллитов. В третьих, предполагалось, что скольжение по плоскости с нормалью  $\mathbf{z}$  наступает, как только касательное напряжение в этой плоскости выше некоторого предела  $\tau_z > \tau_{z0}$ , и тогда интенсивность скольжения по этой плоскости не зависит от разности  $\tau_z - \tau_{z0}$ . Количество кристаллитов, у которых в плоскости их скольжения соблюдается условие  $\tau_z > \tau_{z0}$ , отнесенное к количеству всех кристаллитов, является мерой вероятности появления усталостного разрушения.

В целях упрощения Н.Н.Афанасьев ввел предположение, что наличие всестороннего сжатия или растяжения не влияет на возникновение текучести в отдельных кристаллитах. Приняв указанное положение, любое напряженное состояние можно привести к плоскому, исключив среднее напряжение. Если главные напряжения в какой-либо точке тела будут соответственно  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  причем  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то такое напряженное состояние будет

тождественно состоянию, имеющему напряжения  $\sigma_1 - \sigma_2$  ; 0 ;  $\sigma_3 - \sigma_2$  . Из сказанного вытекает и то, что любой случай напряженного состояния тела приводится к промежуточному между одноосным растяжением (сжатием) и чистым сдвигом.

Для подсчета вероятности появления пластических сдвигов Н.Н.Афанасьев пользуется геометрическими понятиями поверхности касательных напряжений и поверхности предельных напряжений, От рассматриваемой точки как от центра по нормальям к площадкам откладывается величина предельного напряжения на сдвиг. Для изотропного тела предельная поверхность будет сферой, проведенной радиусом, равным пределу текучести на сдвиг  $\tau_{z0}$  . Если по нормали к площадке отложить в том же масштабе величину касательного напряжения, действующего по площадке, то получится поверхность касательных напряжений. Пересечение поверхности касательных напряжений с предельной поверхностью образует кривые на сфере, ограничивающие площади  $S^+$  на сфере, через которые проходят нормали площадок с  $\tau > \tau_{z0}$  . Таким образом, отношением площадей:  $S^+$  на сфере к площади  $S$  всей сферы определяется, по Н.Н.Афанасьеву, вероятность усталостного разрушения.

Впоследствии теория статистической прочности привлекала к себе внимание многих исследователей. Заметное влияние на ее развитие оказали работы Н.Н. Давиденкова, Е.М. Шевандина, Б.Б. Чечулина, С.В. Серенсена, Я.Б.Фридмана, В.В.Болотина, Т.А.Конторовой и Я.И.Френкеля, И.А.Одинга, С.Д. Волкова и других ученых. Библиография этих исследований дана в книгах

В.В.Болотина "Статистические методы в строительной механике" /2.8/, С.Д.Волкова "Статистическая теория прочности" /2.17/ и В.Т.Трощенко "Неупругость и усталость металлов" /1.72/.

В работах С.Д.Волкова, обобщенных в его книге /2.17/ излагается построение статистической теории прочности с учетом микронеоднородности напряжений. Коротко изложим построение теории в случае хрупкой прочности, когда разрушение вызывается растягивающими напряжениями.

Предполагается, что макроразрушение по некоторой плоскости в окрестности рассматриваемой точки возникает при сливании отдельных микротрещин, когда они достигают определенной плотности.

Микротрещины вызываются напряжением второго рода, т.е. перенапряжениями в отдельных кристаллитах материала.

Предполагается, что напряжения второго рода  $\zeta$  в некотором сечении распределяются по нормальному закону около значения соответствующего макронапряжения  $\sigma$  рис.2.1, 2.2. При этом автором показано, что параметр  $M$  плотности распределения  $\rho$  напряжений  $\zeta$  определяется в случае квазиизотропного тела некоторой константой материала и потенциальной энергией деформирования, а именно:

$$\rho(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}M} e^{-\frac{(\zeta - \sigma)^2}{2M^2}} \quad (2.11)$$

где

$$M = \sqrt{E \Pi K} \quad (2.12)$$

$E$  - модуль упругости,  $\Pi$  - потенциальная энергия тела,

$K$  - константа микронеоднородности материала. Допускается,

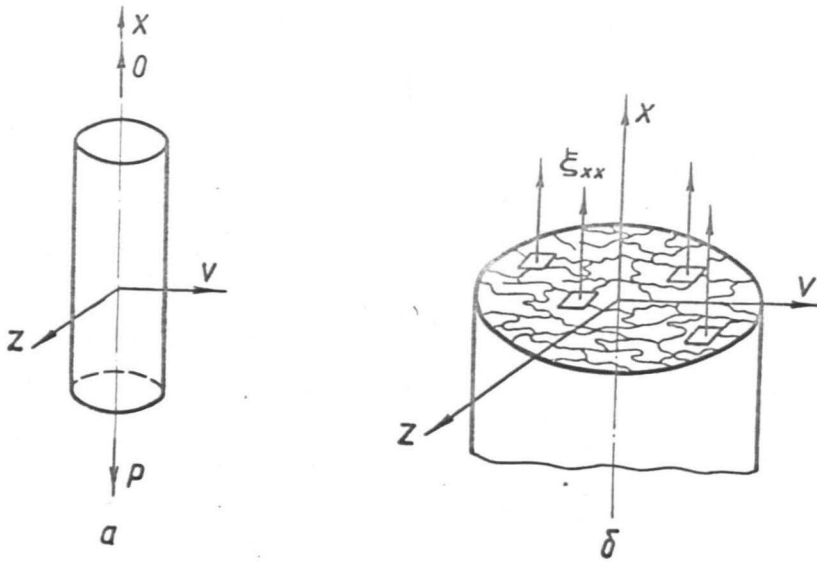


Рис. 2.1.

Одноосное растяжение поликристаллического образца: а) общая схема, б) поперечное сечение образца ( по С. Волкову /2.17/).

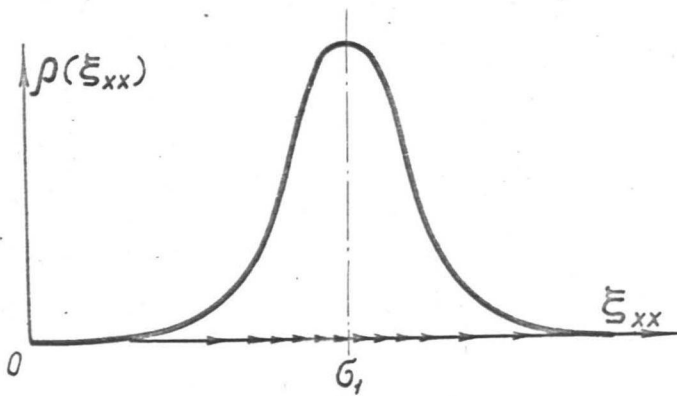


Рис. 2.2.

Плотность распределения напряжений второго рода в поперечном сечении поликристаллического образца ( по С.Д. Волкову /2.17/).

что существует вторая константа материала  $S_p$ , причем  $\zeta$  вызывает разрушение если  $\zeta > S_p$ . Тогда для каждой плоскости материала с нормалью в окрестности рассматриваемой точки можно вычислить относительное количество разрушенных микроплощадок по формуле:

$$q = \int_{S_p}^{\infty} f(\zeta) d\zeta \quad (2.1.3)$$

Принимается наконец, что существует некоторая критическая мера поврежденности  $q_k$ . Если на некоторой плоскости  $q \geq q_k$ , то наступает разрушение точки.

Условие разрушения можно с учетом (2.1.1) и (2.1.3) сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{S_p}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\zeta - \sigma)^2}{2\mu^2}\right] d\zeta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu \int_{\sigma}^{S_p} e^{-\frac{(\zeta - \sigma)^2}{2\mu^2}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{S_p - \sigma}{\mu}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = q_k \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

В этом равенстве предполагается  $q_{\max} = \max q(\theta, \varphi)$ , где ( $0 \leq \theta < \pi$ ;  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) - углы, определяющие положение плоскости, на которой рассматривается  $q$ . При этом ясно, что поскольку  $\mu$  для всех плоскостей согласно (2.1.2) одинаков, то  $q_{\max}$  будет на той плоскости, где максимальное  $\sigma$ .

Равенство (2.1.4) выполнится если на этой плоскости будет:

$$\frac{S_p - \sigma_{\max}}{\mu} = P \quad (2.1.5),$$

где  $P$  некоторая константа, выведенная вместо  $q_k$ . Уравнение (2.1.5) с учетом (2.1.2) переписывается:

$$(S_p - \sigma_{\max})^2 = A E k \rho^2 \quad (2.1.6)$$

Перепишем (2.1.6) в виде:

$$\left( S_p - \sigma_{max} \right)^2 = E \kappa \rho^2 \left( \frac{S_{ij} S_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ii}^2}{3K} \right) \quad (2.1.7)$$

где  $S_{ij}$  - девиатор,  $G, K$  - упругие константы. Можно ввести обозначение  $\lambda = \frac{S_p}{\sigma_p}$ , где  $\sigma_p$  макроразрушающее напряжение при одноосном растяжении. Полагая  $\sigma_{max} = \sigma_{ii} = \sigma_p$ ,  $\sigma_{ij} = 0$ ,  $i, j \neq 1$  имеем из (2.1.7)

$$\left( \lambda - 1 \right)^2 = \kappa \rho^2 \quad (2.1.8)$$

Окончательно уравнение прочности (2.1.7) принимает вид:

$$\left( \lambda \sigma_p - \sigma_{max} \right)^2 = E \left( \lambda - 1 \right)^2 \left( \frac{S_{ij} S_{ij}}{2G} + \frac{\sigma_{ii}^2}{3K} \right) \quad (2.1.9)$$

Константа  $\sigma_p$  определяется при растяжении,  $\lambda$  при любом другом напряженном состоянии, например, при одноосном сжатии.

Хорошее применение этот метод получает при рассмотрении разрушения вследствие сжатия. Хотя при чистом сжатии ни по одной плоскости нет растягивающих макронапряжений, однако, растягивающие микронапряжения максимальны на плоскостях, параллельных линии действия силы. Теория С.Д. Волкова объясняет наблюдающееся разрушение от растяжения по этим плоскостям для хрупких материалов.

Для наших целей сравнивая теории Н.Н. Афанасьева и С.Д. Волкова отметим, что в первой из них вычисляется количество "перегруженных" кристаллитов, ориентированных по всем возможным направлениям, и условие разрушения связывается с этим количеством. В теории Волкова условие разрушения связывается с одной плоскостью, где имеется максимальное количество раз-

рушенных микроплощадок. То, что в одном случае разрушения предполагаются возникающими от касательных, в другом случае от нормальных напряжений и инвариантов (2.1.9) — менее существенно. В дальнейшем покажем как эти подходы согласуются с нашими предположениями.

Применительно к волокнистым материалам статистическую теорию кратковременной прочности в 1959 году сформулировал Хсиао /2.18, 19/. Целью этих работ было получение зависимости прочности для полимерных материалов, ориентированных в разной степени. Основные предположения в его теории были следующие. Несущая способность полимерной среды обусловлена наличием упругих (или упруго-вязких) линейных элементов, распределенных хаотически или с некоторой ориентацией. Если принять, что несущие элементы упруги, то натяжение  $\psi_z$  элемента, направленного по оси  $z$  с координатами  $\theta$ ,  $\varphi$ , пропорционально деформации  $\epsilon_z$ .

$$\psi_z = E \epsilon_z \quad (2.1.10)$$

Вводится понятие распределения плотности элементов по направлениям  $\rho(\theta, \varphi)$ . Суммарное натяжение всех элементов единицы объема, направленных в пределах телесного угла  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  равно:

$$d\sigma_z = E \epsilon_z \rho(\theta, \varphi) d\Omega \quad (2.1.11)$$

Предполагается, что  $\epsilon_z$  можно вычислить по закону преобразования компонент тензора  $\epsilon_{ij}$ :

$$\epsilon_z = l_{iz} l_{jz} \epsilon_{ij} \quad (2.1.12)$$

где  $l_{iz}$ ,  $l_{jz}$  направляющие косинусы оси  $z$ .

В работе /2.18/ это не отмечается, но здесь подчеркнем, что  $\sigma_z$  согласно (2.1.11) при произвольной функции  $\rho(\theta, \varphi)$  не будет распределяться по направлениям  $\theta, \varphi$ , согласно тензорному закону, однако в сумме напряжения всех элементов должны давать компоненты приложенного тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ .

Рассматривая сечение плоскостью с нормалью вдоль оси  $z$  отмечается, что количество элементов, направленных в пределах угла  $d\Omega$  и пересеченных плоскостью единичной площади будет

$l \rho(\theta, \varphi) l_{iz} d\Omega$ , (где  $l$  длина элементов), поэтому вектор суммарного усилия на этой площадке имеет компоненты

$$\sigma_{ij} = \int_s E l \varepsilon_z \rho(\theta, \varphi) l_{iz} l_{jz} d\Omega \quad (2.1.13)$$

Эти компоненты по определению есть компоненты тензора напряжений.

(В § 2.2.2 будет показано, что построение тензора второго ранга (2.1.13) из функции (2.1.11) является частным случаем общего правила построения тензоров любого ранга из функции на сфере).

Принимая, что разрушение элемента наступает при достижении им предельной деформации  $\varepsilon_z$ , из (2.1.13) можно вычислить предельные значения  $\sigma_{ij}$  для разных ориентаций  $\rho(\theta, \varphi)$ .

В работе /2.20/ в 1968 г. подход Хсиао был использован для построения флюктуационной теории длительной прочности ориентированных линейных полимерных материалов. Более подробное рассмотрение этого вопроса будет дано в § 2.4.2.

Наконец отметим, что в ряде выше изложенных теорий статистический подход присутствует лишь неявно, аналогично тому, как это имеет место в статистических теориях пластичности. Статистическая теория прочности в "прямом смысле" получается лишь, если учесть случайный характер распределения механических свойств по отдельным элементам в материале (как в теории В.Вейбулла /2.6/) или учесть случайный характер приложенных нагрузок и задаться целью рассчитать надежность конструкции в определенный промежуток времени. Расчет накопления повреждений при случайных нагрузках наиболее полно рассмотрен В.В.Болотиным /2.8, 21-25/.

Т.Ёкобори принадлежит идея рассмотреть разрушение как стохастический или в более узкой постановке – как марковский случайный процесс /2.26/. Такой подход применен В.Болотиным /2.27/ для описания разрушения композитного материала.

## ✓ 2.1.2. Теории длительной прочности и пластичности Общие вопросы и взаимосвязь

Развитие теории длительной прочности и разрушения идет двумя путями. Первый путь – развитие классической теории Гриффитса /2.28/, рассматривающей разрушение как развитие одной магистральной трещины. Эти работы получили широкое распространение и успешно применяются в ряде случаев для определения критической нагрузки, а также и жизни образца с начальными дефектами. Например, в работах /2.29, 30/ идея развития единичной трещины использована для определения времени до разру-

шения для полиэтилена при циклическом нагружении. Явление усталости рассматривается как прорастание трещины сквозь образец. Скорость роста трещины  $C$  с числом циклов  $\mathcal{N}$  принимается в виде:

$$\frac{dC}{d\mathcal{N}} = B T^\eta \quad (2.1.17)$$

где  $B$  и  $\eta$  константы, а  $T$  определяется через изменение запасенной упругой энергии  $\mathcal{E}$  при возрастании площади трещины т.е.  $T \equiv -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A}$ . Для  $T$  получено выражение  $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A} = -k_c \mathcal{W}_0$ , где  $\mathcal{W}_0$  удельная энергия вдали от трещины, а  $k_c$  в первом приближении принимается константой. Интегрируя зависимость (2.1.17) с учетом выражения для  $T$  находится время жизни образца. При этом константы определяются из эксперимента по росту искусственной единичной трещины, а интегрирование ведется с некоторой начальной значения трещины  $C_0$ . Хорошее совпадение с экспериментальной кривой усталости получается при значении  $C_0 = 0,004$  мм, что в свою очередь находится в хорошей корреляции с микроскопически наблюдаемым размером наибольших сферолитов в исследуемом полиэтилене.

Не обсуждая других работ этого направления отметим одну общую идею, которая лежит в основе такого подхода /2.31/. Свойства материала - упругие или пластические - предлагаются неизменными и заданными заранее. Распространение трещины есть результат локальных процессов, происходящих на ее конце и описываемых при помощи тех или иных средств.

Однако, как показывают непосредственные наблюдения для

металлов и полимеров /2.32,31/ материал даже при однородном напряженном состоянии под действием нагрузки постепенно разрушается - в нем появляется система субмикротрещин, число которых огромно до  $N = 10^{16}$  1/см<sup>3</sup>. Поэтому в этой стадии разрушения допустимо и необходимо считать разрушение рассеянным по всему объему материала, применять обычные гипотезы механики сплошных сред, и считать, что уравнения состояния меняются в зависимости от уровня накопленного повреждения. Этот подход, которого мы придерживались в первой главе, проводится и в настоящей главе, но обобщается на сложное напряженное состояние и сложное нагружение.

Такой подход, когда рассматривается объемное разрушение, которое подготавливает возникновение и развитие фронта разрушения был развит Л.М.Качановым /2.33, 34/ и др. для описания разрушения при ползучести, однако, вероятно первая работа, где было введено понятие поврежденности материала относится еще к 1924 году /2.35/, когда Палмгрен рассчитывал износ шариковых подшипников с историей эксплуатации машин. В работе /2.36/ идея накопления повреждений была перенесена в расчеты на усталостную прочность. Линейное суммирование повреждений обсуждалось в работах Бейли /1.101/ и Майнера /2.37/, а в работе Робинсона /2.38/ идея накопления повреждений была использована для оценки времени до разрушения для режима ползучести при изменяющихся температурах.

Но развитие длительной теории прочности с учетом накопления повреждений при сложном напряженном состоянии происхо-

дит лишь в последнее десятилетие. Это направление служит для решения главной задачи механиков при изучении процессов разрушения: на основе закономерностей, полученных в физических опытах при исследовании разрушения на разных уровнях, развить методику расчета изделий и конструкций с учетом разрушения. Для этого необходимо: 1) обобщить закономерности, полученные при одноосном растяжении, на сложное и неоднородное напряженное состояние и, вообще говоря, сложное нагружение; 2) построить уравнения состояния среды с учетом разрушения. При этом, необходимо учесть обе стадии разрушения - "объемное" или "дисперсное" разрушение, т.е. равномерное по объему увеличения числа нарушений (микротрещин) в образце, и второе - развитие и распространение магистральной трещины.

В настоящее время к построению моделей длительного объемного разрушения в рамках механики сплошных сред имеются несколько подходов. Поскольку исторически раньше были исследованы вопросы пластического деформирования материалов и только в последние годы механики все больше переходят из рассмотрения теории пластичности к теории разрушения, то в развитии последней большую роль играют существующие методы и разработки соответствующих научных школ пластичности /2.39/. Взаимосвязь и преемственность теории разрушения и теории пластичности подчеркивается В.Новожиловым /2.40, 41/. Приведем цитату из работы /2.40/: - "Отмечу, что развитие собственно теории пластичности все более приобретает вспомогательный характер. В настоящее время цель исследований в данной облас-

ти - не столько уточнение формул, необходимых для определения макроскопических пластических деформаций по заданной истории нагружения, сколько стремление разобраться в процессах подготавливающих разрушение. Отсюда интерес к эффектам второго порядка таким, как эффект Баушингера, пластическое разрыхление и эволюция гистерезисной петли при циклическом деформировании".

В настоящее время общепринято теории пластичности делить на три больших группы: деформационные теории, теории течения, статистические теории.

Согласно направлению данной работы остановимся подробнее на обзоре статистических теорий пластичности.

### 2.1.3. Статистические теории пластичности

Статистические теории пластичности /2.42, 43/, /2.44-46/ исходят из разных физических предпосылок, разных гипотез, но они следуют одной основной идее: локальные пластические сдвиги, возникающие в отдельных кристаллитах некоторого объема поликристаллического тела усредняются для получения тензора макродеформации. Эти теории отличаются друг от друга гипотезами и предположениями по законам возникновения локальных пластических деформаций.

Очевидно, первой теорией такого типа была теория скольжения Батдорфа и Будянского /2.42, 43/.

Более подробно изложение основных предположений этой теории даем согласно обзору /2.48/:

а) отдельный агрегат поликристаллического материала состоит из множества беспорядочно ориентированных монокристаллов и поэтому его можно рассматривать как квазиизотропный и однородный;

б) каждый монокристалл и весь агрегат имеют одно и то же напряженное состояние;

в) пластическая деформация в отдельном монокристалле создается только в результате скольжения, т.е. сдвига, вдоль некоторого направления по плоскости определенной ориентации; такое направление называется направлением скольжения, а данная плоскость - плоскостью скольжения;

г) в каждом монокристалле существует одна система скольжения, т.е. одна плоскость скольжения, включающая только одно направление скольжения;

д) сдвиг в одной системе скольжения зависит от величины касательного напряжения, действующего на плоскость скольжения вдоль направления скольжения;

е) пластический сдвиг в данной системе скольжения происходит лишь тогда, когда касательное напряжение по направлению скольжения превышает предел текучести при сдвиге ;

ж) пластические деформации в поликристаллическом агрегате определяются путем соответствующего суммирования сдвигов, образующихся в предельных монокристаллах;

з) монокристаллы действуют независимо друг от друга, т.е. течение в одной системе скольжения не вызывает упрочнения в других системах скольжения.

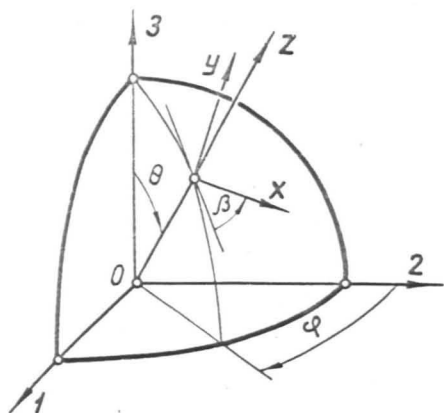


Рис. 2.3.  
К построению теории  
скольжения.

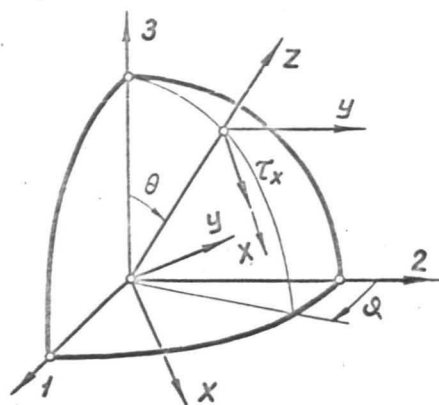


Рис. 2.4.  
К построению теории ло-  
кальности деформаций.

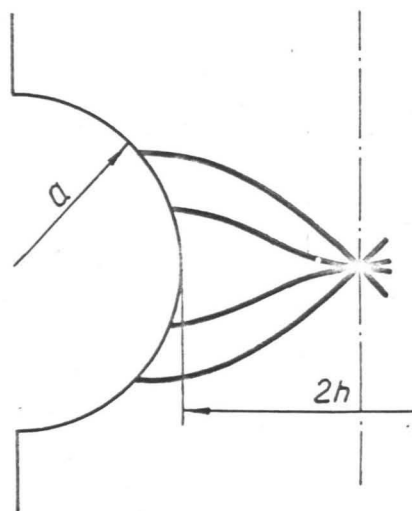


Рис. 2.5.  
Схематическое поле характеристик  
при растяжении разрушающегося  
идеально пластического материала  
(по Ю.Н. Работнову /2.57/ ).

Для математического описания зависимости между напряжениями и деформациями, через точку, в окрестности которой определяются деформации, проводим две ортогональные системы координат:

1) вспомогательную подвижную систему координат  $x, y, z$  (индексы суммирования  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) для определения сдвига в отдельной системе скольжения;

2) основную неподвижную систему координат  $1, 2, 3$  (индексы суммирования  $i, j, k, l$ ) для определения общей пластической деформации. Из соображений удобства вынесем начало вспомогательной системы координат на поверхность единичной сферы, описанной вокруг рассматриваемой точки (рис. 2.3). Ось  $z$  этой системы координат будем рассматривать как нормаль плоскости скольжения, а ось  $x$  совместим с направлением скольжения. Совокупность осей  $z$  и  $x$  определяет систему скольжения.

Если касательное напряжение  $\sigma_{xz}$ , которое действует вдоль направления скольжения, превышает предел текучести, то монокристалл начинает пластически деформироваться и претерпевает пластическую деформацию:

$$\gamma_{zx}^p = F(\sigma_{zx}) \quad (2.1.18)$$

где  $F$  — характеристическая функция сдвига или функция скольжения, зависящая только от истории изменения касательного напряжения, действующего в данной системе скольжения и не зависящая от вида напряженного состояния в основной системе координат.

Согласно закону преобразования тензора второго ранга, можно определить ту пластическую деформацию в основной системе коор-

динат, которая вызвана сдвигом только в одной системе скольжения:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^P = \frac{1}{2} (l_{iz} l_{jx} + l_{ix} l_{jz}) \tau_{zx}^P \quad (2.1.19)$$

где  $l_{iz}$ ,  $l_{jz}$ ,  $l_{ix}$ ,  $l_{jx}$  направляющие косинусы, которые выражаются через сферические координаты  $\theta$  и  $\varphi$ , а также через угол  $\beta$  посредством соотношений

$$\begin{aligned} l_{iz} &= \sin \theta \sin \varphi \\ l_{jz} &= \sin \theta \cos \varphi \\ l_{3z} &= \cos \theta \\ l_{ix} &= \cos \varphi \sin \beta - \cos \theta \sin \varphi \cos \beta \\ l_{jx} &= -\sin \varphi \sin \beta - \cos \theta \cos \varphi \cos \beta \\ l_{3x} &= \sin \theta \cos \beta \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Общая пластическая деформация в основной системе координат тогда определяется интегрированием  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^P$  по всем направлениям и плоскостям скольжения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^P &= \iint_S \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tilde{\varepsilon}_{ij}^P \sin \theta d\theta d\varphi d\beta = \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\tau_{zx}) (l_{iz} l_{jx} + l_{ix} l_{jz}) \sin \theta d\theta d\varphi d\beta \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

где  $S$  - поверхность единичной полусферы.

Функция скольжения  $F(\tau_{zx})$  определяется из макроопыта на одноосное растяжение или кручение.

В 1953-1955г.г. Малмейстером были предложены и разработаны основные принципы нового феноменологического подхода для установления связи между напряжениями и деформациями в процессе пластического деформирования [2.44, 45]. За механизм образова-

ния пластических деформаций в окрестности некоторой точки сплошной среды был принят сдвиг вдоль произвольной локальной плоскости скольжения или двойникования, проходящей через данную точку среды и имеющей нормаль  $z$ . Предполагалось, что направление локального сдвига совпадает с вектором касательного напряжения  $\tau_z$ , действующего на этой плоскости. Так как рассматривался материал с выраженным пределом текучести, было принято, что локальная пластическая деформация сдвига происходит только тогда, когда касательное напряжение на плоскости скольжения  $\tau_z$  превысит некоторую предельную величину  $\tau_0$ , соответствующую пределу текучести материала.

С учетом того, что реальный материал в каждой точке может иметь множество возможных плоскостей скольжения или двойникования, пластическая деформация в окрестности некоторой точки пластически деформируемой изотропной непрерывной сплошной среды постулировалась как статистически средняя величина локальных пластических сдвигов, определенных при всех возможных положениях локальной плоскости скольжения или двойникования, для которых выполнялось условие  $\tau_z > \tau_0$ . Принималось, что сдвиги в разных плоскостях скольжения взаимно независимы, т.е. сдвиг в одной плоскости не вызывает упрочнения материала в другой. Для математического описания зависимости между напряжениями и деформациями через точку, в окрестности которой определялись деформации, проводились две ортогональные системы координат (рис. 2.4):

I) вспомогательная подвижная система координат  $x, y, z$

для определения локальной пластической деформации сдвига;

2) основная неподвижная произвольная система координат 1, 2, 3 - для определения усредненной деформации.

Плоскость, образованная осями  $x$  и  $y$  вспомогательной системы координат, совмещается с локальной плоскостью скольжения, причем так, чтобы направление оси  $x$  всегда совпадало с направлением касательного напряжения  $\tau_z$ . Это приводит к тому, что  $\sigma_{zx} = \tau_z$  и  $\sigma_{zy} = 0$ . Положение оси  $z$ , направленной вдоль нормали плоскости скольжения, по отношению к основной системе координат определяется направляющими косинусами  $l_{iz}$ :

$$l_{1z} = \sin \theta \sin \varphi, \quad l_{2z} = \sin \theta \cos \varphi, \quad l_{3z} = \cos \theta$$

При изменении сферических координат  $\theta$  и  $\varphi$  в пределах  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и  $0 \leq \theta \leq \pi$  ось  $z$  принимает все возможные положения в пространстве, следовательно, при интегрировании по сфере учитываются все возможные положения плоскости скольжения.

Тогда пластическая деформация и напряжение связаны зависимостью

$$\xi_{ij}^p = \frac{1}{S} \int_{S^+} \gamma^p(\sigma_{zx}) \nu_{ij} ds \quad (2.1.22)$$

где  $\gamma^p(\sigma_{zx})$  - локальная пластическая деформация сдвига, которая зависит от истории изменения модуля касательного напряжения на плоскости сдвига (функция локальности деформаций);

$\nu_{ij}$  - функция, преобразующая локальную деформацию из вспомогательной системы координат в основную систему;

$S$  - площадь поверхности единичной сферы;

$S^+$  - область интегрирования, называемая зоной догрузки,

определяется как в теории Н.Афанасьева /2.16/, т.е. образуемая на сфере при пересечении последней с поверхностью касательных напряжений.

Новая теория пластичности /2.44 - 45/, называемая теорией локальности деформаций была применена для решения задач сложного нагружения; она обеспечила возможность анализировать изменение касательных напряжений на всех плоскостях сдвига, проходящих через рассматриваемую точку и учитывать в целях усреднения только те плоскости, в пределах которых в процессе сложного нагружения выполняется условие догружения.

Можно отметить, что теория локальности деформаций нашла широкое и успешное применение при решении ряда задач устойчивости конструкций /2.49/.

К феноменологическим статистическим теориям пластичности следует отнести также предложенную Леоновым и Швайко /2.50/ теорию, основанную на модели линейной анизотропно упрочняющейся "плоскопластической" среды.

#### 2.1.4. Теории длительной прочности, учитывающие накопления повреждений

В случае одноосного напряженного состояния гипотеза накопления повреждений была высказана /2.35-38/ задолго до экспериментального обнаружения системы субмикротрещин в материале. Хорошо известна формула для определения долговечности  $t_p$  образца — на основе закона линейного суммирования повреждений при программном изменении напряжения во времени

$$1 = \int_0^{t_p} \frac{1}{t[\sigma(\tau)]} d\tau$$

Здесь  $t(\sigma)$  — экспериментально определяемое время до разрушения при постоянном напряжении.

Однако, как было сказано выше, построение теорий учитывающих повреждение при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении начато только в последнее время, причем наблюдается переход от изучения теории пластичности и ползучести к вопросам прочности.

Рассмотрим некоторые современные теории длительной прочности.

##### Теория А.А. Ильюшина.

В /2.51, 52/ отмечается, что характеризовать разрушенность материала одной скалярной функцией нельзя, хотя бы потому, что разрушение может наступить как от действия касательных, так и нормальных напряжений. Поэтому предлагается ввести понятие тензора повреждений  $\Pi$ , который может быть как тензором второго ранга  $\Pi_{ij}$ , так и тензором более высо-

кого ранга. Этот тензор должен быть однозначной функцией процесса нагружения. Существуют некоторые неотрицательные меры повреждений  $M_i(\Pi)$  (инварианты тензора  $\Pi$ ), причем материал не разрушается, если все  $M_i < C_i$ , где  $C_i$  - константы материала, и материал в данной точке разрушен, если там хоть одно  $M_k = C_k$  (тогда наступает разрушения типа "к").

Простейший вариант теории получается, если считать  $\Pi$  симметричным тензором второго ранга. Для учета влияния концентрации напряжений и масштабного эффекта предлагается ввести также и тензор 4-го порядка  $\Pi_{ijke}$ . Линейная теория накопления повреждений возникает, если принять зависимость между тензором  $\Pi_{ij}$  и тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , в линейном виде аналогично линейной наследственной теории вязко-упругости:

$$\Pi_{ij} = \int_0^t F_{ijke}(t-\tau) \sigma_{ke}(\tau) d\tau \quad (2.1.23)$$

В случае изотропного тела тензор  $F_{ijke}$ , естественно, является изотропным тензором четвертого ранга:

$$F_{ijke}(\xi) = \varphi_1(\xi) (\delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) + \varphi_2(\xi) \delta_{ij} \delta_{ke}$$

и (2.1.23) переписывается:

$$\Pi_{ij} = \int_0^t \varphi_1(t-\tau) \sigma_{ij}(\tau) d\tau + \delta_{ij} \int_0^t \varphi_2(t-\tau) \sigma_{kk}(\tau) d\tau \quad (2.1.24)$$

Из простейших опытов на длительную прочность при постоянном напряжении, зная время до разрушения  $t$  определяется ядра  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . При этом должна быть заранее задана мера повреждения  $M$ .

Отметим однако, что простейшим опытом на длительную прочность при  $\sigma_{ij} = \text{const}$  не выясняется справедливость выражения (2.1.24). Априори принимая любую нелинейность  $\sigma_{ij}$  в интегралах (2.1.24) мы можем подобрать функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , так, чтобы удовлетворить экспериментальной зависимости  $t_p(\sigma_{ij})$ . Для выяснения справедливости линейной зависимости (2.1.24) нужно проводить дополнительные программные испытания с переменным  $\sigma_{ij}$  во времени или измерять какой-либо физический параметр, показывающий накопление повреждений во времени, при разных уровнях нагрузки  $\sigma_{ij}$ .

Для эффективного введения поврежденности в уравнения состояния В.Москвитином в статье /2.53/ предложен упрощенный вариант этой теории, когда повреждаемость характеризуется скаляром  $\eta$ , зависящим от некоторого приведенного напряжения  $\sigma_2$  и истории нагружения:

$$\eta(t) = (1+m) \int_0^t (t-\tau)^m \frac{d\tau}{t_0^{1+m}(\sigma_2)} \quad (2.1.25)$$

где  $\sigma_2 = \frac{3}{2} \sigma(1-\lambda) + \frac{9}{4} [\sigma^2(1-\lambda)^2 + \lambda \sigma_{ij}^2]^{\frac{1}{2}}$ ; ( $\lambda < 1$ ) - эффективное напряжение, введенное Баландиным, а  $t_0$  - время до разрушения при  $\sigma = \text{const}$ .

Связь напряжений и деформаций следующая:

$$\epsilon_{ij} = \int_0^t k(t'-\tau') d s_{ij}(\tau') \quad (2.1.26)$$

причем поврежденность  $\eta$  влияет на скорость протекания релаксационных процессов посредством введения модифицированного времени  $t'$ :

где функция  $a_\gamma$  имеет значения  $a_\gamma(0) = 1, a_\gamma(\gamma) < 1 (\gamma > 0)$   
 например,  $a_\gamma = \frac{1}{b\gamma^\delta + 1}$

Функция  $\gamma(t)$  определяется из кривой длительной прочности. Ядро  $K$  принимается в виде степенной функции и определяется на физически линейном участке ползучести. Достоинство такого упрощенного подхода можно усмотреть в том, что краевые задачи можно решать методами последовательных приближений, которые разработаны для термо-вязко-упругости /2.52/.

В заключение отметим, что другой подход к введению тензора повреждаемости второго ранга обсуждался в работах /2.54/, /2.55/. Авторы принимают во внимание, что каждая трещина характеризуется диадой векторов: вектором нормали и вектором скачка перемещений, а диада векторов порождает тензор второго ранга.

#### Теория Ю.Н.Работнова.

В работе /2.56/ Ю.Н.Работновым учтено влияние накопления повреждений на процесс ползучести, предполагая, что скорость ползучести зависит от эффективного напряжения  $S$  :

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0 \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n = \epsilon_0 S^n$$

(здесь  $0 \leq \omega < 1$  - параметр поврежденности).

При сложном напряженном состоянии предполагается, что эффективные напряжения и повреждаемость характеризуется тензорами второго ранга  $S_{ij}$  и  $\omega_{ij}$  соответственно. Предполагая существование потенциала эффективных напряжений  $\psi(S_{ij})$ , зависимость  $\dot{\epsilon}_{ij}(S_{ij})$  и  $\dot{\omega}_{ij}(S_{ij})$  пишется в следующей форме:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \epsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_{ij}} ; \quad \psi_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial s_{ij}}$$

(здесь  $\psi_{ij} = \delta_{ij} - \omega_{ij}$ ).

Эффективный метод решения плоских задач разрушения получен, используя уравнение идеальной пластичности /2.57/.

Этот метод очевидно можно успешно применять и в расчетах разрушения полимеров, хотя конкретные вычисления для полимеров нам неизвестны. Метод основан на том, что:

- 1) распределение напряжений в теле при развитой ползучести близко к распределению их при идеальной пластичности;
- 2) повреждения развиваются перпендикулярно максимальным растягивающим напряжениям  $\sigma_1$ , ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ).

За систему эффективных напряжений принимается  $\frac{\sigma_1}{1-\omega}, \sigma_2, \sigma_3$  где  $\omega$  - скалярный параметр поврежденности. Решая задачи плоского деформированного состояния, записывается условие пластичности с учетом  $\omega$ :

$$\frac{\sigma_1}{1-\omega} - \sigma_2 = \lambda \sigma_3 \quad (2.1.27)$$

Кинетическое уравнение для параметра  $\omega$  следующее:

$$\dot{\omega} = b \sigma_3^k \quad (2.1.28)$$

где  $\sigma_3 = (1-\beta)\sigma_1 + \beta \sigma_{ii}$  - эквивалентное напряжение, предложенное Сдобыревым /2.58/.

Переходя к переменным  $\sigma$  и  $\tau$  по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma + \tau & \sigma_x &= \sigma - \tau \cos 2\theta \\ \sigma_2 &= \sigma - \tau & \sigma_y &= \sigma + \tau \cos 2\theta \\ & & \tau_{xy} &= \tau \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.1.29)$$

и используя уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 ; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1.30)$$

имеем неизвестные  $\sigma, \tau, \theta, \omega$  и четыре уравнения (2.127), (2.128); (2.1.30).

Уравнения характеристик полученной системы следующие:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2-\omega) \sin 2\theta \pm 2\sqrt{1-\omega}}{\omega + (2-\omega) \cos 2\theta}$$

причем, если

$$\omega \rightarrow 1, \text{ то } \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \operatorname{tg} \theta$$

значит, при  $\omega \rightarrow 1$  обе характеристики сливаются в одну, перпендикулярно максимальному растягивающему напряжению, образуя трещину. Краевая задача решается по шагам во времени.

В статье /2.57/ таким образом решена задача о разрушении полосы с вырезами при растяжении. Полученное поле характеристик схематически показано на рис. 2.5. Подтвержден результат о поддерживающем влиянии концентратора напряжений в условиях ползучести. Получено, что заключительная стадия разрушения, т.е. развитие магистральной трещины занимает значительно меньше времени, чем инкубационный период.

Этот подход отлично моделирует некоторые реальные явления при разрушении в частности - преимущественную направленную аккумуляцию повреждений в зоне будущей трещины, а также на кончике возникнувшей трещины.

## 2.2. Предлагаемый вариант феноменологической теории усталости и разрушения

### ✓ 2.2.1. Основные гипотезы

В работе /2.62/ в 1968 году нами были сформулированы основные предположения общей теории прочности. Эта теория допускает возможность учета сложного напряженного состояния и сложного нагружения на процессы разрушения. Она была разработана, развивая дальше статистическую теорию прочности Н.Афанасьева /2.16/, на основе успехов, которые были достигнуты в статистической теории пластичности - теории локальности деформаций /2.44/.

Основные предположения предлагаемой теории следующие:

1. Принимается, что реальную материальную среду можно рассматривать как евклидов континуум, который наделен определенными физическими свойствами. Различного рода внешние воздействия, например, механические напряжения, в процессе нагружения могут вызвать в среде какие-то изменения, которые назовем повреждениями. Однородное напряженное состояние вызывает однородное поле повреждений, т.е. распространение магистральных трещин должно быть рассмотрено особо.

2. Принимается, что поврежденность или разрушенность любой точки  $O$  среды можно вполне характеризовать центрально симметричной скалярной функцией  $\Pi(\theta, \varphi)$  на единичной сфере  $S$  с центром в  $O$ . Каждое значение  $\Pi(\theta, \varphi)$  этой функции можно истолковывать как поврежденность малой окрестности точки  $O$  в направлении  $\theta, \varphi$ . Таким образом, мы приходим к операторам,

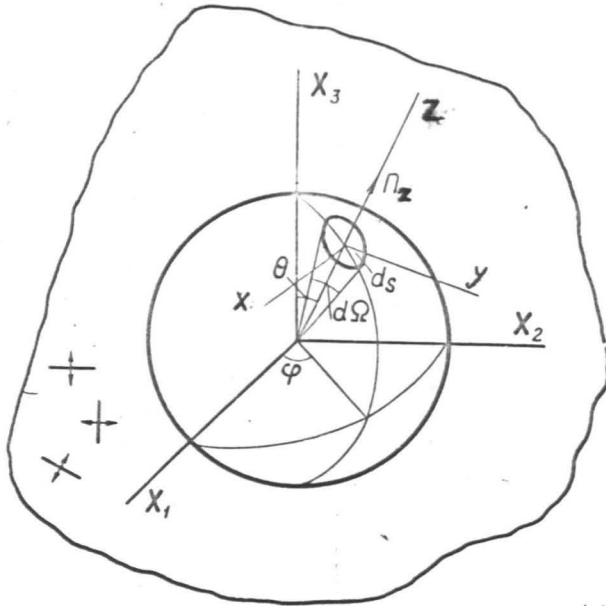


Рис. 2.6.

К построению модели разрушения.

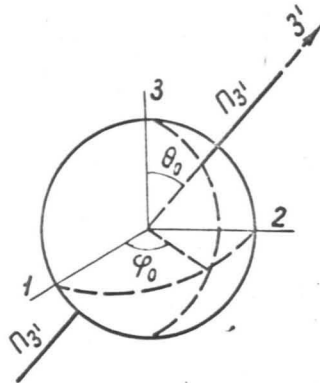


Рис. 2.7.

Функция на сфере, характеризующая развитие повреждений в направлении  $(\theta_0, \varphi_0)$ .

действующим из множества симметричных тензоров второго ранга в множество центрально-симметричных скалярных функций на единичной сфере.

3. Моментом разрушения будем считать достижение инвариантными характеристиками локальной повреждаемости определенных величин. Правильность критерия разрушения может указать только опыт. Ниже критерии разрушения будут обсуждаться более подробно.

Подчеркнем, что с изложенной формальной схемой не связывается какая-либо определенная физическая картина реального процесса разрушения. Однако допустимы вполне конкретные ее интерпретации. Наиболее подходящей кажется следующая интерпретация.

Допустим, что любое повреждение, возникающее в материале, определяется величиной и направлением. Типичным примером таких повреждений являются плоские микротрещины, характеризующиеся некоторой площадью и направлением нормали к своей плоскости. В окрестности рассматриваемой точки  $O$  выделим некоторый объем материала, внутри которого можно считать, что  $\sigma_{ij} = \text{const}$ . Плотность микродефектов, ориентированных в пределах телесного угла  $d\Omega$  в направлении  $\theta, \varphi$  в этом объеме, будет  $\Pi(\theta, \varphi) d\Omega$ . Мерой поврежденности точки  $O$  будем считать функцию  $\Pi(\theta, \varphi)$ , отложенную на единичной сфере  $S$  с центром в  $O$ , (см. рис. 2.6). Точка разрушится, когда плотность любым образом (или в одном направлении) ориентированных микродефектов достигнет критического для данного материала значения.

Таким образом, функцией на сфере мы характеризуем величину и направление повреждений в данной точке, а также разрушения локальной точки.

Например, если разрушение развивается только в одном направлении  $(\theta_0, \varphi_0)$ , то соответствующая функция на сфере будет (рис. 2.6):

$$\Pi_z = \begin{cases} c & \theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0 \\ 0 & \theta \neq \theta_0 \text{ или } \varphi \neq \varphi_0, \end{cases} \quad (2.2.1)$$

если повреждение развивается во всех направлениях одинаково, то

$$\Pi_z = \text{const} \quad (2.2.2)$$

После формулировки этих предложений возникают следующие задачи:

1. Выяснить вид операторов, связывающих функцию на сфере с тензором второго ранга — тензором напряжений в изотропной и анизотропной среде.

2. Выяснить соответствие между функцией на сфере и трехмерными тензорами, которыми можно ее в том или другом виде аппроксимировать. Это целесообразно сделать потому, что в данном подходе мы отказываемся от стандартного подхода механики сплошных сред — все характеристики среды характеризовать тензорами. Соответствие между тензорами и функцией на сфере покажет богатство информации, которую несет последняя.

3. Необходимо сопоставить предлагаемую теорию с другими известными теориями прочности.

4. Необходимо установить дополнительные предположения для построения конкретных расчетных зависимостей, установить

параметры или функции, определяемые из опыта и провести конкретные расчеты процесса разрушения.

### 2.2.2. Аппроксимация функций на сфере трехмерными тензорами

Докажем следующую теорему:

**Т е о р е м а:** Любую однозначную функцию с интегрируемым квадратом модуля на единичной сфере можно в среднем сколько угодно точно приблизить двумя абсолютно симметричными трехмерными декартовыми тензорами достаточно высокого ранга.

Употребленное в этой формулировке утверждение о приближении функции тензорами надо понимать в следующем смысле: для каждой функции, соответствующей сформулированным требованиям, можно указать алгоритм и два таких тензора, что по известным компонентам тензоров можно найти коэффициенты некоторого начального сегмента разложения этой функции в ряд Фурье по сферическим функциям. Неограниченно увеличивая ранг тензоров мы неограниченно увеличим длину сегмента разложения.

Хорошо известно напр. /2.63/, что любую однозначную функцию с интегрируемым квадратом на единичной сфере можно разложить в сходящийся в среднем ряд Фурье по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell}^0 P_{\ell}(\cos \theta) + \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} (a_{\ell}^m \cos m\varphi + b_{\ell}^m \sin m\varphi) P_{\ell}^m(\cos \theta) \quad (2.2.3)$$

$$\text{где } a_e^m = \frac{2^{\ell+1}}{2\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \cos m\varphi d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_e^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad (2.2.4)$$

$$b_e^m = \frac{2^{\ell+1}}{2\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin m\varphi d\varphi \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_e^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta, \quad (2.2.5)$$

$$P_e^m(\cos\theta) = (1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_e(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m} = \sin^m\theta \frac{d^m P_e(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m} \quad (2.2.6)$$

$$P_e(\cos\theta) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell [(\cos^2\theta - 1)^\ell]}{d(\cos\theta)^\ell} \quad (2.2.7)$$

Здесь  $\theta$  и  $\varphi$  - сферические координаты точек на сфере.

Выражение (2.2.6) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} P_e^m(\cos\theta) &= \sin^m\theta \frac{d^m P_e(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m} = \frac{\sin^m\theta}{2^\ell \ell!} \frac{d^{\ell+m} (\cos^2\theta - 1)}{d(\cos\theta)^{\ell+m}} \\ &= \frac{\sin^m\theta}{2^\ell \ell!} \sum_{k=0,1,\dots}^{\leq [\frac{\ell-m}{2}]} (-1)^k C_e^k \frac{d^{\ell+m}}{d(\cos\theta)^{\ell+m}} (\cos\theta)^{2(\ell-k)} = \\ &= \frac{\sin^m\theta}{2^\ell \ell!} \sum_{k=0,1,\dots}^{\leq [\frac{\ell-m}{2}]} (-1)^k C_e^k [2(\ell-k)][2(\ell-k)-1] \dots [2(\ell-k) - (\ell+m) + 1] \times \\ &\quad \times (\cos\theta)^{2(\ell-k) - (\ell+m)} = \\ &= \frac{\sin^m\theta}{2^\ell \ell!} \sum_{k=0,1,\dots}^{\leq [\frac{\ell-m}{2}]} (-1)^k C_e^k \frac{[2(\ell-k)]!}{[2(\ell-k) - (\ell+m)]!} (\cos\theta)^{\ell - 2k - m} \quad (2.2.8) \end{aligned}$$

Кроме того, для  $m \geq 0$

$$\cos m\varphi = \sum_{n=0,2,\dots}^{\leq m} (-1)^{\frac{n}{2}} C_m^n \cos^{m-n}\varphi \sin^n\varphi, \quad (2.2.9)$$

$$\sin m\varphi = \sum_{n=1,3,\dots}^{\leq m} (-1)^{\frac{n+3}{2}} C_m^n \cos^{m-n}\varphi \sin^n\varphi. \quad (2.2.10)$$

Подставляя выражения (2.2.8)-(2.2.10) в (2.2.4) и (2.2.5) соответственно и введя обозначения, получаем:

$$a_e^m = \frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{2^{\ell-1}\ell!(\ell+m)!} \sum_{n=0,2,\dots}^{\leq m} \sum_{k=0,1,\dots}^{\leq [\frac{\ell-m}{2}]} (-1)^{\frac{n+k}{2}} C_m^n C_e^k \frac{[2(\ell-k)]!}{[\ell-m-2k]!} \times (2.2.II)$$

$$\times \mathcal{T}_{(m-n, n, \ell-m-2k)}$$

$$b_e^m = \frac{2\ell+1}{2^{\ell-1}\ell!} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \sum_{n=1,3,\dots}^{\leq m} \sum_{k=0,1,\dots}^{\leq [\frac{\ell-m}{2}]} (-1)^{\frac{n+3+k}{2}} C_m^n C_e^k \frac{[2(\ell-k)]!}{[\ell-m-2k]!} \times (2.2.I2)$$

$$\times \mathcal{T}_{(m-n, n, \ell-m-2k)},$$

где

$$\mathcal{T}_{(a,b,c)} = \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{z1}^a l_{z2}^b l_{z3}^c dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) l_{z1}^a l_{z2}^b l_{z3}^c \sin\theta d\theta d\varphi$$

Здесь  $l_{zi}$  косинус между осью  $i$  и направлением оси  $z$  с сферическими координатами  $\theta, \varphi$ , т.е.

$$l_{z1} = \cos\varphi \sin\theta$$

$$l_{z2} = \sin\varphi \sin\theta$$

$$l_{z3} = \cos\theta. \quad (2.2.I4)$$

Буквой  $S$ , как всегда, обозначена поверхность сферы,  $dS$  — элемент поверхности сферы.

Введенный символ  $\mathcal{T}_{(a,b,c)}$  обозначает компоненту некоторой матрицы ранга  $a+b+c$  в трехмерном пространстве. Все члены матрицы можно записать в следующем виде:

$$\Pi_{\underbrace{ij\dots ke}_{a+b+c}} = \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) \underbrace{l_{zi} l_{zj} \dots l_{ze}}_{a+b+c} dS \quad (2.2.I5)$$

Тогда связь  $\mathcal{T}_{(a,b,c)}$  с компонентами  $\Pi_{ij\dots ke}$  следующая:

$$\mathcal{T}_{(a,b,c)} = \Pi_{\underbrace{1\dots 1}_a, \underbrace{2\dots 2}_b, \underbrace{3\dots 3}_c}$$

Легко видеть, что  $\Pi_{ij\dots ke}$  по выражению (2.2.I5) есть симметричный по всем своим индексам тензор в декартовой системе координат  $ox_i$ .

Действительно, если кроме осей  $i, j, k$  имеем другие повернутые оси  $\alpha, \beta, \gamma$ , то в этой новой системе координат имеем по определению:

$$\Pi_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{z\alpha} \dots l_{z\delta} dS \quad (2.2.I6)$$

Но как скалярное произведение единичных векторов по оси  $z$  и оси  $\alpha$ , имеем

$$l_{z\alpha} = l_{zi} l_{\alpha i}$$

Откуда (2.2.I6) переписывается

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{zi} l_{\alpha i} \dots l_{ze} l_{\delta e} dS = \\ &= l_{\alpha i} \dots l_{\delta e} \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{zi} \dots l_{ze} dS = l_{\alpha i} \dots l_{\delta e} \Pi_{i\dots ke} \end{aligned}$$

что и доказывает тензоральную природу матрицы  $\Pi_{i\dots ke}$ .

После однократной свертки этого тензора получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{iij\dots ke} &= \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{zi} l_{zi} l_{zj} \dots l_{ze} dS = \\ &= \frac{1}{S} \int_S f(\theta, \varphi) l_{zj} \dots l_{ze} dS = \Pi_{j\dots ke} \end{aligned}$$

Отсюда видно, что участвующие в формулах (2.2.II) и (2.2.I2) тензоры ранга  $(l-2)$ ,  $(l-4)$ , ... и т.д. суть последовательные свертки тензора ранга  $l$ . Поэтому, если мы оборвем ряд (2.2.3) на некотором  $l_0$ , то все коэффициенты разложения  $a_l^m$  и  $b_l^m$ ,  $0 \leq l \leq l_0$  будут однозначно выражаться по формулам (2.2.II) и (2.2.I2) через компоненты лишь двух тензоров ранга  $l_0$  и ранга  $(l_0-1)$ , что и требовалось доказать в выше сформулированной теореме.

Попутно отметим, что все статистические теории пластичности или прочности, которые рассматривают и усредняют пластические сдвиги или локальные разрушения по разным направлениям,

например [2.45, 2.18] по существу опираются на зависимости, аналогичные (2.2.15). В этих теориях функция локальных пластических сдвигов [2.45] или функция натяжения локальных связей [2.18] есть некоторая векторная или скалярная функция на сфере. Для получения первого приближения из этих функций усреднением образовывается тензор второго ранга деформаций или напряжений, который сравнивается с экспериментальными макроскопическими параметрами деформаций и напряжений. В теории [2.42] рассматривается функция не на сфере, а на полной группе вращения, поэтому там образование тензора происходит усреднением с тремя интегралами.

Возвращаясь к рассматриваемому нами случаю отметим, что в частном случае, если функция на сфере центрально симметрична на  $S$ , т.е.  $f(\theta, \varphi) = f(\pi - \theta, \pi + \varphi)$  можем писать, согласно (2.2.13) и (2.2.14):

$$\begin{aligned} \tau_{(m-n, n, \ell-2k-m)} &= \frac{1}{4\pi} \int_S f(\theta, \varphi) l_{1z}^{m-n} l_{2z}^n l_{3z}^{\ell-2k-m} dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S f(\pi-\theta, \pi+\varphi) (-l_{1z})^{m-n} (l_{2z})^n (l_{3z})^{\ell-2k-m} dS = \\ &= (-1)^{\ell-2k} \tau_{(m-n, n, \ell-2k-m)}. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что либо  $\ell-2k$  - четное число, либо компонента тензора равна нулю, т.е. в аппроксимации участвует только тензор четного ранга. Если же  $f(\theta, \varphi) = -f(\pi-\theta, \pi+\varphi)$  то совершенно аналогично можно показать, что в аппроксимации участвует только тензор нечетного ранга.

Попутно докажем, что количество компонент тензоров  $\tau_{(a, b, c)}$  ранга  $\ell_0$  и  $\ell_0-1$  совпадает с количеством коэффициентов  $a_m^\ell$  и  $b_m^\ell$  в начальном сегменте длиной  $\ell_0$  разложения по сфе-

рическим функциям и что между ними существует взаимно однозначное соответствие.

Очевидно, что подсчитанные по (2.2.4) и (2.2.5) коэффициенты  $a_e^m, b_e^m$  для функции  $f(\theta, \varphi)$  совпадают с вычисленными по формулам (2.2.II) и (2.2.I2). Поэтому достаточно показать, что (2.2.II) и (2.2.I2) всегда можно однозначно решить относительно  $a_{(m-n, n, l-2k-m)}$ . Простой расчет показывает, что число компонент абсолютно симметричного трехмерного тензора ранга  $l_0$  равно:

$$N_{e_0} = \frac{1}{2} (l_0 + 1)(l_0 + 2) \quad (2.2.I8)$$

Следовательно, число независимых величин в правых частях (2.2.II) и (2.2.I2) равно:

$$N = N_{e_0} + N_{e_0-1} = (l_0 + 1)^2 \quad (2.2.I9)$$

С другой стороны, при некотором фиксированном  $l=l_0$  число коэффициентов  $a_e^m$  и  $b_e^m$   $0 \leq l \leq l_0$ , равно:

$$l_0 + 1 + 2 \frac{l_0 + 1}{2} l_0 = (l_0 + 1)^2$$

Допустим далее, что определитель матрицы линейного преобразования (2.2.II) и (2.2.I2) равен нулю. В таком случае между коэффициентами  $a_e^m$  и  $b_e^m$  должна существовать линейная зави-

симность, не зависящая от конкретной  $f(\theta, \varphi)$ . Но это невозможно, поскольку между коэффициентами Фурье нет ни каких общих функциональных связей. Указанное противоречие и доказывает наше утверждение.

В частном случае, если задан один тензор, доказательство остается в силе, так как можно положить, что все компоненты второго тензора равны нулю.

Каждому симметричному тензору  $\Pi_{ij \dots l}$  ранга  $\ell$  можно найти функцию  $f(\theta, \varphi)$ , которая ему соответствует по формулам (2.2.I5). Для этого надо выражения коэффициентов  $a_\ell^m$  и  $b_\ell^m$  из (2.2.II) и (2.2.I2) подставить в (2.2.3). Но в результате получим весьма сложное выражение, в виде четырехкратной суммы. Поэтому сначала вычислим значение функции  $f(\theta, \varphi)$  в точке (0,0). Так как  $P_\ell(1) \equiv 1$  и  $P_\ell^m(1) \equiv 0$ , если  $m \neq 0$ , то

$$f(0,0) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell^0 = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ell}{2}\right]} (-1)^k \frac{2\ell+1}{2^\ell} C_\ell^k C_{2\ell-2k}^\ell \tau_{(0,0,\ell-2k)} \quad (2.2.20)$$

Через  $\tau_{(0,0,\ell-2k)}$ , как и раньше, обозначена тензорная компонента  $\Pi_{\underbrace{33 \dots 3}_{\ell-2k}}$ , в координатной системе  $ox_3$ , следовательно, в координатной системе у которой ось  $x_3$  проходит через рассматриваемую точку (0,0) на сфере.

Теперь, если хотим вычислить значение функций в другой точке  $(\theta, \varphi)$ , выбираем оси  $ox_3'$  так, чтобы ось  $ox_3'$  проходила через эту точку, следовательно, эта точка имеет координаты  $\theta' = 0$ ,  $\varphi' = 0$ . Согласно (2.2.20) тогда имеем:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\left[\frac{\ell}{2}\right]} (-1)^k \frac{2\ell+1}{2^\ell} C_\ell^k C_{2\ell-2k}^\ell \tau'_{(0,0,\ell-2k)} \quad (2.2.21)$$

Напомним, что через  $\tau'_{(0,0,k)}(\theta, \varphi)$  обозначена обычная тензорная компонента  $\pi'_{\underbrace{33\dots 3}_k}(\theta, \varphi)$  в локальной координатной системе  $Ox_j'$  где  $\theta, \varphi$  - сферические координаты единичного вектора  $l_3'$  в системе  $Ox_i$ :

$$\tau'_{(0,0,k)}(\theta, \varphi) \equiv \pi'_{\underbrace{33\dots 3}_k}(\theta, \varphi) = \underbrace{\pi_{ij\dots ke}}_k l_{i3} \dots l_{e3} \quad (2.2.22)$$

Ряд (2.2.21) можно записать еще в виде последовательности его частных сумм:

$$f(\theta, \varphi) = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^l \beta_{ek} \tau'_{(0,0,k)}(\theta, \varphi), \quad (2.2.23)$$

где

$$\beta_{ek} = \sum_{j=k, k+2}^{\leq l} i^{j-k} \frac{2j+1}{2^j} C_j^{\frac{j-k}{2}} C_{j+k}^j \quad (2.2.24)$$

Отметим еще, что нами было принято допущение о том, что разрушенность по каждому локальному направлению можно характеризовать одним числом. Следствием этого допущения была полная симметричность построенных тензоров  $\pi_{ij\dots s}$  по всем индексам. Полной симметричности можно избежать, если предположить, что для характеристики по данному направлению нужно несколько функций от напряжений в локальной системе координат. Если повреждения характеризуются не скалярной функцией на сфере, а векторным полем на сфере или функцией на полной группе вращений, то аппроксимирующие тензоры не будут полностью симметричными. Этот вопрос рассмотрен в статьях А.М. Лаздинны /2.64, 2.65/.

Некоторые примеры

I. В случае, если  $f(\theta, \varphi) = const$ , все аппроксимирующие тензоры выражаются посредством всевозможных свертков  $\delta_{ij}$ . Рассмотрим тензор второго порядка

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{S} \int_S f \delta l_{iz} l_{jz} ds = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} l_{iz} l_{jz} \sin\theta d\theta d\varphi$$

Учитывая, что  $l_{1z} = \sin\theta \cos\varphi$ ,  $l_{2z} = \sin\theta \sin\varphi$ ,  $l_{3z} = \cos\theta$ , получаем

$$\Pi_{11} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{1}{3}$$

Рассматривая все  $\Pi_{ij}$  получаем:

$$\Pi_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \tag{2.2.25}$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{1}{4\pi} \int_S l_{iz} l_{jz} l_{mz} l_{nz} ds = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) = \frac{1}{15} D_{ijmn} \tag{2.2.26}$$

Непосредственным вычислением легко можно найти, что компоненты тензоров произвольного ранга вида (2.2.26) вычисляются следующим образом:

$$T_{(k,m,n)} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_S l_{1z}^k l_{2z}^m l_{3z}^n ds = \frac{(k-1)!! (m-1)!! (n-1)!!}{(k+m+n+1)!!}$$

Это выражение равно нулю, если хотя бы один из индексов  $k, m, n$  - нечетное число.

2. Пусть  $f(\theta, \varphi)$  определяется дельта функцией  $\frac{1}{S} \int f(\theta, \varphi) ds = c$ ;  $f(\theta, \varphi) \neq 0$   $\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0; \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi$ , т.е. разрушение происходит только по плоскостям, нормали которых совпадают с направлением оси  $ox_1$ .

Тогда все тензоры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{ii} &= \frac{c}{4\pi} & \Pi_{ij} &= 0, \text{ если } i, j \neq 1 \\ \Pi_{iii} &= \frac{c}{4\pi} & \Pi_{ijke} &= 0 \quad \text{"} \quad i, j, k, e \neq 1 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

3. Пусть мы имеем тензор

$$\Pi_{33} = 1; \quad \Pi_{ij} = 0, \text{ если } i, j \neq 3 \quad (2.2.28)$$

Определим функцию  $f(\theta, \varphi)$  по уравнению (2.2.2I). Сумма (2.2.2I) будет состоять из трех слагаемых  $l=0, k=0$ ;

$$l=2, k=0; \quad l=2, k=1 \quad \text{Учтем, что } \tau'_{(0,0,0)} = 1$$

$\tau'_{(0,0,2)} = \cos^2 \theta$  и получим:

$$\begin{aligned} f(\theta, \varphi) &= 1 + \frac{5}{4} C_2^0 C_4^2 \tau'_{(0,0,2)} - \frac{5}{4} C_2^1 C_2^2 \cdot 1 = \\ &= 1 + \frac{15}{2} \cos^2 \theta - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} (-1 + 5 \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Непосредственной подстановкой выражения (2.2.29) в основную формулу (2.2.15) можно проверить, что для найденной функции

$$\Pi_{33} = 1, \quad \Pi_{ij} = 0, \quad i, j \neq 3$$

Связь тензоров с функциями на сфере неоднозначно. Каждому симметричному тензору конечного ранга можно будет указать бесконечно много функций, ему соответствующих. В частности, тензор (2.2.28) согласно второму примеру (2.2.27) является аппроксимирующим тензором не только для (2.2.29), а также для дельта функции в точке  $\theta=0$ . Применяя формулу (2.2.2I), мы находим функцию  $f(\theta, \varphi)$ , которая выражается через начальный сегмент соответствующей длины разложения по сферическим функциям.

### 2.2.3. Зависимость функции на сфере от тензора напряжений

В предыдущем разделе была рассмотрена чисто геометрическое соответствие между функциями на сфере и аппроксимирующими тензорами.

Поскольку мы принимаем, что изменения функции повреждения вызываются тензором напряжений  $\sigma_{ij}$ , то мы должны установить вид операторов действующих из множества тензоров в множество центрально симметричных функций  $\Pi(\theta, \varphi)$ .

1. Тензор  $\sigma_{ij}$  полностью характеризуется своими компонентами в произвольной системе координат. Поэтому можем считать, что значение функции  $\Pi$  в точке  $(\theta, \varphi)$  есть функционал компонент напряжений  $\sigma'_{ij}$ , вычисленных в локальной системе координат  $x, y, z$  (единичный вектор  $e_z$  имеет сферические координаты  $\theta, \varphi$  в координатной системе  $Ox_1$ )

$$\Pi = \Pi \{ \sigma'_{ij}(z), A \} \quad (2.2.30)$$

Через  $A$  обозначены параметры, характеризующие среду, в частности, симметрию среды для анизотропных тел.

2. Повреждение  $\Pi(\theta, \varphi)$  в изотропной среде не должны зависеть от положения координат  $x, y$ , поэтому для изотропной среды  $\Pi$  зависит только от комбинаций  $\sigma'_{ij}$ , инвариантных относительно поворота вокруг оси  $z$ . Таких выражений 5 (они находятся, как инварианты моноотропного тела /2.66/ с осью симметрии  $z$ ).

$$\sigma_{zz}, \tau_z^2 = \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2, \sigma_{ii}, \sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}, \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kk} \cdot \sigma_{jk} \quad (2.2.31)$$

Выражения (2.2.31) назовем сферическими инвариантами тензора  $\sigma_{ij}$  в изотропной среде. В § 2,6 будет дано определение сферических инвариантов в анизотропной среде и приведены их полиномиально независимые базисы, аналогично (2.2.31).

Аргументы (2.2.31) имеют четкий физический смысл: повреждения по направлению  $z$ , есть функционал нормального напряжения, действующего в этом направлении, касательного напряжения, на плоскости с нормалью  $z$  и трех инвариантов тензора напряжений.

#### 2.2.4. Условия местного разрушения

За условие разрушения точки должно быть принято достижение инвариантными характеристиками повреждаемости  $\Pi(\theta, \varphi)$  определенных величин. Наиболее просто можно предположить, что разрушение наступит тогда и только тогда, когда

$$\max \Pi_z(\theta, \varphi) = 1 \quad (2.2.32)$$

Согласно определению  $\Pi_z \leq 1$ , и при  $\Pi_z = 1$  все связи в одном сечении материала исчерпаны и разрушение действительно наступает. Но условие (2.2.32) не учитывает локальных повреждений, возникающих на других, близких к  $z$  сечениях. Поэтому критерий (2.2.32) иногда может оказаться неточным.

Можно предположить, что разрушение наступает, когда усредненная по всему объему величина повреждений достигает критической величины:

$$\int_S \Pi_z ds = \text{const} \quad (2.2.33)$$

Это условие при подходящем выборе функций  $\Pi_z(\sigma_{k'z'})$  дает гладкие поверхности прочности в пространстве напряжений, включающие традиционные поверхности прочности, например, поверхность Мизеса в частном случае. Критерий (2.2.33) коррелирует с критерием разрушения /2.59/ при повторном пластическом нагружении металлов - где разрушение связано с предельным остаточным изменением объема - разрыхлением. Условие (2.2.33) однако не учитывает форму поверхности  $\Pi_z$ . Поэтому критерий (2.2.33) не показывает в случае линейного суммирования повреждений разницу между долговечностью при простом и при сложном нагружении (например, время до разрушения при растяжении в одном направлении или время до разрушения при растяжении поочередно по двум разным направлениям одинаково).

Можно конструировать более сложные критерии разрушения, но нецелесообразно слишком усложнить расчетную модель, если это не вызвано явным расхождением с экспериментом, который, как известно, в случае прочности и долговечности имеет существенный разброс результатов. В статье /2.62/ был предложен критерий

$$\max M_{z'} = \text{const}$$

где  $M_{z'}$  определяется из формулы

$$M_{z'} = \int_s \Pi_z(\theta, \varphi) \lambda_{zz'} ds \quad (2.2.34)$$

где  $\theta, \varphi$  - переменные интегрирования, а  $\lambda_{zz'}$  - непрерывная функция угла  $(z \hat{z}')$ , равная единице при  $(z \hat{z}') = 0$  и нулю при  $(z \hat{z}') = \frac{\pi}{2}$ ; например,  $\lambda_{zz'} = \cos^2(z \hat{z}')$ , а пределы интегрирования распространяются на половину сферы вокруг

оси  $z'$ .

Из-за сложности вычислений критерий (2.2.34) в расчетах дальше не был применен.

Подставляя в критерии разрушения (2.2.32), (2.2.33) связь  $\Pi_2$  с напряжениями (2.2.31) и выражая  $\sigma_{k'e'}$  ( $k'e' = x, y, z$ ) через  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) можем в случае простого нагружения получить соответствующие поверхности прочности во времени; а в случае сложного нагружения - время до разрушения в каждом конкретном случае.

## 2.3. Прочность при сложном напряженном состоянии

### ✓ 2.3.1. Использование критерия разрушения $\max \Pi_z = const$

Простой и естественный вариант расчета прочности получается при использовании условия разрушения по максимальным повреждениям (2.2.32).

Если при этом в качестве аргумента (2.2.31) функции  $\Pi_z$  оставить только нормальное напряжение, то предельные кривые прочности в случае сложного напряженного состояния, совпадают с границей разрушения по максимальным нормальным напряжениям (рис. 2.8), что указывает на приближенность такого подхода. Очевидно, для уточнения расчета с использованием критерия (2.2.32) надо учесть также другие аргументы (2.2.31), в частности инварианты  $\sigma_y$ . В случае интегрального критерия (2.2.33) учет  $\sigma_c$  или 2 инварианта менее необходимо, поскольку  $\frac{1}{5} \int \sigma_z ds = \frac{\sigma_{cx}}{3}$ , а второй инвариант девиатора получается усреднением  $\tau_z^2$  по всем направлениям.

В качестве достаточно простого и в то же время гибкого приближения для описания экспериментальных данных выберем следующий аргумент для скорости повреждений  $\dot{\Pi}_z$ .

$$\dot{\Pi}_z = \dot{\Pi} (A \sigma_z^2 + 4B \tau_z^2 + C S_z)^n \quad (2.3.1)$$

где  $S_z$  второй инвариант девиатора напряжений. При простом нагружении поверхность равнодлительной прочности получается приравниванием максимального значения аргумента (2.3.1) постоянной величине:

$$\max (A \sigma_z^2 + 4B \tau_z^2 + C S_z) = 1 \quad (2.3.2)$$

Выбор аргумента  $\Pi_z$  в виде квадратичной формы от сферических инвариантов обусловлен простотой определения неизвестных коэффициентов А, В, С. Однако выражения (2.3.1) и (2.3.2) нуждаются в некотором уточнении, поскольку нормальные напряжения  $\sigma_z > 0$  вызывают разрушения только, если . Поэтому в дальнейшем будем считать, что:

$$A = 0, \text{ если } \sigma_z < 0 \quad (2.3.3)$$

Такое дополнительное условие, конечно, можно избежать введением в (2.3.2) членов, линейных относительно  $\sigma_z$ , например, используя выражение

$$\max (A\sigma_z + B\tau_z^2 + C S_z) = 1 \quad (2.3.4)$$

Практически разница между поверхностями прочности, определенными по (2.3.4) и (2.3.2) небольшая, а (2.3.2) с учетом (2.3.3) дает более простые выражения для определения коэффициентов А, В, С.

Формула (2.3.2) отличается от множества других известных уравнений поверхностей прочности тем, что при определении коэффициентов, следует учесть направление, по которому происходит разрушение. Рассмотрим примеры построения поверхностей прочности в случае плоского напряженного состояния.

а) Идеально хрупкий материал.

Разрушение при растяжении происходит перпендикулярно максимальному растягивающему напряжению, при кручении — также, при сжатии — по плоскостям, параллельным приложенной силе. На рис. 2.9а схематически показаны направления разрушения в трех исходных опытах. Такое разрушение наблюдается у весьма

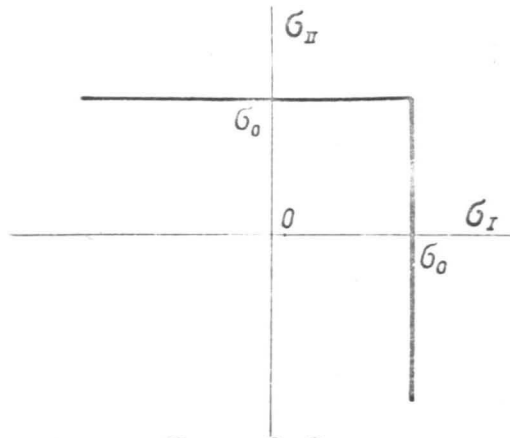


Рис. 2.8.

Предельная кривая разрушения по максимальным нормальным напряжениям.

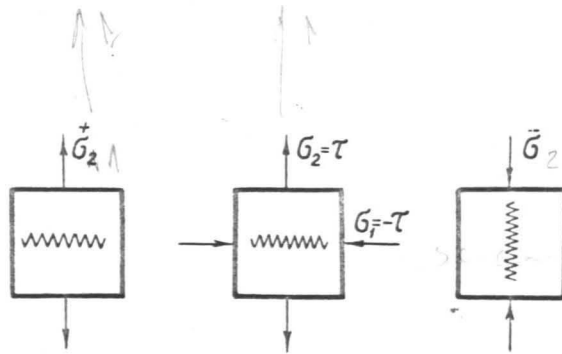


Рис. 2.9а.

Направления разрушения хрупкого материала.

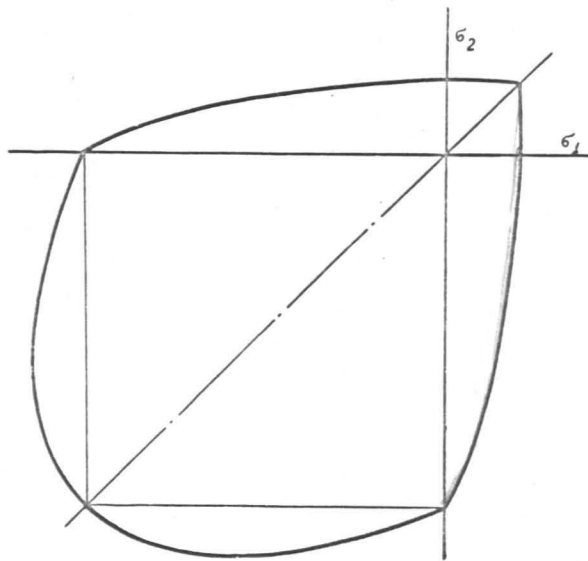


Рис. 2.9б.

Поверхность прочности хрупкого материала.

хрупких материалов с внутренними концентраторами напряжений, например, бетон, хрупкие терморезистивные смолы и т.д.

Распишем (2.3.2) для случая плоского напряженного состояния в развернутом виде:

$$\max \left[ A(\sigma_1 l_{1z}^2 + \sigma_2 l_{2z}^2)^2 + 4B[\sigma_1^2 l_{1z}^2 / (1 - l_{1z}^2) + \sigma_2^2 l_{2z}^2 (1 - l_{2z}^2) - 2\sigma_1 \sigma_2 l_{1z}^2 l_{2z}^2] + C(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) \right] = 1 \quad (2.3.5)$$

Рассматриваем растяжение напряжением  $\sigma_1 = \sigma^+$ . Направление максимального повреждения определяется направляющими косинусами  $l_{1z}^2 = 1, l_{2z} = l_{3z} = 0$ .

Получаем из (2.3.5):

$$A + C = \frac{1}{\sigma^+{}^2} \quad (2.3.6)$$

Кручение:  $\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau, l_{1z}^2 = 1$

Получаем:

$$A + 3C = \frac{1}{\tau^2} \quad (2.3.7)$$

Сжатие:  $\sigma_2 = \bar{\sigma}$ , разрушение по направлению  $l_{1z}^2 = 1$ .

Следует учесть, что во всех направлениях, кроме  $l_{1z}^2 = 1, \sigma_2 < 0$  поэтому повреждения от  $\sigma_2$  равны нулю. Если  $B > 0$ , то максимальное значение  $\Pi$  будет при  $l_{1z}^2 = l_{2z}^2 = \frac{1}{2}$ , поэтому в принятом случае должно быть  $B = 0$ , и получаем  $C = \frac{1}{\bar{\sigma}^2}$

Окончательно имеем

$$A = \frac{1}{\sigma^+{}^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}^2}; C = \frac{1}{\bar{\sigma}^2}; B = 0 \quad (2.3.8)$$

Прочность при сдвиге  $\tau$  при этом однозначно определяется прочностью при растяжении  $\sigma^+$  и сжатии  $\bar{\sigma}$ :

$$\tau^2 = \frac{\sigma^+{}^2 \bar{\sigma}^2}{\bar{\sigma}^2 + 2\sigma^+{}^2}$$

Поверхность прочности состоит из нескольких эллиптических дуг (рис. 2.9б):

$$\begin{aligned} A \sigma_1^2 + c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) &= 1 && \text{при } \begin{matrix} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_1 > \sigma_2 \end{matrix} \\ A \sigma_2^2 + c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) &= 1 && \text{при } \begin{matrix} \sigma_2 > 0 \\ \sigma_2 > \sigma_1 \end{matrix} \\ c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) &= 1 && \text{при } \begin{matrix} \sigma_1 < 0 \text{ и } \sigma_2 < 0 \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

где  $A$  и  $C$  определяются формулой (2.3.8)

Полученная поверхность аналогична с поверхностью так называемой обобщенной теории прочности (см. например /2.76/).

Если исходное уравнение взять в форме

$$A_1 \sigma_1^2 + B_1 \tau_2^2 + C_1 s_2 = 1$$

то получим коэффициенты

$$A_1 = \frac{\sigma_1^2 - \tau_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_1^2}; \quad B_1 = 0; \quad C_1 = -\frac{1}{\sigma_1^2}$$

Соответствующая кривая на рис. 2.9б отмечена пунктиром.

б) Материал, который при растяжении и сдвиге разрушается от максимальных нормальных напряжений (от отрыва), а при сжатии - от сдвига. На рис. 2.10 показаны направления разрушения. Коэффициенты уравнения (2.3.5) определяются аналогично прежнему в следующем виде:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\sigma^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) \\ B &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\sigma^2} \right) \\ C &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Такой вид разрушения может выполняться при условии  $A > 0$ ,

$$B > 0, \quad c > 0, \quad A > 2B \quad \text{т.е.} \quad \sigma > \tau > \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\sigma^2} - \frac{1}{\tau^2} \right) >$$

$$> \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\sigma^2}, \quad A > 8B$$

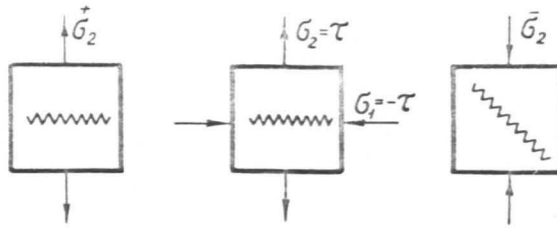


Рис.

Направления разрушения от нормальных и касательных напряжений.

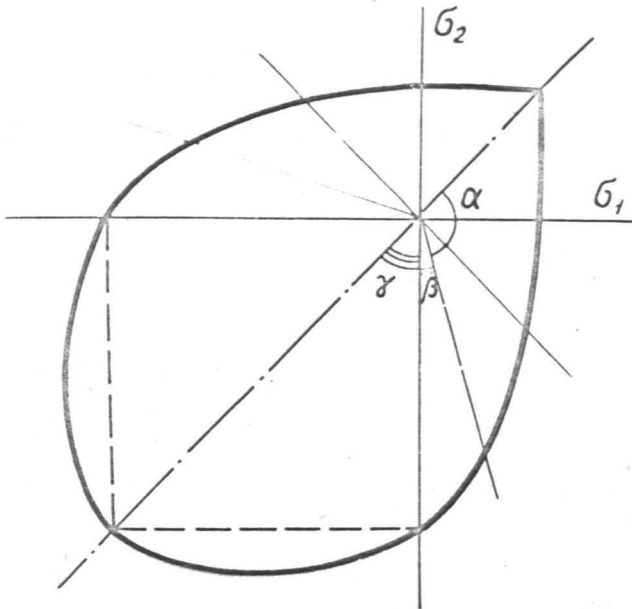


Рис. 2.10б

Соответствующая поверхность прочности.

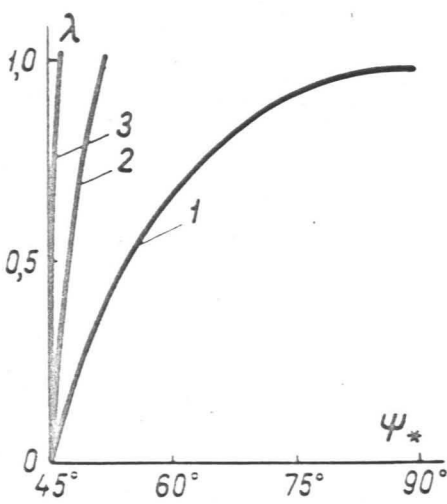


Рис. 2.11.

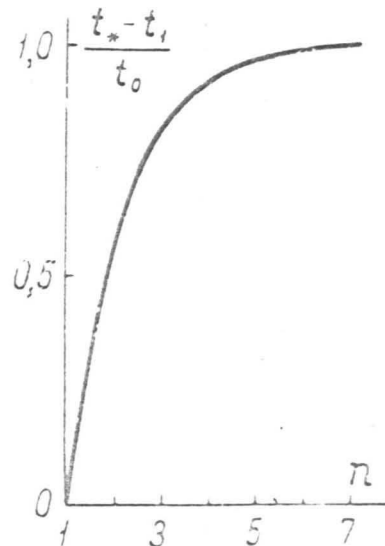


Рис. 2.12.

откуда следует также

$$\tau^2 < \frac{7\sigma^+ \sigma^-}{5\sigma^+ + 16\sigma^-}$$

$$\sigma^-^2 > \sigma^+^2 \quad \text{и} \quad \tau^2 > \frac{\sigma^+ \sigma^-}{2\sigma^+ + \sigma^-}; \quad \tau^2 \neq < \frac{\sigma^- \sigma^+}{4\sigma^+ - \sigma^-}$$

Для построения поверхности прочности надо установить места максимумов (2.3.5) при найденных значениях коэффициентов. Заметим, что в плоскости приложения напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  имеем:

$$\dot{\Pi}_z = A(\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi)^2 + B(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^2 2\varphi$$

где  $\varphi$  - угол между  $z$  и направлением  $\sigma_1$ . Исследуя это выражение на максимум после элементарных вычислений и с учетом, что  $A=0$  при  $\sigma_2 < 0$ , получаем, что для случая  $\sigma_1 > 0$  максимум может быть только при  $\varphi=0$  и  $\varphi=45^\circ$ , т.е. при  $l_{1z}^2=1$  или  $l_{1z}^2=l_{2z}^2=\frac{1}{2}$ .

В зоне  $\alpha$  (см. рис. 2.10б) разрушение происходит по плоскости с направляющим косинусом нормали  $l_{1z}^2=1$ . Перескок плоскости разрушения из одного положения в другое происходит, когда

$$\dot{\Pi}|_{l_{1z}^2=1} = A\sigma_1^2 + cS_2 = \dot{\Pi}(l_{1z}^2=\frac{1}{2}) = B(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2) + cS_2$$

Это равенство выполняется при

$$\left(1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^2 = \frac{\frac{3}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\sigma_1^2}} \quad (2.3.II)$$

Окончательно уравнения поверхностей разрушения следующие:

(см. рис. 2.10б):

$$A\sigma_1^2 + c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = 1 \quad \text{в зоне } \alpha$$

$$B(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = 1 \quad \text{в зоне } \beta \quad (2.3.I2)$$

$$B\sigma_2^2 + c(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) = 1 \quad \text{в зоне } \gamma$$

Кривая обладает симметрией относительно главной диагонали.

Коэффициенты  $A, B, C$  определяются по (2.3.I0). Граница зоны  $\alpha$  и  $\beta$  определяется уравнением (2.3.II).

Аналогично можно исследовать случаи пластического разрушения. Если пределы прочности  $\sigma$  растяжения и сжатия одинаковы, то нормальные напряжения не влияют на разрушение ( $A=0$ ) и мы приходим к пластическому разрушению - симметричной поверхности текучести, в частности - Мизеса или Треска.

### 2.3.2. Расчет разрушения при сложном нагружении

#### Пример Л.М. Качанова

Критерий разрушения  $\max \Pi_z = \text{const}$  предсказывает эффект сложного нагружения на процесс разрушения. Как было отмечено выше, условие  $\max \Pi_z = \text{const}$  и  $\dot{\Pi}_z = \dot{\Pi}_z(\sigma_z)$  дает только приближенное выражение поверхности прочности (рис. 2.8).

Но использование этого критерия с зависимостью  $\dot{\Pi}_z(\Pi_z, \sigma_z)$  имеет то преимущество, что оно приводит к простым расчетным зависимостям в аналитическом виде даже для сложного нагружения. Приведем пример расчета из статьи Л.М. Качанова /2.68/. Обозначения, употребленные в статье, будут несколько изменены, согласно принятыми выше.

Кинетическое уравнение поврежденности имеет вид:

$$\dot{\Pi}_z = A \left( \frac{\sigma_z}{1 - \Pi_z} \right)^n \quad \text{при } \sigma_z > 0 \quad (2.3.I3)$$

$$\dot{\Pi}_z = 0 \quad \text{при } \sigma_z \leq 0$$

Условие разрушения (2.2.32). Рассматривается разрушение круглой тонкостенной трубки при ее скручивании после предварительного растяжения в интервале времени  $0 \leq t < t_1$ . При растяжении нормальное напряжение на некоторой площадке, нормаль к которой образует угол  $\psi$  ( $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ ) с окружным направлением, равно

$$\sigma_{z_1} = \sigma \sin^2 \psi \quad (2.3.14)$$

где  $\sigma$  - растягивающее напряжение. Согласно кинетическому уравнению (2.3.13) к моменту  $t = t_1$ , уровень поврежденности на площадке характеризуется соотношением

$$(1 - \Pi_{z_1})^{n+1} = 1 - A(n+1) \sigma_{z_1}^n t_1 \quad (2.3.15)$$

При  $t \geq t_1$  действует только крутящий момент и тогда на той же площадке

$$\sigma_{z_2} = \tau \sin 2\psi \quad (2.3.16)$$

где  $\tau$  - напряжение кручения. Интегрируя уравнение (2.3.13) и определяя произвольную постоянную по условию  $\Pi_{z_2} = \Pi_{z_1} |_{t=t_1}$ , находим

$$(1 - \Pi_{z_2})^{n+1} = 1 - A(n+1) \left[ \sigma_{z_1}^n t_1 + \sigma_{z_2}^n (t - t_1) \right] \quad (2.3.17)$$

Пусть в момент  $t = t^*$  произойдет разрушение (т.е.  $\Pi_{z_2} = 1$ ), тогда из (2.3.17) получаем

$$t^* - t_1 = t_0' \left( 1 - \frac{t_1}{t_1'} \sin^{2n} \psi \right) \sin^{-n} 2\psi \quad (2.3.18)$$

Здесь через  $t_1' = [A(n+1)\sigma^n]^{-1}$  обозначено время разрушения при растяжении, через  $t_0' = [A(n+1)\tau^n]^{-1}$  - время разрушения при кручении. Очевидно, что  $\lambda \equiv \frac{t_1}{t_1'} \leq 1$ .

Необходимо найти такое значение  $\varphi = \varphi^*$ , для которого время  $t^*$  минимально, Приравнявая нулю производную по  $\varphi$ , находим:

$$1 - 2 \sin^2 \varphi^* + \lambda \sin^{2n} \varphi^* = 0$$

Легко видеть, что при  $\lambda > 0$ ,  $\varphi^* > \frac{\pi}{4}$ . При  $\lambda \ll 1$  разрушение происходит на площадках, близких к площадке  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , с ростом  $\lambda$  угол  $\varphi^*$  также растет.

На рис. 2.II показаны соответствующие кривые /2.6 8/. Необходимо отметить сильное влияние нелинейности. При большом показателе  $n$  опасные площади мало отклоняются от площадки  $\varphi = 45^\circ$ , т.е. даже при  $\lambda \approx 1$  (что следует понимать в смысле "почти" исчерпанной прочности на растяжение) на этих площадках накопление повреждений относительно невелико. Отношение

$(t^* - t_1) / t_0'$  при  $\lambda = 1$  равно

$$\frac{t^* - t_1}{t_0'} = \frac{1 - \sin^{2n} \varphi^*}{\sin^{n-2} 2\varphi^*}$$

Эта зависимость нанесена на рис. 2.I2. С увеличением показателя  $n$  рассматриваемое отношение быстро стремится к единице, т.е. с ростом  $n$  влияние разрушений при растяжении быстро ослабевает. Лишь при  $n = 1$  трубка "не держит" скручивания.

### ✓ 2.3.3. Пример расчета длительной прочности при сложном напряженном состоянии с использованием критерия разрушения $\int \Pi_z ds = const$

В § 2.3.I были рассчитаны кривые кратковременной прочности (или равнодлительной прочности при условии, что кривая равнодлительной прочности меняет с долговечностью только

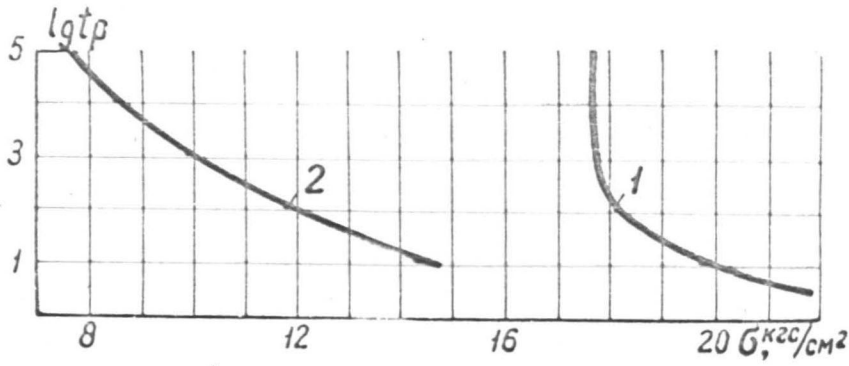


Рис. 2.13.

Кривые выносливости капролона при постоянной температуре  $-80^\circ\text{C}$ . 1 - режим пульсирующего сжатия; 2 - режим пульсирующего растяжения (по данным И.Н.Ивановой /2.69/).

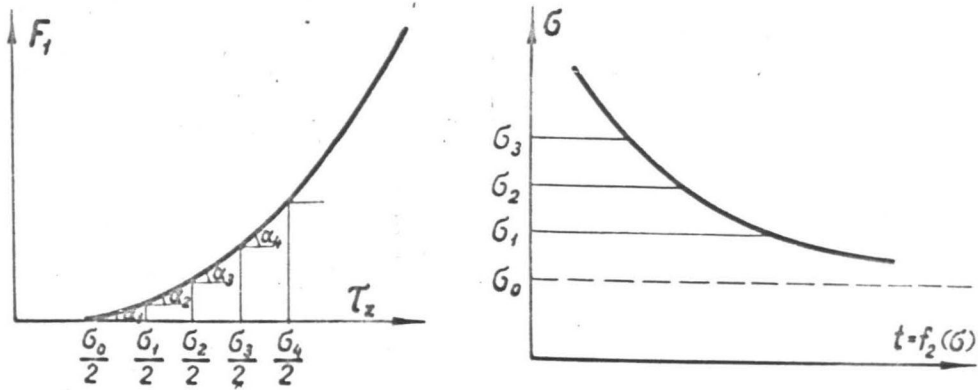


Рис. 2.14.

К численному решению уравнения (2.3.24).

размеры, но не форму).

Это предположение не всегда соответствует действительности. На рис. 2.13 показаны кривые Велера, полученные Н.И. Ивановой /2.69/ в режиме пульсирующего растяжения и пульсирующего сжатия для капролона при температуре  $-80^{\circ}\text{C}$ . Поскольку эти кривые не подобны, ясно, что кривая равнодлительной усталостной прочности меняет во времени форму.

В данном параграфе поставлена задача: используя за основу экспериментальные кривые длительной прочности, найти зависимость скорости локальной поврежденности от тензора напряжений и построить соответствующие кривые равнодлительной прочности. в случае сложного напряженного состояния. Данный пример рассчитан, используя критерий разрушения (2.2.33)

Предположим /2.70/: а) что повреждения, ориентированные в направлении  $Z$ , вызываются напряжениями  $\sigma_z$  и  $\tau_z$  (т.е. из аргументов (2.2.31) сохраняем первые два); б) что повреждения вызванные  $\sigma_z$  и  $\tau_z$ , суммируются; в) справедлив линейный закон накопления повреждений. Тогда при  $\sigma_{ij} = \text{const}$  имеем локальное повреждение

$$\Pi_z = [F_1(\tau_z) + F_2(\sigma_z)] t \quad (2.3.19)$$

где функции  $F_1$  и  $F_2$  подлежат определению.

(В статье /2.70/ нами был использован более широкий закон накопления повреждений  $\Pi_z = [F_1(\tau_z) + F_2(\sigma_z)] \xi(t)$ , что принципиально не меняет рассуждения).

Учитывая (2.2.33), получаем из (2.3.19):

$$\frac{1}{t_p(\sigma_{ij})} = \int_s [F_1(\tau_z) + F_2(\sigma_z)] ds \quad (2.3.20)$$

Для определения  $F_1$  и  $F_2$  используем кривые длительной прочности на одноосное сжатие и растяжение

$$\begin{aligned} t_c &= f_1(\sigma) \\ t_p &= f_2(\sigma) \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

соответственно. Дополнительно предположим, что  $F_2(x) = 0$ , если  $x \leq 0$ , т.е. повреждение на локальной площадке от сжимающих напряжений не развивается. Поэтому при одноосном сжатии в направлении оси  $OX_3$ ,  $F_2 = 0$ , и повреждения вызываются только касательными напряжениями

$$\tau_z = \sigma \sin \theta \cos \theta \quad (2.3.22)$$

(Здесь  $\theta$  - угол  $z\hat{x}$ ).

Подставив (2.3.21) и (2.3.22) в (2.3.20) и заменив  $dS = \sin \theta d\theta d\varphi$  получим:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_1\left(\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta\right) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{f_1(\sigma)} \quad (2.3.23)$$

Рядом преобразований и заменой  $\tau_z = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$  это интегральное уравнение можно привести к интегральному уравнению Вольтерра первого рода:

$$\frac{4\pi}{\sqrt{2}\sigma} \int_0^{\frac{\sigma}{2}} F_1(\tau_z) \frac{\sqrt{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\tau_z^2}} + \sqrt{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4\tau_z^2}}}{\sqrt{\sigma^2 - 4\tau_z^2}} d\tau_z = \frac{1}{f_1(\sigma)} \quad (2.3.24)$$

Решить точно уравнение (2.3.24) при произвольной функции

$f_1(\sigma)$  не удастся. Ниже дан метод численного решения уравнения (2.3.24) /2.72/.

Предполагаем функцию  $F_1(\tau_z)$  ломанной и требуем, чтобы в точках излома, соответствующих дискретным значениям  $\sigma_i$ , выполнялось равенство (2.3.24), (рис. 2.14).

Для  $\tau_z \leq \frac{\sigma_0}{2}$  функция  $F_i$  тождественно равна нулю. Это соответствует наличию предела длительной прочности при сжатии, равному  $\sigma_0$ . В частном случае  $\sigma_0$  может быть равен нулю.

На графике  $F_i(\tau_z)$  для звена с номером  $i$  обозначим  $f_i \alpha_i = K_i$ . Для краткости обозначим  $\frac{1}{f_i(\sigma_i)} = b_i$ , тогда для  $i = 1, 2, \dots$ , получим

$$\int_{\frac{\sigma_0}{2}}^{\frac{\sigma_i}{2}} F_i(\tau_z) \frac{\sqrt{\sigma_i - \sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}} + \sqrt{\sigma_i + \sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}}}{\sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}} d\tau_z = \frac{\sqrt{2\sigma_i} b_i}{4\pi} \quad (2.3.25)$$

Введем обозначение

$$\frac{\sqrt{\sigma_i - \sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}} + \sqrt{\sigma_i + \sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}}}{\sqrt{\sigma_i^2 - 4\tau_z^2}} = [\sigma_i, \tau_z]$$

Тогда для  $i = 1$ .

$$\int_{\frac{\sigma_0}{2}}^{\frac{\sigma_1}{2}} K_1(\tau_z - \frac{\sigma_0}{2}) [\sigma_1, \tau_z] d\tau_z = \frac{\sqrt{2\sigma_1} b_1}{4\pi}$$

для  $i = 2$

$$\int_{\frac{\sigma_0}{2}}^{\frac{\sigma_1}{2}} K_1(\tau_z - \frac{\sigma_0}{2}) [\sigma_2, \tau_z] d\tau_z + \int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\frac{\sigma_2}{2}} \left[ K_2(\tau_z - \frac{\sigma_1}{2}) + K_1\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}\right) \right] [\sigma_2, \tau_z] d\tau_z = \frac{\sqrt{2\sigma_2} b_2}{4\pi}$$

для  $i = n$

$$\int_{\frac{\sigma_0}{2}}^{\frac{\sigma_1}{2}} K_1(\tau_z - \frac{\sigma_0}{2}) [\sigma_n, \tau_z] d\tau_z + \int_{\frac{\sigma_1}{2}}^{\frac{\sigma_2}{2}} \left[ K_2(\tau_z - \frac{\sigma_1}{2}) + K_1\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}\right) \right] [\sigma_n, \tau_z] d\tau_z + \dots + \int_{\frac{\sigma_{n-1}}{2}}^{\frac{\sigma_n}{2}} \left[ K_n(\tau_z - \frac{\sigma_{n-1}}{2}) + K_{n-1}\left(\frac{\sigma_{n-1} - \sigma_{n-2}}{2}\right) + \dots + K_1\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{2}\right) \right] [\sigma_n, \tau_z] d\tau_z = \frac{\sqrt{2\sigma_n} b_n}{4\pi}$$

Принимая во внимание, что

$$\int_{\frac{\sigma_{k-1}}{2}}^{\frac{\sigma_k}{2}} \tau_z [\sigma_n, \tau_z] d\tau_z = \frac{1}{6} \left[ (\sigma_n + \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{k-1}^2})^{3/2} - (\sigma_n - \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{k-1}^2})^{3/2} - (\sigma_n + \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_k^2})^{3/2} + (\sigma_n - \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_k^2})^{3/2} \right];$$

$$\int_{\frac{\sigma_{k-1}}{2}}^{\frac{\sigma_k}{2}} [\sigma_n, \tau_z] d\tau_z = \sqrt{\sigma_n + \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{k-1}^2}} - \sqrt{\sigma_n - \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{k-1}^2}} -$$

$$-\sqrt{\sigma_n + \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_k^2}} + \sqrt{\sigma_n - \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_k^2}}$$

и сгруппировав члены относительно  $K_i$ , получим

$$\begin{aligned} a_{11} K_1 &= -\frac{\sqrt{2\sigma_1} b_1}{4\pi} \\ a_{21} K_1 + a_{22} K_2 &= \frac{\sqrt{2\sigma_2} b_2}{4\pi} \\ \dots &\dots \\ a_{n1} K_1 + a_{n2} K_2 + \dots + a_{nn} K_n &= \frac{\sqrt{2\sigma_n} b_n}{4\pi}, \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

где

$$\begin{aligned} a_{km} &= \frac{1}{6} \left[ (\sigma_k + \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_{m-1}^2})^{3/2} - (\sigma_k - \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_{m-1}^2})^{3/2} - \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_k + \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_m^2})^{3/2} + (\sigma_k - \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_m^2})^{3/2} \right] - \frac{\sigma_{m-1}}{2} \times \\ &\quad \times \left( \sqrt{\sigma_k + \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_{m-1}^2}} - \sqrt{\sigma_k - \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_{m-1}^2}} \right) + \frac{\sigma_m}{2} \left( \sqrt{\sigma_k + \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_m^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\sigma_k - \sqrt{\sigma_k^2 - \sigma_m^2}} \right) \end{aligned}$$

Решая последовательно уравнения системы (2.3.27), получим  $K_i$ .

По найденным значениям  $K_i$  строим функцию  $F_1$  по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{\sigma_0}{2}\right) &= 0 \\ F_1\left(\frac{\sigma_1}{2}\right) &= \frac{K_1}{2} (\sigma_1 - \sigma_0) \\ \dots &\dots \\ F_1\left(\frac{\sigma_n}{2}\right) &= F_1\left(\frac{\sigma_{n-1}}{2}\right) + \frac{K_n}{2} (\sigma_n - \sigma_{n-1}). \end{aligned}$$

Определение функции  $F_2$

При одноосном растяжении повреждения вызываются касательными напряжениями  $\tau_z = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$  и нормальным напряжением  $\sigma_z = \sigma \cos^2 \theta$ . Подставляя выражения для  $\tau_z$ ,  $\sigma_z$  и  $t_p$  из (2.3.2I) в (2.3.20) имеем:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ F_1\left(\frac{\sigma}{2} \sin 2\theta\right) + F_2(\sigma \cos^2 \theta) \right] \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{f_2(\sigma)} \quad (2.3.27)$$

При этом в правой половине (2.3.27) используется экспериментально найденная функция  $t_p = f_2(\sigma)$ . Функция  $F_1$  уже найдена

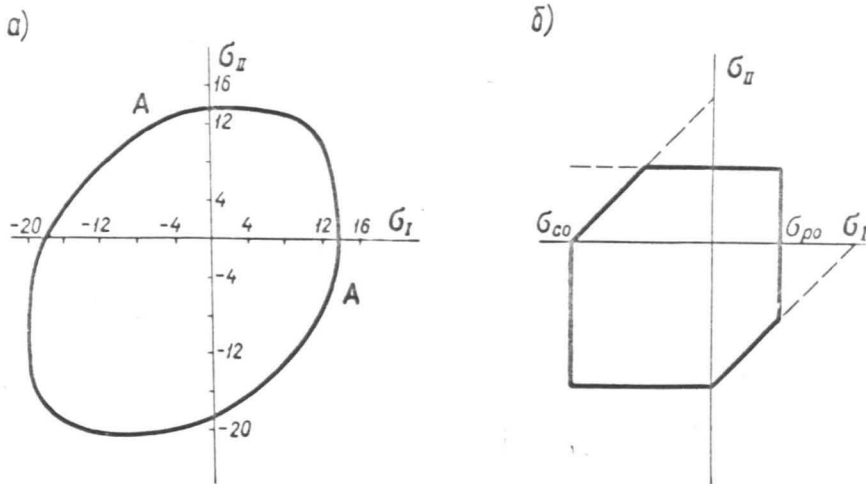


Рис. 2.15.

Кривые равнодлительной прочности в плоскости главных напряжений при малом количестве циклов (а); безопасная область предела усталости (б).

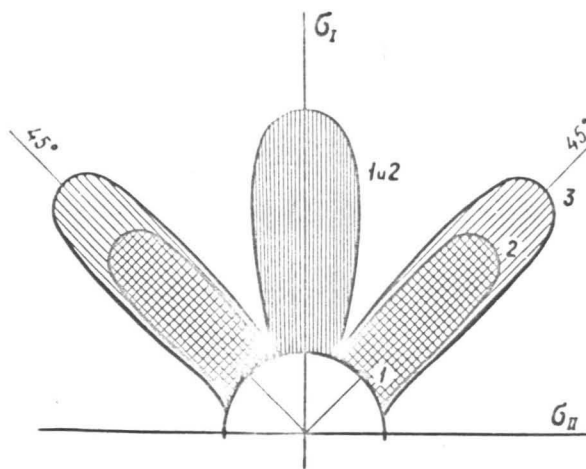


Рис. 2.16.

Схематическое распределение повреждений материала в плоскости приложения нагрузки  $\sigma_I \sim \sigma_{II}$ . 1 - растяжение по оси I; 2 - одновременное растяжение по оси I и сжатие по оси 2; 3 - сжатие.

выше, поэтому первое слагаемое левой части дает  $\frac{1}{f_1(\sigma)}$

и равенство (2.3.27) можно переписать:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_2(\sigma \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{f_2(\sigma)} - \frac{1}{f_1(\sigma)} \quad (2.3.28)$$

Рядом преобразований и заменой  $\sigma_z = \sigma \cos^2 \theta$  приводим (2.3.28) к виду /2.71/.

$$\int_0^{\sigma} F_2(\sigma_z) \frac{d\sigma_z}{\sqrt{\sigma_z}} = \left[ \frac{1}{f_2(\sigma)} - \frac{1}{f_1(\sigma)} \right] \frac{\sqrt{\sigma}}{2\pi} \quad (2.3.29)$$

Обозначим правую часть (2.3.29) через  $c(\sigma)$ :

$$c(\sigma) = \frac{\sqrt{\sigma}}{2\pi} \left[ \frac{1}{f_2(\sigma)} - \frac{1}{f_1(\sigma)} \right] \quad (2.3.30)$$

Продифференцировав правую и левую часть (2.3.29) по  $\sigma$ , получим после умножения на  $\sqrt{\sigma}$

$$F_2(\sigma) = \frac{d[c(\sigma)]}{d\sigma} \sqrt{\sigma} \quad (2.3.31)$$

Имея определенные функции  $F_1$  и  $F_2$ , можем найти время разрушения при любом сложном напряженном состоянии, разрешив формулу (2.3.20) относительно  $t_p$ . При этом в формуле (2.3.20)  $\sigma_z$  и  $\tau_z$  при трехосном напряженном состоянии определяются по обычным формулам

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_1 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \sigma_3 \cos^2 \theta \\ \tau_z^2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi - \sigma_3)^2 \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  - главные напряжения.

На рис. 2.15а показана рассчитанная кривая прочности для малых времен нагружения; за исходные экспериментальные

данные взяты кривые И.Н. Ивановой (рис. 2.13).

При больших временах нагружения кривая равнодлительной прочности меняет не только свой размер, но и форму.

Как предельный случай можно рассмотреть форму безопасной области в пространстве  $\sigma_1 \sim \sigma_2$ , где разрушение не наступает при  $t \rightarrow \infty$ .

Эта область определяется из условия

$$\int_S [F_1(\tau_z) + F_2(\sigma_z)] ds = 0 \quad (2.3.33)$$

Поскольку  $F_1(\tau_z) \geq 0$  и  $F_2(\sigma_z) \geq 0$ , то условие (2.3.33) равносильно  $F_1(\tau_z) = 0$ ,  $F_2(\sigma_z) = 0$  для всех направлений. В свою очередь это условие выполняется, если

$$\tau_{z \max} \leq \frac{\sigma_{c0}}{2} \quad (2.3.34)$$

$$\sigma_{z \max} \leq \sigma_{p0} \quad (2.3.35)$$

где  $\sigma_{c0}$  - предел длительной прочности при сжатии,  $\sigma_{p0}$  - предел длительной прочности при растяжении. Условие (2.3.34) определяет поверхность прочности Треска, условие (2.3.35) соответствует условию прочности по максимальным растягивающим нормальным напряжениям. Область пересечения этих двух условий и дает предельную безопасную область напряжений (рис. 2.15б).

Для того, чтобы определить время до разрушения при сложном напряженном состоянии (т.е. для построения кривых рис. 2.15) необходимо было предварительно вычислить  $\Pi_z(\sigma_z, \tau_z)$  по всем направлениям. Напряжения  $\sigma_z$  и  $\tau_z$  определяются по формулам (2.3.32), а  $\Pi_z$  находится из (2.3.19) по форму-

лам для  $F_1$  и  $F_2$ .

Вследствии того, что  $F_1$  и  $F_2$  являются резко убывающими функциями, основные повреждения развиваются в местах, где  $F_1$  и  $F_2$  максимальны. На рис. 2.12 показаны результаты расчета в виде нескольких графиков, характеризующих распределение  $\Pi_2$  в плоскости приложения нагрузки  $\sigma_1 \sim \sigma_2$ . График 1 получен в условиях чистого растяжения  $\sigma_2 = 0$ , график 3 - в условиях чистого сжатия  $\sigma_1 = 0$ . Промежуточный случай, когда  $\sigma_1/\sigma_2 = -2,2$  показан на графике 2. Изменяя отношение  $\sigma_1/\sigma_2$  - можем проследить момент, когда максимум повреждений скачком изменяет свое положение с  $0^\circ$  до  $45^\circ$ . На рис. 2.11 это приблизительно соответствует точке А. Можно заметить еще, что при вычислении графиков рис. 2.12 принято существование некоторого предела усталости, поэтому по некоторым направлениям повреждения равняются нулю.

Если принять, что  $\dot{\Pi}_2 = F(\sigma_2)$ , и кривую длительной прочности аппроксимировать аналитическим выражением, то кривые прочности при сложном напряженном состоянии тоже выражаются аналитически /2.67/.

Так, например, если при растяжении

$$t_p = \frac{1}{a} e^{-\alpha \sigma} \quad (2.3.36)$$

где  $a$  и  $\alpha$  - константы материала, то вместо (2.3.30) имеем при растяжении по оси  $X_3$  напряжением  $\sigma_3$ :

$$\int_s \dot{\Pi}(\sigma_2) ds = a e^{-\alpha \sigma_3} \quad (2.3.37)$$

где  $\sigma_2 = \sigma_3 \cos^2 \theta$ . Выражение (2.3.37) переписывается:

$$\int_S \dot{\Pi}_z(\sigma_3 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi = -2\pi \int_0^{\pi} \dot{\Pi}_z(\sigma_3 \cos^2 \theta) d \cos \theta = a e^{-\alpha \sigma_3} \quad (2.3.38)$$

Чтобы (2.3.38) удовлетворялось, функция скорости логарифмического повреждения должна иметь вид

$$\dot{\Pi}_z(\sigma_z) = \frac{a}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \sigma_z \alpha \right) e^{-\alpha \sigma_z} \quad (2.3.39)$$

Определяем время разрушения при двухосном растяжении. Положим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma ;$$

при этом

$$\sigma_z = \sigma (\ell_{1z}^2 + \ell_{2z}^2) = \sigma \sin^2 \theta$$

тогда  $\dot{\Pi}_z(\sigma_z) = \frac{a}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \sin^2 \theta \cdot \sigma \alpha \right) e^{-\alpha \sin^2 \theta \cdot \sigma}$

$$\frac{1}{t_p} = \int_S \dot{\Pi}_z ds = a \left[ 1 + e^{-\alpha \sigma} \sqrt{\alpha \sigma \pi} \operatorname{erf}(\sqrt{2\sigma}) \right] \quad (2.3.40)$$

Оценивая отношение  $\frac{\sigma}{\sigma_3}$  для разных значений долговечностей материала можно убедиться, что  $\sigma \leq \sigma_3$

При любом значении напряжений  $\sigma = \sigma_3$  время жизни образца при двухосном растяжении будет несколько меньше, чем при простом растяжении, что совпадает с экспериментальными результатами для хрупких материалов /2.73/.

Из выше перечисленных примеров видно, что расчет кривых прочности или времени для сложного нагружения в рамках предложенного подхода не встречает принципиальных затруднений. Однако, кажется, что умножать в настоящее время количество решенных примеров не очень целесообразно, пока не имеется достоверных экспериментальных данных по изучению кинетики накопления повреждений и прочности материалов при слож-

ном напряженном состоянии и сложном нагружении.

В лаборатории динамических свойств Института механики полимеров разработана и подготовлена установка для изучения усталости трубчатых образцов при сложном нагружении /2.74/ с измерением деформаций и рассеяния энергии в процессе испытаний. Последовательное проведение цикла испытаний на описанной установке является задачей ближайших лет. В частности, опыты на сложное нагружение может дать рекомендации по выбору критерия разрушения (интегрального, или по максимальным значениям  $\Pi_2$  ).

## 2.4. Сравнение предложенного подхода с другими теориями прочности

Основные гипотезы выше изложенного построения теории прочности являются достаточно естественными и широкими, так что на их основе можно рассматривать другие теории прочности изотропного тела. Во-первых, отметим, что феноменологические теории прочности, где предельные поверхности строятся из инвариантов тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , подробный обзор которых приведен в книгах /2.75, 2.76/, включаются в рамки рассмотренного подхода.

Проведем сопоставление с другими теориями.

### 2.4.1. Теория Н.Н. Афанасьева

Интересно сопоставление с теорией Н.Н. Афанасьева, поскольку наш подход является естественным обобщением идеи Л.М. Качанова /2.33, 2.34/ о постепенном росте параметра поврежденности и статистической теории усталости Афанасьева /2.16/, после того как аналогичные идеи нашли плодотворное применение в статистической теории пластичности - теории локальности деформаций /2.44, 2.45/.

Основные гипотезы теории /2.16/ нами изложены в (2.1.1), поэтому их здесь не повторяем, но сформулируем только конечный результат. Равноопасными с точки зрения усталостного разрушения по теории Н.Н. Афанасьева будут напряженные состояния с одинаковым отношением  $s^+ / S$ , где  $S$  полная поверхность сферы, а  $S^+$  та область сферы, где  $\tau_z > \tau_{z_0}$ .

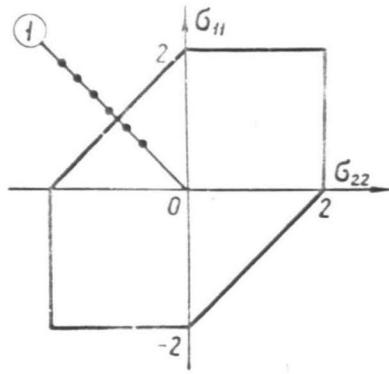


Рис. 2.17.

Лучеобразный путь нагружения  
и безопасная поверхность проч-  
ности.

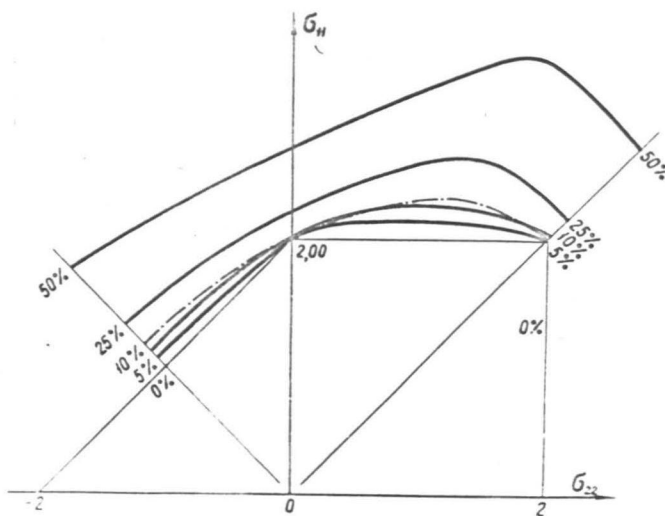


Рис. 2.18.

Равноопасные линии прочности (кри-  
вые равнодлительной прочности) по  
теории Афанасьева в плоскости  $\sigma_1 \sim \sigma_2$   
Пунктиром показан эллипс Мизеса.

Поверхность, радиус - вектор которой  $Z_z$  пропорционален касательному напряжению  $\tau_z$ , называется поверхностью Колосова. Поэтому  $S^+$  можно определить как области пересечения поверхности Колосова со сферой радиуса  $\tau_{z_0}$ .

В нашей книге /2.46/, следуя статье А.Ф. Крегерса /2.77/, были проанализированы кривые равнодлительной прочности в плоскости  $\sigma_{11} \sim \sigma_{22}$  и  $\sigma_{11} \sim \sigma_{12}$  согласно теории Н.Н. Афанасьева. Там они были интерпретированы как кривые одинаковой вероятности появления пластических деформаций. Построение проводилось следующим образом. Принимается, что локальное разрушение по плоскости с нормалью  $Z$  появляются только после того, как результирующее касательное напряжение  $\tau_z$  ( $\tau_z^2 = \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2$ ) превзойдет предел текучести  $\tau_{z_0}$ . Графически упругая зона в подвижной системе координат изображается в виде круга с радиусом  $\tau_z$ .

Исследуем различные лучеобразные пути нагружения в плоскости  $\sigma_{11} \sim \sigma_{22}$ . Удаляясь от нулевой точки по рассматриваемому лучу нагружения в отдельных его точках проверяем, не превысил ли в каком-либо положении подвижной системы координат значение  $\tau$  заданное  $\tau_{z_0}$  ( $\tau = \tau(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ ). Точка луча, в которой при удалении от начала координат впервые будет обнаружено, что имеется хотя бы одна локальная площадка, по которой  $\tau > \tau_{z_0}$ , определит безопасную поверхность в пространстве напряжений.

При условии  $\tau_{z_0} = 1$  в плоскости  $\sigma_{11} \sim \sigma_{22}$  находим, что безопасная поверхность прочности совпадает с шестиугольником Треска (рис. 2.17), а в осях  $\sigma_{11} \sim \sigma_{12}$  имеем эллипс с полуосями

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} = 2.$$

Исследуем как, пропорционально увеличивая напряжения, меняется отношение  $\frac{s^+}{s}$  для разных напряженных состояний, т.е. найдем кривые равнодлительной (равноопасной по Н.И.Афанасьеву) прочности.

Расчет производился на машине БЭСМ-3М.

Безопасная поверхность прочности характеризуется с  $\frac{s^+}{s} = 0$ . Если продолжаем нагружение за пределами этой поверхности, то  $\frac{s^+}{s}$  растет и асимптотически стремится к единице. Была поставлена программа по отысканию длин радиус-векторов лучеобразных путей нагружения при заданных значениях соотношения  $\frac{s^+}{s}$  (5, 10, 25, 50 %) и двух рассмотренных плоских напряженных состояний.

Счет прекращался, если  $\frac{s^+}{s}$  соответствовал заданному с отклонением не более  $\pm 0,05$  (например,  $5\% \pm 0,05\%$ ).

Результаты показаны на рис. 2.18 и 2.19.

Обращает на себя внимание сгущение линий  $\frac{s^+}{s}$  одинакового значения вблизи углов шестиугольника Треска, а так же факт, что соотношение  $\frac{s^+}{s}$  растет быстрее по оси  $\sigma_{11}$ , чем по  $\sigma_{12}$ .

Легко показать, что кривые рис. 2.18, 2.19 получаются как частный случай из изложенной в предыдущих параграфах теории. Чтобы это показать, вернемся еще раз к основным гипотезам в теории длительной прочности А.А. Ильюшина.

В статье /2.51/ было предложено тензор повреждений по аналогии с наследственной теорией ползучести считать зависящим от истории нагружения:

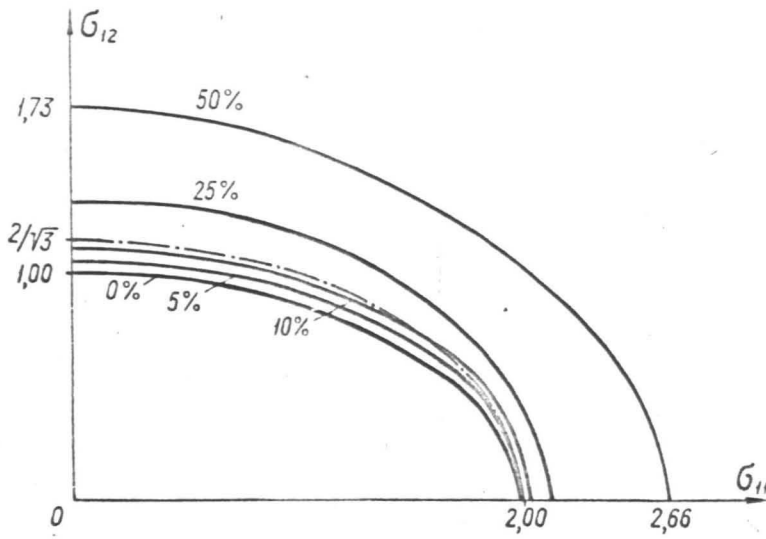


Рис. 2.19.

Кривые равнодлительной прочности в плоскости  $\sigma_{11} \sim \sigma_{12}$ . Пунктиром показан эллипс Мизеса.

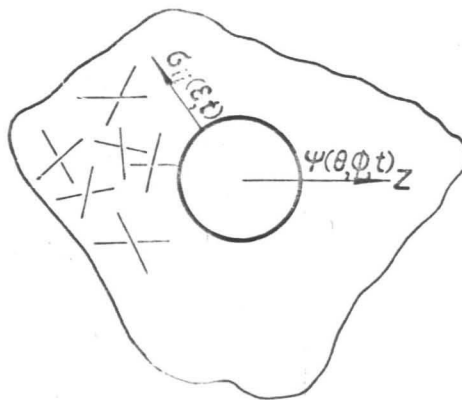


Рис. 2.20.

К построению модели разрушения линейных полимерных материалов согласно /2.20/.

$$\Pi_{ij}(t) = \int_0^t \phi_{ijk}(t-\eta) \sigma_{ke}(\eta) d\eta \quad (2.4.1)$$

Аналогично, можем считать в нашем подходе  $\Pi_z$ , функцией истории изменения напряжений на плоскости с нормалью  $z$ . Принимая, что  $\Pi_z$  порождается только касательными напряжениями, имеем

$$\Pi_z(t) = \int_0^t \phi(t-\eta) f[\tau_z(\eta)] d\eta \quad (2.4.2)$$

(если  $f(\tau_z) \equiv \tau_z$ , то получается линейная теория).

Если нагружение стационарно (или циклическое со стационарной амплитудой нагружения), то можем  $\tau_z(\eta)$  вынести из-под интеграла

$$\Pi_z(t) = f(\tau_z) \int_0^t \phi(t-\eta) d\eta$$

Согласно интегральному критерию разрушения (2.2.33) имеем

$$\Pi(t) = \int_s f(\tau_z) ds \int_0^t \phi(t-\eta) d\eta \quad (2.4.3)$$

откуда в момент разрушения  $t = t_p$ :

$$\Pi(t_p) = 1 = \int_s f(\tau_z) ds \psi(t_p), \quad (2.4.4)$$

где

$$\psi(t_p) = \int_0^{t_p} \phi(t_p-\eta) d\eta \quad (2.4.5)$$

Ясно, что из двух функций  $f(\tau_z)$  и  $\phi(t-\eta)$  одну мы можем выбрать произвольно, если в нашем распоряжении имеется лишь одна опытная кривая длительной прочности  $t_p = t_p(\sigma)$ , которой необходимо удовлетворить. В разделе (2.3), принимая априори линейное суммирование повреждений, предполагалось  $\phi = const$ , и потом определялась функция  $f(\tau_z)$ . Можно поступить наоборот:

задавая заранее зависимость роста повреждений от уровня напряжений, т.е. функцию  $f(\sigma_{ij})$  (например, линейную), находить функцию  $\phi(t_p - \eta)$ .

Если функцию  $f(\tau_z)$  определить в виде

$$f(\tau_z) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau_z \leq \tau_{z_0} \\ 1, & \text{если } \tau_z > \tau_{z_0} \end{cases}, \quad (2.4.6)$$

то из (2.4.4) получаем теорию Афанасьева. Действительно, из (2.4.4) при условии (2.4.6) находим

$$S^+ \cdot \psi(t_p) = 1$$

откуда следует, что при  $S^+ = \text{const}$  будет  $t_p = \text{const}$ , т.е. графики рис. 2.18, 2.19 изображают поверхности равнодлительной прочности. Поверхность Треска при этом является безопасной областью, а время до разрушения при каждом  $S^+ > 0$  определяется из опыта на усталость в режиме простого растяжения-сжатия.

#### ✓ 2.4.2. Теория Хсиао

Как было отмечено в §2.1.1, в пятидесятых годах Хсиао /2.19 и др./ была разработана феноменологическая модель для кратковременной прочности ориентированных линейных полимеров. В 1968 г. эта модель была использована для описания длительной прочности линейных полимерных материалов /2.20/. Вкратце изложим это обобщение в наших обозначениях, поскольку она в некотором смысле двойственна феноменологическому подходу, описанному выше.

Хсиао и Кауш фон Шельлинг предположили /2.20/ (рис.2.20) что среда состоит из упругих волокон, натяжение которых  $\psi_z$  определяется упругими свойствами и нормальной деформацией в направлении волокна  $z$ .

$$\psi_z = E \varepsilon_z \quad (2.4.7)$$

Деформация  $\varepsilon_z$  вычисляется по тензорному закону и, при растяжении в направлении оси  $z$  имеем

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{ij} l_{iz} l_{jz} = \varepsilon_{33} l_{3z}^2 + \varepsilon_{11} (1 - l_{3z}^2) \quad (2.4.8)$$

Число неразрушенных элементов, ориентированных в направлении  $z$  в пределах угла  $d\Omega$  есть  $\rho_z f_z d\Omega$ , а локальное напряжение равно

$$d\sigma_z = \psi_z \rho_z f_z d\Omega \quad (2.4.9)$$

Здесь  $\rho_z(\theta)$  — начальное распределение плотности элементов по направлениям, а для функции  $f_z(\theta, t)$  постулируется кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \dot{f}_z &= \varphi(f_z, \psi_z) & , \text{ если } f_z > 0 \\ \dot{f}_z &= 0 & , \text{ если } f_z = 0 \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

где функция  $\varphi$  определяется из физических соображений.

Согласно термофлуктуационным представлениям функции  $\varphi$  принимается в виде

$$\dot{f} = -f K_e \quad (2.4.11)$$

где "модифицированная энергия активации"  $K_e = \omega_0 \exp \frac{-u + \beta \psi_z}{RT}$  причем  $u, \beta, \omega_0, R$ , константы материала или физи-

ческие константы,  $T$  - температура.

Напряжения  $\sigma_{ij}$  определяются из локальных напряжений  $\sigma_z$  усреднением (2.4.9).

$$\sigma_{ij} = \int_S \psi_z f_z P_z l_{iz} l_{jz} ds \quad (2.4.12)$$

или учитывая (2.4.7) и (2.4.8) получим:

$$\sigma_{ij} = E \int_S [\varepsilon_{33} l_{3z}^2 + \varepsilon_{11} (1 - l_{3z}^2)] f_z P_z(\theta) l_{iz} l_{jz} ds \quad (2.4.13)$$

Поскольку растяжение осуществляется в направлении оси  $x_3$ , то (2.4.13) эквивалентен следующим равенствам

$$\sigma_{33} = E \int_S (\varepsilon_{33} \cos^2 \theta + \varepsilon_{11} \sin^2 \theta) f_z(\theta, t) P_z(\theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.4.14)$$

$$\sigma_{11} = 0, \quad \sigma_{22} = 0.$$

Задача сводится к отысканию  $\varepsilon_{33}(t)$ ,  $\varepsilon_{11}(t)$ ,  $f_z(\theta, t)$ , таких, чтобы удовлетворялись уравнения (2.4.14) и кинетическое уравнение (2.4.11). Разрушением считается момент, когда  $f_z(\theta, t) \rightarrow 0$  по всем направлениям и соответственно необходимо  $\varepsilon_{33} \rightarrow \infty$ , чтобы в левой части (2.4.14) напряжение оставалось постоянным. Двойственность метода /2.20/ и подхода (§ 2.2 - § 2.3) легко усмотреть. В одном случае рассматривается модель, где разрушаются волокна, в другом - рассматриваются разрушения по разным плоскостям. Тензориальными величинами являются локальные деформации или локальные напряжения соответственно. Разрушение в одном случае наступает, когда разрушаются волокна по всем направлениям, критерий (2.2.32) связывает разрушение с одной плоскостью.

Наконец отметим, что теория Волкова /2.17/ § 2.1.1, также укладывается в рамках рассмотренной модели. Действи-

тельно, условие разрушения (2.1.9) определяется величинами (2.2.3I) (инварианты и  $\sigma_z$ ) и условие разрушения связывается с одной плоскостью, где максимальное количество разрушенных микроплощадок.

В 1970 году наш подход был применен в статье /2.78/. Отличие заключается в том, что опасная площадка разрушения в /2.78/ определяется из термодинамических соображений.

## 2.5. Расчет прочности при неоднородном напряженном состоянии

### 2.5.1. Учет перераспределения напряжений и распространения фронта разрушения

При неоднородном напряженном состоянии наступление локального разрушения еще не означает разрушения образца или детали. Необходимо уметь рассчитать заключительную стадию разрушения - распространение магистральной трещины в материале, предварительно ослабленном рассеянным разрушением. Считая, что на границе разрушения всегда имеется  $\Pi = \text{const}$ , легко получить /2.79/ уравнение фронта разрушения  $\Sigma$  :

$$\frac{d\Pi}{dt} = \left( \frac{\partial \Pi}{\partial t} \right)_{\Sigma} + \left( \frac{\partial \Pi}{\partial u} \right)_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.5.1)$$

где  $u$  определяет положение фронта  $\Sigma$  ( $\frac{\partial u}{\partial t}$  - это скорость фронта по нормали).

Кроме того, при неоднородном напряженном состоянии существенное значение имеет перераспределение напряжений вследствие разрушения. Это явление имеет место не только на заключительной стадии разрушения, а также в инкубационном периоде, потому что в этой стадии меняются деформативные свойства материала. Поэтому становится необходимым установление взаимосвязи характеристик разрушения и деформаций. Для ползучести этот вопрос исследован в /2.56, 2.57/. В упругой постановке при сложном напряженном состоянии можно рекомендовать следующую схему расчета.

Локальные деформации  $\varepsilon_{ij}^A$  в системе координат  $x, y, z$  определяются через  $\sigma_{ij}^A$  и  $\Pi_z$ , например,

$$\varepsilon_{zz}^A = \frac{\sigma_{zz}^A}{E(1-\Pi_z)}; \quad \varepsilon_{xz}^A = \frac{\sigma_{xz}^A}{G(1-\Pi_z)}; \quad \varepsilon_{yz}^A = \frac{\sigma_{yz}^A}{G(1-\Pi_z)} \quad (2.5.2)$$

Однако, формально вычисленные деформации  $\varepsilon_{ij}^A$  по (2.5.2) в системе координат  $x, y, z$  вообще говоря, не будут распределяться по тензорному закону. Для получения же тензора второго ранга нам необходимо осреднить  $\varepsilon_{ij}^A$ , как это делается в статистических теориях пластичности, например, в теории локальности деформаций /2.46/.

Расчет деформаций может производиться усреднением в следующем виде:

$$\varepsilon_{ij} = \int_S \varepsilon_{zz}^A l_{iz} l_{jz} dS + \int_S (\varepsilon_{xz}^A l_{ix} l_{jz} + \varepsilon_{yz}^A l_{iy} l_{jz}) dS \quad (2.5.3)$$

где  $\varepsilon_{zz}^A$ ,  $\varepsilon_{xz}^A$ ,  $\varepsilon_{yz}^A$  в первом приближении определяются формулами (2.5.2). Таким образом учитывается также анизотропия, полученная материалом при дисперсном разрушении.

### 2.5.2. Усталость образца при циклическом изгибе /2.80/

В этом параграфе на простейшем примере (плоский изгиб и изгиб при вращении) рассмотрены выше упомянутые эффекты: перераспределение напряжений в образце при его постепенном разрушении и распространение фронта разрушения в заключительной стадии. Показано, что перераспределение напряжений (даже не учитывая явление ползучести) может объяснить повышение предела усталости при изгибе по сравнению с растяжением-сжатием.

Известно /1.90/, что предел усталости при изгибе  $\sigma_{0и}$  выше предела усталости при растяжении-сжатии  $\sigma_0$  примерно 1,4 раза (для металлов). Более надежен диапазон  $\sigma_0 < \sigma_{0и} < 2\sigma_0$  /1.90/. Для стеклопластика ЭФС согласно опытам (глава 4) предел усталости на базе  $10^6$  циклов при изгибе с вращением 1,6 раза выше, чем при растяжении-сжатии. Частично такое изменение пределов усталости можно объяснить наличием ползучести или наличием упруго-пластических деформаций, когда напряжения при изгибе не распределяются в сечении по линейному закону. Однако, если предел усталости составляет  $\approx 0,3$  от разрушающего напряжения, то образец в целом (кроме отдельных перенапряженных областей) работает упруго. Известно также, что модуль упругости материала изменяется в процессе усталости. В

первой главе было показано, что для стеклопластиков при растяжении-сжатии падение модуля упругости только за счет повреждений (исключая влияние температуры) перед разрушением составляет 20 - 30%. Такое изменение жесткости материала может быть причиной перераспределения (выравнивания) напряжений при неоднородном напряженном состоянии и может быть причиной увеличения предела усталости.

Основные предположения для дальнейшего расчета следующие: /2.80/

1. Действием поперечной силы пренебрегаем. Тогда напряженное состояние сведется к простому растяжению и сжатию и критерии разрушения (2.2.32, 2.2.33) становятся эквивалентными.

2. Принимаем линейное суммирование повреждений. Тогда для нашего случая:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial N} = \frac{1}{f(\sigma)} \quad (2.5.4)$$

где  $f(\sigma)$  есть уравнение кривой Велера при циклическом растяжении-сжатии, а  $\Pi$  - число циклов. Введение нелинейного закона роста повреждений вместо (2.5.4) рассуждения принципиально не меняет.

3. Локальное разрушение наступает, когда функция повреждений  $\Pi = 1$ , следовательно,  $\Pi = 1$  есть уравнение фронта разрушения /2.79/.

4. Согласно результатов I главы принимаем, что с ростом  $\Pi$  модуль упругости изменяется линейно

$$E = E_0 (1 - k\Pi) \quad (2.5.5)$$

откуда  $\kappa = \frac{E_0 - E_k}{E_0}$ , где  $E_k$  - модуль упругости перед разрушением, следовательно  $0 \leq \kappa \leq 1$ .

5. Принимается гипотеза плоских сечений.

6. Материал работает в упругой области и имеет одинаковые упругие свойства при растяжении и сжатии.

Рассмотрим сечение образца радиуса  $R$  в месте максимального момента  $M$ . Напряжение с учетом (2.5.5) распределяются по сечению.

$$\sigma = E_0 [1 - \kappa \Pi(z)] \frac{y}{\rho} \quad (2.5.6)$$

где  $z$  - текущий радиус,  $\frac{1}{\rho}$  - кривизна балки.

Изгибающий момент равен:

$$M = \int_F \sigma y dF = \frac{E_0}{5} \pi \int_0^R [1 - \kappa \Pi(z)] z^3 dz \quad (2.5.7)$$

Тогда из (2.5.6) и (2.5.7) имеем распределение напряжений по сечению образца:

$$\sigma = \frac{M [1 - \kappa \Pi(z)] y}{\pi \int_0^R [1 - \kappa \Pi(z)] z^3 dz} \quad (2.5.8)$$

Чтобы определить кинетику роста повреждений в образце, мы должны разрешить уравнение (2.5.4) при условии, что  $\sigma$  определяется формулой (2.5.8). Для определения максимальной амплитуды напряжений  $y$  можно заменить на  $z$ . Перепишем (2.5.4) с учетом сделанных замечаний

$$\frac{\partial \Pi(z, \mathcal{N})}{\partial \mathcal{N}} = \rho^{-1} \frac{\int M [1 - \kappa \Pi(z)] z}{\pi \int_0^R [1 - \kappa \Pi(z)] z^3 dz} \quad (2.5.9)$$

Это интегро-дифференциальное уравнение решаем численно. В начальный момент ( $\mathcal{N} = 0, \Pi = 0$ ) определяем правую часть (2.5.9) при каждом  $z$ . Умножив это значение на  $\Delta \mathcal{N}$ , получим  $\Delta \Pi(z)$

в момент  $\Delta N$ . Определяем опять правую часть при новых значениях  $\Pi(z)$  и т.д. Когда в момент  $N = N^*$  на поверхности образца  $\Pi = 1$ , считаем, что там зарождается фронт разрушения. Концентрацией напряжений при этом пренебрегаем. Таким образом, наружный радиус образца  $R(N)$  с некоторого момента будет уменьшаться, при этом повреждение остается равным единице. Распространение фронта разрушения (2.5.I) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} dz + \frac{\partial \Pi}{\partial N} dN = 0 \quad (2.5.I0)$$

или 
$$dz = - \frac{\frac{\partial \Pi}{\partial N}}{\frac{\partial \Pi}{\partial z}} dN$$

при  $z = R(N)$  и  $\Pi[R(N), N] = 1$

При  $N > N^*$  необходимо решать численно уравнения (2.5.9) и (2.5.I0) вместе. В момент  $N = N^*$  имеем  $\Pi(z)$ . Задавшись  $\Delta N$ , вычисляем  $\Delta z$  из (2.5.I0) и  $\Delta \Pi(z)$  из (2.5.9). В момент  $N^* + \Delta N$  считаем, что радиус образца уменьшается на  $\Delta z$  и шаг повторяем.

Определяем предел усталостной прочности при изгибе с вращением. Предположим, что при симметричном цикле растяжения-сжатия существует предел усталостной прочности  $\sigma_0$ . Тогда пределом усталости при изгибе с вращением считаем такое напряжение  $\sigma_{0e}$ , которое не вызывает разрушение образца. Предельным состоянием будет то состояние, когда напряжение на поверхности образца равно  $\sigma_0$ , а  $\Pi = 1$ . Тогда максимальная деформация  $\varepsilon_0$  на поверхности равна

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{E_0(1-K)} \quad (2.5.II)$$

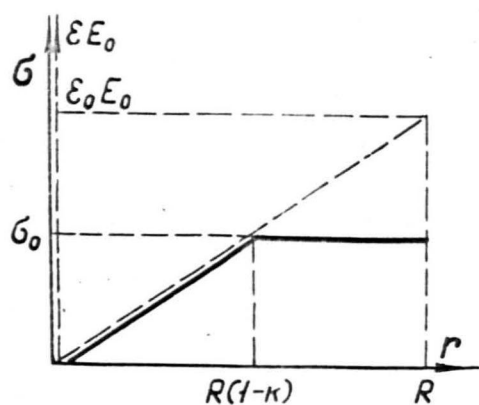


Рис. 2.21.

Пунктирная линия - деформации в плоскости действия изгибающего момента; сплошная линия - напряжения в той же плоскости.

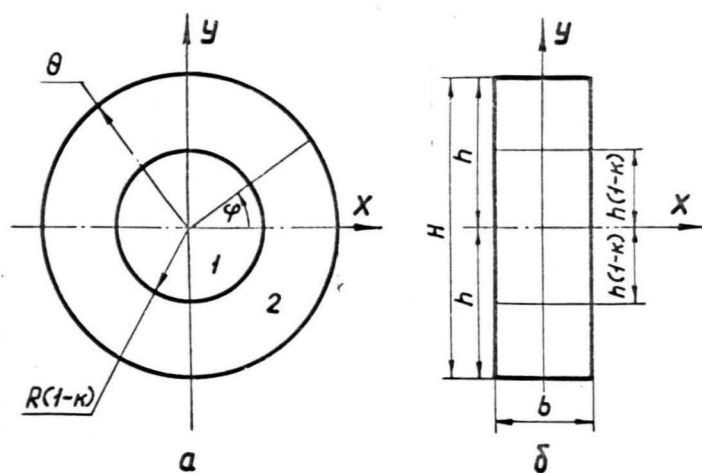


Рис. 2.22.

Так как мы приняли гипотезу плоских сечений, а напряжения по сечению в предельном положении не могут превысить  $\sigma_0$ , то как видно из рис. 2.2I, имеем

$$\varepsilon(z) = \frac{\varepsilon_0 z}{R} = \frac{\sigma_0 z}{E_0 (1-\kappa) R}, \quad (2.5.12)$$

а

$$E(z) = \frac{\sigma(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{E_0 (1-\kappa) R}{z} \quad (2.5.13)$$

причем  $\frac{(1-\kappa) R}{z} \leq 1$ , что соответствует  $z \geq R(1-\kappa)$ ; при

$$z \leq R(1-\kappa), \quad E(z) \equiv E_0.$$

Из (2.5.5) следует, что  $\Pi = \frac{E_0 - E}{E_0 \kappa} \quad (2.5.14)$

$$\Pi = \frac{E_0 - E}{E_0 \kappa}$$

Подставив (2.5.13) в формулу (2.5.14), получим распределение повреждений в предельном случае

$$\Pi(z) = \frac{z - R(1-\kappa)}{z \kappa} \quad (2.5.15)$$

при  $z \geq R(1-\kappa)$ ; при  $z < R(1-\kappa)$ ,  $\Pi(z) \equiv 0$

Определим  $M_0$ , которому соответствует распределение  $E$  и  $\varepsilon$  по формулам (2.5.12) и (2.5.13). В формуле (2.5.12) заменяем

$z$  на  $y$

$$\varepsilon(y) = \frac{\sigma_0 y}{E_0 (1-\kappa) R}$$

Перепишем в полярных координатах. Интегрируем по сечению;

образца;  $M_1$  - интеграл по области I,  $M_2$  - интеграл по области

2 (рис. 2.22а)

$$\varepsilon(z, \varphi) = \frac{\sigma_0 z \sin \varphi}{E_0 (1-\kappa) R}; \quad M = \int_F \sigma \cdot y \, dF = 2 \int_0^{\pi R} \int_0^{\pi R} E(z) \varepsilon(z, \varphi) z^2 \sin \varphi \, x \, dz \, d\varphi$$

$$M_1 = \frac{\pi \sigma_0 R^3}{4} (1-\kappa)^3, \quad M_2 = \frac{\pi \sigma_0 R^3}{3} (3\kappa - 3\kappa^2 + \kappa^3)$$

$$M_0 = M_1 + M_2 = \frac{\pi \sigma_0 R^3}{12} (3 + 3\kappa - 3\kappa^2 + \kappa^3)$$

Определим напряжения на поверхности образца к началу нагружения

$$\sigma_{0e} = \frac{4M_0}{\pi R^3} = \sigma_0 \frac{3 + 3\kappa - 3\kappa^2 + \kappa^3}{3}$$

Таким образом, отношение пределов усталости при изгибе с вращением и пульсирующим растяжением-сжатием будет

$$n = \frac{\sigma_{0e}}{\sigma_0} = \frac{3 + 3\kappa - 3\kappa^2 + \kappa^3}{3}$$

следовательно

$$1 \leq n \leq 1,33$$

Отметим, что предельное состояние образца не зависит от вида кривой Велера выше предела усталости, т.е. от истории накопления повреждений в процессе нагружения. Это явление аналогично тому, что предельное состояние идеально пластических конструкций не зависит от истории нагружения.

Кратко вычислим также предел усталости при симметричном изгибе образца прямоугольного сечения  $b \times h$  (рис. 226). Пределом усталости при симметричном изгибе считаем напряжение

$\sigma_{0u} = \frac{6M}{bh^2}$ , которое не вызывает разрушение образца. Проведем вычисления аналогично вышеизложенному, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(y) &= \frac{\sigma_0 y}{E_0(1-\kappa)h}; & E(y) &= \frac{E_0(1-\kappa)h}{y} \quad \text{при } |y| > (1-\kappa)h \\ & & E(y) &\equiv E_0 \quad \text{при } |y| < (1-\kappa)h \end{aligned}$$

$$M = 2b \int_0^{h(1-\kappa)} \frac{\sigma_0 y^2}{1-\kappa} dy + 2b \int_{h(1-\kappa)}^h \sigma_0 y dy = \frac{bh^2 \sigma_0 (2 + 2\kappa - \kappa^2)}{3}$$

$$n = \frac{\sigma_{0u}}{\sigma_0} = \frac{2 + 2\kappa - \kappa^2}{2}, \text{ следовательно } 1 \leq n \leq 1,5$$

Отметим, что в случае идеального пластического материала и

чистого изгиба в предельном состоянии имеем  $M = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$  и  $n = 1,5$ .  
(Здесь  $\sigma_0$  - предел текучести).

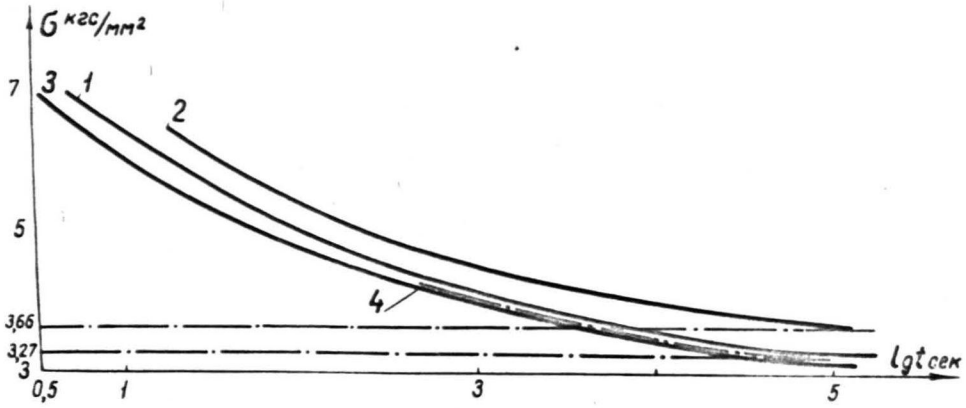


Рис. 2.23.

Кривые циклической прочности: 1) при консольном изгибе с вращением по уравнениям  $(2.5.9), (2.5.10)$  ( $K = 0,1$ ); 2) То же,  $K = 0,3$ ; 3) При пульсирующем растяжении-сжатии, экспериментальная  $1/2.69/$ . При изгибе с вращением экспериментальная  $T = 40^{\circ}C$ .

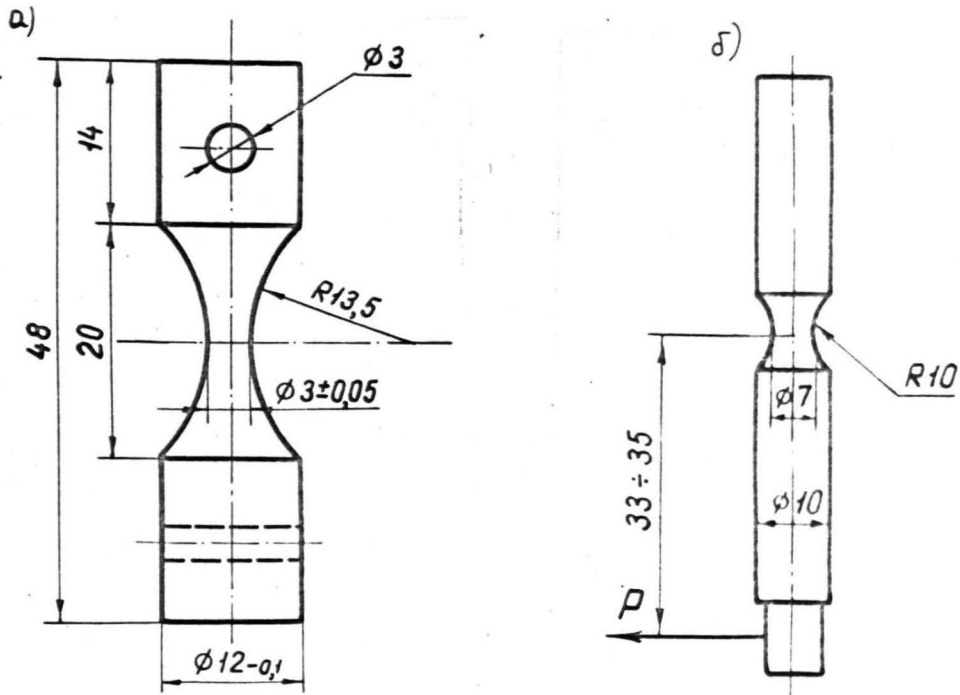
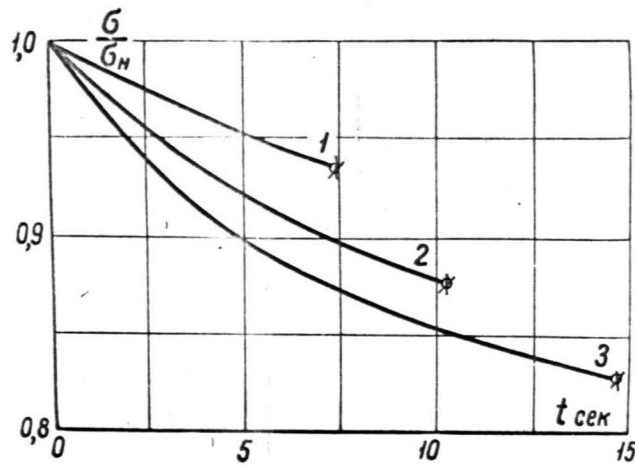
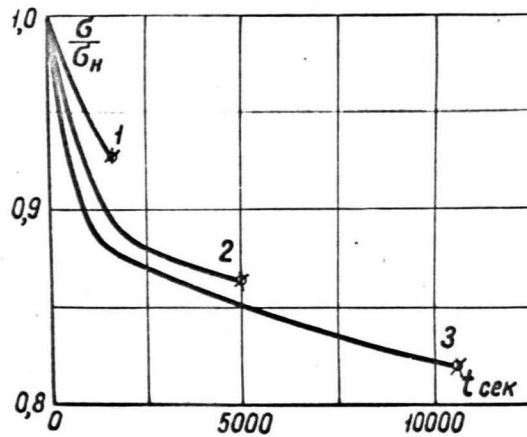


Рис. 2.24.

Форма образцов из оргстекла: а) образцы для испытаний на циклическое растяжение-сжатие; б) для испытаний на циклический изгиб с вращением.



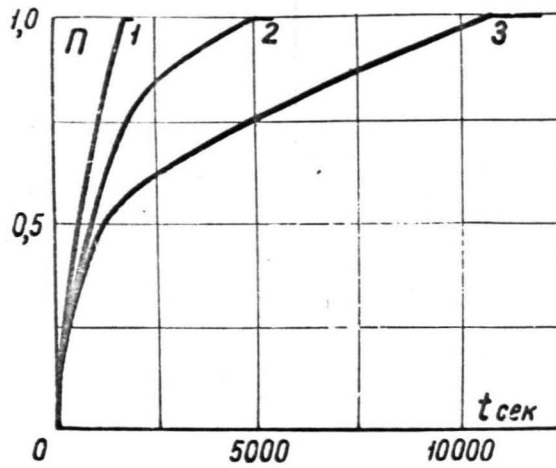
а)



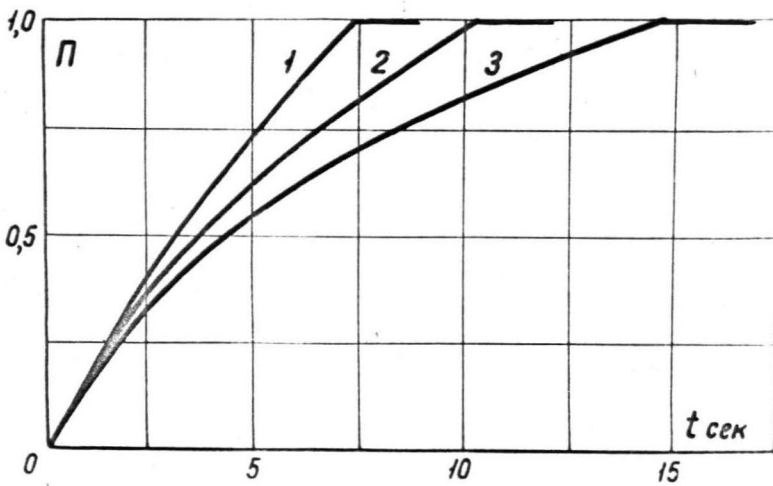
б)

Рис. 2.25.

Относительное изменение напряжений на поверхности образца: а) при  $\sigma_n = 6,5 \text{ кг/см}^2$ , б) при  $\sigma_n = 4 \text{ кг/см}^2$ . Крестиком обозначено появление круговой усталостной трещины. Значения  $k$  для кривых 1, 2, 3 - 0,1, 0,2, 0,3 соответственно.



а)



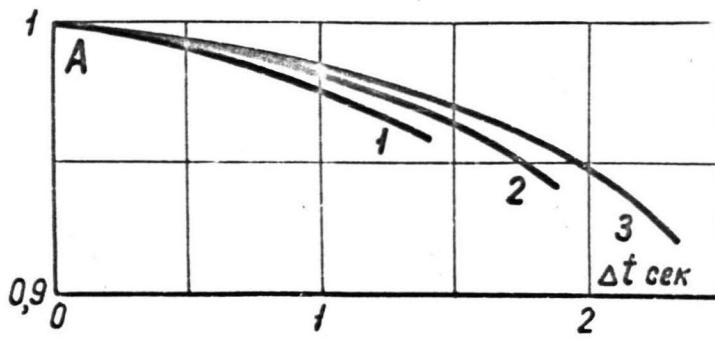
б)

Рис. 2.26.

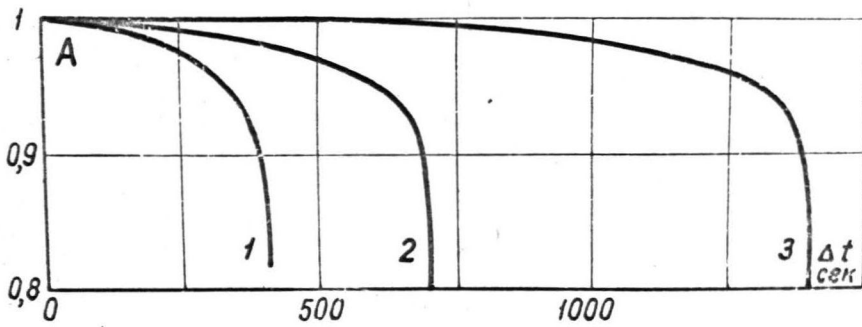
Динамика роста повреждений на поверхности образца **б)** при  $\sigma_H = 6,5 \text{ кг/см}^2$ , **а)**  $\sigma_H = 4 \text{ кг/см}^2$ . Горизонтальный участок - время развития трещины. Значения  $k$  те же, что на рис. 2.25.

а для изгиба с вращением  $M = \frac{4\sigma_0 R^3}{3}$  и  $n = \frac{16}{3\pi} \approx 1,7$

Кинетика роста повреждений выше предела усталости согласно уравнениям (2.5.9) и (2.5.10) была просчитана на конкретном примере с помощью БЭСМ-3М. Результаты показаны на рис. 2.23. Зависимость  $t_p(N)$  была взята из работы /2.69/ для оргстекла в изотермическом режиме при  $T = 30^\circ\text{C}$ , частота 690 цик/мин (рис. 2.23). Изменение жесткости образца в данной работе не фиксировалось. Кривые построены для значений  $\kappa = 0,1; 0,3$ .  $\sigma = \frac{4M}{\pi R^3}$  - начальное напряжение на поверхности образца). Там же нанесена кривая Велера, полученная в изотермических условиях  $T = 40^\circ\text{C}$  при изгибе с вращением, в нашей лаборатории. Следует отметить, что точное сопоставление результатов при растяжении-сжатии и при циклическом изгибе здесь проводить нельзя, поскольку условия испытания были не идентичные. Частота нагружения в опытах Ивановой была  $\omega = 700$  цик/мин, в наших опытах 3000 об/мин. Но в исследованиях /2.69, 2.81/ отмечается, что долговечность полимеров, (вычисленная по числу циклов, а не по времени) в изотермических условиях слабо зависит от частоты. Поэтому мы сопоставляем кривые  $t_p \sim N$  при двух разных частотах, хотя на данном материале нами влияние частоты на долговечность не исследовалась. Отличается также размер образцов, форма которых показана на рис. 24. Из результатов расчета, показанных на рис. 25-27 можно сделать заключение, что отношение времени развития трещины к общей жизни образца при всех уровнях нагрузки приблизительно одинаково и составляет  $10 \div 20\%$  (рис. 26а, 26б).



а)



б)

Рис. 2.27.

Развитие трещины во времени с момента ее зарождения до разрушения а)  $\bar{\sigma}_H = 6,5 \text{ кг/см}^2$ , б)  $\bar{\sigma}_H = 4,0 \text{ кг/см}^2$ . Кривые 1, 2, 3 для  $\kappa = 0,1; 0,2; 0,3$ .

Глубина прорастания круговой усталостной трещины при высоких уровнях напряжения невелико и составляет менее 10% от  $R$  .  
Потом происходит хрупкий долом (рис.2.27). При низких уровнях напряжения круговая усталостная трещина проникает глубже (до 20% радиуса, рис.2.27б).

2.6. Развитие теории для анизотропных сред /2.82/2.6.1. Сферические инварианты анизотропной среды

В § 2.2.3. были найдены комбинации напряжений - "сферические инварианты", посредством которых устанавливается функциональная связь между функцией на сфере и тензором напряжений второго ранга в изотропной среде. Чтобы развить теорию разрушения анизотропной среды, необходимо установить сферические инварианты для разных классов анизотропии.

Распределение повреждений  $\Pi_z$  в окрестности исследуемой точки должно подчиниться некоторым естественным ограничениям:

а) повреждения  $\Pi_z$  не должны зависеть от выбора осей  $x$  и  $y$ ;

б) во всех положениях системы координат  $X_c'$  ( $x_c' = x, y, z$ ), идентичных между собой с точки зрения симметрии среды  $\Pi_z(\sigma_{c'j'})$  должны иметь одинаковую структуру. Тогда, если в двух таких системах  $X_c'$  и  $X_c''$  напряжения  $\sigma_{c'j'} \equiv \sigma_{c''j''}$ , то  $\Pi_z' \equiv \Pi_z''$ . Выражения  $\varphi(\sigma_{c'j'}, A)$ , подчиняющиеся этим двум условиям назовем сферическими инвариантами в анизотропной среде (буквой  $A$  обозначены геометрические параметры, характеризующие анизотропию среды).

Условие а) можно выразить следующим образом.

$$\varphi[\sigma_{c'j'}(g), A(g)] = \varphi[\sigma_{c'j'}(\chi g), A(\chi g)] \quad (2.6.1)$$

здесь через  $g$  обозначено произвольное положение осей координат  $X_c'$ , а  $\sigma_{c'j'}$  означает компоненты тензора напряжений, вычисленные в координатной системе  $g$ . Символом  $\chi$  обозна-

чен произвольный поворот осей координат вокруг оси  $z$ .

Условие б) имеет вид:

$$\varphi[\sigma_{ij}(g), A(g)] \equiv \varphi[\sigma_{ij}(hg), A(hg)], \quad (2.6.2)$$

если

$$\sigma_{ij}(g) \equiv \sigma_{ij}(hg) \quad (2.6.3)$$

здесь через  $h$  обозначена группа преобразований координат, дающая изоморфное представление группы симметрии среды.

Повреждения  $\Pi_2$  должны зависеть от  $\sigma_{ij}$  посредством сферических инвариантов. Обычные инварианты  $f(\sigma_{ij})$  тензора напряжений в наших обозначениях определяются следующим образом:

$$f[\sigma_{ij}(g)] \equiv f[\sigma_{ij}(hg)] \quad (2.6.4)$$

что словами можно выразить следующим образом: обычный (полиномиальный) инвариант - это выражение (полиномиальное) от

$\sigma_{ij}$ , которое инвариантно, т.е. сохраняет свою структуру и значение при любых поворотах координатных систем совместимых с симметрией среды. Если  $g$  совпадает с осями симметрии, то выражения (2.6.4) имеют простейший вид. Полные, полиномиально независимые базисы их для всех кристаллографических классов приведены в книге /2.66/.

Для конкретного построения сферических инвариантов, остановимся на понятии тензоров, задающих симметрию среды.

В работе /2.83/ было указано, что каждому классу симметрии вращения можно поставить в соответствие некоторый набор

тензоров, определяющих и задающих этот класс симметрии. Эти тензоры для всех 39 точечных групп симметрии были в /2.83/ построены. Точнее это означает следующее:

Каждой из 39 точечных групп симметрии  $Q_n \subset W$  (буквой  $W$  обозначаем полную ортогональную группу вращения) (32 конечных и 7 предельных) сопоставляется конечное множество  $\{T^{(m)}\}_n$ ,  $m = 1, 2, \dots, s$ , таких тензоров  $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(s)}$ , что

1) пересечение групп  $Q^{(1)}, Q^{(2)}, \dots, Q^{(s)}$  внешней симметрии этих тензоров совпадает с  $Q_n$ :  $Q^{(1)} \cap Q^{(2)} \cap \dots \cap Q^{(s)} = Q_n$ ;

2) каждый тензор, группа внешней симметрии которого содержит  $Q_n$ , можно построить из тензоров  $T \in \{T^{(m)}\}_n$ , используя линейное комбинирование, тензорное умножение и свертывание;

3) ни один из тензоров  $T \in \{T^{(m)}\}_n$  не может быть получен указанными операциями из остальных тензоров этого множества. Поясним употребленный здесь термин "внешняя симметрия тензора". Согласно /2.84/ у тензоров различают внутреннюю и внешнюю симметрию. Группа внутренней симметрии тензора состоит из всех перестановок его индексов, которые или оставляют тензор без изменений, или же меняют знак его компонент на противоположный. Совокупность всех положений систем координат  $h \in Q \subset W$  ( $W$  — полная ортогональная группа вращений вокруг точки  $O$ ), в которых удовлетворяется соотношение

$$T_{i'j' \dots c'}(h) \equiv T_{ij \dots c}(e) \quad (2.6.5)$$

для всех компонент тензора  $T$ , образует группу внешней симметрии  $Q$  этого тензора в базисе  $(e)$ .

Легко показать, что если выполняется (2.6.5), то будут совпадать компоненты тензора  $T$  в любых системах координат

$$g \text{ и } hg \quad (g \in \mathcal{K}, h \in Q)$$

т.е.

$$T_{i_1 \dots i_n} \dots e^{i_1} \dots e^{i_n}(hg) \equiv T_{i_1 \dots i_n} \dots e^{i_1} \dots e^{i_n}(g) \quad (2.6.6.)$$

Обозначим оси в системе  $e$  через  $ox_i$ , в  $h$  -  $ox_i'$  в  $g$  -  $ox_i''$  в  $hg$  -  $ox_i'''$ .

Обозначаем для краткости операцию перехода к другим осям таким образом:

$$T'(h) = T_{i_1 \dots i_n} e^{i_1} \dots e^{i_n} \overset{\text{def}}{=} T(e) \ell(e, h) \text{ и т.д.}$$

Тогда по закону преобразования тензоров имеем:

$$T''(g) = T(e) \ell(e, g); \quad T'''(hg) = T(h) \ell(h, hg) \quad (2.6.7)$$

Согласно (2.6.5) преобразовываем дальше:

$$T'''(hg) = T(e) \ell(g, hg) \quad (2.6.8)$$

Но углы между осями  $e, g$  равны углам между осями  $h$  и  $gh$  поэтому  $\ell(e, g) = \ell(h, gh)$ , и из (2.6.7) и (2.6.8) следует (2.6.6).

Вследствии (2.6.6) любая полная свертка  $F$  какого-либо тензора  $H_{i_1 \dots i_n} e^{i_1} \dots e^{i_n}$  и тензора  $T$ , имеющего группу внешней симметрии  $Q$  будет инвариантом  $H$  относительно группы симметрии  $Q$ . Действительно любая полная свертка  $F[H(g), T(g)]$  есть

инвариант, поскольку  $F$  1) сохраняет свое численное значение для любой системы координат, так как является скаляром, 2) для всех положений систем координат  $h_g$  она сохраняет свою структуру в силу (2.6.6). В силу свойства 2 тензоров  $T$  можно утверждать, что так можно получить любой полиномиальный инвариант  $H$ . Окончательно имеет место теорема:

**Т е о р е м а:** Любой скалярный полиномиальный вариант произвольного тензора  $H$  относительно некоторой группы симметрии  $Q \subset U$  есть полином от полных внутренних сверток тензорных произведений тензора  $H$  и тензоров  $T^\alpha$ , задающих группу  $Q$ .

Поэтому, в частности, полиномиальные базисы инвариантов  $\sigma_{ij}$  для анизотропных сред /2.66/ можно построить свертками тензора  $\sigma_{ij}$  и тензоров  $T^{(m)}$  из статьи /2.83/.

Естественно, что для построения обычных полиномиальных инвариантов, выше изложенная методика ничего нового не дает по сравнению с /2.66/, но ее можно применить для построения полиномиальных сферических инвариантов, (п.с.и), определяемых равенствами (2.6.1) - (2.6.3).

В самом деле можно доказать утверждение, которое является фактическим алгоритмом построения п.с.и.

Теорема: полиномиально независимые п.с.и. для тензора  $\sigma_{ij}$  относительно группы преобразований координат  $h$  можно получить путем образования всех полиномиально независимых инвариантов  $\sigma_{i_1 j_1}$  и  $T_{i_1 j_1 \dots i_m j_m}^{(m)}$  заменяя на  $z$  в них четное число индексов.

Для доказательства во-первых заметим, что тензорные объекты  $\phi_{i' \dots e'}^{(\beta)}$ , каждая компонента которых удовлетворяет условию (2.6.2) с учетом (2.6.3), образуются тогда и только тогда если роль  $\mathcal{H}(g)$  в (2.6.2) выполняют тензоры симметрии  $T_{i' \dots e'}^{(2)}$ .

Во-вторых, условие (2.6.1) означает, что  $\mathcal{f}$  есть инвариант  $\sigma_{i'j'}$  относительно поворота вокруг оси  $z$ , следовательно, согласно первой теореме для получения  $\mathcal{f}$  необходимо использовать полные свертки  $\phi_{i'j' \dots e'}^{(\beta)}$  с тензорами симметрии моноотропии с осью симметрии  $z$ . Но, согласно /2.83/ любые такие тензоры  $\mathcal{H}_{i' \dots e'}$  (класс текстуры  $m \cdot \infty : m$ ) являются всевозможными комбинациями двух тензоров  $\delta_{i'j'}$  и  $c_{i'j'}$ , где  $\delta_{i'j'}$  символ Кронекера, а  $c_{i'j'} = \begin{cases} 1 & \text{если } i'=j'=z \\ 0 & \text{остальные} \end{cases}$  т.е.  $c_{i'j'} = \delta_{i'z} \delta_{j'z}$ . Поэтому практическое свертывание тензоров  $\phi_{i' \dots e'}^{(\beta)}$  с  $\mathcal{H}_{i' \dots e'}$  осуществляется внутренним свертыванием  $\phi_{i' \dots e'}^{(\beta)}$  или заменой отдельных пар индексов буквой  $z$ . Остается доказать, что все полиномиально независимые п.с.и. можем получить ограничиваясь теми  $\phi_{i' \dots e'}^{(\beta)}$ , из которых полной сверткой получается полиномиально независимый базис скалярных полиномиальных инвариантов  $\{J\}$ . Обозначим через  $S_n$  те п.с.и., которые образуются заменой в  $J_n \in J$  отдельных пар индексов буквой  $z$ . Возьмем полиномиально зависимый  $J_\eta$ , т.е.  $J_\eta \notin \{J\}$

$$J_\eta = Q(J_n) \tag{2.6.9}$$

где  $Q$  некоторый полином.

Пусть  $S_\eta$  - с.п.и., полученный из  $J_\eta$  заменой индексов

буквой  $\mathcal{Z}$ . Прделая эту операцию слева и справа в (2.6.9) мы получим справа полином от  $C_n$ , поскольку одинаковые индексы встречаются лишь внутри каждого  $J_n$ . Следовательно,

$C_\gamma = P(C_n)$ , где  $P$  - полином. Теорема доказана полностью.

Заметим однако, что согласно доказанному, построенный таким образом базис будет содержать все полиномиально независимые сферические инварианты, но, вообще говоря, кроме них мы получим также некоторые полиномиально зависимые инварианты, от которых можно освободиться лишь после дополнительного анализа.

В следующем параграфе будут приведены несколько конкретных примеров.

2.6.2. Частные случаи анизотропных сред  
Ортотропия (группа симметрии  $m:2:m$ )

Тензоры симметрии  $T_{ijk}^{(2)}$  в главных осях имеют вид

12.83/

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=1 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i1} \delta_{j1} \\
 B_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=2 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i2} \delta_{j2} \\
 C_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=3 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i3} \delta_{j3}
 \end{aligned}
 \tag{2.6.10}$$

Скалярные инварианты ортотропии можно образовать путем свертки  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, \sigma_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 &\sigma_{ij} A_{ij}, \sigma_{ij} B_{ij}, \sigma_{ij} C_{ij}, \sigma_{ij} \sigma_{ke} A_{ik} B_{je}, \\
 &\sigma_{ij} \sigma_{ke} B_{ik} C_{je}, \sigma_{ij} \sigma_{ke} A_{ik} C_{je}, \sigma_{ij} \sigma_{ke} \sigma_{mn} A_{ik} B_{jm} C_{en}.
 \end{aligned}
 \tag{2.6.11}$$

буквой  $\mathcal{Z}$ . Прделая эту операцию слева и справа в (2.6.9) мы получим справа полином от  $C_n$ , поскольку одинаковые индексы встречаются лишь внутри каждого  $\mathcal{J}_n$ . Следовательно,  $C_\gamma = P(C_n)$ , где  $P$  - полином. Теорема доказана полностью. Заметим однако, что согласно доказанному, построенный таким образом базис будет содержать все полиномиально независимые сферические инварианты, но, вообще говоря, кроме них мы получим также некоторые полиномиально зависимые инварианты, от которых можно освободиться лишь после дополнительного анализа.

В следующем параграфе будут приведены несколько конкретных примеров.

2.6.2. Частные случаи анизотропных сред  
Ортотропия (группа симметрии  $m:2:m$ )

Тензоры симметрии  $T_{ij\kappa\rho}^{(\kappa)}$  в главных осях имеют вид

$$\begin{aligned}
 /2.83/ \quad A_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=1 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i1} \delta_{j1} \\
 B_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=2 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i2} \delta_{j2} \\
 C_{ij} &= \begin{cases} 1, & i=j=3 \\ 0, & \text{остальные} \end{cases} = \delta_{i3} \delta_{j3}
 \end{aligned} \tag{2.6.I0}$$

Скалярные инварианты ортотропии можно образовать путем свертки  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, \sigma_{ij}$ :

$$\begin{aligned}
 &\sigma_{ij} A_{ij}, \sigma_{ij} B_{ij}, \sigma_{ij} C_{ij}, \sigma_{ij} \sigma_{\kappa\epsilon} A_{\kappa\epsilon} B_{j\epsilon}, \\
 &\sigma_{ij} \sigma_{\kappa\epsilon} B_{\kappa\epsilon} C_{j\epsilon}, \sigma_{ij} \sigma_{\kappa\epsilon} A_{\kappa\epsilon} C_{j\epsilon}, \sigma_{ij} \sigma_{\kappa\epsilon} \sigma_{mn} A_{\kappa\epsilon} B_{jm} C_{en}.
 \end{aligned} \tag{2.6.II}$$

В главных осях (2.6.II), учитывая (2.6.IO), принимают вид:

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}^2, \sigma_{23}^2, \sigma_{31}^2, \sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} \quad (2.6.I2)$$

Получили известный результат /2.66/. Для построения сферических инвариантов пользуемся согласно построенному алгоритму выражениями (2.6.II), выписанными в произвольной (не главной) координатной системе  $i'..e' = x,y,z$ , причем группируем их по степеням  $\sigma_{i'j'}$ .

а) "геометрические инварианты":

$$A_{zz} = A_{ij} l_{iz} l_{jz} = l_{1z}^2, \quad B_{zz} = l_{2z}^2, \quad C_{zz} = l_{3z}^2 \quad (2.6.I3)$$

(из них только 2 независимы, поскольку  $l_{1z}^2 + l_{2z}^2 + l_{3z}^2 = 1$ ).

б) линейные инварианты

$$A_{i'j'} \sigma_{i'j'} = A_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{11}; \quad B_{i'j'} \sigma_{i'j'} = \sigma_{22}, \quad C_{i'j'} \sigma_{i'j'} = \sigma_{33} \quad (2.6.I4)$$

(это - скалярные инварианты, которые всегда содержатся в сферических инвариантах).

Дальше имеем:

$$\sigma_{i'z} A_{i'z} = A_{ij} l_{i'z} l_{jz} \sigma_{i'z} = l_{1z} l_{1z} \sigma_{i'z}; \quad (2.6.I5)$$

$$\sigma_{i'z} C_{i'z} = l_{3z} l_{3z} \sigma_{i'z}; \quad \sigma_{i'z} C_{i'z} = l_{3z} l_{3z} \sigma_{i'z};$$

$$\sigma_{k'e'} A_{zk'} B_{ze'}; \quad \sigma_{k'e'} A_{zk'} C_{ze'}; \quad \sigma_{k'e'} B_{zk'} C_{ze'}$$

(всего 9 линейных инвариантов).

Однако все 9 инвариантов не являются линейно независимыми.

Это легче усмотреть, если переписать их в осях Ортотропии,

например:

$$\sigma_{k'e'} A_{zk'} B_{ze'} = \sigma_{ij} l_{ik'} l_{j'e'} \cdot A_{mn} l_{mz} l_{nk'} \cdot B_{op} l_{oz} l_{pe'} =$$

$$= \sigma_{ij} l_{ik}' l_{j\ell}' l_{i\ell} l_{k\ell}' l_{\ell z} l_{z\ell}' = \sigma_{ij} \delta_{i\ell} \delta_{j\ell} l_{i\ell} l_{\ell z} = \sigma_{i\ell} l_{i\ell} l_{\ell z}$$

Преобразуем еще один:

$$\begin{aligned} \sigma_{i'z} A_{i'z} &= \sigma_{i'z} l_{i'i'} l_{i'z} = \sigma_{ij} l_{i'i'} l_{j'z} l_{i'i'} l_{i'z} = \sigma_{ij} \delta_{i'i'} l_{j'z} l_{i'z} \\ &= \sigma_{ij} l_{i'z} l_{j'z} = \sigma_{11} l_{1z}^2 + \sigma_{12} l_{1z} l_{2z} + \sigma_{13} l_{1z} l_{3z} \end{aligned}$$

Первое слагаемое - уже выписанный сферический инвариант, второе слагаемое было получено выше, 3 слагаемое получается из инварианта  $\sigma_{k'e'} A_{zk'} C_{ze'}$ . Поэтому этот инвариант не является независимым. Окончательно имеем 6 линейных сферических инвариантов в осях ортотропии:

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12} l_{1z} l_{2z}, \sigma_{13} l_{1z} l_{3z}, \sigma_{23} l_{2z} l_{3z},$$

или сокращенно:

$$\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\alpha, \alpha+1} l_{\alpha z} l_{\alpha+1 z}$$

(По  $\alpha$  не суммируется, сложение в индексах подразумевается по mod 3, например  $3 + 1 = 1$ ).

в) Квадратичные инварианты сразу пишем в сокращенной записи /2.82/.

$$\sigma_{i'j'} \sigma_{k'e'} T_{i'k'}^{(\alpha)} T_{j'e'}^{(\alpha+1)} = \sigma_{\alpha, \alpha+1}^2$$

$$\sigma_{i'z} \sigma_{k'e'} T_{i'k'}^{(\alpha)} T_{ze'}^{(\alpha+1)}; \sigma_{i'j'} \sigma_{ze'} T_{i'z}^{(\alpha)} T_{j'e'}^{(\alpha+1)}; \sigma_{zj'} \sigma_{ze'} T_{j'e'}^{(\alpha)} \quad (2.6.16)$$

В статье /2.82/ были указаны именно эти п.с.и., однако после такого же анализа как выше получаем только следующие независимые п.с.и.

$$\sigma_{\alpha, \alpha+1}^2, \sigma_{\alpha, \alpha+1} \sigma_{\alpha, \alpha+2} l_{\alpha+1 z} l_{\alpha+2 z}$$

т.е. всего 6 квадратичных п.с.и.

2. Наконец имеем один кубический инвариант

$$\sigma_{i'j'} \sigma_{i'k'} \sigma_{j'k'} = \sigma_{ij} \sigma_{ik} \sigma_{jk}, \quad (\text{остальные полиномиально зависимы}).$$

Всего для ортотропного материала имеем два геометрических, девять линейных, 12 квадратичных и один кубический инвариант. Следует отметить, что другой алгоритм построения этих инвариантов для нужд теории локальности деформаций был ранее предложен в /2.85/.

Монокотропное тело, ось симметрии 3 (Группа симметрии  $m \cdot \infty \cdot m$ )

Скалярные инварианты получаем свертками  $\sigma_{ij}$  и  $\delta_{ij}$  и  $\sigma_{ij}$

$$\begin{aligned} \sigma_{i'i'} &= \sigma_{ii}; & \sigma_{i'j'} \sigma_{i'j'} &= \sigma_{ij} \sigma_{ij}; & \sigma_{i'k'} \sigma_{i'j'} \sigma_{k'j'} &= \sigma_{ik} \sigma_{ij} \sigma_{kj} \\ \sigma_{i'j'} \sigma_{i'j'} &= \sigma_{33}, & \sigma_{i'j'} \sigma_{k'e'} \delta_{i'k'} \sigma_{j'e'} &= \sigma_{i3} \sigma_{i3} \end{aligned} \quad (2.6.I7)$$

Остальные основные инварианты выражаются через (2.6.I7) в полиномиальной форме.

Образуем сферические инварианты:

$$\begin{aligned} \text{I) } \sigma_{zz} &= \rho_{zz}^2, & 2) \sigma_{i'i'} &= \sigma_{ii}, & 3) \sigma_{33}, & 4) \sigma_{i'z} \sigma_{i'z} &= \sigma_{i'z} \rho_{i'z} \rho_{z3}, \\ 5) \sigma_{zz}, & 6) \sigma_{i'j'} \sigma_{i'j'}, & 7) \sigma_{i'z} \sigma_{i'z}, & 8) \sigma_{i3} \sigma_{i3} \\ 9) \sigma_{zj'} \sigma_{ze'} \sigma_{j'e'} &= \sigma_{zj'} \sigma_{ze'} \rho_{zj'} \rho_{ze'} \\ \text{IO) } \sigma_{i'z} \sigma_{i'e'} \sigma_{ze'} &= \sigma_{i'z} \sigma_{i'e'} \rho_{z3} \rho_{ze'} \\ \text{II) } \sigma_{ij} \sigma_{ik} \sigma_{jk} & \end{aligned} \quad (2.6.I8)$$

Всего имеем одну геометрическую характеристику, 4 линейные, 5 квадратичных и I кубический инвариант.

Группа  $\infty/\infty \cdot m$  (изотропия).

Эта группа определяется тензором с компонентами  $\delta_{ij}$ .

Базис состоит из 5 полиномиально независимых сферических инвариантов, как было получено раньше в § 2.2.3.

$$\begin{aligned} \sigma_{i'i'} = \sigma_{ii}, \quad \sigma_{i'j'} \sigma_{i'j'} = \sigma_{ij} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{i'j'} \sigma_{i'k'} \sigma_{j'k'} = \sigma_{ij} \sigma_{ik} \sigma_{jk}, \\ \sigma_{z'z'}, \quad \sigma_{z'i'} \sigma_{z'i'} \end{aligned} \quad (2.6.19)$$

"Геометрические" инварианты сводятся к константам.

### 2.6.3 Использование критерия $\max \Pi_z = 1$

#### для анизотропных сред

Также как в § 2.3.1 были построены поверхности прочности в случае простого нагружения изотропного тела посредством квадратичной формы от сферических инвариантов, аналогично можно конструировать поверхности прочности анизотропных тел.

Рассмотрим поверхность прочности для ортотропного материала в случае плоского напряженного состояния. Оси координат  $Ox_i$  совпадают с осями симметрии материала. Имеем  $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{22} \neq 0$ ,  $\sigma_{12} \neq 0$ , остальные  $\sigma_{ij} = 0$ . При этом из (2.6.13) - (2.6.16) остается следующая система сферических инвариантов, образующая полиномиально независимый базис

$$\sigma_{12}^2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \sigma_{12} \sigma_{22}, \sigma_{12}^2, \sigma_{ij} \sigma_{jk} \sigma_{ik} \quad (2.6.20)$$

Составляя линейную и квадратичную форму из обычных инвариантов ортотропного тела  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}^2$  (которые

всегда содержатся в базисе сферических инвариантов ) приходим к критериям прочности Гольденבלата-Копнова, Захарова и условию текучести Хилла для ортотропного материала. Тогда поверхность прочности описывается эллипсом в пространстве напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  ( или эллипсоидом в пространстве  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{12}$  ). При таком подходе в критерии прочности не находят отражение существующие направления разрушения.

Используя в критерии прочности все сферические инварианты (2.6.20), получаем кусочно гладкие поверхности прочности, обобщающие выше перечисленные критерии прочности.

В качестве достаточно гибкого уравнения поверхности прочности анизотропного тела можем использовать уравнение, аналогичное выше использованному условию (2.3.5), с добавлением слагаемых, содержащих  $\sigma_{12}$ , причем члены, которые согласно (2.6.20) являются сферическими инвариантами, умножаем на коэффициенты, подлежащие определению из основных опытов на растяжение, сжатие и сдвиг.

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \left( \sqrt{A_1} \sigma_1 l_{1z}^2 + \sqrt{A_2} \sigma_2 l_{2z}^2 + \sqrt{A_3} \sigma_{12} l_{1z} l_{2z} \right)^2 + \right. \\ & + 4 \left[ B_1 \sigma_1^2 l_{1z}^2 (1 - l_{1z}^2) + B_2 \sigma_2^2 l_{2z}^2 (1 - l_{2z}^2) + \right. \\ & + B_3 \sigma_1 \sigma_2 l_{1z}^2 l_{2z}^2 + B_4 \sigma_{12}^2 (l_{2z}^2 + l_{1z}^2 - 4 l_{1z}^2 l_{2z}^2) \left. \right] + \\ & \left. + C_1 \sigma_1^2 + C_2 \sigma_2^2 - C_3 \sigma_1 \sigma_2 + C_4 \sigma_{12}^2 \right\} = 1; \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

$$\left( A_1, A_2, A_3 = 0 \quad \text{если} \quad \sigma_2 < 0 \right).$$

В качестве простейшего примера для выяснения методики расчета рассмотрим несколько гипотетический случай, когда касательные напряжения не влияют на разрушение. Тогда аналогично как в первом примере § 2.3.1 разрушение развивается по плоскостям, показанным на рис. 2.28а. Согласно этим направлениям разрушения ( $l_{1z} = 1$  или  $l_{2z} = 1$ ), формула (2.6.21) дает следующие уравнения для констант:

$$\begin{aligned} A_1 + C_1 &= \frac{1}{\sigma_1^+{}^2}, & A_2 + C_2 &= \frac{1}{\sigma_2^+{}^2}; \\ C_1 &= \frac{1}{\sigma_1^-{}^2}; & C_2 &= \frac{1}{\sigma_2^-{}^2}; \\ A_1 + C_1 + C_2 + C_3 &= \frac{1}{\sigma_{45}^+{}^2}; & A_2 + C_1 + C_2 + C_3 &= \frac{1}{\sigma_{45}^-{}^2}; \\ C_4 + 4B_4 &= \frac{1}{\sigma_{12}^+{}^2} \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Здесь  $\sigma_1^+$ ,  $\sigma_2^+$ ,  $\sigma_1^-$ ,  $\sigma_2^-$ ,  $\sigma_{12}^+$ ,  $\sigma_{45}^+$ ,  $\sigma_{45}^-$  — величины прочности при соответствующих видах нагружений, показанных на рис. 2. 8а. Видно, что коэффициенты  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  в этих опытах не определяются. Однако требование, чтобы выражение (2.6.21) имело максимальное значение по направлениям, указанным на рис.2.18, приводит к условию, что  $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0$ . От величины  $A_3$  поверхность прочности в данном случае не зависит и его тоже полагаем равным нулю.

Окончательно условие прочности имеет вид:

$$\begin{aligned} \max & \left[ (\sqrt{A_1} \sigma_1 l_{1z}^2 + \sqrt{A_2} \sigma_2 l_{2z}^2)^2 + C_1 \sigma_1^2 + C_2 \sigma_2^2 - C_3 \sigma_1 \sigma_2 + \right. & (2.6.23) \\ & \left. + C_4 \sigma_{12}^2 \right] = 1, \\ & (A_1 = A_2 = 0, \text{ если } \sigma_2 \leq 0) \end{aligned}$$

Где коэффициенты определяются из системы (2.6.22):

$$A_1 = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2}; \quad A_2 = \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}; \quad C_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}; \quad C_2 = \frac{1}{\sigma_2^2};$$

$$C_3 = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}; \quad C_4 = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \quad (2.6.24)$$

При этом должно удовлетвориться следующее условие:

$$\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} - \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \quad (2.6.25)$$

которое аналогично условию совместности в теории прочности Гольденблатта-Копнова.

Поверхность прочности в пространстве  $\sigma_1, \sigma_2$  получается пересечением трех эллиптических дуг, соответствующих направлениям разрушения  $\ell_{1z} = I$  и  $\ell_{2z} = I$ :

$$(A_1 + C_1) \sigma_1^2 + C_2 \sigma_2^2 - C_3 \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

$$(A_2 + C_2) \sigma_2^2 + C_1 \sigma_1^2 - C_3 \sigma_1 \sigma_2 = 1 \quad (2.6.26)$$

$$C_1 \sigma_1^2 + C_2 \sigma_2^2 - C_3 \sigma_1 \sigma_2 = 1$$

Вид полученной поверхности прочности показан на рис. 2.186.

Аналогично исследуются случаи, когда разрушение вызывается касательными напряжениями и направления разрушения не совпадают с плоскостями симметрии. При этом  $\beta_i \neq 0$  и анализ значительно усложняется.

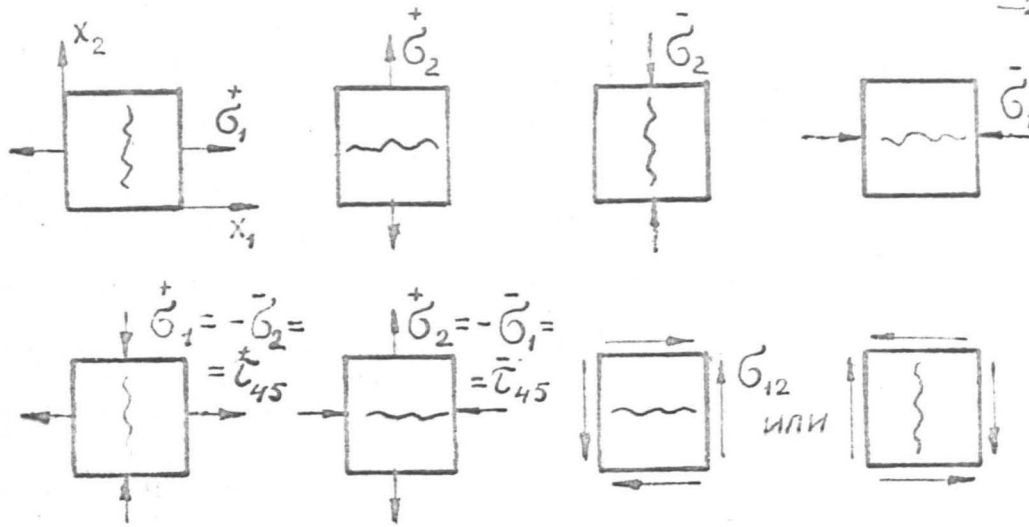


Рис. 2.28а Возможные направления разрушения хрупкого анизотропного тела. Направления осей ортотропии совпадают с направлениями сторон квадратов.

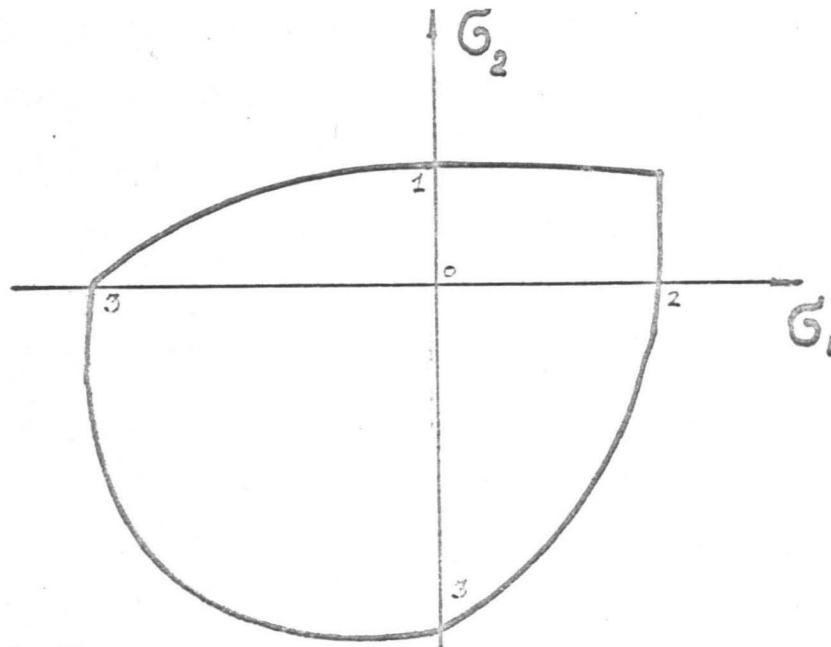


Рис. 2.28б Кривая прочности хрупкого анизотропного

тела со следующими значениями прочности

$$\frac{\sigma_1^+}{\sigma_2^+} = 2; \quad \frac{\sigma_1^-}{\sigma_2^-} = \frac{\sigma_2^-}{\sigma_1^-} = 3; \quad \frac{\tau_{45}^+}{\sigma_2^+} = 1,6.$$

## 2.7 Краткое резюме результатов II главы

1. Предложена феноменологическая теория прочности, основанная на концепции учета дисперсных, разным образом ориентированных повреждений. Поврежденность окрестности точки характеризуется функцией на сфере. Аналогом в теории пластичности для предложенного варианта являются статистические теории пластичности. Рассмотренный вариант теории усталости и длительной прочности дает принципиальную возможность учета влияния сложного нагружения на процесс усталости и разрушения. Предложенный подход позволяет предсказать направление разрушения в случае сложного напряженного состояния по исходным данным, полученным при простейших испытаниях.

2. Показано, что ряд других теорий прочности (теории кратковременной прочности, теории прочности Афанасьева, теория прочности С. Волкова, теория Хсиао) охватываются предложенным подходом. На основе рассмотренных положений возможно уточнение и развитие существующих теорий прочности.

3. Даны примеры расчета поверхностей равнодлительной прочности в случае сложного напряженного состояния и времени разрушения в случае сложного нагружения.

4. Дан пример расчета усталостной прочности при неоднородном напряженном состоянии, с учетом перераспределения напряжений вследствие изменения деформативных свойств в процессе утомления и с учетом распространения фронта разрушения.

5. Установлена связь функции на сфере и симметричных тензоров высших рангов. Показано, что функция на сфере сколь

угодно точно аппроксимируется двумя тензорами достаточно высокого ранга. В случае центрально симметричных функций, используемых нами, в аппроксимации участвуют лишь тензоры четного ранга. Приведены примеры соответствия функций тензорам и наоборот.

6. Установлены операторы, действующие из множества симметричных тензоров второго ранга в множество центрально симметричных скалярных функций на сфере. Эти операторы установлены для анизотропных сред, путем введения понятия сферических полиномиальных инвариантов. Приведен пример расчета прочности анизотропного тела, с использованием предложенной теории. Показано, что критерий прочности Гольденבלата - Кошнова, Захарова и др. не противоречит рассмотренному подходу определения поверхности прочности.

## ГЛАВА 3.

РАЗРУШЕНИЕ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СКОРОСТНОМ  
РАСТЯЖЕНИИ3.1. Постановка задачи и методика испытаний.3.1.1. Постановка задачи.

Если разрушение есть временный процесс, состоящий из множества отдельных актов разрыва связей, описываемого некоторым кинетическим уравнением накопления повреждений, то на основе этого уравнения должна иметь место принципиальная возможность сопоставления различных режимов нагружения (циклического, с постоянной скоростью деформации, под постоянным напряжением и при сложном напряженном состоянии). В предыдущей главе был разработан математический аппарат, посредством которого можно описать процесс разрушения при сложном напряженном состоянии и сложном нагружении, по результатам опытов на простые виды нагружения (растяжение, сжатие, кручение). При этом нагружение во всех опытах, а также рассчитываемые режимы должны иметь одинаковый характер во времени (например, постоянное напряжение или циклическое нагружение с определенной асимметрией). Другая проблема, — рассчитать разрушение при одном режиме нагружения, по данным, полученным в другом режиме. Эта проблема (для металлов) в литературе обсуждена больше, чем предыдущая (сложное напряженное состояние). Фактически все опыты при так называемом программном нагружении преследуют цель пересчета процесса разрушения от одного вида нагружения к другому. Перечислить все работы этого направления нет необходимости, дос-

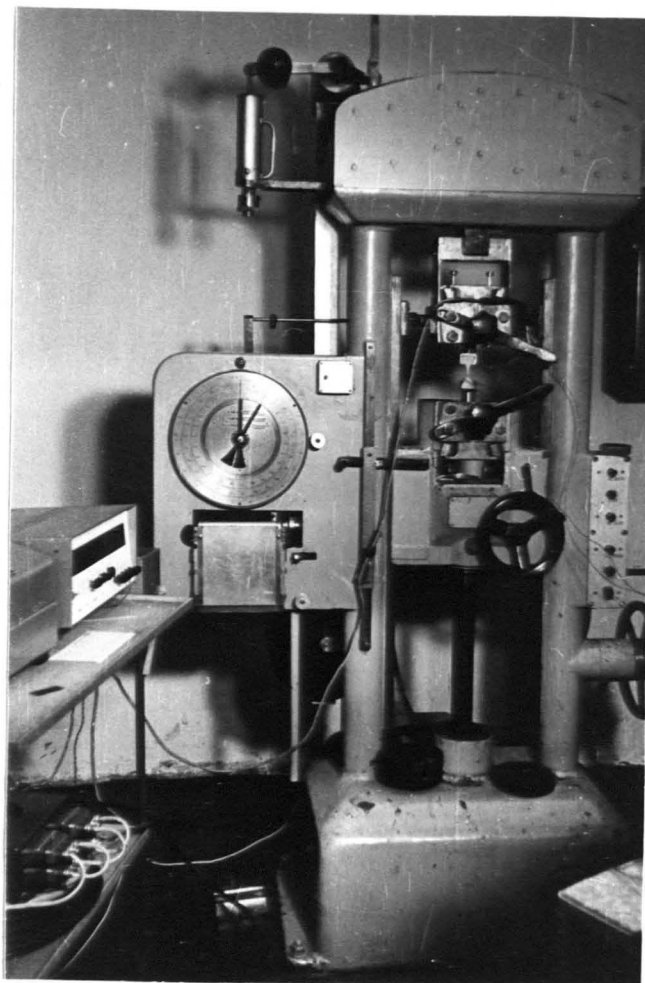


Рис. 3.1.

Общий вид установки УМ-5 для  
статических испытаний.

таточно полная библиография приведена в трудах С.В.Серенсена, Р.М.Шнейдеровича /3.1/, Григорьева /3.2/. Однако, данная проблема до конца не решена (особенно для полимеров), поскольку для разных групп материалов, а также разных видов нагружения, получаются свои особенности разрушения, что не позволяет применить одинаковый подход пересчета для всех случаев.

В настоящей главе сопоставляется прочность и долговечность при динамическом и статическом нагружении для стеклопластиков, а также для мягких полимеров, способных ориентироваться во время нагружения. Кроме теоретического расчета приведена методика высокоскоростных испытаний и результаты экспериментов.

### 3.1.2. Методика статических испытаний на одномерное растяжение и выбор формы образцов.

Универсальной испытательной машины, на которой можно было бы проводить испытания в широком диапазоне скоростей / $10^{-3}$  -  $10^2$  сек<sup>-1</sup>/ по единой методике, не существует, поэтому исследования проводились на двух различных установках /разрывная машина УМ-5 и копер РС0/, а также в некоторых случаях на пневматическом копре.

Растяжение образцов в диапазоне малых скоростей проводилось на стандартной разрывной машине УМ-5, рис. 3.1.

Растяжение образцов на указанной машине осуществляется подвижным захватом, связанными с ходовым винтом. Измерение статических деформаций стеклопластика производились при помо-

ши двух тензометрических датчиков расположенных на противоположных сторонах образца, и регистрировались на цифровом тензометрическом мосте ЦТМ-3. Регистрация силы осуществлялась по показаниям рычажного силоизмерителя установки УМ-5 и отмечалась на бумажной ленте печатающего устройства ЦТМ-1 поворотом специальной ручки.

Размеры и форма образцов выбиралась такой, чтобы можно было бы проводить испытания во всем диапазоне скоростей деформации на образцах обной формы.

Если в области малых скоростей деформирования существующие испытательные машины позволяют применять образцы любых размеров, то в области больших скоростей деформирования этот выбор весьма ограничен. Поэтому размеры и форму образцов надо определять, учитывая конструктивные особенности машин для высокоскоростного нагружения - в данном случае ротационного копра РС0 (см. следующий § 3.1.3), а также особенности материала.

По методикам динамического деформирования полимерных материалов имеется существенно меньше рекомендаций о форме и размерах образцов по сравнению с используемыми в статических испытаниях, сведения о которых можно найти в справочном пособии /3.3/.

Согласно инструкции, на копре РС0 можно испытывать на растяжение образцы, длина которых с захватами не превышает 120 мм. Учитывая длину захватов, максимальная длина образца ограничена 75 мм, а поперечные сечения и база измерений для разных материалов определялась с учетом максимальной мощности копра РС0 (сила нагружения  $< 2$  тонн).

Поэтому пришлось применять образцы из стеклопластика с поперечным сечением меньше рекомендуемого в статических режимах, что может внести погрешности в измерения модуля и прочности.

Форма образца из стеклопластика показана на рис. 3.2. Образцы вытачивались на фрезерном станке, чистота поверхности в пределах  $\nabla 7$ . Выбранная форма образцов обеспечила разрушение их в пределах измерительной базы (рис. 3.2 б).

Образцы из термопластичных полимеров - полиэтилена и фторопласта изготавливались на токарном станке и имели резьбу для закрепления в захватах (рис. 3.3). В этом случае деформации измерялись по перемещению активного захвата.

### 3.1.3. Методика скоростных испытаний при одномерном растяжении

#### а) Установка для скоростного растяжения.

Для высокоскоростного растяжения применяется ротационный копер РС0 завода "ФЕБ Веркштофпрюфмашинен" гор. Лейпциг (рис. 3.4).

Один конец образца закрепляется в захвате совмещенном с динамометром машины, на другой конец надевается специальная наковальня (подвижный захват), по которой производится удар.

При испытаниях на растяжение диск копра разгоняется электродвигателем до необходимой скорости и по сигналу из него

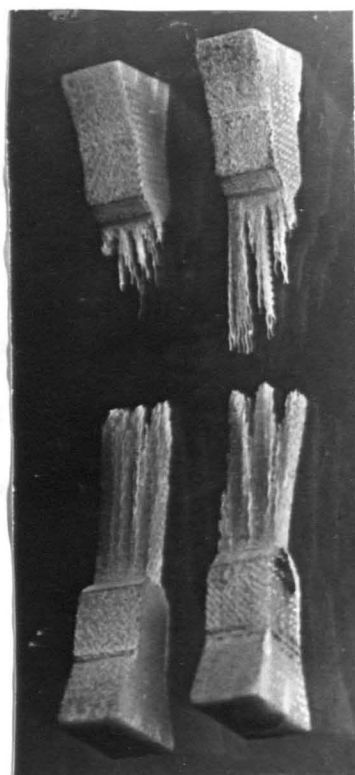
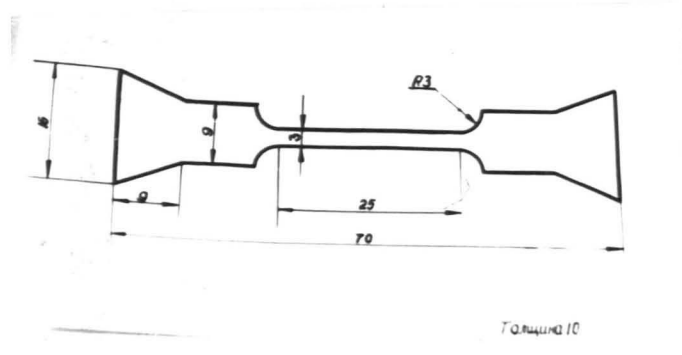


Рис. 3.2.

- а) форма образца из стеклопластика.  
б) вид разрушения образца.

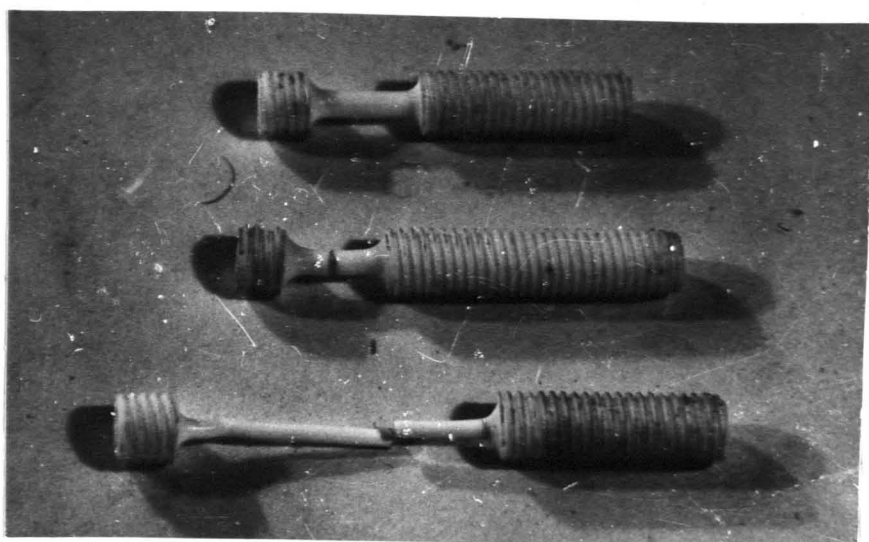


Рис. 3.3.

Образцы из фторопласта .

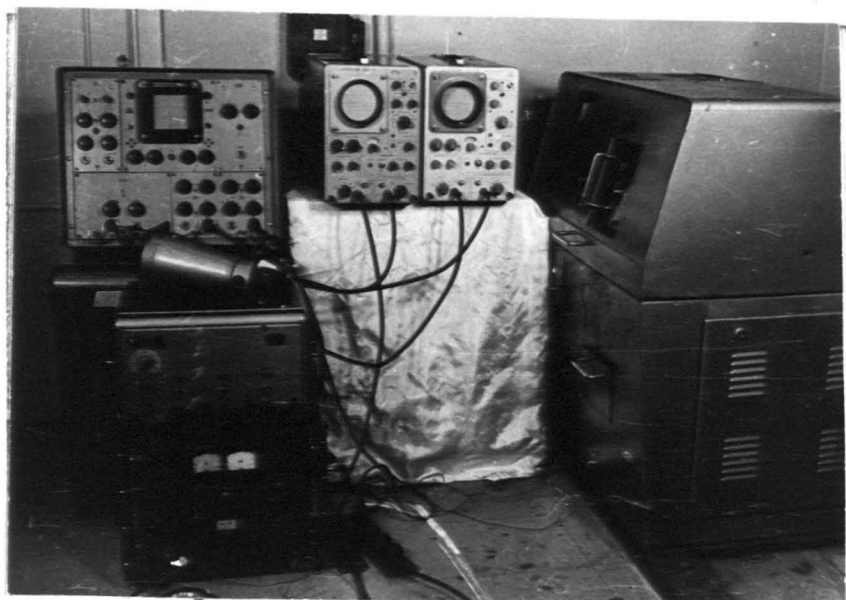


Рис. 3.4.  
Общий вид копра РС0 с измерительной аппаратурой.

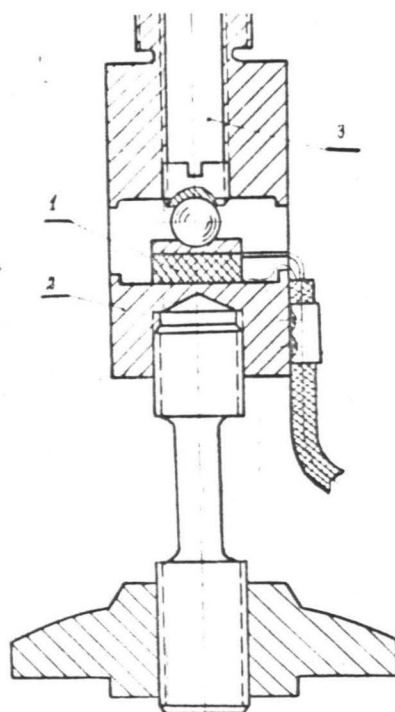


Рис. 3.5.  
Схема пьезоэлектрического динамометра.

выбрасывается зуб, который увлекает наковальню и образец. Скорость удара на установке от 2,5 до 50 м/сек. Вследствие большой энергии ротора копра скорость растяжения практически постоянна. Для исключения изгиба образец подвешен к динамометру шарнирно. Скорость удара определяется по электрическому напряжению, создаваемому таходинамо, соединенным с валом ротора.

б) Регистрация зависимости "деформация - время".

В копре РС0 предусмотрено измерение деформаций образца путем фиксирования положения активного захвата с помощью фотоэлемента. Опыт нашей лаборатории показал, что такой вид измерения деформаций не допустим для жестких композитных материалах, когда жесткость захвата сравнима с жесткостью образца. Поэтому для таких материалов деформация образца во время испытания регистрировалась при помощи тензодатчика, наклеенного циакриновым клеем на поверхность рабочей части образца. Применялись проволочные или фольговые тензодатчики с базой 5 и 10 мм. Тензодатчик подключается на вход тензометрического прибора Т-II м по потенциометрической схеме. Полоса пропускания частот прибора Т-II м от 5 гц до 50 кгц.

Потенциометрическая схема подключения тензодатчиков позволяет перед каждым испытанием произвести электрическую тарировку их стабилизированными по амплитуде прямоугольными импульсами.

Усиленный прибором Т-IIм сигнал тензодатчика подается

на вход однолучевого запоминающего осциллографа СІ-29.

Для образцов (рис. 3.3) из гомогенных полимерных материалов деформации измерялись стандартным заводским методом (с помощью фотоэлемента).

в) Регистрация зависимости "сила - время".

Для регистрации нагрузок в комплекте копра предусмотрен пьезоэлектрический динамометр, который размещается на неподвижной жесткой станине. По многочисленным экспериментам было установлено, что комплектный динамометр копра не пригоден для измерений быстропротекающих процессов, поскольку его собственная частота  $\approx 16$  кгц, что ограничивает скорости удара до  $2 \div 4$  м/сек. Поэтому нами был использован разработанный в лаборатории /3.4/ пьезоэлектрический динамометр /рис. 3.5/. Пьезокристалл / 1 / вставлен в окно, профрезерованное в упругом элементе, совмещенном с захватом / 2 /, и предварительно поджат винтом / 3 /. При растяжении образца деформация упругого элемента разгружает предварительно поджатый пьезоэлемент вызывая в нем ЭДС, фиксируемую на осциллографе. Данный динамометр имеет собственную частоту  $\approx 120$  кгц, что позволяет получать неискаженные собственными колебаниями динамометра осциллограммы процесса деформирования.

г) Регистрация процесса удара в координатах "сила - деформация".

В ряде случаев целесообразно определять совместно с за-

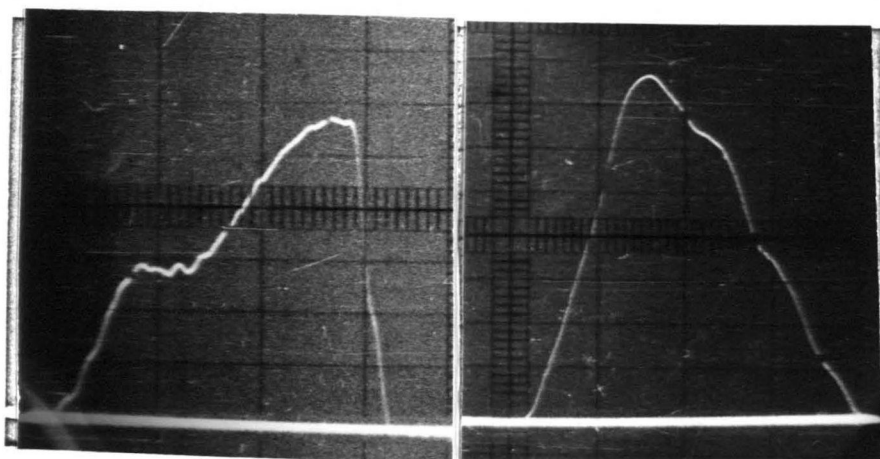


Рис. 3.6.

Характерные осциллограммы на копре РС0:  
а) скорость удара 5 м/сек (по основе),  
б) скорость удара 25 м/сек (по утку).  
(стеклотекстолит ЭФС)

зависимостью "деформация - время" зависимость "сила - деформация". Это приводит к следующим преимуществам:

- 1) без дополнительной обработки опытных данных можно судить о виде кривой деформирования материала;
- 2) простота определения модуля упругости материала.

Выше указанную зависимость легко получить, если в осциллографе, регистрирующем зависимость "сила - время", развертку по времени заменить разверткой по деформации. Это достигается путем отключения горизонтальных пластин трубки осциллографа от усилителя развертки и подключением их к вертикальным пластинам осциллографа, регистрирующего зависимость "деформация - время". На рис. 3.6. показаны типичные осциллограммы "сила - деформация", полученные из изучаемого стеклотекстолита ЭФС.

### 3.2. Сопоставление длительной и кратковременной прочности стеклопластика

Хорошо известна зависимость предела прочности металлов от скорости деформации, предложенная Людвигом

$$\sigma_e = a + b \lg \dot{\epsilon} \quad (3.1)$$

Этой зависимости подчиняется предельная прочность многих жестких полимерных материалов. В статье /3.5/ такая зависимость нами подтверждена для полиформальдегида, аналогичное поведение наблюдается и для исследуемого нами материала - стеклопластика ЭФС. Результаты опытов показаны на рис. 3.7. Отдельные точки соответствуют средним значениям 5-10 испытаний при разных скоростях растяжения. Средняя точка при скоростях деформирования  $\dot{\epsilon} = 5$  Г/сек получена на пневматическом копре, а соответствующая методика испытаний изложена в статье /3.5/.

Длительная прочность стеклопластика при средних временах разрушения хорошо аппроксимируется прямой в полулогарифмических координатах (рис. 3.8). Эти результаты были получены на образцах, идентичных образцам для усталостных испытаний, поскольку по ним была проведена также корреляция между длительной статической прочностью и усталостной долговечностью (глава 4).

Для описания длительной прочности можно воспользоваться формулой кинетической теории прочности:

$$\tau = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \sigma \tau}{KT} \quad (3.2)$$

хотя физический смысл коэффициентов  $\tau_0$ ,  $u_0$ ,  $\gamma$  для композита не ясен, и использование формулы (3.2) вместо формулы

$$\tau = A \exp(-\alpha \sigma) \quad (3.3)$$

имеет лишь то преимущество, что в формуле (3.2) в явном виде входит температура, что будет использовано в главе 4 при сравнении статического нагружения с циклическим в условиях разогрева.

Для определения коэффициентов (3.2) по кривой  $\sigma \sim \lg \tau$  (рис. 3.8) для  $\tau_0$  принимается некоторое значение ( $10^{-11} \div 10^{-13}$  сек), а  $u_0$  и  $\gamma$  определяются по двум точкам ( $\sigma_1$ ,  $\lg \tau_1$ , и  $\sigma_2$ ,  $\lg \tau_2$ ) на экспериментальной прямой /3.6/.

При этом получаем выражение для  $\gamma$  и  $u_0$ :

$$\gamma = \frac{kT}{\lg e} \frac{\lg \tau_2 - \lg \tau_1}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (3.4)$$

$$u_0 = \gamma \left[ \frac{\lg \tau_2 - \lg \tau_0}{\lg \tau_2 - \lg \tau_1} (\sigma_1 - \sigma_2) + \sigma_2 \right]$$

Учитывая, что  $T = 293^\circ \text{K}$ , а постоянная Больцмана  $k = 1,4 \cdot 10^{-21}$  кгс.мм/град, принимая  $\tau_0 = 10^{-12}$  сек и используя точки  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , показанные на рис. 3.8, получаем для статического испытания стеклотекстолита:  $\gamma = 1,28 \cdot 10^{-18}$  мм<sup>3</sup> и  $u_0 = 3,79 \cdot 10^{-17}$  кгс/мм, а используя число Авогадро  $N = 6,02 \cdot 10^{23}$  л/моль, получаем значение для  $u_0 N$  в размерностях, привычных для кинетической теории прочности  $u_0 N = 3,79 \cdot 10^{-17} \cdot 9,8 \cdot 10^{-3}$  Дж.  $N = 3,79 \cdot 10^{-17} \cdot 9,8 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10^{-3}}{4,187} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}$  ккал/моль = 53,5 ккал/моль.

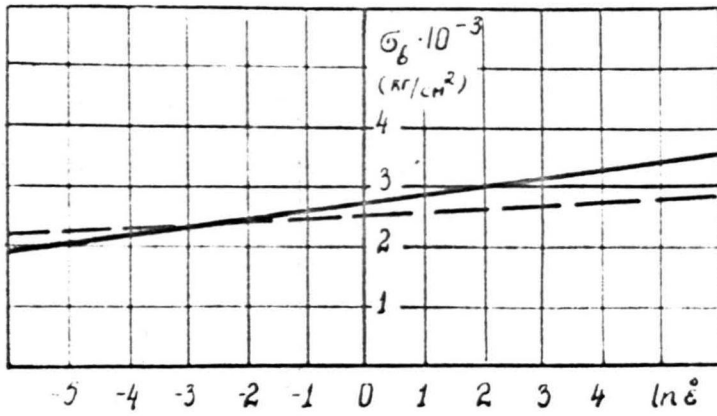


Рис. 3.7.

Прочность стеклопластика ЭФС в зависимости от скорости нагружения (пунктирная линия — теоретический расчет).

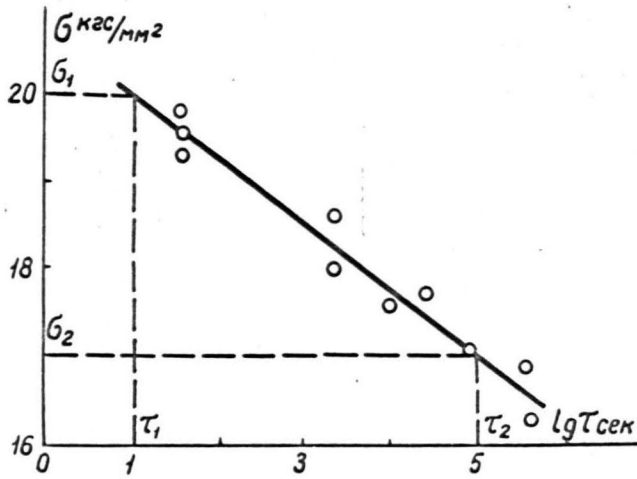


Рис. 3.8.

Прочность стеклопластика ЭФС в зависимости от времени нагружения при постоянной нагрузке.

Закон линейного суммирования повреждений (I.5.8) в режиме нагружения  $\dot{\sigma} = const$  предсказывает линейное увеличение предела прочности с возрастанием логарифма скорости нагружения (3.1) если статическая долговечность определяется зависимостью (3.3). Представляет интерес количественное сравнение экспериментальных и предсказанных результатов.

Учитывая, что для стеклопластика см.рис. 3.6 вплоть до разрушения зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  приблизительно линейна, будем расчет вместо  $\dot{\varepsilon} = const$  вести для режима  $\dot{\sigma} = const$ , т.е.  $\sigma = \dot{\sigma} t$ .

Используя формулы (3.2) и (I.5.8) получим:

$$\int_0^{t_p} \frac{dt}{\tau_0 \exp \frac{u_0 - \gamma \dot{\sigma} t}{kT}} = 1 \quad (3.5)$$

откуда предельная прочность  $\sigma_e = \dot{\sigma} t_p$  при растяжении с  $\dot{\sigma} = const$  определится:

$$\sigma_e = \frac{kT}{\gamma} \ln \left( 1 + \frac{\tau_0 \gamma \dot{\sigma} \exp \frac{u_0}{kT}}{kT} \right) \quad (3.6)$$

Второе слагаемое, для коэффициентов  $u_0$  и  $\gamma$ , определенных выше, существенно больше единицы, поэтому

$$\sigma_e = m + n \ln \dot{\sigma}, \quad \text{где} \quad (3.7)$$

$$m = \frac{u_0}{\gamma} + \frac{kT}{\gamma} \ln \frac{\tau_0 \gamma}{kT}; \quad n = \frac{kT}{\gamma}$$

Подстановка значений коэффициентов  $\tau_0$ ,  $u_0$  и  $\gamma$  в (3.7) дает  $\sigma_e = 21 + 0,33 \ln \dot{\sigma} / \text{кгс/мм}^2$ . Принимая, что во время нагружения имеем  $\dot{\sigma} = E \dot{\varepsilon}$  и учитывая, что  $E = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/мм}^2$

получаем окончательно  $\bar{\sigma}_e = 23,5 + 0,33 \ln \dot{\epsilon}$  /кгс/мм<sup>2</sup>/. Эта прямая на рис. 3.7 нанесена пунктиром.

Расчет согласно линейному закону накопления повреждений предсказывает меньшее увеличение предела прочности в зависимости от скорости деформации по сравнению с наблюдаемым экспериментально.

Расхождение между расчетной и экспериментальной прочностью частично может быть вызвано также различием в форме образцов, применяемых при скоростном и длительном статическом нагружении.

При растяжении идентичных образцов (форма которых показана на рис. (I.7) со скоростью нагружения  $\ln \dot{\sigma} = - 2,3$  (время нагружения 180-200 сек) было получено значение статической прочности  $\bar{\sigma}_e = 20,4$  кгс/мм<sup>2</sup>, что хорошо совпадает с рассчитанным значением  $\bar{\sigma}_e = 20,3$  кгс/мм<sup>2</sup>. (Соответствующие статические кривые  $\sigma(\epsilon)$  приведены в четвертой главе).

### 3.3. Разрушение ориентирующихся материалов при растяжении /3.8/

#### 3.3.1. Результаты экспериментальных исследований и постановка задачи.

Для мягких полимеров зависимость прочности от скорости нагружения может быть существенно сложнее, чем наблюдаемое для стеклопластика и не всегда описывается формулой Людвиг (3.1). В книге В.Е. Гуля /3.10/ подробно проанализированы отклонения от этой зависимости для кристаллизирующихся эластомеров, полиэтилена и полипропилена. При этом наблюдаются кривые с минимумом (рис. 3.9) или же прочность оказывается убывающей, если диапазон изменения скоростей недостаточно широк (рис. 3.10). Нами были испытаны образцы из фторопласта - 4 по выше описанной методике и получены аналогичные результаты, показанные на рис. 3.11. Видно, что в то время как условное напряжение, измеряемое величиной силы на захвате, незначительно растет со скоростью нагружения, истинное напряжение имеет резко выраженный немонотонный характер. (Истинное поперечное сечение образца при разрушении измерялось непосредственно после разрыва, а при статическом нагружении также во время опыта). В диапазоне скоростей, где наблюдается уменьшение истинного разрушающего напряжения, происходит также резкое уменьшение предельной деформации с 200 ÷ 300% до 10 ÷ 20% (рис. 3.12). Отметим, что вытягивание в шейку у данного полимера не происходит скачкообразным появлением шейки в одном месте с последующим распространением ее вдоль образца, как у

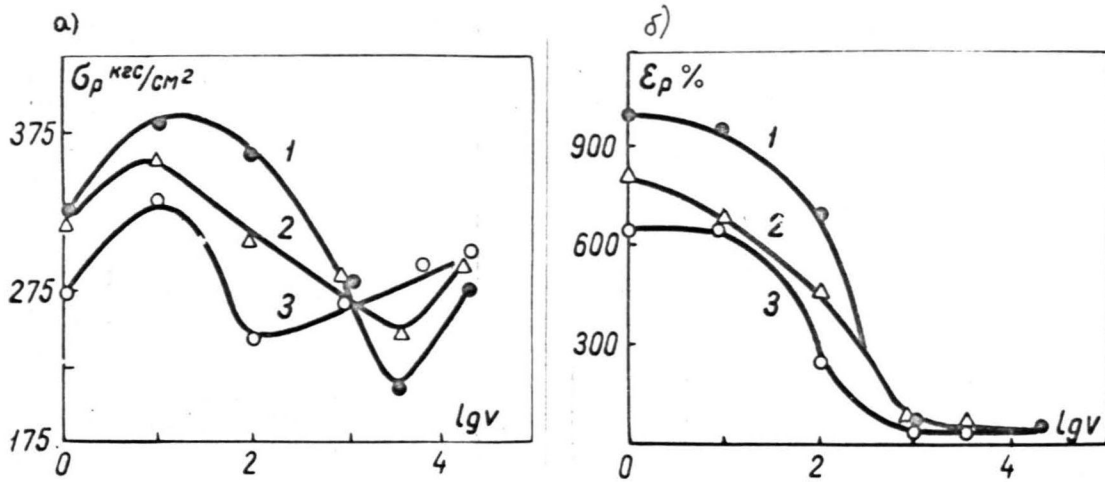


Рис. 3.9.

а) Зависимость разрушающего напряжения;  
 б) и относительного удлинения при разрыве образцов полипропилена трех структур от скорости деформации (температура  $25^\circ\text{C}$ ): 1 - закаленный; 2 - прессованный; 3 - отожженный [3.10]

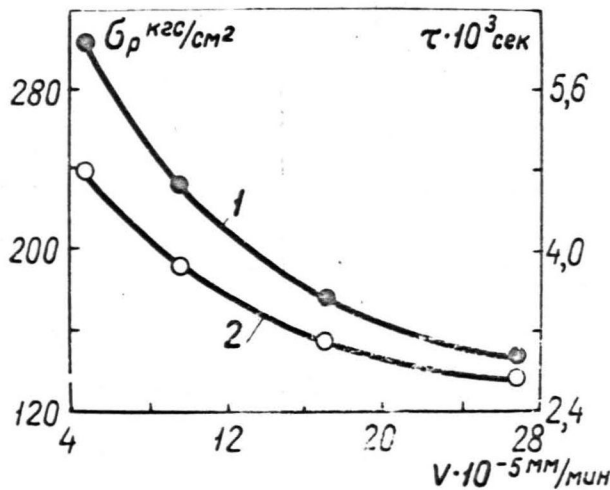


Рис. 3.10.

Зависимость характеристик прочности полиэтилена от скорости деформации при  $18^\circ\text{C}$ : 1 - разрушающее напряжение; 2 - время до разрушения [3.10]

полиэтилена, а постепенным равномерным сужением поперечного сечения всего образца в процессе растяжения.

Известно, что прочность ориентированного полимера может значительно превзойти прочность неориентированного материала.

В работе /2.15/ Хсиао показал, что его модель разрушения предсказывает шестикратное увеличение прочности при полной ориентации линейного полимера.

Поэтому для описания разрушения и аномальной прочности выше рассмотренных полимеров можно предложить следующую схему: разрушение связей происходит по некоторому кинетическому закону одновременно с их ориентацией. При достаточно медленной скорости деформирования материал успевает полностью сориентироваться в начале нагружения и зависимость прочности от скорости нагружения в этом диапазоне аналогична таковой для ориентированного материала. В переходной области скорость разрушения и ориентации сравнимы, а при высоких скоростях материал разрушается почти хрупко, не успевая вытягиваться и получить ориентацию.

В литературе имеется несколько попыток описать процесс ориентации и повреждаемости. В работе /3.1.1/ рассматривалась модель разрушения ориентирующегося полимера с учетом двух процессов: ориентации и накопления повреждений, причем принималось, что оба эти процесса протекают независимо друг от друга. Модель Хсиао, описывающая разрушение ориентированных полимеров, была подробно рассмотрена в главе 2.

В этом параграфе, следуя модели Хсиао, рассмотрим процесс

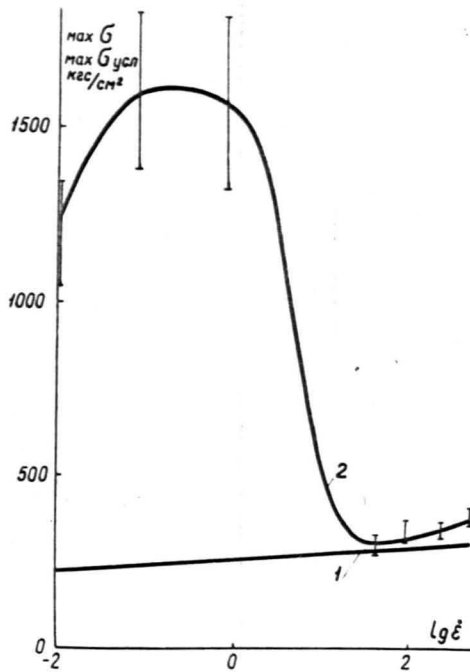


Рис. 3.11.

Экспериментальная зависимость 1 -  $\max \sigma_{уст}$ ; 2 -  $\max \sigma$  от скорости деформирования для фторопласта-4. На графике 2 вертикальными линиями обозначен 90% доверительный интервал.

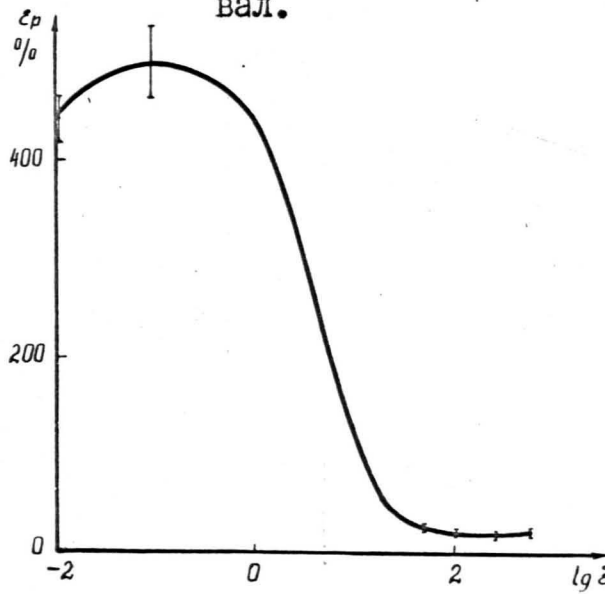


Рис. 3.12.

Экспериментальная зависимость предельных деформаций от скорости деформирования для фторопласта-4.

разрушения вместе с одновременно протекающей ориентацией материала. Покажем, что даже такая предельно идеализированная модель дает объяснение экспериментально наблюдаемым аномальным зависимостям предела прочности и предельной деформации от скорости деформирования.

### 3.3.2. Расчетная модель разрушения ориентирующихся полимеров

а) Сформулируем основные положения и зависимости.

Модель материала принимаем такую же как в работе /2.15/, т.е. в виде хаотически направленных, упругих линейных элементов. В результате деформации эти элементы ориентируются поворачиваясь и проскальзывая друг относительно друга.

I. Введем плотность распределения линейных элементов по направлениям  $\varrho(\theta, \varphi)$ . Для этого выделим в материале микрообъем, который включает достаточное количество элементов. Выделим направление  $z$  (см.рис. 3.13) и вокруг него малый пространственный угол  $d\Omega$ . Количество элементов в пределах этого угла обозначим  $dn$ , а общее количество элементов в микрообъеме через  $N$ , тогда:

$$\varrho = \frac{dn}{N d\Omega} \quad (3.8)$$

Причем

$$\int_{\Omega} \varrho d\Omega = 1 \quad (3.9)$$

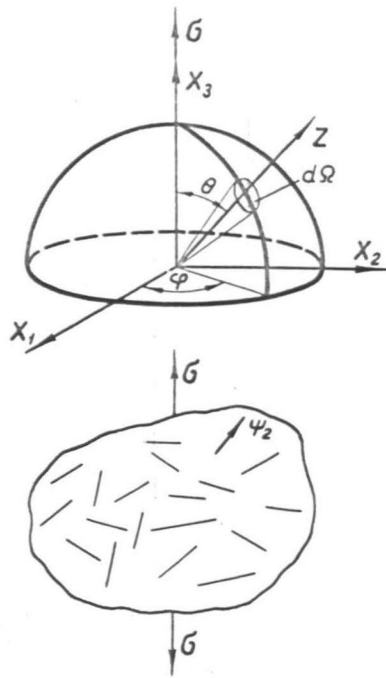


Рис. 3.13.

К построению модели разрушения ориентирующихся полимеров.

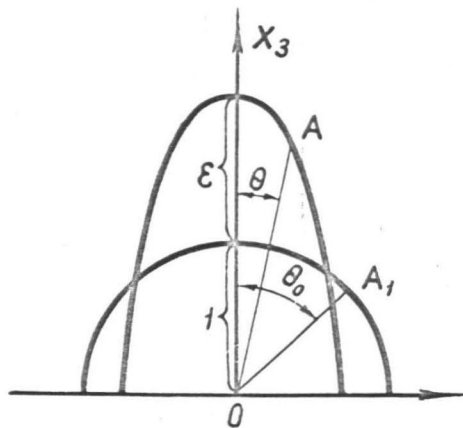


Рис. 3.14.

К определению зависимости  $\zeta(\theta)$  в зависимости от степени деформации.

Для неориентированного материала плотность связей  $\rho_0$  по всем направлениям одинакова и из (3.9) следует, что  $\rho_0 = \frac{1}{2\pi}$ . Аналогично введем локальную повреждаемость  $\Pi_z$  как отношение разрушенных элементов к общему числу элементов заключенных в телесный угол  $d\Omega$ . Очевидно, что  $0 \leq \Pi_z < 1$ .

б) Применительно к нашей задаче уравнение неразрывности для связей в переменных Эйлера /3.12/ запишется в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0 \quad (3.10)$$

где  $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$ ;  $\bar{\omega}$  - вектор угловой скорости поворота элементов вследствие деформации;  $\bar{r}$  - радиус-вектор,

Однако, если мы рассматриваем разрушение, то мы должны рассматривать разрушенные и неразрушенные элементы как двухфазную систему с переходом одной фазы в другую. Тогда, кроме уравнения (3.10) для всей системы, мы должны рассмотреть уравнение неразрывности для одной фазы (например для разрушенных элементов, имеющих плотность  $\rho \Pi$ ).

Применительно к нашей задаче уравнение неразрывности для разрушенных элементов имеет вид:

$$\frac{\partial(\rho \Pi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \Pi \bar{v}) = \rho \frac{\delta \Pi}{\delta t} \quad (3.11)$$

где  $\frac{\delta \Pi}{\delta t}$  - обозначает скорость образования разрушенных элементов. Умножая (3.10) на  $\Pi$  и вычитая уравнение (3.11) получим зависимости для  $\Pi$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \bar{v} \operatorname{grad} \Pi = \frac{\delta \Pi}{\delta t} \quad (3.12)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать растяжение в направлении оси  $X_3$  (см. рис. 3.14). Для этого случая  $z$  и  $\Pi$  не будут зависеть от  $\varphi$  и уравнение (3.12) переписется в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \omega = \frac{\delta \Pi}{\delta t} \quad (3.13)$$

Выведем геометрические зависимости распределения плотности элементов от деформации и угловой скорости поворота элементов  $\omega$  от скорости деформации.

Предварительно оговорим, что полная деформация  $\varepsilon$  складывается из упругой деформации  $\varepsilon_y$  и деформации, связанной с ориентацией, которую для краткости назовем пластической деформацией  $\varepsilon_n$ . Как пластическая деформация, так и упругая, определяются по отношению к недеформируемому телу. Считаем, что пластическое деформирование протекает без изменения объема, а при упругом деформировании существует линейная зависимость между объемом материала  $V$  и упругой деформацией, отнесенной к пластически деформированному состоянию:

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{K \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_n} \right) \quad (3.14)$$

где  $V_0$  — первоначальный объем материала,

$K$  — постоянная, связанная с коэффициентом Пуассона для малых упругих деформаций  $\mu$  соотношением

$$K = 1 - 2\mu \quad (3.15)$$

Рассмотрим деформацию единичного куба. Согласно (3.14) имеем:

$$(1 + \varepsilon) e^z = 1 + \frac{K \varepsilon_y}{1 + \varepsilon_n}$$

откуда следует, что поперечный размер  $\ell$  единичного куба после деформации равен:

$$\ell = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_n + k \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_n)}} \quad (3.16)$$

Теперь можем непосредственно приступить к выводу геометрической зависимости распределения плотности элементов от деформации (см. рис. 3.14).

Рассмотрим перемещение элементов, заключенных в телесный угол  $d\Omega = \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi$  вокруг точки  $A$ . В результате деформации эти элементы попадут в телесный угол  $d\Omega_1 = \sin \theta d\theta d\varphi$  вокруг точки  $A_1$ . Из этого следует, что

$$\rho_0 \sin \theta_0 d\theta_0 d\varphi = \rho(\theta) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (3.17)$$

Напомним, что  $\rho_0$  - плотность распределения элементов недеформированного материала и равна  $\frac{1}{4\pi}$ .

Из последнего соотношения следует:

$$\rho(\theta) = \rho_0 \frac{\sin \theta_0 d\theta_0}{\sin \theta d\theta} \quad (3.18)$$

Чтобы найти уравнение поворота элементов в лагранжевых координатах заметим, что в достаточно малом объеме конечные деформации  $\varepsilon$  сводятся к аффинному преобразованию. Поэтому точка  $A$  с координатами  $(\sin \theta_0, \cos \theta_0)$  после деформации на величину  $\varepsilon$ , согласно (3.14), перейдет в точку  $A_1$ , с координатами:

$$\sqrt{\frac{1 + \varepsilon_n + k \varepsilon_y}{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_n)}} \sin \theta_0, \quad (1 + \varepsilon) \cos \theta_0$$

Из рис. 3.14 видно, что

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon_n + K\varepsilon_y}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_n)}} \sin \theta_0}{(1+\varepsilon) \cos \theta_0} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon_n + K\varepsilon_y}{(1+\varepsilon)^3 / (1+\varepsilon_n)}} \operatorname{tg} \theta_0 \quad (3.19)$$

Введем обозначение

$$B = \frac{(1+\varepsilon)^3 (1+\varepsilon_n)}{(1+\varepsilon_n + K\varepsilon_y)} \quad (3.20)$$

Тогда из (3.19) следует:

$$\theta_0 = \operatorname{arctg}(\sqrt{B} \operatorname{tg} \theta) \quad (3.21)$$

После дифференцирования получаем:

$$d\theta_0 = \frac{\sqrt{B} d\theta}{\cos^2 \theta + B \sin^2 \theta} \quad (3.22)$$

Из (3.21) следует, что:

$$\sin \theta_0 = \frac{\sqrt{B} \sin \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + B \sin^2 \theta}} \quad (3.23)$$

Подставляя (3.22), (3.23) в (3.18) получим выражение

$$S(\theta) = S_0 \frac{B}{(\cos^2 \theta + B \sin^2 \theta)^{3/2}} \quad (3.24)$$

где  $B$  - параметр, зависящий от деформации и определяется по формуле (3.20).

При  $K = 0$   $B = (1 + \varepsilon)^3$  и формула (3.24) совпадает с формулой, полученной в /2.18/.

Далее выведем зависимость угловой скорости поворота элементов  $\omega$  от скорости деформации.

Из (3.19) следует, что:

$$\theta = \arctg \left( \frac{tg \theta_0}{\sqrt{B}} \right)$$

Далее

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = - \frac{tg \theta_0}{2\sqrt{B}(B + tg^2 \theta_0)} \frac{dB}{dt}$$

Заменяя  $tg \theta_0 = \sqrt{B} tg \theta$  получим:

$$\omega(\theta) = - \frac{\sin \theta \cos \theta}{2B} \frac{dB}{dt} \quad (3.25)$$

Составим уравнение равновесия аналогично /2.20/.

Считаем, что натяжение каждого элемента  $\psi_z$  пропорционально его упругой деформации  $\varepsilon_{zy}$  :

$$\psi_z = E \varepsilon_{zy} \quad (3.26)$$

Поскольку  $\varepsilon_{zy} = \varepsilon_0 (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta)$ , то (3.26) переписывается:

$$\psi_z = \psi_0 (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta) \quad (3.27)$$

где  $\varepsilon_0$  и  $\psi_0$  - упругая деформация и натяжение в элементе, параллельном приложению силы.

Локальное напряжение  $\bar{\sigma}_z$ , действующее на элемент площадки сферы  $ds = \sin \theta d\theta d\varphi$  есть

$$\bar{\sigma}_z ds = \psi_z s(1-\mu) ds \quad (3.28)$$

Хотя таким образом рассчитанные локальные напряжения не распределяются по тензорному закону, но после усреднения по всей сфере они должны в результате дать компоненты тензора, прило-

женного макронапряжения:

$$\sigma_{ij} = \int_S \bar{\sigma}_z l_{i,z} l_{j,z} ds \quad (3.29)$$

Поскольку  $\bar{\sigma}_3 = \bar{\sigma}$ , а  $\bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0$ , то уравнение (3.29) с учетом (3.27) и (3.28) принимает вид:

$$\bar{\sigma} = 2\pi \psi_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta) P(\theta) [1 - \Pi(\theta)] \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \quad (3.30)$$

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta) g(\theta) [1 - \Pi(\theta)] \sin^3 \theta d\theta \quad (3.31)$$

В (3.30)  $\bar{\sigma}$  — истинное напряжение, которое связано с условным напряжением  $\bar{\sigma}_{y_{em}}$  обычной зависимостью  $\bar{\sigma} = \frac{F_0}{F} \bar{\sigma}_{y_{em}}$ , которая учитывая (3.16) переписывается в виде:

$$\bar{\sigma} = \frac{(1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon_n)}{1 + \varepsilon_n + K \varepsilon_y} \bar{\sigma}_{y_{em}} \quad (3.32)$$

Чтобы замкнуть систему уравнений необходимо присоединить кинетическое уравнение разрушения  $\frac{\delta \Pi}{\delta t}(\psi_z)$  и уравнения связывающие величину  $\psi_0$  с упругой деформацией и со скоростью пластического деформирования. Уравнение для  $\frac{\delta \Pi}{\delta t}(\psi_z)$  запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi}{\delta t} &= [1 - \Pi(\theta)] f(\psi_z) \quad \text{если } \psi_z > 0 \\ \frac{\delta \Pi}{\delta t} &= 0 \quad \quad \quad \text{'' } \psi_z \leq 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

В данном уравнении предполагается, что скорость роста повреждений пропорциональна количеству оставшихся элементов и вызывается истинным напряжением на этих же элементах. Кроме того принято, что сжимающие напряжения не вызывают повреждений.

Функцию  $f$  можно определить из кривой длительной прочности при растяжении полностью ориентированного материала.

Действительно, для полностью ориентированного материала распределение плотностей имеет вид:

$$\begin{cases} \rho \neq 0 & \text{при } \theta = 0 \\ \rho = 0 & \text{при } \theta \neq 0 \end{cases}$$

Приняв во внимание (3.9) уравнение (3.30) переписывается в виде:

$$\sigma = \psi_0 (1 - \pi)$$

Подставив отсюда выражение для  $\psi_0$  в (3.33) получим:

$$\frac{\delta \pi}{\delta t} = (1 - \pi) f \left( \frac{\sigma}{1 - \pi} \right)$$

Откуда находим /§ I.5/ выражение для функции  $f$  через время жизни  $\tau(\sigma)$  полностью ориентированного материала при постоянном истинном напряжении  $\sigma$ .

$$f(\sigma) = - \frac{1}{\sigma \tau'(\sigma)} \quad (3.34)$$

Тогда окончательно уравнение (3.33) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \pi}{\delta t} &= - \frac{1 - \pi(\theta)}{\psi_z \tau'(\psi_z)} && \text{если } \psi_z > 0 \\ \frac{\delta \pi}{\delta t} &= 0 && \text{или } \psi_z \leq 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Если время жизни полностью ориентированного образца принять по экспоненциальной зависимости:

$$\tau = A \exp(-\alpha \sigma) \quad (3.36)$$

то имеем

$$\begin{cases} \frac{\delta \pi}{\delta t} = \frac{1 - \pi(\theta)}{\alpha \psi_z A \exp(-\alpha \psi_z)} & \text{если } \psi_z > 0 \\ \frac{\delta \pi}{\delta t} = 0 & \text{или } \psi_z \leq 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

Принимаем закон пластического деформирования в виде теории установившейся ползучести и, учитывая большие пластические деформации, имеем:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = L(\psi_0) (1 + \varepsilon_n) \quad (3.38)$$

Оператор  $L(\psi_0)$  удобно выбрать в виде /3.13/:

$$L(\psi_0) = A_1 \exp(\alpha_1 \psi_0) \quad (3.39)$$

Тогда (3.38) примет вид:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = A_1 \exp(\alpha_1 \psi_0) (1 + \varepsilon_n) \quad (3.40)$$

Константы уравнения (3.40) можно найти из данных по установившейся ползучести полностью ориентированного материала.

Упругую деформацию с учетом большой пластической запишем в виде:

$$\varepsilon_y = \frac{\psi_0}{E} (1 + \varepsilon_n) \quad (3.41)$$

Окончательно выпишем совокупность уравнений, которые потребуются для решения задачи. Из уравнений равновесия (3.30, 3.31), и подставив сюда (3.20, 3.24, 3.32) и  $S_0 = \frac{1}{2\pi}$ , получим:

$$\psi_0 = \frac{\sigma_{y\text{уст}}}{(1+\varepsilon)^2 \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2\theta - \mu \sin^2\theta) [1 - \nu(\theta)] \cos^2\theta \sin\theta}{(\cos^2\theta + \nu \sin^2\theta)^{3/2}} d\theta} \quad (3.42)$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos^2\theta - \mu \sin^2\theta) [1 - \nu(\theta)] \sin^3\theta}{(\cos^2\theta + \nu \sin^2\theta)^{3/2}} d\theta = 0 \quad (3.43)$$

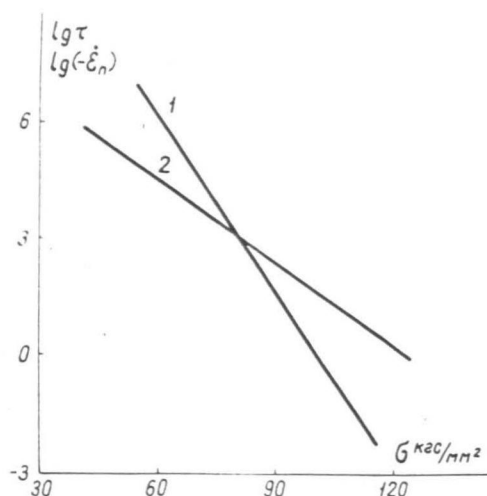


Рис. 3.15.

Исходные зависимости для полностью ориентированного материала: 1 - длительная прочность  $A = 6,07 \cdot 10^{15}$  сек,  $\alpha = 0,368$  мм<sup>2</sup>/кгс; 2 - скорость установившейся ползучести  $A_1 = 6,07 \cdot 10^8$  сек,  $\alpha_1 = 0,163$  мм<sup>2</sup>/кгс,  $E = 1500$  кгс/мм<sup>2</sup>.

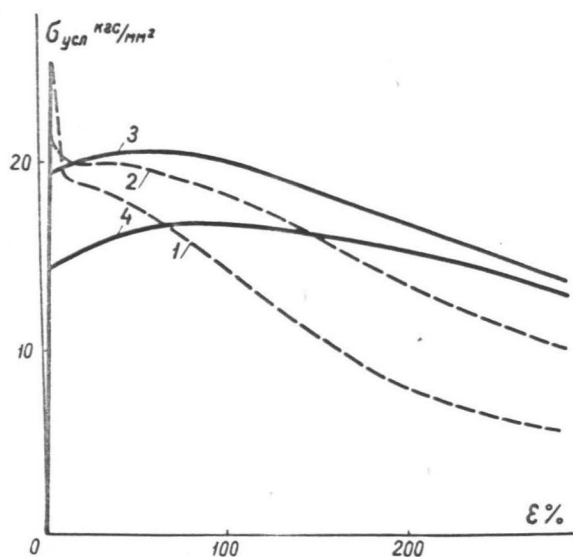


Рис. 3.16.

Зависимость  $\sigma_{усл}$  от общей деформации  $\epsilon$  при различных скоростях деформирования: 1 -  $\dot{\epsilon} = 1000$  сек<sup>-1</sup>; 2 -  $\dot{\epsilon} = 1$  сек<sup>-1</sup>; 3 -  $\dot{\epsilon} = 0,1$  сек<sup>-1</sup>; 4 -  $\dot{\epsilon} = 0,001$  сек<sup>-1</sup>.

Причем параметр  $B$  определяется (3.20):

$$B = \frac{(1+\varepsilon)^3 (1+\varepsilon_n)}{(1+\varepsilon_n + K\varepsilon_y)}$$

истинное напряжение связано с условным напряжением соотношением (3.32):

$$\sigma = \frac{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon_n)}{1+\varepsilon_n + K\varepsilon_y} \sigma_{усл}$$

а коэффициент  $K = 1 - 2\mu$

Уравнение (3.13) с учетом (3.25, 3.36) запишется в виде:

$$\frac{\partial \Pi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{1 - \Pi(\theta, t)}{\alpha \psi_z A \exp(-\alpha \psi_z)} + \frac{\sin\theta \cos\theta}{2B} \frac{dB}{dt} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \quad (3.44)$$

Причем  $\psi_z$  равно согласно (3.27):

$$\psi_z = \psi_0 (\cos^2 \theta - \mu \sin^2 \theta)$$

При  $\psi_z \leq 0$  первый член в выражении (3.44) равен 0.

Уравнения для деформаций перепишем без изменений:

$$\frac{d\varepsilon_n}{dt} = A_1 \exp(\alpha_1 \psi) (1 + \varepsilon_n) \quad (3.45)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\psi_0}{E} (1 + \varepsilon_n) \quad (3.46)$$

Задача решается численно. Для расчета необходимо знать следующие параметры полностью ориентированного материала:

- 1) Модуль упругости  $E$  ;
- 2) Константы уравнения длительной прочности. В уравнении (3.36) это  $A$  ,  $\alpha$  .

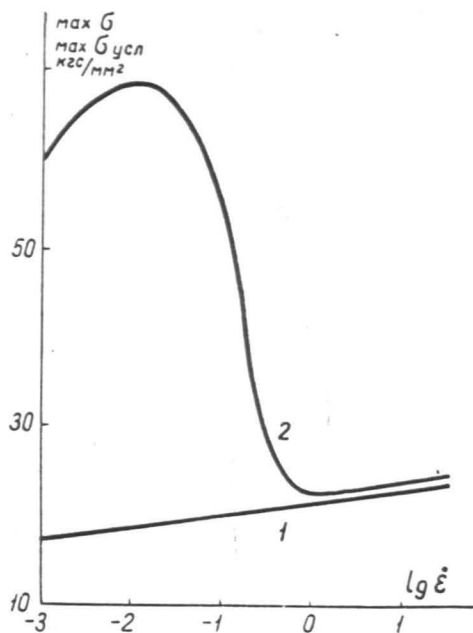


Рис. 3.17.

Зависимость 1 - max  $\sigma_{ysl}$ , 2 - max  $\sigma$  от скорости деформирования.

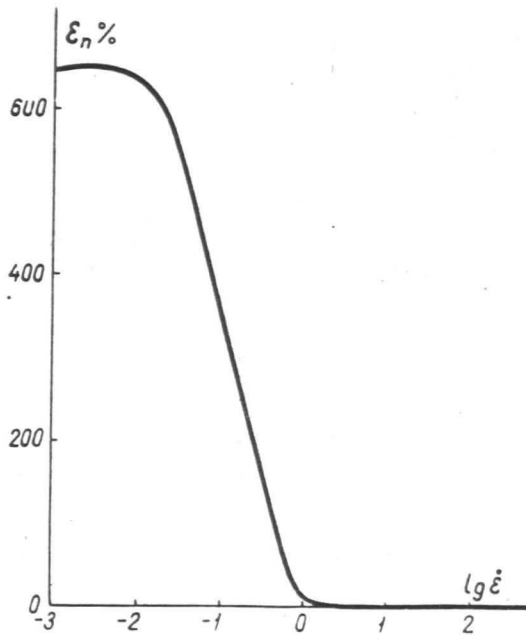


Рис. 3.18.

Пластические деформации, соответствующие max  $\sigma$  в зависимости от скорости деформирования.

3) Константы уравнения установившейся ползучести.

В уравнении (3.40) это  $A_1, \alpha_1$ .

Возможно два вида задач: 1) Задача  $\bar{\sigma}_{y_{cm}}(t)$ , а необходимо найти  $\varepsilon(t)$ ; 2) задача обратная первой.

Рассмотрим первую задачу. Начальные условия при  $t = 0$ :

$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$  и  $\Pi(\theta) \equiv 0$ . Порядок решения следующий.

1. Из (3.43) определяем  $\mu$  и соответственно  $K$ ;

2. По формуле (3.42) находим  $\varphi_0$ ;

3. Задаемся приращением времени  $\Delta t$ ;

4. По формулам (3.45, 3.46) находим новые значения пластической и упругой деформации;

5. Вычислим приращение повреждений по формуле (3.44).

6. Один шаг вычислений закончен, возвращаемся в п. 1 и т.д.

Далее рассмотрим последовательность решения задачи, когда задано изменение деформации во времени. Начальные условия те же, что и в первой задаче:

1. Задаемся приращением времени  $\Delta t$ .

2. Выбираем  $\varphi_0$  так, чтобы приращение деформации, определенное по формулам (3.45, 3.46) было бы равно заданному.

Тогда же определим новые значения упругой и пластической деформации (т.е. их соотношение неизвестно).

3. Вычисляем приращение повреждений по формуле (3.44).

4. Из (3.43) определяем  $\mu$  и соответственно  $K$ .

5. Из (3.42) определим условное напряжение  $\bar{\sigma}_{y_{cm}}$ .

6. По формуле (3.32) определяем истинное напряжение  $\sigma$

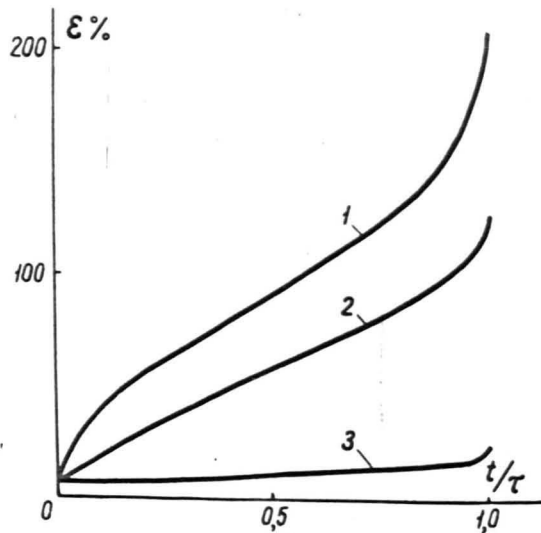


Рис. 3.19.

Зависимость величины общей деформации  $\varepsilon$  от приведенного времени при различных величинах постоянного напряжения: 1 -  $\sigma_{усл} = 19 \text{ кгс/мм}^2$ ; 2 -  $\sigma_{усл} = 20 \text{ кгс/мм}^2$ ; 3 -  $\sigma_{усл} = 21 \text{ кгс/мм}^2$ .

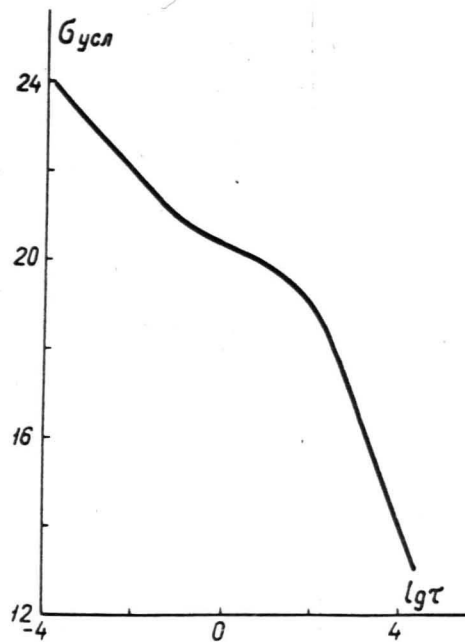


Рис. 3.20.

Кривая длительной прочности при постоянном условном напряжении.

7. Один шаг вычислений закончен, возвращаемся к п. I и т.д.

Численный пример.

В рамках рассматриваемой модели можно описать аномальное поведение прочности полимеров при возрастании скорости деформирования, кривые ползучести с учетом перехода от хрупкого разрушения к вязкому, а также соответствующие кривые деформирования.

На рис. 3.15 представлены исходные данные, на рис.3.16-3.20 расчетные результаты для неориентированного материала. Расчет выполнен на БЭСМ-4.

Полученные результаты правильно отражают качественные особенности разрушения ориентирующегося материала (см. рис.3.12, 3.13).

### 3.4. Краткие результаты и выводы по главе 3

1. Отработана методика скоростного растяжения композитных и гомогенных полимерных материалов в диапазоне больших и малых деформаций. Применением двух или трех установок удается исследовать диапазон скоростей деформаций  $\dot{\epsilon} = 10^{-3} \div 10^2$  1/сек

2. В исследуемом диапазоне скоростей прочность стеклопластика возрастает с увеличением скорости нагружения по закону Лудвига. Длительная прочность при постоянном напряжении в исследуемом диапазоне напряжений хорошо описывается формулой Журкова.

Расчет предела кратковременной (динамической) прочности  $\sigma_c$  по данным длительной прочности согласно закону линейного суммирования повреждений дает несколько заниженное возрастание  $\sigma_c$  в зависимости от скорости нагружения. Расчетное значение статической прочности хорошо согласуется с экспериментальным.

3. У полимеров, допускающих большие деформации разрыва, зависимость прочности от скорости нагружения имеет немотонный характер. В первом приближении это объясняется конкуренцией двух одновременно протекающих процессов - разрушением и ориентацией. Соответствующая модель (типа модели Хсиао) и закон накопления повреждений дает качественное совпадение расчетных результатов с экспериментом.

## ГЛАВА 4

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАЗРУШЕНИЯ СТЕКЛОПЛАСТИКОВ  
КАК КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА4.1. О корреляции разрушения стеклотекстолита при  
усталостном и статическом нагружении /4.1/4.1.1. Состояние вопроса

Как было показано в 3 главе, наблюдается достаточно хорошая корреляция между прочностью стеклопластика при нагружении с постоянной скоростью и его длительной прочностью, если используется линейный закон накопления повреждений.

Цель настоящего параграфа - показать, что такой корреляции в наших исследованиях не было при сравнении длительной прочности в случае постоянно действующей нагрузки и усталости при циклическом нагружении. Предлагается объяснение этому факту и некоторый прием для улучшения корреляции между результатами этих испытаний.

В начале рассмотрим кратко основные достижения в прогнозировании долговечности однородных полимеров при режиме циклического нагружения по результатам длительных статических испытаний. Эти работы в основном основаны на концепции кинетической теории прочности /4.2/ и длительного суммирования повреждений (критерия Бейли).

В /4.3/ линейное суммирование повреждений было проверено и подтверждено для относительно небольшого количества циклов нагружения. В /1.31, 1.32/ проверялась справедливость формулы Журкова и линейного суммирования повреждений при значительно большем количестве циклов. Экспериментируя на пред-

варительно ориентированных полимерных пленках и волокнах, авторы получили, что циклическая долговечность в полулогарифмических координатах  $\sigma \sim \epsilon \tau$  выражается прямой. При хороших условиях теплоотвода наблюдается совпадение прямых циклической и статической долговечностей, пересчитанных с учетом суммирования повреждений по Бейли, другими словами, подтвердилась справедливость формулы Журкова и правила линейного суммирования повреждений в циклических испытаниях. В случае несовпадения циклической и расчетной (по статическим испытаниям) долговечностей разницу удалось уменьшить, увеличивая температуру испытаний и уменьшая частоту нагружения.

В других исследованиях прямолинейный характер долговечности в полулогарифмических координатах не подтвердился /4.4, 4.5, 2.69/. При этом между циклической долговечностью и расчетом по статическим испытаниям с использованием суммирования по Бейли наблюдается существенное различие, которое нельзя объяснить повышением средней температуры образца (см. также /4.6/ ). Неточность критерия Бейли вследствие нелинейности суммирования повреждений также не может внести столь большие ошибки (до несколько порядков по долговечностям). Причиной расхождения может служить наличие локальных разогревов на концах распространяющихся трещин, а также релаксационные эффекты, появляющиеся при изменении величины нагрузки. Практически измерить фактическую температуру на кончике трещины крайне затруднительно, поэтому учет перегревов исследуется в основном теоретически. Непосредственное измерение перегрева в окрест-

ности трещины сделано в /1.85/ путем использования термочувствительных красок.

В работах /4.8 - 4.9/ был предложен полуэмпирический метод оценки циклической долговечности пластмасс с учетом локальных перегревов  $\Delta T$  в вершинах трещин. Подбирая значение температуры перегрева так, чтобы при пульсирующем растяжении получилось наилучшее согласие расчетной и фактической долговечностей, авторы получают хорошее согласие эксперимента с расчетом в асимметричных режимах нагружения, промежуточных между пульсирующим циклом и растяжением с постоянной нагрузкой. Авторы приходят к обнадеживающему выводу, что критерий Бейли применим для расчета циклической долговечности при условии использования фактической температуры разрушения  $\Delta T$  на конце трещины.

При сравнении циклической и статической долговечности армированных материалов, необходимо учесть не только разогрев, а также другие особенности деформирования композитных материалов.

В наших опытах образцы из эпоксифенольного стеклопластика с тканевым армированием испытывались осевым нагружением (вдоль утка) в режимах кратковременного и длительного статического нагружения, а также в режимах мягкого циклического нагружения с частотой 900 цикл/мин и числом циклов до разрушения  $N = 10^6$ . Форма и размеры образца и методика длительных циклических испытаний описаны в первой главе. Длительная прочность при постоянной нагрузке определялась на специальном стенде. Все испытания выполнены на одинаковых образцах сечением 8,6 x 18 мм.

#### 4.1.2. Связь между статической и циклической деформативностью

В ряде работ /4.10 - 4.13/ показано, что при статическом растяжении стеклопластиков на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  появляется характерный изгиб в точке  $\sigma^*(\varepsilon^*)$ , выше которой модуль упругости уменьшается. В /4.14/ установлено, что в точке  $\sigma^*(\varepsilon^*)$  существенно изменяется также и коэффициент Пуассона. Перелом на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , как показано, связан с нарушением сплошности композитного материала за счет трещинообразования. В работе [4.15] показано, что кривая акустической эмиссии при растяжении стеклопластика также имеет точку перелома, коррелирующую с точкой перелома на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ . После характерной точки перелома акустическая эмиссия имеет существенно большую интенсивность.

Ранее (в главе I) опытами установлено, что в момент начала интенсивного разрушения стеклопластика при циклическом растяжении-сжатии амплитуды деформаций принимают примерно одинаковую величину независимо от уровня нагрузки (при прочих неизменных параметрах режима нагружения). Было проверено в каком соотношении находится деформативность стеклопластика при статическом нагружении с постоянной скоростью нарастания нагрузки и деформативность его в режиме непрерывного циклического нагружения. Так как при циклическом нагружении деформируемый объем материала нагревается, то сравнение циклической и статической деформативности необходимо провести хотя бы с приближенным учетом влияния разогрева.

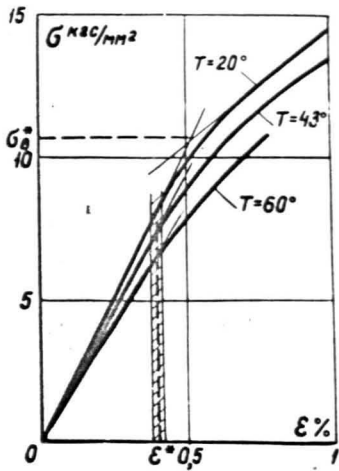


Рис. 4.1.

Кривые  $\sigma$ - $\epsilon$  при кратковременном растяжении стеклопластика при разных температурах.

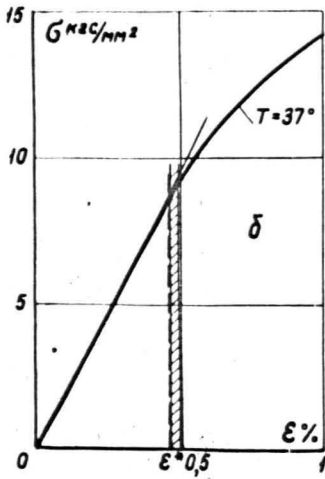


Рис. 4.2.

Кривые  $\sigma$ - $\epsilon$  при кратковременном сжатии стеклопластика.

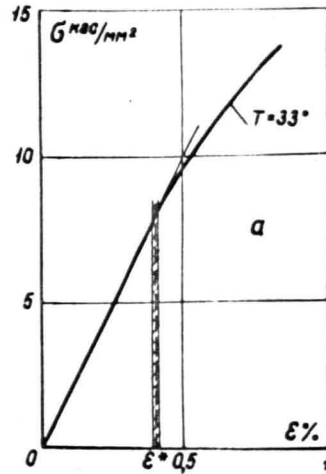


Рис. 4.3.

Кривые  $\sigma$ - $\epsilon$  при кратковременном растяжении стеклопластика.

На рис. 4.1 показаны кривые  $\sigma \sim \varepsilon$  кратковременного растяжения для испытанного стеклопластика, полученные при постоянной скорости нагружения равной  $650 \text{ кгс/см}^2$  в мин. Кривые снимались для трех температур: комнатной -  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $T_B = 66^\circ\text{C}$  и средней температуре  $T_{\text{ср}} = 43^\circ\text{C}$ . (Температура  $T_B$  соответствует температуре разогрева в начале интенсивного разрушения данного материала при симметричном цикле ( $\lambda = -1$ ) нагружения. Из рис. 4.1 видно, что с возрастанием температуры точка перелома на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  снижается, при этом одновременно уменьшаются  $\sigma^*$  и  $\varepsilon^*$ , что находится в согласии с опытными данными других авторов /4.16/.

Аналогично были получены кривые  $\sigma \sim \varepsilon$  кратковременного статического сжатия и растяжения при температурах 33 и  $37^\circ\text{C}$  (рис. 4.2, 4.3), соответствующих средним температурам за время испытаний стеклопластика непрерывным нагружением в циклах пульсирующего сжатия ( $\lambda = -\infty$ ) и растяжения ( $\lambda = 0$ ).

В табл. 4.1 приведены данные по статической и циклической деформативности стеклопластика. Здесь амплитуда циклической деформации  $\varepsilon_a$  и деформации ползучести  $\varepsilon_n$  (в пульсирующих циклах  $\lambda = 0$  и  $\lambda = -\infty$ ) соответствует началу интенсивного разрушения в режиме циклического нагружения, а величина статической деформации  $\varepsilon^*$  определена по кривым рис. 4.1 - 4.3. Для циклов  $\lambda = -1$  и  $\lambda = 0$  сравнение на рис. 1 - 3 дается по диаграммам растяжения, а для  $\lambda = -\infty$  по диаграмме сжатия. На рис. 4.1 - 4.3 заштрихованы полосы, в пределах которых располагается разброс величины  $\varepsilon_a + \varepsilon_n$ . В последней графе табл. 4.1

даны отношения статической и циклической деформативности, из которых следует, что равенство  $\varepsilon_0 + \varepsilon_n \approx \varepsilon^*$  выполняется достаточно точно.

ТАБЛИЦА 4.1

Вид цикла	Циклические деформации, %		Деформация в точке перелома $\varepsilon^*$ %	$\frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0 + \varepsilon_n}$
	$\varepsilon_a$	$\varepsilon_n$		
Симметричный	0,41	0	0,41	$\approx 1$
Пульсирующее растяжение	0,33	0,15	0,46	0,96
Пульсирующее сжатие	0,357	0,04	0,4	$\approx 1$

Следовательно, между циклической деформацией стеклопластика и деформацией в точке перелома на статической кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , снятой при одноименной деформации, существует корреляция, указывающая на то, что начало разрушения при циклическом нагружении и с разогревом связано с нарушением сплошности стеклопластика. Нарушение сплошности в виде микротрещин в режиме статического нагружения еще не приводит к потере несущей способности материала, поскольку стеклонити не разрушены, а в режиме циклического нагружения приводит к интенсивному разогреву материала, резкому снижению его прочности и в конечном счете - к быстрому разрушению.

#### 4.1.3. Связь между статической и циклической долговечностью

График длительной прочности стеклопластика ЭФС был показан на рис. 3.7. Напомним соответствующие значения коэффициентов в формуле  $\tau = \tau_0 \exp \frac{U_0 - \gamma \sigma}{kT}$ , вычисленных по графику рис. 3.7:  $T = 293^\circ\text{K}$ ,  $k = 1,4 \cdot 10^{-21}$  кгс.мм/град,  $\tau_0 = 10^{-12}$  сек,  $\gamma = 1,28 \cdot 10^{-18}$  мм<sup>3</sup> и  $U_0 = 3,79 \cdot 10^{-17}$  кгс/мм, или в другой размерности  $U_0 = 53,5$  ккал/моль.

Для сохранения вида деформации, сравнение усталостной и статической долговечности проведем для режима пульсирующего растяжения.

Напряжение при пульсирующем растяжении изменяется по закону

$$\sigma = \sigma_a (1 - \sin \omega t) \quad (4.3)$$

где  $\omega = 2\pi/\nu$  - частота;  $\nu$  - период колебания;  $\sigma_a$  - амплитуда напряжения.

В режиме циклического нагружения температура образца непрерывно возрастает. Пренебрегая начальным и конечным участками нелинейности изменения температуры (рис. 1.10), аппроксимируем ее выражением:

$$T = at + b \quad (4.4)$$

где  $a$  и  $b$  - коэффициенты, определяемые по фактическим кривым разогрева для каждого уровня нагрузки:  $t$  - время;

Для получения сопоставимых результатов по статической и циклической долговечности необходимо в выражении для суммирования повреждений:

$$\int_0^{\tau} \frac{dt}{\tau[\sigma(t)]} = 1 \quad (4.5)$$

учесть изменение температуры по (4.4). Тогда статическая долговечность -  $\tau_{ст}$  при напряжении  $\sigma = 2\sigma_a$  определяется уравнением;

$$\int_0^{\tau_{ст}} \frac{dt}{\tau_0 \exp\left[\frac{u_0 - 2\sigma_a \rho}{k(at+b)}\right]} = 1 \quad (4.6)$$

Интегрируя (4.6) по частям и производя замену переменных

$\frac{u_0 - 2\sigma_a \rho}{k(at+b)} = z$  можем интеграл (4.6) свести к табулированным функциям:

$$\frac{1}{a\tau_0} \left[ (a\tau_{ст} + b) \exp\left(\frac{B}{a\tau_{ст} + b}\right) - b \exp\left(\frac{B}{b}\right) - B \operatorname{Ei}\left(\frac{B}{a\tau_{ст} + b}\right) + B \operatorname{Ei}\left(\frac{B}{b}\right) \right] = 1 \quad (4.7)$$

где

$$B = - \frac{u_0 - 2\sigma_a \rho}{k}; \quad \operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

При условии справедливости критерия суммирования повреждений (4.5) циклическая долговечность  $\tau_{цр}$  должна вычисляться с учетом (4.3) и (4.4) из уравнения:

$$\int_0^{\tau_{цр}} \frac{dt}{\tau_0 \exp\left[\frac{u_0 - \rho\sigma_a(1 - \sin\omega t)}{k(at+b)}\right]} = 1 \quad (4.8)$$

Из уравнения (4.8) определенная расчетная циклическая долговечность должна сравниваться с фактической циклической долговечностью.

Можно поступить наоборот: по кривой Велера рассчитывать ожидаемую статическую долговечность  $\tau_{ст}^p$  и сравнивать ее с экспериментальной статической долговечностью, приведенной по (4.1) к уровням напряжений, применявшимся в циклических режимах.

В случае постоянной температуры такой расчет был проведен /I.32/. В этом случае расчетная формула имеет вид:

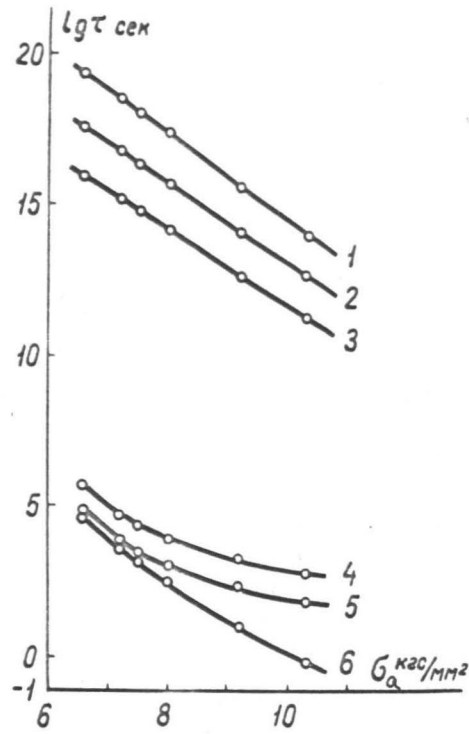


Рис. 4.4.

Зависимость статической и циклической долговечности от напряжения.

$$\tau_{cr}^p = NV \frac{\int_0^{\nu} \tau_0 \exp \left[ \frac{u_0 - \gamma \sigma_a (1 - \sin \omega t)}{KT} \right] dt}{\int_0^{\nu} \tau_0 \exp \left[ \frac{u_0 - 2\sigma_a \gamma}{KT} \right] dt} \quad (4.9)$$

где  $NV = \tau_{cr}$  берется из кривой Велера, а остальные параметры определены выше по результатам статических испытаний. В таблице 4.2 приведены опытные данные по  $\tau_{cr}$  и результаты расчета  $\tau_{cr}^p$  для шести уровней нагрузки и трех значений температур: минимальной, средней и наибольшей температуре разогрева при линейной аппроксимации ее по (4.4).

ТАБЛИЦА 4.2.

$\sigma_a$ кгс/мм <sup>2</sup>	$\tau_{cr}$ сек	$\tau_{cr}^p$ /сек/ по (4.9)			$\tau_{cr}^*$ сек.
		при T=297°K	при T=310°K	при T=327°K	
5,15	$8,4 \cdot 10^2$	84	86,5	88,8	0,85
4,6	$2,67 \cdot 10^3$	$2,86 \cdot 10^2$	$2,91 \cdot 10^2$	$2,99 \cdot 10^2$	II
4,0	$1,11 \cdot 10^4$	$1,28 \cdot 10^3$	$1,3 \cdot 10^3$	$1,33 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^2$
3,75	$2,67 \cdot 10^4$	$3,18 \cdot 10^3$	$3,24 \cdot 10^3$	$3,32 \cdot 10^3$	$1,8 \cdot 10^3$
3,6	$6,67 \cdot 10^4$	$8,1 \cdot 10^3$	$8,2 \cdot 10^3$	$8,46 \cdot 10^3$	$4,7 \cdot 10^3$
3,3	$6,67 \cdot 10^5$	$8,45 \cdot 10^4$	$8,57 \cdot 10^4$	$8,83 \cdot 10^4$	$6,1 \cdot 10^4$

Как видно из таблицы,  $\tau_{cr}^p$  оказывалось для всех температур примерно на порядок ниже  $\tau_{cr}$ . На рис. 4.4  $\tau_{cr}^p$  соответствует кривая 5, а участок кривой Велера с  $\tau_{cr}$  изображен кривой 4. Кривые 1,2,3 представляют  $\tau_{cr}$ , рассчитанную по (4.1) при трех температурах и напряжениях  $\sigma = 2\sigma_a$ . Последние кривые по существу являются экстраполяцией кривой статической долговечности (рис. 3.8) на более низкие напряжения с учетом вли-

яния температуры. Справедливость определения циклической долговечности по статической (и наоборот) можно установить, сравнивая кривые 1, 2, 3 с кривой 5. Как видно из рисунка разница между ними составляет 10 ÷ 15 порядков по времени, что вряд ли можно объяснить неточным учетом температуры разогрева.

В то же время расчет и опыты, проведенные в третьей главе показывали, что для этого же материала корреляция между долговечностью при  $\sigma = const$  и прочностью в режиме  $\dot{\sigma} = const$  на основе линейного суммирования получается хорошей, следовательно, нельзя утверждать, что для исследуемого стеклопластика правило линейного суммирования повреждений вообще не применимо.

Большое расхождение между  $\tau_{\sigma}^P$ , рассчитанной по фактической циклической долговечности, и  $\tau_{\sigma}$ , вероятнее всего связано с различием в механизмах разрушения стеклопластика при циклическом и статическом нагружении. По-видимому, когда в материале начинают интенсивно развиваться трещины, (чему соответствует точка перелома на статической кривой  $\sigma \sim \epsilon$ ), тогда под действием переменной нагрузки, в деформируемом объеме резко нелинейно возрастает диссипация энергии, вызывающая быстрое нагревание и разрушение его. При статическом же характере нагружения подобное нарушение сплошности стеклопластика после достижения напряжения равного  $\sigma^*$  не может вызвать катастрофического разрушения поскольку разогрев за счет диссипации энергии в режимах  $\dot{\sigma} = const$  и  $\sigma = const$  ничтожно мал, а наполнитель еще не разрушен. Если это предположение верно, то усталостная прочность армированного материала практически не зависит от запаса статической прочности его за пределами точки

перелома на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ , что является основной причиной расхождения расчетной и фактической долговечности.

Для проверки этого предположения, основанного на выше установленной корреляции между статической и циклической деформативностью, сделаем расчет, положив условно, что разрушение стеклопластика и при длительном статическом нагружении также происходит в момент времени, соответствующей точке перелома на диаграмме  $\sigma \sim \varepsilon$ .

Поскольку длительная статическая прочность и прочность при постоянной скорости нагружения хорошо согласуются между собой посредством закона суммирования повреждений, то можно заключить, что процесс разрушения стеклопластика в обоих режимах нагружения одинаков. Из этого можно заключить, что при статическом нагружении с  $\sigma = const$  также существует некоторая граница интенсивного трещинообразования, соответствующая точке перелома на кривой  $\sigma \sim \varepsilon$ .

По рис. 4.1. можно найти напряжение  $\sigma^* = 10,6 \text{ кгс/мм}^2$ , соответствующему точке перелома. В то же время предел кратковременной прочности в этом опыте (см. и главу 3) был  $20,4 \text{ кгс/мм}^2$ .

Условную линию трещинообразования при длительном статическом нагружении проводим параллельно прямой на рис. 3.8, но уменьшая напряжения  $20,4/10,6$  раз. Для этой линии, оставляя прежнее значение  $\tau_0$  (и поскольку обе линии параллельны — прежнее  $\delta$ ), имеем измененное значение коэффициента  $U_0^* = 2,6 \cdot 10^{-17} \text{ кгс/мм}$  (или  $U_0^* = 36,7 \text{ ккал/моль}$ )

Результаты расчета  $\tau_{cr}^*$  по формуле (4.7) для шести уровней нагрузки при новом значении параметра  $U_0^*$  с учетом изменения температуры образца за время циклических испытаний приведены в последнем столбце табл. 4.2. На рис. 4.4. эти данные представлены кривой 6. По принятой гипотезе кривая 6 должна совпадать с кривой  $\tau_{cr}^p$ , рассчитанной по (4.9) при значениях  $U_0^*$  с учетом изменения температуры образца. Но так как  $\tau_{cr}^p$  по выражению (4.9) не зависит от  $U_0$  и практически одинакова для трех температур (см. табл. 4.2), то для суждения о соответствии расчетной и фактической долговечности кривую 6 можно сравнивать с кривой 5.

Как следует из рис. 4.4. кривые 5 и 6 начиная с  $\lg \tau \approx 3$  практически совпадают. При малых долговечностях, не характерных для обычных усталостных испытаний, рассчитанные долговечности расходятся не более чем на два порядка. Расхождение кривых 5 и 6 можно объяснить тем, что за разрушающее напряжение принято  $\sigma^*$ , соответствующее условному разрушению. В действительности же в этой точке нарушается только сплошность материала за счет разрушения связующего, а стеклоткань еще некоторое время продолжает оказывать сопротивление, что и приводит к более высокой фактической долговечности.

Предположение о разрушении тканевого стеклопластика в точке перелома кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  существенно улучшило сходимость расчета циклической долговечности по статической, что указывает на принципиальную возможность прогнозирования усталостной прочности по критерию Бейли с учетом специфики разрушения

армированных материалов в режимах циклического нагружения. При использовании в качестве временной зависимости прочности формулы Журкова нами был скорректирован параметр  $U_0$ . Изменение  $U_0$  в формуле долговечности здесь было выполнено формально, но вероятно этот прием имеет физическое обоснование. Возможно, например, что  $U_0 = 53$  ккал/моль в статических режимах характеризует в основном энергетический барьер прочности волокон стеклоткани, а в случае циклического нагружения  $U_0^* = 37$  ккал/моль — адгезионную прочность или прочность связующего. Это предположение, а также основная идея изложенного метода требует еще дополнительной проверки на других стеклопластиках и при других видах напряженного состояния.

Наконец, из факта корреляции между статической и циклической деформативностью вытекает рекомендация для увеличения усталостной прочности стеклопластиков, подверженных циклическому нагружению со средней частотой: необходимо в первую очередь повышать точку перелома на кривой  $\sigma - \varepsilon$ , так как прочность за пределами перелома не оказывает существенного влияния на циклическую работоспособность материала.

## 4.2. Влияние технологии изготовления стеклотекстолита на его вибрационную стойкость /4.17/

### 4.2.1. Постановка задачи и результаты усталостных испытаний

За последние годы опубликовано много работ, посвященных исследованию влияния технологии армирования на механические свойства стеклопластиков. Однако, из-за большого разнообразия свойств арматуры и связующего, а также способов армирования и испытания изделий, единая теория армирования еще не создана, в связи с чем изучение ряда частных вопросов имеет определенное значение как с точки зрения решения некоторых задач практического характера, так и с точки зрения накопления данных для построения упомянутой теории.

Влияние искривления стеклонитей на прочность стеклопластиков обсуждено в многих работах. В особенности можно отметить работы Болотина /4.18/. В книге /4.19/ кроме результатов экспериментального исследования имеется также обширная библиография по данному вопросу. В этом параграфе мы коснемся лишь одного частного аспекта этой проблемы: на основе представления о скручивании ячеек связующего имеющем место при выпрямлении изогнутых нитей в процессе деформирования стеклотекстолита /4.20/, сделана попытка оценить влияние изгиба стеклонитей и плотности упаковки слоев стеклоткани на статическую прочность при растяжении и на циклическую долговечность плотно армированных стеклотекстолитов. Исследуемые образцы стеклотекстолита ЭФС были вырезаны из оболочек отличающихся друг от друга

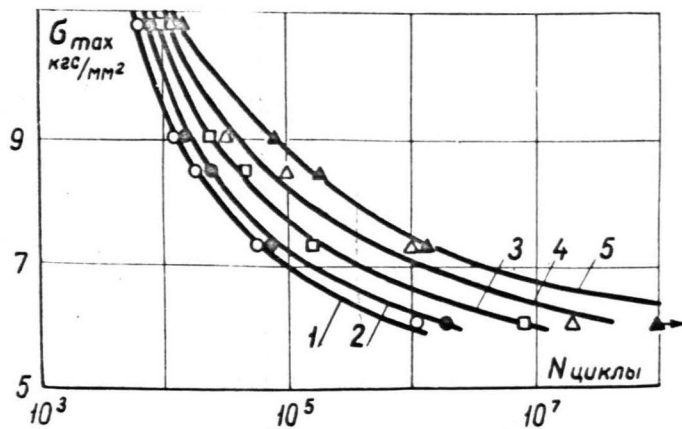
только технологией изготовления, а именно: влиянием натяжения полотна, давлением формовки, а также скоростью и температуры намотки. Процентное содержание наполнителя и состав связующего (70% эпоксидного лака, 30% фенольной смолы) во всех случаях осталось неизменным. Значения натяга и давления формовки разных материалов указаны в табл. 4.3.

ТАБЛИЦА 4.3.

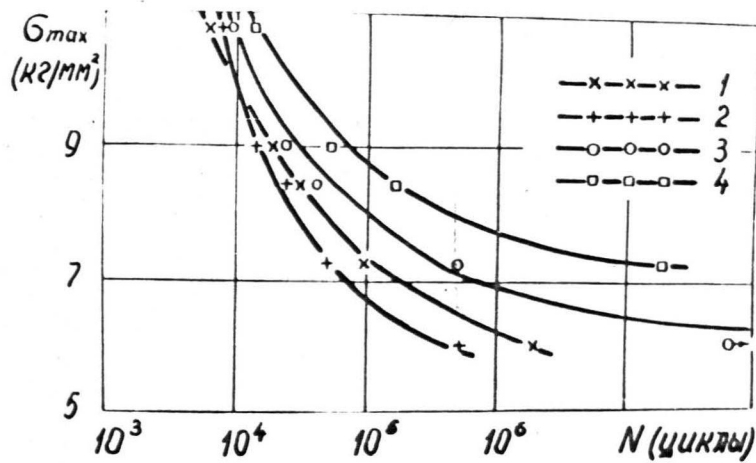
Натяг основы стеклоткани и давление формовки  
при изготовлении стеклотекстолита

Натяг (кг/см)	Давление (кг/см <sup>2</sup> )	Прочность при растяжении, кг/мм <sup>2</sup>
1,38	12,9	20,4
2,78	12,9	18,6
3,50	25,9	20,5
4,10	69,6	17
4,10	93,4	15,8
4,18	25,9	16,3
4,42	11,5	20,2
5,55	25,9	16,1
8,34	0,2	14,7

Требовалось или найти непосредственную корреляцию между величинами натяга и давления и усталостными свойствами стеклотекстолита, или связать параметры технологического процесса с структурными параметрами материала, которые в свою очередь уже определяют механические свойства композита.



а)



б)

Рис. 4.5.  
Диаграммы Велера для испытанных материалов.

Для экспериментального исследования вытачивались цилиндрические образцы, ориентированные таким образом, что их ось совпала с направлением нитей утка стеклоткани. Диаметр рабочей части образца равнялся 7,5 мм, а длина рабочей части — 100 мм; рабочая часть заканчивалась плавными переходами к галтелям, имеющим диаметр 10 мм.

Опыты проводились в обычных условиях: температура воздуха равнялась  $+ 20 \pm 5^\circ\text{C}$ .

Статическая прочность образцов на разрыв определялась на испытательной машине УМ-5 при скорости перемещения захвата 60 мм/мин. Полученные данные (арифметические средние из пяти испытаний с коэффициентами вариации  $1,5 \div 2,0 \%$ ) приведены в табл. 4.3, они свидетельствуют о существенном различии прочностей большинства испытанных материалов.

Поскольку в этой части исследования необходимо было получить лишь результаты сравнительных испытаний 9 видов стеклопластика, отличающихся друг от друга технологией изготовления, то было признано допустимым провести циклические испытания на машине МИП-6000, работающей на чистый изгиб с вращением при частоте 6000 об/мин; машина была частично переоборудована для обеспечения возможности испытания полимерных материалов.

В самом процессе испытания никаких существенных изменений образца, кроме его разогрева, не наблюдалось. Видимое невооруженным глазом разрушение наступило лишь в течении нескольких последних секунд испытания и у всех без исключения

испытанных образцов состояло в том, что где-то на рабочей части образца образовалась небольшая область, в которой по всему сечению образца происходило интенсивное разрушение находящегося между нитями стеклоткани связующего, после чего слои стеклоткани здесь (так же как и при статическом растяжении) отслаивались друг от друга прогиб образца резко возрастал, и испытательная машина автоматически выключалась.

На рис. 4.5 приведены диаграммы Велера для всех материалов, перечисленных в табл. 4.3. Согласно методике, рекомендуемой в /4.2I/ кривые проведены по медианным значениям долговечностей и, следовательно, соответствуют приблизительно 50% вероятности разрушения данного материала на данном уровне нагружения. Для отыскания каждого значения испытано пять образцов, причем обнаружено, что медианные значения долговечностей близки к соответствующим значениям средних арифметических (при высоких уровнях нагружения отклонения равнялись приблизительно  $\pm 1\%$ , а при низких уровнях - в среднем около  $\pm 5\%$  от медианных значений), что свидетельствует о наличии распределения долговечностей с симметричной плотностью вероятности. Коэффициенты вариации долговечностей получились при этом на уровне нагружения  $\sigma_a = 10,9 \text{ кгс/мм}^2$  для материалов 1-б, 2-б, 1-а, 3-а, 3-б равными  $2,5 \pm 1\%$ , а для материалов 4-а, 5-а - равными  $5 \pm 1\%$ ; на уровне нагружения  $\sigma = 8,5 \text{ кгс/мм}^2$  соответственно  $10 \pm 3\%$  и  $15 \pm 4\%$ ; на более же низких уровнях -  $25 \pm 5\%$  и  $35 \pm 5\%$  соответственно.

Как следует из рис. 4.5 на всех обследованных уровнях

нагрузки возрастающей долговечности соответствует в основном одна и та же последовательность примененных материалов. Та же последовательность сохраняется, если материалы разложить в ряд по возрастающей прочности на растяжение (данные см. в таблице 4.3).

Приведенные значения циклической долговечности и прочности не коррелируют в отдельности ни с величинами натяга стеклоткани, ни с величинами давления формовки (см. табл. 4.3). Поэтому ниже дается отыскание параметров, коррелирующих с величинами долговечности и прочности исследованных стеклопластиков, при учете изгиба нитей стеклоткани.

#### 4.2.2. Микроструктурные исследования и соотношения между изучаемыми величинами

Соотношение между структурными и прочностными характеристиками стеклотекстолита выводились на основании допущений, что:

- а) циклическая долговечность при пульсирующем растяжении меньше, чем при пульсирующем сжатии;
- б) при растяжении основную часть нагрузки, приложенной к образцу материала, воспринимают стеклонити, посредством которых она передается связующему;
- в) прочность на растяжение и циклическая долговечность лимитируются величиной максимальных напряжений, возникающих в связующем при деформировании образца.

При таких условиях максимальные напряжения в ячейке связующего как в случае одноосного растяжения стеклотекстолита вдоль изогнутых нитей, так и в случае соответствующего изгиба (при усталостных испытаниях на изгиб с вращением) могут быть вычислены по схеме, показанной на рис. 4.6. Приведенную схему нагружения можно аппроксимировать распределенными моментами, приложенными к каждой ячейке связующего, что ведет к выражениям моментной теории упругости /4.22/. Однако для приближенной оценки напряжений, возникающих в элементарной ячейке, использованы известные выражения для кручения стержней прямоугольного сечения.

Следует оговорить, что принятую схему нагружения одной ячейки связующего и соответственно полученные зависимости можно применять лишь в определенных пределах, т.е. тогда, когда изгиб нитей стеклоткани имеет достаточную кривизну и когда нити одного слоя стеклоткани плотно упакованы к нитям другого слоя. В противном случае такая схема расчета, конечно, не будет соответствовать действительности, так как во втором случае схема сил, действующих на прослойки связующего, находящегося между слоями стеклоткани, будет отличаться от приведенной на рис. 6, в первом же случае крутящие моменты не будут возникать в связующем вообще. Поэтому дальнейшие формулы не допускают предельного порядка на армирование прямыми нитями.

Для рассматриваемого случая приближенное выражение максимального касательного напряжения  $\tau_k$  при кручении моментом  $M_k$  параллелепипеда связующего, имеющего в поперечном сечении

длинную сторону  $\ell$  и короткую сторону  $h_0$  (см. рис. 4.6), приближенно выразиться [4.23], таким образом:

$$\tau_k = \frac{M_k}{\ell h_0^2} \left( 3 + 1,8 \frac{h_0}{\ell} \right) \quad (4.10)$$

Так как  $M_k = P_i \cdot \ell$ , то его величина зависит от изгиба нитей стеклоткани, поскольку из рис. 4.6 следует, что при растяжении нити усилием  $P$  усилие  $P_i$  выражается как:

$$P_i = \frac{2 P}{\sqrt{1 + \left( \frac{\ell}{2 h_i} \right)^2}} \quad (4.11)$$

где  $h_i$  - величина амплитуды изогнутой нити.

Усилие  $P$ , приходящееся на одну стеклонить, равняется растягивающему напряжению  $\sigma$ , помноженному на площадь  $h_0 \Delta$ , где  $h_0$ , как и раньше расстояние между средними линиями профиля слоев стеклоткани,  $\Delta$  - расстояние между растягиваемыми нитями в одном слое, практически постоянное для одной и той же марки стеклоткани. Тогда в случае растяжения:

$$P = P_{\text{раст}} = \sigma h_0 \Delta = \frac{F}{S} h_0 \Delta \quad (4.12)$$

где  $F$  - растягивающее усилие и  $S$  - площадь поперечного сечения образца, а в случае изгиба:

$$P = P_{\text{изг}} = \sigma h_0 \Delta = \frac{M y h_0 \Delta}{J} \quad (4.13)$$

где  $M$  - момент внешних сил,  $y$  - расстояние от нейтрального слоя в изгибаемом образце, а  $J$  - момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Подставляя (4.12) и (4.11) в (4.10) и преобразуя подкоренное выражение, в случае растяжения образцов получаем:

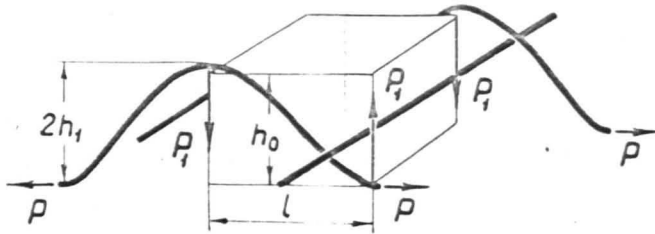


Рис. 4.6.

Схема сил, действующих на ячейку связующего при растяжении стекло-текстолита вдоль изогнутых нитей.

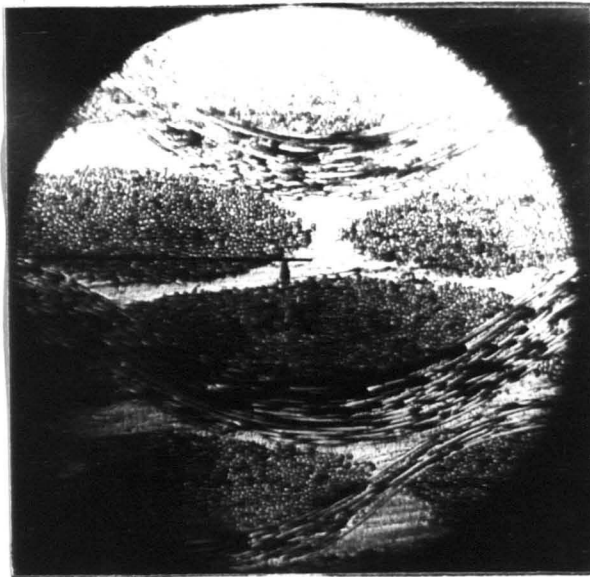


Рис. 4.7.

Микроструктура исследованного стекло-текстолита ( $\sim 150\times$ ).  $2h_1$  - удвоенная величина амплитуды изогнутой стеклонити.

$$\tau_k = \frac{a_1 \sigma h_1}{h_0 \sqrt{4h_1^2 + \ell^2}} \left( 3 + 1,8 \frac{h_0}{\ell} \right) \quad (4.14)$$

где  $a_1$  — произведение постоянных величин. Подставляя (4.13) и (4.11) в (4.10), получаем такую же формулу для изогнутого образца.

Можно показать, что подкоренное выражение в формуле (4.14) является приближенным выражением длины синусоидально изогнутой нити, которая при изменении в одной и той же стеклоткани взаимозависимых величин  $h_1$  и  $\ell$  не меняется. В свою очередь, при  $h_0 < \ell$ , что должно ожидаться в стеклотекстолитах с плотной упаковкой слоев стеклоткани, второй член суммы в формуле (4.14) можно отбросить. Тогда, обозначая произведение постоянных величин через  $a_2$ , имеем:

$$\tau_k = a_2 \frac{h_1}{h_0} \sigma \quad (4.15)$$

В конечном итоге, если прочность на растяжение у стеклотекстолита определяется величиной максимальных касательных напряжений  $\tau_{kp}$  (или таких же по величине нормальных напряжений), возникающих в связующем, для разрушающего напряжения имеем:

$$\sigma_p = a_3 \frac{h_0}{h_1} \quad (4.16)$$

где  $a_3 = \frac{\tau_{kp}}{a_2}$ .

Таким образом, получается, что статическая прочность стеклотекстолита с плотной упаковкой слоев стеклоткани при растяжении вдоль изогнутых нитей прямо пропорциональна толщине связующего, приходящегося на один слой стеклоткани, и обратно

пропорциональна амплитуде изогнутой стеклонити.

В свою очередь, если зависимость между циклической долговечностью  $N$  и максимальным напряжением в цикле принять в виде гиперболы высокой степени:

$$N = \frac{a}{\sigma_a^b} \quad (4.17)$$

где  $a$  и  $b$  предполагается константами то, учитывая (4.15), зависимость

$$N = c \frac{1}{\sigma_a^c} \left( \frac{h_0}{h_1} \right)^b \quad (4.18)$$

$c = \frac{a}{a_2^c}$  - для образцов одинаковой формы должны описать как кривую Велера одной марки стеклотекстолита (при  $\frac{h_0}{h_1} = const$ ), так и закономерность изменения долговечности для стеклотекстолитов с разными  $\frac{h_0}{h_1}$  (при  $\sigma_a = const$ ).

Для проверки формулы (4.18) были проведены микроскопические исследования стеклотекстолитов (величина  $h_0$  подсчитывалась по количеству слоев стеклоткани, приходящихся на 1 см толщины материала, а величина  $h = 2h_1$  измерялась так, как показано на рис. 4.7), результаты которых затем сравнивались с результатами испытаний на циклическую долговечность.

Сравнение формулы (4.18) с кривыми, приведенными на рис. 4.5 показало, что принимая  $c$  за константу, величина  $b$  константой не является, в области больших  $\sigma_a$  для всех кривых  $b \approx 3,5$ , а в области малых  $\sigma_a$  она увеличивается в 2 ÷ 3 раза. Пример данных, полученных для уровня амплитуды напряжения  $\sigma_a = 8,85 \text{ кгс/мм}^2$ , приведен в таблице 4.5

$$c_1 = \frac{c}{\sigma_a^c} = 1850 \cdot \text{вычислено по долговечности материала (1а)}.$$

ТАБЛИЦА 4.5

Толщина слоев связующего  $h_0$ , величина амплитуды изогнутой нити  $h_1 = \frac{h}{2}$ , прочность при растяжении и величины долговечности  $N$  (при  $\sigma_a = 8,5 \text{ кгс/мм}^2$ ) исследованных стеклотекстолитов.

№ материала	Прочн. при растяжении (кг/мм <sup>2</sup> )	$N$ циклы	$h_0$ (мм)	$h_1$ (мм)	$\frac{h_0}{h_1}$	$\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^{3,5}$	$N = C_1 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)$
2 б	14,7	24000	0,238	0,120	1,98	11	22000
1 б	15,8	29000	0,187	0,100	1,87	9	17500
1 а	16,1	24000	0,207	0,100	2,07	13	24000
2 а	16,3	26000	0,210	0,095	2,21	16	30000
3 б	17	38000	0,080	0,196	2,46	23	43000
3 а	18,6	42000	0,225	0,070	3,22	59	110000
4 а	20,2	95000	0,229	0,070	3,28	63	115000
5 а	20,4	160000	0,226	0,065	3,48	78	145000
4 б	20,5	150000	0,205	0,065	3,16	56	105000

Как следует из приведенных данных (срав. третий и последний столбец таблицы), корреляция между  $\frac{h_0}{h_1}$  и долговечностью  $N$  (а вместе с тем и прочностью) испытанных стеклотекстолитов, несмотря на грубые исходные предпосылки, получается удовлетворительной.

Самостоятельными опытами по аналогичной методике было исследовано влияние скорости и температуры намотки на вибрационную стойкость стеклопластика.

Оказалось, что изменение температуры намотки в 2 раза и скорости намотки в 10 раз не оказывают существенное влияние ни на структуру материала  $\frac{h_0}{h_1}$ , ни на его прочностные свойства. Поэтому это исследование здесь более подробно не обсуждается.

## 5.3. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 4.

1. Показано, что непосредственная корреляция между статической и циклической долговечностью на основе линейного закона суммирования повреждений для исследуемого стеклопластика не наблюдается. Разница в долговечностях между рассчитанной и фактической долговечности составляет 10-15 порядков по времени.

2. Показано, что предельная деформация, которая развивается в материале при его циклическом нагружении в начале интенсивного разрушения приблизительно равна деформации в точке перелома на кривой  $\sigma(\varepsilon)$  при одноосном растяжении или сжатии. Поскольку при деформации, соответствующей точке перелома, происходит нарушение сплошности композитного материала, сделано предположение, что такое нарушение сплошности является причиной интенсивного усталостного разрушения.

3. Проведенный расчет показывает, что между циклической долговечностью и долговечностью, приведенной в соответствии с точкой перелома, существует корреляция (их можно пересчитать одно в другое по формулам линейного суммирования повреждений). На основе перечисленных фактов сделан вывод, что усталостная прочность исследуемого композитного материала при вибрациях с разогревом в основном зависит только от уровня напряжения в точке перелома статической кривой, а не от максимальной статической прочности.

4. Показано, как технология изготовления тканевого стеклопластика влияет на прочность и циклическую долговечность

его посредством изменения геометрии армирования.

Для плотно армированного стеклотекстолита при нагружении его по утку выведена формула зависимости прочности и долговечности от отношения  $\frac{h_0}{h_1}$ , где  $h_0$  толщина слоя приходящегося на одну стеклоткань,  $h_1$  амплитуда изгиба стеклоткани.

5. Испытаниями девяти сортов тканевого стеклопластика и микроскопическими измерениями шлифов стеклопластика экспериментально подтверждена справедливость предложенной формулы, что дает возможность прогнозировать сравнительную усталостную долговечность стеклотекстолита по микроструктурным исследованиям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Краткое резюме результатов

Для расчета долговечности и разрушения материалов существуют два подхода:

а) подход "дисперсного разрушения", когда считается, что в первой стадии разрушения возникают дефекты во всем объеме образца, и после достижения ими определенного критического уровня или состояния появляется макротрещина (фронт разрушения);

б) подход "единичной трещины", основанный на предположении, что в материале всегда существует врожденные дефекты, наиболее опасный из которых служит зародышем магистральной трещины, которая распространяется сквозь неповрежденный материал.

В нашей работе развит вариант теории дисперсного разрушения.

Полученные в работе результаты могут быть кратко сформулированы следующим образом.

1. На примере отдельных полимерных материалов показано, что в процессе циклического нагружения происходят необратимые изменения механических свойств (увеличивается скорость диссипации энергии и уменьшается циклический модуль упругости), что может служить мерой накопления повреждений в материале.

2. Показано, что из общей энергии, рассеянной в материале, в процессе циклического нагружения только часть рас-

ходуется на нагрев. В стеклотекстолите при растяжении-сжатии эта доля соответствует  $\approx 75\%$ .

3. Проведен расчет разогрева и разрушения полимерных материалов при вибрационном нагружении с учетом возникающей в материале повреждаемости. Показано, что слабое линейное изменение скорости диссипации энергии от уровня повреждаемости вызывает нелинейное повышение температуры перед разрушением. Результаты расчета согласуются с экспериментальными данными.

4. Рассчитана кинетика разрушения материала с учетом статистического распределения перенапряжений по связям. Полученное развитие повреждений качественно согласуется с экспериментально наблюдаемым развитием.

5. Предложена феноменологическая теория усталости и разрушения, основанная на учете дисперсных, разным образом ориентированных повреждений. Поврежденность окрестности точки при этом характеризуется функцией на сфере. Аналогом в теории пластичности для предложенного варианта являются статистические теории пластичности. Рассмотренный вариант теории усталости и длительной прочности дает принципиальную возможность учета влияния сложного нагружения на процесс усталости и разрушения. Предложенный подход позволяет предсказать направление разрушения в случае сложного напряженного состояния по исходным данным, полученным при простейших испытаниях.

6. Показано, что ряд других теорий прочности (теории

кратковременной прочности, теория прочности Афанасьева, теория прочности С.Волкова, теория Хсиао) охватываются предложенным подходом. На основе рассмотренных положений возможно уточнение и развитие существующих теорий прочности.

7. Даны примеры расчета поверхностей равнодлительной прочности в случае сложного напряженного состояния и времени разрушения в случае сложного нагружения.

8. Дан пример расчета усталостной прочности при неоднородном напряженном состоянии, с учетом перераспределения напряжений вследствие изменения деформативных свойств в процессе утомления и с учетом распространения фронта разрушения.

9. Установлена связь функции на сфере и симметричных тензоров высших рангов. Показано, что функция на сфере сколь угодно точно аппроксимируется двумя тензорами достаточно высокого ранга. В случае центрально симметричных функций, используемых нами, в аппроксимации участвуют лишь тензоры четного ранга. Приведены примеры соответствия функций тензорам и наоборот.

10. Установлены операторы, действующие из множества симметричных тензоров второго ранга в множество центрально-симметричных скалярных функций на сфере. Эти операторы установлены для анизотропных сред, путем введения понятия сферических полиномиальных инвариантов. Приведен пример расчета прочности анизотропного тела с использованием предложенной теории. Показано, что критерии прочности анизотропных сред Гольденבלата-Колнова и Захарова охватываются рас-

смотренным подходом определения поверхностей прочности. Показаны возможные пути обобщения этих критериев прочности.

II. Проведено сопоставление динамической, длительной и вибрационной прочности для нескольких полимерных материалов на основе концепции накопления повреждений.

Показано, что для нахождения корреляции между результатами кратковременных (динамических) испытаний и длительными испытаниями для стеклопластика применим линейный закон накопления повреждений.

12. У полимеров, допускающих большие деформации разрыва, зависимость прочности от скорости нагружения имеет немонотонный характер. В первом приближении это объясняется конкуренцией двух одновременно протекающих факторов - разрушением и ориентацией. Соответствующая модель (типа модели Хсиао) и закон накопления повреждений дает качественное совпадение расчетных результатов с экспериментом.

13. Непосредственной корреляции между статической и циклической долговечностях стеклотекстолита (при частоте 15 гц) не существует. Однако линейный закон накопления повреждений позволяет сопоставить время до разрушения при циклическом и постоянном нагружении, если предположить, что усталостное разрушение происходит при напряжениях и деформациях, соответствующих точке перелома на статической кривой  $\sigma(\epsilon)$ , а не зависит от максимальной статической прочности.

15. При оценке влияния технологии изготовления на усталостную прочность композитного материала необходимо учитывать

его структуру. Дан пример расчета оптимальных (с точки зрения усталостных характеристик) параметров технологии изготовления стеклотекстолита на основе приближенной сравнительной оценки напряжений в ячейке связующего.

Наконец остановимся на некоторых возможных перспективах развития теории разрушения.

Аналогично тому, как в теории пластичности была развита деформационная теория, теории течения и статистические теории, так и в теории разрушения, очевидно, полезно развивать аналогичные направления. Однако, для построения теории, первостепенное значение в настоящее время имеют экспериментальные исследования. Так, до сих пор почти не имеется исследований процесса разрушения при сложном нагружении. Такие исследования совершенно необходимы для проверки достоверности той или другой теории разрушения. В частности, в рамках нашего подхода только опыты на сложное нагружение смогут дать ответ по возможному выбору меры разрушения (интегральный критерий, критерий по максимальным повреждениям или другая форма критерия разрушения).

Вместе с опытами на разрушение первостепенное значение имеет совершенствование методики определения повреждений как "физическими", так и "механическими" методами. Существенно, чтобы эти методы были бы развиты для образцов, допускающих воздействие на них сложного напряженного состояния. Необходимо установить критические условия перехода дисперсного разрушения к распространению макротрещины. Формальное

условие  $\Pi = I$  не дает еще возможность определить физический смысл его. Необходимо также установить классификацию материалов (и, возможно, условий нагружения) определяющую преимущественную область применения линейной и континуальной механики разрушения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

- I.1. Тамуж В.П.. Поведение жестких полимерных материалов при циклическом нагружении. Механика полимеров, 1969, I, 97-107.
- I.2. С.В.Серенсен. Развитие усталостных испытаний материалов, Заводская лаборатория, 1967, 33, 10, 1305.
- 1.3. Thum A., Greth A., Jacobi H.R. Kunst- u. Pressstoffe, 1937, 2, 16.
- 1.4.. Thum A., Jacobi H.R. Maschinenschaden, 1938, 15, 85.
- 1.5. Lazan B.I., Iorgiadis A. The behavior of plastics under repeated stress "Symposium on Plastics. Philadelphia District Meeting 22. 23.II. 1944" ASTM. Philadelphia, 1944, p.66.
- I.6. Усталость высокополимеров. Обзоры и переводы. М., 1957.
- I.7. С.Б.Ратнер, А.В.Стинкас, Гильгендорф Ю.Г. Механические испытания пластических масс. Сообщение III. Усталостные испытания. Пластические массы. 1960, 9, 54.
- I.8. Киселев Б.А. Стеклопластики. М., 1961.
- I.9. Огибалов П.М., Суворова Ю.В. Механика армированных пластиков. М., 1965.
- I.10. Смирнова М.К., Соколов Б.П., Сидорин Я.С., Иванов А.П. Прочность корпуса судна из стеклопластика. Л., 1965.
- I.11. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М., 1963.
- I.12. Немец Я., Серенсен С.В., Стреляем В.С. Прочность пластмасс. М., 1970.
- I.13. Конструкционные полимеры. под редакц. П.М.Огибалова. М., Изд. МГУ, 1972г.

- 1.14. Findley W.N., Hints O.E. Mod. Plast., April 1943.
- 1.15. Zarec I.N. Accelerated fatigue testing of polymethyl methacrylate, British Plastics, 1957, 30, 9, p. 399.
- 1.16. Findley W.N. Proc. ASTM, 1945, 878.
- 1.17. Lazar L.S., Accelerated fatigue of plastics, ASTM Bulletin, 1957, Nr. 220, p.67.
- I.18. Яцкевич С.И., Минков Я.Л. Усталостная прочность некоторых видов пластмасс. М., 1961.
- I.19. Ратнер С.Б., Агамалян С.Г. Влияние частоты нагружения на выносливость пластмасс. Пластические массы. 1967, 12, 66.
- 1.20. Ridell M.N., Koo G.P., O'Tode J.L. Polym. Engng a. Sci., 1966, 6, 4. Fatigue mechanisms of thermoplastics.
- I.21. Черняк Н.И., Яковлев Г.А. О влиянии некоторых факторов на усталостную прочность пластмасс. в кн.: Пластмассы в машиностроении и приборостроении. Киев. 1961.
- I.22. Иванова И.Н., Степанов В.А. Влияние асимметрии цикла на циклическую прочность полимеров, Механика полимеров, 1968, 5, 948.
- 1.23. Chamberlain D.W. Adv. Cryog. Engng, 1964, 9, 4, 131.
- 1.24. Shimamura S.J. Japan Soc. Test. Mater., 1959, 8, 74  
On fatigue Properties of Plastics Materials I.
- 1.25. Endo, Josikawa, Jamodo. Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 1958, 24, 147.
- 1.26. Zilver V. Vliv teploty na mechanicke vlastnosti polyestrovych skelných laminatu, Stojirenstvi, 1961, 8, 608.
- I.27. Паншин Б.И., Бартенев Г.М., Фиполков Г.Н. Прочность пластмасс при повторных нагрузках. Пластические массы. 1960. II, 47.
- 1.28. Freas A.D. Effect of Preloading and Fatigue on Mechanical Properties of Glass-Cloth Plastic Laminates, Trans ASME 1953 v 75 Nr.4.

- I.29. Ашкенази Е.К. Анизотропия механических свойств некоторых стеклопластиков. Л., 1961.
- I.30. Берштейн В.А., Гликман Л.А. Методика испытания стеклопластиков на усталость при чистом изгибе плоских образцов с заданным моментом, Заводская лаборатория, 1963, 29, 7, 858.
- I.31. Регель В.Р., Лексовский А.М. Временная зависимость прочности при статическом и циклическом нагружении. ФТТ, 1962, т.4, № 4.
- I.32. Лексовский А.М., Регель В.Р. Долговечность полимеров при циклическом нагружении, Высокомолекулярные соединения, 1965, 7, 6, 1045.
- I.33. Носов М.П., Бабичева В.Н. О необратимости разрушения нитей от усталости. Изв.высш.учеб.зав. Техн.текст.пром. 1962, 5, II.
- I.34. Стинкас А.В., Ратнер С.Б. Явление упрочнения при отдыхе в процессе усталостного разрушения пластмасс. Пластические массы. 1962, 12, 56.
- I.35. Стинкас А.В. Изучение усталостных свойств жестких пластмасс. Авт. канд.диссерт. М., 1963.
- I.36. Олдырев П.П. Исследование деформативных свойств, рассеяния энергии и разрушения жестких полимерных материалов при длительном циклическом нагружении. Автореферат канд. дисс. Рига. 1968.
- 1.37. Thompson A.W. The fatigue and creep properties of plastics laminates, Reinforced Plastics, 1957, 1, 11, 4.
- 1.38. Boller K.N. Fatigue Properties of fibrous Glass-Reinforced Plastics laminates subjected to Various conditions, Modern Plastics, 1957, v. 34, 6, 163.
- 1.39. Boller K.N. Resume of fatigue characteristics of reinforced plastic laminates subjected to axial loading. Fatigue Interdiscipl. Approach. Syracuse Univ. Press. 1964, 325.

- 1.40. L.I.Wolf, W.B.Diboll, Jr. The role of Stress Concentration in the Fatigue of Delrin, Trans ASME, 1965 v. B87,3.
- I.41. Ратнер С.Б., Бараш Н.И. Влияние жестких сред на усталостную прочность полиамидов, МП, 1965, I, I24.
- I.42. Арсеньева Л.Н. Исследование усталостной прочности стеклопластиков в некоторых агрессивных средах. Авт.канд. дисс. М., 1964.
- I.43. Захаров В.Н. Влияние эксплуатационных факторов на циклическую прочность судостроительных стеклопластиков. Авт.реф. канд.дисс., Рига, 1971.
- I.44. Саркисян Н.Е. Влияние анизотропии на циклическую деформативность и разогрев стеклопластиков типа СВМ. Механика полимеров, 1971, 5, 898.
- I.45. Саркисян Н.Е. Экспериментальное исследование анизотропии циклической прочности, деформативности и разогрева слоистых пластиков. Авт.канд.дисс. Ереван, 1971.
- I.46. Тернопольский Ю.М., Скудра А.М. Конструкционная прочность и деформативность стеклопластиков. Рига, 1966.
- I.47. Олдырев П.П. Температура разогрева и разрушение пластмасс при циклическом деформировании. Механика полимеров, 1967, 3, 483.
- I.48. Петренко И.П. Исследование прочности силового пластика при повторно-переменных нагрузениях, ДАН УССР, 1962, 3, 366.
- I.49. Савкин В.Г., Белый В.А., Соголова Т.И., Каргин В.А. Влияние надмолекулярных структур на саморазогрев пластмасс при циклических нагрузениях. Механика полимеров, 1966, 6, 803.
- I.50. Мачулис А.Н., Пугина М.И., Жечюс А.А., Кучинскас В.К.,

- Стасюнас А.П. Влияние некоторых добавок и окружающей среды на статическую и усталостную прочность полиамидов. Мех. пол. 1966, I, 60.
- I.51. Кучинскас В.К., Мачюлис А.Н. К вопросу усталости и разрушения стабилизированного поликапроамида. Механика полимеров, 1967, 4, 713.
- 1.52. M.Nowak. Wybrane zagadnienia wytrzymałości zme creniowej poliamidu stabilizowanego. Prace Naukowe Instytutu Mechaniki Technicznej Materialoznawstwa Politechniki Wrocławskiej Nr.11 Monografie 3 Wrocław 1972.
- I.53. Барейшис И.П. Исследование прочности и разрушения поликапроамида при циклическом растяжении-сжатии. Авт.канд. дисс. Каунас, 1972.
- 1.54. Matting A. Beurteilungsgrundlagen für die Sicherheit von Konstruktionen aus Glasfaserkunststoffen auf Grund ihrer statischen und dynamischen Eigenschaften, Materialprüfung, 1966, Bd8, N2, 49.
- 1.55. Frank I., Müller W. Zur Dauerschwingfestigkeitsprüfung glasfaserstärkter Kunststoffe, IFL-Mitt, 1965,4,8,300.
- I.56. Стинскас А.В., Антропова Н.И., Коробов В.И., Ратнер С.Б., Самохвалов А.В., Шарова А.В. Механика полимеров, 1965, 2, II8.
- I.57. Ратнер С.Б., Коробов В.И. Саморазогрев полимеров при многократной деформации. ДАН СССР, 1965, 161, 4, 824.  
Ратнер С.Б., Коробов В.И., Саморазогрев пластмасс при циклической деформации, Механика полимеров, 1965, 3, 93.
- I.58. Коробов В.И., Ратнер С.Б. Определение критического саморазогрева полимеров при циклической деформации. Зав.лаб. 1966, 32, 5, 589.
- I.59. Ратнер С.Б. Разогрев и разрушение полимеров при многократном нагружении. Авт. докт. дисс. М., 1970.

- I.60. Баренблатт Г.И., Козырев Ю.И., Малинин Н.И., Павлов Д.Я., Шестерников С.А. О виброползучести полимерных материалов. ДАН 1966, т.166, № 4, 813, ЖПМТФ, 1965, 5, 68.
- I.61. Баренблатт Г.И. Об эффекте малых вибраций при деформации полимеров, ПММ, 1966, т.30, вып.1, 73.
- I.62. Галин Л.А. О воздействии вибрационной нагрузки на полимерные материалы, Изв. АН СССР. Механика, 1965, 6, 53.
- I.63. Schapery R.A. Влияние циклического нагружения на температуру вязкоупругого материала с изменяющимися свойствами. Ракетная техника и космонавтика. (АТАА J.) 1964, 2, 5.
- I.64. Schapery R.A. Термомеханическое поведение вязко-упругих сред с переменными свойствами при циклическом нагружении. *(ссылка?)*
- I.65. Коваленко А.Д., Карпаухов В.Г. Влияние циклического нагружения на температуру цилиндра из вязкоупругого материала. ДАН УССР, 1966, 6. *40, 41а*
- I.66. Франк-Каменецкий Д.А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., 1947.
- I.67. Кнопов В.М., Лексовский А.М., Регель В.Р., Слуцкер А.И. Поведение надмолекулярной структуры ориентированных аморфно-кристаллических полимеров при циклическом нагружении. Механика полимеров, 1968, 2, 195.
- 1.68. T.R.Smith, M.I.Owen. The Progressive Nature of Fatigue damage in Glass Reinforced Plastics. Brit. Plast.Fed. 6th Int. Reinforced Plastics Conference London 1968, paper 27 Modern Plastics 46 Nr.4 p.124, Modern Plastics 46 Nr.5p, 128.
- 1.69. R.I.Howe, M.I.Owen. Cumulative damage in chopped strand mat/polyster resin laminates Brit. Plast. Fed. 8th International Reinforced Plastics Conference Brighton 10-12 X 1972 pp 137-148.

- I.70. Кишкин Б.П. Влияние предварительных периодических нагрузжений на статическую прочность армированных пластиков. Вестник, МГУ, Математика, Механика, 1967, I, 68.
- I.71. Кишкин Б.П. Некоторые особенности усталостной прочности стеклопластиков. Сб. Упругость и неупругость вып. 2. Изд. МГУ, 1971, 253-259.
- I.72. Трощенко В.Т. Упругость и неупругость металлов. Киев, Наукова Думка 1971.
- I.73. К.В. Панферов, Ю.Г. Корабельников О влиянии "отдыха" на долговечность некоторых полимерных материалов при повторных нагрузках. Высоком. соед. 1967, т.7, 10, 1731.
- 1.74. Aida H., Sakae J., Sunamoto D. Studies on the strength of plastics. Proc. 2<sup>nd</sup> Japan Congr. Test. Mater. Kyoto 1959.
- 1.75. Carey R.H. ASTM Fatigue tests of nonrigid plastics. ASTM Bull., 1955, 206.
- I.76. Журков С.Н. Изв. АН СССР Неорг.матер. 1967, 10, 1767, "Проблема прочности твердого тела". Вестник АН СССР 1968, 3, 46. Кинетическая концентрация прочности твердых тел.
- I.77. Велиев С.Н., Веттегрень В.И., Новак И.И. Изучение разрушения полимеров под нагрузкой методом инфракрасной спектроскопии. Механика полимеров, 1970., 3, 433.
- I.78. Веттегрень В.И., Корсуков В.Е., Новак И.И. ???
- I.79. Марихин В.А., Слуцкер А.И., Ястребинский А.А., Исследование структуры ориентированного полиэтилентерсфталата (лавсана) ФТТ., 1962, 4, 2534.
- I.80. Куксенко В.С., Слуцкер А.И., Ястребинский А.А. Возникновение субмикроскопических трещин при нагружении ориентированных аморфно-кристаллических полимеров. ФТТ, 1967, 9, 2390, 8, 2990.

- I.81. Журков С.Н., Куксенко В.С., Слуцкер А.И.. Образование субмикроскопических трещин в полимерах под нагрузкой. ФТТ, 1969, II, № 2, 296.
- I.82. Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Особенности роста субмикроскопических трещин в нагруженных полимерах. ФТТ, 1969, 2, 2405.
- I.83. Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Связь разрушения и деформирования в ориентированных полимерах, Механика полимеров, № I, 1970, 43.
- I.84. Журков С.Н., Куксенко В.С., Слуцкер А.И. Микромеханика разрушения полимеров. Проблемы прочности 1971, 2, 45.
- I.85. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Лексовский А.М., Тамуж В.П. Разрушение и усталость полимеров. Механика полимеров, № 4, 1972, 597-611.
- 1.86. В.Р.Наigh Trans of the Faraday Soc. XXIV Nr.2, 1928.
- 1.87. P.G.Forrest, H.J.Tapsel. Some experiments of the alternating stress fatigue of a mild steel and on aluminium alloy at elevated temperature. Proc. of Mechanical Eng. Nr.29, 1954.
- I.88. Лебедев Т.А., Маринец Т.К., Ефремов А.И. Исследование циклической прочности металлов методом записи диаграмм усталости. Сб. Циклическая прочность металлов, М., 1962.
- I.89. Бугай В.И. Исследование пластических деформаций и рассеяния энергии при повторно-переменных нагрузениях. Авт. канд. дисс. Киев, 1965.
- I.90. Одинг И.А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. М., 1963.
- I.91. Коффи́н Л.Ф. Циклические деформации и усталость металлов. сб. "Усталость и выносливость металлов", М., 1963.
- 1.92. В.Ж.Лazan. Transact. ASME 65, 1943.

- I.93. Чернышев В.М. Динамические свойства некоторых конструкционных пластмасс. Авт.канд.дисс. Рига 1963.
- 1.94. S.Wintergerst Dynamisches Verhalten von Hart-PVC Kunststoffe 50, Nr.5, 1960.
- 1.95. Tauchert T.R., Afzal S.M. J. Appl. Phys. 1967, 38 Nr.12, 4568. Heat generated during torsional oscillation of polymethylmetacrylate tubes.
- I.96. Методы статических испытаний армированных пластиков. Кинцис Т.Я., Розе А.В., Жигун И.Г. под ред. Тарнпольского Ю.М. Рига изд. "Зинатне", 1972.
- I.97. Олдырев П.П., Тамуж В.П. Изменение свойств стеклотекстолита при циклическом растяжении-сжатии. Механика полимеров, 1967, № 5, 864-872.
- I.98. Олдырев П.П., Борисенко В.В. Устройство для измерения деформаций. Авт.свидетельство № 198771, 29.04.1967.
- I.99. Трощенко В.Т. Сб. "Новые машины и приборы для испытания металлов". М., 1963.
- I.100. Олдырев П.П., Тамуж В.П. Исследование рассеяния энергии в стеклопластиках методом динамической петли гистерезиса. В сб. "Рассеяние энергии при механических колебаниях", Киев., 1968.
- I.101. Олдырев П.П., Тамуж В.П. Закономерности рассеяния энергии в стеклопластике при длительном циклическом деформировании. Проблемы прочности, 1969, № 3, 31-35.
- I.102. Олдырев П.П., Тамуж В.П. Рассеяние энергии в стеклотекстолите при циклическом растяжении-сжатии. Механика полимеров, 1969, № 4, 655-661.
- I.103. Роговина А.А., Каргин В.А., Каучук и резина. 1959, I, 31.
- I.104. Пранч А.С., Тамуж В.П. Ударная усталость стеклотекстолитов. Механика полимеров, 1969, 4, 751-754.

- I.I05. Негреева С.Н., Тамуж В.П. Разогрев и разрушение полимерных материалов при вибрационном нагружении. В сб. статей к 100-летию академ. Б.Галеркина (в печати).
- I.I06. Трощенко В.Т., Балыбердин В.С., Коковин А.Г. Методика исследования рассеяния энергии в материалах при стационарном циклическом нагружении. Проблемы прочности, № 5, 1970, 18.
- I.I07. Цирулис Т.Т., Шилтер Э.П. Определение нестационарного температурного поля проводника с джоулевым источником тепла методом степенных рядов. Изв. АН Латв. ССР, Серия физ.техн. наук. 1972, № 5.
- I.I08. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1961.
- I.I09. Тамуж В.П., Тихомиров П.В. Расчет долговечности с учетом статистического распределения перенапряжений на связях. Механика полимеров, 1973 (в печати).
- 1.110. Baily I. Attempt to correlate same tensile strength measurements on glass. Glass Ind. 20 1939, 1.
- 1.111. K.L.De Vries, B.A.Lloyd, M.L.Williams. Reaction-Rate Model for fracture in Polymeric Fibers. J.Appl. Phys. Vol. 42, Nr.12, 1971 pp.4644-4653.
- I.II2. Журков С.Н., Абасов С.А. Температурная и временная зависимость прочности полимерных волокон. ВМС, т.3, 1961, 3, 450.

Список литературы ко II главе

- 2.1. Sachs G. Zur <sup>best</sup>Abteilung einer Fließbedingung. - Z.Vereines dtsh. Ingr. 72, 1928, 22.
- 2.2. Reuss A. Berechnung der Fließgrenzen von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristall. - ZAMM, 9, 1929, 1.

- 2.3. Bruggeman D.A. Dissertation, 1930.
- 2.4. Huber A., Schmidt E. Bestimmung der elastischen Eigenschaften quasiisotroper Vielkristalle durch Mitteilung. - Helv. phys. acta, 7, 1934, 6.
- 2.5. Boas W., Schmidt E. Zur Berechnung physikalischen Konstanten quasiisotroper Vielkristalle. - Helv. phys. acta, 7, 1934, 6.
- 2.6. Weibull W.A. Statistical theory of the strength of materials. Ingeniörs vetenskaps akademien, Handlingen No 151, 1939.
- 2.7. Конторова Т.А., Френкель Я.И. Статистическая теория хрупкой прочности реальных кристаллов.- ЖТФ, II, 1941, 3.
- 2.8. Болотин В.В. Статистические методы в строительной механике. Издательство литературы по строительству, М., 1965.
- 2.9. Болотин В.В. Изменчивость пределов прочности хрупких материалов и ее связь с масштабным эффектом. Строительная механика и расчет сооружений, № 4, 1960.
- 2.10. Болотин В.В. Некоторые вопросы хрупкого разрушения. Сб. Расчеты на прочность. в.8, Машгиз., 1962.
- 2.11. Снитко Н.К. Теория сопротивления материалов при применении статистического анализа.- Вестн.инж.и техн., 1939, I.
- 2.12. Снитко Н.К. Анализ теоретической диаграммы растяжения и определение пределов текучести железа.- Вестн.инж. и техн., 1940.
- 2.13. Снитко Н.К. К теории упруго-пластического состояния квазиизотропных тел и методы вычисления скрытно-упругих напряжений.- Изв. АН СССР, ОТН, 1942, 7-8.
- 2.14. Снитко Н.К. О теории прочности металлов с учетом структуры - ЖТФ, 1948, 18, 6.

- 2.15. Снитко Н.К. Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области Л., Стройиздат., 1968.
- 2.16. Афанасьев Н.Н. Статистическая теория усталостной прочности металлов - Ю, ЖТФ, 1940, 19; Киев, Изд-во АН УССР, 1953.
- 2.17. Волков С.Д. Статистические теории прочности. М., Свердловск, Машгиз, 1960.
- 2.18. C.C.Hsiao. Theory of Mechanical Breakdown and Molecular Orientation of a Model Linear High - Polymer Solid. J. of Appl. Phys. Vol. 30 Nr.10, 1959 pp.1492-1497.
- 2.19. Хсiao С.С. в книге Разрушение твердых полимеров. Изд. "Химия", М., 1971.
- 2.20. Н.Н.Kausch von Schmeling, C.C.Hsiao. Behavior of Elastic Networks of Various Degrees of Orientation in the Kinetic Theory of Fracture. J. Appl. Phys. 1968 v.39, 11, 4915-4919.
- 2.21. Болотин В.В. Некоторые обобщения теории суммирования усталостных повреждений и их приложения к анализу долговечности при действии случайных сил. Изв. ВУЗов, сер. "Машиностроение", № 8, 1959.
- 2.22. Болотин В.В. Об оценке долговечности при стационарных случайных нагрузках. Известия ВУЗов, сер. "Машиностроение", № 9, 1959 г.
- 2.23. Болотин В.В. Прочность и накопление повреждений при случайных нагрузках. Сб. "Расчеты на прочность", вып.7, Машгиз, 1961.
- 2.24. Болотин В.В. Долговечность конструкций при квазистационарных случайных режимах напряжения. Инженерный сборник т.29. Изд. АН СССР, 1960.
- 2.25. Болотин В.В. Накопление усталостных повреждений при напряжениях, представляющих собой широкополосный случайный процесс. Изв. ВУЗов "Машиностроение", № 4, 1963г.

- 2.26. Болотин В.В. Некоторые математические и экспериментальные модели процессов разрушения. Пр. прочности, 1971, 2, 13-20.
- 2.27. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития. Стройиздат М., 1972 г.
- 2.28. Griffith A.A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. Roy. Soc. 1920, A 221, 163-198.
- 2.29. F.H.Andrews Fracture mechanics and engineering design in polymers Proc. Second Int. conf. on fracture Brighton, 1969.
- 2.30. F.H.Andrews, B.I.Walker Fatigue fracture in polyethylene. Proc. Roy. Soc. London, 1971, A325 Nr. 1560- 57-79.
- 2.31. Ю.Н.Работнов. О разрушении твердых тел. Проблемы механики твердого деформированного тела к 60-летию акад. Новожилова. Судостроение. Л., 1970.
- 2.32. Zhurkov S.W., Kuksenko V.S., Slutsker A.I. Submicrocrack formation under stress. Fracture 1969. Proc. second Int. Conf. on fracture; Brighton L. 1969.
- 2.33. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести. Изв. АН СССР ОТН, 1958, № 8.
- 2.34. Качанов Л.М. Время разрушения в условиях ползучести. Проблемы механики сплошной среды. АН СССР, 1961.
- 2.35. Palmgren A. Die Lebensdauer von Kugellagern. Zeit. VDJ, 68, Nr.14, 1924.
- 2.36. Langer B.F. Fatigue failure from stress cycles of varying amplitude. Trans. ASME. J. Appl. Mech. 4, 4, 1937.
- 2.37. Miner M.A. Cumulative fatigue damage. Trans. ASME, J. Appl. Mech., 12, 3, 1945.
- 2.38. Robinson E.L. Effect of temperature variation on the long time rupture strength of steels. Trans. ASME, v.74, d5, 1952.

- 2.39. Тамуж В.П. Усталость и разрушение полимеров. Феноменологический аспект проблемы. Механика полимеров, 1972, 4, 605-611.
- 2.40. Новожилов В.В. Проблемы механики твердого деформируемого тела к 60-летию акад. В.В.Новожилова. Судостроение, Л., 1970.
- 2.41. Новожилов В.В. О перспективах феноменологического подхода к проблеме разрушения. Докл. на XIII международн. конгр. по теоретической и прикладной механике, М., 1972г.
- 2.42. Batdorf S.B., Budiansky B.A. Mathematical theory of plasticity based on the concept of slip NASA TN 1871, 1949.
- 2.43. Batdorf S.B., Budiansky B. Polyaxial stress-strain relations of a strain hardening metal J.Appl.Mech.2 1, 1954, 323  
Русск.перевод в сб. пер. Механика, 1955, 5, 120.
- 2.44. Малмейстер А.К. Упругость и неупругость бетона. Рига, Изд-во АН ЛССР, 1957.
- 2.45. Малмейстер А.К. Основы теории локальных деформаций (обзор I). Механика полимеров. 1965, 4, 12.
- 2.46. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление жестких полимерных материалов. Рига, Изд. "Зинатне", 1972.
- 2.47. Lin T.H. On stress-strain relations based on slips.Proc. 3 rd US Nat. Congr. Appl. Mech.(Providence 1958), 1958, 581.  
Русск. пер. в сб. пер. Механика, 1960, 4, 135.
- 2.48. Кнетс И.В. Основные современные направления в математической теории пластичности. Рига, Изд. "Зинатне", 1971.
- 2.49. Тетерс Г.А. Сложное нагружение и устойчивость оболочек из полимерных материалов. Рига, "Зинатне", 1968.
- 2.50. Леонов Н.Я., Швайко Н.Ю. Сложная плоская деформация. ДАН. 159, 1964, 5, 1007.

- 2.51. Ильющин А.А. Об одной теории длительной прочности. Инженерный журнал МТТ, 1967, 3, 21.
- 2.52. Ильющин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории вязко-упругости. М., "Наука", 1970.
- 2.53. Москвитин В.В. Об одной модели нелинейной вязко-упругой среды, учитывающей влияние накопленных повреждений. Механика полимеров, № 2, 1972 г., стр. 241.
- 2.54. Вакуленко А.А., Качанов М.Л. Континуальная теория среды с трещинами. МТТ, 1971, № 4, стр. 159.
- 2.55. Качанов М.Л. К континуальной теории сред с трещинами. МТТ, 1972, 2, 54.
- 2.56. Y.N.Rabotnov Creep rupture Proc. 12-th International Congress of Appl. Mech. Stanford, 1968.
- 2.57. Работнов Ю.Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность. Инженерный журнал. МТТ, 1967, 3, 36.
- 2.58. Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии. Изв. АН СССР ОТН Механика и машиностроение, 1959, № 6.
- 2.59. Новожилов В.В. О сложном нагружении и перспективах феноменологического подхода к исследованию микронапряжений. ПММ, 1964, XXIII, 3.
- 2.60. Новожилов В.В., Рыбакина О.Г. Перспективы построения критерия прочности при сложном нагружении. Инженерный журнал, 1966, № 5.
- 2.61. Рыбакина О.Г. Сборник "Проблемы механики твердого деформированного тела", Из-во "Судостроение", 1970.
- 2.62. Тамуж В.П., Лагздиньш А.Ж. Вариант построения феноменологической теории прочности. Механика полимеров, 1969, № 4, 638.

- 2.63. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М., 1966.
- 2.64. Лагздиньш А.Ж. Разложение функций на группе компонентами тензоров. Латвийский математический ежегодник (в печати).
- 2.66. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., "Мир", 1965.
- 2.67. Тамуж В.П. Сравнение прочности при простом и двухосном растяжении изотропного тела. Вопросы динамики и прочности 19, Рига, 1969, стр. 277-282.
- 2.68. Качанов Л.М. К вопросу о хрупких разрушениях в условиях ползучести при сложном нагружении. Вестник Ленинградского университета, 1972, I, 92.
- 2.69. Иванова И.Н. Исследование циклической прочности неориентированных полимеров. Авт. канд. дисс. Л., 1968.
- 2.70. Тамуж В.П., Тихомиров П.В. К построению варианта теории разрушения. Механика полимеров, 1970, 4, 648-653.
- 2.71. Тамуж В.П. Об одной возможности построения теории длительного разрушения. Проблемы прочности, 1971, 2, 59-64.
- 2.72. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.
- 2.73. Фридман Я.Б., Зилова Т.К., Новосильцева Н.И. Кинетика разрушения при двухосном растяжении. ДАН, 1967, 174, № 3.
- 2.74. Балтин Ю.П., Тамуж В.П., Ансон Г.Ф. Двухкомпонентная установка для циклических испытаний при сложном нагружении. Механика полимеров. 1972, I, 141-147.
- 2.75. Филоненко-Бородич М.М. Механическая теория прочности. М., Изд-во МГУ, 1961.
- 2.76. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Сопротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряженном состоянии. Киев, "Наукова думка", 1969.

- 2.77. Крегерс А.Ф. Исследование поверхностей нагружения в теории локальности деформаций, *Механика полимеров*, 1971, 4, 5.
- 2.78. Ультан В.Е., Чебанов В.М., Чудновский А.И. К вопросу о разрушении пространственно-структурированных полимеров. *Механика полимеров*, 1972, 4, 612.
- 2.79. Качанов Л.М. Хрупкие разрушения в условиях ползучести при циклическом нагружении. Проблемы механики твердого деформируемого тела к 60-летию акад. В.В.Новожилова, "Судостроение", Л., 1970, 197.
- 2.80. Тамуж В.П., Тихомиров П.В. Определение усталостной долговечности при изгибе с вращением. *Механика полимеров*, 1971, № 5, 875-880.
- 2.81. Бугло С.Т., Ратнер С.Б. Влияние релаксационных явлений на выносливость пластмасс при гармоническом и ударном нагружениях. *Механика полимеров*, 1972, 1, 165.
- 2.82. Лагздиньш А.Ж., Тамуж В.П. К построению феноменологической теории разрушения анизотропной среды. *Механика полимеров*, 1971, № 4, 634-644.
- 2.83. Лохин В.В., Седов Л.И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов. *ПММ*, 1963, 27, № 6, 393.
- 2.84. Сиротин Ю.И. Тензорные функции полярного и аксиального вектора, совместимые с симметрией текстур. *ПММ*, 1964, 28, 653.
- 2.85. Крегерс А.Ф. Физические соотношения ортотропного материала в теории локальности деформаций. *Механика полимеров* № 6, 1968, 970, 975.

## Список литературы III главы.

- 3.1. Прочность при неустановившихся режимах переменных напряжений Под ред. Серенсена С.В. М., Изд-во АН СССР, 1954.
- 3.2. Григорьев Ю.П. Исследование повреждаемости и разрушения металлов при программном нагружении. Авт. докт. дисс., Рига, 1971.
- 3.3. Методы статических испытаний армированных пластиков под ред. Тарнопольского Ю.М., Рига, "Зинатне", 1972.
- 3.4. Кокошвили С.М., Калнинь А.П. "Пьезоэлектрический динамометр", авт. Свид-во № 309259 от 23.IV.1971.
- 3.5. Кокошвили С.М., Тамуж В.П. Влияние скорости деформации на механические свойства полиформальдегида. Механика полимеров. 1966, 6, 937-940.
- 3.6. Панферов К.В., Корабельников Ю.Г., Саламахин П.М. в кн.: Прочность и деформативность конструкций с применением пластмасс. М., 1966.
- 3.7. Кокошвили С.М., Тамуж В.П., Янсон Ю.О. Вычисление релаксационных спектров по результатам динамических испытаний. Механика полимеров, 1971, 2, 349-353.
- 3.8. Тамуж В.П., Тихомиров П.В. Разрушение ориентирующихся материалов при растяжении. Механика полимеров, 1973, (в печати).
- 3.9. V.P.Tamuzh, P.V.Tikhomirov The Fracture of the Orientating Materials at the Tension. Proc. 3-rd Int.Conf. on Fracture München April 1973.
- 3.10. Гуль В.Е. Структура и прочность полимеров. Изд. "Химия", М., 1971.
- 3.11. Губанов А.И. В.М.С. 1965, 7, 1192.
- 3.12. Седов Л.И. "Механика сплошной среды", т.1, М., 1970.

- 3.13. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966 г.
- 3.14. Ляхович И.Е., Мусаедян И.Н., Чирков Н.М. О долговечности некоторых линейных полиолефинов. ВМСтХ, 1968, № 4, 715.
- 3.15. Берстенов В.А., Торнер Р.В., Каргин В.А. Об изменении прочности полимерных материалов в процессе ориентации. Механика полимеров, 1970, № 5, 848.

Список литературы IV главы.

- 4.1. Олдырев П.П., Тамуж В.П. О разрушении стеклопластика при циклическом растяжении-сжатии. Механика полимеров, 1971, 4, 654-662.
- 4.2. Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е. Кинетическая природа прочности твердых тел. Успехи физ. наук, 106, в. 2, 193.
- 4.3. Журков С.Н., Томашевский Э.Е. Временная зависимость прочности при различных режимах нагружения. В кн: Некоторые проблемы прочности твердого тела, 1959.
- 4.4. Бартенев Г.М., Паншин Б.И., Разумовская И.В., Финогенов Г.И. О долговечности органического стекла при циклических нагружениях. Изв. АН СССР., ОТН, 1960, 6.
- 4.5. Паншин Б.И., Бартенев Г.М., Финогенов Г.Н. Прочность пластмасс при повторных нагрузках. Пласт. массы, 1960, II, 47.
- 4.6. Киреенко О.Ф., Лексовский А.М., Регель В.Р. Роль разогрева в снижении долговечности полимеров при циклическом нагружении. Механика полимеров, 1968, 3, 483.
- 4.7. Регель В.Р., Лексовский А.М., Болибеков У., Исанов И.Н., Мех. полимеров, 1972, 3, 483.

- 4.8. Разумовская И.В., Бартенев Г.М. Методы оценки прочности и надежности пластмасс при переменных внешних условиях. ХУІ конф. по высокомолек. соед. Программа, Рига, 1966, 78.
- 4.9. Бартенев Г.М. Паншин Б.И., Разумовская И.В., Буянов Г.И. Расчет циклической долговечности пластмасс с учетом локального перегрева материала. Механика полимеров, 1968, 1, 102.
- 4.10. Chambers R.E., Mc Garry F.I. ASTM Bull., 1958, 233, 40.
- 4.11. Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я., О механизме передачи усилий при деформировании ориентированных стеклопластиков. Механика полимеров, 1965, 1, 100.
- 4.12. Шлица Р.П. Особенности деформирования стеклопластиков при растяжении. 1. Перелом в кривой зависимости между напряжениями и деформациями. Механика полимеров, 1966, 2, 307.
- 4.13. Работнов Ю.Н., Синайский В.М., Степанычев Е.И. Изучение кинетики процесса разрушения стеклопластмасс. Машиновед., 1967, 1, 98.
- 4.14. Шлица Р.П. Особенности деформирования стеклопластиков при растяжении. 2. Соотношение между продольными и поперечными деформациями.
- 4.15. Тутанс М.Я., Адамович А.Г., Заколовский К.Я. Прогностика процессов разрушения стеклопластиков сейсмоакустическим методом. 2. Особенности накопления повреждений в тканых стеклопластиках при одноосном растяжении. Механика полимеров, 1973 (в печати).
- 4.16. Степанычев Е.И. Особенности механизм разрушения стеклопластмасс. Механика полимеров, 1966, 3, 469.
- 4.17. Пранч А.С., Тамуж В.П. О зависимости между структурными и прочностными характеристиками стеклотекстолитов. Механика полимеров, 1967, 2, 302-308.

- 4.18. Болотин В.В. Слоистые упругие и вязко-упругие среды с малыми начальными неправильностями. Инж. журнал, МГТ, 1966, 3.
- 4.19. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков, Рига, "Зинатне", 1969.
- 4.20. Чернин И.М., Гуль В.Е. О механизме разрушения тканевых стеклопластиков при растяжении. Пласт. массы., 1964, 3, 45.
- 4.21. Вейбулл В. Усталостные испытания и анализ из результатов. М., 1964.
- 4.22. Койтер В.Т. Моментные напряжения и теория упругости. Сб. пер. Механика., 1965, 3, 89.
- 4.23. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. т. I., М., 1965.