УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Сборник научных работ аспирантов

Рига—1972

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР
Латвийский ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет имени Петра Стучки
Вычислительный центр

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Сборник научных работ аспирантов

Редакционно-издательский отдел ЛГУ им. Петра Стучки
Рига 1972

Предлагаемый сборник включает научные работы, выполненные аспирантами Вычислительного центра Латвийского государственного университета им. Петра Стучки.

Представлены работы по краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, по стохастическим дифференциально-функциональным уравнениям, а также по теории алгоритмов.

Сборник рассчитан на всех научных работников, интересующихся указанными областями.

Редакторы: Г.И.Лаптев
Е.Ф.Царьков

614-6-74

ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИЙ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛАМПОВОГО ГЕНЕРАТОРА С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ.

Буйкис М.А.

§I. Анализ характеристического квазиполинома и уравнения для радиуса и фазы колебаний.

Рассмотрим следующее стохастическое дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x}(t)+2\bar{q}\,\dot{x}(t-\Delta)+\omega^2 x(t)=\varepsilon\big[a_0 x(t)+a_1\dot{x}(t)+a_2\dot{x}(t-\Delta)-$$

$$-a_3\dot{x}^3(t-\Delta)+x\,h\sin\nu_1 t\big]-2\bar{q}\big[\dot{x}(t-\Delta-\varepsilon\delta)-\dot{x}(t-\Delta)\big]+x\,\dot{\xi}(\varepsilon t) \qquad /1.1/$$

где ε -малый параметр, Δ -время задержки сигнала в цепи обратной связи, $\dot{\xi}(t)$ -"белый шум" интенсивности S Величины a_0, a_1, δ -возмущения коэффициентов ω^2, $\bar{q}$ и δ, введены для удобства анализа. Слагаемое $\varepsilon x\,h\sin\nu_1 t$ соответствует параметрическому возбуждению емкости лампового генератора, а слагаемое $x\,\dot{\xi}(\varepsilon t)$ отражает наличие параметрического шума при этом возбуждении. Уравнения такого типа описывает работу параметрически возбуждаемого лампового генератора с запаздыванием в цепи сетки с учетом параметрических флуктуаций. Подобные параметрические системы, но без запаздывания, рассмотрены в[4, §19, п.5и6].

Уравнение /1.1/ при $\varepsilon=0$ называется порождающим[3]. Его квазиполином имеет вид

$$W(\lambda)=\lambda^2+2\bar{q}\lambda\exp\{-\lambda\Delta\}+\omega^2 \qquad /1.2/$$

В работе [2] построено $\mathfrak{D}$ -разбиение для этого уравнения при $\Delta=\pi$ которое приведено на рисунке I.

Уравнения для прямых n_1, n_3 n_5, получаются из уравнения $W(i\lambda)=0$, если приравнять нулю действительную и мнимую части

$$\begin{cases} -\nu^2+2\bar{q}\nu\sin\nu\pi+\omega^2=0 \\ 2\bar{q}\nu\cos\nu\pi=0 \end{cases}$$

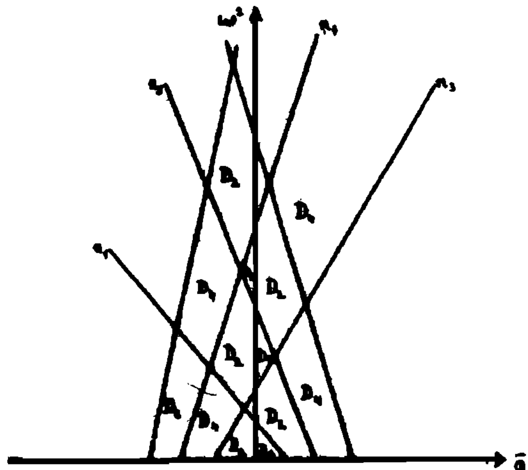


Рис. I.

Из второго уравнения следует что $\nu\pi = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, $\nu = \frac{1}{2} \pm n$, $n=0,1,2,\ldots$
Если n четное, то $\sin\nu\pi = +1$ и прямые наклоненные налево имеют уравнения

$$-\nu^2+2\bar{q}\nu+\omega^2=0 \qquad \nu=\frac{1}{2}n_1 \qquad n_1=1,5,9,\ldots$$

При нечетном n $\sin\nu\pi=-1$ и прямые наклоненные вправо имеют уравнения

$$-\nu^2-2\bar{q}\nu+\omega^2=0 \qquad \nu=\frac{1}{2}n_2 \qquad n_2=3,7,11,$$

На рис.I через $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_4$ обозначены области параметров $\bar{q}$ и ω^2 где квазиполином /I.2/ имеет 0, 2, 4 корня с положительной действительной частью. Как известно, если точка $(\bar{q}, \omega^2)$ находится на границе областей $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_j$ /$i<j$ $i,j=0,2,4,\ldots$/, то квазиполином имеет $j-i$ чисто мнимых корней. По рисунку видно, что квазиполином может иметь не больше двух пар мнимых корней, так как области $\mathcal{D}_0$ имеют границу только с областями $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_4$, области $\mathcal{D}_2$ с областями $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_4$ и $\mathcal{D}$ и.т.д. Будем предполагать что $W(\lambda)$ имеет одну пару чисто мнимых простых корней $\pm i\nu$, а остальные корни расположены в левой полуплоскости т.е. $Re\lambda\leqslant-\rho<0$. Это предположение соответствует тому, что при $\varepsilon=0$ система находится на одной из границ между областями $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{D}_{i+2}$,$(i=0,2,4,\ldots)$.

Заметим, что не теряя общности, можем положить $\Delta = \pi$, так как в противном случае можно сделать замену независимой переменной в исходной системе. Будем также в дальнейшем предпологать, что условие параметрического возбуждения $\nu_1 = 2\nu$ выполняется.

Учитывая соотношение

$$2\bar{q}\left[\dot{x}(t-\Delta-\varepsilon\gamma) - \dot{x}(t-\Delta)\right] = 2\bar{q}\varepsilon\gamma\ddot{x}(t-\Delta-\theta^*\varepsilon\gamma), \quad 0 \le \theta^* \le 1$$

от уравнения /I.I/ перейдем к системе уравнений для радиуса и фазы колебаний. Согласно [1] имеем

$$d r(t) = 2\varepsilon\Big\{\big[p\cos(\nu t+\varphi) + q\sin(\nu t+\varphi)\big]\big[a_0 r\cos(\nu t+\varphi) -$$

$$- a_1 r\nu\sin(\nu t+\varphi) - a_2 r(t-\pi)\nu\sin(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi)) + a_3 r^3(t-\pi)\nu^3 \times$$

$$\times \sin^3(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi)) + h r\cos(\nu t+\varphi)\sin\nu_1 t + 2\bar{q}\gamma\nu^2 r(t-\pi-\theta^*\varepsilon\gamma)\times$$

$$\times\cos(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi) - \nu\theta^*\varepsilon\gamma)\big] + \frac{S^2}{r} r^2\cos^2(\nu t+\varphi)\big[p^2\sin^2(\nu t+\varphi) - pq\sin(2\nu t+2\varphi) +$$

$$+ q^2\cos^2(\nu t+\varphi)\big]\Big\}dt + 2S r\cos(\nu t+\varphi)\big[p\cos(\nu t+\varphi) + q\sin(\nu t+\varphi)\big]d\xi(\varepsilon t)$$

$$d\varphi(t) = \frac{2\varepsilon}{r}\Big\{\big[q\cos(\nu t+\varphi) - p\sin(\nu t+\varphi)\big]\big[a_0 r\cos(\nu t+\varphi) - a_1 r\nu\sin(\nu t+\varphi) -$$

$$- a_2 r(t-\pi)\nu\sin(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi)) + a_3 r^3(t-\pi)\nu^3\sin^3(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi)) +$$

$$+ h r\cos(\nu t+\varphi)\sin\nu_1 t + 2\bar{q}\gamma\nu r(t-\pi-\theta^*\varepsilon\gamma)\cos(\nu t - \nu\pi + \varphi(t-\pi) - \nu\theta^*\varepsilon\gamma)\big] +$$

$$+ \frac{S^2}{r} r^2\cos(\nu t+\varphi)\big[p^2\sin^2(2\nu t+2\varphi) - 2pq\cos(2\nu t+2\varphi) - q^2\sin(2\nu t+2\varphi)\big]\Big\}dt +$$

$$+ \frac{2S}{r} r\cos(\nu t+\varphi)\big[q\cos(\nu t+\varphi) - p\sin(\nu t+\varphi)\big]d\xi(\varepsilon t)$$

где

$$p = Re\left\{\frac{1}{W'(i\nu)}\right\} = \frac{-\bar{q}\,\nu\sqrt{\pi}}{2[(\nu+\bar{q})^2+(\bar{q}\,\nu\sqrt{\pi})^2]}$$

$$q = Jm\left\{\frac{1}{W'(i\nu)}\right\} = \frac{\nu+\bar{q}}{2[(\nu+\bar{q})^2+(\bar{q}\,\nu\sqrt{\pi})^2]}$$

В соответствии с работой [1], мы можем в этой системе осреднять по явновходящему времени коэффициенты сноса. Будем считать, что изображающая точка $(\bar{q},\omega^2)$ находится на одной из прямых, которые наклонены влево, т.е. $\sin\nu\sqrt{\pi}=+1$. После осреднения и перехода к "медленному времени" $s=\varepsilon t$ последняя система будет иметь вид

$$dr(s)=\Big[pa_0 r - qa_1\nu r + pa_2\nu r - \tfrac{3}{4}a_3\nu^3 p\, r^3 - \tfrac{h}{2}(p\sin 2\varphi - q\cos 2\varphi) + \tfrac{\bar{q}}{2}r\nu^2 q r + \tfrac{1}{4}S^2p^2 r + \tfrac{3}{4}S^2q^2 r\Big]ds + 2Sr\cos\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right)\left[p\cos\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right)+q\sin\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right)\right]d\xi(s) \quad /1.3/$$

$$d\varphi(s)=\Big[qa_0 + pa_1\nu + qa_2\nu - \tfrac{3}{4}a_3\nu^3 q r^2 - \tfrac{h}{2}(q\sin 2\varphi + p\cos 2\varphi) - \tfrac{p}{2}\bar{q}\nu^2 - S^2pq\Big]ds + 2S\cos\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right)\left[q\cos\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right) - p\sin\left(\tfrac{\nu s}{\varepsilon}+\varphi\right)\right]d\xi(s) \quad /1.4/$$

Чтобы в полученной системе осреднить коэффициенты диффузии, мы должны из системы уравнений

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^2+\sigma_{12}^2 &= \overline{\sigma_r^2} \\ \sigma_{11}\sigma_{12}+\sigma_{12}\sigma_{22} &= \overline{\sigma_r\sigma_\varphi} \\ \sigma_{12}^2+\sigma_{22}^2 &= \overline{\sigma_\varphi^2} \end{aligned} \quad /1.5/$$

найти σ_{11}, σ_{12} и σ_{22}. В нашем случае

$$\overline{\sigma_r^2}=\frac{1}{2}S^2r^2(3p^2+q^2)$$

$$\overline{\sigma_\varphi^2} = \frac{S^2}{2}(3q^2+p^2) \qquad \overline{\sigma_r\,\sigma_\varphi} = S^2 r\,pq$$

"Полностью упрощенные" уравнения в явном виде выписывать не будем, так как решения системы /I.5/ получаются довольно громоздкими, и, во-вторых, для исследования стационарных режимов колебаний нам эти уравнения не понадобятся.

§2. Исследование стационарных решений в случае $S=0$

Заменой $\sqrt{p^2+q^2}\,s=\theta$ система /I.3/, /I.4/ приводится к виду

$$\frac{dr}{d\theta} = \left(a_0\sin\rho - a_1\nu\cos\rho + a_2\nu\sin\rho + \frac{\bar q}{2}\gamma\nu^2\cos\rho\right)r - \\ - \frac{3}{4}a_3\nu^3\sin\rho\, r^3 + \frac{h}{2}\cos(2\varphi+\rho)\,r,$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = a_0\cos\rho + a_1\nu\sin\rho + a_2\nu\cos\rho - \frac{\bar q}{2}\gamma\nu^2\sin\rho - \\ - \frac{3}{4}a_3\nu^3\cos\rho\, r^2 - \frac{h}{2}\sin(2\varphi+\rho) \qquad /2.1/$$

Так как мы ищем стационарные решения, то $\frac{dr}{d\theta}=0$ и $\frac{d\varphi}{d\theta}=0$ Комбинируя первое уравнение со вторым, получаем соотношение

$$\left(a_1\nu - \frac{\bar q}{2}\gamma\nu^2\right) = \frac{h}{2}\cos 2\varphi \quad ,$$

которое дает нам условие синхронизации

$$\left|\frac{2a_1\nu - \bar q\gamma\nu^2}{h}\right| < 1 \qquad /2.2/$$

Как видно, колебания будут возникать только при достаточно большой интенсивности "накачки". Обозначим

$$b_1 = (a_0 + a_2\nu)\sin\rho - \left(a_1\nu - \frac{\bar q}{2}\gamma\nu^2\right)\cos\rho$$

$$b_2 = (a_0 + a_2\nu)\cos\rho + \left(a_1\nu - \frac{\bar q}{2}\gamma\nu^2\right)\sin\rho,$$

$$r^2 = x \qquad 2\varphi + \rho = \psi \qquad 2\theta = t \qquad \frac{3}{4} a_3 \nu^3 = c$$

Тогда система /2.1/ приводится к более простому виду

$$\frac{dx}{dt} = b_1 x - c x^2 \sin\rho + \frac{h}{2} x \cos\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = b_2 - c x \cos\rho - \frac{h}{2} \sin\psi \qquad /2.3/$$

Для нахождения стационарных состояний системы /2.3/ решаем уравнения

$$b_1 x - c x^2 \sin\rho + \frac{h}{2} x \cos\psi = 0$$

$$b_2 - c x \cos\rho - \frac{h}{2} \sin\psi = 0 \qquad /2.4/$$

относительно x и ψ

При $x = 0$ из второго уравнения получаем что $\sin\psi = \frac{2b_2}{h}$ и если $h > |2b_2|$, то имеем две особые точки (x_1, ψ_1), (x_2, ψ_2) где

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad \sin\psi_1 = \frac{2b_2}{h}$$

а

$$\psi_2 = \pi - \psi_1 \qquad \text{, т.е. } \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \sin^2\psi_1} \text{ , } \cos\psi_2 = -\sqrt{1-\sin^2\psi_1}$$

В случае $h = |2b_2|$ обе особые точки совпадают, а если $h < |2b_2|$ то несуществует ни одна из этих точек. Далее, если $x \neq 0$, то первое уравнение системы /2.4/ можем разделить на x и тогда из полученных уравнений находим еще две особые точки (x_3, ψ_3) и (x_4, ψ_4), где

$$x_3 = \frac{1}{c}\left(a_0 + a_1\nu - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \left(a_1\nu - \frac{\bar{q}}{2}\gamma\nu^2\right)^2}\right) ,$$

$$x_4 = \frac{1}{c}\left(a_0 + a_1\nu + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \left(a_1\nu - \frac{\bar{q}}{2}\gamma\nu^2\right)^2}\right.$$

$$\psi_3 = 2\varphi_3 + \rho \quad , \quad \psi_4 = -2\varphi_3 + \rho \quad ,$$

а φ_3 находим из равенства

$$\cos 2\varphi_3 = \frac{2}{h}\left(a_1\gamma - \frac{\bar{q}}{2}\gamma\vartheta^2\right)$$

Как видно, эта пара особых точек будет существовать только в случае, когда выполняется условие синхронизации /2.2/.

Режимы колебаний, отвечающие первой и третьей особой точке, будем называть синфазными, а отвечающие второй и четвертой точке назовем антифазными.

Для исследования полученных стационарных состояний составим систему уравнений в вариациях, соответствующую системе /2.3/

$$\frac{d\delta x}{dt} = \left(b_1 - 2x_{cm}C\sin\rho + \frac{h}{2}\cos\psi_{cm}\right)\delta x - \frac{h}{2}x_{cm}\sin\psi_{cm}\,\delta\psi,$$

/2.5/

$$\frac{d\delta\psi}{dt} = -C\cos\rho\,\delta x - \frac{h}{2}\cos\psi_{cm}\,\delta\psi$$

Ее характеристическое уравнение равно

$$\lambda^2 - \rho\lambda + \Delta = 0 \qquad /2.6/$$

где

$$\rho = b_1 - 2x_{cm}C\sin\rho$$

$$\Delta = -\left(b_1 - 2x_{cm}C\sin\rho + \frac{h}{2}\cos\psi_{cm}\right)\frac{h}{2}\cos\psi_{cm} - \frac{h}{2}x_{cm}C\sin\psi_{cm}\cos\rho$$

Согласно с нашими предположениями параметры системы /I.I/ могут находится только на одной из прямых n_1, n_3, n_5, /см. рис. I./ т.е. только на границах областей $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{D}_j$ $(i,j=1,2,\dots)$. Но мы можем исследовать и внутренние точки областей при помощи введенных нами возмущений параметров $\bar{q}$ и ω^2 - a_0 и a_1. Поэтому целесообразно исследовать зависимость корней характеристического уравнения /2.6/ от величин a_0 и a_1. Остальные параметры будем считать фиксированными. Построим для каждой особой точки в плоскости (a_0, a_1) следующие три кривые:

$$\rho^2 - 4\Delta = 0 \qquad \rho = 0 \qquad \Delta = 0 \qquad /2.7/$$

первая кривая отделяет узлы и седла от фокусов, вторая отделяет устойчивые узлы и фокусы от неустойчивых, а третья служит границей между узлами и седлами.

Рассмотрим точку (χ_1, ψ_1) Уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ не имеет решений так как для всех значений a_0 и a_2 выполняется $\rho^2 - 4\Delta > 0$ Из уравнения $\Delta = 0$ получаем три прямые

$$a_0 = -a_2\nu - \frac{A\sin\rho}{\cos\rho} \pm \frac{h}{2\cos\rho}$$

$$a_0 = -a_2\nu - \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}$$

где

$$A = (a_1\nu - \frac{\bar{q}}{2}\mu\nu^2)$$

Еще одну прямую дает нам уравнение $\rho = 0$

$$a_0 = -a_2\nu + A\,\mathrm{ctg}\,\rho$$

Эти прямые приведены на рис. 2

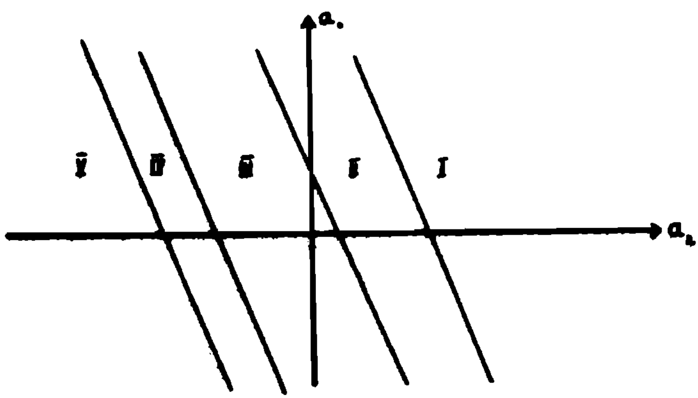


Рис. 2

Расстройки a_0 и a_2 не может принимать значения из областей $\overline{\text{I}}$ и $\overline{\text{V}}$ так как в них не определено Δ В областях $\overline{\text{II}}$ и $\overline{\text{III}}$ расположены седла, а в области $\overline{\text{IV}}$ устойчивые узлы.

Уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ для точки (χ_2, ψ_2) также не имеет решений, так как $\rho^2 - 4\Delta > 0$ при всех a_0 и a_2. Из уравнения $\Delta = 0$ получаем три прямые, из которых первые две такие-же как для точки

(χ_1, ψ_1) а для третьей прямой уравнение имеет вид

$$a_0 = -a_2\nu + \sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}$$

Уравнение $\rho = 0$ имеет вид

$$a_0 = -a_2\nu + A\,ctg\,\rho$$

Все эти прямые приведены на рис. 3

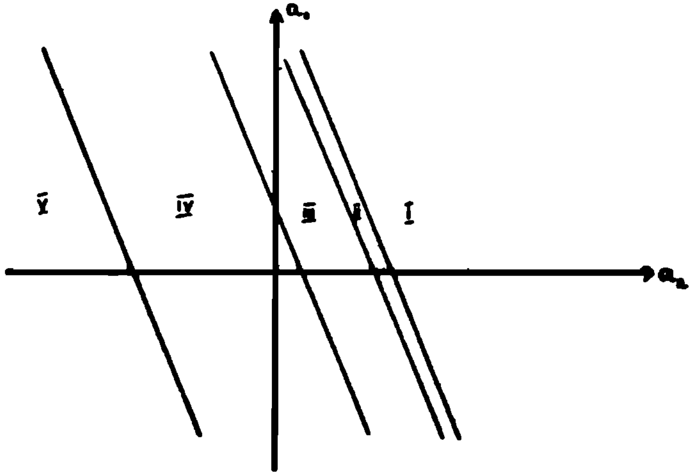


Рис. 3

Так-же как для синфазного режима a_0 и a_2 не может принимать значения из областей I и V Области II соответствует неустойчивые узлы, областям III и IV седла.

Для второго синфазного режима уравнение $\rho^2 - 4\Delta = 0$ дает две паралельные прямые, уравнение которых имеет вид

$$a_0 = -a_2\nu - \frac{1}{\sin^2\rho}\left(-2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}\,\sin^2\rho + A\sin\rho\cos\rho + h\sin 2\psi_3 \pm \sqrt{K}\right)$$

где

$$K = 4h\Big[h\sin^2 2\psi_3 - 2\sin^2\rho\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2}\,(2\sin 2\psi_3 + 2\sin\rho\cos\psi_3 -$$

$$- \cos\rho\sin\psi_3) + 2A\sin\rho\cos\rho\sin 2\psi_3 - h\sin^2\rho\cos^2\psi_3 + 2A\sin^2\rho\cos\rho\cos\psi_3\Big].$$

Из уравнений $\rho=0$ и $\Delta=0$ имеем еще две прямые

$$a_0=-a_2\nu+2\sqrt{\frac{h^2}{4}-A^2}-A\,ctg\,\rho$$

$$a_0=-a_2\nu+\frac{1}{\sin 2\varphi_3}\Big[A\cos\psi_3\cos\rho-\frac{h}{2}\cos^2\psi_3$$

$$-(2\cos\psi_3\sin\rho-\sin\psi_3\cos\rho)\sqrt{\frac{h^2}{4}-A^2}$$

На рис. 4 приведены эти прямые

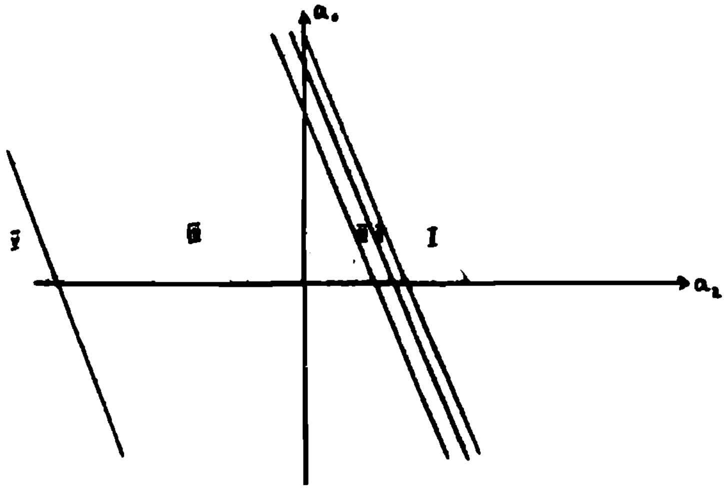


Рис. 4

Области I соответствует седла, области II устойчивые узлы, области III устойчивые фокусы, области IV неустойчивые фокусы и области V неустойчивые узлы.

Аналогично синфазному, для второго антифазного режима уравнение $\rho^2-4\Delta=0$ дает две параллельные прямые

$$a_0=-a_2\nu+\frac{1}{\sin^2\rho}\Big(2\sqrt{\frac{h^2}{4}-A^2}\sin^2\rho+A\sin\rho\cos\rho-h\sin 2\varphi_3\pm\sqrt{K_1}\Big)$$

где

$$K_1=4h\Big[-h\sin^2 2\varphi_3-2\sin^2\rho\sqrt{\frac{h^2}{4}-A^2}\,(2\sin 2\varphi_3+\sin\psi_4\cos\rho-2\sin\rho\cos\psi_4)-$$

$$-2A\sin\rho\cos\rho\cdot\sin 2\psi_3 - h\sin^2\rho\cdot\cos^2\psi_4 + 2A\sin^2\rho\cos\rho\cdot\cos\psi_4\Big]$$

Выпишем еще уравнения $\rho = 0$ и $\Delta = 0$:

$$a_0 = -a_2\nu - 2\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} - A\,\mathrm{ctg}\,\rho$$

$$a_0 = -a_2\nu - \frac{1}{\sin 2\psi_3}\Big[A\cos\psi_4\cos\rho + (2\cos\psi_4\sin\rho -$$

$$-\sin\psi_4\cos\rho)\sqrt{\frac{h^2}{4} - A^2} - \frac{h}{2}\cos^2\psi_4\Big]$$

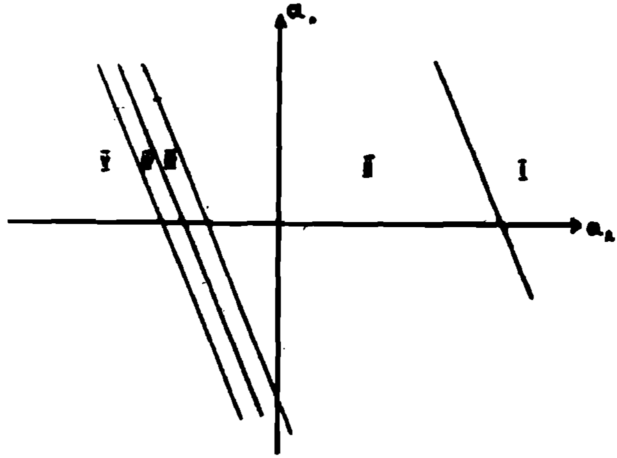


Рис. 5

Области I соответствует неустойчивые узлы, области II устойчивые фокусы, области III устойчивые узлы, областям IV и V седла.

При помощи полученных графиков удобно провести схематический анализ режимов работы генератора на развертке фазового цилиндра. Пусть, например, надо исследовать работу генератора для некоторой точки $(\bar{q}, \omega^2)$. Тогда находим ближайшую прямую, которая служит границей между областями D_{i+2} и D_i, т.е. между такими областями разность индексов которых равен двум. Потом вычислим величину приращений a_0 и a_1, которую необходимо придавать параметрам ω^2 и $\bar{q}$, чтобы достичь нужную нам точку. После этого по рисункам 2, 3, 4, 5 сразу находим тип каждой особой точки. На рисунках 6 и 7 изображены схематически на развертке фазового цилиндра, две из возможных режимов работы генератора.

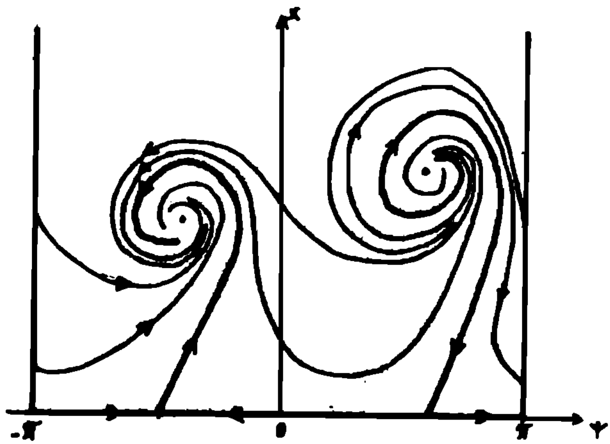


Рис. 6

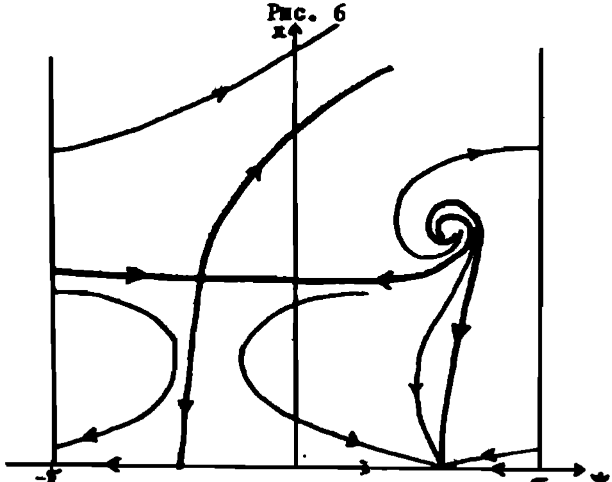


Рис. 7

Из приведенных рисунков видно, что в параметрически возбуждаемом генераторе может быть синхронизован устойчивый режим колебаний /рис.6/, причем плотности распределения амплитуды и фазы колебаний удовлетворяют соотношениям, выведенным в предыдущем параграфе. В случае рис. 7 синхронизация отсутствует, а амплитуда и фаза колебаний подвержена флуктуациям.

§3. Влияние флуктуаций собственной частоты на работу автогенератора и параметрическая "накачка" при наличии помех.

Рассмотрим сперва случай $h = 0$. Тогда уравнение /I.3/ уже не содержит φ, и мы можем это уравнение исследовать отдельно. Для плотности распределения амплитуды колебаний можем составить одномерное уравнение Фоккера-Планка- Колмогорова /УФПК/

$$\frac{\partial w(r,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r}\Big\{\Big[\Big(pa_0 - qa_1\nu + pa_2\nu + \frac{\bar{q}}{2}\gamma^2\nu^2 + \frac{1}{4}s^2p^2 + \frac{3}{4}s^2q^2\Big)r - \frac{3}{4}a_3\nu^3pr^3\Big]w(r,t)\Big\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Big[\frac{s^2r^2}{2}(3p^2+q^2)w(r,t)\Big] \tag{3.1}$$

Определить из этого уравнения, как изменяется $w(r,t)$ во времени нелегко, но довольно просто вычисляется стационарное распределение амплитуды. Приравняв нулю $\frac{\partial w}{\partial t}$ и проинтегрируя один раз уравнение /3.I/ получаем

$$\frac{d}{dr}\Big[\frac{s^2r^2}{2}(3p^2+q^2)w(r)\Big] - (M_1 r - M_2 r^3)\,w(r) = K$$

где

$$M_1 = 2pa_0 - 2qa_1\nu + 2pa_2\nu + \bar{q}\gamma^2\nu^2 q + \frac{1}{2}s^2p^2 + \frac{3}{2}s^2q^2$$

$$M_2 = \frac{3}{2}a_3\nu^3 p$$

Аналогично как и в [4] доказывается, что $K = 0$ и тогда последнее уравнение легко интегрируется

$$W_{ст}(r) = C \exp\left\{ \int_0^r \frac{2M_1 - S^2(3p^2+q^2) - 2M_2 u^2}{S^2(3p^2+q^2)u}\, du \right\}$$

Обозначаем

$$M_1' = 2M_1 - S^2(3p^2+q^2) \qquad M_2' = 2M_2 \qquad M_3 = S^2(3p^2+q^2)$$

Тогда

$$W_{ст}(r) = C\, r^{M-1} e^{-Nr^2}$$

где

$$\frac{M_1'}{M_3} = M-1 \qquad \frac{M_2'}{M_3} = 2N$$

Постоянную C находим из условия нормирования

$$\int_0^\infty W_{ст}(r)\, dr = 1$$

и окончательно получаем, что

$$W_{ст}(r) = \frac{2N^{\frac{M}{2}}}{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}\, r^{M-1} e^{-Nr^2} \qquad /3.2/$$

На рис. 8 приведены стационарные распределения амплитуды колебаний при различных значениях интенсивности флуктуаций S. Из сравнения кривых видно, что с уменьшением интенсивности шума максимум распределения сдвигается и быстро растет, т.е. разброс

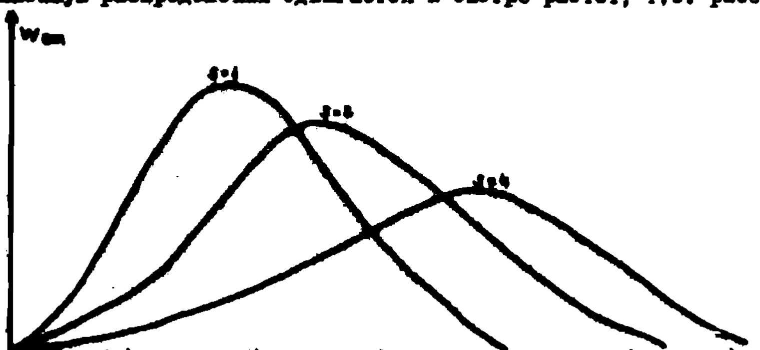


Рис. 8

амплитуды уменьшается. Пусть r_o то значение амплитуды, при котором $W_{cm}(r)$ достигает своего максимума. Из /3.2/ получаем

$$r_o=\sqrt{\frac{M-1}{2N}} = \left[\frac{2(pa_0-a_1q\nu+pa_2\nu)+\bar{q}\gamma\nu^2 q-2S(p^2-q^2)}{\frac{3}{2}a_3\nu^3 p}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad /3.3/$$

Как видно из последнего соотношения при $S\to 0$

$$r_o\to r_{cm}=\left[\frac{4(pa_0-qa_1\nu+pa_2\nu)+2q\gamma\nu^2}{3a_3\nu^3 p}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Легко видеть, что значение r_{cm}, полученное из УФПК, совпадает с r_{cm}, которое получается из /1.3/ при $S=h=0$. Отметим, что максимум распределения может сдвигатся как влево, так и вправо, в зависимости от того, в какой точке области $(\bar{q},\omega^2)$ мы находимся. Как видно из /3.3/, это зависит от знака p^2-q^2. Если решить уравнение $p^2-q^2=0$ то получим границы этих областей:

$$\omega^2=\frac{3q^2-2\bar{\gamma}q^3}{1-2\bar{\gamma}q+\bar{\gamma}^2q^2}\quad,\qquad \omega^2=\frac{3q^2+2\bar{\gamma}q^3}{1+2\bar{\gamma}q+\bar{\gamma}^2q^2}$$

Далее рассмотрим уравнение /1.4/. Из него видно, что в случае $h=0$ фаза подчиняется диффузионному закону. При $h\neq 0$ можем составить одномерное УФПК для условной плотности распределения фазы, при фиксированной амплитуде, так как амплитуда устанавливается медленнее чем фаза [4]. Учитывая /1.5/, можем написать

$$\frac{\partial V(\varphi/r)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big[\Big(a_0q+a_1p\gamma+a_2q\nu-\frac{3}{4}a_3\nu^3qr^2-\frac{h}{2}\big(q\sin 2\varphi+$$

$$+p\cos 2\varphi\big)-\frac{\bar{q}}{2}p\gamma\nu^2-S^2pq\Big)V\Big]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Big[\frac{S^2}{2}(3q^2+p^2)V\Big] \qquad /3.4/$$

Обозначаем

$$M_1=\Big(a_0q+a_1p\gamma+a_2q\nu-\frac{3}{4}a_3\nu^3qr^2-\frac{\bar{q}}{2}p\gamma\nu^2-S^2pq\Big),$$

614-6-74

$$M_2 = \frac{4 M_1}{S^2(q^2+p^2)} \qquad M_3 = \frac{2q\sqrt{p^2+q^2}}{S^2(3q^2+p^2)}$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \sin\rho \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \rho \quad 2\varphi+\rho=\psi$$

и будем искать стационарное решение этого уравнения. В новых обозначениях уравнение /3.4/ имеет вид

$$\frac{d^2 V}{d\psi^2} - \frac{d}{d\psi}\left[(M_2 - M_3\sin\psi)V\right]$$

Его решение записывается в форме [4]

$$V(\varphi/n) = C_1 e^{M_2\varphi + M_3\cos\varphi}\int_{C_2}^{\varphi} e^{-M_2\psi - M_3\cos\psi}\, d\psi$$

а постоянные C_1 и C_2 определяются из условий периодичности и нормировки

$$V(\varphi+2\pi) = V(\varphi) \qquad \int_0^{2\pi} V(\varphi)\,d\varphi = 1$$

В работе [4] проведен подробный анализ влияния параметров M_2 и M_3 на распределение фазы колебаний и поэтому мы этот анализ проводить не будем.

Л И Т Е Р А Т У Р А.

1. Буйкис М.А., Царьков Е.Ф. Исследование колебаний в квазилинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнениях. /см. этот-же сборник/.
2. Букатарь М.И., Царьков Е.Ф. Об автоколебаниях в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью, Изв. ВУЗ, Радиофизика, т.XIII, №8, 1970.
3. Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, Изд. Наука, М., 1969.
4. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд. Советское радио, М., 1961.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ.

БУЙКИС М.А., ЦАРЬКОВ Е.Ф.

В отличие от стохастических дифференциальных уравнений без последействия, которые достаточно хорошо изучены [2, 3, 7, 9], по исследованию уравнений с последействием имеется сравнительно мало работ [4-6] Как и в детерминированном случае, в основу работ по изучению колебаний, при наличии случайных параметров, положен тот или иной вариант метода осреднения Н.Н.Боголюбова. В связи с этим исследуемую систему желательно иметь в стандартной форме. Методика сведения стохастических систем с последействием к стандартной форме изложена в §I настоящей работы. Там же приводится теорема об интегральной непрерывности по параметру, следствием которой является теорема об осреднении. Во втором параграфе изучаются флуктуации амплитуды силы тока в контуре генератора с запаздыванием в цепи сетки.

§I. Замена решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений марковскими процессами.

Пусть $x(t,\omega)$ сепарабельный, непрерывный с вероятностью единица случайный процесс со значениями в R^1. В дальнейшем $x_t(\theta,\omega)$ означает отрезок траектории $\{x(t+\theta,\omega),\ -h\le\theta\le 0\}$ Ясно, что $x_t(\theta,\omega)\in C_{[-h,0]}$ почти наверное. Обозначим F_t семейство σ-алгебр, относительно которых измерим процесс броуновского движения $w(t,\omega)$, с нулевым сносом и единичной диффузией, обладающее свойствами: а/ $F_{t_1}\supset F_{t_2}$ при $t_1\geqslant t_2$ б/ приращение $w(t+s)-w(t)$ не зависит от F_τ при $s>0$, $t\geqslant\tau$

Рассмотрим стохастическое дифференциально-функциональное уравнение

$$\frac{d^2x(t,\omega)}{dt^2}+\sum_{k=0}^{N}\left[a_k\frac{dx(t-\Delta_k,\omega)}{dt}+b_k x(t-\Delta_k,\omega)\right]=$$

$$=\varepsilon\, m(x_t(\theta,\omega),\dot x_t(\theta,\omega),t)+\sigma(x_t(\theta,\omega),\dot x_t(\theta,\omega),t)\,\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \qquad /I.I/$$

где $m(\varphi,\psi,t)$ и $\sigma(\varphi,\psi,t)$ непрерывные по t и ограниченные при всех $t \geq 0$ и $\|\varphi\| \leq R$, $\|\psi\| \leq R$ функционалы на элементах $C_{[-h,0]} \times C_{[-h,0]}$ удовлетворяющие условию:

А. Существует ограниченная мера μ_R на отрезке $[-h,0]$ такая, что для всех $t \geq 0$ и $x_j, y_j \in C[-h,0]$, $\|x_j\| \leq R$, $\|y_j\| \leq R$, $j=1,2$ выполняется

$$|m(x_1(\theta), x_2(\theta), t) - m(y_1(\theta), y_2(\theta), t)| +$$

$$+|\sigma(x_1(\theta), x_2(\theta), t) - \sigma(y_1(\theta), y_2(\theta), t)| \leq$$

$$\leq \int_{-h}^{0} (|x_1(\theta) - y_1(\theta)| + |x_2(\theta) - y_2(\theta)|)\, d\mu_R(\theta)$$

Обозначим

$$U(\lambda) = \lambda^2 + \sum_{k=0}^{N} (a_k \lambda + b_k) e^{-\lambda \Delta_k}$$

Пусть $U(\lambda)$ имеет пару простых чисто мнимых корней $\pm i\nu$, а остальные корни расположены в полуплоскости $Re\,\lambda \leq -\rho < 0$. В дальнейшем у случайных процессов аргумент ω будем опускать. От уравнения /I.I/ перейдем к системе

$$\frac{dx}{dt} = x_1$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\sum_{k=0}^{N} [a_k x_1(t-\Delta_k) + b_k x(t-\Delta_k)] + \qquad /I.2/$$

$$+ \varepsilon m(x_{1t}(\theta), x_{1t}(\theta), t) + \sigma(x_t(\theta), x_{1t}(\theta), t) \frac{dw(\varepsilon t)}{dt}$$

Фундаментальную матрицу $H(t)$ для системы /I.2/ при $\varepsilon=0$ [8] можно записать в виде

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\, z = c} W^{-1}(z)\, e^{zt}\, dt$$

где

$$W(z)=\begin{pmatrix} z & -1 \\ \sum_{k=0}^{N} b_k e^{-z\Delta_k} & z+\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-z\Delta_k} \end{pmatrix}$$

Аналогично [1] от системы /I.2/ используя замену $x_1=u_1+v_1$, $x_2=u_2+v_2$ перейдем к системе

$$du_1=[u_2+2p\varepsilon m(u_{1t}(\theta)+v_{1t}(\theta),u_{2t}(\theta)+v_{2t}(\theta),t)]\,dt+$$

$$+2p\sigma(u_{1t}(\theta)+v_{1t}(\theta),u_{2t}(\theta)+v_{2t}(\theta),t)\,dw(\varepsilon t)$$

$$du_2=[-\nu u_1-2q\nu\varepsilon m(u_{1t}(\theta)+v_{1t}(\theta)\;u_{2t}(\theta)+v_{2t}(\theta),t)]\,dt-$$

$$-2q\nu\sigma(u_{1t}(\theta)+v_{1t}(\theta),u_{2t}(\theta)+v_{2t}(\theta),t)\,dw(\varepsilon t)$$

$$v_1(t)=\tilde{u}_1(t)+\varepsilon\int_0^t g_1(t-\tau)m(u_{1\tau}(\theta)+v_{1\tau}(\theta),u_{2\tau}(\theta)+v_{2\tau}(\theta),\tau)\,d\tau+ \qquad /I.3/$$

$$+\int_0^t g_1(t-\tau)\sigma(u_{1\tau}(\theta)+v_{1\tau}(\theta),\;u_{2\tau}(\theta)+v_{2\tau}(\theta),\tau)\,dw(\varepsilon\tau)$$

$$v_2(t)=\tilde{u}_2(t)+\varepsilon\int_0^t g_2(t-\tau)m(u_{1\tau}(\theta)+v_{1\tau}(\theta),u_{2\tau}(\theta)+v_{2\tau}(\theta),\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t g_2(t-\tau)\sigma(u_{1\tau}(\theta)+v_{1\tau}(\theta),u_{2\tau}(\theta)+v_{2\tau}(\theta),\tau)\,dw(\varepsilon\tau),$$

где

$$p=Re\left[\frac{1}{U'(i\nu)}\right] \qquad q=Jm\left[\frac{1}{U'(i\nu)}\right]$$

$$|\tilde{u}_j(t)|\leqslant C_j e^{-\rho t}, \quad |g_j(t)|\leqslant C_j' e^{-\rho t}, \quad j=1,2.$$

Лемма I. Если система /I.I/ имеет ограниченное в среднем квадратическом решение, то при всех $t\in[0,\frac{L}{\varepsilon}]$ выполняется соотношение:

$$\|V_{jt}(\theta)-\tilde{u}_{jt}(\theta)\|<\varepsilon C \qquad (j=1,2),$$

где

$$\|\varphi(\theta)\|=\sup_{-h\le\theta\le 0}\sqrt{M\{|\varphi(\theta)|^2\}}\,. \qquad /I.4/$$

Доказательство. Пусть

$$V_j^{(0)}=\tilde{u}_j$$

$$V_j^{(n)}=\tilde{u}_j+\varepsilon\int_0^t g_j(t-\tau)\,m(u_{1\tau}(\theta)+V_{1\tau}^{(n-1)}(\theta),\,u_{2\tau}(\theta)+V_{2\tau}^{(n-1)}(\theta),\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_0^t g_j(t-\tau)\,\sigma(u_{1\tau}(\theta)+V_{1\tau}^{(n-1)}(\theta),\,u_{2\tau}(\theta)+V_{2\tau}^{(n-1)}(\theta),\tau)\,dw(\varepsilon t)$$

$$(n=1,2,\dots), \quad (j=1,2)$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и тот факт, что $g_1(t)$ и $g_2(t)$ суммируемо с квадратом, легко получить оценку

$$\sup_{0\le t\le\frac{L}{\varepsilon}}\left(\|V_{1t}^{(n)}(\theta)-V_{1t}^{(n-1)}(\theta)\|+\|V_{2t}^{(n)}(\theta)-V_{2t}^{(n-1)}(\theta)\|\right)\le$$

$$\le\sqrt{\varepsilon}\,C\left\{\sup_{0\le t\le\frac{L}{\varepsilon}}\left(\|V_{1t}^{(n-1)}(\theta)-V_{1t}^{(n-2)}(\theta)\|^2+\|V_{2t}^{(n-1)}(\theta)-V_{2t}^{(n-2)}(\theta)\|^2\right)\right\}^{\frac12}$$

$$(n=2,3,\dots)$$

При $\sqrt{\varepsilon}\,C<1$ из полноты пространства непрерывных на $[-h,0]$ случайных функций с нормой /I.4/ [1], следует существование V_j, $j=1,2$. Далее

$$\|V_{jt}^{(n)}(\theta)-\tilde{u}_{jt}(\theta)\|\le\sum_{k=0}^{n-1}\|V_{jt}^{(k+1)}(\theta)-V_{jt}^{(k)}(\theta)\|\le\sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt{\varepsilon}\,C)^k<\sqrt{\varepsilon}\,C,$$

что после перехода к пределу при $n\to\infty$ завершает доказательство леммы I.

Наряду с системой /I.3/ рассмотрим систему

$$dy_1(t)=[y_2(t)+2p\varepsilon\,m(y_{1t}(\theta),\,y_{2t}(\theta),t)]\,dt+$$

$$+\,2p\,\sigma(y_{1t}(\theta),\,y_{2t}(\theta),t)\,dw(\varepsilon t), \qquad /I.5/$$

$$dy_2(t) = -[\nu^2 y_1(t) + 2\nu q\, m(y_{1t}(\theta), y_{2t}(\theta), t)]\, dt -$$
$$-2q\nu\, \sigma(y_{1t}(\theta), y_{2t}(\theta), t)\, dw(\varepsilon t)$$

Лемма 2. Если начальные условия систем /I.3/ и /I.5/ ε-близки, то решения систем /I.I/ и /I.5/ ε-близки на интервале $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$ т.е. найдется такое C, что при достаточно малом ε при всех $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$ выполняется неравенства:

$$\| x_t(\theta) - y_{1t}(\theta)\|^2 \leq \varepsilon C$$
$$\| x_{1t}(\theta) - y_{2t}(\theta)\|^2 \leq \varepsilon C \qquad /I.6/$$

Доказательство. В силу леммы I достаточно показать, что

$$\| u_{jt}(\theta) - y_{jt}(\theta)\| \leq \sqrt{\varepsilon}\, C \qquad (j = 1, 2)$$

Имеем

$$d(u_1(t) - y_1(t)) = \{u_2(t) - y_2(t) + 2p\varepsilon[m(u_{1t}(\theta) + v_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta) + v_{2t}(\theta), t) -$$
$$- m(y_{1t}(\theta), y_{2t}(\theta), t)]\}dt + 2p[\sigma(u_{1t}(\theta) + v_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta) + v_{2t}(\theta), t) -$$
$$- \sigma(y_{1t}(\theta)\ \ y_{2t}(\theta), t)]\, dw(\varepsilon t),$$

$$d(u_2(t) - y_2(t)) = -\{\nu^2(u_1(t) - y_1(t)) + 2q\nu\varepsilon[m(u_{1t}(\theta) + v_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta) + v_{2t}(\theta), t) -$$
$$- m(y_{1t}(\theta), y_{2t}(\theta), t)]\}dt - 2q\nu[\sigma(u_{1t}(\theta) + v_{1t}(\theta), u_{2t}(\theta) + v_{2t}(\theta), t) -$$
$$- \sigma(y_{1t}(\theta), y_{2t}(\theta), t)]\, dw(\varepsilon t)$$

Обозначив

$$V = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\nu^2 & 0 \end{pmatrix}$$

легко получить

$$u-y=e^{At}\left(u(0)-y(0)\right)+\varepsilon\int_0^t e^{A(t-\tau)}\Delta m\,d\tau+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\Delta\sigma\,dw(\varepsilon t)$$

и тогда, если $|u(0)-y(0)|<\varepsilon$, то

$$\|u_t(\theta)-y_t(\theta)\|^2\leqslant\varepsilon C_1\int_0^t\|u_\tau(\theta)-y_\tau(\theta)\|^2d\tau+\varepsilon C_2\int_0^t\|v_\tau(\theta)\|^2d\tau$$

После использования леммы Гронуолла получим утверждение леммы 2 на интервале $[0,\frac{L}{\varepsilon}]$

$$\|u_t(\theta)-y_t(\theta)\|\leqslant\varepsilon C_2$$

В системе /I.5/ сделаем замену переменных [10]

$$r=\sqrt{y_1^2+\frac{y_2^2}{\nu^2}}\quad,$$

$$\psi=-\operatorname{arctg}\frac{y_2}{\nu y_1}-\nu t$$

Имеем

$$dr=2\varepsilon\Big\{\big[p\cos(\nu t+\psi)+q\sin(\nu t+\psi)\big]m_1(r_t(\theta),\psi_t(\theta),t)+$$

$$+\frac{1}{r}\sigma_1^2(r_t(\theta),\psi_t(\theta),t)\big[p^2\sin^2(\nu t+\psi)+q^2\cos^2(\nu t+\psi)-$$

$$-pq\sin(2\nu t+2\psi)\big]\Big\}dt+2\Big[\sigma_1(r_t(\theta),\psi_t(\theta),t)\times$$

$$\times\big[p\cos(\nu t+\psi)+q\sin(\nu t+\psi)\big]\Big]dw(\varepsilon t)$$

$$d\psi=\frac{2\varepsilon}{r}\Big\{\big[q\cos(\nu t+\psi)-p\sin(\nu t+\psi)\big]m_1(r_t(\theta),\psi_t(\theta),t)+$$

$$+\frac{1}{r}\sigma_1^2(r_t(\theta),\psi_t(\theta),t)\big[p^2\sin(2\nu t+2\psi)-2pq\cos(2\nu t+2\psi)-$$

$$- q^2 \sin(2\nu t + 2\psi)\Big]\Big\} dt + \frac{2}{r}\Big\{ \sigma_n(r_t(\theta), \psi_t(\theta), t)\Big[q \cos(\nu t + \psi) -$$

$$- p \sin(\nu t + \psi)\Big]\Big\} dw(\varepsilon t)$$

где

$$m_n(r_t(\theta), \psi_t(\theta), t) = m(x_t(\theta), \dot{x}_t(\theta), t)\Bigg|_{\substack{x(t) = r(t)\cos(\nu t + \psi(t)) \\ \dot{x}(t) = -r(t)\nu \sin(\nu t + \psi(t))}}$$

$$\sigma_n(r_t(\theta), \psi_t(\theta), t) = \sigma(x_t(\theta), \dot{x}_t(\theta), t)\Bigg|_{\substack{x(t) = r(t)\cos(\nu t + \psi(t)) \\ \dot{x}(t) = -r(t)\nu \sin(\nu t + \psi(t))}}$$

Для дальнейшего анализа нам понадобится одна теорема, доказанная авторами в работе [11], для системы уравнений

$$d x^{\lambda}(t) = m(x_t^{\lambda}(\theta), t, \lambda)\, dt + \sigma(x_t^{\lambda}(\theta), t, \lambda)\, dw(t), \qquad /1.8/$$

$x(t) \in R^n$, λ - некоторый параметр.

<u>Теорема.</u> Пусть для всех $\|\varphi_j\| \le R$, $j = 1,2$ в окрестности точки имеют место следующие неравенства:

A. $\|m(\varphi_1(\theta), t, \lambda) - m(\varphi_2(\theta), t, \lambda)\| + \|\sigma(\varphi_1(\theta), t, \lambda) - \sigma(\varphi_2(\theta), t, \lambda)\| \le$

$$\le \int_{-h}^{0} \|\varphi_1(\theta) - \varphi_2(\theta)\|\, d\mu_R(\theta),$$

B. $\int_0^T \|m(\varphi(\theta), t, \lambda) - m(\varphi(\theta), t, \lambda_0)\|\, dt \le \gamma(\lambda) \int_{-h}^{0} (1 + \|\varphi(\theta)\|)\, d\mu_R(\theta),$

C. $\int_0^T \|\sigma(\varphi(\theta), t, \lambda) - \sigma(\varphi(\theta), t, \lambda_0)\|^2\, dt \le \gamma(\lambda) \int_{-h}^{0} (1 + \|\varphi(\theta)\|^2)\, d\mu_R(\theta),$

где $\gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$.

$$D.\ |m(\varphi_1(\theta)\ t,\lambda)|^2 + |\sigma(\varphi_1(\theta),t,\lambda)|^2 \le c\int_{-h}^{0}(1+|\varphi_1(\theta)|^2)\,d\mu_R(\theta)$$

Тогда решение /I.8/ непрерывно в окрестности точки λ_o равномерно по t на любом конечном интервале.

По доказательству этой теоремы легко заметить, что условие C можно заменить на

$$C'\ \int_0^T|\sigma(\varphi_1(\theta)\,t,\lambda) - \sigma_1(\varphi_1(\theta)\ t\ \lambda)|^2\,dt \le$$

$$\le \gamma(\lambda)\int_{-h}^{0}(1+|\varphi_1(\theta)|^2)\,d\mu_R(\theta)$$

и тогда решение системы

$$dv^\lambda(t) = m(v_t^\lambda(\theta),t,\lambda_o)\,dt + \sigma_1(v_t^\lambda(\theta),t,\lambda)\,dw(t)$$

и системы /I.8/ при $\lambda \to \lambda_o$ удовлетворяют неравенству

$$\|V_t^\lambda(\theta) - x_t^\lambda(\theta)\| \le \delta(\lambda)$$

равномерно по t из любого конечного интервала.

Рассмотрим систему стохастических уравнений

$$dx(t) = \varepsilon m(x_t(\theta),t)\,dt + \sigma(x_t(\theta),t)\,dw(\varepsilon t) \qquad /I.9/$$

Следствие. Если $m(\varphi(\theta),t)$ и $\sigma(\varphi(\theta),t)$ удовлетворяют условиям A, D и

$$B'.\quad \lim_{T\to\infty}\int_0^T m(\varphi_1(0),t)\,dt = m_o(\varphi_1(0)),$$

то решение уравнения /I.5/ и уравнения

$$dz(t) = \varepsilon m_0(z(t))dt + \sigma(z_t(0), t)\, dw(\varepsilon t)$$

при $t \in [0, \frac{L}{\varepsilon}]$ и достаточно малом ε удовлетворяют неравенству

$$\| x_t(\theta) - z_t(\theta) \| \leq \gamma(\varepsilon)$$

где $\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Легко видеть, что после замены $\varepsilon t = s$, $x(\frac{s}{\varepsilon}) = y(s)$ система /I.9/ превратится в систему

$$dy(s) = m(y_s(\varepsilon\theta), \tfrac{s}{\varepsilon})ds + \sigma(y_s(\varepsilon\theta), \tfrac{s}{\varepsilon})\, dw(s) \qquad /I.10/$$

Покажем, что свойство B следует из B′, а свойство C′ из A . Действительно,

$$\int_0^T m(\varphi_1(\varepsilon\theta), \tfrac{s}{\varepsilon})ds = \varepsilon \int_0^{\frac{T}{\varepsilon}} m(\varphi_1(\varepsilon\theta), t)\, dt \to T m_0(\varphi_1(0)) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

$$\int_0^T |\sigma(\varphi_1(\varepsilon\theta), \tfrac{s}{\varepsilon}) - \sigma(\varphi_1(0)\ \tfrac{s}{\varepsilon})|^2 dt \leq$$

$$\leq C \int_0^T \int_{-h}^0 |\varphi_1(\varepsilon\theta) - \varphi_1(0)|^2 d\mu_R(\theta) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0$$

При помощи теоремы и следствия нам удалось осреднить снос и сделать так, что диффузия зависит уже не от отрезка траектории $x_t(\theta)$, а от точки траектории $x_t(0)$, т.е. решение полученного уравнения является n -мерным марковским процессом. Для дальнейшего осреднения можно использовать уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, как это сделано в [2, 3].

§2. Влияние дробового эффекта на работу лампового генератора с запаздывающей обратной связью в случае $MS \gg RC$

Сила анодного тока в ламповом генераторе при учете дробового шума в лампе имеет флуктуационную компоненту $J_\phi(t)$, которую можно считать "белым шумом" с интенсивностью, равной спектральной ности на частоте генерируемого сигнала [3]. Поэтому уравнение для силы тока в контуре указанного в введении генератора имеет вид [1], [3]:

$$\ddot{x}(t) + 2q_1\dot{x}(t-T) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f + S\dot{\xi}(\varepsilon t) \qquad /2.1/$$

где $f = a_0 x(t) + a_1\dot{x}(t) + a_3\dot{x}^3(t-T)$.

S^2 – спектральная плотность шума на частоте ν.

$\dot{\xi}(s)$ – "белый шум" единичной интенсивности, $\varepsilon = \omega RC$.

Параметр a_0 введен для удобства анализа. Остальные обозначения уравнения /2.1/ можно найти в работе [1]. Используя методику предыдущего параграфа для радиуса и фазы колебаний получим уравнения:

$$dr = 2\varepsilon\Big\{\big[p\cos(\nu t+\varphi) + q\sin(\nu t+\varphi)\big]\tilde{f} + \frac{S^2}{r}\big[p^2\sin^2(\nu t+\varphi) + q^2\cos^2(\nu t+\varphi) - pq\sin(2\nu t+2\varphi)\big]\Big\}dt + 2S\big[p\cos(\nu t+\varphi) + q\sin(\nu t+\varphi)\big]d\xi(\varepsilon t), \qquad /2.2/$$

$$d\varphi = \frac{2\varepsilon}{r}\Big\{\big[q\cos(\nu t+\varphi) - p\sin(\nu t+\varphi)\big]\tilde{f} + \frac{S^2}{2r}\big[(p^2-q^2)\sin(2\nu t+2\varphi) - 2pq\cos(2\nu t+2\varphi)\big]\Big\}dt + \frac{2S}{r}\big[q\cos(\nu t+\varphi) - p\sin(\nu t+\varphi)\big]d\xi(\varepsilon t), \qquad /2.3/$$

где обозначения p и q заимствованы из §1.

Для исследования характеристик автоколебаний, используя результаты предыдущего параграфа, перейдем в /2.2/ к сносу и диффузии. Из этого легко получить уравнение для амплитуды колебаний независящее от фазы, т.к.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\Big\{\big[p\cos(\nu t+\varphi) + q\sin(\nu t+\varphi)\big]\big[q\cos(\nu t+\varphi) - p\sin(\nu t+\varphi)\big]\Big\}dt = 0$$

то есть

$$d r = 2\varepsilon\left[r\left(a_0 p + a_1 \nu q - \frac{3}{4} a_3 r^2 \nu^3 p\right) + \frac{S^2}{r}\left(p^2+q^2\right)\right] dt + \sqrt{2\varepsilon}\, S \sqrt{p^2+q^2}\, d\xi(t) \qquad /2.4/$$

Плотность распределения решения /2.4/ $w(r,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2\varepsilon \frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[r\left(a_0 p + a_1 \nu q - \frac{3}{4} a_3 r^2 \nu^3 p\right) + \frac{S^2}{r}\left(p^2+q^2\right)\right] w\right\} + \varepsilon S^2 \left(p^2+q^2\right) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$$

с условием нормировки

$$\int_0^\infty w(r,t)\, dr \underset{t}{\equiv} 1$$

Для стационарной плотности распределения амплитуды $\widetilde{w}(r)$ можно записать обыкновенное дифференциальное уравнение [2]:

$$\frac{d\,\widetilde{w}(r)}{dr} = \left[\frac{1}{r} + \frac{2r\left(a_0 p + a_1 \nu q - \frac{3}{4} a_3 r^2 \nu^3 p\right)}{S^2\left(p^2+q^2\right)}\right]\widetilde{w}(r) \qquad /2.5/$$

и условие нормировки

$$\int_0^\infty \widetilde{w}(r)\, dr = 1 \qquad /2.6/$$

Решение /2.5/ легко получить после интегрирования /2.5/

$$\ln \widetilde{w}(r) = \ln r + \frac{a_0 p + a_1 \nu q}{S^2\left(p^2+q^2\right)} r^2 - \frac{3 a_3 \nu^3 p}{8 S^2\left(p^2+q^2\right)} r^4 + \ln C_1$$

или

$$\widetilde{w}(r) = C_1 r \exp\left\{-\frac{3 a_3 \nu^3 p}{8 S^2\left(p^2+q^2\right)}\left[r^2 - \frac{4\left(a_0 p + a_1 \nu q\right)}{3 a_3 \nu^3 p}\right]^2\right\}.$$

При переходе к нормированной амплитуде / относительно амплитуды стационарного режима при отсутствии флуктуаций / т.е. к $\rho = \frac{r}{r_0}$ где

$$r_0^2 = \frac{4(a_0 p + a_1 \nu q)}{3 a_3 \nu^3 p}$$

получим плотность распределения ρ в виде

$$w_0(\rho) = \frac{2\rho}{M} \exp\left\{-\frac{1}{2\bar{c}}(\rho^2-1)^2\right\} \qquad /2.7/$$

где

$$\bar{c} = \frac{4 g^2 (p^2+q^2)}{3 a_3 \nu^3 p r_0^2} \qquad M = \left(\frac{\pi \bar{c}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\bar{c}}}\right) \qquad /2.8/$$

Анализ зависимости плотности распределения нормированной амплитуды колебаний от параметра $\bar{c}$ имеется в [3]. Учитывая этот анализ и выражение для $\bar{c}$, легко заметить, что плотность распределения ρ при фиксированной частоте, в отличие от случая генератора без задержки, зависит еще от положения изображающей точки в плоскости параметров (ω^2, q_1). Более того, даже если точка находится на границе областей $D_0 - D_2$ /рис.I работы [I]/, то при движении вдоль этой границы плотность распределения сильно меняется. Так, например, при движении вдоль прямой

$$q_1 + \omega^2 = \frac{1}{4}$$

от $\omega^2 = 0$ до $\omega^2 = \frac{1}{4}$ / первая область D_0 рис.I работы [I] / параметр $\bar{c}$ увеличивается т.е. плотность распределения расплывается как при увеличении интенсивности шума.

Как уже отмечалось, все характеристики стационарной амплитуды колебаний можно получить используя анализ распределения /2.7/ приведенный в работе [3] с учетом константы /2.8/.

Объединяя полученный результат с результатами предыдущего параграфа, можно утверждать, что при достаточно малом ε в контуре устанавливаются колебания с амплитудой, распределение которой близко к /2.7/ и фазой, которая подчинена диффузионному закону.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Букатарь М.И., Царьков Е.Ф. Об автоколебаниях в ламповом генераторе с запаздывающей обратной связью, Изв. ВУЗ, Радиофизика, т.XIII, №8, 1970.

2. Хасьминский Р.З., Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, Изд. Наука, М., 1969.

3. Стратонович Р.Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, Изд. Советское радио, М., 1961.

4. Ито К., Нисио М., Стационарные решения стохастических дифференциальных уравнений, Сб. переводов "Математика", т.XI, №4, 1967.

5. Kushner H.J., On the Stability of Processes Defind by stochastic Difference-Differential Equations, J.Dif.Equations, 4, 3, 1968.

6. Колмановский В.Б., Эргодические свойства стационарных решений стохастических дифференциальных уравнений, Теория вероятностей и ее приложения, 14, 1, 1969.

7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения, изд. Наукова думка, К., 1968.

8. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения, Изд. Мир, М., 1967.

9. Коломиец В.Г. Случайные колебания неавтономных квазилинейных стохастических систем, Укр. мат. журнал, т.XX, №3, 1968.

10. Дуб Дж. Вероятностные процессы, Изд. ИЛ, М., 1956.

11. Буйкис М.А., Садовяк А.М., Царьков Е.Ф. О непрерывности по параметру решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений, Латв. мат. ежегодник, №12, 1973, /в печати/.

О "РАЙСКИХ САДАХ" И ВЗАИМНО СТИРАЕМЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ

Э.А. Якубайтис

§ 1. Определения

Клеточной структурой будем называть четверку $(Z^n, S, s_0, Э, \sigma)$, где

Z^n – n-мерная целочисленная решетка (клеточное пространство);

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}\}$ – конечное множество (множество состояний);

$s_0 \in S$ – выделенный элемент множества S (состояние покоя);

$Э = (\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \ldots, \vec{\xi}_m)$ – конечный упорядоченный набор различных n-мерных векторов с целочисленными координатами (шаблон соседства);

$\sigma \colon S^m \to S$ – функция, определенная на всех m-ках $(x_1, \ldots, x_m)$, $x_i \in S$, и принимающая значения из S, причем

$$\sigma(s_0, s_0, \ldots, s_0) = s_0 \qquad (1.1)$$

(функция перехода или локальное преобразование).

Элементы клеточного пространства (n-мерные векторы с целочисленными координатами) будем называть ячейками. Соседями ячейки $\vec{J}$ будем называть ячейки $\vec{J}+\vec{\xi}_1, \ldots, \vec{J}+\vec{\xi}_m$.

Глобальной конфигурацией c будем называть функцию $c \colon Z^n \to S$, которая каждой ячейке $\vec{J}$ сопоставляет состояние $c(\vec{J}) \in S$. Множество всех глобальных конфигураций обозначим через C.

Сужение глобальной конфигурации c на конечный блок $X \subset Z^n$ будем обозначать через $(c)_X$ и называть конфигурацией блока X.

Локальное преобразование σ определяет глобальное преобразование $\tau \colon C \to C$

для любой ячейки $\vec{\jmath} \in Z^n$

$$\tau(c)(\vec{\jmath}) = \sigma\left(c(\vec{\jmath}+\vec{\text{Э}}_1),\dots,c(\vec{\jmath}+\vec{\text{Э}}_m)\right). \qquad (\text{I}.2)$$

Введем теперь дискретное время $t=0,1,2,\dots$. Каждому моменту времени t сопоставим глобальную конфигурацию c_t (состояние сотообразного пространства) по следующему закону: пусть произвольно фиксировано $c_0 \in C$, тогда

$$c_1=\tau(c_0),\ c_2=\tau(c_1)=\tau^2(c_0),\dots,\ c_t=\tau(c_{t-1})=\tau^t(c_0). \qquad (\text{I}.3)$$

Таким образом, состояние ячейки $\vec{\jmath}$ в момент времени $t+1$, согласно (I.2), определяется состояниями всех ее соседей в момент t.

Часто ограничиваются конфигурациями, в которых только конечное число ячеек находится в состояниях, отличных от состояния покоя s_0. Такие конфигурации будем называть конечными глобальными конфигурациями, а множество всех конечных глобальных конфигураций обозначим через C_F. Таким образом, $c \in C_F$ тогда и только тогда, когда конечно

$$\sup c = \{\vec{\jmath} \mid c(\vec{\jmath}) \neq s_0\}. \qquad (\text{I}.4)$$

Из (I.I) следует, что $\tau(c) \in C_F$, если только $c \in C_F$, т.е., множество C_F замкнуто относительно глобального преобразования τ.

Структуры с k состояниями, $|S|=k$, будем сокращенно называть k-структурами.

Рассмотрим подробнее функцию перехода σ. Очевидно, σ можно рассматривать как функцию k-значной логики. Пусть фиксировано Z^n, $\text{Э}=(\vec{\text{Э}}_1,\dots,\vec{\text{Э}}_m)$ и $S=\{s_0,s_1,\dots,s_{k-1}\}$. Тогда σ можно задать таблицей с k^m наборами значений аргументов, причем на одном из них значение функции уже определено условием (I.I). Поэтому число различных k-структур с данным Э, $|\text{Э}|=m$,

$$M_k = k^{k^m-1} \qquad (\text{I}.5)$$

Центральным понятием общей теории сотообразных структур являются райские сады и взаимно стираемые конфигурации, введенные Муром [5].

Конфигурацию $(c)_X$ блока X будем называть райским садом (РС), если для любой $c_1 \in C$

$$(\tau(c_1))_X \neq (c)_X$$

Будем говорить, что конфигурация $(c)_Y$ содержит копию конфигурации $(c_1)_X$, если существует такой сдвиг $\vec{J}_1$, что для любой ячейки $\vec{J} \in X$ ячейка $\vec{J}+\vec{J}_1 \in Y$ и $c(\vec{J}+\vec{J}_1) = c_1(\vec{J})$.

Тогда очевидно, что любая конфигурация, содержащая копию какого-то РС, сама тоже является РС.

Две различные конфигурации конечного блока X $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$ будем называть взаимно стираемыми конфигурациями (ВСК), если для любой конфигурации d блока $\bar{X} = Z^n \setminus X$

$$\tau(c_1 \cup d) = \tau(c_2 \cup d), \tag{I.6}$$

где $c_i \cup d$ $(i=1,2)$ означает глобальную конфигурацию, совпадающую с c_i на блоке X и с d на блоке $\bar{X}$.

Согласно этому определению, взаимно стираемые конфигурации (в любом окружении) неразличимы после применения глобального преобразования, т.е. по конфигурации $\tau(c_i \cup d)$ момента t невозможно однозначно установить конфигурацию момента $t-1$, информация о том, какая из конфигураций $c_1 \cup d$, $c_2 \cup d$ применялась в предыдущий момент, стерлась.

Пусть дан произвольный блок A. Введем обозначение $N(A)$ для блока ячеек, каждая из которых является соседом хотя бы одной ячейки блока A:

$$N(A) = \{\vec{J}+\vec{\exists} \mid \vec{J} \in A, \vec{\exists} \in \exists\}. \tag{I.7}$$

Аналогично, обозначим через $N^-(A)$ блок ячеек, каждая из которых имеет хотя бы одного соседа в A:

$$N^-(A) = \{\vec{J}-\vec{\exists} \mid \vec{J} \in A, \vec{\exists} \in \exists\}. \tag{I.8}$$

Пусть теперь даны две ВСК $(c_1)_X$ и $(c_2)_X$. Рассмотрим блок

$$B = \{ \vec{J} \mid c_1(\vec{J}) \neq c_2(\vec{J}),\ \vec{J} \in X \}$$

ячеек, в которых отличаются c_1 и c_2. Условие (I.6) требует совпадения $\tau(c_1 \cup d)$ и $\tau(c_2 \cup d)$ во всем пространстве Z^n. Однако это условие выполняется автоматически на всех ячейках, которые не имеют соседей в блоке B. Поэтому достаточно требовать выполнения этого условия на ячейках блока $N^-(B)$. Но состояния ячеек блока $N^-(B)$ в момент $t+1$ определяются состояниями ячеек блока $A = N(N^-(B))$ в момент t.

Поэтому справедливо следующее утверждение:

Пусть даны конечные блоки A и B такие, что $N(N^-(B)) \subseteq A$. Пусть даны две различные конфигурации $(c_1)_A$ и $(c_2)_A$ такие, что

$$(c_1)_{A \setminus B} = (c_2)_{A \setminus B} \tag{I.9}$$

$$(\tau(c_1))_{N^-(B)} = (\tau(c_2))_{N^-(B)} \tag{I.10}$$

Тогда $(c_1)_A$ и $(c_2)_A$ являются ВСК

ВСК именно такого вида рассматривает Мур [5]. В [12] автором доказано, что почти все K - структуры имеют ВСК минимальных размеров - с внутренним блоком B, состоящим из одной ячейки (при $K \to \infty$ доля K - структур, имеющих такие ВСК, стремится к 1).

Отметим, что соседство фон Неймана и соседство Мура являются симметрическими: из $\vec{\xi} \in \Xi$ следует $-\vec{\xi} \in \Xi$. Только для симметрических соседств $N^-(A) = N(A)$, в общем же случае $N^-(A)$ отлично от $N(A)$. Поэтому определения ВСК из [11] и [3], использующие блок $N(N(B))$ верны только для структур с симметрическим соседством.

Рассмотрим теперь глобальные аналоги РС и ВСК. Глобальную конфигурацию c будем называть глобальным райским садом (ГРС), если для любой $c_1 \in C$

$$\tau(c_1) \neq c$$

(т.е. c не принадлежит области значений преобразования τ).

Две различные глобальные конфигурации c_1 и c_2 ($c_1 \in C$, $c_2 \in C$) будем называть глобальными взаимно стираемыми конфигурациями (ГВСК), если

$$\tau(c_1) = \tau(c_2).$$

Рассмотрим теперь случай, когда допускаются лишь конечные глобальные конфигурации.

Конфигурацию $c \in C_F$ будем называть конечным глобальным райским садом (КГРС), если для любой $c_1 \in C_F$

$$\tau(c_1) \neq c,$$

т.е. c не имеет предшественника в C_F.

Наконец, две различные конфигурации $c_1 \in C_F$ и $c_2 \in C_F$ будем называть конечными глобальными взаимно стираемыми конфигурациями (КГВСК), если

$$\tau(c_1) = \tau(c_2).$$

§ 2 посвящен исследованию взаимосвязей между введенными выше понятиями. В § 3 будет доказано, что почти все однородные структуры имеют примитивные КГРС (c называем примитивной конфигурацией, если $\sup c$ состоит из одной ячейки). В §4 будет рассмотрена скорость самовоспроизведения в структурах специального типа.

§ 2. <u>Взаимосвязи между различными понятиями РС и ВСК</u>

Отметим сначала очевидные взаимосвязи. Так, из существования РС следует существование ГРС и КГРС, а КГВСК существуют тогда и только тогда, когда существуют ВСК.

Рассмотрим теперь одномерную 2-структуру с $\Im = (-1,0,1)$ и $S = \{0,1\}$ $(s_0 = 0)$. Пусть

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + x_2 + x_3]_{mod\,2} \qquad (2.1)$$

В этой структуре не существует РС и ВСК, но, например, примитивная конфигурация

.... 0001000 ...

является КГРС, а конфигурации

... 000000000000 ... и
011011011011 ...

являются ГВСК.

Заметим, что в §4 будут рассмотрены обобщения структуры (2.1).

Мур [5] доказал, что из существования в структуре ВСК следует существование РС. Майхилл [6] доказал обратную теорему. Заметим, что Мур и Майхилл рассматривали двумерные структуры с соседством Мура. В [12] эти теоремы обобщены на произвольные сотообразные структуры.

Докажем теперь теорему, которая на первый взгляд может показаться неожиданной.

<u>Теорема 2.1.</u> Если в сотообразной структуре существуют ГРС, то существуют и РС.

Доказательство. Пусть в n-мерной структуре $\mathcal{Q}$ не существует РС. Докажем, что тогда для любой глобальной конфигурации c существует конфигурация d такая, что $\tau(d)=c$. Этим завершится доказательство Теоремы 2.1.

Обозначим через X_i n-мерный куб со стороной $2i+1$ и центром в ячейке $\{0,0,\dots,0\}$:

$$X_i = \{ \vec{J} = \{i_1,\dots,i_n\} \mid |i_j| \le i \quad (j=1,2,\dots,n) \}. \qquad (2.2)$$

Фиксируем произвольную глобальную конфигурацию c. Конфигурация $(c)_{X_i}$ не является РС, поэтому для нее существует <u>конечное</u> число предшественников $(d_1^{(i)})_{N(X_i)},\dots,(d_{N_i}^{(i)})_{N(X_i)}$ на блоке $N(X_i)$. Некоторые из $(d_j^{(i)})_{N(X_i)}$ обязательно можно дополнить до предшественника конфигурации $(c)_{X_{i+1}}$ на блоке $N(X_{i+1})$. Легко видеть, что любой предшественник конфигурации $(c)_{X_{i+1}}$ можно получить таким образом.

Рассмотрим теперь дерево предшественников, где каждая вершина уровня i — это предшественник конфигурации $(c)_{X_i}$ на блоке $N(X_i)$, причем вершина уровня i соединена дугами со всеми вершинами уровня $i+1$, которые соответствуют конфигурациям, полученным расширением конфигурации этой вершины. Это дерево имеет конечное ветвление, но бесконечное число вершин. Согласно Лемме о бесконечности (см. напр. [8]), в таком дереве существует бесконечный путь. Этот бесконечный путь определяет глобальную конфигурацию d , так как переходя по пути с вершины уровня i на вершину уровня $i+1$, состояния ячеек блока $N(x_i)$ не меняются. (Отметим, что это доказательство существования d неконструктивно). Таким образом, для произвольной конфигурации c существует предшественник: $\tau(d) = c$. Теорема 2.I доказана.

Из замечаний в начале этого параграфа и Теоремы 2.I получаем

<u>Следствие 2.2.</u> Для произвольной сотообразной структуры $\mathcal{a}$ равносильны следующие четыре утверждения:

I) в $\mathcal{a}$ существуют РС,
2) в $\mathcal{a}$ существуют ВСК,
3) в $\mathcal{a}$ существуют ГРС,
4) в $\mathcal{a}$ существуют КГВСК.

Докажем теперь

<u>Теорему 2.3.</u> В любой сотообразной структуре из существования конечных глобальных райских садов(КГРС)следует существование глобальных взаимно стираемых конфигураций (ГВСК).

Доказательство. Если в структуре существуют РС, то очевидно существуют и КГРС и ГВСК. Поэтому остается случай,когда РС не существуют. Итак, допустим, что в структуре не существуют РС, но существуют КГРС, и докажем существование ГВСК. Обозначим через c_0 нулевую конфигурацию: $c_0(\vec{J}) = s_0$ для всех $\vec{J} \in Z^n$. Тогда очевидно $\tau(c_0) = c_0$. Докажем, что существует ненулевая конфигурация a такая, что $\tau(a) = c_0$. Тогда c_0 и a будут ГВСК.

Действительно, рассмотрим произвольный КГРС d , $d \in C_F$. Так как в структуре не существует РС (и тем самым ГРС), то существует глобальная конфигурация $b \in C_F$, $\tau(b) = d$. Блок $sup\, b$ бесконечен. Поэтому существует такое состояние $s_j \neq s_0$, что $b(\vec{J}) = s_j$ для бесконечно многих $\vec{J}$. Пусть i – произвольное натуральное число. Рассмотрим нулевую конфигурацию $(c_0)_{X_i}$, где X_i определено формулой (2.2). Для нее существует хотя бы один предшественник $(a_i)_{N(X_i)}$ такой, что $a_i(\{0,0,\dots,0\}) = s_j$ (возьмем ячейку $\vec{J_i}$, $d(\vec{J_i}) = s_j$, размещенную достаточно далеко от блока $sup\ d$, тогда конфигурацию $(a_i)_{N(X_i)}$ можно получить, например, сдвигом конфигурации d на $-\vec{J_i}$). Теперь остается, как и при доказательстве Теоремы 2.I, построить дерево предшественников (включаем только предшественники конфигураций $(c_0)_{X_i}$, в которых ячейка $\{0,0,\dots,0\}$ имеет состояние s_j). Бесконечный путь в этом дереве дает конфигурацию a, $a \neq c_0$, такую, что $\tau(a) = c_0$. Теорема 2.3 доказана.

Доказательство Теоремы 2.5, которое будет приведено в этом параграфе, предоставит нам пример структуры, в которой существуют ГВСК, но не КГРС. Поэтому, учитывая Теорему 2.3 и замечания в начале этого параграфа, получаем

<u>Следствие 2.4.</u> В произвольной сотообразной структуре из существования РС следует существование КГРС, а из существования КГРС следует существование ГВСК. Оба обратные утверждения неверны.

Следствия 2.2 и 2.4 дают полную картину взаимосвязей между всеми шестью введенными понятиями.

Переходим теперь к выводу Теоремы 2.5. Рассмотрим одномерную 2 – структуру с

$$\mathcal{E} = (-2,-1,0)$$

и таблицей функции перехода:

x_1	x_2	x_3	$\sigma(x_1,x_2,x_3)$
s_0	s_0	s_0	s_0
s_0	s_0	s_1	s_1
s_0	s_1	s_0	s_1
s_0	s_1	s_1	s_0

(2.3)

x_1	x_2	x_3	$\sigma(x_1, x_2, x_3)$
S_1	S_0	S_0	S_0
S_1	S_0	S_1	S_1
S_1		S_0	S_0
S_1		S_1	S_1

Для примера рассмотрим действие глобального преобразования τ на конфигурации $\bar{c} \in C_F$

$$\bar{c} = \leftarrow S_0\ S_1\ S_0\ S_1\ S_1\ S_1\ S_1\ S_0 \rightarrow$$

где стрелки указывают на то, что все остальные ячейки находятся в состоянии покоя S_0.

		0	1	2	3	4	5	6	7	
$t=0$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=1$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_1	S_1	S_0	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=2$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_0	S_1	S_0	S_0	$\rightarrow$
$t=3$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$
$t=4$	$\leftarrow$	S_0	S_1	S_0	S_1	S_1	S_1	S_1	S_0	$\rightarrow$

Итак, $\tau^4(\bar{c}) = \bar{c}$, т.е. конфигурация $\bar{c}$ содержится в цикле длины $T = 4$. Докажем, что в структуре (2.3) любая конечная глобальная конфигурация содержится в некотором цикле, состоящем из конечных глобальных конфигураций. Поэтому в структуре (2.3) любая $c \in C_F$ имеет предшественника из C_F, т.е. НГРС не существуют. С другой стороны, очевидно, что $\tau(c_1) = \tau(c_2) = c_1$, где

$$c_1 = S_1\ S_1\ S_1\ S_1\ S_1\ S_1\ S_1 \ldots$$

$$c_2 = S_1\ S_0\ S_1\ S_0\ S_1\ S_0\ S_1 \ldots$$

Поэтому структура (2.3) может служить примером структуры, необходимым для следствия 2.4.

Рассмотрим теперь произвольную конечную глобальную конфигурацию c, "активная" часть которой составлена из ℓ рядом стоящих фрагментов $s_1 s_0$ и $s_1 s_1$

$$c(i) = s_0 \quad \text{при} \quad i \leq 0, \tag{2.4}$$

$$c(i) = s_0 \quad \text{при} \quad i \geq 2\ell+1, \tag{2.5}$$

$$c(1) = c(3) = \quad c(2\ell-1) = s_1, \tag{2.6}$$

$c(2), c(4), \ldots, c(2\ell)$ – произвольны.

Класс всех 2^ℓ конфигураций, удовлетворяющих условиям (2.4) – (2.6), обозначим через C_ℓ. Докажем, что из $c \in C_\ell$ следует $\tau(c) \in C_\ell$. Действительно, пусть $c \in C_\ell$. Тогда из $\sigma(s_0, s_0, s_0) = s_0$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.4), из $\sigma(s_1, s_1, s_0) = \sigma(s_1, s_0, s_0) = s_0$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.5), а из $\sigma(s_0, s_0, s_1) = = \sigma(s_1, s_0, s_1) = \sigma(s_1, s_1, s_1) = s_1$ следует, что $\tau(c)$ удовлетворяет (2.6).

В структуре (2.3) не существуют КГВСК. Действительно, допустим противное. Пусть c_1 и c_2 являются КГВСК. Пусть i – самая левая из ячеек, для которых $c_1(i) \neq c_2(i)$. Тогда $c_1(i-1) = c_2(i-1)$ и $c_1(i-2) = c_2(i-2)$. Легко видеть что из этих трех условий и функции перехода (2.3) следует $\tau(c_1)(i) \neq \tau(c_2)(i)$, т.е. c_1 и c_2 не являются КГВСК.

Тем самым доказано, что любая $c \in C_\ell$ содержится в цикле длины $T \leq 2^\ell$. Докажем индукцией по ℓ, что длина цикла $T = 2^j$, $j \leq \ell$. При $\ell = 1$ обе конфигурации из C_1 входят в один цикл длины $T = 2$. Пусть теперь каждая конфигурация из C_k входит в некоторый цикл длины 2^j $j \leq k$. Рассмотрим произвольную конфигурацию $c \in C_{k+1}$. Состояния ячеек i, $i \geq 2k+1$, не влияют на состояния ячеек i, $i \leq 2k$, поэтому начало конфигурации $c(1)c(2) \quad c(2k)$ повторяется впервые через

$T = 2^j$ $j \le r$. Если при этом также $\tau^{2^j}(c)(2r+2) = c(2r+2)$, то конфигурация c содержится в цикле длины 2^j. Если же $\tau^{2^j}(c)(2r+2) \ne c(2r+2)$, то обязательно $\tau^{2^{j+1}}(c)(2r+2) = c(2r+2)$, т.е. c содержится в цикле длины $T = 2^{j+1}$ (в противоположном случае $\tau^{2^j}(c(1)c(2)\dots c(2r)s_1 s_0) = \tau^{2^j}(c(1)c(2) \quad c(2r)s_1 s_1)$, что влечет за собой существование НГВСК). Итак, доказано, что каждая конфигурация $c \in C_\ell$ содержится в некотором цикле длины $T = 2^j$, $j \le \ell$.

Переходим теперь к определению j, т.е. точной длины циклов. Для этого нам будет удобно ввести обозначения

$$s_1 s_0 = 1, \quad s_1 s_1 = 0. \qquad (2.7)$$

Тогда любая $c \in C_\ell$ изображается последовательностью длины ℓ из 0 и 1. Так, конфигурации $\bar{c}$ соответствует последовательность 100. Пусть последовательность $a^{(0)}(1)\dots a^{(0)}(\ell)$ соответствует конфигурации c. Тогда последовательность соответствующую $\tau^t(c)$ обозначим через $a^{(t)}(1)\dots a^{(t)}(\ell)$.

Легко найти закон, по которому из последовательности $a^{(t)}(1)\dots a^{(t)}(\ell)$ получается последовательность $a^{(t+1)}(1)\dots a^{(t+1)}(\ell)$. А именно, из (2.3) следует, что $a^{(t+1)}(i) = \sigma'(a^{(t)}(i-1), a^{(t)}(i))$, где $\sigma'(x_1, x_2)$ задается таблицей

x_1	x_2	$\sigma'(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

,

При вычислении $a^{(t+1)}(1)$ надо учитывать "граничные условия"

$$a^{(t)}(0) \equiv 1. \qquad (2.8)$$

Функцию $\sigma'(x_1, x_2)$ можно записать и аналитически

$$\sigma'(x_1, x_2) \quad [x_1 + x_2]_{mod 2} \qquad (2.9)$$

(этим и объясняются обозначения (2.7)). Индукцией по t легко доказать, что при всех $1 \leq i \leq l$ и всех $t \geq 0$ справедливо соотношение

$$a^{(t)}(i) = \Big[\sum_{j=0}^{i} \binom{t}{j} a^{(0)}(i-j)\Big]_{mod 2} \qquad (2.10)$$

где $\binom{t}{j} \equiv 0$ при $j > t$.

Будем теперь искать длину цикла для произвольной последовательности длины l $a^{(0)}(1)a^{(0)}(2)\ldots a^{(0)}(l)$. Длина цикла - это минимальное t, при котором для всех i, $1 \leq i \leq l$,

$$a^{(t)}(i) = a^{(0)}(i).$$

Используя (2.10) и учитывая (2.8), отсюда получаем

$$\Big[\binom{t}{1}\Big]_{mod 2} = 0$$

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(1) + \binom{t}{2}\Big]_{mod 2} = 0$$

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(2) + \binom{t}{2} a^{(0)}(1) + \binom{t}{3}\Big]_{mod 2} = 0$$

— — — —

$$\Big[\binom{t}{1} a^{(0)}(l-1) + \binom{t}{2} a^{(0)}(l-2) + \ldots + \binom{t}{l}\Big]_{mod 2} = 0.$$

Эта система эквивалентна системе

$$\Big[\binom{t}{1}\Big]_{mod 2} = \Big[\binom{t}{2}\Big]_{mod 2} = \ldots = \Big[\binom{t}{l}\Big]_{mod 2} = 0.$$

Отсюда следует $t > l$, так как $\binom{l}{l} = 1$. По ранее доказанному, t имеет вид 2^j. Из Леммы [I3] следует, что

$$\left[\binom{2^j}{i} \right]_{mod\,2} = 0$$

при всех i, $1 \le i \le 2^j - 1$

Таким образом доказано, что любая $c \in C_l$ содержится в цикле длины

$$T(l) \quad 2^{1+[\log_2 l]} \tag{2.14}$$

($T(l)$ - наименьшая степень числа 2, бо́льшая l).

Переходим к исследованию конфигураций $c \in C_F$, не содержащихся ни в одном C_l. Легко убедиться, что любую конфигурацию $c \in C_F$ можно представить в виде

$$\leftarrow s_0 \bar{c}_1 \underbrace{s_0 \ldots s_0}_{m_1} \bar{c}_2 \underbrace{s_0 \ldots s_0}_{m_2} \bar{c}_3 \quad \bar{c}_{k-1} \underbrace{s_0 \ldots s_0}_{m_{k-1}} \bar{c}_k s_0 \longrightarrow \tag{2.12}$$

где конфигурация $\leftarrow s_0 \bar{c}_i s_0 \rightarrow$ является сдвигом подходящей конфигурации из C_{l_i} $(i = 1, \ldots, k)$, и $m_i \ge 1$ $(i = 1, \ldots, k-1)$. Докажем, что все компоненты $\bar{c}_i$ перерабатываются глобальным преобразованием τ независимо друг от друга. На компоненту $\bar{c}_i$ может влиять лишь компоненты, находящиеся влево от нее. Однако компонента $\bar{c}_{i-1}$ по ранее доказанному не распространяется вправо, т.е., "изоляция" $\underbrace{s_0 \quad s_0}_{m_{i-1}}$ сохраняется, а из $\sigma(s_0, s_0, s_1) = \sigma(s_1, s_0, s_1) = s_1$, следует, что и в случае $m_{i-1} = 1$ компонента $\bar{c}_i$ развивается независимо от $\bar{c}_{i-1}$.

Таким образом, нами доказано следующее утверждение. Пусть дана произвольная конфигурация $c \in C_F$. Пусть в представлении (2.12) конфигурации с входит компонента из C_l, но не входят компоненты из C_j, $j > l$. Тогда в структуре (2.3)

$$\tau^{T(l)}(c) = c,$$

где $T(l) = 2^{1+[\log_2 l]}$, а $\tau^t(c) \ne c$ при всех $0 < t < T(l)$.

Отсюда следует, что в структуре (2.3) все конфигурации $c \in C_F$ распределены по конечным циклам с длинами вида 2^j, причем имеются циклы всевозможных длин 2^j $(j = 0, 1, 2, \ldots)$. Кроме того, отсюда следует, что в структуре (2.3) не существуют КГРС. Таким образом нами доказана

Теорема 2.5. Существуют структуры не имеющие конечных глобальных райских садов, но имеющие глобальные взаимно стираемые конфигурации.

§ 3. Почти все одномерные структуры имеют примитивные КГРС.

Пусть фиксирован индекс соседства $\mathcal{J} = (\vec{\mathcal{J}}_1, \quad \vec{\mathcal{J}}_m)$ n - мерных сотообразных структур. Число всех k - структур с индексом соседства $\mathcal{J}$ равно $M_k = k^{k^m - 1}$. Пусть A - произвольное свойство сотообразных структур. Обозначим через M_k^A число тех k -структур с индексом $\mathcal{J}$, которые обладают свойством A. Будем говорить, что почти все k - структуры с индексом соседства $\mathcal{J}$ обладают свойством А, если

$$\lim_{k \to \infty} \frac{M_k^A}{M_k} = 1. \qquad (3.1)$$

Если же (3.1) имеет место при любом $\mathcal{J}$, то будем просто говорить, что почти все k - структуры обладают свойством A.

Напомним, что примитивными называются глобальные конфигурации, в которых все ячейки, кроме одной, имеют состояние покоя s_0. Структурами размаха m будем называть одномерные структуры, в которых все m $(m \geq 2)$ соседей ячейки размещены плотно (см. [10]).

В этом параграфе будет доказана

Теорема 3.1. При любом $m \geq 2$ почти все k - структуры размаха m имеет примитивные КГРС.

Эта теорема была приведена автором без доказательства в [14].

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что для структуры размаха m

$$\text{Э} = (0,1,\ldots,m-1) \qquad (3.2)$$

Пусть фиксирована одномерная структура размаха m с локальным преобразованием σ и глобальным преобразованием τ.

Любую последовательность $U = u_1 \ \ u_{m-1}$, где $u_i \in S$, будем называть фрагментом. Очевидно, множество V всех фрагментов состоит из k^{m-1} фрагментов. Будем говорить, что фрагмент U' следует за фрагментом $U = u_1 \ldots u_{m-1}$ (сокращенно – $U \to U'$), если U' можно получить из U, отбросив первый символ u_1 и добавив в конце некоторый $u_m \in S$. Очевидно, существует точно k различных фрагментов, следующих за данным. Пусть $U = u_1 \ldots u_{m-1}$, $U' = u_2 \ \ u_{m-1} u_m$. Тогда вместо $\sigma(u_1,\ldots,u_m)$ иногда будем писать короче $\sigma(UU')$. Будем говорить, что фрагмент $U^{(2)}$ s_j – следует за $U^{(1)}$ (сокращенно – $U^{(1)} \xrightarrow[j]{} U^{(2)}$), если

$$U^{(1)} \to U^{(2)},$$
$$\sigma(U^{(1)}U^{(2)}) = s_j \qquad (3.3)$$

Очевидно, если $U^{(1)} \to U^{(2)}$, то существует точно одно s_j такое, что $U^{(1)} \xrightarrow[j]{} U^{(2)}$.

Рассмотрим примитивную конфигурацию c:

$c(0) = s_j \quad (j \neq 0), \quad c(i) = s_0, \ i \neq 0.$

Пусть $c_1 \in C_F$ – прообраз конфигурации c, т.е. $\tau(c_1) = c$. Тогда $\sigma(c_1(i),\ldots, c_1(i+m-1)) = s_0$ при всех $i<0$ и существует такое $l<0$, что $c_1(i) = s_0$ при всех $i<l$. Поэтому для фрагмента

$$U' = c_1(0)c_1(1)\ldots \ c_1(m-2)$$

существует такая конечная последовательность фрагментов

$$U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_n = U', \tag{3.4}$$

что

$$U_0 = s_0 s_0 \quad s_0\ , \tag{3.5}$$

$$U_i \xrightarrow[s_j]{} U_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{3.6}$$

Фрагмент U' будем называть слева s_0 - достижимым, если существует конечная последовательность (3.4) удовлетворяющая условиям (3.5) - (3.6).

Значит, фрагмент U может служить в качестве конфигурации $c_1(0)\,c_1(1) \quad c_1(m-2)$ только тогда, если U слева s_0 - достижим.

Аналогично, фрагмент U'' будем называть справа s_0 -достижимым, если существует конечная последовательность $U_0, U_1, \ldots, U_n = U''$ такая, что $U_0 = s_0 s_0 \ldots s_0$ и $U_{i+1} \xrightarrow[s_0]{} U_i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

В качестве конфигурации $c_1(1)\,c_1(2) \ldots c_1(m-1)$ могут служить лишь справа s_0 - достижимые фрагменты.

Наконец, в структуре не существует примитивных КГРС тогда и только тогда, если для любого $s_i \in S$ существует такая пара фрагментов U', U'', что

1) U' слева s_0 - достижим,
2) U'' справа s_0 - достижим и
3) $U' \xrightarrow[s_i]{} U''$.

Рассмотрим теперь подробнее случайные величины γ (γ') - числа слева (справа) s_0 - достижимых фрагментов в случайной k - структуре размера m. Структура определяется таблицей функции σ. Значение $\sigma(s_0, s_0, \ldots, s_0) = s_0$ уже определено. Поэтому число различных структур равно $k^{k^m - 1}$. Будем строить случайную таблицу функции σ, определяя независимо друг от друга значений функции на $k^m - 1$ наборах аргументов, причем для каждого набора значение функции с вероятностью $1/k$ равно s_i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$. Тогда, слевидно, все различные k - структуры равновероятны, и оценить долю структур с данным свойством можно при помощи оценки соответствующей вероятности.

Рассмотрим следующую вероятностную процедуру $\mathcal{A}$ получения множества слева s_0 -достижимых фрагментов для случайной структуры. Фрагмент $U_0 = s_0 \ldots s_0$ достижим по определению в любой структуре; будем называть его фрагментом нулевого поколения. Нахождение следующих поколений определим индуктивно: Пусть найдены все фрагменты поколений $0, 1, \ldots, r$ и среди них не имеется одинаковых. Для каждого фрагмента r - того поколения U рассмотрим все k следующих за ним фрагментов $U^{(1)}, \ldots, U^{(k)}$. Каждый из них с вероятностью $1/k$ независимо от других включаем в кандидаты на $(r+1)$ -ое поколение (содержательно - $U^{(i)}$ включаем, если $\sigma(UU^{(i)})$ $s_0)$

$(r+1)$ -ое поколение - это множество кандидатов - фрагментов, не встречающихся в предыдущих поколениях. Процесс продолжаем, пока очередное поколение не оказывается пустым (общее число фрагментов k^{m-1}, поэтому k^{m-1} -ое поколение заведомо пусто). Полученное случайное множество фрагментов всех поколений и является множеством слева s_0 - достижимых фрагментов для случайной структуры, так как при формировании кандидатов на I,2, 3, ... поколения для любого набора аргументов $(u_1, \ldots u_m)$ $(u_i \in S)$ мы определяем, выполняется ли условие $\sigma(u_1, \quad u_m) = s_0$, не более одного раза.

Из соображений симметрии ясно, что случайные величины ξ и ξ' (числа слева и соответственно справа s_0 -достижимых фрагментов в случайной структуре) имеют одинаковые распределения. Разумеется, ξ и ξ' - зависимые случайные величины).

Переходим к оценке $P\{\xi \geq l\}$. Для этого рассмотрим ветвящийся случайный процесс $\mathcal{B}$, который получается из вышеописанной процедуры, если все кандидаты на $(r+1)$ - ое поколение включаются в $(r+1)$ -ое поколение в качестве отдельных индивидуумов (один и тот же фрагмент может соответствовать нескольким индивидуумам). Точнее, пусть нулевое поколение состоит из одного индивидуума (фрагмента $U_0 = s_0 \quad s_0$). Каждый индивидуум r-того поколения (фрагмент U) дает случайное число индивидуумов $(r+1)$-го поколения по следующему вероятностному закону: каждый из k фрагментов, следующих за U, входит в непосредственное потомство фрагмента U с вероятностью $1/k$ (если данный фрагмент встречается в качестве индивидуума повторно, потомство определяется заново, независимо от предыдущего). Таким образом, вероятность того, что непосредственное потомство индивидуума состоит из i индивидуумов

$$p_i \quad \binom{k}{i}\left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k-}$$

$$(i = 0, 1, \quad k)$$

Поэтому производящая функция

$$f(s) \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i \quad \left(1 - \frac{s-1}{k}\right)^k$$

Математическое ожидание числа непосредственных потомков индивидуума равно I, поэтому процесс конечен с вероятностью I (см. [4]). Обозначим через χ случайную величину – общее число индивидуумов во всех поколениях. Вычислим теперь

$$P_j = P\{\chi = j\}$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots).$$

Согласно [4], производящая функция

$$F(s) = \sum_{j=1}^{\infty} P_j s^j \tag{3.7}$$

удовлетворяет уравнению

$$F(s) = s f(F(s)).$$

Обозначим $F(s) = u$. Тогда

$$s = \frac{u}{f(u)}$$

Учитывая (3.7), по формуле обращения Лагранжа (см. напр. [9]) получаем

$$P_j = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}}\left(f(u)\right)^j\right\}\Big|_{u=0}$$

$$= \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^{j-1}}{du^{j-1}}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{u}{k}\right)^{kj}\right\}\Big|_{u=0}$$

$$= \frac{1}{j!}\;\frac{kj(kj-1)\quad(kj-j+2)}{k^{j-1}}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{kj-j+1}$$

$$= \frac{(kj)!\,(k-1)^{kj-j+1}}{j!\,(j(k-1))!\,(kj-j+1)\,k^{kj}}$$

Используя формулу Стирлинга, получаем оценку

$$P_j < \frac{\sqrt{k}\,e^{\frac{1}{12kj}}}{j\sqrt{2\pi j(k-1)}} < 0,52\,j^{-3/2}$$

равномерную по $k = 2, 3,$

Теперь мы можем оценить и

$$P\{\chi \geq l\} < 0,52\sum_{i=l}^{\infty} i^{-3/2} <$$

$$< 0,52\int_{l-1}^{\infty} x^{-3/2}\,dx \qquad \frac{1,04}{\sqrt{l-1}} <$$

$$< \frac{1,48}{\sqrt{l}} \qquad (l \geq 2) \tag{3.8}$$

Рассмотрим теперь связь между случайными величинами ξ и χ. Пусть дана реализация ветвящегося процесса $\mathfrak{B}$, для которой $\chi = \chi_0$ (χ всегда конечна). Тогда, просматривая подряд индивидуумы всех поколений, начиная с первого, и вычеркивая каждый повторяющийся фрагмент (и всю ветвь, порожденную им), мы получаем некоторую реализацию процедуры

$\mathcal{A}$. Соответствующее значение $\xi_0 \le \chi_0$. С другой стороны, легко видеть что сумма вероятностей бесконечного числа реализаций процесса $\mathcal{B}$, соответствующих данной реализации процедуры $\mathcal{A}$, равна вероятности этой реализации (заметим, что здесь сравниваются значения из двух различных пространств вероятностей). Отсюда получаем, что

$$P\{\xi \ge l\} \le P\{\chi \ge l\}$$

при любом $l \ge 1$ (равенство достигается только при $l = 1$ $P\{\xi \ge 1\}$ $P\{\chi \ge 1\} = 1$)

Учитывая (3.8), получаем

$$P\{\xi \ge l\} < \frac{1,48}{\sqrt{l}} \qquad (l \ge 2)$$

Рассмотрим случайное число η - число пар фрагментов (U, U') таких, что U слева S_0 - достижим, U' справа S_0 - достижим и $U \to U'$. Если в структуре $\xi = \xi_0$ и $\xi' = \xi_0'$, то число пар (U, U') ни в коем случае не превышает $\xi_0 \xi_0'$. Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\eta \ge p\} &< P\{\xi\xi' \ge p\} < \\ &< P\{(\xi \ge \sqrt{p}) \vee (\xi' \ge \sqrt{p})\} < \\ &< P\{\xi \ge \sqrt{p}\} + P\{\xi' \ge \sqrt{p}\} = \\ &= 2P\{\xi \ge \sqrt{p}\} < \\ &< 3p^{-1/4}. \end{aligned}$$

Обозначим случайную величину - число различных примитивных глобальных конфигураций (ПГК), которые не являются КГРС в случайной k - структуре через $\xi^{(k)}$. Очевидно, всегда $\xi^{(k)} \leq k-1$.

Если для фиксированной k - структуры $\eta = \eta_0 \leq k$, то структура заведомо имеет не более η_0 различных ПГК, не являющихся КГРС, так как каждая из η_0 пар (U, U') может дать только одну ПГК c, для которой $c(0)$ $\sigma(U, U')$, но разные пары могут дать одну и ту же c.

Пусть $\varphi(k)$ - произвольно медленно возрастающая функция натурального аргумента такая, что

$$\varphi(k) \to \infty \text{ при } k \to \infty \quad \text{и} \quad \varphi(k) < k \tag{3.9}$$

Из предыдущего следует

$$P\{\xi^{(k)} \geq \varphi(k)\} < P\{\eta \leq \varphi(k)\} < 3(\varphi(k))^{-1/4}$$

т.е. вероятность того, что случайная k - структура размаха m имеет не менее $\varphi(k)$ примитивных глобальных конфигураций, не являющихся глобальными райскими садами,

$$P\{\xi^{(k)} \geq \varphi(k)\} < 3(\varphi(k))^{-1/4} \tag{3.10}$$

Выражаясь неточно, в почти всех k - структурах почти все ПГК являются КГРС. Тем самым Теорема 3.I доказана.

Из (3.10) легко получить оценки некоторых других вероятностей. Пусть фиксированы k и i, $1 \leq i \leq k-1$. Оценим вероятность q_k того, что ПГК $c^{(i)}$ $(c^{(i)}(0) = s_i)$ не является КГРС. Из соображений симметрии ясно, что эта вероятность не зависит от выбора i. Число тех k - структур, в которых $c^{(i)}$ не является КГРС, равно $q_k M_k$, где $M_k = k^{k^m-1}$. Разобъем все k - структуры на две группы: к первой отнесем те, которые имеют более $\varphi(k)$ различных $c^{(i)}$, не являющихся КГРС (таких структур не более $3(\varphi(k))^{-1/4} M_k$), ко второй - остальные. Будем пересчитывать все k - структуры, считая каждую из них столько раз, сколько различных $c^{(i)}$ в ней не являются КГРС. Тогда общее число структур меньше чем $3(k-1)(\varphi(k))^{-1/4} M_k + \varphi(k) M_k$. С другой стороны, это число равно $(k-1) q_k M_k$. Поэтому

$$(k-1) q_k M_k < 3(k-1)(\varphi(k))^{-1/4} M_k + \varphi(k) M_k$$

Отсюда

$$q_k < 3(\varphi(k))^{-1/4} + \frac{\varphi(k)}{k-1} <$$

$$< 3(\varphi(k))^{-1/4} + \frac{2\varphi(k)}{k}$$

Подставив $\varphi(k) \quad k^{1/5}$, получаем

$$q_k < 5 k^{-1/5} \qquad (3.11)$$

Подставляя в (3.10) $\varphi(k) = k-1$, получаем оценку вероятности того, что в случайной k - структуре не имеется примитивных КГРС:

$$P\{\gamma^{(k)} \geq k-1\} < 3(k-1)^{-1/4} \qquad (3.12)$$

Оценки (3.10) - (3.12) очень грубы. Так, правая часть (3.12) становится меньше единицы только при $k > 82$. На самом деле оцениваемые вероятности стремятся к нулю быстро.

В следующей таблице представлены эмпирические распределения k - структур размаха 3 по числам s различных примитивных КГРС, полученные с помощью ЭВМ. Для каждого k $(2 \leq k \leq 8)$ было исследовано 1000 случайных k - структур.

$k \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	522	478						
3	250	322	428					
4	154	170	244	432				
5	124	100	144	192	440			
6	71	58	85	124	188	474		
7	63	42	52	74	124	188	457	
8	60	40	41	54	83	97	186	437

§ 4. О структурах, в которых все конфигурации самовоспроизводятся

Рассмотрим самовоспроизведение по Муру [5]. Пусть дана конфигурация $c \in C_F$ и конечный блок X, $\operatorname{sup} c \subseteq X$. Будем говорить, что конфигурация $(c)_X$ самовоспроизводится, если для любого натурального r существует такой момент t_r, что конфигурация $\tau^{t_r}(c)$ содержит не менее r непересекающихся копий конфигурации $(c)_X$.

Пусть в n-мерной сотообразной структуре $\mathfrak{A}$ конфигурация $(c)_X$ самовоспроизводится. Легко видеть, что тогда существует такая постоянная A, что число копий конфигурации $(c)_X$ в момент времени t

$$N_t < A t^n \tag{4.1}$$

Рассмотрим n-мерную сотообразную структуру с произвольным индексом соседства и k состояниями $0, 1, \ldots, k-1$. Пусть функция перехода

$$\sigma(x_1, \quad x_m) = [x_1 + x_2 + \ldots + x_m]_{\mathrm{mod}\, k} \tag{4.2}$$

В [13] доказано, что в такой структуре самовоспроизводится любая конфигурация любого конечного блока (k - простое число).

Кроме автора настоящей работы структуры с функцией перехода (4.2) независимо введены и другими авторами. Так, Аморозо и Купер [1] рассматривают частный случай одно- и двумерных структур, а Острэнд [7] показывает, как результаты [1] обобщать на n-мерные структуры. В обоих этих работах рассматривается только простейший индекс соседства, состоящий (в n-мерном случае) из $n+1$ вектора. Кроме того, в [2] упоминаются работы Э. Фредкина и Т. Винограда, посвященные тем же структурам (4.2). Эти работы, повидимому, нигде не опубликованы, так как ни в [1], ни в [7] на них нет ссылок.

В этом параграфе покажем, как результаты [13] переносятся на случай произвольного натурального k, а также докажем, что в простейшем случае структур (4.2) достигается максимальная скорость самовоспроизведения (т.е. оценка (4.1) не улучшаема).

Для случая произвольного k доказательство самовоспроизведения в (4.2) основывается на

__Лемме 4.1.__ Пусть k - произвольное натуральное число, $k = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ - различные простые числа, $\alpha_i \geq 1$, $s \geq 1$. Обозначим

$$M = \min_{1 \leq i \leq s} p_i^{\alpha_i} \tag{4.3}$$

Тогда при любых $l \geq 1$, $m \geq 2$ и любых $r_1, \ldots, r_m$ таких, что

$$1 \leq r_i \leq M^{l-1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m),$$

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_m = k^l$$

справедливо равенство

$$\left[\frac{k^l!}{r_1! \, r_2! \ldots r_m!} \right]_{\bmod k} = 0$$

Доказательство Леммы 4.1 аналогично доказательству леммы из [13].

Рассмотрим теперь шаблон соседства $\mathcal{J} = (\vec{\mathcal{J}}_1, \ldots, \vec{\mathcal{J}}_m)$. Вектор $\vec{\mathcal{J}}_i \in \mathcal{J}$ будем называть крайним вектором множества $\mathcal{J}$, если он не представим в виде выпуклой комбинации остальных векторов множества $\mathcal{J}$. Очевидно, число различных крайних векторов множества $\mathcal{J}$ $m_1 \geq 2$. Далее, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого крайнего вектора $\vec{\mathcal{J}}_i$ и для любой выпуклой комбинации $\vec{\mathcal{J}}'$ остальных векторов из $\mathcal{J}$ справедливо неравенство

$$|\vec{\jmath}_i \quad \vec{\jmath}'| \geq \varepsilon \qquad (4.4)$$

Пусть $d(A) = \max\limits_{\vec{\jmath}_1, \vec{\jmath}_2 \in A} |\vec{\jmath}_1 - \vec{\jmath}_2|$ – диаметр блока A

Пусть $(c)_A$ произвольная конфигурация, $\sup c \subseteq A$.

Пусть l – произвольное натуральное число такое, что

$$M^{l-} > \frac{d(A)}{\varepsilon}$$

Можно доказать, что тогда в структуре (4.2) для любого крайнего вектора $\vec{\jmath}_i$ и для любой ячейки $\vec{\jmath} \in A$ выполняется равенство

$$\tau^{\kappa^l}(c)(\vec{\jmath} \quad \kappa^l \vec{\jmath}_i) \quad c(\vec{\jmath}), \qquad (4.5)$$

т.е. $\tau^{\kappa^l}(c)$ содержит не менее m_1 копий конфигурации $(c)_A$. Из (4.5) уже легко следует самовоспроизведение любой конфигурации.

Переходим теперь к вопросу о скорости самовоспроизведения. Оценку (4.I) можно переписать в форме

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{N_t}{t^n} < \infty$$

Будем говорить, что достигается максимальная скорость самовоспроизведения, если

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{N_t}{t^n} > 0. \qquad (4.6)$$

Использование моментов времени $t_1 = \kappa^{l_1} + \ldots + \kappa^{l_t}$ из [I3] не дает доказательства неравенства (4.6). Однако для некоторого частного случая неравенство (4.6) удается доказать.

<u>Теорема 4.2.</u> Пусть дана одномерная κ-структура $\mathfrak{A}$ (κ – простое число) с индексом соседства $\vec{\jmath} = (-1, 0, 1)$ и функцией перехода (4.2):

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + x_2 + x_3]_{\mathrm{mod}\,\kappa} \qquad (4.7)$$

Тогда максимальная (линейная) скорость самовоспроизведения достигается при любой исходной конфигурации $(c)_A$.

Доказательство. Сначала сведем рассмотрение произвольной конфигурации c к рассмотрению примитивной конфигурации $c^{(0)}$:

$$c^{(0)}(0) = 1, \; c^{(0)}(i) = 0 \quad при \quad i \neq 0.$$

Из (4.7) легко получаем, что $\tau^t(c)(i)$ имеет вид

$$\tau^t(c)(i) = \Big[\sum_{j=-t}^{t} \gamma_t(j)\, c(i+j)\Big]_{mod\,k}, \tag{4.8}$$

где $\gamma_t(j)$ – некоторые коэффициенты, независящие от конфигурации c и сдвига i. Докажем теперь, что

$$\gamma_t(j) = \tau^t(c^{(0)})(j). \tag{4.9}$$

Действительно, подставляя в (4.8) вместо c конфигурацию $c^{(j)}$: $c^{(j)}(j) = 1$,

$$c^{(j)}(i) = 0 \quad при \quad i \neq j,$$

получаем $\tau^t(c^{(j)})(0) = \gamma_t(j)$. С другой стороны, $\tau^t(c^{(j)})$ получается сдвигом $\tau^t(c^{(0)})$ на j, т.е. $\tau^t(c^{(j)})(0) = \tau^t(c^{(0)})(-j)$. Поэтому из симметричности конфигурации $c^{(0)}$ и закона перехода (4.7) получаем требуемое равенство (4.9). Итак, нами доказано, что для любой конфигурации c, для любого t, $t \geq 0$, и для любой ячейки i

$$\tau^t(c)(i) = \Big[\sum_{j=-t}^{t} \tau^t(c^{(0)})(j)\; c(i+j)\Big]_{mod\,k} \tag{4.10}$$

Отметим, что формула (4.10) легко обобщается и для случая произвольной n – мерной структуры (4.2).

Пусть c – произвольная конфигурация, $c \in C_F$, и пусть блок $A \supseteq sup\, c$. Не ограничивая общности, можем допустить, что

$$A = \{0, 1, \quad l\},$$

если только диаметр $d(sup\, c) \leq l$. Пусть t и S выбраны так, что

$$\tau^t(c^{(0)})(i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad = s, \\ 0, & \text{если } i = s\pm 1, s\pm 2, \ \ , s\pm t \end{cases} \tag{4.II}$$

Тогда из (4.I0) следует, что для всех $i \in A$

$$\tau^t(c)(i-s) \quad c(i) \tag{4.I2}$$

Таким образом, конфигурация $\tau^t(c)$ содержит копию конфигурации $(c)_A$ на блоке $A - s = \{-s, \ s+1 \qquad s+1\}$ (блоки копий, соответствующих различным s, не пересекаются).

Обозначим через M_t число различных s таких, что выполняется (4.II). Тогда доказательство неравенства (4.6) сводится к доказательству того, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{M_t}{t} > 0 \tag{4.I3}$$

При доказательстве неравенства (4.I3) будем использовать следующее свойство структуры (4.7) (k - простое число) :

при всех t, $t \geq 0$, и всех j

$$\tau^{kt}(c^{(0)})(j) = \begin{cases} \tau^t(i), & \text{если } j = ki \\ 0, & \text{если } j \text{ не делится на } k, \end{cases} \tag{4.I4}$$

(т.е., конфигурация $\tau^{kt}(c^{(0)})$ получается "разрежением" конфигурации $\tau^t(c^{(0)})$).

Докажем теперь соотношение (4.I4). Из результатов [I3] следует, что

$$\tau^k(c^{(0)})(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = 0, \pm k, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{4.I5}$$

Это доказывает (4.I4) при $t = 1$. Применяя (4.I0), из (4.I5) получаем

$$\tau^{k}(c)(j)=[c(j-k)+c(j)+c(j+k)]_{mod\,k} \qquad (4.16)$$

Заметим, что формула (4.16) является "разреженным" вариантом функции перехода (4.7). Поэтому, используя (4.16), формула (4.14) легко доказывается индукцией по t.

Формула (4.14) позволяет свести доказательство неравенства (4.13) (а тем самым и Теоремы 4.2) к доказательству того, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{L_t}{t}>0 \qquad (4.17)$$

где L_t – число ячеек, имеющих состояние 1 в конфигурации $\tau^{t}(c^{(0)})$. Действительно, выберем t так, чтобы $k^t>\ell$ (напомним, что $A=\{0,1,\ldots \ell\}$. Тогда, применяя (4.14) t раз, получаем

$$M_{k^t t}=L_t \quad \text{т.е.} \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{M_t}{t}\geqslant\frac{1}{k^t}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ \frac{L_t}{t}.$$

Теперь переходим к доказательству неравенства (4.17). Из результатов [13] следует, что при произвольном $s\geqslant 0$

$$\tau^{k^s}(c^{(0)})(j)=\begin{cases}1, & \text{если } j=0,\pm k^s,\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

т.е.

$$\tau^{k^s}(c^{(0)})=\leftarrow 01\underbrace{0\ldots0}_{k^s-1}1\underbrace{0\ldots0}_{k^s-1}10\rightarrow \qquad (4.18)$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $[k^s]_{mod\,3}=0,1,2$. Легко видеть, что предшественником конфигурации (4.18) может служить конфигурация

$$\leftarrow 0\,1_{k-1}\,0\,1_{k-1}0\ldots 1_{k-1}0_{k-1}1\ldots 0_{k-1}1\,0_{k-1}1\,0\rightarrow$$

в первом случае, конфигурация

$$\leftarrow 0\,1^{k-1}0\,1^{k-1}0 \ldots 1^{k-1}0\,1\,0^{k-1}1 \quad 0^{k-1}1\,0^{k-1}1\,0 \rightarrow$$

во втором случае и конфигурация

$$\leftarrow 0\,1^{k-1}0\,1^{k-1}0 \quad 1^{k-1}1 \quad 0^{k-1}1\,0^{k-1}1\,0 \rightarrow$$

в третьем случае.

В структуре (4.7) все конфигурации самовоспроизводящиеся, поэтому не существует PU, а тем самым не существует и ИГВСК. Значит, $\tau^{k^s-1}(c^{(0)})$ совпадает с той из рассмотренных выше трех конфигураций, которая соответствует значению $[k^s]_{mod\,3}$. Таким образом, число состояний 1 в конфигурации $\tau^{k^s-1}(c^{(0)})$ не менее $2/3\,k^s$. Поэтому, рассматривая подпоследовательность $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_s = k^s-1$, получаем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{l_t}{t} \geq \frac{2}{3}$$

Неравенство (4.17) доказано. Тем самым закончено доказательство Теоремы 4.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Amoroso S., Cooper G. Tessellation Structures for Reproduction of Arbitrary Patterns. J. Comput. System Sci., 1971, 5, № 5, 455–464.
2. Banks E.R. Universality in Cellular Automata. "IEEE Conf. Record 11 th Annual Symp. Switch. and Automata Theory", New York, 1970, 194–215.
3. Burks A.W. On Backwards-Deterministic, Erasable, and Garden-of-Eden Automata. The University of Michigan, Technical Report 1971.
4. Harris T.E. The Theory of Branching Processes. Springer Verlag, 1963. (Русский перевод: Т. Харрис. Теория ветвящихся случайных процессов, М., "Мир", 1966).
5. Moore E.F. Machine Models of Self-Reproduction. Proc. Symp. Appl. Math., 1962, 14, 17–33. (Русский перевод в сб. "Математические проблемы в биологии", М., "Мир", 1966, 36–62).
6. Myhill J. A Converse to Moore's Garden-of-Eden Theorem. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, 685–686.
7. Ostrand J. Pattern Reproduction in Tessellation Automata of Arbitrary Dimension. J. Comput. System Sci., 1971, 5, № 6, 623–628.
8. Wang Hao. Games, Logic and Computers. Sci. American, 1965, 213, № 5, 98–106. (Русский перевод: Кибернетический сборник, Новая серия, 1968, 5, 195–207).
9. Whittaker E.T., Watson G.N. A Course of Modern Analysis, 1, Cambridge, 1927. (Русский перевод: Уиттекер Э.Т. и Ватсон Дж.Н., Курс современного анализа, I, М., Физматгиз, 1962).

10. Yamada H., Amoroso S. A Completeness Problem for Pattern Generation in Tessellation Automata. J. Comput. System Sci., 1970, 4, 137-176.

11. Аладьев В.З. К теории однородных структур. Таллин, АН ЭССР, 1972.

12. Ивауниенко Э.А. Об информационных свойствах сотообразных структур. Пробл. передачи информ., 1970, 6, № 4, 49-55.

13. Ивауниенко Э.А. Пример сотообразных структур, в которых все конфигурации самовоспроизводящиеся. Латв. матем. ежегодник, 1971, 9, 73-78.

14. Ивауниенко Э.А. Некоторые свойства сотообразных структур. Логический синтез в дискретных однородных средах. Второе Всесоюзное совещание, декабрь 1971 г. (Тезисы докладов). М., 1971, 60-61.

О ДВУХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Б.С.Польский

В работе [5] были доказаны существование и единственность решения задачи об определении функции u, удовлетворяющей уравнению Фурье во всем пространстве, за исключением некоторой замкнутой поверхности S^*, где она равна 0 на части $S \subset S^*$, а на $S' = S^* \setminus \bar{S}$ выполняется условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \sigma$$

и u равна 0 при $t = 0$

В настоящей работе строится функция Грина для этой задачи. После этого задача

$$\begin{aligned} &\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad P \in \mathcal{D}, \; 0 < t \leq T, \\ &u(P, 0) = 0, \quad P \in \mathcal{D}, \\ &u(P, t) = \varphi(P, t), \quad P \in S, \; 0 < t \leq T; \\ &\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \psi(P, t), \quad P \in S', \; 0 < t \leq T, \end{aligned} \tag{B}$$

где $\mathcal{D}$ - область, ограниченная S^*, сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, которое решается методом последовательных приближений. Задача (B) другими методами решалась в работах [1-4].

Настоящая работа является продолжением работы [5], в которой доказаны существование и единственность решения следующей краевой задачи (задачи (A)): пусть в трехмерном евклидовом пространстве E_3 задана поверхность Ляпунова S^*, состоящая из двух частей S и S' с общей границей F. Требуется найти функцию u непрерывную в $E_3 \times [0,T]$, равномерно стремящуюся к 0 на бесконечности и удовлетворяющую следующим условиям:

$$Lu = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0, \quad P \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}', \quad t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(P,0) = 0, \quad P \in E_3, \tag{2}$$

$$u(P,t) = 0, \quad P \in S, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \sigma(P,t), \quad P \in S', \quad t \in (0,T], \tag{4}$$

где σ - непрерывная, ограниченная функция; $\mathcal{D}$ - конечная область ограниченная S^*, $\mathcal{D}' = E_3 \setminus \bar{\mathcal{D}}$.

Если потребовать дополнительно, что функция, дающая локальное представление поверхности S^* внутри сферы Ляпунова, была дважды непрерывно дифференцируема, то, как было показано в [5], решение задачи (A) представимо в виде теплового потенциала простого слоя. В этой работе функцию Грина задачи (A) строим, используя результаты, полученные в [5], а затем доказываем существование и единственность решения следующей краевой задачи (задачи (B)):

$$Lu = 0, \quad P \in \mathcal{D}, \quad t \in (0,T] \tag{1'}$$

$$u(P,0) = 0, \quad P \in \mathcal{D}, \tag{2'}$$

$$u(P,t) = \varphi(P,t), \quad P \in S, \quad t \in [0,T]; \tag{3'}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_i = \psi(P,t), \quad P \in S', \quad t \in (0,T], \tag{4'}$$

где $\mathcal{D}$ - конечная область, ограниченная S^*.

§I. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ (А)

Пусть

$$\Delta_0 = E_3 \setminus \bar{S}\,, \tag{5}$$

Рассмотрим функцию

$$G(p,t,q,\tau) = E(p,t,q,\tau) - g(p,t,q,\tau); \tag{6}$$

$$p \in \bar{\Delta}_0,\; q \in \Delta_0,\; 0 \le \tau < t \le T,$$

где

$$E(p,t,q,\tau) = \frac{1}{8\pi^{3/2}}(t-\tau)^{-3/2} e^{-\frac{r_{pq}^2}{4(t-\tau)}} \tag{7}$$

– фундаментальное решение уравнения Фурье, а $g(p,t,q,\tau)$ удовлетворяет следующим условиям.

I. Для любых фиксированных $q \in \Delta_0$ и $\tau\ (0 \le \tau < T)$, $g(p,t,q,\tau)$ как функция от p и t, непрерывна в $E_3 \times [\tau,T]$ и удовлетворяет уравнению

$$Lg = 0,\; p \in \Delta_0,\; \tau < t \le T, \tag{8}$$

2. $$g(p,\tau,q,\tau) = 0,\quad p \in \bar{\Delta}_0,\; q \in \Delta_0; \tag{9}$$

3. $$g(p,t,q,\tau) = E(p,t,q,\tau),\; p \in \bar{S},\; q \in \Delta_0; \tag{10}$$
$$0 \le \tau \le t \le T;$$

Функцию $G(p,t,q,\tau)$ назовем функцией Грина задачи (А).

ТЕОРЕМА I. Существует единственная функция Грина задачи (А).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать существование и единственность функции $g(p,t,q,\tau)$. Существование функции $g(p,t,q,\tau)$ вытекает из того, что метод Шварца, с помощью которого в [5] строилось решение задачи (А), позволяет решить следующую задачу: определить функцию $v(p,t)$, непрерывную в $E_3 \times [0,T]$, равномерно стремящуюся к 0 на бесконечности и удовлетворяющую условиям:

$$Lv = 0,\quad p \in \Delta_0,\; t \in (0,T], \tag{II}$$

$$v(P,t)=\varphi(P,t),\quad P\in\bar{S},\quad t\in[0,T], \tag{I2}$$

$$v(P,0)=0,\quad P\in E_3, \tag{I3}$$

$$\varphi(P,0)=0,\quad P\in\bar{S} \tag{I4}$$

φ - заданная непрерывная функция.

Действительно, достаточно построить функцию $\psi(P,t)$ непрерывную в $E_3\times[0,T]$ и равную $\varphi(P,t)$ на $\bar{S}$, а затем при построении альтернирующей последовательности [5] в качестве первого члена последовательности взять функцию $\psi(P,t)$.

В силу этого замечания, для построения функции $g(P,t,q,\tau)$ достаточно построить функцию $\psi(P,t,q,\tau)$ со следующими свойствами.

I°. При фиксированной точке $(q,\tau)\in\Delta_0\times[0,T)$ $\psi(P,t,q,\tau)$ непрерывная на множестве $E_3\times[\tau,T]$ функция.

2°. $\psi(P,t,q,\tau)=E(P,t,q,\tau),\ P\in\bar{S},\ t\in[\tau,T],$

((q,τ) фиксированная точка).

Такую функцию можно построить следующим образом. Положим

$$\rho=\inf_{P\in\bar{S}} r_{Pq}, \tag{I5}$$

Так как $\rho>0$, то

$$\bar{S}\cap K_q^{\rho/2}=\emptyset, \tag{I6}$$

где $K_q^{\rho/2}$ - шар с центром в точке q радиуса $\rho/2$.

Функцию ψ вне $K_q^{\rho/2}$ положим равной $E(P,t,q,\tau)$, а внутри $K_q^{\rho/2}$ определим ее как решение первой краевой задачи с граничным условием $E(P,t,q,\tau)$ и начальным условием, равным 0. Очевидно, что так построенная функция удовлетворяет сформулированным выше требованиям I° и 2°. Тем самым существование функции $g(P,t,q,\tau)$, а вместе с ней и $G(P,t,q,\tau)$ доказано.

Единственность функции Грина вытекает из принципа максимума,который легко переносится на случай незамкнутой поверхности. Таким образом,теорема I доказана.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства функции Грина,к доказательству которых,следуя идеям А.Н.Тихонова [6] ,мы сейчас переходим.Прежде всего отметим,что из принципа максимума следует справедливость следующих неравенств:

$$0 \leq G(P,t,q,\tau) \leq E(P,t,q,\tau) \tag{17}$$

$$0 \leq g(P,t,q,\tau) \leq E(P,t,q,\tau), \quad P \in E_3, \; q \in \Delta_0, \; \tau < t \leq T, \tag{18}$$

ЛЕММА I. Пусть

$$\Pi(P',t,\tau) = \int_{\mathcal{D}^*} G(P,t,P',\tau)\,\Psi(P)\,d\omega_P\,; \tag{19}$$

$\mathcal{D}^*$ - произвольная ограниченная область из E_3 $\Psi(P)$ - непрерывная ограниченная функция.Тогда

$$\lim_{t\to\tau} \Pi(P',t,\tau) = \begin{cases} \Psi(P'), & \text{если } P' \in \mathcal{D}^*, \\ 0, & \text{если } P' \notin \bar{\mathcal{D}}^* \end{cases}$$

Доказательство проводится точно так же,как и аналогичного утверждения в [6] .

ТЕОРЕМА 2. Существуют производные функции $G(P,t,q,\tau)$ по переменным ξ,η,ζ $(q(\xi,\eta,\zeta))$ любого порядка и эти производные являются непрерывными функциями своих аргументов,если $q \notin S$ и $t>\tau$

Эта теорема доказывается дословным повторением теоремы, доказанной в [6,стр.17] .

Теорема I и 2 справедлива для любой ляпуновской поверхности S .Далее нам придется наложить более сильные ограничения на поверхность S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Скажем,что поверхность Ляпунова S (открытая или замкнутая) обладает свойством (Е),если внутри каждой сферы Ляпунова функция,дающая локальное представление поверхности S , дважды непрерывно дифференцируема.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть поверхность S^* обладает свойством (E), и пусть (q,τ) - фиксированная точка из $\Delta_0 \times [0,T)$. Тогда из результатов, доказанных в [7] (теорема I2, стр. 99), следует, что функции

$$\left(\frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial n_P}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial n_P}\right)_i$$

существуют и непрерывны во всякой точке $P \in \bar{S} \setminus F$, $\tau < t \leq T$; (индексом e, i как обычно обозначают предельные значения нормальных производных из областей $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть b - расстояние от точки P до границы поверхности S, (q,τ) - фиксированная точка из $\Delta_0 \times [0,T)$. Тогда, как было показано в [5] для решения задачи (A), можно показать, что произведение

$$b \left| \frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial l_P} \right|$$

равномерно относительно (P,t) стремится к 0 вместе с b. l - произвольное направление.

ТЕОРЕМА 3. Пусть S обладает свойством (E).

$$P_1 \in \Delta_0, \quad P_2 \in \Delta_0,$$

Тогда

$$G(P_1,t,P_2,\tau) = G(P_2,t,P_1,\tau) \qquad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достроим поверхность S до замкнутой поверхности $\tilde{S} = \bar{S} \cup S_1$ так, чтобы $\tilde{S}$ обладала свойством (E) и чтобы точки P_1 и P_2 лежали внутри конечной области $\mathcal{D}$, ограниченной поверхностью $\tilde{S}$. Пусть Δ_ρ -множество точек из Δ_0 таких, что их расстояние до границы F поверхности S больше, чем ρ. Возьмем ρ так, чтобы

$$0 < \rho < \min\left[\inf r_{P_1 q}, \inf r_{P_2 q}\right], \quad q \in F, \qquad (21)$$

Тогда

$$\Delta_\rho = \mathcal{D}_\rho \cup \mathcal{D}'_\rho$$

$$\mathcal{D}_\rho \subset \mathcal{D}, \quad \mathcal{D}'_\rho \subset (E_3 \setminus \bar{\mathcal{D}}) \tag{22}$$

Граница области $\mathcal{D}_\rho$ есть

$$S_\rho \cup S_1^\rho \cup \Sigma_1^\rho \ ,$$

S^ρ - часть поверхности S , S_1^ρ - часть поверхности S_1 , а Σ_1^ρ - связная поверхность,лежащая в $\bar{\mathcal{D}}$.Граница области $\mathcal{D}'_\rho$ есть

$$S^\rho \cup S_1^\rho \cup \Sigma_2^\rho$$

Σ_2^ρ - связная поверхность,лежащая в $E_3 \setminus \mathcal{D}$,причем

$$\Sigma_1^\rho \cup \Sigma_2^\rho$$

- замкнутая поверхность.

Нетрудно видеть,что $G(P,t,q,\tau)$ зависит лишь от трех переменных P , q и $\alpha = t-\tau$

Далее,справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\Big[G(P,P_1,\alpha)\,G(P,P_2,\alpha_0-\alpha)\Big] = G(P,P_2,\alpha_0-\alpha)\times$$

$$\Delta G(P,P_1,\alpha) - G(P,P_1,\alpha)\,\Delta G(P,P_2,\alpha_0-\alpha) \ , \tag{23}$$

$$P \in \Delta_0 \, , \quad 0 < \alpha < \alpha_0 \, ,$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\alpha_0-\varepsilon} d\alpha \int\limits_{\mathcal{D}_\rho} \frac{\partial}{\partial\alpha}\big[G(P,P_1,\alpha)\,G(P,P_2,\alpha_0-\alpha)\big]\,d\omega_P = \int\limits_{\varepsilon}^{\alpha_0-\varepsilon} d\alpha \iint\limits_{S^\rho\cup S_1^\rho\cup\Sigma_1^\rho} \Big[G(P,P_2,$$

(24)

$$\alpha_0-\alpha)\left(\frac{\partial G(P,P_1,\alpha)}{\partial h_P}\right)_i - G(P,P_1,\alpha)\times\left(\frac{\partial G(P,P_2,\alpha_0-\alpha)}{\partial h_P}\right)_i d\sigma_P ,$$

$$P_1, P_2 \in \Delta_0,$$

К интегралу по объему в правой части (23) применена формула Грина (нормаль внешняя). В силу замечания I, производные функции Грина в точках S^ρ существуют и непрерывны (P_1 и P_2 фиксированы). Меняя в левой части (24) порядок интегрирования и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая, что G на S^ρ равна 0, в силу леммы I, получим соотношение:

$$G(P_2, P_1, \alpha_0) - G(P_1, P_2, \alpha_0) = \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_{S_1^\rho} \Big\{ G(P, P_2, \alpha_0 - \alpha) \times \\ \times \left(\frac{\partial G(P, P_1, \alpha)}{\partial h_P} \right)_i - G(P, P_1, \alpha) \left(\frac{\partial G(P, P_2, \alpha_0 - \alpha)}{\partial h_P} \right)_i d\sigma_P + \\ + \int_0^{\alpha} d\alpha \int_{\Sigma_1^\rho} \{ \dots \} d\sigma_P, \tag{25}$$

Интегрируя по области $\mathcal{D}'_\rho$ и применяя такие же преобразования, получим

$$0 = -\int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_{S_1^\rho} \Big\{ G(P, P_2, \alpha_0 - \alpha) \left(\frac{\partial G(P, P_1, \alpha)}{\partial h_P} \right)_e - G(P, P_1, \alpha) \times \\ \times \left(\frac{\partial G(P, P_2, \alpha_0 - \alpha)}{\partial h_P} \right)_e \Big\} d\sigma_P - \int_0^{\alpha_0} d\sigma \int_{\Sigma_2^\rho} \{ \dots \} d\sigma_P, \tag{26}$$

(Нормаль напрвлена внутрь области $\mathcal{D}'_\rho$). Так как в точках S_1^ρ

$$\left(\frac{\partial G(P, t, q, \tau)}{\partial h_P} \right)_e = \left(\frac{\partial G(P, t, q, \tau)}{\partial h_P} \right)_i \tag{27}$$

то, складывая равенства (25) и (26) и переходя к пределу при $\rho \to 0$ в силу замечания 2 получим

$$G(P_2, P_1, \alpha_0) = G(P_1, P_2, \alpha_0) \qquad (28)$$

СЛЕДСТВИЕ I. Из теоремы 2 и 3 следует, что функция $G(P,t,q,\tau)$ удовлетворяет уравнению Фурье по переменным q и t и что ее производные по x, y, z $(P(x,y,z))$ являются непрерывными функциями для всех $P \in \Delta_0$, $q \in \Delta_0$ и $t > \tau$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Из замечания I и следствия I получаем, что функции

$$\left(\frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial n_P}\right)_e, \quad \left(\frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial n_P}\right)_i$$

непрерывны для всех $P \in \bar{S} \setminus F$, $q \in \Delta_0$, $\tau \leq t \leq T$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть S^* обладает свойством (E). Пусть, далее, (A, τ) - фиксированная точка из $\Delta_0 \times [0,T)$. Тогда для функции $g(B,t,A,\tau)$, определенной соотношением (6), справедливо представление

$$g(B,t,A,\tau) = \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega(q,\lambda,A,\tau) E(B,t,q,\lambda) d\sigma_q, \qquad (29)$$

$$B \in E_3, \quad \tau \leq t \leq T,$$

Здесь

$$\omega(q,\lambda,A,\tau) = \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_e - \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i, \qquad (30)$$

$$q \in S, \quad \tau \leq \lambda \leq t,$$

(нормаль направлена внутрь области $\mathcal{D}$),

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ_ρ, $\mathcal{D}_\rho$, $\mathcal{D}'_\rho$, S^ρ, S_1^ρ, Σ_1^ρ, Σ_2^ρ те же, что и в теореме 3 (S_1^ρ -часть поверхности S'). Считаем также, что

$$\rho < \inf r_{Aq}, \quad q \in F,$$

Применяя формулу Грина к функциям $g(q,\lambda,A,\tau)$ и $E(B,t,q,\lambda)$ в областях $\mathcal{D}_\rho$ и $\mathcal{D}'_\rho$ и учитывая, что в точках S_1^ρ

$$\left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_e \qquad \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i \tag{31}$$

получаем соотношение

$$\begin{aligned} g(B,t,A,\tau) = &\int_\tau^t d\lambda \int_{S^\rho} \omega(q,\lambda,A,\tau)\, E(B,t,q,\lambda)\, d\sigma_q + \\ &+ \int_\tau^t d\lambda \int_{\Sigma_1^\rho} \Big[g(q,\lambda,A,\tau) \frac{\partial E(B,t,q,\lambda)}{\partial n_q} - E(B,t,q,\lambda) \times \\ &\times \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i \Big] d\sigma_q + \int_\tau^t d\lambda \int_{\Sigma_2^\rho} \Big[E(B,t,q,\lambda) \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_e - \\ &- g(q,\lambda,A,\tau) \frac{\partial E(B,t,q,\lambda)}{\partial n_q} \Big] d\sigma_q , \end{aligned} \tag{32}$$

Переходя в (32) к пределу при $\rho \to 0$, в силу замечания 2 получим

$$g(B,t,A,\tau) = \lim_{\rho \to 0} \int_\tau^t d\lambda \int_{S^\rho} \omega(q,\lambda,A,\tau)\, E(B,t,q,\lambda)\, d\sigma_q , \tag{33}$$

Соотношение (33) еще не означает существования интеграла (29), так как предельный переход осуществляется по специально выбранной системе окрестностей. Однако, мы сейчас покажем, что $\omega \geq 0$ и, тем самым, из (33) будет следовать (29). Действительно, так как

$$0 \leq g(q,\lambda,A,\tau) \leq E(q,\lambda,A,\tau)$$

то

$$\left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i \le 0, \quad \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_e \ge 0, \tag{34}$$
$$q\in S, \ \lambda\in[\tau,T],$$

нормаль направлена внутрь области $\mathcal{D}$). Следовательно, $\omega \ge 0$ и теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть S^* обладает свойством (Е) и выпукла. Тогда справедливы соотношения:

$$\left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}\right)_i = -\frac{\omega(B,t,A,\tau)}{2} + \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega(q,\lambda,A,\tau)\frac{\partial E}{\partial n_B}d\sigma_q \tag{35}$$

$$\left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}\right)_e \quad \frac{\omega(B,t,A,\tau)}{2} + \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega(q,\lambda,A,\tau)\frac{\partial E}{\partial n_B}d\sigma_q \tag{36}$$

$$B\in \bar{S}\setminus F, \ A\in\Delta_0, \ \tau < t \le T;$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если продифференцировать (32) в точке $B\in\bar{S}\setminus F$ по нормали, направленной внутрь области $\mathcal{D}$ и перейти к пределу при $\rho\to 0$, то получим равенства (35) и (36). Требование выпуклости поверхности обеспечивает положительность подынтегральной функции в (35) и (36), что, в свою очередь, обеспечивает существование этих интегралов.

Сейчас мы переходим к получению оценок для функции $\omega(B,t,A,\tau)$.

ЛЕММА 2. Пусть S^* обладает свойством (Е) и выпукла. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left|\left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}\right)\right| \le C\frac{1}{r_{BA}(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{C_1 r_{BA}^2}{t-\tau}}, \tag{37}$$

$$C, C_1 = const > 0,$$

$$B \in \bar{S} \setminus F, \quad A \in \Delta_0, \quad 0 \le \tau < t \le T,$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \bar{S} \setminus F$. Введем в точке B локальную систему координат с осью z, направленной по нормали внутрь области $\mathcal{D}$. Построим в точке $B(0,0,0)$ касательную плоскость и будем рассматривать параллелепипед:

$$\Pi_a = \{-a < x, y < a, \ 0 < z < 2a\}$$

a – достаточно малое положительное число, значение которого мы уточним в дальнейшем. Считаем, что точка $A(x,y,z) \in \Delta_0$ и не принадлежит построенному параллелепипеду и, кроме того что a выбрано таким, что точки, принадлежащие S' также не принадлежат построенному параллелепипеду.

Пусть $u(q,t,A,\tau)$ $(q(\xi,\eta,\zeta))$ – решение следующей краевой задачи:

$$Lu = 0, \quad -a < \xi, \eta < a, \quad 0 < \zeta < 2a, \quad \tau < t \le T,$$

$$u(q,t,A,\tau) = \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 E(q,t,A,\tau)$$

$$q \in \pi = \{-a \le \xi, \eta \le a, \ \zeta = 0\}, \quad \tau < t \le T$$

$$u(q,t,A,\tau) = 0, \qquad q \in (\bar{\Pi}_a \setminus \Pi_a) \setminus \pi = \pi_1, \quad \tau \le t \le T, \tag{38}$$

$$u(q,\tau,A,\tau) = 0, \qquad q \in \Pi_a,$$

Решение задачи (38) выражается формулой:

$$u(M,t,A,\tau) = \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{\Pi} \left(1-\frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1-\frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 E(q,\lambda,A,\tau) \times$$

$$\times \frac{\partial G_1(M,t,q,\lambda)}{\partial n_q} d\xi d\eta , \tag{39}$$

где $G_1(M,t,q,\lambda)$ - функция Грина первой краевой задачи для параллелепипеда. Пусть $\tilde{S}$ -часть поверхности S, лежащая внутри Π_a. Тогда

$$g(q,t,A,\tau) = E(q,t,A,\tau), \ q \in \tilde{S}, \ \tau \le t \le T; \tag{40}$$

$$0 \le g(q,t,A,\tau) \le E(q,t,A,\tau), \ q \in \Pi_1, \ \tau \le t \le T, \tag{41}$$

$$g(q,\tau,A,\tau) = 0, \quad q \in E_3, \tag{42}$$

Далее, в силу принципа максимума, в точках, принадлежащих $\tilde{S}$,

$$0 \le u(q,t,A,\tau) \le E(q,t,A,\tau), \ q \in \tilde{S}, \ \tau \le t \le T; \tag{43}$$

Из (40)-(43), используя принцип максимума, получаем

$$g(q,t,A,\tau) \ge u(q,t,A,\tau) \tag{44}$$

для всех точек (q,t), принадлежащих области, ограниченной поверхностью $(\tilde{S} \cup \Pi_1) \times [\tau,T]$. Так как в точке $B(0,0,0)$

$$u(B,t,A,\tau) = E(B,t,A,\tau)$$

то из (44) и (45) получаем, что в точке B

$$\left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}\right)_i \ge \frac{\partial u(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}; \tag{45}$$

Используя (34), в точке $B(0,0,0)$ окончательно получаем

$$\left| \left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B}\right)_i \right| \le \left| \frac{\partial u(B,t,A,\tau)}{\partial n_B} \right|; \tag{46}$$

Оценим теперь

$$\frac{\partial u(B,t,A,\tau)}{\partial n_B};$$

Пусть $M(x_1,y_1,z_1)$ точка, лежащая на оси z внутри Π_a. Тогда

$$\frac{\partial u(M,t,A,\tau)}{\partial z} = \int_\tau^t d\lambda \int_\Pi \left(1-\frac{\xi^2}{a^2}\right)^2\left(1-\frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 E(q,\lambda,A,\tau)\times \tag{47}$$

$$\times \frac{\partial^2 G_1(M,t,q,\lambda)}{\partial z\,\partial \zeta}\,d\xi d\eta ,$$

В этой формуле $\zeta=0$. Функция $G_1(p,t,q,\lambda)$ $(p(x,y,z),\ q(\xi,\eta,\zeta))$ имеет следующий вид:

$$G_1(p,t,q,\lambda) = \Gamma_1(x,t,\xi,\tau)\Gamma_1(y,t,\eta,\tau)\Gamma_2(z,t,\zeta,\tau), \tag{48}$$

где Γ_1 – функция Грина первой краевой задачи для отрезка $-a<x<a$. Γ_2 – функция Грина первой краевой задачи для отрезка $0<x<2a$. Рассмотрим функцию

$$G_2(p,t,q,\lambda) = \Gamma_1(x,t,\xi,\tau)\Gamma_1(y,t,\eta,\tau)N(z,t,\zeta,\tau), \tag{49}$$

где $N(z,t,\zeta,\tau)$ – функция Грина второй краевой задачи для отрезка $0<z<2a$. Функции Γ_2 и N имеют следующий вид:

$$\Gamma_2(z,t,\zeta,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{E(z-\zeta+4an,t-\tau) - E(z+\zeta+4an,t-\tau)\right\}, \tag{50}$$

$$N(z,t,\zeta,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{E(z-\zeta+4an,t-\tau) + E(z+\zeta+4an,t-\tau)\right\}$$

Используя эти соотношения, нетрудно показать, что

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial z\,\partial\zeta} = -\frac{\partial^2 G_2}{\partial\zeta^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)G_2 , \tag{51}$$

Кроме того, очевидна оценка

$$0 \le G_2(P,t,q,\lambda) \le C e^{-\frac{\delta r_{pq}^2}{t-\tau}} (t-\tau)^{-3/2}; \qquad (52)$$

$$P,q \in \Pi a, \quad \tau < t \le T, \quad \delta, c = const > 0;$$

Используя соотношения (5I) и то, что функция $\mathcal{U}$ обращается в 0 на границе Π вместе с первыми производными, после интегрирования в (47) по частям, придем к формуле

$$\frac{\partial \mathcal{U}(M,t,A,\tau)}{\partial z} = \int_\tau^t d\lambda \int_\Pi G_2(M,t,q,\lambda) \Big\{ E(q,\lambda,A,\tau) \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 \Big\} d\xi d\eta + \qquad (53)$$

$$+ \int_\tau^t d\lambda \int_\Pi \Big\{ \Big[\frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \Big] \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 +$$

$$+ \left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{\eta^2}{a^2}\right)^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi^2} \Big\} G_2 d\xi d\eta = J_1 + J_2,$$

Так как

$$\left| \frac{\partial E(q,\lambda,A,\tau)}{\partial \xi} \right| \le C(\lambda-\tau)^{-2} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{\lambda-\tau}};$$

$$\left| \frac{\partial E(q,\lambda,A,\tau)}{\partial \eta} \right| \le C(\lambda-\tau)^{-2} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{\lambda-\tau}}, \qquad (54)$$

$$\left| \frac{\partial^2 E(q,\lambda,A,\tau)}{\partial \xi^2} \right| \le C(\lambda-\tau)^{-5/2} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{\lambda-\tau}};$$

то, используя (52), получаем

$$-|J_1| \leq N \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{\Pi} e^{-\frac{\delta r_{Mq}^2}{t-\lambda}} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{\lambda-\tau}} (t-\lambda)^{-3/2} (\lambda-\tau)^{-3/2} d\sigma_q , \tag{55}$$

В силу результатов, полученных в [6, стр. 37], для интеграла (55) справедлива оценка

$$|J_1| \leq N_1 e^{-\frac{\delta_1 r_{MA}^2}{t-\tau}} (t-\tau)^{-1} , \tag{56}$$

$M \in \Pi_a$ - произвольная точка, лежащая на оси z. Оценим J_2

$$|J_2| \leq N \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{\Pi} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{\lambda-\tau}} e^{-\frac{\delta r_{Mq}^2}{t-\lambda}} (\lambda-\tau)^{-5/2} (t-\lambda)^{-3/2} d\sigma_q \tag{57}$$

Здесь

$$r_{qA}^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 ,$$
$$r_{Mq}^2 = \xi^2 + \eta^2 + (z_1-\zeta)^2 , \tag{58}$$

При a достаточно малом будем иметь

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2 \geq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{(z-z_1)^2}{4} = \frac{r_{MA}^2}{4} ; \tag{59}$$

Тогда

$$|J_2| \le N\int_\tau^t e^{-\frac{\delta}{2}\frac{r_{MA}^2}{\lambda-\tau}}(\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-1/2}d\lambda \int_\Pi e^{-\frac{\delta}{2}\frac{r_{qA}^2}{\lambda-\tau}} \times$$

$$e^{-\frac{\delta}{2}\frac{r_{Mq}^2}{t-\lambda}}(\lambda-\tau)^{-1}(t-\lambda)^{-1}d\sigma_q \le \frac{N}{r_{MA}}\int_\tau^t r_{MA}e^{-\frac{\delta_1 r_{MA}^2}{\lambda-\tau}} \times$$

$$(\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-1/2}d\lambda \int_\Pi (\lambda-\tau)^{-1}(t-\lambda)^{-1} \times \tag{60}$$

$$\times e^{-\delta_1\frac{r_{Mq}^2(t-\tau)}{(\lambda-\tau)(t-\lambda)}}\, d\sigma_q ,$$

так как при a достаточно малом $r_{qA} \ge r_{Mq}$. Следовательно,

$$|J_2| \le \frac{N}{r_{MA}}\int_\tau^t r_{MA}e^{-\delta_1\frac{r_{MA}^2}{\lambda-\tau}}(\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-1/2}d\lambda \times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\delta_1(t-\tau)z^2}{(\lambda-\tau)(t-\lambda)}}\left[(\lambda-\tau)(t-\lambda)\right]^{-1/2}dz\right)^2 \le$$

$$\le \frac{N}{r_{MA}(t-\tau)}\int_\tau^t r_{MA}e^{-\frac{\delta_1 r_{MA}^2}{\lambda-\tau}}(\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-1/2}d\lambda \le$$

$$\le \frac{N}{r_{MA}(t-\tau)}\int_{\frac{\sqrt{\delta}\, r_{MA}}{\sqrt{t-\tau}}}^{\infty} e^{-z^2}\left(t-\tau-\frac{\delta r_{MA}^2}{z^2}\right)^{-1/2}dz ,$$

Сделав подстановку,

$$\alpha = \sqrt{z^2 - \frac{\delta^2 r_{MA}^2}{t-\tau}}$$

окончательно получим

$$|J_2| \leq \frac{N}{r_{MA}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\delta \frac{r_{MA}^2}{t-\tau}} \tag{61}$$

$M(0,0,z_1)$ - произвольная точка, лежащая на оси и принадлежащая Π_a. Из (56) и (61) следует (37). Тем самым лемма доказана.

ЛЕММА 3. При тех же предположениях относительно S^*, что и в лемме 2, справедлива следующая оценка:

$$0 \leq \omega(q,t,A,\tau) \leq \frac{C}{r_{qA}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{\delta r_{qA}^2}{t-\tau}} + \\ + \frac{C}{r_{qA}(t-\tau)^{\mu_1}}, \quad q \in S, \ A \notin \bar{S}, \quad \tau < t \leq T, \tag{62}$$

где $\omega(q,t,A,\tau)$ определена соотношением (30).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положительность ω доказана нами в теореме 4. Далее имеем

$$0 \leq g(B,t,A,\tau) = \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega(q,\lambda,A,\tau) E(B,t,q,\lambda) d\sigma_q \leq \\ \leq E(B,t,A,\tau), \quad B \in E_3, \ A \in E_3 \setminus \bar{S}, \quad \tau < t \leq T, \tag{63}$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{E_3} g(B,t,A,\tau)\,d\sigma_B = \int\limits_{E_3} d\sigma_B \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} \omega(q,\lambda,A,\tau)\,E(B,t,q,\lambda)\,d\sigma_q \leq$$

$$\leq \int\limits_{E_3} E(B,t,q,\lambda)\,d\sigma_B\,; \tag{64}$$

Так как

$$\int\limits_{E_3} E(B,t,q,\lambda)\,d\sigma_B = 1\,, \tag{65}$$

то, меняя порядок интегрирования (подынтегральная функция положительная), получим

$$0 \leq \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} \omega(q,\lambda,A,\tau)\,d\sigma_q \leq 1\,,\quad A\in E_3\setminus\bar{S}\,,\quad \tau < t \leq T; \tag{66}$$

Так как

$$\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_i\,;$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_e \geq 0,\quad -\left(\frac{\partial g}{\partial n}\right)_i \geq 0\,; \tag{67}$$

то из (66) следует, что

$$\int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_e d\sigma_q \leq 1; \tag{68}$$

$$\int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} \left| \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q} \right)_i \right| d\sigma_q \le 1 ,$$

$$A \in E_3 \setminus \bar{S}, \quad \tau < t \le T,$$

Рассматривая соотношения (35) как интегральное уравнение относительно ω, можем представить ω в виде

$$\omega(B,t,A,\tau) = -2 \left(\frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B} \right)_i + 2 \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q} \right) \times R(B,t,q,\lambda)\, d\sigma_q ; \tag{69}$$

$$B \in S, \quad A \in E_3 \setminus \bar{S}, \quad \tau < t \le T,$$

где $R(B,t,q,\lambda)$ - резольвента, для которой, в силу условий гладкости, наложенных на S, справедлива оценка [8]

$$|R(B,t,q,\lambda)| \le C(t-\lambda)^{-3/2} e^{-\frac{C_1 r_{Bq}^2}{t-\lambda}} ; \tag{70}$$

$$B, q \in S, \quad \tau < \lambda \le t;$$

Тогда для ω получаем

$$|\omega| \le \left| \left(\frac{\partial g}{\partial n_q} \right)_i \right| + \int_{\tau}^{t} d\lambda \int_{S} \left| \frac{\partial g}{\partial n} \right|_i |R|\, d\sigma_q \le$$

$$\le \frac{C}{r_{BA}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{C_1 r_{BA}^2}{t-\tau}} + J(B,t,A,\tau), \tag{71}$$

где

$$\mathcal{J}(B,t,A,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}d\lambda\int\limits_{S}\left|\left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i\right|\left|R(B,t,q,\lambda)\right|d\sigma_q\le$$

$$\le\int\limits_{\tau}^{t}d\lambda\int\limits_{S}\left|\left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q}\right)_i\right|e^{-\frac{c_1 r_{Bq}^2}{t-\lambda}}(t-\lambda)^{-3/2}d\sigma_q, \tag{72}$$

Пусть $\tilde{S}$ - часть поверхности S ,лежащая в шаре с центром B и радиуса $r_{BA}/2$.Тогда

$$\mathcal{J}=\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}d\lambda\int\limits_{S\setminus\tilde{S}}\{\quad\}d\sigma_q+\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}}d\lambda\int\limits_{S\setminus\tilde{S}}\{\dots\}d\sigma_q+\int\limits_{\tau}^{t}d\lambda\int\limits_{\tilde{S}}\{\dots\}d\sigma_q= \tag{73}$$

$$=\mathcal{J}_1+\mathcal{J}_2+\mathcal{J}_3,$$

На $S\setminus\tilde{S}$ $r_{Bq}\ge r_{BA}/2$.Следовательно,

$$|\mathcal{J}_1|\le C\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}d\lambda\int\limits_{S\setminus\tilde{S}}\frac{1}{r_{Aq}}e^{-\frac{c_1 r_{Aq}^2}{\lambda-\tau}}e^{-\frac{c_1 r_{Bq}^2}{t-\lambda}}(\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-3/2}d\sigma_q\le$$

$$\le C\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}d\lambda\int\limits_{S\setminus\tilde{S}}\frac{1}{r_{Aq}}e^{-\frac{c_1 r_{Aq}^2}{\lambda-\tau}}(\lambda-\tau)^{-3/2}\frac{1}{r_{Bq}^{3/2}}\frac{1}{(t-\lambda)^{3/4}}d\sigma_q\le \tag{74}$$

$$\le\frac{C}{r_{BA}^{3/2}}\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t}\frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/4}}\int\limits_{S\setminus\tilde{S}}\frac{1}{r_{Aq}^{1+\mu}}\left[\frac{r_{Aq}^{\mu}}{(\lambda-\tau)^{\mu/2}}e^{-\frac{c_1 r_{Aq}^2}{\lambda-\tau}}\right]\frac{1}{(\lambda-\tau)^{\varepsilon}}\times$$

$$\times \frac{1}{(\lambda-\tau)^{3/2-\varepsilon-\mu/2}}\, d\sigma_q \le \frac{C}{r_{BA_0}^{3/2}(t-\tau)^{3/2-\varepsilon-\mu/2}} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\lambda}{(t-\lambda)^{3/4}(\lambda-\tau)^{\varepsilon}} \times$$

$$\times \int\limits_{S} \frac{d\sigma_q}{r_{Aq}^{1+\mu}}$$

Выбирая здесь $\varepsilon = 1/8$, $\mu = 7/8$, получим

$$|\mathcal{J}_1| \le \frac{C}{r_{BA}^{3/2}(t-\tau)^{\mu_1}}, \quad \mu_1 = 15/16 < 1, \tag{75}$$

Для $\mathcal{J}_2$ получаем

$$|\mathcal{J}_2| \le C \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int\limits_{S\setminus\tilde{S}} \left| \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q} \right)_i \right| \frac{1}{r_{Bq}^{3/2}(t-\lambda)^{3/4}}\, d\sigma_q \le$$

$$\le \frac{C}{r_{BA}^{3/2}(t-\tau)^{3/4}} \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} \left| \left(\frac{\partial g(q,\lambda,A,\tau)}{\partial n_q} \right)_i \right| d\sigma_q \le \tag{76}$$

$$\le \frac{C}{r_{BA}^{3/2}(t-\tau)^{3/4}} \le \frac{C}{r_{BA}^{3/2}(t-\tau)^{\mu_1}};$$

На $\tilde{S}$ $r_{Aq} \ge r_{BA}/2$, поэтому для $\mathcal{J}_3$ получаем

$$|\mathcal{J}_3| \le C \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int\limits_{\tilde{S}} \frac{1}{r_{Aq}}\, e^{-\frac{c_1 r_{Aq}^2}{\lambda-\tau}}\, e^{-\frac{c_1 r_{Bq}^2}{t-\lambda}} (\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-3/2}\, d\sigma_q \le$$

$$\le \frac{C}{r_{BA}} \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} e^{-\frac{c_1 r_{Aq}^2}{\lambda-\tau}}\, e^{-\frac{c_1 r_{Bq}^2}{t-\lambda}} (\lambda-\tau)^{-3/2}(t-\lambda)^{-3/2}\, d\sigma_q, \tag{77}$$

В силу результатов А.Н.Тихонова [6], получаем

$$|J_3| \le \frac{C}{r_{AB}}(t-\tau)^{-1} e^{-\frac{c\, r_{AB}^2}{t-\tau}} \le \frac{C}{r_{AB}^{3/2}(t-\tau)^{3/4}} \le$$

$$\le \frac{C}{r_{AB}^{3/2}(t-\tau)^{\mu_1}}, \tag{78}$$

Из (75),(76),(78) следует (62).

ЛЕММА 4. При тех же предположениях относительно S^*, что и в лемме 2, справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial G(B,t,A,\tau)}{\partial h_B}\right| \le \frac{C}{r_{BA}^{3/2}(t-\tau)^{\beta}}; \tag{79}$$

$$B\in S',\ A\in S',\ 0\le\tau<t\le T,\ 0<\beta<1;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{S'} \left|\frac{\partial G(B,t,A,\tau)}{\partial h_B}\right| d\sigma_A \le C_0, \tag{80}$$

$$B\in S',\ 0<t\le T,$$

C_0 не зависит от B, t

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B\in S'$, $A\in E_3\setminus \bar{S}$ $\tau<t\le T$

Рассмотрим

$$j(B,t,A,\tau) = \frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial h_B} = \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega \frac{\partial E}{\partial h_B} d\sigma_q, \tag{81}$$

Так как S^* - поверхность Ляпунова с показателем $\alpha = 1$, то

$$|j| \le \int_\tau^t d\lambda \int_S \omega(q,\lambda,A,\tau)\, e^{-\frac{c\, r_{Bq}^2}{t-\lambda}} (t-\lambda)^{-3/2} d\sigma_q; \tag{82}$$

Пусть снова $\tilde{S}$ – часть поверхности S, лежащая внутри сферы с центром в B и радиуса $r_{BA}/2$. Тогда

$$|j| \leq \int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\lambda \int\limits_{S\setminus\tilde{S}} \{\ldots\} d\sigma_q + \int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\lambda \int\limits_{S\setminus\tilde{S}} \{\ldots\} d\sigma_q + \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{\tilde{S}} \{\ldots\} d\sigma_q =$$

$$= j_1 + j_2 + j_3,$$

j_1, j_2, j_3 оцениваются так же, как соответствующие интегралы в предыдущей лемме, при этом используем (62) и то, что

$$0 \leq \int\limits_{\tau}^{t} d\lambda \int\limits_{S} \omega(q,\lambda,A,\tau) d\sigma_q \leq 1,$$

Таким образом, получим

$$\left| \frac{\partial g(B,t,A,\tau)}{\partial n_B} \right| \leq \frac{C}{r_{BA}^{3/2} (t-\tau)^{\beta}}, \qquad (83)$$

$$B \in S', \; A \in E$$

β – подходящим образом выбранная положительная постоянная, меньшая 1

Очевидно, что когда точки B и A находятся на поверхности S^*

$$\left| \frac{\partial E(B,t,A,\tau)}{\partial n_B} \right| \leq C(t-\tau)^{-3/2} e^{-\frac{C_1 r_{BA}^2}{t-\tau}} \leq \qquad (84)$$

$$\leq \frac{C}{r_{BA}^{3/2} (t-\tau)^{3/4}},$$

Из (83) и (84) получаем (79). Из оценки (79) следует (80).

ЛЕММА 5. Решение задачи (А) (I-4) представимо в виде

$$\mathcal{V}(B,t)=\int_0^t d\tau \int_{S'} \sigma(q,\tau)\, G(B,t,q,\tau)\, d\omega_q, \tag{85}$$

Доказательство очевидно.

§2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (В)

Теорема единственности решения задачи (В) является элементарным следствием теоремы Фридмана [7] и сильного принципа максимума [7].

ТЕОРЕМА 6. Пусть S^* обладает свойством (Е) и выпукла. Тогда существует решение задачи:

$$L\, u=0, \quad P\in \mathcal{D},\ 0<t\le T, \tag{86}$$

$$u(P,0)=0, \quad P\in \mathcal{D}; \tag{87}$$

$$u(P,t)=\varphi(P,t), \quad P\in \bar{S},\ 0\le t\le T; \tag{88}$$

$$\left(\frac{\partial u(P,t)}{\partial n}\right)_i=\psi(P,t), \quad P\in S',\ 0<t\le T \tag{89}$$

$$\varphi(P,0)=0, \tag{90}$$

φ, ψ - непрерывные, ограниченные функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, если φ достаточно гладкая, мы не ограничивая общности можем считать ее равной 0. Вместо задачи (86)-(90) рассмотрим задачу

$$L\, v=0, \quad P\in \mathcal{D}\cup\mathcal{D}',\ 0<t\le T, \tag{91}$$

$$v(P,0)=0, \quad P\in E_3, \tag{92}$$

$$v(P,t)=0, \quad P\in \bar{S},\ 0\le t\le T; \tag{93}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e-\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i+\lambda\left[\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e+\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i\right]+2\psi=0,$$

$$p\in S',\ 0<t\le T, \qquad (94)$$

$$\lim_{|P|\to\infty} v(P,t)=0, \qquad (95)$$

λ - действительное число.

Положим

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_e-\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_i=\sigma, \qquad (96)$$

и будем искать решение задачи (9I)-(95) в виде

$$v(P,t)=\int_0^t d\tau\int_{S'}\sigma(q,\tau)\,G(P,t,q,\tau)\,d\omega_q, \qquad (97)$$

где $G(P,t,q,\tau)$ - функция Грина задачи (А).Тогда задача (9I)-(95) сводится к следующему интегральному уравнению Вольтерра:

$$\sigma(P,t)+\lambda\int_0^t d\tau\int_{S'}\sigma(q,\tau)\,K(P,t,q,\tau)\,d\omega_q+2\psi(P,t)=0; \qquad (98)$$

$$P\in S',\ 0<t\le T;$$

где

$$K(P,t,q,\tau)=2\,\frac{\partial G(P,t,q,\tau)}{\partial n_P},$$

В силу леммы 4,это интегральное уравнение решается методом последовательных приближений.При $\lambda=-1$ решение задачи (9I)-(95) является также решением задачи (В).Тем самым существование решения задачи (В) доказано.

Автор выражает глубокую благодарность профессору Л.И.Рубинштейну за помощь,оказанную в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.Magenes. Problemi al contorno misti per l'equazione del calore. Rend.del Seminario Matematico della Universita di Padova, 24, 1955.

2. W.Nowacki. - Arch. mech. stosowanej., 16, 1964, No.4.

3. М.Л.Расулов. - Дифференциальные уравнения, 2, 1966, № 8.

4. О.Напетваридзе. - Дифференциальные уравнения, 4, 1968, № 7.

5. Б.С.Польский, Л.М.Рубинштейн. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению теплопроводности. - Латвийский математический ежегодник, II. Рига, "Зинатне", 1972.

6. А.Н.Тихонов. Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных. - Бюлл. МГУ, секция А, т.I, вып.9, 1938.

7. А. Фридман. Уравнения с частными производными параболического типа. М., "Мир", 1968.

8. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. - Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ ШВАРЦА.

Б.С.Польский

Целью настоящей работы является проверка эффективности альтернирующего метода Шварца для уравнения теплопроводности.

Хорошо известно [I] ,что можно продолжить решения первой краевой задачи для уравнения Лапласа на область $E=E_1 \cup E_2$,если $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и существует решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа для E_1 и E_2 .Кроме того известно [2] ,что с помощью альтернирующего метода Шварца можно построить функцию гармоническую во всем пространстве за исключением некоторого куска поверхности $\sum$,где эта функция принимает заданные значения.Эти результаты были перенесены автором [3,4] на случай уравнения теплопроводности.В [4] с помощью шварцовского алгоритма было доказано существование и единственность решения следующей задачи:пусть в двумерном евклидовом пространстве E_2 задана замкнутая кривая типа Ляпунова $\sum$,состоящая из двух кусков S и S' ,таких,что

$$S \cap S' = \varnothing, \quad \overline{S \cup S'} = \Sigma, \quad F = \bar{S} \cap \bar{S}' \neq \varnothing,$$

Область,ограниченную кривой $\sum$ обозначим через $\mathcal{D}$ и положим:

$$\mathcal{D}' = E_2 \setminus \bar{\mathcal{D}},$$

<u>Задача (А)</u>. Найти функцию $V(P,t)$ непрерывную в $R_2 = E_2 \times [0,T]$,равную 0,при $t=0$ и на ∞ ,удовлетворяющую уравнению теплопроводности в области $(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') \times (0,T]$ обращающуюся в 0 на S при всех $t \in [0,T]$ и удовлетворяющую на S' условию скачка:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_e - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_i = \sigma(P,t), \quad P \in S', \quad t \in (0,T], \tag{I}$$

(Мы считаем, что нормаль направлена внутрь области $\mathcal{D}$, индексы e и i означают, что берутся предельные значения нормальных производных с внешней и внутренней стороны поверхности Σ). $\sigma(P,t)$ непрерывная и ограниченная функция.

Задача (А) для уравнения Лапласа была решена Зарембой [2]. Автору неизвестны работы, в которых бы алгоритм Шварца применялся для численного решения краевых задач параболического типа. Проверке эффективности этого алгоритма посвящена настоящая работа. В дальнейшем вместо однородного уравнения будет рассматриваться неоднородное уравнение с плотностью источников F, где F функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Теорема существования и единственности решения на этот случай переносится без затруднений.

Решение задачи (А) ищем в виде:

$$v(P,t) = v_1(P,t) - w(P,t) \tag{2}$$

где:

$$v_1(P,t) = \int_0^t d\tau \int_{S'} \sigma(q,\tau)\, E(P,t,q,\tau)\, d\omega_q \,; \tag{3}$$

Здесь:

$$E(P,t,q,\tau) = \frac{1}{4\pi}(t-\tau)^{-1} \exp\left(-\frac{r_{Pq}^2}{4(t-\tau)}\right),$$

фундаментальное решение уравнения теплопроводности:

$$Lu = \left(\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)u = 0; \tag{4}$$

Очевидно, что v_1 удовлетворяет условию (I) и уравнению (4). Тогда w должна удовлетворять следующим условиям:

а) w непрерывная в R_2 ;

б) $w(P,0) = 0, \quad \lim\limits_{P\to\infty} w(P,t) = 0,$

с) $w(P,t) = v_1(P,t), \quad P\in S, \quad t\in[0,T],$

d) $Lw - F = 0, \quad P\in \mathcal{D}\cup\mathcal{D}', \quad t\in(0,T],$

е) $\left(\dfrac{dw}{dn}\right)_e - \left(\dfrac{dw}{dn}\right)_i = 0, \quad P\in S', \quad t\in(0,T],$

Совокупность условий d) и e) равносильна условию f)

$$f)\ Lw - F = 0, \quad P \in E_2 \setminus \bar{S},\ t \in (0,T],$$

Введем в рассмотрение объемный потенциал:

$$\Omega(P,t) = \int_0^t d\tau \int_{E_2} F(q,\tau) E(P,t,q,\tau) d\omega_q, \tag{5}$$

и сделаем замену:

$$w = \bar{w} - \Omega, \tag{6}$$

Тогда $\bar{w}$ должна удовлетворять условиям a), в), а также:

$$c)\ \bar{w} = v_1 + \Omega,\quad P \in S,\ t \in [0,T],$$

$$f)\ L\bar{w} = 0, \quad P \in E_2 \setminus \bar{S},\ t \in (0,T],$$

Для построения функции $\bar{w}$ применяется альтернирующий метод Шварца. Пусть Σ_1 замкнутая кривая типа Ляпунова, охватывающая S и пересекающая границу S ортогонально и $\mathcal{D}_1$ область, ограничен - ная Σ_1. Альтернирующую последовательность $\bar{w}_n$ построим следующим образом. Пусть M класс функций, определенных и непрерывных в R_2, обращающихся в 0 при $t=0$ и на бесконечности. Определим $\bar{w}_n(P,t)$ следующими условиями:

$$\bar{w}_n \in M, \quad n = 1,2,$$

$$L\bar{w}_{2k} = 0,\ P \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}',\ t \in (0,T],\ k = 1,2,$$

$$L\bar{w}_{2k+1} = 0,\ P \in E_2 \setminus \bar{\mathcal{D}}_1,\ t \in (0,T],\ k = 0,1,2, \tag{7}$$

$$\bar{w}_1 = v_1 + \Omega,\ P \in \bar{\mathcal{D}}_1,\ t \in [0,T],$$

$$\bar{w}_{2k} = \bar{w}_{2k-1},\ P \in \overline{S \cup S'},\ t \in [0,T],\ k = 1,2,\ldots$$

$$\bar{w}_{2k+1} = \bar{w}_{2k},\ P \in \bar{\mathcal{D}}_1,\ t \in [0,T],\ k = 1,2,\ldots$$

В [4] показано, что $\overline{w}_n$ сходится к искомой функции $\overline{w}$.
В качестве контрольного примера был выбран следующий:

$$S=\{(x,y)\ \ |x|>1,\ y=0\},\quad S'=\{(x,y)\ \ |x|<1,\ y=0\} \tag{8}$$

$$\mathcal{D}=\{(x,y)\ \ y>0,\ x\in(-\infty,\infty)\}, \tag{9}$$

$$F(x,y,t)=e^{-x^2-|y|}\{(e^{-|y|}-1)[2t(2x^2-1)-1]+ \tag{10}$$
$$+t\times(4e^{-|y|}-1)\}$$
$$\sigma(x,t)=-2te^{-x^2},$$

Нормаль направлена внутрь области $\mathcal{D}$, область $\mathcal{D}'$ считается внешней. Распространение результатов, доказанных в [4] на случай неограниченной кривой S не вызывает затруднений. В качестве кривой, охватывающей S не выбираем:

$$\Sigma_1=\{(x,y):|x|=1,\ y\in(-\infty,\infty)\}, \tag{11}$$

Функция:

$$v(x,y,t)=te^{-x^2-|y|}(1-e^{-|y|}), \tag{12}$$

является точным решением поставленной задачи. С другой стороны, из соотношений (2) и (6) следует:

$$v=v_1+\Omega-\overline{w} \tag{13}$$

Кроме того v есть решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} &Lv=-F,\quad p\in\mathcal{D}\cup\mathcal{D}',\ t\in(0,T];\\ &v(p,0)=0,\quad p\in E_2;\\ &v(p,t)=0,\quad p\in\overline{S\cup S'},\ t\in[0,T]; \end{aligned} \tag{14}$$

В силу этого:

$$\bar{w} = v_1 + \Omega, \quad P \in S', \quad t \in [0,T],$$

Таким образом, альтернирующая последовательность $\bar{w}_n$ должна сходится к $v_1 + \Omega$ в точках S'

Имеем:

$$v_1(x,y,t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \tau \exp(-y^2/4(t-\tau) - x^2/[1+4(t-\tau)]) \times$$

$$\times \{ erf[(x/\sqrt{1+4(t-\tau)} + \sqrt{1+4(t-\tau)}/2\sqrt{t-\tau}] - erf[(x/\sqrt{1+4(t-\tau)}$$

$$- \sqrt{1+4(t-\tau)}/2\sqrt{t-\tau}]\} d\tau,$$

erf - интеграл вероятности.

$$\Omega(x,y,t) = \int_0^t [f(y,t,\tau)/(1+4(t-\tau))^{1/2} + f_1(y,t,\tau)x^2/2 \times$$

$$\times (1+4(t-\tau))^{5/2} + f_1(y,t,\tau)(t-\tau)/(1+4(t-\tau))^{3/2}] \exp[-x^2/1+$$

$$+4(t-\tau)] d\tau;$$

где:

$$f(y,t,\tau) = 0{,}5(2\tau-1)e^{4(t-\tau)}\{e^{2y} erfc(y/2\sqrt{t-\tau}+2\sqrt{t-\tau}) + e^{-2y} erfc(-y/$$

$$/2\sqrt{t-\tau}+2\sqrt{t-\tau})\} + 0{,}5(\tau+1)e^{t-\tau}\{e^{y} erfc(y/2\sqrt{t-\tau}+\sqrt{t-\tau}) + e^{-y} \times$$

$$erfc(-y/2\sqrt{t-\tau}+\sqrt{t-\tau})\};$$

$$f_1(y,t,\tau) = 4\tau\{e^{4(t-\tau)}[e^{2y} erfc[y/2\sqrt{t-\tau}+2\sqrt{t-\tau}] + e^{-2y} erfc[-y/$$

$$/2\sqrt{t-\tau}+2\sqrt{t-\tau})] - e^{(t-\tau)}[e^{y} erfc(y/2\sqrt{t-\tau}+\sqrt{t-\tau}) + e^{-y} \times$$

$$\times erfc(-y/2\sqrt{t-\tau}+\sqrt{t-\tau})]\},$$

Здесь:

$$erfc = 1 - erf,$$

Так как для определения $\overline{w}_{k+1}$ необходимо знать значения $\overline{w}_k$ только на границе области, то было целесообразно выбрать для расчетов метод Монте-Карло, который позволяет вычислять значение искомой функции в отдельной точке области. Был применен метод Монте-Карло с так называемым "плавающим" случайным блужданием. Этот метод разработан и подробно описан Хаджи-Шейхом и Сперроу [5]. Число испытаний для определения значения функции в одной точке было равно двум тысячам. Считалось, что блуждающая частица находится на границе, если расстояние от нее до границы области меньше, чем 10^{-8}

Вместо бесконечной области рассматривался квадрат:

$$A = \{(x,y) \ |x| \leq 5, |y| \leq 5\},$$

Такая замена была оправдана результатами вычислений. Границы S, S', Σ были разбиты сеткой с шагом 0,05. В каждой точке границы значения функции вычислялись в моменты времени:

t =0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5.

В таблице приведены члены последовательности, вычисленные в выборочных точках S'

x·10	t·10	w_1	w_3	w_5	w_7	w_9	$v_1+\Omega$ $\pm 10^{-4}$
	1	10^{-4}0,624	10^{-4}0,174	10^{-4}0,165	10^{-4}0,153	10^{-4}0,153	10^{-3}0,124
	2	10^{-2}0,103	10^{-3}0,196	10^{-3}0,169	10^{-3}0,166	10^{-3}0,166	10^{-3}0,256
0	3	10^{-2}0,368	10^{-3}0,728	10^{-3}0,624	10^{-3}0,611	10^{-3}0,609	10^{-3}0,685
	4	10^{-2}0,757	10^{-2}0,171	10^{-2}0,146	10^{-2}0,142	10^{-2}0,142	10^{-2}0,151
	5	10^{-1}0,126	10^{-2}0,318	10^{-2}0,270	10^{-2}0,263	10^{-2}0,262	10^{-2}0,272
	1	10^{-3}0,451	10^{-3}0,128	10^{-3}0,113	10^{-3}0,112	10^{-3}0,112	10^{-3}0,157
	2	10^{-2}0,259	10^{-3}0,664	10^{-3}0,577	10^{23}0,566	10^{-3}0,565	10^{-3}0,571
4	3	10^{-2}0,621	10^{-2}0,175	10^{-2}0,151	10^{-2}0,147	10^{-2}0,147	10^{-2}0,148
—	—	—	—	—	—	—	—

	5	10^{-1}0,168	10^{-2}0,551	10^{-2}0,472	10^{-2}0,460	10^{-2}0,458	10^{-2}0,453
-8	1	10^{-2}0,247	10^{-2}0,107	10^{-3}0,958	10^{-3}0,944	10^{-3}0,943	10^{-3}0,876
	2	10^{-2}0,760	10^{-2}0,337	10^{-2}0,296	10^{-2}0,291	10^{-2}0,290	10^{-2}0,290
	3	10^{-1}0,141	10^{-2}0,666	10^{-2}0,583	10^{-2}0,571	10^{-2}0,569	10^{-2}0,572
	4	10^{-1}0,216	10^{-1}0,107	10^{-2}0,938	10^{-2}0,917	10^{-2}0,914	10^{-2}0,918
	5	10^{-1}0,298	10^{-1}0,154	10^{-1}0,135	10^{-1}0,132	10^{-1}0,131	10^{-1}0,131

точность 10^{-4} при вычислении $V_1+\Omega$ обусловлена трудностью вычисления V_1. Из таблицы видно, что уже 9-е приближение дает хорошее совпадение с точным решением.

Расчеты проводились на БЭСМ-4. Программа была составлена в машинных кодах. Для получения результатов потребовалось 8 часов машинного времени.

В заключение хочу выразить благодарность профессору Л.И.Рубинштейну за постановку задачи и помощь, оказанную прие ее решении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Гурса. Курс математического анализа. Т.III., ч.I, ГТТИ, 1933.
2. С.Заремба. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа. Успехи матем. наук. Т.I, выпуск 3-4 (13-14), 1946.
3. Б.Польский. Об альтернирующем методе Шварца для уравнения теплопроводности. Латв. матем. ежегодник. Т.II. 1972.
4. Б.Польский, Л.Рубинштейн. Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению теплопроводности. Латв. матем. ежегодник. Т.II. 1972.
5. Хаджи-Шейх, Сперроу. Решение задач теплопроводности вероятностными методами. Теплопередача. №2, 1967.

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ.

Ясинский В.К.

Одним из наиболее распространенных критериев устойчивости в теории стохастических дифференциальных уравнений есть устойчивость в среднем квадратичном. Для дифференциально-разностных уравнений разработана эффективная методика исследования тривиального решения в этом смысле [1], [2].

Устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений случайным возмущениям параметров и линейных стохастических уравнений с переменными коэффициентами в скалярных случаях посвящены работы [3], [4].

Настоящая работа является некоторым обобщением результатов [3], [4].

Рассмотрим стохастическую линейную систему с последействием [6]

$$dx(t) = Am(x_t(\theta))dt + [dV(t)]\sigma(x_t(\theta)), \quad (I)$$

где $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-h \le \theta < 0$, отрезок траектории случайного процесса $x(t)$ со значениями из R^n, A - постоянная матрица. $m(x_t(\theta))$, $\sigma(x_t(\theta))$ - вектор-функционалы: $C_{[-h,0]}\times R^n \to R^n$, составленные соответственно из линейных функционалов $m_j(x_{jt}(\theta))$, $\sigma_j(x_{jt}(\theta))$ (здесь и далее x_{jt} j- -я координата вектора x_t), причем $m(0)=\sigma(\theta)=0$ $V(t)$-матрица, составленная из процессов броуновского движения $v_{kj}(t)$, с нулевым сносом и матрицей параметров диффузии $S=\{s_{kj}\}$, $(k,j=1,2,\dots n)$.

Пусть $\mathfrak{F}_t$ σ-алгебра событий такая, что

1) $V(s)$ измерима относительно $\mathfrak{F}_t$ при $s \le t$,
2) разности $v_{kj}(t_1)-v_{kj}(t_2)$ не зависят от событий $\mathfrak{F}_t$ при $t \le t_1 \le t_2$

Уравнение (I) следует понимать в смысле интегрального с стохастическим интегралом Винера-Ито.

$$\int\limits_0^t [dV(\tau)]\, x(\tau) \qquad (2)$$

и решать по начальной функции $\psi(\theta,\omega)$, $-h \le \theta \le 0$ непрерывной с вероятностью I, не зависящей от $\mathcal{F}_t$ при всех $t \ge 0$ обладающей свойством $E|\psi(\theta,\omega)|^4_h < \infty$.

Обозначим $\mathfrak{M}_T$ пространство случайных вектор-функций $\xi(t)$, измеримых относительно семейства $\mathcal{F}_t$ и таких, что

$$\int\limits_0^T E|\xi(t)|^2\,dt < \infty,$$

где E – операция математического ожидания.

В [6] доказана теорема существования и единственности (с точностью до стохастической эквивалентности) решения уравнения (I) в $\mathfrak{M}^n_T$. Причем с вероятностью I $x_t(\theta) \in C_{[-h,0]}$. Кроме того, решение (I) обладает свойством: $x(t)$ измеримо относительно $\mathcal{F}_s$ при всех $t \le s$. Этим фактом будем пользоваться при вычислении математического ожидания квадрата интегралов типа (2).

Обозначим $y(t)$ решение уравнения

$$\frac{dy(t)}{dt} = A\,m(y_t(\theta)) \qquad (3)$$

Предположим, что собственные значения производящего оператора полугруппы решений (3) [7], расположены в левой полуплоскости (это предположение всегда в дальнейшем считается выполненным).

Введем матрицу Коши $H(t)$ – матричное решение (3) такое, что $H(t) \equiv 0$ при $t < 0$, $H(0) = I$ и при $t > 0$

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{\lambda t} W^{-1}(\lambda)\, d\lambda,$$

где $W(\lambda) = I\lambda - Am(e^{\lambda\theta})$, а Γ – контур, охватывающий все нули функции $\det W(\lambda)$.

Предположим, что корни уравнения $\det W(\lambda) = 0$ расположены в левой полуплоскости. Поскольку при сделанных предположениях $h_{kj}(t) \in L_{2(0,\infty)}$, то по теореме Планшереля

$$\|h_{kj}(t)\|^2_{L_2(0,\infty)}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left|\frac{u_{jk}}{\det W(i\lambda)}\right|d\lambda,$$

где u_{jk} -алгебраические дополнения элементов w_{jk} матрицы $W(\lambda)$

Докажем один вспомогательный факт для скалярного случайного процесса

$$z(t)=\int_0^t H(t,\tau)f(\tau)\,dv(\tau)\qquad t\geq 0 \tag{4}$$

где $v(t)$-процесс броуновского движения, $f(t)$ -случайный процесс такой, что

$$\int_{t'}^{t''}E\{|f(t)|^2\}dt<\infty \tag{5}$$

для любых конечных $t',t''\geq 0$

Предположим, что $H(t,\tau)$, $H'(t,\tau)$ определены и непрерывны по совокупности аргументов при $t,\tau\geq 0$.

Лемма Если $f(t)$ непрерывен с вероятностью I и для него выполняется (2), то для случайного процесса $z(t)$ существует стохастический дифференциал

$$dz(t)=\left[\int_0^t H'_t(t,\tau)f(\tau)dv(\tau)\right]dt+H(t,t)f(t)dv(t). \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению стохастического дифференциала [5] выражение (6) обозначает, что для любых конечных t' и t'' верна запись

$$z(t'')-z(t')=\int_{t'}^{t''}\int_0^t H'_t(t,\tau)f(\tau)dv(\tau)dt+\int_{t'}^{t''}H(t,t)f(t)dv(t). \tag{7}$$

Для доказательства леммы надо показать, что (4) удовлетворяет (7). Отрезок $[t',t'']$ разобьем точками на интервалы длины $\Delta=(t''-t')/n$

Тогда

$$z(t'')-z(t')=\sum_{k=0}^{n-1}[z(t_{k+1})-z(t_k)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}H(t_{k+1},\tau)f(\tau)dv(\tau)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{t_k}[H(t_{k+1},\tau)-H(t_k,\tau)]f(\tau)dv(\tau)=$$

$$=\int_{t'}^{t''} H(t,t)f(t)\,dv(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(t_{k+1},\tau)-H(\tau,\tau)]f(\tau)\,dv(\tau)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{0}^{t_k}\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} H'_t(t,\tau)dt\right]f(\tau)dv(\tau)=\int_{t'}^{t''} H(t,t)f(t)\,dv(t)+$$

$$+\int_{t'}^{t''}\left[\int_0^t H'_t(t,\tau)f(\tau)\,dv(\tau)\right]dt+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(t_{k+1},\tau)-H(\tau,\tau)]f(\tau)dv(\tau)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(t_{k+1},\tau)-H(\tau,\tau)]f(\tau)\,dv(\tau). \qquad (8)$$

Обозначим

$$A_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(t_{k+1},\tau)-H(\tau,\tau)]f(\tau)dv(\tau).$$

Оценим $E\{|A_n|^2\}$, используя свойство математического ожидания [5 и свойство $H'_t(t,\tau)$.

$$E\{|A_n|^2\}\le n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}[H(t_{k+1},\tau)-H(\tau,\tau)]^2 E|f(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le n\sum_{k=0}^{n-1}\Delta^2\int_{t_k}^{t_{k+1}}|H'_t(t_k^*,\tau)|^2 E|f(\tau)|^2 d\tau \le$$

$$\le C\Delta\int_{t'}^{t''}E|f(\tau)|^2 d\tau \quad \text{где} \quad t_k\le t_k^*\le t_{k+1}$$

Следовательно, в силу (2)

$$P(|A_n|^2>\varepsilon)\le\frac{E\{|A_n|^2\}}{\varepsilon^2}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty$$

Через B_n обозначим 4-е слагаемое равенства (8) и меняя порядок интегрирования, получим

$$B_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}H_t'(t,\tau)f(\tau)dv(\tau)\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_{\tau}^{t_{k+1}}H_t'(t,\tau)\,dt\right)f(\tau)\,dv(\tau).$$

Аналогично можно оценить

$$E\{|B_n|^2\}\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\int_{\tau}^{t_{k+1}}H_t'(t,\tau)\,dt\right)^2 E|f(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq n\sum_{k=0}^{n-1}\Delta\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|H_t'(t,\tau)|^2 dt\, E|f(\tau)|^2 d\tau \leq$$

$$\leq C\Delta\int_{t'}^{t''}E|f(\tau)|^2 d\tau$$

Поэтому в силу (2)

$$P\{|B_n|^2>\varepsilon\}\leq\frac{E\{|B_n|^2\}}{\varepsilon^2}\longrightarrow 0 \quad \text{при } n\longrightarrow\infty$$

Ввиду произвольности выбора n лемма доказана.

Решение системы (I), используя матрицу Коши $H(t)$, согласно лемме, можно записать в виде

$$x(t)=y(t)+\int_0^t H(t-\tau)[dV(\tau)]\,\sigma(x_\tau(\theta)), \tag{9}$$

где $y(t)$ решение (5), построенное по начальной функции $\varphi(\theta,\omega)$.

Действительно, случайный процесс $x(t)$, заданный выражением (9), имеет стохастический дифференциал

$$dx(t)=dy(t)+[dV(t)]\,\sigma(x_t(\theta))+$$

$$+\int_0^t H'_t(t-\tau)[dV(\tau)]\sigma(x_\tau(\theta))]\,dt,$$

который, очевидно, совпадает с (I).

Т е о р е м а I. При любом $f\in C^*_{[-h,0]}$ имеет место $f(x_t(\theta))\in \mathfrak{M}^n_\infty$ тогда и только тогда, когда собственные значения матрицы

$$B=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\sigma(e^{i\lambda\theta})]^{②}_+\,[W^{-1}(i\lambda)]^{②}_+\,S\,d\lambda$$

расположены внутри круга единичного радиуса с центром в точке 0 (здесь и в дальнейшем ② в качестве верхнего индекса означает, что элементы вектора или матрицы возведены в квадрат, $+$ в качестве нижнего индекса обозначает, что элементы вектора или матрицы взяты по модулю).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к системе (6) вектор-функционал $\sigma(\cdot)$, заменив в (6) $x(t)$ на $x_t(\theta)$ Затем возведем построчно обе части полученной системы в квадрат, применим операцию математического ожидания [5], интегрируя эту систему от 0 до ∞ получим

$$\int_0^\infty \mu_\sigma(t)\,dt=\int_0^\infty \nu_\sigma(t)\,dt+B\int_0^\infty \mu_\sigma(t)\,dt, \qquad (10)$$

где $\mu_\sigma(t)=E\{[\sigma(x_t(\theta))]^{②}\}$, $\nu_\sigma(t)=[\sigma(y_t(\theta))]^{②}$.

В качестве вектора $y(t)$ выбираем столбцы $H(t)$(они тоже являются решениями невозмущенной системы (3)), введя для них обозначение $y_j(t)$($j=1,2,\dots n$).

Повторяя вышеизложенное, получим

$$\int_0^\infty \mu_{\sigma,j}(t)\,dt=\int_0^\infty \nu_{\sigma,j}(t)\,dt+B\int_0^\infty \mu_{\sigma,j}(t)\,dt,$$

где $\nu_{\sigma,j}(t)=[\sigma(y_{jt}(\theta))]^{②}$, или в очевидных обозначениях

$$M_j=N_j+BM_j \qquad (11)$$

Ясно, что вектор N_j совпадает с j-м столбцом матрицы B : $\{N_1, N_2, \ldots, N_n\} = B$. Из (II) получим матричное уравнение

$$M = B + BM \,, \tag{I2}$$

где $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$.

Доказательство необходимости будем вести от противного. Поскольку матрица B составлена из неотрицательных элементов, то $\lambda_0 > 0$ [8] .

Пусть $\lambda_0 \geqslant 1$ Рассмотрим случай $\lambda_0 = 1$. Покажем, что уравнение (I2) не имеет ограниченных решений. Пусть это не так. Тогда ограниченное решение будет иметь и уравнение

$$X = b + BX \,, \tag{I3}$$

где $X = Mb$, b –собственный вектор матрицы B , отвечающий собственному значению $\lambda_0 = 1$. В подпространстве $R_1^n \subset R^n$, порожденном собственным вектором b , уравнение (I3) примет вид $y = b + y$, не имеющее решения ни при каком ($\|y\| < \infty$).

Полученное противоречие приводит к выводу, если $\lambda_0 = 1$, то найдутся начальные функции $\varphi(\theta, \omega)$ такие, что $G(x_t(\theta)) \bar{\in} \mathfrak{M}_\infty^n$. Откуда легко получить, что и $f(x_t(\theta)) \bar{\in} \mathfrak{M}_\infty^n$. Это следует из соотношения

$$\int_0^\infty E[f(x_t(\theta))]^2 dt = \int_0^\infty [f(y_t(\theta))]^2 dt + \int_0^\infty [f(H_t(\theta))]^2 dt \int_0^\infty E[G(x_t(\theta))]^2 dt$$

и неравенства

$$\int_0^\infty [f(H_t(\theta))]^2 dt \int_0^\infty E[G(x_t(\theta))]^2 dt \geqslant \int_0^\delta [f(H_t(\theta))]^2 dt \int_0^\infty E[G(x_t(\theta))]^2 dt \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\delta}{2} \int_0^\infty E[G(x_t(\theta))]^2 dt$$

при достаточно малом $\delta > 0$ ($\left\| \int_0^\infty E[G(x_t(\theta))]^2 dt \right\| = \infty$).

А это отрицает утверждение теоремы $f(x_t(\theta)) \in \mathfrak{M}_\infty^n$.

Рассмотрим случай $\lambda_0 > 1$. Покажем, что уравнение (I2) не имеет ограниченных решений. Пусть имеет место противное, тогда и уравнение (I3) имеет ограниченное решение $X = \frac{1}{1-\lambda_0} b$ координаты которого неположительны. Но этого не может быть, ибо все координаты вектора X должны быть положительны. Следовательно, предположение неверно, а значит $\sigma(x_t(\theta)) \bar{\in} \mathfrak{M}^n_\infty$. Аналогично, как и раньше, показывается, что $f(x_t(\theta)) \bar{\in} \mathfrak{M}^n_\infty$. Это полностью завершает доказательство необходимости теоремы.

Достаточность получим, применяя метод последовательных приближений для нахождения решения (I0)

$$M_n = B M_{n-1} + N.$$

Откуда следует, что $\mu_n(t) \in L_{1(0,\infty)}$. Действительно, если взять $M_0 = 0$, тогда $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} B_k N$. Известно [9], что $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B^n\|} = \max|\lambda_2| < 1$. Для достаточно больших $n \geq n_1$ имеем $\sqrt[n]{\|B^n\|} < (q+\varepsilon) < 1$ и $\|B^n\| < (q+\varepsilon)^n$. Итак, $\|M_n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} q^k \|N\|$, где $0 < q = q+\varepsilon < 1$, $n \geq n_1$.

Откуда $\lim_{n\to\infty} \|M_n\| \leq \frac{q}{1-q} \|N\|$. Тогда ясно, что $\sigma(x_t(\theta)) \in \mathfrak{M}^n_\infty$.

Достаточность становится очевидной, если применить к (9) вектор-функционал $f(\cdot)$ и, проделав соответствующие преобразования, приводящие к уравнению (I0), получить соотношение

$$\int_0^\infty \mu_f(t)dt = \int_0^\infty \nu_f(t)dt + \int_0^\infty [f(H_t(\theta))]^{@} dt \int_0^\infty \mu_\sigma(t)dt.$$

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы I тривиальное решение системы (I) асимптотически устойчиво в среднем квадратичном.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (9) легко получить

$$\mu_\sigma(t) = [\sigma(y_t(\theta))]^{@} + \int_0^t [\sigma(H_{t-\tau}(\theta))]^{@} \mu_\sigma(\tau)d\tau \qquad (I4)$$

Применяя к (I4) преобразование Лапласа [9], получим

$$M(\lambda) = F(\lambda) + H(\lambda)M(\lambda),$$

где $M(\lambda) = \mathcal{L}(\mu_\sigma(t))$, $F(\lambda) = \mathcal{L}\{[\sigma(y_t(\theta))]^{@}\}$, $H(\lambda) = \mathcal{L}\{[\sigma(H_t(\theta))]^{@}$

Поскольку $H(0)$ имеет собственные значения по модулю меньше I, то у $H(\lambda)$ полюса лежат в левой полуплоскости [2]. А это значит, что $M(\lambda) = (I - H(\lambda))^{-1} F(\lambda)$ имеет полюса в полуплоскости $Re\,\lambda < 0$.

Имеем $\|[\sigma(y_t(\theta))]^{\otimes}\| \le N e^{-\alpha t} \|\varphi\|^2_{C[-h,0]}$ и

$\|\tilde{H}(t)\| \le M e^{-\alpha t}$, где $N, M > 0, \alpha > 0$,

$\tilde{H}(t) = \mathcal{L}\{(I - H(\lambda))^{-1}\}$ Тогда, очевидно, что

$$\|\mu_6(t)\| \le N_1 e^{-(\alpha+\varepsilon)t} \|\varphi\|^2_{C[-h,0]},$$

где $\varepsilon < \frac{\alpha}{2}$, $N_1 > 0$ Записав (I4) для $\mu_1(t)$, получим, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mu_1(t)\| = 0$ Это и доказывает следствие.

Замечание I . Легко видеть, что условие теоремы I является необходимым для асимптотической устойчивости тривиального решения (I) в среднем.

Замечание 2 Если хотя бы одно собственное значение матрицы по модулю больше I , то $\lim\limits_{t\to\infty} E\{|x(t)|^2\} = \infty$.

В случае равенства I по модулю хотя бы одного собственного значения матрицы B , аналогично скалярному [9] , получим

$$\lim_{t\to\infty} E\{|x(t)|^2\} \ne 0$$

Рассмотрим систему уравнений

$$dx(t) = Am(x_t(\theta))dt + [dV(t)]F(t)\sigma(x_t(\theta)), \quad (I5)$$

где $F(t) = diag\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$.

Т е о р е м а 2 . Если $\lim\limits_{t\to\infty} f_i(t) = \varphi_i$, то из устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения системы

$$dz(t) = Am(z_t(\theta))dt + [dV(t)]\Phi\sigma(z_t(\theta))$$

следует устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения системы (I5). Здесь $\Phi = diag\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме, от системы (I5) перейдем к системе интегральных уравнений

$$x_t(\theta) = y_t(\theta) + \int_0^t H_{t-\tau}(\theta)[dV(\tau)]F(\tau)\sigma(x_\tau(\theta)),$$

где $y(t)$-решение невозмущенной системы (I5). Далее очевиден переход от полученного уравнения к системе для вторых моментов

$$\mu(t) = [\sigma(y_t(\theta))]^{\otimes} + \int_0^t [\sigma(H_{t-\tau}(\theta))]^{\otimes} \Phi^{\otimes} \mu(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t [\sigma(H_{t-\tau}(\theta))]^{②} [F^{②}(\tau) - \Phi^{②}] \, \mu(\tau) d\tau ,$$

где $\mu(t) = E\{[\sigma(x_t(\theta))]^{②}\}$.

Затем, используя экспоненциальное убывание $[\sigma(y_t(\theta))]^{②}$ и $[\sigma(H_t(\theta))]^{②}$ легко получить [9]

$$\mu(t) = \Psi_1(t) + \int_0^t \Psi_2(t-\tau)[F^{②}(\tau) - \Phi^{②}] \, \mu(\tau) d\tau ,$$

где $\Psi_1(t)$ - n-мерный вектор с нормой $\|\Psi_1(t)\| \le C_1 e^{-\gamma t}$, $\Psi_2(t)$ - $n \times n$ - матрица с нормой $\|\Psi_2(t)\| \le C_2 e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$. Тогда по лемме Гронуолла-Беллмана

$$\|\mu(t)\| \le C_1 e^{-\gamma t + C_2 \int_0^t \|F^{②}(\tau) - \Phi^{②}\| d\tau}$$

Так как

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|F^{②}(\tau) - \Phi^{②}\| d\tau = 0 ,$$

то теорема 2 доказана.

Рассмотрим систему линейных уравнений с экспоненциально-полиномиальными коэффициентами

$$dx(t) = Am(x_t(\theta))dt + \sum_{q=0}^{N} e^{-d_q t} t^{n_q} dV_q(t) \sigma(x_t(\theta)) , \qquad (16)$$

где $x(t) \in R^n$, $V_q(t)$ - матрицы процессов броуновского движения с независимыми элементами с нулевыми сносами и с матрицами диффузии S_q, $d_0 = 0$, $n_0 = 0$, $Re\, d_q > 0$.

От (16) перейдем к системе интегральных уравнений

$$x(t) = y(t) + \int_0^t H(t-\tau) dV_0(\tau) \sigma(x_\tau(\theta)) +$$

$$+ \int_0^t H(t-\tau) \sum_{q=1}^{N} e^{-d_q \tau} \tau^{n_q} dV_q(\tau) \sigma(x_\tau(\theta)).$$

Уравнение для вторых моментов имеет вид

$$\mu(t) = \mu_0(t) + \int_0^t [\sigma(H_{t-\tau}(\theta))]^{②} S_0 \mu(\tau) d\tau +$$

$$+ \int_0^t [\sigma(H_{t-\tau}(\theta))]^{②} \sum_{q=1}^{N} e^{-d_q \tau} \tau^{n_q} S_q \mu(\tau) d\tau , \qquad (17)$$

где $\mu(t)=E\{[\sigma(x_t(\theta))]^{②}\}$, $\mu_0(t)=[\sigma(y_t(\theta))]^{②}$.

Применяя к системе (17) преобразование Лапласа, легко получить

$$M(\lambda)=[i-H(\lambda)S_0]^{-1}M_0(\lambda)+$$
$$+[i-H(\lambda)S_0]^{-1}H(\lambda)\sum_{q=1}^{N}S_q(-1)^{2n_q}\frac{d^{2n_q}}{d\lambda^{2n_q}}M(\lambda+2n_q),$$

где $M(\lambda)=\mathcal{L}\{\mu(t)\}$, $M_0(\lambda)=\mathcal{L}\{\mu_0(t)\}$, $H(\lambda)=\mathcal{L}\{[\sigma(H_t(\theta))]^{②}\}$.

Согласно анализа уравнения для изображения $\mu(t)$ [10], следует, что асимптотическое поведение решения системы (17) определяется полюсами вектора $[i-H(\lambda)S_0]^{-1}H(\lambda)$ и матрицы $[i-H(\lambda)S_0]^{-1}H(\lambda)$. Но полюса вектора $M_0(\lambda)$ и матрицы $H(\lambda)$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<0$, тогда поведение решений (17) определяется расположением нулей определителя $\det[i-H(\lambda)S_0]$.

Следовательно, по [10] для устойчивости решений системы (16) необходимо и достаточно чтобы были устойчивы решения системы

$$dz(t)=Am(z_t(\theta))dt+dV_0(t)\sigma(z_t(\theta)).$$

А для анализа этой системы применима теорема I и следствие. Итак, верна

Т е о р е м а 3. Для устойчивости тривиального решения системы (16) в среднем квадратичном необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\sigma(e^{i\lambda\theta})]_+^{②}[W^{-1}(i\lambda)]_+^{②}S_0\,d\lambda$$

были по модулю меньше I.

В заключение выражаю благодарность ЦАРЬКОВУ Е. Ф. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Царьков Е.Ф., Хинкин В.Н. Статистический запас устойчивости линейных стационарных систем. "Вопросы динамики и прочности". Вып. 19. "Зинатне". Рига. 1969.

2. Царьков Е.Ф., Хинкин В.Н. Устойчивость в среднем квадратичном тривиального решения линейных дифференциально-разностных стохастических уравнений. "Вопросы динамики и прочности". Вып. 22. "Зинатне". Рига, 1972.

3. Слюсарчук В.Е., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости решений дифференциально-функциональных уравнений к случайным возмущениям параметров. (УМЖ , в печати).

4. Слюсарчук В.Е., Сопронюк Ф.О., Ясинский В.К. Стійкість розв язків лінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з змінними коефіцієнтами. "Матеріали Obласної конференції молодих науковців Буковини з проблем природничих наук". Чернівці, 1970.

5. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. М., "Наука", 1965.

6. Itô, K., and Nisio M. On stationary solutions of a stochastic differential equation. Kyoto J. Math., 4(1964), 1-75.

7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Изд. "Наука", М., 1959.

8. Гантмахер Ф. Теория матриц. Изд. "Наука", М., 1967.

9. Беллман Р. и Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Изд. "Мир", М., 1967.

10. Валеев К.Г. Применение преобразования Лапласа к решению и исследованию устойчивости линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и запаздывающими аргумента, "Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом". Том IV, 1967, 51-78.

ОБ $L(p,q)$ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ.

Ясинский В.К.

Обозначим $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ вероятностную тройку с операцией математического ожидания E. Если $x \in R^m$, то $|x|$ определяет эвклидову норму.

Если A есть матрица в $R^m \times R^m$, то $|A| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$. Пусть $h \geq 0$ и $R = (-\infty, \infty)$.

Обозначим $C([-h,0],R^m)$ пространство m-мерных вектор-функций, непрерывных на отрезке $[-h,0]$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$. Норму на элементах $x_t(\theta) \in C([-h,0],R^m)$ зададим так

$$|x_t(\theta)|_h = \sup_{h \leq \theta \leq 0} |x(t+\theta)|.$$

Для случайного вектора $x: \Omega \to R^m$ (для случайной матрицы X $\Omega \to R^m \times R^m$) $\|x\|_p$ ($\|X\|_p$) обозначает норму в L^p-пространстве измеримых относительно $\mathfrak{F}$ вектор-функций (матриц-функций) следующим образом

$$\|x(\cdot)\|_p = \left(E|x(\omega)|^p\right)^{1/p}; \left(\|X(\cdot)\|_p = \left(E|X(\omega)|^p\right)^{1/p}\right).$$

А для случайного элемента $x_t(\theta): \Omega \to C([-h,0],R^m)$ через $\|x(t,\cdot)\|_{h(p)}$ обозначим норму

$$\|x(t,\cdot)\|_{h(p)} = \left(E|x_t(\theta)|_h^p\right)^{1/p}$$

Рассмотрим систему линейных дифференциально-функциональных уравнений со случайными параметрами

$$dx(t) = L(t,x_t(\theta),\omega)dt, \quad t \geq t_0, \qquad (1)$$
$$x_{t_0}(\theta) = \varphi(\theta,\omega),$$

где $L(t,x_t(\theta),\omega)$ есть линейный непрерывный оператор при каждом $t \in [t_0,\infty)$ и почти каждом $\omega \in \Omega: C([-h,0],R^m) \to R^m$, и задан выражением

$$L_1(t, x_t(\theta), \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t,\omega)x(t-\tau_k) + \int_{-\tau}^{0} A(t,\theta,\omega)x(t+\theta)\,d\theta, \quad (2)$$

в котором $m \times m$ матрицы $A_k(t,\omega)$, $A(t,\theta,\omega)$ непрерывные по $t \in [t_0, \infty)$ и $\theta \in [-h, 0]$ с вероятностью I, $0 \le \tau_k \le \tau \le h$ ($h = \sup_k (\tau_k, \tau)$).

Предполагаем, что матрица-функция $A(t,\theta,\omega)$ интегрируема по θ для каждого t с вероятностью I и существует $a(t,\omega)$ из пространства функций, почти при каждом $\omega \in \Omega$ отображающих $[t_0, \infty) \to R$ и интегрируемых по Лебегу на всяком компактном множестве из $[t_0, \infty)$ такая, что

$$\left| \int_{-\tau}^{0} A(t,\theta,\omega)x(t+\theta)\,d\theta \right| \le a(t,\omega)|x_t(\theta)|_h$$

для всех $t \in R$, $x_t(\theta) \in C([-h,0], R^m)$

Тогда для любого заданного $t_0 \in R$, $\varphi(\theta,\omega) \in C([-h,0], R^m)$ существует почти наверное решение (единственное) $x(t,\omega)$ системы (I), определенное и непрерывное на $[t_0 - h, \infty)$ удовлетворяющее (I) на $[t_0, \infty)$ [I].

Пусть $U(t,s,\omega)$ матрица Коши уравнения (I) - матричное решение уравнения (I), удовлетворяющее начальным условиям $U(s,s,\omega) = I$ $U(t,s,\omega) = 0$ для всех $t < s$

Тогда, согласно [I] решение $x(t,\omega)$ при $t \ge s \ge t_0$ запишется в виде

$$x(t,\omega) = U(t,s,\omega)x(s,\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{s}^{s+\tau_k} U(t,\alpha,\omega)A_k(\alpha,\omega)x(\alpha-\tau_k,\omega)\,d\alpha -$$

$$- \int_{-\tau}^{0} \left[\int_{s-\theta}^{s} U(t,\alpha,\omega)A(\alpha,\theta,\omega)x(\alpha+\theta,\omega)\,d\alpha \right] d\theta. \quad (3)$$

Обозначим

$$|U(t,s,\omega)|^* = \sup_{\substack{-h\le\theta\le 0\\ 0\le\xi\le h}} |U(t+\theta, s+\xi, \omega)| ;$$

$$\|U(t,s,\cdot)\|_p^* = \left\{E\left(|U(t,s,\omega)|^*\right)^p\right\}^{1/p} ; \quad \|U(t,s,\cdot)\|_p = \left\{E|U(t,s,\omega)|^p\right\}^{1/p}$$

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_s^{s+\tau_k}|A_k(\alpha,\omega)|d\alpha$ сходится с вероятностью I, тогда из (3) легко получить неравенство

$$|x(t,\omega)|_h \le C(\omega)|U(t,s,\omega)|^* |x(s,\omega)|_h \qquad (4)$$

для всех $t \ge s \ge t_0$ где

$$C(\omega) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\int_s^{s+\tau_k}|A_k(\alpha,\omega)|d\alpha + \int_{-\tau}^{0}\int_{s-\theta}^{s}|A(\alpha,\theta,\omega)|d\alpha\, d\theta$$

Дадим следующие определения устойчивости решений системы (I).

Определение I. Тривиальное решение системы (I) назовем $L(p,q)$ устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что любое решение $x(t,\omega)$ (I), для которого

$$\|x(t_0,\cdot)\|_{h(p)} < \delta(\varepsilon),$$

удовлетворяет $\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} < \varepsilon$ для $t \ge t_0$.

Определение 2. Решение $x(t,\omega)=0$ уравнения (I) есть асимптотически $L(p,q)$ устойчиво, если оно $L(p,q)$ устойчиво и если для любого решения $x(t,\omega)$, для которого

$$\|x(t_0,\cdot)\|_{h(p)} < \infty$$

следует $\lim_{t\to\infty}\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} = 0$ для $t \ge t_0$.

Определение 3. Тривиальное решение (I) называется равномерно $L(p,q)$ устойчивым, если оно $L(p,q)$ устойчиво, и если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что любое решение $x(t,\omega)$ (I), которое удовлетворяет неравенству $\|x(t_1,\cdot)\|_{h(p)} < \delta(\varepsilon)$

для некоторого $t_1 > t_0$ удовлетворяет $\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} \le \varepsilon$ для всех $t \ge t_1$.

Определение 4. Решение $x(t,\omega)\equiv 0$ системы (I) назовем равномерно асимптотически $L(p,q)$ устойчивым, если оно равномерно $L(p,q)$ устойчиво и существует $\delta_0 > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > 0$, обладающее свойством, что любое решение $x(t,\omega)$, для которого $\|x(t_1,\cdot)\|_{h(p)} < \delta_0$ для некоторого $t_1 > t_0$, удовлетворяет $\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} < \varepsilon$ для всех $t > t_1 + T(\varepsilon)$.

Теорема. Пусть $p \ge q \ge 1$ и $r = p\cdot q/(p-q)$ ($r = \infty$ если $p = q$).

Тогда

а) для $L(p,q)$ устойчивости уравнения (I) достаточно, чтобы для некоторого $\alpha > 1$ $\|C(\cdot)\|_{r\cdot\alpha} < \infty$ (в пунктах в), с), d) для первой части утверждения всегда требуем выполнения этого условия) и существовала положительная константа K такая, что

$$\sup_{t \ge t_0} \|U(t,t_0,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} = K < \infty \text{, где } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

и необходимо, чтобы $\sup_{t\ge t_0} \|U(t,t_0,\cdot)\|_r = K < \infty$;

в) для равномерной $L(p,q)$ устойчивости системы (I) достаточно, чтобы существовала положительная константа K такая, что

$$\sup_{t \ge s \ge t_0} \|U(t,s,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} = K < \infty,$$

и необходимо, чтобы $\sup_{t \ge s \ge t_0} \|U(t,s,\cdot)\|_r = K < \infty$;

с) уравнение (I) асимптотически $L(p,q)$ устойчиво, если оно $L(p,q)$ устойчиво и $\lim_{t\to\infty} \|U(t,t_0,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} = 0$

d) для равномерной асимптотической $L(p,q)$ устойчивости системы (I) достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало $T(\varepsilon) > 0$ такое, что, если только $t - s > T(\varepsilon)$ тогда

$$\|U(t,s,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} < \varepsilon,$$

и необходимо, чтобы $\|U(t,s,\cdot)\|_r < \varepsilon$.

Замечание 1. Если почти наверное $|C(\omega)| \le N$, $N > 0$, то достаточность пунктов а), в), с) и d) теоремы формулируется только для r-нормы матрицы Коши $U(t,s,\omega)$.

Замечание 2. Более сильное достаточное условие всех утверждений теоремы получается в терминах $\|C(\cdot)U(t,s,\cdot)\|_r$. Требования на эту норму будут накладываться такие же, что и на $\|U(t,s,\cdot)\|_{r\cdot p}$ в формулировке теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность всех 4-х пунктов следует из соотношения (4), если к нему дважды применить неравенство Гельдера.

Действительно, по определению норм имеем

$$\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} \le \left\{E\left[|C(\omega)|\,|U(t,s,\omega)|^*\right]^q |x(s,\omega)|_h^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \left\{\left[E\left(\left(|C(\omega)|\,|U(t,s,\omega)|^*\right)^q\right)^{p/(p-q)}\right]^{(p-q)/p} \cdot \left[E\left(|x(s,\omega)|_h^q\right)^{p/q}\right]^{q/p}\right\}^{1/q} =$$

$$= \left[E\left(|C(\omega)|^r \left(|U(t,s,\omega)|^*\right)^r\right)\right]^{1/r} \|x(s,\cdot)\|_{h(p)} .$$

Далее

$$\|C(\cdot)U(t,s,\cdot)\|_r^* \le \left\{\left[E\left(|C(\omega)|^r\right)^\alpha\right]^{1/\alpha} \cdot \left[E\left(\left(\left(|U(t,s,\omega)|^*\right)^r\right)^\beta\right)\right]^{1/\beta}\right\}^{1/r} =$$

$$= \|C(\cdot)\|_{r\cdot\alpha} \|U(t,s,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} \quad , \text{ где } \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 .$$

Таким образом,

$$\|x(t,\cdot)\|_{h(q)} \le \|C(\cdot)\|_{r\cdot\alpha} \|U(t,s,\cdot)\|^*_{r\cdot\beta} \|x(s,\cdot)\|_{h(p)}$$

для всех $t \ge s \ge t_0$.

Откуда сразу следуют первые утверждения теоремы.

Доказательство необходимости будем проводить от противного [2].

Доказательство а). Рассмотрим сначала случай, когда $p>q$. Если система (I) $L(p,q)$ устойчива, тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что

$$\|U(t,t_0,\cdot)x(\cdot)\|_q<\varepsilon$$

для любого $x(\omega)$, удовлетворяющего $\|x(\cdot)\|_p<\delta$

Решение (I) строится по такому начальному условию

$$\varphi(\theta,\omega)=\begin{cases}x(\omega) \text{ при } & \theta=0\\ 0 \text{ при } & -h\le\theta<0\end{cases}$$

Пусть а) неверно, тогда существуют последовательности $\{t_n\}$, $\{M_n\}$ такие, что $\|U_n(\cdot)\|_2>n$ где $U_n(\omega)$ определена следующим образом

$$U_n(\omega)=\begin{cases}U(t_n,t_0,\omega), & \text{если } \|U(t_n,t_0,\omega)\|<M_n,\\ M_n I & \text{в противном случае.}\end{cases} \tag{5}$$

Определили $U_n(\omega)$ как усечение $U(t_n,t_0,\omega)$, чтобы обеспечить существование моментов.

Теперь определим $x_n(\omega)$ так

$$x_n(\omega)=\frac{\|U_n(\omega)\|^{(r-q)/q}z_n(\omega)}{\|\|U_n(\cdot)\|^{(r-q)/q}z_n(\cdot)\|_p}\delta \tag{6}$$

где под вектором $z_n(\omega)$ понимаем некоторый вектор единичной длины $|z_n(\omega)|=1$ такой, что

$$|U(t_n,t_0,\omega)z_n(\omega)|=|U(t_n,t_0,\omega)| \tag{7}$$

для каждого $\omega\in\Omega$.

Значит, если находить решение (I), построенного по начальному условию

$$\varphi(\theta,\omega)=\begin{cases}x_n(\omega) & \theta=0,\\ 0 & ,-h\le\theta<0\end{cases} \tag{8}$$

то легко видеть, что $\|x_n(\cdot)\|_p<\delta$, а, следовательно,

$\|U(t_n,t_0,\cdot)x_n(\cdot)\|_q<\varepsilon$ для $n=1,2,\ldots$

Учитывая определение $x_n(\omega)$, имеем

$$\|U(t_n,t_0,\cdot)z_n(\cdot)|U_n(\cdot)|^{(r-q)/q}\|_q\le\frac{\varepsilon}{\delta}\||U_n(\cdot)|^{(r-q)/q}z_n(\cdot)\|_p.$$

Из предыдущего неравенства, согласно (7), следует

$$\|U(t_n,t_0,\cdot)|U_n(\cdot)|^{(r-q)/q}\|_q\le\frac{\varepsilon}{\delta}\||U_n(\cdot)|^{(r-q)/q}\|_p$$

Далее, возведя обе части в q-ую степень, получим из определения L^q нормы и (5)

$$E|U_n(\omega)|^r\le\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^q\left\{E|U_n(\omega)|^{(r-p)p/q}\right\}^{q/p}$$

Но $\frac{(r-q)p}{q}=r$ тогда, взяв корень r-ой степени из обеих частей, получим

$$\|U_n(\cdot)\|_r\le\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{q/r}\|U_n(\cdot)\|_r^{q/p}$$

Откуда следует $\|U_n(\cdot)\|_r\le\frac{\varepsilon}{\delta}$., что противоречит предположению $\|U_n(\cdot)\|_r>n$.

Таким образом часть а) доказана в случае $p>q$

Предположим теперь $p=q$ (следовательно $r=\infty$).
Если не существует M такого, что $\|U(t,t_0,\cdot)\|_\infty<M$ для всех $t>t_0$, то можно выбрать последовательность $\{t_n\}$ такую, что $P\{|U(t_n,t_0,\cdot)|>n\}>0$.

Определим

$$x_n(\omega)=\delta CA_n(\omega)\frac{z_n(\omega)}{[P(A_n(\omega))]^{1/p}},$$

где $z_n(\omega)$ удовлетворяет предположению (7), а $x_n(\omega)$ -(8), CA_n - характеристическая функция

$$A_n=\{\omega:|U(t_n,t_0,\omega)|>n\}.$$

Тогда $\|x_n(\cdot)\|_p\le\delta$, но

$$\|U(t_n,t_0,\cdot)x_n(\cdot)\|_q=\frac{\delta}{(P(A_n))^{1/p}}\left(E|U(t_n,t_0,\omega)CA_n(\omega)|^p\right)^{1/p},$$

которая больше, чем

$$\frac{\delta}{(PA_n)^{1/p}}\cdot n(PA_n)^{1/p}=n\delta$$

Это и дает противоречие при $n\to\infty$, чем и заканчивается доказательство а).

Доказательство в). Случай $p>q$

Пусть в) не выполняется, тогда существует последовательность $\{t_n,s_n,M_n\}$ такая, что

$$\|U_n(t_n,s_n,\cdot)\|_r>n\ ,\qquad (9)$$

где $U_n(t_n,s_n,\cdot)$ является случайной величиной $U(t_n,s_n,\cdot)$, усеченной M_n (см.(5)).

Снова определяем последовательность $\{x_n(\omega)\}$ таким образом

$$x_n(\omega)=\frac{|U_n(t_n,s_n,\omega)|^{(r-q)/q}\,y_n(\omega)}{\||U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(r-q)/q}\|_p}\,\delta\qquad (10)$$

где $y_n(\omega)$ удовлетворяет (7), а $x_n(\omega)$ выбирается как в (8), то-есть находим решение при $t\geq s$, построенного по начальному условию

$$x(s+\theta,\omega)=\begin{cases}x_n(\omega) & \text{при } \theta=0\ ,\\ 0 & \text{при } -h\leq\theta<0\end{cases}\qquad (8')$$

Тогда $\|x_n(\cdot)\|_p\leq\delta$, а, следовательно, $\|U(t,s,\cdot)x_n(\cdot)\|_q<\varepsilon$ для $t>s$. Это и определение (10) $x_n(\omega)$ дает

$$\|U(t,s,\cdot)|U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(r-q)/q}\|_q\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\||U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(r-q)/q}\|_p .$$

Возведя обе части в q/r -ю степень, полагая $t=t_n$ $s=s_n$ и учитывая, что $p(r-q)/q=r$ получим

$$\|U_n(t_n,s_n,\cdot)\|_r\leq\frac{\varepsilon}{\delta}\ ,$$

что противоречит (9) для n достаточно большого.

Случай в) $p=q$ ($r=\infty$).

Ев. и не существует M такого, что $\|U(t,s,\cdot)\|_\infty\leq M$ для $t_0\leq s<t$, то можно выбрать последовательность $\{t_n,s_n\}$

такую, что $P\{|U(t_n, s_n, \cdot)| \geq n\} > 0$

Определим $x_n(\omega) = \delta CA_n(\omega) \frac{y_n(\omega)}{(PA_n)^{1/p}}$

где $y_n(\omega)$ и $x_n(\omega)$ удовлетворяют соответственно (7) и (8$'$). CA_n есть снова характеристическая функция

$$A_n = \{\omega : |U(t_n, s_n, \omega)| \geq n\}$$

Тогда $\|x_n(\cdot)\|_p \leq \delta$, а из определения равномерной $L(p,q)$ устойчивости для $t > s$

$$\|U(t, s, \cdot)\|_q < \varepsilon. \tag{II}$$

Но

$$\|U(t_n, s_n, \cdot) x_n(\cdot)\|_q = \frac{\delta}{(PA_n)^{1/p}} \left(E|U(t_n, s_n, \omega) CA_n(\omega)|^p\right)^{1/p} \geq$$

$$\geq \frac{\delta}{(PA_n)^{1/p}} n (PA_n)^{1/p} = n\delta,$$

что противоречит (II) и, следовательно, доказательство в) завершено.

Доказательство d). Случай $p > q$.

Пусть (I) равномерно асимптотически $L(p,q)$ устойчиво, но для некоторого $\varepsilon > 0$ не существует $T(\varepsilon)$, для которого $\|U(t,s,\cdot)\|_2 < \varepsilon$, когда $t - s > T(\varepsilon)$.

Тогда можно выбрать последовательность $\{t_n, s_n, M_n\}$ такую, что $(t_n - s_n) > n$ и

$$\|U_n(t_n, s_n, \cdot)\|_2 > \varepsilon, \tag{I2}$$

где снова для каждого t_n, s_n $U_n(t_n, s_n, \omega)$ есть случайная величина $U(t_n, s_n, \omega)$, усеченная M_n.

Но ввиду того, что (I) есть равномерно-асимптотически $L(p,q)$ устойчиво, существует $\delta_0 > 0$ такое, что по данному любому $\varepsilon' > 0$ найдется $T(\varepsilon')$, для которого

$$\|U(t, s, \cdot) x(\cdot)\|_q < \varepsilon', \tag{I3}$$

как только $\|x(\cdot)\|_p < \delta_0$ и $t - s > T(\varepsilon')$.

Определим $\{x_n(\omega)\}$ следующим образом

$$x_n(\omega) = \frac{|U_n(t_n,s_n,\omega)|^{(z-q)/q} z_n(\omega)}{\| |U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(z-q)/q} \|} \delta_0 \qquad (14)$$

где $z_n(\omega)$ и $x_n(\omega)$ определены, как в (7) и (8′) соответственно.

Тогда $\|x_n(\cdot)\|_p \le \delta_0$ и следовательно из (13) существует T такое, что $\|U(t,s,\cdot)x_n(\cdot)\|_q < \varepsilon\delta_0$, если $t-s>T$

Из (14) следует

$$\|U(t,s,\cdot)|U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(z-q)/q}\|_q \le \varepsilon \| |U_n(t_n,s_n,\cdot)|^{(z-q)/q}\|_p .$$

Возведя обе части в q/z -ую степень и полагая $t=t_n$, $s=s_n$ получим для некоторого $M>T$

$$\|U_n(t_n,s_n,\cdot)\|_z \le \|U_n(t_n,s_n,\cdot)\|_z^{q/p} ,$$

что дает $\|U_n(t_n,s_n,\cdot)\|_z \le \varepsilon$, а это противоречит (12).

Для случая $p=q$ $(z=\infty)$ предполагаем , что существует $\varepsilon>0$ такое, для которого нет $T(\varepsilon)$, чтобы $\|U(t,s,\cdot)\|_\infty < \varepsilon$, когда $t-s>T(\varepsilon)$.

Тогда можно выбрать последовательность $\{t_n,s_n\}$ такую, что

$$(t_n-s_n)>n \text{ и } P\{|U(t_n,s_n,\cdot)|\ge\varepsilon\}>0$$

Если определить

$$x_n(\omega) = \delta_0 CA_n(\omega)\frac{y_n(\omega)}{(PA_n)^{1/p}} ,$$

где $y_n(\omega)$, $x_n(\omega)$ определяются (7), (8′) и CA_n характеристическая функция $A_n(\omega)=\{\omega: |U(t_n,s_n,\omega)|>\varepsilon\}$, тогда $\|x_n(\cdot)\|_p<\delta_0$

Следовательно, по определению равномерной асимптотической $L(p,q)$ устойчивости существует T такое, что

$$\|U(t,s,\cdot)\|_q < \varepsilon\delta_0 , \qquad (15)$$

когда $t-s>T$

Но $\|U(t_n,s_n,\cdot)x_n(\cdot)\|_q \ge \frac{\delta_0}{(PA_n)^{1/p}}\varepsilon(PA_n)^{1/p} = \delta_0\varepsilon$ для $n>T$, что противоречит (15) и, таким образом, доказательство заканчивается.

В заключение выражаю благодарность Е. Ф. ЦАРЬКОВУ за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА.

1. J. Hale Functional Differential Equations. New. York, 1971.

2. R. Edsinger. Random ordinary differential equations Ph. D. Thesis Math Dept. Univ. Calif Berkeley (sept. 1968)

О СВОДИМОСТЯХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

К.М. Подниекс

I. Введение

N - множество натуральных чисел, $\mathcal{F}$ - множество всех всюду определенных функций из N в N, $\mathcal{R}$ - класс всех общерекурсивных функций (орф), $\mathcal{F}^{\circ}$ - класс всех предикатов (множеств) на N (можно считать, что $\mathcal{F}^{\circ} \subset \mathcal{F}$).

Для классов функций (т.е. подмножеств $\mathcal{F}$) можно ввести понятия сводимостей, аналогичные тем, которые изучаются для множеств чисел. Эта аналогия сохраняется на уровне простейших свойств этих сводимостей (см.раздел 2).

В разделе 3 доказано существование m-универсальных классов на всех уровнях арифметической иерархии классов функций (см. [I]). Некоторые известные результаты об этой иерархии применение m- сводимости позволяет доказывать более просто.

В разделе установлен общий вид полурешетки m - степеней на Σ_1^{fn} (что соответствует р.п. множествам чисел). Замечены существенные особенности этой полурешетки по сравнению со случаем множеств чисел, связанные в основном с существованием т.н. особенных классов.

В разделе 5 строятся (своего рода) вложения упорядоченного множества T- степеней на Σ_1 в полурешетку m - степеней на Σ_1^{fn} Это позволяет перенести некоторые классические результаты о несравнимости на случай классов функций.

В разделе 6 приведено несколько теорем о сравнении различных видов сводимости на Σ_1^{fn} Установлено еще одно отличие от случая множеств чисел (теорема 9).

В разделе 7 отмечены те результаты разделов 2 - 6, которые остаются верными для сводимостей классов множеств (см. [I]). Приведены (без доказательств) две теоремы (11 и 12), показывающие различие случаев $\mathcal{F}^{0}$ и $\mathcal{F}$.

Обозначения. Начальный кусок $\langle \varphi(0) \cdots \varphi(n) \rangle$ функции φ обозначим через $\varphi^{[n]}$. Если рассматривать функции из $\mathcal{F}$ как последовательности чисел $\{\varphi(n)\}$, то понятны обозначения:

$$0^{\infty} \quad 0^{x}1^{\infty} \quad x\,1^{\infty} \quad 0\varphi$$

Фиксируем естественную нумерацию машин Тьюринга с оракулом из $\mathcal{F}$: машина с номером m вычисляет с оракулом φ функцию $[m,\varphi]$ (быть может – частичную). В частности, $[i]$ есть чрф с номером i. Мы будем пользоваться также следующей нумерацией всех р.п. множеств:

$$W_i = \mathcal{D}([i]).$$

Понятия (общe) рекурсивного и частично рекурсивного функционала из $N^{n} \times \mathcal{F}$ в N (сокращения: ОРФ и ЧРФ) считаются известными (см. [1], гл. 15, § 3).

Отображение M $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ будем называть рекурсивным оператором, если существует ОРФ F $\mathcal{F} \times N \to N$ такой, что для всех φ

$$M(\varphi) = \lambda x\, F(\varphi, x).$$

Значение функции $M(\varphi)$ на аргументе x будем обозначать через $M(\varphi, x)$.

2. Определения сводимостей и их простейшие свойства

m- сводимость. Пусть $A, B \subseteq \mathcal{F}$. Тогда $A \leq_m B$, если существует рекурсивный оператор M такой, что:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$$

для всех $\varphi \in \mathcal{F}$ 1- сводимость получается отсюда, если требовать одно-одно-значность оператора M.

Понятие рекурсивного изоморфизма: $A \equiv B$ если существуют рекурсивные операторы M, M' такие, что

1) $MM'(\varphi) = M'M(\varphi) = \varphi$,

2) $\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$.

(Неизвестно, имеет ли здесь место аналог теоремы Майхилла о совпадении $\equiv_1$ и $\equiv$.)

<u>Табличные сводимости</u>. $A \leq_{tt} B$ если существует ОРФ $S : \mathcal{F} \to N$, значения $S(\varphi)$ которого суть номера кортежей вида $\langle m_1, \ldots, m_k, \beta \rangle$, где $[m_i, \varphi] \in \mathcal{F}$ для всех i ; $k = k(\varphi) \geq 1$, а β - k-местная булева функция; притом имеет место:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow \beta(|[m_1, \varphi] \in B|, \ldots, |[m_k, \varphi] \in B|),$$

где "модуль" показывает значение истинности предиката.

btt- сводимость получается отсюда, если потребовать: $k(\varphi) \leq C_{AB}$, а $1tt$- сводимость - если требовать: $k(\varphi) \equiv 1$.

(Легко видеть, что m - сводимость получится, если требовать одновременно: $k(\varphi) \equiv 1$, $\beta(x) = x$ для всех φ .)

<u>T- сводимость</u>. Пусть $B \subseteq \mathcal{F}$. Функционал $F : \mathcal{F} \to N$ назовем рекурсивным в B , если существует машина Z с двумя оракулами, которая для любой $\varphi \in \mathcal{F}$ останавливается, напечатав число $F(\varphi)$, и при этом:

1) первому оракулу задаются только вопросы вида „$\varphi(x) = ?$",

2) второму оракулу задаются только вопросы вида „$[m, \varphi] \in B$?", соблюдая условие $[m, \varphi] \in \mathcal{F}$.

(Это определение легко сформулировать и вполне точно - на языке конфигураций.)

Если $A, B \subseteq \mathcal{F}$ то $A \leq_T B$ означает, что характеристический функционал (ХФ):

$$H_A(\varphi) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi \in A, \\ 1, \text{ если } \varphi \bar{\in} A \end{cases}$$

рекурсивен в B В частности, A есть рекурсивный класс, если H_A рекурсивен в $\mathcal{F}$ (т.е. H_A есть ОРФ).

Для всех рассматриваемых сводимостей непосредственно проверяется:

1) рефлексивность и транзитивность,

2) Если B - рекурсивный класс и $A \leq B$, то A - тоже рекурсивный класс.

Итак, можно ввести все соответствующие эквивалентности и степени: $d_m(A)$, $d_T(A)$ итп.

Для ttt - сводимости легко проверить, что:

1) Все рекурсивные классы ttt - эквивалентны.

2) $A \equiv_{ttt} \bar{A}$ для всех $A \subseteq \mathfrak{F}$.

Для m - сводимости легко проверяется, что:

1) $A \leq_m B \Leftrightarrow \bar{A} \leq_m \bar{B}$.

2) $A \leq_m \phi \Rightarrow A = \phi \quad A \leq_m \mathfrak{F} \Rightarrow A = \mathfrak{F}$.

3) Все нетривиальные рекурсивные классы m - эквивалентны.

4) Частично-упорядоченное множество m - степеней есть верхняя полурешетка. В качестве $A \operatorname{join} B$ можно взять класс:

$$\{\varphi \mid [\varphi(0) = 0 \ \& \ \lambda x \, \varphi(x+1) \in A] \vee [\varphi(0) > 0 \ \& \ \lambda x \, \varphi(x+1) \in B]\}.$$

3. m - сводимость и арифметическая иерархия

Из всех классов функций выделяются арифметические классы ([I], гл.15, § 2), которые образуют арифметическую иерархию: Σ_n^{fn}, Π_n^{fn} $(n \geq 0)$. Если $n \geq 1$, то для классов семейства Σ_n^{fn} существует "вычислимая" нумерация $\{E_z^{(n)}\}$

$$\varphi \in E_z^{(n)} \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \qquad T_n(z, \varphi, x_1, \ldots, x_n),$$

где T_n есть ОРФ на $N^{n+1} \times \mathfrak{F}$ Аналогично для Π_n^{fn} $(n \geq 1)$. $\Sigma_0^{fn} = \Pi_0^{fn}$ - это семейство всех рекурсивных классов.

Семейство Σ_1^{fn} характеризуется тем, что $A \in \Sigma_1^{fn}$, если и только если частичный характеристический функционал (ЧХФ) H_A есть ЧРФ.

Очевидно также, что

$$A \leqslant_m B \ \& \ B \in \Sigma_n^{f_n} \Rightarrow A \in \Sigma_n^{f_n}$$

Поэтому правомерен вопрос о существовании m - универсальных классов в $\Sigma_n^{f_n}$.

Легко построить эффективную нумерацию пар $\langle x, y \rangle$, обладающую свойствами:

1) $\langle 0, 0 \rangle = 0$,

2) $\forall x \exists y \langle x, y \rangle = y$.

Через L, R обозначим обратные функции этой нумерации. (Полезность такого рода нумераций впервые замечена, по-видимому, Р.В.Фрейвалдом.)

Символ $\langle \varphi, \psi \rangle$ обозначает функцию:

$$\langle \varphi, \psi \rangle (x) = \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle .$$

Аналогично для L, R.

<u>Теорема I.</u> Пусть $n \geqslant 1$ Тогда класс функций

$$\mathcal{U}^{(n)} = \{ \varphi \mid R\varphi \in E^{(n)}_{L\varphi(0)} \}$$

принадлежит $\Sigma_n^{f_n} \setminus \Pi_n^{f_n}$ и m - универсален в $\Sigma_n^{f_n}$.

<u>Доказательство</u>. Из соотношения

$$\varphi \in \mathcal{U}^{(n)} \Leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \text{-} \quad T_n (L\varphi(0), R\varphi, x_1, \dots, x_n)$$

следует, что $\mathcal{U}^{(n)} \in \Sigma_n^{f_n}$ Соотношение

$$\langle z0^\infty, \varphi \rangle \in \mathcal{U}^{(n)} \Leftrightarrow \varphi \in E_z^{(n)}$$

показывает, что оператор $M_z(\varphi) = \langle z0^\infty, \varphi \rangle$ m- сводит $E_z^{(n)}$ к $\mathcal{U}^{(n)}$ т.е. $\mathcal{U}^{(n)}$ - m- универсальный класс в $\Sigma_n^{f_n}$.

Остается показать, что $\mathcal{U}^{(n)} \bar{\in} \Pi_n^{f_n}$, это будет непосредственным доказательством невырожденности иерархии (которая в [I] выводится из результатов для множеств чисел). Если допустить, что $\mathcal{U}^{(n)} \in \Pi_n^{f_n}$, то $\overline{\mathcal{U}^{(n)}} \in E_u^{(n)}$ для некоторого u , т.е.

$$R\varphi \bar{\in} E^{(n)}_{\langle \varphi(0)} \Leftrightarrow \varphi \in E^{(n)}_u$$

Найдем t такое, что $\langle u, t\rangle$ t и положим $\varphi = t0^\infty$, тогда:

$$t0^\infty \bar{\in} E^{(n)}_u \Leftrightarrow t0^\infty \in E^{(n)}_u.$$

Противоречие, т.е. $U^{(n)} \bar{\in} \Pi^{fn}_n$ что и требовалось.

Замечание. Использование m - сводимости классов функций позволяет также доказать, что

$$A \quad \{\varphi \mid \varphi^{-1}(0) - \text{конечное множество}\} \in \Sigma^{fn}_2 \setminus \Pi^{fn}_2$$

без применения категорных рассуждений (см. [I], гл.I5). Для этого достаточно заметить, что A - m - универсальный класс в Σ^{fn}_2

4. m - сводимость на Σ^{fn}_1.

Для m - сводимости классов функций легче найти примеры "естественных" классов, m - универсальных в Σ^{fn}_1, чем это было в случае множеств чисел.

Например, если g - некоторая орф, то очевидно: $\mathcal{F} \setminus \{g\} \in \Sigma^{fn}_1$. Докажем универсальность этого класса. Пусть $A \in \Sigma^{fn}_1$, тогда ЧХФ H_A есть ЧРФ. Оператор M определим так: для вычисления $M(\varphi)$ вычисляем $H_A(\varphi)$ по шагам и полагаем:

$$M(\varphi, n) = \begin{cases} g(n), & \text{если } H_A(\varphi) \text{ не останавливается за } \leq n \text{ шагов}, \\ g(n)+1, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Очевидно:

$$\varphi \in A \Leftrightarrow H_A(\varphi) \text{ останавливается} \Leftrightarrow M(\varphi) \neq g.$$

Итак, M сводит A к $\mathcal{F} \setminus \{g\}$, что и требовалось.

Классы функций, m - универсальные для Σ^{fn}_1 легко охарактеризовать в следующих терминах. Функцию φ_0 назовем внешней точкой прикосновения для класса A, если

I) φ_0 есть орф и $\varphi_0 \bar{\in} A$,

2) существует вычислимая последовательность $\{f_i\}$ орф из A такая, что $\forall i\ f_i^{[i]} = \varphi_0^{[i]}$.
(В беровской топологии на $\mathcal{F}$ (см. [I]) такая точка φ_0 и в самом деле будет точкой прикосновения для A.)

Теорема 2. Класс A m-универсален для Σ_1^{fn}, если и только если A имеет внешнюю точку прикосновения.

Доказательство. Необходимость. m-универсальность класса A влечет: $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_m A$, т.е. для некоторого M

$$\varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\varphi) \in A.$$

Если φ есть орф, то и $M(\varphi)$ – орф. Следовательно, как $M(0^\infty)$ так и все $M(0^i 1^\infty)$ суть орф. Очевидно также, что $M(0^\infty) \bar{\in} A$, а все $M(0^i 1^\infty) \in A$. Рекурсивный оператор M непрерывен в беровской топологии, поэтому

$$\lim 0^i 1^\infty = 0^\infty \Rightarrow \lim M(0^i 1^\infty) = M(0^\infty).$$

Итак, функция $M(0^\infty)$ будет внешней точкой прикосновения для A, если в качестве $\{f_i\}$ мы возьмем подходящую подпоследовательность из $\{M(0^i 1^\infty)\}$.

Достаточность. Пусть φ_0 – внешняя точка прикосновения для A, а $\{f_i\}$ – соответствующая последовательность. Достаточно показать, что $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_m A$. Для этого оператор M определим так:

$$M(\varphi, x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & \text{если } \varphi^{[x]} = 0^{x+1}, \\ f_{i+1}(x), & \text{если } i < x \ \&\ \varphi^{[i]} = 0^{i+1} \ \&\ \varphi(i+1) > 0, \\ f_0(x), & \text{если } \varphi(0) > 0. \end{cases}$$

Очевидно: $\varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\varphi) \in A$, что и требовалось.

Следствие. Если B – конечное множество орф, то класс $\mathcal{F} \setminus B$ m-универсален в Σ_1^{fn}.

Кроме того, легко видеть, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^{\circ} \in \Sigma_1^{h}$. Из теоремы 2 следует, что это – m - универсальный класс. Можно показать, что $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^{\circ}$ есть даже 1 - универсальный класс в Σ_1^{h}. С другой стороны очевидно, что к $\mathfrak{F} \setminus \{0^{\infty}\}$ 1 - сводятся только классы, дополнения которых содержат не более одного элемента. Таким образом, не все m - универсальные классы 1 - универсальны, но в универсальной m - степени имеется наибольшая 1 -степень. Открытым остается вопрос об изоморфизме классов этой 1 - степени.

Этим установлена первая особенность рассматриваемой иерархии по сравнению со случаем множеств чисел.

Имеется и другая особенность. В случае множеств чисел рекурсивное множество m - сводится к любому нетривиальному множеству.

В случае же классов функций нетривиальный рекурсивный класс A открыто-замкнут в беровской топологии, поэтому как A, так и $\bar{A}$ содержат орф. Но тогда из $A \leq_m B$ следует, что B и $\bar{B}$ тоже содержат орф.

Всегда ли нетривиальный Σ_1^{h} - класс B удовлетворяет этому условию? Всякий непустой Σ_1^{h} - класс открыт в беровской топологии и поэтому содержит орф. Таким образом, наш вопрос сводится к такому: существуют ли нетривиальные Σ_1^{h} - классы, дополнения которых не содержат орф?

Оказывается, такие классы существуют. Доказательство этого факта, по существу, приведено в [I] (гл.16, § 7), даже в более сильной форме: существует класс $B \in \Sigma_1^{h}$ такой, что $\bar{B}$ не пусто, однако не содержит гиперарифметических функций.

Классы из Σ_1^{h}, имеющие непустое дополнение, не содержащее орф, назовем особенными. Очевидно, все такие классы нерекурсивны.

Имеются и более простые примеры особенных классов.

1. Пусть V - простое множество (чисел). Класс B всех таких φ, что:

a) $\forall x\ \varphi(x) < \varphi(x+1)$,

b) $\forall x\ \varphi(x) \in \bar{V}$;

есть, очевидно, дополнение к Σ_1^{h} - классу. Однако, если $\varphi \in B \cap R$ то область значений φ есть бесконечное рекурсивное подмножество $\bar{V}$, что невозможно. Таким образом $B \cap R = \phi$, хотя $B \neq \phi$.

2. Пусть V_0, V_1 - два рекурсивно перечислимых и рекурсивно неотделимых множества. Класс C всех таких φ, что:

a) $\forall x\ \varphi(x) \leq 1$,

b) $\forall x\, [(\varphi(x) = 0 \Rightarrow x \bar{\in} V_1)\ \&\ (\varphi(x) = 1 \Rightarrow x \bar{\in} V_0)]$;

есть, очевидно, дополнение к Σ_1^{h}- классу. Однако, если $\varphi \in C \cap R$, то φ - характеристическая функция рекурсивного множества, отделяющего V_0 и V_1, что невозможно. Таким образом, $C \cap R = \phi$ хотя $C \neq \phi$

Отметим еще следующие факты:

1) Из $A \leq_m B$ и B - особенный класс следует, что $A = \mathcal{F}$ или A - особенный класс.

2) Особенный класс не может быть m - универсальным (см. теорему 2).

3) Всякий рекурсивный класс m - сводится ко всякому Σ_1^{h}- классу, отличному от ϕ, $\mathcal{F}$ и особенных классов.

Теперь в общей характеристике верхней полурешетки m-степеней на Σ_1^{h} неясными остались два пункта:

a) Существуют ли Σ_1^{h} - классы нерекурсивные, неуниверсальные и не являющиеся особенными ? Такие классы назовем <u>нормальными</u>.

b) Если нормальные классы существуют, то существует ли для каждого особенного B нормальный класс B' такой, что $B \leq_m B'$?

Ответ на оба вопроса дает

<u>Теорема 9</u>. Для всякого особенного класса B класс $B\,\mathrm{join}\,\phi$ является нормальным (и поэтому $B <_m B\,\mathrm{join}\,\phi$).

<u>Доказательство</u>. Напомним, что:

$$B\,\mathrm{join}\,\phi = \{\varphi \mid \varphi(0)=0 \,\&\, \lambda x\, \varphi(x+1) \in B\}.$$

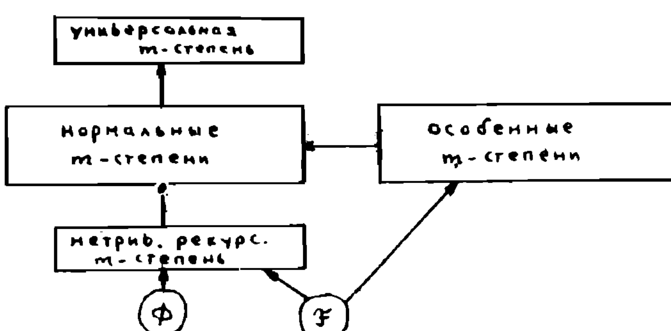
Очевидно $1^{\infty} \bar{\in} B\,\mathrm{join}\,\phi$, т.е. этот класс не является особенным. $B\,\mathrm{join}\,\phi$ не может быть и m-универсальным, ибо для орф φ_0 из $\varphi_0 \bar{\in} B\,\mathrm{join}\,\phi$ следует (в силу того, что B - особенный класс), что $\varphi_0(0) > 0$, тогда как все $\varphi \in B\,\mathrm{join}\,\phi$ имеют $\varphi(0) = 0$, т.е. φ_0 не может быть точкой прикосновения для $B\,\mathrm{join}\,\phi$ (см. теорему 2).

Если допустить, наконец, что $B\,\mathrm{join}\,\phi$ имеет рекурсивный ХФ H, то

$$H(0\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi \in B, \\ 1, & \text{если } \varphi \bar{\in} B, \end{cases}$$

т.е. B - рекурсивный класс, что невозможно. Таким образом $B\,\mathrm{join}\,\phi$ - нерекурсивный, т.е. нормальный класс. Что и требовалось.

Общую характеристику расположения m-степеней на Σ_1^{fn} можно свести в диаграмму:



5. Особенные классы вида $\mathcal{F} \setminus \{\psi\}$.

Мы уже видели, что для орф ψ_0 класс $\mathcal{F} \setminus \{\psi_0\} \in \Sigma_1^{h}$. Но следует ли из $\mathcal{F} \setminus \{\psi\} \in \Sigma_1^{h}$, что ψ – орф ?

Для ответа на вопрос заметим сперва, что класс всех $f \in \mathcal{F}$, графики которых лежат в Π_1 содержит все орф, а также некоторые нерекурсивные функции. Определим, например, следующие функции:

$$f_i(x) = \begin{cases} t+1, \text{если } [i](x) \text{ вычисляется за точно } t \text{ шагов,} \\ 0, \quad \text{если } [i](x) \text{ не определено.} \end{cases}$$

f_i есть орф не для всех ибо:

$$f_i(x) > 0 \Leftrightarrow x \in D([i]) = W_i \tag{1}$$

и не все W_i рекурсивны.

Для предиката $f_i(x) = y$ имеем выражение:

$$[y=0 \,\&\, \forall t \,\neg T(i,x,t)] \vee [y>0 \,\&\, T(i,x,y-1)], \tag{2}$$

где $T(i,x,t)$ – рекурсивный предикат, показывающий, остановится ли вычисление $[i](x)$ на шаге номер t. Таким образом, графики всех f_i лежат в Π_1 и среди этих функций есть и нерекурсивные.

<u>Теорема 4.</u> Если $\psi_0 \in \mathcal{F}$ и график ψ_0 есть Π_1-множество, то $\mathcal{F} \setminus \{\psi_0\} \in \Sigma_1^{h}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть

$$\psi_0(x) = y \Leftrightarrow \forall z\, R(x,y,z),$$

где предикат R рекурсивен. Нам достаточно построить ЧХФ H для предиката $\varphi \neq \psi_0$. Процесс вычисления $H(\varphi)$ будет состоять в поиске такого x что

$$\exists z \,\neg R(x, \varphi(x), z).$$

Нашли – полагаем $H(\varphi) = 0$ (тогда, очевидно $\varphi \neq \psi_0$), если такого x не существует, пусть $H(\varphi)$ не определено (ибо тогда $\varphi = \psi_0$). Теорема доказана.

Итак, Σ_1^{f} содержит классы вида $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}$, где ψ нерекурсивна. Такие классы по определению особенны.

Замечание 1. Графики функций ψ, данных теоремой 4, все лежат в Π_1. Открытым остается вопрос: следует ли из $\mathcal{F}\setminus\{\psi\}\in\Sigma_1^{f}$ что график ψ лежит в Π_1 ?

Замечание 2. Изложенные построения позволяют легко доказать следующее

Предложение. Для класса множеств $C=\{N\setminus\{x\}\mid x\in N\}$ невозможна такая чрф h, что если $W_i\in C$ то $h(i)$ определено и $W_{h(i)}=\overline{W_i}$

Это значит, что хотя множества из C рекурсивны, невозможен эффективный перевод их описаний на языке перечислений в описания на языке характеристических функций. Следовательно, такой перевод невозможен, в частности, и для всего класса рекурсивных множеств (это - результат Сузуки, см. [3]).

Доказательство предложения. Пусть W_0 - нерекурсивное множество. Последовательность множеств из C:

$$A_j=\{x\mid x\neq f_0(j)\}$$

является в силу (2) вычислимой, т.е. $A_j=W_{f(j)}$, где f есть орф. Если функция h существует, то hf - орф и $W_{hf(j)}=\{f_0(j)\}$, т.е. f_0 есть орф, тогда как W_0 нерекурсивно и имеет место (1). Что и требовалось.
Конец замечания 2.

Имеется некоторая связь между m - сводимостью классов $\{f_n\}$ и T - сводимостью (числовых) множеств W_n.

Теорема 5. $\{f_i\}\leqslant_m\{f_j\}\Leftrightarrow W_j\leqslant_T W_i$.

Доказательство. (1) показывает, что f_j есть орф, если и только если W_j - рекурсивное множество. Поэтому в случае рекурсивного W_j теорема очевидна. Допустим для дальнейшего, что W_j нерекурсивно.

Легко проверить, что для всех n функция f_n рекурсивна с оракулом W_n, в свою очередь W_n рекурсивно с оракулом f_n (см. соотношение (I)).

1. Пусть $\varphi = f_i \Leftrightarrow M(\varphi) = f_j$, тогда $M(f_i) = f_j$, т.е. f_j рекурсивна с оракулом f_i. Итак, левое рекурсивно в правом:

$$W_j - f_j - f_i - W_i$$

т.е. $W_j \leq_T W_i$

2. Пусть $W_j \leq_T W_i$, т.е. W_j рекурсивно в W_i, тогда аналогично, левое рекурсивно в правом:

$$f_j - W_j - W_i - f_i$$

Поэтому существует машина m такая, что $[m, f_i] = f_j$. Заметим теперь, что по теореме 4: $\mathcal{F} \setminus \{f_i\} \in \Sigma_1^{f_n}$, т.е. существует ЧХФ H_i для предиката $\varphi \neq f_i$. Нужный нам оператор M со свойством

$$\varphi = f_i \Leftrightarrow M(\varphi) = f_j$$

вычисляем на $\varphi \in \mathcal{F}$ так. Запускаем машину m паралельно на всех значениях аргумента x, но с оракулом φ (с которым ей не обязательно вычислять $\mathcal{F}$ - функцию). Одновременно вычисляем $H_i(\varphi)$. Если до остановки $H_i(\varphi)$ машина m на x остановилась, напечатав y, то полагаем $M(\varphi, x) = y$. После остановки $H_i(\varphi)$ все свободные места в $M(\varphi)$ заполняем нулями, не обращаясь больше к машине m.

Итак, если $H_i(\varphi)$ не определено (т.е. $\varphi = f_i$), то $M(\varphi) = f_j$ (ибо $[m, f_i] = f_j$). Если же $H_i(\varphi)$ определено (т.е. $\varphi \neq f_i$), то $M(\varphi)$ есть орф и, следовательно $M(\varphi) \neq f_j$ (мы допустили что W_j - нерекурсивное множество). Что и требовалось.

<u>Следствие</u>. $\{f_i\} \equiv_M \{f_j\} \Leftrightarrow W_i \equiv_T W_j$.

Теорема 5 вместе с этим следствием показывает, что "структура" T - степеней на $\Sigma_1 \setminus \Pi_1$ может быть в известном смысле ("в обратном порядке") вложена в полурешетку особенных m - степеней на Σ_1^{fn}

Замечание. Понятие "полурешетка особенных m- степеней" предполагает, что если A, B - особенные классы, то и $A \operatorname{join} B$ - особенный класс. Это легко проверить. Аналогично устанавливается правомерность понятия полурешетки нормальных m - степеней.

Можно было бы предположить, что в упомянутом вложении универсальной T - степени соответствует наименьшая особенная m - степень. Однако это не так: как уже указывалось, в [I] приведено доказательство существования особенного класса, дополнение которого не содержит гиперарифметических функций, тогда как $\mathcal{F} \setminus \{f_i\} \leq_m B$ влечет сразу, что $\overline{B}$ содержит арифметическую (даже 2 - рекурсивную, см. [2]) функцию.

Оказывается, "структуру" T - степеней на $\Sigma_1 \setminus \Pi_1$ можно вложить (в обратном порядке) и в полурешетку нормальных m- степеней на Σ_1^{fn}.

Теорема 6. Пусть $A_i = \mathcal{F} \setminus \{f_i\}$, а $B \subseteq \mathcal{F}$ Тогда:

$$A_i \leq_m B \Leftrightarrow A_i \operatorname{join} \Phi \leq_m B \operatorname{join} \Phi.$$

Доказательство. I. Импликацию вправо легко доказать для произвольного класса A (вместо специальных A_i). Дано, что $\varphi \in A \Leftrightarrow M(\varphi) \in B$, тогда

$$\varphi \in A \operatorname{join} \Phi \Leftrightarrow \varphi(0)=0 \;\&\; \lambda x\, \varphi(x+1) \in A \Leftrightarrow$$

$$\varphi(0)=0 \;\&\; M(\lambda x\, \varphi(x+1)) \in B \Leftrightarrow \varphi(0)\, M(\lambda x\, \varphi(x+1)) \in B \operatorname{join} \Phi$$

Итак, оператор $M'(\varphi) = \varphi(0) M(\lambda x \varphi(x+1))$ сводит $A \operatorname{join} \Phi$ к $B \operatorname{join} \Phi$, что и требовалось.

2. Импликация влево является менее общей. Она не выполняется даже для некоторых особенных классов A. Но для классов A_i она верна; пусть:

$$\varphi \in A_i \text{ join } \Phi \Leftrightarrow M(\varphi) \in B \text{ join } \Phi.$$

Тогда:

$$\varphi \in A_i \Leftrightarrow 0\varphi \in A \text{ join } \Phi \Leftrightarrow M(0\varphi) \in B \text{ join } \Phi$$

Заметим, что $\varphi \in A_i \Leftrightarrow \varphi \neq f_i$ т.е.

$$\varphi \neq f_i \Leftrightarrow M(0\varphi, 0) = 0 \;\&\; \lambda x\, M(0\varphi, x+1) \in B, \quad (9)$$

или

$$\varphi = f_i \Leftrightarrow M(0\varphi, 0) > 0 \vee \lambda x\, M(0\varphi, x+1) \bar{\in} B$$

Допустим, что $M(0\varphi, 0) > 0$ для некоторой φ. Но $M(0\varphi, 0)$ зависит лишь от начального куска φ, так что $M(0\psi, 0) > 0$ для всех ψ из некоторой окрестности φ. Но тогда $\psi = f_i$ для этих ψ, что невозможно. Итак, $M(0\varphi, 0) = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{F}$ и (9) принимает вид:

$$\varphi \neq f_i \Leftrightarrow \lambda x\, M(0\varphi, x+1) \in B,$$

т.е. $A_i \leq_m B$, что и требовалось.

Теоремы 3, 5 и 6 дают следующее

<u>Следствие</u>. Пусть $A_n = \mathcal{F} \setminus \{f_n\}$, где множество W_n нерекурсивно. Тогда $A_n \text{ join } \Phi$ - нормальный класс, причем всегда:

$$A_i \text{ join } \Phi \leq_m A_j \text{ join } \Phi \Leftrightarrow W_j \leq_T W_i.$$

Это и есть упомянутое второе "вложение в обратном порядке".

Итак, из соответствующих результатов для T - степеней множеств чисел следует существование несравнимых m-степеней в полурешетке как нормальных, так и особенных m-степеней. Разумеется, до уровня полноты, достигнутого для множеств чисел, здесь еще далеко.

6. <u>Сравнение различных сводимостей на $\Sigma_1^{f_n}$.</u>

Тривиальное различие m- и $1tt$-сводимости заключается в том, что:

1) m - степени $\{\phi\}$, $\{\mathcal{F}\}$, $\{$нетривиальные рекурсивные классы$\}$ различны, из них только $\{\mathcal{F}\}$ меньше особенных m - степеней;

2) $1tt$ - степень $\{$все рекурсивные классы$\}$ меньше всех других $1tt$ - степеней.

Более интересное отличие, проявляющееся на Σ_1^{fn}, состоит в следующем: по теореме 3 для особенного класса $\mathcal{B}$: $\mathcal{B} <_m \mathcal{B}\ join\ \phi$. Для $1tt$ - сводимости не имеет место.

<u>Теорема 7</u>. $\mathcal{B} \equiv_{1tt} \mathcal{B}\ join\ \phi$ для всех $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$

<u>Доказательство</u>. $\mathcal{B} \leqslant_1 \mathcal{B}\ join\ \phi$, поэтому достаточно показать, что $\mathcal{B}\ join\ \phi \leqslant_{1tt} \mathcal{B}$. Нам нужен, по существу, некоторый ОРФ F значением $F(\varphi)$ которого является пара $\langle m, \varphi \rangle$, где $[m, \varphi] \in \mathcal{F}$ а β - одноместная булева функция.

Если $\varphi(0) > 0$ положим: m - такое, что $[m, \varphi] = \varphi$, а $\beta \equiv 0$. Если же $\varphi(0) = 0$, положим: m - такое, что $[m, \varphi] = \lambda x\, \varphi(x+1)$, а $\beta(x) = x$ Тогда:

$$\varphi \in \mathcal{B}\ join\ \phi \Leftrightarrow \varphi(0) = 0\ \&\ \lambda x\, \varphi(x+1) \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \beta(|[m, \varphi] \in \mathcal{B}|),$$

что и требовалось.

<u>Теорема 8</u>. Всякий класс, $1tt$ - универсальный в Σ_1^{fn} является m - универсальным в Σ_1^{fn}, т.е. $d_m(\mathcal{U}^{(\omega)}) = d_{1tt}(\mathcal{U}^{(\omega)}) \cap \Sigma_1^{fn}$. (Большего ожидать не приходится из-за $A \equiv_{1tt} \bar{A}$.)

<u>Доказательство</u>. Поскольку $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\}$ - m - универсальный класс в Σ_1^{fn}, то достаточно показать, что из $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_{1tt} \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \in \Sigma_1^{fn}$ следует, что $\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leqslant_m \mathcal{B}$.

Значение $F(0^\infty)$ $1tt$ - сводящего функционала F зависит только от некоторого начального куска 0^ℓ, обозначим это значение через $\langle m, \beta \rangle$. Итак:

$$0^\ell \varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(|[m, 0^\ell \varphi] \in \mathcal{B}|),$$

причем, по определению, для всех $\gamma \in \mathcal{F}$ имеем: $[m, 0^\ell\gamma] \in \mathcal{F}$. Поэтому можно определить рекурсивный оператор

$$M(\gamma) = [m, 0^\ell \gamma]$$

Тогда:

$$\gamma \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(|M(\gamma) \in B|). \qquad (4)$$

Для функции β (она фиксирована) возможны, вообще говоря, 4 варианта: $\beta \equiv 0$, $\beta \equiv 1$, $\beta(x) = x$, $\beta(x) = \bar{x}$ Первые два отпадают сразу, ибо левая часть (4) непостоянна. В случае четвертого мы имели бы:

$$\gamma \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\gamma) \bar{\in} B,$$

т.е. $\{0^\infty\} \leq_m B$, что невозможно, ибо из теоремы I следует, что $\{0^\infty\} \in \Pi_1^{f_n} \setminus \Sigma_1^{f_n}$, а $B \in \Sigma_1^{f_n}$. Итак, $\beta(x) = x$ и (4) принимает вид

$$\gamma \neq 0^\infty \Leftrightarrow M(\gamma) \in B,$$

что и требовалось.

<u>Замечание</u>. Теоремы 7, 8 верны и для множеств чисел. Открытым остается вопрос о различии $d_{ttt}(\mathcal{U}^{(\omega)})$ и $d_{btt}(\mathcal{U}^{(\omega)})$, а также $d_m(\mathcal{U}^{(\omega)})$ и $d_{btt}(\mathcal{U}^{(\omega)}) \cap \Sigma_1^{f_n}$. Весьма вероятно, что ситуация здесь будет такой же, как в случае множеств чисел (см. [I]).

Однако, в противоположность этому случаю, имеет место

<u>Теорема 9</u>. $d_{btt}(\mathcal{U}^{(\omega)}) = d_{tt}(\mathcal{U}^{(\omega)})$.

<u>Доказательство</u>. Достаточно показать, что

$$\mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_{tt} B \Rightarrow \mathcal{F} \setminus \{0^\infty\} \leq_{btt} B.$$

Значение $S(0^\infty)$ tt - сводящего функционала S зависит только от некоторого начального куска 0^ℓ, обозначим это значение через $\langle m_1, \ldots, m_k, \beta \rangle$ Тогда для всех φ

$$0^\ell\varphi \neq 0^\infty \Leftrightarrow \beta(\ldots |[m_i, 0^\ell\varphi] \in B| \quad). \qquad (5)$$

Определим орф h_1 такую, что для всех x и φ :

$$[h(x), \varphi] = [x, 0^{\ell}\varphi].$$

Тогда постоянный ОРФ S'

$$S'(\varphi) = \langle h(m_1), \ldots, h(m_k), \beta \rangle$$

в силу (5) btt-сводит $\mathfrak{F} \setminus \{0^{\infty}\}$ к B что и требовалось.

Открытым остается вопрос о различии $d_{tt}(\mathcal{U}^{(\omega)})$ и $d_T(\mathcal{U}^{(\omega)})$.

<u>Теорема 10</u>. Особенный класс не может быть T-универсальным в Σ_1^{fn}.

(Это свойство является, очевидно, общим для всех видов сводимости классов функций.)

<u>Доказательство</u>. От противного, пусть $\mathfrak{F} \setminus \{0^{\infty}\} \leq_T B$ для некоторого особенного класса B, т.е. существует машина Z, которая с оракулами φ, B вычисляет ХФ предиката $\varphi \neq 0^{\infty}$.

Если взять $\varphi = 0^{\infty}$ то Z остановится, напечатав 1. При этом оракулу φ будет задано конечное число вопросов вида „$\varphi(x) = ?$" (и получены ответы - 0). Пусть эти вопросы не касаются значений $\varphi(x)$ для $x \geq \ell$. Оракулу B при этом будет задано конечное число вопросов вида „$[m, 0^{\infty}] \in B$?" (где $[m, 0^{\infty}] \in \mathfrak{F}$, даже $\in \mathcal{R}$) и получены ответы "да", ибо B - особенного класса.

Покажем, что тогда Z остановится, напечатав 1, и в случае $\varphi = 0^{\ell} 1^{\infty}$. В самом деле, в процессе этого вычисления Z будет задавать оракулу φ те же вопросы, что и при $\varphi = 0^{\infty}$ (и получать те же ответы - 0). Оракулу B при этом будут заданы вопросы „$[m, 0^{\ell} 1^{\infty}] \in B$?" с теми же m, что и в случае $\varphi = 0^{\infty}$ (заметим, что отличие $0^{\ell} 1^{\infty}$ от 0^{∞} не содержится в конфигурациях Z). Ответы в этом случае будут те же - "да", ибо опять $[m, 0^{\ell} 1^{\infty}] \in \mathcal{R}$, а B - особенный класс.

Итак, по определению Z $\rceil(0^{c}1^{\infty} \neq 0^{\infty})$. Противоречие, следовательно B не есть T - универсальный класс,

Теорема 10 фактически устанавливает существование неуниверсальных и нерекурсивных T - степеней на Σ_1^{1u}. Существование несравнимых T - степеней остается недоказанным.

7. <u>Замечания о сводимостях классов множеств</u>

В [1] (гл.15, § 1) рассматривается также арифметическая иерархия классов множеств: $\Sigma_n^{(s)}$, $\Pi_n^{(s)}$ $(n \geq 0)$. Часть выше изложенного легко переносится на этот случай.

Определения сводимостей и формулировки их простейших свойств требуют лишь замены $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}^{\circ}$. Теорему 1 можно переформулировать (заменив $\mathcal{U}^{(1)}$ на более сложный объект) и передоказать, хотя это несколько сложнее.

Теорема 2 и ее следствие верны для $\mathcal{F}^{\circ}$ без изменений. Существование особенных классов следует в этом случае из нашего примера 2 (см.раздел 4). Сильнейший результат этого рода для $\mathcal{F}$, приведенный в [1], не имеет место для $\mathcal{F}^{\circ}$ здесь верна

<u>Теорема 11</u>. Если B - нетривиальный класс из $\Sigma_1^{(s)}$, то $\overline{B}$ содержит множество из $\Sigma_2 \cap \Pi_2$.

Это нетрудно показать, используя язык предельной рекурсии 2

Теорема 9 остается верной для $\mathcal{F}^{\circ}$, тем самым общая характеристика полурешетки m - степеней на $\Sigma_1^{(s)}$ совпадает со случаем Σ_1^{1u}.

Особенных классов вида $\mathcal{F}^{\circ} \setminus \{\pi\}$ на $\Sigma_1^{(s)}$ не имеется, как показывает

<u>Теорема 12</u>. $\mathcal{F}^{\circ} \setminus \{\pi\} \in \Sigma_1^{(s)}$ если и только если π - рекурсивное множество.

Итак, результаты раздела 5 не имеют аналогов в случае $\mathfrak{F}^\circ$.

Результаты же раздела 6 (о сравнении различных сводимостей) переносятся на $\mathfrak{F}^\circ$ без изменений.

Литература

1. Rogers H., The theory of recursive functions and effective computability, Mc Graw-Hill, N-Y,1967.
2. Gold E.M., Limiting recursion, Journal of Symbolic Logic, vol 30, N 1 /March 1965/.
3. Gold E.M., Language identification in the limit, Information and Controll, vol 10, N 5 /May 1967/.

ОГЛАВЛЕНИЕ