

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
FIZIKAS NODAĻA

**Fraktālanalīzes metožu izmantošana Latvijas ģeoloģisko
struktūru izpētē**

MAGISTRA DARBS

Autore: **Arta Kudlāne**

Stud. apl.: ak06149

Darba vadītājs: asoc. prof. Dr.h.Phys. **Juris
Žagars**

RĪGA 2012

ANOTĀCIJA

Maģistra darbs tika veikts, lai novērtētu fraktālanalīzes un fraktālās dimensijas noteikšanas potenciālu Latvijas ģeoloģisko struktūru analīzē un klasifikācijā.

Darbs sastāv no divām daļām – pirmajā ir apkopota informācija par fraktālanalīzi un tās lietojumiem, bet otrajā – aprēķinātas fraktālās dimensijas ģeoloģiskām struktūrām un analizētas fraktālās dimensijas noteikšanas metodes. Latvijas ģeoloģisko struktūru paraugi tika analizēti ar trīs fraktālās dimensijas noteikšanas metodēm – jaudas spektra analīzes, kastīšu skaitīšanas un Higuči metodēm. Darba rezultātā tika apkopota informācija par analizēto ģeoloģisko struktūru fraktālajām dimensijām. Šie rezultāti parāda, ka Latvijas ģeoloģisko struktūru izpētē fraktālanalīze var tikt veiksmīgi izmantota, un šajā jomā ir vēl daudz pētāmu jautājumu.

Atslēgvārdi: fraktālanalīze, fraktālā dimensija, ieži, Higuči, jaudas spektra analīze, kastīšu skaitīšana.

ANNOTATION

The purpose of the thesis was to assess potential of determining fractal dimension of images in order to analyze and classify geological structures of Latvia.

The work consists of two parts. In the first part information about fractal analysis and applications is gathered. The second part consists of the results of fractal dimension calculations and analysis of methods that were used. Samples were analyzed by three different methods – Higuchi method, power spectrum method and box counting method. Information about fractal dimension of analyzed geological structures was summarized. From the results conclusions have been made – fractal analysis can be used for research of geological structures of Latvia and there is a lot more to investigate in this field.

Key words: fractal analysis, fractal dimension, rocks, Higuchi, power spectrum analysis, box counting.

SATURS

APZĪMĒJUMU SARAKSTS	5
IEVADS	6
1. TEORĒTISKAIS APSKATS	8
1.1. FRAKTĀĻI	8
1.1.1. Fraktāļu vēsture	9
1.1.2. Fraktāļu jēdziens.....	10
1.1.3. Fraktāļu klasifikācija	11
1.1.4. Klasiskie fraktāļi.....	14
1.1.5. Fraktāļu pielietojums	16
1.2. FRAKTĀLANALĪZE UN FRAKTĀLĀ DIMENSIJA	19
1.2.1. Fraktālanalīze.....	19
1.2.2. Fraktālā dimensija	20
1.3. FRAKTĀLĀS DIMENSIJAS NOTEIKŠANAS METODES	25
1.3.1. Kastīšu skaitīšanas metode	26
1.3.2. Jaudas spektra analizēšanas metode	27
1.3.3. Higuči metode	29
1.3.4. Citas metodes.....	30
1.4. FRAGMENTĀCIJA.....	31
2. PĒTNIECISKĀ DAĻA	32
2.1. FRAKTĀLANALĪZES LOMA ĢEOLOĢISKO STRUKTŪRU IZPĒTĒ	32
2.2. FRAKTĀĻU MODELĒŠANA	33
2.3. FRAKTĀLĀS DIMENSIJAS NOTEIKŠANA ĢEOLOĢISKĀM STRUKTŪRĀM LATVIJĀ.....	36
2.3.1. Ģeoloģisko struktūru attēlu iegūšana un izvēle.....	36
2.3.2. Fraktālās dimensijas noteikšanas metožu programmu izveide.....	37
2.3.3. Fraktālās dimensijas noteikšana konkrētām struktūrām.....	39
REZULTĀTI.....	49
SECINĀJUMI.....	50
PATEICĪBAS.....	51
IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI	52
PIELIKUMI.....	54

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

FD vai *D* - fraktālā dimensija;

FFT – ātrā Furjē transformācija (Fast Fourier transform);

HFD vai *H_FD* – Higuči fraktālā dimensija;

KFD vai *KS_FD* – Kastīšu skaitīšanas metodes fraktālā dimensija;

J_FD – Jaudas spektra analīzes fraktālā dimensija;

1D – viena Eiklīda dimensija;

2D – divas Eiklīda dimensijas;

3D – trīs Eiklīda dimensijas.

IEVADS

Fraktālām struktūrām ir liela nozīme mūsu apkārtējās pasaules aprakstīšanā. Fraktāļu burvība slēpjas faktā, ka tos mēs varam redzēt dabā dažnedažādās formās un struktūrās. Tie pārsteidz ar savu līdzību reāliem objektiem dabā – zibenim, ogles struktūrai, kalniem, mākoņiem, uguns liesmai, papardēm, jūras krasta līnijai, brokoļiem, kokiem, cilvēka plaušām un daudziem citiem neskaitāmiem objektiem. Iespējams tieši šis ir iemesls, kāpēc fraktāļi tiek pielietoti tik dažādās nozarēs – datorgrafikā, matemātikā, medicīnā, ekonomikā, mūzikā, mākslā, ģeoloģijā, fizikā un citur. Šī darba ietvaros tiek apskatīts viens konkrēts fraktāļu lietojuma virziens – fraktāļu izmantošana ģeofizikā, konkrētāk ģeoloģisko struktūru izpētē. Darbā tiek analizētas Latvijas ģeoloģiskās struktūras.

Viens no uzskatāmākajiem veidiem kā var aprakstīt fraktāli, ir tā fraktālās dimensijas noteikšana. Šis lielums ģeoloģisku struktūru pētīšanas gadījumā sniedz noderīgu papildus parametru ģeologiem, ar ko raksturot pētāmās ģeoloģiskās struktūras. Pēdējos gados pasaulē aizvien plašāk tiek novērtētas fraktālanalīzes sniegtās iespējas. Latvijā fraktālanalīzes izmantošana ģeoloģisku struktūru izpētē gandrīz nenotiek – līdz šim tikai nedaudz apskatīti daži atsevišķi ģeofizikas virzieni, kuros varētu izmantot fraktālanalīzi.

Darbā, galvenokārt, tiek apskatīta tādu Latvijas ģeoloģisko struktūru izpēte kā Latvijas ieži. Iežu digitālo attēlu analīzei var lietot dažādas fraktālās dimensijas noteikšanas metodes. Darbā tiek pārbaudītas gan tādas iežu digitālo attēlu fraktālās dimensijas noteikšanā plaši izmantotas metodes kā jaudas spektra analizēšanas un kastīšu skaitīšanas metodes, gan arī iežu digitālo attēlu analīzei jauna - Higuči – metode. Darbā tiek izvirzīta hipotēze, ka ar Higuči fraktālās dimensijas noteikšanas metodi ir iespējams noteikti fraktālo dimensiju ģeoloģiskām struktūrām.

Darba mērķis ir novērtēt fraktālanalīzes un fraktālās dimensijas noteikšanas potenciālu Latvijas ģeoloģisko struktūru analīzē un klasifikācijā.

Kā darba uzdevumi tiek izvirzīti:

1. Fraktālanalīzes teorijas un metožu apzināšana;
2. Fraktāļu modelēšana un to fraktālās dimensijas noteikšana;
3. Fraktālās dimensijas noteikšana reāliem ģeoloģiskiem objektiem ar jaudas spektra analizēšanas, kastīšu skaitīšanas un Higuči metodēm;
4. Fraktālās dimensijas noteikšanas metožu salīdzināšana un analīze.

Darba mērķis un uzdevumi tiek realizēti 6 maģistra darba nodaļās. Pēc satura šīs nodaļas iedalāmas divās daļās. Pirmā daļa sastāv no teorijas par fraktālanalīzi apkopojuma, fraktālanalīzes metožu apzināšanas. Otrā daļa sastāv no pētnieciskās daļas – fraktālu modelēšanas, fraktālās dimensijas noteikšanas modelētiem un reāliem – Latvijas ģeoloģisko struktūru - objektiem, un šo metožu salīdzināšanas.

Lai realizētu darba uzdevumus, tiek izmantota tāda metodika kā informācijas apkopošana un analizēšana, matemātiskā modelēšana un programmēšana datorprogrammā *Matlab*, iegūto datu apstrāde un analīze. Kā faktoloģiskā materiāla avots tika izmantotas grāmatas, interneta mājaslapas, zinātniskie raksti un studiju noslēgumu darbi.

Analizējot visu darbā aprakstīto informāciju tiek iegūti secinājumi par fraktālanalīzes metožu izmantošanu Latvijas ģeoloģisko struktūru izpētē.

1. TEORĒTISKAIS APSKATS

1.1. Fraktāļi

Fraktāļi zināmi ne tikai kā matemātisks jēdziens vai modelis, bet arī kā dabā un dažādās nozarēs plaši sastopami objekti. Precizitātes labad jāsaka, ka biežāk gan sastopamies nevis ar fraktāļiem, bet fraktālām struktūrām, tas ir, struktūrām, kas sevī iekļauj fraktāļus vai to fragmentus. Šādas struktūras plaši sastopamas arī cilvēka organismā. Viens no piemēriem varētu būt cilvēka asinsrites sistēma. Asinsrites sistēmai piemīt izteikta pašlīdzība. Lielākie asinsvadi ir līdzīgi mazākajiem, kuri atzarojas no lielākajiem. Tāpat dabā ir vēl daudz citu piemēru, kuros var novērot fraktāļiem raksturīgas īpašības. Viens no spilgtākajiem piemēriem, ar kuru ir sastapies gandrīz jebkurš cilvēks, ir infekciju slimības, kuras izplatās nezināmā virzienā (haotiski) pa pieejamo telpu un kuru atraktors ir fraktālis. [1]

Gan dzīvajā, gan nedzīvajā dabā bieži varam novērot fraktālas struktūras. Daži fraktālu struktūru piemēri aplūkojami 1.1. attēlā [2], [3]. Visbiežāk apskatītais fraktālu līdzības piemērs ar dabu ir papardes auga uzbūve, kurā var pamanīt tās pašatkārtošanos, sīkstruktūru un sarežģīto uzbūvi. Piemērs ar papardi nav vienīgais, kurš raksturo fraktālu haotisko struktūru un lauztās līnijas. Tikpat līdzīgs fraktāļiem ir arī zibens, ogles struktūra, mākoņi, jūras krasta līnija, kā arī daudzi citi objekti. Tātad fraktāļi ir sastopami gandrīz jebkur dabā un daudz dabā esošu reālu objektu ir iespējams attēlot ar fraktāļu palīdzību. [1]



1.1. att. Dabā sastopamas fraktālas struktūras

Šeit arī slēpjas fraktāļu izmantošanas iespēju noslēpums – tā ir to unikālā spēja veiksmīgi un matemātiski precīzi aprakstīt neskaitāmus dabiskus, reālus objektus. Fraktāļu lietojumus dažādās nozarēs apskatīsim tālāk šajā nodaļā, bet vispirms noskaidrosim: kas tad ir fraktālis un ko mēs ar to saprotam.

1.1.1. Fraktāļu vēsture

Pats vārds “fraktālis” nāk no latīņu valodas. 1975.gadā strādājot pie esejas par jauno, fraktālo ģeometriju, kura pirmoreiz tika publicēta viņa grāmatā ar nosaukumu „*Les objets fractals, form, hasard et dimension,*” Benuā Mandelbrotam bija jāatrod tai piemērots vārds. Mandelbrots, kurš uzskatāms par fraktālās ģeometrijas pamatlicēju, izvēlējās nosaukumu “fraktālis” no latīņu vārda “*fractus*”, t.i. „daļa”. Šis vārds, piemēram, raksturo akmens lausku – nolauztu un neregulāru. [4]



1.2. att. Fraktālās ģeometrijas pamatlicējs Benuā Mandelbrots

Fraktālās ģeometrijas pirmsākumi meklējami jau 17.gadsimtā, kad vācu matemātiķis un filozofs Leibnics apskatīja rekursīvu pašlīdzību (kļūdaini uzskatot, ka tikai taisne ir sev pašlīdzīga šādā nozīmē). 1872.gadā K.Veierštrāss deva piemēru funkcijai, kura ir nepārtraukta, bet kura nav nevienā punktā diferencējama, - šodien šādas funkcijas grafiku mēs sauktu par fraktāli. 1915.gadā poļu matemātiķis Vaclavs Serpinskis konstruēja īpašu trīsstūri, vēlāk arī četrstūri. Ap 1920.gadu funkciju uzvedību kompleksā plaknē sāka pētīt franču matemātiķi P. Fatū un G.Džūlija. Tomēr viņu fascinējošie darbi palika neievēroti vēl ilgu laiku citu matemātiķu vidū. 1945.gadā B. Mandelbrotu viņa tēvocis iepazīstināja ar Džūlijas darbiem, bet arī Mandelbrots tolaik tam nepievērsa lielu vērību. Uzmanību šim darbam

Mandelbrots pievērsa 70-tajos gados, kad viņš strādāja IBM Vatsona Pētniecības laboratorijā ASV, kur viņam bija pieejami vismodernākie datori. Tas ļāva veikt sarežģītus aprēķinus un ar datorprogrammas palīdzību tika radīti pirmie grafiskie attēli. Var teikt, ka fraktāļu ģeometrijas tapšanā nenoliedzami visnozīmīgākā loma bija tieši datoriem. Šīs darbības rezultātā tad arī radās 1982.gadā B.Mandelbrota darbs „Dabas fraktāļu ģeometrija”, kas uzskatāms par pirmo nopietno darbu jaunajā matemātikas virzienā – fraktālā ģeometrija. [5]

Tomēr, lai nonāktu līdz fraktālās dimensijas nopietnākai pētīšanai un to iespējamo lietojuma virzienu aptveršanai bija nepieciešams vēl kāds laiks. Nopietnāki un plašāki fraktālās dimensijas noteikšanas eksperimenti dažādās nozarēs sākās pagājušā gadsimta 90.–tajos gados un turpinās joprojām. [6]

1.1.2. Fraktāļu jēdziens

Fraktāļu jēdziens nav nostabilizējies viennozīmīgi, un tam literatūrā ir atrodamas dažādas definīcijas. Benuā Mandelbrots fraktāli definē šādi [7]:

Definīcija 1.1. *Fraktālis* ir neregulāras vai sadrumstalotas formas, kuras var sadalīt mazākās daļās tā, ka jauniegūtās daļas ir sākotnējās formas samazināta izmēra kopijas.

Tajā pašā laikā Lielo terminu vārdnīcā [8] teikts, ka:

Definīcija 1.2. *Fraktālis* – attēlā ietverta ģeometriskā figūra (kontūra), kas precīzi saglabā savu apveidu neatkarīgi no tā, kā tiek palielināts vai samazināts pats attēls (piem., krasta līnija, mākonis, koks u.c.).

Formālā matemātiskā definīcija [5] saka, ka:

Definīcija 1.3. *Fraktālis* ir punktu kopa, kuras fraktālā dimensija ir lielāka par tās topoloģisko dimensiju.

Ar fraktāļa formulēšanu caur fraktālās dimensijas jēdzienu iepazīsimies turpinājumā 1.2.2. nodaļā, apskatot fraktālās dimensijas definīciju.

Definīcija 1.4. Saka, ka kopai A ir *topoloģiskā dimensija* 0 , ja jebkuram kopas A punktam eksistē tāda apkārtnē, kuras robeža nešķēļas ar kopu A . Saka, ka kopai A ir *topoloģiskā dimensija* $k > 0$, ja jebkuram kopas A punktam eksistē tāda apkārtnē, kuras robežas šķēlums ar kopu A ir kopa ar topoloģisko dimensiju $k-1$ un k ir mazākais pozitīvais veselais skaitlis, kuram šī īpašība izpildās. [5]

Lekciju konspektā [5] ļoti precīzi norādīts, ka neviena no definīcijām netiek uztverta kā vispārpieņemta, jo katra no tām neietver kādu no objektiem, kuru vajadzētu saukt par fraktāli.

Iespējams, daudz būtiskākas kā šīs definīcijas, fraktāļu veiksmīgai uztveršanai ir fraktāļu īpašības, kuras definētas [9] šādi:

- 1) Tiem ir sīka, smalka struktūra patvaļīgi mazos skalas izmēros;
- 2) Tie ir pašlīdzīgi (vismaz aptuveni);
- 3) Tie ir pārāk neregulāri, lai tos viegli aprakstītu ar tradicionālo Eiklīda ģeometriju;
- 4) Tiem ir dimensija, kas nav vesels skaitlis, un tā ir lielāka par objekta topoloģisko dimensiju;
- 5) Tie ir vienkārši, bieži vien rekursīvi, definējami.

No fraktāļu dažādajām definīcijām un īpašībām varam secināt, ka fraktāļi nav viennozīmīgi definējami, jo tiem pastāv daudz un dažādi veidi. Turpinājumā apskatīsim kā varam iedalīt fraktāļus.

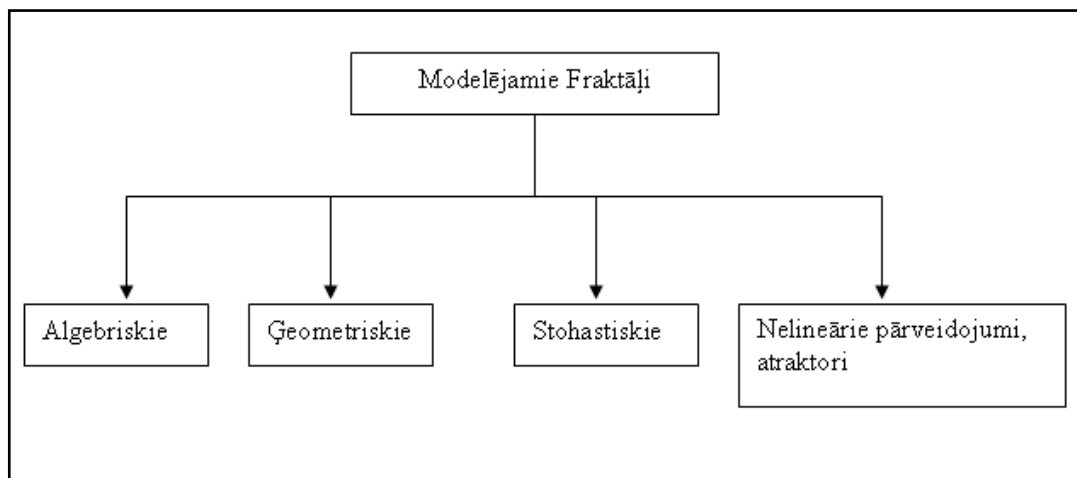
1.1.3. Fraktāļu klasifikācija

Fraktālas struktūras var iedalīt dažādās kategorijās pēc dažādiem parametriem. Pēc tā, kā fraktālis ir veidots, fraktāļus var iedalīt dabiskajos un modelējamos [1]. Kā jau nosaukumi liecina – dabiskie ir sastopami dabā un modelētie ir izveidoti mākslīgi, galvenokārt ar dažādu datorprogrammu palīdzību.



1.3.att. Modelēta (pa kreisi) un dabiska (pa labi) fraktāla ainava [3]

Modelējamus fraktāļus sīkāk var iedalīt šādi:



1.4. att. Modelējamo fraktāļu iedalījums [1]

Algebriskie fraktāļi tiek veidoti no algebriskiem vienādojumiem. Šī ir vislielākā fraktāļu grupa. Kā piemēru apskatīsim vienādojumus no kādiem veidojas Mandelbrota kopa (1.5. att.):

$$z_{i+1} = z_i^2 + c, \quad (1.1.)$$

$$z = x + iy \text{ un } c = p + iq, \quad (1.2.)$$

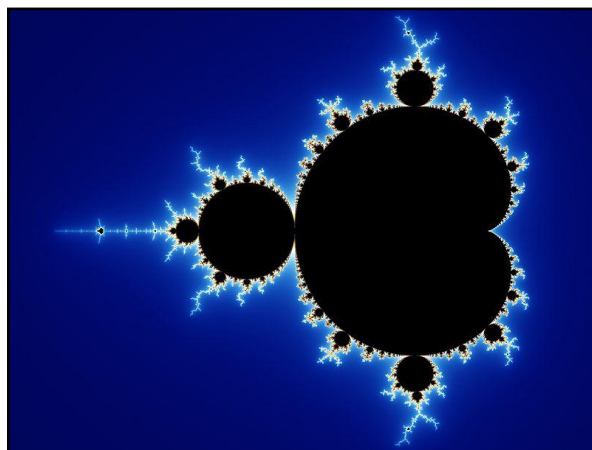
$$x_{i+1} = x_i^2 - y_i^2 + p, \quad (1.3.)$$

$$y_{i+1} = 2 \cdot x_i \cdot y_i + q, \quad (1.4.)$$

no tā seko, ka

$$|z_{i+1}| = \sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2}, \quad (1.5.)$$

kur z un c ir kompleksi skaitļi, x un y ir mainīgās koordinātas divās dimensijās, q un p ir konstantes.[1]



1.5. att. Mandelbrota kopas attēlojums [6]

Ģeometriski fraktāļi ir visuzskatāmākie. Visos mērogos tieši šī fraktāļu grupa uzrāda vislielāko pašlīdzību. Divdimensiju (vai arī trīsdimensiju) gadījumā ģeometriskos fraktāļus ir iespējams iegūt ar lauztām līnijām, kuras tiek sauktas par ģeneratoru. Pēc katra algoritma soļa viens no posmiem, attiecīgajā mērogā, tiek aizvietots ar lauztu līniju. Bezgalīgas atkārtošānās rezultātā tiek iegūts fraktālis.

Atraktori ir kopas fāzu telpā uz kurām mainīgais, kas pārvietojas noteiktā dinamiskā sistēmā, konverģē laika gaitā.[10]

Pēdējā no fraktāļu klasēm ir stohastiskie fraktāļi, kuri tiek iegūti, ja izmanto gadījuma skaitļu ģeneratorus. Šādā veidā objekti ir ļoti līdzīgi dabā esošajiem objektiem - nesimetriskiem kokiem, izrobotām krasta līnijām utt. Divdimensiju stohastiskie fraktāļi tiek izmantoti apvidus reljefa modelēšanā un jūras virsmas modelēšanā. [3]

Augstāk minētais bija tikai viens no iespējamajiem fraktāļu klasifikācijas veidiem. Visus fraktāļus var iedalīt arī trīs plašās kategorijās atkarībā no tā, kā fraktālis tiek definēts vai izveidots [11]:

- 1) iteratīvās funkciju sistēmas (piemēram, Kantora kopa, Koha sniegpārslīņa);
- 2) *escape-time* fraktāļi (piemēram, Mandelbrota kopa, Pildītās Džūlija kopas);
- 3) gadījuma fraktāļi (fraktāļu ainavas, Brauna kustība).

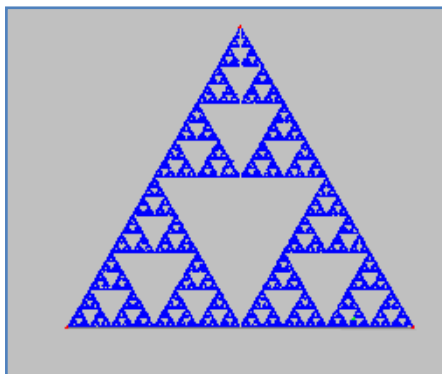
Escape – time fraktāļi ir tādi fraktāļi, kuru veidošanai izmanto iterāciju atkārtošānās skaitu katrā telpas punktā (piemēram, kompleksā plaknē).[6]

Fraktāļi var tikt iedalīti arī atkarībā no to pašlīdzības pakāpes [11]:

- 1) stingra pašlīdzība (*exact self-similarity*) – fraktālis ir identisks jebkurā mērogā. Fraktāļi, kuri definēti ar iteratīvu funkciju sistēmu, parasti ir stingri pašlīdzīgi;
- 2) daļēja pašlīdzība (*quasi-self-similarity*) – ne tik stingra pašlīdzības forma, fraktālis ir aptuveni identisks dažādos mērogos. Daļēji pašlīdzīgi fraktāļi satur mazākas visa fraktāļa kopijas sagrozītā un deformētā formā. Parasti *escape-time* fraktāļi ir daļēji pašlīdzīgi;
- 3) statistiska pašlīdzība (*statistical self-similarity*) – vājākā pašlīdzības forma, fraktālis ir pašlīdzīgs tikai zināmās mēroga robežās. Visi gadījuma fraktāļi ir statistiski pašlīdzīgi.

Vēl visus fraktāļus iedala divās lielās grupās: determinētie fraktāļi un gadījuma fraktāļi. Determinētie fraktāļi tiek veidoti, izmantojot matemātiskas konstrukcijas. Būtībā tie ir iterāciju (rekursiju algoritma) rezultāts. Formāli par fraktāli var saukt tikai tādu objektu, kuram iterācijas ir izpildītas bezgalīgi daudzas reizes. Gadījuma fraktāļiem, savukārt, ir daudz

lielāka praktiskā nozīme. Gadījuma fraktāļi tiek modelēti un pēc tam analizēti tādās nozarēs kā fizika, ķīmija, bioloģija u.c.. Būtiska gadījuma fraktāļu iezīme ir tā, ka fraktāļa veidošanās procesā ir iesaistīts nejaušības moments. Gadījuma fraktāļi ir tie, kas visbiežāk sastopami dabā.



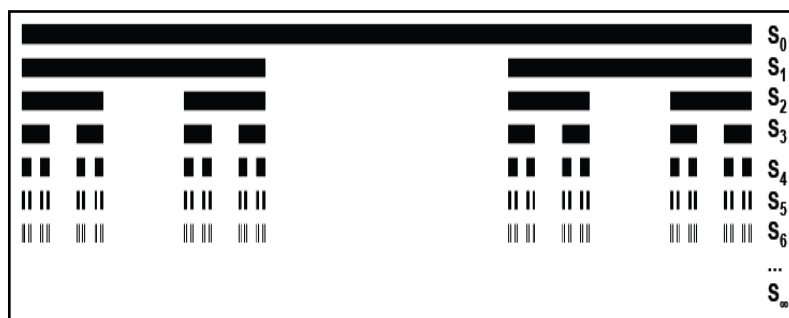
1.6. att. Determinēta fraktāļa piemērs - Sierpinska trīsstūris

1.1.4. Klasiskie fraktāļi

Laika gaitā veidojoties fraktāļu teorijas pamatiem kļuvuši populāri, tā saucamie, klasiskie fraktāļi, kas radīti ar matemātiskās modelēšanas palīdzību. Kā šādi fraktāļi ir zināmi – Koha līkne, Koha sniegpārslīņa, Sierpinska trīsstūris un paklājs, Sātana trepes, Bārnslija paparde, Džūlija un Mandelbrota kopas, Ņūtona baseins, Kantora kopa un daudzi citi. Lai gūtu pilnīgāku priekšstatu par fraktāļiem, īsi iepazīsimies ar dažiem no šiem klasiskajiem fraktāļiem.

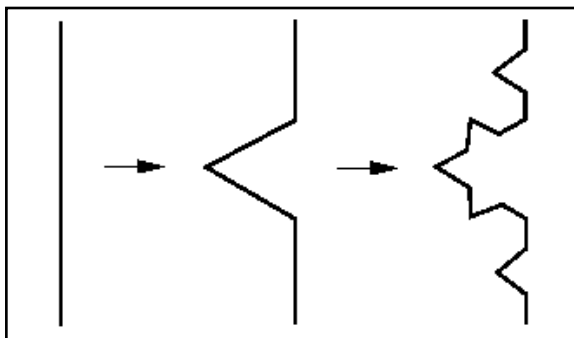
Kantora kopa (1.7.att.) tiek iegūta rekursīvi katrā nākamajā iterācijā izņemot 1/3 līnijas vidējās daļas. Kantora kopas īpašības, kas tiek iegūtas pēc bezgalīga skaita iterāciju [12]:

- 1) Kopai ir noteikta struktūra patvaļīgi mazā skalā;
- 2) Kopa ir pašlīdzīga: tā satur mazākas savas kopijas visās skalās;
- 3) Kopas fraktālā dimensija nav vesels skaitlis.



1.7. att. Kantora kopa, S – iterāciju skaits [12]

Koha līkne ir fraktālis, kas ģenerēts ar aizstāšanas likumu. Šis likums paredz katrā solī vidējo trešdaļu no katra līnijas segmenta aizstāt ar divām vienādmalu trīsstūra malām, kas katra ir vienāda ar aizstājamās līnijas garumu. Divas pirmās iterācijas izskatās šādi [13]:

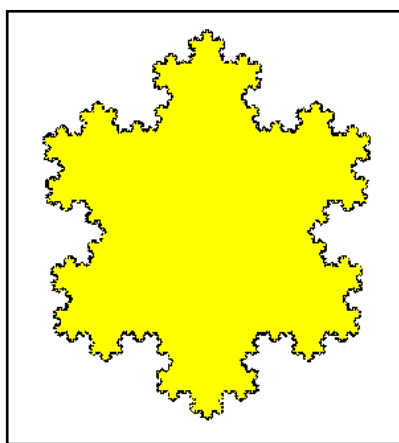


1.8. att. **Koha līknes pirmās divas iterācijas** [13]

Ja Koha līknes garums no sākuma pirms iterēšanas ir l , Koha līknes garums L_k n -tajā iterācijā būs izsakāms kā [13]:

$$L_k = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot l. \quad (1.6.)$$

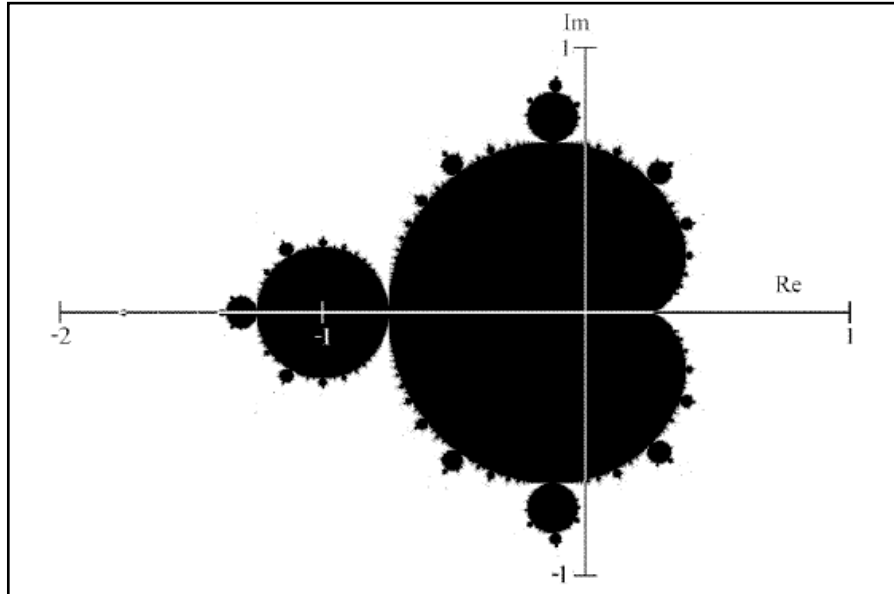
Koha sniegpārslīņa rodas šo pašu principu bezgalīgu skaitu reižu pielietojot vienādmalu trīsstūrim.



1.9. att. **Koha sniegpārslīņa** [14]

Mandelbrota kopa, kā jau iepriekš minēju, ir algebrisks fraktālis, kurš veidojas no formulas kompleksā plaknē: $z_{i+1} = z_i^2 + c$. Mandelbrota kopu raksturo sekojošas īpašības [12]:

- 1) Kopa ir savienota;
- 2) Mandelbrota kopai ir fraktāla robeža;
- 3) Kopa veidojas algebriskas iterācijas rezultātā.



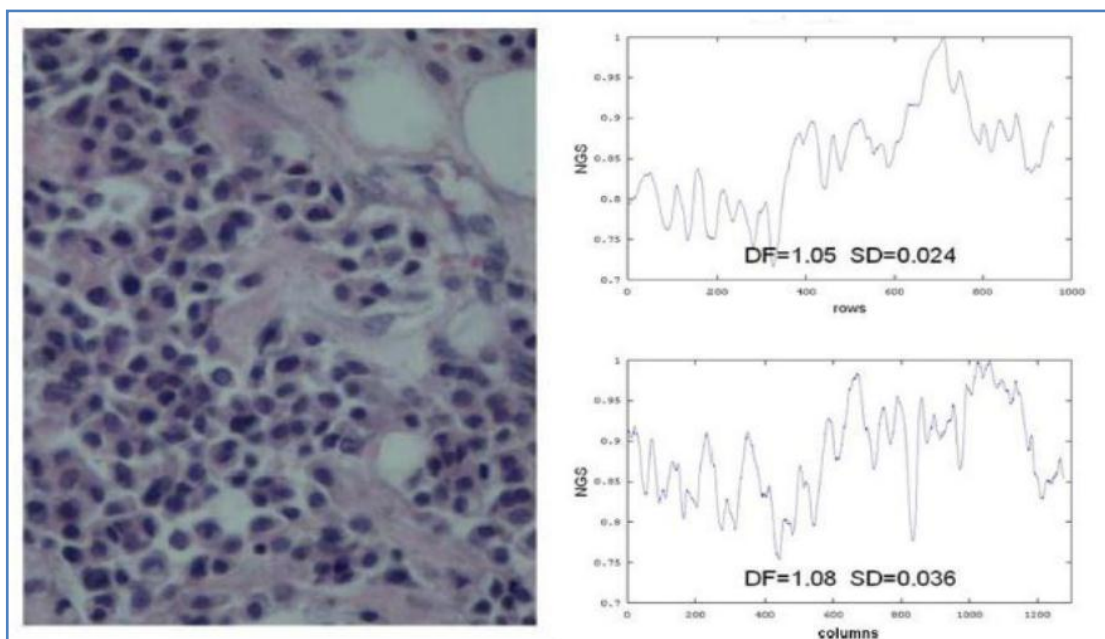
1.10.att. Mandelbrota kopas attēlojums kompleksā plaknē [12]

Šie un citi klasiskie fraktāļi plaši pazīstami fraktāļu matemātiskajā modelēšanā. Tomēr, ja analizē fraktāļu praktisko pielietojumus, tad jāsaprot, ka gadījuma (stohastiskie) fraktāļi spēlē daudz būtiskāku lomu to aplikācijās.

1.1.5. Fraktāļu pielietojums

Kā jau nodaļas sākumā minēju fraktāļi un fraktālas struktūras ir plaši sastopamas. Līdz ar to iespējamie fraktāļu lietojumi dabā sastopamo struktūru un procesu pētīšanai ir diezgan daudzveidīgi.

Tā kā dažādas fraktālas struktūras atrodamas arī cilvēka ķermenī, medicīnā ļoti plaši un aizvien plašāk tiek izmantota fraktālanalīze. Sākot ar asinsrites sistēmas vai bronhu sistēmas modelēšanu, dažādu infekciju slimību izplatīšanās pētīšanu, smadzeņu darbības jautājumiem (smadzeņu darbībai piemīt ar fraktāliem atraktoriem raksturojams haotiskums) līdz pat miega analīzes un centrālās nervu sistēmas darbības pētījumiem, un vēl citiem. Kā konkrētu piemēru varētu minēt krūšu vēža attēlu analīzi, un fraktālās dimensijas noteikšanu šiem attēliem, ar mērķi prognozēt slimības tālāko attīstību [15]. Šajos pētījumos fraktālās dimensijas tiek noteiktas ar dažādām metodēm, un joprojām tiek meklēta efektīvākā no tām.



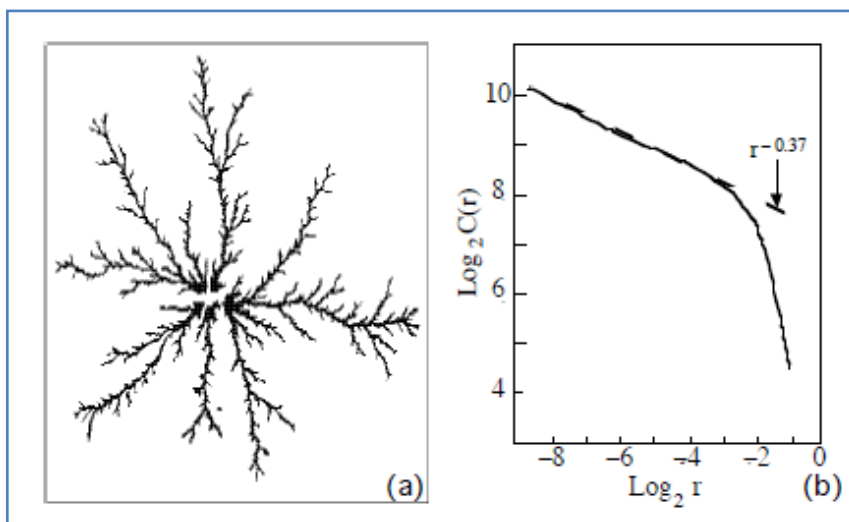
1.11.att. Mikroskopisks krūšu vēža Carcinoma Ductale attēls (pa kreisi) un no rindu un attēlu intensitātes noteiktas Higuči fraktālās dimensijas (pa labi) [15]

Fraktālas struktūras tiek nopietni pētītas arī fundamentālajā un lietišķajā matemātikā, protams, ne tikai vizuāli skaistu modeļu radīšanai, bet galvenokārt, lai palīdzētu attīsties citām nozarēm, piemēram, signālapstrādei un matemātiskajai modelēšanai.

Signālapstrādē, piemēram, fraktālu īpašības tiek izmantotas dažādos lietišķo pētījumu virzienos sākot no attēlu kompresijas metodēm un video modelēšanas (piemēram, mākslas filmām) līdz pat sejas un citu attēlu salīdzināšanai un atpazīšanai [16].

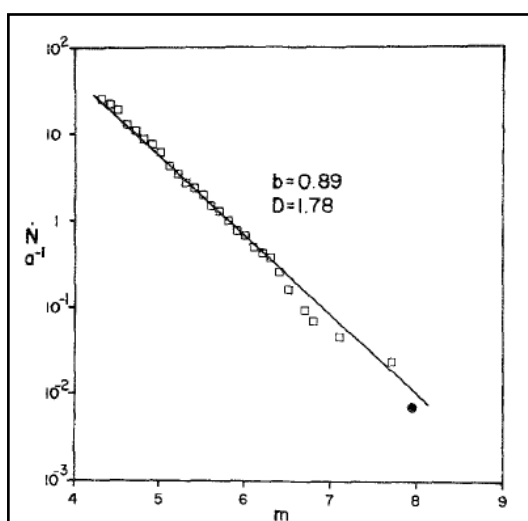
Fraktāļi tiek izmantoti pat tādās nozarēs kā mūzika un māksla. J.S.Baha mūzikā ir atklāti fraktāli mūzikas fragmenti, kā arī pēdējā laikā tiek sacerēts daudz jaunas fraktālas mūzikas. Mākslā nu jau ir izveidojusies vesela fraktāļiem veltīta mākslas nozare. Fraktālo modelēšanu izmanto arī multimēdiiju un video veidošanā.

Arī dažādās fizikas apakšnozarēs fraktālas struktūras spēlē vērā ņemamu lomu – dažādu virsmu un materiālu fraktālā raupjuma pētīšanā, turbulences pētījumos, hidrodinamikā, kā arī elektriskās vadītspējas pētījumos, un citur. [17]



1.12.att. Metāliskā cinka elektrolītiska augšana plānā elektrolīta kārtiņā (a) un tā korelācijas funkcija, kas dod dimensiju $D = 2 - 0,37$ [17]

Tāpat kā medicīnā, ļoti plaši fraktālanalīzi izmanto arī ģeofizikā. Seismoloģijā fraktālanalīze tiek lietota zemestrīču analīzei un prognozēšanai. Hidroloģijā to izmanto noteces baseinu un upju plūsmas fluktāciju pētniecībai. Arī augsnes, topogrāfijas, magnētiskā lauka, mākoņu kustības, dažādu minerālu un sedimentu slāņu analizēšanā aizvien nozīmīgāku lomu spēlē fraktālu struktūru analīze.



1.13.att. Zemestrīču skaits gadā N uz virsmas ar magnitūdu lielāku par m . Kvadrātiņi apzīmē datus Dienvidkalifornijā no 1932.- 1972. gadam, aplītis simbolizē prognozi. [18]

Fraktāļu izmantošana un analīze šajās un vēl citās dabas un inženierzinātņu nozarēs, ne tikai parāda to dažādos pielietojumus, bet arī pamato fraktālanalīzes nepieciešamību un fraktāļu nozīmi dažādās pētniecības nozarēs.

1.2. Fraktālanalīze un fraktālā dimensija

1.2.1. Fraktālanalīze

Fraktālanalīzes mērķis ir izpētīt un raksturot fraktālus objektus. Bet kā lai apraksta fraktālus? Fraktāļu aprakstīšana tradicionālos veidos neko daudz mums par tiem nepateiks. Piemēram, ja mēs par apelsīnu sakām, ka tas ir apaļš, ar rādiusu 6 cm, tad mēs diezgan precīzi varam iedomāties tā formu. Toties fraktālu struktūru šādi aprakstīt neizdosies. Tāpēc mums ir nepieciešama fraktālanalīze, kas spēj raksturot šos fraktālos objektus.

Definīcija 2.1. Fraktālā analīze (galvenokārt) ir matemātisku procedūru kopums, kas tiek izmantots, lai noteiktu fraktālo dimensiju (vai jebkādu citu fraktāļa raksturlielumu) vai fraktālo dimensiju kopu (multifraktāļu gadījumā) ar mazāko iespējamo kļūdu. [19]

Fraktālā dimensija ir galvenais fraktāļa raksturlielums. Lai gan pastāv arī citi fraktāļus raksturojoši lielumi, tādi kā, iterāciju skaits, laukums, perimetrs u.c. [g.smidlers bakalaurs], tomēr fraktālā dimensija ir biežāk izmantotais un fraktālo struktūru vislabāk raksturojošais parametrs.

Fraktālanalīze mūsdienās tiek plaši izmantota, lai raksturotu dabisku objektu īpašības un fraktālanalīzes metodes šobrīd ir nepārtrauktā zinātniskā attīstībā [19] – tiek veidotas jaunas un pilnveidotas esošās, lai dažādos specgadījumos pēc iespējas precīzāk varētu noteikt fraktāļus raksturojošos parametrus.

Fraktālanalīze šobrīd plaši tiek izmantota daudzās zinātnes jomās. Tomēr jāņem vērā, ka svarīgs fraktālanalīzes ierobežojums ir tas, ka empīriskā fraktālās dimensijas noteikšana obligāti nepierāda, ka modelis ir fraktālis; drīzāk, ka ir jāņem vērā citi būtiski modeļa parametri. [12]

Lai kāda veida fraktālanalīze būtu veikta, tā vienmēr būs saistīta ar kaut kāda veida fraktālo dimensiju. Ir ļoti daudz fraktālās dimensijas noteikšanas metožu, bet tās visas var ietilpināt vienā kategorijā – tās ir sarežģītības mēri. Fraktālanalīzē sarežģītību raksturo izmaiņas detaļās mainoties mērogam. [20]

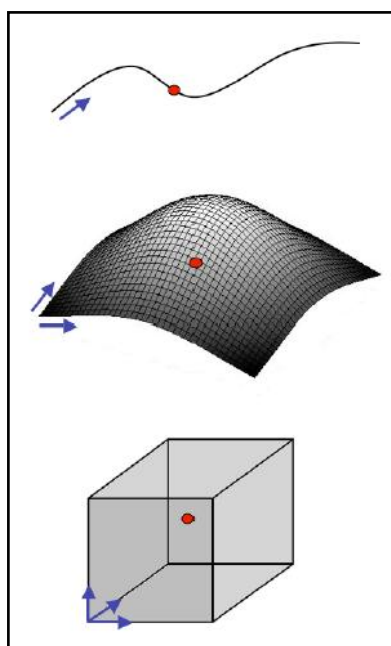
Šeit, līdz ar sarežģītību, arī parādās fraktālanalīzes jēdziena atšķirība no vienkāršas fraktāļu analizēšanas. Fraktālanalīzei bieži vien nākas saskarties ne tikai ar fraktāļiem, bet arī ar tādām ģeometriskām struktūrām, kuras sevī tikai daļēji iekļauj fraktālo dabu.

1.2.2. Fraktālā dimensija

Kā jau iepriekšējā nodaļā tika minēts, fraktālā dimensija ir būtiskākais un fraktāli vispilnīgāk raksturojošais parametrs fraktālanalizē. Tāpēc arī turpmāk, šī darba ietvaros, fraktālanalīze tiks apskatīta, galvenokārt, caur fraktālās dimensijas prizmu.

Kas tad īsti ir fraktālā dimensija? Fraktālā dimensija ir skaitlis, parasti ne vesels, turklāt šis skaitlis, bieži vien ir vienīgais reāli nosakāmais fraktāļa mērs. Fraktālā dimensija raksturo fraktāļa fragmentācijas pakāpi jeb neregularitāti, kas tam raksturīgi izpaužas pie ļoti dažādiem mērogiem. Tā savā ziņā nosaka, cik fraktālis atšķiras no Eiklīda objektiem (punkta, līnijas, plaknes u.c.). [19]

Kā zināms, lietojot Eiklīda ģeometriju, mēs jebkuru viendimensionālas līknes punktu varam aprakstīt ar vienu skaitli – attālumu no kāda sākuma punkta. Jebkuru punktu divās dimensijās mēs varam aprakstīt ar diviem skaitļiem, un trijās dimensijās – ar trim, tipiski izvēloties aprakstīt šos punktus ar skaitļiem, kas ir koordinātas izvēlētajā koordinātu sistēmā [3].

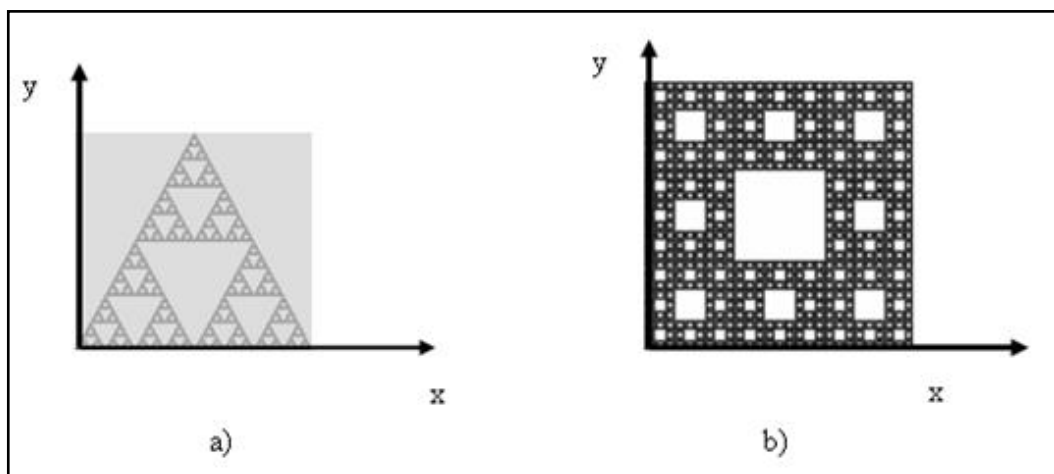


1.14.att. Eiklīda ģeometrijas reprezentācija [3]

Ir labi zināms, ka atsevišķa punkta (Eiklīda) dimensija ir nulle, nogriežņa (kā arī jebkuras līnijas) dimensija ir viens, kvadrāta (kā arī jebkuras virsmas) dimensija plaknē – divi, kuba (kā arī jebkura tilpuma) dimensija trīsdimensiju telpā – trīs utt.. Taču matemātikā un dabas zinātnēs nākas saskarties arī ar tādām punktu kopām, kuru dimensija izsakāma kā daļskaitlis. Tie tad arī ir fraktāļi – ģeometriski objekti, kuru fragmenti atgādina visu objektu

kopumā. Parasti fraktāļu dimensija ir mazāka nekā tās telpas dimensija, kurā tie ir ievietoti.

[1]

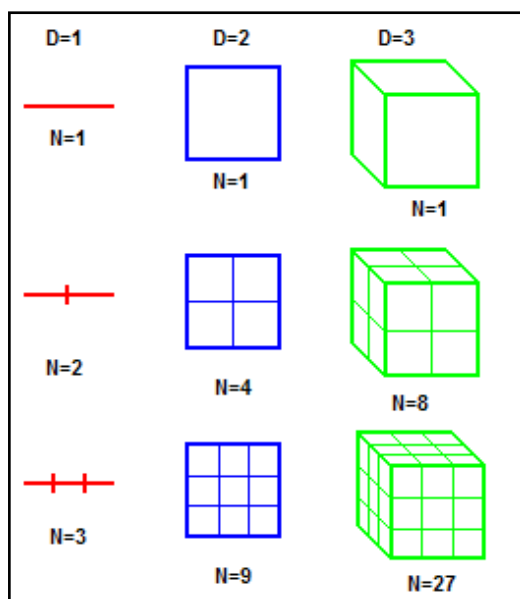


1.15.att. Fraktāļu dimensija plaknē: a) Sierpinska trīsstūris – $D \approx 1.530$, b) Sierpinska paklājs - $D \approx 1.865$ [1]

Fraktālo dimensiju parasti apzīmē ar D vai FD .

Apskatīsim 3 pašlīdzīgas labi pazīstamas figūras: nogriežni, kvadrātu un kubu. Samazinot divas reizes nogriežņa garumu, iegūsim divas tā samazinātas kopijas; ja samazināsim sākotnējā nogriežņa garumu trīs reizes, iegūsim trīs kopijas. Savukārt kvadrātā ietilpst četras kopijas, kuru malas garums ir divreiz mazāks kā sākotnējā kvadrāta malas garums; ja kopijas malas garums ir trīsreiz mazāks – būs 9 kopijas. Līdzīgi varam aplūkot kubu, tanī ietilpst 8 kopijas ar divreiz īsākām malām un 27 kopijas ar trīsreiz īsākām malām.

[5]



1.16.att. Dimensijas noteikšana vienkāršiem objektiem, N – kopiju skaits, r - mērogošanas konstante, D – Eiklīda dimensija [6]

Ja mēs ar r apzīmējam skaitli, cik reizes samazināta figūra iepriekšējā attēlā, ar D apzīmējam dimensiju un N ir kopiju skaits, tad viegli varam redzēt, ka:

1.1. tabula

Kopijus skaita iegūšana, ja zināma D un r

Objekts	r	N	D
Līnija	2	$2^1 = 2$	1
Līnija	3	$3^1 = 3$	1
Kvadrāts	2	$2^2 = 4$	2
Kvadrāts	3	$3^2 = 9$	2
Kubs	2	$2^3 = 8$	3
Kubs	3	$3^3 = 27$	3

No šī piemēra mēs varam uzrakstīt vienādojumu, kas saista minētos lielumus

$$N = r^D, \quad (1.7.)$$

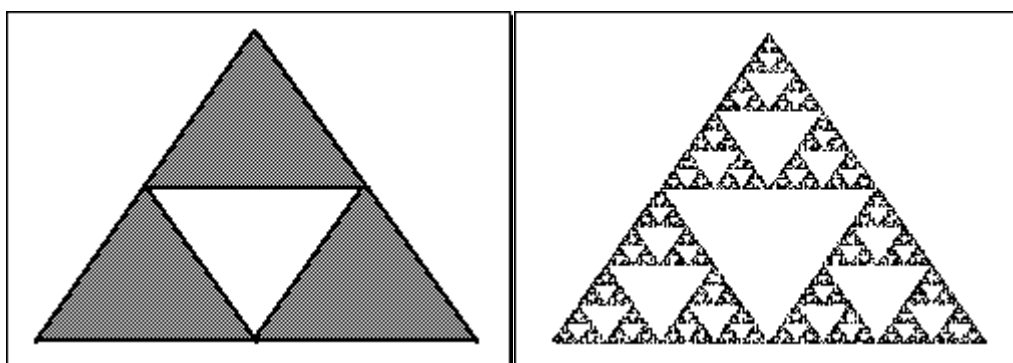
no kuras tieši izsakot fraktālo dimensiju D iegūstam:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r}, \quad (1.8.)$$

kur N – kopiju skaits un r – mērogošanas konstante. Kā redzams, šī dimensijas noteikšanas formula labi atrod topoloģisko dimensiju nogrieznim, kvadrātam, kubam. Formulu izmantosim arī citu pašlīdzīgu kopu dimensiju noteikšanai, bet atrasto lielumu sauksim par apskatāmās kopas **fraktālo dimensiju** (saka arī – līdzības dimensija). [5]

Diemžēl jāsaprot, ka tāpat kā nav absolūti precīzas fraktāļa definīcijas, tāpat arī šī fraktālās dimensijas noteikšanas formula ir piemērota tikai stingri pašlīdzīgu kopu klasei.

Turpinājumā noteiksim fraktālās dimensijas jau dažiem mums pazīstamiem klasiskajiem fraktāļiem.



1.17. att. Figūra, no kuras tiek veidots Sierpiska trīsstūris (pa kreisi) un Sierpiska trīsstūris pēc n iterācijām. [5]

Vēlreiz apskatīsim klasisko fraktāli - Sierpinska trīsstūri. Tas veidots uz vienādmalu trīsstūra bāzes, tātad visas malas ir vienādas, vienu vienību garas. Katru no šīm malām samazinām divas reizes. Šādas darbības rezultātā mēs iegūstam 3 iepriekšējo figūru kopijas. Līdz ar to varam secināt, ka kopiju skaits $N = 3$ un mērogošanas konstante $r = 2$. Tādējādi dimensija atrodama no vienādojuma:

$$3 = 2^D, \quad (1.9.)$$

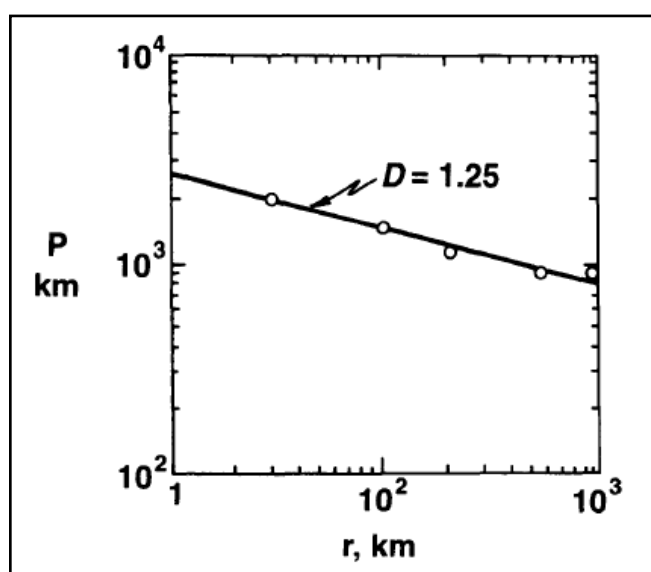
kur D ir fraktālā dimensija. Atrisinām šo vienādojumu:

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585. \quad (1.10.)$$

Esam ieguvuši, ka Sierpinska trīsstūra fraktālā dimensija ir 1.585.

Šādā veidā fraktālo dimensiju samērā viegli var noteikt arī citiem klasiskajiem fraktāļiem. Piemēram, Koha līknes fraktālā dimensija ir $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$ un Kantora kopas - $D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63$.

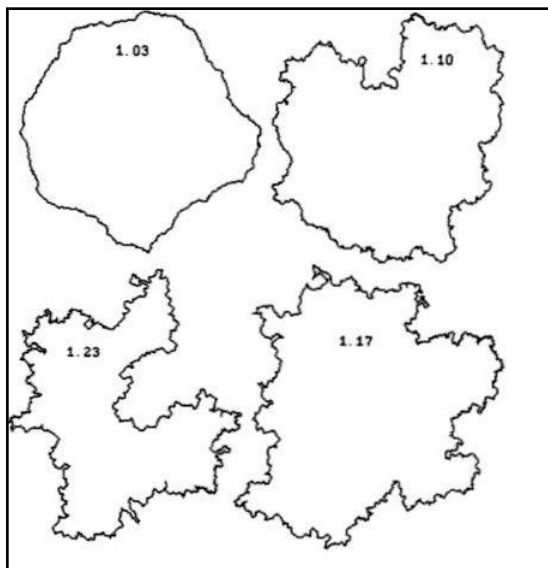
Pat nedeterminētu fraktāļu gadījumā, šī ideja par fraktālās dimensijas noteikšanu pēc kopējā lieluma un fragmentu daudzuma attiecības darbojas. Piemēram, statistisku fraktāļu gadījumā, tika noteikta Lielbritānijas jūras krasta līnijas fraktālā dimensija. Krasta garums P tika noteikts mērot to ar dažāda garuma r nogriežņiem un summējot to skaitu. Izmantojot krasta līnijas karti, tās garums tika iegūts dažādos mērogos izmantojot dažāda garuma nogriežņus r . Šādi iegūtie atšķirīgie krasta līnijas garumi tika attēloti pret izmantoto nogriežņu garumiem r log-log formātā. Ja datu punkti veido taisnu līniju, tad rezultāts ir statistiskais fraktālis. Rezultāti Lielbritānijas rietumu krasta mērījumiem, redzami 1.18.att.. [21]



1.18. att. Lielbritānijas rietumu krasta garums P kā garuma funkcija no izmērītā ceļa r .

Kā redzams, dati korelē labi, un krasta līnijas fraktālā dimensija ir $D = 1.25$. Šis piemērs parāda, ka krasta līnija ir labi modelējama kā fraktālis. [21]

Ja fraktālā dimensija jānosaka vienas topoloģiskās dimensijas gadījumā, tas ir, līnijai vai līknei, tad fraktālai dimensijai jābūt diapazonā $1 < D < 2$, turklāt bieži vien tīri vizuāli novērtējot līniju varam redzēt vai fraktālā dimensija būs tuvāk 1 vai 2. Jo līnija robaināka, raustītāka, t.i. garāka, jo līnijas fraktālā dimensija lielāka. Uzskatāms piemērs redzams sekojošā attēlā:



1.19. att. Fraktālas līnijas ar atšķirīgām fraktālām dimensijām [21]

Fraktālā dimensija parāda cik kompleksa ir struktūra, novērtējot, cik ātri mērījumi palielinās vai samazinās attiecībā pret izmantotā mēroga skalu [22]

Termins fraktālā dimensija vispārīgi attiecas uz dažādām fraktālās dimensijas noteikšanas metodēm. Tas iekļauj, piemēram, tādas fraktālās dimensijas kā kapacitātes, korelācijas, informācijas un Ļapunova fraktālās dimensijas, kuras arī tiek sauktas par fraktālām dimensijām, multifraktāļu gadījumā veidojot t.s. dimensiju spektru. [23]

Bet šajā apakšnodaļā aprakstītie principi parāda veidu kā viegli un ātri noteikt fraktālo dimensiju stingri pašlīdzīgām struktūrām. Šādām struktūrām fraktālo dimensiju var noteikt arī citos veidos un ar citām metodēm. Struktūrām, kas nav stingri pašlīdzīgas, un kuru fraktālā daba ir fragmentāra, augstāk minētajā veidā fraktālo dimensiju nebūs iespējams noteikt. Tieši tāpēc pastāv daudz, dažādu fraktālās dimensijas noteikšanas metožu, kas pielietojamas, ņemot vērā fraktālo struktūru specifiskās īpašības.

1.3. Fraktālās dimensijas noteikšanas metodes

Dažās pēdējās desmitgadēs strauji attīstoties fraktālanalīzei un tās pielietošanas iespējām dažādās nozarēs – medicīnā, ģeoloģijā, fizikā un citur – strauji auga arī fraktālanalīzes metožu attīstība.

Ja sākotnēji metodes, galvenokārt, bija izmantojamas tikai ļoti vispārīgu gadījumu analīzei ļoti noteiktos apstākļos, turklāt, to precizitāte bija nosacīti zema, tad pēdējā laikā metodes kļūst aizvien precīzākas un labāk tiek pielāgotas dažādām iespējamajām fraktālajām struktūrām dažādās vidēs.

Šobrīd jau ir izstrādātas daudzas un dažādas fraktālanalīzes metodes – daļa no tām pielietojama specifiskās nozarēs vai specifiskos apstākļos, bet citas ir lietojamas plašāk. Fraktālā ģeometrija punktu kopām, piemēram, var tikt pielietota izmantojot kastīšu (rūtiņu) skaitīšanas metodi, kura rāda attiecību starp punktus saturošo kastīšu skaitu un kastīšu izmēru. Raupjas virsmas fraktālo ģeometriju var aprakstīt ar t.s. lineāla metodi, kura rāda attiecību starp nepieciešamo lineālu skaitu, lai noklātu virsmu, un lineālu garumu. Katra no šīm metodēm apraksta daļēji atšķirīgus modeļa aspektus. Tātad, fraktālai dimensijai nevajadzētu būt minētai bez atsauces uz metodi, kas izmantota tās aprēķināšanai. [24]

Divdimensionālas telpas (pēc Eiklīda) gadījumā plaši tiek izmantotas tādas metodes kā jaudas spektra analīze dimensijas noteikšanai un kastīšu skaitīšanas metode. Šīs metodes labi darbojas arī viendimensionālā gadījumā. Lai gan šīs metodes ir diezgan vispārīgās un līdz ar to plaši pielietojamas, tomēr tām ir vairāki būtiski trūkumi, ja ir nepieciešamība analizēt sīkas un specifiskas attēla detaļas. Ja šīs metodes tiek izmantotas digitālu attēlu analīzē, tad ar tām nav iespējams aprēķināt fraktālo dimensiju neregulāram interesējošam reģionam attēlā vai efektīvi veikt aprēķinus kādā noteiktā virzienā gar līniju, kas noteiktā leņķī šķērso attēlu. Jaudas spektra un kastīšu skaitīšanas gadījumā metodes efektīgi var pielietot tikai visam attēlam. [25]

Kā jauna un efektīva metode digitālu attēlu FD noteikšanai tiek piedāvāta digitāliem attēliem vispārinātā Higuči metode, kura kā nelineāru laikrindu analizēšanas metode veiksmīgi pārveidojama arī divdimensijas attēlu analīzei. Šīs nodaļas turpinājumā sīkāk apskatīsim daudzsološo Higuči metodi, kura tikai nesen tikusi pielāgota digitālu attēlu analīzei, kā arī divas no plašāk izmantotajām metodēm digitālu attēlu analīzē – jaudas spektra analizēšanas metodi un kastīšu skaitīšanas metodi. Nodaļas noslēgumā nedaudz ielūkosimies arī citās FD noteikšanas metodēs.

1.3.1. Kastīšu skaitīšanas metode

Kastīšu skaitīšanas metode ir visvienkāršākā un viena no biežāk pielietotajām metodēm ļoti dažādu fraktāļu dimensijas noteikšanai. Tās pamatprincips saprotams ļoti viegli – fraktālis tiek „noklāts” ar „kastītēm” – kvadrātiem, un tad tiek analizēts, cik „kastītes” nepieciešamas, lai noklātu fraktāli pilnīgi. Veicot šo darbību, ar dažāda izmēra kastītēm var iegūt attiecību starp nepieciešamo kastīšu skaitu un kastīšu izmēru. Šī attiecība, tad arī ļauj aprēķināt fraktālo dimensiju.

Matemātiski ir vairāki veidi kā formalizēt kastīšu skaitīšanas metodi, piemēram, tāds, kuros skaita slēgtu ložu rādiusu skaitu, kas pārklāj kopu, vai tāds, kurā skaita tīkla kubu skaitu, kuri šķēļas ar šo kopu u.c.. [5]

Sīkāk matemātiski aprakstīsim vienu no plašāk izmantotām definīcijām. Pieņemsim, ka F ir netukša slēgta un ierobežota R^n apakškopa un $N_\varepsilon(F)$ ir mazākais kopu skaits ar diametru vienādu vai mazāku par ε , ar kuru var pārklāt kopu F . Apakšējās un augšējās kopas F kastīšu dimensijas attiecīgi tiek definētas ar apakšējām un augšējām robežām: [5]

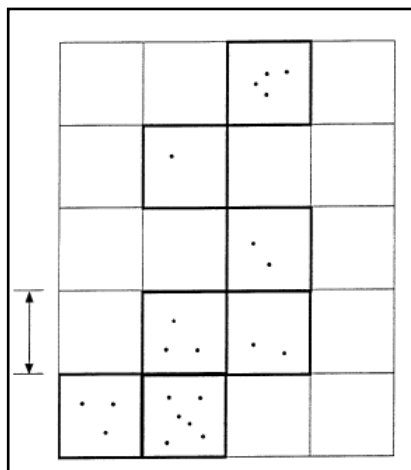
$$\underline{\dim}F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}, \quad (1.11.)$$

$$\overline{\dim}F = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}. \quad (1.12.)$$

Ja abas dimensijas sakrīt, kopīgā vērtība tiek saukta par kopas F kastīšu skaitīšanas dimensiju vai kastīšu dimensiju: [5]

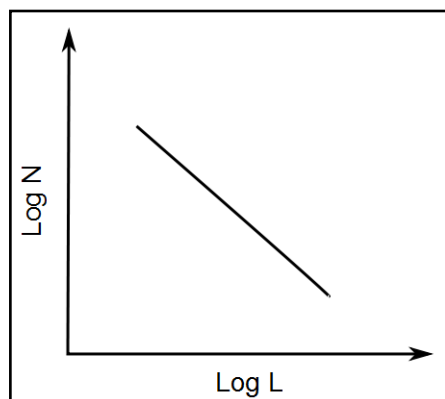
$$\dim F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\varepsilon(F)}{-\ln \varepsilon}. \quad (1.13.)$$

Vizualizējot kastīšu skaitīšanas dimensiju piemērā varam iedomāties, ka mums jānosaka fraktālā dimensija punktu kopai. Viss laukums, kurā atrodas punkti, tiek pārklāts ar noteikta izmēra kvadrātiem.



1.20. att. Uzskatāms piemērs kastīšu skaitīšanas dimensijas iegūšanai [23]

Ja mēs kastīšu skaitu, kas nepieciešams, lai noklātu fraktāli apzīmējam ar N , un atzīmējam uz y ass, un attiecīgo kastīšu izmēru apzīmējam ar L un atzīmējam uz x ass, turklāt veicam šādu darbību vairākkārt ar dažādiem kastītes izmēriem, tad mēs iegūstam aptuveni lineāru sakarību logarimiskās skalās. Taisnes slīpuma koeficients, tad arī norādīs fraktālo dimensiju.



1.21.att. Taisnes, kuras slīpuma koeficients norāda fraktālo dimensiju

Kastīšu skaitīšanas dimensija ir ļoti viegli uztverams fraktālās dimensijas noteikšanas veids, kas ērti izmantojams ģeometriskiem fraktāļiem, ļoti veiksmīgi izmantojams pašlīdzīgu fraktāļu gadījumā, taču ne tuvu nav tik vienkārši lietojams pašafīnu fraktāļu gadījumā, statistiskiem fraktāļiem vai objektiem, kuros tikai daļēji ir fraktālas struktūras.

1.3.2. Jaudas spektra analizēšanas metode

Jaudas spektra analizēšanas metode savukārt ir daudz veiksmīgāk izmantojama pašafīniem fraktāļiem un statistisku fraktāļu gadījumā. Šī metode balstās uz jaudas spektra analīzi. Sākotnēji jaudas spektra analīze tika veikta laicrindām, bet tā tikusi pielāgota arī digitālu attēlu analīzei, t.i. divdimensionāliem signāliem.

Standarta pieeja laicrindu analīzei ir veikt rindu Furjē transformāciju. Laicrindas var tik raksturotas vai nu ar pašu signālu $y(t)$ vai arī attiecībā pret frekvenci ar tā spektru $Y(f, T)$, kur f ir frekvence, bet T signāla garums. Lielums $Y(f, T)$ vispārīgi ir komplekss skaitlis, kas satur gan amplitūdu, gan fāzi. Lai iegūtu $Y(f, T)$, var izmantot $y(t)$ Furjē transformāciju intervālā $0 < t < T$, formā

$$Y(f, T) = \int_0^T y(t) e^{2\pi i f t} dt, \quad (1.13)$$

kur $i = \sqrt{-1}$. Signālu $y(t)$ var restaurēt no spektra $Y(f, T)$, izmantojot inverso Furjē transformāciju

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(f, T) e^{-2\pi i f t} df. \quad [21] \quad (1.14.)$$

Laikrindām ar vienu periodisku komponenti būs viens pīķis to spektrā attiecīgajā frekvencē. Laikrindām ar vairākām komponentēm būs vairāki pīķi to spektrā visās attiecīgajās frekvencēs. Baltajam troksnim nav izteiktas frekvences un tā spektrs ir plakans. Lielums $|Y(f, T)|^2 df$ raksturo kopējo ieguldīto enerģiju signālā $y(t)$ no spektra komponentēm ar frekvencēm starp f un $f + df$. $|Y|$ nozīmē, ka tiek ņemta kompleksā lieluma absolūtā vērtība. Jauda tiek iegūta izdalot šo lielumu ar T . Tādējādi signāla $y(t)$ jaudas spektrālais blīvums tiek definēts kā:

$$S(f) = \frac{1}{T} |Y(f, T)|^2 \quad (1.15.)$$

ar robežnosacījumu $T \rightarrow \infty$. Laikrindām, kas ir pašafīni fraktāļi, jaudas spektrālajam blīvumam ir specifiska atkarība no frekvences:

$$S(f) \sim f^{-\beta}. \quad (1.16.)$$

Tālāk iegūsim attiecību starp pakāpes rādītāju β , t.s. signāla Hausdorfa mēru H_a un fraktālo dimensiju D . Apskatām divas laikrindas (signālus) $y_1(t)$ un $y_2(t)$, kas savstarpēji saistīti sekojošā veidā

$$y_2(t) = \frac{1}{r^{H_a}} y_1(rt). \quad [21] \quad (1.17.)$$

Fundamentāla pašafīnu fraktāļu laikrindu īpašība ir tā, ka $y_1(t)$ ir tās pašas statistiskās īpašības kā $y_2(t)$. Signāla $y_2(t)$ Furjē transformācija ir

$$Y_2(f, T) = \int_0^T y_2(t) e^{2\pi i f t} dt \quad (1.18.)$$

Aizvietojot formulu (1.17.) un izmainot maingīgo $t' = rt$, mēs iegūstam

$$Y_2(f, T) = \int_0^{rT} \frac{y_1(t')}{r^{H_a}} e^{2\pi i f t' / r} \frac{dt'}{r} \quad (1.19.)$$

un salīdzinot (1.19.) ar (1.13.) nonākam pie

$$Y_2(f, T) = \frac{1}{r^{H_a+1}} Y_1\left(\frac{f}{r}, rT\right). \quad [21] \quad (1.20.)$$

No jaudas spektrālā blīvuma definīcijas (1.15.) iegūstam, ka

$$S_2(f) = \frac{1}{T} |Y_2(f, T)|^2 = \frac{1}{r^{H_a+1}} \frac{1}{rT} \left| Y_1\left(\frac{f}{r}, rT\right) \right|^2 = \frac{1}{r^{2H_a+1}} S_1\left(\frac{f}{r}\right). \quad (1.21.)$$

Tā kā y_2 ir proporcionāli pārrēķināta y_1 versija, to jaudu spektrālajam blīvumam arī ir jābūt proporcionālam. Tādējādi mēs varam uzrakstīt, ka

$$S(f) = \frac{1}{r^{H_a+1}} S\left(\frac{f}{r}\right). \quad (1.22.)$$

No tā, ka $H_a = 2 - D$ un (1.16.) seko, ka

$$\beta = 2H_a + 1 = 5 - 2D. \quad [21] \quad (1.23.)$$

Pašafīnam fraktālim ($0 < H_a < 1$, $1 < D < 2$) tāpat $1 < \beta < 3$. Piemēram, Brauna kustībai ar $H_a = \frac{1}{2}$ ($D = \frac{3}{2}$) varam iegūt $\beta = 2$. [21]

Ja mēs zinām β un H_a , bet nezinām D , tad attiecīgi fraktālo dimensiju varam aprēķināt kā $D = \frac{5-\beta}{2}$.

Lai veiktu jaudas spektra analīzi digitālam attēlam mums ir jāpieraksta attēls kā signāls, jāaprēķina tā jaudas spektrs, izmantojot FFT (ātro Furjē transformāciju), jānosaka koeficients β un izmantojot šī koeficienta vērtību jāaprēķina fraktālā dimensija D .

1.3.3. Higuči metode

1988. gadā Tokijas Univeristātes Ģeofizikas izpētes laboratorijā, T. Higuči vadībā, tika izstrādāta Higuči metode fraktālās dimensijas noteikšanai, sākotnēji neregulāru laikrindu analīzei. Ilgu laiku šo metodi pazina tikai kā jaunu, efektīvu metodi laikrindu analīzei. Tikai pēdējā desmitgadē tika atklāts jauns šīs metodes pielietojanas virziens – digitālo attēlu analīze.

Pats T. Higuči metodi raksturo šādi [26]: „Mēs prezentējam tehniku kā izmērīt fraktālo dimensiju kopas punktiem $(t, f(t))$, veidojot grafisku funkciju f definētu ar vienības intervālu. Vispirms mēs tai piemērojam fracionālu Brauna funkciju, kurai ir pašlīdzības īpašība visās skalās, un tad mēs varam iegūt stabilu un precīzu fraktālo dimensiju. Šī tehnika tiek pielietota arī novērotajiem dabisku objektu datiem. Tā neparāda pašlīdzību visā skalā, bet tai ir atšķirīga pašlīdzība cauri visai raksturīgajai laika skalai. Pašreizējā metode dod mums stabilu raksturīgo laika skalu, tāpat kā fraktālo dimensiju.”

Pirmajā Higuči metodes publikācijā tā tiek precīzi izklāstīta [26]: Mēs apskatām galīgu laikrindu kopu novērojumus, kas ņemti regulārā intervālā:

$$X(1), X(2), X(3), \dots, X(N). \quad (1.24.)$$

No dotajām laikrindām, mēs vispirms uzkonstruējam jaunas laikrindas, X_k^m , definētas sekojoši:

$$X_x^m; X(m), X(m+k), X(m+2k), \dots, X\left(m + \left[\frac{N-m}{k}\right] \cdot k\right) \quad (m = 1, 2, \dots, k), \quad (1.25.)$$

kur $[]$ apzīmē t.s. Gausa iekavas, bet k un m ir veseli skaitļi. Respektīvi, m un k parāda sākotnējo laiku un intervāla laiku. Laika intervālam, kas vienāds ar k , mēs iegūstam jaunas k laikrindu kopas. Gadījumā, ja $k = 3$ un $N = 100$, augstāk minētā procesa rezultātā tiek iegūtas trīs laikrindas, kas tiek pierakstītas sekojoši:

$$\begin{aligned} X_3^1; & X(1), X(4), X(7), \dots, X(97), X(100), \\ X_3^2; & X(2), X(5), X(8), \dots, X(98), \\ X_3^3; & X(3), X(6), X(9), \dots, X(99). \end{aligned} \quad (1.26.)$$

Tālāk definējam līknes garumu, X_k^m , sekojoši:

$$L_m(k) = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor} |X(m+ik) - X(m+(i-1) \cdot k)| \right)^{\frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor \cdot k}} \right\} : k. \quad (1.27.)$$

Jēdziens, $\frac{N-1}{\lfloor \frac{N-m}{k} \rfloor \cdot k}$ reprezentē normalizēšanas faktoru līknes apakškopas garumu laicrindām.

Mēs definējam līknes garumu laika intervālam k , $\langle L(k) \rangle$, kā vidējo vērtību no $L_m(k)$ kopām. Ja $\langle L(k) \rangle \propto k^{-D}$, tad līkne ir fraktālis ar dimensiju D . [26]

Arī Higuči metodes gadījumā, lai veiktu digitālu attēlu analīzi, attēls ir jāpārveido kā signāls. To ir iespējams veiksmīgi realizēt ņemot no attēla vienu rindu, kolonnu vai diagonāli, kā arī summējot tās, lai iegūtu plašāka diapazona fraktālo dimensiju.

1.3.4. Citas metodes

Protams, iepriekš minētās metodes nav vienīgās, kas tiek izmantotas fraktālanalizē. Kā jau nodaļas sākumā teikts fraktālanalizē pēdējās desmitgadēs ir strauji attīstījusies, līdz ar to tikušas izveidotas aizvien jaunas metodes fraktālās dimensijas noteikšanai. Līdzās plašāk izmantotajām jaudas spektra analizēšanas un kastīšu skaitīšanas metodēm pastāv daudz citu.

Tā kā fraktālanalizē tiek izmantota ļoti dažādiem mērķiem, tad arī šīs metodes, kas tikušas izstrādātas, bieži vien tiek pielāgotas konkrētām nozares vajadzībām. Galvenokārt metodes iedala pēc diviem principiem. Pirmais no tiem ir metodes, kas der pašlīdzīgu fraktālu dimensijas noteikšanai un metodes, kuras der pašafīnu fraktālu dimensijas noteikšanai. Reti, kuras metodes veiksmīgi ir izmantojamas abos gadījumos. Piemēram, pašlīdzīgu fraktālu dimensijas noteikšanai tiek izmantotas blīvuma, informācijas vai korelācijas dimensijas noteikšanas metodes, bet pašafīnu fraktālu dimensijas noteikšanai – variogrammas noteikšana. Otrs princips, pēc kura bieži iedala metodes, ir tas, kam tās tiek izmantotas, respektīvi, vai nu signālanalizē (1D gadījumā) vai digitālu attēlu (2D gadījumā) analīzei. Ir metodes, kas pielāgotas abiem gadījumiem, taču daļa no tām izmantojama tikai vienā no gadījumiem.

Tomēr, lai cik daudz nebūtu šo metožu, iepriekšējā apakšnodaļa un turpmākās darba nodaļas paskaidro Higuči metodes efektivitāti digitālo attēlu analīzē un līdz ar to norāda uz tās potenciālu ģeoloģisko struktūru attēlu analīzē. Tāpēc arī turpmākajās nodaļās bez populārajām kastīšu skaitīšanas un jaudas spektra analizēšanas metodēm pievērsīsimies arī Higuči metodes vēl neizmantotajam potenciālam ģeoloģisku struktūru izpētē.

1.4. Fragmentācija

Lai redzētu kā fraktālie sadalījumi ir piemērojami reāliem datiem, tiek lietota fragmentācija. Ģeoloģisko fenomenu dažādajā klāstā fragmentācija spēlē būtisku lomu. Piemēram, ieži tiek fragmentēti dēļ erozijas un eksplozīviem (gan dabiskiem, gan mākslīgiem) procesiem. [21]

Fragmentu izmēru sadalījums ir statistiska problēma. Fragmentu vidējo vērtību varam iegūt šādi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.28.)$$

kur \bar{x} ir vidējā vērtība, n ir punktu skaits un x_i – i - ā punkta vērtība, kur $i = 1, 2, \dots, n$. Sadalījuma standartnovirze σ tiek iegūta kā:

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{1/2} [21] \quad (1.29.).$$

Fragmentācija principā sadala objektu daudzos mazākos objektos un norāda kā sadalīto lielumu daudzums ietekmē kopējo objekta izmēru. Šo attiecību mēs varam aplūkot 1D, jo katrai vienai dimensijai būs savs skaits, kurā sadalīti objekti, kurš atšķirsies no rezultātiem kādā citā dimensijā. Šāda fragmentācijas analīze ir ļoti vērtīga sīku detaļu analīzei.

Ģeoloģisko struktūru, konkrētāk, darba ietvaros plašāk apskatīto iežu, gadījumā, fragmentācija dod unikālu iespēju analizēt tādas iežu detaļas, kuras citādos gadījumos nebūtu iespējams analizēt. Darbā ar iežiem ģeologi bieži strādā ar sietu (3D), tomēr tas ir ļoti darbietilpīgs process. Fraktālai analīzei pateicīgāka un vienkāršāka metode ir iežu slīpēšana un attēlu iegūšana (2D). Tomēr visvienkāršākais ir strādāt ar attēlu šķēlumiem (1D). Pateicoties fragmentācijas iespējām, šis it kā vienkāršākais veids dod plašas analīzes iespējas. Darba turpinājumā novērtēsim iespējas iegūt derīgus, efektīvus un interpretējamus rezultātus ātrāk realizējamā un vienkāršāk uztveramajā veidā – 1D gadījumā.

2. PĒTNIECISKĀ DAĻA

2.1. Fraktālanalīzes loma ģeoloģisko struktūru izpētē

Kā noskaidrojām iepriekšējā darba daļā, fraktālās dimensijas noteikšanai pastāv daudz, dažādu metožu. Kā jau minēts iepriekš, fraktāļi un fraktālas struktūras atrodamas dažādos dabiskos un modelētos objektos, un tāpēc to izpratnei bieži nepieciešams lietot fraktālanalīzi. Ģeofizikā fraktālanalīze tiek izmantota dažādās jomās, piemēram, zemestrīču signālu analīzei, garumu (jūras krasta, upju) raksturošanai, tektonisko plātņu izpētei, kā arī ģeoloģisko struktūru pētīšanai.

Veicot dažādu informācijas avotu izpēti tika noskaidroti vairāki iemesli, kāpēc fraktālanalīzei Latvijas ģeoloģisko struktūru izpētē varētu būt būtiska loma:

- 1) Latvijas ģeoloģisko struktūru fraktālā daba tikpat kā nav tikusi pētīta;
- 2) Ģeologi Latvijā aktīvi nodarbojas ar dažādu ģeoloģisko struktūru izpēti, kas nozīmē, ka ir pieejami pamatdati par pētījumiem un ir interese par tiem;
- 3) Ģeoloģisko struktūru fraktālanalīze varētu veicināt ģeoloģisko struktūru pētījumu attīstību un dot noderīgus rezultātus;
- 4) Pasaulē piemēri rāda, ka ģeoloģisko struktūru fraktālanalīze sniedz ģeoloģijai noderīgus rezultātus.

Šī darba ietvaros, protams, nav iespējams apskatīt visa veida ģeoloģiskās struktūras, tāpēc koncentrēsimies uz iežu izpēti, galvenokārt, dolomīta paraugiem. Iežu izpēte notiek vairāku iemeslu dēļ, piemēram, iežu vēsturiskā izpēte, to apkārtējās vides raksturošana, iežu īpašību pētīšana industriālos nolūkos, Zemes dziļāko slāņu netieša izpēte, u.c. iemesli.

Tādējādi, iežu izpētei ir nepieciešams zināt maksimāli daudz informācijas par tiem. Līdzās ieža struktūrai, krāsai, izmēriem, raupjumam, cietībai un citiem, kā vienu no nozīmīgākajiem iežu raksturlielumiem, pasaulē nereti lieto iežu fraktālo dimensiju. Prasme noteikt iežu fraktālo dimensiju mums dod papildus iespēju analizēt mūs interesējošās ģeoloģiskās struktūras.

Fraktālā dimensija par ģeoloģiskām struktūrām spēj pateikt ļoti daudz iepriekš nezināmas un noderīgas informācijas, jo tā daudz detalizētāk apraksta dabā reāli esošu objektu sīkstruktūru nekā citi šo objektu parametri.

2.2. Fraktāļu modelēšana

Lai pilnvērtīgāk varētu analizēt Latvijas ģeoloģiskās struktūras, nosakot to fraktālās dimensijas, vispirms bija nepieciešams iepazīties ar teorētiskiem (vienkāršotiem) fraktāļu modeļiem un izprast tos. Tie tiek apskatīti šajā nodaļā. Ar datorprogrammas *Matlab* palīdzību tika iegūtas dažādas fraktālas struktūras un klasiskie fraktāļi. Gan klasisko, gan jaunizveidotu fraktāļu modelēšana *Matlab* izrādījās gan vienkārša, gan sarežģīta – tas atkarīgs no katra konkrētās fraktālās struktūras īpatnībām. Apskatīsim divus fraktāļu modeļu piemērus – vienu klasisko fraktāli Koha līkni un vienu brīvi ģenerētu fraktāli.

Vienkārša klasiskā fraktāļa – Koha līknes - modelis *Matlab*

Darba teorētiskajā daļā apskatījām klasisko fraktāli Koha līkni. Turpinājumā īsi apskatīsim, kā šādu fraktāli modelēt, gūstot priekšstatu par fraktāļu modelēšanas principiem.

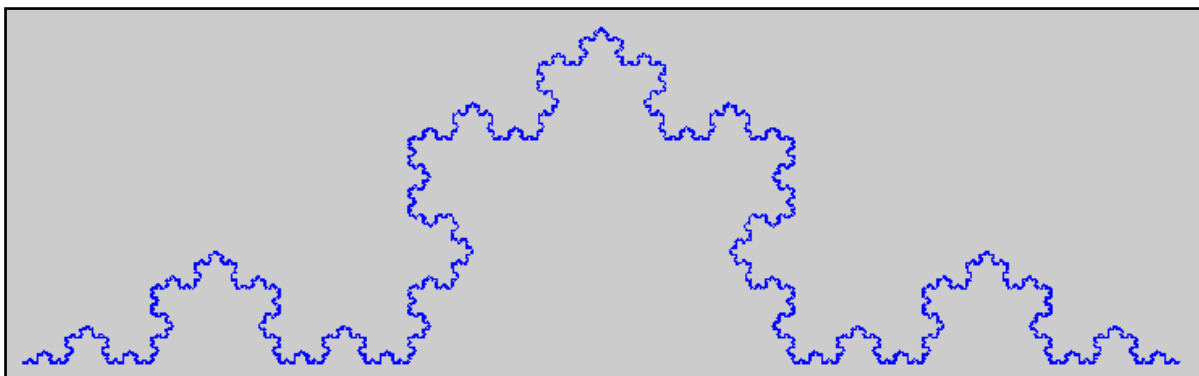
Lai uzmodelētu Koha līkni vispirms jānedefinē iterāciju skaitu, ko vēlamies realizēt. Tad jānedefinē nepieciešamais punktu daudzums šāda fraktāļa izveidei un tukši masīvi, kuros ierakstīt aprēķināto punktu vērtības. Zinot Koha līknes uzbūvi, jānedefinē leņķus, kādos pret zināmajiem punktiem vajadzēs ierakstīt nākamo punktu vērtības. Tālāk jārealizē iepriekš nedefinēto masīvu – visu punktu - aizpildīšanu. Punktu aizpildīšana notiek katras iterācijas laikā visiem punktiem pēc kārtas, sākot no pirmās iterācijas pirmā punkta. Programmas fragments parāda kā tiek aizpildīti minētie punkti:

```
for a=1:mmax
    m=a-1; ang=0;
    for b=1:k
        segment(b)=mod(m,4);
        m=floor(m/4);
        r=segment(b)+1;
        ang=ang+angle(r);
    end
    x(a+1)=x(a)+h*cos(ang);
    y(a+1)=y(a)+h*sin(ang);
end
```

2.1.att. Koha līknes modelēšana *Matlab*, programmas koda fragments [27]1

Programmas fragmentā, kas parāda punktu aizpildīšanu, *mmax* ir kopējais punktu daudzums vienā dimensijā, *k* ir iterāciju skaits, *angle* – jau iepriekš minētie leņķi, kādos pret zināmajiem punktiem vajadzēs ierakstīt nākamo punktu vērtības, un *x* un *y* - masīvi, kuros tiek ierakstīts

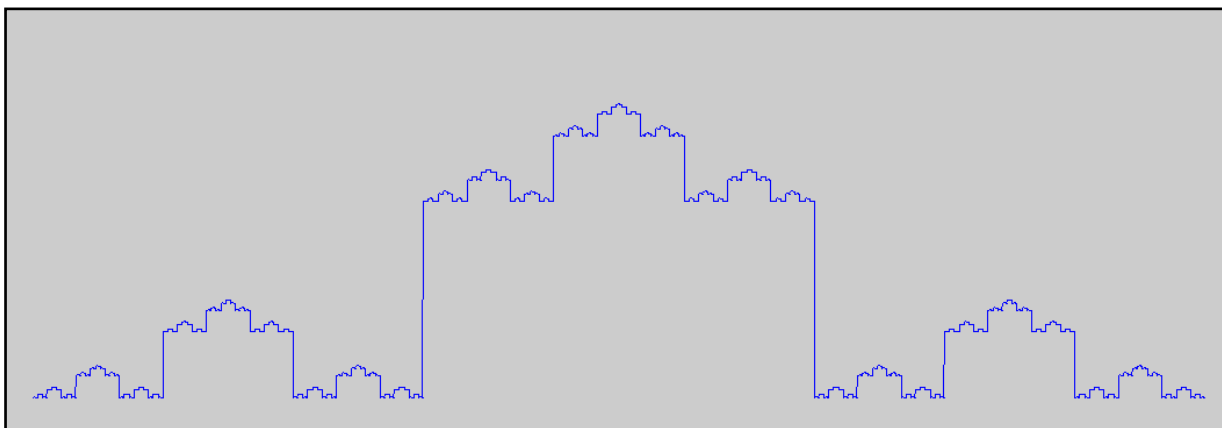
rezultāts. Pēc punktu aizpildīšanas programmas izpildes atliek tikai pareizi izvēloties mērogu attēlot iegūto Koha līkni.



2.2.att. Koha līknes modelis Matlab programmā, iterāciju skaits $k = 10$

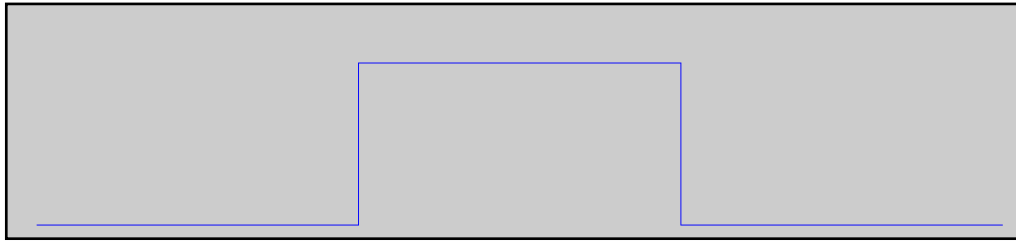
Brīvi ģenerēta fraktāļa modelēšana

Ir iespējams uzmodelēt arī dažnedažādus patvaļīgi izdomātus fraktāļus. Modelējot šo, 2.3.att. redzamo fraktāli, kuru turpmāk sauksim par pakāpienu fraktāli, tas tika ģenerēts, ar mērķi pārbaudīt Higuči algoritma *Matlab* programmas darbības pareizību.



2.3. att. Programmā Matlab uzmodelēts pakāpienu fraktālis, iterāciju skaits $k = 6$

Fraktālis modelēts no līnijas, kuras vidējā trešdaļa pacelta uz augšu par $\frac{1}{2}$ no šīs trešdaļas garuma. Tādējādi pēc vienas iterācijas pakāpienu fraktālis izskatās kā 2.4.att.. Pēc tam tādā pašā veidā tiek pacelta katras trešdaļas vidējā daļa utt.. Tāda iterēšana teorētiski tiek veikta bezgalīgi. Praktiski - realizējot pakāpienu fraktāli programmā *Matlab* - datorprogrammas un paša datora veikspējas dēļ šādam fraktālim ir iespējams realizēt tikai 14 iterācijas. Tomēr tas dod pietiekošu priekšstatu par modelētās figūras fraktālo dabu.



2.4. att. Pakāpienu fraktālis pēc pirmās iterācijas

Matlab programmā pakāpienu fraktāļa modelēšana tika realizēta vispirms definējot iterāciju skaitu, pēc tam nepieciešamo koordināšu skaitu. Programmas turpinājumā tika veikta koordināšu aizpildīšana – vispirms x ass koordināšu, pēc tam – y . Kad koordinātas nepieciešamajā veidā aizpildītas, tad tiek izvadīts rezultātā iegūtais fraktāļa attēls. Modelētā fraktāļa programmas kods pieejams pielikumā Nr.1..

Šim fraktālim tika noteikta fraktālā dimensija ar Higuči un kastīšu skaitīšanas metodēm. Programmu teorētiskais izklāsts pieejams iepriekšējā – teorētiskajā darba daļā. Realizējot abas programmas pie dažāda iterāciju skaita tika iegūtas dažādas fraktālās dimensijas vērtības.

2.1. tabula

FD salīdzinājums pie dažāda iterāciju skaita Higuči un Kastīšu skaitīšanas metodēm

Iterāciju skaits	HFD ($k_{max}=4$)	KFD
4	1.1951	1.1412
6	1.1311	1.1149
8	1.0971	1.0969
10	1.0768	1.0839
12	1.0635	1.0739

Atšķirīgās dimensiju vērtības izskaidrojamas ar konkrētā fraktāļa īpatnību – šajā fraktālajā konstrukcijā sadrumstaloti tiek tikai horizontālie fragmenti uz x ass, vertikālie y ass fragmenti nav sadrumstaloti un veido vienkāršu līniju, kas ar katru iterāciju samazina šīs ģeometriskās struktūras fraktālo dimensiju. Lai dimensijas vērtība būtu stabilāka, būtu nepieciešamas aplūkot fraktāli, kas ir fragmentēts visos virzienos. Tomēr pat šādos apstākļos, kad dimensija ir atkarīga no iterāciju skaita, varam novērot būtisku iezīmi iegūtajos datos – Higuči dimensijas dati labi korelē (salīdzinājumā ar dažādu citu fraktālās dimensijas noteikšanas metožu savstarpējām korelācijām) ar kastīšu skaitīšanas dimensijas datiem. No tā varam secināt, ka metodes ir saderīgas un pareizas, bet izmantotais programnodrošinājums darboties spējīgs.

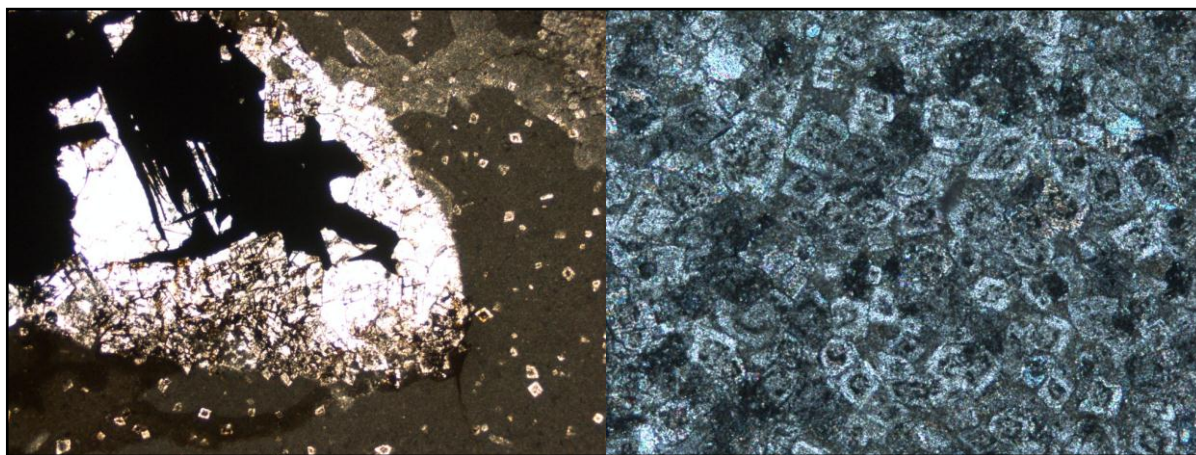
2.3. Fraktālās dimensijas noteikšana ģeoloģiskām struktūrām Latvijā

2.3.1. Ģeoloģisko struktūru attēlu iegūšana un izvēle

Pateicoties sadarbībai ar Latvijas Universitātes Ģeogrāfijas un Zemes zinātņu (LU ĢZZF) fakultātes ģeoloģijas nodaļas profesoru Ģ.Stinkuli tika iegūti nepieciešamie ģeoloģisko struktūru attēli analīzei, kā arī gūts ieskats par jautājumiem, kas saistīti ar ģeoloģisko struktūru izpēti Latvijā.

Tātad, kā jau minēju, turpmāk darbā tiks veikta Latvijas iežu analīze, galvenokārt, dažādu dolomīta paraugu analīze. Darbā izmantotie paraugi iegūti trīs dažādās Latvijas vietās LU ĢZZF Ģeoloģijas nodaļas veikto pētījumu ietvaros. Iegūtajiem paraugiem izveidoti plānslīpējumi – iežu ļoti plānas (dažos mm) kārtiņas noslīpēšana un sagatavošana. No šiem plānslīpējumiem iegūti iežu plānslīpējumu digitālie attēli, kuri tika tālākajā darbā analizēti. Attēli iegūti specifiskā apgaismojumā ar noteiktu attēla asumu.

No visu pieejamo attēlu klāsta (daļa no tiem aplūkojami pielikumā Nr.2.) analīzei interesantākie un atbilstošākie tika izvēlēti pēc tā, cik fragmentāra un pašlīdzīga struktūra attēlos bija novērojama.



2.5. att. Fraktālanalīzei izmantojamu attēlu izvēle – slikts piemērs (pa kreisi) un labs piemērs (pa labi)

Attēla sagatavošana ietekmē to, kāds būs analizējamais materiāls. Attēla punktu krāsu ietekmē tādi faktori kā apgaismojums, plānslīpējuma biezums un kvalitāte, attēla asums, un tas, ar kādu palielinājumu uzņemts attēls. Dažreiz izteismīgāku attēlu ieguvei plānslīpējumiem tiek pievienota krāsviela, parasti, alizarīns - S.

Lai iegūtu iežu plānslīpējumus, šos iežus nākas iznīcināt – jāpaņem to paraugi un pēc tam veidojot plānslīpējumus, tie jāsabrucina, atstājot vien plānu ieža kārtiņu.

2.3.2. Fraktālās dimensijas noteikšanas metožu programmu izveide

Fraktālās dimensijas noteikšanai tika izmantota datorprogramma *Matlab*, tajā ievadot dažādu ģeoloģisko struktūru digitālos attēlos, un realizējot programmas, kas šiem attēliem nosaka fraktālo dimensiju. Digitālo attēlu analīze ir ļoti pateicīgs formāts fraktālās dimensijas noteikšanai, jo digitāls attēls satur daudz skaitliskas informācijas par attēlu – sākot no krāsas parametriem un beidzot ar katra punkta koordinātēm. Tika izveidotas vairākas programmas fraktālās dimensijas noteikšanai – kastīšu skaitīšanas, jaudas spektra analīzes un Higuči algoritma programmas. Visas metodes tiek apskatītas viendimensionālu šķēlumu gadījumā. Turpinājumā apskatīsim mazliet sīkāk katru no metodēm.

1) Jaudas spektra metodes programma

Šī ir viena no populārākajām un plašāk izmantotajām metodēm signālu un arī digitālu attēlu fraktālās dimensijas noteikšanai. Programmas izveide nav ātra un vienkārša, tomēr tās matemātiski labi pārskatāmā algoritma dēļ, tā tiek plaši lietota. Metode efektīvi darbojas lielam datu apjomam. Programmas pozitīva īpašība ir tās diezgan augstā ātrdarbība. 2.6. att. aplūkojama programmas algoritma shēma. [28]

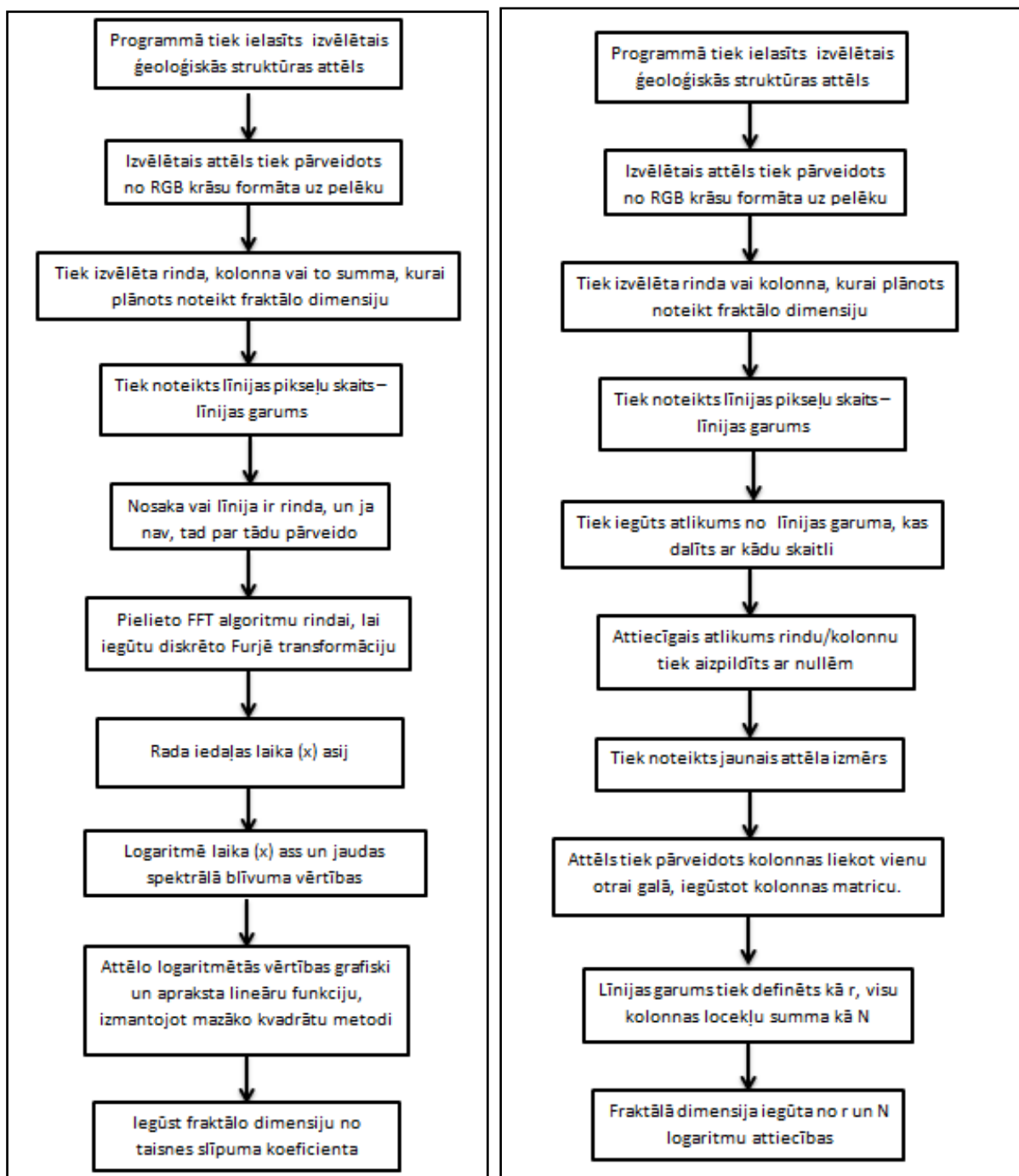
2) Kastīšu skaitīšanas metodes programma

Šī metode savu popularitāti ir ieguvusi ar savu vienkāršību. Programma ir samērā īsa, vienkārša un ātri izveidojama. Metode labi darbojas ģeometriskiem fraktāļiem, tā neņem vērā lielu daudzumu attēla punktu, jo tiek izmantota ģeometrisko fraktāļu precīzā pašlīdzība. Tāpēc tās darbības ātrums ir ļoti augsts. 2.6. att. aplūkojama arī šīs programmas algoritma shēma.

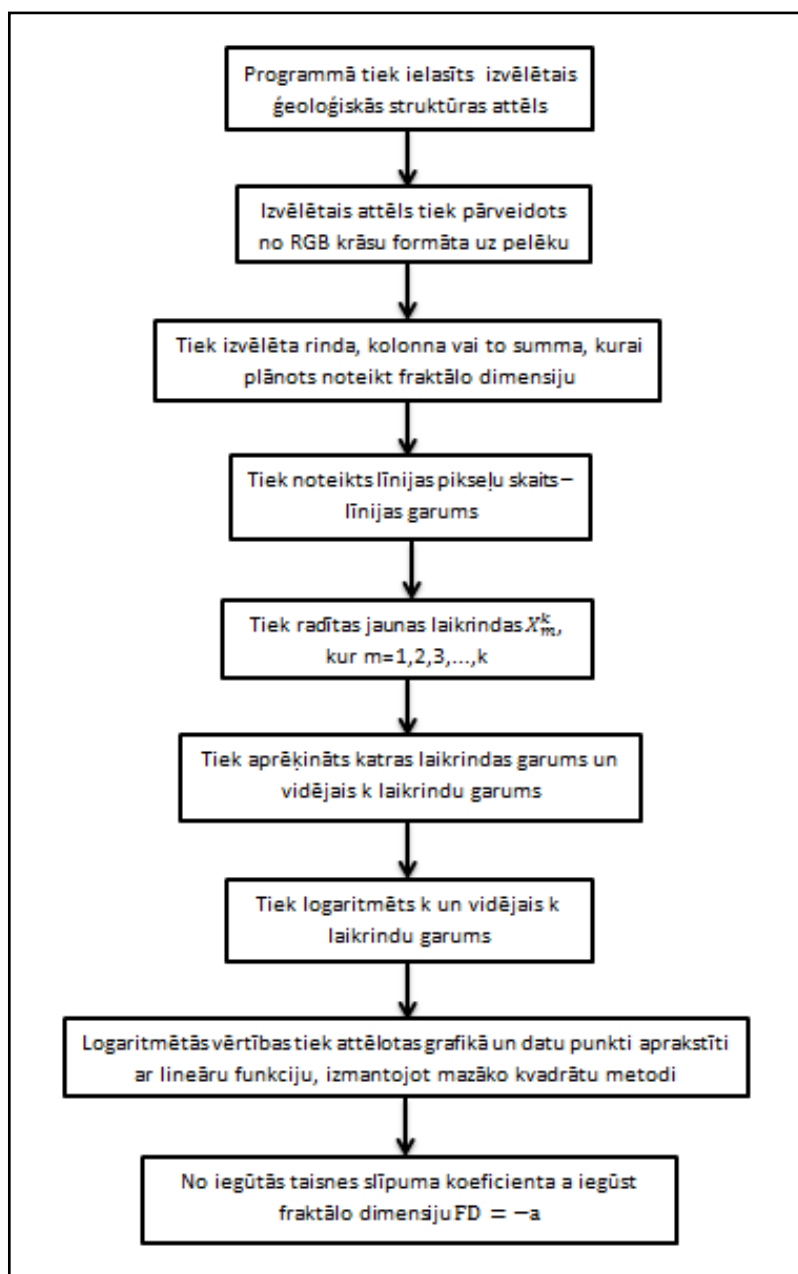
3) Higuči metodes programma

Metode nav tik populāra un plaši lietota kā iepriekšējās, to galvenokārt izmanto signālapstrādē neirozinātņu jomā. Tomēr metode ir pierādījusi savus precīzos un stabilos rezultātus, tāpēc tā tiek aizvien biežāk izmantota arī digitālu attēlu apstrādei. Konkrētās programmas mīnuss ir salīdzinoši lēnais darbības ātrums. Tomēr to atsvēr citi metodes plusi,

tādi kā, iespēja analizēt sīkas 1D signāla detaļas. Par īpaši veiksmīgu metode atzīta dēļ tās precizitātes mazu, specifisku fraktālo detaļu analizēšanā. Metodes realizācijai tika izmantota *Matlab* programma, kuras darbības shēma paskaidrota 2.7.att.. [29]



2.6. att. Shēmas Matlab programmu realizācijai - jaudas spektra metodei (pa kreisi) un kastīšu skaitīšanas metodei (pa labi)



2.7. att. Shēma Higučī metodes Matlab programmas realizācijai

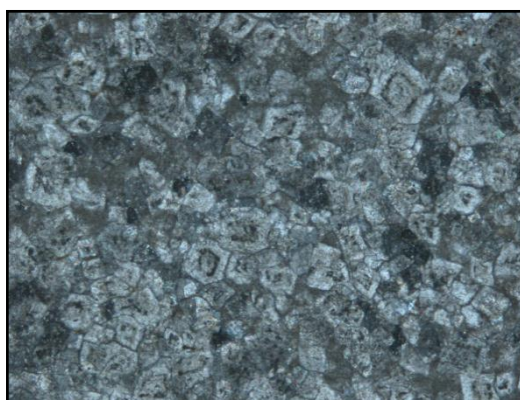
2.3.3. Fraktālās dimensijas noteikšana konkrētām struktūrām

Pēc attēlu ieguves un programmu realizācijas tika pārbaudīta iespēja noteikt fraktālo dimensiju iepriekš minētajām reālām ģeoloģiskām struktūrām, galvenokārt, dolomīta un kaļķakmens iežiem. Tika analizēti dažādi iežu attēli gan individuāli interesanti, gan tādi, kurus savā starpā var salīdzināt pēc kāda aspekta. Iežu attēli iegūti no paraugiem, kas ņemti 2 dažādās Latvijas vietās. Visu attēlu plānslīpējumi veikti Latvijas Universitātes Ģeogrāfijas un Zemes zinātņu fakultātes Ģeoloģijas nodaļā. [30] Visiem apskatītajiem paraugiem ir

iespējams noteikt fraktālo dimensiju ar visām 3 lietotajām metodēm. Turpinājumā sīkāk par daļu no detalizēti pētītajiem iežu paraugiem.

1) Paraugs Nr.1.

Šis paraugs iegūts Vaidavas upes krastā, Karvas ciemā, Apes novadā. Paraugā redzami minerāla dolomīta rombveidīgi kristāli. Parauga aptuvenais ģeoloģiskais vecums ir augšējais Devona periods, t.i., 380. milj. gadu. Attēlā redzami mazie tumšie laukumiņi ir mazi dolomīta kristāliņi. Tā kā dolomīts ir lēni augošs kristāls, tad nepieciešams ļoti ilgs laiks, lai šāda ģeoloģiskā struktūra izveidotos.



2.8 att. Parauga Nr.1. plānslīpējuma attēls [30]

Attēla izmērs ir 2560 x 1920 pikseli, un tā oriģinālie parametri netika mainīti. Kā redzams attēls ir viscauri fragmentārs un tajā ir novērojama zināmi pašlīdzīgi fragmenti. Šim attēlam tika noteikta fraktālā dimensija ar Higuči, jaudas spektra analīzes un kastīšu skaitīšanas metodēm. Gan šim, gan turpinājumā apskatītajiem paraugiem fraktālā dimensija FD tika noteikta 1D gadījumā, t.i. attēla šķēlumiem. FD tika noteikta dažādām attēla rindām, dažādām tā kolonnām, kādam īsākam posmam no rindas un rindu vidējā fraktālā dimensija. Šie fraktālās dimensijas mērījumi *Matlab* programmā deva šādus rezultātus:

2.2. tabula

FD mērījumu rezultāti 1. paraugam

Paraugs Nr.1.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1,6348	1,5542	1,6000
250 _r	1,6752	1,6300	1,5817
1000 _r	1,6742	1,6481	1,5968
1250 _r	1,6679	1,6046	1,6049
1750 _r	1,6871	1,6531	1,5888

1920 _r	1,6639	1,6137	1,6081
500 _k	1,6770	1,5787	1,6038
1000 _k	1,6547	1,5927	1,6152
1500 _k	1,6782	1,5946	1,6178
2000 _k	1,6327	1,6244	1,6244
2560 _k	1,6735	1,6176	1,6190
vid _{att}	1,4476	1,4688	1,5936
vid_{FD}	1,6647	1,6092	1,5934
1000 _{r_500_1000}	1,5651	1,6281	1,7795
std	0,0222	0,0310	0,0071

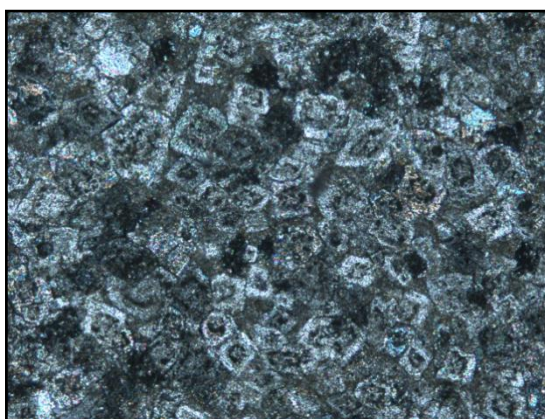
Šajos mērījumu rezultātos, un arī turpmāk, ar H_{FD} apzīmēta Higuči fraktālā dimensija, ar JS_{FD} – jaudas spektra analīzes metodes fraktālā dimensija un ar KS_{FD} – kastīšu skaitīšanas algoritma rezultātā iegūtā fraktālā dimensija. Toties indekss r norāda uz to, kura attēla rinda tikusi analizēta, bet indekss k – kura kolonna. Fraktālās dimensijas vid_{att} vērtības iegūtas izrēķinot attēla kolonnu vidējās vērtības, un tad tām nosakot fraktālo dimensiju. vid_{FD} vērtības ir iegūtas katrai attēla rindai nosakot FD un tad izrēķinot vidējo vērtību no šīm dimensijām. Šis dimensijas iegūšanas veids vislabāk varētu reprezentēt dimensiju paraugam analizējot 1D gadījumus. Fraktālās dimensijas pie $1000_{r_500_1000}$ ir iegūtas attēla 1000 rindas posmam 500 pikseļu garumā, kas sākas no rindas 1000 pikseļa. Ar std tiek apzīmēta standartnovirze, kura tiek iegūta no katras rindas FD , vid_{FD} un rindu skaitu attiecībām pēc darba pirmajā daļā apskatītās formulas.

Skatoties uz dažādajām iegūtajām fraktālām dimensijām redzam, ka metodes savstarpēji dod līdzīgus rezultātus un, ka vienas metodes ietvaros dimensijas vērtības rindām un kolonnām atšķiras vidēji aptuveni par 0,05, lai gan atsevišķos gadījumos atšķirības ir lielākas. Vidējā FD vērtība vid_{FD} diezgan labi reprezentē, to, kas redzams rindu un kolonnu vērtībās. Savukārt vidējā attēla vērtība vid_{att} situāciju reprezentē slikti, kas arī loģiski skaidrojams ar to, ka vidējot ļoti dažādas vērtības mēs „izpludinām” datus un iegūstam maksimāli „nogludinātu” rezultātu. Šīs iegūtās vērtības FD reprezentē slikti un analizē nevajadzētu izmantot. Analizējot rindiņas mazā fragmentiņa vērtības redzam krasākas dimensiju vērtību atšķirības starp metodēm, kas skaidrojamas ar metožu atšķirībām, kas daudz labāk novērojamas analizējot šādus mazus posmiņus. Kopumā redzam, ka ar visām 3 metodēm fraktālo dimensiju dažādos veidos 1D gadījumā izdodas noteikt pārliecinoši. Redzam, ka Higuči metodes standartnovirze ir mazāka kā jaudas spektras metodes standartnovirze. Taču kastīšu skaitīšanas metodes standartnovirze ir vēl mazāka, tomēr dēļ šīs metodes īpatnības tā

objektīvi neatpsoguļo reālo standartnovirzi, tāpēc turpinājumā salīdzināsim tikai Higuči metodes un jaudas spektra analizēšanas metodes standartnovirzes.

2) Paraugs Nr.2.

Apskatīsim pirmajam paraugam līdzīgu paraugu Nr.2., kas arī iegūts Vaidavas upes krastā, Apes novadā. Tāpat kā iepriekšējam paraugam - šim un visiem pārējiem darbā apskatītajiem paraugiem to ģeoloģiskais vecums ir augšējais Devona periods, t.i., 380. milj. gadu. Arī šajā attēli redzami dolomīta kristāliņi.



2.9.att. Parauga Nr.2. plānslīpējuma attēls [30]

Arī šī attēla izmērs ir 2560 x 1920 pikseli. Tā kā attēlu parametri ir identiski un arī vizuāli tajos ir novērojama līdzība, tad iespējams tos varēs savstarpēji labi salīdzināt. Šī attēla fraktālās dimensijas mērījumi *Matlab* programmā deva sekojošos rezultātus:

2.3. tabula

FD mērījumu rezultāti 2. paraugam

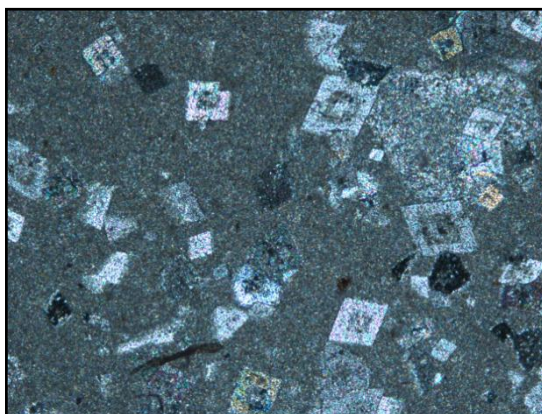
Paraugs Nr.1.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1,7369	1,7903	1,5767
250 _r	1,6692	1,7416	1,5718
500 _r	1,7146	1,7716	1,5965
1000 _r	1,7588	1,8578	1,5781
1250 _r	1,7299	1,7380	1,5798
1760 _r	1,7460	1,8466	1,5581
500 _k	1,7224	1,7931	1,6071
1000 _k	1,7683	1,8451	1,6033
1500 _k	1,7008	1,7741	1,5972
2000 _k	1,7305	1,8552	1,5998

2560 _k	1,7671	1,8213	1,5824
vid _{att}	1,5571	1,4916	1,5779
vid_{FD}	1,7390	1,8060	1,5777
1000 _{r_500_1000}	1,6526	1,8201	1,7136
std	0,0210	0,0325	0,0077

Šajos mērījumu rezultātos apzīmējumi paliek nemainīgi. Skatoties uz šīm dažādajām fraktālām dimensijām, redzam, ka metodes savstarpēji vairs nedod tik līdzīgus rezultātus. Redzam, ka kastīšu skaitīšanas metodes rezultāti vairs tik labi nesakrīt ar Higuči un jaudas spektra analīzes metodēm. Lai gan attēli ir līdzīgi šī attēla fraktālās dimensijas vidēji ir nedaudz lielākas kā iepriekšējā attēlā. Arī šajā gadījumā vidējā FD vērtība vid_{FD} diezgan labi reprezentē, to, kas redzams rindu un kolonnu vērtībās, bet vidējā attēla vērtība vid_{att} situāciju reprezentē slikti. Analizējot rindiņas mazā fragmentiņa vērtības, redzam krasākas dimensiju vērtību atšķirības starp metodēm iepriekš minēto iemeslu dēļ. Higuči metodes standartnovirze ir mazāka kā jaudas spektra analizēšanas metodes standartnovirze.

3) Paraugs Nr.3.

Paraugs iegūts pie Karvas ciema Vaidavas upes krastā, Apes novadā. Paraugs nedaudz līdzīgs iepriekšējiem, tomēr tas atšķiras ar izteikti nevienmērīgāku struktūru. Šajā paraugā daudz vairāk novērojama vienmērīgā kaļakmens struktūra, un dolomīta kristāli redzami retāk, no kuriem daži nav izauguši līdz galam. Visas šie pirmie trīs paraugi attēloti vienā un tajā pašā mērogā.



2.10.att. Parauga Nr.3. plānslīpējuma attēls [30]

Arī šī attēla izmērs ir 2560 x 1920 pikseļi. Tā kā attēlu parametri ir identiski, bet tajos vizuāli saskatāma atšķirība kirstāliņu izvietojumā, tad šo attēlu ir interesanti salīdzināt ar

iepriekšējiem diviem, salīdzinot to fraktālās dimensijas. Fraktālās dimensijas aprēķini *Matlab* programmā deva sekojošos rezultātus:

2.4. tabula

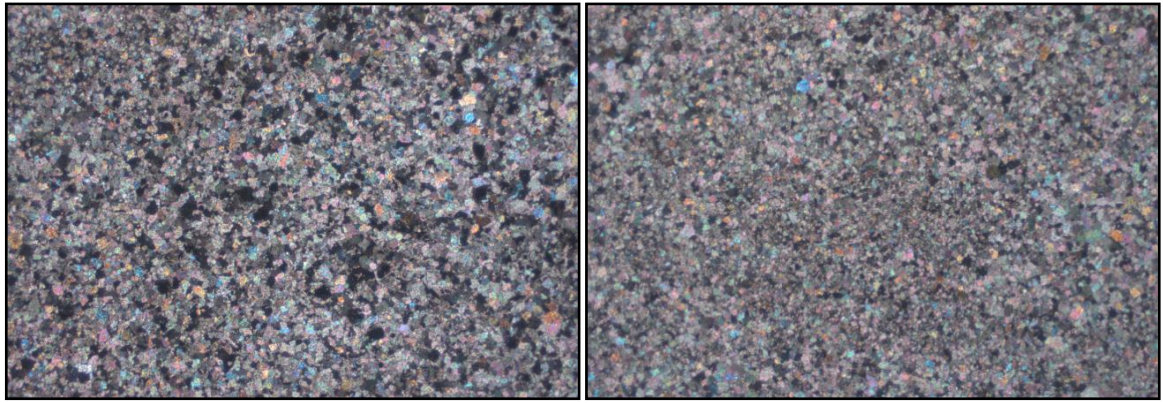
FD mērījumu rezultāti 3. paraugam

Paraugs Nr.3.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1, 8227	1,8949	1,5710
250 _r	1,7827	1,8942	1,5759
1000 _r	1,7829	1,8643	1,5849
1250 _r	1,7429	1,8239	1,5873
1750 _r	1,7984	1,9211	1,5858
1920 _r	1,7926	1,8745	1,5890
500 _k	1,7599	1,8465	1,6058
1000 _k	1,7407	1,8459	1,6078
1500 _k	1,7748	1,7927	1,6223
2000 _k	1,8040	1,9182	1,6161
2560 _k	1,7955	1,8990	1,5971
vid _{att}	1,5021	1,4784	1,5827
vid_{FD}	1,7919	1,8810	1,5824
1000 _{r_500_1000}	1,7848	1,9059	1,7262
std	0,0263	0,0351	0,0080

Šajos mērījumu rezultātos lietoti apzīmējumi tādi paši kā iepriekš. Diezgan krāsas atšķirības no pārējām metodēm redzamas ar kastīšu skaitīšanas metodi iegūtajos rezultātos. Lai gan vizuāli šķita, ka attēls ir vienmērīgāks pēc iegūtajām dimensijām redzam, ka it kā viendabīgā tumšā kaļķakmens struktūra ir pietiekoši „raiba” un dolomītu izvietojums pārāk nevienmērīgs, lai fraktālā dimensija samazinātos, gluži pretēji – tā ir augusi.

4) Paraugs Nr.4. un paraugs Nr. 5.

Abi paraugi iegūti Doles salas Daugavmalas dolomīta atsegumā, Salspils novadā. Paraugos redzama dolomīta pamatmasa – daudz dolomīta un maz kaļķakmens. Ja plānslīpējumi tiek noslīpēti ļoti plāni kā šie, tad var iegūt šeit redzamās perlamutra krāsas, kas mirdz. Arī Doles salā iegūto dolomīta paraugu ģeoloģiskais vecums ir līdzīgs Apē iegūto paraugu ģeoloģiskajam vecumam. Bilžu parametri – attēlu palielinājums un mērogs (2560 x 1760 pikseļi) ir atšķirīgi no iepriekšējiem paraugiem, bet abiem šiem paraugiem tie ir savstarpēji vienādi.



2.11.att. Paraugu Nr.4.(pa kreisi) un Nr.5.(pa labi) plānslīpējumu attēli [30]

Attēliem ir vienādi parametri, tie izskatās vizuāli līdzīgi, un tie iegūti vienā un tajā pašā vietā, tāpēc interesanti novērtēt cik līdzīgas ir to fraktālās dimensijas. Aprēķini ar *Matlab* programmu deva sekojošos rezultātus:

2.5. tabula

FD mērījumu rezultāti 4. un 5. paraugam

Paraugs Nr.4.	H_FD	JS_FD	KS_FD	Paraugs Nr.5.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1,6533	1,6002	1,6047	1 _r	1,6594	1,5984	1,6164
250 _r	1,6994	1,6766	1,6060	250 _r	1,6995	1,6503	1,6124
500 _r	1,6755	1,6142	1,6055	500 _r	1,7235	1,6799	1,6157
1000 _r	1,7038	1,6848	1,6051	1000 _r	1,7214	1,6876	1,6067
1250 _r	1,6555	1,6559	1,6061	1250 _r	1,7184	1,6306	1,6096
1760 _r	1,6916	1,6325	1,6023	1760 _r	1,6816	1,6271	1,6093
500 _k	1,7047	1,7314	1,6395	500 _k	1,6982	1,6192	1,6435
1000 _k	1,6811	1,6931	1,6409	1000 _k	1,7367	1,6655	1,6470
1500 _k	1,6524	1,6625	1,6463	1500 _k	1,7051	1,6845	1,6414
2000 _k	1,6315	1,6056	1,6419	2000 _k	1,6469	1,5717	1,6350
2560 _k	1,5873	1,5232	1,6373	2560 _k	1,5965	1,5418	1,6321
vid _{att}	1,5538	1,4785	1,6070	vid _{att}	1,6084	1,4737	1,6106
vid_{FD}	1,6860	1,6531	1,6069	vid_{FD}	1,7157	1,6583	1,6105
1000 _{r_500_1000}	1,4962	1,7231	1,7625	1000 _{r_500_1000}	1,5425	1,5653	1,7714
std	0,0172	0,0305	0,0050	std	0,0215	0,0355	0,0039

Salīdzinot abus paraugus redzam, ka to attiecīgajās rindās vai kolonnās to dimensijas tiešām diezgan labi sakrīt. Protams, attēli nav identiski, tāpēc dimensiju sakritība nav absolūta. Vidējā FD vērtība jaudas spektra un kastīšu skaitīšanas metodēm ir līdzīgākas kā Higuči metodei. Analizējot mazu vienas rindas posmiņu abos attēlos redzam, ka noteiktās

dimensijas ir ļoti atšķirīgas. Standartnovirzes abiem paraugiem ir līdzīgas un Higuči metodei tā ir mazāka kā jaudas spektra metodei.

5) Paraugs Nr.6.

Paraugs iegūts pie Karvas ciema Vaidavas upes krastā, Apes novadā. Šis paraugs izskatās ļoti īpatnējs savu netradicionālo iežu krāsu dēļ. Un tam ir pamatots iemesls – dažkārt veiksmīgākai atšķirību iezīmēšanai plānslīpējumos, tiem tiek pievienota krāsviela – tā arī šajā gadījumā – plānslīpējumu krāsainu padarījusi krāsviela alizarīns – S. Gaišākie veidojumi ir dolomīts. Šeit tas redzams divos veidos – jau iepriekš apskatītajā kristālu formā, kā arī lielākās dzīslās, kuras bieži vien izveidojas pie plaisām, un tieši ar to ir interesantas vietas analīzei.



2.12.att. Parauga Nr.6. plānslīpējuma attēls [30]

Attēla parametri ir mazliet atšķirīgi no iepriekšējiem – lielāks palielinājums, attēls saglabāts citā formātā un bildes izmēri ir mazāki kā iepriekš (1060 X 690 pikseļi). Tomēr tā kā paraugu nav plānots salīdzināt ar iepriekšējiem, šie aspekti netraucē attēla fraktālās dimensijas izpēti. Aprēķini *Matlab* programmā deva šādus rezultātus:

2.6. tabula

FD mērījumu rezultāti 6. Paraugam

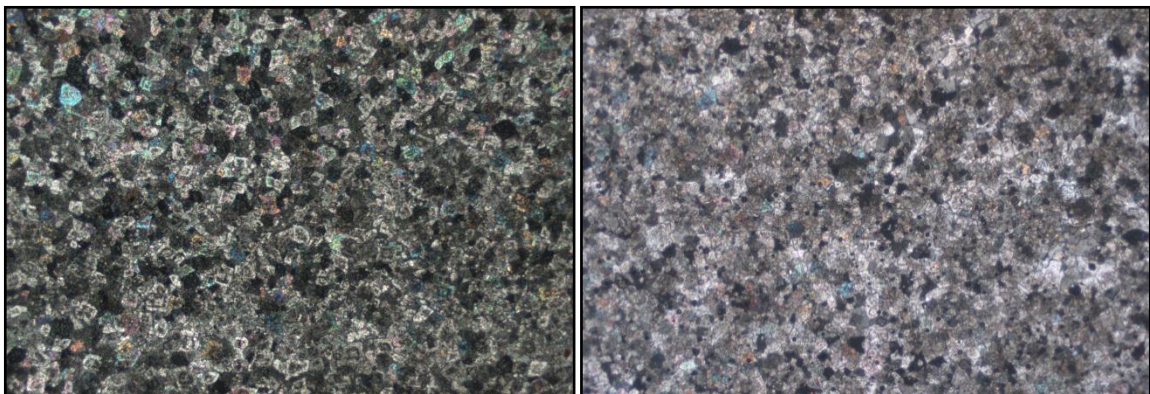
Paraugs Nr.6.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1,7355	1,7663	1,6482
250 _r	1,6449	1,7685	1,6732
380 _r	1,7540	1,8211	1,7169
690 _r	1,6212	1,6359	1,6332
1 _k	1,6369	1,6590	1,6441
250 _k	1,5406	1,5545	1,7242

500 _k	1,6711	1,7068	1,7080
750 _k	1,6121	1,7669	1,7369
1060 _k	1,5660	1,5282	1,7153
vid _{att}	1,4596	1,5234	1,6805
vid_{FD}	1,6559	1,7508	1,6781
500 _{r_500_100}	1,5758	1,7522	1,7287
std	0,0556	0,0689	0,0278

No iegūtajiem rezultātiem var redzēt, ka dažās rindās un kolonnās sakritība starp metožu iegūtajiem rezultātiem ir diezgan augsta, kamēr citās – zema. Ļoti interesanta un būtiska iezīme šajos datos, ka pie plānslīpējuma vietas, kur tajā novērojama plaīsa (aptuveni 380 attēla rindiņa) redzams straujš kāpums fraktālo dimensiju mērījumos, kas labi atspoguļo šo atšķirīgo attēla iezīmi. Šim paraugam ir mazliet lielākas standartnovirzes kā iepriekšējiem.

6) Paraug Nr.7. un paraugs Nr.8.

Pēdējie divi darbā aplūkotie paraugi iegūti divās dažādās Latvijas vietās – Vaidavas upes krastā un Doles salas Daugavmalas dolomīta atsegumā. Tika atrasti maksimāli līdzīgākie paraugi no divām dažādām vietām, kas bija pieejami. To analīzes mērķis ir salīdzināt līdzīgus, divās dažādās vietās iegūtus attēlus. Attēlos redzama dolomīta un kaļakamens masa ar rombveida dolomīta kristāliem. Vietas, kurās šādi kristāli izveidojušies viens iekšā otram, ir dolomīta augšanas zonas. Vietām redzamās košās perlamutra krāsas skaidrojamas ar ļoti plānu plānslīpējumu.



2.13.att. Paraugu Nr.7. un Nr.8. plānslīpējumu attēli [30]

Šie attēli uzņemti vienādā palielinājumā, bet diemžēl nebija iespējams iegūt vienāda izmēra attēlus – parauga Nr.7. izmēri ir 1280 x 873 pikseļi un parauga Nr.8. – 2560 x 1760 pikseļi. Aprēķini *Matlab* programmā deva šādus rezultātus:

2.7. tabula

FD mērījumu rezultāti 7. un 8. paraugam

Paraugs Nr.7.	H_FD	JS_FD	KS_FD	Paraugs Nr.8.	H_FD	JS_FD	KS_FD
1 _r	1,7159	1,7587	1,6251	1 _r	1,6768	1,6100	1,6029
250 _r	1,7485	1,8201	1,6416	250 _r	1,6659	1,6318	1,6174
500 _r	1,7902	1,8966	1,6301	500 _r	1,6710	1,6431	1,6139
750 _r	1,7651	1,8279	1,6441	1000 _r	1,6968	1,6620	1,6058
873 _r	1,7382	1,7592	1,6193	1250 _r	1,6488	1,6350	1,6123
				1760 _r	1,6362	1,5705	1,6080
2500 _k	1,7307	1,7730	1,6764	500 _k	1,6259	1,6236	1,6441
500 _k	1,7388	1,8071	1,6735	1000 _k	1,6565	1,6829	1,6462
750 _k	1,7530	1,8266	1,6741	1500 _k	1,6257	1,5878	1,6403
1000 _k	1,7694	1,7901	1,6667	2000 _k	1,6496	1,6283	1,6435
1280 _k	1,7149	1,6860	1,6604	2560 _k	1,5309	1,4995	1,6318
vid _{att}	1,6376	1,5069	1,6330	vid _{att}	1,5257	1,4856	1,6094
vid_{FD}	1,7610	1,8269	1,6326	vid_{FD}	1,6820	1,6564	1,6093
500 _{r_500_200}	1,7251	1,9201	1,7289	1000 _{r_500_1000}	1,5415	1,5290	1,7607
std	0,0230	0,0392	0,0094	std	0,0221	0,0339	0,0052

Iegūtie rezultāti rāda, ka fraktālās dimensijas starp attēliem labi nesakrīt, kam par pamatu varētu būt vairāki iemesli – attēlu dažādie izmēri, vizuāli pārāk atšķirīgi attēli. Tāpēc neizdodas pārliecinoši apstiprināt izvirzīto hipotēzi, ka ļoti līdzīgi dažādās Latvijas vietās iegūti attēli dod tuvas fraktālās dimensijas. Taču, lai neizdarītu kļūdainus secinājumus, ir ļoti liela nepieciešamība pēc tālākiem pētījumiem šajā jomā. Abu paraugu standartnovirzes ir līdzīgas, un Higuči metodei tās ir mazākas kā jaudas spektra analizēšanas metodei.

Kopumā analizējot attēlus redzam, ka fraktālo dimensiju ir iespējams noteikt ar dažādām metodēm. Detalizētāks iegūto iznākumu apskats nakamajā – darba rezultātu daļā.

REZULTĀTI

Šī darba mērķis bija rast izpratni par iespējam pētīt Latvijas ģeoloģisko struktūru fraktālo dimensiju noteikšanas iespējas un lietderību. Darba mērķis tika sasniegts – izpētes un modelēšanas procesā tika iegūti rezultāti:

1) Fraktālanalīze ģeofizikā pasaulē spēlē būtisku lomu, un Latvijā tai ir vēl nerealizēts potenciāls;

2) Ar Higuči metodi iegūtajiem rezultātiem standartnovirze ir mazāka kā ar jaudas spektra analizēšanas metodi iegūtajiem rezultātiem.

3) Uzmodelētajam pakāpienu fraktālim tika iegūta fraktālā dimensija ar Higuči un kastīšu skaitīšanas algoritmiem, piemēram, 10 iterācijā $H_{FD} = 1,0971$ un $KS_{FD} = 1,0969$. Novērojama laba metožu rezultātu korelācija;

4) Tika iegūtas fraktālās dimensijas ar 3 metodēm – Higuči, kastīšu skaitīšanas un jaudas spektra analīzes – 8 dažādiem dolomīta un kaļķakmens iežu paraugiem;

5) Dolomīta un kaļķakmens fraktālās dimensijas bija aptuveni robežās no 1,55 līdz 1,85;

6) Divu līdzīgu attēlu fraktālās dimensijas visos gadījumos nebija līdzīgas;

7) Fraktālā dimensija tika noteikta gan paraugu dažādām kolonnām, gan rindām, gan rindas fragmentam, kā arī vidējā fraktālās dimensijas vērtība;

8) Fraktālo dimensiju atšķirības dažādās attēla vietās labi parādīja tādas būtiskas izmaiņas attēlā kā plaisa;

9) Fraktālās dimensijas starp metožu pielietojumu dažādām rindiņām viennozīmīgi nekorelēja;

10) Iegūtās fraktālās dimensijas ar kastīšu metodi daudzos gadījumos būtiski atšķirās no Higuči metodes un jaudas spektra analizēšanas rezultātā iegūtajiem datiem;

11) Fraktālās dimensijas vidējās vērtības, kas noteiktas, iegūstot attēlu kolonnu vidējās vērtības un aprēķinot tām fraktālo dimensiju, bija ļoti dažādas un slikti atspoguļo reālās fraktālās dimensijas.

SECINĀJUMI

Maģistra darba izpildes gaitā darbā izvirzītie uzdevumi tika izpildīti, tādējādi realizējot maģistra darba mērķi.

Darba rezultātā var secināt, ka:

1. Latvijas ģeoloģiskajām struktūrām ir iespējams veikt fraktālanalīzi, nosakot to fraktālo dimensiju, kas ir noderīgs papildus parametrs šo ģeoloģisko struktūru kvantitatīvai raksturošanai.
2. Latvijas ģeoloģisko struktūru analīzei var izmantot dažādas fraktālās dimensijas noteikšanas metodes – jaudas spektra, kastīšu skaitīšanas un Higuči algoritma metodes;
3. Higuči metode ir veiksmīgi izmantojama ģeoloģisko struktūru digitālo attēlu analīzē;
4. Higuči metode uzskatāma par precīzāku kā jaudas spektra analizēšanas metode, jo tās rezultātiem ir mazāka izkliede.
5. Atsaucoties uz atšķirīgajiem datiem rezultātos un informācijas avotiem, Higuči metode ir efektīvāka un precīzāka nekā jaudas spektra vai kastīšu skaitīšanas metode, īpaši gadījumos, kad nepieciešams analizēt attēla šķēluma īsu fragmentu – noteikta garuma līniju jebkurā virzienā;
6. Fraktālās dimensijas aprēķināšanā vērtību vidējošana traucē pareizu rezultātu iegūšanai;
7. Fraktālās dimensijas noteikšana 1D gadījumā sniedz vērtīgu papildus informāciju par ģeoloģiskā ieža īpašībām.

Aprēķinot iežu digitālo attēlu šķēlumu fraktālās dimensijas, mērķis nebija iegūt viennozīmīgi precīzas to dimensiju vērtības, bet gan parādīt, ka iežos ir redzamas fraktālas struktūras, un, ka Latvijas ģeoloģiskajām struktūrām ir iespējams noteikt fraktālās dimensijas un pēc tam tās salīdzināt un analizēt iegūtos rezultātus.

Darba noslēgumā jāpiebilst, ka darbs ir parādījis fraktālanalīzes nozīmi un iespējas ģeoloģisko struktūru analizēšanai Latvijā. Darbu pie fraktālanalīzes ģeofizikā iespējams turpināt vairākos virzienos – gan optimizējot esošās metodes un izstrādājot jaunas, gan analizējot lielāku apjomu iežu, gan lietojot fraktālanalīzi citās ģeofizikas jomās. Tieši plašās fraktālanalīzes aplikāciju iespējas un nozīmīgais pienesums, ko fraktālanalīze var piedāvāt pētījumiem ģeofizikā varētu būt nopietnas izvērtēšanas vērts temats Latvijas ģeologu un fiziķu sabiedrībai.

PATEICĪBAS

Paldies Latvijas Universitātei Fizikas un matemātikas fakultātēs (LU FMF) administrācijai par pārdomāto un efektīvo studiju noslēgumu darbu izstrādes administrēšanu, kas zināmos noslēguma darba tapšanas posmos būtiski palīdzēja darba procesā.

Paldies darba vadītājam, prof. Jurim Žagarm, par aizraujošo lekciju kursu „Ģeofizikas pamati”, kas iedvesmoja maģistra darba tēmas izvēlei. Paldies par atbalstu, sniegtajām zināšanām, idejām un padomiem maģistra darba tapšanā.

Paldies Latvijas Universitātes Ģeogrāfijas un Zemes zinātņu fakultātei, it īpaši, pasniedzējiem Valdim Segliņam un Ģirtam Stinkulim par noderīgajiem materiāliem darba tapšanai. Paldies prof. Ģ.Stinkulim par izsmeļošo informāciju un aizraujošo stāstījumu dažādos ģeoloģijas jautājumos.

Paldies LU FMF Studentu pašpārvaldei par zinātniskās literatūras konkursu, kura rezultātā varēju iegūt savā, un vēlāk LU FMF bibliotēkas, īpašumā vienu no darba pamatliteratūras avotiem – L. Turcottes grāmatu „Fractals and Chaos in Geology and Geophysics”.

Paldies draugiem, kursa biedriem, korim „Aura” un ģimenei, bez kuriem šis darbs nebūtu tapis, par neizmērojamo morālo atbalstu, padomiem un viedokļiem, kas sniedza neaizvietojamu lomu darba tapšanā.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. **Valaine, Z. E** – apmācība par fraktāļiem: bakalaura darbs. RTU Datorzinātnes un informācijas tehnoloģiju fakultāte. Rīga : Rīgas Tehniskā universitāte, 2006. 74 lpp.
2. *Webcoist* [tiešsaiste] – [atsauce 14.05.2012.]. Pieejams:
<http://webcoist.momtastic.com/2008/09/07/17-amazing-examples-of-fractals-in-nature/>.
3. *Migel* [tiešsaiste] – [atsauce 14.05.2012.]. Pieejams:
http://www.migel.com/fractals_math_patterns/visual-math-natural-fractals.html.
4. **Siliņš, I. E.** *Lielo patiesību meklējumi*. Rīga: Jumava, 1999. 510 lpp.
5. **Bula, I.** *Fraktālā ģeometrija*, Lekciju konspekts, 2009. 114.lpp.
6. *Wikipedia* [tiešsaite] - [atsauce 14.05.2012.]. Pieejams:
http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal_dimension.
7. *WASP* [tiešsaite] - [atsauce 20.05.2012.]. Pieejams:
<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracintro/>.
8. *Lielā terminu vārdnīca* [tiešsaite] - [atsauce 08.04.2012.]. Pieejams:
<http://termini.lv/index.php?term=fractal&lang=EN&terms=fractal>.
9. **Gonze, D.** *Fractals:theory and applications*: lekciju materiāli. Belģija: Université Libre de Bruxelles, 2011.
10. *Wikipedia* [tiešsaite] - [atsauce 14.05.2012.]. Pieejams:
<http://en.wikipedia.org/wiki/Attractor>.
11. **Šmidlere, G.** Fraktāļa īpašības un fraktāļa dimensijas noteikšana: bakalaura darbs. LU Fizikas un matemātikas fakultāte. Rīga: Latvijas Universitāte, 2005. 81 lpp.
12. *Wikipedia* [tiešsaite] - [atsauce 14.05.2012.]. Pieejams:
<http://en.wikipedia.org/wiki/Fractal>.
13. *Planetmath* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://planetmath.org/KochCurve.html>.
14. *Math UIC* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://homepages.math.uic.edu/~culler/chaos/#Koch>
15. **Klonowski, T.** Simple fractal method of assessment of histological images for application in medical diagnostics. *Nonlinear Biomedical Physics*, vol. 4:7, 2010.
16. **Kouzani, A.Z.; He, F. and Sammut, K.** *Face image matching using fractal dimension*. Austrālija: School of Engineering, Flinders University of SA, 1999. 642 – 646. lpp.
17. **Gouyet, J. F.** *Physics and fractal structures*. Francija: Laboratoire de Physique de la Matière Condensée, Ecole Polytechnique, 1996., 231. lpp.

18. **Turcotte D. L.** *Fractals in Geology and Geophysics*. PAGEOPH Vol.131., Nos.1/2, 1989.
19. **Zmeskal, O.** *Fractal Analysis of Image Structures*. Harmonic and Fractal Image Analysis, 2001., 3. – 5. lpp.
20. *FracLac* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://rsb.info.nih.gov/ij/plugins/fracLac/FLHelp/Fractals.htm>
21. **Turcotte, Donald L.** *Fractals and Chaos in Geophysics, Second Edition*. Cambridge University Press, 1997., 398 lpp.
22. **Ying, L. K.** *Analysis of diabetic cardiac signals: A non-linear approach*. Sim university, school of science and technology. 2010., 81 lpp.
23. **Raghavendra, B.S.; Narayana Dutt, D.** *Computing Fractal Dimension of Signals using Multiresolution Box-counting Method*. International Journal of Information and Mathematical Science, vol. 6:1, 2010., 50. – 65. lpp.
24. **Dershowitz, W.; Redus, K; Wallmann, P; LaPointe, P.; Axelsson, C.L.** *The implication of fractal dimension in hydrogeology and rock mechanics*. Zviedrija: Tehnical report for Swedish nuclear fuel and waste management, CO 92 -17, 2010, 62 lpp.
25. **Ahammer, H.** Higuchi dimension of fractal images. *PloS ONE*, 2011, vol.6, issue 9, e24796.
26. **Higuchi, T.** Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. *Physica D*, 1988, vol. 31, p. 277 – 283.
27. *ULB* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/FRACTALS/fractals.html>.
28. *Matworks* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://www.mathworks.se/products/matlab/demos.html?file=/products/demos/shipping/matlab/fftdemo.html>.
29. *Signal Processing* [tiešsaite] - [atsauce 18.05.2012.]. Pieejams:
<http://groups.yahoo.com/group/biomedicalSignalProcessing/messages/55?threaded=1&message=1&var=1&tid=1>
30. Latvijas Universitātes Ģeogrāfijas un Zemes zinātņu fakultātes studentu un pasniedzēju sagatavoti plānslīpējumi

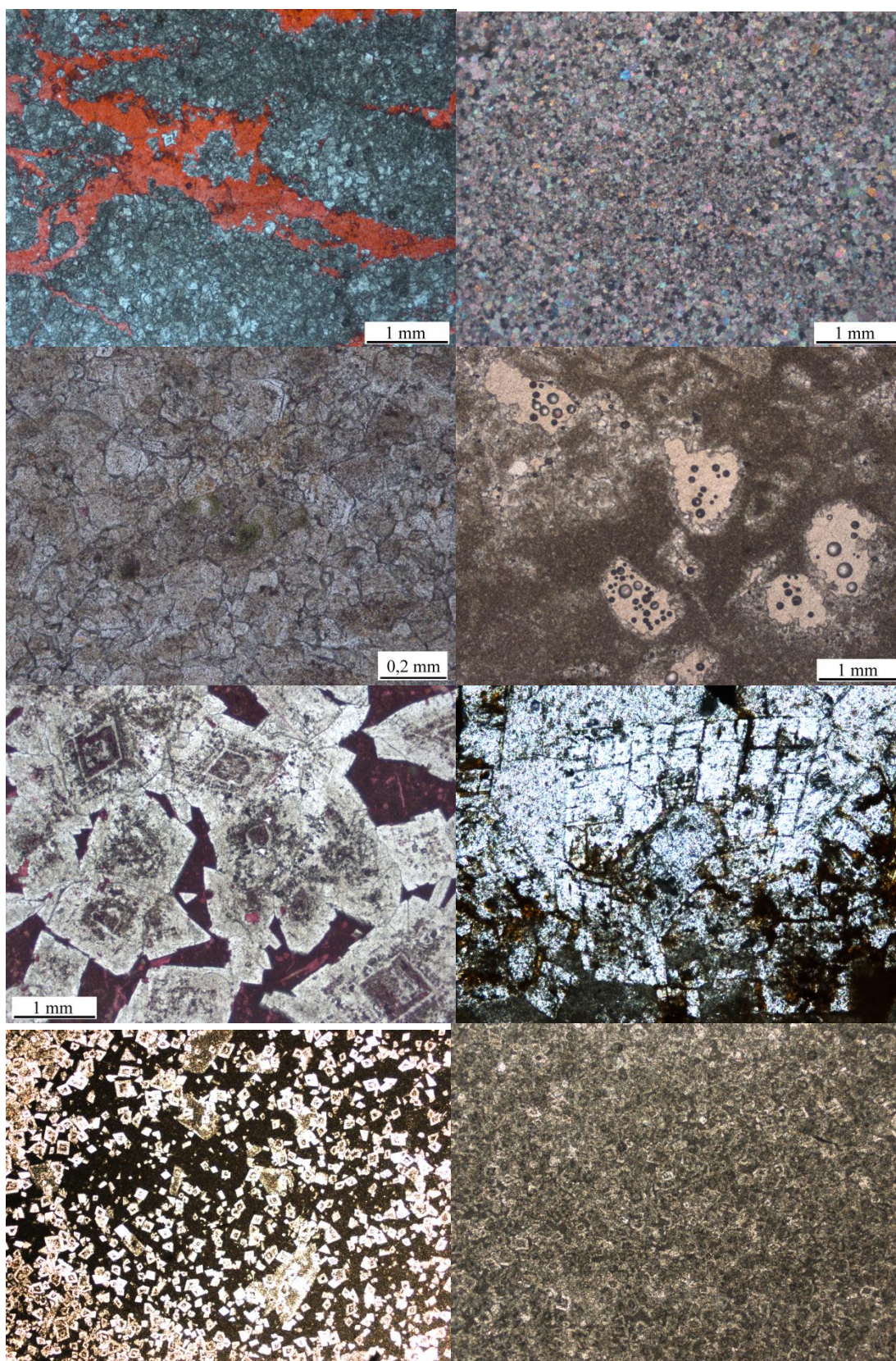
PIELIKUMI

```

clear %iztira mainigos
k=12; %iteraciju skaits
mmax=2*3^k; %vajadzigo koordinasu skaits
x=zeros(1,mmax);
y=zeros(1,mmax);
o=zeros(1,mmax);
x(1)=0; x(mmax)=1;
y(1)=0; y(mmax)=0;
%x aizpildisana
p=1/(3^k); % attalums starp diviem x-iem
a=1;
for z=1:2:(mmax-2)
    for b=1:2
        x(z+b)=p*a;
    end
    a=a+1;
end
%y aizpildisana
h=0;
for n=1:k
    q=1/(3^n); %garums 1 gabalinam
    e=1/(3^(n-1));
    for o=1:(3^(n-1))
        h=y(round(mmax*e*o));
        | beig=e*o;
        saak=beig-e;
        an=3*o-2;
        an2=an+1;
        [n1,n2,n3,n4]=kaste(saak,beig,h);
        y(an*mmax/3^n)=n1;
        y(an*mmax/3^n+1)=n2;
        y(an2*mmax/3^n)=n3;
        y(an2*mmax/3^n+1)=n4;
    end
end
plot(x,y,'b');
shading flat;
axis('square','equal','off');

```

Paraugi no darbā analizētajiem Latvijas iežu attēliem



Maģistra darbs „Fraktālanalīzes metožu izmantošana Latvijas ģeoloģisko struktūru izpētē” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autore: Arta Kudlāne _____
paraksts

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Darba vadītājs: asoc. prof. Dr.h.Phys. Juris Žagars _____

Recenzents : vadošais pētnieks, Jānis Virbulis

Darbs iesniegts Fizikas nodaļā _____ . _____ . 2012.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta _____

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījumu komisijas sēdē

_____ . _____ . 2012. protokols _____

Komisijas sekretārs: docents Vladimirs Ivins _____