Latvijas Universitāte
Fizikas un matemātikas fakultāte

Matemātikas nodaļa

Kriptovalūtu statistiskās īpašības un to portfeļu optimizēšana.

Bakalaura darbs

Autors: Raimonds Lukstaraups

Stud. apl. rl 14012

Darba vadītājs: Dr. math. Jānis Valeinis

Rīga 2018

Anotācija

Bakalaura darbā aprakstīta, mūsdienu, viena no populārākajām valūtām-kriptovalūta, kas pēdējo gadu laikā, ir izraisījusi lielu interesi investoru un spekulantu vidū. Darbā tiks apskatīta lielākā no kriptovalūtām $Bitcoin$ un tās statistiskās īpašības. Tākā kriptovalūtai piemīt daudzas valūtai raksturīgās īpašības, to var uzsskatīt par finanšu instrumentu. Šajā darbā tiks izklāstīts, kā izveidot optimālu portfeli, pielietojot plašāk pazīstamās portfeļu optimizācijas metodes.

Atslēgvārdi: Kriptovalūta, bitcoin, portfeļu optimizācija, ienesīgums.

Anotation

This Bachelor thesis describes the current, one of the most popular currencies, the cryptocurrency, which in recent years has caused great interest among investors and speculators. The paper will look at the largest of the cryptocurrencies $Bitcoin$ and its statistical properties. Hence cryptocurrency has many currency-specific characteristics, it can be accounted as a financial instrument. This paper will outline how to create an optimal portfolio by applying the well-known portfolio optimization techniques.

Keywords: Cryptocurrencies, bitcoin, portfolio optimization, profitability.

Saturs

Ievads

Pēdējo gadu laikā, lielu popularitāti sabiedrībā ir guvusi valdības emitētajiem naudas līdzekļiem izveidotā alternatīva - kriptovalūta. Tā ir ciparu valūta, kurā tiek izmantotas dažādas šifrēšanas metodes, lai regulētu valūtas vienību ģenerēšanu un pārbaudītu līdzekļu pārskaitījumus, kā arī tās darbība nav piesaistīta nevienai no bankām. Galvenokārt, kriptovalūtas izceļas, jo to vērtība strauji pieaug, pārskaitījumi, kas tiek veikti ir anonīmi, droši un gandrīz bezmaksas. [1]

Šo digitālo valūtu pirmsākumi meklējami jau 1998. gadā, kad pirmo reizi tika veikti mēģinājumi izveidot virtuālo valūtu, kas nodrošināta ar šifrēšanu, piemēram, B-Money un Bit Gold, ir pirmās no kriptovalūtām, kas tika formulētas, taču diemžēl netika pilnībā izstrādātas. [14]

2008.gadā Japāņu programmētājs Satoshi Nakamoto izstrādāja un iepazīstināja sabiedrību ar mūsdienās vispopulārāko kriptovalūtu Bitcoin [13], un kopš tā laika Bitcoin vērtība ir pieaugusi no viena tūkstoša amerikāņu dolāru līdz 37 miljoniem [1]. Lai arī Bitcoins, šobrīd, sabiedrībā ir plašāk pazīstamā kriptovalūta, pastāv vēl vismaz 1600 citas digitālās valūtas [16]. Ar kriptovalūtu parādīšanos radās, ne tikai, jauna veida valūtas un darījumu tīkli, bet arī jauna veida investīciju produkti.

Viens no svarīgākajiem jautājumiem finanšu jomā ir tas, vai nopērkot kādu noteiktu finanšu intrumentu- akciju, obligāciju, valūtu vai kriptovalūtu, tas dos ienesīgumu jeb vai veiktais ieguldījums būs optimāls. Bieži vien investori veido dažādus finanšu portfeļus, šādā gadījumā tie ir ieinteresēti, lai izveidotais portfelis būtu optimāls. Par optimālu portfeli tiek uzskatīts, vairāku finanšu instrumentu kopums, kurā ieguldītie līdzekļi ir sadalīti tā, lai tiem būtu pēc iespējas lielāks ienesīgums un minimāls risks gan labos, gan sliktos laikos. Portfeļu optimizācijas pamatlicējs ir Harijs Markovics, kurš bija pirmais, kas ieviesa diversifikācijas terminu ekonomijas teorijā, kas nosaka, kā investoram izveidot labāku portfeli. Mūsdienās eksistē daudz metodikas ar kuru palīdzību var optimizēt portfeli. Šajā darbā tiks aprakstīti šādi optimizēti portfeļi:

1. Minimālā riska portfelis (*GMV*);
2. Maksimālā Šarpa koeficienta portfelis (*MSR*);
3. Visvairāk diversificētais portfelis *MDP*;
4. Minimālās nosacītās riskam pakļautās vērtības portfelis (*CVaR*).

Minimālā riska portfelis ir viens no Markovica portfeļiem, kurā finanšu instrumentu kombinācija sniedz vismazāko iespējamo risku. Maksimālā Šarpa koeficienta portfelis sniedz vislabāko ienesīguma un riska attiecību. Visvairāk diversificētais portfelis - šajā portfelī izmantotie finanšu instrumenti ir savstarpēji vismazāk atkarīgi viens no otra. Kā pēdējais šajā darbā tiks apskatīts minimālās nosacītās riskam pakļautās vērtības (CVaR) portfelis. Šajā portfelī risks tiek novērtēts, balstoties uz vēsturisko datu iespējamo zaudējumu lielumu. Bakalaura darba mērķis ir izveidot vairākus optimālus portfeļus un salīdzināt to ienesīgumu noteiktā laika periodā. Tiek izvirzīti sekojoši darba uzdevumi, lai sasniegtu izvirzīto mērķi:

1. Iepazīties ar kriptovalūtu tirgu.
2. Izprast kriptovalūtu cenas īpašības;
3. Iepazīties ar teoriju par dažādu optimālu porteļu veidošanu;
4. Izveidot optimālus kriptovalūtu portfeļus;
5. Aprēķināt kāds būtu optimizēto portfeļu ienesīgums, ja tajos tiktu veikti ieguldījumi;
6. Salīdzināt iegūtos rezultātus.

Darbs sastāv no trīs daļām. Pirmajā daļā tiek aplūkota kriptovalūtu vēsture, to pielietojums un cenu attīstība. Otrajā daļā tiek izklāstīts teorētisks apraksts par finanšu instrumentu optimālu portfeļu veidošanu. Darba trešajā daļā aprēķināti dažādu optimizētu portfeļu iespējamais ienesīgums un veikta to salīdzināšana.

1 Bitcoin

2008 gada novembrī anonīma persona vai organizācija vārdā Satoshi Nakamoto publicēja *Bitcoin* konceptu ar nosaukumu "Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System" [12]. Šajā darbā Nakamoto iepazīstina un apraksta elektronisku norēķinu sistēmu *Bitcoin*. Šī sistēma ir sasniegusi to, ko daudzas citas jau bija mēģinājušas, bet bez panākumiem. Šajā rakstā esošais protokols apraksta vienādranga tīklu (angļu val. *Peer-to-Peer*) norēķinu sistēmu, kura ir atrisinājusi slaveno dubultās tērēšanas problēmu. *Bitcoin* ir decentralizēta sistēma kura darbojās bez centrālo autoritāšu kā starpnieku iejaukšanās. Tā vietā, šī sistēma balstās uz kriptogrāfiskā darba padarīšanas pierādījumu, kurš tiek radīts patērējot lielu daudzumu skaitļošanas jaudas. Šī metode padara praktiski neiespējamu šī protokola neievērošanu. Nakamoto *Bitcoin* dēvēja par elektronisku norēķinu sistēmu, bet mūsdienās tā tiek saukta par kriptovalūtu, dēļ tās valūtai raksturīgajām iezīmēm.

Sistēma ir vienādranga tīkls, un tādējādi lietotāji var tieši apmainīties ar *Bitcoin* viens ar otru. Katrs darījums, kas notiek *Bitcoin* tīklā, tiek reģistrēts publiskajā virsgrāmatā: blokķēdē. Šo publisko virsgrāmatu atjaunina tīkla uzturētāji, kas kā kompensāciju saņem maksu par darījumiem un jaunizveidotos *Bitcoin*. Virsgrāmata ir publiski pieejama un jebkurš var to aplūkot.

Katrs *Bitcoin* darījums tiek reģistrēts blokķēdē. Blokķēde ir publiska grāmata, kurai nav neviena, kas to pārrauga. To pārvalda un atjaunina tīkls. Katras desmit minūtes jaunie darījumi tiek noslēgti jaunā blokā. Šis bloks tiek pievienots blokķēdei. To nodrošina tīkla pārvalītāji un tas kurš pirmais ir izveidojis un pievienojis bloku tiek atalgots ar 25 *Bitcoin*. Tākā tehnoloģijas attīstās un paliek aizvien ātrākas arī tīklam jāpielāgojas un jānodrošina, lai grūtības pakāpe būtu atbilstoša 10 minūšu intervālam.

Bitcoin tiek turēti elektroniskā makā, šis maks ir fails, kuram ir publiskā un privātā atslēga. Publisko atslēgu var uzskatīt par maka konta numuru, kuru ir droši nosūtīt citai personai, lai saņemtu pārskaitījumu un ir nepieciešama lai veiktu pārskaitījumu. Privāto atslēgu var uzskatīt par paroli, lai piekļūtu savam *Bitcoin* kontam.

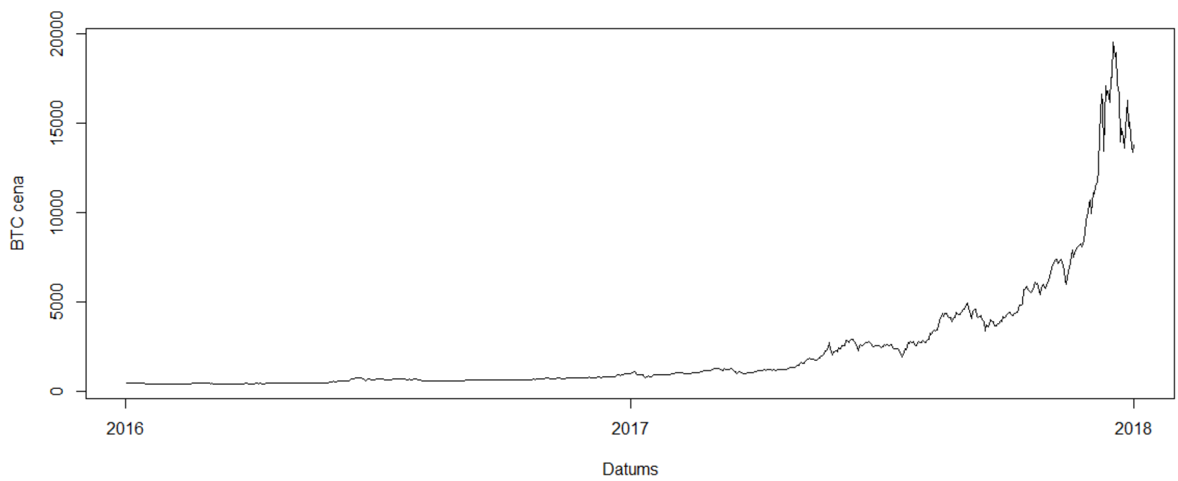
Bitcoin priekšrocības:

- Darījumu maksa. *Bitcoin* tīkls nodrošina ļoti mazas izmaksas par pārskaitījumu salīdzinājumā ar bankas pārskaitījumu. *Bitcoin* var sūtīt no jebkuras vietas pasaulē uz citu par to maksājot apmēram 0.002$ salīdzinājumā ar līdzpat 50$ par bankas darījumu.

- Anonimitāte. *Bitcoin* piedāvā gandrīz vai pilnīgu anonimitāti, izņemot gadījumus, kad tavs elektroniskais maks ir piesaistīts biržai vai savādākā veidā personas datiem. Tomēr tava publiskā atslēga ir redzama visiem. Var redzēt no kurienes ienāk un uz kurieni tiek pārskaitīti *Bitcoin*, tomēr nevar zināt kuram tieši pieder šis maks.

- Naudas daudzumu apritē. Centralizētā naudas sistēmā naudas daudzumu apritē nosaka valsts vai centrālā banka, bet *Bitcoin* gadījumā, maksimālais iespējamais *Bitcoin* daudzums apritē ir fiksēts 21 miljons.

Bitcoin koncepts bija ļoti veiksmīgs un nu jau mūsdienās daudzviet atzīts un plaši lietots samaksas līdzeklis. Šī iemesla dēļ ir izveidojušās vēl daudzas citas kriptovalūtas, kuras darbojas uz ļoti līdzīgiem pamatiem. Jebkurš var uztaisīt savu kriptovalūtu, tāpēc šobrīd to ir ļoti daudz, 1640 precīzi. No visa kriptovalūtu tirgus *Bitcoin* vērtība sastāda, apmēram, 40%, un tā ir pašlaik dominējošā kriptovalūta un tai ir ļoti liela ietekme uz pārējām kriptovalūtām.



Att. 1.1: Bitcoin cenas grafiks

2 Finanšu tirgus dati

2.1 Finanšu instrumenta peļņas laikrindas iezīmes

2.1.1 Viendimensiju laikrindas iezīmes

Pirms mēs aplūkojam, kā tiek modelēts finanšu tirgus risks, ir vērts apdomāt un apskatīt tipiskas finanšu tirgus rakstura iezīmes. Tās ļoti labi ir aprakstītas [6]. Šīs iezīmes ir ļoti svarīgas, lai noteiktu, vai izvēlētais riska modelis ir piemērots vai nē. To var skaidrot kā, ja riska modelis neatspoguļo laikrindas iezīmes, tad arī izdarītie secinājumi būs nederīgi, un novērtētais risks nebūs atbilstošs. Par novērotajiem finanšu datiem, šādas iezīmes ir spēkā:

- Laikrindas dati par peļņu parasti nav neatkarīgi un vienmērīgi sadalīti.
- Datu svārstības nav vienādas visā datu laika posmā.
- Absolūtās vai kvadrātiskās vērtības peļņas datiem ir autokorelētas.
- Finanšu tirgus peļņas sadalījums ir leptokurtisks. Ekstrēmu notikumu iestāšanās ir biežāka nekā normālā sadalījuma gadījumā.
- Ekstrēmo notikumu gadījumi ir novērojami viens otram blakus, attiecībā pret laiku. (svārstību grupēšanās)
- Ieņēmumu empīriskais sadalījums ir novirzīts uz kreiso pusi; negatīvie ienākumi ir iespējamāki, nekā pozitīvie.

2.1.2 Daudzdimensiju laikrindu iezīmes

Iepriekšējajā nodaļā aplūkotās iezīmes ir ļoti noderīgas. Tomēr, lai skatītos no portfeļa optimizācijas viedokļa mums ir nepieciešams apskatīt daudzdimensiju laikrindu iezīmes. Mēs koncentrēsimies uz šādiem faktiem:

- Savstarpējās korelācijas starp absolūtajām vērtībām ir mazāk izteiktas un vienāda laika perioda korelācijas parasti ir stiprākās.
- Pretēji, tām absolūtā vai kvadrātiskā peļņas vērtība parāda lielas savstarpējās korelācijas. Šis empīriskais apgalvojums ir līdzīgs viendimensiju laikrindas gadījumam.
- Vienādo laika periodu korelācijas laika gaitā nav nemainīgas.
- Ekstrēmie novērojumi vienā peļņas laikrindā bieži vien ir saistīti ar ekstrēmajām vērtībām citās peļņas laikrindās.

2.2 Riska modeļa ieviešana

Aplūkojot viendimensiju un daudzdimensiju finanšu datu laikrindu iezīmes iepriekšējajās nodaļās, mēs varam daudz spriest par to kādam jābūt riska novērtēšanas modelim. Ar iezīmēm kuras esam aplūkojuši līdz šim, varam secināt ka riska novērtēšanas modelim piemīt šādas īpašības:

- Riska modelis kurš pieņem ka vērtības ir neatkarīgas un vienmērīgi sadalītas, nebūs atbilstošs visos laikrindas momentos.
- Riska modelis kurš ir bāzēts uz pieņēmumu par normālo sadalījumu nespēs precīzi prognozēt ekstrēmo vērtību biežumu.
- Riska modelim vajadzētu noteikt un pielāgoties konkrētajām svārstībām katrā laika posmā. Tas nozīmē riska mēram jāpielāgojas nepārtraukti mainīgajai videi, kurā var tikt novērots gan augsts, gan zems svārstību līmenis.
- Portfeļa kontekstā izmantotajam modelim jābūt pietiekami elastīgam, lai to varētu izmantot arī pie mainīgajām atkarībām starp finanšu instrumentiem; jo īpaši kopīgajai peļņas kustībai.

3 Riska mērīšana

Šā gadsimta pirmās desmitgades beigās investoru uzmanība tika pievērsta riska novērtēšanai ne tikai finanšu krīzes dēļ, bet arī, lai spētu precīzi noteikt potenciālos zaudējumus arī mierīgākos tirgus periodos. Ja investors būtu pārāk piesardzīgs attiecībā pret esošo risk, tad tas apdraud potenciālos ienākumus.

3.1 Riska mēra pārskats

Šajā sadaļā ieviestie riska mēri ir balstīti uz varbūtības modeli potenciālajiem zaudējumiem, ar kuriem saskarsies investors. Investora ieguldītie līdzekļi W_t tiek uzskatīti par gadījuma lielumu, un tiek pieņemts, ka to reālā vērtība laika punktā t ir zināma. Vērtība šajā konkrētajā laika brīdī ir atkarīga no riska faktoru vektora z_t, kas ietekmē investora ieguldīto līdzekļu stāvokli:

$$W_t = f(t, z_t). \tag{3.1}$$

Finanšu instrumentu cenas, maiņas kursi un/vai procentu likmes var būt piemēram, riska faktori. Tiek pieņemts, ka tie ir zināmi laika momentā t.

Pretstatā, nākotnes ieguldīto līdzekļu vērtība pēc laika brīža Δ nav zināma. Tā varētu būt līdzekļu vērtība pēc 1 vai 10 dienām. Zaudējumi, kas rodas pēc kāda laika Δ ir apzīmēti ar $L_{t,t+\Delta}$, un tā ir starpība starp līdzekļu daudzumu laika brīžos $t + \Delta$ un t. Ir ērti zaudējumus apzīmēt ar pozitīviem skaitļiem:

$$L_{t,t+\Delta} := -(W_{t+\Delta} - W_t). \tag{3.2}$$

Ievietojot 3.1 vienādojumu 3.2 vienādojumā ir skaidri redzams, ka zaudējumi tiek noteikti pēc izmaiņām riska faktoros:

$$L_{t+\Delta} = -(f(t+\Delta, z_t + x_{t+\Delta}) - f(t, z_t)), \tag{3.3}$$

kur $x_t = z_t - z_{t-\Delta}$.

Tā kā līdzekļu daudzums W_t ir gadījuma lielums, zaudējuma funkcija, kā starpība starp līdzekļu vērtībām kādā laika intervālā, arī ir gadījuma lielums, un tam ir varbūtības sadalījums. Tas tiek saukts arī par zaudējumu sadalījumu. Šo sadalījumu ietekmē informācija kas ir pieejama laika momentā t.

3.2 Riskam pakļautā vērtība

Kā viens no praktiskākajiem un visplašāk pielietotajiem riska mēriem ir: riskam pakļautā vērtība (VaR). Šādu terminu pirmais lietoja uzņēmums "JP Morgan" savā publikācijā $RiskMetrics$ [5].

Definīcija 3.1. Dotam ticamības intervāla līmenim $\alpha \in (0,1)$, VaR tiek definēts kā mazākais iespējamais skaitlis l tāds, ka varbūtība iestāties zaudējumiem L nav augstāka par $1-\alpha$ priekš zaudējumiem lielākiem par l. Šī vērtība atbilst zaudējumu sadalījuma kvantilei un var tikt izteikta formā:

$$VaR_\alpha = inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} : F_l(l) \geq \alpha\}$$

kur F_l ir zaudējumu varbūtības sadalījuma funkcija.

Lai šādu mēru labāk izprastu tika ieviest tāds termins, kā vidējais VaR jeb VaR_α^{mean}. Šis mērs nosaka starpību starp riskam pakļauto vērtību un sagaidāmajiem ienākumiem μ. Ja izvēlētais laika periods ir viena diena, tad šo mēru sauc arī par *riskam pakļautajiem dienas ienākumiem*.

3.3 Sagaidāmie vidējie zaudējumi

Lai gan riskam pakļautās vērtības mēram ir dažas labas iezīmes, tas tomēr nesniedz pietiekamu secinājumu par riska līmeni. Lai būtu vieglāk saprast, to var skaidrot šādi: ja no 100 dienām 95 dienas ir saulainas un piecas dienas līst, parasti cilvēki nav ieinteresēti zināt cik ir mazākais lietus daudzums ko viņiem sagaidīt, bet gan to cik daudz lietus vidēji varētu būt šajās dienās. Sagaidāmie vidējie zaudējumi (angļu val. *expected shortfall*) tiek labi aprakstīti [8]. Šāds mērs nodrošina ar ieskatu par to kādi būs zaudējumi, ja tiks pārsniegta riskam pakļautā vērtība pie dotā ticamības līmeņa.

Definīcija 3.2.

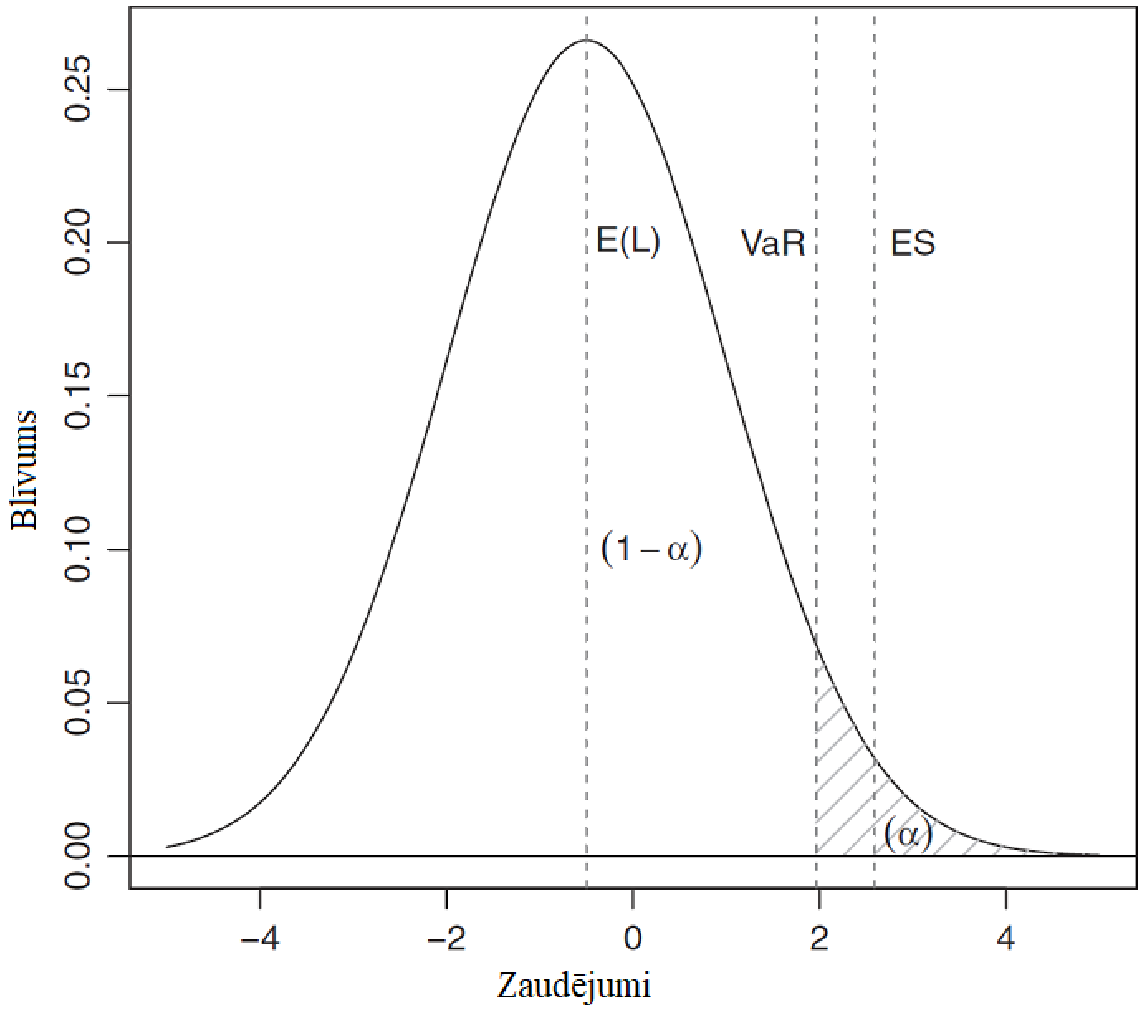
$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_u(F_L)du,$$

kur $q_u(F_L)$ ir kvantiļu funkcija no zaudējumu sadalījuma F_L. Sagaidāmos vidējos zaudējumus var arī izteikt izmantojot riskam pakļauto vērtību:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)du,$$

un šis mērs var tikt interpretēts, kā vidējā riskam pakļautā vērtība intervālā $(1-\alpha, 1)$.

Lai labāk izprastu gan riskam pakļautās vērtības, gan vidējo sagaidāmo zaudējumu konceptus var aplūkot 3.1 attēlu.



Att. 3.1: Zaudējumu blīvuma funkcija ar VaR un ES

Līdz šim nekādi pieņēmumi par zaudējumu sadalījumu vēl nav izdarīti. VaR un ES var tikt aprēķināti izmantojot empīrisko sadalījuma funkciju dotajiem datiem. Šo metodi dēvē par vēsturisko datu izmantošanu. Lai to pielietotu ir nepieciešams zaudējumus sakārtot atbilstoši to lielumiem. Kā piemēru ņemsim datus kuros ir novēroti 1000 zaudējumi. Tātad riskam pakļautā vērtība pie 99% atbilstu desmitajam lielākajam zaudējumam un sagaidāmos vidējos zaudējumus varētu noteikt, kā vidējo vai mediānu no 10 lielākajiem zaudējumiem. Bieži vien šie mēri var tikt aprēķināti ne tikai balstoties uz vēsturiskajiem datiem, bet arī izdarot pieņēmumus par to kāds ir zaudējumu sadalījums. Ja tiek pieņemts ka zaudējumi ir normāli sadalīti, tad šie mēri var tikt aprēķināti kā:

$$VaR_\alpha = \sigma \Phi^{-1}(\alpha) - \mu, \tag{3.4}$$

$$ES_\alpha = \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha} - \mu, \tag{3.5}$$

kur ϕ apzīmē standart normālā sadalījuma blīvuma funkciju.

Lai gan līdz šim mēs esam pieņēmuši, ka zaudējumi ir neatkarīgi un vienādi sadalīti gadījuma lielumi, ir vērts pieminēt, ka izvēloties nepiemērotu sadalījumu, lai noteiktu riska mērus, tas var novest pie nopietnām riska modelēšanas kļūdām. Kā jau iepriekšējajās nodaļās minēts, parasti, nebūtu pareizi pieņemt, ka zaudējumi ir normāli sadalīti. Zaudējumu empīriskajai sadalījuma funkcijai ir raksturīga lielāka varbūtības vērtība tās galos, salīdzinājumā ar Gausa sadalījumu. Ja riska mēra aprēķini būtu balstīti uz pieņēmumu par normālo sadalījumu, tad netiktu pienācīgi novērtēts risks kurš saistīts ar individuālu finanšu instrumentu. Lai nepieļautu šādas modelēšanas kļūdas mēs varētu izmantot Stjūdenta t sadalījumu ar mazāk par 30 brīvības pakāpēm, dēļ tā lielajām vērtībām sadalījuma galos, salīdzinājumā ar normālo sadalījumu, bet mūsu modelis vēl aizvien varētu būt neprecīzs. Jāuzsver, ka šie sadalījumi ir simetriski. Tātad kļūda rastos tādās situācijās, kad zaudējumu sadalījum funkcija būtu asimetriska. Šo modelēšanas kļūdu var labot izmantojot daļējus zaudējumu izkliedes momenta novērtējumus.

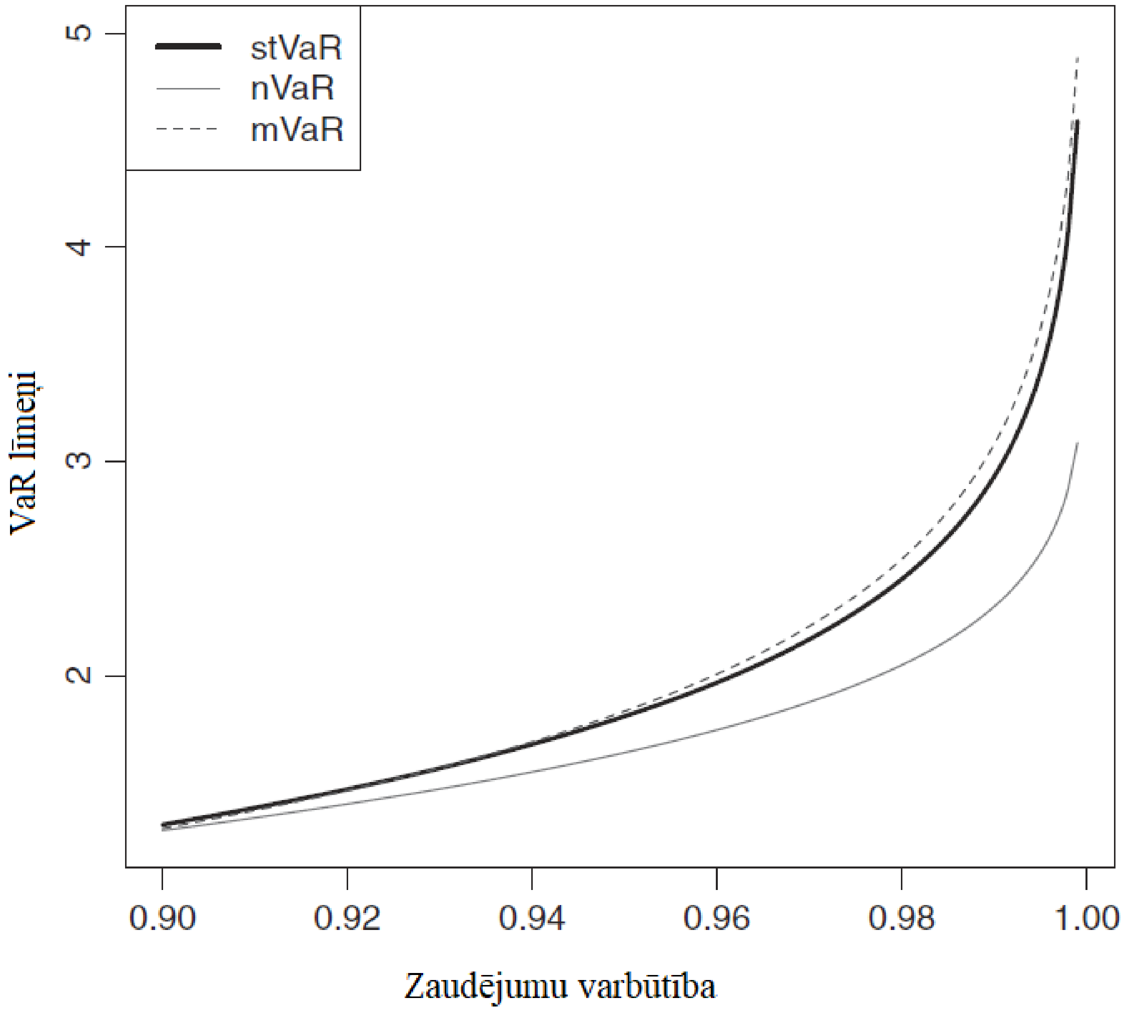
Sadalījumu īpašības par asimetriskumu un lielām varbūtību vērtībām sadalījuma galos var tikt ievietotas riskam pakļautās vērtības aprēķinā. 1996. gadā Zangari izteica piedāvājumu par pārveidota VaR (mVaR) ieviešanu. Šis mērs ņem vērā augstākus momentus un šeit, lai aprēķinātu kvantiļu funkciju tiek izmantots otrās pakāpes "Cornish–Fisher" paplašinājums kurš balstīts uz kvantiļu funkciju priekš normālā sadalījuma. Šī iemesla dēļ mVaR tiek arī dēvēts par Cornish–Fisher VaR.

Definīcija 3.3. Cornish-Fisher VaR tiek definēts, kā:

$$mVaR_\alpha = VaR_\alpha + \frac{(q_\alpha^2 - 1)S}{6} + \frac{(q_\alpha^3 - 3q_\alpha)K}{24} - \frac{(2q_\alpha^3 - 5q_\alpha)S^2}{36},$$

1. kur S atbilst asimetrijas koeficientam,
2. K atbilst ekscesa koeficientam
3. un q_α standart normālā sadalījuma kvantilei pie nozīmības līmeņa α

Speciālgadījums, kad gadījuma lielums ir normāli sadalīts, tad $mVaR_\alpha = VaR_\alpha$, jo abi koeficienti ir vienādi ar nulli. Cornish–Fisher VaR sniedz daudz precīzāku riska novērtējumu gadījumos kad sadalījums ir nobīdīts uz kreiso pusi un/vai gadījumos, kad asimetrijas koeficients un ekscesa koeficients ir lielāks par nulli. Ir vērts pieminēt, ka mVaR ir daudz piesardzīgāks riska mērs nekā Gaussa VaR, ja šie nosacījumi netiek apmierināti.



Att. 3.2: Dažādu riskam pakļauto vērtību salīdzinājums

Salīdzinājums starp mVaR un Gaussa VaR priekš ticamības līmeņiem intervālā $[90\%, 100\%)$ var tikt aplūkots 3.2 attēlā. Šajā piemērā zaudējumi tika aprēķināti izmantojot nobīdītu Stjūdenta t sadalījumu ar 10 brīvības pakāpēm un asimetrijas koeficientu $\xi = 1.5$. Asimetrijas koeficients $/xi > 0$ tiek definēts kā kvadrātsakne no attiecības starp varbūtību virs vidējās vērtības un varbūtību zem vidējās vērtības. Ja $\xi < 1$, tad sadalījums ir nobīdīts uz kreiso pusi, ja $\xi = 1$, tad sadalījums ir simetrisks, bet ja $\xi > 1$, tad sadalījums ir nobīdīts uz labo pusi. [9]. No šī grafika var spriest, ka patieso riskam pakļauto vērtību var labi novērtēt ar mVaR, bet ja riskam pakļautās vērtības aprēķināšanai tiek lietots Gaussa VaR tad risk tiks novērtēts par zemu.

Var droši teikt, ka visi riska mēri kuri tika aplūkoti iepriekšējajās nodaļās var tikt arī pielietoti lai noteiktu kopējo risku portfelī.

4 Modernā portfeļa teorija

4.1 Markovica porfeļi

Ir pagājuši sešdesmit gadi kopš tika publicēts raksts ”Portfolio Selection” [4]. Daudzas mūsdienu portfeļa optimizācijas metodes ir balstītas uz šo darbu, un šī iemesla dēļ tas tiks aplūkots šajā nodaļā. Šajā darbā tika uzskatīts, ka riska un ienesīguma attiecību nevajag rēķināt katram finanšu instrumentam atsevišķi, bet gan visam portfelim kopumā. Šādā veidā finanšu portfelis var tikt novērtēts par efektīvu tikai tad, kad tam ir minimāls risks pie noteikta ieņēmumu līmeņa vai arī maksimāli ieņēmumi pie noteikta riska līmeņa. Lai gan abi skatījumi uz optimālo portfeli ir līdzīgi, optimālā portfeļa aprēķini atšķiras. Pirmajā gadījumā tiek rēķināts kvadrātisks vienādojums ar lineāriem nosacījumiem, bet otrajā lineārs vienādojums ar kvadrātiskiem nosacījumiem.

Turpinājumā pieņemsim, ka portfelis sastāv no N finanšu instrumentiem, un to kopīgais peļņas sadalījums ir normālais sadalījums. Portfeļa ienākumi $\overline{r}$ tiek definēti kā skalārais reizinājums starp $(N \times 1)$ izmēra svariem un peļņas vektoru ω un μ. Portfeļa risks tiek mērīts ar portfeļa dispersijas palīdzību $\sigma_W^2 = \omega\prime\Sigma\omega$, kur Σ apzīmē dispersija - kovariācijas matricu finanšu instrumentu peļņas datiem. Priekš minimāla riska portfeļa ar noteiktu peļņu, $\overline{r}$, optimizācijas uzdevums var tikt pierakstīts šādi:

$$P = \arg\min_{\omega} \ \sigma_W^2 = \omega'\Sigma\omega, \tag{4.1}$$

$$\omega'\mu = \overline{r},$$
$$\omega'\mathbf{i} = 1,$$

kur **i** ir $(N \times 1)$ izmēra vieninieku vektors.

Tajā pašā gada, kad Markovitc publicēja savu rakstu, funkciju efektīvu portfeļu noteikšanai nodefinēja Rojs (1952), lai gan Mertona (1972) gada darbs literatūrā tiek pieminēts biežāk. Izmantojot šo funkciju var noteikt, kādiem jābūt svariem, lai portfelis būtu minimāla riska, pie noteikta peļņas līmeņa. To pieraksta šādi:

$$\omega^* = \overline{r}\omega_0^* + \omega_1^*, \tag{4.2}$$

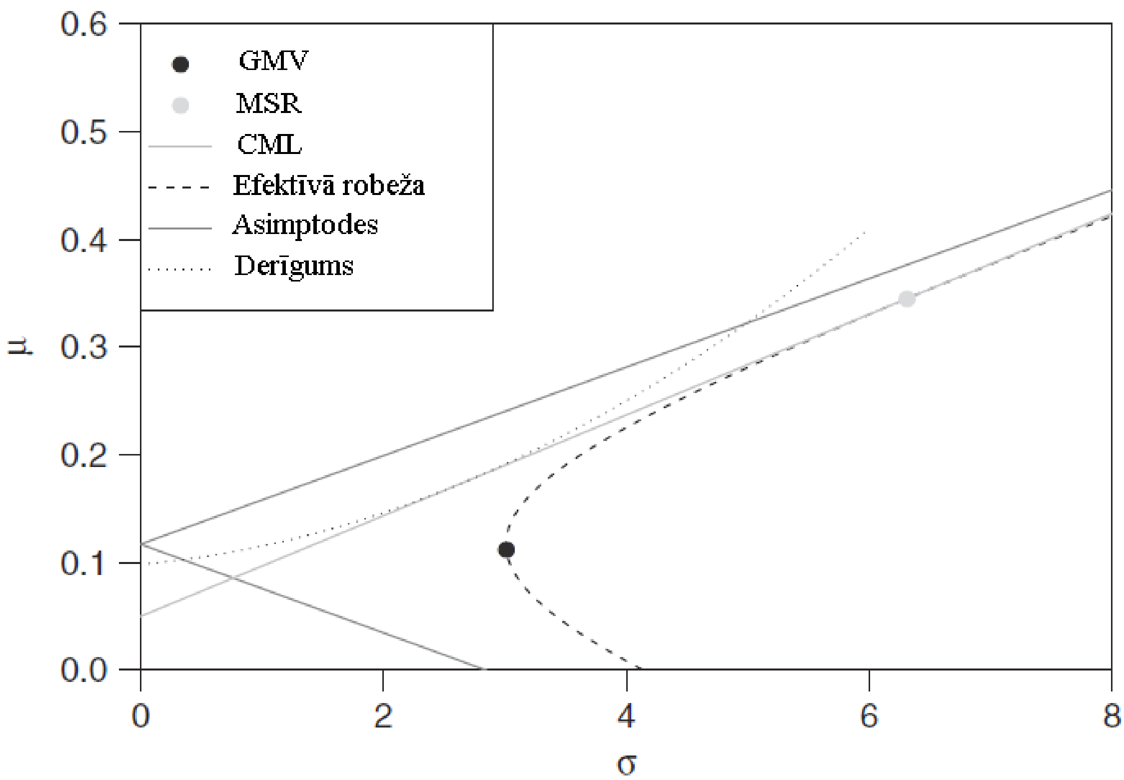
kur

$$\omega_0^* = \frac{1}{d}(c\Sigma^{-1}\mu - b\Sigma^{-1}\mathbf{i}),$$
$$\omega_1^* = \frac{1}{d}(b\Sigma^{-1}\mu - a\Sigma{-}1\mathbf{i}).$$

Portfeļa standartnovirze tiek aprēķināta, kā:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{d}(c\overline{r}^2 - 2b\overline{r} + a)}, \tag{4.3}$$

kur $a = \mu'\Sigma^{-1}\mu, b = \mu'\Sigma^{-1}\mathbf{i}, c = \mathbf{i}'\Sigma^{-1}\mathbf{i}$ un $d = ac - b^2$. Vienādojums 4.2 iegūts lietojot Lagrānža optimizāciju ar ierobežotu ienesīguma līmeni un nosacījumu, ka svaru suma ir vienāda ar 1. Sīkāks apraksts meklējams [11].



Att. 4.1: Globālāminimālā riska un maksimālā Šarpa koeficienta portfeļi

No šī vienādojuma var secināt, ka portfeļa svari ir lineāra funkcija no sagaidāmajiem ienākumiem. Katrs optimāls portfelis var tikt izveidots, kā divu citu optimālu portfeļu lineāra kombinācija. It īpaši, optimāla portfeļa riska/peļņas attiecība var tikt izteikta kā lineāra kombināciju starp globālo minimālo riska portfeli (GMV) un jebkuru citu optimālu portfeli. Kovariance starp šiem diviem portfeļiem ir vienāda ar dispersiju no minimālā riska portfeļa. Jāuzsver, ka vienīgais ierobežojums attiecībā uz portfeļa svariem ir tas, ka to summa ir 1. Šis nosacījums pieļauj arī ka kādam no finanšu instrumentiem ir negatīvi svari un kādam svari ir lielāki par viens.

Vienādojums 4.3 apraksta hiperbolu priekš optimāliem portfeļiem. Hiperbola ir ierobežota ar asimptodēm $\overline{r} = b/c \pm \sqrt{d/c\sigma}$. Minimālā riska portfelis atrodas hiperbolas virsotnē, ar šādiem svariem $\omega^*_{GMV} = \Sigma^{-1}\mathbf{i}/\mathbf{i}'\Sigma^{-1}\mathbf{i}$. Skatīt 4.1 grafiku.

Optimālais portfelis atrodas, kapitāla tirgus līnijas (CML) un efektivitātes robežas augšējā zara, pieskares punktā. Šajā punktā slīpums ir vislielākais un līdz ar to Šarpa koeficients ir maksimāls. Portfelis, kurš atbilst šim punktam, sauc arī par maksimālo Šarpa koeficienta (MSR) portfeli.

5 Portfeļa diversifikācija

Ir skaidri zināms, ka labs veids kā samazināt kopējo risku ir sadalīt savus ieguldījumus. Šī iemesla dēļ, investors kurš vēlas izvairīties no riska, savus ieguldījumus sadalīs pa dažādiem finanšu instrumentiem, nevis iegādāsies tikai vienu finanšu instrumentu. Ienākumu dispersijas - kovariācijas matricu bieži vien lieto lai aprēķinātu finanšu instrumenta riskantumu un atkarības starp tiem.

5.1 Visvairāk diversificētais portfelis

Lai izmantotu diversifikāciju, kā kritēriju bija nepieciešams mērs. Ar Σ apzīmēsim ienākumu dispersijas - kovariācijas matricu priekš N dažādiem finanšu instrumentiem un ar σ apzīmēsim finanšu instrumenta svārstību vektoru, kurš tiek mērīts izmantojot standartnovirzi.

Definīcija 5.1. Diversifikācijas koeficients (DR) tiek noteikts konkrētam $(N \times 1)$ svara vektoram ω no visiem iespējamajiem portfeļiem Ω kā:

$$DR_{\omega \in \Omega} = \frac{\omega' \sigma}{\sqrt{\omega' \Sigma \omega}}.$$

Šajā vienādojumā, skaitītājs ir svērtās vidējās svārstības katram no finanšu instrumentiem. Tas tiek iegūts kā skalārais reizinājums starp svaru vektoru un standartnovirzēm. Pēc šīs definīcijas var spriest, jo lielāks ir DR koeficients, jo portfelis ir diversificētāks. Šim rādītājam ir apakšējā robeža 1, kura var tikt sasniegta tikai gadījumā, kad portfelis sastāv no viena finanšu instrumenta. Portfeļi, kuri satur vai nu ļoti koncentrētu ieguldījumu sadali, vai ļoti korelētu finanšu instrumentu izvēli var tikt kvalificēti kā vāji diversificēti. Diversifikācijas koeficientu var izteikt arī šādi:

$$DR_{\omega \in \Omega} = \frac{1}{\sqrt{(\rho + CR) - \rho CR}}. \tag{5.1}$$

kur ρ un CR atbilst korelācijai un koncentrācijas koeficientiem, kurus aprēķina:

$$\rho_{\omega \in \Omega} = \frac{\sum_{i \neq j}^{N} (\omega_i \sigma_i \omega_j \sigma_j) \rho_{ij}}{\sum_{i \neq j}^{N} (\omega_i \sigma_i \omega_j \sigma_j)},$$

$$CR_{\omega \in \Omega} = \frac{\sum_{i \neq j}^{N} (\omega_i \sigma_i)^2}{\sum_{i \neq j}^{N} (\omega_i \sigma_i)^2},$$

kuri atrodas intervālā no $[1/N; 1]$.

Svari pie kādiem portfelis būs visvairāk diversificēts būs pie nosacījuma kad:

$$P_{MDP} = arg_{\omega \in \Omega} max DR.$$

Ieviešot mākslīgu finanšu instrumentu kopumu, kuriem ir līdzīgas svārstības, diversifikācija koeficients tiek maksimizēts, minimizējot $\omega' C \omega$, kur C apzīmē korelācijas matricu no sākotnējajiem ienākumiem. Tāpēc mērķa funkcija ir līdzīga ar GMV portfeļa, bet tā vietā, lai izmantotu dispersija-kovariācijas matricu, tiek izmantota korelācijas matrica. Gala svarus iegūst, koriģējot svarus, kuri balstīti un korelācijas matricu, attiecībā pret ienākumu standartnovirzēm. Citiem vārdiem, optimālo svara vektoru nosaka divās daļās. Pirmajā, tiek noteikts kādiem jābūt svariem, lai izvēlētais finanšu instrumentu kopums būtu vismazāk korelēts. Šī pieeja atšķiras no GMV portfeļa pieejas, jo šajā gadījumā svārstības tiek lietotas tieši mērķa funkcijā, lai tiktu minimizētas. Šī iemesla dēļ svārstībām ir mazāka ietekme uz MDP portfeli nekā GMV gadījumā. MDP portfelim piemīt sekojošas pazīmes:

- Jebkurš finanšu instruments, kurš neietilpst MDP portfelī ir vairāk korelēts ar to nekā jebkurš tam piederošs finanšu instruments. Tātad, jebkurš MDP portfelim piederošs finanšu instruments ir ar to vienādi korelēts.

- Ilgtermiņa MDP ir tāds ilgtermiņa portfelis, kuram korelācija starp jebkuru citu ilgtermiņa portfeli un sevi pašu ir lielāka vai vienāda ar DR.

6 Riska - optimāli portfeļi

Šajā nodaļā ir aprakstītas portfeļa optimizācijas metodes, kurās tiek ņemta vērā riska pakāpe un tā līmenis, kurš tieši ietekmē finanšu instrumenta svarus. Šāda pieeja atšķiras no Markovica portfeļa pieejas, jo šajā gadījumā VaR un ES netiek aprēķināts optimālajam portfelim, bet gan optimālais portfelis tiek sastādīts balstoties uz noteiktu VaR vai ES. Tādējādi investors varētu gūt atbildi uz jautājumu: "Kādi būtu jaizvēlas portfeļa svari, lai rezūltējošais 99% VaR būtu 3.5% ".

6.1 Sagaidāmā ienesīguma - riskam pakļautās vērtības portfelis

Šajā nodaļā sagaidāmā ienesīguma - riskam pakļautās vērtības portfelis ($\mu - VaR$) tiks salīdzināts ar Markovica portfeļa pieeju. Lasītāju ērtības labad atkārtosim VaR aprēķinu:

$$VaR_\alpha = inf\{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = inf\{l \in \mathbb{R} : F_l(l) \geq \alpha\},$$

kur F_L ir zaudējumu sadalījuma funkcija, kura tagad tiek uzskatīta par eliptisku, tas ir, daudzdimensiju normālo vai daudzdimensiju Stjūdenta t sadalījumu.

Līdzīgi kā klasiskajā Markovica portfelī, $\mu - VaR$ portfeļa optimizēšana var norisināties divos veidos. Vainu tiek noteikti svari ar kādiem, pie noteikta VaR pie noteikta ticamības līmeņa, tiek maksimizēti ienākumi, vai arī tiek minimizēts VaR pie noteikta ticamības līmeņa noteiktam ienākumu līmenim. Turpinājumā izmantosim otro pieeju. Sākumā pieņemsim, ka pastāv N skaits finanšu instrumentu, un ar $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ apzīmēsim zaudējumu sadalījuma kvantili pie ticamības līmeņa $\alpha \in (1/2; 1)$. Tad VaR tiek definēts, kā

$$VaR_\alpha^m = z_\alpha \sigma_W - \overline{r}, \tag{6.1}$$

kur $\overline{r} = \omega' \mu$ portfeļa ienesīgums. Portfelis $\overline{\omega} \in \Omega$ var tikt uzskatīts par $\mu - VaR$ optimālu pie noteikta ticamības līmeņa, ja tas ir atbilde uz sekojošu vienādojumu:

$$P_{VaR^m} = arg_\omega min VaR_\alpha^m = z_\alpha \sigma_W - \overline{r},$$

$$\omega' \mu = \overline{r},$$

$$\omega' \mathbf{i} = 1,$$

kur **i** ir $(N \times 1)$ izmēra vieninieku vektors un $\sigma_W = \omega'\Sigma\omega$. Līdz ar to tā ir kvadrātiska mērķa funkcija ar lineāriem ierobežojumiem, dēļ $\sigma_W = \omega'\Sigma\omega$. Šī pieeja ir līdzīga Markovica portfeļa pieejai un "Portfolio Performance Evaluation Using Value-at-Risk" publikācijā tiek pierādīts, ka $\mu - VaR$ portfelis ir apakškopa sagaidāmo ienākumu - variācijas optimāliem portfeļiem.

$$\frac{\sigma_W^2}{1/C} - \frac{(\bar{r} - A/C)^2}{D/C^2} = 1,$$

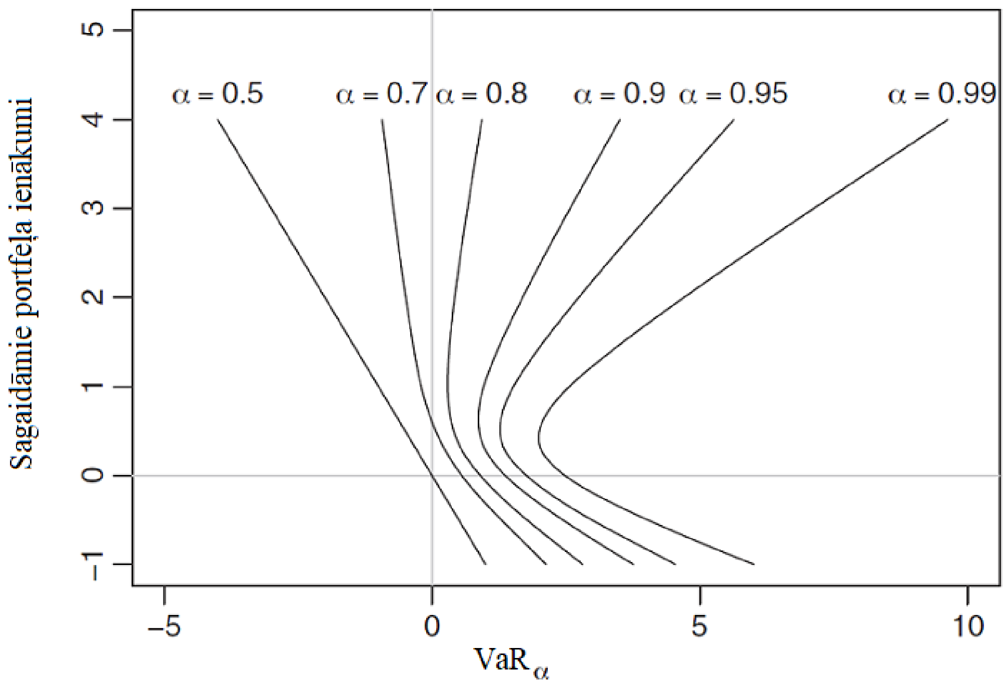
kur skalāri lielumi $A, B, CunD$ kuri tiek definēti kā:

$$\begin{aligned} A = &\quad \mathbf{i}'\Sigma^{-1}\mu, \\ B = &\quad \mu'\Sigma^{-1}\mu, \\ C = &\quad \mathbf{i}'\Sigma^{-1}\mathbf{i}, \\ D = &\quad BC - A^2, \end{aligned}$$

var tikt izmantoti arī $\mu - VaR$ efektivitātes robežas aprēķinam:

$$\frac{[(VaR^m + \bar{r})/z_\alpha]^2}{1/C} - \frac{(\bar{r} - A/C)^2}{D/C^2} = 1$$

un kurā tiek izmantos no 6.1 vienādojuma izteikts σ_W aprēķins.



Att. 6.1: Dažādu $\mu - VaR$ portfeļu robežas

6.2 Optimāli CVaR portfeļi

Finanšu tirgus riska mērs, nosacītā riskam pakļautā vērtība ($CVaR$), var tikt skaidrota, kā sagaidāmie zaudējumi, kuri pārsniedz VaR pie noteikta ticamības līmeņa. Nepārtraukta zaudējumu sadalījuma gadījumā tā ir vienāda ar sagaidāmajiem vidējajiem zaudējumiem (ES), kuri tika aprakstīti 3.3 sadaļā.

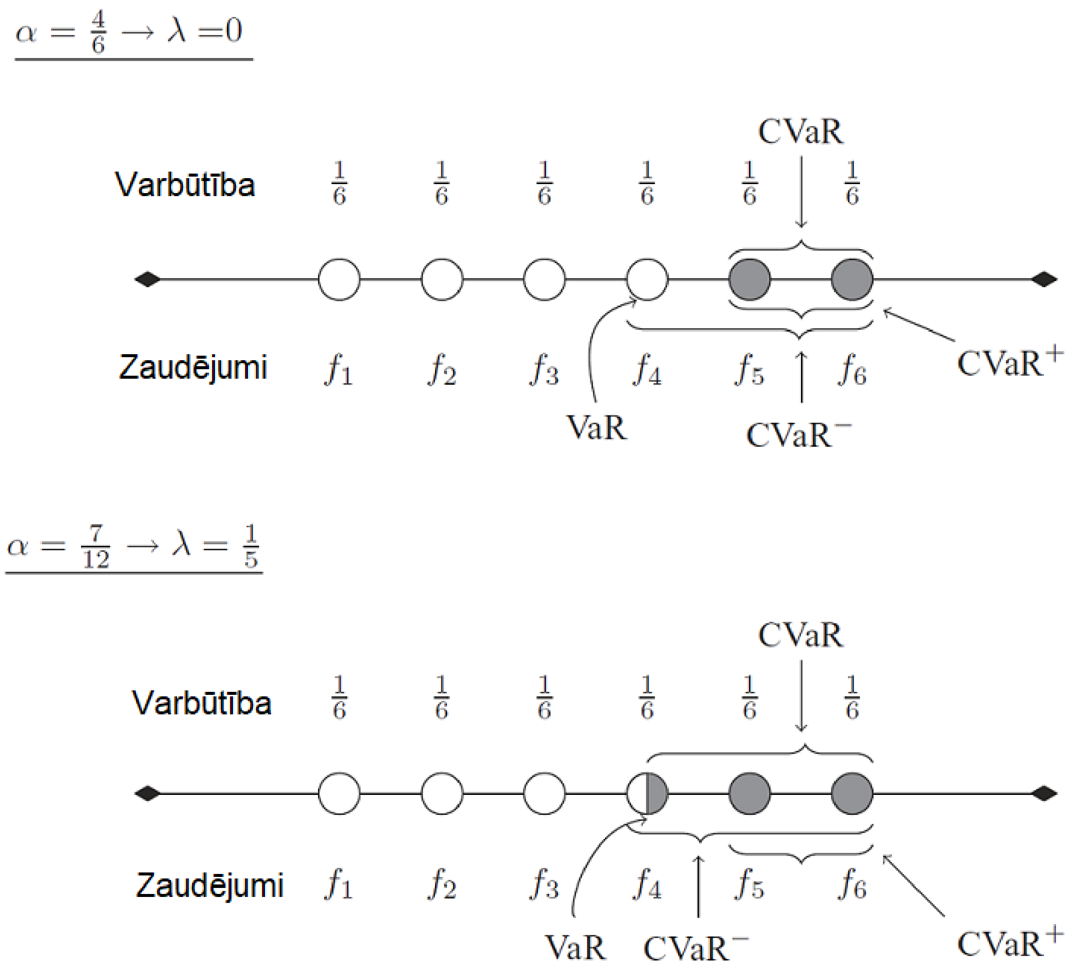
Lai noteiktu $CVaR$, ir nepieciešami šādi riska mēri:

- VaR_α, zaudējuma sadalījuma α kvantile.
- $CVaR^+$, sagaidāmie zaudējumi, kuri stingri pārsniedz VaR.
- $CVaR^-$, sagaidāmie zaudējumi, kuri mazliet pārsniedz VaR.

Definīcija 6.1. Tad $CVaR$ var tikt definēts kā svērtā vidējā vērtība starp VaR un $CVaR^+$:

$$CVaR = \lambda VaR + (1 - \lambda)CVaR^+,$$

kur lielums $0 \leq \lambda \leq 1$ tiek izteikts kā $\lambda = (\Psi(VaR) - \alpha)/(1 - \alpha)$ un $\Psi(VaR)$ apzīmē varbūtību, ka zaudējumi nepārsniedz vai ir vienādi ar VaR pie noteikta ticamības līmeņa.

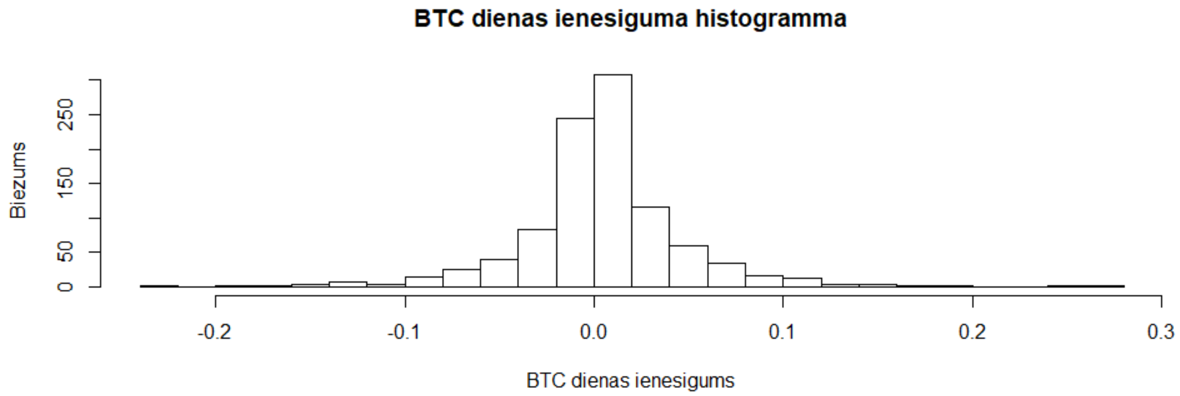


Att. 6.2: $VaR, CVaR, CVaR^+ un CVaR^-$ diskrēta zaudējumu sadalījuma gadījumā

Attiecības starp dažādiem riska mēriem, diskrētā sadalījuma gadījumā, var aplūkot 6.2 attēlā. Šajā grafikā uz ass atlikti fiktīvi un vienādi iespējami zaudējumi $f_1, ..., f_6$. Grafika pirmajā gadījumā ticamības līmenis $\alpha = 4/6$ un tas sakrīt ar VaR kvantili, tāpēc $\lambda = 0$. Riska mēri $CVaR$ un $CVaR^+$ šādā gadījumā ir identiski un vienādi ar vidējo f_5 un f_6 zaudējumu vērtību. VaR ir vienāds ar f_4 un riska mērs $CVaR^-$ ir vidējā svērtā vērtība no f_4, f_5, f_6. Šajā piemērā attiecība starp šiem riska mēriem ir $VaR < CVaR^- < CVaR = CVaR^+$. Turpinājumā apskatīsim ticamības līmeni $\alpha = 7/12$, kurš redzams 6.2 grafika lejas daļā. $CVaR$ vērtība ir vienāda ar pirmajā piemērā doto, toties λ vērtība, šajā gadījumā ir $\lambda = 1/5$, un tāpēc $CVaR = \frac{1}{5}f_4 + \frac{4}{5}CVaR^+$, ko var pārrakstīt, kā $CVaR = \frac{1}{5}f_4 + \frac{2}{5}f_5 + \frac{2}{5}f_6$. Otrajā piemērā risku mēru attiecības var pierakstīt kā: $VaR < CVaR^- < CVaR < CVaR^+$.

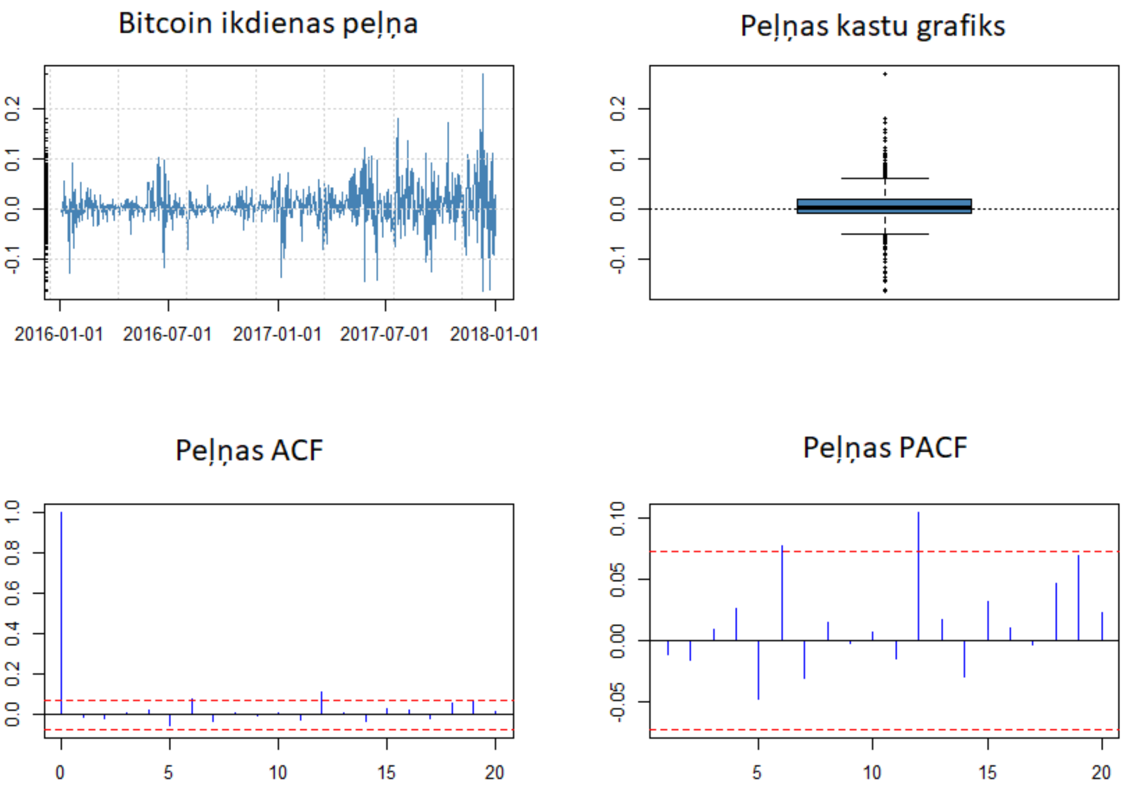
7 Bitcoin cenu datu iezīmes

Darba praktiskajā daļā tiek izmantota programa R, lai ievāktu un apstrādātu datus. Par piemēru izmantosim kriptovalūtu "$Bitcoin$", jo tā ir pirmā, populārākā un visplašāk pielietotā kriptovalūta. Dati par kriptovlūtu cenām tika iegūti izmantojot R no interneta vietnes CoinCap.io. Datus var iegūt par jebkādu laika periodu, bet vienkāršības labad tie sākas ar 2016. gada 1 janvāri un beidzas ar 2018.gada 1 janvāri (24 mēnešu intervāls). Turpinājumā aplūkosim dažādus grafikus saistībā ar $Bitcoin$ cenu šajā laika posmā.



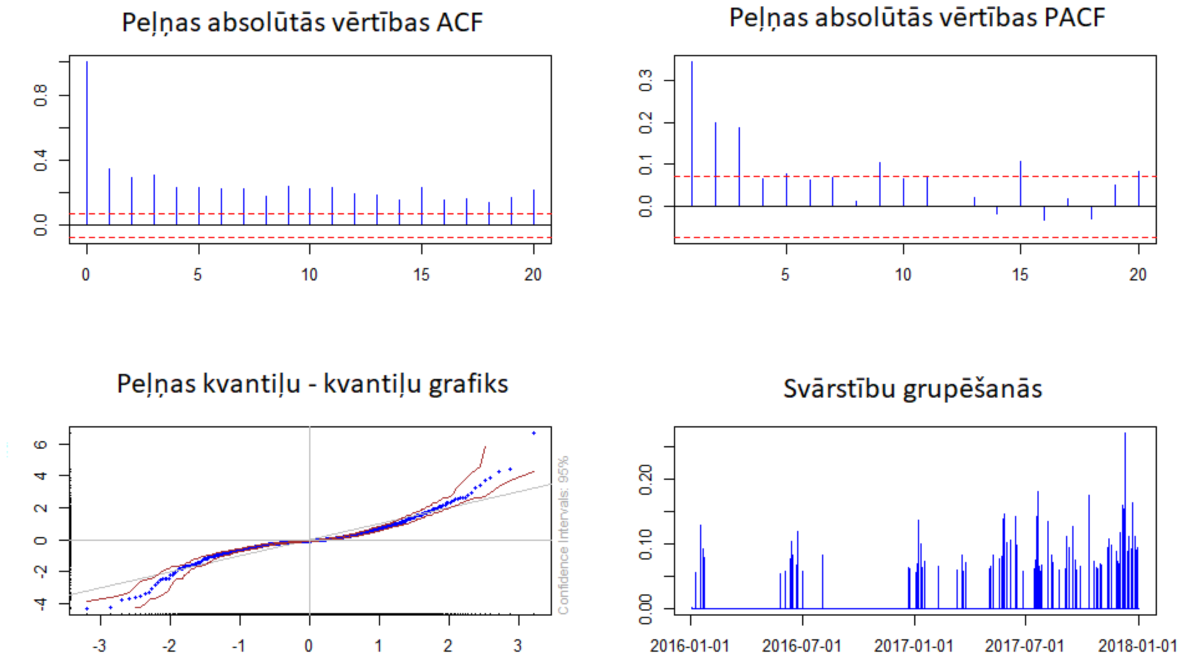
Att. 7.1: Bitcoin dienas ienesīguma histogramma

7.1 grafikā var redzēt, ka dienas ienesīguma sadalījums ir nobīdīts un labo pusi, kas liecina par pozitīvu vidējo dienas ienākumu vērtību, kā arī var redzēt salīdzinoši biežu ekstrēmo notikumu iestāšanos.



Att. 7.2: Bitcoin cenas analizējošie grafiki: 1

Kā jau var redzēt 7.2 attēlā, laika gaitā ir novērojamas svārstību izmaiņas, kas apstiprina svārstību grupēšanos, kas vairāk novērojama perioda otrajā pusē. Pēc kastu grafika var viegli noteikt, ka ir daudz ekstrēmo vērtību, kas liecina ka liela varbūtības masa atrodas sadalījuma galos. Vislielākie zaudējumi šajā posmā bija -16% un vislielākā dienas peļņa bija 27%. Asimetrijas koeficients ir 0.44 un ekscesa koeficients ir 9.11, kas norāda uz lielu varbūtības masu sadalījuma galos. ACF un PACF sniedz norādes uz pirmās kārtas autokorelāciju.

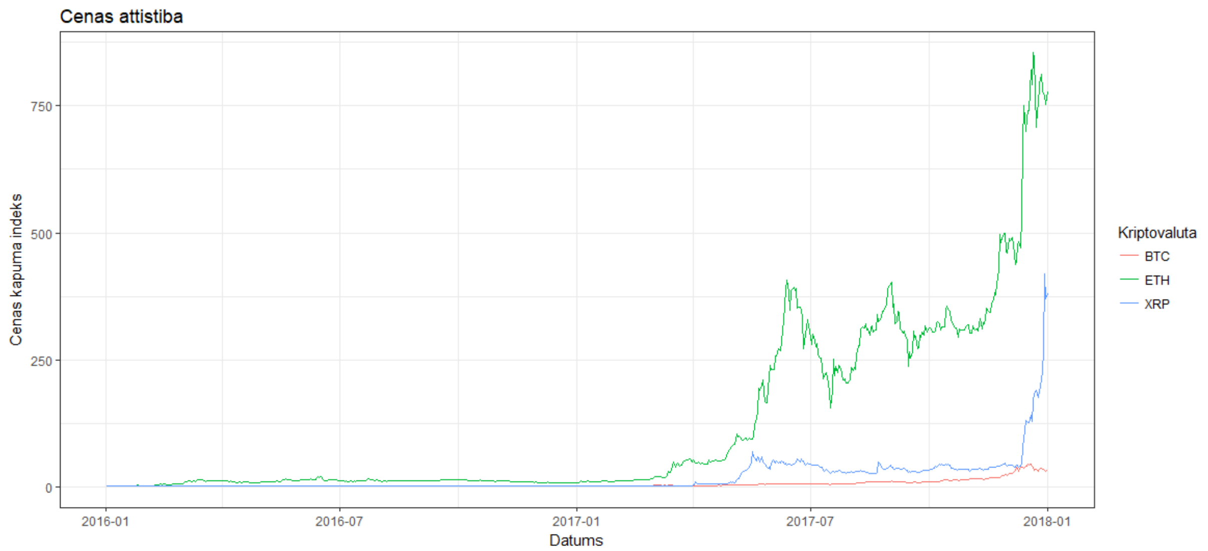


Att. 7.3: Bitcoin cenas analizējošie grafiki: 2

7.3 attēlā mēs varam turpināt apskatīt *Bitcoin* cenu grafikus. Augšējajā daļā ir redzamas, absolūto ieņēmumu, ACF un PACF. Ir skaidri redzama atšķirība no nulles un tā samazinās ļoti lēnām. Labajā kreisajā stūrī redzams kvantiļu-kvantiļu (QQ) grafiks salīdzinājumā ar normālo sadalījumu. Gan asimetrija, gad sadalījuma smagie gali apstiprinās arī šajā grafikā. Apakšējajā labajā stūrī daudz skaidrāk, nekā 7.2 attēla 1. grafikā, var redzēt, ka pastāv svārstību grupēšanās un ka tieši perioda otrā puse ir daudz nestabilāka.

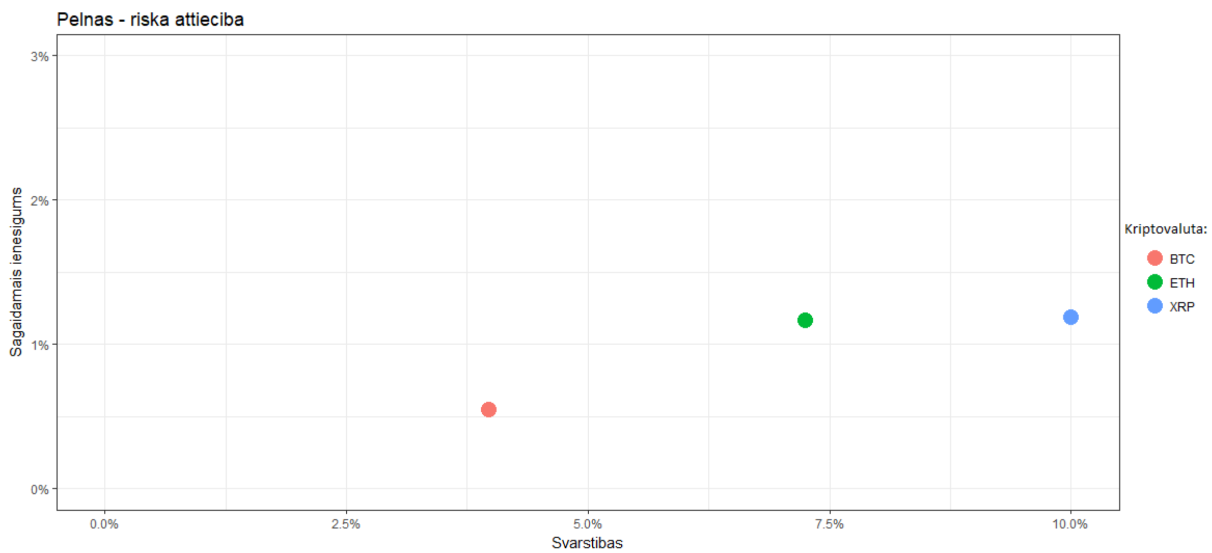
8 Optimizētie portfeļi

Šajā dabā tika izmantota programma R, lai noteiktu kādiem ir jābūt svariem, lai portfeļi būtu optimāli. Tā kā šie dati sastāv no kriptovalūtu cenām, laika posmā no 2016. gada 1 Janvāra līdz 2018. gada 1 Janvāra, tad arī šie optimizētie portfeļi balstās uz informāciju, kas ir pieejama visā šajā laika periodā. Informācija ievākta par trīs kriptovalūtām (BTC, ETH, XRP), no kurām tad sastāv šie otimizētie portfeļi. Turpinājumā var aplūkot insividuālās kriptovalūtu cenu attīstības līknes.



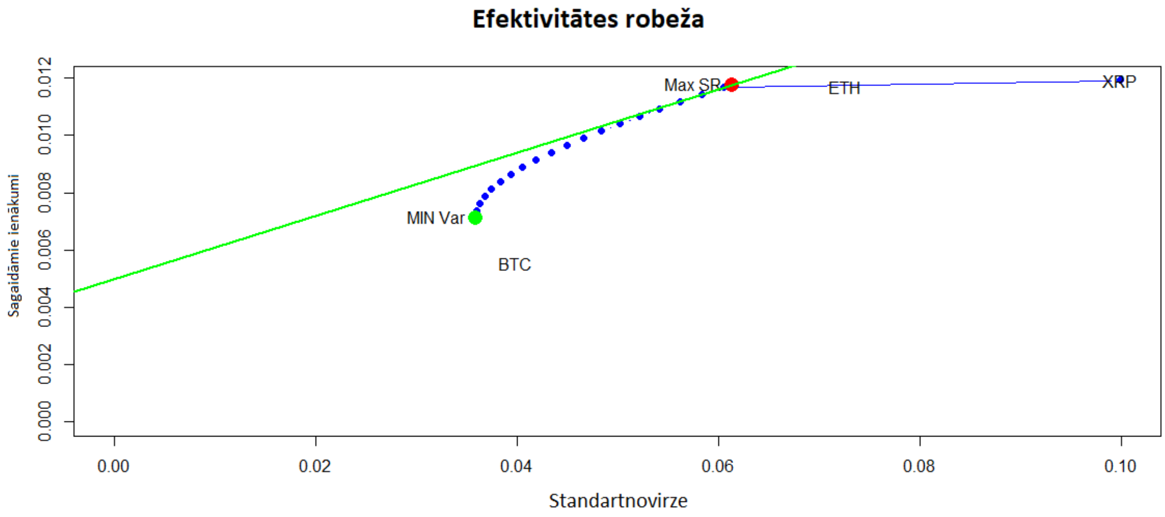
Att. 8.1: Izvēlēto kriptovalūtu cenu attīstība

Turpinājumā aplūkosim Markovitca pieeju. Kā kriptovalūtas var attēlot sagaidāmā ienesīguma - svārstību plaknē individuāli. Skatīt attēlu 8.2:



Att. 8.2: Izvēlēto kriptovalūtu cenu attīstība

Lai noteiktu minimālā riska un maksimālā Šarpa koeficienta portfeļus ir nepieciešams uzzīmēt efektivitātes robežu:



Att. 8.3: Efektivitātes robeža

Iegūtie dati par optimizēto portfeļu svariem tika apkopoti tabulā 8.1 ,kurā arī var redzēt kāda būtu bijusi portfeļu peļņa 2018. gada 1 Jūnijā, ja 2018. gada 1 Janvārī tajos tiktu veikti ieguldījumi.

Portfelis	BTC	ETH	XRP	Peļņa
Max-SR	0%	66%	34%	-37.52%
Min-Var	75%	16%	9%	-43.27%
Min-CVaR	53%	25%	22%	-45.32%
MDiV	51%	27%	22%	-44.88%
E	33%	33%	33%	-47.053%

Tabula 8.1: Dažādu optimizētu portfeļu svari

Šie ir ilgtermiņa ieguldījumu portfeļi un to svari balstās uz divu gadu datiem. Var redzēt, ka vislabāk būtu bijis izvēlēties maksimālo Šarpa koeficienta portfeli, jo tādā gadījumā tiktu zaudēti tikai 37.5%, kas salīdzinājumā ar citiem portfeļiem ir labs rādītājs.

Tākā nodaļas sākumā tika pieminēts, ka ir novērojama svārstību grupēšanās, nebūtu pareizi portfeļa risku novērtēt par visu periodu kopumā. Perioda sākumā kriptovalūtas tirgus ir diezgan stabils un ar ne tik lielām svārstībām, toties perioda otrajā daļā svārstības ievērojami palielinās.

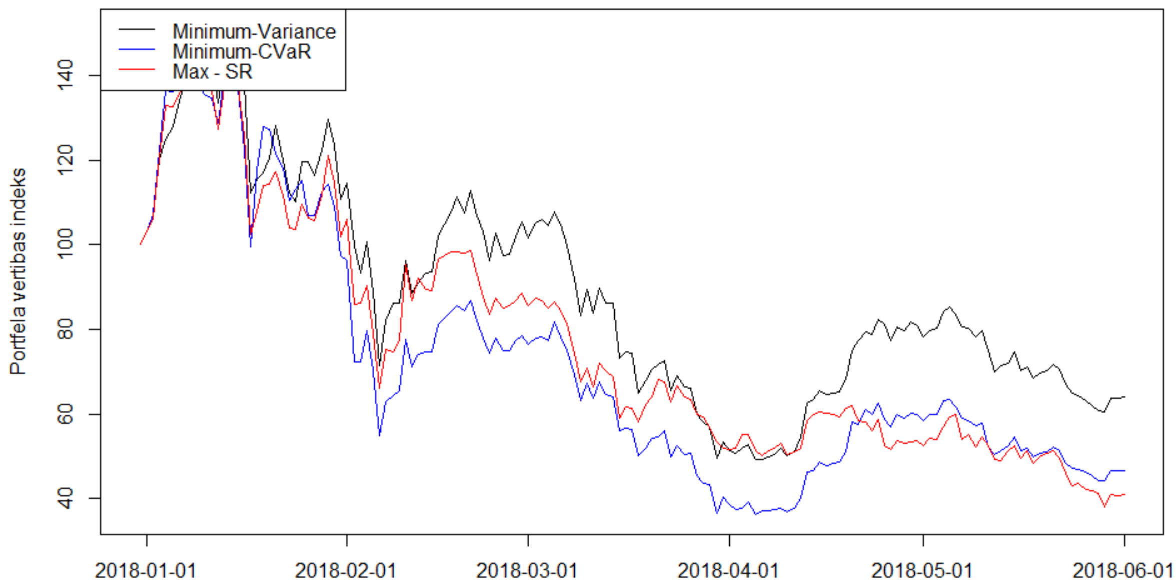
Šī iemesla dēļ tabulā 8.2 optimizētie portfeļi tika balstīti uz datiem par pēdējo divu mēnešu cenu izmaiņām.

Portfelis	BTC	ETH	XRP	Peļņa
Max-SR	37%	29%	34%	-48.16%
Min-Var	42%	58%	0%	-31.24%
Min-CVaR	23%	51%	26%	-40.84%
MDiV	45%	42%	13%	-38.79%
E	33%	33%	33%	-47.053%

Tabula 8.2: Dažādu optimizētu portfeļu svari

Var redzēt, ka minimālās variācijas portfelis šajā gadījumā ir vislabākā izvēle.

Kā vēl vienu pieeju optimālā portfeļa iegūšanai var izmantot nepārtraukti mainīgus svarus. Tie balstās uz pēdējo divu mēnešu cenu svārstībām. Iegūto informāciju, kāda būtu portfeļa vērtība attiecībā pret laiku, sadalītu pa portfeļiem, apkopoju grafikā.



Att. 8.4: Trīs dažādu manīgo svaru portfeļu vērtības attīstības grafiks

Kā var redzēt 8.4 attēlā, vislabāko sniegumu nodrošina minimālās variances portfelis, kura peļņa perioda beigās bija -37%, savukārt maksimālā Šarpa koeficienta un minimālā CVaR portfeļu sniegums bija sliktāks, -59% un -54% atbilstoši.

9 Secinājumi

Aplūkojot un izanalizējot datus varam teikt, ka kriptovalūtu tirgus ir ļoti nestabils. Ir novērojamas ļoti lielas svārstības, kā arī svārstību grupēšanās. Kriptovalūtu tirgus ir samērā jauns tirgus, tāpēc tas vēl ir attīstības stadijā. Lai kriptovalūtu varētu sākt lietot un uzskatīt, kā drošu un neriskantu norēķinu līdzekli, tad to svārstībām vajadzētu samazināties. Daudzi šo finanšu instrumentu lieto tieši spekulācijām, kas arī padara kriptovalūtu tirgu vēl nestabilāku.

Veidojot kriptovalūtu portfeļus ir liela nozīme no kādām kriptovalūtām tie tiek veidoti. Liela nozīme šajā tirgū ir $Bitcoin$, tā šobrīd ir noteicošā kriptovalūta. Pārsvarā tirgū ir redzama tendence pārējām kriptovalūtām sekot līdzi $Bitcoin$ cenu izmaiņām, ar ļoti retiem izņēmumiem. Ļoti liela ietekme uz cenas izmaiņām ir notikumiem pasaulē. Daudzas valstis un finanšu institūcijas uzskata, ka kriptovalūtām nevajadzētu ļaut attīstīties, jo daudz darījumi sastībā ar tām ir nelegāli, kā piemēram nodokļu apiešana, tāpēc tās aizliedz. Tas vērā ņemami ietekmē cenas attīstību.

Pēc veiktajiem aprēķiniem var nonākt pie secinājuma, ka vislabāko sniegumu uzrāda ilgtermiņa ieguldījumu portfelis, kurš ir balstīts uz pēdējo divu mēnešu informāciju un minimizē standartnovirzi. Tas varētu būt skaidrojams, jo pēdējo divu mēnešu vidējās svārstības vislabāk atspoguļo šībrīža tirgus situāciju. Vissliktākos rezultātus uzrādija vienmērīgi izvietotie svari, kas ir loģiski un norāda uz to, ka izmantojot jebkādu optimizāijas metodi, mēs tomēr uzlabojam savas izredzes nopelnīt.

Tā kā kriptovalūtu tirgū kopš 2018. gada 1 Janvāra ir novērojama izteikta lejupslīde, tad arī darbā aplūkotajos portfeļos novērojami zaudējumi.

10 Izmantotie literatūras avoti

1. Dominik Krause Nga Pham. Bitcoin – a favourable instrument for diversification? A quantitative study on the relations between Bitcoin and global stock markets. Umeå School of Business and Economics.
2. Bernhard Pfaff. Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R. John Wiley & Sons, Ltd, 2013.
3. Gordon J. Alexander, Alexandre M Baptista. Portfolio Performance Evaluation Using Value-at-Risk. 2003.
4. Harry Markowitz. Portfolio Selection. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1. 1952.
5. J.P.Morgan Risk Metrics
6. John Y. Campbell. The Econometrics of Financial Market.
7. Jörg Osterrieder. The Statistics of Bitcoin and Cryptocurrencies. Zurich University of Applied Sciences, School of Engineering, Switzerland, 2016.
8. Philippe Artzner, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath. Coherent measure of risk. 1998.
9. Philippe Lambert and Sebastien Laurent. Modelling skewness dynamics in series of financial data using skewed location-scale distributions. 2002.
10. Prypto. Bitcoin For Dummies John Wiley & Sons, Ltd, 2016.
11. Robert C. Merton. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. The Econometric Society
12. Satoshi Nakamoto. Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System.
13. Tristan Mazer. Bitcoin: A worldwide currency? Erasmus rotterdam university, 2015.
14. https://www.forbes.com/sites/bernardmarr/2017/12/06/a-short-history-of-bitcoin-and-crypto-currency-everyone-should-read/
15. https://coincap.io/
16. https://coinmarketcap.com/currencies/bitcoin/

Pielikums

```r
################################   KODS 1 ######################################

library(data.table)
library(scales)
library(ggplot2)

library(RJSONIO)
library(RCurl)
library(anytime)
library(plyr)


coins <- c("BTC", "ETH", "XRP")
globalData <- NULL

for (coin in coins) {
  url <- paste(
    "http://socket.coincap.io/history/",
    coin,
    sep=""
  )
  rawData <- getURL(url)
  data <- fromJSON(rawData)
  pricesData <- as.data.frame(
    matrix(unlist(data$price), ncol=2, byrow=T)
  )
  names(pricesData) <- c("date", "price")
  pricesData$date <- anydate(
    as.numeric(pricesData$date)/1000
  )
  pricesData$coin <- coin
  globalData <- rbind(globalData, pricesData)
}

data = globalData

uk <- data[ , c("coin", "date")]
uk$date <- as.numeric(uk$date)
data <- data[-which(duplicated(uk)), ]
data <- data[data$date >= "2016-01-02"&data$date <= "2018-01-01", ]

write.csv(data, file = "data.csv")

#---------------------------------------------------
dt <- data.table(read.csv(file = "data.csv"))
dt[, date := as.Date(date)]
dt$X = NULL

# create indexed values
```

```r
dt[, idx_price := price/price[1], by = coin]

# plot the indexed values
ggplot(dt, aes(x = date, y = idx_price, color = coin)) +
  geom_line() +
  # Miscellaneous Formatting
  theme_bw() + ggtitle("Cenas attistiba") +
  xlab("Datums") + ylab("Cenas kapuma indeks") +
  scale_color_discrete(name = "Kriptovaluta")
#-----------------------------------------------------
# calculate the arithmetic returns
dt[, ret := price / shift(price, 1) - 1, by = coin]

# summary table
# take only non-na values
tab <- dt[!is.na(ret), .(coin, ret)]

# calculate the expected returns (historical mean of returns) and volatility (standard deviation of returns)
tab <- tab[, .(er = round(mean(ret), 4),
               sd = round(sd(ret), 4)),
           by = "coin"]
#--------------------------------------------------
ggplot(tab, aes(x = sd, y = er, color = coin)) +
  geom_point(size = 5) +
  # Miscellaneous Formatting
  theme_bw() + ggtitle("Pelnas - riska attieciba") +
  xlab("Svarstibas") + ylab("Sagaidamais ienesigums") +
  scale_y_continuous(label = percent, limits = c(0, 0.03)) +
  scale_x_continuous(label = percent, limits = c(0, 0.1))
scale_color_discrete(name = "Kriptovaluta")
#-------------------------------------------------
BTC_data = data[data$coin == "BTC",]
ETH_data = data[data$coin == "ETH",]
XRP_data = data[data$coin == "XRP",]
dff = data.table(BTC_data$price)
dff$ETH_price = ETH_data$price
dff$XRP_price = XRP_data$price
names(dff)[1] = "BTC_price"

x = dff$BTC_price[-1]/dff$BTC_price[-nrow(dff)] - 1
y = dff$ETH_price[-1]/dff$ETH_price[-nrow(dff)] - 1
z = dff$XRP_price[-1]/dff$XRP_price[-nrow(dff)] - 1

dfff = data.table(x,y,z)

plot(BTC_data$date,BTC_data$price, t = "l", xlab="Datums", ylab="BTC cena")
#-------------------------------------------------
library(IntroCompFinR)
asset.names = c("BTC", "ETH", "XRP")
er = c(mean(dfff$x), mean(dfff$y), mean(dfff$z))
```

```
names(er) = asset.names
covmat = cov(dfff)
r.free = 0.005
dimnames(covmat) = list(asset.names, asset.names)

# tangency portfolio
tan.port <- tangency.portfolio(er, covmat, r.free, shorts = F)
# compute global minimum variance portfolio
gmin.port = globalMin.portfolio(er, covmat, shorts = F)

# compute portfolio frontier
ef <- efficient.frontier(er, covmat, alpha.min=-2,
                         alpha.max=1.5, nport=20, shorts = F)
attributes(ef)

plot(ef)
plot(ef, plot.assets=TRUE, col="blue", pch=16)
points(gmin.port$sd, gmin.port$er, col="green", pch=16, cex=2)
points(tan.port$sd, tan.port$er, col="red", pch=16, cex=2)
text(gmin.port$sd, gmin.port$er, labels="MIN Var", pos=2)
text(tan.port$sd, tan.port$er, labels="Max SR", pos=2)
sr.tan = (tan.port$er - r.free)/tan.port$sd
abline(a=r.free, b=sr.tan, col="green", lwd=2)


#-------------------------------------------------
library(FRAPO)
Most_div = PMD(dfff)
Most_div
tan.port
gmin.port


################################   KODS 2 #####################################

library(RJSONIO)
library(RCurl)
library(anytime)
library(plyr)


coins <- c("BTC", "ETH", "XRP")
globalData <- NULL

for (coin in coins) {
  url <- paste(
    "http://socket.coincap.io/history/",
    coin,
    sep=""
  )
  rawData <- getURL(url)
```

```
  data <- fromJSON(rawData)
  pricesData <- as.data.frame(
    matrix(unlist(data$price), ncol=2, byrow=T)
  )
  names(pricesData) <- c("date", "price")
  pricesData$date <- anydate(
    as.numeric(pricesData$date)/1000
  )
  pricesData$coin <- coin
  globalData <- rbind(globalData, pricesData)
}

data = globalData

uk <- data[ , c("coin", "date")]
uk$date <- as.numeric(uk$date)
data <- data[-which(duplicated(uk)), ]
data <- data[data$date >= "2015-09-01"&data$date <= "2018-05-31", ]


weeks <- seq(as.Date("2016-01-02"), max(data$date), 7)
data.weekly <- data[data$date %in% weeks,
                    c("coin", "date", "price")]
data.weekly <- ddply(
  data.weekly,
  c("coin", "date"),
  function (row) {
    prevRow <- data.weekly[
      data.weekly$coin == row$coin &
        (data.weekly$date == row$date - 7),
      ]
    if (nrow(prevRow) >= 1) {
      row$prev.price <- prevRow$price
    } else {
      row$prev.price <- NULL
    }
    return(row)
  }
)

BTC_data = data[data$coin == "BTC",]
ETH_data = data[data$coin == "ETH",]
XRP_data = data[data$coin == "XRP",]


BTC_data = BTC_data[20:nrow(BTC_data),]
ETH_data = ETH_data[20:nrow(ETH_data),]
XRP_data = XRP_data[21:nrow(XRP_data),]


CoinPrice = as.data.frame(BTC_data)
```

```r
row.names(CoinPrice) = BTC_data$date
CoinPrice = CoinPrice[2]
names(CoinPrice)[1] = "BTC_Price"
CoinPrice$ETH_Price = ETH_data$price
CoinPrice$XRP_Price = XRP_data$price

BTC_daily_returns = BTC_data$date[-1]

BTC_day = BTC_data$price[-1]
BTC_prev_day = BTC_data$price[-nrow(BTC_data)]

BTC_daily_returns = as.data.frame(BTC_daily_returns)
BTC_daily_returns$BTC_day_price  =  BTC_day
BTC_daily_returns$BTC_prev_day_price = BTC_prev_day
BTC_daily_returns$returns = BTC_daily_returns$BTC_day_price / BTC_daily_returns$BTC_prev_day_
    price
BTC_daily_returns$returns_prct = BTC_daily_returns$returns-1
names(BTC_daily_returns)[1] = "Date"

plot(ce)
#----------------------------------------------------------------------
library(moments)
skewness(BTC_daily_returns$returns_prct)
kurtosis(BTC_daily_returns$returns_prct)
summary(BTC_daily_returns$returns_prct)
plot(BTC_daily_returns$Date,BTC_daily_returns$BTC_day_price, t = "l")
#----------------------------------------------------------------------
library(fBasics)
library(evir)

BTC_time = as.character(BTC_daily_returns$Date)
BTC_ret = timeSeries(BTC_daily_returns$returns_prct, charvec = BTC_time)
colnames(BTC_ret) <- "BTC_ret"

## Stylised Facts I

seriesPlot(BTC_ret, title = FALSE, main = "Daily Returns of Bitcoin")
boxPlot(BTC_ret, title = FALSE, main = "Box plot of Returns", cex = 0.5, pch = 19)
acf(BTC_ret, main = "ACF of Returns", lag.max = 20, ylab = " ",
    xlab = " ", col = "blue", ci.col = "red")
pacf(BTC_ret, main = "PACF of Returns", lag.max = 20, ylab = " ",
     xlab = " ", col = "blue", ci.col = "red")
## Stylised Facts II
SieRetAbs <- abs(BTC_ret)
SieRet100 <- tail(sort(abs(series(BTC_ret))), 100)[1]
idx <- which(series(SieRetAbs) > SieRet100, arr.ind = TRUE)
SieRetAbs100 <- timeSeries(rep(0, length(BTC_ret)),
                           charvec = time(BTC_ret))
SieRetAbs100[idx, 1] <- SieRetAbs[idx]
acf(SieRetAbs, main = "ACF of Absolute Returns", lag.max = 20,
    ylab = " ", xlab = " ", col = "blue", ci.col = "red")
```

```r
pacf(SieRetAbs, main = "PACF of Absolute Returns", lag.max = 20,
     ylab = " ", xlab = " ", col = "blue", ci.col = "red")
qqnormPlot(BTC_ret, main = "QQ-Plot of Returns", title = FALSE,
           col = "blue", cex = 0.5, pch = 19)
plot(SieRetAbs100, type = "h", main = "Volatility Clustering",
     ylab = " ", xlab = " ", col = "blue")
#----------------------------------------------------------------------
#----------------------------------------------------------------------

library(FRAPO)
library(fPortfolio)
## Retrieving data and calculating returns
data(StockIndex)
StockReturn <- na.omit(timeSeries(returnseries(CoinPrice,
                                               method = "discrete"),
                                  charvec = rownames(CoinPrice)))
## Specifying portfolio
pspec <- portfolioSpec()
gmv <- pspec
cvar <- pspec
setType(cvar) <- "CVaR"
setAlpha(cvar) <- 0.01
setSolver(cvar) <- "solveRglpk.CVAR"
## Conducting back???test
end <- time(StockReturn)[60:980]
from <- time(StockReturn)[1:length(end)]
wGMV <- matrix(NA, ncol = ncol(StockReturn), nrow = length(end))
wCVAR <- wGMV
for(i in 1:length(end)){
  series <- window(StockReturn, start = from[i], end = end[i])
  gmvpf <- minvariancePortfolio(data = series, spec = gmv,
                                constraints = "Longonly")
  wGMV[i, ] <- c(getWeights(gmvpf))
  cvarpf <- minriskPortfolio(data = series, spec = cvar,
                             constraints = "Longonly")
  wCVAR[i, ] <- c(getWeights(cvarpf))
}
## Compute portfolio values (subsequent returns)
wGMVL1 <- lag(timeSeries(wGMV, charvec = end), k = 1)
colnames(wGMVL1) <- colnames(StockReturn)
wCVARL1 <- lag(timeSeries(wCVAR, charvec = end), k = 1)
colnames(wCVARL1) <- colnames(StockReturn)
## Return factors and portfolio values
GMVRetFac <- 1 + rowSums(wGMVL1 *
                         StockReturn[time(wGMVL1), ]) / 100
GMVRetFac[1] <- 100
GMVPort <- timeSeries(cumprod(GMVRetFac),
                      charvec = names(GMVRetFac))
CVARRetFac <- 1 + rowSums(wCVARL1 *
                          StockReturn[time(wCVARL1), ]) / 100
CVARRetFac[1] <- 100
```

```
CVARPort <- timeSeries(cumprod(CVARRetFac),
                       charvec = names(CVARRetFac))
## Plotting of portfolio values
ylims <- range(cbind(GMVPort, CVARPort))
plot(GMVPort, ylim = ylims, xlab = " ",
     ylab = "Portfolio Value (Index)")
lines(CVARPort, col = "blue")
legend("topleft",
       legend = c("Minimum-Variance", "Minimum-CVaR"),
       col = c("black", "blue"), lty = 1)
## Relative performance
RelOutPerf <- (CVARPort - GMVPort) / GMVPort * 100
plot(RelOutPerf, type = "h", col = "blue", xlab = " ",
     ylab = "Percent",
     main = "Relative Performance Minimum - CVaR vs. Minimum - Variance")
abline(h = 0, col = "grey")
```

Bakalaura darbs „Kriptovalūtu statistiskās īpašības un to portfeļu optimizēšana" izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Raimonds Lukstaraups

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītāja: profesore profesors Dr. math. Jānis Valeinis 05.06.2017.

Recenzents: Jolanta Goldšteine

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __ .06.2017.

Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Dzintra Holsta

Darbs aizstāvēts Valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

__ .06.2017. prot. Nr.______

Komisijas sekretāre: asociētā profesore Ingrīda Uļjane