

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE  
MATEMĀTIKAS NODAĻA

**BRAUNA-ROBINSONES ITERATĪVĀ METODE**

BAKALĀURA DARBS

Autors: **Polina Gmērņicka**

Stud. apl. pg17010

Darba vadītājs: Dr.mat., prof. Inese Bula

RĪGA 2021

## **Anotācija**

Bakalaura darbā ir aprakstīta Brauna-Robinsones iteratīvā metode, kas paredzēta nulles summas spēļu optimālo atrisinājumu atrašanai jauktajās stratēģijās. Darbs satur tos spēļu teorijas jēdzienus aprakstus, kas nepieciešami Brauna-Robinsones metodes izpratnei. Plašāk izklāstītas spēles ar nulles summu. Visi jēdzieni ilustrēti ar piemēriem. Brauna-Robinsones algoritms ilustrēts ar trīs piemēriem, kuri realizēti MATLAB vidē. Metodiska rakstura darbs.

Atslēgas vārdi: spēļu teorija, Brauna-Robinsones iteratīvā metode, nulles summas spēle, optimālā stratēģija, Neimana teorēma

## **Abstract**

The bachelor's thesis describes the Brown-Robinson iterative method for finding optimal solutions for zero-sum games in mixed strategies. The work contains those descriptions of the terms of game theory that are necessary for understanding the Brown-Robinson method. Zero-sum games are considered more extensively. All terms are illustrated with examples. The Brown-Robinson algorithm is illustrated with three examples that have been implemented in the MATLAB environment. Work of a methodical nature.

Keywords: game theory, the iterative Brown-Robinson method, zero-sum game, optimal strategy, Neumann theorem

# Saturs

<b>Apzīmējumi</b>	<b>3</b>
<b>Ievads</b>	<b>4</b>
<b>1. Spēļu teorijas jēdzieni</b>	<b>5</b>
1.1. Spēles formalizācija . . . . .	6
1.2. Spēles ar nulles summu . . . . .	12
1.3. Jauktās stratēģijas . . . . .	13
1.4. Neimana teorēma . . . . .	14
<b>2. Brauna-Robinsones iteratīvā metode</b>	<b>20</b>
2.1. Džūlijas Robinsones biogrāfija . . . . .	20
2.2. Džordža Viljama Brauna biogrāfija . . . . .	22
2.3. Metodes apraksts . . . . .	23
<b>3. Praktiskā daļa</b>	<b>28</b>
3.1. Piemēri . . . . .	28
3.1.1. Klasiskais piemērs . . . . .	28
3.1.2. Tirdzniecības piegādes uzdevums . . . . .	33
3.1.3. Autosalonu cīņa . . . . .	34
<b>Nobeigums</b>	<b>38</b>
<b>Izmantotā literatūra un avoti</b>	<b>40</b>
<b>Pielikums</b>	<b>41</b>
A. Programmas kods . . . . .	41

## Apzīmējumi

$N$  - spēlētāju kopa,

$\emptyset$  - tukša kopa,

$S_i$  -  $i$ -tā spēlētāja stratēģiju kopa,

$S := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i+1} \times \dots \times S_n = \prod_{i=1}^n S_i$  -  $n$  spēlētāju stratēģiju kopa,

$S_{-i} := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n = \prod_{j=1, j \neq i}^n S_j$  -  $n$  spēlētāju stratēģiju kopa bez  $i$ -tā spēlētāja stratēģiju kopas  $S_i$ ,

$s = (s_1, s_2, \dots, s_n) = (s_{-i}, s_i)$  -  $n$  spēlētāju stratēģiju kombinācija,

$s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  - viena konkrēta  $n$  spēlētāju stratēģiju kombinācija bez  $i$ -tā spēlētāja stratēģijas  $s_i$ ,

$u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R$  -  $i$ -tā spēlētāja lietderības (vinnesta, ieguvumu, derīguma) funkcija,

$\Gamma = (N; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$  - spēle normālformā,

$\overline{S}_i$  -  $i$ -tā spēlētāja jaukta stratēģiju kopa,

$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$  - jauktā stratēģija (varbūtību sadalījums pār tīro stratēģiju kopu ar skaitām stratēģijām),

■ - piemēra beigu simbols.

# Ievads

Mūsdienās ir diezgan liels uzdevumu skaits, kuru risinājums analītiskā formā principā nav iespējams ar elementārajām funkcijām, vai ir saistīts ar lielu darba apjomu, kas ietver ilgu aprēķinu laiku. Tādā situācijā asi izceļas metožu meklējuma jautājums, kuras izmantojot mēs varam atrast kompromisu starp atbildes saņemšanas laiku un aprēķinu precizitāti. Pie tādām metodēm spēļu teorijā pieder arī Brauna-Robinsona metode-iteratīvs algoritms, lai atrastu optimālās stratēģijas spēlētājiem  $A$  un  $B$  nulles summas spēlēs.

Bakalaura darba mērķis ir izpētīt spēļu teorijas pamatjēdzienus, aprakstīt Brauna-Robinsones metodi un to pielietojumu. Brauna-Robinsones metodes ideja ir vairākkārtēja fiktīva spēles realizācija ar doto izmaksu matricu. Kā pamatmateriāls izmantots *Osokina L.A.* darbs «*Braun-Robinson method and economic application*» ([11]).

Galvenie uzdevumi darba mērķa sasniegšanai ir:

- Iepazīties ar dažādām situācijām, kuras var attēlot kā spēles, un spēļu klasifikāciju;
- Apskatīt, kā Džūlija Robinsone (Julia Robinson), balstoties uz Džordža Brauna (George Brown) rakstu, izveidoja šo metodi;
- Aprakstīt Brauna-Robinsones metodi un ar tās palīdzību atrisināt tam piemērotus uzdevumus;
- Nosaukt Brauna-Robinsones metodes priekšrocības un trūkumus.

Darbs ir veidots, lai to būtu viegli lasīt arī lasītājiem, kuri nav labi pazīstami ar spēļu teoriju. Visās nodaļās kā piemēri tiek lietoti gan klasisku spēļu modeļi, gan arī autores izdomātas spēles.

Bakalaura darbs sastāv no 3 nodaļām. Darba izklāsts sākas ar spēļu teorijas aprakstu, kur tiek apskatīti svarīgākie jēdzieni, tai skaitā, spēles formalizācija, jauktās stratēģijas, Neimana teorēma. Savukārt 2. nodaļa sniedz matemātisko aprakstu Brauna-Robinsones metodei, izvērtējot tās priekšrocības un nepilnības. Tālāk ir apskatīti piemēri, kā atrast optimālo stratēģiju diviem spēlētājiem, izmantojot Brauna-Robinsones metodi. Nobeigumā īsi apkopoti darbā iegūtie rezultāti. Pielikums satur programmas kodu MATLAB vidē. Darba izveidē izmantoti 17 literatūras avoti.

Bakalaura darbs noformēts, izmantojot  $\text{\LaTeX}$ .

# 1. Spēļu teorijas jēdzieni

**Spēļu teorija** ([2]) ir matemātikas nozare, kas pēta optimālās lēmumu pieņemšanas metodes konfliktsituācijās. Konflikta matemātiskais modelis apraksta divu vai vairāku tā dalībnieku (spēlētāju) savstarpējo pretdarbību, kas izpaužas to izraudzītajās stratēģijās; spēlētāji var arī apvienoties koalīcijās. Spēli uzdod ar visu spēlētāju vai koalīcijas stratēģiju kopām un to veidotajām situācijām.

Spēļu klasifikācija tiek veikta pēc [12] :

- *spēlētāju skaita*: divu un  $n$  spēlētāju spēles;
- *stratēģiju skaita*: ja spēlē visiem spēlētājiem ir galīgs skaits stratēģiju, tad spēle ir galīga. Ja kaut vienam spēlētājam ir bezgalīgi daudz stratēģiju, tad tā ir bezgalīga spēle;
- *spēlētāju savstarpējā mijiedarbības rakstura*: bezkoalīciju (nekooperatīvas) spēles (spēlētājiem nav iespējams izveidot koalīcijas, līgumus, vienoties, utt.); koalīciju (kooperatīvās) spēles, kurās notiek vienošanās;
- *vinnesta*: spēles ar nulles summu (kopējais spēlētāju kapitāls nemainās, bet tiek pārdalīts starp spēlētājiem; visu spēlētāju vinnests ir 0) un spēles ar nenulles summu;
- *gājienu skaita*: viensoļa un daudzsoļa. Starp daudzsoļas spēlēm mēs izceļam pozicionālās spēles, kurās vairāki spēlētāji secīgi veic darbības; spēlētāju izmaksa ir atkarīga no gājienu izvēles stratēģijas (piemēram, dambrete, šahs, kāršu spēles, spēļu automāti, dinamiskas ekonomiskās sistēmas utt.);
- *informācijas daudzuma*: spēles ar perfektu un neperfektu informāciju. Spēlē ar perfektu informāciju katrā solī spēlētāji zina (atceras), kuri gājieni tika veikti agrāk (piemēram, dambrete un šahs). Spēlē ar neperfektu informāciju spēlētāji var nezināt, kādā pozīcijā viņi atrodas (dažas stohastiskas spēles, īpaši kāršu spēles).

Spēļu teorijas sākums tiek datēts ar 1928. gadu. Džons fon Neimans (John von Neumann) vissvarīgākā figūra spēļu teorijas agrīnajā attīstībā. Analizējot galda spēles, Džons fon Neimans

Ļoti ātri saprata savu pieeju praktisko lietderību ekonomisko problēmu analīzē. Savā grāmatā “Spēļu teorija un ekonomiskā uzvedība” (“Theory of Games and Economic Behavior”), ko viņš sarakstīja kopā ar Oskaru Morgenšternu (Oskar Morgenstern) 1944. gadā, viņš jau izmantoja savu matemātisko teoriju ekonomikā. Šīs grāmatas izdošana parasti tiek uzskatīta par mūsdienu spēļu teorijas sākumpunktu.

Šobrīd spēļu teorētiskie modeļi tiek izmantoti dažādās ekonomikas un citu zinātņu jomās, it īpaši: efektīvu stratēģiju izvēlē uzņēmējdarbībā un optimālai firmas uzvedībai, racionālai finanšu vadībai, investīciju teorijā, komercdarbībā, apdrošināšanas jomā, transporta pakalpojumu mārketingā un pilsētas transporta pārvaldībā, mājokļu tirgus jomā, inovāciju teorijā, ekoloģisko un ekonomisko sistēmu analīzē un vadībā, pētījumu organizēšanā, psiholoģijā un medicīnā, militārajos jautājumos, drošības nodrošināšanas uzdevumos, socioloģijā, politikā. No reālās konfliktu situācijas dzīvē spēle atšķiras ar to, ka tajā eksistē stingri definēti noteikumi un konfliktā iesaistētās puses (kas tiek sauktas par spēlētājiem) tiek uzskatītas par vienādi prasmīgām.

## 1.1. Spēles formalizācija

**Definīcija 1.** ([6]). Katra spēlētāja ikvienu darbības variantu, kas atbilst spēles noteikumiem, sauc par *tīro stratēģiju*.

**Definīcija 2.** ([2]). Teiksim, ka ir dota *spēle normālformā* ja,

1. dota spēlētāju kopa  $N = \{1, \dots, n\}$ ;
2. katram spēlētājam  $i \in N$  ir zināma viņa stratēģiju kopa  $S_i$ ;
3. katram spēlētājam  $i \in N$  ir zināma viņa ieguvumu funkcija

$$u_i: S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow R.$$

Saīsināti spēli normālformā pieraksta  $\Gamma = (N; S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$ .

Atzīmēsim, ka spēle, kas dota ar ieguvumu matricas palīdzību, ir speciālgadījums spēlei normālformā.

Ar pierakstu

$$S := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i+1} \times \dots \times S_n = \prod_{i=1}^n S_i$$

saprātīsim visu  $n$  spēlētāju stratēģiju kopu, kur ar  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) = (s_{-i}, s_i)$  tiek apzīmēta viena konkrēta visu  $n$  spēlētāju stratēģiju kombinācija.

Ar

$$S_{-i} := S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n = \prod_{j=1, j \neq i}^n S_j$$

tiek apzīmēta  $n$  spēlētāju stratēģiju kopa bez  $i$ -tā spēlētāja stratēģijām;

attiecīgi  $s_{-i} = (s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  ir viena konkrētā  $n$  spēlētāju stratēģiju kombinācija bez  $i$ -tā spēlētāja stratēģijas  $s_i$ .

### Piemērs 1. (Saldumu zagšana, [15]).

Pieņemsim, ka kasieris noķer divus bērnus par saldumu zagšanu. Abus bērnus veikala birojā atsevišķi iztaujā veikala īpašnieks. Šajā gadījumā bērniem ir tikai divas iespējas: klusēt (neviens bērns neatzīstas izdarītajā) vai teikt, ka viņa draugs nozaga saldumus. Ja viens bērns atzīst, ka ir nozadzis saldumus, bet otrs to nedara, bērns, kurš atzīst, saņem brīdinājumu, bet otrs bērns tiks sodīts ar četru nedēļu “mājas arestu”. Ja abi bērni atzīst, ka ir nozaguši saldumus, viņi abi saņems divu nedēļu sodu. Ja viņi abi to noliedz, tad abi bērni tiks sodīti uz trim nedēļām. Vienam bērnam ir jāpaļaujas uz otra bērna klusēšanu, lai izvairītos no neliela soda. Spēļu teorija parasti aplūko, kā indivīdi vai grupas izdara izvēli, kas ietekmēs citas puses.

Abus bērnus mēs varam aplūkot kā spēles dalībniekus jeb spēlētājus.

Katram spēlētājam  $i$  ( $i = 1, 2$ ) ir iespējamās divas tīrās stratēģijas  $s_i$ :

1. atzīties (stratēģija  $s_{i1}$ ,  $i = 1, 2$ ),
2. neatzīties (stratēģija  $s_{i2}$ ,  $i = 1, 2$ ).

Atkarībā no tā, kuru no abām stratēģijām izvēlēsies katrs no abiem spēlētājiem, veidosies noteikta stratēģiju kombinācija kā pāris  $s = (s_1, s_2)$ . Pavisam kopā ir iespējamās 4 tīro stratēģiju kombinācijas ( $2 \times 2$ ). Katrai kombinācijai  $s$  var piekārtot atbilstošu notikumu  $e(s)$  — nedēļu skaitu, kādu bērniem vajadzēs pavadīt sodītam. Spēli ar iespējamajiem notikumiem  $e(s)$  varam attēlot ar matricu kā Tabulā 1.1. Ieguvumiem matricā ir jāatspoguļo fakts, ka visvairāk vēlamajam notikumam ir vislielākais ieguvums. Šajā piemērā ieguvumi ir sods- jo mazāks sods, jo tas ir vairāk vēlams.

Tabula 1.1: Piemēra 1 spēles ieguvumu matrica

Bērns A / Bērns B	Atzīties ( $s_{21}$ )	Neatzīties ( $s_{22}$ )
Atzīties ( $s_{11}$ )	(-2,-2)	(0,-4)
Neatzīties ( $s_{12}$ )	(-4,0)	(-3,-3)

Spēles aprakstu, kas dots ar matricas palīdzību, sauc par *spēles normālformu* vai *stratēģisko spēles formu*. Abi bērni izvēlas stratēģiju vienlaicīgi, nezinot, ko izvēlēsies otrs spēlētājs. Komunikācija starp abiem nav iespējama. Šādu spēli sauc par nekooperatīvu.

Divu bērnu pirmā doma noteikti bija viņu personīgās intereses, taču tas būtu izraisījis lielāko sodu abiem. Viņiem labākais variants ir abiem atzīties un līdz ar to saņemt arī sodu. Tādējādi tas ir *Neša līdzsvars*, saukts arī par nekooperatīvo līdzsvaru (precīzs definējums atrodas 1.6. apakšnodaļā). ■

## **Piemērs 2. (Cietuma dilemma (Prisoner's Dilemma), [2], [10]).**

Viena no vispazīstamākajām stratēģiskajām spēlēm ir Cietuma dilemma. Tās nosaukums cēlies no stāsta, kurā iesaistīti aizdomās turamie par noziegumu; tās nozīmi rada milzīgais dažādu situāciju klāsts, kurās dalībnieki saskaras ar tādiem stimuliem, kas ir līdzīgi tiem, ar kuriem saskaras aizdomās turētie stāstā. Iepriekš apskatītais Saldumu zagšanas piemērs arī ir “Cietuma dilemmas” variācija.

Cietuma dilemma: *Noķerti divi noziedznieki. Šerifs ir pārliecināts, ka viņi abi piedalījušies lielas bankas aplaupīšanā, taču nav nekādu pierādījumus. Šerifs zina, ka katram no noziedzniekiem ir divas iespējas: atzīties aplaupīšanā vai neatzīties. Šerifs ievieto noziedzniekus katru savā kamerā un katram no viņiem saka sekojošo: "Ja tu neatzīsies un tavš biedrs neatzīsies, tad jūs abi izcietīsiet 3 mēnešus cietumsodu; ja tu neatzīsies, bet tavš biedrs atzīsies, tad tu saņemsi 10 gadus cietumsodu, bet viņš staigās brīvībā; ja tu atzīsies, bet viņš ne, tad otrādi — tu staigāsi brīvībā, bet viņš cietīs sodu; ja nu jūs abi atzīsieties, tad abi dabūsi 8 gadus cietumsodu."*

Abus noziedzniekus mēs varam aplūkot kā spēles dalībniekus jeb spēlētājus.

Katram spēlētājam  $i$  ( $i = 1, 2$ ) ir iespējamās divas tīrās stratēģijas  $s_i$ :

1. atzīties (stratēģija  $s_{i1}$ ,  $i = 1, 2$ ),
2. neatzīties (stratēģija  $s_{i2}$ ,  $i = 1, 2$ ).

Pavisam kopā ir iespējamās 4 tīro stratēģiju kombinācijas ( $2 \times 2$ ). Katrai kombinācijai  $s$  var piekārtot atbilstošu notikumu  $e(s)$  — gadu skaitu, kādu noziedzniekiem vajadzēs pavadīt cietumā. Spēli ar iespējamajiem notikumiem  $e(s)$  varam attēlot ar matricu kā Tabulā 1.2. Taču šeit lielākais skaitlis 10 neatspoguļo faktu, ka tas ir sliktākais vēlamais notikums. Tāpēc, lai nonāktu līdz Piemēra 2 ieguvumu matricai, ir jāizveido spēlētāju priekšrocību sakārtojums iespējamajiem notikumiem un jāpiekārtoti tiem ieguvumu vērtības. Šajā Piemērā 2 vismazāk vēlamie ir 10 gadi cietumsoda, tiem var piekārtot skaitli  $a$ , tad 8 gadi - skaitlis  $b > a$ , tad 3 mēneši -  $c > b > a$  un ceturtais notikums 0 gadu - tam vislielākā vērtība  $d > c > b > a$ .

Varam šos  $a, b, c, d$  aizstāt ar konkrētiem skaitļiem  $a = 1 < b = 2 < c = 3 < d = 4$  un iegūsim Piemēram 2 atbilstošu ieguvumu matricu (Tabula 1.3).

Tabula 1.2: Piemēra 2 noziedznieku sodu ilgums

1.spēlētājs / 2.spēlētājs	Atzīties ( $s_{21}$ )	Neatzīties ( $s_{22}$ )
Atzīties ( $s_{11}$ )	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	(10,0)
Neatzīties ( $s_{12}$ )	(0,10)	(8,8)

Tabula 1.3: Piemēra 2 ieguvumu matrica

1.spēlētājs / 2.spēlētājs	Atzīties ( $s_{21}$ )	Neatzīties ( $s_{22}$ )
Atzīties ( $s_{11}$ )	(3,3)	(1,4)
Neatzīties ( $s_{12}$ )	(4,1)	(2,2)

Spēles aprakstu, kas dots ar matricas palīdzību, sauc par *spēles normālformu* vai *stratēģisko spēles formu*. Abi noziedznieki izvēlas stratēģiju vienlaicīgi, nezinot, ko izvēlēsies otrs spēlētājs. Komunikācija starp abiem nav iespējama. Šādu spēli sauc par nekooperatīvu. ■

### Piemērs 3. (Automašīnu apdrošināšana, [7]).

Apskatīsim vienu no visizplatītākajiem un pazīstamākajiem apdrošināšanas veidiem - automašīnas apdrošināšanu. Latvijā automašīnu apdrošināšana (OCTA) ir obligāta, un katrs autobraucējs saskaras ar šo problēmu. Daudzi autobraucēji vēlētos, pirmkārt, samazināt savus izdevumus par apdrošināšanas prēmijām un, otrkārt, saņemt maksimālo samaksu, iestājoties apdrošināšanas gadījumam. Šajā gadījumā apdrošinātājs, gluži pretēji, vēlētos saņemt maksimālās prēmijas un maksāt minimālās summas, iestājoties apdrošināšanas gadījumam. Apdrošinātā un apdrošinātāja intereses ir pretrunīgas, un attiecības, kurās viņi nonāk savā starpā, var uzskatīt par antagonisku spēli.

Apskatāmajai konflikta situācijai ir divas puses:

- A* - ir autovadītājs (apdrošināšanas ņēmējs), kura mērķis ir samazināt apdrošināšanas izmaksas un ceļu satiksmes negadījuma gadījumā saņemt maksimālo samaksu. Noslēdzot līgumu, viņš apdrošina automašīnu par pilnu vērtību;
- B* - apdrošināšanas sabiedrība (apdrošinātājs), kuras mērķis ir iegūt maksimālu peļņu (t.i., maksimālās apdrošināšanas prēmijas un minimālos maksājumus apdrošināšanas gadījumu gadījumā).

Autovadītājam ir trīs stratēģijas:

- $A_1$  - braukt ar vislielāko piesardzību un, noslēdzot līgumu, norādīt automašīnas faktisku vērtību (3500 eiro). Peņemsim, ja vadītājs, braucot ir uzmanīgs un seko ceļam, tad apdrošināšanas gadījuma iestāšanās varbūtība ir praktiski nulle (mēs izslēdzam zādzības iespēju);
- $A_2$  - braukt ļoti piesardzīgi un, noslēdzot līgumu, norādīt mazāku automašīnas vērtību (apdrošināšanas summu) (2500 eiro), lai samazinātu apdrošināšanas prēmijas;
- $A_3$  - nesekot līdzī ceļam un norādīt paaugstinātas automašīnas izmaksas (4500 eiro). Tā kā šajā gadījumā apdrošināšanas gadījuma iespējamība ir liela, un automašīnas īpašnieks norādījis paaugstināto vērtību, tad avārijas gadījumā autovadītājs saņems lielāku atlīdzību nekā tad, ja viņš norādītu automašīnas patieso vērtību.

Tajā pašā laikā jāatceras, ja apdrošināšanas sabiedrība konstatē, ka negadījums noticis autovadītāja vainas dēļ vai ka viņš norādījis paaugstināto vai nepietiekami novērtētas automašīnas izmaksas, tad apdrošināšanas maksājums var netikt maksāts un autovadītājam var uzlikt naudas sodu (šajā gadījumā tas ir viens no līguma nosacījumiem).

Apdrošināšanas sabiedrībai ir četras stratēģijas:

- $B_1$  - nenovērtēt automašīnas vērtību un noticēt autovadītāja teiktajam, kā arī nelaimes gadījumā nemeklēt vainīgo, lai ietaupītu laiku;
- $B_2$  - veikt izmeklēšanu apdrošināšanas gadījumā, bet nenovērtēt automašīnas vērtību;
- $B_3$  - pārbaudīt automašīnas vērtību, bet neveikt izmeklēšanu negadījuma gadījumā;
- $B_4$  - veikt izmeklēšanu negadījuma gadījumā un pārbaudīt, vai norādītā automašīnas vērtība atbilst realitātei.

Pieņemsim, ja tiks konstatēts nepareizi norādīta automašīnas vērtība, apdrošinātājs no apdrošinājuma ņemēja iekasēs naudas sodu 15% no apdrošināšanas objekta reālās vērtības. Ja tiek konstatēts, ka negadījums noticis apdrošināšanas ņemēja vainas dēļ, viņš nesaņem apdrošināšanas maksājumu. Apdrošināšanas prēmija par apdrošināšanas periodu ir 10% no norādītās apdrošināšanas summas. Pieņemsim, ka, iestājoties apdrošināšanas gadījumam, automašīna tiek pilnībā iznīcināta. Par attiecīgo apdrošināšanas periodu tiek veikta tikai viena iemaksa, un apdrošināšanas gadījums var notikt ne vairāk kā vienu reizi.

Izveidosim spēles matricu.

Šo situāciju var uzskatīt par antagonisku spēli, jo  $A$  un  $B$  puses intereses ir pretējas.  $S_A = \{A_1, A_2, A_3\}$  - spēlētāja  $A$  (autovadītāja) tiro stratēģiju kopa,  $S_B = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$  - spēlētāja

$B$  (apdrošināšanas sabiedrības) tīro stratēģiju kopa. Spēlētājs  $A$  var izvēlēties vienu no trim stratēģijām, spēlētājs  $B$  - vienu no četrām.

Kā spēlētāja  $A$  ieguvumu (vai spēlētāja  $B$  zaudējumu) mēs uzskatīsim viņa izdevumus par apdrošināšanas prēmijām (ar negatīvu zīmi), soda naudas (arī ar negatīvu zīmi) un, ja tāda ir, apdrošināšanas summu (ar pozitīvu zīmi). Spēlētājs  $A$  cenšas maksimizēt savu ieguvumu, spēlētājs  $B$  - samazināt zaudējumus.

Apskatīsim katru no iespējamām situācijām.

Situācijās  $(A_1, B_1)$ ,  $(A_1, B_2)$ ,  $(A_1, B_3)$ ,  $(A_1, B_4)$  apdrošināšanas gadījums, pateicoties vadītāja uzmanībai, nenotika, autovadītājam izdevumi radās tikai par prēmijām. Summa ir norādīta pareizi, tāpēc jebkurā gadījumā (neatkarīgi no tā, vai tika veikts novērtējums vai nē) nav par ko sodīt autovadītāju. Ieguvuma funkcijas vērtība tiek definēta šādi:

$$u_A(A_1, B_1) = u_A(A_1, B_2) = u_A(A_1, B_3) = u_A(A_1, B_4) = -(0.1 \cdot 3500) = -350\text{€}.$$

Situācijās  $(A_2, B_1)$ ,  $(A_2, B_2)$  apdrošināšanas gadījums vadītāja uzmanības dēļ nenotika. Automašīnas vērtība ir pazemināta, tāpēc apdrošināšanas prēmija ir mazāka. Krāpšana nav identificēta, jo apdrošināšanas sabiedrība neveic pie stratēģijas  $B_1$  un  $B_2$  novērtējumu. Soda nav. Tad

$$u_A(A_2, B_1) = u_A(A_2, B_2) = -(0.1 \cdot 2500) = -250\text{€}.$$

Situācijās  $(A_2, B_3)$ ,  $(A_2, B_4)$  apdrošināšanas gadījums nenotika, automašīnas vērtība ir pazemināta. Apdrošināšanas prēmija ir veikta. Tā kā novērtēšana tika veikta, autobraucējam tika uzlikts naudas sods. Tātad

$$u_A(A_2, B_3) = u_A(A_2, B_4) = -(0.1 \cdot 2500 + 0.15 \cdot 3500) = -775\text{€}.$$

Situācijā  $(A_3, B_1)$  vadītājs bija neuzmanīgs, notika avārija. Apdrošināšanas summa ir paugstināta, izmaksa ir lielāka, bet arī apdrošināšanas prēmija ir lielāka. Tā kā apdrošināšanas sabiedrība neveic pie  $B_1$  stratēģijas novērtēšanu vai izmeklēšanu, tā maksā kompensāciju. Tad

$$u_A(A_3, B_1) = -0.1 \cdot 4500 + 4500 = 4050\text{€}.$$

Situācijā  $(A_3, B_2)$  apdrošināšanas gadījums notika autovadītāja vainas dēļ, tika veikta izmeklēšana, taču netika konstatēts, ka summa būtu pārspilēta. Sods netiek piemērots, kompensācija netiek izmaksāta (turklāt vadītājam rodas zaudējumi remonta dēļ, taču šeit tie netiek ņemti vērā, jo tie vienlaikus nav apdrošinātāja ienākumi). Tad

$$u_A(A_3, B_2) = -0.1 \cdot 4500 = -4500\text{€}.$$

Situācijā  $(A_3, B_3)$  vadītāja neuzmanības dēļ notika negadījums. Netika veikta izmeklēšana par vainīgā identificēšanu, bet kļuva zināms, ka summa ir pārspīlēta. Tiks izmaksāta kompensācija automašīnas reālās vērtības apmērā, atskaitot naudas sodu:

$$u_A(A_3, B_3) = -0.1 \cdot 4500 - 0.15 \cdot 3500 + 3500 = 2525\text{€}.$$

Situācijā  $(A_3, B_4)$  ir notikusi avārija. Vainīgais tika konstatēts, apdrošināšanas maksājums netika veikts, autovadītājam tika uzlikts naudas sods par nepareizu summu:

$$u_A(A_3, B_4) = -0.1 \cdot 4500 - 0.15 \cdot 3500 = -975\text{€}.$$

Esam ieguvuši ieguvumu matricu (Tabula 1.4).

Tabula 1.4: Piemēra 3 spēles ieguvumu matrica

$A_i \backslash B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$
$A_1$	-350	-350	-350	-350
$A_2$	-250	-250	-775	-775
$A_3$	4050	-4500	2525	-975

■

## 1.2. Spēles ar nulles summu

**Definīcija 3.** ([3]). Spēli, kas ir uzdots stratēģiskā formā, sauc par *nulles summas spēli*, ja visu spēlētāju ieguvumu summa ir vienāda ar nulli neatkarīgi no izvēlētajām stratēģijām jeb

$$\forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n \quad \sum_{i=1}^n u_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0.$$

Divu spēlētāju gadījumā nulles summas spēlē viena spēlētāja zaudējums ir otra spēlētāja ieguvums.

Nulles summas spēlēs ieguvumu matricu parasti sauc par norēķinu matricu, arī par vinnestu matricu.

**Piemērs 4.** ([16], [17]).

Daudzas azarta spēles iederas starp nulles summas spēlēm. Viena no populārākajām kāršu spēlēm „uz naudu” ir Pokers. Pieņemsim, ka spēlē piedalās divi spēlētāji. Katram no viņiem

tiek izdalītas kārtis. Pokera noteikumi nosaka spēlētājam iedalīto kāršu kombināciju stiprumu. Katras no spēlētājiem novērtē savu kāršu stiprumu un izsaka solījumu naudas formā par to, cik stipri viņš vērtē sev rokā esošās kārtis. Spēlētājs solījumā var piedalīties brīvprātīgi, un parasti to dara tikai uzskatot, ka viņš var uzvarēt. Kad visi spēlētāji ir izteikuši savu solījumu, kārtis tiek atklātas. Uzvar spēlētājs ar labāko kāršu sadalījumu, iegūstot visu sasolīto naudas summu. Uzvarētāja ieguvums ir vienāds ar otra spēlētāja zaudēto naudas summu. ■

### 1.3. Jauktās stratēģijas

**Definīcija 4.** ([7]). Varbūtību sadalījumu pār spēlētāja tīro stratēģiju kopu, kas nosaka, ar kādu varbūtību tiks izvēlēta kāda no tīrajām stratēģijām, sauc par spēlētāja *jaukto stratēģiju*.

Pieņemsim, ka  $S_A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  ir spēlētāja  $A$  tīro stratēģiju kopa.

Katru spēlētāja  $A$  jaukto stratēģiju  $p$  pilnībā nosaka varbūtības  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , ar kurām spēlētājs  $A$  izvēlas atbilstošās tīras stratēģijas  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Tāpēc jaukto stratēģiju  $p$  var identificēt ar  $m$ -dimensiju vektoru  $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Apzīmēsim ar  $\overline{S_A}$  spēlētāja  $A$  jaukto stratēģiju kopu.

Katru spēlētāja  $A$  tīro stratēģiju  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , var uzskatīt par jaukto, definējot jauktajā stratēģijā  $i$ -to koordināti vienādu ar 1, bet visas pārējās vienādas ar 0. Tāpēc spēlētāja  $A$  tīro stratēģiju kopa  $S_A$  ir viņa jaukto stratēģiju kopas apakškopa  $\overline{S_A}$ , t.i.

$$S_A \subset \overline{S_A}, S_A \neq \emptyset, \overline{S_A} \neq S_A,$$

kur  $\emptyset$  ir tukša kopa,  $S_A$  - tīro stratēģiju kopa,  $\overline{S_A}$  - jaukts stratēģiju kopa.

Visu iepriekš minēto var pārformulēt  $B$  spēlētājam. Proti, ja  $S_B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  ir spēlētāja  $B$  tīro stratēģiju kopa, tad viņa jauktā stratēģija ir  $n$ -dimensiju vektors  $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ ,  $q_j \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ;  $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ , kura koordinātas atspoguļo varbūtības, ar kurām spēlētājs  $B$  izvēlas savas tīras stratēģijas.

Ja spēlētājs ievēro noteiktu jauktu stratēģiju, tad, lai noteiktu konkrētu tīro stratēģiju spēlē, pirms tās sākuma tiek palaists kāds varbūtību ģenerējošs mehānisms, kas atbilst dotajai jauktajai stratēģijai.

**Piemērs 5.** ([7]).

Vai spēlē ar 4 tīrajām stratēģijām par jaukto stratēģiju var tikt uzskatīta spēlētāja  $A$  nejauša tīras stratēģijas izvēle, ko nosaka izvēle no 52 kāršu kavas, izvelkot noteikta masts kārts (piemēram, ja tiek nejauši pēķa kārts, tad tiek izvēlēta  $A_1$  stratēģija utt.)?

Tā kā 52 karšu kavā ir 13 kārtis katram no četriem mastiem, tad varbūtība no šīs kavas nejauši izvēlēties noteiktu masta karti ir  $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ , tāpēc mums ir vektors  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , ko nosaka četras pozitīvas koordinātas, kuru summa ir 1. Tāpēc šis vektors ir jauktā stratēģija, kurā katra tīrā stratēģija tiek izvēlēta ar varbūtību  $p_i = \frac{1}{4}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Šādi tiek realizēts viens noteikts varbūtību sadalījums.

Bet, piemēram, ja vajag realizēt jauktu stratēģiju  $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ , tad to var izdarīt ar 32 kārtīm, atstājot 12 pēķus, 4 kāravus, 8 ercus un 8 kreičus, jo  $(\frac{12}{32}, \frac{4}{32}, \frac{8}{32}, \frac{8}{32}) = (\frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ . ■

## 1.4. Neimana teorēma

Neimana teorēma ir spēļu teorijas pamatteorēma, kas nosaka, ka katrai ierobežotai, nulles summas divu cilvēku spēlei eksistē optimālas jauktās stratēģijas. To pierādīja Džons fon Neimans 1928. gadā.

Pieņemsim, ka dota matricu spēle (ar nulles summu) ar norēķinu matricu  $M$ , 1. spēlētājam ir  $m$ , bet 2. spēlētājam ir  $n$  tīrās stratēģijas, matricas elementus (ieguvumus 1. spēlētājam) apzīmēsim ar  $a_{ij}$ .

Ja 1. spēlētājs izmanto  $i$ -to tīro stratēģiju, tad tam jāreķinās ar 2. spēlētāja atbildi, kura minimizē 1. spēlētāja ieguvumu  $a_i$ :

$$a_i = \min_{j=1, \dots, n} a_{ij}.$$

Redzot šādu atbildi, 1. spēlētājs izvēlēsies tādu tīro stratēģiju, kurai atbilst vislielākā  $a_i$  vērtība  $a$ :

$$a = \max_{i=1, \dots, m} a_i \text{ jeb } a = \max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} a_{ij}. \quad (1.4.1)$$

**Definīcija 5.** ([6]). Skaitlis  $a$ , kas iegūts ar vienādību (1.4.1) sauc par *spēles apakšējo cenu* jeb 1. spēlētāja maxmin vinnestu, atbilstošo 1. spēlētāja tīro stratēģiju sauc par maxmin stratēģiju.

Maxmin stratēģiju mēdz saukt arī par piesardzīgo stratēģiju, jo neatkarīgi no 2. spēlētāja darbības, šī stratēģija nodrošina 1. spēlētājam  $a$  vienību ieguvumu.

Līdzīgi, ja 2. spēlētājs izmanto  $j$ -to tīro stratēģiju, tad tam jāreķinās ar 1. spēlētāja atbildi, kura maksimizē 2. spēlētāja ieguvumu  $b_j$ :

$$b_j = \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}.$$

Redzot šādu atbildi, 2. spēlētājs izvēlēsies tādu tīro stratēģiju, kurai atbilst vismazākā  $b_j$  vērtība  $b$ :

$$b = \min_{j=1, \dots, n} b_j \text{ jeb } b = \min_{j=1, \dots, n} \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}. \quad (1.4.2)$$

**Definīcija 6.** ([6]). Skaitlis  $b$ , kas iegūts ar vienādību (1.4.2) sauc par spēles augšējo cenu jeb 2. spēlētāja minmax zaudējumu, atbilstošo 2. spēlētāja tīro stratēģiju sauc par minmax stratēģiju.

Minmax stratēģijas gadījumā neatkarīgi no 1. spēlētāja darbībām 2. spēlētāja zaudējums nepārsniedz  $b$  vienības.

**Piemērs 6.** Pieņemsim, ka 1. spēlētājam ir 3 tīrās stratēģijas un 2. spēlētājam ir 4 tīrās stratēģijas. Spēles norēķinu matrica ir šāda

$$M = \begin{matrix} & & & & \min \\ & \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{matrix} \\ \max & \begin{matrix} 2 & 5 & 6 & 4 \end{matrix} & & & \end{matrix}$$

Tā kā  $a_1 = \min\{2, 4, -1, 0\} = -1$ ,  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = -2$ , tad  $a = \max\{-1; -3; -2\} = -1$  - tā ir spēles apakšējā cena. Savukārt, tā kā  $b_1 = \max\{2; -3; 2\} = 2$ ,  $b_2 = 5$ ,  $b_3 = 6$ ,  $b_4 = 4$ , tad  $b = \min\{2, 5, 6, 4\} = 2$  - tā ir spēles augšējā cena. 1. spēlētājam maxmin stratēģija ir pirmā stratēģija  $s_{11}$ , arī 2. spēlētājam minmax stratēģija ir pirmā stratēģija  $s_{21}$ . Ievērosim, ka  $a = -1 < b = 2$ . ■

Vispārīgā gadījumā spēles apakšējā cena ir mazāka vai vienāda ar spēles augšējo cenu

$$\max_{i=1, \dots, m} \min_{j=1, \dots, n} a_{ij} = a \leq b = \min_{j=1, \dots, n} \max_{i=1, \dots, m} a_{ij}.$$

Ja  $a = b$ , tad  $a$  un  $b$  sauc par spēles cenu un apzīmē ar  $v$ .

**Definīcija 7.** ([6]). Par norēķinu matricas  $M$  seglu punktu sauc tādu matricas elementu, kas vienlaikus ir mazākais rindā un lielākais kolonnā.

**Piemērs 7.** Dota norēķinu matrica

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Šajā piemērā  $a = \max\{-2; -5\} = -2$  un  $b = \min\{6; -2; 3\} = -2$ , tad  $a = b = -2 = v$ . Šis -2 ir matricas  $M$  seglu punkts, jo tas ir mazākais elements 1.rindā un lielākais elements 2.kolonnā. ■

Ja spēlei eksistē seglu punkts, tad tās stratēģijas, ar kurām tas tiek sasniegts (pēdejā piemērā tas ir stratēģiju pāris  $(s_{11}; s_{22})$ ), veido šīs spēles atrisinājumu tīrajās stratēģijās jeb tās ir spēlētāju optimālās stratēģijas.

Pamatojoties uz iepriekš minēto, mēs varam formulēt šādu algoritmu, lai atrastu spēles matricas seglu punktus, spēlētāju optimālās stratēģijas, spēles cenu un spēles atrisinājumu tīrā stratēģijā.

Seglu punktu atrašanas algoritms ([7]):

1. Spēles matricas 1. rindā atrodam mazākos elementus.

Ja neviens no atrastajiem elementiem nav lielākais kolonnā, kurā tas atrodas, tad 1. rindā nav seglu punktu.

Parejam uz 2. rindu.

2. Ja neviens no mazākajiem elementiem katrā  $i$ -tajā rindā,  $i = 2, \dots, m$ , nav lielākais kolonnā, kurā tas atrodas, tad  $i$ -tajā rindā  $i = 2, \dots, m$ , seglu punktu nav.

Tādējādi spēles matricai nav seglu punktu, un tāpēc spēlētājiem nav optimālo tīro stratēģiju, un tīrajās stratēģijās spēlei nav cenas vai atrisinājuma.

3. Ja ņemot vērā rindu pa rindai pirmais elements  $a_{kl}$  ir mazākais  $k$ -tā rindā,  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ , un vislielākais  $l$ -tā kolonnā, tad  $a_{kl}$  ir seglu punkts.

4. Turklāt katrā  $i$ -tajā rindā  $i = k, k + 1, \dots, m$ , sākot ar  $k$ , mēs meklējam elementus, kuru skaitliskā vērtība ir vienāda ar seglu punkta  $a_{kl}$  skaitlisko vērtību. Katram atrastajam šādam elementam mēs pārbaudām, vai tas ir seglu punkts (t.i., mazākais rindā un lielākais kolonnā).

Tādējādi tiek atrasti visi seglu punkti.

5. Stratēģijas ar seglu punktiem attiecīgajās spēles matricas rindās ir optimālas spēlētājam  $A$ . Tādējādi atrasta kopa  $(S_A)^0$ .

Stratēģijas ar seglu punktiem attiecīgajās spēles matricas rindās ir optimālas spēlētājam  $B$ . Tādējādi atrasta kopa  $(S_B)^0$ .

Seglu punkta skaitliskā vērtība ir spēles cena  $v$  tīrās stratēģijās.

Spēles vispārējs atrisinājums ir formā  $\{(S_A)^0, (S_B)^0, v\}$ .

**Piemērs 8.** Norēķinu matricai

$$M = \begin{pmatrix} 3 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \end{pmatrix}$$

ir divi seglu punkti  $a_{12} = a_{32} = 0$ , spēles cena  $v = 0$ . ■

### Piemērs 9. ([7]).

Tiek apskatīti divi konkurējoši finanšu uzņēmumi -  $A$  un  $B$ . Uzņēmums  $B$  veic sarunas ar trīs investīciju projektu  $B_1, B_2, B_3$  iniciatoriem, bet tas var noslēgt ieguldījumu līgumu tikai ar vienu no projektu iniciatoriem. Uzņēmumam  $B$  uzdevums ir pozitīvs rezultāts sarunās ar kādu no projektu iniciatoriem. Uzņēmuma  $A$  mērķis ir samazināt uzņēmuma  $B$  sarunas līdz negatīvam rezultātam, lai ieņemtu uzņēmuma  $B$  vietu ieguldījumā.

Uzņēmums  $A$  sava mērķa sasniegšanai var izmantot vienu no diviem līdzekļiem:  $A_1$  - piedāvāt projekta iniciatoriem izdevīgākus nosacījumus salīdzinājumā ar uzņēmumu  $B$ ;  $A_2$  - nodrošināt materiālus, kas kompromitē  $B$  uzņēmumu.

Uzņēmuma  $A$  darbība  $A_1$  noved pie negatīva sarunu rezultāta starp uzņēmumu  $B$  un  $B_1, B_2, B_3$  projektu ierosinātajiem attiecīgi ar varbūtību  $0,7; 0,5; 0,3$ , un darbība  $A_2$  - ar varbūtībām  $0,6; 0,9; 0,4$ .

Atradīsim atrisinājumu tīrajās stratēģijās.

Tā kā  $A$  un  $B$  uzņēmumiem ir pretēji mērķi, aplūkojamā konflikta situācija ir antagoniska. Spēlētāji ir finanšu kompānijas  $A$  un  $B$ . Spēlētājam  $A$  ir divas tīras stratēģijas  $A_1$  un  $A_2$ :  $S_A = \{A_1, A_2\}$ . Spēlētāja  $B$  stratēģiju kopa sastāv no trim stratēģijām:  $S_B = \{B_1, B_2, B_3\}$ . Spēlētājam  $B$  jāizvēlas vienu no trim projektiem, spēlētājam  $A$  jāizvēlas vienu no divām darbībām.

Kā uzvaru spēlētājam  $A$  (vai zaudējumu spēlētājam  $B$ ) apskatīsim varbūtību negatīvu sarunu rezultātu uzņēmumam  $B$ . Saskaņā ar saviem uzdevumiem spēlētājs  $A$  cenšas maksimizēt vinnestu, bet spēlētājs  $B$  - samazināt.

Spēles matrica ar  $A_1, A_2$  stratēģiju efektivitātes rādītājiem un stratēģiju  $B_1, B_2, B_3$  neefektivitātes rādītājiem ir sēkojošā veidā:

Tabula 1.5: Piemēra 9 sākotnējie dati

$B_j$ $A_i$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	min
$A_1$	0,7	0,5	0,3	0,3
$A_2$	0,6	0,9	0,4	0,4
max	0,7	0,9	0,4	0,4 0,4

Izmantojot seglu punktu atrašanas algoritmu, mēs mēģināsim atrast seglu punktus vai noteikt to neesamību matricā (1.5).

1. rindā mazākais elements ir  $a_{13} = 0, 3$ , kas nav lielāks 3. kolonnā. Tādējādi seglu punktu 1. rindā nav.

2. rindā ir viens seglu punkts  $a_{23} = 0, 4$ .

Līdz ar to vienīgās spēlētāju  $A$  un  $B$  optimālās stratēģijas ir attiecīgi stratēģijas  $A_2$  un  $B_3$ , t.i.,  $(S_A)^0 = \{A_2\}$ ,  $(S_B)^0 = \{B_3\}$ . Spēles cena ir  $v = 0, 4$ .

Tādējādi šīs spēles vispārīgais (pilnīgais) atrisinājums tīrajās stratēģijās ir šāds:  $\{A_2, B_3, v = 0, 4\}$ .

Šajā spēlē spēlētāja  $A$  maxmin stratēģija ir stratēģija  $A_2$ , un spēlētāja  $B$  minmax stratēģija ir stratēģija  $B_3$ . Spēles apakšēja cena tīrajās stratēģijās ir vienāda ar augšējo, un to kopējā vērtība ir vienāda ar spēles cenu tīrajās stratēģijās:  $a = b = v = 0, 4$ .

Interpretējot iegūto risinājumu, šīs problēmas matemātiski iegūtais rezultāts nozīmē, ka finanšu uzņēmuma  $A$  optimālā darbība, konkurējot ar uzņēmumu  $B$ , ir nodrošināt projektu ierosinātajiem materiālus, kas kompromitē uzņēmumu  $B$ . Un tad uzņēmuma  $B$  un jebkura no trim investīciju projekta ierosinātāja sarunu negatīvā rezultāta varbūtība būs vismaz 0,4.

No otras puses, uzņēmuma  $B$  optimālā darbība ir sarunas tikai ar investīciju projekta  $B_3$  ierosinātāju, jo šajā gadījumā šo sarunu negatīvā rezultāta varbūtība būs ne vairāk kā 0,4, neatkarīgi no tā, kādas darbības veicis uzņēmums  $A$ .

Nevienam uzņēmumam nav izdevīgi atkāpties no optimālās stratēģijas.

Piemēram, ja uzņēmums  $B$  atkāpjas no savas optimālās stratēģijas un sāk sarunas nevis ar  $B_3$  projekta ierosinātāju, bet gan ar  $B_1$  projekta ierosinātāju, tad uzņēmums  $A$  būs nevis kompromitēt uzņēmumu  $B$ , bet piedāvās projekta ierosinātājam  $B_1$  izdevīgākus nosacījumus (t.i. stratēģijas  $A_2$  vietā izvēlieties stratēģiju  $A_1$ ), tad uzņēmuma  $B$  sarunu negatīvā rezultāta varbūtība vairs nebūs 0,4, bet daudz lielāka -0,7.

■

Tā kā vairumā gadījumu norēķinu matricai var nebūt seglu punkts, tad spēlei nav atrisinājuma tīrajās stratēģijās. Lai panāktu, kā 1. spēlētāja vidējais ieguvums būtu maksimālais iespējama un 2. spēlētāja vidējais zaudējums būtu minimālais iespējama, tīrās stratēģijas jālieto ar noteiktu varbūtību jeb jāmeklē spēles atrisinājums jauktajās stratēģijās.

Ja 1. spēlētājs spēlē jaukto stratēģiju  $p$ , bet 2. spēlētājs spēlē jaukto stratēģiju  $q$ , tad 1. spēlētāja ieguvumu (vidējo teorētisko vinnestu), kas vienlaikus ir 2. spēlētāja zaudējums (vidējais teorētiskais zaudējums) var aprēķināt ar formulu

$$u(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = pMq. \quad (1.4.3)$$

**Piemērs 10.** Dota spēle ar norēķinu matricu

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Noteikt 1.pretinieka vinnesta (2.pretinieka zaudējuma)  $u(p, q)$ , ja 1.pretinieka jauktā stratēģija ir  $p = \left(\frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right)$  un 2.pretinieka jauktā stratēģija ir  $q = \left(\frac{4}{5}; 0; \frac{1}{5}\right)^T$ .

Saskaņā ar formulu  $u(p, q) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j = pMq$  ir 1.pretinieka vinnests (2.pretinieka zaudējums), ja pretinieki lieto dotās jauktās stratēģijas  $p$  un  $q$ , ir

$$u(p, q) = pMq = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{14}{15} \end{pmatrix} = \frac{194}{75} = 2\frac{44}{75}.$$

■

Atrisināt spēli nozīmē atrast abu spēlētāju optimālās jauktās stratēģijas  $p^*$  un  $q^*$ .

**Definīcija 8.** ([6]). Jaukto stratēģiju  $p^*$  sauc par 1. spēlētāja optimālo jaukto stratēģiju un jaukto stratēģiju  $q^*$  sauc par 2. spēlētāja jaukto stratēģiju, ja  $p^*$  un  $q^*$  ir funkcijas  $u(p, q)$  seglu punkts, t.i., visām jauktajām stratēģijām  $p \in \overline{S_1}$  un  $q \in \overline{S_2}$  izpildās nevienādība

$$u(p, q^*) \leq u(p^*, q^*) \leq u(p^*, q).$$

Ir spēkā šāds nozīmīgs rezultāts:

**Teorēma 1.** (Neimana teorēma, [6]). Katrai matricveida spēlei ar nulles summu eksistē atrisinājums jauktajās stratēģijās, t.i., eksistē funkcijas  $u(p, q)$  seglu punkts.

Klasiski nulles summas spēles atrisinājuma meklēšanu reducē uz lineārās programmēšanas uzdevumu un atrisinājumu atrod ar simpleksa algoritma palīdzību. Nākamajā nodaļā tiks aprakstīts cits algoritms atrisinājuma atrašanai.

## 2. Brauna-Robinsones iteratīvā metode

### 2.1. Džūlijas Robinsones biogrāfija

Viena no izcilākajām sievietēm matemātiķēm ir Džūlija Robinsone (Julia Robinson, 1919-1985), kurai ir bijusi liela loma Hilberta desmitās problēmas atrisināšanā - lai atrastu efektīvu metodi, kā noteikt, vai dotais diofanta vienādojums ir atrisināms veselos skaitļos. Divdesmit gadu laikā viņa izstrādāja sistēmu, uz kuras balstoties tika izveidots atrisinājums.

Atzīstot viņas sasniegumus, Džūlija Robinsone kļuva par pirmo matemātiķi, kas ievēlēta ASV Nacionālajā Zinātņu akadēmijā, par pirmo Amerikas Matemātikas biedrības prezidenti un par pirmo matemātiķi, kas saņēmusi *MacArthur* fonda stipendiju.

Džūlija Robinsone (Bovmane, angļiski Bowman) ir dzimusi 1919. gada 8. decembrī Sentluisā, Misūri štātā. Viņas māte Helēna Hola Bovmane (Helen Hall Bowman) nomira divus gadus pēc Džūlijas piedzimšanas; Džūlija un viņas vecākā māsa devās dzīvot pie vecmāmiņas netālu no Fīniksas, Arizonā. Nākamajā gadā viņu tēvs Ralfs Bovmans (Ralph Bowman) aizgāja pensijā un pēc tam pievienojās viņiem Arizonā, pārtraucot savu biznesu. Viņš cerēja atbalstīt savus bērnus un viņa jauno sievu Edeniju Kridelbaugu Bovmanu (Edenia Kridelbaugh Bowman) ar saviem ietaupījumiem. 1925. gadā viņas ģimene pārcēlās uz San Diego; trīs gadus vēlāk piedzima trešā meita.

Deviņu gadu vecumā Robinsone saslima ar skarlatīnu, un ģimene uz mēnesi atradās karantīnā. Viņi svinēja izolācijas beigas, skatoties savu pirmo runājošo kinofilmu. Svinības tomēr bija priekšlaicīgas, jo Robinsonai drīz sākās reimatiskais drudzis un viņa gadu bija gultā. Kad viņai bija pietiekami labi, viņa gadu strādāja ar skolotāju, lai apgūtu nepieciešamo mācību programmu no piektās līdz astotajai klasei. Viņu sajūsmināja skolotāja apgalvojums, ka ir pierādīts, ka kvadrātsakni no divi nevar aprēķināt līdz punktam, kur sāktu atkārtoties decimāldaļa. Viņas interese par matemātiku turpinājās San Diego vidusskolā, kuru viņa absolvēja ar izcilību matemātikā un dabaszinībās.

Sešpadsmit gadu vecumā Robinsone iestājās San Diego štata koledžā. Viņa ieguva matemā-

tikas specialitāti un gatavojās skolotājas karjerai, neapzinoties citas matemātikas karjeras izvēles iespējas. Kad Robinsone mācījās otrajā kursā, viņas tēvs atklāja, ka ietaupījumi ir beigušies un izdarīja pašnāvību. Ar vecākās māsas un tantes palīdzību Robinsone palika skolā. Viņa pārcēlās uz Kalifornijas Universitāti Berklijā, kur mācījās pēdējo gadu un absolvēja 1940.gadā.

Bērklījā viņa atrada skolotājus un kursabiedrus, kuri dalījās viņas priekā par matemātiku. 1941. gada decembrī viņa apprecējās ar docentu Rafaelu Robinsonu (Raphael Robinson). Tajā laikā viņa bija skolotāja asistente, 1941.gadā pabeidzot maģistra grādu. Tomēr nākamajā gadā skolas neotisma likums liedza viņai mācīt matemātikas nodaļā. Tā vietā viņa strādāja Bērklīja statistikas laboratorijā pie militāriem projektiem. Viņa palika stāvoklī, bet zaudēja bērnu; sakarā ar reimatiskā drudža izraisītu sirds bojājumu, viņas ārsts brīdināja par turpmāko grūtniecību. Viņas cerības kļūt par māti sabruka, Robinsone pārcieta depresijas periodu, kas ilga līdz brīdim, kad viņas vīrs atjaunoja interesi par matemātiku.

1947. gadā Robinsone uzsāka doktora studiju programmu Alfrēda Tarska (Alfred Tarski) vadībā. Disertācijā viņa nodarbojās ar racionālo skaitļu lauka teoriju. Viņai doktora grāds tika piešķirts 1948. gadā. Tajā pašā gadā Tarskis apsprieda ideju par diofanta vienādojumiem (vairāku mainīgo polinomu vienādojumiem ar veselu skaitļu koeficientiem, kuru saknēm jābūt veseliem skaitļiem) ar Rafaelu Robinsonu, kurš pastāstīja to sievai. Kad viņa saprata, ka tā ir Hilberta desmitā problēma, viņa bija jau pārāk iesaistīta tēmā, lai tā viņu aizbiedētu. Nākamajos 22 gados viņa pievērsās dažādiem problēmas aspektiem, veidojot pamatu, uz kura Jurijs Matijasevičs (Yuri Matijasevic) 1970.gadā pierādīja, ka vēlamā vispārējā metode atrisināmības noteikšanai nepastāv. 1949. un 1950. gadā, strādājot RAND korporācijā, Robinsone balstoties uz Džordža Brauna rakstu [1] izstrādāja iteratīvu risinājumu metodi attiecībā uz divu cilvēku nulles summas spēles vērtību [13]. Viņas vienīgais ieguldījums spēļu teorijā joprojām tiek uzskatīts par fundamentālu teorēmu šajā jomā.

Robinsonei 1961. gadā tika veikta sirds operācija, taču viņas veselība joprojām nebija laba. Viņas slava Hilbertas problēmas risinājumā beidzās ar to, ka 1976. gadā D.Robinsone tika iecelta par pilntiesīgu profesori Bērklījā, lai gan bija paredzēts, ka viņai būs tikai ceturta daļa no parastās mācību slodzes. Pēc 8 gadiem viņa saslima ar leukēmiju, 1985. gada 30. jūlijā viņa nomira.

## 2.2. Džordža Viljama Brauna biogrāfija

Džordžs Viljams Brauns (George William Brown, 1917 - 2005) bija amerikāņu statistiķis, spēļu teorētiķis un datorzinātnieks, kas pazīstams ar darbiem un pētījumiem par pirmajām skaitļošanas mašīnām, spēļu teoriju, matemātisko loģiku, lēmumu teoriju.

Brauns dzimis un uzaudzis Bostonā, kur viņa tēvs bija farmaceits. Ātrā prāta dēļ viņš ieguva apskaužamu akadēmisko rekordu Bostonas Latīņu skolā (the Boston Latin School) un Hārvardas universitātē (Harvard University), kur divdesmit gadu vecumā saņēma bakalaura grādu matemātikā. Pēc trim gadiem viņš saņēma doktora grādu matemātikā Prinstonas universitātē (Princeton University). Šis prestižais grāds viņam nedeva akadēmisko stāvokli, kā viņš vēlējās, jo augstākās izglītības iestādes tajā laikā bija stipri inficētas ar antisemitismu.

Viņa pirmais darbs bija “Macy’s” universālveikalā Ņujorkā, kur viņš veica statistikas pētījumus par veikala darbību. Pēc četriem gadiem viņš atgriezās Prinstonas universitātē, kur piedalījās militārajos pētniecības projektos, kurus Universitāte īstenoja Otrā pasaules kara laikā. Pēc kara viņš palika Prinstonā, jo viņu izvēlējās ievērojamais matemātiķis un fiziķis Džons fon Neimans (John von Neumann, 1903-1957), lai virzītu uz priekšu jauna datora izveidošanu.

Beidzot 1946. gadā Dž.Brauns varēja sākt savu akadēmisko karjeru Aiovas Valsts universitātē (Iowa State University). Viņš kompensēja zaudēto laiku, sākot darbu kā matemātikas asociētais profesors; nākamajā gadā viņš tika paaugstināts par profesoru. Gadu vēlāk jauna bezpeļņas pētniecības organizācija “The RAND Corporation” pieņēma darbā Dž.Braunu, jo tam bija nepieciešams vispēcīgākais pieejamais dators. Tur Dž.Brauns vadīja Neimana datora dublikāta izgatavošanu un nosauca to par “Johniac”. Kā RAND Matemātikas nodaļas loceklis viņš piedalījās RAND galvenajos matemātiskajos centienos pielietot matemātisko spēļu teoriju (Neimana izgudrojumu) militārajās kaujas situācijās.

Tā kā viņš bija pazīstams ar Neimana datoru, viņam bija ievērojams datoru konsultanta statuss IBM (International Business Machines Corporation) un pie citiem datoru ražotājiem. 1952. gadā IBM korporācija piedāvāja piešķirt Kalifornijas universitātei Losandželosā (University of California, Los Angeles) visjaudīgāko datoru, ja tā izmantos Dž.Braunu savā datoru laboratorijā. Ar šo vienošanos Dž.Brauns atgriezās akadēmiskajās aprindās kā administrācijas profesors. Viņš palika Kalifornijā, līdz Kalifornijas universitāte Irvinā (University of California, Irvine) viņu pieņēma darbā Administrācijas augstskolā.

Šo četrpadsmit gadu laikā Kalifornijas universitātē Dž.Braunam bija nozīmīga loma datoru nozarē. Trīs reizes viņš palīdzēja uzņēmēju grupām organizēt un izveidot savu ražošanu, kā arī strādāja direktoru padomē.

Dž.Brauna matemātiskās specialitātes bija varbūtību teorija, matemātiskā statistika un matemātiskā loģika. Viņš publicējis pētījumus visās trijās minētajās jomās.

## 2.3. Metodes apraksts

Bieži vien praksē, risinot antagonistisko spēļu problēmas, mēs saskaramies ar pietiekami liela izmēra norēķinu matricām, kuras lielās darbietilpības dēļ ir grūti atrisināt. Šajā gadījumā ir jēga izmantot Brauna-Robinsones metodi, ko sauc arī par fiktīvo ieviešanas metodi vai iteratīvo procesu, lai atrastu konkrētu risinājumu jauktajās stratēģijās. Šī metode ir aptuvena un spēj dot spēles atrisinājumu abiem spēlētājiem ar precizitātes pakāpi - tādu, kādu mēs iepriekš norādām. Tādējādi mēs paši varam atrast līdzsvaru starp aprēķinu ātrumu un nepieciešamo precizitāti. Apskatīsim šo metodi tuvāk.

Pieņemsim, ka viena un tā pati antagonistiskā situācija tiek atkārtota daudzas reizes un katram no spēlētājiem ir informācija par pretinieka iepriekšējo rīcību. Tad katrs no spēlētājiem izvēlēsies savu nākamo stratēģiju, paļaujoties uz informāciju par pretinieka jaukto stratēģiju, kas izriet no iepriekšējām situāciju realizācijām. Tādējādi mēs iegūstam iteratīvu procesu, lai izvēlētos katram spēlētājam stratēģijas. Lai labāk saprastu, kāpēc ar metodi iegūtais atrisinājums būs optimāls, vispirms apskatīsim metodes algoritmu. Šai iteratīvai metodei pirmais solis būtiski atšķiras no pārējiem soļiem, tāpēc mēs apskatīsim pirmos 2 soļus un vispārējo  $k + 1$  soli. Noteiktībai pieņemsim, ka spēlētājs  $A$  ir pirmais, kurš izvēlas stratēģiju, bet spēlētājs  $B$  vienas situācijas ietvaros nezina, kuru stratēģiju ir izvēlējis spēlētājs  $A$ .

### 1. solis:

Pirmajā solī neviens no spēlētājiem nezina otra stratēģiju un izvēlas stratēģiju, pamatojoties uz viņu vēlmēm, piemēram, spēlētājam  $A$  tas var būt viņa vidējās izmaksas maksimizēšana, bet spēlētājam  $B$  - vidējo zaudējumu minimizēšana. Tādējādi spēlētājs  $A$  izvēlējās savu tīro stratēģiju  $i_1$ , bet spēlētājs  $B$  - stratēģiju  $j_1$ .

### 2. solis:

Otrajā solī spēlētājs  $A$  jau zina, kuru stratēģiju spēlētājs  $B$  izvēlējās pirmajā solī, un balstās uz pieņēmumu, ka viņš izmantos to pašu stratēģiju kā iepriekšējā solī. Tāpēc visi soļi pēc pirmā neatšķiras viens no otra - katrs no spēlētājiem uzskata, ka viņa pretinieks ievēros to pašu stratēģiju, kas bija iepriekšējā solī, un ka pašreizējā solī ir jāizvēlas tāda tīrā stratēģija, kura maksimizētu ieguvumu (spēlētājam  $A$ ) vai minimizētu zaudējumus (spēlētājam  $B$ ) ar pretinieka

stratēģiju no iepriekšējā soļa. Pēc mūsu terminiem to var aprakstīt šādi:

$$\max_{1 \leq i \leq m} a_{i,j_1} = a_{i_2,j_1},$$

kur  $i_2$  ir tīrās stratēģijas numurs, kuru spēlētājs  $A$  izvēlējās otrajā solī. Pierakstīsim spēlētāja  $B$  tīro stratēģiju pirmajā solī kā jaukto stratēģiju  $q(1) = (q_1(1), \dots, q_n(1))$ :

$$q_j(1) = \begin{cases} 1, & \text{ja } j = j_1 \\ 0, & \text{ja } j \neq j_1 \end{cases}.$$

Tad:

$$\beta(q(1)) = \max_{1 \leq i \leq m} u(A_i, q(1)) = \max_{1 \leq i \leq m} u(A_i, B_{j_1}) = \max_{1 \leq i \leq m} a_{i,j_1} = a_{i_2,j_1} -$$

ir stratēģijas  $B_{j_1}$  neefektivitātes rādītājs.

Šeit un turpmāk ar  $A_i$  apzīmēta spēlētāja  $A$   $i$ -tā stratēģija un ar  $B_j$  tiek apzīmēta spēlētāja  $B$   $j$ -tā stratēģija.

Līdzīgi spēlētājam  $B$ : viņa stratēģija otrajā solī ir minimizēt zaudējumu, ja spēlētājam  $A$  ir stratēģija  $i_1$ :

$$\min_{1 \leq j \leq n} a_{i_1,j} = a_{i_1,j_2}.$$

Pierakstīsim spēlētāja  $A$  tīro stratēģiju pirmajā solī kā jaukto stratēģiju  $p(1) = (p_1(1), \dots, p_m(1))$ :

$$p_i(1) = \begin{cases} 1, & \text{ja } i = i_1 \\ 0, & \text{ja } i \neq i_1 \end{cases}.$$

Tad:

$$\alpha(p(1)) = \min_{1 \leq j \leq n} u(p(1), B_j) = \min_{1 \leq j \leq n} u(A_{i_1}, B_j) = \min_{1 \leq j \leq n} a_{i_1,j} = a_{i_1,j_2} -$$

tas ir stratēģijas  $A_{i_1}$  efektivitātes rādītājs.

### **K+1 solis:**

Vispārināsim stratēģijas izvēles procedūru  $k + 1$  solī un sadalīsim to divos posmos:

**1.** Spēlētājam ir jāizvēlas tāda tīrā stratēģija, kas maksimizētu (spēlētājam  $A$ ) vai minimizētu (spēlētājam  $B$ ) ieguvumu funkcijas vērtību pie nosacījuma, zinot kāda ir pretinieka jauktā stratēģija  $k$ -tajā solī ( $q(k)$  spēlētājam  $A$  un  $p(k)$  spēlētājam  $B$ ). Spēlētājam  $A$  tas izskatās šādi:

$$\max_{1 \leq i \leq m} u(A_i, q(k)) = u(A_{i_{k+1}}, q(k)).$$

Tādēļ solī  $k + 1$  spēlētājs  $A$  izvēlēsies  $i_{k+1}$  tīro stratēģiju.

Atzīmēsim, ka

$$\max_{1 \leq i \leq m} u(A_i, q(k)) = \beta(q(k))$$

ir stratēģijas  $q(k)$  neefektivitātes rādītājs.

$B$  spēlētājam:

$$\min_{1 \leq j \leq n} u(p(k), B_j) = u(p(k), B_{j_{k+1}}).$$

Tādēļ solī  $k + 1$  spēlētājs  $B$  izvēlēsies  $j_{k+1}$  tiro stratēģiju.

Atzīmēsim, ka

$$\min_{1 \leq j \leq n} u(p(k), B_j) = \alpha(p(k))$$

ir stratēģijas  $p(k)$  efektivitātes rādītājs.

**2.** Nepieciešams noteikt pretinieka jaukto stratēģiju, kas ir mainījies, realizējot  $k$ -to soli. Pieņemsim, ka  $r_i(k)$  ir  $i$ -tās stratēģijas gadījumu skaits procesa  $k$ -tajā solī un  $p_i(k)$  ir  $i$ -tās stratēģijas rašanās biežums procesa  $k$ -tajā solī (tiek pieņemts, ka biežums ir ekvivalents  $i$ -tā notikuma varbūtībai). Tad  $k + 1$  vērtībai šie lielumi ir šādi:

$$r_i(k + 1) = \begin{cases} r_i(k) + 1, & \text{ja } i = i_{k+1}, \\ r_i(k), & \text{ja } i \neq i_{k+1}. \end{cases}$$

Ja  $i = i_{k+1}$ , tad

$$p_i(k + 1) = \frac{r_i(k + 1)}{k + 1} = \frac{r_i(k) + 1}{k + 1} = \frac{k \frac{r_i(k)}{k} + 1}{k + 1} = \frac{k p_i(k) + 1}{k + 1} = \frac{k}{k + 1} p_i(k) + \frac{1}{k + 1}.$$

Ja  $i \neq i_{k+1}$ , tad

$$p_i(k + 1) = \frac{r_i(k + 1)}{k + 1} = \frac{r_i(k)}{k + 1} = \frac{k \frac{r_i(k)}{k}}{k + 1} = \frac{k}{k + 1} p_i(k);$$

$$p_i(k + 1) = \begin{cases} \frac{k}{k+1} p_i(k) + \frac{1}{k+1}, & \text{ja } i = i_{k+1}, \\ \frac{k}{k+1} p_i(k), & \text{ja } i \neq i_{k+1}. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Līdzīgi mēs pārrēķinām spēlētāja  $B$  varbūtību:

$$q_j(k + 1) = \begin{cases} \frac{k}{k+1} q_j(k) + \frac{1}{k+1}, & \text{ja } j = j_{k+1}, \\ \frac{k}{k+1} q_j(k), & \text{ja } j \neq j_{k+1}. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

Tā kā Brauna-Robinsones algoritms ir darbietilpīgs un laukietilpīgs process, tad aprēķinus ieteicams veikt ar datoru. Alternatīvs veids apskatītajām formulām var būt tiešā veidā saskaitīt, cik reizes ir izvēlētas stratēģijas, un izdalot šo skaitu ar realizēto situāciju skaitu.

3.  $k + 1$  iterācijā nepieciešams aprēķināt efektivitātes rādītāju (spēlētājam  $A - \alpha(k + 1)$ ) vai neefektivitātes rādītāju (spēlētājam  $B - \beta(k + 1)$ ), kas iegūts procesa  $k + 1$  solī. Acīmredzami, ja  $k = 1$ :

$$\alpha(1) = \alpha(p(1)),$$

$$\beta(1) = \beta(q(1)).$$

Un vispārējā formula  $k + 1$  solī:

$$\alpha(k + 1) = \max\{\alpha(k), \alpha(p(k + 1))\}, \quad (2.3.3)$$

$$\beta(k + 1) = \min\{\beta(k), \beta(q(k + 1))\}. \quad (2.3.4)$$

Kā tiks parādīts tālāk, nosacījums šī algoritma apturēšanai, lai sasniegtu vajadzīgo precizitāti  $\epsilon$ , ir šādas nevienādības izpildīšanās:

$$\beta(k) - \alpha(k) \leq 2\epsilon. \quad (2.3.5)$$

Ja šis nosacījums nav izpildīts, jāatgriežas pie **1.** posma un jāveic vēl viena iterācija.

Mēģināsim atbildēt uz jautājumu, kāpēc atrastās jauktās stratēģijas būs šīs spēles atrisinājums. Vispirms mēs izmantosim spēles apakšējās un augšējās cenas definīciju, kā arī Neimana teorēmu (skatīt 1.4. apakšnodaļas Teorēmu 2), kas nozīmē, ka  $k$ -tajā iterācijā katrai matricveida spēlei ar nulles summu eksistē atrisinājums jauktajās stratēģijas, t.i., eksistē tādas 1. un 2. spēlētāja jauktās stratēģijas  $p$  un  $q$ , ka izpildās nevienādība

$$\alpha(p(k)) \leq \max_{p \in S_A} \alpha(p) = a = v = b = \min_{q \in S_B} \beta(q) \leq \beta(q(k)) \quad (2.3.6)$$

visām jauktajām stratēģijām  $p(k)$  un  $q(k)$ .

Tādējādi, ja  $\alpha(p(k)) = \beta(q(k))$  izpildīsies pie kaut kāda  $k$ , tad saskaņā ar iepriekš rakstīto dubulto nevienādību  $v$  būs spēles cena, un stratēģijas  $p(k)$  un  $q(k)$  būs optimālas. Tādā veidā mēs atradīsim konkrētās spēles atrisinājumu.

Izmantojot aprakstīto algoritmu, mēs varam iegūt divas bezgalīgas tīro stratēģiju  $(A_{i_k})_{k=1}^{\infty}$  un  $(B_{j_k})_{k=1}^{\infty}$  virknes, kuras spēlētāji izvēlējušies, pamatojoties uz minētām jauktajām stratēģijām  $p(k)$  un  $q(k)$ , kas apmierina nevienādību (2.3.6).

Tīro stratēģiju virknes, kuru atbilstošās jauktās stratēģijas apmierina nosacījumu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(p(k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(q(k)) = v, \quad (2.3.7)$$

sauc par **pieļaujamām tīrajām stratēģijām**.

Ja tīro stratēģiju virkne ir pieļaujama, tad no tā neizriet, ka attiecīgās jauktās stratēģijas konverģē. Tomēr, ja tas konverģē:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p(k) = p^0, \lim_{k \rightarrow \infty} q(k) = q^0,$$

tad stratēģijas  $p^0$  un  $q^0$  apmierina vienādību (2.3.7), tātad tās ir spēlētāju optimālās stratēģijas. Tādējādi aprakstītais process notiks tikai izpildoties (2.3.7). Apgalvojumu, ka tīro stratēģiju  $(A_{i_k})_{k=1}^{\infty}$  un  $(B_{j_k})_{k=1}^{\infty}$  virknes, kas iegūtas, izmantojot aprakstīto algoritmu, ir pieļaujamas, pierādīja amerikāņu matemātiķe **Džūlija Robinsone**, kuras dēļ tika pierādīta algoritma konverģence, kuru mēs tagad zinām kā **Brauna-Robinsones algoritmu**.

Tālāk pierādīsim apgalvojumu, ja (2.3.5) izpildās, tad iegūsim atrisinājumu ar spēles cenu, kas no patiesās atšķiras ne vairāk kā  $\epsilon$ :

Tā kā  $\alpha(k) \leq v$  un  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(p(k)) = v$ , tad no robežas definīcijas seko, ka

$$\exists k_1 \quad 0 \leq v - \alpha(k) \leq 2\epsilon - \text{nevienādība būs patiesa } \forall k \geq k_1. \quad (2.3.8)$$

Tā kā  $\beta(k) \geq v$  un  $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(q(k)) = v$ , tad

$$\exists k_2 \quad 0 \leq \beta(k) - v \leq 2\epsilon - \text{nevienādība būs patiesa } \forall k \geq k_2. \quad (2.3.9)$$

No tā, ka  $v - \alpha(k) \geq 0$  un  $\beta(k) - v \geq 0$ , seko

$$v - \alpha(k) \leq v - \alpha(k) + (\beta(k) - v) = \beta(k) - \alpha(k); \quad (2.3.10)$$

$$\beta(k) - v \leq \beta(k) - v + (v - \alpha(k)) = \beta(k) - \alpha(k). \quad (2.3.11)$$

$\Delta k = \beta(k) - \alpha(k)$  tiecas uz 0, kad  $k \rightarrow \infty$ , jo  $\beta(k)$  un  $\alpha(k)$  abi tiecas uz 0, kad  $k \rightarrow \infty$ .

Ja mēs pieprasām nosacījumu

$$\Delta k \leq 2\epsilon, \quad (2.3.12)$$

tad no (2.3.10) sekos (2.3.8) un no (2.3.11) sekos (2.3.9), ja  $k \geq k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ .

Pareizināsim (2.3.8) ar  $(-1)$  un saskaitīsim ar (2.3.9):

$$-2\epsilon \leq \beta(k) + \alpha(k) - 2v \leq 2\epsilon, \quad k \geq k_0;$$

$$-\epsilon \leq \frac{1}{2}[\beta(k) + \alpha(k)] - v \leq \epsilon, \quad k \geq k_0;$$

$$|\frac{1}{2}[\beta(k) + \alpha(k)] - v| \leq \epsilon, \quad k \geq k_0.$$

Mēs secinām, ka  $k$ -tajā solī ir izpildīta nevienādība (2.3.12), no kā izriet, ka  $\frac{1}{2}[\beta(k) + \alpha(k)]$  vērtība no spēles cenas  $v$  atšķirsies ne vairāk kā par  $\epsilon$ .

## 3. Praktiskā daļa

### 3.1. Piemēri

Šajā sadaļā mēs apskatīsim trīs uzdevumu risinājumu, izmantojot Brauna-Robinsones algoritmu MATLAB vidē. Algoritma kods pievienots Pielikumā.

#### 3.1.1. Klasiskais piemērs

Dota norēķinu matrica  $C$  un norādītā precizitāte  $\epsilon$ .

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \epsilon = 0.0001.$$

Pārrakstīsim matricu  $C$  sekojošā veida:

Tabula 3.1: Piemēra 1 sākotnējie dati

$A_i \backslash B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	vidējās izmaksas spēlētājam $A$
$A_1$	$a_{11} = 3$	$a_{12} = 4$	$a_{13} = 3$	$a_{14} = 5$	$\frac{15}{4}$
$A_2$	$a_{21} = 4$	$a_{22} = 3$	$a_{23} = 5$	$a_{24} = 2$	$\frac{14}{4}$
$A_3$	$a_{31} = 5$	$a_{32} = 2$	$a_{33} = 4$	$a_{34} = 3$	$\frac{14}{4}$
vidējās izmaksas spēlētājam $B$	$\frac{12}{3} = 4$	$\frac{9}{3} = 3$	$\frac{12}{3} = 4$	$\frac{10}{3}$	$\max = \frac{15}{4}$ $\min = 3$

Mūsu gadījumā  $n = 4$  un  $m = 3$ .

**1.solis ( $k=1$ ):**

Spēlētāji  $A$  un  $B$  var patvaļīgi izvēlēties savu tīro stratēģiju. Lielākā vidējā izmaksa  $\frac{15}{4}$  spēlētāja  $A$  tiek sasniegta ar stratēģiju  $A_1$ , stratēģijai  $A_2$  un  $A_3$  vidēja izmaksa ir  $\frac{14}{4}$ . Tāpēc

spēlētājs  $A$  izvēlas stratēģiju  $A_1$ , kuru var uzrakstīt kā jauktu stratēģiju  $p(1) = (1, 0, 0)$ . Tādējādi  $i_1 = 1$ .

Vismazākais vidējais zaudējums spēlētājam  $B$  būs ar  $B_2$  stratēģiju, vienāds ar 3, stratēģijas  $B_1$ ,  $B_3$  un  $B_4$  vidēji zaudējumi ir vienādi attiecīgi ar 4, 4 un  $\frac{10}{3}$ . Tāpēc spēlētājs  $B$  izvēlas stratēģiju  $B_2$ , kuru var uzrakstīt kā jauktu stratēģiju  $q(1) = (0, 1, 0, 0)$ . Tātad,  $j_1 = 2$ .

Tālāk mums ir:

$$\alpha(p(1)) = \alpha(A_1) = \alpha_1 = \min_{1 \leq j \leq 4} a_{1j} = a_{11} = a_{13} = 3, \quad (3.1.1)$$

$$\beta(q(1)) = \beta(B_2) = \beta_2 = \max_{1 \leq j \leq 3} a_{i2} = a_{12} = 4. \quad (3.1.2)$$

Tad  $\alpha(1) = \alpha(p(1)) = 3$ ,  $\beta(1) = \beta(q(1)) = 4$ . No šejienes

$$\Delta(1) = \beta(1) - \alpha(1) = 4 - 3 = 1 > 2\epsilon = 0,0002,$$

t.i. nevienādība (2.3.12) pie  $k = 1$  neizpildās. Tas nozīmē, ka norādītā precizitāte nav sasniegta, un tāpēc ir jāpāriet uz 2. soli.

Aizpildīsim Tabulā 3.2 1.rindu ar iegūtiem datiem.

### **2.solis ( $k=2$ ):**

Otrajā solī spēlētājs  $A$ , pieņemot, ka spēlētājs  $B$  pieturēsies pie tās pašas stratēģijas kā pirmajā solī, t.i., stratēģijas  $q(1) = B_2$ , izvēlas tīro stratēģiju  $A_{i_2}$ , kurā viņš saņems maksimālos laimestus  $\beta(q(1))$ . No (3.1.2) ir skaidrs, ka  $i_2 = 1$ . Tādējādi 2. solī spēlētājs  $A$  izvēlas stratēģiju  $A_1$ .

Spēlētājs  $B$  pieņem, ka spēlētājs  $A$  2.solī izvēlēsies stratēģiju  $p(1) = A_1$ , kurai viņš sekoja 1.solī. Tāpēc spēlētājam  $B$  jāizvēlas stratēģija  $B_{j_2}$ , kurā viņa zaudējums būs mazākais  $\alpha(p(1))$ .

Bet, kā redzams no (3.1.1), kā tādu stratēģiju var izvēlēties vienu no stratēģijām  $B_1$  vai  $B_3$ , kurā spēlētāja  $B$  zaudējums būs minimāls, vienāds ar 3. Pieņemsim, ka spēlētājs  $B$  izvēlas stratēģiju  $B_1$ , t.i.,  $j_2 = 1$ .

Definēsim stratēģiju  $p(2) = (p_1(2), p_2(2), p_3(2))$ , kuru pēc spēlētāju  $B$  domām pielietos spēlētājs  $A$  3.solī. Tā kā pirmajos divos soļos stratēģijas  $A_1, A_2, A_3$  bija izvēlētas spēlētājam  $A$ , attiecīgi 2,0,0 reizes, tad  $p_1(2) = 2/2 = 1$ ,  $p_2(2) = p_3(2) = 0/2 = 0$ .

Tādējādi,  $p(2) = (1, 0, 0)$ .

Varbūtības  $p_i(2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , var aprēķināt, izmantojot formulas (2.3.1), ja  $k = 1$ ,  $p_1(1) = 1$ ,  $p_2(1) = p_3(1) = 0$  (jo  $p(1) = (1, 0, 0)$ ) un  $i_2 = 1$ :

$$p_1(2) = \frac{1}{1+1}p_1(1) + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} = 1,$$

$$p_2(2) = \frac{1}{1+1}p_2(1) = 0,$$

$$p_3(2) = \frac{1}{1+1}p_3(1) = 0.$$

Tā kā pirmajos divos soļos stratēģijas  $B_1, B_2, B_3$  un  $B_4$  bija izvēlētas spēlētājam  $B$ , attiecīgi 1,1,0 un 0 reizes, tad  $q_1(2) = q_2(2) = 1/2, q_3(2) = q_4(2) = 0$ .

Tādējādi,  $q(2) = (1/2, 1/2, 0, 0)$ .

Varbūtības  $q_i(2), j = 1, 2, 3, 4$  var aprēķināt, izmantojot formulas (2.3.2) ja  $k = 1, q_1(1) = 1 = q_3(1) = q_4(1) = 0, q_2(1) = 1$  (jo  $q(1) = (0, 1, 0, 0)$ ) un  $j_2 = 1$ :

$$q_1(2) = \frac{1}{1+1}q_1(1) + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$q_2(2) = \frac{1}{1+1}q_2(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2},$$

$$q_3(2) = \frac{1}{1+1}q_3(1) = 0,$$

$$q_4(2) = \frac{1}{1+1}q_4(1) = 0.$$

Tad

$$\alpha(p(2)) = \alpha(A_1) = \alpha_1 = \min_{1 \leq j \leq 4} a_{1j} = a_{11} = a_{13} = 3,$$

$$\begin{aligned} \beta(q(2)) &= \max_{1 \leq i \leq 3} u(A_i, q(2)) = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^4 q_j(2) \cdot a_{ij} = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^2 q_j a_{ij} = \\ &= \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq 3} (a_{i1} + a_{i2}) = \frac{1}{2} \max\{a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}, a_{31} + a_{32}\} = \frac{1}{2} \max\{3+4, 4+3, 5+2\} = \frac{7}{2} = \\ &= u(A_1, q(2)) = u(A_2, q(2)) = u(A_3, q(2)) = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Pēc formulām (2.3.3) un (2.3.4):

$$\alpha(2) = \max\{\alpha(1), \alpha(p(2))\} = \max\{3, 3\} = 3,$$

$$\beta(2) = \min\{\beta(1), \beta(q(2))\} = \min\{4, 3.5\} = 3.5,$$

$$\Delta(2) = \beta(2) - \alpha(2) = 3,5 - 3 = 0,5.$$

Tagad varam aizpildīt 2.rindu Tabulā 3.2.

Tā kā  $\Delta(2) = 0,5 > 2\epsilon = 0.0002$ , tad norādītā precizitāte vēl nav sasniegta. Jāpariet uz nākamo soli.

Turpmākie soļi tiks aprēķinātas, izmantojot MATLAB programmu.

Atrisinājums pa soļiem ievietots Tabulā 3.2.

No tabulas mēs varam secināt, ka spēles cena ir 3.5. Ir vērts atzīmēt, ka  $\beta(18) = \alpha(18) = 3.5$ , un tas nozīmē, ka mēs atradām precīzu atrisinājumu spēlei jauktajās stratēģijās abiem spēlētājiem. Optimālās spēlētāju stratēģijas A un B attiecīgi ir šādas:

$$p^0 = p(18) = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) \approx (0,6667; 0,1667; 0,1667),$$

$$q^0 = q(2) = (0,5; 0,5; 0; 0).$$

Pārbaudīsim, vai atrastās stratēģijas ir optimālas:

$$\alpha(p^0) = \min \begin{pmatrix} \frac{2}{3} * 3 + \frac{1}{6} * 4 + \frac{1}{6} * 5; \\ \frac{2}{3} * 4 + \frac{1}{6} * 3 + \frac{1}{6} * 2; \\ \frac{2}{3} * 3 + \frac{1}{6} * 5 + \frac{1}{6} * 4; \\ \frac{2}{3} * 5 + \frac{1}{6} * 2 + \frac{1}{6} * 3 \end{pmatrix}^T = \min \begin{pmatrix} 3,5; \\ 3,5; \\ 3,5; \\ 4,167 \end{pmatrix}^T = 3,5 = v,$$

$$\beta(q^0) = \max \begin{pmatrix} 0,5 * 3 + 0,5 * 4 + 0 * 3 + 0 * 5; \\ 0,5 * 4 + 0,5 * 3 + 0 * 5 + 0 * 2; \\ 0,5 * 5 + 0,5 * 2 + 0 * 4 + 0 * 3 \end{pmatrix}^T = \max \begin{pmatrix} 3,5; \\ 3,5; \\ 3,5 \end{pmatrix}^T = 3,5 = v.$$

Tādējādi mūsu iegūtais risinājums ir optimāls. Jāatzīmē, lai atrisinātu šo problēmu ar datora palīdzību, bija nepieciešams apmēram sekundi, savukārt manuālie 18 iterāciju aprēķini aizņēma daudz ilgāku laiku.

Tātad atbilde:

$$p^0 = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right),$$

$$q^0 = (0,5; 0,5; 0; 0),$$

$$v = 3,5.$$

Tabula 3.2: Atrisinājumu tabula

$k$ soļa Nr	Spēlētāja $A$ tīrā stratēģija $A_{i,k}$ $k$ -tajā solī	Spēlētāja $B$ tīrā stratēģija $B_{i,k}$ $k$ -tajā solī	Jauktā stratēģija $p(k)$ , kuru saskaņā ar spēlētāja $B$ pieņēmumu, izvēlies spēlētājs $A$ ( $k + 1$ )-solī	Jauktā stratēģija $q(k)$ , kuru saskaņā ar spēlētāja $A$ pieņēmumu, izvēlies spēlētājs $B$ ( $k + 1$ )-solī	$\alpha(k)$	$\beta(k)$	$\alpha(p(k))$	$\beta(q(k))$	$\Delta(k) = \beta(k) - \alpha(k)$	$\epsilon$
1	1	2	(1;0;0)	(0;1;0;0)	3,00	4,00	3,00	4,00	1,00	$>2\epsilon$
2	1	1	(1;0;0)	(0,5;0,5;0;0)	3,00	3,50	3,00	3,50	0,50	$>2\epsilon$
3	1	1	(1;0;0)	(0,6667;0,3333; 0;0)	3,00	3,50	3,00	4,00	0,50	$>2\epsilon$
4	3	1	(0,75;0;0,25)	(0,75;0,25;0;0)	3,25	3,50	3,25	4,25	0,25	$>2\epsilon$
5	2	3	(0,6;0;0,4)	(0,6;0,2;0,2;0)	3,25	3,50	3,20	4,20	0,25	$>2\epsilon$
6	2	2	(0,5;0;0,5)	(0,5;0,3333; 0,1667;0)	3,25	3,50	3,00	3,83	0,25	$>2\epsilon$
7	2	2	(0,4286; 0,1429; 0,4286)	(0,4286;0,4286; 0,1429;0)	3,25	3,50	3,00	3,71	0,25	$>2\epsilon$
8	2	2	(0,3750; 0,2500; 0,3750)	(0,375;0,5; 0,125;0)	3,25	3,50	3,00	3,62	0,25	$>2\epsilon$
9	2	2	(0,3333;0,3333; 0,3333)	(0,3333;0,5556; 0,1111;0)	3,25	3,50	3,00	3,55	0,25	$>2\epsilon$
10	2	2	(0,4;0,3;0,3)	(0,3;0,6;0,1;0)	3,25	3,50	3,10	3,60	0,25	$>2\epsilon$
11	2	2	(0,4545;0,2727; 0,2727)	(0,2727;0,6364; 0,0909;0)	3,25	3,50	3,18	3,63	0,25	$>2\epsilon$
12	2	2	(0,5;0,25;0,25)	(0,25;0,6667; 0,0833;0)	3,25	3,50	3,25	3,66	0,25	$>2\epsilon$
13	2	2	(0,5385;0,2308; 0,2308)	(0,2308;0,6923; 0,0769;0)	3,3077	3,50	3,31	3,69	0,19	$>2\epsilon$
14	2	2	(0,5714; 0,2143; 0,2143)	(0,2143;0,7143; 0,0714;0)	3,3571	3,50	3,36	3,71	0,14	$>2\epsilon$

15	2	2	(0,6;0,2; 0,2)	(0,2;0,7333; 0,0667;0)	3,4	3,5	3,40	3,73	0,1	>2€
16	2	2	(0,625;0,1875; 0,1875)	(0,1875;0,75; 0,0625;0)	3,4375	3,50	3,44	3,75	0,06	>2€
17	2	2	(0,6471;0,1765; 0,1765)	(0,1765;0,7647; 0,0588;0)	3,4706	3,50	3,47	3,76	0,03	>2€
18	1	2	(0,6667;0,1667; 0,1667)	(0,1667;0,7778; 0,0556;0)	3,5	3,5	3,5	3,78	0,00	<2€

### 3.1.2. Tirdzniecības piegādes uzdevums

Uzņēmējam ir divu veidu preces, kuras viņš var piegādāt tirgum, bet konkurents var piegādāt līdzīgas preces. Uzņēmējs nezina, kādas preces konkurents piegādās tirgum, un konkurents nezina, kādas uzņēmēja preces parādīsies šajā tirgū. Pieņemsim, ka spēlētājs  $A$  ir uzņēmējs, bet spēlētājs  $B$  - konkurents. Spēlētājam  $A$  ir divas iespējamās stratēģijas  $A_i$  - $i$ -tā veida produkta piegāde tirgum,  $i = 1, 2$ . Spēlētājs  $B$  var arī pieturēties pie vienas no divām stratēģijām  $B_j$  - pārdot  $j$ -tā veida produktu,  $j = 1, 2$ . Uzņēmējam ir informācija par to, cik liela ir iespēja pārdot vienu vai otru preci, ja tirgū jau ir konkurenta prece. Uzņēmēja iespēju varbūtības ir ievietotas spēles norēķinu matricā:

$$C = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Izmantojot Brauna-Robinsones metodi ar precizitāti  $\epsilon = 0.05$ , ir jāatrod uzņēmēja optimālais 1. un 2. veida preču sadalījums, ja vispirms uzņēmējs piegādā tirgū 2. veida preci, un konkurents piegādā 1. veida preci.

Tātad  $m = 2, n = 2$ , apskatīsim tikai 1.soli, tālāk izmantosim MATLAB palīdzību.

Pēc nosacījuma spēlētājs  $A$  izvēlas stratēģiju  $A_2$ , kuru var uzrakstīt kā jaukto stratēģiju  $p(1) = (0, 1)$ . Tādējādi  $i_1 = 2$ .

Spēlētājs  $B$  izvēlas stratēģiju  $B_1$ , kuru var uzrakstīt kā jaukto stratēģiju  $q(1) = (1, 0)$ . Tātad,  $j_1 = 1$ .

Tālāk mums ir:

$$\alpha(p(1)) = \alpha(A_2) = \alpha_2 = \min_{1 \leq j \leq 2} a_{2j} = a_{22} = 0,3, \quad (3.1.3)$$

$$\beta(q(1)) = \beta(B_1) = \beta_1 = \max_{1 \leq i \leq 2} a_{i1} = 0,7. \quad (3.1.4)$$

Tad  $\alpha(1) = \alpha(p(1)) = 0,3$ ,  $\beta(1) = \beta(q(1)) = 0,7$ . No šejienes  $\Delta(1) = \beta(1) - \alpha(1) = 0,7 - 0,3 = 0,4 > 2\epsilon = 0,1$ , t.i., nevienādība (2.3.12) pie  $k = 1$  neizpildās. Tas nozīmē, ka norādītā precizitāte nav sasniegta, un tāpēc ir jāpāriet uz 2. soli.

Aizpildīsim Tabulā 3.3 1.rindu ar iegūtajiem datiem, pārejas rindas aizpildām ar MATLAB palīdzību.

Tabula 3.3: Atrisinājumu tabula Piemēram 2

№ $k$	$A_{ik}$	$B_{jk}$	$P(k)$	$Q(k)$	$\alpha(k)$	$\beta(k)$	$\Delta(k) = \beta(k) - \alpha(k)$	$2\epsilon$
1	2	1	(0;1)	(1;0)	0,30	0,7	0,40	>0,1
2	2	2	(0;1)	(0,5;0,5)	0,30	0,7	0,40	>0,1
3	2	2	(0;1)	(0,33; 0,67)	0,30	0,6	0,30	>0,1
4	1	2	(0,25;0,75)	(0,25; 0,75)	0,425	0,6	0,175	>0,1
5	1	2	(0,4;0,6)	(0,2; 0,8)	0,5	0,6	0,1	=0,1

Aptuvenā spēles cena ir  $V = \frac{1}{2}[\beta(k) + \alpha(k)] = \frac{1}{2}[\beta(5) + \alpha(5)] = \frac{1}{2}(0,5 + 0,6) = 0,55$ .

Un  $p(5) = (0,4; 0,6)$ ,  $q(5) = (0,2; 0,8)$ - aptuvenas optimālās jauktās stratēģijas ar precizitāti līdz  $\epsilon = 0,05$ .

Lai atrisinātu šādu uzdevumu MATLAB bija nepieciešams 0.011171 sekundes.

### 3.1.3. Autosalonu cīņa

Pieņemsim, ka mums ir jāpieņem lēmums par automašīnu salonu  $A$ , kuram draud automašīnu salons  $B$  un kuram tirgū ir 10 dažādi automašīnu modeļi (vieglais automobilis, traktors utt.). Spēlētāja  $A$  mērķis ir maksimizēt sava automašīnu salonu vērtību, izpērkot tirgū savas automašīnas, lai saglabātu to vērtību, savukārt spēlētājs  $B$  cenšas samazināt autosalona  $A$  tirgus vērtību vienā no četriem veidiem:

- Publiska negatīva uzņēmuma  $A$  automašīnu analīze;
- Publisks nosodījums par uzņēmuma  $A$  vadības neefektivitāti;
- Publiska tiesas lieta pret uzņēmumu  $A$ ;
- Vienošanās ar uzņēmuma  $A$  darbinieku, lai to diskreditētu.

Katra no šīm metodēm ietekmē automašīnu vērtību, tomēr katra no tām ir saistīta ar risku, ka autosalona  $B$  darbību tiks atklāta, uz ko tirgus reaģēs ar autosalona  $A$  automašīnu vērtības pieaugumu (salīdzinājumā ar gaidāmo kritumu) un autosalona  $B$  vērtības kritums. Pieņemsim, ka eksperti ir noteikuši kopējos koeficientus, kas parāda visu iepriekš minēto faktoru ietekmi uz

autosalona  $A$  automašīnu vērtību, un reģistrējuši tos  $10 \times 4$  matricas formā:

$$C = \begin{pmatrix} 19 & -14 & -1 & 19 \\ 3 & 16 & 5 & -2 \\ -9 & 10 & -13 & -18 \\ -14 & -13 & 0 & 11 \\ 14 & 5 & 9 & 12 \\ -18 & 13 & 15 & 3 \\ 13 & 5 & 18 & 0 \\ 9 & 6 & -13 & -15 \\ -18 & 4 & -13 & 6 \\ -3 & 16 & 18 & -1 \end{pmatrix}, \epsilon = 0.00005.$$

Tā ka matricas izmērs ir pietiekami liels, mēs izmantosim MATLAB palīdzību.

Tad šīs problēmas atrisinājums:

$$p^0 = (0.0000; 0.0002; 0; 0; 0.6963; 0.0413; 0; 0; 0; 0.2622),$$

$$q^0 = (0.0133; 0.5430; 0.0000; 0.4437),$$

$$\alpha(p^0) = 8.216853171275645,$$

$$\beta(q^0) = 8.225998205707980,$$

$$v = 8.2169.$$

Lai atrastu atrisinājumu ar noteikto precizitāti, bija jāveic 956366 iterācijas.

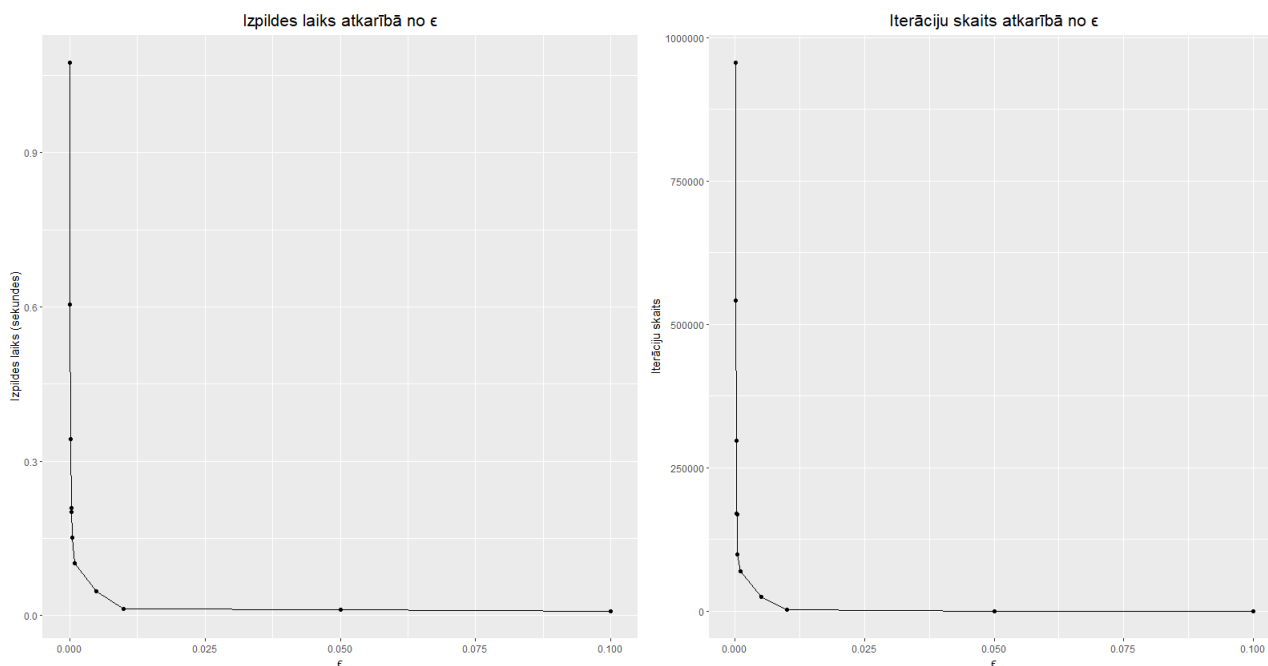
Salīdzinot ar iepriekšējiem piemēriem, šeit bija jāgaida rezultāts nedaudz ilgāk. Kļūst skaidrs, ka jo lielāka matrica, jo ilgāk MATLAB kods darbojas, kā arī jo augstāka precizitāte nepieciešama, jo vajadzīgs lielāks iterāciju skaits un līdz ar to arī lielāks laiks.

Apskatīsim izpildes laika un iterācijas skaita atkarību no precizitātes  $\epsilon$  (Tabula 3.4), apskatot  $10 \times 4$  matricu  $C$ .

Tabula 3.4: Izpildes laika un iterācijas skaita atkarība no  $\epsilon$

$\epsilon$	Izpildes laiks, sek.	Iterāciju skaits
0,1	0.008392	180
0,05	0.010582	632
0,01	0.012860	2584
0,005	0.047012	24630
0,001	0.101212	69580
0,0005	0.151342	99409
0,0004	0.208713	169038
0,0003	0.201941	171015
0,0002	0.342733	297404
0,0001	0.604146	541183
0,00005	1.075168	956366

Lai visu labāk redzētu, mēs veidojam grafikus:

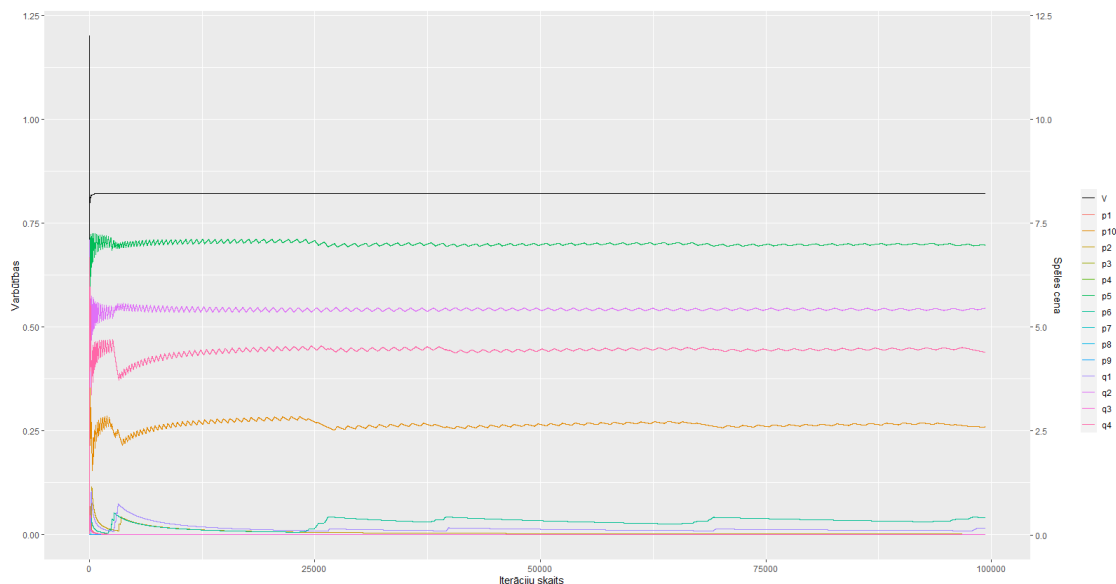


Att. 3.1: Funkcijas grafiki. Pa kreisi izpildes laiks pret  $\epsilon$ . Pa labi iterāciju skaits pret  $\epsilon$ .

Kā redzam Attēla 3.1 kreisajā grafikā, atkarība ļoti atgādina funkciju  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , -kas ļauj izdarīt secinājumu par šīs metodes ārkārtīgi sliktu konverģenci maziem  $\epsilon$  (skatīt [11]), bet vajag piebilst, ka laiku, kurā tika sasniegta nepieciešamā precizitāte, var uzskatīt par pieņemamu mūsu piemēram.

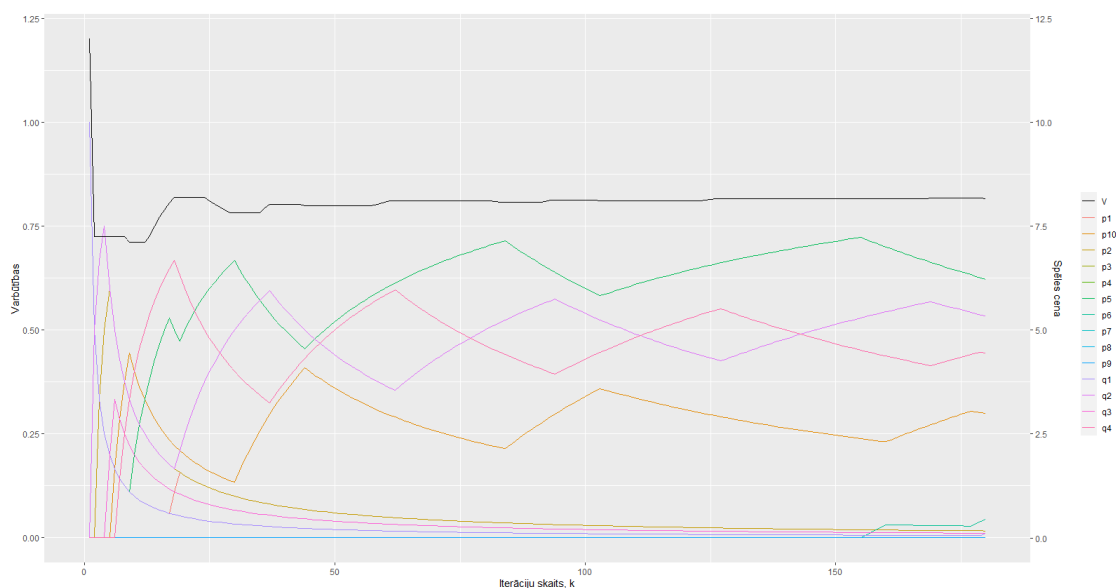
Pamatojoties uz Attēla 3.1 grafiku labajā pusē, mēs arī secinām, ka iterāciju skaits ir atkarīgs no  $\epsilon$  tādā veidā, kas ir tuvu iepriekš minētajai attiecībai. Tieši otrais grafiks ļauj secināt, ka ir aprakstītā pakāpes funkcija, jo laika pieaugumu atkarībā no  $\epsilon$  varētu attiecināt uz neefektīvi īstenotu algoritmu vai nepieciešamību saglabāt gandrīz visus iepriekšējās iterācijas datus.

Atrisinājumu elementu novērtējumu konverģences grafiki, kas iegūti pēc Brauna-Robinsones metodes 99409 iterācijām (ja  $\epsilon = 0.0005$ ), ir parādīti Attēlā 3.2.



Att. 3.2: Matricas spēles atrisinājumu novērtējumu konverģence ( $\epsilon = 0.0005$ )

Apskatīsim arī pie 180 iterācijām un  $\epsilon = 0.1$  (Attēls 3.3).



Att. 3.3: Matricas spēles atrisinājumu novērtējumu konverģence ( $\epsilon = 0.1$ )

## Nobeigums

Darba gaitā tika apskatīti vairāki spēļu teorijas elementi, kuri var tikt izmantoti turpmākai priekšmeta izpētei. Tika apskatīts Brauna-Robinsones algoritms - algoritms, lai iteratīvi atrastu tuvinātu optimālo atrisinājumu spēlētājiem jauktajās stratēģijās ar noteiktu norēķinu matricu un nepieciešamo precizitāti. Mēs izpētījām šīs metodes konverģences jautājumu un pierādījām algoritma apturēšanas nosacījumu, lai sasniegtu nepieciešamo precizitāti.

Darba praktiskajā daļā ar *MATLAB* vidē realizētas programmas palīdzību atrisinājām trīs problēmas - viena ir diezgan viegla, bet to nevar atrisināt grafiski, otra - ar tirdzniecības formulēšanas uzdevumu un ar mazu dimensiju -  $2 \times 2$ , pēdējais uzdevums par automašīnu tirgus bija ar pietiekami lielu dimensiju -  $10 \times 4$ , kur grafiki tika veidoti ar brīvpiekļuves programmu *RStudio*.

Pēc paveiktā darba par Brauna-Robinsones metodes priekšrocībām var uzskatīt tās vienkāršību un pārskatāmību, salīdzinoši labo atrisinājuma iegūšanas ātrumu. Atrisinājuma atrašanas ātrumu var kontrolēt, izvēloties pieņemamu aprēķina precizitātes līmeni. Šī metode ir pielietojama jebkurai spēlei ar izmēru  $m \times n$ . Tā neprasa nekādus nosacījumus (piemēram, nevajag nosacījumu  $a_{ij} > 0$ ) un ir viegli realizējama ar programmatūras metodēm.

Brauna-Robinsones metodes trūkumi ir tādi, ka metodes konverģences ātrums strauji samazinās, palielinoties spēles matricas dimensijām.

Tātad mēs esam ieguvuši diezgan labus rezultātus attiecībā uz precizitātes un darbības laika attiecību, kas, ņemot vērā šīs metodes vienkāršību un pietiekamo tā ieviešanas vieglumu datorā, ļauj secināt, ka šīs metodes izmantošana ir efektīva problēmu risināšanā, ieskaitot pietiekami lielus izmērus.

Piedāvāto metodi var piemērot, piemēram, ekonomikā, lai precīzāk plānotu uzņēmuma produktu klāstu un izstrādātu ienesīgāku konkurences politikas stratēģiju tirgū.

Izstrādātais bakalaura darbs ir uzskatāms par metodisku izstrādni, kas var noderēt spēļu teorijas kursā, apskatot tēmas par nulles summas spēlēm, to atrisinājumu atrašanu tīrajās un jauktajās stratēģijās.

# Izmantotā literatūra un avoti

- [1] Brown G.W., Some notes on computation of Games Solutions. RAND Report P-78, April 1949, The RAND Corporation, Santa Monica, California. Piejams: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD0603823.pdf>, skatīts 05.02.2021.
- [2] Bula I., Stratēģisko spēļu teorija, 2007. Piejams: <http://home.lu.lv/~ibula/lv/studentiem/otrs.pdf>, skatīts 30.03.2021.
- [3] Ferguson T.S., Game theory, class notes for math 167, fall 2000. Piejams: <https://www.math.ucla.edu/~tom/GameTheory.html>, skatīts 04.04.2021.
- [4] Figueiredo D.R., Introduction to Game Theory and its Applications in Computer Networks, 2006. Piejams: <https://fddocuments.in/document/introduction-to-game-theory-and-its-applications-in-computer-networks.html>, skatīts 15.05.2021.
- [5] Hotz H., A short introduction to game theory, 2017. Piejams: [https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey/teaching/archiv/sose\\_06/softmatter/talks/Heiko\\_Hotz-Spieltheorie-Handout.pdf](https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey/teaching/archiv/sose_06/softmatter/talks/Heiko_Hotz-Spieltheorie-Handout.pdf), skatīts 14.05.2021.
- [6] Kļaviņš D., Optimizācijas metodes ekonomikā I, II. Otrais izdevums, Datorzinību centrs, 2003.
- [7] Лабскер Л. Г., Яценко Н. А., Теория игр в экономике, Издательство "Проспект", 2013.
- [8] Mood A.M., Porter L., Im Memoriam "George W. Brown", The University of California. Piejams: [https://senate.universityofcalifornia.edu/\\_files/inmemoriam/html/georgewbrown.htm](https://senate.universityofcalifornia.edu/_files/inmemoriam/html/georgewbrown.htm), skatīts 7.05.2021.
- [9] National Academy of Sciences, Biographical Memoirs: Volume 63, Chapter: 18, Julia Bowman Robinson. Washington, The National Academies Press, 1994. Piejams: <https://www.nap.edu/read/4560/chapter/21>, skatīts 7.05.2021.

- [10] Osborne M.J., An introduction to game theory, New York: Oxford university press, 2004.
- [11] Осокин Л.А., Метод Брауна-Робинсон и экономическое приложение, Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия, 2016.
- [12] Писарук Н., Введение в теорию игр, Минск: БГУ, 2015.
- [13] Robinson J., An iterative method of solving a game. Annals of mathematics, 296-301, 1951. Piejams: <http://www.dklevine.com/archive/refs4422.pdf>, skatīts 05.02.2021.
- [14] Julia Robinson, Biography. Piejams: <https://biography.yourdictionary.com/julia-robinson>, skatīts 7.05.2021.
- [15] Wiki, Некооперативная теория игр (Non-cooperative game theory). Piejams: [https://ru.xcv.wiki/wiki/Non-cooperative\\_game\\_theory](https://ru.xcv.wiki/wiki/Non-cooperative_game_theory), skatīts 20.04.2021.
- [16] Wikipedia, Zero-sum game. Piejams: [https://en.wikipedia.org/wiki/Zero-sum\\_game](https://en.wikipedia.org/wiki/Zero-sum_game), skatīts 20.04.2021.
- [17] Wikipedia, Poker. Piejams: <https://en.wikipedia.org/wiki/Poker>, skatīts 20.04.2021.

# Pielikums

## Matlab programmas kods

```
1 tic %skaita izpildes atrumu sekundes
2 e=0.0001; %velema precizitate
3 max_iter =30; %iteraciju skaits
4 A=[3 4 3 5; 4 3 5 2; 5 2 4 2]; %ievades matrica
5 [m,n] = size(A);
6 M = sum(A,2)/n;
7 K = sum(A,1)/m;
8 [max_sr_profit ,xmax]=max(M);
9 [min_sr_loss ,ymin]=min(K);
10 %sakotnejas tuvinasanas uzdevums
11 q = zeros(1,n); %speletaja B strategija
12 q(ymin) = 1;
13 p = zeros(1,m); %speletaja A strategija
14 p(xmax) = 1;
15 V=0;
16 lastk = 1;
17 [b,nA] = beta(q,A);
18 [a,nB] = alpha(p,A);
19 tabula=zeros(max_iter,9); %kopsavilkuma tabula
20 counter=1;
21 %cikls ir ierobežots līdz maksimālajam iteraciju skaitam
22 for k=1:max_iter;
23     tabula(counter,1)=counter;
24     tabula(counter,2)=nA;
25     tabula(counter,3)=nB;
26     tabula(counter,6)=a;
27     tabula(counter,7)=b;
28     tabula(1,4)=tabula(1,6);
29     tabula(1,5)=tabula(1,7);
30     PP(k,:)=p;
```

```

31     QQ(k,:) = q;
32     counter = counter + 1;
33
34     V = (a + b) / 2; %speles cena
35     delta = abs(b - a);
36
37     if a > 0 & b > 0
38         tabula(counter - 1, 8) = V;
39         tabula(counter - 1, 9) = delta;
40     end
41
42     if (delta <= 2 * e); %precizitates parbaude
43         lastk = k;
44     break
45 end
46
47 %ar izveletajiem nA un nB
48 for j = 1:n
49     if(j == nB);
50         q(1, j) = (k * q(1, j) + 1) / (k + 1);
51     else
52         q(1, j) = k * q(1, j) / (k + 1);
53     end
54 end
55
56 for i = 1:m
57     if(i == nA);
58         p(1, i) = (k * p(1, i) + 1) / (k + 1);
59     else
60         p(1, i) = k * p(1, i) / (k + 1);
61     end
62 end
63

```

```

64 [cur_a ,nB] = alpha(p,A);
65 tabula(counter,4)=cur_a;
66 if( cur_a >= a );
67 a = cur_a;
68 end
69
70 [cur_b ,nA] = beta(q,A);
71 tabula(counter,5)=cur_b;
72 if( cur_b <= b );
73 b = cur_b;
74 end
75
76 end
77 lastk %parada, cik iteracijas bija nepieciams
78 V %parada speles cenu
79 p %parada speletaja A optimalo strategiju
80 q %parada speletaja B optimalo strategiju
81 tabula %parada beigu tabulu
82 toc %parada izpildes laiku
83
84 %-----
85 function [a ,nA]=alpha(p,A)
86 H=A'*p';
87 a=min(H);
88 nA = find(H==a);
89 nA=nA(1);
90 end
91 function [b ,nB]=beta(q,A)
92 K=A*q';
93 b=max(K);
94 nB = find(K==b);
95 nB = nB(1);
96 end

```

Bakalaura darbs "Brauna-Robinsones iteratīvā metode" izstrādāts LU Fizikas, Matemātikas un Optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā noslēguma darba elektroniskā versija atbilst LUIS augšupielādētā darba elektroniskai kopijai.

Autors: Poļina Gmerņicka

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju/Nerekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Dr.mat., prof. Inese Bula

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Recenzents: Dr.mat., prof. Svetlana Asmuss

\_\_\_\_\_

(paraksts)

(datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā \_\_\_\_\_

(datums)

Dekāna pilnvarotā persona: metodiķe Inita Šneidere

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

\_\_\_\_\_ prot. Nr. \_\_\_\_\_, vērtējums \_\_\_\_\_

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: \_\_\_\_\_

(Vārds, Uzvārds)

(paraksts)