Doc. J. Kalniņa

TĒLOJOŠĀS ĢEOMETRIJAS KURSS

saskaņā ar Latvijas Universitatē lasitām lekcijām.

Pielikums:

Atlass ar 424 rasejumiem uz 64 lapām.

RIGĀ, 1922. g.
L. U. St. Pad. Māc. Lidz. Apg. Kom.
Apgādibā.

Docenta **Jēkaba Kalniņa**

Tēlojošās Ģeometrijas kurss

saskaņā ar Latvijas Universitatē lasitām lekcijām.

Rigâ, 1922 g.

Latv. Univ. Stud. Pad. Māc. Lidz. Apg. Komisijas apgādibā.

Vairumā L. U. Studentu Padomes grāmatnicā.

Tipo-litografija, senak Grothusa drukatava. — Rigā, Vecpilsētā 8.

Priekšvārdam.

Šās grāmatas mērķis — zinamā mērā aizpildit latviešu techniskā literaturā stipri sajūtamo robu.

Tēlojošo ģeometriju studejot un praktiskus darbus strādajot, studejošiem nebij piemērigas mācibas grāmatas. Ari es nevareju balstities uz studejošiem pieejamiem un jau lekciju laikā izskaidrotiem paraugrasejumiem un konstrukcijam.

Lekciju laikā studejošiem ne vienmēr izdodas pilnigi un skaidri nobeigt uz sienas tafeles konstruetos rasejumus, sevišķi, ja pieņemtiem ģeometriskiem elementiem piešķir drusku citadu stāvokli, kā ari sarešģitakos gadijumos. Bez tam studejošie, rasejumu izpildit iesākdami, nevar paredzet viņa dimenzijas, kapēc bieži konstrukcijas neiznāk rasejuma robežās, kas rada dažas neērtibas un neskaidribas.

Līdz šim attiecigā literaturas nozarē latviešu valodā izdotas tikai dažas arodnieku pašmācibai domatas vēstules par „Projekciju mācibu" un „Zīmetaju ģeometriju" (Mašinu būvskola, izdota Puriņu Klāva vadibā, Rigā, 1901—1903 g.).

Šo pirmo latviešu valodā sarakstito tēlojošās ģeometrijas kursu sastādot, bij japārvar dažas grūtibas, kapēc šim kursam bez šaubam būs savas neskaidribas un trūkumi, par kuŗiem godatos lasitajus lūdzu neliegt man savus aizrādijumus.

Grāmatā attēlotas tās tēlojošās ģeometrijas daļas, kas nākamiem inženieŗiem un architektiem nepieciešami jazin. Par tādām uzskatamas: ortogonalo projekciju mācība, mācība par līkām linijām un virsām, perspektive un aksonometrija, kuŗas sakārtotas pēc praktisko darbu vajadzibām.

Kursam pamatos liktas manas 1917 g. Maskavā, krievu valodā iznākušās lekcijas par tēlojošo ģeometriju.

Lai novērstu pārpratumus un atvieglotu tēlojošās ģeometrijas studešanu pēc citiem avotiem, tad grāmatas beigās sakopoti raksturigakie termiņi un viņiem pievienoti attiecigie nosaukumi vācu un krievu valodā.

Tēlojošo ģeometriju studejot, no liela svara ir skaidri stādit sev priekšā ķermeņus un telpā izvestas konstrukcijas, attīstot caur to iedomašanās spēju, eb telpas sajēgsmi. Tikai tad mēs varesim techniskā rasejumā pareizi attēlot ķermeņus un a p z i n i g i izpildit vajadzigās konstrukcijas. Bez tam rasejumu techniskā izpildišana studejošo pieradina skaidri, rūpigi un glīti raset.

Ķermeņu sagrupejumu un viņu atsevišķo daļu izskatu mēs varesim vieglaki sajēgt, ja rasejumā būs aizrāditas ķermeņu krītošās un pašēnas. Tapēc ēnu konstrukcijas pienācigā veidā ir ievērotas šinī grāmatā.

Lai tēlojošo ģeometriju studejot, varetu lekcijam sekmigi sekot, tad p r a k t i s k i e d a r b i j a i z p i l d a r ū p i g i u n p a t s t ā v i g i. Citadi viegli var zust nepieciešamais sakars un savstarpeja saprašanās starp pasniedzeju un klausitajiem.

Beidzot gribu izteikt savu sirsnigako pateicibu: stud. ing. K a r l i m U p e s l e j a m, kuŗš nēma tuvaku dalibu pie šās grāmatas teksta piemērošanas latviešu valodai un korekturu lasišanas; stud. arch. O s v a l d a m T i l m a n i m, par rūpigo rasejumu izpildišanu un visiem tiem, kas veicinajuši šo darbu.

Jēkabs Kalniņš.

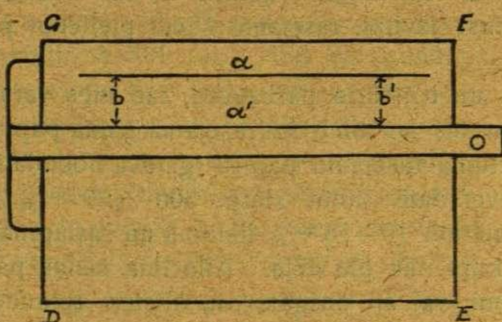
R i g ā, februarī 1922 g.

Aizrādijumi

tēlojošās ģeometrijas praktiskos darbus uzsākot.

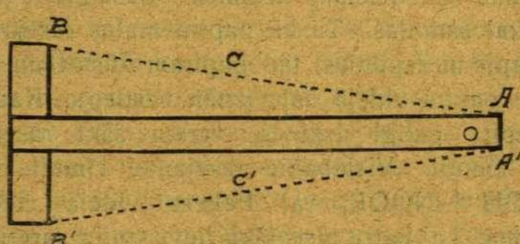
Universitatē iestājoties studejošie pa lielakai daļai neprot pietiekoši labi apieties ar rasešanas piederumiem un nav pieradųši noteikti, skaidri un glīti raset, kas sevišķi no svara tēlojošās ģeometrijas praktiskos darbos, jo nenoteikti jeb pavirši rasejot ļoti viegli var dabut nepareizu, sagrozitu attēlojumu, un rasejumā neiznāk dažadas ģeometriskas kontroles, kapēc jazaudē daudz laika. Tapēc nebūtu lieki raset iesācejiem dot vispārejus lietderigus padomus.

Latvijas Universitatē tēlojošās ģeometrijas konstrukcijām pieņemts lietot rasejamos galdus 460 $^m/_m \times$ 560 $^m/_m$ lielumā. Jaunu, vaj lietotu rasejamo galdu pērkot, japārliecinās par viņa pareizibu, jo uz nepareiza rasejamā galda nevar iegūt pareizu rasejumu. Galdu pārbauda šādi. Ņem pareisu rasejamo sliedi un pieliekot viņu pie vienas galda malas, novelk taisni *a* (I ras.). Sliedi pēc tam novirsa apmēram 10 cm. atstatu no pirmās un velk jaunu taisni *a′*. Tādas taisnes janovelk vairakās vietās un tad ar cirkuli izmēro atstatumus *b* un *b′* starp divām līdzteku taisnēm *a* un *a′*. Ja atstatums *b* līdzinas atstatumam *b′*, tad rasejamais galds pareizs.



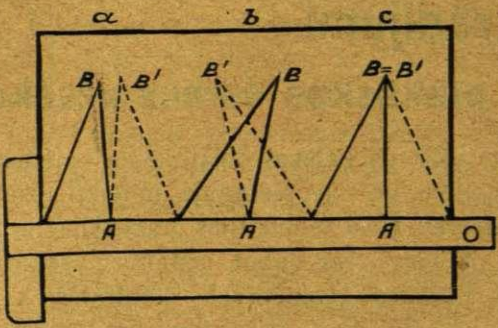
I ras.

Rasejamās sliedes pareizibu atrod šādi (II ras.). Ņem zinama gaŗuma diegu un vienu galu piestiprina pie sliedes pamata, bet otru pieliek pie sliedes gala. Izmēro atstatumu *c* starp punktiem A un B. Tapat to izdara ar otru pusi. Ja gaŗums *c* līdzinas gaŗumam *c′*, tad sliede konstrueta pareizi.



II ras.

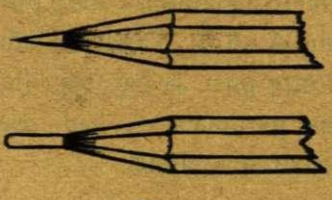
Lai rasejums būtu pareizs, tad japārbauda ari trijstūŗu pareiziba, ko izdara šādi. Pie rasejamās sliedes, kas uzlikta uz galda, mēs noliekam pārbaudamo trijstūri (III ras.). Novilkuši gar stateniskās malas AB taisni, apgriežam trijstūri un atkal novelkam taisni AB′ gar to pašu trijstūŗa malu. Ja vilktās taisnes nesakrīt, kā tas redzams *a* un *b* gadijumos, tad trijstūris nepareizs. Pirmā gadijumā leņķis pie virsotnes A mazaks par taisno leņķi, otrā gadijumā tas lielaks. Ja vilktās taisnes sakrīt, kā tas redzams rasejuma *c* gadijumā, tad leņķis pie virsotnes A ir taisns leņķis un trijstūris pareizs.



III ras.

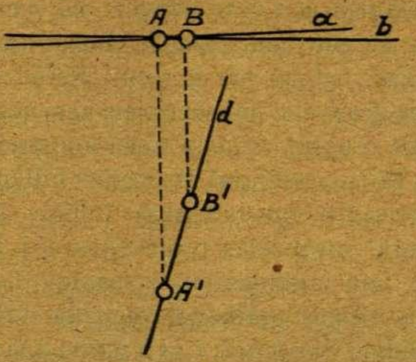
Rasejot vienmēr ir jaraugas, ka rasejamo sliedi pieliktu tai rasejamā galda malai, gar kuŗu rasejamais galds tika pārbaudits. Pretejā gadijumā visai pārbaudišanai nav nekādas nozīmes. Visas taisnes, kuŗu virsiens sakrīt ar virzienu DE vaj FG (sk. I ras.) jaizvelk ar rasejamo sliedi, bet stateņus pret šo virzienu jaizvelk ar taisnleņķa trijstūri, kā tas aizrādits III rasejumā. Tādas taisnes nedrīkst izvilkt, rasejamo sliedi pieliekot pie malas DE, vaj GF.

Kad rasejamais galds, sliede un trijstūris pārbauditi, tad mēs varam uzsākt raset, bet darbus uzsākot mums jauzlimē uz rasejamā galda papirs. Tam nolūkam ņemam attieciga lieluma rasejamo papiru (gatava nododamā rasejuma formatam Latvijas Universitatē jabūt starp 300—400 $^{m}/_{m}$ X 400—500 $^{m}/_{m}$). Atlokam malas apmēram 10—15 $^{m}/_{m}$ lielumā un saslapinam ar sūkli to papira pusi ar ūdeni, kuŗa nāk pie dēļa. Atlocitās malas pārklājam ar dekstrinu jeb stipru līmi, vaj ari pašgatavotu klīsteri (plauceti bīdeleti rudzu milti karstā ūdenī), pēc tam viņas atlokam atpakaļ un pielīmejam pie rasejamā galda. Papiru saslapinot jaraugas, lai nesamērcetu to pusi, uz kuŗas jarasē, jo pretejā gadijumā papira mazgašanai pēc rasešanas nav nekādas nozīmes. Saslapinot papirs izplēšas, bet žūdams viņš atkal saraujas. Tā kā papira malas rasejamam galdam pielīmē, kad papirs slapjš un izplēties, tad papiram žūstot un raujoties malas vairs nepadodas un papira videjā daļa iznāk uzstiepta. Kad papirs galigi izžūvis, varam sākt raset ar zīmuli. Vislabakie rasejamie zīmuļi ir KOH-I-NOOR, vaj Fabera videjā cietuma. Lai katru atsevišķu tievu liniju varetu izvilkt skaidri un noteikti, tad zīmuļus mēdz noasinat ķīļejadi (IV ras.). Liniju velkot,

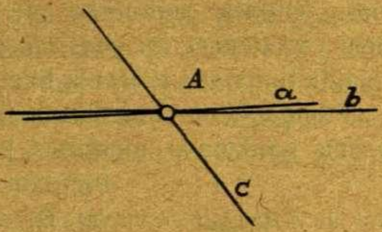

IV ras.

jaskatas, lai grafita asums sakristu ar to lineala malas šķautni, kas uzgulstas uz papira. Ar zīmuli javelk cik iespējams tievakas linijas, lai netraucetu atrast noteiktus krustošanās punktus.

Konstrukcijas izpildot visvairak jasargas lietot tādus punktus, ko dabujam divām taisnēm *a* un *b* (V ras.) krustojoties ļoti mazā leņķī. Tādu nenoteiktu divu liniju krustošanās punktu sauksim par slidošo krustošanās punktu. Ja taisnes *a* un *b* nav diezgan tievi izvilktas, tad krustošanās punktu A, vaj B noteicot, varam viegli maldities par dažiem milimetriem. Ja bez tam krustošanās punkts A, vaj B vēl japrojecē rasejumā aizrāditā virzienā uz trešo taisni *d*, tad pie tam starpiba starp pareizo punktu A′ un kļūdaino punktu B′ var tapt vēl lielaka, un mēs galu galā dabujam pilnigi nepareizu rasejumu, lai gan kodolā ģeometriskās konstrukcijas izpilditas pareizi. Tapēc sevišķi jabrīdina no slidošo punktu lietošanas. Ja rasejumā janoteic divu taišņu *a* un *b* slidošs krustošanās punkts A (VI ras.), tad šis punkts janoteic ar kaut kādu trešo konstrukcijas liniju, kas pa leelakai daļai vienmēr iespējams izdarit, noteicot attieciga veida palīgliniju *c*, kuŗai jaiet caur mekleto punktu A. Vispārejā gadijumā tādu palīgliniju noteicot varam rīkoties pēc 11 §, pirmā uzdevumā, aizrāditiem paņēmieniem (1 lapa, 12 un 13 ras.).



V ras.

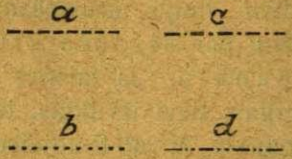


VI ras.

Ar zīmuli strādajot cik iespējams skaidraki jaaizrāda visas konstrukciju linijas, lai praktisko darbu vaditajam būtu iespējams pārliecinaties par rasejuma atrisinašanas gaitas pareizibu.

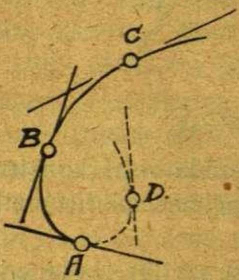
Kad rasejums ar zīmuli izvilkts, tad, pirms ar tušu izvilkt, tas janodod praktisko darbu vaditajam to caurlūkot un apzīmogot. Darbu vaditajs aizrāda kļūdas, dod paskaidrojumus un prasa izskaidrot darbibas gaitu, kā ari aizrādit, kādu stāvokli uzzīmetās linijas, plaknes, vaj priekšmeti ieņem telpā. Pēc tam, ja izrādijies pareizs, konstrueto rasejumu var apvilkt ar tušu. Linijas izvelkot velce jatura tā, lai viņa skārtos pie lineala augšejās šķautnes, bet no apakšejās paliktu zinamā attālumā, jo citādi var tuša izplūst. Tušai jabūt tādai, lai rasejumu mazgajot ta neizplūstu pa papiru. Ja tuša pārak bieza, viņu var atšķaidit ar ūdeni.

Visām, konstrukcijās aizrāditām palīglinijām jabūt cik spējams tievakām; vislabakì ieteicams tās izvilkt ar atšķaiditu tušu. Konstrukciju linijas pēc vajadzibas jaatzimē raustitās, punktlinijas jeb punktstrīpotās (VII ras.). Redzamie priekšmeta apveidi un šķautnes, kā ari raksturigakās redzamās linijas (krustošanās linijas, gaismas atdaļošās veidules u. t. t.) jaapvelk kā vienlaidu linījas un pie tam resnaki, nekā konstrukciju linijas, bet ne pārak resni. Neredzamās šķautnes jaapvelk mazliet tievakas nekā redzamās, bet druscin resnaki nekā konstrukciju linijas. Tā tad rasejumā atzīmetām linijām jabūt trejadā biezumā. Citreiz ieteicams raksturigakās linijas, kā piemēram divu ķermeņu krustošanās figuru, otrreizejās projekcijas u. t. t., atzīmet ar sarkanu, vaj zilu tušu. Pie tam jarīkojas ļoti uzmanigi, lai rasejums neiznāktu pārak raibs. Tapēc sarkana, vaj zila tuša jalieto tikai tad, ja rasejums tā iznāktu vieglaki saprotams. Izvelkot rasejumu jaievēro, kā konstrukciju linijas nav jaatzīmē visā garumā, bet tikai galos, un tikai virzienā, kuŗā linija patiešam vilkta. Ja vienā kopejā punktā tiecas vairakas taisnes (stari), tad ieteicams šo punktu atzīmet ar riņķiti, kā tas piemēram aizrādits 1 lapas, 3—6 rasejumos. Riņķišu caurmēram pie tam jabūt ne lielakam, kā $1^m/_m$. Ar riņķišiem var atzīmet ari citus raksturigakos punktus. Ja caur šādu punktu iet vienlaidu linija, tad tā javelk tikai līdz riņķišam, bet ne caur pašu riņķiti.



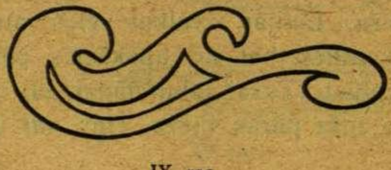
VII ras.

Pilnigai līknes noteikšanai, jakonstruē ne tikai pietiekoši daudz punktu, bet šinīs punktos ari pieskares, jo pieskares noteic līknes virzienu (VIII ras.). Pie tam pieskare kautkādā punktā (piemēram A, vaj B) jaaizrāda abās pusēs no atzīmetā punkta. Gadijumā, ja līkne no attiecigās pieskares maz atšķiras, kā piem. punktā C, tad šo pieskari ar tušu izvelkot, rasejumā ta saplūst ar zinamo līknes daļu un rasejums iznāk neglīts, kapēc tādos gadijumos pieskare nav javelk caur pašu punktu (C), bet tikai jaaizrāda zinamā atstatumā abās pusēs no punkta (C). Ja punkts (piem. D) guļ uz neredzamās (raustitās) līknes daļas, tad ari viņa pieskare jaatzīmē kā raustitā linija. Dažreiz ieteicams pieskares atzīmet ar zilo(ne sarkano) tušu. Vispāreji pieskare jaatzīmē mazliet tievaki, nekā attiecigā līkne.



VIII ras.

Līknes jaizvelk ar līko linealu (IX ras.). Līkni ar līko linealu izvelkot, tā javelk pa daļām, uzmeklejot līkā linealā tādu gabalu, kas pilnigi sakrīt ar līkni. Pie tam jaskatas, lai konstruetās pieskares būtu pieskares ari pret attie-


IX ras.

cigo līka lineala daļu. Izvelkamām līknēm var būt dažadas lieces, kapēc ieteicams iegūt dažadus līkos linealus, lai varetu atrast vajadzigo lieci. Izvilktām līknēm jabūt slaidenām, bez lūzumiem*), vaj pārtraukumiem.

Kad rasejums galigi izvilkts ar tušu, tad ar mīkstu dzēsni (gumiju) iznīcinam zīmuļa pēdas un liekam rasejamo galdu ar visu papiru zem ūdens krāna.**) Papirs izmirkst un līdz ar to atkausejas papira līme, kas no jauna piepilda rasējot izkasitās papira poras un piešķir papiram iepriekšejo izskatu.

Kad papirs no jauna izžūvis, varām iekrāsot. Iekrāsošanai nolemto krāsu atšķaida ar ūdeni sevišķā, tam nolūkam piemērotā mazā trauciņā. Atšķaidito krāsu tad ņem ar otiņu un izmēģina viņu uz rasejamā papira atlocitās malas. Kad vajadzigā krāsa izmēģinata, tad veikli izdzenā to pa ieklājamo laukumu, turot pie tam rasejumu ne horicontali, bet drusku paslīpi, lai krāsas tecešana nokļutu vēlamā virzienā. Pēc tam ar sausu otiņu noņem lieko krāsu un rasejumam ļauj nožūt.

Ieklājot jalieto cik spējams maigas, neuzkrītošas, un ne pārak spilgtas krāsas, pie tam ieteicams krāsu ļoti stipri atšķaidit ar ūdeni. Ja vēlaki, rasejumam nožūvušam, izrāditos, kā krāsa par bālu, tad vajadzigo laukumu rasejumā varam ar to pašu krāsu ieklāt no jauna Dažreiz ieklāšana jaatkārto 3 reises. Ieklājot jaievēro, ka viena un ta pate plakne, vaj viens un tas pats ķermenis visās redsamās projekcijās jaieklāj ar to pašu krāsu. Ja dotas vairakas plaknes, vaj ķermeņi, tad katra plakne vaj ķermenis visās redzamās projekcijās jaieklāj ar to pašu atseviško krāsu. Attiecigās palīgkonstrukcijas, piemēram plaknes savienotais stāvoklis, jeb ķermeņa notinums jaieklāj ar to pašu krāsu, ar kuŗu projekcijās ieklāta plakne, vaj ķermenis. Pie tam ieteicams plaknes savienotos stāvokļus ieklāt gaišaki, nekā pašas redzamās projekcijas.

Krītošās redzamās ēnas jaieklāj ar stipri atšķaiditu tušu, jeb vēl labaki ar attiecigo sevišķo krāsu (Neutraltinte). Nekādā ziņā nav pielaižams ēnas ieklāt ar nedabisku (sarkanu u. t. t.) krāsu.

Redzamās pašēnas jaieklāj ar to pašu krāsu, kā krītošās ēnas, bet manami gaišaki, nekā krītošās ēnas. Dabā gan tāda starpiba starp krītošām un pašēnām nav skaidri manama, bet mūsu rasejumos no ģeometriskā viedokļa no svara krītošās ēnas vienmēr atšķirt no pašēnām.

Ja plaknes, jeb ķermeņi ieklāti ar kaut kādu krāsu, piem. dzeltenu, tad, lai atzīmetu ēnu, kas no kaut kāda cita ķermeņa krīt uz doto ķermeņi, jeb lai aizrāditu dotā ķermeņa pašēnu, virs ķermeņa, jeb plaknes pamatkrāsas (dzeltenas), attiecigais laukums vēl jaieklāj ar neitraltinti, — lai aizrāditu krītošo, jeb pašēnu.

*) Šeit domatas tādas līknes, kuŗu pieskares ikkatros divos blakus guļošos bezgali tuvos punktos krustojas bezgali mazā leņķī.

**) Papiru mazgat var tikai pielīmetu pie rasejamā galda, jo nepielīmets papirs mazgajot sakrunkojas.

Citreiz pašēnu varam aizrādit ar atsevišķiem melnās tušas punktiņiem, kā tas piemēram aizrādits 1 lapā, 3—7 rasejumos. Pašēnu varam ari ar neitraltinti neieklāt, ieklājot viņu ar to pašu krāsu, kā apgaismotās ķermeņa plaknes, tikai drusku tumšaku krāsu (mazak atšķaiditu), lai tās noēnošana būtu skaidri manama. Līkās virsas noēnojot jaievēro šīs grāmatas rasejumos aizrāditie attiecigie piemēri (lodes pašēnas), pie tam pašēnas vistumšakā daļa jaaizrāda pa abām pusēm no gaismas atdaļošām linijām.

Vispārigi, pirms attiecigā rasejuma izvilkšanas un krāsošanas pamatigi jaaplūko rasetavā izkārtie paraugrasejumi.

Kad rasejums galigi nobeigts, tad varam viņu nogriest, stingri ievērojot pieprasamo papira lielumu, t. i., lai rasejuma viena mala būtu no 400 līdz 500 $^{m}/_{m}$ garumā, bet otra no 300 līdz 400 $^{m}/_{m}$.

Rasejumu nogriežot var gadities, ka nazi gar lineala šķautni velkot pēdejo ievaino. Tapēc ieteicams naža asmeni iespraust, piemēram, sērkociņā un vilkt nazi gar lineala šķautni kopā ar sērkociņu.

Tēlojošās ģeometrijas kurss.

Ievads.

Ir dots patvaļigs trijstūŗis ABC (1 lapa, 1 rasejums), kuŗa plakne sakrīt ar rasejuma plakni. Ja mums priekša tāds rasejums, kas attēlo trijstūŗi ABC dabiskā lielumā, jeb kautkādā mērogā, tad mēs spējam tieši pēc rasejuma noteikt trijstūŗa malu gaŗumu un virsotņu leņķu lielumus. Dotā trijstūŗī mēs varam izvest bez tam, ja vajadzigs, dažadas konstrukcijas, piemēram varam sadalit pēc vajadzibas kautkādu trijstūŗa malu zināmās daļās, noteikt kautkādas nebut virsotnes atstatumu no pretguļošās malas u. t. t.

Pēc elementarās ģeometrijas noteikumiem nav grūti atrisinat ari preteju uzdevumu, t. i. pēc dažiem dotiem elementiem, piem., pēc divām malām un viņu ieslēgta leņķa var konstruet $\triangle$-i ABC.

Līdzigā kārtā rasejumā var attēlot ari sarežģitakas taišņu, vaj likņu ierobežotas plakanas figuras. Visos aprāditos gadijumos mēs uz rasejuma pamata spējam pilnigi sajēgt doto figuru formas (izskatu) un attiecigo ģeometrisko elementu sagrupejumu, kā ari noteikt visus vajadzigos mērus.

Pieņemsim tagad, ka trijstūris ABC ir kādas piramides pamats. Tiek jautats, kā tādu piramidi attēlot rasejumā? Te mēs uz reiz saduramies ar diezgan ievērojamām grūtibām, jo jaattēlo triju dimenziju ķermenis plakanā rasejumā, kuŗ iespējams aizrādit tikai divas dimenzijas.

Ikdienišķos gadijumos pieņemts priekšmetus attēlot tā, kā viņi attēlojas aplūkotaja acīs. Pie tam rasejumā nav atsevišķu ģeometrisko elementu pareizie, bet viņu **šķietamie sagrozitie mēri**. 2 rasejumā attēlots tāds piramides ABCD šķietamais izskats, pie tam, kā atsevišķās šķautnes un sānu malas, tā ari leņķi un kakti starp atsevišķām šķautnēm, vaj atsevišķām sānu malām nelīdzinas dabiskās (oriģinalās) piramides mēriem. Zinot, ka $\triangle$ ABC ir piramides pamats un D viņas virsotne, cilveka prāts var pietiekoši iedomaties piramides izskatā un sānu malu stāvoklī. Citiem vārdiem: mēs varam stādit sev priekšā piramidi ABCD telpā, dabujot diezgan skaidru jēdzienu par piramides atsevišķo ģeometrisko elementu savstarpejiem stāvokļiem. Tādu iegūto jēdzienu par dotā priekšmeta telpas dimenzijām un atsevišķo priekšmeta daļu savstarpejiem stāvokļiem sauksim par **telpas sajēgsmi**.

Vēl saprotamaku telpas sajēgsmi par doto piramidi iegūsim, aizrādidami viņas apgaismotās (ABD) un neapgaismotās (BCD) sānu malas, kā ari krītošo ēnu uz pagarinato pamatplakni.*)

2 rasejumā doto attēlu sauc par perspektivisko attēlu. Neredzamās šķautnes perspektiviskos attēlos pa lielakai daļai neaizrāda, bet ja to dara, tad viņas apzīmē raustitām taisnēm.

Ja mums dots mākslinieka rokas attēlots priekšmetu sakopojums, tad mēs iegūstam glezniecisku priekšmetu attēlu jeb vienkārši gleznu. Gleznas iespaids uz aplūkotaju atkarajas no mākslinieka spējām telpiskos priekšmetus attēlot plakanā rasejumā tā, lai aplūkotajs no rasejuma iegūtu tādu pašu iespaidu, kā no telpā esošiem iedomajamiem priekšmetiem, kas viens pret otru ieņem noteiktu stāvokli.

Priekšmetus izšķirt mēs vispāreji spējam tikai tad, ja viņi apgaismoti, pie kam mums vienmēr ir darišanas ar dažadi apgaismotiem priekšmetiem. Tapēc ari skaidri saprotams, cik liela loma mākslinieka gleznā priekšmetu apgaismoto un neapgaismoto virsu, kā ari krītošo ēnu pareizai attēlošanai. Cik lielu iespaidu mākslinieka glezna neatstājusi uz mums, viņas trūkums ir tas, ka pēc gleznas mēs varam spriest tikai par šķietamiem mēriem un atsevišķu priekšmetu daļu attiecigiem stāvokļiem, bet ne par viņu īstiem mēriem un atstatumiem. Tapēc pēc dotas gleznas mēs nespējam konstruet viņā attēlotus priekšmetus. Bet tā ir galvenā prasiba, ko uzstāda technika. Tapēc mums jaiepazīstās ar tādiem paņēmieniem, kas mums dod iespējamibu rasejumā ātri un pareizi attēlot priekšmetus tā, lai pēc rasejuma mēs spētu spriest bez kļūdām par visiem priekšmeta mēriem, veidu un atsevišķu elementu attiecigiem stāvokļiem. Bez tam šados rasejumos mēs spējam izmērot nepieejamus priekšmeta mērus.

Zinatne, kas aplūko paņēmienus, kā telpiskos priekšmetus pareizi artēlot uz vienas plaknes, sauc par Tēlojošo Ģeometriju.

Jau iepriekš redzejām, ka priekšmetus var plakanā rasejumā attēlot perspektiviski. Tēlojošās ģeometrijas kursu cauri iedami mēs iepazīsimies ar paņēmieniem priekšmetus pareizi attēlot perspektiviskā attēlā. Tapat būs aizrādits, kā pēc dotā perspektiviskā attēla iespējams atrast priekšmeta pareizos mērus.

Priekšmetu attēlot perspektiviskā rasejumā prasa daudz pūļu, un ne vienmēr tas ātri un ērti izdarams. Tapēc technikā perspektiviskie rasejumi nevisai izplatiti. Galvenām kārtām viņus lieto architekturas un inženieru

---

*) Pie tēlojošās ģeometrijas kursa caurņemšanas mēs priekšmetu apgaismošanas pakāpi, kas atkarajas no dažadiem apstākļiem neievērosim, bet tikai vispāreji ģeometriski noteiksim, vaj zinamas plaknes, jeb zinamas virsu un priekšmetu daļas apgaismotas, jeb atrodas pašēnā.

zinibās, lai dotu projektejamās būves izskata dabisko attēlu. Bet tomēr ari šādos gadijumos visus būves pareizai izpildišanai vajadzigos mērus aizrāda atsevišķos rasejumos. Tādus rasejumus, pēc kuŗiem tieši ceļ viņos attēlotos priekšmetus, sauc par techniskiem rasejumiem.

Techniskos rasejumos priekšmetus attēlo pēc franču zinibu vīra, inženiera Gaspard Monge (1746—1818) atrisinatiem paņēmieniem. Šie paņemieni dibinas uz tā saucamām ortogonalām projekcijām.

Uzsākot iepazīties ar ortogonalām projekcijām mums iepriekš jaaplūko un jaiegūst jēdziens par vispār lietojamiem projecešanas paņēmieniem un projekcijām. Taī pašā laikā mēs iepazīsimies ar galveniem jēdzieniem par plakņu, vaj priekšmetu pašām un viņu krītošām ēnām.

Projecešanas un ēnu pamatjēdzieni.

1 §. Patvaļigas figuras centralā projekcija.

Pieņemsim, ka telpā doti: kautkāds punkts Ω, plakne K un kautkāda aprobežota plakana (jeb neplakana) figura ABCD (3 ras.).

Savienojam punktu Ω ar dotās figuras ABCD kautkādu punktu piem. A, un pagarinot šo taisni līdz krustošanai ar plakni K iegūstam punktu A_p. Punktu A_p dēvē par punkta A centralo jeb polaro projekciju uz plaknes K, bet dotā punkta projekcijas iegūšanas paņēmienu dēvē par centralo projecešanu. Punkta projekciju apzīmesim ar indeksu „p", no vārda „projekcija".

Lai izšķirtu telpā doto punktu A no viņa projekcijas A_p, tad doto punktu sauc par oriģinalo punktu. Punktu Ω sauc par projekciju centru jeb polu. Taisni ΩA_p sauc par projecejošo taisni jeb projecejošo staru, bet plakni K — par projekciju jeb attēlu plakni.

Ja centrā Ω atrodas aplūkotaja acs, tad taisne ΩA_p ir redzes stars, kuŗa katrs punkts atstāj uz aplūkotaju vienu un to pašu iespaidu. Tapēc pat tādā gadijumā, kad oriģinalā punkta A pavisam nav, bet dota tikai viņa projekcija A_p, pēdejā atstāj uz aplūkotaja aci tādu pašu iespaidu, kā oriģinalais punkts A. Tapēc projekciju A_p pieņemts saukt par oriģinalā punkta A attēlu jeb perspektivi uz plaknes K.

Līdzigā kārtā punkti B_p, C_p un D_p ir centralās projekcijas jeb attēli no oriģinaliem punktiem B, C un D, guļošiem uz dotās līknes.

Skaidri redzams, ka katram oriģinalam punktam A atbilst viena pilnigi noteikta projekcija A_p,*) jo projecejošais stars ΩA_p krustojas ar plakni K tikai vienā vienigā punktā. Tapēc dotās līknes robežai ABCD atbilst tikai viena pilnigi noteikta projekcija $A_p B_p C_p D_p$, iegūta savienojot līknes atsevišķo punktu pakāpeniskās projekcijas.

---

*) Ja projecejošais stars ir līdztece attēlu plaknei K, tad dotā punkta perspektive atrodas bezgalibā.

Projecejošie stari ΩA_p, ΩB_p, ΩC_p u. t. t. visā kopumā sastāda smaiļa virsu un ir viņa veidules. Šo smaiļa virsu ari sauc par līknes ABCD smailisko projecejošo virsu. Ar attēlu plakni K krustodamās, viņa dod mums mekleto projekciju $A_p B_p C_p D_p$.

Ja uz projecejoša stara ΩA pieņemam patvaļigu punktu A_1, tad projecejošie stari ΩA un ΩA_1 sakrīt, tapēc punktu A un A_1 projekcijām jasakrīt kopejā punktā A_p. Skaidri saprotams, ka visu uz projecejoša stara ΩA_p guļošo punktu projekcijas sakrīt kopejā punktā A_p. Tas pierāda, ka projekciju A_p ar centru Ω pretejā kārtā savienodami, mēs nevaresim uz ša stara noteikt oriģinala punkta A stāvokli telpā, jo uz stara ΩA_p varam pieņemt bezgali daudz punktu A, A_1 u. t. t., kuŗu projekcijas sakrīt ar A_p. Tā tad, pretejā kārtā, pēc vienas dotās projekcijas A_p nevar atrast oriģinalā punkta stāvokli telpā.

Tamlīdzigi, uz attiecigiem stariem ΩB_p, ΩC_p un ΩD_p varam pieņemt kautkādus punktus B_1, C_1 un D_1, kuŗu projekcijas sakrīt ar jau atzīmetām attiecigām projekcijām B_p, C_p un D_p. Tapēc $A_p B_p C_p D_p$ var pieņemt kā bezgala daudz līkņu ABCD, $A_1 B_1 C_1 D_1$ u. t. t. kopeju projekciju, -- pie kam šās līknes atronas uz kopejas smailiskas projecejošas virsas, ar virsotni centrā Ω.

Ja mēs pieņemam patvaļigu punktu E figuras ABCD iekšpusē, tad ša punkta projekcija E_p atrodas projekcijas $A_p B_p C_p D_p$ iekšpusē. Visi stari, līdzigie ΩE, visā kopibā sastāda smailisko staru kūliti jeb projecejošo smaili. Laukums $A_p B_p C_p D_p$, pa kuŗu attēlu plakne K krusto projecejošo smaili, noteic dotās plaknes ABCD centralo projekciju.

2 §. Trijstūŗa centralā projekcija.

Katru plakni jeb priekšmetu var iedomaties sastāvošu no bezgali daudz atsevišķiem punktiem, kuŗu projekcijas atrodamas 1 § aprādītā kārtā. Uzmeklesim, piemēram, dotā trijstūŗa ABC centralo projekciju uz attēlu plaknes K (4 zīm.). Šaī gadijumā projecejošais smailis pārvēršas projecejošo plakņu ΩAB, ΩBC un ΩCA ierobežotā projecejošā piramidē ΩABC. Projecejošo plakņu krustošanās taisnes ar attēlu plakni K noteic malu AB, BC un CA projekcijas $A_p B_p$, $B_p C_p$ un $C_p A_p$. Tam līdzigi, kā iepriekšejā gadijumā, mēs $A_p B_p C_p$ varam uzskatit ari kā trijstūŗa $A_1 B_1 C_1$ centralo projekciju, kuŗa virsotnes guļ uz attiecigām projecejošās piramides šķautnēm. Tā tad, pēc zinamas projekcijas $A_p B_p C_p$ mēs nevaram pretejā kārtā noteikt oriģinalā trijstuŗa stāvokli telpā.

Attēlu plakne K krusto projecejošas piramides sānu malas pa taisnēm $A_p B_p$, $B_p C_p$ un $C_p A_p$, kuŗas ir attiecigo taišņu AB, BC un CA projekcijas. Ar šo pierādits, kā ikkatras taisnes projekcija ir taisne.*)

*) Atsevišķā gadijumā, kad visi caur doto taisni ejošie projecejošie stari sakrīt, taisnes projekcija pārvēršas punkta veidā.

Projekcijas garums vispārejā gādijumā nelīdzinas oriģinalai taisnei, bet var būt lielaks, jeb mazaks par viņu, atkaribā no oriģinalās taisnes, projekciju centra un projekciju plaknes savstarpigā stāvokļa telpā. Tā piemēram, 4 rasejumā projekcija $A_p C_p$ lielaka par oriģinalo taisni AC, bet mazaka par $A_1 C_1$*). Citiem vārdiem: *vispārejā gadijumā oriģinalā taisne projekcijā sagrozas.*

Pieņemsim uz AC patvaļigu punktu D un uzmeklesim viņa projekciju D_p. Projecejošais stars ΩD acim redzot guļ uz projecejošas plaknes ΩAC un tapēc stara ΩD krustošanās punktam D_p ar plakni K jaatrodās uz plaknes ΩAC krustošanās taisnes ar plakni K, t. i. projekcijai D_p ir jaatrodās uz projekcijas $A_p C_p$. Tā tad, dabujam: *kautkādas uz dotās taisnes* (AC) *guļoša punkta* (D) *projekcija* (D_p) *guļ uz dotās taisnes projekcijas* ($A_p C_p$).

3 §. Jēdziens par krītošām ēnām.

Iedomasimies, ka projekciju centrā Ω (3 un 4 ras.) atrodas gaismas avots, tad projecejošie stari, kas iziet no centra Ω, pārvēršas gaismas staros un projekcijas A_p, B_p, C_p un D_p pārvēršas attiecigo oriģinalo punktu A, B, C un D krītošās ēnās uz plaknes K. Projecejošais smailis $\Omega ABCD$... (3 ras.) pārvēršas gaismas smailī, un projecejošā piramide ΩABC (4 ras.) — gaismas piramidē.

Ja laukumi ABCD un ABC (3 un 4 ras.) necaurspīdigi, tad švītrotie laukumi $A_p B_p C_p D_p$ un $A_p B_p C_p$ noteic ēnas, krītošas no laukumiem ABCD jeb ABC uz plakni K Krītošās ēnas, kuŗas dabujam, ja gaismas avots atrodas galibā, sauc par *centralām krītošām ēnām.*

Tā kā līknes ABCD un $A_1 B_1 C_1 D_1$ (3 ras.) guļ uz viena un ta paša gaismas smaiļa virsas, tad $A_p B_p C_p D_p$ noteic šo līkņu kopejo krītošo ēnu uz plaknes K. To pašu var izteikt arī par trijstūŗu ABC un $A_1 B_1 C_1$ kopejo krītošo ēnu $A_p B_p C_p$ (4 ras.).

Lai iegūtu *patiesās* (*fiziskas*) ēnas, nepieciešami vajadzigs, lai punkts, no kuŗa krīt ēna uz kautkādu plakni, atrastos starp gaismas avotu un to plakni, uz kuŗu ēna krīt Šis noteikums ievērots, piemēram, priekš visiem trijstuŗa ABC punktiem (4 ras.), bet nav ievērots priekš trijstuŗa $A_1 B_1 B_1$ punktiem. Laukums $A_p B_p C_p$ ir $\triangle$-a ABC patiesā krītošā ēna, bet attiecibā uz $\triangle$-i $A_1 B_1 C_1$ laukums $A_p B_p C_p$ ir tikai $\triangle$-a $A_1 B_1 C_1$ *šķietamā jeb ģeometriskā ēna.*

---

*) Uz projecejošas plaknes $\Omega A_p C_p$ varam vilkt kautkādas taisnes lielakas vaj mazakas, nekā $A_p C_p$, kuŗu projekcijas ir $A_p C_p$.

4 §. Jēdziens par pašēnām.

Uz katras necaurspīdigas plaknes mēs izšķiram divas puses; viena ir pagriesta gaismas avotam, bet otra — pagriesta preteji. Pirmā puse — apgaismota, bet otrā — neapgaismota Plaknes (jeb kautkādas virsas vaj ķermeņa) tumšo pusi sauc par plaknes (jeb virsas vaj ķermeņa) pašēnu.

Pieņemsim, ka punktā Ω (3 ras.) atrodas gaismas avots, bet aplūkotajs atrodas priekš rasejuma plaknes; tad nav grūti iedomaties, ka plakne ABCD pagriesta pret aplūkotaju ar savu gaišo, bet plakne (vaj virsa) A_1 B_1 C_1 D_1 ar savu tumšo pusi, kas atrodas pašēnā.

Krītošās ēnas laukums rasejumā aizrādits biežām švītriņām, bet pašēna — atsevišķiem punktiem.

Tamlīdzigi, var iedomaties, ka $\triangle$ ABC (4 ras.) redzams no tumšās puses, bet $\triangle$ A_1 B_1 C_1 no gaišās puses. Virsa ABCD (3 ras.), saprotams, var būt tikai tad apgaismota, ja pieņemsim, ka virsa A_1 B_1 C_1 D_1 caurspīdiga. Tamlīdzigi, 4 rasejumā $\triangle$ A_1 B_1 C_1 tikai tad apgaismots, ja $\triangle$ ABC un plakne K caurspīdigi.

5 §. Ķermeņa centralā projekcija un ēnas.

Pieņemsim, ka telpā dots kautkāds ķermenis ABCD (5 ras.). Pieskares, vilktas no projekciju centra Ω pret dotā ķermeņa virsu, visā kopumā veido smailisko projecejošo virsu, kas krustodamies ar attēlu plakni K noteic dotā ķermeņa centralo projekciju A_p B_p C_p D_p. Punkti A, B, C, D u. t. t., kuŗos projecejošie stari pieskaras dotā ķermeņa virsai, noteic līkni, — ta saukto dotā ķermeņa redzamibas apveidu. Šī līkne atdala redzamo priekšmeta daļu (pret centrā Ω iedomato aplūkotaju pagriesto pusi) no neredzamās, pretejā pusē pagriestas ķermeņa daļas. Tapēc A_p B_p C_p D_p ir dotā ķermeņa redzamibas apveida ABCD projekcija.

Saprotams, kā pēc dotās projekcijas A_p B_p C_p D_p nevar atrast oriģinalā ķermeņa stāvokli telpā, jo bezgali daudziem ķermeņiem ABCD, A_1 B_1 C_1 D_1 u. t. t. ir kopejs projecejošais smailis un kopeja projekcija A_p B_p C_p D_p.

Ja centrā Ω atrodas gaismas avots, tad projecejošais smailis pārvēršas gaismas smailī, kas dotam ķermeņam pieskaras pa līkni ABCD. Šī līkne atdala gaišo priekšmeta pusi no pašēnas, tapēc līkni ABCD sauc ari par gaismas atdaļošo līkni jeb pašēnas apveidu.

Ja projekciju centrā Ω atrodas gaismas avots, tad centralā projekcija A_p B_p C_p D_p noteic dotā ķermeņa ABCD centralo krītošo ēnu uz plaknes K. Kā redzams, krītošās ēnas apveids ir gaismas atdaļošas līknes kritošā ēna, t. i. krītošas ēnas apveidam A_p B_p C_p D atbilst pašēnas apveids ABCD, un ari otradi.

Nav grūti saprast, ka projekciju A_p B_p C_p D_p var ari uzskatit' kā ķermeņa A_1 B_1 C_1 D_1 krītošo ēnu, pie tam krītošās ēnas A_p B_p C_p D_p apveidam atbilst pašēnas apveids A_1 B_1 C_1 D_1, un ari otradi.

6 §. Daudzplakņa centralā projekcija un ēnas.

Ja dots kautkāds daudzplaknis, tad projecejošais jeb gaismas smailis pārvēršas projecejošā jeb gaismas piramidē. 6 rasejumā attēlotas divas piramides ABCD un A_1 B_1 C_1 D_1, kuŗām kopeja centralā projekcija jeb krītošā ēna A_p B_p C_p D_p. No centra Ω caur atsevišķām piramides šķautnēm vilktas plaknes noteic šo šķautņu projecejošas jeb viņu gaismas plaknes. Šo projecejošo plakņu krustošanās taisnes ar attēlu plakni K noteic atsevišķo piramižu šķautņu centralās projekcijas jeb krītošās ēnas.

Saprotams, ka projekcijas jeb krītošās ēnas ārejo apveidu (mūsu gadijumā B_p C_p D_p) veido tās projecejošas plaknes (mūsu gadījumā ΩBC, ΩCD un ΩDB), kas pieskaras dotam daudzplaknim.

Linijas jeb šķautnes (mūsu gadijumā BC, CD un DB), pa kuŗām atsevišķas projecejošas jeb gaismas plaknes pieskaras dotai piramidei, sauc par redzamibas jeb gaismas atdalošām linijām jeb šķautnēm. Visā kopumā šās šķautnes sastāda dotā daudzplakņa redzamibas*) jeb pašēnas apveidu.

Figura B_p C_p D_p ir slēgta figura, tapēc ari attiecigam redzamibas jeb pašēnas apveidam BCD jabūt slēgtai figurai. Pie tam redzamibas apveids var būt plakana jeb neplakana figura (mūsu gadijumā dabujam plakanu figuru BCD).

Ja kautkāda punkta A projekcija jeb krītošā ēna A_p atrodas apveida B_p C_p D_p iekšpusē, tad tas nozīmē, kā attiecigā virsotnē A saejošo šķautņu projekcijas jeb ēnas ari atrodas apveida B_p C_p D_p iekšpusē.

Piramides ABCD sānu malas, kuŗas saiet virsotnē A (mūsu gadijumā sānu malas ABD, ACD un ABC) ir redzamas vaj neredzamas (atrodas pašēnā), atkaribā, vaj centrs Ω un virsotne A atrodas vienā pusē no redzamibas (pašēnas) apveida BCD, jeb dažadās pusēs. Mūsu gadijumā virsotne A un centrs Ω atrodas vienā pusē no apveida BCD, un tapēc sānu plaknes ABD, ADC un ABC ir redzamas (apgaismotas), ja aplūkotajs atrodas centrā Ω. Bet skatidamies uz ķermeni ABCD (6 ras.) no sāniem, mēs saprotams, redzam tikai daļu no plaknēm ABD, ADC un ABC.**)

Tamlīdzigo varam aizrādit attiecibā uz piramides A_1 B_1 C_1 D_1 sānu malām.

*) Pie tam domats, ka aplūkotajs atrodas centrā Ω.

**) Aizrāditais protams attiecas tikai uz ķermeni ar izliekto virsu; bet priekš ķermeņa ar ieliekto virsu tas ne vienmēr ir pareizi.

7 §. Ķermeņa līdzteku projekcijas un ēnas.

Ja projekciju centrs Ω attālinas līdz bezgalibai, tad projecejošie stari krustodamies bezgalibā top savstarpeji līdzteči. Taisni *m* (7 ras.), kas norāda kādā virzienā atrodas bezgali tālais projekciju centrs $\Omega\infty$,*) sauc par projecešanas virzienu.

Saule no zemes stāv ļoti tāļu, tapēc viņas starus mēs varam pieņemt savstarpeji ||. Projekcijas, iegūtas no bezgali tāliem punktiem projecejot, sauc par līdzteku projekcijām un aizrādito projecešanas veidu sauc par līdzteku projecešanu.

Līdzigā kārtā, no bezgalibā atrodošā gaismas avota (piem. saules) iegūtas ēnas sauc par līdzteku jeb saules ēnām. 7 un 5 rasejumu salīdzinadami redzam, ka pie līdzteku projecešanas projecejošais jeb gaismas smailis pārvēršas projecejošā jeb gaismas velteni, kas ietin doto ķermeni un pieskaras pie viņa virsas pa līkni ABCD. Projecejošā velteņa veidules ir līdzteces projecešanas virzienam *m*. Projecejošais jeb gaismas veltenis ar necaurspīdigo plakni K krustodamies, veido dotā ķermeņa līdzteku projekciju jeb krītošo ēnu $A_p B_p C_p D_p$. Līkni ABCD, kas ķermeņa redzamo jeb apgaismoto pusi atdala no neredzamās jeb neapgaismotās, sauc par dotā ķermeņa redzamibas jeb pašēnas apveidu jeb par gaismas atdaļošo līkni. Saprotams, ka projekcijas jeb krītošās ēnas apveidam $A_p B_p C_p D_p$ jasaskan ar redzamibas jeb pašēnas apveidu ABCD, vaj arī otradi.

Ja dots kautkāds daudzplaknis, tad projecejošais veltenis pārvēršas projecejošā prizmā, kas ietin doto daudzplakni. Tādu gadijumu dabusim, pieņemdami, ka 6 rasejumā projekciju centrs Ω atrodas bezgalibā.

8 §. Projecešana no diviem galibā atrodošamies centriem.

Līdz šim aplūkotos gadijumos katram dotam punktam bija viena vieniga, pilnigi noteikta projekcija, bet otradi, pēc dotās projekcijas mēs nevarejām uziet oriģinalā punkta stāvokli telpā. Tādas nenoteiktibas novēršanai, dotais punkts A japrojecē uz plakni K no diviem dažadiem projekciju centriem Ω_1 un Ω_2 (8 ras.). Tā iegūtas projekcijas apzīmē ar A_{1p} un A_{2p}. Lai pēc dotām projekcijām A_{1p} un A_{2p} varetu uziet oriģinalā punkta A stāvokli telpā, tad A_{1p} savieno ar Ω_1 un A_{2p} savieno ar Ω_2. Šo staru griezuma punkts noteic oriģinalā punktā A stāvokli telpā.

Līdzigā kārtā, pēc divām dotām projekcijām var atrast kaut kādas plaknes vaj priekšmeta oriģinalo stāvokli telpā. Tā piemēram, 9 rasejumā aizrāditas △-a ABC projekcijas $A_{1p} B_{1p} C_{1p}$ un $A_{2p} B_{2p} C_{2}$. Lai pretejā ceļā

*) Ar indeksu ∞ apzīmē bezgali tālus ģeometriskus elementus.

atrastu oriģinalā $\triangle$-a ABC stāvokli telpā, jauzmeklē atsevišķo trijstūŗa virsotņu stāvokļi telpā un uzmekletie punkti jāsavieno. Atsevišķo trijstūŗa malu stāvokļus telpā varam noteikt ari citadi. Tā piemēram, malas AB stāvokli telpā dabusim, uzmeklejot attiecigo projecejošo plakņu $\Omega_1 A_{1_p} B_{1_p}$ un $\Omega_2 A_{2_p} B_{2_p}$ krustošanās taisni.

9 §. Projecešana no diviem bezgali tāliem centriem.

Ja abi projekciju centri $\Omega_1 \infty$ un $\Omega_2 \infty$ atrodas bezgalibā (10 ras.) un ir noteikti ar attiecigiem projecešanas virzieniem m_1 un m_2, tad punkta A projekcijas A_{1_p} un A_{2_p} uz plaknes K dabujam, vilkdami caur A līdzteces ar m_1 un m_2 un uzmeklejot šo projecejošo staru krustošanās punktus ar K. Ja otradi, ir dotas projekcijas A_{1_p} un A_{2_p}, tad nav grūti atrast oriģinalo punktu A telpā, velkot no A_{1_p} un A_{2_p} projecejošos starus apgriestā virzienā līdz savstarpejai krustošanai. Aizrāditā kārtā varam attēlot kautkādu plakni vaj ķermeni projekcijās, un otradi pēc dotām projekcijām varam uzmeklet oriģinalās plaknes vaj oriģinalā ķermeņa stāvokli telpā.

Līdz šim mēs projecejām punktu vaj ķermeni uz vienu projekciju plakni. Bet uz iepriekšejiem noteikumiem pamatodamies, mēs varam projecet punktus vaj priekšmetus no diviem projekciju centriem, galibā vaj bezgaibā atrodošamies uz divām projekciju plaknēm K_1 un K_2. Tā piemēram, 11 rasejumā $\triangle$ABC projecets no diviem bezgali tāliem projekciju centriem $\Omega_1 \infty$ un $\Omega_2 \infty$ (dotiem ar projecešanas virzieniem m_1 un m_2) uz kautkādām divām plaknēm K_1 un K_2, dabujot pie tam projekcijas $A_{1_p} B_{1_p} C_{1_p}$ un $A_{2_p} B_{2_p} C_{2_p}$. Saprotams, ka uz doto projekciju $A_{1_p} B_{1_p} C_{1_p}$ un $A_{2_p} B_{2_p} C_{2_p}$ pamata nav grūti apgriestā kārtā uzmeklet oriģinalā $\triangle$-a ABC stāvokli telpā.

10 §. Slīpleņķainās un ortogonalās projekcijas.

Līdz šim mēs pieņēmām, ka projecejošie stari veido ar projekciju plakni kautkādus leņķus, mazakus vaj lielakus par taisno leņķi. Tapēc līdz šim aplūkotās projekcijas sauc par slīpleņķainām projekcijām. Ja projecejošie stari veido ar projekciju plaknēm taisnus leņķus, tad tādas projekcijas sauc par taisnleņķainām jeb ortogonalām projekcijām.

Ja mēs 11 rasejumā pieņemsim, ka projekciju plaknes K_1 un K_2 savstarpeji stateniskas, un projecešanas virziens $m_1 \perp K_1$, bet $m_2 \perp K_2$, tad dabujam to projecešanas paņēmienu, kuŗa pamatlicejs ir slavenais franču zinibu vīrs un inženieris Gaspard Monge. Turpmak par ortogolām projekcijām runajot, mēs priekšmetus attēlosim uz divām plaknēm pēc aizrādita paņēmiena. Saprotams, ka uz doto projekciju pamata mēs apgriestā kārtā varesim viegli un pilnigi noteikti uzmeklet oriģinalo priekšmetu stāvokļus telpā. Priekšmetus plakanos techniskos rasejumos attēlojot, šiem apstākļiem izšķirošs svars, kapēc ari aizrādito paņēmienu visbiežaki lieto technikā. Iekams ar ortogonalām projekcijām tuvaki iepazīsimies, mums vēl jaaplūko, kā rīkoties izpildot ģeometriskas konstrukcijas, ja konstrukciju punkti atrodas ārpus rasejuma robežām, t. i. ja viņi nepieejami.

11 §. Konstrukciju izpildišana ar nepieejamo punktu palīdzibu.

1. uzdevums. Divu taišņu a un b griezuma punkts X atrodas ārpus rasejuma robežām.*) Caur doto punktu C un nepieejamo punktu X javelk taisne c (12 ras.).

Uzdevuma atrisinašanai pieņemam kautkādu △-i ABC, kuŗa virsotnes A un B guļ uz attiecigām taisnēm a un b. Pēc tam velkam $A'B' \parallel AB$ un caur punktiem A′ un B′ velkam $A'C' \parallel AC$ un $B'C' \parallel BC$, iegūstot △-i A′B′C′, līdzigu △-im ABC. Stari, kas savieno divu līdzigo trijstūŗu virsotnes, krustojas kopejā punktā X, tapēc ari stars $c = CC'$ iet caur nepieejamo punktu X.

Augšmineto uzdevumu var atrisinat ari šādi. Kā zinams, kautkāda trijstūŗa augstumi krustojas kopejā punktā. Tapēc no dotā C punkta (13 ras.) velkam stateni pret a un atzīmejam punktu B, kuŗā šis statenis krusto taisni b. Tamlīdzigi, no C velkam stateni pret b un atzīmejam krustošanās punktu A ar a. Savienojot punktus A, B un C, iegūstam △-i ABC. Beidzot velkam no punkta C stateni pret AB, t. i. velkam trijstūŗa ABC trešo augstumu un iegūstam mekleto taisni c, kas krustojas ar taisnēm (augstumiem) a un b nepieejamā kopejā punktā X.

2 uzdevums. Dotas kautkādas divas taisnes a un b, kuŗu krustošanās punkts X atrodas ārpus rasejuma robežām. Caur nepieejamo punktu X javelk līdztece c trešai dotai taisnei d (14 ras.).

Šā uzdevuma atrisinašanai velkam pret d kautkādu stateni f, kas krusto taisnes a un b punktos A un B. Tad uzmeklejam trijstūŗa ABX augstumu krustošanās punktu C. Tam nolūkam no punkta A velkam $h_1 \perp b$ un no B velkam $h_2 \perp a$. Augstumi h_1 un h_2 krustojas punktā C. Caur šo punktu C iet trešais augstums h_3, stateniski pret $AB = f$. Trešais augstums h_3 ir meklētā taisne c, jo viņa iet caur nepieejamo punktu X un viņas virziens ir stateniski pret f, t. i. līdztekus d.

3 uzdevums. Doti divu taišņu pāri a_1, b_1 un a_2, b_2, kuŗu attiecigie griezuma punkti X_1 un X_2 nepieejami. Janoteic nepieejamās taisnes $c = X_1 X_2$ virziens (15 ras.).

*) Lai varetu skaidri saprast izvestās konstrukcijas, tad visos sekošos piemēros nepieejamie punkti X rasejumā aizrāditi.

Neskaitot punktus X_1 un X_2, dotās taisnes krustojas vēl četros punktos. Pieņemsim, ka no šiem četriem punktiem kautkādi divi pretguļošie punkti, piemēram A un B, atrodas rasejuma robežās. Ja tas tā nebūtu, tad mēs (pēc 1 uzdevuma, 12 ras.) varetu doto taišņu a_1, b_1 un a_2, b_2 vietā vilkt taisnes, kas iet caur attiecigiem punktiem X_1 un X_2, kuŗām divi pretguļošie krustošanās punkti (A un B) pieejami. Uz AB pieņemam kautkādu punktu B' un caur viņu velkam $b_1' \parallel b_1$ un $b_2' \parallel b_2$. Taisnes b_1' un b_2' krusto a_1 un a_2 attiecigos punktus X_1' un X_2'. Savienojot punktus X_1', X_2' un B', iegūstam $\triangle$-i $X_1' X_2' B'$ līdzigu $\triangle$-im $X_1 X_2 B$, jo attiecigo virsotņu stari $X_1' X_1$, $X_2' X_2$ un $B'B$ krustojas kopejā punktā A un malas $B'X_1'$, BX_1 un $B'X_2'$, BX_2 savstarpeji līdzteces. Tapēc ari malas $X_1' X_2'$ un $X_1 X_2$ ir savstarpeji līdzteces un taisne $c' = X_1' X_2'$ noteic nepieejamās taisnes $c = X_1 X_2$ virzienu.

I daļa. Ortogonalās projekcijas.

I nodaļa. Punktu projekcijas.

12 §. Pamatjēdzieni. Punkts, atrodošs I kvadrantā.

Pieņemsim divas savstarpeji stateniskas plaknes: horicontalo H un vertikalo V (16^a ras.). Taisni OX, pa kuŗu krustojas plaknes H un V, sauc par projekciju asi. Projekciju ass OX sadaļa horicontalo projekciju plakni priekšejā daļā H_I un pakaļejā daļā H_{II}; tamlīdzigi OX sadala vertikalo projekciju plakni augšejā daļā V_I un apakšejā daļā V_{II}.

Ja doto projekciju plaknes H un V iedomasimies neaprobežoti pagarinatas uz visām pusēm, tad viņas sadala visu telpu četrās daļās, jeb kvadrantos, pie tam:

I kvadrants ir telpas daļa, ierobežota ar H_I un V_I,
II kvadrants ir telpas daļa, ierobežota ar H_{II} un V_I,
III kvadrants ir telpas daļa, ierobežota ar H_{II} un V_{II},
IV kvadrants ir telpas daļa, ierobežota ar H_I un V_{II}.

Pieņemsim I kvadrantā kautkādu punktu A. Lai iegūtu ša punkta projekcijas uz plaknēm H un V pēc Gaspard Monge's paņēmiena, tad punktu A projecejam, kā tas jau aizrādits 10 §, no diveem bezgali tāliem projekciju centriem $\Omega_1\infty$ un $\Omega_2\infty$, uz dotām projekciju plaknēm H un V. Pie tam projecešanas virziens $m_1 \perp H$, bet $m_2 \perp V$. Pieņemsim, ka $\Omega_1\infty$ atrodas bezgalibā virs H un $\Omega_2\infty$ bezgalibā priekš V. Tad dabujam ar šautriņām aizrāditus virzienus m_1 un m_2.

Punkti A_1 un A_2, kur projecejošie stari AA_1 un AA_2 krusto plaknes H un V, noteić divas dažadas projekcijas no viena un tā paša oriģinalā punkta A. Staru AA_1 sauc par horicontali projecejošo staru, bet staru AA_2 — par vertikali projecejošo staru. Plakni H sauc par horicontalo projekciju plakni, bet uz viņas iegūto projekciju A_1 sauc par oriģinalā punkta A ortogonalo horicontalo projekciju jeb vienkārši par punkta A horicontalo projekciju.

Punkta A horicontalā projekcija A_1 ir punkta A attēls, novērojot punktu A no bezgala attāluma n o a u g š a s. Projekciju A_1 nosauksim par oriģinalā punkta A v i r s s k a t u.

Plakni V sauc par v e r t i k a l o p r o j e k c i j u p l a k n i, bet uz viņas iegūto projekciju A_2 — par oriģinalā punkta A o r t o g o n a l o v e r t i k a l o p r o j e k c i j u jeb vienkārši par punkta A v e r t i k a l o p r o j e k c i j u.

Vertikalā projekcija A_2 ir oriģinalā punkta A attēls, novērojot punktu A no bezgala attāluma n o p r i e k š a s. Projekciju A_2 nosauksim par oriģinalā punkta A p r i e k š s k a t u.

Projecejošie stari $A A_1$ un $A A_2$ noteic plakni $A A_1 A_x A_2$, kas stateniska pret projekciju plaknēm H un V, kapēc plakne $A A_1 A_x A_2$ stateniska ari pret plakņu H un V krustošanās taisni, t. i. pret projekciju asi OX. Plakni $A A_1 A_x A_2$ sauc par punkta A d i v e j a d i p r o j e c e j o š o plakni, jo tā satur abus projecejošus caur pieņemto punktu A ejošus starus. Plakne $A A_1 A_x A_2$ krusto H pa taisni $A_1 A_x$, bet V — pa $A_2 A_x$, pie kam taisnes $A_1 A_x$ un $A_2 A_x$ stateniskas pret OX.

Virzieni m_1 un m_2 ir savstarpeji stateniski, kapēc figura $A A_1 A_x A_2$ ir taisnstūris ar vienlīdzigām pretguļošām malām, tapēc $A A_1 = A_2 A_x$ un $A A_2 = A_1 A_x$.

T ā t a d, o r i ģ i n a l ā p u n k t a A a t s t a t u m s n o h o r i c o n t a l ā s p r o j e k c i j u p l a k n e s i r v i e n l ī d z i g s a r š a p u n k t a v e r t i k a l ā s p r o j e k c i j a s A_2 a t s t a t u m u n o p r o j e k c i j u a s s OX; u n o r i ģ i n a l ā p u n k t a A a t s t a t u m s n o v e r t i k a l ā s p r o j e k c i j u p l a k n e s i r v i e n l ī d z i g s a r š a p u n k t a h o r i c o n t a l ā s p r o j e k c i j a s A_1 a t s t a t u m u n o p r o j e k c i j u a s s OX.

Projekcijas A_1 un A_2 guļ uz divām dažadām plaknēm, kas runa preti mūsu pamatuzdevumiem, jo mēs meklejam noteikumus punkta vaj ķermeņa attēlošanai uz v i e n a s plaknes. Lai to panāktu, tad plakni V aizrādītā virzienā griežot ap asi OX, savienojam ar plakni H, pie tam V_I savienojas ar H_{II} un V_{II} ar H_I. Vertikalā projekcija A_2 pēc griešanās ieņems uz plaknes H jaunu stāvokli, ko mēs atzīmesim tāpat ar A_2. Vertikalās projekcijas griešanās rādius ir $A_2 A_x$, bet griešanās plakne sakrīt ar divejadi projecejošās plaknes pagarinajumu. Tapēc vertikalās projekcijas A_2 jaunais stāvoklis uz plaknes H atrodas uz taisnes $A_1 A_x$ pagarinajuma, pa kuru divejadi projecejoša plakne krustojas ar H. Tā tad, p ē c p l a k n e s V s a v i e n o š a n ā s a r H d a b u j a m a b a s p r o j e k c i j a s A_1 un A_2 uz k o p e j a s t a t e ņ a p r e t p r o j e k c i j u a s i OX. Pie tam, jaunajam vertikalās projekcijas A_2 atstatumam no ass OX jabūt tikpat garam, kā īstās projekcijas A_2 atstatumam no ass OX.

Parasti tiek pieņemts, kā horicontalā projekciju plakne sakrīt ar rasejuma plakni, tad dabujam 16^b rasejumā aizrādito punkta attēlojumu divās projekcijās. Ar tādām savienotām projekciju plaknēm (16^b rasejums) mums patiesibā tikai darišanas, bet 16^a rasejums tikai aizrādits, lai skaidri varetu novērot telpā izvestas konstrukcijas.

Aizrāditā kārtā varam divās projekcijās (virs un priekšskatā) attēlot kautkādus priekšmetus. Tā kā šo attēlošanas paņēmienu pa lielakai daļai lieto techniskos rasejumos, mēs turpmak katru rasejumu, kuŗā kā 16^b rasejumā abas ortogonalās projekcijas no kautkāda punkta jeb priekšmeta ir savienotas aizrāditajā veidā ar rasejuma plakni — nosauksim par technisko rasejumu. Vēlak mēs redzesim, kā techniskā rasejumā punktu jeb priekšmetu var attēlot ari trijās ortogonalās projekcijās (§§ 13 un 61).

16^b rasejumā mēs redzam, ka projekcija A_1 atrodās uz H_I, t. i. zem OX un projekcija A_2 uz V_I, t. i. virs OX. Tā tad, ja oriģinalais punkts atrodas I kvadrantā, tad techniskā rasejumā viņa horicontalā projekcija A_1 atrodas zem ass OX, bet vertikalā projekcija A_2 virs ass OX.

Taisne $A_1 A_x$ norāda vertikali projecejoša stara virzienu, bet taisne $A_2 A_x$ ir horicontali projecejoša stara savienotais virziens. Taisne $A_1 A_2$ ir divejadi projecejošas plaknes griezuma linija ar H.

Turpmāk techniskā rasejumā plakņu H un V atsevišķas daļas (H_I, H_{II}, V_I un V_{II}) netiks vairs aizrāditas, bet no liela svara ir viņas domās vienmēr atzīmet techniskā rasejumā.

Plakņu H un V ierobežojumi taisnstūŗu veidā tapat techniskā rasejumā turpmak netiks aizrāditi, jo mēs projekciju plaknes varam neaprobežoti pagaŗinat uz visām pusēm. Lai mēs apgriesti pēc dotām projekcijām, t. i. uz dotā techniskā rasejuma pamata noteiktu oriģinalā punkta stāvokli telpā, tad jaiedomajās, ka projekciju plaknes nostāditas pirmatnejā stāvoklī, t. i. plakne V_I, ar visiem punktiem uz tās, pacelta no rasejuma plaknes (H) uz augšu, bet V_{II}, ar visiem punktiem uz tās, ir pagriesta uz leju no H. Velkot pēc tam no A_1 stateni pret H, un no A_2 stateni pret attiecigo plaknes V daļu, t. i. 16^a rasejumā aizraditas konstrukcijas apgriesti izdaridami, mēs iegūsim projecejošos starus A_1 A un A_2 A, kas krustodamies noteic oriģinalā punkta A stāvokli telpā. Šādi mēs atrodam paņēmienu attēlot punktus, kas atrodas ne uz rasejuma plaknes, bet telpā.

Oriģinalā punkta A stāvokli telpā uz techniskā rasejuma (16^b ras.) pamata varam noteikt ari šādi. No A_1 velkam stateni pret H (t. i. rasejuma plakni) un uz ša stateņa nospraužam nogriezni $A_2 A_x$, kas pēc augšā aizrāditā līdzinas oriģinalā punkta A attālumam no plaknes H. Pie tam nogriezuis $A_2 A_x$ janosprauž uz augšu jeb uz leju no H, atkaribā no tam, vaj oriģinalais punkts atrodas virs H (I jeb II kv.), jeb zem H (III jeb IV kv.).

Punkta projekcijas pilnigi noteic oriģinalā punkta stāvokli telpā, tapēc oriģinalais punkts skaitas dots, ja dotas viņa ortogonalās projekcijas. Tapēc, ja mēs teiksim, dots oriģinalais punkts A, tad tas nozīmē, kā techniskā rasejumā (virs un priekšskatā) ir dotas iedomajama oriģinalā punkta projekcijas A_1 un A_2. Tamlīdzigi, mēs turpmak vienkāršibas dēļ teiksim, ka taisne, plakne, daudzplaknis u. t. t. doti, ja techniskā rasejumā dotas taisnes, plaknes, daudzplakņa u. t. t. projekcijas.

Lai visu izskaidroto labaki varetu piesavinaties, tad katram studejošam ieteicams pagatavot atticigo veiduli. Tam nolūkam no bieza kartona jaizgriež divi taisnstūŗi, kā tas aizrādits 17 rasejumā, bet tikai apmēram desmit reiz lielaki. Puse no ass OX abos taisnstūŗos jaizgriež aizrāditā veidā, pie tam izgriezuma šķirtnei jabūt mazliet lielakai par kartona biezumu. Abi taisnstūŗi gar asi OX jaiebīda viens otrā un janostāda savstarpeji stateniski, kā tas aizrādits 16a rasejumā. Lai oriģinalā punkta A stāvokli dabiski attēlotu telpā, tad jaņem drātite, jasaliec taisnā leņķī, viens gals (leņķa mala) jaiesprauž stateniski pret H punktā A_1, bet otrs gals (leņķa mala) jaiesprauž punktā A_2, stateniski pret V, tad saliektās drātites stūŗa virsotne noteic oriģinala punkta A stāvokli telpā, bet viņa malas — dotā punkta projecejošos starus; drātites plakne noteic divejadi projecejošo plakni.

Lai labaki sajēgtu telpā izvestās konstrukcijas un viņu attēlojumu techniskā rasejumā, tad ieteicams visas konstrukcijas, atsevišķo taišņu, plakņu un ķermeņu stāvokļus aizrādit dabā ar veiduli, kuŗš turpmak attiecigā veidā japapildina ar taisnēm (drātitēm) un plaknem (attiecigā veidā izgriestiem kartoniem). Tādi veiduļi vienmēr jalieto praktiskos darbos un ar viņu janoteic atsevišķo ģeometrisko elementu stāvokļi telpā, kā ari attiecigas projekcijas.

13 §. Punkta koordinatas.

Patvaļigi pieņemta punkta A (18 ras.) stāvokli telpā vispārejā gadijumā noteic ša punkta attālumi jeb koordinatas x, y un z no trim savstarpeji stateniskām plaknēm W_I, V_I un H_I. Tā saucamās koordinatu plaknes krustojas pa koordinatu asim OX, OY un OZ, kuŗas saiet kopejā punktā O, tā saucamā koordinatu sākumā.

Parasti koordinatu ass OX virzienu no kreisās uz labo pusi pieņem kā pozitivu virzienu un apzīmē ar + OX; bet pretejo virzienu – kā negativu (– OX). Ass OY virzienu, vērstu pret aplūkotaju, pieņem kā pozitivu (+ OY), bet pretejo virzienu – kā negativu (– OY). Ass OZ virzienu no apakšas uz augšu pieņem kā pozitivu (+ OZ), bet pretejo virzienu – kā negativu (– OZ).

Parasti plakni H_I pieņem horicontalajā stāvoklī un mēs šo plakni varam uzskatit kā horicontalo projekciju plakni. Tad plakne V_I ir vertikalā projekciju plakne, bet W_I ir trešā projekciju plakne, tā saucamā profilā jeb sānu plakne. Profilā plakne W_I ir līdztece punkta A divejadi projecejošai plaknei $A A_1 A_x A_2$. Saprotams, ka mēs tapat kā 16a rasejumā varam koordinatu jeb projekciju plaknes pagaŗinat uz visām pusēm un viņas attiecigi apzīmet. Punkta A ortogonalo projekciju uz profilās jeb trešās projekciju plaknes W_I atzīmesim ar A_3, un šo projekciju sauksim par profilo projekciju jeb sānu skatu (attēlu), jo mēs šo attēlu dabujam, skatidamies uz oriģinalo punktu A no bezgalibas sānos.

Projecejošie stari $A A_1$, $A A_2$ un $A A_3$ noteic trīs divejadi projecejošas plaknes $A A_1 A_x A_2$, $A A_1 A_y A_3$ un $A A_2 A_z A_3$, no kuŗām pirmā stateniska pret asi OX un līdztece plaknei W_I, otra — stateniska pret asi OY un līdztece plaknei V_I, bet trešā — stateniska pret asi OZ un līdztece plaknei H_I. Atzīmejot šo divejadi projecejošo plakņu griezuma taisnes ar projekciju plaknēm, dabujam telpā taisnstūŗa paralelepipedu, kuŗā $A A_3 = x = A_2 A_z = O A_x$, $A A_2 = y = A_1 A_x$ un $A A_1 = z = A_2 A_x$, t. i.: punkta A_x atstatums no koordinatu sākuma O līdzinas koordinatai x; horicontalās projekcijas A_1 atstatums no ass OX līdzinas koordinatai y; un projekcijas A_2 atstatums no ass OX līdzinas koordinatai z.

Atkaribā no tam vaj virzieni $O A_x$, $A_x A_1$ un $A_x A_2$ sakrītīs ar asu OX, OY un OZ pozitiviem vaj negativiem virzieniem, mēs attiecigām koordinatām dabusim pozitivas – vaj negativas nozīmes. Mūsu gadijumā dabujam koordinatām x, y un z pozitivas nozīmes (+).

Ar divām projekcijām A_1 un A_2 oriģinalā punkta A stāvoklis telpā pilnigi noteikts (12 §), tapēc patiešam nevajadzetu projecet punktu A uz profilo plakni. Bet techniskos rasejumos ir pieņemts priekšmetus attēlot trijās projekcijās (skatos); jo profilā projekcijā dabiskā lielumā attēlojas tādi priekšmeta apveidi, kas guļ uz plaknēm, stateniskām pret H un V, jeb uz līdzteku plaknēm ar W, kuŗi projekcijās uz H un V attēlojas taisno liniju veidā, kā to vēlak vēl izskaidros (61 §).

Lai iegūtu punkta A projekcijas techniskā rasejumā, jasavieno, kā tas aizrādits 12 §, V_{II} ar H_I, jeb kas gala iznākumā tas pats, H_I ar V_{II}, kā tas aizrādits 18a rasejumā. Šādu paņēmienu lietojam, ja V plakne sakrīt ar rasejuma plakni, t. i., ja mēs rasejam uz vertikalās plaknes (sienas tafeles).

Lai ari profilo projekciju A_3 iegūtu uz rasejuma plaknes, tad profilo plakni W_I griežam ap asi OZ, kamēr W_I uzgulstas uz V_I. Plakni W_I griežot stingri jaievēro sekojošais. Ja mēs skatisimies uz doto punktu (jeb priekšmetu) no bezgalibas sānos, no labās uz kreiso pusi, kā tas pieņemts 18a rasejumā, tad profilo plakni W_I savienojot ar V, viņa jagriež projecejošā stara $A A_3$ virzienā. Tapēc šinī gadijumā dabujam plaknes W_I savienoto stāvokli W_{I_0} pa kreisi no ass OZ. Bet ja mēs uz doto punktu (jeb priekšmetu) skatamies no bezgalibas sānos, no kreisās uz labo pusi, kā mēs to pa lielakai daļai turpmak pieņemsim, tad dabusim plaknes W_I savienoto stāvokli pa labo pusi no OZ. Tapēc, ja pēc savienošanas profilā projekcija A_3 atrodas pa kreisi no OZ, jeb kas tas pats, no A_2, tad mums darišana ar sānu skatu no labās uz kreiso pusi. Šos noteikumus neievērojot, techniskos rasejumos var izcelties dažadi pārpratumi priekšmetus izgatavojot uz rasejuma pamata.*)

Plakni W_I savienojot ar V iegūstam projekcijas A_3 savienoto stāvokli uz taisnes, kas iet caur A_2 līdztekus OX, jo projekcija A_3 virzas uz pagarinatas divejadi projecejošas plaknes $A\,A_2\,A_z\,A_3$, kuŗa krusto V pa taisni $A_2\,A_z \parallel OX$. Taisne $A_3\,A$ pēc profilās plaknes savienošanas ieņem jauno stāvokli $A_3\,A_{y_0} \perp OX$ jeb $A_3\,A_{y_0} \parallel A_2\,A_x$.

Lielakas skaidribas dēļ atsevišķā rasejumā (18b ras.) atzīmetas oriģinalā punkta A projekcijas A_1, A_2 un A_3, bez tam aizrādīti negativie un pozitivie asu OX, OY un OZ, kā ari attiecigo koordinatu virzieni. Lai 18b rasejumā pēc dotām projekcijām A_1 un A_2 iegūtu trešo projekciju A_3, no centra O ar radiusu $OA_y = A_xA_1$ velkam loku līdz krustošanai ar OX un no iegūtā punkta A_{y_0} velkam stateni pret asi OX līdz krustošanai ar taisni, kas vilkta caur A_2 līdztekus OX. Tā kā divas projekcijas pilnigi noteic oriģinalo punktu, mēs turpmak punktus un citus ģeometriskus elementus pa lielakai daļai atzīmesim tikai divās projekcijās.

14 §. Punkts, atrodošs II kvadrantā.

Kā redzams 19a rasejumā, kur attēlots patvaļigs punkts B II kvadrantā, tad viņa projekcija B_1 guļ uz H_{II}, bet B_2 – uz V_I. Techniskā rasejumā (19b ras.) abas projekcijas B_1 un B_2 atrodas virs ass OX. Horicontalai projekcijai B_1 ir negativa koordinata ($-y$), bet vertikalai projekcijai B_2 pozitiva ($+z$).

15 §. Punkts, atrodošs III kvadrantā.

Kā redzams 19a rasejumā, kur attēlots patvaļigs punkts C III kvadrantā, viņa horicontalā projekcija C_1 guļ uz H_{II} un vertikalā projekcija C_2 uz V_{II}. Tapēc techniskā rasejumā (19b ras.) C_1 atrodas virs, bet C_2 zem OX. Pie tam, kā horicontalai, tā ari vertikalai projekcijai ir negativa koordinata ($-y$ un $-z$).

16 §. Punkts, atrodošs IV kvadrantā.

Kā redzams 19a rasejumā, kur attēlots patvaļigs punkts D IV kvadrantā, horicontalā projekcija D_1 guļ uz H_I un vertikalā projekcija D_2 – uz V_{II}. Tapēc techniskā rasejumā (19b ras.) abas projekcijas D_1 un D_2 atrodas zem OX, pie kam horicontalai projekcijai D_1 ir pozitiva koordinata ($+y$), bet vertikalai projekcijai D_2 – negativa ($-z$).

*) Citreiz mēs techniskos rasejumos attēlojam priekšmetu ne tikai skatidamies uz viņu no augšas, t. i. virsskatā, bet ari skatidamies uz priekšmetu no apakšas uz augšu, t. i. apakšskatā. Pēdejā gadijumā attiecigam skatam jeb projekcijai jaatrodas virs vertikalās projekcijas.

17 §. Punkts, guļošs uz H_I.

Ja dots patvaļigs punkts E, kas guļ uz H_I (20 ras.), tad ar oriģinalo punktu E sakrīt viņa horizontalā projekcija, t. i. $E_1 = E$. Punkta E vertikali projecejošais stars saplūst ar horicontalo projekciju plakni, tapēc punkta E vertikali projecejošā stara griezuma punkts ar plakni V, t. i. vertikalā projekcija E_2 guļ uz ass OX. Techniskā rasejumā (20^b ras.) $E = E_1$ atrodas zem ass OX, bet E_2 guļ uz OX. Punkta E atstatums no horicontalās projekciju plaknes vienlīdzigs 0, tapēc koordinata $z = o$; bet koordinatai y ir zinama pozitiva nozīme.

18 §. Punkts, guļošs uz H_{II}.

Ja dots patvaļigs punkts F uz plaknes H_{II} (20^a ras.), tad tamlīdzigi, kā iepriekšejā gadijumā $F_1 = F$ un atrodas uz H_{II}, bet F_2 iegūstam uz ass OX.

Techniskā rasejumā (20^b ras.) $F = F_1$ atrodas virs ass, bet F_2 guļ uz ass OX. Vertikalai projekcijai F_2 ir koordinata $z = o$, bet horicontalai projekcijai F_1 ir zinama negativa koordinata ($-y$).

19 §. Punkts, gulošs uz V_I.

Ja dots patvaļigs punkts G uz plaknes V_I (20 ras.), tad viņa patiesigā vertikalā projekcija G_2 sakrīt ar oriģinalo punktu, t. i. $G_2 = G$. Punkta G horicontali projecejošais stars saplūst ar vertikalo projekciju plakni, tapēc horicontali projecejoša stara griezuma punkts ar H, t. i. horicontalā projekcija G_1 guļ uz ass OX, t. i. $G_1 = G_x$.

Techniskā rasejumā (20^b ras.), vertikalā projekcija G_2 atrodas virs ass OX un viņai ir pozitiva koordinata $+z$, bet horicontalā projekcija G_1 guļ uz ass OX un viņas koordinata $y = o$.

20 §. Punkts, guļošs uz V_{II}.

Ja dots patvaļigs punkts J uz plaknes V_{II} (20 ras.), tad $J = J_2$ un $J_1 = J_x$.

Techniskā rasejumā (20^b ras.), vertikalā projekcija J_2 atrodas zem ass OX, bet horicontalā projekcija J_1 guļ uz OX. Koordinata $y = o$, bet koordinatai z negativa nozīme ($-z$).

P i e z ī m e. Ja mēs rasejam uz horicontalās plaknes, tad, saprotams, oriģinalie punkti G un J nesakrīt ar attiecigo vertikalo projekciju savienotiem stāvokļiem G_2 jeb J_2, kas aizrāditi 20^b rasejumā. Bet-ja mēs rasejam uz vertikalās plaknes (sienas tafeles), tad oriģinalie punkti G un J pilnigi sakrīt ar G_2 jeb J_2. Saprotami, ka rasejot uz vertikalās plaknes, mēs 20^b rasejumā nedrīkstam rakstit $E = E_1$ un $F = F_1$, bet tad vajadzetu šos punktus atzīmet tikai ar E_1 un F_1.

Turpmak mēs punktus, guļošus uz H jeb V atzīmesim vienkārši sekošā veidā: projekcijas no kautkāda punkta E, gulоša uz H, ar E un E_2, bet projekcijas no kautkāda punkta G, guloša uz V, ar G_1 un G. Pie tam saprotami ir pieņemts, ka projekciju plaknes ar visiem punktiem, atrodošamies uz viņām, ir nostādīti (pacelti jeb nolaisti) attiecigā stāvoklī telpā.

21 §. Punkts, gulošs uz OX.

Ja ir dots patvaļīgs punkts K, kas guļ uz ass OX, tad ša punkta horicontalā un vertikalā projekcija sakrīt ar oriģinalo punktu, t. i. $K = K_1 = K_2 = K_x$ (20a ras.). Tapēc ari techniskā rasejumā (20b ras.), visi šie punkti sakrīt kopejā punktā, kas guļ uz ass OX. Koordinatas x un y līdziņas 0.

22 §. Sakrītošo projekciju plakne.

Plakni R, kuŗa iet caur asi OX un daļa uz pusēm II un IV kvadrantu kaktus, sauc par sakrītošo projekciju plakni. Katram punktam, piemēram L vai M, kas guļ uz plaknes R, piemīt īpašiba atrasties vienadā atstatumā no H un V, tapēc ari viņu projekcijas atrodas vienadā atstatumā no ass OX un tapēc ari techniskā rasejumā (21b ras.) punktu L un M attiecigās projekcijas sakrīt, t. i. $L_1 = L_2$ un $M_1 = M_2$. Pie tam abas projekcijas no punkta L, atrodoša II kvadrantā, guļ virs ass OX, bet abas projekcijas no punkta M, atrodoša IV kvadrantā, guļ zem ass OX. Attiecigas koordinates ir $-y = +z$ un $+y = -x$.

Visi līdz šim aizrāditie atsevišķo punktu un viņu projekciju stāvokļi telpā janoskaidro ar veiduli. Vispareji, javingrinas pēc kautkādām patvaļigi pieņemtām projekcijām noteikt attiecigo punktu stāvokļus telpā.

Piemēri: Dotas koordinatas: $x = 1{,}5$ cm., $y = 3$ cm., $z = -2$ cm. (Meklejamais oriģinalais punkts atrodas IV kvadrantā).

Dotas koordinatas: $x = 3$ cm., $y = -2{,}5$ cm., $z = -2{,}5$ cm. (Meklejamais oriģinalais punkts atrodas III kvadrantā, vienlīdzigos atstatumos no H un V).

Dotas koordinatas: $x = 4{,}5$ cm., $y = -3$ cm., $z = o$. (Meklejamais punkts guļ uz H_{II}).

Dotas koordinatas: $x = -1{,}2$ cm., $y = o$, $z = -1{,}5$ cm. (Meklejamais punkts guļ uz V_{II}).

II nodaļa. Taišņu projekcijas.

23 §. Taisnes attēlošana vispārejā gadijumā.

Patvaļigi pieņemtās taisnes a (22 ras.) stāvokli telpā noteic kautkādi divi punkti A un B, kas guļ uz dotās taisnes a. Tapēc oriģinalās taisnes a stāvokli telpā varesim noteikt, ja dotas punktu A un B attiecigas projekcijas A_1, A_2 un B_1, B_2.

Savienojot A_1 ar B_1 un A_2 ar B_2, mēs iegūstam oriģinalās taisnes projekcijas a_1 un a_2.

Projekcijas, kas guļ uz vienas un tās pašas projekciju plaknes, kā piemēram A_1 un B_1, jeb A_2 un B_2, sauc par vienadnosaukuma projekcijām. Tā piemēram, A_1 un B_1 ir vienadnosaukuma horicontalās projekcijas, bet A_2 un B_2 ir vienadnosaukuma vertikalās projekcijas.

Tā tad, taisnes projekcijas iegūsim, ja savienosim vienadnosaukuma projekcijas no diviem punktiem, kas guļ uz oriģinalās taisnes. (Nekādā ziņā nedrīkstam savienot A_1 ar B_2, jeb A_2 ar B_1, jo šīs projekcijas ir dažadnosaukuma projekcijas, t. i. guļ uz dažadām projekciju plaknēm).

Projecejošie stari $A A_1$ un $B B_1$ ir stateniski pret H, tapēc ari šo staru noteiktā plakne $A A_1 B_1 B$ stateniska pret H. Plakni $A A_1 B_1 B$, kas iet caur oriģinalo taisni $a = AB$, stateniski pret H, sauc par taisnes a horicontali projecejošo plakni.

Taisne a_1, pa kuŗu horicontali projecejoša plakne krustojas ar H, noteic oriģinalās taisnes a ortogonalo horicontalo projekciju a_1.

Tamlīdzigi, plakni $A B B_2 A_2$, kas vilkta caur oriģinalo taisni $a = AB$ stateniski pret V, sauc par oriģinalās taisnes a vertikali projecejošo plakni. Taisne a_2, pa kuŗu vertikali projecejoša plakne $A B B_2 A_2$ krusto V, noteic oriģinalas taisnes a vertikalo ortogonalo projekciju a_2.

Ja apgriesti caur a_1 velkam horicontali projecejošo plakni, stateniskо pret H, un caur a_2 – vertikali projecejošo plakni, stateniskо pret V, tad šo projecejošo plakņu griezuma taisne noteic oriģinalās taisnes $a = AB$ stāvokli telpā. Tapat noteicams ari vispārejā gadijumā*) oriģinalās taisnes a stāvoklis telpā uz dotā technisķā rasejuma (22b ras.) pamata, pie tam saprotams, vertikalā projekcija $a_2 = A_2 B_2$ janostāda pirmatnejā stāvoklī. Tam nolūkam vajadzetu rasejamo papiru saliekt pa asi OX un papira augšejo daļu pacelt uz augšu (stateniski pret H). Bet tā kā pie tam rasejuma papirs tiek bojats, tad aizrāditais jaizdara ar veiduli (17 ras.), atzīmejot iepriekš uz viņa plaknēm attiecigās projekcijas.

---

*) Kā vēlak redzesim, ir gadijumu, kad mēs aizrāditā veidā apgriestā kārtā pēc dotām projekcijām nevaram noteikt oriģinalās taisnes a stāvokli telpā (§§ 33 un 34).

Ja mēs uz taisnes $a = AB$ (22[a] ras.) pieņemsim patvaļigu punktu C, tad acim redzot punkta horicontali projecejošais stars CC_1 guļ uz horicontali projecejošas plaknes ABB_1A_1 un tapēc stars CC_1 krusto H punktā C_1, kas guļ uz taisnes $a = AB$ horicontalās projekcijas $a_1 = A_1B_1$. Tamlīdzigi dabusim, ka vertikali projecejošais stars CC_2 guļ uz vertikali projecejošas plaknes ABB_2A_2 un tapēc C_2 guļ uz $a_2 = A_2B_2$. Tā tad, kautkāda punkta, kas guļ uz dotās oriģinalās taisnes, vienadnosaukuma projekcijas guļ uz dotās taisnes vienadnosaukuma projekcijām un pie tam abas punkta projekcijas tehniskā rasejumā (22[b] ras.) guļ uz kopejā stateņa pret asi OX.

Pamatojoties uz aizrādito, mēs pēc vienas dotās projekcijas (C_1 vaj C_2) varam uzmeklet tehniskā rasejumā attiecigo otro projekciju (C_2 vaj C_1) tā, lai oriģinalais punkts C atrastos uz dotās oriģinalās taisnes $a = AB$.

Pieņemsim, ka punkts C (22[a] ras.) dala taisni AB zinamā proporcijā, t. i. lai būtu $AC:CB = m:n$. Tā kā $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, tad saprotams, ka $A_1C_1 : C_1B_1 = m:n$. Analoģiski dabusim, ka $A_2C_2 : C_2B_2 = m:n$. Tā tad, ja kautkāds punkts dala doto oriģinalo taisni zinamā proporcijā, tad tanī pašā proporcijā punkta vienadnosaukuma projekcijas dala oriģinalās taisnes vienadnosaukuma projekcijas, un ari otradi. Tapēc, ja piemēram $A_1C_1 = C_1B_1$ un $A_2C_2 = C_2B_2$, tad ari $AC = CB$, t. i. punkts C dala doto oriģinalo taisni uz pusi. Tamlīdzigie novērojumi dažos gadijumos no svara, pārbaudot konstrukciju noteiktibu.

24 §. Taisnes pēdu punkti; taisnes redzamiba.

Patvaļigi pieņemtas taisnes a griezuma punktu ar plakni H (23[a] ras.) sauc par taisnes a horicontalo pēdu punktu un viņu apzīmē ar S; analoģiski taisnes a griezuma punktu ar plakni V sauc par vertikalo pēdu punktu un viņu apzīmē ar T. Tā kā horicontalais pēdu punkts S atrodas uz H, tad pēc 17 un 18 §§ viņa horicontalā projekcija sakrīt ar S_1, t. i. $S_1 = S$, bet vertikalā projekcija S_2 guļ uz ass OX. Analoģiski uz 19 un 20 §§ pamata dabujam, ka vertikalā pēdu punkta vertikalā projekcija T_2 sakrīt ar T, t. i. $T_2 = T$, bet horicontalā projekcija T_1 guļ uz ass OX.

Citreiz mēs vienkāršibas dēļ S_2 un T_1 nemaz neaizrādisim, zinadami, ka S_2 un T_1 vienmēr guļ uz OX.

Uz aizrādito pamatodamies, mēs tehniskā rasejumā (23[b] ras.), kuŗ dotas taisnes projekcijas a_1 un a_2, rīkosimies šādi. Horicontalā pēdu punkta S atrašanai, vertikalo projekciju a_2 pagaŗinam līdz krustošanai ar asi OX un no iegūta punkta S_2 velkam stateni pret OX līdz krustošanai ar horicontalo projekciju a_1 meklejamā pēdu punktā $S = S_1$.

Vertikalā pēdu punkta T_2 uzmeklešanai, horicontalo projekciju a_1 pagarinam līdz krustošanai ar asi OX, un no iegūtā punkta T_1 velkam stateni pret OX līdz krustošanai ar vertikalo projekciju a_2 meklejamā punktā $T = T_2$.

Lai apgriestā kārtā pēc dotiem pēdu punktiem S un T noteiktu taisnes a projekcijas a_1 un a_2, tad no S un T javelk stateni pret asi OX un uz ass OX iegūtie punkti S_2 un T_1 jasavieno ar attiecigām projekcijām S un T, tādā kārtā dabujot $a_1 = S\,T_1$ un $a_2 = S_2 T$.

Taisnes stāvoklis telpā visvienkāršaki noteicams ar pēdu punktiem, kas novērojams ar veiduli (17 ras.), savienojot telpā uzmekletos pēdu punktus ar kautkādu drātiti.

Taisnes redzamiba. Visparejā gadijumā pēdu punkti sadala doto taisni trijās daļās, kas atrodas dažados kvadrantos. Ja plaknes H un V nav caurspīdigas un novērotajs atrodas I kv., tad redzama tikai tā taisnes daļa, kas atrodas I kvadrantā. Redzamās taisnes projekcijas izvelk ar vienlaidu linijām, bet neredzamās — raustitām linijām.

Lai noteiktu kādos kvadrantos atrodas dotās taisnes a attiecigās daļas (24 ras.), mēs uzmeklejam pēdu punktus S un T un uz taisnes videjās daļas pieņemam patvaļigu punktu A. Pēc punkta A projekciju A_1 un A_2 stāvokļiem pret asi OX varam spriest, ka oriģinalais punkts A atrodas I kvadrantā, jo A_1 atrodas zem OX, bet A_2 virs OX (12 §) un tapēc visa taisnes videjā daļa starp pēdu punktiem S un T atrodas I kvadrantā un ir redzama. Pēc tam pieņemam patvaļigu punktu B uz taisnes a labās daļas. Pec punkta B projekciju B_1 un B_2 stāvokļiem pret asi OX varam spriest, ka punkts B atrodas II kvadrantā, jo B_1 un B_2 guļ virs ass OX (14 §) un tapēc visa taisnes labā daļa, sākot no vertikalā pēdu punkta līdz bezgalibai, atrodas II kvadrantā un nav redzama. Beidzot uz dotās taisnes kreisās daļas pieņemam projekcijas C_1 un C_2 no kautkāda punkta C un atrodam, ka punkts C atrodas IV kvadrantā (16 §), jo abas projekcijas guļ zem OX, tapēc ari visa taisnes a kreisā daļa, sākot no horicontalā pēdu punkta līdz bezgalibai atrodas IV kvadrantā un nav redzama.

25 §. Lidztece plaknei H.

Ja taisne a ir līdztece plaknei H (25^a un 25^b ras.), tad visi viņas atsevišķie punkti atrodas vienlīdzigā attālumā no H. Bet punkta attālumu no horicontalās plaknes noteic ar viņa vertikalās projekcijas attālumu no ass OX (12 §). Tapēc vertikalām projekcijām no visiem dotās taisnes punktiem jabūt vienlīdzigā attālumā no ass OX, t. i. $a_2 \parallel$ OX. Horicontalā projekcija a_1 var ieņemt kautkādu stāvokli pret asi OX, atkaribā no oriģinalās taisnes a stāvokļa. Tā kā taisne $a \parallel$ H, tad viņa krusto H bezgalibā, t. i. horicontalais pēdu punkts atrodas bezgalibā ($S\infty$).

Taisnes redzamibu un vertikalo pēdu punktu T noteic pēc vispārejiem likumiem.

Rasejumā pieņemta taisne a iet caur I un II kvadrantu, bet viņu varetu ari pieņemt tā, ka tā iet caur III un IV kvadrantu. Līdzigā kārta, nākamos rasejumos aizrāditi zinamie taisnes stāvokļi telpā, bet viņu stāvokļus var pieņemt ari citadi.

26 §. Līdztece plaknei V.

Ja dotā taisne a (26a un 26b ras.) ir līdztece V, tad visi viņas punkti atrodas vienlīdzigos attālumos no V, tapēc horicontalā projekcija $a_1 \parallel OX$, bet vertikalā projekcija a_2 ieņem kautkādu stāvokli pret asi OX, atkaribā no oriģinalās taisnes a stāvokļa telpā. Vertikalais pēdu punkts atrodas bezgalibā ($T\infty$), horicontalais pēdu punkts un taisnes redzamiba noteicami pēc vispārejiem likumiem.

27 §. Līdztece asij OX.

Ja taisne $a \parallel OX$ (27a un 27b ras.), tad viņa vienā un taī pašā laikā $\parallel$ H un V. Pēc iepriekšejos pantos aplūkotiem likumiem dabujam, ka projekcijām a_1 un a_2 jabūt $\parallel OX$. Abi taisnes a pēdu punkti atrodas bezgalibā ($S\infty$ un $T\infty$).

28 §. Taisne, guļoša uz H.

Ja dotā taisne a guļ uz H (28a un 28b ras.), tad pēc 17 un 18 §§ visas taisnes atsevišķo punktu vertikalās projekcijas guļ uz OX, t. i. $a_2 = OX$ un horicontalā projekcija a_1 sakrīt ar oriģinalo taisni, t. i. $a_1 = a$. Vertikalais pēdu punkts T guļ uz OX, bet horicontalo pēdu punktu nav iespējams noteikt, jo visi taisnes punkti sakrīt ar H.

29 §. Taisne, guļoša uz V.

Šinī gadijumā uz 19 un 20 §§ pamata dabujam, ka $a_1 = OX$, bet $a = a_2$ un ieņem patvaļigu stāvokli pret OX. Noteiktā vertikalā pēdu punkta nav. Horicontalais pēdu punkts S atrodas uz ass OX (29 ras.).

30 §. Taisne, sakrītoša ar OX.

30 ras. Uz 21 panta pamata dabujam, ka $a = a_1 = a_2 = OX$. Noteikto pēdu punktu nav.

31 §. Taisne, stateniska pret H.

31 ras. Uz taisnes a, stateniskas pret plakni H, pieņemam divus patvaļigus punktus A un B un uzmeklejam viņu projekcijas. Punktu A un B horicontali projecejošie stari sakrīt, tapēc $A_1 = B_1 = a_1$. Punktu A un B

vertikali projecejošie stari guļ vienā divejadi projecejošā plaknē, kas krusto V pa taisni $A_2 B_2 = a_2 \perp OX$. Taisne a bez tam ir līdztece plaknei V un tapēc vertikalais pēdu punkts atrodas bezgalibā. Horicontalais pēdu punkts S sakrīt ar horicontalo projekciju, t. i. $S = a_1 = A_1 = B_1$.

No diviem punktiem A un B, kas guļ uz kopeja horicontali projecejoša stara, horicontalajā projekcijā no bezgalibas no augšas skatidamies, saprotams, redzams tas augstakais, mūsu gadijumā tas būtu punkts A. Bet oriģinalā punkta attālumu no H pēc 12 § noteic ša punkta vertikalās projekcijas atstatums no OX.

Tapēc no diviem punktiem (A un B), kas guļ uz kopeja horicontali projecejoša stara, horicontalajā projekcijā redzams tas (A), kuŗa vertikalā projekcija (A_2) atrodas augstaki, jeb tālak no ass OX.

Abas projekcijas no redzamā punkta 31b rasejumā pastrīpotas.

32 §. Taisne, stateniska pret V.

32 ras. Analoģiski iepriekšejam gadijumam mēs atrodam, ka $A_2 = B_2 = a_2 = T$, bet $a_1 = A_1 B_1 \perp OX$. Horicontalais pēdu punkts S atrodas bezgalibā.

No diviem punktiem A un B, kas guļ uz kopeja vertikali projecejoša stara a, mēs no bezgalibas skatidamies no priekšas, redzesim to punktu, mūsu gadijumā B, kas tālak no V; bet pēc 12 § ša punkta horicontalā projekcija tālak no ass OX, t. i. atrodas zemaki.

Tā tad, no diviem punktiem (A un B), kas guļ uz kopeja vertikali projecejoša stara, mēs vertikalajā projekcijā redzam to punktu (B), kuŗa horicontalā projekija (B_1) atrodas zemaki, jeb tālak no ass OX.

33 §. Taisne, stateniska pret OX.

33 ras. Dotās taisnes a horicontali un vertikali projecejošas plaknes šinī gadijumā sakrīt kopejā divejadi projecejošā plaknē, kas krustojas ar H un V pa vienu taisni, statenisku pret OX. Tapēc šinī gadijumā a_1 un a_2 veido kopeju stateni pret OX. Abi pēdu punkti S un T sakrīt un guļ uz ass OX.

Tā kā taisnes a horicontali un vertikali projecejosas plaknes sakrīt, tad šinī gadijumā pēc dotām projekcijām a_1 un a_2 mēs nevaram pēc 23 § atrast oriģinalās taisnes a stāvokli telpā. Lai izvairitos tādu nenoteiktibu, uz dotās taisnes a japieņem kautkāds punkts A. Uzmeklejot pēc dotām projekcijām A_1 un A_2 oriģinalā punkta A stāvokli telpā un savienojot punktu A ar S=T, dabujam oriģinalās taisnes a stāvokli telpā.

34 §. Taisne, guļoša uz profilās plaknes.

34^a rasejumā aizrāditas projekciju plaknes H, V un profilā plakne W. Plaknes H un V dala profilo plakni W četrās daļās, kas atrodas I, II, III un IV kvadrantos. Apzīmesim šīs daļas ar W_I, W_{II}, W_{III} un W_{IV} un pieņemsim uz W_I patvaļigu taisni $a = AB$. Taisnes a divejadi projecejoša plakne sakrīt ar W, tadēļ projekcijas a_1 un a_2 (34^b ras.) veido vienu stateni pret OX. Tapēc pēc 23 § noteikumiem nevar atrast oriģinalās taisnes stāvokli telpā, un viņas pēdu punktus. Lai izvairitos tādu nenoteiktibu, japieņem uz taisnes a divi patviļigi punkti A un B.

Taisnes a pēdu punktus dabusim šādi. Profilo plakni griežot ap asi OZ savienojam aizrāditā virzienā ar V. Profilās plaknes atsevišķas daļas savienotā stāvoklī apzīmejam ar W_{I_0}, W_{II_0}, W_{III_0} un W_{IV_0}. Pēc rasejumā aizrāditas griešanas, W_{I_0} iegūsim virs ass OX un pa labi no ass + OZ; W_{II_0} iegūsim virs ass OX, un pa kreisi no ass + OZ; W_{III_0} iegūsim apakš ass OX, un pa kreisi no ass – OZ; bet W_{IV_0} iegūsim apakš OX, un pa labi no ass –OZ. Punkts A, griezdamies ap asi OZ, pārvietojas uz plaknes, kas iet caur punktu A, stateniski pret griešanās asi OZ, tadēļ ši plakne ir līdztece H un krustojas ar V pa taisni $A_2 A_0 \parallel OX$. Nogrieznim $A_0 A_2$ jalīdzinās punkta A īstajam griešanās radijam $A A_2$, kuŗš savukārt līdzinas punkta A atstatumam no V. Šis atstatums pēc 12 § līdzinas horicontalās projekcijas A_1 attālumam no ass OX. Atliekot šo atstatumu pa labi no punkta A_2 (34^b ras.), iegūstam meklejamo savienoto stāvokli A_0.

Savienoto stāvokli A_0 var uziet ari šādi (34^a ras.). Horicontali pro-projecejošais stars $A A_1 \parallel OZ$, tapēc ari ša stara savienotais stāvoklis $A_0 A_{1_0} \parallel OZ$ Punkti A un A_1 griezdamies ap asi OZ virzas pa vienlīdzigiem lokiem, jo viņu griešanās radiusi $A A_2$ un $A_1 O$ ir vienlīdzigi. Tā kā A_1 ir oriģinalā punkta A horicontalā projekcija, tad loks, pa kuŗu virzas A_1 griezdams ap asi OZ, ir tā horicontalā projekcija no loka, pa kuŗu punkts A virzas telpā. Rasejumā 34^b šis loks attēlojas dabiskā lielumā, kā aploces daļa, kuŗu iegūstam, ja no centra O velkam aploci ar radiusu $O A_1$ līdz krustošanai ar OX. Iegūtais punkts A_{1_0} ir punkta A_1 savienotais stāvoklis. Velkot tagad caur punktu A_{1_0} līdzteci asij OZ, jeb stateni pret OX, bet caur punktu A_2 līdzteci asij OX, mēs viņu krustotnē iegūsim A_0.

Līdzigi varam iegūt punkta B savienoto stāvokli B_0. Savienodami A_0 un B_0, mēs iegūstam taisnes a savienoto stavokli a_0.

Punkts T, kur pagaŗinatā taisne $A_0 B_0$ krusto asi OZ, noteic meklejamo vertikalo pēdu punktu. Tā kā šis punkts guļ uz pašas griešanās ass, tad viņa savienotais stāvoklis sakrīt ar oriģinalo punktu, t. i. $T_0 = T$.

Plakni W savienojot ar V, savienojas ari ass OY, kuŗas pozitivais un negativais virzieni aizrāditi rasejumā. Pagaŗinatās taisnes $A_0 B_0$ krustotne ar asi $OY_0 = OX$ ir horicontalā pēdu punkta S savienotais stāvoklis S_0, pēc kuŗa pretejā kārtā nav gŗūti atrast S, velkot no centra O ar radiusu $O S_0$ loku līdz krustošanai ar A_1 B_1. Līdzigā kārtā varam noteikt to punktu, jeb taišņu savienotos stāvokļus, kas guļ uz pārejām profilās plaknes daļām. Tā, 35 ras. ir uzmekleti savienotie stāvokļi C_0, D_0 un E_0 no punktiem, kas guļ uz attiecigām plaknēm W_{II}, W_{III} un W_{IV}. Pie tam jaievēro savienoto plakņu W_{II_0}, W_{III_0} un W_{IV_0} stāvokļi attiecibā uz asim OX un $\pm$ OZ, kā tas augšā aizrādits.

Ja otradi – pēc doto punktu savienotiem stāvokļiem jaatrod viņu patiesās projekcijas, tad pirmkārt pēc doto punktu savienotiem stāvokļiem attiecibā uz asim OX un $\pm$ OZ jaizšķir jautajums, kādā īsti kvadrantā atrodas oriģinalais punkts, un pēc tam var izvest pretejā kārtā visas konstrukcijas.

35 §. Taisne, guļoša uz sakrītošo projekciju plaknes.

Tā kā pēc 22 § abas kautkāda punkta, guļoša uz sakrītošo projekciju plaknes, projekcijas sakrīt, tad techniskā rasejumā (36 ras.) abas dotās taisnes projekcijas sakrīt, t. i. $a_1 = a_2$, pie kam, atkaribā no oriģinalās taisnes a stāvokļa telpā, $a_1 = a_2$ veido ar projekciju asi kautkādu leņķi β. Abi pēdu punkti S un T gul uz OX.

Visi līdz šim aplūkotie taišņu atsevišķie stāvokļi telpā jaizskaidro ar veiduļa palīdzibu (17 ras.).

36 §. Krustodamās taisnes.

Divas taisnes telpā var krustoties jeb ari ne. Ja divas taisnes krustojas galibā, tad viņas sauc par krustodamām taisnēm, bet ja viņu krustotne bezgalibā, tad tādas taisnes sauc par līdzteku taisnēm. Beidzot, ja taisnes nekrustojas ne galibā, nedz bezgalibā, tad viņas sauc par šķērsodamām taisnēm.

Ja divas taisnes a un b krustojas (37 ras.), tad viņām pēc nosacijuma ir viens kopejs punkts C. Ša punkta horicontalai projekcijai jaatronās vienā un taī pašā laikā kā uz a_1, tā ari uz b_1, t. i. $C_1 = a_1 \times b_1$ *). Līdzigā kārtā jabūt, ka $C_2 = a_2 \times b_2$. Bet tā kā C_1 un C_2 ir viena un ta paša punkta projekcijas, kuŗām pēc 12 § noteikumiem jaatronās uz viena stateņa pret asi OX, tad dabujam: divas taisnes krustojas telpā, ja viņu vienadnosaukuma projekcijas krustojas divos punktos, kas guļ uz viena stateņa pret projekciju asi un ari otradi.

---

*) Zīme $\times$ noteic, ka divas taisnes krustojas zinamā punktā.

37 §. Līdzteku taisnes.

Divas līdzteku taisnes a un b (38 ras.) pēc nosacījuma krustojas bezgalibā. Tapēc viņu vienadnosaukuma projekcijas a_1 un b_1, kā ari a_2 un b_2, krustojas bezgalibā, t. i. divu līdzteku taišņu vienadnosaukuma projekcijas ir savstarpeji līdzteces.

Ja mēs pieņemtu telpā vēl kautkādu taisni $c \parallel a \parallel b$, tad saprotams, ka taisnēm c, a un b jaiet caur kopejo bezgali tālo punktu, t. i. visas telpā savstarpeji līdzteku taisnes krustojas kopejā bezgali tālā punktā.

38 §. Šķērsodamās taisnes; divu taišņu attiecigie stāvokļi.

Divām šķērsodamām taisnēm a un b nav pēc nosacījuma kopeja punkta, kapēc techniskā rasejumā (39 ras.) vienadnosaukuma projekcijas krustojas divos punktos, kas neguļ uz kopeja stateņa pret OX, bet uz diviem dažadiem stateņiem pret asi OX.

Doto taišņu a un b horicontali projecejošas plaknes krustojas pa zinamo horicontali projecejošo staru, kas krusto taisni a punktā C un taisni b punktā D. Punktu C un D horicontalās projekcijas sakrīt, t. i. $C_1 = D_1$ (31 §), bet vertikalās projekcijas C_2 un D_2 nesakrīt. Punktus C un D, kas guļ uz divām šķērsojošām taisnēm a un b, kuŗu horicontalās projekcijas sakrīt, bet vertikalās projekcijas nesakrīt, — sauc par šķērsošanās punktiem.

Ar šķērsošanās punktiem C un D varam noteikt doto taišņu a un b attiecigos stāvokļus pret horicontalo projekciju plakni H. Kā zinams (31 §), no diviem punktiem, guļošiem uz kopeja horicontali projecejoša stara, horicontalajā projekcijā redzams tas, kuŗa vertikalā projekcija atrodas augstaki. Tapēc mūsu gadijumā (39 ras.), skatidamies no bezgaliga attāluma no augšas, mēs redzesim oriģinalo punktu D, jo D_2 atrodas augstaki nekā C_2. Tas nozīmē, ka attiecigā taisnes b daļa, uz kuŗas guļ redzamais punkts D, iet virs otras taisnes a, attiecibā uz H.

Tamlīdzigi nav gŗūti sajēgt, ka doto taišņu a un b vertikali projecejošas plaknes krustojas pa kopejo vertikali projecejošo staru, kas krusto taisni a punktā E, bet taisni b punktā F. Šo punktu vertikalās projekcijas pēc 32 § sakrīt ($E_2 = F_2$), bet horicontalās projekcijas nesakrīt. Punktus E un F sauc par šķērsošanās punktiem. Kā zinams (32 §), no diviem punktiem, kas guļ uz kopeja vertikali projecejoša stara, vertikalajā projekcijā redzams tas, kuŗa horicontalā projekcija atrodas zemaki. Tapēc mūsu gadijumā (39 ras.), skatidamies no bezgaliga attāluma no priekšas, mēs redzesim oriģinalo punktu E, jo E_1 atrodas zemaki nekā F_1. Tas nozīmē, ka attieciga taisnes a daļa, uz kuŗas guļ redzamais punkts E, iet priekš otras taisnes b, attiecibā uz V.

Divu doto taišņu stāvokļa noskaidrošanai attiecoties uz H un V, pie mīt svariga nozīme mūsu turpmakās konstrukcijās (noteicot plakņu un ķermeņu redzamibu).

Lielakas skaidribas dēļ 39 rasejumā abas redzamo šķērsošanās punktu projekcijas, t. i. D_1, D_2 un E_1, E_2, ir pastrīpotas.

Piezīme. Viss aizrāditais attiecas tikai uz tādām taisnēm, kas atrodas I kvadrantā, jo tikai tādas taisnes redzamas aplūkotajam, kas I kvadrantā.

III nodaļa. Plakne.

39 §. Plaknes noteikšana.

Plaknes stāvokli telpā noteic: 1) ar divām krustodamām taisnēm; 2) ar divām līdzteku taisnēm; 3) ar taisni un punktu un 4) ar trijiem punktiem.

Pie tam pēdejos trīs gadijumos varam uzskatit kā pirmā, vispārejā gadijuma, atsevišķos gadijumos.

Pieņemsim, ka dota patvaļiga plakne P (40a ras.), kas krustojas ar H un V pa taisnēm s un t. Taisnēm s un t jasaiet kopejā punktā a uz ass OX, jo a ir trijplakņu kakta, ko veido plaknes P, H un V, virsotne.

Taisni s sauc par dotās plaknes horicontalo pēdu liniju, bet taisni t—par dotās plaknes vertikalo pēdu liniju.

Tā kā s atrodas uz H, tad pēc 28 § $s_1 = s$ un $s_2 = OX$. Līdzigā kārtā pēc 29 § dabujam, ka $t_2 = t$ un $t_1 = OX$. Rasejumā 40b aizrādits attiecigais techniskais rasejums. Turpmak vienkāršibas labad mēs bieži rasejumos s_2 un t_1 nemaz neaizrādisim un horicontalo pēdu liniju atzīmesim vienkārši ar s, bet vertikalo pēdu liniju vienkārši ar t, pie kam saprotams, vienmēr jaiedomajas, ka vertikalā projekciju plakne kopā ar vertikalo pēdu liniju nostādita pirmatnejā stāvoklī, t. i. stateniski pret rasejuma plakni H

Dotās plaknes pēdu linijas guļ uz attiecigām projekciju plaknēm, tapēc techniskā rasejumā (40b ras.) mēs iegūstam viņu patieso (dabisko) lieļumu.

Ar pēdu linijām pretejā kārtā varam ļoti viegli noteikt dotās oriģinalās plaknes stāvokli telpā. Lai to panāktu, tad caur OX velkam plakni V $\perp$ H; uz V atzīmejam t, un caur s un t velkam telpā oriģinalo plakni P. Šo plakni varesim skaidri novērot, ja iz bieza kartona izgriezisim attiecigo trijstūraino gabalu un viņu pieliksim veidulim tā, kā tas aizrādits 40a rasejumā.

Parasti tiek dots tikai techniskais rasejums (40b ras.) un tapēc doto plakni apzīmesim ar $s\,a\,t$.

Plakne, kas ieņem kautkādu stāvokli telpā, pietiekoši pagarinot, iet caur visiem četriem kvadrantiem, krustodama pie tam H_{II} un V_{II}. Tapēc plaknes pēdu linijas s un t varam pagarinat aiz punkta a, pie kam attiecigo pēdu liniju daļas, kas guļ uz H_{II} un V_{II} nebūs redzamas un tās atzīmē ar raustitām linijām (40^b ras.).

Atkaribā no dotās oriģinalās plaknes stāvokļa telpā, viņas pēdu līnijas var ieņemt dažadus stāvokļus un slīpumus pret asi OX, kā tas aizrādits 41, 42 un 43 rasejumos.

Ieteicams plakņu atsevišķus stāvokļus noskaidrot telpā ar veiduli.

40 §. Taisne un punkts, guļošie uz dotās plaknes.

Ja taisne a guļ uz dotās plaknes P (40^a ras.). tad taisnes a horicontalam pēdu punktam S jaguļ uz dotās plaknes horicontalās pēdu līnijas s. Analoģiski taisnes a vertikalam pēdu punktam T jaguļ uz plaknes vertikalās pēdu linijas t. Ja otradi aizrāditie noteikumi izpilditi, mēs varam apgalvot, ka attiecigā taisne $a =$ ST guļ uz dotās plaknes.

Uz aizrādito pamatodamies, pēc vienas patvaļigas taisnes projekcijas, mēs varam atrast viņas otru projekciju tā, lai oriģinalā taisne guletu uz dotās plaknes. Pieņemsim, piemēram, patvaļigi a_1 un uzmeklesim a_2. Tam nolūkam atzīmejam punktus $S = a_1 \times s$ un $T_1 = a_1 \times OX$, un pēc tam pārnesam*) S uz OX un T_1 uz t, iegūstot tādā kārtā S_2 un T. Taisne $a_2 = S_2T$ ir meklejama vertikalā projekcija. Visas telpā aizrāditas konstrukcijas (40^a ras.), saprotams, tādā pašā kārtā, jaizdara techniskā rasejumā (40^b ras.).

Analoģiskā veidā pēc patvaļigi pieņemtas taisnes vertikalās projekcijas a_2 var atrast attiecigo horicontalo projekciju a_1 tā, lai oriģinalā taisne a guletu uz dotās plaknes. Ja caur doto taisni javelk pretejā kārtā plakne, tad tas ir nenoteikts uzdevums, jo caur dotās taisnes horicontalo pēdu punktu S varam pilnigi patvaļigi vilkt kautkādu taisni s un to uzskatit kā mekletās plaknes horicontalo pēdu liniju s. Attiecigo pēdu liniju t, saprotami, vairs nedrīkstam patvaļigi pieņemt, bet viņai jaiet caur T un punktu a, kuŗā s krusto OX.

Saprotami, ka papriekšu varetu caur T patvaļigi vilkt vertikalo pēdu liniju t, un pēc tam uzmeklet attiecigo horicontalo pēdu liniju s.

Lai pieņemtu kautkādu dotai plaknei $P = s\,a\,t$ piederigu punktu A (40 ras.), tad viņš japieņem uz kautkādas dotai plaknei piederigas taisnes a, pie kam, saprotams, vienadnosaukuma punkta projekcijām jaatronās uz attiecigas taisnes vienadnosaukuma projekcijām, t. i. A_1 jaguļ uz a_1 un A_2 jaguļ uz a_2.

Ja otradi, aizrāditie noteikumi izpilditi, tad varam apgalvot, ka attiecigais punkts guļ uz dotās plaknes.

---

*) Punktu pārnest, tas nozīmē, pēc viņa vienas dotas projekcijas (piem. S) atrast otru punkta projekciju (S_2), ja zinama attieciga linija (OX), uz kuŗas jaatrodās mekletai otrai projekcijai.

41 §. Horicontalā pēdu līdztece.

Ikkatru taisni h (44 ras.), kas guļ uz dotās plaknes $P = s\,a\,t$ un ir līdztece ar H, sauc par dotās plaknes horicontalo pēdu līdzteci. Horicontalo pēdu līdzteci h var iedomaties iegūtu plaknei P krustojoties ar iedomajamo plakni H', vilktu līdztekus H. Taisnēm s un h, pa kuŗām P krusto līdzteku plaknes H un H', jabūt līdztecēm, tapēc (sk. 37 §) jabūt $h_1 \parallel s$ un $h_2 \parallel s_2 \parallel OX$.

Pēc 25 § dabujam, ka galibā atrodas horicontalās pēdu līdztecēs vertikalais pēdu punkts T, bet horicontalais pēdu punkts S atrodas bezgalibā.

Pieņemot uz h kautkādu punktu A, mēs varam apgalvot, ka punkts A pieder plaknei $P = s\,a\,t$, uz kuŗas guļ h.

42 §. Vertikalā pēdu līdztece.

Ikkatru taisni v (45 ras.), kas guļ uz dotās plaknes $P = s\,a\,t$ un ir līdztece ar V, sauc par dotās plaknes vertikalo pēdu līdzteci. Vertikalo pēdu līdzteci v var iedomaties iegūtu plaknei P krustojoties ar iedomajamo plakni V', vilktu līdztekus V. Taisnēm t un v, pa kuŗām plakne P krusto līdzteku plaknes V un V', jabūt līdztecēm, tapēc (sk. 37 §) jabūt $v_2 \parallel t$ un $v_1 \parallel t_1 \parallel OX$.

Pēc 26 § dabujam, ka galībā atrodas vertikalās pēdu līdzteces horicontalais pēdu punkts S, bet vertikalais pēdu punkts T atrodas bezgalibā.

Pieņemot uz v kautkādu punktu A, mēs varam apgalvot, ka punkts A pieder plaknei $P = s\,a\,t$, uz kuŗas guļ v.

43 §. Plakne - līdztece H.

Ja dota plakne P (46 ras) līdztece H, tad viņas vertikalā pēdu linija $t \parallel OX$, jo plakne V krusto divas līdzteku plaknes P un H pa savstarpeji līdzteku taisnēm t un OX. Plaknes P horicontalā pēdu linija ir plakņu P un H bezgali tāla krustošanās taisne, t. i. s atrodas bezgalibā.

Katru plaknei P piederigo taisni h mēs varam uzskatit kā plaknes P horicontalo pēdu līdzteci h, pie kam $h_2 = t$, bet h_1 ieņem pātvaļigu stāvokli pret OX.

Katrai plaknei P piederigai vertikalai pēdu līdztecei v pēc 42 § jaiet līdztekus V, bet tā kā vertikalā pēdu līdztece v šinī gadijumā pieder plaknei P, kas līdztece H, tad viņai jaiet ari līdztekus plaknei H, t. i. vertikalai pēdu līdztecei v jaiet līdztekus plakņu V un H krustošanās taisnei OX, tapēc $v_1 \parallel OX \parallel v_2$ (27 §).

46 rasejumā h un v ir vilktas caur patvaļigi uz plaknes P pieņemto punktu A, pie kam A_2 guļ uz t, bet A_1 ieņem patvaļigu stāvokli pret OX.

Nav gŗūti sajēgt, ka visu uz plaknes P guļošo taišņu vertikalās projekcijas sakrīt ar vertikalo pēdu liniju t, bet viņu horicontalās projekcijas ņesakrīt-

44 §. Plakne-līdztece V.

Ja dota plakne P || V (47 ras.), tad plaknes P horicontalā pēdu linija s || OX, jo divas līdzteku plaknes P un V krustojas ar trešo plakni H pa savstarpeji līdztecēm s un OX. Plaknes P vertikalā pēdu linija atrodas bezgalibā, jo ta ir plakņu P un V bezgali tāla krustošanās taisne.

Pēc 41 § noteikumiem katrai horicontalai pēdu līdztecei h jabūt līdztecei H, bet tā kā šinī gadijumā h pieder plaknei P || V, tad viņai ari jabūt līdztecei ar V, t. i. horicontalai pēdu līdztecei h jabūt līdztecei plakņu H un V krustošanās taisnei OX.

Katru dotai plaknei P piederigu taisni v varam uzskatit kā plaknes P vertikalo pēdu līdzteci, pie kam $v_1 = s$, bet v_2 ieņem patvaļigu stāvokli pret OX. Rasejumā h un v ir vilktas caur patvaļigi pieņemto kopejo punktu A, pie kam A_1 guļ uz s, bet A_2 ieņem patvaļigu stāvokli pret OX. Nav grūti saprast, ka visu uz plaknes P guļošo taišņu horicontalās projekcijas sakrīt ar s, bet viņu vertikalās projekcijas nesakrīt, un ieņem kautkādus stāvokļus pret OX.

45 §. Plakne-līdztece OX.

Plakne P, līdztece asij OX, vispārejā gadijumā krusto abas projekciju plaknes (48 ras.), pie tam abas pēdu linijas s un t ir līdzteces OX, jo plakne P, līdztece asij OX, krusto caur OX ejošo plakni H pa taisni s || OX. Līdzigā kārtā dabujam, ka t || OX. Katra taisne, kas pieder plaknei P un ir līdztece ar OX, ir ari līdztece ar H vaj V, kapēc šāda taisne vienā un taī pašā laikā ir plaknes P horicontalā un vertikalā pēdu līdztece, t. i. $h = v$. Tapēc $h_1 = v_1$ un $h_2 = v_2$, pie kam šās projekcijas ir līdzteces asij OX. Taisnes $h = v$ horincontalais jeb vertikalais pēdu punkts atrodas bezgalibā.

Lai attēlotu kautkādu plaknei P piederigu horicontalo jeb vertikalo pēdu līdzteci, tad uz plaknes P pēc vispārejiem noteikumiem (40 §) japieņem patvaļiga taisne a un caur patvaļigi pieņemto punktu A uz a javelk $h = v$ || OX.

46 §. Plakne, ejoša caur projekciju asi OX.

Ja dotā plakne P (49 ras.) iet caur projekciju asi OX, tad abas pēdu linijas sakrīt ar OX, t. i. $s = t =$ OX. Tapēc šinī gadijumā pēc dotām pēdu linijām nevar noteikt oriģinalās plaknes P stāvokli telpā.

Lai noteiktu plaknes P stāvokli telpā, jaaizrāda kautkāds plaknei P piederigs punkts A. Vilkdami plakni caur punktu A un taisni $s = t =$ OX, iegūsim oriģinalās plaknes P stāvokli telpā. Atsevišķā gadijumā plakne P var būt sakrītošo projekciju plakne (22 §), ja P iet caur II jeb IV kvadrantu.

Katra uz plaknes P guļoša taisne, kuŗa ir līdztece ar OX, vienā un taī pašā laikā ir plaknes P horicontalā un vertikalā pēdu līdztece, t. i. $h = v$ || OX.

Patvaļigi uz plaknes P pieņemta taisne a krusto H un V kopejā punktā S = T, kas guļ uz OX un ir taisnes a-horicontalais vaj vertikalais pēdu punkts Saprotams, ka caur punktu S = T iet ari abas taisnes projekcijas a_1 un a_2.

47 §. Horicontali projecejoša plakne.

Katra pret H stateniska plakne P (50 ras.) saucas par horicontali projecejošo plakni (23 §). Plakne V ari stateniska pret H, tapēc plaknēm P un V vajadzigs krustoties pa taisni (t), statenisku pret H. Tā tad, horicontali projecejošas plaknes vertikalā pēdu linija t ir stateniska pret OX, bet horicontalā pēdu linija s ieņem patvaļigu stāvokli pret OX, atkaribā no plaknes P stāvokļa telpā. Saprotams, ka s un t krustojas kopejā punktā a uz projekciju ass OX.

Ja mēs uz plaknes P pieņemsim kaut kādu taisni a, tad viņas horicontalā projekcija sakrīt ar s, t i. $a_1 = s$, bet vertikalā projekcija a_2 ieņem kautkādu stāvokli pret asi OX. Tamlīdzigi patvaļigi uz plaknes P pieņemta punkta A horicontalā projekcija A_1 guļ uz s, bet vertikalā projekcija A_2 ieņem kautkādu stāvokli uz stateņa, kas vilkts caur A_1 stateniski pret OX.

Prieks horicontalās pēdu līdzteces h dabujam $h_1 = s$ un $h_2 \parallel$ OX.

Vertikalā pēdu līdztece v šinī gadijumā ir stateniska pret H, tapēc horicontalā projekcija v_1 attēlojas punkta veidā (31 §), kas guļ uz s, bet vertikalā projekcija $v_2 \perp$ OX un pagaŗinot iet caur punktu v_1.

No visa aizrādītā varam novērot, ka visas, kautkādai horicontali projecejošai plaknei piederošu taišņu vaj punktu horicontalās projekcijas sakrīt ar s jeb guļ uz s, bet attiecigās vertikalās projekcijas vispārejā gadijumā ieņem patvaļigu stāvokli pret OX.

Piezīme. Lai atšķirtu dažadu taišņu vienadnosaukuma pēdu punktus, tad viņiem indekšu veidā pievieno romiešu skaitļus, kā tas izdarits 50 rasejumā attiecibā uz punktiem S_I, S_{II}, T_I, T_{II}. Šādu vienadnosaukuma punktu savstarpejo atšķirošanu mēs turpmak lietosim vispāreji.

48 §. Vertikali projecejoša plakne.

Katru pret V statenisku plakni P (51 ras.) sauc par vertikali projecejošu plakni (23 §). Analoģiski iepriekšejam gadijumam nav gŗūti pierādit, ka katra vertikali projecešа plakne P krusto H pa horicontalo pēdu liniju s, statenisku pret OX, t. i. $s \perp$ OX, bet vertikalai pēdu linijai t ir kautkāds stāvoklis pret asi OX, pie kam, saprotams, s un t krustojas kopejā punkta a uz OX.

Ja mēs uz plaknes P pieņemsim patvaļigu taisni a, tad viņas horicontalā projekcija a_1 ieņem patvaļigu stāvokli, bet $a_2 = t$. Uz plaknes P patvaļigi pieņemta punkta A horicontalā projekcija A_1 ieņem patvaļigu stāvokli, bet A_2 guļ uz t.

Horicontalā pēdu līdztece $h \perp V$, tapēc (32 §) horicontalā projekcija $h_1 \perp OX$, bet h_2 attēlojas punkta veidā uz t un guļ uz taisnes h_1 pagarinajuma.

Prieks vertikalās pēdu līdzteces v dabujam: $v_1 \parallel OX$ un $v_2 = t$.

Visu uz kautkādas vertikali projecejošas plaknes guļošu taišņu vaj punktu vertikalās projekcijas sakrīt jeb guļ uz t, bet attiecigās horicontalās projekcijas vispārejā gadijumā ieņem patvaļigus stāvokļus pret OX.

49 §. Profilā plakne.

Abas profilās jeb kautkādas divejadi projecejošas plaknes P pēdu linijas sakrīt viena ar otru un ir stateniskas pret OX (52 ras.). Kautkādas uz P guļošas taisnes a pēdu punkta uzmeklešanas paņēmiens tika jau izskaidrots 34 §. Prieks horicontalās pēdu līdzteces h dabujam: $h_1 = s$, bet h_2 attēlojas punkta veidā un guļ uz t.

Prieks vertikalās pēdu līdzteces v dabujam $v_2 = t$, bet v_1 attēlojas punkta veidā un guļ uz s.

Visus augšā pievestos raksturigakos plakņu, taišņu un punktu stāvokļus ieteicams katram noteikt ar veiduli. Tapēc veidulim pieliek vajadzigos stāvokļos kartona plakni un uz viņas atzīmē meklejamas taisnes.

50 §. Plaknes noteikšana vispārejā gadijumā.

Vispārejā gadijumā (39 §) plakni varam noteikt ar kautkādām divām patvaļigi pieņemtām krustodamām taisnēm a un b (53 ras.).

Ja plakne dota ar taisni a un punktu B, jeb trijiem punktiem A, B un C, tad šos gadijumos var viegli piemērot 53 rasejumā pieņemtam gadijumam.

Lai uz dotās plaknes ab pieņemtu patvaļigu taisni c, mēs varam patvaļigi pieņemt kautkādu vienu taisnes c projekciju, konstruejot pēc tam attiecigo otro projekciju. Pieņemsim, piemēram, patvaļigi c_1 un uzmeklesim c_2. Tam nolūkam atzīmejam punktus $D_1 = c_1 \times a_1$ un $E_1 = c_1 \times b_1$. Ja oriģinalā taisne c guļ uz plaknes ab, tad D_1 un E_1 ir punktu D un E horicontalās projekcijas, kuŗos taisne c krusto telpā a un b. Tapēc šo punktu vertikalām projekcijām D_2 un E_2 jaguļ uz attiecigām projekcijām a_2 un b_2. Uzmeklejuši D_2 un E_2 un viņus savienojuši, mēs iegūsim mekleto vertikalo projekciju $c_2 = D_2 E_2$.

Līdzigā kārtā pēc patvaļigi pieņemtas vertikalās projekcijas c_2 var atrast attiecigu projekciju c_1 tā, lai oriģinalā taisne c guletu uz plaknes ab.

Katrs uz taisnes c pieņemtais punkts F guļ uz plaknes ab.

Lai uz dotās plaknes ab pieņemtu kautkādu horicontalu pēdu līdzteci h, mēs atzīmejam papriekšu vertikalo projekciju, vilkdami patvaļigi

$h_2 \parallel OX$. Tad atzīmejam punktus $G_2 = h_2 \times a_2$ un $J_2 = h_2 \times b_2$. Pēc tam uz a_1 un b_1 uzmeklejam attiecigos punktus G_1 un J_1 un viņus savienodami, dabujam mekleto horicontalo projekciju $h_1 = G_1 J_1$.

Līdzigā kārtā kautkādas vertikalās pēdu līdzteces v noteikšanai, mēs velkam patvaļigi $v_1 \parallel OX$, atzīmejam punktus $K_1 = v_1 \times a_1$ un $L_1 = v_1 \times b_1$ uzmeklejam K_2 un L_2 un atrodam $v_2 = K_2 L_2$.

Rasejumā taisnes c, h un v vilktas caur kopeju punktu F.

Piezīme. Kā no izskaidrotā redzams, mūsu konstrukcijās projekciju ass OX nemaz neietilpst, tapēc mēs varetu viņu ari nemaz neaizrādit, ja mums tikai zinams kautkāda punkta divejadi projecejošas plaknes virziens, t. i. ja dotas kautkāda punkta, piemēram A, abas projekcijas A_1 un A_2. Taisne $A_1 A_2$ tad noteic projecešanas virzienu techniskā rasejumā. Tas pats sakams par dažiem turpmakiem rasejumiem, kuros tapat varetu istikt bez projekciju ass OX.

51 §. Pēdu liniju uzmeklešana un plaknes redzamibas noteikšana.

Pieņemsim, ka ir dota patvaļiga plakne, noteikta ar krustodamām taisnēm a un b (54[a] ras.).

Pēc 24 § noteikumiem atrodam taišņu a un b horicontalos (S_I un S_{II}) un vertikalos (T_I un T_{II}) pēdu punktus. Taisnes $s = S_I S_{II}$ un $t = T_I T_{II}$, kuŗas savieno taišņu a un b vienadnosaukuma pēdu punktus, noteic plaknes $a\,b$ pēdu linijas.

Visparejā gadijumā pēdu liniju s un t noteikšanai vajaga atrast visus četrus pēdu punktus (S_I, S_{II}, T_I un T_{II}). Bet pietiek, ja atrod kautkādus trīs no šiem punktiem, jo pēdu linijām s un t jakrustojās uz ass OX zinamā punkta α. Šo punktu varam izlietot pēdu liniju noteikšanai jeb pārbaudot viņu noteiktibu. Viegli var gadities, ka taišņu a un b pēdu punkti pa daļai, jeb visi atrodas ārpus rasejuma robežām. Tādos gadijumos mēs pēc 50 § aizrādita paņēmiena velkam uz dotās plaknes ab kautkādu pilnigi patvaļigu palīgliniju (c) jeb vienu horicontalo vaj vertikalo pēdu līdzteci $(h$ vaj $v)$ un uzmeklējam šo palīgliniju pēdu punktus.

Tā kā katru plakni var pagaŗinat neaprobežoti uz visām pusēm, tad dotās plaknes bezgali daudzo atsevišķo punktu projekcijas visā kopumā apsedz zinamas projekciju plakņu daļas, t. i. patvaļigi pieņemtas plaknes projekcijas pa daļai aizsedz projekciju plaknes H un V. Tapēc rasejumā var aizrādit tikai atsevišķus dotās plaknes elementus, t. i. punktus, taisnes un aprobežotas figuras. Šo atsevišķo elementu redzamiba noteicama pēc vispārejiem likumiem (24 §), caur ko noteikta ari dotās plaknes attiecigās daļas redzamiba. Tā, piemēram, 54[a] rasejumā taišņu a un b redzamiba projekcijās noteic ari attiecigas plaknes $s\,a\,t$ daļas redzamibu projekcijās.

52 §. Plaknes pēdu līniju uzmeklešana ar pēdu līdzteču palīdzību.

Kā jau 51 § aizrādits, plaknes pēdu linijas varam noteikt ari ar pēdu līdztecem. Pieņemsim kautkādu plakni ar divām krustodamām taisnēm a un b (54b ras.); pēc 50 § vilksim uz plaknes ab patvaļigu horicontalo un vertikalo pēdu līdzteci (h un v) un uzmeklesim viņu pēdu punktus T un S.

Pēc 41 § dabujam, ka plaknes ab horicontalai pēdu linijai s jaiet caur horicontalo pēdu punktu S, līdztekus h_1. Tamlīdzigi pēc 42 § dabujam, ka t iet caur T, līdztekus v_2. Pēdu linijām s un t jakrustojās kopejā punktā a uz ass OX, kas jaievēro konstrukciju noteiktibas pārbaudišanai. Taišņu a un b pēdu punktiem, saprotams, jaatrodas uz plaknes vienadnosaukuma pēdu linijām un ar viņu pēdu punktiem janoteic taišņu a un b redzamiba.

53 §. Sakrītošo projekciju ass.

Taisni, pa kuŗu patvaļiga plakne krustojas ar sakrītošo projekciju plakni, sauc par dotās plaknes sakrītošo projekciju asi.

Uzmeklesim, piemēram, plaknes ab (54b ras.) sakrītošo projekciju asi. Kā zinams, katra taisne ir noteikta ar diviem punktiem. Tapēc sakrītošo projekciju ass būs noteikta, ja mēs uz plaknes ab uzmeklesim kautkādus divus punktus, kas vienā un taī pašā laikā pieder ari sakrītošo projekciju plaknei (22 §). Saprotams, ka pie tādiem mekletiem punktiem pieder, piemēram, punkti R un K, kuŗos taisnes a un b krusto sakrītošo projekciju plakni. Punktus R un K nav gŗūti atrast, ja ievērosim, ka pēc 22 § abām projekcijām no šiem punktiem jasakrīt, t. i. $R_1 = R_2$ un $K_1 = K_2$. Vienkāršibas dēļ vienosimies turpmak šādus punktus atzīmet ar $R_{1,2}$ un $K_{1,2}$. Techniskā rasejumā (54b ras) mēs šos punktus, saprotams, iegūsim kā attiecigo projekciju a_1, a_2 un b_1, b_2 krustošanās punktus. Uzmekletos punktus $R_{1,2}$ un $K_{1,2}$ savienodami, mēs dabusim plaknes ab sakrītošo projekciju asi $r_1 = r_2$, kuŗu vienkāršibas dēļ turpmak atzīmesim ar $r_{1,2}$.

Kā zinams (39 §), $s_1 = s$ un $s_2 = OX$, tapēc punkts a, kuŗā krustojas abas projekcijas s_1 un s_2 ir plaknes ab horicontalās pēdu linijas s krustošanās punkts ar sakrītošo projekciju plakni un tā tad pieder mekletai sakrītošo projekciju asij $r_{1,2}$, kuŗai tapēc pārbaudišanas dēļ jaiet caur punktu a. Aizrādito apstākli varam otradi izlietot pie sakrītošo projekciju ass noteikšanas, uzmeklejot tikai vienu no punktiem $R_{1,2}$ jeb $K_{1,2}$.

Punktu $R_{1,2}$ un $K_{1,2}$ vietā līdzigā kārtā var atrast punktus $L_{1,2} = h_1 \times h_2$ un $M_{1,2} = v_1 \times v_2$, kas tapat pieder sakrītošo projekciju asij $r_{1,2}$.

54 §. Affinitate.

Aplūkosim plaknei sat piederigo trijstūri ABC (54b ras.). Ša trijstūŗa projekcijas ir $A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$. Rasejumā redzams, ka trijstūŗu

$A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$ virsotnes pa pārām guļ uz savstarpeji līdzteku taisnēm (stariem) $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ un $C_1 C_2$, bet attiecigās malas $A_1 B_1$ un $A_2 B_2$, $A_1 C_1$ un $A_2 C_2$, $B_1 C_1$ un $B_2 C_2$ pagaŗinot pa pārām krustojas uz vienas taisnes (ass) $r_{1,2}$. Tādu sakaribu starp divām plakanām figurām ($A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$), kad attiecigās virsotnes pa pārām guļ uz līdzteku taisnēm (stariem), un attiecigas malas pagaŗinot — pa pārām krustojas uz vienas ass, sauc par affinitati, bet pašas figuras ($A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$) sauc par affini radnieciskām figurām. Taisni ($r_{1,2}$), uz kuŗas krustojas attiecigās affini radnieciskas malas, sauc par affinitates asi, bet līdzteku taisnes (stari $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ u t. t.), kas savieno attiecigas radnieciskas virsotnes, noteic affinitates virzienu.

Ja affinitates virziens ar affinitates asi veido leņķi, kas mazaks vaj lielaks par taisno leņki, tad dabujam slīpleņķaino affinitati. Bet ja affinitates virziens veido ar affinitates asi taisno leņķi, tad dabujam taisnleņķaino jeb ortogonalo affinitati.

54b rasejumā virziens $A_1 A_2$ veido ar asi $r_{1,2}$ slīpu leņķi. Ta tad, abas kautkādas plakanas figuras projekcijas atrodas slīpleņķainā affinitatē, kuŗas ass ir dotās plaknes sakrītošo projekciju ass, bet affinitates virziens sakrīt ar projecešanas virzienu, jeb ir stateniski pret projekciju asi OX.

Punkti un taisnes, kas pieder vienai figurai ($A_1 B_1 C_1$) noteic vienu punktu un taišņu zistemu, bet attiecigie punkti un taisnes, kas pieder otrai figurai ($A_2 B_2 C_2$) noteic attiecigu otro punktu un taišņu zistemu.

Tā tad plakanu figuru vietā mēs varam aplūkot affinitati starp divām punktu jeb taišņu zistemām.

55 §. Plakanas figuras redzamibas noteikšana projekcijās.

Pieņemsim, ka dots patvaļigs $\triangle$ ABC (55 ras.). Trijstūŗa ABC pēdu linijas noteicam pēc 52 § noteikumiem ar h un v palīdzibu. Uz $\triangle$-a ABC pēdu linijām guļ attiecigo malu pēdu punkti, kapēc nav gŗūti pēc 24 § noteikt atsevišķo $\triangle$-a ABC malu redzamibu projekcijās. Taisnes $S_{II} S_{III}$ un $T_{II} T_{III}$ ir oriģinalā $\triangle$-a ABC krustošanās taisnes ar H un V, bet pārejās daļas no s un t ir tikai pagaŗinatas $\triangle$-a ABC plaknes krustošanās taisnes ar H un V. Tapēc $S_{II} S_{III}$ un $T_{II} T_{III}$ jaatzīmē ar vienlaidu taisnēm, bet pārejās pēdu liniju s un t daļas ar raustitām taisnēm. $S_{II} S_{III}$ ierobežo $\triangle$-a ABC horicontalās projekcijas redzamo daļu, bet $S_{II_2} S_{III_2}$ ierobežo $\triangle$-a ABC vertikalās projekcijas redzamo daļu. Līdzigā kārtā varam novērot, ka $T_{II} T_{III}$ un $T_{II_1} T_{III_1}$ tapat ierobežo $\triangle$-a ABC redzamo daļu projekcijās. Tādejadi noteicam $\triangle$-a ABC redzamibu abās projekcijās.

Aizrādītā △-a ABC projekciju redzamiba atkarajas no tam, ka virsotne A atrodas I kvadrantā, virsotne B — IV kvadrantā un virsotne C — II kvadrantā.

Lai △-a ABC redzamiba būtu labaki novērojama projekcijās, tad attiecigie laukumi jaieklāj ar atšķaiditu krāsu.

Ar veiduļa palīdzibu jaizskaidro oriģinalā △-a ABC stāvoklis telpā, atzīmejot uz veiduļa taisnes s, t un punktus S_{II}, S_{III}, T_{II} un T_{III}. Taisne, kas telpā savieno punktus S_{III} un T_{III}, noteic oriģinalās malas BC virzienu telpā. Lai noteiktu pārejo divu malu stāvokļus telpā, iepriekš pēc 12 § janoteic oriģinalā punkta A stāvoklis telpā, un pēc tam punkts A jasavieno ar punktiem S_{II} un T_{II}, dabujot mekletos virzienus AB un AC telpā. Tādā kārtā mēs varesim sev izskaidrot, ka tā △-a ABC daļa, kas atrodas I kvadrantā, mūsu gadijumā telpā veido piecstūri $A\,S_{II}\,S_{III}\,T_{III}\,T_{II}\,A$. Ša piecstūŗa projekcijas 55 rasejumā švītrotas.

Ja dotas plaknes pēdu linijas, tad, saprotams, nav gŗūti otradi uzmeklet kautkādas plakanas figuras, piemēram △-a ABC projekcijas.

56 §. Plakanu figuru projekciju konstruešana ar diagonaļu palidzibu.

Pieņemsim, ka jakonstruē patvaļiga plakana piecstūŗa ABCDE projekcijas (56 ras.).

Vienu piecstūŗa projekciju, piemēram, $A_1\,B_1\,C_1\,D_1\,E_1$ varam pieņemt pilnigi patvaļigi, bet otru projekciju $A_2\,B_2\,C_2\,D_2\,E_2$ tad vairs nedrīkstam pieņemt patvaļigi, bet viņu konstruejot jaievēro sekošais.

Kā zinams, trīs punkti noteic plaknes stāvokli telpā, tapēc vertikalajā projekcijā varam patvaļigi pieņemt tikai trīju virsotņu projekcijas, piemēram, A_2, B_2 un C_2. Lai uzmekletu kautkādu ceturto virsotni, piemēram D_2, mēs velkam $A_1\,C_1$ un $B_1\,D_1$ un atzīmejam punktu $F_1 = A_1\,C_1 \times B_1\,D_1$. Ja punkts D tiešam atradisies figuras ABCDE plaknē, tad DB un AC noteic šās figuras diagonales, kuŗu krustošanās punkta F horicontalā projekcija aizrādita rasejumā. Atrodot pēc tam F_2 uz $A_2\,C_2$, un savienojot F_2 ar B_2, nav gŗūti atrast mekleto projekciju D_2.

Līdzigā kārtā atrodam virsotnes E projekcijas. Kontroles dēļ patvaļigo diagonaļu BD un CE krustošanās punkta projekcijām, t. i. J_1 un J_2, jaguļ uz viena stateņa pret asi OX, jeb $J_1\,J_2 \parallel A_1\,A_2$.

57 §. Plakanu figuru projekciju konstruešana uz affinitates pamata.

54 §. bij aizrādits, ka sakrītošo projekciju ass ir slīpleņķainas affinitates ass starp plakanas figuras projekcijām. Šo īpašibu izlietodami, mēs kautkāda piecstūŗa ABCDE projekcijas varam konstruet šādi (57 ras.).

Pieņemsim, ka dotas trīju punktu A, B un C projekcijas. Savienojot vienadnosaukuma projekcijas un pagarinot viņas līdz savstarpejai krustošanai punktos $F_{1,2}$ un $G_{1,2}$, mēs atradisim affinitates ass $r_{1,2} = F_{1,2} - G_{1,2}$. Lai tagad pēc patvaļigi pieņemtas projekcijas D_1 atrastu attiecigo projekciju D_2, mēs savienojam D_1 ar C_1 un atrodam pagarinatas taisnes $D_1 C_1$ krustošanos ar $r_{1,2}$ punktā $J_{1,2}$. Savienodami pēdejo punktu ar C_2, mēs iegūstam vertikalās projekcijas $C_2 D_2$ virzienu, uz kuŗas nav grūti atrast pašu vertikalo projekciju D_2. Līdzigi atrod virsotnes E projekcijas.

58 §. Līdzteku plaknes.

Tā kā divas līdzteku plaknes krustojas ar kautkādu trešo plakni pa līdzteku taisnēm, tad divu līdzteku plakņu vienadnosaukuma pēdu linijām jabūt savstarpeji līdztecēm, t. i. $s_I \parallel s_{II}$ un $t_I \parallel t_{II}$ (58 ras.).

Divas līdzteku plaknes varam ari noteikt ar diviem krustodamo taišņu pāriem ab un cd (59 ras.), pie kam jabūt $a \parallel c$ un $b \parallel d$.

59 §. Plakne, ejoša caur doto punktu, līdztekus dotai plaknei.

Pieņemsim, ka caur punktu B (60 ras.) javelk plakne, līdztekus dotai plaknei $s_I a_I t_I$.

Mekletās plaknes pēdu linijām $s_{II} a_{II} t_{II}$ pēc 58 § jabūt līdztecēm dotās plaknes pēdu linijām $s_I a_I t_I$. Lai noteiktu pēdu linijas $s_{II} a_{II} t_{II}$, mēs uz mekletās plaknes caur doto punktu B velkam vienu horicontalo pēdu līdzteci, pie kam h_2 iet caur B_2 līdztekus OX, bet h_1 iet caur $B_1 \parallel s_{II} \parallel s_I$. Noteicot horicontalās pēdu līdzteces h vertikalo pēdu punktu T, velkam caur T taisni $t_{II} \parallel t_I$, atrodam punktu $a_{II} = t_{II} \times OX$ un beidzot caur a_{II} velkam $s_{II} \parallel s_I$.

Saprotams, ka līdzigā kārtā mēs aplūkoto uzdevumu varetu atrisināt ar vienas uz mekletās plaknes $s_{II} a_{II} t_{II}$ vilktas vertikalās pēdu līdzteces palīdzibu.

60 §. Plakne, ejoša caur doto taisni, līdztekus otrai dotai taisnei.

Lai caur doto taisni b (61 ras.) vilktu plakni, līdztekus otrai dotai taisnei a, uz taisnes b japieņem patvaļigs punkts B un caur viņu javelk taisne $c \parallel a$. Plakne bc, acim redzot, ir līdztece taisnei a, jo plakne bc satur taisni $c \parallel a$.

IV nodaļa. Plakaņu figuru ģeometrisko elementu patiesā lieluma noteikšana.

61 §. Taišņu un plakņu sagrozišana projekcijās.

Pieņemsim, ka telpā dota patvaļiga taisne a (62 ras.) un viņas ortogonalā projekcija a_p uz patvaļigas projekciju plaknes P. Oriģinalās taisne a un viņas ortogonalās projekcijas a_p ierobežoto leņķi β sauc par taisnes a slīpuma leņķi pret plakni P.

No taisnleņķaina trijstūŗa AA_pS dabujam $a_p = a . \cos \beta$, t. i. taisnes projekcija uz patvaļigas plaknes sagrozas proporcionali ar kosinu no dotās taisnes slīpuma leņķa pret doto plakni.

Tā kā mēs plakni P pieņemam pilnigi patvaļigi, tad aizrādito sakaribu dabusim ari starp kautkādu oriģinalo taisni un viņas ortogonalo horicontalo vaj vertikalo projekciju.

Tā kā katete A_pS vienmēr mazaka par hipotenuzi AS, tad dabujam, ka vispārejā gadijumā patvaļiga taisne savā ortogonalā projekcijā attēlojas sagroziti samazinatā veidā. Tapēc pēc dotām projekcijām vispārejā gadijumā nevar spriest par oriģinalās taisnes patieso lielumu, izņemot gadijumu, kad oriģinalā taisne guļ uz projekciju plaknes, vaj ir līdztece projekciju plaknei. Saprotams, ka šinīs gadijumos oriģinalā taisne projecejas uz līdzteku plakni dabiskā lielumā.

Atsevišķos gadijumos taisne projecejas dabiskā lielumā uz H, V vaj W, atkaribā no tam, kādai no šīm projekciju plaknēm dotā taisne ir līdztece.

Dzīvē mēs visbiežaki sastopam tādus cilveka rokām izgatavotus priekšmetus, kuŗu atsevišķas sānu malas ir līdzteces trīm savstarpeji stateniskām plaknēm (H, V un W). Tapēc attiecigā veidā priekšmetu nostādidami un viņu uz H, V un W projecedami, mēs horicontalajā projekcijā iegūsim dabiskus lielumus no visiem tādiem priekšmeta apveidiem, kas ir līdztekus H; vertikalajā projekcijā dabiskā lielumā iegūsim tādus apveidus, kas ir līdztekus V, un profilā projekcijā iegūsim dabiskā lielumā apveidus, kas ir līdztekus W. Tapēc ari techniskos rasejumos pieņemts priekšmetus attēlot trījās projekcijās: uz H, V un W, uz ko jau 13 §. aizrādits.

Bet ja mēs pieņemsim priekšmetu, kuŗa sānu malas neizpilda aizrāditus noteikumus, tad šāda priekšmeta sānu malas un viņa šķautnes vispārejā gadijumā vienmēr attēlojas projekcijās sagrozitā veidā. Tapēc no liela svara ari šajos gadijumos pareizi noteikt ķermeņu atsevišķo ģeometrisko elementu patiesos jeb dabiskos lielumus (mērus). Šim nolūkam lietoti paņēmieni pa lielakai daļai atbalstās uz tā saucamiem griešanas un savienošanās paņēmieniem, ar kuŗiem mēs tapēc ari tuvaki iepazīsimies, bet papriekšu mums vēl jaaplūko punkta griešanās

62 §. Punkta griešanās.

Patvaļigi pieņemta punkta A griešanās ap patvaļigi pieņemto asi o (63 ras.) notiek plaknē Q, kas stateniska pret griešanās asi. Šo plakni sauc par dotā punkta griešanās plakni. Šās plaknes krustošanos ar griešanās asi noteic griešanās centru N, bet punkta A atstatums no centra N noteic griešanās radiusu r. Saprotams, ka griešanās radius NA vienmēr veido ar griešanās asi o taisnu leņķi.

Līdzigā kārtā kā punktu A, mēs ap asi o varam griest kautkādu taisni, plakni, vaj ķermeni. Tam nolūkam jaatron taisnes, plaknes, vaj ķermeņa atsevišķo punktu pagriestie stāvokļi.

Ja griešanās plakne $Q \perp o$, kā tas pieņemts 63 rasejumā, tad šādu punkta A griešanu sauc par svabadu griešanu. Var gadities, ka punkts A negriežas svabadi ap asi o, bet punkta griešanās atkariga vēl no citiem spaidu apstākļiem. Pie tam griešanās plakne jau nebūs vairs stateniska pret o, bet veidos ar o leņķi $\lessgtr 90^0$. Šādu griešanu nosauksim par spaidu griešanu. Turpmak, kur to atsevišķi neminēs, mums vienmēr būs darīšana ar svabadu griešanu.

63 §. Dotā nogriežņa patiesā lieluma noteikšana pēc griešanās paņēmiena.

Pieņemsim, ka jaņoteic patvaļiga nogriežņa AB (64 ras.) patiesais lielums. Tam nolūkam nogriezni AB griežam ap asi y, stateniskи pret V, līdz AB top līdztekus H. Visvienkāršaki taisne griežama, ja griešanās ass y iet caur vienu taisnes AB gala punktu, piemēram caur B. Griešanās ass vertikalā projekcija tad sakrīt ar B_2, t. i. $y_2 = B_2$, bet horicontalā projekcija y_1 stateniska pret OX un iet caur B_1. Punkts B uz griešanās ass nemaina savu stāvokli, tapēc, lai noteiktu dotās taisnes stāvokli pēc griešanās, pietiek noteikt viena punkta A stāvokli pēc griešanās.

Punkta A griešanās plakne Q ir stateniska pret asi y, bet pēdejā pēc noteikuma stateniska pret V, tapēc plakne $Q \parallel V$ un punkta A griešanās ceļš attēlojas dabiskā lielumā uz V, kā aploce, vilkta no centra B_2 ar radiusu B_2A_2. Ja mēs taisni AB nostādam līdztekus H, tad gala punkts A ieņem jaunu stāvokli, kuŗu atzīmesim ar A_0, un taisnes AB jaunā vertikalā projekcija $B_1 A_{o_2}$ ies caur B_2 līdztekus OX.

Tā kā griešanās plakne $Q \parallel V$, tad šās plaknes horicontalā pēdu linija iet caur A_1 līdztekus OX, un ar šo pēdu liniju sakrīt punkta A griešanās ceļa horicontalā projekcija. Tapēc pēc zinamās projekcijas A_{o_2} nav gŗūti uzmeklet attiecigo projekciju A_{o_1}. A_{o_1} ar B_1 savienodami, dabujam pagriestās taisnes jauno horicontalo projekciju, kuŗā taisne AB attēlojas dabiskā lielumā. Tā tad $B_1 A_{o_1}$ ir originalās taisnes AB patiesais lielums.

Saprotams, ka taisni AB nostādot līdztekus H, var pagriest uz labo vaj kreiso pusi, kapēc varam atzīmet ne tikai punkta A_o, bet ari punkta A'_o projekcijas. Ja mēs to izdarisim, kā tas 64 rasejumā aizrādits, tad dabusim, ka ari $B_1 A'_{o_1}$ ir oriģinalās taisnes AB patiesais lielums. Saprotams, ka $B_1 A_{o_1} = B_1 A'_{o_1}$.

Taisnei AB griežoties ap asi y, ap šo asi griežas ari taisnes AB vertikali projecejoša plakne. Kad taisne AB top līdztece H, tad ari vertikali projecejoša plakne top līdztece H, un taisnes AB slīpuma leņķis δ pret vertikalo projekciju plakni V projecejas dabiskā lielumā uz H. Tādu pat leņķi δ, kā ar V, taisne AB veido ar katru plakni, piemēram Q, kuŗa ir līdztece V, kā tas rasejumā aizrādits.

Līdzigā kārtā, kā ap asi y, statenisko pret V, mēs doto taisni AB varam griest ari ap asi z, stateniskų pret H, un nostādit taisni AB līdztekus V, kā tas aizrādits 65 rasejumā. Pie tam punkta A griešanās ceļš projecejas patiesā lielumā uz H, kā aploce, vilkta no B_1 ar radiusu $B_1 A_1$. Punkta A griešanās ceļa vertikalā projekcija attēlojas kā taisne, kas iet caur A_2 līdztekus OX. Atzīmejot telpā punkta A pagriestos stāvokļus ar A_o vaj A'_o, techniskā rasejumā dabusim attiecigas jaunās projekcijas A_{o_1}, A_{o_2} jeb A'_{o_1}, A'_{o_2}. Taisne $B_2 A_{o_2}$ vaj $B_2 A'_{o_2}$ noteic nogriežņa AB patieso lielumu.

Taisni AB griežot ap asi z, ap šo asi griežas ari taisnes AB horicontali projecejoša plakne, un vertikalajā projekcijā dabiskā lielumā attēlojas taisnes AB slīpuma leņķis β pret H, kā tas aizrādits rasejumā.

64 un 65 rasejumos aizrādits punkta A griešanās centrs N. Bet parasti šis griešanās centrs N, kā ari attiecigo griešanās asu y un z projekcijas nemaz netiek aizrāditas rasejumā.

Pamatojoties uz aizrādito, mēs varam atrisinat ari pretejo uzdevumu, t. i uz taisnes, dotas projekcijās, varam nospraust nogriezni m, kuŗa patiesais lielums ir dots. Tā, piemēram, 65 rasejumā uz taisnes AB no punkta B ir nosprausts nogrieznis $BC = m$. Tam nolūkam uz $B_2 A_{o_2}$ nospraužam no punkta B_2 nogriezni $B_2 C_{o_2} = m$ un pēc projekcijām C_{o_2} un C_{o_1} pretējā kārtā uzmeklejam attiecigās projekcijas C_1 un C_2. Projekciju C_1 dabujam, velkot no B_1 ar radiusu $B_1 C_{o_1}$ aploci līdz krustošanai ar $B_1 A_1$ punktā C_1. Lai atrastu C_2, tad no C_{o_2} velkam līdzteci ar OX līdz krustošanai ar $A_2 B_2$. Kontroles dēļ projekcijām C_1 un C_2 jaguļ uz viena stateņa pret OX.

Piezime. Kā 64 un 65 rasejumā redzams, pie dotiem projecešanas virzieniem ass OX stāvoklis var būt pieņemts patvaļigi (lai tikai ass OX būtu stateniska pret projecešanas virzienu), t. i. patvaļiga nogriežņa patiesais lielums ir neatkarigs no projekciju ass OX stāvokļa. Tapēc projekciju ass OX varam ari rasejumā pavisam neaizrādit.

64 §. Taisnes horicontali projecejošas plaknes savienošana un taisnes patiesā lieluma noteikšana.

Pieņemsim, ka dota patvaļiga taisne a (66 ras.). Atzīmesim taisnes a horicontali projecejošo plakni AA_1S un ap asi a_1 griezdami, savienosim viņu ar H. Saprotams, ka punkta A horicontali projecejošais stars AA_1 ari savienotā stāvoklī veido ar a_1 taisnu leņķi. Tapēc, lai iegūtu punkta A savienoto stāvokli A_0, no A_1 javelk statenis pret a_1 un uz viņa janosprauž nogrieznis $A_0A_1 = AA_1 = A_2A_x = z_1$.

Līdzigā kārtā noteicami ari taisnes a punktu B un C savienotie stāvokļi B_0 un C_0 ar koordinatu z_2 un z_3 palīdzibu.

Oriģinalie punkti A un B atrodas vienā pusē no H, tapēc ari savienotiem stāvokļiem A_0 un B_0 jaatrodās vienā pusē no a_1. Bet oriģinalos punktus A un C aplūkodami, novērojam, ka viņi atrodas dažadās pusēs no H, kapēc ari viņu savienotiem stāvokļiem A_0 un C_0 jaatrodās pa dažadām pusēm no a_1 Taisnes a horicontalais pēdu punkts S guļ uz griešanās ass a_1 un tapēc nemaina savu stāvokli.

Taisne a_0, kas iet caur taisnes a atsevišķo punktu savienotiem stāvokļiem A_0, B_0 un C_0, noteic oriģinalās taisnes patieso lielumu. Taisnes a slīpuma leņka pret H patiesais lielums ir $\beta = \sphericalangle A_0SA_1$.

Taisnes a zinamā nogriežņa AB patiesais lielums var būt noteikts ari šādi. Uz plaknes AA_1S velkam caur punktu B horicontalo pēdu līdzteci $BD = h$. Kā 66a rasejumā redzams, dotā nogriežņa AB patiesais lielums ir vienlīdzigs ar taisnleņka trijstūŗa ADB hipotenuzi AB, kuŗa viena katete $DB = A_1B_1$ ir vienlīdziga ar dotā nogriežņa horicontalo projekciju, bet otrā katete $AD = AA_1 - DA_1 = AA_1 - BB_1 = A_2A_x - B_2B_x = z_1 - z_2$ ir vienlīdziga ar starpibu starp dotā nogriežņa vertikalās projekcijas gala punktu attālumiem no ass OX. Nosprauzdami 66b rasejumā uz stateņa, vilkta no A_1 pret a_1, nogriezni $A_1A'_{0_1} = z_1 - z_2$ un savienodami A'_{0_1} ar B_1, iegūsim taisnleņka trijstūri $A'_{0_1}A_1B_1 = ADB$, kuŗā hipotenuze $A'_{0_1}B_1$ ir vienlīdziga ar nogriežņa AB patieso lielumu, bet $\sphericalangle A'_{0_1}B_1A_1$ noteic nogriežņa AB slīpuma leņķi pret H.

Iedomasimies, ka trijstūris ADB (66a ras.), griežot viņu ap asi h, nostādits līdztekus ar H, tad $A'_{0_1}A_1B_1$ noteic viņa horicontalo projekciju, kas ir vienlīdziga ar trijstūŗa A'_0DB vaj ADB patieso lielumu. Tapēc ari hipotenuze $A'_{0_1}B_1$ ir vienlīdziga ar nogriežņa AB patieso lielumu.

Gadijumā, kad dotā nogriežņa AC gali atrodas d a ž a d ā s p u s ē s no H, mēs priekš punktu A un C ordinatām dabusim pretejas nozīmes, pie kam punkta A ordinata ir $+z_1$, bet punkta C ordinata : $-z_3$. Šinī gadijumā starpiba $A_2A_x - C_2C_x = z_1 - (-z_3) = z_1 + z_3$ un tapēc nogriežņa AC patiesais lielums ir vienlīdzigs ar hipotenuzi $A''_{0_1}C_1$ no taisnleņka trijstūŗa

$A_o''{}_1 A_1 C_1$ (66ᵇ ras.) kuŗā viena katete ir $A_1 C_1$, bet otra katete $A_o''{}_1 A_1 = z_1 + z_3$, t. i. vienlīdziga ar dotā nogriežņa vertikalās projekcijas gala punktu attālumu zumu no ass OX. Taisnes AC slīpuma leņķis pret H ir $\sphericalangle A_o''{}_1 C_1 A_1$.

Aizrādito sakopodami, dabujam, kā patvaļiga nogriežņa patiesais lielums ir vienlīdzigs ar taisnleņķa trijstūŗa hipotenuzi, kam viena katete ir vienlīdziga ar dotā nogriežņa horicontalo projekciju, bet otrā katete — vienlīdziga starpibai jeb zumai no dotā nogriežņa vertikalās projekcijas gala punktu attālumiem no ass OX, atkaribā no tam, vaj dotā nogriežņa gali atrodas vienā, jeb dažadās pusēs no H.

65 §. Taisnes vertikali projecejošas plaknes savienošana un taisnes patiesā lieluma noteikšana.

Lai atrastu patvaļigi uz dotās taisnes a pieņemta punkta A savienoto stāvokli A_o (67ᵃ ras.), tad taisnes $ABC = a$ vertikali projecejoša plakne AA_2T jasavieno ar V. Pie tam A_o iegūsim uz stateņa, vilkta no A_2 pret a_2, atstatumā $A_oA_2 = AA_2 = A_1A_x = y_1$, kā tas aizrādits 67ᵇ rasejumā.

Līdzigā kārtā atrod punktu B un C savienotos stāvokļus B_o un C_o, pie kam C_o iegūsim pa otru pusi no a_2, jo oriģinalie punkti A un C atrodas dažadās pusēs no V. Ja caur punktu B velkam uz plaknes AA_2T vertikalo pēdu līdzteci $v = BD$, tad, kā tas redzams no 67ᵃ rasejuma, taisnes AB patiesais lielums ir vienlīdzigs ar taisnleņķa trijstūŗa ADB hipotenuzi, kuŗā viņa katetē $DB = A_2B_2$, t. i. ir vienlīdziga ar nogriežņa AB vertikalo projekciju, bet otra katete $AD = A_1D_1 = A_1A_x - D_1A_x = A_1A_x - B_1B_x = y_1 - y_2$, t. i. vienlīdziga ar nogriežņa AB horicontalās projekcijas gala punktu atstatumu starpibu no ass OX. 67ᵇ ras. aizrādits taisnleņķa trijstūris $A_{o_2}' A_2B_2$, kuŗa hipotenuze $A_{o_2}'B_2$ līdzinas nogriežņa AB patiesam lielumam.

Ja ap vertikalo pēdu līdzteci v griezdami, mēs trijstūri ABD (67ᵃ ras.) nostādam līdztekus V, stāvoklī $A_o'BD$, tad vertikalā projekcija $A'_{o_2}A_2B_2$ līdzinas trijstūŗa A'_oDB vaj ADB patiesam lielumam, un tapēc $A'_{o_2}B_2$ ir nogriežņa AB patiesais lielums.

Ja dotā nogriežņa AC gala punkti atrodas dažadās pusēs no V, tad dabujam $A_1A_x - C_1C_x = y_1 - (-y_3) = y_1 + y_3$. Attiecigais taisnleņķa trijstūris ir $A''_{o_2} A_2 C_2$ (67ᵇ ras.), kuŗa hipotenuze $A''_{o_2} C_2$ līdzinas nogriežņa AC patiesam lielumam.

Leņķus δ, kuŗus veido savienotie stāvokļi a_o, a'_{o_2} vaj a''_{o_2} ar $a_2 = A_2B_2$, noteic oriģinalās taisnes ABC slīpuma leņķi pret V.

Visu izteikto sakopodami, dabujam, ka patvaļiga nogriežņa patiesais lielums līdzinas taisnleņķa trijstūŗa hipotenuzei, kam viena katete līdzinas dotā nogriežņa vertikalai projekcijai, bet otrā — vienlīdziga starpibai jeb zumai no dotā nogriežņa horicontalās projekcijas gala punktu attālumiem no ass OX, atkaribā no tam, vaj dotā nogriežņa gali atrodas vienā, vaj dažadās pusēs no V.

66 §. Punkta savienošana ar H.

Pieņemsim, ka telpā doto punktu A (68 ras.) jasavieno ar H, griežot pie tam doto punktu ap taisni h, kas guļ uz H.

Griešanās ass guļ uz H, tapēc punkta A griešanās plakne Q ir stateniska pret H. Griešanās plaknes horicontalā pēdu linija $A_1 A_0$ ies caur A_1, stateniski pret h un uz šās linijas $A_1 A_0$ jaatronās punkta A savienotam stāvoklim A_0.

Punktu N, kuŗā griešanās plaknes Q horicontalā pēdu linija krusto griešanās asi h, noteic punkta A griešanās centru, bet nogrieznis AN ir attiecigais griešanās radiuss, kuŗa patieso lielumu NA'_0 pēc 64 § noteikumiem atrodam ar taisnleņķa trijstūŗa $NA_1A'_0$ palīdzibu. Velkot no centra N loku ar radiusu NA_0', mēs ša loka krustošanās punktā ar $A_1 A_0$ iegūsim punkta A mekleto savienoto stāvokli A_0. Tā kā $h_1 = h$ un $h_2 = OX$, tad dabujam, ka punkta A griešanās radiusa patiesais lielums vienlīdzigs ar taisnleņķa trijstūŗa A'_0A_1N hipotenuzi A'_0N, kam viena katete (A_1N) vienlīdziga ar savienojamā punkta horicontalās projekcijas (A_1) attālumu no griešanās ass horicontalās projekcijas (h_1), bet otrā katete ($A_0'A_1 = z$) vienlīdziga ar savienojamā punkta vertikalās projekcijas (A_2) attālumu no griešanās ass vertikalās projekcijas (h_2).

Piezīme. Tā kā h guļ uz H, mēs griešanās asi varam uzlūkot kā zinamo horicontalo pēdu līdzteci.

67 §. Punkta savienošana ar V.

Ja patvaļigs punkts A (69 ras.) jasavieno ar V, griežot viņu ap taisni v, kas guļ uz V, tad punkta A griešanās plakne $Q \perp V$, tapēc griešanās plaknes vertikalā pēdu linija $A_2 A_0$ iet caur A_2, stateniski pret v, un uz taisnes A_2A_0 jaatronās punkta A savienotam stāvoklim A_0. Punkts N, kuŗā A_2A_0 krusto v, ir griešanās centrs N, bet nogrieznis AN ir griešanās radiuss, kuŗa patiesais lielums NA'_0 pēc 65 § noteicams ar taisnleņķa trijstūri $NA_0'A_2$. Vilkdami ap centru N loku ar radiusu NA'_0 līdz krustošanai ar pagaŗinato taisni A_2N, atradisim punkta A savienoto stāvokli A_0.

Tā kā $v_2 = v$ un $v_1 = OX$, tad dabujam, ka punkta A griešanās radiusa patiesais lielums ir vienlīdzigs ar taisnleņķa trijstūŗa (A'_0A_2N) hipotenuzi ($A_0'N$), kam viena katete (A_2N) ir vienlīdziga ar savienojamā punkta vertikalās projekcijas (A_2) attālumu no griśanās ass vertikalās projekcijas (v_2), bet otra katete ($A_0'A_2 = y$) vienlīdziga ar savienojamā punkta horicontalās projekcijas (A_1) atstatumu no griešanās ass horicontalās projekcijas (v_1).

Piezīme. Tā kā v guļ uz V, tad mēs griešanās asi v varam uzlūkot kā zinamo vertikalo pēdu līdzteci.

68 §. Plaknes savienošana ar H.

Patvaļigi dotu plakni sat var savienot ar H, griežot viņu ap pēdu liniju s (70 ras.).

Lai noteiktu dotās plaknes vertikalās pēdu linijas t savienoto stāvokli, pietiek, ja pēc 66 § atrodam uz vertikalās pēdu linijas t patvaļigi pieņemta punkta T savienoto stāvokli T_0 Savienodami T_0 ar punktu a, kuŗā t krusto griešanās asi, dabujam vertikalās pēdu linijas savienoto stāvokli $t_0 = aT_0$.

Vēl vienkāršaki T_0 atrod, ievērojot, ka uz plaknes V guļošais nogrieznis aT attēlojas techniskā rasejumā patiesā lielumā. Tapēc no centra a velkam loku ar radiusu $aT = aT_0$ līdz krustošanai ar stateni, kas vilkts no T_1 pret s.

Leņķis $T'_0NT_1 = \beta$ ir vienlīdzigs ar divplakņu kaktu, ko veido plaknes sat un H, jo β ir vienlīdzigs ar leņķi, ko dabujam plaknēm sat un H krustojoties ar horicontali projecejošo plakni, vilkto caur punktu T stateniski pret plakņu sat un H krustošanās taisni s

69 §. Plaknes savienošana ar V.

Līdzigā kārtā mēs doto plakni sat (71 ras.) varam savienot ar V, griežot pie tam plakni sat ap vertikalo pēdu liniju t.

Patvaļiga punkta S savienoto stāvokli S_0 atrodam pēc 67 §. Vēl vienkāršaki atrod S_0, ja ar radiusu $aS = aS_0$ pārgriežam no S_2 pret t vilkto stateni. S_0 ar a savienodami, iegūstam horicontalās pēdu linijas s savienoto stāvokli s_0.

Leņķis $S_0'NS_2$ δ ir plakņu sat un V veidotā divplakņu kakta patiesais lielums.

70 §. Plakanu figuru projekciju konstruešana pēc dotiem patiesiem lielumiem.

Pamatodamies uz to, ka katru plakanu figuru var sadalit atsevišķos trijstūŗos, mēs atrisinasim sekošo pamatuzdevumu

Dots uz zinamas plaknes sat guļoša trijstūŗa ABC patiesais lielums; jaatrod $\triangle$-a ABC projekcijas (72 ras.).

Lai atrisinatu šo uzdevumu, tad uz pēdu linijas t pieņemam patvaļigu punktu T, uzmeklejam viņa savienoto stāvokli T_0, velkam $t_0 = \alpha T_0$ (68 §) un pēc atsevišķo malu patiesigiem lielumiem konstruejam dotā trijstūŗa savienoto stāvokli $A_0 B_0 C_0$. Ja pie tam ir vēlams oriģinalo trijstūri ABC iegūt I kvadrantā, tad $\triangle$-im $A_0 B_0 C_0$ jaatronās taišņu s un t_0 veidota leņķa iekšpusē, jo šis leņķis atbilst tai plaknes $s \alpha t$ daļai, kas atrodas I kvadrantā.

Tagad uzmeklesim $\triangle$-a ABC projekcijas. Atradisim, piemēram, malas AB projekcijas. Tam nolūkam savienoto malu $A_0 B_0$ pagaŗinam līdz krustošanai ar s un t_0, dabujot punktus S_I un T_{I_0}. Pēc tam ar radiusu αT_{I_0} velkam loku līdz krustošanai ar t punktā T_I un šo punktu savienojam S_{I_2}. Taisne $T_I S_{I_2}$ norāda vertikalās projekcijas $A_2 B_2$ virzienu. Velkot pēc tam no A_0 un B_0 stateņus pret s līdz krustošanai ar $T_{I_1} S_I$, iegūsim horicontalās projekcijas A_1 un B_1, pēc kuŗām nav gŗūti uz $S_{I_2} T_I$ atrast attiecigās vertikalās projekcijas A_2 un B_2. Līdzigā kārtā varam uzmeklet pārejo trijstūŗa malu projekcijas. Pie tam izrādas, ka $C_0 B_0$ un $C_1 B_1$ krustojas kopejā punktā S_{II} uz s. Tamlīdzigi $C_0 A_0$ un $C_1 A_1$ krustojas kopejā punktā S_{III} uz s, bet virsotnes A_0 un A_1, B_0 un B_1, C_0 un C_1 guļ uz savstarpeji līdzteku stariem, kas pie tam ir stateniski pret s. Tādu sakaru, kā jau zinam (54 §), sauc par ortogonalo affinitati. Tā tad f i g u r a s $A_0 B_0 C_0$ u n $A_1 B_1 C_1$ i r o r t o g o n a l i a f f i n i r a d n i e c i s k a s f i g u r a s a r a f f i n i t a t e s a s i s u n a f f i n i t a t e s v i r z i e n u, s t a t e n i s k u p r e t s.

Aizrāditais sakars starp figurām $A_0 B_0 C_0$ un $A_1 B_1 C_1$ vienmēr jaievēro un jaizlieto kā līdzeklis konstrukciju pavienkāršinašanai.

Neatkarigi no aizrāditām konstrukcijām mēs kautkādas virsotnes projekcijas varam uzmeklet, ievērojot, ka ikkatras horicontalās pēdu līdzteces h savienotais stāvoklis $h_0 \parallel s$. Tapēc, ja mēs savienotajā stāvoklī caur C_0 velkam $h_0 \parallel s$, tad saprotams, ka attiecigām punkta C projekcijām C_1 un C_2 jaguļ uz pēdu līdzteces h vienadnosaukuma projekcijām h_1 un h_2, kuŗus nav gŗūti uzmeklet. Pašas konstrukcijas izdaram šādi. Caur punktu C_0 velkam $h_0 \parallel s$ un atzīmejam punktu $T_{III_0} = h_0 \times t_0$. Pēc tam velkam loku ar radiusu αT_{III_0} līdz krustošanai ar t un caur iegūto punktu T_{III} velkam $h_2 \parallel OX$. Punktu T_{III} pārnesam uz OX, dabujot T_{III_1}. Caur T_{III_1} velkam $h_1 \parallel s$. Tad velkam no C_0 stateni pret s, līdz krustošanai ar h_1 punktā C_1, un pēc tam uz h_2 atrodam C_2.

Bez tam vēl konstrukcijas izpildot jaievēro, ka pēc 54 § kautkādas plakanas figuras abas projekcijas, t. i. $A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$ ir affini radnieciskas figuras ar affinitates asi, kas ir dotās plaknes sakrītošo projekciju ass $r_{1,2}$. Šī ass iet caur punktu α un caur punktu $D_{1,2} = h_1 \times h_2$. Kontroles dēļ uz $r_{1,2}$ krustojas $A_1 C_1$ un $A_2 C_2$ punktā $E_{1,2}$. Tamlīdzigi uz $r_{1,2}$ krustojas arī $A_1 B_1$ un $A_2 B_2$ punktā $F_{1,2}$.

Kā augšā jau tika aizrādits, savienoto stāvokli $A_0 B_0 C_0$ mēs pieņēmam leņķa, veidota no taisnēm s un t_0 iekšpusē un tapēc oriģinalo $\triangle$-i ABC dabujam I kvadrantā, kā tas ari novērojams no projekciju no $A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$ stāvokļiem attiecibā uz asi OX.

Ja mēs vēlamies $\triangle$-i ABC pieņemt kautkāda citā kvadrantā, tad jaievēro, ka plaknes sat daļa, kas atrodas II kvadrantā, savienotajā stāvoklī ir ierobežota no taisnēm t_0 un s', pie kam s' ir pēdu linijas s pagarinajums. Tamlīdzigi dabujam, ka plaknes sat daļas, kas atrodas III vaj IV kvadrantā, ir ierobežotas savienotajā stāvoklī no attiecigām taisnēm s', t_0' un s, t_0', pie kam t_0' ir taisnes t_0 pagaŗinajums. Aizrāditie leņķi 72 rasejumā atzīmeti ar I $kv._0$, II $kv._0$, III $kv._0$ un IV $kv._0$.

Pieņemot aizrādito leņķu iekšpusē savienoto stāvokli $A_0 B_0 C_0$, mēs dabusim oriģinalo $\triangle$-i ABC uz plaknes sat daļas, kas atrodas I, II, III jeb IV kvadrantā. Ja mēs pieņemsim $A_0 B_0 C_0$ tā, lai šis savienotais stāvoklis krusto t_0, tad nav gŗūti sajēgt, ka oriģinalais $\triangle$ ABC atradisies pa daļai I un pa daļai II kvadrantā. Bet ja mēs pieņemsim, ka $A_0 B_0 C_0$ krusto s, tad oriģinalo $\triangle$-i ABC iegūsim pa daļai I un IV kvadrantā. Analoģiskais jaievēro pie $A_0 B_0 C_0$ krustošanās ar s' un t'_0. Varetu ari $\triangle$-i ABC pieņemt tā, ka viņš atrastos visos četros kvadrantos, šinī gadijumā saprotams a guļ $\triangle$-a $A_0 B_0 C_0$ iekšpusē.

71 §. Punkta savienošana ar H'.

Pieņemsim, ka patvaļigs punkts A (73 ras.), griežot viņu ap doto horicontalo pēdu līdzteci h, jasavieno ar plakni H', kas līdztece plaknei H un iet caur h.

Ja H' pieņemam kā jauno horicontalo projekciju pamatplakni, tad jaunā projekciju ass O'X' sakrīt ar h_2, un mūsu uzdevums atrisinajams tādā pašā kārtā, kā 66 § aplūkotais uzdevums.

Uz aizrādito pamatodamies, mēs varam noteikt patvaļigi pieņemta nogriežņa $a =$ AB (74 ras.) patieso lielumu a_0, velkot tam nolūkam caur vienu galu B pilnigi patvaļigi pieņemto horicontalo pēdu līdzteci h.

72 §. Punkta savienošana ar V'.

Pieņemsim, ka patvaļigs punkts A (75 ras.) jasavieno ar plakni V', kas ir līdztece V, pie kam plaknes V' stāvoklis noteikts ar patvaļigu vertikalu pēdu līdzteci v, ap kuŗu griežam doto punktu.

Ja V' pieņemam par jauno vertikalo projekciju plakni, tad jaunā projekciju ass O'X' sakrīt ar v_1, un mūsu uzdevums atrizinams pēc 67 panta noteikumiem.

73 §. Patvaļigas plakanas figuras patiesā lieluma noteikšana.

Pieņemsim, ka ir jaatrod △-a ABC patiesais lielums (76 ras.).

Tam nolūkam uz △-a ABC plaknes caur virsotni A velkam horicontalo pēdu līdzteci h; pie tam h_2 iet caur A_2 līdztekus OX. Horicontalo projekciju h_1 mēs nekādā ziņā nedrīkstam pieņemt patvaļigi, bet viņa janoteic tā, lai h patiesi guletu uz △-a ABC plaknes. To mēs sasniegsim, ja atzīmesim projekciju $D_2 = h_2 \times B_2C_2$ (50 §) un pēc tam uz B_1C_1 uzmeklesim attiecigo projekciju D_1, ko ar A_1 savienodami, dabujam h_1. Pēc tam uz 71 § pamata (73 ras.) atrodam virsotnes B savienoto stāvokli B_o. Lai noteiktu C_o, pietiek B_o savienot ar $D_o = D_1$ un uzmeklet šās taisnes krustošanās punktu ar statcni, kas vilkts caur C_1 pret h_1. Tādā veidā dabujam △-a ABC patieso lielumu $A_o B_o C_o$, kas praktisko darbu laikā jaieklāj drusku gaišaki, nekā projekcijas $A_1 B_1 C_1$ un $A_2 B_2 C_2$.

Kā 76 rasejumā novērojams, f i g u r a s $A_1 B_1 C_1$ u n $A_o B_o C_o$ i r o r t o g o n a l i a f f i n i r a d n i e c i s k a s f i g u r a s a r a f f i n i t a t e s a s i h_1 u n a f f i n i t a t e s v i r z i e n u , s t a t e n i s k u p r e t h_1. Konstruejot kautkādas plakanas figuras patieso lielumu, šī affinitate vienmēr jaievēro.

No rasejuma redzams, ka ass OX stāvoklim mūsu konstrukcijās nav nekādas nozīmes, kapēc ari OX rasejumā var ari nemaz neaizrādit.

Ievērosim, ka pēc 76 rasejuma var noteikt ari kautkādu divu krustodamo taišņu veidota leņķa patieso lielumu.

Analoģiskā kārtā pēc 75 rasejuma izdarama △-a ABC savienošana ar plakni V′ ‖ V, griežot △-i ABC ap vertikalo pēdu līdzteci v, kas iet caur vienu dotā trijstūŗa virsotni un guļ uz △-a ABC plaknes. Pie tam šinī gadījumā dabusim ortogonalo affinitati starp $A_o B_o C_o$ un $A_2 B_2 C_2$, kuŗas ass ir v_2, bet virziens ir stateniski pret v_2.

74 §. Jaunās vertikalās projekcijas plaknes pieņemšanas paņēmiens.

77 rasejumā attēlots patvaļigs punkts A un viņa projekcijas A_1 un A_2 uz projekciju pamatplaknēm H und V.

Pieņemsim plaknes V vietā vienu patvaļigu citu vertikalo projekciju plakni $V' \perp H$, un atzīmesim plakņu V′ un H krustošanās taisni, t. i. j a u n o p r o j e k c i j u a s i ar O′X′. Punkta A projekcijas attiecibā uz projekciju plaknēm H un V′ atzīmesim ar A_1 un A_2'. Punktu A_2' sauc par oriģinalā punkta A j a u n o v e r t i k a l o p r o j e k c i j u, attiecibā uz jauno vertikalo projekciju plakni V′. Punkta A divejadi projecejošas plaknes krustošanās punktu ar asi O′X′ apzīmesim ar A'_x.

Tā kā plaknes H un V′ savstarpeji stateniskas, tad paliek spēkā visi 12 § minetie pamatnoteikumi par kautkāda punkta projekcijām.

Kā 77[a] rasejumā redzams, tad $A'_2A'_x = AA_1 = A_2A_x = z$, tapēc techniskā rasejumā (77[b] ras) jaunā vertikalā projekcija A_2' atrodas tādā pašā atstatumā no jaunās projekciju ass O'X', kā vecā vertikalā projekcija A_2 no vecās projekciju ass OX.

Jaunai vertikalai projekcijai A'_2 no punkta A, kas atrodas I kvadrantā, jaatronās otrā pusē no ass O'X', t. i. projekcijas A'_2 savienošanās virziens sakrīt ar jaunā vertikali projecejoša stara AA'_2 virzienu.

Ass O'X' apzīmejot, burtu O' liek pa kreisi no iedomajama aplūkotaja, kas atrodas I kvadrantā, plakņu H un V' zistemā.

Kā rasejumā redzams, tad agrakajo koordinatu y un z vietā mēs iegūstam koordinatas y' un z.

Līdzigā kārtā nav grūti uz plaknēm H un V' attēlot punktu projekcijas, kas atrodas II, III jeb IV kvadrantā.

75 §. Jaunās horicontalās projekciju plaknes pieņemšanas paņēmiens.

Iepriekšejam gadijumam līdzigi mēs varam pieņemt vienu jauno horicontalo projekciju plakni H', statenisku pret V, kā tas aizrādits 78[a] rasejumā. Plakni H' sauc par jauno horicontalo projekciju plakni. Plakņu H' un V krustošanās liniju, t. i. O'X', sauc par jauno projekciju asi, bet punta A projekciju uz H', t. i. A'_1, sauc par jauno horicontalo projekciju. Pie tam jaņem vērā, ka teiciens „jaunā horicontalā projekcija" ir pieņemts un nesakrīt ar īstenibu, jo plakne H' nav horicontalā plakne, bet viņa tikai pieņemta agrakās horicontalās projekciju plaknes H vietā.

Kā 78[a] rasejumā redzams, $A'_1A'_x = AA_2 = A_1A_x = y$, kapēc techniskā rasejumā (78[b] ras.) dabujam, ka jaunā horicontalā projekcija A'_1 atrodas tādā pašā atstatumā no jaunās projekciju ass O'X', kā vecā horicontalā projekcija A_1 no vecās ass OX.

Agrakajo koordinatu y un z vietā mēs punktam A iegūsim koordinatas y un z'.

Projekciju A'_1 savienojot ar V, jaņem vērā, ka savienošanas virziens (sk. 78[a] ras) sastāda jaunā horicontalī projecejoša stara AA'_1 pagarinajumu.

Ass O'X' atzīmejot, burts O' jaliek pa kreisi no aplūkotaja, kas atrodas I kvadrantā, plakņu VH' zistemā.

Kā vēlak redzesim, projekciju plaknes mainidami, mēs iegūstam līdzekli ātri un ērti noteikt zinamā virzienā telpā vilkto taišņu patiesos lielumus.

V nodaļa. Punktu, taišņu un plakanu figuru ēnas.

76 §. Pamatjēdzieni.

Atkārībā no tam, vai gaismas avots atrodas galibā vaj bezgalibā, mēs izšķiram: centralo un saules*) apgaismošanu. Tapēc pirmā gadijumā attiecigas krītošās ēnas saucās par centralām, bet otrā gadijumā — par saules ēnām. 3—7 §§. jau tika aizrādits, ka kautkāda ķermeņa centralā vaj saules ēna nav nekas cits, ka ķermeņa attiecigā centralā vaj līdzteku projekcija uz dotās plaknes.

Ja ēnas krīt uz horicontalo vaj vertikalo projekciju plakni, tad viņas sauc par horicontalām vaj vertikalām krītošām ēnām.

Plakni, uz kuŗu krīt ēna, sauc par ēnas plakni. Ēnas plaknes puse, kas pagriesta pret gaismas avotu, ir apgaismota, bet pretejā puse neapgaismota un atrodas tā saucamā pašēnā.

Var gadities, ka gaismas staru virziens sakrīt ar ēnas plakni, t. i. gaismas stari slīd pa ēnas plakni Tādā gadijumā mēs abas ēnas plaknes puses uzskatam par neapgaismotām, t. i. par tādām, kas atrodas pašēnā.

Apgaismošanas pakāpe atkariga no gaismas staru slīpuma leņķa pret ēnas plakni, gaismas avota atstatuma no ēnas plaknes un citiem apstākļiem, kuŗus visus gŗūti pienācigi ievērot Tapēc ēnu konstruejot, pieņemsim, ka visas plaknes, virsas un ķermeņi vienlīdzigi apgaismoti.

Ēna, kas no patvaļiga punkta krīt uz doto plakni, ir attieciga caur doto punktu un gaismas avotu ejoša gaismas stara krustošanās punkts ar ēnas plakni.

Lai iegūtu patiesas, fiziskas krītošās ēnas, nepieciešami, lai punkts, kas met ēnu, atrastos starp gaismas avotu un to plakni, uz kuŗu krīt ēna. Kad šis noteikums nav ievērots, tad punkta ēnai ir tikai šķietama vaj ģeometriska nozīme.

Ja gaismas staru, pirms tas krustojas ar doto ēnas plakni, aiztur kautkāda cita plakne, tad uz doto ēnas plakni krītošo ēnu sauc par fiktivo ēnu, pie kam dotā punkta patieso ēnu dabujam uz tās plaknes, kas aiztur gaismas staru.

Turpmak pa lielakai daļai pieņemsim, ka gaismas avots atrodas I kvadrantā un ka projekciju plaknes H un V ir necaurspīdigas. Tādos apstākļos fiziskās ēnas varam dabut tikai no tādiem punktiem, kas atrodas I kvadrantā starp gaismas avotu un projekciju plaknēm. Pie tam realas ēnas varam dabut tikai uz H_I vaj V_I. Krītošām ēnām uz H_{II} un V_{II} var būt tikai fiktiva nozīme, bet ēnām, no visiem punktiem, kas atrodas II, III, vaj IV kvadrantā, var būt tikai šķietamas, vaj ģeometriskas nozīmes.

---

*) Pie ēnu konstrukcijām mēs pieņemam, ka saule atrodas bezgalībā.

77 §. Punkta ēnas pie saules apgaismošanas.

Lai noteiktu patvaļiga punkta A krītošās ēnas uz H un V (79 ras.), tad caur A javelk gaismas stars, līdztekus ar doto gaismas staru virzienu l. Gaismas stara krustošanās punkti ar H un V, t. i. gaismas stara pēdu punkti S un T uz plaknēm H un V noteic punkta A krītošo ēnu uz H un V. Turpmak pieņemsim punkta A horicontalo krītošo ēnu apzīmet vienkārši ar A', bet vertikalo krītošo ēnu — ar A''. Tā tad, **punkta A krītošās ēnas A' un A'' ir attieciga gaismas stara pēdu punkti.** Saprotami, ka tikai viens no šiem punktiem var būt oriģinalā punkta A patiesā ēna, kas katrā atsevišķā gadijumā jaizšķir, ievērojot krītošo ēnu A' un A'' stāvokļus attiecibā uz projekciju asi OX. Mūsu gadijumā, t. i. 79 rasejumā, A' ir punkta A horicontalā patiesā ēna, jo punkts A' iegūts uz H_I (zem OX); bet punkts A'' ir tikai punkta A fiktivā vertikalā ēna, jo A'' atrodas uz V_{II} (zem OX, sk. 12 §) Ēnai A'' tikai tad varetu būt realā nozīme, ja plakne H caurspīdiga, vaj ari viņas pavisam nebūtu.

78 §. Punkta ēnas pie centralās apgaismošanas.

Pieņemsim, ka telpā (I kvadrantā) doti: gaismas avots L un kautkāds punkts A (80 ras.). Vilksim gaismas staru $l = LA$ un atzīmesim viņa krustošanos ar H un V, t. i. krītošās ēnas A' un A''.

Ja plakni V_I savienojam ar H_{II}, tad vertikalā ēna A'' ieņem jaunu stāvokli A'' uz H_{II}. Savienojot nekustamo punktu A' ar A'', dabujam gaismas stara l savienoto stāvokli l_0. Saprotams, ka uz l_0 jaatrodās gaismas avota L savienotam stāvoklim L_0. Lai atrastu L_0, ievērosim sekojošo.

Plakni V_I savienojot ar H_{II}, punkts A'' virzas pa aploci A'' A'', kapēc ari punktam L javirzas pa zinamo aploci. Plaknes, kuŗas noteic punkta A'' un L griešanās plaknes, ir savstarpeji līdzteces un pie tam stateniskas pret OX, kapēc savienotam stāvoklim L_0 jaatrodās uz taisnes $L_1 L_2$, stateniskas pret OX. Punkta A'' griešanās centrs ir M, bet griešanās radiuss ir nogrieznis $A''M \perp OX$ un H. Tapēc ari punkta L griešanās radiusam jabūt stateniskam pret H. Punkts A' ir taisnes $l = LA''A'$ nekustams punkts, kapēc taisne $LA''A'$ griežas spaidu ceļā (sk. 62 §) ap asi A' M, kas nav stateniska pret punkta A'' griešanās plakni. Uz taisnās A' M pagaŗinajuma, t. i. punktā L_1, atrodas punkta L griešanās centrs. Tādejadi dabujam punkta L griešanās radiusu $L_1 L = L_1 L_0$.

Taisnstūri $L L_2 L_x L_1$ varam uzskatit kā locekļu taisnstūri, kapēc plakni V_I savienojot ar H_{II}, gaismas avots L ieņems uz H pilnigi noteiktu savienoto stāvokli L_0, neatkarigi no tam, kur telpā pieņemam A.

Ja mēs pieņemsim kautkādu citu punktu B un līdzigā kārtā usmeklesim viņa krītošās ēnas B' un B''*), tad dabusim, ka attiecigais savienotais

*) Punkts B un viņa ēnas B' un B'' 80 rasejumā nav aizrāditas.

gaismas stars $B'B''$ tapat iet caur L_0. Tapēc pie centralās apgaismošanas taisnes, kas savieno kautkādu punktu horicontalās un vertikalās krītošās ēnas (t. i. $A'A''$, $B'B''$ u. t. t.) iet caur kopeju punktu L_0, ko sauc par kontroles centru.

Rasejumā redzams, ka $L_0L_2 = L_1L_2 - L_1L_0$, bet $L_1L_2 = L_1L_x + L_xL_2$ un $L_1L_0 = L_1L = L_xL_2$, tadēļ $L_0L_2 = L_1L_x + L_xL_2 - L_xL_2 = L_1L_x$. Tā tad dabujam, ka

$$L_0L_2 = L_1L_x \text{ un } L_0L_1 = L_2L_x,$$

t. i. kontroles centrs L_0 atrodas no katras gaismas avota projekcijas L_1 jeb L_2 tik tālu, cik otrā gaismas avota projekcija L_2 vaj L_1 atrodas no ass OX, un ari otradi.

Ja gaismas avots L atrodas bezgalibā, t. i. pie saules apgaismošanas, tad ari punkti L_1, L_2 un L_0 atrodas bezgalibā, tapēc pie saules apgaismošanas taisnes, kas savieno kautkādu punktu horicontalās un vertikalās krītošās ēnas (t. i. $A'A''$, $B'B''$ u. t. t.) krustojas bezgali tālā kontroles centrā L_0, t. i. šās taisnes savstarpeji līdsteces un noteic kontroles virzienu $l_0 \parallel A'A'' \parallel B'B''$.

79 §. Taisnes krītošās ēnas.

81. rasejumā aizrāditas dotās taisnes AB krītošās ēnas pie centralās apgaismošanas. Gaismas avota projekcijas ir L_1 un L_2. Bet 82 rasejumā aizrāditas dotās taisnes AB krītošās ēnas pie saules apgaismošanas, pie kam gaismas staru virziens noteikts ar projekcijām l_1 un l_2.

Caur doto taisni AB ejošie gaismas stari kopibā sastāda gaismas plakni, kuŗas krustošanās linijas ar H un V, t. i. $A'B'$ un $A''B''$, noteic ēnas, kas no dotās taisnes AB krīt uz H un V.

Ēnas $A'B'$ un $A''B''$ pietiekoši pagaŗinatas, vienmēr krustojas uz ass OX zinamā punktā a, ko sauc par krītošās ēnas lūzuma punktu.

(Ja dotā taisne met ēnu uz kautkādām krustodamām plaknēm, tad ari šaī gadijumā uz ēnu plaknēm krītošās ēnas krustojas punktā, kas atrodas uz doto ēnu plakņu krustošanās taisnes.)

Taisnes $B'a$ un $A''a$ (81 ras.) ir taisnes AB redzamās, fiziskās ēnas, bet $A'a$ un $B''a$ ir neredzamās, fiktivās ēnas. Kontroles dēļ taisnēm $A'A''$ un $B'B''$ jakrustojās kontroles centrā L_0, kas atrodams pēc 78 § noteikumiem.

Ēna, ko taisne met uz H, V vaj kautkādu ēnas plakni, iet caur taisnes vienadnosaukuma pēdu punktu, t. i., caur S, T, jeb punktu, kuŗā dotā taisne krusto ēnas plakni.

Attiecigais pēdu punkts dala taisnes krītošo ēnu divās daļās. Viena daļa ir taisnes patiesā ēna, kā, piemēram, Sa, vaj Ta (82 ras.), bet otra daļa ($A'S$ jeb $B''T$) ir dotās taisnes šķietamā-ģeometriskā ēna.

Kontroles dēl taisnēm $A'A''$ un $B'B''$ (82 ras.) jabūt savstarpeji līdztecēm. Šo kontroles virzienu atzīmē ar l_0.

80 §. Taisnes krītošā ēna uz līdzteku plaknes.

Ja taisne AB || H, tad saprotams, ka A′B′ || AB || A_1B_1 (83 ras.). Tamlīdzigi, ja AB || V, tad A″B″ || AB || A_2B_2.

Vispārejā gadijumā, ja taisne līdztece kautkādai ēnas plaknei, tad taisnes krītošā ēna uz šīs plaknes ir līdztece oriģinalai taisnei.

§ 81. Pret H statenisko taišņu krītošās ēnas.

Ja dotās taisnes AB un CD (84 ras.) stateniskas pret H, tad taišņu AB un CD gaismas plaknes ir horicontali projecejošas plaknes, kas krusto V pa taisnēm, stateniskām pret OX. Tapēc vertikalās ēnas A″B″ un C″D″ ir stateniskas pret OX. 84 rasejumā pieņemta saules apgaismošana. Saprotams, kā ari pie centralās apgaismošanas taišņu AB un CD vertikalās ēnas ir stateniskas pret OX, un tapēc savā starpā līdzteces.

Taišņu AB un CD horicontalās ēnas B′α un D′β (84 ras.) pie saules apgaismošanas ir savstarpeji līdzteces, bet pie centralās apgaismošanas viņas nav savstarpeji līdzteces, kā tas redzams 85 rasejumā, jo šinī gadijumā attiecigās gaismas plaknes nav savstarpeji līdzteces.

82 §. Līdzteku taišņu krītošās ēnas.

Ja dotas divas līdzteku taisnes AB un CD (86 ras.), kuŗas nav līdzteces ēnas plaknei H, tad pie saules apgaismošanas A′B′ || C′D′, jo doto taišņu gaismas plaknes savstarpeji līdzteces. Bet pie centralās apgaismošanas doto taišņu krītošas ēnas nav savstarpeji līdzteces, jo šaī gadijumā attiecigās gaismas plaknes nav savstarpeji līdzteces.

83 §. Plaknes redzamiba projekcijās.

Ja mēs ar veiduli novērosim 87—90 rasejumos aizrādito plakņu redzamibu projekcijās, tad dabusim, ka plakne savās projekcijās redzama no vienas, vaj pretejām pusēm, atkaribā no tam, vaj plaknes redzamās pēdu linijas ieslēdz ar asi OX asus leņķus ar vienadiem (87 un 88 ras.), jeb pretejiem virzieniem (89 un 90 ras.).

Pieņemsim tagad, ka dots uz patvaļigas plaknes *sat* guļošais $\triangle$ ABC (91 un 92 ras.). Tiek jautats, vaj plakne *sat* un $\triangle$ ABC projekcijās uz H un V redzami no vienas, jeb no dažadām pusēm?

Uz tiko aizrādito noteikumu pamata dabusim, ka 91 rasejumā plakne *sat* abās projekcijās redzama no tās pašas puses, bet 92 rasejumā plakne projekcijās redzama no pretejām pusēm.

Bet kā rīkoties, noteicot $\triangle$-a ABC redzamibu, ja $\triangle$-a ABC plaknes pēdu linijas nav dotas rasejumā?

Lai ari tādos gadijumos noteiktu $\triangle$-a ABC redzamibu, iedomasimies, ka $\triangle$-a ABC viduspunktā ir piestiprinats rāditajs, kuŗa viens gals slīd pa trijstūŗa apveidu, pakāpeniski iedams caur virsotnēm A, B un C.

Aplūkojot trijstūri ABC iz bezgalibas no augšas jeb no priekšas (12 §), t. i. no diviem centriem $\Omega_1 \infty$ un $\Omega_2 \infty$, kas abi 91a rasejumā atrodas vienā pusē no $\triangle$-*a* ABC plaknes, mums rāditaja kustibas virziens, vaj virsotņu A, B un C kārta abās projekcijās izrādisies vienadi. Bet ja aplūkosim trijstūri ABC (92a ras.) no diviem centriem $\Omega_1 \infty$ un $\Omega_2 \infty$, kas šinī gadījumā atrodas pretejās pusēs no $\triangle$-a ABC plaknes, tad rāditaja griešanās virziens, jeb $\triangle$-a ABC virsotņu kārta izrādisies dažadi; tapēc ari projekcijās $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$, kas iegūtas $\triangle$-i ABC projecejot no $\Omega_1 \infty$ un $\Omega_2 \infty$ uz H un V, virsotņu kārta būs preteja. Izskaidroto sakopojot, dabujam, ka trijstūris savās projekcijās redzams no vienas, vaj pretejām pusēm, atkaribā no tam, vaj trijstūŗa virsotņu kārta projekcijās ir vienada (91 ras.), jeb dažada (92 ras.).

Saprotams, ka šos noteikumus var attiecinat uz kautkādu plakanu figuru. Lielakas uzskatamibas labad, apgaismotā $\triangle$-a ABC puse ir švītrota ar retām linijām, bet $\triangle$-a ABC tumšā puse ir atzīmeta ar atsevišķiem punktiem. Tapat atzīmetas ari attiecigas projekcijas $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$.

Piezīme. Pārpratumu novēršanai jaievēro, ka mēs līdz šim 91 un 92 rasejumos esam tikai noteikuši, vaj $\triangle$ ABC projekcijās redzams no vienas vaj pretejām pusēm, bet vēl mēs nezinam, kāda $\triangle$-a ABC puse apgaismota un kāda atrodas pašēnā. Šo uzdevumu izšķirsim tikai nākamā pantā.

84 §. Plakanas figuras ēnas pie saules apgaismošanas. Figuras pašēnas noteikšana.

Pieņemsim, ka pie dotā gaismas staru virziena *l* jaatron uz plaknes *s α t* guļoša $\triangle$-a ABC krītošās ēnas (91 ras.).

Tam nolūkam pēc agrak aizrāditiem noteikumiem atrodam trijstūŗa atsevišķo virsotņu un malu horicontalās un vertikalās krītošās ēnas un pēc tam noteicam patiesās un fiktivās krītošās ēnas. Ēnu konstrukciju izpildot, jaievēro: 1) ka horicontalām krītošām ēnām jaiet caur attiecigiem horicontaliem pēdu punktiem (piemēram B′C′ un B_1C_1 krustojas punktā S uz *s*); 2) vertikalām krītošām ēnām jaiet caur attiecigiem vertikaliem pēdu punktiem (piemēram B″C″ un B_2C_2 krustojas punktā T un *t*); 3) taisnes, kas savieno viena un ta paša punkta ēnas (piemēram, A′A″, B′B″ un C′C″) ir savstarpeji līdzteces un līdzteces kontroles virzienam l_0; 4) horicontalām un vertikalām krītošām ēnām jakrustojās uz ass OX, tā, piemēram, A′C′ un A″C″ krustojas punktā β uz OX.

Lielakas skaidribas dēļ $\triangle$-a ABC patiesā redzamā krītošā ēna 91 rasejumā aizrādita ar švītriņām. Pie tam tā krītošās ēnas daļa, kas sakrīt ar kautkādu trijstūŗa projekciju, netiek švītrota, jo šo ēnu aizsedz oriģinalā trijstūŗa ABC projekcija un tapēc šī ēnās daļa neredzama. Tādu neredzamu ēnu 91ᵇ rasejumā dabujam pie virsotnes B''.

L a i n o t e i k t u $\triangle$-a ABC p a š ē n u, m u m s j a i e v ē r o s e k o š a i s.

Ja gaismas avots un projekciju centrs atrodas dotās plaknes *sat* vienā pusē, tad attiecigā $\triangle$-a ABC projekcija, saprotams, redzama no apgaismotās puses. Bezgali tālu gaismas avotu (sauli), kurš noteikts ar gaismas staru virzienu *l*, mēs varam uzlūkot, kā projekciju centru $\Omega_3\infty$ (sk. 91ᵃ ras.) Tapēc trijstūŗa ABC krītošo ēnu varam uzlūkot, kā $\triangle$-a ABC slīpleņķaino projekciju uz ēnas plaknes, ko dabujam, projecejot $\triangle$-i ABC no bezgali tāla projekciju centra $\Omega_3\infty$ uz H jeb V.

Iepriekšejā pantā mēs pārliecinajamies, ka trijstūri ABC aplūkojot, vaj projecejot no diviem centriem, kas no dotās plaknes atrodas vienā pusē, virsotņu kārtai attiecigās projekcijās jabūt vienlīdzigai. Tapēc trijstūri ABC projecejot no diviem, vienā pusē esošiem projekciju centriem $\Omega_1\infty$ un $\Omega_3\infty$, uz vienu un to pašu plakni H, attiecigo projekciju $A_1B_1C_1$ un $A'B'C'$ virsotņu kārtai jabūt vienlīdzigai (91 ras.). Ja otradi šis nosacijums ir izpildits, kā mūsu gadijumā, tad varam apgalvot, ka projekciju centri $\Omega_1\infty$ un $\Omega_3\infty$ (gaismas avots) ātrodas vienā pusē no $\triangle$-a ABC plaknes, un tapēc aplūkotajs, $\triangle$-i ABC no $\Omega_1\infty$ uz H projecedams, redzēs $\triangle$-a ABC apgaismoto pusi.

Līdzigā kārtā uz 91ᵃ ras. pamata varam novērot, ka $\Omega_2\infty$ un $\Omega_3\infty$ ari atrodas vienā pusē no $\triangle$-a ABC plaknes; tapēc projekcijai $A_2B_2C_2$ un ēnai $A''B''C''$ jabūt vienlīdzigas virsotņu kārtas. Otradi, ja tas izpildits, kā mūsu gadijumā, tad tas nozīmē, ka vertikalā projekcija $A_2B_2C_2$ redzama no gaišās puses.

Ja mēs tagad piegriežam vēribu 92 rasejumam, tad nav grūti novērot, ka centri $\Omega_1\infty$ un $\Omega_3\infty$ atrodas dažadās pusēs no $\triangle$-a ABC, kapēc attiecigās projekcijās $A_1B_1C_1$ un $A'B'C'$ virsotņu kārta ir dažada. Saprotams, ka šinī gadijumā aplūkotajs, kas atrodas $\Omega_1\infty$, redzēs trijstūri ABC horicontalajā projekcijā no tumšās puses.

Ja mēs aplūkosim centru $\Omega_2\infty$ un $\Omega_3\infty$ stāvokļus attiecibā uz $\triangle$-a ABC plakni (92ᵃ ras.), tad novērojam, ka abi centri atrodas vienā pusē no ABC; tapēc $\triangle$ ABC vertikalajā projekcijā $A_2B_2C_2$ redzams no gaišās puses.

Uz visu teikto pamatodamies, kautkāda trijstūŗa vaj patvaļigas plakanas figuras pašēnas noteikšanai varam lietot šādus noteikumus. P l a k a n a f i g u r a z i n a m ā p r o j e k c i j ā r e d z a m a n o g a i š ā s j e b t u m š ā s p u s e s, a t k a r i b ā n o t a m, v a j a p l ū k o t a j ā p r o j e k c i j ā u n v i e n a d n o s a u k u m a ē n ā v i r s o t ņ u k ā r t a i r v i e n l ī d z i g a, j e b n e.

91 rasejumā redzams, ka $A_1B_1C_1$ un $A'B'C'$ atrodas vienā pusē no vienādnosaukuma pēdu linijas s; līdzigā kārtā ari $A_2B_2C_2$ un $A''B''C''$ atrodas vienā pusē no vienadnosaukuma pēdu linijas t, pie kam projekcijas $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$ redzamas no apgaismotās puses.

92 rasejumu aplūkodami, novērosim, ka $A_2B_2C_2$ un $A''B''C''$ atrodas vienā pusē no t, pie kam projekcija $A_2B_2C_2$ redzama no gaišās puses, bet projekcija $A_1B_1C_1$ un vienadnosaukuma ēna $A'B'C'$ atrodas dažadās pusēs no vienadnosaukuma pēdu linijas s, pie kam projekcija $A_1B_1C_1$ redzama no tumšās puses.

Ņemot vērā visus aizrāditus gadijumus, patvaļiga trijstūŗa pašēnās noteikšanai varam lietot ari šādus vienkāršus noteikumus. T r i j s t ū r i s z i n a m ā p r o j e k c i j ā r e d z a m s n o g a i š ā s j e b t u m š ā s p u s e s, a t k a r i b ā n o t a m, v a j a p l ū k o t ā p r o j e k c i j a u n v i e n a d n o s a u k u m a ē n a a t r o d a s v i e n ā, j e b d a ž a d ā s p u s ē s n o t r i j s t ū ŗ a p l a k n e s v i e n a d n o s a u k u m a p ē d u l i n i j a s.

Tā kā $\triangle ABC$ var ieņemt kautkādu stāvokli pret H, V un ari otradi, tad pēdejos noteikumus varam ari lietot pie kautkādas plakanas figuras, kas krusto kautkādu doto plakni, pašēnas noteikšanas, ja ir uzmekleta plakanas figuras krītošā ēna uz doto plakni.

91 un 92 rasejumā redzams, ka figuras $A_1B_1C_1$ un $A'B'C'$, $A_2B_2C_2$ un $A''B''C''$, $A'B'C'$ un $A''B''C''$ p a p ā r ā m a t r o d a s s l ī p l e ņ ķ a i n ā a f f i n ā r a d n i e c i b ā; a f f i n i t a t e s a s s p i r m ā gadijumā ir s, otrā — t, bet trešā — OX. Radniecibas virzienu pirmā gadijumā noteic ar l_1, otrā ar l_2, bet trešā ar $l_0 \parallel A'A''$.

Bez tam nav grūti novērot, ka oriģinalais $\triangle ABC$ stāv radnieciskā sakarā, kā ar $A_1B_1C_1$ un $A_2B_2C_2$, tā ari ar $A'B'C'$ un $A''B''C''$, pie kam affinitates asis ir s un t, bet affinitates virziens pirmā gadijumā sakrīt ar horicontali projecejošo staru virzienu, otrā gadijumā — ar vertikali projecejošo staru virzienu, bet trešā un ceturtā — ar gaismas staru virzienu l.

85 §. Plakanas figuras ēnas pie centralās apgaismošanas.

93 rasejumā ar retām švītriņām atzīmetas $\triangle$-a ABC projekcijas, bet ar biežakām — viņa pie centralās apgaismošanas iegūtas krītošās ēnas. Gaismas avots atrodas punktā L. Plaknes ABC pēdu linijas ir s un t.

Tā kā ēnu noteikšanas veids pie saules jeb centralās apgaismošanas paliek viens un tas pats, tad spēkā paliek visi iepriekšejā pantā aizrāditie pārbaudišanas veidi, tā, piemēram, ēnām $A'B'$ un $A''B''$ jakrustojās kopejā punktā β uz ass OX; taisnēm A_1B_1 un $A'B'$ jakrustojās uz pēdu linijas s punkta S, bet taisnēm A_2B_2 un $A''B''$ jakrustojās uz pēdu linijas t punktā T. Pie centralās apgaismošanas taisnēm $A'A''$, $B'B''$ un $C'C''$ jasaiet kopejā kontroles punktā L_0 (78 §).

86 §. Centralā kollineacija.

Kā 93 rasejumā redzams, figuru $A_1 B_1 C_1$ un $A'B'C'$, $A_2 B_2 C_2$ un $A''B''C''$, $A'B'C$ un $A''B''C''$ virsotnes pa pārām guļ uz taisnēm (stariem), kas iziet no kopejā punkta; pirmā gadijumā no L_1, otrā gadijumā no L_2, trešā gadijumā no L_o; bet attiecigās malas pa pārām krustojas uz zinamām taisnēm (asim); pirmā gadijumā uz *s*, otrā gadijumā uz *t*, bet trešā gadijumā uz OX. Tādu sakaru, starp divām plakanām figurām, kad attiecigās virsotnes pa pārām guļ uz stariem, kas iziet no kopeja centra, bet attiecigās malas pie pagarinašanas pa pārām krustojas uz vienas ass, sauc par centralo kollineaciju. Taisni (*s*, *t* jeb OX), uz kuŗas krustojas attiecigās centrali-kollineari radnieciskas malas, sauc par kollineacijas asi, bet punktu (L_1, L_2 jeb L_o), no kuŗa iziet radniecibas stari, sauc par kollineacijas centru.

Pie saules apgaismošanas (84 §) mēs redzejām, ka oriģinalais △ABC un viņa horicontalā vaj vertikalā krītošā ēna ir affini radnieciskas figuras; bet pie centralās apgaismošanas dabujam, ka oriģinalais △ABC un viņa horicontalā vaj vertikalā ēna ir centrali kollineari radnieciskas figuras, pie kam kollineacijas ass ir taisne *s*, jeb *t*, bet kollineacijas centrs sakrīt ar pašu gaismas avotu L.

Ja kollineacijas centrs (gaismas avots L) attālinās līdz bezgalibai, tad telpā radniecibas stari kļūst savstarpeji līdzteči. Tapēc affino radniecibu var uzlūkot, kā atsevišķu centralās kollineacijas gadijumu ar bezgali tālu kollineacijas centru.

Saprotams, ka visu par trijstūri aizrādito var attiecinat uz jebkuŗu plakanu figuru.

87 §. Uzdevums.

Doti punkti A, B un C (94 ras.), kuŗu koordinatām šadi lielumi. Punktam A: $x = 9{,}5$ cm., $y = 7{,}4$ cm., $z = 7{,}4$ cm.; priekš punkta B: $x = 13{,}1$ cm., $y = -2{,}1$ cm., $z = 4{,}9$ cm.; priekš punkta C: $x = 5{,}8$ cm., $y = 4{,}4$ cm., $z = -1{,}7$ cm. Jakonstruē △-a ABC projekcijas ar izgriezumu △-a DEF veidā, kuŗa malas atstāj vienā un taī pašā attālumā $n = 1{,}85$ cm. no attiecigām △-a ABC malām. Jaatrod trijstūŗa ABC un izgriezuma DEF redzamiba, kā ari konstruetās figuras krītošās un pašēnas pie patvaļigi pieņemta gaismas staru virziena *l*.

Pirmkārt pēc dotām koordinatām atradisim punktu A, B un C projekcijas, pēc tam savienosim vienadnosaukuma projekcijas un pēc tam atrodam △-a ABC pēdu linijas (51 §), viņa redzamibu (55 §) un savienoto stāvokli $A_oB_oC_o$ (70 §). Izvelkot dotā attāluma $n = 1{,}85$ cm. savienotā △-a $A_oB_oC_o$ malām līdzteces, šo līdzteču krustošanās punktos dabusim virsotnes D_o, E_o un F_o, pēc kuŗām pretejā kārtā var atrast △-a DEF projekcijas (70 §).

Punkti D_o, E_o un F_o guļ uz attiecigām bissektrisēm A_oG_o, B_oJ_o un C_oK_o, kas krustojas kopejā punkta L_o. Tapēc punktu D, E un F projekciju atrašanai mēs rīkosimies šādi. No G_o velkam stateni pret s līdz krustošanai ar B_1C_1 punktā G_1. Punktu G_1 savinojam ar A_1. Punktu L_o uz taisni G_1A_1 pārnesdami, iegūstam L_1. Pēc tam atrodam A_2G_2 un uz viņas projekciju L_2. Savienodami L_1 ar A_1, B_1 un C_1, bet L_2 ar A_2, B_2 un C_2, mēs iegūstam bissektrišu projekcijas, uz kuŗām nav gŗūti atrast punktu D, E un F projekcijas. Konstrukciju pareizibu var pārbaudit ar sakrītošo projekciju ass $r_{1,2}$ palīdzibu.

Trijstūŗu ABC un DEF redzamibu, pašās un krītošās ēnas noteicot, jarīkojās pēc agrak aizrāditiem noteikumiem.

Jaievēro, ka figura $S_I S_{II} T_{II_o} T_{I_o} A_o S_I$ ar izgriezumu $D_o E_o F_o$ noteic to oriģinalā △-a ABC ar izgriezumu DEF daļu, kas atrodas I kvadrantā. Šīs figuras savienotais stāvoklis atzīmets ar raustitām švītriņām.

Skaidrakas izšķiršanas dēļ, redzamā apgaismotā figuras projekcija aizrādita ar retu švītrojumu, bet figuras redzamā tumšā projekcija atzīmeta atsevišķiem punktiem.

Nav gŗūti izgatavot aplūkotās figuras veiduli, izgriežot no kartona figurai $S_I S_{II} T_{II_o} T_{I_o} A_o S_I$ vienlīdzigu apveidu ar izgriezumu $D_oE_oF_o$. Šo figuru pielīmē pie H tā, lai punkti S_I un S_{II} atrastos aizrāditā stāvoklī. Lai būtu ērtaki pielīmet, tad veiduli pagatavojot, gar taisni $S_I S_{II}$ jaatstāj šaura strēmele pielīmešanai.

Ja △ ABC būtu krustojis tikai V, tad veiduli vajadzetu pielīmet tikai pie V tā, lai taisne $T_{II_o} T_{I_o}$ sakristu ar $T_{II} T_I$, atstājot pie tam pielīmešanai šauro strēmeli gar $T_{II_o} T_{I_o}$.

VI nodaļa. Krustodamās plaknes un plakni krustodamās taisnes.

88 §. Plakņu krustošanās taisnes noteikšana vispārejā gadijumā.

Pieņemsim, ka dotas divas plaknes $s\alpha t$ un $p\beta q$ (95 ras.) Taisne l, pa kuŗu krustojas dotās plaknes, noteikta ar diviem punktiem, piederošiem katrai no dotām plaknēm. Tādi punkti ir S un T, kuŗos krustojas doto plakņu horicontalās un vertikalās pēdu līnijas. Tapēc, lai noteiktu plakņu $s\alpha t$ un $p\beta q$ krustošanās liniju techniskā rasejumā (95[b] ras.), jasavieno vienadnosaukuma pēdu liniju krustošanās punktu projekcijas, t i. S ar T_1 un S_2 ar T.

89 §. Viena no krustodamām plaknēm ir līdztece ar H.

Pieņemsim, ka viena plakne $s\alpha t$ (96 ras) ieņem patvaļigu stāvokli, bet otra ir līdztece ar H. Techniskā rasejumā otra plakne ir noteikta ar vienu vertikalo pēdu liniju $q \parallel OX$ (43 §).

Šinī gadijumā dotās plaknes krustojas pa horicontalo pēdu līdzteci h, kas iet caur punktu $T = t \times q$. Pie tam $h_2 = q$ un iet caur T, bet $h_1 = s$ un iet caur T_1.

90 §. Viena no krustodamām plaknēm ir līdztece ar V.

Ja viena plakne $s\alpha t$ (97 ras.) ieņem patvaļigu stāvokli, bet otra plakne, kuŗas horicontalā pēdu linija $p \parallel OX$, ir līdztece ar V, tad krustošanās taisne v ir kopejā doto plakņu vertikalā pēdu līdztece. Pie tam $v_1 = p$ un iet caur punktu $S = s \times p$, bet $v_2 \parallel t$ un iet caur S_2.

91 §. Viena plakne ir līdztece ar H, bet otra līdztece ar V.

Pieņemsim, ka t ir plaknes, līdzteces ar H, vertikalā pēdu linija, bet p ir plaknes, līdzteces ar V, horicontalā pēdu linija (98 ras.).

Krustošanās taisne $l \parallel OX$ ir doto plakņu horicontalā, vaj vertikalā pēdu līdztece, pie kam, $l_1 = p$ un $l_2 = t$.

92 §. Viena no krustodamām plaknēm ir stateniska pret H.

Ja viena plakne $s\alpha t$ (99 ras.) ieņem patvaļigu stāvokli, bet otra plakne $p\beta q \perp H$, tad krustošanās taisne l noteicama pēc vispārejiem nonoteikumiem (88 §). Horicontalā projekcija $l_1 = ST_1$ un sakrīt ar p, bet $l_2 = TS_2$.

93 §. Viena no krustodamām plaknēm ir stateniska pret V.

Ja viena plakne $s\alpha t$ (100 ras.) ieņem patvaļigu stāvokli, bet otra $p\beta q \perp V$, tad krustošanās taisne l atrodama pēc vispārejiem noteikumiem (88 §). Vertikalā projekcija $l_2 = TS_2$ un sakrīt ar q, bet $l_1 = ST_1$.

94 §. Viena no krustodamām plaknēm ir profilā plakne.

Ja viena plakne $s\alpha t$ (101 ras.) ieņem patvaļigu stāvokli, bet otra plakne $p\beta q$ ir profilā plakne, tad plakņu krustošanās taisne l ir profilā taisne, kuŗas savienotais stāvoklis l_0 iet caur $T = T_0$ un S_0 (34 §).

95 §. Abas plaknes ir stateniskas pret H.

Ja abas dotās plaknes $s\alpha t$ un $p\beta q$ (102 ras.) stateniskas pret H, tad viņu krustošanās taisne l ir stateniska pret H un noteic doto plakņu kopejo vertikalo līdzteci, pie kam $l_1 = S = s \times p$, bet $l_2 \perp OX$.

96 §. Abas plaknes ir stateniskas pret V.

Ja abas dotās plaknes $s\alpha t$ un $p\beta q$ (103 ras.) stateniskas pret V, tad viņu krustošanās taisne l ir stateniska pret V un noteic doto plakņu kopejo horicontalo pēdu līdzteci. Pie tam $l_2 = T = t \times q$, bet $l_1 \perp OX$.

97 §. Palīgplaknes lietošanas paņēmiens.

Bieži doto plakņu pēdu linijas nekrustojas rasejuma robežās, un tapēc šādos gadijumos nevar pēc iepriekšejiem noteikumiem atrast doto plakņu krustošanās taisni. Tādos gadijumos pieņem vienu (vaj divas palīgplaknes), kuŗas krustošanās taisne ar dotām plaknēm atrodas rasejuma robežās.

Pieņemsim, ka telpā dotas divas patvaļigas plaknes P un Q (104 ras.) Lai noteiktu viņu krustošanās taisni l, mēs velkam divas patvaļigas plaknes H′ un V′, no kuŗām pirmā krusto plaknes P un Q pa taisnēm a un b, bet otrā krusto P un Q pa taisnēm c un d. Punkts M, kuŗā krustojas a un b, ir meklejamai doto plakņu P un Q krustošanās taisnei l piederošais punkts. Tādā pat kārtā ari punkts N, kuŗā krustojas c un d, ir krustošanās taisnei l piederošais punkts. Punktus M un N savienodami, dabusim meklejamās taisnes l stāvokli.

Plaknes H′ un V′ vispārejā gadijumā var ieņemt patvaļigu stāvokli telpā. Bet visvieglaki konstrukcijas izpildamas techniskā rasejumā, ja plakni H′ pieņem līdztekus H, bet V′ || V. Var ari abas palīgplaknes pieņemt līdztekus H vaj ari līdztekus V, mainot pie tam attiecigā kārtā viņu apzīmejumus. Bieži izrādas lietderigi vienu no plaknēm H′, vaj V′ pieņemt profilās plaknes stāvoklī.

Ja vienu meklejamai krustošanās taisnei l piederigu punktu var noteikt tieši pēc rasejuma, tad, lai noteiktu krustošanās taisnes otru punktu, pietiek, ja pieņemam vienu palīgplakni.

Tagad aplūkosim, kādā kārtā līdzigus uzdevumus atrisina techniskā rasejumā.

98 §. Viens pēdu liniju pāris krustojas, bet otrs ne.

Pieņemsim, ka ir dotas plaknes $s\alpha t$ un $p\beta q$ (105 ras.), kuŗu horicontalās pēdu linijas krustojas rasejuma robežās punktā S, bet vertikalās pēdu linijas nekrustojas rasejuma robežās.

Saprotami, ka punkts $S = s \times p$ pieder meklejamai doto plakņu krustošanās taisnei l. Lai pilnigi noteiktu krustošanās taisni l, tad jaatron vēl kāds abām dotām plaknēm kopejs punkts M. Tam nolūkam pieņemsim vienu patvaļigu plakni H′ || H. Atzīmesim palīgplaknes vertikalo pēdu liniju ar k.

Plakne H′ krusto $s\alpha t$ un $p\beta q$ pa horicontalām pēdu līdztecēm h_{I} un h_{II}, kuŗu projekcijas atrodamas pēc 89 § noteikumiem. Punkts M, kuŗā krustojas h_{I} un h_{II}, noteic otru taisnei l piederošo punktu. Šā punkta horicontalā projekcija ir $M_1 = h_{\mathrm{I}_1} \times h_{\mathrm{II}_1}$, pēc kuŗas nav grūti uzmeklet ari attiecigo vertikalo projekciju M_2 uz $h_{\mathrm{I}_2} = h_{\mathrm{II}_2} = k$. Punktus M_1 ar S un M_2 ar S_2 savienodami, iegūsim meklejamās krustošanās taisnes l projekcijas.

P i e z ī m e. Ja doto plakņu vertikalās pēdu linijas krustojas rasejumā robežās, bet horicontalās pēdu linijas nekrustojas, tad punkts T, kuŗā krustojas vertikalās pēdu linijas, tieši noteicams uz rasejuma pamata, bet otrs krustošanās taisnes l punkts atrodams ar palīgplaknes $V' \parallel V$ palīdzibu, analoģiski tikko aplūkotam gadijumam.

99 §. Abi pēdu liniju pāŗi nekrustojas.

Ja doto plakņu $s\alpha t$ un $p\beta q$ horicontalās un vertikalās pēdū linijas nekrustojas rasejuma robežās (106 ras.), tad, lai noteiktu doto plakņu krustošanās taisni l, japieņem divas palīgplāknes. Pieņemsim, piemēram, vienu plakni $H' \parallel H$, bet otru plakni $V' \parallel V$. Plaknes H' vertikalā pēdu linija ir k, bet plaknes V' horicontalā pēdu linija ir i. Plakne H' krusto dotās plaknes pa horicontalām pēdu līdztecēm h_{I} un h_{II}, bet plakne V' viņas krusto pa vertikalām pēdu līdztecēm v_{I} un v_{II}. Šo taišņu projekcijas noteicamas pēc 89 un 90 §§.

Taisnes h_{I} un h_{II} krustojas punktā M, bet taisnes v_{I} un v_{II} punktā N. Vienadnosaukuma punktu M un N projekcijas savienodami, iegūsim doto plakņu $s\alpha t$ un $p\beta q$ meklejamās krustošanās taisnes l projekcijas l_1 un l_2.

100 §. Viena plakne ir līdztece OX, bet otra plakne iet caur OX un doto punktu.

Pieņemsim, ka pirmās dotās plaknes pēdu linijas ir s un t (107 ras.), bet otra plakne iet caur OX un doto punktu A.

Šinī gadijumā plakņu krustošanās taisne l ir līdztece asij OX, tapēc viņas noteikšanai pietiek uzmeklet vienu punktu M. Tam nolūkam caur punktu A velkam profilo plakni $p\beta q$. Šī plakne krustojas ar plakni st pa taisni $a = ST$, bet ar plakni, kas iet caur asi OX un punktu A, pa taisni $b = A\beta$. Taišņu a un b savienotie stāvokļi $a_0 = TS_0$ un $b_0 = \beta A_0$ krustojas punktā M_0, kuŗa projekcijas M_1 un M_2 atrodamas pēc 34 §. Caur M_1 un M_2 līdsteces ar OX vilkdami, iegūsim doto plakņu krustošanās taisnes l projekcijas l_1 un l_2.

101 §. Abas plaknes ir lidzteces asij OX.

Pieņemsim, ka vienas plaknes pēdu linijas ir s un t, bet otras plāknes pēdu linijas ir p un q (108 ras.).

Šinī gadijumā doto plakņu krustošanās taisne l ir līdztece asij OX, kapēc viņas noteikšanai pietiek, ja atrodam vienu dotām plaknēm st un pq kopeju punktu M. Tam nolūkam velkam patvaļigu profilo plakni $k\gamma i$, kas krustojas ar plakni st pa taisni $a = ST$ un ar plakni pq pa taisni $b = S_{\mathrm{I}} T_{\mathrm{I}}$.

Taisnes a un b krustojas punktā M, kuŗa savienotais stāvoklis ir $M_0 = a_0 \times b_0$. Atrodot pretejā kārtā projekcijas M_1, M_2 un velkot caur viņiem l_1 un $l_2 \parallel OX$, mēs iegūstam mekletās taisnes l projekcijas.

Plaknes st un pq ir stateniskas pret katru profilo plakni un tapēc ari plakņū st un pq krustošanās taisne l ir stateniska pret katru profilo plakni.

Kā rasejumā redzams, doto plakņu vienadnosaukuma pēdu linijas s un p, kā ari t un q savstarpeji līdzteces, bet plaknes st un pq tomēr krustojas pa taisni l. No ta seko (salīdzinā 58 §), ka ne tikai līdzteku plaknēm, bet ari atsevišķā gadijumā krustodamām plaknēm var būt vienadnosaukuma līdzteku pēdu linijas. Bet ja divi plakņu vienadnosaukuma pēdu linijas uz trijām krūstodamām plaknēm ir savstarpeji līdzteces, tad šinī gadijumā var apgalvot, kā ari oriģinalās, dotās plaknes ir savstarpeji līdzteces. Pie tam mēs 108 ras. iegūtu $a_0 \parallel b_0$.

102 §. Vispārejs taisnes krustošanās punkta ar plakni noteikšanas paņēmiens.

Pieņemsim, ka telpā dota patvaļiga plakne P un patvaļiga taisne a (109 ras.). Lai noteiktu taisnes a krustošanās punktu M ar plakni P, mēs caur a velkam vienu patvaļigu palīgplakni Q tā, lai viņa krustotu plakni P pa kautkādu taisni b. Punkts M, kuŗā taisne a krustojas ar palīgliniju b, ir meklejamais taisnes a ar plakni P krustošanās punkts.

Techniskos rasejumos pa lielakai daļai palīgplakni pieņem ne pilnigi patvaļigā stāvoklī, bet palīgplaknes Q vietā pīeņem vienu horicontali projecejošo, vaj vienu vertikali projecejošo, vaj vienu profilo palīgplakni. Pa lielakai daļai plaknes Q vietā pieņem horicontali vaj vertikali projecejošas palīgplaknes. Aplūkosim šos gadijumus tuvaki.

103 §. Taisnes krustošanās punkta noteikšana ar horicontali projecejošas plaknes palīdzibu. Taisnes redzamiba.

Lai noteiktu taisnes a krustošanās punktu M ar doto plakni sat (110 ras.), caur taisni a velkam vienu horicontali projecejošo palīgplakni $p\beta q$ (47 §), pie kam $p = a_1$. Plakne $p\beta q$ krusto doto plakni sat pa taisni b, kas noteicama pēc 92 §. Taisnes a un b krustojas meklejamā punktā M. Pie tam papriekšu noteic vertikalo projekciju $M_2 = a_2 \times b_2$, un pēc tam tiek uzmekleta attiecigā horicontalā projekcija M_1 uz $b_1 = a_1$.

Ja dotā plakne sat necaurspīdiga un taisne a krusto viņu punkta M, kas atrodas I kvadrantā, tad punkts M atdala taisnes a redzamo daļu no neredzamās.

Lai noteiktu taisnes a redzamibu, tad papriekšu janoskaidro taisnes a stāvoklis attiecibā uz doto plakni sat, kas izdarams ar šķērsošanās punktu palīdzibu (38 §), noskaidrojot taisnes a stāvokli attiecibā uz kautkādām uz plaknes sat guļošām taisnēm, piemēram, attiecibā uz plaknes sat pēdu linijām Tā, piemēram, taisnes a redzamibu horicontalajā projekcijā noteic ar šķērsošanās punkta $S = A_1$ palīdzibu. Tā kā vertikalā projekcija A_2 tāļak atstāj no ass OX, nekā S_2 (kas guļ uz pašas ass OX), tad pēc 31 un 38 §§ horicontalajā projekcijā punkts A redzams. Tapēc ari attiecigā taisnes a kreisā daļa, uz kuŗas guļ punkts A, iet virs s, attiecibā uz H. Tā tad, **visa taisnes a kreisā daļa līdz punktam M horicontalājā projekcijā redzama, bet laba daļa neredzama**, kā tas rasejumā attiecigā veidā aizrādits.

Vertikalās projekcijas a_2 redzamiba tiek noteikta ar šķērsošanās punkta $T_I = B_2$ palīdzibu. Tā kā B_1 atrodas zemaki, nekā projekcija T_{I_2} (kas guļ uz pašas ass), tad vertikalajā projekcijā punkts B, guļošs uz taisnes a kreīsās daļas, redzams (32 un 38 §§). Tapēc ari attiecigā taisnes a kreisā daļa iet priekš t, attiecibā uz V. Tā tad **visa taisnes a kreisā daļā līdz punktam M vertikalajā projekcijā redzama, bet labā daļa neredzama**, kā tas rasejumā aizrādits.

104 §. Taisnes krustošanās punkta noteikšana ar vertikali projecejošas plaknes palīdzibu.

111 rasejumā taisnes a krustošanās punkts M ar doto plakni $s\alpha t$ ir noteikts ar vertikali projecejošo plakni $p\beta q$, kas iet caur taisni a.

Taisnes a redzamiba projekcijās noteikta, kā iepriekšejā gadijumā, ar šķērsošanās punktiem $S_I = A_1$ un $T = B_2$. Pie tam izrādas, ka horicontalajā projekcijā redzama taisnes a daļa pa labi no punkta M, bet vertikalajā projekcijā redzama taisnes a daļa pa kreisi no punkta M.

Abos aplūkotos piemēros (110 un 111 ras.) studejošiem ieteicams ar veiduli noskaidrot taisnes a stāvokli attiecibā uz doto plakni $s\alpha t$.

105 §. Taisnes krustošanās ar horicontali vaj vertikali projecejošo plakni.

112 rasejumā aizrādits taisnes a krustošanās punkts M ar patvaļigu horicontali projecejošo plakni $s\alpha t$.

Punkta M horicontalā projekcija $M_1 = a_1 \times s$, bet vertikalā projekcija M_2 guļ uz a_2.

Tā kā visi horicontali projecejošie stari šaī gadijumā līdzteči plaknei $s\alpha t$, tad horicontalajā projekcijā vienigi punkts M nav redzams, bet visi citi taisnes a punkti (ciktāl taisne a atrodās I kvadrantā) horicontalajā projekcijā redzami*). Vertikalās projekcijas a_2 redzamiba noteicama pēc vispārejiem noteikumiem ar šķērsošanās punkta $T = A_2$ palīdzibu (38 §).

Līdzigā kārtā varam uzmeklet dotās taisnes krustošanās punktu ar kautkādu vertikali projecejošo plakni.

*) 112 rasejumā a_1 jaatzīmē kā vienlaidu linija; viena daļa no a_1 nepareizi atzīmeta kā raustita linija.

106 §. Taisnes krustošanās ar plakanu figuru.

Pieņemsim, ka jaatrod taisnes *a* krustošanās punkts ar patvaļigu △-i ABC (113 ras.). Tam nolūkam caur taisni *a* velkam vienu horicontali projecejošu palīgplakni *sat* un atrodam taisni *b*, pa kuŗu plakne *sat* krustojas ar △-i ABC. Taisne *b* noteicama ar diviem punktiem. Tādi punkti acim redzot ir tie (D un E), kuŗos divas △-a ABC malas, piemēram, AC un BC, krusto plakni *sat*. Punktus D un E atrod pēc iepriekšeja panta noteikumiem.

Punktus D un E savienodamā taisne *b* ir plakņu *sat* un ABC krustošanās taisne un tapēc punkts M, kuŗā krustojas taisnes *a* un *b*, ir taisnes *a* krustošanās punkts ar △ i ABC. Pie tam papriekšu uzmeklejam $M_2 = a_2 \times b_2$ un pēc tam uz taisnes $a_1 = b_1$ atrodam M_1.

Taisnes *a* redzamibu projekcijās noteic ar viņas šķērsošanās punkta ar kautkādām △-a ABC malām palīdzibu. Tā, piemēram, rasejumā aizrāditi šķērsošanās punkti $E_1 = F_1$ un $G_2 = J_2$, ar kuŗu palīdzibu pēc 38 § ir noteikta taisnes *a* redzamiba projekcijās.

Kā rasejumā redzams, tad taisnes *a* horicontali projecejošas plaknes vertikalai pēdu linijai *t* mūsu konstrukcijās nekādas nozīmes nav, kapēc rasejumos parasti viņa netiek aizrādita. Tapat ari asi OX varetu pavisam neaizrādit.

Analoģiskā kārtā varam noteikt taisnes krustošanās punktu ar doto trijstūri, velkot caur doto taisni vienu vertikali projecejošo palīgplakni. Pie tam šinī gadijumā vertikali projecejošas palīgplaknes horicontalai pēdu linijai konstrukcijās nav nekādas nozīmes un tapēc rasejumos viņu neaizrāda.

107 §. Profilās taisnes krustošanās ar plakni.

Ja janoteic uz profilās plaknes $p\beta q$ guļošās taisnes AB = *a* krustošanās punkts ar doto plakni *sat* (114 ras.), tad noteicam taisnes ST savienoto stāvokli S_0T, pa kuŗu plakne *sat* krusto profilo plakni $p\beta q$ (94 §). Pēc tam noteicam dotās taisnes savienoto stāvokli $a_0 = A_0B_0$ un atrodam punkta M, kuŗā taisne AB krusto plaknei *sat* piederošo taisni ST, savienoto stāvokli $M_0 = A_0B_0 \times S_0T$. Punktu M_0 zinot, nav gŗūti pretejā kārtā uzmeklet attiecigās projekcijas M_1 un M_2.

Lai noteiktu profilās taisnes AB redzamibu, iedomasimies, ka ar V ir savienoti punkta A horicontali un vertikali projecejošie stari m_1 un m_2 (12 §). Rasejumā viņu savienotie stāvokli atzīmeti ar m_{1_0} un m_{2_0}. Skatidamies no bezgali tāla centra $\Omega_1\infty$ virzienā m_{1_0}, mēs horicontalajā projekcijā redzesim dotās taisnes *a* daļu A_0M_0 (AM), bet daļū M_0B_0 (MB) neredzesim, jo caur A_0M_0, virzienam m_{1_0} līdztekus ejošie horicontali projecejošie stari netrauceti sasniedz daļu A_0M_0, bet caur M_0B_0 ejošos starus aiztur plaknei *sat* piederošā taisne M_0T, vaj ari viņas pagaŗinajums.

Līdzigā kārtā nav grūti novērot, ka virzienam m_{2_0} līdztekus vilktie vertikali projecejošie stari netrauceti sasniedz daļu $A_0 M_0$, bet daļu $M_0 B_0$ viņi nesasniedz, jo viņus aiztur taisne $M_0 S_0$, vaj viņas pagarinajums.

Aizrāditais, saprotams, attiecas ne tikai uz staru un taišņu savienotiem stāvokļiem, bet paliek spēkā ari prieks oriģinaliem stariem un taisnēm, tapēc dabujam rasejumā aizrādito taisnes AB redzamibu projekcijās.

108 §. Horicontali jeb vertikali projecejoša stara krustošanās ar plakni.

Pieņemsim, ka jaatrod patvaļiga horicontali projecejoša stara a krustošanās punkts M ar doto plakni *sat* (115 ras.).

Tā kā taisne a guļ uz zinamās profilās plaknes, tad punktu M, kurā viņa krusto plakni *sat*, var atrast pēc iepriekšeja panta noteikumiem. Bet punktu M var atrast vēl vienkāršaki. Tam nolūkam caur meklejamo punktu M velkam vienu dotai plaknei *sat* piederošo horicontalo pēdu līdzteci h. Tā kā meklejamai horicontalai projekcijai M_1 jasakrīt ar a_1, tad h_1 iet caur $M_1 = a_1$, līdztekus s. Pēc tam ar vertikala pēdu punkta T palīdzibu atrodam vertikalo projekciju h_2. Taišņu h_2 un a_2 krustošanās punkts noteic meklejamo vertikalo projekciju M_2.

116 rasejumā aizrādits vertikali projecejoša stara a krustošanās punkts M ar plakni *sat*. Konstrukcijas izdaritas ar vertikalās pēdu līdzteces v palīdzibu, kas guļ uz dotās plaknes *sat* un iet caur meklejamo punktu M.

Taišņu redzamibu 115 un 116 rasejumā parastā kārtā noteic ar attiecigiem šķērsošanās punktiem.

109 §. Divu plakanu figuru krustošanās; doto figuru ēnas.

Pieņemsim divas kautkādas plakanas figuras, piemēram, trijstūri ABC un paralelogramu DEFG (117 ras.). Doto figuru sakrītošo projekciju asis ir $r_{1,2}$ un $p_{1,2}$.

Uzmeklesim papriekšu doto figuru krustošanās taisni. Tam nolūkam visparejā gadijumā atradisim divu vienas plaknes taišņu krustošanās punktus ar otru plākni un iegūtos punktus savienosim. Var ari atrast vienas figuras (ABC) malas krustošanās punktu ar otro figuru (DEFG) un atrasto punktu savienot ar punktu, kur otrās figuras (DEFG) mala krusto pirmo. Pie tam konstrukcijas izpildot, nav no svara, vaj uzmekletie krustošanās punkti atrodas doto plakņu apveidu iekšpusē, vaj uz doto figuru pagarinatām plaknēm.

Ja doto figuru sakrītošo projekciju asis krustojas rasejuma robežās punktā 1, tad konstrukcijas var izdarit vienkāršaki. Punkts 1, kas vienā un tai pašā laikā guļ uz $r_{1,2}$ un $p_{1,2}$, pieder abu figuru plaknēm un tapēc viņām ari japieder šo figuru krustošanās taisnei.

Lai noteiktu kautkādu mekletās krustošanās taisnes otru punktu, mēs uzmeklejam punktu 4, kur taisne AC krusto plakni DEFG. Tam nolūkam caur AC velkam vienu vertikali projecejošo palīgplakni. Šī plakne krusto DEFG pa taisni 2—3, kuŗas vertikalā projekcija sakrīt ar $A_2 C_2$. Punkts 2 ir taisnes $A_2 C_2$ pagaŗinajuma krustošanās punkts ar $p_{1,2}$, tapēc punktā 2 sakrīt viņa horicontalā un vertikalā projekcija. Vertikalā projekcija 3_2 guļ uz $E_2 F_2$. Pēc tam noteicam viņas attiecigo horicontalo projekciju 3_1 uz $E_1 F_1$, savienojam punktu 3_1 ar 2 un uzmeklejam punktu $4_1 = 2 - 3_1 \times A_1 C_1$. Zinedami 4_1, nav gŗūti atrast 4_2. Punktu 4 savienodami ar 1, iegūsim doto figuru krustošanās taisni. Reālā nozīme būs tikai tai viņas daļai 4–5, kas vienā un tai pašā laikā atrodas abu doto figuru robežās. Uz taisnes 4—5 (jeb viņas pagaŗinajuma) ir jaatrodās visiem vienas figuras malu krustošanās punktiem ar otrās figuras plakni. Tā, piemēram, punkts 6 ir taisnes DE un pagaŗinatas plaknes ABC krustošanās punkts. Līdzigā kārtā ari punkts 7 ir taisnes DG un pagaŗinatas plaknes ABC krustošanās punkts.

Lai noteiktu doto figuru redzamibu projekcijās, tad mēs aplūkojam patvaļigu malu šķērsošanās punktus. Tā, piemēram, vertikalās projekcijas redzamiba ir noteikta ar šķērsošanās punkta $3_2 = 8_2$ palīdzibu, kuŗos krustojas $A_2 C_2$ un $E_2 F_2$. Tā kā 3_1 atrodas zemak, nekā 8_1, mēs pēc 38 § varam spriest, ka vertikalajā projekcijā punkts 3 ir redzams, bet punkts 8 ne. Tā tad attiecibā uz V taisne EF iet priekš AC. Zinot taišņu EF un AC vertikalo projekciju redzamibu, nav grūti vertikalajā projekcijā noteikt ari pārejo malu redzamibu.

Horicontalās projekcijas redzamiba noteikta ar malu $A_1 C_1$ un $D_1 E_1$ šķērsošanās punkta $9_1 = J_1$ palīdzibu. No tam, ka vertikalā projekcija 9_2 atrodas augstaki, kā J_2, mēs varam spriest, ka punkts 9 horicontalajā projekcijā redzams, bet punkts J neredzams. Tā tad attiecibā uz H mala DE iet virs AC. Pēc tam nav vairs gŗūti horicontalajā projekcijā noteikt pārejo malu redzamibu.

Doto figuru krītošo un pašēnu noteikšanai jaievēro sekojošais. Gaismas avotu varam pieņemt galibā, vaj bezgalibā. Pēdējā gadijumā japieņem gaismas staru virsiens l.

No vienas figuras atsevišķām virsotnēm uz otras figuras plakni krītošās ēnas noteic, kā attiecigo gaismas staru krustošanās punktus ar doto plakano figuru (106 §).

Lai dabutu raksturigaku krītošās ēnas izskatu, tad var pretejā ceļā pieņemt kautkādas vienas virsotnes krītošo ēnu un pēc viņas uzmeklet gaismas staru virzienu l. Atzīmesim ēnu, ko, piemēram, virsotne C met uz plakni DEFG ar $C^{\times}$, bet attiecigas projekcijas ar $C_1^{\times}$ un $C_2^{\times}$. No šīm projekcijām kautkādu vienu, piemēram $C_2^{\times}$ varam pieņemt pilnigi patvaļigi. Otru projekciju $C_1^{\times}$ tad vairs nedrīkstam pieņemt patvaļigi, bet viņa jaatrod. Tam nolūkam rīkojamies šādi. Punktu $C_2^{\times}$ savienojam ar kautkādu tās plaknes virsotni, uz kuŗas guļ ēna $C^{\times}$, piemērām, ar E_2, un šo taisni pagaŗinam līdz krustošanai ar plaknes DEFG sakrītošo projekciju asi $p_{1,2}$ punktā 10. Punktu 10 savienojam ar E_1 un uz šīs taisnes atrodam $C_1^{\times}$. Punktus C_2 ar $C_2^{\times}$ un C_1 ar $C_1^{\times}$ savienodami, mēs iegūsim gaismas staru virziena l projekcijas, t. i. l_2 un l_1. Pie tam, lai būtu dabiska apgaismošana, projekcijai l_2 jaiet no augšas uz leju, kas tūliņ jaievēro, punktu $C_2^{\times}$ pieņemot.

Ja rasejumā vēlams ēnas attēlot pie centralās apgaismošanas, tad uz atrastiem virzieniem var pieņemt gaismas avota projekcijas.

Ja 10 punkts neiznāk rasejuma robežās, tad atzīmē punktu $11_2 = E_2C_2^{\times} \times D_2G_2$ un pēc viņa uz D_1G_1 atrod projekciju 11_1. Savienodami E_1 ar 11_1, pēc $C_2^{\times}$ varam noteikt $C_1^{\times}$.

Zinot gaismas staru virzienu l, nav gŗūti pēc 106 § atrast visu virsotņu krītošās ēnas. Bet konstrukcijas var pavienkāršināt, ja ņemam vērā, ka ēna, kas no kautkādas taisnes krīt uz kautkādu plakni, iet caur taisnes krustošanās punktu ar doto plakni. Tapēc ēnai, krītošai no taisnes CA uz plakni DEFG, jaiet caur punktu 4, kuŗā taisne AC krusto plakni DEFG; šīs ēnas projekcijām jaiet caur 4 punkta vienadnosaukuma projekcijām, t. i. $C_1^{\times}A_1^{\times}$ jaiet caur 4_1, bet $C_2^{\times}A_2^{\times}$ caur 4_2. Pie tam $A_1^{\times}$ un $A_2^{\times}$ ir ēnas projekcijas, krītošas no virsotnes A uz plakni DEFG. Lai dabutu projekcijas $A_1^{\times}$ un $A_2^{\times}$, mēs caur A_1 velkam taisni, līdztekus l_1, līdz krustošanai ar pagaŗinato taisni $C_1^{\times}-4_1$ punktā $A_1^{\times}$. Līdzigā kārtā dabujam $A_2^{\times}$.

Tā kā ēna $C^{\times}A^{\times}$ guļ uz plaknes DEFG, tad viņas projekcijām jakrustojas kopejā punktā 12 uz sakrītošo projekciju ass $p_{1,2}$. Punktu 12 var ari lietot, lai tieši pēc pieņemtas projekcijas $C_2^{\times}$ noteiktu attiecigo otru projekciju $C_1^{\times}$. Tam nolūkam 4_2 savieno ar $C_2^{\times}$ un pagaŗina līdz krustošanai ar $p_{1,2}$ punkta 12. Punktu 12 savieno ar 4_1 un uz taisnes $12-4_1$ uzmeklē projekciju $C_1^{\times}$.

Kā zinams, taisnes krustošanās punkts ar kautkādu plakni sadala taisnes krītošo ēnu uz aplūkotās plaknes divās daļās: realā un šķietamā, vaj ģeometriskā ēnā (79 §). Mūsu gadijumā nav gŗūti izšķirt, ka $C^{\times}-4$ ir realā, bet $A^{\times}-4$ — šķietamā ēna.

Taisnes BA krītošai ēnai jaiet caur punktu 5, kuŗā taisne BA krusto plakni DEFG. Tapēc punktu $A^{\times}$ ar 5 savienodami, mēs iegūsim taisnes AB krītošo ēnu. Uz pagaŗinatās taisnes $A^{\times}-5$ nav gŗūti noteikt punkta B krītošo ēnu $B^{\times}$. Tam nolūkam caur punktu B velkam gaismas staru līdztekus virzienam l, un tur, kur viņš krusto pagaŗinato taisni $A^{\times}-5$, dabujam meklejamo punktu $B^{\times}$.

Kontroles dēļ projekcijām $A_2^{\times}B_2^{\times}$ un $A_1^{\times}B_1^{\times}$ jakrustojās uz sakrītošo projekciju ass $p_{1,2}$ (šis punkts mūsu gadijumā neatrodas rasejuma robežās). Punkts 5 dala ēnu $A^{\times}B^{\times}$ patiesā ($B^{\times}-5$) un šķietamā ($A^{\times}$ 5). Pie tam tikai tai ēnas $B^{\times}-5$ daļai, kas guļ uz dotās figuras DEFG, ir reālā nozīme. Šinī gadijumā tāda reālā daļa ir $5-13$, bet pārejai daļai $13-B$, kas guļ uz pagarinatas plaknes DEFG, nav reālās nozīmes.

Savienojot $B^{\times}$ ar $C^{\times}$, mēs iegūsim taisnes BC krītošo ēnu. Šīs ēnas lielakai daļai ir reālā nozīme. Kontroles dēļ projekcijām $B_1^{\times} C_1^{\times}$ un $B_2^{\times} C_2^{\times}$ jaiet caur punktu 14, kas guļ uz ass $p_{1,2}$.

Vertikalajā projekcijā visa reālā ēna, krītoša no $\triangle$-a ABC uz figuru DEFG, redzama, bet horicontalajā projekcijā viņu pa lielakai daļai aizsedz $\triangle$-a ABC projekcija.

Ievērosim, ka patiesa krītošā ēna var atrasties tikai uz apgaismotās plaknes, bet uz virsas, jeb plaknes, kas atrodas pašēnā, krītošā ēna nekad nevar atrasties.

Tā kā mūsu gadijumā abās figuras DEFG projekcijās ir redzama uz šo plakni krītošā ēna, tad varam spriest, ka plakne DEFG abās projekcijās redzama no gaišās puses. Saprotams, ka tad kontroles dēļ ari virsotņu DEFG kārta abās projekcijās ir viena un ta pati.

Aplūkosim tagad $\triangle$-i ABC. Plaknes ABC pēdu linija attiecibā uz plakni DEFG ir taisne $4-5$. Rasejumā redzams, ka vertikalā projekcija B_2C_2 un vienadnosaukuma, t. i., vertikalā krītošā ēna $B_2^{\times}C_2^{\times}$ atrodas dažadās pusēs no attiecigās pēdu linijas vienadnosaukuma projekcijas, t. i., no krustošanās linijas vertikalās projekcijas 4_2-5_2. Tā tad pēc 84 § noteikumiem vertikalā projekcija $A_2B_2C_2$ redzama no tumšās puses, kas atrodas pašēnā. Turpreti horicontalajā projekcijā krītošās ēnas projekcija $(C_1^{\times} B_1^{\times})$ un ēnu metošās taisnes projekcija (C_1B_1) atrodas vienā pusē no pēdu linijas (krustošanās linijas) vienadnosaukuma projekcijas (4_1-5_1). Tapēc $\triangle$ ABC horicontalajā projekcijā redzams no gaišās puses. Tas pats seko no ta, ka horicontalajā projekcijā virsotņu kārta $A_1B_1C_1$ ir preteja, nekā vertikalajā projekcijā $A_2B_2C_2$, t. i. $\triangle$ ABC savās projekcijās redzams no dažadām pusēm. Bet tā kā mēs augšā jau izšķirām, ka projekcija $A_2B_2C_2$ redzama no tumšās puses, tad projekcija $A_1B_1C_1$ redzama no pretejās, t. i. gaišās puses.

Uzmeklesim tagad ēnu, kas krīt no figuras DEFG uz $\triangle$-a ABC plakni. Tam nolūkam uzmeklesim kautkādas figuras DEFG virsotnes, piemēram D, krītošo ēnu $D^{\times}$. Punkts $D^{\times}$ noteikts ar horicontali projecejošo palīgplakni, kas vilkta caur gaismas staru, ejošo caur D, līdztekus l. Šī horicontali projecejoša plakne krusto plakni ABC pa taisni $15-16$, pie kam punkts 15 guļ uz sakrītošo projekciju ass $r_{1,2}$, bet punkts 16 — uz taisnes BC. Velkot caur D_2 līdzteci ar l_2 un uzmeklejot šās taisnes krustošanās punktu ar $15-16_2$, dabujam meklejamā punkta vertikalo projekciju $D_2^{\times}$, pēc kuŗas nav gŗūti atrast $D_1^{\times}$.

Taisnes DE un DG krusto plakni ABC, vaj viņas pagariņajumu attiecigos punktos 6 un 7. Punktu $D_1^\times$ ar 6_1 un 7_1 savienodami, mēs iegūstam ēnas horicontalo projekciju, krītošas no paralelograma DEFG uz pagariņato △-a ABC plakni. Reālā nozīme būs tikai tai ēnas daļai, kas atrodas △-a ABC apveida iekšpusē. Pie tam šīs ēnas vienu daļu aizsedz paralelograma DEFG horicontalā projekcija. Kontroles dēļ taisnēm $6_1 - D_1^\times$ un $6_2 - D_2^\times$ jakrustojās punktā 18, kas guļ uz sakrītošo projekciju ass $r_{1,2}$. Līdzigā kārtā $7_1 - D_1^\times$ un $7_2 - D_2^\times$ krustojas punktā 19 uz $r_{1,2}$.

Tā kā vertikalajā projekcijā △ ABC redzams no tumšās puses, tad uz viņu krītošā ēna atrodas uz pretējās, mums neredzamās △-a ABC puses, un tapēc šo ēnu rasejumā nekādā ziņā nedrīkst ieklāt.

Rasejumā nav aizrādita šķietamā ēna, kas krīt no plaknes DEFG uz △-i ABC, jo pie konstrukciju izpildišanas ši ēna mums nav vajadziga.

118 rasejumā aizrādita divu trijstūru ABC un DEF krustošanās, kā ari no viena △-a uz otru krītošā ēna. Bez tam △ DEF pieņemts ar zgriezumu. Visas konstrukcijas jaizdarā tādā pašā kārtā, kā 117 rasejumā.

110 §. Triju plakanu figuru krustošanās.

119 rasejumā aizrādita triju patvaļigu trijstūru ABC, DEF un GJK krustošanās. Katra trijstūŗa krustošanās taisne ar diviem pārejiem trijstūŗiem noteicama pēc iepriekšejā panta noteikumiem. Katra trijstūŗa malu redzamiba noteicama pēc vispārejiem noteikumiem ar šķērsošanās punktu palīdzibu.

Figuru krustošanos noteicot, jaievēro šādi pavienkāršinajumi. Taisnei m_{I}, pa kuŗu krustojas trijstūŗu ABC un DEF plaknes, jaiet caur punktu $R_{\mathrm{I,II}}$, kuŗā krustojas plakņu ABC un DEF sakrītošo projekciju asis r_{I} un r_{II}.

Taisnei m_{II}, pa kuŗu krustojas trijstūŗu ABC un GJK plaknes, jaiet caur punktu $R_{\mathrm{I,III}}$, kuŗā krustojas trijstūŗu ABC un GJK sakrītošo projekciju asis r_{I} un r_{III}.

Taisnei m_{III}, pa kuŗu krustojas trijstūŗu DEF un GJK plaknes, jaiet caur punktu $R_{\mathrm{II,III}}$, kuŗā krustojās trijstūŗu DEF un GJK sakrītošo projekciju asis r_{II} un r_{III}.

Trīs patvaļigas plaknes telpā sastāda trijplakņu piramidi, kuŗas virsotnē L saiet atsevišķo sānu malu krustošanās taisnes (šķautnes) m_{I}, m_{II} un m_{III}. Tapēc vienadnosaukuma taišņu m_{I}, m_{II} un m_{III} projekcijām jakrustojās divos punktos L_1 un L_2, kas guļ uz vienas projecešanas virzienam $(A_1 A_2)$ līdzteku taisnes.

Trīs krustodamās plaknes visu telpu sadala astoņos trijplakņu kaktos, no kuŗiem horicontalajā projekcijā redzams tas, kas ir pagriests uz augšu no H, bet vertikalajā projekcijā tas, kas ir pagriests uz priekšu no V.

Ja astoņu trijplakņu kaktu virsotne L atrodas ikkatras dotās figuras apveida iekšpusē, kā tas mūsu gadijumā (119 ras.), tad redzamās un neredzamās kaktu šķautnes, t. i. redzamās un neredzamās doto figuru krustošanās taisnes, pie virsotnes L, mainas pa rindai. Tas pats, saprotams, ari novērojams projekcijās.

VII nodaļa. Savienošanas uzdevumi.

111 §. Taisne, kas iet caur doto punktu un krusto divas šķērsodamās taisnes.

Pieņemsim, ka dotas divas patvaļigas šķērsodamās taisnes a, b un viņām nepiederošs punkts C (120 ras.). Javelk taisne d, kas iet caur punktu C un krusto dotās taisnes a un b.

Caur punktu C un katru doto taisni a un b telpā var vilkt pa vienai palīgplaknei. Šās divas palīgplaknes krustodamās, noteic meklejamo taisni d, jo viņa pēc konstrukcijas iet caur punktu C un, ar abām dotām taisnēm a un b pa rindai kopejā plaknē atrasdamās, krustojas ar viņām.

Taisnes d noteikšanai techniskā rasejumā pietiek, ja atrodam vienu no minetām palīgplaknēm. Tam nolūkam savienojam punktu C ar patvaļigu uz vienas dotās taisnes, piemēram, a pieņemtu punktu D, un pēc tam uz 106 § pamata atrodam otrās dotās taisnes b krustošanās punktu E ar plakni, noteiktu caur krustodamām taisnēm a un CD. Punktus C un E savienodami, mēs iegūsim mekleto taisni d, kas krusto taisni a punktā F. Techniskā rasejumā kontroles dēļ jabūt, ka punkti $F_1 = d_1 \times a_1$ un $F_2 = d_2 \times a_2$ guļ uz vienas līdzteces ar projecešanas virzienu.

112 §. Taisne, līdztece dotai taisnei un krustodamā divas dotās šķērsodamās taisnes.

Pieņemsim, ka dotas divas patvaļigas šķērsodamās taisnes a un b (121 ras.). Javelk taisne d tā, lai viņa krustotu dotās taisnes a, b un būtu līdztece trešai dotai taisnei c.

Ja mēs iedomasimies, ka mekletā taisne javelk caur bezgali attālinatu punktu C uz taisnes c, tad šis uzdevums atrisinams līdzigi iepriekšejam gadijumam. Tam nolūkam patvaļigi pieņemto punktu D uz taisnes a savienojam ar bezgali attālinato punktu C uz taisnes c, t. i. caur punktu D velkam $c_I \parallel c$. Pēc tam atrodam punktu E, kurā taisne b krusto palīgplakni, noteikto ar krustodamām taisnēm a un c_I. Savienodami E ar bezgali attālinatu punktu C, vaj ari vilkdami caur punktu E līdzteci taisnei c, jeb c_I, mēs iegūsim mekleto taisni d.

Kontroles punkti $F_1 = d_1 \times a_1$ un $F_2 = d_2 \times a_2$ guļ uz viena kopeja projecejoša stara.

113 §. Taisnes, ejošas caur trijām šķērsodamām taisnēm.

Ja caur trijām dotām šķērsodamām taisnēm *a*, *b* un *c* (122 ras.) javelk taisnes, tad uz katras dotās taisnes var pieņemt pa vienam patvaļīgam punktam un caur šo punktu pēc 111 § var vilkt taisni, kas krusto pārejās divas šķērsodamās taisnes.

Var rīkoties ari citadi. Caur vienu doto taisni velkam patvaļīgu palīgplakni un atrodam divu pārejo taišņu krustošanās punktus ar vilkto palīgplakni. Šos punktus savienodami, mēs iegūsim mekleto taisni.

122 rasejumā palīgplakne ir vilkta caur *a*, velkot tam nolūkam caur patvaļīgi pieņemto punktu D uz taisnes *a* patvaļīgu taisni *f*. Taišņu *b* un c krustošanās punktus E un F ar vilkto palīgplakni noteikdami un viņus savienodami, mēs iegūsim mekleto taisni *d*, kas krusto trešo doto taisni *a* punktā G. Kontroles dēļ punktiem $G_1 = d_1 \times a_1$ un $G_2 = d_2 \times d_2$ jaguļ uz viena kopeja projecejoša stara.

114 §. Taisnes, ejošas caur divām šķērsodamām taisnēm, līdztekus dotai plaknei.

Pieņemsim, ka caur divām dotām šķērsodamām taisnēm *a* un *b* (123 ras.) javelk taisne *d* līdztekus plaknei, noteiktai ar divām krustodamām taisnēm *m* un *n*. Plakni *mn* sauc par vadošo plakni.

Tam nolūkam mēs caur patvaļīgu punktu B velkam palīgplakni, līdztekus vadošai plaknei. Šo palīgplakni noteic taisnes m_I un n_I, pie kam $m_I \parallel m$ un $n_I \parallel n$. Pēc tam noteicam taišņu *a* un *b* krustošanās punktus E un F ar palīgplakni $m_I\, n_I$. Punktus E un F savienodami, iegūstam mekleto taisni *d*, kuŗa, kā redzams, ir līdztece vadošai plaknei, jo viņa guļ uz palīgplaknes $m_I\, n_I \parallel m\, n$.

Tā kā punkts B pieņemts patvaļīgi, tad var pieņemt bezgali daudz palīgplakņu, līdzteču dotai vadošai plaknei *mn*, un uz ikkatras no šām plaknēm var uzmeklet taisni, kas apmierina aplūkoto uzdevumu. Visas līdzteku palīgplaknes krustojas pa vienu bezgali attālinato taisni, caur kuŗu, saprotams, iet ari katra atrastā taisne *d*. Tapēc aplūkoto uzdevumu var saprast ari šādi: vilkt taisni, kuŗa krusto trīs šķērsodamās taisnes, no kuŗām divas ir dotas galibā, bet trešā atrodas bezgalibā un ir vadošās plaknes bezgali attalinata taisne.

VIII nodaļa. Savstarpeji stateniskas taisnes un plaknes.

Vispārejā gadijumā divas taisnes krustojas patvaļigā leņķī, kas projecejas uz H un V sagrozitā veidā. Šā leņķa patieso lielumu varam noteikt pēc 68, 69 un 73 §§.

115 §. Divas savstarpeji stateniskas taisnes.

Ja divas krustodamās taisnes veido telpā taisno leņķi, tad ari taisns leņķis vispārejā gadijumā projecejas uz H un V sagrozitā veidā. Izņēmumus dabujam sekošos gadijumos.

Ja viena no krustodamām taisnēm $h = MC \parallel H$ (124 ras.), bet otra taisne $a = MB$, kas ir stateniska pret pirmo taisni h, ieņem patvaļigu stāvokli, tad horicontalās projekcijas a_1 un h_1 savstarpeji stateniskas, bet vertikalās projekcijas a_2 un h_2 veido kautkādu leņķi. Lai šo pierāditu, aplūkosim 124a ras. Pēc konstrukcijas $MC \perp MM_1$, bet, tā kā $M_1 C_1 \parallel MC$, tad ari $M_1 C_1 \perp MM_1$. Tā tad, $M_1 C_1$ ir stateniski pret plakni $MM_1 B_1 B$ un tapēc $M_1 C_1$ ir stateniski pret ikkatru taisni, kas guļ uz plaknes $MM_1 B_1 B$ un iet caur M_1. Tapēc $M_1 C_1$ ari stateniski pret $M_1 B_1$, t. i. $M_1 C_1 \perp M_1 B_1$, ko vajadzeja pierādit.

Nav grūti līdzigi iepriekšejam pierādit, ka taisns leņķis, ko telpā veido divas krustodamās taisnes $v = MC$ un $a = MB$ (125 ras.), no kurām $v \parallel V$, bet a ieņem patvaļigu stāvokli telpā, — projecejas uz V dabiskā lielumā, bet uz H — sagrozitā lielumā, t. i. $a_2 \perp v_2$, bet a_1 un v_1 veido kautkādu leņķi.

Tā tad, ja viena leņķa mala ir līdztece zinamai projekciju plaknei (H jeb V), tad taisns leņķis uz attiecigo projekciju plakni projecejas dabiskā lielumā.

116 §. Statenis pret doto plakni.

Uzdevums: Pret doto plakni sat (126 ras.) javelk patvaļigs statenis p.

Tam nolūkam uz plaknes sat caur kopejo punktu M velkam horicontalo un vertikalo pēdu līdzteci h un v. Taisne p, ejoša caur punktu M, stateniski pret plakni sat, taī pašā laikā ir ari stateniska pret h un v. Tapēc pēc 115 § noteikumiem jabūt $p_1 \perp h_1$ un $p_2 \perp v_2$; bet tā kā $h_1 \parallel s$ un $v_2 \parallel t$, tad dabujam, ka $p_1 \perp s$ un $p_2 \perp t$.

Tā tad, ja taisne stateniska pret doto plakni, tad viņas vienadnosaukuma projekcijas ir stateniskas pret plaknes vienadnosaukuma pēdu linijām, jeb pret attiecigo pēdu līdzteču vienadnosaukuma projekcijām.

Saprotams, ka nav grūti pretejā kārtā pret doto taisni p vilkt statenisko plakni sat.

Uz p patvaļigu punktu B pieņemdami, mēs taisni p varam uzlūkot kā stateni, vilkto no patvaļiga punkta B pret doto plakni. Punkts M ir šā stateņa krustošanās punkts ar płakni sat.

Taisnes p redzamiba noteicama pēc vispārejiem likumiem.

Nogrieznis BM noteic punkta B atstatumu no plaknes sat. Šā nogriežņa patiesais lielums noteicams pēc agrak aplūkotiem paņēmieniem (63—65 §§).

127 rasejumā stateņa BM patiesais lielums noteikts pēc savienošanas paņēmiena. Tam nolūkam konstruets taisnes ST savienotais stāvoklis ST_o', pa kuŗu horicontali projecejoša plakne, ejošā caur p = BM, krusto plakni sat.

Noteikdami pēc tam punkta B savienoto stāvokli B_o un vilkdami no B_o stateni pret taisni ST_o', līdz krustošanai ar viņu punktā M_o, mēs iegūstam nogriezni B_oM_o, kas noteic punkta B patieso atstatumu p_o no plaknes sat. Ja no M_o velkam stateni pret taisni B_1T_1, līdz krustošanai ar viņu punktā M_1, tad iegūtais pnnkts ir stateņa p krustošanās punkta ar plakni sat horicontalā projekcija. Pēc M_1 nav gŗūti atrast M_2 uz p_2.

Ja no punkta B janolaiž statenis uz plakni st, kas līdztece asij OX (128 ras.), tad šis statenis guļ uz profilās plaknes, kas iet caur punktu B. Bet tā kā ikkatras uz profilās plaknes guļošas taisnes projekcijas ir stateniskas pret s un t, tad lai mekleto stateni pilnigi noteiktu, iepriekš jaatron viņa savienotais stāvoklis. Tam nolūkam atrodam punkta B savienoto stāvokli B_o ún taisnes ST savienoto stāvokli S_oT, pa kuŗu profilā plakne, ejoša caur punktu B, krustojas ar plakni st. Caur punktu B_o taisni $p_o \perp S_oT$ vilkdami, iegūstam mekletā stateņa savienoto stāvokli. Uz p_o pieņemam patvaļigu punktu C_o un pretejā ceļā atrodam ša punkta projekcijas. Punktu B un C projekcijas pilnigi noteic stateņa stāvokli telpā.

Stateņa p redzamiba attiecibā uz plakni st noteicama pēc 107 §.

Ja no dotā punkta D javelk statenis p pret plakni, noteikto kautkāda $\triangle$-a ABC veidā (129 ras.), tad uz $\triangle$-a ABC plaknes velkam vienu horicontalo (h) un vertikalo (v) pēdu līdzteci, un pēc tam caur D_1 velkam $p_1 \perp h_1$ bet caur D_2 velkam $p_2 \perp v_2$.

Stateņa p krustošanās punkts ar $\triangle$-i ABC un redzamiba noteicami pēc 106 §.

117 §. Punkta attālums no taisnes.

Lai noteiktu punkta A attālumu no dotās taisnes p (130 ras.), tad caur A velkam plakni $sat \perp p$, noteicam punktu M, kuŗā plakne sat krusto taisni p, un savienojot A ar M, dabujam mekleto attālumu, kuŗa patiesais lielums noteicams pazīstamā kārtā.

Lai techniskā rasejumā vilktu plakni sat, tad uz meklejamās plaknes caur punktu A velkam vienu horicontalu pēdu līdzteci h, pie tam $h_1 \perp p_1$ un $h_2 \parallel$ OX. Pēc tam noteicam uz h vertikalo pēdu punktu T, caur T velkam $t \perp p_2$, uzmeklējam punktu $a = t \times OX$ un caur a velkam $s \perp p_1$. Pēc tam ar horicontali projecejošas plaknes palīdzibu, kas iet caur p, uzmeklejam dotās taisnes p krustošanās punktu M ar plakni sat, un, beidzot, savienojam punktus A un M.

Aizrādītā veidā atron ari atstatumu starp līdzteku taisnēm. Tam nolūkam no patvaļiga uz vienas taisnes pieņemta punkta velkam stateni pret otru taisni.

118 §. Atstatums starp divām šķērsodamām taisnēm.

Kā zinams, atstatumu starp divām šķersodamām taisnēm a un b (131 ras.) noteic ar viņu kopeju stateni d.

Katram taisnes a statenim jaguļ uz kāutkādas plaknes $s_I a_I t_I$, stateniskas pret a; bet katram taisnes b statenim jaguļ uz kautkādas plaknes $s_{II} a_{II} t_{II}$ stateniskas pret b; tapēc doto taišņu a un b kopejam statenim ir jaiet līdztekus taisnei c, pa kuŗu krustojas plaknes $s_I a_I t_I$ un $s_{II} a_{II} t_{II}$. Kā redzams, aplūkojamais uzdevums ir līdzigs 112 § uzdevumam, t. i., javelk taisne, kas krusto divas dotās šķērsodamās taisnes a un b un iet līdztekus trešai taisnei c. Attiecigās konstrukcijas aizrāditas 131 ras. Tā kā plakne visērtaki noteicama ar pēdu linijām, tad 131 rasejumā aizrādita projekciju ass OX, ko var pieņemt patvaļigi, ievērojot tikai to, lai viņa būtu stateniska pret projecešanas virzienu. Tā tad velkam patvaļigu plakni $s_I a_I t_I \perp a$ (116 §), pie tam jabūt $s_I \perp a_1$ un $t_I \perp a_2$; pēc tam velkam patvaļigu plakni $s_{II} a_{II} t_{II} \perp b$, pie kam $s_{II} \perp b_1$ un $t_{II} \perp b_2$. Plaknes $s_I a_I t_I$ un $s_{II} a_{II} t_{II}$ krustojas pa taisni ST $= c$. Pēc tam, pamatodamies uz 112 §, caur taisnes a patvaļigu punktu D velkam taisni $c_I \parallel c$ un atrodam punktu E, kuŗā taisne b krusto palīgplakni $a c_I$. Velkot pēc tam caur E līdzteci ar c_I jeb ,c' iegūstam mekleto taisni d, kas krusto taisni a punktā F. Kontroles dēļ projekcijām F_1 un F_2 jaguļ uz viena stateņa pret asi OX.

Nogrieznis EF ir statenisks pret dotām šķērsodamām taisnēm a un b un noteic visīsako atstatumu starp viņām. Šā nogriežņa patiesais lielums noteicams pēc vispārejiem paņēmieniem.

119 §. Trīs savstarpeji stateniskas taisnes jeb plaknes.

Pieņemsim, ka caur patvaļigu punktu A (132 ras.) javelk trīs savstarpeji stateniskas taisnes a, b un c.

Pirmo taisni a mēs velkam caur punktu A pavisam patvaļigi. Pēc tam noteicam plakni $h_I v_I$, statenisku pret taisni a, vilkdami tam nolūkam caur attiecigām punkta A projekcijām $h_{I_1} \perp a_1$ un $v_{I_2} \perp a_2$ (116 §), bet h_{I_2} un $v_{I_1} \perp A_1 A_2$. Uz plaknes $h_I v_I$ caur A velkam patvaļigu taisni b. Techniskā rasejumā var patvaļigi pieņemt b_1, jeb b_2. Pieņemsim, piemēram, patvaļigi vertikalo projekciju b_2 un uzmeklesim b_1. Tam nolūkam velkam uz plaknes $h_I v_I$ vienu palīgliniju 1 - 2 un noteicam punktu $3_2 = 1_2 - 2_2 \times b_2$. Pēc tam uz $1_1 - 2_1$ uzmeklejam attiecigu projekciju 3_1, un caur 3_1 un A_1 velkam tagad b_1.

Meklejamai trešai taisnei c jaiet caur A, stateniski pret plakni, kas noteikta ar taisnēm a un b. Tapēc, taisnes c projekciju noteikšanai, mēs uz plaknes ab velkam vienu horicontalo (h_{II}) un vienu vertikalo (v_{II}) pēdu līdzteci. Pavienkāršinašanas labā šās taisnes ir vilktas caur kopejo punktu 3. Vilkdami pēc tam caur A_1 taisni $c_1 \perp h_{II_1}$ un caur A_2 taisni $c_2 \perp v_{II_2}$, mēs iegūsim meklejamās trešās taisnes c projekcijas.

Uz taisnēm a, b un c, abās pusēs no punkta A, atliekam doto pēc sava patiesā lieluma nogriezni m. Vajadzigas konstrukcijas izdaram pēc 63 §. Taišņu a, b un c galus atzīmejam ar A_I un A_{II}, B_I un B_{II}, C_I un C_{II}; tad $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ un $C_I C_{II}$ noteic telpā trīs vienlīdzigas, savstarpeji stateniskas taisnes. Acim redzot, a t r a s t o s p u n k t u s v a r u z s k a t i t, k ā o k t a e d r a v i r s o t n e s, k a s i e ņ e m p a t v a ļ i g u s t ā v o k l i t e l p ā. Taisnes, kas savieno attiecigo oktaedra augstumu gala punktus, ir viņa šķautnes. Ikkatri divi augstumi noteic vienu oktaedra diagonalplakni. Saprotams, ka visas oktaedra diagonalplaknes telpā ir savstarpeji stateniskas. Tapēc a i z r ā d i t ā k ā r t ā v a r a m c a u r d o t o p u n k t u v i l k t t r ī s s a v s t a r p e j i s t a t e n i s k a s p l a k n e s. Pie tam no paša sākuma vienu plakni, piemēram, $h_I v_I$ vareja pilnigi patvaļigi pieņemt un turpmakas konstrukcijas izpildit aizrādītā kārtā.

132 rasejumā pieņemts, ka oktaedra sānu malas caurspīdigas, bet diagonalplaknes necaurspīdigas. Lai diagonalplaknes labaki varetu atšķirt, tad šo plakņu redzamās daļas iešvītrotas dažados virzienos, bet viena un tā pati plakne abās projekcijās iešvītrota vienadā virzienā.

Kā jau 110 § aizrādits, diagonaļu $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ un $C_I C_{II}$ redzamās un neredzamās daļas pie viduspunkta A mainas pa rindai.

Līdzigā kārtā ari 133 rasejumā konstruetas trīs savstarpeji stateniskas taisnes a, b un c, kas krustojas kopejā punktā N. Šās taisnes uzlūko kā taisnes, pa kuŗām krustojas trīs telpā savstarpeji stateniski kvadrati, kuŗiem ir aizrāditie apveidi.

Bez tam rasejumā aizrāditas ēnas, krītošas no viena kvadrata uz otru (109 §), kā ari viņu pašēnas.

120 §. Taisnes slīpuma leņķa noteikšana.

Kā no 61 § zinams, par taisnes a slīpuma leņķi pret doto plakni P (134 ras.) sauc leņķi β, ko oriģinalā taisne a veido ar savu ortogonalo projekciju a_p uz plaknes P.

Atzīmesim leņķi pie virsotnes A ar γ un vilksim caur A līdzteci n ar $A_p S$. Tad taisnes n un a veido to pašu leņķi β, kā taisnes a un a.

Tapēc mēs varam teikt, ka taisnes a slīpuma leņķis β pret doto plakni ir vienlīdzigs ar leņķi, kas papildina līdz 90° leņķi γ, ko ieslēdz dotā taisne a un no kautkāda viņas punkta A pret doto plakni vilktais statenis p.

Uz aizrādito pamatodamies, uzmeklesim taisnes a slīpuma leņķi pret plakni, doto ar divām krustodamām taisnēm b un c (135 ras.). Tam nolūkam uz plaknes bc velkam vienu horicontalo (h_I) un vertikalo (v_I) pēdu līdzteci, un no patvaļigi uz taisnes a pieņemta punkta A velkam pret plakni $ab = h_I v_I$ stateni p. Techniskā rasejumā dabujam $p_1 \perp h_{I_1}$ un $p_2 \perp v_{I_2}$. Pēc tam uz plaknes, noteiktas ar krustodamām taisnēm a un p, velkam vienu horicontalo pēdu līdzteci h_{II} un ap šo pēdu līdzteci griežam plakni ap, uzmeklejot pēc 73 § punkta A savienoto stāvokli A_0. Punktu A_0 ar C_1 un D_1 savienodami, dabujam taišņu a un p savienotos stāvokļus a_0 un p_0, kas krustodamies veido leņķi γ. Papildinajot šo leņķi līdz 90°, dabujam meklejamā slīpuma leņķa patieso lielumu β.

Ja plakne ir dota ar pēdu līnijām, kā tas aizrādits 136 rasejumā, tad no patvaļiga punkta A uz a velkam pret plakni sat stateni p un pēc tam noteicam šā stateņa un taisnes a krustošanās punktus A_p un M ar doto plakni sat.

Punkts A_p ir oriģinala punkta A ortogonalā projekcija uz plaknes P (134 ras.), bet techniskā rasejumā (136 ras.) mēs, saprotams, dabusim projekcijas no šās ortogonalās projekcijas, t. i. mēs dabusim tā saucamās otrreizejās projekcijas A_{p_1} un A_{p_2}.

Punktus M un A_p savienodami, mēs iegūsim taisnes a ortogonalo projekciju a_p uz plaknes sat. Techniskā rasejumā, saprotami, dabusim otrreizejas projekcijas $a_{p_1} = M_1 A_{p_1}$ un $a_{p_2} = M_2 A_{p_2}$. Tālak pēc 73 § varam uzmeklet $\triangle$-a AMA_p patieso lielumu, griežot viņu ap horicontalo pēdu līdzteci h, vilkto uz plaknes AMA_p, dabujot tādā kārtā taisnes a slīpuma leņķi pret plakni sat. Pēdejā konstrukcija rasejumā nav aizrādita.

Ja janoteic taisnes slīpuma leņķis pret vienu no projekciju pamatplaknēm H, vaj V, tad šo leņķi varam noteikt pēc 68 un 69 §§.

121 §. Trijstūŗa atspoguļošana.

Pieņemsim, ka doti: kautkāds $\triangle$ ABC, kuŗa sakrītošo projekciju ass ir $r_{1,2}$ un kautkāda spoguļa plakne ar krustodamām pēdu līdztecēm h un v ($h \times v = K$) un sakrītošo projekciju asi $p_{1,2}$.

Lai dabutu kautkāda punkta A atspoguļojumu A^s,*) no punkta A javelk statenis pret spoguļa plakni, janoteic šā stateņa krustošanās punkts A^o ar spoguļa plakni un otrā pusē no A^o janosprauž nogrieznis $A^s A^o = A A^o$.

*) Ar indeksu s augšā apzīmē atspoguļojumus.

Tamlīdzigi varam uzmeklet ari pārejo punktu atspoguļojumus, bet ja dota sarežģitaka figura, tad ieteicams uzmeklet taisni m, pa kuŗu dotā plakne krusto spoguļa plakni. Abas šās taisnes projekcijas iet caur punktu $D_{1,2}$, kuŗā krustojas plakņu ABC un hv sakrītošo projekciju asis $r_{1,2}$ un $p_{1,2}$. Tapēc jauzmeklē tikai vēl viens uz mekletās taisnes m guļošs punkts. Tādu punktu iegūsim, ja uzmeklesim punktu, kuŗā kautkāda trijstūŗa ABC mala krustojas ar spoguļa plakni. Bet dažreiz neērti, vaj neiespējami uzmeklet trijstūŗa malas krustošanās punktu ar spoguļa plakni. Tādā gadijumā caur vienu virsotni, piemēram, A, velkam palīgliniju AF tā, lai tā krusto spoguļa plakni. Rasejumā šās palīglinijas horicontalā projekcija $A_1F_{1,2}$ ir vilkta tā, lai $A_1F_{1,2}$ krusto $r_{1,2}$ rasejuma robežās, un bez tam $A_1F_{1,2}$ krusto h_1 un v_1 tādos punktos J_1 un E_1, priekš kuŗiem attiecigās vertikalās projekcijas J_2 un E_2 atrodas rasejuma robežās. Punkts $L_2 = J_2E_2 \times A_2F_{1,2}$ ir palīglinijas AF krustošanās punkta ar spoguļa plakni vertikalā projekcija. Pēc tam uzmeklejam L_1 un savienojot L_1 un L_2 ar $D_{1,2}$, dabujam mekletās taisnes m projekcijas m_1 un m_2. Lai tagad uzmekletu, piemēram, $B_1{}^s$, pagaŗinajam A_1B_1 līdz krustošanai ar m_1 punktā M_1. Šo punktu savienojam ar $A_1{}^s$, un tur, kur taisne $M_1A_1{}^s$ krusto no B_1 pret h_1 vilkto stateni, dabujam mekleto punktu $B_1{}^s$. Analoģiski noteicama ar punkta M_2 palīdzibu projekcija $B_2{}^s$. Kontroles dēļ punkti M_1 un M_2, kā ari $B_1{}^s$ un $B_2{}^s$ guļ uz taisnēm, līdztecēm ar projecešanas virzienu, t. i. uz līdztecēm ar A_1A_2. Tamlīdzigi noteicam ari atspoguļojuma C^s projekcijas.

No atspoguļojuma redzamas tikai tās daļas, kas atrodas spoguļa apveida iekšpusē.

No izvestām konstrukcijām redzams, ka figuras $A_1B_1C_1$ un $A_1{}^sB_1{}^sC_1{}^s$, $A_2B_2C_2$ un $A_2{}^sB_2{}^sC_2{}^s$ atrodas slīpleņķainā affinā radniecibā. Affinitates ass pirmā gadijumā ir m_1, bet otrā m_2, pie tam affinitates virziens pirmā gadijumā ir statenisks pret h_1, bet otrā gadijumā statenisks pret v_2.

Nav gŗūti izskaidrot ar veiduļa palīdzibu, ka plakana figura un tās atspoguļojums zinamā projekcijā redzami no vienas un tās pašas, jeb no dažadām pusēm:

1) atkaribā no tam, vaj dotās figuras virsotņu kārta zinamā projekcijā un konstruetā atspoguļojuma vienadnosaukuma projekcijā ir dažada, jeb vienada;

2) atkaribā no tam, vaj dotās figuras zinamā projekcija un konstruetā atspoguļojuma vienadnosaukuma projekcija atrodas dažadās, jeb vienadās pusēs no krustošanās taisnes m vienadnosaukuma projekcijas.

Jaievēro, ka šie noteikumi taisni otradi līdzigiem noteikumiem, kas aizrāditi kautkāda trijstūŗa pašēnas noteikšanai (84 §).

Pamatojoties uz aizrāditiem uoteikumiem, mēs dabujam, ka horicontalajā projekcijā $\triangle$ ABC un viņa atspoguļojums redzami no vienas un tās pašas, bet vertikalajā projekcijā $\triangle$ ABC un viņa atspoguļojums redzami no dažadām pusēm. Ja pieņemsim, ka projekcija $A_2 B_2 C_2$ redzama no gaišās puses, tad atspoguļojums $A_2{}^s B_2{}^s C_2{}^s$ redzams no tumšās puses, kas atrodas pašēnā.

Lai dabutu patieso atspoguļojumu, spoguļa plakne abās projekcijās japieņem tā, lai h_1 un v_1, kā ari h_2 un v_2 veido asus vienada virziena leņķus; bez tam figura, jeb ķermenis japieņem virs un priekš spoguļa plaknes.

Lai atspoguļojuma projekcijas nesakristu, tad punkti K_1 un K_2 japieņem ne pārak tuvu viens no otra; bez tam ieteicams dotās figuras projekcijas pieņemt vienu no otras pietiekošā atstatumā.

Kautkāda priekšmeta atspoguļojums ir patstāvigs iedomajams priekšmets, tapēc atspoguļojumā sānu malu, jeb šķautņu redzamiba noteicama pilnigi neatkarigi no dotā priekšmeta sānu malu jeb šķautņu redzamibas. Pie tam var gadities, ka atspoguļojumā redzamas tādas priekšmeta daļas, kas dotā priekšmeta projekcijās nav redzamas, un ari otradi.

122 §. Divplakņu kakta noteikšana.

Kā zinams, divplakņu kakts, kuŗu telpā veido plaknes P un Q (138 ras.) tiek izmērots ar plakano leņķi β, pa kuŗu trešā plakne R, vilkta stateniski pret plakņu P un Q krustošanās šķautni a, krusto dotās plaknes P un Q.

Uz šo pamatojoties, nav gŗūti noteikt divplakņu kaktu starp patvaļigu plakni sat un projekciju plaknēm H un V. Šos kaktus mēs jau atradām 68 un 69 §§. Bet viņus var atrast ari sekošā kārtā (139 ras.).

Caur patvaļigu punktu K uz āss OX velkam pret dotās plaknes sat horicontalo pēdu liniju s vienu stateniskо horicontali projecejošo plakni. Šās plaknes horicontalā pēdu linija $KS_I \perp s$, bet viņas vertikalā pēdu linija $KT_I \perp OX$. Plakni $KS_I T_I$ savienojam ar V, griežot viņu ap asi KT_I, pie tam punkts S_I pārvietojas pa aploci, vilktu ap centru K ar radiusu KS_I. Punkta S_I savienoto stāvokli, t. i. S_{I_0} iegūsim uz ass OX, un $\triangle KS_{I_0}T_I$ ir $\triangle$-a $KS_I T_I$ savienotais stāvoklis; tapēc leņķis $\beta = KS_{I_0}T_I$ ir patiesais divplakņu kakta lielums, ko veido plaknes sat un H.

Analoģiskā kārtā noteic plakņu sat un V veidotu kaktu. Tam nolūkam caur K velkam vienu vertikali projecejošo plakni $KT_{II}S_{II}$, stateniski pret t, pie tam $KT_{II} \perp t$ un $KS_{II} \perp OX$. Griežot ap asi KS_{II}, savienosim šo plakni ar H, tad $KT_{II_0}S_{II}$ ir $\triangle$-a $KT_{II}S_{II}$ savienotais stāvoklis, un leņķis $\gamma = KT_{II_0}S_{II}$ izmēro plakņu sat un V veidotā divplakņu kakta patieso lielumu.

Tā kā plaknes $KS_I T_I$ un $KT_{II} S_{II}$ iet caur kopeju punktu K un ir stateniskas trešai plaknei *sat*, tad viņas krustojas pa zinamo taisni KL, statenisko pret plakni *sat*. Tapēc telpā KL ir stateniski ari pret taisnēm $S_I T_I$ un $T_{II} S_{II}$, kas guļ uz plaknes *sat* un iet caur kopejo punktu L, kuŗā statenis KL krusto plakni *sat*. Punkta L divus dažadus savienotos stāvokļus L_o' un L_o'' iegūsim, ja no K vilksim stateņus pret $S_{I_o} T_I$ un $T_{II_o} S_{II}$. Kontroles dēļ vajadzigs, ka $KL'_o = KL''_o$, tapēc aploce, kas no K vilkta ar radiusu $KL_o' = KL_o''$, aizskar taisnes $S_{I_o} T_I$ un $T_{II_o} S_{II}$.

Ja ir janoteic divplakņu kakts, ko veido kautkādas patvaļigas dotās plaknes $s_I a_I t_I$ un $s_{II} a_{II} t_{II}$ (140ª ras.), tad pret doto plakņu krustošanās šķautni a velkam patvaļigu statenisku plakni R, kuŗa krusto taisni a punktā A (sk. ari 138 ras.). Ši plakne 140ª rasejumā ir iešvītrota. Plaknes R pēdu linija ir taisne $S_I S_{II}$, kuŗai pēc 116 § jabūt stateniskai pret a_1. Plakne R krusto dotās plaknes pa taisnēm AS_I un AS_{II}, kas veido mekleto leņķi β (sk. 138 ras.). Lai noteiktu šā leņķa patieso lielumu, mēs plakni R, griezdami viņu ap $S_I S_{II}$, savienojam ar H. Pie tam punkti S_I un S_{II}, kas guļ uz griešanās ass, pāliek negrozijušies, bet punkta A savienotam stāvoklim A_o jaatronās uz a_1, jo punkts A griežas uz taisnes a horicontali projecejošas plaknes. Tā kā plakne $R \perp a$, tad griešanās radiuss $NA \perp a$. Tapēc techniskā rasejumā (140ᵇ ras.) konstrukcijas izdara šādi.

Velkam patvaļigi $S_I S_{II} \perp a_1$. Atrodam savienotos stāvokļus T_o' un a'_o. No punkta $N = S_I S_{II} \times a_1$ nolaižam uz a'_o stateni, iegūstot tādā ceļā punkta A savienoto stāvokli A_o' un punkta A griešanās radiusa patieso lielumu NA_o'. Ar šo radiusu velkot loku ap centru N, līdz krustošanai ar a_1, mēs iegūstam punkta A mekleto savienoto stāvokli A_o. Punktu A_o ar S_I un S_{II} savienodami, iegūstam mekleto leņķi $\beta = S_I A_o S_{II}$.

Pieņemsim, ka no patvaļiga punkta B (138 ras.) pret plaknēm P un Q ir vilkti stateņi p_I un p_{II}. Tad, kā zinams, šo stateņu veidotais leņķis γ papildina plakņu P un Q kaktu β līdz 180°, un ari otradi.

Uz aizrādito pamatodamies, noteiksim divplakņu kaktu, kuŗu veido plaknes, dotas ar diviem pāriem krustodamo taišņu $d \times c = C$ un $f \times g = D$ (141 ras.). Tam nolūkam, uz dotām plaknēm velkam horicontalās pēdu līdzteces (1–2 un 3–4) un vertikalās pēdu līdzteces (5–6 un 7–8). Velkot pēc tam no patvaļiga punkta B_1 taisnes $p_{I_1} \perp 1_1 - 2_1$, $p_{II_1} \perp 3_1 - 4_1$ un no B_2 taisnes $p_{I_2} \perp 5_2 - 6_2$, $p_{II_2} \perp 7_2 - 8_2$, dabujam no patvaļiga punkta B telpā pret dotām plaknēm vilktu stateņu p_I un p_{II} projekcijas. Pēc tam uz plaknes $R = p_I\, p_{II}$ velkam horicontalo pēdu līdzteci 9–10 un pēc 73 § atrodam punkta B savienoto stāvokli B_o. Punktu B_o ar 9_1 un 10_1 savienodami, iegūstam leņķi γ starp stateņiem p_I un p_{II} un pēc tam atrodam leņķi β, kas papildina leņķi γ līdz 180°. Leņķis β ir meklejamā divplakņu kakta patiesais lielums.

IX nodaļa. Daudzplakņi.

123 §. Pamatjēdzieni par daudzplakņiem.

Ķermeni, ko ierobežo no visām pusēm plaknes, sauc par daudzplakni. Ja daudzplaknim visas šķautnes, sānu malas, leņķi un kakti ir vienlīdzigi, tad tādu daudzplakni sauc par regularu. Regularu daudzplakņu sānu malas ir regulari un vienlīdzigi daudzstūri. No stereometrijas zinams, ka katrā daudzplakņu kaktā plakano leņķu zumai jabūt mazakai par četriem taisniem leņķiem, t. i. mazakai par 360°. Tā kā daudzplakņu kakts sastāv vismaz no trījiem plakaniem leņķiem, bet regulara sešstūŗa leņķis līdzinās 120°, tad, saprotams, ka no regulariem sešstūŗiem, jeb ari no regulariem daudzstūŗiem, kam vēl vairak malu, nevar sastādit daudzplakņu kaktu. Tapēc regularie daudzplakņi var būt tikai regularu trijstūŗu, četrstūŗu, t. i. kvadratu un piecstūŗu ierobežoti.

No regulariem trijstūŗiem var sastādit trīs regularus daudzplakņus: četru vienadmalu trijstūŗu ierobežotu četrplakni, jeb tetraedru; astoņu vienadmalu trijstūŗu ierobežotu astoņplakni, jeb oktoedru un divdesmit vienadmalu trijstūŗu ierobežotu divdesmitplakni, jeb ikosaedru.

Tetraedra daudzplakņu kakts ierobežots no trijiem vienadmalu trijstūŗiem; oktaedra kakts ierobežots no četriem vienadmalu trijstūŗiem, bet ikosaedra kakts — no pieciem vienadmalu trijstūŗiem. No sešiem vienadmalu trijstūŗiem nevar veidot regulara daudzplakņa kaktu, jo šinī gadijumā plakano leņķu zuma līdzinas 360°.

No kvadratiem var veidot tikai vienu regularu daudzplakni, t. i. regularu sešstūri, tā saucamo eksaedru, jeb kubu.

No regulariem piecstūŗiem var konstruet tikai vienu regularu daudzplakni, t. i. regularu divpadsmitplakni, jeb dodekaedru.

Daudzplakņa projekciju redzamiba. Pie daudzplakņa projekciju redzamibas noteikšanas, kas atrodas I kvadrantā un nav aizsegts no citām plaknēm, vaj ķermeņiem, jaievēro sekojošais. Ārejie projekciju ierobežojumi, t. i. projekciju apveidi vienmēr redzami; zinamā šķautne projekcijā redzama, ja taī pašā projekcijā redzami trīs dotai šķautnei piederigi punkti, bet ja jel viens šķautnes punkts zinamā projekcijā neredzams, tad taī pašā projekcijā ari visa šķautne neredzama.

Horicontalajā projekcijā vienmēr redzams visaugstakais punkts, t. i. tas punkts, kuŗa vertikalā projekcija atrodas visaugstaki (vistālaki no ass OX).

Vertikalajā projekcijā vienmēr redzams priekšejais punkts, t. i. tas punkts, kuŗa horicontalā projekcija atrodas viszemaki (vistālaki no ass OX).

Šķērsojošo šķautņu redzamiba noteicama pēc 38 §.

124 §. Piramide, kas atbalstās uz H.

Pieņemsim, ka dotas patvaļigas piramides ABCD projekcijas, pie kam piramides pamats sakrīt ar H (142 ras.).

Horicontalās projekcijas apveids ir ABC, un tapēc horicontalajā projekcijā virsotnes A, B un C redzamas. Bez tam horicontalajā projekcijā redzama ari virsotne D, jo tā ir visaugstakā virsotne, kapēc horicontalajā projekcijā redzamas ari šķautnes AD, BD un CD, kas saiet virsotnē D.

Vertikalās projekcijas apveids ir $A_2 C_2 D_2$, un tāpēc šinī projekcijā šķautnes AD, CD un AC redzamas. Virsotne B vertikalajā projekcijā nav redzama, jo punkta B projecejošo staru, pirms punkta B sasniegšanas, aiztur sānu mala ACD punktā G, kā tas aizrādits rasejumā. Ja punkts B vertikalajā projekcijā neredzams, tad šinī projekcijā neredzamas ari šķautnes BD, BA un BC, kas saiet virsotnē B.

Par piramides, jeb kautkāda daudzplakņa n o t i n u m u sauc plakanu figuru, kuŗā atsevišķas daudzplakņa sānu malas attēlotas dabiskā lielumā. Notinumā ikkatrām divām daudzplakņa sānu malām ir tā kopejā mala (šķautne), pa kuŗām šīs sānu malas krustojas telpā.

Lai konstruetu dotās piramides notinumu, tad savienosim visas piramides sānu malas ar pamatplakni H. Tā kā piramides atbalsts sakrīt ar H, tad $\triangle$ ABC ir viņa patiesais lielums. Pēc 66 § uzmeklejam virsotnes D savienoto stāvokli D_{o_I}, griežot sānu plakni ACD ap šķautni, jeb pēdu liniju AC. Punktu D_{o_I} ar A un C savienodami, mēs iegūstam sānu malas DAC savienoto stāvokli.

Kautkādas blakus guļošas sānu malas DBC savienoto stāvokli $D_{o_{II}}$ BC var tagad noteikt vēl vienkāršaki. Punktam $D_{o_{II}}$ jaguļ uz stateņa, vilkta no punkta $E = D_1$ pret BC, un bez tam nogrieznis $CD_{o_{II}} = CD_{o_I}$, jo CD_{o_I} un $CD_{o_{II}}$ ir vienas un tās pašas šķautnes CD savienotie stāvokļi. Tapēc, lai noteiktu punktu $D_{o_{II}}$, velkam no centra C ar radiusu CD_{o_I} loku līdz krustošanai ar stateni, vilkto no punkta $D_1 = E$ pret BC. Līdzigā kārtā atrasts trešās sānu malas DAB savienotais stāvoklis $D_{o_{III}}$ AB. Piramides augstums $p \perp$ H, tapēc šis augstums uz plaknes V projecejas patiesā lielumā. Augstums p ir taisnleņķa trijstūŗa NED'_o katete, pie tam $\triangle$ NED'_o ir horicontali projecejošas plaknes, ejošas caur virsotni D, stateniski pret AC, savienotais stāvoklis. Šī plakne krusto sānu malu ACD pa taisni DN, kuŗas savienotais stāvoklis ir D'_oN.

Ja pretejā kārtā pēc dotiem šķautņu patiesiem lielumiem jaatrod piramides projekcijas, tad iepriekš pēc triju šķautņu patiesiem lielumiem konstruejam piramides pamatu ABC, pēc tam atrodam divu sānu malu, piem., D_{o_I} AC un $D_{o_{II}}$ BC savienotos stāvokļus; no punktiem D_{o_I}

un $D_{0_{II}}$ velkam stateņus pret AC un BC, un šo taisņu krustošanās punktā $E = D_1$ dabujam piramides augstuma pamatu. Lai noteiktu piramides augstuma patieso lielumu p, velkam no E stateni pret NE un uzmeklejam šā stateņa krustošanās punktu, ar loku, vilkto no N ar radiusu ND_{0_I}. Iegūtais punkts D_o' ir taisnleņķa trijsstūŗa END_o' virsotne, kuŗā katete $ED_o' = p$. Nospraužot uz stateņa, vilkta no E_2 pret OX nogriezni p, iegūstam virsotnes D vertikalo projekciju D_2. Pēc tam nav gŗūti konstruet piramides projekcijas.

Uz aizrādito pamatodamies, varam konstruet piramides projekcijas ari tanī gadijumā, ja dots piramides pamats, piramides augstuma patiesais lielums p un augstuma atbalstpunkts E.

125 §. Piramide telpā un viņas notinums.

Pieņemsim, ka dots patvaļigs $\triangle$ABC (143a ras.). Jakonstruē piramide, kuŗas augstums līdzinas dotam nogrieznim p, pie kam augstuma pamats E uz plaknes ABC ir dots.

Tam nolūkam velkam uz plaknes ABC horicontalo un vertikalo pēdu līdzteci (h un v) un caur E_1 velkam $p_1 \perp h_1$, bet caur E_2 velkam $p_2 \perp v_2$ (116 §). Pieņemot uz p patvaļigu punktu K, mēs pēc 63 § noteikumiem nostādam taisni EK līdztekus V, un pēc tam uz $E_2K_{0_2}$ no punkta E_2 nospraužam doto augstumu $p = E_2D_o$. Pēc tam pretejā ceļā atrodam virsotnes D projekcijas. Virsotnes D un pamata vienadnosaukuma projekcijas savienodami, iegūsim mekletās piramides projekcijas, kuŗu redzamibu noteic ar šķērsošanās punktu palīdzibu.

Ja piramides pamata projekcijas nav dotas, bet doti patiesie šķautņu lielumi, tad piramides pamata projekcijas noteicamas pēc 70 §, pie tam jabūt zinamām pamatplaknes pēdu linijām.

Ja piramides augstums nav dots, bet doti visu šķautņu patiesie lielumi un pamatplaknes pēdu linijas, tad atkal pēc 70 § konstruejam pamata savienoto stāvokli $A_oB_oC_o$, pēc tam līdzigi 124 pantam atrodam augstuma pamata (E) savienoto stāvokli un augstuma patieso lielumu p.

Ja piramides pamatplakne nav noteikta ar pēdu linijām, bet ar patvaļigām krustodamām taisnēm, tad doto plakni griežam ap plaknes horicontalo, jeb vertikalo pēdu līdzteci, nostādot doto plakni līdztekus H jeb V. Savienotajā stāvoklī konstruejam piramides pamatplakni $A_oB_oC_o$, aizrādito 143a rasejumā, un pēc tam atrodam pamata ABC projekcijas. Vajadzigās konstrukcijas izdaramas pēc 73 §, bet tikai pretejā kārtā.

143b ras. aizrādits piramides notinums, kuŗas projekcijas dotas 143a ras. Patiesais pamata lielums $A_oB_oC_o$ noteikts, griežot to ap h. Lai 143b ras. noteiktu piramides augstuma pamatu E, mēs 143a ras. E_1 savienojam ar B_1 un C_1 un atrodam punktus F_1 un K_1, kuŗos šās taisnes krusto A_1C_1 un A_1B_1. Noteicot pēc tam savienotos stavokļus F_o un K_o un pārnesot viņus

143b rasejumā, mēs taišņu BF un CK krustošanās punktā iegūstam piramides augstuma pamatu E. Līdzigā kārtā notinumā varam noteikt patvaļiga, uz piramides sānu malas guļoša punkta stāvokli.

Šķautņu DA, DB un DC patiesie lielumi atrasti pēc griešanās metodes, bet pašas konstrukcijas 143a rasejumā nav aizrāditas.

Pamatojoties uz konstrueto notinumu, varam pagatavot piramides veiduli. Tam nolūkam no kartona jaizgriež aizrāditā lieluma figura, kuŗu saliecam pa taisnēm DB, DC un BC tā, lai atkārtojošās malas (šķautnes) sakristu. Lai piramides veiduli varetu salīmet, tad saejošām šķautnēm jabūt ar uzlaistām šaurām maliņām, kuŗas tad pielīme attiecigām sānu malām. Šīs maliņas atzīmetas 143b ras. raustitām linijām gar malām DA, AB un AC.

P i e z ī m e. Jaievēro, ka 143b rasejumā ir aizrādits piramides ā r e j ā s virsas notinums. Ja mēs uz piramidi skatisimies no tādā viedokļa, kad virsotne D atrodas virs BC, tad nav gŗūti novērot, ka virsotne B atrodas pa labi no C. Tapēc ari notinumā virsotnei B jaatrodās pa labi no C, kā tas ari 143b ras. aizrādits. Bet ja 143b ras. B atrastos pa kreisi no C, tad mums būtu darišana ar piramides i e k š e j ā s virsas notinumu. Saprotams, ka šķautņu un sānu malu patiesie lielumi abos gadijumos ir tie paši, bet turpmak ēnu konstrukcijās no liela svara ir pareisi pēc vajadzibas attēlot dotā ķermeņa ārejo, vaj iekšejo virsu.

126 §. Slīpa prizma, kas atbalstās uz V, un viņas notinums.

Pieņemsim, ka dotas patvaļigas slīpas četrplakņu prizmas projekcijas, pie kam viens prizmas pamats $A_I B_I C_I D_I$ sakrīt ar V, bet otrais pamats $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$ ir līdztekus V (144a ras.).

Prizmas horicontalās projekcijas redzamibas noteikšanai jaņem vērā, ka šķautne $C_I C_{II}$, kā augstakā, šinī projekcijā katrā ziņā redzama. Šķautnes $B_I B_{II}$ un $D_I D_{II}$, kas noteic horicontalās projekcijas ārejos ierobežojumus, redzamas. Šķautne $A_I A_{II}$ nav redzama šinī projekcijā, jo šās šķautnes horicontali projecejošos starus aiztur sānu mala $C_I D_I D_{II} C_{II}$; tā, piemēram, horicontali projecejošo staru, kas iet caur punktu A_I, aiztur sānu mala $C_I C_{II} D_{II} D_I$ punktā E, kuŗa vertikalā projekcija E_2 rasejumā aizrādita.

Vertikalajā projekcijā šķautņu $A_{II} B_{II}$ un $D_I D_{II}$ redzamiba noteicama ar šķērsošanās punkta $F_2 = G_2$ palīdzibu. Pēc 38 § atrodam, ka šķautne $A_{II} B_{II}$ attiecibā uz V iet prieks šķautnes $D_I D_{II}$, tapēc šķautne $A_{II} B_{II}$ redzama, bet šķautne $D_I D_{II}$ vertikalajā projekcijā nav redzama. Tapat ari šķautnes $C_I D_I$ un $A_I D_I$ nav redzamas vertikalajā projekcijā, jo viņu kopejais punkts D_I nav redzams.

Lai noteiktu kautkādas sānu malas, piemēram, $B_I B_{II} C_{II} C_I$ patieso lielumu, tad mēs viņu griezdami ap vertikalo pēdu liniju $B_I C_I$, savienojam ar V. Punkta C_{II} savienotais stāvoklis C_{II_0} noteicams pēc 67 § noteikumiem, pie kam griešanās radiuss ir taisnleņķa trījstūŗa $C_{II_2}NC'_{II_0}$ hipotenuze NC'_{II_0}, kuŗā viena katete $C_{II_2}N$ līdzinas savienojamā punkta vertikalās projekcijas attālumam no griešanās ass vertikalās projekcijas, bet otra katete $C_{II_2}C'_{II_0} = p$ līdzinas savienojamā punkta horicontalās projekcijas atstatumam no griešanās ass horicontalās projekcijas, kas ir vienlīdzigs ar prizmas augstumu p.

Noteikuši C_{II_0}, mēs caur šo punktu velkam līdzteci ar $C_I B_I$, bet caur B_I velkam līdzteci ar $C_I C_{II_0}$. Punkts B_{II_0}, kuŗā krustojas vilktās taisnes, noteic ceturtas virsotnes savienoto stāvokli B_{II_0}. Tādā kārtā dabujam sānu malas $B_I C_I C_{II} B_{II}$ savienoto stāvokli $B_I C_I C_{II_0} B_{II_0}$. Kautkādas blakus guļošās sānu malas savienoto stāvokli $B_I B_{II_0} A_{II_0} A_I$ var atrast vēl vienkāršaki. Tā, piem., savienoto stāvokli B_{II_0} atrod, ja no centra B_I ar radiusu $B_I B_{II_0}$ velkam loku līdz krustošanai ar stateni, vilkto no B_{II_2} pret $B_I A_I$. Zinot B_{II_0}, nav gŗūti atrast ari virsotnes A_{II} savienoto stāvokli A_{II_0}. Līdzigā kārtā atrod prizmas pārejo sānu malu savienotos stāvokļus.

144b rasejumā aizrādits pilns prizmas notinums ar attiecigiem uzlaidumiem (strīpotām maliņam) veiduļa salipinašanai. Šķautnes $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$, $C_I C_{II}$ un $D_I D_{II}$ savstarpeji līdzteces, kapēc ari notinumā šīm šķautnēm jabūt līdztecēm. Tā kā prizmas sānu virsu notinot, katrs punkts pārvietojas uz plaknes, stateniskas pret prizmas sānu šķautnēm, tad kontroles-dēļ, taisnēm $A_I A_I$ un $A_{II} A_{II}$ jabūt stateniskām pret sānu šķautnēm.

Ja pēc doto šķautnu patiesiem lielumiem jakonstruē pretejā ceļā prizma, kas atbalstās uz V, zinot pie tam, ka prizmas šķautnēm jabūt līdztecēm dotam virzienam l, tad papriekšu konstruejam prizmas pamatu $A_I B_I C_I D_I$, un pēc tam caur šā pamata vienadnosaukuma projekcijām velkam līdzteces ar virziena l vienadnosaukuma projekcijām. Nospraužot pēc 63 § uz zinamiem virzieniem dotam patiesigam lielumam līdzigus nogriežņus un iegūtos punktus attiecigi savienojot, mēs iegūstam mekletās prizmas projekcijas.

P i e z ī m e. No 144a ras. skaidri saprotams, ka $B_I C_I C_{II_0} B_{II_0}$ ir prizmas sānu malas $B_I C_I C_{II} B_{II}$ i e k š e j ā s puses savienojums. Pie tam izrādas, ka B_I atrodas pa labi no C_I. 144b ras. virsotne B_I pieņemta pa labi no C_I, tapēc šinī rasejumā mums darišana ar prizmas i e k š e j ā s v i r s a s notinumu. Bet ja mēs gribetu attēlot ārejās virsas notinumu, tad viņu vajadzetu raset tā, lai virsotne B_I atrastos pa kreisi no C_I.

127 §. Patvaļigas prizmas notinums.

Pieņemsim, ka dotas kautkādas prizmas projekcijas attiecibā uz asi OX (145 ras.). Pieņemsim jauno vertikalo projekciju plakni V′, līdztekus prizmas sānu šķautnēm. Plakne V′ krusto horicontalo projekciju plakni H pa jauno asi O′X′. Attiecibā uz asi O′X′ atzīmejam prizmas jauno vertikalo projekciju. Kautkāda punkta, piemēram punkta A_I, jauno vertikalo projekciju A'_{I_2} pēc 74 § dabujam, vilkdami no A_{I_1} stateni pret O'X' un nosprauzdami uz ša stateņa ordinatu $z = A_{I_2} A_{I_x}$, t. i. punkta A_I attālumu no H.

Jaunajā vertikalajā projekcijā visas prizmas sānu šķautnes attēlojas dabiskā lielumā.

Lai konstruetu prizmas notinumu, janoteic patiesie attālumi starp atsevišķām prizmas sānu šķautnēm. Šos attālumus dabujam, velkot palīgplakni, statenisko pret sānu šķautnēm. Šās palīgplaknes vertikalā pēdu linija t' ir stateniska pret $A'_{I_2} A'_{II_2}$, un šī palīgplakne krusto doto prizmu pa △-i $A_{III} B_{III} C_{III}$, kuŗa vertikalā projekcija sakrīt ar t'. Pamatodamies uz vertikalo projekciju $A'_{III_2} B'_{III_2} C'_{III_2}$, uzmeklejam attiecigo horicontalo projekciju $A_{III_1} B_{III_1} C_{III_1}$. Noteiksim △-a $A_{III} B_{III} C_{III}$ patieso lielumu, griežot trijstūri ap vertikalo pēdu līdzteci v, kas iet caur virsotni A_{III}, pie kam v_2 sakrīt ar t', bet v_1 – ar $A_{I_1} A_{II_1}$. Virsotnes B_{III} savienoto stāvokli B'_{III_0} dabujam uz stateņa, vilkta no B'_{III_2} pret t', t. i. B'_{III_0} dabujam uz $B'_{I_2} B'_{II_2}$. Tā kā vertikalā pēdu līdztece v guļ uz plaknes, stateniskas pret jauno vertikalo projekciju plakni V', tad nogrieznis, kas izmēro kautkāda punkta, piemēram, B_{III}, attālumu no v, telpā iet līdztekus H un tapēc projecejas uz H dabiskā lielumā, kā ordinata y_1. Nospraužot y_1 vertikalajā projekcijā no B'_{III_2}, dabujam B'_{III_0}. Tamlīdzigi ar ordinatas y_2 palīdzibu uzmeklejam $C_{III}'_0$. Tādā kārtā dabujam △-a $A_{III} B_{III} C_{III}$ patieso lielumu $A'_{III_0} B'_{III_0} C'_{III_0}$, kuŗa malas noteic attālumus starp prizmas šānu šķautnēm. Šos attālumus nospraužam uz t', un caur iegūtiem punktiem A_{III_0}, B_{III_0} un C_{III_0} velkam līdzteces ar $C'_{I_2} C'_{II_2}$, līdz krustošanai ar stateņiem, vilktiem no attiecigām virsotnēm A'_{I_2}, A'_{II_2} u. t. t., tādā kārtā iegūstot notinumā virsotnes A_{I_0}, A_{II_0} u. t. t. Bez tam notinumā aizrāditas pamatplaknes $A_{I_0} B_{I_0} C_{I_0}$ un $A_{II_0} B_{II_0} C_{II_0}$.

Ja uz prizmas sānu plaknes $A_I A_{II} B_{II} B_I$ dots kautkāds punkts D (rasejumā aizrādita tikai šā punkta projekcija D'_2), tad nav grūti, D'_2 ar B'_{I_2} savienojot un punktu $E'_2 = B'_{I_2} D'_2 \times A'_{I_2} A'_{II_2}$ atzīmejot, uzmeklet notinumā uz $A_{I_0} A_{II_0}$ attiecigo punktu E_0. Šo punktu savienojam ar B_{I_0} un uz $E_0 B_{I_0}$ uzmeklejam D_0.

128 §. Tetraedra projekcijas.

146 ras. aizrāditas uz H stāvoša tetraedra projekcijas. Augstuma p patiesais lielums telpā līdzinas taisnleņķa trijstūŗa ADE katetei DE. Ša trijstūŗa savienotais stāvoklis ir $A D_0 E$, pie kam $A D_0$ līdzinas tetraedra šķautnes patiesam lielumam (64 §), bet $E D_0 = p$.

Tetraedra projekcijas, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā, konstruejamas pēc 125 §.

129 §. Oktaedra un kuba projekcijas.

147. ras. aizrāditas oktaedra projekcijas, kuŗa viena ass FG stateniska pret H. Ikkatrā oktaedra virsotnē saiet četri vienadmalu trijstūŗi. Ikkatra oktaedra diagonalplakne ir kvadrats, uz kuŗu atbalstās divas vienlīdzigas taisnās četrplakņu piramides; šo piramidu virsotnes no pamatkvadrata pagriestas uz dažadām pusēm. Piramidu augstumi (p) līdzinas pamatkvadrata diagonales pusei.

148 rasejumā aizrāditas kautkāda kuba projekcijas.

130 §. Ikosaedra projekcijas.

Ikosaedrs sastāv no divdesmit vienadmalu trijstūŗiem (149[a] ras.), kuŗi pa pieciem saiet ikosaedra virsotnēs. Trijstūŗi, kuŗi saiet virsotnēs 1 un 12, sastāda divas piecplakņu piramides ar vienlīdzigiem, pretejos virzienos pagriestiem, augstumiem. Šo piramidu pamatplaknes 2 – 3 – 4 – 5 – 6 un 7 – 8 – 9 – 10 – 11 savstarpeji līdzteces un viņu savstarpejs atstatums ir m. Pie tam šo piramidu pamatplakņu virsotnes telpā ieņem tādus stāvokļus, ka tās projecejas regulara desmitstūŗa veidā uz kautkādu, pamatplaknei līdzteci plakni. Ja ass $1 - 12 \perp H$, kā tas pieņemts 149[a] rasejumā, tad, saprotams, virsotnes 2 līdz 10 projecejas regulara desmitstūŗa veidā uz H.

Ja zinams aploces radiuss r, kuŗā ir ievilkts desmitstūris, tad regulara desmitstūŗa mala b noteicama pēc elementarās ģeometrijas noteikumiem, kā tas aizrādits 149[b] rasejumā. Tam nolūkam velkam aploci ar radiusu OA. No A ar radiusu AO velkam loku, līdz krustošanai ar pieskari, kas punktā A vilkta pret aploci O. Ap AO velkam aploci, savienojam C ar B, atzīmejam D, un dabujam mekleto desmitstūŗa malu $b = BD = BE$.

Attiecigie augstumi p un m konstruejami pēc 64 § ar attiecigo taisnleņķa trijstūŗu $3_1 - 1_1 - 1_0$ un $7_1 - 2_0 - 2_1$ palīdzibu, kuŗos hipotenuzes $1_0 - 3_1$ un $2_0 - 7_1$ ir vienlīdzigas ar ikosaedra šķautņu patieso lielumu a, bet katetes $1_0 - 1_1$ un $2_0 - 2_1$ ir meklejamie augstumi. Augstumus p un m zinot, nav gŗūti pēc horicontalās projekcijas konstruet ikosaedra vertikalo projekciju.

Tā kā turpmakās konstrukcijās ļoti bieži vajadzēs no dotā punkta A pret doto aploci O (149[c] raş) vilkt pieskares, tad atkārtosim šeit attiecigo no elementarās ģeometrijas pazīstamo konstrukciju. Ap AO velkam aploci, atzīmejam viņas krustošanās punktus C un D ar aploci O, un savienojot A ar C un D, dabujam attiecigas pieskares.

131 §. Dodekaedra projekcijas,

150 ras. aizrāditas dodekaedra projekcijas, kuŗa viena sānu mala sakrīt ar H. Dodekaedrs sastāv no 12 vienadmalu piecstūŗiem, no kuŗiem vienmēr divi, piemēram 1 – 2 – 3 – 4 – 5 un 6 – 7 – 8 – 9 – 10, ir līdzteči. Šo piecstūŗu virsotnes telpā ieņem tādus stāvokļus, ka viņi projecejas uz līdz-

teči tām plakni (H) regulara desmitstūŗa veidā. Katram no aizrāditiem līdzteku piecstūriem pieslejas pa pieci tādi paši piecstūŗi, kas cits citam piegulstās ar savām malām. Šo piecstūŗu virsotnes (11 līdz 20) guļ uz divām līdzteku plaknēm, kas no pamatplaknēm 1–2–3–4–5 un 6–7–8–9–10 atrodas vienlīdzigos atstatumos *m*, bet viņu savstarpejs atstatums ir *n*.

Dodekaedra projekcijas konstruē šādi. Papriekšu konstruē apakšejā un augšejā pamata horicontalās projekcijas $1_1 - 2_1 - 3_1 - 4_1 - 5_1$ un $6_1 - 7_1 - 8_1 - 9_1 - 10_1$, pie kam virsotņu kopiba veido regularo desmitstūri. Pēc tam noteic virsotņu 11 līlz 20 horicontalās projekcijas. Lai noteiktu, piemēram 13_1, aplūkosim piecstūŗus 13 – 2 – 1 – 11 – 12 un 13–2–3–15–14, kuŗiem ir kopeja mala 13 – 2. Pieņemsim, ka šie piecstūŗi savienoti ar H, pie tam pirmā piecstūŗa griešanās ass ir 1 – 2, bet otra – 2 – 3. Šo piecstūŗu savienotie stāvokļi sakritīs ar pamatpiecstūri 1 – 2 – 3 – 4 – 5, pie kam, piemēram, virsotne 12 sakritīs ar virsotni 4, bet virsotne 14 ar 5. Griežot piecstūri 13–2–1–11–12 ap 1–2, virsotnes 13 ceļš projecejas uz H, kā taisne $13_1 - 3_1$, kuŗa ir stateniska pret taisnes $1_1 - 2_1$ pagaŗinajumu. Līdzigā kārtā griežot piecstūŗi 13 – 2 – 3 – 15 – 14 ap 2 – 3, virsotnes 13 ceļš attēlojas taisnes $13_1 - 1_1$ veidā, kuŗa ir stateniska pret taisnes $2_1 - 3_1$ pagaŗinajumu. Tā kā taisnes $13_1 - 3_1$ un $13_1 - 1_1$ attiecibā uz pamatpiecstūŗa 1 – 2 – 3 – 4 – 5 centru novienotas zimetriski, tad no tā seko, ka taisne, kas savieno punktus $2_1 - 13_1$ sakrīt ar radiusa pagaŗinājumu, ejoša caur pamatpiecstūŗa centru un punktu 2_1.

Lai preteji varetu atrast projekciju 13_1, no 3_1, javelk statenis pret $1_1 - 2_1$ un no 1_1 javelk statenis pret $2_1 - 3_1$; šo stateņu krustošanās punktam 13_1 jaguļ uz taisnes, kas iet caur 2_1 un pamatpiecstūŗa centru. Līdzigā kārtā noteicamas projekcijas 11_1, 15_1, 17_1 un 19_1.

Ar piecstūŗiem, kas pieslejas augšejam pamatpiecstūrim 6–7–8–9–10, var izdarit analoģiskas konstrukcijas, tapēc nav gŗūti uzmeklet attiecigas projekcijas 12_1, 14_1, 16_1, 18_1 un 20_1.

Projekcijas 11_1, 12_1, 13_1 u. t. t. kopibā noteic regularo desmitstūri.

11 virsotnes atstatuma *m* no pamatplaknes H noteikšanai, mēs konstruejam taisnleņķa trijstūri $1_1 - 11_1 - 11_0$, kuŗā viena katete $1_1 - 11_1$ ir šķautnes 1–11 horicontalā projekcija, hipotenuze $1_1 - 11_0$ ir šķautnes 1 – 11 patiesais lielums, bet otra katete $11_1 - 11_0$ ir meklejamais atstatums *m*.

Līdzigā kārtā noteicam atstatumu *n*, kā taisnleņķa trijstūŗa $20_1 - 20_0 - 11_1$ vienu kateti $20_1 - 20_0$, kuŗa otra katete $11_1 - 20_1$ ir šķautnes 11 – 20 horicontalā projekcija, bet hipotenuze $11_1 - 20_0$ ir šķautnes patiesais lielums. Zinot *m* un *n*, nav gŗūti konstruet dodekaedra vertikalo projekciju.

132 §. Kuba, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā, projekcijas.

151 rasejumā aizrāditas kuba projekcijas, kuŗa viena sānu mala sakrīt ar doto plakni *sat*.

Noteikuši ar punkta S_o palīdzibu, horicontalās pēdu linijas s savienoto stāvokli s_o (69 §), mēs varam konstruet vienas kuba sānu malas savienoto stāvokli $A_{I_o} B_{I_o} C_{I_o} D_{I_o}$ un pēc tam pretejā ceļā atrast šās malas projekcijas. Konstrukciju pareiziba pārbaudama ar plaknes *sat* sakrītošo projekciju ass $r_{1,2}$ palīdzibu.

Pret pamatplakni $A_I B_I C_I C_I = sat$ statenisko šķautņu $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$, $C_I C_{II}$ un $D_I D_{II}$ virzienu projekcijās noteicam pēc 116 §. Bet aizrādito šķautņu projekciju lielumus dabusim, nospraužot pēc griešanās paņēmiena (63 §) uz zinamā šķautņu virziena viņu patieso lielumu $p = B_{I_o} C_{I_o}$.

Ši konstrukcija rasejumā aizrādita šķautnei $D_I D_{II}$ un izpildita ar punkta E palīdzibu.

Tā kā šķautnes $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ un $C_I C_{II}$ vienlīdzigas un līdzteces ar $D_I D_{II}$, tad ari viņu vienadnosaukuma projekcijas ir vienlīdzigas un līdzteces šķautnes $D_I D_{II}$ vienadnosaukuma projekcijām. Tādā ceļā iegūtas virsotnes savienodami, mēs iegūstam kuba projekcijas. Kontroles dēļ atsevišķas kuba sānu malas projecejas paralelogramu veidā, pie tam ikkatrā projekcijā dabujam pa diviem vienlīdzigiem paralelogramiem ar līdzteku šķautnēm.

Virsotne C_I, kuŗa vertikalajā projekcija atrodas visaugstaki, pēc 123 § redzama, ar ko ir noteikta visas horicontalās projekcijas redzamiba. Analoģiski dabujam, ka vertikalajā projekcijā virsotne B_{II} redzama, ar ko ir noteikta ari kuba vertikalās projekcijas redzamiba. Redzamibu, saprotams, varetu noteikt ari ar šķērsošanās punktu palīdzibu.

P i e z ī m e. Ja zinami patvaļigas taisnās prizmas pamata mēri un šķautņu, statenisko pret pamatplakni, patiesie lielumi, tad aizrāditā kārtā varam atrast šās prizmas projekcijas. Tamlīdzigi varam konstruet ari jebkuŗa, telpā patvaļigu stāvokli ieņēmoša priekšmeta (galda, krēsla u. t. t.) projekcijas, ja dota priekšmeta pamatplakne *sat* un visi vajadzigie mēri, kuŗi šinī gadijumā visērtaki aizrādami ortogonalās projekcijās.

133 §. Oktaedra, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā, projekcijas.

Ja ir jakonstruē oktaedra, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā projekcijas, tad šo uzdevumu var atrisinat pēc iepriekšejā panta noteikumiem, ja dotas oktaedra pamatplaknes (kvadrata) pēdu linijas. Bet ja oktaedra pamatplakne dota ar krustodamām pēdu līdztecēm h un v, tad konstrukcijas izpildamas 152 rasejumā aizrāditā kārtā.

Pieņēmuši uz v patvaļigu punktu K, mēs pēc 71 § atrodam ša punkta savienoto stāvokli K_o. Pēc tam konstruejam pamatkvadrata savienoto stāvokli $A_o B_o C_o D_o$ un diagonaļu krustošanās punktā iegūstam kvadrata centru E_o. Pēc tam pretejā kārtā atrodam centra E projekcijas E_1 un E_2. Tam nolūkam E_o savienojam ar K_o un atzīmejam punktu $L_1 = E_o K_o \times h_1$, pēc tam savienojam punktu L_1 ar K_1 un pagarinot šo liniju līdz krustošanai ar stateni, vilkto no E_0 pret h_1, iegūstam E_1. Pēc E_1 atrodam uz taisnes K_2L_2 projekciju E_2. Tālakas konstrukcijas izpilda rasejumā aizrāditā kārtā.

Japiemetina, ka oktaedra projekcijas, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā, mēs jau konstruejām 119 § (132 ras.).

134 §. Dodekaedra attēlošana trijās projekcijās. Dodekaedra kritošās un pašēnas.

Pieņemsim, ka dodekaedra pamatplakne 1–2–3–4–5 dota ar krustodamām pēdu līdztecēm h un v, kuŗu krustošanās punkts ir A.

Ar patvaļigi uz v pieņemta punkta B palīdzibu mēs plakni hv nostādam līdztekus H, un atzīmejam savienotajā stāvoklī dodekaedra virsotņu ortogonalās projekcijas 1_0 līdz 20_0 uz plaknes hv. Projekcijas 1_0 līdz 20_0 noteicamas pēc 131 § (150 ras). Pēc tam tādā pašā kārtā, kā 152 rasejumā, mēs atrodam horicontalās projekcijas 1_1 līdz 5_1 un $6_1'$ līdz $20_1'$, un pēc tam atrodam vertikalās projekcijas 1_2 līdz 5_2 un $6_2'$ līdz $20_2'$. Tā kā dodekaedra sānu mala 1–2–3–4–5 atbalstās uz plakni hv, tad projekcijas 1_1 līdz 5_1 un 1_2 līdz 5_2 pieder meklejamām dodekaedra virsotņu projekcijām, bet $6'_1$ līdz $20'_1$ un 6_2 līdz $20'_2$ ir tikai dodekaedra virsotņu o t r r e i z e j a s p r o j e k c i j a s. Virsotņu 6 līdz 20 patiesās projekcijas vēl jauzmeklē. Tas nav gŗūti izdarams, zinot, ka virsotņu 11, 13, 15, 17 un 19 atstatums no plaknes hv ir m (sal. 150 ras.), virsotņu 12, 14, 16, 18 un 20 atstatums no hv ir $m+n$, bet virsotņu 6, 7, 8, 9 un 10 atstatums no hv ir $m+n+m$. Attiecigās konstrukcijas izpilditas tādā pašā kārtā, kā tas aizrādits 152 rasejumā attiecibā uz virsotnēm F un G.

Savienojot pēc tam attiecigā veidā uzmekletās projekcijas, dabujam dodekaedra horicontalo un vertikalo projekcijas; pēc tam parastā kārtā noteicam projekciju redzamibu.

Ja vēlamies attēlot doto ķermeni trešā, jeb profilā projekcijā, projecejot viņu uz profilo plakni, doto ar pēdu linijām $p\beta q$, tad jaievēro, ka projecejošie stari telpā iet līdztekus OX, tapēc viņu projekcijas iet caur attiecigo virsotņu projekcijām, līdztekus OX. Patvaļigās 14 virsotnes profilo projekciju 14_3 dabujam šādi. Vilkdami no 14_1 un 14_2 līdzteces asij OX, līdz krustošanai ar $p\beta q$, dabujam 14 virsotnes profilās projekcijas 14_3 otrreizejās projekcijas 14_{3_1} un 14_{3_2}. Velkot ar radiusu $\beta-14_{3_1}$ loku līdz krustošanai ar OX, dabujam savienoto stāvokli $14_{3_{1_0}}$, no kuŗa stateni pret OX līdz krustošanai ar pagarinato staru $14_2-14_{3_2}$ vilkdami, dabujam profilās projekcijas savienoto stāvokli 14_3.

Ķermeņa redzamiba profilā projekcijā noteicama tamlīdzigi, kā mēs noteicam viņa redzamibu horicontalajā un vertikalajā projekcijā (123 §).

Pie tam jaievēro, ka profilā projekcijā katrā ziņā redzama tādā virsotnē, kā, piemēram, 17, kuŗas horicontalā, vaj vertikalā projekcija vistālak no profilās plaknes pēdu linijām $p\beta q$. Kautkādu šķautņu 3_3-4_3 un 13_3-14_3 attiecigā redzamiba noteicama ar viņu šķērsošanās punkta $E_3=F_3$ palīdzibu. Uzmeklejot uz 3_2-4_2 un 13_2-14_2 projekcijas E_2 un F_2, mēs varam novērot, ka E_2 stāv tālak no $p\beta q$, nekā F_2, tapēc punkts E profilā projekcijā redzams, bet F nav redzams, t. i. šķautne 3 – 4 iet priekš šķautnes 13 – 14, attiecibā uz profilo plakni $p\beta q$.

Jautajums, vaj zinamā projekcijā kautkāda daudzplakņa redzama sānu mala redzama no gaišās, vaj tumšās puses, atrisinajams, pamatojoties uz noteikumiem, kas aizrāditi pie kautkāda trijstūŗa pašēnas noteikšanas (84 §). Bet ja kautkāda ķermeņa sānu mala zinamā projekcijā nav redzama, tad pret aplūkotaju pagriesta šās plaknes iekšejā, t. i. pretejā puse, un tapēc, šai gadijumā plaknes pašēnas noteikšanai dabujam taisni pretejus noteikumus, nekā redzamās plaknes pašēnas noteikšanai. Saprotams, ka neredzamās plaknes pašēna nemaz nav redzama aplūkotajā projekcijā, bet tā cittreiz redzama kautkādā citā projekcijā. Tā, piemēram, novērojot virsotņu kārtu projekcijā $1_1-5_1-19_1-20_1-11_1$ un vienadnosaukuma ēnā $1'-5'-19'-20'-11'$, mēs redzam, ka abos gadijumos virsotņu kārta ir vienada. Tā kā sānu mala 1 – 5 – 19 – 20 – 11 horicontalajā projekcijā ir pagriesta pret aplūkotaju ar savu iekšejo pusi, tad šī puse būtu gaiša, ja pārejās ķermeņa sānu malas būtu caurspīdigas, bet plaknes 1 – 5 – 19 – 20 – 11 āŗejā pusē atrodas pašēnā. Šo pašēnu horicontalajā projekcijā, saprotami, neredzam, bet tā, piemēram, redzama profilā projekcijā.

Šķautnes, kas atdala apgaismotās sānu malas no neapgaismotām, sauc par gaismas atdalošām šķautnēm. Pie saules apgaismošanas gaismas stari, kas pieskaras dotam ķermenim, viskopibā sastāda gaismas prizmu, bet pie centralās apgaismošanas tie sastāda gaismas piramidi, kuŗas virsotnē atrodas gaismas avots. Šķautnes, pa kuŗām gaismas prizma, vaj piramide aizskar doto ķermeni, ir šā ķermeņa gaismas atdalošās šķautnes. Saprotams, ka krītošās ēnas apveids nav nekas cits, kā gaismas prizmas, vaj piramides krustošanās figura ar doto ēnas plakni, t. i. krītošās ēnas apveidu sastāda gaismas atdalošo šķautņu krītošās ēnas. Tapēc krītošās ēnas apveidam jasaskan ar pašēnas apveidu, un ari otradi.

Uz aizrādito pamatodamies, varam noteikt ķermeņa pašēnu, ja uzmekleta dotā ķermeņa krītošā ēna uz kautkādas ēnas plaknes. Pie tam, saprotams, jaievēro ķermeņa sānu malu stāvokļus pret gaismas avotu. Tā, piemēram, uzmeklejot 153 rasejumā visu virsotņu horicontalās krītošās ēnas un savienojot viņas pienācigā veidā, mēs dabujam, ka horicontalās krītošās ēnas apveids ir $1'-2'-13'-14'-7'-8'-9'-18'-19'-5'-1'$, kuŗam jasaskan ar attiecigo pašēnas apveidu $1-2-\ldots-5-1$, kā tas rasejumā aizrādits. Saprotams, ka pašēnas apveids visās projekcijās ir viens un tas pats, tikai pašēnas redzamiba projekcijās var mainities.

Ēna, ko kautkāda virsotne met uz profilo plakni $p\beta q$ ir attieciga gaismas stara krustošanās punkts ar šo plakni. Tā, piemēram, 7 virsotnes profilo ēnu konstruejam šādi. Atzīmejam punktus $7_1'''$ un $7_2'''$ kuŗos gaismas stara projekcijas krusto $p\beta q$; ar radiusu $\beta 7_1'''$ velkam loku līdz krustošanai ar OX punktā $7'''_{1_0}$, un no ša punkta velkam stateni pret OX līdz krustošanai ar taisni, vilkto caur $7_2'''$, līdztekus asij OX, dabujot tādā kārtā meklejamo punktu $7'''$.

Saprotams, ka realā nozīme ir tikai tai profilās ēnas daļai, kas guļ uz W_I, t. i. atrodas I kvadrantā. Rasejumā šī daļa atrodas virs OX un pa labi no pēdu linijas q, pie kam viena daļa no šīs patiesās profilās ēnas nav redzama, jo ta aizsegta no dotā ķermeņa profilās projekcijas.

135 §. Piramides ēnas.

Pieņemsim, ka doti: patvaļiga piramide, kuŗa atbalstās uz H, un gaismas staru virziens l (154 ras.).

Caur piramides virsotni D velkam gaismas staru, līdztekus dotam virzienam l, un noteicam virsotnes D horicontalo (D′) un vertikalo (D″) krītošo ēnu. Tā kā horicontalās ēnas no visiem punktiem, guļošiem uz H, sakrīt ar oriģinaliem punktiem, tad $A' = A$, $B' = B$ un $C' = C$. Savienojot D′ ar A′, B′ un C′, mēs iegūstam piramides šķautņu horicontalās krītošās ēnas D′A′, D′B′ un D′C′, pie kam ārejās no šīm ēnām noteic horicontalās krītošās ēnas apveidu. Ēna A′D′C′, kā redzams, ir sānu malas ADC krītošā ēna. Šī ēna apsedz šķautnes BD krītošo ēnu B′D′. Tas nozīmē, ka ēnai B′D′ ir tikai fiktivā nozīme: caur šķautni BD ejošie gaismas stari nemaz nevar sasniegt šo šķautni, jo viņi tiek aiztureti no sānu malas ADC. Tapēc rasejumā ēna B′D′ izvilkta ar raustito liniju.

Šķautņu DC un DA patiesās horicontalās krītošās ēnas, kā redzams, sniedzas tikai līdz asij OX. Tapēc $C'\beta$ un $A'\gamma$ ierobežo horicontalās krītošās ēnas redzamo daļu. Punktus β un γ ar piramides virsotnes patieso vertikalo ēnu D″ savienodami, mēs iegūstam vertikalās krītošās ēnas apveidu.

Sānu malu pašēnas var noteikt pēc 84 § noteikumiem, ievērojot: 1) virsotņu kārtu projekcijā un vienadnosaukuma krītošā ēnā, jeb 2) ievērojot projekcijas un vienadnosaukuma krītošās ēnas stāvokļus pret sānu malu pēdu linijām AB, BC un AC. 3) Kā iepriekšajā pantā aizrādits, krītošās ēnas apveidam jasaskan ar pašēnas apveidu, tapēc nav gŗūti sajēgt, ka mūsu gadijumā šķautnes AC, DC un DA ir gaismas atdalošas šķautnes.

136 §. Prizmas ēnas.

Pieņemsim, ka dota trijplakņu prizma, kuŗas viens pamats $A_I B_I C_I$ sakrīt ar V, bet otrs $A_{II} B_{II} C_{II}$ iet līdztekus V (155 ras.).

Lai noteiktu prizmas ēnas pie dotā gaismas staru virziena *l*, mēs atrodam virsotņu A_{II}, B_{II} un C_{II} horicontalās un vertikalās krītošās ēņas. Virsotņu A_I, B_I un C_I vertikalās ēnas sakrīt ar oriģinaliem punktiem, t. i. $A_I'' = A_I$, $B_I'' = B_I$ un $C_I'' = C_I$, tapēc lai noteiktu prizmas šķautņu vertikalās ēnas, jasavieno A_I'' ar A_{II}'' u. t. t. Prizmas vertikalās ēnas apveidu noteic figura $B_I'' B_{II}'' C_{II}'' A_{II}'' A_I'' B_I''$, pie tam realā nozīme ir tikai tai ēnas daļai, kuŗa guļ uz V_I, t. i. virs OX.

No šās patiesās vertikalās ēnas viena daļa, ko aizsedz prizmas vertikalā projekcija, nav redzama. Kontroles dēļ, pie saules apgaismošanas līdzteku šķautņu krītošām ēnām jabūt savstarpeji līdztecēm.

Savienodami attiecigās horicontalās krītošās ēnas virsotnes savā starpā un ar lūzuma punktiem β un γ, dabujam pilno krītošās ēnas apveidu $B_I'' \beta B_{II}' C_{II}' \gamma A_{II}'' A_I'' B_I''$, kuŗam atbilst pašēnas apveids $B_I B_{II} C_{II} A_{II} A_I B_I$. Tapēc nav grūti sajēgt, ka sānu malas $B_I B_{II} A_{II} A_I$ un $B_{II} C_{II} A_{II}$ apgaismotas, bet pārejas šānu malas atrodas pašēnā.

X nodaļa. Daudzplakņu krustošanās ar plaknēm un taisnēm.

137 §. Piramides krustošanās ar plakni.

Pieņemsim, ka janoteic piramides $A_I B_I C_I D$ krustošanās ar plakni *s a t* (156 ras.). Lai noteiktu krustošanās figuru, jaatrod piramides sānu malu krustošanās linijas ar plakni *s a t*, vaj ari jaatrod piramides šķautņu krustošanās punkti ar plakni *s a t*. Pēdejā gadijumā attiecigā kārtā savienodami atrastos punktus, mēs iegūstam mekleto krustošanās figuru.

Uzmeklesim, piemēram, sānu malas $A_I B_I D$ krustošanās liniju ar plakni *s a t*. Tā kā piramide stāv uz H, tad sānu malas $A_I B_I D$ horicontalā pēdu linija ir $A_I B_I$, tapēc punkts $S_I = A_I B_I \times s$ pieder meklejamai krustošanās linijai. Otru meklejamai taisnei piederošo punktu dabusim, ja uzmeklesim šķautnes $A_I D$ krustošanās punktu A_{II} ar plakni *s a t*. Punkts A_{II} noteicams ar horicontali projecejošas, caur šķautni $A_I D$ ejošās plaknes palīdzibu (103 §). Punktus S_I un A_{II} savienodami, iegūstam meklejamo krustošanās liniju. Realā nozīme ir tikai tai viņās daļai $A_{II} B_{II}$, kas atrodas sānu malas $A_I B_I D$ robežās. Punkts B_{II}, kuŗā $A_{II} S$ krusto B D, ir šķautnes B D krustošanās punkts ar plakni *s a t*.

Līdzigā kārtā varam uzmeklet parejo sānu malu krustošanās linijas. Var ari rīkoties vēl vienkāršaki.

Tā kā punkts A_{II} pieder ari sānu malas $A_I C_I D$ krustošanās linijai $A_{II} C_{II}$ ar plakni *sat*, kuŗas otrais punkts ir $S_{II} = A_I C_I \times s$, tad, lai noteiktu sānu malas $A_I C_I D$ krustošanās liniju ar plakni *sat*, jasavieno tikai A_{II} ar S_{II}. Beidzot C_{II} ar B_{II} savienodami, iegustam sānu malas $B_I C_I D$ krustošanās liniju ar *sat*. Kontroles dēļ taisnei $C_{II} B_{II}$ jaiet caur punktu $S_{III} = C_I B_I \times s$.

Atsevišķos krustošanās figuras punktus var atrast ari citā ceļā. Tam nolūkam velkam patvaļigu palīgplakni līdztekus H; šās palīgplaknes vertikalā pēdu linija $q \parallel OX$. Palīgplakne krusto plakni *sat* pa horicontalo pēdu līdzteci h, bet doto piramidi pa kautkādu trijstūri 1–2–3, kuŗa horicontalā projekcija noteicama, ievērojot, ka 1_2, 2_2 un 3_2 guļ uz q. Punkti 4 un 5, kuŗos horicontalā projekcija h_1 krusto trijstūri 1–2–3, pieder meklejamai krustošanās figurai. Pie tam punkts 4 guļ uz sānu malas $A_I B_I D$, bet punkts 5 — uz sānu malas $A_I C_I D$. Savienojot 4 ar S_I un 5 ar S_{II}, mēs iegūsim divu piramides sānu malu krustošanās linijas ar doto plakni *sat*.

Kā no rasejuma saprotams, $S_I = A_I B_I \times A_{II} B_{II}$, $S_{II} = A_I C_I \times A_{II} C_{II}$ un $S_{III} = C_I B_I \times C_{II} B_{II}$, pie kam punkti S_I, S_{II} un S_{III} guļ uz vienas taisnes s. Tādu sakaru starp divām plakanām figurām $A_I B_I C_I$ un $A_{II} B_{II} C_{II}$, kuŗu attiecigās malas pa pārām krustojas uz vienas taisnes (ass) s, bet attiecigās virsotnes pa pārām guļ uz stariem, kas iziet no kopeja centra D, pēc 86 § noteikumiem sauc par centralo kollineaciju. Tā tad, piramides krustošanās figura un viņas atbalsts ir centrali kollineari radnieciskas figuras, pie kam kollineacijas centrs ir piramides virsotne D, bet kollineacijas ass ir griezejās plaknes *sat* krustošanās linija (s) ar piramides pamatplakni.

Šās centralās kollineacijas īpašibas paliek spēkā, projecejot piramidi kopā ar krustošanās figuru un kollineacijas asi (s) uz patvaļigu plakni (H jeb V). Tapēc horicontalajā projekcijā dabujam centralo kollineaciju starp $A_I B_I C_I$ un $A_{II_1} B_{II_1} C_{II_1}$ ar asi $s_1 = s$ un centru D_1; bet vertikalajā projekcijā dabujam centralo kollineaciju starp $A_{I_2} B_{I_2} C_{I_2}$ un $A_{II_2} B_{II_2} C_{II_2}$ ar asi $s_2 = OX$ un centru D_2.

Ja pieņemsim, ka plakne *sat* nav caurspīdiga, tad projekcijās redzama tikai piramides augšejā, nošķeltā daļa $DA_{II} B_{II} C_{II}$, kā tas rasejumā aizrādits.

Krustošanās figuras patiesais lielums $A_{II_0} B_{II_0} C_{II_0}$ atrasts, griežot plakni *sat* ap pēdu liniju s un savienojot viņu ar H. Lai noteiktu savienoto stāvokli $A_{II_0} B_{II_0} C_{II_0}$, pietiek uzmeklet kautkāda viena punkta, piemēram, B_{II} savienoto stāvokli B_{II_0}, kas rasejumā izdarits pēc 66 §. Pārejos punktus var noteikt, pamatojoties uz ortogonalo affino radniecibu starp figurām $A_{II_1} B_{II_1} C_{II_1}$ un $A_{II_2} B_{II_2} C_{II_2}$, pie kam radniecibas ass ir horicontalā pēdu linija s (70 §).

156 rasejumā bez tam vēl aizrāditas ēnas, kas krīt no piramides uz griezejo plakni *sat*. Lai konstruetu šās ēnas, mēs pēc 135 § papriekšu konstruejam piramides krītošās ēnas uz H un V. Punkts S_{IV}, kuŗā šķautnes $B_I D$ horicontalā krītošā ēna $B_I D'$ krusto horicontalo pēdu liniju s, noteic attiecigās krītošās ēnas lūzuma punktu. Bez tam mēs zinam, ka ēna, ko kautkāda taisne met uz patvaļigu plakni, iet caur dotās taisnes krustošanās (pēdu) punktu ar ēnas plakni (79 §). Tapēc, lai noteiktu ēnu, kas krīt no taisnes $B_I - D$ uz plakni *sat* pietiek, ja savienojam punktu S_{IV} ar punktu B_{II}. Šās ēnas projekcijas ir $B_{II_1} S_{IV}$ un $B_{II_2} S_{IV_2}$. Līdzigā kārtā, lai noteiktu šķautnes $A_I D$ krītošo ēnu uz plaknes *sat*, mēs savienojam punktu $S_V = A_I D' \times s$ ar A_{II}. Saprotams, ka no šās ēnas redzama tikai tā daļa ($A_{II} T_V$), kas atrodas I kvadrantā.

Šķautnes $A_I D$ krītošo ēnu varam noteikt ari citadā veidā. Kā rasejumā rēdzams, šķautnes $A_I D$ vertikalā krītošā ēna krusto vertikalo pēdu liniju t punktā T_V. Tapēc šo punktu ar A_{II} savienodami, mēs dabusim mekleto krītošo ēnu uz plaknes *sat*.

Piramides pašēnas noteicamas pēc iepriekšejiem noteikumiem.

138 §. Slīpās prizmas krustošanās ar plakni.

Pieņemsim, ka doti: patvaļiga slīpā prizma, kas atbalstās uz H, un kautkāda griezejā plakne *sat* (157 ras.).

Meklejamā krustošanās figurā $A_{III} B_{III} C_{III}$ atrodama tādā pašā kārtā, kā piramides krustošanās figuŗa ar plakni.

Kā rasejumā redzams, $S_I = A_I B_I \times A_{III} B_{III}$, $S_{II} = B_I C_I \times B_{III} C_{III}$ un $S_{III} = A_I C_I \times A_{III} C_{III}$, pie kam punkti S_I, S_{II} un S_{III} guļ uz griezejās plaknes krustošanās linijas ar prizmas pamatplakni, bet punkti A_I un A_{III}, B_I un B_{III}, C_I un C_{III} pa pāriem guļ uz līdzteku šķautnēm (stariem), kuŗām ir patvaļigs slīpums pret s. Tādu sakaru starp divām plakanām figurām $A_I B_I C_I$ un $A_{III} B_{III} C_{III}$, kā zinams, sauc par slīpleņķaino affino radniecibu.

Tā tad prizmas pamats $A_I A_I C_I$ un krustošanās figura $A_{III} B_{III} C_{III}$ ir affini radnieciskas figuras, pie tam affinitates ass ir griezejās plaknes krustošanās linija *(s)* ar prizmas pamatu, bet radniecibas virziens sakrīt ar prizmas sānu šķautņu virzienu.

Saprotams, kā ari projekcijās mēs dabusim tādu pašu radniecisku sakaru starp prizmas pamata projekciju un krustošanās figuras vienadnosaukuma projekciju, pie kam horicontalajā projekcijā affinitates ass ir $s_1 = s$, un affinitates virziens sakrīt ar $A_I A_{II_1}$, bet vertikalajā projekcijā affinitates ass ir $s_2 = OX$ un affinitates virziens sakrīt ar $A_{I_2} A_{II_2}$.

Tā kā katru prizmu var uzlūkot kā piramidi ar bezgali attālinatu virsotni, tad 157 rasejumu ar 156 salīdzinadami, varam teikt, ka affinā radnieciba ir atsevišks centralās kollineacijas gadijums, kad kollineacijas centrs atrodas bezgalibā (86 §).

157 rasejumā pieņemts, ka plakne *sat* necaurspīdiga un ir aizrādita prizmas augšejās, nošķeltās daļas redzamiba. Bez tam ir konstruetas ēnas $A_{II}^{\times}$, $B_{II}^{\times}$ un $C_{II}^{\times}$, kas krīt no prizmas virsotnēm A_{II}, B_{II} un C_{II} uz plakni *sat*. Šie punkti ir uzmekleti kā attiecigo gaismas staru krustošanās punkti ar plakni *sat* (103 un 104 §§).

Savienodami pēc tam $A_{II}^{\times}$ ar A_{III}, $B_{II}^{\times}$ ar B_{III} un $C_{II}^{\times}$ ar C_{III}, mēs iegūstam prizmas sānu šķautņu krītošās ēnas uz plaknes *sat*. Pēc tam noteicam krītošās ēnas apveidu un ar viņas palīdzibu prizmas pašēnas.

Plakne *sat* norobežota ar taisni $S_{IV} T_{IV}$, tapēc ēna, kas no plaknes *sat* krīt uz H un V, ir norobežota no taisnes $S_{IV} T_{IV}$ krītošām ēnām. Šās ēnas dabujam, uzmekledami patvaļigi uz $S_{IV} T_{IV}$ pieņemta punkta krītošās ēnas uz H un V. (Šī konstrukcija rasejumā nav aizrādita). Taisnes $S_{IV} T_{IV}$ krītošām ēnām uz H un V ir kopejs lūzuma punkts β, kas guļ uz OX.

139 §. Taisnās prizmas krustošanās ar plakni.

Pieņemsim, ka dota patvaļiga taisnā prizma, kas atbalstās uz H, un griezejā, caurspīdigā plakne *sat* (158 ras.).

Lai noteiktu krustošanās figuru, mēs pēc 108 § konstruejam atsevišķo prizmas sānu šķautņu krustošanās punktus A_{III}, B_{III}, C_{III} un D_{III} ar plakni *sat*.

Prizmas sānu šķautņu horicontalās ēnas iet caur viņu atbalstpunktiem, līdztekus l_I, bet viņu vertikalās ēnas ir stateniskas pret OX (81 §).

140 §. Taisnes krustošanās ar piramidi; no taisnes uz piramidi krītoša ēna.

Taisnes *a* krustošanās punktus M un N ar doto piramidi ABCDFGJ (159[a] ras.) noteicam šādi.

Pieņemsim uz taisnes *a* patvaļigu punktu E un savienosim viņu ar piramides virsotni J. Pēc tam uzmeklesim taišņu JE un *a* pēdu punktus S_I un S_{II}. Krustodamās taisnes JE un *a* noteic palīgplakni, kuŗas horicontalā pēdu linija ir $s = S_I S_{II}$. Šī palīgplakne krusto doto piramidi pa taisnēm 1 – J un 2 – J, kas iet caur virsotni J un punktiem 1 un 2, kuŗos pēdu linija *s* krusto piramides pamatplakni ABCDFG. Punkti M un N, kuŗos taisnes $1-J$ un $2-J$ krusto taisni a, ir šās taisnes meklejamie krustošanās punkti ar piramidi. Visas telpā (159ª ras.) aizrāditās konstrukcijas techniskā rasejumā (159ᵇ ras.) jaizdara abās projekcijās.

Pieņemsim gaismas staru virzienu l (159ᵇ ras.) (vaj gaismas avotu) un uzmeklesim virsotnes J horicontalo krītošo ēnu J'. Tā kā piramide atbalstās uz H, tad piramides pamata virsotņu horicontalās krītošās ēnas sakrīt ar šīm virsotnēm, t. i. $A' = A$, $B' = B$ u. t. t. Tapēc J' ar A', $B' \ldots G'$ savienodami, dabujam atsevišķo sānu šķautņu horicontalās krītošās ēnas, no kuŗām ārejās $J'B'$ un $J'F'$ noteic piramides horicontalās krītošās ēnas apveidu. Tā kā krītošās ēnas apveidam jasaskan ar pašēnas apveidu, tad nav gŗūti novērot, ka JB un JF ir gaismas atdalošas šķautnes.

Bez tam uzmeklejam taisnes a horicontalo krītošo ēnu a', konstruejot tam nolūkam E' un savienojot E' ar S_{II}. (Gadijumā, ja S_{II} atrodas rasejuma ārpusē, jauzmeklē vēl kautkāda patvaļiga uz taisnes a pieņemta punkta horicontalā ēnā un ši ēna savienojama ar E').

Ēnu K, kas no taisnes a krīt uz šķautni GJ, konstruejam šādi. Atzīmesim punktu K', kuŗā šķautnes GJ horicontalā ēna $G'J'$ krustojas ar taisnes a horicontalo ēnu a'. No K' apgriestā virzienā velkam līdzteci ar l_1 un atzīmejam punktu K_1, kuŗā šī līdztece krustojas ar attiecigo projekciju GJ_1. Saprotams, ka K_1 ir ēnas horicontalā projekcija, krītošas no taisnes a uz šķautni GJ. Punktu K_1 ar N_1 savienodami, dabujam no taisnes a uz sānu malu AGJ krītošās ēnas horicontalo projekciju.

Tamlīdzigi ar punkta $L' = a' \times F'J'$ palīdzibu uzmekleta krītošās ēnas projekcija L_1. Tapat ar punkta Q' palīdzibu uz AJ_1 uzmeklejam Q_1. Saprotams, ka Q_1 ir no taisnes a uz šķautni AJ krītošās ģeometriskās, jeb šķietamās ēnas horicontalā projekcija. Linija KQ ir taisne, pa kuŗu caur taisni a ejoša gaismas plakne krusto piramides sānu malu AGJ. Kontroles dēļ taisne K_1Q_1 iet caur N_1.

Aizrādito ievērojot, varam krustošanās punktu N_1 konstruet ari šadi. Ar punktu K' un Q' palīdzibu uzmekledami punktus K_1 un Q_1 un tos savienodami, dabujam $N_1 = K_1Q_1 \times a_1$.

Atzīmesim vēl caur taisni a ejošas gaismas plaknes krustošanās punktus ar pārejām piramides šķautnēm, dabujot horicontalajā projekcijā figuŗu $K_1L_1W_1R_1P_1Q_1$. Daļa NKL ir patiesā krītošā ēna, daļa NQPM — šķietamā ēna, bet daļa LWRM — fiktivā ēna.

Gaismas plaknes horicontalā pēdu linija ir a', bet sānu malas GFJ horicontalā pēdu linija ir GF. Kā zinams, divu plakņu krustošanās taisne iet caur vienadnosaukuma pēdu liniju krustotni. Tapēc gaismas plaknes un sānu malas GFJ krustošanās taisne, jeb krītoša ēna KL, kā ari horicontalā projekcija K_1L_1 kontroles dēļ iet caur pēdu liniju GF un a' krustošanās punktu 3. Tamlīdzigi FD un LW, jeb L_1W_1 krustojas punktā 4 uz a' u. t. t. Tā tad dabujam, ka figuras ABCDFG un $Q_1P_1R_1W_1L_1K_1$ ir centrali kollineari radnieciskas figuras ar kollineacijas asi a' un kollineacijas centru J_1. Vertikalajā projekcijā dabujam centralo kollineaciju starp $A_2B_2C_2D_2F_2G_2$ un $Q_2P_2R_2W_2L_2K_2$ ar kollineacijas asi $a'_2 = OX$ un centru J_2. Šo sakaru mēs jau aplūkojām 137 §.

No taisnes a uz doto piramidi krītošā ēna aizrādita ari 159ª rasejumā. Pie tam šinī rasejumā taisnes a krītošās ēnas ir $M\beta$ un $NK\gamma$.

141 §. Taisnes krustošanās ar prizmu; no taisnes uz prizmu krītoša ēna.

Pieņemsim, ka janoteic patvaļigas taisnes a krustošanās punkti ar doto prizmu, stāvošo uz H (160ª ras.).

Tā kā prizmu var uzlūkot kā piramidi ar bezgali attālinatu virsotni, tad šis uzdevums atrisinams tādā pašā kārtā, kā iepriekšejā pantā aplūkotais. Tam nolūkam patvaļigais punkts E, uz taisnes a, jasavieno ar prizmas bezgali attālinato virsotni, velkot caur E līdzteci ar prizmas sānu šķautnēm. Ja S_I ir taisnes a pēdu punkts, bet S_{II} palīglinijas pēdu punkts, tad taisne $s = S_I S_{II}$ ir caur bezgali attālinatu prizmas virsotni un doto taisni a ejošas palīgplaknes pēdu linija. Šī palīgplakne krustojas ar doto prizmu pa taisnēm 1 – M un 2 – N, kas iet caur punktiem 1 un 2, kuŗos pēdu linija s krusto prizmas pamatu, un bezgali attālinatu prizmas virsotni. Tapēc taisnēm 1 – M un 2 – N jabūt līdztecēm prizmas sānu šķautnēm. Punkti M un N, kuŗos taisnes 1 – M un 2 – N krustojas ar a, ir meklejamie taisnes a krustošanās punkti ar doto prizmu. Saprotams, ka visas aizrāditās konstrukcijas techniskā rasejumā (160ᵇ ras.) jaizdara abās projekcijās.

Tamlīdzigi, kā iepriekšejā pantā, noteicama ari no dotās taisnes a uz prizmu krītoša ēna. Pie tam dabujam, ka taisnes patiesās uz prizmu krītošās ēnas ir MC_{III} un NB_{III}.

Figura $A_{III}B_{III}C_{III}$ ir caur taisni a ejošas gaismas plaknes krustošanās figura ar doto prizmu. Figura $A_{III}B_{III}C_{III}$ un prizmas pamats $A_IB_IC_I$, kā tas 138 § aizrādits, ir affini radnieciskas figuras ar affinitates asi a' un affinitates virzienu, kas sakrīt ar prizmas sānu šķautņu virzienu. Saprotams, kā ari projekcijās dabujam to pašu radniecisko sakaru, pie tam affinitates ass horicontalajā projekcijā ir a', bet vertikalajā projekcijā $a'_2 = OX$.

Horicontalajā projekcija uz redzamām prizmas sānu malām guļošie punkti M un N redzami, tāpēc ari attiecigās taisnes a daļas šinī projekcijā redzamas. Vertikalajā projekcijā uz redzamās sānu malas $A_IA_{II}C_{II}C_I$ guļošs punkts M redzams, tapēc ari taisnes a labā daļa šinī projekcijā redzama. Bet uz neredzamās sānu malas $A_IB_IB_{II}A_{II}$ guļošs punkts N neredzams, tapēc ari taisnes a attiecigā kreisā, no sānu malas $A_IC\ C_{II}A_{II}$ aizsegtā daļa vertikalajā projekcijā nav redzama.

142 §. Kautkādas plakanas figuras krustošanās ar doto daudzplakni un viņu ēnas.

Pieņemsim, ka telpā doti: kautkāds daudzplaknis ABCD un patvaļigs △ EFG (161 ras.). Lai noteiktu kautkādas dotā trijstūŗa malas EG krustošanās punktus ar daudzplakni ABCD, mēs caur EG velkam vienu vertikali projecejošo palīgplakni, kas krusto piramidi ABCD pa zinamo figuru $1-2-3-4$. Šās figuras vertikalā projekcija sakrīt ar E_2G_2, bet horicontalo projekciju $1_1-2_1-4_1-3_1$ dabusim, pārnesot punktus 1_2, 2_2, 3_2 un 4_2 uz attiecigo piramides šķautņu horicontalām projekcijām. Pie tam punktus 1_1, 2_1.... savienojot, jaievēro, ka mēs pa pāriem drīkstam savienot tikai tādus divus punktus, kas guļ uz vienas zinamas piramides sānu malas. Tā, piemēram, varam savienot punktus 1_1 un 2_1, bet nedrīkstam savienot punktus 2_1 un 3_1, jo šie punkti neguļ uz vienas sānu malas, bet jasavieno 2_1 ar 4_1, kuŗi guļ uz vienas un tās pašas sānu malas.

Punkti J un K, kuŗos EG krusto figuru $1-2-4-3$, ir meklejamie punkti. Tamlīdzigi ir uzmekleti punkti M un L, kuŗos mala FG krustojas ar doto daudzplakni. Tam nolūkam caur FG ir vilkta viena horicontali projecejoša plakne, kas krusto daudzplakni pa figuru $5-6-7$.

Punktus K un M, kas guļ uz vienas un tās pašas plaknes ABD, varam savienot; šo liniju pagaŗinadami līdz krustošanai ar AD un BD, dabujam punktus O un P. Punktus O un J, kā ari P un L, kas guļ uz attiecigām sānu malām ACD un BCD, mēs atkal varam savā starpā savienot. Šo liniju pagaŗinajumiem kontroles dēļ jakrustojās kopejā uz sānu malu ACD un BCD krustošanās šķautnes DC guļošā punktā N.

Tādā kārtā noteicam visu △-a EFG krustošanās figuru ar doto daudzplakni, un pēc tam noteicam šās figuras redzamibu.

Ēnu konstrukcijas izvedamas tamlīdzigi, kā 117 rasejumā. Griezisim lasitaja vēribu tikai uz sekojošo. Ja konstrueta virsotnes E krītoša ēna $E^{\times}$, tad šo punktu savienojam ar punktiem J un Q, kuŗos △-a EFG malas EG un EF krustojas ar taisni JN, jeb viņas pagaŗinajumu. Ēna $E^{\times}Q$ krusto šķautni CD punktā R, ko savienojam ar punktu S. Pie tam punkts S ir malas EF krustošanās punkts ar piramides sānu mālu BCD, jo punktā S taisne EF krustojas ar pagaŗinato taisni NL, pa kuŗu △ EFG krusto sānu malu BCD.

Tādā kārtā R ar S savienodami, dabujam no malas EF uz plakni BCD krītošo ēnu. Uzmeklejot taisnes SR un caur virsotni F vilkta gaismas stara krustošanās punktu, iegūsim ēnu $F^{\times}$, kas no virsotnes F krīt uz plakni BCD. Savienojot beidzot F ar L, dabujam taisnes FL krītošo ēnu uz plaknes BCD.

Bez tam konstruejam virsotnes D krītošo ēnu uz plaknes EFG, un savienojam šo ēnu ar O un P, dabujot šķautņu DA un DB krītošās ēnas.

143 §. Patvaļiga priekšmeta atspoguļošana plakanā spogulī.

162 rasejumā aizrāditas taisnās nošķeltās, regularās sešpłakņu piramides projekcijas un viņas atspoguļojums plakanā spogulī. Pie tam pieņemts, ka nošķeltās piramides sānu malas necaurspīdigas, bet viņas pamati caurspīdigi.

Piramides projekcijas konstruejamas pēc 133 § aizrādijumiem. Pie tam rasejumā piramides apakšejā pamatplakne $A_I B_I C_I D_I E_I F_I$ noteikta ar krustodamām pēdu līdztecēm h_I un v_I, kuŗu krustošanās punkts ir J_I; plaknes $h_I v_I$ sakrītošo projekciju ass ir r_I. Punkts J_I pieņemts par piramidēs apakšejā pamata centru. Griežot ap h_I, pamatplakne nostādita līdztekus H, un pēc tam savienotajā stāvoklī atzīmets apakšejais piramides atbalsts $A_{I_0} B_{I_0} C_{I_0} D_{I_0} E_{I_0} F_{I_0}$, pie kam pavienkāršinašanai virsotnes A_{I_0} un D_{I_0} pieņemtas uz vertikalās pēdu līdzteces savienotā stāvokļa v_{I_0}.

Noteikuši pēc dotiem mēriem nošķeltās piramides virsotni L un augšejo pamatu $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II} E_{II} F_{II}$ ar ~~centru~~ J_{II}, mēs atrodam (vaj ari no paša sākuma pieņemam) augšejā pamata sakrītošo projekciju asi r_{II}, pie kam $r_{II} \parallel r_I$. Pēc tam noteicam nošķeltas piramides redzamibu.

Spoguļa plakne pieņemta patvaļigā stāvoklī. Viņas ierobežojums dots ar pēdu līdztecēm h_{II} un v_{II}, kas krustojas punktā K. Spoguļa plaknes sakrītošo projekciju ass ir r_{III}.

Piramides augšejā un apakšejā pamatu plaknes krustojas ar spoguļa plakni pa taisnēm m_I un m_{II}, kuŗu projekcijām attiecigi jaiet caur punktiem $R_{I-III} = r_I \times r_{III}$ un $R_{II-III} = r_{II} \times r_{III}$, pie kam $m_I \parallel m_{II}$. Lai noteiktu taisni m_I, mums pēc vispārejiem likumiem jauzmeklē kautkādas uz piramides apakšejās pamatplaknes guļošas taisnes krustošanās punkts ar spoguli un šis punkts jasavieno ar punktu R_{I-II}. Tamlīdzigi noteicama ari taisne m_{II}.

Pēc 121 § dabujam, ka taišņu m_I un m_{II} horicontalās projekcijas, t. i. m_{I_1} un m_{II_1} ir slīpleņkainās affinitates asis starp nošķeltās piramides pamatu horicontalām projekcijām un attiecigām atspoguļojumu vienadnosaukuma, t. i. horicontalām projekcijām. Affinitates virziens veido ar h_{II_1} taisno leņķi, bet ar m_{I_1} jeb m_{II_1} šis virziens veido kautkādu leņķi.

Analoģiski dabujam, ka taišņu m_I un m_{II} vertikalās projekcijas, t. i. m_{I_2} un m_{II_2} ir slīpleņkainās affinitates asis starp nošķeltas piramides pamatu vertikalām projekcijām un attiecigām atspoguļojumu vienadnosaukuma, t. i. vertikalām projekcijām.

Affinitates virziens veido ar v_{II_2} taisno leņķi, bet ar m_{I_2} jeb m_{II_2} šis virziens veido kautkādu leņķi.

Ja kautkāda punkta A_I atspoguļojumu apzīmejam ar A_I^s, tad šā punkta projekcijas būs $A_{I_1}^s$ un $A_{I_2}^s$. Līdzigi atzīmesim spoguļa attēlā visus punktus. Konstrukciju pavienkāršinašanai pietiek, ja atrodam divu pret spoguļa plakni stateniski vilktu staru krustošanās punktus ar spoguli. Šos starus var vilkt caur augšejā un apakšejā pamata patvaļigiem punktiem. Rasejumā šie stari aizrāditi punktiem A_I un A_{II}. Staru $A_I A_I^s$ un $A_{II} A_{II}^s$ krustošanās punktus ar spoguļa plakni apzīmejam ar A_I^o un A_{II}^o. Šos punktus varam uzmeklet pēc 121 § aizrādijumiem, vaj ari velkot uz spoguļa plaknes caur punktu M vienu horicontalo palīgpēdu līdzteci h_{III}.

Atliekot spoguļa plaknes otrā pusē oriģinalo punktu A_I un A_{II} atstatumus no atrastiem krustošanās punktiem A_I^o un A_{II}^o, mēs iegūstam mekletos atspoguļojumus A_I^s un A_{II}^s. Pārejo punktu atspoguļojumus var atrast uz aizrāditās affinitates pamata. Pie tam kontroles dēļ jaņem vērā, ka savstarpeji vienlīdzigas līdzteku taisnes ari atspoguļojumā attēlojas kā savstarpeji vienlīdzigas un līdzteku taisnes.

Mūsu gadijumā virsotne D_I atrodas aiz spoguļa plaknes, tapēc šās virsotnes atspoguļojumam D_I^s ir tikai šķietamā nozīme. Kā rasejumā redzams, divas piramides sānu malas krusto spoguļa plakni.

Tā kā atspoguļojums noteic patvaļigu iedomajamo priekšmetu telpā, zimetrisku dotam priekšmetam, tad atspoguļojuma redzamiba noteicama pilnigi neatkarigi no oriģinala priekšmeta redzamibas.

Atspoguļojums redzams savās projekcijās par tik, par cik atspoguļojuma projekcijas atrodas spoguļa plaknes ierobežojuma iekšpusē. Rasejumā spoguļa plakni ierobežo pēdu līdzteces h_{II}, v_{II} un patvaļigi pieņemta līkā linija. Šo līko liniju varam rasejumā ari pavisam neaizrādit.

Bez tam rasejumā ari aizrāditas ēnas, kas no piramides sānu malām krīt uz piramides iekšejo virsu.

144 §. Plaknes pašēnas noteikšana.

Jautajums, vaj kautkāda plakne, piemēram $\triangle$-is ABC (163 ras.) redzams no gaišās, jeb tumšās puses, atrisinajams vispārejā gadijumā bez krītošās ēnas palīdzibas sekošā kārtā. Caur patvaļigu virsotni A velkam attiecigo gaismas staru un ar šķērsošanās punkta $D_2 = E_2$ palīdzibu atrodam, ka attiecibā uz vertikalo projekciju plakni aplūkotais gaismas stars iet aiz malas BC; tapēc vertikalajā projekcijā $\triangle$ ABC redzams no gaišās puses.

Ja gaismas staru virziens horicontalajā projekcijā būtu ne l_1, bet l_1', tad ar šķērsošanās punkta $D_2 = F_2$ palīdzibu varetu pierādit, ka šinī gadijumā vertikalajā projekcijā $\triangle$-is ABC redzams no tumšās puses, jo caur virsotni A ejošais gaismas stars attiecibā uz V iet priekš malas BC.

Pie ša paņēmiena saprotams jastāda sev priekšā oriģinalā $\triangle$-a ABC stāvoklis telpā.

XI nodaļa. Daudzplakņu savstarpeja krustošanās.

145 §. Divu piramidu krustošanās, kas atbalstās uz kopejo plakni un viņu ēnas. Notinumi.

164 rasejumā aizrāditas divas piramides ABCD un EFGJ, kas atbalstās uz H.

Atsevišķi vienas piramides šķautņu krustošanās punkti ar otru piramidi noteicami: pēc 140 §. Tam nolūkam velkam virsotņu taisni DJ un noteicam šās taisnes pēdu punktu S_I. Kautkādas šķautnes AD krustošanās punktus ar otru doto piramidi dabujam, savienojot šās šķautnes horicontalo pēdu punktu A ar S_I un pagarinot taisni $s_I = AS_I$ līdz krustošanai ar otras piramides pamatplakni EFG punktos 1 un 2. Punktus 1 un 2 savienojam ar attiecigo virsotni J un atzīmejam punktus A_{III} un A_{IV}, kuŗos taisnes 1–J un 2–J krustojas ar AD. Līdzigā kārtā noteikti punkti E_{III} un E_{IV}, kuŗos šķautne EJ krusto otro piramidi, velkot tam nolūkam $s_{IV} = ES_I$, atzīmejot punktus 3 un 4, kuŗos s_{IV} krusto otras piramides atbalstplakni ABC, un savienojot punktus 3 un 4 ar virsotni D. Taisnes 3–D un 4–D krusto šķautni EJ meklejamos punktos E_{III} un E_{IV}.

Ja palīgplaknes pēdu linija, kā piemēram s_{III}, nekrusto otras piramides pamatplakni, tad attiecigā šķautne CD nekrusto otro piramidi. Šķautne FJ krusto tikai vienu otras piramides sānu plakni punktā F_{III}, jo tikai viena palīglinija 5–D krusto šķautni FJ. Šķautnei FJ ar otras piramides sānu malām ir tikai viens krustošanās punkts, jo šās šķautnes atbalstpunkts F atrodas otras piramides iekšpusē. Saprotams, ka punktu F varam uzskatit kā aplūkotās šķautnes krustošanās punktu ar otrās piramides atbalstu.

Bez tam vēl jaatzīmē punkti M un N, kuŗos krustojas piramidu atbalstplaknes ABC un EFG. Konstruetos punktus attiecigi savienojot, dabujam krustošanās figuru $MA_{III}F_{III}E_{IV}A_{IV}E_{III}NFM$. Krustošanās figuras noteikšanai vienmēr jasavieno tādi divi šķautņu krustošanās punkti, kā, piemēram, A_{III} un F_{III}, jeb A_{III} un M, kas vienā un taī pašā laikā pieder zinamai vienas piramides plaknei, kā ari zinamai otras piramides plaknei.

Divu plakņu krustošanās taisne, piemēram, MA_{III}, jeb $A_{III}F_{III}$ zinamā projekcijā redzama, ja tanī pašā projekcijā redzamas abas aplūkotās krustodamās plaknes; bet ja jel viena no krustodamām plaknēm nav redzama, tad ari nav redzama attiecigā krustošanās taisne, kā, piemēram, NE_{III}, jeb $F_{III}E_{IV}$.

Ja divas blakus guļošas plaknes, kā, piemēram, EGJ un GFJ krustojas ar kautkādu zinamu trešo plakni ACD, tad attiecigās krustošanās taisnes $E_{IV}A_{IV}$ un $F_{III}A_{III}$ krustojas punktā K, kas guļ uz šķautnes GJ, pa kuŗu krustojās aplūkotās blakus guļošās plaknes. Tamlīdzigi taisnes $F_{III}E_{IV}$ un NE_{III}, pa kuŗām plaknes ACD un ABD krustojas ar plakni EFJ, krustojas punktā W, kas guļ uz plakņu ACD un ABD krustošanās šķautnes AD. Krustošanās figura vienmēr ir slēgta figura, kuŗai mūsu gadijumā ar pamatplakni ir kopeja daļa NFM. Krustošanās figura var ari sastāvet no divām, jeb vairakām atsevišķām daļām.

Ēnas, kas no vienas piramides krīt uz otru, jakonstruē pēc vispārejiem likumiem. Šeit aizrādisim tikai, ka punkti P un Q uzmekleti ar punktu P′ un Q′ palīdzibu; kontroles dēļ ēna RQ iet caur punktu $L = GJ \times E_{III} A_{IV}$.

Saprotams, ka visas 164 ras. aizrāditās konstrukcijas techniskā rasejumā jaizdara abās projekcijās, kā tas aizrādits 165 rasejumā.

Atsevišķo šķautņu redzamibu noteicot, mēs papriekšu iztirzajam, vaj viņas kā šķautnes, kas pieder vienam zināmam ķermenim, redzamas, jeb ne.

Pēc tam janoskaidro, vaj pašas par sevi redzamās šķautnes nav pa daļai, vaj pavisam aizsegtas no otra ķermeņa sānu malām. Tā, piemēram, šķautnes BD un CD (165 ras.) pašas par sevi abās projekcijās redzamas, bet vertikalajā projekcijā viņas pa daļai aizsedz otrās piramides sānu malas.

Krustošanās taisne $E_{III}A_{IV}$ abās projekcijās redzama, jo abās projekcijās redzamas sānu malas ABD un EGJ, kuŗām krustojoties iegūta aplūkojamā taisne. Taisne NE_{III} horicontalajā projekcijā redzama, jo abas sānu malas ABD un EFJ horicontalajā projekcijā redzamas, turpreti vertikalajā projekcijā NE_{III} nav redzama, jo šinī projekcijā sānu mala EFJ nav redzama.

Pašēnas un ēnas, kas krīt uz H un V, ikkatrai piramidei noteicamas atševišķi.

Bez tam 165 rasejumā aizrādita patvaļiga trijplakņu prizma, kuŗas viena sānu mala KLWR uzgulstās uz H, viens pamats LQW sakrīt ar V, bet otrs pamats KMR ∥ V.

Pirms ēnas noteikšanas, kas no dotām piramidēm krīt uz prizmas sānu malām, noteiksim prizmas sānu malu apgaismojumu. Sānu mala KMQL, kā redzams, apgaismota, tapat sānu mala KMR, kas ir līdztece ar V, ir apgaismota. Rodas jautajums, vaj sānu mala MQWR apgaismota, jeb ne? Lai šo jautajumu atrisinatu, mēs atrodam punkta M krītošo ēnu M′. Tā kā punkti M_1 un M′ atrodas vienā pusē no pēdu linijas RW, tad sānu mala MRWQ ir apgaismota. (Ja punkts M′ atrastos pa labi no pēdu linijas WK, tad sānu mala MRWQ atrastos pašēnā). Tagad noteiksim ēnu, kas krīt uz prizmu. Tam nolūkam atrodam ēnas $D^{\times}$ un $J^{\times}$, ko virsotnes D un J met uz pagaŗinato sānu malu KLQM. Punktu $10 = B'D' \times KL$ savienojam ar $D^{\times}_1$ un atzīmejam punktu $11 = 10 - D^{\times} \times MQ$, ko savienojam ar punktu $12 = B'D' \times RW$. Laustā linija 10 – 11 – 12 ir ēna, kas no šķautnes BD krīt uz prizmu. Līdzigi atrastas šķautņu AD un FJ krītošās ēnas 13 – 14 – 15 un 16 – 17 – 19. Ēna G′J′ krusto sānu malas KMR pamatu punktā 20, tāpēc, lai noteiktu ēnu 20 – 21, krītošo no šķautnes GJ uz sānu malu KMR, ir atrasta virsotnes J krītošā ēna J‴ uz šo sānu malu, kas savienota ar punktu 20. (Skaties vertikalo projekciju $J_2''' - 20_2$). Savienodami, beidzot, 21 ar punktu $22 = GJ' \times RW$, mēs iegūstam krītošās ēnas pilnigu apveidu.

166 rasejumā aizrādits piramides ABCD ā r e j ā s v i r s a s n o t i n u m s, pie tam attiecigo šķautņu patiesie lielumi janoteic pēc vispārejiem likumiem. Pie tam vietas trūkuma dēļ šis notinums attēlots mērogā 1 : 2.

Veiduļa izgatavošanai jaatstāj šauras maliņas gar tām šķautnēm, kuŗas atkārtojas divkārt; tādas maliņas jaatstāj ari gar visu izgriezuma figuru.

167 rasejumā attēlotas tās pašas piramides, kas aizrāditas 164 ras., bet pie tam pieņemts, ka piramide EFGJ ir tikai iedomajamā, kuŗa no piramides ABCD izgriež zinamu daļu. Izgriezumā dabujam šādas trīs plaknes: $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$, $MA_{III}F_{III}F$ un $E_{III}A_{IV}E_{IV}$.

Gaismas staru virziens l 167 rasejumā pieņemts cits, nekā 164 ras., un rasejumā aizrāditas attiecigas krītošās ēnas. Ēna $A^{\times}_{III}$, kas no punkta A_{III} krīt uz izgriezuma plakni $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$, konstrueta šādi. Šķautnes AD horicontalā krītošā ēna AD′ krusto plaknes $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$ atbalsttaisni NF punktā X. Savienojot punktu X ar punktu W, kuŗā šķautne AD krusto plakni $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$, dabujam šķautnes AD krītošo ēnu uz plaknes $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$. (Punkts W ir šķautnes AD krustošanās punkts ar plakni $NE_{III}E_{IV}F_{III}F$, jo punkts W guļ uz pagaŗinatās taisnes NE_{III}, jeb $F_{III}E_{IV}$, pa kuŗu plakne ABD, jeb ACD, kas iet caur šķautni AD, krusto plakni $NE_{III}E_{IV}F_{III}J$).

Velkot caur A_{III} līdzteci ar l, līdz krustošanai ar taisni XW, dabujam $A_{III}^{\times}$. Taisne $A_{III}^{\times}X$ nenoteic krītošās ēnas apveidu, jo mūsu gadijumā šķautne $A_{III}A$ nav gaismas atdaloša šķautne. Tadēļ jauzmeklē attiecigās gaismas atdalošās šķautnes, t. i. $A_{III}M$, krītošā ēna. Tam nolūkam papriekšu uzmeklejam punkta A_{III} horicontalo krītošo ēnu A'_{III} uz AD′, un punktu A'_{III} savienojam ar M, dabujot šķautnes $A_{III}M$ horicontalo krītošo ēnu. Ēna A_{III}' krusto NF punktā Y, kuŗu, beidzot, varam savienot ar $A_{III}^{\times}$. Bez tam $A_{III}^{\times}$ jasavieno ar F_{III}.

Tālak uz XW vēl uzmeklejam punkta A_{IV} krītošo ēnu $A_{IV}^{\times}$ un viņu savienojam ar E_{III} un E_{IV}.

168 rasejumā aizrādits izgriezuma notinums, kas ir daļa no iedomajamās piramides EFGJ i e k š e j ā s virsas notinuma. Pie tam rasejumā aizrāditas divas piramides sānu maļas JEF un JFG, bet no trešās sānu malas JEG, vietas trūkuma dēļ, aizrādita tikai daļa $E_{III}E_{IV}A_{IV}$.

146 §. Piramides krustošanās ar prizmu, gadijumā, ja abi dotie ķermeņi atbalstās uz kopejo plakni.

Pieņemot, ka prizma ir piramide ar bezgali tālu virsotni, visas konstrukcijas varam izdarit pēc agraki aizrāditā principa. Pie tam jaievēro, ka virsotņu taisne, kā ari palīgtaisnes ($1-A_{III}$, $2-A_{IV}$ u. t. t), kas iet caur prizmas bezgali tālu virsotni, ir līdzteces prizmas sānu šķautnēm. Attiecigas telpā izpildamas konstrukcijas aizrāditas 169 rasejumā. Krustošanās figura ir $A_{III}\,F_{III}\,A_{IV}\,B_{IV}\,F_{IV}\,B_{III}\,A_{III}$.

Visas telpā izvestās konstrukcijas, saprotams, techniskā rasejumā jaizdara abās projekcijās, kā tas aizrādits 170 rasejumā. Pie tam šinī rasejumā dabujam krustošanās figuru $NF_{III}\,C_{IV}\,F_{IV}\,G_{III}\,C_{III}\,MG_I\,N$, kuŗai ar pamatplakni H ir kopeja daļa $MG_I\,N$.

Bez tam rasejumā aizrāditas doto ķermeņu krītošās ēnas uz H un V, ķermeņu pašēnas, kā ari ēnas, kas no viena ķermeņa krīt uz otru.

147 §. Divu prizmu krustošanās, gadijumā, kad abi dotie ķermeņi atbalstās uz kopejo plakni.

Šaī gadijumā virsotņu linija atrodas bezgalibā. Visas palīgplaknes (ar pēdu linijām s_I līdz s_{VI}), kas iet caur šo bezgali tālo virsotņu liniju, ir līdzteku plaknes, tapēc ari šo palīgplakņu pēdu linijas s_I līdz s_{VI} ir līdzteku taisnes. Šo pēdu liniju virziena noteikšanai, caur telpā patvaļigi pieņemto punktu K (171 ras.) javelk taisnes a un b, līdzteces doto prizmu sānu šķautnēm, un janoteic šo taišņu pēdu punkti S_I un S_{II}. Taisne $s = S_I\,S_{II}$ noteic meklejamo pēdu liniju virzienu, jo plakne $KS_I\,S_{II}$ ir līdztece visām, caur bezgali tālu virsotņu liniju ejošām, palīgplaknēm un krustojas ar viņām pa bezgali tālu prizmu virsotņu liniju.

Pēc tam caur atsevišķo šķautņu atbalstpunktiem velkam palīgplakņu pēdu linijas s_I, $s_{II} \ldots \parallel s$ un parastā kārtā uzmeklejam atsevišķo šķautņu krustošanās punktus. Iegūtos punktus attiecigi savienodami, dabujam doto prizmu krustošanās figuru $A_{III}\,D_{III}\,C_{III}\,E_{III}\,C_{IV}\,A_{IV}\,E_{IV}\,D_{IV}\,A_{III}$.

172 rasejumā abās projekcijās konstrueta divu prizmu, kas atbalstās uz V, krustošanās figura. Šinī gadijumā horicontalās pēdu linijas $s = S_I\,S_{II}$ vietā ir jaatrod plaknes $KT_I\,T_{II}$ vertikalā pēdu linija $t = T_I\,T_{II}$, kas ir līdztece ar visām, caur prizmu atsevišķām šķautnēm ejošām palīgplaknēm. Attiecigas konstrukcijas aizrāditas rasejumā, pie kam iegūtā krustošanās figura sastāv no divām daļām $E_{III}\,G_{III}\,D_{IV}\,F_{III}\,D_{III}\,E_{III}$ un $E_{IV}\,F_{IV}\,G_{IV}$. Bez tam, rasejumā aizrāditas doto prizmu krītošās un pašēnas.

148 §. Divu piramidu krustošanās, kuŗām ir dažadas pamatplaknes.

Pieņemsim, ka telpā dotas divas piramides $A_I\,B_I\,C_I\,D$ un $E_I\,F_I\,G_I\,J_I\,K$ (173 ras.), kuŗām dažadas pamatplaknes P un Q; pie kam plakne P noteikta ar līdzteku taisnēm b un c, bet plakne Q noteikta ar līdzteku taisnēm d un e. Plaknes P un Q krustojas pa taisni a.

Doto piramidu krustošanās figuru noteicam pēc tā paša principa, pēc kuŗa mēs atradām divu piramidu krustošanās figuru, gadijumā, ja viņām ir kopeja pamatplakne (145 §). Tam nolūkam savienojam doto piramidu virsotnes D un K un atrodam taisnes DK pēdu punktus, t. i. krustošanās punktus ar pagaŗinatām pamatplaknēm P un Q. Šos punktus atzīmejam attiecigi ar S_I un S_{II}*).

Pieņemsim tagad, ka jaatrod šķautnes $A_I D$ krustošanās punkti ar otro piramidi. Tam nolūkam velkam taisni $s_I = S_I A_I$ un atrodam punktu α, kuŗā viņa krustojas ar taisni a. Šo punktu ar taisnes s'_I palīdzibu savienojam ar S_{II}. Taisnes s_I un s'_I ir palīgplaknes, kas iet caur doto piramidu virsotnēm D un K un caur šķautni $A_I D$, — pēdu linijas uz plaknēm P un Q. Šī palīgplakne rasejumā noteikta $\triangle$-a $S_I S_{II} \alpha$ veidā. Palīgplaknes pēdu linija s'_I krusto pamatu $E_I F_I G_I J_I$ punktos 1 un 2. Šos punktus savienodami ar virsotni K, mēs iegūstam taisnes 1 – K un 2 – K, pa kuŗām palīgplakne krustojas ar piramides sānu malām $E_I J_I K$ un $E_I F_I K$. Punkti A_{II} un A_{III}, kuŗos taisnes 1 – K un 2 – K krusto šķautni $A_I D$, ir šās šķautnes meklejamie krustošanās punkti ar piramidi $E_I F_I G_I J_I K$.

Līdzigā kārtā noteicamas šķautnes $E_I K$ krustošanās punkti ar piramidi $A_I B_I C_I D$. Tam nolūkam velkam $S_{II} E_I$ un atrodam punktu $\beta = S_{II} E_I \times a$. Punktu β savienojam ar S_I un uzmeklejam punktus 3 un 4, kuŗos βS_I krusto pamatu $A_I B_I C_I$. Punkti E_{II} un E_{III}, kuŗos taisnes 3 – D un 4 – D krusto $E_I K$, ir meklejamie krustošanās punkti.

Atrastos punktus attiecigi savienodami, mēs iegūstam krustošanās figuru, sastāvošu no divām daļām $A_{II} E_{II} A_{III} F_{II} G_{II} J_{II} A_{II}$ un $J_{III} E_{III} F_{III} G_{III}$.

Visi aizrāditie punkti papriekšu ir noteikti vertikalajā projekcijā, un pēc tam ir konstruetas attiecigās horicontalās projekcijas. Saprotams, ka analoģiskā veidā krustošanās punktus varetu papriekšu uzmeklet horicontalajā projekcijā.

Pamatplaknes P un Q 173 rasejumā pieņemtas patvaligā stāvoklī. Bet atsevišķā gadijumā plakne P var saplūst ar horicontalo projekciju plakni (P = H); tamlīdzigi var notikt, ka Q = V. Ja tas tā, tad taisne a noteic projekciju asi (OX); pēdu punkts S_I ir virsotnes taisnes horicontalais pēdu punkts; S_{II} ir virsotnes taisnes vertikalais pēdu punkts; s_I ir palīgplaknes horicontalā pēdu linija, bet s'_I — viņas vertikalā pēdu linija. Tādā gadijumā punkts S_{II} jaapzīmē ar T_{II} un taisne s'_I ar t_I.

---

*) Tālakos paskaidrojumos galvenā kārtā jaņem vērā mineto punktu un taisņu vertikalās projekcijas.

149 §. Piramides krustošanās ar prizmu, gadijumā, kad dotiem ķermeņiem dažadas pamatplaknes.

174 rasejumā aizrādita piramides krustošanās ar prizmu, gadijuma, kad dotiem ķermeņiem dažadas pamatplaknes $Q = de$ un $P = bc$, pie kam $d \parallel e$ un $b \parallel c$. Plaknes P un Q krustojas pa taisni a.

Uzlūkodami atkal prizmu, kā piramidi ar bezgali attālinatu virsotni, un savienodami piramides virsotni J ar prizmas bezgali attālinatu virsotni, t. i. caur J vilkdami līdzteci prizmas sānu šķautnēm, — atrodam virsotņu linijas pēdu punktus S_I un S_{II} attiecibā uz pamatplaknēm P un Q.

Lai noteiktu patvaļigas prizmas šķautnes $B_I B_{II}$ krustošanās punktus ar piramidi, mēs velkam $s_I = S_I B_I$ un atrodam punktu $\alpha = S_I B_I \times a$. Pēc tam velkam $s'_I = \alpha - S_{II}$ un atrodam punktus 1 un 2, kuŗos šī taisne krusto piramides pamatu $E_I F_I G_I$. Punkti B_{III} un B_{IV}, kuŗos taisnes $1 - J$ un $2 - J$ krusto $B_I B_{II}$, ir meklejamie krustošanās punkti.

Lai noteiktu šķautnes $E_I J$ krustošanās punktus ar prizmu, mēs atrodam punktu $\beta = E_I S_{II} \times a$. Punktu β savienojam ar S_I un atrodam punktus 3 un 4, kuŗos šī linija krusto prizmas pamatu $A_I B_I C_I D_I$. Caur 3 un 4 velkam līdzteces prizmas sānu šķautnēm un atrodam punktus E_{II} un E_{III}, kuŗos šās līdzteces krusto $E_I J$.

Līdzigā kārtā atrodam pārejos krustošanās punktus, kuŗus savienojot, dabujam no divām daļām sastāvošo krustošanās figuru $G_{II} F_{II} B_{IV} E_{II} B_{III} G_{II}$ un $E_{III} F_{III} G_{III}$.

Japiezīmē, ka vertikalajā projekcijā augšā minetie punkti aizrāditi pilnigi, bet horicontalajā projekcijā tikai pa daļai.

150 §. Divu prizmu krustošanās, gadijumā, kad dotiem ķermeņiem dažadas pamatplaknes.

175 rasejumā aizrādita divu prizmu krustošanās, kuŗu pamati $A_I B_I C_I$ un $E_I F_I G_I$ guļ uz divām dažadām plaknēm P un Q, noteiktām ar divām pārām savstarpeji līdzteku taisnēm bc un de. Plaknes P un Q krustojas pa taisni a. Uzlūkojot šās prizmas kā divas piramides ar bezgali attālinatām virsotnēm, mēs uz iepriekšejo noteikumu pamata konstrukcijas izpildam šādi.

Telpā patvaļigi pieņemtu punktu K savienojam ar prizmas virsotnēm, t. i. caur K velkam līdzteces f un g prizmas sānu šķautnēm un atrodam šo līdzteču krustošanās punktus ar plaknēm P un Q.

Lai varetu skaidraki stādities priekšā telpā izpildamās konstrukcijas, tad atsevišķā 176 rasejumā aizrādita plakņu P, Q un taišņu f un g šemats. Atzīmesim taisnes f krustošanās punktu ar plakni P ar S_I, bet viņas krustošanās punktu ar plakni Q — ar S'_I. Līdzigā kārtā taisnes g krustošanās punktus ar plaknēm P un Q atzīmesim ar S_{II} un S'_{II}. Taišne $s = S_I S_{II}$

ir palīgplaknes krustošanās linija ar plakni P, bet taisne $s' = S'_I S'_{II}$ ir palīgplaknes krnstošanās linija ar plakni Q. Kontroles dēļ linijām s un s' ir jakrustojās punktā a, kas guļ uz plakņu P un Q krustošanās taisnes a.

Konstruejuši 175 rasejumā taisnes s un s', mēs noteicam doto prizmu krustošanās figuru. Tā, piemēram, noteiksim šķautnes $B_I B_{II}$ krustošanās punktus ar otro prizmu. Tam nolūkam caur B_I velkam līdzteci ar s un atrodam punktu β, kurā šī līdztece krusto a. Caur β velkam līdzteci ar s' un atrodam punktus 1 un 2, kuŗos šī taisne krusto otrās prizmas pamatu $E_I F_I G_I$. Caur punktiem 1 un 2 velkam līdzteces ar šās prizmas sānu šķautnēm, un ar viņu palīdzibu atrodam punktus B_{III} un B_{IV}, kuŗos šķautne $B_I B_{II}$ krusto otro prizmu.

Līdzigā kārtā šķautnes $E_I E_{II}$ krustošanās punktu noteikšanai, mēs caur E_I velkam līdzteci ar s' līdz krustošanai ar a punktā γ. Caur punktu γ velkam līdzteci ar s un atrodam punktus 3 un 4, kuŗos šī līdztece krusto pamatu $A_I B_I C_I$. Vilkdami pēc tam caur 3 un 4 līdzteces otrās prizmas sānu šķautnēm, mēs ar viņu palīdzibu atrodam punktus E_{III} un E_{IV}, kuŗos šķautne $E_I E_{II}$ krusto otro prizmu.

Līdzigā kārtā noteicami pārejie krustošanās punkti, dabujot no divām daļām $A_{IV} B_{IV} C_{III}$ un $A_{III} B_{III} E_{IV} G_{III} E_{III} A_{III}$ sastāvošu krustošanās figuru, pie tam šīm daļām ir kopejs punkts $C_{III} = G_{III}$.

1 Piezīme. Atsevišķā gadijumā plakne P var būt horicontalā, bet plakne Q — vertikalā projekciju plakne, tad $a = OX$. Bez tam vienas prizmas sānu šķautnes var būt līdzteces ar plakni $Q = V$. Tad S'_I atrodas bezgalibā, un visas pēdu līnijas (s'), ejošas caur bezgali tālu punktu S'_I, top savstarpeji līdzteces un līdzteces ar tām prizmas sānu šķautnēm, kuŗas ir līdzteces plaknei Q. Ja bez tam šās šķautnes ir stateniskas pret P, tad visas pēdu linijas s' ir stateniskas pret asi $a = OX$. Analoģiski varam atrisinat gadijumu, ja vienas prizmas šķautnes ir līdzteces ar $P = H$, bet otras prizmas šķautnes — līdzteces ar $Q = V$.

2. Piezīme. Ēnu, krītošo no viena patvaļiga daudzplakņa uz otru, var uzlūkot kā gaismas prizmas, kas aptver doto ķermeni, krustošanās figuru ar otro doto ķermeni. Pie tam par gaismas prizmas pamatu var pieņemt dota ķermena horicontalo, vaj vertikalo ēnu.

Ja saules apgaismošanas vietā dota centralā apgaismošana, tad ēna, krītoša no viena dotā daudzplakņa uz otro, noteicama kā attiecigas gaismas piramides krustošanās figura ar otro doto ķermeni.

Tā tad aplūkotie līdz šim ķermeņu krustošanās gadijumi dod mums līdzekli noteikt ēnu, kas no viena dota daudzplakņa krīt uz otru.

Otrā daļa. Līkās linijas un virsas.

I nodaļa. Vispārejie jēdzieni par līkām linijām.

151 §. Plakanas līknes.

Ja visi līkās linijas, jeb līknes punkti guļ uz vienas plaknes, tad šādu līkni sauc par p l a k a n u l ī k n i, bet pretejā gadijumā — par t e ļ p a s l ī k n i.

Aplūkosim papriekšu tikai plakanas līknes.

Pieņemsim uz līknes plaknes taisnleņķaino koordinatu zistemu un uzskatisim kautkāda līknes punkta koordinatas kā parametra t funkcijas, t. i.

$$x = f_1(t), \; y = f_2(t).$$

No šiem nolīdzinajumiem parametru t izslēgdami, dabusim nolīdzinajumu

$$f(x, y) = 0.$$

Ja visi līknes punktu koordinatas izpilda nolīdzinajumu $f(x, y) = 0$, tad šis nolīdzinajums izteic l ī k n e s, jeb kustedamā pūnkta l i k u m u. Otradi, ja zinams līknes likums $f(x, y) = 0$, tad ikkatrs līknes punkts ir pilnigi noteikts. Tapēc mēs līkni varam ari uzlūkot kā ceļu, ko punkts uz plaknes noiet, kustedamies pēc zinama likuma.

Līknes, kuŗu likums zinams, sauc par ģ e o m e t r i s k ā m l ī k n ē m, bet līknes, kuŗu likums nav zinams, sauc par g r a f i s k ā m l ī k n ē m.

Ja $f(x, y)$ ir vesela racionala x un y funkcija, jeb, ja šo nolīdzinajumu tādā funkcijā varam pārveidot (t.i., ja nolīdzinajumā $f(x, y) = 0$ ieiet zumas, reizinajumi, pakāpes), tad dabujam a l g e b r a i s k ā s l ī k n e s (piemēram aploce, kuŗas nolīdzinajums ir $x^2 + y^2 = r^2$). Bet ja nolīdzinajumā ieiet transcendentās koordinatu funkcijas (piemēram, $lg\, x$, a^x, $\sin x$, $arc \sin x$), tad tādas līknes sauc par t r a n s c e n d e n t ā m l ī k n ē m (piemēram sinuslinija ar nolīdzinajumu $y = b.\sin\frac{x}{a}$; aploces evolvente ar nolīdzinajumiem $x = a.\cos t + a t.\sin t$ un $y = a.\sin t - a t.\cos t$).

Līkni zinamā punktā uzlūkojam par nepārtrauktu attiecibā uz punktu, ja viņai katrā pusē no aplūkotā punkta ir bezgali tuvs punkts. Tapēc līkne attiecibā uz punktu ir pārtraukta tikai savos galos. Visas algebraiskās līknes pieder pie nepārtrauktām attiecibā uz punktu līknēm.

L ī k n e s n o l ī d z i n a j u m a p a k ā p i s a u c p a r l ī k n e s š ķ i r u. Tā, piemēram, aploce ar nolīdzinajumu $x^2 + y^2 = r^2$ ir otrās šķiras līkne. L ī k n e s š ķ i r u n o t e i c p a t v a ļ i g a s u z l ī k n e s p l a k n e s g u ļ o š a s t a i s n e s k r u s t o š a n ā s p u n k t u s k a i t s a r d o t o l ī k n i. Pie tam k r u s t o š a n ā s p u n k t i e m v a r b ū t r e a l ā s, s a k ā r t o t i š ķ i e t a m ā s, v a j p a p ā r ā m s a k r ī t o š ā s n o z ī m e s.

Tā, piemēram, aploce ir otrās šķiras līkne, jo taisne krusto aploci divos punktos, kuŗiem ir reālās, jeb ari šķietamās nozīmes. Pirmā gadijumā taisne patiešam krusto aploci, bet otrā gadijumā taisne atrodas ārpus aploces. Ja griezejā taisne pārveršas pieskarē pret aploci, tad abi krustošanās punkti sakrīt kopejā punktā.

Kautkādas realās taisnes šķietamie krustošanās punkti ar algebraisko līkni ir vienmēr pa pāriem sakārtoti, tapēc viena realā taisne krusto trešās šķiras līkni vismaz vienā realā punktā.

Par l ī k n e s k l a s i sauc p i e s k a r u s k a i t u, ko n o p a t v a ļ i g a l ī k n e s p l a k n e s p u n k t a v a r a m v i l k t p r e t d o t o l ī k n i. Šīm pieskarēm var būt realās, sakārtoti šķietamās, vaj pa pārām sakrītošas nozīmes. Tā, piemēram, no patvaļiga punkta ārpus aploces varam vilkt pret aploci divas realās pieskares; no punkta, guļoša uz pašas aploces varam vilkt vienu realu pieskari (jeb divas sakrītošas pieskares), bet no punkta iekšpus aploces varam vilkt tikai sakārtoti šķietamās pieskares.

Divām uz vienas plaknes guļošām līknēm, kuŗu šķiras ir n_1 un n_2, bet klases m_1 un m_2, ir $n_1 . n_2$ krustošanās punkti un $m_1 . m_2$ kopejas pieskares.

Starp līknes šķiru n un viņas klasi m pastāv sekoša sakariba: $n = m(m-1)$. No aizrāditās sakaribas redzams, ka otrās klases līkne ir ari otrās šķiras līkne. Zinamas šķiras, vaj klases līkni uz patvaļigu plakni projecedami, mēs projekcijā dabusim tās pašas šķiras, vaj klases līkni, kā oriģinalā līkne, jo ikkatrs taisnes krustošanās, jeb pieskaršanās punkts ar līkni projecejas kā krustošanās, jeb pieskaršanās punkts. Tas nozīmē, k a l ī k n e s š k i r a, j e b k l a s e p r o j e k c i j ā n e m a i n a s.

Otrās šķiras algebraiskās līknes ir sekošas: e l i p s e (a p l o c e), h i p e r b o l e un p a r a b o l e, kuŗas sauc ari par s m a i ļ a g r i e z u m i e m.

Katrai otrās šķiras līknei ir divi bezgali tāli punkti. Atkaribā no tam, vaj līkne nekrusto, krusto, vaj ari pieskaras bezgali tālai uz dotās līknes plaknes guļošai taisnei, — mēs dabusim divus sakārtoti šķietamus bezgali tālus punktus (elipse), jeb divus atsevišķus realus bezgali tālus punktus (hiperbole), jeb divus sakrītošus realus, bezgali tālus punktus (parabole).

152 §. Pieskare un griezejā. Normale.

Pieņemsim, ka taisne pēc zinama likuma virzas uz plaknes tā, ka ikkatri divi taisnes bezgali tuvie stāvokļi pakāpeniski krustojas bezgali mazā leņķī (177a ras.). Šie krustošanās punkti guļ viens otram bezgali tuvu un viņu kopiba sastāda līko liniju m (177b ras.), kuŗai pieskaras atsevišķie kustedamās taisnes t stāvokļi. Kautkādi divi blakus guļošie kustedamās taisnes krustošanās punkti noteic līknes t a i s n l i n i j a i n o e l e m e n t u, vaj vienkārši līknes elementu; šo taisnlinijaino elementu kopiba sastāda līkni. Tapēc pieskari pret līkni varam uzlūkot kā taisnlinijainā elementa pagaŗinajumu, un tā tad pieskarei un līknei ir kopejs taisnlinijains elements, vaj pieskarei un līknei ir divi kopeji bezgali tuvi punkti, t. i. mēs dabujam pieskaršanās vietu. Bet ja mēs runajam par pieskaršanās punktu, tad iedomajamies, ka šie bezgali tuvie punkti saplūst kopejā punktā. Caur bezgali tālu līknes punktu ejošu pieskari sauc par asimptoti.

Visi 177ª rasejumā aizrāditie atsevišķie krustedamās taisnes t stāvokļi aptver līkni m, kuŗu tapēc sauc par aptveramo, bet kustedamo taisni t sauc par aptverošo; bet citreiz mēs runajam taisni otradi, ka līkne m ir atsevišķo taisnes t stāvokļu aptverošā, bet taisnes t stāvokļus saucam par aptveramiem.

Pret pieskari pagriesto līknes pusi sauc par izliekto pusi, bet pretejo pusi par ieliekto.

177ª rasejumā mēs pieņemām, ka taisne kustojas tā, ka ikkatri divi taisnes blakusstāvokļi krustojas bezgali mazā leņķī. Var tomēr gadities, ka divi taisnes blakusstāvokļi neveido bezgali mazu leņķi, bet zinama lieluma α leņķi, kā tas aizrādits 178 rasejumā attiecibā uz punktu A. Uz līknes m, pa abām pusēm no punkta A, varam pieņemt bezgali tuvus punktus, tapēc, attiecibā uz punktu, līkne m punktā A ir nepārtraukta (151 §), bet, attiecibā uz pieskari t, līkne m punktā A ir pārtraukta. Punktu A sauksim par stūrpunktu, vaj pieskaru lūzuma punktu.

Algebraiskās līknes attiecibā uz pieskari vienmēr ir nepārtrauktas.

Pieņemsim, ka dota kautkāda nepārtraukta, attiecibā uz pieskari, līkne m (179 ras.). Atzīmesim patvaļigu punktu A un pieņemsim, ka kautkāds punkts B virzas pa līkni m tā, ka tas pakāpeniski ieņem stāvokļus B_1, B_2 u.t.t., līdz viņš, beidzot, sakrīt ar punktu A. Savienosim A ar B_1 un B_2, tad dabusim griezejās a_1 un a_2. Ja nu punkts B sakrīt ar punktu A, tad griezejā pārvēršas pieskarē t pret līkni m punktā A.

Tamlīdzigi mēs uz līknes m otras daļas varam pieņemt kautkādu punktu C, kas pakāpeniski ieņemdams stāvokļus C_1, C_2... bezgali tuvojas punktam A un, beidzot, ar viņu sakrīt. Attiecigās griezejās a_1', a_2'... pie tam robežgadijumā pārvēršas pieskarē t pret līkni m punktā A. Tapēc pieskari t pret līkni m punktā A varam uzlūkot, kā griezejās taisnes robežgadijumu, kad griezuma punkti A un B_2, jeb A un C_2 atrodas viens otram bezgali tuvu.

Caur punktu A, stateniski pret pieskari t, vilktu taisni p sauc par līknes normali punktā A. Normale p krusto līkni m punktā A ortogonali, t. i. taisnā leņķī. Tā kā pieskare ir griezejās robežstāvoklis, tad normali varam ari uzlūkot kā pret griezejo vilkta vidusstateņa robežstāvokli, gadijumā, kad griezejā pārvēršas pieskarē. Pēdeja definicija ir no svara līknes lieces noteikšanai (154 §).

153 §. Regularie un sevišķie līknes punkti.

Pieņemsim, ka kautkāda taisne a (180 ras.) griežas ap zinamo punktu A, un pa taisni a virzas punkts B, kas kustedamies veido zinamo līkni m. Taisne a pakāpeniski ieņem stāvokļus a_1, a_2, t, a_3, $a_4 \ldots$, bet punkts B ieņem stāvokļus B_1, B_2, A, B_3, $B_4 \ldots$ Atkārībā no tam, vaj taisnes a griešanās un punkta B kustibas virzieni nemainas, jeb mainas, mēs dabujam sekošus çetrus raksturigus gadijumus.

Pirmais no šiem gadijumiem attēlots 180 rasejumā; pie tam pieņemts, ka taisnes a griešanās un punkta B kustibas virzieni visu laiku nemainas. Ja punkts B sakrīt ar punktu A, tad taisne a pārvēršas pieskarē t pret līkni m punktā A.

Ikkatru punktam A līdzigu punktu sauc par regularo līknes punktu.

Aplūkosim tagad 181 rasejumu, kur pieņemts, ka punkta B kustibas virziens nemainas, bet taisnes a griešanās virziens mainas. Pie tam taisne a, ieņemdama pakāpeniski stāvokļus a_1, a_2 un t, griežas vienā virzienā, bet ieņemdama stāvokļus t, a_3, $a_4 \ldots$ griežas pretejā virzienā. Šinī gadijumā pieskarei t ar līkni m ir trīs kopeji punkti: punkts A un pa vienam bezgali tuvam punktam katrā pusē no A, t. i. pieskarei t ar līkni m ir divi kopeji līknes elementi (152 §). Pieskari t punktā A sauksim par apgriešanās pieskari, bet pašu punktu A par apgriešanās punktu. Apgriešanās pieskare vienā un taī pašā laikā pieskaras un krusto līkni m, tapēc apgriešanās punktā mainas līknes izliektā un ieliektā daļa.

Tālak pieņemsim, ka punkta B kustibas virziens mainas, bet taisnes a griešanās virziens nemainas (182 ras.). Pie tam varam iedomaties, ka punktam B tuvojoties A, viņa kustibas ātrums top vienmēr mazaks. Punktā A kustibas ātrums ir 0, un pēc tam punkts B sāk kusteties pretejā (negativā) virzienā.

Jaievēro, ka punktā A mēs dabujam tikai vienu pieskari t, jo katri divi kustedamās taisnes a bezgali tuvie stāvokļi krustojas bezgali mazā leņķī. Ja mēs pielaistu pretejo, tad dabutu ne rasejumā attēlotu gadijumu, bet stūŗpunktu ar divām dažadām pieskarēm (178 ras.).

Punktu A sauc par pirmā veida atgriešanās punktu, vaj galotni.

Beidzot aplūkosim gadijumu, kad taisnes a un punkta B kustibas virzieni mainas (183 ras.).

Sinī gadijumā apgriešanās un atgriešanās punktu (181 un 182 ras.) īpašibas sakopotas. Šādu punktu A sauc par **otrā veida atgriešanās punktu, vaj šnīpi.**

Augšā mēs jau aizrādijām, ka punktu A (180 ras.) sauc par regularo punktu; bet punktus A, attēlotus 181, 182 un 183 rasejumos, sauc par **sevišķiem punktiem.** Tādus sevišķus punktus dabujam tikai pie līknēm, kuŗu šķira ir augstaka par otru.

Līdz šim mēs katram, attiecibā uz pieskari nepārtrauktam, līknes punktam dabujam vienu pieskari. Bet dažreiz vienā punktā A varam dabut ari divas (trīs, jeb n) pieskares, ja līkne caur vienu un to pašu punktu iet divas (trīs, jeb n) reizes. Tāds gadijums ir attēlots 184 rasejumā, kur līkne m iet divas reises caur vienu un to pašu punktu A. Šādu punktu sauc par div- (trij-, jeb n-) kārteju punktu. Punktā A mūsu gadijumā dabujam divas dažadas pieskares t_1 un t_2. Bet var gadities, ka n-kārtejā punktā divas, vaj vairakas no n pieskarēm sakrīt. Divkārtejs punkts tādā gadijumā pārvēršas galotnē.

Var ari gadities, ka līknei ir kopeja divkārtpieskare ar diviem atšķirtiem pieskaršanās punktiem. Ja abi divkārtpieskares pieskaršanās punkti sakrīt, tad dabujam līknes **pašpieskaršanās punktu** A (185 ras.).

Līkne var sastāvet no diviem, jeb vairakiem zariem, pie tam var gadities, ka viens zars pārvēršas punkta veidā. Šādu punktu sauksim par **atšķirtu punktu.** Viņu dabujam, piemēram, iedomadamies, ka līkne, pa kuŗu krustojas divas līkas virsas, pārvēršas punkta veidā, t. i. ja pieņemsim, ka divas līkas virsas nekrustojas, bet pieskāras vienā punktā Atšķirtā punktā mēs nevaram vilkt pieskari.

Pievestie piemēri pieder biežaki sastopamiem sevišķo punktu veidiem.

154 §. Līknes liece; lieces aploce.

Kautkādas nepārtrauktas*) līknes m punktos A un C vilkto pieskaru t_1 un t_2 veidotu leņķi φ (186 ras.) sauc par līknes **pilnu lieces leņķi** starp punktiem A un C. Ja mēs leņķi φ dalisim uz loka AC gaŗumu, tad dabusim **videjo** loka AC **lieci.**

Tā kā normales punktos A un C ir stateniskas pret attiecigām pieskarēm t_1 un t_2, tad dabusim, ka normales punktos A un C veido to pašu lieces leņķi φ.

Par līknes lieci zinamā punktā, piemēram, A, sauc robežu, kurp tiecas dalijums $\frac{\varphi}{AC}$, ja punkts C bezgali tuvojas punktam A, t. i. līknes liece zinamā punktā ir $\frac{d\varphi}{ds}$, ja $d\varphi$ ir divu bezgali tuvu pieskaru veidots leņķis, bet ds ir loka gaŗums starp attiecigiem bezgali tuviem pieskaršanās punktiem.

*) Attiecibā uz pieskari.

Līknes lieci zinamā punktā varam definet ari šādi. Caur patvaļigi pieņemtiem līknes m (187 ras.) trim punktiem A, B un C varam vilkt aploci, kuŗas centrs Ω_1 atrodas pret AB un BC vilkto vidusstateņu krustošanās punktā. Ja griezejās AB un BC tiecas ieņemt pieskares stāvokli, vilktās punktā B pret līkni m, tad punkti A, B un C robežgadijumā pārvēršas līknes bezgali tuvos punktos, tapēc aplocei, kas robežgadijumā iet caur šiem trim bezgali tuviem punktiem A, B un C, ir ar līkni m trīs kopeji punkti, jeb divi kopeji līknes elementi. Ši aploce, kas līknei pieskaras punktā B, ieņem līknes attiecigās daļas vietu.

Tamlīdzigi, caur punktiem B, C un D varam vilkt aploci, kuŗas centrs Ω_2 atrodas attiecigo vidusstateņu krustošanās punktā. Kā rasejumā redzams, centri Ω_1 un Ω_2 guļ uz kopeja vidusstateņa (normales).

Kā zinams, aploces (radiusa r) liece ir pastāvigs lielums, kas līdzinas $\frac{1}{r}$, tapēc līknes lieci patvaļigā punktā varam izmērot ar aploces lieci, kas iet caur aplūkoto punktu. Tā tad līknes liece punktā B ir vienlīdziga ar aploces lieci, kas iet caur punktu B un diviem bezgali tuviem punktem A un C, guļošiem uz dotās līknes pa abām pusēm no punkta B.

Aploci, ejošo caur trim bezgali tuviem līknes punktiem A, B un C, sauc par līknes lieces aploci punktā B; attiecigo radiusu sauc par lieces radiusu, bet attiecigo centru — par lieces centru. Kā aizrādits, lieces aplocei ar līkni ir trīs bezgali tuvi punkti, t. i. lieces aploce vispārejā gadijumā pieskaras un krusto doto līkni, tapēc lieces aploce pieskaršanās punktā no vienas līknes puses pāriet otrā pusē, kā tas, piemēram, redzams 188 rasejumā*). Ikkatra cita aploce, kas pieskaras līknei, atrodas līknes vienā pusē.

Kā 187 rasejumā redzams, lieces aploces centru varam uzlūkot, kā divu līknes taisnlinijaino blakus elementu vidusstateņu, vaj divu bezgali tuvu normaļu krustošanās punktu. Uz katra vidusstateņa, vaj normales atrodas divi bezgali tuvi lieces aploču centri (Ω_1 un Ω_2), kas ir zinamās normales krustošanās punkti ar iepriekšejo un sekojošo normali.

Visvienkāršaki lieces centru varam atrast šādi (188 ras.). Vilksim punktos A, B, C, D... pret doto līkni m pieskares un nospraudisim uz šīm pieskarēm vienlīdzigus nogriežņus $t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots$ dabujot punktus A′, B′, C′, D′.., kas visi kopā veido zinamo līkni n. Ja nu līknes B punktā vēlamies uzmeklet attiecigās lieces aploces centru Ω, tad attiecigā līknes n punktā B′ velkam pret n pieskari l. No B′ velkam stateni, vaj normali $p' \perp l$, un no B velkam $p \perp t_2$, dabujot normaļu p' un p krustošanās punktā mekletās lieces aploces centru Ω.

Aizrādītās konstrukcijas pareizibu nav grūti pierādit.

*) Ja lieces aploce atrodas vienā pusē no dotās līknes, tad viņai ar līkni ir četri kopeji punkti. Šadu punktu (vietu) sauc par līknes virsotni.

Ja līkne m būtu aploce, tad, saprotams, ari līkne n būtu ar m koncentriskā aploce, un p un p' krustotos kopejā centrā Ω. Bet, kā zinams, lieces aploce iet caur punktu B un diviem bezgali tuviem līknes punktiem A un C, kas guļ pa abām pusēm no B, t. i. līknes daļa ABC sakrīt ar zinamo aploces daļu un tapēc līknes n daļu A′B′C′ varam uzlūkot, kā ļoti mazu ar mekleto lieces aploci koncentriskās aploces daļu, kuŗas centru Ω tapēc varam konstruet aizrādītā veidā.

155 §. Evolvente un evolute.

Pieņemsim, ka atsevišķiem dotās līknes m punktiem A, B, C.... (189 ras.) mēs uzmeklejām attiecigos lieces centrus Ω_1, Ω_2, Ω_3.... Ja punkti A, B, C... ir bezgali tuvi līknes m punkti, tad pakāpeniskos lieces centrus Ω_1, Ω_2, Ω_3 savienodami, dabujam līkni n, kas ir nepārtraukta, ja m attiecibā uz pieskari ir nepārtraukta līkne.

Pēc 187 rasejuma uz katras normales atrodas divi bezgali tuvi lieces centri, kas noteic zinamo līknes n taisnlinijaino elementu, tapēc līknes m normales (189 ras.) ir pieskares pret līkni n. Līkni m sauc par a p t v e r a m o, j e b e v o l v e n t i, bet līkni n par aptverošo, j e b e v o l u t i. (Līkne n aptver atsevišķus normaļu stāvokļus).

Starpiba starp divu pakāpenisko līknes m normaļu gaŗumiem ir vienlīdziga ar attiecigo līknes n taisnlinijainā elementa gaŗumu. Tapēc ari starpiba starp normaļu gaŗumiem divos patvaļigos līknes m punktos A un C, ir vienlīdziga ar līknes n gaŗumu starp attiecigiem lieces centriem, jeb pieskaršanās punktiem Ω_1 un Ω_3. Ja mēs uz normales $A\Omega_1$ nospraudisim no punkta A nogriezni $A\Omega'_3 = C\Omega_3$, tad $\Omega_1\Omega'_3 = \Omega_1 A - \Omega_3 C = \smile\Omega_1\Omega_3$, t. i. nogrieznis $\Omega_1\Omega'_3$ ir vienlīdzigs ar loka $\Omega_1\Omega_3$ rektificeto gaŗumu.

Var iedomaties, ka taisne $\Omega_1\Omega'_3$ ir neizstiepjams diegs, kam viens gals piestiprinats punktā Ω_1, bet otru galu uztin uz līkni n, pie kam šis gals veido līkni m_1. Aizrādito kustibu var izdarit ari apgriestā virzienā, pie kam dabujam diega, jeb līknes $\Omega_3\Omega_1$ notīšanu, jeb rektifikaciju.

Ja mēs līkni m aplūkosim no šā viedokļa, tad viņu varam uzlūkot kā ceļu, pa kuŗu virzas kautkāds, pret līkni n tangentiali vilktas taisnes $A\Omega_1$, punkts A, ja mēs šo taisni, jeb diegu $A\Omega_1$ uztīsim uz līkni n, jeb kas tas pats ir, ja pieskare $A\Omega_1$ veļas ap līkni n. Pie tam pieņemsim, ka pieskari veļ, neslīdot pa līkni n, t. i. pieskare $A\Omega_1$ nekustas virzienā, kuŗš sakrīt ar acumirkligo pieskares virzienu. Tā kustedamies, punkts A zinamā acumirklī uzgulsies punktā F uz likni n, kas notiks tad, ja $\smile\Omega_1 F = \Omega_1 A$.

Tā kā līknes m pieskares (neaizrāditas rasejumā), ir stateniskas pret attiecigām līknes m normalēm, vāj ari stateniskas pret attiecigām līknes n

pieskarēm, tad dabujam, ka pieskare līknes m punktā F ir stateniska pret pieskari, kas tanī pašā punktā F vilkta pret līkni n, jeb ar citiem vārdiem, līknes m un n punktā F krustojas ortogonali, t. i. taisnā leņķī.

Ja mēs turpinasim velt taisni (pieskari) $\Omega_1 A$ ap līkni n, tad dabusim jauno līknes m zaru m'. Pie tam pieskare pret n, ejot caur punktu F, itkā apgāžas, veidodama pie pāriešanas no bezgali tuva punkta pa kreisi no F, līdz bezgali tuvam punktam pa labi no F, — leņķi, kas līdzinas 180^0. Līknes $m m'$ punkts F, acim redzot, ir pirmā veida atgriešanās punkts (153 §).

Tā kā punktu A uz pieskares, kas iet caur līknes n punktu Ω_1, varam pieņemt pilnigi patvaļigi, tad līknei n atbilst bezgali daudz evolventu (m, m_1...), ko sauc par līdzteku līknēm. Saprotams, ka šīm līdzteku evolventēm ir kopejas normales, no kuŗām līdzteku evolventes izgriež vienlīdzigas daļas (starp m un m_1).

156 §. Telpas līknes.

Telpas līko mēs varam uzlūkot kā ceļu, ko veido punkts, kustedamies telpā pēc zinama likuma. Ja mēs pieņemsim taisnleņķaino koordinatu zistemu un punktu ortogonalas koordinatas x, y un z uzlūkosim kā zinama parametra (piemēram, laika) funkcijas t, tad dotā punkta kustibas likumu noteic nolīdzinajumi

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t) \ldots (1)$$

Telpas līkni varam noteikt ari ar diviem nolīdzinajumiem

$$F_1(x, y, z) = 0,\quad F_2(x, y, z) = 0. \ \ldots (2).$$

Izslēdzot parametru t iz kautkādiem diviem no (1) nolīdzinajumiem, dabusim atsevišķus (2) nolīdzinajumu gadijumus.

Telpas līkni sauc par algebraisko, ja F_1 un F_2 ir veselas racionalas funkcijas no x, y un z; pretejā gadijumā līkni sauc par transcendento.

Algebraiskās telpas līknes šķiru noteic pastāvigo krustošanās punktu skaits, kuros patvaļiga plakne krusto doto telpas līkni.

Ja tikai projekciju centrs neguļ uz dotās līknes, tad telpas līknes šķira nemainas, viņu projecejot uz kautkādu plakni.

Telpas līknes pieskari dabujam tapat, kā pie plakanām līknēm, iedomajoties, ka griezejās krustošanās punkti ar līkni bezgali tuvojas viens otram. Tā tad pieskare ir griezejās robežstāvoklis, un pieskarei ar līkni ir kopejs taisnlinijains elements. Tapat, kā pie plakanām līknēm, ari pie telpas līknēm pieskares virziens noteic kustedamā punkta virzienu.

Katra plakne Σ (190ª ras.) ejoša caur pieskari t, pieskaras ari telpas līknei m tanī pašā punktā P, kuŗā pieskare t pieskaras līknei m. Šādu plakni sauc par **tangentialo plakni**. Tā kā caur taisni (pieskari) var vilkt bezgali daudz plakņu, tad pret telpas līkni zinamā punktā var vilkt bezgali daudz tangentialo plakņu. Vispārejā gadijumā tāda tangentialā plakne Σ krusto telpas līkni m vēl kautkādā punktā A.

Iedomasimies, ka plakni Σ griežam ap t tādejadi, ka krustošanās punkts A bezgali tuvojas pieskaršanās punktam un beidzot ar viņu saplūst. Tad plakne Σ ieņem robežstāvokli, kuŗu 190^b rasejumā atzīmejam ar Ξ. Pie tam plaknei Ξ ar līkni m ir trīs kopeji punkti; plakne Ξ pieskaras un krusto līkni m kopejā punktā P. Ja mēs tangentialo plakni pagriestu vēl tāļaki, tad otrā pusē no P dabutu krustošanās punktu, līdzigo punktam A. 190^b rasejumā atzīmeto plakni Ξ sauksim par telpas līknes m **pieglaušanās, vaj lieces plakni** punktā P.

Šai plaknei ar līkni m ir **trīs kopeji bezgali tuvi punkti, vaj divi bezgali tuvi taisnlinijaini elementi, jeb pieskares.**

Pēdejo apstākli ievērojot, mēs varam konstruet līknes m atsevišķas pieglaušanās plaknes, kā tas aizrādits 191^a rasejumā. Katra tāda pieglaušanās plakne ir noteikta ar divām pagaŗinatām pieskarēm. Atsevišķas pieglaušanās plaknes krusto plakni H pa lausto liniju s, kuŗa robežgadijumā pārvēršas līknē s (191^b ras.). Pieskares viskopibā veido līko virsu, kuŗas pēdu linija attiecibā uz H ir līkne s. Šo līko virsu sauc **par atgriešanās virsu**, kuŗu vēlak aplūkosim vēl tuvaki (201 §).

Pieglaušanās plaknes pēdu liniju s' patvaļigā līknes m punktā 4 dabusim, ja pagaŗinasim pieskares 3–4 un 4–5, kas krustojas punktā 4. Uzmekledami šo pagaŗinato pieskaru pēdu punktus attiecibā uz H un viņus savienodami, dabusim s'. Saprotams, ka robežgadijumā (191^b ras.) 4 punkta pieglaušanās plaknes pēdu linija s' pieskaras pēdu līknei s punktā 4', kas ir pagaŗinatas, caur 4 punktu ejošas, pieskares pēdu punkts.

Algebraiskās telpas līknes klasi noteic negrozigs, caur patvaļigu telpas punktu pret doto telpas līkni velkamo pieglaušanās plakņu skaits.

192 rasejumā aizrādita telpas līkne m, pieskare t un pieglaušanās plakne Ξ punktā P.

Ikkatru caur punktu P, stateniski pret pieskari t ejošu taisni sauc par telpas līknes **normali** punktā P. Normaļu kopums noteic caur punktu P, stateniski pret t, ejošo plakni Π. Šo plakni sauksim par līknes **normalplakni** punktā P. Taisni p, pa kuŗu normalplakne krusto pieglaušanas plakni, sauc par līknes m **galveno normali** punktā P. Galvenā normale tā tad guļ uz pieglaušanās plaknes Ξ.

Caur P, stateniski pret p vilkto taisni k sauc par līknes m **binormali** punktā P. Caur pieskari t un binormali k ejošo tangentialo plakni Σ sauc par **rektificejošo plakni**.

Tādā kārtā līknes m punktā P dabujam trīs savstarpeji stateniskas plaknes: pieglaušanās plakni Ξ, normalplakni Π un rektificejošo plakni Σ, kas krustojas pa trim savstarpeji stateniskām taisnēm (koordinatu asīm): pieskari t, galveno normali p un binormali k. Aizrāditās plaknes un koordinatu asis, punktam P kustoties pa telpas līkni m, vienmēr maina savus stāvokļus telpā.

Kā augšā aizrādits, pieglaušanās plaknei Ξ ar līkni m ir trīs kopeji punkti. Caur šiem trim punktiem varam vilkt aploci, kas noteic telpas līknes m lieces aploci punktā P. Šīs lieces aploces plakne saplūst ar pieglaušanās plakni un lieces aploces centrs (Ω) guļ uz galvenās normales (192 ras.). Vispārejā gadijumā lieces aploce pieskaras un krusto telpas līkni m punktā P, kā mēs to ari redzejām 188 rasejumā attiecibā uz plakanu līkni. Tapēc lieces aploce punktā P no vienas līknes m puses pāriet otrā pusē. Ja lieces aploce paliek vienā pusē no telpas līknes, tad lieces aplocei ar līkni ir četri kopeji punkti, un attiecigo pieskaršanās punktu sauc par telpas līknes virsotni.

Lieces leņķis punktā P līdzinas $\frac{d\varphi}{ds}$ pie tam $d\varphi$ ir divu bezgali tuvu pieskaru (taisnlinijaino elementu) veidots leņķis, bet ds ir loka garums starp attiecigiem bezgali tuviem pieskaršanās punktiem. Lieci punktā P varam ari noteikt ar $\frac{1}{\varrho}$, kur ϱ ir lieces aploces radiuss. Aizrāditā kārtā izmēroto lieci sauc par telpas līknes pirmo lieci punktā P.

Divu bezgali tuvu pieglaušanās plakņu, piemēram P un Q (191ᵃ ras.), veidotu leņķi sauksim par vērpšanas leņķi, jeb otro lieci. Šo leņķi apzīmesim ar $d\psi$, bet attiecigo pieskaršanās punktu attālumu ar ds. Tad leņķis $\frac{d\psi}{ds}$ ir līknes vērpšanas leņķis, vaj otrā līknes liece zinamā vietā.

Aiz aizrāditā iemesla, telpas līknes sauc ari par līknēm ar divkārteju lieci.

Lai dabutu telpas līkni, mēs varam iedomaties, ka kautkāda plakne, piemēram, plakne P (191ᵃ ras.) griežas ar taisni 3–4, kamēr ta saplūst ar plakni Q, pie tam uz plaknes P guļošā taisne 3–4 griežas ap punktu 4. Plaknei P sakrītot ar plakni Q, taisne 3–4 saplūst ar 4–5; pie tam pa taisnēm 3–4 un 4–5 kustas punkts, kuŗš pakāpeniski ieņem stāvokļus 3, 4 un 5. Krustedamā punkta (3) ceļš ir aizrāditā telpas līkne m. Atkaribā, vaj griezošās plaknes, griezošās taisnes un kustedamā punkta kustibas virzieni paliek tie paši, jeb daļa no aizrāditiem elementiem, vaj ari visi elementi maina savu kustibas virzienu, mēs tamlīdzigi, kā 181—183 ras., dabusim sevišķus telpas līknes punktus. Pie tam var būt astoņi dažadi gadijumi. Pirmā gadijumā, kas aizrādits 192 ras., kad visu elementu kustibas virzieni nemainas, mēs dabujam regularo telpas līknes punktu (P), bet parejos gadijumos, kad aizrādito elementu kustibas virzieni pa daļai, jeb visi mainas, dabusim sevišķus punktus.

Visvienkāršaki mēs varesim šos gadijumos ietēloties šādi. 192 rasejumā aizrāditas plaknes Ξ, Σ un Π sadala telpu astoņos oktantos. Punkts P dala līkni m divās daļās. Ja nu mēs vienu līknes daļu vienmēr pieņemsim tanī pašā oktantā, bet otru daļu pēc rindas pieņemsim vienā no 8 oktantiem, tad dabusim minetus astoņus sevišķus gadijumus.

Lai noteiktu telpas līknes patieso gaŗumu, mēs atsevišķas tangentialās, vaj pieglaušanās plaknes varam savienot ar zinamo plakni*); bet vēl vienkāršaki mēs līknes patieso gaŗumu uzmeklesim, ja caur atsevišķiem līknes punktiem vilksim līdzteku projecejošus starus un iegūto velteniskо virsu (193ᵃ ras.) notīsim, kā tas aizrādits 193ᵇ rasejumā.

II nodaļa. Vispārejie jēdzieni par likām virsām.

157 §. Dažadie liko virsu veidi.

Telpā kustedamās, līkne veido līko virsu. Līko virsu veidojošu līkni sauz par veiduli; veidules forma var mainities, vaj ari nemainities. Atsevišķā gadijumā veidule var būt taisnā linija. Atkarigi no tam, vaj virsas veidule ir taisne, jeb līkne, mēs izšķirsim taišņu un līkņu veidotās līkās virsas. Pirmās nosauksim par taisnes virsām, bet otrās — par līknes virsām, vaj vienkārši par līkām virsām. Taisne, jeb līkne telpā var kusteties tā, ka viņa vienmēr krusto kautkādu doto taisni, vaj līkni. Pēdejo liniju sauc par vaduli.

Atkarigi no tam, vaj divi bezgali tuvi kustedamās taisnes (veidules) stāvokļi krustojas, vaj nē, t. i., vaj viņas guļ uz vienas plaknes, vaj nē, mēs izšķiram tā saucamās notinamās līkās taisnes virsas (notinamās taisnes virsas) un nenotinamās, jeb greizās līkās taisnes virsas (nenotinamās greisas taisnes virsas). Pirmā gadijumā doto virsu varam savienot ar plakni, t. i. varam virsu notīt, bet otrā gadijumā to nevaram.

194 rasejumā aizrādita notinamā taisnes virsa. Atsevišķie kustedamās taisnes stāvokli atzīmeti ar A_1A_2, B_1B_2.... E_1E_2. Visus kustedamās taisnes bezgali tuvus krustošanās punktus savienodami, telpā iegūsim līko liniju $k = $ A, B....E, ko sauc par aplūkotās virsas atgrieśanās līniju, jo vispārejā gadijumā patvaļiga plakne krusto doto virsu pa līkni ii', kuŗas atgriešanās punkts (galotne) C (153 §) guļ uz atgriešanās linijas k.

Aplūkotā virsa sastāv no divām daļām (pusēm), kas piesliejas pa līkni k; notinumā šīs daļas apsedz plaknes daļu, uz kuŗas viņas notītas, — divkārteji.

Aizrādito virsu varam iedomaties ari tā veidotu, ka taisne A_1B_1 veļas pa telpas līkni k, visu laiku tai pieskaroties. Pie tam katras divas bezgali tuvas pieskares krustojas kopejā punktā, kapēc dabujam jau 191 rasejumā aizrādito virsu.

---

*) Gadijumā, ja dota notinamā telpas līkne.

Virsas, ko viskopibā veido telpas līknes galvenās normales, jeb binormales, pieder pie nenotinamām greizām taisnes virsām.

Ja taisne A_1A_2 (195 ras.) telpā kustoties, vienmēr ir līdztece zīnamam virzienam MN un visu laiku iet caur doto vaduli *m*, tad aizrādītā kārtā veidoto virsu sauc par veltenisko virsu.

Ja vadule ir aploce $A_1B_1C_1D_1$ (196 ras.) un atsevišķie kustedamās veidules stāvokļi ir stateniski pret aploces $A_1B_1C_1D_1$ plakni, tad dabujam taisno aploces velteņa virsu, vaj taisno aploces velteni. Bet ja veidules A_1A_2, B_1B_2.... nav stateniskas pret pamatu $A_1B_1C_1D_1$, tad dabujam slīpo aploces velteņa virsu, vaj slīpo aploces velteni.

Velkot plakni līdztekus $A_1B_1C_1D_1$, dabujam velteņa augšejo pamatu $A_2B_2C_2D_2$; pamatu centrus F_1 un F_2 savienodami, dabujam velteņa asi *o*.

Ja veidule telpā kustedamās vienmēr iet caur doto vaduli ABCD (197 ras.) un nekustamo punktu L, tad dabujam smailisko virsu, vaj smaili. Punktu L sauc par smaiļa virsotni, bet ABCD par smaiļa pamatu. Pagaŗinot smaiļa veidules otrā pusē no L, dabujam smaiļa otro, jeb augšejo daļu (pusi), kuŗa ir zimetriska apakšejai daļai (pusei) attiecibā uz virsotni L. Ja vadule ABCD ir aploce, tad dabujam aploces smaili. Taisni $LF = o$, kas savieno pamata (aploces) centru F ar virsotni L, sauc par smaiļa asi. Atkaribā, vaj ass *o* ar atbalstu veido taisno, vaj slīpo leņķi, mēs izšķiram taisnus un slīpus smaiļus.

Ja smaiļa virsotne atrodas bezgalibā, tad smailis pārvēršas velteni, tapēc velteni varam uzskatit kā smaili ar bezgali tālu virsotni.

Acim redzot, smailis un veltenis pieder pie notinamām taisnes virsām.

Līkne, telpā kustedamās, var veidot dažadas līkas virsas. Atsevišķā gadijumā, ja dotā līkne A_1A_2 (198 ras.) griežas telpā ap doto taisni — asi — *o*, tad viņa veido tā saucamo griešanās virsu. Pie tam ikkatrs līknes punkts virzas uz plaknes, stateniskas pret griešanās asi *o*. No punktiem A_1 un A_2 pret asi *o* vilktie stateņi r_1, jeb r_2, noteic šo punktu griešanās radiusus. Ikkatra plakne, ejoša caur griešanās asi, krusto griešanās virsu pa tā saucamo meridianu. Saprotams, ka visi meridiani vienlīdzigi. Katra pret griešanās asi *o* stateniska plakne krusto griešanās virsu pa zinamo platuma aploci. Platuma aploces nav vienlīdzigas.

Pie griešanās virsām pieder lielaka daļa no dzīvē sastopamām virsām. Saprotams, ka smaili, velteni un plakni tapat var uzlūkot, kā atsevišķas griešanās virsas veidus.

Jaatzīmē ka vienu un to pašu virsu var dažadi veidot. Tā, piemēram, taisnā aploces velteņa virsu (196 ras.) dabujam ne tikai veidulei A_1A_2 griežoties ap asi *o*, bet šo virsu varam iedomaties ari veidotu, veidojošai aplocei $A_1B_1C_1D_1$ kustoties telpā tā, ka viņas plakne vienmēr ir stateniska pret asi o un viņas centrs F_1 virzas pa vaduli — asi — o. Atsevišķie kustedamās aploces stāvokli pie tam, saprotams, ir savstarpeji līdzteči.

Tamlīdzigi ari smailisko virsu (197 ras.), vaj griešanās virsu (198 ras.) varam iedomaties veidotu, veidojošai aplocei m tā kustoties telpā, ka viņas atsevišķie stāvokļi vienmēr ir līdzteči, un pie tam aploces radiusa lielums mainas pēc zinama likuma.

Pie smailiskās virsas veidošanas šo likumu noteic dotā veidule AL, bet pie griešanās virsas veidošanas, likumu noteic vadošās līknes A_1A_2 forma.

Aizrādītā kārtā veidotas virsas sauc ari par bīdišanās virsām.

Ja līkne, vaj taisne pēc zinama likuma virzas telpā pa vītes liniju, tad viņa veido tā saucamo vītes virsu.

Ar pārejiem līko virsu veidiem iepazīsimies vēlak. Aizrādisim šeit vēl uz to, ka līko virsu varam uzlūkot ari kā ģeometrisko līkņu vietu, pa kuŗām pakāpeniski krustojas kautkādas citas kustošās virsas atsevišķie stāvokļi. Tādu kustošu virsu sauc par veidojošu virsu, bet iegūto virsu sauc par aptverošu virsu. Tā, piemēram, ja pieņemsim, ka lodes centrs F′ (199 ras.) virzas pa taisni o tā, ka viņas mainošs radiuss r_1 vienmēr ir stateniski pret doto taisni (vaduli) LA, tad ikkatras lodes bezgali tuvi stāvokļi krustojas pa aplocēm (ABCD), kas visas kopā sastāda taisnā smaiļa virsu ar asi o un veiduli LA. Šā smaiļa virsu varam uzlūkot kā kustošās lodes (ar mainigu radiusu r_1) aptverošo virsu. Līkni ABCD, pa kuŗu krustojas divi bezgali tuvi kustošās virsas stāvokļi, sauc par charakteristiku. Acim redzot, to pašu virsu dabujam grozīgai charakteristikai kustoties pēc zinama likuma.

Virsu sauc par alģebraisko, ja viņu varam noteikt ar nolīdzinajumu $f(x, y, z) = 0$, kuŗa kreisa daļa ir vesela racionala funkcija, pie kam locekļu augstakā pakāpe noteic virsas šķiru. Nealģebraiskas virsas sauc par transcendentām. Virsas šķiru noteic patvaļigas taisnes krustošanās punktu skaits ar doto virsu. Ja taisne krusto virsu n punktos, pie kam daļa no šiem punktiem var būt šķietama, tad virsu sauc par n-ās šķiras alģebraisko virsu, bet ja taisnes krustošanās punktu skaits ar doto virsu ir bezgali liels, tād attiecigā virsa ir transcendenta virsa. Pirmās šķiras virsa ir plakne, kuŗas vispārejais nolīdzinajums ir $Ax + By + Cz + D = 0$, pie kam A, B, C un D ir pastāvigi koeficienti. Pie otrās šķiras virsām pieder, piemēram, lodes virsa, kuŗas nolīdzinajums ir $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Katra plakne krusto doto n-ās šķiras virsu pa n-ās šķiras līkni, bet apgriestā kārtā mēs ne vienmēr pēc griezumā dabūtās līknes šķiras varam noteikt virsas šķiru, jo griezuma līkne atsevišķos gadijumos var pārvērsties zemakās šķiras līknē, nekā dotā virsa. Tā, piemēram, uz katras griešanās virsas varam griezumā ar plakni dabut platuma aploces, kuŗas pieder pie otrās šķiras līknēm, bet pati virsa var būt augstakās šķiras, nekā otrās.

Otrās šķiras virsas krustojas ar griezejo plakni pa smaiļa griezumiem (aploce, elipse, hiperbole un parabole).

Divas virsas, kuŗu šķiras ir m un n, krustojas pa $m.n$-ās šķiras telpas līkni, jo patvaļiga plakne krusto dotās virsas pa m-ās un n-ās šķiras līknēm, kuŗām ir $m.n$ kopeji punkti, kas guļ uz abām virsām.

Līkās virsas klasi noteic pastāvigs, caur patvaļigu taisni telpā, pret doto virsu velkamo tangentialo plakņu skaits. Virsas otrās šķiras ir ari otrās klases, jo caur patvaļigu taisni varam vilkt tikai divas tangentialās plaknes pret doto virsu.

Virsas, kuŗu veidošanas likumi nav zinami, sauc par grafiskām virsām.

158 §. Tangentialās plaknes.

Pieņemsim, ka dots kautkādai virsai piederošs punkts A (200 ras.). Vilksim trīs patvaļigas līknes m, n un p, kas guļ uz dotās virsas un iet caur kopeju punktu A. Doto virsu tad var iedomaties iegūtu, līknei m slīdot pa divām dotām vadošām līknēm n un p. Pieņemsim, ka m' ir patvaļigs kustošās līknes stāvoklis, pie kam m' un līknēm n un p ir kopeji punkti B un C. Taisnes, kas savieno punktus A, B un C, noteic kautkādu $\triangle$-i ABC, kuŗa malas AB, AC un BC noteic līkņu n, p un m' sekantes, vaj griezejās. Pieņemsim, ka līkne m' atgriežas savā pirmatnejā stāvoklī m. Tad robežgadijumā griezejās AB, AC un BC kļūst par līkņu n, p un m pieskarēm t_1, t_2 un t_3 kopejā punktā A. Tā kā griezejās AB, AC un BC atrodas vienā plaknē, jo veido $\triangle$-i ABC, tad viņu robežstāvokļiem, t. i. pieskarēm t_1, t_2 un t_3 tapat jaatrodās vienā kopejā plaknē.

Plakni, kas satur pieskares, vilktās pret kautkādām līknēm, guļošām uz dotās virsas un ejošām caur kopejo punktu A, sauc par dotās virsas tangentialo plakni aplūkotajā punktā.

Tā kā uz dotās virsas caur punktu A varam vilkt līkni m pilnigi patvaļigi, tad dabujam, ka pieskares, vilktas pret visām, uz dotās virsas guļošām un caur kopeju punktu ejošām līknēm, guļ uz kopejas tangentialās plaknes.

Plakni noteic ar divām krustodamām taisnēm. Tapēc, lai noteiktu dotās virsas tangentialo plakni dotā punktā A, pietiek, ja caur punktu A velkam pieskares pret kautkādām divām dotās virsas līknēm, kas abas iet caur punktu A.

Pieņemsim, ka caur patvaļigi uz dotās plaknes pieņemtu punktu A (201 ras.) ir vilktas tangentialā plakne P un patvaļiga griezejā plakne R. Plakne R krusto doto virsu pa līkni m, bet plakni P pa taisni t_I, kas iet caur punktu A. Acim redzot taisne t_I pieskaras līknei m punktā A, no ka seko, ka katra tangentialā plakne krustojas ar katru griezejo plakni, ejošo caur pieskaršanās punktu (A), pa taisni, kas ir pieskare pret līkni, iegūto griezejai plaknei krustojoties ar doto virsu.

Atsevišķos gadijumos tangentialās plaknes konstruešanu var pavienkāršinat. Tā, piemēram, caur patvaļigu punktu A (202 ras.) uz smailiskās virsas, kuŗas vadule ir m, bet virsotne — L, var vilkt taisnlinijaino veiduli $n = AL$. Šo veiduli varam uzlūkot kā līkni, pa kuŗu griezejā plakne krusto doto smailisko virsu. Saprotams, ka ar n sakrīt pieskare t_I, pa kuŗu griezejā plakne krustojas ar tangentialo, caur veiduli n pret doto smailisko virsu vilkto plakni, t. i. $n = t_I$. Tapēc tangentialās plaknes noteikšanai pietiek, ja noteic caur punktu A, pret dotās virsas patvaļigo līkni m, vilkto pieskari t_{II}. Atsevišķā gadijumā līkne m var būt smailiskās virsas vadule m.

Pieskares t_I un t_{II}, jeb — kas tas pats — veidule n un pieskare t_{II} krustodamās, pilnigi noteic meklejamo tangentialo plakni punktā A.

Līdzigā kārtā varam noteikt zinamā punktā A pret veltenisko virsu vilktu tangentialo plakni, pie kam šo plakni noteic caur punktu A ejoša veidule un pret dotās virsas patvaļigu līkni m punktā A vilkta pieskare t_{II}.

Kā augšā aizrādits, mēs izšķiram notinamās un nenotinamās taisnes virsas. Pirmā gadijumā kautkādi divi veidules blakus stāvokļi atrodas vienā plaknē, t. i. krustojas galibā, vaj bezgalibā, bet otrā gadijumā veiduļu blakus stāvokli nekrustojas, bet šķērsojas telpā.

Pieņemsim, ka dota kautkāda notinamā taisnes virsa, kuŗas kautkādu divu veiduļu blakus stāvokļi ir A_1A_2 un B_1B_2 (203 ras.). Vilksim pret doto virsu punktos A_1 un A_2 tangentialās plaknes. Tam nolūkam uz dotās virsas caur pnktiem A_1 un A_2 velkam līknes m_1 un m_2, un pret viņām punktos A_1 un A_2 velkam pieskares t_1 un t_2. Tangentialā plakne, vilktā punktā A_1 pret doto virsu, noteicama ar veiduli A_1A_2 un pieskari t_1. Tamlīdzigi tangentialā plakne, vilkta punktā A_2 pret doto virsu, noteicama ar veiduli A_1A_2 un pieskari t_2. Pierādisim, ka šās divas tangentialās plaknes saplūst un pieskaras dotai virsai pa veiduli A_1A_2. Tam nolūkam savienojam blakus guļošos punktus A_1, B_1 un A_2, B_2. Taisnes A_1B_1 un A_2B_2 noteic līkņu m_1 un m_2 griezejās. Tā kā pēc aplūkotās virsas īpašibām blakus guļošas veidules A_1A_2 un B_1B_2 atrodas vienā plaknē, tad ari griezenes A_1B_1 un A_2B_2 pieder tai pašai plaknei, t. i. figuŗa $A_1A_2B_2B_1$ ir plakans četrstūris. Pieņemsim tagad, ka veidule B_1B_2 tuvinas A_1A_2, un beidzot ar viņu sakrīt. Tad griezenes A_1B_1 un A_2B_2 robežgadijumā pārvēršas pieskarēs t_1 un t_2. Griezenes visu laiku atrodas vienā kopejā plaknē, tapēc ari viņu robežstāvokļi, t. i. pieskares t_1 un t_2 guļ uz vienas kopejās plaknes, t. i. punktos A_1 un A_2 pret doto virsu vilktās tangentialās plaknes saplūst kopejā plaknē.

Tā tad kautkādā pret notinamo taisnes virsu vilktā tangentialā plakne pieskaras šai virsai pa veiduli, kas iet caur aplūkoto punktu.

Aplūkosim tagad pret nenotinamo, jeb greizo taisnes virsu vilktu tangentialo plakni.

Lai A_1A_2 un B_1B_2 (204 ras.) ir divas, uz vienas plaknes neguļošas blakus veidules. Tangentialās plaknes, kas aplūkojamai virsai pieskaras punktos A_1 un A_2, noteicamas tapat, kā iepriekšejā gadijumā, ar veiduli A_1A_2 un attiecigām pieskarēm t_1 un t_2. Bet šinī gadijumā tangentialās plaknes punktos A_1 un A_2 nesaplūst vienā plaknē un nepieskaras virsai pa veiduli A_1A_2, bet gan krusto viņu pa šo veiduli.

Lai to pierāditu, tad atkal velkam griezenes A_1B_1 un A_2B_2. Tā kā veidules A_1A_2 un B_1B_2 šinī gadijumā neguļ kopejā plaknē, tad ari griezenes A_1B_1 un A_2B_2 neatrodas kopejā plaknē. Tapēc figura $A_1A_2B_2B_1$ nav plakans četrstūris, bet greizs. Veidulei B_1B_2 tuvojoties A_1A_2, aizrāditais četrstūris visu laiku paliek greizs. Tapēc ari robežgadijumā, kad griezenes A_1B_1 un A_2B_2 pārvēršas pieskarēs t_1 un t_2, pēdejās guļ ne vienā, bet divās dazadās plaknēs, kuŗas veido kautkādu kaktu. Šās plaknes, dotai virsai zinamā punktā (A_1 jeb attiecigi A_2) pieskardamās, krusto virsu pa kopeju taisnlinijaino caur pieskaršanās punktu ejošu veiduli.

Tā tad tangentialā plakne, nenotinamai taisnes virsai zinamā punktā pieskardamās, krusto doto virsu pa taisnlinijaino, caur pieskaršanās punktu ejošu veiduli.

Par savstarpeji tangentialām virsām sauc tādas, kuŗām tangentialās plaknes, vilktas pret dotām virsām, — šo virsu kopejos pieskaršanās punktos, — saplūst. Atkaribā no virsu veida, viņas var viena otrai pieskarties vienā, jeb vairakos punktos, pa taisno, jeb līko liniju.

159 §. Tangentialās plaknes, kas iet caur doto ārejo punktu.

Pieņemsim, ka caur punktu Ω (205 ras.) pret doto virsu R javelk tangentialā plaknē. Tam nolūkam velkam smailisko virsu, ar virsotni punktā Ω, kas aptver doto virsu. Katra plakne, kas pieskaras smailiskai virsai, taī pašā laikā pieskaras ari dotai virsai R.

Lai noteiktu aptverošo smailisko virsu, jaatrod vadošā līkne ABCD, pa kuŗu šī smailiskā virsa pieskaras dotai virsai R. Tam nolūkam caur Ω velkam patvaļigu plakni P, kas krusto doto virsu pa līkni BEDF. No punkta Ω pret līkni BEDF vilktās pieskares ΩB un ΩD noteic divas uz smailiskās, aptverošās virsas guļošas veidules; bet pieskaršanās punkti B un D noteic divus uz meklejamās līknes ABCD guļošus punktus.

Vilkdami vairakas griezejās plaknes un uz katras pa diviem punktiem — līdzigi atzīmetiem B un D — noteikdami, mēs iegūsim veselu rindu uz meklejamās vadošās līknes ABCD guļošu punktu.

160 §. Tangentialās plaknes, līdzteces dotam virzienam.

Pieņemsim, ka pret doto virsu R (206 ras.), līdztekus dotam virzienam *m*, javelk tangentialās plaknes. Tam nolūkam velkam aptverošo veltenisko virsu, kuras veidules ir līdzteces dotam virzienam *m*. Pieņemsim, ka aptverošā virsa pieskaras dotai virsai pa līkni ABCD. Lai noteiktu šās līknes atsevišķus punktus, mēs velkam, līdztekus dotam virzienam *m*, patvaļīgu plakni P, un atrodam līkni BEDF, pa kuru plakne P krusto doto virsu. Pret līkni BEDF, līdztekus dotam virzienam *m* vilktās pieskares m_1 un m_2 noteic uz līknes BEDF divus pieskaršanās punktus B un D, kas abi pieder meklejamai līknei ABCD. Līdzīgā kārtā noteicam veselu rindu uz meklejamās vadošās līknes ABCD guļošu punktu.

205 un 206 ras. ar 5 un 7 ras. salīdzinot, nav grūti pārliecinaties, ka līknei ABCD (205 un 206 ras.), pa kuru aptverošais smailis, vaj veltenis pieskaras dotai virsai, 5 un 7 rasejumā pie centralās, vaj līdzteku projecešanas, jeb apgaismošanas atbilst redzamības, jeb pašēnas apveids ABCD.

Ja pieņemsim, ka plakne K (7 ras.) ir horicontalā, vaj vertikalā projekciju plakne (H, jeb V), un virziens *m* ir stateniski pret H vaj V, tad $A_p B_p C_p D_p$ noteic dotās virsas ierobežotā ķermeņa horicontalo, vaj vertikalo projekciju.

Tā tad, patvaļīga ķermeņa horicontalā, vaj vertikalā projekcija, jeb ari tā saucamie projekciju r e d z a m i b a s a p v e i d i ir plakanas līknes, kuras dabujam, attiecīgam aptverošam, vaj projecejošam veltenim krustojoties ar H, vaj V; pie kam šā projecejošā velteņa veidules ir stateniskas pret attiecīgo projekciju plakni.

Aptverošo velteņu virsas sauc par h o r i c o n t a l i, v a j v e r t i k a l i p r o j e c e j o š ā m a p t v e r o š ā m v i r s ā m.

161 §. Smailiskie un velteniskie griezumi.

Pieņemsim, ka dots taisns smailis ar vadošo aploci *m* (207 ras.). Katra plakne P_1, kas krusto visas smaiļa veidules, krusto smailisko virsu pa zinamo e l i p s i m_1. Atsevišķā gadijumā, ja griezejā plakne stateniska pret smaiļa asi *o*, tad griezumā rodas aploce *m*.

Plakne P_2, kas ir līdztece divām smaiļa veidulēm, krusto smaiļa virsu pa h i p e r b o l i, kurai divi, uz abām smaiļa daļām guļoši zari m_2 un m'_2.

Plakne P_3, kas ir līdztece vienai smaiļa veidulei, krusto smaiļa virsu pa p a r a b o l i m_3.

Caur smaiļa virsotni Ω ejoša plakne P (208 ras.) vispārejā gadijumā krusto doto smailisko virsu pa divām v e i d u l ē m A_1A_2 un B_1B_2, kas iet caur smaiļa virsotni Ω. Ja plakne P nekrusto konisko virsu, bet tikai pieskaras tai pa taisnlinijaino veiduli, tad a b a s v e i d u l e s s a p l ū s t.

Atsevišķā gadijumā griezuma līkne (elipse, hiperbole, vaj parabole) var pārvērsties vienā punktā. Tas notiksies, kad griezejā plakne (P) krustos visas veidules vienā punktā, t. i. smaiļa virsotnē Ω, un pie tam plaknei P nav neviena cita kopeja punkta ar smaiļa virsu. Šinī gadijumā griezuma līkne pārvēršas vienā atšķirtā punktā (153 §).

Ja smaiļa virsotne pārvietojas pa asi *o* līdz bezgalibai, tad smailis pārvēršas taisnā aploces veltenī. Katra plakne, kas krusto visas velteņa veidules, krusto viņa virsu pa zinamo elipsi.

Ja smailiskās, vaj velteniskās virsas vadošā ir patvaļiga līkne, tad šo virsu griezumā ar plaknēm rodas nenoteiktas līknes.

Pieņemsim, ka virsotnē Ω (207 ras.) atrodas projekciju centrs. Tad smaiļa patvaļigo griezumu (m_1 u. t. t.) var uzlūkot, kā vadošās aploces projekciju uz griezejo plakni.

Tas pats, saprotams, attiecinams ari uz to gadijumu, kad projekciju centrs Ω atrodas bezgalibā uz smaiļa ass. Pēdejā gadijumā projecejoša smailiskā virsa pārvēršas projecejošā velteniskā virsā.

Ja smailiskās, vaj velteniskās virsas ass nav stateniska pret vadošās līknes plakni, bet veido ar viņu patvaļigu leņķi, tad ari tādos gadijumos griezumā ar patvaļigu plakni, vispārejā gadijumā, dabujam elipsi, ja tikai aplūkotā virsa ir noteikta ar vadošo aploci. No tā seko, ka aploces (m) projekcija uz patvaļigu plakni (P_1), pie galibā, vaj bezgalibā atrodoša projekcijū centra un pie patvaļiga projecešanas virziena, vispārejā gadijumā ir elipse (m_1).

Ja projekciju plakne P_2 līdztece diviem projecejošiem stariem (smaiļa veidulēm), tad aploces projekcija ir hiperbole $m_2 m'_2$, kuŗai divi bezgali attālinati punkti: tie divi punkti, kuŗos attiecigās veidules krustojas ar līdzteci viņām plakni P_2.

Ja projekciju plakne P_3 līdztece vienam projecejošam staram (veidulei), tad aploces projekcija ir parabole, kuŗai viens bezgali attālinats punkts: tas punkts, kuŗa attiecigā veidule krustojas ar viņai līdzteci plakni P_3.

Tā kā smailis ir robeža, kurp sānu malas bezgali palielinot, tiecas viņām ievilktās un apvilktās piramides, tad uz 137 § pamata varam teikt, ka katras plaknes krustošanās figura ar smaili un smaiļa pamataploce ir centrali kollineari radnieciskas figuras, kuŗu centrs ir smaiļa virsotne, bet radniecibas ass ir griezejās plaknes krustošanās linija ar smaiļa pamataploces plakni. Saprotams, ka šis radnieciskais sakars paliek spēkā projekcijā uz patvaļigu plakni. Tā tad uz smaiļa virsas guļoša aploce un elipse, (hiperbole, vaj parabole) ir centrali-kollineari radnieciskas figuras.

Ja smailis pārvēršas veltenī, tad centralā kollineacija starp pamataploci un griezuma figuru (elipsi) pārvēršas affinā radniecibā (138 §).

III nodaļa. Līkņu projekcijas.

162 §. Patvaļigas līknes projekcijas.

Pieņemsim, ka dota patvaļiga līkne ABCD (209a ras.). Līknes atsevišķo punktu vienadnosaukuma projekcijas savienodami, mēs iegūsim dotās līknes horicontalo $A_1B_1C_1D_1$ un vertikalo projekciju $A_2B_2C_2D_2$. Atsevišķie horicontali projecejošie stari visā kopibā sastāda horicontali projecejošo veltenisko virsu, bet vertikali projecejošie stari, — vertikali projecejošo veltenisko virsu. Šo virsu krustošanās linijas ar H un V noteic dotās līknes projekcijas.

Lai techniskā rasejumā (209b ras.) uz dotās līknes pieņemtu kautkādu oriģinalo punktu, japieņem viņa vienadnosaukuma projekcijas uz līknes vienadnosaukuma projekcijām, pie kam abām punkta projekcijām jaatrodās uz viena stateņa pret projekciju asi.

Uz dotā techniskā rasejuma pamata (209b ras.), saprotams, nav grūti pretejā ceļā noteikt oriģinalās līknes stāvokli telpā.

Pieņemsim, ka taisne t telpā pieskaras dotai līknei punktā B (209a ras.). Plakne, kas noteikta ar pieskari t un horicontali projecejošas velteniskās virsas veiduli BB_1, pēc 158 § noteikumiem pieskaras pēdejai virsai pa veiduli BB_1. Tapēc viņa pieskaras ari līknei $A_1B_1C_1D_1$ punktā B_1. Pēc 158 § tangentialā plakne krustojas ar katru griezejo plakni H, kas iet caur pieskaršanās punktu B_1, pa taisni t_1, kas līknei $A_1B_1C_1D_1$ pieskaras punktā B_1.

Līdzigā kārtā nav grūti pierādit, ka t_2 pieskaras līknei $A_2B_2C_2D_2$ punktā B_2.

Tā tad, p i e s k a r e s p r o j e k c i j a s p i e s k a r a s v i e n a d n o s a u k u m a l ī k n e s p r o j e k c i j ā m d i v o s p u n k t o s, k a s g u ļ uz kopeja s t a t e ņ a p r e t p r o j e k c i j u a s i.

Uz tiko aizrādito pamatodamies, mēs apgriestā kārtā, velkot techniskā rasejumā pieskares pret līknes projekcijām, caur to noteicam pieskari pret oriģinalo līkni telpā.

Līkņu projekcijas vispārejā gadijumā ir līknes (209 ras.). Atsevišķos gadijumos viena, vaj abu līkņu projekcijas var būt ari taisnes. Pēdejā gadijumā dotā oriģinalā līkne ir plakana līkne, kuras plakne stateniska pret vienu no projekciju plaknēm. Ja līknes plakne stateniska pret H, tad viņas horicontalā projekcija ir taisne (210 ras.), bet ja līknes plakne stateniska pret V, tad viņas vertikalā projekcija ir taisne (211 ras.). Beidzot, ja līknes plakne stateniska pret OX, tad abas projekcijas ir taisnes (212 ras.).

Plakanas līknes īsto izskatu var viegli atrast pēc griešanās, jeb savienošanās paņēmiena. Tā, piemēram, 210 rasejumā līknes ABC plakne nostādita līdztekus V, pie kam $A_{o_2}B_{o_2}C_2$ ir līknes patiesais izskats (63 §).

211 un 212 rasejumos līkņu plaknes savienotas ar V; $A_0B_0C_0$ ir līknes patiesais izskats (65 un 34 §§).

Ja abas līknes projekcijas ir līkās linijas, tad oriģinalā līkne var būt plakana, vaj neplakana, t. i. telpas līkne. Lai uzzinatu, vaj dotā līkne plakana, vaj telpas līkne, mēs savienojam trīs patvaļigus līknes punktus A, B un C (213 ras.) un pēc tam skatamies, vaj visi pārejie līknes punkti, kā, piemēram, D un E guļ uz plaknes ABC, jeb ne.

Ja taisnes DE projekciju krustošanās punkti ar trijstūŗa ABC malu vienadnosaukuma projekcijām atrodas uz vieniem un tiem pašiem stateņiem pret OX, tad līkne ir plakana, pretejā gadijumā viņa ir telpas līkne. 213 rasejumā aizrādita līkne ir telpas līkne, jo taisne DE neguļ plaknē ABC, kas redzams no tā, ka J_1 un K_1 nesakrīt ar attiecigiem punktiem F_1 un G_1.

Dažreiz mēs jau pēc projekciju izskata varam spriest, vaj oriģinalā līkne plakana, jeb telpas līkne. Tā, piemēram, ja uz vienas projekcijas atrodas sevišķie punkti (apgriešanās, atgriešanās, pašpieskaršanās u. t. t.), bet uz otras projekcijas tādu nav, vaj ari viņi neatrodas uz vieniem un tiem pašiem stateņiem pret projekciju asi, tad oriģinalā līkne ir telpas līkne.

Vispāreji, j a v i e n a s p r o j e k c i j a s v e i d s s t i p r i a t š ķ i r a s n o o t r a s p r o j e k c i j a s v e i d a, t a d o r i ģ i n a l ā l ī k n e i r t e l p a s l ī k n e.

163 §. Slēgtā līkne.

Pieņemsim, ka dotas kautkādas slēgtas līknes *m* projekcijas (214 ras.). Lai uz dotās līknes pilnigi noteiktu kautkāda punkta projekcijas, nepieciešami vajadzigs, lai tehniskā rasejumā būtu aizrāditas dotās līknes patvaļiga viena punkta A projekcijas. Ja nu tagad pēc vienas dotās horicontalās projekcijas D_1 janoteic attiecigā vertikalā projekcija, tad caur D_1 velkam stateni pret asi OX un atzīmejam punktus B_2 un D_2, kuŗos šis statenis krusto līknes vertikalo projekciju. Jautajam, kuŗš no šiem punktiem ir punkta D vertikalā projekcija? Lai atbildetu uz jautajumu, iedomasimies, ka oriģinalais punkts A pārvietojas pa līkni *m* līdz punktam D. Pie tam horicontalā projekcija A_1, pārvietodamās caur horicontalās projekcijas galejo labo punktu C_1, sasniedz stāvokli D_1. Tapēc ari vertikalai projekcijai A_2, pārvietojoties pa līknes vertikalo projekciju, jaiet caur galejo labo punktu C_2, sasniedzot savā tālakā kustibā stāvokli D_2. No aizrāditā skaidri saprotams, ka punkta D vertikalā projekcija ir D_2, bet ne B_2.

Punkts B_2 ir oriģinalā punkta B vertikalā projekcija, pie kam šis oriģinalais punkts guļ uz līknes *m*, starp punktu A un galejo labo punktu C, kas redzams no tā, ka punkta B projekcijas atrodas starp punktu A un C projekcijām.

Līdzigā kārtā nav gŗūti pārliecinaties, ka ari E_1, E_2 un G_1, G_2 ir attiecigo oriģinalo punktu E un G projekcijas.

164 §. Krustodamās līknes.

Kā krustodamām taisnēm (36 §), tā ari krustodamām līknēm vienadnosaukuma projekciju krustošanās punktiem jaatrodās uz kopeja stateņa pret projekciju asi. Šo noteikumu izpilda, piemēram, punkta A projekcijas (215 ras.), tapēc punkts A ir doto līkņu *m* un *n* krustošanās punkts. Bet punkts $B_2 = C_2$ nav doto līkņu krustošanās punkta vertikalā projekcija, bet tikai viņu šķērsošanās punkts, jo B_1 nesakrīt ar C_1.

Atsevišķā gadijumā viena, vaj abas līknes var pārvērsties taisnēs, caur kọ viņu krustošanās pazīmes nemainas.

Ja abas dotās līknes guļ uz zinamas projecejošas plaknes, tad viņu horicontalās, vaj vertikalās projekcijas saplūst, un līkņu krustošanās punkts noteicams ar nesakrītošo projekciju krustošanās punkta palīdzibu. Tā, piemēram, 216 rasejumā aizrādits gadijums, kad abas līknes guļ uz vertikali projecejošas plaknes. Līkņu krūstošanās punkts ir A.

Ja abas līknes guļ uz profilās plaknes, tad viņu krustošanās punkta noteikšanai, profilā plakne jasavieno ar vertikalo projekciju plakni.

Ja viena no dotām līknēm $m = ABC$ (217 ras.) guļ uz profilās plaknes, bet otra dotā līkne *n* uz tās neguļ, tad noteic punkta D savienoto stāvokli D_0, kuŗā līkne *n* krusto profilo plakni, kā ari līknes *m* savienoto stāvokli m_0. Ja pie tam izrādas, ka D_0 guļ uz $m_0 = A_0B_0C_0$, tad punkts D ir līkņu *m* un *n* krustošanās punkts. Bet ja tas tā nav, kā mūsu gadijumā, tad līknes *m* un *n* nekrustojas.

165 §. Līknes krustošanās ar patvaļigu virsu.

Līknes krustošanās punktu ar patvaļigu virsu, vaj plakni sauc par l ī k n e s p ē d u p u n k t u. Atsevišķā gadijumā, ja līkne krusto H, vaj V, tad mēs iegūstam līknes horicontalo, vaj vertikalo pēdu punktu.

218 rasejumā aizrāditi līknes *m* pēdu punkti, kas noteikti tādā pašā kārtā, kā taisnes pēdu punkti (24 §).

Pēdu punkti vispārejā gadijumā sadala līknes trijās daļās, no kuŗām redzama tā daļa, kas atrodas I kvadrantā.

Atkaribā no līknes šķiras, viņa krustojas ar patvaļigu plakni vienā, divos, vaj vairakos punktos. Tapēc līknei var būt viens, divi, vaj vairaki vienadnosaukuma pēdu punkti.

Ģeometriskai līknei, kuŗas veidošanas likums zinams, līknes pēdu punktus vienmēr var konstruet, ja attiecigā kārtā pagaŗinam līknes projekcijas. Bet ja dota grafiska līkne, un nav zinami viņas projekciju krustošanās punkti ar asi OX, tad tādas līknes pēdu punktus nevar noteikt, jo nezinot oriģinalās līknes likumu, mēs nevaram pagaŗinat viņas projekcijas līdz krustošanai ar OX.

Lai noteiktu līknes krustošanās punktu M ar patvaļigu plakni P (219 ras.), mēs rīkojamies analoģiski tam, kā mēs to darijām taisnes krustošanās punkta noteikšanai ar patvaļigu plakni (102 §, 109 ras.). Tam nolūkam caur līkni *m* velkam patvaļigu virsu Q un atrodam līkni *n*, pa kuŗu virsa Q krustojas ar plakni P. Punkts M, kuŗā krustojas līknes *m* un *n*, ir meklejamais punkts.

Techniskā rasejumā konstrukcijas visvienkāršaki izpildamas, ja caur līkni *m* vilksim ne patvaļigu virsu Q, bet horicontali, vaj vertikali projecejošu virsu.

Ja pieņemsim, ka 219 rasejumā P nav plakne, bet patvaļiga virsa, tad ari šinī gadijumā krustošanas punkta M noteikšanas paņēmiens paliek tas pats.

Izpildisim attiecigas konstrukcijas techniskā rasejumā. Pieņemsim, ka jaatrod līknes $m = ABCD$ krustošanās punkts M ar plakni *sat* (220 ras.). Tam nolūkam caur līkni *m* velkam horicontali projecejošo vīrsu Q un atrodam līkni *n*, pa kuŗu virsa Q krustojas ar plakni *sat*. Līknes *n* horicontalā projekcija n_1 saplūst ar m_1, bet vertikalā projekcija n_2 noteicama ar punktu A′, B′, C′ un D′ palīdzibu, kuŗos punktu A, B, C un D horicontali projecejošie stari krustojas ar plakni *sat*. Šie punkti noteicami pēc 108 §, 115 ras. Punkts M_2, kuŗā krustojas vertikalās projekcijas $n_2 = A'_2B'_2C'_2D'_2$ un $m_2 = A_2B_2C_2D_2$, noteic meklejamā punkta M vertikalo projekciju. Pamatojoties uz M_2, nav gŗūti atrast attiecigo horicontalo projekciju M_1.

Ja plakne *sat* nav caurspīdiga, tad vēl janoteic līknes *m* redzamiba. Tam nolūkam uz līknes *m*, kautkādā pusē no punkta M, pieņemsim patvaļigu punktu un noteiksim viņa redzamibu. Aplūkosim, piemēram, punktu A. Šis punkts guļ uz kopeja horicontali projecejoša stara ar punktu A′, kas pieder plaknei *sat*. Tā kā A_2 stāv tālak no OX, nekā A'_2, tad pēc 31 § horicontalajā projekcijā redzams punkts A. Tapēc līknes *m* kreisā daļa AM horicontalajā projekcijā redzama, bet labā daļa DM šinī projekcijā nav redzama.

Analoģiski noteicama redzamiba vertikalajā projekcijā. Tam nolūkam caur punktu A velkam vienu vertikali projecejošo staru. Šis stars sastop plakni *sat* punktā A″, kuŗa horicontalā projekcija A''_1 atrasta pēc 116 ras. ar vertikalās pēdu līdzteces *v* palīdzibu. Tā kā A_1 stāv tālak no ass OX, nekā A_1'', tad punkts A vertikalajā projekcijā redzams; tapēc līknes *m* kreisā daļa AM vertikalajā projekcijā redzama, bet labā daļa MD šinī projekcijā nav redzama.

Ja līkne *m* krusto doto plakni vairakos punktos, tad katra līknes zara redzamiba janoteic atsevišķi.

166 §. Elipses īpašibas un viņas konstruešanas paņēmiens.

Pieņemsim, ka telpā doti: patvaļiga aploce ar centru F un patvaļigs projecešanas virziens *m* (221 ras.). Vilksim divus savstarpeji stateniskus caurmērus AB, CD un apvilksim ap aploci kvadratu KMLN, kuŗa malas ir līdzteces caurmēriem AB un CD. Kvadrata diagonales ir MN un KL. Šo diagonaļu nogriežņi GJ un ES noteic divus savstarpeji stateniskus aploces caurmērus. Aploces pieskares punktos G un J ir līdzteces caurmēram ES, bet pieskares punktos E un S ir līdzteces caurmēram GJ.

Nogriežņi FA un AM līdzinas aploces radiusam r, tapēc $FM = = \sqrt{FA^2+AM^2} = \sqrt{r^2+r^2} = r.\sqrt{2}$ un $\frac{FG}{FM} = \frac{r}{r.\sqrt{2}} \sim 0,7$, t. i. punkts G dala pusdiagonali FM divos nogriežņos GM un GF, kas attiecas, kā 3:7.

Tādā pašā attiecībā punkti E, S un J dala apvilktā kvadrata pusdiagonales FK, FL un FN. Šās attiecības, kā zinams, paliek spēkā, projecejot aplūkoto figuru uz kautkādu plakni, līdztekus patvaļigam projecešanas virzienam (23 §).

221 rasejumā pieņemts, ka dotā figura projeceta līdztekus virzienam m uz patvaļigu projekciju plakni. Pie tam kvadrata projekcija pārvēršas paralelogramā $K_pM_pL_pN_p$.

Vilksim patvaļigu chordu PQ, līdztekus caurmēram AB. Caurmērs CD, kas stateniski pret AB, dala chordu PQ punktā R uz pusēm, kapēc ari projekcija C_pD_p dala projekciju P_pQ_p punktā R_p uz pusēm. Līdzigu varetu aizrādit ari attiecibā uz AB, ja vilksim patvaļigu chordu, līdztekus CD. Bet ši chorda rasejumā nav aizrādita, lai to pārak nesarežģitu.

Aploce, kā zinams, pie līdzteku projecešanas projecejas rasejumā elipses veidā. Elipses caurmērus A_pB_p un C_pD_p, no kuŗām katrs dala uz pusēm otram elipses caurmēram līdztekus ejošās elipses chordas, sauc par elipses sakārtotiem caurmēriem.

Kā rasejumā redzams, elipses sakārtotie caurmēri ir divu savstarpeji statenisku aploces caurmēru projekcijas; šie caurmēri pieder tai aplocei, kuŗas projekcija ir aplūkojamā elipse.

Vispārejā gadijumā taisnam leņķim starp diviem stateniskiem aploces caurmēriem projekcijā neatbilst taisns leņķis, kapēc ari leņķis starp elipses sakārtotiem caurmēriem nav taisns leņķis. Bet starp bezgali daudziem elipses sakārtotiem caurmēriem atrodas viens tāds sakārtoto caurmēru pāris, kas savā starpā veido taisno leņķi. Tādus divus sakārtotus caurmērus sauc par elipses galvenām asīm. Pie tam viens no šiem caurmēriem ir elipses vislielakais caurmērs, kuŗu sauc par lielo asi, bet otrs sakārtotais caurmērs ir elipses mazakais caurmērs, kuŗu sauc par elipses mazo asi.

Tā kā galvenās asis ir savstarpeji statenisko oriģinalās aploces caurmēru projekcijas, tad šās oriģinalās aploces caurmēru malas un attiecigās elipses galveno asu malas sauc par attiecigo taisno leņķu malām.

bet pašus leņķus sauc par attiecigiem taisniem leņķiem. Acim redzot, ikkatrai aplocei un viņas projekcijai, t. i. elipsei, dabujam tikai vienu attiecigo taisno leņķu pāri.

Uz aizrādito pamatodamies, pēc dotiem sakārtotiem caurmēriem A_pB_p un C_pD_p varam konstruet attiecigo elipsi. Tam nolūkam konstruejam paralelogramu $K_pM_pL_pN_p$, kuŗa malas ir līdzteces sakārtotiem caurmēriem. Pēc tam velkam diagonales K_pL_p un M_pN_p un dalam pusdiagonales proporcijā 3:7, dabujot punktus G_p, E_p, J_p un S_p. Caur šiem punktiem velkam līdzteces attiecīgām diagonalēm. Šīs līdzteces ir meklejamās elipses pieskares. Ievērojot, ka paralelograma $K_pM_pL_pN_p$ malas ir pieskares pret elipsi punktos A_p, D_p, B_p un C_p, mēs ar līko linejalu varam izvilkt meklejamo elipsi.

Uz aizrādito pamatodamies, varam uzmeklet jebkuŗas dotās elipses centru. Tam nolūkam elipsē velkam divas patvaļigas līdzteku chordas un savienojam šo chordu viduspunktus, dabujot tā vienu elipses caurmēru. Šo caurmēru uz pusēm dalot, dabujam elipses centru.

Uz 221 ras. pamata nav gŗūti caur patvaļigu elipses punktu A_p vilkt pret elipsi pieskari, vaj ari otradi, pēc dotās pieskares, piemēram, M_pL_p var atrast pieskaršanās punktu D_p.

Pirmā gadijumā mēs A_p savienojam ar F_p un velkam patvaļigu chordu $P_pQ_p \parallel A_pF_p$; punktā R_p dalam chordu P_pQ_p uz pusēm, un caur A_p velkam mekleto pieskari $K_pM_p \parallel F_pR_p$.

Otrā gadijumā velkam caurmēru A_pB_p un patvaļigu chordu P_pQ_p, līdztekus dotai pieskarei M_pL_p. Taisne, kas savieno centru F_p ar chordas P_pQ_p viduspunktu R_p, iet caur meklejamo pieskaršanās punktu D_p.

Konstrueto elipsi aplūkojot, nav gŗūti novērot, ka ikkatrs elipses caurmērs, piemēram, A_pB_p, dala elipsi divās zimetriskās daļās $A_pC_pB_p$ un $A_pD_pB_p$. Katram punktam uz vienas elipses daļas atbilst attiecigs punkts uz elipses otrās daļas, pie kam attiecigie punkti, kā, piemēram, C_p un D_p, S_p un E_p u. t. t. atrodas attiecigo elipses caurmēru galos.

167 §. Aploces projekcijas.

Pieņemsim, ka jakonstruē aploces, guļošas uz dotās plaknes *sat*, projekcijas, ja dots aploces radiusa *r* patiesais lielums (222 ras.).

Tam nolūkam pēe 68 § konstruejam dotās plaknes vertikalās pēdu linijas savienoto stāvokli t_o un atzīmejam aploces savienoto stāvokli F_o. Pēc tam pēc 70 § (72 ras.) ar horicontalās pēdu līdzteces *h* palīdzibu atrodam centra F projekcijas F_1 un F_2. Lai noteiktu aploces projekcijas, kas projecejas uz H un V divu dažadu elipšu veidā, tad katrā projekcijā janoteic divi elipses sakārtotie caurmēri. Tādi sakārtotie caurmēri ir elipses lielā un mazā asis. Acim redzot, katrā projekcijā lielo asi dabujam no tā aploces caurmēra, kas uz attiecigo projekciju plakni projecejas nesagrozidamies, t. i. horicontalās projekcijas lielo asi A_1B_1 iegūstam no tā oriģinalā caurmēra AB, kas ir dotās plaknes horicontalā pēdu līdztece, un vertikalās projekcijas lielo asi E_2G_2 iegūstam no tā aploces oriģinalā caurmēra EG, kas ir dotās plaknes vertikalā pēdu līdztece.

Šie noteikumi abās projekcijās noteic elipšu lielās asis, kā ari attiecigo oriģinalo caurmēru savienotos stāvokļus, pie kam $A_0B_0 \parallel s$ un $E_0G_0 \parallel t_0$.

Mazās asis abās projekcijās iegūstam no aploces caurmēriem, stateniskiem pret tiem aploces caurmēriem, kas uz H un V projecejušies kā lielās asis. Tā tad C_1D_1 ir oriģinalā caurmēra CD, stateniska pret AB projekcija, bet J_2K_2 ir oriģinalā caurmēra JK, stateniska pret EG projekcija. Tapēc savienotajā stāvoklī $C_0D_0 \perp A_0B_0$ un $J_0K_0 \perp E_0G_0$. Savienotos stāvokļus C_0D_0 un J_0K_0 zinot, nav grūti noteikt attiecigo caurmēru projekcijas, dabujot tādā veidā elipšu mazās asis.

Tā tad elipšu galvenās asis ir divu dažadu, oriģinalās aploces, sakārtoto caurmēru pāru projekcijas.

Elipšu mazās asis var konstruet ari šādi. Tā, piemēram, mazo asi C_1D_1 var uzlūkot kā tā oriģinala caurmēra horicontalo projekciju, pa kuru horicontali projecejoša plakne, kas caur centru F iet stateniski pret horicontalo pēdu liniju s, — krustojas ar doto oriģinalo aploci. Šā caurmēra savienoto stāvokli $C'_0D'_0$ iegūsim, ja pēc 64 § (66 ras.) konstruesim centra savienoto stāvokli F'_0, un šo punktu savienosim ar caurmēra CD horicontalo pēdu punktu $N = C_1D_1 \times s$. Uz taisnes $F_0'N$, pa abām pusēm no punkta F'_0, dotā radiusa patieso lielumu r nosprauzdami, iegūsim savienotajā stāvoklī caurmēra CD galus C'_0 un D'_0. Pēc tam nav grūti pretejā ceļā atrast attiecigās projekcijas C_1 un D_1, velkot no C'_0un D'_0 stateņus pret zinamo mazās ass virzienu.

Analoģiski noteicam savienoto stāvokli $J_0''K_0''$ no tā caurmēra JK, pa kuru vertikali projecejoša plakne, kas caur centru F iet stateniski pret vertikalo pēdu liniju t, krusto aploci; un apgriestā kārtā konstruejam mazo asi J_2K_2.

Aplūkosim vēl aploces projekciju konstruešanu sekošā gadijumā.

Jakonstruē kaut kādas aploces projekcijas, ja doti: aploces radiusa patiesais lielums r un aploces plakne ar kautkādām krustodamām pēdu līdztecēm h un v (223 ras.).

Pieņemot pēdu līdzteču krustošanās punktu F par elipses centru, nav grūti konstruet abās projekcijās lielās asis; pie tam horicontalajā projekcijā lielās ass virziens saplūst ar h_1, bet vertikalajā projekcijā lielās ass virziens saplūst ar v_2. Lai noteiktu elipses mazo asi C_1D_1 horicontalajā projekcijā, mēs aploces plakni, griežot to ap h, nostādam līdztekus ar H, uzmeklejot tam nolūkam M_0, un atzīmejam aploces savienoto stāvokli $A_1C_0B_1D_0$. Pēc tam uz affinās radniecibas pamata, kuŗas ass ir h_1, nav gŗūti punktiem C_o un D_o uzmeklet attiecigus punktus C_1 un D_1, dabujot tādā veidā elipses mazo asi. Pieskares patvaļigos attiecigos punktos P_o un P_1 krustojas uz h_1.

Analoģiski konstrueta elipses vertikalā projekcija, griežot ar punkta N palīdzibu aploces plakni ap v; pie tam radniecibas ass vertikalajā projekcijā ir v_2.

Piezīme. Ja ir konstruetas aploces projekcijas, tad nav gŗūti konstruet ari kautkāda taisnā, telpā patvaļigu stāvokli ieņemoša, aploces smaiļa, jeb velteņa projekcijas.

IV nodaļa. Centralā kollineacija un affinā radnieciba starp aploci un elipsi.

168 §. Elipses konstruešana uz centralās kollineacijas pamata.

Kā 161 § aizrādits, katra elipse ir līkne, centrali-kollineari radnieciska ar aploci; šis sakars paliek spēkā ari projekcijā. Tapēc var pieņemt, ka atsevišķā gadijumā aploce un centrali-kollineari radnieciska elipse guļ uz vienas plaknes.

Pieņemsim, piemēram, ka doti: kollineacijas centrs Ω_p, kollineacijas ass o un aploce ar centru F_o (224 ras.). Lai pēc šiem elementiem būtu iespējams noteikt centrali-kollineari radniecisko elipsi, tad vēl jazina viens attiecigo punktu, vaj viens attiecigo taišņu pāris.

Ja dots viens attiecigo punktu pāris, piemēram, G_o un G_p, tad, lai noteiktu patvaļigam aploces punktam E_o attiecigo elipses punktu E_p, mēs taisni G_oE_o pagaŗinam līdz krustošanai ar asi o punktā S_I, punktu S_I savienojam ar G_p, un pēc tam atrodam šās taisnes krustošanos ar staru Ω_pE_o meklejamā punktā E_p.

Elipses punktā E_p pieskari t_p konstruejot, jaievēro, ka pieskarei t_p ar attiecigo, punktā E_o pret aploci vilkto pieskari t_o jakrustojās kopejā punktā S_{II}, kas guļ uz kollineacijas ass o.

Ja dots attiecigo taišņu pāris, piemēram, a_o un a_p, tad nav gŗūti uz viņām atrast vienu attiecigo punktu pāri G_o un G_p, caur ko pēdejais gadijums pielīdzinas tikko aplūkotajam.

Pietiekoši daudz attiecigo punktu konstruedami, un viņus ar līko linijalu savienodami, iegūstam meklejamo elipsi.

Konstrueto elipsi varam uzlūkot, kā elipses horicontalo projekciju, iegūtu, kautkādai plaknei, kuŗas horicontalā pēdu linija ir o, krustojoties ar smaili, kuŗa pamats (aploce) sakrīt ar H, bet virsotne atroḍas punktā Ω. Pie tam, saprotams, indekšu „p“ vietā jalieto indekši „1“.

Ja smaiļa pamats (aploce) sakrīt ar V, tad līdzigā kārtā varam atrast elipses vertikalo projekciju, pa kuŗu griezejā plakne krustojas ar smaili. Pie tam apzīmejumu o, S_I un S_{II} vietā būtu jalieto apzīmejumi t, T_I un T_{II}, bet indekšu „p" vietā jalieto indekši „2".

Jaievēro, ka vispārejā gadijumā pie centralās kollineacijas elipses centrs neatbilst aploces centram. Bet ja centralā kollineacija pāriet affinā radniecibā, tad elipses centrs atbilst aploces centram. Aizrādito nav gŗūti noskaidrot, salīdzinot 225 un 226 rasejumus. Abos gadijumos aizrādita elipse, ar centru F_{III}, ir iegūta, kautkādai plaknei krustojoties ar smaiļa, vaj velteņa virsu. Kā redzams 225 ras., patvaļiga, caur smaiļa asi un virsotni ejoša plakne $A_I \Omega B_I$ krusto elipsi ar centru F_{III} pa kautkādu taisni $A_{III} B_{III}$, kas elipsi nedala divās zimetriskās daļās, kapēc ari taisne $A_{III} B_{III}$ neiet caur elipses centru F_{III} un nav viņas caurmērs, bet ir elipses chorda. Stars ΩF_I krusto $A_{III} B_{III}$, t. i. elipses plakni zinamā punktā C_{III}, kas nevar sakrist ar elipses centru F_{III}, jo $A_{III} B_{III}$ neiet caur F_{III}. Tā tad dabujam, ka aploces centram F_I neatbilst elipses centrs F_{III}, bet punkts C_{III}, kas guļ uz chordas $A_{III} B_{III}$. Punkti F_I un F_{III} guļ uz diviem dažadiem stariem ΩF_I un $\Omega F'_I$.

226 ras. aplūkodami, varam novērot, ka plakne $A_I A_{II} B_{II} B_I$, kas iet caur asi un bezgali attālinatu velteņa virsotni, krusto elipsi pa taisni $A_{III} B_{III}$, kas elipsi dala divās zimetriskās daļās. Tapēc taisnei $A_{III} B_{III}$ jaiet caur elipses centru F_{III}; tas nozīme, ka elipses centrs F_{III} guļ uz stara $F_I F_{II}$, t. i. elipses centrs F_{III} un velteņa pamataploču centri F_I, vaj F_{II} ir affini radnieciski punkti.

225 un 226 rasejumus salīdzinadami, redzam, ka pie centralās kollineacijas patvaļigam kollinearās aploces caurmēram $A_I B_I$ neatbilst elipses caurmērs, bet zinamā elipses chorda $A_{III} B_{III}$; turpretim pie affinās radniecibas katram aploces caurmēram $A_I B_I$ atbilst ari zinamais elipses caurmērs $A_{III} B_{III}$.

Šo pēdejo affinās radniecibas īpašibu varam izlietot elipses galveno asu noteikšanai.

169 §. Elipses galveno asu konstruešana uz affinitates pamata.

Pieņemsim, ka doti: affinitates ass o, viens attiecigo punktu pāris E_o un E_p, kas noteic radniecibas virzienu, un aploces centrs F_o (227 ras.). Ar caurmēra $E_o G_o$ palīdzibu, kas krusto asi o punktā S_I, atrodam elipses attiecigo caurmēru $E_p G_p$, un uz viņa noteicam elipses centru F_p.

Lai tagad noteiktu elipses galvenās asis, konstruejam attiecigo taisno leņķu pāri. Tam nolūkam nogriezni $F_o F_p$ dalam punktā L uz pusēm un no punkta L velkam vidusstateni pret $F_o F_p$, līdz krustošanai ar asi o punktā K. No punkta K, kā no centra, velkam aploci caur F_o un F_p, un atzīmejam punktus S_{II} un S_{III}, kur šī aploce krustojas ar asi o. F_o un F_p ar punktiem S_{II} un S_{III} savienodami, iegūstam attiecigo taisno leņķu pāri $S_{II} F_o S_{III}$ un $S_{II} F_p S_{III}$, kas atbalstās uz kopejo caurmēru $S_{II} S_{III}$. Atzīmejot punktus A_o, B_o un C_o, D_o, kur taisnes $F_o S_{II}$ un $F_o S_{III}$ krusto doto aploci, mēs iegūstam divus savstarpeji stateniskus caurmērus $A_o B_o$ un $C_o D_o$, kuŗiem atbilst divi savstarpeji stateniski sakārtotie elipses caurmēri, t. i. galvenās asis $A_p B_p$ un $C_p D_p$.

170 §. Elipses konstruešana ar ievilktās aploces palīdzibu.

Pieņemsim, ka doti elipses sakārtotie caurmēri $E_p G_p$ un $P_p J_p$ (228 ras.). Kā zinams, elipses pieskares viena sakārtota caurmēra galos ir līdzteces ar otro sakārtoto caurmēru (166 §). Atzīmesim šās pieskares; pagaŗinasim, piemēram, caur E_p un G_p ejošās pieskares un viņu iekšpusē patvaļigā vietā iezīmesim aploci ar centru F_o. Šo aploci varam uzlūkot, kā ar meklejamo elipsi affini radniecisko aploci. Tad dabusim, ka pieskaršanās punkti E_p, E_o un G_p, G_o ir attiecigie elipses un affini radnieciskās aploces punkti. Saprotams, ka ari punktiem P_o un J_o, kuŗos taisne $F_o F_p$ krusto aploci, jasaskan ar attiecigiem meklejamās elipses punktiem P_p un J_p. Pie tam mēs attiecigus punktus varam pieņemt kā patīkas, t. i., kā attiecigus punktus varam uzlūkot J_o un J_p, bet varetu ari J_o un P_p uzlūkot kā vienu attiecigo punktu pāri. Tad, saprotams, punktam P_o atbilst punkts J_p. Rasejumā par attiecigiem punktiem ir pieņemti punktu pāri J_o, J_p un P_o, P_p.

Pēc tam uzmeklejam affinitates asi o starp atzīmeto aploci un meklejamo elipsi. Tam nolūkam velkam aploces un elipses zistemā divus kautkādus attiecigo taišņu pārus, piemēram $G_o J_o$, $G_p J_p$ un $P_o E_o$, $P_p E_p$, un atzīmejam viņu krustošanās punktus 1 un 2. Šos punktus savienodami, dabujam meklejamo affinitates asi $o = 1 - 2$. Nu vairs nav gŗūti pēc 227 rasejuma noteikt elipses galvenās asis $A_p B_p$ un $C_p D_p$, un izvilkt pašu elipsi.

Līdzigā kārtā varetu ari noteikt elipses galvenās asis, pagaŗinajot elipses caurmēram $E_p G_p$ līdztekus ejošas pieskares punktos P_p un J_p.

171 §. Elipses konstruešana ar pieņemtās ass palīdzibu.

Pieņemsim, ka doti divi elipses sakārtotie caurmēri $E_p G_p$ un $K_p L_p$, kas krustojas elipses centrā F_p (229 ras.).

Pieņemsim pilnigi patvaļigi affinitates asi o un uzmeklesim ar elipsi affini radniecisko aploci. Tam nolūkam atrodam punktus S_I un S_{II}, kur elipses sakārtotie caurmēri krustojas ar asi o. Caur šiem punktiem jaiet ari attiecigiem affini radnieciskās aploces caurmēriem, kuŗiem bez tam pēc 166 § jakrustojās taisnā leņķī, meklejamā aploces centrā F_o. Tapēc centram F_o jaguļ uz aploces, kuŗas centrs N ir nogriežņa (caurmēra) $S_I S_{II}$ viduspunkts.

No otrās puses zinams, ka paralelogramam $F_p E_p M_p K_p$, kas noteikts ar pieskarēm, vilktām caur punktiem E_p un K_p, līdztekus elipses sakārtotiem caurmēriem, jasaskan ar zinamo kvadratu $F_o E_o M_o K_o$, kas pieder affini radnieciskās aploces zistemai. Attiecigām taisnēm $E_p M_p$ un $E_o M_o$, kā ari $K_p M_p$ un $K_o M_o$, jakrustojās attiecigos punktos S_{III} un S_{IV} uz ass o. Tapat diagonalei $F_p M_p$ un attiecigai diagonalei $F_o M_o$ jakrustojās uz ass o zinamā punktā S_V.

Kā no elementarās ģeometrijas zinams, ievilktais leņķis ir puse no centra leņķa, kas atbalstās uz to pašu loku. Leņķi $E_o F_o M_o$ un $K_o F_o M_o$ līdzinas 45^0; tas pierāda, ka viņiem katram jaatbalstās uz ceturto aploces daļu, kuŗas cēntrs ir N. Tapēc leņķa $E_o F_o K_o$ bissektrisei $F_o M_o$ jaiet caur punktu J, kas pusáploci $S_I J S_{II}$ dala uz pusēm. Bet tā kā taisnei $F_o M_o$ bez tam vēl jaiet caur punktu $S_V = F_p M_p \times o$, tad punkti J un S_V noteic meklejamās bissektrises virzienu. Punkts F_o, kuŗā taisne $J S_V$ krusto ar radiusu $N S_I$ vilkto aploci, ir meklejamās affini radnieciskās aploces centrs.

Affini radnieciskās aploces radiuss noteicams ar punktiem E_o un K_o, kuŗos taisnes $S_{III} E_o$ un $S_{IV} K_o$, vilktās līdztekus aploces sakārtotiem caurmēriem $S_I F_o$ un $S_{II} F_o$, krustojas ar šiem caurmēriem. Saprotams, ka taisnēm $S_{III} E_o$ un $S_{IV} K_o$ japieskarās affini radnieciskai aplocei punktos E_o un K_o.

Beidzot pēc 227 ras. varam konstruet elipses galvenās asis.

Tā kā affinitates asi o mēs pieņemam pilnigi patvaļigi, tad atsevišķā gadijumā var pieņemt, ka viņa sakrīt ar vienu no dotiem elipses sakārtotiem caurmēriem $E_p G_p$, jeb $K_p L_p$.

Pieņemsim, piemēram, ka ass o sakrīt ar $E_p G_p$ (230 ras.), tad ar šo caurmēru, saprotams, sakrītīs ari attiecigais affini radnieciskās aploces caurmērs $E_o G_o$, pie kam ari centrs F_o sakrītīs ar centru F_p. Otram aploces caurmēram $K_o L_o$, kuŗš atbilst otram elipses sakārtotam caurmēram $K_p L_p$, jabūt stateniskam pret $E_o G_o$. Attiecigie aploces un elipses punkti K_o, K_p un L_o, L_p noteic affinitates virzienu starp aploci un elipsi.

Katrai aploces chordai $M_o N_o$, kas ir līdztece aploces caurmēram $K_o L_o$, pēc 166 § noteikumiem atbilst elipses zistemā zinama, attiecigam elipses caurmēram $K_p L_p$ līdztekus ejoša chorda $M_p N_p$. Bet tā kā šām chordām bez tam uz ass o ir kopejs krustošanās punkts $P_o = P_p$, tad pamatojoties uz aizrādito, nav gŗūti konstruet veselu rindu elipses chordas ar attiecigiem gala punktiem, kā tas rasejumā aizrādits.

172 §. Elipses atsevišķo punktu konstruešana ar galveno asu palīdzibu.

Pieņemsim, ka dotas elipses galvenās asis AB un CD (231 ras.). Ar radiusiem a un b, kuŗi līdzinas elipses pusasīm, velkam ap centru F divas aploces. Meklejamo elipsi var uzlūkot, kā affini radniecisku figuru ar aploci, radiusa a, attiecibā uz asi AB, pie kam radniecibas virziens ir stateniski pret AB.

Bet elipsi varam uzlūkot ari kā affini radniecisku figuru ar aploci, radiusa b, attiecibā uz asi CD, pie kam radniecibas virziens ir stateniski pret CD. Aizrāditās aploces atkal savā starpā ir centrali kollineari radnieciskas figuras, jo viņām ir viens vienigs kopejs punkts F, kas ir viņu kollineacijas centrs. Attiecigā kollineacijas ass atrodas bezgalibā, jo katras divas attiecigas aploču taisnes (chordas) krustojas bezgalibā.

No centra F patvaļigu staru vilkdami, mēs šā stara krustotnēs ar aplocēm dabusim divus attiecigus punktus L un K, kas atbilst viens otram.

Uz affino radniecibu starp lielo aploci (ar radiusu a) un elipsi pamatodamies, dabusim, ka punktam K un attiecigam elipses punktam M_1 jaguļ uz kopeja, no K pret radniecibas asi AB vilktā stateņa. Bet uz affino radniecibu starp mazo aploci (ar radiusu b) un elipsi pamatodamies, dabusim, ka punktam L un attiecigam elipses punktam M_1 jaguļ uz kopeja, no punkta L pret radniecibas asi CD vilktā stateņa. Aizrādito stateņu krustošanās punktu uzmeklejuši, iegūsim vienu elipsei piederošo punktu M_1. Zinadami M_1, mēs atrodam zimetriskos punktus M_2 un M_3, kuŗiem atkal atbilst punkts M_4. No konstrukcijas redzams, ka figura $M_1 M_2 M_4 M_3$ ir taisnstūris, kuŗa diagonales $M_1 M_4$ un $M_2 M_3$ krustojas centrā F.

Lai caur punktu M_1 vilktu pret elipsi pieskari t_1, mēs caur attiecigo lielās aploces punktu K velkam pieskari pret lielo aploci, un punktu J, kuŗā šī pieskare krustojas ar radniecibas asi AB, savienojam ar M_1. Pieskari t_1 var iegūt ari citadā ceļā, velkot caur punktu L, kuŗš uz mazās aploces atbilst punktam M_1, pieskari pret mazo aploci, un savienojot punktu R, kuŗā šī pieskare krusto radniecibas asi CD, ar punktu M_1. Saprotams, ka abas konstruetas pieskares saplūst.

Pieskares t_2, t_3, t_4 punktos M_2, M_3 un M_4 konstruejamas līdzigā kārtā, vaj ari uz zimetrijas pamata attiecibā uz asim AB un CD. Pie tam, saprotams, $J'F = JF$ un $R'F = RF$. Konstruetās pieskares kopibā veido paralelogramu $JRJ'R'$, kuŗa iekšpusē ievelkama meklejamā elipse.

Notinamās taisnes virsas.

Smailiskās un velteniskās virsas.

V. nodaļa. Smaiļa un velteņa redzamibas apveidi. Tangentialās plaknes.

173 §. Smaiļa redzamibas apveids.

Pieņemsim, ka dots slīps aploces smailis, kuŗa pamats sakrīt ar H (232 ras.).

Lai noteiktu smaiļa redzamibas apveidu horicontalajā projekcijā, pēc 160 § jauzmeklē aptverošās, horicontali projecejošas velteniskās virsas krustošanās ar H. Smaili aptverošā, horicontali projecejoša virsa pa daļai pārvēršas divās plaknēs, kas pieskaras smaiļa virsai pa divām viņa veidulēm, tapēc smaiļa horicontalo projekciju pa daļai ierobežo šo veiduļu projekcijas. Šās projekcijas iegūstam, ja no smaiļa virsotnes horicontalās projekcijas velkam pret smaiļa pamataploces horicontalo projekciju galejās pieskares L_1A un L_1B. Horicontalās projekcijas redzamibas apveids slēdzas ar loku ACB, pa kuŗu aptverošās, horicontali projecejošas virsas pārejā daļa krustojas ar H. Smaiļa sānu virsas aizsegtā pamataploces daļa ADB horicontalajā projekcijā, saprotams, nav redzama.

Vertikali projecejoša, aptverošā velteniskā virsa mūsu gadijumā pārvēršas trijās plaknēs, no kuŗām divas pieskaras smailim pa veidulēm, bet trešā sakrīt ar smaiļa pamatplakni, t. i. H.

Aizrādito vertikali projecejošo tangentialo plakņu horicontalās pēdu linijas s_{I} un s_{II} mēs iegūsim, ja vilksim stateņus pret OX, kas pieskaras smaiļa pamataplocei. Pieskaršanās punktus C un D noteicot, mēs dabujam to veiduļu CL un DL horicontalās projekcijas, pa kuŗām aptverošās, vertikali projecejošas plaknes pieskaras smaiļa virsai. Pēc horicontalām projekcijām CL_1 un DL_1 nav gŗūti konstruet attiecigās vertikalās projekcijas C_2L_2 un D_2L_2, kas noteic smaiļa redzamibas apveidu vertikalajā projekcijā. Šis apveids slēdzas ar pamata projekciju C_2D_2.

Punkti C, D un virsotne L noteic plakni, kas sašķeļ smaili divās daļās. Daļu CADL, kas no ass OX stāv tālaki, sauc par smaiļa **priekšejo daļu**, bet daļu CBDL, kas asij OX tuvaki, sauc par smaiļa **pakaļejo daļu**, attiecibā uz V.

Veidules radzamibu jebkuŗā projekcijā noteicot, ir jaņem vērā, ka zinamā projekcijā veidule redzama tikai tad, ja tanī pašā projekcijā redzami trīs viņas punkti, bet ja aplūkojamā projekcijā jel viens veidules punkts nav redzams, tad šai projekcijā visa veidule nav redzama.

Nav gŗūti sajēgt, ka 232 rasejumā horicontalajā projekcijā redzamas visas veidules, kas atbalstās uz pamataploces redzamo daļu ACB, bet veidules, kas atbalstās uz neredzamo daļu ADB, — nav redzamas. Tā, piemēram, horicontalajā projekcijā veidule CL redzama, bet DL nav redzama. Vertikalajā projekcijā redzamas veidules, kas atbalstās uz pamataploces priekšejo daļu CAD, bet veidules, kas atbalstās uz pamataploces pakaļejo daļu CBD, nav redzamas. Tā, piemēram, veidule AL vertikalajā projekcijā redzama, bet veidule BL tanī pašā projekcijā nav redzama.

Lai uz smaiļa virsas noteiktu patvaļigu punktu, šis punkts japieņem uz zinamas smaiļa veidules. Vispārejā gadijumā, pēc vienas dotās projekcijas var noteikt divus uz smailiskās virsas guļošus oriģinalus punktus.

Pieņemsim, piemēram, ka dota horicontalā projekcija E_1. Taisni, kas savieno E_1 ar L_1, varam uzlūkot kā divu veiduļu CL un JL kopeju horicontalo projekciju. Attiecigas oriģinalās veidules guļ uz kopejas horicontali projecejošas plaknes, kapēc ari viņu horicontalās projekcijas sakrīt. Bet šo veiduļu vertikalās projekcijas C_2L_2 un J_2L_2 nesakrīt. Tapēc uz viņām varam aizrādit divu dažadu oriģinalo punktu vertikalās projekcijas E_2 un G_2, kuŗu horicontalās projekcijas sakrīt vienā punktā $E_1 = G_1$.

Līdzigā kārtā pēc vienas dotās vertikalās projekcijas var noteikt divu dažadu punktu horicontalās projekcijas.

Kautkāds smailiskās virsas punkts zinamā projekcijā redzams, ja tanī pašā projekcijā redzama veidule, uz kuŗas aplūkotais punkts atrodas. Tā, piemēram, punkts E horicontalajā projekcijā redzams, jo šinī projekcijā redzama veidule CL, uz kuŗas tas guļ. Bet punkts G horicontalajā projekcijā nav redzams, jo nav redzama attiecigā veidule JL.

Pieņemsim, ka smailis noteikts ar slēgtu vadošo līkni *m* un virsotni L (233 ras.). Lai atsevišķus līknes *m* punktus pilnigi noteiktu, jaaizrāda kautkāda līknes *m* punkta A projekcijas (163 §). Smaiļa redzamibas apveidu horicontalajā un vertikalajā projekcijā dabujam, ja no L_1 un L_2 pret attiecigām vadošās līknes *m* projekcijām velkam pieskares L_1D_1, L_1E_1 un L_2F_2, L_2G_2.

Horicontalajā projekcijā vadošās līknes daļa DJE katrā ziņā redzama jo $D_1J_1E_1$ ir smaiļa projekcijas galejais ierobežojums. Bet lai noteiktu, vaj līknes daļa DKE horicontalajā projekcijā redzama, vaj ne, mēs caur virsotni L velkam patvaļigu horicontali projecejošo plakni, kas krusto smaili pa veidulēm JL un KL, kuŗu horicontalās projekcijas saplūst. Pēc J_1L_1 un K_1L_1 atrodam attiecigas vertikalās projekcijas J_2L_2 un K_2L_2. Ievērojot projekciju J_2L_2 un K_2L_2 stāvokļus pret asi OX, nav grūti sajēgt, ka veidule JL, attiecībā uz H, iet virs veidules KL. Tapēc horicontalajā projekcijā veidule LK un līknes daļa DKE nav redzamas. Tas nozīmē, ka horicontalajā projekcijā visas veidules, kas atbalstās uz līkni DKE, kā ari visi punkti uz šām veidulēm, nav redzami.

Līdzigā kārtā izšķirams jautajums par līknes FNG redzamibu vertikalajā projekcijā. Tam nolūkam caur virsotni L velkam vienu vertikali projecejošo plakni, kas krusto smaili pa veidulēm ML un NL. Viņu vertikalās projekcijas saplūst, bet horicontalās nē. Ievērojot horicontalo projekciju M_1L_1 un N_1L_1 stāvokļus pret asi OX, dabujam, ka attiecibā uz V — veidule ML iet priekš veidules NL. Tapēc punkts N, līkne FNG un visas veidules, kas atbalstās uz FNG, kopā ar visiem punktiem uz šām veidulēm, — vertikalajā projekcijā nav redzami.

174 §. Velteņa redzamibas apveids.

Veltenis ir atsevišķs smaiļa gadijums, kad smaiļa virsotne atrodas bezgalibā, tapēc attiecibā uz velteniskām virsām var atkārtot visus iepriekšejā panta aizrādijumus.

Pieņemsim, piemēram, ka dots slīps aploces veltenis, kuŗa pamats sakrīt ar H (234 ras.). Aptverošā, horicontali projecejoša velteniskā virsa pārvēršas pa daļai divās līdzteku plaknēs, kas pieskaras veltenim pa divām līdzteku veidulēm. Šo veiduļu horicontalās projekcijas $A_I A_{II_1}$ un $B_I B_{II_1}$ iegūstam, ja pret velteņa pamataploču projekcijām velkam kopejās, velteņa ass horicontalai projekcijai $F_I F_{II_1}$ līdzteku pieskares. Bez tam horicontalās projekcijas redzamibas apveidu ierobežo loki $A_I C_I B_I$ un $A_{II_1} D_{II_1} B_{II_1}$. Viss velteņa augšejais pamats horicontalajā projekcijā, saprotams, redzams, bet no apakšejās pamataploces redzama tikai daļa $A_I C_I B_I$.

Vertikali projecejoša velteniskā virsa pārvēršas četrās plaknēs, no kuŗām divas pieskaras veltenim pa divām līdzteku veidulēm, bet pārejās divas sakrīt ar velteņa pamatiem. Vertikali projecejošo plakņu horicontalās pēdu linijas ir s_I un s_{II}. Šās pēdu linijas ir stateniskas pret OX un pieskares apakšejam velteņa pamatam. Ar pieskaršanās punktu C_I un D_I palīdzibu konstruejam attiecigās vertikalās projekcijas C_{I_2} un D_{I_2}, un pēc tam noteicam veiduļu projekcijas $C_{I_2} C_{II_2}$ un $D_{I_2} D_{II_2}$, kas pa daļai ierobežo velteņa vertikalās projekcijas redzamibas apveidu. Šis apveids bez tam slēdzas ar apakšejā un augšejā velteņa pamatu projekcijām $C_{I_2} D_{I_2}$ un $C_{II_2} D_{II_2}$. Plakne $C_I C_{II} D_{II} D_I$, kas iet caur asi $F_I F_{II}$, sašķeļ velteni divās daļās. Daļu $C_I A_I D_I D_{II} A_{II} C_{II}$, kas tālak no ass OX, sauc par velteņa p r i e k š e j o d a ļ u, bet daļu $C_I B_I D_I D_{II} B_{II} C_{II}$, kas asij OX tuvaki, sauc par p a k a ļ e j o d a ļ u.

Veiduļu un viņu punktu redzamiba noteicama pēc iepriekšejā panta noteikumiem.

175 §. Plaknes, kas smailim, jeb veltenim pieskaras dotajā punktā.

Pieņemsim, ka caur veidules $A_I L$ punktu A_{II} pret doto slīpo smailisko virsu javelk tangentialā plakne (235 ras.).

Kā 158 § aizrādits, meklejamā tangentialā plakne pieskaras smaiļa virsai pa veiduli $A_I L$, kas iet caur punktu A_{II}. Tapēc, lai noteiktu meklejamo tangentialo plakni, pietiek, ja atrodam vēl vienu uz šās plaknes guļošu taisni. Tāda taisne ir linija s, pa kuŗu tangentialā plakne krustojas ar smaiļa pamatplakni. Kā zinams (158 §), tangentialā plakne krustojas ar katru griezejo plakni, piemēram, ar pamatplakni H, pa taisni (s), kas pieskaras attiecigai griezuma linijai, t. i. smaiļa pamatam. Tapēc, lai meklejamo tangentialo plakni pilnigi noteiktu, atliek tikai caur punktu A_I vilkt pret smaiļa pamataploci pieskari s.

Ja vēlams tangentialo plakni noteikt ar taisni, kas iet caur punktu A_{II}, tad caur A_{II} javelk taisne $h \parallel s$. Saprotams, ka pie tam $h_1 \parallel s$ un $h_2 \parallel OX$.

Līdzigā kārtā dotajā punktā A_{III} (236 ras.) velkam pret doto veltenisko virsu tangentialo plakni, kas noteikta ar taisnēm $A_I A_{II}$ un s, vaj $A_I A_{II}$ un h.

176 §. Plakne, kas pieskaras smailim, jeb veltenim un iet caur doto ārejo punktu.

Pieņemsim, ka caur doto ārejo punktu A javelk pret doto smaili, kas atbalstās uz H, tangentialā plakne (237 ras.).

Meklejamā plakne pieskaras smailim pa zinamo veiduli, kapēc viņai jaiet ari caur smaiļa virsotni L. Tā tad meklejamā tangentialā plakne iet caur taisni AL. Taisnes AL pēdu punkts attiecibā uz smaiļa pamatplakni ir punkts S. Caur punktu S, acim redzot, jaiet taisnei s_I, pa kuŗu smaiļa pamatplakne krustojas ar meklejamo tangentialo plakni. Šī taisne pēc 158 § pieskaras attiecigai griezuma linijai, t. i. s_I pieskaras smaiļa pamataplocei. Pieskaršanās punktu B ar virsotni L savienodami, iegūstam veiduli BL, pa kuŗu tangentialā plakne pieskaras smailim. Tādā kārtā meklejamā tangentialā plakne ir noteikta ar trijām savstarpeji krustodamām taisnēm LAS, $s_I = SB$ un BL.

Bet caur punktu S pret smaiļa pamataploci varam vilkt ne tikai pieskari s_I, bet vēl otru pieskari s_{II}, kas kopā ar veiduli CL noteic vēl otru, caur doto ārejo punktu A ejošu tangentialo plakni.

Tā tad caur doto ārejo punktu A mūsu gadijumā varam pret doto smaili vilkt d i v a s t a n g e n t i a l ā s p l a k n e s.

Jaievēro, ka abas atrastās plaknes krustojas pa kopejo tāisni LAS.

Ja smaiļa atbalsts nebūtu aploce, bet patvaļiga līkne, tad var gadities, ka pret doto smailisko virsu caur doto ārejo punktu var vilkt ari vēl vairak, kā divas tangentialās plaknes.

Ja caur doto ārejo punktu A javelk tangentialā plakne pret doto velteni (238 ras.), tad punktu A savienojam ar velteņa bezgali attālinatu virsotni, t. i. caur punktu A velkam velteņa veidulēm līdzteci a un atrodam šās līdzteces pēdu punktu S. Tālakās konstrukcijas izvedamas līdzigi iepriekšejam gadijumam (237 ras.), pie kam mūsu gadijumā atkal dabujam divas tangentialās plaknes, kas noteiktas ar taisnēm s_{I}, $B_{I} B_{II}$, jeb s_{II}, $C_{I} C_{II}$.

177 §. Plakne, kas pieskaras smailim, jeb veltenim un iet līdztekus dotam virzienam.

Pieņemsim, ka pret doto smaili javelk tangentialā plakne, līdztekus dotam virzienam l (239 ras.).

Katra plakne, kas izpilda aizrāditus nosacijumus, satur taisni $a = LS$, kas iet caur smaiļa virsotni L, līdztekus dotam virzienam l. Noteikuši taisni LS, mēs tālakas konstrukcijas izdaram tapat, kā 237 rasejumā.

Aplūkosim tagad plakni, kas pieskaras dotam veltenim (240 ras.), un iet līdztekus dotam virzienam l.

Katra plakne, kas izpilda šā uzdevuma prasibas, satur kautkādu velteņa veiduli un dotam virzienam l līdzteku taisni. Noteiksim patvaļigu, meklejamo tangentialo plakņu virzienam līdzteku plakni.

Tam nolūkam caur patvaļigu punktu telpā, piemēram, caur smaiļa augšejā pamata centru F_{II}, velkam taisni $a \parallel l$, un atrodam taisnes a pēdu punktu S. Taisne a kopā ar asi $F_{I} F_{II}$ noteic meklejamām tangentialām plaknēm līdzteku palīgplakni. Šī plakne krusto velteņa apakšejo pamatu pa taisni $s = SF_{I}$. Tā kā meklejamām tangentialām plaknēm jabūt līdztecēm aizrāditai palīgplaknei, tad ari viņu krustošanās taisnēm s_{I} un s_{II} ar velteņa apakšejo pamatu jabūt līdztecēm ar s. Bez tam taisnēm s_{I} un s_{II} japieskarās velteņa pamataplocei. Aizrāditie nosacijumi noteic meklejamo tangentialo plakņu pēdu linijas.

Noteicot punktus B_{I} un C_{I}, kuŗos s_{I} un s_{II} pieskaras velteņa apakšejai pamataplocei, nav gŗūti atrast veidules $B_{I} B_{II}$ un $C_{I} C_{II}$, pa kuŗām meklejamās plaknes pieskaras veltenim.

Mūsu gadijumā atkal dabujam divus atrisinajumus.

VI. nodaļa. Smailiskie un velteniskie griezumi; notinumi.

178 §. Smaiļa krustošanās ar patvaļigu plakni.

Pieņemsim, ka janoteic uz H stāvošā aploces smaiļa krustošanās ar patvaļigu plakni *sat* (241 ras.).

Atsevišķus griezuma figurai piederigus punktus varam noteikt divejadi.

Pēc pirmā paņēmiena caur smaiļa virsotni L velkam patvaļigu horicontali projecejošo plakni, kas krustojas ar smaili pa veidulēm A_I L un B_I L, bet ar plakni *sat* pa taisni $S_I T_I$. Taisnes $S_I T_1$ krustošanās punkti ar veidulēm A_I L un B_I L noteic divus krustošanās figurai piederigus punktus A_{II} un B_{II}, kuŗus papriekšu konstruejam vertikalajā projekcijā*). Līdzigā kārtā uz veidulēm E_I L un G_I L noteikti punkti E_{II} un G_{II}. Veidules E_I L un G_I L ierobežo smaiļa vertikalās projekcijas redzamibas apveidu.

Pēc otra paņēmiena velkam patvaļigu plakni H', līdztekus H, kas ar smaili krustojas pa aploci, kuŗas radiuss ir $l_1 - F_{II_1} = l_2 - F_{II_2}$, bet centrs F_{II}. Ar plakni *sat* plakne, H' krustojas pa horicontalo pēdu līdzteci *h*. Pēdejās taisnes krustošanās punkti ar aploci F_{II} noteic divus griezuma figurai piederigus punktus C_{II} un D_{II}, kas iepriekš noteicami horicontalajā projekcijā. Līdzigā kārtā noteicami griezuma līknes pārejie punkti.

Atsevišķus griezuma līknes punktus var noteikt ari uz kollineacijas pamata starp griezuma līkni un smaiļa pamataploci, pie kam horicontalajā projekcijā radniecibas ass ir pēdu līnija *s* un kollineacijas centrs $- L_1$, bet vertikalajā projekcijā kollineacijas ass ir $s_2 = OX$ un kollineacijas centrs L_2 (137 §, 156 ras.)

Griezuma līknes raksturigakie punkti ir sekošie:

1) a u g s t a k a i s u n z e m a k a i s p u n k t s (M_{II} un N_{II}), t. i. punkti, kas atrodas vaj nu vistālaki, vaj vistuvaki no H;

2) p r i e k š e j a i s u n p a k a ļ e j a i s p u n k t s (P_{II} un Q_{II}), t. i. punkti, kas atrodas vaj nu vistālaki, vaj vistuvaki no V;

4) galejais kreisais un galejais labais punkts (J_{II} un K_{II}), t. i. punkti, kas atrodas, vaj nu vistālaki, vaj vistuvaki no W, t. i. no patvaļigas, ārpus dotā smaiļa ejošas profilās plaknes.

Pieskarēm (h_I un h_{II}) pret līknes augstako un zemako punktu jaiet līdztekus H, bez tam viņām jaguļ uz griezejās plaknes, t. i. šās pieskares ir griezejās plaknes horicontalās pēdu līdzteces, kas iet caur griezuma līknes augstako un zemako punktu.

---

*) Lielakas skaidribas dēļ indekši „1" un „2" dažiem punktiem un taisnēm horicontalajā un vertikalajā projekcijā rasejumā nav aizrāditi. Tas pats jaievēro ari dažos turpmakos rasejumos.

Līdzigā kārtā dabujam, ka pieskares (v_{I} un v_{II}) pret griezuma līknes priekšejo un pakaļejo punktu ir griezejās plaknes vertikalās pēdu līdzteces.

Beidzot, pieskares (w_{I} un w_{II}) pret griezuma līknes galejo kreiso un galejo labo punktu ir griezejās plaknes profilās pēdu linijas, t. i. taisnes, ejošas līdztekus plaknes *sat* krustošanās linijai ar patvaļigu profilo plakni.

Tapēc, lai konstruetu aizrāditus punktus, mums jaizdara šādas konstrukcijas.

1) javelk tangentialās plaknes, līdztekus horicontalai, vertikalai un profilai pēdu liniju virzienam;

2) jaatrod veidules, pa kuŗām vilktās tangentialās plaknes pieskaras smaiļa virsai, un

3) jaatrod uzmekleto veiduļu krustošanās punkti ar griezejo plakni, dabujot tādā veidā augšā aizrāditus raksturigus punktus.

Plaknes, kas pieskaras smailim un iet līdztekus plaknes *sat* horicontalām pēdu līdztecēm, noteicamas ar divu taišņu pāriem s_{I}, $M_{\mathrm{I}}L$ un s_{II}, $N_{\mathrm{I}}L_{\mathrm{I}}$, pie kam s_{I} un s_{II} pieskaras smaiļa pamatam un iet līdztekus griezejās plaknes horicontalai pēdu linijai s. (Ja smaiļa pamatplaknei būtu kautkāds patvaļigs stāvoklis telpā, tad caur virsotni L vajadzetu vilkt plaknes *sat* horicontalai pēdu linijai līdzteku taisni, un no šās taisnes krustošanās punkta ar smaiļa pamatplakni būtu javelk pret smaiļa pamatu pieskares, dabujot tādā veidā pieskaršanās punktus M_{I} un N_{I}).

Ar pieskaršanās punktu M_{I} un N_{I} palīdzibu veidules $M_{\mathrm{I}}L$ un $N_{\mathrm{I}}L$ noteikuši, mēs parastā kārtā atrodam viņu krustošanās punktus M_{II} un N_{II} ar griezejo plakni *sat*. Punkti M_{II} un N_{II} ir griezuma līknes augstakais un zemakais punkts; šajos punktos pret griezuma līkni vilktās pieskares h_{I} un h_{II} ir plaknes *sat* horicontalās pēdu līdzteces.

Lai noteiktu griezuma līknes priekšejo un pakaļejo punktu, caur virsotni L velkam plaknes *sat* vertikalām pēdu līdztecēm līdzteku taisni v, atrodam šās taisnes krustošanās punktu S_{II} ar smaiļa pamatplakni, un no iegūtā punkta S_{II} velkam pieskares s_{III} un s_{IV} pret smaiļa pamatu. Pieskaršanās punkti P_{I} un Q_{I} noteic smaiļa veidules $P_{\mathrm{I}}L$ un $Q_{\mathrm{I}}L$, pa kuŗām tangentialās plaknes, kas ir līdzteces plaknes *sat* vertikalām pēdu līdztecēm, pieskaras smailim. Pēc tam šo veiduļu krustošanās punktus P_{II} un Q_{II} ar plakni *sat* noteikdami, iegūstam griezuma līknes priekšejo un pakaļejo punktus.

Šajos punktos pret griezuma līkni vilktās pieskares v_{I} un v_{II} ir plaknes *sat* vertikalās pēdu līdzteces. Kontroles dēļ v_{I_1} un v_{II_1} jakrustojās ar s_{III} un s_{IV} punktos, kas guļ uz pēdu linijas s.

Lai noteiktu griezuma līknes galejo kreiso un galejo labo punktu (J_{II} un K_{II}), caur virsotni L velkam taisni n, līdztekus taisnei $S_{\mathrm{III}}T_{\mathrm{III}}$, pa kuŗu patvaļiga profilā plakne $p\beta q$ krusto plakni *sat*. Taisnes n pēdu punkta S_{IV} noteikšanai, mēs konstruejam taisnes n savienoto stāvokli n_0.

Tam nolūkam caur smaiļa virsotnes savienoto stāvokli L_o velkam līdzteci savienotam stāvoklim $T_{III} S_{III_o}$. Ar punkta $S_{IV_o} = n_o \times OX$ palīdzibu nav grūti atrast S_{IV}. Pēc tam no punkta S_{IV} velkam pieskares s_V un s_{VI} pret smaiļa pamataploci. Pieskaršanās punkti J_I un K_I noteic veidules $J_I L$ un $K_I L$, pa kuŗām taisnei n līdzteces tangentialās plaknes pieskaras smailim. Šo veiduļu krustošanās punkti ar griezejo plakni *sat* noteic punktus J_{II} un K_{II}, kas ir griezuma līknes galejie punkti, kuŗu pieskares w_I un w_{II} ir līdzteces virzienam n. Kontroles dēļ taisnei w_{I_1} jaiet caur punktu $S_V = s_V \times s$, bet taisnei w_{II_1} jaiet cau punktu $S_{VI} = s_{VI} \times s$.

Pieskare patvaļigā griezuma līknes punktā konstruejama, pamatojoties uz to, ka šī pieskare un, caur attiecigo uz pamataploces guļošo punktu pret pamataploci vilktā pieskare ir centrali-kollineari radnieciskās taisnes, kas krustojas uz kollineacijas ass s. Tas pats, saprotams, paliek ari spēkā projekcijās.

Tā kā plakne *sat* krusto visas smaiļa veidules, tad griezuma figura, kā ari viņas projekcijas uz H un V, ir elipses. Griezuma figuras patiesais lielums atrodams, savienojot plakni *sat* ar H vaj V.

Horicontalajā projekcijā redzamas visas veidules, tapēc šaī projekcijā redzama ari visa griezuma līkne. Vertikalajā projekcijā redzamas tās veidules, kuŗu koricontalās projekcijas atbalstās uz pusaploci $E_I P_I G_I$ (173 §), tapēc vertikalajā projekcijā redzama tikai griezuma līknes daļa $E_{II} J_{II} C_{II} P_{II} A_{II} N_{II} K_{II} G_{II}$, bet pāreja daļa nav redzama.

Bez tam varam vēl noteikt g r i e z u m a e l i p s e s c e n t r u F_{III} u n g a l v e n ā s a s i s. Tam nolūkam uzmeklejam divus elipses sakārtotus caurmērus. Viens tāds elipses sakārtotais caurmērs rasejumā jau atzīmets; tas ir caurmērs $M_{II} N_{II}$, jo pieskares h_I un h_{II} ša caurmēra galos ir savstarpeji līdzteces un pie tam līdzteces ar s. Tapēc nogriezni $M_{II} N_{II}$ uz pusēm dalot, iegūsim griezuma elipses centru F_{III}.

Kā zinams (166 §), otram sakārtotam elipses caurmēram jaiet līdztekus ar pirmā sakārtotā caurmēra galos vilktām pieskarēm. Tā tad mūsu gadijumā otram sakārtotam caurmēram jaiet līdztekus ar h_I, vaj h_{II}, vaj s. Tāpēc mēs šā otrā sakārtotā caurmēra virzienu varam noteikt. Lai bez tam vēl noteiktu viņa lielumu (7 – 8), mēs uz zinama mums virziena pieņemsim horicontalajā projekcijā patvaļigu punktu 2, kas pieder elipses zistemai un uzmeklesim smaiļa pamataploces zistemā attiecigo punktu 4. Šo punktu dabusim šādi. Punktu 2 savienojam ar patvaļigu, elipses zistemai piederošo zinamo punktu N_{II}, un uzmeklejam taisnes $2 - N_{II}$ krustošanās punktu 3 ar kolllineacijas asi s. Punktu 3 savienojam ar punktu N_I, kas aploces zistemā atbilst punktam N_{II}, un ar kollineacijas stara $L - 2$ palīdzibu uz taisnes $3 - N_I$ dabujam punktam 2 attiecigo punktu 4 aploces zistemā. Elipses otrā sakārtota caurmēra (7 – 8) virziens pēc konstrukcijas iet līdztekus s, t. i. krusto kollineacijas asi s bezgalibā, tapēc ari attiecigā taisne (5 – 6) aploces zistemā iet caur punktu 4, līdztekus asij s. Šī taisne krusto aploci punktos 5 un 6, kuŗiem elipses zistemā atbilst meklejamie otrā sakārtotā caurmēra gali 7 un 8; pie tam šie punkti uzmekleti ar kollineacijas staru 5 – L un 6 – L palīdzibu. Punktos 7 un 8 pieskares iet līdztekus pirmam sakārtotam caurmēram $M_{II}N_{II}$, kas, saprotams, attiecas ari uz pieskaŗu projekcijām. Bez tam jaievēro, ka $7_2 - 8_2 \parallel s_2 \parallel OX$.

Zinadami divus elipses sakārtotus caurmērus $M_{II}N_{II}$ un 7 – 8, mēs pēc 170 § (228 ras.) abās projekcijās varam konstruet elipses galvenās asis, bet šās konstrukcijas rasejumā nav aizrāditas, lai rasejums netaptu pārak neskaidrs.

179 §. Pieskares konstruešana patvaļiga smaiļa punktā.

Pieņemsim, ka dots smailis ar virsotni L un patvaļigu vadošo līkni m (242 ras.).

Atsevišķus griezejai plaknei *s a t* piederigus panktus noteic tapat, kā iepriekšejā gadijumā ar horicontali, vaj vertikali projecejošām, caur smaiļa veidulēm vilktām palīgplaknēm. Veidules $A_I - L$ krustošanās punkts A_{II} ar plakni *s a t* iegūts ar horicontali projecejošas plaknes palīdzibu.

Noteiksim tagad punktā A_{II} tangentionalo plakni pret smaiļa virsu. Tam nolūkam konstruesim pieskari t_{II} punktā A_{II} pret plaknes *s a t* griezuma līkni ar doto smaili. (Šī līkne rasejumā nav aizrādita). Pieskare t_{II} pēc 158 § ir tangentialās plaknes, vilktās punktā A_{II} pret smaiļa virsu, krustošanās taisne ar griezejo plakni *s a t*. Šo tangentialo plakni var noteikt ar veiduli LA_I un pieskari t_I, vilkto pret vadošo līkni m veidules LA_I gala punktā A_I. Meklejamās tangentialās plaknes horicontalā pēdu linija ir taisne s_I, kas savieno veidules LA_I un pieskares t_I horicontalos pēdu punktus S_I un S_{II}. Tangentialā plakne krustojas ar griezejo plakni *s a t* pa taisni t_{II}, kuŗai jaiet caur punktu A_{II} un punktu $S_{III} = s \times s_I$, caur ko meklejamā pieskare t_{II} ir noteikta.

Ja smaiļa vietā d o t s p a t v a ļ i g s v e l t e n i s, tad nav gŗūti līdzigi iepriekšejam gadijumam konstruet griezuma līkni ar patvaļigu plakni, uzlūkojot pie tam velteni kā smaili ar bezgali attālinatu virsotni. Attiecigie piemēri aizrāditi 184 un 185 §§.

180 §. Smaiļa krustošanās ar plakni, līdzteci divām veidulēm.

Pieņemsim, ka dots taisns smailis ar virsotni L un pamataploci F, kas atbalstās uz H (243 ras.) Janoteic smaiļa krustošanās figura ar divām smaiļa veidulēm AL un BL līdzteku plakni, pie tam veidules AL un BL ir zimetriskas attiecibā uz profilo plakni, ejošo caur smaiļa virsotni.

Veidules AL un BL noteic plakni ALB, kuŗas horicontalā pēdu linija $s = AB$ ir līdztece asij OX; tapēc ari pati plakne $ALB \parallel OX$, t. i. viņa ir stateniska pret katru profilo plakni.

Atzīmesim patvaļigu profilo plakni $p\beta q$ un projecesim doto smaili uz šo plakni, tad iegūsim virsotnes L un pamata centra F projekcijas L_3 un F_3, kā ari veiduļu AL un BL sakrītošās projekcijas $A_3L_3 = B_3L_3$.

Plaknes ALB pēdu linija w, attiecibā uz profilo plakni, kā redzams, sakrīt ar $A_3L_3 = B_3L_3$. Ja mēs tagad vilksim patvaļigu taisni $w_{\mathrm{I}} \parallel w$, tad w_{I} noteic veidulēm AL un BL līdztekus ejošas griezejās plaknes profilo pēdu liniju. Griezejās plaknes horicontalai pēdu linijai s_{I} jaiet caur punktu $G = w_{\mathrm{I}} \times p$, līdztekus s.

Tagad vairs nav gŗūti konstruet atsevišķo smaiļa veiduļu un griezejās plaknes krustošanās punktus, dabujot meklejamai krustošanās līknei (hiperbolei) piederošus punktus. Veiduļu krustošanās punktu profilās projekcijas iegūstamas tieši pēc rasejuma tanīs vietās, kur griezejās plaknes profilā pēdu linija w_{I} krustojas ar atsevišķo veiduļu profilām projekcijām. Pēc profilām projekcijām nav gŗūti rasejumā aizrādītā kārtā uzmeklet ari attiecigo krustošanās punktu horicontalās un vertikalās projekcijas.

Ja uzmeklets viens, griezuma līknei piederigs patvaļigs punkts, tad pārejus punktus varam noteikt uz centralās kollineacijas pamata starp smaiļa pamataploci un griezuma līkni, pie kam kollineacijas ass ir griezejās plaknes pēdu linija s_{I}. Pieskarēm, vilktām attiecigos pamataploces un griezejās līknes punktos, jakrustojās uz kollineacijas ass s_{I}.

Tā kā griezejā plakne līdztece divām smaiļa veidulēm, tad griezuma līkne ir hiperbole (161 §). Šās hiperboles bezgali attālinati punkti ir tie divi punkti, kuŗos veidules AL un BL krusto griezejo plakni. Konstruesim šos hiperboles bezgali attālinatos punktos pieskares, t. i. atzīmesim griezuma līknes asimptotes. Tam nolūkam pēc vispāreja pieskares noteikšanas paņēmiena (158 §), jaatrod taisnes, pa kuŗām, bezgali attālinatos punktos, pret smaiļa virsu vilktās tangentialās plaknes krustojas ar griezejo plakni.

Plakni, kas smaiļa virsai pieskaras bezgali attālinatā veidules AL punktā, pēc vispārejiem noteikumiem var noteikt ļoti vienkārši ar pašu veiduli AL un punktā A pret smaiļa pamataploci vilkto pieskari t. Tā kā pieskare t guļ uz plaknes H, tad viņu var uzlūkot kā aplūkojamās tangentialās plaknes horicontalo pēdu liniju. Tapēc punkts $S = t \times s_{\mathrm{I}}$ ir taisnes horicontalais pēdu punkts, pa kuŗu tangentialā plakne krustojas ar griezejo plakni, jeb ari, kas tas pats, S ir meklejamās pieskares t_{I} horicontalais pēdu punkts.

Bez tam mēs zinam, ka meklejamai pieskarei t_{I} jaiet caur bezgali attālinatu veidules AL punktu, t. i. $t_{\mathrm{I}} \parallel AL$. Tapēc meklejamās pieskares, t. i. asimptotes t_{I} projekcijām, jabūt līdztecēm veidules AL projekcijām, un viņām jaiet caur pēdu punkta S projekcijām. Līdzigā kārtā noteicamas otras, caur punktu $S' = t' \times s_{\mathrm{I}}$ un veidules BL bezgali attālinatu punktu ejošas asimptotes t'_{I} projekcijas (t' iet caur punktu B, tangentiali pret smaiļa pamataploci).

Rasejumā bez tam aizrādits hiperboles patiesais lielums. Tam nolūkam griezejā plakne savienota ar H, griežot viņu ap horicontalo pēdu liniju s_{I}. Pie tam savienotajā stāvoklī aizrādits ari tas hiperboles zars, kas guļ uz smaiļa augšejās daļas. Šis otrais zars ir zimetrisks pirmajam, attiecibā uz hiperboles centru E, kuŗā krustojas asimptotes. Punktu E var noteikt ari pēc viņa profilās projekcijas E_3, ievērojot, ka E_3 dala uz pusēm nogriezni $C_3 C'_3$, t. i. atstatumu starp hiperboles virsotņu profilām projekcijām C_3 un C'_3.

181 §. Smaiļa krustošanās ar vienai veidulei līdzteku plakni.

Pieņemsim, ka janoteic dotā taisnā aploces smaiļa (243 ras.) griezuma līkne ar plakni, kas caur pamataploces centru F iet līdztekus veidulei DL un stateniski pret profilo plakni $p\,\beta\,q$.

Griezuma plaknes horicontalā pēdu linija s_{II} šādos noteikumos iet caur F, līdztekus OX; bet profilā pēdu linija w_{II} iet caur F_3, līdztekus $D_3 L_3$. Atsevišķie griezuma līknei piederigie punkti konstruejami tapat, kā iepriekšejā pantā. Kollineacijas ass šinī gadijumā ir pēdu linija s_{II}. Griezuma līkne, kā zinams, ir p a r a b o l e.

Doto uzdevumu var uzlūkot kā iepriekšejā uzdevuma atsevišķu gadijumu, kad abas smaiļa veidules, līdztekus kuŗām tiek vilkta griezejā plakne, saplūst. Tapēc aplūkojamā gadijumā abi griezuma līknes bezgali attālinati punkti saplūst, t. i. viņi guļ bezgali tuvu viens otram. Tapēc ari griezuma līknes asimptotes saplūst un pārveidojas vienā taisnē, kas visa atrodas bezgalibā. Tā ir tā bezgali tāla taisne, pa kuŗu tangentialā plakne (kuŗas horicontalā pēdu linija s_{III} iet caur D_1 līdztekus s_{II}), krustojas ar tai līdztekus ejošo griezejo plakni.

Rasejumā aizrādits paraboles patiesais lielums, kas iegūts, griesejo plakni ar H savienojot. Pie tam griešana izdarita ap pēdu liniju s_{II}. Punkts J_0 ir paraboles virsotnes savienotais stāvoklis.

182 §. Taisnā smaiļa notinums.

Smaiļa sānu virsa ir robeža, kurp tiecas dotā smailī ievilktās, vaj ap viņu apvilktās piramidu sānu virsas, kuŗām ar smaili kopeja virsotne, ja piramidu sānu malu skaitu bezgali palielinam. Tapēc kautkāda smaiļa notinumu nav grūti konstruet. Konstruesim, piemēram, 243 rasejumā aizrāditā taisnā aploces smaiļa notinumu.

Tam nolūkam dotā smailī ievilksim kautkādu daudzplakņu piramidi, kuŗas šķautnes sakrīt ar smaiļa veidulēm. Sadalisim smaiļa pamataploci cik gribas daudz vienada lieluma daļās tā, lai blakus guļošo iedaļu galus savienotajās chordas varetu ar pietiekošu noteiktibu pieņemt par vienlīdzigām ar attiecigiem lokiem. Rasejumā pamataploce sadalita 20 vienlīdzigās daļās uñ šo iedaļu gali atzīmeti pēc kārtas ar skaitļiem no 0 līdz 20. Tā kā taisnam aploces smailim visas veidules ir vienlīdzigas, tad vienlīdzigas ir ari visas ievilktās piramides šķautnes. Tapēc no patvaļiga punkta L (244 ras.) ar radiusu l, kas līdzinas smaiļa veiduļu patiesam lielumam, velkam loku, un uz šā loka no patvaļiga punkta 0 nospraužam attiecigām smaiļa pamataploces chordām vienlīdzigus nogriežņus 0 – 1, 1 – 2,... 19 – 20. Galejos punktus 0 un 20 ar virsotni L savienodami, iegūstam dotā smaiļa sānu virsas notinumu. Linijas, kas atsevišķus iedaļu galus savieno ar virsotni L, piemēram 0 – L, 5 – L..., noteic atsevišķo smaiļa veiduļu stāvokļus notinumā. Tapēc nav grūti uz smaiļa virsas notinuma uzmeklet ari atsevišķo punktu stāvokļus. Tā, piemēram, lai notinumā noteiktu hiperboles virsotni C, janoteic nogriežņa LC patiesais lielums (243 ras.) un pēc tam šis nogrieznis janosprauž 244 rasejumā no virsotnes L uz tās smaiļa veidules 5 – L, uz kuras punkts C guļ 243 rasejumā.

Nogriežņa LC patiesais lielums atrodams, griežot veiduli 5 – L ap smaiļa asi līdz līdzteku stāvoklim ar V. Veiduli LN, kas ierobežo smaiļa vertikalās projekcijas redzamibas apveidu, var uzlūkot kā visu smaiļa pagriesto veiduļu kopejo vertikalo projekciju. Tapēc, lai iegūtu nogriežņa LC patieso lielumu $L_2C_{o_2}$, kas pēc tam nospraužams 244 rasejumā, tad 243 rasejumā javelk caur C_2 līdztece asij OX, līdz krustošanai ar L_2N_2 punktā C_{o_2}.

Lai noteiktu notinumā pārejus hiperboles un paraboles punktus, tad iepriekš jaatrod to veiduļu stāvokļi, uz kurām guļ aplūkojamie punkti. Tā, piemēram, lai noteiktu hiperboles punktu K, mēs notinumā noteicam veidules ML stāvokli, uz kuras guļ punkts K. Tam nolūkam 244 rasejumā uz notitās pamataploces attiecigā pusē nospraužam loku 3 – M, kura lielumu iepriekš izmērojam 243 rasejumā. Pēc tam 243 ras. noteicam nogriežņa LK patieso lielumu $L_2K_{o_2}$ un nospraužam viņu 244 rasejumā. Tādā kārtā iegūtos atsevišķos punktus ar slaideno līkni savienodami, iegūstam hiperboles un paraboles notinumus.

Loka 0 – 20 garums līdzinas $2\pi r$, pie kam r ir pamataploces radiuss. No otras puses $\smile 0-20 = l.\varphi$, pie kam l ir veidules garums, bet φ starp galejām notinuma veidulēm ieslēgtais leņķis. Tapēc $l.\varphi = 2\pi r$; bet kā no taisnleņķa trijstūra $L_2N_2F_2$ redzams, $F_2N_2 = r = l. \sin a$, pie kam $\sphericalangle a = F_2L_2N_2$. Tapēc $l.\varphi = 2\pi l. \sin a$, jeb $\varphi = 2\pi. \sin a$. No pēdejā nolīdzinajuma mēs varam noteikt leņķa φ lielumu.

183 §. Slīpā smaiļa notinums.

Ja dots patvaļigs slīps smailis (245a ras.), tad atsevišķo veiduļu garumi ir dažadi, tapēc, lai dabutu smaiļa sānu virsas notinumu, jauzmeklē atsevišķo veiduļu patiesie lielumi, kas rasejumā pēc griešanās metodes izdarīts attiecībā uz veidulēm LA, LE un LC.

Pašu notinumu (245 b ras.) sastādam no atsevišķiem trijstūŗiem AEL, ECL u. t. t., pie tam šo trijstūŗu malas AL, EL un CL ir attiecīgo veiduļu patiesie lielumi, bet AE un EC ir smaiļa pamataploces chordas. Šīm chordām jabūt pietiekoši mazām, lai viņus varetu pieņemt par vienlīdzigām ar lokiem, kuŗus tās savelk. Mēs varam ari loku AE, EC... gaŗumus noteikt atsevišķi, un ar radiusiem, kas līdzinas šiem meklejamiem gaŗumiem, 245 b rasejumā no attiecīgiem centriem A, E... velkam lokus līdz krustošanai ar iepriekš no centra L ar radiusiem $LE = LE_0$ u. t. t. vilktiem lokiem. Tādā kārtā dabusim punktus E, C... Šos punktus ar slaideno līko liniju savienodami, dabusim dotā smaiļa notinumu, no kuŗa 245 b rasejumā ir attēlota tikai ceturtā daļa.

184 §. Taisnā velteņa notinums.

Noteiksim taisnā, 246 rasejumā attēlotā aploces velteņa notinumu.

Tam nolūkam velteņa pamataploci sadalam, piemēram, 12 vienlīdzīgās daļās, atzīmejot dalijumu galus ar skaitļiem $0_1, 1_1 \dots 12_1$. Pēc tam uz ass OX no patvaļīga punkta 0′ nogriežņus $0'-1' = 0_1-1_1$, $1'-2' = 1_1-2_1$ u. t. t. nosprauzdami, iegūstam velteņa pamataploces notinumu taisnes $0'-12'$ veidā, kuŗas gaŗums līdzinas $2\pi r$, pie kam r ir velteņa pamataploces radiuss. Tamlīdzīgi dabujam velteņa augšejā pamata notinumu, kas attēlojas taisnes $0''-12'' \parallel 0'-12'$ veidā, pie kam atstatums starp notītiem pamatiem līdzinas veiduļu gaŗumam l. Tā konstruetais taisnstūris $0'-0''-12''-12'$ noteic velteņa sānu virsas notinumu. Caur punktiem 1′, 2′... pret OX stateņus velkot, iegūstam atsevišķo velteņa veiduļu notītus stāvokļus.

246 rasejumā bez tam pieņemta pret V stateniska griezejā plakne *sat*, kas velteni krusto pa zinamo elipsi. Šās elipses vertikalā projekcija attēlojas taisnes veidā, kas saplūst ar t; horicontalā projekcija attēlojas aploces veidā, kas saplūst ar velteņa horicontalo projekciju; bet profilā projekcija attēlojas elipses veidā, kuŗas atsevišķie punkti konstruejami rasejumā aizrādītā kārtā.

Atsevišķo velteņa veiduļu un griezejās plaknes krustošanās punktus noteikuši, mēs tos pārnesam uz attiecīgo veiduļu notītiem stāvokliem un iegūtos punktus 0,1 ... 11,12 ar slaideno līkni savienodami, dabujam griezuma figuras (elipses) notinumu 0 – 1 ... 11 – 12.

Bez tam rasejumā konstruets elipses patiesais lielums $0_0-1_0 \dots 11_0-12_0$, kuŗš iegūts plakni *s a t* ar H savienojot.

185 §. Slīpā velteņa notinums.

Pieņemsim, ka dots patvaļīgs slīps aploces veltenis, kuŗa ass $F_I F_{II} \parallel V$ (247 ras.).

Lai noteiktu velteņa sānu virsas notinumu, iepriekš jakonstruē velteņa griezuma figura ar patvaļigu pret velteņa asi statenisko plakni *sat*. Pie tam radusies līkne ir elipse $A_{III} C_{III} B_{III} D_{III}$, kuŗas horicontalā projekcija $A_{III_1} C_{III_1} B_{III_1} D_{III_1}$ ari ir elipse, bet vertikalā projekcija $A_{III_2} C_{III_2} B_{III_2} D_{III_2}$ saplūst ar pēdu liniju t. Elipses centra F_{III} vertikalo projekciju dabujam punktā $F_{III_2} = t \times F_{I_2} F_{II_2}$. Pēc tam uzmeklejam uz $F_1 F_{II_1}$ attiecigo horicontalo projekciju F_{III_1}.

Elipses lielā ass $A_{III} B_{III}$ ir plaknes *sat* horicontalā pēdu līdztece kas iet caur centru F_{III}. Šā caurmēra horicontalā projekcija $A_{III_1} B_{III_1}$ attēlojas dabiskā lielumā, kā elipses horicontalās projekcijas lielā ass. Elipses mazā ass $C_{III} D_{III}$ ir stateniska pret lielo asi, tapēc viņa ir līdztece V un vertikalajā projekcijā ($C_{III_2} D_{III_2}$) attēlojas dabiskā lielumā. Horicontalā projekcija $C_{III_1} D_{III_1}$ ir elipses horicontalās projekcijas mazā ass.

Elipses lielo ($A_{III_1} B_{III_1}$) un mazo ($C_{III_1} D_{III_1}$) asi horicontalajā projekcijā zinot, nav gŗūti konstruet elipses horicontalo projekciju (sk. 231 ras.).

Atsevišķus elipses $A_{III} C_{III} B_{III} D_{III}$ punktus var ari atrast pēc 178 §. Griezejās plaknes krustošanās punktus ar velteņa veiduļēm aplūkotajā gadijumā varam noteikt tieši vertikalajā projekcijā, jo šiem punktiem jaguļ uz vertikalās pēdu linijas t.

Griezuma figuras patieso lielumu atron, savienojot griezejo plakni *sat* ar H, vaj V, vaj ari plakni *sat* nostādot līdztekus ar H, vaj V. Rasejumā lietots pēdejais paņēmiens, pie kam plakne *sat* griesta ap elipses mazo asi $C_{III} D_{III}$.

Tā kā elipses lielā ass projecejas uz H dabiskā lielumā, tad viņas savienotā stāvokļa $A_{III_0} B_{III_0}$ noteikšanai, caur F_{III_2} javelk statenis pret t un uz šā stateņa, abās pusēs no F_{III_2}, janosprauž puse no elipses lielās ass $A_{III_1} B_{III_1}$, dabujot tādā veidā punktus A_{III_0} un B_{III_0}. Pēc tam nav vairs gŗūti savienotajā stāvoklī konstruet visu elipsi $A_{III_0} C_{III_0} B_{III_0} D_{III_0}$.

Atsevišķus savienotā elipses punktus var konstruet ari šādi. Lai iegūtu, piemēram, punktus G_{III_0} un J_{III_0}, tad uz stateņa, kas no punkta $G_{III_2} = J_{III_2}$ vilkts pret pēdu liniju t, abās pusēs no t janosprauž puse no nogriežņa $G_{III_1} J_{III_1}$.

Lai noteiktu velteņa sānu virsu, mēs viņu uzgriežam pa patvaļigu veiduli $C_I C_{II}$, un savienojam sānu virsu, griežot viņu ap $C_I C_{II}$, ar plakni, kas caur $C_I C_{II}$ iet līdztekus V. Pie tam visi velteņa punkti virzas uz griešanās asij $C_I C_{II}$ stateniskām plaknēm. Bet tā kā $C_I C_{II} \parallel V$, tad velteņa punkti virzas plaknēs, kas pret V stateniskas. Tas nozīmē, ka visi elipses $A_{III} C_{III} B_{III} D_{III}$ punkti virzas uz griezejās plaknes *sat*, kapēc viņu pagriestie stāvokli A_{III}, D_{III}, B_{III} un C_{III} guļ uz pēdu linijas t pagaŗinajuma.

Lai noteiktu, piemēram, pagriesto stāvokli E_{III}, mēs izmērojam loka $C_{III_0} E_{III_0}$ gaŗumu un šo gaŗumu nospraužam no punkta $C_{III_2} = C_{III_0}$ uz pēdu linijas t. Līdzigā kārtā nospraužam $E_{III} M_{III} = O E_{III_0} M_{III_0}$. Aizrāditās konstrukcijas turpinadami, iegūstam taisni $C_{III_2} A_{III} D_{III} B_{III} C_{III}$, kas līdzinas elipses rektificetam garumam.

Caur konstruetiem punktiem E_{III}, A_{III}, D_{III} u. t. t. līdzteces ar $C_{I_2} C_{II_2}$ vilkdami, iegūstam velteņa veiduļu pagriestus (notītus) stāvokļus.

Lai pagriestā stāvoklī noteiktu veiduļu galus, caur attiecigo veiduļu vertikalo projekciju galiem velkam līdzteces ar t, un atrodam šo līdztečlu krustošanās punktus ar to pašu veiduļu pagriestiem stāvokļiem.

Atrastus punktus pēc kārtas savienodami, iegūstam līknes $C_{I_2} A_I D_I B_I C_I$ un $C_{II_2} A_{II} D_{II} B_{II} C_{II}$, kuŗas kopā ar taisnēm $C_{I_2} C_{II_2}$ un $C_I C_{II}$ ierobežo velteņa sānu virsas notinumu.

Jaievēro, ka 247 rasejumā aizrādits velteņa iekšejās sānu virsas notinums. Ja gribetu dabūt ārejas sānu virsas notinumu, tad mūsu gadijumā vajadzetu tikai apzīmejumus A_I, A_{II}, A_{III} un B_I, B_{II}, B_{III} attiecigi mainit, kā tas rasejumā iekavās aizrādits.

Ja velteņa ass nav līdztece ar V, tad griežot velteni ap asi, kas stateniska pret H, mēs velteni vienmēr varam nostādit līdztekus V.

Projekciju plaknes V vietā varam ari pieņemt vienu jaunu vertikalo projekciju plakni V′, kuŗu pieņemam tā, lai viņa būtu līdztece velteņa asij. Pie tam jaunā projekciju ass O′X′ (248 ras.) ir līdztece velteņa ass horicontalai projekcijai.

Velteņa jauno vertikalo projekciju konstruejam tamlīdzīgi, kā atzīmejām prizmas jauno vertikalo projekciju (sk. 127 §, 145 ras.). Tālakas velteņa notinuma konstruešanai vajadzigas konstrukcijas izdaram tādā pašā veidā, kā 247 rasejumā.

VII. nodaļa. Smaiļa un velteņa ēnas.

186 §. Taisnes krustošanās ar smaili, kas atbalstas uz H. Taisnes un smaiļa ēnas pie saules apgaismošanas.

Pieņemsim, ka doti: slīps aploces smailis, kas atbalstās uz H, un patvaļiga taisne a (249 ras.).

Taisnes a krustošanās punktus M un N ar smaiļa virsu atrodam pēc tā paša principa, kā taisnes krustošanās punktus ar piramidi (140 §, 159b ras.). Tam nolūkam patvaļigi uz a pieņemto punktu E savienojam ar smaiļa virsotni L. Konstruejam taišņu LE un a pēdu punktus S_I un S_{II}, velkam $s = S_I S_{II}$, noteicam punktus 1 un 2, kuŗos pēdu linija s krusto smaiļa pamatu; punktus 1 un 2 savienojam ar L, un dabujam meklетos punktus $M = 1 - L \times a$ un $N = 2 - L \times a$. Taisnes a redzamiba projekcijās noteicama pēc vispārejiem likumiem.

Smaiļa ēnas noteicamas šādejadi. Kā zinams (160 §), patvaļiga ķermeņa krītošās ēnas pie saules apgaismošanas iegūstam, ja konstruejam figuru, pa kuŗu aptverošais gaismas veltenis krusto ēnas plakni. Ķermeņa pašēna ir noteikta ar apveidu, pa kuŗu aptverošais gaismas veltenis pieskaras dotam ķermenim.

Mūsu gadijumā aptverošais veltenis pa daļai pārvēršas divās plaknēs, kas pieskaras smailim pa divām viņa veidulēm. Tapēc, lai noteiktu smaiļa ēnas pie saules apgaismošanas, pret smaiļa virsu pēc 177 § javelk tangentialās plaknes, līdztekus dotam gaismas staru virzienam l. Taisnes, pa kuŗām šīs tangentialās plaknes krustojas ar ēnas plakni, t. i. tangentialo plakņu pēdu linijas, noteic krītošās ēnas apveidu. Smaiļa veidules, pa kuŗām tangentialās gaismas plaknes pieskaras dotam smailim, noteic viņa gaismas atdalošas veidules, kas atdala smaiļa gaišo no neapgaismotās virsas.

249 rasejumā L' ir smaiļa virsotnes horicontalā krītošā ēna, bet taisnes $L'G_1$ un $L'J_1$, vilktās no L' tangentiali pret smaiļa pamatu, noteic augšā mineto aptverošo gaismas plakņu pēdu linijas, t. i. viņas noteic horicontalās krītošās ēnas apveidu. Šis apveids slēdzas ar līkni $G_1 P_1 J_1$, jo smaiļa pamata horicontalā ēna saplūst ar pašu pamatu.

Krītošās ēnas apveidam atbilst pašēnas apveids LGPJL.

Ja smaiļa ēnas būtu jakonstruē pie centralās apgaismošanas, tad pēc 176 § caur doto punktu (gaismas avotu) pret smaiļa virsu javelk aptverošās tangentialās plaknes.

No taisnes a uz smaiļa virsu krītošā ēna konstruejama tapat, kā ēna, kas no taisnes krīt uz piramidi (140 §, 159 b ras.). Tam nolūkam jauzmeklē ēnas, ko dotā taisne a met uz atsevišķām smaiļa veidulēm. Tā, piemēram, ēna $P^\times$, krītoša uz patvaļigu veiduli PL, konstrueta šādi. Atzīmejam punktu $P^{\times'}$, kuŗā veidules PL horicontalā krītošā ēna $P_1 L'$ krusto taisnes a horicontalo ēnu a', un no šā punkta apgriestā virzienā, līdztekus ar l_1, velkam staru, līdz krustošanai ar $P_1 L_1$ punktā $P_1^\times$, kuŗš ir meklejamās ēnas horicontalā projekcija. Pēc tam uz vertikalās projekcijas $P_2 L_2$ noteicam ēnas vertikalo projekciju $P_2^\times$.

Var gadities, ka $P_1^\times$ uz vertikalo projekciju pārnesdami, t. i. $P_2^\times$ noteikdami, mēs vertikalajā projekcijā dabujam slīdošo krustošanos. Šādā gadijumā mēs papriekšu noteicam uz ass OX vertikalo projekciju $P_2^{\times'}$ un caur šo punktu velkam līdzteci ar l_2, līdz krustošanai ar $P_2 L_2$ meklejamā punktā $P_2^\times$. Šādu paņēmienu ieteicams vienmēr lietot, kad dabujam slīdošo krustošanos, jo kautkādu punktu nepietiekoši noteikti konstruejot, mēs vēlak varam dabut pilnigi nepareizu rasejumu, un viss darbs jasāk no jauna.

Aizrādītā kārtā pietiekoši daudz, punktam $P^{\times}$ līdzigu punktu uzmeklejuši un viņus ar slaideno līkni savienodami, dabujam līknes projekcijas, pa kuŗu caur doto taisni a ejoša gaismas plakne krusto smaiļa virsu.

Griezuma līkne un smaiļa pamats pēc 178 § ir centrali-kollineari radnieciskas figuras ar kollineacijas centru L un kollineacijas asi a'. Saprotams, ka to pašu sakaru dabujam ari projekcijās, pie kam horicontalajā projekcijā dabujam kollineacijas centru L_1 un asi $a_1' = a'$, bet vertikalajā projekcijā dabujam centru L_2 un asi $a_2' = OX$.

Uz centralo kollineaciju pamatodamies, konstruejam punktā $P^{\times}$ pieskari pret griezuma līkni. Tam nolūkam caur attiecigās veidules LP pamatu P velkam pieskari pret smaiļa pamatu, atzīmejam šās pieskares krustošanās punktu 3_1 ar kollineacijas asi a', un punktu 3_1 savienojam ar $P_1^{\times}$. Lai dabutu pieskares vertikalo projekciju, uz ass $a_2' = OX$ noteicam punktu 3_2, ko savienojam ar $P_2^{\times}$.

Tā kā smaiļa atbalsts ir aploce, tad vispārejā gadijumā taisnes a gaismas plakne krusto smaiļa virsu pa elipsi, kas projecejas uz H un V divu dažadu elipšu veidā. Saprotams, ka realā nozīme mūsu gadijumā ir tikai elipses daļai $MP^{\times}J^{\times}$*); daļa $MG^{\times}N$ ir tikai šķietamā. ēna, bet daļa $N5^{\times}J^{\times}$ – fiktivā ēna.

Ēnas redzamiba vertikalajā projekcijā noteicama pēc vispārejiem likumiem, pie tam jaievēro, ka redzamā ēnas daļa vispāreji var sniegties tikai līdz veidulei LA, tapēc no svara konstruet uz veidules LA attiecigo ēnas punktu $A^{\times}$, kā tas rasejumā aizrādits.

Bez tam pēc 178 § noteicam elipses galvenās asis abās projekcijās. Tam nolūkam uz smaiļa pamataploces atzīmejam punktus 4_1 un 5_1, kuŗos pieskares pret smaiļa pamatu ir līdzteces kollineacijas asij a', un uzmeklejam attiecigus punktus $4^{\times}$ un $5^{\times}$ elipses zistemā. Tam nolūkam velkam taisni $4_1 - P$, atzīmejam punktu $6 = 4_1 - P \times a'$, punktu 6 savienojam ar punktu $P_1^{\times}$, kas atbilst punktam P, un atzīmejam punktu $4_1^{\times} = 6 - P_1^{\times} \times$ $\times 4_1 - L_1$. Līdzigi konstruets punkts $5_1^{\times}$ uz $5_1 - L_1$. Kontroles dēļ $4_1 - 5_1$ un $4_1^{\times} - 5_1^{\times}$ krustojas kopejā punktā (8) uz ass a'.

Pēc tam ir uzmekleti vertikalās projekcijas $4_2^{\times}$ un $5_2^{\times}$. Taisne $4^{\times} - 5^{\times}$ ir griezuma līknes, t. i. elipses caurmērs, jo pieskares viņa galos ir līdzteces kollineacijas asij a', pie kam horicontalajā projekcijā šās pieskares ir līdzteces ar a', bet vertikalajā projekcijā viņas ir līdzteces ar $a'_2 = OX$.

Tālak, $4^{\times} - 5^{\times}$ dalam uz pusēm, dabujot elipses centru $Q^{\times}$, pie kam kontroles dēļ $Q_1^{\times}$ un $Q_2^{\times}$ guļ uz viena stateņa pret projekciju asi OX. Caur centru $Q^{\times}$ velkam līdzteci ar pieskarēm, kas galos $4^{\times}$ un $5^{\times}$ vilktas pret elipsi, dabujot tādā veidā attiecigā otrā elipses sakārtota caurmēra

*) 249 rasejumā līkne $P_1^{\times}J_1^{\times}$ nepareizi atzīmeta kā raustita līkne, viņa jaatzīmē ar vienlaidu liniju.

virzienu. Lai noteiktu viņas lielumu, uz zinama mums virziena atzīmejam patvaļigu punktu $9_1^\times$, šo punktu savienojam ar $P_1^\times$, atzīmejam punktu $10 = P_1^\times - 9_1^\times \times a'$, punktu 10 savienojam ar P_1, atzīmejam punktu $9_1 = 10 - P_1 \times L_1 - 9_1^\times$, un caur 9_1 velkam līdzteci ar $Q_1^\times - 9_1^\times$, dabujot tādā veidā aploces zistemā chordu $11_1 - 12_1$, kuŗai elipses zistemā atbilst meklejamais otrs elipses sakārtotais caurmērs $11_1^\times - 12_1^\times$. Pēc tam noteicam vertikalajā projekcijā $11_2^\times - 12_2^\times \parallel a'_2$.

Tā tad abās projekcijās zinam divus elipses sakārtotus caurmērus un varam pēc 170 § (228 ras.) konstruēt elipses galvenās asis, kā tas rasejumā aizrādits.

Atkārtosim vēl reiz, ka pie centralās kollineacijas elipses sakārtotiem caurmēriem $4^\times - 5^\times$ un $11^\times - 12^\times$ aploces zistemā neatbilst divi caurmēri, bet divas stateniskas taisnes, no kuŗām viena ir aploces caurmērs $4_1 - 5_1$, bet otra ir viņas chorda $11_1 - 12_1$.

Piezīme. Ja dots patvaļigs slīps aploces veltenis, tad taisnes a krustošanās punkti ar velteni un ēna, kas no dotās taisnes a krīt uz velteņa virsu, noteicami pēc 141 § (160^b ras.). Taisnes krītošā ēna vispārejā gadijumā ir elipse; šī elipse un velteņa pamataploce šinī gadijumā ir affini radnieciskas figuras, kuŗas radniecibas ass atkal ir a'. Projekcijās affinitates asis attiecigi ir $a' = a'_1$ un $a'_2 = OX$, bet affinitates virziens sakrīt ar velteņa veiduļu atticigām projekcijām. Elipses centrs guļ uz velteņa ass, t. i. elipses centrs atbilst pamataploces centram, tapēc šinī gadijumā divi elipses sakārtotie caurmēri atbilst diviem pamataploces savstarpeji stateniskiem caurmēriem.

187 §. Taisnes krustošanās ar smaili, kuŗa virsotne atbalstās uz H. Taisnes un smaiļa ēnas pie saules apgaismošanas.

Pieņemsim, ka dots slīps aploces smailis, kuŗa virsotne L atbalstās uz H, bet aplocesveidigs pamats, ar centru F, iet līdztekus H (250 ras.). Bez tam dota patvaļiga taisne a.

Ja mēs smaiļa pamatu pieņemsim par jauno horicontalo projekciju plakni H′, tad jaunā projekciju ass O′ X′ sakrītīs ar smaiļa pamata vertikalo projekciju, un mēs visas konstrukcijas varesim izpildit pēc tā paša principa, kā iepriekšejā pantā (249 ras.), kā tas ari rasejumā aizrādits.

Virsotni L savienodami ar patvaļigi uz a pieņemtu punktu E, mēs uzmeklejam taišņu LE un a pēdu punktus S_I un S_{II}, attiecibā uz H′. Pēc tam velkam $s = S_I S_{II}$, atzīmejam pēdu linijas s krustošanās punktus 1 un 2 ar smaiļa atbalstu, velkam $1 - L$ un $2 - L$ un dabujam meklejamos krustošanās punktus $M = a \times 1 - L$ un $N = a \times 2 - L$.

Ēna, ko taisne a met uz smaiļa virsu, tapat konstruejama pēc 249 rasejuma. Tam nolūkam uzmeklejam punktu E un L ģeometriskās, jeb šķietamās ēnas E'_s un L'_s uz plaknes H', un atzīmejām taisnes a šķietamo ēnu $a'_s = S_{II} E'_s$, attiecibā uz H'. Taisne a'_s ir kollineacijas ass starp smaiļa pamatu un ēnu (elipsi), ko taisne a met uz smaiļa virsu.

Lai dabutu uz patvaļigu veiduli LP krītošo ēnu, mēs atzīmejam šās veidules horicontalo krītošo šķietamo ēnu $P_1 L'_{s_1}$, uzmeklejam punktu $P'_{s_1} = P_1 L'_{s_1} \times a'_{s_1}$ un caur šo punktu velkam līdzteci ar l_1, līdz krustošanai ar $L_1 P_1$ meklejamā punktā $P_1^{\times}$, pēc kuŗa nav gŗūti uz $P_2 L_2$ uzmeklet $P_2^{\times}$. Pieskares punktā P_1 pret aploci un punktā $P_1^{\times}$ pret elipsi krustojas punktā 3_1 uz a'_{s_1}. Uzmeklejot uz $a'_{s_2} = O'X'$ punktu 3_2, un savienojot to ar $P_2^{\times}$, dabujam pieskari vertikalajā projekcijā.

Divi elipses sakārtotie caurmēri un elipses galvenās asis konstruejami tāpat, kā 249 rasejumā. Tam nolūkam atzīmejam punktus 4_1 un 5_1, kuŗiem pieskares ir līdzteces ar a'_{s_1}, velkam $4_1 - P_1$, līdz krustošanai ar a'_{s_1} punktā 6, šo punktu savienojam ar $P_1^{\times}$ un atzīmejam punktu $4_1^{\times} = 6 - P_1^{\times} \times L_1 - 4_1$. Tamlīdzigi ir uzmeklets punkts $5_1^{\times}$.

Nogriezni $4_1^{\times} - 5_1^{\times}$ dalam uz pusēm, dabujam elipses centru $Q_1^{\times}$ un turpinam konstrukcijas pazīstamā kārtā.

Aizrādisim tikai uz šādām kontrolēm. Punktiem C_1, C_2 un D_1, D_2, kuŗos elipses projekcijas krusto aploces F projekcijas, jaatronās uz stateņiem pret OX. Tamlīdzigi punktiem R_1 un R_2, kuŗos elipses projekcijas krusto gaismas atdalošas veidules LG projekcijas, — jaatronās uz viena stateņa pret OX.

Konstruesim tagad ēnas, ko horicontalā aploce F met uz H un V. Pie saules apgaismošanas horicontalā aploce met uz H ēnu aploces veidā, kuŗas centrs ir oriģinalas aploces centra F horicontalā krītošā ēna F', bet radiuss ir vienlīdzigs ar smaiļa pamataploces radiusu. Virsotnes L horicontalā ēna L' sakrīt ar L_1, t. i. $L' = L_1$, tapēc smaiļa horicontalās krītošās ēnas apveidu iegūsim, ja no L' vilksim pret aploci F' pieskares, kas aplocei F' pieskaras punktos G' un J'. Velkot no G' un J' apgriestā virzienā līdzteces ar l_1, līdz krustošanai ar aploci F_1 attiecigos punktos G_1 un J_1, dabusim gaismas atdalošo veiduļu horicontalās projekcijas $L_1 G_1$ un $L_1 J_1$. Ja smailis ir pilns, tad, saprotams, horicontalajā projekcijā smaiļa pašēna neredzama, bet tā pa daļai redzama vertikalajā projekcijā.

Lai noteiktu pareizi punktus G_1 un J_1, vislabak caur F_1 vilkt līdzteces ar radiusiem F'G' un F'J'. Tad dabusim pilnigi noteiktu krustošanos ar aploci F_1.

Smaiļa pašēnu varam noteikt ari bez horicontalās krītošās ēnas palīdzibas, velkot vienkārši no L'_{s_1} pieskares pret aploci F_1, dabujot pie tam tos pašus punktus G_1 un J_1.

Uzmeklesim tagad aploces F vertikalo krītošo ēnu. Šī ēna ir zinama elipse, pa kuŗu gaismas veltenis, kas iet telpā caur aploci F, krusto V. Šā gaismas velteņa atbalsts ir oriģinalās aploces F horicontalā krītošā ēna F′, bet viņa ass ir FF′, kas iet līdztekus gaismas staru virzienam l. Vertikalā krītošā ēna (elipse) un gaismas velteņa pamats (aploce F′) ir affini radnieciskas figuras, pie kam affinitates ass ir ēnas plaknes V, t. i. griezejās plaknes krustošanās linija OX ar gaismas velteņa pamatplakni H, bet affinitates virziens ir F′F″. (Vertikalo ēnu F″ nav gŗūti konstruet pēc vispārigiem likumiem).

Ja ir konstruetas patvaļiga aploces punkta A krītošās ēnas A′ un A″, tad punktos A′ un A″ pret aploci F′ un vertikalo ēnu (elipsi) vilktās pieskares krustojas punktā 13 uz affinitates ass OX.

Vienu attiecigo punktu pāri F′ un F″ un affinitates asi zinot, nav gŗūti pēc 169 § (227 ras.) konstruet elipses galvenās asis, kā tas rasejumā aizrādits.

188 §. Horicontalās aploces ēnas pie centralās apgaismošanas.

Pieņemsim, ka doti: kautkāda horicontalā aploce ar centru F, un gaismas avots Ω (251 ras.).

Uzmeklejot centra F un uz aploces guļoša punkta 1 horicontalās krītošās ēnas F′ un 1′, ar radiusu F′ – 1′ velkam aploci, kas ir dotās aploces F horicontalā krītošā ēna.

Caur doto aploci F ejošais gaismas smailis krusto V pa elipsi. Šī elipse un aploce F′ ir centrali kollineari radnieciskas figuras. Kollineacijas ass ir plakņu H un V krustošanās taisne OX, bet kollineacijas centrs ir kontroles centrs Ω_0 (78 §), jo šai punktā krustojas taisnes, kas savieno abas no kautkādiem punktiem krītošas ēnas.

Meklejamās elipses viduspunkts Q″ un aploces viduspunkts F′ neguļ uz kopeja stara, kā pie saules apgaismošanas, tapēc šinī gadijumā elipses viduspunkts noteicams citadi, nekā pie saules apgaismošanas. Lai konstruetu Q″, uzmeklejam divus elipses sakārtotus caurmērus (1″ – 2″ un 5″ – 6″).

Elipses zistemā mēs varam uzmeklet tādu caurmēru (1″ - 2″), kuŗam pieskares, vilktās caurmēra gala punktos pret elipsi, ir līdzteces radniecibas asij OX. Pamatodamies uz to, ka aploces F′ zistemā vilktās attiecigās pieskares ari ir līdzteces ar OX, nav gŗūti uz aploces F′ noteikt attiecigos punktus 1′ un 2′. Pēc tam uzmeklejam attiecigo punktu 1 un 2 projekcijas, un ar kontroles centra Ω_0 palīdzibu konstruejam elipses punktus 1″ un 2″. Tālak nogriezni 1″ – 2″ dalam uz pusēm, dabujot tādā veidā meklejamo elipses viduspunktu Q″.

Otrs elipses caurmērs, kas sakārtots ar 1″ – 2″, ir līdztece ar pieskarēm, vilktām caurmēra 1″ – 2″ gala punktos pret elipsi, t. i. šis caurmērs (5″ – 6″)

ir līdztece ar OX. Tā tad noteicām caurmēra 5″-6″ virzienu. Lai noteiktu viņa lielumu, tad uz zinama mums vierziena pieņemam kautkādu punktu 3″; velkam 1″-3″; atzīmejam šās taisnes krustošanās punktu 4 ar OX; velkam taisni 4-1′, un atzīmejam punktu $3' = 3'' \Omega_o \times 1' - 4$. Taisne Q″-3″ ir līdztece radniecibas asij OX, tapēc ari attiecigā taisne aploces F′ zistemā, kas iet caur punktu 3′, ir līdztece asij OX. Šī taisne krusto aploci F′ punktos 5′ un 6′, kuŗiem ar staru $\Omega_o - 5'$ un $\Omega_o - 6'$ palīdzibu konstruejam elipses zistemā attiecigos punktus 5″ un 6″. Pieskares punktos 5″ un 6″ ir līdzteces ar 1″-2″.

Zinadami divus sakārtotus elipses caurmērus 1″-2″ un 5″-6″, mēs tālak elipses galvenās asis varam noteikt pēc 170 § (228 ras.).

189 §. Ēna, kas pie saules apgaismošanas no smaiļa pamataploces malas krit uz smaiļa iekšejo virsu.

Smaiļa gaismas atdalošas veidules noteicamas tapat, kā 250 rasejumā. Tam nolūkam caur virsotni L (252 ras.) apgriestā virzienā velkam gaismas staru un uzmeklejam virsotnes šķietamo ēnu L'_s uz smaiļa pagaŗinatās pamatplaknes. Velkot no L'_{s_1} pieskares pret aploci F_1, dabusim pieskaršanās punktus G_1 un J_1, kas noteic gaismas atdalošas veidules.

Aploces mala G-2-6-J met ēnu uz smaiļa iekšejo virsu. Lai noteiktu ēnu $2^\times$, kas krīt uz patvaļigi pieņemto veiduli 1-L, mēs 1_1 savienojam ar L'_{s_1}, uzmeklejam šīs taisnes krustošanās punktu 2_1 ar smaiļa pamataploci, un no punkta 2_1 velkam līdzteci ar l_1, līdz krustošanai ar $1_1 - L_1$ mekletā punktā $2_1{}^\times$. Pēc tam uz $L_2 - 1_2$ noteicam $2_2{}^\times$.

Uz smaiļa iekšejo virsu krītošās ēnas horicontalā projekcija ir elipse, kas ir affini radnieciska figura ar aploci F_1. Radniecibas ass ir $G_1 J_1$, bet radniecibas virziens l_1. Šās elipses centra $F_1{}^\times$ noteikšanai, mēs atzīmejam punktu $4_1 = 2_1 F_1 \times G_1 J_1$, un caur punktiem $2_1{}^\times$ un 4_1 velkam taisni, līdz krustošanai ar staru, kas caur F_1 iet līdztekus l_1, dabujot tā $F_1{}^\times$.

Attiecigos punktos 2_1 un $2_1{}^\times$ pret aploci F_1 un elipsi $F_1{}^\times$ vilktās pieskares krustojas punktā 3_1 uz radniecibas ass $G_1 J_1$. Caur šo punktu iet ari pieskare, kas no punkta 1_1 vilkta pret aploci F_1, jo aploci F_1 un elipsi $F_1{}^\times$ varam ari uzlūkot, kā centrali kollineari radnieciskas figuras ar radniecibas asi $G_1 J_1$ un radniecibas centru L_1. Pie tam viens centrali-kollineari radnieciskais punktu pāris ir 1_1 un $2_1{}^\times$, kas guļ uz zinamā kollineacijas stara $1_1 - L_1$.

Vertikalajā projekcijā affinitates ass starp aploci F_2, kas šeit attēlojas kā taisne, — līdztece asij OX, — un elipsi $F_2{}^\times$ ir $G_2 J_2$, bet affinitates virziens ir l_2. Tapēc uz $1_2 - L_2$ punktu $2_2{}^\times$ un uz $G_2 J_2$ punktu 3_2 uzmeklejuši un punktus $2_2{}^\times$ un 3_2 savienojuši, dabusim attiecigo pieskari pret elipsi vertikalajā projekcijā.

Lai noteiktu elipses viszemako punktu $6_2^{\times}$ vertikalajā projekcijā, kam pieskare ir horicontalā taisne, t. i. līdztece OX, — mēs pret aploci F_1 velkam pieskari, līdztekus ar $G_1 J_1$, un atzīmejam pieskaršanās punktu 5_1. Uz veidules $5_1 - L_1$ ar punkta $6_1 = 5_1 - L'_{s_1} \times \cup G_1 - 2_1 - J_1$ palīdzibu noteicam punktu $6_1^{\times}$ un pēc tam uz $5_2 - L_2$ uzmeklejam $6_2^{\times}$. Pieskare punktā $6_1^{\times}$ pret elipsi ir līdztece ar $G_1 J_1$, bet pieskare punktā $6_2^{\times}$ pret elipsi ir līdztece ar $G_2 J_2$, vaj OX.

Tamlīdzigi varam noteikt elipses visaugstako punktu $5_2^{\times}$ uz $6_2 - L$. Vēl vienkāršaki šis punkts konstruejams šādi. Savienojam $6_1^{\times}$ ar $F_1^{\times}$ un nospraužam uz šīs taisnes otrā pusē nogriezni $5_1^{\times} F_1^{\times} = 6_1^{\times} F_1^{\times}$. Tā dabujam horicontalajā projekcijā vienu elipses caurmēru $6_1^{\times} - 5_1^{\times}$. Atzīmejot punktus $7_1 = 5_1^{\times} - 6_1^{\times} \times G_1 J_1$ un uzmeklejot uz $G_2 J_2$ attiecigo punktu 7_2, mēs vertikalajā projekcijā dabujam caurmēra $6_2^{\times} - 5_2^{\times}$ virzienu, uz kuŗa varam noteikt šā caurmēra galu $5_2^{\times}$, kā ari elipses centru $F_2^{\times}$.

Pēc tam noteicam horicontalajā projekcijā otru elipses sakārtotu caurmēru $8_1^{\times} - 9_1^{\times}$, kuŗam aploces zistemā atbilst caurmērs $8_1 - 9_1$, kas ir stateniski pret $5_1 - 6_1$, jeb $8_1 - 9_1 \parallel G_1 J_1$ un iet caur F_1. Tāpēc nav gŗūti noteikt caurmēru $8_1^{\times} - 9_1^{\times}$, kuŗa virziens iet caur $F_1^{\times}$, līdztekus $8_1 - 9_1$, vaj $G_1 J_1$. Stari $8_1 - 8_1^{\times}$ un $9_1 - 9_1^{\times}$ ir līdzteces l_1. Zinadami divus elipses sakārtotus caurmērus $5_1^{\times} - 6_1^{\times}$ un $8_1^{\times} - 9_1^{\times}$ pēc 170 § (228 ras.) konstruejam elipses galvenās asis $14_1^{\times} - 15_1^{\times}$ un $16_1^{\times} - 17_1^{\times}$, kā tas rasejumā aizrādits, un izvelkam horicontalajā projekcijā visu elipsi, kas ir no smaiļa pamataploces malas uz smaiļa iekšejo virsu krītoša ēna. Saprotams, ka tikai daļa $G_1 - 2_1^{\times} - 15_1^{\times} - 6_1^{\times} - 16_1^{\times} - J_1$ ir patiesā, bet pāreja daļa ir šķietamā ēna.

Vertikalajā projekcijā virziens $8_2^{\times} - 9_2^{\times} \parallel G_2 J_2$. Tapēc uz šā virziena nav gŗūti noteikt galus $8_2^{\times}$ un $9_2^{\times}$ un pēc 228 ras. konstruet elipsi. Saprotams, ka vertikalajā projekcijā visa uz smaiļa iekšejās virsas guļoša ēna neredzama.

190 §. Ēna, kas pie centralās apgaismošanas no smaiļa pamataploces malas krīt uz smaiļa iekšejo virsu.

Apzīmesim gaismas avota projekcijas ar Ω_1 un Ω_2 (253 ras.); uzmeklesim virsotnes L šķietamo ēnu L'_s un noteiksim gaismas atdalošas veidules LG un LJ.

Ēna, ko aploces mala met uz smaiļa iekžejo virsu, un pamataploce F ir centrali kollineari radnieciskas figuras. Horicontalajā projekcijā kollineacijas ass ir $G_1 J_1$, bet kollineacijas centrs Ω_1. Vertikalajā projekcijā kollineacijas ass ir $G_2 J_2$ un kollineacijas centrs Ω_2.

Atzīmesim uz aploces F_1 punktus 1_1 un 2_1, kuŗiem pieskares ir līdzteces asij $J_1 G_1$. Tad attiecigām pieskarēm elipses zistemā ari jabūt līdztecēm ar $J_1 G_1$, un tapēc attiecigai taisnei $1_1{}^{\times} - 2_1{}^{\times}$ jabūt elipses caurmēram. Caurmēru $1_1{}^{\times} - 2_1{}^{\times}$ dabujam šādi.

Taisnes $1 - L$ un $2 - L$ ir ēnas, ko taisne $L'_s - 1 - 2$ met uz smaiļa virsu, jeb linijas $1 - L$ un $2 - L$ ir taisnes $L'_s - 1 - 2$ gaismas plaknes krustošanās taisnes ar smaiļa virsu.

Punktu $1_1{}^{\times}$ iegūsim, velkot staru $\Omega_1 - 1_1$ līdz krustošanai ar $L_1 - 2_1$. Tamlīdzigi noteicam ari punktu $2_1{}^{\times} = \Omega_1 - 2_1 \times L_1 - 1_1$. Taisnes $1_1 - 2_1$ un $1_1{}^{\times} - 2_1{}^{\times}$ kontroles dēļ krustojas uz ass $G_1 J_1$ zinamā punktā 3.

Nogriezni $1_1{}^{\times} - 2_1{}^{\times}$ dalam uz pusēm, dabujot elipses centru $Q_1{}^{\times}$. Caur šo punktu iet otrs elipses sakārtotais caurmērs $5_1{}^{\times} - 6_1{}^{\times}$, līdztekus asij $G_1 J_1$.

Pieņemot uz zinama mums virziena $5_1{}^{\times} - 6_1{}^{\times}$ patvaļigu punktu $4_1{}^{\times}$, mēs šo punktu savienojam, piemēram, ar $1_1{}^{\times}$, atzīmejam šīs taisnes krustošanās punktu 8 ar $J_1 G_1$, un caur Ω_1 un $4_1{}^{\times}$ velkam staru, līdz krustošanai ar taisni $1_1 - 8$ punktā 4_1. Caur 4_1 velkam līdzteci ar $J_1 G_1$, dabujot aploces F_1 chordu $5_1 - 6_1$, un pēc tam uzmeklejam attiecigos elipses punktus $5_1{}^{\times}$ un $6_1{}^{\times}$.

Divus elipses sakārtotus caurmērus $1_1{}^{\times} - 2_1{}^{\times}$ un $5_1{}^{\times} - 6_1{}^{\times}$ zinot, nav grūti pēc 228 ras. uzmeklet elipses galvenās asis, kā tas rasejumā aizrādits.

Punktā J_1 pret elipsi vilkto pieskari iegūsim, atzīmejot punktu 7_1, kur pieskare, kas tanī pašā punktā J_1 vilkta pret aploci F_1, krusto pieskari, kas vilkta, piemēram, punktā 1_1 pret aploci F_1. Uzmeklejot tālak attiecigo punktu $7_1{}^{\times}$ uz pieskares, kas punktā $1_1{}^{\times}$ vilkta pret elipsi, un savienojot punktu $7_1{}^{\times}$ ar J_1, dabujam meklejamo pieskari pret elipsi punktā J_1.

Pēc tam, tapat, kā 252 rasejumā, uzmeklejam $1_2{}^{\times} - 2_2{}^{\times}$ un $5_2{}^{\times} - 6_2{}^{\times}$, dabujot vertikalajā projekcijā divus sakārtotus elipses caurmērus, ar kuŗu palīdzibu nav grūti konstruet pašu elipsi.

P i e z ī m e. Elipses centrs $Q_2{}^{\times}$, saprotams, tikai nejauši itka guļ uz $G_2 J_2$, patiesibā viņš mūsu gadijumā atrodas mazliet virs $G_2 J_2$.

191 §. Ēna, kas pie saules apgaismošanas no velteņa pamataploces malas krīt uz velteņa iekšejo virsu.

Velteņa augšejās pamataploces F_{II} horicontalā krītošā ēna ir aploce ar centru F'_{II} (254 ras.), kuŗas radiuss ir vienlīdzigs ar pamataploces radiusu.

Aploces F_{II} vertikalā ēna ir elipse, kas konstruejama pec 187 §, (250 ras.).

Velkot pret aplocēm F_I un F_{II}' pieskares, dabujam horicontalās krītošās ēnas apveidu. Pieskaršanās punkti G_I un J_I noteic gaismas atdalošas veidules $G_I G_{II}$ un $J_I J_{II}$.

Taisne $G_{II} J_{II}$, kas ir affinitates ass starp aploci F_{II} un no pusaploces $G_{II}\, AC J_{II}$ uz velteņa iekšejo virsu krītošo ēnu, iet caur centru F_{II}, tapēc šai gadijumā aploces F_{II} un mekletās elipses centri saplūst.

Uz meklejamās elipses (ēnas) guļoša patvaļiga ēnas punkta $A^{\times}_{III}$ horicontalo projekciju $A^{\times}_{III_1}$ iegūsim šādā kārtā. Pieņemsim patvaļigu veiduli $A_I A_{II}$, noteiksim šās veidules krītošo ēnu $A_I A'_{II}$, un atzīmesim krustošanas punktu A'_{III} ar aploci F'_{II}. Pēc tam caur A'_{III} vilksim līdsteci ar l_1, un atzīmesim punktus $A^{\times}_{III_1}$ un A_1, kuŗos šī līdstece krusto $A_I A_{II_1}$ un aploci F_{II_1}. Pie tam $F_{II}' A_{III}' \parallel F_{II_1} A_1$. Saprotams, ka $A^{\times}_{III}$ ir ēna, ko uz aploces F_{II} malas guļošs punkts A met uz velteņa iekšejo virsu. Pieskares punktos A_1 un $A^{\times}_{III_1}$ krustojas uz affinitates ass $G_{II_1} J_{II_1}$ punktā 1_1.

Nogrieznis $F_{II_1} A^{\times}_{III_1}$ ir puse no zinama elipses caurmēra, tapēc nav gŗūti noteikt šā caurmēra otro gala punktu $B^{\times}_{III_1}$, kuŗam jaatbilst caurmēra $A_1 F_{II_1} B_1$ gala punktam B_1. Tā tad taisnes $A_1 B_1$ un $B^{\times}_{III_1} B^{\times}_{III_1}$ ir attiecigie aploces F_{II} un affini radnieciskas elipses caurmēri.

Ja mēs tagad aploces zistemā vilksim caurmēru $C_1 D_1 \perp A_1 B_1$ un uzmeklesim attiecigo caurmēru $C^{\times}_{III_1} D^{\times}_{III_1}$ elipses zistemā, tad $A^{\times}_{III_1} B^{\times}_{III_1}$ un $C^{\times}_{III_1} D^{\times}_{III_1}$ ir divi meklejamās elipses sakārtotie caurmēri.

Punktu $C^{\times}_{III_1}$ iegūsim, uzmeklejot punktu M, kuŗā $B_1 C_1$ krusto asi $G_{II_1} J_{II_1}$, un atzīmejot pēc tam punktu $C^{\times}_{III_1}$, kuŗā taisne $M B^{\times}_{III_1}$ krustojas ar taisni, kas caur C_1 iet līdztekus l_1.

Punktu $C^{\times}_{III_1}$ varam konstruet arī šādi. Atzīmesim punkta C krītošo ēnu C', uzmeklesim attiecigās veidules atbalstpunktu C_I un atzīmesim veiduli $C_I C_{II_1}$, uz kuŗas dabusim meklejamo punktu $C^{\times}_{III_1}$, velkot caur C' līdzteci ar l_1, līdz krustošanai ar $C_I C_{II_1}$.

Nospraužot otrā pusē no F_{II_1} nogriezni $D^{\times}_{III_1} F_{II_1} = C^{\times}_{III_1} F_{II_1}$, dabujam otro elipses caurmēra gala punktu $D^{\times}_{III_1}$. Tādā kārtā dabujam divus elipses sakārtotus caurmērus $A^{\times}_{III_1} B^{\times}_{III_1}$ un $C^{\times}_{III_1} D^{\times}_{III_1}$ un pēc 170 § (228 ras.) noteicam elipses galvenās asis.

Elipsi vertikalajā projekcijā konstruejam šādi. Uz $A_{I_2} A_{II_2}$ noteicam punktu $A^{\times}_{III_2}$, šo punktu savienojam ar F_{II_2} un uz taisnes $A^{\times}_{III_2} F_{II_2}$ uzmeklejam $B^{\times}_{III_2}$. Bez tam uz $G_{II_2} J_{II_2}$ noteicam 1_2, un savienojot šo punktu ar A_{III_2}, dabujam pieskari pret elipsi punktā $A^{\times}_{III_2}$. Pieskare punktā $B^{\times}_{III_2}$ iet līdztekus ar tikko konstrueto pieskari. Līdztekus šai pieskarei velkam caur F_{II} otro elipses sakārtoto caurmēru, uz kuŗa ar horicintalo projekciju $C^{\times}_{III_1}$ un $D^{\times}_{III_1}$ palīdzibu nav gŗūti noteikt $C^{\times}_{III_2}$ un $D^{\times}_{III_2}$. Tā vertikalajā projekcijā dabujam divus elipses sakārtotus caurmērus un pēc 228 ras. varam šo elipsi konstruet.

192 §. Ēna, kas pie centralās apgaismošanas no velteņa pamataploces malas krit uz velteņa iekšejo virsu.

Velteņa augšejās pamataploces F_{II} horicontalā krītošā ēna ir aploce ar viduspunktu F_{II}' (255 ras.), pie tam gaismas avota projekcijas ir Ω_1 un Ω_2. Aploces radiusu $F_{II}' - 1'$ iegūsim, uzmeklejot punkta 1 horicontalo krītošo ēnu 1'.

Velkot no gaismas avota Ω telpā līdzteci ar velteņa asi un uzmeklejot šās līdzteces horicontalo pēdu punktu L', mēs dabusim velteņa bezgali tālas virsotnes horicontalo krītoso ēnu L'. Caur šo punktu iet visu velteņa veiduļu horicontalās krītošās ēnas.

No L' pret atbalstaploci F_I pieskares velkot, mēs iegūsim horicontalās krītošās ēnas apveidu, bet pieskaršanās punkti G_I un J_I noteic gaismas atdalošas veidules $G_I G_{II}$ un $J_I J_{II}$.

Ēna, ko aploces mala $G_{II} A J_{II}$ met uz velteņa iekšejo virsu, un aploce F_{II} ir affini radnieciskas figuras, kuŗu ass horicontalajā projekcijā ir $G_{II_1} J_{II_1}$, bet radniecibas virziens sakrīt ar $F_I F_{II_1}$.

Vilksim patvaļigu veiduli $A_I A_{II_1}$, uzmeklesim šās veidules horicontalo krītošo ēnu, kuŗa iet caur L' un A_I, noteiksim krustošanās punktu A'_{III} ar aploci F'_{II} un uzmeklesim punktus $A^{\times}_{III_1}$ un A_1, kuŗos stars $\Omega_1 A_{III}'$ krusto veiduli $A_I A_{II_1}$ un aploci F_{II_1}, pie kam jaievēro, ka $A_1 F_{II_1} \parallel A_{III}' F_{II}'$. Tā mēs dabujam ēnu $A^{\times}_{III_1}$, ko punkts A met uz velteņa iekšejo virsu. Punktu A_1, $A^{\times}_{III_1}$ un A_{II_1} pieskares krustojas kopejā punktā 2 uz $G_{II_1} J_{II_1}$.

Vienu attiecigo punktu pāri $A^{\times}_{III_1}$ un A_{II_1}, radniecibas asi $G_{II_1} J_{II_1}$ un radniecibas virzienu $F_I F_{II_1}$ zinot, nav gŗūti pēc 169 § konstruet meklejamo elipsi, kā affini radniecisku figuru ar aploci F_{II_1}, pie kam elipses centrs F_{III_1} guļ uz $F_{II_1} F_I$.

Ja horicontalajā projekcijā ir konstruetas galvenās asis, tad tamlīdzigi, kā 254 rasejumā, nav gŗūti uzmeklet šo caurmēru attiecigās vertikalās projekcijas, kas vertikalajā projekcijā noteic divus elipses sakārtotus caurmērus, pēc kam pēc 228 ras. varam konstruet galvenās asis ari vertikalajā projekcijā, kā tas rasejumā aizrādits.

VIII nodaļa. Smaiļu un velteņu savstarpeja krustošanās.

193 §. Smaiļa un velteņa savstarpeja krustošanās, gadijumā, ja abi dotie ķermeņi atbalstās uz kopeju plakni.

Patvaļigu veiduļu krustošanās punktus varam noteikt tapat, kā mēs konstruejām piramides un prizmas šķautņu krustošanās punktus (146 §, 170 ras.). Tam nolūkam caur smaiļa virsotni L (256 ras.) velkam līdzteci ar velteņa veidulēm un uzmeklejam šīs līdzteces pēdu punktu S_I. Caur patvaļigi pieņemtas veidules LA pamatu A_1 velkam $s = S_I A_1$ un atzīmejam pēdu linijas s krustošanās punktus 1 un 2 ar velteņa atbalstu. Caur punktiem 1 un 2 velkam līdzteces velteņa veidulēm, līdz krustošanai ar $L_1 A_1$

mekletos punktos M_1 un N_1. Pēc tam uz L_2A_2 noteicam M_2 un N_2. Līdzigā kārtā noteicami velteņa krustošanās punkti ar smaili.

Pieskari t, kas punktā N vilkta pret doto ķermeņu līko krustošanās liniju, dabusim, ievērojot, ka t telpā ir taisne, pa kuŗu krustojas punktā N pret smaiļa un velteņa virsām vilktās tangentialās plaknes. Pirmā no šām plaknēm pieskaras smaiļa virsai pa veiduli LA, kas iet caur punktu N. Šās plaknes horicontalā pēdu linija m pieskaras smaiļa atbalstam punktā A, kapēc nav gŗūti noteikt pēdu linijas m virzienu.

Tamlīdzigi punktā N pret velteņa virsu vilktā tangentialā plakne pieskaras šai virsai pa veiduli ar atbalstpunktu 2. Šās plaknes horicontalā pēdu linija n ir pieskare pret velteņa atbalstu punktā 2. Caur punktu S, kuŗā krustojas pēdu linijas m un n, iet meklejamā pieskare t, kuŗas projekcijas ir $t_1 = N_1 S$ un $t_2 = N_2 S_2$.

Var atgadities, ka punkts S neatrodas rasejuma robežās. Tādā gadijumā velkam patvaļigu jauno horicontalo prejekciju plakni H′, atzīmejam jauno projekciju asi O′X′, uzmeklejam punktus F_{III} un P′, kuŗos velteņa un smaiļa asis krusto plakni H′, un atzīmejam doto ķermeņu jaunos atbalstus attiecibā uz plakni H′, pie tam smaiļa jaunās atbalstaploces radiuss līdzinas $P'_2 - 3_2$. Atzīmejot vēl attiecigo veiduļu jaunos atbalstpunktus A′ un 2′, velkam priet jauniem atbalstiem pieskares m' un n' (pie tam $m' \parallel m$ un $n' \parallel n$) un atzīmejam krustošanās punktu $S' = m' \times n'$. Caur S′ un N_1 iet tā horicontalā projekcija t_1. Uzmeklejot uz O′X′ projekciju S'_2 un savienojot to ar N_2, dabujam t_2.

Jaievēro, ka punkti B_1 un C_1, kuŗos krustojas atbalsti, t. i. aploces F_{III_1} un P'_1, pieder doto ķermeņu krustošanās figurai. Saprotams, ka nav gŗūti uz O′X′ noteikt attiecigas vertikalās projekcijas B_2 un C_2.

Pietiekoši daudz puktu ar attiecigām pieskarēm uzmeklejuši un tos attiecigi savienojuši, iegūstam doto ķermeņu krustošanās figuru, kas ir nenoteikta telpas līkne.

257 rasejumā smailis un veltenis ir pieņemti citadā stāvoklī un šinī rasejumā aizrāditi raksturigaki krustošanās līknes punkti. Lai varetu šos punktus skaidraki aizrādit rasejumā, tad indekši „1“ un „2“ pie atzīmeto punktu projekcijām ir atmesti.

Pie raksturigakiem punktiem pieder sekošie:

a) Punkti A_3, A_4 un B_3, B_4 uz veidulēm LA_I un LB_I, kuŗas ierobežo smaiļa horicontalās projekcijas redzamibas apveidu.

b) Punkti D_3 un D_4, guļošie uz velteņa veidules $D_I D_{II}$, kuŗa ierobežo velteņa horicontalās projekcijas redzamibu.

Japiezīmē, ka uz veidules $C_I C_{II}$, kas no otrās puses ierobežo velteņa horicontalās projekcijas redzamibu, neatrodas neviens krustošanās punkts ar smaili, jo pēdu linija $S_I C_I$ nekrusto smaiļa pamatu.

c) Punkti J_3, J_4 un K_3, K_4 uz veidulēm LJ_I un LK_I, kas ierobežo smaiļa vertikalās projekcijas redzamibas apveidu.

d) Punkti M_3, M_4 un N_3, N_4 uz veidulēm $M_I M_{II}$ un $N_I N_{II}$, kas ierobežo velteņa vertikalās projekcijas redzamibas apveidu.

e) Punkti E_3, E_4 un G_3, G_4, kuŗiem velteņa veidules, kas iet caur aizrāditiem punktiem, ir pieskares pret krustošanās līkni. Šie punkti guļ uz smaiļa veidulēm LE_I un LG_I, kuŗu pamatus E_I un G_I dabujam, ja no S_I pret smaiļa pamatu velkam pieskares.

Japiezīmē, ka pēdejo aizrādito punktu vietā dažreiz atrodami punkti, kuŗos smaiļa veidules, (kas neierobežo redzamibas apveidu), pieskaras krustošanās līknei. Tādos gadijumos meklejamie punkti guļ uz velteņa veidulēm, kuŗu pamatus dabujam, ja no S_I pret velteņa pamatu velkam pieskares. Mūsu gadijumā šās pieskares nekrustojas ar smaiļa pamatu, bet apņem viņu, tapēc mūsu gadijumā šiem punktiem ir tikai šķietamā nozīme. Bet ja šās pieskares krustotu smaiļa pamatu, tad mēs dabutu velteņa ieejas un izejas krustošanās figuras ar smaili. Turpreti mūsu gadijumā, mēs dabujam smaiļa ieejas un izejas krustošanās figuras ar velteni.

Bez aizrāditiem diviem gadijumiem vēl iespējams trešais videjais gadijums, kad ne visas, bet tikai daļa no viena ķermeņa veidulēm krusto otru ķermeni. Tādā gadijumā rodas viena nepārtraukta slēgta krustošanās līkne, pie kam no katra ķermeņa tiek izgriesta tikai viena daļa. Tāds gadijums rodas tad, kad velteņa pamatu krusto tikai viena no S_I pret smaiļa pamatu vilkta pieskare. Saprotams, ka tādā gadijumā viena no pieskarēm, vilktām no S_I pret velteņa pamatu, krusto smaiļa pamatu.

Ja viena no pieskarēm, vilktām no S_I, vienā un taī pašā laikā pieskaras smaiļa un velteņa pamatam, tad doto ķermeņu krustošanās līkne sastāv no divām līknēm, kuŗām ir viens kopejs punkts.

Ja abas no S_I vilktās pieskares vienā un taī pašā laikā pieskaras smaiļa un velteņa pamatam, tad iegūstam divas krustošanās līknes, kuŗām ir divi kopeji punkti.

Tādā kārtā krustošanās līkņu atsevišķos punktus noteikuši, mēs pa pāriem savienojam tādus divus punktus, kas vienā un taī pašā laikā guļ uz divām blakus guļošām smaiļa veidulēm un uz attiecigām blakus guļošām velteņa veidulēm, vaj ari otradi.

Visērtaki iesākt no punktiem, guļošiem uz veidulēm, kas ierobežo redzamibas apveidu. Tā, piemēram, var iesākt no veidules L_1B_I, uz kuŗas iegūts punkts B_4. Pēc tam mēs pakāpeniski aplūkojam visas smaiļa veidules L_1E_1, L_1D_{III}..., kuŗu virziens sakrīt, piemēram, ar pulksteņa rāditaja griešanās virzienu. Pie tam velteņa veidulēm, uz kuŗām vienā un taī pašā ļaikā guļ atsevišķo veiduļu krustošanās punkti, tapat pakāpeniski jaseko vienai pēc otras zinamā noteiktā kārtā. Šī kārta mainas tikai tanīs punktos, kur attiecigās veidules pieskaras krustošanās līknei. Tā, piemēram, punkti B_4, E_4, D_3, J_4... guļ uz velteņa veidulēm, kuŗu atbalsti sākumā seko cits pēc cita virzienā, kas ir pretejs pulksteņa rāditaja griešanās virzienam, bet pēc tam šie atbalsti seko virzienā, kas sakrīt ar pulksteņa rāditaja griešanās virzienu, pie kam sekošanas kārtiba mainas punktā, kas guļ uz tādas galejas veidules $E_{IV}E_4$, kas pieskaras krustošanās līknei. Tamlīdzigi veidulē $G_{IV}G_4$, kas pieskaras krustošanās līknei, mainas velteņa veiduļu sekošanas kārta.

Konstruetos punktus savienodami, iegūstam ieejas līkni $B_4E_4D_3J_4M_3$-$A_4G_4M_4K_4D_4B_4$, no kuŗas horicontalajā projekcijā redzama daļa $B_4E_4D_3$, bet vertikalajā projekcijā redzama daļa $M_3A_4G_4M_4$.

Izejas līkne ir $B_3E_3J_3N_3A_3G_3N_4K_3B_3$, no kuŗas horicontalajā projekcijā redzama daļa $B_3E_3J_3N_3A_3$, bet vertikalajā projekcijā redzama daļa $N_3A_3G_3N_4$.

Abas iegūtas līknes vispārejā gadijumā ir telpas līknes.

Kā rasejumā redzams, ieejas līknes horicontalai projekcijai mūsu gadijumā ir cilpasveidigs izskats.

Krustošanās līkne zinamā projekcijā redzama, ja šinī projekcijā redzamas abas krustodamās virsas.

Ēnas, kas no dotiem ķermeņiem krīt uz H un V un no viena ķermeņa uz otru, konstruejamas pēc agraki jau izskaidrotiem paņēmieniem, pie kam šās ēnas ir elipšu daļas. pa kuŗām caur gaismas atdalošām veidulēm ejošas gaismas plaknes krusto doto ķermeņu virsas (186 §, 249 ras.).

Līdzigā kārtā varam konstruet divu smaiļu, vaj divu velteņu krustošanās figuru gadijumā, ja dotie ķermeņi atbalstās uz kopeju plakni.

194 §. Divu smaiļu krustošanās, kuŗām ir dažadas pamatplaknes.

Pieņemsim, ka janoteic divu taisno aploces smaiļu krustošanās, kuŗu pamatplaknes ieņem patvaļigus stāvokļus telpā (258 ras.).

Smaiļu pamatplaknes noteic divi pāri krustodamo pēdu līdzteču h_I, v_I un h_{II}, v_{II}, pie kam $h_I \times v_I = F_I$ un $h_{II} \times v_{II} = F_{II}$. Pieņemsim punktus F_I un F_{II} par smaiļu pamataploču centriem un konstruesim pēc dotā pamataploces radiusa patiesā lieluma r šo aploču projekcijas uz H un V elipšu veidā. Šās elipses konstruejamas pēc 167 §. Lielās asis līdzinas $2r$ un sakrīt ar h_{I_1}, h_{II_1}, v_{I_2} un v_{II_2}. Mazās pusasis ikkatrā projekcijā noteicamas ar affini radniecisko aploču palīdzibu, kuŗu centri sakrīt ar punktu F_I un F_{II} projekcijām. Attiecigas affinitates asis ir h_{I_1}, h_{II_1}, v_{I_2} un v_{II_2}.

Lai pilnigi noteiktu katras elipses affinitati, jazinā divi affini radnieciski punkti. Tapēc, piemēram, uz v_I pieņemam patvaļigu punktu R_I un atrodam viņa savienoto stāvokli R_{I_0}, pie kam griešanās ass ir horicontālā pēdu līdztece h_I. Zinot R_{I_1} un R_{I_0}, nav grūti noteikt elipses F_{I_1} mazo asi.

Līdzigā kārtā elipses F_{I_2} mazās ass noteikšanai, mēs konstruejam patvaļigi uz h_I pieņemta punkta W_I savienoto stāvokli W_{I_0}, pie kam griešanās ass ir v_I.

Tapat ar punktu R_{II_0} un W_{II_0} palīdzibu ir noteiktas otra smaiļa pamata projekcijas elipšu veidā.

Tā kā pēc uzdevuma smaiļiem jabūt taisniem, tad viņu asu p_I un p_{II} projekcijām pēc 116 § jabūt: $p_{I_1} \perp h_{I_1}$, $p_{I_2} \perp v_{I_2}$, $p_{II_1} \perp h_{II_1}$ un $p_{II_2} \perp v_{II_2}$.

Ja ir doti smaiļu augstumu patiesie lielumi, tad pēc griešanas metodes (63 §) noteicam smaiļu virsotņu L_I un L_{II} projekcijas.

No virsotņu L_I un L_{II} projekcijām pret pamatu projekcijām pieskares velkot, iegūstam smaiļu projekcijas.

Pēc tam konstruejam smaiļu pamatplakņu krustošanās taisni a un pēc 148 §, 173 ras., noteicam virsotņu taisnes $L_I L_{II}$ krustošanās punktus S_I un S_{II} ar pagarinatām smaiļu pamatplaknēm h_I, v_I un h_{II}, v_{II}.

Atsevišķo veiduļu krustošanās punkti noteicami tādā pašā kārtā, kā 173 rasejumā.

Lai pilnigi noteiktu krustošanās līknes stāvokli, jaatrod viņas raksturigakie, iepriekšejā pantā zem a)—e) minetie, punkti. Lielakas skaidribas dēļ 258 rasejumā šie punkti atzīmeti ar tādiem pašiem burtiem, kā 257 rasejumā.

Pie b) japiezīmē, ka šinī gadijumā bez punktiem D_3 un D_4 iegūti vēl punkti C_3 un C_4, tā kā ari veidule $L_{II} C_I$ krusto pirmo smaili.

Pie c) japiezīmē, ka veidule $L_I J_I$ nekrusto otro smaili, jo attiecigās palīgplaknes pēdu linija, attiecibā uz plakni $h_{II} v_{II}$, nekrusto pamatu F_{II}.

Pie e) japiezīme, ka tangentialā palīgplakne $S_I S_{II} E_I$, kas pieskaras pirmā smaiļa pamataplocei, krusto otrā smaiļa pamataploci, bet tangentialā palīgplakne $S_I S_{II} G_I$, kas pieskaras pirmam smailim, nekrusto otra smaiļa pamataploci, jo taisne $S_{II_1} a$ nesastop otrā smaiļa pamata horicontalo projekciju (punkts $a = S_{I_1} G_I \times a_1$).

Līdzigā kārtā tangentialā plakne $S_{II} S_I Q_I$, kas pieskaras otram smailim, krusto pirmā smaiļa pamatu, bet tangentialā plakne $S_{II} S_I P_I$, kas pieskaras otram smailim, nekrusto pirmā smaiļa pamatu. Tapēc, pamatojoties uz 193 pantā aizrādito, dabusim, ka aplūkotajā gadijumā mums ir darišana ar vienu slēgtu krustošanās figuru $A_4 E_4 K_4 N_3 B_4 C_3 Q_3 M_3 B_3 K_3 D_3 E_3 D_4 A_3 M_4 Q_4$-$C_4 A_4 N_4$, pie kam horicontalajā projekcijā ir redzamas daļas $A_3 M_4 Q_4 C_4'$ un $B_4 C_3 Q_3 M_3 B_3$, bet vertikalajā projekcijā ir redzamas daļas $N_4 A_4 E_4 K_4$ un $K_3 D_3 E_3 D_4 A_3 M_4$.

Patvaļiga krustošanās līknes punkta pieskari iegūsim, noteikdami taisni, pa kuŗu krustojas aplūkojamā punktā pret dotiem smaiļiem vilktās tangentialās plaknes. Katra no šām plaknēm ir noteikta ar divām taisnēm: viena no viņam ir atticigā ķermeņa veidule, bet otra ir veidules atbalstpunktā pret pamataploci vilktā pieskare. Aizrādito tangentialo plakņu krustošanās taisni, t. i. meklejamo pieskari varam konstruet pēc 109 §.

Līdzigā kārtā varam konstruet ari divu velteņu, vaj smaiļa ar velteni savstarpejo krustošanos, gadijumā, ja dotiem ķermeņiem ir patvaļigi stāvokļi telpā.

Aplūkosim vēl sekojošus raksturigakus krustošanās gadijumus.

195 §. Divu, uz H un W atbalstošo smaiļu krustošanās.

Pieņemsim, ka doti divi taisni smaiļi (259 ras.), kuŗu pamataploces F_I un F_{II} attiecigi sakrīt ar horicontalo plakni H un profilo plakni W.

Virsotņu taisne $L_I L_{II}$ krusto pirmā smaiļa pamatu punktā S_I, bet otrā smaiļa pamatu — punktā S_{II}. Doto ķermeņu pamatplakņu krustošanās taisne a guļ uz H un ir stateniska pret OX.

Lai noteiktu viena smaiļa veiduļu krustošanās punktus ar otro smaili, mēs konstruejam punkta S_{II} savienoto stāvokli S_{II_0}, kā ari doto smaiļu profilo projekciju savienotos stāvokļus.

Patvaļigās pirmā smaiļa veidules $L_I A_I$ krustošanās punktus ar otro smaili iegūsim šādi. Punktu S_I savienojam ar A_I un atrodam punktu $a_1 = S_I A_I \times a_1$. Pēc tam noteicam profilo projekciju A_{I_3} un savienotos stāvokļus A_{I_0} un a_0. Punktu a_0 savienojam ar S_{II_0} un atrodam punktus A_{III_0} un A_{IV_0}, kuŗos taisne $a_0 S_{II_0}$ krusto otrā smaiļa pamatu. Velkot pēc tam veidules $L_{II_0} A_{III_0}$ un $L_{II_0} A_{IV_0}$, mēs viņu krustotnēs ar $L_{I_0} A_{I_0}$ iegūsim meklejamo krustošanās punktu savienotos stāvokļus A_{3_0} un A_{4_0}, ar kuŗu palīdzibu nav gŗūti noteikt attiecigās horicontalās (A_{3_1} un A_{4_1}) un vertikalās (A_{3_2} un A_{4_2}) projekcijas.

Analoģiskā kārtā noteicami punkti B_3 un B_4, kuŗos patvaļiga otrā smaiļa veidule $L_{II} B_I$ krusto pirmo smaili. Tam nolūkam mēs B_{I_0} savienojam ar S_{II_0} un atzīmejam punktu $\beta_0 = S_{II_0} B_{I_0} \times a_0$. Pēc tam noteicam β_1 un savienojam šo punktu ar S_I. Taisnes $S_I \beta_1$ krustošanās punkti ar pirmā smaiļa pamatu noteic pirmā smaiļa veiduļu pamatus B_{III} un B_{IV}. Veidules $L_I B_{III}$ un $L_I B_{IV}$ krustodamies ar $L_{II} B_{I_1}$, noteic meklejamo punktu B_3 un B_4 horicontalās projekcijas B_{3_1} un B_{4_1}, pēc kuŗām nav gŗūti noteikt ari pārejās projekcijas B_{3_2}, B_{4_2} un B_{3_0}, B_{4_0}.

Tā kā veidules, kuŗas vertikalajā projekcijā noteic doto smaiļu redzamibas apveidus, guļ vienā ar V līdztecē plaknē, tad šo veiduļu vertikalo projekciju krustošanās punkti tieši noteic četrus raksturigus krustošanās līknes punktus.

Pie raksturigiem punktiem bez tam pieder punkti, guļošie uz tām pirmā smaiļa veidulēm, kas ierobežo profilās projekcijas redzamibas apveidu.

Šie punkti konstruejami tapat, kā punkti A_3 un A_4, guļošie uz veidules $L_I A_I$. Rasejumā šie punkti ar atsevišķiem burtiem nav atzīmeti.

Lai noteiktu tās smaiļu veidules, kas pieskaras krustošanās līknēm, pēc 193 §, e) no S_I javelk pieskares pret pirmā smaiļa pamataploci, bet no S_{II_0} javelk pieskares pret otra smaiļa pamataploci, jaatzīme attiecigie pieskaršanās punkti un pēc tam jaatrod tādā kārtā noteikto veiduļu krustošanās punkti. Mūsu gadijumā reālā nozīme ir tikai pirmā smaiļa veidulēm $L_I C_I$ un $L_I D_I$, kas aizrāda uz to, ka krustošanās figura sastāv no divām daļām: ieejas un izejas līknēm. Punkti C_3, C_4 un D_3, D_4, kuŗos veidules $L_I C_I$ un $L_I D_I$ krusto otro smaili, guļ uz otra smaiļa veidulēm, kas krustošanās līknēm pieskaras atrastos punktos.

196 §. Smaiļa krustošanās ar velteni, pie kam smailis atbalstās uz H, bet veltenis uz W.

Pieņemsim, ka dotā smaiļa pamataploce sakrīt ar horicontalo plakni H, bet dotā velteņa pamatplakne sakrīt ar profilo plakni W (260 ras.).

Šinī gadijumā virsotņu taisne iet caur smaiļa virsotni L_I, līdztekus velteņa veidulēm. Tapēc pie rasejumā pieņemtiem ķermeņu stāvokļiem, virsotņu linija ir līdztece asij OX, un punkts S_I atrodas bezgalibā uz taisnes, kas caur L_{1_1} iet līdztekus OX. Tapēc visas, no bezgali attālinata punkta S_I izejošas taisnes ir līdzteces OX.

Noteikuši bez tam savienoto stāvokli $S_{II_0} = L_{I_0}$, mēs atsevišķo smaiļa un velteņa veiduļu krustošanās punktus noteicam pēc iepriekšejā panta aizrādijumiem. Attiecigās konstrukcijas aizrāditas rasejumā smaiļa veidulei $L_I A_I$ un velteņa veidulei, kas iet caur B_I.

Šinī gadijumā, atšķiribā no iepriekšeja panta, patiesas nozīmes ir tikai no S_{II_0} pret velteņa pamataploci vilktām pieskarēm. Punkti C_3, C_4 un D_3, D_4, kuŗos caur atbalstiem C_I un D_I ejošās velteņa veidules krusto smaili, guļ uz smaiļa veidulēm, kas pieskaras atrastos punktos griezuma līknēm.

Japiezīmē, ka atsevišķus krustošanās figuras punktus var konstruet ari šādi. Piemēram, lai noteiktu smaiļa veidules $L_I A_I$ krustošanās punktus ar velteni, mēs caur $L_I A_I$ velkam vienu horicontali projecejošu plakni, kas krusto smaili pa aplūkojamo veiduli, bet velteni pa kautkādu elipsi, kuŗas profilās projekcijas savienotais stāvoklis sakrīt ar velteņa pamataploci. Tapēc punkti A_{3_0} un A_{4_0}, kuŗos $L_{I_0} a_0$ krustojas ar šās elipses profilo projekciju, ir meklejamie.

Krustošanās figuras atsevišķus punktus, beidzot, var noteikt ari pēc šādas metodes. Velkam patvaļigu, ar H līdzteku plakni. Pieņemsim, ka t ir šās plaknes vertikalā pēdu linija. Šī plakne krusto smaili pa aploci ar centru F_{II}, kuŗas radiusa patiesais lielums līdzinas $l_2 - F_{II_2}$. Veltenis krustojas ar aizrādito plakni pa veidulēm, kas iet caur atbalstpunktiem E_I un G_I. Šās veidules noteicamas ar punktu E_{I_0} un G_{I_0} palīdzibu, kuŗos pēdu linija *t* krusto velteņa pamataploci. Punkti, kuŗos aizrādito velteņa veiduļu horicontalās projekcijas krustojas ar aploces F_{II} horicontalo projekciju, — noteic četrus krustošanās punktus (E_3, E_4 un G_3, G_4), kas pieder meklejamai krustošanās figurai.

197 §. Divu, uz H un W atbalstošo velteņu krustošanās.

Doti divi velteņi (261 ras.), pie kam pirmā velteņa pamataploce sakrīt ar horicontalo plakni H, bet otrā velteņa pamataploce — ar profilo plakni W. Velteņu asis krustojas taisnā leņķī.

Agrak, divu prizmu krustošanos noteikdami (147 un 150 §§), mēs noteicām abu prizmu sānu šķautnēm līdzteces palīgplaknes. Tā kā abu velteņu veidules ir līdzteces V, tad ari palīgplaknes ir līdzteces V. Tapēc visu palīgplakņu horicontalās pēdu linijas (*s*) ir līdzteces OX, bet palīgplakņu profilo pēdu liniju savienotie stāvokli (w_0) ir stateniski pret OX.

Uz aizrādito pamatojoties, atsevišķo veiduļu krustošanās punkti noteicami šādā kārtā. Caur patvaļigas pirmā velteņa veidules pamatu A_I velkam palīgplaknes horicontalo pēdu liniju $s \parallel OX$, un ar punktu a_1 un a_0 palīdzibu atrodam attiecigās profilās pēdu linijas savienoto stāvokli w_0. Punkti A_{III_0} un A_{IV_0}, kuŗos w_0 krusto otrā velteņa pamatu, noteic otrā velteņa veidules, kas ar pirmā velteņa veiduli A_I krustojas divos krustošanās līknei piederigos punktos A_3 un A_4.

Saprotams, ka var ari iepriekš vilkt w_0 un pēc tam uzmeklet *s*.

Krustošanās līknes atsevišķos punktos var ari šādi konstruet. Velkam patvaļigu plakni $H' \parallel H$, pie tam *t* ir attieciga vertikalā pēdu linija. Plakne H' krusto vertikalo velteni pa aploci, kuŗas horicontalā projekcija saplūst ar šā velteņa horicontalo projekciju. Tā pati plakne H' krusto horicontalo velteni pa divām, ar punktiem B_{III_0} un C_{III_0} noteiktām veidulēm. Punktos B_{III_0} un C_{III_0} pēdu linija *t* krusto horicontalā velteņa pamataploci. Šās veidules krustojas ar vertikalo velteni punktos B_3, B_4 un C_3, C_4, ko papriekšu noteicam horicontalajā projekcijā.

198 §. Divu velteņu krustošanās, kuŗu asis ir paslīpas viena pret otru.

Janoteic divu velteņu krustošanās, gadijumā, ja viena velteņa ass stateniska pret H, bet otrā velteņa ass ir līdztece V un krustojas ar pirmā velteņa asi slīpā leņķī (262 ras.).

Vispirms atzīmesim velteņu projekcijas uz H, V un W. Pirmā velteņa projekcijas noteicamas bez grūtibām.

Paslīpais veltenis no vienas puses ierobežots ar aploci F_{II}. Šī aploce projecejas uz V velteņa asij stateniskas taisnes veidā, bet uz H un W aploce F_{II} projecejas divu elipšu veidā, kuŗas konstruejamas pēc attiecigām lielām un mazām asīm, kas nav gŗūti izpildams.

Palīgplaknes, kas javelk atsevišķo krustošanās punktu noteikšanai, ir līdzteces abu velteņu veidulēm un tapēc viņas mūsu gadijumā ir ari līdzteces V.

Pieņemsim, ka s ir vienas tādas palīgplaknes V' horicontalā pēdu linija. Palīgplakne V' krusto vertikalo velteni pa divām veidulēm, no kuŗām vienas pamats atzīmets ar A_I. Paslīpais veltenis krustojas ar plakni V' pa divām veidulēm, kas ir noteiktas ar horicontalām projekcijām A_{III_1} un A_{IV_1} kuŗās s krusto aploces F_{II} horicontalo projekciju F_{II_1}. Veiduļu A_I, A_{III} un A_{IV} vertikalās projekcijas krustojas punktos A_{3_2} un A_{4_2}, pēc kuŗiem nav gŗūti konstruet attiecigas profilās projekcijas A_{3_0} un A_{4_0}. Horicontalās projekcijas A_{3_1} un A_{4_1} saplūst ar A_I.

Griezuma līknes atsevišķus punktus varam noteikt ari šādi. Velkam slīpa velteņa veidulēm līdzteku plakni $Q \perp V$. Pieņemsim, ka t ir šās plaknes vertikalā pēdu linija. Plakne Q krusto slīpo velteni pa veidulēm, kuŗu vertikalās projekcijas saplūst ar t. Apzīmesim šo veiduļu galus ar B_{III} un C_{III}. Pēc šām vertikalajām projekcijām nav gŗūti atrast attiecigās horicontalās projekcijas B_{III_1} un C_{III_1}.

Palīgplakne Q krusto pirmo velteni pa elipsi, kuŗas horicontalā projekcija sakrīt ar pamataploci, tapēc punkti B_{3_1} un C_{3_1}, kuŗos otra velteņa veiduļu horicontalās projekcijas, kas iet caur B_{III_1} un C_{III_1}, krusto pirmā velteņa pamataploci, ir divu krustošanās līknei piederigu punktu horicontalās projekcijas, pēc kuŗām nav gŗūti atrast attiecigas vertikalās un profilās projekcijas.

IX nodaļa. Vītes linijas.

199 §. Velteniskā vītes linija.

Pieņemsim, ka dots taisns aploces veltenis ar radiusu r, kuŗa ass l stateniska pret H (263 ras.).

Pieņemsim, ka patvaļiga velteņa veidule $0-8$, kuŗas pamats ir 0, vienmērigi griežas ap asi l, un uz šās veidules vienmērigi virzas punkts 0. Pie tam ceļi, ko punkts 0 zinamos laikos noiet veidules $0-8$ virzienā, ir proporcionali attiecigiem kustošās veidules griešanās leņķiem ap asi l. Savienodami visus atsevišķus kustošā punkta 0 stāvokļus telpā, dabujam telpas līkni $0-1-2 \ldots 8$, ko sāuc par v e l t e n i s k o v ī t e s l i n i j u, vaj vienkārši par vītes liniju. Patvaļiga punkta atstatums no ass l ir vītes linijas radiuss r.

Aplūkosim kādejadi attēlojas vītes linija projekcijās. Taisns aploces veltenis, kas stāv uz H, projecejas uz šo plakni aploces veidā, kuŗas radiuss ir r, bet centrs l_1 (264 ras.), tapēc ari vītes linijas horicontalā projekcija ir aploce. Vītes linijas vertikalās projekcijas konstruešanai jazina punkta 0 pārvietojums, jeb ceļš ass l virzienā, vienā punkta apgrieziena laikā ap asi l. Šo ceļu sauc par vītes kāpi un apzīmē ar h.

Lai tagad konstruetu vītes linijas vertikalo projekciju, uzmeklesim cik vēlams, piemēram, astoņus kustošā punkta 0 stāvoklus, atzīmejot tos ar skaitļiem 0, 1....7, 8. Tam nolūkam velteņa pamataploci un vītes kāpi, vaj velteņa augstumu sadalam 8 vienlīdzigās daļās. Ja punkts 0 ieņem stāvokli 1, tad radiuss r ieņem stāvokli r_1; attiecigo horicontalo projekciju dabujam, savienodami l_1 ar 1_1. Vertikalās projecijas r_{1_2} virziens iet līdztekus OX, un atstāj no OX atstatumā $\frac{h}{8}$. Velkot no 1_1 stateni pret OX, līdz krustošanai ar r_{1_2}, iegūstam viena vītes linijai piederiga punkta vertikalo projekciju.

Līdzigā kārtā konstruejamas pārejas vertikalās projekcijas $2_2, 3_2 \ldots 8_2$. Iegūtos punktus ar slaideno līkni savienodami, iegūstam vītes linijas vertikalo projekciju.

Vītes linijas vertikalā projekcija ir sinusoide, ko nav gŗūti pierādīt. Pieņemsim par koordinatu sākumu, piemēram, punktu 2_2, kuŗā vītes linijas vertikalā projekcija krusto velteņa ass vertikalo projekciju l_2, un lai taisne $2_2 - X'$, kas ir līdztece OX, ir x-su ass, bet taisne $l_2 = 2_2 - Z'$ ir z-tu ass. Tad patvaļigam vītes linijas punktam 3_2 ir koordinatas $x = 2_2 - K$ un $z = 3_2 - K$. Vilksim no 3_1 stateni pret caurmēru $2_1 - 6_1$. Tad no taisnļeņka trijstūŗa $3_1 L l_1$ dabujam, ka $3_1 L = r \,.\, \sin \sphericalangle L l_1 3_1$, bet $\sphericalangle L l_1 3_1 = \frac{\smile 2_1 - 3_1}{r}$, tapēc $3_1 L = r \,.\, \sin \frac{\smile 2_1 3_1}{r}$. Bet tā kā $x = K 2_2 = 3_1 L$, tad $x = r \,.\, \sin \frac{\smile 2_1 3_1}{r}$. No otrās puses, pamatojoties uz vītes linijas veidošanas likumu, dabujam, ka $\frac{\smile 2_1 3_1}{2 \pi r} = \frac{z}{h}$; tapēc $\smile 2_1 3_1 = 2 \pi r \,.\, \frac{z}{h}$. Tā tad, $x = r \,.\, \sin 2 \pi r \frac{z}{h . r} = r \,.\, \sin \,.\, 2 \pi \frac{z}{h}$, bet tas ir sinusoides nolīdzinajums.

Ja mēs velteņa sānu virsu uzgriezisim pa veiduli 0 – 8 un šo virsu ap veiduli 0 – 8 griežot, nostādisim līdztekus V, kā tas rasejumā aizrādits, tad iegūsim taisnstūri $0_2 - 8_2 - 8 - 8'$. Ša taisnstūŗa pamats $0_2 - 8'$ līdzinas velteņa pamataploces rektificetam gaŗumam $2 \pi r$. Nogriezni $0_2 - 8'$ astoņās vienlīdzigās daļās sadalidami, iegūstam punktus 1', 2', 3'..., kas noteic pamatus attiecigām velteņa veidulēm, uz kuŗām guļ vītes linijas punkti 1, 2, 3....

Apzīmesim punkta 1 griešanās leņķi ap asi l ar φ_1. Tad, pamatojoties uz vītes linijas veidošanas likumu, varam uzrakstit, ka $\frac{z_1}{\varphi_1} = \frac{h}{2\pi}$, jeb $\frac{z_1}{\smile 0_1 - 1_1} = \frac{h}{2\pi r}$, bet $\smile 0_1 - 1_1 = 0_2 - 1'$ un $2\pi r = 0_2 - 8'$ (sk. notinumu); tapēc $\frac{z_1}{0_2 - 1'} = \frac{h}{0_2 - 8'}$.

Līdzigā kārtā punktam 2 dabujam, ka $\frac{z_2}{0_2 - 2'} = \frac{h}{0_2 - 8'}$, tapēc $\frac{z_1}{0_2 - 1'} = \frac{z_2}{0_2 - 2'}$. Tas nozīmē, ka trijstūŗi $0_2 - 1' - 1$ un $0_2 - 2' - 2$ ir līdzigi, un tapēc malām $1 - 0_2$ un $2 - 0_2$ javeido ar $0_2 - 2'$ vienadi leņķi α, t. i. malām $0_2 - 1$ un $0_2 - 2$ jasaplūst.

No aizrādītā seko, ka uotinumā visi punkti 0, 1, 2...8 guļ uz vienas taisnes, t. i. *velteniskās vītes linijas notinums ir taisnā linija.*

Visīsako attālumu starp diviem punktiem noteic taisne, kas savieno šos punktus. No ta seko, *ka velteniskā vītes linija noteic visīsako atstatumu starp diviem uz velteniskās virsas guļošiem punktiem*, mērojot šo atstatumu uz dotās virsas.

Pieņemsim, ka punktā 1 (263 ras.) pret vītes liniju telpā ir vilkta pieskare, un lai S_I ir šās pieskares horicontalais pēdu punkts.

Taisnes $1 - S_I$, $1 - 1_1$ un $1_1 - S_I$ telpā noteic taisnleņķa trijstūri, kam $S_I - 1_1 = (1 - 1_1) . ctg\,\alpha$. No trijstūŗa $0_2 - 1' - 1$ (264 ras.) dabujam, ka $0_2 - 1' = (1 - 1') . ctg\,\alpha$, bet tā kā $1 - 1_1 = 1 - 1'$, tad $S_I - 1_1 = 0_2 - 1'$. Taisni $S_I - 1_1$, kas ir pieskares $S_I - 1$ projekcija, sauc par *subtangenti.*

Kā no pēdejā nolīdzinajuma redzams, *subtangentes gaŗums ir vienlīdzigs ar tās vītes linijas horicontalās projekcijas daļas rektificeto gaŗumu, ko ierobežo vītes linijas sākuma punkts (0) un aplūkojamā punkta horicontalā projekcija.*

Uz aizrādito pamatodamies, pieskares projekcijas patvaļigā vītes linijas punktā 1 techniskā rasejumā (264 ras.) konstruejam šādi. No 1_1 velkam pieskari pret pamataploci un uz šās pieskares nospraužam nogriezni $1_1 - S_I = 0_2 - 1'$, dabujot tā subtangenti $1_1 - S_I$. Pēc tam ar horicontalās projekcijas palīdzibu atrodam uz OX vertikalo projekciju S_{I_2}, ko ar 1_2 savienodami, dabujam pieskares vertikalo projekciju.

Trijstūri $S_I - 1 - 1_1$ (263 ras.) var uzlūkot kā attiecigās velteņa sānu virsas daļas $0 - 1 - 1_1$ notinumu; tapēc $S_I - 1 = \smile 0 - 1$, t. i. *pieskares gaŗums pret vītes liniju līdzinas attiecigās vītes linijas daļas gaŗumam.*

264 rasejumā redzams, ka visas pieskares pret vītes liniju notinumā saplūst, t. i. veido ar pamatu $0_2 - 8'$ vienlīdzigus leņkus α. Tas nozīmē, ka arī *telpā, patvaļigos punktos pret vītes liniju vilktās pieskares veido ar H vienlīdzigus leņķus* α. Leņķi α sauc par *vītes linijas slīpuma, jeb kāpes leņķi.*

Konstruejuši pret vītes liniju vairakas pieskares un savienojuši viņu pēdu punktus S_I, S_{II}, S_{III}... ar slaidenu līkni, mēs iegūstam līkni S_I S_{II} S_{III}.... ar sākuma punktu 0, kuŗa pēc konstrukcijas ir velteņa pamataploces evolvente (155 §).

Ja vītes linijas redzamā daļa, kas guļ uz velteņa priekšejās daļas, paceļas no kreisās uz labo pusi, tad tādu vītes liniju sauc par labo vītes liniju. Bet ja vītes linijas redzamā daļa paceļas no labās uz kreiso pusi, tad viņu sauc par kreiso vītes liniju. 264 rasejumā attēlota labā vītes linija.

Japiezīme, ka katru liniju, guļošo uz dotās virsas, kas notinumā pārvēršas taisnē, sauc pār ģeodezisko liniju. Tāda ģeodeziskā linija noteic visīsako atstatumu starp diviem aplūkojamās virsas punktiem, skaitot šo atstatumu pa doto virsu. Acim redzot, vītes linija ir velteniskās virsas ģeodeziskā linija.

200 §. Smailiskā vītes linija.

Dots taisns aploces smailis, kuŗa ass l stateniska pret pamatplakni H (265 ras.). Pieņemsim, ka patvaļiga smaiļa veidule 0 – L vienmērigi griežas ap asi l un tanī paša laikā punkts 0 vienmērigi virsas pa veiduli 0 – L. Pie tam ceļi, ko punkts 0 zinamos laikos noiet veidules 0 – L virzienā, ir proporcionali attiecigiem kustošās veidules griešanās leņķiem ap asi l, jeb šie ceļi ir proporcionali ar lokiem, ko zinamos laikos veido veidules 0 – L atbalstpunkts 0.

Līkni 0 – 1 – 2...7 – 8 – L, ko aizrādītā veidā kustedams punkts 0 veido telpā, sauc par smailisko vītes liniju.

Pie aizrādītā griešanās smaiļa veidule 0 – L pakāpeniski iet caur pamataploces punktiem I, II, III...VIII, un pēc viena pilna apgrieziena atgriežas savā pirmatnejā stāvoklī. Punkta 0 attiecigais ceļš par šo laiku ir līkne 0 – 1 – 2...8. Šo līkni sauc par vienu smailiskās vītes linijas apgriezienu, bet ceļš 0 – 8, kuŗu punkts 0 nogājis gar veiduli 0 – L, saucas par smailiskās vītes linijas kāpi. Dažreiz par smailiskās vītes linijas kāpi sauc ari nogriežņa 0 – 8 ortogonalo projekciju uz smaiļa asi.

Veidulei L – 0 un punktam 0 aizrādito kustibu turpinajot, iegūstam jaunu vītes linijas apgriezienu, un, beidzot zinamā momentā punkts 0 ies caur smaiļa virsotni L. Ja mēs iedomasimies, ka punkts 0 turpina kusteties pēc aizrādītā likuma, tad radisies vītes linija, kas guļ uz smaiļa augšejās daļas.

Aplūkosim tagad, kā attēlosies smailiskā vītes linija projekcijās (266 ras.). Tam nolūkam smaiļa pamataploci sadalam patvaļigi daudz, piemēram, 8 vienlīdzigās daļās, atzīmejot iedaļu galus ar romiešu skaitļiem no I līdz VIII, pie kam VIII $= 0$. Tik pat daudzās daļās sadalam doto kāpi $h = 0 - 8$, atzīmejot iedaļas ar skaitļiem $1'$ līdz $7'$.

Tā kā pēc 23 § vienlīdzigiem nogriežņiem ir vienlīdzigas projekcijas, tad punktu $1', 2' \ldots 7'$ projekcijas dala kāpes h projekcijas, t. i. $0_1 - 8_1$ un $0_2 - 8_2$, attiecigi vienlīdzigos nogriežņos. Griešanās veidules $0 - L$ pakāpeniskie stāvokļi ir $I - L, II - L \ldots VIII - L$. Šo veiduļu projekcijas rasejumā ir aizrāditas.

Pieņemsim tagad, ka veidule $0 - L$ ieņēmusi stāvokli $I - L$, pie kam viņas pamats pārvietojies pa $^1/_8$ pamataploces daļu. Tad, saskaņā ar smailiskās vītes linijas veidošanas likumu, punkts 0 pārvietojies gar veiduli $0 - L$ pa $^1/_8$ $h = 0 - 1'$. Visas smaiļa veidules veido ar H vienlīdzigus leņķus, tapēc nogriežņu $I - 1$ un $0 - 1'$ horicontalās projekcijas ir vienlīdzigas. Tapēc, lai uz $I - L_1$ noteiktu horicontalo projekciju 1_1, janosprauž uz $I - L_1$ no punkta I nogrieznis $I - 1_1 = 0_1 - 1_1'$, jeb no centra L_1 ar radiusu $L_1 - 1_1'$ javelk loks, līdz krustošanai ar $I - L_1$ meklejamā punktā 1_1.

Līdzigā kārtā konstruē pārejo smailiskās vītes linijas punktu horicontalās projekcijas $2_1, 3_1 \ldots 8_1$.

Pēc horicontalām projekcijām $1_1, 2_1 \ldots 8_1$ uz attiecigām smaiļa veidulēm nav grūti noteikt vertikalās projekcijas $1_2, 2_2 \ldots 8_2$.

Var ari, otradi, papriekšu noteikt vertikalās projekcijas $1_2, 2_2 \ldots 8_2$ un pēc tam viņām konstruet attiecigās horicontalās projekcijas $1_1, 2_1 \ldots 8_1$. Lai noteiktu, piemēram, projekciju 1_2, caur $1'_2$ javelk līdztece asij OX, līdz krustošanai ar attiecigās veidules vertikalo projekciju $I_2 - L_2$ punktā 1_2. Tāda konstrukcija, acim redzot, nav nekas cits, kā dotā nogriežņa $0 - 1'$ nospraušana uz dotās taisnes $I - L$ pēc griešanās paņēmiena (63 §).

Saprotams, ka to pašu punktu 1_2 iegūsim, ja mēs kāpes ortogonalo projekciju uz smaiļa ass, t. i. nogriezni $II_2 - M$ sadalisim astoņās vienlīdzigās daļās, un no pirmās iedaļas gala vilksim līdzteci asij OX, līdz krustošanai ar $I_2 - L_2$.

Rasejumā aizrādita ari smailiskās vītes linijas tālakā daļa $8 - 16$, pie kam punkts $16 = L$, jo smaļa veidules garums $l = 0 - L$ pieņemts tā, lai smailiskai vītes linijai būtu divi pilni apgriezieni.

Punktu L_1 var uzskatit kā p o l u, bet vītes linijas horicontalās projekcijas atsevišķo punktu $0_1, 1_1, 2_1 \ldots$ atstatumus no pola $L_1 -$ kā līknes $0_1 - 1_1 - 2_1 \ldots$ radiusus-vektorus. Kā no konstrukcijām redzams, līknes $0_1 - 1_1 - 2_1 \ldots 16_1$ r a d i u s u - v e k t o r u garumi ir p r o p o r c i o n a l i l e ņ ķ i e m, ko viņi veido ar patvaļigu taisni, piemēram, $0_1 - IV$, kas iet caur polu L_1. Taisni $0_1 - IV$ sauc par p o l a r i. Pie tam visizdevigak līknes punktus aplūkot pretejā kārtā, iedomajoties, ka radiuss-vektors $0_1 - L_1$ griežas pulksteņa rāditaja virzienā. Tad, piemēram, $15_1 - L_1 : 14_1 - L_1 = \sphericalangle 0_1 L_1 VII : \sphericalangle 0_1 L_1 VI$. Līdzigas attiecibas iegūstam visiem līknes $16_1 - 15_1 \ldots 1_1 - 0_1$ punktiem.

Līkni $16_1 - 15_1 \ldots 1_1 - 0_1$, kuŗai piemīt aizrāditas īpašibas, sauc par Archimeda spirali.

Smailiskās vītes linijas vertikalā projekcija, t. i. $0_2 - 1_2 \ldots 15_2 - 16_2$ noteic sevišķa veida sinusoidi, kas atšķiras no iepriekšejā pantā aplūkotās sinusoides tanī ziņā, ka griešanās radiuss, ko projecē uz V, nepaliek pastāvigs, kā pie velteniskās vītes linijas, bet viņa lielums mainas pēc zinamā likuma.

267 rasejumā aizrādits smaiļa sānu virsas un attiecigās vītes linijas notinums. Atsevišķo vītes linijas punktu $0 - 1 - 2 \ldots 15 - 16$ konstruešanas veiđs saprotams no rasejuma. Ja šinī rasejumā pieņemam punktu $L = 16$ kā polu, bet atsevišķo smaiļa veiduļu stāvokļus kā radiusus-vektorus, tad nav gŗūti pārliecinaties, ka smailiskās vītes linijas notinums ir zinama Archimeda spirale.

Tā kā 267 rasejumā atsevišķie līknes $0 - 1 - 2 \ldots 15 - 16$ taisnlinijainie elementi veido dažadus leņķus ar attiecigo veiduļu notītiem stāvokļiem, tad, saprotams, ari attiecigās, telpā pret smailisko vītes liniju (266 ras.) vilktās pieskares veido ar smaiļa veiduļēm dažadus leņķus. Tapēc šās pieskares veido ari dažadus leņķus ar H; kamēr velteniskās vītes linijas pieskares veido ar H vienadus leņķus, kā to redzejām 199 §.

X nodaļa. Atgriešanās virsas.

201 §. Vispārejie jēdzieni.

157 § aizrādits, ka pieskarei veļoties pa telpas līkni (atgriešanās liniju), rodas tā saucama atgriešanās virsa.

Tā kā ikkatri divi veļošās pieskares bezgali tuvi blakusstāvokļi krustojas, t. i. guļ zinamā kopejā plaknē, tad, saprotams, ka atgriešanās virsas pieder pie notinamām taisnes virsām. Atgriešanās virsa jau aizrādita 191 un 194 rasejumos.

Lai uz atgriešanās virsas noteiktu kautkādu punktu, janoteic šā punkta stāvoklis uz dotās virsas taisnlinijainās veidules.

Pieņemsim, ka dota atgriešanās virsa, kas techniskā rasejumā (268 ras.) noteikta ar pašas atgriešanās linijas m projekcijām m_1 un m_2. Pēc vienas dotās projekcijas M_1 jaatrod uz dotās atgriešanās virsas guļoša oriģinalā punkta M otra projekcija M_2. Tā kā punktam M jaguļ uz kautkādas taisnlinijainās veidules, kas pieskaras atgriešanās līknei m, tad ari šās veidules projekcijām japieskarās līknes m projekcijām.

Tapēc tangentiali pret m_1 vilktā taisne $M_1 B_1$ ir meklejamās veidules horicontalā projekcija. Noteikuši pēc projekcijas B_1 uz m_2 attiecigu projekciju B_2, mēs caur punktu B_2 velkam pieskari pret m_2 un noteicam šās pieskares krustotni ar stateni, vilkto no M_1 pret OX, dabudami tādā veidā meklejamo otru projekciju M_2.

No punkta M_1 pret līkni m_1 varam vilkt vēl otru pieskari M_1C_1, tapēc nav grūti uz dotās atgriešanās virsas uzmeklet vēl vienu otru punktu N, kuŗa horicontalā projekcija N_1 saplūst ar M_1. Šis otrais punkts N guļ uz dotās atgriešanās virsas otras daļas (157 §).

Bez jau aizrāditiem atgriešanās virsas noteikšanas paņēmieniem, mēs vēlak vēl iepazīsimies ar citām atgriešanās virsas veidošanas metodēm, cik šās metodes tiek lietotas technikā.

Ja atgriešanās linija ir plakana līkne, tad visas viņas pieskares guļ vienā plaknē. Tapēc tādā gadijumā iegūta virsa ir plakne, kas sakrīt ar dotās līknes plakni.

Ja atgriešanās linija pārvēršas vienā punktā, tad virsa, ko veido kustošā veidule, kas visu laiku iet caur doto punktu un kautkādu vadošo līkni, ir smailiskā virsa.

Ja atgriešanās linija ir punkts, kas atrodas bezgalibā, tad virsa, ko veido kustošā veidule, kas iet caur šo bezgali attālinatu punktu un kautkādu vadošo līkni, ir velteniskā virsa.

Patvaļigas taisnes krustošanās punkti ar atgriešanās virsu noteicami šādi. Caur doto taisni velkam vienu horicontali, jeb vertikali projecejošo plakni un atrodam projecejošas plaknes krustošanās punktus ar atsevišķām atgriešanās virsas taisnlinijainām veidulēm.

Atrastos punktus ar slaideno līkni savienodami, šās līknes krustotnēs ar doto taisni iegūsim mekletos krustošanās punktus.

Līdzigā kārtā noteicami kautkādas līknes krustošanās punkti ar atgriešanās virsu.

Lai noteiktu patvaļigas plaknes, vaj virsas krustošanos ar atgriešanās virsu, mēs noteicam atsevišķo dotai plaknei, vaj virsai piederigu taišņu, vaj līkņu krustošanās punktus ar doto atgriešanās virsu. Konstruetos punktus savienodami, dabusim meklejamo krustošanās līkni.

202 §. Tangentialā plakne pret atgriešanās virsu dotā punktā.

Pieņemsim, ka dota atgriešanās virsa ar atgriešanās līkni $m = ABC$ (269 ras.). Uz taisnlinijainās veidules b, kas iet caur dotās līknes punktu B, dots punkts M, un caur punktu M javelk tangentialā plakne pret doto virsu.

Tam nolūkam caur punktiem A, B un C velkam veidules a, b un c un atrodam viņu pēdu punktus S_I, S_{II} un S_{III}. Atrastos punktus savienodami, iegūstam atgriešanās virsas horicontalo pēdu liniju s.

Pēc 158 § tangentialā plakne pret notinamo taisnes virsu pieskaras tai pa veiduli, kas iet caur aplūkojamo punktu, tapēc caur punktu M ejoša veidule BS_{II} pieder meklejamai tangentialai plaknei.

Otra taisne, kas noteic meklejamās tangentialās plaknes stāvokli, ir taisne s_I, kas vilkta caur veidules BM pēdu punktu S_{II}, tangentiali pret pēdu liniju s, pa kuŗu atgriešanās virsa krustojas ar plakni H. Tādejadi meklejamā tangentialā plakne ir noteikta ar krustodamām taisnēm BMS_{II} un s_I.

203 §. Tangentialā plakne pret atgriešanās virsu, ejoša caur doto ārejo punktu.

Pieņemsim, ka dota atgriešanās virsas atgriešanās līkne $m = ABCD$ (270 ras.), un caur doto ārejo punktu M pret doto virsu javelk tangentialā plakne.

Tam nolūkam caur punktiem A, B, C un D velkam uz dotās virsas taislinijainās veidules un atrodam viņu pēdu punktus S_I, S_{II}, S_{III} un S_{IV}. Atrastos punktus savienodami, iegūstam dotās virsas pēdu liniju s.

Pieņemot pēc tam punktu M kā smailiskās virsas virsotni, mēs velkam caur viņu smailiskās virsas veidules, līdztekus dotās atgriešanās virsas veidulēm AS_I, BS_{II}, CS_{III} un DS_{IV}. Smailisko virsu ar virsotni M sauc par v a d o š o s m a i l i.

Noteikuši smailiskās virsas veiduļu pēdu punktus S_I', S_{II}', S'_{III} un S_{IV}', un savienojuši šos punktus ar slaideno līkni, mēs dabujam vadošā smaiļa pēdu liniju s'. Linija s_I, vilktā tangentiali pret pēdu linijām s un s', ir meklejamās tangentialās plaknes horicontalā pēdu linija, bet punkti S un S', kuŗos s_I pieskaras pēdu linijām s un s', noteic taisnlinijainās veidules SE un S'M, pa kuŗām tangentialā plakne pieskaras atgriešanās virsai un vadošam smailim. Veidule S'M iet caur doto punktu M, tapēc ari atrastā tangentialā plakne, kuŗas pēdu linija ir s_I, iet caur punktu M un tā tad izpilda mūsu uzdevuma nosacijumus.

204 §. Tangentialā plakne pret atgriešanās virsu, ejoša līdztekus dotam virzienam.

Pret doto atgriešanās virsu, kuŗas atgriešanās līkne ir $m = ABCD$ (271 ras.) javelk tangentialā plakne, līdztekus dotam virzienam n.

Tam nolūkam atkal atrodam atgriešanās virsas horicontalo pēdu liniju s. Pēc tam uz dotā virziena n pieņemam patvaļigu punktu L, un caur viņu velkam veidules, līdzteces atgiešanās virsas veidulēm. Konstrueto veiduļu pēdu punktus savienodami, iegūstam smailiskās palīgvirsas pēdu liniju s'. No taisnes n pēdu punkta S_I velkam pēdu liniju s_I', tangentiali pret s', un pēc tam velkam $s_I \parallel s_I'$, tangentiali pret s. Punkti S' un S, kuŗos taisnes s_I' un s_I pieskaras attiecigām pēdu linijām s' un s, noteic divas savstarpeji līdzteku veidules S'L un SE, kas pieder vadošam smailim un atgriešanās virsai.

Plakne, noteikta ar krustodamām taisnēm s_I un S E, ir meklejamā tangentialā plakne, jo viņa satur atgriešanās virsas taisnlinijaino veiduli S E un pieskari s_I līknei s, kas pieder dotai virsai. Bez tam aizrādītā plakne ir līdztece dotai taisnei n, jo viņa ir līdztece plaknei $S' L S_I$, kas iet caur doto taisni n.

205 §. Notinamie vien- un divpusigie helisoidi.

Virsu, ko veido taisne, kustojoties telpa pēc zinama likuma, pie kam vadošā linija ir vītes linija, sauc par helisoidu.

Ja vadošā līkne ir velteniskā vītes linija, kuŗa ir kustedamās taisnes atgriešanās linija, tad iegūto virsu sauc par notinamo helisoidu.

Kā zinams, atgriešanās virsas sastāv no divām daļām, kuŗas atdala pati atgriešanās līkne; tapēc atkarigi no tam, vaj rasejumā aizrādita viena, vaj abas atgriešanās virsas daļas (puses), mēs izšķiram vienpusigus un divpusigus notinamus helisoidus.

272 ras. aizrādits vienpusigs notinams helisoids. Atsevišķo veiduļu konstruešana izdarama pēc 199 § (264 ras.). Rasejumā aizrāditas sešpadsmit helisoida veidules. Visas šās veidules horicontalajā projekcijā redzamas, bet vertikalajā projekcijā redzamas tikai tās viņas daļas, ko neaizsedz paša helisoida virsa.

Redzamibas apveids horicontalajā projekcijā ierobežots no vienas puses ar velteniskās vītes linijas horicontalo projekciju, no otras — ar pamataploces notinumu $0 - S_{VIII} - S_{XVI}$ un, beidzot, ar galejās veidules $16 - S_{XVI}$ horicontalo projekciju $16_1 - S_{XVI}$.

Helisoida vertikali projecejoša velteniskā aptveroša virsa pa daļai pārvēršas divās plaknēs, kas pieskaras aplūkojamam helisoidam pa divām viņa veidulēm $8 - S_{VIII}$ un $16 - S_{XVI}$, kuŗas ir līdzteces V. Tapēc šo veiduļu vertikalās projekcijas $8_2 - S_{VIII_2}$ un $16_2 - S_{XVI_2}$ pa daļai ierobežo helisoida vertikalās projekcijas redzamibas apveidu. Redzamibas apveids vertikalajā projekcijā slēdzas ar pašas vītes linijas vertikalo projekciju $8_2 - 16_2$ un taisni $S_{VIII_2} S_{XVI_2}$.

Lielakas uzskatamibas dēļ, rasejumā helisoida redzamā iekšejā virsa ieklāta ar atsevišķiem punktiem.

273 rasejumā aizrāditas divpusiga notinamā helisoida projekcijas.

Helisoida veidules no vienas puses ierobežotas ar plakni H, bet no otras ar plakni $H' \parallel H$, pie kam atstatums starp plaknēm H un H' līdzinas kāpei h. Aplūkojamās virsas atgriešanās linija ir vītes linija, kuŗas radiuss ir r. Veiduļu pēdu linija attiecibā uz plakni H' ir līkne $16 - S'_{VIII} - S'_{XVI}$, kas ir augšejās pamataploces notinums. Tā kā $16_1 = 0$, tad horicontalā projekcija $16_1 - S'_{VIII_1} - S_{XVI_1}'$ un līkne $0 - S_{VIII} - S_{XVI}$ ir zimetriskas attiecībā pret velteņa pamataploces caurmēru, kas iet caur punktu $16_1 = 0$.

Saprotams, ka katra plakne, līdztece ar H, krusto helisoida virsu pa līkni, kuŗai tāds pat izskats, kā liknei $0 - S_{VIII} - S_{XVI}$, vaj $16 - S_{VIII}' S'_{XVI}$, pie kam griezuma līknes sākuma punkts atrodas punktā, kur griezejā plakne krusto vītes liniju.

Abu helisoida daļu redzamibas apveidi noteicami tapat, kā 272 ras., pie kam, saprotams, projekcijās uz H un V ir redzamas tikai tās helisoida daļas, ko neaizsedz aplūkojamās virsas otra puse.

Rasejumā aizrāditas tikai veiduļu redzamās daļas; pie tam lielakas skaidribas dēļ, augšejās puses redzamā iekšejā virsa, kas ir pagriesta pret vītes linijas asi, atzīmeta atsevišķiem punktiem, bet apakšejās puses redzamā iekšejā daļa ir švītrota.

206 §. Helisoida notinums.

Pieņemsim, ka dots kautkāds helisoids, kuŗa atgriešanās linija ir līkne $m = ABC$, bet veiduļu horicontalā pēdu linija ir $s = S_I S_{II} S_{III}$ (274ª ras.).

Ja punkti A, B un C viens otram pietiekoši tuvu, tad var pieņemt, ka līknes m daļas ir attiecigo helisoida veiduļu pagaŗinajumi. Tā, piemēram, lokus AB un BC var uzskatit kā veiduļu BS_{II} un CS_{III} pagaŗinajumus. Tādejadi heliosoida virsu var pārveidot veselā rindā trijstūŗu $S_I A S_{II}$, $S_{II} B S_{III}$ u. t. t.

Noteikuši pēc griešanās metodes šo trijstūŗu malu patiesos lielumus un loku AB un BC gaŗumus, kas ir attiecigo malu $S_{II}B$ un $S_{III}C$ pagaŗinajumi, mēs notinumu konstruejam šādi.

Uz patvaļigas taisnes nospraužam nogriezni AS_I (274ᵇ ras.), vienlīdzigu veidules AS_I patiesam lielumam $A_2 S_{I_{o2}}$. No punkta S_I velkam loku ar radiusu $S_I S_{II}$, bet no punkta A velkam loku ar radiusu $AS_{II} = A_2 S_{II_{o2}}$. Šo loku krustošanās noteic trijstūŗa $AS_I S_{II}$ trešo virsotni S_{II}. Pēc tam uz AS_{II} no punkta A nospraužam nogriezni $AB = A_2 B_{o2}$. Trijstūris $BS_{II}S_{III}$ konstruejams līdzigā kārtā, pie kam $BS_{III} = B_2 S_{III_{o2}}$. Noteikuši uz BS_{III} savienotā punkta C stāvokli, pie kam $BC = B_2 C_{o2}$, konstrukcijas varetu turpinat aizrāditā veidā.

Punktus S_I, S_{II} un S_{III} ar slaideno līko liniju savienodami, iegūstam horicontalās pēdu linijas s notinumu. Bet punktus A, B un C savienodami, iegūstam atgriešanās linijas m notinumu, pie kam AB un BC attiecibā pret m ir zinama daudzstūŗa ievilktās malas.

K o n s t r u e s i m t a g a d 272 r a s e j u m ā a i z r ā d i t ā h e l i s o i d a a p a k š e j ā s d a ļ a s n o t i n u m u.

Tam nolūkam sadalam vītes liniju ar punktiem 1, 2...15, 16 sešpadsmit vienlīdzigās daļās un pieņemam tapat, kā 274 ras., ka atsevišķās vītes linijas daļas 0 - 1, 1 - 2...15 - 16 ir taisnlinijaino veiduļu, t. i. attiecigos vītes linijas punktos 0, 1, 2...15, 16 vilktu pieskaru pagaŗinajumi. Ja tagad helisoida virsu notinam uz plakni, tad vītes linija pārveidojas zinamā līknē $m = 0, 1, 2 \ldots 15, 16$ (275 ras.), attiecibā uz kuŗu taisnes 0 - 1, 1 - 2... 15 - 16 ir ievilktā daudzstūŗa malas.

Telpā nogriežņi 0 - 1, 1 - 2...15 - 16 un starp viņiem ieslēgti leņķi ir vienlīdzigi, tapēc ari notinumā daudzstūŗa 0, 1...15, 16 malas 0 - 1, 1 - 2...15 - 16, kā ari leņķi starp šām malām, ir vienlīdzigi. Tas nozīmē, ka figura 0, 1, 2...15, 16 ir regulars daudzstūris. Tapēc vītes linijas $m = 0, 1, 2 \ldots, 15, 16$ notinums ir ap aizrādito daudzstūŗi ar radiusu ς apvilkta aploce. Ja vītes linijas iedaļu skaits bezgali pieaugs, tad daudzstūris 0, 1, 2...15, 16 robežgadijumā pāries vītes linijas notinumā. Pie tam nogriežņi 0 - 1, 1 - 2...15 - 16 robežgadijumā pārveršas līknes m taisnlinijainos elementos, kas saplūst ar pieskarēm, vilktām attiecigos punktos 1, 2...15, 16 pret līkni, vaj aploci, kuŗas radiuss ir ς. Šās pieskares nav nekas cits, kā attiecigos punktos telpā pret vītes liniju vilkto pieskaru notītie stāvokļi; t. i. punktos 1, 2...15, 16 pret aploci, ar radiusu ς, vilktās pieskares ir helisoida taisnlinijaino veiduļu notītie stāvokļi.

Telpā caur vītes linijas pakāpeniskiem punktiem 0, 1, 2...15, 16 vilktas pieskares veido savā starpā vienlīdzigus leņķus, tapēc ari notinumā šām pieskarēm javeido savā starpā vienlīdzigi leņķi φ_1.

Ja vītes linija sadalita n vienlīdzigās daļās, tad caur līknes m galejiem punktiem vilkto radiusu $0 - l_1$ un $16 - l_1$ veidotais leņķis līdzinas $\varphi = n . \varphi_1$.

Lai noteiktu leņķa φ lielumu, tad iedomasimies, ka caur kautkādu patvaļigu punktu telpā velkam taisnes, līdzteces vītes linijas pieskarēm punktos 0, 1...15, 16. Šās taisnes viskopibā veido vadošo taisno aploces smaili, kuŗā visas veidules veido ar H tādu pašu leņķi β, kā vītes linijas pieskares veido ar H. Viena vītes linijas pilna apgriezena galejos punktos 0 un 16 vilktas pieskares telpā ir viena otrai līdzteces. Tapēc vadošā smailī galejās veidules, kas ir līdzteces vītes linijas pieskarēm punktos 0 un 16, — saplūst. Tas nozīmē, ka vadošais smailis ir pilns, noslēgtais smailis. Tapēc leņķa $\varphi = n . \varphi_1$ patieso lielumo iegūsim, uzmeklejot vadošā smaiļa sānu virsas notinumu (182 §, 267 ras.)

Kā zinams, leņķis $\varphi = 2\,\pi . \sin\,\alpha$, pie kam α ir vītes linijas pieskaru, vaj ari vadošā smaiļa veiduļu slīpuma leņķis pret asi l. No taisnlenķa trijstūŗa $0_2 - 16_2 - S_{XVI_2}$ (272 ras.) dabujam, ka $\alpha = 90^0 - \beta$, tapēc $\varphi = 2\,\pi . \sin\,\alpha = 2\,\pi . \sin\,(90^0 - \beta) = 2\,\pi . \cos\beta$. Velteniskās vītes linijas gaŗums pēc 199 § līdzinas $m = 0, 1, 2 \ldots 15, 16 = 16_2 - S_{XVI_2} = \frac{0_2 - S_{XVI_2}}{\cos\beta} = \frac{2\,\pi\,r}{\cos\beta}$.

No otrās puses $\smile m = 0, 1, 2 \ldots 15, 16 = \varsigma . \varphi = \varsigma . 2\,\pi\cos\beta$. Tā tad $\varsigma . 2\,\pi\cos\beta = \frac{2\,\pi\,r}{\cos\beta}$, jeb $\varsigma = \frac{r}{\cos^2\beta}$.

Nav grūti radiusu ς noteikt arī grafiski. Tam nolūkam 275 rasejumā velkam aploci ar radiusu r, caur šās aploces centru l_1 velkam horicontalo radiusu $l_1 C$, un no punkta C velkam stateni CB pret $l_1 C$, līdz krustošanai punktā B ar taisni $B l_1$, vilkto caur centru l_1 zem leņķa β pret $l_1 - C$ ($l_1 B \parallel S_{XVI_2} - 16_2$). No punkta B velkam stateni BE pret $B l_1$, līdz krustošanai ar pagarinato taisni $l_1 C$ punktā E.

No taisnleņķa trijstūra $l_1 BE$ dabujam, ka $l_1 E = \frac{l_1 B}{\cos \beta}$. Bet no taisnleņķa trijstūra $l_1 BC$ dabujam, ka $l_1 B = \frac{l_1 C}{\cos \beta} = \frac{r}{\cos \beta}$. Tā tad $l_1 E = \frac{l_1 B}{\cos \beta} = \frac{r}{\cos^2 \beta} = \varsigma$. Tādejadi grafiski noteicam mekleto radiusu $\varsigma = l_1 E$.

Tā kā $\sphericalangle C l_1 B = \beta$, tad punktu B var uzlūkot, kā augstaki aplūkota vadošā smaiļa virsotni. Tādā gadijumā $B l_1$ līdzinas viņa veidules garumam, bet $l_1 C = r$ līdzinas šās veidules horicontalās projekcijas garumam.

Ja vadošā smaiļa virsotni B pieņemam uz vītes linijas ass, tad ap centru l_1, ar radiusu r vilkto aploci var uzlūkot kā vadošā smaiļa horicontalo pēdu liniju. Šī aploce notinumā (sk. 267 ras.) pārvēršas aploces lokā, kas no patvaļiga centra, piemēram, l_1 vilkts ar radiusu $l_1 B$, vienlīdzigu vadošā smaiļa veiduļu garumam.

Nospraužot uz aploces, radiusa $l_1 B$, no punkta 0′, kurā šī aploce krusto $l_1 0$, — šās aploces garumu, mēs iegūstam loku 0′, 1′...15′, 16′, kas ierobežo vadoša smaiļa notinumu. Pie tam ērtibas dēļ uz aploces, radiusa $l_1 B = l_1 - 0'$, ir nospraustī tās pašas sešpadsmit vienlīdzigas daļas, kas iegūtas 272 rasejumā pie aploces, radiusa r, dališanas. Tādejadi 275 rasejumā dabujam loka 0′, 1′...15′, 16′ garumu, kas noteic mekleto leņķi φ.

Pēc tam punktus 0′, 1′...15′, 16′ ar centru l_1 savienodami un šos radiusus līdz krustošanai ar aploci m (radiusa $\varsigma = l_1 E$) pagarinadami, iegūstam vītes linijas m notinuma iedaļu punktus 0, 1...15, 16. Beidzot, pret aploci m punktos 1, 2...15, 16 velkam pieskares un uz šām pieskarēm nospraužam attiecigo helisoida veiduļu garumus. Galejās, caur punktu 16 ejošās helisoida veidules patiesais lielums līdzinas $16_2 - S_{XVI_2}$ (272 ras.). Tapēc $16_2 - S_{XVI_2}$ dalam uz sešpadsmit vienlīdzigām daļām un uz pieskarēm (275 ras.), vilktām pret aploci m punktos 1, 2...15, 16, nospraužam attiecigo dalijumu skaitu, dabujot tā helisoida atsevišķo veiduļu patiesos lielumus.

Iegūtos punktus ar slaideno līkni savienodami, dabujam helisoida horicontalās pēdu linijas notinumu $0 - S_{VIII} - S_{XVI}$.

Tā tad, pilns helisoida apakšejās puses notinums ir ierobežots ar aploces loku $m = 0, 1 \ldots 15, 16$, līkni $0 - S_{VIII} - S_{XVI}$ un taisnlinijaino veiduli $16 - S_{XVI}$.

207 §. Gredzenveidigs helisoids.

Vienpusiga notinamā helisoida virsu, kas no vienas puses ir ierobežota ar atgriešanās līkni, t. i. vītes liniju m, bet nò otras — ar līkni n, iegūtu helisoidam krustojoties ar viņam kopejasigo velteni, sauz par **gredzenveidigu helisoidu.**

276 rasejumā aizrāditas tādas gredzenveidiga helisoida projekcijas, kuŗa atgriešanās linija ir $m = 0, 1 \ldots 15, 16$, bet krustošanās līkne ar kopejasigo velteni ir līkne $n = 0', 1' \ldots 16'$.

Visas helisoida taisnlinijainās veidules $0-0', 1-1' \ldots 16-16'$, ieslēgtas starp vītes liniju un kopejasigo velteni, ir vienlīdzigas un veido ar H vienlīdzigus leņķus. Tapēc ari šo veiduļu horicontalās projekcijas ir vienlīdzigas un viņu gali $0_1', 1_1' \ldots 16_1'$ guļ uz aploces, kuŗas radiuss līdzinas griezejā velteņa radiusam r_1.

Pēc viena pilna apgrieziena uz līknes m guļošo helisoida veiduļu gala punktu horicontalās projekcijas saplūst, t. i. $16_1 = 0_1$. Tapēc ari veiduļu $0-0'$ un $16-16'$ horicontalās projekcijas saplūst, t. i. $16_1 - 16'_1 = 0_1 - 0'_1$, un helisoida horicontalai projekcijai ir gredzenveidigs izskats.

Atsevišķo veiduļu horicontalās projekcijas pieskaras vītes linijas m horicontalai projekcijai m_1.

Lai noteiktu līknes $n = 0', 1' \ldots 15', 16'$ vertikalo projekciju, uz veiduļu vertikalām projekcijām, kas pieskaras vītes linijai m punktos $0, 1 \ldots 15, 16$, janoteic šo veiduļu galu vertikalās projekcijas $0_2', 1_2' \ldots 15_2', 16_2'$. Tam nolūkam konstruejam helisoida veiduļu horicontalo pēdu liniju s, velkam caur 0_2 asi OX un pēc atsevišķo veiduļu horicontaliem pēdu punktiem atrodam attiecigo veiduļu vertikalās projekcijas, uz kuŗām pēc $0_1', 1_1', \ldots 15_1', 16'$ nav gŗūti konstruet $0_2', 1_2' \ldots 15_2', 16_2'$. Pēc tam patvaļigi velkam jaunu asi $O'X' \parallel OX$ tā, lai gredzenveidigs helisoids atrastos I kvadrantā.

Japiemetina, ka punktu $4'$ un $12'$ projekcijas $4_2'$ un $12_2'$ guļošo uz helisoida veidulēm, kas atrodas profilā plaknē, ir konstruetas, savienojot attiecigas profilās plaknes ar V. (Ši konstrukgija rasejumā nav aizrādita).

Iegūtos punktus ar slaideno līkni savienojot, mēs dabujam līknes n vertikalo projekciju n_2.

Iedomasimies, ka zinama helisoida veidule, piemēram, $0'-0$ cieši saistita ar radiusu, kas iet caur galu 0 Ja punkts 0, telpā pēc zinama likuma kustedamies, veido vītes liniju m, tad veidule $0'-0$ pie tam veido gredzenveidiga helisoida virsu Saprotams, ka visi punkti, guļošie uz patvaļigas laustās linijas, pie šās laustās griešanās ap zinamo asi, telpā veido vienlīdzigus griešanās leņķus, tapēc ari punktu 0 un $0'$ griešanās leņķi ir vienlīdzigi.

Punktu $0'$ un 0 ceļi ass l virzienā, saprotams, tapat ir vienlīdzigi. Bet tā kā punkta 0 ceļi ass l virzienā ir proporcionali attiecigiem punkta 0 griešanās leņķiem, tad ari punkta $0'$ ceļi ass l virzienā ir proporcionali ar punkta $0'$ attiecigiem griešanās leņķiem. No ša punkta $0'$ kustibas likumu seko, ka līkne n, kuŗu telpā veido punkts $0'$, tapat ir zinama vītes linija, kuŗas ass sakrīt ar dotās vītes linijas m asi. Saprotams, ka ari vītes linijas n kāpe h līdzinas vītes linijas m kāpei, bet vītes linijas n radiuss līdzinas griezejā velteņa radiusam r_1.

Griezejā velteņa radiusu vispārejā gadijumā var pieņemt pilnigi patvaļigi, tapēc nav gŗūti sajēgt, ka visas līknes, kas rodas helisoidam krustojoties ar patvaļigu kopejasigo velteni, ir vītes linijas, t. i. uz notinamā helisoida virsas var vilkt bezgali daudz vītes linijas, kuŗām ir vienlīdzigas kāpes.

277 rasejumā aizrādits aplūkojamā gredzenveidiga helisoida notinums, kas konstruets pēc 206 § (275 ras.) aizrādijumiem.

XI nodaļa. Nokalnes virsas.

208 §. Vispārejie jēdzieni.

Iedomasimies, ka taisns aploces smailis virzas telpā tādā veidā, ka viņa virsotne pārvietojas gar patvaļigu vadošo līkni m (278 ras.), bet smaiļa ass visu laiku stateniska pret kautkādu plakni, piemēram, H. Katri divi kustošā smaiļa blakus stāvokļi krustojas pa taisnlinijainām veidulēm, kas viskopibā veido zinamu virsu, saucamo par nokalnes virsu. Tā tad nokalnes virsa aptver pakāpeniskus kustošā smaiļa stāvokļus.

Visām kustošā smaiļa veidulēm ir vienadi slīpuma leņķi pret plakni H, tapēc ari nokalnes virsas veidulēm ir vienlīdzigi slīpuma leņķi β pret H. Tapēc, lai noteiktu nokalnes virsu, rasejumā jaizrāda vadošā līkne m un veiduļu slīpuma leņķis β.

Tā tad, nokalnes virsas veidules veido vienlīdzigus leņkus ar patvaļigu plakni H, ko mēs ari novērojām pie atgriešanās virsām, t. i. pie notinamiem helisoidiem. Tapēc nokalnes virsas pieder pie atgriešanās virsām. Nokalnes virsas atgriešanās linija parasti rasejumā netiek aizrādita.

Šīm virsām zemes darbos piemīt seviška nozīme, tapēc mēs viņas aplūkojam atsevišķi no pārejām atgriešanās virsām.

Saprotams, ka nokalnes virsas pieder pie notinamām taisnes virsām. Kā uz nokalnes virsu piemēru aizrādisim uz dzelsceļa dambi.

209 §. Nokalnes virsas veiduļu noteikšana.

Pieņemsim, ka nokalnes virsa dota ar vadošo līkni m un veiduļu slīpuma leņķi β pret H (278 ras.).

Lai caur patvaļigu punktu M uz līknes m vilktu dotās virsas veiduli, mēs patvaļigu punktu L telpā pieņemam par vadošā smaiļa virsotni, kuŗa veidules ir līdzteces nokalnes virsas veidulēm un veido ar H doto leņķi β. (Atsevišķā gadijumā virsotni L var pieņemt uz pašas līknes m).

Caur punktu M velkam pieskari t pret līkni m un caur virsotni L velkam taisni $t' \parallel t$. Taisnes t' pēdu punktu S' noteikuši, mēs no S' pret vadošā smaiļa pamatu velkam pieskares S'A' un $S'A'_I$. Pieskaršanās punkti A' un A'_I noteic divas veidules LA' un LA'_I, pa kuŗām plaknes, līdzteces ar t, pieskaras vadošam smailim. Velkot caur M taisnes MA $\parallel$ MA' un $MA_I \parallel MA'_I$, iegūsim tās nokalnes virsas taisnes, pa kuŗām tangentialās plaknes punktā M pieskaras nokalnes virsai. Bet tā kā taisnes, pa kuŗām tangentialās plaknes pieskaras notinamai taisnes virsai, ir viņas veidules (158 §), tad aizrādītā kārtā dabujam divas nokalnes virsas veidules, kas iet caur punktu M.

Iespējamiba caur patvaļigu punktu M uz dotās liknes m vilkt divas veidules, norāda uz to, ka nokalnes virsām ir divas daļas (puses), kas krustojas pa vadošo līkni m.

Ģeometriskā vieta, kuŗā krustojas katras nokalnes virsas daļas veidules, ir šās daļas atgriešanās linija, kas nesakrīt ar līkni m. Tapēc katru nokalnes virsas daļu (pusi), var uzlūkot kā pilnigi atsevišķu virsu, kuŗai savukārt ir atkal divas daļas (puses), kas viena otrai pieslejas pa attiecigo atgriešanās līkni (201 §).

Veidulēm MA un MA_I var noteikt viņu horicontalos pēdu punktus A un A_I. Noteicot līdzigā kārtā pietiekoši daudz nokalnes virsas veidules un savienojot veiduļu pēdu punktus, mēs iegūstam abu nokalnes virsas daļu horicontalās pēdu linijas. Šās pēdu linijas var ari konstruet pēc sekoša, vēl vienkāršaka paņēmiena.

210 §. Nokalnes virsas noteikšana.

Pieņemsim, ka nokalnes virsa dota ar vadošo līkni $m = 1, 2 \ldots 10, 11$ un veiduļu slīpuma leņķi β pret H (279 ras.).

Caur pakāpeniskiem kustošā taisnā aploces smaiļa virsotnes stāvokļiem 1, 2...10, 11 velkam veidules līdzteces V. Šo veiduļu vertikalās projekcijas iet caur $1_2, 2_2 \ldots 10_2, 11_2$ un veido ar asi OX doto leņķi β. Tapēc nav gŗūti pēc vertikalām projekcijām uzmeklet kustošā smaiļa mainigā pamata patiesos radiusus $r_1, r_2 \ldots r_{10}, r_{11}$. Velkot ar šiem radiusiem no attiecigām horicontalām projekcijām 1_1, 2_1... 10_1, 11_1 aploces, mēs, acim redzot, iegūstam kustošā smaiļa atsevišķo pakāpenisko stavokļu pamatus. Nokalnes virsas aptver kustošā smaiļa virsu, tapēc ari nokalnes virsas horicontalās pēdu linijas s un s_I aptver kustošā smaiļa pamatus.

Nokalnes virsa pieskaras ikkatram kustošā smaiļa atsevišķam stāvoklim pa divām viņa veidulēm, kas iet caur punktiem, kuŗos pēdu linijas s un s_I pieskaras attiecigam kustošā smaiļa pamatam. Šo apstākli varam izlietot, noteicot veselu rindu nokalnes virsas veiduļu, kā tas aizrādits rasejumā.

Līkne s pieskaras atsevišķiem kustošā smaiļa stāvokļiem punktos A, B... kas guļ uz attiecigiem kustošā smaiļa pamatiem. Tapēc attiecigos punktos pret līkni s vilktām pieskarēm un normalēm jasakrīt ar pieskarēm un normalēm, kas tajos pašos punktos vilktas pret attiecigām pamataplocēm. Bet tā kā normales punktos A, B... nav nekas cits, kā caur pieskaršanās punktiem A, B... ejoši radiusi, tad no aizrādītā seko, ka veiduļu horicontalās projekcijas, pa kuŗām nokalnes virsa pieskaras kustošā smaiļa virsai, — ir stateniskas pret nokalnes virsas pēdu liniju s. Šo apstākli varam izlietot, noteicot nokalnes virsas atsevišķas veidules. Līdzigu dabujam, saprotams, attiecibā uz otro pēdu liniju s_I.

Nokalnes virsas pēdu linijas s un s_I noteikuši, mēs pēc 202—204 §§ noteikumiem varam pret nokalnes virsu vilkt tangentialās plaknes, kuŗas iet vaj nu caur punktu, kas pieņemts uz dotās virsas, vaj caur doto ārejo punktu, vaj ari līdztekus dotam virzienam.

Lai konstruetu nokalnes virsas notinumu, mēs doto virsu ar viņas veidulēm sadalam vairakos četrstūŗos A-1-2-B, B-2-3-C u. t. t. Pieņemot līknes 1-2 un AB par taisnlinijainiem nogriežņiem un noteicot visu četrstūŗa A-1-2-B malu, kā ari vienas diagonales (1-B, vaj 2-A) patiesos lielumus, mēs atsevišķā rasejumā konstruejam šā četrstūŗa patieso lielumu. Četrstūrim A-1-2-B pievienojam blakusčetrstūri B-2-3-C u. t. t., dabujot tā nokalnes virsas notinumu. (Šis notinums rasejumā nav aizrādits).

Nenotinamās, jeb greizās taisnes virsas.

211 §. Greizās taisnes virsas veidošana.

Kā zinams (157 §), divas notinamai, jeb greizai virsai piederošas, blakus guļošas veidules atrodas dažadās plaknēs, t. i. viņas nekrustojas, bet šķērsojas telpā.

Tangentialā plakne pret nenotinamo taisnes virsu pieskaras šai virsai zinamā punktā, krustojot viņu pie tam pa taisnlinijaino veiduli, kas iet caur pieskaršanās punktu (158 §).

Aizrāditās īpašibas atšķir nenotinamās taisnes virsas no notinamām.

Nenotinamo, jeb greizo taisnes virsu veidošanas veidi var būt dažadi. Aizrādisim šeit uz dažiem no šiem veidiem.

1) Nenotinamā taisnes virsa rodas, taisnei slīdot telpā pa trim patvaļigām vadošām līknēm *m*, *n* un *p* (280 ras.).

Lai noteiktu nenotinamās taisnes virsas taisnlinijaino veiduli, kas iet caur patvaļigi uz līknes *n* pieņemtu punktu L, mēs L pieņemam kā smailiskās virsas virsotni, bet vienu no parejām dotām līknēm, piemēram, *m* pieņemam kā sās smailiskās virsas vaduli. Punkti M un N, kuŗos līkne *p* krusto smailisko virsu, noteic smailiskās virsas veidules LA un LB, kuŗas taī pašā laikā ir ari nenotinamās virsas veidules, jo viņas krustojas ar visām trim dotām līknēm *m*, *n* un p.

Līknes *p* krustošanās punktu skaits ar palīgsmaiļa virsu noteic taisnlinijaino veiduļu skaitu, kuŗas var vilkt caur patvaļigi pieņemto punktu L.

2) Nenotinamā taisnes virsa rodas, taisnei slīdot pa vienu vadošo līkni *n* un divām vadošām virsām R_1 un R_2 (281 ras.).

Šās virsas taislinijaino veiduli, kas iet caur patvaļigi uz līknes *n* pieņemtu punktu L, varam noteikt šādā veidā. Caur virsotni L velkam divas smailiskās virsas, kuŗu veidules pieskaras virsām R_1 un R_2. Šo smailisko virsu krustošanās linijas, kas iet caur L, noteic nenotinamās virsas taisnlinijainās veidules. Rasejumā aizrādita viena tāda veidule AML, kuŗas pieskaršanās punkti ar virsām R_1 un R_2 ir A un M.

3) Nenotinamā taisnes virsa rodas, taisnei slīdot pa divām vadošām līknēm *m* un *n*, līdztekus dotā vadošā smaiļa (ar virsotni L′) veidulēm (282 ras.).

Lai noteiktu nenotinamās taisnes virsas veiduli, kas iet caur patvaļigi uz līknes *n* pieņemtu punktu L, velkam caur virsotni L smailisko palīgvirsu, kuŗas veidules ir līdzteces vadošā smaiļa veidulēm. Punkti M un N, kuŗos līkne *m* krusto palīgsmaiļa virsu, noteic nenotinamās taisnes virsas veidules LA un LB.

Ja atsevišķā gadijumā vadošā smaiļa virsotne L′ saplūst ar šā smaiļa vadošās līknes (q) plakni, tad vadošā smailiskā virsa pārvēršas vadošā plaknē. Visām greizās virsas veidulēm tadā gadijumā jabūt līdztecēm šai vadošai plaknei un jaiet caur dotām vadošām līknēm m un n.

Nenotinamās taisnes virsas sadalas divās galvenās grupās:

1) kuŗām ir vadošā plakne un
2) kuŗām nav vadošās plaknes.

XII. nodaļa. Nenotinamās taisnes virsas, kuŗām ir vadošā plakne.

212 § Nenotinamo taisnes virsu sadališana.

Pēc vadošo liniju veida skatoties, virsas, kuŗām ir vadosā plakne, var sadalit sekošos veidos:

1) Ja abas vadules ir taisnās linijas, kuŗas neguļ vienā plaknē un nav līdzteces vadošai plaknei, tad dabujam hiperboliskā paraboloida virsu. Tādu virsu sauc ari par greizo plakni.

2) Ja viena no vadulēm ir taisne, bet otra — līkne, tad dabujam konoida virsu.

3) Ja abas vadules ir līkas linijas, tad dabujam veltenoida virsu.

213 §. Hiperboliskā paraboloida veiduļu zistemas, vadošās plaknes un asis.

Pieņemsim, ka telpā dotas divas patvaļigas šķērsodamās taisnes m un n (283 ras.). Vilksim caur taisni m plakni H, līdztekus taisnei n. Caur taisnes m patvaļigiem punktiem 0 un 10 vilksim plaknes V un V′, stateniskas pret H, pie kam V′ ‖ V. (Plakne V′ rasejumā nav aizrādita).

Plakne V krusto taisnes m un n punktos 0 un 0′, bet plakne V′ krusto tās pašas taisnes punktos 10 un 10′. Savienosim punktus 0 un 0′, kā ari 10 un 10′ ar taisnēm p un q. Šās taisnes, acim redzot, šķērsojas telpā. Vilksim tagad vairakas savstarpeji līdzteku plaknes, kas ir līdzteces plaknei V. Šās plaknes varam vilkt patvaļigā atstatumā vienu no otras, bet lielakas skaidribas dēļ viņas 283 rasejumā ir vilktas vienlīdzigos atstatumos viena no otras. Atzīmejam šo plakņu krustošanās punktus ar taisnēm m un n ar skaitļiem 1, 2... un 1′, 2′... Šās plaknes sašķel taisnes m un n proporcionalos nogriežņos, t. i. $0 - 1 : 0' - 1' = 1 - 2 : 1' - 2' = \ldots = 9 - 10 : 9' - 10'$.

Pēc tam velkam vairakas savstarpeji līdzteku plaknes, kas ir līdzteces plaknei H un atrodas viena no otras patvaļigos atstatumos. Rasejumā šie atstatumi pieņemti vienlīdzigi. Šās plaknes sašķel taisnes *p* un *q* proporcionalos nogriežņos: $0-\mathrm{I}:0''-\mathrm{I}'=\mathrm{I}-\mathrm{II}:\mathrm{I}'-\mathrm{II}'=\ldots=\mathrm{VII}-\mathrm{VIII}:\mathrm{VII}'-\mathrm{VIII}'$.

Savienosim rasejumā aizrāditā kārtā atrastos punktus, tad dabusim divas taišņu grupas: $0-10, \mathrm{I}-\mathrm{I}' \ldots \mathrm{VIII}-\mathrm{VIII}'$ un $0-0', 1-1' \ldots 10-10'$. Katra šām grupām piederoša taisne ir hiperboliskā paraboloida taisnlinijainā veidule.

Aizrādito virsu iegūsim, taisnei $m=0-10$ slīdot pa divām nekustamām, šķērsodamām vadošām taisnēm $p=0-\mathrm{VIII}$ un $q=0''-\mathrm{VIII}'$, pie kam slīdošā taisne *m* visu laiku paliek līdztece vadošai plaknei H. To pašu virsu, acim redzot, iegūsim, taisnei $p=0-\mathrm{VIII}$ slīdot pa divām nekustamām, šķērsodamām vadošām taisnēm $m=0-10$ un $n=0'-10'$, pie kam slīdošā taisne *p* visu laiku paliek līdztece vadošai plaknei V.

Taisnes $0-10, \mathrm{I}-\mathrm{I}' \ldots \mathrm{VIII}-\mathrm{VIII}'$, kas ir līdzteces vadošai plaknei H, sauc par vienas zistemas veidulēm, bet taisnes $0-\mathrm{VIII}, 1-1' \ldots 10-10'$, kas ir līdzteces vadošai plaknei V, sauc par otrās zistemas veidulēm.

Tā tad, hiperboliskam paraboloidam ir divas vadošas plaknes un divas attiecigas taisnlinijaino veiduļu zistemas.

Acim redzot, šās divas vadošas plaknes un attiecigas divas veiduļu zistemas ir līdztiesigas.

Katras zistemas veidules savā starpā nekrustojas, bet katra no viņām krusto visas otras zistemas veidules.

Ja vadošas plaknes savstarpeji stateniskas, tad attiecigo hiperbolisko paraboloidu sauc par taisno; pretejā gadijumā viņu sauc par slīpo.

Saprotams, ka vadošas plaknes var ari nesaplūst ar H un V. 283 rasejumā tās tikai pieņemtas, lai ērtaki varetu attēlot hiperbolisko paraboloidu.

Kā aizrādits, plaknes, līdzteces H, sašķeļ taisnes *p* un *q* savstarpeji proporcionalos nogriežņos; bet plaknes, līdzteces V, sašķeļ taisnes *m* un *n* savstarpeji proporcionalos nogriežņos.

Acim redzot, to pašu dabusim priekš visām pārejām taisnlinijainām veidulēm, līdztecēm vienai, vaj otrai vadošai plaknei. Tā tad, vienas zistemas taisnlinijainās veidules, kas līdzteces vienai vadošai paknei, sašķeļ otrās zistemas taisnlinijainās veidules, kas ir līdzteces otrai vadošai plaknei, — savstarpeji proporcionalos nogriežņos.

Aplūkosim patvaļigus punktus A, B, C un D, kas guļ uz patvaļigām vienas zistemas veidulēm $2-2'$ un $5-5'$ un taī pašā laikā uz zinamām otras zistemas veidulēm $\mathrm{III}-\mathrm{III}'$ un $\mathrm{VI}-\mathrm{VI}'$. Rasejumā aizrāditas aplūkojamo veiduļu un uz viņām guļošo punktu horicontalās un vertikalās projekcijas.

Tā kā taisnes $2-2'$ un $5-5'$ līdzteces V, tad viņu horicontalās projekcijas $2-2'_1$ un $5-5'_1$ līdzteces OX. Bet tā kā taisnes III un III' un VI – VI' līdzteces H, tad viņu vertikalās projekcijas $III-III'_2$ un $VI-VI'_2$ līdzteces OX.

Kā rasejumā redzams: $2-A:2-B:2-2'=2-A_1:2-B_1:2-2'_1$ un $5-C:5-D:5-5'=5-C_1:5-D_1:5-5'_1$; no otrās puses dabujam $2-A$:$:2-B:2-2'=5-C:5-D:5-5'$. Ievietojot pēdejā nolīdzinajumā pirmo divu nolīdzinajumu labās daļas, dabujam $2-A_1:2-B_1:2-2'_1=5-C_1:5-D_1:5-5'_1$. Pēdejā nolīdzinajuma locekļu nogriežņi guļ uz divām līdzteku taisnēm $2-2'_1$ un $5-5'_1$, bet tas nozīmē. ka taisnēm, kas savieno šo nogriežņu galus,' t. i. 2 ar 5, A_1 ar C_1, B_1 ar D_1 un $2'_1$ ar $5'_1$, jakrustojās zinamā kopejā punktā 8, jo tādā gadijumā no punkta 8 iziejošie stari sašķeļ līdzteku taisnes $2-2_1$ un $5-5_1$ nogriežņos, kas izpilda pēdejā nolīdzinajuma nosacijumus.

Taisnes A_1-8, B_1-8 un $2'_1-8$ ir taišņu III – III', VI – VI' un $0'-10'$ horicontalās projekcijas. jo uz viņām guļ ari punktu C, D un 5' horicontalās projekcijas C_1, D_1 un $5'_1$, kas pieder aizrāditām taisnēm. Acim redzot, ari visu pārejo veiduļu, — kas līdzteces H, — horicontalās projekcijas ies caur to pašu punktu 8, tapēc visu, plaknei H līdzteču veiduļu horicontali projecejošas plaknes krustojas pa kopejo taisni o_I, kas iet caur punktu 8, stateniski pret H.

Mūsu gadijumā vadošas plaknes ir savstarpeji stateniskas ($H \perp V$) tapēc ari $o_I \perp H$, bet vispārejā gadijumā vadošas plaknes nav savstarpeji stateniskas, tapēc tādā gadijumā ari o_I nav stateniska pret H, bet viņa ir tikai līdztece vadošai plaknei V.

Velkot caur veidulēm $1-1', 2-2' \ldots 9-9'$ plaknes, — līdzteces vadošai plaknei V, dabusim atsevišķo veiduļu attēlojumus uz otras vadošas plaknes H taišņu $2-2', 5-5'$ u. t. t. veidā; tikai veidule o_I attēlojas uz H punkta veidā.

Nav grūti sajēgt, ka o_I šķērsojas telpā ar vadošo plakņu H un V krustošanās taisni OX taisnā leņķī.

Līdzigi varam pierādit, ka $III-A_2:III-C_2=VI-B_2:VI-D_2=0'-2'_2$: $:0'-5'_2$; bet tā kā taisnes $III-C_2$, $VI-D_2$ un $0'-5'_2$ savstarpeji līdzteces, tad taisnēm $0-0'$, $A_2-B_2-2'_2$ un $C_2-D'_2-5'_2$ jakrustojās zinamā kopejā punktā V.

Aizrāditās taisnes ir veiduļu $0-0'$, $A-B-2'$ un $C-D-5'$ vertikalās projekcijas. Acim redzot, ari visu pārejo, plaknei V līdzteku veiduļu vertikalām projekcijām jakrustojās tanī pašā punktā. Tapēc visām plaknei V līdzteku veiduļu vertikali projecejošām plaknēm jakrustojās pa kopejo taisni o_{II}, kas iet caur punktu V, stateniski pret V. Bet ja H nav stateniski pret V, tad dabusim, ka $o_{II} \parallel H$ un pie tam o_{II} un OX telpā šķērsojas taisnā leņķī.

Taisnes o_I un o_{II}, acim redzot, ir vienigas uz hiperboliskā paraboloida virsas guļošas taisnes, kuŗām piemīt aizrāditās īpašības.

T a i s n e s, j e b v e i d u l e s o_I u n o_{II} s a u c p a r h i p e r b o l i s k ā p a r a b o l o i d a a s i m.

Kā rasejumā redzams, hiperboliskā paraboloida asis guļ vienā plaknē, kas stateniska pret vadošo plakņu krustošanās liniju (OX).

Asu o_I un o_{II} krustošanās punktu L sauc par hiperboliskā paraboloida c e n t r u.

Ja vadošas plaknes (H un V) savstarpeji stateniskas, tad, kā augšā aizrādits, $o_I \perp H$ un $o_{II} \perp V$, tapēc šādā gadijumā o_I stateniska pret visām otrās zistemas veidulēm un izmēro visīsakus atstatumus starp viņām. Tamlīdzigi o_{II} šaī gadijumā stateniska pret pirmās zistemas veidulēm un izmēro visīsakus atstatumus starp viņām. Bet ja H nav stateniski pret V, tad ari o_I un o_{II} nav stateniskas pret vadošām plaknēm un neizmēro visīsakus atstatumus starp attiecigās zistemas veidulēm.

Taisni o_{III}, kas stateniska pret asim o_I un o_{II} un iet caur viņu krustošanās punktu L, sauc par hiperboliskā paraboloida g a l v e n o a s i. Galvenā ass o_{III} ir līdztece abām vadošām plaknēm, un tapēc viņa ir ari līdztece šo plakņu krustošanās linijai (OX).

Asis o_I un o_{II} visā gaŗumā guļ uz paraboliskā paraboloida virsas, kamēr galvenā ass o_{III} krusto šo virsu centrā L.

214 §. Hiperboliskā paraboloida griezumi.

Lai attēlotu hiperboliskā paraboloida projekcijas visvienkāršā veidā, mēs ar asim o_I un o_{II} noteikto plakni nostādisim tā, ka viņa būtu līdztece H (284 ras.). Tad galvenā ass o_{III} un vadošas plaknes ir stateniskas pret H, un divplakņu kakts, ko veido vadošas plaknes, projecejas uz H dabiskā lielumā.

Bez tam nostādisim vadošas plaknes tā, lai tās būtu pret vertikalo projekciju plakni novietotas zimetriski, t. i. lai viņas ar V veidotu vienlīdzigus kaktus.

Visu vadošām plaknēm līdzteku plakņu horicontalās pēdu linijas, kā ari visu šām plaknēm līdzteku veiduļu horicontalās projekcijas, — ir līdzteces attiecigo asu o_I un o_{II} horicontalām projekcijām, t. i. ir līdzteces o_{I_1} jeb o_{II_1}.

Atsevišķas veidules varesim visērtaki attēlot, ja pieņemsim vadošo taišņu, jeb veiduļu m, n, p un q projekcijas. Pie tam šām taisnēm jaizpilda 213 pantā minetie noteikumi. Ja šās veidules pieņemam vienlīdzigos atstatumos no galvenās ass o_{III}, tad viņu horicontalās projekcijas veido paralelogramu $A_1B_1C_1D_1$, kuŗa malas zimetriski novietotas pret asi OX.

Paralelograma $A_1 B_1 C_1 D_1$ diagonales krustojas punktā L_1, kas ir aplūkojamās virsas centra L horicontalā projekcija. Taisnes $E_1 G_1$ un $F_1 J_1$, kas savieno paralelograma pretguļošo malu vidus, saplūst ar asu o_I un o_{II} horicontalām projekcijām. Bet viņu krustošanās punkts L_1 ir galvenās ass o_{III} horicontalā projekcija. Leņķi pie paralelograma $A_1 B_1 C_1 D_1$ virsotnēm līdzinas divplakņu kaktiem, vaj attiecigiem papildu kaktiem, ko veido vadošas plaknes.

Pieņemsim, ka punkti B_1 un D_1 ir veiduļu n, q un m, p horicontalie pēdu punkti. Bez tam doti punktu A un C vertikalās projekcijas A_2 un C_2. Pēc tam vairs nav grūti konstruet vadošo taišņu m, n, p un q vertikalās un profilās projekcijas.

Asis o_I un o_{II} iet caur vaduļu m, n, p, un q vidiem un bez tam ir līdzteces H. Ievērojot aizrādito, varesim noteikt asu o_I un o_{II} projekcijas, kā ari centra L projekcijas.

Bet ja ir dota projekcija L_2, tad uz aizrādito noteikumu pamata nav grūti pretejā ceļā pēc E_1 un J_1, uzmeklet uz $o_{I_2} = o_{II_2}$ punktus E_2 un J_2, kā ari vadošo taišņu m, n, p un q vertikalās projekcijas.

Sadalijuši pēc tam asu o_I un o_{II} horicontalās projekcijas, jeb ari paralelograma $A_1 B_1 C_1 D_1$ malas vienlīdzigās daļās, un iegūtās daļas ari uz šo taišņu pagarinajumiem atlikuši, caur iedaļu galiem velkam līdzteces ar o_{II_1} un o_{I_1}. Šās līdzteces ir atsevišķo veiduļu horicontalās projekcijas.

Līdzigā veidā noteic veiduļu vertikalās un profilās projekcijas. Tam nolūkam mēs sadalam, piemēram, $A_2 D_2$ un $C_2 D_2$ tik pat daudz daļās, kā $A_1 D_1$, vaj $C_1 D_1$, un attiecigā kārtā savienojam dabutos iedaļu galus. Pie tam jaatzīmē ari iedaļas uz taišņu $A_2 D_2$ un $C_2 D_2$ pagarinajumiem.

Līdzigi konstruejamas atsevišķo veiduļu profilās projekcijas

Ja ir konstruetas atsevišķo veiduļu projekcijas, tad saprotams, nav grūti atrast hiperboliskā paraboloida horicontalās pēdu linijas s un s'.

Pieņemsim, ka aplūkojamā virsa ierobežota ar divām profilām plaknēm, kas iet caur punktiem A un C. Tad šo profilo plakņu horicontalās pēdu linijas kopā ar konstruetām pēdu linijām s un s' ierobežo hiperboliskā paraboloida horicontalās projekcijas redzamibas apveidu.

Vertikalās projekcijas redzamibas apveids ir ierobežots ar aizrādito profilo plakņu vertikalām pēdu linijām, asi OX un līkni $A_2 L_2 C_2$, kas ievilkta daudzstūra iekšpusē, ko veido atsevišķo veiduļu augšejās daļas.

Līkne ALC, kā ari viņas vertikalā projekcija ir parabole, kuras virsotne sakrīt ar aplūkojamās virsas centru L. Paraboles ALC plakne ir līdztece V. Paraboles $A_2 L_2 C_2$ pieskaršanās punkti ar viņai apvilkto daudstūri guļ uz stateņiem, kas vilkti pret asi OX caur punktiem, kuros $A_1 L_1 C_1$ krustojas ar atsevišķo veiduļu horicontalām projekcijām.

Katra, plaknei ALC līdztece plakne krusto doto virsu pa tādu pat paraboli, kā ALC, pie tam jaunās paraboles virsotne guļ uz līknes BLD.

Aplūkojamās virsas profilā projekcija ierobežota ar divām vienlīdzigām parabolēm. Apakšejā no viņām ($B_3L_3D_3$) ir aplūkojamās virsas griezuma līkne ar profilo, caur centru L ejošo plakni. Bet augšejā, caur punktu $A_3 = C_3$ ejoša parabole ir to divu paraboļu kopeja profilā projekcija, ko dabujam, aplūkojamai virsai krustojoties ar profilām plaknēm, kas iet caur punktiem A un C.

Paraboles, kas ierobežo profilo projekciju, pabīditas viena pret otru atstatumā L_3A_3. Saprotams, ka ari ikkatra cita, plaknei BLD līdztece plakne krusto hiperbolisko paraboloidu pa paraboli, vienlīdzigu ar $B_3L_3D_3$, kuŗas virsotne atrodas kautkur uz ALC.

Atlūkojamās virsas krustošanās linijas ar plakni H, kas stateniska galvenai asij o_{III}, t. i. līknes s un s' noteic divus hiperboles zarus, kuŗas centrs saplūst ar horicontalo proejekciju o_{III_1}. Hiperboles virsotnes atrodas punktos B_1 un D_1, bet viņas asimptotes ir taisnes o_{I_1} un o_{II_1}.

Katrs aplūkojamās virsas griezums ar plakni, līdzteci H, t. i. statenisku pret o_{III} un ejošo zem centra L, — tapat ir zinama hiperbole, kuŗas centra un asimptotu horicontalās projekcijas sakrīt ar o_{III_1}, o_{I_1} un o_{II_1}, bet virsotņu horicontalās projekcijas guļ uz $B_1L_1D_1$ un zinamā mērā ir pabīditas attiecībā uz virsotnēm B_1 un D_1.

Ja griezejā plakne, kas stateniska pret o_{III}, iet virs centra L, tad griezumā ar aplūkojamo virsu tapat rodas hiperboles, kas atrodas divplakņu kaktu ELF un GLJ iekšpusē. Šo hiperboļu centru un asimptotu horicontalās projekcijas ieņem iepriekšejos stāvokļus, bet hiperboļu zaru horicontalās projekcijas atrodas leņķu $E_1L_1F_1$ un $G_1L_1J_1$ iekšpusē. (Pēdejās hiperboles rasejumā nav aizrāditas).

Ta tad griezumos ar vertikalām plaknēm, līdztecēm V, dabujam paraboles; tapat griezumos ar profilām plaknēm dabujam paraboles; bet griezumos ar horicontalām plaknēm dabujam hiperboles.

Pēc šām griezuma līknēm aplūkoto virsu ari sauc par hiperbolisko paraboloidu.

Hiperboliskā paraboloida virsu var ari uzlūkot iegūtu, parabolei ALC slīdot pa otru vadošo paraboli BLD, pie kam slīdošās paraboles ALC plakne visu laiku ir līdztece V, un virsotne L slīd pa vadošo paraboli BLD.

Saprotams, ka to pašu virsu iegūstam, parabolei BLD slīdot pa vadošo paraboli ALC, pie kam slīdošās paraboles plakne BLD visu laiku ir līdztece profilai plaknei, un virsotne L slīd pa vadošo paraboli ALC.

Aizrādītā nozīmē parabolēm ALC un BLD ir pilnigi vienadas tiesibas.

Hiperboliskā paraboloida tangentialās plaknes noteicamas ar divām caur pieskaršanās punktu ejošām veidulēm. Šās veidules ir tangentialās plaknes krustošanās taisnes ar hiperboliskā paraboloida virsu.

Hiperboliskos paraboloidus, vaj greizās plaknes diezgan bieži lieto praktiskā dzīvē. Tā, piemēram, vējeņu spārņi (285 ras.) veidoti no hiperboliskā paraboloida virsas.

Greizās plaknes lieto ari jumtu nogāžu veidošanai, ja jumta horicontalā projekcija ir trapece un jumta čukurs ir horicontalā taisne (286 ras.). Kā vēl uz vienu piemēru var aizrādit uz sienas virsu ABCD (287 ras.), kas ronas, sienai no vertikalā stāvokļa paslīpā pārejot.

215 §. Vītes konoids.

Kā augšā minets, konoida virsa rodas, taisnei slīdot pa divām vadulēm, no kuŗām viena ir taisnā linija, bet otra līkā, pie kam slīdošā taisne visu laiku paliek līdztece dotai vadošai plaknei.

Ja vadoša līkne ir vītes linija m, vadoša taisne ir vītes linijas ass l, bet vadoša plakne stateniska pret vītes linijas asi l, tad vītes linijas radiuss veido vītes konoida virsu. Tāda virsa attēlota 288 rasejumā.

Lielakas skaidribas dēļ konoida redzamā apakšejā virsa, kas pagriesta pret H, — vertikalajā projekcijā ieklāta ar atsevišķiem punktiem.

Lai pēc dotās horicontalās projekcijas A_{I_1} atrastu attieciga, uz konoida virsas guļoša oriģinalā punkta A_I vertikalo projekciju, A_{I_1} savienojam ar l_1 un atrodam punktu A_{1_1}, kuŗa taisne $l_1 A_{I_1}$ krusto vītes linijas horicontalo projekciju m_1. Taisne $l_1 A_{1_1}$, acim redzot, ir radiusa, ejoša caur punktu A_I, horicontalā projekcija. Projekcijai $l_1 A_{1_1}$ atbilst zinama, caur punktu A_{1_2} ejoša vertikalā projekcija. Tā kā taisne, vilkta caur A_{1_1} stateniski pret OX, krusto vītes linijas vertikalo projekciju divos punktos, tad, lai punktu A_{1_2} pareizi noteiktu, japiegriež vēriba horicontalās projekcijas A_{1_1} stāvoklim. Projekcija A_{1_1} guļ uz vītes linijas horicontalās projekcijas daļas $0-4_1$, tapēc ari projekcijai A_{1_2} jaguļ uz attiecigās vītes linijas vertikalās projekcijas daļas 0_2-4_2. Noteikuši attiecigas veidules vertikalo projekciju, nav grūti konstruet meklejamo projekciju A_{I_2}.

Analoģiski pēc dotās vertikalās projekcijas A_{I_2} var noteikt attiecigo horicontalo projekciju A_{I_1}.

Vītes konoidus sauc ari par n e n o t i n a m i e m h e l i s o i d i e m (205 §).

216 §. Gredzenveidigs vītes konoids.

Ja vītes konoids krustojas ar vienasigu velteni (289 ras.), tad griezumā dabujam vītes liniju n, kuŗai vienlīdziga kāpe ar vadošo vītes liniju m, bet cits radiuss r_1. Nenotinamo taisnes virsu, ko ierobežo aizrāditās vītes linijas, sauc par gredzenveidīgo vītes konoidu. Praktiskā dzīvē tādu virsu sastopam pie vītes trepēm.

217 §. Taisnstūraina vite.

Visbiežaki gredzenveidigā vītes konoida virsa sastopama pie taisnstūrainām vītēm (290 ras.).

Taisnstūrainas vītes virsa rodas, taisnstūrim, vaj kvadratam ABCD, kuŗa malas BC un AD ir stateniskas pret doto taisni l, griežoties ap asi l tā, ka plakne ABCD visu laiku iet caur asi l, un viena no taisnstūŗa virsotnēm ABCD slīd pa vienasigo vītes liniju.

Saprotams, ka pie tam ari pārejās virsotnes slīd pa zinamām vienasigām vītes linijām. Pie tam virsotņu A un B vītes linijas ir vienlīdzigas un guļ uz velteņa virsas, kuŗa radiuss ir r; tapat ari virsotņu C un D vītes linijas ir vienlīdzigas, bet guļ uz vienasigā velteņa virsas, kuŗa radiuss ir r_1. Malas AB un CD, saprotams, visu laiku ir līdzteces asij l.

218 §. Vites veltenoids.

Kā 212 § aizrādits, veltenoida virsu dabujam, taisnei slīdot pa divām dotām līknēm, pie kam slīdošā taisne visu laiku ir līdztece zinamai vadošai plaknei.

Vītes veltenoidu (291 ras.) dabujam no taisnes AB kustibas, kas cieši saistita ar vītes linijas n radiusa galu A, un pie tam guļ uz plaknes, stateniskas pret vītes linijas asi. Saprotams, ka punktam A kustoties pa vītes liniju n, punkts B ari veido telpā zinamu vītes liniju m, kuŗas kāpe līdzinas vītes linijas n kāpei, bet radiuss līdzinas punkta B atstatumam no ass l.

Šās divas vītes linijas ir aplūkojamās virsas vadošas līknes, bet virsas vadoša plakne ir plakne H, stateniska pret l. 291 rasejumā pieņemts, ka taisne BA stateniska pret radiusu, kas iet caur punktu A, tapēc veidules BA horicontalā projekcija visu laiku pieskaras vītes linijas n horicontalai projekcijai.

Noteikuši atsevišķo veiduļu horicontalo un vertikalo projekciju virzienus, pēc horicontalām projekcijām varam konstruet attiecigo veiduļu galu vertikalās projekcijas.

XIII nodaļa. Nenotinamās taisnes virsas, kuŗām nav vadošas plaknes. Vienpusigie hiperboloidi.

219 §. Vispārejie jēdzieni.

Pieņemsim, ka dotas divas šķērsodamās taisnes AB un l (292 ras.), un taisne AB griežas ap nekustamo asi l tā, lai atsevišķo taisnes AB punktu attālumi no griešanās ass l nemainas. Virsu, ko taisne AB veido, aizrādītā veidā ap asi l griezdamies, sauc par vienpusigu hiperboloidu.

Ikkatrs taisnes AB punkts pie tam virzas pa zinamo aploci, ko sauc par platuma aploci. Visu platumu aploču plaknes ir stateniskas pret griešanās asi l. Tādas platuma aploces ir aizrāditas taisnes AB punktiem A, B un C. Saprotams, ka vismazakā radiusa r platuma aploci dabusim no tāda taisnes AB punkta C griešanās, kas atrodas vismazakā atstatumā no griešanās ass l, t. i. kuŗa griešanās radiuss $r = LC$ ir stateniskš pret abām šķērsodamām taisnēm AB un l.

Vismazakā radiusa platuma aploci sauc par vienpusiga hiperboloida kaklu.

Ja griešanās ass l stateniska horicontalai plaknei, tad visas platuma aploces un viņu griešanās radiusi projecejas uz H dabiskā lielumā.

Rasejumā aizrādita caur kaklu (C) ejoša horicontalā plakne H. Taisne AB projecejas uz šo plakni taisnes A_1B_1 veidā, kas pieskaras kakla platuma aplocei. Saprotams, ka taisnes AB projekcija uz patvaļigu citu horicontalo plakni pieskaras kakla (C) projekcijai uz šo plakni.

Kustošās veidules AB slīpuma leņķis pret H nemainas.

Katra caur griešanās asi ejoša plakne krusto aplūkojamo virsu pa meridianu, kas sastāv no diviem zariem m un m' un pieder zinamai hiperbolei. Šās hiperboles virsotnes C_1 un C_2 ir meridiana plaknes krustošanās punkti ar kakla platuma aploci, bet hiperboloida centrs L ir ari kakla centrs.

Acim redzot, aplūkojamo virsu iegūsim, hiperbolei mm' griežoties ap viņas šķietamo asi l. Tapēc attēloto virsu ari sauc par vienpusigu griešanās hiperboloidu.

Divas patvaļigas aplūkojamās virsas platuma aploces, piemēram, punktu A un B platuma aploces, var uzlūkot par kustošās veidules AB vadošām līknēm, pie kam AB bez tam visu laiku krusto patvaļigu trešo platuma aploci, piemēram, kakla C platuma aploci.

220 §. Vienpusiga hiperboloida projekcijas.

293 rasejumā vienpusigs hiperboloids dots ar šķērsodamām taisnēm AB un l, pie kam l ir hiperboloida griešanās ass.

Ērtibas dēļ punkti A un B pieņemti vienlīdzigos atstatumos no ass l, tapēc ari šo punktu platuma aploču horicontalās projekcijas saplūst. Veidules AB horicontalai projekcijai A_1B_1, kā augšā aizrādits, jabūt pieskarei pret kakla horicontalo projekciju. Pamatojoties uz aizrādito, varam noteikt kakla radiusa lielumu $r = L_1C_1$.

Kakla vertikalo projekciju dabujam, ievērojot, ka kakla plakne iet pa vidu starp punktiem A un B, kas atrodas vienlīdzigos atstatumos no ass l. Tapēc kakla vertikalā projekcija iet caur punktu C_2, kas dala A_2B_2 uz pusēm. Šās platuma aploces krustošanās punktu ar l_2 noteikuši, iegūstam kakla centra vertikalo projekciju L_2. Pēc tam abās pusēs no L_2 uz līdzteces ar OX radiusu r nospraužot, atrodam vertikalās projekcijas C_{1_2} un C_{2_2} no tām hiperboles virsotnēm C_1 un C_2, kas rodas, vienpusigam hiperboloidam krustojoties ar plakni, kuŗa iet caur asi l, līdztekus V.

Tā kā visas platuma aploces horicontalajā projekcijā projecejas dabiskā lielumā, bet viņu vertikalās projekcijas ir līdzteces OX, tad nav gŗūti konstruet ari pārejos apveida punktus vertikalajā projekcijā. Tam nolūkam vienpusiga hiperboloida augstumu vertikalajā projekcijā un veidules AB horicontalo projekciju dalam patvaļigās, piemēram, 8 vienlīdzigās daļās, atzīmejot iedaļu galus ar attiecigiem skaitļiem I, II . . . VII un 1, 2 . . . 7. Caur I, II . . . VII velkam līdzteces asij OX un uz šām līdztecēm abās pusēs no l_2 nospraužam attiecigo punktu 1, 2 . . . 7 atstatumus $r_1, r_2 \ldots r_7$ no l_1. Tā, piemēram, $I - D_2 = r_1 = l_1 - 1$, $II - E_2 = r_2 = l_1 - 2 \ldots$ un $VII - F_2 = r_7 = l_1 - 7$. Tādā veidā iegūtie punkti $D_2, E_2 \ldots F_2$ ierobežo vienpusiga hiperboloida vertikalās projekcijas apveidu.

Lai pēc punkta M_1 horicontalās projekcijas M_{1_1}, kas guļ uz vienpusiga hiperboloida virsas, atrastu attiecigo vertikalo projekciju M_{1_2}, velkam caur M_{1_1} veidules A_1B_1, uz kuŗas guļ oriģinalais punkts M_1, horicontalo projekciju $A_{1_1}B_{1_1}$. Pie tam projekcijai $A_{1_1}B_{1_1}$ japieskaras kakla horicontalai projekcijai. Pēc horicontalām projekcijām A_{1_1} un B_{1_1} nav gŗūti uzmeklet attiecigās vertikalās projekcijas A_{1_2} un B_{1_2}. Savienojot A_{1_2} ar B_{1_2}, kontroles dēļ dabujam, ka $A_{1_2}B_{1_2}$ krusto kakla vertikalo projekciju zinamā punktā G_2, kas ar punktu G_1, — kuŗā $A_{1_1}B_{1_1}$ pieskaras kakla horicontalai projekcijai, — guļ uz viena stateņa pret OX, jo punkts G, acim redzot, ir oriģinalās veidules A_1B_1 pieskaršanās punkts ar kaklu. Projekciju $A_{1_2}B_{1_2}$ zinot, nav gŗūti uz viņas uzmeklet punkta M_1 vertikalo projekciju M_{1_2}.

Projekciju M_{1_2} varam konstruet ari ar punkta M_1 platuma aploces palīdzību. Tam nolūkam no centra l_1 ar radiusu $l_1M_{1_1}$ velkam loku, līdz krustošanai ar A_1B_1 punktā M_1. Pēc M_1 uzmeklejam uz A_2B_2 projekciju

M_2; caur M_2 velkam platuma aploces vertikalo projekciju, līdztekus OX, un uz viņas pēc M_{1_1} atrodam meklejamo projekciju M_{1_2}.

Analoģiskā kārtā nav grūti pēc patvaļiga punkta vertikalās projekcijas atrast attiecigo horicontalo projekciju.

Saprotams, ka horicontalajā projekcijā redzama tā kustošās veidules AB daļa, kas atrodas virs kakla plaknes. (Kadēļ rasejumā taisne A_1B_1 ir izvilkta vienlaidus, vēlak (221 §) tiks izskaidrots).

Vertikalajā projekcijā veidules redzamas tiktāl, ciktāl viņas guļ uz hiperboloida priekšejās daļas Tā, piemēram, veidules A_2B_2 vertikalā projekcijā $A_{2_2}B_{2_2}$ pa daļai redzama, bet pa daļai neredzama.

294 rasejumā aizrāditi sešpadsmit dažadi vienpusiga hiperboloida veidules AB stāvokļi. Ievelkot daudzstūŗos, noteiktos ar veiduļu galejiem kreisiem un labiem apveidiem, līknes, iegūstam hiperboles projekcijas C_{1_2} un C_{2_2}, kas ierobežo vienpusiga hiperboloida vertikalās projekcijas apveidu.

221 §. Veiduļu zistemas.

Veidules AB horicontali projecejoša plakne (292 ras.) krusto punktu A un B platuma aploču plaknes pa taisnēm AB′ un BA′. Ja pie tam punkti A un B no kakla C plaknes vienlīdzigos atstatumos, tad punkti A un A′, kā ari B un B′ guļ uz kopejiem horicontali projecejošiem stariem, un tapēc taišņu AB un A′B′ horicontalās projekcijas A_1B_1 un $A_1'B_1'$ saplūst.

Taisnstūŗa AA′BB′ diagonale A′B′ iet caur diagonales AB vidu, t. i. caur punktu C, kas guļ uz kakla platuma aploces. Punkts B′ guļ uz punkta A platuma aploces, bet A′ — uz punkta B platuma aploces, t. i. punkti A′ un B′ guļ uz vienpusiga hiperboloida virsas. Tapēc taisne A′B′, kas krustojas ar trijām platuma aplocēm, jeb vadošām līknēm, pēc augšā pievestā vienpusiga hiperboloida veidošanas likuma, - ir šās virsas taisnlinijainā veidule. Tapēc aizrādito virsu iegūsim, ari veidulei A′B′ ap agrakajo asi *l* griežoties.

Pakāpeniskie griezošās veidules AB stāvokļi noteic p i r m o v e i d u ļ u z i s t e m u, bet pakāpeniskie griezošās veidules A′B′ stāvokļi noteic o t r o v e i d u ļ u z i s t e m u. Acim redzot, abām veiduļu zistemām ir vienadas tiesibas.

Leņķi ACA_1 un $A'CA'_1$, kā redzams, ir vienlīdzigi; bet tā kā šie leņķi ir veiduļu AB un A′B′ slīpuma leņķi pret H, tad tas nozīme, ka a b a s v e i d u ļ u z i s t e m a s v e i d o v i e n l ī d z i g u s, n e m a i n i g u s s l ī p u m a l e ņ ķ u s a r H.

293 rasejumā pēc veidules AB projekcijām ir noteiktas veidules A′B′ projekcijas, pie kam veidules AB un A′B′ guļ vienā kopejā horicontali projecejošā plaknē. Kā redzams, veidules A′B′ daļa CB′ atrodas virs kakla plaknes. Tapēc horicontalo projekciju C_1B_1' dabujam vienlaidu linijas

veidā, kas apsedz veidules AB horicontalās projekcijas neredzamo daļu $C_1 B_1$, uz ko jau aizrādits 220 §.

Kā augšā pierādits, taisne $A'B'$ ir vienpusiga hiperboloida veidule, t. i. viņa visa pieder aplūkojamai virsai. Bet šo virsu varam uzlūkot, kā sastāvošu no bezgali daudz kustošās veidules AB atsevišķiem stāvokļiem, tapēc saprotams, ka taisne $A'B'$ krustojas ar visām veidules AB atsevišķiem stāvokļiem, t. i. ar visām veidulēm, kas pieder zistemai AB. Tapēc punktiem, kuŗos taisnes $A'B'$ projekcijas krustojas ar veiduļu AB zistemas vienadnosaukuma projekcijām, t. i. punktiem C_1 un C_2, J_1 un J_2, kā ari K_1 un K_2 jaatrodās uz taisnēm, stateniskām pret asi OX.

Saprotams, ka veiduļu zistemu AB un $A'B'$ vienlīdzigo tiesibu dēļ, mēs varam apgalvot, ka ari katra zistemas AB veidule krustojas ar visām zistemas $A'B'$ veidulēm.

294 rasejumā aizrāditas tikai zistemas AB veidules. Saprotams, ka nebūtu gŗūti tanī pašā rasejumā aizrādit ari otrās zistemas $A'B'$ veidules, bet tas lielakas skaidribas dēļ rasejumā nav izdarits.

Ja mēs aplūkosim divus patvaļigus vienas veiduļu zistemas AB stāvokļus $A_1 B_1$ un $A_2 B_2$ (293 ras.), tad pamatodamies uz aplūkojamās virsas veidošanas likumu, dabujam, ka taisnei AB griežoties ap asi l, ar kuŗu taisne AB visu laiku šķērsojas, ari visiem stāvokļiem $A_1 B_1$, $A_2 B_2$... jašķērsojās ar asi l, t. i. viņiem ar asi l nav kopeju punktu. Tapēc ari divi kautkādi kustedamās veidules AB stāvokļi nevar krustoties. Ja pielaidisim pretejo, t. i. ja pielaidisim, ka divas patvaļigas veidules krustojas, tad vajadzetu pielaist, ka caur to pašu punktu iet ari pārejas veidules, t. i. mēs iegūtu ne aplūkojamo virsu, bet smailisko virsu, kuŗas virsotne guļ uz griešanās ass l.

Vienas veiduļu zistemas savstarpejas krustošanās neiespējamiba novērojama, ja aplūkojam patvaļigas vienas veiduļu zistemas projekcijas. Tā, piemēram, horicontalo projekciju $A_{1_1} B_{1_1}$ un $A_{2_1} B_{2_1}$ krustošanās punktam $N_1 = R_1$ vertikalajā projekcijā atbilst projekcijas N_2 un R_2, kas nesakrīt. Bet tā ir pazīme, ka taisnes $A_1 B_1$ un $A_2 B_2$ telpā nekrustojas, bet šķērsojas. Tapēc vienpusigā hiperboloida virsa pieder pie nenotinamām taisnes virsām.

Tā tad mēs atradām, ka zinamai vienai zistemai piederošas veidules savā starpā nekrustojas, bet katra vienas zistemas veidule krustojas ar visām otrās zistemas veidulēm.

No aizrādita seko, ka caur patvaļigu vienpusigā hiperboloida punktu vienmēr var vilkt divas taisnlinijainās veidules, kas noteic vienpusigā hiperboloida tangentialo plakni aplūkojamā punktā. Šā tangentialā plakne krustojas ar virsu pa divām, caur aplūkojamo punktu ejošām veidulēm.

L a i n o t e i k t u p a t v a ļ i g a s t a i s n e s k r u s t o š a n ā s p u n k t u s a r v i e n p u s i g ā h i p e r b o l o i d a v i r s u, caur doto taisni velkam vienu horicontali, vaj vertikali projecejošo plakni un atrodam šās projecejošas plaknes krustošanās punktus ar atsevišķām vienpusiga hiperboloida veidulēm. Atrastos punktus savienodami, iegūstam projecejošas plaknes griezuma līkni ar vienpusigo hiperboloidu. Šās līknes krustošanās punkts ar doto taisni ir meklejamais punkts.

Līdzigi noteicama vienpusigā hiperboloida krustošanās ar patvaļigām plaknēm.

222 §. Tangentialā plakne pret vienpusigu hiperboloidu, ejoša caur doto ārejo punktu.

Pieņemsim, ka caur doto ārejo punktu J pret vienpusigu hiperboliodu javelk tangentialā plakne (295 ras.).

Tam nolūkam velkam patvaļigu veiduli AB, kuŗas horiçontalais pēdu punkts ir B. Caur doto punktu J velkam taisni $a \parallel AB$ un atrodam taisnes a pēdu punktu S. Punktus B un S savienodami, iegūstam zinamas, caur taisni a un veiduli AB ejošas plaknes horicontalo pēdu liniju s. Pēdu linija s krusto vienpusiga hiperboloida horicontalo pēdu liniju, t. i. punkta B platuma aploci, punktā A'_1, ko varam pieņemt par otrai veiduļu zistemai piederošas veidules $A'B'$ horicontalo pēdu punktu.

Veidules $A'B'$ projekcijas nav gŗūti konstruet, ievērojot, ka projekcija $A'_1B'_1$, pieskaras kakla horicontalai projekcijai. Veidulei AB jakrustojās ar visām otras zistemas veidulem, tapēc viņai ari jakrustojās ar veiduli $A'B'$ zinamā punktā M, kuŗa projekcijas ir veiduļu AB un $A'B'$ vienadnosaukuma projekciju krustošanās punkti. Kontroles dēļ punktiem M_1 un M_2 jaguļ uz viena stateņa pret asi OX.

Plakne, kas ir noteikta ar krustodamām veidulēm AB un $A'B'$, pieskaras vienpusiga hiperboloida virsai punktā M. Šī plakne bez tam iet caur doto ārejo punktu J, jo viņa satur caur punktu J ejošo taisni $a \parallel AB$.

Punkts M ir punkts, kuŗā viena no tangentialām plaknēm, vilktām no punkta J pret vienpusigu hiperboloidu, pieskaras šai virsai, un taisne JM ir viens no stariem, kas iet caur punktu J, tangentiali pret doto virsu.

Pieņemot uz vienpusiga hiperboloida virsas veidules AB vietā patvaļigu citu veiduli, varam konstruet jaunu pieskaršanās punktu, līdzigu punktam J. Visus tādejadi atrastos punktus ar slaideno līkni savienodami, iegūstam līkni, pa kuŗu no punkta J izejošais staru kūlitis pieskaras vienpusiga hiperboloida virsai.

Ja punkts J ir gaismas avots, tad tādā kārtā atrasta līkne noteic gaismas atdalošo līkni, jeb vienpusiga hiperboloida pašēnas apveidu. Pēc pašēnas apveida nav grūti konstruet ari attiecigās krītošās ēnas apveidu.

223 §. Pret vienpusigu hīperboloidu tangentialā plakne, līdztece dotam virzienam.

Pieņemsim, ka pret doto vienpusigu hiperboloidu javelk tangentialā plakne, līdztece dotam virzienam m (296 ras.).

Tam nolūkam velkam patvaļigu veiduli AB un caur patvaļigu punktu J uz m velkam taisni $a \parallel AB$. Savienojot taišņu m un a horicontalos pēdu punktus S un S_I, iegūstam ar krustodamām taisnēm m un a noteiktās plaknes pēdu liniju s. Caur veidules AB horicontalo pēdu punktu B_1 velkam taisni $s_I \parallel s$. Punktu A'_1, kuŗā linija s_I krusto vienpusiga hiperboloida horicontalo pēdu liniju, var pieņemt kā otrai veiduļu zistemai piederošas veidules A′B′ horicontalo pēdu punktu. Noteikuši veidules A′B′ projekcijas, atrodam punkta $M = AB \times A'B'$ projekcijas.

Taisne s_I pēc konstrukcijas ir ar krustodamām veidulēm AB un A′B′ noteiktas plaknes horicontalā pēdu linija. Šī plakne pieskaras vienpusigam hiperboloidam punktā M un ir līdztece virzienam m, jo viņa satur taisnes AB un s_I, kuŗas ir līdzteces attiecigām taisnēm a un s, kas noteic caur doto virzienu m ejošo plakni. Tā tad, plakne $AB \times A'B'$ ir viena no meklejamām tangentialām plaknēm, un šaī plaknē caur punktu M pret vienpusigo hiperboloidu var vilkt pieskari, līdztekus dotam virzienam m.

Noteikuši līdzigā kartā veselu virkni plakņu, kas pieskaras vienpusiga hiperboloida virsai un ir līdzteces dotam virzienam m, un konstruejuši viņu pieskaršanās punktus, tamlīdzigi, kā konstruejām punktu M, — šos punktus savienojam. Iegūtā līkne noteic ģeometrisko vietu, pa kuŗu atsevišķie, virzienam m līdzteku tangentialie stari pieskaras vienpusiga hiperboloida virsai.

Ja taisne m noteic gaismas staru virzienu, tad konstruetā pieskaršanās līkne noteic gaismas atdalošo līkni, jeb vienpusiga hiperboloida p a š ē n a s a p v e i d u. Pēc pašēnas apveida nav gŗūti konstruet ari krītošās ēnas apveidu.

Jaatzīmē, ka vienpusiga hiperboloida virsu lieto, profilejot zobriteņus, kuŗu asis telpā šķērsojas.

Greizie velteņi ar trim vadulēm.

Greizie velteņi ar trim vadulēm rodas, ja jel viena no vadulēm ir līka linija. Aplūkosim sekošus greizo velteņu veidus.

224 §. Greizs veltenis.

297 rasejumā attēlots greizs veltenis ar trim vadulēm, no kuŗām divas ir pusaploces m un n, nostāditas līdztekus V, bet trešā ir pret pusaploču plaknēm stateniska taisne a.

Lai noteiktu patvaļigu taisnlinijaino veiduli, mēs uz vienas pusaploces vertikalās projekcijas, piemēram, uz m_2 pieņemam patvaļigu punktu A_2, savienojam viņu ar vadošās taisnes vertikalo projekciju a_2 un atzīmejam taisnes $a_2 - A_2$ krustošanās punktu ar n_2, dabujot tā punkta B vertikalo projekciju B_2, kas pieder meklejamai veidulei un vadošai pusaplocei n.

Noteikuši pēc tam uz m_1 un n_1 projekcijas A_1 un B_1, mēs iegūstam meklejamās veidules horicontalo projekciju $A_1 B_1$.

Attēloto virsu lieto velvju veidošanai virs greizām caurejām.

225 §. Greizs helisoids.

Pieņemsim, ka aplūkojamās virsas vadules ir vītes linija m un viņas ass l (298 ras.).

Taisne $0 - 0_o$ virzas telpā tā, ka viens gals 0 slīd pa vītes liniju m, bet otrs gals 0_o pa asi l, un pie tam visas atsevišķas veidules $0 - 0_o$ stāvokļi ir līdzteces taisnā vadoša smaiļa veidulēm, ša vadoša smaiļa ass saplūst ar l, bet viņa pamats ir aploce n; virsotne L guļ uz l. Virsu, ko vadule $0 - 0_o$ veido, aizrādītā kārtā telpā kustojoties, sauc par **g r e i z o h e l i s o i d u**.

Pieņemsim, ka $1' - L$ ir vadoša smaiļa veidule, kas līdztece V. Attieciga greiza helisoida veidule $0 - 0_o$ atbilst sekošiem noteikumiem: horicontala projekcija $0 - 0_{o1}$ saplūst ar virzienu $1'_1 - L_1$, bet vertikalā projekcija $0_2 - 0_{o2} \parallel 1'_2 - L_2$, jo $0 - 0_o \parallel 1 - L$. Līdzigi konstruejamas patvaļigas citas greiza helisoida veidules $3 - III$ projekcijas. Tam nolūkam iepriekš janoteic attiecigās vadoša smaiļa veidules $3' - L$ projekcijas, pēc tam noteicam $3_1 - III_1$, kas saplūst ar virzienu $3'_1 - L_1$, un, beidzot, caur vītes linijas vertikalo projekciju 3_2 velkam $3_2 - III_2 \parallel 3'_2 - L_2$.

Greiza helisoida veidules var noteikt ari uz ta nosacijuma pamata, ka helisoida taisnlinijainās veidules gala punkta 0_o kustiba vertikalā virzienā, viena veidules $0 - 0_o$ apgrieziena laikā ap asi l, līdzinas vītes linijas m kāpei h, jo visi veidules $0 - 0_o$ punkti veido zinamas vītes linijas, kam viena un tā pati kāpe. Gala punkta 0_o vītes linija, saprotams, pārvēršas taisnē, kas saplūst ar asi l. Uz aizrādito pamatojoties, greiza helisoida veiduļu vertikalās projekcijas konstruejamas šādi.

Pieņemsim, ka vītes liniju m konstruejot, mēs atzīmejām sešpadsmit dažadus punkta 0 stāvokļus $0, 1, 2 \ldots 16$. Noteikuši veidules $0 - 0_o$ sākuma stāvokļa vertikalo projekciju $0_2 - 0_{o2}$, mēs uz l_2 no punkta 0_{o2} nospraužam nogriezni $0_{o2} - XVI_2 = h$, sadalam šo nogriezni sešpadsmit vienlīdzigās daļās un iegūtos iedaļu galus $I_2, II_2, III_2 \ldots XVI_2$ savienojam ar līknes m_2 attiecigiem punktiem $0_2, 1_2, 2_2 \ldots 16_2$, dabujot greiza helisoida veiduļu vertikalās projekcijas.

Rasejumā aizrādita viena greiza helisoida daļa (puse), pie kam lielakas uzskatamibas dēļ iekšejā, redzamā virsa ieklāta ar atsevišķiem punktiem.

Ja veidules pagarinatu otrā pusē no l, tad dabutu greiza helisoida otro pusi.

226 §. Trijstūraina vīte.

Ja greiza helisoida virsa krustojas ar vienasigu velteni, tad tādā kārtā dabujamo virsu lieto trijstūraino vīti profilejot.

299 ras. aizrāditas tādas vītes projekcijas. Aplūkojamo virsu dabujam, trijstūrim ABC kustoties telpā tā, ka viņa plakne visu laiku iet caur vertikalo asi l, bet virsotnes A, B un C slīd pa vītes linijām, kuŗām vienlīdzigas kāpes h. Pie tam virsotņu B un C vītes linijas ir vienlīdzigas, kas atstāj viena no otras atstatumā h, bet virsotnes A vītes linijai ir cits radiuss. Virsas, ko veido kustedamās malas AB un AC, ir greiza helisoida virsas, kas ierobežo vīti.

Ja konstruesim greiza helisoida veidulu horicontalos pēdu punktus un iegūtos punktus savienosim ar slaideno līkni, tad dabujam tā saucamo Archimeda spirali. Šās līknes punkti atstāj no centra l_1 atstatumos, kas ir proporcionali attiecigo radiusu vektoru griešanās leņķiem. Saprotams, ka greiza helisoida griezuma līkne ar katru plakni, līdzteci H, tapat ir Archimeda spirale. Tapēc ari 299 ras. vītes augšejā apveida horicontalā projekcija ir Archimeda spirales daļa.

227 §. Greizs, gredzenveidigs helisoids.

Greizo, gredzenveidigo helisoidu (300 ras.) iegūstam, taisnlinijainai veidulei $0-0_0$ kustoties telpā tā, ka viens gals 0 slīd pa vītes liniju m, pie kam atsevišķie veidules stāvokļi pieskaras vienasigam ar vītes liniju m veltenim, kuŗa radiuss ir r, — un bez tam veidules $0-0_0$ atsevišķie stāvokļi ir līdzteči taisnā vadoša aploces smaiļa veidulēm, kuŗa virsotne L guļ uz vītes linijas ass l, bet pamataploces radiuss r līdzinas velteņa pamataploces radiusam.

Patvaļigas veidules $2-\mathrm{II}$ projekcijas noteicamas sekošā veidā. Caur punktu 2_1, kas guļ uz vītes linijas m horicontalās projekcijas m_1, velkam $2_1-\mathrm{II}_1$, tangentiali pret aploces velteņa horicontalo projekciju. Pēc tam caur L_1 velkam $L_1-2_1' \parallel \mathrm{II}_1-2_1$, dabujot tā vadoša smaiļa veidules $L-2'$, kas ir līdztece meklejamai helisoida veidulei, horicontalo projekciju. Noteikuši pēc $2'_1-L_1$ attiecigo vertikalo projekciju $2'_2-L_2$, mēs caur projekciju 2_2, kas guļ uz m_2, velkam $2_2-\mathrm{II}_2 \parallel 2'_2-L_2$, un uz projekcijas $2_2-\mathrm{II}_2$ pēc II_1 atrodam II_2. Taisne $2_2-\mathrm{II}_2$ ir meklejamās veidules $2-\mathrm{II}$ vertikalā projekcija.

Līdzigā kartā noteicamas ari pārejās helisoida veidules.

Ģeometriska vieta, pa kuŗu helisoida veidules pieskaras taisnam aploces veltenim, ir zinama vītes līkne m', kuŗai tāda pati kāpe h, ka dotai vītes linijai m.

Šās vītes linijas radiusu r un viena viņas punkta, piemēram 0_0, vaj II projekcijas zinot, nav gŗūti konstruet vertikalo projekciju $m'_2 = 0_{o_2} - II_2 - XVI_2$. Savienojot atsevišķus līknes m'_2 punktus ar attiecigiem līknes m_2 punktiem, dabujam greiza gredzenveidiga helisoida atsevišķo veiduļu vertikalās projekcijas. Šo veiduļu horicontalās projekcijas, saprotams, pieskaras aplocei ar radiusu r, un iet caur attiecigo, uz līknēm m un m' guļošo punktu horicontalām projekcijām.

300 rasejumā ir aizrādita greiza, gredzenveidiga helisoida apakšejā puse, kas sniedzas līdz pieskaršanās līknei $m' = 0_0 - II - XVI$ ar vienasigo velteni. Ja veidules pagaŗinat līknes m' otrā pusē, tad iegūsim aplūkojamās virsas otru pusi (daļu).

301 rasejumā aizrādits tāds divpusigs greizs, gredzenveidigs helisoids, pie kam veidules ir pagaŗinatas vienlīdzigos atstatumos otrā pusē no pieskaršanās punktiem ar velteni. (Pieskaršanās līkne ar velteni rasejumā nav aizrādita). Saprotams, ka pie tam veidules $0 - 0'$ gals $0'$ telpā veido vītes liniju m_I, kas vienlīdziga vītes linijai m, bet tikai pabīdita vertikalā virzienā.

Attēloto virsu var ari iedomaties iegūtu, taisnlinijainai veidulei slīdot pa divām vienlīdzigām, vienašigām vītes linijām m un m_I, kuŗām ir zinams vertikalais atstatums, pie kam veidules visu laiku pieskaras vienasigam taisnam aploces veltenim.

Griešanās virsas.

XIV nodaļa. Pamatjēdzieni.

228 §. Atsevišķie griešanās virsas elementi.

Kā 157 § aizrādits, griešanās virsa rodas, patvaļigai veidulei ABCDEF griežoties ap nekustamu asi *o* (302 ras.). Saprotams, ka attēloto griešanās virsu dabujam, uz attēlotās virsas guļošai patvaļigai līknei griežoties ap to pašu asi *o*.

Lai griešanās virsu varetu ērtaki attēlot, tad parasti par veiduli tiek pieņemta līkne, kas rodas, aplūkojamai virsai krustojoties ar plakni, kuŗa iet caur griešanās asi *o*. Tā iegūto griezumu sauc par meridianalo griezumu, vaj vienkārši par meridianu. Acim redzot, visi meridianalie griezumi ir vienlīdzigi.

Ja griešanās ass stateniska pret H, tad līkni, ko dabujam griezumā ar plakni, kas iet caur griešanās asi, līdztekus V, sauc par galveno meridianalo griezumu, jeb par galveno meridianu.

Acim redzot, aplūkojamās virsas vertikalās projekcijas redzamibas apveids ir galvena meridiana vertikalā projekcija.

Galvenā meridiana plakne dala griešanās virsu divās daļās: priekšejā, kas tuvaka aplūkotajam un pakaļejā, kas tālaki aplūkotajam. Visi punkti, guļošie uz virsas priekšejās daļas, vertikalajā projekcijā redzami, bet visi punkti, guļošie uz virsas pakaļejās daļas, tanī pašā projekcijā nav redzami.

Katra pret griešanās asi stateniska plakne krusto griešanās virsu pa zinamo platuma aploci. Ja dotās virsas griešanās ass stateniska pret H, tad platuma aploces projecejas uz H dabiskā lielumā, bet viņu vertikalās projekcijas ir līdzteces asij OX, un viņu lielumi līdzinas attiecigo platuma aploču caurmēriem.

Kautkādas platuma aploces horicontalā projekcija redzama, ja attiecigos horicontali projecejošos starus neaiztur pati griešanās virsa.

Ja aplūkosim 302 rasejumā attēloto griešanās virsu, tad nav gŗūti novērot, ka uz veidules daļas FE guļošo punktu platuma aploces horicontalajā projekcijā redzamas, bet visu pārejo punktu platuma aploces horicontalajā projekcijā nav redzamas, jo attiecigos horicontali projecejošos starus aiztur līknes EF veidotā virsa. Tā, piemēram, punkta D horicontali projecejošo staru aiztur līkne EF punktā G, kas redzams no tā, ka šā stara vertikalā projekcija krustojas ar vertikalo projekciju E_2F_2 punktā G_2.

Vislielako, nepārtrauktas, attiecibā uz pieskari, līknes ABCDEF platuma aploci sauc par ekvatoru, jeb ekvatorialo griezumu; bet griezeju plakni sauc par ekvatora plakni.

Salīdzinajot ekvatoru ar platuma aplocēm, kas guļ vienā, vaj otrā pusē no ekvatora plaknes, nav grūti novērot, ka ekvatoram ir vislielakais griešanās radiuss. Pieskare pret patvaļigu meridianu punktā, kurā meridians krusto ekvatoru, ir līdztece griešanās asij.

Uz aizrādito pamatojoties, dabujam, ka 302 rasejumā ekvators ir punkta C platuma aploce, bet punkta E platuma aploce nav ekvators, lai gan punkta E griešanās radiuss ir lielaks, nekā punkta C griešanās radiuss; jo punkts E attiecibā uz pieskari nav veidules ABCDEF nepārtraukts punkts, bet stūrpunkts (152 §) kam divas pieskares, kas nav līdzteces asij *o*. Punkta E platuma aplocei, kurai piemīt aizrāditās īpašibas, sauc par griešanās virsas apaļo šķautni.

Platuma aploci, kas pieder veidules ABCDEF nepārtrauktai, attiecibā uz pieskari, daļai, kurai, salīdzinot ar blakus guļošām platuma aplocēm, ir vismazakais griešanās radiuss, sauc par kaklu. Pieskare punktā, kurā veidule ABCDEF krusto kaklu, ir līdztece asij *o*. 302 rasejumā punkta B platuma aploce, acim redzot, ir aplūkojamās griešanās virsas kakls. Bet punkta D platuma aploce nav kakls, jo punkts D ir stūrpunkts. Punkta D platuma aploci sauc par iežmaugumu.

Ja kaut kāds veidules punkts F guļ uz pašas griešanās ass, tad ša punkta platuma aploce pārvēršas punktā. Tādu punktu sauc par griešanās virsas pārtraukuma punktu.

229 §. Griešanās virsas veidi.

Atkarigi no veiduļu veida, griešanās virsu apveidi var būt dažādi.

Ja veidule ir aploce, tad šo aploci ap viņas patvaļigu caurmēru griezdami, dabujam lodi.

Plakne, ejoša caur lodes centru, līdztekus H, krusto lodi pa tā saucamo ekvatoru. Ekvatora plakne dala lodi divās daļās: augšejā un apakšejā puslodē.

Ikkatra plakne, līdztece ekvatora plakni, krusto lodes virsu pa zinamo platuma aploci.

Plakne, ejoša caur lodes centru, stateniski pret H un līdztekus V, krusto lodi pa galveno meridianu. Galvenā meridiana plakne dala lodi divās daļās: priekšejā un pakaļejā puslodē. Ikkatra cita plakne, ejoša caur lodes centru, stateniski pret H, krusto lodi pa zinamo meridianu.

Acim redzot, lodes horicontalais apveids ir ekvatora horicontalā projekcija, bet lodes vertikalais apveids ir galvenā meridiana vertikalā projekcija.

Horicontalajā projekcijā redzami visi punkti, kas guļ uz augšejās puslodes virsas, bet vertikalajā projekcijā redzami visi punkti, kas guļ uz priekšejās puslodes virsas.

Ja aploce negriežas ap savu caurmēru AB, bet ap kautkādu chordu CD (303 ras.), tad griešanās virsai ir vārpstas veids.

Ja aploce ABCD griežas ap asi o, kas gan guļ viņas plaknē, bet ārpus aploces, tad rodas apaļa gredzenveidiga virsa, vaj tā saucamais torus (304 ras.).

Ja veidule ir elipse ACBD (305 ras.), tad elipsei ap vienu no viņas galvenām asīm, piemēram, AB griežoties, rodas tā saucamais griešanās elipsoids. Katrs meridianalais griezums AC_1 BD_1 ir tāda pati elipse, kā veidojoša elipse.

Hiperbolei ap viņas patieso asi o griežoties, iegūstam divpusigu griešanās hiperboloidu (306 ras.).

Bet hiperbolei ap viņas šķietamo asi griežoties, iegūstam vienpusigu griešanās hiperboloidu. Ar šo virsu mēs jau iepazinamies 219 līdz 223 §§ (292—296 ras.).

Atsevišķos gadijumos līkā veidule var pārvērsties taisnā linijā. Ja pie tam taisne krusto griešanās asi, tad iegūstam taisnā aploces smaiļa virsu.

Ja taisne līdztece griešanās asij, tad iegūstam taisnā aploces velteņa virsu.

Ja taisne šķērsojas ar griešanās asi, tad iegūstam jau mineta vienpusigā griešanās hiperboloida virsu.

Beidzot, ja taisne griežas pret griešanās asi stateniskā plaknē, tad, vaj nu taisne krusto, vaj nekrusto griešanās asi, — mēs iegūstam plakni.

230 §. Patvaļiga punkta un meridiana projekcijas.

Pieņemsim, ka ir dota patvaļiga punkta 1', guļoša uz dotās griešanās virsas, horicontalā projekcija $1'_1$; jaatrod attiecigā vertikalā projekcija $1'_2$ (302 ras.).

Punkts 1' guļ uz zinamas griešanās virsas platuma aploces, kuŗas radiuss līdzinas $o_1 - 1'_1$. Bez tam punkts 1' guļ zinamā meridianalā plaknē, kas stateniska pret H. Šās meridianalās plaknes horicontalā pēdu linija $s = o_1 1'_1$. Pagriezisim punkta 1' meridianalo plakni, griežot viņu ap asi o, — līdztekus stāvoklī ar V. Pie tam punktā 1' horicontalā projekcija, virzoties pa aploces loku, kuŗas radiuss ir $o_1 - 1'_1$, ieņem stāvokli 1_1, pie kam $1_1 - o_1 \parallel OX$. Velkot caur 1_1 stateni pret OX, mēs iegūsim punkta 1' horicontali projecejoša stara vertikalās projekcijas savienoto stāvokli. Šā stateņa krustošanās punkti ar galvenā meridiana vertikalo projekciju, t. i. ar griešanās virsas vertikalās projekcijas apveidu, noteic mūsu gadijumā četru platuma aploču vertikalās projekcijas $1_2, 2_2, 3_2, 4_2$, kuŗu radiusi vienlīdzigi. Velkot pēc tam no $1'_1$ stateni pret OX, līdz krustošanai ar šām platuma aplocēm, iegūsim četru punktu vertikalās projekcijas $1'_2, 2'_2, 3'_2, 4'_2$, kuŗu horicontalās projekcijas sakrīt ar $1'_1$.

Ja ir dota vertikalā projekcija $1'_2$ un janoteic attieciga horicontalā projekcija, tad tam nolūkam caur $1'_2$ velkam līdzteci asij OX, līdz krustošanai ar vertikalo apveidu punktā 1_2. Pēc 1_2 atrodam 1_1 un pēc tam ar radiusu $o_1 - 1_1$ velkam punkta $1'$ platuma aploces horicontalo projekciju. No $1'_2$ pret OX vilktais statenis krusto vilkto aploci divos punktos $1'_1$ un $1''_1$, kuŗu vertikalās projekcijas saplūst.

No izskaidrotā seko, ka vispārejā gadijumā pēc vienas dotas projekcijas nevar pilnigi noteikt uz griešanās virsas guļoša oriģinalā punkta attiecigo otro projekciju.

Uz s vēl vairakus punktus pieņemot un viņu attiecigās vertikalās projekcijas noteicot, iegūstam patvaļiga meridianalā griezuma vertikalo projekciju. Pie tam janoteic meridianalā griezuma raksturigako punktu vertikalās projekcijas, kā, piemēram, A'_2, B'_2, C'_2, D'_2 un E'_2.

XV nodaļa. Tangentialās plaknes.

231 §. Vispārejs tangentialās plaknes noteikšanas paņēmiens.

Pieņemsim, ka ir dota patvaļiga griešanās virsa, kuŗas ass ir o, bet galvenais meridians ir līkne ABCD (307 ras.).

Caur patvaļigu uz griešanās virsas guļošo punktu M' pret doto virsu javelk tangentialā plakne.

Kā zinams (158 §), tangentialā plakne zinamā punktā noteicama ar pieskarēm, kas vilktas pret divām uz dotās virsas guļošām un caur doto punktu ejošām patvaļigām līknēm.

Par tādām līknēm aplūkojamā gadijumā var pieņemt meridianu $AM'B'CD'$ un platuma aploci $MM'M_1$, kas iet caur doto punktu M'. Pret līknēm $AM'B'CD'$ un $MM'M_1$ punktā M' pieskares t' un t'_1 vilkdami, iegūstam meklejamo, ar krustodamām taisnēm t' un t'_1 noteikto tangentialo plakni P.

Pieskare t', kas guļ aizrādītā meridianalā plaknē, krusto griešanās asi o zinamā punktā L. Ja tagad meridianu $AM'B'CD'$ savienosim ar galveno meridianu ABCD, tad punkts M', virzidamies pa savu platuma aploci, ieņems jauno stāvokli M. Pieskare t', kas iet caur nekustamo, uz griešanās ass o guļošo punktu L, — visu laiku atrodas meridiana AM'B'CD'A plaknē un beidzot ieņem jauno stāvokli LM, pieskardamās galvenam meridianam ABCD punktā M.

Meridians AM'B'CD' un platuma aploce $MM'M_1$ krustojas pa radiusu r, kas iet caur punktu M', stateniski pret asi o. Pieskare t'_I, kā redzams, stateniska šim radiusam, tapēc pieskare t_I' ari stateniska meridiana AM'B'CD' plaknei. Tas nozīmē, ka ari tangentialā plakne P, ejoša caur t'_I, ir stateniska pret meridiana AM'B'CD' plakni.

Ja punkts M' ieņem stāvokli M, tad pieskares t'_I jaunais stāvoklis (rasejumā neaizrāditais) iet caur punktu M, pieskarus šā punkta platuma aplocei, pie tam pieskares t'_I jaunajam stāvoklim jabūt stateniskam pret galvenā meridiana ABCD plakni, t. i. jaunā pieskare t_I' iet caur punktu M, stateniski pret rasejuma plakni.

Pieskare t', aizrāditā veidā telpā virzidamās, veido taisnā aploces smaiļa virsu, kas aptver doto griešanās virsu pa punkta M platuma aploci. Katra, pret šo aptverošo smaili tangentialā plakne pieskaras viņam pa zinamo taisnlinijaino veiduli, kas pieskaras ari griešanai virsai zinamā punktā, guļošā uz punkta M platuma aploces.

Ja caur patvaļigu punktu B', kas guļ uz dotās griešanās virsas ekvatora BB'DD', javelk tangentialā plakne, tad viņa noteicama līdzigā kārtā. Pie tam pieskare t_o', vilktā meridiana AB'CD' punktā B', acim redzot, ir līdztece griešanās asij o, t. i. pieskares t_o' krustošanās punkts ar asi o atrodas bezgalibā. Tapēc aptverošā smailiskā virsa pārvēršas taisnā aploces velteņa aptverošā virsā, kas griešanās virsai pieskaras pa ekvatoru.

Ja punktā M' velkam stateni pret tangentialo plakni P, tad dabujam virsas normali aplūkojamā punktā. Šī normale atrazdamās meridiana AM'B'CD' plaknē, krustojas ar asi o zinamā punktā E. Saprotams, ka ari visas pārejās normales, kas iet caur patvaļigiem platuma aploces $MM'M_1$ punktiem, stateniski pret attiecigām tangentialām plaknēm, krustojas ar asi o tanī pašā punktā E.

232 §. Tangentialā plakne dotā punktā.

Uz iepriekšejo pantu pamatodamies, nav grūti techniskā rasejumā konstruet tangentialo plakni punktā M', kas guļ uz griešanās virsas, kuŗas ass o stateniska pret H (308 ras.).

Meklejamās pieskares t_I' horicontalā projekcija $t_I{'}_1$ iet caur M'_1 tangentiali pret punkta M' platuma aploces horicontalo projekciju, bet vertikalā projekcija $t_I{'}_2$ iet caur M'_2, līdztekus OX.

Vilksim punktā M' pret ša punkta meridianu pieskari t'. Šās pieskares horicontalā projekcija t_1' iet caur o_1 un M_1'. Lai noteiktu attiecigo vertikalo projekciju t_2', mēs iepriekš noteicam punktu M, kas guļ uz galvenā meridiana un uz kopejās platuma aploces ar punktu M'.

Caur punktu M velkam uz galvenā meridiana plaknes pret šo meridianu pieskari t, kuŗas vertikalā projekcija t_2 krusto o_2 punktā L_2. Saprotams, ka pieskares t un t' telpā krustojas kopejā punktā L uz ass o (231 §). Tapēc L_2 un M'_2 savienodami, dabujam meklejamās pieskares t' vertikalo projekciju t'_2.

Rasejumā bez tam aizrādita normale $M'E$, kas iet caur punktu M'. Horicontalā projekcija M'_1E_1 saprotams, saplūst ar M'_1L_1. Lai noteiktu attiecigo vertikalo projekciju, papriekšu konstruējam normali punktā M, guļošā uz galvenā meridiana. Šās normales vertikalā projekcija $M_2E_2 \perp M_2L_2$. Dabujot tā punktu E_2, un zinadami, ka caur punktu E iet ari punkta M' normale (231 §), mēs E_2 savienojam ar M_2'. Taisne E_2M_2 ir meklejamā vertikalā projekcija.

233 §. Tangentialā plakne pret lodi dotā punktā.

Ir dota lode ar centru F un radiusu r (309 ras.). Pieņemsim uz lodes virsas patvaļigu punktu M. Lai noteiktu punkta M stāvokli uz lodes virsas, vilksim caur M vienu platuma aploci, kuŗas centrs ir F_I, bet radiuss r_I. Savienojam punktu M ar lodes centru. Tad attiecigā radiusa projekcijas ir r_1 un r_2. Punktā M pret lodes virsu vilktā tangentialā plakne ir stateniska pret radiusu r, jo šis radiuss ir lodes virsas normale punktā M. Tapēc, lai noteiktu meklejamo tangentialo plakni, janoteic divas radiusam r stateniskas taisnes.

Kā šādas taisnes var pieņemt horicontalo (h) un vertikalo (v) pēdu līdzteci, kas guļ uz meklejamās tangentialās plaknes. Pēc 116 § noteikumiem $h_1 \perp r_1$ un $v_2 \perp r_2$; bez tam zinams, ka h_2 un $v_1 \parallel OX$. Tapēc taišņu h un v projekcijas ir pilnigi noteiktas, ar ko ir noteikta ari meklejamā tangentialā plakne.

234 §. Tangentialā plakne, ejoša caur doto ārejo punktu, kas pieskaras virsai punktā, guļošā uz platuma aploces.

Ir dota griešanās virsa (310 ras.), kuŗas ass o stateniska pret H. Uz virsas ir dota punkta M platuma aploce un patvaļigs ārejais punkts A.

Vilksim caur M_2 pret griešanās virsas apveida vertikalo projekciju pieskari, līdz krustošanai ar o_2, tad dabusim smaiļa virsotnes L projekciju L_2, šis smialis pieskaras dotai virsai pa punkta M platuma aploci. Horicontalā projekcija $L_1 = o_1$. Pēc tam caur punktu A velkam plakni $H' \parallel H$. Taisni, kas caur A_2 iet līdztekus OX, var uzlūkot kā jauno projekciju asi $O'X'$. Pieskari L_2M_2 līdz krustošanai ar $O'X'$ pagaŗinadami, iegūsim pieskares

LM horicontalā pēdu punkta, — attiecibā uz plakni H′, — vertikalo projekciju S_2.

Pēc tam atrodam S_1, un ar radiusu $o_1 S_1$ velkam aptverošā smaiļa horicontalās pēdu linijas s horicontalo projekciju s_1. Ja tagad no A_1 velkam pieskares $A_1 S_{I_1}$ un $A_1 S_{II_1}$ pret s_1, un S_{I_1} un S_{II_1} savienojam ar L_1, tad iegūstam divu taišņu pāru AS_I, LS_I un AS_{II}, LS_{II} horicontalās projekcijas, kas krustojas attiecigos punktos S_I un S_{II}. Šie divi taišņu pāri noteic divas tangentialās plaknes pret aptverošo smaili, kas smailim pieskaras pa viņa veidulēm LS_I un LS_{II}.

Pēdejās taisnes, kā aptverošā smaiļa veidules, pieskaras ari griešanās virsai punktos M' un M'', kas guļ uz punkta M platuma aploces. Šo punktu horicontalās projekcijas M'_1 un M''_1 nav grūti noteikt. Pēc M'_1 un M''_1 konstruejam vertikalās projekcijas M'_2 un M''_2.

Japiezīmē, ka pieskaršanās punktu M' un M'' noteikšanai var iztikt ari bez virsotnes L stāvokļa noteikšanas. Tapēc virsotni L var ari rasejumā neaizrādit.

235 §. Pieskaršanās līkne.

Ja nav aizrādita platuma aploce, uz kuŗas jaguļ pieskaršanās punktam, tad no dotā ārejā punkta A pret doto griešanās virsu var vilkt bezgali daudz tangentialo plakņu, kas visā kopibā veido doto griešanās virsu aptverošo smaili. Atsevišķus aptverošā smaiļa pieskaršanās līknei piederigus punktus var noteikt pēc 159 §, vaj ari pēc iepriekšejā panta.

Pēc beidzamā paņēmiena 311 rasejumā noteikti, piemēram, pieskaršanās punkti M' un M'', E' un E'', G' un G'' uz attiecigo punktu M, E un G platuma aplocēm, pie kam punkti G' un G'' pieder ekvatoram G.

Lai pilnigi noteiktu pieskaršanās līkni, jauzmeklē viņas visaugstakais (J') un viszemakais (K') punkts.

Ja griešanās asš $o \perp H$, tad visaugstakais un viszemakais punkts iegūstami uz griešanās virsas griezuma līknes ar horicontali projecejošo plakni, kas iet caur doto punktu A un griešanās asi o.

Griezuma līkne, acim redzot, ir zinamais, caur punktu A un griešanās asi o ejošais meridians. Šo meridianalo griezumu, kopā ar punktu A, nostādisim līdztekus V, pie tam meridianu griežot ap griešanās asi o. Ja to izdarisim, tad griešanās virsas vertikalais apveids (projekcija) ir griezuma meridiana patiesais lielums.

Atzīmesim punkta A pagriestā stāvokļa projekcijas ar A_{o_1} un A_{o_2} un vilksim no A_{o_2} pieskares pret griešanās virsas vertikalo apveidu. Pieskaršanās punkti J_2 un K_2 noteic meklejamo punktu J' un K' platuma aploces. Noteicot pēc tam horicontalās projekcijas J_1 un K_1, nav grūti pēc viņām uz taisnes $A_1 - o_1$ noteikt augstakā un zemakā punkta horicontalās projekcijas J'_1 un K'_1, pēc kuŗām, beidzot, noteicam J'_2 un K'_2.

Pieskares griezuma līknei augstakajā un zemakajā punktā ir horicontalās pēdu līdzteces. Tapēc viņu vertikalās projekcijas ir līdzteces asij OX, bet horicontalās projekcijas stateniskas pret $A_1J'_1$ un $A_1K'_1$, jo taisns lenķis, ko telpā veido taisne AJ' un horicontalā, caur punktu J' ejoša pēdu līdztece, projecejas uz plakni H nesagrozoties (115 §). To pašu, saprotams, var aizrādit attiecibā uz AK' un horicontalo, caur punktu K' ejošo pēdu līdzteci.

Ja griešanās ass *o* nav stateniska pret H, tad doto ķermeni attiecigi griežot, jeb projekciju plaknes mainot, asi *o* vienmēr var nostādit vēlamā stāvoklī.

Ja punktā A atrodas gaismas avots, tad konstruetā pieskaršanās līkne ir dotās virsas gaismas atdaloša līkne, kas atdala apgaismoto virsas daļu no neapgaismotās, jeb pašēnas.

236 §. Lodes tangentialās plaknes, ejošas caur doto ārejo punktu.

Pieņemsim, ka no punkta A pret lodi, kuŗas centrs ir F, javelk tangentialās plaknes (312 ras.).

Tangentialās plaknes visā kopibā veido smailisko virsu, kas aptver lodes virsu pa līkni, ko varam konstruet pēc iepriekšejā panta noteikumiem.

Pieskaršanās līkne šinī gadijumā ir aploce, kuŗas centrs (F_I) guļ uz taisnes AF. Šās aploces plakne stateniska pret taisni AF. Pieskaršanās aploces projekcijas uz H un V ir divas elipses, kuŗas var konstruet šādi.

Pret doto lodi no punkta A velkam divas tangentialās, horicontali projecejošas plaknes. Šo plakņu horicontalās pēdu linijas iet caur A_1, pieskaroties lodes horicontalai projekcijai. Šo pēdu liniju pieskaršanās punkti B_1 un C_1 noteic divu punktu B un C horicontalās projekcijas, kas guļ uz lodes ekvatora un pieder meklejamai pieskaršanās aplocei. Attiecigas vertikalās projekcijas B_2 un C_2 guļ uz lodes ekvatora vertikalās projekcijas, t. i. uz taisnes, kas iet caur F_2 līdztekus OX.

Punktu B un C, kas guļ uz lodes ekvatora, horicontalās projekcijas B_1 un C_1 atdala pieskaršanās līknes horicontalās projekcijas, t. i. elipses, redzamo no neredzamās daļas.

Pēc tam no punkta A pret lodi divas tangentialās, vertikali projecejošas plaknes vilkdami, mēs iegūstam divu punktu D un E projekcijas, kas pieder lodes galvenam meridianam un meklejamai pieskaršanās aplocei. Punktu D un E projekcijas noteicam analoģiskā kārtā, kā punktu B un C projekcijas, pie tam papriekšu noteicam D_2 un E_2, velkot no A_2 pieskares pret lodes vertikalo apveidu (projekciju).

Punkti D_2 un E_2 atdala pieskaršanās līknes vertikalās projekcijas, t. i. elipses, redzamo daļu no neredzamās.

Tā kā projekcijas B_2C_2 un D_1E_1 ir līdzteces asij OX, tad taisne BC ir horicontalā, bet taisne DE ir vertikalā pēdu līdztece, kas guļ uz meklejamās pieskaršanās aploces plaknes.

Savienojot punktu D, — griežot viņu ap horicontalo pēdu līdzteci BC, — ar plakni, ejošo caur BC, līdztekus H, iegūstam punkta D savienoto stāvokli D_0. Pēc tam caur punktiem B_1, C_1 un D_0 aploci velkot, iegūstam pieskaršanās aploces savienoto stāvokli, dabujot tā viņas centra savienoto stāvokli F_{I_0}. Vienu affini radniecisko punktu pāri D_0 un D_1 un affinitates asi B_1C_1 zinadami, varam atsevišķiem aploces $B_1C_1D_0$ punktiem konstruet attiecigus affini radnieciskas elipses punktus, kā ari pieskares šajos punktos pret elipsi.

Šās elipses galvenās asis noteicamas ļoti vienkārši. Tam nolūkam papriekšu pēc F_{I_0} uz affinitates pamata atrodam elipses centru F_{I_1}. Elipses lielā ass 1_1-2_1, kas iet caur F_{I_1} un ir stateniska pret $A_1F_{I_1}$, līdzinas konstruetās affini radnieciskās aploces $B_1C_1D_0$ caurmēram 1_0-2_0. Bet elipses mazā ass 3_1-4_1 atbilst tam affini radnieciskas aploces caurmēram 3_0-4_0, kas ir stateniski pret 1_0-2_0.

Tādā kārtā konstruejam elipses lielo un mazo asi, pēc kam nav grūti izvilkt visu elipsi (172 §, 231 ras.).

Horicontalajā projekcijā redzams punkts D, jo viņš guļ uz augšejās puslodes, kas atrodas virs ekvatora, jo D_2 atrodas virs ekvatora vertikalās projekcijas. Bet punkts E, kas guļ uz apakšejās puslodes, t. i. zem ekvatora plaknes, saprotams, horicontalajā projekcijā nav redzams. Tā tad pieskaršanās aploces daļa BDC horicontalajā projekcijā redzama, bet daļa BEC šinī pat projekcijā neredzama.

Pieskaršanās aploces vertikalā projekcija noteicama analoģiskā kārtā. Tam nolūkam atrodam punkta B savienoto stāvokli B_0, savienojot pie tam punktu B ar plakni, līdzteci V, kas iet caur pieskaršanās aploces vertikalo pēdu līdzteci DE, ap kuŗu notiek aizrādītā griešana. Caur D_2, E_2 un B_0 velkam aploci, kas noteic pieskaršanās aploces savienoto stāvokli, dabujot tā savienotajā stāvoklī aploces centru F_{II_0}. Pēc tam uz affinitates pamata, kuŗas ass ir D_2E_2, bet viens attiecigo punktu pāris ir B_0 un B_2, atrodam F_{I_2} un caurmēriem 5_0-6_0 un 7_0-8_0 konstruejam lielo (5_2-6_2) un mazo (7_2-8_2) elipses asi, kuŗas noteic pieskaršanās aploces vertikalo projekciju elipses veidā.

Punkts B guļ uz priekšejās puslodes, t. i. galvenā meridiana plaknes priekšā, jo B_1 atrodas zem galvenā meridiana horicontalās projekcijas, tapēc punkts B vertikalajā projekcijā redzams. Bet punkts C, kas guļ uz pakaļejās puslodes, t. i. aiz galvenā meridiana plaknes, vertikalajā projekcijā nav redzams. Tapēc pieskaršanās aploces daļa DBE vertikalajā projekcijā redzama, bet daļa DCE tajā pat projekcijā nav redzama.

Ja punktā A atrodas gaismas avots, tad konstruetā pieskaršanās līkne atdala apgaismoto lodes daļu no tās daļas, kas atrodas pašēnā. Šinī gadijumā pieskaršanās aploci sauc par l o d e s g a i s m a s a t d a l o š o a p l o c i.

237 §. Griešanās virsas tangentialās plaknes, līdzteces dotam virzienam.

Pieņemsim, ka ir dota patvaļiga griešanās virsa, kuŗas ass o stateniska pret H (313 ras.). Pret doto virsu, līdztekus dotam virzienam l, javelk tangentialās plaknes, kas dotai virsai pieskaras punktos (A′ un A″), guļošos uz dotā punkta A platuma aploces.

Lai konstruetu punktus A′ un A″, caur A_2 velkam pieskari pret griešanās virsas vertikalo apveidu un noteicam punktu L_2, kur šī pieskare krustojas ar o_2. Atrastais punkts ir smaiļa virsotnes L vertikalā projekcija, šīs smailis aptver doto griešanās virsu pa punkta A platuma aploci. Ikkatra plakne, kas pieskaras šim aptverošam smailim, pieskaras ari griešanās virsai zinamā punktā, guļošā uz punkta A platuma aploces.

Noteikuši aptverošā smaiļa horicontalo pēdu liniju s, kā ari caur virsotni L, dotam virzienam l līdztekus vilktās taisnes a horicontalo pēdu punktu S, velkam no S pieskares pret pēdu liniju s. Pieskaršanās punkti 1 un 2 noteic aptverošā smaiļa veidules L – 1 un L – 2, pa kuŗām virzienam l līdzteces tangentialās plaknes pieskaras kā aptverošam smailim, tā ari dotai griešanās virsai Punkti A'_1 un A''_1, kuŗos L_1 – 1 un L_1 – 2 krusto punkta A platuma aploces horicontalo projekciju, ir meklejamo pieskaršanās punktu horicontalās projekcijas. Punktus A'_1 un A''_1 zinot, nav gŗūti uz punkta A platuma aploces vertikalās projekcijas konstruet attiecigās vertikalās projekcijas A'_2 un A''_2.

Konstruejot pēc ta paša paņēmiena pieskaršanās punktus uz punkta B platuma aploces, kas atrodas ekvatora tuvumā, izrādas, ka punktā B_2 pret griešanās virsas vertikalo apveidu vilktā pieskare nekrusto asi o_2 rasejuma robežās. Aizrādisim, kā rīkoties tādā gadijumā.

Tam nolūkam patvaļigi uz o_2 pieņemto punktu, piemēram, L_2 pieņemam par palīgsmaiļa virsotnes vertikalo projekciju, kuŗa veidulēm ir tāds pat slīpums pret H, kā punktā B pret doto griešanās virsu vilktai pieskarei. Tapēc palīgsmaiļa vertikalo apveidu ierobežo taisne b_2, kas līdztece punktā B_2 pret griešanās virsas vertikalo apveidu vilktai pieskarei. Noteikuši palīgsmaiļa horicontalo pēdu liniju s_I, mēs no punkta S pret pēdu liniju s_I velkam pieskares S – 3 un S – 4 un pēc tam pagaŗinam L_1 – 3 un L_1 – 4 līdz krustošanai ar punkta B platuma aploces horicontalo projekciju punktos B'_1 un B''_1. Pēc B'_1 un B''_1 nav gŗūti uz punkta B platuma aploces vertikalās projekcijas uzmeklet projekcijas B'_2 un B''_2. Atrastie punkti ir meklejamo pieskaršanās punktu B′ un B″ projekcijas.

T a n g e n t i a l o p l a k ņ u p i e s k a r š a n ā s p u n k t u s a r g r i e š a n ā s v i r s u v a r n o t e i k t a r i p ē c s e k o š a p a ņ ē m i e n a.

Pieņemsim, ka vēlamies noteikt pieskaršanās punktus (C' un C''), guļošos uz patvaļiga griešanās virsas meridiana, kuŗas horicontalā pēdu linija ir s_{II}. Tādā gadijumā velkam veltenisko palīgvirsu, kas aptver doto griešanās virsu pa zinamo meridianu, kuŗa horicontalā projekcija ir s_{II}. Aptverošās velteniskās virsas veidules, saprotams, ir stateniskas pret doto meridianalo plakni. Ja mēs tagad pret veltenisko palīgvirsu vilksim tangentialās plaknes, līdzteces dotam virzienam l, tad šās tangentialās plaknes vienā un taī pašā laikā ari pieskarsies griešanās virsai divos punktos, kas guļ uz aplūkojamās griešanās virsas dotā meridiana.

Lai techniskā rasejumā atrastu meklejamos pieskaršanās punktus, tad telpā izpildamo konstrukciju principu noskaidrojuši, mēs rīkojamies šādi. Caur patvaļigi uz taisnes l pieņemto punktu 5 (punktu 5 var ari pieņemt uz patvaļigas taisnes, līdzteces ar l), velkam taisni d, līdztekus aptverošās velteniskās palīgvirsas veidulēm.

Taisnes d horicontalā projekcija d_1 ir stateniska pret s_{II}, bet vertikalā projekcija d_2 — līdztece asij OX. Taisnes d krustošanās punkts ar doto meridianalo plakni ir K, pie kam $K_1 = d_1 \times s_{II}$, bet K_2 guļ uz d_2. Pēc tam atrodam punktu J, kuŗā taisne l krusto to pašu meridianalo plakni, pie kam $J_1 = l_1 \times s_{II}$, bet J_2 guļ uz l_2. Atrastos punktus K un J savienodami, dabujam palīgplaknes krustošanās liniju ar meridianalo plakni s_{II}. Šī palīgplakne pēc konstrukcijas ir līdztece aptverošās velteniskās palīgvirsas veidulēm un līdztece dotam virzienam l.

Lai tagad noteiktu tangentialās plaknes pret palīgvelteņa virsu, kas līdzteces virzienam l, vajadzetu pret meridianalo griezumu vilkt taisnei JK līdzteku pieskares. Šo pieskaru noteikšanai meridianalo plakni s_{II}, kopā ar taisni KJ, kas guļ uz šās plaknes, savienojam ar galveno meridianalo plaknī, griežot doto meridianu ap asi o. Pēc griešanas meridiana vertikalā projekcija saplūst ar griešanās virsas vertikalo apveidu, bet taisne KJ ieņem savienoto stāvokli $K_0 J_0$, kuŗas projekcijas ir $K_{o_1} J_{o_1} \parallel OX$ un $K_{o_2} J_{o_2}$.

Velkot tagad pret griešanās virsas vertikalo apveidu pieskares, kas līdzteces $K_{o_2} J_{o_2}$, iegūsim meklejamo pieskaršanās punktu C' un C'' vertikalo projekciju savienotos stāvokļus C'_{o_2} un C''_{o_2} un pēc tam uz taisnes, kas iet caur o_1, līdztekus OX, atrodam C'_{o_1} un C''_{o_1}. Pēc tam griežot punktus C'_{o_1} un C''_{o_1} pretejā virzienā ap centru o_1, atrodam uz s_{II} projekcijas C'_1 un C''_1, un pēc viņām konstruejam C'_2 un C''_2. Tādā kārtā dabujam meklejamo punktu projekcijas.

Pēc aizrāditiem paņēmieniem var noteikt veselu rindu punktu, kuŗos virzienam l līdzteces tangentialās plaknes pieskaras dotai griešanās virsai. Šos punktus ar slaideno līkni savienodami, iegūstam aptverošā velteņa pieskaršanās līkni ar doto griešanās virsu. Ša velteņa veidules ir līdzteces dotam virzienam l.

Atsevišķā gadijumā, ja dotais virziens l saplūst ar līdzteku gaismas (saules) staru virzienu, konstruetā pieskaršanās līkne ir dotās virsas gaismas atdaloša līkne.

313 rasejumā bez tam aizrāditi raksturigakie pieskaršanās līknes punkti D un E, guļošie uz griešanās virsas ekvatora. Šo punktu horicontalās projekcijas tieši noteicamas rasejumā kā punkti, kuŗos pieskares, vilktās līdztekus l_1, pieskaras dotās griešanās virsas horicontalam apveidam.

Punkti G un F, guļošie uz galvenā meridiana, noteicami pēc viņu vertikalām projekcijām G_2 un F_2, kuŗos pieskares, līdzteces l_2, pieskaras griešanās virsas vertikalam apveidam. Horicontalās projekcijas G_1 un F_1 guļ uz taisnes, kas caur o_1 iet līdztekus OX.

Visaugstakais (P) un viszemakais (R) pieskaršanās līknes punkts noteicams tamlīdzigi, kā mēs to konstruejām 235 §, 311 rasejumā.

Visaugstakais un viszemakais punkts, acim redzot, guļ tanī meridianalā plaknē, kas iet līdztekus virzienam l. Savienosim šo meridianalo plakni, kopā ar patvaļigu taisni a, kas līdztece l un guļ šinī plaknē, — ar galvenā meridiana plakni. Taisnes a horicontalā pēdu punkta S savienotais stāvoklis ir S_0. Pēc S_0 atrodam S_{0_2} un pēc tam $a_{0_2} = L_2S_{0_2}$.

Velkot tagad pieskares pret griešanās virsas vertikalo apveidu, līdztekus ar $L_2S_{0_2}$, pieskaršanās punktos mēs dabujam meklejamo punktu P un R platuma aploču vertikalās projekcijas. Punktu P un R projekcijas dabujam, aplūkojamo meridianalo plakni apgriestā virzienā ap asi o griežot, un nostādot viņu savā pirmatnejā stāvoklī. Pie tam P_1 un R_1 guļ uz taisnes, ejošas caur o_1 līdztekus l_1. Pēc P_1 un R_1 nav gŗūti uz attiecigo platuma aploču vertikalām projekcijām noteikt P_2 un R_2.

XVI nodaļa. Plakņu un taišņu krustošanās ar griešanās virsām.

238 §. Horicontali projecejošas plaknes krustošanās ar griešanās virsu.

Pieņemsim, ka janoteic patvaļigas horicontali projecejošas plaknes krustošanās ar doto griešanās virsu, kuŗas ass $o \perp H$, pie kam griezejās plaknes horicontalā pēdu linija ir s (314 ras).

Meklejamai griezuma līknei piederošie punkti A un B, kas pie tam guļ uz galvenā meridiana, noteicami pēc viņu sakrītošām horicontalām projekcijām $A_1 = B_1$, kuŗas dabujam pēdu linijas s krustošanās punktā ar galvenā meridiana horicontalo projekciju. Pēc $A_1 = B_1$ atrodam A_2 un B_2 uz galvenā meridiana vertikalās projekcijas.

Punktus C un D, kas guļ uz ekvatora, noteic pēc viņu horicontalām projekcijām C_1 un D_1, kuŗos s krusto ekvatora horicontalo projekciju. Pēc C_1 un D_1 nav gŗūti uz ekvatora vertikalās projekcijas noteikt C_2 un D_2.

Patvaļigi, griezuma līknei piederigie punkti noteicami papriekšu pēc viņu horicontalām projekcijām, kuŗās pēdu linija s krusto patvaļigas platuma aploces horicontalo projekciju. Aplūkosim, piemēram, aploci, kuŗas radiuss ir $o_1E_1 = o_1F_1$. Šaī aplocē saplūst divu dažadu punktu E un F platuma aploču horicontalās projekcijas. Noteikuši pēdu linijas s krustošanās punktus ar aizrādito aploci, mēs iegūstam horicontalās projekcijas $E_{I_1} = F_{I_1}$ un $E_{II_1} = F_{II_1}$, pie kam punkti E_I un E_{II} guļ uz punkta E platuma aploces, bet F_I un F_{II} guļ uz punkta F platuma aploces. Pēc šo punktu horicontalām projekcijām nav gŗūti konstruet viņu vertikalās projekcijas uz attiecigām platuma aploču vertikalām projekcijām.

Lai noteiktu visaugstako (G_I) un viszemako (J_I) griezuma līknes punktu, mēs noteicam punktus G un J, kuŗu platuma aploces pieskaras griezuma līknei un griezejai plaknei. Šo platuma aploču sakrītošas horicontalās projekcijas pieskaras s, kādu apstākli izlietojam meklejamo punktu horicontalo projekciju $G_{I_1} = J_{I_1}$ noteikšanai. Pēc tam uz attiecigo platuma aploču vertikalām projekcijām noteicam G_{I_2} un J_{I_2}.*)

239 §. Vertikali projecejošas plaknes krustošanās ar griešanās virsu.

Pieņemsim, ka janoteic patvaļigas vertikali projecejošas plaknes krustošanās ar griešanās virsu, pie kam griezejās plaknes vertikalā pēdu linija ir t. Griešanās virsas ass o ir līdztece V, bet nav stāteniska pret H (315 ras.).

Lai noteiktu punktus A_I un A_{II}, kuŗos griezejā plakne krusto patvaļiga punkta A platuma aploci, mēs rīkojamies šādi. Uz griešanās virsas vertikalā apveida patvaļigu punktu A_2 pieņēmuši, caur A_2 velkam $t_I \perp o_2$. Taisne t_I, acim redzot, ir zinama punkta A platuma aploces vertikalā projekcija un viņas vertikalā pēdu linija. Punkta A platuma aploce un griezejā plakne krustojas pa taisni $1-2$, stateniska pret V. Tapēc taisnes $1-2$ vertikalā projekcija attēlojas punkta veidā: $1_2 = 2_2 = t \times t_I$, bet horicontalā projekcija $1_1 - 2_1$ ir stateniska pret OX.

Ja mēs pēc tam konstruetu punkta A platuma aploces horicontalo projekciju, kuŗa attēlojas elipses veidā, tad šās elipses krustotnes ar $1_1 - 2_1$, acim redzot, noteiktu meklejamo punktu A_I un A_{II} horicontalās projekcijas. Bet, lai izvairitos no aizrāditās elipses konstruešanas, mēs punkta A platuma aploci, griežot viņu ap taisni $1-2$, nostādinam līdztekus H. Tad

*) 314 rasejumā punkta J_{I_2} vietā ir nepareizi atzīmets punkts J_{II_2}.

platuma aploces horicontalā projekcija attēlojas aploces veidā, kuŗas radiuss līdzinas $A_2 - 3_2$, pie kam punkts $3_2 = t_I \times o_2$ ir punkta A platuma aploces centra vertikalā projekcija.

Velkot ar radiusu $1_2 - 3_2$ loku līdz krustošanai ar taisni, ejošu caur 1_2 līdztekus OX, dabujam punktu 3_{o_2}, kas noteic pagriestā centra vertikalo projekciju. Pēc 3_{o_2} nav gŗūti uz o_1 noteikt šā centra horicontalo projekciju 3_{o_1}. Velkot ap 3_{o_1} ar radiusu $3_2 - A_2$ aploci, šās aploces krustošanās punktos ar taisni $1_1 - 2_1$ dabujam meklējamo punktu A_I un A_{II} horicontalās projekcijas A_{I_1} un A_{II_1}.

Līdzigi var konstruet veselu rindu griezejās plaknes krustošanās punktus ar doto griešanās virsu, kas visā kopibā sastāda līko liniju. Šās līknes horicontalā projekcija rasejumā nav aizrādita.

240 §. Ar pēdu linijām dotās plaknes krustošanās ar griešanas virsu.

Pieņemsim, ka janoteic ar pēdu linijām *sat* dotās plaknes krustošanās līkne ar doto griešanās virsu, kuŗas ass o stateniska pret V (316 ras.)

Griezuma līknes noteikšanai, velkam patvaļigu plakni $V' \parallel V$. Plaknes V' horicontalā pēdu linija lai būtu s_I. Plakne V' krusto plakni *sat* pa vertikalo pēdu līdzteci v, kuŗas horicontalā projekcija v_1 saplūst ar s_I, bet vertikalā projekcija $v_2 \parallel t$ un iet caur S_{I_2}.

Griešanās virsa krustojas ar plakni V' pa platuma aploci, kuŗas horicontalā projekcija saplūst ar s_I. Šās platuma aploces vertikalā projekcija attēlojas aploces veidā, kuŗas radius līdzinas $A_1 - 1_1$. Saprotams, ka punkti A_{I_2} un A_{II_2}, kuŗos aizrāditā aploce krustojas ar taisni v_2, ir punktu A_I un A_{II} vertikalas projekcijas, kas pieder kā griezejai plaknei, tā ari dotai griešanās virsai. Pēc A_{I_2} un A_{II_2} nav gŗūti atrast A_{I_1} un A_{II_1}. Līdzigi var konstruet veselu rindu griezuma līknei piederošo punktu.

Aizrādito paņēmienu var ari drusku pārveidot. Tam nolūkam plakni *sat*, griežot ap asi o, nostādam stateniski pret H. Atzīmesim jaunos griezejās plaknes pēdu liniju stāvokļus attiecigi ar s' un t'. Šās pēdu linijas noteicamas sekošā veidā. Pēdu linijas t' stāvokli iegūsim, ievērojot, ka no o_2 pret t vilktais statenis $o_2 - T$ pagriests ieņems jauno stāvokli $o_2\,T' \parallel$ $\parallel$ OX. Noteikuši T', mēs caur šo punktu velkam $t' \perp$ OX, iegūstot pie tam punktu $a' = t' \times OX$.

Patvaļiga, plaknei *sat* piederoša vertikalā pēdu līdztece pēc aizrāditās griešanas top stateniska pret H. Vilksim, piemēram, plaknes *sat* vertikalo pēdu līdzteci v_I, kas iet caur asi o. Šās pēdu līdzteces vertikalā projekcija v_{I_2} iet caur o_2, līdztekus t, bet horicontalā projekcija $v_{I_1} \parallel$ OX un iet caur pēdu punktu S, kuŗu nav gŗūti konstruet.

Pie plaknes *sat* griešanas ap asi o, kas iet caur vertikalo pēdu līdzteci v_I, stateniski pret v_I, vertikalās pēdu līdzteces horicontalais pēdu punkts S pārvietojas pa taisni, kas caur punktu S iet līdztekus asij OX. Ja, nu, beidzot, plakne *sat* pārvēršas horicontali projecejošā plaknē $s'a't'$, tad vertikalās pēdu līdzteces v_I jaunam horicontalam pēdu punktam S′ jaatrodās tanī punktā, kur caur S, asij OX līdztekus ejošā taisne krustojas ar o_1. Punktus S′ un a' savienodami, iegūstam meklejamo jauno horicontalo pēdu liniju s'.

Ja nu tagad velkam patvaļigu plakni V″ ∥ V, kuŗas horicontalā pēdu linija ir s_{II}, tad plakņu V″ un $s'a't'$ krustošanās linija attēlojas pret H stateniskas taisnes veidā. Šās taisnes horicontalā projekcija ir taišņu s_{II} un s' krustošanās punkts, bet šās taisnes vertikalā projekcijā ir stateniska pret OX. Šās vertikalās projekcijas krustošanās punkti ar platuma aploces vertikalo projekciju, pa kuŗu plakne V″ krusto doto griešanās virsu, t. i. punkti $B_{I_{0_2}}$ un $B_{II_{0_2}}$ ir divu punktu B_{I_0} un B_{II_0} vertikalās projekcijas. Punkti B_{I_0} un B_{II_0} ir griezejai plaknei *sat* un dotai griešanās virsai piederošo punktu B_I un B_{II} pagriestie stāvokļi.

Punktu B_I un B_{II} projekcijas nav gŗūti atrodamas. Tam nolūkam atzīmejam leņķi β, par kuŗu plakni *sat* griežot, pagriezusies taisne o_2 - T. Par tādu pašu leņķi, saprotams, griežas ari katrs griešanās virsas radiuss. Tapēc, piemēram, punkta B_{I_2} noteikšanai, punkts $B_{I_{0_2}}$ japagriež uz to pašu leņķi β, bet pretejā virzienā. Pie tam punkts $B_{I_{0_2}}$ virzas pa loku, kas ir platuma aploces vertikalā projekcija, pa kuŗu plakne V″ krustojas ar griešanās virsu. Pēc B_{I_2} noteikšanas nav gŗūti uz s_{II} noteikt B_{I_1}.

Līdzigā kārtā noteic punkta B_{II} projekcijas.

Pēdejo paņēmienu varam lietot, noteicot punktus C un D, kuŗi atrodas vismazakā un vislielakā atstatumā no V. Šo punktu pagriestie stāvokļi ir C_0 un D_0.

Punktu C_0 un D_0 horicontalās projekcijas C_{0_1} un D_{0_1} tieši noteicamas pēc rasejuma un atrodas tur, kur s' krustojas ar griešanās virsas horicontalo apveidu. Bet vertikalās projekcijas C_{0_2} un D_{0_2} guļ uz taisnes, kas iet caur o_2 līdztekus OX. Zinot punktu C_0 un D_0 projekcijas, nav gŗūti, griežot C_{0_2} un D_{0_2} apgriestā virzienā uz leņķi β, noteikt vertikalās projekcijas C_2 un D_2. Pēc tam konstruejam C_1 un D_1.

Ja griešanās virsas ass stateniska pret H, tad griezuma līknes punkti noteicami analoģiskā kārtā ar palīgplaknēm, kas līdzteces ar H.

241 §. Patvaļigas, ar pēdu linijām dotās plaknes krustošanās ar lodi.

Janoteic patvaļigas plaknes *sat* krustošanās ar lodi, kuras centrs ir F un radiuss r (317 ras.).

Lodes griezums ar plakni *sat* ir aploce, kuŗas centrs F_I noteicams šādi. Caur lodes centru F velkam vienu horicontali projecejošo plakni Q, statenisko pret dotās plaknes *sat* horicontalo pēdu liniju *s*. Plaknes Q un *sat* krustojas pa taisni *m*, kuŗas horicontalā projekcija m_1 iet caur F_1, stateniski pret *s*. Savienosim plakni Q un taisni *m* ar H. Taisnes *m* savienotā stāvokļa m_0 noteikšanai, jazin leņķis β, ko veido telpā *m* un m_1.

Lai noteiktu leņķi β, velkam vienu patvaļigu plakni $Q' \parallel Q$ un atrodam taisni ST, pa kuŗu plakne Q' krustojas ar plakni *sat*, kā ari taisnes ST savienoto stāvokli ST_0. Plaknes Q' horicontalā pēdu linija ir $s' \perp s$.

Taisnleņķa trijstūŗa ST_1T_0 malu ST_0 un ST_1 veidotais leņķis β līdzinas meklejamam leņķim β. Tapēc savienotā stāvokļa m_0 noteikšanai, caur punktu $1 = m_1 \times s$ velkam $m_0 \parallel ST_0$.

Plakne Q krusto lodi pa aploci, kuŗas centrs sakrīt ar lodes centru. Šās aploces savienoto stāvokli iegūsim, vilkdami no lodes centra savienotā stāvokļa F_0 aploci ar radiusu *r*. Punkti C_0 un D_0, kuŗos vilktā aploce krusto m_0, noteic caurmēra CD galu savienotos stāvokļus. Caurmērs CD guļ uz aploces, ko dabujam, lodei krustojoties ar griezejo plakni *sat*. Tā kā caurmērs CD bez tam guļ uz plaknes Q, tad savienotais stāvoklis C_0D_0 noteic šā caurmēra lielumu. Dalot C_0D_0 uz pusēm, iegūsim punktu F_{I_0}, kas ir aploces centra F_I savienotais stāvoklis, pa kuŗu lode krustojas ar plakni *sat*. Nogrieznis $F_{I_0}C_0 = F_{I_0}D_0 = r_I$ noteic griezuma aploces radiusa patieso lielumu.

Taisnei, kas lodes centru F savieno ar aploces centru F_I, jabūt stateniskai pret aploces plakni. Aploces F_I plakne savienotā stāvoklī attēlojas kā taisne C_0D_0, tapēc taisnei, kas savieno F_{I_0} ar F_0, jabūt stateniskai pret C_0D_0, pie kam nogrieznis $F_0F_{I_0}$ noteic lodes centra F patieso atstatumu no griezejās plaknes *sat*.

Zinot F_{I_0} un griezuma aploces radiusa r_I patieso lielumu, nav gŗūti konstruet griezuma aploces horicontalās projekcijas, t. i. elipses lielo (A_1B_1) un mazo (C_1D_1) asi.

Visi griezuma aplocei piederošie punkti, kas guļ virs ekvatora, horicontalajā projekcijā redzami, bet visi punkti, kas zem ekvatora, tanī pašā projekcijā nav redzami. Caur F_0, stateniski pret F_0F_1 vilktā taisne 2_0-3_0 noteic lodes ekvatora savienoto stāvokli. Horicontali projecejošie redzes stari savienotā stāvoklī ir stateniski pret $2_0 — 3_0$, (rasejumā aizrādits šo savienoto horicontali projecejošo redzes staru virziens), tapēc nav gŗūti sajēgt, ka horicontalajā projekcijā redzami visi griezuma aplocei piederošie punkti, kas savienotā stāvoklī guļ uz griezuma aploces daļas J_0C_0, pie kam $J_0 = m_0 \times 2_0 - 3_0$. Bet punkti, kuŗu savienotie stāvokļi guļ uz J_0D_0, horicontalā projekcijā nav redzami.

Griezuma aploce krusto ekvatora plakni divos punktos J un K. kuŗu savienotie stāvokļi saplūst vienā kopejā punktā $J_0 = K_0 = m_0 \times 2_0 - 3_0$. Tapēc nav grūti pretejā ceļā, uz ekvatora horicontalās projekcijas uzmeklet projekcijas J_1 un K_1. Punkti J_1 un K_1 atdala griezuma aploces horicontalās projekcijas redzamo ($J_1 C_1 K_1$) daļu no neredzamās ($J_1 D_1 K_1$).

Analoģiski noteicama griezuma aploces vertikalā projekcija. Tam nolūkam velkam patvaļigu vertikali projecejošo plakni, stateniski pret t. Šī plakne krustojas ar plakni $s a t$ pa taisni $S_I T_I$, kuŗas savienotais stāvoklis ir $T_I S_{I_0}$. Taisne $T_I S_I$ telpā veido ar V leņķi δ, kuŗa savienotais stāvoklis ir $\delta = \sphericalangle S_{I_0} T_I S_{I_2}$. Pēc tam caur lodes centru F velkot pret t statenisku vertikali projecejošo plakni, nav grūti noteikt šās plaknes krustošanās linijas ar plakni $s a t$ savienoto stāvokli n_0, kā ari lodes centra un griezuma aploces centra savienotos stāvokļus F_0' un F_{I_0}'.

Elipses galvenās asis $E_2 G_2$ un $P_2 R_2$ noteicamas tapat, kā horicontalajā projekcijā.

Punkti 5_2 un 6_2 atdala šās elipses redzamo daļu no neredzamās. Šie punkti noteicami, ievērojot, ka viņu savienotie stāvokļi saplūst vienā punktā $5_0 = 6_0 = n_0 \times 7_0 - 8_0$, pie kam $7_0 - 8_0$ ir galvenā meridiana savienotais stāvoklis.

Vertikali projecejošo redzes staru savienotie stāvokļi ir stateniski pret $7_0 - 8_0$, kā tas rasejumā aizrādits. Saprotams, ka visi griezuma aplocei piederošie punkti, kuŗu savienotie stāvokļi guļ uz daļas $5_0 - P_0$, vertikalajā projekcijā redzami, bet visi punkti, kuŗu savienotie stāvokļi guļ uz $5_0 - R_0$, tanī pašā projekcijā neredzami.

242 §. Patvaļigas, ar divām krustodamām taisnēm dotās plaknes krustošanās ar lodi.

Pieņemsim, ka ir dota lode ar centru F un patvaļiga plakne ar krustodamām taisnēm a un l, ($a \times l = P$) (318 ras.).

Plakne $a l$ krusto lodi pa aploci, kuŗas centrs ir L. Šā centra noteikšanai no F velkam stateni p pret plakni $a l$ un noteicam stateņa krustošanās punktu L ar plakni $a l$. Tam nolūkam caur patvaļigi pieņemto punktu Q uz a velkam uz plaknes $a l$ pēdu līdzteces $h = 1 - Q$ un $v = 2 - Q$, pēc tam velkam $p_1 \perp h_1$ un $p_2 \perp v_2$ un, beidzot, ar horicontali projecejošas palīgplaknes palīdzibu noteicam punktu $L = p \times 3 - 4$.

Dabiskā lielumā uz H projecejas tas aploces L caurmērs, pa kuŗu plakne $a l$ krusto lodes F platuma aploci, kas iet caur L. Šās platuma aploces vertikalā projekcija $5_2 - 6_2$ iet caur L_2, tapēc nav grūti noteikt platumā aploces radiusu $5_2 - 7_2 = 6_2 - 7_2$, kā ari atzīmet platuma aploces attiecīgo horicontalo projekciju. Velkot pēc tam caur L_1 taisni $h'_1 \parallel h_1$ un atzīmejot punktus 8_1 un 9_1, kuŗos h'_1 krusto platuma aploces horicontalo projekciju, mēs horicontalajā projekcijā iegūsim lielo asi $8_1 - 9_1$, jeb aploces L radiusa patieso lielumu $r' = 8_1 L_1 = 9_1 L_1$. Pēc tam varam atzīmet attiecigas vertikalās projekcijas 8_2 un 9_2 uz taisnes h'_2, kas caur L_2 iet stateniski pret $F_1 F_2$.

Zinadami r', varam ari vertikalajā projekcijā noteikt lielo asi $10_2 - 11_2$, kas guļ uz $v'_2 \parallel v_2$.

Mazās asis $C_1 D_1$ un $J_2 K_2$ abās projekcijās konstruejamas pēc 223 rasejuma.

Bez tam vēl jauzmeklē sekojošie raksturigie punkti, kā, piemēram, punkti 13 un 14, kuŗos plakne al krusto lodes ekvatoru. Šos punktus varam konstruet, pamatodamies uz to, ka plakne al krusto ikkatru horicontalo plakni pa zinamo horicontalo pēdu līdzteci, kas iet līdztekus h', jeb h. Tā tad mums jauzmeklē kaut kāds punkts, kuŗā plakne al krusto ekvatora plakni. Tādu punktu (12) mēs iegūsim, ja atzīmesim taisnes l krustošanās punktu ar ekvatora plakni, pie tam rasejumā tieši noteicama šā punkta vertikalā projekcija 12_2. Velkot pēc tam caur 12_1 līdzteci ar h'_1, līdz krustošanai ar ekvatora horicontalo projekciju, vaj lodes horicontalo apveidu, mēs dabusim punktus 13_1 un 14_1. Punkti 13_1 un 14_1 atdala horicontalajā projekcijā griezuma aploces, t. i. elipses redzamo un neredzamo daļu.

Pēc tam uz ekvatora vertikalās projekcijas noteicam punktus 13_2 un 14_2.

Tamlīdzigi varam noteikt ari punktus 19 un 20, kuŗos plakne al krusto pilnigi patvaļigi pieņemto platuma aploci 15 – 16 – 17, velkot caur punktu 18, kuŗā l krusto platuma aploci, taisni, līdzteci ar h', līdz krustošanai ar pieņemtas platuma aploces horicontalo projekciju, dabujot pie tam 19_1 un 20_1. Pēc tam noteicam 19_2 un 20_2.

Analoģiski noteicami ari punkti 22 un 23, kuŗos plakne al krusto lodes galveno meridianu. Tam nolūkam atzīmejam punktu 21_1, kuŗā l_1 krusto galvenā meridiana horicontalo projekciju, uzmeklejam 21_2, un caur 21_2 velkam $22_2 - 23_2 \parallel v'_2$. Punkti 22_2 un 23_2 vertikalajā projekcijā atdala elipses redzamo un neredzamo daļu. Pēc tam noteicam 22_1 un 23_1 uz galvenā meridiana horicontalās projekcijas.

Saprotams, ka nav gŗūti analoģiski noteikt punktus, kuŗos griezejā plakne al krusto patvaļigu lodes aploci, kuŗas plakne ir līdztece V.

Savienojot visus konstruetos punktus ar slaideno līkni, dabujam griezuma aploces projekcijas, kuŗas redzamiba noteicama pēc vispārejiem noteikumiem (228 §).

Ja pieņemsim, ka a ir kautkāda dotā taisne un ka l pie saules, jeb centralās apgaismošanas ir kaut kāds gaismas stars, kas krusto taisni a, tad aploce ar centru L ir taisnes a gaismas plaknes krustošanās līkne ar lodi, jeb šā līkne ir ēna, ko taisne a met uz lodi. Saprotams, ka realā nozīme ir tikai tai ēnas (griezuma līknes) daļai, kas guļ uz lodes apgaismotās virsas un pie tam tālak no gaismas avota, nekā attiecigā taisnes a daļa.

243 §. Taisnes krustošanās ar griešanās virsu (lodi).

Taisnes krustošanās punktu noteikšanai ar griešanās virsu, caur doto taisni velkam vienu horicontali, jeb vertikali projecejošo plakni (vaj ari kautkādu patvaļigu citu plakni), un atrodam palīgplaknes krustošanās līkni m ar doto griešanās virsu. Dotās taisnes krustošanās punkti ar doto līkni m ir meklejamie punkti.

Aplūkosim, piemēram, patvaļigas taisnes AB krustošanos ar lodi, kuŗas centrs ir F (319 ras.).

Lai atrastu taisnes AB krustošanās punktus ar lodi, caur AB velkam vienu horicontali projecejošo plakni Q. Plakne Q krusto lodi pa aploci ar centru F_I. Centra F_I horicontalo projekciju F_{I_1} iegūstam punktā, kuŗā no F_1 pret A_1B_1 vilktais statenis krusto A_1B_1, jo taisne, kas telpā savieno lodes centru F ar aploces centru F_I, ir stateniska pret griezejo plakni Q. Bet plakne $Q \perp H$, tapēc taisnei FF_I ir horicontals virziens, un viņas vertikalā projekcija $F_2F_{I_2} \parallel OX$, bet horicontalā projekcija $F_1F_{I_1} \perp A_1B_1$. Uz aizrādito pamatojoties, nav gŗūti pēc F_{I_1} konstruet F_{I_2}.

Griezuma aploces radiusu r_I dabujam, dalot nogriezni 1_1-2_1, pa kuŗu A_1B_1 krusto lodes horicontalo apveidu, uz pusēm, t. i. $r_I = F_{I_1} - 1_1 = F_{I_1} - 2_1$.

Savienosim tagad plakni Q un uz viņas gulošo griezuma aploci ar H. Tam nolūkam atrodam taisnes AB savienoto stāvokli A_0B_0, kā ari centra F_I savienoto stāvokli F_{I_0}, pie kam $F_{I_1}F_{I_0} = F_{I_2}F_{I_x}$. Ap centru F_{I_0} velkam aploci ar radiusu $r_{I_0} = F_{I_1} - 1_1$. Punkti M_0 un N_0, kuŗos A_0B_0 krusto vilkto aploci, noteic punktu M un N savienotos stāvokļus, kuŗos taisne AB krusto lodi. Pēc tam nav vairs gŗūti pretejā ceļā uzmeklet punktu M un N projekcijas M_1, M_2 un N_1, N_2.

Plaknei Q savienojoties ar H, ar H savienojas ari horicontali projecejošie redzes stari, kuŗu savienotais stāvoklis rasejuma atzīmets ar m_0.

Caur F_{I_0}, stateniski pret $F_{I_0}F_{I_1}$ ejošais caurmērs 1_0-2_0 dala aploci F_{I_0} divās daļās: $1_0-3_0-2_0$ un $1_0-4_0-2_0$. Saprotams, horicontalajā projekcijā redzami visi punkti, kuŗu savienotie stāvokļi guļ uz pusaploces $1_0-3_0-2_0$, bet punkti, kuŗu savienotie stāvokļi guļ uz pusaploces $1_0-4_0-2_0$, horicontalajā projekcijā nav redzami. Tapēc horicontalajā projekcijā redzams punkts M, bet punkts N nav redzams. Tādā veidā noteicam taisnes AB redzamibu horicontalajā projekcijā.

Kā rasejumā redzams, punkts M guļ uz priekšejās, bet punkts N uz pakaļejās puslodes, tapēc vertikalajā projekcijā punkts M redzams, bet punkts N neredzams, caur ko ir ari noteikta taisnes AB redzamiba vertikalajā projekcijā.

244 §. Lodes notinums.

Lodes virsa pieder nenotinamām līkām virsām, tāpēc lodes virsas notinumu var konstruet tikai apmēram.

Tam nolūkam dotās lodes F virsu (320 ras.) ar meridianalo plakņu palīdzību sadalam vienlīdzigos, ķīļveidigos izgriezumos, kuŗu skaitu pieņemam patvaļigi, un konstruejam viena tāda izgriezuma virsas notinumu.

Lodes ķīļveidigo izgriezumu pieņemam tādā stāvoklī, lai lodes galvenais meridians dalītu ķīļveidigo izgriezumu uz pusēm. Pēc tam sadalam galvenā meridiana apveida ceturto daļu, t. i. loku B_2D_2, ar punktu K_2, G_2 un J_2 palīdzibu, piemēram, četrās vienlīdzigās daļās. Pēc vertikalām projekcijām K_2, G_2 un J_2 noteicam attiecigas horicontalās projekcijas K_1, G_1 un J_1.

Vilksim tagad aptverošo veltenisko virsu, kuŗas ass iet caur lodes centru F, stateniski pret V.

Aptverošais veltenis pieskaras lodei pa galveno meridianu DBEA. Ķīļveidiga izgriezuma virsas vietā pieņemsim aptverošā velteņa sānu virsas daļu, kas ieslēgta starp meridianalām plaknēm, kuŗas ierobežo aplūkojamo lodes izgriezumu. Tam nolūkam caur punktiem K, G, J un B velkam stateniski pret V velteņa veidules. Šo veiduļu vertikalās projekcijas $1_2 = 2_2$, $3_2 = 4_2$, $5_2 = 6_2$ un $7_2 = 8_2$ attēlojas punktu veidā, kas saplūst ar K_2, G_2, J_2 un B_2. Bet šo veiduļu horicontalās projekcijas $1_1 - 2_1$, $3_1 - 4_1$, $5_1 - 6_1$ un $7_1 - 8_1$ noteic viņu patiesos lielumus.

Uz aizrādito pamatojoties, nav gŗūti konstruet attiecigās velteņa sānu virsas daļas notinumu. Tam nolūkam velkam patvaļigu horicontalo taisni un uz viņas atzīmejam punktu B′ (321 ras.). No punkta B′ velkam stateni pret horicontalo liniju un uz ša stateņa nospraužam nogriezni B′J′, kas līdzinas loka $BJ = B_2J_2$ rektificetam gaŗumam. Līdzigā veidā nospraužam $J'G' = J_2G_2$, $G'K' = G_2K_2$ un $K'D' = K_2D_2$.

Caur punktiem B′, J′, G′ un K′ velkam horicontalās taisnes un uz viņām nospraužam rasejumā aizrāditā kārtā attiecigo velteņa veiduļu gaŗumus, t. i. $7'-8' = 7_1 - 8_1$, $5'-6' = 5_1 - 6_1$, $3'-4' = 3_1 - 4_1$ un $1'-2' = 1_1 - 2_1$. Punktus D′, 1′, 3′, 5′ un 7′, kā ari punktus D′, 2′, 4′, 6′ un 8′ ar slaidenām līknēm savienodami, dabujam pusi no velteniskā izgriezuma notītās sānu virsas, ieslēgtās starp meridianalām plaknēm, kas taī pašā laikā ierobežo lodes ķīļveidigo izgriezumu. Konstrueto notinumu var pieņemt par attiecigās lodes ķīļveidigā izgriezuma sānu virsas notinumu. Apakšejā notinuma daļa 7′E′8′ konstruejama tapat, kā augšejā daļa.

Ja mēs konstruejam n tādu notinumu, kuŗiem pa pāriem ir kopeji punkti, kas guļ uz taisnes 7′—8′ pagaŗinajuma, tad tādā veidā iegūto virsu varam uzlūkot, kā lodes virsas notinumu.

321 rasejumā aizrāditas trīs lodes notinumam piederošas daļas.

XVII nodaļa. Griešanās virsu ēnas.

245 §. Vispārejs griešanās virsu ēnu noteikšanas paņēmiens.

Griešanās virsas pašēnas noteikšanai pie centralās apgaismošanas, jaatron aptverošā gaismas smaiļa, kuŗa virsotnē atrodas dotais gaismas avots, — pieskaršanās līkne dotai virsai. Tam nolūkam caur doto gaismas avotu javelk pret doto virsu tangentialās plaknes, kas iet caur doto ārejo punktu (234—236 §§).

Ja ēnas jakonstruē pie saules apgaismošanas, tad pēc 237 § jaatron aptverošā gaismas velteņa pieskāršanās līkne griešanās virsai, pie kam gaismas velteņa veidules ir līdzteces dotam gaismas staru virzienam.

Pieskaršanās, t. i. gaismas atdalošo līkni noteikuši, dabujam griešanās virsas pašēnas apveidu. Zinot, ka krītošās ēņas apveids atbilst pašēņas apveidam, nav gŗūti konstruet dotās virsas krītošo ēnu, velkot tam nolūkam caur atsevišķiem gaismas atdalošas līknes punktiem, līdztekus dotam virsienam, gaismas starus un uzmeklejot šo gaismas staru krustošanās punktus ar ēnas plakni.

246 §. Lodes ēnas pie saules apgaismošanas.

Lodes gaismas atdaloša līkne pie saules apgaismošanas ir aploce, kuŗas centrs F sakrīt ar lodes centru (322 ras.). Gaismas atdalošas aploces plakne stateniska pret gaismas staru virzienu l.

Gaismas atdaloša aploce projecejas uz H un V divu elipšu veidā, kuŗu lielās asis A_1B_1 un E_2G_2 ir stateniskas pret attiecigām projekcijām l_1 un l_2.

Mazās ass C_1D_1 noteikšanai, savienojam ar H horicontali projecejošo plakni, kas caur F vilkta līdztekus l, pie tam $F_1F_0 = F_2F_x$. Pēc tam uzmeklejam centra F horicontalo ēnu F′. Šo punktu savienojam ar F_0, un caur F_0 velkam caurmēru $C_0D_0 \perp F_0F'$. Caurmērs C_0D_0 ir tā lodes caurmēra savienotais stāvoklis, pa kuŗu horicontali projecejoša plakne, kas iet caur F un l, krusto gaismas atdalošo aploci. Šis caurmērs projecejas uz H kā elipses mazā ass. Zinot C_0D_0, nav gŗūti noteikt C_1D_1.

Taisne F_0F_1 ir horicontali projecejoša redzes stara savienotais stāvoklis. Punktu C un D redzamiba horicontalajā projekcijā noteicama, ievērojot punktu C_0 un D_0 stāvokļus attiecibā uz taisni P_0R_0, kas caur F_0 vilkta stateniski pret F_0F_1.

Analoģiski noteicama vertikalajā projekcijā mazā ass J_2K_2, savienojot vertikali projecejošo, caur F un l vilkto plakni ar V. Centra F savienoto stāvokli F'_0 savienojam ar lodes centra vertikalo ēnu F″, un pret savienoto gaismas staru $l'_0 = F'_0F''$ velkām caur F'_0 stateni $J_0K_0 \perp l'_0$. Pēc tam apgriestā kārtā noteicam J_2 un K_2. Ievērojot punktu J_0 un K_0 stāvokļus attiecībā uz taisni $N_0Q_0 \perp F'_0F_2$, noteicam elipses $E_2J_2G_2K_2$ redzamibu.

Gaismas veltenis, kuŗš aptver lodi, krusto H un V pa elipsēm, kuŗu mazās asis $A'B'$ un $E''G''$ ir attiecigo lodes caurmēru AB un EG krītošās ēnas uz H un V. Lielo asu $C'D'$ un $J''K''$ noteikšanai, caur C_0 un D_0 javelk līdzteces ar F_0F', bet caur J_0 un K_0 — līdzteces ar F'_0F'', līdz krustošanai ar attiecigām gaismas stara l projekcijām, kas iet caur lodes centru F.

Aizrādisim vēl uz sekošo konstrukciju atsevišķo gaismas atdalošas aploces punktu un viņu krītošo ēnu konstruešanai. Izpildisim šās konstrukcijas, piemēram, horicontalajā projekcijā.

Tam nolūkam vilksim stateniski pret F_1F_0 patvaļigu taisni 1_0-2_0 un atzīmesim krustošanās punktu $3_0 = 1_0-2_0 \times F_1F_0$. Taisne 1_0-2_0 ir zinamas lodes platuma aploces savienotais stāvoklis. Platuma aploces plakne ir līdztece H, un šās aploces radiuss līdzinas $3_0-1_0 = 3_0-2_0$. Vilksim ar šo radiusu no centra F_1 platuma aploces horicontalo projekciju. Bez tam atzīmesim punktu $4_0 = 5_0 = 1_0-2_0 \times C_0D_0$. Punkts $4_0 = 5_0$ ir chordas $4-5$ savienotais stāvoklis, pa kuŗu aplūkojamā platuma aploce krustojas ar gaismas atdalošo aploci. Šā chorda, saprotams, ir līdztece H un stateniska pret horicontali projecejošo plakni, kas iet caur F un l. Tapēc chordas horicontalā projekcija 4_1-5_1 stateniska pret l_1 un viņai jaiet caur punktu 4_0-5_0.

Velkot pēc tam no punkta $4_0 = 5_0$ stateni pret l_1 un atzīmejot šā stateņa krustošanās punktus ar aplūkojamās platuma aploces horicontalo projekciju, mēs iegūsim divu gaismas atdalošai līknei piederigu punktu horicontalās projekcijas 4_1 un 5_1.

Punktu 4 un 5 horicontalo krītošo ēnu noteikšanai ievērosim sekojošo. Gaismas plakne, ejoša caur taisni $4-5$, savienotajā stāvoklī attēlojas kā taisne, kas caur punktu $4_0 = 5_0$ iet līdztekus l_0. Punkts $6'$, kuŗā šī taisne krusto l_1, acim redzot, ir chordas $4-5$ viduspunkta 6 horicontalā krītošā ēna. Bet tā kā chorda $4-5$ stateniska pret gaismas staru virzienu, tad viņas horicontalai ēnai $4'-5'$ jabūt stateniskai pret l_1 un viņai jaiet bez tam caur punkta 6 horicontalo krītošo ēnu $6'$.

Atzīmejot, beidzot, taisnes $4'-5'$ krustošanās punktus ar gaismas staru horicontalām projekcijām, kas caur 4_1 un 5_1 iet līdztekus l_1, dabujam meklejamos punktus $4'$ un $5'$.

Analoģiski varetum attiecigas konstrukcijas izpildit vertikalajā projekcijā.

247 §. Elipsoida ēnas pie saules apgaismošanas.

Pieņemsim, ka dots elipsoids, kuŗa ass o stateniska pret H (323 ras.). Elipsoida centrs ir F.

Lai konstruetu elipsoida krītošās ēnas, var iepriekš pēc 237 § noteikt elipsoida gaismas atdalošo līkni un pēc pašēnas apveida konstruet krītošās ēnas apveidu. Bet var ari, preteji, papriekšu konstruet elipsoida krītošo ēnu un tad pēc krītošās ēnas apveida noteikt attiecigo pašēnas apveidu, t. i. gaismas atdalošo līkni.

Pēdejā gadijumā velkam veselu rindu plakņu, līdztečų H, kas krusto elipsoidu pa līdzteku platuma aplocēm. Šās platuma aploces projecejas uz H patiesā lieluma, bet uz V — taišņu, līdztečų OX, veidā. Platuma aploču vertikalās projekcijas noteic attiecigo caurmēru patiesos lielumus.

Katras tādas platuma aploces horicontalā ēna ir tāda pat caurmēra aploce, kā oriģinala platuma aploce. Bet šo aploču centri ir oriģinalo aploču centru horicontalās krītošās ēnas.

Konstruejoši aizrādītā veidā atsevišķo elipsoida platuma aploču horicontalās ēnas, velkam pret konstruetām aplocēm kopejo aptverošo līkni *s*, kas noteic elipsoida horicontalās krītošās ēnas apveidu.

Lai pareisi apvilktu līkni *s*, jakonstruē visaugstakā (C) un viszemakā (D) gaismas atdalošas līknes punkta horicontalā ēna. Punkti C un D noteicami pēc 237 §.

Apzīmesim punktu C un D platuma aploču centrus ar C_I un D_I un konstruesim šo centru horicontalās krītošās ēnas C_I' un D_I'. Velkot no centriem C_I' un D_I' aploces ar radiusiem, kas līdzinas punktu C un D platuma aploču radiusiem, iegūstam horicontalās krītošās ēnas ierobežojumus krītošo ēnu C' un D' tuvumā.

Atzīmejot aptverošās līknes *s* pieskaršanās punktus ar atsevišķo platuma aploču horicontalām ēnām kā, piemēram, punktus J', E', G'..., caur šiem punktiem pretejā virzienā velkam līdzteces ar l_1 un noteicam šo līdztecū krustošanās punktus ar attiecigo platuma aploču horicontalām projekcijām, dabujot tā oriģinalo punktu J, E, G... horicontalās projekcijas, kuŗu horicontalās ēnas ir J', E', G',... Pēc J_1, E_1, G_1... uz attiecigo platuma aploču vertikalām projekcijām atrodam J_2, E_2, G_2...

Iegūtos punktus ar slaidenām līknēm savienodami, iegūstam gaismas atdalošas līknes projekcijas. Bez tam varam atrastiem punktiem J, E, G... noteikt attiecigas vertikalās krītošās ēnas, kā tas resejumā aizrādits attiecibā uz punktiem E un J, kuŗu vertikalās ēnas ir E'' un J''.

248 §. Lodes ēnas pie centralās apgaismošanas.

Pieņemsim, ka doti: lode ar centru F un gaismas avots Ω (324 ras.).

Lodes gaismas atdaloša aploce, kuŗas projekcijas ir divas elipses, noteicama pēc 236 §, 312 ras. Gaismas atdalošas aploces centrs 324 rasejumā atzīmets ar K.

Elipšu galvenās asis horicontalajā projekcijā ir $1_1 - 2_1$ un $3_1 - 4_1$, bet vertikalajā projekcijā: $5_2 - 6_2$ un $7_2 - 8_2$.

Punkts 3 ir gaismas atdalošās aploces augstakais, bet punkts 4 zemakais punkts, attieciba uz H. Punkts 8 ir priekšejais, bet 7 — pakaļejais punkts attiecibā uz V.

Lai noteiktu punktu 3 un 4 vertikalās projekcijas 3_2 un 4_2, ievērosim, ka $3_1 - 4_1$ iet caur K_1. No otrās puses $3_1 - 4_1$ krusto $E_1 D_1$ punktā Q_1 (pie tam $Q_1 = F_1$), tapēc $3_2 - 4_2$ iet caur attiecigo punktu Q_2 uz $E_2 D_2$, kuŗu nav gŗūti noteikt. Zinadami virzienu $3_2 - 4_2$, kas iet caur K_2 un Q_2, uz ša virziena noteicam vertikalās projekcijas 3_2 un 4_2.

Analoģiski noteicam $7_1 - 8_1$. Pie tām $7_1 - 8_1$ iet caur K_1, jo $7_2 - 8_2$ iet caur K_2. No otrās puses $7_2 - 8_2$ krusto $C_2 B_2$ punktā R_2 (pie tam $R_2 = F_2$), tapēc $7_1 - 8_1$ iet caur attiecigo punktu R_1 uz $C_1 B_1$, kuŗu nav gŗūti noteikt.

Lodes horicontalās krītošās ēnas noteikšanai, mēs uzmeklejam ēnas $3'$ un $4'$, un dalam nogriezni $3' - 4'$ uz pusēm, dabujot lodes horicontalās krītošās ēnas, t. i. elipses centru Q'.

No Q' velkam stateni pret OX, līdz krustošanai ar OX punktā α, un pēdejo punktu savienojam ar Ω_2. Taisne $\alpha - \Omega_2$ krusto $3_2 - 4_2$ punktā, kuŗš sakrīt ar jau agrak atzīmeto punktu Q_2. Pēc tam uz $3_1 - 4_1$ uzmeklejam $Q_1 = F_1$, un tādā kārtā dabujam abas punkta Q projekcijas, kuŗā gaismas stars $\Omega Q'$ krusto gaismas atdalošas aploces plakni.

Pierādisim tagad, ka $\Omega_2 - \alpha$ patiešam krusto $3_2 - 4_2$ agrak atzīmetā punktā Q_2. Tam nolūkam iedomasimies, ka caur staru Ω Q telpā ir vilkta viena horicontali projecejoša palīgplakne. Šī palīgplakne krusto gaismas atdalošas aploces plakni pa taisni 3 - 4, jo Q' guļ uz $3' - 4'$. Tā pati palīgplakne krusto lodes galveno meridianu pa taisni, kas caur lodes centru F īet stateniski pret H, tapēc pēdejās taisnes vertikalā projekcija iet caur F_2 stateniski pret OX.

Uzmekletā palīglīnija 3 — 4 un aizrāditais statenis krustojas punktā Q, kuŗam bez tam jaguļ uz lodes gaismas atdalošas plaknes krustošanas taisnes ar galveno meridianu. Bet šī taisne pēc agrak izskaidrota ir ED. Tā tad punktam Q jaguļ uz ED.

Bez tam punktam Q, kā augšā aizrādits, ari jaguļ uz taisnes 3 — 4. Tas nozīmē, ka punkts Q ir taišņu ED un 3 — 4 krustošanas punkts. Tapēc $Q_2 = 3_2 - 4_2 \times E_2 D_2$ un bez tam Q_2 guļ uz statena, kas no F_2 vilkts pret asi OX.

Aizrādito ievērojot, tieši pēc punkta Q projekcijām Q_1 un Q_2 varetu konstruet lodes horicontalās krītošās ēnas, t. i. elipses centru Q'.

Nogrieznis $3' - 4'$ ir horicontalās krītošās ēnas lielā ass, bet mazā ass $(12' - 13')$ ir horicontalā ēna no gaismas atdalošas aploces horicontalās pēdu līdzteces, kas iet caur punktu Q. Šī pēdu līdztece bez tam guļ uz lodes platuma aploces, kuŗas vertikalā projekcija $9_2 - 10_2$ iet caur Q_2, līdztekus OX, bet centrs $11_2 = Q_2$. Šās platuma aploces radiusu $9_2 - 11_2 = 11_2 - 10_2$ zinadami, mēs atzīmejam punktus 12_1 un 13_1, kuŗos platuma aploces horicontalā projekcija krustojas ar taisni, kas caur Q_1 vilkta līdztekus $B_1 C_1$. Pēc tam uzmeklejam uz $9_2 - 10_2$ punktus 12_2 un 13_2 un konstruejam attiecigas ēnas $12'$ un $13'$. Punkti $12'$ un $13'$ guļ uz stateņa, kas caur Q' vilkts pret $3' - 4'$, pie tam $12' - Q' = Q' - 13'$.

Tādā veidā noteicam horicontalās krītošās ēnas galvenās asis $3' - 4'$ un $12' - 13'$.

Analoģiski noteicama vertikalā krītošā ena. Tam nolūkam uzmeklejam ēnas $7''$ un $8''$; dalam lielo asi $7'' - 8''$ uz pusēm, dabujot R'', un pēc tam noteicam punkta R projekcijas, kuŗas atrodas uz taisnes $7 - 8$ projekcijām.

Nav gŗūti pierādit analoģiskā veidā, kā mēs to izdarijām attiecibā uz punktu Q, ka punkts R ir taišņu $7 - 8$ un BC krustošanās punkts, tapēc $R_1 = 7_1 - 8_1 \times B_1 C_1$ un guļ uz stateņa, kas no F_1 vilkts pret OX. Vertikalā projekcija R_2 saplūst ar F_2, t. i. $R_2 = F_2$.

Caur R_2 velkam vertikalo pēdu līdzteci, līdztekus ar $D_2 E_2$, un noteicam šās pēdu līdzteces krustošanās punktus 16_2 un 17_2 ar lodes aploci, kuŗas plakne iet caur R līdztekus V. Šās aploces horicontalā projekcija $14_1 - 15_1$ iet caur R_1, līdztekus asij OX, un viņas centrs sakrīt ar R_1. Aizrādītās aploces vertikalā projekcija ir aploce, kuŗas radiuss līdzinas $14_1 - R_1 = 15_1 - R_1$. Tapēc augša minetos punktus 16_2 un 17_2 nav gŗūti noteikt.

Pēc tām uz $14_1 - 15_1$ noteicam vēl 16_1 un 17_1 un uzmeklejam punktu 16 un 17 vertikalās ēnas, kas noteic lodes krītošās vertikalās ēnas mazo asi $16'' - 17''$, kuŗa ir stateniska pret $\Omega_2 R''$ un iet caur R''.

XVIII nodaļa. Lodes krustošanās ar citām virsām; ēnu konstrukcijas.

249 §. Lodes krustošanās ar smaili. Pieskares konstrukcija pret krustošanās līkni.

Pieņemsim, ka doti: lode ar centru F un slīps aploces smailis ar virsotni L un pamataploci K (325 ras.).

Kautkādas smaiļa veidules krustošanās punktu ar lodi varam noteikt pēc 243 §, 319 ras., vaj ari šādi.

Vilksim patvaļigu horicontalo plakni H', kas krusto lodi pa platuma aploci $1 - 2 - 3$, bet smaili pa aploci ar centru 4 un radiusu $4 - 5$.

Saprotams, ka punkti 6_1 un 7_1, kuŗos horicontalajā projekcijā krustojās aizrādītās aploces, noteic horicontalās projekcijas no diviem punktiem

6 un 7, kas pieder meklejamai krustošanās līknei. Pēc tam nav grūti noteikt projekcijas no attiecigām smaiļa veidulēm, uz kuŗām guļ punkti 6 un 7, kā ari vertikalās projekcijas 6_2 un 7_2. Tā, piemēram, rasejumā ir aizrāditas smaiļa veidules $L-8$, ejošas caur punktu 6, projekcijas.

Pieskare t, vilkta telpā punktā 6 pret doto ķermeņu krustošanās līkni, t. i. pret lodes un smaiļa virsām, — ir taisne, pa kuŗu krustojas punktā 6 pret smaiļa un lodes virsām vilktas tangentialās plaknes. Pirmo plakni telpā atzīmesim ar P, otro ar Q.

Uzmeklesim horicontalās pēdu linijas, pa kuŗām plaknes P un Q krustojas ar H (vaj ar kautkādu citu horicontalo plakni).

Plakne P krusto H pa taisni s_{I}, kas caur atbalstpunktu 8 iet tangentiali pret smaiļa pamataploci K.

Lai noteiktu taisni s_{II}, pa kuŗu plakne Q krusto H, rīkosimies šādi. Punkts 6 guļ uz zinama lodes meridiana, kuŗa plakni nostadijam lidztekus V, griežot meridianu ap vertikalo asi, kas iet caur F. Pēc griešanās aplūkotais meridians projecejas uz V kā lodes apveids, un 6 punkta jaunā vertikalā projekcija 6_{o_2} sakrīt pie tam ar 2_2. Bet jaunā horicontalā projekcija 6_{o_1} sakrīt ar 2_1. Caur punktu 6_o velkam tangentialo plakni Q_o pret lodi. Plakne Q_o ir stateniska pret V un ir noteikta ar vertikalo pēdu liniju $6_{o_2}-9_{o_2}$ un horicontalo pēdu liniju $s_{II_o}=9_{o_2}-9_{o_1}$, kas iet caur punktu 9_{o_2}, stateniski pret OX. (Taisne $6_{o_2}-9_{o_2}$ pieskaras lodes vertikalam apveidam.)

Tālak atzīmeto meridianu kopā ar plakni Q_o griežam atpakaļ pirmatnejā stāvoklī. Tam nolūkam ar radiusu $F_1-9_{o_1}$ velkam aploci līdz krustošanai ar meridiana pagaŗinato pirmatnejo horicontalo projekciju F_1-6_1 punktā 9_1, un pēc tam caur punktu 9_1 velkam $s_{II}\perp F_1-9_1$, jo $s_{II_o}\perp F_1-9_{o_1}$.

Tā mēs noteicam plaknes Q horicontalo pēdu liniju s_{II}. (Q_o ir plaknes Q pagriestais stāvoklis, bet s_{II_o} – pēdu linijas s_{II} pagriestais stāvoklis).

Pēdu linijas s_{I} un s_{II} krustojas punktā S. Savienojot punkta S projekcijas ar attiecigām punkta 6 projekcijām, iegusim meklejamās pieskares t projekcijas t_1 un t_2.

Var gadities, ka punkts $S=s_{I}\times s_{II}$ neatrodas rasejuma robežās. Tādā gadijumā javelk patvaļiga horicontalā plakne H′, līdzigi, kā mēs to izdarijām 256 rasejumā, un janoteic plakņu P un Q pēdu linijas attiecibā uz plakni H′.

Uzmeklejot pietiekoši daudz punktam 6 līdzigu krustošanās punktu, noteicot prieks katra no uzmekletiem punktiem pieskari, un savienojot pēc tam iegūtos punktus ar slaideno līkni, iegūsim doto ķermeņu krustošanās līkni, kas rasejuma aizrādita.

Līdzigā kārtā varam noteikt ari kaut kāda velteņa krustošanās līkni ar lodi, kā ari pieskares attiecigos punktos.

Atzīmesim kautkādu horicontalo plakni, kas krusto smaili pa aploci ar centru M. Ja pieņemsim, ka smaiļa (vaj velteņa) virsotnē atrodas gaismas avots, tad mekletā krustošanās figura nav nekas cits, kā ēna, ko horicontalā aploce M pie centralās (jeb saules) apgaismošanas met uz lodi. Smaiļa (vaj velteņa) atbalsts ir aploces M horicontalā krītošā ēna pie centralās (jeb saules) apgaismošanas.

Saprotams, ka realā nozīme ir tikai tai aploces krītošās ēnas daļai, kas guļ uz lodes apgaismotās virsas.

250 §. No smaiļa uz lodi un no lodes uz smaili kritošo ēnu konstrukcija.

Pieņemsim, ka pēc 249 §, 325 ras. ir konstruetas smaiļa krustošanās līknes ar lodi (326 ras.). Bez tam pazīstamajā kārtā ir konstruetas doto ķermeņu krītošās ēnas uz H un V.

No smaiļa uz lodi krītošo ēnu iegūsim, noteikdami smaiļa gaismas atdalošo veiduļu L A un L B krītošās ēnas uz lodi. Šās ēnas noteicamas pēc 242 §, 318 ras., velkot caur patvaļigi uz gaismas atdalošām veidulēm L A un L B pieņemtiem punktiem gaismas starus, līdztekus l, un uzmeklejot aploces, pa kuŗām tādā veidā noteiktas gaismas plaknes krusto lodi. Šās aploces projecejas uz H un V elipšu veidā, no kuŗām rasejumā aizrāditas tikai patiesās daļas, t. i. ēnas $C L^{\times}$ un $D L^{\times}$. Abas ēnas krustojas punktā $L^{\times}$, kas ir smaiļa virsotnes krītošā ēna uz lodi.

Smaiļa virsotne L met ēnu uz lodes virsu, kas redzams ari no ta, ka L' atrodas lodes horicontalās krītošās ēnas iekšpusē.

Ēnu $L^{\times}$ bez tam varam pārkontrolet, noteicot pēc 243 §, (319 ras.) caur smaiļa virsotni L ejoša gaismas stara krustošanas punktu ar lodes virsu.

Pieskari t' patvaļigā punktā 5 pret ēnas līkni $C L^{\times}$ varam konstruet sekošā veidā. Pieskare t' ir tā taisne, pa kuŗu punktā 5 pret lodes virsu vilktā tangentialā plakne P' krustojas ar veidules A L gaismas plakni Q', kas satur līkni $C-5-L^{\times}$. Lai dabutu t', jakonstruē plakņu P' un Q' pēdu linijas attiecibā uz H, un viņu krustošanās punkts jasavieno ar punktu 5. Bet izpildot vajadzigās konstrukcijas attiecibā uz H, izrādas, ka tās pa daļai atrodas rasejuma ārpusē. Tapēc plaknes $\bar{H}$ vietā ir pieņemta patvaļiga horicontalā plakne H', kas iet, piemēram, caur lodes centru F. Plaknes H' krustošanās linija ar V atzīmeta ar $O'X'$.

Lai noteiktu pirmo plakni P', tad lodes meridianu, kas iet caur punktu 5, nostādam līdztekus V, dabujot jaunās projekcijas $5_{o_1} = 3_1$ un $5_{o_2} = 3_2$. Tagad punktā 5_o varam pret lodi vilkt tangentialo, vertikali projecejošo plakni, kuŗas vertikalā pēdu linija $5_{o_2} - 9_{o_2}$ pieskaras galvenam meridianam, t. i. lodes vertikalam apveidam; pie tam punkts 9_{o_2} guļ uz $O'X'$.

Caur punktu 9_{o_2}, stateniski pret $O'X'$, iet tā attiecigā horicontalā pēdu linija s_0, kas krusto pagarinato taisni $F_1 - 5_{o_1}$ punktā 9_{o_1}.

Pēc tam galveno meridianu kopā ar pēdu liniju s_0 pagriežam atpakaļ pirmatnejā stāvoklī, velkot tam nolūkam ar radiusu $F_1 - 9_{o_1}$ loku līdz krustošanai ar pagarinato taisni $F_1 - 5_1$ punktā 9_1, un no punkta 9_1 velkam stateni s pret $F_1 - 9_1$, dabujot tā plaknes P' pēdu liniju s attiecībā uz H'.

Plaknes Q' pēdu liniju attiecībā uz H' noteicam sekošā veidā. Plakne Q' krusto H pa taisni AL'. Tapēc Q' krusto plasni H', kas līdztece ar H, pa taisni (s'), līdzteci AL' un ejošu caur punktu A', kurā veidule LA krusto H'. Punktu A' nav grūti noteikt, uzmeklejot papriekšu viņa vertikalo projekciju $A_2' = A_2 L_2 \times O'X'$ un noteicot uz AL_1 projekciju A_1'. Pēc tam caur A_1' velkam $s' \parallel AL'$.

Beidzot, noteicam pēdu liniju s un s' krustošanās punktu S_1'. Caur šo punktu un 5_1 iet meklejamās pieskares horicontalā projekcija $t_1' = S_1' - 5_1$. Uzmeklejot pēc tam uz $O'X'$ attiecigo vertikalo projekciju S_2' un savienojot to ar 5_2, dabujam pieskares vertikalo projekciju $t_2' = S_2' - 5_2$.

Japiezīmē, ka punktā 5 pret lodes virsu vilkto tangentialo plakni P' varetum ari noteikt pēc 233 §, 309 ras..

A t s e v i š ķ u s l ī k ņ u $CL^\times$ u n $DL^\times$ ē n a s p u n k t u s v a r a m n o t e i k t a r i š ā d i. Pieņemsim patvaļigu lodes platuma aploci $1 - 2 - 3$ ar centru 2, un uzmeklesim centra 2 horicontalo krītošo ēnu $2'$. Velkot ar platuma aploces radiusu $1 - 2$ no $2'$ aploci, dabujam pieņemtās platuma aploces horicontalo krītošo ēnu, kas krustojas ar smaila gaismas atdalošo veiduļu horicontalām krītošām ēnām AL' un BL' punktos $4'$ un $5'$.

Velkot pēc tam apgriestā virziena līdzteces ar l_1, līdz krustošanai ar platuma aploces horicontalo projekciju $1_1 - 2_1 - 3_1$, dabujam punktus 4_1 un 5_1. Pie tam $4_1 - 2_1 \parallel 4' - 2'$ un $5_1 - 2_1 \parallel 5' - 2'$. Pēc tam uz platuma aploces vertikalās projekcijas $1_2 - 2_2 - 3_2$ noteicam punktus 4_2 un 5_2.

Tādā veidā dabujam divu punktu 4 un 5 projekcijas, kas pieder no smaiļa uz lodi krītošai ēnai. Tamlīdzigi varetum noteikt ari pārejus smaiļa krītošās ēnas punktus.

No lodes uz smaili krītošā ēna, saprotams, ir lodes gaismas atdalošas aploces krītošā ēna. Lai konstuetu šo ēnu, jauzmeklē ēnas, kas no lodes gaismas atdalošas aploces krīt uz atsevišķām smaiļa veidulēm.

Lai dabutu, piemēram, ēnu, kas krīt uz patvaļigi pieņemto veiduli LE, noteicam punktu $E^{\times\prime}$, kurā šīs veidules horicontalā krītošā ēna $L'E$ krustojas ar lodes horicontalo krītošo ēnu. Caur $E^{\times\prime}$ velkam līdzteci ar l_1, līdz krustošanai ar EL_1 punktā $E_1^\times$, un pēc tam uz E_2L_2 noteicam projekciju $E_2^\times$. Tādā veidā dabujam abas projekcijas no krītošās ēnas $E^\times$, ko lode met uz pieņemto veiduli EL.

Dažreiz ērtaki papriekšu noteikt krītošo ēnu vertikalajā projekcijā, sevišķi, ja smailis atbalstās uz V, bet ari mūsu gadijumā varam papriekšu noteikt $E^{\times}_{2}$.

Tam nolūkam janoteic pieņemtās veidules LE vertikalā krītošā ēna. Šī ēna iet caur virsotnes L vertikalo ēnu L″ un punktu $a = L'E \times OX$. Noteicot pēc tam veidules vertikalās krītošās ēnas L″a krustošanās punktu $E^{\times\prime\prime}$ ar lodes vertikalās krītošās ēnas apveidu un velkot caur $E^{\times\prime\prime}$ apgriestā virzienā līdzteci ar l_2, līdz krustošanai ar L_2E_2, dabujam meklejamās ēnas vertikalo projekciju $E^{\times}_{2}$. Pēc tam varam noteikt ari $E^{\times}_{1}$.

Pieskari t punkta $E^{\times}$ konstruejam šādi. Pieskare t ir tā taisne, pa kuŗu punktā $E^{\times}$, tangentiali pret smaiļa virsu vilktā plakne P krustojas ar plakni Q, kas punktā $E^{\times}$ vilkta tangentiali pret gaismas velteni, kurš iet caur lodes gaismas atdalošo aploci, līdztekus l.

Plaknes P horicontalo pēdu liniju s_{I} dabujam, velkot caur smaiļa veidules LE pamatu E pieskari pret smaiļa atbalstaploci M.

Plaknes Q horicontalo pēdu liniju dabujam, velkot caur gaismas velteņa veidules $E^{\times}E^{\times\prime}$ atbalstpunktu $E^{\times\prime}$ pieskari s_{II} pret gaismas velteņa horicontalo atbastu. Šīs atbalsts ir lodes horicontalā krītošā ēna, t. t. elipse ar centru F′.

Lai punktā $E^{\times\prime}$ pareizi vilktu pieskari s_{II} pret elipsi ar centru F′, mēs papriekšu uz aploces, kuŗas centrs sakrīt ar F′, bet caurmērs līdzinas elipses F′ mazai asij $6'-7'$, noteicam punktam $E^{\times\prime}$ affini radniecisko punktu E_0 (172 §, 231 ras.), velkot tam nolūkam no $E^{\times\prime}$ stateni pret $6'-7'$, līdz krustošanai ar atzīmeto aploci Punktam E_0 varam ģeometriski noteikt pieskari s_{II_0} pret aizrādito aploci, dabujot punktu $8' = s_{II_0} \times 6'-7'$. Caur punktu $8'$ uz affinitates pamata iet ari punktā $E^{\times\prime}$ pret elipsi F′ vilktā pieskare s_{II}.

Tā mēs dabujam plakņu P un Q horicontalās pēdu linijas s_{I} un s_{II}. Savienojot pēdu liniju s_{I} un s_{II} krustošanās punktu S ar $E^{\times}$, dabujam meklajamo pieskari t. Pie tam t_1 iet caur S un $E^{\times}_{1}$ (nejauši rasejumā t_1 sakrīt ar s_{I}), bet t_2 iet caur S_2 un $E^{\times}_{2}$. (Punkts S_2, saprotams, guļ uz OX.)

251 §. Divu ložu krustošanās un viņu ēnas.

Pieņemsim, ka ir dotas divas lodes ar centriem F_{I} un F_{II}, kuŗiem vienlīdzigie radiusi r, pie kam lode ar centru F_{II} guļ uz H (327 ras.).

Ložu paš- un krītošās ēnas pie saules apgaismošanas noteicamas pēc agrakiem noteikumiem (246 §, 322 ras.).

Lai noteiktu ložu krustošanās līkni, velkam veselu rindu palīgplakņu, līdzteču H, vaj V. Šās plaknes krusto lodes pa aplocēm, kuŗu krustošanās noteic meklejamai krustošanās līknei piederošus punktus.

Lai pilnigaki noteiktu krustošanās līknes raksturu, jakonstruē sekošie punkti.

1) Krustošanās līknes punkti 1 un 2, 3 un 4, piederošie ložu ekvatoriem.

2) Punkti 5 un 6, 7 un 8, kas guļ uz doto ložu galveniem meridianiem.

Punktus 1 līdz 8 noteic augšā aizrādītā kārtā ar palīgplaknēm, kas līdzteces H, vaj V.

3) Punkti 9 un 10, kas pieder caur ložu centriem F_I un F_{II} ejošai horicontali projecejošai plaknei P.

Lai noteiktu punktus 9 un 10, tad plakni P, griežot to ap asi, kas caur F_{II} iet stateniski pret H, nostādam līdztekus V. Pagriestā centra F_I stāvokli atzīmejam ar $F_I{}^0$. Šā punkta projekcijas aizrāditas rasejumā. Velkot ap $F^0{}_{I_2}$ aploci ar radiusu, kas līdzinas lodes F_I radiusam, mēs punktos, kuŗ šī aploce krustojas ar lodes F_{II} vertikalo apveidu, dabujam punktu 9 un 10 savienoto stāvokļu vertikalās projekcijas 9_{o_2} un 10_{o_2}. Pēc 9_{o_2} un 10_{o_2} noteicam uz taisnes, kas caur F_{II_1} iet līdztekus OX, projekciju 9_{o_1} un 10_{o_1} stāvokļus. Pēc tam no centra F_{II_1} velkam lokus ar radiusiem $F_{II_1} - 9_{o_1}$ un $F_{II_1} - 10_{o_1}$, līdz krustošanai ar $F_{I_1}\,F_{II_1}$, dabujot tādā veidā projekcijas 9_1 un 10_1, pēc kuŗām nav gŗūti atrast attiecigas vertikalās projekcijas 9_2 un 10_2 uz taisnēm, kuŗas iet caur 9_{o_2} un 10_{o_2} līdztekus OX.

Punkti 10 un 9, acim redzot, ir krustošanās līknes augstakais un zemakais punkts.

4) Punkti 11 un 12, kas pieder caur centriem F_I un F_{II} ejošai vertikali projecejošai plaknei Q. Lai šos punktus noteiktu, tad plakni Q, griežot to ap asi, kas caur F_{II} iet stateniski pret V, nostādam līdztekus H. Centra F_I pagriestais stāvoklis ir $F_I{}^{00}$, kuŗa projekcijas aizrāditas rasejumā.

No $F_{I_1}{}^{00}$ ar radiusu r velkam aploci un atzīmejam punktus 11_{o_1} un 12_{o_1}, kuŗos šā aploce krustojas ar lodes F_{II} horicontalo apveidu. Atzīmetie punkti ir meklejamo punktu 11 un 12 pagriesto stāvokļu horicontalās projekcijas. Pēc 11_{o_1} un 12_{o_1} uz taisnes, kas caur F_{II_2} iet līdztekus OX, atrodam 11_{o_2} un 12_{o_2}. Ap centru F_{II_2} ar radiusiem $F_{II_2} - 11_{o_2}$ un $F_{II_2} - 12_{o_2}$ velkam lokus līdz krustošanai ar $F_{II_2}\,F_{I_2}$ punktos 11_2 un 12_2, un pēc tam uzmeklejam uz taisnēm, kas caur 11_{o_1} un 12_{o_1} vilktas līdztekus OX, meklejamo punktu horicontalās projekcijas 11_1 un 12_1.

Acim redzot, punkti 11 un 12 ir krustošanās līknes punkti, kas atrodas vismazakā un vislielakā atstatumā no V, t. i. punkti 11 un 12 ir krustošanās līknes pakaļejais un priekšejais punkts.

Noteicot augšā aizrādītā kārtā vēl veselu rindu starppunktu un šos punktus ar slaideno līkni savienojot, iegūstam meklejamo krustošanās līkni 1 – 8 – 10 – 6 – 2 – 12 – 3 – 5 – 9 – 7 – 4 – 11 – 1. Horicontalajā projekcijā redzama līknes daļa 1 – 8 – 10 – 6 – 2, kas atrodas virs lodes F_I ekvatora plaknes. Vertikalajā projekcijā redzama griezuma līknes daļa 5 – 3 – 12 – 2 – 6, kas atrodas lodes F_I galvenā meridiana priekšpusē.

Ēna, kas no lodes F_I krīt uz lodi F_{II}, noteicama pēc agrak aizrāditiem paņēmieņiem.

Tā piemēram, lodes F_I uz lodi F_{II} mesto ēnas punktu horicontalās projekcijas 15_1 un 16_1 konstruetas šādi. Ap centru F_{II_1} ar zinamo radiusu $F_{II_1} - 13_1$ velkam patvaļigas lodes F_{II} platuma aploces horicontalo projekciju. Pēc tam no 13_1 velkam stateni pret l_1, līdz krustošanai punktā 13_o ar tās aploces savienoto stāvokli, ko dabujam, lodei F_{II} krustojoties ar horicontali projecejošo plakni, kas caur F_{II} iet līdztekus gaismas staru virzienam l. No punkta 13_o velkam stateni pret $F_{II_1} F_{II_o}$ un atrodam punktu 14_o, kuŗā šis statenis krusto taisni $F_{II_1} F_{II_o}$. Punkts 14_o ir punkta 13 platuma aploces centra 14 savienotais stāvoklis ($14_1 = F_{II_1}$). Pēc tam caur 14_o velkam līdzteci ar gaismas staru savienoto stāvokli, t. i. velkam līdzteci ar $l_{oI} = F_{I_o} F_I'$, jeb $l_{oII} = F_{II_o} F_{II}'$, un atzīmejam šās līdzteces krustošanās punktu $14'$ ar taisni $F_{II_1} F_{II}'$, dabujot tādā veidā aplūkojamās platuma aploces centra 14 horicontalo krītošo ēnu $14'$.

Ap $14'$ ar radiusu, kas līdzinas $F_{II_1} - 13_1 = 14_o - 13_o$, velkam aploci, iegūstot tā aplūkojamās platuma aploces horicontalo krītošo ēnu. Punkti $15'$ un $16'$, kuŗos aizrādītā aploce krusto lodes F_I horicontalās krītošās ēnas apveidu, pieder ēnai, ko lode F_I met uz H. Tā kā punkti $15'$ un $16'$ atrodas lodes F_{II} horicontalās krītošās ēnas apveida iekšpusē, tad nav gŗūti sajēgt, ka patiesās krītošās ēnas (15 un 16) guļ uz lodes F_{II} virsas.

Šo patieso ēnu horicontalās projekcijas 15_1 un 16_1 dabujam, velkot caur $15'$ un $16'$ apgriestā virzienā līdzteces ar l_1, līdz krustošanai ar aplūkojamās platuma aploces horicontalo projekciju. Pie tam japiegriež vēriba krustošanās punktu 15_1 un 16_1 pareisai noteikšanai.

Punktus 15_1 un 16_1 vispareizaki noteiksim, ja caur F_{II} vilksim $F_{II_1} - 15_1 \parallel 14' - 15'$ un $F_{II_1} - 16_1 \parallel 14' - 16'$. Pēc tam uz pieņemtās platuma aploces vertikalās projekcijas noteicam ēnu vertikalās projekcijas 15_2 un 16_2.

No vienas lodes uz otru krītošo ēnu varam noteikt ari pēc sekoša paņēmiena.

Vilksim patvaļigu horicontali projecejošo plakni K, līdztekus gaismas staru virzienam. Pieņemsim, ka s ir šās plaknes horicontalā pēdu linija. Plakne K krusto abas lodes pa aplocēm, kuŗu centru horicontalās projekcijas

17_1 un 19_1 atrodas pēdu linijas *s* krustošanas punktos ar $F_{I_0}F_{I_1}$ un $F_{II_0}F_{II_1}$. Šo apločū radiusi ir $17_1 - 18_1$ un $19_1 - 20_1$, bet apločū centru savienotie stāvokļi ir 17_0 un 19_0, pie kam $17_1 - 17_0 = F_{I_2}F_{I_x}$ un $19_1 - 19_0 = F_{II_2}F_{II_x}$. Ap centriem 17_0 un 19_0 ar aizrāditiem radiusiem aploces velkot, iegūstam to apločū savienotos stāvokļus, ko dabujam, plaknei K krustojoties ar dotām lodēm.

Velkot pēc tam pret aploci ar centru 17_0 pieskari, līdztekus l_{0_I} un noteicot punktu 21_0, kuŗā šī pieskare krusto aploci ar centru 19_0, acim redzot, iegūsim savienoto stāvokli 21_0 no tā punkta 21, kuŗā gaismas stars, kas guļ uz plaknes K un pieskaras lodes F_I apveidam, — krusto lodes F_{II} virsu. Punkts 21 ir ēna, ko zinamais lodes F_I punkts met uz lodi F_{II}.

Velkot no 21_0 līdzteci ar $F_{II_0}F_{II_1}$, līdz krustošanai ar *s*, dabujam meklejamās ēnas horicontalo projekciju 21_1.

Ja no centriem 17_0 un 19_0 vilktās aploces krustojas, tad šie punkti ir savienotie stāvokļi M_0 un N_0 no punktiem M un N, kas pieder doto ložu krustošanās līknei. Velkot no M_0 un N_0 līdzteces ar F_{II_0} F_{II_1}, līdz krustošanai ar *s*, dabujam punktu M un N horicontalās projekcijas M_1 un N_1. Tapēc aizrādito paņēmienu varam ari lietot atsevišķus krustošanās līknes punktus noteicot.

Krītošās ēnas horicontalā projekcija no vienas puses sniedzas līdz punktam 22_1, kas pazīstamajā veidā kontruets ar punkta 22′ palīdzibu, kuŗā krustojas doto ložu krītošās horicontalās ēnas.

Analoģiski tam, kā mēs konstruejām ēnas horicontalo projekciju, kas no lodes F_I krīt uz lodi F_{II}, konstruejama ari šās ēnas vertikalā projekcija.

Velkot ar patvaļigu radiusu $F_{II_2} - 23_2$ aploci, atrodam 23_0, pēc tam uzmeklejam platuma aploces centra savienoto stavokli 24_0 un attiecigo ēnu 24″. Ap 24″ velkam aploci ar radiusu $F_{II_2} - 23_2 = 24_0 - 23_0$, un atrodam punktus 25″ un 26″, kuŗos aploce ar centru 24″ krustojas ar lodes F_I verkalo krītošo ēnu. Velkot no F_{II_2} taisnes $F_{II_2} - 25_2 \parallel 24'' - 25''$ un $F_{II_2} - 26_2 \parallel$ $\parallel 24'' - 26''$, uz pieņemtas platuma aploces dabujam ēnas projekcijas 25_2 un 26_2. Pēc tam nav gŗuti uzmeklet 25_1 un 26_1.

Pēc otra paņēmiena ir konstruets ēnas punkts 31_2. Tam nolūkam ir vilkta vertikali projecejoša plakne, kuŗas pēdu linija $t \parallel l_2$. Pēc tam uzmekleti punkti 27_2 un 28_2, kuŗos *t* krusto F_{I_2} F_{I_0}' un F_{II_2} F_{II_0}'. Pēc 27_2 un 28_2 atrasti savienotie stāvokļi 27_0 un 28_0, pie kam $27_2 - 27_0 = F_{I_1}$ F_{I_x} un $28_2 - 28_0 = F_{II_1}$ F_{II_x}. Pēc tam ar radiusiem $27_2 - 29_2$ un $28_2 - 30_2$ velkam ap centriem 27_0 un 28_0 aploces. Pret pirmo šo aploci ir vilkta pieskare, līdztekus l_{0I}', vaj l_{0II}', un uzmeklets šās pieskares krustošanās punkts 31_0 ar aploci 28_0. Velkot pēc tam no 31_0 līdzteci ar F_{II_2} F_{II_0}', līdz krustošanai ar t, iegūstam meklejamo ēnas punktu 31_2.

Aploces ar centriem 27_0 un 28_0 krustojas divos punktos, no kuŗiem rasejumā atzīmets viens punkts 32_0. Velkot no 32_0 līdzteci ar F_{II_2} F_{II_0}', līdz krustošanai ar t, dabujam zinama doto ložu krustošanās līknei piederiga punkta vertikalo projekciju 32_2. (Vietas trūkuma dēļ punkts 32_2 rasejumā nav atzīmets).

Krītoša ēna no vienas puses ierobežojas ar punktu 33_2, kas konstruets ar punkta 33″ palīdzibu, kuŗā krustojas doto ložu vertikalās krītošās ēnas.

Trešā daļa. Perspektive.

I nodaļa. Vispārejie noteikumi.

Ša kursa sākumā (1—6 §§) mēs jau iepazinamies ar vispārejiem centralās projecešanas pamatjēdzieniem; pie tam tika pieņemts, ka punktā Ω atrodas projekciju centrs, vaj aplūkotaja acs. Tādos noteikumos patvaļiga ķermeņa, vaj figuras centralā projekcija atstāj uz aplūkotaju tādu pašu iespaidu, kā oriģinalais telpā esošais priekšmets.

Kā jau aizrādits, patvaļiga priekšmeta centralo projekciju uz attēlu plaknes sauc par dotā priekšmeta p e r s p e k t i v i; tapēc ari tēlojošās ģeometrijas mācibas daļu, kuŗā tuvaki aplūko paņēmienus priekšmetus pareizi attēlot plakanā perspektiviskā rasejumā, sauc par p e r s p e k t i v i.

Pastāv vairaki paņēmieni priekšmetus attēlot perspektiviskā rasejumā, bet šie paņēmieni nav tomēr viens no otra pilnigi atšķirami, jo viņi atbalstās uz kopejiem pamatnosacijumiem un konstrukcijām, ar kuŗām tapēc vispirms jaiepazistās.

252 §. Patvaļigas taisnes perspektive.

Telpā doti: patvaļiga taisne a, attēlu plakne K un aplūkotaja acs Ω (328 ras.).

Pieņemsim, ka taisne a krusto attēlu plakni K punktā T. Punkts T ir taisnes a pēdu punkts attiecibā uz attēlu plakni K. Punkts T guļ uz attēlu plaknes, tapēc viņa perspektive T_p*) saplūst ar T, t. i. $T_p = T$.

Vilksim caur centru Ω taisni ΩU_p, līdztekus taisnei a, un atzīmesim viņas krustošanās punktu U_p ar attēlu plakni K. Taisni ΩU_p sauc par dotās taisnes a l ī d z t e k u s p r o j e c e j o š o s t a r u.

Līdzteku taisnes, kā zinams, sauc tādas taisnes, kas krustojas bezgalibā, tapēc, acim redzot, punkts U_p ir bezgali attālinata punkta U perspektive, kuŗā taisne a krustojas ar līdztekus projecejošo staru ΩU_p.

Bezgali attalinato ģeometrisko elementu apzīmešanai lietosim indeksu ∞.

Tā tad, p u n k t s U_p i r d o t ā s t a i s n e s a b e z g a l i a t t ā l i n a t a p u n k t a U_∞ p e r s p e k t i v e.

---

*) Ar indeksu „p" turpmak apzīmesim perspektiviskos attēlus.

Pēc 2 § katras taisnes centralā projekcija ir taisne; tapēc taisnes a perspektivi a_p iegūsim, savienojot divus punktu T un U∞, guļošo uz dotās taisnes, perspektiviskos attēlus T_p un U_p, t. i. $a_p = T_p U_p$.

Ja pretejā ceļā, pēc dotās perspektives a_p un dotā centra Ω jaatrod oriģinalās taisnes a stāvoklis telpā, tad jabūt zinamiem punktu T_p un U_p stāvokļiem uz dotās perspektives a_p. Savienojot U_p ar Ω un velkot caur T_p līdzteci ar $U_p \Omega$, iegūsim oriģinalās taisnes a stāvokli telpā.

Ja uz a_p ir dots patvaļiga punkta perspektivisks attēls B_p, tad oriģinalā punkta B stāvokļa telpā noteikšanai, B_p jasavieno ar Ω un jauzmeklē šā stara krustošanās punkts B ar oriģinalo taisni a.

Tā tad, punkta stāvoklis telpā noteikts, ja viņa perspektive dota uz patvaļigas taisnes perspektives.

Vilksim tagad caur centru, vaj aci Ω plakni J, līdzteci attēlu plaknei K. Pieņemsim, ka plakne J krusto doto taisni a punktā Q. Lai iegūtu punkta Q perspektivi, jaatron stara ΩQ krustošanās punkts ar attēlu plakni K. Stars ΩQ vienā un tai pašā laikā pieder plaknei J un plaknei $\Omega Q T_p U_p$ un tapēc noteic šo plakņu krustošanās taisni.

Plakne K krusto plakni $\Omega Q T_p U_p$ pa taisni a_p. Divas līdzteku plaknes J un K, kā zinams, krustojas ar trešo plakni $\Omega Q T_p U_p$ pa līdzteku taisnēm; tapēc taisnei ΩQ jabūt līdztecei taisnei $a_p = U_p T_p$. Bet līdzteku taisnes ΩQ un a_p krustojas bezgalibā. Tā tad plaknei J piederiga punkta Q perspektive atrodas uz a_p bezgalibā. Tapēc punktu Q sauc par zuduma punktu, jo viņa perspektive Q_p izzūd uz a_p bezgalibā. Punkta Q perspektivi apzīmē ar $Q_p\infty$.

Līdzigā kārtā kautkāda cita, uz plaknes J guļoša punkta perspektive atrodas uz plaknes K bezgalibā, tapēc plakni J sauc par zuduma plakni.

Tā tad, uz dotās taisnes a izšķiram trīs raksturigus punktus: pēdu punktu T, bezgali attālinatu punktu U∞ un zuduma punktu Q. Šiem punktiem atbilst trīs raksturigi perspektives punkti T_p, U_p un $Q_p\infty$.

Plaknes K un J, vaj punkti T un Q sadala taisni a trijās daļās I, II un III, kuŗām atbilst perspektives a_p daļas I_p, II_p un III_p.

Lai noteiktu perspektives daļas I_p, II_p un III_p, aplūkosim pēc kārtas taisnes a daļas I, II un III.

Pieņemsim uz I daļas patvaļigu punktu A un uzmeklesim ar stara ΩA palīdzibu punkta A perspektivi A_p uz a_p. Iedomasimies tagad, ka punkts A iesāk kusteties no punkta U ∞, virzidamies pa taisni a, ar šautriņu aizrādītā virzienā, tuvojoties punktam Q. Pie tam punkta A perspektive A_p virzas pa perspektivi a_p uz leju, attiecigās, pie punkta A_p aizrāditas šautriņas virzienā. Ja punkts A, kustoties pa a, sasniedz punktu

Q, tad attiecigā perspektive $Q_p \infty$ atrodas uz taisnes a_p apakšejās daļas bezgalibā, t. i. perspektive $Q_p \infty$ izzūd bezgalibā.

Kā augšā aizrādits, bezgali attālinata, uz taisnes a guļoša punkta $U\infty$ perspektive ir U_p. Tas nozīme, ka taisnes a bezgali gaŗai daļai $I = U_\infty Q$ atbilst bezgali gaŗa perspektives a_p daļa $I_p = U_p Q_p \infty$.

Pieņemsim tagad, ka punkts A pārvietojies stāvoklī B uz taisnes a II daļas Pie tam punkta B perspektivi, t. i. B_p iegūstam uz perspektives a_p augšejās daļas. Ja punkts B atrastos ļoti tuvu punktam Q, bet vēl uz taisnes a II daļas, tad tomēr viņa perspektive B_p atrastos uz perspektives a_p augšejās daļas, lai gan ļoti tālu. Bet augšā mēs dabujam, ka punkta Q perspektive atrodas uz perspektives a_p apakšejās daļas bezgalibā Tapēc var pieņemt, ka tanī momentā, kad punkts A savā kustibā ieņem punkta Q stāvokli, viņa perspektivi $Q_p \infty$ dabujam bezgalibā, kā uz perspektives a_p augšejās, tā ari uz apakšejās dalas. Tapēc abus bezgali tālus perspektives a_p galus varam apzīmet ar $Q_p \infty$. Bet tā kā uz katras taisnes mēs izšķiram tikai vienu vienigu bezgali tālu punktu, tad dabujam, itkā perspektive a_p slēdzas bezgalibā punktā $Q_p \infty$.

Ja punkts A, pa taisnes a II daļu kustedamies, sasniedz punktu T, tad viņa perspektive $T_p = T$. Punktam A no Q līdz T virzoties, viņa perspektive virzas uz a_p aizrāditajā virzienā no bezgalibas (no augšas) līdz T_p. Tā tad, taisnes a aprobežotai daļai $II = QT$ atbilst bezgali gaŗa perspektives daļa $II_p = Q_{p\infty} T_p$, kas sniedzas no augšas līdz punktam T_p.

Pieņemsim tālak, ka punkts A pārvietojies uz taisnes a III daļas stāvoklī C. Punkta C perspektive ir C_p. Ja punkts A aizrāditajā virzienā pārvietodamies sasniedz bezgali attālinato punktu $U\infty$ uz taisnes a, tad viņa perspektive attēlojas jau agrak uzmekleta punkta U_p veidā. Tā tad, taisnes a bezgali gaŗai daļai $III = TU\infty$ atbilst aprobežotais perspektives a_p nogrieznis $III_p = T_p U_p$.

Punkts A, iesākdams savu kustibu no bezgali attālinata punkta $U\infty$ uz taisnes a labās puses, kustedamies sasniedz to pašu punktu $U\infty$ uz taisnes a kreisās puses, t. i. taisne a itkā slēdzas bezgali attālinatā punktā $U\infty$.

Tā tad, dotā taisne a un viņas perspektive a_p slēdzas divos dažados bezgali attālinatos punktos ($U\infty$ un $Q_p\infty$), kas neatbilst viens otram.

Ja attēlu plakne K caurspīdiga un centrā Ω atrodas aplūkotaja acs, kas raugas uz attēlu plakni, tad, saprotams, uz attēlu plaknes var attēlot tikai taisnes a II un III daļu; tapēc realā nozīme ir tikai perspektives a_p II_p un III_p daļai, bet daļa I_p ir tikai dotās taisnes I daļas, kas aiz aplūkotaja muguras, šķietamais attēls.

Tā tad taisnes a patiesā perspektive a_p sniedzas no bezgalibas līdz punktam U_p, tapēc punktu U_p sauc par perspektives a_p robežpunktu.

Kā rasejumā redzams, perspektives a_p patiesā daļa, sākot no robežpunkta U_p, iet caur pēdu punktu $T = T_p$ un izzūd bezgalibā.

Perspektives a_p šķietamā daļa rasejumā pavisam netiek aizrādita, vaj viņu aizrāda ar raustitu taisni.

Turpmakos izskaidrojumos, vienkāršibas labā, punktu T_p apzīmesim tikai ar T.

Vilksim no centra Ω stateni pret attēlu plakni K un atzīmesim šā stateņa krustošanās punktu ar attēlu plakni K ar Γ. Taisni $\Omega\Gamma$ sauc par galveno staru, bet punktu Γ — par galveno punktu. Nogrieznis $\Omega\Gamma = r$ izmēro aplūkotaja acs atstatumu no attēlu plaknes.

Kā 328 ras. redzams, tie oriģinalie punkti, kuŗu perspektives tālak atstāj no robežpunkta U_p, aplūkotajam atrodas tuvaki un ari otradi. Tā, piemēram rasejumā redzams, ka punkts B atrodas aplūkotajam Ω tuvaki, nekā punkts C. Pie tam izrādas, ka perspektive B_p tālak atstāj no U_p, nekā perspektive C_p.

253 §. Patvaļigu līdzteku taišņu perspektives.

Pieņemsim, ka ir dotas patvaļigas līdzteku taisnes a, b un c (329 ras.). Dotām taisnēm caur Ω līdztekus vilkta taisne ΩU_p noteic viņu kopejo līdztekus projecejošo staru. Tapēc doto taišņu perspektives a_p, b_p un c_p iet caur kopejo punktu U_p un caur attiecigiem pēdu punktiem T_I, T_{II} un T_{III}.

Tā tad līdzteku taišņu perspektives saiet kopejā robežpunktā U_p, ko tapēc sauc ari par līdzteku taišņu saiešanās punktu.

254 §. Pret K statenisko taišņu perspektives.

Pieņemsim, ka ir dotas taisnes a, b un c, kas stateniskas pret attēlu plakni K (330 ras.).

Šinī gadijumā kopejais līdztekus projecejošais stars ΩU_p saplūst ar galveno staru $\Omega\Gamma$, tapēc ari pret K stateniskо taišņu saiešanās punkts U_p saplūst ar galveno punktu Γ.

255 §. Horicontalo taišņu perspektives.

Pieņemsim, ka ir dotas patvaļigas horicontalās taisnes a, b un c, kas neguļ vienā plaknē un veido ar attēlu plakni K patvaļigus leņķus (331 ras.).

Doto taišņu līdztekus projecejošie stari ΩU_{I_p}, ΩU_{II_p} un ΩU_{III_p} iet caur centru Ω un viņi guļ kopejā horicontalajā plaknē H', ejošā caur centru Ω. Caur aplūkotaja aci Ω ejošu horicontalo plakni H' sauc par *apvāršņa plakni*, bet taisni h, pa kuŗu apvāršņa plakne H' krusto attēlu plakni K, sauc par *apvārsni*. Kā rasejumā redzams, *visu kautkādu horicontalo taišņu robež- vaj saiešanās punkti guļ uz apvāršņa* h.

Parasti attēlu plakni K pieņem vertikalajā stāvoklī. Tādā gadijumā galvenais stars r guļ uz apvāršņa plaknes, t. i. *apvārsnis* h *iet caur galveno punktu* Γ.

Ja atsevišķā gadijumā kautkāda horicontalā taisne, piemēram, $c \perp K$, tad viņas saiešanās punkts U_{III_p} saplūst ar galveno punktu Γ, tapēc *visu, pret attēlu plakni K statenisko horicontalo taišņu perspektives iet caur kopejo saiešanās punktu, kuŗš saplūst ar galveno punktu* Γ.

256 §. Attēlu plaknei K līdzteku taišņu perspektives.

Pieņemsim, ka ir dotas patvaļigas, attēlu plaknei K līdzteku taisnes AB un CD (332 ras.).

Doto taišņu pēdu punkti, acim redzot, atrodas bezgalibā. Taišņu AB un CD kopejs līdztekus projecejošais stars iet līdztekus attēlu plaknei K, tapēc doto taišņu kopejais saiešanās punkts atrodas uz K bezgalibā. Caur kopejo, bezgali attālinatu punktu ejošas taisnes ir līdzteces, tapēc perspektive $A_pB_p \parallel C_pD_p$.

Lai šinī gadijumā aizrāditu paivaļigas taisnes AB perspektivi A_pB_p, jakonstruē divu uz dotās taisnes guļošo punktu A un B perspektives. Ta, pat konstruejama ari taisnes CD perspektive C_pD_p.

Kā zinams, plakne ΩA_pB_p, kas iet caur attēlu plaknei K līdzteku taisni AB, krusto šo plakni pa taisni $A_pB_p \parallel AB$. Tamlīdzigi dabujam, ka $C_pD_p \parallel CD$.

Tā tad dabujam, ka *attēlu plaknei K līdzteku taišņu AB un CD perspektives A_pB_p un C_pD_p savstarpeji līdzteces un līdzteces dotām oriģinalām taisnēm AB un CD*.

Tā kā doto taišņu pēdu un saiešanās punkti atrodas bezgalibā, tad 252 § aizrāditā kārtā nevaram pretejā ceļā pēc dotās perspektives (A_pB_p) noteikt oriģinalās taisnes (AB) stāvokli telpā. Lai aplūkotā gadijumā noteiktu oriģinalās taisnes stāvokli telpā, viņa japieņem uz kaut kādas plaknes, kas krusto attēlu plakni, kā tas tiks turpmak izskaidrots.

257 §. Vertikalo taišņu perspektives.

Pieņemsim, ka ir dotas patvaļigas vertikalās taisnes AB un CD (333 ras.), kas krusto apvāršņa plakni H' punktos A un C.

Aplūkosim, piemēram, taisni AB. Punkta A perspektivi A_p, saprotams, dabujam uz apvāršņa h tanī punktā, kuŗā projecejošais stars ΩA krustojas ar attēlu plakni K. Projecejoša plakne ΩAB iet caur taisni AB, kas stateniska pret H', tapēc plakne $\Omega AB \perp H'$. Attēlu plakne K tapat ir stateniska pret H', tapēc projecejošai plaknei ΩAB un attēlu plaknei K jakrustojās pa taisni $A_p B_p$, kas stateniska pret apvāršņa plaknī H' un tapēc ari stateniska pret apvārsni h.

Taisnes AB un CD $\parallel$ K, tapēc ari viņu perspektives pēc 256 § savstarpeji līdzteces. Tā tad, vertikalo taišņu perspektives savstarpeji līdzteces un stateniskas pret apvārsni h.

Pamatojoties uz aizrāditiem vispārejiem nosacijumiem, aplūkosim tagad metodes, kā konstruet patvaļigu priekšmetu perspektives plakanā rasejumā Lai gan šās metodes atbalstās, kā jau aizrādits, uz kopejiem paņēmieniem tomēr būtibā viņas var sadalit sekošās trijās metodēs:

1) perspektives konstruešana ortogonalās projekcijās;

2) perspektives konstruešana ar pēdu un saiešanās liniju palīdzibu;

3) perspektives konstruešana ar atbalstpunktu palīdzibu.

II nodaļa. Perspektives konstruešana ortogonalās projekcijās.

258 §. Vispārejie noteikumi.

Kautkāda priekšmeta perspektives konstruešanai pēc ša paņēmiena, dotais priekšmets, aplūkotaja acs un attēlu plakne jaattēlo ortogonalās projekcijās uz H un V. Attēlu plakni K vienmēr pieņem stateniski pret H, pie kam izšķiram sekošus gadijumus: 1) K saplūst ar V, 2) K $\parallel$ V un 3) K veido ar V patvaļigu leņķi.

Aplūkosim papriekšu pirmo gadijumu, kad attēlu plakne K saplūst ar vertikalo projekciju plakni V. Tādā gadijumā projecejošo staru krustošanās punkti ar V. t. i. viņu vertikalie pēdu punkti noteic aplūkojamo punktu perspektives. Tapēc patvaļiga punkta perspektives noteikšanai, jakonstruē attieciga projecejoša stara vertikalais pēdu punkts. Šis uzdevums atrisinajams pēc vispārejiem, ortogonalās projekcijās aplūkotiem paņēmieniem.

259 §. Patvaļiga punkta perspektive.

Pieņemsim, ka janoteic patvaļiga punkta A perspektive (334 ras.).

Galvenais stars ir statenisks pret plakni V = K, tapēc galvenais punkts Γ sakrīt ar acs vertikalo projekciju, t. i. $\Gamma = \Omega_2$.

Noteikuši stara ΩA vertikalo pēdu punktu, iegūstam perspektivi A_p, kas sakrīt ar savu vertikalo projekciju, t. i. $A_p = A_{p_2}$.

335 rasejumā aizrādita uz H guļoša punkta A perspektive $A_p = A_{p_2}$.

Ja dotais punkts A (336 ras.) guļ uz apvāršņa plaknes, tad viņa vertikalā projekcija A_2 un perspektive A_p guļ uz apvāršņa $h \parallel OX$.

Ja dots punkts A (337 ras.), kas guļ uz plaknes $K = V$, tad viņa perspektive saplūst ar pašu oriģinalo punktu, vaj viņa vertikalo projekciju, t. i. $A_p = A_2$.

260 §. Patvaļigas horicontalās taisnes perspektive.

Lai noteiktu patvaļigas ar H līdzteces taisnes a perspektivi (338 ras.), mēs noteicam viņas pēdu punktu T, pēc tam caur Ω velkam līdztekus projecejošo staru un atrodam šā stara pēdu, vaj saiešanās punktu U_p. Taisne $a_p = T U_{p_2}$ ir mekletā perspektive.

Dotās taisnes a patvaļiga punkta B perspektivi B_p dabujam stara $\Omega_2 B_2$ krustošanās punktā ar dotās taisnes perspektivi a_p.

261 §. Patvaļigas uz H guļošas taisnes perspektive.

Ja ir dota patvaļiga uz horicontalās projekciju plaknes guļoša taisne a (339 ras.), tad viņas pēdu punkts T atrodas uz ass OX. Savienojot punktu T ar līdztekus projecejoša stara saiešanās punktu U_{p_2}, iegustam meklejamo perspektivi a_p.

262 §. Uz H guļošas un ar V 45° leņķi veidojošas taisnes perspektive.

Pieņemsim, ka dotā taisne a guļ uz H un veido ar V 45° leņķi (340 ras.).

Tadā gadijumā aizrādito leņķi veido a_1 ar asi OX. Velkot caur Ω līdztekus projecejošo staru, dabusim, ka ari $\Omega_1 U_{p_1}$ veido ar OX to pašu leņķi. Trijstūrī $\Omega_1 \Omega_x U_{p_1}$ leņķi $\Omega_1 U_{p_1} \Omega_x$ un $U_{p_1} \Omega_1 \Omega_x$ līdzinas 45°, tapēc šis trijstūris ir vienadsānu trijstūris, kuŗā $\Omega_1 \Omega_x = \Omega_x U_{p_1}$.

No otrās puses $\Omega_x U_{p_1} = \Omega_2 U_{p_2}$. Tas nozīme, ka $\Omega_1 \Omega_x = U_{p_2} \Omega_2 = U_{p_2} \Gamma$. Tā tad dabujam, ka taisnes a, kas guļ uz horicontalās plaknes un veido ar V 45° leņķi, — saiešanās punkts U_{p_2} guļ uz apvāršņa h, pie kam šā saiešanās punkta vertikalā projekcija atstāj no galvenā punkta Γ tādā pašā atstatumā $U_{p_2} \Gamma$, kā aplūkotaja acs no attēlu plaknes $K = V$, t. i. $U_{p_2} \Gamma = \Omega_1 \Omega_x$. Tādu saiešanās punktu (U_{p_2}) sauc par attālumu punktu.

To pašu saiešanās punktu, saprotams, dabujam priekš visām horicontalām taisnēm, guļošām dažadās plaknēs, un kuŗām aizrāditais virziens.

Tā tad, visu horicontalo taišņu, — kas ar plakni $K = V$ veido 45^0 leņķi, — attālumu punkts guļ uz apvāršņa, tikpat attālu no galvenā punkta, kā aplūkotaja acs no attēlu plaknes.

Taisnes a patvaļiga punkta B perspektive B_p noteicama parastā kārtā.

263 §. Uz H guļošas un pret V stateniskas taisnes perspektive.

Ja dotā taisne a (341 ras.) guļ uz plaknes H un ir stateniska pret V, tad līdztekus projecejošais stars saplūst ar galveno staru, tapēc $U_{p_2} = \Omega_2 = \Gamma$. Perspektive $a_p = T\,U_{p_2}$.

Patvaļiga, uz taisnes a guļoša punkta B perspektive noteicama ar stara ΩB, kas vikts caur doto punktu, palīdzibu.

Visām līdzteku taisnēm ir kopejs saiešanās punkts, tapēc visu, pret plakni $K = V$ stateniško taišņu perspektives iet caur kopejo punktu $U_{p_2} = \Omega_2 = \Gamma$.

264 §. Pret H stateniskas taisnes perspektive.

Ja dotā taisne a stateniska pret H (342 ras.), tad viņas līdztekus projecejošais stars krustojas ar plakni $K = V$ bezgalibā, t. i. taisnes a saiešanās punkts guļ bezgalibā.

Pēc 257 § taisnes a perspektivei a_p jabūt stateniskai pret h, vaj OX. Tapēc, lai noteiktu perspektivi a'_p, pietiek, ja atrodam patvaļiga, dotai taisnei piederiga punkta B perspektivi B_p un caur šo punktu velkam taisni $a_p \perp h$.

265 §. Patvaļigas taisnes perspektive.

Patvaļigas taisnes a perspektive a_p (343 ras.) noteicama pēc vispārejā paņēmiena (252 §) ar viņas pēdu punkta T un līdztekus projecejoša stara saiešanās punkta U_{p_2} palīdzibu.

Dotās taisnes a punktu A un B perspektives A_p un B_p dabujam tanīs vietās, kur attiecigo projecejošo staru ΩA un ΩB vertikalās projekcijas krustojas ar perspektivi a_p.

266 §. Patvaļigas figuras perspektive.

Pieņemsim, ka janoteic patvaļigas plakanas figuras, trijstūŗa ABC veidā, perspektive (344 ras.).

Dotā trijstūŗa virsotnes pieņemtas šādi: virsotne A guļ uz H, B uz V, bet virsotnei C ir patvaļigs stāvoklis telpā. Noteicot trijstūŗa virsotņu perspektives un konstruetos punktus savienojot, iegūstam meklejamo perspektivi $A_p B_p C_p$.

Kā rasejumā redzams, perspektive $A_p B_p C_p$ pa daļai sakrīt ar dotā trijstūŗa horicontalo un vertikalo projekciju.

Sarežģitaku figuru perspektives konstruejot, šīs apstāklis ievērojamā kārtā pamazina rasejuma uzskatamibu un skaidribu. Tapēc pieņemts perspektivi konstruet atsevišķā rasejumā, kā tas 269 § tiks aizrādits.

267 §. Patvaļigas uz H guļošas figuras perspektive.

Pieņemsim, ka jakonstruē patvaļiga, uz H guļoša kvadrata ABCD perspektive (345 ras.).

Tam nolūkam papriekšu noteicam patvaļigas kvadrata virsotnes A perspektivi A_p un pēc tam ar līdztekus projecejošo staru palīdzibu noteicam dotā kvadrata malu saiešanās punktus $U_{I_{p_2}}$ un $U_{II_{p_2}}$. Kvadrata malas ir horicontalās taisnes, tapēc šo malu saiešanās punktiem jaguļ uz *h*.

Savienojot A_p ar $U_{I_{p_2}}$ un $U_{II_{p_2}}$, iegūstam perspektivu $A_p B_p$ un $A_p D_p$ virzienus. Uz atrastiem virzieniem nav gŗūti noteikt punktu B un D perspektives B_p un D_p.

Mala $BC \parallel AD$, tapēc perspektivei $B_p C_p$ jaiet caur jau konstruetu saiešanās punktu $U_{II_{p_2}}$. Līdzigā kārtā perspektivei $D_p C_p$ jaiet caur saiešanās punktu $U_{I_{p_2}}$. Šo taisņu krustošanās punkts noteic ceturtās kvadrata virsotnes perspektivi C_p, kas kontroles dēļ guļ uz $\Omega_2 C_2$.

268 §. Attēlu plakne K || V.

Dažreiz attēlu K plakni pieņem līdztekus stāvoklī ar V. Tādā gadijumā patvaļigas figuras perspektiviskais attēls projecejas uz V dabiskā lielumā. Tapēc perspektives vertikalo projekciju varam uzlūkot kā dotās figuras perspektivi.

Pieņemsim, piemēram, ka janoteic patvaļiga trijstūŗa ABC perspektive (346 ras.), pie tam attēlu plaknes K horicontalā pēdu linija $s \parallel OX$. Tam nolūkam konstruejam perspektivu A_p, B_p un C_p horicontalās projekcijas A_{p_1}, B_{p_1} un C_{p_1}, kuŗos redzes staru horicontalās projekcijas $\Omega_1 A_1$, $\Omega_1 B_1$ un $\Omega_1 C_1$ krustojas ar attēlu plaknes K horicontalo pēdu liniju *s*. Pēc tam uz attiecigām vertikalām projekcijām $\Omega_2 A_2$, $\Omega_2 B_2$ un $\Omega_2 C_2$ noteicam meklejamos punktus A_{p_2}, B_{p_2} un C_{p_2}.

Konstruetos punktus savienodami, iegūstam dotā trijstūŗa perspektivi $A_{p_2} B_{p_2} C_{p_2}$.

Patvaļigās malas perspektives virzienu, piemēram, $A_{p_2} B_{p_2}$ varam noteikt ari šādi: konstruesim taisnes AB pēdu punkta T, attiecibā uz pļakni K, horicontalo projekciju $T_1 = A_1B_1 \times s$. Uz A_2B_2 uzmeklejam attiecigo vertikalo projekciju T_2, un pēc tam noteicam taisnes A B līdztekus projecejoša stara saiešanās punkta U_p vertikalo projekciju U_{p_2}.

Konstruetos punktus U_{p_2} un T_2 savienodami, dabujam meklejamās perspektives $A_{p_2} B_{p_2}$ virzienu.

269 §. Attēlu plakne K veido ar V patvaļigu leņķi.

Pieņemsim, ka jakonstruē pieminekļa, kas aizrādits ortogonalās projekcijās 347a rasejumā, perspektive. Aplūkotaja acs Ω stāvoklis telpā ir dots.

Pieņemot attēlu plakni, jaievēro sekojošais. Kaut kādu attēlu, vaj gleznu aplūkojot, novērotajs nostājas tā, lai galvenais redzes stars, kas no aplūkotaja acs (Ω) vilkts stateniski pret attēlu plakni (K), krustotu attēlu, vaj gleznu viņa centrā. Tapēc g a l v e n o p u n k t u s a u c a r i p a r a t t ē l a, v a j g l e z n a s c e n t r u.

Aplūkotajs, ieņemot aizrādito stāvokli pret gleznu, var vienadā mērā aplūkot visas atsevišķas gleznas daļas. Pie tam pret gleznas galejam apveidam vilktie redzes stari veido ar galveno staru vienlīdzigus leņķus.

Uz aizrādito pamatodamies, techniskā rasejumā (347a ras.) pret doto priekšmetu velkam galejus pieskaršanās starus. Šo staru horicontalās projekcijas ir $\Omega_1 B_1$ un $\Omega_1 C_1$. Dalot leņķi $B_1 \Omega_1 C_1$ uz pusēm, un velkot leņķa $\alpha = B_1 \Omega_1 C_1$ bissektrisi, iegūstam galvenā redzes stara horicontalo projekciju.

Attēlu plaknei K jabūt stateniskai pret galveno staru, tapēc attēlu plaknes horicontalā pēdu linija s javelk stateniski pret leņķa α bissektrisi. Aizrādītās taisnes krustojas punktā Γ_1, kas ir galvenā punkta Γ horicontalā projekcija. Pēc Γ_1 nav grūti uz apvāršņa h, kas caur Ω_2 iet līdztekus OX, noteikt Γ_2. Nogrieznis $\Omega_1 \Gamma_1$ noteic aplūkotaja acs atstatumu no attēlu plaknes K.

Aplūkojot ne visai lielu gleznu, vaj rasejumu, aplūkotajs nostājas tādā atstatumā no rasejuma, lai visskaidraki varetu atšķirt atsevišķas rasejuma daļas. Šis atstatums nedrīkst būt pārak mazs, jo pretejā gadijumā aplūkotaja acs zaudē spēju skaidri atšķirt atsevišķas rasejuma daļas. Acs spēju piemēroties atstatumam, no kuŗa aplūko doto rasejumu, sauc par a c s p i e m ē r o š a n ā s s p ē j u (a k o m o d a c i j u).

Parasti acs piemērošanās spēja zūd, ja rasejumu, vaj priekšmetu aplūkojam no atstatuma, kas mazaks par 25 cm. Tapēc 347a rasejumā normalos apstākļos nogrieznim $\Omega_1 \Gamma_1$ jabūt ne mazakam par 25 cm.

Pēc aizrāditā nosacijuma 347a rasejums ieņem diezgan daudz vietas, tapēc ērtaki pieņemt, ka nogrieznis $\Omega_1 \Gamma_1$, kā ari viss 347a rasejumā dotais priekšmets attēlots kautkādā mērogā, piemēram, 1 : 2. Mūsu rasejumā atstatums $\Omega_1 \Gamma_1$ līdzinās 12,3 cm., bet patiesais acs atstatums no rasejuma plaknes līdzinas $2 \times 12,3 = 24,6$ cm., t. i. mazliet mazak, kā normali japieņem. Atkarībā no acs atstatuma no rasejumu plaknes (K), citreiz vēlams $\Omega_1 \Gamma_1$ pieņemt vēl lielaku.

Attēlu plakni K pieņemot, bez tam jaievēro, ka priekšmetam aiz attēlu plaknes atrodoties, vispārejā gadijumā dabujam dotā priekšmeta perspektivi samazinatā veidā. Bet dotam priekšmetam priekš attēlu plaknes atrodoties, viņa perspektivi dabujam palielinatā veidā. Saprotams, ka vismazako priekšmeta sagrozijumu dabujam tad, ja attēlu plakne vilkta caur pašu doto priekšmetu, kā tas ari izdarits aplūkojamā rasejumā (347^a ras.).

Acs un attēlu plaknes savstarpejus stāvokļus tā noteikuši, tagad konstruesim dotā pieminekļa perspektivi.

Konstruesim, piemēram, punkta A perspektivi. Meklejamo perspektivi A_p dabujam projecejoša stara ΩA krustošanās punktā ar attēlu plakni K. Perspektives horicontalā projekcija $A_{p_1} = \Omega_1 A_1 \times s$. Vertikalā projekcija A_{p_2} no vienas puses guļ uz attiecigā projecejoša stara vertikalās projekcijas $\Omega_2 A_2$, bet no otrās puses viņai jaatrodās uz stateņa, kas no A_{p_1} vilkts pret asi OX; tapēc nav grūti noteikt A_{p_2}. Līdzigi varam konstruet pārejo, dotam piemineklim piederigo punktu perspektives abās projekcijās.

Mūsu gadijumā attēlu plaknes K pēdu linija s veido ar asi OX patvaļigu leņķi, tapēc dotā priekšmeta vertikalā projekcija neattēlo priekšmeta perspektivi dabiskā lielumā, kā iepriekšejos pantos, bet priekšmeta perspektive savā vertikalajā projekcijā attēlojas sagrozitā veidā. Lai iegūtu perspektivi dabiskā lielumā, tad attēlu plakne, griežot ap s, jasavieno ar rasejuma plakni. Pie tam rodas tā neērtiba, ka perspektive pa daļai sakrīt ar dotā priekšmeta ortogonalām projekcijām. Tapēc perspektivisko attēlu parasti aizrāda atsevišķā rasejumā (347^b ras.), pie kam perspektives konstruešanai vajadzigie mēri noteikti 347^a rasejumā.

Perspektivi, t. i. 347^b ras. varam konstruet kaut kuŗā rasejuma vietā, tapēc apvaršņa un uz viņa guļoša galvenā punkta Γ stāvokli varam pieņemt pilnigi patvaļigi. Lai tagad 347^b rasejumā noteiktu, piemēram, punkta A perspektivi, rīkojamies šādi.*).

Punkta A perspektivi A_p 347^a rasejumā dabujām uz vertikalās taisnes $A_p A_h$, kas vilkta caur attēlu plaknes punktu A_p, pie tam punkts A_h ir šās vertikalās taisnes krustošanās punkts ar apvārsni h. Taisne $A_p A_h$ horicontalajā projekcijā attēlojas punkta $A_{p_1} = A_{h_1}$ veidā, bet attieciga vertikalā projekcija $A_{p_2} A_{h_2}$ ir stateniska pret OX, vaj h, un iet caur A_{p_1}. Punkta A_h vertikalā projekcija A_{h_2}, saprotams, guļ uz h, pie kam nogrieznis $A_{h_2} A_{p_2}$ noteic perspektives A_p patieso atstatumu no apvāršņa h. Nogrieznis $A_{p_1} \Gamma_1$ līdzinas punkta A_h patiesam atstatumam no galvenā punkta Γ.

---

*) 347^b rasejumā, kā ari daļā turpmako rasejumu patvaļiga punkta, vaj taisnes perspektive atzīmeta bez indekša „p“.

Uz aizrādito pamatodamies, vertikalās taisnes $A_h A_p$ stāvokli 347 b rasejumā dabujam šādi. Izmērojam 347 a rasejumā nogriezni $A_{p_1} \Gamma_1$ un šo nogriezni 347 b rasejumā nospraužam uz apvāršņa h divas reizes uz labo pusi no galvenā punkta Γ, jo punkts A_{p_1} 347 a rasejumā atrodas pa labi no Γ_1. Tā iegūstam punkta A_h patieso perspektivisko attēlu.

Ja dotais priekšmets attēlots 347 a rasejumā mērogā 1 : 3, 1 : 4, vaj 1 : n, tad nogrieznis $A_{p_1} \Gamma_1$ janosprauž 347 b rasejumā divas, trīs, vaj ari n reizes no Γ. Ja punktu A_{p_1} 347 a rasejumā dabutu pa kreisi no Γ_1, tad ari punktam A_h 347 b rasejumā jaatrodās pa kreisi no Γ.

Punkta A_h stāvokli noteikuši, velkam caur A_h vertikalo taisni un uz viņas, skaitot no punkta A_h, nospraužam nogriezi $A_h A = 2 \times A_{h_2} A_{p_2}$, jo visi mēri mūsu gadijumā 347 b ras. tiek nosprausti divas reizes. Tā iegūtais punkts A ir dotā oriģinalā punkta A meklejamais perspektiviskais attēls.

Kā rasejumā redzams, perspektives A stāvoklis noteicams ar nogriežņiem, jeb koordinatām ΓA_h un $A_h A$, attiecibā uz sākuma punktu Γ. Šos nogriežņus sauc par Dekarta koordinatām.

Ja punkts A_{p_2} 347 a rasejumā atrastos virs apvāršņa h, tad viņa atstatums no h 347 b rasejumā ari būtu janosprauž uz augšu no apvāršņa h.

Līdzigā kārtā varam konstruet dotā priekšmeta pārejo atsevišķo punktu perspektives.

Dažus punktus varam konstruet vēl vienkāršaki ar saiešanās punktu palīdzibu. Tā, piemēram, punkta B perspektivi var noteikt šādi. Punkts B guļ uz taisnes AB, kuŗas saiešanās punkts ir U_{I_p}. Šā punkta projekcijas 347 a rasejumā konstruetas ar līdztekus projecejošā stara $\Omega U_{I_p} \parallel AB$ palīdzibu. Visu horicontalo taišņu saiešanās punktiem, kā zinams, jaguļ uz apvāršņa h, tapēc ari taisnes AB saiešananās punkts U_{I_p} guļ uz h, un pie tam šā punkta atstatums no galvenā punkta Γ līdzinas $\Gamma_1 U_{I_{p_1}}$.

Tapēc, lai konstruetu saiešanās punktu U_I 347 b rasejumā, nogrieznis $\Gamma_1 U_{I_{p_1}}$ janosprauž uz apvāršņa h divas reizes pa labi no Γ, jo punkts $U_{I_{p_1}}$ 347 a rasejumā atrodas pa labi no Γ_1.

Jau agraki konstrueto perspektivi A ar U_I savienodami, dabujam perspektives AB virzienu. Lai noteiktu uz taisnes AU_I punkta B perspektivi, pietiek, ja izmērojam 347 a rasejumā vienu ordinatu $\Gamma_1 B_{p_1}$ un viņu 347 b rasejumā nospraužam divas reizas uz attiecigo pusi no Γ. Velkot no tā iegūta punkta B_h stateni pret h, līdz krustošanai ar AU_I, dabujam meklejamo perspektivi B.

Aplūkosim tagad taisni AC. Šās taisnes līdztekus projecejošais stars krusto attēlu plakni ārpus rasejuma robežās, kas redzams no tā, ka taisne, vilktā caur Ω_1, līdztekus $A_1 C_1$, nekrusto attēlu plaknes pēdu liniju s. Bet ja attiecigais krustošanās punkts iegūstams rasejuma robežās, tad šis punkts noteic taisnes AC saiešanās punkta U_{II_p} horicontalo projekciju $U_{II_{p_1}}$.

Japiemetina, ka visvienkāršaki konstrukcijas izpildamas gadijumā, ja perspektiviskā rasejumā (347b) mūsu rīcībā atrodas abi saiešanās punkti U_I un U_{II}, bet uzskatamako perspektivisko attēlu dabujam, ja rasejuma robežās atrodas tikai viens (vaj ari neviens) saiešanās punkts, jo tad attēlotais priekšmets neizliekas tik sagrozits.

Ja pieņemsim, ka punkts $U_{II_{p_1}}$ iegūstams 347a rasejumā, tad, saprotams, nav grūti ari 347b rasejumā noteikt saiešanās punkta U_{II} stāvokli, nospraužot uz apvāršņa h nogriezni $\Gamma_1 U_{II_{p_1}}$ divas reizes pa kreisi no Γ. Tādā gadijumā no paša sākuma, pieņemot punkta Γ stāvokli uz apvāršņa h (347b ras.), apdomigi jarīkojas.

Taisne CD || AB, tapēc taisnēm CD un AB ir kopejs saiešanās punkts U_{I_p}. Līdzigi ari taisnēm AC un BD ir kopejs saiešanās punkts U_{II_p}, tapēc punkts D 347b rasejumā atrodas taisnes CU_I krustotnē ar BU_{II} (gadijumā, ja mūsu rīcībā atrodas punkts U_{II}). Punkts D nav redzams, tapēc viņš 347b rasejumā pavisam nav aizrādits, jo perspektiviskos rasejumos parasti attēlo tikai redzamos punktus un taisnes.

Šķautne $AE \perp H$, tapēc pēc 257 un 264 §§ perspektivei AE jabūt stateniskai pret h. Tā kā vertikalās taisnes $A_h A$ stāvoklis, uz kuŗas jaatrodās ari perspektivei E, jau noteikts, tad perspektives E noteikšanai, tikai jaizmēro nogrieznis $A_{h_2} E_{p_2}$ un šis nogrieznis 347b rasejumā janosprauž no punkta A_h divas reizes uz attiecigo pusi no h.

Šķautnes EF un EG, kas saietas punktā E, noteicamas ar iepriekšejo saiešanās punktu U_I un U_{II} palīdzibu, jo telpā EF || AB un EG || AC. Aizrādito šķautņu gali F un G atrodas tur, kur šo šķautņu virzieni krustojas ar vertikalām, caur B un C vilktām taisnēm.

Šķautnes AE, BF un CG savstarpeji līdzteces un stateniskas pret h, jo viņu kopejs saiešanās punkts atrodas bezgalibā.

Līdzigā kārtā konstruejam pārejo virsotņu un šķautņu perspektives.

III nodaļa. Perspektives konstruešana ar pēdu un saiešanās liniju palīdzibu.

270 §. Plaknes perspektive.

Pieņemsim, ka telpā ir dotas patvaļigas plaknes K un P, un aplūkotaja acs Ω (348a ras.).

Apzīmesim plaknes P un attēlu plaknes K krustošanās taisni ar $t = t_p$.

Pieņemsim, ka plakne E, kas caur Ω vilkta līdztekus P, krusto attēlu plakni K pa taisni u_p. Taisnes t un u_p, acim redzot, savstarpeji līdzteces.

Uz plaknes P ir dota patvaļiga taisne a, kuŗas pēdu punkts T_I guļ uz pēdu linijas t. Taisnes a līdztekus projecejošam staram ΩU_{I_p} jaguļ uz plaknes E || P, tapēc taisnes a saiešanās punktam U_{I_p} jaguļ uz taisnes u_p. Punktus T_1 un U_{I_p} savienodami, dabujam dotās taisnes a perspektivi a_p.

Līdzigi var konstruet patvaļigu, uz plaknes P guļošu taišņu perspektives. Pie tam visu šo taišņu saiešanās punkti, kas atbilst doto taišņu bezgali attālinatiem punktiem, guļ uz vienas un tās pašas taisnes u_p.

Plakni E, kuŗā guļ visi līdztekus projecejošie stari, kā, piemēram, ΩU_{I_p}, sauc par dotās plaknes P līdztekus projecejošo plakni, bet taisni u_p, pa kuŗu līdztekus projecejoša plakne E krusto attēlu plakni K, sauc par dotās plaknes P saiešanās, vaj robežliniju.

Acim redzot, visi bezgali attālinatie plaknes P punkti guļ uz vienas taisnes, pa kuŗu krustojas līdzteku plaknes P un E, tapēc taisni u_p var uzlūkot, kā bezgali attālinatąs, uz plaknes P guļošas taisnes $u\infty$ perspektivi.

Tam līdzigi, kā 329 rasejumā punkts U_p ir visu līdzteku taišņu kopejs saiešanās punkts, tā ari 348ª rasejumā taisne u_p ir visu plaknei P līdzteku plakņu kopeja saiešanās linija, t. i. u_p ir kopejās bezgali attālinatas taisnes $u\infty$ perspektive, pa kuŗu krustojas visas, plaknei P līdzteku plaknes.

Plaknes P stāvoklis telpā noteikts ar divām līdzteku taisnēm t un $u\infty$, tapēc ar šo taišņu perspektivēm t_p un u_p ir noteikta plaknes P perspektive.

Turpmak taisni $t = t_p$ apzīmesim vienkārši ar t.

Vilksim caur Ω plakni J || K. Šī plakne krusto plakni P pa taisni $q \parallel t$, tapēc ari $q \parallel u_p$. Plakni J sauc par zūduma plakni, jo visu uz plaknes J guļošu punktu perspektives atrodas bezgalibā uz attēlu plaknes K, t. i. it kā izzūd bezgalibā. Saprotams, ka ari taisnes q perspektive iegūstama uz K bezgalibā, pie kam taisnes q perspektive ir bezgali attālinata taisne $q_p\infty$, pa kuŗu krustojas plaknes J un K.

Ja pieņemsim uz acumirkli, ka, otradi, plakne P ir dotā attēlu plakne, bet K ir patvaļigi pieņemta plakne, tad taisne q nōteic plaknes K saiešanās, jeb robežliniju.

Vilksim caur Ω plakni, kas stateniska pret P un K un tapēc ari stateniska pret viņu krustošanās liniju t. Šī plakne krusto plaknes P, K, E un J pa taisnēm, kas telpā noteic paralelogramu $\Omega Q T U_p$, kuŗa malas stateniskas pret attiecigām taisnēm u_p, t un q. Paralelograma $\Omega Q T U_p$ diagonaļu krustošanās punktu atzīmejam ar F.

No Ω pret attēlu plakni K vilktais statenis, t. i. galvenais redzes stars $\Omega \Gamma$, saprotams, guļ plaknē $\Omega Q T U_p$, tapēc aizrādītā stara krustošanās punktam ar K, t. i. galvenam punktam Γ jaguļ uz taisnes TU_p, pa kuŗu krustojas plaknes $\Omega Q T U_p$ un K. Tā tad galvenais punkts Γ guļ uz taisnes TU_p, kas stateniska pret t, vaj u_p.

Nogrieznis $\Omega\Gamma = r$ noteic acs Ω attālumu no attēlu plaknes K.

Pieņemsim tagad, ka paralelograms $\Omega Q T U_p$ savienots ar rasejuma plakni (348[b] ras.). Pie tam plaknes P, K, E un J attēlojas attiecigo taišņu QT, TU_p, $U_p\Omega$ un ΩQ veidā, bet taisnes q, t un u_p attēlojas attiecigo punktu Q, T un U_p veidā.

Iedomasimies $\Omega Q T U_p$ locekļu paralelograma veidā, un pieņemsim, ka plakne P, griežot viņu ap asi t, ir savienota ar attēlu plakni K. Pie tam plaknes P savienotais stāvoklis noteicams aı plaknei P piederiga punkta Q savienoto stāvokli. Tapēc, lai plakni P pagriestu ap asi t, punktu Q varam pagriest ap centru T. Rasejumā aizrāditi divi punkta Q savienotie stāvokļi Q_{o_I} und $Q_{o_{II}}$, kuŗus dabujam, atkaribā no pieņemta grieśanās virziena.

Tā kā $\Omega U_p T Q$ ir locekļu paralelograms, tad punktam Q ar plakni K savienojoties, ar to pašu plakni savienosies ari punkts Ω, pie kam punkta Ω griešana notiek ap centru U_p. Punkts U_p noteic asi u_p, ap kuŗu telpā griežas plakne E kopā ar punktu Ω.

Atkaribā no punkta Q griešanās virziena, mēs ari punktam Ω iegūsim divus dažadus savienotus stāvokļus Ω_{o_I} und $\Omega_{o_{II}}$.

Kā rasejumā redzams, acs Ω griešanās radiuss ir nogrieznis ΩU_p, kas līdzinas taisnleņķa trijstūŗa $U_p\Gamma\Omega$ hipotenuzei, kuŗā viena katete ΓU_p līdzinas galvenā punkta Γ atstatumam no saiešanās punkta U_p, vaj no saiešanās linijas u_p; bet otra katete $\Omega\Gamma$ līdzinas aplūkotaja acs attālumam r no attēlu plaknes K.

Parasti attēlu plakni K savieno ar rasejuma plakni, kā tas ari pieņemts 348[c] rasejumā. Tādā gadijumā plakni P noteic ar pēdu liniju t un saiešanās liniju u_p, pie kam $t \parallel u_p$. Bez tam jaaizrādā galvenā punkta Γ stāvoklis un aplūkotaja acs attālums r no attēlu plaknes. Šis attālums noteicams ar tā saucamo attālumu aploci, kas vilkta ap centru Γ ar radiusu r, kuŗš līdzinas acs Ω attālumam no attēlu plaknes.

Lai uz aizrādito doto elementu pamata noteiktu 348[c] rasejumā vienu acs savienoto stāvokli Ω_o, janoteic attiecigais griešanās radiuss ΩU_p, t. i. janoteic taisnleņķa trijstūŗa $U_p\Omega\,\Gamma$ hipotenuze (sk. 348[b] ras.). Tam nolūkam mēs 348[c] rasejumā konstruejam šā trijstūŗa savienoto stāvokli $U_p\Gamma\Omega'_o$, kuŗa hipotenuze $\Omega'_o U_p$ noteic meklejamo griešanās radiusu.

Pēc 348[b] ras. patiesais acs savienotais stāvoklis guļ uz stateņa, kas no Γ vilkts pret u_p. Tapēc, lai noteiktu 348[c] rasejumā acs savienoto stāvokli Ω_o, no centra U_p ar radiusu $U_p\Omega'_o$ javelk loks, līdz krustošanai ar pagaŗinato stateni ΓU_p.

Parasti perspektivi konstruejot, pietiek aizrādit vienu acs savienoto stāvokli, tapēc ari otrs acs savienotais stāvoklis 348c rasejumā nav aizrādits.

Lai uz 348c rasejuma pamata varetu stādities priekšā oriģinalo plakni P telpā, kas noteikta rasejumā ar pēdu liniju t un saiešanās liniju u_p, — no punkta Γ javelk statenis pret rasejuma plakni. Uz šā stateņa telpā no punkta Γ janosprauž nogrieznis $\Gamma\Omega$, kas līdzinas attālumu aploces radiusam r. Velkot caur tādejadi telpā iegūto aci Ω un saiešanās liniju u_p plakni, mēs iegūstam līdztekus projecejošas plaknes E stāvokli telpā (sk. 348a ras.). Velkot pēc tam 348c rasejumā caur dotās plaknes pēdu liniju t plakni, līdztekus iedomajamai plaknei E, iegūstam plaknes P patieso stāvokli telpā.

Tā tad, elementi t, u_p, Γ un r pilnigi noteic plaknes P stāvokli telpā.

Dažreiz lietderigi 348c rasejumā aizrādit otrās saiešanās linijas q savienoto stāvokli q_o, ko dabujam plaknei P savienojoties ar K. Tam nolūkam 348c rasejumā savienotam stāvoklim Ω_o konstruets attiecigais savienotais stāvoklis Q_o, ko dabujam, ievērojot sekošo.

Savienojot plakni P ar K (348b ras.), varam novērot, ka pie patvaļiga locekļu paralelograma $QTU_p\Omega$ stāvokļa, pretguļošas malas vienmēr ir vienlīdzigas un līdzteces. Diagonaļu ΩT un QU_p lielumi mainas, bet viņas vienmēr krustojas zinamā punktā F, kas vienā un taī pašā laikā ir vidus starp punktiem Ω un T, kā ari vidus starp Q un U_p. Tapēc ari plaknei P savienojoties ar K, aizraditā sakariba paliek spēkā, t. i. vidus starp acs savienoto stāvokli Ω_o un punktu T, vaj asi t taī pašā laikā ir ari vidus starp punktiem U_p un Q_o, t. i. starp saiešanās liniju u_p un saiešanās linijas q savienoto stāvokli q_o. (Pie tam vienmēr jaievēro, ka u_p pieder perspektives t. i. plaknes K zistemai, bet q_o pieder savienotās plaknes P zistemai).

Uz aizrādito pamatojoties, nav grūti 348c rasejumā noteikt q_o. Tam nolūkam nogriezni $\Omega_o T$ dalam uz pusēm, dabujot punktu F; izmērojam punkta F atstatumu no U_p, kas līdzinas FU_p, un nospraužam šo nogriezni otrā pusē no F, dabujot tā punkta Q savienoto stāvokli Q_o. Caur Q_o iet saiešanās taisnes q savienotais stāvoklis $q_o \parallel t \parallel u_p$.

Saprotams, ka pie otrā, iespējama acs savienota stāvokļa Ω_o iegūsim ari otro saiešanās taisnes q savienoto stāvokli q_o.

348b rasejumā redzam, ka ikkatrā locekłu paralelograma stāvoklī viņa pretguļošas malas ir vienlīdzigas, t.i. $U_p T = Q\Omega$ un $QT = U_p\Omega$. No tā seko, ka katra saiešanās linija atstāj no ass t tikpat tālu, kā otrā saiešanās linija atstāj no aplūkotaja acs Ω, vaj ari otradi.

Aizrāditā sakariba, saprotams, paliek spēkā, plaknei P savienojoties ar K. Tapēc pēc vienas saiešanās linijas (u_p, vaj q_o) zinama stāvokļa nav grūti noteikt otrās saiešanās linijas stāvokli, ievērojot, ka $U_p T = Q_o\Omega_o$ un $Q_o T = U_p\Omega_o$.

271. § Punkta perspektive.

Pieņemsim, ka telpā ir dotas patvaļigas plaknes P, K un aplūkotaja acs Ω (349 ras.).

Vilksim caur Ω, tamlīdzigi, kā iepriekšejā rasejumā, plaknes E un J un apzīmesim attiecigā veidā aizrādito plakņu krustošanās taisnes. Pieņemsim uz plaknes P patvaļigu punktu A un aizrādisim šā punkta perspektivi A_p, ko dabujam projecejoša stara ΩA krustošanās punktā ar attēlu plakni K.

Perspektives A_p konstruešanai, velkam plaknē E caur Ω stateni pret saiešanās liniju u_p un apzīmejam šā stateņa krustošanās punktu N ar u_p. Līdzigi velkam plaknē P caur A stateni pret t un iegūto krustošanās punktu apzīmejam ar M. Taisnes ΩN un AM savstarpeji līdzteces, jo viņas ir stateniskas pret divām līdzteku taisnēm u_p un t. Līdzteku taisnes ΩN un AM noteic zinamo plakni, kas krustojas ar plakni K pa taisni MN. Stars ΩA guļ taišņu ΩN un AM plaknē, tapēc projecejoša stara ΩA krustošanās punktam A_p ar attēlu plakni K jaguļ uz taisnes MN.

Pieņemsim tagad, ka plaknes P un E ir pagriezušās ap taisnēm t un u_p vienā un taī pašā leņķī β, pie kam punkti A un Ω ieņem jaunus stāvokļus A' un Ω'.

Savienosim Ω' ar A' un pierādisim, ka taisne $\Omega' A'$ krusto plakni K tanī pašā punktā A_p, kuŗā taisne ΩA krusto plakni K. Pielaidisim pagaidam, ka tas nav tā un ka krustošanās notiek citā zinamā punktā A_p'.

Savienosim A' ar M, bet Ω' ar N. Taisnēm $A'M$ un $\Omega' N$, kā griešanās radiusiem jabūt stateniskiem pret attiecigām griešanās asīm t un u_p. Tas nozīmē, ka griešanās radiusi atkal noteic zinamo plakni, kas krusto plakni K pa iepriekšejo taisni MN. Tapēc punktam A'_p jaguļ kautkur uz taisnes MN.

Līdzigos trijstūŗus AMA_p un $\Omega N A_p$ aplūkojot, dabujam:

$$\frac{MA_p}{NA_p} = \frac{MA}{N\Omega} \quad \ldots (1).$$

Bet uz trijstūŗu $A'MA'_p$ un $\Omega' N A'_p$ līdzibu pamatojoties, dabujam:

$$\frac{MA'_p}{NA'_p} = \frac{MA'}{N\Omega'} \quad \ldots (2).$$

Tā kā $MA = MA'$ un $N\Omega = N\Omega'$, kā attiecigi vienlīdzigi radiusi, tad

$$\frac{MA}{N\Omega} = \frac{MA'}{N\Omega'},$$

t. i. 1 un 2 nolīdzinajuma labās puses ir vienlīdzigas, tapēc vienlīdzigas ari viņu kreisās puses, t. i.

$$\frac{MA_p}{NA_p} = \frac{MA'_p}{NA'_p},$$

jeb $MA_p = MA'_p$ un $NA_p = NA'_p$.

Pēdejie nolīdzinajumi rāda, ka punktiem A_p un A'_p jasakrīt, t. i, $A'_p = A_p$, kas bija japierāda.

Tā kā leņķis β pieņemts pilnigi patvaļigi, tad saprotams, ka ari staram $\Omega' A'$ jebkuŗā citā stāvoklī esot, mēs dabujam, ka $A'_p = A_p$. Tapēc ari atsevišķā gadijumā, kad stars $\Omega' A'$ saplūst ar plakni K, dabusim $A'_p = A_p$.

Stara ΩA savienoto stāvokli apzīmesim ar $\Omega_o A_o$.

Tā tad punkta A perspektivi A_p dabujam uz attiecigā savienotā redses stara $\Omega_o A_o$.

272 §. Perspektive, kā centralās kollineacijas gadijums.

Pieņemsim, ka telpā ir dotas patvaļigas plaknes P un K un acs Ω stāvoklis (350 ras.).

Pieņemsim uz plaknes P patvaļigu $\triangle$-i ABC un atzīmesim viņa perspektivi $A_p B_p C_p$ uz plaknes K.

Kā zinams, taisnes, pa kuŗām kaut kāda plakne krusto divas dotas plaknes, krustojas uz doto plakņu krustošanās šķautnes. Tapēc ari projecejoša plakne ΩAB krusto plaknes P un K pa taisnēm BA un $B_p A_p$, kuŗas pie pagaŗināšanas krustojas zinamā punktā T_I uz t. To pašu dabusim attiecibā uz taisnēm BC, $B_p C_p$ un AC, $A_p C_p$, kuŗas krustojas attiecigos punktos T_{II} un T_{III} uz t. Tapēc figura ABC un tās perspektive $A_p B_p C_p$ ir centrali kollineari radnieciskas figuras; radniecibas ass ir plakņu P un K krustošanās taisne, t. i. pēdu linija t, bet radniecibas centrs ir aplūkotaja acs Ω.

Ja nu plakni P savieno ar K, tad ari acs Ω savienojas ar K. Pie tam punkti T_I, T_{II} un T_{III}, kas guļ uz t, kā ari perspektiviskie attēlojumi A_p, B_p un C_p pēc 271 § nemaina savus stāvokļus, tapēc ari perspektive $A_p B_p C_p$ un figuras ABC savienotais stāvoklis, t. i. $A_o B_o C_o$ ir centrali-kollineari radnieciskas figuras ar radniecibas asi t un radniecibas centru Ω_o.

Ja attēlojumu plakne K sakrīt ar rasejuma plakni, tad $A_o B_o C_o$ attēlo doto figuru ABC patiesā lielumā.

Uz aizrādito sakaru starp $A_o B_o C_o$ un $A_p B_p C_p$ pamatodamies, varesim konstruet jebkuŗas plakanas figuras perspektivi, kā tas aizrādits 273 pantā.

273 §. Plakanas figuras perspektives konstruešana.

Pieņemsim, ka dots galvenais punkts Γ ar attālumu aploci r (351 ras.); bez tam dota patvaļigas plaknes P pēdu linija t un saiešanās linija u_p. Jakonstruē patvaļiga, uz plaknes P guļoša trijstūŗa ABC perspektive.

Tam nolūkam iedomasimies, ka plakne P savienota ar attēlu plakni K, kas saplūst ar rasejuma plakni. Savienotā stāvoklī apzīmejam dotā trijstūŗa ABC patieso lielumu $A_o B_o C_o$. Bez tam pēc 348c ras. noteicam acs Ω savienoto stāvokli Ω_o.

Pēc 271 § atsevišķo punktu A, B un C perspektivēm A_p, B_p, C_p jaguļ uz attiecigo projecejošo staru savienotiem stāvokļiem $\Omega_o A_o$, $\Omega_o B_o$ un $\Omega_o C_o$. Bez tam pēc 272 § meklejamā perspektive $A_p B_p C_p$ un figuras savienotais stāvoklis $A_o B_o C_o$ ir centrali-kollineari radnieciskas figuras ar asi t un centru Ω_o. Tapēc punkts T_I, kuŗā, piemēram, savienotā mala $A_o B_o$ krusto kollineacijas asi t, pieder ari meklejamai perspektivei $A_p B_p$.

Aci Ω ar plakni K savienojot, ar šo plakni savienojas ari uz plaknes P guļošas taisnes $a = AB$ līdztekus projecejošais stars ΩU_{I_p} (sk. 348a ras.). Tapēc, lai noteiktu taisnes $a = AB$ saiešanās punktu U_{I_p}, javelk savienotais līdztekus projecejošais stars $\Omega_o U_{I_p} \parallel A_o B_o$ un janoteic stara $\Omega_o U_{I_p}$ krustošanās punkts U_{I_p} ar u_p. Punktus U_{I_p} un T_I savienodami, iegūstam meklejamās perspektives $A_p B_p$ virzienu $a_p = T_I U_{I_p}$. Uzmeklejot, beidzot, staru $\Omega_o A_o$ un $\Omega_o B_o$ krustošanās punktus ar a_p, iegūstam punktu A un B perspektives A_p un B_p.

Perspektives C_p stāvokli tagad varam noteikt vēl vienkāršaki, noteicot punktu T_{II}, kuŗā pagaŗinatā mala $A_o C_o$ krusto t, un savienojot punktu T_{II} ar jau atrasto perspektivi A_p. Savienotā stara $\Omega_o C_o$ krustošanās punkts ar taisni $T_{II} A_p$ noteic meklejamās perspektives C_p stāvokli. Kontroles dēļ $B_o C_o$ un $B_p C_p$ krustojas punktā T_{III}, kas guļ uz t.

Aizrāditās konstrukcijas preteji izpildami, pēc dotās perspektives $A_p B_p C_p$ varetu noteikt trijstūŗa ABC patieso lielumu $A_o B_o C_o$.

Perspektives $a_p = A_p B_p$ virzienu var noteikt ari šādi. Pēc 348c ras. atrodam plaknes K bezgali attālinatai taisnei atbilstošās saiešanās linijas q savienoto stāvokli q_o. Tā kā q guļ plaknē P, tad q_o pieder savienotai zistemai $A_o B_o C_o$. Kā 270 § aizrādits, visiem punktiem, kas guļ uz q, atbilst bezgali attālinatas perspektives. Tapēc ari 351 rasejumā punkta $Q_{oI} = A_o B_o \times q_o$ perspektive $Q_{I_p} \infty$ atrodas uz projecojoša stara $\Omega_o Q_{oI}$ bezgalibā.

Lai tapēc noteiktu perspektives $A_p B_p$ virzienu, pēdu punkts T_I jasavieno ar bezgali attālinatu punktu $Q_{I_p} \infty$, t. i. caur T_I javelk $A_p B_p \parallel \Omega_o Q_{oI}$. Uz tādejadi noteikta virziena tagad ar staru $\Omega_o A_o$ un $\Omega_o B_o$ palīdzibu nav gŗūti uzmeklet perspektives A_p un B_p.

Atsevišķā gadijumā, ja centrā Ω atrodas gaismas avots, tad trijstūŗa ABC perspektivi $A_p B_p C_p$ var uzlūkot, kā šā trijstūŗa centralo krītošo ēnu uz plaknes K.

Atgriezisimies tagad pie 93 rasejuma (86 §). Nav gŗūti novērot, ka ēnas $A'B'C'$ un $A''B''C''$ telpā saistitas ar centralo kollineaciju, pie kam kollineacijas centrs ir oriģinalais gaismas avots L, bet kollineacijas ass ir plakņu H un V krustošanās linija OX. Savienojot plakni V ar H, griežot pie tam V ap asi OX, ar plakni H savienojas arī gaismas avots L. Pēc 270 § dabujam, ka $L_0 L_2 = L_1 L_x$, un $L_0 L_1 = L_2 L_x$, pie kam punkts L_x ir taisnes $L_1 L_2$ krustošanās punkts ar asi OX.

Tā kā A'B'C' un A"B"C" ir divas centrali kollineari radnieciskas zistemas, tad stariem, kas savieno attiecigas virsotnes, jaiet caur kollineacijas centra savienoto stāvokli L_0, bet attiecigām malām jakrustojās uz nemainigās kollineacijas ass OX.

Aizrādito sakaru mēs jau agrak citadā veidā pierādijām 78 §.

Ja gaismas avots bezgalibā, tad radniecibas stariem A'A", B'B" un C'C" jabūt savstarpeji līdztečiem, kā tas aizrādits 84 §.

274 § Savienotās zistemas un perspektives attiecigie stāvokļi.

Pieņemot kautkādas plakanas figuras, — kuŗas perspektive jakonstruē, — savienoto stāvokli, jaievēro sekošais.

352ᵃ un 353ᵃ rasejumā pieņemts, ka caur aci Ω, stateniski pret plaknēm K un P vilktā plakne $\Omega Q T U_P$ ir savienota ar rasejuma plakni.

Ja punktā Ω atrodas aplūkotaja acs, kuŗš skatas uz attēlu plakni K, tad patiesus perspektiviskos attēlus varam dabut tikai no tādiem punktiem A un B, kas guļ uz plaknes P daļas, kuŗa sākas no saiešanās taisnes q (attēlotās rasejumā punkta Q veidā) un, iedama caur t, sniedzas līdz bezgalibai. Bet no punkta C, guļoša tajā plaknes P daļā, kas atrodas pa labi no saiešanās taisnes q, iegūstams tikai šķietams perspektivisks attēls (252 §).

Ja atsevišķā gadijumā kautkāda figura, guļoša uz P, krusto saiešanās taisni q, tad viņas perspektive sastāv no divām daļām, pie kam perspektives patieso daļu dabujam uz attēlu plaknes K apakšejās daļas un šī perspektive sniedzas līdz bezgalibai. Bet perspektives šķietamo daļu dabujam uz plaknes K augšejās daļas un tā iesākas bezgalibā.

Tamlīdzigi, kā patvaļigas taisnes perspektive slēdzas bezgaliba (252 §), tā arī abas plakanas figuras perspektives daļas slēdzas bezgalibā uz bezgali attālinatas taisnes $q_P\infty$, kas ir saiešanās taisnes q perspektive.

Kā 348ᵇ rasejuma aizrādits, savienojot aci Ω un plakni P ar K, dabujam divus dažadus acs savienotos stāvokļus Ω_{o_I} un $\Omega_{o_{II}}$ un attiecigus saiešanās taisnes q savienotos stāvokļus q_{o_I} un $q_{o_{II}}$. Tapēc katru šo gadijumu aplūkosim atsevišķi, kā tas arī azirādits 352ᵃ un 353ᵃ rasejumos. Šajos rasejumos ir aizrāditas punktu A un B perspektives, kā arī oriģinalo punktu A un B savienotie stāvokļi A_0 un B_0.

352ᵇ un 353ᵇ rasejumos plakne K savienota ar rasejuma plakni un bez tam ir aizrāditi uz plaknes P guļošo punktu un taisņu savienotie stāvokļi.

Kā no šām figurām redzams, tā plaknes P daļa, kuŗa dod patieso perspektivisko attēlu, sākas no saiešanās taisnes q savienotā stāvokļa, t. i. no q_{o_I} (352b ras.), vaj no $q_{o_{II}}$ (353b ras.), un, caur pēdu liniju t iedama, sniedzas līdz bezgalibai. Tapēc tikai aizrāditās robežās (švītrotā laukuma iekšpusē) var pieņemt punktu savienotos stāvokļus, piemēram, A_o un B_o, kuŗiem vēlams iegūt patiesus perspektiviskos attēlus A_p un B_p. Saprotams, ka švītrotā laukuma sānu apveidi sniedzas uz labo un kreiso pusi līdz bezgalibai, tapēc šie apveidi rasejumā pieņemti pilnigi patvaļigi.

Kā rasejumā redzams, savienotās zistemas P iešvītrotiem laukumiem ir dažadi virzieni. 352b rasejumā savienotā zistema sniedzas uz leju no q_{o_I}, bet 353b rasejumā viņa sniedzas uz augšu no $q_{o_{II}}$.

352c un 353c rasejumā aizrāditi attiecigo perspektivisko attēlu virzieni. Šie laukumi rasejumā atzīmeti retakām švītriņām, nekā savienotās zistemas laukumi 352b un 353b rasejumos.

Kā rasejumā redzams, patiesās perspektives laukums sākas no plaknes P saiešanās linijas u_p un, caur t iedams, sniedzas līdz bezgalibai, pie kam abos gadijumos (352c un 353c ras.) perspektives virziens ir vienads.

Japiezīmē, ka savienotie stāvokļi Ω_{o_I}, $\Omega_{o_{II}}$, A_o un B_o, kā ari perspektives A_p un B_p rasejumā aizrāditas tikai šematiski; pie kam aizrāditie punkti pieņemti patvaļigi uz horicontalām taisnēm, vilktām no attiecigiem 352a un 353a rasejumu punktiem. Patiesibā 352c un 353c rasejumi var pārsegt 352b un 353b rasejumus. Aizrāditais savienotās zistemas un perspektives norobežojums izdarits tikai lielakas rasejuma uzskatamibas dēļ.

No visa izskaidrotā seko, ka **patvaļigās figuras, guļošas uz plaknes P, savienoto stāvokli varam pieņemt laukuma robežās, kas sākas no q_o, un, caur t iedams, sniedzas līdz bezgalibai. Attiecigo perspektivi dabujam laukuma iekšpusē, kas sākas no u_p, un, caur t iedams, sniedzas līdz bezgalibai.**

275 §. Savienotās figuras pieņemšanas veids.

Pieņemsim, ka ir dotas: patvaļigas plaknes pēdu un saiešanās linijas t un u_p un galvenais punkts Γ ar attālumu aploci r (354 ras.).

Pēc 348c rasejuma uzmeklejam Ω_o un q_o.

Ja mēs vēlamies konstruet kautkādas figuras, guļošąs uz plaknes $P = t u_p$, perspektivi, tad papriekšu jaatzīmē šās figuras savienotais stāvoklis. Bet ja mēs figuras savienoto stāvokli atzīmesim kautkādā vietā, tad ļoti viegli var atgadities, ka tā attiecigā perspektive pa daļai, vaj pavisam neietilpst rasejuma robežās. Tapēc mums jaizšķir, kādā vietā pieņemt figuras savienoto stāvokli, lai tā attiecigā perspektive atrastos rasejuma robežās.

Pieņemsim, ka mēs vēlamies dotās (vēl neatzīmetās) figuras perspektivi dabut kautkāda taisnstūŗa $A_p B_p C_p D_p$ (vaj kautkādas citas figuras) iekšpusē.

Uzskatisim taisnstūri $A_p B_p C_p D_p$ kā doto perspektivi un uzmeklesim attiecigās figuras savienoto stāvokli.

Perspektives malas $A_p D_p$ un $B_p C_p$ krustojas bezgali tālā punktā $Q_p \infty$, kuŗam jasaskan ar punktu Q_o, guļošo uz q_o. Punktu Q_o iegūsim, savienojot acs savienoto stāvokli Ω_o ar $Q_p \infty$, t. i. velkot caur Ω_o līdzteci ar $A_p D_p$, vaj $B_p C_p$ un atzīmejot šīs līdzteces krustošanās punktu Q_o ar q_o.

Savienojot Q_o ar punktiem 1 un 2, kuŗos $A_p D_p$ un $B_p C_p$ krusto t, iegūsim taisnes $1-Q_o$ un $2-Q_o$, uz kuŗām ar staru $\Omega_o A_p$, $\Omega_o B_p$, $\Omega_o C_p$ un $\Omega_o D_p$ palīdzibu uzmeklejam attiecigus punktus A_o, B_o, C_o un D_o. Tā kā $A_p B_p$ un $C_p D_p \parallel t$, tad ari $A_o B_o$ un $C_o D_o \parallel t$.

Taisne $A_p D_p$ krusto u_p punktā U_{I_p}, kuŗam jasaskan ar bezgali tālu punktu $U_I \infty$, guļošo uz $A_o D_o$. Punkts $U_I \infty$ guļ bezgalibā uz stara $\Omega_o U_{I_p}$, tapēc taisne $A_o D_o$ iet caur punktu 1, līdztekus staram $\Omega_o U_{I_p}$. Tamlīdzigi $B_o C_o$ iet caur punktu 2, līdztekus staram $\Omega_o U_{II_p}$.

Tādā veidā dabujam, ka s l ē g t a i p e r s p e k t i v e i $A_p B_p C_p D_p$, k a s k r u s t o s a i e š a n ā s l i n i j u u_p, j a s a s k a n a r f i g u r u $A_o B_o C_o D_o$, k u ŗ a s l ē d z a s b e z g a l i b ā p a b e z g a l i t ā l u t a i s n i $u = U_{I\infty} U_{II\infty}$. Figuras $A_o B_o C_o D_o$ apveidi lielakas uzskatamibas dēl ir mazliet iežvītroti. Ka figura $A_o B_o C_o D_o$ slēdzas bezgalibā, varejām no paša sākuma paredzet, jo malas $A_p D_p$ un $B_p C_p$ krusto saiešanās liniju u_p.

Ja mēs nu vēlamies dabut kautkādas figuras perspektivi taisnstūŗa $A_p B_p C_p D_p$ iekšpusē, tad attiecigās figuras savienotais stāvoklis japieņem vaj nu uz leju un taišņu $1-A_o-B_o-2$ ierobežotā laukuma iekšpusē, vaj ari uz augšu un taišņu $M_o-C_o-D_o-N_o$ ierobežotā laukuma iekšpusē. Šo laukumu apveidi rasejumā aizrāditi mazām švītriņām. Bet ja mēs pieņemsim patvaļigu trijstūri $E_o G_o I_o$, kuŗa viena daļa $(7_o-8_o-9_o-10_o)$ atrodas starp aizrāditiem laukumiem, tad, saprotams, šā trijstūŗa perspektive slēdzas bezgalibā.

Pēc 351 rasejuma uzmeklejuši trijstūŗa $E_o G_o I_o$ perspektivi, varam novērot, ka trijstūŗa daļai $E_o-7_o-8_o$ aibilst perspektive $E_p-7_p-8_p$; daļai $G_o-I_o-9_o-10_o$ atbilst perspektive $G_p-I_p-9_p-10_p$, pie kam šās perspektives atrodas taisnstūŗa $A_p B_p C_p D_p$ iekšpusē. Bet daļai $7_o-8_o-9_o-10_o$ atbilst perspektive, kas atrodas taisnstūŗa $A_p B_p C_p D_p$ ārpusē un slēdzas bezgalibā.

276 § Aploces perspektive elipses veidā.

Pieņemsim, ka doti: Γ, r un patvaļiga plakne tu_p (355 ras.). Uzmeklesim Ω_o un q_o un pieņemsim aploci ar centru O_o tā, lai tā nekrustotu q_o.

Ja mēs no patvaļiga punkta M_o, guļoša uz q_o, vilksim pieskares $M_o - E_o - 1$ un $M_o - G_o - 2$ pret aploci O_o, tad attiecigām pieskarēm $M_{p\infty} - E_p - 1$ un $M_{p\infty} - G_p - 2$ elipses zistemā jaiet caur punktu $M_p \infty$, guļošo bezgalibā uz stara $\Omega_o M_o$. Tapēc pieskares $1 - E_p$ un $2 - G_p$ ir savstarpeji līdzteces un līdzteces staram $\Omega_o M_o$.

Velkot taisni $3 - E_o - G_o - N_o$ un pēc tam caur punktu 3 taisni, līdzteci $\Omega_o N_o$, mēs apzīmejam pēdejās taisnes krustošanās punktus E_p un G_p ar pieskarēm, kas vilktas caur punktiem 1 un 2 pret meklejamo elipsi. (Šo pieskaru virzienu mēs augšā jau noteicām). Punkti E_p un G_p bez tam kontroles dēļ guļ uz stariem $\Omega_o E_o$ un $\Omega_o G_o$. Dalot nogriezni $E_p G_p$ uz pusēm, dabujam elipses centru F_p. Saprotams, ka elipses centrs F_p neatbilst aploces centram O_o, kā tas jau 168 § tika aizrādits.

Ja mēs uz aploces O_o pieņemam kautkādu punktu J_o, tad nav grūti ar taisnes $E_o - J_o - 4$ palīdzibu konstruet centrali-kollineari radniecisko elipses punktu J_p. Punktos J_o un J_p pret aploci O_o un elipsi F_p vilktās pieskares krustojąs uz radniecibas ass t punktā 5.

Pagarinato pieskaru $1 - E_p$ un $2 - G_p$ iekšpusē ievelkam aploci, kuras centrs ir F_1. Pēc tam atzīmejam punktus E_1, G_1 un J_1, uzmeklejam affinitates asi $6 - 7$ starp aploci F_1 un elipsi F_p, un tagad pēc 170 § varam konstruet elipses galvenās asis.

Jaievēro, ka no Ω_o pret aploci O_o vilktās pieskares ir ari pieskares pret elipsi.

277 §. Aploces perspektive paraboles veidā.

Pieņemsim, ka doti: Γ, r un patvaļiga plakne tu_p (356 ras.). Uzmeklesim Ω_o un q_o un pieņemsim aploci ar centru O_o tā, lai pieņemtā aploce pieskaras q_o patvaļigā punktā B_o. Punktam B_o jasaskan ar bezgali tālu punktu $B_p\infty$, guļošo uz mekletās paraboles un uz stara $\Omega_o B_o$. Caur bezgali tālu punktu $B_p\infty$ iet paraboles ass, līdztekus staram $\Omega_o - B_o - B_p\infty$. Tā tad mums ir zinams paraboles ass virziens, bet pati ass vēl jakonstruē.

Paraboles ass uzmeklešanai, velkam $\Omega_o K_o \perp \Omega_o B_o$, un K_o savienojam ar kaut kādu punktu C_o uz aploces O_o. Taisne $K_o C_o$ krusto aploci O_o un pēdu liniju t attiecigos punktos D_o un 3. Attiecigā taisne $3 - C_p$ paraboles zistemā ir līdztece staram $\Omega_o K_o$, jeb taisne $3 - C_p$ stateniska pret $\Omega_o - B_o - B_p\infty$, t. i. taisne $3 - C_p$ ir stateniska pret paraboles ass virzienu.

Katra pret paraboles asi stateniska taisne ir zinama paraboles chorda. Tapēc ari taisne $3 - C_p$ noteic zinamas paraboles chordas virzienu. Paraboles ass dala ikkatru chordu uz pusēm. Tapēc ar stara $\Omega_o D_o$ palīdzibu uz $3 - C_p$ punktu D_p uzmeklejuši un nogriezni $C_p D_p$ uz pusēm dalijuši, mēs iegūsim uz paraboles ass guļošu punktu E_p. Caur šo punktu tagad varam vilkt meklejamo paraboles asi, līdztekus staram $\Omega_o - B_o - B_p\infty$.

Velkot punktā C_o pieskari $1 - 2_o$ pret aploci O_o, nav grūti noteikt attiecigo pieskari $1 - C_p$ pret paraboli, pie kam $1 - C_p \parallel \Omega_o - 2_o$. Pagarinot $1 - C_p$ līdz krustošanai ar paraboles asi punktā 6 un savienojot šo punktu ar D_p, dabujam zimetrisko pieskari pret paraboli punktā D_p.

Aploces chordām, kas iziet no punkta K_o, kā, piemēram, $K_o - D_o - C_o$, paraboles zistemā atbilst savstarpeji līdzteku chordas, līdzteces virzienam $\Omega_o K_o$ un ejošas caur bezgali tālu punktu $K_p\infty$, kā, piemēram, $D_p - C_p$. Ja nu tagad aploces O_o chorda pārvēršas aploces pieskarē, t. i., ja mēs no K_o vilksim pret aploci O_o pieskari $K_o - A_o - 5$, tad ari paraboles zistemā attiecigā taisne $5 - A_p$ ir pieskare pret paraboli, kuŗa pie tam ir stateniska pret paraboles asi. Tapēc pieskaršanās punkts A_p ir paraboles virsotne, guļoša uz paraboles ass

Tā tad paraboles ass iet caur punktiem $B_p\infty$ un A_p, tapēc attiecigai taisnei aploces O_o zistemā jaiet caur B_o un A_o, pie tam $B_{p\infty} - A_p$ un $B_o - A_o$ krustojas zinamā punktā 4 uz t.

Aizrādito ievērojot, mēs sekošā kārtā varam tieši uzmeklet virsotni A_p un paraboles asi. No Ω_o velkam $\Omega_o K_o \perp \Omega_o B_o$, no K_o velkam pieskari $K_o - A_o - 5$ pret aploci O_o, no 5 velkam $5 - A_p \parallel \Omega_o K_o$, un ar stara $\Omega_o - A_o$ palīdzibu noteicam A_p. Caur A_p iet paraboles ass, līdztekus $\Omega_o B_o$.

278 §. Aploces perspektive hiperboles veidā.

Pieņemsim atkal Γ, r un patvaļigu plakni $t u_p$ (357 ras.).

Uzmeklesim Ω_o un q_o un pieņemsim aploci ar centru O_o tā, lai tā krustotu q_o kautkādos punktos A_o un B_o. Punktiem A_o un B_o jasaskan ar bezgali tāliem, uz attiecigiem stariem $\Omega_o A_o$ un $\Omega_o B_o$ guļošiem hiperboles punktiem $A_p\infty$ un $B_p\infty$.

Ja mēs punktos A_o un B_o vilksim pret aploci O_o pieskares $A_o - 1$ un $B_o - 2$, tad šīm pieskarēm jasaskan ar hiperboles pieskarēm $1 - A_p\infty$ un $2 - B_p\infty$, kuŗas ir līdzteces attiecigiem stariem $\Omega_o A_o$ un $\Omega_o B_o$. Caur hiperboles bezgali tāliem punktiem $A_p\infty$ un $B_p\infty$ ejošās pieskares $1 - A_p\infty$ un $2 - B_p\infty$ sauc par **hiperboles asimptotēm**. Tādā veidā konstruetās asimptotes krustojas punktā F_p, kuŗam jasaskan ar aploces O_o pieskaru $1 - A_o$ un $2 - B_o$ krustošanās punktu F_o, t. i. punktiem F_p un F_o kontroles dēļ jaguļ uz kopeja, caur Ω_o ejoša stara.

Dalot leņķus starp asimptotēm uz pusēm, iegūsim hiperboles galvenās asis.

Savienosim punktu 3, kuŗā viena galvena ass krusto t, ar F_o, tad taisnes $3-F_p$ un $3-F_o$ ir attiecigas taisnes hiperboles un aploces zistemās. Tapēc punktiem C_o un D_o, kuŗos $3-F_o$ krusto aploci, jasaskan ar punktiem C_p un D_p, guļošiem uz hiperboles ass. Punktus C_p un D_p nav gŗuti uzmeklet ar staru $\Omega_o C_o$ un $\Omega_o D_o$ palīdzibu. Punkti C_p un D_p ir hiperboles virsotnes un tie atrodas vienados atstatumos no F_p.

Punktus C_p un D_p varam noteikt ari ar attiecigo pieskaru palīdzibu. Tā, piemēram, punktu C_p dabusim, ja punktā C_o vilksim pieskari $4-K_o$ pret aploci O_o, un caur punktu 4 vilksim $4-C_p \parallel \Omega_o K_o$. Ja punkts K_o neatrodas rasejuma robežās, tad caur C_o velkam patvaļigu taisni un viņai konstruejam attiecigo taisni hiperboles zistemā, kuŗas krustošanās punkts ar hiperboles asi noteic punktu C_p.

Ja caur K_o vilksim kautkādu aploces O_o chordu $K_o-E_o-G_o-5_o$, tad tā attiecigā taisne $5-G_p-E_p$ hiperboles zistemā iet caur punktu 5, līdztekus $\Omega_o K_o$. Ar staru $\Omega_o E_o$ un $\Omega_o G_o$ palīdzibu punktus E_p un G_p uzmeklejuši, dabusim vienu hiperboles chordu $E_p G_p$, un pēc tam varam noteikt ari pieskares punktos E_p un G_p.

Hiperboles chorda E_pG_p ir stateniska pret hiperboles asi; bet $E_pG_p \parallel \Omega_o K_o$, tapēc $\Omega_o K_o$ veido ar galveno asi taisnu leņķi. Aizrādito ievērojot, varam tūlit noteikt punktu K_o, velkot no Ω_o stateni pret hiperboles galveno asi, līdz krustošanai ar q_o.

Chorda $E'_p-G'_p$, guļoša uz hiperboles otrā zara, konstruejama uz zimetrijas pamata, attiecibā uz F_p. Saprotams, ka šo otro zaru varetu konstruet tapat, kā pirmo.

279 §. Krustodamās un šķērsodamās taisnes.

Pieņemsim, ka perspektiviskā rasejumā ir dotas divu taišņu a un b perspektiviskie attēli a_p un b_p ar atticiegiem saiešanās un pēdu punktiem U_{I_p}, T_I un U_{II_p}, T_{II} (358 ras.)

Vilksim $u_p = U_{I_p} U_{II_p}$ un $t = T_I T_{II}$. Ja pie tam izrādisies, ka $u_p \parallel t$, kā tas pieņemts rasejumā, tad oriģinalās taisnes a un b guļ uz k o p e j a s plaknes, kuŗas saiešanās linija ir u_p, bet pēdu linija — t. Tapēc šinī gadijumā punkts $A_p = a_p \times b_p$ ir oriģinalo taišņu a un b krustošanās punkta A perspektiviskais attēls.

Bet ja u_p un t nav savstarpeji līdzteces, tad oriģinalās taisnes a un b n e g u ļ uz k o p e j a s p l a k n e s un tapēc nekrustojas, bet šķērsojas telpā.

280 §. Krustodamās plaknes.

Pieņemsim, ka perspektiviskā rasejumā ir dotas divas plaknes $u_{I_p} t_I$ un $u_{II_p} t_{II}$ (359 ras.). Doto plakņu krustošanās taisne a telpā iet caur pēdu liniju krustošanās punktu T, kuŗa perspektive sakrīt ar T, un caur bezgali tālu punktu U, kuŗā krustojas bezgali tālas taisnes, guļošas uz dotajām plaknēm. Šo divu bezgali tālu taišņu perspektiviskie attēli ir u_{I_p} un u_{II_p} un viņu bezgali tāla krustošanās punkta perspektiviskais attēls ir punkts $U_p = u_{I_p} \times u_{II_p}$. Tapēc doto plakņu krustošanās taisnes a perspektiviskais attēls a_p iet caur punktiem T un U_p.

281 §. Taisne, ejoša caur doto punktu, līdztekus dotajai taisnei.

Pieņemsim, ka perspektiviskā rasejumā caur punktu C_p, kas dots uz patvaļīgas taisnes $b_p = U_{II_p} T_{II}$, javelk līdztece dotajai taisnei $a_p = U_{I_p} T_I$ (360 ras.).

Telpā meklejamā taisne $d \parallel a$, tapēc perspektiviskā rasejumā meklejamai taisnei d_p un dotajai taisnei a_p ir kopejs saiešanās punkts U_{I_p}. Tapēc C_p ar U_{I_p} savienodami, dabujam meklejamo taisni d_p.

Lai pilnigi noteiktu taisni d_p, vēl jauzmeklē šīs taisnes pēdu punkts T_{III}. Tam nolūkam noteiksim plaknes bd pēdu liniju t, kuŗa iet caur T_{II}, līdztekus plaknes bd saiešanās linijai $u_p = U_{I_p} U_{II_p}$. Punkts T_{III}, kuŗā t krusto d_p, ir meklejamais pēdu punkts.

282 §. Taisnes krustošanās punkts ar doto plakni.

Pieņemsim, ka ir dotas: taisne $a_p = U_{I_p} T_I$ un plakne $u_{I_p} t_I$ (361 ras.). Lai uzmekletu taisnes a_p krustošanās punktu C_p ar doto plakni, caur taisni a_p velkam kautkādu plakni $u_{II_p} t_{II}$, velkot tam nolūkam caur punktiem U_{I_p} un T_I patvaļīgas līdzteces u_{II_p} un t_{II}. Plaknes $u_{I_p} t_I$ un $u_{II_p} t_{II}$ krustojas pa taisni $b_p = U_p T$. Punkts C_p, kuŗā krustojas b_p ar a_p, ir meklejamā krustošanās punkta perspektive.

283 §. Pret doto plakni vilkto stateņu saiešanās punkts. Plaknes, stateniskas pret doto taisni.

Pieņemsim, ka ir dota patvaļīga plakne $P = u_p t$ un galvenais punkts Γ ar attālumu aploci r (362 ras.).

Ja mēs telpā caur Ω pret doto plakni P velkam vienu statenisku palīgplakni Q, tad šī plakne ir stateniska arī pret plaknes P līdztekus projecejošo plakni E. Nav gŗūti sajēgt (sk. 348 ras.), ka palīgplakne Q ir stateniska pret u_p, kā arī pret t, un tapēc plakne Q rasejumā attēlojas kā no Γ pret u_p, jeb t stateniski vilkta taisne $U_p T$.

Palīgplakne Q telpā krusto līdztekus projecejošo plakni E pa taisnī ΩU_p, kuras savienotais stāvoklis ir $\Omega_o' U_p$.

Visiem, telpā pret doto plakni P, jeb pret līdztekus projecejošo plakni E vilktiem stateņiem ir kopejs līdztekus projecejošais stars, kurš telpā iet caur Ω, stateniski pret plakni P, jeb E. Šīs līdztekus projecejošais stars telpā veido taisnu leņķi ar visām taisnēm, guļošām uz plaknes E un ejošām caur Ω, tapēc tas veido taisnu leņķi ari ar taisni ΩU_p, guļošo uz E, un tapēc ari savienotā stāvoklī līdztekus projecejošais stars $\Omega_o' K_p$ veido taisnu leņķi ar taisnes ΩU_p savienoto stāvokli $\Omega_o' U_p$.

Taisnes $U_p \Omega_o'$ un $\Omega_o' K_p$ noteic palīgplaknes Q savienoto stāvokli. Palīgplakne Q krusto attēlu plakni pa taisni $U_p T$ un ap šo taisni mēs griežam palīgplakni Q, savienodami viņu ar rasejuma plakni. Tapēc punkts K_p, kurā taisne $\Omega_o' K_p$ krusto pagarinato taisni $U_p T$, ir līdztekus projecejoša stara krustošanās punkts ar attēlu plakni. Tas nozīmē, ka K_p ir visu, telpā pret līdztekus projecejošo plakni E, vaj oriģinalo plakni $P = u_p t$ vilktu stateņu saiešanās punkts. Caur K_p kautkādas taisnes a_p, b_p, c_p... vilkdami, dabusim patvaļigu pret plakni $P = u_p t$ vilktu stateņu perspektives.

Uz aizrādito pamatodamies, v a r a m a t r i s i n a t a r i a p g r i e s t o u z d e v u m u, t. i. p r e t k a u t k ā d u t a i s n i a_p, k u r a s s a i e š a n ā s p u n k t s i r K_p, v a r a m v i l k t s t a t e n i s k o p l a k n i. Tam nolūkam mēs K_p savienojam apgriestā kārtā ar Ω_o', no Ω_o' velkam stateni pret $K_p \Omega_o'$ un noteicam punktu U_p, kurā šīs statenis krusto pagarinato taisni $K_p \Gamma$.

Caur U_p taisni $u_p \perp U_p K_p$ vilkdami, dabusim visu, telpā pret oriģinalo taisni a vilktu plakņu saiešanās liniju u_p. Kautkādu taisni $t \parallel u_p$ vilkdami, dabusim patvaļigas, pret oriģinalo taisni a stateniskas plaknes pēdu liniju. Saprotams, ka mēs varetu vilkt ari kautkādu citu pēdu liniju, līdztekus u_p, dabujot tā kaukādu citu, pret oriģinalo taisni a statenisku plakni.

284 § Statenis pret doto plakni, ejošais caur doto punktu.

Pieņemsim, ka caur punktu A_p, doto uz taisnes $a_p = U_{I_p} T_I$, javelk pret doto plakni $u_p t$ statenis (363 ras.).

Tam nolūkam pēc 362 rasejuma noteicam pret plakni $u_p t$ vilktu stateņu saiešanās punktu K_p, un punktu A_p savienojam ar K_p, dabujot tā meklejamo taisni $c_p = A_p K_p$.

Lai šo taisni pilnigi noteiktu, uzmeklesim taisnes c_p pēdu punktu T. Plaknes ac saiešanās linija ir $u_{I_p} = U_{I_p} K_p$, bet attiecigo pēdu liniju t_I dabusim, velkot caur T_I taisni $t_I \parallel u_{I_p}$. Punkts T, kurā c_p krusto t_I, ir meklejamais pēdu punkts.

Bez tam vēl varam noteikt oriģinalās taisnes c krustošanās punktu ar plakni $u_p t$, uzmeklejot tam nolūkam taisni $b_p = U_{II_p} T_{II}$, pa kuŗu krustojas plaknes $ac = u_{I_p} t_I$ un $u_p t$. Punkts $B_p = c_p \times b_p$ ir meklejamais.

285 § Plakne, ejoša caur doto punktu, stateniski pret doto taisni. Statenis, vilktais no dotā punkta pret doto taisni.

Pieņemsim, ka caur punktu A_p, doto uz taisnes $b_p = U_{I_p} T_I$, javelk pret doto taisni $c_p = U_{II_p} T_{II}$ stateniska plakne (364 ras.).

Meklejamās plaknes saiešanās liniju u_p konstruejam pēc 362 rasejuma. Pēc tam uz meklejamās plaknes caur punktu A_p velkam patvaļigu taisni e_p, kuŗas saiešanās punkts U_{III_p} guļ uz u_p. Taisnes e_p pēdu punktu T_{III} dabusim, ja atzīmesim plaknes be saiešanās liniju $u_{I_p} = U_{I_p} U_{III_p}$ un pēdu liniju t_I, kuŗa iet caur T_I, līdztekus u_{I_p}. Tādā veidā noteicam punktu $T_{III} = t_I \times e_p$. Tagad caur punktu T_{III} varam vilkt meklejamās plaknes pēdu liniju $t \parallel u_p$.

Punktu D_p, kuŗā taisne c_p krustojas ar stateniskо pret to plakni $u_p t$, dabusim, ja caur taisni c_p vilksim kautkādu plakni $u_{III_p} t_{III}$ un atzīmesim punktu D_p, kuŗā c_p krusto plakņu $u_p t$ un $u_{III_p} t_{III}$ krustošanās taisni $U_{IV_p} T_{IV}$.

Ja mēs punktu A_p savienosim ar D_p, tad dabusim stateni p_p, kas no punkta A_p vilkts pret taisni c_p, jo oriģinalā taisne p guļ uz plaknes $u_p t$, stateniskas pret oriģinalo taisni c. Taisnes p saiešanās punkts U_{V_p} guļ uz u_p, bet pēdu punkts T_V uz pēdu linijas t.

Oriģinalā taisne p krusto oriģinalās taisnes b un c, tapēc kontroles dēļ jabūt $U_{V_p} U_{I_p} \parallel T_V T_I$ un $U_{V_p} U_{II_p} \parallel T_V T_{II}$.

286 §. Divas, vaj tris savstarpeji stateniskas plaknes.

Pieņemsim, ka ir doti: galvenais punkts Γ ar attalūmu aploci r un kautkādas plaknes saiešanās linija u_{I_p} (365 ras.). Attiecigā pēdu linija, kā ari parejo, šinī rasejumā atzīmeto plakņu pēdu linijas nav aizrāditas, jo tām mūsu konstrukcijās nav nekādas nozīmes.

Pēc 362 ras. uzmeklejam stateņu, vilkto pret plakni u_{I_p} saiešanās punktu K_{I_p}, un caur šo punktu velkam patvaļigu saiešanās liniju u_{II_p}, kuŗa ir visu, zinamā virzienā, stateniski pret doto plakni u_{I_p} vilktu oriģinalo plakņu saiešanās linija.

Punkts $K_{II_p} = u_{I_p} \times u_{II_p}$ ir saiešanās punkts visām taisnēm, pa kuŗām krustojas savstarpeji stateniskas plaknes, kuŗu saiešanās linijas ir u_{I_p} un u_{II_p}. Visas plaknes, kas stateniskas pret plaknēm ar saiešanās linijām u_{I_p} un u_{II_p}, ir stateniskas ari pret šo plakņu krustošanās linijām, kuŗām ir kopejs saiešanās punkts K_{II_p}. Uzmeklejot pēc 362 ras. punktu U_{III_p}, mēs caur šo punktu velkam $u_{III_p} \perp K_{II_p} - U_{III_p}$, dabujot tā visu, pret plaknēm u_{I_p} un u_{II_p} statenisku plakņu saiešanās liniju. Kontroles dēļ u_{III_p} iet caur K_{I_p}.

Saiešanās linijas u_{I_p}, u_{II_p} un u_{III_p} krustodamās veido trijstūri $K_{I_p} K_{II_p} K_{III_p}$, kuŗā pēc konstrukcijas divi augstumi krustojas galvenā punktā Γ, tapēc ari trešais augstums $K_{III_P} U_{III_p}$ iet caur Γ. Punkti K_{I_p}, K_{II_p} un K_{III_p} ir saiešanās punkti no trim, telpā savstarpeji stateniskām taisnēm, pa kuŗām krustojas trīs telpā savstarpeji stateniskas plaknes, vilktās zinamos virzienos.

Uz aizrādīto pamatojoties, mēs pareizi konstruetā perspektiviskā rasejumā (gleznā), jeb fotografiskā uzņēmumā varam noteikt galveno punktu Γ, ja uzmeklesim triju savstarpeji statenisku taišņu saiešanās punktus, t. i. ja uzmeklesim trijstūri $K_{I_p} K_{II_p} K_{III_p}$. Attiecigus augstumus vilkdami, dabusim viņu krustošanās punktā galveno punktu Γ.

Bez tam vēl varam noteikt attālumu aploces radiusu, velkot, piemēram, ap $U_{I_p} K_{I_p}$, kā caurmēru, pusaploci un no Γ pret $U_{I_p} K_{I_p}$ stateni, līdz krustošanai ar atzīmeto aploci punktā Ω'_o. Tādā veidā dabujam meklejamo radiusu $\Gamma\Omega_o' = r$.

287 §. Vienlīdzigie nogriežņi uz līdzteku taisnēm.

Pieņemsim, ka plakanā rasejumā ir dotas kautkādas divas līdzteku taisnes a un b (366ᵃ ras.), un uz taisnes a ir dots kautkāds nogrieznis EF. Velkot caur E un F kautkādas līdzteces c un d līdz krustošanai ar b, mēs uz taisnes b iegūsim nogriesni $E'F' = EF$. Tadā veidā nogriezni EF parvedam no taisnes a uz taisni b.

Ja aizrādito konstrukciju gribam izpildit perspektiviskā rasejumā (366ᵇ ras.), kuŗa savstarpeji līdzteku taisnes a un b attēlojas kā taisnes a_p un b_p ar kopeju saiešanās punktu U_{I_p}, tad no kautkāda saiešanās punkta U_{II_p}, guļoša uz plaknes ab saiešanās linijas u_p, caur punktiem E_p un F_p javelk taisnes c_p un d_p līdz krustošanai ar b_p punktos E'_p un F'_p, jo taisnes c_p un d_p ir divu, telpā savstarpeji līdzteku taišņu c un d perspektives. Taisnes a, b, c un d guļ kopejā plaknē, jo viņu saiešanās punkti U_{I_p} un U_{II_p} guļ uz vienas saiešanās linijas u_p. Tapēc telpā figuŗa $EFF'E'$ ir paralelograms ar savstarpeji vienlīdzigām pretguļošām malām EF un $E'F'$. Saprotams, ka perspektiviskā rasejumā paralelograms $EFF'E'$ attēlojas sagrozitā, t. i. kautkāda četrstūŗa veidā.

288 §. Vienlīdzigie nogriežņi uz krustodamām taisnēm.

Ja uz taisnes a (367 ᵃ ras.) dotais nogrieznis EF japārved uz taisni b, kas krustojas ar a, tad tam nolūkam caur gala punktiem E un F velkam leņķa α, vaj β bissektrisai līdzteces c' un d', vaj c'' un d'', dabujot tā uz b nogriežņus $E'F' = E''F'' = EF$.

Lai šo konstrukciju izpilditu perspektiviskā rasejumā (367b ras.), kuŗā ir dots galvenais punkts Γ, atrodam Ω_o un šo punktu savienojam ar doto taišņu a_p un b_p saiešanās punktiem U_{I_p} un U_{II_p}, dabujot tā savienotus stāvokļus $\Omega_o U_{I_p}$ un $\Omega_o U_{II_p}$ līdztekus projecejošiem stariem, kas telpā vilkti caur Ω, līdztekus oriģinalām taisnēm a un b. Leņķus α un β, ko veido projecejošie stari $\Omega_o U_{I_p}$ un $\Omega_o U_{II_p}$ uz pusēm dalot, dabusim savienotus stāvokļus līdztekus projecejošiem stariem, kas vilkti telpā caur Ω, līdztekus oriģinalo taišņu a un b veidotu leņķu α un β bissektrisēm.

Punkti U_{I_d} un U_{II_d}, kuŗos atzīmetās bissektrises krustojas ar u_p, ir saiešanās punkti visām taisnēm, vilktām telpā līdztekus leņķu α un β bissektrisēm. Tapēc ar šo punktu palīdzibu mēs nogriezni $E_p F_p$ no taisnes a_p varam pārnest uz taisni b_p, velkot no U_{I_d} taisnes c'_p un d'_p, vaj no U_{II_d} taisnes c''_p un d''_p.

Saprotams, ka telpā taisnes c' un d', vaj c'' un d'' ir savstarpeji līdzteces un guļ uz tās pašas plaknes $u_p t$, kā ari oriģinalās taisnes a un b. Tādejadi dabujam perspektiviskos attēlojumus $E'_p F'_p$ un $E''_p F''_p$ no diviem telpā vienlīdzigiem nogriežņiem $E'F' = E''F''$, kas līdzinas EF.

Punktus U_{I_d} un U_{II_d} sauc par pārnešanas centriem, jeb dalīšanas punktiem.

Parasti rasejumā tiek aizrādits tikai viens pārnešanas centrs, ko turpmak atzīmesim ar U_d.

289 §. Perspektiviskā nogriežņa patiesais lielums.

Pieņemsim, ka jauzmeklē perspektiviskā nogriežņa $E_p F_p$, guļoša uz perspektives a_p, patiesais lielums (368 ras.).

Tam nolūkam vilksim caur U_{I_p} un T_I kautkādā virzienā savstarpeji līdzteku taisnes u_p un t, atzīmejot tā kautkādu plakni, kas iet caur oriģinalo taisni a. Bez tam uzmeklesim Ω_o.

Taisnes a_p un t ir divas krustodamās taisnes, kuŗam pēc 367b ras. konstruejam pārnešanas centrus U_{I_d} un U_{II_d}. Pie tam jaievēro, ka taisnes t saiešanās punkts $U_{II_p} \infty$ atrodas bezgalibā uz līdztekus projecejoša stara $\Omega_o U_{II_p} \infty \parallel t$.

Ar pārnešanas centra U_{I_d}, vaj U_{II_d} palīdzibu nogriezni $E_p F_p$ no a_p pārvedam uz t, dabujot $E'_p F'_p$, vaj $E''_p F''_p$. Tā kā t guļ uz attēlojumu (rasejuma) plaknes, tad $E'_p F'_p$, vaj $E''_p F''_p$ ir perspektiviskā nogriežņa $E_p F_p$ patiesais lielums.

Kā no izpilditām konstrukcijām redzams, trijstūris $U_{I_p} \Omega_o U_{I_d}$ ir vienadsānu trijstūris, jo leņķi $U_{I_p} \Omega_o U_{I_d}$ un $U_{I_p} U_{I_d} \Omega_o$ pēc konstrukcijas līdzinas $\frac{\alpha}{2}$, tapēc $U_{I_p} U_{I_d} = U_{I_p} \Omega_o$.

Trijstūris $U_{I_p}\Omega_o U_{II_d}$ tapat ir vienadsānu trijstūris, kuŗam leņķi $U_{I_p}\Omega_o U_{II_d}$ un $U_{I_p}U_{II_d}\Omega_o$ līdzinas $\frac{\beta}{2}$, tapēc $U_{I_p}\Omega_o = U_{I_p}U_{II_d}$.

Tā tad atradām, ka $U_{I_p}U_{I_d} = U_{I_p}\Omega_o = U_{I_p}U_{II_d}$, t. i. pārnešanas centri U_{I_d} un U_{II_d} atstāj no saiešanās punkta U_{I_p} vienlīdzigos atstatumos, kas līdzinas acs Ω patiesam atstatumam no saiešanās punkta U_{I_p}. Šo atstatumu savienotā stāvoklī noteic nogrieznis $U_{I_p}\Omega_o$.

Acs attālumu no saiešanās punkta U_{I_p} var ari noteikt ar taisnleņķa trijstūŗa $U_{I_p}\Gamma\Omega_{oI}$ palīdzibu, kuŗā hipotenūze $U_{I_p}\Omega_{oI}$ noteic acs patieso atstatumu no saiešanās punkta U_{I_p}. Šo atstatumu noteic griezuma linija, pa kuŗu caur aci Ω un saiešanās punktu U_I, stateniski pret attēlu plakni vilktā plakne krustojas ar plaknes $u_p t$ līdztekus projecejošo plakni.

Velkot ap centru U_{I_p} ar radiusu $U_{I_p}\Omega_{oI}$ aploci, mēs viņas krustošanās punktos ar u_p iegūstam iepriekšejos punktus U_{I_d} un U_{II_d}.

Ar radiusu $U_{I_p}\Omega_{oI}$, vaj $U_{I_p}\Omega_o$ vilkto aploci, kuŗas radiuss līdzinas acs patiesam atstatumam no saiešanās punkta U_{I_p}, — sauc par p ā r n e š a n a s, v a j d a l i š a n a s a p l o c i, bet punktus U_{I_d} un U_{II_d}, kuŗos pārnešanas aploce krustojas ar saiešanās liniju u_p, sauc par p ā r n e š a n a s c e n t r i e m (288 §).

Tā tad p e r s p e k t i v e s a_p p ā r n e š a n a s c e n t r i U_{I_d} u n U_{II_d} g u ļ u z k a u t k ā d a s p l a k n e s s a i e š a n ā s l i n i j a s (u_p), k a s i e t c a u r d o t ā s t a i s n e s a_p s a i e š a n ā s p u n k t u (U_{I_p}), u n p i e t a m p ā r n e š a n a s c e n t r i a t r o d a s t ā d ā a t s t a t u m ā n o p e r s p e k t i v e s a_p s a i e š a n ā s p u n k t a U_{I_p}, k ā a p l ū k o t a j a a c s Ω n o t ā p a š a s a i e š a n ā s p u n k t a U_{I_p}.

290 §. Dotā nogriežņa nospraušana.

Ja uz dotās taisnes a_p no patvaļiga punkta janosprauž nogrieznis, kuŗa patiesais lielums dots, tad šo uzdevumu atrisina šādi.

Pēc iepriekšejā panta atrod dotās taisnes $a_p = U_{I_p}T_I$ (368 ras.) pārnešanas centrus U_{I_d} un U_{II_d}. Pēc tam U_{I_d} savienojam ar E_p un pārnesam punktu E_p uz taisni t, dabujot punktu E'_p. No punkta E'_p uz taisnes t nospraužam nogriezni $E'_p F'_p$, kuŗš līdzinas dotā nogriežņa patiesam lielumam, un punktu F'_p pretejā ceļā ar pārnešanas centra U_{I_d} palīdzibu pārnesam uz taisni a_p, dabujot F_p. Nogrieznis $E_p F_p$ ir dotā nogriežņa $E'_p F'_p$ perspektiviskais attēls.

Līdzigas konstrukcijas var ari izdarit ar otra pārnešanas centra U_{II_d} palīdzibu.

291 §. Kuba, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpā, perspektive.

Pieņemsim, ka ir doti: kuba pamatplakne $u_p t$ un galvenais punkts Γ ar attālumu aploci r (369 ras.).

Papriekšu pēc 351 ras. noteicam kuba pamata perspektivi $A_{I_p}B_{I_p}C_{I_p}D_{I_p}$, kuŗa savienotais stāvoklis ir $A_{I_o}B_{I_o}C_{I_o}D_{I_o}$. Pēc tam, pamatojoties uz

362 ras., noteicam visu, pret pamatplakni $u_p t$ statenisko kuba šķautņu saiešanās punktu K_p.

Lai noteiktu patvaļigas šķautnes $B_I B_{II}$ perspektivisko attēlu $B_{I_p} B_{II_p}$, velkam vienu palīgplakni caur $B_{I_p} B_{II_p}$ un kautkādu taisni, piemēram, $B_{I_p} C_{I_p}$, kuŗa krustojas ar $B_{I_p} B_{II_p}$ un kuŗas pēdu punkts T_{II} un saiešanās punkts U_{II_p} ir zinami. Palīgplaknes saiešanās linija u_{I_p} iet caur taišņu $B_{I_p} C_{I_p}$ un $B_{I_p} B_{II_p}$ saiešanās punktiem U_{II_p} un K_p, t. i. $u_{I_p} = U_{II_p} K_p$. Bet palīgplaknes pēdu linijai t_I jaiet caur taisnes $B_{I_p} C_{I_p}$ pēdu punktu T_{II}, līdztekus u_{I_p}. Tādā veidā noteicam palīgplakni $u_{I_p} t_I$.

Lai nu tagad uz zinamā virziena $K_p B_{I_p}$ noteiktu perspektivisko nogriezni $B_{I_p} B_{II_p}$, kuŗa patiesais lielums $a = B_{I_0} C_{I_0}$ ir zinams, pēc 368 ras. jauzmeklē taisnei $B_{I_p} B_{II_p}$ attiecigais pārnešanas centrs U_a, velkot no K_p ar radiusu $K_p \Omega'_0$, — kurš ir acs patiesais attālums no K_p, — loku, līdz krustošanai ar palīgplaknes, uz kuŗas guļ $B_{I_p} B_{II_p}$, saiešanās liniju u_{I_p}. Tālak pēc 368 ras. velkam $U_a B_{I_p}$, līdz krustošanai ar t_I, dabujot B'_I; nospraužam $a = B'_I B'_{II}$, un ar stara $B_{II}' U_a$ palīdzibu noteicam uz $K_p B_{I_p}$ meklejamo virsotni B_{II_p}.

Tamlīdzigi varam uzmeklet ari pārejas virsotnes A_{II_p}, C_{II_p} un D_{II_p}. Vēl vienkāršaki šīs virsotnes konstruejamas ar saiešanās punktu U_{I_p} un U_{II_p} palīdzibu, jo telpā $A_{II} B_{II} \parallel A_I B_I$, $B_{II} C_{II} \parallel A_I C_I$ u. t. t.

Perspektiviskā attēla redzamibas noteikšanai jaievēro sekojošais. Kautkāds saiešanās punkts ir bezgali tāla punkta perspektive, tapēc t a s p u n k t s a t r o d a s m a z a k ā a t t ā l u m ā n o a p l ū k o t a j a a c s Ω, k u ŗ a p e r s p e k t i v e t ā l a k a t s t ā j n o a t t i e c i g ā s a i e š a n ā s p u n k t a u n a r i o t r a d i. Tā, piemēram, D_{II} atrodas tuvaki pie Ω, nekā A_{II}, jo D_{II_p} tālak atstāj no U_{II_p}, nekā A_{II_p}. Tamlīdzigi D_{II} atrodas tuvaki pie Ω, nekā C_{II} jeb D_I, jo C_{II_p} un D_{I_p} tuvaki guļ pie attiecigiem saiešanās punktiem U_{I_p} un K_p, nekā D_{II_p}. Tapēc trijplakņu kakts ar virsotni D_{II} ir pagriests pret aplūkotaju, un šis kakts redzams.

Otradi: kakts ar virsotni B_I nav redsams, jo, piemēram, B_{I_p} guļ tuvaki pie K_p, nekā B_{II_p}, t. i. B_I atrodas tālaki no Ω, nekā B_{II}.

P i e z ī m e. Acs attālumu no K, t. i. attālumu aploces radiusu r vēlams pieņemt pēc iespējas lielaku ($r \geq 25$ cm.), bet jo lielaks ir radiuss r, jo grūtaki iegūt rasejuma robežās konstruešanai vajadzigus punktus, tadēļ mēs praktiskos darbos esam piespiesti pieņemt r mazaku, kā vēlams, bet tomēr japieņem r ne m a z a k s, k ā 15 cm. (369 resejumā aiz techniskiem iemesļiem bija iespējams pieņemt tikai $r = 7,5$ cm.).

292 §. Ikosaedra, kas ieņem patvaļigu stāvokli telpa, perspektive.

Pieņemsim, ka ir doti: patvaļiga plakne $u_p t$ un Γ ar attālumu aploci r (370 ras.). Jakonstruē perspektive ikosaedram, kuŗa ass 1 – 12 stateniska pret doto plakni $u_p t$, pie kam virsotne 1 atbalstās uz plakni $u_p t$.

Lai konstruetu meklejamo perspektivi, atzīmesim savienotā stāvoklī ikosaedra ortogonalo projekciju 1_o, 2_o... 11_o, 12_o uz doto plakni, un pēc 149a ras. noteicam augstumus p un m. Tad pēc 351 ras. noteicam ikosaedra ortogonalās projekcijas perspektivi $1'$, $2'$...$11'$, $12'$. Pie tam punkts $1'$ ir meklejamās virsotnes 1 perspektive, bet pārejo virsotņu perspektives iegūsim, ievērojot, ka šās virsotnes guļ uz stateniem, vilktiem no $2'$, $3'$...$11'$, $12'$ pret doto plakni $u_p t$.

Perspektiviskā rasejumā visi šie stateņi pret plakni $u_p t$ iet caur kopejo saiešanās punktu K_p, kuŗu noteicam pēc 362 rasejuma. Tapēc uz zinamiem mums virzieniem janosprauž attiecigie augstumi, līdzigi 369 rasejumam. Tā, piemēram, virsotni 12 dabujam, velkot caur zinamo virzienu $K_p - 12'$ un taisni $5' - 8'$, — kas šo virzienu krusto punktā $12'$, — palīgplakni. Šās plaknes saiešanās linija u_I iet caur K_p un taisnes $5' - 8'$ saiešanās punktu U_I, bet pēdu linija t_I iet caur taisnes $5' - 8'$ pēdu punktu T_I, līdztekus u_I.

Velkot ar radiusu $K_p \Omega'_o$ loku, līdz krustošanai ar u_I, dabujam punktam U_I attiecigo pārnešanas centru U_d, ar kuŗa palīdzibu punktu $12'$ pārnesam uz t_I, dabujot punktu $12'_o$. Pēc tam nospraužam uz t_I no punkta $12'_o$ nogriezni $p + m + p$, dabujot punktu 12_o, kuŗu ar pārnešanas centra U_d palīdzibu atkal pārnesam atpakaļ uz virzienu $K_p 12'$, iegūstot tā virsotni 12.

Tamlīdzigi noteicamas parejās virsotnes.

Šās virsotnes varam noteikt ari šādi. Tā, piemēram, lai noteiktu virsotni 9, mēs papriekšu noteicam piramides $7 - 8 - 9 - 10 - 11 - 12$ pamatplaknes $7 - 8 - 9 - 10 - 11$ centru C. Tam nolūkam uz t_I no punkta $12'_o$ nospraužam nogriezini $p + m$, dabujot punktu C', kuŗu ar pārnešanas centra U_d palīdzibu pārnesam uz virzienu $K_p - 12'$, iegūstot tā perspektivi C.

Telpā radius $C - 9$ iet līdztekus savai ortogonalai projekcijai, kuŗas perspektive ir $1' - 9'$. Tapēc šām taisnēm ir kopejs saiešanās punkts U_{II}, kas guļ uz u_p. Savienojot U_{II} ar C un pagaŗinot šo taisni līdz krustošanai ar virzienu $K_p - 9'$, dabujam meklejamo perspektivi 9.

Jaievēro, ka telpā $6' - 1' - 9' \parallel 2' - 8' \parallel 5' - 10'$, tapēc kontroles dēļ attiecigas perspektives $6' - 9'$, $2' - 8'$ un $5' - 10'$ iet caur kopejo saiešanās punktu U_{II}.

Bez tam aizrādisim vēl uz sekošām kontrolēm. Telpā $9 - 10 \parallel \parallel 9' - 10' \parallel 2' - 6' \parallel 2 - 6$, tapēc visu šo taišņu perspektives iet caur kopejo saiešanās punktu U_{III}, kas guļ uz u_p.

Tamlīdzigi $2 - 3$, $10 - 11$, $2' - 3'$ un $10' - 11'$ iet caur kopejo saiešanās punktu U_{IV}, kas guļ uz u_p.

Aizrāditais jaievēro, konstruejot atsevišķo šķautņu, vaj virsotņu perspektives.

Ikosaedra redzamiba noteicama tapat, kā kuba redzamiba. Aplūkojot, piemēram, ikosaedra asi 12 – 1′, kuŗas saiešanās punkts ir K_p, varam tulit novērot, ka virsotne 12 ir pagriesta pret aplūkotaju, bet virsotne 1′ pagriesta pretejā pusē, jo 12 tālaki atstāj no K_p, nekā 1′.

Līdzigi varam konstruet patvaļiga priekšmeta (galda, krēsla u. t. t.) perspektivi, pie kam tādā gadijumā attiecigo augstumu noteikšanai, dotais priekšmets papriekšu jaatzīmē ortogonalās projekcijās.

293 §. Uz H stāvoša kuba perspektive. Augstumu mērogs.

Pieņemsim, ka pēc šķautnes patiesā lieluma a, jakonstruē perspektive kubam, kas atbalstās uz horicontalo plakni (371 ras.).

Ja t ir kuba pamatplaknes pēdu linija, tad horicontalās plaknes saiešanās linija u_p saplūst ar apvārsni h, un $\Gamma = U_p$ guļ uz h. Acs savienoto stāvokli Ω_o dabujam uz attālumu aploces.

Pieņemdami savienotā stāvoklī kuba pamatplakni $A_{I_o}B_{I_o}C_{I_o}D_{I_o}$, mēs pēc 351 ras. noteicam pamata perspektivi $A_{I_p}B_{I_p}C_{I_p}D_{I_p}$.

Šķautnes A_IA_{II}, B_IB_{II} u. t. t. ir stateniskas pret H, tapēc viņu perspektives pēc 257 § ir stateniskas pret h. Lai noteiktu patvaļigas šķautnes perspektivi $A_{I_p}A_{II_p}$, rīkojamies šādi. Uz h pilnigi patvaļigi pieņemam punktu U_{III_p}, velkam $U_{III_p} - A_{I_p} - M$ un vēl kautkādu taisni $U_{III_p}M'$. No M un M' velkam stateņus pret t un nospraužam attiecigās šķautnes patieso lielumu $a = MN = M'N'$. Punktus N un N′ ar U_{III_p} savienojot, mēs iegūstam bezgali gaŗa slīpa paralelopipeda perspektivi, kuŗš krusto attēlu (rasejuma) plakni pa taisnstūri $MNN'M'$, kas ša taisnstūŗa patiesais lielums.

Taisnes MU_{III_p}, NU_{III_p} un $M'U_{III_p}$, $N'U_{III_p}$ ir perspektiviskie attēli no savstarpeji līdzteku paralelopipeda šķautnēm, kuŗu savstarpejs vertikalais attālums telpā ir a. Ja mēs nu no A_{I_p} vilksim $A_{I_p}A'_{I_o} \parallel t$, no A'_{I_o} vilksim $A'_{I_o}A'_{II_o} \parallel M'N'$, un pēc tam no A'_{II_o} vilksim $A'_{II_o}A_{II} \parallel N'N$, tad $A_{I_p}A'_{I_o}A'_{II_o}A_{II_p}$ ir perspektiviskais attēls no paralelopipeda krustošanās figuras ar plakni, kas ir līdztece attēlu (rasejuma) plaknei. Tapēc telpā taisnstūŗi $MNN'M'$ un $A_{I_p}A_{II_p}A'_{II_o}A'_{I_o}$ ir vienlīdzigi, kapēc ari $A_{I_p}A_{II_p}$, un $A'_{I_o}A'_{II_o}$ ir vertikalo nogriežņu perspektiviskie attēli, kuŗu dabiskais lielums ir a. Kā no rasejuma redzams, konstrukcijai taisnes $U_{III_p}M$ un $U_{III_p}N$ nemaz nav vajadzigas un tapēc rasejumā parasti netiek aizrāditas, bet tiek aizrāditas tikai taisnes $U_{III_p}M'$ un $U_{III_p}N'$.

Taisnes $U_{III_p}M'$ un $U_{III_p}N'$ veido tā saucamo augstumu mērogu.

Tapat varam noteikt virsotnes B_{II_p}, C_{II_p} un D_{II_p}, bet vēl vienkāršaki tās noteicamas ar saiešanās punktu U_{I_p} un U_{II_p} palīdzibu.

Kuba redzamiba noteicama pēc 291 §.

Ja kuba vietā ir dots patvaļigs priekšmets, stāvošs uz H, tad viņa perspektive konstruejama līdzigā kārtā.

Lai noteiktu atsevišķo punktu patiesos augstumus, t. i. attālumus no H, dotais priekšmets jaattēlo ortogonalās projekcijās. Pie tam var pieņemt, ka pamata savienotais stāvoklis, piemēram, $A_{I_0} B_{I_0} C_{I_0} D_{I_0}$ vienā un taī pašā laikā noteic dotā priekšmeta horicontalo projekciju. Velkot patvaļigā virzienā asi OX, attiecibā uz viņu konstruejam dotā priekšmeta vertikalo projekciju, kā tas aizrādits rasejumā, attiecibā uz kubu. Pēc šīs vertikalās projekcijas noteicam konstrukcijai vajadzigus augstumus.

294 §. Uz H stāvoša velteņa perspektive.

Lai konstruetu patvaļiga uz H stāvoša velteņa perspektivi, savienotajā stāvoklī atzīmejam velteņa pamatu (372 ras.). Pēc tam velkam patvaļigi pieņemtiem virzieniem līdztekus atsevišķas taisnes, kas velteņa pamata savienoto stāvokli krusto punktos A_{I_0}, B_{I_0}, C_{I_0}, D_{I_0} u. t. t. Šīm taisnēm attiecigos saiešanās punktus U_{I_p} un U_{II_p} noteikuši, konstruejam atsevišķo punktu perspektives A_{I_p}, B_{I_p} u. t. t.

Jaievēro, ka rasejumā taisnes $B_{I_0} F_{I_0}$ un $D_{I_0} J_{I_0}$, kā arī viņām līdztekus vilktās taisnes veido ar t leņķus, kas līdzinas 45^0, tapēc saiešanās punkti U_{I_p} un U_{II_p} mūsu gadijumā guļ uz attālumu aploces.

Velteņa veiduļu perspektives konstruejamas ar augstumu mēroga palīdzibu, kā tas, piemēram, aizrādits veidulei $E_{I_p} E_{II_p}$. Pārejo veiduļu augšejos atbalstus (C_{II_p}, G_{II_p} u. t. t.) konstruejam ar saiešanās punktu U_{I_p} un U_{II_p} palīdzibu.

Lai noteiktu velteņa augstumu p, rasejumā ir aizrādita velteņa vertikalā projekcija attiecibā uz patvaļigo asi OX.

Konstruetos augšejā un apakšejā pamata punktus ar slaidenām līknēm savienodami, iegūstam perspektives ierobežojumu. Perspektivi bez tam ierobežo galejās, pret h stateniski un velteņa apakšejam un augšejam pamatam pieskarus vilktās veidules.

295 §. Prizmas, vaj patvaļiga priekšmeta perspektive, kuŗa pamatplakne stateniska pret H un K.

Pieņemsim, ka jakonstruē patvaļigas prizmas perspektive, kuŗas pamatplakne stateniska pret H un K. Horicontalās pamatplaknes H pēdu linija ir t, bet $u_p = h$ ir attieciga saiešanās linija (373 ras.). Bez tam vēl ir dota prizmas pamatplaknes pēdu linija t_I, pie kam t_I saskaņā ar uzdevuma nosacijumiem ir stateniski pret t un h. Prizmas pamatplaknes saiešanās linijai u_{I_p} jaiet caur Γ, līdztekus t_I.

Savienosim prizmas pamatplakni ar attēlu plakni K, un savienotā stāvoklī atzīmesim prizmas pamatu $A_{I_0} B_{I_0} C_{I_0} D_{I_0}$. Prizmas pamatplakni ar K savienojot, arī acs Ω savienojas ar K. Pie tam acs savienoto stāvokli Ω_0 iegūsim attālumu aploces krustotnē ar h.

Taisnes $A_{I_o}B_{I_o}$ un $A_{I_o}D_{I_o}$ ir pieņemtas tā, ka viņas veido ar t_I vienlīdzigus leņķus 45^0, tapēc šai gadijumā saiešanās punkti U_{I_p} un U_{II_p} guļ uz attālumu aploces. (Ja taisnes $A_{I_o}B_{I_o}$ un $A_{I_o}D_{I_o}$ veido ar t_I patvaļigus leņķus, tad, saprotams, saiešanās punkti U_{I_p} un U_{II_p} negulēs uz attāļumu aploces, bet atradisies zinamās vietās uz u_{I_p}).

Prizmas pamata perspektivi $A_{I_p}B_{I_p}C_{I_p}D_{I_p}$ konstruejam pēc 351 ras. Šķautnes $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ u. t. t. telpā ir līdzteces pēdu linijai t. Šo šķautņu saiešanās punkts atrodas bezgalibā taisnes t, vaj h virzienā, tapēc perspektives $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ u. t. t. savstarpeji līdzteces un līdzteces ar t, vaj h. Lai noteiktu patvaļigas šķautnes $D_I D_{II}$ perspektivisko attēlu $D_{I_p}D_{II_p}$, konstruejam augstumu mērogu $U_{III_p}M'N'$. Tam nolūkam pret t_I velkam patvaļigu stateni $M'N'$ un uz viņa nospraužam nogriezni, kas līdzinas prizmas augstumam p.

Savienojot M' un N' ar patvaļigo saiešanās punktu U_{III_p}, kas pieņemts uz saiešanās linijas u_{I_p}, varam apgalvot, ka $U_{III_p}M'$ un $U_{III_p}N'$ ir divu līdzteku taišņu perspektives. Šīs taisnes guļ divās dažādās, pret H un K stateniskās plaknēs. Attāļums starp šām taisnēm līdzinas p, jo nogrieznis $M'N'=p$ guļ uz attēlu plaknes. Punkti M' un N' ir šo līdzteku taišņu pēdu punkti attiecibā uz attēlu plakni K.

Pārnesisim tagad punktu D_{I_p} uz taisni $U_{III_p}M'$, velkot tam nolūkam caur D_{I_p} līdzteci ar t. No tādā veidā iegūta punkta D'_{I_o} velkam stateni pret t_I, līdz krustošanai ar $U_{III_p}N'$ punktā D'_{II_o}. Šo punktu pretejā ceļā uz zinamo vierzienu $D_{I_p}D_{II_p}$ parnesot, iegūsim punkta D_{II} perspektivi D_{II_p}. Taisnes $D_{I_p}D_{II_p}$ un $D'_{I_o}D'_{II_o}$, acim redzot, ir divu vienlīdzigu līdzteku taišņu perspektives, kas atrodas vienlīdzigos attālumos no attēlu plaknes, jo viņu pamati D_{I_p} un D'_{I_o} atstāj no attēlu plaknes vienlīdzigos attālumos. Tapēc ari viņu perspektivēm $D_{I_p}D_{II_p}$ un $D'_{I_o}D'_{II_o}$ jabūt vienlīdzigām.

Pārejās prizmas augšejā pamata virsotnes un prizmas redzamibu noteicam uz iepriekšejo noteikumu pamata.

Līdzigā kārtā var konstruet velteņa, vaj patvaļiga priekšmeta perspektivi, ja pamats statenisks pret H un K. Konstrukcijai vajadzigus augstumus noteic pēc dotā priekšmeta vertikalās projekcijas, konstruetās attiecibā uz patvaļigu asi OX, kā tas rasejumā aizrādits.

296 § Perspektives konstruešana ar pārnešanas centra palidzibu. Nolodetais atbalsts.

374ᵃ rasejumā ir aizrāditas patvaļiga, uz H stāvoša priekšmeta projekcijas. Tapat, kā 347ᵃ rasejumā noteicam Ω_1, Ω_2, a, Γ, s, $r=\Omega_1\Gamma_1$, U_{I_p} un U_{II_p}, un pēc tam 374ᵇ rasejumā atzīmejam $h=u_p$, Γ un uzmeklejam U_I un U_{II}.*)

*) 347ᵇ rasejumā indekši „p" atsevišķiem perspektiviskiem attēliem nav atzīmeti.

Attālumā $\Gamma\Gamma_1 = 2\times(\Omega_2\Omega_x)$ velkam $t = h$. (Jaievēro, ka taisne t 374^b rasejumā ir ta pati taisne, kuŗa 374^a ras. atzīmeta ar s. 374^b rasejumā šī taisne atzīmeta ar t, jo tā ir dotā priekšmeta horicontalās atbalstplaknes pēdu linija attiecibā uz vertikalo attēlu plakni K). Pēc tam nospraužam uz h no punktiem U_I un U_{II} nogriežņus $U_I - {}^1/_2 U_{Id} = \Gamma_1 U_{Ip_1}$, $U_I U_{Id} = 2\times$ $\times(\Omega_1 U_{Ip_1})$ un $U_{II} - {}^1/_2 U_{IId} = \Omega_1 U_{IIp_1}$, $U_{II} - U_{IId} = 2\times(\Gamma_1 U_{IIp_1})$, dabujot tā pārnešanas centrus U_{Id} un U_{IId} (289 §).

Pēc tam uzmeklejam dotā priekšmeta pamata perspektivi. Tam nolūkam 374^a ras. atzīmejam pēdu punktus T_I līdz T_{IV} un uzmeklejam attiecigos punktus T_I līdz T_{IV} 374^b rasejumā, nospraužot uz t divas reizes, attiecigā pusē no Γ_1, — 374^a rasejumā noteiktos nogriežņus $\Gamma_1 T_I$, $\Gamma_1 T_{II}$ u. t. t Punktus T_I līdz T_{IV} 374^b rasejumā savienojam ar attiecigiem saiešanās punktiem U_I un U_{II}. Šo taisņu krustotnes noteic perspektives A_I, B_I, C_I un D_I.

Šķautņu $A_I A_{II}$, $B_I B_{II}$ u. t. t. augstumi noteicami ar augstuma mēroga $M'N'U_{III}$ palīdzibu (293 §, 371 ras.).

Ja rasejuma robežās atrodas tikai viens saiešanās punkts, piemēram, U_I un attiecigais pārnešanas centrs U_{Id}, tad konstrukcijas izpildamas šādi. Lai dabutu uz zinama virziena $T_I U_I$ punktus A_I un B_I, mēs uz t, attiecigās pusēs no T_I, nospraužam divas reizes 374^a rasejumā noteiktus nogriežņus $T_I A_{I_1}$ un $T_I B_{I_1}$. Tādā veidā 374^b rasejumā dabujam punktus A_{Id} un B_{Id}, kuŗus savienojam ar U_{Id}. Taisnes $U_{Id} A_{Id}$ un $U_{Id} B_{Id}$, krustodamās ar $U_I T_I$, noteic punktus A_I un B_I.

Tādā pat kārtā uz zinama virziena $T_{III} U_I$ varam noteikt punktus C_I un D_I.

Punktu A_I varam noteikt ari ar punkta ${}^1/_2 U_{Id}$ palīdzibu, savienojot ${}^1/_2 U_{Id}$ ar ${}^1/_2 A_{Id}$, pie kam ${}^1/_2 A_{Id} T_I = m = T_I A_{I_1}$. Pagaŗinot taisni ${}^1/_2 U_{Id} - {}^1/_2 A_{Id}$ līdz krustošanai ar virzienu $U_I T_I$, dabujam A_I. Konstrukcijas pareizibu nav gŗūti pierādit, aplūkojot līdzigus trijstūŗus $A_I T_I A_{Id}$ un $A_I U_I U_{Id}$. Taisne $A_I - {}^1/_2 A_{Id}$ dala nogriezni $T_I A_{Id}$ uz pusēm, tapēc pagaŗinata taisne $A_I - {}^1/_2 A_{Id}$ dala ari $U_I U_{Id}$ uz pusēm, t. i. taisne $A_I - {}^1/_2 A_{Id}$ iet caur punktu ${}^1/_2 U_{Id}$.

Punktu ${}^1/_2 U_{Id}$ sauc par puspārnešanas centru.

Tam līdzigi punktu U_{IId} vietā var lietot punktu ${}^1/_2 U_{IId}$.

Zinadami $A_I B_I C_I D_I$, mēs ar augstumu mēroga palīdzibu varam konstruet A_{II} un pārejas virsotnes.

Tā kā perspektiviskā rasejumā neredzamās šķautnes, kā, piemēram, $C_I C_{II}$ paŗasti netiek aizrāditas, bet pašas virsotnes (C_I, C_{II} u. t. t.) tomēr dažreiz pie ēnu konstrukcijām jauzmeklē, un bez tam rasejums japārkontrolē, tad priekšmeta horicontalo projekciju nolodē uz kaut kādu horicontalo plakni, kuŗas pēdu linija t_0 japieņem tā, lai nolodetais atbalsts $A_{I_0} B_{I_0} C_{I_0} D_{I_0}$ nesakristu ar pašu perspektivisko rasejumu. Tapēc patiesibā konstrukcijas jaizpilda šādi.

Papriekšu uzmeklejam, kā augšā izskaidrots, vistuvaka punkta A_I perspektivi, pēc tam pietiekošā atstatumā no t velkam $t_0 \parallel t$. No T_I velkam stateni pret t, līdz krustošanai ar t_0 punktā T_{I_0}. Vertikalā taisne $T_I T_{I_0}$ ir pagaŗinatās vertikalās plaknes $A_I B_I B_{II} A_{II}$ krustošanās linija ar attēlu, t. i. rasejuma plakni K, tapēc nolodetā, jeb jaunā atbalstlinija $A_{I_0} B_{I_0}$ iet caur T_{I_0} un U_I, jo telpā $A_{I_0} B_{I_0} \parallel A_I B_I$.

Nospraužot uz t_0, attiecigā pusē no T_{I_0}, nogriežņus $T_{I_0} - \frac{1}{2} A_{I_d} = m = \frac{1}{2} A_{I_d} - A_{I_d} = T_I A_{I_1}$ (pēdejais nogrieznis noteicams 374ᵃ rasejumā), mēs ar pārnešanas centra $\frac{1}{2} U_{I_d}$, vaj U_{I_d} palīdzibu noteicam A_{I_0}.

Tamlīdzigi varam noteikt B_{I_0} un visas nolodetās horicontalās projekcijas perspektivi.

Ja U_I neatrodas rasejuma robežās, bet tikai U_{II}, tad konstrukcijas izpildamas ar pārnešanas centra $\frac{1}{2} U_{II_d}$, vaj U_{II_d} palīdzibu.

Virsotnes A_I un A_{II} pēc tam noteicamas šādi. Pēdu liniju t_0 pagaŗinam līdz krustošanai ar pagaŗinato taisni $N'M'$ punktā M'_0. Caur A_{I_0} velkam līdzteci ar t_0, līdz krustošanai ar $U_{III} M'_0$ punktā A'_{I_0}. No A'_{I_0} velkam vertikalo taisni, līdz krustošanai ar $U_{III} M'$ punktā A'_I. No A'_I velkam līdzteci ar t, līdz krustošanai ar stateni, kas no A_{I_0} vilkts pret h, dabujot tā A_I. Pēc tam nospraužam $M' N' = 2 \times (A_{I_2} A_{II_2})$ (pēdejais nogrieznis noteicams 374ᵃ rasejumā), velkam $U_{III} N'$, līdz krustošanai ar $A'_{I_0} A'_I$ punktā A'_{II}, un no A'_{II} velkam līdzteci ar t, līdz krustošanai punktā A_{II} ar pagaŗinato stateni, kas vilkts caur A_I pret h.

Lai dabutu virsotni P, velkam $P_{1_0} P'_{1_0} \parallel t_0$ un noteicam P'_{1_0}. Uz pagaŗinatās taisnes $M' N'$ nospraužam $M' Q' = 2 \times (P_2 P_x) = 2 \times b$. No P'_{1_0} velkam $P'_{1_0} P'$, līdz krustošanai ar $U_{III} Q'$, un no P' velkam $P'P \parallel h$, līdz krustošanai ar vertikalo taisni, kas iet caur P_{1_0}. Atbalsts P_1 noteicams ar punkta P'_1 palīdzibu.

Līdzigā kārtā 374ᵇ rasejumā konstruejamas visas virsotnes.

Rasejumu pārkontrolejot, jaievēro: ja punkti J_1 un F_1 (374ᵃ ras.) guļ uz diagonales $B_{I_1} D_{I_1}$, tad ari punkti J un F (374ᵇ ras.) guļ uz diagonales $B_{II} D_{II}$.

Apvārsnis h aizrādits ar raustitu liniju, jo vertikalā plakne V, kas krusto H pa OX, aizsedz apvārsni. Ja nebūtu attēlota vertikalā plakne V, tad apvārsni h vajadzetu atzīmet ar vienlaidu liniju.

IV nodaļa. Perspektives konstruešana ar atbalstpunktu palidzibu.

297 §. Patvaļiga punkta attēlošana.

Pieņemsim, ka telpā ir dota attēlu plakne K, kas krusto horicontalo pamatplakni H pa taisni $t = OX$ (375ª ras). Bez tam ir doti: aplūkotaja acs Ω un patvaļigs punkts A telpā.

Caur Ω vilktā apvāršņa plakne H′ krusto attēlu plakni K pa apvārsni *h*, pie kam $h \parallel t$. Galvenais, pret attēlu plakni vilktais stars $\Omega\Gamma$ krusto šo plakni galvenā punktā Γ uz *h*.

Vilksim no Ω un A stateņus pret H, tad punkti Ω_1 un A_1, kuŗos šie stateņi krusto horicontalo pamatplakni H, noteic punktu Ω un A horicontalās projekcijas. Šos punktus perspektiviskā rasejumā parasti sauc par oriģinalo punktu Ω un A pamatiem, vaj atbalstiem.

Vilksim tagad caur A un A_1 projecejošus starus ΩA un ΩA_1 un viņu krustošanās punktus ar attēlu plakni K apzīmesim ar A_p un A_{1p}. Punkti A_p un A_{1p} noteic punktu A un A_1 perspektiviskos attēlus. Projecejoša plakne $\Omega A A_1$ iet caur stateni AA_1 pret plakni H, tapēc šī projecejoša plakne ir stateniska pret H, t. i. viņa ir viena zinama horicontali projecejoša plakne, kuŗas krustošanās linijai $A_p A_{1p}$ ar attēlu plakni K jabūt stateniskai pret $OX = t$ (47 §.). Tā tad dabujam, ka punkta A perspektivei, t. i. A_p un punkta A atbalsta perspektivei, t. i. A_{1p} jaatrodās uz viena stateņa pret *t*, vaj *h*.

Projecejošās plaknes $A\Omega A_1$ krustošanās ar H noteic projecejošās plaknes pēdu liniju *s* attiecibā uz horicontalo pamatplakni H, pie tam $s = \Omega_1 A_1$ un iet caur punktu α, kuŗā $A_p A_{1p}$ krusto *t*.

Perspektive A_p un atbalsta perspektive A_{1p} pilnigi noteic oriģinalā punkta A stāvokli telpā.

Lai iegūtu oriģinalo punktu A, mēs pretejā ceļā A_p un A_{1p} savienojam ar Ω, noteicam stara $A_{1p}\Omega$ krustošanās punktu ar H, un no iegūta punkta A_1 velkam stateni pret H, līdz krustošanai ar staru $A_p\Omega$ meklejamā punktā A.

Tā tad, ja ir doti Ω, A_p un A_{1p}, mēs katrā laikā varam uzmeklet oriģinalo punktu A telpā, kamēr pēc agrakajiem paņēmieniem, pēc vienas perspektives A_p vien tas nebija iespējams.

Savienosim tagad attēlu plakni K ar rasejuma plakni. Dabujam 375ᵇ ras. Lai pēc šā rasejuma noteiktu oriģinalā punkta A stāvokli telpā, jaiedomajas plakņu H un H′ stāvokļi telpā. Plaknes H un H′ iet caur attiecigām pēdu linijām *t* un *h*, stateniski pret rasejuma plakni. Pēc tam ar attālumu aploces radiusa *r* palīdzibu noteicam acs Ω stāvokli telpā uz stateņā, kas caur galveno punktu Γ vilkts pret rasejuma plakni. Izdarot visas 375a rasejumā aizrāditās konstrukcijas apgriestā kārtā, nav grūti noteikt oriģinalā punkta A stāvokli telpā.

298 § Uz attēlu plaknes K guļoša punkta attēlošana.

Ja dots patvaļigs uz attēlu plaknes K gulošs punkts T (376a ras.), tad viņa perspektive saplūst ar doto oriģinalo punktu, t. i. $T_p = T$. Tamlīdzigi atbalsta perspektive saplūst ar dotā punkta atbalstu, t. i. $T_{1p} = T_1$, pie kam T_{1p} guļ uz t.

376b rasejumā ir aizrādits plaknes K savienotais stāvoklis.

376b rasejumā, kā ari daudzos turpmakos rasejumos attālumu aploce nav aizrādita.

299 §. Uz horicontalās pamatplaknes H guļoša punkta attēlošana.

Ja uz horicontalās pamatplaknes H ir dots patvaļigs punkts S (377a ras.), tad viņa atbalsts saplūst ar oriģinalo punktu, t. i. $S_1 = S$. Tapēc šo punktu projecejošie stari saplūst, un atbalsta perspektive sakrīt ar oriģinala punkta perspektivi, t. i. $S_{1p} = S_p$.

377b rasejumā aizrādits plaknes K savienotais stāvolis.

300 §. Bezgali tāla punkta attēlošana.

Ja kaut kāds punkts U_∞ atrodas bezgalibā, tad ari viņa atbalsts $U_1\infty$ atrodas bezgalibā un pie tam uz H. Tapēc stars $\Omega U_1\infty$ (378 ras.) iet līdztekus pamatplaknei H un krusto attēlu plakni K punktā U_{1p} uz apvāršņa h.

Bezgali attālinata punkta U_∞ perspektive U_p guļ uz stateņa, kas no U_{1p} vilkts pret h.

Atkaribā no bezgali attālinata punkta U_∞ stāvokļa telpā, viņa perspektive U_p atrodas virs, vaj zem h, bet atbalsta perspektive U_{1p} vienmēr guļ uz h.

378b ras. aizrādits plaknes K savienotais stāvoklis.

301 §. Uz zūduma plaknes guļoša punkta attēlošana. Šķietamie attēli.

Ja ir dots patvaļigs punkts Q uz zūduma plaknes J (379a ras.), tad projecejošie stari ΩQ un ΩQ_1 ir līdzteči attēlu plaknei K, un tapēc šinī gadijumā perspektives $Q_p\infty$ un $Q_{1p}\infty$ atrodas bezgalibā.

Punktu Q varam pieņemt uz plaknes J pilnigi patvaļigi, tapēc perspektiviskā rasejumā (379b ras.) bezgali tālus perspektives $Q_p \infty$ un $Q_{1p} \infty$ varam pieņemt uz patvaļigi vilktiem virzieniem.

Ja kaut kāds punkts B (379a ras.) atrodas aiz zūduma plaknes J, t. i. aiz aplūkotaja muguras, tad atbalstpunkta B_1 perspektive B_{1p} vienmēr atatrodas virs h, bet oriģinalā punkta B perspektive B_p var atrasties virs, vaj zem h, atkaribā no punkta B stāvokļa telpā.

Bez tam 379a rasejumā ir aizrāditi punkti C un D, kas atrodas aplūkotaja priekšā. Kā redzams rasejumā, attiecigo atbalstpunktu perspektives C_{1p} un D_{1p} atrodas zem h. Perspektives C_p un D_p, atkaribā no punktu C un D stāvokļiem telpā, var atrasties virs, vaj zem h.

Ērtibas dēļ punkti B, C un D ir pieņemti uz kopejā stara, bet viņus, saprotams, varetu pieņemt ari uz dažadiem projecejošiem stariem.

No visa aizrāditā seko, ka punktu perspektivēm (B_p), kuŗu atbalstpunktu perspektives (B_{1p}) atrodas virs h, ir tikai šķietamā nozīme. Patiesā nozīme ir tikai tadiem perspektiviskiem punktiem (C_p, vaj D_p), kuŗu atbalstpunktu perspektives (C_{1p}, vaj D_{1p}) atrodas zem h, pie tam tas punkts (D) atrodas tuvak pie aplūkotaja, kuŗa atbalstpunkta perspektive (D_{1p}) atrodas zemaki, t. i. tālak no h uz leju.

302 §. Patvaļigas taisnes attēlošana.

Pieņemsim, ka ir doti divi patvaļigi punkti A un B ar savām perspektivēm A_p un B_p un attiecigo atbalstpunktu perspektivem A_{1p} un B_{1p} (380 ras.).

Taisne $a_p = A_p B_p$, kas savieno doto punktu perspektives, acim redzot, noteic oriģinalās taisnes $a = AB$ perspektivi, bet taisne $a_{1p} = A_{1p} B_{1p}$, kas savieno attiecigo atbalstpunktu perspektives, noteic atbalstlinijas perspektivi.

Noteicot pēc 297 § oriģinalo punktu A un B stāvokļus telpā un viņus savienojot, iegūstam oriģinalās taisnes $a = AB$ stāvokli telpā.

Tā tad, taisne perspektiviskā rasejumā noteicama ar savu perspektivi (a_p) un attiecigās atbalstlinijas perspektivi (a_{1p}).

Noteiksim tagad taisnes a raksturigakos punktus. Šādi punkti ir: 1) taisnes pēdu punkts, vaj krustotne T ar attēlu plakni; 2) taisnes pēdu punkts, vaj krustotne S ar horicontalo pamatplakni H; 3) taisnes bezgali attālinatais punkts U un 4) taisnes pēdu punkts, vaj krustotne Q ar zūduma plakni.

Pamatojoties uz 298 § (376 ras.) dabujam, ka atbalstpunkta T_1 perspektive T_{1p} guļ uz pēdu linijas t. Noteicot šā punkta stāvokli 380 rasejumā un velkot no T_{1p} stateni pret t, līdz krustošanai ar a_p, iegūsim taisnes a pēdu punkta T perspektivi T_p.

Pēc 377 ras. pēdu punkta S perspektive sakrīt ar attiecigā atbalstpunkta S_1 perspektivi, tapēc 380 rasejumā punkts $S_p = S_{1p}$, kuŗā krustojas a_p un a_{1p}, noteic taisnes a pēdu punkta S perspektivi S_p.

Pēc 378 ras. bezgali attālinata punkta atbalstpunkta perspektive guļ uz apvāršņa h, tapēc 380 rasejumā punkts U_{1p}, kuŗā a_{1p} krusto h, ir bezgali attālinata atbalstpunkta perspektive. Bezgali tāla punkta U perspektivi U_p dabujam punktā, kuŗā no U_{1p} pret h vilktajs statenis krustojas ar perspektivi a_p.

Beidzot, pēc 379 ras. punkta Q, kas guļ uz zūduma plaknes, kā ari attiecigā atbalstpunkta Q_1 perspektive atrodas bezgalibā. Tapēc 380 ras. punkta Q perspektive Q_p guļ uz perspektives a_p bezgalibā aizrāditā virzienā, bet attiecigā atbalstpunkta Q_1 perspektive Q_{1p} guļ uz a_{1p} bezgalibā aizrāditā virzienā.

303 §. Taisnes redzamiba.

Kā 301 §. aizrādits, punktu perspektivēm, kuŗu atbalstpunktu perspektives atrodas virs h, ir tikai šķietamā nozīme. Tapēc 380 rasejumā atbalstlinijas a_{1p} daļa, kas guļ virs h, un attiecigā taisnes a_p daļa ir tikai šķietami perspektiviski attēli no tās atbalstlinijas a_1 un oriģinalās taisnes a daļām, kas aiz aplūkotaja muguras. Rasejuma šīs šķietamās perspektives atzīmē ar raustitām linijām.

Kā rasejumā redzams, perspektives a_p patiesā daļa sākas no saiešanās, vaj robežpunkta U_p un sniedzās, caur T_p ejot, līdz bezgalibai. Atbalstlinijas perspektives a_{1p} patiesā daļa sākas no saiešanās punkta atbalsta perspektives U_{1p} un sniedzas, caur T_{1p} iejot, līdz bezgalibai.

Pēc 252 § dabujam, ka no diviem punktiem A un C, guļošiem uz dotās taisnes a, tuvak aplūkotajam novietots tas (C), kuŗa perspektive C_p tālaki no dotās taisnes saiešanās punkta U_p, un ari otradi.

Ka rasejumā redzams, aplūkotajam tuvakā punkta atbalstpunkta perspektive C_{1p} atrodas tālak no h (zemaki), nekā otra atbalstpunkta perspektive (A_{1p}), kas apstiprina jau agrak aizrādito nosacijumu punktu attiecigās redzamibas noteikšanai (301 §).

304 §. Patvaļigas plaknes attēlošana.

Plaknes stāvoklis telpā noteicams pēc 39 §. Atsevišķā gadijumā plakni var noteikt ar trim punktiem. Lai A, B, C un A_1, B_1 un C_1 ir doto punktu un attiecigo atbalstpunktu perspektives (381 ras.).

Vienadnosaukuma perspektives savienojot, mēs iegūsim trijstūŗa ABC un viņa atbalsttrijstūŗa $A_1 B_1 C_1$ perspektives. Oriģinalā trijstūŗa ABC stāvokli telpā iegūsim, noteicot pēc 297 § atsevišķo trijstūŗa virsotņu stāvokļus telpā. Trijstuŗa plaknes stāvokli telpā varam ari noteikt ar viņa pēdu linijas t_I un saiešanās linijas u_I palīdzibu.

Pieņemsim, ka dots apvārsnis h un horicontalās pamatplaknes pēdu linija t. Tad pēdu linijas t_I stāvoklis noteicams ar atsevišķo trijstūŗa malu pēdu punktiem T_I, T_{II} un T_{III}. Šie punkti noteicami pēc 298 §. Savienojot punktus T_I, T_{II} un T_{III}, iegūsim trijstūŗa ABC plaknes pēdu liniju t_I.

Punkti T_{I_1}, T_{II_1} un T_{III_1} guļ uz horicontalās pamatplaknes pēdu linijas t, tapēc atbalstlinijas t_{I_1} perspektive sakrīt ar t, t. i. $t_{I_1} = t$.

Analoģiskā kārta ar atsevišķo trijstūŗa malu saiešanās punktu U_I, U_{II} U_{III} palīdzibu noteicama trijstūŗa ABC plaknes saiešanās linija u_I, pie kam kontroles dēļ $u_I \parallel t_I$.

Punkti U_{I_1}, U_{II_1} un U_{III_1} ir iegūti uz h, tapēc atbalstlinijas u_{I_1} perspektivei jasakrīt ar h, t. i. $u_{I_1} = h$.

Bez tam var aizrādit pēdu linijas s_I perspektivi, pa kuŗu trijstūŗa ABC plakne krusto horicontalo pamatplakni H. Tam nolūkam pēc 299 § atrodam atsevišķo trijstūŗa malu pēdu punktu S_I, S_{II} un S_{III} perspektives. Šos punktus savienodami, iegūsim s_I. Saprotams, ka $s_{I_1} = s_I$.

Plaknes H, K un ABC telpā krustojas pa trim taisnem t, t_I un s_I, kuŗam jakrustojās kopejā punkta M. Tapēc ari šo taišņu perspektivem jakrustojās kopejā punktā, kurš noteic punkta M perspektivi.

Līdzigi dabusim, ka ari u_I, s_I un h krustojas kopejā punktā N.

Kā no konstrukcijām redzams, trijstūŗi ABC un $A_1 B_1 C_1$ ir affini radnieciskas figuras, jo attiecigās malas pa pārām krustojas uz vienas taisnes (ass) $s_I = s_{I_1}$, bet attiecigās virsotnes guļ pa pārām uz stateniskiem pret h radniecibas stariem.

Ja ir dots apvārsnis h un horicontalās pamatplaknes pēdu linija t, un bez tam ir zinama perspektive ABC, pēdu linija t_I un plaknes ABC saiešanās linija u_I, tad nav gŗūti pretejā ceļā atrast pamata $A_1 B_1 C_1$ perspektivi.

305 §. Krustošanās uzdevumi.

Kā piemēru aplūkosim sekošo uzdevumu. Pieņemsim, ka janoteic taisnes a krustotne ar trijstūri ABC, pie kam ir dotas taisnes a un trijstūŗa ABC, kā ari attiecigo atbalstu a_1 un $A_1 B_1 C_1$ perspektives (382 ras).

Caur taisni a velkam vienu horicontali projecejošo plakni. Šās plaknes pēdu linijas s perspektive, acim redzot, sakrīt ar dotās taisnes atbalsta perspektivi, t. i. $s = a_1$. Šī plakne krusto trijstūŗa ABC plakni pa taisi $1-2$, kuŗas atbalsta perspektive $1_1 - 2_1$ tapat sakrīt ar a_1. Tā tad punkti 1_1 un 2_1 noteic tādu punktu perspektives, kas pieder kā horicontali projecejošai, tā ari trijstūŗa ABC plaknei. Punkts 1_1 guļ uz A_1C_1, tapēc punkta 1 perspektivei jaatrodās uz AC, uz stateņa, kas no 1_1 vilkts pret h. Tamlīdžigi dabujam punkta 2 perspektivi uz perspektives BC.

Punktus 1 un 2 savienodami, iegūstam horicontali projecejošas plaknes krustošanās linijas ar trijstūri ABC perspektivi. Tapēc punkts M, kur krustojas 1 – 2 un a, ir taisnes a krustotnes ar trijstūri ABC perspektive. Zinot M, varam uz a_1 noteikt attiecigo atbalstpunktu M_1.

Lai noteiktu taisnes a redzamibu, aplūkosim taisnes a šķērsošanās punktu ar malu AC. Apzīmesim šo punktu ar $3 = 4$. Atbalstpunktu perspektivēm jaguļ uz attiecigo atbalstliniju perspektivēm, t. i. 3_1 uz a_1 un 4_1 uz A_1C_1.

Kā redzams, atbalsta 4_1 perspektive atrodas zemaki, nekā 3_1, tapēc uz 303 §. pamata dabujam, ka punkts 4, kas pieder taisnei AC, atrodas aplūkotajam tuvaki, nekā punkts 3, kas pieder taisnei a, t. i. mala AC attiecibā uz attēlu plakni K iet priekš taisnes a. Tapēc taisnes a daļa 3 – M, ko aizsedz trijstūŗa ABC plakne, nav redzama.

Ja mēs salīdzinasim aplūkotā uzdevuma atrisinašanas gaitu ar analoģisko, ortogonalās projekcijās (106 §, 113 ras.) atrisinato uzdevumu, tad nav gŗūti novērot, ka izpilditās konstrukcijas abos gadijumos ir vienadas.

Ja pieņemsim, ka 382 rasejumā dotais trijstūris ABC noteic vertikalo projekciju, bet atbalsts $A_1B_1C_1$ horicontalo projekciju, tad dabujam pilnigu analoģiju starp 113 un 382 rasejumiem. Pie tam ari taisnes a redzamiba noteicama pēc tiem pašiem noteikumiem, kā ortogonalās projekcijās.

Uz aizrādito analoģiju pamatodamies, mēs perspektiviskā rasejumā varam atrisinat visus ortogonalās projekcijās aplūkotos krustošanās uzdevumus, pie kam, saprotams, ķermeņu un viņu atbalstu perspektivēm jabūt iepriekš konstruetām.

Ja pieņemsim, ka 382 rasejumā taisne a ir kautkāds gaismas stars, tad, atkaribā no gaismas stara a virziena, $\triangle$ABC ir apgaismots, vaj atrodas pašēnā, ko katrā atsevišķā gadijumā nav gŗūti izšķirt. Tā, piemēram, ja gaismas staram a 382 rasejumā ir virziens no labas uz kreiso pusi, tad $\triangle$ ABC apgaismots, bet pie preteja stara a virziena $\triangle$ABC atrodas pašēnā.

306 §. Gaismas avots, kas aplūkotajam priekšā.

Pieņemsim, ka telpā ir dots patvaļigs punkts B, acs Ω un gaismas avots L galibā (383 ras·).

Gaismas staram l telpā ir virziens LB. Pieņemsim uz stara l divus punktus A un C tā, lai punkts B atrastos starp A un C. Pie tam punkts A guļ tuvak gaismas avotam, nekā punkts B.

Ja gaismas staru $l = ABC$, kopā ar visiem uz viņa guļošiem punktiem, projecejam uz attēlu plakni K, tad ari perspektivē gaismas staram l_p ir virziens no L_p pret A_p, jo ar šo virzienu sakrīt perspektivu A_p, B_p un C_p kārta.

To pašu varetu aizrādit ari attiecibā uz gaimas stara atbalstu, kurš rasejumā nav atzīmets.

384 rasejumā attēlu plakne ir savienota ar rasejuma plakni, un dažiem punktiem ir konstrueti viņu horicontalās krītošās ēnas. Pie tam vienkāršibas labā indekši „p" nav aizrāditi.

Patvaļiga punkta B horicontalo ēnu B′ pēc 299 § dabujam gaismas stara LB krustotnē ar attiecigo atbalstliniju L_1B_1. Ēna B′ ir punkta B patiesā ēna, jo B′ guļ gaismas stara virzienā LB un atrodas tālak no L, nekā B.

Tanī pašā rasejumā ir aizrādita punkta D ēna D′. Šī ēna ir šķietamā, jo virziens LD′ nesaskan ar gaismas stara virzienu LD. (Gaismas avots L šinī gadijumā atrodas starp punktu D un ēnas plakni H.)

Beidzot iespējams vēl tāds gadijums, kad gaismas stara krustotne ar ēnas plakni atrodas gaismas avotam tuvaki, nekā dotais punkts, t. i. dotais punkts guļ aiz ēnas plaknes. Tadā gadijumā atkal dabujam šķietamo ēnu. 384 rasejumā punkts E′ ir punkta E horicontalā šķietamā ēna.

Līdzigi noteicamas punktu horicontalās krītošās ēnas saules apgaismojumā, kad gaismas avots (saule) atrodas bezgalibā aplūkotajam priekšā (385 ras.). Tādā gadijumā pēc 300 § gaismas avota (saules) atbalstpunkts L_1 guļ uz apvāršņa *h*, bet gaismas avota (saules) L perspektivi var pieņemt patvaļigi uz stateņa, kas no L_1 vilkts pret *h*. Lai dabutu patiesās ēnas, parasti L japieņem virs apvāršņa *h*.

307 §. Gaismas avots, kas aplūkotajam aiz muguras.

386 rasejemā ir pieņemts, ka gaismas avots L atrodas galibā aiz aplūkotaja Ω muguras.

Pieņemsim, ka ir dots punkts B, kam jauzmeklē krītošā ēna. Savienojam L ar B un uz šā stara pieņemam punktus A un C tā, lai dotais punkts B atrastos starp A un C, pie kam punkts A atrodas tuvaki gaismas avotam, nekā B.

Aplūkojamo gaismas staru projecejam uz attēlu plakni K un atzīmejam atsevišķo gaismas stara punktu perspektives A_p, B_p un C_p. Gaismas stara *l* virziens telpā ir noteikts ar punktu A, B un C kārtu, tapēc gaismas stara perspektives l_p virzienu noteic perspektivu A_p, B_p un C_p kārta.

Kā rasejumā redzams, gaismas stara perspektive l_p saiet gaismas avota perspektivē.

Tamlīdzigo varetu aizrādit attiecibā uz rasejumā neatzīmeto gaismas stara atbalstlinijas perspektivi, kuŗa saiet gaismas avota atbalstpunkta perspektivē L_{1p}.

387 rasejumā ir aizrādits attēlu plaknes K savienotais stāvoklis, pie kam vienkāršibas dēļ indekši „p" ir atmesti.

Punkts B′ ir dotā punkta B patiesā horicontalā ēna. Līdzigi 306 §, mēs ari šinī gadijumā izšķiram patiesās un šķietamās ēnas. Ta, piemēram, D′ ir punkta D šķietamā ēna, jo gaismas avots atrodas starp D un ēnu D′.

Ari E′ ir šķietamā ēna, jo E′ neatrodas starp E un L, kā tam vajadzetu būt.

Atsevišķā gadijumā gaismas avots (saule) var atrasties bezgalibā aiz aplūkotaja muguras (388 ras.). Tadā gadijumā atbalsta perspektive L_1 guļ uz apvāršņa *h*, bet L varam pieņemt virs, jeb zem *h*. Parasti, lai dabutu patiesās horicontalās ēnas, L pieņem zem apvāršņa *h*.

Rasejumā ir aizrādita punkta B patiesā horicontalā ēna B′.

Aplūkotos gadijumus salīdzinot, novērojam, ka perspektiviskā rasejumā gaismas stari iziet, vaj saiet gaismas avota perspektivē, atkarībā no tam, vaj gaismas avots atrodas aplūkotajam priekšā, vaj aiz viņa muguras.

308 §. Patvaļiga ķermeņa ēnas pie centralās apgaismošanas.

Pieņemsim, ka telpā ir dota patvaļiga piramide, kuŗas perspektive ir ABCD, bet atsevišķo virsotņu atbalstpunktu perspektīves ir A_1, B_1, C_1 un D_1 (389 ras.).

Pieņemsim gaismas avotu L galibā, aplūkotajam priekšā, un pēc 306 § konstruesim visu piramides virsotņu horicontalās krītošās ēnas. Atrastos punktus A′, B′, C′ un D′ vajadzigā kārtā savienojot, dabujam piramides horicontalās krītošās ēnas perspektivi.

Pašēnas perspektivē noteicamas tapat, kā ortogonalās projekcijās, ievērojot virsotņu kārtu perspektivē un krītošajā ēnā.

Tā, piemēram, sānu mala BCD apgaismota, jo virsotņu kārta perspektivē BCD un attiecigā krītošajā ēnā B′C′D′ ir vienada. Sānu mala ABD atrodas pašēnā, jo virsotņu kārta perspektivē ABD un attiecigā krītošajā ēnā A′B D′ ir preteja.

Pašēnas apveidu var atrast ari pēc krītošās ēnas apveida. Tā, piemēram, šķautnes BD, DC un CB ir gaismas atdalošas šķautnes, jo šo šķautņu ēnas ierobežo krītošās ēnas apveidu.

309 §. Patvaļiga priekšmeta ēnas pie saules apgaismošanas.

Pieņemsim, ka pēc 374 ras. ir konstrueta kaut kāda priekšmeta perspektive (390 ras.). Pie tam vietas trūkuma dēļ dotā priekšmeta nolodetais atbalsts rasejumā nav aizrādits, bet praktiskos darbus izpildot, tas katrā ziņā jaaizrāda.

Pieņemsim gaismas avotu L bezgalibā, aiz aplūkotaja, un pēc 388 ras. konstruesim horicontalās krītošās ēnas A_{II}' un B_{II}'. Tā kā šķautne $A_{II} B_{II} \parallel H$, tad telpā tās horicontalā krītošā ēna $A_{II}' B_{II}' \parallel A_{II} B_{II}$, tapēc šīm taisnēm ir kopejs saiešanās punkts U_I. Tamlīdzigi šķautnei $B_{II} C_{II}$ un tās horicontalai ēnai $B_{II}'C_{II}'$ ir kopejs saiešanās punkts U_{II} (Ēna $B_{II}'C_{II}'$ rasejumā nav aizrādita).

Ēna $A_{II}'B_{II}'$ krusto OX, tapēc B_{II}' ir šķietamā horicontalā krītošā ēna. Punkta B_{II} patieso vertikalo krītošo ēnu B_{II}''*) iegūsim, atzīmejot gaismas stara atbalstlinijas $L_1 B_I$ krustošanās punktu ar OX, un no šā punkta velkot stateni pret h, līdz krustošanai ar gaismas staru $B_{II} L$. Iegūto punktu B_{II}'' ar lūzuma punktu $a = A'_{II} B'_{II} \times OX$ savienojot, dabusim šķautnes $A_{II} B_{II}$ vertikalo krītošo ēnu.

Tamlīdzigi varetu uzmeklet ari C_{II}'', bet ievērojot, ka šķautne $B_{II} C_{II} \parallel V$, mēs telpā dabusim $B_{II} C_{II} \parallel B_{II}''C_{II}''$. Tapēc šīm taisnēm ir kopejs saiešanās punkts U_{II}. Tā tad ēnas virzienu $B_{II}''C_{II}''$ varam noteikt, savienojot B_{II}'' ar U_{II}.

Punktu P, E un G vertikalās ēnas P″, E″ un G″ konstruejamas tapat, kā B_{II}''.

Bez tam vēl jauzmeklē ēna, kas no piramides krīt uz plakni $A_{II}B_{II}C_{II}D_{II}$. Plakni $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$ varam uzskatit kā jauno horicontalo pamatplakni. Virsotnes P atbalstpunkts attiecibā uz šo plakni ir $P^{\times}_1$. Gaismas avota atbalstpunktu uz jaunās horicontalās pamatplaknes atzīmesim ar $L^{\times}_1$. Priekš bezgali tāliem gaismas avota (saules) atbalstpunktiem $L_1 \infty$ un $L^{\times}_1 \infty$, — attiecibā uz pagarinatām horicontalām plaknēm $A_I B_I C_I D_I$ un $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$, — dabujam telpā vienu un to pašu projecejošo staru, kas iet līdztekus horicontalai pamatplaknei $H = A_I B_I C_I D_I$, tapēc punkta $L^{\times}_1$ perspektive sakrīt ar perspektivi L_1, t. i. $L^{\times}_1 = L_1$.

Zinot $P^{\times}_1$ un $L^{\times}_1$, nav grūti parastā kārtā uzmeklet virsotnes P krītošo ēnu $P'_{\times}$ uz pagarinatās plaknes $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$.

No $P_{\times}'$ pieskares pret pamatu EFGJ velkot, iegūsim piramides krītošās ēnas apveidu. Šī ēna tikai pa daļai redzama.

Pēc krītošās ēnas apveida noteicam gaismas atdalošas šķautnes PE un PG, no kuŗām tikai PE redzama.

No piramides uz $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$ krītošo ēnu varam noteikt ari šādi. Ēnas $B_{II}''C_{II}''$ un P″E″ krustojas punkta K″. Punktu K″ ar L savienojot,

*) Rasejumā punkts B''_{II} nepareizi atzīmets ar B″.

t. i. gaismas staru apgriestā virzienā velkot un šā stara krustotni ar $B_{II} C_{II}$ atzīmejot, iegūsim ēnu $K_{\times}'$, ko škautne P E met uz $B_{II} C_{II}$. Mūsu gadijumā dabujam slīdošo stara L K″ krustošanos ar šķautni $B_{II} C_{II}$, tapēc tādā gadijumā ieteicams lietot pirmo paņēmienu punkta $K_{\times}'$ noteikšanai.

Citreiz jauzmeklē ēnas, kas no kaut kāda punkta krīt uz paslīpu plakni. Šādu ēnu varam konstruet uz 382 ras. pamata.

Vispāreji jaievēro, ka krītošās un pašēnas noteicamas pēc ortogonalās projekcijās aizrāditiem paņēmieniem.

Tādā pašā veidā 392b un 393b ras. ir konstruetas doto priekšmetu ēnas pie saules apgaismošanas. Doto priekšmetu attiecigās ortogonalās projekcijas ir aizrāditas 392a un 393a rasejumos. Pie tam perspektives ir konstruetas ar viena saiešanās punkta U_I un attiecigā pārnešanas centra $\frac{1}{2} U_{I_d}$, vaj U_{I_d} palīdzibu.

Japiezīmē, ka vietas trūkuma dēļ 392b un 393b rasejumos doto priekšmetu nolodetie atbalsti nav aizrāditi, bet praktiskos darbos šie atbalsti jaaizrāda.

310 §. Gaismas avota jaunā atbalstpunkta noteikšana pie centralās apgaismošanas.

Ja gaismas avots atrodas galibā (391 ras.), tad gaismas avota atbalstpunkts $L^{\times}_1$ attiecibā uz plakni $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$ noteicams šādi.

Tā kā telpā gaismas stara atbalstlinijas $L_1 P_1$ un $L^{\times}_1 P^{\times}_1$, attiecibā uz plaknēm $A_I B_I C_I D_I$ un $A_{II} B_{II} C_{II} D_{II}$, ir savstarpeji līdzteku horicontalās taisnes, tad tām ir zinamais kopejs saiešanās punkts U, kas guļ uz *h* un ir taisnes $L_1 P_1$ krustotne ar *h*. Tapēc $P^{\times}_1$ ar U savienojot, un šo taisni pagaŗinajot līdz krustošanai ar stateņi, kas no L vilkts pret *h*, dabujam meklejamo gaismas avota jauno atbalstu $L^{\times}_1$.

311 §. Atspoguļošana horicontalā spogulī.

Pieņemsim, ka spoguļa plakne saplūst ar horicontalo plakni, kuŗas saiešanās linija ir *h*, bet pēdu linija — *t* (394 ras.).

Attiecibā uz doto spoguļa plakni ir konstrueta patvaļigas taisnes atbalstlinija $A_t B_t$ un taisnes perspektive AB. Punktu A un B atspoguļojumi A^s un B^s guļ uz stateņiem pret spoguļa plakni, t. i. uz taisnēm, stateniskām pret *h*. Bez tam doto punktu A un B atspoguļojumi no spoguļa plaknes tikpat attālu, kā oriģinalie punkti.

No A un B pret spoguļa plakni vilktie stateņi krusto šo plakni punktos A_t un B_t. Bet tā kā vienlīdzigo, uz zinamas vertikalas taisnes guļošo nogriežņu perspektives ir vienlīdzigas, tad no tam seko, ka meklejamo spoguļa attēlu A^s un B^s iegūšanai, tikai janosprauž nogriežņi AA_1 un BB_1 otrā pusē no attiecigām krustotnēm A_1 un B_1 ar spoguļa plakni.

Pieņemsim tagad, ka horicontalais spogulis ht_I nesaplūst ar horicontalo pamatplakni ht (395 ras.).

Attiecibā uz pamatplakni ht ir dota patvaļiga taisne AB un viņas atbalstlinija A_1B_1. Lai konstruetu taisnes AB atspoguļojumu horicontalā spogulī ht_I, jaatrod taisnes AB horicontali projecejošas plaknes krustošanās linija ar spoguļa plakni. Tam nolūkam iepriekš noteicam taisni TU, pa kuŗu taisnes AB horicontali projecejoša plakne krusto horicontalo pamatplakni ht. Acim redzot, taisne UT ir pamata A_1B_1 pagarinajums.

Dotā spoguļa plakne krustojas ar taisnes AB horicontali projecejošo plakni pa taisni T_IU, kas iet caur to pašu saiešanās punktu U, jo divām līdzteku taisnēm, pa kuŗām taisnes AB horicontali projecejoša plakne krusto horicontalo pamatplakni ht un horicontalo spoguļa plakni ht_I, ir kopejs saiešanās punkts. Attēlu plakne krustojas ar taisnes AB horicontali projecejošo plakni pa taisni, kas stateniska pret t un iet caur punktu T. Pēdejās taisnes krustošanās ar t_I noteic punktu T_I, caur kuŗu iet meklejamā taisne T_IU.

Noteicot pēc tam punktus A^x un B^x, kuŗos taisne T_IU krusto AA_1 un BB_1, un nospraužot nogriežņus AA^x un BB^x otrā pusē no attiecigiem punktiem A^x un B^x, mēs iegūstam meklejamos spoguļa attēlus A^s un B^s.

Atsevišķā gadijumā kā horicontalo spoguļa plakni varam uzlūkot ūdens, vaj parketa virsu.

397 rasejumā ir aizrādita perspektive ar atspoguļojumu ūdens virsā. Atspoguļojums jaizvelk ar tievakām linijam, nekā pats priekšmets, un ēnas atspoguļojumā jaieklāj gaišaki, nekā patiesās ēnas Tapat ari ēnas, krītošās uz ūdens virsu, jaieklāj gaišaki. Pašu ūdens virsu var ieklāt ar ļoti gaišu zilu tušu.

312 §. Atspoguļošana vertikalā spogulī.

Pieņemsim, ka doti: horicontalā pamatplakne ht, galvenais punkts Γ ar attālumu aploci r, patvaļigas taisnes perspektive AB un attiecigās atbalstlinijas perspektive A_1B_1 (396 ras.). Bez tam ir dota patvaļiga vertikalā spoguļa plakne $t_I u_I$, pie kam t_I un $u_I \perp h$.

Pēc 362 ras. uzmeklejam pret plakni $u_I t_I$ vilkto stateņu saiešanās punktu K_p. Punktu K_p ar A, B un A_1, B_1 savienojot, dabusim starus, uz kuŗiem jaguļ attiecigiem atspoguļojumiem A^s, B^s un A^s_1, B^s_1. Lai šos punktus konstruetu, noteiksim papriekšu, piemēram, atbalstpunkta A_1 atspoguļojumu A^s_1.

Spoguļa plakne un horicontalā pamatplakne ht krustojas pa taisni UT, pie kam $U = h \times u_I$ un $T = t \times t_I$. Ja mēs vilksim taisni UA_1 līdz krustošanai ar t punktā A'_1, otrā pusē no T nospraudisim uz t nogriezni $A^{s\prime}_1 T = TA'_1$, un $A^{s\prime}_1$ savienosim ar U, tad telpā taisnes TU, A'_1U un $A^{s\prime}_1U$ ir horicontalās līdzteku taisnes, kuŗu savstarpejs attālums ir vienlīdzigs. Tapēc telpā šīs taisnes atšķel uz taisnes K_pA_1, guļošas uz plaknes ht, vienlīdzigus nogriežņus $A_1A_1^{\times} = A_1^{\times}A^s_1$, pie tam $A^{\times}_1$ ir stara K_pA_1 krustošanās punkts ar taisni UT. Tā tad A^s_1 ir atbalstpunkta A_1 atspoguļojums, jeb A^s_1 ir meklejamā atspoguļojuma A^s atbalstpunkts.

Velkot no A^s_1 stateni pret h, līdz krustošanai ar staru K_pA, iegūsim A^s. Tapat noteicam atspoguļojumu B^s.

Saprotams, ka A_1B_1 un $A^s_1B^s_1$ krustojas punktā $C^{\times}_1$, kas guļ uz UT. Punkts $C^{\times}_1$ ir tā punkta $(C^{\times})$ atbalstpunkts, kuŗā oriģinalā taisne AB krustojas ar spoguli. Punktu $C^{\times}$ iegusim, uzmeklejot taišņu AB un A^sB^s krustotni. Kontroles dēļ $C^{\times}_1C^{\times} \perp h$.

Velkot no $A^{\times}_1$ un $B^{\times}_1$ stateņus pret h, līdz krustošanai ar stariem K_pA un KB, mēs dabusim punktus $A^{\times}$ un $B^{\times}$, kuŗos stari K_pA un K_pB krusto spoguli. Savienojot $A^{\times}$ un $B^{\times}$, dabusim taisni, pa kuŗu caur taisni AB, stateniski pret spoguļa plakni vilktā plakne krusto šo spoguļa plakni. Saprotams, ka kontroles dēļ $A^{\times}B^{\times}$ iet caur punktu $C^{\times}$.

Aizrādītā veidā varam konstruet patvaļiga priekšmeta atspoguļojumu.

Spoguļa plakni varam ierobežot ar kautkādām, pret h stateniskām taisnēm un ar divām telpā horicontalām taisnēm, kuŗas saiet punktā U, kā tas rasejumā aizrādits. Redzama ir, saprotams, tikai tā atspoguļojuma daļa, kas atrodas spoguļa apveida iekšpusē.

Ja priekšmets, kuŗa atspoguļojumu mēs vēlamies konstruet, ir dots ortogonalās projekcijās, tad saprotams, ka attālumu aploces radiuss $r = \Omega_1 \Gamma_1$, pie kam pēdejais nogrieznis noteicams ortogonalās projekcijās, un viņš 396 rasejumā janosprauž divas reizes, gadijumā, ja perspektivisko rasejumu palielina divas reizes.

Bet ne vienmēr spoguļa plakne krusto attēlu plakni rasejuma robežas, t. i. var gadities, ka t_I, kā ari punkts U atrodas rasejuma ārpusē. Tāds gadijums attēlots 398 rasejumā, kur vertikalā spoguļa horicontalā pēdu linija apzīmeta ar s_I (398a ras.). Šās taisnes perspektive s_I (398b ras.) konstruejama pēc vispārejiem likumiem. Lai šinī gadijumā dabutu pret spoguļa plakni vilkto stateņu saiešanās punktu K_p, mēs šo punktu iepriekš noteicam 398a rasejumā, velkot tam nolūkam no Ω_1 stateni pret s_I, un atzīmejot šā stateņa kŗustotni ar s. Tā mēs dabujam meklejamā punkta horicontalo projekciju K_1, un pēc tam uz h noteicam K_2.

Nogriezni Γ_1K_1 divas reizes attiecigā pusē no Γ perspektiviskā rasejumā (398b ras.) nosprauzdami, dabujam meklejamo stateņu saiešanās punktu K_p. Bez tam saiešanās punktam K_p noteicam attiecigo puspārnešanas centru $\frac{1}{2}K_d$, noteicot 398[a] rasejumā nogriezni $\Omega_I K_I$ un nospraužot viņu 398[b] rasejumā no punkta K_p uz h.

Patvaļiga atbalstpunkta A atspoguļojumu konstruejam tagad šādi. Atzīmejam punktu $A^{\times} = AK_p \times s_I'$, un punktus A un $A^{\times}$ ar pārnešanas centra $\frac{1}{2}K_d$ palīdzibu pārnesam uz t, dabujot punktus A' un $A^{\times\prime}$. Pēc tam attiecigā pusē no $A^{\times\prime}$ nospraužam uz t nogriezni $A^{\times\prime}A^{s\prime} = A^{\times\prime}A'$, dabujot punktu $A^{s\prime}$. Pēdejo punktu ar punkta $\frac{1}{2}K_d$ palīdzibu uz virzienu AK_p pārnezdami, dabujam meklejamo atspoguļojumu A^s.

Konstruejot punkta B atspoguļojumu B^s, papriekšu aizrādītā kārtā noteicam atbalstpunkta atspoguļojumu A^s, un pēc tam no A^s velkam stateni pret h, līdz krustošanai ar attiecigo staru BK_p meklejamā punktā B^s. Tādā kārtā konstruejams viss atspoguļojums.

Lai dabutu patvaļiga priekšmeta atspoguļojumu, mēs varetu ari šo atspoguļojumu papriekšu konstruet ortogonalās projekcijās, t. i. 398[a] rasejumā, un pēc tam varetu konstruet atspoguļojuma perspektivi pēc vispārejiem likumiem.

398[b] rasejumā bez tam ir aizrāditas ēnas pie centralās apgaismošanas; gaismas avots ir L.

P i e z ī m e. Ja spoguļa plakne ieņem patvaļigu paslīpu stāvokli telpā, tad atspoguļojums konstruejams pēc 121 un 143 pantos aizrāditiem principiem.

Ceturtā daļa. Aksonometrija.

I nodaļa. Ģeometrisko elementu attēlošana vispārejā gadijumā.

313 §. Vispārejie jēdzieni. Punkta attēlošana.

Pieņemsim, ka telpā ir dotas viena pret otru patvaļigi novietotas attēlu plakne K un taisnleņķaina koordinatu zistema OXYZ ar sākumu O, pie kam koordinatu asīm OX, OY un OZ ir vienlīdzigs garums p (399a ras.).

Pieņemsim, ka bez tam telpā vēl ir dots patvaļigs punkts A, kuŗa koordinatas attiecibā uz koordinatu zistemu OXYZ ir x, y un z.

Parasti koordinatu zistemu OXYZ pieņem tā, lai plakne OXY ieņem horicontalo stāvokli. Tapēc šo plakni var apzīmet ar H. Tādā gadijumā no punkta A pret plakni H vilktais statenis ir punkta A horicontaļi projecejošais stars, un ša stateņa krustotne ar plakni OXY ir oriģinalā punkta A horicontalā projekcija A_1.

Ja OXY ir horicontalā plakne, tad plakni OXZ var uzlūkot kā vertikalo plakni V, bet plakni OYZ — kā profilo plakni.

Pieņemsim patvaļigu pret attēlu plakni K paslīpu virzienu m un projecesim līdztekus virzienam m koordinatu zistemu OXYZ, kopā ar punktu A un viņa koordinatām x, y un z, uz attēlu plakni K. Tā iegūto attēlu sauc par slīpleņķaino aksonometrisko projekciju, jeb aksonometrisko attēlu.

Projekciju centrs šaī gadijumā atrodas bezgalibā, kapēc iegūto attēlu sauc ari par līdzteku perspektivi.

Patiesibā aplūkotaja acs nekad nevar atrasties bezgali attālinatā centrā, tapēc aksonometriskais attēls, jeb līdzteku perspektive nevar atstāt uz aplūkotaja aci, kas atrodas galibā, tādu pašu iespaidu, kā oriģinalais priekšmets. Tomēr aksonometriskos attēlus bieži lieto priekšmetu attēlošanai, jo dotā priekšmeta aksonometriskais attēls konstruejams daudz vienkaršaki, nekā attiecigais pareizais perspektiviskais attēls.

Taisnes O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p sauc par aksonometriskā attēla asīm. Punkts A_p ir oriģinalā punkta A aksonometriskais attēls; x_p, y_p un z_p ir aksonometriskā attēla A_p koordinatas, bet A_{1p} ir atbalstpunkta A_1 aksonometriskais attēls.

Līdzteku taisnes uz patvaļigu plakni projecedami, dabujam savstarpeji līdzteku projekcijas, tapēc koordinatas y_p un z_p ir līdzteces attiecigām koordinatu asīm O_pY_p un O_pZ_p. Šo apstākli ievērojot, varam diezgan ātri konstruet dotā priekšmeta aksonometrisko attēlu, gadijumā, ja priekšmeta šķautnes ir līdzteces attiecigām koordinatu asīm.

Vispārejā gadijumā attēlu plakne K un koordinatu zistema OXYZ var ieņemt viena pret otru patvaļigu stāvokli, bez tam projecejošo staru virzienu m varam pieņemt pilnigi patvaļigi; tapēc vispārejās slīpleņķainas aksonometrijas gadijumā, trīs kautkādā virzienā vilktus, patvaļigi pieņemtus nogriežņus O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p, ar kopeju sākumu O_p, var uzlūkot, kā taisnleņķainas koordinatu zistemas OXYZ, — kuŗai telpā ir vienlīdzigs asu gaŗums, — slīpleņķaino aksonometrisko attēlu (Pohlke's teorema).

Attiecibas

$$\frac{O_pX_p}{OX}=\frac{O_pX_p}{p}=\frac{x_p}{x}=i_x,$$

$$\frac{O_pY_p}{OY}=\frac{O_pY_p}{p}=\frac{y_p}{y}=i_y$$

un

$$\frac{O_pZ_p}{OZ}=\frac{O_pZ_p}{p}=\frac{z_p}{z}=i_z$$

sauc par attiecigo koordinatu asu O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p sagrozišanas rāditājiem.

Attēlu plakni K ar rasejuma plakni savienodami, iegūstam 399[b] ras., pie kam punkta A_p stāvoklis noteicams ar viņa koordinatām x_p, y_p un z_p attiecibā uz koordinatu asīm O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p.

Kā augšā aizrādits, šo asu lielumus un viņu virzienus vispārejā gadijumā var pieņemt pilnigi patvaļigi, bet parasti asi O_pZ_p pieņem vertikalajā stāvoklī.

Ja ir dota projekcija A_{1p}, tad punkta A_p stāvokli varam noteikt ar vienu koordinatu z_p. Tā tad, punkta stāvoklis telpā noteicams ar paša oriģinalā punkta un viņa atbalstpunkta aksonometriskiem attēliem.

Kā redzams, patvaļigs punkts aksonometriskā rasejumā noteicams tapat, kā perspektiviskā rasejumā, konstruejot oriģinalā punkta un attiecigā atbalstpunkta attēlus.

Vienkāršibas labā mēs turpmakos paskaidrojumos, kur tas būs iespējams, atmetisim indekšus „p", apzīmejot punktu un taišņu aksonometriskos attēlus.

314 §. Atsevišķie punkta stāvokļi.

Ja punkts B guļ uz plaknes OXY, tad atbalstpunkts B_1 saplūst ar oriģinalo punktu, t. i. $B=B_1$ (400 ras.).

Ja punkts C guļ uz plaknes OXZ, tad viņa atbalstpunkts C_1 guļ uz OX.

Ja punkts D guļ uz plaknes OYZ, tad viņa atbalstpunkts D_1 guļ uz OY.

Ja punkts E guļ uz ass OX, tad viņa atbalstpunkts E_1 saplūst ar E.

Ja punkts F guļ uz ass OY, tad viņa atbalstpunkts F_1 saplūst ar F.

Ja punkts G guļ uz ass OZ, tad viņa atbalstpunkts G_1 saplūst ar sākumu O.

Ja punkts J sakrīt ar sākumu O, tad ari viņa atbalstpunkts saplūst ar O, t. i. $J = J_1 = O$.

315 §. Taisnes attēls.

Pieņemsim, ka ir doti divu punktu A un B un attiecigo atbalstpunktu A_1 un B_1 aksonometriskie attēli (401 ras.).

Punktus A ar B, un A_1 ar B_1, t. i. vienadnosaukuma attēlus savienodami, mēs iegūsim patvaļigas taisnes a un viņas atbalstlinijas a_1 aksonometriskos attēlus.

Taisnes AA_1 un BB_1 ir stateniskas pret plakni OXY, tapēc taisnes a atbalstliniju a_1 var iedomāties iegūtu, plaknei, — vilktai caur a, stateniski pret OXY, — krustojoties ar pēdejo plakni.

Ja plakne OXY ieņem horicontalo stāvokli, tad a_1 noteic taisnes a horicontali projecejošas plaknes krustošanos ar plakni $H = OXY$. Tapēc plaknes ABB_1A_1 pēdu liniju attiecibā uz plakni OXY var apzīmet ar $s = a_1$.

Plakne, vilktā caur a, stateniski pret OXY, krustojās ar plaknēm $OXZ = V$ un $OYZ = W$ pa pēdu linijām t un w, kas iet līdztekus asij OZ. Šo pēdu liniju stāvokļi noteicami ar punktiem T_1 un G_1, kuŗos $a_1 = s$ krustojas ar asīm OX un OY.

Taisnes a krustotni ar plakni OXY atzīmesim ar S. Ja plakne $OXY = H$, tad punkts S ir taisnes a horicontalais pēdu punkts.

Līdzigā kārtā taisnes a krustotni ar plakni $OXZ = V$ apzīmesim ar T, bet krustotni ar plakni $OYZ = W$ — ar G.

Pēc 314 § punktam T_1 jaatrodās uz OX, bet punktam G_1 — uz OY, tapēc pēdu punktus T un G dabujam, velkot no atbalstlinijas a_1 krustotnēm ar asīm OX un OY līdzteces asij OZ, līdz krustošanai ar a.

Pēdu punkts $S = a \times a_1$.

316 §. Ar krustodamām taisnēm noteikta plakne.

Patvaļigu plakni aksonometriskā rasejumā varam noteikt ar divām krustodamām taisnēm b un c un viņu atbalstlinijām b_1 un c_1 (402 ras.).

Punktam A, kuŗā krustojas b un c, un punktam A_1, kuŗā krustojas b_1 un c_1, jaatrodās uz vienas taisnes, līdzteces asij OZ.

317 §. Ar pēdu linijām noteikta plakne.

Patvaļigu plakni P varam noteikt ar pēdu linijam s, t un w (403 ras.); pa kuŗām dotā plakne krustojas ar koordinatu plaknēm.

Ikkatrām divām pēdu linijām ir kopejs punkts, kas guļ uz attiecigās koordinatu ass. Tapēc šos punktus savienodami, iegūstam kautkādu trijstūri $S_x S_y S_z$, ko sauc par galveno pēdu liniju trijstūri.

318 §. Vienai koordinatu asij līdztece plakne.

Ja plakne ir līdztece kautkādai koordinatu asij, tad viena no galvenā pēdu liniju trijstūŗa virsotnēm atrodas bezgalibā.

404 rasejumā ir aizrādita, piemēram, plakne — līdztece asij OX.

Tā kā punkts S_x atrodas uz OX bezgalibā, tad pēdu linijam s un t jabut līdztecēm asij OX, bet pēdu linija w var ieņemt patvaļigu stāvokli.

319 §. Vienai koordinatu plaknei līdztece plakne.

Ja dotā plakne ir līdztece vienai koordinatu plaknei, tad divas galvenā pēdu liniju trijstūŗa virsotnes atrodas bezgalibā.

405 rasejumā aizrāditā plakne ir līdztece plaknei OXY.

Tā kā virsotnes S_x un S_y guļ bezgalibā uz attiecigām asīm OX un OY, tad pēdu linijas t un w ir līdzteces attiecigām asīm OX un OY.

Nogrieznis OS_z noteic dotās plaknes atstatumu no plaknes OXY.

320 §. Krustodamās plaknes.

Pieņemsim, ka ir dotas divas plaknes ar pēdu linijam $s_I t_I w_I$ un $s_{II} t_{II} w_{II}$, pie kam pēdejā plakne ir caurspīdiga (406 ras.).

Taisnei l, pa kuŗu krustojas dotas plaknes, jaiet caur attiecigām vienadnosaukuma pēdu liniju krustotnēm S, T un G. Bet taisnes l atbalstlinijai l_1 jaiet caur attiecigiem atbalstpunktiem S_1, T_1 un G_1.

321 §. Taisnes krustošanās ar plakni, doto ar pēdu linijām.

Pieņemsim, ka ir dotas: patvaļiga plakne P ar pēdu linijām s, t, w un taisne a, kuŗas atbalstlinija ir a_1 (407 ras.).

Lai noteiktu taisnes a krustotni ar plakni P, mēs caur taisni a velkam palīgplakni $Q \perp OXY$. Plaknes Q pēdu linija s_I saplūst ar a_1, bet pēdu linija g_1 iet līdztekus asij OZ, jo plakne Q ir līdztece šai asij (318 §).

Plakņu P un Q krustošanās linijai jaiet caur vienadnosaukuma pēdu liniju krustotnēm, t. i. caur $S = s \times s_I$ un $G = w \times g_1$. Punkts M, kuŗā taisne SG krusto doto taisni a, ir meklejamās taisnes a krustotne ar plakni P. Attiecigais atbalstpunkts M_1 guļ uz atbalstlinijas a_1.

Lai noteiktu taisnes a, jeb patvaļiga priekšmeta redzamibu, mēs turpmak vienmēr iedomasimies, ka aplūkotajs atrodas bezgalibā priekš attēlu, vaj rasejuma plaknes, pie kam aplūkotajs atrodas koordinatu plakņu OXY, OXZ un OYZ ierobežotā trijplakņu kakta iekšpusē, un koordinatu asīm ir rasejumā aizrāditie virzieni.

Taisnes a redzamiba noteicama ar viņas un dotai plaknei P piederigas patvaļigas taisnes šķērsošanās punkta palīdzibu. Pieņemsim, piemēram, šķērsošanās punktu C = T, kuŗā saplūst taisnei a un pēdu linijai t piederigu punktu C un T aksonometriskie attēli. Attiecigie atbalstpunkti ir C_1 un T_1. Nav gŗūti sajēgt, ka redzams tas punkts, kuŗa atbalstpunkts atrodas tuvaki bezgali attālinatam aplūkotajam, jeb tālak atstāj no koordinatu sākuma O, vaj koordinatu asīm OX, jeb OY, skaitot uz leju.

Kā redzams, atbalstpunkts C_1 tālak atstāj no O, nekā T_1, tapēc taisnei a piederigais punkts C redzams, bet punkts T, kas guļ uz pēdu linijas t, nav redzams. Tas nozīmē, ka taisnes a labā daļa līdz punktam M iet priekš plaknes P un tapēc šī taines a daļa redzama, bet taisnes a kreisā daļa atrodas aiz plaknes P un nav redzama.

322 §. Taisnes krustošanās ar trijstūri.

Pieņemsim, ka jaatrod patvaļigas taisnes a krustotne ar trijstūŗa ABC plakni (408 ras.).

Šis uzdevums atrisinajams tapat, kā iepriekšejais. Caur taisni a velkam plakni $Q \perp OXY$ un atrodam taisni EF, pa kuŗu plakne Q krusto doto plakni ABC. Punkts M, kuŗā taisne EF krusto a, ir meklejamais.

Taisnes a redzamiba noteicama ar šķērsošanās punkta J = K palīdzibu. Tā kā K_1 tālak atstāj no O, nekā J_1, tad taisnei a piederigs punkts K redzams, caur ko ir noteikta taisnes a redzamiba attiecibā uz trijstūŗa ABC plakni.

Nav gŗūti novērot, ka aplūkojamā uzdevuma atrisinašanas veids pilnigi vienlīdzigs ar paņēmienu, ko lietojām, atrisinajot to pašu uzdevumu ortogonalās projekcijās (106 §, 113 ras.), jeb perspektivē (305 §, 382 ras.). Līdzigā kārtā aksonometrijā atrisina visus krustošanās uzdevumus, lietojot ortogonalās projekcijās aplūkotos paņēmienus.

323 §. Ēnu konstrukcija.

No dotā punkta uz patvaļigu plakni krītošo ēnu meklejot, kā zinams, jakonstruē attiecigā gaismas stara krustotne ar doto ēnas plakni, t. i. ja-atrisina krustošanās uzdevums. Tapēc ari ēnu konstrukcijas aksonometrijā izpildamas pēc ta paša principa, kā ortogonalās projekcijās.

Tā, piemēram, 409 rasejumā ir konstruetas patvaļiga trijstūŗa ABC, kuŗa atbalsts ir $A_1B_1C_1$, krītošās ēnas uz koordinatu plaknēm.

Gaismas staru virziens ir noteikts ar taisni l un viņas atbalstliniju l_1.

Ja plakne $OXY = H$ un plakne $OXZ = V$, tad uz šām plaknēm krītošās ēnas var uzlūkot kā $\triangle$-a ABC horicontalās, vaj vertikalās krītošās ēnas.

Patvaļigas virsotnes A horicontala ēna A′ iegūstama attiecigā gaismas stara krustošanās punktā ar tā paša gaismas stara atbalstliniju (315 §, 401 ras.).

Patvaļigas virsotnes B vertikalā ēna B″ iegūstama, ja no attiecigā gaismas stara atbalstlinijas krustotnes ar OX velkam līdzteci ar OZ, līdz krustošanai ar attiecigo gaismas staru (401 ras.).

Kā ortogonalās projekcijās, tā ari aksonometrijā patvaļigas taisnes horicontalā un vertikalā ēnas krustojas uz ass OX.

Patvaļigas taisnes krītošā ēna uz ēnas plaknes, kā zinams, sākas no taisnes pēdu punkta. Tapēc, piemēram, ēna A′C′ iet caur taisnes AC horicontalo pēdu punktu S_I.

Kā no rasejuma redzams, figuras ABC un $A_1B_1C_1$, ABC un A′B′C′, $A_1B_1C_1$ un A′B′C′ pa pārām ir affini radnieciskas figuras ar kopejo radniecibas asi $s = S_I S_{II}$. Affinitates virziens pirmā gadijumā ir līdztece asij OZ, otrā gadijumā — līdztece gaismas stara virzienam l, bet trešā gadijumā — līdztece l_1.

Taisne s ir plaknes ABC krustošanās linija ar plakni OXY.

Tamlīdzigi ari trijstūris ABC un viņa vertikalā ēna A″B″C″ ir affini radnieciskas figuras, kuŗas ass ir $\triangle$-ABC plaknes krustošanās linija ar plakni OXZ (šī taisne rasejumā nav aizrādita), bet affinitates virziens sakrīt ar l.

Trijstūŗa ABC pašēna noteicama pēc tiem pašiem noteikumiem, kā ortogonalās projekcijās (84 §.).

Bez tam rasejumā ir konstrueta patvaļigas taisnes a krustotne M ar $\triangle$-i ABC un ir aizrāditas taisnes a horicontalā un vertikalā krītošās ēnas (a' un a''). Tam nolūkam ir konstruetas patvaļiga, uz taisnes a guļoša punkta D ēnās D′ un D″. Ēna D′ savienota ar taisnes a horicontalo pēdu punktu S, dabujot tā a'. Ēna a'' iegūstama, savienojot D″ ar punktu, kuŗā a' krusto asi OX.

No taisnes a uz $\triangle$-i ABC krītošā ēna konstrueta pēc tā paša principa, kā ortogonalās projekcijas, velkot tam nolūkam no punkta $K' = a' \times B'C'$ līdzteci virzienam l, līdz krustošanai ar BC punktā K. Savienojot K ar M, dabujam meklejamo krītošo ēnu.

Punktu K varetu konstruet ari ar punkta $K'' = a'' \times B''C''$ palīdzibu, velkot caur K″ līdzteci virzienam l, līdz krustošanai ar BC.

324 §. Patvaļiga priekšmeta attēla konstruešana vispārejā slīpleņķainas aksonometrijas gadijumā.

Vispārejā slīpļeņķainas aksonometrijas gadijumā mēs pēc 313 § trīs patvaļigus nogriežņus O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p, kuŗiem ir kopejs sākums O_p (410 ras.), varam uzlūkot par triju, telpā vienlīdzigu, savstarpeji statenisku nogriežņu OX, OY un OZ aksonometriskiem attēliem.

Pieņemsim pilnigi patvaļigi asu O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p virzienus un bez tam patvaļigi pieņemsim viņu lielumus: $O_pX_p = 40$ m/m, $O_pY_p = 30$ m/m un $O_pZ_p = 60$ m/m.

Konstruesim, piemēram, taisnā paralelepipeda aksonometrisko attēlu, kuŗa šķautnes sakrīt ar asu OX, OY un OZ virzieniem, un kuŗam, skaitot pa attiecigām koordinatu asīm, telpā ir sekošie patiesie lielumi: $x = 35$ m/m, $y = 25$ m/m un $z = 45$ m/m.

Lai konstruetu paralelepipeda aksonometrisko attēlu, jazina viņa šķautņu sagrozitie lielumi. Šie lielumi pēc 313 §. noteicami no attiecigām attiecibam:

$$\frac{O_pX_p}{OX} = \frac{O_pX_p}{p} = \frac{x_p}{x} = i_x,$$

$$\frac{O_pY_p}{OY} = \frac{O_pY_p}{p} = \frac{y_p}{y} = i_y,$$

$$\text{un } \frac{O_pZ_p}{OZ} = \frac{O_pZ_p}{p} = \frac{z_p}{z} = i_z,$$

pie kam jazina koordinatu asu patiesais gaŗums $p = OX = OY = OZ$.

Vispārejā slīpleņķainās aksonometrijas gadijumā diezgan gŗūti noteikt p. Tapēc rīkojamies šādi. Pieņemsim patvaļigu nogriezni p' par koordinatu asu OX, OY un OZ patieso gaŗumu. Lai attēlojamo priekšmetu aksonometriskā attēlā pārak stipri nesagrozitu, ieteicams par p' pieņemt kautkādu videjo nogriezni starp O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p. Pieņemsim, piemēram, $p' = 50$ m/m. Pieņemdami patvaļigi p', mēs iegūsim nevis dotā paralelepipeda attēlu, bet paralelepipeda attēlu, kuŗš līdzigs dotam paralelepipedam. Šā līdzigā paralelepipeda dimenzijas attiecas pret dotā paralelepipeda dimenzijām, kā p' attiecas pret nezinamo p. Citiem vārdiem, mēs iegūsim dotā priekšmeta aksonosmetrisko attēlu mērogā $\frac{p'}{p}$, kuŗa lielums nav zinams. Bet kā mēs vēlak pārliecinasimies, ša mēroga nezinašana neatstāj nekāda iespaida uz konstruejamā aksonometriskā attēla uzskatamibu.

Pieņemot p vietā p', mēs, saprotams, nedabusim patiesus sagrozišanās rāditajus i_x, i_y un i_z, bet dabusim attiecigus sagrozišanas rāditajus i_x', i_y' un i_z', kuŗu lielumus noteicam no sekošiem nolīdzinajumiem:

$$i'_x = \frac{O_p X_p}{p'} = \frac{40}{50} = 0,8,$$

$$i'_y = \frac{O_p Y_p}{p'} = \frac{30}{50} = 0,6$$

$$\text{un} \quad i'_z = \frac{O_p Z_p}{p'} = \frac{60}{50} = 1,2.$$

Ar šo sagrozišanas rāditaju palīdzibu varam noteikt dotā priekšmeta šķautņu sagrozitos lielumus, kas attiecigi līdzinas:

$$x'_p = x \cdot i'_x = 35 \cdot 0,8 = 28 \ {}^m/_m,$$

$$y'_p = y \cdot i'_y = 25 \cdot 0.6 = 15 \ {}^m/_m$$

$$\text{un} \quad z'_p = z \cdot i'_z = 45 \cdot 1,2 = 54 \ {}^m/_m.$$

Šos lielumus uz attiecigām koordinatu asīm 410 rasejumā nospraužot, iegūsim punktus A_p, B_p un C_p. Pēc tam nav gŗūti konstruet paralelepipeda aksonometrisko attēlu. Kā rasejumā redzams, mēs dabujam pilnigi uzskatamu perspektivisko attēlu.

Ja paralelepipeds, vaj kāds cits priešmets ir konstruets, tad uz rasejuma pamata no nolīdzinajumiem:

$$x_p' = x \cdot i'_x,$$

$$y_p' = y \cdot i'_y$$

$$\text{un} \quad z'_p = z \cdot i'_z$$

varam noteikt patiesos lielumus x, y un z, ja ir zinami sagrozišanas rāditaji i_x', i'_y un i'_z.

Konstruetā aksonometriskā attēla mērogs ir $\frac{x_p}{x'_p} = \frac{x \cdot i_x}{x \cdot i'_x} = \frac{i_x}{i'_x} = \frac{O_p X_p}{p}$: $\frac{O_p X_p}{p'} = \frac{p'}{p}$, kā tas augšā tika aizrādits.

325 § Koordinatu sagrozijumu mērogs.

Sarežgitaku priekšmetu attēlojot aksonometriskā rasejumā, ērtakī sagrozitus koordinatus noteikt ne analitiski, kā tas aizrādits 324 §, bet grafiski, ar tā saucama koordinatu sagrozijumu mēroga palīdzibu.

Tāds mērogs konstruejams šādi (411 ras.). Patvaļigu leņķi α pieņemdami, caur virsotni 1 velkam stateniski pret vienu leņķa malu taisni 1 – 2. Uz šās taisnes no punkta 1 nospraušam p' (vaj koordinatu patieso gaŗumu p, ja tas zinams); bez tam nospraužam $O_p X_p$, $O_p Y_p$ un $O_p Z_p$, dabujot tā punktus 2, 3, 4 un 5. Caur iegūtiem punktiem velkam līdzteces ar leņķa α malu 1 – 1′, un atzīmejam punktus 2′, 3′, 4′ un 5′, kuŗos šās līdzteces krusto otro leņķa a malu. No iegūtiem punktiem velkam stateņus pret $1-1'$, dabujot punktus $1'$, I, II un III. Kā redzams, $1'-2'=p'$, $I-3'=O_pX_p$, $II-4'=O_pY_p$ un $III-5'=O_pZ_p$.

Lai vēlak, attiecigās konstrukcijas izpildot, būtu vieglaki pārskatit rāsejumu, blakus punktiem $2'$, $3'$, $4'$ un $5'$ atzīmejam p', vaj p; O_pX_p; O_pY_p un O_pZ_p.

Pēc tam uz taisnes $1'-2'$, skaitot no punkta $1'$, nospraužam dotās patiesās koordinatas $1'-6=x=35$ m/m, $1'-7=y=25$ m/m un $1'-8=z=45$ m/m, dabujot pie tam punktus 6, 7 un 8. Šos punktus ar punktu 1 savienodami, mēs šo taišņu krustotnēs ar attiecigām taisnēm $I-3'=O_pX_p$, $II-4'=O_pY_p$ un $III-5'=O_pZ_p$ iegūsim sagrozitas koordinatas $x'_p=I-6'$, $y'_p=II-7'$ un $z'_p=III-8'$, ko nav grūti pierādit. Tam nolūkam aplūkojam līdzigus trijstūrus $I-6'-1$ un $1'-6-1$, kā ari $I-3'-1$ un $1'-2'-1$, dabujot, ka:

$$\frac{I-6'}{1'-6}=\frac{I-1}{1'-1}=\frac{I-3'}{1'-2'}=\frac{O_pX_p}{p'}=i'_x.$$

Bet $1'-6=x$, tapēc

$$\frac{I-6'}{1'-6}=\frac{I-6'}{x}=i'_x, \text{ jeb } I-6'=x\,.\,i'x=x'_p.$$

Zinot x'_p, y'_p un z'_p, nav grūti konstruet dotā paralelepipeda aksonometrisko attēlu.

Ja taisne, jeb kautkāds priekšmets attēlots mēroga $^1/_2$, tad nogriežņi x'_p, y'_p un z'_p janosprauž uz koordinatu asīm divas reizes. Lai tūlit dabutu vajadzigu lielumu, varam leņķa a malas pagarinat un no paša sākuma nospraust ne $1-3=I-3'=O_pX_p$, bet $1-3_o=I''-3''=2\times O_pX_p$.

Pagarinajot staru $1-6$ līdz krustošanai ar $I''-3''$, dabusim $I''-6''=2\times x'_p$, jo $\frac{I''-6''}{I-6'}=\frac{1-I''}{1-I}=\frac{I''-3''}{I-3'}=\frac{2\times O_pX_p}{O_pX_p}=2$.

Tamlīdzigi varam noteikt $2\times y'_p$ un $2\times z'_p$.

Lai gan koordinatu asu O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p virzienus un lielumus var pieņemt pilnigi patvaļigi, tomēr, lai nedabutu pārak sagrozitus attēlus, ieteicams leņķus starp koordinatu asīm pieņemt lielakus pār 90^0, bet mazakus par 180^0.

Asu O_pX_p, O_pY_p un O_pZ_p lielumus ieteicams pieņemt ne pārak atšķirigus vienu no otra un pēc tam, ja spējams, tādā pašā attiecibā, kā pretguļošie leņķi $Y_pO_pZ_p$, $X_pO_pZ_p$ un $X_pO_pY_p$.

Aplūkotā piemērā sagrozišanas rāditaji $i'_x=0{,}8$, $i'_y=0{,}6$ un $i'_z=1{,}2$; kas attiecas viens pret otru, kā

$$i'_x : i'_y : i'_z = 0{,}8 : 0{,}6 : 1{,}2 = 8 : 6 : 12 = 4 : 3 : 6.$$

Aizrāditā veidā bieži noteic sagrozišanas rāditajus.

Ja divu asu sagrozitie lielumi vienlīdzigi, tad dabujam tā saucamo dimetrisko attēlu, piemēram, $i_x : i_y : i_z = 0{,}8 : 0{,}6 : 0{,}6$, jeb $i_x : i_y : i_z = 0{,}8 : 0{,}6 : 0{,}8$.

Ja triju asu sagrozitie lielumi vienlīdzigi, tad dabujam tā saucamo izometrisko attēlu, piemēram, $i_x : i_y : i_z = 0{,}8 : 0{,}8 : 0{,}8$.

II nodaļa. Atsevišķie slīpleņķainas aksonometrijas gadijumi.

326 §. Attēlu plakne, līdztece vienai koordinatu asij.

Pieņemsim, ka attēlu plakne ir līdztece koordinatu asij O Z. Tadā gadijumā visi nogriežņi, kuŗu virziens sakrīt ar ass O Z virzienu, attēlojas dabiskā lielumā. Tapēc ari ass O Z attēls noteic koordinatu asu patieso lielumu p telpā (412 ras.).

Aplūkosim gadijumu, kad patvaļigi ir pieņemti visu koordinatu asu virzieni un divu asu, piemēram O X un O Z sagrozītie lielumi, pie tam šai gadijumā ass O Z, saprotams, noteic ari koordinatu asu patieso lielumu p.

Pieņemsim, ka attēlu plakne krusto plakni O X Y pa pēdu liniju s, bet plaknes O X Z un O Y Z pa pēdu linijām t un w. Pie tam pēc 318 § pēdu linijām t un w jabūt līdztecēm asij O Z. Ass O Z stateniska pret plakni O X Y, tapēc viņa stateniska pret ikkatru taisni, guļošo uz plaknes O X Y, un tapēc ass O Z virziens ir ari stateniski pret pēdu liniju s. Bez tam ass O Z ir līdztece attēlu plaknei, tapēc aksonometriskiem attēliem O Z un s jabūt savstarpeji stateniskiem.

Kā zinams, līdztekus projecejot, patvaļigas taisnes projekcija nemainas, ja mēs projekciju plakni pārvietojam tā, ka viņa vienmēr paliek līdztece pirmatnejam virzienam. Tapēc aksonometrijā varam pieņemt, kā attēlu plakne iet caur patvaļigu uz ass O X pieņemtu punktu, piemēram, caur ass O X galu X.

Pamatojoties uz aizrādito, caur punktu X velkam $t \parallel OZ$ un $s \perp OZ$. Uzmeklejot punktu $S_y = s \times OY$, velkam caur S_y pēdu liniju $w \parallel OZ$.

Augšā mēs pieņemam asu O X un O Z sagrozitus lielumus. Bez tam vēl janoteic ass OY sagrozitais lielums. Tam nolūkam mēs trijstūri OXS_y, griežot viņu ap asi s, savienojam ar attēlu, t. i. rasejuma plakni. Tā kā leņķis XOS_y telpā ir taisns leņķis, tad pēc savienošanas jadabu $\sphericalangle XO_0S_y = 90^0$, pie kam O_0 ir virsotnes O savienotais stāvoklis.

Punktu O_o iegūsim, ja ap $X S_y$, kā caurmēru, vilksim pusaploci un apzīmesim punktu, kuŗā loks, kas no centra X vilkts ar radiusu p, krusto šo pusaploci. Taisne, kas savieno O_o ar S_y, noteic ass O Y savienoto stāvokli, bet taisne, kas savieno O_o ar O, noteic affinitates virzienu starp figuram $O X S_y$ un $O_o X S_y$.

Nospraužot uz taisnes $O_o S_y$ nogriezni $p = O_o Y_o$ un pārnesot punktu Y_o līdztekus virzienam $O_o O$ uz asi O Y, mēs iegūsim punktu Y, kas noteic ass O Y sagrozito lielumu.

Aplūkosim tagad gadijumu, kad ir d o t i v i s u k o o r d i n a t u a s u v i r z i e n i u n a s u OX un OY s a g r o z i t i e l i e l u m i.

Tādā gadijumā koordinatu asu patiesais lielums noteicams no sekošas attiecibas:

$$\frac{O_o X}{O_o S_y} = \frac{O_o Y_o}{O_o S_y} = \frac{O Y}{O S_y}.$$

Konstruejot taisnleņķa palīgtrijstūri $O S_y Y$ (413 ras.) ar katetem, kas līdzinas O Y un $O S_y$, nav gŗūti novērot, ka viņš līdzigs trijstūrim $O_o S_y X$, jo trijstūŗu $O Y S_y$ (413 ras.) un $O X S_y$ (412 ras.) malas atrodas aizrāditā attiecibā.

Ar 413 ras. palīdzibu mēs noteicam leņķus α un β, un pēc tam konstruejam šos leņķus 412 rasejumā pēdu linijas s galos. Atzīmejot šo leņķu malu krustotni O_o, dabujam trijstūri $O_o X S_y$, kuŗa katete $O_o X$ līdzinas p. Tā mēs noteicam koordinatu asu patieso lielumu, ar ko ir ari noteikta trešā ass $O Z = p$.

327 §. Attēlu plakne, līdztece vienai koordinatu plaknei.

Pieņemsim, ka attēlu plakne ir līdztece vienai koordinatu plaknei, piemēram, O X Z, pie kam atsevišķā gadijumā viņa var saplūst ar plakni O X Z, kā tas pieņemts 414 rasejumā.

Tādā gadijumā nogriežņi O X un O Z noteic šo asu patiesos lielumus un leņķis starp asim O X un O Z līdzinas taisnam leņķim.

Slīpleņķainās aksonometrijas gadijumā mēs līdztekus projecejošo staru virzienu telpā varam pieņemt pilnigi patvaļigi, tapēc mums tiesiba ass O Y lielumu un virzienu pieņemt p i l n i g i p a t v a ļ i g i.

Šados noteikumos iegūtais aksonometriskais attēls visvieglaki konstruejams, jo janoteic tikai sagrozitas koordinatas y. Aiz šā iemesļa aizrāditais attēlošanās paņemiens visbiežaki lietots.

Sagrozišanas rāditaji i_x un i_z līdzinas 1, bet sagrozišanas rāditajs i_y tiek parasti pieņemts $1/2$, $1/3$, $2/3$, vai $3/4$.

328 §. Velteņa attēls.

Konstruesim krītošās un pašēnas taisnam aploces veltenim, kas atbalstas uz plakni O X Y, gadijumā, kad attēlu plakne ir līdztece koordinatu plaknei OXZ. Bez tam konstruesim patvaļigas taisnes krustošanās punktus ar velteni, un taisnes ēnas (415 ras.).

Lai noteiktu velteņa pamata attēlu, mēs plakni OXY, griežot ap asi OX, savienojam ar attēlu plakni un savienotajā stāvoklī konstruejam velteņa pamatu ar centru Q_{I_0}. Pēc tam no Q_{I_0} velkam stateni pret OX un no punkta Q_x, kur šīs statenis krusto asi OX, velkam līdzteci asij OY. Pieņemot sagrozīšanas rāditaju $i_y = 1/2$, mēs uz vilktās līdzteces nospraužam nogriezni $Q_x Q_I = 1/2 . Q_{I_0} Q_x$.

Aizrādītā kārtā var konstruet atsevišķus velteņa pamata punktus, jeb ari sekošā veidā.

Atsevišķie velteņa pamata punktu savienotie stāvokļi A_0, B_0, C_0, ... un viņu attēli A_I, B_I, C_I, ..., kā redzams, ir affini radnieciski punkti, pie tam affinitates ass ir OX, bet affinitates virzienu noteic taisne $Q_{I_0} Q_I$. Tapēc pagarinajot, piemēram, $B_0 F_0$ līdz krustošanai ar OX punktā 1 un savienojot punktu 1 ar Q_I, mēs iegūsim aksonometriskā attēlā caurmēra $B_I F_I$ virzienu. Ja tagad caur B_0 un F_0 velkam līdzteces ar $Q_{I_0} Q_I$, tad šo līdzteču krustotnēs ar taisni $1 - Q_I$ iegūsim velteņa pamata punktus B_I un F_I.

Caurmērs $A_0 E_0 \parallel OX$, tapēc ari viņa attēls $A_I B_I \parallel OX$, un pie tam šā caurmēra lielums nesagrozas.

Pieņemot velteņa augstumu, mēs uz velteņa veidulēm, kas iet caur apakšeja pamata atsevišķiem punktiem, nospraužam doto augstumu, iegūstot tā attiecigus augšejā pamata punktus. Iegūtos punktus attiecigā veidā ar slaidenām līknēm savienodami, dabujam velteņa pamatu attēlus divu vienlīdzigu elipšu veidā.

Affinitates asi OX un vienu attiecigo punktu pāri Q_{I_0} un Q_I zinot, varetu pēc 227 ras. konstruet elipses galvenās asis.

Aplūkotajs atrodas bezgalibā virs plaknes OXY, tapēc viss velteņa augšejais pamats redzams, bet no apakšejā pamata redzama tikai priekšejā daļa.

Gaismas stara virzienu l un attiecigo atbalstliniju l_1 patvaļigi pieņemot, velkam pret velteņa pamatu pieskares, līdztekus l_1. Tā iegūtie pieskaršanās punkti K_I un L_I noteic gaismas atdalošas veidules $K_I K_{II}$ un $L_I L_{II}$, ar ko ari ir noteikta velteņa pašēna.

Augšejā pamata atsevišķo punktu krītošās ēnas konstruejamas pēc vispārejām metodēm. Japiezīmē, kā velteņa augšejā pamata horicontalā ēna attēlojas tādas pat elipses veidā, ka velteņa pamats.

Patvaļigas taisnes a krustotnes M_{III} un N_{III} ar velteni un ēna $N_{III} K_{III}$, kas no taisnes a krīt uz velteni, noteicami pēc tā paša paņēmiena, kā ortogonalās projekcijās.

329 §. Piramides un paralelepipeda attēls.

416a rasejumā mērogā $1/2$ ir attēlota piramide, kas atbalstās uz paralelepipedu.

416b rasejumā ir aizrādits attiecigais aksonometriskais attēls, pie kam sagrozišanas rāditajs ass OY virzienā līdzinas $1/2$, tapēc 416b rasejumā ass OY virzienā varam tieši nospraust visus mērus, kuŗam 416a rasejumā ir ass OY virziens. Bet koordinatas asu OX un OZ virzienā japalielinā divas reizes.

Ēnas, krītošās uz koordinatu plaknēm, noteicamas parastā kārtā. Lai noteiktu no šķautnes KJ uz plakni $A_{II}B_{II}C_{II}D_{II}$ krītošo ēnu, mēs atrodam punktu N″, kur krustojas šķautnes $B_{II}C_{II}$ un KJ vertikalās ēnas $B_{II}''C_{II}''$ un K″J″. Caur punktu N″ apgriestā virzienā velkam gaismas staru, līdztekus l, un atrodam punktu N, kuŗā šīs stars krusto šķautni $B_{II}C_{II}$. Punktus N un J savienodami, iegūstam šķautnes KJ ēnu, kas krīt uz plakni $A_{II}B_{II}C_{II}D_{II}$. Šo ēnu varam noteikt arī šādi.

Plakni $A_{II}B_{II}C_{II}D_{II}$ varam uzlūkot kā horicontalo pamatplakni un noteikt punkta K pamatu $K^{\times}_{1}$, attiecibā uz šo jauno horicontalo pamatplakni; pie tam $K_1K^{\times}_1 = A_I A_{II}$. Caur $K^{\times}_1$ velkam gaismas stara atbalstliniju $K^{\times}_1K^{\times\prime}$ līdztekus gaismas staru atbalstlinijai l_1, un atrodam punktu $K^{\times\prime}$, kur krustojas gaismas stara atbalstlinija ar gaismas staru, vilkto caur K. Savienojot $K^{\times\prime}$ ar J, iegūsim šķautnes KJ krītošo ēnu.

III nodaļa. Ortogonalā aksonometrija.

330 §. Atsevišķi ortogonalās aksonometrijas gadijumi.

Ortogonalās aksonometrijas gadijumā projecejošie stari ir stateniski pret attēlu plakni, tapēc patvaļiga priekšmeta ortogonalā aksonometrija nav nekas cits, kā šā priekšmeta ortogonalā projekcija ar vienu bezgali attālinatu projekciju centru.

Ortogonalās aksonometrijas gadijumā projecejošo staru virziens ir pilnigi noteikts, tapēc šai gadijumā nevar patvaļigi pieņemt visu triju koordinatu asu virzienus un viņu lielumus, kā tas iespējams vispārejā slīpleņķainās aksonometrijas gadijumā.

Vispāreji izšķiram sekošus ortogonalās, vaj taisnleņķainās aksonometrijas gadijumus:

a) ir doti visu koordinatu asu virzieni un vienas ass sagrozitais lielums;

b) ir doti visu koordinatu asu sagrozitie lielumi un vienas ass virziens, pie tam asu gaŗumi nevar būt lielaki, kā viņu patiesie lielumi p.

Aplūkosim papriekšu pirmo gadijumu.

331 §. Ir doti visu koordinatu asu virzieni un vienas ass sagrozitais lielums.

Pieņemsim, piemēram, patvaļigi ass O Z sagrozito lielumu O Z (417 ras.).

Attēlu plakne krusto koordinatu plaknes pa pēdu linijām s, t un w, kas veido galveno pēdu trijstūri $S_x S_y S_z$.

Telpā ass O Z stateniska pret plakni O X Y, tapēc ortogonalā aksonometrijā, tapat kā ortogonalās projekcijās, ass O Z attēlam, vaj projekcijai jabūt stateniskai pret plaknes O X Y pēdu liniju s. Analoģiski dabujam, ka $OX \perp w$, un $OY \perp t$. Tapēc uz ass O X patvaļigi punktu S_x pieņemot, iegūstam pilnigi noteiktu galveno pēdu trijstūri $S_x S_y S_z$.

Noteiksim tagad koordinatu asu patieso lielumu p. Tam nolūkam iedomasimies, ka caur asi O Z, stateniski pret attēlu plakni, ir vilkta plakne P. Plaknes P pēdu linija attiecibā uz attēlu plakni saplūst ar ass O Z attēlu. Plakne P krusto plasni O X Y pa taisni s_I, kas telpā stateniska pret O Z, pie tam taisne $s_I = O S_{xy}$ attēlojas kā ass O Z pagarinajums. Tā tad dabujam, ka taisnes O Z un $O S_{xy}$, kas telpā krustojas taisnā leņķī, aksonometriskā attēlā saplūst vienā taisnē $Z O S_{xy}$.

Pieņemsim, ka koordinatu sākums O atrodas aiz attēlu plaknes un savienosim taisnleņķaino trijstūri $O S_z S_{xy}$, kuŗa katetes ir $O S_z$ un $O S_{xy}$, ar attēlu plakni, griežot trijstūri ap hipotenuzi $S_z S_{xy}$, pa kuŗu trijstūŗa plakne krustojas ar attēlu plakni.

Punkta O savienotais stāvoklis O'_0 no vienas puses guļ uz pusaploces, vilktās ap $S_z S_{xy}$ kā caurmēru, un no otrās puses guļ uz stateņa, vilktā no O pret $S_z S_{xy}$. Tapēc nav gŗūti noteikt punktu O'_0.

Taisne $O'_0 S_z$ noteic ass O Z savienoto stāvokli, bet taisne $O'_0 S_{xy} = s_{I0}$ noteic pēdu linijas s_I savienoto stāvokli.

Velkot pēc tam no punkta Z stateni pret griešanās asi, mēs šā stateņa krustotnē ar $O'_0 S_z$ iegūsim ass O Z gala punkta savienoto stāvokli Z_0. Acim redzot, n o g r i e z n i s $O'_0 Z_0$ n o t e i c a s s O Z p a t i e s o l i e l u m u p.

Ja nebūtu dots ass O Z, bet gan ass O X, vaj ari ass O Y sagrozitais lielums, tad varetu izpildit līdzigas konstrukcijas, griežot attiecigo taisnleņķaino trijstūri $O S_x S_{yz}$, vaj $O S_y S_{xz}$ ap attiecigo asi $S_x S_{yz}$, vaj $S_y S_{xz}$, pie kam dabutu punktus O''_0, jeb O'''_0. (Punkti O''_0 un O'''_0 rasejumā nav aizrāditi.).

Acim redzot, visos šos gadijumos $O O'_0 = O O''_0 = O_0 O'''_0$ ir koordinatu sākuma O patiesais atstatums no attēlu plaknes, t. i. no rasejuma plaknes.

Atgriezisimies tagad pie gadijuma, kad ir dots ass O Z sagrozitais lielums

Noteikuši koordinatu asu patieso lielumu $p = O'_0 Z_0$, vēl janoteic koordinatu asu O X un O Y sagrozitie lielumi. Tam nolūkam savienosim taisnleņķaino telpā trijstūri $S_x O S_y$ ar attēlu plakni, griežot trijstūri ap viņa hipotenuzi $s = S_x S_y$. Sākuma O savienoto stāvokli O_{o_I} tagad iegūsim uz pusaploces, vilktās ap caurmēru $S_x S_y$. Nospraužot uz taisnā leņķa $S_x O_{o_I} S_y$ malām nogriežņus $O_{o_I} X_o$ un $O_{o_I} Y_o$, vienlīdzigus ar p, un no šiem punktiem velkot līdzteces affinitates virzienam $O_{o_I} O$, uz asīm O X un O Y iegūsim punktus X un Y, kas noteic šo asu sagrozitos lielumus.

Japiezīmē, ka attēliem O X, O Y an O Z, kā ari nogriežņiem $O S_x$, $O S_y$ un $O S_z$ vispārejā gadijumā ir dažadi lielumi.

Apzīmesim ass O Z slīpuma leņķi pret attēlu plakni ar γ. Šā leņķa patiesais lielums, acim redzot, līdzinas leņķim $S_{xy} S_z O'_o$, jo trijstūris $S_{xy} S_z O'_o$ noteic šā leņķa plaknes savienoto stāvoklī.

Vilksim caur punktu Z_o līdzteci asij O Z, līdz krustotnei M ar taisni $O O'_o$. Tad leņķis $M Z_o O'_o = \gamma$, bet nogrieznis $M Z_o = O Z$. No taisnleņķaina trijstūŗa $M Z_o O'_o$ dabujam:

$$\frac{M Z_o}{O'_o Z_o} = \cos.\gamma, \text{ jeb } \frac{O Z}{p} = \cos.\gamma.$$

Bet pēc 313 §

$$\frac{O Z}{p} = i_z,$$

tā tad

$$i_z = \frac{O Z}{p} = \cos.\ \gamma.$$

Atzīmesim asu O X un O Y slīpuma leņķus pret attēlu plakni attiecigi ar α un β, tad nav grūti analoģiskā kārtā pierādit, ka:

$$i_x = \frac{O X}{p} = \cos.\ \alpha \text{ un } i_y = \frac{O Y}{p} = \cos.\ \beta.$$

Tā tad, s a g r o z i š a n a s r ā d i t a j i l ī d z i n a s cos. no a t t i e c i g o k o o r d i n a t u a s u s l ī p u m a l e ņ ķ i e m p r e t a t t ē l u p l a k n i.

332 §. Piemēri.

1. U z d e v u m s. P ē c d o t i e m t a i s n ā p a r a l e l e p i p e d a š ķ a u t ņ u a, b un c p a t i e s i e m l i e l u m i e m janoteic viņu sagrozijumi, gadijumā, ja paralelepipeda šķautnes sakrīt ar koordinatu asīm.

Aizrādītā uzdevuma atrisināšanai uz koordinatu asu savienotiem stāvokļiem (417 ras.) nospraužam paralelepipeda šķautņu patiesiem lielumiem līdzigus nogriežņus a_o, b_o un c_o, pie kam $a_o = O_{o_I} - 1_o$, $b_o = O_{o_I} - 2_o$ un $c_o = O'_o - 3_o$. Galus 1_o, 2_o un 3_o pārnesam pretejā ceļā uz attiecigām asīm O X, O Y un O Z, iegūstot tā punktus 1, 2 un 3. Pēc konstruetiem sagrozitiem lielumiem $a = O - 1$, $b = O - 2$ un $c = O - 3$ nav grūti konstruet attiecigo paralelepipedu.

2. Uzdevums. Jakonstruē taisnās trijplakņu piramides attēls, gadijumā, ja ir dots piramides pamats vienadmalu trijstūŗa veidā, kas atbalstās uz OXY, un piramides augstums c (418 ras.).

Ērtibas dēļ koordinatu asu virsienus 418 rasejumā pieņemam līdztekus attiecigiem, 417 rasejumā aizrāditiem virzieniem.

Savienosim agraki aizrāditā kārtā plakni OXY, griežot viņu ap pēdu liniju $s = S_x S_y$, ar rasejuma plakni, un konstruesim piramides pamata savienoto stāvokli $A_o B_o C_o$. Pamata attēls ABC noteicams uz taisnleņķainās affinitates pamata starp figurām $S_x O S_y$ un $S_x O_{o_I} S_y$, pie kam affinitates ass ir pēdu linija $s = S_x S_y$.

Noteikuši pēc tam ar punkta E_o palīdzibu, kuŗā krustojas trijstūŗa $A_o B_o C_o$ medianas, piramides augstuma atbalstpunktu E, mēs pēc 417 ras. noteicam piramides augstuma $c = O_o' - 3_o$ sagrozito lielumu $O - 3$. Nospraužot iegūto augstumu 418 rasejumā, dabujam piramides virsotni D.

Bez tam rasejumā ir aizrāditas piramides ēnas, kas noteicamas parastā kārtā.

Līdzigi varam konstruet patvaļiga priekšmeta aksonometrisko attēlu.

333 §. Ir doti visu koordinatu asu sagrozitie lielumi un vienas ass virziens.

Pirms koordinatu asu virziena noteikšanas, jaizskaidro, kādā sakaribā, šinī gadijumā atrodas koordinatu asu sagrozitie lielumi.

Tam nolūkam pieņemsim patvaļigu taisno paralelepipedu (419 ras.) kuŗa šķautnes sakrīt ar attiecigām koordinatu asīm. Savienosim virsotni A ar sākumu O. Dabujam, ka

$$OA^2 = OA^2_1 + AA^2_1,$$

bet tā kā $OA^2_1 = OY^2 + A_1Y^2$,

tad $OA^2 = OY^2 + A_1Y^2 + AA^2_1 = OY^2 + OX^2 + OZ^2$,

vaj ari

$$1 = \frac{OY^2}{OA^2} + \frac{OX^2}{OA^2} + \frac{OZ^2}{OA^2} = \left(\frac{OY}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OX}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OZ}{OA}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\eta + \cos^2\zeta + \cos^2\vartheta,$$

t. i. $\cos^2\zeta + \cos^2\eta + \cos^2\vartheta = 1$,

pie kam ζ, η un ϑ ir leņķi, ko veido paralelepipeda diagonale OA ar paralelepipeda šķautnēm, kuŗām ir kopejs šākums O.

Projecesim tagad koordinatu zistemu $OXYZ$ uz attēlu plakni K (420 ras.), pie kam projecešanas virziens OO_p ir stateniski pret plakni K. Pieņemsim, ka $O_pX_pY_pZ_p$ ir iegūtais aksonometriskais attēls. Ass OX

pēdu punktu attiecibā uz plakni K apzīmesim ar S_x. Acim redzot, trijstūris $O O_p S_x$ telpā ir taisnleņķa trijstūris, jo $O O_p \perp K$, tapēc ari $O O_p \perp O_p S_x$.

Nav grūti iedomaties, ka punkts O_p atbilst punktam A, kas attēlots 419 rasejumā. Tapēc leņķi $O_p O S_x$, kas atbilst leņķim $A O X$, apzīmesim ar $\mathfrak{z}$. Bet leņķi, ko ass $O X$ veido ar attēlu plakni K, uz 331 § pamata apzīmesim ar α. No taisnleņķaina trijstūŗa $O O_p S_x$ dabujam, ka

$$\cos^2 \mathfrak{z} + \cos^2 \alpha = 1.$$

Ja pagaŗinasim asis $O Y$ un $O Z$ līdz krustošanai ar attēlu plakni, un ja aplūkosim taisnleņķainos trijstūŗus, ko telpā veido koordinatu asis $O Y$, $O Z$, viņu attēli $O_p Y_p$, $O_p Z_p$ un kopejā hipotenuze $O O_p$, tad analoģiskā kārtā dabusim, ka

$$\cos^2 \eta + \cos^2 \beta = 1 \text{ un } \cos^2 \vartheta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Pie tam β un γ ir leņķi, ko koordinatu asis $O Y$ un $O Z$ veido ar attēlu plakni K (331 §.)

Beidzamos trijus nolīdzinajumus saskaitidami, dabusim

$$\cos^2 \mathfrak{z} + \cos^2 \eta + \cos^2 \vartheta + \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 3,$$

$$\text{bet tā kā } \cos^2 \mathfrak{z} + \cos^2 \eta + \cos^2 \vartheta = 1,$$

$$\text{tad } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2.$$

Kā 331 § tika aizrādits, $\cos \alpha = \frac{O X}{p}$, $\cos \beta = \frac{O Y}{p}$ un $\cos \gamma = \frac{O Z}{p}$, piekam $O X$, $O Y$ un $O Z$ ir triju, telpā vienlīdzigu nogriežņu sagrozitie lielumi. Tapēc pēdejo nolīdzinajumu varam uzrakstit šādi:

$$\frac{O X^2}{p^2} + \frac{O Y^2}{p^2} + \frac{O Z^2}{p^2} = 2,$$

$$\text{vaj } O X^2 + O Y^2 + O Z^2 = 2 p^2.$$

Tā dabujam sakaribu starp koordinatu asu sagrozitiem lielumiem.

Uz pēdejo nolīdzinajumu pamatodamies, pēc dotiem sagrozitiem lielumiem $O X$, $O Y$ un $O Z$ varam noteikt viņu kopejo patieso lielumu p.

Tam nolūkam pēc divām katetēm $O X = A B$ un $O Y = A C$ konstruejam taisnleņķa trijstūri $A B C$ (421 ras). No virsotnes B velkam stateni pret $B C$ un uz ša stateņa nospraužam $B D = O Z$.

No taisnleņķa trijstūŗa $A B C$ dabujam

$$C B = \sqrt{O X^2 + O Y^2},$$

un no taisnleņķa trijstūŗa $B C D$ dabujam

$$C D = \sqrt{C B^2 + B D^2} = \sqrt{O X^2 + O Y^2 + O Z^2}.$$

Bet, kā augšā pierādits,

$$O X^2 + O Y^2 + O Z^2 = 2 p^2,$$

$$\text{tapēc } C D = \sqrt{2 p^2} = p \sqrt{2}.$$

Tālak ap caurmēru $C D$ velkam pusaploci, un no caurmēra $C D$ viduspunkta E velkam stateni pret $C D$, kas krusto vilkto pusaploci punktā F.

Punktus F un D savienodami, dabujam, ka FD ir videjā proporcionalā starp CD un ED, t. i.

$$FD^2 = CD . ED = (p\sqrt{2}.) \left(\frac{p\sqrt{2}}{2}\right) = p^2,$$

vaj $\quad FD = p.$

Tā noteicam koordinatu asu patieso lielumu p.

No attiecigām attiecibām

$$\cos\alpha = \frac{OX}{p},\ \cos\beta = \frac{OY}{p} \text{ un } \cos\gamma = \frac{OZ}{p}$$

nav grūti analitiski noteikt leņķus α, β, γ.

Grafiski šos leņķus konstruejam šādi (422 ras.).

Ar radiusu, vienlīdzigu ar p, no patvaļiga centra O'_0 velkam loku, un uz patvaļiga radiusa O'_0M nospraužam no punkta O'_0 dotos sagrozitos lielumus OX, OY un OZ, apzīmejot iegūtos punktus lielakas uzskatamibas dēļ ar OX, OY un OZ. No atzīmetiem punktiem velkam stateņus pret radiusu O'_0M, līdz krustošanai ar vilkto loku punktos 1, 2 un 3, un šos punktus savienojam ar centru O'_0. Tā iegūtie radiusi veido ar radiusu O'_0M mekletos leņķus α, β un γ, jo

$$\cos.\ \alpha = \frac{OX}{O'_0-1} = \frac{OX}{p},\ \cos.\ \beta = \frac{OY}{p} \text{ un } \cos.\ \gamma = \frac{OZ}{p}.$$

Acim redzot, leņķus α, β vaj γ nav iespējams noteikt, ja attiecigās ass OX, OY vaj OZ sagrozitais lielums ir lielaks, nekā koordinatu asu patiesais gaŗums p, jo tādā gadijumā mēs nedabujam attiecigā stateņa (OX−1, OY−2, jeb OZ−3) krustotni ar loku, t. i. nedabujam punktus 1, 2 vaj 3.

Aizrādito noteikumu jau vareja no paša sākuma paredzet, jo ortogonalā aksonometrijā, tapat kā ortogonalās projekcijās, attēls (vaj projekcija) nevar būt lielaks par oriģinalā nogriežņa patieso lielumu. Robežgadijumā, kad projekcija līdzinas nogriežņa patiesam lielumam, oriģinalā taisne, kā zinams, ir līdztece attēlu plaknei.

Lai tagad noteiktu koordinatu asu virzienus, mēs rīkojamies šādi. No punkta O'_0 (422 ras.) velkam stateni pret radiusu O'_0M, uz šā stateņa pieņemam patvaļigu punktu O, un caur punktu O velkam līdzteci ar O'_0M. Radiusu O'_0-3 pagaŗinajam līdz krustošanai ar vilkto līdzteci punktā S_z, un pret taisni $S_zO'_0$ no gala O'_0 velkam stateni, kas krusto pagaŗinato taisni S_zO punktā S_{xy}.

Leņķis $S_{xy}S_zO'_0$ pēc konstrukcijas līdzinas γ, un taisnleņķa trijstūris $S_{xy}S_zO'_0$ ir līdzigs tādam pat trijstūrim, kas aizrādits 417 rasejumā. Pēdejā trijstūri, kā zinams, nogrieznis OO'_0 noteic koordinatu sākuma O attālumu no attēlu plaknes. Bet tā kā attēlu plakni var pabīdit līdztekus viņai pašai, pie kam nemainas aksonometriska attēla lielums, tad ari atstatumu O'_0O var pieņemt patvaļigi, kā tas darits 422 rasejumā.

Tādā veidā uz 422 ras. pamata mēs varam noteikt nogriežņus OS_z un OS_{xy}, un bez tam varam atrast pēdu linijas *s* virzienu, kuŗam jaiet caur punktu S_{xy}, stateniski pret OS_z.

Nogriežņus O'_0-1 un O'_0-2 līdzigā kārtā līdz krustošanai ar OZ punktos S'_x un S'_y pagaŗinot, nav gŗūti noteikt šo punktu atstatumus no koordinatu sākuma O. Pēc tam no centra O velkam ar radiusiem OS'_x un OS'_y lokus, līdz krustošanai ar pēdu linijas *s* virzienu, dabujot tā galvenā pēdu trijstūŗa virsotnes S_x un S_y. Savienojot šos punktus ar sākumu O, dabujam asu OX un OY virzienus.

Nospraužot uz konstruetiem koordinatu asu virzieniem viņu sagrozitos lielumus OX, OY un OZ, iegūsim rasejumu, kur doti visi vajadzigie elementi patvaļiga priekšmeta aksomometriskā attēla konstruešanai. Vajadzigās konstrukcijas izpildamas tapat, kā 324 §, lietojot pie tam atrasto lielumu *p*.

334 §.* Dimetriskie un izometriskie attēli.

Ja divu koordinatu asu sagrozitie lielumi, piemēram, OX un OY vienlīdzigi, tad punkti 1 un 2 422 rasejumā saplūst. Tapēc tadā gadijumā ari leņķi α un β, kā ari nogriežņi OS_x un OS_y ir vienlīdzigi.

Noteicot pēc 422 ras. asu OX un OY virzienus, dabusim, ka viņas veido ar asi OZ vienlīdzigus leņķus.

Patvaļigs kubs šādā gadijumā attēlojas 423 rasejumā aizrādītā kārtā. Konstrueto attēlu sauc par ortogonalo dimetrisko attēlu (sk. 325 §).

Ja $OX = OY = OZ$, tad 422 rasejumā punkti 1, 2 un 3 saplūst, un tapēc $\alpha = \beta = \gamma$ un $OS_x = OS_y = OS_z$. Šādā gadijumā asis OX, OY un OZ veido savā starpā leņķus 120^0.

Patvaļigs kubs šādā gadijumā attēlojas 424 rasejumā aizrādītā kārtā.

Pie tadiem noteikumiem iegūtu attēlu sauc par ortogonalo izometrisko, vaj ari trimetrisko attēlu.

Iespiešanas kļūdas.

	Nodrukats:	Jabūt:
4. lap. p. 1. r. no augšas:	eb	jeb
21. „ „ 13. „ „ „	velteni	veltenī
25. „ „ 6. „ „ „	sadaļa	sadala
26. „ „ 10. „ „ apakšas:	radius	radiuss
27. „ „ 21. „ „ „	... veidā tapat techniskā...	... veidā — techniska...
36. „ „ 12. „ „ augšas:	bezgaliba	bezgalibā
38. „ „ 13 „ „ apakšas:	griezdams	griezdamies
38 „ „ 18. „ „ „	pro-projecejošais	projecejošais
41. „ „ 14. „ „ augšas:	gadijumos	gadijumus
41. „ „ 15. „ „ „	„	„
45. „ „ 5. „ „ apakšas:	punkta	punktā
46. „ „ 15. „ „ „	gadijumos	gadijumus
47. „ „ 16. „ „ „	punkta	punktā
56. „ „ 18. „ „ „	katetē	katete
58. „ „ 3. „ „ augšas:	grišanās	griešanās
71. „ „ 4. „ „ „	savinojam	savienojam
73. „ „ 2. „ „ apakšas:	rasejumā	rasejuma
76. „ „ 12. „ „ augšas:	daļā	daļa
77. „ „ 4. „ „ apakšas:	daļū	daļu
79. „ „ 9. „ „ augšas:	zinedami	zinadami
82. „ „ 16. „ „ „	zgriezumu	izgriezumu
93. „ „ 11. „ „ apakšas:	paša	pašā
98. „ „ 22. „ „ augšas:	šānu	sānu
100. „ „ 1. „ „ „	... teči	... teci
103. „ „ 9. „ „ „	redzama	redzamā
121. „ „ 12. „ „ „	visi	visas
131. „ „ 6. „ „ apakšas:	piesliejas	pieslejas
135. „ „ 3. „ „ „	kautkādā	kautkāda
158. „ „ 9. „ „ augšas:	cau	caur
168. „ „ 19. „ „ apakšas:	atticigām	attiecigām
176. „ „ 15. „ „ „	puktu	punktu
182. „ „ 13. „ „ „	punktos	punktus
195. „ „ 12. „ „ apakšas:	konstrukgija	konstrukcija
196. „ „ 2. „ „ augšas:	likumu	likuma
211. „ „ 6. „ „ „	visām	visiem
216. „ „ 13. „ „ „	pagaŗinat	pagaŗinasim
227. „ „ 4. „ „ „	kuŗas	kuŗa
244. „ „ 8. „ „ augšas:	plasni	plakni
244. „ „ 8. „ „ apakšas:	konstuetu	konstruetu
244. „ „ 18. „ „ „	smaiļa	smaiļa
247. „ „ 9. „ „ „	pareisais	pareizais
248. „ „ 18. „ „ „	kontruets	konstruets
258. „ „ 1. „ „ „	pļakni	plakni
259. „ „ 25. „ „ „	galejam apveidam	galejo apveidu
261. „ „ 11. „ „ augšas:	nogriezi	nogriezni
268. „ „ 18. „ „ apakšas:	izpildami	izpildidami
271. „ „ 17. „ „ „	iežvītroti	iešvītroti
289. „ „ 5. „ „ „	zūduma	zuduma
292. „ „ 1. „ „ „	taisi	taisni

Raksturigako terminu saraksts.

Affinitate	— Affinität	— аффинитетное сродство
apgriešanās punkts	— Wende oder Inflexionspunkt	— точка перегиба
aptveramā, evolvente	— Ewolwente	— эвольвента
aptverošā, evolute	— Ewolute	— эволюта
apveids	— Umriss	— очертание
asimptote	— Asymptote	— асимптота
atgriešanās linija	— Rückkehrkante, Gratlinie	— ребро возврата
atgriešanās punkts pirmā veida, galotne	— Rückkehrpunkt erster Art, Spitze	— точка возврата перваго рода
atgriešanās punkts otrā veida, šnīpis	— Rückkehrpunkt zweiter Art, Schnabelspitze	— точка возврата второго рода
atgriešanās virsa	— Tangentenfläche der Rückkehrkurwe	— поверхность с ребром возврата
atšķirts punkts	— isolierter Punkt, Einsiedlerpunkt	— уединенная точка
attālumu aploce	— Distanzkreis	— круг разстояний
attālumu punkts	— Distanzpunkt	— точка разстояний
attēls	— Abbildung (Bild)	— изображение (картина)
attēlu plakne	— Bildebene	— картинная плоскость, плоскость изображений
Bidišanas virsa	— Schieb- oder Rückungsfläche	— — —
binormale	— Binormale	— бинормаль
Charakteristika	— Charakteristik	— характеристика
Dališanas aploce (pārnešanas aploce)	— Teilungskreis	— круг деления
dališanas punkts, (pārnešanas centrs)	— Teilungspunkt	— точка деления
dažādnosaukuma projekcijas	— Ungleichnamige Projektionen	— разноименныя проекции
daudzplaknis	— Poyeder	— многогранник
divejadi projecejošaplakne	— doppelt projicierende Ebene	— двояко — проектирующая плоскость
divplakņu kakts	— Flächenwinkel zweier Ebenen	— двугранный угол
divpusigs	— zweischaliges	— двуполый
dubultiga liece	— doppelte Krümmung	— двоякая кривизна
dubultigs punkts	— Doppelpunkt	— двойная точка
Elipsoids	— Ellipsoid	— эллипсоид
Fiktivā ēna	— fiktiwer Schatten	— фиктивная тень
Gaismas atdaloša linija	— Lichtgrenze	— светораздельная линия
galvenais punkts	— Hauptpunkt	— главная точка
galvenais stars	— Hauptstrahl	— главный луч

galvenā normale	— Hauptnormale	— главная нормаль
greizā plakne	— windschiefe Fläche	— косая плоскость
griešanās virsa	— Dreh-oder Rotations fläche	— поверхность вращения
griezejā, griezene	— Sekante	— секущая
griezumapunkts, krustotne	— Schnittpunkt	— точка пересечения
Hiperbolisks poraboloids	— Hyperbolisches Paraboloid	— Иперболический параболоид
Ieliekts	— konkaw	— вогнуто
iežmaugums	— Einschnürung	— перехват
izliekts	— konwex	— выпукло
Kakls	— Hals	— шейка, горловина
kāpe	— Ganghöhe	— под'ем, шаг, ход
konoids	— Konoid	— коноид
koordinata	— Koordinate	— координата
krītošā ēna	— Schlagschatten	— падающая тень
krustodamās taisnes	— sich schneidende Geraden	— пересекающияся прямыя
krustošanās punkts, taisne, figura	— Schnittpunkt, Schnittlinije, Schnittfigure	— точка пересечения, прямая пересечения, фигура пер.
krustotne	— Schnittpunkt, Schnittstelle	— точка, место пересечения
kvadrants	— Quadrant	— квадрант
Līdztece	— Parallele	— параллель
līdzteku līknes	— Parallelkurwen, äquidistante Kurwen	— параллельныя крывыя
līdztekus	— parallel	— параллельно
līdzteku taisnes	— parallele Geraden	— параллельныя прямыя
līdztekus projecejošais stars	— Parallelstrahl	— паралельно проектирующий луч
liece	— Krümmung, Flexion	— кривизна
lieces aploce	— Krümmungs-, Schmieg- oder Oskulationskreis	— круг кривизны
lieces leņķis	— Krümmungs- oder Kontingenzwinkel	— угол кривизны
lieces plakne	— Schmiegungsebene	— плоскост кривизны, прижимающаяся плоскость
līkne, līka linija	— Kurwe, krumme Linie	— кривая, кривая линия
līknes virsotne	— Scheitelpunkt	— вершина кривой
līkņu veidota virsa, līkā virsa,	— Nichtregelfläche	— кривая поверхность
lode	— Kugel	— шар
lūzuma punkts	— Knickpunkt	— точка перелома
Meridians	— Meridian	— меридиан
Nenotinamā (greizā) taisnes virsa	— nichtabwickelbare (windschiefe) Regelfläche	— неразвертывающаяся линейчатая или косая повер.
nepārtraukta līkne	— stetige Kurve	— непрерывная кривая
nokalnes virsa	— Böschungsfläche	— поверхность одинакого ската

normale	— Normale	— нормаль
normalplakne	— Normalebene	— нормальная плоскость
notinamā taisnes virsa	— abwickelbare Regelfläche	— развертывающаяся линейчатая поверхность
notinums	— Abwickelung	— развертка
Pārnešanas aploce, dalīšanas aploce	— Teilungskreis	— круг деления
pārnešanas centrs, dalīšanas punkts	— Teilungspunkt	— точка деления
papildleņķis	— Supplementwinkel	— дополнительный угол
pašēna, (paša ēna)	— Eigenschatten	— собственная тень
pašēnas apveids	— Eigenschattengrenze	— контур собственной тени
pašpieskaršanās punkts	— Selbstberührungspunkt	— точка самоприкосновения
pēdu linija	— Spurlinije	— след плоскости
pēdu paralela	— Spurparallele	— следопараллель
pēdu punkts	— Spurpunkt	— след прямой
pieglaušanās plakne	— Schmiegungs, Oskulations ebene	— прижимающаяся плоскость, плоск. кривизны
pieskare, tangente	— Tangente	— касательная
pieskaršanās plakne	— Tangentialebene	— касательная плоскость
pieskaršanās punkts	— Berührungspunkt	— точка касания
piramide	— Pyramide	— пирамида
plakana figura	— ebene Figur	— плоская фигура
plakana likne	— ebene Kurwe	— плоская кривая
plakne	— Ebene	— плоскость
platuma aploce	— Parallelkreis	— параллель, круг широты
priekšskats	— Aufriss	— вид спереди
profilā plakne	— Kreuz-oder Querrissebene	— плоскость профиля
projekciju ass	— Projektions-oder Rissachse	— ось проекций
Redzamibas apveids	— Sichtbarkeits Grenze, wahrer Umriss	— контур видимости
rektificejoša plakne	— rektifizierende Ebene	— выпрамляющая плоскость
rektificet	— rektifizieren	— выпрамлять
robežpunkts	— Grenzpunkt	— предельная точка
Sagrozisana	— Verkürzung	— искажение
saiešanās linija	— Fluchtlinije	— линия схода
saiešanās punkts	— Fluchtpunkt	— точка схода
sakārtotie caurmēri	— konjugierte Durchmesser	— сопряженные диаметры
sakārtots	— konjugiert	— сопряженно
sakritošo projekciju ass	— Koinzidenz- oder Deckgerade	— ось совпадающих проекций
sakritošo proekciju plakne	— Koinzidenz- oder Deckebene	— плоскость совпадающих проекций
sevišķs punkts	— singulärer Punkt	— особая точка
slēgta figura	— geschlossene Figur	— замкнутая фигура
slipuma leņķis	— Neigungswinkel	— угол наклона
smailis	— Kegel	— конус

statenis, statene	— Lot, Senkrechte	— перпендикуляр
stateniski	— senkrecht	— перпендикулярно
stūrpunkts	— Eckpunkt	— угловая точка
subtangente	— Subtangente	— подкасательная
Zuduma punkts	— Verschwindungspunkt	— исчезающая точка
zuduma plakne	— Verschwindungsebene	— исчезающая плоскость
Šķautne	— Kante	— ребро
šķērsodamās taisnes	— sich kreuzende Geraden	— скрещивающияся прямыя
šķietamā ēna	— uneigentlicher (ideeller) Schatten	— мнимая тень
šķira	— Ordnung	— порядок
švītrošana	— Schraffierung	— штриховка
švītrot	— schraffieren	— штриховать
Taišņu veidota virsa, taisnes virsa	— Regelfläche	— линейчатая поверхность
tangente, pieskare	— Tangente	— касательная
tangentialā plakne	— Tangentialebene	— касательная плоскость
telpas līkne	— Raumkurwe	— косая кривая
torus	— Torus	— тор
trijstūris	— Dreieck	— треугольник
Vadošā plakne	— Richtebene	— направляющая плоскость плоскость параллелизма
vadoss smailis	— Richtkegel	— направляющий конус
vadule	— Leitlinie	— направляющая
vārpsta	— Spindel	— веретен
veidule	— Erzeugende	— производящая,образующая
veidulis	— Modell	— модель
veltenis	— Zylinder	— цилиндр
veltenoids	— Zylindroid	— цилиндроид
vērpšanas leņķis	— Torsions- oder Windungs winkel	— угол кручения
vienadnosaukuma projekcijas	— gleichnamige Projektionen	— одноименныя проекции
vienpusigs	— einschalig	— однополый
virsa	— Oberfläche	— поверхность
virsotne (līknes)	— Scheitelpunkt	— вершина кривой
virsskats	— Grundriss	— вид сверху
vītes kāpe	— Schraubenganghöhe	— ход (шаг) винта
vītes līnija	— Schraubenlinije	— винтовая линия
vītes virsa	— Schraubfläche	— винтовая поверхность

Satura rāditajs.

IV. nodaļa. Perspektives konstruešana ar atbalstpunktu palīdzību.

Ceturtā daļa. Aksonometrija.

I. nodaļa. Ģeometrisko elementu attēlošana vispārejā gadijumā.

II. nodaļa. Atsevišķie slīpleņķainas aksonometrijas gadijumi.

III. nodaļa. Ortogonalā aksonometrija.