

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
FIZIKAS NODAĻA

**AUGSTFREKVENCES AKUSTISKĀS TĪRĪŠANAS PROCESOS
IESAISTĪTO KAVITĀCIJAS BURBUĻU IZMĒRU SADALĪJUMA
MATEMĀTISKĀ MODELĒŠANA**

MAĢISTRA DARBS

Autore: **Tija Sīle**

Stud. Apl. ts06008

Darba vadītājs:

Dr. Phys. Jānis Virbulis

RĪGA 2011

ANOTĀCIJA

Kavitācija ir gāzes burbuļu rašanās un oscilāciju process šķidrumā akustiskā lauka iedarbībā. Burbuļu oscilācijas ir nozīmīgas akustiskās tīrīšanas procesos. Tās ir atkarīgas no burbuļa izmēriem. Šī darba mērķis ir uzlabot matemātisko modeli burbuļu sadalījumam pa miera stāvokļa rādiusiem. Šī darba ietvaros tiek skaitliski realizēta vienādojumu sistēma, kas apraksta burbuļa svārstības un gāzes apmaiņas starp burbuli un šķidrumu. Literatūrā aprakstītais burbuļu sadalījuma modelis tiek papildināts ar gāzes apmaiņas procesu, burbuļu mijiedarbības spēku, kā arī burbuļu telpiskās pārvietošanās modeli, izmantojot darba pirmajā daļā iegūtos rezultātus.

Atslēgvārdi:

akustiskā kavitācija, burbuļu izmēru sadalījums, rektificētā difūzija, Bjerknas spēki

ABSTRACT

Cavitation is the process of bubble formation and subsequent bubble radius oscillations in the liquid that is under the influence of an acoustic field. The bubble oscillations have an important role in megasonic cleaning process and depend on the bubble size. The aim of this work is to improve the mathematical model of equilibrium bubble size distribution. In this paper, first, a system of equations is solved to calculate the gas exchange between bubbles and liquid (rectified diffusion), and, second, an existing bubble size distribution model is improved adding the gas exchange between bubbles and liquid, reciprocal force acting on bubbles and spatial bubble movement using the results previously obtained.

Keywords:

acoustic cavitation, bubble size distribution, rectified diffusion, Bjerknes forces

SATURS

Apzīmējumu saraksts	1
Ievads	4
1. Literatūras apskats.....	6
2. Teorētiskā daļa	10
2.1. Kellera-Mikša-Meidani (KMM) modelis	10
2.2. Burbuļu izzušana	13
2.3. Rektificētā difūzija.....	14
2.4. Ģenerācija	14
2.5. Burbuļu koalescence.....	15
2.6. Burbuļu telpiskā pārvietošanās	17
3. Skaitliskās metodes, programmēšanas un realizācijas jautājumi.....	19
3.1. Kellera-Mikša Meidani modelis	19
3.2. Burbuļu līdzsvara rādiusu sadalījuma modelis	21
4. Rezultāti	25
4.1. Kellera –Mikša- Meidani modelis	25
4.2. Burbuļu rādiusa sadalījuma modelis.....	30
5. Secinājumi.....	36
1. Pielikums.	
Izmantoto vienādojumu izvedumi un bezdimensionalizācijas	38
2. Pielikums.	
Divu burbuļu savstarpējā pievilksnās Bjerkes spēka iedarbībā.	50
3. Pielikums. Izmantotās galīgās diferences:	54
4. Pielikums. Kellera – Mikša – Meidani modeļa rezultāti.	
Rektificētajai difūzijai atbilstošo datu iegūšana.	55
Izmantotā literatūra	58

APZĪMĒJUMU SARAKSTS

Latīņu alfabēta burti:

a - empīriski koeficienti burbuļa galīgā ātruma gravitācijas dēļ kalibrācijai

c - skaņas ātrums

C - gāzes koncentrācija

C_i - gāzes koncentrācija šķidrumā

C_p, C_v - siltumietilpība pie konstanta spiediena, tilpuma

C_{sat} - gāzes piesātinājuma koncentrācija

D - difūzijas koeficients

d - attālums starp burbuļiem

E - enerģija, J

F - spēks, N

F_D - berzes spēks

F_{B1} - pirmā veida Bjerkes spēks

F_{B2} - otrā veida Bjerkes spēks

f - frekvence

g - brīvās krišanas paātrinājums

h - burbuļu koalescences kalibrācijas koeficients

H_D - Henrija konstante

K - siltumvadītspēja

k_λ - viļņu skaitlis

k - no otrā veida Bjerkes spēka atkarīgais loceklis burbuļu saskriešanās varbūtības izteiksmē

m - masa

M - molmasa(kg/mol)

N_b - burbuļu koncentrācija

N_c - koalescējošo burbuļu koncentrācija

N_R - burbuļu, kas izmaina savu rādiusu, skaits

N_z - burbuļu, kas pārvietojas telpā, koncentrācija

n_{gen} - ģenerēto burbuļu skaits

P - spiediens

p_a - pieliktā akustiskā lauka spiediens, tā amplitūda

P_g - gāzes spiediens burbuļa iekšpusē
 p_i - spiediens burbuļa iekšpusē
 p_l - spiediens šķīdumā pie burbuļa sienas
 p_∞ - spiediens šķīdumā tālu no burbuļa, parasti – atmosfēras spiediens
 Q - siltuma plūsma
 r - telpas koordināte sfēriskajā koordinātu sistēmā
 R - burbuļa rādiuss, m
 R^{cut} - burbuļa rādiuss līdz kuram notiek burbuļu ģenerācija
 R_g - universālā gāzu konstante
 S^i - burbuļu saplūšanas varbūtība ar burbuļiem ar rādiusu R_i
 T - temperatūra
 t - laiks
 t_0 - akustiskais periods, $t_0 = \frac{1}{f}$
 V - tilpums
 V_{gen} - ģenerētais burbuļu tilpums
 v_r - šķidruma ātrums radiālajā virzienā
 v_b - burbuļa ātrums gravitācijas spēka ietekmē
 v_{FB1} - burbuļa ātrums FB1 ietekmē
 W - gāzes veiktais darbs izplešoties
 z - telpiskā koordināte

Grieķu alfabēta burti:

α - termiskās difūzijas koeficients
 β - empīriski koeficienti berzes spēka izteiksmē
 κ - politropas pakāpes rādītājs
 μ - šķidruma dinamiskās viskozitātes koeficients
 ν - šķidruma kinemātiskās viskozitātes koeficients
 ξ - normalizētais telpiskais mainīgais r/R
 ρ - blīvums
 σ - virsmas spraiguma koeficients
 θ - burbuļu sadalījuma funkciju
 ϕ - viskozās disipācijas funkcija
 $\omega = 2\pi f$ – leņķiskā frekvence

Indeksu apzīmējumi:

x_g - gāzes parametrs

x_l - šķidrums parametrs

x_{int} - burbuļa sienas parametrs

$\langle x \rangle$ - laikā vidējotā vērtība

$\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt}$, atvasinājums pēc laika

IEVADS

Kad uz šķidrumu iedarbojas ultraskaņa, tajā var rasties gāzes burbuļi, kas ultraskaņas iedarbībā maina savu rādiusu - oscilē. Šo procesu sauc par kavitāciju. Pie noteiktiem akustiskā lauka parametriem burbuļi var tikt saspiesti ievērojami mazāki par savu sākotnējo izmēru. Šo parādību sauc par burbuļa kolapsu. Burbuļa kolapsa laikā var notikt gaismas izdalīšanās, jo burbulī esošā gāze tiek saspiesta un sakarst. Šo parādību sauc par sonoluminescenci.

Burbuļiem svārstoties akustiskā lauka ietekmē tie rada ap sevi sekundāro spiediena lauku, kas var būt vairākas reizes spēcīgāks par primāro, svārstības izraisošo akustiskā lauka spiedienu. Tāpēc mēdz teikt, ka burbuļi fokusē vai koncentrē enerģiju. Šīs burbuļu īpašības dēļ ultraskaņai ir nozīmīgi pielietojumi ķīmijā, t.s. sonoķīmijā (*sonochemistry*), kur ultraskaņa tiek izmantota ķīmisko reakciju katalīzei vai efektivitātes palielināšanai.

Neseni eksperimentālie rezultāti ir parādījuši, ka burbuļu svārstību izraisītām mikroskopiskām plūsmām (*microstreaming*) ir nozīmīga loma silīcija plākšņu tīrīšanā. Burbuļa svārstības savukārt ir atkarīgas no burbuļa izmēriem, tāpēc, lai tīrīšanas procesu optimizētu, ir nepieciešams modelis, kas apraksta burbuļu sadalījumu pa līdzsvara rādiusiem kā funkciju no laika, akustiskā lauka un šķidruma parametriem.

Grūtības šāda modeļa izveidē ir saistītas ar lielo procesu skaitu, kas var ietekmēt burbuļu līdzsvara rādiusu. Viens no procesiem ir gāzes transports cauri burbuļa sienīnai (rektificētā difūzija, *rectified diffusion*), kas ir atkarīgs no burbuļa svārstībām. Burbuļu rādiusa sadalījumu iespaido arī burbuļu saskriešanās un apvienošanās, ko nosaka spēki, kas iedarbojas uz burbuli - spēks, ar kuru uz burbuli iedarbojas akustiskais lauks (pirmā veida Bjerķnes spēks, *primary Bjerknes force*) un burbuļu mijiedarbības spēks (otrā veida Bjerķnes spēks, *secondary Bjerknes force*). Papildus tam, dažām ar burbuļiem saistītām parādībām, piemēram, burbuļu rašanās procesam, trūkst kvantitatīva apraksta.

Šī darba mērķis ir attīstīt Iida et al.[1] piedāvāto empīrisko burbuļu rādiusa sadalījuma modeli, papildinot to ar rektificētās difūzijas parādībām, burbuļu telpisko pārvietošanos vienā dimensijā gravitācijas un pirmā veida Bjerķnes spēka ietekmē, kā arī burbuļu apvienošanās varbūtības atkarību no otrā veida Bjerķnes spēka.

Burbuļa oscilācijas un ar tām saistītā gāzes apmaiņa tiek aprēķināta izmantojot Meidani et al. piedāvāto modeli [2], rēķinot burbuļa svārstību vienādojumu (Kellera –Mikša modelis, *Keller – Miksis equation*) kopā ar vienādojumu gāzes blīvumam un temperatūrai burbuļa iekšpusē, kā arī izšķīdušās gāzes un temperatūras konvekcijas – difūzijas vienādojumam šķidrumā burbuļa tuvumā.

Darba uzdevumi ir: skaitliski realizēt vienādojumu kopu viena burbuļa oscilāciju un gāzes apmaiņas aprēķinam, izmantojot Matlab vidi un tajā pieejamos līdzekļus; salīdzināt iegūtos rezultātus ar pieejamajiem analītiskajiem atrisinājumiem; skaitliski realizēt matemātisko modeli, kas apraksta burbuļa rādiusu sadalījuma izmaiņas; kalibrēt iegūto modeli izmantojot Iida et al. iegūtos eksperimentālos rezultātus.

1. LITERATŪRAS APSKATS

Pusvadītāju iekārtu ražošanā tiek izmantotas plānas silīcija plāksnes (*silicon wafer*). Tipiskā ražošanas procesā vispirms tiek izaudzēts silīcija monokristāls, kas pēc tam tiek sagriezts plāksnēs, kuru biezums ir mazāks par milimetru. Elektronisko ierīču izgatavošanai nepieciešams, lai plāksnes būtu cik vien iespējams tīras, taču ražošanas procesu laikā uz plāksnēm nosēžas mikroskopiskas daļiņas. To tīrīšanai izmanto augstas frekvences (~1MHz) ultraskaņas vannas un procesu sauc par megaskaņas (*megasonic*) tīrīšanu [3].

Lai arī ir pastāvējis uzskats, ka kavitācijas burbuļiem nav nozīmes daļiņu aizvākšanas procesā [4], 2009. gadā tika publicēti eksperimentāli rezultāti, kuros tika tieši novērots process, kurā burbuļi paceļ daļiņas no plāksnes virsmas [5]. Šis process tiek skaidrots ar mikroskopiskā plūsmām, ko ap sevi rada burbuļi svārstoties (*microstreaming*).

Burbuļa svārstības akustiskā lauka ietekmē ir labi izpētītas un eksistē vairāki matemātiskie modeļi, kas tās apraksta [6, p. 306], piemēram, Releja – Plesē, Kellera – Mikša, Gilmora modelis. Modeļi ir samērā līdzīgi un iespējams tāpēc to nomenklatūra nav sakārtota. Releja – Plesē vienādojums uzskatāms par vēsturiski pirmo šāda veida vienādojumu, taču dažos avotos tas pats nosaukums tiek piedāvāts arī vēlākiem vienādojuma variantiem [6, p. 305], [7, p.3].

Ja akustiskais spiediens mainās harmoniski, tad burbuļa svārstības apraksta uzspiesto svārstību process, kam raksturīga rezonanse. Akustiskā lauka frekvenci f_0 , pie kuras burbulim ar līdzsvara rādiusu R_0 parādās visspēcīgākās burbuļa svārstības (rezonances frekvenci) nosaka Minnaerta formula [7, p.9]:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{3\kappa p_\infty}{\rho_l}}, \quad (1)$$

kur κ - politropas koeficients, p_∞ - spiediens šķidrumā tālu no burbuļa, ρ_l - šķidruma blīvums. Izteiksme ūdenim normālos apstākļos reducējas uz:

$$f_0 R_0 \approx 3 \frac{m}{s}. \quad (2)$$

Arī skaitlisko simulāciju rezultāti apstiprina, ka burbuļa svārstības ir atkarīgas no burbuļa līdzsvara rādiusa un akustiskā lauka frekvences. Raksturīgi, ka, ja burbuļa rādiuss ir daudz lielāks vai mazāks par rezonances burbuļa rādiusu pie attiecīgās akustiskā lauka frekvences, tad burbuļa svārstības ir harmoniskas un to amplitūda ir neliela. Tāpat, ja burbuļa rādiuss ir lielāks par rezonances rādiusu, svārstības notiek fāzē ar akustisko lauku, ja mazāks - pretfāzē. Rezonances rādiusa tuvumā ir iespējamas gan periodiskas ne-sinusoidālas svārstības,

piemēram, viens kolapss vienā akustiskajā periodā, gan uzvedība, ko apraksta haosa teorija [7,8].

Modeļi, kas apraksta burbuļa oscilācijas, parasti pieņem, ka gāzes daudzums burbulī ir nemainīgs, taču šis pieņēmums neizpildās laika skalās, kas daudzkārt pārsniedz akustisko periodu. Pirmkārt, vairāki burbuļi var apvienoties un saplūst vienā (*coalescence*) vai viens burbulis - sadalīties vairākos. Otrkārt, burbulim svārstoties notiek gāzes apmaiņa starp burbuli un šķidrumu, kurā tas atrodas. To sauc par rektificēto difūziju (*rectified diffusion*). Šobrīd tiek uzskatīts, ka burbuļu rādiusa izmaiņas galvenokārt nosaka koalescence un rektificētā difūzija, taču pat visjaunākā literatūra apstiprina, ka nav skaidra abu šo procesu savstarpējā nozīmība [9, p. 7]. Darba autorei nav zināms neviens kvantitatīvs burbuļu koalescences vai burbuļu sadalīšanās modelis.

Ar gāzi burbuļa iekšpusē kolapsa laikā var notikt arī ķīmiskas pārvērtības. Noteikts, ka sonoluminescences gaismas intensitāte ir atkarīga no cēlgāzu piemaisījumiem šķidrumā un ir eksperimentāli apstiprināta hipotēze, ka sonoluminescences procesa laikā notiek burbuļa gāzu sastāva pārvērtības – burbuļa sastāvā esošais skābeklis un slāpekļi kļūst ķīmiski aktīvi un pārvietojas uz šķidrumu, kā rezultātā pēc zināma laika burbulis satur galvenokārt ķīmiski inertās cēlgāzes [10].

Ir pamats uzskatīt, ka burbuļu koalescence ir atkarīga no burbuļu savstarpējā telpiskā novietojuma un tāpēc arī no spēkiem, kas nosaka burbuļu pārvietošanos. Ar akustisko lauku ir saistīti Bjerkes spēki - ir iespējams parādīt, ka, ja objekts ar tilpumu V atrodas laukā ar spiediena gradientu ∇p , uz to darbojas spēks [6 p.342]:

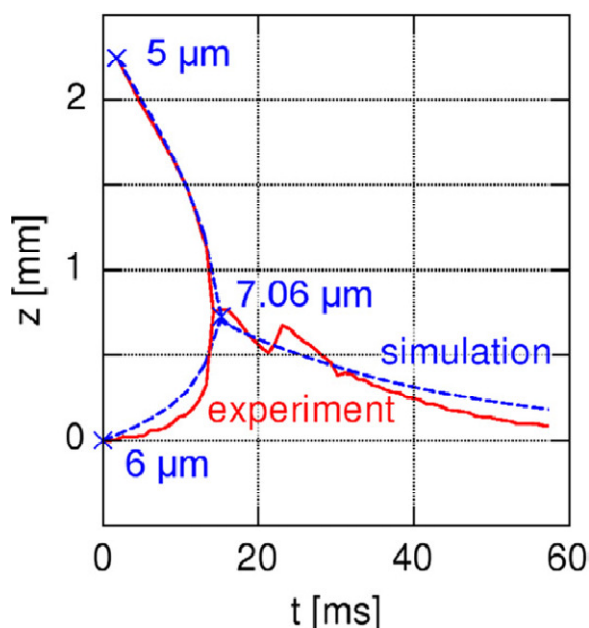
$$\vec{F} = -V \cdot \nabla p. \quad (3)$$

Gadījumā, ja burbulis atrodas spiediena gradientā, ko rada primārais akustiskais lauks, šo spēku sauc par pirmā veida Bjerkes spēku. Ja burbulis atrodas cita burbuļa radītā spiediena gradienta laukā, tad to sauc par otrā veida Bjerkes spēku.

Ja akustiskais lauks eksistē stāvviļņu veidā, tad burbuļi, kuru rādiuss ir mazāks par rezonanses rādiusu pirmā veida Bjerkes spēka ietekmē pārvietosies uz blīvuma punktiem, ja rādiuss lielāks – uz mezglu punktiem. Dažu rādiusu burbuļi var atrasties stabilās pozīcijās pa vidu starp šiem punktiem [8,11].

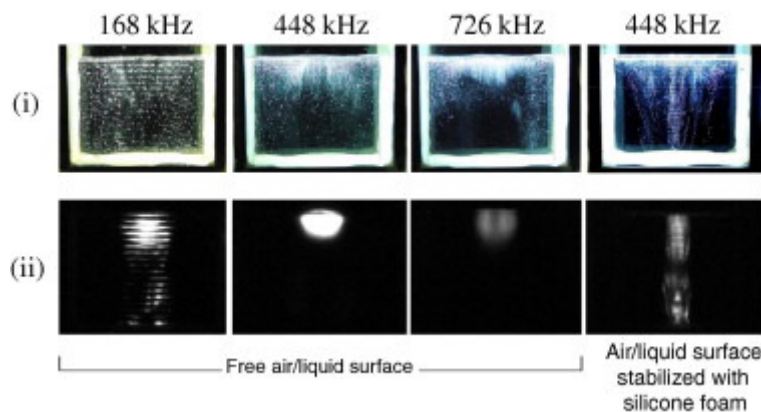
Ir iespējams aprēķināt burbuļu pievilkšanos 2. veida Bjerkes spēka ietekmē, ņemot vērā gan burbuļu pārvietošanos, gan viena burbuļa oscilāciju ietekmi uz otra burbuļa oscilācijām. Rezultāti rāda, ka burbuļiem dažādās akustiskā perioda fāzēs ir dažādas Bjerkes spēka zīmes, tāpēc, lai arī summāri burbuļi galvenokārt kustas viens otram pretī, atsevišķās fāzēs tie var atgrūsties viens no otra [12].

Ir veikti eksperimenti, kas novēro burbuļu pārvietošanos otrā veida Bjercknes spēka ietekmē. Rezultāti (1.1.att.) uzrāda labu eksperimentu un skaitlisko simulāciju rezultātu sakritību, taču klasiskā Bjercknes teorija neapraksta pēdējos brīžus pirms burbuļu saskriešanās un apvienošanās. Tika novēroti burbuļu saskriešanās ātrumi līdz pat 20 cm/s [7].



1.1.att. Burbuļu kustība otrā veida Bjercknes spēka iespaidā. Eksperimenta salīdzinājums ar skaitlisko aprēķinu rezultātiem. Akustiskā lauka frekvence - 22.945 kHz, spiediena amplitūda - 120 kPa. Attēls ņemts no [7 p.58]

Ir veikti arī eksperimenti, kas saistīti ar burbuļu telpiskā sadalījuma noskaidrošanu [13], turklāt reģistrēts gan vizuāli redzamo burbuļu, gan sonoluminescējošo burbuļu sadalījums, kā arī vizuāli redzamā burbuļu sadalījuma attīstību laikā (1.2.att.). Pie akustiskā lauka frekvences $f = 448$ kHz gan sonoluminescējošie, gan redzami burbuļi tipiski atrodas tuvu ūdens virsmai. Pārklājot ūdens virsmu ar silikona putām, kas novērš ūdens brīvās virsmas svārstības, burbuļi izvietojas periodiskā struktūrā, kas vistīkamākais saistīta ar akustiskā stāvviļņa izveidošanos.



1.2.att. Redzamo burbuļu (i) un sonoluminescējošo burbuļu (ii) struktūra pie dažādām frekvencēm. Ultraskaņas avots atrodas uzņēmuma apakšā. Attēls ņemts no [13]

Eksperimentu, kas saistīti ar burbuļu līdzsvara rādiusa sadalījumu noteikšanu, skaits ir neliels. Netiešu informāciju par stabilu burbuļu rādiusu eksistenci dod viena burbuļa sonoluminescences (SBSL, *single bubble sonoluminescence*) parādība - izmantojot noteiktu akustiskā lauka spiediena un frekvences kombināciju ir iespējams iegūt situāciju, ka eksperimentālajā iekārtā atrodas tikai viens sonoluminescējošs burbulis. Mērot burbuļa rādiusa attīstību laikā un salīdzinot to ar skaitlisko aprēķinu rezultātiem tika secināts, ka eksperimentu rezultāti atbilst aprēķiniem ar burbuļa sākotnējo rādiusu $0.8 \mu\text{m}$ ($f = 1\text{MHz}$). Papildus tam sistēmā vienmēr atradās vēl viens, neluminiscējošs burbulis, kura dinamika atbilda aprēķiniem ar sākotnējo rādiusu $2 \mu\text{m}$ [14].

Eksistē sonoluminescējošo burbuļu sadalījuma eksperimentālie mērījumi [15], kuros tiek izmantota pulsēta ultraskaņa – ultraskaņa tiek pievadīta šķidrumam periodiski, ar periodu, kas daudz lielāks par akustisko periodu, un tiek mērīta sonoluminescences intensitāte atkarībā no ultraskaņas izslēgšanas ilguma. Kad ultraskaņa ir izslēgta notiek burbuļu izžušanas process, kura ātrums ir zināms no analītiskiem apsvērumiem, kas ļauj aprēķināt burbuļu rādiusa sadalījumu. Taču sonoluminescējošo burbuļu populācija neietver visu burbuļu populāciju.

Visu burbuļu populācijas sadalījumu laikā mērījumi ir aprakstīti literatūrā [16]. Arī šajā eksperimentā izmantota pulsēta ultraskaņa un burbuļu populācijas mērījumi veikti, kad tā ir izslēgta. Šo eksperimentu rezultāti tiks izmantoti šajā darbā.

Viena no neatrisinātajām problēmām, kas saistīta ar viena burbuļa dinamiku, ir precīzs sonoluminescences mehānisms – eksperimenti rāda, ka temperatūra burbuļa iekšpusē var sasniegt līdz pat $40'000 \text{ K}$, taču starojumu nevar izskaidrot ar vienkāršu absolūti melna ķermeņa starojumu [17].

Akustiskās kavitācijas īpašības atļauj to izmantot daudzos interesantos veidos, piemēram, izveidojot iekārtu šķidrumu samaisīšanai mikroskopiskos kanālos, kur maisošais objekts ir viens burbulis [18], vai arī grafiņa pārvēršanai dimantos [19].

2. TEORĒTISKĀ DAĻA

2.1. Kellera-Mikša-Meidani (KMM) modelis

Šī darba daļa (viena burbuļa rādiusa izmaiņa dinamika, kas saistīta ar gāzes un temperatūras izmaiņu tuvumā esošajā šķidrumā) ir balstīta uz avotu [2]. Viena no nozīmīgākajām atšķirībām ir tas, ka tiek izmantots cits burbuļa dinamikas vienādojums, proti, Trillinga vienādojums ir aizstāts ar Kellera – Mikša vienādojumu, lai rezultātus būtu iespējams salīdzināt ar iepriekšējiem pētījumiem. Abu vienādojumu atšķirības ir maznozīmīgas, jo tie abi izmanto pieņēmumu par konstantu un galīgu skaņas ātrumu, un atšķirības saistītas ar koeficientiem, kas ieviesti, lai aprakstītu šķidruma saspiežamību, turklāt Kellera- Mikša modelī inerces locekļi kļūst negatīvi (bez fizikāla pamatojuma) tikai pie $\dot{R} = c$, kur c – skaņas ātrums. nevis $\dot{R} = \frac{1}{2}c$, kā Trillinga modelī [20 p.67]. Tā kā abos vienādojumos gāzes spiediena loceklis un tā atvasinājums parādās atklātā veidā, Kellera – Mikša savienošana (*coupling*) ar vienādojumiem gāzes spiedienam nav problemātiska.

Izmantotā modeļa galvenais uzdevums ir nevis aprēķināt burbuļa oscilācijas viena perioda laikā (lai arī šie dati tiks izmantoti vēlāk), bet gan noteikt burbuļa līdzsvara rādiusa izmaiņu ātrumu, gāzei ieplūstot vai izplūstot caur burbuļa virsmu. Ja mērķis ir burbuļa oscilāciju aprēķins, parasti tiek izmantots pieņēmums par konstantu gāzes daudzumu burbulī, kura spiedienu aprēķina pieņemot, ka process ir adiabatisks [8]. Šeit papildus tiek aprēķināts gāzes blīvums un gāzes spiediens izmantojot ideālas gāzes stāvokļa vienādojumu, un gāzes temperatūru. Tā kā tiek aplūkota gāzes un temperatūras apmaiņa ar šķidrumu, nepieciešams risināt gāzes un temperatūras transporta vienādojumus šķidrumā. Tiek pieņemts, ka gāzes un temperatūras telpiskais sadalījums burbuļa iekšpusē ir homogēns.

Kellera – Mikša modelis:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right)\frac{p_l}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l c} \frac{dp_l}{dt},$$
$$p_l = P_g - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R}\dot{R} - p_a(t), \quad (4)$$

kur t – laiks, p_l - spiediens šķidrumā pie burbuļa sienas, σ - virsmas spraiguma koeficients, μ - viskozitāte, p_a - pieliktais akustiskais lauks, P_g - gāzes spiediens burbuļa iekšpusē, ko gadījumā, ja tiek pieņemts konstants gāzes daudzums burbulī iespējams aprēķināt pēc sakarības

$$P_g = \left(p_\infty + \frac{2\sigma}{R_0}\right) \cdot \left(\frac{R_0}{R}\right)^{3-\kappa}. \quad (5)$$

Vienādojuma kreisā puse apraksta šķidrums inerci, kurai reizinātāji, kas satur $\frac{R}{c}$ ieviesti, lai ņemtu vērā to, ka šķidrums ir saspiežams un skaņas ātrums ir galīgs un loceklis, kas satur $\frac{dp_l}{dt}$ atbild par enerģijas zudumiem, kas saistīti ar spiediena vilni, ko izstaro burbulis (*radiation damping*) [20 p.67].

Var uzskatīt, ka gāze burbuļa iekšienē atbilst ideālas gāzes tuvinājumam. Ideālas gāzes vienādojums ir:

$$P_g \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R_g \cdot T_g, \quad (6)$$

kur V – burbuļa tilpums, m – burbulī esošās gāzes masa, M – gāzes molmasa, R_g – ideālās gāzes konstante, T_g – gāzes temperatūra.

Tā kā gāzes blīvums ρ_g izsakāms kā

$$\rho_g = \frac{m}{V}, \quad (7)$$

tad

$$P_g = \frac{\rho_g}{M} \cdot R_g \cdot T_g. \quad (8)$$

Vienādojumu blīvumam iespējams iegūt ņemot vērā to, ka masas $\rho_g \cdot V$ izmaiņas burbulī izraisa gāzes transports cauri burbuļa virsmai:

$$\frac{d}{dt}(\rho_g \cdot V) = \frac{d}{dt}\left(\rho_g \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) = \frac{dm}{dt}, \quad (9)$$

kur gāzes transportu cauri virsmai iespējams aprēķināt kā:

$$\frac{dm}{dt} = 4\pi R^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R}. \quad (10)$$

D – difūzijas koeficients, C – gāzes koncentrācija, r – radiālā koordināte.

Veicot atvasināšanas darbību:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3 \frac{1}{R} D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} - \rho \cdot 3 \cdot \frac{1}{R} \cdot \dot{R}. \quad (11)$$

Sarežģītāk ir aprēķināt gāzes temperatūras izmaiņas:

Gāzes iekšējo enerģiju E ar temperatūru saista izteiksme:

$$E = \rho \cdot V \cdot C_v \cdot T_g \quad (12)$$

kur C_v – siltumietilpība pie konstanta tilpuma.

Gāzes iekšējās enerģijas izmaiņas izraisa šādi procesi:

1. Gāzes veiktais darbs W , kura jaudu \dot{W} iespējams aprēķināt kā:

$$\dot{W} = P_B \cdot \frac{dV}{dt} \quad (13)$$

2. Siltuma plūsma Q_l no šķidrums

$$\dot{Q}_l = 4\pi R^2 K_l \frac{\partial T_l}{\partial r}_{r=R}, \quad (14)$$

kur K_l – šķidrums siltumvadītspēja, T_l - šķidrums temperatūra.

3. Gāzes masas plūsma no šķidrums \dot{m}_{int} , kurai atbilst enerģijas izmaiņa:

$$\frac{dE(\dot{m}_{int})}{dt} = \dot{m}_{int} C_p T_{int} \quad (15)$$

Summējot minētos procesus

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{W} + \dot{Q}_l + \dot{m}_{int} C_p T_{int} \quad (16)$$

Izsakot temperatūras atvasinājumu:

$$\dot{T}_g = -\frac{\dot{\rho} T_g}{\rho_g} - \frac{3\dot{R} T_g}{R} - \frac{3 \cdot P_b \cdot \dot{R}}{\rho_g \cdot R \cdot C_v} + \frac{3 \cdot K_l \cdot \frac{\partial T_l}{\partial r}_{r=R}}{\rho_g \cdot R \cdot C_v} + \frac{3 \cdot D C_p T_{int} \frac{\partial C}{\partial r}_{r=R}}{\rho_g \cdot R \cdot C_v} \quad (17)$$

Tā kā tiek izmantots nesaspiežama šķidrums tuvinājums un difūzijas koeficients ir konstants, tad gāzes koncentrācijas transporta vienādojumu šķidrums ir iespējams uzrakstīt kā:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \nabla C = D \Delta C, r > R. \quad (18)$$

Temperatūras vienādojums ir analogs, tikai papildus vērā jāņem viskozās disipācijas loceklis:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \nabla T = \alpha \Delta T + \frac{\mu}{\rho_l C_{pl}} \phi, r > R, \quad (19)$$

kur

$$\phi = 12 \frac{v_r^2}{r^2}. \quad (20)$$

Gāzes koncentrāciju uz burbuļa virsmas iespējams aprakstīt izmantojot Henrija gāzu likumu, kurā gāzes koncentrācija uz burbuļa virsmas C_{int} ir saistīta ar gāzes parciālo spiedienu pēc likuma:

$$C_{int} = H_D^{-1} P_g, \quad (21)$$

kur H_D – Henrija konstante.

Ņemot vērā to, ka piesātinājuma koncentrāciju C_{sat} ar atmosfēras spiedienu saista tā pati Henrija konstante:

$$C_{sat} = H_D^{-1} P_\infty, \quad (22)$$

iespējams izteikt:

$$C_{int} = C_{sat} \frac{P_g}{P_\infty}. \quad (23)$$

No enerģijas saglabāšanās likuma uz burbuļa virsmas

$$(\dot{m}C_p T + \dot{q})_g = (\dot{m}C_p T + \dot{q})_l \quad (24)$$

iespējams izteikt interfeisa temperatūru (sk. 1.5. pielikumā).

2.2. Burbuļu izžušana

Statiskā gadījumā, kad uz šķidrumu neiedarbojas akustiskais lauks, ar burbuli, kura rādiuss ir R , saistītos spiedienus apraksta vienādojums [6 p.70]:

$$p_i = p_\infty + \frac{2\sigma}{R}, \quad (25)$$

jeb gāzes spiediens burbuļa iekšpusē p_i ir līdzsvarā ar spiediena p_∞ šķidrumā ļoti tālu no burbuļa (parasti atmosfēras spiediena) summu ar Laplasa spiedienu, kas rodas virsmas spraiguma dēļ. Tā kā gāzes spiediens ir proporcionāls tās koncentrācijai, tad gāzes koncentrācija burbuļa iekšpusē vienmēr būs augstāka nekā gāzes piesātinājuma koncentrācija, un tāpēc gāzes plūsma šķidrumā kas nav pārsātināts, vienmēr būs vērsta ārā no burbuļa un burbuļa rādiuss samazināsies.

Izdarot vairākus vienkāršojumus ir iespējams atrast analītisku izteiksmi burbuļa rādiusa samazināšanās ātrumam. No Henrija likuma ir iespējams iegūt gāzes koncentrāciju pie burbuļa sieniņas, un pieņemot nekustīgu burbuļa sieniņu un nemainīgu gāzes spiedienu burbulī ir iespējams iegūt analītisko atrisinājumu koncentrācijas sadalījumam šķidrumā, no kura ir iespējams iegūt gāzes transportu caur burbuļa sieniņu [21].

Izsakot gāzes transportu kā rādiusa izmaiņu, iegūst izteiksmi burbuļa izžušanas ātrumam šķidrumā ar gāzes koncentrāciju C_i :

$$\dot{R}_0 = \frac{C_i D}{\rho_g} \left(\frac{C_{sat}}{C_i} - 1 - \frac{2\sigma}{p_\infty R_0} \right) \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{\sqrt{\pi D t}} \right). \quad (26)$$

Burbuļu sākotnējais rādiuss un tā izmaiņas Kellera –Mikša – Meidani modeļa ietvaros tiek aprēķināts izmantojot izteiksmi (6), proti aprēķinot burbuļa rādiusu pie sākotnējiem apstākļiem, pieņemot, ka tajā atrodas jaunais masas daudzums ρV :

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \cdot P_0 = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \frac{R_g \cdot T_0}{M}, \quad (27)$$

$$R_0 = R \cdot \sqrt[3]{\frac{\rho \cdot R_g \cdot T_0}{M \cdot P_0}}. \quad (28)$$

2.3. Rektificētā difūzija

Rektificētās difūzijas vērtības ir iespējams aptuveni aprēķināt izmantojot Ellera un Flinna pieeju [6 p. 385], ko vēlāk modificēja Krums. Viņi, pieņemot gan konstantu temperatūru visā sistēmā, gan parametru homogenitāti burbulī un burbuļa svārstību periodiskumu, atrada atrisinājumu, kas apraksta gāzes daudzuma izmaiņas burbulī kā funkciju no burbuļa rādiusa izmaiņām laikā [6 p. 397]:

$$\dot{R}_0 = \frac{DR_g T_g C_i}{p_\infty R_0 \left(1 + \frac{4\sigma}{3p_\infty R_0}\right)} \left(\left\langle \frac{R}{R_0} \right\rangle + R_0 \sqrt{\frac{\langle R^4 \rangle}{R_0^4}} \right) \left(\frac{C_\infty}{C_i} - \frac{\langle R^4 \rangle \frac{P_g}{p_\infty}}{\langle R^4 \rangle} \right). \quad (29)$$

Laikā vidēdotās burbuļa rādiusa, tā ceturtās pakāpes un spiedienu attiecības vērtības var iegūt no burbuļa oscilāciju modeļiem. Loceklis, kas satur $\sqrt{\frac{1}{t}}$ tiek uzskatīts par pārejas locekli [6 p.401], kuru var interpretēt kā mijiedarbību ar gāzes robežslāni \sqrt{Dt} burbuļa tuvumā. Pēc tam, kad gāze no šī robežslāņa ir ieplūdusi burbulī, iestājas līdzsvara stāvoklis, kurā eksistē gāzes plūsma no šķidrums slāņiem ārpus robežslāņa uz gāzes robežslāni, un no robežslāņa – burbulī.

2.4. Ģenerācija

Jautājums par precīzu burbuļu rašanās procesu nav līdz galam atrisināts. Par stiepes stiprību (tensile strength) sauc spiedienu, ko iespējams pielikt šķidrumam tā, lai kavitācija vēl nesāktos [6 p.73]. Absolūti tīrs ūdens teorētiski varētu izturēt spiedienu līdz pat ~140 MPa. Normālos apstākļos praktiski sasniegtā augstākā spiediena vērtība ir 27.7 MPa [22]. Realitātē šķidrums ir jāskata kā plašāka sistēma, kas ietver trauku vai piemaisījuma daļiņas, kas rada nehomogenitātes un samazina stiepes stiprību.

Parasti kavitācijas aizmetņu rašanos jeb nukleāciju (*cavitation inception, nucleation*) iedala homogēnajā un heterogēnajā nukleācijā. Par homogēno nukleāciju sauc kavitācijas aizmetņu rašanos molekulu haotiskās siltumkustības dēļ, par heterogēno nukleāciju sauc kavitācijas rašanos saistībā ar sistēmas nepilnībām [23 p.8]. Heterogēno nukleāciju parasti veido vai nu ar piemaisījuma molekulām stabilizēti nanoizmēra gāzes burbuļi vai arī iedobes uz trauka virsmām vai cietajās piemaisījuma daļiņās [24] (*crevice model*). Skaidrs, ka tīrīšanas procesos, kuros parasti akustiskā spiediena vērtības nepārsniedz dažas atmosfēras,

nozīmīgāka ir heterogēnā nukleācija. Šo tēzi apstiprina t.s. Akustiskās Lihtenberga figūras (*Acoustic Lihtenberg figure, ALF*) jeb parādība, ka pie zemām frekvencēm (~20 kHz) burbuļi rodas noteiktos punktos pie trauka sienīņām un tad pa konkrētām trajektorijām pārvietojas uz akustiskā lauka blīvuma punktu, veidojot pavedienveida struktūras. Lielākā daļa burbuļu pārvietojas savstarpēji ekvidistanti un burbuļi ir stabili ilgstošus laika periodus (līdz pat vairākiem simtiem akustisko periodu), un burbuļa eksistences beigās bieži ir saistītas ar koalescenci ar citiem burbuļiem [25].

Lai arī ir veikti vairāki eksperimenti [26], lai noskaidrotu stabilizēto gāzes burbuļu un plaisu savstarpējo nozīmīgumu un plaisu modelis ir eksperimentāli pārbaudīts speciāli izveidotās nanoizmēra iedobēs un iegūtie rezultāti uzrāda labi sakritību ar teorijas paredzējumiem [24], šāda burbuļu ģenerācijas modeļa pielietošanu patvaļīgai eksperimentālai iekārtai ierobežo fakts, ka vispārējā gadījuma trūkst informācijas par iekārtas virsmas īpašībām mikroskopiskā izmērā.

Turpmākajos aprēķinos tiks izmantots Iida et al [1] ieteiktais empīriskais burbuļu ģenerācijas modelis, kas paredz, ka katrā laika solī katrā burbuļu intervālā, kurā burbuļu sākotnējais rādiuss ir mazāks par R_0^{cut} , tiek ģenerēts konstants gāzes tilpums V_{gen}^i , kas atbilstoši burbuļu rādiusam tiek pārveidots noteiktā uzģenerēto burbuļu skaitā. No tā seko, ka mazāki burbuļi tiks ģenerēti vairāk kā lielāki burbuļi, kas saskan ar eksperimentālajiem rezultātiem par kavitācijas aizmetņu sadalījumu ūdenī [23 p. 19].

Burbuļu skaitu n_{gen}^i , kas tiek ģenerēts i -tajā intervālā aprēķina pēc izteiksmes

$$n_{gen}^i = \frac{V_{gen}^i}{\frac{4}{3}\pi(R_0^i)^3}. \quad (30)$$

Kopējais ģenerētais tilpums V_{gen} aprēķināms kā

$$V_{gen} = \sum_{R_0^i < R_0^{cut}} V_{gen}^i. \quad (31)$$

2.5. Burbuļu koalescence

Burbuļu koalescences modelis balstīts uz Iida et al.[1] piedāvāto empīrisko modeli. Iida et al. piedāvā aplūkot koalescenci tikai starp viena izmēra burbuļiem un burbuļu skaitu, kas koalescē vienā laika solī aprēķināt kā:

$$N_c^i = S^i \cdot N_b^i \quad (32)$$

S – ir saplūšanas varbūtība, N_c norāda koalescējošo burbuļu skaitu, N_b burbuļu skaitu rādus intervālā, i – rādus intervāla numuru, kur saplūšanas varbūtība tiek aprēķināta

$$S^i = h \frac{N_b^i}{\sum_j N_b^j}, \quad (33)$$

proti, saplūšanas varbūtība noteikta izmēra burbuļiem ir proporcionāla noteiktā izmēra burbuļu skaita attiecībai pret visu burbuļu skaitu, un proporcionalitātes koeficients h tiek noteikts empīriski.

Šajā darbā tiek piedāvāts izmantot citādu koalescences varbūtības aprēķinu, balstoties uz šādiem apsvērumiem:

1. Koalescences varbūtība ir atkarīga no burbuļu koncentrācijas, un palielinoties koncentrācijai, koalescences varbūtība pieaug
2. Koalescences varbūtība ir atkarīga no burbuļu savstarpējā pievilkšanās – atgrūšanās spēka (otrā veida Bjerkes spēka), un jo lielāks ir pievilkšanās spēks, jo lielāka ir koalescences varbūtība

Precīzāku funkcionālo atkarību darba autore piedāvā iegūt risinot uzdevumu divu burbuļu saskriešanās laikā, pieņemot, ka abu burbuļu saskriešanos nodrošina tikai 2. veida Bjerkes spēks, kas darbojas pa taisni, kas savieno burbuļu centrus un 2. veida Bjerkes spēka vērtību aprēķina kā [27]:

$$F_{12} = V_2 \frac{\rho_L}{d^2} \frac{d}{dt} (R_1^2 \dot{R}_1) = V_2 \frac{\rho_L}{d^2} (2 \cdot R_1 \cdot \dot{R}_1^2 + R_1^2 \cdot \ddot{R}_1) \quad (34)$$

Pieņemot, ka attālums starp diviem vienādiem burbuļiem procesa sākumā ir $2x_0$ un izmantojot dažādus pieņēmumus (sk. 2. pielikumu), ir iespējams novērtēt, ka burbuļu saskriešanās varbūtība ir proporcionāla:

$$S \sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{dd}}, \quad (35)$$

kur k – no burbuļa dinamikas atkarīgs loceklis (sk. 2. pielikumu).

Lai saistītu burbuļu savstarpējo attālumu ar koncentrāciju, iespējams izmantot pieņēmumu, katrs burbulis atrodas kubiskas šūnas centrā. Tādā gadījumā attālumu starp burbuļiem iespējams izteikt kā funkciju no burbuļu koncentrācijas N_b kā:

$$d = N_b^{-\frac{1}{3}}. \quad (36)$$

Tāpēc burbuļu saskriešanās varbūtība izsakāma kā

$$S = h \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{N_b}. \quad (37)$$

2.6. Burbuļu telpiskā pārvietošanās

2.6.1. Burbuļu pārvietošanās gravitācijas iespaidā.

Burbuļi gravitācijas spēka iespaidā ceļas augšup. To galīgā ātruma aproksimācijai izmantota empīriskā parametrizācija [28]:

$$v_b = a_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot g \cdot R^{a_2} \cdot \nu^{a_3}, \quad (38)$$

kur a_1, a_2 un a_3 ir koeficienti, kas atkarīgi no burbuļa rādiusa (*Tabula 2.1.*).

Tabula 2.1.

Koeficienti burbuļu ātruma gravitācijas dēļ aprēķinam

R, μm	a_1	a_2	a_3
<60	0.666	2.00	-1.00
60-150	0.139	1.372	-0.64

2.6.2. Burbuļu pārvietošanās pirmā veida Bjercknes spēka iespaidā

Pirmā veida Bjercknes spēku apraksta izteiksme:

$$\vec{F} = -V \cdot \nabla p. \quad (39)$$

Pieņemot, ka akustiskā lauka spiedienu skrejviļņu laukā apraksta izteiksme

$$P = p_\infty - p_a \cdot \sin(\omega t - k_\lambda z), \quad (40)$$

tad

$$\nabla p = -p_a \cdot \cos(\omega t - kz) \cdot (-k) = kp_a \cdot \cos(\omega t - kz) \quad (41)$$

Tā kā burbuļa pozīciju iespējams izvēlēties patvaļīgi, pieņemot ka $z = 0$:

$$\nabla p = kp_a \cdot \cos(\omega t) \quad (42)$$

Viens no veidiem, kā aprakstīt berzes spēku, kas iedarbojas uz burbuli ir [29]:

$$\vec{F}_D = -(\beta_1 \langle R(t) \rangle_T + \beta_2 \langle R(t) \rangle_T^2 \cdot |v_{FB1}|) \cdot \vec{v}_{FB1}, \quad (43)$$

kur β_1, β_2 - eksperimentāli noteikti koeficienti, bet $\langle R(t) \rangle_T$ - pa periodu vidējotās burbuļa rādiusa vērtības, v_{FB1} - burbuļa ātrums pirmā veida Bjercknes spēka ietekmē.

Lai atrastu burbuļu galīgo ātrumu (*terminal velocity*), iespējams izmantot faktu, ka brīdī, kad burbuļa ātrums vairs nemainās, uz to darbojošos spēku summa ir nulle.

$$|\vec{F}_D| = |\vec{F}_{B1}| \quad (44)$$

$$\beta_2 \langle R(t) \rangle_T^2 \cdot v_{FB1}^2 + \beta_1 \langle R(t) \rangle_T \cdot v_{FB1} - F_{B1} = 0 \quad (45)$$

Kvadrātvienādojuma atrisinājums ir :

$$v_{FB1} = \frac{-\beta_1 \langle R(t) \rangle_T \pm \sqrt{\beta_1^2 \langle R(t) \rangle_T^2 + 4 \cdot F_{B1} \cdot \beta_2 \langle R(t) \rangle_T^2}}{2 \cdot \beta_2 \langle R(t) \rangle_T^2} \quad (46)$$

Tā kā $\beta_1, \beta_2, \langle R(t) \rangle_T > 0$, un fizikāla nozīme ir tikai pozitīvajām v_{FB1} vērtībām:

$$v_{FB1} = \frac{-\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + 4 \cdot F_{B1} \cdot \beta_2}}{2 \cdot \beta_2 \langle R(t) \rangle_T} \quad (47)$$

3. SKAITLISKĀS METODES, PROGRAMMĒŠANAS UN REALIZĀCIJAS JAUTĀJUMI

3.1. Kellera-Mikša Meidani modelis

Modelis matemātiskā izpratnē sastāv no viena otrās kārtas parastā diferenciālvienādojuma burbuļa rādiusam, diviem pirmās kārtas parastajiem diferenciālvienādojumiem gāzes blīvumam un temperatūrai burbuļa iekšpusē, kā arī diviem parciāldiferenciālvienādojumiem gāzes koncentrācijai un temperatūrai šķidrumā ārpus burbuļa. Pieņemot pilnu sfērisku simetriju, parciāldiferenciālvienādojumiem ir tikai viena telpiskā brīvības pakāpe. Tā kā parciāldiferenciālvienādojumiem ir zināmi sākuma nosacījumi un katrā laika momentā ir iespējams aprēķināt robežnosacījumus uz burbuļa virsmas, tad ir izdevīgi izmantot līniju metodes pieeju [30], proti, aizstāt telpas atvasinājumus ar galīgajām diferenciālvienādojumu sistēmu, kuras risināšanai ir iespējams pielietot dažādas parasto diferenciālvienādojumu sistēmu risināšanas metodes.

Tā kā vienādojumā burbuļa rādiusam tā otrais atvasinājums no vienādojuma ir izsakāms atklātā veidā, vienādojuma pārveidošana par divu pirmās kārtas vienādojumu sistēmu ir triviāls uzdevums.

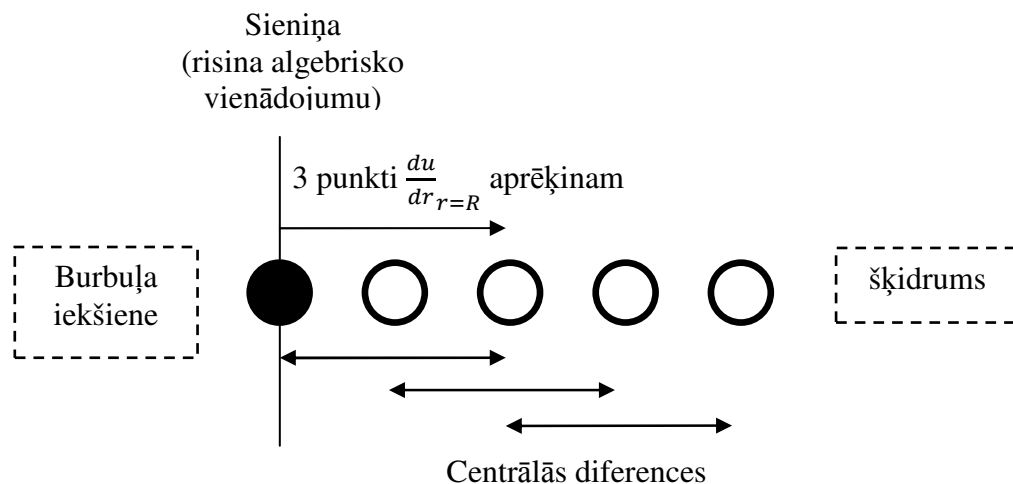
Burbulim oscilējot, šķidruma apgabals pārvietojas. Tā kā aprēķinus ir vieglāk veikt uz konstanta režģa, tika veikta mainīgo substitūcija $r \rightarrow \xi$ (sekojot Meidani paraugam), telpisko dimensiju normējot uz burbuļa stāvokli attiecīgajā brīdī

$$\xi = \frac{r}{R(t)}. \quad (48)$$

Šāda substitūcija atļauj izmantot nekustīgu režģi, kur robežnosacījumi izsakāmi kā

$$u_{r=R} = u_{\xi=1}. \quad (49)$$

Šāda substitūcija pieprasa izmaiņas pašos vienādojumos (sk. pielikumu 1.7).



3.1.att. Shēma galīgo diferencu lietojumam telpiskās dimensijas diskretizācijai temperatūras un gāzes koncentrācijas vienādojumiem burbuļa sieniņas tuvumā

Parciāldiferenciālvienādojumu telpiskā diskretizācija notika izmantojot standarta 2. kārtas centrālās galīgās diferences funkcijas pirmajam un otrajam atvasinājumam apgabala vidū, kā arī otrās kārtas „uz priekšu” diferenci (sk. 3. pielikumu). Punktiem uz apgabala robežas atbilst algebriskie vienādojumi burbuļa sieniņai. Galīgo diferencu lietojums paskaidrots 3.1.att.

Tā kā koncentrācijas un temperatūras vērtība tālu no burbuļa tiek uzskatīt par konstantu, tad

$$\frac{du}{dt}_{r,\xi \rightarrow \infty} = 0. \quad (50)$$

Tā kā koncentrācijas un temperatūras vienādojumiem ir izteikti atšķirīgi difūzijas koeficientam atbilstošie locekļi, tad katram vienādojumam tika izmantots savs režģis.

Programmēšana tika veikta programmēšanas vidē Matlab, izmantojot iebūvētos solverus *ode15s*, *ode23* un *ode45* parasto diferenciālvienādojumu sistēmu ar zināmiem sākumnosacījumiem risināšanai.

Tika kontrolēta aprēķinu skaitliskā precizitāte un aprēķiniem tika izmantotas tādas maksimālā laika soļa, relatīvās un absolūtās tolerances vērtības, kuras samazinot divas reizes burbuļa rādiusa vērtības noteiktā laika brīdī mainījās neievērojami maz, mazāk kā desmittūkstošo daļu no procenta ($10^{-4}\%$). Aprēķinu laikā noskaidrojās, ka rektificētās difūzijas vērtības ir ļoti jūtīgas pret koncentrācijas režģa telpas soli, turklāt dažādi burbuļa rādiusi pieprasa dažādu telpas soli (kas saskan ar faktu, ka režģa solis ir funkcija no burbuļa rādiusa), tāpēc precizitātes noteikšanai tika izmantots šāds algoritms:

1. Burbuļa rādiusu apgabals tika sadalīts 4 intervālos, kas aptuveni sakrita ar tipiskajiem burbuļa svārstību režīmiem.
2. Katra intervāla sākumā un beigās tika noteiktas telpas soļa vērtības, pie kura rektificētās difūzijas vērtība, samazinot telpas soli divas reizes, izmainījās par mazāk kā 1%.
3. Telpa soļa vērtības punktiem intervālu iekšienē tika lineāri interpolētas no galapunktu vērtībām.

3.2. Burbuļu līdzsvara rādiusu sadalījuma modelis

Tā kā burbuļu sadalījuma izmaiņas nav iespējams reducēt līdz diferenciālvienādojumam vai to sistēmai, jo koalescences process izmaina burbuļa rādiusu lēcienveidīgi, lai arī cik mazs laika solis tiktu apskatīts, tad modeļa skaitliskās realizācijas pamatā ir divdimensionāla matrica, kas apraksta noteiktu burbuļu skaita sadalījumu pa rādiusiem (kolonnas) un telpas dimensiju (rindīņas). Telpas dimensija ir sadalīta intervālos ar izmēru Δz . Aprēķini tiek veikti ar laika soli Δt .

Burbuļu skaitu N_z^i , kas pārvietosies no telpas apgabala z_j uz $z_{j+1} = z_j + \Delta z$ laika intervālā Δt , pieņemot ka burbuļu ātrums spēka F iedarbībā ir v_F^i , ja kopējais burbuļu skaits ar izmēru i ir N_b^i , iespējams aprēķināt kā:

$$\frac{N_z^i}{N_b^i} = \frac{v_F^i \cdot \Delta t}{\Delta z}.$$

Burbuļu rādiusi ir sadalīti intervālos ar izmēriem ΔR^i un galapunktiem $R^{i-\frac{1}{2}}$ un $R^{i+\frac{1}{2}}$. Burbuļu skaits, kas izžušanas vai rektificētās difūzijas dēļ maina savu rādiusu N_R^i , tiek aprēķināts kā:

$$\frac{N_R^i}{N_b^i} = \frac{\frac{dR}{dt}(R^i) \cdot \Delta t}{\Delta R^i},$$

kur

$$R^i = \frac{R^{i-\frac{1}{2}} + R^{i+\frac{1}{2}}}{2}.$$

Rektificētā difūzija un burbuļu izžušana tiek uzskatīti par procesiem, kuru laikā notiek gāzu apmaiņa starp burbuļiem un šķidrumu. Koalescence tiek uzskatīta par procesu, kurā gāzu apmaiņa ar šķidrumu nenotiek. Tāpēc, burbuļu skaita izmaiņa koalescences procesa rezultātā

tiek aprēķināta, vispirms nosakot rādiusu $R^{i'}$, kuram atbildīs divu burbuļu R^i saplūšanas rezultāts

$$\left(R^{i'-\frac{1}{2}}\right)^3 < 2 \cdot (R^i)^3 < \left(R^{i'+\frac{1}{2}}\right)^3.$$

Tad, ja koalescējošo burbuļu skaits ir $N_C^{i'}$, tad burbuļu skaitu pēc koalescences $N_{t+\Delta t}^{i'}$ aprēķina kā

$$N_{t+\Delta t}^{i'} = N_t^{i'} + N_C^{i'} \cdot \frac{2 \cdot (R^i)^3}{(R^{i'})^3}.$$

Katrā no laika soļiem, balstoties uz datiem burbuļu koncentrācijas (turpmāk – primārajā) matricā, tiek aprēķinātas burbuļu skaita izmaiņas, ko ienes noteikts process. Šīs burbuļa skaita izmaiņas attiecībā pret esošo burbuļu skaitu, no dažādiem procesiem tiek summētas citā, bufera matricā. Pēc tam kad aprēķinātas burbuļu skaita izmaiņas visu procesu rezultātā, kur visi procesi izmanto vienu un to pašu „šobrīd esošo” burbuļu skaitu no primārās matricas, un visu procesu radītās burbuļu skaita izmaiņas ir saskaitītas kopā, bufera matrica tiek pierēzināta primārajai matricai iegūstot burbuļu skaitu nākošajā laika solī. Šāda metode tiek izmantota lai panāktu rezultātu neatkarību no dažādu procesu iespaida aprēķinu kārtības.

Tiek uzdoti šādi nosacījumi uz telpas – rādiusu apgabalu robežām:

1. Burbuļi, kuru rādiusi kļūst mazāki par tiem, kas aplūkoti aprēķinā, tiek uzskatīti par izšķīdušiem, šis process ir fizikāli pamatots un šajos burbuļos esošā gāze atgriežas šķidrumā
2. Telpas apgabala apakšējā robeža tiek uzskatīta par burbuļiem nepārvaramu barjeru, un tāpēc burbuļi, kas atrodas apakšējā telpas apgabalā un kuriem vajadzētu pārvietoties lejup, tiek atstāti tajā pašā apgabalā
3. Telpas apgabala augšējā robeža tiek uzskatīta par brīvo virsmu, kur burbuļi savienojas ar gaisu, aizvācot gāzi no aprēķina sistēmas
4. Burbuļi, kuru rādiusi kļūst lielāki par tiem, kas aplūkoti aprēķinā tiek uzskatīti par tādiem, kas tiek aizvākti no sistēmas. Šim procesam trūkst laba fizikāla pamatojuma, taču uz lielākajiem burbuļiem viennozīmīgi ir sagaidāms lielāks Arhimēda cēlējspēka iespaids, tāpēc izvēloties gana lielu rādiusa aprēķina apgabalu ir iespējams cerēt, ka visi lielākie burbuļi izies no sistēmas savienojoties ar gaisu telpas apgabala augšpusē (sk. iepriekš).

Papildus aprēķiniem tiek kontrolēta gāzes saglabāšanās, sekojot tam lai gāzes daudzums, kas izkļūst no sistēmas 4. nosacījuma dēļ būtu neievērojami mazs.

Šī modeļa realizācija pamatā tika veikta Delphi programmēšanas vidē, taču rezultāti tiek izvadīti failā un vizuālā interpretācija galvenokārt notiek Matlab vidē.

Darbā izmantoto fizikālo parametru vērtības apkopotas Tabula 3.1. tabulā.

Piezīme. Par darba autores ieguldījumu. Visi izmantotie modeļi ņemti no norādītās literatūras. Modeļu kombinācijas ideoloģija Iida et al. modeļa uzlabošanai uzskatāma par darba autores un kolēģu kopīga darba rezultātu. Izvedumus, balstoties uz norādīto literatūru, un vienādojumu bezdimensionalizāciju veica darba autore patstāvīgi, izmantojot kolēģu konsultācijas. Modeļiem atbilstošās programmatūras realizāciju, rezultātu iegūšanu un apstrādi veica darba autore.

Tabula 3.1.

Darbā izmantoto fizikālo parametru vērtību saraksts

Simbols	Nosaukums	Vērtība	Dimensija	Avots
c	Skaņas ātrums	1497	m/s	[31]
ρ_L	Šķidruma blīvums	998.24	kg/m^3	[31]
σ	Virsmas spraiguma koeficients	$72.58 \cdot 10^{-3}$	$\frac{N}{m}$	[31]
C_{pl}	Ūdens īpatnējā siltumietilpība	4186.0	$\frac{J}{kg \cdot K}$	[2]
K_l	Ūdens siltumvadītspēja	0.602	$\frac{W}{m \cdot K}$	[2]
α	termiskās difūzijas koeficients	$1.44 \cdot 10^{-3}$	$\frac{m^2}{s}$	[2]
μ	Viskozitātes koeficients	$1.053 \cdot 10^{-3}$	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	[2]
β_1	Berzes spēka empīrisks koeficients	0.015	$\frac{N \cdot s}{m^2}$	[29]
β_2	Berzes spēka empīrisks koeficients	4000	$\frac{N \cdot s}{m^3}$	[29]
K_g	Gaisa siltumvadītspēja	0.0257	$\frac{W}{m \cdot K}$	[32]
C_{pg}	Gaisa īpatnējā siltumietilpība	1012	$\frac{J}{kg \cdot K}$	[33]
C_{sat}	Gaisa piesātinājuma koncentrācija	0.0227	$\frac{kg}{m^3}$	[34][[35]
C_{vg}	Gaisa izohorā siltumietilpība	718	$\frac{J}{kg \cdot K}$	[31]

Temperatūra $T = 293$ K, atmosfēras spiediens $p_{\infty} = 101325$ Pa, spiediena amplitūda $p_a = 1.24$ kPa, frekvence $f = 443$ kHz, gaisa molmasa $M = 0.029$ kg/mol, $R_g = 8.31$ J/(K·mol),

$$C_i = 0.99 \cdot C_{sat}$$

Saskaņā ar izteiksmi (2), atbilstošais burbuļa rezonanses rādiuss

$$R_0 = 6.8 \mu m.$$

Gaisa piesātinājuma koncentrācija aprēķināta izmantojot Henrija konstantes vērtības skābeklim un slāpeklim, pieņemot attiecīgi 21% un 79% vērtības gaisā.

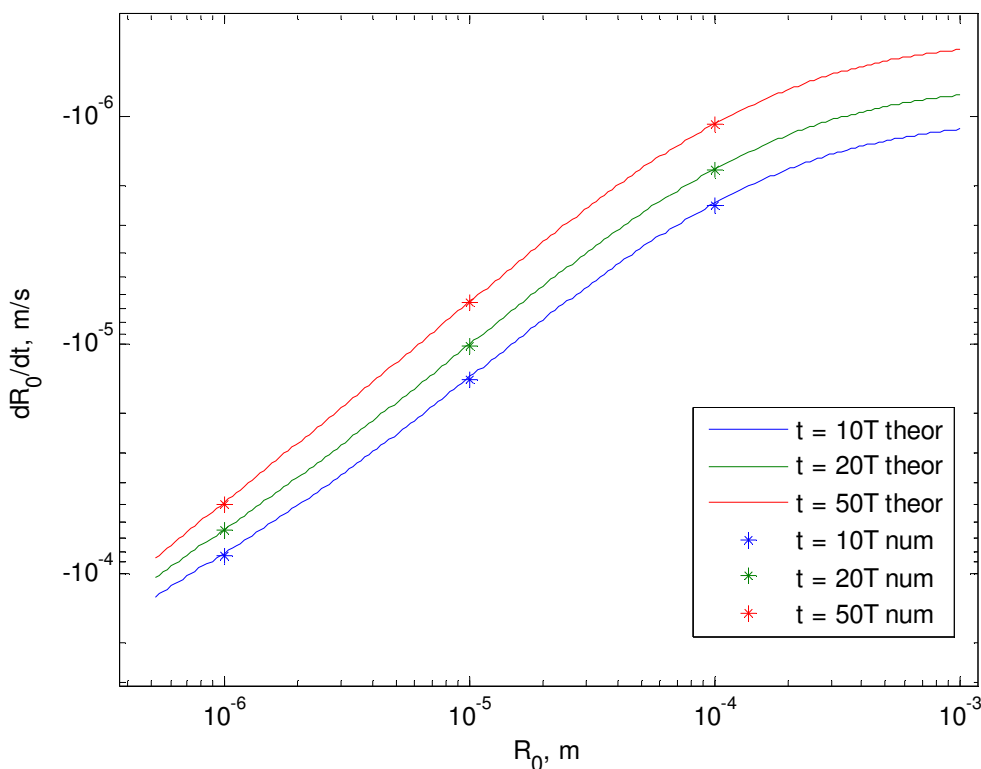
Saskaņā ar eksperimentālās iekārtas aprakstu, modelēts trauka apgabals, kurā šķidruma augstums ir 10 cm. Par apgabala pamatni pieņemts 1 cm^2 , taču tā kā aprēķinos izmantota koncentrācija, pamata laukums neietekmē rezultātus.

Aprēķinos izmantota pulsēta ultraskaņa, kas ir ieslēgta 10'000 akustiskos periodus un izslēgta 20' 000 akustiskos periodus. Laikā, kad ultraskaņa ir ieslēgta, uz burbuļiem darbojas visi aprakstītie efekti, izņemot burbuļu izzušanu, laikā, kad ultraskaņa ir izslēgta – tikai burbuļu izzušana un gravitācijas spēks.

4. REZULTĀTI

4.1. Kellera –Mikša- Meidani modelis

4.1.1. Kellera – Mikša – Meidani modeļa rezultātu salīdzinājums ar Kellera-Mikša modeļa rezultātiem



4.1.att. Burbuļa izžušanas ātrums kā funkcija no burbuļa sākotnējā rādiusa. Skaitlisko (num) un analītisko (theor, izteiksme (26)) salīdzinājums pēc 10, 20 un 50 akustiskajiem periodiem

Pārbaudes nolūkos tika veikti aprēķini burbuļu izžušanas ātrumam, ja burbuļi neatrodas akustiskajā laukā (4.1.att.). Iegūtie rezultāti ir uzrāda labu sakritību ar analītiskajiem. Redzams, ka mazākie burbuļi izzūd ar par vairākām kārtām lielāku ātrumu, kā arī ar laiku izžušanas ātrums samazinās, jo burbuļa tuvākajā apkārtnē palielinās gāzes koncentrācija.

Triviālā metodika rektificētās difūzijas ātruma vērtības iegūšanai konkrētam burbuļu līdzsvara rādiusam ir sākumnosacījumos uzdot vēlamo burbuļa līdzsvara rādiusu un aprēķinu laikā reģistrēt rektificētās difūzijas vērtības, taču ar šo metodiku ir saistīta nozīmīga problēma, proti, nepieciešamība atrast līdzsvaru starp diviem konkurējošiem faktoriem. No vienas puses iepriekšējie rezultāti rāda, ka bieži, it īpaši spēcīgu svārstību apgabalā burbuļiem ir nepieciešams pārejas periods, lai tie nonāktu režīmā, kurā svārstības ir stabilas, proti rādiusa izmaiņa laikā ir identiska dažādos akustiskajos periodos, tāpat arī teorētiskie rezultāti rādi, ka

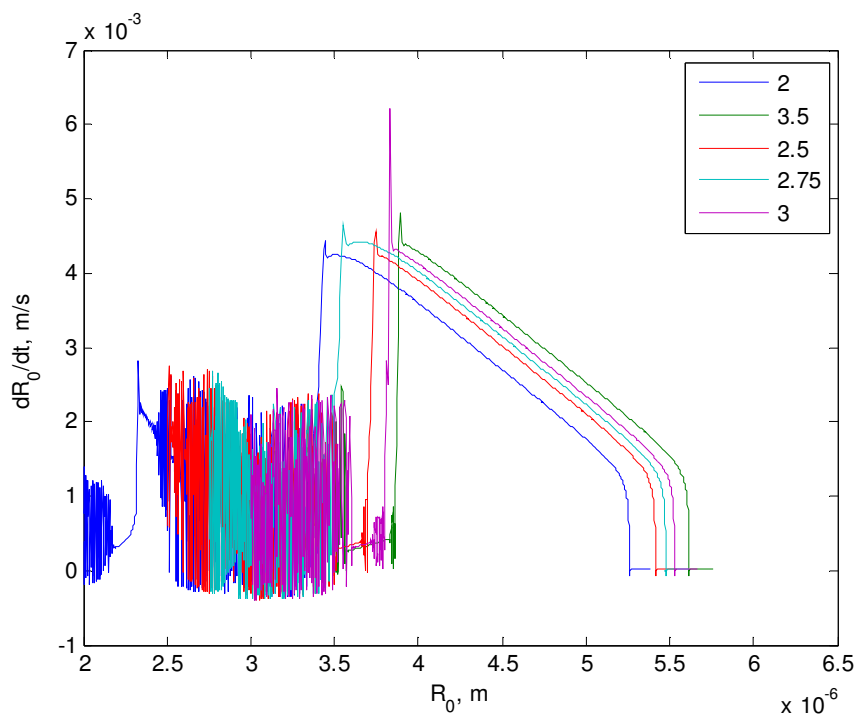
eksistē noteikts pārejas periods, pēc kura iestājas stacionārais stāvoklis - izteiksme (29). No otras puses, ja burbuļa ar rādiusu $1 \mu\text{m}$ augšanas ātrums ir 10^{-3} m/s , tad pietiek ar 10 akustiskajiem periodiem, lai tas izmainītu savu rādiusu par 5%. Līdz ar to, rodas jautājums vai burbuļa, kura rādiuss pie $t=0$ bija $1 \mu\text{m}$ augšanas ātrums pie $t=10 \cdot t_0$ ir attiecināms uz burbuli ar rādiusu $1 \mu\text{m}$. Šī iemesla dēļ rektificētās difūzijas vērtības aprēķināšanai tuvu rezonanses rādiusam izvēlēta cita metodika – burbuļiem ar sākotnējiem izmēriem mazākiem par rezonanses rādiusu veikti gari (līdz $10'000 t_0$) aprēķini, kuros reģistrēts gan burbuļu tā brīža līdzsvara rādiuss, gan tā izmaiņas ātrums (4.2.att.), un pēc tam iegūtie dati vidējoti (sk. 4. pielikumu). Salīdzinot ar šo metodiku, kurā izmantots viens burbulis visam intervālam (1B), iegūtos rezultātus ar parastās metodikas, kurā attiecīgajā intervālā veikti aprēķini daudziem burbuļu sākotnējiem rādiusiem (DB), rezultātiem (4.3.att.), redzams, ka iegūtie rezultāti ir salīdzinoši tuvi.

No burbuļa rādiusa atkarīgie parametri labāk aprēķināmi no intervāliem tuvāk aprēķinu perioda sākumam, kad burbuļa līdzsvara rādiuss nav pārāk izmainījies. Laika intervāli, pa kuriem vidējojam parametru vērtības izmantotas turpmākajos aprēķinos apkopotas tabulā *Tabula 4.1.*

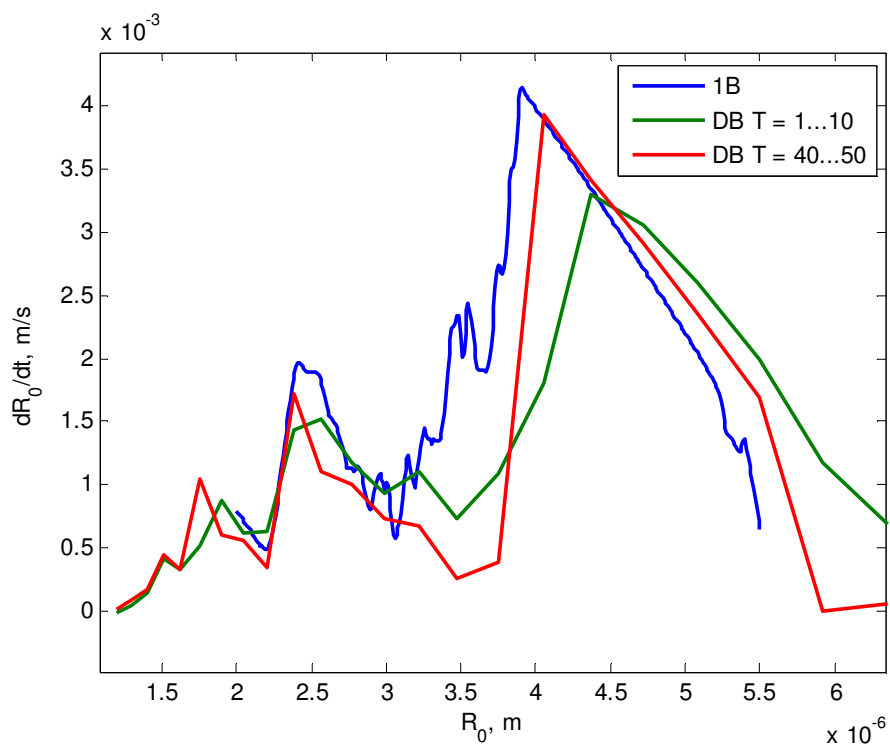
Tabula 4.1.

Parametru aprēķinam izmantotie laika intervāli

R_0	Laika intervāls no R atkarīgo parametru aprēķinam, t_0 pēc aprēķinu sākuma	Laika intervāls rektificētās difūzijas aprēķinam, t_0 pēc aprēķinu sākuma
$R_0 < 1.2 \mu\text{m}$	10...20	375...400
$1.2 \mu\text{m} < R_0 < 6 \mu\text{m}$	40...50	1B, sk. tekstā
$6 \mu\text{m} < R_0 < 20 \mu\text{m}$	40...50	975...1000
$R_0 > 20 \mu\text{m}$	975...1000	975...1000

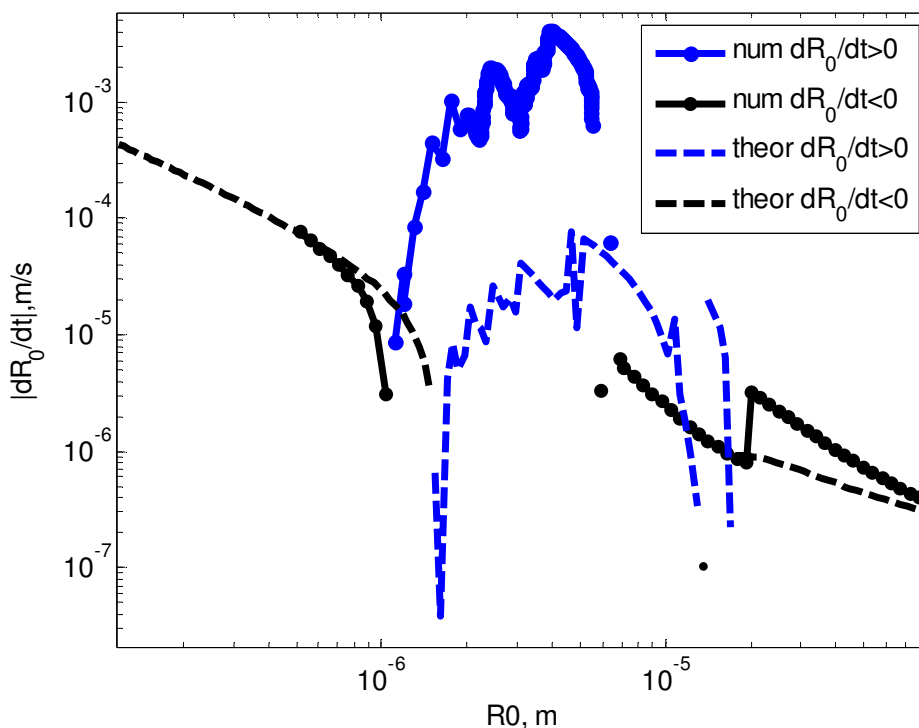


4.2.att. Burbuļa līdzsvara rādiusa izmaiņas ātrums kā funkcija no burbuļa momentānā rādiusa, burbuļi ar sākotnējiem rādiusiem $R_0 = 2.00, 2.50, 2.75, 3.00, 3.50 \mu\text{m}$



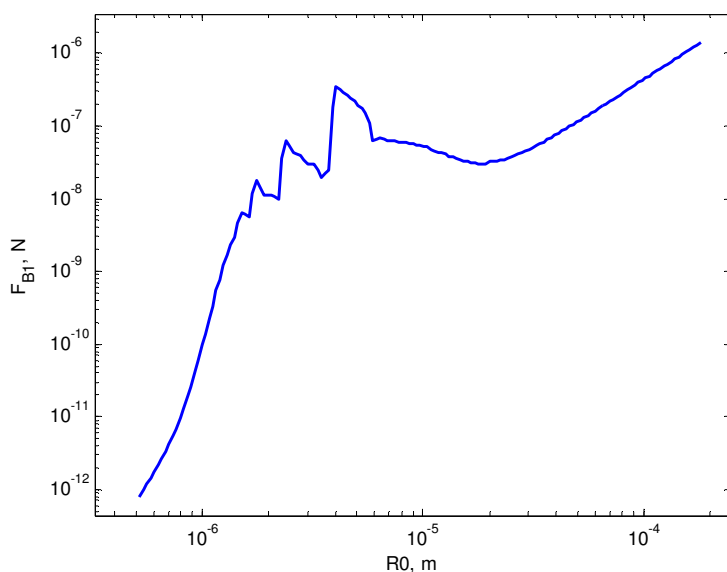
4.3.att. Viena burbuļa(1B) un daudzu burbuļu (DB) metodes rezultātu salīdzinājums. Daudzu burbuļu metodei uzrādīti rezultāti vidējojot no 1 līdz 10 periodam, kā arī no 40 līdz 50 periodam

Salīdzinot rektificētās difūzijas ātruma vērtības, kas iegūtas ar Kellera – Mikša – Meidani modeli, ar vērtībām, kas iegūtas izmantojot Kellera – Mikša modeļa un analītiskās izteiksmes (29) apvienojumu (4.4.att. Piezīme. Sakarā ar nepieciešamību izmantot dubultlogaritmisko skalu, uz y ass atlikts rektificētās difūzijas ātruma vērtības modulis, bet tā zīme identificēta ar krāsu, sk. apzīmējumus), redzams, ka abi modeļi paredz pēc kārtas līdzīgas vērtības burbuļiem ar nelielām oscilācijām – daudz lielākiem vai mazākiem par rezonanses rādiusu. Nobīdi pa rādiusu vērtībām - rektificētā difūzija savu zīmi maina pie mazākām vērtībām KMM modelī – iespējams skaidrot ar faktu, ka Kellera-Mikša modelī izmantotais pieņēmums par adiabatisku uzvedību neizpildās, kas ir saskaņā ar literatūru [23 p.103], līdz ar to nedaudz izmainot burbuļa oscilācijas. Rezultāti rāda, ka KMM modelis paredz daudz lielākas rektificētās difūzijas vērtības spēcīgo burbuļa svārstību apgabalā – burbuļiem, kas mazāki par rezonanses rādiusu. No vienas puses to varētu interpretēt kā sekas faktam, ka izmantotā viena burbuļa metodika atbilst pārejas periodam ar gāzes difūziju no robežslāņa un tādējādi iegūtās vērtības nav uzskatāmas par līdzsvara vērtībām, taču tā kā modelī nav ņemtas vērā mikroskopiskās plūsmas, kuru nozīme ir eksperimentāli parādīta pie mazām frekvencēm [6 p.406], kuras atjauno burbuļa tuvāko apkārtni ar šķidrumu kurā ir sākotnējā gāzes koncentrācija, tad šāds tuvinājums ir pieņemams.



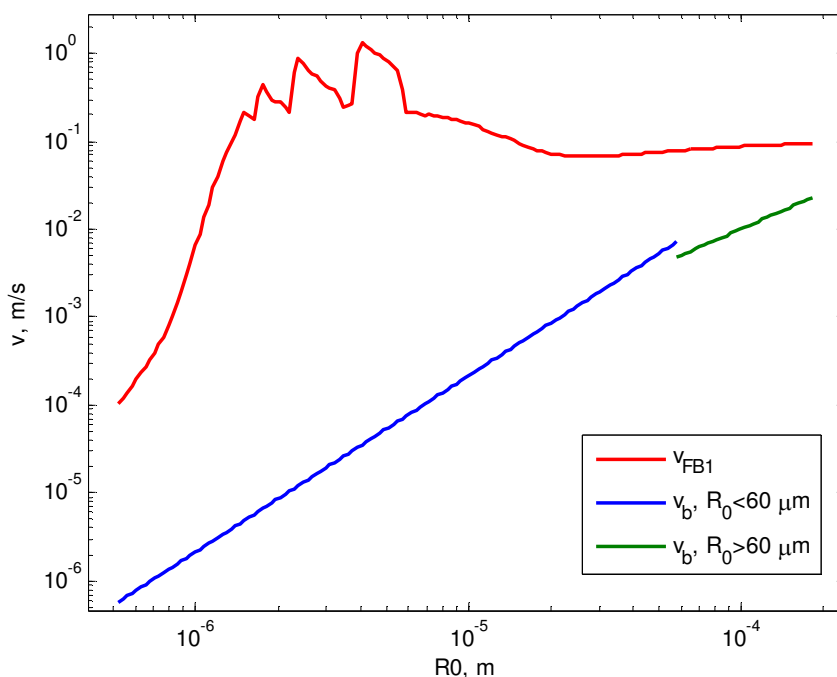
4.4.att. Ar KMM (num) modeli un ar KM modeli un analītiskās rektificētās difūzijas izteiksmi (theor) iegūto rezultātu salīdzinājums. Teorētiskajam rezultātam $t = 1000t_0$

Pirmā veida Bjerķnes spēka vērtības (4.5.att.) atbilst sagaidītajām – lielāks burbuļa tilpums nozīmē lielāku pirmā veida Bjerķnes spēka vērtību un rezonanses rādiusa tuvumā burbuļiem raksturīgas spēcīgas oscilācijas, kas rezultējas vairākos lokālajos maksimumos.



4.5.att. Pirmā veida Bjerķnes spēka atkarība no burbuļa sākotnējā rādiusa

Salīdzinot burbuļu ātrumu gravitācijas un pirmā veida Bjerķnes spēka iedarbībā (4.6.att), redzams, ka burbuļu ātrums ir daudz lielāks Bjerķnes spēka iedarbībā. Lokālie Bjerķnes spēka maksimumi rezultējas lokālajos ātruma maksimumos.

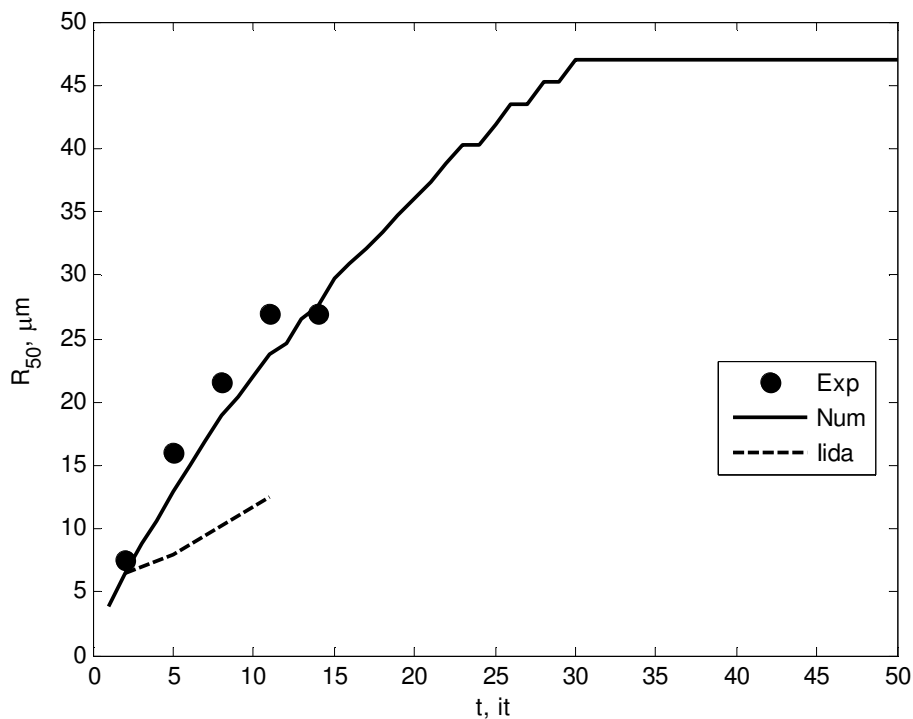


4.6.att. Burbuļu stacionārais ātrums gravitācijas (v_b) un pirmā veida Bjerķnes spēka (v_{FB1}) ietekmē atkarībā no burbuļa līdzsvara rādiusa

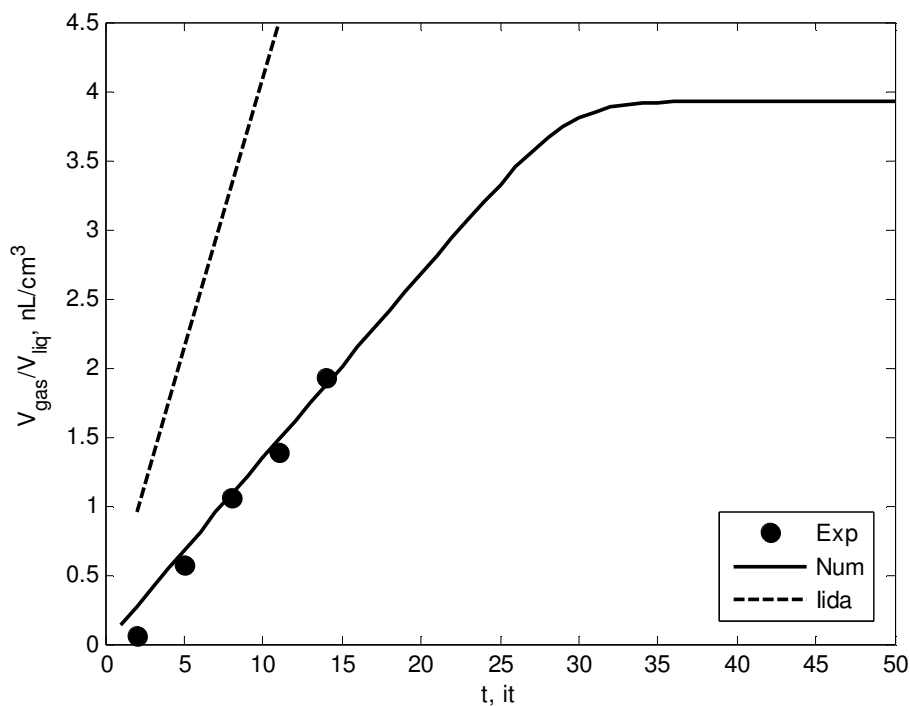
4.2. Burbuļu rādiusa sadalījuma modelis

Aprēķinu veikšanas gaitā tika noskaidrots, ka iegūtie rezultāti ir stabili, ja telpa ir sadalīta 400 intervālos, burbuļu līdzsvara rādiusi – 155 logaritmiski izkārtotos intervālos, bet aprēķinu laika solis ir vienāds ar 100 akustiskajiem periodiem. Stabilitāte tika testēta samazinot visus intervālus divas reizes. Tā kā modelis šobrīd ietver tikai viena rādiusa burbuļu koalescenci un koalescence ir atkarīga no burbuļu koncentrācijas kvadrātsaknes, tad sadalot vienu rādiusu intervālu divos ir nepieciešams reizināt kalibrācijas koeficientu h ar $\sqrt{2}$ (ja jaunie intervāli ir vienādi). Šo problēmu novērstu dažādu izmēru burbuļu koalescences ieviešana modelī.

Aprēķinu laikā noskaidrojās, ka rezultāti labi sakrīt ar eksperimentu, ja $R^{cut}=2 \mu\text{m}$, $V_{gen}=15 \text{ nL/cm}^3$ un $h = 2.5$. Šie parametri pēc lieluma kārtas ir tuvi lida aprakstījumiem ($R^{cut}=0.99 \mu\text{m}$, $V_{gen}=25 \text{ nL/cm}^3$ un $h = 2$). Modelī izdarītās izmaiņas validē fakts, ka nepalielinot patvaļīgi maināmo parametru skaitu, ir iespējams panākt daudz labāku sakritību ar eksperimentālajiem rezultātiem, kā pamata, lida et al. modelī (4.7.att., 4.8.att..) Lai arī fakts, ka iegūtie rezultāti ir tuvi eksperimentiem, nenozīmē, ka fizikālais process ir pilnībā aprakstīts, un pastāv iespēja, ka uzlabojot modeli un iekļaujot tajā citus efektus, parametru vērtības mainīsies, ir iespējams izdarīt vairākus secinājumus. Pirmkārt, lielā R^{cut} vērtība norāda, ka modeli būtu vēlams papildināt ar burbuļu sadalīšanās mehānismu, kas viegli varētu izskaidrot tik lielu burbuļu rašanos. Tāpat, arī eksperimentālie rezultāti liecina par stacionāra stāvokļa iestāšanos - burbuļu vidējais rādiuss R_{50} (definēts kā rādiuss, par kuru mazākos burbuļos atrodas puse no kopā burbuļos esošās gāzes tilpuma) nemainās starp 11 un 14 iterāciju (4.7.att.), taču skaitliskie rezultāti paredz stacionārā stāvokļa iestāšanos, taču pie daudz lielāka rādiusa un daudz vēlāk. Arī šī nesakritība liecina par kādu modelī vērā neņemtu procesu, kas samazina lielo burbuļu skaitu. Šim aprakstam atbilst burbuļu fragmentācija.

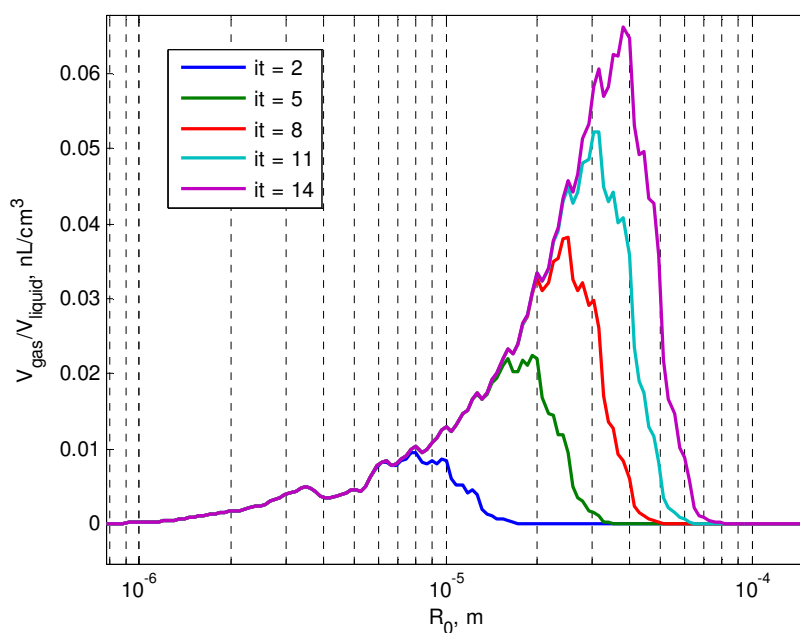


4.7.att. Burbuļu vidējā rādiusa atkarība no iterācijas numura. Eksperimentālo, skaitliski iegūto un Iida et al. piedāvātā modeļa rezultātu salīdzinājums. Iida et al. Dati ņemti no literatūras [1]



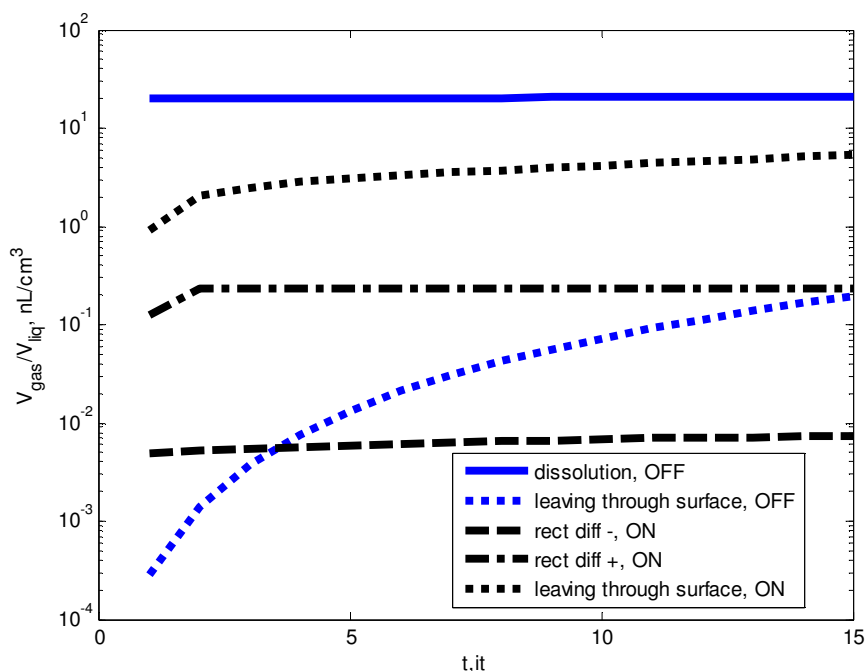
4.8.att. Burbuļos esošās gāzes tilpuma koncentrācijas atkarība no iterācijas numura. Eksperimentālo, skaitliski iegūto un Iida et al. piedāvātā modeļa rezultātu salīdzinājums. Iida et al. Dati ņemti no literatūras [1]

Pētot sīkāku tilpumu sadalījumu pa rādiusiem (4.9.att.), redzams, ka laikam ejot uz priekšu, mazo burbuļu tilpuma sadalījums nemainās, bet pieaug lielo burbuļu skaits, kas nodrošina gan burbuļu vidējā rādiusa, gan kopējā gāzes tilpuma pieaugumu.



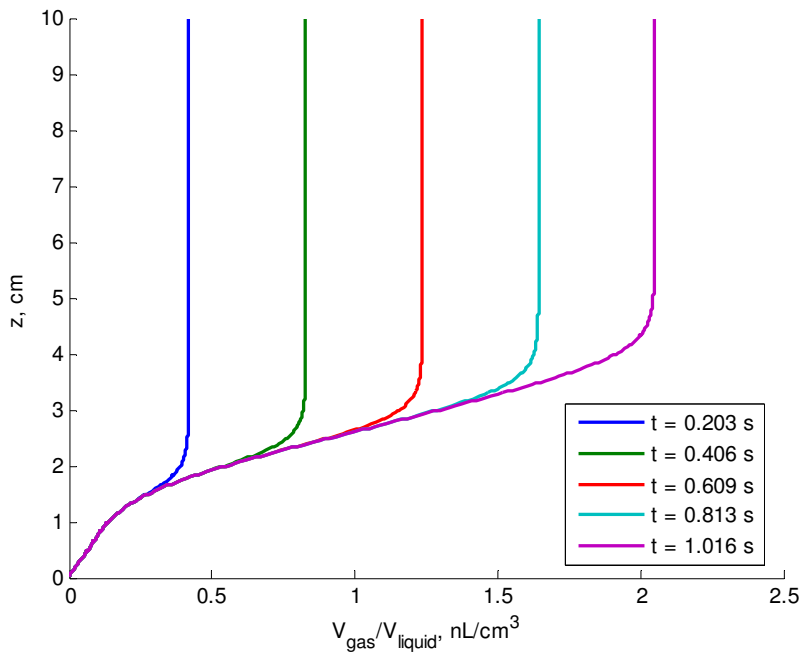
4.9.att. Burbuļos esošā gāzes tilpuma koncentrācijas atkarība no burbuļu līdzsvara rādiusa dažādos laika periodos.

Pētot gāzes apmaiņu starp burbuļiem un šķidrumu (4.10.att.), jāsecina, ka vislielākā nozīme ir burbuļu izzušanas procesam, kā ar pirmā veida Bjerknes spēku saistītam transportam caur šķidruma brīvo virsmu. Rektificētajai difūzijai ir daudz mazāka nozīme, īpaši, gāzes transportam no burbuļiem uz šķidrumu.

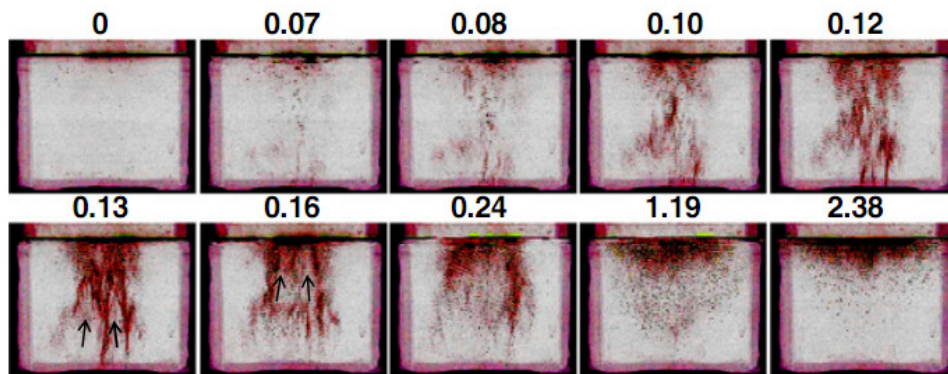


4.10.att. Dažādu procesu veiktā gāzu apmaiņa starp burbuļiem un šķīdumu. Burbuļu izušana (*dissolution*) un burbuļu savienošanās ar šķīduma virsmu (*leaving through surface*) pie izslēgta akustiskā lauka (OFF), tīlpums, kas ar rektificēto difūziju nokļūst no šķīduma burbuļos (*rect diff +*), tīlpums, kas ar rektificēto difūziju nokļūst no burbuļiem šķīdumā (*rect diff -*) un burbuļu savienošanās ar šķīduma virsmu (*leaving through surface*) pie ieslēgta akustiskā lauka (ON)

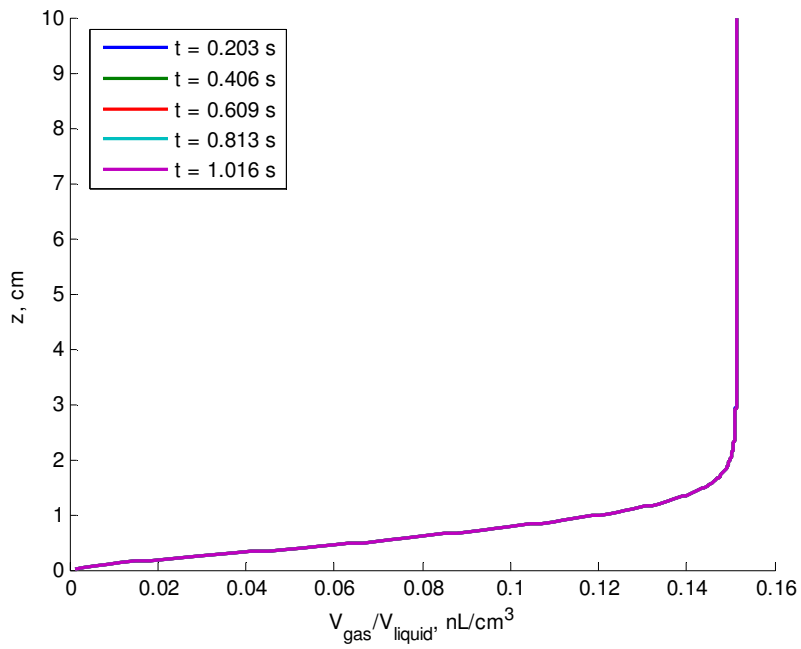
Tā kā modelis satur arī telpas dimensiju, ir iespējams salīdzināt burbuļu telpiskā sadalījuma attīstību laikā (4.11.att.) ar eksperimentālajiem rezultātiem pie līdzīgas frekvences taču nepārtrauktas ultraskaņas (4.12.att.). Redzams, ka modelis uzrāda pareizu tendenci – sākotnēji burbuļi ir vienmērīgi sadalīti pa visu apgabalu, bet vēlāk burbuļi koncentrējas tuvāk šķīduma virsmai, taču aplūkojot burbuļus, kas mazāki par rezonanses rādiusu (4.13.att.), redzams, ka to sadalījums laikā ir gandrīz nemainīgs, kas ir pretrunā ar faktu, ka eksperimentāli arī sonoluminescējošie burbuļi (1.2.att.) tiecas koncentrēties pie šķīduma virsmas. Šo nesakrītību varētu skaidrot ar faktu, ka modelī netiek ņemts vērā fakts, ka burbuļi spēcīgi absorbē ultraskaņu un fakts, ka gāzei pārejot no šķīduma burbuļos, gāzes koncentrācija šķīdumā krītas, kas nozīmē, ka nozīmīga paliek gāzes pāreja no gaisa šķīdumā caur šķīduma brīvo virsmu [36].



4.11.att. Burbuļos esošās gāzes tilpuma koncentrācijas atkarība no vertikālās koordinātes dažādos laika periodos. Kopējais tilpums visiem izmēru burbuļiem.



4.12.att. Eksperimentālā burbuļu sadalījuma attīstība laikā, $f = 448$ kHz. Laiks sekundēs norādīts virs attēla. Nepārtraukta ultraskaņa. Attēls ņemts no literatūras [13]



4.13.att. Burbuļos esošās gāzes tilpuma koncentrācijas atkarība no vertikālās koordinātes dažādos laika periodos. Burbuļi, kuru līdzsvara rādiuss ir mazāks par $6.8 \mu\text{m}$

5. SECINĀJUMI

Uzstādītie darba uzdevumi ir izpildīti un matemātiskajiem modeļiem atbilstošā programmatūra ir veiksmīgi realizēta, kā arī iegūtie rezultāti ir skaitliski stabili pie laika un telpas soļiem, kas atbilst aprēķiniem pārskatāmā laikā.

No Kellera – Mikša – Meidani modeļa iegūtie rezultāti liecina, ka aproksimētais analītiskais burbuļu izzušanas process sakrīt ar precīzāko skaitlisko rezultātu, taču rektificētās difūzijas vērtības, kas iegūtas ar tuvinājumu, atšķiras no skaitliski iegūtajām par vairākām kārtām. Rezultāti rāda, ka burbuļu ātrums pirmā veida Bjerkes spēka ietekmē ir daudz lielāks par burbuļu celšanās ātrumu gravitācijas ietekmē.

Uzlabotais burbuļu rādiusa sadalījuma modelis spēj daudz precīzāk atkārtot eksperimentālos datus, nepalielinot patvaļīgo parametru skaitu, kā arī uzrāda daudzas eksperimentāli novērojamas parādības, kā piemēram, stacionārā stāvokļa iestāšanos un burbuļu pārvietošanos tuvāk šķidrums virsmai. Modeļa rezultāti rāda, ka rektificētajai difūzijai ir mazāka nozīme, kā burbuļu telpiskā sadalījuma izmaiņām.

Tā kā modelis nespēj replicēt visas burbuļu sadalījumam raksturīgās īpašības, kas novērotas eksperimentos, sadalījuma modeli iespējams un nepieciešams uzlabot. Pirmkārt, empīriskos procesu modeļus – burbuļu ģenerāciju un koalescenci būtu vēlams aizstāt ar fizikāliem modeļiem, kas ļautu iegūtos rezultātus pielietot plašākam parametru intervālam, kā arī ieviest koalescenci starp dažāda izmēra burbuļiem. Nesakrītības starp eksperimentiem un modeļa rezultātiem norāda uz nepieciešamību ieviest burbuļu sadalīšanās procesa aprakstu.

Burbuļu telpiskā sadalījuma uzlabošanai nepieciešams ieviest akustiskās enerģijas absorbciju burbuļos, kā arī gāzes koncentrācijas šķidrums aprēķinu.

Piezīme. Darba autore uzstājusies konferencēs [37,38] ar darba tēmai atbilstošu referātu.

PATEICĪBAS

Darba autore izsaka pateicību darba vadītājam, bez kura šis darbs nebūtu iespējams, Andrejam Timuhinam par labajiem padomiem, kā arī VTPMML un PAIC kolektīvam par atbalstu.

Darba autore ir pateicīga par finansiālo atbalstu darba tapšanas laikā Eiropas Sociālā fonda (ESF) projektiem Nr. 2009/0162/1DP/1.1.2.1.1/09/IPIA/VIAA/004, „Atbalsts maģistra studiju programmu īstenošanai Latvijas Universitātē” un „Atomāro un nepārtrauktās vides tehnoloģisko fizikālo procesu modelēšana, matemātisko metožu pilnveide un kvalitatīvā izpēte” 2009/0223/1DP/1.1.1.2.0/09/APIA/VIAA/008

1. PIELIKUMS. IZMANTOTO VIENĀDOJUMU IZVEDUMI UN
BEZDIMENSIONALIZĀCIJAS

1.1.Kellera – Mikša vienādojuma bezdimensionalizācija

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{p_l}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l c} \frac{dp_l}{dt}$$

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0}$$

$$R = R_0 \bar{R}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

$$\dot{R} = \frac{d\bar{R}R_0}{d\bar{t}t_0} = \frac{R_0}{t_0} \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}} = \frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}}$$

$$\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt} = \frac{R_0}{t_0} \frac{d\dot{\bar{R}}}{dt} = \frac{R_0}{t_0^2} \frac{d\dot{\bar{R}}}{d\bar{t}} = \frac{R_0}{t_0^2} \ddot{\bar{R}}$$

$$p_l = p_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p_{out}$$

$$p_{out} = p_\infty - P_a \cdot \sin(2\pi f t)$$

$$\overline{p_{out}} = \frac{p_{out}}{p_0}$$

$$\overline{p_g} = \frac{p_g}{p_0}$$

$$p_l = p_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p_{out}$$

$$\bar{c} = \frac{c \cdot t_0}{R_0}$$

$$c = \frac{R_0}{t_0} \cdot \bar{c}$$

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) = \left(1 - \frac{\frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}}}{\frac{R_0}{t_0} \cdot \bar{c}}\right) = \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right)$$

Analogi:

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) = \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{\dot{R}}{3c}\right) = \\ & = \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) R_0 \bar{R} \frac{R_0}{t_0^2} \ddot{\bar{R}} + \frac{3}{2} \left(\frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right) = \\ & \boxed{= \frac{R_0^2}{t_0^2} \left[\left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \bar{R} \ddot{\bar{R}} + \frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right) \right]} \end{aligned}$$

$$\frac{p_l}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left(p_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} - p_{out} \right)$$

$$\boxed{\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_0 \bar{p}_g}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R_0 \bar{R}} - \frac{4\mu}{\rho_l R_0 \bar{R}} \frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out}}{\rho_l}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_l}{dt} &= \frac{dp_g}{dt} + 2\sigma \frac{\dot{R}}{R^2} - 4\mu \frac{\ddot{R}R - \dot{R}\dot{R}}{R^2} - \frac{dp_{out}}{dt} = \\ &= \frac{d\bar{p}_g p_0}{d\bar{t} t_0} + 2\sigma \frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}} \frac{1}{(\bar{R} R_0)^2} - 4\mu \frac{R_0}{t_0^2} \frac{\ddot{\bar{R}}}{R_0 \bar{R}} + 4\mu \left(\frac{R_0}{t_0}\right)^2 \frac{(\dot{\bar{R}})^2}{(R_0 \bar{R})^2} - \frac{d\bar{p}_{out} \cdot p_0}{d\bar{t} t_0} = \\ &= \frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_g}{d\bar{t}} + \frac{2\sigma}{t_0 R_0} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}^2} - \frac{4\mu}{t_0^2} \frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} + \frac{4\mu}{t_0^2} \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 - \frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_{out}}{d\bar{t}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{R}{\rho_l c} \frac{dp_l}{dt} = \frac{R_0 \bar{R}}{\rho_l c} \left(\frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_g}{d\bar{t}} + \frac{2\sigma}{t_0 R_0} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}^2} - \frac{4\mu}{t_0^2} \frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} + \frac{4\mu}{t_0^2} \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 - \frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_{out}}{d\bar{t}} \right)}$$

Vienādojuma labā puse ir :

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\dot{R}}{c}\right) \frac{p_l}{\rho_l} + \frac{R}{\rho_l c} \frac{dp_l}{dt} = \\ & = \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 \bar{p}_g}{\rho_l} - \frac{2\sigma}{\rho_l R_0 \bar{R}} - \frac{4\mu}{\rho_l R_0 \bar{R}} \frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out}}{\rho_l} \right) + \\ & + \frac{R_0 \bar{R}}{\rho_l c} \left(\frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_g}{d\bar{t}} + \frac{2\sigma}{t_0 R_0} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}^2} - \frac{4\mu}{t_0^2} \frac{\ddot{\bar{R}}}{\bar{R}} + \frac{4\mu}{t_0^2} \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 - \frac{p_0}{t_0} \frac{d\bar{p}_{out}}{d\bar{t}} \right) \end{aligned}$$

Reizinot ar $\frac{t_0^2}{R_0^2}$ iegūst:

$$\left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 \bar{p}_g t_0^2}{\rho_l R_0^2} - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l R_0 \bar{R} R_0^2} - \frac{4\mu R_0 t_0^2}{\rho_l R_0 \bar{R} t_0 R_0^2} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out} t_0^2}{\rho_l R_0^2} \right) +$$

$$+ \frac{t_0^2 \bar{R}}{R_0 \rho_l c} \left(\frac{p_0 d\bar{p}_g}{t_0 d\bar{t}} + \frac{2\sigma \dot{\bar{R}}}{t_0 R_0 \bar{R}^2} - \frac{4\mu \ddot{\bar{R}}}{t_0^2 \bar{R}} + \frac{4\mu}{t_0^2} \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 - \frac{p_0 d\bar{p}_{out}}{t_0 d\bar{t}} \right)$$

jeb

$$\left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 \bar{p}_g t_0^2}{\rho_l R_0^2} - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l \bar{R} R_0^3} - \frac{4\mu t_0}{\rho_l \bar{R} R_0^2} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out} t_0^2}{\rho_l R_0^2} \right) +$$

$$+ \frac{t_0 \bar{R} p_0 d\bar{p}_g}{R_0 \rho_l c d\bar{t}} + \frac{t_0 2\sigma \dot{\bar{R}}}{\rho_l c R_0^2 \bar{R}} - \frac{4\mu}{R_0 \rho_l c} \ddot{\bar{R}} + \frac{4\mu \dot{\bar{R}}^2}{R_0 \rho_l c \bar{R}} - \frac{\bar{R} t_0 p_0 d\bar{p}_{out}}{R_0 \rho_l c d\bar{t}}$$

Iznesot kreisajā pusē locekļus, kas satur $\ddot{\bar{R}}$

$$\left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \bar{R} \ddot{\bar{R}} + \frac{4\mu}{R_0 \rho_l c} \ddot{\bar{R}} =$$

$$= -\frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right) + \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 \bar{p}_g t_0^2}{\rho_l R_0^2} - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l R_0^3 \bar{R}} - \frac{4\mu t_0}{\rho_l R_0^2 \bar{R}} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out} t_0^2}{\rho_l R_0^2} \right) +$$

$$+ \frac{t_0 \bar{R} p_0 d\bar{p}_g}{R_0 \rho_l c d\bar{t}} + \frac{t_0 2\sigma \dot{\bar{R}}}{\rho_l c R_0^2 \bar{R}} + \frac{4\mu \dot{\bar{R}}^2}{R_0 \rho_l c \bar{R}} - \frac{\bar{R} t_0 p_0 d\bar{p}_{out}}{R_0 \rho_l c d\bar{t}}$$

$$\ddot{\bar{R}} = \frac{\text{skait}}{\text{sauc}}$$

$$\text{sauc} = \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \bar{R} + \frac{4\mu}{R_0 \rho_l c}$$

$$\text{skait} = -\frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right) + \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 \bar{p}_g t_0^2}{\rho_l R_0^2} - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l R_0^3 \bar{R}} - \frac{4\mu t_0}{\rho_l R_0^2 \bar{R}} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 \bar{p}_{out} t_0^2}{\rho_l R_0^2} \right) +$$

$$+ \frac{t_0 \bar{R} p_0 d\bar{p}_g}{R_0 \rho_l c d\bar{t}} + \frac{t_0 2\sigma \dot{\bar{R}}}{\rho_l c R_0^2 \bar{R}} + \frac{4\mu \dot{\bar{R}}^2}{R_0 \rho_l c \bar{R}} - \frac{\bar{R} t_0 p_0 d\bar{p}_{out}}{R_0 \rho_l c d\bar{t}}$$

Aizstājot

$$\bar{p}_g = \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g$$

$$\frac{d\bar{p}_g}{d\bar{t}} = \dot{\bar{\rho}} \cdot \bar{T}_g + \bar{\rho} \cdot \dot{\bar{T}}_g$$

$$\text{skait} = -\frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}}\right) + \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}}\right) \left(\frac{p_0 t_0^2}{\rho_l R_0^2} \bar{\rho} \bar{T}_g - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l R_0^3 \bar{R}} - \frac{4\mu t_0}{\rho_l R_0^2 \bar{R}} \dot{\bar{R}} - \frac{p_0 t_0^2}{\rho_l R_0^2} \bar{p}_{out} \right) +$$

$$+ \frac{t_0 p_0}{R_0 \rho_l c} \bar{R} (\dot{\bar{\rho}} \bar{T}_g + \bar{\rho} \dot{\bar{T}}_g) + \frac{t_0 2\sigma \dot{\bar{R}}}{\rho_l c R_0^2 \bar{R}} + \frac{4\mu \dot{\bar{R}}^2}{R_0 \rho_l c \bar{R}} - \frac{\bar{R} t_0 p_0 d\bar{p}_{out}}{R_0 \rho_l c d\bar{t}}$$

$$c = \frac{R_0}{t_0} \cdot \bar{c}$$

$$\begin{aligned} skait = & -\frac{3}{2} \dot{\bar{R}}^2 \left(1 - \frac{\dot{\bar{R}}}{3\bar{c}} \right) + \left(1 + \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{c}} \right) \left(\frac{p_0 t_0^2}{\rho_l R_0^2} \bar{\rho} \bar{T}_g - \frac{2\sigma t_0^2}{\rho_l R_0^3} \frac{1}{\bar{R}} - \frac{4\mu t_0}{\rho_l R_0^2} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} - \frac{p_0 t_0^2}{\rho_l R_0^2} \overline{p_{out}} \right) + \\ & + \frac{t_0^2}{R_0^2} \frac{p_0}{\rho_l \bar{c}} \bar{R} \left(\dot{\bar{\rho}} \bar{T}_g + \bar{\rho} \dot{\bar{T}}_g \right) + \frac{t_0}{\rho_l c} \frac{2\sigma}{R_0^2} \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} + \frac{4\mu}{R_0 \rho_l c} \frac{\dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}} - \frac{t_0 p_0}{R_0 \rho_l c} \bar{R} \frac{d\overline{p_{out}}}{d\bar{t}} \end{aligned}$$

1.2. Vienādojums gāzes blīvumam

$$\frac{d}{dt} \left(\rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{dm}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 + \rho \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R} = 4\pi R^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$R^3 \cdot \frac{d\rho}{dt} + \rho \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R} = \frac{3}{4\pi} \cdot 4\pi R^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 3 \frac{R^2}{R^3} D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} - \rho \cdot 3 \cdot \frac{R^2}{R^3} \cdot \dot{R}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 3 \frac{1}{R} D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} - \rho \cdot 3 \cdot \frac{1}{R} \cdot \dot{R}$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\bar{C} = \frac{C}{C_i}$$

$$\xi = \frac{r}{R} = \frac{r}{\bar{R} R_0}$$

$$\xi \Big|_{r=R} = \frac{r}{R} \Big|_{r=R} = 1$$

$$r = \xi \bar{R} R_0$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \bar{C} C_i}{\partial \xi \bar{R} R_0} \Big|_{\xi=1} = \frac{C_i}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho_0}{t_0} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}}$$

$$\frac{\rho_0}{t_0} \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}} = 3 \frac{1}{\bar{R} R_0} \frac{C_i}{\bar{R} R_0} D \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} - \bar{\rho} \rho_0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{\bar{R} R_0} \cdot \frac{R_0}{t_0} \cdot \dot{\bar{R}}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{t}} = 3 \frac{C_i D t_0}{\rho_0 \bar{R}^2 R_0^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} - 3 \cdot \frac{\bar{\rho} \dot{\bar{R}}}{\bar{R}}}$$

1.3. Gāzes stāvokļa vienādojums

$$P_g \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R_g \cdot T_g,$$

$$P_g = \frac{m}{V \cdot M} \cdot R_g \cdot T_g = \frac{\rho}{M} \cdot R_g \cdot T_g.$$

Ieviešot

$$\bar{P}_g = \frac{P_g}{P_0},$$

$$\bar{P}_g = \frac{\rho \cdot R_g \cdot \bar{T}_g \cdot T_0}{P_0 \cdot M}.$$

Ieviešot

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$\rho_0 = \frac{P_0 \cdot M}{R_g \cdot T_0}$$

$$\boxed{\bar{P}_g = \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g}$$

1.4. Gāzes temperatūras vienādojums

$$\frac{dE}{dt} = -\dot{W} + \dot{Q}_l + \dot{m}_{int} C_p T_{int}$$

$$E = \rho \cdot V \cdot C_v \cdot T_g$$

$$\dot{W} = P_B \cdot \frac{dV}{dt}$$

$$\dot{Q}_l = 4\pi R^2 K_l \frac{\partial T_l}{\partial r}_{r=R}$$

$$\frac{dE}{dt} = C_v (\dot{\rho} \cdot V \cdot T_g + \rho \cdot \dot{V} \cdot T_g + \rho \cdot V \cdot \dot{T}_g)$$

$$\dot{V} = \frac{4}{3} \pi \cdot 3 \cdot R^2 \cdot \dot{R} = 4\pi R^2 \cdot \dot{R}$$

$$\dot{m}_{int} = 4\pi R^2 D \frac{\partial C}{\partial r}_{r=R}$$

$$\begin{aligned} & C_v (\dot{\rho} \cdot V \cdot T_g + \rho \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R} \cdot T_g + \rho \cdot V \cdot \dot{T}_g) = \\ & = P_B \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R} + 4\pi R^2 K_l \frac{\partial T_l}{\partial r}_{r=R} + 4\pi R^2 C_p T_{int} D \frac{\partial C}{\partial r}_{r=R} \end{aligned}$$

$$C_v \rho \cdot V \cdot \dot{T}_g =$$

$$\begin{aligned}
&= -C_v(\dot{\rho} \cdot V \cdot T_g + \rho \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R} \cdot T_g) + P_B \cdot 4\pi R^2 \cdot \dot{R} + 4\pi R^2 K_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=R} \\
&\quad + 4\pi R^2 C_p T_{int} D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} \\
\dot{T}_g &= -\frac{\dot{\rho} T_g}{\rho} - \frac{3\dot{R} T_g}{R} - \frac{3 \cdot P_b \cdot \dot{R}}{\rho \cdot R \cdot C_v} + \frac{3 \cdot K_l}{\rho \cdot R \cdot C_v} \cdot \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{3 \cdot D C_p T_{int}}{\rho \cdot R \cdot C_v} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} \\
P_B &= p_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R}
\end{aligned}$$

Bezdimensionalizējot:

$$\begin{aligned}
T_g &= \bar{T}_g \cdot T_0 \\
\dot{T}_g &= \dot{\bar{T}}_g \cdot \frac{T_0}{t_0} \\
\rho &= \bar{\rho} \cdot \rho_0 \\
\dot{\rho} &= \dot{\bar{\rho}} \cdot \frac{\rho_0}{t_0} \\
R &= \bar{R} R_0 \\
\dot{R} &= \dot{\bar{R}} \cdot \frac{R_0}{t_0} \\
p_g &= P_0 \cdot \bar{P}_g = P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g \\
\frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{C_i}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \\
\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \frac{T_0}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \\
\dot{T}_g &= -\frac{\dot{\rho} T_g}{\rho} - \frac{3\dot{R} T_g}{R} - \frac{3 \cdot \dot{R}}{\rho \cdot R \cdot C_v} \left(p_g - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu}{R} \dot{R} \right) + \\
&\quad + \frac{3 \cdot K_l}{\rho \cdot R \cdot C_v} \cdot \frac{\partial T_l}{\partial r} \Big|_{r=R} + \frac{3 \cdot D C_p T_{int}}{\rho \cdot R \cdot C_v} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} \\
\dot{\bar{T}}_g \cdot \frac{T_0}{t_0} &= -\dot{\bar{\rho}} \cdot \frac{\rho_0}{t_0} \cdot \frac{\bar{T}_g \cdot T_0}{\bar{\rho} \cdot \rho_0} - 3 \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \frac{R_0}{t_0} \cdot \bar{T}_g \cdot T_0 \cdot \frac{1}{\bar{R} R_0} - \\
&\quad - \frac{3 \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \frac{R_0}{t_0}}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R} R_0 \cdot C_v} \left(P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g - \frac{2\sigma}{\bar{R} R_0} - \frac{4\mu}{\bar{R} R_0} \dot{\bar{R}} \cdot \frac{R_0}{t_0} \right) + \\
&\quad + \frac{3 \cdot K_l}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R} R_0 \cdot C_v} \cdot \frac{T_0}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \frac{3 \cdot D C_p \bar{T}_{int} \cdot T_0}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R} R_0 \cdot C_v} \cdot \frac{C_i}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{T}}_g &= -\dot{\bar{\rho}} \cdot \frac{\bar{T}_g}{\bar{\rho}} - \frac{3 \cdot \dot{\bar{R}} \cdot \bar{T}_g}{\bar{R}} - \\
&- \frac{3}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot T_0 \cdot C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} \cdot \left(P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g - \frac{2\sigma}{\bar{R}R_0} - \frac{4\mu}{\bar{R}} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{t_0} \right) + \\
&+ \frac{3t_0 \cdot K_l}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R}^2 R_0^2 \cdot C_v} \cdot \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \frac{3t_0 \cdot DC_p \bar{T}_{int} C_i}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R}^2 R_0^2 \cdot C_v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \\
\dot{\bar{T}}_g &= -\dot{\bar{\rho}} \cdot \frac{\bar{T}_g}{\bar{\rho}} - \frac{3\dot{\bar{R}}\bar{T}_g}{\bar{R}} - \frac{3 \cdot P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot T_0 \cdot C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} + \\
&+ \frac{6\sigma}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot T_0 \cdot R_0 C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}^2} + \frac{12\mu}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 t_0 \cdot T_0 \cdot C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}^2}{\bar{R}^2} + \\
&+ \frac{3t_0 \cdot K_l}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot \bar{R}^2 R_0^2 \cdot C_v} \cdot \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \frac{3t_0 \cdot DC_p C_i \bar{T}_{int}}{\rho_0 \cdot R_0^2 \cdot C_v \bar{\rho} \bar{R}^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \\
\rho_0 &= \frac{P_0 \cdot M}{R_g \cdot T_0}
\end{aligned}$$

$$\frac{3 \cdot P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{T}_g}{\bar{\rho} \cdot \rho_0 \cdot T_0 \cdot C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}} = \frac{3 \cdot R_g \cdot \bar{T}_g}{M \cdot C_v} \cdot \frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{T}}_g &= -\frac{\dot{\bar{\rho}} \cdot \bar{T}_g}{\bar{\rho}} - \frac{3\dot{\bar{R}}\bar{T}_g}{\bar{R}} + \frac{3\dot{\bar{R}}\bar{T}_g R_g}{\bar{R} C_v M} + \frac{6 \cdot \sigma \cdot \dot{\bar{R}}}{\bar{\rho} \rho_0 T_0 C_v R_0 \bar{R}^2} + \frac{12 \cdot \mu \dot{\bar{R}}^2}{\bar{\rho} \rho_0 T_0 C_v t_0 \bar{R}^2} + \\
&+ \frac{3 \cdot t_0 \cdot K_l}{\bar{\rho} \rho_0 C_v R_0^2 \bar{R}^2} \cdot \frac{\partial \bar{T}_l}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \frac{3t_0 DC_i \bar{T}_{int} C_{pg}}{\bar{\rho} \rho_0 C_v R_0^2 \bar{R}^2} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}
\end{aligned}$$

1.5. Vienādojums burbuļa sienas temperatūrai

No enerģijas saglabāšanās likuma, enerģijas plūsmas šķidrumā un gāzē tuvu pie burbuļa sienas ir jābūt vienādi

$$(\dot{m} c_p T + \dot{q})_g = (\dot{m} c_p T + \dot{q})_l$$

$$\dot{m}_t = 4\pi R^2 D \frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R}$$

$$\dot{q} = \frac{k \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta T}{d}$$

$$d = \sqrt{\alpha \cdot t_0} = \sqrt{\frac{k}{\rho c_p} \cdot t_0}$$

$$T_g c_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} + \frac{k_g \cdot (T_g - T_{int})}{\sqrt{\frac{k_g}{\rho_g c_{pg}} \cdot t_0}} = T_0 c_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} + \frac{k_l \cdot (T_{int} - T_0)}{\sqrt{\frac{k_l}{\rho_l c_{pl}} \cdot t_0}}$$

$$\sqrt{t_0} T_g c_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} + \sqrt{k_g \rho_g c_{pg}} \cdot (T_g - T_{int}) = \sqrt{t_0} T_0 c_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} + \sqrt{k_l \rho_l c_{pl}} \cdot (T_{int} - T_0)$$

$$T_{int} \left(\sqrt{k_l \rho_l c_{pl}} + \sqrt{k_g \rho_g c_{pg}} \right)$$

$$= T_g \left(\sqrt{k_g \rho_g c_{pg}} + \sqrt{t_0} c_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} \right) + T_0 \left(\sqrt{k_l \rho_l c_{pl}} + \sqrt{t_0} c_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} \right)$$

$$T_{int} = \frac{T_g \left(\sqrt{k_g \rho_g c_{pg}} + \sqrt{t_0} c_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} \right) + T_0 \left(\sqrt{k_l \rho_l c_{pl}} + \sqrt{t_0} c_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} \right)}{\left(\sqrt{k_l \rho_l c_{pl}} + \sqrt{k_g \rho_g c_{pg}} \right)}$$

Bezdimensionalizācija:

$$\bar{T}_{int} = \frac{T_{int}}{T_0} = \frac{1}{\left(\sqrt{(K\rho C_p)_g} + \sqrt{(K\rho C_p)_l} \right)}$$

$$\cdot \left[\sqrt{(K\rho C_p)_l} - \sqrt{t_0} c_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} + \bar{T}_g \left(\sqrt{(K\rho C_p)_g} + \sqrt{t_0} c_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r_{r=R}} \right) \right]$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \bar{C} C_i}{\partial \xi \bar{R} R_0} \Big|_{\xi=1} = \frac{C_i}{\bar{R} R_0} \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1}$$

$$n_g = \sqrt{(K C_p)_g} \cdot \rho_0$$

$$n_l = \sqrt{(K \rho C_p)_l}$$

$$n_{tg} = \sqrt{t_0} c_{pg} D \cdot \frac{C_i}{R_0}$$

$$n_{tl} = \sqrt{t_0} c_{pl} D \cdot \frac{C_i}{R_0}$$

$$\bar{T}_{int} = \frac{1}{(n_g \sqrt{\bar{\rho}} + n_l)}$$

$$\cdot \left[n_l - n_{tl} \cdot \frac{1}{\bar{R}} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} + \bar{T}_g \left(n_g \sqrt{\bar{\rho}} + n_{tg} \cdot \frac{1}{\bar{R}} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \Big|_{\xi=1} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \overline{T_{int}} &= \frac{1}{\left(\sqrt{(K\rho C_p)_g} + \sqrt{(K\rho C_p)_l} \right)} \\ &\quad \cdot \left[\sqrt{(K\rho C_p)_l} - \sqrt{t_0} C_{pl} D \frac{\partial C}{\partial r} (r = R) \right. \\ &\quad \left. + \overline{T_g} \left((K\rho C_p)_g + \sqrt{t_0} C_{pg} D \frac{\partial C}{\partial r} (r = R) \right) \right] \\ \overline{T_{int}} &= \frac{1}{n_g \cdot \sqrt{\bar{\rho}} + n_l} \cdot \left(n_l - n_{tl} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} (\xi = 1) + \overline{T_g} \left(n_g \cdot \sqrt{\bar{\rho}} + n_{tg} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} (\xi = 1) \right) \right) \end{aligned}$$

1.6. Vienādojums gāzes koncentrācijai uz burbuļa sienas

$$C_{int} = C_{sat} \frac{P_g}{P_\infty}$$

$$\overline{C_{int}} = \frac{C_{int}}{C_i}$$

$$\overline{P_g} = \frac{P_g}{P_0}$$

$$\overline{P_g} = \bar{\rho} \cdot \overline{T_g}$$

$$P_g = P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{T_g}$$

$$\overline{C_{int}} \cdot C_i = C_{sat} \cdot \frac{(P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{T_g})}{P_\infty}$$

$$\overline{C_{int}} = \frac{C_{sat}}{C_i} \cdot \frac{P_0 \cdot \bar{\rho} \cdot \overline{T_g}}{P_\infty}$$

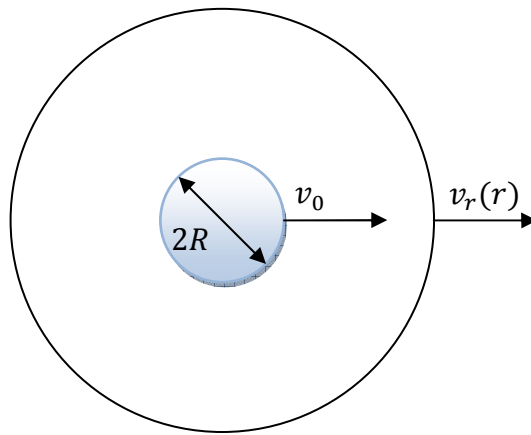
1.7. Konvekcijas – difūzijas vienādojums gāzei šķidrumā tuvu pie burbuļa

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r \nabla C = D \Delta C, r > R$$

R – burbuļa rādiuss

\dot{R} – burbuļa rādiusa izmaiņas ātrums.

v_r – šķidruma ātrums (sfēriskās simetrijas dēļ – tika radiālā komponente) (**Kļūda! Nav atrasts atsauces avots.. att.**)



Ātrumi šķidrumā pie burbuļa

Šķidruma ātrums pieņemot sfērisko simetriju ir atkarīgs tikai no r . Lai noskaidrotu ātruma izteiksmi, var izmantot masas saglabāšanās likumu, proti šķidruma plūsmai, ko izraisa burbuļa kustība tieši blakus šķidruma sienīņai jābūt vienādei ar šķidruma plūsmu tālu no burbuļa.

$$\int_S v_r(r) \cdot dS = \int_{S_0} v_0 \cdot dS$$
$$v_r(r) \cdot 4\pi \cdot r^2 = v_0 \cdot 4\pi \cdot R^2$$

Uz virsmas šķidruma ātrums ir vienāds ar burbuļa rādiusa izmaiņu ātrumu $v_0 = \dot{R}$

$$v_r(r) = \frac{\dot{R} \cdot R^2}{r^2}$$

Sfēriskajā koordinātu sistēmā, pieņemot pilnīgu sfērisko simetriju:

$$\nabla = \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -v_r \nabla C + D \Delta C = -\frac{\dot{R} \cdot R^2}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} C + \left(D \frac{\partial^2}{\partial r^2} + D \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) C =$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\dot{R} \cdot R^2}{r^2} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} + D \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + D \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r}$$

Pāreja uz nekustīgo režģi. Tā kā burbuļa rādiuss R ir atkarīgs no laika, r koordināte tiek normēta uz burbuļa rādiusu attiecīgajā laika brīdī:

$$\xi = \frac{r}{R}$$

$$r = \xi R$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{R}$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial C}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{r}{R^2} \dot{R} = -\frac{\xi R \dot{R}}{R^2}$$

$$-\frac{\xi R \dot{R}}{R^2} \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\dot{R} \cdot R^2}{r^2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi} + D \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + D \frac{2}{r} \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial C}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{R \dot{R}}{\xi^2 \cdot R^2} + \frac{R \dot{R}}{R^2} \xi + D \frac{2}{r} \frac{1}{R} \right) \frac{\partial C}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{R^2} \left[D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{R \dot{R}}{\xi^2} + R \dot{R} \xi + D \frac{2R}{r} \right) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right]$$

Bezdimensionalizācija R tiek normēts uz burbuļa sākotnējo rādiusu R_0 , laiks t tiek normēts uz perioda ilgumu t_0 , un koncentrācija C tiek normēta uz gāzes koncentrāciju tālu no burbuļa C_i

$$\bar{R} = \frac{R}{R_0}$$

$$\dot{R} = \frac{d\bar{R}R_0}{dt t_0} = \frac{R_0}{t_0} \frac{d\bar{R}}{d\bar{t}} = \frac{R_0}{t_0} \dot{\bar{R}}$$

$$\bar{C} = \frac{C}{C_i}$$

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i \partial \bar{C}}{t_0 \partial \bar{t}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R^2} \left[D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\dot{R} \cdot R}{\xi^2} + R \dot{R} \xi + D \frac{2}{\xi} \right) \frac{\partial C}{\partial \xi} \right] = \\ & = \frac{1}{\bar{R}^2 R_0^2} \left[D \frac{C_i \partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{R_0 \dot{\bar{R}} \cdot \bar{R} R_0}{t_0 \xi^2} + \frac{R_0^2}{t_0} \bar{R} \dot{\bar{R}} \xi + D \frac{2}{\xi} \right) \frac{C_i \partial \bar{C}}{\partial \xi} \right] = \\ & \frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{R}^2} \left[\frac{D t_0}{R_0^2} \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\dot{\bar{R}} \bar{R}}{\xi^2} + \bar{R} \dot{\bar{R}} \xi + \frac{D t_0}{R_0^2} \frac{2}{\xi} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \right] \end{aligned}$$

Ieviešot:

$$D^* = \frac{D t_0}{R_0^2}$$

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{\bar{R}^2} \left[D^* \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial \xi^2} + \left(-\frac{\dot{\bar{R}} \bar{R}}{\xi^2} + \bar{R} \dot{\bar{R}} \xi + D^* \frac{2}{\xi} \right) \frac{\partial \bar{C}}{\partial \xi} \right]$$

2. PIELIKUMS. DIVU BURBUĻU SAVSTARPĒJĀ PIEVILKŠANĀS BJERKNES SPĒKA IEDARBĪBĀ.

Pirmā burbuļa radītais spiediena lauks uz otro burbuli radīs spēku (virzienā prom no pirmā burbuļa):

$$F_{12} = V_2 \frac{\rho_L}{d^2} (2 \cdot R_1 \cdot \dot{R}_1^2 + R_1^2 \cdot \ddot{R}_1)$$

Pieņemot, ka abi burbuļi ir vienādi un atmetot indeksus, spēku ar ko burbuļi pievelkas var aprakstīt kā:

$$F_{12} = -V \frac{\rho_L}{d^2} (2 \cdot R \cdot \dot{R}^2 + R^2 \ddot{R}).$$

Pieņemot, ka abi burbuļi identiski kustas viens otram pretim un novietojot koordinātu sistēmas centru vidū starp abiem burbuļiem, ir iespējams reducēt šo uzdevumu uz viena burbuļa kustību konstantā spēka laukā. Attālums starp burbuļiem ir $2 \cdot x(t)$. Tā kā burbuļiem inercē galvenā loma ir piesaistītās masas spēkam (6 p. 117), tad, neņemot vērā berzes spēkus, burbuļa pārvietošanos apraksta vienādojums (mīnuszīme vienādojumā neparādās, jo pozitīvs pirmā veida Bjercknes spēks darbosies negatīvajā virzienā):

$$\frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot \ddot{x}(t) = \frac{\rho \cdot R (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})}{(2x(t))^2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Atdalot no burbuļa rādiusa atkarīgo daļu un uzskatot, ka spēkā ir divas atšķirīgas laika skalas un burbuļa rādiusa svārstības notiek daudz ātrāk nekā burbuļa pārvietošanās un kustību nosaka pa periodu vidējotais (sk. zemāk) Bjercknes spēka loceklis:

$$k = \frac{8\pi R^4 (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})}{3V}.$$

Tādā gadījumā Bjercknes spēku iespējams uzrakstīt kā

$$F = \frac{k}{4x^2},$$

un ar šo spēku saistītā enerģija ir

$$F = -\nabla E, E = \frac{k}{4x}$$

vienādojumu iespējams uzrakstīt kā

$$\frac{1}{2} \ddot{x}(t) = \frac{k}{(2x(t))^2}.$$

Ja burbuļi sākumā atrodas attālumā $2x_0$ un ir nekustīgi, tad sākumnosacījumi uzrakstāmi kā:

$$x(0) = -x_0;$$

$$\dot{x}(0) = 0 \rightarrow E(0) = \frac{k}{4x_0}$$

No klasiskās mehānikas zināms, ka šādā gadījumā laiku kā funkciju no koordinātes iespējams izteikt kā [39 p.25]:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{k}{4x_0} - \frac{k}{4x}}} + c_2 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} + c_2 \end{aligned}$$

Nointegrējot šo integrāli, un ņemot vērā to, ka $x(0)=0$

Integrāli $\int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}$ iespējams nointegrēt, ieviešot substitūciju:

$$y = \frac{1}{x}; dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \cdot \frac{2}{\sqrt{-b}} \cdot \arctan \frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{-b}}, ja b < 0$$

[40]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}} = - \int \frac{dy}{y^2 \sqrt{-y - \frac{1}{x_0}}} = \frac{\sqrt{-y - \frac{1}{x_0}}}{-\frac{1}{x_0} y} + \frac{-1}{-2 \frac{1}{x_0}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-y - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}}$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{-\frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{1}{2 \frac{1}{x_0}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \right) + c_2$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(-1 \cdot \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} \cdot x \cdot x_0 + x_0 \cdot \sqrt{x_0} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \right) + c_2$$

Izmantojot sākuma nosacījumus:

Kad $x = x_0, t = 0$

$$c_2 = 0$$

$$t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \left(-1 \cdot \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} \cdot x \cdot x_0 + x_0 \cdot \sqrt{x_0} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \right)$$

Kad $x=0$ (x tiecas uz nulli no kreisās puses),

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \cdot \lim_{x \rightarrow -0} \left(-1 \cdot \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} \cdot x \cdot x_0 + x_0 \cdot \sqrt{x_0} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} \right) = \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} \cdot x \cdot x_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \lim_{x \rightarrow -0} x_0 \cdot \sqrt{x_0} \cdot \arctan \frac{\sqrt{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}}{\sqrt{\frac{1}{x_0}}} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k}} \cdot x_0 \cdot \sqrt{x_0} \cdot \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}} \cdot x = \lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{-\frac{x^2}{x} + \frac{x^2}{x_0}} = \lim_{x \rightarrow -0} \sqrt{-x + \frac{x^2}{x_0}} = 0$$

Tātad burbuļu saskriešanās laiks ir izsakāms kā:

$$t(x \rightarrow 0) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x_0 x_0}}{\sqrt{k}},$$

Un pieņemot, ka burbuļu saskriešanās varbūtība S ir apgriezti proporcionāla laikam, tā uzrakstāma kā

$$S \sim \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{x_0 x_0}}$$

Jautājums par to, kā vidējot k locekli laikā, nav vienkārši atbildams. Tā kā viena perioda laikā otrā veida Bjerkes spēks var mainīties, tāpat kā burbuļa rādiuss, kas nosaka burbuļa inerces īpašības, tad atkarībā no vidējošanas veida, k vērtības var spēcīgi mainīties. Jāņem vērā arī tas, ka šādā tuvinājumā netiek ņemta vērā viena burbuļa radītā spiediena lauka ietekme uz otra burbuļa svārstībām, kā arī tas, ka spiediena vilnis, kas realizē otrā veida Bjerkes spēku pārvietojas ar galīgu ātrumu, līdz ar to burbuļiem kas atrodas tālu viens no otra spēka vērtības perioda laikā var nobīdīties fāzē pret rādiusa izmaiņas vērtībām.

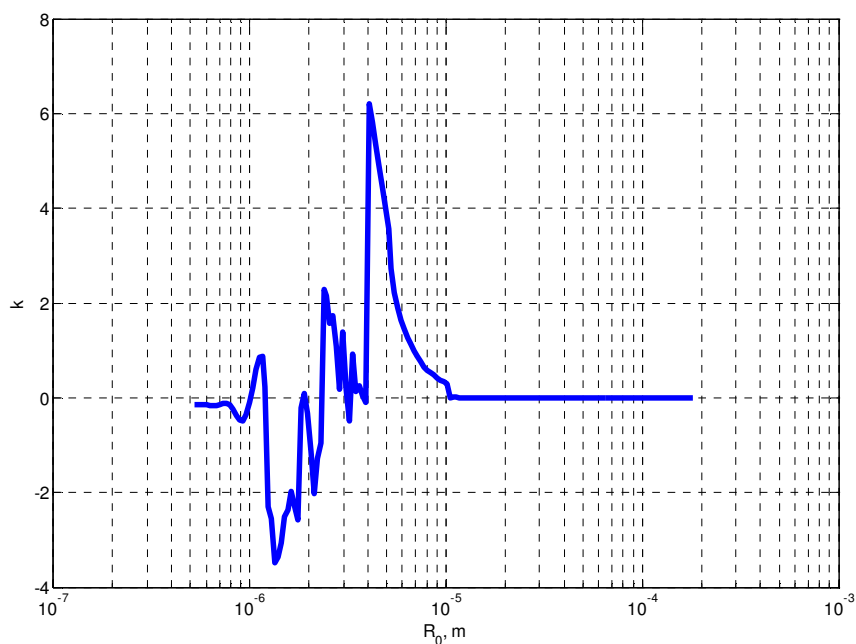
Definējot divus dažādus koeficientu veidus:

$$\bar{k} = \langle 2\bar{R}(2\dot{\bar{R}}^2 + \bar{R}\ddot{\bar{R}}) \rangle$$

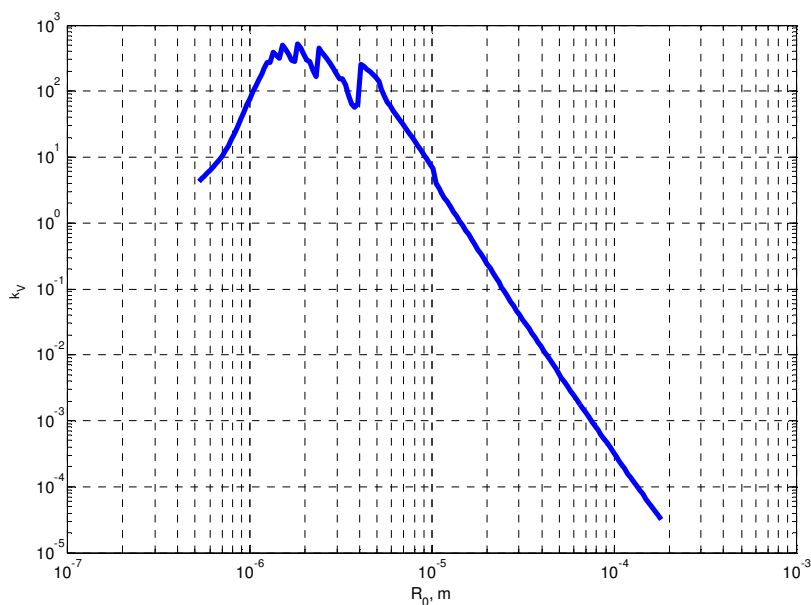
un

$$\bar{k}_V = \frac{\langle 2\bar{R}(2\dot{\bar{R}}^2 + \bar{R}\ddot{\bar{R}}) \cdot \bar{V} \rangle}{\langle \bar{V} \rangle},$$

kā arī salīdzinot abas koeficientu vērtības pie raksturīgajiem burbuļu parametriem, redzams ka koeficienta $\overline{k_V}$ uzvedība atbilst fizikālajai interpretācijai – tas ir pozitīvs, ar izteiktu maksimumu rezonanses rādiusa tuvumā.



\overline{k} kā funkcija no sākotnējā burbuļa rādiusa



$\overline{k_V}$ kā funkcija no rezonanses rādiusa

$\overline{k_V}$ dimensionālā forma izsakāma kā:

$$k_V = \overline{k_V} \cdot \frac{R_0^3}{t_0^2}$$

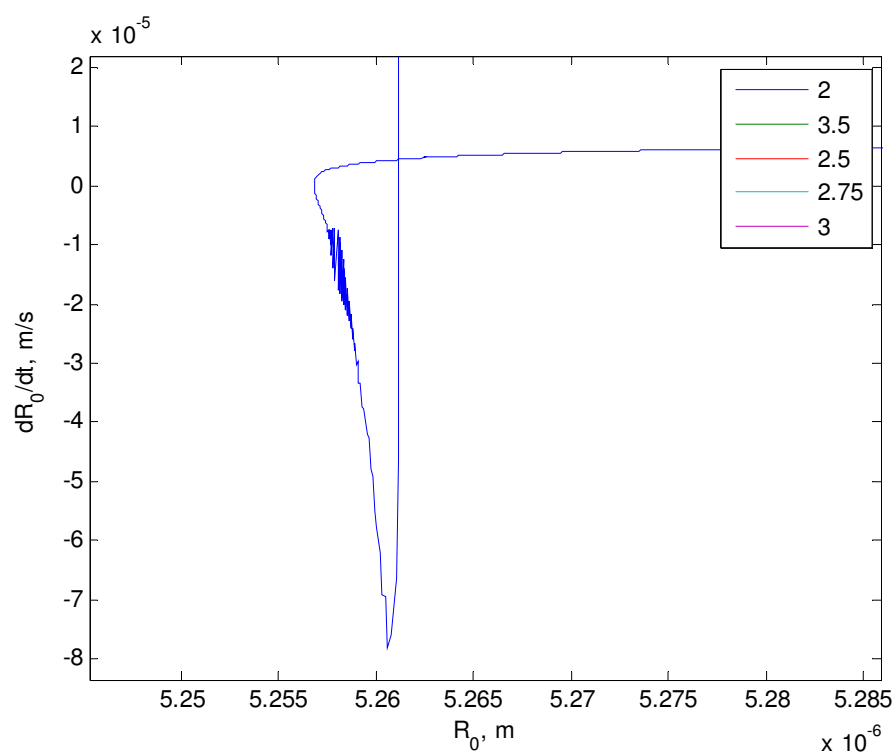
3. PIELIKUMS. IZMANTOTĀS GALĪGĀS DIFERENCES:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

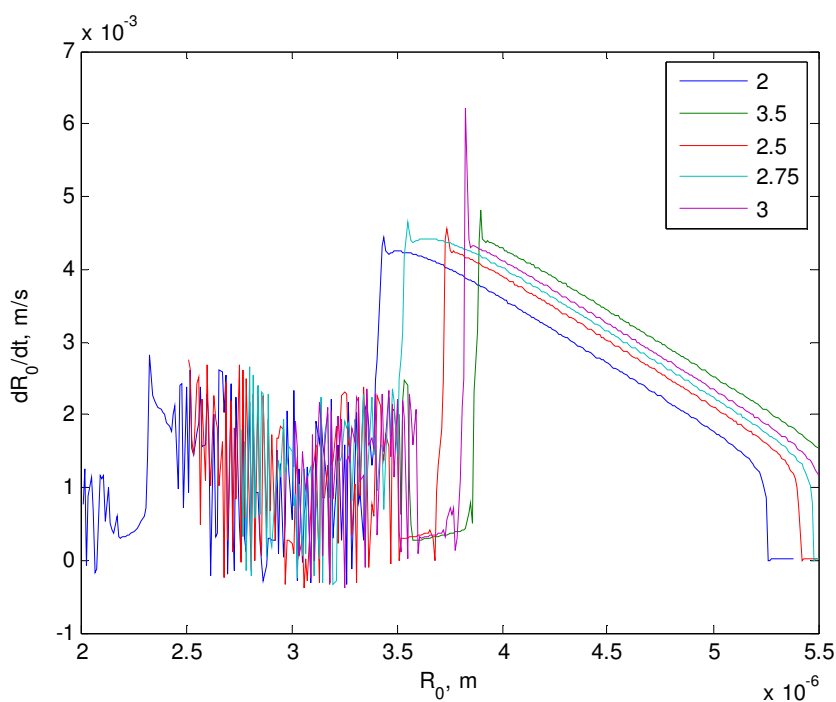
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3 \cdot u_i + 4 \cdot u_{i+1} - 1 \cdot u_{i+2}}{\Delta x}$$

Formulas ņemtas no avota [41].

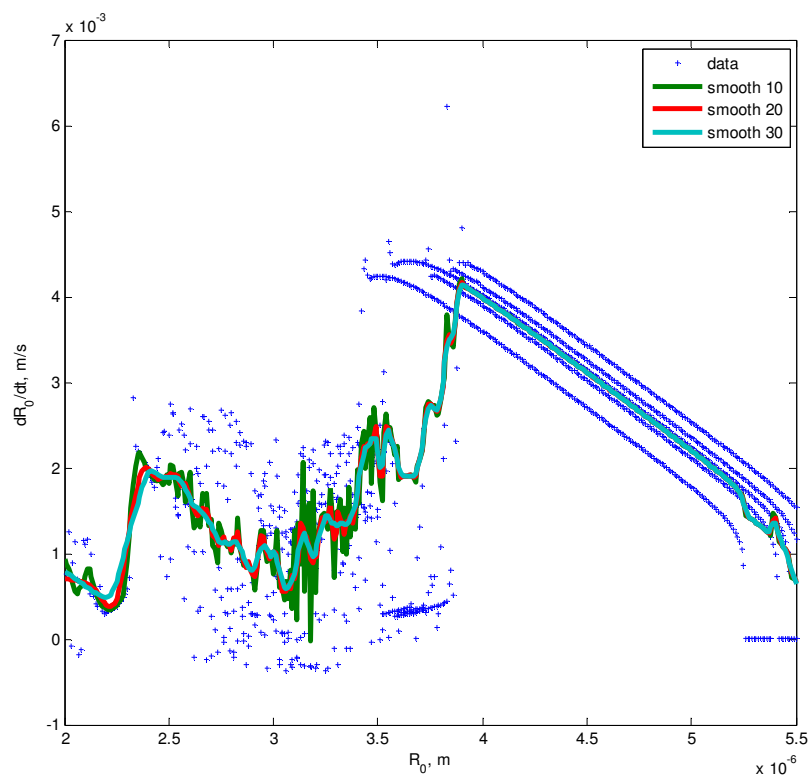
4. PIELIKUMS. KELLERA – MIKŠA – MEIDANI MODEĻA REZULTĀTI.
REKTIFICĒTAJAI DIFŪZIJAI ATBILSTOŠO DATU IEGŪŠANA.



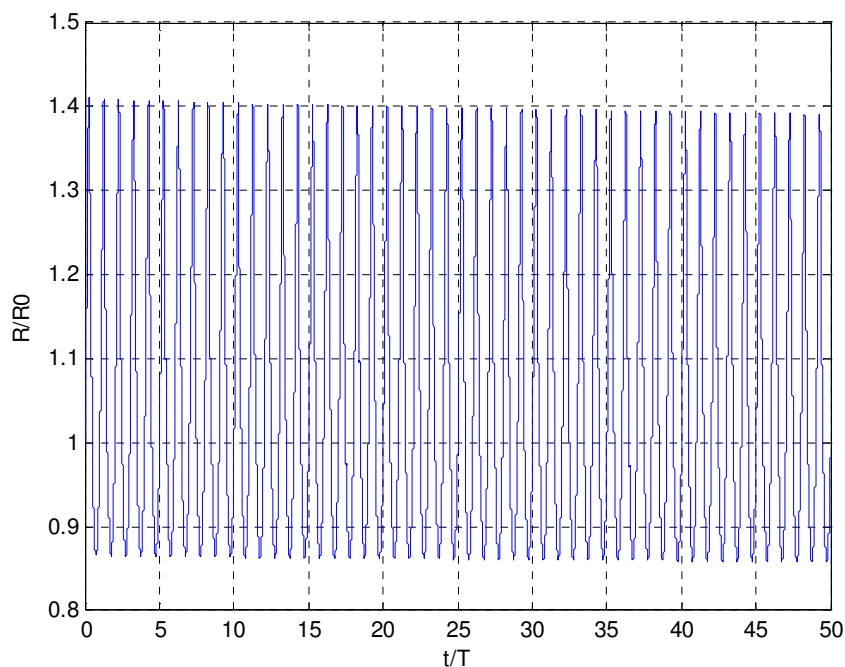
Burbuļa līdzsvara rādiusa izmaiņas ātrums kā funkcija no burbuļa tā brīža rādiusa, $R_0 = 2.00 \mu\text{m}$. Novērojama lokāli negatīva rektificētās difūzijas vērtība, un tai sekojoša burbuļa rādiusa samazināšanās, kas noved pie cilpveida trajektorijas fāzu telpā.



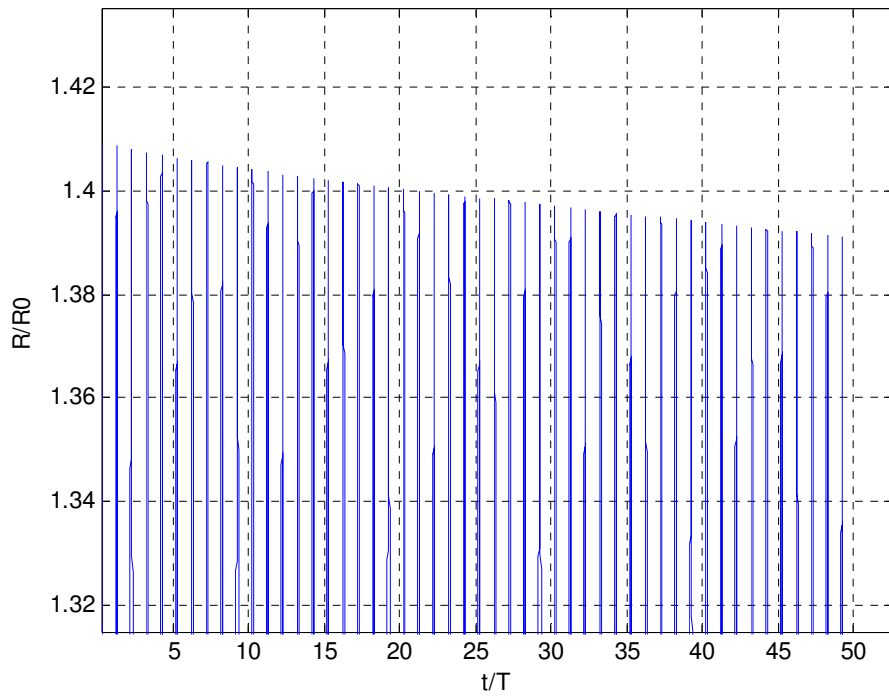
Dati no 4.2.att., kas interpolēti uz punktu masīvu $2...6 \mu\text{m}$ ar soli $0.01 \mu\text{m}$, izmantojot Matlab funkciju `interp1` ar tuvākā kaimiņa (*nearest neighbour*) metodi.



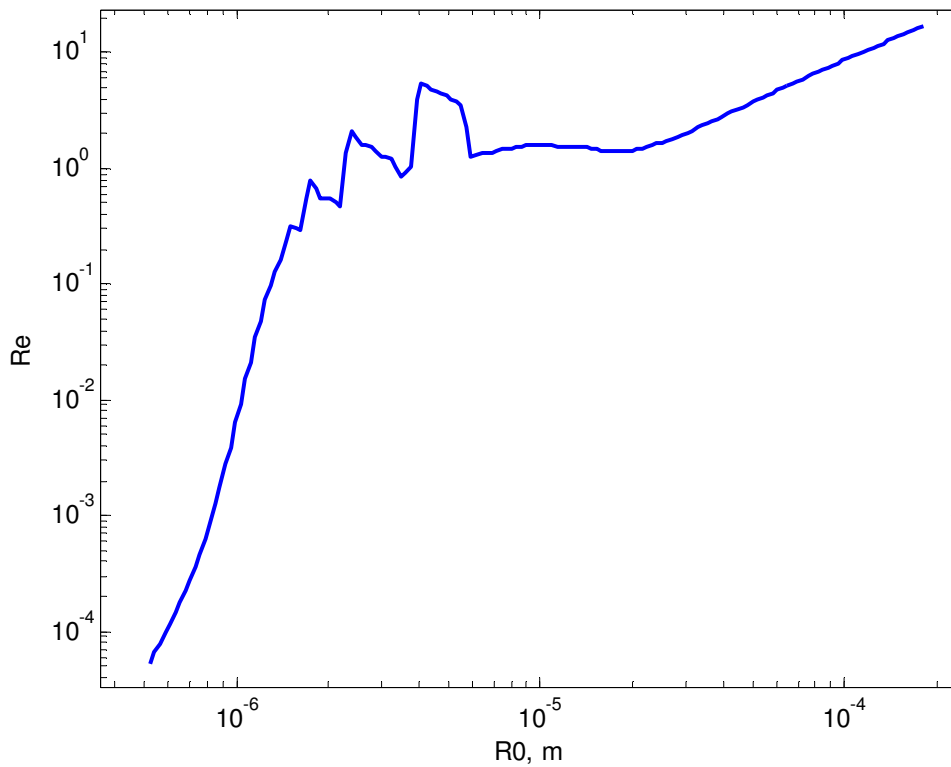
Interpolētie dati attēloti kopā ar atbilstošajām nogludinātām līknēm. Gļudināšana veikta izmantojot Matlab funkciju „smooth” ar lokālu pirmās kārtas aproksimāciju, gļudināšanas intervāls – 10, 20 un 30 punkti.



Burbuļa ar sākotnējo izmēru 0.8 μm svārstības, aprēķinātas izmantojot Kellera – Mikša – Meidani modeli.



Burbuļa ar sākotnējo izmēru $0.8 \mu\text{m}$ svārstības, aprēķinātas izmantojot Kellera – Mikša – Meidani modeli. Palielināts fragments.



Ar pirmā veida Bjercknes spēku saistītajam burbuļu galīgajam ātrumam atbilstošais Reynolds skaits.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA

1. **Iida, Y, et al.** Bubble population phenomena in sonochemical reactor: II. Estimation of bubble size distribution and its number density by simple coalescence model calculation. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2010, Vol. 17, pp. 480-486.
2. **Meidani, A. R. N. and Hasan, M.** Mathematical and physical modelling of bubble growth due to ultrasound. *Applied Mathematical Modelling*. 2004, Vol. 28, 4, pp. 333-351.
3. **Gale, Glenn W and Busnaina, Ahmed A.** Roles of Cavitation and Acoustic Streaming in Megasonic Cleaning. *Particulate Science and Technology*. 1999, Vol. 17, pp. 229-238.
4. **Deymier, P A, et al.** Streaming and removal forces due to second-order sound field during megasonic cleaning of silicon wafers. *Journal of Applied Physics*. 2000, Vol. 88, 11, pp. 6821.
5. **Kim, W, et al.** Mechanism of particle removal by megasonic waves. *Applied Physics Letters*. 2009, Vol. 24, pp. 081908.
6. **Leighton, T G.** *The Acoustic Bubble*. London: Academic Press, 1994.
7. **Lauterborn, W and Thomas, K.** Physics of bubble oscillations. *Reports on Progress in Physics*. 2010, Vol. 73, pp. 6501.
8. **Sīle, T.** Ultraskaņas kavitācijas radīto burbuļu dinamikas matemātiskā modelēšana. Bakalaura darbs. Rīga: Latvijas Universitāte, 2009. gads.
9. **Pankaj, S and Ashokummar, A.** *Theoretical and Experimental Sonochemistry Involving Inorganic Systems*. Springer, 2011.
10. **Matula, T J and Crum, L A.** Evidence for Gas Exchange in Single-Bubble Sonoluminescence. *Physical Review Letters*. 1998, Vol. 80, 4, pp. 865.
11. **Mettin, R and Doinikov, A A.** Translational instability of a spherical bubble in a standing ultrasound wave. *Applied Acoustics*. 2009, Vol. 70, pp. 1330-1339.
12. **Doinikov, A A.** Translational motion of two interacting bubbles in a strong acoustic field. *Physical Review E*. 2001, Vol. 64, pp. 026301.
13. **Lee, J, et al.** Development and optimization of acoustic bubble structures at high frequencies. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2011, Vol. 18, 1, pp. 92-98.
14. **Camara, C, Putterman, S and Kirilov, E.** Sonoluminescence from a Single Bubble Driven at 1 Megahertz. *Physical Review Letters*. 2004, Vol. 92, 12, pp. 124301.
15. **Brotchie, A, Grieser, F and Ashokkumar, M.** Effect of Power and Frequency on Bubble-Size Distributions in Acoustic Cavitation. *Physical Review Letters*. 2009, Vol. 102, pp. 084302.

16. **Iida, Y, et al.** Bubble population phenomena in sonochemical reactor: I Estimation of bubble. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2010, Vol. 17, pp. 473-479.
17. **Brenner, M P, Hilgenfeldt, S and Lohse, D.** Single-bubble sonoluminescence. *Reviews of Modern Physics*. 2002, Vol. 74, pp. 425.
18. **Ahmed, D.** A millisecond micromixer via single-bubble-based acoustic streaming. *Lab on a Chip*. 9, 2009, pp. 2738-2741.
19. **Khachatryan, A K, et al.** Graphite-to-diamond transformation induced by ultrasound cavitation. *Diamond & Related Materials*. 2008, Vol. 17, pp. 931-936.
20. **Hoff, L.** *Acoustic characterization of contrast agents for medical ultrasound imaging*. Springer, 2001. pp. 207.
21. **Epstein, P S un Plesset, M S.** On the Stability of Gas Bubbles in Liquid- Gas Solutions. *The Journal of Chemical Physics*. 1950, Vol. 18, 11, pp. 1505.
22. **Morch, K A.** Cavitation nuclei: Experiments and theory. *Journal of Hydrodynamics*. 2009, Vol. 2, 1, pp. 176-189.
23. **Brennen, C E.** *Cavitation and Bubble Dynamics*. New York: Oxford University Press, 1995.
24. **Borkent, B M, et al.** Nucleation threshold and deactivation mechanisms of nanoscopic cavitation nuclei. *Physics of Fluids*. 2009, Vol. 21, p. 102003.
25. **Luther, S, et al.** Observation of acoustic cavitation bubbles at 2250 frames per second. *Ultrasonics Sonochemistry*. 2001, Vol. 8, pp. 159-162.
26. **Morch, K A.** Reflections on cavitation nuclei in water. *Physics of Fluids*. 2007, Vol. 19, pp. 072104.
27. **Mettin, R, et al.** Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field. *Physical Review E*. 1997, Vol. 56, 3, pp. 2924-2931.
28. **Patro, R, Leifer, I and Bowyer, P.** Better bubble process modeling: Improved bubble hydrodynamics parameterization. [book auth.] M Donelan. *Gas Transfer and Water Surfaces*. Washington, D.C.: AGU, 2002.
29. **Parlitz, U, et al.** Spatio-temporal dynamics of acoustic cavitation bubble clouds. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. 1999, Vol. 357, pp. 313-334.
30. **Verwer, J G, et al.** A Moving-Grid Method for One-Dimensional PDEs Based on the Method of Lines. [book auth.] J E Flaherty, et al. *Adaptive Methods for Partial Differential Equations*. s.l. : SIAM, 1989, pp. 160.
31. **Кикоин, И К.** *Таблицы физических величин*. Москва : Атомиздат, 1976. стр. 1008.

32. Wolfram Alpha. [Tiešsaiste] [Citēts: 2011. gada 17. maijs.] <http://www.wolframalpha.com/input/?i=thermal+conductivity+of+moist+air>.
33. **Chadderton, D V.** *Building services engineering*. New York : Taylor & Francis, 2007. lpp. XV.
34. *National Institute of Standards and Technology Chemistry WebBook*. [Tiešsaiste] [Citēts: 2011. gada 17. maijs.] <http://webbook.nist.gov/cgi/inchi/InChI%3D1S/O2/c1-2>.
35. *National Institute of Standards and Technology Chemistry WebBook*. [Tiešsaiste] [Citēts: 2011. gada 17. maijs.] <http://webbook.nist.gov/cgi/inchi/InChI%3D1S/N2/c1-2>.
36. **Hirayama, S, et al.** Sonoluminescence measurement of 1MHz ultrasonic cavitation and effect of dissolved gases. *Acoust. Sci. & Tech.* 2008., Vol. 29, pp. 345-350.
37. **Sīle, T and Virbulis, J.** Ultraskaņas akustiskajā laukā kavitējošu gāzes burbuļu augšanas modelēšana. *LU 68. Konference*. 4. februāris 2010.
38. **Sīle, T, et al.** Modelling of cavitation and bubble growth during ultrasonic cleaning process. *Modelling for Material Processing*. Riga., 2010. 16-17. September.
39. **Landau, L D and Lifshitz, E M.** *Mechanics. Third Edition*. Oxford: Butterworth - Heinemann, 1976.
40. **Бронштейн, И Н и Семендяев, К А.** *Справочник по математике*. Москва: Наука, 1964. стр. 355.
41. **Lomax, H, Pulliam, T H and Zingg, D W.** *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2001.

Maģistra darbs „Augstfrekvences akustiskās tīrīšanas procesos iesaistīto kavitācijas burbuļu izmēru sadalījuma matemātiskā modelēšana” izstrādāts LU Fizikas un matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums izveidots pastāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autore: Tija Sīle

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: Dr. Phys. Jānis Virbulis

Recenzents: profesors, Dr.h.Phys. Andrejs Cēbers

Darbs iesniegts Fizikas nodaļā

Metodiķe: Ārija Deme

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

Komisijas sekretārs: docents V. Ivins