РИЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Д. А. Б О Ж Е

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук
профессор А. Д. МЫШКИС

1 9 7 0

ВВЕДЕНИЕ

В самом конце прошлого столетия знаменитой докторской диссертацией А.М. Ляпунова " Общая задача об устойчивости движения" /I/ во всей общности была поставлена задача об устойчивости движения и были предложены методы ее решения. Эта работа явилась отправным пунктом дальнейших исследований по теории устойчивости движения. Вопросам устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены многие книги и статьи.

Наряду с обыкновенными дифференциальными уравнениями в 40-х годах начались исследования уравнений в полных дифференциалах. Их называют также уравнениями Пфаффа, многомерными уравнениями или уравнениями с многомерным временем. Начало теории уравнений в полных дифференциалах обычно связывают с именами А. Мичала и В. Элконина /2/, хотя условия полной интегрируемости были известны до их работ. С некоторым упрощением результаты Мичала и Элконина даются в статье М.К. Гавурина /3/. Изложение линейной теории уравнений в полных дифференциалах дано в монографии Р.и Ф. Неванлинна /4/. Изучению вопросов уравнений в полных дифференциалах посвящены работы А.И. Перова (/5/, /6/ и другие). Этим вопросам занимались также Б. Пини, В.В. Немыцкий, Е.А. Барбашин, И.С. Куклес, П.Л. Хаимова, А.И. Рейзинь, И.П. Карклинь.

Естественно был поставлен вопрос о распространении теории устойчивости решения на системы в полных дифференциалах.

В 60-х годах появились работы В.Г. Егорова /7/, /8/, в которых рассматривались вопросы устойчивости решений систем дифференциальных уравнений в полных дифференциалах в виде

$$dx = P(u,x)du + Q(v,x)dv, \tag{0.1}$$

где x - неизвестная n-мерная векторфункция аргументов u и v; $P(u, x)$ и $Q(v, x)$ - n-мерные векторфункции, определены и непрерывны вместе с их производными по x в области H : $u \geq 0$, $v \geq 0$, $|x| \leq h$ и удовлетворяют в этой области условиям интегрируемости

$$\frac{\partial P}{\partial x} Q = \frac{\partial Q}{\partial x} P. \tag{0.2}$$

Было дано определение устойчивости и асимптотической устойчивости решения системы и рассмотрен вопрос об устойчивости нулевого решения системы (0.I) в зависимости от устойчивости решений систем

$$dx = P(u,x)du$$

и

$$dx = Q(v,x)dv.$$

Система (0.I) является специальным видом общей системы в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x)dt^i, \tag{0.3}$$

где $a^i(t,x) \in C^{1,1}_{t,x}$ в области

$$Z = \mathcal{Y}^k_t \times G^n_x = \{0 \leq t^i < \infty,\ i=1,\dots,k\} \times \{|x| \leq H\}.$$

Изучению вопросов устойчивости такой системы посвящена настоящая работа.

Ряд утверждений об асимптотическом поведении (в том числе об устойчивости) решений линейных систем в полных дифференциалах с постоянными или периодическими коэффициентами доказан в работах Д. Петровану /9/ и /10/.

В первом параграфе первой главы даются определения разного вида устойчивости (асимптотической, равномерной, экспоненциальной и т.п.) для систем уравнений в полных дифференциалах (опр.1 - 5). Доказываются прямые и обратные теоремы второго метода Ляпунова для систем вида (0.3) (теоремы 1 - 10). Дается также определение устойчивости относительно части координат искомого вектора (устойчивость по отношению к компоненте) и прямая и обратная теоремы. Приводится пример, показывающий, что свойство устойчивости для уравнений в полных дифференциалах существенно зависит от области, в которой решение рассматривается, т.е. незначительным изменением области неустойчивое решение может стать устойчивым, даже асимптотически устойчивым. Здесь даются также определения и теоремы устойчивости и асимптотической устойчивости в целом.

В параграфе 2 вместе с системой (0.3) рассматривается "возмущенная" система

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (a^i(t,x) + \omega^i(t,x))\,dt^i, \qquad (0.4)$$

дается определение устойчивости при постоянно действующих возмущениях и доказываются некоторые теоремы устойчивости.

В параграфах 3 и 4 обобщаются определения свойства конвергенции системы и диссипативность на системы вида (0.3) и приводятся теоремы с условиями, обеспечивающими эти свойства. Результаты первой главы не содержат существенных изменений по сравнению с обыкновенными уравнениями, кроме примера о зависимости понятия устойчивости от области. Основные результаты опубликованы в статьях /22/, /33/ и /34/.

Во второй главе рассмотрены некоторые вопросы, характерные именно многомерным системам. В параграфе I для пространства аргументов $t=(t^1,\ldots,t^k)$ вводится понятие зоны эмиссии из точки t. Параграф 2 содержит определения и теоремы различных видов устойчивости в зоне эмиссии. Здесь понятие устойчивости существенно связано с видом удаления точки $(t^1,\ldots,t^k)$ на бесконечность (взамен процесса $t_0 \le t \to \infty$ для обыкновенных уравнений и процесса $t^i \ge t_0^i$, $i=1,\ldots,k$, $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$, использованного в первой главе). В параграфе 3 рассматривается обратная задача - нахождение зоны, в которой решение системы устойчиво, по заданной системе. Вопрос решается для случая линейной системы

$$dx = \sum_{i=1}^{k} A^i(t)\, x\, dt^i. \tag{0.4}$$

При $k = 2$; $n = I$ и $n = 2$ получены конечные формулы определения зоны монотонной устойчивости и обычной устойчивости в случае постоянных матриц A^I, A^2 и дифференциальные уравнения линий плоскости t^1, t^2, ограничивающих зону устойчивости (монотонной устойчивости). Результаты параграфов I и 2 опубликованы в статье /23/.

В главе Ш понятие устойчивости рассмотрено применительно к линейным системам, имеющим ряд специфических особенностей. В параграфе I показано, что поведение решений линейной неоднородной системы в смысле устойчивости такое же, как поведение решений соответствующей однородной системы. В параграфе 2 рассмотрены вопросы устойчивости линейных однородных систем. Получены результаты, аналогичные случаю обыкновенных уравнений, как равносильность устойчивости нулевого решения и ограниченности всех решений и другие. В параграфе 3 рассмотрен частный случай линейных систем - системы с постоянными коэффициентами. Получены некоторые условия устойчивости систем с "малыми" нелинейностями. Параграф 4 посвящен линейным уравнениям с к-периодическими решениями. Приводятся результаты, аналогичные результатам Д. Петровану (/9/, /10/) о структуре решения и приводимости системы с к-периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами, что дает возможность применить к системам с периодическими коэффициентами результаты параграфа 3. Получено также условие существования к-периодического решения. Привлечением к рассмотрению уравнений в вариациях доказана теорема об асимптотической устойчивости к-периодического решения.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

I. Второй метод Ляпунова

Рассмотрим систему в полных дифференциалах

$$dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x)\,dt^i, \qquad (I.I)$$

где x - n-мерная векторфункция скалярных аргументов $t^1,\ldots,t^k$, совокупность которых обозначается через t; $a^i(t, x)$ - n-мерные векторфункции, непрерывно дифференцируемые по всем аргументам в области $Z = J_t^k \times D_x^n = \{t^i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, k;\ |x| \leqslant H\}$ и выполняются условия полной интегрируемости

$$\frac{\partial a^i}{\partial t^j} + \frac{\partial a^i}{\partial x} a^j = \frac{\partial a^j}{\partial t^i} + \frac{\partial a^j}{\partial x} a^i, \quad i,j = 1,\ldots,k. \qquad (I.2)$$

Под производной векторфункции $a^i(t, x)$ по вектору x понимается матрица $\left\| \frac{\partial a_s^\ell}{\partial x^r} \right\|$, в которой $\frac{\partial a_s^\ell}{\partial x^r}$ является элементом r-го столбца и s - ной строки, $s, r = 1,\ldots, n$; $\ell = 1,\ldots,$ k. Тогда в области Z при данных начальных условиях имеет место теорема существования и единственности решения /25/. Решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_0) = x_0$, будем обозначать $x(t;\ t_0, x_0)$.

Допустим, что $a^i(t, 0) = 0$ ($i = 1,\ldots,$k), т.е. система (2.I) имеет нулевое решение.

Определение I. Нулевое решение системы (I.I) называется устойчивым, если для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in J_t^k$ можно найти такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что из условия $|x_0| \leq \delta$ следует

$$|x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \; i=1,\dots,k.$$

Т е о р е м а I. Если существует функция $v(t,x)$, определенная в области $\bar{Z} = \mathcal{J}_t^k \times \bar{\mathcal{D}}_x^n = \mathcal{J}_t^k \times \{|x| \leq \bar{H}\}$, непрерывная по x в каждой точке (t, o), равная нулю при x = 0 и такая, что

$$v(t,x) \geq \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ определена и непрерывна при $x \in \bar{\mathcal{D}}_x^n$, $\alpha(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\alpha(0) = 0$, и для любых $t_0^i \geq 0$ (i = I,...,к), $|x_0| \leq \bar{H}$ функция

$$v^*(t) = v(t, x(t;t_0,x_0))$$

не возрастает в точке t_0 по t, то нулевое решение си - стемы (I.I) устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеем $0 < \varepsilon < h = \min(H, \bar{H})$. Обозначим $v_\varepsilon^t = \min\limits_{|x|=\varepsilon} \alpha(x)$. Из условий теоремы следует, что $v_\varepsilon^t > 0$. Рассмотрим точку t_0 и выберем $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ так, чтобы было $v(t_0,x_0) < v_\varepsilon^t$ при $|x_0| \leq \delta$. Выбор такого δ возможен в силу непрерывности $v(t,x)$ по x и условия $v(t,0) = 0$. Рассмотрим решение $x(t;t_0,x_0)$ при $|x_0| \leq \delta$ и допустим, что найдется такое t_1 $(t_1^i \geq t_0^i, \; i=1,\dots,k)$, при котором $|x(t_1;t_0,x_0)| = \varepsilon$. Тогда имеем $v^*(t_1) =$

$$= v(t_1, x(t_1;t_0,x_0)) \geq v_\varepsilon^t > v(t_0,x_0) = v(t_0, x(t_0;t_0,x_0)) = v^*(t_0).$$

Но это противоречит не возрастанию функции $v^*(t, x(t))$ по t. Следовательно, при всех $t^i \geq t_0^i$ (i = I, ..., к) имеем $|x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon$ и теорема доказана.

Примечание. Если функция $V(t,x)$ дифференцируема по всем аргументам, то условие ее не возрастания равносильно системе неравенств

$$\frac{\partial V^i}{\partial t^i} \overline{\overline{def}} \frac{\partial V^i}{\partial t^i} + grad_x V^i \cdot a^i \leq 0, \quad i = 1, \dots, k. \tag{I.3}$$

Определение 2. Устойчивое нулевое решение называется асимптотически устойчивым, если для каждой точки t_0 существует такое $\delta_0 = \delta_0(t_0) > 0$, что при условии $|x_0| \leq \delta_0$ будет $\lim\limits_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \geq t_0^i} x(t; t_0, x_0) = 0$.

Теорема 2. Если существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы I и такая, что для любого решения $x(t; t_0, x_0)$ при $|x| \leq \bar{H}$ функция $V^*(t)$ непрерывна и

$$\frac{\bar{\partial} V^i}{\partial t^i} \overline{\overline{def}} \limsup_{h_i \to 0} \frac{V^i(t+h^i, x(t+h^i)) - V^i(t, x(t))}{h_i} \leq -\alpha^i(x(t)), \tag{I.4}$$

где $h^i = (0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0)$, $i = 1, \dots, k$, и $\alpha^i(x)$, $i = 1, \dots, k$, определены и непрерывны при $|x| \leq \bar{H}$, $\alpha^i(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\alpha^i(0) = 0$, то нулевое решение системы (I.I) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Так как функция $V(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы I, то нулевое решение системы (I.I) устойчиво и достаточно доказать, что

$$\lim_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \geq t_0^i} x(t; t_0, x_0) = 0 \text{ при } |x_0| \leq \delta_0.$$

Пусть это не так и существует такое $\alpha > 0$, что $|x(t; t_0, x_0)| \geq \alpha$ при $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$, $t^i \geq t_0^i$. Обозначим $K^i = \min\limits_{\alpha \leq |x| \leq h} \alpha^i(x)$ и положим $T = \sum_{i=1}^{k} t_0^i + \dfrac{k V(t_0, x_0)}{\min\limits_i K^i}$.

Тогда при $\sum_{i=1}^{k} t^i > T$ $(t^i \geq t_0^i,\ i=1,\dots,k)$ хотя бы один раз будет $t^i > t_0^i + \frac{V(t_0,x_0)}{k^i}$. Но тогда $V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) < 0$ при $\sum_{i=1}^{k} t^i > T$, что противоречит положительности функции $V(t,x)$. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 3. Нулевое решение системы (I.I) называется равномерно устойчивым, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия $|x_0| < \delta$ следует

$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ при $t^i \geq t_0^i,\ i=1,\dots,k$ для любого $t_0 \in J_t^k$.

Т е о р е м а 3. Если существует функция $V(t,x)$, определенная в области Z и удовлетворяющая условиям:

а) $\alpha_1(x) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(x)$, где $\alpha_i(x)$ $(i=1,2)$ определены и непрерывны при $|x| \leq H$, $\alpha_i(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\alpha_i(0) = 0$.

б) для любого $t_0 \in J_t^k$ и $|x_0| < \bar{H}$ функция $V^*(t)$ не возрастает по t в точке t_0, то нулевое решение системы (I.I) равномерно устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $0 < \varepsilon < h$. Обозначим через S_ε поверхность n-мерного шара $|x| = \varepsilon$ и $\alpha_\varepsilon = \min_{|x|=\varepsilon} \alpha_1(x)$. Из определения функции $\alpha_1(x)$ следует, что $\alpha_\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы при $|x| \leq \delta$ выполнялось неравенство $\alpha_2(x) < \alpha_\varepsilon$ при $t \in J_t^k$. Выбор такого δ возможен в силу непрерывности $\alpha_2(x)$ и условия $\alpha_2(0) = 0$. По условию б) вдоль каждого решения $x(t)$ функция $V^*(t)$ не возрастает по t. Если при $t_0 \in J_t^k$ начальную точку x_0 выбрать внутри шара S_δ, то при построении интегральной поверхности она остается внутри шара S_ε. Действительно, если бы эта поверхность при некотором t_1 $(t_1^i \geq t_0^i, i=1,\dots,k)$ достигла S_ε, то мы имели бы

$$V(t_1, x(t_1; t_0, x_0)) \geq \alpha_\varepsilon \geq \underset{|x|=\delta}{\alpha_2(x)} \geq V(t_0, x_0),$$

что противоречит условию б) теоремы. Теорема доказана.

Определение 4. Равномерно устойчивое нулевое решение системы (I.I) называется равномерно асимптотически устойчивым, если существует такое $\delta_0 > 0$, что при $|x_0| \leq \delta_0$ $x(t; t_0, x_0) \to 0$ при $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$, $t^i \geq t_0^i$ равномерно по t_0^i $(i=1,\dots,k)$ и x_0.

Теорема 4. Если существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теорем 2 и 3, то нулевое решение системы (I.I) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Надо доказать, что существует такое $T = T(\varepsilon)$, что при $t^i \geq t_0^i$, $i=1,\dots,k$ и $\sum_{i=1}^{k}(t^i - t_0^i) > T$ будет $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$. Пусть $h = \min(H, \bar{H})$ и $\alpha_h = \min_{|x|=h} \alpha_1(x)$. В силу свойств функции $V(t,x)$ при $|x| = h$, $t \in J_t^k$ имеем $V(t,x) \geq \alpha_h$. В силу определения $\alpha_2(x)$ найдется такое $\delta_0 > 0$, что $\alpha_2(x) < \alpha_h$ при $|x_0| \leq \delta_0$. Выберем $\delta > 0$ такое, чтобы

$$\max_{|x| \leq \delta} \alpha_2(x) \leq \min_{|x|=\varepsilon} \alpha_1(x).$$

Обозначим $K^i = \min_{\delta \leq |x| \leq h} \alpha^i(x)$, $i=1,\dots,k)$ и положим

$$T = \frac{k\,\alpha_h}{\min\limits_i K^i}.$$

Тогда хотя бы для одного $i=1,\dots,k$ будет $t^i - t_0^i > \dfrac{\alpha_h}{\min K^i}$. Если бы на интегральной поверхности от точки t_0 до t_T, для которой $\sum_{i=1}^{k}(t^i - t_0^i) = T$ было бы $|x(t; t_0, x_0)| > \alpha > 0$, то мы имели бы

$$V(t_T, x(t_T; t_0, x_0)) < V(t_0, x_0) - \sum_{i=1}^{k} \alpha^i (t^i - t_0^i) <$$

$< \alpha_h - \sum_{i=1}^{k} \alpha^i (t^i - t_0^i) < 0$, что противоречит условию положительности $V(t,x)$. Значит, хоть раз станет $|x| < \alpha$, но после этого всегда будет $|x| \le \varepsilon$,что и требовалось доказать.

Пример:

$$dx = \left(\frac{3}{t^1+5} - 1\right) x\, dt^1 - x\, dt^2.$$

Здесь $n=1,\ k=2;\ a^1(t,x) = \left(\frac{3}{t^1+5} - 1\right)x\ ;\ a^2(t,x) = -x.$

Условие (I.2) принимает вид

$$\frac{\partial a^1}{\partial t^2} + \frac{\partial a^1}{\partial x} \cdot a^2 = \frac{\partial a^2}{\partial t^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x} \cdot a^1.$$

Проверка дает $\left(\frac{3}{t^1+5} - 1\right)(-x) = -1 \cdot \left(\frac{3}{t^1+5} - 1\right) x,$.

т.е. выполняется для $t \in J_t^* = \{t^1 \ge 0,\ t^2 \ge 0\}$, $|x| \le H$

где H - любое .

Пусть $V(t,x) = x^2.$

Тогда

$$\frac{\Delta V}{\Delta t^1} = \frac{\partial V}{\partial t^1} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot a^1 = 2x^2 \left(\frac{3}{t^1+5} - 1\right) \le -\frac{2}{5} x^2,$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta t^2} = \frac{\partial V}{\partial t^2} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot a^2 = -2x^2.$$

Это означает, что выполнены условия теоремы 2 с $\alpha(x) = x^2$;

$\alpha^1(x) = -\frac{2}{5} x^2$ и $\alpha^2(x) = 2x^2$ и потому решение уравнения асимптотически устойчиво.

Теоремы устойчивости допускают также обращения.

<u>Теорема 5</u> . Если нулевое решение системы (I.I) устойчиво, то существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая усло-

виям теоремы I.

Доказательство. Следуя методу А. Халаная /13/,

$$V(t,x) = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma; t, x)|, \quad \text{где } \sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^k).$$

Учитывая, что

$$\sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma; t, x)| \geq |x(t; t, x)| = |x|,$$

получаем $V(t,x) \geq |x|$.

В точках интегральной поверхности $x(t; t_0, x_0)$ имеем $V^*(t) =$

$$= \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma; t, x(t; t_0, x_0))| = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma; t_0, x_0)|.$$

Пусть $t_1^i \geq t_2^i$ и $d^i = t_1^i - t_2^i$, $i=1,\dots,k$. Тогда

$$V^*(t_1) = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_1+\sigma; t_0, x_0)| = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_2+d+\sigma; t_0, x_0)| =$$

$$= \sup_{\sigma^i \geq d^i,\ i=1,\dots,k} |x(t_2+\sigma; t_0, x_0)| \leq \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_2+\sigma; t_0, x_0)| =$$

$= V^*(t_2)$, т.е. функция $V(t,x)$ не возрастает по t.

Теорема 6. Если нулевое решение системы (I.I) равномерно устойчиво, то существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.

Доказательство. Аналогично теореме 5 положим

$$V(t,x) = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma; t, x)|$$

Из равномерной устойчивости имеем, что $|x(t+\sigma; t, x)| \leq$ $\leq \varepsilon(|x|)$, где $\varepsilon(\delta)$ - функция, обратная $\delta(\varepsilon)$ (при этом функцию $\delta(\varepsilon)$ без ограничения общности можно считать непрерывной и возрастающей). Это означает, что $V(t,x) \leq \varepsilon(|x|)$. Остальные свойства функции $V(t,x)$ проверяются так же, как в теореме 5.

Теорема 7. Если нулевое решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво, то существует функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4.

Доказательство. Пусть

$$V(t,x) = \sup_{\sigma^i \geq 0,\ i=1,\dots,k} \left\{ |x(t+\sigma;t,x)|^2 \frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma^i} \right\}, \text{ где } \alpha>1.$$

При $\sigma^i = 0,\ i = 1,\dots,k$ имеем

$$V(t,x) \geq |x(t;t,x)|^2 = |x|^2. \qquad (1.5)$$

Пусть $\varepsilon(\delta)$ – функция, обратная $\delta(\varepsilon)$ (как в теореме 6). Так как из равномерной устойчивости $|x(t+\sigma;t,x)| \leq \varepsilon(|x|)$ и по условию $\alpha>1$, $\frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma^i} < \alpha$, то получаем

$$V(t,x) \leq \alpha\cdot\varepsilon^2(|x|).$$

При $\sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ выполняется неравенство $|x(t+\sigma;t,x)| < \varepsilon$ и если $\sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\frac{1}{\alpha}|x|)$, то

$$|x(t+\sigma;t,x)|^2 < \frac{1}{\alpha^2}|x|^2.$$

Следовательно, для $\sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\frac{1}{\alpha}|x|)$ выполняется неравенство

$$|x(t+\sigma;t,x)|^2 \frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma^i} < |x|^2 \leq V(t,x).$$

Вместе с неравенством (1.5) это означает, что

$$V(t,x) = \sup_{\substack{\sigma^i\geq 0\\ 0\leq \sum_{i=1}^{k}\sigma^i \leq T(\frac{1}{\alpha}|x|)}} \left\{ |x(t+\sigma;t,x)|^2 \frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma^i} \right\}$$

и существует такое σ_0, при котором достигается наибольшее значение. В этом случае имеем

$$V(t,x) = |x(t+\sigma_0;t,x)|^2 \frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma_0^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma_0^i}.$$

Пусть $x = x(t;\, t_0, x_0)$ и $x^* = x(t+h^i;\, t, x)$, где $h^i = (\,0,\dots,0,\ h_i\,,\ 0,\dots,0)$. Тогда

$$V(t+h^i, x^*) = |x(t+h^i+\sigma_0^*;\, t+h^i, x^*)|^2\,\frac{1+\alpha\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}}{1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}} =$$

$$= |x(t+h^i+\sigma_0^*;\, t, x)|^2\,\frac{1+\alpha\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}}{1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}} =$$

$$= |x(t+h^i+\sigma_0^*;\, t, x)|^2\,\frac{1+\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i^i\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i}\left\{1-\frac{h_i(\alpha-1)}{\left[1+\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)\right]\left(1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)}\right\}.$$

На основании определения функции $V(t,x)$ имеем

$$V(t+h^i, x^*) \le V(t,x)\left\{1-\frac{h_i(\alpha-1)}{\left[1+\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)\right]\left(1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)}\right\}$$

и

$$V(t+h^i, x^*) - V(t,x) = V(t+h^i, x(t+h^i)) - V(t, x(t)) \le$$

$$\le -\frac{h_i(\alpha-1)\,V(t,x)}{\left[1+\alpha\left(\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)\right]\left(1+\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_0^{i*}+h_i\right)} \le -\frac{h_i(\alpha-1)\,|x|^2}{\left(1+\alpha T(\frac{1}{\alpha}|x|)+\alpha h_i\right)\left(1+T(\frac{1}{\alpha}|x|)\right)} \le$$

$$\le -\frac{h_i(\alpha-1)\,|x|^2}{\left(2+\alpha T(\frac{1}{\alpha}|x|)\right)\left(1+T(\frac{1}{\alpha}|x|)\right)} = -h_i W^i(x), \quad \text{если } h_i < \frac{1}{\alpha}$$

где $W^i(x) = \dfrac{(\alpha-1)\,|x|^2}{\left(2+\alpha T(\frac{1}{\alpha}|x|)\right)\left(1+T(\frac{1}{\alpha}|x|)\right)} > 0$ при $|x| \ne 0$.

Но тогда

$$\limsup_{h_i\to+0}\frac{V(t+h^i, x(t+h^i)) - V(t, x(t))}{h_i} \le -W^i(x),$$

что означает выполнение условий (1.4). Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е 5. Нулевое решение системы (1.1) называется равномерно экспоненциально устойчивым, если существуют такие $\lambda^i > 0$, $i = 1,\dots,k$ и для каждого $\varepsilon > 0$ такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $|x_0| \le \delta$, $t_0 \in J_t^k$ следует

$$|x(t;\, t_0, x_0)| \le \varepsilon \exp\left[-\sum_{i=1}^{k}\lambda^i(t^i - t_0^i)\right] \quad \text{при } t^i \ge t_0^i,\ i = 1,\dots,k.$$

Теорема 8. Если существует непрерывная функция $V(t,x)$, определенная в области $\bar{Z}$ и удовлетворяющая условиям:

а) $C_0|x|^2 \leq V(t,x) \leq \alpha(x)$,

б) $\frac{\bar{\partial} V}{\partial t^i} \leq -C_i V$, $i=1,\ldots,k$,

где $C_i > 0$ $(i=0,1,\ldots,k)$; $r>0$, $\alpha(x) \to 0$ при $|x| \to 0$, то нулевое решение системы (I.I) равномерно экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Из условий теоремы при $x \neq 0$ имеем

$$\frac{\bar{\partial}(\ln V + \sum_{i=1}^{k} C_i t^i)}{\partial t^i} = \frac{1}{V} \cdot \frac{\bar{\partial} V}{\partial t^i} + C_i \leq 0, \quad i=1,\ldots,k.$$

Отсюда при $t^i > t_0^i$ (i = I,...,k) вдоль решения $x(t)$ имеем

$$\ln V + \sum_{i=1}^{k} C_i t^i \leq \ln V_0 + \sum_{i=1}^{k} C_i t_0^i$$, т.е.

$$V(t,x) \leq V(t_0,x_0) \exp\left[-\sum_{i=1}^{k} C_i (t^i - t_0^i)\right].$$

Учитывая условия а) получаем

$$C_0 |x(t;t_0,x_0)|^r \leq \alpha(x_0) \exp\left[-\sum_{i=1}^{k} C_i (t^i - t_0^i)\right]$$, что

и доказывает теорему. Эту теорему применим к доказательству следующей основной теоремы об устойчивости по первому приближению.

Теорема 9. Пусть система (I.I) имеет вид

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i x + \varphi^i(t,x))\, dt^i, \tag{I.6}$$

где A^i – $n \times n$ перестановочные постоянные матрицы, все собственные значения которых имеют отрицательные действительные части.

Тогда существует такая постоянная $r>0$, зависящая лишь от матриц A^i, что если при всех достаточно малых $|x|$ будет

$$|\varphi^i(t,x)| \le r|x|, \quad i=1,\dots,k; \quad t\in \mathcal{J}_t^k, \tag{I.7}$$

то нулевое решение системы (I.6) равномерно экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Рассмотрим систему первого приближения

$$dy = \sum_{i=1}^{k} A^i y\,dt^i; \tag{I.8}$$

и определим для нее функцию $V(t,y)$ по теореме 7 в виде

$$V(t,y) = \max_{\sigma^i\ge 0,\ i=1,\dots,k} \left|\left(\exp\sum_{i=1}^{k} A^i\sigma^i\right)y\right|^2 \frac{1+\alpha\sum_{i=1}^{k}\sigma^i}{1+\sum_{i=1}^{k}\sigma^i} = V(y)$$

Легко проверить, что этот максимум достигается на отрезке $0\le\sum_{i=1}^{k}\sigma^i\le T$ фиксированной длины, не зависящей от y и потому из доказательства теоремы 7 вытекает, что для решений системы (I.8)

$$\left.\frac{\bar{\Delta} v^i}{\Delta t^i}\right|_{(1.8)} \le c_i\, v^i \qquad (c_i = const>0,\ i=1,\dots,k).$$

Кроме того легко выводится оценка

$$|V(y)-V(z)| \le a\,(|y|+|z|)\cdot|y-z|, \quad (a=const>0). \tag{I.9}$$

Воспользуемся той же функцией для системы (I.6).

Так как

$$|x|^2\le V(x)\le b|x|^2, \qquad (b=const>0)$$

то условие а) теоремы 8 выполнено.

Далее,

$$\left.\frac{\bar{\Delta} v^i}{\Delta t^i}\right|_{(1.6)} = \limsup_{h_i\to+0} \frac{V(x(t+h^i))-V(x(t))}{h_i} \le$$

$$\leq \limsup_{h_i\to+0} \frac{v(x(t+h^i)) - v(y(t+h^i;t,x(t)))}{h_i} +$$

$$+ \limsup_{h_i\to+0} \frac{v(y(t+h^i;t,x(t))) - v(x(t))}{h_i}.$$

Второе слагаемое в правой части не превосходит $-c_i\, v(x)$, тогда как первое слагаемое в силу (I.9) не превосходит

$$2a|x| \cdot \limsup_{h_i\to+0} \frac{|x(t+h^i) - y(t+h^i;t,x(t))|}{h_i} = 2a|x|\,\varphi^i(t,x),$$

т.е. $\frac{\bar{\Delta} v}{\Delta t^i} \leq 2a|x|\cdot\varphi^i(t,x) - c_i\, v(x)$.

Если в неравенствах (I.7) положить $\tau < \frac{\min c_i}{2a}$, то будет выполнено условие б) теоремы 8. Итак, теорема 9 доказана.

Замечание. Взамен условия (I.7) можно поставить более сильное условие

$\sum_{i=1}^{k} |\varphi^i(t,x)| = O(|x|)$ $(|x|\to 0)$ равномерно по t^i.

Отметим, кроме того, что аналогичная теорема о неустойчивости по первому приближению (в случае, когда хотя бы одна из матриц A^i $(i=1,\dots,k)$ имеет по крайней мере одно собственное значение с положительной вещественной частью) не требует отдельного доказательства, а непосредственно вытекает из соответствующей теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 10. Если существует функция $v(t,x)$, определенная в области $\bar{Z}$ и непрерывная линия L с уравнениями $t^i = t^i(s)$, $t^i(s) \geq t^i(0) \geq 0$, $0 \leq s < \infty$, $i=1,\dots,k$, такие, что $v(t,x) \leq \alpha_1(x)$ и для любого решения $x(t)$ $(|x| < \bar{H})$ в точках L

$$\limsup_{h\to+0} \frac{v(t(s+h), x(t(s+h))) - v(t(s), x(t(s)))}{h} \geq \alpha_2(x)$$

где $\alpha_i(x)$ $(i = 1,2)$ непрерывные при $|x| < \bar{H}$ функции, $\alpha_i^{\xi}(x) > 0$, при $x \neq 0$ и $\alpha_i(0)=0$ и множество точек $t \in \mathcal{L}$, в которых $V(t,x)>0$ имеет при x = 0 предельные точки, то нулевое решение системы (I.I) неустойчиво.

Доказательство. Выберем начальную точку $(t_0,x_0) \in \mathcal{Z}$, так, чтобы $t_0 \in \mathcal{L}$ и $V(t_0,x_0)>0$. Так как вдоль линии $\mathcal{L}$ функция $V(t,x(t))$ возрастает и $V(t,x) \leq \alpha_1(x)$, то вдоль $\mathcal{L}$ будет $\inf |x|>0$. Но тогда вдоль поверхности $x(t)$ по направлению $\mathcal{L}$ имеем

$$\limsup_{h \to +0} \frac{V(t(s+h), x(t(s+h))) - V(t(s), x(t(s)))}{h} \geq m > 0$$

Поэтому в силу ограниченности $V(t,x)$ при $|x| \leq H$ поверхность $x(t;t_0,x_0)$ неминуемо достигнет поверхность $|x|=H$, что и означает неустойчивость.

Определение 6. Нулевое решение системы (I.I) называется асимптотически устойчивым в целом если оно асимптотически устойчиво по Ляпунову и для каждого решения $x(t;t_0,x_0)$ $(t_0 \in J_t^k)$ выполнено условие

$$\lim_{\substack{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty, \; t^i \geq t_0^i}} |x(t;t_0,x_0)| = 0.$$

Определение 7. Будем говорить, что $V(t,x)$ в $\mathcal{Z} = J_t^k \times R_x^n$ допускает бесконечно большой низший предел при $|x| \to \infty$, если $V(t,x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$ равномерно по всем t^i (i =I,...,к), т.е. для любого $M>0$ существует $R=R(M)$ такое, что $|V(t,x)|>M$ при $t^i \geq t_0^i$, $i=1,\dots,k$ и $|x| \geq R$.

Определение 8. Будем говорить, что $V(t,x)$ допускает в R_x^n сильный бесконечно малый высший предел при $|x| \to 0$, если существует функция $W(x) \in C(R_x^n)$ такая, что

$|V(t,x)| \leq W(x)$ при $(t,x) \in \mathcal{Z}$ и $W(0)=0$. (I.IO)

Т е о р е м а II. Если для системы (I.I) существует положительно определенная функция $V(t,x) \in C^{1,1}_{t,x}(Z)$, допускающая в R^n_x сильный бесконечно малый высший предел при $|x| \to 0$ и бесконечно большой низший предел при $|x| \to \infty$, причем $\frac{\Delta V}{\Delta t^i}$ ($i = 1,\dots,k$) отрицательно определены в R^n_x, то нулевое решение системы (I.I) асимптотически устойчиво в целом.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как условия теоремы включают условия теоремы 3, то нулевое решение системы (I.I) асимптотически устойчиво. Пусть $x(t;\, t_0, x_0)$ – нетривиальное решение системы (I.I), где $(t_0, x_0) \in Z$ произвольны. Обозначим через K_x некоторое ограниченное замкнутое множество пространства R^n_x содержащее точку x, так что $x_0 \in K_{x_0} \subset R^n_x$ и пусть $M = \sup V(t,x)$ на $J^k_t \times K_{x_0}$. В силу неравенства (I.IO) $M < +\infty$. Так как $V(t,x)$ обладает в R^n_x бесконечно большим низшим пределом при $|x| \to \infty$, то существует шар $S = \{|x| < R\} \supset K_{x_0}$, такой, что $V(t,x) > M$ при $|x| \geq R$.
По условию теоремы вдоль траектории $x(t;\, t_0, x_0)$ выполнены неравенства $\frac{\Delta V(t, x(t;\, t_0, x_0))}{\Delta t^i} < 0$, поэтому при $t^i \geq t^i_0$ ($i = 1,\dots,k$) имеем $V(t, x(t;\, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) \leq M$,
и следовательно $|x(t;\, t_0, x_0)| < R$, т.е. все решения системы (I.I) ограничены.

Покажем, что $V(t, x(t;\, t_0, x_0)) \to 0$ при $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$, $t^i \geq t^i_0$, $i = 1,\dots,k$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $r > 0$ такого, что функция $U(x)$, определенная условием (I.IO), удовлетворяет неравенству

$$0 \leq U(x) < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x| \leq r.$$

Покажем, что решение $x(t;t_0,x_0)$ при $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$ войдет внутрь замкнутого шара $|x| \le r$. Допустим, что это не так и $0 < r < |x(t;t_0,x_0)| < R$ при $t^i \ge t_0^i$, $i = 1,\dots,k$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial t^i}$, будучи отрицательно определеные, имеют в области $J_t^k \times \{r \le |x| \le R\}$ отрицательные верхние грани $-\gamma^i$ $(\gamma^i > 0)$ и при $t^i \ge t_0^i$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial v(t, x(t;t_0,x_0))}{\partial t^i} \le -\gamma^i, \quad i = 1,\dots,k$$

или

$$dv(t, x(t;t_0,x_0)) \le -\sum_{i=1}^{k} \gamma^i dt^i$$

Интегрируя это неравенство по произвольному пути от t_0 до t $(t^i \ge t_0^i)$ получим

$$v(t, x(t;t_0,x_0)) \le v(t_0,x_0) - \sum_{i=1}^{k} \gamma^i (t^i - t_0^i) < 0,$$

если хотя бы для одного $i = 1,\dots,k$ $t^i > t_0^i + \frac{v(t_0,x_0)}{\gamma^i}$, что противоречит положительности $v(t,x)$. Следовательно, существует $t_1^i \ge t_0^i$ ($i = 1,\dots,k$) такие, что $|x(t_1;t_0,x_0)| \le r$, т.е. $u(x(t_1;t_0,x_0)) < \varepsilon$. Отсюда ввиду монотонного убывания $v(t, x(t;t_0,x_0))$ при $t^i \ge t_1^i$ ($i = 1,\dots,k$) будем иметь

$$v(t, x(t;t_0,x_0)) < v(t_1; x(t_1;t_0,x_0)) \le u(x(t_1;t_0,x_0)) < \varepsilon$$

и таким образом

$$\lim_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} v(t, x(t;t_0,x_0)) = 0.$$

Но тогда $\lim\limits_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} x(t;t_0,x_0) = 0$ и теорема доказана.

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью и свойством единственности имеет место интегральная непрерывность решений /26/, т.е. если $x(t)$ $(a < t < b)$ есть решение системы

$$\dot{x} = f(x,t),$$

то для любых $\varepsilon>0$ и $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$ существует $\delta>0$ такое, что решение $y(t)$, определяемое начальными условиями $y(\gamma)=y_0$, где $\gamma\in[\alpha,\beta]$ и $|y(\gamma)-x(\gamma)|<\delta$ будет иметь смысл при $t\in[\alpha,\beta]$, причем $|y(t)-x(t)|<\varepsilon$ для $t\in[\alpha,\beta]$.

Из этого сразу следует, что поведение решения в смысле устойчивости в интервале $b\le t<\infty$ будет такое же, как в интервале $a\le t<\infty$, если $b\ge a$.

Для систем (I.I) понятие устойчивости зависит от области, в которой оно рассматривается, т.е. решение может быть неустойчивым в $\mathcal{Y}_t^k=\{0\le t^i<\infty, i=1,\dots,k\}$ и стать устойчивым, даже асимптотически устойчивым в области $\bar{\mathcal{Y}}_t^k=\{0<t^i<\infty, i=1,\dots,k\}$. В подтверждение этого приведем пример.

Пусть дано уравнение
$$dx=-(2t_1+t_2)x\,dt_1+\left(\frac{1}{t_2+1}-t_1\right)x\,dt_2.$$

Легко проверить, что решение имеет вид
$$x=C(t_2+1)e^{-t_1(t_1+t_2)}$$
, где C - произвольная постоянная.

Рассмотрим $\mathcal{Y}_t^2=\{0\le t_1,t_2<\infty\}$. Решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(t_1^0,t_2^0)=x_0$, имеет вид
$$x(t;t_0,x_0)=\frac{x_0(t_2+1)}{t_2^0+1}e^{t_1^0(t_1^0+t_2^0)-t_1(t_1+t_2)}.$$

Выберем $t_1^0=t_2^0=0$, тогда
$$x(t;0,x_0)=x_0(t_2+1)e^{-t_1(t_1+t_2)}.$$

Если $t_1=t_1^0=0$, $0\le t_2\to\infty$, то $x(t;0,x_0)\to\infty$, т.е. решение неустойчиво.

Рассмотрим теперь $\bar{\mathcal{Y}}_t^2=\{0<t_1<\infty;\ 0\le t_2<\infty\}$. Для заданного $\varepsilon>0$ выберем $\delta<\varepsilon\, t_1^0(t_2^0+1)e^{1-t_1^0(t_1^0+t_2^0)}$.

Тогда при $t_1 \geq t_1^\circ, t_2 \geq t_2^\circ$ будет

$|x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon$, что означает устойчивость нулевого решения. Более того, $|x(t;t_0,x_0)| \to 0$ при $t_1+t_2 \to \infty$, $t_1 \geq t_1^\circ, t_2 \geq t_2^\circ$, а это означает, что нулевое решение данного уравнения асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь систему уравнений

$$\begin{cases} dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x,y)\,dt^i, \\ dy = \sum_{i=1}^{k} b^i(t,x,y)\,dt^i \end{cases} \qquad (\text{I.II})$$

где векторы x и a^i одной размерности, а y и $b^i (i=1,\dots,k)$ вообще говоря, - другой. Предположим, что эта система при $t^i \geq 0 \ (i=1,\dots,k)$, $|x| \leq H$ и любом y обладает непрерывно дифференцируемыми коэффициентами и удовлетворяет условиям интегрируемости

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a^i}{\partial t^j} + \dfrac{\partial a^i}{\partial x} a^j + \dfrac{\partial a^i}{\partial y} \cdot b^j = \dfrac{\partial a^j}{\partial t^i} + \dfrac{\partial a^j}{\partial x} \cdot a^i + \dfrac{\partial a^j}{\partial y} \cdot b^i, \\ \dfrac{\partial b^i}{\partial t^j} + \dfrac{\partial b^i}{\partial x} a^j + \dfrac{\partial b^i}{\partial y} b^j = \dfrac{\partial b^j}{\partial t^i} + \dfrac{\partial b^j}{\partial x} \cdot a^i + \dfrac{\partial b^j}{\partial y} \cdot b^i, \end{cases}$$

$$i,j = 1,\dots,k.$$

Будем предполагать, что $a^i(t,0,0) = b^i(t,0,0) \equiv 0$ ($i = 1,\dots,k$), т.е. система (I.II) обладает нулевым решением.

О п р е д е л е н и е 9 . Нулевое решение системы (I.II) называется устойчивым по отношению к компоненте X , если для каждого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \in J_t^k = \{0 \leq t^i < \infty, i=1,\dots,k\}$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, что из условия $|x| + |y| \leq \delta$ следует

$$|x(t;t_0,x_0,y_0)| < \varepsilon \text{ при } t^i \geq t_0^i, \ i=1,\dots,k.$$

Если число δ можно выбрать независимо от t_0, то нулевое решение системы (I.II) называется равномерно устойчивым по отношению к компоненте X .

Т е о р е м а 12. Если существует функция $V(t,x,y)$, определенная при $t^i \geq 0$, $i = 1,\ldots,k$, $|X| \leq H$ и любом y и удовлетворяющая условиям:

а) $V(t,x,y)$ непрерывна по совокупности x и y при x = y = 0, $V(t,0,0) = 0$,

б) $V(t,x,y) \geq \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ при $|x| \leq H$ непрерывная, положительная, неубывающая при x $\neq$ 0 функция и $\alpha(0) = 0$,

в) для каждого решения $x(t)$, $y(t)$, для которого $|x(t)| < H$, функция $V(t, x(t), y(t))$ не возрастает по t в точке t_0,

то нулевое решение системы (I.II) устойчиво по отношению к компоненте X.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть имеем $\varepsilon > 0$. Выберем в точке t_0 настолько малое $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, чтобы при $|x_0| + |y_0| < \delta$ было $V(t_0, x_0, y_0) < \alpha(\varepsilon)$. Выбор такого δ возможен в силу условия а). Рассмотрим компоненту решения $x(t; t_0, x_0, y_0)$ и функцию $V^*(t) = V(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y(t; t_0, x_0, y_0))$, которая в силу условия в) не возрастает. Тогда имеем

$$\alpha(|x(t; t_0, x_0, y_0)|) \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) = V(t_0, x_0, y_0) < \alpha(\varepsilon).$$

По виду функции $\alpha(x)$ (условие б)) следует, что

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \quad при \quad t^i \geq t_0^i, \; i = 1, \ldots, k,$$

что требовалось доказать.

Теорема 13. Если существует функция $V(t,x,y)$, определенная при $t_i \geq 0$ ($i = 1,\ldots,k$), $|x| \leq H$ и любом y и удовлетворяющая условиям:

а) $\alpha(|x|) \leq V(t,x,y) \leq \beta(|x|+|y|) \qquad (|x|+|y| \leq H)$,

где $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ - непрерывные возрастающие функции при $0 \leq r \leq H$ и $\alpha(0) = \beta(0) = 0$,

б) для каждого решения $x(t)$, $y(t)$, для которого $|x(t)| < H$, функция $V(t, x(t), y(t))$ не возрастает по t,

то нулевое решение системы (1.11) равномерно устойчиво по отношению к компоненте x.

Доказательство. Пусть имеем $\varepsilon > 0$. Выберем настолько малое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, чтобы при $|x_0| < \delta$ было $\beta(|x_0| + |y_0|) < \alpha(\varepsilon)$. Рассмотрим компоненту $x(t;\, t_0, x_0, y_0)$ и функцию $V^*(t)$. Тогда имеем

$$\alpha(|x(t; t_0, x_0, y_0)|) \leq V^*(t) \leq V^*(t_0) = V(t_0, x_0, y_0) \leq$$
$$\leq \beta(|x_0| + |y_0|) < \alpha(\varepsilon)$$

откуда следует, что $|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ при $t^i \geq t_0^i$, $i = 1,\ldots,k$, что требовалось доказать.

Теоремы 12 и 13 допускают также обращение.

Теорема 14. Если нулевое решение системы (1.11) равномерно устойчиво по отношению к компоненте x, то существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям теоремы 13.

Доказательство. Пусть

$$V(t,x,y) = \sup_{\tau^i \geq 0,\ i = 1,\ldots,k} |x(t+\tau;\, t, x, y)|.$$

Из равномерной устойчивости по отношению к компоненте X имеем

$$v(t,x,y) \le \varepsilon(|x|+|y|) \quad и \quad v(t,x,y) \ge |x|.$$

В точках поверхности $x(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0),\, y(t;\, t_0,\, x_0,\, y_0)$ имеем

$$v^*(t) = v(t,\, x(t;t_0,x_0,y_0),\, y(t;t_0,x_0,y_0)) =$$

$$= \sup_{\sigma^i \ge 0,\ i=1,\dots,k} |x(t+\sigma;\, t,\, x(t;t_0,x_0,y_0),\, y(t;t_0,x_0,y_0))|.$$

Пусть $t_2^i \ge t_1^i$ и $t_2^i - t_1^i = d^i,\ i=1,\dots,k.$

Тогда имеем

$$v^*(t_2) = \sup_{\sigma^i \ge 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_2+\sigma;\, t_0,\, x_0,\, y_0)| =$$

$$= \sup_{\sigma^i \ge 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_1+d+\sigma;\, t_0,x_0,y_0)| = \sup_{\sigma^i \ge d^i,\ i=1,\dots,k} |x(t_1+\sigma;\, t_0,x_0,y_0)| \le$$

$$\le \sup_{\sigma^i \ge 0,\ i=1,\dots,k} |x(t_1+\sigma;\, t_0,x_0,y_0)| = v^*(t_1),$$

что означает, что функция $v^*(t)$ невозрастающая и теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему (I.I) и скалярное уравнение

$$d\xi = \sum_{i=1}^{k} \omega^i(t,\xi)\, dt^i, \tag{I.12}$$

где $\omega^i(t,\xi)$ непрерывно дифференцируемые функции и удовлетворяют условиям интегрируемости

$$\frac{\partial \omega^i}{\partial t^j} + \frac{\partial \omega^i}{\partial \xi}\cdot \omega^j = \frac{\partial \omega^j}{\partial t^i} + \frac{\partial \omega^j}{\partial \xi}\cdot \omega^i, \quad i,j=1,\dots,n$$

в области $t^i \ge 0,\ i=1,\dots,k;\ 0 \le \xi \le \xi_0\ \ (0<\xi_0<+\infty)$ и $\omega^i(t,0) \equiv 0,\ i=1,\dots,k.$

Т е о р е м а 15. Если существует дифференцируемая при $t^i \ge 0\ (i = 1,\dots,k)$, $|x| \le H$ функция $v(t,x)$ такая, что $v(t,0)=0$; $0 \le v(t,x) \le \xi_0$; $\frac{\Delta v}{\Delta t^i} \le \omega^i(t, v(t,x))$ $(i = 1,\dots,k)$

и функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$, непрерывные и возрастающие при $0 \le r \le H$, причем $\alpha(0)=\beta(0)=0$,

то

1^0) если нулевое решение уравнения (I.I2) устойчиво и $V(t,x) \ge \alpha(|x|)$, то нулевое решение системы (I.I) также устойчиво;

2^0) если нулевое решение уравнения (I.I2) равномерно устойчиво и $\alpha(|x|) \le V(t,x) \le \beta(|x|)$, то нулевое решение системы (I.I) также равномерно устойчиво,

3^0) если нулевое решение уравнения (I.I2) асимптотически устойчиво и $V(t,x) \ge \alpha(|x|)$, то нулевое решение системы (I.I) также асимптотически устойчиво,

4^0) если нулевое решение уравнения (I.I2) равномерно асимптотически устойчиво и $\alpha(|x|) \le V(t,x) \le \beta(|x|)$, то нулевое решение системы (I.I) также равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. 1^0) Пусть $\varepsilon > 0$, $t_0^i \ge 0$ ($i = 1,\ldots,k$) и $\eta(\varepsilon, t_0) > 0$ такие, что из условия $|\xi_0| < \eta$ следует $|\xi(t; t_0, \xi_0)| < \alpha(\varepsilon)$ при $t^i \ge t_0^i$ ($i = 1,\ldots,k$). Из непрерывности функции $V(t,x)$ следует, что существует такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что при $|x_0| < \delta$ будет $V(t_0, x_0) < \eta$.

Тогда имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t^i} \le \omega^i(t, V(t, x(t; t_0, x_0))), \quad i = 1,\ldots,k,$$

или

$$dV(t, x(t; t_0, x_0)) \le \sum_{i=1}^{k} \omega^i(t, V)\, dt^i$$

Но тогда

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \le \xi(t; t_0, V(t_0, x_0)) < \alpha(\varepsilon).$$

Так как $\alpha(|x(t;t_0,x_0)|) \le v(t,x) < \alpha(\varepsilon)$, то $|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ при $t^i \ge t_0^i$ ($i = 1,\ldots,k$) если $|x_0| \le \delta(\varepsilon,t_0)$.

2°) Пусть $\varepsilon>0$. Из равномерной устойчивости нулевого решения уравнения (I.I2) можно выбрать $\eta = \eta(\varepsilon)>0$ такое, что из условия $|\xi_0|<\eta$ следует $|\xi(t;t_0,\xi_0)| < \varepsilon$ при $t^i \ge t_0^i$ ($i = 1,\ldots,k$) для всех t_0. Тогда существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $|x_0|<\delta$ будет $\beta(|x_0|)<\eta$ и $v(t_0,x_0) \le \beta(|x_0|)<\eta$. Так как $dv \le \sum_{i=1}^{k} \omega^i(t,v)\,dt^i$, то

$$v(t,x(t;t_0,x_0)) \le \xi(t;t_0,v(t_0,x_0)) < \alpha(\varepsilon).$$

Но тогда

$$|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad t^i \ge t_0^i, \ i=1,\ldots,k$$

для любых $t_0 \in J_t^k$, если только $|x_0|< \delta(\varepsilon)$.

3°) Так как $v(t,x(t,t_0,x_0)) \le \xi(t;t_0,v(t_0,x_0))$ и $\lim\limits_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} \xi(t;t_0,v(t_0,x_0)) = 0$, то

$$\lim_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} v(t,x(t;t_0,x_0)) = 0 \quad \text{и также} \quad \lim_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} \alpha(|x(t;t_0,x_0)|) = 0,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty,\ t^i \ge t_0^i} |x(t;t_0,x_0)| = 0$.

4°) Из равномерной асимптотической устойчивости решения уравнения (I.I2) следует, что существует η_0 и для каждого $\varepsilon>0$ такое $T(\varepsilon)$, что при $|\xi_0|<\eta_0$ будет $|\xi(t_0+\sigma;t_0,\xi_0)| < \alpha(\varepsilon)$ при $\sum_{i=1}^{k} \sigma^i \ge T(\varepsilon)$, $\sigma^i \ge 0$, $i = 1,\ldots,k$.

Выберем $\delta_0>0$ такое, чтобы было $\beta(\delta_0) < \eta_0$. Тогда при $|x_0| < \delta_0$ получаем

$$v(t_0,x_0) \le \beta(|x_0|) < \beta(\delta_0) < \eta_0$$

и следовательно

$$\xi(t_0+\sigma;\, t_0,\, v(t_0,x_0)) < \alpha(\varepsilon) \text{ при } \sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\varepsilon).$$

Так как $v(t, x(t_0+\sigma;\, t_0, x_0)) \leq \xi(t_0+\sigma;\, t_0,\, v(t_0,x_0))$, то

$$\alpha(|x(t_0+\sigma;\, t_0, x_0)|) < \alpha(\varepsilon) \text{ при } \sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\varepsilon)$$

и $|x(t_0+\sigma;\, t_0, x_0)| < \varepsilon$ при $\sum_{i=1}^{k}\sigma^i \geq T(\varepsilon)$, $\sigma^i \geq 0$, $i = 1,\ldots,k$,

если только $|x_0| < \delta_0$.

2. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

Рассмотрим систему

$$dx = \sum_{i=1}^{k}(a^i(t,x) + \omega^i(t,x))dt^i \tag{I.13}$$

и допустим, что она вместе с системой (I.I) удовлетворяет условиям интегрируемости в той же области Z . Непрерывно дифференцируемые функции $\omega^i(t,x)$, $i =$ I, ...,к будем рассматривать как величины, характеризующие постоянно действующие возмущения и они, вообще говоря, не обращаются в нуль при X = 0.

О п р е д е л е н и е IO. Нулевое решение системы (I.I) называется равномерно устойчивым при постоянно действующих возмущениях, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такие $\eta^i(\varepsilon)$ ($i =$ 0, I, ...,к), что всякое решение системы (I.I3) при условии $|x_0| < \eta^0(\varepsilon)$, $t_0 \in J_t^k$ при произвольных $\omega^i(t,x)$ ($i =$ I,...,к), удовлетворяющих в области $|x| < \varepsilon$, $t^i \geq t_0^i$, $i =$ I,...,к неравенствам

$$|\omega^i(t,x)| < \eta^i(\varepsilon)\ ,\quad i = \text{I, ..., к},$$

удовлетворяет неравенству

$|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ при $t^i \geq t_c^i$, $i = 1,\ldots,к$.

Определение II. Нулевое решение системы (I.I) называется равномерно устойчивым при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, если для любых чисел $\varepsilon>0$, $T_i>0$ ($i = 1,\ldots,к$) можно указать такие числа $\delta>0$, $\eta^i>0$ ($i = 1,\ldots,к$), что при выполнении условий

$$|\omega^i(t,x)|<\varphi^i(t^i) \text{ при } |x|<\varepsilon,\ t^i\geq 0,\ i=1,\ldots,k, \tag{I.14}$$

где $\varphi^i(t^i)$ ($i = 1,\ldots,к$) – непрерывные функции и

$$\int_{t^i}^{t^i+T_i} \varphi^i(\xi)\,d\xi<\eta^i, \qquad i = 1,\ldots,к, \tag{I.15}$$

каждое решение системы (I.13) удовлетворяет неравенству

$|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ при $t^i \geq t_0$ ($i = 1,\ldots,к$) если $|x_0|<\delta$.

Очевидно, из равномерной устойчивости при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем, вытекает равномерная устойчивость при постоянно действующих возмущениях.

Теорема 16. Если в области $\mathcal{L} = \mathcal{Y}_t^k \times \mathcal{D}_x^n$ существует непрерывная функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям

а) $V(t,x)\geq\alpha(x)$, $V(t,0)=0$,

б) для любого решения системы (I.I) при $|x|<H$ выполнены неравенства

$$\frac{\Delta V}{\Delta t^i} \leq -\alpha^i(x),\ i=1,\ldots,k,$$

где $\alpha(x)$ и $\alpha^i(x)$ ($i = 1,\ldots,к$) определены и непрерывны при $|x| < H$, положительные при $x \neq 0$ и равные нулю при $x = 0$,

в) для любого достаточно малого $\delta>0$ функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица по x при $|x|\geq\delta$, то нулевое решение системы (I.I) равномерно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Доказательство. Пусть $y(t)$ - какое-либо решение системы (I.I3), причем $|y(t)|<H$. Тогда, обозначая К(б) (б > о) непрерывную функцию, для которой $|v(t,x)-v(t,y)|\le$ $\le K(\delta)|x-y|$, $(|x|\ge\delta$, $|y|\ge\delta)$, получим

$$\limsup_{h_i\to+0}\frac{v(t+h_i, y(t+h_i))-v(t,y(t))}{h_i}\le$$

$$\le\limsup_{h_i\to+0}\frac{v(t+h_i, y(t+h_i))-v(t+h_i, x(t+h_i;t,y(t)))}{h_i}+$$

$$+\limsup_{h_i\to+0}\frac{v(t+h_i, x(t+h_i;t,y(t)))-v(t,y(t))}{h_i}\le$$

$$\le K(|y(t)|)\cdot\limsup_{h_i\to+0}\frac{|y(t+h_i)-x(t+h_i;t,y(t))|}{h_i}-\alpha^i(y(t))=$$

$$=K(|y(t)|)|\omega^i(t,y(t))|-\alpha^i(y(t))\le K(|y(t)|)\varphi^i(t^i)-\alpha^i(y(t)). \qquad (I.16)$$

Пусть теперь заданы $\varepsilon>0$, $T_i>0$ ($i=1,\dots,k$), причем без ограничения общности можно считать, что $\varepsilon\le\delta_0$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы

$$u=\sup_{|x|\le\delta}v(t,x)<w=\inf_{\varepsilon\le|x|<\delta_0}v(t,x).$$

Затем выберем η^i так, чтобы

$$0<K(\delta)\eta^i<T_i\min_{\delta\le|x|\le\delta_0}\alpha^i(x), \qquad i=1,\dots,k, \qquad (I.17)$$

и $K(\delta)\sum_{i=1}^{k}\eta^i<w-u$.

Тогда при выполнении неравенств (I.I4) и (I.I5) и при $|x_0|<\delta$ будет $|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ при $t^i\ge t_0^i$, ($i=1,\dots,k$). В самом деле, предполагая противное легко найти τ_0, σ и x^0 ($\tau_0^i>0$, $\sigma^i\ge0$, $i=1,\dots,k$), для которых

$|x(\tilde{\tau}_0+\sigma;\tilde{\tau}_0,x^0)|<\varepsilon$ при $|x^0|<\delta$;

$|x(\tilde{\tau}_0+\tilde{\sigma}_1;\tilde{\tau}_0,x^0)|\geq\delta$, где $\tilde{\sigma}_1=(\tilde{\sigma}_0^1,0,\dots,0)$, $0\leq\tilde{\sigma}_0^1\leq\sigma^1$;

$|x(\tilde{\tau}_0+\tilde{\sigma}_2;\tilde{\tau}_0,x^0)|\geq\delta$, где $\tilde{\sigma}_2=(\sigma^1,\tilde{\sigma}_0^2,0,\dots,0)$, $0\leq\tilde{\sigma}_0^2\leq\sigma^2$;

. . . .

$|x(\tilde{\tau}_0+\tilde{\sigma}_k;\tilde{\tau}_0,x^0)|\geq\delta$, где $\tilde{\sigma}_k=(\sigma^1,\dots,\sigma^{k-1},\tilde{\sigma}_0^k)$, $0\leq\tilde{\sigma}_0^k\leq\sigma^k$.

Из (I.I6) следует, что

$$w-u\leq\mathcal{K}(\delta)\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\sigma^i}\varphi^i(\xi)\,d\xi-\sum_{i=1}^{k}\sigma^i\min_{\delta\leq|x|\leq\delta_0}\alpha^i(x). \qquad \text{I.I8)}$$

Пусть целые числа n^i такие, что

$$n^iT_i\leq\sigma^i\leq(n^i+1)T_i \qquad (\,i=1,\dots,k)$$

Из (I.I7) получаем, что

$$\mathcal{K}(\delta)\sum_{i=1}^{k}\int_0^{n^iT_i}\varphi^i(\xi)\,d\xi\leq\sum_{i=1}^{k}\sigma^i\min_{\delta\leq|x|\leq\delta_0}\alpha^i(x),$$

и потому из (I.I8) вытекает, что

$$w-u\leq\mathcal{K}(\delta)\sum_{i=1}^{k}\int_{n^iT_i}^{\sigma^i}\varphi^i(\xi)\,d\xi\leq\mathcal{K}(\delta)\sum_{i=1}^{k}\eta^i$$

но этому противоречит (I.I7) и теорема доказана.

Т е о р е м а I7. Если нулевое решение системы (I.I) равномерно асимптотически устойчиво, то оно устойчиво при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Согласно теореме 7 существует функция $v(t,x)$, удовлетворяющая оценкам

а) $\alpha_1(x)\leq v(t,x)\leq\alpha_2(x)$, где $\alpha_i(x)>0$ при $x\neq0$ и $\alpha^i(0)=0$, $i=1,2$.

б) $\frac{\partial v}{\partial t^i}\leq-\beta^i(x)$, где $\beta^i(x)>0$ при X $\neq$ 0 и $\beta^i(0)=0$, $i=1,\dots,k$.

Если предполагать, что производные $a^i(t,x)$ (i =I,...,к) по X равномерно ограничены при $|x|\le H$, $t\in J_t^k$, то по построению функции $V(t,x)$ имеем, что ее производные по x также равномерно ограничены, т.е.

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x^i}\right| < N \quad , i = 1,\dots,k, |x| \le H. \qquad (I.19)$$

Пусть дано $\varepsilon>0$. Вследствие определенной положительности $V(t,x)$ имеем

$$\inf_{|x|=\varepsilon} V(t,x) \ge \min_{|x|=\varepsilon} \alpha_1(x) = 2\alpha > 0 \qquad (I.20)$$

а вследствие (I.19) можно написать неравенство

$$\sup \left(V(t,x) \text{ при } |x| \le \delta = \frac{\alpha}{nNe^2}\right) \le \frac{\alpha}{e^2}. \qquad (I.21)$$

Обозначим $a_1 = \inf\left(\frac{\alpha_1(x)}{|x|}\right)$; $b_i = \inf\left(\frac{\beta^i(x)}{|x|}\right)$ при $\delta\le|x|\le\varepsilon$, i = I,...,k. Тогда в области $\delta\le|x|\le\varepsilon$ будут выполнены неравенства

$$a_1\cdot|x| \le V(t,x) \le nN|x| = a_2|x|,$$

$$\left.\frac{dV}{dt^i}\right|_{(1.1)} \le -b^i\cdot|x|, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x^i}\right| \le \frac{a_2}{n}, \; i=1,\dots,k, \qquad (I.22)$$

а функции $\omega^i(t,x)$ (i =I,...,к) удовлетворяют неравенствам

$$|\omega^i(t,x)| \le \frac{\varphi^i(t^i)}{\delta}\cdot|x| \quad , i = 1,\dots,k. \qquad (I.23)$$

Построим теперь функцию $f(t,x) = e^{\beta(t)}\cdot V(t,x)$ и постараемся подобрать функцию $\beta(t)$ так, чтобы функция $f(t,x)$, могла служить для доказательства устойчивости при постоянно действующих возмущениях, удовлетворяющих оценке (I.15). Вычислим изменение функции $f(t,x)$ по t^i вдоль поверхности системы (I.13). Имеем

$$\lim_{\Delta t^i \to +0} \frac{\Delta_{t^i} f(t,x)}{\Delta t^i} = f(t,x(t))\left(\frac{\partial\beta}{\partial t^i} + \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t^i}\Big|_{(1.1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\omega^i(t,x)\right) \le f(t,x)\left(\frac{\partial\beta}{\partial t^i} - \frac{b_1}{a_2} + \frac{a_2\varphi^i(t^i)}{a_1\delta}\right)\Big|_{(1.13)}. \quad (\text{I.24})$$

Пусть q^i, $i = 1,\ldots,k$, числа из интервала $(0,1)$.

Определим функции $\psi^i(t^i)$ так, чтобы выполнились равенства

$$\int_{mT_i}^{(m+1)T_i} \psi^i(t^i)\,dt^i = \int_{mT_i}^{(m+1)T_i}\left[\frac{(1-q^i)b^i}{a_2} - \frac{a_2\varphi^i(t^i)}{a_1\delta}\right]dt^i, \quad i=1,\ldots,k, \quad m=0,1,\ldots \quad (\text{I.25})$$

Если выбрать числа η^i в условиях (I.25) из равенств

$$\eta^i = \frac{T_i(1-q^i)b^i a_1\delta}{a_2^2}, \qquad i=1,\ldots,k,$$

то интегралы в левых частях равенств (I.25) будут неотрицательными, и, следовательно, существуют неотрицательные функции $\psi^i(t^i)$, удовлетворяющие условиям (I.25).

Определим теперь функцию $\beta(t)$ равенством

$$\beta(t) = \sum_{i=1}^{k}\int_0^{t^i}\left[-\psi^i(\xi) - \frac{a_2\varphi^i(\xi)}{a_1\delta} + \frac{(1-q^i)b^i}{a_2}\right]d\xi. \quad (\text{I.26})$$

Из неравенств (I.23) и (I.24) по определению функции $\beta(t)$ получаем

$$\left(\lim_{\Delta t^i \to +0}\frac{\Delta_{t^i} f(t,x(t))}{\Delta t^i}\right)_{(1.13)} \le f(t,x)\left(-\psi^i(t^i) - \frac{q^i}{a_2}\right) \le \frac{q^i}{a_2} f(t,x), \quad i=1,\ldots,k. \quad (\text{I.27})$$

С другой стороны из условий (I.25) и (I.26) имеем

$$\beta(mT_i) = 0, \quad i=1,\ldots,k; \quad m=0,1,\ldots$$

и, следовательно,

$$|\beta(t)| < \frac{3}{a_2}\sum_{i=1}^{k}(1-q^i)T_i.$$

Если положить теперь q^i ($i = 1,\ldots,k$), удовлетворяющих условиям

$$\frac{b^i(1-q^i)T_i}{a_2} < \frac{1}{3k}, \quad i=1,\ldots,k,$$

то функция $f(t,x)$ в области $\delta \le |x| \le \varepsilon$ удовлетворяет неравенствам

$$v \cdot e^{-1} \le f(t,x) \le v \cdot e. \qquad (I.28)$$

Таким образом построена функция, удовлетворяет условиям (I.27) и в силу неравенств (I.20), (I.2I) и (I.28) - неравенству

$$\sup_{|x|\le\delta} f(t,x) \le \inf_{|x|=\varepsilon} f(t,x). \qquad (I.29)$$

Если теперь рассматривать поверхность $x(t;t_0,x_0)$ при условии $|x_0|<\delta$, то вследствие неравенств (I.27) и (I.29) будет $|x(t;t_0,x_0)|<\varepsilon$ при $t^i \ge t_0^i$, $i=$ I,...,к, что требовалось доказать.

Рассмотрим систему уравнений (I.II)

$$\begin{cases} dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x,y)\,dt^i, \\ dy = \sum_{i=1}^{k} b^i(t,x,y)\,dt^i \end{cases}$$

и систему

$$dz = \sum_{i=1}^{k} b^i(t,0,z)\,dt^i, \qquad (I.30)$$

удовлетворяющие условиям полной интегрируемости.

Т е о р е м а I8. Если нулевое решение системы (I.II) равномерно устойчиво по отношению к компоненте X ,функции $b^i(t,x,y)$, $i=$ I,...,к равномерно непрерывны по X при X = 0, а нулевое решение системы (I.30) равномерно устойчиво, то нулевое решение системы (I.II) равномерно устойчиво.

Доказательство. Из устойчивости нулевого решения системы (I.II) по отношению к компоненте x следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что из условия $|x_0| + |y_0| < \delta$ следует

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Систему

$$dy = \sum_{i=1}^{k} b^i(t, x, y)\, dt^i$$

перепишем в виде

$$dy = \sum_{i=1}^{k} \{ b^i(t, 0, y) + [b^i(t, x, y) - b^i(t, 0, y)] \} dt^i.$$

Вследствие равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (I.30), оно является устойчивым при постоянно действующих возмущениях, т.е. существуют $\eta^i(\varepsilon)$, $i = 0, 1, \ldots, k$ такие, что при $|y_0| < \eta^0$, $|b^i(t, x, y) - b^i(t, 0, y)| < \eta^i$, ($i = 1, \ldots, k$) будет $|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon$ при $t^i \geq t_0^i$, ($i = 1, \ldots, k$). В силу непрерывности функций $b^i(t, x, y)$ по x существует такое $\sigma(\varepsilon)$, что из условия $|x| < \sigma$ следует

$$|b^i(t, x, y) - b^i(t, 0, y)| < \eta^i \quad \text{при } |y| < \varepsilon, \; t^i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, k).$$

По определению устойчивости по отношению к компоненте x из $|x_0| + |y_0| < \delta(\sigma(\varepsilon))$ следует

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \sigma(\varepsilon) \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Пусть $\eta(\varepsilon) = \min\{\eta^0(\varepsilon), \eta^0(\sigma(\varepsilon))\}$. Тогда из $|x_0| + |y_0| < \eta(\varepsilon)$ следует

$$|x(t; t_0, x_0, y_0)| < \sigma(\varepsilon) < \varepsilon$$

и если

$$|b^i(t, x(t; t_0, x_0, y_0), y) - b^i(t, 0, y)| < \eta^i, \quad i = 1, \ldots, k \quad \text{при}$$

$|x| < \varepsilon$, то

$$|y(t; t_0, x_0, y_0)| < \varepsilon \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \; i = 1, \ldots, k,$$ что доказывает теорему.

3. Свойство конвергенции

Рассмотрим систему (I.I) в области $\mathcal{J}_t^k \times R_x^n$, где $\mathcal{J}_t^k = \{-\infty < t^1, \ldots, t^k < +\infty\}$ и допустим, что в этой области выполнены условия интегрируемости (I.2).

Определение 12. Будем говорить, что система (I.I) обладает свойством конвергенции, если:

1) все решения $x(t; t_0, x_0)$ определены при

$$t_0^i \leq t^i < \infty \quad , \; i = 1, \ldots, k \; ,$$

2) существует единственное решение $\eta(t)$ $(t \in \mathcal{J}_t^k)$, определенное и ограниченное во всем пространстве $\mathcal{J}_t^k$, т.е.

$$\sup_t |\eta(t)| < \infty \quad ;$$

3) решение $\eta(t)$ асимптотически устойчиво в целом при $\sum_{i=1}^k t^i \to \infty$, $t^i \geq t_0^i$, т.е. оно устойчиво и для любого решения имеем $\lim\limits_{\sum_{i=1}^k t^i \to \infty} |x(t; t_0, x_0) - \eta(t)| = 0.$

Замечание. Если правая часть конвергентной системы (I.I) периодична по t с периодом $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^k)$, то ограниченное решение $\eta(t)$ также периодично с тем же периодом ω.

Доказательство. Пусть $a^i(t+\omega, x) = a^i(t, x)$, $i = 1, \ldots, k$. Рассмотрим векторфункцию $\eta(t+\omega)$. Имеем

$$d\eta(t+\omega) = \sum_{i=1}^k a^i(t+\omega, \eta(t+\omega))dt^i = \sum_{i=1}^k a^i(t, \eta(t+\omega))dt^i$$

и $\eta(t+\omega)$ является решением системы (I.I) и притом огра-

ниченным на $\mathcal{J}_t^k$. Так как система с конвергенцией обладает единственным ограниченным на $\mathcal{J}_t^k$ решением, то $\eta(t+\omega) \equiv$
$\equiv \eta(t)$, т.е. $\eta(t)$ - периодическое решение с периодом ω.

Рассмотрим систему

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i x + f^i(t))\, dt^i, \tag{I.31}$$

где A^i - постоянные $n \times n$ перестановочные матрицы, $f^i(t) \in C^1(\mathcal{J}_t^k)$ и выполнены условия полной интегрируемости.

$$A^i f^j(t) + \frac{\partial f^i(t)}{\partial t^j} = A^j f^i(t) + \frac{\partial f^j(t)}{\partial t^i}, \quad i, j = 1, \dots, k. \tag{I.32}$$

Т е о р е м а I9. Если

I) все собственные значения $\lambda_i^j(A^i)$ имеют отрицательные действительные части, т.е.

$$Re\, \lambda_i^j (A^i) < 0, \quad i = 1, \dots, k; \ j = 1, \dots, n, \tag{I.33}$$

2) векторфункции $f^i(t)$ ($i =$ I,...,к) ограничены на $\mathcal{J}_t^k$, т.е.

$$\sup_t |f^i(t)| = M_i < \infty, \quad i = 1, \dots, k, \tag{I.34}$$

то система (I.3I) обладает свойством конвергенции, причем

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{t^i} e^{A^i(t^i - \tau)} f^i(t^1, \dots, t^{i-1}, \tau, t^{i+1}, \dots, t^k)\, d\tau, \quad i = 1, \dots, k \tag{I.35}$$

представляет собой единственное, ограниченное на $\mathcal{J}_t^k$ решение системы (I.3I).

Следуем методу доказательства Б.П. Демидовича /I5/.

<u>Доказательство</u>. Из условия (I.33) имеем /I0/, что

$$\| e^{A^i t^i} \| \le N e^{-\alpha_i t^i} \quad при \quad t^i \ge 0, \ i = 1, \dots, k,$$

где $N_i > 0,\ 0 < \alpha_i < -\max\limits_j \operatorname{Re} \lambda^i_j(A^i)$.

Отсюда получаем

$$|\eta(t)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{t^i} e^{A^i(t^i-\tau)} f^i(t^1,\dots,t^{i-1},\tau,t^{i+1},\dots,t^k)\,d\tau\right| \le \int\limits_{-\infty}^{t^i} \|e^{A^i(t^i-\tau)}\|\cdot|f^i(\tau)|\,d\tau \le$$

$$\le N_i \int\limits_{-\infty}^{t^i} e^{-\alpha_i(t^i-\tau)} |f^i(\tau_i)|\,d\tau \le N_i M_i e^{-\alpha_i t^i} \frac{e^{\alpha_i \tau}}{\alpha_i}\Big|_{-\infty}^{t^i} = \frac{N_i M_i}{\alpha_i} < \infty.$$

Следовательно, интеграл (I.35) сходится и функция $\eta(t)$ ограничена по всем t^i, $i = 1,\dots,k$, причем

$$|\eta(t)| \le \frac{N_i}{\alpha_i} \sup_t |f^i(t)| \le \frac{N}{\alpha} \sup_{t,i} |f^i(t)|$$, где
$N = \max\limits_i N_i$, $\alpha = \min\limits_i \alpha_i$.

Проверим, что формулой (I.35) определяется только одна функция $\eta(t)$, т.е. интеграл в правой части один и тот же при $i = 1,\dots,k$.

Для этого рассмотрим интервал

$$\oint e^{\sum\limits_{i=1}^{k} A^i(t^i-\tau^i)} \sum_{i=1}^{k} f^i(\tau)\,d\tau^i$$ по замкнутому контуру

$$M(t^1,\dots,t^{i-1},t^i_M,t^{i+1}_M,t^{i+2},\dots,t^k) \to M_1(t^1,\dots,t^i,t^{i+1}_M,t^{i+2},\dots,t^k) \to$$

$$\to M_2(t^1,\dots,t^i,t^{i+1},\dots,t^k) \to M$$. Тогда имеем

$$\int\limits_{t^i_M}^{t^i} e^{A^i(t^i-\tau^i)+A^{i+1}(t^{i+1}-t^{i+1}_M)} f^i(t^1,\dots,t^{i-1},\tau^i,t^{i+1}_M,t^{i+2},\dots,t^k)\,d\tau^i +$$

$$+\int\limits_{t^{i+1}_M}^{t^{i+1}} e^{A^{i+1}(t^{i+1}-\tau^{i+1})} f^{i+1}(t^1,\dots,t^i,\tau^{i+1},t^{i+2},\dots,t^k)\,d\tau^{i+1} +$$

$$+\int\limits_{t^i}^{t^i_M} e^{A^i(t^i-\tau^i)} f^i(t^1,\dots,t^{i-1},\tau^i,t^{i+1},\dots,t^k)\,d\tau^i +$$

$$+\int\limits_{t^{i+1}}^{t^{i+1}_M} e^{A^i(t^i-t^i_M)+A^{i+1}(t^{i+1}-\tau^{i+1})} f^{i+1}(t^1,\dots,t^{i-1},t^i_M,\tau^{i+1},t^{i+2},\dots,t^k)\,d\tau^{i+1} = 0$$

Переходя к пределу при $t_M^i \to -\infty$ и $t_M^{i+1} \to -\infty$ и используя условие I) имеем

$$\int_{-\infty}^{t^{i+1}} e^{A^{i+1}(t^{i+1}-\tau^{i+1})} f^{i+1}(t^1,\dots,t^i,\tau^{i+1},t^{i+2},\dots,t^k)\,d\tau^{i+1} =$$

$$= \int_{-\infty}^{t^i} e^{A^i(t^i-\tau^i)} f^i(t^1,\dots,t^{i-1},\tau^i,t^{i+1},\dots,t^k)\,d\tau^i.$$

Теперь проверим, что функция $\eta(t)$, определяемое формулой (I.35) является решением системы (I.31). Дифференцируя $\eta(t)$ по t^i получаем

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i} = f^i(t) + A^i \int_{-\infty}^{t^i} e^{A^i(t^i-\tau^i)} f^i(t^1,\dots,t^{i-1},\tau^i,t^{i+1},\dots,t^k)\,d\tau^i =$$

$$= A^i \eta(t) + f^i(t), \quad i = 1,\dots,k.$$

Но тогда

$$d\eta(t) = \sum_{i=1}^{k} (A^i \eta(t) + f^i(t))\,dt^i$$

и $\eta(t)$ является решением системы (I.31). Покажем, что $\eta(t)$ является единственным решением, ограниченным на J_t^k. Пусть $\eta_1(t)$ - другое решение системы (I.31), ограниченное на J_t^k. Тогда при любом $t_0 \in J_t^k$ имеем

$$\eta_1(t) - \eta(t) = e^{A^i(t^i - t_0^i)}[\eta_1(t_0) - \eta(t_0)].$$

Отсюда

$$|\eta_1(t) - \eta(t)| \le N_i e^{-\alpha_i(t^i - t_0^i)} |\eta_1(t_0) - \eta(t_0)|. \qquad (I.36)$$

Так как $\sup_{t_0} |\eta_1(t_0) - \eta(t_0)| < \infty$, то фиксируя t переходя к пределу при $\sum_{i=1}^{k} t_0^i \to -\infty$ (но тогда хотя бы для одного i имеем $t_0^i \to -\infty$ и в неравенстве (I.36) можем выбрать именно этого i) в неравенстве (I.36), получим $|\eta_1(t) - \eta(t)| \le 0$ т.е. $\eta_1(t) \equiv \eta(t)$ и $\eta(t)$ является единственным ограниченным на J_t^k решением.

Если $x(t)$ - любое решение системы (I.3I), что $|x(t)-\eta(t)| \le N_i e^{-\alpha_i(t^i-t_0^i)}|x(t_0)-\eta(t_0)|$ при $t^i \ge t_0^i$, $i=$ I,...,к.. Если выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{N}$, то при $|x(t_0)-\eta(t_0)|<\delta$ будет $|x(t)-\eta(t)|<\varepsilon$, т.е. решение $\eta(t)$ устойчиво по Ляпунову. Более того, $\lim\limits_{\Sigma t^i \to \infty} |x(t)-\eta(t)| = 0$ и решение $\eta(t)$ устойчиво в целом, значит, система (I.3I) конвергентна.

Лемма I. Пусть система (I.I) задана во всем пространстве $J_t^k \times R_x^n = \{-\infty < t^i, x^j < +\infty, i=1,\dots,k; j=1,\dots,n\}$ и выполнены условия существования и единственности решения, причем при $|x| \le R$ и любом $t_0 \in J_t^k$ $\frac{\partial(|x|^2)}{\partial t^i} < 0$ ($i=$ I,...,к), где производная взята в силу системы (I.I).

Тогда существует по меньшей мере одно решение $\eta(t)$ системы (I.I), определенное и ограниченное для всех $t \in J_t^k$, т.е. $|\eta(t)| < R$ при $t \in J_t^k$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность трубок T_p решений $x(t; t_p, x_0)$, определяемых начальными условиями $t_p = (-p,\dots,-p)$, $p = 0, 1, 2, \dots$, $x_0 \in S$, где $S = \{|x| \le R\}$. Так как решения $x(t; t_p, x_0) \in T_p$ при $t_p^i = -p$ ($i=$ I,...,к) входят в область $Z = \{-\infty < t^i < \infty, |x| \le R\}$ и остаются в ней, то они бесконечно продолжаемы вправо, т.е. имеют смысл при $-p \le t^i < +\infty$, $i=$ I,...,к.

Пусть $S_p = \{x(0; t_p, x_0)\}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) - сечение трубки T_p начальной гепирплоскостью $t^i = 0$ ($i=$ I,...,к). В силу интегральной непрерывности S_p замкнуты. Так как решения $x(t; t_p, x_0)$ при $t^i \ge -p$ ($i=$ I,...,к) содержатся внутри области Z, то

$$|x(t_{p-1}; t_p, x_0)| < R,$$

и, следовательно, на основании свойства единственности, значения $x(t_{p-1}; t_p, x_0)$ составляют часть начальных значений $t^i = -(p-1)$, $i = 1,\dots,k$, $|x_0| \le R$ трубки T_{p-1}. Поэтому для каждого $p \geqslant 1$ трубка T_p целиком содержится в трубке T_{p-1} и поэтому для системы замкнутых множеств $\{S_p\}$ имеем

$$S_0 \supset S_1 \supset \dots \supset S_{p-1} \supset S_p \supset \dots$$

Следовательно, на основании принципа вложенных сфер для системы $\{S_p\}$ существует общая точка $\eta_0 \in \bigcap_{p=0}^{\infty} S_p$, притом $|\eta_0| < R$.

Рассмотрим решение $\eta(t) = x(t, 0, \eta_0)$. Так как $\eta_0 \in S_p$ ($p = 0, 1, \dots$), то существует решение $x(t; t_p, \eta_p)$ ($t^i \geqslant -p$, $i = 1,\dots,k$, $|\eta_p| < R$) такое, что $x(0; t_p, \eta_p) \equiv \eta_0$. В силу свойства единственности имеем $x(t; 0, \eta_0) \equiv x(t; t_p, \eta_p)$ и, следовательно, $x(t; 0, \eta_0)$ определено при $-p \le t^i < \infty$, $i = 1,\dots,k$. Отсюда ввиду произвольности натурального числа p получаем, что решение $\eta(t) = x(t; 0, \eta_0)$ имеет смысл при $-\infty < t^i < +\infty$, $i = 1,\dots,k$, причем

$$\sup_t |\eta(t)| < R$$ и лемма доказана.

В /15/ приведена следующая

Л е м м а 2. Пусть $f(x) \in C^1(R_x^n)$ - действительная векторфункция,

$$J_s(x) = \frac{1}{2}\left\{ f'(x) + [f'(x)]^T \right\}$$

- симметризованная матрица Якоби, а $\lambda(x)$ и $\Lambda(x)$ - ее наименьшее и наибольшее собственные значения.

Тогда для скалярного произведения $(f(x+h) - f(x), h)$ справедлива оценка

$$\lambda_m \cdot (h, h) \le (f(x+h) - f(x), h) \le \Lambda_M \cdot (h, h), \qquad (1.37)$$

где $\lambda_m = \inf\limits_{t\in[0,1]} \lambda(x+th)$, $\Lambda_M = \sup\limits_{t\in[0,1]} \Lambda(x+th)$.

Т е о р е м а 20. Если для системы (I.I) во всем пространстве $Z = \{-\infty < t_i^i, x^j < +\infty,\ i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n\}$

I) $\sup\limits_t |a^i(t,0)| = K^i < \infty$, $i=1,\dots,k$,

2) наибольшие собственные значения $\Lambda^i(t,x)$ симметризованных матриц Якоби $J_s^i(t,x)$ векторфункций $a^i(t,x)$ для всех t и x удовлетворяют неравенствам

$$\Lambda^i(t,x) \le -\alpha^i < 0, \quad i=1,\dots,k, \tag{I.38}$$

то система (I.I) обладает свойством конвергенции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $V(x) = \frac{1}{2}(x,x)$. В силу системы (I.I) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial t^i} = \left(\frac{\partial x}{\partial t^i}, x\right) = (a^i(t,x), x), \quad i=1,\dots,k.$$

Тогда $\frac{\partial V}{\partial t^i} = (a^i(t,x) - a^i(t,0), x) + (a^i(t,0), x)$, и

применяя лемму 2 и используя неравенство (I.38), получим

$$\frac{\partial V}{\partial t^i} \le \Lambda^i \cdot (x,x) + (a^i(t,0),x) \le -\alpha^i (x,x) + (a^i(t,0),x),\ i=1,\dots,k.$$

В силу неравенства Коши и условия I) имеем

$$|(a^i(t,0),x)| \le |a^i(t,0)|\cdot|x| < K^i\cdot|x|.$$

Таким образом

$$\frac{\partial V}{\partial t^i} \le -\alpha^i(x,x) + K^i|x| < 0, \text{ если } |x| \ge \frac{\max K^i}{\min \alpha^i} = R.$$

Следовательно, выполнены условия леммы I и существует решение $\eta(t)$ такое, что

$$\sup_t |\eta(t)| \le R.$$

Пусть $x(t)$ - любое решение системы (I.I), определяемое начальным условием $x(t_0)=x_0$. Положим $y(t)=x(t)-\eta(t)$ и $v(y)=\frac{1}{2}|y|^2=\frac{1}{2}(y,y)$.

Так как $\frac{\partial y}{\partial t^i}=a^i(t,x)-a^i(t,\eta)$, то на основании леммы 2 имеем

$$\frac{\Delta v}{\Delta t^i}=(a^i(t,x)-a^i(t,y),y)\leq-\alpha^i(y,y)=-2\alpha^i v.$$

Отсюда при $t^i\geq t^i_0,\ i=1,\ldots,k$

$$v(y(t))\leq v(y(t_0))e^{-\sum_{i=1}^{k}\alpha^i(t^i-t^i_0)}$$

т.е.

$$|x(t)-\eta(t)|\leq|x(t_0)-\eta(t_0)|e^{-\sum_{i=1}^{k}\alpha^i(t^i-t^i_0)} \quad \text{при } t^i\geq t^i_0,\ i=1,\ldots,k \tag{I.39}$$

Следовательно, $\eta(t)$ асимптотически устойчиво в целом, причем устойчивость экспоненциальная. Из неравенства (I.39) следует также единственность ограниченного на J^k_t решения $\eta(t)$. Таким образом система (I.I) конвергентна.

С л е д с т в и е. Пусть дана система

$$dx=\sum_{i=1}^{k}(f^i(t)+g^i(x))dt^i, \tag{I.40}$$

где $f^i(t)\in C^1(J^k_t)$, $g^i(x)\in C^1(R^n_x)$ и выполнены условия полной интегрируемости

$$\frac{\partial f^i}{\partial t^j}+\frac{\partial g^i}{\partial x}(f^j+g^j)=\frac{\partial f^j}{\partial t^i}+\frac{\partial g^j}{\partial x}(f^i+g^i),$$

причем $J^i=(g^i(x))'$ - матрицы Якоби.

Если

I) $\sup_t|f^i(t)|<\infty,$

2) наибольшее из собственных значений $\Lambda^i(x)$ симметризованной матрицы Якоби

$$J^i_s(x)=\frac{1}{2}\left[J^i(x)+(J^i(x))^T\right]$$

удовлетворяет неравенству

$$\Lambda^i(x) \leq -\alpha^i < 0, \qquad (x \in R_x^n), \quad i = 1, \ldots, k,$$

где α^i – положительные постоянные,

то система (I.39) обладает свойством конвергенции.

4. Диссипативные системы

Рассмотрим систему (I.I) с выполненными условиями интегрируемости и обеспеченной единственностью решений $x(t;\ t_0,\ x_0)$ в области $\mathcal{Z} = J_t^k \times R_x^n = \{0 \leq t^i < \infty\} \times R_x^n$.

Определение I3. Система (I.I) называется диссипативной, если все ее решения $x(t;\ t_0, x_0)$ бесконечно продолжаемы вправо (при $t^i \geq t_0^i$, $i =$ ....,к) и существует такое число $R > 0$, что

$$\overline{\lim_{\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty}} |x(t;\ t_0, x_0)| < R$$

т.е. для каждого решения $x(t;\ t_0, x_0)$ существует число Т (t_0 , x_0) такое, что при $\sum_{i=1}^{k} (t^i - t_0^i) > T$ оно навсегда погружается в фиксированную сферу $|x| < R$, т.е.

$$|x(t;\ t_0, x_0)| < R \quad \text{при} \quad T \leq \sum_{i=1}^{k} (t^i - t_0^i) < \infty. \tag{I.4I}$$

Если число Т можно выбрать независимо от t_0, то система (I.I) называется равномерно диссипативной относительно t_0.

Теорема 2I. Если во внешности некоторого цилиндра $\mathcal{Z}^c = \{t \in J_t^k\} \times \{x \in S_\rho^c\}$, где $S_\rho^c = \{|x| \geq \rho\}$ для системы (I.I) существует функция Ляпунова $V(t, x) \in C_{t,x}^{1,1}(\mathcal{Z}^c)$ такая, что

а) $V(t,x) \leq a(|x|)$, где $a(r)$ – непрерывная положительная возрастающая функция, б) $V(t,x) \geq b(|x|)$, где $b(r)$ - непрерывная неубывающая функция и $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$,

в) $\frac{\partial V}{\partial t^i} \leq C^i(|x|)$, где $C^i(r)$ ($i = 1,\ldots,k$) положительные непрерывные функции,

то система (I.I) равномерно диссипативна относительно t_0.

Доказательство. Из условия б) следует, что при $|x| \geq p_1$, где $p_1 \geq p$ достаточно велико, функция $V(t,x)>0$. Так как по смыслу теоремы вместо числа p можно взять p_1, то будем предполагать, что $V(t,x)>0$ в $\mathcal{Z}^c$. Рассмотрим решение $x(t; t_0, x_0)$ при $|x_0| \leq p$ и покажем, что они равномерно ограничены в совокупности. Действительно, область существования $J = \{t_0^i \leq t^i < T^i\}$, $i = 1,\ldots,k$ можно разбить на два множества: $J = J_1 + J_2$, где J_1 - совокупность всех точек t, для которых $|X(t; t_0, x_0)| \leq p$ и J_2 - совокупность точек t, для которых $|X(t; t_0, x_0)| > p$. Если множество J_2 пусто, то наше утверждение доказано. Пусть J_2 не пусто. Берем в пространстве t произвольную прямую ℓ, пересекающую J_2 и пусть t_α и t_β - точки пересечения ℓ с границей J_2. Тогда $|X(t_\alpha)| = p$ и $|X(t_\beta)| = p$. Учитывая монотонное убывание функции $V(t, X(t))$ по t (условие в) и также свойства а) и б), имеем для $t \in \ell \cap J_2$

$$b(|X(t)|) \leq V(t, X(t)) \leq V(t_\alpha, X(t_\alpha)) \leq a(|X(t_\alpha)|) = a(p). \qquad (I.42)$$

Так как $b(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, то существует $R \geq p > 0$ такое, что $b(r) > a(p)$ при $r \geq R$. В таком случае на основании (I.4I) получаем $|X(t)| < R$ при $t \in \ell \cap J_2$, и ввиду произвольности ℓ, $|X(t)| < R$ при $t \in J_2$. Это означает, что $|X(t)| < R$ при $t \in J$. Отсюда следует, что решение $X(t; t_0, x_0)$ бесконечно продолжаемо вправо, т.е. $T^i = \infty$, причем для всех $t \in J_t^k$ и $|x_0| < \rho$ имеем $|x(t; t_0, x_0)| < R$, где R зависит только от ρ.

Рассмотрим теперь произвольное решение $x(t; t_0, x_0)$ при $|x_0| > \rho$. Покажем, что и теперь при $t^i \geq t_1^i$ ($t_1^i \geq t_0^i$, $i = 1, \ldots, k$) будет $|x(t)| < R$. Прежде всего отметим, что если для некоторого t_1 ($t_1^i \geq t_0^i$, $i = 1, \ldots, k$) будет выполнено неравенство $x(t_1; t_0, x_0)| \leq \rho$, то в силу единственности имеем

$x(t; t_0, x_0) \equiv x(t; t_1, x(t_1; t_0, x_0))$ и

$|x(t; t_0, x_0) < R$ при $t^i \geq t_1^i$, $i = 1, \ldots, k$.

Поэтому достаточно предположить, что $|x(t)| > \rho$ при $t^i \geq t_0^i$. Но тогда в силу условий а), б) и в) имеем

$$b(|x(t)|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) \leq a(|x_0|) \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \ i = 1, \ldots, k,$$

и $b(r) > a(|x_0|)$ при $r \geq R_1 \geq R$, где R_1, достаточно велико. Отсюда получаем, что

$$|x(t; t_0, x_0)| < R_1 \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \ i = 1, \ldots, k,$$

где R_1 зависит только от x_0, т.е. любое решение $x(t; t_0, x_0)$ ограничено при $t^i \geq t_0^i$, $i = 1, \ldots, k$ равномерно относительно начального момента t_0 и следовательно бесконечно продолжаемо вправо.

Покажем, что для некоторого t_1 ($t_1^i \geq t_0^i$, $i = 1, \ldots, k$) будет выполнено равенство

$$|x(t_1; t_0, x_0)| = \rho. \tag{I.43}$$

Действительно, пусть

$$\rho < |x(t_1; t_0, x_0)| < R_1 \quad \text{при } t^i \geq t_0^i, \ i = 1, \ldots, k. \tag{I.44}$$

Положим $\inf\limits_{\rho \leq r \leq R_1} C^i(r) = \gamma^i > 0$. Тогда, учитывая неравенство (I.42) в силу свойства в) будем иметь

$$dV(t,x(t;t_0,x_0)) \le -\sum_{i=1}^{k} \gamma^i dt^i \quad при \quad t^i \ge t_0^i,\ i=1,\dots,k,$$

следовательно,

$$V(t,x(t;t_0,x_0)) \le V(t_0,x_0) - \sum_{i=1}^{k} \gamma^i (t^i - t_0^i) \quad при \quad t^i \ge t_0^i,\ i=1,\dots,k \qquad (I.45)$$

и при достаточно большой $\sum_{i=1}^{k} (t^i - t_0^i)$ функция $V(t,x(t))$ становится отрицательной, причем $(t,x(t)) \in S_\rho^c$, что противоречит предположению. Таким образом решение $x(t;t_0,x_0)$ не может для всех $t^i \ge t_0^i$ ($i=1,\dots,k$) удовлетворять неравенству (I.44) и следовательно при некотором t_1 ($t_1^i \ge t_0^i$, $i=1,\dots,k$) выполнено равенство (I.43). Но тогда $|x(t;t_0,x_0)| < R$ при $t^i \ge t_1^i$ ($i=1,\dots,k$) и система (I.I) диссипативна.

Оценим значение t_1. Полагая $\rho \le |x(t;t_0,x_0)| < R_1$, из неравенства (I.45) получаем

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma^i t_1^i \le V(t_0,x_0) - V(t,x) + \sum_{i=1}^{k} \gamma^i t_0^i$$

и

$$\sum_{i=1}^{k} (t_1^i - t_0^i) \le \frac{1}{\min \gamma^i} \sup_{t^i \ge t_0^i,\ i=1,\dots,k} |V(t_0,x_0) - V(t,x)|.$$

В силу свойства а) имеем $V(t_0,x_0) \le a(|x_0|) < a(R_1)$.

Кроме того, на основании свойства б) получаем

$$V(t,x(t)) \ge b(|x(t)|) \ge b(\rho).$$

Потому

$$\sum_{i=1}^{k} (t_1^i - t_0^i) \le T(x_0),$$

где $T(x_0) = \dfrac{a(R_1) - b(\rho)}{\min \gamma^i}$ и $R_1 = R_1(|x_0|)$,

т.е. $T(x_0)$ не зависит от начального момента t_0 и диссипативность равномерна по t_0.

ГЛАВА II

УСТОЙЧИВОСТЬ В ЗОНЕ ЭМИССИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

I. Определение зоны эмиссии

Понятие устойчивости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривается в процессе $t_0 \le t \to \infty$. Для функций от нескольких переменных возможны различные способы удаления точки в пространстве аргументов на бесконечность. В главе I мы рассматривали процесс $\sum_{i=1}^{k} t^i \to \infty$, $t^i \geq t_0^i$. Но эта не единственная возможность. Рассмотрим понятие устойчивости, связанное с заданным способом удаления точки t на бесконечность и тем самым характерное именно для уравнений в полных дифференциалах.

Пусть в к-мерном пространстве $t=(t^1,\dots,t^k)$ задано непрерывное поле П(t) выпуклых конусов, причем каждый конус П(t) имеет положительный к-мерный объем и не содержит противоположных векторов. Под конусом будем понимать замкнутое связное в естественной топологии множество единичных векторов с общей вершиной. Х а р а к т е р и с т и к о й поля П(t) будем называть любую непрерывную кусочно непрерывно дифференцируемую линию $\mathcal{L}$ с уравнением $t=t(s)$, $0 \le s < \infty$, где s – длина дуги $\mathcal{L}$, если для любого $s \in [0,\infty)$ вектор $t'(s) \in \Pi(t(s))$. З о н о й э м и с с и и из t (обозначим К$_t$) для любой точки t будем называть множество всех точек всех характеристик поля П(t) с началом в точке t. Обозначим $\tilde{\Pi}(t) \subset \Pi(t)$ множество векторов, вдоль выпуклой оболочки которого расположено П(t). Наиболее интересен случай, когда поле П (t) таково, что все характеристики при $s \to \infty$ уходят на бесконечность, однако это предполагать, вообще говоря, не обязательно.

2. Общие теоремы устойчивости в зоне эмиссии

Рассмотрим систему (I.I), т.е. систему

$$dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x)\, dt^i,$$

где векторфункции $a^i(t,x)$ непрерывны и удовлетворяют условиям интегрируемости в $Z = \{|x| \leq H \quad , \; t - \text{любое}\}$.

Определение I4. Нулевое решение системы (I.I) называется устойчивым (относительно поля П (t)) в зоне эмиссии из t^0, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что из условия $|x_0| < \delta$ следует

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \qquad \text{при } t \in \mathcal{K}_{t_0}.$$

В противном случае нулевое решение будем называть неустойчивым.

Теорема 22. Если при $|x| \leq h, (0 < h \leq H)$, существует дифференцируемая функция $V(t,x)$, равная нулю при x = 0 и удовлетворяющая условиям:

а) $V(t,x) \geq \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - непрерывная функция при $|x| \leq h$, $\alpha(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $\alpha(0) = 0$,

б) для любого решения $x(t)$ при $|x(t)| < h$

$$\operatorname{grad}_t V(t, x(t)) \cdot l(t) \leq 0 \qquad \text{для всех } l(t) \in \Pi(t) \qquad (2.I)$$

то нулевое решение системы (I.I) устойчиво в зоне эмиссии из $\mathcal{K}_{t^0}$.

Доказательство. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$. Обозначим $a_\varepsilon = \min\limits_{|x| = \varepsilon} \alpha(x)$ и выберем такое $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, чтобы было $V(t,x) < a_\varepsilon$ при $|x| < \delta$, $t \in \mathcal{K}_{t_0}$. Выбор такого δ возможен вследствие непрерывности по x функции $V(t,x)$. Рассмотрим интегральную поверхность $x(t; t_0, x_0)$ при $|x_0| < \delta$, $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$, вдоль характеристики $\mathcal{L}$ поля П (t), проходящей через точку t_0 при $s = s_0$. В точках этой поверхности имеем $V(t,x) = V(t, x(t)) = V^*(t)$. Если $\mathcal{L}$ с уравнением $t = t(s)$ – произвольная характеристика поля П (t), то вследствие условия б) имеем по направлению $\mathcal{L}$

$$\frac{dV^*}{d\mathcal{L}} = \operatorname{grad}_t V^*(t(s)) \cdot t'(s) \le 0$$

что означает, что функция $V^*(t(s))$ не возрастает. Если бы при некотором $s_1 > s_0$ было бы $|X(t(s_1); t_0, x_0)| = \varepsilon$, то мы имели бы $V^*(t(s_0)) < a_\varepsilon < V^*(t(s_1))$, что противоречит невозрастанию $V^*(t(s))$ и таким образом должно быть

$$|X(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in \mathcal{K}_{t_0}, \ |x_0| < \delta, \ t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}.$$

Примечание. Эта и последующие теоремы могут быть доказаны при более слабых условиях, наложенных на функцию $V(t,x)$. Можно потребовать только, чтобы эта функция была определена при $t \in \mathcal{K}_{t^0}$ в некоторой окрестности гиперплоскости x = 0 и была непрерывна по x при x = 0. Тогда условие б) надо заменить следующим: для любого решения $x(t)$ при $|x(t)| < h$ и любой точки $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$, в которой это решение определено, и любой характеристики $t(s)$, для которой $t(s_0) = t_0$.

$$\limsup_{h \to +0} \frac{V(t(s+h), x(t(s+h))) - V(t(s), x(t(s)))}{h} \le 0$$

При таких предположениях легко доказать обратную теорему о существовании функции $V(t,x)$ с указанными свойствами в случае устойчивости положив

$$V(t,x) = \max_{\tau \in \mathcal{K}_t} |x(\tau; t, x)|, \quad t \in \mathcal{K}_{t^0}$$

Определение 15. Устойчивое в $\mathcal{K}_{t^0}$ нулевое решение системы (I.I) называется асимптотически устойчивым в $\mathcal{K}_{t^0}$, если для каждой точки $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$ существует такое $\delta_0(t_0) > 0$, что из условия $|x_0| \leq \delta_0$ следует $|x(t(s); t(s_0), x_0)| \to 0$ при $s \to \infty$ по направлению любой характеристики $\mathcal{L}$.

Теорема 23. Если при $|x| \leq h$, $t \in \mathcal{K}_{t^0}$ существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, обращающаяся в нуль при $x = 0$ и удовлетворяющая условиям:

а) $V(t,x) \geq \alpha(x)$,

б) для каждого решения $x(t)$, для которого $|x(t)| < h$ и $t \in \mathcal{K}_{t^0}$

$$\operatorname{grad}_t V(t, x(t)) \cdot \ell(t) \leq -W(x) \quad \text{для всех } \ell(t) \in \Gamma(t),$$

где $\alpha(x)$ и $W(x)$ при $|x| \leq h$ непрерывные положительные функции, обращающиеся в нуль при $x = 0$,

то нулевое решение системы (I.I) асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$.

Доказательство. Так как условия теоремы 22 выполнены, то нулевое решение системы (I.I) устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$ и надо только показать, что $x(t(s); t(s_0), x_0) \to 0$ при $s \to \infty$. В силу свойств функции $V^*(t(s))$ достаточно проверить, что $V^*(t(s)) \to 0$ при $s \to \infty$. Пусть это не так и $V^*(t(s))$ по направлению некоторой характеристики $\mathcal{L}_1$ превосходит некоторую положительную постоянную. Тогда $|x(t)| > \eta > 0$ при $t \in \mathcal{L}_1$, где η достаточно мало. Но тогда

$$\frac{dV}{d\mathcal{L}_1} = \operatorname{grad}_t V^*(t(s)) \cdot t'(s) < -\alpha,$$

где $\alpha = \min\limits_{|x|=\eta} W(x)$. Но тогда

$$V(t(s), x(t(s))) < V(t_0, x_0) - \alpha(s - s_0);$$

откуда имеем, что $V(t(s), x(t(s))) \to -\infty$ при $s \to +\infty$, что противоречит положительности $V(t,x)$. Теорема доказана.

Определение 16. Нулевое решение системы (I.I) называется равномерно устойчивым в K_{t^0} , если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x_0| \le \delta$, $t_0 \in K_{t^0}$ следует

$$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon \qquad \text{при } t \in K_{t_0} .$$

Теорема 24. Если при $|x| \le h$, $t \in K_{t^0}$ существует дифференцируемая функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

а) $\alpha_1(x) \le V(t,x) \le \alpha_2(x)$,где $\alpha_i(x)$ (i =I,2) - непрерывные функции при $|x| \le h$, $\alpha_i(x) > 0$ при $x \ne 0$ и $\alpha_i(0) = 0$,

б) для каждого решения $x(t)$

$$grad_t V(t, x(t)) \cdot l(t) \le 0 \qquad \text{для всех } l(t) \in \Gamma(t) ,$$

то нулевое решение системы (I.I) равномерно устойчиво в K_{t^0} .

Доказательство. Подобно теореме 22 обозначим $a_\varepsilon = \min\limits_{|x|=\varepsilon} \alpha_1(x)$ и выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, чтобы при $|x| \le \delta$ было $\alpha_2(x) \le a_\varepsilon$. Рассматривая решение ; $x(t; t_0, x_0)$ при $|x_0| < \delta$, $t_0 \in K_{t^0}$, убеждаемся, что по направлению любой характеристики, проходящей через t_0, будем $|x(t(s); t_0, x_0)| < \varepsilon$, что и доказывает теорему.

Определение 17. Равномерно устойчивое в K_{t^0} нулевое решение системы (I.I) называется равномерно асимптотически устойчивым в K_{t^0}, если существует $\delta_0 > 0$ такое, что из $|x_0| < \delta_0$ следует $x(t(s_0 + \sigma); t(s_0), x_0)) \to 0$ при

$\sigma \to \infty$ для любой характеристики $t(s)$ $(t(0)=t^0)$ равномерно по x_0, $s_0 \geq 0$, и всем характеристикам.

Т е о р е м а 25. Если при $|x| \leq h$, $t \in K_{t^0}$ существует дифференцируемая функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

а) $\alpha_1(x) \leq V(t,x) \leq \alpha_2(x)$,

б) для любого решения $x(t)$ и $t \in K_{t^0}$

$\operatorname{grad}_t V(t,x(t)) \cdot l(t) \leq -\beta(x)$ для всех $l(t) \in \Gamma(t)$,

где $\alpha_i(x)$ ($i = 1,2$) и $\beta(x)$ непрерывные при $|x| \leq h$ функции, положительные при $x \neq 0$ и равные нулю при $x = 0$,

то нулевое решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво в K_{t^0}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $a_h = \min\limits_{|x|=h} \alpha_1(x)$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Надо доказать, что существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $\sigma > N$ будет $|x(t(s_0+\sigma); t(s_0), x_0)| < \varepsilon$ равномерно по $t(s_0)$ и x_0. Выберем $\alpha > 0$, для которого

$\max\limits_{|x|<\alpha} \alpha_2(x) \leq \min\limits_{|x|=\varepsilon} \alpha_1(x)$ и обозначим $\beta = \min\limits_{\alpha \leq |x| \leq h} \beta(x)$.

Тогда можно положить $N = \frac{a_h}{\beta}$. При изменении s от s_0 до s_0+N хоть раз станет $|x| < \alpha$, после чего всегда будет $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

П р и м е ч а н и е. В отличие от случая одной независимой переменной, в теории уравнений в полных дифференциалах возможны естественные определения равномерной в ослабленном смысле асимптотической устойчивости. Так стремление $x(t(s_0+\sigma); t(s_0), x_0) \to 0$ может быть для каждой характеристики равномерным по $s_0 \geq 0$ и x_0; оно может быть равномерным по x_0 и всем характеристикам и т.п.

Определение 18. Нулевое решение системы (I.I) называется равномерно экспоненциально устойчивым в $\mathcal{K}_{t^0}$, если существует такое $\lambda > 0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что вдоль любой характеристики $t(s)$ $(t(0) = t^0)$ из условия $|x_0| < \delta$ следует

$$|\mathcal{X}(t(s); t(s_0), x_0)| < \varepsilon\, e^{-\lambda(s-s_0)} \quad \text{при} \quad s \geq s_0 \geq 0.$$

Теорема 26. Если при $|x| \leq h$, $t \in \mathcal{K}_{t^0}$ существует дифференцируемая функция $v(t,x)$, удовлетворяющая условиям:

а) $c_1 |x|^k \leq v(t,x) \leq \alpha(x)$,

б) для каждого решения $x(t)$ и $t \in \mathcal{K}_{t^0}$

$$\operatorname{grad}_t v(t, x(t)) \cdot l(t) \leq c_2 v(t, x(t)) \quad \text{для всех} \quad l(t) \in \Gamma(t),$$

где C_1, C_2, k – положительные постоянные, $\alpha(x) \to 0$ при $|x| \to 0$, то нулевое решение системы (I.I) равномерно экспоненциально устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$.

Доказательство. Из условия б) по направлению любой характеристики имеем

$$\frac{dv}{ds} \leq -c_2 v \qquad \text{, откуда получаем}$$

$$v(t(s), x(t(s))) \leq v(t(s_0), x(t(s_0)))\, e^{-c_2(s-s_0)},$$

откуда, учитывая условие в) имеем

$$c_1 \cdot |\mathcal{X}(t(s); t(s_0), x_0)|^k \leq \alpha(x_0)\, e^{-c_2(s-s_0)},$$

что и доказывает теорему.

Теорема 27. Если при $|x| \leq h$, $t \in \mathcal{K}_{t^0}$ существует дифференцируемая функция $v(t,x)$, равная нулю лишь x = 0 и такая, что для некоторой характеристики $t(s)$ $(t(0)\in \mathcal{K}_{t_0})$ при $0\le s<\infty$ будет

$$grad_t\, V(t, x(t))\cdot t'(s) \geq \alpha(x) \geq 0,$$

где непрерывная функция $\alpha(x)$ определена при $|x|\le h$ и равна нулю лишь при x = 0, и существуют сколь угодно малые значения /x/, при которых $V(t(0), x) > 0$,

то нулевое решение системы (I.I) неустойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$.

Доказательство. Пусть имеет некоторое $\varepsilon>0$ и произвольное $\delta>0$. Выберем начальные значения так, чтобы было $t_0\in t(s)$, $|x_0|<\delta$ и $V(t_0, x_0)>0$. По условию теоремы $V(t, x(t))$ по направлению характеристики $t(s)$ возрастает и так как $V(t, 0)=0$, то решение $x(t)$ не может приближаться к x = 0. Но тогда вдоль интегральной поверхности $x(t)$ по направлению характеристики имеем $\frac{dV}{ds}\geq\alpha>0$, откуда имеем

$$V(t(s), x(t(s)))\geq V(t(s_0), x_0) + \alpha(s-s_0) \to \infty \text{ при } s\to\infty.$$

Но тогда поверхность $x(t)$ неминуемо достигнет границу $|x|=\varepsilon$, что и доказывает теорему.

Определение 19. Нулевое решение системы (I.I) называется устойчивым (асимптотически устойчивым и т.п.) в поле $\Pi(t)$, если оно устойчиво (асимптотически устойчиво и т.п.) в зоне эмиссии этого поля из каждой точки t.

Примечание. Для устойчивости нулевого решения системы (I.I) в поле П (t) имеют место теоремы, получаемые из теорем 22 - 27, если условия, наложенные на функцию $V(t,x)$ при $t\in\mathcal{K}_{t^0}$, заменить такими же условиями при любом t.

§. Существование зоны устойчивости

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений для уравнений в полных дифференциалах можно искать зону $\mathcal{K}_{t^0}$, в которой нулевое решение заданной системы (I.I) устойчиво. Будем решать эту задачу для случая линейной системы

$$dx = \sum_{i=1}^{k} A^i(t)\, x\, dt^i, \tag{2.2}$$

где матрицы $A^i(t)$ непрерывно дифференцируемы при любых t и выполнены условиях интегрируемости

$$\frac{\partial A^i}{\partial t^j} + A^i A^j = \frac{\partial A^j}{\partial t^i} + A^j A^i. \tag{2.3}$$

Сначала рассмотрим случай монотонной асимптотической устойчивости, т.е. случай, когда вдоль любой характеристики решение $x(t; t_0, x_0)$ монотонно приближается к нулю. Очевидно, это будет тогда, когда

$\dfrac{d(x,x)}{dt} < 0$ по направлению любой характеристики зоны $\mathcal{K}_{t^0}$. Значит для нахождения зоны монотонной устойчивости надо искать те направления t, по которым $\dfrac{d(x,x)}{dt} < 0$.

Если найдем производную

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{k} A^i(t)\, x\, \frac{dt^i}{dt},$$

то получаем условие монотонной устойчивости

$$\frac{d(x,x)}{dt} = 2\sum_{i=1}^{k} (A^i(t)x, x)\frac{dt^i}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left(\left[A^i(t) + A^{i*}(t)\right]x, x\right)\cos\alpha^i < 0.$$

Таким образом зона монотонной устойчивости определяется решением неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} (A_i(t)x, x)\cos\alpha^i < 0, \tag{2.3}$$

где $A_i(t) = A^i(t) + A^{i*}(t)$. (2.4)

Пусть к = 2. Тогда (2.3) принимает вид

$$(A_1(t)x, x)\cos\alpha + (A_2(t)x, x)\sin\alpha < 0. \tag{2.5}$$

При п = I получаем неравенство

$$A_1(t)\cos\alpha + A_2(t)\sin\alpha < 0. \tag{2.6}$$

Если A_1 и A_2 постоянные, то решение неравенства (2.6) имеет вид

$$-\operatorname{arctg}\frac{A_1}{A_2} < \varphi < \pi - \operatorname{arctg}\frac{A_1}{A_2} \text{ при } A_2 < 0,$$

$$\pi - \operatorname{arctg}\frac{A_1}{A_2} < \varphi < 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{A_1}{A_2} \text{ при } A_2 > 0,$$

т.е. зоной монотонной устойчивости является полуплоскость. Если $A_1 = A_1(t)$ и $A_2 = A_2(t)$, то для нахождения зоны устойчивости из точки (t_0^1, t_0^2) получаем дифференциальное неравенство

$$A_1(t) + A_2(t)\frac{dt^2}{dt^1} \gtrless 0 \text{ при } \cos\alpha \lessgtr 0, \quad t^2\big|_{t^1=t_0^1} = t_0^2.$$

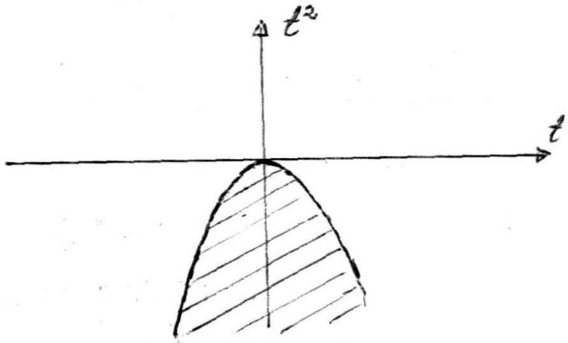
П р и м е р . Найти зону монотонной устойчивости $K_{(0,0)}$ для решения уравнения

$$dx = 2t^1 x\, dt^1 + x\, dt^2.$$

Р е ш е н и е . Составляем дифференциальное уравнение:

$$2t^1 + \frac{dt^2}{dt^1} = 0, \quad t^2\big|_{t^1=0} = 0.$$

Его решение является $t^2 = -(t^1)^2$, откуда получаем зону монотонной устойчивости $t^2 < -(t^1)^2$ (черт.I)



черт. I.

При n = 2

$$A_1(t) = \begin{Vmatrix} a_1(t) & b_1(t) \\ b_1(t) & c_1(t) \end{Vmatrix} \qquad A_2(t) = \begin{Vmatrix} a_2(t) & b_2(t) \\ b_2(t) & c_2(t) \end{Vmatrix}$$

и неравенство (2.3) принимает вид

$$(a_1(t)\cos\alpha + a_2(t)\sin\alpha)x^{1^2} + 2(b_1(t)\cos\alpha + b_2(t)\sin\alpha)x^1x^2 +$$
$$+ (c_1(t)\cos\alpha + c_2(t)\sin\alpha)x^{2^2} < 0$$

Квадратичная форма может быть определенной, если

$$a_1^2(t) + a_2^2(t) > 0 \quad \text{и} \quad c_1^2(t) + c_2^2(t) > 0.$$

Точки, в которых $a_1^2(t) + a_2^2(t) = 0$ или $c_1^2(t) + c_2^2(t) = 0$, назовем особыми точками зоны устойчивости и из рассмотре - ния исключим.

Условие отрицательности квадратичной формы дает систе- му неравенств

$$\begin{cases} a_1(t)\cos\alpha + a_2(t)\sin\alpha < 0 \\ (a_1(t)\cos\alpha + a_2(t)\sin\alpha)(c_1(t)\cos\alpha + c_2(t)\sin\alpha) - (b_1(t)\cos\alpha + b_2(t)\sin\alpha)^2 > 0. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Рассмотрим второе неравенство системы (2.7), если A_I и A_2 постоянные. После вынесения $\cos^2\alpha$ получаем

$$(a_1 + a_2 \operatorname{tg}\alpha)(c_1 + c_2 \operatorname{tg}\alpha) - (b_1 + b_2 \operatorname{tg}\alpha)^2 > 0.$$

Соответствующее уравнение имеет корни

$$tg\,\alpha_{1,2}=\frac{-(a_2c_1+a_1c_2-2b_1b_2)\pm\sqrt{(a_2c_1+a_1c_2-2b_1b_2)^2-4(a_1c_1-b_1^2)(a_2c_2-b_2^2)}}{2(a_2c_2-b_2^2)}$$

Использование условий полной интегрируемости, которые в случае постоянных матриц дает

$$a_1b_2+b_1c_2=a_2b_1+b_2c_1,$$

имеем $(a_2c_1+a_1c_2-2b_1b_2)^2-4(a_1c_1-b_1^2)(a_2c_2-b_2^2)=$

$$=a_2^2c_1^2+a_1^2c_2^2+4b_1^2b_2^2+2a_1a_2c_1c_2-4a_2c_1b_1b_2-4a_1c_2b_1b_2-$$

$$-4a_1c_1a_2c_2+4a_1c_1b_2^2+4a_2c_2b_1^2-4b_1^2b_2^2=$$

$$=(a_2c_1-a_1c_2)^2+4(c_1b_2-c_2b_1)(a_1b_2-a_2b_1)=$$

$$=(a_2c_1-a_1c_2)^2+4(a_1b_2-a_2b_1)^2>0$$

Это означает, что всегда существуют два действительных различных корня $tg\,\alpha_1$ и $tg\,\alpha_2$.

Корни могут совпадать только при условии

$$\begin{cases}a_2c_1-a_1c_2=0\\ a_1b_2-a_2b_1=0\end{cases}$$

что означает

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}.$$

Но в таком случае система (2.2) имеет вид

$$dx=A_1x\,dt^1+kA_1x\,dt^2$$

и заменой $t=t^1+kt^2$ она сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Естественно, в этом случае "зоной монотонной устойчивости" является полупрямая.

Из двух вертикальных углов, в которых выполняется второе неравенство из (2.7) первым неравенством той же системы оставляется один. Полученные результаты сформулируем теоремой.

Т е о р е м а 28. Линейная система (2.2) с постоянными коэффициентами при к = п = 2 для любой точки t_0 имеет зону монотонной устойчивости в виде угла с вершиной в t_0, причем этот угол не зависит от t_0.

П р и м е р . Найти зону монотонной устойчивости нулевого решения системы

$$\begin{cases} dx^1 = (-2x^1 + x^2)dt^1 + x^2 dt^2 \\ dx^2 = (x^1 - x^2)dt^1 + (x^1 + x^2)dt^2. \end{cases}$$

Имеем
$$A^I = \begin{Vmatrix} -2 & I \\ I & -I \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & I \\ I & I \end{Vmatrix}.$$

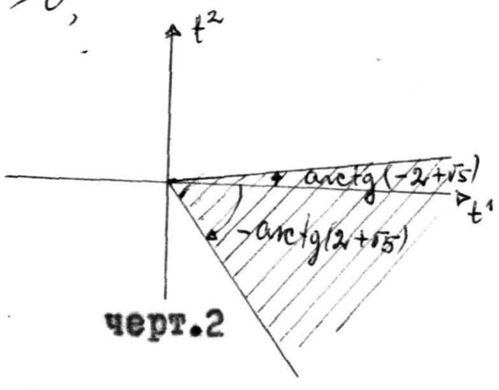
отдука
$$A_I = A^I + A^{Ix} = \begin{Vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$$

Система (2.7) дает

$$\begin{cases} -4\cos\alpha < 0 \\ -4(-2 + 2\,tg\,\alpha) - (2 + 2\,tg\,\alpha)^2 > 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \\ -2-\sqrt{5} < tg\,\alpha < -2+\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{(черт.2)}$$



черт.2

В случае переменных матриц $A_I(t)$, $A_2(t)$ при $t = t_0$ система (2.7) дает угол устойчивости в зависимости от его вершины - точки t_0.

Дифференциальное уравнение

$$\left(a_1^1(t)+a_2^2(t)\frac{dt^2}{dt^1}\right)\left(c_1(t)+c_2(t)\frac{dt^2}{dt^1}\right)-\left(b_1(t)+b_2(t)\frac{dt^2}{dt^1}\right)^2=0\ ;\quad t^2\big|_{t_0^1}=t_0^2$$

вместе с неравенством

$$\cos\alpha\left(a_1(t)+a_2(t)\frac{dt^2}{dt^1}\right)<0$$

определяет границы зоны K_{t_0} монотонной устойчивости.

П р и м е р . Найти зону монотонной устойчивости $K_{(I,-I)}$ нулевого решения системы

$$\begin{cases} dx_1 = t_2 x_1\,dt_1 + t_1 x_1\,dt_2\,, \\ dx_2 = x_2\,dt_1 + x_2\,dt_2 \end{cases}$$

Р е ш е н и е . Имеем

$$A_I = \begin{Vmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix},\quad A_2 = \begin{Vmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & I \end{Vmatrix}.$$

Система (2.7) принимает вид

$$\begin{cases} t_2\cos\alpha + t_1\sin\alpha < 0 \\ \cos\alpha + \sin\alpha < 0 \end{cases}$$

Для определения границ зоны монотонной устойчивости $K_{(I,-I)}$ решаем дифференциальные уравнения:

$$t_2 + t_1\frac{dt_2}{dt_1} = 0\ ,\quad t_2\big|_{t_1=1} = -1\ ,$$

$$1 + \frac{dt^2}{dt^1} = 0\ ,\quad t_2\big|_{t_1=1} = -1.$$

Решение этих уравнений определяет зону монотонной устойчивости (черт. 3).

черт. 3.

Вопрос о нахождении зоны монотонной устойчивости в случае переменных коэффициентов конечно на много сложнее случая постоянных матриц.

Для зоны простой (немонотонной) устойчивости из

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{k} A^i(t)\, x \cos\alpha^i$$

очевидно следует, что матрица

$$\sum_{i=1}^{k} A^i(t) \cos\alpha^i$$

должна быть гурвицевой. Условия Гурвица дают систему неравенств для определения направлений α^i (i = I,...,к).

При п = I условие Гурвица принимает вид

$$\sum_{i=1}^{k} a^i(t) \cos\alpha^i < 0$$

которое как видно совпадает с условием монотонной устойчивости.

При п = 2 условие Гурвица дает

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i(t) + c_i(t)) \cos\alpha^i < 0$$, где $a_i(t)$ и $c_i(t)$ - элементы главной диагонали матрицы $A^i(t)$, i = I,...,к.

ГЛАВА III

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

I. Устойчивость неоднородной системы линейных уравнений

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$dy = \sum_{i=1}^{k} (A^i(t)y + f^i(t))dt^i, \tag{3.I}$$

где $A^i(t)$ - непрерывно дифференцируемые n x n матрицы и $f^i(t)$ - непрерывно дифференцируемые векторфункции при любых t, удовлетворяющие условиям интегрируемости

$$A^i(t)\cdot f^j(t) + \frac{\partial f^i(t)}{\partial t^j} = A^j(t)\cdot f^i(t) + \frac{\partial f^j(t)}{\partial t^i}, \quad i,j = 1,\dots,k \tag{3.2}$$

при выполненных условиях интегрируемости

$$\frac{\partial A^i(t)}{\partial t^j} + A^i(t)\cdot A^j(t) = \frac{\partial A^j(t)}{\partial t^i} + A^j(t)\cdot A^i(t), \quad i,j = 1,\dots,k \tag{3.3}$$

соответствующей однородной системы

$$dx = \sum_{i=1}^{k} A^i(t)x\,dt^i. \tag{3.4}$$

О п р е д е л е н и е 20. Линейная система (3.I) называется устойчивой (вполне неустойчивой), если все ее решения $y(t)$ устойчивы (неустойчивы) по Ляпунову.

З а м е ч а н и е . Как мы увидим дальше, решения линейных дифференциальных систем либо все одновременно устойчивы, либо неустойчивы. Иначе с нелинейными системами, некоторые решения которых могут быть устойчивыми, а другие не - устойчивыми.

Т е о р е м а 29. Для устойчивости в K_{t_0} линейной системы (3.I) при любых свободных членах $f^i(t)$ (i = I,...,к) необходимо и достаточно, чтобы было устойчивым тривиальное решение $x \equiv 0$ соответствующей однородной системы (3.4) в зоне K_{t_0}, $t_0 \in K_{t_0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . I°. Пусть $\eta = \eta(t)$ $(t \in K_{t_0})$ есть некоторое устойчивое решение неоднородной системы (3.I). Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого решения $y(t)$ системы (3.I) при $t \in K_{t_0}$ справедливо неравенство

$$|y(t; t_0, y_0) - \eta(t; t_0, \eta_0)| < \varepsilon \tag{3.5}$$

если только

$$|y_0 - \eta_0| < \delta. \tag{3.6}$$

Но $x(t) = y(t) - \eta(t)$ является решением однородной системы (3.4), причем любое решение $x(t)$ может быть представлено в таком виде. Таким образом неравенства (3.5) и (3.6) эквива - лентны следующим:

$|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ при $t \in K_{t_0}$, если только $|x_0| < \delta$,

что означает устойчивость в K_{t_0} нулевого решения системы (3.4).

З а м е ч а н и е I. Из доказательства следует, что устойчивость нулевого решения системы (3.4) вытекает из устойчивости хотя бы одного решения линейной системы (3.I) при каком нибудь свободном члене $f^i(t)$ (может быть $f^i(t) \equiv 0$) (i = I,...,к).

2°. Пусть нулевое решение системы (3.4) устойчиво по Ляпунову. Тогда, если $x(t)$ $(t \in K_{t_0})$ произвольное решение однородной системы такое, что $|x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$ при $t \in K_{t_0}$, если $|x_0| < \delta(\varepsilon, t_0)$. Следовательно, если $\eta(t)$ – некоторое решение системы (3.I) и $y(t)$ – произвольное решение этой системы, то из $|y_0 - \eta_0| < \delta$ будет следовать

$$|y(t) - \eta(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in K_{t_0},$$

что означает устойчивость решения $\eta(t)$.

Следствие I. Линейная дифференциальная система устойчива (вполне неустойчива), когда устойчиво (неустойчиво) хотя бы одно ее решение.

Следствие 2. Линейная неоднородная система устойчива тогда и только тогда, когда устойчива соответствующая однородная система.

Замечание 2. Таким образом поведение решений линейной неоднородной системы (3.I) с любыми свободными членами $f^i(t)$ ($i = 1,\dots,k$) в смысле устойчивости такое же, как поведение решений соответствующей однородной системы (3.4). Аналогично определению 20 дается определение асимптотической устойчивости системы (3.I) и т.п. и доказываются теоремы, аналогичные теореме 29. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся изучением устойчивости лишь однородных линейных дифференциальных систем.

2. Устойчивость линейных однородных систем

Рассмотрим линейную однородную систему (3.4).

Теорема 30. Линейная однородная система (3.4) устойчива в зоне K_{t^0} тогда и только тогда, когда каждое решение $x(t; t_0, x_0)$ ($t_0 \in K_{t^0}$) этой системы ограничено при $t \in K_{t_0}$.

Доказательство. Пусть любое решение системы (3.4) ограничено при $t \in K_{t_0}$, $t_0 \in K_{t^0}$. Рассмотрим нормированную фундаментальную матрицу $X(t)$ $(X(t_0)=E)$. Так как матрица $X(t)$ состоит из ограниченных при $t\in\mathcal{K}_{t_0}$ функций, то она ограничена при $t\in\mathcal{K}_{t_0}$, т.е. $\|X(t)\|\leq M$, где M - положительная постоянная, зависящая, вообще говоря, от t_0. Каждое решение системы (3.4) может быть представлено в виде $x(t;t_0,x_0)=X(t)\cdot x_0$. Отсюда получаем

$|x(t)|\leq\|X(t)\|\cdot|x_0|\leq M\cdot|x_0|<\varepsilon$ если только $|x_0|<\frac{\varepsilon}{M}=\delta$.

Следовательно, нулевое решение, и значит в силу теоремы 29 и любое решение системы (3.4) устойчиво, т.е. система устойчива.

Докажем теперь, что ограниченность всех решений системы (3.4) является необходимым условием устойчивости. Пусть система (3.4) допускает неограниченное при $t\in\mathcal{K}_{t_0}$ решение $z(t)$, где очевидно $z(t_0)\neq 0$. Фиксируя числа $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ рассмотрим решение

$$x(t)=\frac{z(t)}{|z(t_0)|}\cdot\frac{\delta}{2}.$$

Очевидно $|x(t_0)|=\frac{\delta}{2}<\delta$, причем в силу неограниченности $z(t)$ для некоторого $t_1\in\mathcal{K}_{t_0}$ имеем

$$|x(t_1)|=\frac{|z(t_1)|}{|z(t_0)|}\cdot\frac{\delta}{2}>\varepsilon$$

и нулевое решение системы (3.4) неустойчиво, следовательно система (3.4) вполне неустойчива.

С л е д с т в и е. Если линейная неоднородная система устойчива, то все ее решения или ограничены, или неограничены вдоль любой характеристики $t(s)$ $(t(s_0)=t_0)$ при $s\to\infty$.

Т е о р е м а 31. Линейная однородная система асимптотически устойчива в $\mathcal{K}_{t_0}$ тогда и только тогда, когда все ее решения $x(t;t_0,x_0)$ $(t_0\in\mathcal{K}_{t_0})$ стремятся к нулю вдоль любой характеристики $t(s)$ $(t(s_0)=t_0)$ при $s\to\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть система (3.4) асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$, тогда в $\mathcal{K}_{t^0}$ асимптотически также ее нулевое решение. Это означает, что для любого решения $\xi(t)$ системы (3.4) имеем $\lim_{s\to\infty} \xi(t(s)) = 0$ вдоль любой характеристики $t(s)$ $(t(s_0) = t_0)$, если только $|\xi(t_0)| < \delta_0$, где $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$ произвольно.

Рассмотрим произвольное решение $x(t; t_0, x_0)$ при $x_0 \neq 0$ и положим

$$x(t) = \xi(t) \cdot \frac{|X(t_0)|}{\frac{\delta_0}{2}} .$$

Тогда $\xi(t) = \frac{x(t)}{|X(t_0)|} \cdot \frac{\delta_0}{2}$ также является решением и очевидно удовлетворяет условию $|\xi(t_0)| = \frac{\delta_0}{2} < \delta_0$. Но тогда $\lim_{s\to\infty} \xi(t(s)) = 0$, следовательно

$\lim_{s\to\infty} x(t(s)) = 0$ вдоль любой характеристики $t(s)$, для которой $t(s_0) = t_0$.

Пусть теперь $\lim_{s\to\infty} x(t(s)) = 0$ по направлению любой характеристики $t(s)$ $(t(s_0) = t_0)$. Тогда для каждого решения $x(t)$ и каждой характеристики $t(s)$ будет такое S, что при $S < s < \infty$ будет $|x(t(s))| < 1$. Так как в конечной части характеристики $s_0 \le s \le S$ непрерывная векторфункция ограничена, то любое решение $x(t)$ ограничено в $\mathcal{K}_{t_0}$ и следовательно система устойчива, причем ее нулевое решение асимптотически устойчиво. Тогда в силу теоремы, аналогичной теореме 29 (следствию I) имеем, что система (3.4) асимптотически устойчива.

С л е д с т в и е . Асимптотически устойчивая линейная система асимптотически устойчива в целом (в зоне $\mathcal{K}_{t^0}$).

Аналогично доказываются две последующие теоремы.

Т е о р е м а 32. Линейная однородная система равномерно устойчива в $\mathcal{K}_{t^0}$ тогда и только тогда, когда все ее решения $x(t;t_0,x_0)$ равномерно ограничены при $t\in\mathcal{K}_{t_0}$, $t_0\in\mathcal{K}_{t^0}$.

Т е о р е м а 33. Линейная однородная система равномерно асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения $x(t(s);t(s_0),x_0)\to 0$ при $s\to\infty$ равномерно по $t_0\in\mathcal{K}_{t^0}$, x_0 и всем характеристикам.

О п р е д е л е н и е 21. Нулевое решение системы (3.4) называется эквиасимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$, если существует такое $\delta_0>0$ и для каждого $\varepsilon>0$ и каждой характеристики такое $S>0$, что из условия $|x_0|<\delta$ следует

$$|x(t(s);t^0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad s>S \qquad (t(0)=t^0).$$

Т е о р е м а 34. Если нулевое решение системы (3.4) асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$, то оно эквиасимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(t;t^0,x_0)$ – произвольное решение системы (3.4). Представим его в виде

$$x(t;t^0,x_0)=X(t)\cdot X^{-1}(t^0)\,x_0$$

По условию асимптотической устойчивости в $\mathcal{K}_{t^0}$ для каждого $\varepsilon>0$ и каждой характеристики можно найти такое S, что $\|X(t(s))\|<\varepsilon$ при $s>S$. Выберем $\delta_0=\|X^{-1}(t^0)\|$, тогда при $|x_0|<\delta_0$ и $s>S$ будет $|x(t;t^0,x_0)|<\varepsilon$, что требовалось доказать.

Т е о р е м а 35. Если нулевое решение системы (3.4) в $\mathcal{K}_{t^0}$ равномерно асимптотически устойчиво, то оно равномерно экспоненциально асимптотитически устойсиво в $\mathcal{K}_{t^0}$(определение 18).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию равномерной асимптотической устойчивости следует, что $|x(t(s);t(s_0),x_0)| \to 0$ при $s \to \infty$ равномерно по t_0, x_0 и всем характеристикам. Выражение решения $x(t;t_0,x_0)$ в виде $x(t;t_0,x_0) = X(t)\cdot X^{-1}(t_0)x_0$ и теорема 32 дает, что $\|X(t)\cdot X^{-1}(t_0)\| < M$ в $\mathcal{K}_{t_0}$, $t_0 \in \mathcal{K}_{t^0}$, причем M не зависит от t_0. В силу равномерной асимптотической устойчивости найдется такое $S > 0$, что при $s > S + s_0$ будет $\|X(t(s))\cdot X^{-1}(t(s_0))\| < \frac{1}{2}$. Следовательно, при $s > s_0 + nS$ где n - целое положительное число, будет $\|X(t(s))\cdot X^{-1}(t(s_0))\| < 2^{-n}\cdot M$, а это означает, что

$$\|X(t(s))\cdot X^{-1}(t(s_0))\| < 2M e^{-\lambda(s-s_0)}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{S}.$$

Но тогда, если выбрать $\delta_0 < \frac{\varepsilon}{2M}$, то из условия $|x_0| < \delta_0$ будет следовать

$$|x(t;t_0,x_0)| < \varepsilon e^{-\lambda(s-s_0)} \quad \text{при} \quad s > s_0,$$

что требовалось доказать.

Т е о р е м а 36. Если нулевое решение системы /3.4/ в зоне $\mathcal{K}_{t^0}$ устойчиво и

$$\inf_{t(s)\in \Phi_{t^0},\, 0<s<\infty} \int_0^s \Big(\sum_{i=1}^{k} A^i(t(\sigma))\cdot t^{i\prime}(\sigma)\Big)d\sigma > -\infty$$

где под Φ_{t^0} понимается совокупность всех характеристик с началом в t^0,

то это решение равномерно устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим решение $x(t;t_0,x_0)$ и представим его в виде $x(t;t_0,x_0) = X(t,t^0)X^{-1}(t_0,t^0)\cdot x_0$. Из условия устойчивости нулевого решения в $\mathcal{K}_{t^0}$ следует, что матрица $X(t,t^0)$ ограничена в $\mathcal{K}_{t^0}$ /равномерно по отношению к t_0, от которого $X(t,t^0)$ не зависит/. По формуле для определителя фундаментального решения

$$\det X(t,t_0) = \exp\int_{s_0}^{s}\Big(\sum_{i=1}^{k} Sp\, A^i(t(\sigma))\cdot t^{i\prime}(\sigma)\Big)d\sigma$$

и условия теоремы, $X(t_0,t^0)$ также ограничено в $\mathcal{K}_{t^0}$ равномерно по t_0. Но тогда $x(t;t_0,x_0)$ равномерно ограничено в $\mathcal{K}_{t^0}$, и следовательно (теорема 32) нулевое решение системы (3.4) равномерно устойчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$.

Рассмотрим теперь линейную неоднородную систему (3.I)

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i(t)x + f^i(t))\,dt^i, \quad x(t_0) = x_0.$$

Исходя из того, что решение задачи (3.I) существует, представим его в виде $x(t) = X(t,t_0)u(t)$, где $X(t;t_0)$ фундаментальная матрица решений системы (3.4). Тогда легко проверить, что

$$x(t;t_0,x_0) = X(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)\sum_{i=1}^{k} f^i(\tau)\,d\tau^i, \tag{3.7}$$

причем интеграл не зависит от пути интегрирования. С помощью формулы (3.7) можно найти некоторые признаки устойчивости.

Пусть имеется система

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i(t) + a^i(t))x\,dt^i, \tag{3.8}$$

удовлетворяющая условиям (3.3) и условиям

$$\frac{\partial a^i}{\partial t^j} + A^i a^j + a^i A^j + a^i a^j = \frac{\partial a^j}{\partial t^i} + A^j a^i + a^j A^i + a^j a^i, \quad i,j = 1,\dots,k, \tag{3.9}$$

в которой матрицы $a^i(t)$ непрерывно дифференцируемы в $\mathcal{K}_{t^0}$ и в некотором смысле малы.

Т е о р е м а 37. Если нулевое решение системы (3.4) равномерно устройчиво в $\mathcal{K}_{t^0}$ и

$$\sup_{t(s)\in\Phi_{t^0}} \int_0^\infty \|a^i(t(s))\|\,ds < \infty, \quad i = 1,\dots,k,$$

то нулевое решение системы (3.9) также равномерно устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем систему (3.8) в виде

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i(t)x + a^i(t)x)\,dt^i,$$

и, принимая $a^i(t)x$ за неоднородные члены, из формулы (3.7) получаем

$$x(t(s)) = \bar{x}(t(s)) + \int_{s_0}^{s} X(t(s), t(\sigma)) \cdot \sum_{i=1}^{k} a^i(t(\sigma)) \cdot x\, t^{i'}(\sigma)\, d\sigma.$$

Пусть $c = \max(\sup_{s \geq 0,\, t(s) \in \Phi_{t^0}} |\bar{x}(t(s))|,\ \sup_{s \geq 0,\, t(s) \in \Phi_{t^0}} \|X(t(s))\|)$.

Тогда имеем

$$|x(t(s))| \leq c + c \int_{s_0}^{s} \left(\sum_{i=1}^{k} \|a^i(t(\sigma))\|\right) \cdot |x(t(\sigma))| \cdot d\sigma,$$

откуда, применяя лемму Гронуолла, получаем

$$|x(t(s))| \leq c \exp\left\{c \int_{s_0}^{s} \sum_{i=1}^{k} \|a^i(t(\sigma))\| \cdot d\sigma\right\} \leq$$

$$\leq c \exp\left\{c \int_{s_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \|a^i(t(\sigma))\|\, d\sigma\right\}$$

и условия теоремы дают равномерную ограниченность решений $x(t(s))$ в K_{t^0}. Из теоремы 32 тогда следует, что нулевое решение системы (3.8) равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 38. Если нулевое решение системы (3.4) равномерно асимптотически устойчиво в K_{t^0}, то существует такая постоянная $c > 0$, что если $\sum_{i=1}^{k} \|a^i(t)\| < c$ всюду в K_{t^0}, то нулевое решение системы (3.8) также равномерно асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в теореме 37 имеем

$$x(t(s)) = \bar{x}(t(s)) + \int_{s_0}^{s} X(t(s), t(\sigma)) \sum_{i=1}^{k} (a^i(t(\sigma)) \cdot x \cdot t^{i'}(\sigma))\, d\sigma.$$

Из равномерной асимптотической устойчивости в K_{t^0} и теоремы 35 следует, что существует такая постоянная $a > 0$, что $|\bar{x}(t(s))| \leq c_1 e^{-a(s-s_0)}$ и $\|X(t(s))\| < c_2 e^{-a(s-s_0)}$ при $s \geq s_0$.

Отсюда

$$|x(t(s))| \le C_1 e^{-a(s-s_0)} + C_2 \int_{s_0}^{s} e^{-a(s-\sigma)} \sum_{i=1}^{k} \|a^i(t(\sigma))\| \cdot |x(t(\sigma))| \cdot d\sigma$$

или

$$|x(t(s))| \cdot e^{a(s-s_0)} \le C_1 + C_2 c \int_{s_0}^{s} e^{a(\sigma-s_0)} \cdot |x(t(\sigma))| \, d\sigma.$$

Применяя лемма Гронуолла дает

$$|x(t(s))| \cdot e^{a(s-s_0)} \le C_1 \, e^{C_2 c (s-s_0)}.$$

Если $C_2 c < a$, то следует, что $|x(t(s))| \to 0$ при $s \to \infty$ и рулевое решение системы (3.8) равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь нелинейную систему вида

$$dx = \sum_{i=1}^{k} (A^i(t) x + f^i(t,x))\, dt^i, \tag{3.10}$$

где $f^i(t,x) \in C^{1,1}_{t,x}$, $f^i(t,0) = 0$, $i=1,\dots,k$ и удовлетворяются условия интегрируемости системы (3.10) и соответствующей линейной системы (3.4).

Теорема 39. Если нулевое решение системы (3.4) равномерно асимптотически устойчиво и

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} |f^i(t,x)|}{|x|} \to 0$$ при $|x| \to 0$ равномерно по $t \in K_{t_0}$,

то нулевое решение системы (3.10) равномерно устойчиво и притом асимптотически устойчиво.

Доказательство. Применяя к уравнению (3.10) формулу (3.7), имеем вдоль характеристики $t(s) \in K_{t_0}$

$$x(t(s)) = \bar{x}(t(s)) + \int_{s_0}^{s} X(t(s), t(\sigma)) \sum_{i=1}^{k} f^i(t(\sigma), x(t(\sigma))) \dot{t}^i(\sigma)\, d\sigma.$$

По условию асимптотической устойчивости имеем

$$|\bar{x}(t(s))| \le \|X(t(s))\| \cdot |x_0| \le a_1 \cdot |x_0|,$$

где $a_1 = \sup_{s \ge 0} \|X(t(s))\| > 1$. Покажем, что для любого решения

$x(t(s))$ можно указать равномерную оценку $|x(t(s))| < 2a_1 \cdot |x_0|$, чем и будет доказана равномерная устойчивость. Предположим противное, и пусть $t(s_1)$ - первая точка при $s \geq s_0$ по направлению $t(s)$, для которой $|x(t(s_1))| = 2a_1 |x_0|$. В точке $s = s_1$ имеем

$$2a_1|x_0| = |x(t(s_1))| \leq |\bar{x}(t(s_1))| + \int_{s_0}^{s_1} \|X(t(s_1), t(\sigma))\| \left(\sum_{i=1}^{k} |f^i(t(\sigma), x)| \cdot |t^{i\prime}(\sigma)|\right) d\sigma.$$

Если $|x_0|$ достаточно мало, то из предположений теоремы следует, что $\sum_{i=1}^{k} |f^i(t(\sigma), x)| \cdot |t^{i\prime}(\sigma)| \leq \varepsilon |x|$ при $s_0 \leq \sigma < s_1$, где ε можно сделать произвольно малым за счет выбора $|x_0|$. Тогда имеем

$$2a_1|x_0| \leq a_1|x_0| + \varepsilon \cdot 2a_1|x_0| \int_{s_0}^{s_1} \|X(t(s_1), t(\sigma))\| \cdot d\sigma \leq$$

$$\leq a_1|x_0| + \varepsilon \cdot 2a_1|x_0| \cdot \int_{s_0}^{\infty} \|X(t(s), t(\sigma))\| \cdot d\sigma < 2a_1|x_0|,$$

если $|x_0|$ и с ним ε достаточно малы. Следовательно точка s_1 не может существовать, что и доказывает равномерную устойчивость.

Для доказательства второй части теоремы достаточно заметить, что вдоль любой характеристики системы (3.10) и (3.4) превращаются в системы с одной независимой переменной, что дает возможность применить известные результаты /13/.

Т е о р е м а 40. Если система (3.4) устойчива в K_{t^0} и функции $f^i(t,x)$ удовлетворяют условиям

$|f^i(t,x)| \leq g^i(t) \cdot |x|$ для $|x| \leq h$, причем

$\int_{s_0}^{\infty} g^i(t(s))ds < \infty$ для любой характеристики $t(s) \in K_{t^0}$.

то нулевое решение системы (3.10) устойчиво в зоне K_{t^0}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим

$c = \max\left(\sup_{s\geq 0}|\bar{x}(t(s))|, \sup_{s\geq 0}\|X(t(s))\|\right)$. Тогда из (3.7) имеем

$$|x(t(s))| \leq c + c\int_{s_0}^{s}\left(\sum_{i=1}^{k}|f^i(t(\sigma),x)|\cdot|t^{i\prime}(\sigma)|\right)d\sigma \leq$$

$$\leq c + c\int_{s_0}^{s}\left(\sum_{i=1}^{k}q^i(t(\sigma))\cdot|x|\right)d\sigma$$

. На основе леммы Гронуолла имеем

$$|x(t(s))| \leq c\exp\left\{c\int_{s_0}^{s}\sum_{i=1}^{k}q^i(t(\sigma))\,d\sigma\right\} \leq$$

$$\leq c\exp\left\{c\int_{s_0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k}q^i(t(\sigma))\,d\sigma\right\}$$

. Из теоремы 30 тогда следует устойчивость.

3. Линейные системы с постоянными коэффициентами

Рассмотрим систему

$$dx = \sum_{i=1}^{k}A^i x\,dt^i, \tag{3.11}$$

в которой A^i - перестановочные n x n матрицы. Перестановочность матриц обеспечивает выполнение условий интегрируемости (3.3). В этом случае легко проверить, что

$$X(t,t_0) = X(t-t_0), \text{ где } X(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k}A^i t^i\right). \tag{3.12}$$

Явное выражение решения позволяет установить некоторые его свойства.

Если постоянны не только коэффициенты системы, но и $\Pi(t) = const$, то легко записать необходимое и достаточное условие устойчивости. Пусть при каждом t k-мерный конус натянут на $\Pi(t) = (l_1, l_2, \ldots, l_k)$, где единичный вектор $l_i = \{\cos\varphi_1^i, \ldots, \cos\varphi_k^i\}$ ($i = 1,\ldots,k$) не зависит от точки t, причем

$$0<\varphi_j^{i}-\varphi_j^{s}<\pi \quad (i,s,j=1,\dots,k,\ i\neq s).$$

Так как A^{i} - перестановочные матрицы, то n-мерное комплексное векторное пространство можно, и притом единственным образом, представить в виде прямой суммы подпространств $\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_m$ $(m\le n)$, так что $A^{i}\mathcal{K}_j\subseteq\mathcal{K}_j$ $(i=1,\dots,k;\ j=1,\dots,m)$, причем матрица A^{i} в $\mathcal{K}_j$ имеет лишь одно собственное значение λ_i^{j} $(i=1,\dots,k;\ j=1,\dots,m)$, причем

$$\sum_{i=1}^{k}|\lambda_i^{j}-\lambda_i^{s}|>0 \qquad \text{при } j\neq s.$$

Для устойчивости нулевого (а с ним и любого) решения системы (3.10) необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{i=1}^{k}\operatorname{Re}\lambda_i^{j}\cos\varphi_i^{s}\le 0 \quad (j=1,\dots,m;\ s=1,\dots,k). \tag{3.13}$$

Если же для каких либо j,s это неравенство обращается в равенство, то должно быть $A^{i}x\equiv\lambda_i^{j}x$ $(x\in\mathcal{K}_j)$, (i =1,...,к), т.е. матрицам A^{i} (i =1,...,к) в $\mathcal{K}_j$ должны отвечать элементарные делители только первой степени. При выполнении указанного условия устойчивость равномерная. Для асимптотической устойчивости нулевого решения необходимо и достаточно, чтобы все неравенства (3.12) были строгими - тогда устойчивость является равномерно экспоненциальной.

Из этого общего условия легко найти достаточные признаки устойчивости относительно переменного поля $\Pi(t)$ на основе следующего очевидного принципа "сужения": если устойчивость (равномерная устойчивость и т.п.) проявляется относительно поля $\Pi(t)$, то она имеет место и относительно любого поля $\Pi_1(t)$ для которого $\Pi_1(t)\subseteq\Pi(t)$ при всех t. Однако такое "сужение" необязательно: например, устойчивость для системы /3.11/ может иметь место, если неравенства /3.13/ выполняются лишь асимптотически при $|t|\to\infty$, а асимптотическая устойчивость может иметь место, если строгие неравенства /3.13/ при $(t\to\infty)$ переходят в равенства.

Аналогично § 3 главы II возможно поставить обратную задачу - отыскание для заданной системы /3.11/ постоянного поля Π , относительно которого эта система была бы устойчивой. Это поле получается при параллельном переносе к-мерного конуса, полученного пересечениями полупространств t с уравнениями

$$\sum_{i=1}^{k} t^i \operatorname{Re}\lambda_i^j \le 0, \quad j=1,\ldots,n \qquad /3.14/$$

причем те j, для которых все $\operatorname{Re}\lambda_i^j=0$ $/\,i=1,\ldots,k/$ не принимаются во внимание. При этом, если на какой-нибудь образующей этого конуса не выполняется условие, указанное после /3.13/, то эту образующую надо повернуть внутрь конуса как угодно мало. Если $\operatorname{Re}\lambda_i^j=0$ для всех i, j и матрицы A^i имеют все элементарные делители первой степени, то в качестве Π можно взять любой конус /тогда решения системы /3.11/ будут ограничены во всем пространстве /. Для существования решения поставленной задачи необходимо и достаточно, чтобы система полупространств /3.14/ имела невырожденное пересечение. При к=2 это означает, что

или $$\max_{\operatorname{Re}\lambda_2^j>0}\left\{-\infty, \frac{\operatorname{Re}\lambda_1^j}{\operatorname{Re}\lambda_2^j}\right\} < \min_{\operatorname{Re}\lambda_2^j<0}\left\{+\infty, \frac{\operatorname{Re}\lambda_1^j}{\operatorname{Re}\lambda_2^j}\right\},$$

или

$$\min_{\operatorname{Re}\lambda_2^j>0}\left\{+\infty, \frac{\operatorname{Re}\lambda_1^j}{\operatorname{Re}\lambda_2^j}\right\} > \max_{\operatorname{Re}\lambda_2^j<0}\left\{-\infty, \frac{\operatorname{Re}\lambda_1^j}{\operatorname{Re}\lambda_2^j}\right\};$$

если же некоторое $Re\,\lambda_2^i = 0$ и соответствующее $Re\,\lambda_1^i > c\,(<0)$, то первое (второе) неравенство считается невыполненным.

Пример. Найти зону асимптотической устойчивости решений системы

$$\begin{cases} dx_1 = (-2x_1 + x_2)\,dt^1 + x_2\,dt^2, \\ dx_2 = (x_1 - x_2)\,dt^1 + (x_1 + x_2)\,dt^2. \end{cases}$$

Имеем $A^1 = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$, $A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$,

собственные значения которых

$$\lambda_1^{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2^{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

и система (3.13) принимает вид

$$\begin{cases} (-3+\sqrt{5})t^1 + (1+\sqrt{5})t^2 < 0 \\ (-3-\sqrt{5})t^1 + (1-\sqrt{5})t^2 < 0 \end{cases}.$$

Общая часть полуплоскостей определяет угол

$$-arctg\,(2+\sqrt{5}) < \varphi < arctg\,(-2+\sqrt{5})$$

(см. прим. на стр. 62).

Неудобство практического применения системы (3.14) для определения зоны устойчивости составляет определение "соответствующих" собственных значений матриц . Дело в том, что выбор порядка собственных значений для одной из матриц A^i определяет матрицу преобразования T, при помощи которой A^i приводится к диагональному виду; но тогда порядок собственных значений других матриц уже определяется и его нельзя брать произвольным. Так в рассмотренном примере значению $\lambda_1 = -3 + \sqrt{5}$ соответствует $\lambda_2 = 1 + \sqrt{5}$ (а не $\lambda_2 = 1 - \sqrt{5}$).

К системам, получающимся из (3.11) при добавлении в правую часть слагаемых более сложного вида, но малых в том или ином смысле, можно применить все теоремы, приведенные для общей системы (3.4).

4. Линейные системы с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейную систему

$$dx = \sum_{i=1}^{k} P^i(t)\, x\, dt^i, \tag{3.15}$$

где матрицы $P^i(t)$ непрерывно дифференцируемы при любом t, удовлетворяют условиям интегрируемости и к-периодические, т.е.

$$P^i(t+\omega_j) \equiv P^i(t), \quad \omega_j = (\omega_j^1, \ldots, \omega_j^k), \; j = 1, \ldots, k,$$

причем ω_j линейно независимые.

Теорема 41. Для линейной периодической системы (3.15) нормированная при $t=0$ фундаментальная матрица решений имеет вид

$$X(t) = R(t) \exp \sum_{i=1}^{k} \Lambda^i t^i, \tag{3.16}$$

где $R(t)$ - к-периодическая непрерывно дифференцируемая матрица с периодами ω_j (j = 1,...,к), причем $R(0) = E$ и Λ^i (i = 1,...,к) - постоянные перестановочные матрицы.

Доказательство. Пусть $X(t)$ - нормированная при $t=0$ фундаментальная матрица решений системы (3.15). Тогда матрица $X(t+\omega_j)$ также является фундаментальной. Действительно, на основании тождества $\frac{\partial X}{\partial t^i} = P^i(t) \cdot X(t)$ имеем

$$\frac{\partial X(t+\omega_j)}{\partial t^i} = \frac{\partial X(t+\omega_j)}{\partial (t^i+\omega_j^i)} \cdot \frac{\partial (t^i+\omega_j^i)}{\partial t^i} =$$

$$= A^i(t+\omega_j) \cdot X(t+\omega_j) = A^i(t) \cdot X(t+\omega_j),$$

а это означает, что $X(t+\omega_j)$ есть фундаментальная система решений для системы (3.15). Отсюда получаем $X(t+\omega_j) = X(t) \cdot C^j$, где C^j – постоянная неособенная матрица. Полагая $t^i = 0$, $i = 1,\dots,к$, получаем $C^j = X(\omega_j)$. Таким образом

$$X(t+\omega_j) = X(t) \cdot X(\omega_j). \tag{3.17}$$

Матрицы $X(\omega_j)$ ($j = 1,\dots,к$) носят название м а т р и ц м о н о д р о м и и. Очевидно $\det X(\omega_j) \neq 0$.

Кроме того, поскольку

$$X(t+\omega_i+\omega_j) = X(t+\omega_i)X(\omega_j) = X(t) \cdot X(\omega_i) X(\omega_j),$$

$$X(t+\omega_j+\omega_i) = X(t+\omega_j)X(\omega_i) = X(t) \cdot X(\omega_j) X(\omega_i),$$

то матрицы $X(\omega_i)$ и $X(\omega_j)$ ($i,j = 1,\dots,к$) перестановочны.

Однако к невырожденные перестановочные матрицы являются экспонентами от к перестановочных матриц, т.е.

$$X(\omega_i) = \exp \mathcal{D}^i \quad (i = 1,\dots,к) \tag{3.18}$$

где $\mathcal{D}^i \mathcal{D}^j = \mathcal{D}^j \mathcal{D}^i$.

В самом деле, в силу свойств перестановочных матриц, указанного при рассмотрении систем с постоянными коэффициентами, после расщепления n-мерного пространства мы переходим к случаю, когда каждая из матриц $X(\omega_j)$ имеет единственное собственное значение λ_j, но тогда $X(\omega_j) = \lambda_j(E+N_j)$, где $(N_j)^n = 0$, а потому главное значение $\mathcal{D}^j$ (логарифма $X(\omega_j)$)

можно представить в виде полинома от матрицы N_j. Из перестановочности матриц $X(\omega_j)$ вытекает перестановочность матриц N_j, а значит и матриц $\mathcal{D}^j$, что и требовалось доказать.

Допуская, что $X(t)$ имеет вид (3.15), покажем как определить матрицы Λ^i (i = I,...,к). При j = I,...,к имеем

$$X(t+\omega_j) = \mathcal{R}(t+\omega_j)\exp\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i(t^i+\omega_j^i) =$$
$$= \mathcal{R}(t)\exp\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i t^i\cdot\exp\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i\omega_j^i =$$

Учитывая (3.17) и (3.18) получаем

$$\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i\omega_j^i = \mathcal{D}^j \quad (j=1,\dots,k), \tag{3.19}$$

откуда в силу линейной независимости периодов ω_j можно найти матрицы Λ^i (i = I,...,к), которые также оказываются перестановочными.

После определения матриц Λ^i определяем $\mathcal{R}(t)$ из соотношения

$$\mathcal{R}(t) = X(t)\exp\Big(-\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i t^i\Big).$$

Согласно (3.17), (3.18) и (3.19) $\mathcal{R}(t)$ имеет периоды ω_j (j =I,...,к). Указанный способ определения Λ^i (i =I,...,к) и $\mathcal{R}(t)$ доказывает теорему.

О п р е д е л е н и е 22. Характеристическими показателями системы (3.15) называются собственные значения λ_i^j матриц Λ^i (i =I,...,к; j = I,...,n).

О п р е д е л е н и е 23. Мультипликаторами системы (3.15) называются собственные значения ρ_i^j матриц $X(\omega_i)$ (i = I,...,к; j = I,...,n), т.е. корни уравнения

$$\det(X(\omega_i)-\rho_i E) = 0. \tag{3.20}$$

Из (3.20) следует, что $\sum_{j=1}^{n} \rho_i^j = Sp\,X(\omega_i)$ и

$$\prod_{j=1}^{n} \rho_i^j = \det X(\omega_i) = \exp \int_0^{\omega_i} \sum_{i=1}^{k} Sp\,A^i(t)\,dt^i$$

Так как $\det X(\omega_i) \neq 0$, то $\rho_i^j \neq 0$ $(i=1,\dots,k;\ j=1,\dots,n)$.

Обобщение. Нетрудно получить более общие формулы для матричного решения линейной периодической системы (3.15). Пусть $X(t)$ $(X(t_0)=E)$ – нормальная фундаментальная матрица системы (3.15) и $X_1(t)$ – произвольная фундаментальная матрица той же системы. Очевидно имеем $X_1(t) = X(t)\cdot X_1(t_0)$. Так как $X_1(t+\omega_i)$ (i = I,...,к) снова являются решениями системы (3.I4), то справедливо тождество

$$X_1(t+\omega_i) = X_1(t)\cdot C^i, \qquad i = 1,\dots,k,$$

где C^i – постоянная матрица. Полагая $t=t_0$, получим

$$C^i = X_1^{-1}(t_0)\cdot X_1(t_0+\omega_i) = X_1^{-1}(t_0)\cdot X(\omega_i)\cdot X_1(t_0).$$

Матрицы C^i, подобные матрицам монодромии $X(\omega_i)$ (i = I,...,к) называются основными для матрицы $X_1(t)$.

Положим Λ^i из системы $\sum_{i=1}^{k} \Lambda^i \omega_j^i = Ln\,X(\omega_j)$

и Λ_1^i из системы $\sum_{i=1}^{k} \Lambda_1^i \omega_j^i = Ln\,C^j$.

Конкретизируя выбор Λ^i, нетрудно убедиться, что можно взять

$$\Lambda_1^i = X_1^{-1}(t_0)\,\Lambda^i X_1(t_0) \tag{3.21}$$

Действительно, используя известное свойство экспоненциала матрицы, имеем

$$\exp \sum_{i=1}^{k} \Lambda_1^i \omega_i^j = X_1^{-1}(t_0)\left(\exp \sum_{i=1}^{k} \Lambda^i \omega_i^j\right) X_1(t_0) = X_1^{-1}(t_0)\,X(\omega_i)\,X_1(t_0).$$

Применяя основную формулу (3.I6) получаем

$$X_1(t) = X(t)\cdot X_1(t_0) = R(t)\exp\Big(\sum_{i=1}^{k}\Lambda^i t^i\Big)X_1(t_0) =$$
$$= R(t)\exp\Big[X_1(t_0)\Big(\sum_{i=1}^{k}\Lambda_1^i t^i\Big)\cdot X_1^{-1}(t_0)\Big] =$$
$$= R(t)\cdot X_1(t_0)\exp\sum_{i=1}^{k}\Lambda_1^i t^i.$$

Таким образом
$$X_1(t) = R_1(t)\exp\sum_{i=1}^{k}\Lambda_1^i t^i,$$

где $R_1(t) = R(t)\cdot X_1(t_0)$ - к - периодическая матрица с периодами ω_i (i = I,...,к).

Т е о р е м а 42. Система (3.I5) в указанных предположениях может быть приведена к вполне интегрируемой системе с постоянными коэффициентами при замене $x = R(t)\,y$, где матрица $R(t)$ к - периодична с периодами ω_i (i =I,...,к) и дважды непрерывно дифференцируема при всех t.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы непосредственно следует из следующей леммы.

Л е м м а 3. Для того, чтобы вполне интегрируемая при всех t система (3.I5) могла быть приведена к системе

$$dy = \sum_{i=1}^{k} A^i y\,dt^i \quad (A^iA^j = A^jA^i,\ i,j=1,\dots,k) \tag{3.22}$$

с постоянными коэффициентами при замене $x = R(t)y$ с непрерывно дифференцируемой невырожденной матрицей $R(t)$, необходимо и достаточно, чтобы ее фундаментальное решение имело вид

$$X(t) = R(t)\exp\sum_{i=1}^{k}A^i t^i\Big[R(t_0)\exp\sum_{i=1}^{k}A^i t_0^i\Big]^{-1} \tag{3.23}$$

I°. Пусть выполнено условие (3.23). Сделаем замену $x = R(t)y$ или $y = R^{-1}(t)x = R^{-1}(t)X(t)x_0$

Тогда

$$y(t) = \exp\sum_{i=1}^{k} A^i t^i \left[R(t_0)\cdot \exp\sum_{i=1}^{k} A^i t_0^i\right]^{-1} x_0,$$

откуда
$$dy = \sum_{i=1}^{k} A^i y\, dt^i.$$

2°. Пусть (3.15) заменой $x = R(t)y$ приводится к системе (3.22). Тогда $Y(t) = \exp\sum_{i=1}^{k} A^i t^i$ и из $X(t) = x(t)x_0^{-1}$ следует, что
$$X(t) = R(t)\cdot \exp\sum_{i=1}^{k} A^i t^i \cdot \left[R(t_0)\cdot \exp\sum_{i=1}^{k} A^i t_0^i\right]^{-1},$$

что и требовалось.

На основании теоремы 42 можно сделать вывод, что все свойства устойчивости для системы (3.15) те же, что для системы с постоянными коэффициентами (3.11). Это дает возможность, в частности, получить в случае постоянного поля $\Pi(t)$ окончательные признаки устойчивости, выраженные в терминах для матриц монодромии.

Т е о р е м а 43. Для всякого мультипликатора ρ_i существует нетривиальное решение $\xi(t)$ периодической системы (3.15), удовлетворяющее условию
$$\xi(t+\omega_i) = \rho_i\, \xi(t). \qquad (3.24)$$

Обратно, если для некоторого нетривиального решения выполнено условие (3.24), то число ρ_i является мультипликатором данной системы.

Д о к а з а т е л ь с т в о 1°. В качестве начального вектора $\xi(t_0)$ выберем собственный вектор матрицы монодромии $X(\omega_i)$, отвечающий собственному значению ρ_i. Имеем
$$X(\omega_i)\,\xi(t_0) = \rho_i\, \xi(t_0) \quad \text{и} \quad \xi(t) = X(t)\,\xi(t_0).$$

Отсюда
$$\xi(t+\omega_i) = X(t+\omega_i)\,\xi(t_0) = X(t)\cdot X(\omega_i)\,\xi(t_0) =$$
$$= X(t)\,\rho_i\,\xi(t_0) = \rho_i\,\xi(t),$$

следовательно, условие (3.24) выполнено.

2^0. Пусть для некоторого нетривиального решения $\xi(t) = X(t)\xi(t_0)$ выполнено условие (3.24). Тогда, положив $t = t_0$ из (3.24) получаем

$$\xi(t_0+\omega_i) = \rho_i \xi(t_0)$$

т.е.

$$X(\omega_i)\xi(t_0) = \xi(t_0+\omega_i) = \rho_i \xi(t_0).$$

Таким образом $\xi(t_0)$ является собственным вектором матрицы монодромии $X(\omega_i)$, а число ρ_i есть корень уравнения

$$\det(X(\omega_i)-\rho_i E) = 0,$$

т.е. мультипликатор.

С л е д с т в и е . Линейная периодическая система (3.I5) имеет нетривиальное к-периодическое решение с периодами ω_i ($i = $I,...,к), тогда и только тогда, когда для каждого $i = $I,...,к по крайней мере один из мультипликаторов ρ_i равен единице и существует общий собственный вектор матриц монодромии, отвечающий единичному мультипликатору.

Действительно, если $\rho_i = $ I, то для некоторого вектора $\xi(t)$ будет

$$\xi(t+\omega_i) = \xi(t), \tag{3.25}$$

и следовательно, $\xi(t)$ имеет период ω_i. Из доказательства теоремы следует, что этот же вектор имеет период ω_j ($j = $I,...,к; $j \neq i$), т.е. соотношение (3.25) выполняется при $i = $I,...,к.

Обратно, из (3.25) при $i = $I,...,к следует, что для каждого i существует мультипликатор $\rho_i = $ I.

5. Уравнения в вариациях

Вернемся к системе (I.I)

$$dx = \sum_{i=1}^{k} a^i(t,x)\,dt^i.$$

Пусть $\eta = \eta(t)$ $(t \in K_{t_0})$ – решение системы (I.I), удовлетворяющее условию $|\eta(t)| \leq h < H$.

Положим $\tilde{x} = x - \eta(t)$.

Тогда будем иметь

$$d\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} [a^i(t, \eta(t) + \tilde{x}) - a^i(t, \eta(t))]\,dt^i, \tag{3.26}$$

откуда имеем

$$d\tilde{x} = \sum_{i=1}^{k} [a_x^{i\,\prime}(t, \eta(t)) \cdot \tilde{x} + r^i(t, \tilde{x})]\,dt^i. \tag{3.27}$$

Определение 24. Линейная система

$$dy = \sum_{i=1}^{k} a_x^{i\,\prime}(t, \eta(t))\,y\,dt^i, \tag{3.28}$$

представляющая линеаризированную систему (3.27) называется уравнениями в вариациях для системы (I.I) относительно ее решения $\eta(t)$ (система первого приближения).

Отметим, что если данная система линейная неоднородная, то ее уравнения в вариациях совпадают с соответствующей однородной системой.

Теорема 44. Если система вполне интегрируема ее уравнения в вариациях также вполне интегрируемы.

Доказательство. Запишем условия полной интегрируемости данной системы

$$\frac{\partial a^i}{\partial t^j} + a_x^{i\,\prime} \cdot a^j = \frac{\partial a^j}{\partial t^i} + a_x^{j\,\prime} \cdot a^i$$

и дифференцируем их по x. Тогда получаем

$$\frac{\partial a_x^{i'}}{\partial t^j} + a_{x^2}^{i''} a^j + a_x^{i'} a_x^{j'} = \frac{\partial a_x^{j'}}{\partial t^i} + a_{x^2}^{j''} a^i + a_x^{j'} a_x^{i'}. \tag{3.29}$$

Но условия полной интегрируемости системы (3.28) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t^j}\left(a_x^{i'}(t,\eta(t))\cdot y\right) = \frac{\partial}{\partial t^i}\left(a_x^{j'}(t,\eta(t))\cdot y\right).$$

Выполняя ~~интегрирование~~ дифференцирование, получаем (3.29) и теорема доказана.

Т е о р е м а 42. Если система (I.I) автономная

$$dx = \sum_{i=1}^{k} f^i(x)\, dt^i \tag{3.30}$$

и $\eta(t)$ есть ее решение, то

$$y = \frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i} \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.31}$$

является решением ее уравнений в вариациях.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как $\eta(t)$ решение (3.30), то

$$y = \frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i} = f^i(\eta(t)).$$

Тогда $$dy = d\left(\frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial\left(\frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i}\right)}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f^i(\eta(t))}{\partial t^j} dt^j =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} f_x^{i'}(\eta(t)) \frac{\partial \eta(t)}{\partial t^j} dt^j = \sum_{j=1}^{k} f_x^{i'}(\eta(t))\cdot f^j(\eta(t))\, dt^j.$$

Условия интегрируемости системы (3.30) имеют вид

$$\frac{\partial f^i(x)}{\partial x}\cdot f^j(x) = \frac{\partial f^j(x)}{\partial x}\cdot f^i(x)$$

Тогда имеем

$$dy = \sum_{j=1}^{k} f_x^{j'}(\eta(t))\cdot f^i(\eta(t))\, dt^j = \sum_{j=1}^{k} f_x^{j'}(\eta(t))\cdot y\, dt^j,$$

т.е. $y = \frac{\partial \eta(t)}{\partial t^i}$ является решением уравнений в полных дифференциалах.

Предположим теперь, что $a^i(t,x)$ (i =I,...,к) к-периодичны по t с периодами ω_i и исследуемое решение $\eta(t)$ также к-периодично с периодами ω_i. Тогда уравнения в вариациях представляют собой линейную систему с периодическими коэффициентами

$$dy = \sum_{i'=1}^{k} a_x^{i'}(t, \eta(t))\, y\, dt^{i'} \qquad (3.32)$$

Т е о р е м а 45. Если все характеристические показатели $\lambda_i^{i'}$ уравнений в вариациях для данного периодического решения $\eta(t)$ имеют отрицательные вещественные части, то это периодическое решение асимптотически устойчиво при $\sum_{i'=1}^{k} t^{i'} \to \infty$ (в смысле определения главы I).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Представим нормированное решение системы (3.32) в виде

$$X(t) = R(t)\cdot \exp \sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'} \qquad \text{(теорема 51)},$$

и сделаем в нелинейной системе (3.27) замену $\tilde{x} = x - \eta(t) = R(t) z$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t^{i}} = \frac{\partial [X(t)\cdot \exp(-\sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'})]}{\partial t^{i}} = \frac{\partial X(t)}{\partial t^{i}} \exp(-\sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'}) -$$

$$- X(t)\cdot \exp(-\sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'})\cdot \Lambda^{i} = a_x^{i'}(t, \eta(t))\cdot X \exp(-\sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'}) -$$

$$- X(t) \exp(-\sum_{i'=1}^{k} \Lambda^{i'} t^{i'})\cdot \Lambda^{i} = a_x^{i'}(t, \eta(t))\cdot R(t) - R(t)\cdot \Lambda^{i},$$

будем иметь

$$R(t) \frac{\partial z}{\partial t^{i}} + [a_x^{i'}(t, \eta(t)) R(t) - R(t) \Lambda^{i}] z =$$

$$= a_x^{i'}(t, \eta(t))\cdot R(t) z + r^{i}(t, R(t) z)$$

или

$$dz = \sum_{i'=1}^{k} (\Lambda^{i} z + R^{-1}(t)\, r^{i}(t, R(t) z))\, dt^{i}, \qquad (3.33)$$

где $\dfrac{\sum_{i=1}^{k} |R^{-1}(t) \cdot r^{i}(t, R(t)z)|}{|z|} \to 0$ при $|z| \to 0$ равномерно по t. Отсюда на основе теоремы 39 решение $z = 0$ системы (3.33) асимптотически устойчиво, что эквивалентно асимптотической устойчивости периодического решения $\eta(t)$ системы (I.I).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы, относящиеся к исследованию устойчивости еще не исчерпаны. Работа может быть продолжена по следующим направлениям:

1. Установление требований, налагаемых на функцию Ляпунова, для обеспечивания ослабленной равномерной устойчивости,
2. изучение зоны монотонной и обычной устойчивости при $n > 2$ (для постоянных и переменных матриц),
3. нахождение поля (зоны), относительно которого заданная система обладает свойстом конвергенции, диссипативности,
4. изучение устойчивости в заданных переменных полях, например, при $\Pi(t+\omega_i) = \Pi(t)$.

Выражаю благодарность своему научному руководителю профессору А.Д. Мышкису за ценные советы и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.М. ЛЯПУНОВ. Общая задача об устойчивости движения. М.,1950.

2. A. MICHAL and V. ELCONIN. Completely integrable differential equations in abstract spaces . Acta Math. 1937.69:1-2,72-107.

3. М.С. ГАВУРИН. Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч.зап.ЛГУ,сер.матем.,вып.19, № 137, 1959, 59-154.

4. NEVANLINNA R. und F. Absolute Analysis,Grundlehren Mat. Wiss. 102, Springer, 1959.

5. А.И. ПЕРОВ. О многомерных линейных дифференциальных уравнениях с постоянными коэффициентами. ДАН СССР, 1964, 154, 6.

6. А.И. ПЕРОВ. О топологических характеристиках решений многомерных дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 1964, 157, 4.

7. В.Г. ЕГОРОВ. Устойчивость решений систем в полных дифференциалах. ДАН,1955,102,4.

8. В.Г. ЕГОРОВ. Устойчивость решений "порожденных" систем дифференциальных уравнений. Труды Уральского ПИ им. С.М. Кирова, 1958, 74.

9. D. PETROVANU. A supra comportarii soluţiiler unor sisteme Pfaff complet integrabile. Stud. şi cerc.şt.,Matematica , Jaşi,1962,13,1,23,-52.

10. D.PETROVANU. Comportement des solutions de certains systemes à differentielles totales à coeffisients periodiques. An. Ştiint. Univ. Jasi, 1964, 10, 1, 1a, 2, 303-324.

11. Н.Н. КРАСОВСКИЙ. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., 1959.

12. И.Г. МАЛКИН. Теория устойчивости движения. М.-Л., 1952.

13. A. HALANAY. Teoria calitativa a ecuatiilor diferentiale. Ed. Acad. RPR, 1963.

14. И.Г. МАЛКИН. К вопросу об обратимости теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. ПММ, 1954, 18, 2.

15. Б.П. ДЕМИДОВИЧ. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967.

16. Б.Ф. БЫЛОВ, Р.Э. ВИНОГРАД, Д.М. ГРОБМАН, В.В. НОМЫЦКИЙ. Теория показателей Ляпунова, М., 1966.

17. Е.А. БАРБАШИН, Н.Н. КРАСОВСКИЙ. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, 1952, 86, 3.

18. Р. БЕЛЛМАН. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., 1954.

19. В.А. ПЛИСС. Нелокальные проблемы теории колебаний. М., 1964.

20. Б.П. ДЕМИДОВИЧ. О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I, Вестн. МГУ, 1961, 6, 19-27; II, 1962, 1, 3-8.

21. N. LEVINSON. Transformation theory of non-linear differential equations of the second order, Ann. math. 1944, 54, 4, 723-737.

22. Д.А. БОЖЕ, А.Д. МЫШКИС. Общие теоремы второго метода Ляпунова для систем уравнений в полных дифференциалах. Латвийский мат. ежегодник, 1966, 2, 43-58.

23. Д.А. БОЖЕ, А.Д. МЫШКИС. Устойчивость в зоне эмиссии решений систем в полных дифференциалах. Лат. мат. ежегодник, 1966, 2, 59-63.

24. Д.А. БОЖЕ, А.Д. МЫШКИС. Устойчивость решений линейной системы в полных дифференциалах. Дифференциальные уравнения и их применение в технике. Рига, 1968, 3-12.

25. В.В. НЕМЫЦКИЙ. К теории орбит общих динамических систем. Математический сборник, 1948, 23 (65), 2, 161-186.

26. В.В. НЕМЫЦКИЙ, В.В. СТЕПАНОВ. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., 1949.

27. Л.С. ПОНТРЯГИН. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1965.

28. Ф.Р. ГАНТМАХЕР. Теория матриц, М., 1966.

29. Ж. ЛА-САЛЛЬ, С. ЛЕФШЕЦ. Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964.

30. С. ЛЕФШЕЦ. Геометрическая теория дифференциальных уравнений, М., 1961.

31. Н.Н. КРАСОВСКИЙ. Обращение теории второго метода Ляпунова и вопросы устойчивости по первому приближению, ПММ, 1956, 20, 2.

32. Л. МАССЕРА. К теории устойчивости. Математика. Периодический журнал переводов, 1957, I,4.

33. Д.А. БОЖЕ. Свойство конвергентности для систем в полных дифференциалах. Латвийский математических ежегодник. (в печати).

34. Д.А. БОЖЕ. О диссипативности систем в полных дифференциалах. Латвийский математический ежегодник (в печати).

С О Д Е Р Ж А Н И Е