PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA
LATVIJAS VALSTS UNIVERSITATE
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ
VI
SĒJUMS

LATVIJAS PSR ZINĀTŅU AKADEMIJAS IZDEVNIECĪBA
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР

PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA
LATVIJAS VALSTS UNIVERSITATE
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ZINĀTNISKIE RAKSTI
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ
VI
SĒJUMS

LATVIJAS PSR ZINĀTŅU AKADEMIJAS IZDEVNIECĪBA
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
RĪGĀ 1952 РИГА

1 Ю

FIZIKAS-MATEMATIKAS ZINĀTNES

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ВЫПУСК 1

ОТ РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ

Настоящим выпуском Физико-математический факультет Латвийского государственного университета начинает публикацию научных работ, выполненных на факультете.

Наибольшее количество работ (8) относится прямо или косвенно к теории обобщенных систем телеграфных уравнений, описывающих электромагнитные процессы, протекающие в электрических проводах. Исследования в этой области математической физики были начаты Н. А. Бразма еще в 1948 году и в настоящем сборнике представлены статьями Н. А. Бразма, Э. Я. Риекстыньша, А. Д. Мышкиса и В. Э. Аболини. Эти статьи посвящены частично вопросам общей теории телеграфных уравнений, частично — решению конкретных математических задач, частично же — смежным темам (операционное исчисление, специальные функции). Изучение этих вопросов проводится при поддержке лаборатории по разработке научных проблем проводной связи АН СССР. Мы полагаем, что методы, развитые во всех этих статьях, найдут свое применение и при рассмотрении конкретных практически важных электромагнитных процессов. Работы Э. Я. Риекстыньша представляют собой часть его кандидатской диссертации.

Две совместные статьи А. Д. Мышкиса и А. Я. Лепина посвящены изучению различных неравенств, связанных с работами А. Д. Мышкиса по теории диференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В работе Э. К. Фогеля изучается один из вопросов, связанных с распределением простых чисел; при этом автор пользуется методом, созданным академиком И. М. Виноградовым. Статья А. Я. Лусиса посвящена перенесению метода С. А. Чаплыгина-Д. Ю. Панова на приближенное решение интегральных уравнений типа Вольтерра.

В работе К. А. Штейнса, являющейся главой его кандидатской диссертации, освещаются некоторые вопросы, связанные с проблемой трех тел — одной из основных задач небесной механики. При выполнении этой работы автор был связан с кафедрой небесной механики Московского государственного университета. Наконец, статья П. Е. Кунина дает важное уточнение формул для ионизационных потерь энергии быстрых частиц, существенное для расчетов процессов, происходящих в космических лучах.

ПРИМЕР НЕЛИНЕЙНОЙ ПРОГРЕССИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Э. К. Фогелс

Цель этой статьи дать пример нелинейной прогрессии, содержащей бесконечное множество простых чисел. Хотя здесь построенная прогрессия довольно искусственна и является кусочно-квазилинейной, однако результат заслуживает внимания тем, что до сих пор не было примера последовательности натуральных чисел, возрастающей быстрее арифметической прогрессии и содержащей бесконечное множество простых чисел (за исключением тривиального примера последовательности, образующей любую часть множества всех простых чисел*). Возможность построить такой пример существенно зависит от результата Виноградова о распределении дробных частей $\{\alpha p\}$ при p, пробегающем простые числа (см. лемму 3).

Для построения упомянутого примера воспользуемся рядом Фибоначчи

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots, \tag{1}$$

общий член которого дается рекуррентным соотношением

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n > 2)$$

или же формулой

$$a_n = \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2}$$

Это — простейший из всех рекуррентных рядов, употребляя которые, можно получить и другие примеры, имеющие интересующее нас свойство. Оно доказывается при помощи следующих четырех лемм.

Лемма 1. Пусть a', a, M — *три члена ряда Фибоначчи, следующие в возрастающем порядке, из которых* a *является* n*-ым* ($n > 2$). *Тогда*

$$aa' \equiv (-1)^n \pmod{M}, \tag{3}$$

---

*) Интересная теорема Миллса [3] утверждает, что существует константа A, для которой все числа $[A^{3^x}]$ $(x = 1, 2, \ldots)$ являются простыми, но не дает способа эффективного вычисления такого A.

первое неполное частное числа $\frac{a'}{M}$ *двойка, а остальные единицы; все неполные частные числа* $\frac{a}{M}$ *единицы.*

Доказательство. Формула (3) является следствием более точного результата

$$a_{n-1}\,a_n = a_{n-2}\,a_{n+1} + (-1)^n,$$

доказуемого при помощи (2). Вследствие формул

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \ldots$$

имеем соотношения

$$\begin{aligned} M &= 2a' + a_{n-2} \\ a' &= a_{n-2} + a_{n-3} \\ a_{n-2} &= a_{n-3} + a_{n-4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

дающие представление числа $\frac{M}{a'}$ непрерывной дробью

$$2 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots, \text{ откуда } \frac{a'}{M} = \frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots$$

Лемма 2. *Пусть a и M имеют значение леммы 1, а A и N любые целые числа, причем $N \leqslant M$ и $(r_1, r_2, \ldots, r_N)$ обозначает систему наименьших неотрицательных остатков чисел at $(t = A+1, \ldots, A+N)$ по модулю M. Тогда количество чисел r, не превосходящих x, для всех $x \leqslant M$ дается формулой*

$$\rho(x) = \frac{N}{M}x + O(\log M). \tag{4}$$

Доказательство. Предполагая $N < M$ (при $N = M$ лемма очевидна), можно указать такие члены a_m, a_{m+1} ряда (1), чтобы

$$a_m \leqslant N < a_{m+1}, \quad m \leqslant n,$$

или же

$$N = a_m + N_1, \qquad 0 \leqslant N_1 < a_{m-1}.$$

Имеем

$$\frac{a}{M} = \frac{a_{m-1}}{a_m} + \frac{\Theta}{a_m\,a_{m+1}}, \quad -1 \leqslant \Theta \leqslant 1.$$

Пусть t сначала пробегает ряд чисел $A+1, A+2, \ldots, A+a_m$.

Тогда

$$\frac{at}{M} = \frac{t'}{a_m} + \frac{\Theta_t}{a_m},$$

где t' пробегает полную систему вычетов по модулю M и Θ_t изменяется монотонно не более чем на единицу. Вследствие этого дробные части $\left\{\frac{at}{M}\right\}$ $(t = A+1, \ldots, A+a_m)$ распределяются равномерно по интервалу $(0,1)$ и для

$$\frac{x}{M}\, a_m + O\,(1)$$

значений t эти дробные части $\leqslant \frac{x}{M}$, т. е. существует столько же членов множества $(r_1, \ldots, r_{a_m})$, не превосходящих x. Верно и обратное утверждение.

Если $N_1 > 0$, то положим

$$N_1 = a_{m-k} + N_2, \quad k \geqslant 1, \quad 0 \leqslant N_2 < a_{m-k-1}$$

и получим подобные оценки. Из всех предыдущих результатов следует формула (4) с остаточным членом $O\,(m)$, который ввиду (2) не превосходит $O\,(\log M)$.

Лемма 3. *Пусть* $M \geqslant 2,\ 0 < \sigma < 1$,

$$\xi = \frac{b}{q} + \frac{\Theta}{q^2},\ (b,\ q) = 1,\ 0 < q < M,\ -1 \leqslant \Theta \leqslant 1, \tag{5}$$

p пробегает простые числа, не превосходящие M. Тогда для числа T дробей при условии

$$0 \leqslant \{\xi p\} < \sigma$$

имеем

$$T - \sigma\,\pi\,(M) \ll M^{1+\varepsilon}\left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{M}} + M^{-0,2}\right) \tag{6}$$

Буквой ε обозначается сколь угодно малое положительное постоянное, и $A \ll B$ обозначает $A = O(B)$.

Доказательство: Виноградов [1], Теорема 3.

Лемма 4. *Пусть a, M и $(r_1, \ldots, r_N)$ суть числа леммы 1 и 2,* $\gamma = 1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\delta = 0{,}8 + \varepsilon$ *и* $N = [M\delta]$, *где $[x]$ обозначает наибольшее целое число $\leqslant x$. Тогда интервал $(a,\ M)$ содержит*

$$\gamma\, M^{\delta} + O\,(\log M) \tag{7}$$

чисел r, из которых

$$\gamma \frac{M^{\delta}}{\log M} + O\left(\frac{M^{\delta}}{\log^2 M}\right) \tag{8}$$

являются простыми числами.

Доказательство: Согласно (4) для количества чисел r интервала (a, M) имеем оценку

$$\frac{[M^{\delta}]}{M}(M-a)+O\ (\log M)=\frac{M^{\delta}+O\,(1)}{M}\,M\left(1-\frac{1}{\alpha}+\frac{\Theta}{M^{2}}\right)+$$
$$+\,O\ (\log M)=\gamma\,M^{\delta}+O\,(\log M),$$

которая и доказывает (6).

Через r_t обозначаем любое из рассматриваемых чисел интервала (a, M), являющееся одновременно простым числом. Тогда, пользуясь формулой

$$p=r_t\equiv at\ (\mathrm{mod}\ M)$$

и леммой 1, получаем сравнение

$$a'p\equiv(-1)^{n}t\ (\mathrm{mod}\ M),$$

эквивалентное равенству

$$\left\{\frac{a'p}{M}\right\}=\left\{\frac{(-1)^{n}\,t}{M}\right\},\tag{9}$$

согласно которому дробная часть $\left\{\frac{a'}{M}\,p\right\}$ включается в интервал длины $\frac{[M^{\delta}]}{M}$ и $a\leqslant p<M$. Употребляя (5) для числа решений уравнения (9), получаем оценку

$$\frac{[M^{\delta}]}{M}(\pi\,(M)-\pi\,(a))\;+\;O\;\left(M^{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{q}{M}+M^{-0,2}}\right),\tag{10}$$

где q определяется формулами (5) при $\xi=\frac{a'}{M}$.

Ввиду того что все неполные частные (кроме первого) числа $\frac{a'}{M}$ суть единицы, в качестве q можно взять любое число $\leqslant M$ ряда 2, 3, 5, 8, ..., подчиняющегося условию $q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$.

Вследствие этого условия для всех n имеем $q_{n+1}<2\,q_n$, ввиду чего для каждого $M>4$ существует q, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{2}\sqrt{M}<q\leqslant\sqrt{M}$. Для такого q имеем $\frac{1}{q}+\frac{q}{M}\ll M^{-0,5}$ и остаточный член выражения (10) сводится к $O(M^{0,8+\varepsilon})$, которое ввиду произвольности ε принимаем $\ll\frac{M^{\delta}}{\log^{2}M}$. Тогда вместо (10) получаем

$$\frac{M^{\delta}+O\,(1)}{M}\left(\frac{M}{\log M}-\frac{a}{\log a}+O\left(\frac{M}{\log^{2}M}\right)\right)+O\left(\frac{M^{\delta}}{\log^{2}M}\right).$$

Подставляя $$a = \frac{1}{\alpha} M + \frac{\Theta}{M},$$

имеем $$\frac{M}{\log M} - \frac{a}{\log a} = \frac{\gamma M}{\log M} + O\left(\frac{M}{\log^2 M}\right)$$

и окончательно получаем выражение (8).

Теорема. *Пусть M любой член ряда Фибоначчи, a — ему предшествующий член того же ряда, ε сколь угодно малое положительное постоянное, $\delta = 0{,}8 + \varepsilon$ и $(r)_M$ обозначает множество тех чисел интервала $(a,\ M)$, которые являются наименьшими положительными остатками при делении на M числа at, $1 \leqslant t \leqslant M^\delta$.*

Тогда сумма множеств $\sum\limits_M (r)_M$, где суммирование распространено на все члены $M > 1$ ряда Фибоначчи, образует прогрессию (r), которая при $x \to \infty$ содержит

$$R(x) = Cx^\delta \tag{11}$$

чисел $r \leqslant x$, из которых

$$\Pi(x) = C\,\frac{x^\delta}{\delta \log x} \tag{12}$$

являются простыми числами. Буквой C обозначается величина

$$C = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \varepsilon\right)^{\Theta\delta} \frac{3-\sqrt{5}}{2} : \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad -1 \leqslant \Theta \leqslant 1,$$

имеющая 5,1 и 12,2 своими экстремальными значениями (при $\delta = 0,9$).

Доказательство. Пусть сначала x совпадает с членом M ряда Фибоначчи. Обозначая через $\nu(t)$ число членов a_k ряда Фибоначчи, не превосходящих t, при $t \to \infty$ согласно (2) имеем

$$\nu(t) \sim c \cdot \log t, \qquad c = 1 : \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Далее пользуемся формулой [2]

$$\sum_{a_k \leqslant M} \Phi(a_k) = \nu(M)\,\Phi(M) - \int_1^M \nu(t) \cdot \Phi'(t)\,dt,$$

где $\Phi(t)$ любая функция, имеющая непрерывную производную для рассматриваемых значений аргумента. Подставляя сначала $\Phi(t) = \gamma t^\delta$ и интегрируя по частям, получаем

$$\sum_{a_k \leqslant M} \gamma a_k^\delta \sim c\gamma M^\delta \log M - c\gamma\delta \int_1^M t^{\delta-1} \log t\,dt =$$

$$= c\gamma M^\delta \log M - c\gamma \left| t^\delta \log t \right|_1^M + c\gamma\delta \int_1^M t^{\delta-1}\,dt \sim c\gamma M^\delta. \tag{13}$$

Затем, подставляя $\Phi(t) = \gamma \frac{t^\delta}{\log t}$, получаем

$$\sum_{a_k \leqslant M} \gamma \frac{a_k^\delta}{\log a_k} \sim c\gamma M^\delta - c\gamma\delta \int_1^M t^{\delta-1} dt + c\gamma \int_1^M \frac{t^{\delta-1} dt}{\log t} \sim c\gamma \int_1^M \frac{t^{\delta-1}}{\log t} dt =$$

$$= c\delta \left| \frac{t^\delta}{\delta \log t} \right|_1^M - c\gamma \int_1^M \frac{t^{\delta-1}}{\delta \log^2 t} dt \sim \frac{c\gamma}{\delta} \frac{M^\delta}{\log M}. \tag{14}$$

Этим теорема доказана для всех x, являющихся членами ряда Фибоначчи. Каждое другое x содержится между двумя соседними членами M, $M' = \alpha M + \frac{\Theta}{M}$ ряда Фибоначчи, ввиду чего имеем неравенства

$$\begin{gathered} M > x(\alpha + \varepsilon)^{-1}, \quad M' < x(\alpha + \varepsilon), \\ R(M) \leqslant R(x) \leqslant R(M'), \end{gathered} \tag{15}$$

из которых последнее вместе с (13), (15) доказывает (11):

$$c\gamma(\alpha + \varepsilon)^{-\delta} x^\delta \leqslant R(x) < c\gamma(\alpha + \varepsilon)^\delta x^\delta.$$

Подобным образом с помощью (14), (15) и неравенства $\Pi(M) \leqslant \Pi(x) \leqslant \Pi(M')$ доказываеся и (12).

Более подробными рассуждениями получаются и точные оценки чисел $R(x)$ и $\Pi(x)$, но для нашей цели они не нужны.

Кафедра общей математики
Март 1947 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виноградов И. М., Уточнение метода оценки сумм с простыми числами, „Известия Академии Наук СССР", Серия мат., 7, 1943, стр. 17—34.

2. Ингам А. Е., Распределение простых чисел, Москва, 1936, стр. 28, (Теорема А.)

3. Mills W. H., A prime representing function, „Bull. Am. Math. Soc.", 53, 1947, 604.

ОБ ОДНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ НЕРАВЕНСТВЕ

А. Д. Мышкис и А. Я. Лепин

Приводимая ниже теорема была доказана в 1949 г. Она играет основную роль в изучении вопроса о единственности решения начальной задачи для диференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Теорема (см. [1], стр. 116). *Пусть на интервале $0 < x < a$ (где $a > 0$) задана неубывающая неотрицательная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая для всех достаточно малых значений аргумента x неравенству*

$$\varphi(x) \leqslant x \sum_{i=1}^{r} k_i \left[\varphi\left(b_i x^{\alpha_i}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha_i}}. \tag{1}$$

Тут $r \geqslant 1$, все k_i, b_i и α_i — некоторые положительные числа, причем все $\alpha_i \geqslant 1$; при этом, если какие-нибудь из $\alpha_i = 1$, то соответствующие b_i должны быть $\leqslant 1$. Тогда в достаточной близости от значения $x = 0$ будет $\varphi(x) \equiv 0$.

Эта теорема имеет и самостоятельный интерес; в связи с этим возник вопрос о ее уточнении. В этой работе будет дано другое доказательство приведенной теоремы, из которого, в частности, следует, что требование неубывания функции $\varphi(x)$ может быть заменено на более слабое требование ограниченности этой функции. Кроме того, будет дана явная оценка длины интервала, на котором гарантируется равенство $\varphi(x) \equiv 0$.

Мы выделим в правой части неравенства (1) те слагаемые, для которых $\alpha_i = 1$, т. е. перепишем это неравенство так:

$$\varphi(x) \leqslant x \sum_{i=1}^{p} L_i \varphi(c_i x) + x \sum_{j=1}^{q} M_j \left[\varphi\left(d_j x^{\beta_j}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_j}} \tag{2}$$

$$(p \geqslant 0, \quad q \geqslant 0, \quad p + q = r > 0;$$
$$0 < L_i < \infty,\ 0 < c_i \leqslant 1,\ 0 < M_j < \infty,\ 0 < d_j < \infty,\ 1 < \beta_j < \infty;$$
$$i = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q).$$

Обозначим далее

$$\bar{k} = \max_{i,\,j} \{ L_i,\ M_j \},\ k = \max \{ \bar{k},\ r^{-1} \}. \tag{3}$$

Теорема. *Пусть на интервале* $0 < x < a$ (где $0 < a < \infty$) *задана ограниченная неотрицательная функция* $\varphi(x)$, *удовлетворяющая неравенству* (2) *для всех тех значений* $x \in (0, a)$, *для которых все* $d_j x^{\beta_j} < a$ $(j = 1, \ldots, q)$. *Тогда*:

а) *если* $q = 0$, *то* $\varphi(x) = 0$ *при* $0 < x < \min\{a, (\bar{k}r)^{-1}\}$,

б) *если* $q > 0$, *то* $\varphi(x) = 0$ *при* $0 < x < l = \min\left\{a, \left(\bar{k} r a^{\frac{1}{\beta - 1}}\right)^{-1}\right\}$,

где обозначено

$$d = \max_j \{d_j, 1\} \ (1 \leqslant d < \infty), \quad \beta = \min_j \{\beta_j\} \ (1 < \beta < \infty).$$

Доказательство. Обозначим

$$\psi(x) = \sup_{0 < t < x} \varphi(t) \qquad (0 < x < a).$$

Тогда функция $\psi(x)$ не убывает. Из неравенства (2), если подставить t вместо x и взять после этого верхние грани левой и правой части на интервале $0 < t < x$, получим при $0 < x < a$

$$\psi(x) \leqslant x \sum_{i=1}^{p} L_i \psi(c_i x) + x \sum_{j=1}^{q} M_j \, [\psi(d_j x^{\beta_j})]^{\frac{1}{\beta_j}} \leqslant \bar{k} x \Big(p\psi(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \Big[\psi\Big(d_j x^{\beta_j}\Big)\Big]^{\frac{1}{\beta_j}}\Big), \tag{4}$$

если только все $d_j x^{\beta_j} < a$.

В случае а) это неравенство даст

$$\psi(x) \leqslant \bar{k} x p \psi(x).$$

Но $\psi(x) \geqslant 0$. Поэтому, если $\bar{k} x p < 1$, то $\psi(x) = 0$. Отсюда и следует утверждение теоремы в рассматриваемом случае (отметим, что в этом случае $r = p$).

В случае б) отметим прежде всего, что при $0 < x < l$ для всех $j = 1, \ldots, q$ будет

$$d_j x^{\beta_j} = \frac{x}{(kr)^{\beta_j - 1}} \left(x k r d_j^{\frac{1}{\beta_j - 1}}\right)^{\beta_j - 1} \leqslant x \left(x k r a^{\frac{1}{\beta - 1}}\right)^{\beta_j - 1} < x, \tag{5}$$

т. е. для всех таких x неравенство (4) имеет место. Докажем далее, что

$$\psi(x) < 1 \quad (0 < x < l). \tag{6}$$

Действительно, из неравенств (4) и (5) и неубывания функции $\psi(x)$ следует, что если бы это было не так при некотором $x \in (0, l)$, то

$$\psi(x) \leqslant kx\left(p\psi(x) + \sum_{j=1}^{q}\left[\psi\left(d_j\ x^{\beta_j}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_j}}\right) \leqslant kx\left(p\psi(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{q}\left[\psi(x)\right]^{\frac{1}{\beta_j}}\right) \leqslant kx\left(p\psi(x) + \sum_{j=1}^{q}\psi(x)\right) = krx\psi(x),$$

причем

$$krx < krl \leqslant d^{-\frac{1}{\beta-1}} \leqslant 1\,.$$

Значит, неравенство (6) доказано.

Из неравенств (6) и (4) следует, что

$$\psi(x) < krx \quad (0 < x < l)\,. \tag{7}$$

Докажем теперь, что для любого натурального n при $0 < x < l$

$$\psi(x) < (krx)^n \exp\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \beta\,\frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\}. \tag{8}$$

Действительно, при $n = 1$ эта оценка совпадает с оценкой (7). Пусть далее неравенство (8) доказано для некоторого натурального n. Тогда для любого $j = 1, \ldots, q$

$$\left[\psi\left(d_j\,x^{\beta_j}\right)\right]^{\frac{1}{\beta_j}} < \left(krdx^{\beta_j}\right)^{\frac{n}{\beta_j}} \exp^{\frac{1}{\beta_j}}\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \beta\,\frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\} =$$

$$= \left(kr\right)^{\frac{n}{\beta_j}} x^n \exp^{\frac{\beta}{\beta_j}}\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\} \leqslant (kr)^n x^n \exp\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\}; \tag{9}$$

последний переход сделан на основании того, что $kr \geqslant 1$, $d \geqslant 1$ и

$$\frac{n}{\beta-1} - \frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2} = \frac{n\,\beta^{n+1} - (n+1)\,\beta^n + 1}{\beta^n(\beta-1)^2} > \frac{n-(n+1)+1}{\beta^n\,(\beta-1)^2} = 0\,,$$

поскольку выражение $n\beta^{n+1} - (n+1)\beta^n$ является, как легко проверить, возрастающей функцией β при $1 \leqslant \beta < \infty$.

С другой стороны, из неравенства (8) следует, что

$$\psi(x) < (krx)^n \exp\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\}. \tag{10}$$

Подставляя оценки (9) и (10) в неравенство (4), получим при $0 < x < l$

$$\psi(x) < kx(p+q)(krx)^n \exp\left\{\left[\frac{n}{\beta-1} - \frac{1-\beta^{-n}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\} =$$

$$= (krx)^{n+1} \exp\left\{\left[\frac{n+1}{\beta-1} - \beta\frac{1-\beta^{-(n+1)}}{(\beta-1)^2}\right]\ln d\right\};$$

таким образом, согласно методу полной индукции, неравенство (8) доказано для всех натуральных n.

Из неравенства (8) следует, что при $0 < x < l$

$$\psi(x) < (krx)^n \exp\left(\frac{n}{\beta-1}\ln d\right) = \left(\frac{x}{l}\right)^n \left(krld^{\frac{1}{\beta-1}}\right)^n \leqslant \left(\frac{x}{l}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Значит, первый член этой цепи соотношений, неотрицательный и не зависящий от n, тождественно равен нулю при $0 < x < l$. Отсюда, согласно определению $\psi(x)$, следует, что и

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad (0 < x < l).$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Обозначим $b_i x^{\alpha_i} = f_i(x)$, $k_i l_i^{\frac{1}{\alpha_i}} = \bar{k}_i$. Тогда неравенство (1) можно переписать так:

$$\varphi(x) \leqslant x \sum_{i=1}^{r} \bar{k}_i f_i^{-1}[\varphi(f_i(x))], \tag{11}$$

где под f_i^{-1} понимается функция, обратная к f_i. Таким образом, доказанная теорема говорит о тождественном равенстве нулю неотрицательной функции, удовлетворяющей неравенству (11), при специальном виде функций f_i. Естественно, возникают вопросы: а) будет ли аналогичное утверждение верным для более общего вида функций f_i, б) на каком именно интервале гарантируется равенство $\varphi(x) = 0$ в более общем случае, в) какова роль сомножителя x, стоящего в неравенстве (11) перед знаком суммы.

Кафедра общей математики
Январь 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. М ы ш к и с А. Д., Общая теория диференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, „Успехи математических наук", IV : 5 (33), 1950, стр. 99—141.

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ В ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА

А. Д. Мышкис и А. Я. Лепин

Приводимая ниже теорема 1 была доказана в 1950 г. Она применяется при изучении некоторых типов диференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Теорема 1 (см. [1], стр. 236). *Пусть на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ заданы неубывающие функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ и непрерывные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем*

$$f_1(x) \geqslant f_2(\overline{x}) \quad \textit{всегда при } a \leqslant x \leqslant \overline{x} \leqslant b,$$
$$g_1(x) \geqslant g_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$
$$g_1(a) = g_2(a),$$

в каждой точке роста функции $g_1(x)$ будет $f_1(x) \geqslant 0$.

Тогда

$$\int_a^b f_1(x)\, d\, g_1(x) \;\geqslant\; \int_a^b f_2(x)\, d\, g_2(x). \tag{1}$$

Было доказано также несколько достаточных условий для того, чтобы неравенство (1) в предположениях теоремы 1 было бы строгим. В связи с этим возник вопрос об отыскании необходимых и достаточных условий этого. В данной работе и будут указаны эти условия.

Впредь буквами $f(x)$ с индексами или без них мы будем обозначать непрерывные функции, заданные на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, а буквами $g(x)$ с индексами или без них — функции, имеющие конечное изменение на том же отрезке. Все величины будут считаться вещественными и конечными.

Предварительно мы докажем несколько теорем, которые будут применены при выводе основной теоремы. При этом будут использованы следующие общеизвестные свойства интеграла Стильтьеса:

1. Если $g(x)$ не убывает, то

$$\min_{[a,\, b]} f(x) \cdot [g(b) - g(a)] \leqslant \int_a^b f(x)\, dg(x) \leqslant \max_{[a,\, b]} f(x) \cdot [g(b) - g(a)]\,.$$

2. Если $g(x)$ не убывает и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dg(x) \geqslant \int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

3. Если обозначить $f(x)\,g(x)\,|_a^b = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\,|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x).$$

4. Если $f(x)$ не возрастает и $g(x) \geqslant 0$, то

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \geqslant f(x)\,g(x)\,|_a^b.$$

Действительно, это следует из предыдущего свойства и определения $\int_a^b g(x)\,df(x)$.

5. Если $g(x)$ не убывает и $f_1(x) = f_2(x)$ во всех точках роста функции $g(x)$, то

$$\int_a^b f_1(x)\,dg(x) = \int_a^b f_2(x)\,dg(x).$$

Приведем далее лемму, доказательство которой аналогично доказательству подобного факта в теории интеграла Римана (см., например, [2], стр. 128—129).

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ не убывает и непостоянна, а $g(x) > 0$. Тогда*

$$\int_a^b g(x)\,df(x) > 0.$$

Доказательство. Предположим противное, что

$$\int_a^b g(x)\,df(x) = 0.$$

Тогда, поскольку при бесконечном измельчении отрезка $[a, b]$

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1},\, x_k]} g(x)\,[f(x_k) - f(x_{k-1})] \longrightarrow \int_a^b g(x)\,df(x) = 0,$$

найдется такое разбиение этого отрезка, для которого

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{[x_{k-1}, x_k]} g(x) \left[f(x_k) - f(x_{k-1}) \right] < \varepsilon_1 \left[f(b) - f(a) \right], \tag{2}$$

где ε_1 — произвольное наперед заданное положительное число. Из неравенства (2) следует, что найдется один из частичных отрезков данного разбиения, который мы обозначим через $[a_1, b_1]$, такой, что

$$[a_1, b_1] \subset [a, b],\ f(a_1) < f(b_1),\ \sup_{[a_1, b_1]} g(x) < \varepsilon_1 .$$

Применяя такое же рассуждение к отрезку $[a_1, b_1]$, мы получим отрезок $[a_2, b_2]$, для которого

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1],\ f(a_2) < f(b_2),\ \sup_{[a_2, b_2]} g(x) < \varepsilon_2 ,$$

где ε_2 — произвольное положительное число, поскольку и

$$\int_{a_1}^{b_1} g(x)\, df(x) = \left(\int_a^b - \int_a^{a_1} - \int_{b_1}^{b} \right) g(x)\, df(x) = 0 .$$

Продолжая этот процесс и принимая, что $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ при $k \longrightarrow \infty$, получим, что в точке $x = c$, общей всем отрезкам $[a_k, b_k]$,

$$g(c) = 0 ,$$

чему противоречит условие. Итак, лемма доказана.

Переходим к доказательству вспомогательных теорем.

Т е о р е м а 2. *Пусть даны неубывающая функция $g(x)$ и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, причем*

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{3}$$

и $f_1(x) > f_2(x)$ хотя бы в одной точке роста функции $g(x)$. Тогда

$$\int_a^b f_1(x)\, dg(x) > \int_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = \gamma$ — точка роста функции $g(x)$, в которой $f_1(\gamma) > f_2(\gamma)$. Тогда, в силу непрерывности $f_1(x)$ и $f_2(x)$, найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, такой, что

$$f_1(x) > f_2(x) \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad g(\beta) > g(\alpha) \tag{4}$$

(точку γ можно взять в качестве одного из концов этого отрезка). Тогда на основании свойства 1 интеграла Стильтьеса и неравенств (3) и (4), получим:

$$\int_a^b f_1(x)\,dg(x) - \int_a^b f_2(x)\,dg(x) = \left(\int_a^\alpha + \int_\alpha^\beta + \int_\beta^b\right)[f_1(x) - f_2(x)]\,dg(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta [f_1(x) - f_2(x)]\,dg(x) \geqslant \min_{[\alpha,\,\beta]}[f_1(x) - f_2(x)]\,[g(\beta) - g(\alpha)] > 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть даны невозрастающая неотрицательная функция $f(x)$ и неотрицательная функция $g(x)$, причем $g(a) = 0$ и $-f(x)$ имеет по крайней мере одну точку роста, в некоторой окрестности которой $g(x) > 0$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) > 0.$$

Доказательство. Пусть $x = \gamma$ — точка роста функции $-f(x)$, в некоторой окрестности которой $g(x) > 0$. Тогда найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, такой, что

$$g(x) > 0\ (\alpha \leqslant x \leqslant \beta), \quad f(\alpha) > f(\beta).$$

Поэтому, в силу леммы, приведенной выше,

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x) \geqslant \int_a^b g(x)\,d[-f(x)] \geqslant$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta g(x)\,d[-f(x)] > 0.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть даны функция $f(x)$ и неотрицательная функция $g(x)$. Обозначим через A множество всех корней функции $g(x)$, через $\bar{A}$ — замыкание этого множества и через B — совокупность всех точек изменения функции $f(x)$* (т. е. точек, в любой окрестности каждой из которых функция $f(x)$ не остается постоянной). *Пусть дано, что $B \subset \bar{A}$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b.$$

(здесь ограничения, наложенные ранее на функции $f(x)$ и $g(x)$, излишни, если только дано, что изучаемый интеграл существует).

Доказательство. Проверим сначала, что если разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ удовлетворяет условию

$$\left.\begin{array}{l} f(x_{k-1}) = f(x_k) \text{ для любого такого } k = 1, \ldots, n, \\ \text{для которого } g(x_{k-1}) > 0,\ g(x_k) > 0, \end{array}\right\} \qquad (5)$$

то можно составить интегральную сумму для этого разбиения, равную $f(x)g(x)|_a^b$. Для этого достаточно положить

$$\left.\begin{aligned} \xi_k = x_{k-1} \quad &\text{при} \quad g(x_k) = 0, \\ \xi_k = x_k \quad &\text{при} \quad g(x_k) > 0, \end{aligned} \quad (k = 1, \ldots, n) \right\}. \tag{6}$$

В справедливости этого утверждения мы убедимся индукцией по числу n слагаемых интегральной суммы. Действительно, пусть $n = 1$, т. е., $x_0 = a$, $x_1 = b$. Тогда, при $g(b) = 0$,

$$f(\xi_1)[g(x_1) - g(x_0)] = f(a)[g(b) - g(a)] = -f(a)g(a) = f(x)g(x)|_a^b.$$

Если $g(b) > 0$ и $g(a) = 0$, то рассуждение проходит аналогично. Если же, наконец, $g(b) > 0$ и $g(a) > 0$, то, по условию (5), $f(a) = f(b)$, откуда

$$f(\xi_1)[g(x_1) - g(x_0)] = f(b)[g(b) - g(a)] = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

что и доказывает наше утверждение для $n = 1$.

Пусть теперь это утверждение верно при $n - 1$ ($n \geqslant 2$) слагаемых в интегральной сумме и дана интегральная сумма с n слагаемыми, удовлетворяющая условиям (5) и (6). Тогда, применяя утверждение к отрезку $[a, x_{n-1}]$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(x)g(x)|_a^{x_{n-1}}.$$

Тогда, при $g(b) = 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] = f(x)g(x)|_a^{x_{n-1}} + f(x_{n-1})[g(b) - g(x_{n-1})] =$$
$$= f(x)g(x)|_a^b.$$

Если $g(b) > 0$ и $g(x_{n-1}) = 0$, то рассуждение проходит аналогично. Если же, наконец, $g(b) > 0$ и $g(x_{n-1}) > 0$, то, согласно условию (5), $f(x_{n-1}) = f(b)$; учитывая это, выкладки проводятся аналогично.

Итак, утверждение о возможности составления интегральной суммы, равной $f(x)g(x)|_a^b$, при выполнении условия (5), доказано. Значит, осталось проверить, что в условиях теоремы 4 можно составить как угодно мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее условию (5).

Прежде всего, нетрудно убедиться в том, что если условия теоремы 4 удовлетворяются на отрезке $[a, b]$, то они удовлетворяются и в том случае, если заданные функции рассматривать только на каком-либо отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Поэтому достаточно проверить, что имеется разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее условию (5), для которого все $x_k - x_{k-1} \leqslant \frac{2}{3}(b - a)$ $(k = 1, \ldots, n)$. Действительно, повторяя этот процесс разбиения для каждого из частичных отрезков любое число раз, мы получим как угодно мелкое разбиение отрезка $[a, b]$, удовлетворяющее условию (5).

Для построения искомого разбиения отметим сначала, что если некоторый отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ не содержит точек множества A, то, по условию, внутри этого отрезка нет точек множества B и потому $g(\alpha) > 0$, $g(\beta) > 0$ и $f(x)$ постоянна на $[\alpha, \beta]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на три равные части точками c, d $(c < d)$ и обозначим $[a, c] \cap A = C_1$, $[c, d] \cap A = C_2$, $[d, b] \cap A = C_3$. Тогда, если множество C_2 не пусто, то легко проверить, что разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$, где x_1 — какая-нибудь точка C_2, будет удовлетворять свойству (5), причем $\max(x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{2}{3}(b - a)$; значит, это разбиение будет искомым. Поэтому впредь мы будем считать, что множество C_2 пусто, т. е. $C_2 = \Lambda$.

Если $C_1 = C_3 = \Lambda$, то искомым разбиением является, например, $a < c < b$. Если $C_1 = \Lambda$, но $C_3 \neq \Lambda$, например, $C_3 \ni x_2$, то искомым разбиением будет $a < c < x_2 < b$ при $x_2 < b$ и $a < c < b$ при $x_2 = b$. Случай $C_3 = \Lambda$ рассматривается аналогично.

Осталось рассмотреть случай, когда $C_2 = \Lambda$, $C_1 \neq \Lambda$, $C_3 \neq \Lambda$. Но пусть тогда $e \in C_1$, $h \in C_3$. Искомым разбиением является

$$\begin{aligned}
&a < e < c < h < b, && \text{если } a < e,\ h < b;\\
&a < c < h < b, && \text{если } a = e,\ h < b;\\
&a < e < c < b, && \text{если } a < e,\ h = b;\\
&a < c < b, && \text{если } a = e,\ h = b.
\end{aligned}$$

Итак, все случаи разобраны. Теорема 4 доказана.

Переходя к основной теореме 5, обозначим в условиях теоремы 1

$$f_1^+(x) = \max\{f_1(x), 0\} \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

$$\overline{f_1}(x) = \min_{a \leqslant t \leqslant x} f_1^+(t) \ (a \leqslant x \leqslant b),$$

D_i — множество точек роста функции $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$,

A — множество корней функции $[g_1(x) - g_2(x)]$,

B — множество точек роста (очевидно, неубывающей и непрерывной) функции $-\overline{f_1}(x)$.

Теорема 5 (основная). *Для того чтобы в условиях теоремы* 1 *неравенство* (1) *было строгим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось по крайней мере одно из следующих условий:*

1. $\overline{f_1}(x) < f_1^+(x)$ *хотя бы для одного* $x \in D_1$,

2. $\overline{f}_1(x) > f_2(x)$ *хотя бы для одного* $x \in D_2$,

3. *B не является подмножеством замыкания множества A.*

4. $\overline{f}_1(b)[g_1(b) - g_2(b)] > 0$.

Доказательство. Убедимся сначала в необходимости приведенных условий. Для этого предположим, что ни одно из них не выполняется. Тогда, в силу свойства 5 интеграла Стильтьеса,

$$\int_a^b f_1(x)\,dg_1(x) = \int_a^b f_1^+(x)\,dg_1(x) = \int_a^b \overline{f}_1(x)\,dg_1(x) \tag{7}$$

(первое из этих равенств написано на основании условия теоремы 1 о знаке функции $f_1(x)$, а второе следует из невыполнения условия 1). Из условий теоремы 1 следует, что во всяком случае

$$\overline{f}_1(x) \geqslant f_2(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Поэтому из невыполнения условия 2 следует, что

$$\int_a^b f_2(x)\,dg_2(x) = \int_a^b \overline{f}_1(x)\,dg_2(x).$$

Отсюда и из равенств (7) получается:

$$I = \int_a^b f_1(x)\,dg_1(x) - \int_a^b f_2(x)\,dg_2(x) = \int_a^b \overline{f}_1(x)\,d[g_1(x) - g_2(x)]. \tag{8}$$

Однако из невыполнения условия 3 и теоремы 4 вытекает:

$$\int_a^b \overline{f}_1(x)\,d[g_1(x) - g_2(x)] = (\overline{f}_1(x)[g_1(x) - g_2(x)])\Big|_a^b = \overline{f}_1(b)[g_1(b) - g_2(b)].$$

Отсюда, из равенств (8) и невыполнения условия 4 следует, что $I = 0$, что и требовалось доказать.

Убедимся теперь в достаточности каждого из приведенных четырех условий для того, чтобы неравенство (1) было строгим. Из условий теоремы 1 следует во всяком случае, что

$$\int_a^b f_1^+(x)\,dg_1(x) \geqslant \int_a^b \overline{f}_1(x)\,dg_1(x), \quad \int_a^b f_2(x)\,dg_2(x) \leqslant \int_a^b \overline{f}_1(x)\,dg_2(x), \tag{9}$$

$$\int_a^b \overline{f}_1(x)\,d[g_1(x) - g_2(x)] \geqslant (\overline{f}_1(x)[g_1(x) - g_2(x)])\Big|_a^b =$$

$$= \overline{f}_1(b)[g_1(b) - g_2(b)] \geqslant 0. \tag{10}$$

(неравенство (10) получено при помощи свойства 4 интеграла Стильтьеса).

Если выполнено условие 1, то теорема 2 показывает, что первое из неравенств (9) является строгим. Если выполнено условие 2, то второе из неравенств (9) является строгим. Если выполнено условие 3, то из теоремы 3 следует, что

$$\int_a^b \overline{f}_1(x)\, d\,[g_1(x) - g_2(x)] > 0\,.$$

Если же выполнено условие 4, то это же следует из соотношений (10). Итак, во всех этих случаях мы получаем, что неравенство (1) является строгим. Теорема 5 доказана.

Кафедра общей математики
Январь 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мышкис А. Д., Теория линейных диференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, ГТТИ, 1951.

2. Фихтенгольц Г. М., Курс диференциального и интегрального исчисления, II, ГТТИ, 1948.

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАТРИЧНОГО ПАРАМЕТРА

Н. А. Бразма

1. В работе автора [1] рассмотрено операционное исчисление для функций, которые являются аналитическими функциями одного матричного параметра, и притом для случая его приводимости к диагональному виду. Общий случай произвольного матричного параметра остался нерассмотренным.

Настоящая работа посвящена этому общему случаю. Оказывается, что в основном операционные соотношения, помещенные в работе [1], остаются справедливыми также в указанном общем случае, если удовлетворены некоторые дополнительные условия.

В частности, указаны условия существования операционного равенства для функции, аналитически зависящей от матричного параметра в случае его приводимости к диагональному виду.

Затем в качестве примера рассмотрена матрица с трехкратным элементарным делителем и некоторый частный случай обобщенной системы телеграфных уравнений с рассмотренной матрицей в виде параметра.

2. Рассмотрим некоторую матрицу $\mathbf{A}$ порядка n, входящую в виде параметра в исследуемое операционное равенство. Пусть характеристические числа и элементарные делители этой матрицы $\mathbf{A}$ суть

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s; \quad (\lambda-\lambda_1)^{\rho_1}, (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2}, \ldots, (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s},$$

так что $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_s=n$. Тогда матрицу $\mathbf{A}$ можно привести к следующему каноническому виду, содержащему квази-диагональную матрицу:

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}\,[\mathrm{J}_{\rho_1}(\lambda_1),\ \mathrm{J}_{\rho_2}(\lambda_2),\ \ldots,\ \mathrm{J}_{\rho_s}(\lambda_s)]\,\mathbf{S}^{-1}, \tag{1}$$

где

$$\mathrm{J}_\rho(\lambda)=\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & \lambda \end{Vmatrix} \quad \text{(матрица порядка } \rho,\ \rho=2,3,\ldots). \tag{2}$$

$$\mathrm{J}_1(\lambda)=\lambda.$$

Затем рассмотрим некоторую функцию $f(t, \mathbf{A})$, кусочно непрерывную от t $(0 \leqslant t < \infty)$ при постоянном $\mathbf{A}$*) и аналитически зависящую от матрицы $\mathbf{A}$ как параметра при постоянном t. Эту функцию можно привести к следующему виду, содержащему квази-диагональную матрицу [2]:

$$
\begin{gathered}
f(t, \mathbf{A}) = \mathbf{S}\,[\mathrm{G}_{\rho_1}\,(f(t,\lambda_1), \frac{\partial}{\partial \lambda_1} f(t, \lambda_1), \ldots, \frac{\partial^{\rho_1-1}}{\partial \lambda_1^{\rho_1-1}} f(t, \lambda_1)), \ldots \\
\ldots, \mathrm{G}_{\rho_s}\,(f(t, \lambda_s), \frac{\partial}{\partial \lambda_s} f(t, \lambda_s), \ldots, \frac{\partial^{\rho_s-1}}{\partial \lambda_s^{\rho_s-1}} f(t, \lambda_s))]\,\mathbf{S}^{-1},
\end{gathered}
\tag{3}
$$

где обозначено

$$
\mathrm{G}_\rho\,(f(t, \lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda), \ldots, \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial \lambda^{\rho-1}} f(t, \lambda)) =
$$

$$
= \begin{Vmatrix}
f(t, \lambda), & 0, & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda), & f(t, \lambda), & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} f(t, \lambda), & \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda), & f(t, \lambda) & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{1}{(\rho-1)!}\frac{\partial^{\rho-1}}{\partial \lambda^{\rho-1}} f(t, \lambda), & \frac{1}{(\rho-2)!}\frac{\partial^{\rho-2}}{\partial \lambda^{\rho-2}} f(t, \lambda), & \ldots & \ldots & f(t, \lambda)
\end{Vmatrix}
\tag{4}
$$

Как известно, функция $f(t, \lambda)$ является аналитической функцией от λ при постоянном t в соответствующей области изменения λ.

3. Применим преобразование Лапласа к равенству (4). Это преобразование существует, если значение λ находится внутри области сходимости преобразования Лапласа функции $f(t, \lambda)$ и ее производных по λ порядков до $\rho - 1$ включительно, т. е. если сходятся следующие интегралы:

$$
\int_0^\infty e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt
\tag{5}
$$

и

$$
\int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)\, dt, \ldots, \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial \lambda^{\rho-1}} f(t, \lambda)\, dt.
\tag{6}
$$

*) Характер этой кусочной непрерывности впоследствии будет уточнен.

(Сходимость этих интегралов окажется следствием дальнейших предположений.)

Предположим следующее:

а$_1$) Точки разрыва функции $f(t, \lambda)$ и производных

$$\frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} f(t, \lambda) \quad (r = 1, \ldots, \rho - 1), \tag{7}$$

рассматриваемых как функции от t $(0 \leqslant t < \infty)$ при постоянном λ, являются точками разрыва первого рода, число которых либо конечно $(a_1 < a_2 < \ldots < a_k)$, либо бесконечно $(a_1 < a_2 < \ldots \to \infty)$, и эти точки разрыва не зависят от λ в некоторой окрестности σ λ-плоскости. В дальнейшем мы будем для единообразия считать, что $a_1 = 0$ и число точек a_i бесконечно, так как этого всегда можно достичь при помощи добавления новых точек.

б$_1$) В окрестности σ функция $f(t, \lambda)$ аналитически зависит от λ при любом постоянном t $(0 < t < \infty)$, кроме ее точек разрыва, указанных в а$_1$).

в$_1$) Производные (7) являются непрерывными функциями по совокупности переменных t и λ в каждой области $a_i \leqslant t \leqslant a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\lambda \in \sigma$.

г$_1$) В окрестности σ интеграл (5) сходится равномерно относительно λ при каждом фиксированном p, если вещественная часть этого p превосходит некоторую положительную константу.

Докажем, что в интегралах (6) диференцирование по λ можно вынести перед знаком интеграла. Для доказательства этого разобьем интеграл (5) на бесконечную сумму интегралов, взятых между последующими точками произвольной бесконечной последовательности точек a_k $(k = 1, 2, \ldots)$, уходящих в бесконечность, причем среди этих точек возьмем также все точки разрыва данной функции $f(t, \lambda)$ и ее производных (7).

Тогда интеграл (5) преобразуется в равномерно сходящийся ряд интегралов вида

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt, \tag{8}$$

причем каждый такой интеграл в окрестности σ параметра λ выражает аналитическую функцию от λ, а производные по λ порядков до $\rho - 1$ включительно от каждого интеграла получаются диференцированием по λ под знаком интеграла.

На основании теоремы Вейерштрасса о суммировании рядов аналитических функций, бесконечная сумма интегралов (8), которая равна интегралу (5), выражает аналитическую функцию от λ, а производные этой функции по λ любого порядка получаются почленным диференцированием по λ бесконечной суммы интегралов (8), причем среди них производные порядков до $\rho - 1$ включительно получаются диференцированием под знаком интеграла.

Суммы производных по λ от интегралов (8) равны соответствующим интегралам (6). Из предыдущего следует, что производные интеграла (5) по λ, порядков до $\rho - 1$ включительно, равны соответствующим интегралам (6), т. е. в интегралах (6) диференцирование по λ можно вынести перед знаками интегралов.

При произвольной бесконечной последовательности точек a_k, уходящих в бесконечность, сумма интегралов (8) равна интегралу (5), а суммы производных по λ от интегралов (8) равны соответствующим интегралам (6). Из произвольности последовательности точек a_k следует сходимость интегралов (6).

Таким образом, сходимость интегралов (6) и возможность диференцировать интеграл (5) под знаком интеграла являются следствием предположений а$_1$) — г$_1$).

4. Далее допустим, что функция $f(t, \lambda)$ и ее производные по λ порядков до $\rho - 1$ включительно, кроме рассмотренных точек разрыва первого рода, обладают еще конечным множеством точек разрыва второго рода, причем последние удовлетворяют некоторым условиям, указанным далее. Под точкой разрыва второго рода мы подразумеваем точку, при стремлении к которой функция стремится к бесконечности.

Пусть b — одна из упомянутых точек разрыва второго рода ($0 \leqslant b < \infty$). С той стороны этой точки, с которой интеграл существует как несобственный, приложим к этой точке некоторый интервал $b_1 < t < b$ или $b < t < b_1$, не содержащий больше точек разрыва. Для определенности будем считать, что $b_1 < b$.

Предположим следующее:

а$_2$) Любая точка b разрыва второго рода функции $f(t, \lambda)$, рассматриваемой как функции от t ($0 \leqslant t < \infty$) при постоянном λ, не зависит от λ в некоторой окрестности σ λ-плоскости.

б$_2$) В окрестности σ функция $f(t, \lambda)$ аналитически зависит от λ при любом постоянном t в интервале $b_1 < t < b$ и при вышеуказанном b_1.

в$_2$) Производные (7) являются непрерывными функциями по совокупности переменных t и λ в области $b_1 < t < b$, $\lambda \in \sigma$.

г$_2$) В окрестности σ интеграл (5) сходится равномерно относительно λ при каждом фиксированном p, если вещественная часть этого p превосходит некоторую положительную константу.

В указанном интервале $b_1 < t < b$ возьмем произвольную последовательность точек b_k ($k = 1, 2, \ldots$), сходящуюся к b. Часть интеграла (5), взятую по интервалу (b_1, b), т. е. соответствующий интеграл

$$\int_{b_1}^{b} e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt, \tag{9}$$

разобьем на бесконечную сумму интегралов, взятых между соседними точками последовательности b_k ($k = 1, 2, \ldots$).

Тогда на основании теоремы Вейерштрасса о суммировании рядов аналитических функций оказывается, что производные по λ порядков до $\rho - 1$ включительно от несобственного интеграла (9) можно получить диференцированием этого интеграла под знаком интеграла по параметру λ.

Вернемся к интегралам (5) и (6). К точкам разрыва второго рода подинтегральных выражений этих интегралов приложим некоторые интервалы рассмотренного вида, которые исключим из интервала интегрирования интегралов (5) и (6). Тогда на основании предыдущего, для оставшегося интеграла вида (5) производные по λ порядков до $\rho - 1$ включительно можно получить диференцированием под знаком интеграла по параметру λ. Также и от несобственных интегралов вида (9), взятых по указанным интервалам, производные по λ тех же порядков получаются дифференцированием под знаком интеграла по параметру λ.

Объединив оба результата, получаем, что и в случае наличия конечного числа точек разрыва второго рода, производные от интеграла (5) по λ порядков до $\rho - 1$ включительно можно получить диференцированием под знаком интеграла по параметру λ, если удовлетворены вышеуказанные предположения.

5. Обозначим изображение функции $f(t, \lambda)$ через $F(p, \lambda)$. Тогда на основании предыдущего из равенства

$$p \int_0^\infty e^{-pt} f(t, \lambda)\, dt = F(p, \lambda) \quad \text{или} \quad f(t, \lambda) \doteqdot F(p, \lambda)$$

следует:

$$p \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} f(t, \lambda)\, dt = \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} F(p, \lambda) \quad \text{или} \quad \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} f(t, \lambda) \doteqdot \frac{\partial^r}{\partial \lambda^r} F(p, \lambda)$$

$$(r = 1, 2, \ldots, \rho - 1).$$

Отсюда преобразование Лапласа равенства (4) приобретает такой вид:

$$p \int_0^\infty e^{-pt} G_\rho \left(f(t, \lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda), \ldots, \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial \lambda^{\rho-1}} f(t, \lambda)\right) dt =$$

$$
= \left\| \begin{matrix} F(p,\lambda), & 0, & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda), & F(p,\lambda), & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}F(p,\lambda), & \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda), & F(p,\lambda) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{(\rho-1)!}\frac{\partial^{\rho-1}}{\partial\lambda^{\rho-1}}F(p,\lambda), & \frac{1}{(\rho-2)!}\frac{\partial^{\rho-2}}{\partial\lambda^{\rho-2}}F(p,\lambda), & \ldots & \ldots & F(p,\lambda) \end{matrix} \right\| =
$$

$$
= \mathrm{G}_\rho\left(F(p,\lambda), \frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda), \ldots, \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial\lambda^{\rho-1}}F(p,\lambda)\right)
$$

или

$$
\mathrm{G}_\rho\left(f(t,\lambda), \frac{\partial}{\partial\lambda}f(t,\lambda), \ldots, \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial\lambda^{\rho-1}}f(t,\lambda)\right) \doteqdot
$$

$$
\doteqdot \mathrm{G}_\rho\left(F(p,\lambda), \frac{\partial}{\partial\lambda}F(p,\lambda), \ldots, \frac{\partial^{\rho-1}}{\partial\lambda^{\rho-1}}F(p,\lambda)\right). \tag{10}
$$

6. Рассмотрим преобразование Лапласа равенства (3). Предполагая удовлетворенными соответствующие условия относительно функции $f(t, \lambda)$ и ввиду независимости от t матрицы $\mathbf{S}$, на основании формулы (10) получаем:

$$
p\int_0^\infty e^{-pt} f(t, \mathbf{A})\, dt = \mathbf{S}\Big[\mathrm{G}_{\rho_1}\Big(F(p,\lambda_1), \frac{\partial}{\partial\lambda_1}F(p,\lambda_1), \ldots, \frac{\partial^{\rho_1-1}}{\partial\lambda_1^{\rho_1-1}}F(p,\lambda_1)\Big), \ldots
$$

$$
\ldots, \mathrm{G}_{\rho_s}\Big(F(p,\lambda_s), \frac{\partial}{\partial\lambda_s}F(p,\lambda_s), \ldots, \frac{\partial^{\rho_s-1}}{\partial\lambda_s^{\rho_s-1}}F(p,\lambda_s)\Big)\Big]\mathbf{S}^{-1} =
$$

$$
= F(p, \mathbf{A})
$$

или:

$$
f(t, \mathbf{A}) \doteqdot F(p, \mathbf{A}). \tag{11}
$$

Основываясь на условиях существования формулы (10), сформулируем условия существования операционного равенства (11).

Теорема. *Пусть дана матрица* $\mathbf{A}$, *характеристические числа и элементарные делители которой суть*

$$
\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s; \quad (\lambda-\lambda_1)^{\rho_1}, \quad (\lambda-\lambda_2)^{\rho_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda-\lambda_s)^{\rho_s}.
$$

Пусть, кроме того, дана функция $f(t, \lambda)$, кусочно непрерывная от t $(0 \leqslant t < \infty)$ при постоянном $\mathbf{A}$ и аналитически зависящая от матрицы $\mathbf{A}$ как параметра при постоянном t, причем удовлетворены следующие условия:

а) *Точки разрыва функций $f(t, \lambda_k)$ $(k = 1, \ldots, s)$ и производных*

$$\frac{\partial^r}{\partial \lambda_k^r} f(t, \lambda_k) \quad (k = 1, \ldots, s; \quad r = 1, \ldots, \rho^{k-1}), \tag{12}$$

рассматриваемых как функции от t $(0 \leqslant t < \infty)$ при постоянном λ_k, являются точками разрыва первого или второго рода, причем эти точки разрыва удовлетворяют условиям а$_1$) *и* а$_2$) *в некоторой окрестности σ_k λ_k-плоскости.*

б) и в) *Для тех k, которым соответствуют кратные элементарные делители, выполняются условия* б$_1$), б$_2$), в$_1$) *и* в$_2$), *в которых вместо σ надо поставить σ_k.*

г) *Интегралы Лапласа*

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t, \lambda_k)\, dt \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{13}$$

сходятся для всех значений k. Для тех k, которые соответствуют кратным элементарным делителям, интегралы (13) сходятся в окрестности σ_k λ_k-плоскости равномерно относительно λ при каждом фиксированном p, если вещественная часть этого p превосходит некоторую положительную константу.

Если, кроме того, $F(p, \lambda)$ обозначает изображение функции $f(t, \lambda)$, то $F(p, \mathbf{A})$ является изображением данной функции $f(t, \mathbf{A})$.

Замечание 1. Рассмотренную теорему можно доказать и при других условиях, опираясь не на теорему Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций, а на правило диференцирования несобственных интегралов от непрерывных функций по параметру под знаком интеграла. В таком случае приходится делать следующие изменения в формулировке теоремы:

1) В пункте а) надо ограничиться допущением конечного числа точек разрыва функций $f(t, \lambda_k)$ и их производных (12),

2) Пункт б), т. е. условия б$_1$) и б$_2$), оказывается излишним,

3) В пункте г), вместо равномерной сходимости интегралов Лапласа (13) от функций $f(t, \lambda_k)$, надо требовать равномерную сходимость относительно λ_k интегралов Лапласа от производных (12).

Замечание 2. Как частный случай доказанной теоремы можно рассматривать случай приводимости данной матрицы $\mathbf{A}$ к диагональному виду, т. е. случай, когда все элементарные делители матрицы $\mathbf{A}$ простые.

В этом случае оказывается излишним следующее: рассмотрение производных от функций $f(t, \lambda_k)$ в пункте а), весь пункт б) и пункт в) и, кроме того, равномерность сходимости интегралов Лапласа в пункте г).

7. Пример 1. Рассмотрим матрицу $\mathbf{A}$, обладающую единственным элементарным делителем $(\lambda - \lambda_0)^3$ кратности 3, причем $\Re(\lambda_0) > 0$. Эту матрицу можно привести к такому виду:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \begin{Vmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \mathbf{S}^{-1}.$$

Кроме того, рассмотрим функцию

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2 \mathbf{A}}{4t}},$$

зависящую от указанной матрицы $\mathbf{A}$. Можно убедиться в том, что эта функция при $\Re(\lambda_0) > 0$ и $\Re(p) > 0$ удовлетворяет условиям рассмотренной теоремы. Используем известное операционное равенство для соответствующей численной функции [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2 \lambda_0}{4t}} \doteqdot \sqrt{p}\, e^{-x \sqrt{\lambda_0} \sqrt{p}},$$

справедливое при $\Re(\lambda_0) > 0$, причем возьмем такие значения квадратных корней: $|\arg \sqrt{\lambda_0}| < \frac{\pi}{4}$ и $|\arg \sqrt{p}| < \frac{\pi}{4}$. Таким образом получаем операционное равенство для данной функции:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{x^2 \mathbf{A}}{4t}} \doteqdot \sqrt{p}\, e^{-x \sqrt{\mathbf{A}} \sqrt{p}}, \tag{14}$$

справедливое для рассматриваемой матрицы $\mathbf{A}$ при тех же значениях квадратных корней.

Впрочем, данная матричная функция после приведения к каноническому виду получает выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2 \mathbf{A}}{4t}} = \mathbf{S} \begin{Vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ -\frac{x^2}{4t}, & 1, & 0 \\ \frac{x^4}{32 t^2}, & -\frac{x^2}{4t}, & 1 \end{Vmatrix} \mathbf{S}^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2 \lambda_0}{4t}}. \tag{15}$$

Подобным образом получается также следующее операционное равенство:

$$\operatorname{erfc}\frac{x\sqrt{\mathbf{A}}}{2\sqrt{t}} \doteqdot e^{-x\sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{p}},$$

справедливое для рассмотренной матрицы **A** и вышеуказанных значений квадратных корней. Заметим, что в этом случае для обоснования операционного равенства удобнее воспользоваться доказанной теоремой в измененном виде, согласно замечанию 1 к теореме.

8. Пример 2. Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений для трех проводов, соответствующую частному случаю $\mathbf{L}=0$, $\mathbf{G}=0$ [1, 3]:

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}=\mathbf{R}\mathbf{i}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}=\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{16}$$

причем предположим, что матрица **RC** имеет единственный элементарный делитель $(\lambda-\lambda_0)^3$, удовлетворяющий условию $\Re(\lambda_0)>0$. Будем решать эту систему (16) для значений аргументов $0\leqslant x<\infty$, $0\leqslant t<\infty$ при условиях:

$$\mathbf{u}\big|_{x=0}=\mathbf{u}_0=\mathbf{const}, \quad \mathbf{u}\big|_{x=\infty} \text{ ограничено и } \mathbf{u}\big|_{t=0}=0.$$

После перехода к изображениям решение системы (16) получается такое:

$$\mathbf{u}=e^{-x\sqrt{\mathbf{RC}}\sqrt{p}}\,\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{i}=\mathbf{R}^{-1}\sqrt{\mathbf{RC}}\sqrt{p}\,e^{-x\sqrt{\mathbf{RC}}\sqrt{p}}\,\mathbf{u}_0, \tag{17}$$

причем значение корня $\sqrt{\mathbf{RC}}$ берем то, у которого характеристическое число удовлетворяет условию $|\arg\sqrt{\lambda_0}|<\frac{\pi}{4}$, а значение $\sqrt{p}$ берем с условием $|\arg\sqrt{p}|<\frac{\pi}{4}$.

Замечание. Ввиду условия $\Re(\lambda_0)>0$ матрица **RC** неособая. Следовательно, **R** также неособая матрица, и поэтому $\mathbf{R}^{-1}$ во второй формуле (17) существует.

Воспользуясь операционными равенствами пункта 7, мы получаем искомое решение системы (16):

$$\mathbf{u}=\operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{\mathbf{RC}}}{2\sqrt{t}}\right)\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{i}=\mathbf{R}^{-1}\sqrt{\frac{\mathbf{RC}}{\pi t}}\,e^{-\frac{x^2\mathbf{RC}}{4t}}\,\mathbf{u}_0, \tag{18}$$

справедливое при том же значении корня $\sqrt{\mathbf{RC}}$.

После приведения полученного выражения матрицы $\mathbf{I}$ к каноническому виду при помощи формулы (15) прямой подсчет показывает, что силы токов в проводах линейно зависят от 1, $-\frac{x^2}{4t}$ и $\frac{x^4}{32t^2}$, умноженных на выражение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2 \lambda_0}{4t}}.$$

Кафедра общей математики
Июнь 1949 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А., Операционное исчисление для функций, зависящих от матричного параметра, „Известия Академии Наук ЛССР", № 4, 1949, стр. 123 — 132.

2. Лаппо-Данилевский И. А., Теория функций от матриц и системы линейных диференциальных уравнений, ОНТИ, Ленинград-Москва, 1934, стр. 29 — 41.

3. Бразма Н. А., Об исследовании обобщенной системы телеграфных уравнений матричными методами, „Известия Академии Наук ЛССР", № 3, 1948, стр. 83 — 85.

ИЗУЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРИМЕНИМЫХ К РЕШЕНИЮ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Я. Риекстыньш

Классическое решение основной задачи телеграфных уравнений, описывающих электромагнитные явления в отдельных линиях электросвязи, имеет вид весьма сложных интегралов, содержащих бесселевы функции. Это затрудняет использование решения на практике.

Советским ученым П. И. Кузнецовым [1, 2, 3] найдено решение той же задачи, не содержащее интегралов, выраженное через некоторые специальные функции от двух аргументов, именно функции Ломмеля от двух мнимых аргументов.

В настоящей работе исследуются специальные функции от двух аргументов, которые получаются из функций, рассмотренных Кузнецовым, заменой независимых переменных двумя новыми аргументами. Такая замена упрощает теорию этих функций.

В § 1 получены некоторые общие свойства исследуемых специальных функций. Среди этих свойств имеются также существенно новые. При этом особое значение для решения телеграфных уравнений имеет диференциальное уравнение (15) со смешанной частной производной второго порядка, которому удовлетворяют функции, рассмотренные в этой работе.

Затем в § 2 при помощи рассмотренных специальных функций получено решение основной задачи телеграфных уравнений посредством преобразования Лапласа. Это решение получено более простым путем, чем аналогичное решение П. И. Кузнецова для той же задачи [1].

Наконец, в § 3 получены асимптотические представления рассматриваемых функций.

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РАССМАТРИВАЕМЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

1. В своих исследованиях явлений дифракции Ломмель пользовался функциями

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z), \tag{1}$$

$$V_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{w}{z}\right)^{-\nu-2m} J_{-\nu-2m}(z),$$

которые впоследствии названы функциями Ломмеля от двух аргументов и встречаются в некоторых задачах физики [4].

П. И. Кузнецов [2] рассмотрел функции, выражаемые через функции Ломмеля от двух мнимых аргументов:

$$\begin{aligned} \Upsilon_n(w, z) &= i^{-n} U_n(iw, iz), \\ \Theta_n(w, z) &= i^{-n} V_n(iw, iz), \end{aligned} \qquad (n \text{ — целое число}) \quad (2)$$

при помощи которых он получил решения телеграфных уравнений [1, 2, 3]. По определению функций $U_n(w, z)$ и $V_n(w, z)$ имеем:

$$\begin{aligned} \Upsilon_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z), \\ \Theta_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(z). \end{aligned} \qquad (3)$$

В настоящей работе исследуются специальные функции от двух аргументов, которые получаются из функций, рассмотренных Кузнецовым, введением новых независимых переменных:

$$u_n(x, y) = \Upsilon_n(2x, 2\sqrt{xy}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(2\sqrt{xy}), \qquad (4)$$

$$v_n(x, y) = \Theta_n(2x, 2\sqrt{xy}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{n+2m} I_{n+2m}(2\sqrt{xy}). \qquad (5)$$

Очевидно:

$$v_n(x, y) = u_n(y, x), \qquad (6)$$

и поэтому можем довольствоваться рассмотрением одной из этих функций. *Впоследствии будем исследовать функцию $u_\nu(x, y)$ при любом вещественном значке* ν, которую определим рядом (4) с заменой n на ν. Значения x и y, при которых этот ряд сходится, выяснятся впоследствии.

Заметим, что соотношение (6) равносильно известной формуле [2]

$$\Upsilon_n(w, z) = \Theta_n\left(\frac{z^2}{w}, z\right).$$

2. Разложим каждый член ряда (4) после замены n на ν в степенной ряд:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}(2\sqrt{xy}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xy)^k x^{\nu+2m}}{k!\,\Gamma(k+\nu+2m+1)}. \qquad (7)$$

Перегруппировав затем члены полученного повторного ряда (законность чего будет доказана впоследствии), мы получаем при $\nu \neq -n$ (n — целое положительное) разложение по степеням y:

$$u_\nu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} r_{k+\nu}(x), \tag{8}$$

где обозначено:

$$r_{k+\nu}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+k+2i}}{\Gamma(2i+\nu+k+1)}.$$

Если же $\nu = -n$, то после перегруппировки членов и некоторых преобразований мы имеем

$$u_{-n}(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x+y) - u_{n+2}(y, x) & \text{при нечетном } n \\ \operatorname{ch}(x+y) - u_{n+2}(y, x) & \text{при четном } n. \end{cases} \tag{9}$$

Формулы (9) уже известны в другом виде [2]. Они оказываются правильными при любом целом n.

Перегруппировав другим образом члены того же повторного ряда, мы получаем при $\nu \neq -n$ разложение по степеням x:

$$u_\nu(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+\nu}}{\Gamma(k+\nu+1)} h_k(y), \tag{10}$$

где обозначено

$$h_k(y) = \begin{cases} 1 + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^k}{k!} & \text{при четном } k, \\ y + \frac{y^3}{3!} + \ldots + \frac{y^k}{k!} & \text{при нечетном } k. \end{cases}$$

Если же $\nu = -n$, то мы имеем

$$u_{-n}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} h_{n+k}(y). \tag{11}$$

Ввиду неравенства $|h_k(y)| \leqslant e^{|y|}$ ряды (10) и (11) абсолютно сходятся при всех комплексных x и y, кроме $x = 0$ при $\nu < 0$ ($\nu \neq -n$), чем оправдывается перегруппировка членов в ряде (4) [5]. Отсюда следует также сходимость рядов (4) и (8) при тех же значениях аргументов.

Согласно свойствам степенных рядов, не только функции $u_\nu(x, y)$, но также и все производные любых порядков по x и y от этих функций непрерывны.

При комплексных аргументах значения многозначных множителей отдельных членов ряда (4) надо брать так, чтобы получился ряд (7). Формула (7) показывает также, что $y = 0$ является устранимой особенностью ряда (4).

Впредь будем рассматривать функции u_ν только при вещественных неотрицательных значениях аргументов. Однако многие дальнейшие формулы оказываются справедливыми также при любых комплексных значениях аргументов.

Пользуясь формулами (4), (8), (10) и (11), можно получить все те свойства функций $u_\nu\ (x,\ y)$, которые соответствуют известным свойствам функций $\Theta_n\ (w,\ z)$ и $\Upsilon_n\ (w,\ z)$ [2], например:

$$u_{\nu+2}(x,\ y) = u_\nu\,(x,\ y) - \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^\nu I_\nu\,(2\sqrt{xy}),$$

$$u_{2n}(x,\ x) = \frac{1}{2}\,[I_0\,(2x) + \operatorname{ch} 2x\,] - \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k}\,(2x),$$

$$u_{2n+1}\,(x,x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\,2\,x - \sum_{k=0}^{n-1} I_{2k+1}\ (2x)\,,$$

$$u_{2n}\,(x,\ 0) = \operatorname{ch} x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\,, \tag{12}$$

$$u_{2n+1}\,(x,\ 0) = \operatorname{sh} x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,,$$

$$u_\nu\,(0,\ y) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = 0, \\ 0 & \text{при } \nu > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} u_\nu\ (x,\ y) = 0 \quad \text{при фиксированных } x,\ y.$$

3. Из разложений (7) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}\ (2\sqrt{xy})\right] = \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m-1} I_{\nu+2m-1}\ (2\sqrt{xy}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m} I_{\nu+2m}\,(2\sqrt{xy}\,)\right] = \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+2m+1} I_{\nu+2m+1}\,(2\sqrt{xy}),$$

откуда затем получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_\nu (x, y) = u_{\nu-1} (x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y} u_\nu (x, y) = u_{\nu+1} (x, y). \tag{13}$$

Из формул (13) и определения функций v_ν (x, y) следуют диференциальные уравнения с частными производными, которым удовлетворяют эти функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} - u_\nu &= \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu-2} I_{\nu-2} (2\sqrt{xy}), \\ \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial y^2} - u_\nu &= -\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu} I_\nu (2\sqrt{xy}), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial x \, \partial y} - v_\nu = 0. \tag{15}$$

При помощи формул (13) мы получаем следующее разложение в ряд Тейлора:

$$u_\nu (x, y + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} u_{\nu+k} (x, y). \tag{16}$$

После перегруппировки членов последнего ряда имеем:

$$u_\nu (x, y + \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu+k} I_{\nu+k} (2\sqrt{xy}) h_k (\alpha). \tag{16'}$$

Подобным образом можно получить:

$$u_\nu (x + \alpha, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} u_{\nu-k} (x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{\nu-k} I_{\nu-k} (2\sqrt{xy}) \, r_k (\alpha). \tag{17}$$

4. Дальнейшие свойства функций $v_\nu (x, y)$, а также и соотношения между функциями u_ν (x, y) и другими специальными функциями можно получить при помощи преобразования Лапласа.

Пользуясь рядами (4), (8), (10) или (11), мы получаем следующие преобразования Лапласа функций u_ν (x, y) (при $\nu > -1$) по переменной x:

$$\mathfrak{L}_x \{u_\nu (x, y)\} = \frac{e^{\frac{y}{p}}}{p^{\nu-1} (p^2 - 1)}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{L}_x \{ v_{-n} (x, y)\} = \frac{p^{n+1}}{p^2 - 1} e^{\frac{y}{p}} - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} h_k (y), \tag{19}$$

$$\mathfrak{L}_x\{u_\nu[\alpha(x-\tau),\ \beta(x+\tau)]\,h(x-\tau)\}=$$

$$=\frac{1}{2}\,e^{-\tau\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}{2\beta}\right)^{\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}+\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right], \tag{20}$$

где $h(x-\tau)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\tau,\\ 1 & \text{при } x>\tau,\end{cases}$ $\quad \mathfrak{L}_x\{f(x,y)\}=\int\limits_0^\infty e^{-px}f(x,\ y)\,dx.$

Из формулы (20) при $\tau=0$ получаем:

$$\mathfrak{L}\{u_\nu(\alpha x,\ \beta x)\}=\frac{1}{2}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}{2\beta}\right)^{\nu}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}+\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right], \tag{21}$$

и, кроме того, при $\alpha=\beta=1$ получаем:

$$\mathfrak{L}\{u_\nu(x,\ x)\}=\frac{1}{p^2-4}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4}}{2}\right)^{\nu-1}, \tag{22}$$

$$\mathfrak{L}_x\{u_\nu(x-\tau,\ x+\tau)\,h(x-\tau)\}=\frac{e^{-\tau\sqrt{p^2-4}}}{p^2-4}\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4}}{2}\right)^{\nu-1}. \tag{23}$$

Преобразование Лапласа по y при целом ν можно получить, пользуясь формулой (9).

По известным формулам и правилам преобразования Лапласа [6, 7] можно найти многие соотношения между функциями u_ν и другими специальными функциями, среди которых отметим только некоторые:

$$\begin{aligned} u_\nu(x,\ y) &= \int\limits_0^x\left(\sqrt{\frac{t}{y}}\right)^{\nu-2} I_{\nu-2}\,(2\sqrt{ty})\ \mathrm{sh}\,(x-t)\,dt \qquad (\nu>1)\\ &= \int\limits_0^x\left(\sqrt{\frac{t}{y}}\right)^{\nu-1} I_{\nu-1}\,(2\sqrt{ty})\ \mathrm{ch}\,(x-t)\,dt \qquad (\nu>0), \end{aligned} \tag{24}$$

$$u_\nu(x,\ y)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int\limits_0^x u_{\nu-\mu}\ (t,\ y)\ (x-t)^{\mu-1}\,dt \quad \begin{pmatrix}\nu>\mu-1\\ \mu>0\end{pmatrix}. \tag{25}$$

$$u_\nu(x, y) = \int_0^x [u_{\nu-2}(t, y) + u_\nu(t, y)] \sin(x - t)\, dt \qquad (\nu > 1)$$

$$= \int_0^x [u_{\nu-1}(t, y) + u_{\nu+1}(t, y)] \cos(x - t)\, dt \qquad (\nu > 0), \tag{26}$$

$$u_\nu(\alpha x, \beta x) = \alpha \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu-1} \int_0^x I_{\nu-1}(2t\sqrt{\alpha\beta}) \operatorname{ch}[(\alpha + \beta)(x - t)]\, dt -$$

$$- \beta \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} \int_0^x I_\nu(2t\sqrt{\alpha\beta}) \operatorname{sh}[(\alpha + \beta)(x - t)]\, dt \qquad (\nu > 0), \tag{27}$$

$$u_\nu(x, y) = \frac{1}{2} e^y \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} + x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} L_k^\nu(x) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-y} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\nu+k}}{\Gamma(\nu+k+1)} + x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} L_k^\nu(-x) \right]$$

$$(\nu > -1)$$

$$= \frac{1}{2} e^y \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\nu+k-1}}{\Gamma(\nu + k)} + x^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu)} L_k^{\nu-1}(x) \right] - \tag{28}$$

$$- \frac{1}{2} e^{-y} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{\nu+k-1}}{\Gamma(\nu + k)} + x^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k+1}}{(k+1)\Gamma(k+\nu)} L_k^{\nu-1}(-x) \right] (\nu > 0),$$

причем

$$L_k^\nu(x) = \sum_{m=0}^{k} \binom{k+\nu}{k-m} \frac{(-x)^m}{m!}$$

обозначает обобщенный полином Лягерра.

Ввиду неравенства

$$x^\nu L_k^\nu(x) < x^\nu L_k^\nu(-x) < (1 + x)^{k+\nu},$$

существующего при $x > 0$, мы получаем мажорантный ряд

$$(1 + x)^{\nu-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y + xy)^{k+1}}{(k + 1)\Gamma(k + \nu + 1)}$$

для рядов, содержащих обобщенные полиномы Лягерра в формулах (28), причем этот мажорантный ряд сходится при всех конечных значениях $x > 0$ и y. Поэтому ряды в формулах (28) сходятся.

Если, в частности, ν целое, первые ряды в квадратных скобках формул (28) можно выразить через элементарные функции, после чего эти формулы можно использовать для нахождения численных значений функций u_n.

§ 2. РЕШЕНИЕ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИЙ $u_\nu(x, y)$.

1. Уравнение (15) дает некоторые указания на связь функций u_ν с телеграфными уравнениями, ибо это уравнение является преобразованным телеграфным уравнением. Более общее формальное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\, \partial y} = v \tag{15'}$$

получается в виде

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\,(2\sqrt{xy}) + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\,(2\sqrt{xy}), \tag{29}$$

ибо на основании вышеуказанного отдельные члены рядов (29) удовлетворяют уравнению (15′). При этом ν остается произвольным. Еще более общее решение уравнения (15′) можно получить суммированием выражения (29) по ν.

После известного преобразования независимых переменных оказывается, что обычное телеграфное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (LG + RC)\,\frac{\partial v}{\partial t} + RGv, \quad (LC \neq 0) \tag{30}$$

в котором $v(x, t)$ означает напряжение $u(x, t)$ или силу тока $i(x, t)$, обладает формальным решением следующего вида:

$$v = e^{-\rho t}\left[\sum_{k=0}^{\infty} a_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{t-\omega x}{t+\omega x}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\,(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} b_{k\nu}\left(\sqrt{\frac{t+\omega x}{t-\omega x}}\right)^{k+\nu} I_{k+\nu}\,(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2})\right], \tag{31}$$

где обозначено

$$\rho = \frac{RC + LG}{2LC}, \quad \sigma = \frac{RC - LG}{2LC}, \quad \omega = \sqrt{LC},$$

и еще может быть выполнено суммирование по ν.

Коэфициенты $a_{k\nu}$ и $b_{k\nu}$ и значки ν можно найти из начальных и граничных условий. Однако мы выберем для определения этих величин другой путь — именно воспользуемся опять преобразованием Лапласа.

2. Известное решение телеграфных уравнений для линии полубесконечной длины при начальных условиях $u(x, 0) = i(x, 0) = 0$ и граничном условии $u(0, t) = 1$ можно представить в виде [8]

$$u(x, t) = \mathfrak{L}_t^{-1}\left\{\frac{1}{p} e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\},$$

$$i(x, t) = \mathfrak{L}_t^{-1}\left\{\frac{G+Cp}{\omega p}\frac{e^{-\omega x\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}}{\sqrt{(p+\rho)^2-\sigma^2}}\right\}, \tag{32}$$

причем $\mathfrak{L}_t^{-1}$ обозначает обращение преобразования Лапласа по t.

Для осуществления обращения преобразования Лапласа воспользуемся подстановкой

$$p + \rho = q.$$

Затем, согласно известным правилам, совершим обратное преобразование относительно q и, наконец, умножим результат на $e^{-\rho t}$.

После этого воспользуемся формулой (20), которая после замены p на q, x на t и τ на ωx, при $\nu = 0$ и $\nu = 1$, дает:

$$\mathfrak{L}_t\{e^{-\rho t} u_0[\alpha(t-\omega x), \beta(t+\omega x)]\, h(t-\omega x)\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\omega x\sqrt{q^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{1}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}} + \frac{q}{q^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}[q^2-(\alpha+\beta)^2]}\right], \tag{33}$$

$$\mathfrak{L}_t\{e^{-\rho t} u_1[\alpha(t-\omega x), \beta(t+\omega x)]\, h(t-\omega x)\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\omega x\sqrt{q^2-4\alpha\beta}}\left[\frac{\alpha+\beta}{q^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{(\alpha-\beta)q}{\sqrt{q^2-4\alpha\beta}\,[q^2-(\alpha+\beta)^2]}\right]. \tag{34}$$

Введем здесь обозначения

$$t - \omega x = \tau, \quad t + \omega x = \eta,$$
$$\alpha + \beta = \rho, \quad 4\alpha\beta = \sigma^2,$$

причем предполагаем $\alpha > \beta$. Тогда мы получаем

$$\mathfrak{L}_t\{e^{-\rho t}[u_0(\alpha\tau, \beta\eta) + u_0(\beta\tau, \alpha\eta) + u_1(\alpha\tau, \beta\eta) + u_1(\beta\tau, \alpha\eta)]\, h(\tau)\} =$$

$$= e^{-\omega x\sqrt{q^2-\sigma^2}}\left[\frac{1}{\sqrt{q^2-\sigma^2}} + \frac{1}{q-\rho}\right].$$

Ввиду соотношения [6]

$$\mathfrak{L}_t^{-1}\left\{ e^{-\omega x\sqrt{q^2-\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{q^2-\sigma^2}}\right\} = e^{-\rho t} I_0\left(\sigma\sqrt{t^2-\omega^2 x^2}\right) h\,(t-\omega x),$$

получаем, наконец,

$$u\,(x,\ t) = e^{-\rho t}[-I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\,\tau\eta}) + u_0\,(\alpha\tau,\ \beta\eta) + u_0\,(\beta\tau,\ \alpha\eta) + u_1\,(\alpha\tau,\ \beta\eta) +$$
$$+ u_1\,(\beta\tau,\ \alpha\eta)]\ h\,(\tau). \tag{35}$$

Подобным же образом получаем

$$i\,(x,\ t) = \left\{\sqrt{\frac{C}{L}}\ e^{-\rho t} I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\,\tau\eta}\,) + \sqrt{\frac{G}{R}}\ e^{-\rho t}\,[u_0\,(\alpha\tau,\ \beta\eta) - u_0\,(\beta\tau,\ \alpha\eta) +\right.$$
$$\left.+ u_1\,(\alpha\tau,\ \beta\eta) - u_1\,(\beta\tau,\ \alpha\eta)]\right\}\ h\,(\tau). \tag{36}$$

Ввиду формул (9) при $n=0$ и $n=-1$ мы можем представить формулы (36) и (35) еще в следующем виде:

$$u\,(x,\ t) = \{\,e^{-\omega\mu x} + e^{-\rho t}\,[u_0\,(\beta\tau,\ \alpha\eta) - u_0\,(\beta\eta,\ \alpha\tau) + u_1\,(\beta\tau,\ \alpha\eta) -$$
$$- u_1\,(\beta\eta,\ \alpha\tau)]\}\ h\,(\tau), \tag{35'}$$

$$i\,(x,\ t) = \left\{\sqrt{\frac{G}{R}}\ e^{-\omega\mu x} + \left(\sqrt{\frac{C}{L}} + \sqrt{\frac{G}{R}}\right) e^{-\rho t} I_0\,(2\sqrt{\alpha\beta\,\eta\tau}) -\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{G}{R}}\ e^{-\rho t}\,[u_0\,(\beta\eta,\ \alpha\tau) + u_0\,(\beta\tau,\ \alpha\eta) + u_1\,(\beta\eta,\ \alpha\tau) + u_1\,(\beta\tau,\ \alpha\eta)]\right\} h(\tau), \tag{36'}$$

где

$$\mu = \alpha - \beta = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} = \sqrt{\frac{RG}{LC}}.$$

Формулы (35) и (36) совпадают с решением П. И. Кузнецова для той же задачи, найденным другим путем [1, 2].

Подобным образом можно получить решения той же задачи для линии конечной длины и для некоторых других граничных условий, пользуясь функциями u_ν.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $u_0(x, y)$ И $u_1(x, y)$.

1. Будем искать асимптотические представления функций $u_0(x, y)$ и $u_1(x, y)$, использованных в предыдущем параграфе для решения телеграфных уравнений, причем и здесь будем пользоваться преобразованием Лапласа.

Воспользуемся следующей известной теоремой [7].

Теорема. Если положим $\mathfrak{L}_x\{F(x)\} = f(p)$ и

1) $f(p)$ не имеет других особенностей, кроме точек разветвления и полюсов первого порядка;

2) при $\operatorname{Re} p < 0$ $f(p)$ равномерно относительно аргумента φ стремится к нулю, когда $|p| \to \infty$;

3) в окрестности точки разветвления p_0 с наибольшей вещественной частью $f(p)$ представляется рядом вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (p-p_0)^{n-\frac{1}{2}};$$

4) в полюсах $p_1, p_2, \ldots p_k$ функция $f(p)$ имеет вычеты

$$r_1, r_2, \ldots r_k,$$

то функция $F(x)$ имеет такое асимптотическое представление:

$$F(x) \sim \sum_{n=1}^{k} r_n e^{p_n x} + \frac{e^{p_0 x}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{37}$$

2. Подставим в формулу (21) $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Получаем

$$\mathfrak{L}\{u_0(\alpha x, \beta x)\} = f_0(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}} + \frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right], \tag{38}$$

$$\mathfrak{L}\{u_1(\alpha x, \beta x)\} = f_1(p) = \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha+\beta}{p^2-(\alpha+\beta)^2} + \frac{(\alpha-\beta)p}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p^2-(\alpha+\beta)^2]}\right]. \tag{39}$$

Впредь будем считать, что $\alpha \neq \beta$, ибо если $\alpha = \beta$, то $u_n(\alpha x, \alpha x)$ выражается через известные функции.

Можно убедиться, что функции $f_0(p)$ и $f_1(p)$ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы. Мы имеем полюсы $p_1 = \alpha + \beta$, $p_2 = -(\alpha+\beta)$ и точку разветвления с наибольшей вещественной частью $p_0 = 2\sqrt{\alpha\beta}$. Поэтому нам следует найти вычеты в точках p_1 и p_2 и разложение в окрестности $p = p_0$.

Ввиду формул [6, 7]

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}\right\}=I_0(2x\sqrt{\alpha\beta})\sim$$

$$\sim\frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{2\pi\sqrt[4]{\alpha\beta}\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(4x\sqrt{\alpha\beta})^n}, \tag{40}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}\right\}=\operatorname{ch}(\alpha+\beta)x, \tag{41}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\alpha+\beta}{p^2-(\alpha+\beta)^2}\right\}=\operatorname{sh}(\alpha+\beta)x, \tag{42}$$

$$\frac{1}{p^2-(\alpha+\beta)^2}=\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\left[\frac{1}{p-(\alpha+\beta)}-\frac{1}{p+(\alpha+\beta)}\right] \text{ и}$$

$$\frac{p}{p^2-(\alpha+\beta)^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-(\alpha+\beta)}+\frac{1}{p+(\alpha+\beta)}\right]$$

остается только найти вычеты функций

$$\varphi_1(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p-(\alpha+\beta)]} \quad \text{и} \quad \varphi_2(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}\,[p+(\alpha+\beta)]}$$

и разложить эти функции по степеням

$$p-2\sqrt{\alpha\beta}=z,$$

после чего окажутся удовлетворенными условия 3) и 4) теоремы.

3. Мы найдем вычеты в точках $(\alpha+\beta)$ и $-(\alpha+\beta)$:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\lim_{p\to\alpha+\beta}\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta}, & \text{если } \alpha>\beta,\\[2mm] \dfrac{-1}{\alpha-\beta}, & \text{если } \alpha<\beta;\end{cases}\\ r_2&=\lim_{p\to-(\alpha+\beta)}\frac{1}{\sqrt{p^2-4\alpha\beta}}=\frac{1}{\sqrt{(\alpha-\beta)^2}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-\beta}, & \text{если } \alpha>\beta,\\[2mm] \dfrac{-1}{\alpha-\beta}, & \text{если } \alpha<\beta.\end{cases}\end{aligned}\right. \tag{43}$$

Затем разложим функции $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ по степеням z.

$$\varphi_1(p)=\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1}{\sqrt{z+4\sqrt{\alpha\beta}}}\,\frac{1}{z+2\sqrt{\alpha\beta}-(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt[4]{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}\,\frac{1}{\sqrt{z}}\,\frac{1}{1-\dfrac{z}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right)^n z^n.$$

Потом мы воспользуемся формулой

$$\frac{1}{1-cz}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_n)\,z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^n,$$

которая справедлива в окрестности $z=0$.

В данном случае имеем

$$c=\frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2},\quad a_n=\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{1}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right)^n,$$

и поэтому

$$\gamma_n=\frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left[\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]^k.$$

Последняя сумма является суммой первых n членов формального разложения бинома

$$\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]^{-\frac{1}{2}},$$

поэтому введем следующее обозначение:

$$\gamma_n=\frac{1}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^{2n}}\left[1+\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]_n^{-\frac{1}{2}}.\tag{44}$$

Таким образом, получаем

$$\varphi_1(p)=\frac{-1}{2\sqrt[4]{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n z^{n-\frac{1}{2}}.\tag{45}$$

Подобным же путем находим разложение функции $\varphi_2(p)$:

$$\varphi_2(p)=\frac{1}{2\sqrt[4]{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta_n z^{n-\frac{1}{2}},\tag{46}$$

где

$$\delta_n = \frac{1}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^{2n}}\left[1-\frac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2}{4\sqrt{\alpha\beta}}\right]_n^{-\frac{1}{2}}. \tag{47}$$

4. Согласно формулам (37) — (46), можем, наконец, представить функции $u_0(\alpha x, \beta x)$ и $u_1(\alpha x, \beta x)$ в виде асимптотических рядов (при $\alpha > \beta$):

$$u_0(\alpha x, \beta x) \sim \frac{1}{2} e^{(\alpha+\beta)x} + \frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{4\pi\sqrt[4]{\alpha\beta}\sqrt{x}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(4x\sqrt{\alpha\beta})^n} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{2(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^n} - \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{2(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^n}\right], \tag{48}$$

$$u_1(\alpha x, \beta x) \sim \frac{1}{2} e^{(\alpha+\beta)x} +$$

$$+ \frac{e^{2x\sqrt{\alpha\beta}}}{8\pi\sqrt[4]{\alpha\beta}\sqrt{x}}\left[-\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\gamma_n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{x^n}\right]. \tag{49}$$

Если же $\alpha < \beta$, то в формулах (48) и (49) первый член будет соответственно $+\frac{1}{2}e^{-(\alpha+\beta)x}$ и $-\frac{1}{2}e^{-(\alpha+\beta)x}$, а остальные члены остаются прежними.

После подстановки $\alpha x = t$, $\beta x = y$ получаем при $t > y$:

$$u_0(t, y) \sim \frac{1}{2} e^{t+y} + \frac{e^{2\sqrt{ty}}}{4\pi\sqrt[4]{ty}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(4\sqrt{ty})^n} - \right.$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}+\sqrt{y}}{\sqrt{t}-\sqrt{y}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{2n}}\left[1+\frac{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-\frac{1}{2}} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{y}}{\sqrt{t}+\sqrt{y}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^{2n}}\left[1-\frac{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}, \qquad (48')$$

$$u_1(t, y) \sim \frac{1}{2}e^{t+y}+$$

$$+\frac{e^{2\sqrt{ty}}}{8\pi\sqrt[4]{ty}}\Bigg\{-\frac{\sqrt{t}+\sqrt{y}}{\sqrt{t}-\sqrt{y}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^{2n}}\left[1+\frac{(\sqrt{t}-\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{t}-\sqrt{y}}{\sqrt{t}+\sqrt{y}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^{2n}}\left[1-\frac{(\sqrt{t}+\sqrt{y})^2}{4\sqrt{ty}}\right]_n^{-\frac{1}{2}}\Bigg\}. \qquad (49')$$

При $t<y$ первый член здесь будет соответственно $\frac{1}{2}e^{-(t+y)}$ и $-\frac{1}{2}e^{-(t+y)}$.

Очевидно, что полученные асимптотические формулы применимы к вычислению значений функций $u_0(t, y)$ и $u_1(t, y)$ при достаточно больших значениях $\sqrt{t}-\sqrt{y}$.

5. Из формул (12), (48) и (49) следует

$$\lim_{x\to\infty} e^{-(\alpha+\beta)x}u_\nu(\alpha x, \beta x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{если } \alpha>\beta,\\ \frac{1}{4}, & \text{если } \alpha=\beta,\\ 0, & \text{если } \alpha<\beta,\end{cases} \qquad (\nu=0,1) \qquad (50)$$

а из формул (48′) и (49′) получаем

$$\lim_{t\to\infty} u_\nu(t, y)\,e^{-t}=\frac{1}{2}e^{y},\qquad \lim_{y\to\infty} u_\nu(t, y)\,e^{-y}=0. \qquad (\nu=0,1) \qquad (51)$$

Легко распространить эти свойства на другие целые значения ν.

Возвращаясь затем к формулам (36′) и (35′), ввиду неравенств $\alpha\eta>\beta\tau$, $\alpha\tau>\beta\eta$ (среди которых второе имеет место, начиная с достаточно большого t) имеем

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u_\nu(\beta\tau, \alpha\eta)=0,\qquad \lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}u_\nu(\beta\eta, \alpha\tau)=0. \qquad (\nu=0,1) \qquad (52)$$

Отсюда новым путем получаем известные следствия [8]:

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = e^{-\omega \mu x},$$
$$\lim_{t \to \infty} i(x, t) = \sqrt{\frac{G}{R}}\, e^{-\omega \mu x}. \tag{53}$$

Кафедра общей математики
Апрель 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П. И., О представлении одного контурного интеграла, „Прикладная математика и механика", 1947, т. XI, вып. 2, стр. 267 — 270.
2. Кузнецов П. И., Функции Ломмеля от двух мнимых аргументов, „Прикладная математика и механика", 1947, т. XI, вып. 5, стр. 555 — 560.
3. Кузнецов П. И., Распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных однопроводных линий, „Прикладная математика и механика", 1948, т. XII, вып. 2, стр. 141 — 148.
4. Грей Э. и Матьюз Г. Б., Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, 1949, стр. 79, 224 — 275.
5. Фихтенгольц Г. М., Курс диференциального и интегрального исчисления, т. II, 1948, стр. 382.
6. Диткин В. А., Операционное исчисление, „Успехи математических наук", 1947, т. II, вып. 6 (22), стр. 72 — 158.
7. Лурье А. И., Операционное исчисление, 1950, стр. 369 — 388.
8. Коваленков В. И., Устанавливающиеся электромагнитные процессы вдоль проводных линий, 1945, стр. 127.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА МЕТОДОМ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ

А. Я. Лусис

1. Д. Ю. Панов [1] распространил известный метод верхних и нижних функций на линейные интегральные уравнения Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \tag{1}$$

с непрерывным и знакопостоянным ядром, а также и на нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. При этом верхние и нижние функции строятся при помощи использования теорем об интегральных неравенствах, аналогичных теоремам С. А. Чаплыгина ([2], стр. 349) о диференциальных неравенствах. Это исследование уравнения (1) проводится в предположении достаточной малости значений параметра $\lambda \geqslant 0$, именно, при

$$\lambda < \frac{1}{M}, \tag{2}$$

где M — максимум значений ядра $K(x, s)$ при $0 \leqslant x,\ s \leqslant 1$.

Цель данной статьи — дать применение метода Чаплыгина — Панова к приближенному решению линейного интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{3}$$

или уравнения с параметром

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds + f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{3'}$$

и показать, что этот метод применим при любых значениях параметра $\lambda \geqslant 0$, если ядро $K(x, s)$ непрерывно по совокупности переменных и неотрицательно в замкнутой области $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$, а заданная функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. *Мы будем все время предполагать, что $K(x, s)$ и $f(x)$ удовлетворяют этим требованиям.*

2. Докажем основную теорему об интегральных неравенствах: *пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ и имеет место неравенство*

$$\varphi(x) - \int_0^x K(x, s)\, \varphi(s)\, ds > 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)\,; \tag{4}$$

тогда $\varphi(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Доказательство. Если учесть, что

$$\varphi(s) > \int_0^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (0 \leqslant s \leqslant 1),$$

то из неравенства (4) мы получим

$$\varphi(x) > \int_0^x K(x, s) \left[\int_0^s K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \right] ds$$

и после перестановки порядка интегрирования —

$$\varphi(x) > \int_0^x \varphi(t) \left[\int_t^x K(x, s)\, K(s, t)\, ds \right] dt = \int_0^x K_2(x, t)\, \varphi(t)\, dt\,,$$

где, как обычно, под $K_2(x, t)$ понимается первая итерация ядра $K(x, s)$. Продолжая этот процесс, получим общую оценку

$$\varphi(x) > \int_0^x K_n(x, t)\, \varphi(t)\, dt \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1;\ n = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

где под K_n понимается $n - 1$-я итерация ядра K. Однако итерированные ядра, как известно, имеют оценку

$$0 \leqslant K_n(x, t) \leqslant M^n \frac{(x - t)^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{M^n}{(n-1)!}\,,$$

где

$$M = \max_{0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1} K(x, s)\,. \tag{6}$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (5), получаем, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ будет $\varphi(x) \geqslant 0$. Отсюда неравенство (4) дает, что $\varphi(x) > 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. А. Д. Мышкис указал на более простое доказательство основной теоремы. Из неравенства (4) следует, что $\varphi(0) > 0$. Пусть утверждение теоремы неверно и $x = a$ — первый нуль функции $\varphi(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi(x) > 0 \quad (0 \leqslant x < a).$$

Подставляя в обе части неравенства (4) значение $x = a$, немедленно приходим к противоречию.

Замечание 2. Доказательство показывает, что утверждение теоремы справедливо и в том случае, если от $\varphi(x)$ требовать только кусочную непрерывность (или даже только суммируемость по Лебегу). Далее, из того же доказательства следует, что если при этом предположении о $\varphi(x)$ неравенство (4) заменить на

$$\varphi(x) - \int_0^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

то

$$\varphi(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Следствие. Если $\varphi(x)$ является непрерывным решением уравнения

$$L(\varphi) \equiv \varphi(x) - \int_0^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds - f(x) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{7}$$

а две другие (кусочно непрерывные) функции $\varphi_1(x)$ и $\Phi_1(x)$ удовлетворяют неравенствам $L(\varphi_1) \leqslant 0$, $L(\Phi_1) \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, то $\Phi_1(x)$ представляет собой *верхнюю*, а $\varphi_1(x)$ — *нижнюю функцию решения* $\varphi(x)$; более точно —

$$\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant \Phi_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Действительно, это получается при помощи применения замечания 2 к функциям

$$\Psi(x) = \Phi_1(x) - \varphi(x), \quad \psi(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x).$$

3. Мы применим основную теорему для построения верхних и нижних функций по методу Д. Ю. Панова [1], беря их кусочно постоянными. Для этого разделим основной отрезок $[0, 1]$ на n равных частей и обозначим через $g_k^{(n)}$ отрезки

$$g_k^{(n)} = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем далее обозначения при $k = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\underline{f}_k^{(n)} = \min f(x) \quad (x \in g_k^{(n)}), \quad \overline{f}_k^{(n)} = \max f(x) \quad (x \in g_k^{(n)})$$

и

$$\underline{K}_{ik}^{(n)} = \min K_i^{(n)}(x) \quad (x \in g_k^{(n)}), \quad \overline{K}_{ik}^{(n)} = \max K_i^{(n)}(x) \quad (x \in g_k^{(n)}),$$

где

$$K_i^{(n)}(x) = \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} K(x, s)\, ds \qquad \left(\frac{i}{n} \leqslant x \leqslant 1\right),$$

$$K_i^{(n)}(x) = \int\limits_{\frac{i-1}{n}}^{x} K(x, s)\, ds \qquad \left(\frac{i-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{i}{n}\right).$$

Ясно, что имеют место следующие соотношения

$$0 \leqslant \underline{f}_k^{(n)} \leqslant \overline{f}_k^{(n)}; \quad 0 \leqslant \underline{K}_{ik}^{(n)} \leqslant \overline{K}_{ik}^{(n)} \leqslant \frac{M}{n} \ (k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

где постоянная M определена по (6).

Для построения верхних и нижних функций в случае интегрального уравнения Вольтерра (3) рассмотрим системы уравнений

$$a_k^{(n)} = \underline{f}_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} \underline{K}_{ik}^{(n)}\, a_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

$$b_k^{(n)} = \overline{f}_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} \overline{K}_{ik}^{(n)}\, b_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

(с неизвестными $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$ и $b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_n^{(n)}$). Эти системы имеют более простой вид, чем в случае интегрального уравнения Фредгольма (1), так как для уравнения Вольтерра ядро $K(x, s)$ тождественно равно нулю при $s > x$. Для изучения систем (9) и (10) нам понадобится следующая простая алгебраическая лемма.

Лемма. *Пусть дана система линейных уравнений*

$$x_k = d_k + \sum_{i=1}^{k} c_{ik} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

причем

$$d_k \geqslant 0, \quad 0 \leqslant c_{ik} \leqslant c < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ k = 1, 2, \ldots n).$$

Тогда решение этой системы существует и единственно, причем

$$0 \leqslant x_k \leqslant \frac{\max(d_1, d_2, \ldots, d_k)}{(1-c)^k} \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{12}$$

Доказательство. Существование и единственность решения системы (11) следует из возможности последовательного определения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из 1-го, 2-го, ..., n-го уравнения этой системы по формуле

$$x_k = \frac{d_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ik} x_i}{1 - c_{kk}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{13}$$

Из этой формулы, далее, сразу следует справедливость неравенства (12) при $k = 1$. Предположим, согласно методу полной индукции, что для некоторого $l = 2, \ldots, n$ неравенство (12) доказано для $k = 1, \ldots, l-1$. Тогда, поскольку

$$0 \leqslant \max(d_1, d_2, \ldots, d_i) \leqslant \max(d_1, d_2, \ldots, d_l) \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1),$$

формула (13) даст

$$x_l \leqslant \max(d_1, d_2, \ldots, d_l) \frac{1 + \sum_{i=1}^{l-1} \frac{c_{ik}}{(1-c)^i}}{1 - c_{kk}}$$

и далее —

$$x_l \leqslant \frac{\max(d_1, d_2, \ldots, d_l)}{1-c} \left[1 + c \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1}{(1-c)^i} \right] = \frac{\max(d_1, d_2, \ldots, d_l)}{(1-c)^l}$$

Итак, неравенство (12) верно и для $k = l$. Лемма доказана.

Возвращаясь к системам (9) и (10), *положим, что во всяком случае*

$$n > M.$$

Тогда из доказанной леммы следует, прежде всего (см. оценки (8)), что решение каждой из этих систем существует, единственно и неотрицательно. Построим далее функции $\Phi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, положив

$$\Phi_n(x) = b_k^{(n)} \quad (x \in g_k^{(n)}), \quad \varphi_n(x) = a_k^{(n)} \quad (x \in g_k^{(n)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(в общем конце отрезков $g_k^{(n)}$ и $g_{k+1}^{(n)}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ значение $\Phi_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ мы примем для определенности равным $b_k^{(n)}$, соответственно $a_k^{(n)}$).

Докажем, что *функция* $\Phi_n(x)$ *является верхней, а* $\varphi_n(x)$ — *нижней функцией для решения уравнения* (3) *или* (7). Действительно, согласно следствию из основной теоремы, для проверки того, что функция $\Phi_n(x)$ является верхней для $\varphi(x)$, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$L(\Phi_n) \equiv \Phi_n(x) - \int_0^x K(x, s)\, \Phi_n(s)\, ds - f(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{14}$$

Однако пусть $x \in g_k^{(n)}$ для некоторого $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда это неравенство можно переписать так:

$$b_k^{(n)} \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} b_i^{(n)} K_i^{(n)}(x) + b_k^{(n)} K_k^{(n)}(x) + f(x) \quad (x \in g_k^{(n)})$$

и справедливость его сразу следует из равенств (10) и определения чисел $\overline{f}_k^{(n)}$ и $\overline{K}_{ik}^{(n)}$. Аналогично можно проверить, что функция $\varphi_n(x)$ является нижней для решения $\varphi(x)$.

4. Докажем далее, что *функции* $\Phi_n(x)$ *и* $\varphi_n(x)$ *на отрезке* $[0, 1]$ *равномерно стремятся к решению уравнения* (3) *при* $n \to \infty$.

Для доказательства оценим разность $\Phi_n(x) - \varphi_n(x)$, рассматривая, подобно Д. Ю. Панову [1], вспомогательные системы алгебраических уравнений

$$\alpha_k^{(n)} = \underline{S}_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} K_{ik}^{(n)} \alpha_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

$$\beta_k^{(n)} = \overline{S}_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} K_{ik}^{(n)} \beta_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{16}$$

где обозначено при

$$k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

$$K_{ik}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\underline{K}_{ik}^{(n)} + \overline{K}_{ik}^{(n)}\right), \quad \underline{S}_k^{(n)} = \underline{f}_k^{(n)} - \frac{A_k^{(n)}}{2} \sum_{i=1}^{k} \omega_{ik}^{(n)},$$

$$\overline{S}_k^{(n)} = \overline{f}_k^{(n)} + \frac{B_k^{(n)}}{2} \sum_{i=1}^{k} \omega_{ik}^{(n)},$$

$$A_k^{(n)} = \max\left(a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}\right), \quad B_k^{(n)} = \max\left(b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \ldots, b_k^{(n)}\right),$$

$$\omega_{ik}^{(n)} = \overline{K}_{ik}^{(n)} - \underline{K}_{ik}^{(n)}.$$

Так как все $K_{ik}^{(n)} \leqslant \dfrac{M}{n} < 1$ и неотрицательны (см. оценки (8)), то, в силу леммы, каждая из систем (15) и (16) имеет решение и притом единственное.

Докажем, что

$$\alpha_k^{(n)} \leqslant a_k^{(n)}, \quad \beta_k^{(n)} \geqslant b_k^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{17}$$

Действительно, согласно формулам (13), имеем (для упрощения выкладок в ходе доказательства опускаем верхние значки):

$$\alpha_1 = \frac{\underline{S}_1}{1-\underline{K}_{11}} = \frac{\underline{f}_1 - \frac{1}{2} a_1 \omega_{11}}{1-\underline{K}_{11}},$$

или

$$\alpha_1 = \frac{\underline{f}_1 - \frac{1}{2}\, \frac{\underline{f}_1}{1-\underline{K}_{11}}\, (\overline{K}_{11} - \underline{K}_{11})}{1-\overline{K}_{11}} = \frac{\underline{f}_1 (1-\overline{K}_{11})}{(1-\overline{K}_{11})(1-\underline{K}_{11})} = a_1 .$$

Предположим, согласно методу полной индукции, что для некоторого $l = 2, \ldots, n$ первое из неравенств (17) доказано для $k = 1, \ldots l-1$. Тогда для

$$\alpha_l = \frac{1}{1-\overline{K}_{ll}}\left(\underline{S}_l + \sum_{i=1}^{l-1} K_{il}\alpha_i\right) = \frac{1}{1-\overline{K}_{ll}}\left[\underline{f}_l - \frac{1}{2}\max(a_1, \ldots, a_l)\sum_{i=1}^{l}\omega_{il} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{l-1} K_{il}\alpha_i\right]$$

получаем оценку

$$\alpha_l \leqslant \frac{1}{1-\overline{K}_{ll}}\left(\underline{f}_l - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l} a_i\omega_{il} + \sum_{i=1}^{l-1} K_{il} a_i\right).$$

Правую часть полученного неравенства можно представить в виде

$$\frac{1}{1-\overline{K}_{ll}}\left(\underline{f}_l - \frac{1}{2} a_l\omega_{ll} + \sum_{i=1}^{l-1} \underline{K}_{il} a_i\right)$$

или

$$\frac{1}{1-\overline{K}_{ll}}\left(-\frac{1}{2} a_l\omega_{ll} + a_l - \underline{K}_{ll} a_l\right) = \frac{a_l(1-\overline{K}_{ll})}{1-\overline{K}_{ll}} = a_l.$$

Таким образом, справедливость первого из неравенств (17) доказана для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично доказывается и верность второго из этих неравенств.

Обозначим далее $\delta_k^{(n)} = \beta_k^{(n)} - \alpha_k^{(n)}$. Тогда, в силу (15) и (16), эти величины удовлетворяют системе уравнений

$$\delta_k^{(n)} = \overline{S}_k^{(n)} - \underline{S}_k^{(n)} + \sum_{i=1}^{k} K_{ik}^{(n)}\delta_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Применяя лемму, получим (поскольку обязательно $\overline{S}_k^{(n)} - \underline{S}_k^{(n)} \geqslant 0$):

$$\delta_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max_i (\overline{S}_i^{(n)} - \underline{S}_i^{(n)}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots, k).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенства (17) и определение величин $\overline{S}_k^{(n)}$, $\underline{S}_k^{(n)}$ и $\delta_k^{(n)}$, получим:

$$b_k^{(n)} - a_k^{(n)} \leqslant \delta_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max_i \left(\overline{S}_i^{(n)} - \underline{S}_i^{(n)}\right)$$

или ($k = 1, 2, \ldots, n$; $i = 1, 2, \ldots, k$):

$$b_k^{(n)} - a_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max_i \left(\overline{f}_i^{(n)} - \underline{f}_i^{(n)} + \frac{A_i^{(n)} + B_i^{(n)}}{2} \sum_{j=1}^{i} \omega_{ji}^{(n)}\right).$$

Но величины $A_i^{(n)}$ и $B_i^{(n)}$ с ростом i не убывают. Поэтому имеем

$$b_k^{(n)} - a_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max_i \left(\overline{f}_i^{(n)} - \underline{f}_i^{(n)}\right) +$$

$$+ \frac{A_k^{(n)} + B_k^{(n)}}{2} \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max_i \sum_{j=1}^{i} \omega_{ji}^{(n)} \tag{18}$$

(для тех же k и i).

Обозначим через $\omega^{(n)}$ наибольшее из колебаний функции $f(x)$ на отрезках $g_1^{(n)}, \ldots, g_n^{(n)}$, а через $\Omega^{(n)}$ — наибольшее из колебаний ядра $K(x, s)$ на фигурах (квадратах и треугольниках), на которые разбивается область $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$ прямыми

$$x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}; \quad s = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\overline{f}_k^{(n)} - \underline{f}_k^{(n)} \leqslant \omega^{(n)}, \quad \omega_{ik}^{(n)} \leqslant \frac{1}{n} \Omega^{(n)}.$$

$$\omega_{kk}^{(n)} \leqslant \frac{1}{n} \left(\Omega^{(n)} + M\right) \quad (k = 1, \ldots n; \ i = 1, \ldots, k - 1).$$

С другой стороны, величины $a_k^{(n)}$ и $b_k^{(n)}$ можно оценить, согласно лемме, неравенством (12). Поскольку правая часть этого неравенства с ростом k не убывает, то так же можно оценить и величины $A_k^{(n)}$ и $B_k^{(n)}$:

$$A_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \max\left(\underline{f}_1^{(n)}, \ldots, \underline{f}_k^{(n)}\right) \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} N,$$

$$B_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} N \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где буквой N обозначен максимум функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$.

Подставляя все эти оценки в неравенство (18), получим:

$$b_k^{(n)} - a_k^{(n)} \leqslant \omega^{(n)} \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} + N \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-2k} \left(\frac{k}{n}\Omega^{(n)} + \frac{1}{n} M\right) \quad (19)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

Однако, учитывая непрерывность функций $f(x)$ и $K(x, s)$ и соотношение $\frac{k}{n} \leqslant 1$, имеем при $n \to \infty$:

$$\omega^{(n)} \to 0,\ \Omega^{(n)} \to 0,\ \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-k} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-n} \to e^M,$$

$$\left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-2k} \leqslant \left(1 - \frac{M}{n}\right)^{-2n} \to e^{2M}.$$

Поэтому неравенство (19) показывает, что при $n \to \infty$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} (\Phi_n(x) - \varphi_n(x)) = \max_{k = 1, 2, \ldots, n} (b_k^{(n)} - a_k^{(n)})$$

стремится к нулю. Следовательно, доказано, что верхние функции $\Phi_n(x)$ и нижние функции $\varphi_n(x)$ имеют при $n \to \infty$ в качестве общего предела

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x)$$

решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (3). Скорость этого стремления к пределу оценивает неравенство (19).

З а м е ч а н и е. Для решения интегрального уравнения Вольтерра (3') с параметром $\lambda \geqslant 0$ верхние функции $\Phi_n(x)$ и нижние функции $\varphi_n(x)$ можно построить, решая соответствующие системы линейных алгебраических уравнений

$$a_k^{(n)} = \underline{f}_k^{(n)} + \lambda \sum_{i=1}^{k} \underline{K}_{ik}^{(n)} a_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (9')$$

$$b_k^{(n)} = \overline{f}_k^{(n)} + \lambda \sum_{i=1}^{k} \overline{K}_{ik}^{(n)} b_i^{(n)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (10')$$

Если $n > \lambda M$, то эти системы имеют неотрицательные решения $a_k^{(n)} \geqslant 0$ и $b_k^{(n)} \geqslant 0$ и их разность можно оценить по формуле (при $i = 1, \ldots, k$; $k = 1, \ldots, n$):

$$b_k^{(n)} - a_k^{(n)} \leqslant \left(1 - \frac{\lambda M}{n}\right)^{-k} \left[\max_i (\overline{f}_i^{(n)} - \underline{f}_i^{(n)}) + \right.$$

$$\left. + \lambda \frac{A_k^{(n)} + B_k^{(n)}}{2} \max_i \sum_{j=1}^{i} \omega_{ji}^{(n)}\right]. \qquad (18')$$

Сравнивая полученную оценку (18′) с оценкой

$$l_k^{(n)} - c_k^{(n)} \leqslant (1-\lambda M)^{-1}\Big[\max\,(\overline{f}_i^{(n)} - \underline{f}_i^{(n)}) + + \lambda\,\frac{A_n^{(k)} + B_n^{(k)}}{2}\max_i \sum_{j=1}^{n} \omega_{ji}^{(n)}\Big], \tag{20}$$

данной Д. Ю. Пановым ([1], стр. 873) для случая интегрального уравнения Фредгольма (1), следует отметить существенную разницу в том, что для уравнения Вольтерра формула оценки (18′) пригодна для любых неотрицательных значений параметра, а для уравнения Фредгольма — только для достаточно малых значений (2) параметра.

Кафедра математического анализа
Январь 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю., О применении методы академика С. А. Чаплыгина к решению интегральных уравнений, „Известия АН СССР", сер. ОМЕН, 6, 1934, стр. 843—886.
2. Чаплыгин, С. А., Новый метод приближенного интегрирования диференциальных уравнений, Собрание сочинений, т. 1, ГТТИ, 1948, стр. 347—419.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ СИСТЕМ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Бразма и А. Д. Мышкис

В нашей стране уделяют много внимания исследованию электромагнитных явлений в линиях электросвязи. Изучение этих явлений имеет как теоретический интерес, так и большое значение для народного хозяйства. Большая заслуга советских ученых, работающих в этом направлении во главе с членом-корреспондентом АН СССР В. И. Коваленковым, заключается в тесном сближении теории передачи по линиям электросвязи с практикой. В. И. Коваленков также является автором обобщенной системы телеграфных уравнений, описывающих электромагнитные явления в пучке проводов.

Целью этой работы является выяснение некоторых общих свойств указанных уравнений. В центре работы лежит тождество (3), которое с физической точки зрения означает запись закона сохранения энергии в пучке проводов. Из этого тождества вытекает единственность решения смешанной задачи и затухание решений, полученных методом разделения переменных. Математический вывод этих утверждений, сделанный А. Д. Мышкисом, составляет содержание § 1. Физическое истолкование полученных результатов и проверка выполнения условий теорем для электромагнитных процессов в пучках проводов даны в § 2, написанном Н. А. Бразма.

§ 1.

Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений, записанную в матричном виде

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{Ri} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{Gu} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ являются постоянными и симметричными *). От всех функций, составляющих решение,

$$u_1(x,\ t), \ldots,\quad u_n(x,\ t),\ i_1(x,\ t) \ldots,\ i_n(x,\ t) \quad (n \geqslant 1)$$

---

*) Все участвующие величины считаются конечными и вещественными, если не оговорено противное.

мы будем требовать существование и непрерывную диференцируемость в частично замкнутой области P:

$$0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t < T \quad (0 < l < \infty,\ 0 < T \leqslant \infty).$$

Граничные условия поставим такие:

$$\mathbf{u}|_{x=0} = \mathbf{u}|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Теорема 1. *Для любого решения системы* (1), *удовлетворяющего граничным условиям* (2), *выполняется соотношение*

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\, dx = -\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\, dx \quad (0 \leqslant t < T). \tag{3}$$

Доказательство. Вспомнив, что для симметричной матрицы $\mathbf{A}$ всегда $(\mathbf{Aa}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{Ab})$, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\, dx = \int_0^l \left[\left(\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \mathbf{i}\right)\right] dx =$$

$$= -\int_0^l \left[\left(\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}, \mathbf{u}\right) + (\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \mathbf{i}\right) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})\right] dx = -(\mathbf{i}, \mathbf{u})\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) +$$

$$+ (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\, dx = -\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\, dx.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Теорема 1, очевидно, верна и при следующих, более общих, граничных условиях: при любом $r = 1, \ldots, n$ для $x = 0$ и для $x = l$ приравнено нулю u_r или i_r.

Впредь мы будем считать все матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ *и* $\mathbf{R}$ *неотрицательно определенными.*

Теорема 2 (Единственность решения смешанной задачи). *Пусть из матриц* $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{G}$ *хотя бы одна является положительно определенной; пусть матрицы* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{R}$ *обладают тем же свойством. Пусть далее даны два решения* $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{i}_1$ *и* $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{i}_2$ *системы* (1), *причем*

$$\mathbf{u}_1\Big|_{t=0} = \mathbf{u}_2\Big|_{t=0}\ \mathbf{i}_1\Big|_{t=0} = \mathbf{i}_2\Big|_{t=0},\ \mathbf{u}_1\Big|_{x=0} = \mathbf{u}_2\Big|_{x=0},\ \mathbf{u}_1\Big|_{x=l} = \mathbf{u}_2\Big|_{x=l}.$$

Тогда $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2$ *и* $\mathbf{i}_1 \equiv \mathbf{i}_2$ *в* P.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$, $\mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}$. Тогда, в силу неотрицательной определенности матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$, правая часть тождества (3) неположительна, а потому выражение

$$\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\, dx$$

с ростом t не возрастает. Значит, равное нулю при $t=0$ и неотрицательное, оно обязано тождественно равняться нулю. Поэтому тождество (3) дает

$$\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\, dx \equiv 0.$$

Из неотрицательной определенности всех матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ мы получаем:

$$(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) \equiv 0, \quad (\mathbf{Li}, \mathbf{i}) \equiv 0, \quad (\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) \equiv 0, \quad (\mathbf{Ri}, \mathbf{i}) \equiv 0 \quad (\text{в } P). \tag{4}$$

Утверждение теоремы 2 следует теперь из упомянутой в формулировке положительной определенности матриц.

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2, очевидно, верна для граничных условий, описанных в замечании к теореме 1, и соответствующих неоднородных граничных условий, а также для соответствующих неоднородных систем диференциальных уравнений.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathbf{i} \equiv 0$. Тогда из системы (1) мы получим, что $\mathbf{u}$ зависит только от t. Значит, при краевых условиях (2) будет и $\mathbf{u} \equiv 0$. Поэтому при таких краевых условиях для единственности решения смешанной задачи достаточна (см. (4)) положительная определенность только одной из двух матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{R}$. То же получится и при краевых условиях, описанных в замечании к теореме 1, если только для каждого $r = 1, \ldots, n$ либо $u_r\big|_{x=0}$, либо $u_r\big|_{x=l}$ приравнено нулю. Нетрудно рассмотреть аналогичным образом и случай $\mathbf{u} \equiv 0$.

Отметим тот частный случай, когда решение $\mathbf{u}$, $\mathbf{i}$ имеет вид

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{j}(t) \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (\text{в } P),$$

где k — натуральное число. Тогда

$$\int_0^l (\mathbf{Cu}, \mathbf{u})\, dx = \int_0^l \left(\mathbf{Cv} \sin \frac{k\pi x}{l}, \mathbf{v} \sin \frac{k\pi x}{l}\right) dx = \int_0^l (\mathbf{Cv}, \mathbf{v}) \sin^2 \frac{k\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{l}{2} (\mathbf{Cv}, \mathbf{v});$$

аналогично выражаются прочие интегралы в тождестве (3), и потому это тождество принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} [(\mathbf{Cv}, \mathbf{v}) + (\mathbf{Lj}, \mathbf{j})] = -[(\mathbf{Gv}, \mathbf{v}) + (\mathbf{Rj}, \mathbf{j})]. \tag{5}$$

Система (1) преобразуется следующим образом:

$$-\frac{k\pi}{l} \mathbf{v} = \mathbf{Rj} + \mathbf{L} \frac{d\mathbf{j}}{dt}, \quad \frac{k\pi}{l} \mathbf{j} = \mathbf{Gv} + \mathbf{C} \frac{d\mathbf{v}}{dt}; \tag{6}$$

краевые условия (2) удовлетворяются автоматически, и поэтому тождество (5) справедливо для всех (непрерывно диференцируемых на участке $[0, T)$) решений системы (6).

Вспомнив о неотрицательной определенности матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$, в результате интегрирования тождества (5) мы получим

$$\int\limits_0^T [(\mathbf{Gv}(t), \mathbf{v}(t)) + (\mathbf{Rj}(t), \mathbf{j}(t))]\, dt \leqslant \frac{1}{2}[(\mathbf{Cv}(0), \mathbf{v}(0)) + (\mathbf{Lj}(0), \mathbf{j}(0))]. \tag{7}$$

Будем теперь искать решение системы (6) в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}e^{\lambda t}, \ \mathbf{j} = \mathbf{b}e^{\lambda t} \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{8}$$

($\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные колонные матрицы, быть может, комплексные; λ — комплексное постоянное). Тогда эта система перейдет в такую (алгебраическую):

$$-\frac{k\pi}{l}\mathbf{a} = \mathbf{Rb} + \lambda\mathbf{Lb}, \quad \frac{k\pi}{l}\mathbf{b} = \mathbf{Ga} + \lambda\mathbf{Ca}. \tag{9}$$

Чтобы полученная система $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ имела ненулевое решение, необходимо и достаточно обращение в нуль определителя этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n, & \mathbf{R} + \lambda\mathbf{L} \\ \mathbf{G} + \lambda\mathbf{C}, & -\frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0, \tag{10}$$

где $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n.

Теорема 3 (Затухание решений, полученных методом разделения переменных). *Все корни уравнения* (10) *имеют неположительную вещественную часть. Если же по крайней мере одна из матриц* $\mathbf{G}$ *и* $\mathbf{R}$ *является положительно определенной, то все корни этого уравнения имеют отрицательную вещественную часть.*

Доказательство. Первое утверждение следует из второго, так как неотрицательно определенную матрицу при помощи произвольно малого изменения элементов можно сделать положительно определенной, а корни уравнения (10), как и всякого алгебраического уравнения не являющегося тождеством*), непрерывно зависят от его коэфициентов.

Пусть теперь матрица $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ является положительно определенной, а уравнение (10) имеет решение $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$, где $\alpha_0 \geqslant 0$. Тогда подставим $\lambda = \lambda_0$ в (9) и найдем соответствующее нетривиальное решение $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ этой системы. Если после этого отделить в (8) вещественную часть от

*) Уравнение (10) не тождество, так как свободный член отличен от нуля, что вытекает хотя бы из леммы 1 и замечания 1 работы [1].

мнимой, то мы получим ненулевое решение системы (6), причем каждая из функций $v_r(t)$ и $j_r(t)$ $(r = 1, \ldots, n)$ представляет собой линейную комбинацию функций

$$e^{\alpha_0 t} \cos \beta_0 t \text{ и } e^{\alpha_0 t} \sin \beta_0 t.$$

Из системы (6) получаем, что для нетривиального ее решения будет $\mathbf{j} \neq 0$ и $\mathbf{v} \neq 0$. Поэтому в силу предположения о матрицах $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ построенное нами решение обращает в бесконечность левую часть неравенства (7), если положить $T = \infty$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.

Эта теорема дает ответ на вопрос, неявно поставленный в п. 3 статьи [2].

Замечание. Если даны какие-нибудь симметричные неотрицательно определенные матрицы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$, то всегда можно построить обобщенную систему телеграфных уравнений (1), положив в ней $\mathbf{R} = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{A}_2$ $\mathbf{G} = \mathbf{A}_3$ и $\mathbf{C} = \mathbf{A}_4$. Затем, применяя к полученной системе теорему 3 при $l = \pi$ и $k = 1$, мы получим следующее чисто алгебраическое утверждение: при наших предположениях о матрицах $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ и $\mathbf{A}_4$ все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & , \mathbf{A}_1 + \lambda \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 + \lambda \mathbf{A}_4, & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

имеют неположительную вещественную часть; если же, кроме этого, по крайней мере одна из матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_3$ является положительно определенной, то все корни уравнения (11) имеют отрицательную вещественную часть.

§ 2

Впредь мы будем рассматривать матрицы $\mathbf{L}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$, имеющие такие выражения:

$$\mathbf{L} = \begin{Vmatrix} L_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{21} & L_2 & \ldots & M_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ M_{n1} & M_{n2} & \ldots & L_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} C_1 & -C_{12} & \ldots & -C_{1n} \\ -C_{21} & C_2 & \ldots & -C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -C_{n1} & -C_{n2} & \ldots & C_n \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G_1 & -G_{12} & \ldots & -G_{1n} \\ -G_{21} & G_2 & \ldots & -G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -G_{1n} & -G_{2n} & \ldots & G_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & R_n \end{Vmatrix}.$$

Эти матрицы имеют следующий физический смысл [3].

Именно, L_k обозначает самоиндукцию k-го провода пучка, а M_{ks} — взаимную индукцию между проводами k и s, рассчитанные на единицу длины пучка. По физическим соображениям мы имеем $M_{ks} = M_{sk}$, т. е. $\mathbf{L}$ — симметричная матрица (*матрица индуктивности*).

C_k же имеет выражение:

$$C_k = C'_k + \sum_{s=1}^{n}{}' C_{ks} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

причем штрих у суммы здесь и впоследствии означает, что слагаемое с равными значками не берется. При этом C'_k обозначает емкость между k-ым проводом и землей, а C_{ks} — емкость между проводами k и s, рассчитанными на единицу длины пучка. По физическим соображениям мы имеем $C_{ks} = C_{sk}$ [4], т. е. $\mathbf{C}$ — тоже симметричная матрица (*матрица емкости*).

Подобным образом G_k имеет выражение:

$$G_k = G'_k + \sum_{s=1}^{n}{}' G_{ks} \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{13}$$

причем G'_k обозначает проводимость изоляции между k-ым проводом и землей, а G_{ks} — проводимость изоляции между проводами k и s, рассчитанными на единицу длины пучка. Очевидно, мы имеем $G_{ks} = G_{sk}$, и поэтому $\mathbf{G}$ — также симметричная матрица (*матрица проводимости изоляции*).

Наконец, R_k обозначает омическое сопротивление k-го провода пучка, рассчитанное на единицу длины пучка ($\mathbf{R}$ — *матрица сопротивления*).

Убедимся в том, что предположение относительно неотрицательной определенности матриц § 1 действительно удовлетворено. Кроме того, получим некоторые условия, при которых эти матрицы положительно определенны.

Впредь мы будем записывать положительную (неотрицательную) определенность матрицы $\mathbf{A}$ так: $\mathbf{A} > 0$ ($\geqslant 0$).

Мы имеем $\mathbf{C} \geqslant 0$ и $\mathbf{L} \geqslant 0$, ибо квадратичные формы $(\mathbf{Cu}, \mathbf{u})$ и $(\mathbf{Li}, \mathbf{i})$ выражают удвоенные энергии соответственно электрического и магнитного полей пучка проводов [4, 5], рассчитанные на единицу длины пучка, и поэтому эти квадратичные формы должны быть неотрицательно определенными.

Свойство $\mathbf{C} \geqslant 0$ выясняется также другим способом. В силу формулы (12) квадратичная форма $(\mathbf{Cu}, \mathbf{u})$ приводится после перегруппировки членов к следующей сумме неотрицательных членов;

$$(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{n} C'_r u_r^2 + \sum_{r<s} C_{rs} (u_r - u_s)^2, \tag{14}$$

причем член $C'_r u_r^2$ интерпретируется как удвоенная энергия электрического поля между проводом r и землей, рассчитанная на единицу длины пучка, а член $C_{rs}(u_r - u_s)^2$ выражает удвоенную энергию поля между проводами r и s, также рассчитанную на единицу длины.

Из разложения (14) следует $\mathbf{C} > 0$, кроме следующих предельных случаев, в которых $\mathbf{C} \geqslant 0$:

а) часть пучка проводов не имеет емкости по отношению к земле и остальным проводам пучка, или

б) весь пучок проводов не имеет емкости по отношению к земле.

Оба этих случая объединяются таким условием:

$$C'_{r_p} = C_{r_p s} = 0 \ (1 \leqslant r_p \leqslant n, \ p = 1, \ \ldots, \ m; \ s \neq r_1, \ \ldots, \ r_m).$$

Подобным образом получается $\mathbf{G} > 0$ ($\geqslant 0$). Именно, ввиду формулы (13) мы имеем приведение квадратичной формы $(\mathbf{Gu}, \mathbf{u})$ к сумме неотрицательных членов:

$$(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) = \sum_{r=1}^{n} G'_r u_r^2 + \sum_{r<s} G_{rs}(u_r - u_s)^2, \tag{15}$$

причем член $G'_r u_r^2$ интерпретируется как мощность тепловой энергии, выделяемой ввиду проводимости изоляции между проводом r и землей, а член $G_{rs}(u_r - u_s)^2$ выражает мощность тепловой энергии, выделяемой между проводами r и s. (Все это рассчитывается на единицу длины пучка проводов.)

Из разложения (15) следует, что $\mathbf{G} > 0$, кроме следующих предельных случаев, в которых $\mathbf{G} \geqslant 0$:

а) часть пучка проводов идеально изолирована от земли и остальных проводов пучка, или

б) весь пучок проводов идеально изолирован от земли.

Оба этих случая объединяются таким условием:

$$G'_{r'_p} = G_{r'_p s} = 0 \ \ (1 \leqslant r'_p \leqslant n, \ p = 1, \ \ldots, \ m'; \ s \neq r'_1, \ \ldots, \ r'_{m'}).$$

Наконец, свойство $\mathbf{R} > 0$ ($\geqslant 0$) очевидно. В выражении

$$(\mathbf{Ri}, \mathbf{i}) = \sum_{s=1}^{n} R_s i_s^2$$

член $R_s i_s^2$ означает мощность тепловой энергии, выделяемой в проводе s и рассчитанной на единицу длины пучка. Если хотя бы один провод s пучка является идеальным проводником (т. е. $R_s = 0$), то $\mathbf{R} \geqslant 0$. При отсутствии же идеальных проводников в пучке мы имеем $\mathbf{R} > 0$.

Формула (3) утверждает, что уменьшение в единицу времени суммы энергий электрического и магнитного полей всего пучка проводов равно сумме мощностей тепловых энергий, выделяемых в изоляции и проводах пучка.

Еще удобнее получается это физическое истолкование после умножения вышеуказанной формулы на dt:

$$d\left\{\frac{1}{2}\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\, dx\right\} = -\left\{\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\, dx\right\} dt. \tag{3'}$$

Именно, *уменьшение в промежуток времени dt суммы энергий электрического и магнитного полей пучка проводов равно сумме тепловых энергий, выделяемых в тот же промежуток времени в изоляции и проводах пучка.* Это выражает закон сохранения энергии пучка проводов при отсутствии перетока энергии через концы пучка. Последнее же будет, если на концах пучка u_r или i_r равно нулю при любом $r = 1, \ldots, n$ для $x = 0$ и для $x = l$, что совпадает с требованием, поставленным в замечании к теореме 1.

В заключение отметим еще следующее. Затухание решений в теореме 3, при положительной определенности матриц **G** или **R**, является следствием выделения тепловой энергии соответственно в изоляции или проводах пучка, и, таким образом, это затухание вполне естественно.

Кафедра общей математики
Май 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма, Н. А., Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 69 — 73.

2. Бразма Н. А., Решение основной задачи распространения электромагнитных процессов в многопроводной системе, „Доклады Академии Наук СССР", LXIX : 3, 1949, стр. 313 — 316.

3. Коваленков В. И., Теория передачи по линиям электросвязи, т. I, Москва, 1937, стр. 138 — 141.

4. Нейман Л. Р. и Калантаров П. Л., Теоретические основы электротехники, ч. 3, Ленинград-Москва, 1948, стр. 94 — 99, 313.

5. Pipes L., Matrix theory of multiconductor transmission lines, „Philosophical Magazine", Vol. XXIV, 1937, 97 — 113.

ПОЛНАЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. А. Бразма

Настоящая работа представляет исследование одного из общих свойств обобщенной системы телеграфных уравнений, автором которой является член-корреспондент АН СССР В. И. Коваленков.

Опираясь на общую теорию систем диференциальных уравнений в частных производных, при разработке которой исключительные заслуги принадлежат академику И. Г. Петровскому, выяснение свойства, рассмотренного в настоящей работе, даст некоторые указания на общий характер электромагнитных явлений в пучке проводов.

1. Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{1}$$

где квадратные матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ порядка n ($n \geqslant 1$) являются постоянными, симметричными и неотрицательно определенными [1].

Будем исследовать условия, при которых система (1) является вполне гиперболической. П. И. Кузнецов [2], рассматривая случай $n = 2$, неявно предполагал полную гиперболичность системы (1). Однако из настоящей работы будет следовать, что это предположение является излишним, ибо система (1) даже при произвольном n оказывается вполне гиперболической при незначительном условии положительной определенности матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$, которое практически всегда удовлетворено, если не рассматривать особые предельные случаи [1].

2. Будем предполагать матрицы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$ положительно определенными. Для выяснения типа системы (1), как известно [3], надо составить операторную матрицу этой системы

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{L}\dfrac{\partial}{\partial t} & \mathbf{E}_n\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{E}_n\dfrac{\partial}{\partial x} & \mathbf{C}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{matrix} \right\|,$$

где $\mathbf{F}_n$ — единичная матрица порядка n, и затем получить характеристическую форму в переменных y и s:

$$C(y, s) = \begin{vmatrix} \mathbf{L}s & \mathbf{E}_n y \\ \mathbf{F}_n y & \mathbf{C}s \end{vmatrix} = s^{2n} \begin{vmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{F}_n Y \\ \mathbf{F}_n Y & \mathbf{C} \end{vmatrix} \quad \left(Y = \frac{y}{s} \right).$$

Согласно известной терминологии, система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{E}_n Y \\ \mathbf{E}_n Y & \mathbf{C} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

вещественны.

3. Воспользуемся следующей, повидимому, известной леммой, простейшее доказательство которой указал автору Э. Я. Риекстыньш.

Лемма 1. *Для произвольных симметричных матриц* **A** *и* **B** *существует равенство*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E}_n\lambda \\ \mathbf{E}_n\lambda & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{AB} - \mathbf{E}_n\lambda^2|. \tag{3}$$

Доказательство. Как известно, характеристические числа квадрата матрицы равны квадратам характеристических чисел исходной матрицы. Поэтому, если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ суть корни уравнения

$$\begin{vmatrix} -\mathbf{E}_n\lambda, & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{B}, & -\mathbf{E}_n\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то из равенства

$$\begin{Vmatrix} 0 & -\mathbf{A} \\ -\mathbf{B} & 0 \end{Vmatrix}^2 = \begin{Vmatrix} \mathbf{AB} & 0 \\ 0 & \mathbf{BA} \end{Vmatrix}$$

следует, что уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{AB} - \mathbf{E}_n\lambda & 0 \\ 0 & \mathbf{BA} - \mathbf{E}_n\lambda \end{vmatrix} = |\mathbf{AB} - \mathbf{E}_n\lambda|^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_2^1, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_{2n}^2$. Уравнение же

$$|\mathbf{AB} - \mathbf{E}_n\lambda^2| = 0$$

имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$, откуда следует равенство (3) после сравнения коэфициентов у высших степеней λ в обеих сторонах этого равенства.

4. На основании леммы 1 система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$|\mathbf{LC} - \mathbf{E}_n Y^2| = 0 \tag{4}$$

вещественны или же если все корни уравнения

$$|\mathbf{LC} + \mathrm{E}_n Z^2| = 0 \tag{5}$$

чисто мнимы.

Затем на основании той же леммы 1 имеем:

$$|\mathbf{L}(-\mathbf{C}) - \mathbf{E}_n Z^2| = \begin{vmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{E}_n Z \\ \mathbf{E}_n Z & -\mathbf{C} \end{vmatrix},$$

после чего переменим знаки на обратные у последних n строк детерминанта правой части равенства и, наконец, поменяем местами первый столбец этого детерминанта с $n+1$-м столбцом, второй столбец — с $n+2$-м, и т. д. Таким образом, имеем:

$$|-\mathbf{LC} - \mathbf{E}_n Z^2| = \begin{vmatrix} \mathbf{E}_n Z & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n Z \end{vmatrix}.$$

Следовательно, система (1) является вполне гиперболической, если все корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n Z & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n Z \end{vmatrix} = 0$$

или уравнения

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & \lambda \mathbf{L} \\ \lambda \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0 \quad \left(\lambda = \frac{1}{Z}\right) \tag{6}$$

с неизвестным λ — чисто мнимы.

Мнимость корней уравнения (6) докажем следующим образом. На основании замечания к теореме 3 предыдущей работы [1] корни уравнения (6) имеют неотрицательную вещественную часть. После подстановки $\lambda = -\mu$ в то же уравнение и перемены знаков на обратные у последних n столбцов и последних n строк детерминанта получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} \mathbf{E}_n & \mu \mathbf{L} \\ \mu \mathbf{C} & -\mathbf{E}_n \end{vmatrix} = 0,$$

корни которого также имеют неотрицательную вещественную часть. Таким образом, корни исходного уравнения (6) имеют одновременно неотрицательную и неположительную вещественную часть, и, следовательно, эти корни чисто мнимы.

Из предыдущего следует

Теорема. *При положительно определенных матрицах* **L** *и* **C** *обобщенная система телеграфных уравнений является вполне гиперболической.*

5. Вещественность всех корней уравнения (4) докажем ещё другим путем. Эта вещественность означает, что все характеристические числа

матрицы **LC** положительны, для подтверждения чего рассмотрим следующую лемму, доказательство которой сообщил автору М. А. Наймарк.

Лемма 2. *Если* **A** *и* **B** *симметричные положительно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы* **AB** *положительны.*

Доказательство. Матрицу **A** приведем ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\,\mathbf{S}^{-1}, \quad \lambda_k > 0 \ (k = 1, \ldots, n).$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{S}[\sqrt{\lambda_1}, \ \sqrt{\lambda_2}, \ \ldots, \ \sqrt{\lambda_n}]\,\mathbf{S}^{-1},$$

причем условимся брать, например, $\sqrt{\lambda_k} > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Матрица **D** тоже является симметричной, ибо она оказывается равной своей транспонированной матрице.

Произведение **AB** преобразуем так:

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{DD})\,\mathbf{B}\,(\mathbf{DD}^{-1}) = \mathbf{D}\,(\mathbf{DBD})\,\mathbf{D}^{-1}.$$

Тогда матрица **DBD** тоже оказывается симметричной, и мы можем привести ее ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$\mathbf{DBD} = \mathbf{T}[\mu_1, \ \mu_2, \ \ldots, \ \mu_n]\,\mathbf{T}^{-1}.$$

С другой стороны, из положительной определенности матрицы **B**, т. е. положительной определенности квадратичной формы $(\mathbf{Bu}, \mathbf{u})$, следует после линейного преобразования $\mathbf{u} = \mathbf{Dv}$ положительная определенность преобразованной квадратичной формы:

$$(\mathbf{Bu}, \mathbf{u}) = ([\mathbf{DBD}]\,\mathbf{v}, \ \mathbf{v}) > 0.$$

Таким образом, матрица **DBD** тоже является положительно определенной, и поэтому $\mu_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Наконец, произведение **AB** преобразуем к виду

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{DT})\,[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,(\mathbf{DT})^{-1}, \tag{7}$$

и, следовательно, положительные числа μ_k $(k = 1, \ldots, n)$ оказываются характеристическими числами матрицы **AB**, чем доказана лемма.

Замечание 1. Если **A** и **B** симметричные неотрицательно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы **AB** вещественны и неотрицательны. Это утверждение вытекает из леммы 2 при помощи предельного перехода, причем приходится воспользоваться тем свойством, что корни характеристического уравнения матрицы **AB**, как и всякого алгебраического уравнения с постоянным коэфициентом у старшей степени неизвестной, непрерывно зависят от коэфициентов уравнения.

Замечание 2. Если среди матриц **A** и **B** одна является неотрицательно определенной, а вторая положительно определенна, то матрицу

AB можно привести к диагональному виду. Доказательство этого утверждения в случае предположения положительной определенности матрицы **A** следует непосредственно из формулы (7). Аналогичным способом доказывается это утверждение также в случае предположения положительной определенности матрицы **B**.

З а м е ч а н и е 3. Можно доказать еще такое свойство: если **A** и **B** неотрицательно определенные матрицы, то все характеристические числа матрицы **AB** заключены между произведением наименьших характеристических чисел матриц **A** и **B** и произведением наибольших характеристических чисел тех же матриц.

Кафедра общей математики
Май 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д., Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 61 — 68
2. Кузнецов П. И., Распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных однопроводных линий, „Прикладная математика и механика", XII : 2, 1948, стр. 141 — 148.
3. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. I', Москва, 1945, стр. 162 — 167.

ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Д. Мышкис и В. Э. Аболиня

В работе [1] доказана единственность решения смешанной задачи для обобщенной системы телеграфных уравнений при простейших граничных условиях. Здесь будет показано, что эта теорема легко переносится и на случай более общих граничных условий.

Рассмотрим обобщенную систему телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ — квадратные постоянные симметричные матрицы порядка n. От искомых колонных матриц $\mathbf{u}(x, t)$ и $\mathbf{i}(x, t)$ высоты n (матриц напряжения и силы тока) мы будем требовать существование и непрерывную диференцируемость в частично замкнутой области P

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < T \quad (0 < l < \infty, \quad 0 < T \leqslant \infty).$$

Граничные условия поставим такие:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_0\mathbf{u}\big|_{x=0} &= -\mathbf{R}_0\mathbf{i}\big|_{x=0} - \mathbf{L}_0\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}\bigg|_{x=0} - \mathbf{D}_0\int_0^t \mathbf{i}\bigg|_{x=0} dt, \\ \mathbf{A}_l\mathbf{u}\big|_{x=l} &= \mathbf{R}_l\mathbf{i}\big|_{x=l} + \mathbf{L}_l\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}\bigg|_{x=l} + \mathbf{D}_l\int_0^t \mathbf{i}\bigg|_{x=l} dt, \\ (\mathbf{E}_n - \mathbf{A}_0)\,\mathbf{i}\big|_{x=0} &= 0, \quad (\mathbf{E}_n - \mathbf{A}_l)\,\mathbf{i}\big|_{x=l} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_l$, $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_l$, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_l$, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_l$ — квадратные постоянные симметричные матрицы порядка n, причем $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_l$ — диагональные матрицы с элементами по диагонали, равными 0 или 1, а $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n. Такие граничные условия появляются, когда к левому концу ($x = 0$) пучка проводов подключено устройство передачи, а к правому ($x = l$) приемник; при этом матрицы $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_l$, $\mathbf{L}_0$ и $\mathbf{L}_l$, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_l$ являются соответственно матрицами сопротивления, индуктивности и потенциальных коэфициентов устройства передачи и приемника. Матрицы $\mathbf{A}_0$ и

$\mathbf{A}_l$ появляются в связи с тем, что часть проводов пучка может иметь один или оба конца свободными; на этих концах сила тока равна нулю, в связи с чем и возникают последние из граничных условий (2).

Теорема 1. *При* $0 \leqslant t < T$ *имеет место соотношение*

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left\{\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\,dx + (\mathbf{L}_0\mathbf{i}, \mathbf{i})|_{x=0} + (\mathbf{L}_l\mathbf{i}, \mathbf{i})|_{x=l} + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{D}_0\int_0^t \mathbf{i}\,dt, \int_0^t \mathbf{i}\,dt)|_{x=0} + (\mathbf{D}_l\int_0^t \mathbf{i}\,dt, \int_0^t \mathbf{i}\,dt)|_{x=l}\right\} =$$
$$= -\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\,dx - (\mathbf{R}_0\mathbf{i}, \mathbf{i})|_{x=0} - (\mathbf{R}_l\mathbf{i}, \mathbf{i})|_{x=l} \tag{3}$$

для любого решения $\mathbf{u}$, $\mathbf{i}$ *системы* (1), *удовлетворяющего граничным условиям* (2).

Доказательство. Из непрерывной диференцируемости решения следует, что производная, стоящая в левой части равенства (3), существует и может быть вычислена при помощи формального диференцирования. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^l [(\mathbf{Cu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Li}, \mathbf{i})]\,dx = \int_0^l \left[\left(\mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \mathbf{i}\right)\right]dx =$$
$$= -\int_0^l \left[\left(\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x}, \mathbf{u}\right) + \left(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \mathbf{i}\right) + \left(\mathbf{Ri}, \mathbf{i}\right)\right]dx = -\left(\mathbf{i}, \mathbf{u}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} -$$
$$-\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\,dx = -(\mathbf{i}, A_l\mathbf{u})|_{x=l} - (\mathbf{i}, (\mathbf{E}_n - A_l)\,\mathbf{u})|_{x=l} +$$
$$+ (\mathbf{i}, \mathbf{A}_0\mathbf{u})|_{x=0} + (\mathbf{i}, (\mathbf{E}_n - \mathbf{A}_0)\,\mathbf{u})|_{x=0} - \int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\,dx =$$
$$= -(\mathbf{i}, \mathbf{R}_l\mathbf{i})|_{x=l} - \left(\mathbf{i}, \mathbf{L}_l\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}\right)\Big|_{x=l} - \left(\mathbf{i}, \mathbf{D}_l\int_0^t \mathbf{i}\,dt\right)\Big|_{x=l} - \left((\mathbf{E}_n - A_l)\,\mathbf{i}, \mathbf{u}\right)\Big|_{x=l} -$$
$$-(\mathbf{i}, \mathbf{R}_0\mathbf{i})|_{x=0} - \left(\mathbf{i}, \mathbf{L}_0\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}\right)\Big|_{x=0} - \left(\mathbf{i}, \mathbf{D}_0\int_0^t \mathbf{i}\,dt\right)\Big|_{x=0} - \left((\mathbf{E}_n - \mathbf{A}_0)\,\mathbf{i}, \mathbf{u}\right)\Big|_{x=0} -$$
$$-\int_0^l [(\mathbf{Gu}, \mathbf{u}) + (\mathbf{Ri}, \mathbf{i})]\,dx = -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{L}_l\mathbf{i}, \mathbf{i}\right)\Big|_{x=l} + \left(\mathbf{D}_l\int_0^t \mathbf{i}\,dt, \int_0^t \mathbf{i}\,dt\right)\Big|_{x=l} + \right.$$

$$+\left(\mathbf{L}_0\mathbf{i},\ \mathbf{i}\right)\Big|_{x=0}+\left(\mathbf{D}_0\int_0^t \mathbf{i}\,dt,\ \int_0^t \mathbf{i}\,dt\right)\Big|_{x=0}\Bigg]-\left(\mathbf{R}_l\mathbf{i},\ \mathbf{i}\right)\Big|_{x=l}-\left(\mathbf{R}_0\mathbf{i},\ \mathbf{i}\right)\Big|_{x=0}-$$

$$-\int_0^l\left[(\mathbf{G}\mathbf{u},\ \mathbf{u})+(\mathbf{R}\mathbf{i},\ \mathbf{i})\right]dx.$$

Отсюда сразу следует справедливость соотношения (3). Теорема 1 доказана.

Соотношение (3), умноженное на dt, физически истолковывается так: уменьшение суммы энергий электрического и магнитного поля пучка проводов, устройства передачи и приемника за промежуток времени dt равно сумме тепловых энергий, выделяемых за тот же промежуток времени в изоляции, проводах пучка, устройстве передачи и приемнике (см. [1], стр. 68 и [2], стр. 313).

Переходя к теореме о единственности решения смешанной задачи, мы будем считать все матрицы $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}_0$, $\mathbf{R}_l$, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_l$, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_l$ неотрицательно определенными.

Теорема 2. *Пусть по крайней мере одна из матриц* $\mathbf{C}$ *и* $\mathbf{G}$ *является положительно определенной, а пара матриц* $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{L}$ *обладает тем же свойством. Тогда решение смешанной задачи* (при $t=0$ задается $\mathbf{u}$ и $\mathbf{i}$) *для обобщенной системы телеграфных уравнений* (1) *при граничных условиях* (2) *единственно, если существует.*

Доказательство. Пусть даны два решения $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{i}_2$ системы (1), удовлетворяющие граничным условиям (2), совпадающие при $t=0$, т. е. для которых

$$\mathbf{u}_1\big|_{t=0}=\mathbf{u}_2\big|_{t=0},\quad \mathbf{i}_1\big|_{t=0}=\mathbf{i}_2\big|_{t=0}.$$

Обозначим тогда $\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2=\mathbf{u}$, $\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_2=\mathbf{i}$ и покажем, что $\mathbf{u}\equiv\mathbf{i}\equiv 0$ в P.

Воспользуемся для этой цели соотношением (3). В силу неотрицательной определенности матриц $\mathbf{G}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{R}_l$ правая часть этого соотношения не положительна, а потому выражение, стоящее в фигурных скобках в левой части равенства (3), с ростом t $(0\leqslant t<T)$ не возрастает. Но это выражение равно нулю при $t=0$ и неотрицательно в силу неотрицательной определенности матриц $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_l$, $\mathbf{D}_0$ и $\mathbf{D}_l$; значит, оно равно нулю тождественно. Поэтому тождественно равна нулю и правая часть тождества (3).

Но все скалярные произведения (круглые скобки), стоящие в равенстве (3), неотрицательны в силу неотрицательной определенности всех участвующих квадратных матриц. Поэтому из доказанного в предыдущем абзаце следует, что эти скалярные произведения тождественно равны нулю. В частности,

$$(\mathbf{C}\mathbf{u},\ \mathbf{u})\equiv 0,\quad (\mathbf{L}\mathbf{i},\ \mathbf{i})\equiv 0,\quad (\mathbf{G}\mathbf{u},\ \mathbf{u})\equiv 0,\quad (\mathbf{R}\mathbf{i},\ \mathbf{i})\equiv 0\quad (\text{в } P).$$

Отсюда, в силу положительной определенности по крайней мере одной матрицы из пары $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ и из пары $\mathbf{L}$, $\mathbf{R}$, следует, что $\mathbf{u} \equiv \mathbf{i} \equiv 0$ или

$$\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{i}_1 \equiv \mathbf{i}_2 \quad (\text{в } P).$$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Теорема о единственности решения, очевидно, автоматически переносится и на случай соответствующей неоднородной системы уравнений и неоднородных граничных условий.

Кафедра общей математики
Декабрь 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д., Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том V', 1952, стр. 61—68.
2. Нейман Л. П. и Калантаров П. Л., Теоретические основы электротехники, ч. III., Ленинград — Москва, 1948.

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. А. Бразма

ВВЕДЕНИЕ

В двух предыдущих статьях автора [1, 2] вкратце рассмотрены две основные задачи обобщенной системы телеграфных уравнений В. И. Коваленкова, описывающей электромагнитные явления в пучке проводов. Решения этих задач получены там матричным методом разделения переменных в виде матричных рядов, отдельные члены которых содержат время t в показателях степеней численных показательных функций. Однако определение матричных коэфициентов этих рядов громоздко, что затрудняет использование полученных решений.

В настоящей работе мы будем рассматривать, кроме двух предыдущих основных задач, еще третью задачу, выражающую распространение электромагнитного процесса в пучке проводов под влиянием непосредственно включенных в одном конце пучка синусоидальных электродвижущих сил. При этом будет применен в новом виде матричный метод разделения переменных, значительно проще приводящий к цели. Решения задач и здесь мы получим в виде матричных рядов, однако время t будет входить в показатели степеней матричных показательных функций. Определение матричных коэфициентов этих новых рядов значительно проще, чем в ранее полученных решениях тех же задач.

Мы будем рассматривать обобщенную систему телеграфных уравнений в матричном виде

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}. \qquad (T)$$

Число проводов n мы будем считать произвольным. Таким образом, $\mathbf{R}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{C}$ — квадратные матрицы порядка n, которые мы будем предполагать постоянными и симметричными. Кроме того, *мы предположим, что* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{C}$ — *положительно определенные, а* $\mathbf{R}$ *и* $\mathbf{G}$ — *неотрицательно определенные матрицы* [3]. Неизвестными в системе (T) являются переменные колонные матрицы $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ и $\mathbf{i} = \mathbf{i}(x, t)$, которые выражают напряжения и силы токов в соответствующих проводах пучка, описываемого системой (T).

Решения задач мы будем искать в такой частично замкнутой области изменения аргументов:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty \quad (0 < l < \infty). \tag{P}$$

При этом l обозначает длину рассматриваемого пучка проводов.

§ 1. ПЕРВАЯ ЗАДАЧА: НУЛЕВЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, НЕОДНОРОДНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Найти решение системы (T) *в области* (P) *при нулевых граничных условиях*

$$\mathbf{u}(0,\ t) = 0, \quad \mathbf{u}(l,\ t) = 0 \tag{1.1}$$

и начальных условиях

$$\mathbf{u}(x,\ 0) = \mathbf{f}_1(x), \quad \mathbf{i}(x,\ 0) = \mathbf{f}_2(x). \tag{1.2}$$

1. Вначале мы будем искать частные решения системы (T), удовлетворяющие граничным условиям (1.1), в виде

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathbf{i}_k = \mathbf{j}_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l}, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{v}_k(t)$ и $\mathbf{j}_k(t)$ — колонные матрицы, состоящие каждая из n элементов, а k — натуральное. Эти решения выражают стоячие волны с переменными амплитудами $\mathbf{v}_k(t)$ и $\mathbf{j}_k(t)$ в пучке проводов.

После подстановки выражений (1.3) в систему (T) мы получаем новую систему:

$$-\frac{k\pi}{l}\mathbf{v}_k = \mathbf{R}\mathbf{j}_k + \mathbf{L}\frac{d\mathbf{j}_k}{dt}, \quad \frac{k\pi}{l}\mathbf{j}_k = \mathbf{G}\mathbf{v}_k + \mathbf{C}\frac{d\mathbf{v}_k}{dt}. \tag{1.4}$$

Первое и второе уравнения (1.4) умножим с левой стороны на $\mathbf{L}^{-1}$ и $\mathbf{C}^{-1}$ соответственно*) и объединим эти уравнения в одно матричное диференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt}\begin{Vmatrix} \mathbf{j}_k \\ \mathbf{v}_k \end{Vmatrix} + \mathbf{M}_k \begin{Vmatrix} \mathbf{j}_k \\ \mathbf{v}_k \end{Vmatrix} = 0, \tag{1.5}$$

содержащее постоянную квадратную матрицу порядка $2n$:

$$\mathbf{M}_k = \begin{Vmatrix} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}, & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1}, & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} \end{Vmatrix}. \tag{1.6}$$

---

*) Матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ и $\mathbf{C}^{-1}$ существуют ввиду положительной определенности матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}$.

Общее решение уравнения (1.5) имеет вид [4]:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{j}_k \\ \mathbf{v}_k \end{matrix} \right\| = e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{matrix} \right\|, \tag{1.7}$$

причем $\mathbf{b}_k$ и $\mathbf{a}_k$ — произвольные постоянные колонные матрицы, состоящие каждая из n элементов. Заметим, что решение (1.7) справедливо как при простых, так и при кратных элементарных делителях матрицы $\mathbf{M}_k$.

Отсюда получается:

$$\mathbf{u}_k = \| 0, \ \mathbf{E}_n \| \, e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{matrix} \right\| \sin \frac{k\pi x}{l}, \ \mathbf{i}_k = \| \mathbf{E}_n, \ 0 \| \, e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{matrix} \right\| \cos \frac{k\pi x}{l}, \tag{1.8}$$

где в выражении прямоугольной матрицы $\mathbf{E}_n$ обозначает единичную матрицу порядка n, а 0 — квадратную матрицу порядка n, состоящую из одних нулей.

Случай $k = 0$ приходится рассматривать отдельно. Здесь мы имеем $\mathbf{u}_0 \equiv 0$, а $\mathbf{i}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{i}_0}{dt} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{i}_0 = 0 \tag{1.9}$$

с квадратной матрицей $\mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R}$ порядка n, общее решение которого мы запишем так:

$$\mathbf{i}_0 = \frac{1}{2} e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} \mathbf{b}_0. \tag{1.10}$$

Непосредственной проверкой, т. е. подстановкой выражений (1.8) и (1.10) в уравнение (T), убеждаемся в правильности полученных частных решений системы (T).

2. Характеристические числа матрицы $\mathbf{M}_k$ отличаются лишь обратным знаком от корней уравнения относительно λ

$$| \mathbf{M}_k + \lambda \mathbf{E}_{2n} | \equiv \left| \begin{matrix} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + \lambda \mathbf{E}_n, & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1}, & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \lambda \mathbf{E}_n \end{matrix} \right| = 0, \tag{1.11}$$

которое после преобразования

$$\left| \begin{matrix} \mathbf{L} & 0 \\ 0 & \mathbf{C} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + \lambda \mathbf{E}_n, & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1}, & \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \lambda \mathbf{E}_n \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \mathbf{R} + \lambda \mathbf{L}, & \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n \\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n, & \mathbf{G} + \lambda \mathbf{C} \end{matrix} \right|$$

переходит в уравнение:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{R} + \lambda\,\mathbf{L}, & \frac{k\pi}{l}\,\mathbf{E}_n \\ -\frac{k\pi}{l}\,\mathbf{E}_n, & \mathbf{G} + \lambda\,\mathbf{C} \end{vmatrix} = 0. \tag{1.12}$$

Уравнение (1.11), а также и (1.12) мы будем называть *характеристическим уравнением системы* (T). Для этого уравнения известно такое свойство [3]:

Все корни уравнения (1.12) при натуральном k имеют неположительную вещественную часть; если же по крайней мере одна из матриц $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ *является положительно определенной, то все корни этого уравнения имеют* отрицательную вещественную часть.

Отсюда следует, что все характеристические числа матрицы $\mathbf{M}_k$ имеют неотрицательную вещественную часть; если же $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ является положительно определенной матрицей, то все характеристические числа матрицы $\mathbf{M}_k$ имеют положительную вещественную часть.

Впоследствии мы воспользуемся следующими основными формулами теории функций от матрицы [5].

Если матрица $\mathbf{X}$ обладает простыми элементарными делителями, то ее можно привести к каноническому виду с диагональной матрицей в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\,[\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n]\,\mathbf{S}^{-1},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — характеристические числа матрицы $\mathbf{X}$. В этом случае любая аналитическая функция $f(\mathbf{X})$ от этой матрицы во всей своей области существования имеет каноническое представление, тоже содержащее диагональную матрицу:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{S}\,[\,f(\xi_1),\ f(\xi_2),\ \ldots,\ f(\xi_n)]\,\mathbf{S}^{-1}. \tag{1.13}$$

Если же матрица $\mathbf{X}$ обладает кратными элементарными делителями, то ее можно привести к каноническому виду с квазидиагональной матрицей в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{S}\,[\,\mathbf{J}_{\rho_1}(\xi_1),\ \mathbf{J}_{\rho_2}(\xi_2),\ \ldots,\ \mathbf{J}_{\rho_p}(\xi_p)]\,\mathbf{S}^{-1},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ — характеристические числа матрицы $\mathbf{X}$, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ — соответствующие показатели элементарных делителей, а $J_\rho(\xi)$ означает каноническую матрицу порядка ρ:

$$\mathbf{J}_\rho(\xi) = \begin{Vmatrix} \xi & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & \xi & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & \xi & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & \xi \end{Vmatrix} \quad (\rho = 2,\ 3,\ \ldots), \tag{1.14}$$

$$\mathbf{J}_1(\xi) = \xi.$$

В этом случае любая аналитическая функция $f(\mathbf{X})$ от этой матрицы $\mathbf{X}$ во всей своей области существования имеет каноническое представление, тоже содержащее квазидиагональную матрицу:

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{S}\,[\,\mathbf{G}_{\rho_1}(f(\xi_1),\ f'(\xi_1),\ \ldots,\ f^{(\rho_1-1)}(\xi_1)),\ \ldots,$$
$$G_{\rho_p}(f(\xi_p),\ f'(\xi_p),\ \ldots,\ f^{(\rho_p-1)}(\xi_p))\,]\,\mathbf{S}^{-1}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{G}_\rho$ означает следующую матрицу порядка ρ:

$$G_\rho(f(\xi), f'(\xi), \ldots, f^{(\rho-1)}(\xi)) =$$
$$= \begin{Vmatrix} f(\xi) & 0 & 0 \ \ldots & 0 \\ \frac{1}{1!}f'(\xi) & f(\xi) & 0 \ \ldots & 0 \\ \frac{1}{2!}f''(\xi) & \frac{1}{1!}f'(\xi) & f(\xi) \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{(\rho-1)!}f^{(\rho-1)}(\xi) & \frac{1}{(\rho-2)!}f^{(\rho-2)}(\xi) & \ldots & f(\xi) \end{Vmatrix}. \tag{1.16}$$

Таким образом, если при некотором k матрица $\mathbf{M}_k$ обладает лишь простыми элементарными делителями, то показательную матрицу в формулах (1.8) при том же k можно привести по формуле (1.13) к каноническому виду с диагональной матрицей, содержащей соответствующие численные показательные функции. Из предыдущего следует невозрастание решения (1.8). Если же по крайней мере одна из матриц $\mathbf{R}$ или $\mathbf{G}$ является положительно определенной, то решение (1.8) оказывается монотонно затухающим.

Если же при некотором k матрица $\mathbf{M}_k$ обладает кратными элементарными делителями, то показательную матрицу в формулах (1.8) при том же k можно привести по формуле (1.15) к каноническому виду с квазидиагональной матрицей, содержащей, кроме численных показательных функций, также эти функции, умноженные на положительные степени t. При дополнительном предположении, что по крайней мере одна из матриц $\mathbf{G}$ или $\mathbf{R}$ является положительно определенной, мы получаем решение, представленное формулами (1.8), амплитуды которого могут вначале возрастать, но начиная с некоторого t все они затухают. Это — квази-резонансные явления, о которых упоминалось уже раньше [2].

Аналогично рассмотрим характеристические числа матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$, которая встречается в формуле (1.10). Она является произведением положительно определенной матрицы $\mathbf{L}^{-1}$ на неотрицательно определенную $\mathbf{R}$. Поэтому все характеристические числа матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ вещественны и неотрицательны. Матрицу $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ можно привести к диагональному виду ([6], замечания 1 и 2 к лемме 2).

Следовательно, показательную матрицу в формуле (1.10) можно привести к диагональному виду, содержащему соответствующие численные показательные функции. Из предыдущего следует, что решение, представленное формулой (1.10), является апериодическим и невозрастающим. При дополнительном же предположении положительной определенности матрицы $\mathbf{R}$ мы имеем апериодическое монотонно затухающее решение.

3. Наконец приступим к решению задачи 1. Решение этой задачи мы ищем в виде суммы ряда частных решений видов (1.8) и (1.10), удовлетворяющих нулевым граничным условиям (1.1):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k = \|0, \ \mathbf{E}_n\| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{matrix} \right\| \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ \mathbf{i}(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{i}_k = \frac{1}{2} e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} \mathbf{b}_0 + \|\mathbf{E}_n, \ 0\| \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} \mathbf{b}_k \\ \mathbf{a}_k \end{matrix} \right\| \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}\right\} \quad (1.17)$$

Затем мы требуем удовлетворения начальным условиям (1.2):

$$\mathbf{f}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{a}_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathbf{f}_2(x) = \frac{1}{2} \mathbf{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{b}_k \cos \frac{k\pi x}{l}. \qquad (1.18)$$

В предположении достаточно гладких матричных функций $\mathbf{f}_1(x)$ и $\mathbf{f}_2(x)$, для которых условия рассматриваются в обычной теории рядов Фурье, ряды Фурье (1.18) с матричными коэфициентами $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ сходятся, и мы имеем:

$$\mathbf{a}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \mathbf{f}_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \, dx, \quad \mathbf{b}_k = \frac{2}{l} \int_0^l \mathbf{f}_2(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx \ (k=0,1, \ldots). \quad (1.19)$$

Подстановка найденных $\mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$ в формулы (1.17) дает решение задачи. Ввиду затухания или по крайней мере невозрастания отдельных членов рядов (1.17) при возрастающем t приходится ожидать сходимость этих рядов также при $t > 0$.

§ 2. ВТОРАЯ ЗАДАЧА: К ЛЕВОМУ КОНЦУ ПУЧКА ВКЛЮЧЕНЫ ПОСТОЯННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Найти решение системы (T) *в области* (P) *при граничных условиях*

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 = \mathbf{const}, \quad \mathbf{u}(l, t) = 0 \qquad (2.1)$$

и нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad \mathbf{i}(x, 0) = 0. \qquad (2.2)$$

Замечание. Решение задачи мы получим при дополнительном предположении, что $\mathbf{R}$ и $\mathbf{G}$ положительно определенные матрицы.

1. Согласно обычному приему решение задачи мы ищем в виде сумм

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_1(x, t) + \mathbf{f}(x), \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{i}_1(x, t) + \mathbf{g}(x), \tag{2.3}$$

причем матричные функции $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$ определяем так, чтобы они удовлетворяли системе (T) и граничным условиям

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{f}(l) = 0. \tag{2.4}$$

Тогда получаем для $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$ систему уравнений

$$-\mathbf{f}'(x) = \mathbf{R}\mathbf{g}(x), \quad -\mathbf{g}'(x) = \mathbf{G}\mathbf{f}(x), \tag{2.5}$$

откуда следует уравнение

$$\mathbf{f}''(x) - \mathbf{R}\,\mathbf{G}\,\mathbf{f}(x) = 0. \tag{2.6}$$

Матрицу $\mathbf{RG}$ как произведение двух положительно определенных матриц можно привести к диагональному виду [5]

$$\mathbf{RG} = \mathbf{S}\,[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,\mathbf{S}^{-1}, \tag{2.7}$$

причем $\mu_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$. Отсюда следует решение уравнения (2.6), удовлетворяющее условиям (2.4):

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0. \tag{2.8}$$

Решение (2.8) получается следующим образом. Подставим в уравнение (2.6) выражение (2.7), после чего умножим полученное уравнение с левой стороны на $\mathbf{S}^{-1}$:

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}''(x) - [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,\mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}(x) = 0.$$

Затем введем новую переменную колонную матрицу $\mathbf{f}^*(x) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{f}(x)$, при помощи которой уравнение переписывается:

$$\mathbf{f}^{*\prime\prime}(x) - [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n]\,\mathbf{f}^*(x) = 0; \tag{2.9}$$

граничные условия (2.4) переходят в такие:

$$\mathbf{f}^*(0) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{f}^*(l) = 0. \tag{2.10}$$

Уравнение (2.9) равносильно следующей системе численных диференциальных уравнений:

$$f_\nu^{*\prime\prime}(x) - \mu_\nu f_\nu^*(x) = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{2.11}$$

причем $f_\nu^*(x)$ является элементом строки ν матрицы $f^*(x)$. Введем такое обозначение:

$$\varphi(x, \mu_\nu) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mu_\nu}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\mu_\nu}\,l}, \tag{2.12}$$

причем значение функции $\varphi(x, \mu_\nu)$ не зависит от выбора знака квадратного корня.

Тогда решение системы (2.11) при условиях (2.10) будет:

$$f_\nu^*(x) = \varphi(x, \mu_\nu)[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0]_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{2.13}$$

где $[\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0]_\nu$ означает элемент строки ν матрицы $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0$. Отсюда мы имеем

$$\mathbf{f}^*(x) = [\varphi(x, \mu_1), \ldots, \varphi(x, \mu_n)]\,\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0$$

и

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{S}\,[\varphi(x, \mu_1), \ldots, \varphi(x, \mu_n)]\,\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{2.14}$$

Наконец, ввиду формулы (1.12), из (2.14) и следует формула (2.8).

Затем из первого уравнения (2.5) получаем:

$$\mathbf{g}(x) = \mathbf{R}^{-1}\frac{\sqrt{\mathbf{RG}}\,\mathrm{ch}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\mathrm{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0 = \mathbf{G}\frac{\mathrm{ch}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\sqrt{\mathbf{RG}}\,\mathrm{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0. \tag{2.15}$$

Здесь для диференцирования матричного выражения (2.8), а также для преобразования одного матричного выражения (2.15) в другое мы пользуемся приведением этих выражений к диагональному виду по формуле (1.13).

2. *Перейдем к отысканию матричных функций* $\mathbf{u}_1(x, t)$ *и* $\mathbf{i}_1(x, t)$. Последние должны быть решением задачи I при таком частном виде матричных функций начальных условий (1.2):

$$\mathbf{f}_1(x) = -\mathbf{f}(x), \quad \mathbf{f}_2(x) = -\mathbf{g}(x).$$

Подстановкой выражений (2.8) и (2.15) в формулы (1.19) и интегрированием полученных матричных выражений посредством приведения их к диагональному виду мы получаем следующие выражения для матричных коэфициентов Фурье:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{2}{l}\frac{k\pi}{l}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0, \quad \mathbf{b}_k = -\frac{2}{l}\,\mathbf{G}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{2.16}$$

$$(k = 0, 1, \ldots)$$

При этом матрица $\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}$ существует, ибо ее можно привести к диагональному виду, пользуясь представлением (2.7) и формулой (1.13). Таким образом, мы имеем:

$$\begin{Vmatrix}\mathbf{b}_k\\ \mathbf{a}_k\end{Vmatrix} = -\frac{2}{l}\begin{Vmatrix}\mathbf{G}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0\\ \frac{k\pi}{l}\left(\mathbf{RG} + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0\end{Vmatrix} = \tag{2.17}$$

$$= -\frac{2}{l}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0.$$

Наконец, подставив выражения (2.17) в формулы (1.17) и приняв во внимание (2.3), (2.8) и (2.15), мы получаем решение задачи 2:

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{u}(x,\ t) &= \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0 - \\
&-\frac{2}{l}\left\|0,\ \mathbf{E}_n\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0,\\
\mathbf{i}(x,\ t) &= \mathbf{G}\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\mathbf{RG}}\,(l-x)}{\sqrt{\mathbf{RG}}\operatorname{sh}\sqrt{\mathbf{RG}}\,l}\,\mathbf{u}_0 - \frac{1}{l}\,e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\,\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_0 - \\
&-\frac{2}{l}\left\|\mathbf{E}_n,\ 0\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left(\mathbf{RG}+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right)^{-1}\mathbf{u}_0.
\end{aligned}\right\}\quad(2.18)$$

3. Частично рассмотрим вопрос сходимости рядов (2.18).

При $t = 0$ ряды (2.18) являются рядами Фурье матричных функций $-\mathbf{f}(x)$ и $-\mathbf{g}(x)$. Отсюда следует сходимость этих рядов ввиду непрерывности $\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{g}(x)$ и существования $\mathbf{f}'(x)$, $\mathbf{g}'(x)$ [7].

Если рассматривать $\mathbf{f}(x)$ на отрезке $[-l,\ l]$ как нечетную функцию, разложенную в ряд Фурье по синусам, то на этом отрезке $\mathbf{f}(x)$ непрерывна, кроме точки $x = 0$ в тех строках колонной матрицы $\mathbf{f}(x)$, в которых элемент матрицы $\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0$ не равен нулю. Следовательно, элементы общего коэфициента Фурье матричной функции $\mathbf{f}(x)$ являются величинами выше первого порядка относительно $1/k$ при $k \to \infty$, кроме тех строк, в которых элементы матрицы $\mathbf{f}(0) = \mathbf{u}_0$ не равны нулю и в которых элементы общего коэфициента Фурье матричной функции $\mathbf{f}(x)$ являются величинами первого порядка относительно $1/k$ при $k \to \infty$ [7].

Если же рассматривать $\mathbf{g}(x)$ на отрезке $[-l,\ l]$ как четную функцию, разложенную в ряд Фурье по косинусам, то на этом отрезке $\mathbf{g}(x)$ непрерывна без исключений. Следовательно, элементы общего матричного коэфициента Фурье матричной функции $\mathbf{g}(x)$ являются величинами не ниже второго порядка относительно $1/k$ при $k \to \infty$.

Как первый, так и второй ряд (2.18) содержат коэфициенты Фурье обеих матричных функций $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$. Поэтому коэфициенты рядов (2.18) являются величинами не ниже первого порядка относительно $1/k$ при $k \to \infty$.

Кроме того, ввиду затухания отдельных членов рядов (2.18) при возрастающем t и сходимости этих рядов при $t=0$ приходится ожидать сходимость рядов (2.18) также при $t>0$.

4. На практике можно пользоваться формулами (2.18) следующим образом. Матрицы $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{RG}$ и $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ надо привести к каноническому виду, после чего надо представить в каноническом виде также все встречаемые функции от этих матриц, пользуясь формулами (1.13) и (1.15). Затем следует выписать из формул (2.18) численные равенства, соответствующие отдельным элементам матриц $\mathbf{u}(x, t)$ и $\mathbf{i}(x, t)$.

§3. ТРЕТЬЯ ЗАДАЧА: К ЛЕВОМУ КОНЦУ ПУЧКА ВКЛЮЧЕНЫ СИНУСОИДАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Найти решение системы (T) *в области* (P) *при граничных условиях*

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{u}(l, t) = 0 \tag{3.1}$$

и нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad \mathbf{i}(x, 0) = 0. \tag{3.2}$$

(При этом мы предполагаем, что $\mathbf{u}_0$ — постоянная комплексная колонная матрица, а ω — постоянное вещественное или комплексное число.)

1. Решение задачи мы ищем в таком виде:

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_1(x, t) + \mathbf{f}(x) e^{i\omega t}, \quad \mathbf{i}(x, t) = \mathbf{i}_1(x, t) + \mathbf{g}(x) e^{i\omega t}, \tag{3.3}$$

причем $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$ определяем так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (2.4) и после умножения на $e^{i\omega t}$ также системе (T).

Тогда мы получаем для $\mathbf{f}(x)$ и $\mathbf{g}(x)$ систему уравнений

$$-\mathbf{f}'(x) = (\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})\mathbf{g}(x), \quad -\mathbf{g}'(x) = (\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})\mathbf{f}(x), \tag{3.4}$$

откуда следует уравнение

$$\mathbf{f}''(x) - (\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})\mathbf{f}(x) = 0. \tag{3.5}$$

Решение этого уравнения (3.5) при граничных условиях (2.4) получается такое:

$$\mathbf{f}(x) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\,l}\,\mathbf{u}_0. \tag{3.6}$$

Замечание. Обозначим характеристические числа матрицы

$$(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}) \tag{3.7}$$

через $\mu_\nu(\omega)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Для возможности получения формулы (3.6) дополнительно предположим, что удовлетворено условие разрешимости

$$\mu_\nu(\omega) \neq -\frac{k^2\pi^2}{l^2} \quad (\nu = 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3.8}$$

Для тех значений ω, при которых матрицу (3.7) можно привести к диагональному виду, мы получаем подобно предыдущему параграфу формулу (3.6).

Для значений же ω, при которых матрицу (3.7) нельзя привести к диагональному виду, т. е. при которых эта матрица обладает кратными элементарными делителями, выражение (3.6) все же остается решением уравнения (3.5) при тех же граничных условиях (2.4). В правильности этого утверждения убеждаемся следующим путем.

Как известно, матрицу (3.7) в данном случае можно привести к каноническому виду

$$(\mathbf{R} + i\,\omega\,\mathbf{L})\;(\mathbf{G} + i\,\omega\,\mathbf{C}) = \mathbf{S}(\omega)\,[\mathrm{J}_{\rho_1}(\mu_1(\omega)),\;\ldots,\;\mathrm{J}_{\rho_p}(\mu_p(\omega))]\,\mathbf{S}^{-1}(\omega), \tag{3.9}$$

где $\mu_1(\omega),\;\ldots,\;\mu_p(\omega)$ — характеристические числа матрицы (3.7), $\rho_1,\;\ldots,\;\rho_p$ — соответствующие показатели элементарных делителей, а J_ρ определено формулой (1.14).

Подставим в уравнение (3.5) выражение (3.9), после чего умножим полученное уравнение с левой стороны на $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$ и введем новую переменную колонную матрицу $\mathbf{f}^*(x) = \mathbf{S}^{-1}(\omega)\,\mathbf{f}(x)$. Тогда уравнение (3.5) переходит в такое:

$$\mathbf{f}^{*\prime\prime}(x) - [\mathrm{J}_{\rho_1}(\mu_1(\omega)),\;\ldots,\;\mathrm{J}_{\rho_p}(\mu_p(\omega))]\,\mathbf{f}^*(x) = 0, \tag{3.10}$$

а граничные условия переходят в (2.10).

Выписав систему численных диференциальных уравнений, равносильную матричному уравнению (3.10), и затем решив ее при граничных условиях (2.10), оказывается возможным представить решение в таком матричном виде:

$$\mathbf{f}^*(x) = \left[\mathrm{G}_{\rho_1}\left(\varphi(x, \mu_1),\; \frac{\partial\,\varphi(x,\,\mu_1)}{\partial\,\mu},\;\ldots,\; \frac{\partial^{\rho_1 - 1}\,\varphi(x,\mu_1)}{\partial\,\mu^{\rho_1 - 1}}\right),\;\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\;\mathrm{G}_{\rho_p}\left(\varphi\,(x,\,\mu_p),\; \frac{\partial\,\varphi\,(x,\,\mu_p)}{\partial\,\mu},\;\ldots,\; \frac{\partial^{\,\rho_p - 1}\,\varphi\,(x,\mu_p)}{\partial\,\mu^{\rho_p} - 1}\right)\right]\mathbf{S}^{-1}(\omega)\,\mathbf{u}_0, \tag{3.11}$$

где $\varphi\,(x,\,\mu)$ означает выражение (2.12), а G_ρ определено формулой (1.16).

Отсюда мы имеем $\mathbf{f}(x) = \mathbf{S}(\omega)\,\mathbf{f}^*(x)$ и, наконец, согласно формуле (1.15), получаем (3.6).

Затем из первого уравнения (3.4) имеем

$$\mathbf{g}(x) = (\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})^{-1}\,\frac{\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})\,(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\,\mathrm{ch}\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})\,(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\,(l - x)}{\mathrm{sh}\sqrt{(\mathbf{R} + i\,\omega\,\mathbf{L})\;(\mathbf{G} + i\,\omega\,\mathbf{C})}\,l}\,\mathbf{u}_0 =$$

$$= (\mathbf{G} + i\,\omega\,\mathbf{C})\,\frac{\mathrm{ch}\sqrt{(\mathbf{R} + i\,\omega\,\mathbf{L})\;(\mathbf{G} + i\,\omega\,\mathbf{C})}\,(l - x)}{\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})\,(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\;\mathrm{sh}\sqrt{(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C})}\;l}\,\mathbf{u}_0, \tag{3.12}$$

причем формула (3.12) справедлива как при простых, так и при кратных элементарных делителях матрицы (3.7), в чем легко убедиться при помощи приведения этой матрицы к каноническому виду и использования формул (1.13) и (1.15). (По вопросу существования матрицы $(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})^{-1}$, т. е. неравенства нулю детерминанта $|\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L}|$, имеется положительный ответ далее в п. 4.)

3. Перейдем к отысканию матричных функций $\mathbf{u}_1(x,t)$ и $\mathbf{i}_1(x,t)$. Последние должны быть решением задачи 1 при таком частном виде матричных функций начальных условий (1.2): $\mathbf{f}_1(x) = -\mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}_2(x) = -\mathbf{g}(x)$.

Подстановкой выражений (3.6) и (3.12) в формулы (1.19) и интегрированием полученных матричных выражений посредством приведения их к каноническому виду мы получаем следующие выражения для матричных коэфициентов Фурье:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{2}{l}\frac{k\pi}{l}\left[(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C}) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right]^{-1}\mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{b}_k = -\frac{2}{l}(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})\left[(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C}) + \frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right]^{-1}\mathbf{u}_0. \qquad (3.13)$$

$$(k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

При этом матрица квадратных скобок в степени -1 существует ввиду условия (3.8).

Затем, подставив выражения (3.13) в формулы (1.17) и приняв во внимание (3.3), (3.6) и (3.12), после некоторых преобразований получаем р е ш е н и е з а д а ч и 3:

$$\mathbf{u}(x,t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})}\,(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})}\,l}\mathbf{u}_0 e^{i\omega t} - \qquad (3.14_1)$$

$$-\frac{2}{l}\left\|0,\mathbf{E}_n\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi x}{l}e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left[(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right]^{-1}\mathbf{u}_0,$$

$$\mathbf{i}(x,t) = (\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})\frac{\operatorname{ch}\sqrt{(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})}\,(l-x)}{\sqrt{(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})}\operatorname{sh}\sqrt{(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})}\,l}\mathbf{u}_0 e^{i\omega t} -$$

$$-\frac{1}{l}e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{u}_0 - \qquad (3.14_2)$$

$$-\frac{2}{l}\left\|\mathbf{E}_n,0\right\|\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{k\pi x}{l}e^{-\mathbf{M}_k t}\left\|\begin{matrix}\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C}\\ \frac{k\pi}{l}\mathbf{E}_n\end{matrix}\right\|\left[(\mathbf{R}+i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G}+i\omega\mathbf{C})+\frac{k^2\pi^2}{l^2}\mathbf{E}_n\right]^{-1}\mathbf{u}_0.$$

Вопрос сходимости рядов (3.14), а также и способ употребления формул (3.14) на практике можно рассмотреть подобно § 2 п. 4. Впрочем, при граничном условии $\mathbf{u}(0,\ t) = \mathbf{u}_0 \cos\omega t$ надо взять вещественные части выражений (3.14).

4. Рассмотрим подробнее условие разрешимости (3.8). Это условие означает, что характеристические числа матрицы (3.7), т. е. корни уравнения

$$|(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}) - \mathbf{E}_n\mu| = 0,$$

не равны числам $-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ или же детерминант

$$\left|(\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L})(\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\mathbf{E}_n\right| \tag{3.15}$$

не равен нулю при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Убедимся в том, что детерминант (3.15) не равен нулю для $k = 0$, т. е. *условие* (3. 8) *при* $k = 0$ *удовлетворено, при дополнительном предположении неравенства нулю вещественной части* ω. Именно, матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G}$ приводимы к диагональному виду и все их характеристические числа вещественны и неотрицательны (§ 1, п. 2). Тогда матрицы $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega\mathbf{E}_n$ тоже приводимы к диагональному виду, причём мнимая часть у всех характеристических чисел этих матриц не равна нулю. Поэтому детерминанты $|\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega\mathbf{E}_n|$ и $|\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega\mathbf{E}_n|$ не равны нулю. Ввиду равенств между детерминантами

$$|\mathbf{L}||\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega\mathbf{E}_n| = |\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L}|, \quad |\mathbf{C}||\mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega\mathbf{E}_n| = |\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}|$$

и неравенства нулю детерминантов $|\mathbf{L}|$ и $|\mathbf{C}|$ следует неравенство нулю детерминантов $|\mathbf{R} + i\omega\mathbf{L}|$ и $|\mathbf{G} + i\omega\mathbf{C}|$ и, наконец, также детерминанта (3.15) при $k = 0$.

Для остальных же значений k $(k = 1, 2, \ldots)$ рассмотрим характеристическое уравнение (1.12) системы (T), которое преобразуем. Именно, переменим знаки на обратные у последних n строк детерминанта (1.12) и затем применим известную лемму [6], преобразующую детерминант порядка $2n$ в детерминант порядка n. Таким образом, мы получаем:

$$\left|-(\mathbf{R} + \lambda\mathbf{L})(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{C}) - \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\mathbf{E}_n\right| = 0,$$

или, наконец,

$$\left|(\mathbf{R} + \lambda\mathbf{L})(\mathbf{G} + \lambda\mathbf{C}) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\mathbf{E}_n\right| = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3.16}$$

Тогда *условие* (3.8) *при* $k = 1, 2, \ldots$ *означает, что* $i\omega$ *не должно быть корнем характеристического уравнения системы* (T) *при* $k = 1, 2, \ldots$, имеющего вид (1.11), или (1.12), или (3.16).

Назовем корни характеристического уравнения системы (T) при $k = 1, 2, \ldots$ *собственными комплексными частотами* рассматриваемого пучка проводов при этих k. Тогда сравнивание формул (3.15) с (3.16) приводит нас к выводу, что вышеуказанное условие (3.8) при $k = 1, 2, \ldots$ равносильно следующему:

Частота внешней электродвижущей силы, умноженная на мнимую единицу i, не должна быть равна ни одной из собственных комплексных частот рассматриваемого пучка проводов при $k = 1, 2, \ldots$

Впрочем, это условие всегда удовлетворено при вещественной частоте ω внешней электродвижущей силы, если по крайней мере одна из матриц $\mathbf{R}$ или $\mathbf{G}$ является положительно определенной матрицей. Именно, в таком случае $i\omega$ чисто мнимо, зато все корни характеристического уравнения системы (T) обладают отрицательной вещественной частью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравним решения задач 1 и 2, рассмотренные в настоящей работе, с решениями тех же задач, полученными раньше [1, 2]. Из теоремы единственности решения смешанной задачи обобщенной системы телеграфных уравнений [3], примененной к k-ым членам рядов (1.16) и (2.18), следует, что эти члены тождественно равны суммам соответствующих $2n$ членов при том же k в рядах ранее полученных решений тех же задач.

После приведения показательных матриц в членах рядов (1.16) и (2.18) к каноническому виду мы убеждаемся, что как выражения новых решений задач, рассмотренные в настоящей работе, так и выражения раньше полученных решений при одинаковом k содержат те же самые численные показательные функции.

Уточняя полученные раньше результаты, отметим ещё, что квазирезонансные явления § 1 п. 2 невозможны при таких кратных характеристических числах матрицы M_k, т. е. при таких кратных корнях характеристического уравнения системы (T), которым соответствуют простые элементарные делители матрицы M_k. Такое следствие не удавалось получить из известных ранее решений рассмотренных задач.

Кафедра общей математики
Август 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А., Об электромагнитных процессах в пучке однопроводных линий, „Известия Академии наук ЛССР“, № 5, 1949, стр. 125 — 132.

2. Бразма Н. А., Решение основной задачи распространения электромагнитных процессов в многопроводной системе, „Доклады Академии наук СССР“, LXIX : 3, 1949, стр. 313 — 316.

3. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д., Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета“, том VI, 1952, стр. 61 — 68.

4. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III_2, Ленинград-Москва, 1949, стр. 325 — 340.

5. Лаппо-Данилевский И. А., Теория функций от матриц и системы линейных диференциальных уравнений, Ленинград-Москва, 1934, стр. 29—41.

6. Бразма Н. А., Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета“, том VI, 1952, стр. 69 — 73.

7. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. II, Ленинград-Москва, 1948, стр. 430 — 457.

О РЕЗОНАНСНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В ПУЧКЕ ПРОВОДОВ

Н. А. Бразма и В. Э. Аболиня

В работе [1] рассмотрено решение обобщенной системы телеграфных уравнений при граничном условии, которое соответствует распространению электромагнитного процесса в пучке проводов под влиянием непосредственно включенных в одном конце пучка синусоидальных электродвижущих сил. Это решение справедливо при некотором ограничении, требующем несовпадения частоты внешней электродвижущей силы с собственными частотами рассматриваемого пучка проводов.

Цель настоящей работы — получить решение той же задачи для исключительного случая совпадения частоты внешней электродвижущей силы с некоторой собственной частотой пучка проводов. В этом случае решение задачи интерпретируется в виде резонансного явления в пучке проводов. При этом применяется видоизмененный прием решения обобщенной системы телеграфных уравнений, который заключается в отщеплении линейного процесса напряжений в пучке проводов, вместо отщепления установившегося процесса в работе [1].

§ 1

Мы будем рассматривать обобщенную систему телеграфных уравнений

$$-\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t}, \quad -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \tag{1.1}$$

в предположениях, указанных в введении к работе [1].

Будем искать решение $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{i} = \mathbf{i}(x, t)$ системы (1.1) для значений аргументов

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty \quad (0 < l < \infty)$$

при граничных условиях

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{u}(l, t) = 0 \tag{1.2}$$

и нулевых начальных условиях

$$\mathbf{u}(x, 0) = 0, \quad \mathbf{i}(x, 0) = 0. \tag{1.3}$$

При этом $\mathbf{u}_0$ — постоянная комплексная колонная матрица, а ω — постоянное вещественное или комплексное число.

Матричную функцию $\mathbf{u}(x, t)$ мы будем искать в виде суммы

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{v}(x, t) + \left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{i\omega t}\, \mathbf{u}_0, \tag{1.4}$$

выражающей отщепление линейного процесса напряжений в пучке проводов. После этого искомые матричные функции $\mathbf{v}(x, t)$ и $\mathbf{i}(x, t)$ должны быть решением неоднородной системы обобщенных телеграфных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} &= \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - \frac{1}{l} e^{i\omega t}\, \mathbf{u}_0, \\ -\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial x} &= \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{C}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(1 - \frac{x}{l}\right) e^{i\omega t} (\mathbf{G} + i\omega\, \mathbf{C})\, \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

при нулевых граничных условиях

$$\mathbf{v}(0, t) = 0, \quad \mathbf{v}(l, t) = 0 \tag{1.6}$$

и начальных условиях

$$\mathbf{v}(x, 0) = -\left(1 - \frac{x}{l}\right) \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{i}(x, 0) = 0. \tag{1.7}$$

Следуя обычному приему, решение системы (1.5) мы будем искать, в свою очередь, в виде сумм

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{i} = \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2, \tag{1.8}$$

причем от $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{i}_1$ мы будем требовать удовлетворения однородной системе уравнений (1.1) при нулевых граничных условиях (1.6) и начальных условиях (1.7). Тогда $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{i}_2$ должно быть решением неоднородной системы уравнений (1.5) при нулевых граничных условиях (1.6) и нулевых начальных условиях (1.3).

Для матричных функций $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{i}_1$ мы получаем выражения [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(x, t) &= -\left\| 0\ \mathbf{E}_n \right\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ \mathbf{i}_1(x, t) &= -\left\| \mathbf{E}_n\ 0 \right\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} e^{-\mathbf{M}_k t} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \cos \frac{k\pi x}{l}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

где в выражении прямоугольной матрицы $\mathbf{E}_n$ обозначает единичную матрицу порядка n, а 0 — квадратную матрицу порядка n, состоящую из одних нулей. Матрица $\mathbf{M}_k$ же имеет выражение:

$$\mathbf{M}_k = \left\| \begin{matrix} \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{R} & \frac{k\pi}{l}\mathbf{L}^{-1} \\ -\frac{k\pi}{l}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}^{-1}\,\mathbf{G} \end{matrix} \right\|.$$

Матричные функции $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{i}_2$ мы будем искать в виде рядов

$$\mathbf{v}_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{r}_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \mathbf{i}_2(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{s}_k(t) \cos \frac{k\pi x}{l} \tag{1.10}$$

Формально продиференцируем ряды (1.10) почленно по x и t и подставим их в систему (1.5). Кроме того, примем во внимание разложение

$$1 - \frac{x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (0 < x \leqslant l).$$

Тогда оказывается, что матричные коэфициенты $\mathbf{r}_k(t)$ и $\mathbf{s}_k(t)$ рядов (1.10) удовлетворяют следующему матричному диференциальному уравнению (при $k \geqslant 1$):

$$\frac{d}{dt} \begin{Vmatrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{Vmatrix} + \mathbf{M}_k \begin{Vmatrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{Vmatrix} = -\frac{2}{k\pi} e^{i\omega t} \begin{Vmatrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{Vmatrix} \mathbf{u}_0, \tag{1.11}$$

а $\mathbf{s}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{s}_0}{dt} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}\,\mathbf{s}_0 = \frac{1}{l} e^{i\omega t} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{1.12}$$

Из нулевых начальных условий для матричных функций $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{i}_2$ следует

$$\mathbf{r}_k(0) = 0, \quad \mathbf{s}_k(0) = 0. \tag{1.13}$$

Общее решение неоднородного уравнения (1.11) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения (1.11). Решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \sigma_k \\ \rho_k \end{Vmatrix} = e^{-\mathbf{M}_k t} \begin{Vmatrix} \mathfrak{b}_k \\ \mathfrak{a}_k \end{Vmatrix} \tag{1.14}$$

с произвольными колонными матрицами $\mathfrak{a}_k$ и $\mathfrak{b}_k$, каждая из которых состоит из n элементов.

Частное решение неоднородного уравнения (1.11) мы будем искать в виде

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{s}_k^* \\ \mathbf{r}_k^* \end{Vmatrix} = e^{i\omega t} \begin{Vmatrix} \mathbf{d}_k \\ \mathbf{c}_k \end{Vmatrix},$$

где $\mathbf{c}_k$ и $\mathbf{d}_k$ — пока неизвестные постоянные колонные матрицы. Подстановкой этого выражения в уравнение (1.11) выясняются выражения матриц $\mathbf{c}_k$ и $\mathbf{d}_k$, и частное решение уравнения (1.11) приобретает такой вид:

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{s}_k^* \\ \mathbf{r}_k^* \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} e^{i\omega t} (\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n})^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0, \quad (1.15)$$

где $\mathbf{E}_{2n}$ — единичная матрица порядка $2n$. Очевидно, решение (1.15) справедливо в предположении, что матрица $\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n}$ неособая.

Общее решение уравнения (1.11) получается в виде суммы выражений (1.14) и (1.15). Частное же решение этого уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям (1.13), приобретает такой вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \frac{2}{k\pi} \| 0\, \mathbf{E}_n \| \left(e^{-\mathbf{M}_k t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_{2n} \right) (\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n})^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0, \\ \mathbf{s}_k &= \frac{2}{k\pi} \| \mathbf{E}_n\, 0 \| \left(e^{-\mathbf{M}_k t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_{2n} \right) (\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n})^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Подобным образом мы получаем следующее решение уравнения (1.12) при условии (1.13):

$$\mathbf{s}_0 = -\frac{1}{l} \left(e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_n \right) (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega \mathbf{E}_n)^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_0. \quad (1.17)$$

Впрочем, здесь матрица $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega \mathbf{E}_n$ не является особой, т. е. детерминант $|\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega \mathbf{E}_n|$ не равен нулю при дополнительном предположении неравенства нулю вещественной части ω [1, § 3, п. 4].

Подстановкой выражений (1.16) и (1.17) в формулы (1.10) мы получаем матричные функции $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{i}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2(x, t) &= \| 0\, \mathbf{E}_n \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left(e^{-\mathbf{M}_k t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_{2n} \right) (\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n})^{-1} \times \\ &\quad \times \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \sin \frac{k\pi x}{l}, \\ \mathbf{i}_2(x, t) &= -\frac{1}{l} \left(e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_n \right) (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + i\omega \mathbf{E}_n)^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_0 + \\ &\quad + \| \mathbf{E}_n\, 0 \| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \left(e^{-\mathbf{M}_k t} - e^{i\omega t} \mathbf{E}_{2n} \right) (\mathbf{M}_k + i\omega \mathbf{E}_{2n})^{-1} \times \\ &\quad \times \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \cos \frac{k\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Подставив затем выражения (1.9) и (1.18) в формулы (1.8) и приняв во внимание (1.4), мы получаем решение задачи. Это решение справедливо при следующих предположениях:

а) матрица $\mathbf{M}_k + i\omega E_{2n}$ неособая;

б) вещественная часть ω не равна нулю.

Здесь предположение а) равносильно условию неравенства нулю детерминанта $|\mathbf{M}_k + i\omega\, \mathbf{E}_{2n}|$ или же предположению, что $i\omega$ не является корнем характеристического уравнения обобщенной системы телеграфных уравнений (1.1) при любом натуральном k [1]. Физически это предположение равносильно следующему: частота внешней электродвижущей силы, умноженная на мнимую единицу i, не должна быть равна ни одной из собственных комплексных частот рассматриваемого пучка проводов при $k = 1, 2, \ldots$ [1].

§ 2

Рассмотрим случай, когда матрица $\mathbf{M}_k + i\omega\, \mathbf{E}_{2n}$ является особой.

Вначале предположим, что $i\omega$ — простой корень характеристического уравнения

$$\Delta_k(\lambda) \equiv |\mathbf{M}_k + \lambda\ \mathbf{E}_{2n}| = 0 \tag{2.1}$$

обобщенной системы телеграфных уравнений при некотором k ($k = 1, 2, \ldots$).

Вместо уравнения (1.11), воспользуемся уравнением

$$\frac{d}{dt}\left\| \begin{matrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{matrix} \right\| + \mathbf{M}_k \left\| \begin{matrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} e^{\mu t} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mu\, \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \tag{2.2}$$

в предположении, что $\Delta_k(\mu) \neq 0$. Уравнение (2.2) имеет частное решение

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{s}_k^* \\ \mathbf{r}_k^* \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} e^{\mu t} (\mathbf{M}_k + \mu\, \mathbf{E}_{2n})^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mu\, \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 =$$

$$= -\frac{2}{k\pi} e^{\mu t} \frac{1}{\Delta_k(\mu)} \mathbf{A}_k(\mu) \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mu\, \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0,$$

причем $\mathbf{A}_k(\mu)$ — квадратная матрица порядка $2n$, элементы которой являются соответствующими адъюнктами транспонированной матрицы $(\mathbf{M}_k + \mu\, \mathbf{E}_{2n})'$.

Из равенства

$$\mathbf{A}_k(\mu)(\mathbf{M}_k + \mu\, \mathbf{E}_{2n}) = (\mathbf{M}_k + \mu\, \mathbf{E}_{2n})\, \mathbf{A}_k(\mu) = \mathbf{E}_{2n}\Delta_k(\mu) \tag{2.3}$$

следует, что выражение

$$\left\| \begin{matrix} \sigma_k^* \\ \rho_k^* \end{matrix} \right\| = e^{i\omega t}\, \mathbf{A}_k(i\omega) \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mu\, \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0$$

при $\Delta_k(i\omega) = 0$ является некоторым решением однородного матричного диференциального уравнения, соответствующего неоднородному уравнению (2.2). Поэтому выражение

$$\left\| \begin{matrix} \bar{\mathbf{s}}_k \\ \bar{\mathbf{r}}_k \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} \frac{1}{\Delta_k(\mu)} \left[e^{\mu t} \mathbf{A}_k(\mu) - e^{i\omega t} \mathbf{A}_k(i\omega) \right] \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + \mu \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \quad (2.4)$$

оказывается новым частным решением неоднородного уравнения (2.2).

Совершим предельный переход $\mu \to i\omega$ в выражении (2.4) и получим

$$\left\| \begin{matrix} \bar{\mathbf{s}}_k \\ \bar{\mathbf{r}}_k \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} \frac{1}{\Delta_k'(i\omega)} \left[\frac{\partial}{\partial\mu} \left(e^{\mu t} \mathbf{A}_k(\mu) \right) \right]_{\mu = i\omega} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0. \quad (2.5)$$

Подстановкой выражения (2.5) в уравнение (1.11) легко убедиться в том, что матричная функция (2.5) является решением этого уравнения (1.11) в предположении $\Delta_k(i\omega) = 0$ и $\Delta_k'(i\omega) \neq 0$, т. е. в предположении, что $i\omega$ является простым корнем характеристического уравнения обобщенной системы телеграфных уравнений при соответствующем k.

Если же мы имеем

$$\Delta_k(i\omega) = \Delta_k'(i\omega) = \ldots = \Delta_k^{p-1}(i\omega) = 0, \quad \Delta_k^{(p)}(i\omega) \neq 0, \quad (1 \leqslant p \leqslant 2n),$$

т. е. $i\omega$ является корнем кратности p характеристического уравнения обобщенной системы телеграфных уравнений при некотором k, то уравнение (1.11) имеет следующее частное решение при том же k:

$$\left\| \begin{matrix} \bar{s}_k \\ \bar{r}_k \end{matrix} \right\| = -\frac{2}{k\pi} \frac{1}{\Delta_k^{(p)}(i\omega)} \left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p} (e^{\mu t} \mathbf{A}_k(\mu)) \right]_{\mu = i\omega} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0. \quad (2.6)$$

В справедливости этого утверждения убеждаемся, пользуясь равенством

$$\frac{d^p}{d\mu^p} [\mathbf{A}_k(\mu)(\mathbf{M}_k + \mu \mathbf{E}_{2n})] = \frac{d^p}{d\mu^p} [(\mathbf{M}_k + \mu \mathbf{E}_{2n}) \mathbf{A}_k(\mu)] = \mathbf{E}_{2n} \Delta_k^{(p)}(\mu), \quad (2.7)$$

которое следует из равенства (2.3).

Затем получаем обычным путем частное решение уравнения (1.11) при том же k, удовлетворяющее нулевым начальным условиям (1.13):

$$\left\| \begin{matrix} \mathbf{s}_k \\ \mathbf{r}_k \end{matrix} \right\| = \frac{2}{k\pi} \frac{1}{\Delta_k^{(p)}(i\omega)} \left[e^{-\mathbf{M}_k t} \frac{d^p \mathbf{A}_k(\mu)}{d\mu^p} - \frac{\partial^p}{\partial\mu^p} (e^{\mu t} \mathbf{A}_k(\mu)) \right]_{\mu = i\omega} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \mathbf{C}^{-1}\mathbf{G} + i\omega \mathbf{E}_n \end{matrix} \right\| \mathbf{u}_0 \quad (2.8)$$

Подобным образом убеждаемся в том, что матричная функция

$$\bar{\mathbf{s}}_0 = \frac{1}{l} \frac{1}{\Delta_0^{(p)}(i\omega)} \left[\frac{\partial^p}{\partial\mu^p} (e^{\mu t} \mathbf{A}_0(\mu)) \right]_{\mu = i\omega} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (2.9)$$

является частным решением уравнения (1.12), если $i\omega$ — корень кратности p $(1 \leqslant p \leqslant n)$ уравнения

$$\Delta_0(\lambda) \equiv |\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R} + \lambda\mathbf{E}_n| = 0. \tag{2.10}$$

Для этого случая получаем еще частное решение уравнения (1.12), удовлетворяющее нулевому начальному условию (1.13):

$$\mathbf{s}_0 = -\frac{1}{t}\frac{1}{\Delta_0^{(p)}(i\omega)}\left[e^{-\mathbf{L}^{-1}\mathbf{R}t}\frac{d^p\mathbf{A}_0(\mu)}{d\mu^p} - \frac{\partial^p}{\partial\mu^p}(e^{\mu t}\mathbf{A}_0(\mu))\right]_{\mu=i\omega}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{u}_0. \tag{2.11}$$

Уравнение (2.10) будем называть **характеристическим уравнением обобщенной системы телеграфных уравнений** (1.1) **для** $k=0$.

Заменим в тех членах рядов (1.10), для которых $i\omega$ является корнем некоторой кратности p характеристического уравнения системы (1.1), обычные выражения коэфициентов $\mathbf{r}_k$, $\mathbf{s}_k$ выражениями (2.8) и (2.11). Таким образом получаем матричные функции $\mathbf{v}_2(x, t)$, $\mathbf{i}_2(x, t)$ для общего случая, когда $i\omega$ является корнем характеристического уравнения обобщенной системы телеграфных уравнений (1.1) при некотором k.

Наконец получаем обычным путем решение задачи, подставив новые выражения рядов (1.18) и выражения (1.9) в формулы (1.8) и приняв во внимание (1.4).

Физическое истолкование. При совпадении частоты внешней электродвижущей силы с некоторой собственной комплексной частотой пучка проводов, т. е. в случае равенства $i\omega$ корню характеристического уравнения (2.1) или (2.10) системы (1.1) при некотором k, имеет место **резонансное явление**. В этом случае соответствующее выражение (2.8) или (2.11), входящее в некоторые члены матричных рядов решения задачи, содержит линейным образом многочлен относительно t некоторой степени p, умноженный на $e^{i\omega t}$. Значение этого многочлена неограниченно возрастает при неограниченном возрастании t.

При вещественной частоте ω $(\omega \neq 0)$ внешней электродвижущей силы, т. е. при чисто синусоидальной внешней электродвижущей силе, соответствующее выражение (2.8) представляет колебательный процесс напряжений и сил токов в проводах пучка, обладающий неограниченно возрастающей амплитудой при возрастании t.*. Однако такое возрастание невозможно, если по крайней мере одна из матриц $\mathbf{R}$ или $\mathbf{G}$ положительно определенная, ибо в этом случае все корни характеристического уравнения (2.1) системы (1.1) обладают отрицательной вещественной частью [1, 2], и поэтому $i\omega$ не может быть корнем характеристического уравнения системы (1.1).

Рассмотренное неограниченное возрастание напряжений и сил токов, соответствующее выражению (2.8), может иметь место в предельном

*) Выражение (2.11) в этом случае излишне, ибо $i\omega$ не может быть корнем уравнения (2.10) (§ 1).

случае, когда $\mathbf{R} = \mathbf{G} = 0$, ибо в этом случае все корни характеристического уравнения (2.1) системы (1.1) чисто мнимы [3].

Рассмотрим теперь случай комплексной частоты ω внешней электродвижущей силы в предположении, что мнимая ее часть не аннулируется. В этом случае $i\omega$, будучи корнем характеристического уравнения системы (1.1), должна обладать отрицательной вещественной частью, и поэтому мнимая часть от ω должна быть положительной. При этом произведение вышеуказанного многочлена относительно t степени p на $e^{i\omega t}$ может иметь вначале возрастающие значения, однако, начиная с достаточно большого t, значения этого произведения убывают по модулю, неограниченно приближаясь к нулю. Такое возрастание вначале и последующее убывание с неограниченным приближением к нулю относится также к напряжениям и силам токов в проводах пучка. Внешняя же электродвижущая сила в этом случае монотонно убывает с самого начального момента времени $t = 0$.

Кафедра общей математики
Ноябрь 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бразма Н. А., Решение основных задач обобщенной системы телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 79—92.

2. Бразма Н. А. и Мышкис А. Д., Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 61—68.

3. Бразма Н. А., Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 69—73.

ОБ УСЛОВИЯХ РАСЩЕПЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕГРАФНЫХ УРАВНЕНИЙ

Э. Я. Риекстыньш

Будем рассматривать обобщенную систему телеграфных уравнений в матричном виде [1]:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{u} &= \mathbf{R}\mathbf{i} + \mathbf{L}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i} \\ -\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} &= \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{C}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1}$$

где обозначено:

$$\mathbf{u} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{Vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{Vmatrix} L_1 & M_{12} & \ldots & M_{1n} \\ M_{12} & L_2 & \ldots & M_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ M_{1n} & M_{2n} & \ldots & L_n \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{Vmatrix} C_1 & -C_{12} & \ldots & -C_{1n} \\ -C_{12} & C_2 & \ldots & -C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -C_{1n} & -C_{2n} & \ldots & C_n \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G_1 & -G_{12} & \ldots & -G_{1n} \\ -G_{12} & G_2 & \ldots & -G_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -G_{1n} & -G_{2n} & \ldots & G_n \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R_n \end{Vmatrix}.$$

Одним из методов решения этой системы является метод расщепления, который применен для исследования телеграфных уравнений В. И. Коваленковым [2, 3, 4, 5]. Основную идею этого метода можно выразить посредством матриц следующим образом: вместо неизвестных матриц $\mathbf{u}$ и $\mathbf{i}$, введем при помощи линейного преобразования новые колонные матрицы так, чтобы система (1) расщеплялась на n обыкновенных систем телеграфных уравнений, которые решаются затем известными методами.

Однако оказывается, что в общем случае такое расщепление невозможно. Оно возможно лишь при наличии некоторых соотношений между первичными параметрами проводов. Условия расщепления для случая двух проводов установлены впервые В. И. Коваленковым [3, 4]. Настоящая работа посвящена условиям расщепления для общего случая любого числа n проводов.

1°. Вначале мы рассмотрим две теоремы, которые являются основными для настоящего исследования. При доказательстве первой теоремы воспользуемся тремя леммами.

Определение 1. Структурой квазидиагональной матрицы будем называть совокупность тех чисел, которые указывают порядки отдельных диагональных клеток, считая слева направо.

Впрочем, можно объединить некоторые клетки квазидиагональной матрицы и считать их одной диагональной клеткой. Поэтому структура не определяется однозначно. Структуру диагональной же матрицы мы можем выбрать произвольным образом.

Определение. 2. Будем называть ту структуру диагональной матрицы нормальной, которая указывает порядки одинаковых рядом находящихся диагональных элементов. Например, диагональная матрица $[a, a, c, a, c, c]$ имеет нормальную структуру $\{2, 1, 1, 2\}$.

Лемма 1. Если в диагональной матрице $\mathbf{D}$ одинаковые диагональные элементы находятся рядом, то матрица $\mathbf{A}$ коммутирует с матрицей $\mathbf{D}$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ квазидиагональна и можно выбрать у нее такую структуру, которая совпадала бы с нормальной структурой матрицы $\mathbf{D}$ [6].

Доказательство. Обозначим

$$\{\mathbf{A}\}_{ik} = a_{ik}, \quad \{\mathbf{D}\}_{ik} = \begin{cases} d_i \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

В предположении коммутативности матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ мы имеем

$$\mathbf{AD} = \mathbf{DA}, \tag{3}$$

т. е.

$$a_{ik} d_k = a_{ik} d_i, \ (i, \ k = 1, \ 2, \ \dots \ n)$$

или

$$a_{ik} (d_i - d_k) = 0. \tag{4}$$

Если, кроме того, $d_i \neq d_k$ $(i, k = 1, 2, \dots n; \ i \neq k)$, то $a_{ik} = 0$ $(i \neq k)$ и матрица $\mathbf{A}$ должна быть диагональной. Но мы можем рассматривать ее также как квазидиагональную со структурой $\{1, 1, \dots 1\}$, которая совпадает с нормальной структурой матрицы $\mathbf{D}$.

Если же $d_{i_1} = d_{i_2} = \dots = d_{i_m} = d$ $(m \geqslant 1)$, то a_{ik} может и не равняться нулю при $i, k = i_1, i_2, \dots i_m$. Зато $a_{ik} = 0$ при $i = i_1, i_2, \dots i_m$ и $k \neq i_1, i_2, \dots i_m$

или $i \neq i_1, i_2, \ldots i_m$ и $k = i_1, i_2, \ldots i_m$. Отсюда следует, что в строках и столбцах матрицы **A** со значком $i_1, i_2, \ldots i_m$ ненулевые элементы могут находиться только в соответствующей диагональной клетке порядка m. Подобные рассуждения о других одинаковых между собой элементах матрицы **D** показывают, что матрица **A** должна быть такой квазидиагональной матрицей, у которой можно выбрать структуру, совпадающую с нормальной структурой матрицы **D**.

Обратное утверждение очевидно из равенства (4).

Замечание. Если матрица **A** неособая, то равенство (3) мы можем записать в такой форме:

$$\mathbf{ADA^{-1}} = \mathbf{D},$$

чем мы воспользуемся впоследствии.

Лемма 2. Если матрицы **A** и **B** коммутируют, то подобные им матрицы также коммутируют [6].

Доказательство. Ввиду равенства $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ мы имеем

$$(\mathbf{SAS^{-1}})\,(\mathbf{SBS^{-1}}) = \mathbf{SABS^{-1}} = \mathbf{SBAS^{-1}} = (\mathbf{SBS^{-1}})\,(\mathbf{SAS^{-1}}),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Квазидиагональная матрица приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда каждая отдельная ее клетка приводится к диагональному виду.

Доказательство. Допустим, что данная квазидиагональная матрица приводится к диагональному виду, но некоторые ее клетки не приводятся к диагональному виду. Тогда мы можем найти такие матрицы, которые приводят эти клетки к нормальной форме Жордана. Остальные же клетки приводятся к диагональному виду.

Из всех отдельных матриц, приводящих клетки данной квазидиагональной матрицы к каноническому виду, составим такую новую квазидиагональльную матрицу, которая приводила бы данную матрицу к нормальной форме Жордана, причем структуры обеих этих матриц можем выбрать одинаковыми. Но эта последняя форма Жордана уже не приводится к диагональному виду.

Поэтому и данная квазидиагональная матрица не приводится к диагональному виду, что противоречит допущению. Следовательно, допущение, что некоторые клетки не приводятся к диагональному виду, неверно. Таким образом, каждая клетка данной квазидиагональной матрицы приводится к диагональному виду.

Если же все клетки данной квазидиагональной матрицы приводятся к диагональному виду, то можно построить по вышеуказанной схеме новую квазидиагональную матрицу, которая приводит данную квазидиагональную матрицу к диагональному виду. Этим лемма доказана.

Следствие. Если квазидиагональная матрица приводится к диагональному виду, то ее можно привести к диагональному виду с помощью другой квазидиагональной матрицы, причем структуры обеих этих матриц можно выбрать одинаковыми.

Теорема 1. *Если матрицы $A_1, A_2, \dots A_n$ приводимы к диагональному виду, то их можно привести одновременно при помощи одной и той же матрицы* S *к диагональному виду тогда и только тогда, когда каждые две из этих матриц коммутируют, т. е. когда* $A_i A_k = A_k A_i$, $(i, k = 1, 2, \dots n)$.

Эта теорема известна [7], но ее доказательство в литературе автору настоящей работы не удалось найти.

Доказательство. Допустим, что мы имеем

$$SA_i S^{-1} = D_i \, (i = 1, 2, \dots n),$$

где D_i и D_k — диагональные матрицы. Отсюда получаем

$$S^{-1} D_i S = A_i, \quad S^{-1} D_k S = A_k,$$

и из равенства $D_i D_k = D_k D_i$ и леммы 2 следует

$$A_i A_k = A_k A_i \qquad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

что и требовалось доказать.

Докажем обратное свойство. Допустим, что любые две среди матриц A_1, A_2, A_3 коммутируют. Возьмем сначала только 2 матрицы A_1 и A_2 и такую матрицу S, чтобы было $SA_1 S^{-1} = D_1$, причем потребуем, чтобы одинаковые элементы диагональной матрицы D_1 находились рядом. Нормальную структуру матрицы D_1 обозначим буквой p. Если тогда матрица $SA_2 S^{-1} = U$ не является диагональной, то по лемме 2 мы имеем

$$D_1 U = U D_1.$$

Согласно лемме 1, матрица U квазидиагональна и у нее можно выбрать такую структуру, которая совпадала бы со структурой p. Кроме того, матрица U, как подобная матрице A_2, приводится к диагональному виду. Тогда по следствию к лемме 3 можем найти квазидиагональную матрицу T со структурой p, которая приводит матрицу U к диагональному виду:

$$TUT^{-1} = TSA_2 (TS)^{-1} = D_2,$$

где D_2 — диагональная матрица. Согласно замечанию к лемме 1, мы имеем

$$D_1 = TD_1 T^{-1} = TSA_1 (TS)^{-1},$$

и поэтому матрица TS приводит одновременно матрицы A_1 и A_2 к диагональному виду.

Возьмем еще матрицу A_3, которая коммутирует с матрицами A_1 и A_2, и обозначим

$$SA_3 S^{-1} = V$$

Матрица $\mathbf{V}$ обладает свойствами, подобными рассмотренным свойствам матрицы $\mathbf{U}$. Ввиду $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_2$ по лемме 2 получаем

$$\mathbf{U} \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{U}.$$

Это возможно только тогда, когда соответствующие клетки матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ тоже коммутируют. Согласно лемме 3 и доказанному для двух коммутирующих матриц, мы можем построить такую квазидиагональную матрицу $\mathbf{T}_1$ со структурой p, которая приводит одновременно матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ к диагональному виду. Таким образом, получаем

$$\mathbf{T}_1\mathbf{V}\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1\mathbf{S}\mathbf{A}_3 (\mathbf{T}_1\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{D}_3,$$
$$\mathbf{T}_1\mathbf{U}\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1\mathbf{S}\mathbf{A}_2 (\mathbf{T}_1\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{D}_2,$$
$$\mathbf{T}_1\mathbf{D}_1\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1\mathbf{S}\,\mathbf{A}_1\ (\mathbf{T}_1\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{D}_1$$

с диагональными матрицами $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, что и требовалось доказать.

Для случая произвольного числа n матриц доказательство теоремы с помощью индукции по указанной схеме для трех матриц очевидно.

Теорема 2. *Произведение двух симметричных, положительно определенных матриц* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *всегда можно привести к диагональному виду.*

Доказательство этой теоремы, сообщенное автору М. А. Наймарком, таково:

Ввиду симметричности и положительной определенности матрицы $\mathbf{A}$ матрица $\sqrt{\mathbf{A}}$ симметрична [8]. (Под $\sqrt{\mathbf{A}}$ мы здесь и впоследствии будем подразумевать то из возможных значений $\sqrt{\mathbf{A}}$, у которого все характеристические числа положительны). Поэтому матрица $\sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{A}}$ тоже симметрична и приводится к диагональному виду при помощи некоторой матрицы $\mathbf{T}$:

$$\sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n]\,\mathbf{T}^{-1}.$$

Так как $\mathbf{AB} = \sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{A}}\sqrt{\mathbf{A}}^{-1}$, то

$$\mathbf{AB} = \sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{T}\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n]\,\mathbf{T}^{-1}\sqrt{\mathbf{A}}^{-1} = (\sqrt{\mathbf{A}}\mathbf{T})\,[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]\,(\sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{T})^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Так как матрицы $\mathbf{B}$ и $\sqrt{\mathbf{A}}\,\mathbf{B}\sqrt{\mathbf{A}}$ характеризуют одну и ту же квадратичную форму при разных базисах и эта форма положительно определенная, то все характеристические числа матрицы $\mathbf{AB}$ положительны.

Замечание 2. В доказательстве теоремы 2 не используется условие положительной определенности матрицы $\mathbf{B}$. Поэтому теорема остается верной в предположении лишь симметричности матрицы $\mathbf{B}$. В таком случае характеристические числа матрицы $\mathbf{AB}$ имеют такие же знаки, как и у матрицы $\mathbf{B}$.

Матрицы $\mathbf{L}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ системы (1) мы будем предполагать постоянными, симметричными и положительно определенными. Можно доказать, что, оставив в стороне некоторые предельные случаи, эти матрицы всегда положительно определенные [9].

При этом предположении матричные произведения $\mathbf{LC}$, $\mathbf{LG}$, $\mathbf{RC}$ и $\mathbf{RG}$ обладают свойствами, описанными в теореме 2 с замечанием 1.

2°. Из системы (1) исключим одну из неизвестных матриц. Таким образом, мы получаем матричные телеграфные уравнения [10, 11]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{u} = \mathbf{LC}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{u} + (\mathbf{RC}+\mathbf{LG})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u} + \mathbf{RGu}, \tag{5_1}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{i} = \mathbf{CL}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{i} + (\mathbf{CR}+\mathbf{GL})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{i} + \mathbf{GRi}. \tag{5_2}$$

В первое из этих уравнений введем новую матрицу $\mathbf{v}$ при помощи подстановки

$$\mathbf{v} = \mathbf{Su}, \tag{6}$$

или

$$\mathbf{u} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}, \tag{6'}$$

причем $\mathbf{S}$ — пока любая неособенная матрица. Мы получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{LC}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v} + (\mathbf{RC}+\mathbf{LG})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v} + \mathbf{RGS}^{-1}\mathbf{v}.$$

Последующим умножением с левой стороны на $\mathbf{S}$ получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathbf{v} = \mathbf{SLCS}^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{v} + \mathbf{S}(\mathbf{RC}+\mathbf{LG})\mathbf{S}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + \mathbf{SRGS}^{-1}\mathbf{v}. \tag{7}$$

Если бы можно было матрицу $\mathbf{S}$ выбрать таким образом, чтобы $\mathbf{SLCS}^{-1}$, $\mathbf{S}(\mathbf{RC}+\mathbf{LG})\mathbf{S}^{-1}$ и $\mathbf{SRGS}^{-1}$ были диагональными матрицами (т. е. матрицы $\mathbf{LC}$, $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$ и $\mathbf{RG}$ одновременно приводились бы к диагональному виду), то матричное уравнение (7) расщеплялось бы на n отдельных численных диференциальных уравнений. Но можно построить примеры, где при положительно определенных и симметричных матрицах $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{G}$ матрица $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$ не приводится к диагональному виду. Таким образом, нам надо еще потребовать, что матрица $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$ приводится к диагональному виду.

Ввиду теоремы 1 необходимым и достаточным условием для расщепления уравнения (7), а, следовательно, также и уравнения (5) является коммутативность любых двух из матриц $\mathbf{LC}$, $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$ и $\mathbf{RG}$, т. е. наличие совокупности равенств:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \mathbf{LCRG} = \mathbf{RGLC},\\
&\text{b)}\ \mathbf{LCRC} + \mathbf{LCLG} = \mathbf{RCLC} + \mathbf{LGLC},\\
&\text{c)}\ \mathbf{RCRG} + \mathbf{LGRG} = \mathbf{RGRC} + \mathbf{RGLG}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Переходя от формул (8) к равенствам с транспонированными матрицами, получаем, что при условиях (8) матрицы $\mathbf{CL}$, $\mathbf{CR}+\mathbf{GL}$ и $\mathbf{GR}$ тоже коммутируют. Кроме того, оказывается, что при помощи подстановки $\mathbf{i}=\mathbf{S}^*\mathbf{j}$, где $\mathbf{S}^*$ — транспонированная для матрицы $\mathbf{S}$, расщепляется и матричное уравнение (5_2).

Итак, *совокупность равенств* (8) *вместе с вышеупомянутым предположением о матрице* $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$ *оказывается необходимым и достаточным условием возможности указанного вида расщепления системы* (1).

Но условия (8) сравнительно сложны; кроме того, в этих условиях не учитывается предположение о матрице $\mathbf{RC}+\mathbf{LG}$. Это предположение отпадает, если потребуем, чтобы матрицы $\mathbf{LC}$, $\mathbf{RC}$, $\mathbf{LG}$ и $\mathbf{RG}$ приводились одновременно к диагональному виду. В таком случае мы имеем совокупность следующих условий:

$$\mathbf{LCRC}=\mathbf{RCLC},\ \mathbf{RCRG}=\mathbf{RGRC},\ \mathbf{LGRG}=\mathbf{RGLG},$$

$$\mathbf{LCLG}=\mathbf{LGLC},\ \mathbf{LCRG}=\mathbf{RGLC},\ \mathbf{RCLG}=\mathbf{LGRC}.$$

Из первых четырех среди этих условий мы получаем

$$\begin{aligned}
&\alpha)\ \mathbf{LCR}=\mathbf{RCL},\\
&\beta)\ \mathbf{CRG}=\mathbf{GRC},\\
&\gamma)\ \mathbf{RGL}=\mathbf{LGR},\\
&\delta)\ \mathbf{GLC}=\mathbf{CLG}.
\end{aligned}\tag{9}$$

Последние же два условия оказываются излишними, ибо ввиду (9)

$$\underline{\mathbf{LC}}\mathbf{RG}=\underline{\mathbf{R}\overline{\mathbf{CL}}}\overline{\mathbf{G}}=\mathbf{R}\overline{\mathbf{GLC}},$$

$$\mathbf{R}\underline{\mathbf{CLG}}=\overline{\mathbf{R}\mathbf{GL}}\mathbf{C}... $$

Затем оказывается, что при наличии любых трех из соотношений (9) имеет место и оставшееся четвертое. Например, соотношение δ следует из α, β и γ:

$$\mathbf{GLC}=\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\mathbf{RGL}}\mathbf{C}=\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\mathbf{LG}}\overline{\mathbf{RC}}=\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{LC}}}\overline{\mathbf{RG}}=\mathbf{R}^{-1}\,\underline{\underline{\mathbf{RCL}}}\mathbf{G}=\mathbf{CLG}.$$

Очевидно, при условиях (9) расщепляется также матричное уравнение (5_2). Таким образом, *справедливость любых трех из равенств* (9) *достаточна для расщепления системы* (1). Эти условия можно перефразировать следующим образом: *симметричность любых трех из матриц* $\mathbf{LCR}$, $\mathbf{CRG}$, $\mathbf{RGL}$ и $\mathbf{GLC}$ *достаточна для расщепления системы* (1).

В случае двух проводов ($n=2$) условия α, β и γ в равенствах (9) оказываются следующими соотношениями:

$$M_{12}(C_2R_2-C_1R_1)=C_{12}(L_1R_2-L_2R_1),$$

$$G_{12}(C_2R_2-C_1R_1)=C_{12}(G_2R_2-G_1R_1),$$

$$G_{12}(L_1R_2-L_2R_1)=M_{12}(G_2R_2-G_1R_1),$$

которые получены В. И. Коваленковым [3]. Поэтому условия (9) мы будем называть *условиями Коваленкова.*

3°. В случае симметричного пучка n проводов мы имеем:

$$\mathbf{R} = \begin{Vmatrix} R\,0 \ldots 0 \\ 0\,R \ldots 0 \\ \ldots\ldots \\ 0\,0 \ldots R \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{Vmatrix} LM \ldots M \\ ML \ldots M \\ \ldots\ldots \\ MM \ldots L \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{Vmatrix} C & -C_1 & \ldots & -C_1 \\ -C_1 & C & \ldots & -C_1 \\ . & . & \ldots & . \\ -C_1 & -C_1 & \ldots & C \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} G & -G_1 & \ldots & -G_1 \\ -G_1 & G & \ldots & -G_1 \\ . & . & \ldots & . \\ -G_1 & -G_1 & \ldots & G \end{Vmatrix}.$$

Легко убедиться, что в этом случае не только условия (9) удовлетворены, но даже и любые две среди матриц **L**, **C**, **R** и **G** коммутируют.

Матрицы **L**, **C** и **G** имеют вид матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} ab \ldots b \\ ba \ldots b \\ \ldots\ldots \\ bb \ldots a \end{Vmatrix},$$

характеристические числа которой являются корнями уравнения

$$F \equiv \begin{vmatrix} a-x & b & \ldots & b \\ b & a-x & \ldots & b \\ . & . & \ldots & . \\ b & b & \ldots & a-x \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение решим следующим образом. В определителе

$$F = \begin{vmatrix} a-x & b & \ldots & b & 0 \\ b & a-x & \ldots & b & 0 \\ . & . & \ldots & . & . \\ b & b & \ldots & a-x & 0 \\ b & b & \ldots & b & 1 \end{vmatrix}$$

вычтем последнюю строку от каждой из предыдущих n строк:

$$F = \begin{vmatrix} a-b-x & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & a-b-x & \ldots & 0 & -1 \\ . & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a-b-x & -1 \\ b & b & \ldots & b & 1 \end{vmatrix}.$$

Затем помножим каждый столбец, кроме последнего, на $\frac{1}{a-b-x}$ и прибавим их к последнему столбцу, после чего непосредственно вычисляем определитель:

$$F = \begin{vmatrix} a-b-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a-b-x & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a-b-x & 0 \\ b & b & \dots & b & 1+\dfrac{nb}{a-b-x} \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b-x)^n \frac{a+(n-1)b-x}{a-b-x} = (a-b-x)^{n-1}\,[a+b(n-1)-x].$$

Таким образом, матрицы **L**, **C** и **G** имеют следующие характеристические числа, причем для каждой из этих матриц второе число является характеристическим числом порядка $n-1$:

у матрицы **L** числа $L+M(n-1)$ и $L-M$,

у матрицы **C** числа $C-C_1(n-1)$ и $C+C_1$,

у матрицы **G** числа $G-G_1(n-1)$ и $G+G_1$.

Эти характеристические числа были известны уже Пайпсу [10] и Коваленкову [2, 5], однако они получены другим путем. Впрочем, отметим, что в цитированной работе Пайпса допущены некоторые грубые ошибки, например, считается, что любые две симметричные матрицы перестановочны.

Матрицу **S**, которая приводит матрицу **A**, а также и матрицы **L**, **C** и **G** к диагональному виду, можно найти обычным приемом. Одной из возможных таких матриц **S** является следующая:

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \dfrac{s_2}{n} & \dfrac{s_2}{n} & \dfrac{s_2}{n} & \dots & \dfrac{s_2}{n} \\ \dfrac{-s_1}{n} & \dfrac{n-1}{n}s_1 & \dfrac{-s_1}{n} & \dots & \dfrac{-s_1}{n} \\ \dfrac{-s_1}{n} & \dfrac{-s_1}{n} & \dfrac{n-1}{n}s_1 & \dots & \dfrac{-s_1}{n} \\ . & . & . & \dots & . \\ \dfrac{-s_1}{n} & \dfrac{-s_1}{n} & \dfrac{-s_1}{n} & \dots & \dfrac{n-1}{n}s_1 \end{Vmatrix},$$

причем

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{s_2} & \frac{-1}{s_1} & \frac{-1}{s_1} & \ldots & \frac{-1}{s_1} \\ \frac{1}{s_2} & \frac{1}{s_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{1}{s_2} & 0 & \frac{1}{s_1} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ \frac{1}{s_2} & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{s_1} \end{Vmatrix},$$

где s_1 и s_2 произвольны, но не равны нулю. Легко убедиться в том, что

$$\mathbf{SAS}^{-1} = [a + b\,(n-1),\ a-b,\ .\ .\ .\ .\ a-b].$$

Если мы здесь возьмем $s_1 = s_2 = n$, то получим совпадение с исследованиями Коваленкова [5].

4°. Убедимся, что *условия Коваленкова*, в свою очередь, *удовлетворены, если имеет место соотношение*

$$\mathbf{RC} = \mathbf{LG}. \tag{10}$$

Транспонируя это соотношение, получаем

$$\mathbf{CR} = \mathbf{GL}. \tag{10'}$$

Действительно, из равенств (10) и (10′) следует:

$$\alpha)\ \underline{\mathbf{LC}}\mathbf{R} = \overline{\mathbf{L}\underline{\mathbf{GL}}} = \overline{\mathbf{RCL}},$$

$$\beta)\ \underline{\mathbf{CR}}\mathbf{G} = \underline{\mathbf{G}\overline{\mathbf{L}}}\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}\overline{\mathbf{RC}},$$

$$\gamma)\ \mathbf{R}\underline{\mathbf{GL}} = \overline{\mathbf{R}\underline{\mathbf{CR}}} = \overline{\mathbf{LGR}}.$$

Это показывает, что при условии (10) матричные уравнения (5_1) и (5_2), а также и система (1) расщепляемы.

Численное соотношение вида (10) между первичными параметрами в случае одного провода называется соотношением Хевисайда. Поэтому и матричное соотношение мы будем называть *условием Хевисайда.*

Условие Хевисайда является более частным, чем условия Коваленкова, ибо в случае удовлетворения условия (10) удовлетворены также условия (9), но не наоборот.

Заметим, что в случае симметричного пучка проводов условие Хевисайда обычно не удовлетворено.

Условие Хевисайда мы получим еще другим путем.

Мы введем новые матрицы порядка 2 n:

$$\mathbf{y} = \begin{Vmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \\ i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{Vmatrix},\quad (\mathbf{R}, \mathbf{G}) = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{Vmatrix},\quad (\mathbf{L}, \mathbf{C}) = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{Vmatrix},$$

при помощи которых представим систему (1) в виде одного матричного уравнения:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{y} = (\mathbf{R},\ \mathbf{G})\,\mathbf{y} + (\mathbf{L},\ \mathbf{C})\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{y}. \tag{11}$$

После подстановки

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{v} \tag{12}$$

и умножения уравнения (11) с левой стороны на $\mathbf{S}$ мы получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{v} = \mathbf{S}\,(\mathbf{R},\ \mathbf{G})\,\mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{v} + \mathbf{S}\,(\mathbf{L},\ \mathbf{C})\,\mathbf{S}^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\,\mathbf{v}. \tag{13}$$

Если матрицы $(\mathbf{R},\ \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L},\ \mathbf{C})$ приводимы к диагональному виду при помощи одной и той же матрицы $\mathbf{S}$, то матричное уравнение (13) можно расщепить на $2n$ отдельных численных диференциальных уравнений. Согласно теореме 1, необходимым и достаточным условием возможности расщепления уравнения (13) является коммутативность матриц $(\mathbf{R},\ \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L},\ \mathbf{C})$, причем предполагается, что эти матрицы приводимы к диагональному виду.

После умножения матриц $(\mathbf{R},\ \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L},\ \mathbf{C})$

$$\begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{RC} & 0 \\ 0 & \mathbf{GL} \end{Vmatrix},\quad \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{L} \\ \mathbf{C} & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{R} \\ \mathbf{G} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathbf{LG} & 0 \\ 0 & \mathbf{CR} \end{Vmatrix}$$

следует, что эти матрицы коммутируют в случае существования равенств

$$\mathbf{RC} = \mathbf{LG} \ \text{и}\ \mathbf{GL} = \mathbf{CR},$$

среди которых второе равенство является следствием первого.

Остается еще доказать, что матрицы $(\mathbf{R},\ \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L},\ \mathbf{C})$ приводятся к диагональному виду. Для этого возьмем более общую матрицу $\mathbf{T}$ и ее квадрат:

$$\mathbf{T} = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & 0 \end{Vmatrix},\quad \mathbf{T}^2 = \begin{Vmatrix} \mathbf{AB} & 0 \\ 0 & \mathbf{BA} \end{Vmatrix}.$$

Если матрица $\mathbf{T}^2$ приводится к диагональному виду, то к таковому виду приводится и матрица $\mathbf{T}$. Но матрица $\mathbf{T}^2$ приводится к диагональному виду в случае приводимости к таковому виду произведения $\mathbf{AB}$, ибо из последнего следует также приводимость матрицы $\mathbf{BA}$. Мы имеем в нашем случае вместо $\mathbf{AB}$ матрицу $\mathbf{LC}$ или матрицу $\mathbf{RG}$, которые приводятся к диагональному виду. Поэтому матрицы $(\mathbf{R},\ \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L},\ \mathbf{C})$ также приводятся к диагональному виду.

Мы получаем еще другое свойство этих матриц. Предположим, что матрица $\mathbf{U}$ приводит матрицу $\mathbf{AB}$ к диагональному виду

$$\mathbf{UABU}^{-1} = \mathbf{D}^2.$$

Можно убедиться, что матрица

$$\mathbf{S} = \begin{Vmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{DUB}^{-1} \\ -\mathbf{U} & \mathbf{DUB}^{-1} \end{Vmatrix}, \text{ где } \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} \mathbf{U}^{-1} & -\mathbf{U}^{-1} \\ \mathbf{BU}^{-1}\mathbf{D}^{-1} & \mathbf{BU}^{-1}\mathbf{D}^{-1} \end{Vmatrix},$$

приводит матрицу $\mathbf{T}$ к диагональному виду

$$\mathbf{STS}^{-1} = \begin{Vmatrix} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & -\mathbf{D} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что характеристические числа матрицы $\mathbf{T}$ являются квадратными корнями характеристических чисел матрицы $\mathbf{AB}$, взятыми со знаками $+$ и $-$. Отсюда следует, что характеристические числа матриц $(\mathbf{R}, \mathbf{G})$ и $(\mathbf{L}, \mathbf{C})$ вещественны, ибо они являются квадратными корнями характеристических чисел матриц $\mathbf{RG}$ и $\mathbf{LC}$, которые положительны.

Надо заметить, что условие Хевисайда является только одним и притом наиболее важным из частных случаев условий Коваленкова. Впрочем, как это впервые указал Я. Д. Зарецкий, условия Коваленкова удовлетворены также при матричном соотношении $\mathbf{LC} = \mathbf{RG}$.

Кафедра общей математики
Ноябрь 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П. И., Распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных однопроводных линий, „Прикладная математика и механика", 1948, т. XII, вып. 2, стр. 141 — 148.
2. Коваленков В. И., Устанавливающиеся процессы при движении электромагнитных волн вдоль проводов связи, „Изв. АН СССР, ОТН", 1945, № 12, стр. 1061 — 1088.
3. Коваленков В. И., Применение метода „расщепления уравнений" к анализу линий, работающих в пучках проводов, „Автоматика и телемеханика", 1948, т. IX, № 1. стр. 30 — 38.
4. Коваленков В. И., Решение обобщенных телеграфных уравнений методом „расщепления уравнений", „Сборник научных работ по проводной связи", 1949.
5. Коваленков В. И., Расщепление уравнений, выражающих электромагнитные процессы в линейных цепях, „Автоматика и телемеханика", 1947, т. VIII, № 4, стр. 255 — 261.
6. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. 1, 1949, стр. 151—154.
7. Schauder J., Cauchysches Problem für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, „Commentarii Mathematici Helvetici", 9 (4), 1936-7, 263 — 283.
8. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, 1948, стр. 289.
9. Брзама Н. А. и Мышкис А. Д., Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, „Ученые записки Латвийского государственного университета", том VI, 1952, стр. 61 — 68.
10. Брзама Н. А., Об исследовании обобщенной системы телеграфных уравнений матричными методами, „Изв. АН Латв. ССР", 1948, № 3, стр. 83 — 85.
11. Pipes L. A., On matrix theory of multiconductor transmission lines, „Philosophical Magazine", 7 (24), 1937, 97—113.

УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТОЧЕК

К. А. Штейнс

§ 1. МЕТОД ЛОКАЛЬНОГО ОСРЕДНЕНИЯ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

В одной из последних работ Н. Д. Моисеева, посвященных построению осредненных вариантов проблемы трех точек [1], был указан прием построения упрощенных вариантов этой проблемы при помощи так называемого интерполяционного осреднения. Существенным в этом приеме является допущение большей гибкости в выборе сочетаний элементов, считаемых в процессе осреднения постоянными, равно как и допущение большей гибкости в выборе интервала осреднения, причем и тот и другой выбор предлагается совершать на основе тех или иных сведений о поведении оскулирующих элементов на интересующем нас промежутке времени.

Такого рода интерполяционное осреднение представляется весьма мощным средством для построения осредненных схем, хорошо представляющих обстоятельства движения в пределах промежутка времени, уже перекрытого наблюдениями рассматриваемого небесного тела, т. е. для нужд построения аналитической теории движения интерполяционного типа.

В случае потребности построения аналитической теории движения в промежутке времени, еще не охваченном наблюдениями, интерполяционно-осредненные схемы остаются более гибкими и, следовательно, более сильными, чем использовавшиеся до сих пор осредненные схемы, опирающиеся на те или иные соотношения между оскулирующими невозмущенными элементами одной единственной начальной эпохи. Однако для использования этих преимуществ интерполяционно-осредненных схем необходимо при построении теории задаваться какими-то гипотезами относительно поведения тех или иных элементов в будущем и относительно возможного интервала изменения этих элементов, что создает соответствующие затруднения.

Принимая все это во внимание, мы решили рассмотреть некоторое предельное вырождение приема интерполяционного осреднения Моисеева, являющееся менее гибким, чем последнее, но зато свободное от необходимости использования конкретных гипотез относительно будущего изменения элементов, по которым ведется осреднение.

Это рассматриваемое ниже предельное вырождение приема интерполяционного осреднения называется нами приемом локального осреднения. Сущность его заключается в том, что, произведя по избранному элементу осреднение пертурбационной функции на некотором отрезке значений этого элемента, мы после этого берем предел полученного осредненного выражения пертурбационной функции при условии стягивания интервала осреднения в его начальную точку, соответствующую начальной эпохе оскуляции.

В результате оказывается, что получаемая таким образом локально-осредненная схема, имея указанное родство с интерполяционно-осредненной схемой, обладает известным родством также и с той приближенной схемой, которая лежит в основе классической теории возмущений первого порядка. С этой последней у локально-осредненной схемы имеется общее *именно в том, что в них обеих фигурирует прием фиксации значений* оскулирующих элементов, входящих в диференциальные уравнения возмущенного движения. Однако при этом схема классической теории возмущений первого порядка является более грубой, чем наша локально-осредненная схема, ибо в первой из этих двух схем заменяются постоянными начальными значениями в с е элементы, входящие в правые части диференциальных уравнений возмущенного движения, г д е б ы о н и т а м н и ф и г у р и р о в а л и, тогда как в локально-осредненной схеме постоянными значениями заменяются не все, а только н е к о т о р ы е из этих элементов, причем т о л ь к о в о д н о й ч а с т и п е р т у р б а ц и о н н о й ф у н к ц и и.

Будучи в двух указанных отношениях менее грубой аппроксимацией действительности, чем классическая схема возмущений первого порядка, наша локально-осредненная схема уступает этой классической схеме в том отношении, что в ней фиксация избранных элементов производится д о в ы п о л н е н и я ч а с т н ы х д и ф е р е н ц и р о в а н и й п е р т у р б а ц и о н н о й ф у н к ц и и, тогда как в классической схеме фиксация всех элементов производится не в пертурбационной функции, а в результатах ее частных диференцирований. Это влечет за собой то, что локально-осредненная схема учитывает члены разложения пертурбационной функции с правильными коэфициентами лишь в некоторых уравнениях системы диференциальных уравнений. Она учитывает их значительно более полно и гибко, чем классическая схема возмущений первого порядка, тогда как эта последняя схема, учитывая члены везде с правильными коэфициентами, берет их в значительно менее близком к реальности виде. При соответствующем выборе интерполяционной аномалии мы можем достигнуть того, что локальное осреднение меняет только ту часть пертурбационной функции, которая имеет множитель $\sigma^2 = \sin\frac{i}{2}$. В этом случае локальное осреднение искажает коэфициенты членов пертурбационной функции только в тех диференциальных уравнениях, где эти члены имеют множитель $\sin\frac{i}{2}$, но не искажает там, где они этого множителя не имеют. Следовательно, при выборе достаточно малого значения угла наклонности орбиты i влияние неправильности учета коэфициентов можно уменьшить до произвольно малой величины.

Итак, при достаточно малых значениях i локально-осредненная схема учитывает с любой точностью члены разложения пертурбационной функции во всех уравнениях, притом более полно и гибко, чем классическая схема возмущений первого порядка. Все сказанное относится также к интерполяционной схеме, которая, в свою очередь, учитывает члены пертурбационной функции еще более полно и гибко, чем наша локально-осредненная схема.

В заключение этих предварительных соображений относительно локально-осредненных схем можно было бы привести также следующий аргумент в их пользу. В случае отсутствия строгой соизмеримости средних движений уже схема возмущений первого порядка дает неплохое согласие с результатами строгой интеграции диференциальных уравнений возмущенного движения в осредненных задачах типа задач Делоне-Хилла. Из сказанного выше следует, что локально-осредненные схемы имеют известное родство со схемой возмущений первого порядка. Поэтому в нормальных случаях возможно ожидать для этих локально-осредненных задач неплохой аппроксимации действительности.

Условимся для краткости называть „третьим критерием" качества данной схемы признак ее сходства со схемой, которая дает решение, близкое к действительности. Тогда приведенное выше заключение можно рассматривать как результат применения этого третьего критерия к оценке качества локально-осредненных схем.

В заключение настоящего параграфа следует заметить, что прием локального осреднения может быть применяем как однократно, так и многократно, в результате чего могут строиться как однократные локальноосредненные схемы, так и многократно-локально-осредненные схемы.

Пример однократно-локально-осредненной схемы ограниченной круговой задачи трех точек будет рассмотрен в следующем параграфе.

Далее, прием локального осреднения можно сочетать с приемом обычного осреднения. Именно, таким образом нами будет строиться упрощенная схема пространственной круговой ограниченной задачи трех точек; эта схема получается в результате совокупного применения к схеме пространственной круговой ограниченной задачи трех точек, во-первых, локального осреднения по расстоянию перигелия от узла и, во-вторых, однократного осреднения по Делоне-Хиллу.

Возможно, наконец, локально осреднять отдельные члены разложения пертурбационной функции. Для этого следует в соответствующие члены, вместо ω и Ω, подставить их оскулирующие значения ω_0 и Ω_0, притом только там, где они входят в явном виде.

§ 2. ОДНОКРАТНО-ЛОКАЛЬНОЕ ОСРЕДНЕНИЕ

Пертурбационная функция W для ограниченной пространственной круговой проблемы трех точек в кеплеровом фазовом пространстве

$$a,\ p,\ i,\ M,\ \omega,\ \Omega \tag{K 4}$$

имеет следующий вид

$$W = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{q,r,s}(a, p, i) \cos\left[qM + r(\Omega - M') + s\omega\right], \tag{2}$$

где a — большая полуось,

p — параметр,

i — угол наклона,

M, M' — средняя аномалия планеты и Юпитера,

ω — угловое расстояние перигелия от восходящего узла,

Ω — долгота восходящего узла,

q, r, s — целые числа.

Введем интерполяционную аномалию формулой

$$D^* = q^* M + r^* \bar{\Omega} + s^* \omega, \tag{3}$$

где $\bar{\Omega} = \Omega - M'$; q^*, r^* и s^* — постоянные числа, причём q^* и r^* взаимно просты. Определим из формулы (3) среднюю аномалию M. Это даст формулу

$$M = q^{*-1} D^* - r^* q^{*-1} \bar{\Omega} - s^* q^{*-1} \omega. \tag{4}$$

Подстановка этого выражения в формулу (2) приводит пертурбационную функцию к следующему виду:

$$W = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{q,r,s}(a, p, i) \cos\left(\frac{q}{q^*} D^* + \frac{rq^* - r^* q}{q^*} \bar{\Omega} + \right.$$
$$\left. + \frac{sq^* - s^* q}{q^*} \omega \right). \tag{5}$$

Приступая к построению локально-осредненного варианта нашей задачи, мы проделаем это двумя различными способами, приводящими к одному и тому же результату.

Первый из этих способов выявляет близость локально-осредненного варианта к идее классической схемы возмущений первого порядка. Здесь мы для образования упрощенной пертурбационной функции попросту полагаем расстояние перигелия от узла ω равным его начальному значению ω_0:

$$\omega = \omega_0 \tag{6}$$

повсюду в формуле (5) для пертурбационной функции, где это расстояние входит явно, а не через посредство интерполяционной аномалии D^*. Расстояние перигелия от узла ω, входящее через посредство интерполяционной аномалии D^* (3), мы оставляем не зафиксированным и не заменяем его начальным значением ω_0. Это приводит нас к следующему упрощенному выражению для пертурбационной функции

$$[W] = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{q,r,s}(a,p,i) \cos\left(\frac{q}{q^*} D^* + \frac{rq^* - r^*q}{q^*}\bar{\Omega} + \right.$$
$$\left. + \frac{sq^* - s^*q}{q^*}\omega_0\right). \tag{7}$$

Второй способ образования упрощенной пертурбационной функции для того же локально-осредненного варианта выявляет связь этого варианта с идеей интерполяционного осреднения. Здесь мы образуем среднее значение пертурбационной функции (5) по расстоянию перигелия от узла на некотором интервале

$$\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 \tag{8}$$

значений этой величины. Это дает нам следующее осредненное значение пертурбационной функции:

$$[W] = \frac{2}{\omega_1 - \omega_0} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{q,r,s}(a,p,i) \frac{\sin \frac{sq^* - s^*q}{q^*} \frac{\omega_1 - \omega_0}{2}}{\frac{sq^* - s^*q}{q^*}} \times$$
$$\times \cos\left(\frac{q}{q^*} D^* + \frac{rq^* - r^*q}{q^*}\bar{\Omega} + \frac{sq^* - s^*q}{q^*} \frac{\omega_1 + \omega_0}{2}\right). \tag{9}$$

Перейдем теперь в формуле (9) к пределу, при условии стремления величины ω_1 к ω_0. Предельное значение осредненной пертурбационной функции тогда будет полностью совпадать со значением функции, данным формулой (7).

Эту упрощенную функцию мы берем в качестве пертурбационной функции в локально-осредненном по расстоянию перигелия от узла варианте ограниченной пространственной круговой проблемы трех точек.

Диференциальные уравнения движения в кеплеровом фазовом пространстве (K 4) для этого варианта получатся путем замены в уравнениях [2] истинной пертурбационной функции W ее локально-осредненным выражением $[W]$ (7). Эти уравнения, следовательно, будут иметь вид:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\sqrt{a}}{k} \frac{\partial [W]}{\partial M}, \qquad \frac{dM}{dt} = \frac{k}{a^{3/2}} - \frac{2\sqrt{a}}{k} \frac{\partial [W]}{\partial a},$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{2\sqrt{p}}{k}\frac{\partial[W]}{\partial\omega},\qquad \frac{d\omega}{dt}=-\frac{2\sqrt{p}}{k}\frac{\partial[W]}{\partial p}-\frac{\operatorname{ctg} i}{k\sqrt{p}}\frac{\partial[W]}{\partial i},\tag{10}$$

$$\frac{di}{dt}=\frac{\operatorname{ctg} i}{k\sqrt{p}}\frac{\partial[W]}{\partial\omega}-\frac{1}{k\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial[W]}{\partial\Omega},\qquad \frac{d\Omega}{dt}=\frac{1}{k\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial[W]}{\partial i}.$$

Поскольку величина начального значения расстояния перигелия от узла ω считается постоянной, постольку расстояние перигелия от узла ω будет входить в локально-осредненную пертурбационную функцию $[W]$ так же, как и средняя аномалия M, только через посредство интерполяционной аномалии D^*. При этом будут иметь место следующие формулы для частных производных:

$$\frac{\partial[W]}{\partial\omega}=s^*\frac{\partial[W]}{\partial D^*},\qquad \frac{\partial[W]}{\partial M}=q^*\frac{\partial[W]}{\partial D^*}.\tag{11}$$

Вследствие этих формул из двух первых уравнений системы можно исключить частную производную от упрощенной пертурбационной функции $[W]$ по интерполяционной аномалии D^*. Это приведет к уравнению в полных производных:

$$\frac{k\,q^{*-1}}{2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}-\frac{k\,s^{*-1}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}=0,\tag{12}$$

интеграция которого дает следующий интеграл системы (10):

$$q^{*-1}k\sqrt{a}-s^{*-1}k\sqrt{p}=c_1.\tag{13}$$

Таким образом, локальное осреднение по расстоянию перигелия от узла дало возможность в нашей задаче получить один дополнительный интеграл (13) к интегралу Якоби:

$$\frac{k^2}{2a}+kn'\sqrt{p}\cos i+[W]=C,\tag{14}$$

который она имеет по тем же причинам, по которым истинная пространственная круговая ограниченная задача трех точек (K 4) обладает интегралом Якоби

$$\frac{k^2}{2a}+kn'\sqrt{p}\cos i+W=C.\tag{14a}$$

§ 3. УПРОЩЕННЫЙ ВАРИАНТ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТОЧЕК

Возьмем теперь пертурбационную функцию $[W]$ (7) локально-осредненного варианта и образуем ее среднее значение по синодической долготе узла на промежутке

$$0\leqslant\overline{\Omega}\leqslant 2\pi q^*$$

значений этой переменной.

Мы будем иметь:

$$\Big[[W]\Big] = \frac{1}{2\pi q^*} \int\limits_{\bar{\Omega}=0}^{2\pi q^*} [W]\, d\,\bar{\Omega}, \tag{15}$$

где интеграл по $\bar{\Omega}$ берется при условии постоянства всех элементов a, p, i и интерполяционной аномалии D^*. Полученная таким образом упрощенная пертурбационная функция $[[W]]$ будет зависеть от величины M, Ω и ω только через посредство интерполяционной аномалии D^*, вследствие чего будут иметь место следующие формулы для частных производных

$$\frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,\omega} = s^* \frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,D^*}, \quad \frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,\Omega} = r^* \frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,D^*}, \quad \frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,M} = q^* \frac{\partial\,[[W]]}{\partial\,D^*}. \tag{16}$$

Разложение в ряд упрощенной пертурбационной функции будет иметь вид

$$[[W]] = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_{q^*j,\, r^*j,\, s}\,(a, p, i)\, \cos\,[jD^* + (s - js^*)\,\omega_0]. \tag{17}$$

Таким образом, эта упрощенная пертурбационная функция $[[W]]$ будет представляться рядом, состоящим из совокупности таких членов разложения локально-осредненной пертурбационной функции предыдущего параграфа (§ 2), которые содержат в себе синодическую долготу узла, входящую только через D^*.

Задачу, получаемую из круговой пространственной ограниченной задачи трех точек заменой в ее диференциальных уравнениях движения истинной пертурбационной функции описанной только что упрощенной пертурбационной функцией $[[W]]$, мы будем называть упрощенной круговой пространственной ограниченной задачей трех точек.

У соответствующей системы диференциальных уравнений будут существовать следующие три первых интеграла:

$$\begin{gathered} \frac{k^2}{2a} + kn'\sqrt{p}\,\cos i + [[W]] = C, \\ k\sqrt{a} - \frac{q^*}{r^*}\,k\sqrt{p}\,\cos i = C_2, \\ q^{*-1}\,k\sqrt{a} - s^{*-1}\,k\sqrt{p} = C_1. \end{gathered} \tag{18}$$

Первый и третий из этих интегралов соответствуют дополнительному интегралу и интегралу Якоби, которые мы имели в локально-осредненной задаче предыдущего параграфа. Они получаются способом, описанным в предыдущем параграфе.

Что касается второго интеграла (18), то он получается интеграцией того диференциального уравнения в полных производных, которое получится из третьего уравнения системы (10) после исключения из него частных производных от пертурбационной функции при помощи двух первых уравнений той же системы и которое имеет вид

$$\frac{k}{2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}+\frac{q^*}{r^*}\left[-\frac{k\cos i}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}+k\sqrt{p}\frac{di}{dt}\sin i\right]=0. \qquad (19)$$

При этом мы предполагали, что в системе (10) $[W]$ заменено на $[[W]]$ и учтено соотношение (16).

§ 4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ УПРОЩЕННОГО ВАРИАНТА

Решение пространственной круговой ограниченной задачи трех точек доводится до конца аналогично тому, как это делается в осредненном варианте Делоне-Хилла плоской круговой ограниченной задачи трех точек [3]. Именно, мы начинаем с того, что с помощью существующих в этой задаче трех первых интегралов (18) выражаем a, i, p через D^* и подставляем их значения в диференциальное уравнение для D^*

$$\frac{dD^*}{dt}=q^*n-r^*n'-\frac{2\sqrt{a}}{k}q^*\frac{\partial[[W]]}{\partial a}-\frac{2\sqrt{p}}{k}s^*\frac{\partial[[W]]}{\partial p}+$$
$$+\frac{1}{k\sqrt{p}\sin i}(r^*-s^*\cos i)\frac{\partial[[W]]}{\partial i}. \qquad (20)$$

Это последнее диференциальное уравнение можно, разделяя переменные, проинтегрировать в квадратурах. Подставляя полученное таким образом значение D^* в систему первых интегралов (18), получим $a=a(t)$, $e=e(t)$, $i=i(t)$. Подставляя все эти значения в остальные диференциальные уравнения, возможно их проинтегрировать в квадратурах.

§ 5. СРАВНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ УПРОЩЕННОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С РАЗЛОЖЕНИЕМ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОКРАТНО ОСРЕДНЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТОЧЕК

Описанный в предшествующем параграфе упрощенный вариант ограниченной пространственной круговой задачи трех точек был построен на основе использования интерполяционной аномалии D^*, определяемой формулой (3). Возможность рационально распорядиться выбором этих трех постоянных индексов q^*, r^*, s^* позволяет увеличивать степень близости схемы к настоящей задаче трех точек.

До сих пор мы имели в виду систему кеплеровых фазовых (K 4) координат $a, p, i, M, \omega, \Omega$. При желании оставить разложение пертурбационной функции в виде, более принятом в классической небесной механике, нам придется заменить эту систему (K4) системой кеплеровых фазовых координат

$$a,\ e,\ i,\ M,\ \omega,\ \Omega, \tag{K 3}$$

где вместо параметра p введен эксцентриситет e.

Разложение вековой долгопериодической части возмущающей функции в случае соизмеримости q^*, r^* для круговой пространственной ограниченной задачи трех точек имеет по Ньюкому следующий вид [4]:

$$\frac{1}{k^2m'}[W] = \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{p=0}^{2n} \Pi^n_{n-p}(s) \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_{r^*j} \cos\left[r^*j\,(\Omega - \right.\right.$$

$$- M') + r^*j\,\omega + q^*jM] + \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{jr^*-1} \cos\left[r^*j\,(\Omega - M') + \right.$$

$$+ (r^*j - 2)\,\omega + q^*j\,M] + \sigma^4 \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_{jr^*-2} \cos\left[r^*j\,(\Omega - M') + \right.$$

$$\left. + (jr^* - 4)\,\omega + q^*jM] + \ldots \right\}$$

$$\text{для членов класса} \left\{ \begin{array}{lll} 0 & n-p = j\,(r^* - q^*) & s = r^*j \\ 1 & n-p = j\,(r^* - q^*) - 2 & s = r^*j - 2 \\ 2 & n-p = j\,(r^* - q^*) - 4 & s = r^*j - 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \tag{21}$$

$$p = 0,\ 2,\ 4\ \ldots\ 2n$$

$$a'A_i = c_1^{(i)} - \frac{1}{2}\sigma^2\left(c_3^{(i-1)} + c_3^{(i+1)}\right) + \frac{3}{8}\sigma^4\left(c_5^{(i-2)} + 4c_5^{(i)} + c_5^{(i+2)}\right) + \ldots$$

$$a'B_i = \frac{1}{2}c_3^{(i)} - \frac{3}{4}\sigma^2\left(c_5^{(i-1)} + c_5^{(i+1)}\right) + \ldots$$

$$c_n^{(i)} = \alpha^{\frac{n-1}{2}} b_n^{(i)},\quad \alpha = \frac{a}{a'}.$$

Π^n_{n-p} — операторы Ньюкома, $b_n^{(i)}$ — коэфициенты Лапласа.

Члены класса нуль, т. е. члены с коэфициентами „A“, характерны тем, что между ними находятся все без исключения члены, не имеющие множителя σ^2. Имея в виду, что $\sigma^2 = \sin^2\frac{i}{2}$ есть малая величина второго порядка, заключаем, что все главные члены находятся между членами класса нуль и поэтому целесообразно их учесть полностью, т. е. у членов класса нуль не заменять ω его начальным значением ω_0.

Этого мы достигнем, беря за интерполяционную аномалию D^* основной аргумент тригонометрических функций класса нуль. Однако, как видно из формулы, этот аргумент имеет вид

$$D^* = q^* M + r^* (\Omega - M') + r^*\omega, \tag{22}$$

но такая интерполяционная аномалия D^* является двухиндексной.

Итак, из всех возможных способов локального осреднения однократно осредненной функции ограниченной пространственной круговой задачи трех точек только двухиндексный вариант учитывает все члены класса нуль полностью.

§ 6. СРАВНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВУХИНДЕКСНОГО УПРОЩЕННОГО ВАРИАНТА С ТОЧНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРУГОВОЙ ОДНОКРАТНО ОСРЕДНЕННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТОЧЕК ДЕЛОНЕ — ХИЛЛА

Фиксация элемента ω, входящего в возмущающую функцию, помимо интерполяционной аномалии D^*, производится в упрощенной схеме до выполнения частных диференцирований пертурбационной функции. При этом диференцировать по ω мы должны в упрощенном варианте только через посредство интерполяционной аномалии D^*. Вследствие этого коэфициенты диференциальных уравнений для нашей упрощенной схемы будут отличаться от коэфициентов диференциальных уравнений однократно осредненной круговой задачи Делоне-Хилла. Однако это отличие будет иметь место только в уравнениях для элементов e и i, ибо только в эти диференциальные уравнения входят частные производные от пертурбационной функции по ω.

Диференциальные уравнения для e и i в однократно осредненном варианте пространственной круговой ограниченной задачи трех точек при использовании разложения (21) для пертурбационной функции будут иметь следующий вид:

$$\frac{de}{dt} = \frac{km'\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}\, e} \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{p=0}^{2n} \Pi_{n-p}^{n}(s) \Bigg\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_{r^*j} \sin\,[r^*j\,(\Omega - M') +$$

$$+ r^*j\,\omega + q^*jM]\,(-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j) + \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{r^*j-1} \sin\,[r^*j\,(\Omega - M') +$$

$$+ (r^*j - 2)\,\omega + q^*jM]\,(-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j - 2) + \ldots \Bigg\}, \tag{23}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{km'}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sum_{n=0}^{2n} \iota^n \sum_{p=0}^{\infty} \Pi_{n-p}^{n}(s) \Bigg\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_{r^*j} \sin\,[r^*j\,(\Omega - M') +$$

$$+ r^*j\,\omega + q^*j\,M]\,\frac{2\sigma^2 r^*j}{\sin i} + \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_{r^*j-1} \sin\,[r^*j(\Omega - M') + (r^*j-2)\,\omega +$$

$$+ q^*j\,M]\,\frac{(-\cos i)\,(r^*j-2) + r^*j}{\sin i} + \ldots \Big\}. \tag{24}$$

Для нашего упрощенного двухиндексного варианта мы взамен этих уравнений будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{de}{dt} = \frac{km'\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{a}\,e} \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{p=0}^{2n} \Pi^n_{n-p}(s) \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_{r^*j} \sin\,[r^*j\,(\Omega -$$

$$- M') + r^*j\,\omega + q^*jM]\,(-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j) + \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{r^*j-1} \sin\,[r^*j\,(\Omega -$$

$$- M') + r^*j\,\omega + q^*j\,M - 2\,\omega_0]\,(-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j) + \ldots \Big\}, \tag{25}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{km'}{\sqrt{a\,(1-e^2)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^n \sum_{p=0}^{2n} \Pi^n_{n-p}(s) \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} A_{r^*j} \sin\,[r^*j\,(\Omega -$$

$$- M') + r^*j\,\omega + q^*jM]\,\frac{2\,\sigma^2 r^*j}{\sin i} + \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_{r^*j-1} \sin\,[r^*j\,(\Omega - M') +$$

$$+ r^*j\,\omega + q^*jM - 2\,\omega_0]\,\frac{2\,\sigma^2 r^*j}{\sin i} + \ldots \Big\}. \tag{26}$$

Сравнивая диференциальные уравнения (23) и (25) для эксцентриситета e, мы видим, что у членов класса нуль коэфициенты в этих уравнениях одинаковы и не имеют множителя σ^2. У членов класса один отношение соответствующих коэфициентов есть

$$\frac{-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j - 2}{-\sqrt{1-e^2}\,q^*j + r^*j}.$$

Если $j \to \infty$, то это отношение стремится к единице. Следовательно, в упрощенном варианте в уравнении для e лучше учитываются члены высших гармоник. Учитывая, что члены класса один имеют множитель σ^2, а члены класса нуль такого не имеют, мы вправе утверждать, что, выбирая i достаточно малым, абсолютное и относительное влияние неправильности учета коэфициентов в уравнении для эксцентриситета e можно сделать произвольно малым.

Сравнивая диференциальные уравнения (24) и (26) для наклонности i, мы видим, что члены класса нуль учтены в упрощенном варианте правильно. Различие в коэфициентах начинается с членов класса один. При переходе к упрощенному варианту при членах класса один появляется множитель $\frac{2\,\sigma^2 r^*j}{\sin i}$ взамен множителя $\frac{-(\cos i)(r^*j-2) + r^*j}{\sin i}$ в уравнении для однократно осредненной задачи. Здесь так же, как и для e, получается, что отношение соответствующих коэфициентов стремится к единице, когда $j \to \infty$. Действительно,

$$\lim_{j \to \infty} \frac{-(\cos i)(r^*j - 2) + r^*j}{-(\cos i)\; r^*j + r^*j} = 1.$$

Таким образом, можно утверждать, что упрощенный вариант учитывает лучше члены высших гармоник. В диференциальном уравнении для i в упрощенном варианте члены класса один получают добавочный множитель σ^2. Следовательно, учитывая малость этого множителя, можно утверждать, что в упрощенном варианте в уравнении для i не учитываются члены класса один.

В отличие от диференциального уравнения для e в уравнении для i нет существенной разницы между членами класса нуль и класса один, ибо члены обоих классов имеют тот же малый множитель $\frac{\sigma^2}{\sin i}$. Коэфициенты класса один при локальном осреднении мы искажаем. Следовательно, здесь относительное влияние неправильности учета коэфициентов невозможно уменьшить, выбирая i достаточно малым. Тем не менее, при достаточно малом i абсолютное влияние неправильности учета коэфициентов при не слишком больших промежутках времени можно сделать произвольно малым, ибо искаженная часть уравнения для i вместе с соответствующей частью в диференциальном уравнении в сравниваемой задаче при $i \to 0$ стремится также к нулю. На практике при достаточно малых значениях i мы будем считать решением данного диференциального уравнения для i в упрощенном варианте постоянную величину i_0. Это отнюдь не уменьшает точности. Действительно, замена правой стороны диференциального уравнения через нуль вносит там ошибку того же порядка, что и при локальном осреднении. Это ошибка порядка величины правой стороны диференциального уравнения для i, а именно порядка $\frac{\sigma^2}{\sin i}$.

Кафедра астрономии
Декабрь 1950 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Д., Об интерполяционно-осредненных вариантах ограниченной задачи трех точек, „Вестник Московского Университета", № 2, 1950, стр. 29.

2. Моисеев Н. Д., Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек, „Труды ГАИШ", том XV, кн. I, 1945, стр. 100.

3. Моисеев Н. Д., Об осредненных вариантах ограниченной круговой плоской проблемы трех точек, „Труды ГАИШ", том XV, кн. I, 1945, стр. 75.

4. Орлов Б. А., Разложение пертурбационной функции по методу Ньюкома, „Труды АО ЛГУ", том VI, 1936.

О ПОТЕРЯХ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ НА ИОНИЗАЦИЮ И ВОЗБУЖДЕНИЕ АТОМОВ СРЕДЫ

П. Е. Кунин

До работы Ферми [3] при расчете потерь энергии заряженной частицы при движении в среде с диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ на возбуждение и ионизацию атомов не учитывалось влияние среды на взаимодействие летящей частицы с ионизируемым (или возбуждаемым) атомом. Ферми показал, что экранирование поля частицы, возникающее благодаря поляризации среды, при больших энергиях заметно меняет величину ионизационных потерь энергии на единицу пути, т. е. потерь на ионизацию и возбуждение атомов среды. Несмотря на то что Ферми исходил из весьма грубого предположения, что электроны в атомах среды связаны „квазиупруго" с одной лишь собственной частотой, основные черты поправок к обычной теории он получил правильно. В частности, им был получен тот общий результат, не зависящий от предположений о характере связи электронов в атоме, что при возрастании энергии частицы ее ионизационные потери на „далекие" соударения стремятся к конечному пределу; величина этого предела зависит только от электронной „плотности" среды, а не от атомных характеристик — собственных частот или „сил осцилляторов". При этом „далекими" мы здесь и впредь будем называть такие соударения ионизирующей частицы с атомными электронами, параметр удара которых больше атомных размеров. Легко показать, что при этом энергия, теряемая частицей в каждом акте соударения, будет мала в сравнении с энергией самой частицы, вследствие чего явление может описываться классически. В противоположность этому, соударения с параметром удара („прицельным расстоянием"), меньшим атомных размеров, мы будем называть „близкими".

Однако для построения всей кривой ионизационных потерь нельзя ограничиться предельным случаем Ферми и необходимо использовать более точную дисперсионную формулу. В настоящей работе производится обобщение рассуждений Ферми в этом направлении, т. е. подсчитывается поправка на поляризацию среды или, как говорят, „эффект плотности" в предположении произвольного, дискретного или непрерывного, спектра собственных частот; при этом зависимость диэлектрической постоянной ε от частоты ω берется в следующем общем виде:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + A \sum_k \frac{f_k}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}, \qquad A = \frac{4\pi e^2 n}{m}. \tag{1}$$

(В случае непрерывного спектра сумма заменяется интегралом, а f_k, ω_k и γ_k становятся функциями ω.)

Здесь ω_k, γ_k — собственные частоты и соответствующие им коэфициенты затухания атомов среды, f_k — силы осцилляторов, e и m — заряд и масса электрона, n — число электронов в 1 см^3. По окончании настоящей работы нам стало известно, что аналогичные результаты были получены Виком [4] другим методом, который, однако, в его работе подробно не излагается.

Как уже указывалось, потери энергии быстрой частицы на „далекие" соударения малы в сравнении с первоначальной энергией частицы, что обуславливает возможность использования классической (релятивистской) электродинамики при подсчете потерь на „далекие" соударения. „Близкие" соударения надо подсчитывать квантовомеханически, однако поправки на „эффект плотности" на них не сказываются. Поэтому мы поступим следующим образом. Найдем разность значений, которые получаются для ионизационных потерь на соударения с параметрами удара, большими некоторого значения ρ (ρ порядка атомных размеров), по обычной классической теории Бора (формула (22)) и настоящей теории (формулы (18), (21)). Вычитая затем эту разность из полной величины ионизационных потерь, подсчитанной по обычной квантовомеханической формуле [5], не учитывающей поляризации среды (соотношение (25)), мы получим правильные значения удельных ионизационных потерь с учетом действия поляризации, производимой полем летящей частицы.

Выражение для потерь энергии на соударения с параметром удара, большим некоторой величины ρ, при движении частицы в среде с произвольной диэлектрической постоянной $\varepsilon(\omega)$ было получено Таммом и Франком [1, 2] в их работах по черенковскому излучению. Основная формула, полученная Таммом [1], может быть выведена следующим образом: потери энергии частицы заряда e, массы m, движущейся в некоторой среде с постоянной скоростью $v = \beta c$ в направлении оси z, на соударения с электронами атомов среды, расположенными на расстояниях больших ρ от ее траектории, определяются потоком вектора Умова-Пойнтинга через цилиндрическую поверхность радиуса ρ, окружающую траекторию частицы. Вектор Умова-Пойнтинга определяется электрическим и магнитным полями частицы, которые находятся решением уравнений Максвелла. Если все величины разложить в интегралы Фурье, то решение уравнений Максвелла для компонент Фурье сведется к решению следующего уравнения для компонент Фурье векторного потенциала:

$$\nabla^2 A_\omega + \frac{\omega^2 \varepsilon(\omega)}{c^2} A_\omega = -\frac{4\pi}{c} j_\omega. \tag{2}$$

Так как ток, создаваемый летящей частицей, равен

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z(\omega) = z\, v\, \delta(x)\, \delta(y)\, \delta(z - v\, t) = \frac{e}{2\pi} e^{-i\omega z}\, \delta(x)\, \delta(y),$$

или в цилиндрических координатах (δ — функция Дирака),

$$j_z(\omega) = \frac{e}{2\pi^2 \rho}\, e^{-\frac{i\omega z}{v}}\, \delta(\rho),$$

то векторный потенциал можно искать в виде

$$A_\rho = A_\varphi = 0, \qquad A_z(\omega) = \frac{e}{2\, c}\, a(\rho)\, e^{-\frac{i\omega z}{v}}.$$

Для $a(\rho)$ получается диференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + s^2 a = -\frac{4}{\pi \rho}\, \delta(\rho), \tag{3}$$

где

$$s = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 \varepsilon(\omega) - 1}, \qquad \beta = \frac{v}{c}. \tag{4}$$

Если скалярный потенциал φ_ω исключить при помощи соотношения

$$\operatorname{div} A_\omega + \frac{i\,\omega}{c}\, \varepsilon(\omega)\, \varphi_\omega = 0,$$

то для напряженностей полей H_ω и E_ω получим следующие выражения:

$$H_\omega = \operatorname{rot} A_\omega, \qquad E_\omega = -\frac{i\, c}{\omega\, \varepsilon(\omega)}\, \boldsymbol{\Delta} \operatorname{div} A_\omega - \frac{i\,\omega}{c} A_\omega.$$

Входящая в предыдущие соотношения диэлектрическая постоянная $\varepsilon(\omega)$ является коэфициентом в материальном уравнении

$$D_\omega = \varepsilon(\omega)\, E_\omega.$$

Вычисляя таким образом E, H, вектор Умова-Пойнтинга

$$S_\rho = -\frac{c}{4\pi} E_z H_\varphi$$

и его поток, получим для потерь энергии на пути dx

$$-dE = 2\pi\, \rho\, dx \int_{-\infty}^{\infty} S_\rho\, d\, t$$

или

$$-\frac{dE}{dx}=\frac{i\pi c^2\rho}{4\pi v^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon(\omega)}-\beta^2\right)a(\omega)\frac{\partial a(-\omega)}{\partial\rho}\,\omega\,d\omega\,. \tag{5}$$

Входящая сюда величина $a(\rho,\omega)$ получается решением диференциального уравнения (3) в виде:

$$\left.\begin{aligned} a&=-iH_0^{(2)}(s\rho)\quad \text{при } \omega>0,\\ a&=+iH_0^{(1)}(s\rho)\quad \text{при } \omega<0, \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

где $H_0^{(i)}$ — ханкелевские функции нулевого порядка. (5) и (6) и являются основными соотношениями, полученными Таммом [2], который применил их к подсчету интенсивности черенковского излучения. При этом подсчете можно, как это и было сделано Таммом, считать диэлектрическую постоянную $\varepsilon(\omega)$ величиной действительной, т. е. пренебречь поглощением электромагнитных волн в среде. Если же учесть поглощение [3], т. е. мнимую часть диэлектрической постоянной, то с помощью соотношений (5) и (6) можно найти и полные потери (на ионизацию и излучение)*).

Для подсчета ионизационных потерь мы воспользуемся теперь асимптотическим выражением для ханкелевских функций, входящих в выражения (6) при малых значениях аргумента (функции Ханкеля в (6) выбраны так, чтобы решения исчезали на бесконечности). Если значение аргумента функций Ханкеля мало в сравнении с единицей, то справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\,[iH_0^{(1)}(ix)]&=-\lim_{x\to 0}\,[iH_0^{(2)}(-ix)]=\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma x},\\ \gamma^2&=e^{2\,\cdot\,\text{пост. Эйлера}}\approx 3{,}17\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Условие малости аргумента требует, чтобы было

$$\rho\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\beta^2\varepsilon(\omega)}\ll 1 \text{ или } \rho\ll\frac{v}{|\omega|}\sim\lambda_\omega\,. \tag{8}$$

С другой стороны, поскольку мы пользуемся макроскопической теорией, ρ должно быть не менее атомных расстояний в среде. Сравнение с длинами волн характеристического рентгеновского излучения показывает, что в конденсированной среде такое асимптотическое представление несправедливо только для процессов вырывания K-электронов из атомов элементов с $Z>25$-30 и L-электронов нескольких самых тяжелых элементов, в газах же вырывание K-электронов таким путем вообще учитывать нельзя.

---

*) Нелишне заметить, что весь расчет Ферми основан на методе, разработанном И. Е. Таммом для подсчета черенковского излучения; ссылка на работу Тамма [1] имеется и у самого Ферми [3].

Мы считаем, что множитель $\sqrt{1-\beta^2\varepsilon(\omega)}$ не становится особенно большим ни при каких ω из-за наличия затухания, особенно сильного вблизи собственных частот (подробнее об этом см. ниже).

После подстановки асимптотических значений (7) в (5) получаем

$$-\frac{dE}{dx}=-\frac{ie^2}{2\pi v^2}I,\quad I=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\beta^2\right)\ln\frac{4v^2}{\gamma^2\rho^2\omega^2(1-\beta^2\varepsilon)}\,\omega\,d\omega. \tag{9}$$

Для интегрирования этого выражения разобьем I на три части. Каждый из полученных таким образом интегралов I_1, I_2, I_3 вычисляется подходящим деформированием контура интегрирования в комплексную плоскость. При этом надо учесть следующие обстоятельства:

1) Функция $\dfrac{1}{\varepsilon(\omega)}$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости, если для $\varepsilon(\omega)$ принять обычную дисперсионную формулу (1), где n — число электронов в 1 см^3 $(n=NZ)$ и f_k — силы осцилляторов $(\sum\limits_k f_k=1)$. Высказанное утверждение сводится к тому, что уравнение $\varepsilon(\omega)=0$ не должно иметь нулей выше действительной оси, в чем легко убедиться, представив его в виде $(\omega=\xi+i\eta)$:

$$\sum_k\frac{f_k[\omega_k^2-\xi^2+\eta^2+\gamma_k\eta+i(2\eta+\gamma_k)]}{(\omega_k^2-\xi^2+\eta^2+\gamma_k\eta)^2+\xi^2(2\eta+\gamma_k)^2}=-\frac{1}{A},\quad A>0.$$

Левая часть должна быть действительной, а это возможно в двух случаях: либо если $\eta=-\dfrac{\gamma_k}{2}$, т. е. корни находятся в нижней полуплоскости, либо если $\xi=0$, но тогда

$$\sum_k\frac{f_k}{\omega_k^2+\eta^2+\gamma_k\eta}=-\frac{1}{A}$$

и η опять должно быть меньше нуля (иначе все члены суммы будут положительны).

2) Уравнение $\varepsilon(\omega)\beta^2=1$ в верхней полуплоскости имеет корни только на мнимой оси. В этом легко убедиться рассуждениями, аналогичными предыдущим. Корень в верхней полуплоскости (хотя бы один) существует только при $\varepsilon(0)\beta^2>1$, что эквивалентно условию

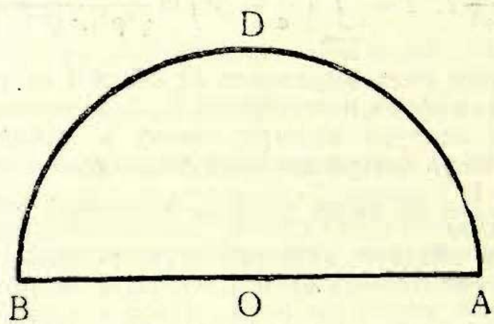
$$v>\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}=\frac{c}{n_0}.$$

Для вычисления первого интеграла

$$I_1=\ln\frac{4v^2}{\gamma^2\rho^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon}-\beta^2\right)\omega\,d\omega \tag{10}$$

достаточно взять по полукругу бесконечного радиуса (от точки А через *D* до точки В на фиг. 1) интеграл

$$\int \frac{\omega\, d\omega}{\varepsilon(\omega)}$$



Фиг. 1.

(вторая часть интеграла *I* пропадает из-за нечетности подинтегральной функции). В результате, учитывая, что на большом расстоянии от начала координат асимптотическое значение $\varepsilon = 1 - \frac{A}{\omega^2}$, получаем

$$I_1 = i\pi A \ln \frac{4v^2}{\gamma^2 \rho^2}. \tag{11}$$

Второй интеграл

$$I_2 = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2 \right) \ln(\omega^2)\, \omega\, d\omega \tag{12}$$

путем вычитания и добавления членов с нечетными подинтегральными функциями вдоль всей действительной оси (что не меняет его значения) может быть заменен следующим

$$I_2 = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{A}{\omega^2} \right) \ln(\omega^2)\, \omega\, d\omega. \tag{12a}$$

Контур интегрирования надо выбирать так, как указано на фиг. 2. При этом интегралы по удаленной полуокружности исчезают. Разрез вдоль мнимой оси необходим потому, что в первой и во второй четвертях $\ln \omega$ должен быть определен по-разному, так как на вещественной оси он должен непрерывно переходить в $\ln|\omega|$. Напомним, что аргумент функции Ханкеля, из которой получился логарифм, согласно (6), содержит множитель $|\omega|$.

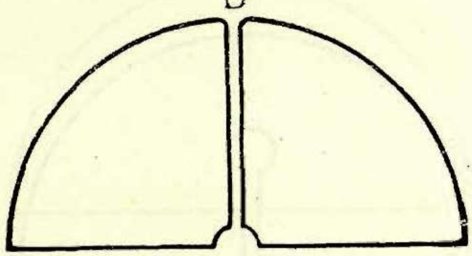
Учитывая сказанное, определим логарифм в комплексной плоскости следующим образом: в первой четверти

$$\ln \omega = |\omega| + i\varphi,$$

во второй

$$\ln \omega = \ln |\omega| - i\,\varphi,$$

причем $\varphi = 0$ на вещественной оси и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ на мнимой оси. Разность значений $\ln(\omega^2)$ на „берегах" мнимой оси будет $-2\pi i$. Кроме того, надо



Фиг. 2.

учесть, что на участке CE вещественной оси I_2 исчезает в силу нечетности подинтегральной функции при $\omega \to 0$. Таким образом, для I_2 получаем $\left(\int\limits_{\Delta}\right.$ означает интеграл по малому полукругу вокруг начала координат$\left.\right)$:

$$I_2 = \lim_{\delta \to 0} \left\{ 2\pi i \int\limits_{i\delta}^{i\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{A}{\omega^2} \right) \omega\, d\omega + \int\limits_{\substack{\Delta \\ -\pi/2}}^{\pi/2} \ln(\omega^2) \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \frac{A}{\omega^2} \right) \omega\, d\omega \right.$$

Очевидно, во втором интеграле множитель ω при $\delta \to 0$ „убьет" все члены, кроме последнего, поэтому, вводя обозначение $\omega = iu$, получим

$$I_2 = \lim_{\delta \to 0} \left\{ -2\pi i \int\limits_{\delta}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon(iu)} - 1 + \frac{A}{u^2} \right) u\,du - A \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \ln(\omega^2) \frac{d\omega}{\omega} \right\}. \tag{13}$$

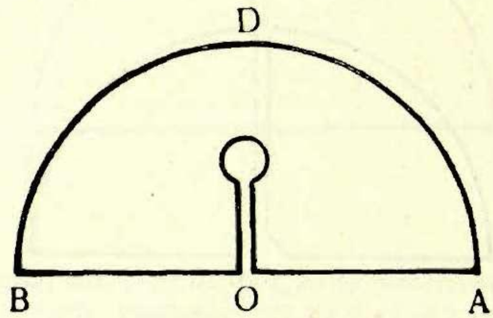
Далее можно ввести для удобства в дальнейшем корень уравнения $\varepsilon(iu)\beta^2 = 1$, который обозначим через u_0 ($\omega_0 = iu_0$), тогда I_2 можно представить в виде

$$I_2 = \lim_{\delta \to 0} \left\{ -2\pi i \left[\int\limits_{u_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{A}{u^2} \right) u\,du + \int\limits_{\delta}^{u_0} \frac{u\,du}{\varepsilon} - \frac{u_0^2}{2} + A \ln u_0 + A \ln \delta \right] - \right.$$

$$-A \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i d\varphi \, (2 \ln \delta + 2 i \varphi) \Big\} =$$

$$= -\lim_{\delta \to 0} \left\{ 2\pi i \left[\int_{u_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{A}{u^2} \right) u du + \int_{\delta}^{u_0} \frac{u du}{\varepsilon} - \frac{u_0^2}{2} + A \ln u_0 + A \ln \delta - A \ln \delta \right] \right\} =$$

$$= -\pi i \left\{ 2 \int_{u_0}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{A}{u^2} \right) u du + 2 \int_{0}^{u_0} \frac{u du}{\varepsilon} - u_0^2 + A \ln v_0^2 \right\} . \qquad (14)$$



Фиг. 3.

Вычисление третьего интеграла

$$I_3 = -\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2 \right) \ln (1 - \beta^2 \varepsilon) \omega \, d\omega \qquad (15)$$

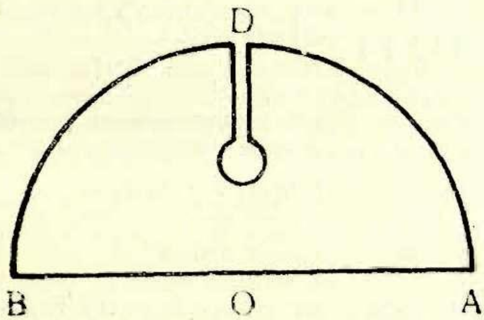
приводит к различному результату в зависимости от того, существует ли корень уравнения $1 - \beta^2 \varepsilon(iu) = 0$ на верхней половине мнимой оси или нет. Рассмотрим сначала случай наличия такого корня $\left(\varepsilon(0)\beta^2 > 1, \; v > \frac{c}{n}\right)$. Тогда интеграл I_3 берется по контуру, показанному на фиг. 3. Корень u_0 $(\varepsilon(iu_0)\beta^2 = 1)$ будет точкой ветвления, и возможность ее обхода необходимо уничтожить разрезом*.

*) Этот разрез необходимо произвести снизу, т. е. от действительной оси, так как в противном случае для того, чтобы иметь правильное значение логарифма на действительной оси, надо неаналитически определить его в комплексной плоскости, что делает невозможным деформирование контура для вычисления интеграла. Действительно, если разрез произвести сверху и интегрировать по контуру, показанному на фиг. 4, интеграл будет расходиться. Это обусловлено тем, что обход точки u_0 ведет к изменению значения логарифма на $2\pi i$ и в точке D мы будем иметь различные значения подинтегральной функции в зависимости от того, приближаемся мы к ней справа или слева по большому полукругу. Поэтому представляется странным замечание Вика, что контур интегрирования в этом случае должен быть избран согласно фиг. 4, несмотря на правильность полученного им результата.

Легко видеть, что интеграл по исчезающе малой окружности вокруг u_0 при стремлении радиуса этой окружности к нулю исчезает. Для интеграла по большой полуокружности (обозначенного $\int\limits_R$) получим:

$$I_{3R} = -\int\limits_R^{\pi} \left[\left(1 + \frac{A}{\omega^2} - \beta^2\right)\frac{A\beta^2}{1-\beta^2}\frac{1}{\omega^2} + \ln(1-\beta^2)\left(1+\frac{A}{\omega^2}\right)\right]\omega\, d\boldsymbol{\omega};$$

$$I_{3R} = -i\pi A\,\{\ln(1-\beta^2) - \beta^2\}. \tag{16}$$



Фиг. 4.

Интеграл же по берегам разреза равен (в силу того, что $\ln(1-\varepsilon\beta^2)$ после обхода точки ветвления меняет свое значение на $2\pi i$):

$$\left.\begin{aligned} I_{3u} &= 2\pi i \int\limits_0^{u_0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \beta^2\right)u\,du = \\ &= \pi i\left[2\int\limits_0^{u_0}\frac{u\,du}{\varepsilon(iu)} - \beta^2 u_0^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$I_3 = I_{3R} + I_{3u}.$$

Теперь можно получить величину ионизационных потерь на соударения с параметром, большим ρ, для случая, когда скорость частицы больше скорости электромагнитного излучения бесконечно большой длины волны в данной среде, т. е. когда имеется корень уравнения $\beta^2\varepsilon = 1$ в верхней полуплоскости. Для этого нужно воспользоваться соотношением (9), подставляя вместо I сумму $I = I_1 + I_2 + I_3$. Таким образом получаем

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi ne^4}{mv^2}\left\{\ln\frac{4v^2}{\gamma^2\rho^2} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2 + (1-\beta^2)\frac{u_0^2}{A} - \ln u_0^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{A}\int\limits_{u_0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{A}{u^2}\right)u\,du\right\}. \tag{18}$$

В случае же $\varepsilon(0)\beta^2 < 1$ (отсутствие корней уравнения $\varepsilon(iu)\beta^2 = 1$ в верхней полуплоскости) имеем $I_{3u} = 0$; I_{3R} остается таким же (16), а интеграл I_2, согласно (13) и (14), нужно представить в следующем виде (без введения величины u_0):

$$I_2 = \lim_{\delta \to 0}\left\{ -2\pi i \int_{\delta}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 + \frac{A}{u^2}\right) u\,du - 2\pi i A \ln \delta \right\}.$$

Отсюда

$$I_2 = -\pi i\left[2\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) u\,du + 2A\int_{\omega_n}^{\infty}\frac{du}{u} + A \ln \omega_n^2\right]; \qquad (19)$$

ω_n здесь произвольно, его будет в дальнейшем удобно рассматривать как „среднюю" частоту в следующем смысле:

$$Z \ln \omega_n = f_1 \ln \omega_1 + f_2 \ln \omega_2 + \ldots \qquad (20)$$

Таким образом, в случае $v < \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(0)}}$ имеем:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{2\pi n e^4}{m v^2}\left\{\ln\frac{4v^2}{\gamma^2\rho^2} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2 - \frac{2}{A}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) u\,du - \right.$$

$$\left. - 2\int_{\omega_n}^{\infty}\frac{d\omega}{\omega} - \ln \omega_n^2\right\}. \qquad (21)$$

Вспоминая теперь, что ρ мы условились считать порядка атомных размеров, видим, что соотношения (18) и (21) дают потери энергии на „далекие" соударения. Как уже указывалось выше, влияние среды (эффект плотности) существенно только для далеких соударений, поэтому для получения полных потерь достаточно найти поправки к потерям энергии при далеких соударениях и прибавить их к полным потерям энергии на ионизацию и возбуждение, подсчитанным обычным путем. Обычная теория для далеких соударений (с параметром удара, большим ρ) дает:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_0 = \frac{2\pi n e^4}{m v^2}\left\{\ln\frac{4v^2}{\gamma^2\rho^2\omega_n^2} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right\}. \qquad (22)$$

Вычитая отсюда соответственно (18) и (21) и обозначая $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{точн.}} = \left(-\frac{dE}{dx}\right)_0 - \Delta$, получим поправки к обычной теории:

$$\Delta = \frac{2\pi n e^4}{m v^2}\left[\ln\frac{u_0^2}{\omega_0^2} - (1-\beta^2)\frac{u_0^2}{A} + \frac{2}{A}\int_{u_0}^{\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon(iu)} - 1 + \frac{A}{u^2}\right) u\,du\right]$$

$$(\varepsilon(0)\beta^2 > 1), \qquad (23)$$

$$\Delta = \frac{2\pi n e^4}{m v^2} \cdot \frac{2}{A}\left[\int_0^\infty \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) u\,du + A \int_{\omega_n}^\infty \frac{d\omega}{\omega}\right] (\varepsilon(0)\,\beta^2 < 1). \tag{24}$$

Эти поправки надо вычесть из обычной квантовомеханической формулы

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{0\ \text{квант.}} = \frac{2\pi n e^4}{m v^2}\left\{\ln\frac{(2)\, m v^2 W}{I^2(z)} - \ln(1-\beta^2) - \beta^2\right\}, \tag{25}$$

дающей потери энергии на соударения, при которых передается энергия, меньшая чем W. Для получения полных ионизационных потерь здесь надо вместо W подставить максимальную энергию, которую летящая частица может передать электрону при каждом акте. $I(Z)$ без особой погрешности (ввиду того, что он входит под логарифмом) можно считать равным $13{,}5 \cdot Z\ N$. Множитель (2) стоит здесь вместо множителя

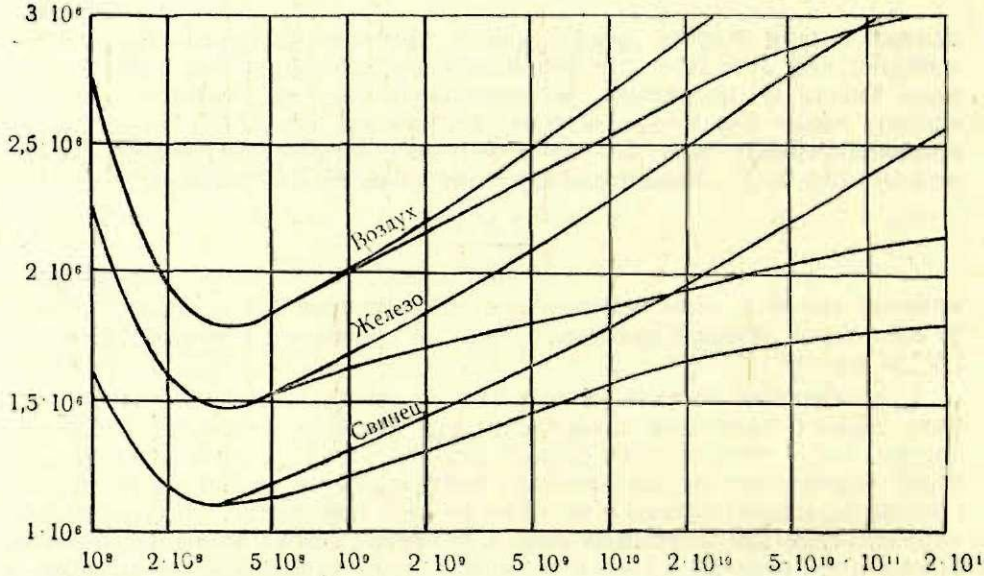
$$\frac{2\,Mm}{M+m},$$

который равен 1, если летящая частица электрон ($M = m$), и близок к 2, если масса летящей частицы велика по сравнению с массой электрона ($M \gg m$).

Существенным во всем изложенном является вопрос об учете затухания. Эффект плотности сказывается при больших скоростях (энергиях) частиц, когда нужно пользоваться для его учета соотношением (23). В этом выражении диэлектрическая постоянная, а значит, и оптические константы, входят только в подинтегральное выражение. Интегрирование производится вдоль мнимой оси, т. е. существенны такие значения ω, при которых разность $\omega_k^2 - \omega^2$ не может стать малой (так как ω_k должны быть, конечно, действительными). Но затухание, которое, вообще говоря, мало́, сказывается лишь при $\omega \sim \omega_k$. Таким образом, в окончательном выражении (23) им большей частью можно пренебречь. Однако необходимо заметить, что затуханием (т. е. величинами γ_k) нельзя было пренебречь в процессе вывода основных соотношений, так как в противном случае возник бы ряд затруднений. Во-первых, полюсы функции $\frac{1}{\varepsilon(\omega)}$ переместились бы тогда из нижней полуплоскости на действительную ось, что затруднило бы интегрирование в комплексной плоскости. Во-вторых, в этом случае аргумент функций Ханкеля в (6) не был бы мал вблизи собственных частот ω_k и стала бы невозможной замена функций Ханкеля логарифмом. Последнее затруднение в действительности не возникает потому, что как раз близ собственных частот затухание особенно велико.

Если рассматривать потери энергии лишь на далекие соударения, можно показать, что они стремятся к определенному конечному пределу при приближении скорости частицы к скорости света, т. е. при увеличении энергии частицы. Для этого надо принять во внимание, что u_0 будет в этом случае настолько велико, что при его нахождении из уравнения $\varepsilon(iu_0)\beta^2 = 1$ для ε можно использовать асимптотическое выражение $\varepsilon = 1 + \frac{A}{u^2}$. Тогда получим:

$$u_0^2 = \frac{A\,\beta^2}{1-\beta^2}$$



Фиг. 5. Ионизационные потери энергии мезонов (энергия покоя 100 *MeV*) в воздухе, железе и свинце. По оси абсцисс отложена энергии мезона в электрон-вольтах (в логарифмическом масштабе), по оси ординат — потери энергии в *eV* на г/см². Для каждого материала проведены две кривые: верхняя показывает потери энергии без учета поляризации среды, нижняя — с учетом поляризации.

и, подставляя это в (18) (с тем же асимптотическим значением для ε), найдем:

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{max}} = \frac{2\pi n e^4}{mc^2} \ln \frac{mc^2}{\pi n e^2 \rho^2 \gamma^2}. \tag{26}$$

Этот результат был получен и Ферми: предел, к которому стремятся потери энергии на далекие соударения, не зависит от оптических характеристик атомов среды.

Полные потери энергии на ионизацию при столь больших энергиях частицы, что справедливо (26), можно подсчитать, вычитая из (25) не (24), а разность между (22) и (26). Тогда получается

$$\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{мах}} = \frac{2\pi ne^4}{mc^2}\left[\ln\frac{2\pi m^2 c^2 W}{ne^2 h^2} - 1\right], \quad \beta = 1. \tag{27}$$

При меньших энергиях (как раз в той области, где ионизационные потери играют основную роль, а тормозное излучение еще не сказывается) нельзя уже пользоваться соотношением (27), а нужно произвести расчет точно, используя спектральные данные для значений собственных частот электронов в атомах среды и соответствующих им сил осцилляторов. Численные расчеты [4] показывают, что возможная неточность в экспериментальных значениях ω_k и γ_k не вносит существенной ошибки в результат (с наименьшей точностью на опыте получаются значения для сил осцилляторов, соответствующих внешним электронным оболочкам, но малые частоты почти ничего не вносят в интеграл (9) из-за нечетности подинтегрального выражения при $d\omega$). На фиг. 5 мы приводим графическую зависимость ионизационных потерь (в eV на г/см^2) от энергии мезонов. Наряду с кривыми, показывающими потери в воздухе, железе и свинце, приведены кривые, дающие ионизационные потери по обычной теории, не учитывающей поляризации среды полем летящей частицы. Из фиг. 5 видно, что значение энергии мезона, при которой становится заметной поправка, вводимая настоящим расчетом, находится между 10^{10} eV для воздуха и, примерно, 5.10^8 eV для свинца.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность проф. И. Е. Тамму за ряд ценных советов и указаний.

Кафедра теоретической физики
Январь 1951 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм I. E., ,,Journal of Physics of the USSR", 1, 439, 1939.
2. Тамм И. Е. и Франк И. М., ,,Доклады АН СССР", 14, 107, 1937.
3. Fermi E., ,,Phys. Rev.", 57, 485, 1940.
4. Vick H., ,,Nuovo Cimento", 1 (H. C.), 302, 1943; ,,La Ricerca Scientifica" 11, 273, 1940; 12, 858, 1941.
5. Bethe H., ,,Ann. der Phys." 5, 325, 1930; 76, 293, 1932. Bloch F., ,,Zeitschr. fur Physik." 81, 363, 1933

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

От редакционной коллегии 5

Фогелс Э. К. — Пример нелинейной прогрессии, содержащей бесконечное множество простых чисел 7

Мышкис А. Д. и Лепин А. Я. — Об одном функциональном неравенстве 13

Мышкис А. Д. и Лепин А. Я. — Об одном неравенстве в теории интеграла Стильтьса. 17

Бразма Н. А. — Общий случай операционного исчисления для функций, зависящих от матричного параметра 25

Риекстыньш Э. Я. — Изучение некоторых специальных функций, применимых к решению телеграфных уравнений 35

Лусис А. Я. — Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра методом верхних и нижних функций. 51

Бразма Н. А. и Мышкис А. Д. — Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. 61

Бразма Н. А. — Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений 69

Мышкис А. Д. и Аболиня В. Э. — Теорема о единственности решения смешанной задачи для обобщенной системы телеграфных уравнений. . . . 75

Бразма Н. А. — Решение основных задач обобщенной системы телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных 79

Бразма Н. А. и Аболиня В. Э. — О резонансных явлениях в пучке проводов. 93

Риекстиньш Э. Я. — Об условиях расщепления обобщенной системы телеграфных уравнений 101

Штейнс К. А. — Упрощенный вариант пространственной круговой ограниченной задачи трех точек. 113

Кунин П. Е. — О потерях энергии частицы на ионизацию и возбуждение атомов среды. 125

Редактор И. Юрицина: Техническ. редактор А. Петерсон. Корректоры: Г. Евтушенко, Т. Иванова. Подписано к печати 27 августа, 1952 г. Формат бумаги 73x103$^{1}/_{16}$. 4,375 бумажн. листа. 11,99 печатн. листа. 9,82 уч.-издат. листа. Тираж 500 экз. ЯТ 40829. Типогр. заказ. № 137. Отпечатано в типографии № 6 ЛРТПП, г. Рига, ул. Валдемара, 6.

Цена 5 руб. 90 коп.

Опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
31	6 сверху	ρ^{k-1}	$\rho_k - 1$
65	6 сверху	$j \neq 0$ и $v \neq 0$	$j \neq 0$ и $v \neq 0$
78	3 снизу	уииверситета	университета
131	3 сверху	$\ln \omega = \lvert\omega\rvert + i\varphi$,	$\ln \omega = \ln \lvert\omega\rvert + i\varphi$,

Ученые записки VI том