PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITATE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

# ZINĀTNISKIE RAKSTI
# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS
XX
ТОМ

RĪGĀ 1958 РИГА

PSRS AUGSTĀKĀS IZGLĪTĪBAS MINISTRIJA
PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITATE

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

# ZINĀTNISKIE RAKSTI

# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS
XX
ТОМ

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

RĪGĀ 1958 РИГА

44/5764

188

Подписано к печати 15 августа 1958 г. Формат бумаги 70×108/16. 17,5 печ. листов. 19 уч.-изд. листов. Тираж 500 экз. ЯТ 07778. Отпечатано в типографии № 6 Латглавиздата, г. Рига, ул. Горького, 6. Заказ № 3613
Цена 12 руб. 50 коп.

# FIZIKAS-MATEMATIKAS ZINĀTNES
# ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

3. IZLAIDUMS
ВЫПУСК 3

## LUDVIGS JANSONS

Latvijas fiziķu saime skumst par Latvijas Valsts Universitates Fizikas un matematikas fakultates Eksperimentalās fizikas katedras vadītāja zinātņu kandidata docenta Ludviga Jansona pāragro pēkšņo nāvi š. g. 12. maijā. Latvijas zinātne pazaudējusi pieredzes bagātu fiziķi, pedagogu, organizatoru un vadītāju.

Dzimis 1909. gadā kā kalpa dēls, Ludvigs Jansons neatlaidīgā darbā, pārvarot daudzas grūtības, 1933. gadā nobeidz Latvijas Universitati. 1933.

Doc. Ludvigs Jansons.

gadā arī tiek veikts viņa pirmais patstāvīgais zinātniskais darbs «Hāna un Debaja-Serera metožu salīdzinājums», kas kļuva par viņa maģistra darbu.

Sevišķi rosīga viņa zinātniskā darbība kļuva pēc 1934. gada, kad viņš uzsāka darbu Latvijas Universitatē kā subasistents.

1935. gadā viņam piešķir zinātnisku komandējumu uz Varšavu, kur viņš ievērojamā poļu fiziķa Pienkovska vadībā izstrādā darbu, kura rezultati

parādījās trijās publikacijās ar nosaukumu: „«Piespiesto» līniju Zēmaņa efekts He spektrā». Darbā aplūkots Štarka komponenšu Zēmana efekts un noskaidrotas likumības, kādas valda šajās parādībās.

Atgriezies Rīgā, L. Jansons veic lielu pedagoģisku un organizatorisku darbu Fizikas Institutā, turpinot arī strādāt zinātnisku darbu. Daudzu eksperimentalu darbu veikšanai fizikā nepieciešams stabils augstspriegums, un L. Jansons pievēršas jautājumam par stabila augstsprieguma iegūšanu. Šo pētījumu rezultatā radās viņa habilitacijas darbs, kas tika aizstāvēts Matematikas un Dabas zinātņu fakultatē 1942. gadā: «Pētījumi par sprieguma stabilizaciju ar elektronu lampas palīdzību». Līdztekus jau pazīstamām shemām, eksperimentali un teoretiski aplūkotas arī oriģinalas jaunas shemas. Šā darba turpinājumā 1945. gadā LVU Fizikas un matematikas fakultates zinātnisko rakstu krājumā publicēšanai tika iesniegts darbs «Elektronu lampa sprieguma stabilizatora lomā». 1948. gadā tiek veikts tālāks teoretisks darbs «Mainīga palīgsprieguma izlietošana sprieguma stabilizacijā ar elektronu lampas palīdzību (iesniegts atskaites veidā LPSR ZA Fizikas Institutā), un eksperimentals pētījums «Sprieguma stabilizacija», kas iesniegts 1949. gadā.

Tai pašā laikā L. Jansons pievēršas gāzes izlādes jautājumiem. Šai laukā viņš veic pētījumus, pa daļai viens pats, pa daļai ar J. Šprunku. It īpaši viņu interesē vielas pārneses procesi gāzu izlādē. Darba materiali vairāku atskaišu veidā iesniegti LPSR ZA Fizikas Institutā. Darba gaitā noskaidrotas vairākas ļoti interesantas un oriģinalas likumsakarības, kādas novērojamas dažādu veidu gāzu izlādē.

Vistuvāks tomēr viņam paliek optiskais, it īpaši spektroskopiskais virziens. Jau piecdesmito gadu sākumā viņš sāk dzīvi interesēties par pusvadītāju īpašībām. Viņš veic vairākus pētījumus par fotopretestībām un pamazām arvien vairāk tuvojas cietvielas optikai. Šai virzienā viņš darbojas līdz pašai pānagrai nāvei, kura viņu pārsteidza aktivā darbā un spēku briedumā.

Kopā ar saviem līdzstrādniekiem un diplomandiem, L. Jansons izstrādā vairākus darbus, no kuriem būtu jāmin viņa darbs ar O. Šmitu — «Krāsu centru dihroisms sārmu halogenīdu kristalos» 1956. gadā un darbs «Svina ietekme uz rentgenizēta KCl absorbcijas spektru» 1957. gadā.

Tomēr līdztekus tam L. Jansons nemitīgi darbojas arī daudzās citās fizikas nozarēs. Te varētu minēt viņa pētījumu, ko viņš veic kopā ar LPSR ZA Eksperimentalās medicinas instituta līdzstrādnieku P. Ozoliņu: «Iekārta termiskā kairinājuma kvantitativai raksturošanai»; šis darbs publicēts Eksperimentalās medicinas instituta rakstos 1956. gadā.

Auglīga bija L. Jansona darbība palīdzībā LPSR rūpniecībai. Bez daudzām konsultacijām, ekspertizēm un sīkākiem pētījumiem veikti arī lielāki darbi. Te jāmin, piemēram, pētījums, kas veikts rūpnīcai «Etalons», nosakot precizijas svaru kļūdu cēloņus. Šis darbs iesniegts rūpnīcai izmantošanai sīkas atskaites veidā. Gribas arī pieminēt pētījumu, kura rezultatā radusies rūpnīcas VEF radioaparata MIR skalas netiešā apgaismojuma sistema, spuldžu un lampu gaismas raksturlielumu noteikšanu u. c. Šeit varētu minēt arī to, ka L. Jansons pārbaudījis apgaismošanas atbilstību normām Rīgas Vagonu rūpnīcas ražotajos elektrovilcienos un tramvajos. Vēl īsi pirms nāves, 6. maijā, tika izdarīta kārtējā pārbaude. Rūpīga un ietilpīga darba rezultatā izstrādāta priekšlēca fotoaparatam «Smena» (rezultati iesniegti publicēšanai žurnalam «Pad. Latv. Skola») un pārbaudīta Rīgas daudznozaru kombinata ražotā priekšlēca ar gredzeniem fotoaparatam «Zorkij» un «Fed», pie kam pēdējā darba rezultatā eksperimentali noteikti un nodoti rūpnīcai arī visi dati instrukcijai un tabulām, kas nepieciešamas lēcas izmantošanai praksē. Rūpīgi izpētītas Rīgā ražoto fotografisko lēcu īpašības, filtru īpašības utt. Liels darbs veikts arī, palīdzot fabrikai «Uzvara»

izstrādāt un teoretiski pamatot metodiku pastilu un marmelades žāvēšanai ar infrasarkaniem stariem. Šis darbs pilnīgi nobeigts un rezultati ieviesti. Strādāts arī pie biskvitu cepšanas metodikas ar infrasarkaniem stariem. Darbs palicis uzrakstīts līdz pusei. Visi šie darbi veikti ar L. Jansonam raksturīgo pamatīgumu.

Būdams izcils audzinātājs, kas izaudzinājis gandrīz vai visu jauno fiziķu saimi, kuri pašlaik sekmīgi strādā mūsu republikā gan augstskolās, gan pētniecības iestādēs, gan vidusskolās, gan rūpnīcās, L. Jansons lielu darbu ieguldījis arī dažādu metodisku darbu izstrādāšanā. Jau 1940. gadā «Padomju Latvijas Skolā» parādās viņa darbs par demonstracijas eksperimentu «Fuko svārsta eksperiments skolā». Šo darbu viņš veica kopā ar savu dzīves biedri A. Jansoni.

1947. gadā iznāk viņa darbs «Fizikas praktikums», kuru vēl šodien sekmīgi izmanto studenti Latvijas augstskolās. Šai darbā atrodama virkne jaunu mērīšanas metožu dažādu fizikalu lielumu noteikšanai. 1954. gadā «Fizikas praktikums» tika izdots jaunā, stipri pārstrādātā un papildinātā izdevumā.

Daudz metodiskā darba ieguldīts, izveidojot fizikas mācības laboratorijas LVU Fizikas un matematikas fakultates Eksperimentalās fizikas katedrā, Skolotāju Institutā un citur.

L. Jansons nekad nav aizmirsis arī lielo nozīmi, kāda ir zinātnes popularizēšanai tautas masās. Jau kopš 1954. gada parādījās viņa popularzinātniskie raksti gan žurnalos, gan laikrakstos. Regulari viņš lasījis popularzinātiskus priekšlasījumus skolu audzēkņiem, iestādēm un rūpnīcām. Pašlaik iespiešanā viņa popularzinātniskā brošura par pusvadītājiem.

Dzīvi interesēdamies par visu jauno, kas notiek fizikā, Jansons rūpīgi sekoja jaunākajai literaturai, pie tam ne tikai tajā laukā, kurā viņš strādāja pats, bet arī citās fizikas nozarēs. Rezultatā grūti bija atrast Latvijā fiziķi ar tik plašām un daudzpusīgām zināšanām. Savas zināšanas viņš nekad nepaturēja sev vien, bet allaž domāja par to, kā tās varētu padarīt pieejamas iespējami lielākam cilvēku skaitam. Vēl viena raksturīga īpašība Ludvigam Jansonam bija viņa lielā rūpība un prasme eksperimentā, roku veiklība, ko nevar dot tikai laba skola, bet kas prasa zināmas dabas dotības. Šī rūpība eksperimentā saistījās ar īsta zinātnieka mīlestību šai virzienā. Katrs rezultats, ko L. Jansons bija ieguvis eksperimentā, bija iegūts daudzos mērījumos, rūpīgi pārbaudīts un atkārtots.

Daudz kas palicis pusceļā. Daudz kas bija iecerēts un netika izpildīts pāragrās nāves dēļ, dažādi darba materiali pārmērīgās darba slodzes dēļ palikuši nepublicēti. Bet arī tas, kas paveikts, liek mums ar dziļu cieņu atcerēties un pieminēt viņa gaišo tēlu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В СОВЕТСКОЙ ЛАТВИИ ЗА ПОСЛЕДНЕЕ ДЕСЯТИЛЕТИЕ

*А. Я. ЛУСИС*

Развитие математики в Советской Латвии за первое десятилетие своего существования охарактеризовано в моей обзорной статье „Работы математиков Советской Латвии за десять лет" [1]. В последующие годы (с 1950 года) научная работа по математике продолжалась на двух математических кафедрах Латвийского государственного университета, на кафедре математики Рижского педагогического института, на кафедре высшей математики Латвийской сельскохозяйственной академии и на кафедре математики РКВИАВУ. Институт физики и математики при Академии Наук ЛССР был преобразован в Институт физики, в котором математическая секция не существует, но с 1956 года организован вычислительный центр. Большинство рижских математиков, активно работающих над научными проблемами, сосредоточено на физико-математическом факультете Латвийского Государственного университета; в особенности плодотворную научную деятельность проявили члены кафедры Общей математики (Н. А. Бразма, А. Д. Мышкис и Э. Я. Риекстыньш).

Данная статья является обзором дальнейших научных работ латвийских математиков, выполненных после 1950 года. Математика в Советской Латвии продолжала развиваться по следующим главным направлениям: по теории чисел, по геометрии, по анализу в широком смысле и по практической математике. Новое направление работ начато по математической логике.

1. По математической логике имеются 3 работы *В. К. Детловса* [1], [2], [3] и одна работа *А. А. Курмитиса* [1]. Работы *В. К. Детловса* примыкают к исследованиям А. А. Маркова по теории алгорифмов. В этих работах установлена эквивалентность понятий алгорифмической и частично рекурсивной функции, а также вполне алгорифмической и общерекурсивной функций. А. Курмитис [1] показал, что система аксиом исчисления высказываний, данная А. А. Марковым в БСЭ (т. 25), не является независимой, так как одна из аксиом этой системы является следствием остальных аксиом.

2. По теории чисел 6 работ опубликовал Э. К. Фогелс, кроме того одну статью написала Н. Дума. В работах *Э. К. Фогелса* [1] и [2] даны финитные доказательства формул Гаусса-Дирихле о числе классов положительно определенных бинарных квадратичных форм и формул Валле-Пуссена об ассимптотическом распределении простых чисел в арифметической прогрессии. В его работе [3] разработана финитная теория для логарифмической и показательной функции, а [4] представляет доклад о финитных доказательствах в аналитической теории чисел, прочитанный 26 апреля 1951 года на Ученом Совете Математического Института имени Стеклова в Москве. В статье [5] строится последовательность чисел, содержащая бесконечное множество простых чисел, а в [6] получены теоремы о распределении простых чисел в начале арифметической прогрессии, исходя из теорем К. А. Родосского о плотности нулей $L$ — рядов Дирихле.

В статье [1] *Н. Дума* приводит несколько следствий из теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

3. По тензорной алгебре имеется одна работа *Ш. Д. Трупина* [1], в которой доказана методом поляризации теорема о единственности разложения полилинейной функции (тензора) на линейные и нераспадающиеся билинейные множители. Вопрос о разложении тензора на множители первой валентности рассмотрел А. М. Лопшиц в своей работе „Некоторые задачи тензорной алгебры в линейных безразмерных пространствах" (Труды сем. по вект. и тенз. анализу, вып. VI, 1948).

4. По геометрии имеются 11 работ, в которых рассматриваются вопросы дифференциальной геометрии и геометрических преобразований. *Л. Я. Березина* в своих работах [1] — [6] и [8] — [10] устанавливает свойства прямолинейных конгруенций, в частности, соотношения между геометрическими элементами двусторонне расслояемой пары прямолинейных конгруенций, существование различных видов расслояемых пар конгруенций, законы преломления конгруенции через оптическую систему и применения конгруенций в геометрической оптике. Подробный анализ некоторых ее работ имеется в Реферативном Журнале „Математика" (1953, 878; 1953, 1373; 1954, 1793; 1954, 5758).

Кроме того по дифференциальной геометрии имеется работа *Э. Я. Гринберга* [3], в которой исследуется в $n$ — мерном пространстве первая вариация криволинейного интеграла по дуге от функции, зависящей от кривизн $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ кривой и их производных по дуге. Полученные в работе результаты обобщают результаты И. Радона в соответствующей вариационной задаче для кривых трехмерного пространства.

По вопросам геометрических преобразований опубликована статья *К. Я. Залтса* [2]. В этой статье рассматриваются те частные случаи преобразования плоских фигур в равновеликие фигуры, которые выделяются простотой и легкостью графического или графо-аналитического осуществления.

5. По обыкновенным дифференциальным уравнениям и смежным вопросам опубликованы: 1 монография и 10 журнальных статей. Оригинальная монография *А. Д. Мышкиса* [3] представляет собой значительно переработанную часть его докторской диссертации „Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом", защищенной в 1950 году в МГУ (автореферат ее [4]). А. Д. Мышкису принадлежит заслуга создания как общей теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (существование и единственность решения, зависимость решения от начальных данных и от параметра и т. д.), так и качественной теории таких уравнений (ассимптотическое поведение решений, колебательный характер решений и т. д.). В монографии [3] и в статьях [1] и [2], в основном, рассматривается качественная теория линейных однородных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом 1-го и 2-го порядков. Это потребовало построения и систематического развития принципиально новых методов, —метода сравнения и метода возвратных последовательностей. В частности в монографии [3] исследуется более общий случай „распределения" запаздывания. При помощи интегралов Стильтьеса устанавливается связь рассматриваемых уравнений с интегральными уравнениями типа Вольтерра и интегро-дифференциальными уравнениями.

В двух совместных статьях *А. Д. Мышкиса* и *А. Я. Лепина* [1] и [2] изучены различные неравенства, применяемые в теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. По качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений и динамических систем имеются 3 работы. В работе

А. Д. Мышкиса [5] исследуется строение динамической системы в целом в многосвязной области. В совместной статье *А. Д. Мышкиса* и *У. Гринфельда* [1] на построенном примере показано, что для дифференциального уравнения второго порядка существование и единственность решения задачи Коши не гарантирует непрерывную зависимость решения от начальных данных. В работе *Л. Я. Рейзиня* [1], переведенной также на английский язык [2], исследована, применением сферических координат, система трех дифференциальных уравнений в случаях, когда правые части представляют собой многочлены $m$-ой степени или содержат дополнительные члены, удовлетворяющие определенным условиям. Доказана теорема существования т. наз. исключительного направления для системы в трехмерном пространстве и изучено поведение интегральных линий системы в окрестности изолированной особой точки и исключительного направления.

Вопросы линейных дифференциальных уравнений рассмотрены в работах *Г. К. Энгелиса* [1] и *Э. Я. Риекстыньша* [14]. В первой работе найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы заданная система $m$ линейно-независимых функций образовала систему решений линейного дифференциального уравнения $n$-го порядка ($n \geqslant m$) с непрерывными коэффициентами. Во второй работе исследовано ассимптотическое поведение решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда коэффициенты содержат параметр и имеют особенности. Ассимптотическое поведение исследовано методом эталонных функций при больших значениях параметра; метод применен также к некоторому интегро-дифференциальному уравнению. В работе вопрос об ассимптотическом поведении рассмотрен с более общей точки зрения и получены новые ассимптотические оценки по сравнению с работами других авторов (А. А. Дородницын, Р. Лангер).

Краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения $y'' = f(x, y)$ решила *А. Гринфельде* [1] методом верхних и нижних функций в случае, когда задано значение искомой функции $y(x)$ на одном конце интервала и значение производной на другом конце интервала. Случай краевых условий, когда заданы значения функции на обоих концах интервала, решен Б. Н. Бабкиным (Прикл. матем. и механика, т. XVIII, вып. 2, 1954).

6. Исследовательская работа в Советской Латвии за прошедший период была достаточно широко развита по уравнениям в частных производных и математической физике: в этой области опубликованы всего 42 работы. В этих работах исследованы два основных вопроса: 1) смешанная задача для систем гиперболического типа, в частности для системы телеграфных уравнений (всего 27 работ) и 2) краевые задачи уравнений эллиптического типа, в частности теории потенциала (всего 15 работ).

В Риге инициатором исследований системы матричных телеграфных уравнений является *Н. А. Бразма*, а с 1948 года работа по этой тематике перешла на кафедру общей математики Латвийского Государственного университета (Н. А. Бразма, А. Д. Мышкис, Э. Я. Риекстыньш, В. Э. Аболиня). Поддерживалась научная связь с лабораторией по разработке научных проблем проводной связи Академии Наук СССР, руководимой членом корреспондентом АН СССР В. И. Коваленковым. Исследования в Риге проводились по следующим направлениям: 1) общие свойства системы матричных телеграфных уравнений (свойства матриц коэффициентов, условия возможности расщепления и т. п.); 2) общие свойства решений системы (единственность, зависимость от данных задачи), 3) матричный метод разделения переменных (формальная схема, обоснование метода, системы с последействием), 4) матричный метод расщепления,

связанный с преобразованиями Лапласа и применением специальных функций; 5) метод сеток для решения системы. Достаточно подробный обзор работ по упомянутым направлениям имеется в статье *Н. А. Бразма* [7]. После ее опубликования появились еще следующие работы рижских математиков: *Н. А. Бразма* [9] и [10], *Э. Я. Риекстыньш* [10] и [11] и совместно *А. Д. Мышкис* и *В. Э. Аболиня* [3].

Общий обзорный доклад о смешанной задаче для линейных гиперболических систем на плоскости прочел *А. Д. Мышкис* на III Всесоюзном математическом съезде в Москве в 1956 году (совместное сообщение: *А. Д. Мышкис, В. Э. Аболиня, А. Я. Лепин, А. С. Шлопак* и др. [1]).

Вопросам краевых задач уравнений эллиптического типа посвящены 3 работы А. Д. Мышкиса, 6 работ З. Я. Плуме и 5 работ Н. К. Усманова. В статье *А. Д. Мышкиса* [6] решена задача Дирихле теории потенциала при обобщении понятия границы, а в [13] дан общий метод перехода от обычной задачи Дирихле теории потенциала к видоизмененной (или „свободной") задачи Дирихле. В статье [14] того же автора доказано экстремальное свойство решения задачи Дирихле теории потенциала для некоторого нового функционала — именно „нагрузки" функции; проводится также сравнение „нагрузки" с интегралом Дирихле.

В работах *З. Я. Плуме* [1] — [6] методами теории функций комплексного переменного и теории сингулярных интегральных уравнений решены краевые задачи теории потенциала на плоскости и линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. В статье [1] решение задачи Неймана в случае замкнутого контура представлено в виде потенциала двойного слоя, а в статьях [2] и [4] задача Неймана в случае разомкнутого контура сведена к сингулярному интегральному уравнению с ядром типа Коши. Задача Дирихле для линейного однородного уравнения эллиптического типа второго порядка в случае разомкнутого контура решена в статье [5] при помощи сингулярных интегральных уравнений, используя интегральное представление решения уравнения, данное И. Н. Векуа („Новые методы решения эллиптических уравнений", М.-Л. 1948). Аналогичным образом для линейного однородного уравнения четвертого порядка краевая задача в случае разомкнутого контура при заданных предельных значениях функции и ее нормальной производной сведена к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений и двух интегро-дифференциальных уравнений (статья [6]). Упомянутые статьи З. Я. Плуме являются разработкой некоторых вопросов его кандидатской диссертации [3].

В работах *Н. К. Усманова* [1] — [5] исследуется в общем виде система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа на плоскости. При помощи решений канонической системы строятся обобщенные аналитические функции комплексного переменного в односвязанй области $D$. В статье [1] дано общее представление этих функций посредством произвольной голоморфной функции и решения некоторого интегрального уравнения Вольтерра в комплексной области. При помощи полученных представлений решена краевая задача при линейном условии на контуре области $D$. В другой статье [3] ставится и решается методом интегральных уравнений краевая задача для канонической системы при нелинейном краевом условии. В работах [2] и [4] даны применения найденных решений краевых задач к безмоментной теории оболочек. В последней работе Н. К. Усманова [5] изучается существование квази-конформного отображения, соответствующего канонической системе уравнений эллиптического типа, и полученные результаты применяются к задачам фильтрации грунтовых вод и к некоторым вопросам газодинамики. Наконец, в совместной работе *З. Я. Плуме* и *И. М. Таксара* [1] изучены

некоторые краевые задачи в теории магнетизма, решение которых сведено к бесконечной линейной системе алгебраических уравнений.

7. По теории и приложениям интегральных уравнений опубликовано 8 работ. В статье *А. Я. Лусиса* [2] перенесен метод С. А. Чаплыгина — Д. Ю. Панова на приближенное решение линейных интегральных уравнений типа Вольтерра. В совместной с *Б. Б. Леви* статье [1] доказано существование и единственность периодического решения для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, описывающего нелинейные вынужденные колебания механической системы в среде с сопротивлением. Доказательство проводится применением эквивалентного нелинейного сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра. Аналогичным методом в линейном случае задачу решил Г. Мюнтц в своей монографии „Интегральные уравнения", ч. 1, Л. — М., 1934. В другой совместной *А. Я. Лусиса* и *Б. Б. Леви* статье [2] подобным образом рассмотрен вопрос о существовании и единственности периодического решения для уравнения с отклоняющимся аргументом, описывающего колебательный процесс с последействием.

В совместной работе *А. Д. Мышкиса* и *И. Ю. Эгле* [1] дана оценка точности в методе последовательных приближений при решении нелинейных интегральных уравнений регулярного типа Вольтерра. Оценка отклонения последовательных приближений производится при помощи системы степенных функций. Проводится также общая схема оценки для уравнений общего вида.

В статье *А. Э. Стапана* [1] построен простейшего вида пример нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна, имеющего счётный спектр собственных значений. В другой его статье [3], составленной по материалам кандидатской диссертации [2], исследовано разветвление решений нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна и Урысона с точки зрения разветвления Э. Шмидта. Обоснован метод Н .Н. Назарова, и исследованы новые случаи разветвления решений. Применением диаграммы Ньютона определено число решений, и разложены решения в ряды по дробным степеням параметра.

В статье *Л. А. Ладыженского* [1] исследовано нелинейное операторное уравнение, содержащее параметр и вполне непрерывный положительный оператор в банаховом пространстве, полуупорядоченном при помощи некоторого конуса. Исследованы положительные решения в зависимости от параметра. Полученные результаты дают обобщения теорем П. С. Урысона (Труды по топологии и другим областям математики, М. -Л., 1951) о положительных решениях нелинейных интегральных уравнений.

8. По теории специальных функций и операционному исчислению имеются 11 работ, большинство которых составляют работы *Э. Я. Риекстыньша* [1], [4], [6], [7], [8], [12] и [13]. В первых трех его работах исследуются новые специальные функции, полученные из функций Ломмеля от двух мнимых аргументов заменой аргументов. Установлены общие свойства этих специальных функций, и даны их применения к решению телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа. В статье [7] выведены новые формулы для обратного преобразования Лапласа специальных классов функций, и установлена связь введенной функции с функцией параболического цилиндра с целым отрицательным индексом. В статье [8] изучены свойства многочлена, являющимся обобщением многочлена Лягерра; при помощи этого многочлена решена система телеграфных уравнений в частном случае. Подробный анализ работ [6], [7], [8] имеется в Реферативном журнале „Математика" (1953, 309; 1955, 5111; 1956, 7441). В статье [12] построено новое частное решение линейного дифференциального уравнения Эрмита, изучены свойства этого решения и связь с функ-

циями параболического цилиндра и с цилиндрическими функциями. В статье [13] даны явные выражения тех многочленов, которые рассмотрел И. Н. Денисюк (Укр. мат. журн., 1954, т. 6) при решении динамических задач о шахтных канатах.

Кроме работ Э. Я. Риекстыньша по операционному исчислению и смежным вопросам имеются статьи *И. В. Карклыньша* [1] и *В. Ж. Риекстыной* [1]. В первой статье дано обоснование некоторых формально полученных формул преобразования Эфроса. Во второй статье дается обобщение ассимптотического представления и разложения функций в случае, когда аппроксимируемая функция имеет нули, и указаны некоторые ассимптотические разложения такого вида, для функций, определенных с помощью контурных интегралов.

Системы многочленов, обобщающих классические ортогональные многочлены, исследовал *Г. К. Энгелис* в статьях [2] и [3]. В первой статье дается понятие о биортогонализации двух последовательностей, строится аналог формулы Родрига для некоторых систем биортогональных многочленов и рассматриваются линейные дифференциальные уравнения, связанные с одним классом биортогональных систем. Во второй статье для многочленов, заданных обобщенной формулой Родрига, составлены представления в виде определителя, рекурентные соотношения, производящие функции и интегральные представления.

9. По теории функций действительного переменного и топологии имеются 11 работ. *Э. И. Ариньш* в статье [2] дает обобщение прямой теоремы Бэра о функциях первого класса на случай полунепрерывных функций и обращение этой теоремы при дополнительном условии, что функция принадлежит классификации Бэра. В кандидатской диссертации [3] и в докладе [4] на III Всесоюзном математическом съезде исследованы функции, непрерывные по некоторым системам множеств. Найдены условия, налагаемые на систему гладких кривых на плоскости, достаточные для непрерывности функции $f(x, y)$, непрерывной вдоль каждой из этих кривых, и изучены вопросы, связанные с понятием частично равномерной сходимости и строением множества точек разрыва частично-непрерывных функций. Кроме того дана топологическая интерпретация частичной непрерывности.

В статье *М. К. Зандере* [1] рассматриваются функции, непрерывные вдоль системы кривых в $n$ — мерном пространстве и удовлетворяющие некоторому условию относительно системы, элементами которой являются гомеоморфы $n-1$ — мерного куба. Доказана теорема: множество точек непрерывности таких функций всюду плотно на каждом гомеоморфе $n-1$— мерного куба.

В статье *Э. И. Вигант* [1] определяется несобственный интеграл по $n$— мерной области как результат предельного перехода при определенных способах аппроксимации области, рассматриваются общие свойства таких интегралов и вопрос об эквивалентности двух различных способов интегрирования. В другой статье [2] обобщаются формулы типа Грина на случай несобственных интегралов по $n$ — мерной области. При этом вводится понятие почти гладкой поверхности и выделяется один из наиболее естественных способов аппроксимации границы области при помощи поверхностей, в обобщенном смысле параллельных границе области. Современное состояние вопроса несобственного интегрирования изложено в совместном докладе *А. Д. Мышкиса, Э. И. Вигант, А. Я. Лепин* [1], зачитанном на III Всесоюзном съезде математиков.

В статье *А. Д. Мышкиса* [7] теорема о существовании полного дифференциала перенесена на случай произвольной обобщенной граничной точки.

В другой его статье [11] установлен признак равномерной сходимости дважды непрерывно дифференцируемых функций, сходящихся в среднем.

К теоретико-множественной топологии относятся две заметки: одна— *А. Д. Мышкиса* [8] и другая — совместная *А. Д. Мышкиса* и *Э. И. Вигант* [1]. В первой заметке в соответствие пространству близости ставится некоторое расширение топологического пространства. Во второй заметке устанавливается, что это соответствие укладывается в общую схему Ю. М. Смирнова.

10. По функциональному анализу имеются 15 работ, значительная часть которых принадлежит *С. Н. Крачковскому* и *М. А. Гольдману*. В их совместных работах [1], [2], [3] и в статье *С. Н. Крачковского* [1] установлен ряд свойств нульэлементов и нульфункционалов вполне непрерывного оператора, аналогичных свойствам правых и левых главных функций ядра интегрального уравнения Фредгольма. Кроме того выявлена структура главной части вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве, и дано каноническое представление резольвенты вполне непрерывного оператора в банаховом пространстве. Значительный интерес представляют работы *С. Н. Крачковского* [2], [3], [4] и совместная с *М. А. Гольдманом* работа [4] по вопросам спектральной теории линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство в себя.

В этих работах рассматриваются области комплексной плоскости, обладающие тем свойством, что когда параметр $\lambda$ пробегает какую-либо из них, оператор $I - \lambda A$, изучаемый в спектральной теории, сохраняет нормальную разрешимость и некоторые свойства канонического представления нульэлементов. Подробный разбор результатов имеется в Реферативном журнале „Математика" (1953, 330; 1954, 2228; 1955, 3845). В статье *М. А. Гольдмана* [2] исследовано множество нормально разрешимых операторов в пространстве операторов, отображающих одно банахово пространство в другое. Установлены критерии устойчивости свойства нормальной разрешимости операторного уравнения. В статье [1] и кандидатской диссертации [3] М. А. Гольдмана доказаны теоремы Фредгольма для линейных операторных уравнений в банаховом пространстве методом аппроксимации вполне непрерывных операторов конечномерными. В этих работах теория Рисса—Шаудера переносится на более общий случай.

В совместной заметке *С. Н. Крачковского* и *А. А. Виноградова* [1] доказан признак равномерной выпуклости банахового пространства, использующий построение опорных плоскостей к единичной сфере.

В совместной работе *М. М. Вайнберга* и *Я. Л. Энгельсона* [1] устанавливается необходимое условие существования условного экстремума для функционалов в линейных топологических пространствах. Этот результат является обобщением теоремы А. А. Люстерника, доказанной им для банахового пространства. В статье *Я. Л. Энгельсона* [1] доказаны некоторые теоремы о вполне непрерывных квазидефинитных операторах, действующих в рефлексивном локально выпуклом топологическом пространстве, и исследованы свойства квадратного корня из такого оператора. В другой его статье [2] некоторые общие свойства потенциальных операторов перенесены из банахова пространства на линейное топологическое пространство.

11. По численным и графическим методам имеются 9 работ. Применением графических методов интерполяции *Э. И. Ариньш* в статье [1] решил вопрос, предложенный Промышленным отделом Госплана Латвийской ССР и относящийся к распределению заданного прироста промышленной продукции на определенный период времени. По вопросам численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений имеются

3 работы. В заметке *А. Д. Мышкиса* [12] усовершенствованы формулы для определения произвольных постоянных в общем решении линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. В другой его статье [15] сравниваются точное решение и приближенные решения уравнения свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы. В статье *С. Н. Предтеченского* [1] указан способ приближенного решения краевой задачи линейного дифференциального уравнения, но не решен вопрос о сходимости приближений.

По вопросам номографии опубликованы две посмертные статьи *К. Я. Залтса* [1] и [3]. В первой статье функция, указанная в заглавии статьи, представлена в виде определителя с разъединенными переменными (т. наз. определителя Массо); разбор этой статьи имеется в Реферативном журнале „Математика" (1954, 2359). Во второй статье [3] найдены достаточные условия для анаморфизируемости уравнения общей функциональной структуры, и дана анаморфоза для уравнения третьего и четвертого номографического порядка с тремя переменными.

Вопросы уравнительных вычислений рассматриваются в кандидатской диссертации [1] и в статьях [2] и [3] *А. Ф. Крастыня*. В этих работах векторным методом решены основные задачи на уравновешивание и оценку точности результатов измерений и разработана простая схема решения системы нормальных уравнений методом квадратных корней. Дано также сравнение метода квадратных корней с методом последовательного исключения неизвестных при решении нормальных уравнений.

12. Математические методы в теории электрических цепей разработаны в 4 статьях. *Н. А. Бразма* в статье [8] дал обобщение теорем вариации и компенсации для $n$ параметров электрической цепи, используя матричное исчисление. В другой его статье [11] преобразования Фурье обобщенных функций применяются к исследованию переходных процессов на примере электрической цепи, содержащей последовательно включенные сопротивление, индуктивность и емкость. Дано сравнение этого метода с обычными методами преобразования Лапласа и Фурье.

В работах *Э. Я. Гринберга* [1] и [2] указан способ представления и расчета коэффициента передачи лестничных и многоконтурных электрических цепей. Даны указания для решения ряда задач анализа и синтеза таких цепей.

13. По вопросам практической математики имеются 11 работ, среди которых наиболее важными являются совместная статья *В. А. Дьякова, В. С. Сиванова* и *Я. Я. Даубе* [1] и работы *Я. Я. Даубе* [1], [2], [3] по счетно-решающим устройствам. В упомянутой совместной статье рассматривается расчет химического состава шихты, определение компонентов шихты и рационализация методов расчета шихт с помощью разработанного в Институте физики АН Латвийской ССР электрического прибора. Прибор позволяет производить расчет и проверку состава шихт по одному, двум и трем элементам соответственно из двух, трех, четырех и пяти составляющих. В приборе используется трансформаторная схема, которая работает по принципу баланса напряжений. В кандидатской диссертации Я. Я. Даубе [1] разработан новый вариант трансформаторных схем для вычисления линейных алгебраических форм и решения системы линейных уравнений, а также даны принципиальные схемы двух приборов для решения задач, встречающихся в металлолитейной промышленности. В его статье [2] анализируется погрешность трансформаторного аналога Маллока для решения систем линейных уравнений в зависимости от физических параметров схемы и от коэффициентов системы уравнений. В работе [3] рассматривается принцип действия и погрешность другого трансфор-

маторного аналога для вычисления линейных алгебраических форм и решения систем линейных уравнений.

По вопросам практической геометрии имеются 4 работы. В совместной работе *Л. Я. Березиной* и *А. Д. Ковтуна* [1] теоретически обоснован переход от фотографии к истинным размерам объекта и разработана методика расчета размеров его при различных случаях съемки. В статье *Л. Я. Березиной* [7] предложен точный, а не приближенный способ определения элементов взаимного ориентирования двух аэрофотоснимков. В двух статьях *Л. Н. Лихачева* [1] и [2] рассмотрены вопросы перспективно-прямоугольных сопряженных проекций и перспективы малых форм.

Наконец, вопросам математической статистики посвящены работы *В. В. Озолса* [1], [2], [3]. В этих работах даны некоторые обобщения статистического критерия Колмогорова-Смирнова для малых выборок и применен введенный автором метод векторандов.

14. По вопросам истории математики имеются 5 работ. В совместной статье *А. Д. Мышкиса* и *И. М. Рабиновича* [1], зачитанной 12 апреля 1955 года на заседании Московского математического общества, выявлены заслуги рижского математика П. Г. Боля (1865—1921) в топологии и в применении топологических методов к анализу. Именно, в одной работе П. Г. Боля от 1904 года в журнале Крелля содержится ряд важных утверждений $n$ — мерной топологии, из которых, в частности, следует известная теорема о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении шара в себя. Эту теорему впоследствии (1910 год) доказал голландский математик Л. Брауэр. В докладе *И. М. Рабиновича* [1] на III Всесоюзном математическом съезде указана роль П. Г. Боля в теории устойчивости движения, а в популярной статье [2] дан очерк жизни и деятельности П. Г. Боля, охарактеризованы его работы по небесной механике и приведен список его научных работ и работ о нем.

Сведения о латвийских математиках имеются в статьях *А. Я. Лусиса* [1] и *Л. Э. Рейзиня* [3]. В последней статье, в основном, освещена жизнь и деятельность отечественных математиков для нужд школьного преподавания.

15. За 1950—1957 годы латвийские математики опубликовали 150 работ, среди которых 137 журнальных статей и 1 монография (А. Д. Мышкис). Примерно одна треть всех статей напечатана в центральных математических журналах и в Докладах АН СССР, а остальные статьи в местных изданиях (Ученые Записки Латв. ГУ, физ. мат. науки — 3 выпуска; Ученые Записки РПИ (мат. физ.) — 1 том, Научно-технический Сборник РКВИВУ — 2 выпуска, Известия АН ЛССР). Кроме того вышли четыре Сборника студенческих научных работ Студенческого научного общества физико-математического фак-та Лат. ГУ, в которых имеются 25 студенческих работ по математике. За отчетный период в журналах: „Падомью Латвиис Скола", „Математика в Школе", „Ученые Записки РПИ" опубликованы: ряд статей по методике преподавания математики (В. Р. Китаенко, Г. К. Остапов, Я. М. Томсон) и одна статья по общим философским вопросам математики (Г. К. Остапов). Наши математики защитили: 1 докторскую диссертацию (А. Д. Мышкис, 1950, МГУ) и 12 кандидатских диссертаций (М. А. Гольдман, 1951, Киев; А. Э. Стапан 1951, Тарту; З. Я. Плуме, 1952, Тарту; Э. Я. Риекстыньш, 1952, Рига; Э. И. Ариньш, 1953, МГУ; В. К. Детловс, 1953, Лен ГУ; А. С. Шлопак, 1953, Минск; В. Э. Аболиня, 1954, Тарту; Я. Я. Даубе, 1955, Ленинград А. Ф. Крастынь; 1956, Рига; В. В. Озолс, 1956, Киев; Л. Я. Березина, 1957, Тарту). Многие наши математики являются сотрудниками Реферативного журнала „Математика" (Н. А. Бразма, Л. Я. Березина, В. К. Детловс, С. Н. Крачковский, А. Я. Лусис, Э. И. Ариньш, Э. Я. Риекстыньш, Э. К. Фогелс, Г. К. Энгелис).

В моей обзорной статье „Работы латвийских математиков за 30 лет" („Математика в СССР за 30 лет 1917—1947", М.—Л., 1948) указано общее число (80) оригинальных работ латвийских математиков за первое тридцатилетие от Великой Октябрьской Революции. Научная продукция наших математиков за 1947—1950 годы составляет 30 работ, а за все десятилетие (1947—1957) — 180 работ. Таким образом за последнее десятилетие научная продукция латвийских математиков по объему вдвое превышает научную продукцию за все первое тридцатилетие. Кроме того нужно отметить возросшую разносторонность математических работ. Большую активизирующую роль в деле поднятия научного уровня и весьма плодотворную научную деятельность проявил *А. Д. Мышкис*, работая с 1950 по 1953 год в Латвийском Государственном университете.

Дальнейшие перспективы развития намечаются в работе Вычислительного центра, организованного в 1956 году при Институте физики Академии Наук Латвийской ССР. Начаты работы по созданию электронной цифровой машины М-3, за основу которой выбрана уже действующая малогабаритная электронная цифровая машина М-3.

Математики Советской Латвии встречают сороковую годовщину Великой Октябрьской революции с уверенностью в дальнейшем прогрессе своих научных работ.

15 VIII 1957 *Кафедра математического анализа*

## MATEMATIKAS ATTĪSTĪBA PADOMJU LATVIJĀ PĒDĒJOS DESMIT GADOS

(Kopsavilkums)

Laikā no 1950. gada līdz 1957. gadam Padomju Latvijas matematiķi ir publicējuši pavisam 150 darbus matematikā, pie kam rakstu skaits pa atsevišķām nozarēm sadalās šādi: matematiskā loģikā — 3 raksti un 1 kandidata disertacija (V. Detlovs); skaitļu teorijā — 7; tensoru algebrā — 1; ģeometrijā — 11 raksti un 1 kandidata disertacija (L. Berezina); parastos diferencialvienādojumos — 10 raksti, 1 doktora disertacija (A. Miškis) un 1 monografija (A. Miškis); parcialos diferencialvienādojumos un matematiskā fizikā — 38 raksti un 4 kandidata disertacijas (E. Riekstiņš, V. Āboliņa, A. Šlopaks, Z. Plūme); integralvienādojumos — 7 raksti un 1 kandidata disertacija (A. Stapans); specialo funkciju teorijā un operatoru rēķinos — 11; realā mainīgā funkciju teorijā un topoloģijā — 10 raksti un 1 kandidata disertacija (E. Āriņš); funkcionalā analizē — 14 raksti un 1 kandidata disertacija (M. Goldmanis); skaitliskās un grafiskās metodēs — 8 raksti un 1 kandidata disertacija (A. Krastiņš); matematiskās metodēs elektrisko ķēžu teorijā — 4; praktiskā matematikā — 9 raksti un 2 kandidata disertacijas (J. Daube, V. Ozols); matematikas vēsturē — 5.

Bez tam vairāki republikas matematiķi piedalās kā līdzstrādnieki Referativajā žurnalā „Matematika" (E. Āriņš, N. Brāzma, L. Berezina, V. Detlovs, G. Enģelis, S. Kračkovskis, A. Lūsis, E. Riekstiņš, E. Fogels). Pārskata laikā iznākuši arī četri LVU Fizikas un matematikas fakultates Studentu Zinātniskās biedrības rakstu krājumi, kuros ir 25 studentu darbi matematikā.

## БИБЛИОГРАФИЯ

*В. Э. Аболиня.*

[1]. О смешанной задаче для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными на плоскости. Автореферат канд. диссерт., Рига, 1954, 1—9.

*Э. И. Ариньш.*

[1]. Об одном применении графических методов нелинейной интерполяции. Изв. АН ЛССР, 1951, 1(42), 155—162.

[2]. Об одном обобщении теоремы Бэра. Успехи Мат. Наук, 1953, т. VIII : 3, 105—108.

[3]. О частично непрерывных функциях. Автореферат канд. диссерт. МГУ, 1953, 1—8.

[4]. О понятии частичной непрерывности функций. Труды III всесоюзного мат. съезда, 1956, т. I, 75.

*Л. Я. Березина.*

[1]. Исследование конгруэнций, лучи которых образуют постоянный угол с нормалями средних поверхностей, при помощи триэдра С. Д. Россинского. Изв. АН ЛССР, 1951, 8(49), 1317—1325.

[2]. Исследование прохождения общей конгруэнции лучей через оптическую систему при помощи метода подвижного триэдра. Изв. АН ЛССР, 1952, 3(56), 115—126.

[3]. О паре налагающихся поверхностей с постоянным расстоянием между соответствующими точками. Успехи Мат. наук, 1952, т. УП: 3, 123—124.

[4]. О средней огибающей конгруэнции нормалей. Успехи Мат. наук, 1952, т. УП : 3, 121—122.

[5]. Двусторонне расслояемая пара конгруэнций с нормальной конгруэнцией общих перпендикуляров. Изв. АН ЛССР, 1952, 12(65), 145—152.

[6]. Некоторые двусторонне расслояемые пары конгруэнций. Изв. АН ЛССР, 1953, 3(68), 132—134.

[7]. Об одном аналитическом методе взаимного ориентирования двух аэрофотоснимков. Изв. АН ЛССР, 1953, 6(71), 111—117.

[8]. Некоторые теоремы о двусторонне расслояемых парах с действительными фокальными поверхностями. Мат. Сб., 1953, т. 33(75) : 1, 101—110.

[9]. Некоторые свойства эволютных поверхностей. Успехи Мат. Наук, т. VIII : 3, 109—110.

[10]. Преломление конгруэнции с действительными фокальными поверхностями через оптическую систему. Успехи мат. наук, 1953, т. VIII : 1, 111—113.

*Я. Л. Березина и А. Д. Ковтун.*

[1]. Определение размеров плоского объекта по его фотоснимку. Изв. АН ЛССР, 1952, 11(64), 145—158.

*Н. А. Бразма.*

[1]. Новое решение основной задачи распространения электромагнитных явлений в пучке проводов. Доклады АН СССР, 1951, т. 76 : 1, 41—44.

[2]. Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений. Прикл. матем. и мех., 1951, т. XV : 4, 501—503.

[3]. Полная гиперболичность обобщенной системы телеграфных уравнений. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. 1, 69—73. (то же: Прикл. мат. мех., 1951 г. XV : 4, 501—503).

[4]. Решение основных задач обобщенной системы телеграфных уравнений матричным методом разделения переменных. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. 1, 79—92.

[5]. О некоторых квази-резонансных явлениях в пучке проводов. Сб. научн. работ по проводной связи, АН СССР, 1953, вып. 2, 59—70.

]6[. Обобщение по С. Л. Соболеву матричных телеграфных уравнений. Научно-техн. Сборн., РКВИАВУ им. Ворошилова, Рига, 1955, вып. 19, 3—12.

[7]. Обзор исследований системы матричных телеграфных уравнений, выполненных в Риге, Изв. АН ЛССР, 1955, 8(97), 133—141.

[8]. Обобщение теорем вариации и компенсации для $n$ параметров электрической цепи. Доклады АН СССР, 1955, т. 105 : 2, 271—274.

[9]. О решении методом сеток простейшей смешанной задачи матричного телеграфного уравнения. Изв. АН ЛССР, 1956, 3(104), 133—138.

[10]. О решении системы матричных телеграфных уравнений при некотором согласовании электромагнитных приемно-передающих устройств с параметром. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н. вып. 2, 39—47.

[11]. О применении обобщенных функций к исследованию переходных процессов в электрических цепях. Уч. Зап. ЛГУ, 1957, т. X, 59—69.

*Н. А. Бразма и В. Э. Аболиня*
[1]. О резонансных явлениях в пучке проводов. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. I, 93—100.

*Н. А. Бразма и А. Д. Мышкис.*
[1]. Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. Прикл. мат. мех., 1951, т. XV : 4, 495—500.
[2]. Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. 1, 61—68. (тоже: Прикл. мат. мех., 1951, т. XV : 4, 495—500).

*М. М. Вайнберг и Я. Л. Энгельсон.*
[1]. Об условном экстремуме функционалов в линейных топологических пространствах. Представлено к печати, Мат. Сб., 1956, 1—10 машинописи.

*Э. И. Вигант-Лепина.*
[1]. Несобственые интегралы в $n$-мерном пространстве. Уч. Зап. ЛГУ, 1958 ,т. XX, физ. мат. н. вып. 3, 105—124.
[2]. Обобщенная формула Грина. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 125—135.

*М. А. Гольдман.*
[1]. Аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов конечномерными и теория Рисса-Шаудера. Изв. АН ЛССР, 1951, 7(48), 1151—1160.
[2]. Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений. Доклады АН СССР, 1955, т. 100 : 2.
[3]. Линейные уравнения в пространствах типа В. Автореферат канд. диссерт., Рига, 1951, 1—5.

*Э. Я. Гринберг.*
[1]. Методы расчета пассивных электрических цепей. Латв. Респ. правление НТОР и Э им. Попова, Рига, 1956, 1—19.
[2]. Об анализе и синтезе простых многоконтурных фильтров. Изв. АН ЛССР, 1957, 1(114), 149—160.
[3]. Об одной геометрической вариационной задаче. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 151—162.

*А. Р. Гринфельде.*
[1]. Применение метода верхних и нижних функций к решению нелинейной дифференциальной системы второго порядка. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 57—64.

*Я. Я. Даубе*
[1]. Исследование электрических процессов в некоторых трансформаторных схемах для автоматизации решения систем линейных алгебраических уравнений. Автореферат канд. диссерт. (техн. н.), Рига, 1955, 1—15.
[2]. Влияние омических потерь на точность решения в трансформаторной схеме Маллока. Изв. АН ЛССР, 1955, 12(101), 112—120.
[3]. Погрешность одного трансформаторного аналога для решения систем линейных алгебраических уравнений и для вычисления линейных алгебраических форм. Изв. АН ЛССР, 1957, 11(124), 111—120

*В. К. Детловс*
[1]. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. Автореферат канд. диссерт. Мат. Инст. им. Стеклова (ЛОМИ), 1953, 1—10.
[2]. Нормальные алгорифмы и рекурсивные функции. Доклады АН СССР, 1953, т. 90:5, 723—725.
[3]. Эквивалентность нормальных алгорифмов и рекурсивных функций. Представлено к печати, Труды Мат. инст. АН СССР, 1955, 1—100 (машинописи).

*Н. Дума*
[1]. Об одной проблеме Хуа Ло-кен. Изв. АН ЛССР, 1953, 1 (66), 159—162.

*В. А. Дьяков, В. С. Сиванов, и Я. Я. Даубе*
[1]. Рационализация методов расчета шихт. Изв. АН ЛССР, 1950, 12(41), 171—186.

*К. Я. Залтс.*
[1]. О бесквадратурном номографировании функции $F_1K_{23} + F_2L_{31} + F_3M_{12}$ Мат. Сб., 1953, т. 33(75) : 2, 383—388.
[2]. Преобразования точек ллоскости, сохраняющие площади фигур. Уч. Зап. ЛГУ 1956, т. VIII, физ. мат. н. вып. 2, 5—10.
[3]. Об анаморфозирующем множителе. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н. вып. 2, 11—20.

*М. К. Зандере.*
[1]. О частичной непрерывности функций нескольких переменных. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н. вып. 3, 47—56.

*И. В. Карклыньш*

[1]. Обоснование некоторых формул преобразования Эфроса. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н. вып. 2., 81—91.

*А. Ф. Крастынь.*

[1]. Векторный метод в уравнительных вычислениях. Автореф. канд. диссерт. (техн. н,), Рига, 1956, 1—19.

[2]. К вопросу решения системы нормальных уравнений методом квадратных корней. Труды сельхоз. Акад. ЛССР, 1956, т. V. 323—328.

[3]. Решение в векторном виде задачи уравновешивания посредственных измерений, связанных условиями. Представлено к печати, Труды Сельхоз. Акад. ЛССР, 1957, 1—11 (машинописи).

*С. Н. Крачковский.*

[1]. Каноническое представление резольвенты вполне непрерывного оператора. Изв. АН ЛССР, 1951, 6(47), 995—998.

[2]. Каноническое представление нульэлементов линейного оператора в его области Фредгольма. Доклады АН СССР, 1953, т. 88 : 2.

[3]. О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью Фредгольма. Доклады АН СССР, 1953, т. 91 : 5, 1011—1013.

[4]. О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$ Доклады АН СССР, 1954, т. 96 : 6, 1101—1104.

*С. Н. Крачковский* и *А. А. Виноградов*

[1]. Об одном критерии равномерной выпуклости пространства типа В. Успехи мат. наук, 1952, т. УП:3, 131—134.

*С. Н. Крачковский* и *М. А. Гольдман*

[1]. Нульэлементы и нульфункционалы вполне непрерывного оператора. Изв. АН ЛССР, 1950, 6(35), 87—100.

[2]. Некоторые свойства вполне непрерывного оператора в пространстве Гильберта. Изв. АН ЛССР, 1950, 10(39), 93—106.

[3]. О главной части вполне непрерывного оператора. Доклады АН СССР, 1950, т. 70:6, 945—948.

[4]. О нульэлементах нульоператора в его области Фредгольма. Доклады АН СССР, 1952, т. 86:1.

*А. А. Курмитис*

[1]. К вопросу независимости одной системы аксиом исчисления высказываний. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н. вып. 3, 21—26.

*Л. А. Ладыженский*

[1]. Об одном классе нелинейных уравнений. Труды семинара по функциональному анализу. Воронежский ун-т, 1956, вып. 2, 34—38.

*Л. Н. Лихачев*

[1]. Перспективно прямоугольные сопряженные проекции. Научно-техн. , Сб. РКВИАВУ им. Ворошилова, 1955, вып. 19, 41—76.

[2]. Перспектива малых форм и ее применение. Научно-техн. Сб., РКВИАВУ им. Ворошилова, Рига, 1955, вып. 19, 77—109.

*А. Я. Лусис*

[1]. Работы математиков Советской Латвии за десять лет. Изв. АН ЛССР, 1950, 11(40), 109—117.

[2]. Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра методом верхних и нижних функций. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. I, 51—60.

*А. Я. Лусис* и *Б. Б. Леви*

[1]. Применение сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра к нахождению периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 3—26.

[2]. Существование и единственность периодического решения некоторого нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 46—55.

*А. Д. Мышкис*

[1]. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка периодического типа с запаздывающим аргументом. Мат. Сб., 1951, т. 28(70):1, 15—54.

[2]. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом. Мат. Сб., 1951, т. 28(70):3. 641—658.



Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

[3]. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. «Современные проблемы математики» М.—Л., 1951, 1—254.
[4]. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Автореферат докторской диссертации МГУ. Успехи мат. наук, 1952, т. УП:4, 190—196.
[5]. Одна теорема из теории динамических систем. Уч. Зап. МГУ, 1950, вып. 146, Матем. т. III, 129—130.
[6]. О решении краевой задачи теории потенциала при обобщении понятия границы. Мат. Сб., 1950, т. 26(68) : 3, 341—344
[7]. Полный дифференциал в обобщенной граничной точке. Мат. Сб., 1950, т. 26(68):3, 345—350.
[8]. О связи инфинитезимальных пространств с расширениями топологических пространств. Доклады АН СССР, 1952, т. 84:5, 879—882.
[9]. Непрерывная зависимость решения смешанной задачи для систем линейных дифференциальных уравнений от начальных условий и правых частей системы. Мат. Сб., 1952, т. 30(72):2, 317—328.
[10]. Простейшая краевая задача для обобщенных систем телеграфных уравнений. Мат. Сб., 1952, т. 31 (73) : 2, 335—352.
[11]. Одна теорема о сходимости последовательности функций. Успехи мат. наук, 1952, т. УП:1, 186—190.
[12]. К статье О. М. Богатырева «Определение постоянных интегрирования при решении дифференциального уравнения высокой степени». «Электричество», 1952, № 6, 82.
[13]. О переходе от обычной первой краевой задачи к видоизмененной. Мат. Сб., 1952, т. 31(73):1, 128—135.
[14]. Об одном экстремальном свойстве решения первой краевой задачи в теории потенциала. Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, т. 17:1, 13—30.
[15]. О точности приближенных методов анализа малых нелинейных свободных колебаний с одной степенью свободы. «Вопросы динамики и динамической прочности». Академия наук ЛССР, 1953, вып. 1. 139—164.

*А. Д. Мышкис* и *В. Э. Аболиня*

[1]. О единственности решения смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений с частными производными. Доклады АН СССР, 1951, т. 80:4, 533—536.
[2]. Теорема единственности в теории обобщенных систем телеграфных уравнений при общих граничных условиях. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, физ. мат. н., вып. I, 75—78.
[3]. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 87—104.

*А. Д. Мышкис* и *Э. И. Вигант*

[1]. О связи пространств близости с расширениями топологических пространств. Доклады АН СССР, 1955, т. 103:6, 969—972.

*А. Д. Мышкис* и *У. К. Гринфельд*

[1]. О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных. Успехи мат. наук, 1954, т. IX:3, 171—174.

*А. Д. Мышкис* и *А. Я. Лепинь*

[1]. Об одном функциональном неравенстве. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н., 13—16.
[1]. Об одном неравенстве в теории интеграла Стильтьеса. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. I, 17—24.

*А. Д. Мышкис* и *И. М. Рабинович*

[1]. Первое доказательство теоремы о неподвижной точке при непрерывном отображении шара в себя, данное латышским математиком П. Г. Болем. Доклад на заседании от 12 апреля 1955 г. в Московском матем. обществе. Успехи мат. наук, 1955, т. X:3, 188—192.

*А. Д. Мышкис* и *И. Ю. Эгле*

[1]. Об оценке ошибки в методе последовательных приближений. Мат. Сб., 1954, т. 35(77):3, 491—500.

*А. Д. Мышкис, Э. И. Вигант* и *А. Я. Лепинь*

[1]. Несобственные интегралы в $n$-мерном пространстве, Труды III Всесоюзного мат. съезда, 1956, т. I, 91—92.

*А. Д. Мышкис, В. Э. Аболиня, А. Я. Лепинь, А. С. Шлопак* и др.

[1]. Смешанная задача для линейных гиперболических систем на плоскости. Труды III Всесоюзного мат. съезда, 1956, т. I, 61—63.

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

*В. В. Озолс*

[1]. Некоторые обобщения критерия Колмогорова-Смирнова для малых выборок (метод векторандов), Автореферат канд. диссертации, Рига, 1956, 1—14.

[2]. О векторандах и непараметрическом критерии согласия для двух конечных выборок (метод векторандов). Изв. АН ЛССР, 1956, 8(109), 153—158.

[3]. Обобщение теоремы Гнеденко-Королюка на три выборки при двух односторонних границах (на лат. языке, резюме на русском языке). Изв. АН ЛССР, 1956, 10(111), 141—152.

*З. Я. Плуме*

[1]. Решение задачи Неймана теории потенциала методом сингулярных интегральных уравнений (на лат. яз. резюме на русск. яз.). Изв. АН ЛССР, 1950, 8(37), 119—126.

[2]. Решение задачи Неймана теории потенциала в случае разомкнутого контура. Изв. АН ЛССР, 1951, 5(46), 815—820.

[3]. Некоторые граничные задачи теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае разомкнутого контура. Автореферат канд. диссерт. Рига, 1952, 1—9.

[4]. Решение задачи Неймана теории потенциала в случае одного разомкнутого контура. Изв. АН ЛССР, 1953, 10(75), 95—106.

[5]. Задача Дирихле теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае разомкнутого контура. Изв. АН ЛССР, 1954, 2(79), 129—136.

[6]. Об одном классе дифференциальных уравнений эллиптического типа для случая разомкнутого контура. Уч. Зап. РПИ, 1957, т. IV (Матем. физ.), 47—56.

*З. Я. Плуме* и *И. И. Таксар*

[1]. Некоторые граничные задачи теории импульсного намагничивания. Труды Инст. физики АН ЛССР, 1952, вып. VI.

*С. Н. Предтеченский*

[1]. Об одном способе приближенного решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 74—81.

*И. М. Рабинович*

[1]. П. Г. Боль. Труды III Всесоюзного матем. съезда, 1956, т. II, 166—167,

[2] Выдающийся рижский ученый Пирс Боль (на лат. языке) «Астрономический календарь 1957 г.» Изд. АН ЛССР, Рига, 1956, 95—105,

*Л. Э. Рейзинь*

[1]. Поведение интегральных кривых системы трех дифференциальных уравнений вблизи особой точки. Изв. АН ЛССР, 1951, 2(43), 333—345.

[2]. Перевод предыдущей статьи: The behavior of the integral curves of a system of three differential equations in the neighborhood of a singular point. Americ. Math. Soc. Translat., 1955, v. 1, 239—252.

[3]. Сведения об отечественных математиках в курсе математики средней школы (на лат. языке). Падомью Латвияс Скола, 1956, 66—77.

*Э. Я. Риекстиньш*

[1]. О некоторых специальных функциях применимых к решению телеграфных уравнений. Прикл. матем. и механ., 1951, т. XV:4, 485—494.

[2]. Метод расщепления для обобщенной системы телеграфных уравнений. Автореферат канд. диссерт., Рига, 1952, 1—10.

[3]. О некоторых возможностях решения обобщенной системы телеграфных уравнений при помощи преобразования Лапласа. Прикл. матем. мех., 1952, т. XVI:3, 375—381.

[4]. Изучение некоторых специальных функций, применимых к решению телеграфных уравнений. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н., вып. I, 35—50.

[5]. Об условиях расщепления обобщенной системы телеграфных уравнений. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI, физ. мат. н. вып. I, 101—112.

[6]. О специальных функциях, применимых к решению телеграфных уравнений. Прикл. матем. мех., 1953, т. ХУП:1, 125—132.

[7]. Некоторые новые формулы для преобразования Лапласа. Прикл. матем. мех., 1953, т. ХУП:6, 761—768.

[8]. Об одном многочлене, примененном к решению телеграфных уравнений. Прикл. матем. мех., 1954, т. ХУIII:6, 738—744.

[9]. Решение расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений в случае пучка с электромагнитными приемниками в конце проводов. Научно-техн. Сб., РКВИАВУ им. Ворошилова, 1955, вып. 19, 19—40.

[10]. Решение расщепляемой матричной системы телеграфных уравнений в случае включенных синусоидальных напряжений. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. УIII, физ. мат. н., вып. 2, 21—38.

[11]. О некоторых возможностях решения системы телеграфных уравнений преобразованием Лапласа в случае сложного провода. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н., вып. 2, 49—53.
[12]. О функциях Эрмита и функциях параболического цилиндра. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н., вып. 2, 67—72.
[13]. О канатных функциях. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н., вып. 2, 93—98.
[14]. О методе эталонных функций. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 65—86.

*В. Ж. Риекстыня*
[1]. Об одном обобщении ассимтотических разложений. Уч. Зап. ЛГУ, т. XX 1958, физ. мат. н., вып. 3, 143—150.

*А. Э. Стапан*
[1]. О нелинейных интегральных уравнениях с дискретным спектром собственных значений. Изв. АН ЛССР, 1951, 4(45), 643—650.
[2]. Разветвление решений нелинейных интегральных уравнений. Автореферат канд. диссерт., Рига, 1951, 1—12.
[3]. Разветвление решений нелинейных интегральных уравнений. Уч. Зап. РПИ, 1957, т. IV (Матем. физ.), 31—43.

*Ш. Д. Трупин*
[1]. К вопросу о делимости тензоров в линейных безразмерных пространствах. Уч. Зап. РПИ, 1957, т. IV (Матем. и физ.), 59—83.

*Н. К. Усманов*
[1]. Линейные граничные задачи обобщенных аналитических функций. Изв. АН ЛССР, 1953, 8(73), 115—121.
[2]. Приложения обобщенных аналитических функций к теории безмоментных оболочек. Изв. АН ЛССР, 1954, 5(82), 115—132.
[3]. Нелинейные задачи системы дифференциальных уравнений эллиптического типа и их приложения. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 27—45.
[4]. Новый метод расчета оболочек по безмоментной теории. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 56—69.
[5]. Вопросы квази-конформного отображения и их приложения к механике сплошной среды. Уч. Зап. РПИ, 1957, т. IV (Матем., физика), 9—28.

*А. С. Шлопак*
[1]. Смешанная задача для систем дифференциально-функциональных уравнений с частными производными по двум независимым переменным. Автореферат канд. диссерт. БГУ, Минск, 1953, 1—10.
[2]. Решение смешанной задачи для линейных систем дифференциально-функциональных уравнений с постоянными коэффициентами при простейших граничных условиях. Научно-техн. Сб., РКВИАВУ им. Ворошилова, 1955, вып. 19, 13—18.

*Э. К. Фогелс*
[1]. Финитное доказательство формул Гаусса-Дирихле. Изв. АН ЛССР, 1950, 9(38), 117—125.
[2]. Элементарное доказательство формул Валле-Пуссена. Изв. АН ЛССР, 1950, 11(40), 123—130.
[3]. Финитная теория элементарных функций. I. Логарифмическая и показательная функция. Изв. АН ЛССР, 1951, 5 (46), 801—813.
[4]. Финитные доказательства некоторых результатов аналитической теории чисел. (Доклад на Уч. Совете Матем. Инст. им. Стеклова АН СССР, 26 апреля 1951 г.). Труды Инст. физики АН ЛССР, вып. III, 1952, 51—63.
[5]. Пример нелинейной прогрессии, содержащей бесконечное множество простых чисел. Уч. Зап. ЛГУ, 1952, т. VI. физ. мат. н., вып. I., 7—12.
[6]. О простых числах в начале арифметической прогрессии. Доклады АН СССР, 1955, т. 102 : 3, 455—456.

*Г. К. Энгелис*
[1]. Существование обыкновенного дифференциального уравнения с заданной неполной системой решений. Научно-техн. Сб., Рига, 1954, вып. 16, 70—73.
[2]. О некоторых системах полиномов. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н., вып. 2, 55—66.
[3]. О полиномах, заданных формулой Родрига. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 136—142.

*Я. Л. Энгельсон*
[1]. О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах. Уч. Зап. ЛГУ, 1956, т. VIII, физ. мат. н., вып. 2, 73—80.
[2]. О потенциальных операторах в линейных топологических пространствах. Уч. Зап. ЛГУ, 1958, т. XX, физ. мат. н., вып. 3, 27—46.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# К ВОПРОСУ НЕЗАВИСИМОСТИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ АКСИОМ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

*А. А. КУРМИТИС*

1. В [1] даются одиннадцать аксиом для классического исчисления высказываний:

A1. $A \supset (B \supset A)$

A2. $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$

A3. $A \,\&\, B \supset A$

A4. $A \,\&\, B \supset B$

A5. $A \supset (B \supset A \,\&\, B)$

A6. $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$

A7. $A \supset A \vee B$

A8. $B \supset A \vee B$

A9. $\neg A \supset (A \supset B)$

A10. $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$

A11. $A \vee \neg A$

Отбрасывая A11, получаем систему аксиом для конструктивного исчисления высказываний.

Правилами вывода в обоих исчислениях являются следующие.

Правило подстановки. Из формулы выводится новая формула путём подстановки всюду вместо какой-либо переменной произвольной формулы.

Правило вывода заключений (*modus ponens*). Из формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ выводится формула $\mathfrak{B}$.

2. В данной системе аксиом A10 выводится из остальных аксиом.

Обозначим подстановку в формуле с номером $N$ вместо переменной $A$ формулы $\mathfrak{A}$, вместо переменной $B$ — формулы $\mathfrak{B}, \ldots,$ вместо $M$ — $\mathfrak{M}$ через $S(N)\,(A/\mathfrak{A},\ B/\mathfrak{B}, \ldots,\ M/\mathfrak{M})$.

Тогда, обозначая применение правила вывода заключений через $\Pi$, употребляя символ $\vdash$ в смысле [2] и применяя теорему о *дедукции* [2], для доказательства которой используются только A1 и A2, можем дать вывод A10.

(1) $\vdash (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C))$

(2) $\vdash A \supset A$

Формулы (1) и (2) выводятся из A1 и A2. Мы приводим их без доказательства.

(3) $\vdash (A \supset \neg B) \supset ((\neg B \supset (B \supset \neg A)) \supset (A \supset (B \supset \neg A)))$

$[S(1)\,(B/\neg B,\ C/B \supset \neg A)]$

(4) $\vdash (A \supset (B \supset \neg A)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset \neg A))$ [$S$(A2) ($C/\neg A$)]

(5) $\vdash \neg B \supset (B \supset \neg A)$ [$S$(A9) ($A/B$, $B/\neg A$)]

(6) $\vdash \neg A \supset \neg A$ [$S$(2) ($A/\neg A$)]

(7) $\vdash (A \supset \neg A) \supset ((\neg A \supset \neg A) \supset (A \vee \neg A \supset \neg A))$ [$S$(A6) ($B/\neg A$, $C/\neg A$)]

(8) $A \supset \neg B \vdash (\neg B \supset (B \supset \neg A)) \supset (A \supset (B \supset \neg A))$ [$П$ (3)]

(9) $A \supset \neg B \vdash A \supset (B \supset \neg A)$ [$П$ (5),(8)]

(10) $A \supset \neg B \vdash (A \supset B) \supset (A \supset \neg A)$ [$П$ (9),(4)]

(11) $A \supset \neg B,\ A \supset B \vdash A \supset \neg A$ [$П$ (10)]

(12) $A \supset \neg B,\ A \supset B \vdash (\neg A \supset \neg A) \supset (A \vee \neg A \supset \neg A)$ [$П$ (11),(7)]

(13) $A \supset \neg B,\ A \supset B \vdash A \vee \neg A \supset \neg A$ [$П$ (6),(12)]

(14) $A \supset \neg B;\ A \supset B \vdash \neg A$ [$П$ (A11),(13)]

(15) $A \supset B \vdash (A \supset \neg B) \supset \neg A$ [Теор. о дед. (14)]

(16) $\vdash (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ [Теор. о дед. (15)]

(16) есть аксиома A10.

3. Возникает вопрос, нет ли в данной системе аксиом ещё какой-нибудь зависимой аксиомы. Однако все остальные аксиомы оказываются независимыми. Независима также A10 в конструктивном исчислении высказываний.

Доказательство независимости проводим нормальными таблицами истинности — то есть такими таблицами, согласно которым, если $A$ и $A \supset B$ принимают выделённые значения истинности, то необходимо $B$ имеет выделённое значение истинности. Обоснование метода можно найти, например, в [3]. Во всех таблицах в работе выделённым значением является 0, за исключением таблицы 1, в которой выделённые значения суть 0, 1, 2.

Ниже приводим таблицы 1—11 для доказательства независимости аксиом и таблицу 12, в которой указано, для какого набора значений переменных аксиома, независимость которой доказывается, принимает невыделённое значение истинности.

Таблица 1.

| | $\supset$ | | | | & | | | | $\vee$ | | | | $\neg$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 1 | 0 | 1 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 2 | 0 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 0 |

Таблица 2.

| | $\supset$ | | | | | | | | & | | | | | | | | $\vee$ | | | | | | | | $\neg$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 0 |
| 2 | 0 | 3 | 0 | 3 | 4 | 0 | 6 | 0 | 2 | 1 | 2 | 1 | 7 | 5 | 5 | 7 | 0 | 2 | 2 | 0 | 7 | 2 | 5 | 2 | 3 |
| 3 | 0 | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | 7 | 3 | 1 | 1 | 3 | 4 | 6 | 6 | 4 | 0 | 3 | 0 | 3 | 3 | 6 | 3 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 | 5 | 5 | 0 | 4 | 1 | 7 | 4 | 4 | 1 | 3 | 7 | 0 | 4 | 7 | 3 | 4 | 0 | 3 | 4 | 5 |
| 5 | 0 | 4 | 0 | 3 | 4 | 0 | 0 | 4 | 5 | 1 | 5 | 6 | 1 | 5 | 6 | 2 | 0 | 5 | 2 | 6 | 0 | 5 | 5 | 2 | 4 |
| 6 | 0 | 7 | 2 | 0 | 7 | 0 | 0 | 7 | 6 | 1 | 5 | 6 | 3 | 6 | 6 | 1 | 0 | 6 | 5 | 3 | 3 | 5 | 6 | 0 | 7 |
| 7 | 0 | 6 | 0 | 3 | 0 | 6 | 6 | 0 | 7 | 1 | 7 | 4 | 7 | 2 | 1 | 7 | 0 | 7 | 2 | 4 | 4 | 2 | 0 | 7 | 6 |

Таблица 3.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 0 1 | 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 | 0 1 | 0 1 | 0 |

Таблица 4.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 0 0 | 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 | 1 1 | 0 1 | 0 |

Таблица 5.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 1 1 | 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 | 1 1 | 0 1 | 0 |

Таблица 6.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 0 1 | 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 | 1 1 | 0 0 | 0 |

Таблица 7.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | |
| 0 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 0 2 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 0 | 1 1 1 1 | 0 1 2 3 | 0 |
| 2 | 0 3 0 3 | 2 1 2 1 | 0 2 2 0 | 3 |
| 3 | 0 2 2 0 | 3 1 1 3 | 0 3 0 3 | 2 |

Таблица 8.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | |
| 0 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 0 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 0 | 1 1 1 1 | 0 1 2 3 | 0 |
| 2 | 0 3 0 3 | 2 1 2 1 | 2 2 2 0 | 3 |
| 3 | 0 2 2 0 | 3 1 1 3 | 0 3 0 3 | 2 |

Таблица 9.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 0 1 | 0 0 | 0 |
| 1 | 0 0 | 1 1 | 0 1 | 0 |

Таблица 10.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 | 0 1 | 0 1 | |
| 0 | 0 1 | 0 1 | 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 | 1 1 | 0 1 | 1 |

Таблица 11.

| | ⊃ | & | ∨ | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 | 0 1 2 | 0 1 2 | |
| 0 | 0 1 2 | 0 1 2 | 0 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 | 1 1 1 | 0 1 2 | 0 |
| 2 | 0 1 0 | 2 1 2 | 0 2 2 | 1 |

Таблица 12.

| № таблицы | Аксиома | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A1 | 2 | 1 | — |
| 2 | A2 | 2 | 6 | 4 |
| 3 | A3 | 1 | 0 | — |
| 4 | A4 | 0 | 1 | — |
| 5 | A5 | 0 | 0 | — |
| 6 | A6 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | A7 | 0 | 2 | — |
| 8 | A8 | 2 | 0 | — |
| 9 | A9 | 0 | 1 | — |
| 10 | A10 (в констр.) | 1 | 0 | — |
| 11 | A11 | 2 | — | — |

Таблицы 1—11 пригодны также для доказательства независимости системы аксиом из [2], которая отличается от исследованной системы тем, что A11 заменено через A11* $\neg\neg A \supset A$. Классическое исчисление высказываний получается отбрасыванием A 9, а конструктивное — отбрасыванием A11*. Аксиома A9 в классической системе из [2] выводима.

4. Так как аксиома A10 в рассмотренной системе аксиом оказалась зависимой, то её можно отбросить, и аксиоматику исчисления высказываний можно строить следующим образом. За аксиомы классического исчисления высказываний принимаются A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A11. Конструктивное исчисление высказываний получается, если в классической системе заменить A11 через A10.

5. Идея построения таблицы 2 заключается в некотором искажении таблиц истинности для восьмизначного исчисления высказываний, в котором выполняются все законы двузначного исчисления высказываний. Ход построения таблицы 2 даёт основание предполагать, что доказательство независимости A2 в первоначальной системе упростить нельзя, если употреблять нормальные таблицы истинности. Упрощение достигается в сокращённой в пункте 4 системе аксиом (таблица 13), а также в классической системе из [2] (таблица 14).

Вопрос об упрощении доказательства независимости A2 в системе всех одиннадцати аксиом ненормальными таблицами остаётся открытым; о возможности достижения упрощения таким путём свидетельствует доказательство независимости в сокращённой системе ненормальными таблицами истинности из [4] (таблица 15).

В таблице 16 указаны значения переменных, при которых A2 принимает невыделённое значение истинности.

Таблица 13.

| | $\supset$ | & | $\vee$ | $\neg$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | |
| 0 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 0 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 0 | 1 1 1 1 | 0 1 2 3 | 0 |
| 2 | 0 1 0 0 | 2 1 2 2 | 0 2 2 3 | 1 |
| 3 | 0 1 3 0 | 3 1 2 3 | 0 3 3 3 | 1 |

Таблица 14.

| | $\supset$ | & | $\vee$ | $\neg$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | 0 1 2 3 | |
| 0 | 0 1 2 3 | 0 1 1 1 | 0 0 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 0 | 1 1 1 1 | 0 1 1 1 | 0 |
| 2 | 0 0 0 3 | 1 1 1 1 | 0 1 1 1 | 0 |
| 3 | 0 0 0 0 | 1 1 1 1 | 0 1 1 1 | 0 |

Таблица 15.

| | ⊃ | & | ∨ | 7 |
|---|---|---|---|---|
| | 0 1 2 | 0 1 2 | 0 1 2 | |
| 0 | 0 1 0 | 0 1 1 | 0 0 0 | 1 |
| 1 | 0 0 0 | 1 1 1 | 0 1 1 | 0 |
| 2 | 0 0 0 | 1 1 1 | 0 1 1 | 0 |

Таблица 16.

| № таблицы | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|
| 13 | 3 | 3 | 2 |
| 14 | 2 | 1 | 3 |
| 15 | 0 | 2 | 1 |

1 VI 1957

*Кафедра математического анализа*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *А. А. Марков.* Логика математическая. Большая Советская Энциклопедия. Второе издание. Том 25, стр. 338—341.

[2]. *С. К. Клини.* Введение в метаматематику. Москва, 1957.

[3]. *D. Hilbert* und *P. Bernays.* Grundlagen der Mathematik. Bd. I. Berlin, 1934.

[4]. *M. l'Abbé.* On the independence of Henkin's axioms for fragments of the propositional calculus. The Journal of Symbolic Logic. 1951. Vol. 16. No 1. pp. 43—45.

# PAR KĀDAS IZTEIKUMU RĒĶINU AKSIOMU SISTĒMAS NEATKARĪBU

*A. A. Kurmītis*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta aksiomu sistēma A1 — A11 no [1]. Dots A10 izvedums un pierādīts ar normālām patiesuma tabulām, ka sistēmas pārējās aksiomas ir neatkarīgas, kā arī, ka neatkarīga ir A10 konstruktīvo izteikumu rēķinu aksiomu sistēmā (tabulas 1—11). Tabulā 12 uzrādītas mainīgo patiesuma vērtības, pie kurām aksioma, kuras neatkarību pierāda, nepieņem izcilu patiesuma vērtību. Neatkarības pierādījumi derīgi arī aksiomu sistēmai no [2].

Norādīts, ka apskatāmo sistēmu var vienkāršot, atmetot A10. Parādīts, ka A2 neatkarības pierādījumu var vienkāršot, ja iepriekš atmet A10. To var vienkāršot arī sistēmā no [2]. Izvirzīts jautājums par A2 neatkarības pierādījuma vienkāršošanu visu vienpadsmit aksiomu sistēmā, lietojot nenormālas patiesuma tabulas.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

*Я. Л. ЭНГЕЛЬСОН*

Пусть $E$ — линейное топологическое пространство и $E^*$ — пространство, сопряженное к $E$. Оператор $\mathbf{F}(x)$ из $E$ в $E^*$ называется *градиентом функционала* $f(x)$, заданного в $E$, если

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=(\mathbf{F}(x),\ h),$$

где $h$ — произвольный элемент из $E$ и $(\mathbf{F}(x), h)$ — линейный функционал от $h$.

Оператор $\mathbf{\Phi}(x)$, являющийся градиентом некоторого функционала $\varphi(x)$, называется *потенциальным*, а $\varphi(x)$ называется *потенциалом* оператора $\mathbf{\Phi}(x)$.

Потенциальные операторы играют существенную роль в вариационной теории нелинейных операторных уравнений. Это обстоятельство было выяснено в работах М. М. Вайнберга [1—3], в которых исследованы потенциальные операторы в банаховых пространствах.

В настоящей работе мы распространяем результаты, установленные для потенциальных операторов в работах [1—3], на локально выпуклые линейные топологические пространства $E$.

В § 1 рассматриваются некоторые виды непрерывности операторов, действующих из одного локально выпуклого пространства в другое такое пространство. В § 2 вводится понятие интеграла Стильтьеса для абстрактных функций, значения которых принадлежат локально выпуклым пространствам, и изучаются некоторые его свойства. В § 3 изучаются криволинейные интегралы в пространстве $E$, для которых устанавливаются различные предложения. Основным предложением этого параграфа является теорема 3.1 о равенстве нулю интеграла по замкнутой кривой, которая представляет собой обобщение соответствующей теоремы М. К. Гавурина [4], установленной для банаховых пространств. Центральным является § 4; в нем устанавливаются необходимые и достаточные условия потенциальности недифференцируемых операторов, действующих из $E$ в $E^*$ (теорема 4.1). В § 5 устанавливаются некоторые связи между свойствами потенциальных операторов и их потенциалов.

## § 1.

## НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА

Сначала мы рассмотрим некоторые виды непрерывности операторов $\mathbf{F}(x)$ $(E_1\to E_2)$, т. е. действующих из одного локально выпуклого линейного топологического пространства $E_1$, в другое локально выпуклое пространство $E_2$.

Определение 1.1. Оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E_1 \to E_2)$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in E_1$, если для каждой окрестности нуля $V \subset E_2$ существует такая окрестность нуля $U \subset E_1$, что из $x - x_0 \in U$ следует $\mathbf{F}(x) - F(x_0) \in V$.

Оператор называется *непрерывным на множестве* $D$, если он непрерывен в каждой точке $x \in D$.

Определение 1.2. Оператор $\mathbf{F}(x)$ называется *равномерно непрерывным* на множестве $D \subset E_1$, если для каждой окрестности нуля $V \subset E_2$ существует такая окрестность нуля $U \subset E_1$, что для любых 2-х элементов $x'$, $x'' \in D$, для которых $x'' - x' \in U$, будет $\mathbf{F}(x'') - \mathbf{F}(x') \in V$. В дальнейшем будет использована следующая

Теорема Кантора. Если оператор $\mathbf{F}(x)$ непрерывен на бикомпактном множестве $B \subset E$, то он равномерно непрерывен на $B$.

Доказательство. Пусть дана окрестность нуля $V \subset E_2$. Так как $\mathbf{F}(x)$ непрерывен на $B$, то для каждого $x \in B$ найдется окрестность нуля $U_x$ такая, что для каждого $y \in B$, для которого $y - x \in U_x$ имеет место включение

$$\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(x) \in \frac{V}{2}.$$

Тогда для любых 2-х элементов $y'$, $y'' \in (x + U_x) \cap B$

$$\mathbf{F}(y'') - \mathbf{F}(y') = \mathbf{F}(y'') - \mathbf{F}(x) + \mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(y') \in \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} V \subset V. \qquad (1.1)$$

Пусть множество $B$ покрыто окрестностями $x + \frac{U_x}{2}$. В силу бикомпактности множества $B$ из этого покрытия можно выделить конечное покрытие $\left\{x_k + \frac{1}{2} U_k\right\}$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, так что для любых 2-х элементов принадлежащих $B \cap (x_k + U_k)$ выполняется (1.1).

Пусть теперь $x'$, $x'' \in B$ такие, что

$$x' - x'' \in \bigcap_{k=1}^{m} \frac{U_k}{2} = U.$$

Тогда для некоторого $k$

$$x' \in x_k + \frac{1}{2} U_k.$$

Далее, для того же $k$ имеем:

$$x'' - x' \in U \subset \frac{1}{2} U_k.$$

Следовательно

$$x'' - x_k = x'' - x' + x' - x_k \in \frac{1}{2} U_k + \frac{1}{2} U_k \subset U_k,$$

т. е.

$$x'' \in B \cap (x_k + U_k).$$

Так как и $x' \in B \cap (x_k + U_k)$, то отсюда и из (1.1) следует, что

$$\mathbf{F}(x'') - \mathbf{F}(x') \in V.$$

Теорема доказана.

Пусть $A$ — частично упорядоченное множество и $\alpha$ — его элементы.

Определение 1.3. Оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E_1 \to E_2)$ называется *усиленно непрерывным в точке* $x_0 \in E_1$, если для всякой направленной последователь-

ности $\{x_\alpha\}$, слабо сходящейся к $x_0$, т. е. такой, что для каждого $y \in E_1^*$

$$\lim_{\alpha \in A} (y, x_\alpha) = (y, x_0), \tag{1.2}$$

имеет место равенство

$$\lim_{\alpha \in A} \mathbf{F}(x_\alpha) = \mathbf{F}(x_0), \tag{1.3}$$

где предел понимается в смысле топологии в $E_2$.

Определение 1.4. Оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E_1 \to E_2)$ называется *слабо непрерывным в точке* $x_0 \in E_1$, если из (1.2) следует, что для каждого $z \in E_2^*$

$$\lim_{\alpha \in A} (z, \mathbf{F}(x_\alpha)) = (z, \mathbf{F}(x_0)). \tag{1.4}$$

Если $\mathbf{F}(x)$ есть функционал, то равенства (1.3) и (1.4) эквивалентны, а потому функционал называется *слабо непрерывным*, если из (1.2) следует (1.3).

Подобно тому, как в [2—3], можно и в линейных топологических локально выпуклых пространствах ввести другие понятия, связанные с непрерывностью операторов, и доказать связь между ними. Это, однако, не связано с основной задачей данной работы.

## § 2.
## ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

**2.1.** Пусть $E$ — локально выпуклое пространство, $E^*$ — пространство, сопряженное к $E$.

Обозначим через $x(t)$ абстрактную функцию, отображающую отрезок $[a, b]$ числовой оси в $E$, а через $y(t)$ — абстрактную функцию, отображающую $[a, b]$ в $E^*$.

Разобъем отрезок $[a, b]$ на части точками $t_k$, причем

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

В каждом интервале $[t_{k-1}, t_k]$, длину которого обозначим через $\Delta t_k$, выберем по точке $\tau_k$. Тогда, так как $y(\tau_k) \in E^*$, а $x(t_k) - x(t_{k-1}) \in E$, имеет смысл внутреннее произведение

$$(y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})),$$

а также сумма

$$\sum_{k=1}^{n} (y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})),$$

называемая интегральной суммой Стильтьеса абстрактной функции $y(t)$ по абстрактной функции $x(t)$.

Определение 2.1. Если существует предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} (y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})), \qquad \lambda = \max_k \Delta t_k,$$

не зависящий от способа разбиения $[a, b]$ и от выбора $\tau_k$, то этот предел назовем *интегралом Стильтьеса от* $y(t)$ *по* $x(t)$ и обозначим его

$$\int_a^b (y(t), dx(t)).$$

2.2. Достаточные условия существования интеграла Стильтьеса мы получим, вводя предварительно понятие функции ограниченной вариации.

Определение 2.2. Абстрактная функция $x(t)$ ($[a, b] \to E$) обладает *ограниченной вариацией на* $[a, b]$, если существуют окрестность нуля $V \subset E^*$ и число $M$ такие, что при любом разбиении $[a, b]$ точками $t_k (k = 1, 2, \ldots n-1, a = t_0, b = t_n)$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left|(y, x(t_k) - x(t_{k-1}))\right| \leqslant M \tag{2.1}$$

для всех $y \in V$.

Из этого определения следует, что для всех $y \in \alpha V$, где $\alpha > 0$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left|(y, x(t_k) - x(t_{k-1}))\right| \leqslant \alpha M.$$

Определение 2.3. Пусть дана окрестность нуля $V \subset E^*$. Тогда полной вариацией $\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{W}}}(V, x(t))$ функции $x(t)$ на $[a, b]$ относительно окрестности $V$ называется наименьшее из чисел $M$, для которых выполняется неравенство (2.1) или

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{W}}}(V, x(t)) = \sup \sum_{k=1}^{n} \left|(y, x(t_k) - x(t_{k-1}))\right|, \quad y \in V,$$

где sup берется по всевозможным $n$ и разбиениям $[a, b]$.

Пользуясь этим определением можно назвать функцией с ограниченной вариацией такую функцию, для которой существует окрестность $V$ такая, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{W}}}(V, x(t)) < \infty$.

Данные здесь определения в случае, когда $E$ — пространство Банаха, совпадают с определениями И. М. Гельфанда [5].

Из определения полной вариации следует, также, как и для обычных функций, что если интервал $[a, b]$ разбит на части $[a, c]$ и $[c, b]$, то

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathfrak{W}}}(V, x(t)) = \overset{c}{\underset{a}{\mathfrak{W}}}(V, x(t)) + \overset{b}{\underset{c}{\mathfrak{W}}}(V, x(t)).$$

Приведем пример, иллюстрирующий введенные понятия.

Пусть $x_0, x_1 \in E$, $\varphi(t)$ — числовая функция, определенная на $[a, b]$ с ограниченной вариацией, и $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\varphi)$ — ее полная вариация на $[a, b]$. Рассмотрим абстрактную функцию

$$x(t) = x_0 + \varphi(t) x_1.$$

Разобьем интервал $[a, b]$ на произвольные части $[t_{k-1}, t_k]$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \left|(y, x(t_k) - x(t_{k-1}))\right| = \sum_{k=1}^{n} \left|(y, (\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})) x_1)\right| =$$

$$= \left|(y, x_1)\right| \cdot \sum_{k=1}^{n} \left|\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\right| \leqslant \left|(y, x_1)\right| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(\varphi).$$

Если в качестве $V \subset E^*$ взять поляру точки $x_1$, то для всех $y \in V$ будет

$$|(y, x_1)| \leqslant 1$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} |(y, x(t_k) - x(t_{k-1}))| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (\varphi)$$

для всех $y \in V$ при любом разбиении $[a, b]$. Значит $x(t)$ есть абстрактная функция с ограниченной вариацией. Дадим теперь достаточные условия существования интеграла Стильтьеса (ср. [4] и [3], стр. 39).

Теорема 2.1. Если абстрактная функция $y(t)$ ($[a, b] \to E^*$) непрерывна на $[a, b]$, а абстрактная функция $x(t)$ ($[a, b] \to E$) имеет ограниченную вариацию, то

$$\int_a^b (y(t), dx(t))$$

существует.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и положим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} (y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})), \quad \lambda = \max_k \Delta t_k .$$

Возьмем продолжение этого разбиения такое, что

$$t_{k-1} = t_{k,0} < t_{k,1} < \ldots\ldots < t_{k,i_k-1} < t_{k,i_k} = t_k .$$

Тогда соответствующая интегральная сумма будет

$$\sigma' = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} (y(\tau_{k,i}), x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1})),$$

а так как

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = \sum_{i=1}^{i_k} [x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1})],$$

то

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} (y(\tau_k), x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1})).$$

Следовательно

$$|\sigma' - \sigma| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} |(y(\tau_{k,i}) - y(\tau_k), x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}))| .$$

Так как $x(t)$ есть функция с ограниченной вариацией, то для всех $y \in \frac{\varepsilon V}{M}$ (см. определение 2.2) при произвольно заданном $\varepsilon > 0$ будет

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{i_k} |(y, x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}))| \leqslant \varepsilon.$$

Далее $y(t)$ непрерывна на $[a, b]$, а следовательно по теореме Кантора и равномерно непрерывна. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что для любых $t', t'' \in [a, b]$, для которых $|t' - t''| < \delta$ будет иметь место

$$y(t') - y(t'') \in \frac{\varepsilon V}{M}.$$

Если выбрать $\lambda = \max\limits_k \Delta t_k < \delta$, то $|\tau_k - \tau_{k,i}| < \delta$ и $y(\tau_{k,i}) - y(\tau_k) \in \frac{\varepsilon V}{M}$, а поэтому $|\sigma' - \sigma| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что каждой последовательности разбиений, являющихся продолжениями друг друга, соответствует фундаментальная числовая последовательность интегральных сумм, которая согласно теореме Коши имеет предел $I$.

Далее обычным способом легко показать, что при любой другой последовательности разбиений интегральные суммы стремятся к $I$, значит существует

$$\int_a^b (y(t),\ dx(t)).$$

Теорема доказана.

Для интеграла Стильтьеса в локально выпуклом пространстве обычным способом доказываются все основные свойства, которые известны для интегралов Стильтьеса от числовых функций. Например, если $y(t) = y_0$, то

$$\int_a^b (y_0,\ dx(t)) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} (y_0,\ x(t_k) - x(t_{k-1})) = \lim_{\lambda\to 0} (y_0,\ \sum_{k=1}^{n} [x(t_k) - x(t_{k-1})]) =$$
$$= (y_0,\ x(b) - x(a)). \qquad (2.2)$$

**2.3.** В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства, связанные с предельным переходом под знаком интеграла Стильтьеса.

1°. Если последовательность абстрактных функций $\{y_n(t)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к непрерывной функции $y(t)$, а $x(t)$ — абстрактная функция с ограниченной вариацией, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (y_n(t),\ dx(t)) = \int_a^b (y(t),\ dx(t)).$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\left| \int_a^b (y(t),\ dx(t)) - \int_a^b (y_n(t),\ dx(t)) \right| =$$
$$= \left| \int_a^b (y(t) - y_n(t),\ dx(t)) \right| \leqslant \int_a^b \left| (y(t) - y_n(t),\ dx(t)) \right| =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{m} \left| (y(\tau_k) - y_n(\tau_k),\ x(t_k) - x(t_{k-1})) \right|.$$

Из определения 2.2 следует, что каждому $\varepsilon > 0$ соответствует окрестность $\varepsilon V$ такая, что при любом разбиении $[a, b]$ и всякого $y \in \varepsilon V$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \left| (y,\ x(t_k) - x(t_{k-1})) \right| < \varepsilon.$$

Далее, из равномерной сходимости $\{y_n(t)\}$ к $y(t)$ следует существование такого $n_0$, что для всех $n > n_0$ и всех $t \in [a, b]$

$$y(t) - y_n \sqrt{(t)} \in \varepsilon V.$$

Значит, для любого разбиения $[a, b]$ и $n > n_0$

$$\sum_{k=1}^{m} \left|\left(y(\tau_k) - y_n(\tau_k),\ x(t_k) - x(t_{k-1})\right)\right| < \varepsilon,$$

откуда, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$\left|\int_a^b \left(y(t),\ dx(t)\right) - \int_a^b \left(y_n(t),\ dx(t)\right)\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

2°. Если обстрактная функция $y(t)$ непрерывна, а последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится в каждой точке $t \in [a, b]$ к $x(t)$, причем функции $x_n(t)$ имеют ограниченную вариацию с общими $V \subset E^*$ и $M$ (см. определение 2.2), то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(y(t),\ dx_n(t)\right) = \int_a^b \left(y(t),\ dx(t)\right).$$

Доказательство. Подставляя в неравенство (2.1) вместо $x(t)$ функции $x_n(t)$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $x(t)$ имеет ограниченную вариацию с теми же $V \in E^*$ и $M$, а значит

$$\int_a^b \left(y(t),\ dx(t)\right)$$

существует.

Далее, для доказательства свойства 2°, разобьем $[a, b]$ на $m$ частей точками $t_k$ и напишем

$$\int_a^b \left(y(t),\ dx(t)\right) = \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(y(t),\ dx(t)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(y(t) - y(t_k),\ dx(t)\right) + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(y(t_k),\ dx(t)\right). \qquad (2.3)$$

Заметим, что в силу (2.2):

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(y(t_k),\ dx(t)\right) = \sum_{k=1}^{m} \left(y(t_k),\ x(t_k) - x(t_{k-1})\right). \qquad (2.4)$$

Далее, представим каждый из интегралов $\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(y(t) - y(t_k),\ dx(t)\right)$ в виде предела интегральной суммы

$$\lim_{\max \Delta t_{k,i} \to 0} \sum_{i=1}^{i_k} \left(y(\tau_{k,i}) - y(t_k),\ x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1})\right),$$

где $t_{k-1} = t_{k,0} < t_{k,1} < \ldots < t_{k,i_k-1} < t_{k,i_k} = t_k$.

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (y(t) - y(t_k),\ dx(t)) =$$

$$= \lim_{\max \Delta t_{k,i} \to 0} \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{i_k} (y(\tau_{k,i}) - y(t_k),\ x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1})).$$

Учитывая равномерную непрерывность $y(t)$, ограниченность вариации $x(t)$ и возможность выбора $\lambda = \max(t_k - t_{k-1})$ так, чтобы для всех отрезков $[t_{k-1},\ t_k]$ было $y(t) - y(t_k) \in \frac{\varepsilon V}{M}$, если $t \in [t_{k-1},\ t_k]$, мы получаем, что при любых разбиениях отрезков $[t_{k-1},\ t_k]$ имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{i_k} \left|(y(\tau_{k,i}) - y(t_k),\ x(t_{k,i}) - x(t_{k,i-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\max\limits_{i,k} \Delta t_{k,i} \to 0$ имеем, что

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left|(y(t) - y(t_k),\ dx(t))\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

и тем более

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (y(t) - y(t_k),\ dx(t))\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из соотношений (2.3) и (2.4) следует, что

$$\int_a^b (y(t),\ dx(t)) = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \eta + \sum_{k=1}^{m} (y(t_k),\ x(t_k) - x(t_{k-1})), \quad \text{где } |\eta| \leqslant 1$$

и аналогично

$$\int_a^b (y(t),\ dx_n(t)) = \frac{\varepsilon}{3} \cdot \eta_n + \sum_{k=1}^{m} (y(t_k),\ x_n(t_k) - x_n(t_{k-1})), \quad \text{где } |\eta_n| \leqslant 1.$$

Далее, так как $m$ и $t_k$ фиксированы и в каждой точке $t_k$ $(k = 0, 1, \ldots m)$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_k) = x(t_k)$, то найдется такое $n_0$, что для всех $n > n_0$

$$\left|\sum_{k=1}^{m} (y(t_k),\ x_n(t_k) - x_n(t_{k-1})) - \sum_{k=1}^{m} (y(t_k),\ x(t_k) - x(t_{k-1}))\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m} \left|(y(t_k),\ x_n(t_k) - x(t_k))\right| + \sum_{k=1}^{m} \left|(y(t_k),\ x(t_{k-1}) - x_n(t_{k-1}))\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда и из предыдущего следует, что при $n > n_0$

$$\left|\int_a^b (y(t),\ dx(t)) - \int_a^b (y(t),\ x_n(t))\right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3°. Если последовательность непрерывных функций $\{y_n(t)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к непрерывной функций $y(t)$, а последовательность

абстрактных функций $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в каждой точке из $[a, b]$, причем функции $x_n(t)$ имеют ограниченную вариацию с общими $V \subset E^*$ и $M$ (см. определение 2.2), то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b (y_n(t), dx_n(t)) = \int_a^b (y(t)), dx(t)).$$

Доказательство. Напишем

$$\int_a^b (y_n(t), dx_n(t)) - \int_a^b (y(t), dx(t)) = \int_a^b (y_n(t) - y(t), dx_n(t)) +$$
$$+ \left[\int_a^b (y(t), dx_n(t)) - \int_a^b (y(t), dx(t))\right].$$

Доказательство того, что первый из интегралов в правой части равенства стремится к нулю при $n \to \infty$ проводится так же, как доказательство свойства 1°, а разность последних 2-х интегралов стремится к нулю по свойству 2°.

## § 3.
## КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

**3.1.** Криволинейный интеграл в линейных топологических пространствах вводится примерно так же, как в банаховых пространствах (ср. [4], [3]).

Если абстрактная функция $x(t)$ ($[a, b] \to E$) отображает $[a, b]$ однозначно на некоторое множество $L \subset E$, то множество $L$ называется *дугой кривой*, а функция $x(t)$ — ее *представлением*.

Точку $x(a)$ назовем *началом*, а точку $x(b)$ — *концом дуги*. Если концы совпадают, кривая называется *замкнутой*. Заменой $t = \varphi(s)$ ($\alpha \leqslant s \leqslant \beta$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$), где $\varphi(s)$ — возрастающая непрерывная функция на $[\alpha, \beta]$, мы получаем другое представление — $x(\varphi(s))$ той же дуги. Дугу кривой $L$ называют *простой*, если одно из ее представлений устанавливает гомеоморфизм между $[a, b]$ и $L$. Дугу называют *регулярной*, если одно из ее представлений $x(t)$ есть непрерывная функция с ограниченной вариацией.

Дугу, представление которой есть

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

называют *отрезком, соединяющим точки* $x_1$ и $x_2$. Если точки $x_0, x_1, \ldots x_n \in E$ последовательно соединить отрезками, получаем *ломанную* $L_n$. Говорят, что ломанная $L_n$ *вписана в кривую* $L$, если точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат $L$.

Отметим, что для данной регулярной дуги $L$, представление которой есть $x(t)$, можно построить последовательность вписанных в $L$ ломанных $L_n$, равномерно сходящуюся к $L$ (т. е. их представления $x_n(t)$ равномерно на $[a, b]$ сходятся к $x(t)$).

Действительно, пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n \in L$. Определим ломанную $L_n$ следующим образом:

$$x_n(t) = x(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(x(t_k) - x(t_{k-1})), \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \ (k = 0, 1, \ldots n)$$

где $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$, $x(t_k) = x_n(t_k) = x_k$.

Докажем, что для каждой окрестности нуля $U \subset E$, найдется $n_0$ такое, что для всех $n > n_0$

$$x(t) - x_n(t) \in U \text{ для всех } t \in [a, b].$$

Так как $x(t)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$, то для каждой окрестности нуля $U \subset E$ найдется $\delta > 0$ такое, что из $|t' - t''| < \delta$ следует $x(t') - x(t'') \in \frac{U}{2}$. Пусть последовательность ломанных $L_n$ определяется последовательностью систем $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_k \in L$ такой, что для прообразов $t_k$ точек $x_k$ будет $\max \Delta t_k \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует $n_0$ такое, что для всех $n > n_0$ $\max \Delta t_k < \delta$ и для $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$x(t) - x_n(t_{k-1}) = x(t) - x(t_{k-1}) \subset \frac{U}{2}$$

и

$$x_n(t) - x_n(t_{k-1}) = \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \left(x(t_k) - x(t_{k-1})\right) \subset \frac{U}{2}.$$

Но тогда для $n > n_0$

$$x(t) - x_n(t) = x(t) - x_n(t_{k-1}) + x_n(t_{k-1}) - x_n(t) \subset \frac{U}{2} + \frac{U}{2} \subset U.$$

3.2. Пусть на связном множестве $\omega \subset E$, где $E$ — локально выпуклое пространство, задан непрерывный оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E \to E^*)$. Множество $\omega$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в $\omega$. Так как $\mathbf{F}(x) \in E^*$ для $x \in E$, то, полагая в интеграле Стильтьеса

$$\int_a^b \left(y(t),\ dx(t)\right)$$

$y(t) = \mathbf{F}(x(t))$, где $x(t)$ — непрерывная функция с ограниченной вариацией, мы получим следующий интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b \left(\mathbf{F}(x(t)),\ dx(t)\right). \tag{3.1}$$

Пусть $L$ — кривая из $\omega$ и $x(t)$ — ее представление. При замене $t = \varphi(s)$, где $\varphi(s)$ удовлетворяет условиям, указанным в начале п. 3.1, мы получим другое представление той же кривой. Отсюда и из того, что интеграл (3.1) также не изменится при указанной замене, следует, что интеграл (3.1) зависит от кривой $L$, но не зависит от ее представления. Ввиду этого (3.1) обозначается следующим образом

$$\int_L \left(\mathbf{F}(x),\ dx\right) \tag{3.2}$$

и называется *криволинейным интегралом оператора* $\mathbf{F}(x)$ *по кривой* $L$, одним из представлений которой является $x(t)$. Очевидно, что интеграл (3.2) существует, если кривая $L$ регулярна.

Если оператор $\mathbf{F}(x)$ таков, что интеграл (3.2) по любой дуге из $\omega$ не зависит от формы дуги $L \subset \omega$, а зависит лишь от ее концов $x(a) = x_1$ и $x(b) = x_2$, то криволинейный интеграл (3.2) записывается так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\mathbf{F}(x),\ dx\right).$$

В этом случае интеграл по любой замкнутой кривой, лежащей в $\omega$, равен нулю, так как, если $x(a) = x(b)$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{F}(x),\ dx) = -\int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{F}(x),\ dx).$$

Лемма 3.1. Если последовательность регулярных дуг $\{L_n\}$ сходится равномерно к регулярной дуге $L$, причем для представлений $x_n(t)$ дуг $L_n$ существует общая окрестность $V \subset E^*$ и число $M$ (см. определение 2.2), то

$$\lim_{n\to\infty} \int_{L_n} (\mathbf{F}(x),\ dx) = \int_{L} (\mathbf{F}(x),\ dx).$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\{\mathbf{F}(x_n(t))\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к $\mathbf{F}(x(t))$. Для этого заметим, что множество $\Lambda$, состоящее из всех точек $z \in E$, принадлежащих кривым $L$ и $L_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, бикомпактно.

Действительно, покроем каждую точку $z \in \Lambda$ открытой окрестностью $z + U_z$, где $U_z$ — произвольная окрестность нуля, своя для каждого $z$. Возьмем те из них, которые покрывают $L$ и имеют вид: $x(t) + U_{x(t)}$, где $x(t) \in L$. Покроем теперь каждую точку $x(t) \in L$ окрестностью $x(t) + \frac{1}{2} U_{x(t)}$. Так как окрестности $U_z$ выпуклы, то $x(t) + \frac{1}{2} U_{x(t)} \subset x(t) + U_{x(t)}$.

Ввиду того, что кривая $L$ как непрерывный образ бикомпактного множества $[a, b]$ бикомпактна, из покрытия $\{x(t) + \frac{1}{2} U_{x(t)}\}$ можно выделить конечное покрытие $\{x(t_k) + \frac{1}{2} U_{x(t_k)}\}$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, причем $x_k + \frac{1}{2} U_{x(t_k)} \subset x_k + U_{x(t_k)}$ и каждая точка $x(t) \in L$ принадлежит $x_k + \frac{1}{2} U_{x(t_k)}$ при некотором $k$.

Рассмотрим окрестность нуля $U = \bigcap_{k=1}^{m} \frac{1}{2} U_{x(t_k)} \subset E$. Ввиду равномерной сходимости $\{x_n(t)\}$ к $x(t)$ найдется $n_0$ такое, что для всех $n > n_0$ будет $x_n(t) - x(t) \in U \subset \frac{1}{2} U_{x(t_k)}$ для всех $k$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ и всех $t \in [a, b]$. Но при каждом $t$ для некоторого $k$

$$x(t) - x(t_k) \in \tfrac{1}{2} U_{x(t_k)}.$$

Значит для каждого $t \in [a, b]$ и некоторого $k$ при всех $n > n_0$ имеет место соотношение:

$$x_n(t) - x(t_k) = x_n(t) - x(t) + x(t) - x(t_k) \in \tfrac{1}{2} U_{x(t_k)} + \tfrac{1}{2} U_{x(t_k)} \subset U_{x(t_k)}.$$

Следовательно для всех $n > n_0$ кривые $L_n$ и $L$ покрыты конечным числом окрестностей из произвольно взятого покрытия множества $\Lambda$.

Далее, так как остальные кривые $L_1\ L_2, \ldots, L_{n_0}$ из множества $\Lambda$ являются бикомпактными множествами точек в $E$, то из их покрытия окрестностями $z + U_z$ также выделяется конечное покрытие. Последнее вместе с покрытием $\{x(t_k) + U_{x(t_k)}\}$ образует конечное покрытие множества $\Lambda$, значит $\Lambda$ бикомпактно.

Так как оператор $\mathbf{F}(x)$ непрерывен, то по теореме Кантора, он равномерно непрерывен на $\Lambda$. Следовательно, для каждой окрестности нуля $U^* \subset E^*$ найдется окрестность нуля $U \subset E$, такая, что если $x', x'' \subset \Lambda$ и $x' - x'' \in U$, имеет место включение:

$$\mathbf{F}(x'') - \mathbf{F}(x') \in U^*.$$

В свою очередь, для окрестности нуля $U \subset E$ в силу равномерной сходимости $\{x_n(t)\}$ к $x(t)$ на $[a, b]$ найдется такое $N$, что для всех $n > N$ и всех $t \in [a, b]$

$$x_n(t) - x(t) \in U,$$

а поэтому

$$\mathbf{F}(x_n(t)) - \mathbf{F}(x(t)) \in U^*.$$

Этим доказана равномерная сходимость $\{\mathbf{F}(x_n(t))\}$ к $\mathbf{F}(x(t))$. Теперь утверждение леммы следует непосредственно из свойства 3°.

**3.3.** Пусть $\omega$ — открытая *односвязная* область в локально выпуклом пространстве $E$, т. е., каковы бы ни были непрерывная кривая $L \subset \omega$ и точка $\bar{x} \in \omega$, существует абстрактная функция $x(t, s)$, непрерывная в прямоугольнике $\{a \leqslant t \leqslant b, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$, отображающая этот прямоугольник в $\omega$, и такая, что $x(t, 0) = x(t)$ — представление дуги $L$, а $x(t, 1) = \bar{x}$.

Теорема 3.1. (ср. [4]) Если $\int\limits_L (\mathbf{F}(x), dx)$ равен нулю вдоль любого треугольника (т. е. замкнутой ломанной из 3-х звеньев), выпуклая оболочка которого лежит в односвязной области $\omega$, то он равен нулю вдоль любой регулярной замкнутой кривой $L$, лежащей в $\omega$.

Доказательство. Интеграл $\int\limits_L (\mathbf{F}(x), dx)$ по любой замкнутой ломанной, лежащей в $\omega$ вместе со своей выпуклой оболочкой, равен нулю по условию теоремы, ибо он равен сумме интегралов по треугольникам, лежащим в $\omega$ вместе с выпуклыми оболочками.

Далее, если замкнутая кривая $L$ лежит в $\omega$ вместе со своей выпуклой оболочкой, то можно построить последовательность ломанных $\{L_n\}$, которые вместе со своими выпуклыми оболочками лежат в выпуклой оболочке кривой $L$ и сходятся к $L$ равномерно на $[a, b]$.

Но тогда по лемме 3.1:

$$\int\limits_L (\mathbf{F}(x), dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{L_n} (\mathbf{F}(x), dx) = 0.$$

Пусть теперь $L$ — замкнутая кривая, лежащая в $\omega$ (ее выпуклая оболочка может и не принадлежать $\omega$), а $x(t)$ — ее представление. Построим замкнутые кривые, лежащие в $\omega$ вместе с выпуклой оболочкой и такие, что сумма интегралов по этим кривым равна интегралу по кривой $L$.

Так как $\omega$ односвязно, то для любой точки $x_0 \in \omega$ найдется функция $x(t, s)$ такая, что $x(t, 0) = x(t)$, $x(t, 1) = x_0$. Образ прямоугольника $\{a \leqslant t \leqslant b, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ при непрерывном отображении $x(t, s)$ есть бикомпактное множество $B \subset \omega$.

Для каждой точки $x \in B$ найдется окрестность нуля $U_x \subset E$ такая, что $x + U_x \subset \omega$, ибо $\omega$ — открытое множество. В силу бикомпактности $B$ из покрытия $\{x + \frac{1}{2} U_x\}$ можно выделить конечное покрытие $\{x_k + \frac{1}{2} U_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots p)$, которое содержится в $\omega$. Пусть $U = \bigcap\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{2} U_k$. Так как функция $x(t, s)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике $\{a \leqslant t \leqslant b, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$, то найдется $\delta > 0$ такое, что из $|t' - t''| < \delta$, $|s' - s''| < \delta$ $(a \leqslant t', t'' \leqslant b, 0 \leqslant s', s'' \leqslant 1)$ следует

$$x(t'', s'') - x(t', s') \in U \subset \tfrac{1}{2} U_k \text{ при всех } k.$$

При этом $x(t', s') \in B$ и поэтому

$$x(t', s') - x_k \in \tfrac{1}{2} U_k \quad \text{для некоторого } k.$$

Следовательно, для некоторого $k$

$$x(t'', s'') - x_k = x(t'', s'') - x(t', s') + x(t', s') - x_k \in \tfrac{1}{2} U_k + \tfrac{1}{2} U_k \subset U_k.$$

Так как $x(t', s')$, $x(t'', s'') \in x_k + U_k$, а $U_k$ — выпуклая окрестность, то отрезок, соединяющий точки $x(t', s')$ и $x(t'', s'')$, содержится в $x_k + U_k$, а значит и в $\omega$. Итак, мы установили, что если $|t' - t''| < \delta$, $|s' - s''| < \delta$ то отрезок, соединяющий точки $x(t', s')$ и $x(t'', s'')$, лежит в $\omega$.

Далее воспользуемся следующей конструкцией (см. [4] или [3]).

Разобьем $[a, b]$ и $[0,1]$ на части, соответственно, точками $t_i$ и $s_j$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu = b; \quad 0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_\nu = 1$$

так, чтобы $|t_i - t_{i-1}| < \delta$ и $|s_j - s_{j-1}| < \delta$.

Рассмотрим замкнутые кривые $L_{ij}$, представления которых $x_{ij}(\tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 4)$ имеют вид:

$$x_{ij}(\tau) = \begin{cases} x(t_{i-1},\ s_{j-1} + \tau(s_j - s_{j-1})), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1 \\ x(t_{i-1} + (\tau - 1)(t_i - t_{i-1}),\ s_j), & 1 \leqslant \tau \leqslant 2 \\ x(t_i,\ s_j + (\tau - 2)(s_{j-1} - s_j)), & 2 \leqslant \tau \leqslant 3 \\ x(t_i + (\tau - 3)(t_{i-1} - t_i),\ s_{j-1}), & 3 \leqslant \tau \leqslant 4 \end{cases}$$

Так как при любом $\tau \in [0,4]$ $x_{ij}(\tau) = x(t, s)$, где $t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i$, $s_{j-1} \leqslant s \leqslant s_j$, то при любых $\tau_1$, $\tau_2$ таких, что $0 \leqslant \tau_1$, $\tau_2 \leqslant 4$

$$x_{ij}(\tau_1) = x(t', s') \quad x_{ij}(\tau_2) = x(t'', s''), \quad t_{i-1} \leqslant t',\ t'' \leqslant t_i, \quad s_{j-1} \leqslant s',\ s'' \leqslant s_j;$$

следовательно, $|t' - t''| < \delta$ $|s' - s''| < \delta$ и любые две точки кривой $L_{ij}$ соединяются отрезком, лежащим в $\omega$.

Значит $L_{ij}$ вместе со своей выпуклой оболочкой лежит в $\omega$ и по ранее доказанному

$$\int\limits_{L_{ij}} (\mathbf{F}(x),\ dx) = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\int\limits_{L} (\mathbf{F}(x),\ dx) = \sum_{i,j} \int\limits_{L_{ij}} (\mathbf{F}(x),\ dx) = 0.$$

Теорема доказана.

Следствие (см. [4]). Если для любого отрезка, лежащего в $\omega$ имеет место равенство:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\mathbf{F}(x),\ dx) = f(x_2) - f(x_1),$$

где $x_1$, $x_2$ — концы отрезка, а $f(x)$ — функционал, то для всякой кривой с концами $x_1$, $x_2$, лежащей в $\omega$, имеет место такое же равенство:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} (\mathbf{F}(x),\ dx) = f(x_2) - f(x_1)$$

т. е. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

## § 4.
## УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ ОПЕРАТОРА

**4.1.** На основе предыдущих рассуждений можно получить необходимое и достаточное условие потенциальности операторов (см. введение).

Теорема 4.1. Для того, чтобы непрерывный оператор $\mathbf{F}(x)$, определенный на связном открытом множестве $\omega \subset E$, со значениями в $E^*$, был потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L (\mathbf{F}(x),\ dx)$$

не зависел от пути интегрирования $L \subset \omega$, а зависел бы только от выбора начальной и конечной точек.

Доказательство необходимости. Пусть $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$, где $x \in E$, т. е.

$$(\mathbf{F}(x),\ h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = Df(x, h). \tag{4.1}$$

Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_L (F(x), dx) \tag{4.2}$$

вдоль произвольного отрезка $L \subset \omega$, представление которого есть

$$x(t) = x_1 + \tau(x_2 - x_1), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1.$$

Тогда интеграл (4.2) равен

$$\int_0^1 (\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)),\ d(x_1 + \tau(x_2 - x_1)). \tag{4.3}$$

Представляя (4.3) в виде предела интегральной суммы и преобразуя ее, легко видеть, что (4.3) равен обычному интегралу Римана.

$$\int_0^1 (\mathbf{F}(x_1 + \tau(x_2 - x_1)), x_2 - x_1) d\tau = \int_0^1 Df(x_1 + \tau(x_2 - x_1),\ x_2 - x_1) d\tau.$$

но по определению

$$Df(x_1 + \tau(x_2 - x_1),\ x_2 - x_1) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1 + (\tau + t)\ (x_2 - x_1)) - f(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{t} =$$
$$= \frac{df(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau}.$$

Следовательно

$$\int_L (\mathbf{F}(x),\ dx) = \int_0^1 \frac{df(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{d\tau}\, d\tau =$$
$$= f(x_1 + \tau(x_2 - x_1)) \Big|_{\tau=0}^{\tau=1} = f(x_2) - f(x_1).$$

Поэтому согласно следствию из теоремы 3.1 криволинейный интеграл (4.2) не зависит от пути интегрирования в $\omega$.

Доказательство достаточности. Пусть $\int\limits_L (\mathbf{F}(x), dx)$ не зависит от пути интегрирования. Фиксируем некоторую точку $x_1 \in \omega$ и рассмотрим функционал, определенный на $\omega \subset E$:

$$f(y) = \int\limits_{x_1}^{y} (\mathbf{F}(x), dx), \quad y \in \omega.$$

Далее для произвольно выбранного $y \in \omega$ возьмем элемент $h \in E$ и число $t$ такие, чтобы отрезок, представление которого есть

$$z(\tau) = y + \tau th, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

лежал в $\omega$, и составим

$$\frac{f(y+ht)-f(y)}{t} = \frac{1}{t}\left(\int\limits_{x_1}^{y+ht} (\mathbf{F}(x), dx) - \int\limits_{x_1}^{y} (\mathbf{F}(x), dx)\right) = \frac{1}{t}\int\limits_{y}^{y+ht} (\mathbf{F}(x), dx).$$

Далее, согласно (2.2),

$$\int\limits_{y}^{y+ht} (\mathbf{F}(y), dx) = (\mathbf{F}(y), ht) = (\mathbf{F}(y), h)t$$

и следовательно

$$\frac{f(y+ht)-f(y)}{t} - (\mathbf{F}(y), h) = \frac{1}{t}\left[\int\limits_{y}^{y+ht} (\mathbf{F}(x), dx) - \int\limits_{y}^{y+ht} (\mathbf{F}(y), dx)\right] =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_{y}^{y+th} (\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(y), dx).$$

Так как последний интеграл не зависит от пути, то можно интегрировать по вышеупомянутому отрезку $z(t)$. Тогда

$$\int\limits_{y}^{y+ht} (\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(y), dx) = \int\limits_{0}^{1} (\mathbf{F}(y+\tau th) - \mathbf{F}(y), d(y+\tau th)) =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} (\mathbf{F}(y+\tau th) - \mathbf{F}(y), h)t\,d\tau = t\int\limits_{0}^{1} (\mathbf{F}(y+\tau th) - \mathbf{F}(y), h)d\tau$$

и

$$\frac{f(y+ht)-f(y)}{t} - (\mathbf{F}(y), h) = \int\limits_{0}^{1} (\mathbf{F}(y+\tau th) - \mathbf{F}(y), h)d\tau.$$

Отсюда видно, что при $t \to 0$ ввиду непрерывности $\mathbf{F}(x)$ подинтегральная функция в правой части стремится к нулю и следовательно

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(y+ht)-f(y)}{t} = (\mathbf{F}(y), h),$$

т. е.

$$\mathbf{F}(y) = \operatorname{grad} f(y).$$

Теорема доказана.

**4.2.** Если оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E \to E^*)$ имеет линейный дифференциал Гато, то на случай локально выпуклых пространств переносится другое необходимое и достаточное условие потенциальности $F(x)$.

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия:

1) Оператор $\mathbf{F}(x)$ действует из пространства $E$ в $E^*$.

2) $\mathbf{F}(x)$ имеет линейный дифференциал Гато $\mathbf{D}\,\mathbf{F}(x, h)$ в каждой точке $x$ ограниченного выпуклого множества $D \subset E$.

3) В каждой точке $x \in D$ функционал $(\mathbf{D}\,\mathbf{F}(x, h_1), h_2)$ непрерывен по $x$.

Тогда для того, чтобы оператор $\mathbf{F}(x)$ был потенциальным в $D$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $x \in D$ выполнялось равенство

$$(\mathbf{D}\,\mathbf{F}(x, h_1), h_2) = (\mathbf{D}\,\mathbf{F}(x, h_2), h_1).$$

Доказательство этой теоремы для локально выпуклого пространства $E$ проводится так же, как в [2] для пространства Банаха.*

## § 5.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИОНАЛОВ И ИХ ГРАДИЕНТОВ

Рассмотрим некоторые свойства функционалов, которые следуют из определенных свойств их градиентов.

**5.1.** Определение 5.1. Будем называть оператор $\mathbf{F}(x)$ $(E_1 \to E_2)$ компактным, если он отображает всякое ограниченное множество $D \subset E_1$, в компактное множество $K$ из $E_2$.

Компактность $K$ здесь понимается в том смысле, что каждая сеть из $K$ имеет подсеть, сходящуюся в $E_2$.

Теорема 5.1. (см. [3]). Если $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ есть компактный оператор, то функционал слабо непрерывен на всяком ограниченном выпуклом множестве $D$.

Доказательство. Пусть $f(x)$ не является слабо непрерывным в точке $x_0 \in D$, т. е. существует направленная последовательность $\{x_\alpha\} \subset D$ ($\alpha \in A$, где $A$ — некоторое частично упорядоченное множество) такая, что для всякого $y \in E^*$

$$\lim_{\alpha \in A} (y, x_\alpha) = (y, x_0) \tag{5.1}$$

в то время, как

$$\lim_{\alpha \in A} f(x_\alpha) \neq f(x_0).$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого $\alpha_0 \in A$ найдется бесконечное множество $\alpha' > \alpha_0$ таких, что

$$|f(x_{\alpha'}) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon. \tag{5.2}$$

Применим формулу Лагранжа (см. [3])

$$f(x_{\alpha'}) - f(x_0) = (\mathbf{F}(x_0 + \tau_{\alpha'}(x_{\alpha'} - x_0)), x_{\alpha'} - x_0), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{5.3}$$

Так как $\mathbf{F}(D) \subset E^*$ компактно, то бесконечное множество, состоящее из точек $\mathbf{F}(x_0 + \tau_{\alpha'}(x_{\alpha'} - x_0))$ (эти точки могут также совпадать) имеет подсеть, сходящуюся к $y_0 \in E^*$. Следовательно в любой окрестности нуля, а значит и в

---

* При подготовке настоящей работы к печати, автору стало известно, что в Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1956., том 20, № 6 и т. 21, № 1—2 в работе Себаштян и Сильва имеются предложения, из которых следует достаточность условий потенциальности теоремы 4.1. Необходимость доказана лишь для случая дифференцируемого оператора, что может быть получено как частный случай из теорем 4.2. и 4.1. настоящей работы.

окрестности $\frac{\varepsilon}{3}(D-D)^0$, где $(D-D)^0$ — поляра ограниченного множества $D-D$, находятся точки $\mathbf{F}(x_0+\tau_{\alpha'}(x_{\alpha'}-x_0))-y_0$, где $x_{\alpha'}$, удовлетворяют неравенству (5.2), причем, среди них для всякого $\alpha_0 \in A$ найдутся такие, что $\alpha' > \alpha_0$. Для этих $\alpha'$, так как $x_{\alpha'}-x_0 \in D-D$, будет

$$\left|\left(\mathbf{F}(x_0+\tau_{\alpha'}(x_{\alpha'}-x_0))-y_0,\, x_{\alpha'}-x_0\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.4}$$

Далее, так как

$$\lim_{\alpha\in A}(y_0,\, x_\alpha) = (y_0,\, x_0)$$

то найдется $\alpha_0'$ такое, что для всех $\alpha > \alpha_0'$ будет $|(y_0,\, x_\alpha - x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Из предыдущего следует, что для $\alpha_0'$ найдутся такие $\alpha' > \alpha_0'$, что для них выполняются неравенства (5.2) и (5.4). Но из (5.3) и (5.4) следует, что для этих $\alpha'$

$$|f(x_{\alpha'})-f(x_0)| \leqslant \left|\left(\mathbf{F}(x_0+\tau_{\alpha'}(x_{\alpha'}-x_0))-y_0,\, x_{\alpha'}-x_0\right)\right| +$$
$$+ |(y_0,\, x_{\alpha'}-x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon,$$

что противоречит неравенствам (5.2). Теорема доказана.

**5.2.** Из определения дифференциала Гато $Df(x,\, h)$ функционала $f(x)$ следует, что

$$f(x+th)-f(x) = t\big(Df(x,\, h)+\alpha(x,\, t,\, h)\big), \tag{5.5}$$

где $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(x,\, t,\, h) = 0$.

Определение 5.2. Будем говорить, что функционал $f(x)$ *равномерно дифференцируем на множестве* $D \subset E$, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что при $0 \leqslant t < \delta$ для всех $x,\, x+h \in D$ имеет место неравенство

$$|\alpha(x,\, t,\, h)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 5.2. (ср. [2] или [3]). Если $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ равномерно непрерывен на ограниченном выпуклом множестве $D \subset E$, то функционал $f(x)$ равномерно дифференцируем на $D$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и $x, x+h \in D$. Запишем (5.5) в виде

$$f(x+th)-f(x) = t\left[(\mathbf{F}(x),\, h)+\alpha(x,\, t,\, h)\right], \tag{5.6}$$

где можно считать $0 \leqslant t \leqslant 1$. С другой стороны, по формуле Лагранжа

$$f(x+th)-f(x) = (\mathbf{F}(x+\tau th),\, th) = t\left[(\mathbf{F}(x+\tau th),\, h)\right]. \tag{5.7}$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\alpha(x,\, t,\, h) = (\mathbf{F}(x+\tau th),\, h)-(\mathbf{F}(x),\, h). \tag{5.8}$$

Пусть $(D-D)^0 \in E^*$ — поляра ограниченного множества $D-D$; тогда, так как $h \in D-x \subset D-D$, то для всех $y \in \varepsilon(D-D)^0$ будет

$$|(y,\, h)| \leqslant \varepsilon. \tag{5.9}$$

Далее, ввиду равномерной непрерывности $\mathbf{F}(x)$, найдется окрестность нуля $U \subset E$ такая, что если $\tau th \in U$, то

$$\mathbf{F}(x+\tau th)-\mathbf{F}(x) \in \varepsilon(D-D)^0.$$

Наконец, так как $D-D$ ограничено, то существует $\delta > 0$ такое, что из $|t| < \delta$ следует $t(D-D) \subset U$, ибо, по определению ограниченного мно-

жества, оно поглощается любой окрестностью нуля. Поэтому для всех $h \in D - x$ при $0 \leqslant t < \delta$ будет $th \in U$, и тем более $\tau th \in U$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$.

Следовательно, при $0 \leqslant t < \delta$ имеет место

$$\mathbf{F}(x + \tau th) - \mathbf{F}(x) \in \varepsilon(D - D)^0$$

и в силу неравенства (5.9)

$$|\alpha(x, t, h)| = |(\mathbf{F}(x + \tau th), h) - (\mathbf{F}(x), h)| = |(\mathbf{F}(x + \tau th) - \mathbf{F}(x), h)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Определение 5.3. Говорят, что функционал $f(x)$ имеет на множестве $D \subset E$ *локально равномерный дифференциал Гато*, если каждому $\varepsilon > 0$ и произвольному $x_0 \in D$ соответствует окрестность нуля $U$ и число $\delta > 0$ такие, что для всякого $x \in x_0 + U$ при $0 \leqslant t < \delta$ для $x, x + h \in D$ имеет место неравенство

$$|\alpha(x, t, h)| \leqslant \varepsilon.$$

Теорема 5.3. (ср. [2]). Если $\mathbf{F}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ непрерывен на ограниченном выпуклом множестве $D$, то функционал $f(x)$ имеет локально равномерный дифференциал Гато в $D$.

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $\mathbf{F}(x)$ в точке $x_0$, найдется окрестность нуля $U_1 \in E$ такая, что для всех $x \in x_0 + U_1$ имеет место включение

$$F(x) - F(x_0) \in \frac{\varepsilon(D - D)^0}{2}, \tag{5.10}$$

где $(D - D)^0$ — поляра множества $D - D$.

Подобно предыдущей теореме, найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t| < \delta$ для всех $h \in D - x$ имеет место $\tau th \in \frac{U_1}{2}$, где $0 \leqslant \tau \leqslant 1$.

Пусть $x \in x_0 + U$, где $U = \frac{U_1}{2}$. Тогда

$$x + \tau th \in x_0 + \frac{U_1}{2} + \frac{U_1}{2} \subset x_0 + U_1, x \in x_0 + U_1.$$

Так как $h \in D - D$, то, в силу (5.10)

$$|(\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(x_0), h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad |(\mathbf{F}(x + \tau th) - \mathbf{F}(x_0), h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (5.8) получаем, что при $0 \leqslant t < \delta \leqslant 1$ и $x \in (x_0 + U) \cap D$

$$|\alpha(x, t, h)| = |(\mathbf{F}(x + \tau th) - \mathbf{F}(x_0), h) + (\mathbf{F}(x_0) - \mathbf{F}(x), h)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

1 VI 1957 *Кафедра общей математики*

## ЛИТЕРАТУРА


[1]. *М. М. Вайнберг.* К вопросу о вариационной теории собственных значений для нелинейных интегральных уравнений. УМН, 1952, т. 7, в. 1 (47), 144—146.

[2]. *М. М. Вайнберг.* Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. УМН, 1952, т. 7, в. 4(50), 55—102.

[3]. *М. М. Вайнберг.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. Гостехиздат, 1956.

[4]. *М. К. Гавурин.* Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Уч. зап. Ленингр. гос. унив., сер. матем. 1950, № 19, 59—154.

[5]. *И. М. Гельфанд.* Abstrakte Funktionen und lineare Operationen. Матем. сб., 1938, т. 4(46):2, 235—283.

# PAR POTENCIALIEM OPERATORIEM LINEARĀS TOPOLOĢISKĀS TELPĀS

*J. Engelsons*

(Kopsavilkums)

Darbā vispārināti lokali izliektas telpas gadījumam daži rezultati, kas iegūti darbos [1—5] Banacha telpai.

Ja operators $\mathbf{F}(x)$, kas definēts lineārā topoloģiskā telpā $E$ ar vērtībām tās saistītā telpā $E^*$, ir kāda funkcionala $f(x)$ gradients, t. i., ja

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = (\mathbf{F}(x), h), \; h \in E,$$

tad $\mathbf{F}(x)$ sauc par potencialu operatoru, $f(x)$ — par tā potencialu.

Darbā ievests Stieltjesa integraļa un līnijas integraļa jēdziens operatoriem, kuru vērtības pieder lokali izliektai linearai topoloģiskai telpai un apskatītas šo integraļu īpašības.

Galvenais darba rezultats ir šāds:

Teorema 4. 1. Lai operators $\mathbf{F}(x)$ $(E \to E^*)$ būtu potencials operators, ir nepieciešams un pietiekams, lai līnijas integralis $\int_L (\mathbf{F}(x), dx)$ nebūtu atkarīgs no integrēšanas ceļa.

Bez tam darbā pierādītas teoremas par sakaru starp dažām funkcionaļa gradienta īpašībām un paša funkcionaļa īpašībām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О ЧАСТИЧНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

*М. К. ЗАНДЕРЕ*

## ВВЕДЕНИЕ

Функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем линейно непрерывной, если она непрерывна по каждому своему аргументу отдельно. Известно, что из линейной непрерывности не следует непрерывность функции по совокупности аргументов. Строение точек разрыва линейно непрерывных функций двух и трех аргументов исследовал Бэр [1], который доказал, что множество точек непрерывности линейно непрерывной функции двух аргументов всюду плотно на каждой непрерывной кривой, представляемой уравнением $y = \varphi(x)$, а множество точек непрерывности функции трех аргументов всюду плотно на каждой непрерывной поверхности, представляемой уравнением

$$z = \varphi(x, y).$$

Дальнейшее обобщение этого вопроса шло в двух главных направлениях:

1) Исследовалось строение точек разрыва линейно непрерывных функций $n$ переменных. Этим занимался Хан [2], доказавший, что множество точек непрерывности таких функций всюду плотно на каждой гиперплоскости $x_i = const.$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Богель исследовал функции двух переменных [3], непрерывные по одному из аргументов, например, $y$. Относительно другого аргумента $x$ он требует, чтобы множество точек, в которых колебание функции $f(x, y)$ по $x$ произвольно мало, было бы всюду плотно на каждой прямой, параллельной оси $y$. Богель доказал, что множество точек непрерывности функции, удовлетворяющей вышеупомянутым условиям, всюду плотно на каждой кривой, представляемой уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant T,$$

и удовлетворяющей некоторым несущественным условиям. Он исследовал также функции $n$ аргументов, не требуя линейной непрерывности, а налагая некоторое условие относительно колебания функции по совокупности каких-нибудь $k (k < n)$ аргументов [4].

2) Исследовались функции, непрерывные на некоторых множествах, принадлежащих области определения функции. При этом имелись в виду, главным образом, функции двух переменных, непрерывные вдоль некоторых кривых. Исследованию таких функций посвящена диссертация Э. Г. Ариньша.

В настоящей работе рассматриваются функции, непрерывные вдоль кривых $M$ системы $\mathfrak{M}^1$ в $n$-мерном пространстве $R^n$ и удовлетворяющие некоторому условию относительно элементов системы $\mathfrak{M}^{n-1}$, где $\mathfrak{M}^{n-1}$ элементами являются гомеоморфы $n-1$-мерного куба. Доказывается теорема, что множество точек непрерывности таких функций всюду плотно

на каждом гомеоморфе $n-1$-мерного куба. Из этого общего результата как простое следствие вытекает обобщение результата Хана:

На каждом гомеоморфе $n-1$-мерного куба множество точек непрерывности линейно непрерывной функции $n$ аргументов всюду плотно.

Следует отметить, что система множеств

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^{n-1}$$

метризуется метрикой отклонений. Кроме того, в работе встречается и обычное расстояние между точками $n$-мерного пространства $R^n$. Это следует иметь в виду в дальнейшем.

---

В $n$-мерном пространстве $R^n$ дана замкнутая область $\overline{D}$ (замыкание открытого множества) и в ней система множеств

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^{n-1},$$

где элементами подсистемы $\mathfrak{M}^1$ являются гомеоморфы отрезка $[0,1]$ а элементами $\mathfrak{M}^{n-1}$ — гомеоморфы $n-1$-мерного куба.

Введем метрику отклонений в системе $\mathfrak{M}$, то есть, если даны множества $A$ и $B$, то расстоянием (отклонением) между ними назовем

$$\max\left[\sup_{x\in A} \rho(x, B),\ \sup_{y\in B} \rho(A, y)\right]$$

и обозначим его в дальнейшем через $\alpha(A, B)$.

На систему $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^{n-1}$ наложим следующие условия:

I. Каковы бы ни были множество $M_0 \in \mathfrak{M}^{n-1}$ и его точка $x_0 \in M_0$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует содержащее эту точку множество $\overline{M} \in \mathfrak{M}^1$ и $\delta > 0$ такие, что для всех $M \in \mathfrak{M}^{n-1}$, удовлетворяющих неравенству

$$\alpha(M_0, M) < \delta,$$

пересечение $M\overline{M}$ не пусто и

$$\rho(x_0, M\overline{M}) < \varepsilon.$$

($\rho(A, B)$ — расстояние между множествами $A$ и $B$ в обычном смысле).

II. Каковы бы ни были множество $M_0 \in \mathfrak{M}^{n-1}$ и его точка $x_0 \in M_0$, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in U\rho(x_0, \delta)$ существует содержащее точку $x$ множество $M \in \mathfrak{M}^{n-1}$, удовлетворяющее при этом неравенству

$$\alpha(M, M_0) < \varepsilon.$$

Аналогичные условия I и II наложим и на элементы подсистемы $\mathfrak{M}^1$.

III. Если $M_0$ — произвольно выбранный элемент системы $\mathfrak{M}^{n-1}$ и множество $G$ — открытое (относительно $M_0$) подмножество множества $M_0$, а $\mathfrak{G}^1$ — открытое (относительно $\mathfrak{M}^1$) подмножество системы $\mathfrak{M}^1$ такое, что через каждую точку множества $G$ проходит по крайней мере один элемент множества $\mathfrak{G}^1$, тогда в множестве $G$ существует такое открытое (относительно $M_0$) подмножество $G'$, что элементы множества $\mathfrak{G}^1$, проходящие через точки множества $G'$, образуют открытое (относительно $\mathfrak{M}^1$) множество.

Отметим следующее: если $\overline{D}_1$ — подобласть области $\overline{D}$, то в $\overline{D}_1$ индуцируется новая система

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1^1 + \mathfrak{M}_1^{n-1},$$

где элементами $\mathfrak{M}_1^1$ являются множества

$$M' = \overline{D}_1 \cdot M, \quad (M \in \mathfrak{M}^1),$$

а элементами $\mathfrak{M}_1^{n-1}$ — множества

$$M'' = \bar{D}_1 \cdot N, \quad (N \in \mathfrak{M}^{n-1}).$$

IV. Для каждой точки $x_0$ области $\bar{D}$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U$ (не обязательно сферическая!) точки $x_0$ с диаметром $< \varepsilon$, что индуцированная множеством $\bar{U}$ система $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1^1 + \mathfrak{M}_1^{n-1}$ удовлетворяет условиям I, II и III в области $\bar{U}$.

Рассмотрим еще функцию $f(x)$, заданную в области $\bar{D}$ и удовлетворяющую следующим условиям:

(A) Функция $f(x)$ непрерывна вдоль элементов системы $\mathfrak{M}^1$.

(B) Пусть в области $\bar{D}$ дана точка $x_0$, её окрестность $U \subset \bar{D}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такая точка $x_1 \in U$, что на каждом содержащем точку $x_1$ множестве $M \in \mathfrak{M}^{n-1}$ существует открытое (в $M$) множество $H \subset U$, содержащее точку $x_1$, для которой выполняется неравенство

$$\omega(f, \{x_0\} + H) < \varepsilon$$

(где $\omega(f, A)$ — колебание функции $f(x)$ в множестве $A$).

Наша задача — исследовать строение множества точек разрыва такой функции.

Лемма 1. Пусть в области $\bar{D}$ задана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (A) и (B) и такая, что на каждом открытом (относительно $\mathfrak{M}^1$) подмножестве $\mathfrak{G}^1$ пространства $\mathfrak{M}^1$ выполняется неравенство

$$\omega(f, \sum_{M \in \mathfrak{G}^1} M) \geqslant \varkappa > 0,$$

где $\varkappa$ — константа.

Пусть кроме того дано $0 < \varepsilon < \varkappa$.

Тогда множество тех элементов $M$ пространства $\mathfrak{M}^1$, для которых при фиксированном $\varepsilon$

$$\omega(f, M) < \varkappa - \varepsilon,$$

неплотно в $\mathfrak{M}^1$.

Доказательство: Возьмём в $\mathfrak{M}^1$ открытое множество $\mathfrak{G}^1$ и докажем, что можно найти в нем такое открытое подмножество $\tilde{\mathfrak{G}}^1$, что

$$\omega(f, M) \geqslant \varkappa - \varepsilon$$

для всех $M \in \tilde{\mathfrak{G}}^1$. Этим лемма будет доказана.

1. Допустим сперва, что функция $f(x)$ на множестве $\sum_{M \in \mathfrak{G}^1} M$ ограничена снизу и что её нижняя грань равна $g$. Тогда для любого $\bar{\delta} > 0$ существует такая точка $x_0 \in \sum_{M \in \mathfrak{G}^1} M$, что $f(x_0) < g + \bar{\delta}$. Фиксируем $\bar{\delta} > 0$ и найдем соответствующее ему $x_0$. Через точку $x_0$ проходит по крайней мере один элемент множества $\mathfrak{G}^1$; пусть это будет элемент $M_0$. В силу того, что $\mathfrak{G}^1$ открыто, в $\mathfrak{M}^1$ существует такая $\delta$ — окрестность элемента $M_0$ $U_\alpha(M_0, \delta)$, что $U_\alpha(M_0, \delta) \subset \mathfrak{G}^1$. По этой $\delta$ — окрестности можно найти такую $\eta_0$—окрестность точки $x_0$ $U_\rho(x_0, \eta_0)$, что через каждую ее точку проходит по крайней мере один элемент множества $U_\alpha(M_0, \delta)$ (в силу условия II). В окрестности $U_\rho(x_0, \eta_0)$ существует такая точка $x_0'$, что на каждом проходящем через

эту точку элементе пространства $\mathfrak{M}^{n-1}$ находится содержащее точку $x_0'$ открытое множество $H$ такое, что

$$\omega(f, \{x_0\} + H) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

(условие (B)).

Через точку $x_0'$ проходит по крайней мере один элемент множества $U_\alpha(M_0, \delta)$, например, $M_0'$. Возьмём окрестность точки $x_0'$ $U_\rho(x_0', \eta_0')$ такую, чтобы

$$U_\rho(x_0', \eta_0') \subset U_\rho(x_0, \eta_0).$$

По этой окрестности $U_\rho(x_0', \eta_0')$ найдем такой элемент $\overline{M}_0$ пространства $\mathfrak{M}^{n-1}$ и такое $\delta_1 > 0$, что элемент $\overline{M}_0$ содержит точку $x_0'$ и пересекает все элементы множества $U_\alpha(M_0', \delta_1)$ в окрестности $U_\rho(x_0', \eta_0')$ (Это всегда возможно в силу условия I). По $U_\alpha(M_0', \delta_1)$ найдем такую окрестность $U_\rho(x_0', \eta_0'')$ точки $x_0'$, что через каждую ее точку проходит по крайней мере один элемент множества $U_\alpha(M_0', \delta_1)$ (условие II). На элементе $\overline{M}_0$ возьмем открытое множество $H_0$ такое, чтобы выполнялось неравенство (1) и чтобы было

$$H_0 \subset U_\rho(x_0', \eta_0'').$$

В силу условия III в множестве $H_0$ существует такое открытое подмножество $H_0'$, что элементы множества $U_\alpha(M_0', \delta_1)$, проходящие через точки множества $H_0'$, образуют открытое множество $\mathfrak{G}_1^1$. Легко видеть, что нижняя грань функции $f(x)$ в множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}_1^1} M$ больше или равно $g$. Согласно условиям леммы, на множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}_1^1} M$ колебание функции $f(x)$ больше или равно $\varkappa$, поэтому найдется такая точка $x_1 \in \sum\limits_{M \in \mathfrak{G}_1^1} M$, что

$$\omega(f, \{x_1\} + H_0') > \varkappa - \overline{\delta} - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2}$$

Поступая аналогично предыдущему, найдем для точки $x_1$ такое открытое множество $H_1' \subset \overline{M}_1$ (где $\overline{M}_1$ — подходящий элемент подпространства $\mathfrak{M}^{n-1}$), что

$$\omega(f, \{x_1\} + H_1') < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

и кроме того множество элементов окрестности $U_\alpha(M_0', \delta_1)$, проходящих через точки множества $H_1'$, открыто (относительно $\mathfrak{M}^1$). Обозначим это множество через $\widetilde{\mathfrak{G}}^1$. Из неравенств (1), (2) и (3) следует, что

$$\omega(f, M) > \varkappa - \overline{\delta} - \varepsilon$$

для всех $M \in \widetilde{\mathfrak{G}}^1$. Но так как $\overline{\delta} > 0$ — выбрано произвольно, то

$$\omega(f, M) \geqslant \varkappa - \varepsilon$$

для всех $M \in \widetilde{\mathfrak{G}}^1$, что и требовалось доказать.

Если функция $f(x)$ на множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}^1} M$ не ограничена снизу, но ограничена снизу на множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}_1^1} M$, где $\mathfrak{G}_1^1$ — открытое подмножество множества $\mathfrak{G}^1$, то доказательство проводится на множестве $\mathfrak{G}_1^1$ аналигично предыдущему.

2. Пусть функция $f(x)$ не ограничена снизу ни на каком множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}_1^1} M$, где $\mathfrak{G}_1^1 \subset \mathfrak{G}^1$. Возьмем точку $x_0 \in \sum\limits_{M \in \mathfrak{G}^1} M$. Так же как и выше, можно найти открытое множество $H_0' \subset \overline{M}_0$, $\overline{M}_0 \in \mathfrak{M}^{n-1}$, такое, что

$$\omega(f, \{x_0\} + H_0') < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1'}$$

и такое, что множество элементов множества $\mathfrak{G}^1$, проходящих через точки $H_0'$, открыто относительно $\mathfrak{M}^1$. Согласно условиям леммы и допущению, что функция $f(x)$ не ограничена снизу на множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}^1} M$, найдется такая точка $x_1$, что

$$\omega(f, \{x_1\} + H_0') > \varkappa - \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2'}$$

Дальше найдем множество $H_1'$ такое, что

$$\omega(f, \{x_1\} + H_1') < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3'}$$

и множество $\widetilde{\mathfrak{G}}^1$ элементов множества $\mathfrak{G}^1$, проходящих через точки множества $H_1'$, открыто. Из неравенств (1′), (2′) и (3′) следует, что $\widetilde{\mathfrak{G}}^1$ — искомое множество.

Этим лемма полностью доказана.

Пусть кроме элементов системы $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}^{n-1}$ дано множество $L$, которое может не принадлежать системе $\mathfrak{M}$. (Множество $L$ — гомеоморф $n-1$ — мерного куба).

Отметим прежде всего следующее:

1. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (A) и (B) в области $\overline{D}$, удовлетворяет этим же условиям и в каждой подобласти $\overline{D}_1$ области $\overline{D}$.

2. Каждая $n$ — мерная область $\overline{D}$, имеющая хоть одну общую внутреннюю точку $x_0$ с множеством $L$ (где $x_0$ внутренная так же относительно $L$) высекает на $L$ по крайней мере одно связное подмножество множества $L$, содержащее точку $x_0$.

Это почти очевидно.

Лемма 2. Пусть в области $\overline{D}$ дано: функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (A) и (B), множество $L$, удовлетворяющее условию III, и $\varkappa > 0$. Тогда множество тех точек, в которых

$$\omega(f, x) \geqslant \varkappa,$$

неплотно на $L$.

Доказательство: Доказательство проводится от противного: пусть утверждение леммы неверно, то есть, существует такое открытое подмножество $G$ множества $L$, что в каждой его точке $x \in G$

$$\omega(f, x) \geqslant \varkappa.$$

Фиксируем монотонно стремящуюся к нулю последовательность положительных чисел:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots,$$
$$\varepsilon_n \to 0$$
$$n \to \infty.$$

Согласно условиям леммы в множестве $G$ существует такое открытое (относительно $L$) подмножество $G'$, что множество $\mathfrak{G}'$ элементов пространства $\mathfrak{M}^1$, проходящее через точки множества $G'$, открыто (относительно $\mathfrak{M}_1$). На множестве $\sum\limits_{M \in \mathfrak{G}'} M$ выполняется неравенство

$$\omega(f, \sum_{M \in \mathfrak{G}'} M) \geqslant \varkappa,$$

но тогда в силу I-ой леммы во множестве $\mathfrak{G}'$ можно найти такое открытое подмножество $\mathfrak{G}''$ множества $\mathfrak{G}'$, что для всех $M \in \mathfrak{G}''$ выполняется неравенство

$$\omega(f, M) \geqslant \varkappa - \varepsilon_1.$$

Возьмем в множестве $\mathfrak{G}''$ открытое подмножество $\mathfrak{G}^0$ такое, чтобы замыкание $\overline{\mathfrak{G}}^0$ принадлежало множеству $\mathfrak{G}''$:

$$\overline{\mathfrak{G}}^0 \subset \mathfrak{G}''$$

и точку $x_1 \in \sum\limits_{M \in \mathfrak{G}^0} M \cdot G'$. Пусть $M_1$ — проходящий через точку $x_1$ элемент множества $\mathfrak{G}^0$. Так как множество $\mathfrak{G}^0$ открыто, то найдется такая окрестность $U_\alpha(M_1, \delta_1)$ элемента $M_1$ что

$$U_\alpha(M_1, \delta_1) \subset \mathfrak{G}^0.$$

По этой $\delta_1$ — окрестности найдем такую $\eta_1$ — окрестность точки $x_1$ $U_\rho(x_1, \eta_1)$, что через каждую ее точку проходит по крайней мере один элемент множества $U_\alpha(M_0, \delta_1)$. Во множестве $U_\rho(x_1, \eta_1)$ существует такая содержащая точку $x_1$ область $D_1$ $(D_1 \subset U_\rho(x_1, \eta_1))$ с диаметром меньшим или равным 1, что в ней выполняются условия I, II, и III относительно индуцированной системы

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1^1 + \mathfrak{M}_1^{n-1}.$$

В дальнейшем рассмотрим функцию $f(x)$ в области $\overline{D}_1$. Как уже отмечалось, относительно системы $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_1^1 + \mathfrak{M}_1^{n-1}$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (A) и (B). Множество, полученное из множества $\mathfrak{G}^0$ при сечении его элементов областью $\overline{D}_1$, обозначим через $\mathfrak{G}_1$; легко видеть, что оно открыто относительно $\mathfrak{M}_1^1$.

Возьмем далее множество $G_1 \subset L$ согласно замечанию 2. Во множестве $G_1$ найдется такое открытое подмножество $G_1'$, что проходящие через его точки элементы множества $\mathfrak{G}_1$ образуют открытое (относительно $\mathfrak{M}_1^1$) множество $\mathfrak{G}_1'$. В этом множестве существует такое открытое подмножество $\mathfrak{G}_1''$, что

$$\omega(f, M) \geqslant \varkappa - \varepsilon_2$$

для всех $M \in \mathfrak{G}_1''$.

Во множестве $\mathfrak{G}_1''$ возьмём открытое множество $\mathfrak{G}_1^0$ такое, что

$$\overline{\mathfrak{G}}_1^0 \subset \mathfrak{G}_1''.$$

Как и в предыдущем, возьмем точку $x_2 \in \sum_{M \in \mathfrak{G}_1^0} M \cdot G_1'$ и проходящий через нее элемент $M_2$ множества $\mathfrak{G}_1^0$. Найдем окрестность элемента $M_2$ такую, что

$$U_\alpha(M_2, \delta_2) \subset \mathfrak{G}_1^0.$$

По $\delta_2$ — окрестности $U_\alpha(M_2, \delta_2)$ найдем такую окрестность $U_\rho(x_2, \eta_2)$ точки $x_2$, что через каждую её точку проходит по крайней мере один элемент множества $U_\alpha(M_2, \delta_2)$.

Во множестве $U_\rho(x_2, \eta_2)$ существует такая окрестность $D_2$ точки $x_2$, что

$$\overline{D_2} \subset U_\rho(x_2, \eta_2)$$

с диаметром $\leqslant \frac{1}{2}$, что в ней выполняются условия I, II и III относительно новой индуцированной системы

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2^1 + \mathfrak{M}_2^{n-1}.$$

В дальнейшем функцию $f(x)$ рассмотрим в области $\overline{D_2}$; в этой области выполняются условия (A) и (B). Множество $\mathfrak{G}_1^0$ в области $\overline{D_2}$ переименуем в $\mathfrak{G}_2$.

Дальнейшая конструкция проводится индуктивно. Подробное описание индуктивного перехода опускается в виду его простоты.

Таким образом мы получили последовательность замкнутых включенных областей

$$\overline{D} \supset \overline{D_1} \supset \ldots \supset \overline{D_n} \supset \ldots,$$

при чем диаметр $dD_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Существует одна единственная точка $x_0$, общая всем этим областям, через которую проходит по крайней мере один элемент $M_0$ подпространства $\mathfrak{M}^1$ такой, что $M_0 \cdot \overline{D_n} \in \mathfrak{G}_n^0$ (это следует из выбора множеств $\mathfrak{G}_n^0$), причем

$$\omega(f, M_0 \cdot \overline{D_n}) \geqslant \varkappa - \varepsilon_n$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Но из этого следует, что

$$\omega_{M_0}(f, x_0) \geqslant \varkappa$$

(где $\omega_{M_0}(f, x_0)$ — колебание функции $f(x)$ в точке $x_0$ вдоль элемента $M_0$), что противоречит условию (A).

Этим лемма доказана.

## ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА БЭРА

Пусть в области $\overline{D}$ дана функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям (A) и (B), и множество $L$, удовлетворяющее условиям 2-ой леммы.

Тогда множество точек непрерывности функции $f(x)$ всюду плотно на множестве $L$.

Доказательство: Обозначим через $B_n$ множество всех тех точек множества $L$, для которых выполняется неравенство

$$\omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Тогда множество $B$ всех точек разрыва функции $f(x)$ на множестве $L$ будет

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_n + \ldots .$$

Но множество $B$ — первой категории, значит множество всех точек непрерывности функции $f(x)$ на $L$ — второй категории, чем теорема и доказана.

Отсюда как простое следствие получается обобщение результата Хана (см. введение):

На каждом гомеоморфе $n-1$ — мерного куба множество точек непрерывности линейно непрерывной функции $n$ аргументов всюду плотно.

Доказательство: Обозначим через $\mathfrak{M}^1$ множество всех прямых, параллельных оси $x_1$, а через $\mathfrak{M}^{n-1}$ — множество всех гиперплоскостей

$$x_1 = const.$$

Доказательство нашего утверждения сводится к доказательству того, что линейно непрерывная функция удовлетворяет условию (B) относительно системы $\mathfrak{M}^{n-1}$.

Докажем следующее свойство линейно непрерывной функции $n$ аргументов:

Пусть дана точка $p_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, ее окрестность $U_\rho(p_0, \eta_0)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда в окрестности $U_\rho(p_0, \eta_0)$ существует такая точка $p_1$ и ее окрестность $U_\rho(p_1, \eta_1) \subset U_\rho(p_0, \eta_0)$, что

$$\omega(f, \{p_0\} + U_\rho(p_1, \eta_1)) < \varepsilon.$$

Докажем это утверждение для $n = 2$. Через точку $p_0(x_0, y_0)$ проводим прямую

$$y = y_0 .$$

На этой прямой найдется такой интервал

$$U' = (x_0 - \eta', x_0 + \eta'),$$

что

$$\omega(f, U') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Возьмем при этом $U'$ таким, чтобы

$$U' \subset U_\rho(p_0, \eta_0).$$

Согласно результату Бэра (см. введение) в интервале $U'$ найдется точка $p_1$ и ее окрестность

$$U_\rho(p_1, \eta_1) \subset U_\rho(p_0, \eta_0)$$

такие, что

$$\omega(f, U_\rho(p_1, \eta_1)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) следует, что

$$\omega(f, \{p_0\} + U_\rho(p_1, \eta_1)) < \varepsilon.$$

Пусть это свойство справедливо для линейно непрерывной функции $k-1$ аргумента $(k \leqslant n)$; докажем, что оно справедливо и для функции $k$ аргументов.

Через точку $p_k^0(x_1^0, \ldots, x_k^0)$ проведем гиперплоскость

$$x_k^0 = const.$$

В этой гиперплоскости функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k)$ является уже функцией $k-1$ аргумента, поэтому в окрестности $U_\rho(p^0_{k-1}, \eta)$ точки $(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_{k-1}) = p^0_{k-1}$ существует такое открытое множество $U' \subset U_\rho(p^0_{k-1}, \eta)$, что

$$\omega(f, \{p^0_{k-1}\} + U') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Но по теореме Хана в множестве $U'$ существует точка непрерывности $p^1$ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ и её окрестность ($k$ — мерная! $U \subset U'$ такая, что

$$\omega(f, U_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$\omega(f, \{p^0_k\} + U_1) < \varepsilon.$$

Значит свойств имеет место для всех $k = 1, 2, \ldots, n$, в частности и для $k = n-1$, что и требовалось доказать.

1 VI 1957 *Кафедра математического анализа*

## ЛИТЕРАТУРА


[1]. *R. Baire.* Sur les fonctions de variables reelles. Ann. di Matematica pura ed applicata, 1899, serie III-a, tomo III°.

[2]. *H. Hahn.* Über Funktionen mehrerer Veränderlichen, die nach jeder einzelnen Veränderlichen stetig sind. Math. Zeitschr, 1919, B. 4.

[3]. *K. Bögel.* Über die Stetigkeit und die Schwankung von Funktionen zweier reeller Veränderlichen. Math. Annalen, 1920, B. 81.

[4]. *K. Bögel.* Über partiell differenzierbare Funktionen. Math. Zeitschr., 1926, B. 25.


## PAR VAIRĀKU MAINĪGO FUNKCIJU DAĻVEIDA NEPĀRTRAUKTĪBU

*M. K. Zandere*


(Kopsavilkums)

Darbā apskatītas n-dimensiju telpas $R^n$ apgabalā $\overline{D}$ definetas funkcijas $f(x)$, kas nepārtrauktas gar zināmai saimei $\mathfrak{M}^1$ piederošām vienkāršām līnijām un kuru oscilacijai gar saimei $\mathfrak{M}^{n-1}$ piederošām kopām ($n-1$ — dimensionala kuba homeomorfiem) ir uzlikti zināmi noteikumi (vājāki, kā nepārtrauktības prasība gar šīs saimes elementiem). Ir pierādīts, ka šādu funkciju nepārtrauktības punkti guļ visur blīvi uz katras kopas $L$, kas ir kuba homeomorfs un apmierina vēl zināmus noteikumus. Kā sekas dabūts H. Hahna rezultata (sk. ievadā) vispārinājums.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*А. Р. ГРИНФЕЛЬДЕ*

В 1919 году академик С. А. Чаплыгин разработал новый метод для приближенного решения дифференциальных уравнений первого порядка [1]. Впоследствии этот метод получил название метода верхних и нижних функций.

В 1954 году Б. Н. Бабкин в работе [2] решил методом верхних и нижних функций нелинейную дифференциальную систему второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = A;\ y(b) = B, \end{cases} \tag{I}$$

Здесь $A$ и $B$ произвольные постоянные, функция $f(x, y)$ непрерывна в области $G: a \leqslant x \leqslant b,\ -\infty < y < +\infty$ и имеет в $G$ непрерывную неотрицательную производную по $y$.

В настоящей работе методом верхних и нижних функций решается нелинейная дифференциальная система второго порядка

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) \\ y(a) = A;\ y'(b) = B \end{cases} \tag{II}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{G}: a \leqslant x \leqslant b,\ -\infty \leqslant y \leqslant +\infty$ и имеет в $\overline{G}$ непрерывную неотрицательную производную по $y$.

## § 1.
## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ (II)

1. Прежде чем приступить к построению верхних и нижних функций для решения нелинейной дифференциальной системы (II) следует выяснить вопрос о существовании и единственности решения.

Имеет место следующая теорема 1 (теорема единственности).

*Пусть дана дифференциальная система*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y) & (1.1) \\ y(a) = A;\ y'(b) = B, & (1.2) \end{cases}$$

*где функция $f(x, y)$ непрерывна в области $\overline{G}$ и имеет в $\overline{G}$ непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$. Если дифференциальная система* (1.1), (1.2) *имеет решение, то оно единственно.*

Доказательство. Допустим, что дифференциальная система (1.1), (1.2) имеет два различных решения $y(x)$ и $z(x)$. Тогда имеет место соотношение

$$y'' - z'' - f(x, y) + f(x, z) = 0.$$

Используя формулу Лагранжа, имеем

$$y'' - z'' - f_y^* \cdot (y - z) = 0, \tag{1.3}$$

где $f_y^* = \dfrac{\partial f(x, z + \theta(y - z))}{\partial y}$, $(0 < \theta < 1)$.

Умножая обе части равенства (1.3) на $y - z$ и интегрируя в пределах от $a$ до $b$, получим, что

$$-\int_a^b (y' - z')^2 dx - \int_a^b f_y^* \cdot (y - z)^2 dx = 0.$$

Последнее равенство противоречит условию $\dfrac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$, следовательно, $y(x) \equiv z(x)$, что и требовалось доказать. Существование решения дифференциальной системы (II) вытекает из дальнейшего (см. § 2 и § 3).

2. Пусть правая часть уравнения (1.1) удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда имеет место следующая теорема 2.

*Если на отрезке* $[a, b]$ *дважды непрерывно дифференцируемая функция* $v(x)$ *удовлетворяет граничным условиям* (1.2) *и дифференциальному неравенству*

$$v'' - f(x, v) \leqslant 0 \tag{1.4}$$

*то*

$$v(x) \geqslant y(x)$$

*на всём интервале* $(a, b)$. *Здесь* $y(x)$ *является решением дифференциальной системы* (1.1), (1.2).

Доказательство. Обозначим

$$v'' - f(x, v) = \alpha(x),$$

тогда $\alpha(x) \leqslant 0$. Применяя формулу Лагранжа к соотношению

$$v'' - y'' - f(x, v) + f(x, y) = \alpha(x),$$

имеем

$$v'' - y'' - f_y^* \cdot (v - y) = \alpha(x). \tag{1.5}$$

Умножая равенство (1.5) на $v - y$ и интегрируя в пределах от $a$ до $b$, получим

$$-\int_a^b (v' - y')^2 dx - \int_a^b f_y^* \cdot (v - y)^2 dx = \int_a^b \alpha(x)\,(v - y) dx. \tag{1.6}$$

Так как $\dfrac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$, то

$$\int_a^b \alpha(x)\,(v - y) dx \leqslant 0. \tag{1.7}$$

Неравенство (1.7) показывает, что существует по крайней мере одна точка $\xi^* \in [a, b]$ такая, что

$$v(\xi^*) > y(\xi^*). \tag{1.8}$$

Покажем, что $v(x) \geqslant y(x)$ на всём отрезке $[a, b]$. Действительно, допустим, что это не так, т. е. существует $\xi \in [a, b]$ такое, что

$$v(\xi) < y(\xi).$$

В силу непрерывности функций $v(x)$ и $y(x)$ последнее неравенство имеет место в некотором интервале $(x_1, x_2)$. Возможны два случая

$$\text{а) } a < x_1 < x_2 = b$$

$$\text{б) } a \leqslant x_1 < x_2 < b.$$

В первом случае имеют место граничные условия

$$v(x_1) = y(x_1); \quad v'(x_2) = y'(x_2).$$

Применяя предыдущие рассуждения к дифференциальной системе

$$\begin{cases} y'' = f(x, y), \\ y(x_1) = v(x_1), \quad y'(x_2) = v'(x_2), \end{cases}$$

приходим к неравенству

$$\int_{x_1}^{x_2} \alpha(x)\,(v - y)dx \leqslant 0,$$

что невозможно, так как $\alpha(x) \leqslant 0$.

Во втором случае имеют место граничные условия

$$v(x_1) = y(x_1); \quad v(x_2) = y(x_2). \tag{1.9}$$

В работе [2] доказано, что если на отрезке $[x_1, x_2]$ дважды непрерывно дифференцируемая функция $v(x)$ удовлетворяет граничным условиям (1.9) и дифференциальному неравенству (1.4), то $v(x) \geqslant y(x)$ на всём $[x_1, x_2]$. Это противоречит допущению, что $v(\xi) < y(\xi)$.

Аналогично можно доказать теорему 3:

*Если на отрезке $[a, b]$ дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям* (1.2) *и дифференциальному неравенству*

$$u'' - f(x, u) \geqslant 0, \tag{1.10}$$

*то*

$$u(x) \leqslant y(x)$$

*на всём отрезке $[a, b]$, где $y(x)$ — решение дифференциальной системы* (1.1), (1.2).

В дальнейшем функцию $v(x)$, которая удовлетворяет граничным условиям (1.2) и дифференциальному неравенству (1.4), назовём верхней функцией для решения дифференциальной системы (1.1), (1.2). Аналогично функцию $u(x)$, которая удовлетворяет граничным условиям (1.2) и дифференциальному неравенству (1.10), назовём нижней функцией для решения дифференциальной системы (1.1), (1.2).

## § 2.
## ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ

1. Нижнюю функцию $u(x)$ для решения $y(x)$ дифференциальной системы (1.1), (1.2) можно легко построить. Решим линейную дифференциальную систему второго порядка

$$\begin{cases} u'' = f(x, +\infty) & (2.1) \\ u(a) = A; \; u'(b) = B. & (2.2) \end{cases}$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$, то

$$u'' - f(x, u) = f(x, +\infty) - f(x, u) \geqslant 0, \tag{2.3}$$

Из последнего неравенства и теоремы 3 следует, что

$$u(x) \leqslant y(x). \tag{2.4}$$

Функция $u(x)$ существует, так как дифференциальная система (2.1), (2.2) имеет одно и только одно решение. Рассмотрим решение $v(x)$ линейной дифференциальной системы второго порядка

$$\begin{cases} v'' = f(x, -\infty), & (2.5) \\ v(a) = A; \quad v'(b) = B. & (2.6) \end{cases}$$

Функция $v(x)$ является верхней функцией для решения $y(x)$ дифференциальной системы (1.1), (1.2).

Действительно, так как $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$, то

$$v'' - f(x, v) = f(x, -\infty) - f(x, v) \leqslant 0. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.7) и теоремы 2 следует, что

$$v(x) \geqslant y(x). \tag{2.8}$$

Так как дифференциальная система (2.5), (2.6) имеет одно и только одно решение, то функция $v(x)$, удовлетворяющая неравенству (2.8), существует.

2. Построим верхние и нижние функции, которые аппроксимируют решение $y(x)$ дифференциальной системы (1.1) (1.2) лучше, чем $v(x)$ и $u(x)$.

Решение дифференциальной системы

$$\begin{cases} v_1'' = f(x, u), \\ v_1(a) = A; \ v_1'(b) = B; \end{cases}$$

является верхней функцией для $y(x)$. Действительно, из (2.3) следует, что

$$u(x) \leqslant v_1(x). \tag{2.9}$$

Из (2.9) и условия $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$ получаем

$$v_1'' - f(x, v_1) = f(x, u) - f(x, v_1) \leqslant 0.$$

Следовательно, по теореме 2

$$v_1(x) \geqslant y(x). \tag{2.10}$$

Кроме того из неравенства

$$v'' - f(x, u) = f(x, -\infty) - f(x, u) \leqslant 0$$

и теоремы 2 следует, что

$$v_1(x) \leqslant v(x), \tag{2.11}$$

т. е. функция $v_1(x)$ аппроксимирует $y(x)$ лучше, чем $v(x)$.

Следующую нижнюю функцию можно получить, решая дифференциальную систему

$$\begin{cases} u_1'' = f(x, v) \\ u_1(a) = A; \quad u_1'(b) = B. \end{cases}$$

Действительно $u_1(x)$ является нижней функцией для $y(x)$, так как из (2.7) и теоремы 2 следует, что

$$v(x) \geqslant u_1(x). \tag{2.12}$$

Используя (2.12) и условие $\frac{\partial f}{\partial y} \geqslant 0$, получаем

$$u_1'' - f(x, u_1) = f(x, v) - f(x, u_1) \geqslant 0,$$

откуда по теореме 3 следует, что

$$u_1(x) \leqslant y(x). \tag{2.13}$$

Кроме того

$$u_1(x) \geqslant u(x), \tag{2.14}$$

т. е. $u_1(x)$ аппроксимирует решение $y(x)$ лучше, чем $u(x)$, так как

$$u'' - f(x, v) = f(x, +\infty) - f(x, v) \geqslant 0.$$

Итак, для построенных верхних и нижних функций, ввиду (2.8), (2.10), (2.11), (2.4), (2.13) и (2.14), имеют место неравенства

$$u(x) \leqslant u_1(x) \leqslant y(x) \leqslant v_1(x) \leqslant v(x).$$

Этот процесс построения верхних и нижних функций можно продолжать неограниченно. Используя метод математической индукции можно показать, что решения дифференциальных систем

$$\begin{cases} v_n'' = f(x, u_{n-1}) & (2.15) \\ v_n(a) = A;\ v_n'(b) = B,\ (n = 1, 2, 3, \ldots), & (2.16) \end{cases}$$

где $u_0(x) = u(x)$, являются верхними функциями для $y(x)$. Верхние функции с большими индексами аппроксимируют $y(x)$ лучше, чем верхние функции с меньшими индексами, т. е.

$$y(x) \leqslant \ldots \leqslant v_n(x) \leqslant \ldots \leqslant v_1(x) \leqslant v(x).$$

Аналогично строится последовательность нижних функций

$$u(x) \leqslant u_1(x) \leqslant \ldots \leqslant u_n(x) \leqslant \ldots \leqslant y(x).$$

Эти функции являются решениями дифференциальных систем

$$\begin{cases} u_n'' = f(x, v_{n-1}) & (2.17) \\ u_n(a) = A;\ u_n'(b) = B,\ (n = 1, 2, 3, \ldots), & (2.18) \end{cases}$$

где $v_0(x) = v(x)$.

Отметим, что все верхние и нижние функции определяются единственным образом, так как дифференциальные системы (2.15), (2.16) и (2.17), (2.18) имеют единственное решение.

## § 3.

## РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ВЕРХНИХ И НИЖНИХ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

1. Чтобы доказать, что последовательности $\{v_n(x)\}$, $\{u_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ равномерно сходятся к одной и той же функции $\varphi(x)$, покажем, что последовательность $\{v_n(x) - u_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ равномерно сходится к нулю. Для сокращения записи, обозначим $v_n(x) - u_n(x) = z_n(x)$.

Так как последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонно убывает, а последовательность $\{u_n(x)\}$ монотонно возрастает, то последовательность $\{z_n(x)\}$ монотонно убывает, кроме того эта последовательность ограничена снизу.

Следовательно, последовательность $\{z_n(x)\}$ сходится в каждой точке отрезка $[a, b]$. Обозначим предел этой последовательности через $z(x)$.

Функция $z_n(x)$ является решением дифференциальной системы

$$\begin{cases} z_n'' = f(x, u_{n-1}) - f(x, u_{n-1} + z_{n-1}) & (3.1) \\ z_n(a) = 0; \ z_n'(b) = 0 \ (n = 1, 2, 3, \ldots), & (3.2) \end{cases}$$

где $z_0(x) = v_0(x) - u_0(x)$. Решение дифференциальной системы (3.1), (3.2) можно написать в интегральной форме

$$z_n(x) = \int_a^x (x-t)\Big[f(t, u_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t) + z_{n-1}(t))\Big]dt -$$

$$-(x-a)\int_a^b \Big[f(t, u_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t) + z_{n-1}(t))\Big]dt. \qquad (3.3)$$

Чтобы доказать равномерную сходимость к нулю последовательности $\{z_n(x)\}$, покажем, что на всём отрезке последовательность $\{z_n'(x)\}$ равномерно сходится к нулю. Дифференцируя (3.3) по $x$, получим

$$z_n'(x) = \int_a^x \Big[f(t, u_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t) + z_{n-1}(t))\Big]dt -$$

$$-\int_a^b \Big[f(t, u_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t) + z_{n-1}(t))\Big]dt$$

или

$$z_n'(x) = \int_x^b \Big[f(t, u_{n-1}(t) + z_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t))\Big]dt.$$

Так как $z_0(x) \leqslant N$ и $\frac{\partial f}{\partial y} \leqslant K$, где $N$ и $K$ постоянные, то после несложных вычислений будем иметь

$$|z_n'(x)| \leqslant \frac{K^n N (b-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} \leqslant \frac{(b-a)^{2n-1} K^n}{(2n-1)!} N \qquad (3.4)$$

для всех $x \in [a, b]$.

Неравенство (3.4) показывает, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n'(x) = z'(x) = 0,$$

причем сходимость равномерная. Отсюда и из первого граничного условия (3.2) заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x) = z(x) = 0.$$

Таким образом, доказано, что последовательности верхних и нижних функций сходятся равномерно на отрезке $[a, b]$ к одной и той же функции $\varphi(x)$.

2. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет дифференциальной системе (1.1), (1.2). Действительно, из дифференциальной системы (2.15), (2.16) следует, что

$$v_n(x) = \int_a^x (x-t) f(t, u_{n-1}(t))\,dt + (x-a)\Big[B - \int_a^b f(t, u_{n-1}(t))dt\Big] + A. \qquad (3.5)$$

Переходя к пределу в равенстве (3.5), имеем

$$\varphi(x) = \int_a^x (x-t) f((t, \varphi(t))dt + (x-a)\left[B - \int_a^b f(t, \varphi(t))dt\right] + A$$

или

$$\varphi''(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $\varphi(x)$ удовлетворяет также граничным условиям (1.2).

1 VI 1957 *Кафедра математического анализа*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *С. А. Чаплыгин* — Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.—Л., 1950.
[2]. *Б. Н. Бабкин* — Решение одной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка методом Чаплыгина. ПММ, 1954, том XVIII, в. 2, стр. 239—242.

# NELINEARAS OTRĀS KĀRTAS DIFERENCIALSISTEMAS ATRISINĀŠANA AR AUGŠĒJO UN APAKŠĒJO FUNKCIJU METODI

*A. Grīnfelde*

(Kopsavilkums)

1954. gadā B. Babkins [2] izmantoja augšējo un apakšējo funkciju metodi nelinearas 2. kārtas diferencialsistemas (I) atrisināšanai. Šinī rakstā augšējo un apakšējo funkciju metode izmantota cita tipa nelinearas 2. kārtas diferencialsistemas (II) atrisināšanai.

1. § pierādīta diferencialsistēmas (1.1), (1.2) atrisinājuma unitate un divas teoremas:

*Ja funkcija* $v(x)$ $[u(x)]$, *kas ir divreiz nepārtraukti diferencējama segmentā* $[a, b]$, *apmierina robežnosacījumus* (1.2) *un diferencialnevienādību* (1.4) [(1.10)], *tad intervalā* $(a, b)$ *ir spēkā nevienādība* $v(x) \geqslant y(x)$ $[u(x) \leqslant y(x)]$, *kur* $y(x)$ *ir diferencialsistemas* (1.1), (1.2) *atrisinājums.*

Izmantojot šīs teoremas, darbā tiek konstruētas augšējās un apakšējās funkcijas diferencialsistemas (1.1), (1.2) atrisinājumam $y(x)$.

2. § parādīts, ka nelinearas diferencialsistemas (1.1), (1.2) atrisinājuma augšējās un apakšējās funkcijas var konstruēt, atrisinot linearas diferencialsistemas (2.15), (2.16) un (2.17), (2.18).

3. § pierādīts, ka diferencialsistemas (1.1), (1.2) atrisinājuma $y(x)$ augšējo un apakšējo funkciju virknes segmentā $[a, b]$ vienmērīgi konverģē uz $y(x)$.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О МЕТОДЕ ЭТАЛОННЫХ ФУНКЦИЙ

*Э. Я. РИЕКСТЫНЬШ*

Асимптотическое представление решений дифференциального уравнения

$$L_0(y) \equiv y'' + [\lambda^2 R(x) + Q(x)]y = 0 \qquad (0.1)$$
$$(x \in [0, l_0],\ \lambda \geqslant \lambda_1 > 0)$$

при больших значениях параметра $\lambda$ в случае, когда $R(x) > 0$ и $|Q(x)| < M$, хорошо известно из работ Лиувилля [1], Горна [2] и Стеклова [3]. Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений $n$-го порядка при $\lambda \to \infty$ известно из работы Биркгофа [4], а поведение решения системы 1-го порядка из работы Шлезингера [5]. В последних двух работах рассматривается комплексный параметр, а у Шлезингера и комплексный аргумент. Комплексные $\lambda$ и $x$ встречаются в большей части цитированных работ, но в настоящем обзоре мы не будем вдаваться в это подробнее.

Случаи, когда $R(x)$ на сегменте имеет нули или полюсы, или же $Q(x)$ имеет полюсы, начали исследоваться позже. Но и в настоящее время эти вопросы далеко не разрешены полностью. В дальнейшем будем говорить, что уравнение (0.1) в указанном случае имеет особенности.

Одной из первых работ в этом направлении является работа Хильба [6], в которой рассматривается частный случай уравнения (0.1) (преобразованное уравнение Лежандра), когда $R(x) \equiv 1$ и $Q(x)$ имеет полюс 2-го порядка. Хильбом получено асимптотическое представление решения на всем сегменте при $\lambda \to \infty$ с помощью функций Бесселя. Идея метода эталонных функций — выразить асимптотическое представление решений уравнения (0.1) при наличии особенностей с помощью основных решений другого, в явном виде разрешаемого уравнения (которое называется присоединенным уравнением) — высказана уже в работе Джефрия [7]. Однако эта работа не содержит достаточного обоснования метода. Такой же дефект имеют и некоторые другие работы, появившиеся вскоре после работы Джефрия (например [8, 9]).

Начиная с 1931 года появляется цикл работ Лейнджера, в которых новая идея развивается и обосновается. Сначала рассматривается случай, когда $R(x)$ имеет нуль любого порядка [10, 11], а $Q(x)$ — ограничено. Далее Лейнджер рассматривает более общее уравнение

$$Л_0(y) \equiv u'' + [\lambda^2 R(x) + \lambda P(x) + Q(x, \lambda)]u = 0, \qquad (0.2)$$

когда $R(x)$ имеет нуль второго порядка [12], а $P(x)$ и $Q(x, \lambda)$ ограничены. Наконец исследуется асимптотическое поведение решений уравнения (0.1) в случае, когда $R(x) = x^{\nu} R_1^2(x)$ $(\nu > -2)$ и $Q(x)$ имеет при $x = 0$ полюс второго порядка [13].

Благодаря этим работам новый метод стал общеизвестным и начал широко применяться в различных работах иностранных и советских авторов. За границей этот метод часто называется методом Лейнджера. Особенное

значение этот метод имеет в квантовой механике при исследовании решений волнового уравнения.

В 1949 году Лейнджер дал метод для уточнения полученного асимптотического представления, причем рассматривалось уравнение (0.2) в случае, когда $R(x)$ имеет нуль первого порядка, а остальные функции аналитические [14]. Формально этот прием был указан уже в работе [15]. Вскоре после этого Черри предложил другой вариант для решения той же задачи, причем в этой работе рассматривалось уравнение (0.1) [16]. Мак Кельви методом Лейнджера уточнил асимптотическое представление решения (0.2) для случая двухкратного нуля у функции $R(x)$ [17]. Обзор идей Лейнджера и Черри дается в работе Эрдейи [24].

Во всех указанных работах, кроме [24], недостаточно освещается один момент — выбор эталонных функций. Этот момент хорошо освещен в работе А. А. Дородницына [18], который предлагает видоизмененный вариант метода.* А. А. Дородницын рассматривает 2 случая: 1) $R(x) = x^{\nu}R_1^2(x)$ $(\nu > -2)$, $|Q(x)| < M$, $R_1(x) > 0$ и 2) $R(x)$ имеет полюс первого порядка, а $Q(x)$ — полюс второго порядка. Особенно надо отметить, что в этой работе подробно рассматриваются применения полученных асимптотических формул к асимптотическому представлению собственных значений задач Штурма — Лиувилля.

Таким образом видно, что имеется много работ по вопросу асимптотического представления решения (0.1) в случае одной особой точки. *Настоящая статья посвящена объединению, некоторому расширению и видоизменению полученных результатов,* причем ради простоты рассматривается только случай вещественного параметра и аргумента. Но именно этот случай имеет наибольшее значение в математической физике.

Следует отметить, что случаи нескольких особых точек до сих пор разобраны совершенно недостаточно. Имеются попытки применить метод эталонных уравнений для асимптотического представления решения (0.1) на всем сегменте в случае двух простых нулей функции на концах сегмента [например, 19, 20, 21], но в них нет достаточных математических обоснований.

В последнее время главное внимание уделяется либо применению метода эталонных функций к нахождению асимптотических представлений различных специальных функций, либо попыткам перенести этот метод на уравнениях высших порядков.

## § 1.

1°. Основная идея метода эталонных функций состоит в следующем: Уравнение (0.1) (или же (0.2)) переписывается в форме

$$L_0(y) + \rho(x)y = \rho(x)y, \tag{1.1}$$

а затем обычным способом приводится к интегральному уравнению типа Вольтерра. Решение последнего ищется в виде ряда методом последовательных приближений. Функция $\rho(x)$ подбирается так, чтобы уравнение

$$L_0(y) + \rho(x)y = 0 \tag{1.2}$$

имело бы линейно независимые частные решения в виде

$$y_i(x, \lambda) = A(x, \lambda)U_i(\varphi(x, \lambda)), \qquad (i = 1,2) \tag{1.3}$$

где $U_i$ в свою очередь являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с теми же особенностями, какие имеет исходное уравнение (0.1) или (0.2). *Уравнение* (1.2) *называется присоединенным уравнением, а уравнение для*

* При чтении корректуры автору стала известной работа В. П. Коноплева (ДАН, 1958, 118, № 1, 25—28), в которой тоже анализируется выбор эталонных функций.

*функций* $U_i(x)$ — *эталонным уравнением для* (0.1) *или же* (0.2). Надо заметить, что перед приведением к форме (1.1) может оказаться удобным в данном уравнении ввести замену переменных. Этот прием будет использоваться в настоящей работе.

Ряд, при помощи которого решается интегральное уравнение, должен быть асимптотическим при больших $\lambda$. Тогда при больших $\lambda$ функции (1.3) явятся асимптотическими для решений уравнения (1.1), и поэтому *эти функции назовем эталонными функциями.* Для того, чтобы ряд был асимптотическим, функции $U_1$ и $U_2$ должны иметь соответствующее хорошее поведение при $x = 0$ и на бесконечности. Кроме того, для практических целей надо найти явное выражение для функций $\varphi(x, \lambda)$. Все это налагает ограничения на выбор эталонных функций. Почти всегда в качестве этих функций используются цилиндрические функции. Исключение представляет случай двухкратного нуля у функции $R(x)$ для уравнения (0.2), когда в качестве эталонных функций применяются вырожденные гипергеометрические функции (они выражаются через функции параболического цилиндра) [12, 17].

В настоящей работе главным образом будет рассматриваться уравнение (0.1), при том в случае, когда

$$R(x) = x^{\alpha_0} r^2(x), \quad Q(x) = x^{-2} q(x) \tag{1.4}$$

и $x \in [0, l_0]$, $l_0 \leqslant \infty$, $r(x) > 0$, $\alpha_0 > -2$. Если $q(0) \neq 0$, то

$$q(x) = a_0 + b_0 x + g_0(x) x^2, \quad (a_0 \neq 0) \tag{1.5}$$

а в случае $q(0) = 0$ $q(x)$ имеет форму

$$q(x) = x^{\beta}[b_0 + x g_0(x)]. \quad (b_0 \neq 0, \ \beta > 0). \tag{1.6}$$

При $\beta \geqslant 2$ функция $Q(x)$ является ограниченной и поэтому можно удовлетвориться только значениями $\beta \leqslant 2$. Впредь будем допускать значения $0 < \beta \leqslant 2$. Отсюда видно, что рассматриваемое уравнение содержит в себе все до сих пор рассмотренные уравнения типа (0.1), а также некоторые новые случаи (при соотношении (1.6)).

В настоящем параграфе от $r(x)$ будем требовать непрерывную дифференцируемость два раза в $[0, l_0]$, а от $g_0(x)$ — непрерывность. Дополнительные требования в случае $l_0 = \infty$ будут даны впоследствии. Дополнительные требования будут наложены также и в третьем параграфе.

2°. Имеется несколько вариантов метода приведения (0.1) к присоединенному уравнению. Рассмотрим сначала вариант метода, предложенный А. А. Дородницыным. Из уже высказанных соображений легко видеть, что в качестве эталонного уравнения следует брать

$$U''(s) + \left[s^{\alpha_0} - \frac{\nu^2(\alpha_0 + 2)^2 - 1}{4s^2}\right] U(s) = 0. \tag{1.7}$$

Значение параметра $\nu$ будет определено позже, но всегда будем считать, что $\nu \geqslant 0$. В дальнейшем введем обозначение

$$\mu_0 = \frac{2}{\alpha_0 + 2}. \tag{1.8}$$

В качестве двух линейно независимых решений (1.7) выберем

$$\begin{aligned} U_1(s) &= \frac{\mu_0}{2} \sqrt{s}\, J_\nu\left(\mu_0 s^{\frac{1}{\mu_0}}\right), \\ U_2(s) &= \pi \sqrt{s}\, Y_\nu\left(\mu_0 s^{\frac{1}{\mu_0}}\right). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Тогда легко убедиться в том, что определитель Вронского

$$W(U_1, U_2) = 1.$$

Далее требуется найти присоединенное уравнение. Подставляя в уравнение (1.2) $y_i$ по формуле (1.3), получаем

$$AU_i\left[\lambda^2 x^{\alpha_0} r^2 + Q(x) - \varphi^{\alpha_0}(\varphi')^2 + \frac{\nu^2(\alpha_0+2)^2-1}{4}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2\right] +$$
$$+ U_i'(2A'\varphi' + A\varphi'') + U_i(A'' + A\rho) = 0.$$

Отсюда легко находим

$$\varphi(x, \lambda) = \lambda^{\mu_0}\omega(x), \quad A(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}},$$
$$\rho(x) = -\left[\frac{\nu^2(\alpha_0+2)^2-1}{4}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 + Q(x) + \sqrt{\omega'}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega'}}\right)''\right],$$

где

$$\omega(x) = \left[\frac{1}{\mu_0}\int_0^x \tau^{\frac{\alpha_0}{2}} r(\tau)\, d\tau\right]^{\mu_0} =$$
$$= x\left[r(0)^{\mu_0} + \frac{\mu_0}{\mu_0+1} r'(0)\, r(0)^{\mu_0-1} x + \frac{\omega'''(\theta x)}{3!} x^2\right]. \tag{1.10}$$

Так как $r(x) > 0$, то $\omega'(x) > 0$ на всем сегменте.

Очевидно, что $\rho(x)$ в общем случае при $x = 0$ будет иметь полюс 2-го порядка. Но легко проверить, что выбрав

$$\nu = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{1 - 4q(0)}, \tag{1.11}$$

в случае соотношения (1.5) порядок полюса будет не выше первого. В случае (1.6) порядок полюса будет $2 - \beta$. Если $q(0) > \frac{1}{4}$, то эталонные функции (1.9) будут комплексными и вместо них следует брать другие, но этим мы в настоящей работе заниматься не будем. *Поэтому в дальнейшем примем* $q(0) \leqslant \frac{1}{4}$.

3°. Рассмотрим вариант метода, примененный Лейнджером, с точки зрения эталонных уравнений. В работе [13] рассмотрен только случай $q(0) \neq 0$. В качестве эталонного уравнения берется

$$\widetilde{U}'' + \frac{1-2c}{s}\widetilde{U}' + \left[1 + \frac{c^2 - \nu_1^2}{s^2}\right]\widetilde{U} = 0, \tag{1.12}$$

частными решениями которого являются

$$\widetilde{U}(s) = s^c Z_{\nu_1}(s),$$

где $Z_{\nu_1}$ — любая цилиндрическая функция со значком $\nu_1$. Подстановка (1.3) в (1.2) с учетом (1.12) дает уравнение

$$A_1\widetilde{U}\left[\lambda^2 x^{\alpha_0} r^2 + \frac{a_0}{x^2} + \frac{b_0}{x} + g(x) - (\varphi_1')^2 - (c^2 - \nu_1^2)\left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2\right] +$$
$$+ \widetilde{U}'\left[2A_1'\varphi_1' + A_1\varphi_1'' - A_1(1-2c)\frac{(\varphi_1')^2}{\varphi_1}\right] + U(A_1'' + \rho_1 A_1) = 0.$$

Тогда имеем

$$\varphi_1 = \lambda \int_0^x \tau^{\frac{\alpha_0}{2}} r(\tau)\, d\tau = \lambda\, \omega_1(x); \quad A_1 = (\varphi_1')^{-\frac{1}{2}} \varphi_1^{\frac{1}{2}-c}. \tag{1.14}$$

Постоянная $c$ выбирается так, чтобы $A_1$, а также $A_1'$ и $A_1''$ в $[0, l_0]$ остались ограниченными. Это будет иметь место при $c = \frac{\mu_0}{2}$. Далее, из определения $\varphi_1$ следует, что

$$\left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right)^2 = \frac{1}{\mu_0^2 x^2} + \frac{\sigma(x)}{x},$$

где $\sigma(x)$ ограниченная функция. Поэтому при

$$\nu_1 = \frac{\mu_0}{2}\sqrt{1 - 4a_0} = \nu \tag{1.15}$$

$\rho_1(x)$ будет опять иметь полюс не выше первого порядка. Если учесть, что $\nu_1 = \nu$ и $\omega_1 = \mu_0\, \omega^{\frac{1}{\mu_0}}$, то легко убедиться в том, что эталонные функции Лейнджера только численным множетелем, который содержит и $\lambda^{-\frac{\mu_0}{2}}$, отличаются от прежних эталонных функций.

4°. Рассмотрим еще третий вариант приведения к присоединенному уравнению. Идея этого варианта заключается в том, чтобы при помощи замены переменных уравнение (0.1) привести к виду, из которого сразу можно видеть эталонные функции.

В силу $\omega'(x) > 0$, функция $\xi = \omega(x)$ является монотонно возрастающей, поэтому она имеет обратную функцию, которую обозначим через $x = \Omega(\xi)$ ($\xi \in [0, l_1]$). Можно показать, что

$$\Omega(\xi) = \xi\left[r(0)^{-\mu_0} - \frac{\mu_0}{\mu_0 + 1} r'(0)\, r(0)^{-(1+2\mu_0)}\, \xi + \frac{\Omega'''(\theta\xi)}{3!}\xi^2\right]. \tag{1.16}$$

Из $\omega'(x) > 0$ следует также, что $\Omega'(\xi) > 0$ при $\xi \in [0, l_1]$. Поэтому в уравнение (0.1) можем ввести подстановку

$$x = \Omega(\xi), \; y(x) = Y(\xi)\sqrt{\Omega'(\xi)}. \tag{1.17}$$

Тогда, введя обозначение

$$Q_1(\xi) = Q(\Omega)\,(\Omega')^2 + \frac{1}{2}\frac{\Omega'''}{\Omega'} - \frac{3}{4}\left(\frac{\Omega''}{\Omega'}\right)^2, \tag{1.18}$$

получаем

$$Y'' + Y[\lambda^2 \xi^{\alpha_0} + Q_1(\xi)] = 0. \tag{1.19}$$

Если учесть соотношения (1.5) или же (1.6), то $Q_1(\xi)$ принимает вид

$$Q_1(\xi) = \frac{a_0}{\xi^2} + \frac{b'}{\xi} + g_1(\xi) \tag{1.5'}$$

и, соответственно,

$$Q_1(\xi) = \xi^{\beta-2}\,[b'' + \xi\, g_1(\xi)], \tag{1.6'}$$

где

$$b' = b_0 r(0)^{-\mu_0} - 2a_0 \frac{\mu_0}{\mu_0+1} r'(0) r(0)^{-(1+\mu_0)}, \quad b'' = b_0 r(0)^{-\beta\mu_0},$$

а $g_1(\xi) - b$ $[0, l_1]$ непрерывная функция.

Далее к уравнению (1.19) применяем еще вторую замену переменных (она применяется в указанной работе [13])

$$\xi = t^2, \; Y(\xi) = v(t)\sqrt{t}, \quad t = \sqrt{\xi}, \quad t \in [0, l]. \tag{1.20}$$

В силу соотношений (1.5′) и (1.6′) получаем следующие уравнения:

$$v'' + v[\lambda^2 t^\alpha + at^{-2} + g(t)] = 0, \tag{1.21}$$

$$v'' + v[\lambda^2 t^\alpha - \frac{3}{4} t^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)] = 0, \tag{1.22}$$

где

$$\alpha = 2\alpha_0 + 2, \; a = 4a_0 - \frac{3}{4}, \; g(t) = 4[b^{(i)} + t^2 g_1(t^2)]. \; (i = 1,2). \tag{1.23}$$

Если использовавшееся до сих пор $\lambda$ обозначить через $\lambda_0$, то теперь надо считать $\lambda = 2\lambda_0$.

Уравнения (1.21) и (1.22) объединим теперь в одно уравнение

$$L(v) \equiv v'' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)]v = 0, \tag{1.24}$$

причем для (1.21) надо считать $\beta = 1$, а для (1.22) — $a = -\frac{3}{4}$.

Подстановка (1.20) в некоторых частных случаях является излишней, но тогда уравнение (1.19) можно рассматривать как частный случай (1.24). В случае соотношения (1.5′) надо тогда считать $\lambda = \lambda_0$, $\alpha = \alpha_0$, $a = a_0$, $\beta = \frac{1}{2}$. При соотношении (1.6′) надо считать $\lambda = \lambda_0$, $\alpha = \alpha_0$, $a = 0$, а $2\beta$ заменить через $\beta$. Впредь в таком случае вместо $\beta$ будем писать $\beta_0$. Факт, что (1.24) понимается в смысле (1.19), покажем, обозначая уравнение номером (1.24′).

Из (1.24) уже явно видно, что в качестве эталонного, а в то же время и присоединенного уравнения следует брать

$$N(U) \equiv U'' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2}]U = 0, \tag{1.25}$$

которое по существу не отличается от уравнения (1.7). Если учесть, что

$$\mu = \frac{\mu_0}{2}, \quad \sqrt{1-4a} = 2\sqrt{1-4a_0}, \quad \nu = \frac{\mu}{2}\sqrt{1-4a},$$

то за два линейно независимых решения (1.25) можно брать

$$U_1(t, \lambda) = \frac{\mu}{2}\sqrt{t}\, J_\nu(\lambda \mu t^{\frac{1}{\mu}}),$$

$$U_2(t, \lambda) = \pi\sqrt{t}\, Y_\nu(\lambda \mu t^{\frac{1}{\mu}}). \tag{1.26}$$

При помощи подстановок (1.20) и (1.17) мы, очевидно, получаем для уравнения (0.1) прежние эталонные функции.

Выполненные подстановки существенно не изменяют дальнейшее приведение к интегральному уравнению и исследование асимптотических рядов, но упрощают их. Кроме того, *при уточнении полученных асимптотических выражений при помощи метода Черри, подстановка* (1.17) *уже существенна*. Поэтому в дальнейшем будем исследовать только уравнение

(1.24) с эталонными функциями (1.26), и *назовем его канонической формой для* (0.1).

Если вместо (0.1), за исходное уравнение взять (0.2), то легко видеть, что получаются следующие уравнения:

$$v'' + [\lambda^2 t^\alpha + \lambda t^2 P_0(t) + at^{-2} + g(t)]v = 0, \tag{1.27}$$

$$v'' + [\lambda^2 t^\alpha + \lambda t^2 P_0(t) - \frac{3}{4} t^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)]v = 0, \tag{1.28}$$

где $P_1(\xi) = P(\Omega)\ (\Omega')^2$, $P_0(t) = 2P_1(t^2)$.

Они объединяются в следующее каноническое уравнение

$$Л(v) \equiv v'' + [\lambda^2 t^\alpha + \lambda t^2 P_0(t) + at^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)]v = 0, \tag{1.29}$$

в которое включается и случай, когда подстановка (1.20) не выполнена. Тогда, кроме уже указанных замен, еще надо заменить $t^2 P_0(t)$ через $P_1(t)$. Уравнение в таком случае обозначим через (1.29′).

## § 2.

1°. В настоящем параграфе рассмотрим приведение уравнения (1.24) к интегральному уравнению и решение его. В дальнейшем нам понадобятся оценки эталонных функций (1.26). Из свойств цилиндрических функций легко получить следующие представления:

$$U_1(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda^\nu t^{\frac{\nu}{\mu} + \frac{1}{2}} O(1) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant c\lambda^{-\mu}, \\ \lambda^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{4}} O(1) & \text{при } t \geqslant c\lambda^{-\mu}; \end{cases} \tag{2.1}$$

$$U_2(t, \lambda) = \begin{cases} \lambda^{-\nu} t^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} O(1) & \text{при } 0 < t \leqslant c\lambda^{-\mu}, \nu \neq 0, \\ \lambda^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{4}} O(1) & \text{при } t \geqslant c\lambda^{-\mu}; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$|U_2(t, \lambda)| < M_0 \lambda^{-\varepsilon} t^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\mu}} \quad \text{при } 0 \leqslant t \leqslant c\lambda^{-\mu},\ \nu = 0, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно малое, $M_0$ — достаточно большое, а $c$ — любое фиксированное положительное число.

Будем искать частные решения уравнения

$$L(v) \equiv v'' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2} + t^{2\beta-2} g(t)]v = 0 \tag{2.4}$$

в следующей форме:

$$v_i(t, \lambda) = U_i(t, \lambda) + z_i(t, \lambda). \quad (i = 1,2) \tag{2.5}$$

Тогда для функций $z_i$ получаем интегральные уравнения

$$z_i(t, \lambda) = \int_{t_i}^{t} K(t, \tau, \lambda) U_i(\tau, \lambda) d\tau + \int_{t_i}^{t} K(t, \tau, \lambda) z_i(\tau, \lambda) d\tau, \tag{2.6}$$

где

$$K(t, \tau, \lambda) = \tau^{2\beta-2} g(\tau)\ [U_1(\tau, \lambda) U_2(t, \lambda) - U_1(t, \lambda) U_2(\tau, \lambda)]. \tag{2.7}$$

Решение уравнения (2.6) ищем в виде

$$z_i(t, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{in}(t, \lambda), \tag{2.8}$$

где

$$\zeta_{i1} = \int_{t_i}^{t} K(t, \tau, \lambda) U_i(\tau, \lambda) d\tau; \ \zeta_{in} = \int_{t_i}^{t} K(t, \tau, \lambda) \zeta_{i, n-1}(\tau, \lambda) d\tau \quad (n > 1). \tag{2.9}$$

В дальнейшем исследовании будем отдельно рассматривать случаи $i = 1$ и $i = 2$.

2°. $i = 1$.

Примем $t_1 = 0$. Если $\lambda$ ограничено: $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, то для эталонных функций можно брать первое из асимптотических представлений в формулах (2.1) и (2.2). Тогда при $\nu \neq 0$ имеем

$$|K(t, \tau, \lambda)| < M \tau^{2\beta-2} \left[ \tau^{\frac{\nu}{\mu} + \frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} + \tau^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \right].$$

$M$ в дальнейшем будет обозначать различные постоянные.

Далее имеем

$$|\zeta_{11}| < \int_0^t M \tau^{2\beta-2} \left[ \tau^{\frac{\nu}{\mu} + \frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} + \tau^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \right] \tau^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} d\tau <$$

$$< \frac{M}{\beta} t^{2\beta + \frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}}.$$

Методом индукции легко убедиться в том, что

$$|\zeta_{1n}| < \left(\frac{M}{\beta}\right)^n \frac{1}{n!} t^{2n\beta + \frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}}.$$

Поэтому ряд (2.8) имеет мажорант

$$t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M}{\beta}\right)^n \frac{(t^{2\beta})^n}{n!} = t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \left[\exp \frac{M}{\beta} t^{2\beta} - 1\right]. \tag{2.10}$$

Это означает, что ряд (2.8) равномерно сходится на $[0, l]$.

Далее покажем асимптотический характер ряда (2.8) при больших $\lambda$. Для этого рассмотрим отдельные промежутки $t$.

а) $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$. Для этого промежутка можно применить предыдущие оценки, заменяя $M$ на $M\lambda^{\nu}$, причем $M$ в этом случае уже не зависит от $\lambda$. Тогда из (2.10) имеем

$$z_1(t, \lambda) = t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} O(\lambda^{\nu - 2\beta\mu}). \tag{2.11}$$

б) $c\lambda^{-\mu} \leqslant t \leqslant l$. Из мажоранта (2.10) асимптотический характер ряда уже не следует. Поэтому оценку для $z_1$ найдем прямо из уравнения (2.6). Так как функции $\zeta_{1i}$ непрерывны и ряд (2.8) сходится равномерно, то функция $z_1$ непрерывна. Поэтому функция $\left|z_1 t^{\frac{\alpha}{4}}\right|$ в $[c\lambda^{-\mu}, l]$ имеет макси-

мум, который обозначим через $Z$, а соответствующую точку через $t = t_0$. Тогда после умножения (2.6) на $t^{\frac{\alpha}{4}}$ имеем

$$Z \leqslant \int_0^{t_0} |K(t_0, \tau, \lambda)\, t_0^{\frac{\alpha}{4}}\, U_1(\tau, \lambda)|\, d\tau + \int_0^{t_0} |K(t_0, \tau, \lambda)\, t_0^{\frac{\alpha}{4}}\, z_1(\tau, \lambda)|\, d\tau = I_1 + I_2. \tag{2.12}$$

Так как ядро $K$ в $[0, c\lambda^{-\mu}]$ и $[c\lambda^{-\mu}, l]$ имеет разные оценки, то промежуток интегрирования разделим на $[0, c\lambda^{-\mu}]$ и $[c\lambda^{-\mu}, t_0]$. Применяя на этих промежутках формулы (2.1) и (2.2), а для оценки $I_2$ на $[0, c\lambda^{-\mu}]$ и (2.11), получаем

$$|I_1| < M\lambda^{-\frac{1}{2}}\gamma(\lambda), \quad |I_2| < M\lambda^{-\frac{1}{2}-2\beta\mu}\gamma(\lambda) + MZ\gamma(\lambda),$$

где

$$\gamma(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} & \text{при } 2\beta\mu > 1, \\ \lambda^{-1}\ln\lambda & \text{при } 2\beta\mu = 1, \\ \lambda^{-2\beta\mu} & \text{при } 2\beta\mu < 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

В силу того, что $\gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, из (2.12) получаем

$$z_1(t, \lambda) = t^{-\frac{\alpha}{4}}\, O(\lambda^{-\frac{1}{2}}\gamma(\lambda)). \tag{2.14}$$

в) Если $l = \infty$, то надо еще дополнительно потребовать справедливость неравенства

$$\int_{x_0}^{\infty} |\tau^{2\beta-2-\frac{\alpha}{2}} g(\tau)|\, d\tau < M. \quad (x_0 > 0). \tag{2.15}$$

Тогда, разделяя промежуток интегрирования на три — $[0, c\lambda^{-\mu}]$, $[c\lambda^{-\mu}, x_0]$, $[x_0, t]$ — мы можем повторить предыдущие рассуждения и получить опять формулу (2.14).

Если рассмотреть случай $\nu = 0$, то надо учесть и формулу (2.3). Для заданного $\beta$ мы можем выбрать $\varepsilon$ таким, что $2\beta - \frac{\varepsilon}{\mu} > 0$. Тогда в формулах (2.10) и (2.11) надо заменить $2\beta$ через $2\beta - \frac{\varepsilon}{\mu}$, а остальные оценки не изменятся.

3°. $\quad i = 2.$

Выберем $t_2 = c\lambda^{-\mu}$. Покажем сходимость ряда (2.8), а также его асимптотический характер при достаточно больших $\lambda$.

а) $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$. В силу формул (2.1) и (2.2) при $\nu \neq 0$ получаем оценки

$$|\zeta_{21}| < M\lambda^{-\nu} t^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{\mu}} \lambda^{-2\beta\mu}, \quad |\zeta_{2n}| < \lambda^{-\nu} t^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{\mu}} (M\lambda^{-2\beta\mu})^n.$$

Отсюда следует сходимость ряда (2.8) при достаточно больших $\lambda$ и оценка

$$z_2(t, \lambda) = t^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{\mu}}\, O(\lambda^{-\nu-2\beta\mu}). \tag{2.16}$$

б) $c\lambda^{-\mu} \leqslant t \leqslant l$. Подобным же образом имеем оценки

$$|\zeta_{2n}| < \lambda^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{\alpha}{4}} (M\gamma(\lambda))^n,$$

$$z_2(t, \lambda) = t^{-\frac{\alpha}{4}} O(\lambda^{-\frac{1}{2}} \gamma(\lambda)). \tag{2.17}$$

в) Если $l = \infty$, то при условии (2.15) формула (2.17) остается в силе. При $\nu = 0$ в случае а) надо учесть также оценку (2.3). Тогда получаем

$$|z_2(t, \lambda)| < M\lambda^{-2\beta\mu - \varepsilon} t^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\mu}}. \tag{2.18}$$

Примечания. 1) Полученные оценки показывают, что функции $v_1(t, \lambda)$ и $v_2(t, \lambda)$, определяемыми формулой (2.5), являются линейно независимыми.

2) Подобным образом можно и уравнение (1.29) привести к интегральному уравнению. Но в этом случае при $t \geqslant c\lambda^{-\mu}$ оценки для $z_i$ получаются такого же порядка относительно $\lambda$, как и для $U_i$, и тогда формула (2.5) не имеет практического значения. Только при $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$ и $\alpha < 6$ $\left(\mu > \frac{1}{4}\right)$ получаем опять оценки по формулам (2.11), (2.16) и (2.18), в которых $2\beta\mu$ надо заменить через $\varkappa = \min(2\beta\mu, 4\mu - 1)$.

3) Сравнение формул (2.1), (2.2) и (2.3), с одной стороны, и формул (2.11), (2.14), (2.16), (2.17) и (2.18), с другой стороны, показывает, что функции $U_i$ являются асимптотическими функциями для функций $v_i$. Но имея ввиду колебательный характер функций $U_i$, эта асимптотика является обобщенной [22], и замена $v_i$ через $U_i$ в окрестностях нулей функций $U_i$ дают большие относительные погрешности.

4) Мы получили различные асимптотические представления для функций $z_i$ в различных промежутках аргумента $t$. Единообразные представления на всем сегменте удается получить только при $-\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$ $\left(\text{или же } 0 \leqslant a_0 \leqslant \frac{1}{4}\right)$, но зато можно исследовать более общее уравнение — интегро-дифференциальное уравнение. Переходим к рассмотрению этого вопроса.

4°. Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$L(v) = \int_0^t G(t, s)\, v(s, \lambda)\, ds, \tag{2.19}$$

которое при $G \equiv 0$ переходит в уравнение (2.4). Функцию $G(t, s)$ примем непрерывной в квадрате $t, s \in [0, l]$. $G$ может быть также ограниченной функцией от параметра $\lambda$. Можно показать, что к такому уравнению при помощи подстановок (1.17) и (1.20) приводится подобное интегро-дифференциальное уравнение, в котором слева стоит $L_0(y)$.

Ищем частные решения уравнения (2.19) в форме (2.5), а функции $z_i$ в виде следующих рядов:

$$z_i(t, \lambda) = u_1(t, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} w_{in}^{(1)}(t, \lambda) + u_2(t, \lambda) \sum_{n=1}^{\infty} w_{in}^{(2)}(t, \lambda), \tag{2.20}$$

где

$$w_{i1}^{(j)} = (-1)^j \Big[ \int_0^t \tau^{2\beta-2} g(\tau) U_i(\tau, \lambda) U_{j\pm1}(\tau, \lambda)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t U_{j\pm1}(\tau, \lambda)\, d\tau \int_0^\tau G(\tau, s) U_i(s, \lambda)\, ds \Big], \tag{2.21}$$

$$w_{in}^{(j)} = (-1)^j \Big\{ \int_0^t \tau^{2\beta-2} g(\tau) U_{j\pm1}(\tau, \lambda) \, [U_1(\tau, \lambda) w_{i,n-1}^{(1)}(\tau, \lambda) +$$

$$+ U_2(\tau, \lambda) w_{i,n-1}^{(2)}(\tau, \lambda)]\, d\tau - \int_0^t U_{j\pm1}(\tau, \lambda)\, d\tau \int_0^\tau G(\tau, s) \, [U_1(s, \lambda) w_{i,n-1}^{(1)}(s, \lambda) +$$

$$+ U_2(s, \lambda) w_{i,n-1}^{(2)}(s, \lambda)]\, ds \Big\}.$$

$$(n = 2, 3, \ldots;\ i, j = 1, 2).$$

„$\pm$ “при $j = 2$ означает „$-$“, а при $j = 1$ — „$+$“.

В дальнейших оценках сходящиеся интегралы получатся только при $\beta > \frac{\nu}{\mu}$. Если в случае уравнения (1.21) взять $a > -\frac{3}{4}$, то $\frac{\nu}{\mu} < 1$, $\beta = 1$, поэтому требуемое неравенство имеет место. В случае уравнения (1.22) $a = -\frac{3}{4}$, $\frac{\nu}{\mu} = 1$, и поэтому надо ограничиться значениями $\beta > 1$.

Равномерная сходимость рядов (2.20) при ограниченном $\lambda$ доказывается таким же путем, как в п. 2. Если обозначить $\varkappa = \min\left(2\beta - \frac{2\nu}{\mu},\ 3 - \frac{2\nu}{\mu}\right)$, то легко убедиться в том, что ряды (2.20) имеют мажорант $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{M}{\varkappa}\right)^n \frac{t^{n\varkappa}}{n!}$. Это гарантирует равномерную сходимость рядов (2.20) на $[0, l]$.

Асимптотический характер этих рядов при больших $\lambda$ доказывается при помощи другого мажоранта. Разделяя промежуток интегрирования на $[0, \lambda^{-\mu}]$, $[\lambda^{-\mu}, t]$ (в случае $t \leqslant \lambda^{-\mu}$ второй сегмент отпадает) и применяя оценки (2.1), (2.2) и (2.3), получаем

$$|w_{i1}^{(j)}| < M\gamma_0, \quad |w_{in}^{(j)}| < (2M)^n \gamma_0^n, \ (n = 2, 3, \ldots) \tag{2.22}$$

где $\gamma_0(\lambda) = \gamma(\lambda)$, если $\beta < \frac{3}{2}$, но при $\beta \geqslant \frac{3}{2}$ и $G \neq 0$

$$\gamma_0(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-1} & \text{при } \mu > \frac{1}{3}, \\ \lambda^{-1} \ln^2 \lambda & \text{при } \mu = \frac{1}{3}, \\ \lambda^{-3\mu} & \text{при } \mu < \frac{1}{3}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Поэтому при достаточно больших $\lambda$ (когда $2M\gamma_0 < 1$) ряды (2.20) имеют также мажорант

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2M)^n \gamma_0^n = \frac{2M\gamma_0}{1 - 2M\gamma_0} = O(\gamma_0),$$

что показывает асимптотический характер этих рядов.

Поэтому имеем следующее единообразное асимптотическое представление:

$$v_i(t, \lambda) = U_i(t, \lambda)[1 + O(\gamma_0)] + U_{i\pm 1}(t, \lambda) O(\gamma_0). \tag{2.25}$$

Если же $l = \infty$, то при $G \equiv 0$ эта формула остается справедливой при выполнении условия (2.15). При $G \neq 0$ кроме этого условия еще требуется, чтобы функция $G(t, s)$ была равномерно ограниченной для всех $t$ и $s$. Но и тогда формула (2.25) справедлива только при $\alpha > 4 \left(\mu < \frac{1}{3}\right)$.

Отметим еще случай, когда $a = -\frac{3}{4}$ и $\alpha = 2\beta - 2$. В силу выражения для $g_1(t)$ в (1.23), мы можем ввести новый параметр $\overline{\lambda}^2 = \lambda^2 + 4b$. Тогда получим $L(v)$ в форме (1.22), в которой $\beta$ заменено на $\beta + 1$. Это означает, что формула (2.25) остается справедливой и при $0 < \beta < 1$, если $\alpha = 2\beta - 2$.

## § 3.

1°. Переходим к уточнению полученных асимптотических представлений. Для более тонкой оценки в первую очередь можно использовать некоторые начальные члены в рядах (2.8) и (2.20), однако эти члены слишком громоздки и для практических целей их трудно использовать. В своей работе [18] А. А. Дородницын предлагает рассматривать только первые члены в этих рядах и выделить их главные части, применяя при этом новые специальные функции. Поскольку этот метод уточнения непосредственно не связан с эталонным методом, мы в этой работе будем исследовать только возможности применения методов Лейнджера [14] и Черри [16], которые тесно связаны с эталонными уравнениями. Оказывается, что в силу особенностей у функций $R(x)$ и $Q(x)$, эти методы применимы только в частных случаях и в ограниченных пределах, т. е. невозможно получить сколь угодно хорошое уточнение.

Основная идея обеих методов одинаковая. Вместо присоединенного уравнения (1.25) надо брать другое, которое имеет вид

$$L(u) + \rho_1(t, \lambda) u = 0, \tag{3.1}$$

и решение которого лучше апроксимирует решение данного уравнения (1.24) при больших $\lambda$, чем (1.25). Отличаются эти методы между собой только в выборе уравнения (3.1).

В этом параграфе от функции $g(t)$ будем требовать непрерывную дифференцируемость 2 раза. Надо заметить, что у Лейнджера и Черри рассмотрены аналитические функции, но здесь, ввиду наличия особенностей, такое требование не помогло бы в общем случае усилить точность оценок.

2°. Начнем с рассмотрения метода Лейнджера. Сначала найдем линейное однородное уравнение, которому удовлетворяют функции

$$\eta_i(t, \lambda) = U_i(t, \lambda) + \lambda^{-2} B(t) U_i'(t, \lambda). \tag{3.2}$$

Входящее сюда $B(t)$ мы выберем позже. Дальнейшая идея следующая: составим $L(\eta)$, причем $\eta'$ и $\eta''$ выразим через $U$ и $U'$, учитывая уравнение (1.25). Тогда имеем

$$\begin{aligned} L(\eta) = &-\lambda^{-2} U (2B' a t^{-2} - 2B a t^{-3}) + \lambda^{-2} U'(B'' + \\ &+ B g t^{2\beta-2}) - U (2B' t^{\alpha} + B \alpha t^{\alpha-1} - g t^{2\beta-2}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь $B(t)$ выбираем так, чтобы последняя скобка обращалась в нуль. Тогда оставленные в правой стороне члены (3.3) содержат множитель $\lambda^{-2}$. Таким образом имеем

$$B(t) = \frac{1}{2}\, t^{-\frac{\alpha}{2}} \int\limits_0^t g(\tau)\tau^{2\beta-2-\frac{\alpha}{2}}\, d\tau. \tag{3.4}$$

Интеграл сходится только при $2\beta\mu > 1$, но в дальнейшем мы будем иметь еще более ограничивающее условие. В силу свойств функции $g(\tau)$, $B(t)$ в промежутке $[0, l]$ 3 раза непрерывно дифференцируема. Кроме того, при обозначении

$$2\beta - \alpha - 1 = \delta, \tag{3.5}$$

имеем следующие представления: $B^{(i)}(t) = t^{\delta-i} B_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, где $B_i(t)$—ограниченные в $[0, l]$ функции. Исключение для этих представлений имеется в случаях $\delta = 0, 1, 2$. Будем называть их особыми случаями, и оставим их пока в стороне.

После выбора функции $B(t)$ возвращаемся к уравнению (3.3). Это уравнение неоднородное, поэтому дальше поступаем следующим образом. Систему

$$\begin{cases} \eta = U + \lambda^{-2} B U' \\ \eta' = -U\lambda^{-2} B(\lambda^2 t^\alpha + at^{-2}) + (1 + \lambda^{-2} B') U' \end{cases}$$

будем решать относительно $U$ и $U'$. Подставляя полученные выражения в правую часть (3.3), имеем

$$\eta'' - \frac{D'(t,\lambda)}{D(t,\lambda)}\eta' + [\lambda^2 t^\alpha + at^{-2} + g t^{2\beta-2} + E(t,\lambda)]\eta = 0,$$

где обозначено

$$D(t,\lambda) = 1 + \lambda^{-2} B' + \lambda^{-4} B^2 (\lambda^2 t^\alpha + at^{-2}),$$

$$E(t,\lambda) = \frac{1}{D\lambda^2}[(1 + \lambda^{-2} B')\ (2B' at^{-2} - 2B\, at^{-3}) - \tag{3.6}$$

$$- \lambda^{-2} B(B'' + B\, gt^{2\beta-2})\ (\lambda^2 t^\alpha + at^{-2})].$$

Для того, чтобы $D \neq 0$, надо брать достаточно большое $\lambda$ и требовать $\delta \geqslant 1$ (или же $\beta\mu \geqslant 1$). Тогда при больших $\lambda$ на всем сегменте $[0, l]$ $D > 0$. Кроме того, имеем оценки

$$D = 1 + \lambda^{-2} t^{\delta-1} D_0(t,\lambda), \quad E = t^{\delta-3} E_0(t,\lambda),$$

где $D_0$ и $E_0$ — для всех $t$ и $\lambda$ ограниченные функции. Потом можно ввести подстановку

$$\eta = u\sqrt{D}$$

и получить уравнение

$$\mathrm{L}(u) + \rho_1(t,\lambda)\, u = 0, \tag{3.7}$$

где

$$\rho_1(t,\lambda) = E + \frac{D''}{2D} - \frac{3}{4}\left(\frac{D'}{D}\right)^2 = \lambda^{-2} t^{\delta-3}\sigma(t,\lambda)$$

и $\sigma(t, \lambda)$ — ограниченная функция для всех $t$ и $\lambda$. Случай $a = 0$ в этой оценке ничего не меняет.

Уравнение (3.7) и является нашим новым присоединенным уравнением. Оно имеет частные решения

$$u_i(t,\lambda) = \frac{\eta_i(t,\lambda)}{\sqrt{D}} = \frac{1}{\sqrt{D}}[U_i(t,\lambda) + \lambda^{-2} B(t) U_i'(t,\lambda)], \tag{3.8}$$

которые являются новыми эталонныму функциями. Можно убедиться в том, что

$$W(u_1, u_2) = 1$$

и для функций $\eta_i(t, \lambda)$, а также для функций $u_i(t, \lambda)$ справедливы оценки (2.1) до (2.3).

3°. Если теперь уравнение (1.24) переписать в форме

$$L(v) + \rho_1 v - \rho_1 v = 0,$$

то это уравнение в сущности отличается от (1.24) только тем, что вместо $t^{2\beta-2} g(t)$ стоит $\lambda^{-2} t^{\delta-3} \sigma(t, \lambda)$ и эталонными функциями для этого уравнения служат функции $u_i$. Если $\delta > 1$, то всегда можно найти такое $\beta_1 > 0$, чтобы $\delta - 3 = 2\beta_1 - 2$. При этом $2\beta_1\mu = 2\beta\mu - 2$. Требование $\delta > 1$ (или же $\beta\mu > 1$) и является окончательным требованием для применимости метода Лейнджера. Случай $\beta = 1$ дает требование $\alpha < 0$ (или же $\alpha_0 < -1$).

Учитывая указанные изменения, мы можем сослаться на оценки, полученные в § 2, причем надо учесть и множитель $\lambda^{-2}$. Согласно формулам (2.11), (2.14), (2.16), (2.17) и (2.18), имеем

$$\text{при} \quad t \leqslant c\lambda^{-\mu} \qquad v_1(t, \lambda) = u_1(t, \lambda) + t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} O(\lambda^{\nu - \Delta}),$$

$$v_2(t, \lambda) = u_2(t, \lambda) + t^{\frac{1}{2} - \frac{\nu}{\mu}} O(\lambda^{-\nu - \Delta}), \quad (\nu \neq 0)$$

$$|v_2(t, \lambda) - u_2(t, \lambda)| < M t^{\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{\mu}} \lambda^{-\Delta - \varepsilon}; \quad (\nu = 0) \tag{3.9}$$

$$\text{при} \quad t \geqslant c\lambda^{-\mu} \qquad v_i(t, \lambda) = u_i(t, \lambda) + t^{-\frac{\alpha}{4}} O\left(\lambda^{-\frac{5}{2}} \gamma(\lambda)\right), \quad (i = 1,2)$$

где $\Delta = 2\beta\mu$. При определении $\gamma(\lambda)$ по формуле (2.13) надо учесть, что там вместо $\beta$ надо подставить $\beta_1$. Выражение $\lambda^{-2}\gamma(\lambda)$ примет тогда следующий вид:

$$\lambda^{-2}\gamma(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-3} & \text{при } \beta\mu > \frac{3}{2}, \\ \lambda^{-3} \ln \lambda & \text{при } \beta\mu = \frac{3}{2}, \\ \lambda^{-2\beta\mu} & \text{при } 1 < \beta\mu < \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Из формул (3.9) видно, что они дают уточнение по сравнению с (2.11), (2.14), (2.16), (2.17) и (2.18) только при $t \geqslant c\lambda^{-\mu}$. При $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$ получаются такие же оценки, какие даны в § 2. Но если подойти к этому вопросу строго, то оценки по формулам (3.9) получаются даже несколько хуже. Действительно, в формуле (2.11) мы могли писать более точно $z_1 = O(t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \lambda^{\nu} t^{2\beta})$. Если заменить $t^{2\beta-2} g(t)$ на $\lambda^{-2} t^{\delta-3} \sigma(t, \lambda)$, то получается оценка $O(t^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{\mu}} \lambda^{\nu} t^{2\beta - \frac{2}{\mu}} \lambda^{-2})$, но $t^{2\beta} \leqslant t^{2\beta - \frac{2}{\mu}} \lambda^{-2}$. Причина этого в следующем: при малых $t$ $t^{2\beta-2} g(t)$ ведет себя лучше, чем $\lambda^{-2} t^{\delta-3} \sigma(t, \lambda)$.

Если $l = \infty$, то в требовании (2.15) надо заменить $g(\tau)$ через $\sigma(\tau, \lambda)$ и $\beta$ через $\beta_1$.

4°. Единообразное асимптотическое представление получается при $\beta_1 > \frac{\nu}{\mu}$ или же $\beta\mu > 1 + \nu$. Но уточненное асимптотическое представление формулы дают только при $G \equiv 0$, в противном случае из-за наличия в (2.19) интеграла остаются в силе прежние оценки, где вместо $\gamma(\lambda)$ стоит $\gamma_0(\lambda)$. Это показывает, что для интегро-дифференциальных уравнений более точное присоединенное уравнение надо искать в другой форме.

И в этом случае мы можем полностью применять результаты предыдущего параграфа. Используя формулу (2.25) при $-\frac{3}{4} \leqslant a \leqslant \frac{1}{4}$, $\beta\mu > 1+\nu$, получаем

$$v_i(t, \lambda) = u_i(t, \lambda)\,[1 + O(\gamma\lambda^{-2})] + u_{i\pm1}(t, \lambda)\,O(\gamma\lambda^{-2}). \qquad (3.11)$$

При $\beta = 1$ получаем условие $\alpha < -\frac{2\nu}{\mu} = -\sqrt{1-4a}$, или же $\alpha_0 < -1 - \sqrt{1-4a_0}$; в формуле (3.10) в этом случае $\beta\mu = \frac{3}{2}$, что дает $\alpha = -\frac{2}{3}$ $\left(\text{или же } \alpha_0 = -\frac{4}{3}\right)$. Если рассмотреть уравнение (1.24′), при соотношении (1.6′), то согласно этому уравнению надо брать $a = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\mu = \mu_0$ и $2\beta$ заменить на $\beta_0$, причем $\beta_0 > 1$. Тогда метод настоящего пункта применим при $-2 < \alpha_0 < \beta_0 - 3$. Другие возможности возникают еще в особых случаях, к рассмотрению которых мы сейчас перейдем.

5°. Рассмотрим по отдельности случаи $\delta = 0, 1, 2$. Другие целые значения $\delta$ относятся к предыдущему исследованию.

а) $\delta = 0$. Имеем $B^{(i)}(t) = B_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Если $a \neq 0$, то $D = 1 + \lambda^{-2} t^{-2} D_0$, и мы не можем гарантировать на всем сегменте $D > 0$. Поэтому остается только возможность $a = 0$ $\left(a_0 = \frac{3}{16}\right)$ или же $a_0 = 0$. Тогда $D = 1 + \lambda^{-2}(B_1 + B_0^2 t^2)$. Из $\delta = 0$ следует $\alpha = 2\beta - 1$, причем для сходимости интеграла (3.4) необходимо $\alpha > 0$. Рассмотрим далее различные возможные значения $\alpha$:

1) $0 < \alpha < 1$. Тогда $\rho_1 = \lambda^{-2} t^{\alpha-2} \sigma(t, \lambda)$, и для функций $v_i$ мы имеем только формулы (3.9), в которых $\Delta = 2 + \alpha\mu$, а $\gamma(\lambda) = \lambda^{-\alpha\mu}$.

2) $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Имеем $\rho_1 = \lambda^{-2}\sigma(t, \lambda)$, и функции $v_i$ представляются формулами (3.11), в которых $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1}$. Если применить формулы (3.9), то $\Delta = \frac{10}{3}$, а $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1}$.

3) $1 < \alpha < 2$. Этот случай отличается от первого только тем, что можно воспользоваться также формулами (3.11) при том же $\gamma(\lambda)$.

4) Случай $\alpha = 2$ отличается от третьего тем, что $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1} \ln \lambda$.

5) $2 < \alpha \leqslant 3$. Тогда $\rho_1 = \lambda^{-2}\sigma(t, \lambda)$ и $\gamma(\lambda) = \lambda^{-2\mu}$, а $\Delta = 2 + 2\mu$.

Еще новые возможности возникают, если рассмотреть уравнение (1.24′), в котором $a_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$, а $2\beta$ заменено на $\beta_0$. Тогда надо различать:

6) $0 < \alpha_0 < 1$.

7) $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 2$ (случай Лейнджера [14]).

Оценки для $\rho_1$ в этих случаях не отличаются от тех оценок, которые получены в случаях 1) и 2), надо только заменить $\alpha$ и $2\beta$ на $\alpha_0$ и $\beta_0$.

б) $\delta = 1$. Имеем $B(t) = tB_0(t)$, $B^{(i)}(t) = B_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$. Легко видеть, что при $a \neq 0$ $\rho = \lambda^{-2} t^{-2} \sigma(t, \lambda)$, и мы не можем доказать сходимость рядов (2.8). Поэтому опять приходится рассматривать только либо случай $a = 0$, либо $a_0 = 0$. Тогда интеграл в (3.4) сходится для всех $\alpha > -2$ и $D > 0$ при достаточно больших $\lambda$. В этом случае можно различать:

1) $-2 < \alpha \leqslant 0$. Имеем $\rho_1 = \lambda^{-2} t^{\alpha} \sigma(t, \lambda)$. Легко видеть, что при $\alpha \leqslant -1$ можно воспользоваться только формулами (3.9), в которых $\Delta = 4$ и $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1}$. При $\alpha > -1$ можно пользоваться и формулами (3.11) при том же $\gamma(\lambda)$.

2) При $0 < \alpha \leqslant 2$ имеем $\rho_1 = \lambda^{-2} \sigma(t, \lambda)$. Если $\alpha < 2$, то $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1}$, а при $\alpha = 2$ $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1} \ln \lambda$.

3) При $-2 < \alpha_0 \leqslant 0$ и $\alpha_0 = \beta_0 - 2$ $\rho_1$ имеет такую же оценку, как в 1), если там заменить $\alpha$ на $\alpha_0$. Отметим еще, что при $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 2$ имеем классический случай.

в) $\delta = 2$. Имеем $B(t) = t^2 B_0(t)$, $B'(t) = tB_1(t)$, $B^{(i)}(t) = B_i(t)$ $(i = 2, 3)$. Здесь:

1) $a \neq 0$. Тогда $\alpha = 2\beta - 3$, $\rho_1 = \lambda^{-2} t^{-1} \sigma(t, \lambda)$, и мы можем пользоваться только формулами (3.9), в которых $\Delta = 2 + \mu$, а $\gamma(\lambda)$ имеет следующие значения: $\lambda^{-1}$ при $\alpha < 0$, $\lambda^{-1} \ln \lambda$ при $\alpha = 0$ и $\lambda^{-\mu}$ при $0 < \alpha \leqslant 1$.

2) $a = 0$, $\alpha = 2\beta - 3$, $-2 < \alpha \leqslant 1$.

3) $a_0 = 0$, $\alpha_0 = \beta_0 - 3$, $-2 < \alpha_0 \leqslant -1$.

В обеих последних случаях имеем $\rho_1 = \lambda^{-2} \sigma(t, \lambda)$, $\gamma(\lambda) = \lambda^{-1}$.

6°. Переходим к рассмотрению метода Черри [16]. Как уже было отмечено выше, подстановка (1.17) для этого метода существенна.

Идея метода заключается в следующем: присоединенное уравнение (3.1) подбирается так, чтобы линейно независимыми частными решениями этого уравнения были функции

$$u_i^*(t, \lambda) = C(t, \lambda) U_i \left(t + \lambda^{-2} \overline{B}(t)\right), \tag{3.12}$$

причем функции $C$ и $\overline{B}$ подбираются так, чтобы при $\lambda \to \infty$ $\rho_2(t, \lambda)$ по возможности быстрее стремилось к нулю.

Поставляя (3.12) в (3.1) и учитывая (1.25), имеем

$$U' [2C'(1 + \lambda^{-2} \overline{B}') + \lambda^{-2} C \overline{B}''] + CU \{ (1 + \lambda^{-2} \overline{B}') [-\lambda^2 (t + \lambda^{-2} \overline{B})^{\alpha} - \\ - a(t + \lambda^{-2} \overline{B})^{-2}] + \lambda^2 t^{\alpha} + at^{-2} + gt^{2\beta - 2} \} + U (C'' + C \rho_2) = 0. \tag{3.13}$$

Допустим теперь, что функции $\overline{B} t^{-1}$ и $\overline{B}'$ $[0, l]$ ограничены. Тогда выражение в фигурной скобке в (3.13) при достаточно большом $\lambda$ можно преобразовать в следующее:

$$\lambda^2 t^{\alpha} [1 - (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{\alpha}] + at^{-2} [1 - (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{-2}] + gt^{2\beta - 2} - \\ - 2\overline{B}' t^{\alpha} (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{\alpha} - \lambda^{-2} \{ [2\overline{B}' + \lambda^{-2} (\overline{B}')^2] (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{-2} at^{-2} + \\ + (\overline{B}')^2 t^{\alpha} (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{\alpha} \} = \lambda^2 t^{\alpha} [ - \alpha \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1} - \tbinom{\alpha}{2} \lambda^{-4} (\overline{B} t^{-1})^2 - \ldots ] + \\ + at^{-2} [2\lambda^{-2} \overline{B} t^{-1} + \ldots ] + gt^{2\beta - 2} - 2\overline{B}' t^{\alpha} (1 + \alpha \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1} + \ldots) - \\ - \lambda^{-2} \{ [2\overline{B}' + \lambda^{-2} (\overline{B}')^2] (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{-2} at^{-2} + (\overline{B}')^2 t^{\alpha} (1 + \lambda^{-2} \overline{B} t^{-1})^{\alpha} \}.$$

Выберем теперь $\overline{B}$ так, чтобы полученное выражение не содержало бы членов с $\lambda^0$. Тогда должно быть $-\alpha\, t^{\alpha-1}\overline{B} + gt^{2\beta-2} - 2\overline{B}'\, t^{\alpha} = 0$. Но легко видеть, что тогда $\overline{B} \equiv B$, и мы можем пользоваться прежними оценками для функции $B$ и ее производных. Очевидно, высказанное нами выше предположение относительно $\overline{B}\, t^{-1}$ и $\overline{B}$ будет иметь место при $\delta \geqslant 1$, но в дальнейшем надо считать (кроме особых случаев) $\delta > 1$.

Функцию $C(t, \lambda)$ определим, приравнивая нулю коэффициент при $U'$. Это дает

$$C(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^{-2} B'}}. \tag{3.15}$$

При достаточно больших $\lambda$ и всех $t \in [0, l]$ подкоренное выражение положительно, если $\delta \geqslant 1$ или же $\delta = 0$.

$\rho_2(t, \lambda)$ следует теперь выбрать так, чтобы удовлетворялось уравнение (3.13). Тогда, исходя из (3.13), (3.14) и (3.15) можно показать, что $\rho_2(t, \lambda)$ во всех случаях имеет те же самые оценки, какие имеет $\rho_1(t, \lambda)$ в предыдущих пунктах. В случае $\delta = 0$ преобразование (3.14) не применимо, но тогда можно воспользоваться формулой

$$(t + \lambda^{-2}\overline{B})^{\alpha} - t^{\alpha} = \alpha\, t^{\alpha-1}\lambda^{-2}\overline{B} + \binom{\alpha}{2}(t + \Theta\lambda^{-2}\overline{B})^{\alpha-2}\lambda^{-4}\overline{B}^2.$$

Если еще отметить, что из (3.12) легко следует $W(u_1^*, u_2^*) = 1$ и справедливость оценок (2.1) до (2.3) для $u_i^*$, то ясно, что все исследования можно вести точно также, как в предыдущих пунктах, и поэтому нет надобности их повторить. Можно только отметить, что особый случай а7) рассмотрен самым Черри, которым дано уточнение до любой степени $\lambda$. Но в общем случае дальнейшее уточнение невозможно. Соответствующие асимптотические представления получаются по формулам (3.9) и (3.11), в которых $u_i$ следует заменить на $u_i^*$.

7°. Сравним оба метода уточнения. Очевидно, оба метода приводят к сходным результатам, но присоединенные уравнения (3.7) и (3.13) не совпадают, также как не совпадают и апроксимирующие функции $u_i$ и $u_i^*$. Однако легко показать, что при достаточно большем $\lambda$ они совпадают в пределах погрешности наших оценок. Действительно:

Из (3.8) и (3.6) имеем

$$u_i = \frac{U_i + BU_i'}{\sqrt{1 + \lambda^{-2}(B' + B^2 t^{\alpha}) + \lambda^{-4} a (Bt^{-1})^2}} = \Big[1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2}(B' + B^2 t^{\alpha}) +$$
$$+ O(\lambda^{-4})\Big][U_i + \lambda^{-2} BU_i'] = \Big[1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2}(B' + B^2 t^{\alpha})\Big]U_i +$$
$$+ \lambda^{-2} BU_i' + [U_i + U_i']\, O(\lambda^{-4}).$$

Но, с другой стороны, по формулам (3.12) и (3.15), учитывая (1.25), получаем

$$u_i^* = \frac{U_i(t + \lambda^{-2}B)}{\sqrt{1 + \lambda^{-2}B'}} = \Big[1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2}B' + O(\lambda^{-4})\Big]\Big[U_i(t) + \lambda^{-2}BU_i'(t) +$$
$$+ \frac{1}{2}\lambda^{-4}B^2 U_i''(t) + \frac{1}{6}\lambda^{-6}B^3 U_i'''(\tau)\Big] = \Big[1 - \frac{1}{2}\lambda^{-2}(t^{\alpha}B^2 + B')\Big]U_i(t) +$$
$$+ \lambda^{-2}BU_i'(t) + [U_i(t) + U_i'(t)]\, O(\lambda^{-4}) + [U_i(\tau) + U_i'(\tau)]\, O(\lambda^{-4}).$$

Представляется, что практически более удобно применить эталонные функции (3.12) чем (3.8) по следующим причинам:

1) Математический аппарат метода Черри проще аппарата в методе Лейнджера.

2) Функции (3.12) требуют знания численных значений лишь функций $U_i$. Последние можно получить из таблиц цилиндрических функций, причем в случае дробных индексов этих функций удобно использовать таблицы [23], в которых табулированы родственные функции.

8°. Как мы видели во втором параграфе, асимптотическое представление решений уравнения (1.29) при помощи эталонных функций (1.26) возможно только при $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$ и $\alpha < 6$. Но можно пытаться эталонные функции для уравнения (1.29) найти либо по методу Лейнджера, либо по методу Черри. Так как и в этом случае оба метода приводят к сходным результатам, то ради простоты будем применить только метод Черри.

В этом случае в качестве эталонных функций надо брать функции

$$\bar{u}_i(t, \lambda) = \Gamma(t, \lambda)\, U_i\left(t + \lambda^{-1} F(t)\right). \tag{3.16}$$

Функцию $P_0(t)$ будем считать дважды непрерывно дифференцируемой. Если поступать точно так же, как в п. 6, то получаем

$$F(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t P_0(\tau)\, \tau^{2-\frac{\alpha}{2}}\, d\tau. \tag{3.17}$$

Интеграл сходится, если $\alpha < 6$, но требование ограниченности функций $F(t)\, t^{-1}$ и $F'(t)$ накладывает условие $\alpha \leqslant 2$. Для функции $\Gamma(t, \lambda)$ получаем выражение

$$\Gamma(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^{-1} F'}}. \tag{3.18}$$

Если тогда уравнение (1.29) представить в форме

$$Л(v) + \rho_3 v = \rho_3 v$$

и $\rho_3(t, \lambda)$ выбрать так, что функции (3.16) удовлетворяют соответствующему однородному уравнению

$$Л(v) + \rho_3 v = 0, \tag{3.19}$$

то $\rho_3(t, \lambda)$ имеет оценку $\rho_3(t, \lambda) = O(t^{-\alpha}) - gt^{2\beta-2}$. Применяя далее результаты второго параграфа, получаем окончательное требование $\alpha < 2$. Тогда

$$v_i(t, \lambda) = \bar{u}_i(t, \lambda) + z_i(t, \lambda), \tag{3.20}$$

где $z_i(t, \lambda)$ имеют оценки по формулам (2.11), (2.14), (2.16), (2.17) и (2.18), а в формуле (2.13) $2\beta$ надо заменить через $\varkappa = \min(2\beta, 2 - \alpha)$. Единообразное асимптотическое представление по формуле (2.25), в которой $U_i$ заменено через $\bar{u}_i$ и $\gamma_0$ через $\gamma$, получается при $\varkappa > \frac{2\nu}{\mu}$.

Особыми случаями здесь являются случаи, когда $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$. В этих случаях можно брать только либо $a = 0$ $\left(\text{или же } a_0 = \frac{3}{16}\right)$, либо $a_0 = 0$. Разделяем следующие подслучаи:

1) $a = 0$, $\alpha = 2$ или $\alpha = 3$. Тогда $\rho_3 = O(1) - gt^{2\beta-2}$, и к этим случаям относится все уже сказанное, надо только брать $\varkappa = \min(1, \beta)$.

2) $a_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = 1$. Тогда нам приходится рассмотреть уравнение (1.29′), и для определения $F(t)$ имеем формулу

$$F(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{\alpha_0}{2}} \int_0^t P_1(\tau) \tau^{-\frac{\alpha_0}{2}} d\tau. \tag{3.21}$$

Далее имеем $\rho_3(t, \lambda) = O(1) - gt^{\beta_0 - 2}$, $\varkappa = \beta_0$. При $\alpha_0 = 1$ и $\beta_0 = 2$ получаем случай Лейнжера [14], а при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 2$ — классический случай.

3) При $\alpha = 2$ (или же $\alpha_0 = 0$) можно рассмотреть и случай $a \neq 0$. Тогда в уравнение эталонных функций (1.26) вместо параметра $\lambda^2$ надо ввести $\lambda_1^2 = \lambda^2 + \lambda P_0(0)$. Для функции $F(t)$ тогда имеем выражение

$$F(t) = \frac{1}{2} t^{-1} \int_0^t [P_0(\tau) - P_0(0)] \tau d\tau. \tag{3.22}$$

Учитывая, что $P_0(t) = 2P_1(t^2)$, имеем $F(t) = t^3 F_0(t)$, где $F_0(t)$ — ограниченная функция, и $\rho_3(t, \lambda) = \lambda^{-1} O(1) - gt^{2\beta - 2}$. Следовательно, при такой функции $F(t)$ сохраняются прежние результаты, если только в эталонных функциях заменить $\lambda$ на $\lambda_1$.

9°. Более точные эталонные функции для решений уравнения (1.29) можно искать в виде

$$\overline{u}_i^*(t, \lambda) = \Gamma_1(t, \lambda) U_i\left(t + \lambda^{-1} F(t) + \lambda^{-2} \Phi(t)\right). \tag{3.23}$$

Если поставить эти функции в (3.19) и поступать точно так же, как в п. 6, то имеем

$$\Phi(t) = B(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right) t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t F^2 \tau^{\frac{\alpha}{2} - 2} d\tau - \alpha t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t F F' \tau^{\frac{\alpha}{2} - 1} d\tau -$$

$$- \frac{1}{2} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t (F')^2 \tau^{\frac{\alpha}{2}} d\tau = B(t) - \frac{\alpha}{2} F^2(t) t^{-1} -$$

$$- \frac{\alpha}{4} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t F^2 \tau^{\frac{\alpha}{2} - 2} d\tau - \frac{1}{2} t^{-\frac{\alpha}{2}} \int_0^t (F')^2 \tau^{\frac{\alpha}{2}} d\tau, \tag{3.24}$$

$$\Gamma_1(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^{-1} F' + \lambda^{-2} \Phi'}}, \tag{3.25}$$

а $B(t)$ и $F(t)$ определяются по формулам (3.4) и (3.17).

Для сходимости интегралов достаточны прежние условия $\alpha < 2$ и $\delta = 2\beta - \alpha - 1 > 1$, причем последнее включает в себя и первое, поскольку $\beta \leqslant 2$. Это покажет, что особые случаи $\alpha = 2, 3$ (или же $\alpha_0 = 0, 1$) здесь рассмотреть нельзя.

При таких условиях получаем $\rho_3 = \lambda^{-1} t^{\delta - 3} \sigma(t, \lambda)$, и дальнейшие исследования можно вести точно так же, как в случае эталонных функций (3.12) или же (3.8). Соответствующие асимптотические выражения получаются по формулам (3.9) и (3.11), в которых следует заменить $u_i$ на $\overline{u}_i^*$, и во всех случаях аргумент функций **O** помножить на $\lambda$. Это покажет, что при $t \leqslant c\lambda^{-\mu}$ в формулах (3.9) функции $\overline{u}_i^*$ дают худшую апроксимацию чем функции $\overline{u}_i$.

Еще можно рассмотреть особые случаи $\delta = 0, 1, 2$. Ввиду того, что все дальнейшие суждения, которые точно такие же как выше, определяются оценкой для $\rho_3(t, \lambda)$, ограничимся указыванием только этой оценки. Имеем следующие возможности:

а) $\delta = 0$.

1) $a = 0,\ 1 < \alpha < 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1}\ [O(t^{-\alpha}) + O(t^{\alpha-3})]$.

2) $a = 0,\ \alpha = 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1} O(1)$.

3) $a_0 = 0,\ \alpha_0 = 1,\ \beta_0 = 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1} O(1)$.

б) $\delta = 1$.

1) $a = 0,\ -2 < \alpha < 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1}\ [O(t^{-\alpha}) + O(t^{\alpha})]$.

2) $a = 0,\ \alpha = 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1} O(1)$.

3) $a_0 = 0,\ -2 < \alpha_0 < 0;\ \rho_3 = \lambda^{-1}\ [O(t^{-\alpha_0-2}) + O(t^{\alpha_0})]$.

4) $a_0 = 0,\ \alpha_0 = 0,\ \beta_0 = 2;\ \rho_3 = \lambda^{-1} O(1)$.

в) $\delta = 2$.

1) $-2 < \alpha \leqslant 1;\ \rho_3 = \lambda^{-1}\ [O(t^{-\alpha}) + O(t^{\alpha+2}) + a\,O(t^{-1})]$.

2) $-2 < \alpha_0 \leqslant -1;\ \rho_3 = \lambda^{-1}\ [O(t^{-\alpha_0-2}) + a_0\,O(t^{-1})]$.

Количество особых случаев в этом параграфе можно увеличить, если при приведении к каноническому виду (1.24) или же (1.29) вместо подстановки (1.20) брать следующую:

$$\xi = t^n,\quad Y(\xi) = v(t)\, t^{\frac{n-1}{2}} \quad (n > 2, \text{ целое}).$$

Еще отметим, что при $\alpha \leqslant 2$ уравнение (1.29) можно привести к (1.24) при помощи подстановки

$$t_1 = \omega_1(t, \lambda) = \left[\frac{1}{\mu}\int_0^t \tau^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{1+\lambda^{-1}\tau^{2-\alpha}P_0(\tau)}\, d\tau\right]^{\mu},$$

$$t = \Omega_1(t_1, \lambda), \quad v(t, \lambda) = v_1(t_1, \lambda)\sqrt{\Omega_1'(t_1, \lambda)}, \tag{3.26}$$

но при $0 < \alpha < 2$ $(\alpha \neq 1)$ в (1.24) тогда добавляется еще член $v_1 t_1^{-\alpha} g_1(t_1, \lambda)$ ($g_1$ — ограниченная функция), содержащий новую сингулярность. Кроме того в этом случае подинтегральное выражение в (3.4) станет слишком сложным, поэтому подстановка (3.26), повидимому, не является целесообразной.

1 VI 1957 *Кафедра общей математики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *J. Liouville.* Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramétre variable. Jour. de math. pures et appl., 1837, 2, 16—35.

[2]. *J. Horn.* Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. Math Annalen, 1899, 52, 271—292.

[3]. *В. А. Стеклов.* Об асимптотических выражениях некоторых функций, определенных линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка, и их приложениях к вопросу о разложении произвольной функции в ряды, расположенные по этим функциям. Сообщ. Харьковского Мат. Общ., 1909, 10, 97—200.
Имеется отдельное издание статьи: Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений. Изд. Харьковского ун-та, 1956.

[4]. *G. D. Birkhoff.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations contaning a parameter. Trans. Am. Math. Soc., 1908, 9, 219—231.

[5]. *L. Schlesinger.* Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters. Math. Annalen, 1907, 63, 277—300.

[6]. *E. Hilb.* Über die Laplace'sche Reihe. Math. Zeitschrift, 1919, 5, 17—25.

[7]. *H. Jeffreys.* On certain approximate solutions of linear differential equation of the second order. Proc. Lond. Math. Soc., 1925, 23, 428—436.

[8]. *S. Goldstein.* A note on certain approximate solutions of linear differential equation of the second order, with an application to the Mathieu equation. Proc. Lond. Math. Soc., 1928, 28, 81—90.

[9]. *C. Lanzos.* Zur Theory des Starkeffekts in hohen Feldern. Zeitschrift für Physik, 1930, 62, 518—544.

[10]. R. E. Langer. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Am. Math. Soc., 1931, 33, 23—64.

[11]. *R. E. Langer.* On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to the Bessel functions of large komplex order. Trans. Am. Math. Soc., 1932, 34, 447—480.

[12]. *R. E. Langer.* The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of second order. Trans. Am. Math. Soc., 1934, 36, 90—106.

[13]. *R. E. Langer.* On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point. Trans. Am. Math. Soc., 1935, 37, 397—416.

[14]. *R. E. Langer.* The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Am. Math. Soc., 1949, 67, 461—490.

[15]. *R. E. Langer.* On the connection formulas and the solutions of the wave equation. Phys. Rev., 1937, 51, 669—676.

[16]. *T. M. Cherry.* Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Am. Math. Soc., 1950, 68, 224—257.

[17]. *R. W. Mac Kelvey.* The solutions of second order linear ordinary differential equations about a turning point of order two. Trans. Am. Math. Soc., 1955, 79, 103—123.

[18]. *А. А. Дородницын.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. УМН, 1952, 7, вып. 6, 3—96.

[19]. *М. И. Петрашень.* О полуклассических методах решения волнового уравнения. Уч. Зап. Ленинградского ГУ, 1949, № 120, 59—78.

[20]. *S. C. Miller, R. H. Good.* A WKB — type approximation to the Schrödinger Equation. Phys. Rev. 1953, 91, 174—179.

[21]. *С. И. Дроздов.* Сечение поглощения быстрых частиц полупрозрачными ядрами. ДАН, 1956, 106, № 3, 409—412.

[22]. *В. Ж. Риекстиня.* Об одном обобщении асимптотических разложений. Ученые Записки Латв. ГУ, 1958, 20, вып. 3, 143—150.

[23]. *А. Д. Смирнов.* Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций. АН СССР, Москва, 1955.

[24]. *A. Erdelyi.* Asymptotic solutions of differential equations with transition points. Proc. of the international congress of mathematicians 1954, V. 3, Amsterdam, 1956, 92—101.

# PAR ETALONA FUNKCIJU METODI

*E. Riekstiņš*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta 2. kārtas linearu homogenu diferencialvienādojumu atrisinājumu asimptotiska izturēšanās pie lielām parametra $\lambda$ vērtībām gadījumā, kad vienādojuma koeficientiem punktā $x = 0$ ir singularitates. Lietota etalona funkciju metode. Apskatītais vienādojums (1.24) ietver sevī visu līdz šim apskatīto singularitašu gadījumus, kā arī dažus līdz šim neapskatītus gadījumus. Pie novērtēšanas atsevišķi jāšķiro asimptotika pie mazām $x$ vērtībām un pārējām $x$ vērtībām, bet pie zināmiem nosacījumiem attiecībā uz parametriem $\alpha$ un $\beta$ iespējams atrast arī vienveidīgu asimptotisku izteiksmi visiem $x$. Pie tam pēdējā gadījumā iespējams apskatīt plašāku vienādojumu — integrodiferencialvienādojumu (2.19). Šāda vienādojuma atrisinājumu asimptotiska izturēšanās singularitašu gadījumā līdz šim literaturā nebija apskatīta.

Darba 3. nodaļā apskatīti jautājumi par atrasto asimptotisko izteiksmju precizēšanu. Lietotas Lēndžera un Čerri metodes, kuras autori bija izstrādājuši specialam gadījumam, kad $\alpha = 1$ un $\beta = 2$. Noskaidrots, ka abas metodes pie apskatāmās precizitates dod sakrītošus rezultatus.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

*В. Э. АБОЛИНЯ И А. Д. МЫШКИС*

В настоящей статье рассматривается смешанная задача для линейной гиперболической системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка по двум независимым переменным. Сформулированы достаточные условия для существования и единственности классического и обобщенного решений. Доказаны некоторые свойства обобщенного решения. Здесь в основном изложены результаты диссертации [1]; исследованию аналогичными методами более общего случая авторы намерены посвятить отдельную работу.

## § 1.

## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ

1. Постановка задачи. Пусть дана система дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка по двум независимым переменным

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - \lambda_i(x, t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x, t)\, u_j + f_i(x, t) \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{1.1}$$

где $\lambda_i(x, t)$, $a_{ij}(x, t)$ — известные непрерывно дифференцируемые функции, определенные в прямоугольнике $\overline{\Pi}$: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0_L t \leqslant T\,(0 < l < \infty$, $0 < T < \infty)$; $u_j(x, t)$ — искомые функции*. Предположения о функциях $f_i(x, t)$ будут указаны позже.

Система (1.1) гиперболична, так как все $\lambda_i(x, t)$ являются вещественными функциями от $x$ и $t$ [2]. Будем требовать также, чтобы функции $\lambda_i(x, t)$ можно было перенумеровать в порядке их возрастания, т. е. в каждой точке $(x, t) \in \overline{\Pi}$ положим

$$\lambda_1(x, t) \leqslant \lambda_2(x, t) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(x, t);$$

причем первые $k$ $(0 \leqslant k \leqslant m)$ из величин $\lambda_i$ пусть будут отрицательными, а остальные $m - k$ — положительными всюду в $\overline{\Pi}$.

Характеристики системы (1.1) определяются как интегральные линии обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_i(x, t) \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2.1}$$

*) Все величины в этой работе предполагаются вещественными.

Через каждую точку $(x_0, t_0)$ прямоугольника $\overline{\Pi}$ проходят $m$ действительных характеристик $L_i(x_0, t_0)$ с угловыми коэффициентами $k_i = -\frac{1}{\lambda_i}$ относительно оси $Ox$. Уравнением характеристики $L_i(x_0, t_0)$ пусть будет $x = \varphi_i(t; x_0, t_0)$. Функции $\varphi_i(t; x_0, t_0)$ являются строго монотонными относительно $t$ и имеют непрерывные частные производные по $t$, $x_0$ и $t_0$.

Смешанная задача для системы (1.1) ставится так: найти в прямоугольнике $\overline{\Pi}$ решение системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i(x, 0) = g_i(x) \quad (i = 1, \ldots, m;\ 0 \leqslant x \leqslant l) \tag{3.1}$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_i(0, t) &= \sum_{j=k+1}^{m} \left[\alpha_{ij}(t) u_j(0, t) + \int_0^t \beta_{ij}(t; \tau) u_j(0, \tau) d\tau\right] + h_i(t) \\ &\qquad (i = 1, \ldots, k), \\ u_i(l, t) &= \sum_{j=1}^{k} \left[\alpha_{ij}(t) u_j(l, t) + \int_0^t \beta_{ij}(t; \tau) u_j(l, \tau) d\tau\right] + h_i(t) \\ &\qquad (i = k+1, \ldots, m) \\ &\qquad (0 \leqslant t \leqslant T), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\alpha_{ij}(t)$ — известные непрерывно дифференцируемые функции, определенные на сегменте $0 \leqslant t \leqslant T$, а $\beta_{ij}(t; \tau)$ — известные непрерывные функции, определенные на треугольнике $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, непрерывно дифференцируемые по $t$. Предположения о функциях $g_i(x)$ и $h_i(t)$ будут указаны позже.

Замечание 1. Если все функции $\lambda_i(x, t)$ отрицательны, то граничные условия задаются только на прямой $x = 0$, а если все они положительны, то на прямой $x = l$.

Замечание 2. К виду (4.1) можно привести и более общие граничные условия

$$\sum_{j=1}^{m} \left[A_{ij}(t) u_j(0, t) + \int_0^t B_{ij}(t; \tau) u_j(0, \tau) d\tau\right] + H_i(t) = 0 \quad (i=1, \ldots, k), \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left[A_{ij}(t) u_j(l, t) + \int_0^t B_{ij}(t; \tau) u_j(l, \tau) d\tau\right] + H_i(t) = 0 \quad (i=k+1, \ldots, m), \tag{6.1}$$

если определители $|A_{ij}|_1^k$ и $|A_{ij}|_{k+1}^m$ отличны от нуля и выполнены необходимые требования гладкости коэффициентов. Для этого уравнения (5.1) рассматривают как систему интегральных уравнений типа Вольтерра относительно функций $u_i(0, t)$ $(i = 1, \ldots, k)$, а уравнения (6.1) — как систему интегральных уравнений относительно функций $u_i(l, t)$ $(i = k+1, \ldots, m)$. Если выразить решения систем (5.1) и (6.1) через резольвенту, то получим граничные условия вида (4.1).

Замечание. 3. Граничные условия вида

$$\sum_{j=1}^{m} [A_{ij}(t) u'_{jt}(0, t) + B_{ij}(t) u_j(0, t)] + H_i(t) = 0 \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$\sum_{j=1}^{m} [A_{ij}(t) u'_{jt}(l, t) + B_{ij}(t) u_j(l, t)] + H_i(t) = 0 \quad (i = k+1, \ldots, m)$$

интегрированием по $t$ в пределах от 0 до $t$ можно привести к виду (5.1), (6.1), если нам известны $u_i(0, 0)$ и $u_i(l, 0)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

2. Приведение к системе интегральных уравнений. Если от функций $f_i(x, t)$ потребовать непрерывность и непрерывную дифференцируемость по $x$, а от функций $g_i$ и $h_i$ — непрерывную дифференцируемость, то поставленную смешанную задачу можно привести к системе интегральных уравнений типа Вольтерра и доказать эквивалентность обеих задач. Из эквивалентности будет следовать, что для нахождения решения смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) достаточно решить соответствующую систему интегральных уравнений.

Для написания системы интегральных уравнений проведем через точки (0, 0) и $(l, 0)$ все характеристики, находящиеся в прямоугольнике $\overline{\Pi}$: $L_i(0, 0)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $L_j(l, 0)$ $(j = k+1, \ldots, m)$. Предположим, что $0 < k < m$ (случаи $k = 0$ и $k = m$ разбираются еще проще). Рассмотрим прямоугольник $\overline{\Pi}^{(1)}$: $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant t^{(1)}$ $(t^{(1)} \leqslant T)$, внутри которого эти характеристики $L_i(0, 0)$ и $L_j(l, 0)$ не пересекаются. Тогда они разбивают прямоугольник $\overline{\Pi}^{(1)}$ на области $T_0, T_1, \ldots, T_m$ (см. рис. 1.)

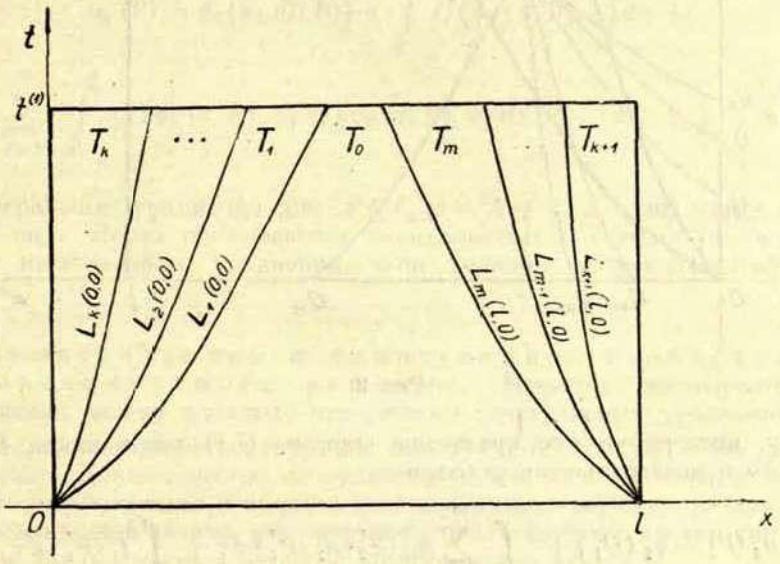



Рис. 1.

Некоторые из областей $T_i$ могут отсутствовать, если какие-либо из упомянутых характеристик совпадают. Подобная картина получается и при $k = 0$ и $k = m$, но эти случаи мы более подробно рассматривать не будем.

Прямоугольник $\overline{\Pi}$ мы можем разбить прямыми $t = t^{(j)}$ параллельными оси $0x$ на конечное число прямоугольников, внутри каждого из которых характеристики $L_1(0, t^{(j)})$ и $L_m(l, t^{(j)})$ не пересекаются. Поэтому можно ограничиться рассмотрением смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) в области $\overline{\Pi}^{(i)}$. Действительно, если известно решение смешанной задачи в прямоугольнике

$\overline{\Pi}^{(1)}$, то тем самым определяются и значения функций $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ на прямой $t = t^{(1)}$. Принимая значения функций $u_i$ на прямой $t = t^{(1)}$ за начальные значения, получаем смешанную задачу для прямоугольника $\overline{\Pi}^{(2)}$ уже рассмотренного типа, и т. д., пока не дойдем до прямой $t = T$.

Рассмотрим $i$-ое уравнение системы (1.1). Если обозначить через $d_i u_i$ дифференциал функции $u_i$ вдоль линии $L_i(x, t)$, то левая часть рассматриваемого уравнения равна $\frac{d_i u_i}{dt}$ и мы получим

$$\frac{d_i u_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} u_j + f_i \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{7.1}$$

Пусть точка $P(x, t)$ принадлежит области $T_s$ $(0 \leqslant s \leqslant k)$. Если через эту точку провести все характеристики в направлении убывающих $t$, то первые $s$ из них пересекают ось $0t$, а остальные $m - s$ — ось $0x$ (рис. 2).

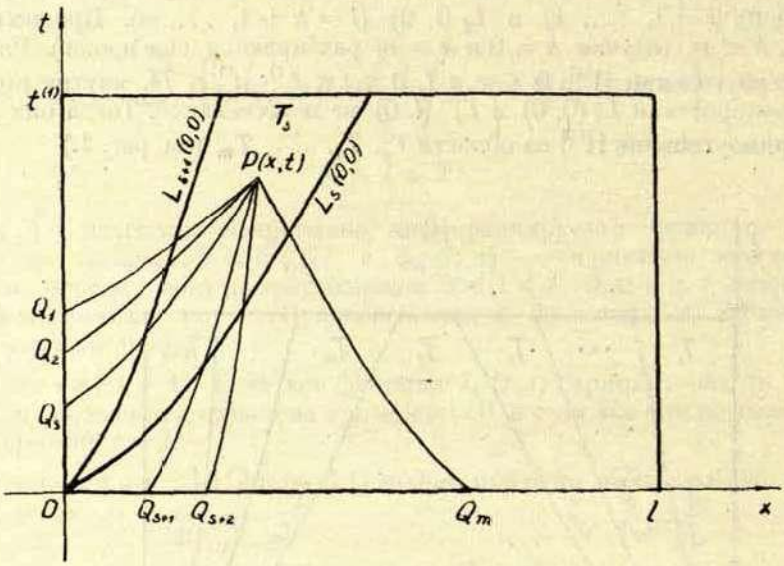



Рис. 2.

Поэтому, интегрируя $i$-ое уравнение системы (7.1) вдоль линии $L_i(x, t)$, приходим к интегральному уравнению

$$u_i(P) = u_i(Q_i) + \int\limits_{Q_i P} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(P_i') u_j(P_i') \, d\tau + \int\limits_{Q_i P} f_i(P_i') \, d\tau \tag{8.1}$$
$$(i = 1, \ldots, m),$$

где $Q_i$ — точка пересечения характеристики $L_i(x, t)$ либо с осью $0x$ $(i = s + 1, \ldots, m)$, либо с осью $0t$ $(i = 1, \ldots, s)$, а $P_i' = (\varphi_i(\tau;\ x,\ t),\ \tau)$. Значения функций $u_i$ на $0x$ нам даны (начальные значения (3.1)), поэтому

$$u_i(Q_i) = g_i(\varphi_i(0;\ x,\ t)) \quad (i = s + 1, \ldots, m),$$

а $u_i(Q_i) = u_i(0, t_i(x, t))$ $(i = 1, \ldots, s)$ выражаются через $u_j(0, t)$ $(j = k + 1, \ldots, m)$ при помощи граничных условий (4.1). Но $u_j(0, t_i(x, t))$ в свою очередь при помощи формул (8.1) выражаются через известные функ-

ции $g_i$ и интегралы от искомых функций. В результате получим следующую систему интегральных уравнений, если $(x, t) \in T_s$ $(s = 0, 1, \ldots, k)$:

$$u_i(P) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t_i(P))\, g_j(\varphi_j(0; 0, t_i(P)) + h_i(t_i(P)) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t_i(P)) \int_0^{t_i(P)} f_j(\varphi_j(\tau; 0, t_i(P)), \tau)\, d\tau + \int_{t_i(P)}^{t} f_i(\varphi_i(\tau; P), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(t_i(P)) \sum_{q=1}^{m} \int_0^{t_i(P)} a_{jq}(\varphi_j(\tau; 0, t_i(P)), \tau)\, u_q(\varphi_j(\tau; 0, t_i(P)), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{=k+1}^{m} \int_0^{t_i(P)} \beta_{ij}(t_i(P), \tau)\, u_j(0, \tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_i(P)}^{t} a_{ij}(\varphi_i(\tau; P), \tau) u_j(\varphi_i(\tau; P), \tau)\, d\tau$$

$$(i = 1, \ldots, s), \tag{9.1}s$$

$$u_i(P) = g_i(\varphi_i(0; P)) + \int_0^t f_i(\varphi_i(\tau; P), \tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_0^t a_{ij}(\varphi_i(\tau; P), \tau)\, u_j(\varphi_i(\tau; P), \tau)\, d\tau \quad (i = s+1, \ldots, m).$$

Интегральные уравнения для $P \in T_s$ $(s = k+1, \ldots, m)$ имеют аналогичный вид. Легко доказывается эквивалентность смешанной задачи и системы интегральных уравнений, если решение непрерывно дифференцируемо.

3. Существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения. Методом последовательных приближений можно доказать, что система интегральных уравнений (9.1) имеет непрерывно дифференцируемое решение в области $\Pi^{(1)}$ и это решение единственно. Доказательство по существу ничем не отличается от доказательства существования и единственности гладкого решения задачи Коши [2] или смешанной задачи, рассмотренной в [3], поэтому мы его приводить не будем. Более сложным методом доказательство дано в [1].

Если точка $P$ переходит с одной стороны характеристики $L_i(0, 0)$ $(i = 1, \ldots, k)$ (соответственно $L_j(l, 0)$, $j = k+1, \ldots, m$) на другую, то число уравнений первого и второго типов меняется. Поэтому приходится проверить непрерывную дифференцируемость решения на линиях $L_i(0, 0)$, $L_j(l, 0)$. Она имеет место, если коэффициенты системы (1.1) и граничных условий (4.1) и начальные данные (3.1) в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$ связаны некоторыми соотношениями. Условия для непрерывности решения получим, если приравнять значения функций $u_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ в точке $(0, 0)$ и значения функций $u_j$ $(j = k+1, \ldots, m)$ в точке $(l, 0)$, вычисленные при помощи граничных условий (4.1) и начальных условий (3.1). Вывод условий для непрерывной дифференцируемости немного сложнее. Таким образом

достаточными условиями для непрерывности решения системы уравнений (9.1) во всем прямоугольнике $\overline{\Pi}$ являются условия

$$g_i(0) = \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{ij}(0)\, g_j(0) + h_i(0) \quad (i = 1, \ldots, k),$$
$$g_i(l) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij}(0)\, g_j(l) + h_i(0) \quad (i = k+1, \ldots, m), \tag{10.1}$$

а для непрерывной дифференцируемости — условия (10.1) и

$$\frac{dg_s(0)}{dx} = \frac{1}{\lambda_s(0,0)} \left\{ \sum_{j=k+1}^{m} \alpha_{sj}(0) \left[ \lambda_j(0,0) \frac{dg_j(0)}{dx} + \sum_{r=1}^{m} a_{jr}(0,0) g_r(0) + f_j(0,0) \right] - \right.$$
$$- \sum_{j=1}^{m} a_{sj}(0,0)\, g_j(0) - f_s(0,0) + \sum_{j=k+1}^{m} \frac{d\alpha_{sj}(0)}{dt} g_j(0) + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_{sj}(0,0)\, g_j(0) +$$
$$\left. + \frac{dh_s(0)}{dt} \right\} \quad (s = 1, \ldots, k),$$
$$\frac{dg_s(l)}{dx} = \frac{1}{\lambda_s(l,0)} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{sj}(0) \left[ \lambda_j(l,0) \frac{dg_j(l)}{dx} + \sum_{r=1}^{m} a_{jr}(l,0)\, g_r(l) + f_j(l,0) \right] - \right. \tag{11.1}$$
$$- \sum_{j=1}^{m} a_{sj}(l,0)\, g_j(l) - f_s(l,0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d\alpha_{sj}\, d(0)}{dt} g_j(l) + \sum_{j=1}^{k} \beta_{sj}(0,0)\, g_j(l) +$$
$$\left. + \frac{dh_s(0)}{dt} \right\} \quad (s = k+1, \ldots, m).$$

В дальнейшем условия (10.1) и (11.1) мы будем называть условиями согласования. Они, очевидно, и необходимы для существования у задачи (1.1), (3.1), (4.1) непрерывно дифференцируемого решения. Для удобства изложения сформулируем полученные результаты в виде леммы.

Основная лемма 1. *Смешанная задача* (1.1), (3.1), (4.1) *имеет гладкое (т. е. непрерывно дифференцируемое) решение в прямоугольнике* $\overline{\Pi}$ *и это решение единственно, если* $h_i(t)$, $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — *гладкие функции, а функции* $f_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ *непрерывны и имеют непрерывную производную по* $x$ *и выполнены условия согласования* (10.1), (11.1).

4. Оценки для решения. Непрерывная зависимость. Оценки для решения смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) получаются при помощи метода последовательных приближений. Выпишем некоторые из них.

$$|u_i(x,t)| \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{m} \left[ \max_{[0,l]} |g_j(x)| + \max_{[0,T]} |h_j(t)| + \right.$$
$$\left. + \max_{P \in \overline{\Pi}} \int_0^T |f_j(\varphi_j(t; P), t)|\, dt \right] \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{12.1}$$

$$|u_i(x, t)| \leqslant C_2 \sum_{j=1}^{m} [\max_{[0, l]} |g_j(x)| + \max_{[0, T]} |h_j(t)| + \max_{P \in \overline{\Pi}} |f_j(p)|] \, (i=1, \ldots, m), \quad (13.1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial u_i(x, t)}{\partial x}\right| \\ \left|\dfrac{\partial u_i(x, t)}{dt}\right| \end{array}\right\} \leqslant C_3 \sum_{j=1}^{m} \Bigg[ \max_{[0, l]} |g_j(x)| + \max_{[0, T]} |h_j(t)| + \max_{P \in \overline{\Pi}} |f_j(P)| +$$

$$+ \max_{[0, l]} \left|\frac{dg_j(x)}{dx}\right| + \max_{[0, T]} \left|\frac{dh_j(t)}{dt}\right| + \max_{P \in \overline{\Pi}} \int_0^T \left|\frac{\partial f_j(\varphi_j(t; P), t)}{\partial \varphi_j}\right| dt \Bigg] (i=1, \ldots, m), \quad (14.1)$$

$$\max_{[0, T]} \int_0^l |u_i(x, t)| \, dx + \max_{[0, l]} \int_0^T |u_i(x, t)| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{j=1}^{m} \Bigg[ \int_0^l |g_j(x)| \, dx + \int_0^T |h_j(t)| \, dt + \iint_{\overline{\Pi}} |f_j(P)| \, dP \Bigg] \quad (i = 1, \ldots, m). \quad (15.1)$$

Здесь $C_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ — положительные постоянные, не зависящие от $f_i$, $g_i$, $h_i$, а подинтегральные функции полагаются равными нулю всюду, где они не определены. Эти оценки позволяют доказать непрерывную зависимость решения смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) от начальных условий и от неоднородных членов системы и граничных условий, а также перейти к обобщенному решению.

Лемма 2. *Решение смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *непрерывно зависит от начальных данных* (3.1), *неоднородных членов системы* (1.1) *и неоднородных членов граничных условий* (4.1) *в том смысле, что если*

$$\max_{[0, l]} |g_i(x)| < \eta, \quad \max_{[0, T]} |h_i(t)| < \eta, \quad \max_{P \in \overline{\Pi}} \int_0^T |f_i(\varphi_i(\tau; P), \tau)| \, d\tau < \eta \quad (\eta > 0),$$

*то* $u_i|(x, t)| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0, i = 1, \ldots, m)$, *причем* $\varepsilon \to 0$, *если* $\eta \to 0$. Доказательство следует непосредственно из оценки (12.1).

Замечание 1. Аналогично можно показать, используя оценку (14.1), что

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial t}\right| < \varepsilon,$$

если все слагаемые в правой части неравенства (14.1) меньше некоторого $\eta > 0$, причем $\varepsilon \to 0$, если $\eta \to 0$.

Замечание 2. Используя оценку (15.1), устанавливаем, что

$$\max_{[0, T]} \int_0^l |u_i| \, dx + \max_{[0, l]} \int_0^T |u_i| \, dt < \varepsilon,$$

если только слагаемые в правой части (15.1) меньше $\eta > 0$; $\varepsilon \to 0$, если $\eta \to 0$.

## § 2.
## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Пространство функций $L_{11}$. Пусть дана совокупность функций $u(x, t)$, определенных почти всюду на прямоугольнике $\overline{\Pi}$. Предполагаем, что функции $u(x, t)$ измеримы по совокупности переменных и при каждом $t \in [0, T]$ определены почти для всех $x$ и измеримы, а при каждом $x \in [0, l]$ определены почти для всех $t$ и измеримы. Кроме того,

$$\sup_{[0,T]} \int_0^l |u|\,dx + \sup_{[0,l]} \int_0^T |u|\,dt < \infty$$

и функции интегрально непрерывны по $x$ и по $t$, т. е.

$$\int_0^l |u(x, t) - u(x, t_0)|\,dx \to 0, \quad \text{когда } t \to t_0 \ (0 \leqslant t \leqslant T),$$

$$\int_0^T |u(x, t) - u(x_0, t)|\,dt \to 0, \quad \text{когда } x \to x_0 \ (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Введем в рассматриваемой совокупности функций норму при помощи соотношения

$$\|u\| = \sup_{[0,T]} \int_0^l |u|\,dx + \sup_{[0,l]} \int_0^T |u|\,dt. \tag{1.2}$$

Тогда наша совокупность превращается в метрическое пространство, так как все условия, налагаемые на норму, выполнены. Обозначим это пространство через $L_{11}$. При этом функции, совпадающие для каждого $t \in [0, T]$ почти для всех $x$ и для каждого $x \in [0, l]$ почти для всех $t$ мы не будем считать различными. Имеют место следующие простые утверждения [1]:

Лемма 3. *Если на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ последовательность интегрально непрерывных по $x$ и по $t$ функций $u_n(x, t)$ сходится в метрике $L_{11}$ к функции $u$, то предельная функция также интегрально непрерывна по $x$ и по $t$ на $\overline{\Pi}$. (Все эти функции считаются обладающими сформулированными выше свойствами измеримости.)*

Лемма 4. *Пространство $L_{11}$ полное.*

Замечание. Если последовательность функций сходится равномерно, то она сходится и в метрике $L_{11}$.

2. Обобщенное решение. Отметим, что гладкое решение смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \Big[\sum_{i=1}^m u_i \psi_i\Big]_{t=T} dx - \int_0^l \Big[\sum_{i=1}^m u_i \psi_i\Big]_{t=0} dx -$$

$$- \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^m u_i \lambda_i \psi_i\Big]_{x=l} dt + \int_0^T \Big[\sum_{i=1}^m u_i \lambda_i \psi_i\Big]_{x=0} dt +$$

$$+\iint\limits_{\overline{\Pi}} \sum_{i=1}^{m} \left\{ u_i \left[ -\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{\partial (\lambda_i \psi_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \psi_j \right] - f_i \psi_i \right\} dx\, dt = 0 \quad (2.2)$$

для любых гладких функций $\psi_i(x, t)$.

Соотношение (2.2) получается из системы (1.1), если $i$-ое уравнение умножить на функцию $\psi_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и сумму результатов проинтегрировать по прямоугольнику $\overline{\Pi}$ с учетом граничных условий (4.1) и начальных условий (3.1).

Рассмотрим теперь смешанную задачу (1.1), (3.1), (4.1), когда от функций $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ требуется только интегрируемость в смысле Лебега (т. е. $g_i \in L$) на отрезке $[0, l]$, от $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — интегрируемость в смысле Лебега на отрезке $[0, T]$, а от $f_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — интегрируемость в смысле Лебега на прямоугольнике $\overline{\Pi}$. Другими словами, рассмотрим смешанную задачу (1.1), (3.1), (4.1), когда начальные данные и неоднородные члены системы и граничных условий представляют собой суммируемые функции.

Определение. Обобщенным решением смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) будем называть систему функций $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, принадлежащих пространству $L_{11}$, удовлетворяющих интегральному тождеству (2.2) при любых гладких функциях $\psi_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ (интегрирование понимается в смысле Лебега) и удовлетворяющих начальным условиям (3.1) и граничным условиям (4.1) почти всюду. Очевидно, что если существует обычное гладкое решение, то оно одновременно является обобщенным.

Теорема 1. *Если функции, входящие в постановку смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *удовлетворяют требованиям, сформулированным в начале п. 2, то обобщенное решение этой задачи существует.*

Доказательство. Возьмем последовательность гладких функций $g_i^{(n)}(x)$, сходящуюся на $[0, l]$ в метрике $L$ к функции $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$, последовательность гладких функций $h_i^{(n)}(t)$, сходящуюся на $[0, T]$ в метрике $L$ к функции $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, и последовательность гладких функций $f_i^{(n)}(x, t)$, сходящуюся в метрике $L$ на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ к функции $f_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, причем так, чтобы удовлетворялись условия согласования (10.1), (11.1). Например, аппроксимируем функции $g_i, h_i, f_i$ такими гладкими функциями $g_i^{(n)}, h_i^{(n)}, f_i^{(n)}$, сходящимся в метрике $L$ соответственно к функциям $g_i, h_i, f_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, что $g_i^{(n)}$ равны нулю в некоторой достаточно малой окрестности точек $x = 0$, $x = l$, $h_i^{(n)}$ равны нулю в некоторой достаточно малой окрестности точки $t = 0$ и $f_i^{(n)}$ равны нулю в некоторой достаточно малой окрестности точек $(0, 0)$ и $(l, 0)$, причем диаметры этих окрестностей стремятся к нулю, когда $n \to \infty$. Такие функции, очевидно, существуют.

Рассмотрим теперь смешанную задачу (1.1), (3.1), (4.1), когда неоднородные члены заменены соответственно функциями $f_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$ $h_i^{(n)}$. Такая смешанная задача имеет непрерывно дифференцируемое решение, обозначим его через $u_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Для функций $u_i^{(n_1)} - u_i^{(n_2)}$ справедливо неравенство (15.1). Из этого неравенства следует, что последовательность $u_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является фундаментальной последовательностью в

пространстве $L_{11}$. Предел его обозначим через $u_i$. Переходя в неравенстве (15.1) к пределу, когда $n \to \infty$, находим, что

$$\max_{[0,l]} \int_0^T |u_i|\,dt + \max_{[0,T]} \int_0^l |u_i|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sum_{j=0}^{m} \left[ \int_0^l |g_j(x)|\,dx + \int_0^T |h_j(t)|\,dt + \iint_{\Pi} |f_j(P)|\,dP \right] \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Для функций $u_i^{(n)}$ тождество (2.1) имеет место. Переходя к пределу при $n \to \infty$ устанавливаем, что предельные функции удовлетворяют тождеству (2.1). Удовлетворение начальным условиям (3.1) и граничным условиям (4.1) также устанавливается при помощи предельного перехода $n \to \infty$. Значит, функции $u_i\,(i = 1, \ldots, m)$ являются обобщенным решением смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1). Теорема доказана.

Сформулируем теперь простую лемму, которой мы будем пользоваться при доказательстве единственности обобщенного решения.

Лемма 5. *Пусть функция $\psi(x, t)$ принадлежит пространству $L_{11}$ и дано, что $\iint_{\Pi} \psi(x, t)\, F(x, t)\, dx\, dt = 0$ для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(x, t)$, для которой $F(0, T) = F(l, T) = 0$. Тогда $\psi(x, t) \equiv 0$ (как элемент пространства $L_{11}$).*

Эта лемма вытекает, например, из теоремы 5 книги [4] (стр. 250) и интегральной непрерывности функции $\psi$.

Теорема 2. *Если дополнительно к предположениям п. 1 § 1 дано, что функции $\lambda_i(x, t)$ имеют гладкую производную по $x$, а функции $\beta_{ij}(t, \tau)$ — непрерывную производную по $\tau$, то существует не более одного обобщенного решения смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1).

Доказательство. Предположим, что мы имеем два обобщенных решения рассматриваемой смешанной задачи $u_i^{(1)}$ и $u_i^{(2)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Их разность $u_i^{(1)} - u_i^{(2)} = u_i$ удовлетворяет тождеству (2.2) при $f_i(x, t) = 0$ и $u_i(x, 0) = 0$ и однородным начальным и граничным условиям почти всюду, т. е.

$$\int_0^l \Big[ \sum_{i=1}^{m} u_i\, \psi_i \Big]_{t=T} dx - \int_0^T \Big[ \sum_{i=0}^{m} u_i\, \lambda_i\, \psi_i \Big]_{x=l} dt + \int_0^T \Big[ \sum_{i=1}^{m} u_i\, \lambda_i\, \psi_i \Big]_{x=0} dt +$$

$$+ \iint_{\Pi} \sum_{i=1}^{m} u_i \Big[ -\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \frac{\partial (\lambda_i \psi_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, \psi_j \Big] dx\, dt = 0, \tag{3.2}$$

$$u_i(x, 0) = 0, \tag{4.2}$$

$$u_i(0, t) = \sum_{j=k+1}^{m} \Big[ \alpha_{ij}(t)\, u_j(0, t) + \int_0^t \beta_{ij}(t, \tau)\, u_j(0, \tau)\, d\tau \Big] \quad (i = 1, \ldots, k),$$

$$u_i(l, t) = \sum_{j=1}^{k} \Big[ \alpha_{ij}(t)\, u_j(l, t) + \int_0^t \beta_{ij}(t, \tau)\, u_j(l, \tau)\, d\tau \Big] \quad (i = k+1, \ldots, m). \tag{5.2}$$

Подставляя в тождество (3.2) выражения $u_i(0, t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ и $u_i(l, t)$ $(l = k+1, \ldots, m)$ из (5.2) и меняя порядок суммирования, а также интегрирования, получим

$$\int_0^l \Big[\sum_{i=1}^m u_i\ \psi_i\Big]_{t=T} dx - \int_0^T \sum_{i=1}^k u_i(l, t)\Big[\lambda_i(l, t)\,\psi_i(l, t) +$$

$$+ \sum_{j=k+1}^m \alpha_{ji}(t)\,\lambda_j(l, t)\,\psi_j(l, t) + \sum_{j=k+1}^m \int_t^T \beta_{ji}(\tau, t)\,\lambda_j(l, \tau)\,\psi_j(l, \tau)\,d\tau\Big]dt +$$

$$+ \int_0^T \sum_{i=k+1}^m u_i(0, t)\Big[\lambda_i(0, t)\,\psi_i(0, t) + \sum_{j=1}^k \alpha_{ji}(t)\,\lambda_j(0, t)\,\psi_j(0, t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^k \int_t^T \beta_{ji}(\tau, t)\,\lambda_j(0, \tau)\,\psi_j(0, \tau)\,d\tau\Big]dt +$$

$$+ \iint_{\overline{\Pi}} \sum_{i=1}^m u_i\Big[-\frac{\partial\psi_i}{dt} + \frac{\partial(\lambda_i\,\psi_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^m a_{ji}\ \psi_j\Big]dx\,dt = 0. \qquad (6.2)$$

Выберем в тождестве (6.2) за функции $\psi_i$ решение сопряженной смешанной задачи

$$-\frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \frac{\partial(\lambda_i\ \psi_i)}{\partial x} - \sum_{j=1}^m a_{ji}\ \psi_j = F_i(x, t)\ \ (i = 1, \ldots, m), \qquad (7.2)$$

$$\psi_i(x, T) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \qquad (8.2)$$

$$\lambda_i(0, t)\,\psi_i(0, t) + \sum_{j=1}^k\Big[\alpha_{ji}(t)\,\lambda_j(0, t)\,\psi_j(0, t) + \int_t^T \beta_{ji}(\tau, t)\,\lambda_j(0, \tau)\,\psi_j(0, \tau)d\tau = 0 \quad (i = k+1, \ldots, m),$$

$$\lambda_i(l, t)\,\psi_i(l, t) + \sum_{j=k+1}^m\Big[\alpha_{ji}(t)\,\lambda_j(l, t)\,\psi_j(l, t) + \int_t^T \beta_{ji}(\tau, t)\,\lambda_j(l, \tau)\,\psi_j(l, \tau)\,d\tau = 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \qquad (9.2)$$

в прямоугольнике $\overline{\Pi}$ при любых гладких функциях $F_i(x, t)$, для которых $F_i(0, T) = F_i(l, T) = 0$.

Системы (1.1) и (7.2) имеют одни и те же характеристики. Смешанная задача (7.2), (8.2), (9.2) отличается от смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) тем, что мы решаем первую „в противоположном направлении", т. е. начальные условия нам заданы при $t = T$ и мы ищем решение при меньших значениях $t : 0 \leqslant t < T$. Поэтому на прямой $x = 0$ заданы $m - k$ граничных условий, которые можно разрешить относительно функций $\psi_i$ $(i = k+1, \ldots, m)$, так как функции $\lambda_i \neq 0$, а на прямой $x = l$ заданы $k$ условий, которые можно разрешить относительно функций $\psi_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. В силу того, что $F_i(0, T) = F_i(l, T) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ условия согласования в точках $(0, T)$ и $(l, T)$ типа (10.1) и (11.1) выполнены. Значит по основной лемме 1 смешанная задача (7.2), (8.2), (9.2) имеет гладкое решение.

Если функции $\psi_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ являются решением смешанной задачи (7.2), (8.2), (9.2), то (6.2) превращается в тождество

$$\sum_{i=1}^{m} \iint_{\overline{\Pi}} u_i(x, t) F_i(x, t)\, dx\, dt = 0.$$

Но это тождество равносильно системе тождеств

$$\iint_{\overline{\Pi}} u_i(x, t) F_i(x, t)\, dx\, dt = 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{10.2}$$

Из (10.2) и леммы 4 следует, что $u_i \equiv 0$ или

$$u_i^{(1)} \equiv u_i^{(2)}$$

в пространстве $L_{11}$. Теорема доказана.

Дадим еще одно определение обобщенного решения.

Определение. Пусть функции $f_i$, $g_i$ и $h_i$ удовлетворяют требованиям, сформулированным в начале п. 2. Тогда систему функций $u_i$ $(i=1, \ldots, m)$ из пространства $L_{11}$ мы будем называть обобщенным решением смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1), если можно найти последовательность гладких функций $g_i^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся в $L$ к $g_i(x)$ на $[0, l]$ $(i = 1, \ldots, m)$, последовательность гладких функций $h_i^{(n)}(t)$, сходящуюся в $L$ к $h_i(t)$ на $[0, T]$, последовательность непрерывных и имеющих непрерывную производную по $x$ функций $f_i^{(n)}(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся в $L$ к $f_i(x, t)$ на $\overline{\Pi}$ и последовательность гладких функций $u_i^{(n)}(x, t)$ $(n=1, 2, \ldots)$, сходящуюся в метрике $L_{11}$ к $u_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$, причем функции $u_i^{(n)}(x, t)$ являются решением смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1), если вместо $f_i(x, t)$, $g_i(x)$, $h_i(t)$ написать соответственно $f_i^{(n)}(x, t)$, $g_i^{(n)}(x)$, $h_i^{(n)}(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Каждое обобщенное решение поставленной смешанной задачи в настоящем смысле будет обобщенным решением и в предыдущем смысле. Далее, из доказательства теоремы 1 легко следует, что в условиях этой теоремы обобщенное решение задачи в настоящем смысле существует и единственно. Отсюда следует, что при дополнительных предположениях теоремы 2 оба определения обобщенного решения равносильны.

Впредь мы будем понимать обобщенное решение во втором смысле.

## § 3.

## СВОЙСТВА ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ.

Теорема 3. *Обобщенное решение смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *как элемент пространства* $L_{11}$ *непрерывно зависит от начальных данных* (3.1), *неоднородных членов системы* (1.1) *и неоднородных членов граничных условий* (4.1), *изменение которых измеряется в метрике* $L$.

Доказательство сразу следует из неравенства (15.1) и ничем не отличается от доказательства замечания 2 к лемме 2.

Для вывода дальнейших свойств обобщенного решения будем пользо-

ваться понятием осреднения суммируемой функции с помощью соответствующего ядра [5], [6]. Введем функцию $\omega_h(x)$, определенную по закону

$$\omega_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varkappa h} e^{-\frac{x^2}{h^2-x^2}}, & \text{когда } 0 \leqslant |x| < h, \\ 0, & \text{когда } h \leqslant |x| \leqslant \infty, \end{cases} \qquad (h > 0)$$

где

$$\varkappa = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} dx.$$

Функция $\omega_h(x)$ непрерывна на всей прямой вместе со своими производными всех порядков. В точках $x = \pm h$ сама функция и все ее производные равны нулю.

Пусть $f(x)$ [соответственно $F(x, t)$] — суммируемая функция на всей оси [плоскости]. Средняя функция $f_h(x)$ [$F_h(x, t)$] составляется так:

$$f_h(x) = \int_{x-h}^{x+h} f(\xi)\, \omega_h(\xi - x)\, d\xi,$$

$$F_h(x, t) = \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{t-h}^{t+h} F(\xi, \vartheta)\omega_h(\xi - x)\omega_h(\vartheta - t)\, d\vartheta$$

или

$$F_h(x, t) = \int_{-h}^{h} d\xi \int_{-h}^{h} F(x + \xi,\ t + \vartheta)\omega_h(\xi)\omega_h(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Средняя функция имеет непрерывные производные всех порядков. Кроме того, следует отметить, что

$$\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{t-h}^{t+h} \omega_h(\xi - x)\omega_h(\vartheta - t)\, d\vartheta = 1.$$

Лемма 6. *Для любой гладкой функции $g(x)$, заданной на сегменте $[0, l]$, можно построить последовательность гладких функций $g^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, что $g^{(n)}(0) = g(0)$ [соответственно $g^{(n)}(l) = g(l)$] и производная $\frac{dg^{(n)}(x)}{dx}$ в точке $x = 0$ $(x = l)$ принимает заданное значение $a$. Кроме того, функция $g^{(n)}(x)$ совпадает с $g(x)$ на сегменте $[\alpha_n, l]$ $([0, \beta_n])$, причем $\alpha_n \to +0$ $(\beta_n \to l - 0)$, когда $n \to \infty$, а на промежутке $[0, \alpha_n]$ $([\beta_n, l])$ $|g(x) - g^{(n)}(x)| < \varepsilon_n$ и $\varepsilon_n \to +0$, когда $n \to \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций $q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенных на сегменте $[0, l]$,

$$q_n(x) = \begin{cases} bx\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)^{n+1}, & \text{когда } 0 \leqslant x \leqslant \alpha_n, \\ 0, & \text{когда } \alpha_n < x \leqslant l. \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Последовательность

$$g^{(n)}(x) = g(x) + q_n(x) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

является искомой, если $b = a - g'(0)$, так как при этом значении $b\, g^{(n)}(0) = g(0)$ и $\frac{dg^{(n)}(0)}{dx} = a$. Аналогично строится последовательность, если условия заданы при $x = l$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть функция $f(x, t)$ измерима в прямоугольнике $\overline{\Pi}$ и, кроме того, интегрально непрерывна вдоль $i$-го семейства характеристик, т. е.*

$$\int_0^T |f(\varphi_i(t; x_1, 0), t) - f(\varphi_i(t; x_2, 0), t)|\, dt \to 0,$$

*когда $x_2 \to x_1$. (При этом здесь, как и далее, мы считаем функцию $\lambda_i(x, t)$ продолженной гладким образом на всю полосу $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < \infty$, причем $\inf|\lambda_i| > 0$, а характеристику мы определяем ее точкой пересечения с осью $0x$ и предполагаем, что $f \equiv 0$ вне $\overline{\Pi}$). Тогда для функции $f(x, t)$ можно построить последовательность гладких функций $f^{(n)}(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящуюся к функции $f(x, t)$ в интегральном смысле вдоль $i$-го семейства характеристик, т. е.*

$$\int_0^T |f(\varphi_i(t; x, 0), t) - f^{(n)}(\varphi_i(t; x, 0), t)|\, dt \to 0,$$

*когда $n \to \infty$ (равномерно по $x$).*

Доказательство. Введем вместо $x$, $t$ новые переменные $x'$, $t'$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} x &= \varphi_i(t'; x', 0), \\ t &= t'. \end{aligned} \tag{11.2}$$

Замена переменных (11.2) взаимно однозначна. Она переводит измеримую функцию $f(x, t)$ в измеримую функцию $\overline{f}(x', t') = f(\varphi_i(t'; x', 0), t')$ и интегрально непрерывную вдоль $i$-го семейства характеристик функцию в функцию интегрально непрерывную по $x'$ вдоль семейства прямых $x' = \text{const}$, и наоборот.

Если положить функцию $\overline{f}(x', t')$ вне области ее определения — образа прямоугольника $\overline{\Pi}$ — равной нулю, то свойство интегральной непрерывности по $x'$ после этого сохранится. Построим для функции $\overline{f}(x', t')$ среднюю функцию $\overline{f}_h(x', t')$. Тогда, если $h \to 0$, то равномерно по $x'$

$$\int_0^T |\overline{f}(x', t') - \overline{f}_h(x', t')|\, dt' \to 0,$$

что доказывается совершенно аналогично лемме 8 работы [6].

Последовательность

$$f^{(n)}(x, t) = \overline{f}_{\frac{1}{n}}(\varphi_i(0; x, t), t) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

искомая. Действительно, функции $f^{(n)}(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по $x$ и по $t$ и, кроме того,

$$\int_0^T |f(\varphi_i(t';\ x',\ 0),\ t') - f^{(n)}(\varphi_i(t';\ x',\ 0),\ t')|\,dt' =$$

$$= \int_0^T |\overline{f}(x',\ t') - \overline{f}_{\frac{1}{n}}(x',\ t')|\,dt' \to 0,$$

когда $n \to \infty$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть $g_i(x)$ и $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывные функции соответственно на сегментах $[0, l]$ и $[0, T]$, а функции $f_i(x, t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ измеримы на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ и интегрально непрерывны вдоль i-го семейства характеристик, т. е.*

$$\int_0^T |f_i(\varphi_i(t;\ x_1,\ 0),\ t) - f_i(\varphi_i(t;\ x_2,\ 0),\ t)|\,dt \to 0,$$

*когда $x_2 \to x_1$. Пусть далее выполнены условия согласования* (10.1).

*Тогда обобщенное решение смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *непрерывно на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ (точнее говоря, среди эквивалентных в смысле $L_{11}$ функций, любой из которых равно обобщенное решение, имеется одна непрерывная).*

Доказательство. Построим для каждого $i = 1, \ldots, m$ последовательность гладких функций $g_{i(n)}(x)$, равномерно сходящуюся на сегменте $[0, l]$ к функции $g_i(x)$, причем $g_{i(n)}(0) = g_i(0)$, $g_{i(n)}(l) = g_i(l)$. Далее построим для функции $h_i(t)$ последовательность непрерывно дифференцируемых функций $h_i^{(n)}(t)$, сходящуюся равномерно на сегменте $[0, T]$ к функции $h_i(t)$, требуя, чтобы $h_i^{(n)}(0) = h_i(0)$. По лемме 7 для функции $f_i(x, t)$ можно построить последовательность непрерывно дифференцируемых функций $f_i^{(n)}(x, t)$, для которых

$$\int_0^T |f_i(\varphi_i(t;\ x,\ 0),\ t) - f_i^{(n)}(\varphi_i(t;\ x,\ 0),\ t)|\,dt \to 0,$$

когда $n \to \infty$ (равномерно по $x$).

Подставим в правую часть условий согласования (11.1) вместо значений функций $g_i$ и $h_i$ и их производных соответственно при $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$ значения функций $g_{i(n)}$, $h_i^{(n)}$ и их производных в тех же точках и вместо значений функций $f_i$ в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$ соответствующие значения функций $f_i^{(n)}$. Вычислим значения правых частей условий согласования (11.1). Потом, по лемме 6 для функции $g_{i(n)}(x)$ построим непрерывно дифференцируемую функцию $g_i^{(n)}(x)$, производная которой принимает в точке $x = 0$ $(x = l)$ соответствующее вычисленное значение и которая достаточно мало отличается от $g_{i(n)}(x)$. (Так, чтобы при $n \to \infty$ равномерно $g_i^{(n)}(x) \to g_i(x)$).

Рассмотрим смешанную задачу (1.1), (3.1), (4.1), когда вместо функций $f_i$, $g_i$, $h_i$ подставлены соответственно функции $f_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$, $h_i^{(n)}$. По лемме 1 такая смешанная задача имеет непрерывно дифференцируемое решение $u_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$, так как условия согласования (10.1) и (11.1) для функций $f_i^{(n)}$, $g_i^{(n)}$, $h_i^{(n)}$ выполнены. Из неравенства (12.1) следует, что последовательность $u_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно. Значит, предельная функ-

ция $u_i$ непрерывна в силу непрерывности функций $u_i^{(n)}$. Но согласно неравенству (15.1) и в силу полноты пространства $L_{11}$ последовательность $\{u_i^{(n)}\}$ сходится и в метрике $L_{11}$ к функции $u_i$. Значит, обобщенное решение $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) непрерывно. Теорема доказана.

Лемма 8. *Пусть функция $f(x, t)$ непрерывна на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ и имеет в $\Pi$ обобщенную (в смысле С. Л. Соболева) производную по $x$ $\Phi(x, t)$, которая интегрально непрерывна вдоль i-го семейства характеристик. (Здесь предполагается, что мы продолжили функцию $\Phi(x, t)$ на области $x < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $x > l$, $0 \leqslant t \leqslant T$, полагая ее равной нулю.)*

*Тогда для функции $f(x, t)$ можно построить последовательность гладких функций $f^{(n)}(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которая равномерно сходится к функции $f(x, t)$ на $\overline{\Pi}$, причем последовательность, составленная из производных по $x$ от функций $f^{(n)}$: $\frac{\partial f^{(n)}(x, t)}{\partial x}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходится к $\Phi(x, t)$ в интегральном смысле вдоль i-го семейства характеристик (при этом $\frac{\partial f^{(n)}}{\partial x}$ также полагается равной нулю всюду вне $\overline{\Pi}$).*

Доказательство. Продолжим функцию $f(x, t)$ за прямые $x = 0$ и $x = l$ следующим образом. Положим $f(x, t)$ равной $f(0, t)$ для всех $x < 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и равной $f(l, t)$ для всех $x > l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Для определенности предположим, что $i \leqslant k$. Обозначим через $S$ область, ограниченную линиями $x = \varphi_i(t; 0, T)$, $x = \varphi_i(t; l, 0)$, $t = 0$, $t = T$, и положим $a = |\varphi_i(0; 0, T)|$. Функция $f(x, t)$ в области $S$ имеет обобщенную производную по $x$, причем вне $\overline{\Pi}$ эта производная $\Phi(x, t)$ равна нулю (это сразу вытекает из следствия леммы 5 работы [6]). Введем новые переменные $x'$, $t'$ при помощи соотношений (11.2). Область $\overline{S}$ в новой системе координат переходит в прямоугольник $\overline{S}' : -a \leqslant x' \leqslant l$, $0 \leqslant t' \leqslant T$. На основании определения обобщенной производной легко непосредственно проверить, что преобразованная функция $\overline{f}(x', t') = f(\varphi_i(t'; x', 0), t')$ в области $\overline{S}'$ имеет обобщенную производную по $x'$, равную $\overline{\Phi}(x', t') = \Phi \frac{\partial x}{\partial x'}$. В силу продолжения функции $f(x, t)$, функция $\overline{f}(x', t')$ определена в любом прямоугольнике $-h' - a \leqslant x' \leqslant l + h'$ $(h' > 0$, $0 \leqslant t' \leqslant T)$ и имеет там обобщенную производную по $x'$. Продолжим функцию $\overline{f}(x', t')$ за прямые $t = 0$ и $t = T$ четным образом. Рассмотрим прямоугольник $\overline{S}_1 : -h' - a \leqslant x' \leqslant l + h'$, $-h' \leqslant t' \leqslant T + h'$. В прямоугольнике $\overline{S}_1$ функция $\overline{f}(x', t')$ имеет обобщенную производную $\overline{\Phi}(x', t')$ по $x'$. Составим среднюю функцию $\overline{f}_h(x', t')$ $(h < h')$. Так как $\overline{f}(x', t')$ — непрерывная функция, то $\overline{f}_h(x', t') \to \overline{f}(x', t')$ равномерно, когда $h \to 0$. Кроме того, в прямоугольнике $\overline{S}'$ производная по $x'$ от средней функции $\overline{f}_h(x', t')$ равна средней функции от обобщенной производной по $x'$, т. е. $\overline{\Phi}_h(x', t')$. Как было указано при доказательстве леммы 7,

$$\int_0^T |\overline{\Phi}(x', t') - \overline{\Phi}_h(x', t')|\, dt' \to 0, \quad \text{когда } h \to 0.$$

Последовательность $f^{(n)}(x, t) = \overline{f}_{\frac{1}{n}}(\varphi_i(0; x, t), t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ является искомой, так как $f^{(n)}(x, t) \to f(x, t)$ равномерно, когда $h \to 0$ и, кроме того

$$\int_0^T \left| \Phi\left(\varphi_i(t;\ x',\ 0),\ t\right) - \frac{\partial f^{(n)}(\varphi_i(t;\ x',\ 0),\ t)}{\partial \varphi_i} \right| dt =$$

$$= \int_0^T \frac{\partial x'}{\partial x} \left| \overline{\Phi}(x',\ t) - \frac{\partial}{\partial x'} \overline{f}_{\frac{1}{n}}(x',\ t) \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \max \frac{\partial x'}{\partial x} \int_0^T \left| \overline{\Phi}(x',\ t) - \overline{\Phi}_{\frac{1}{n}}(x',\ t) \right| dt \to 0$$

(равномерно по $x'$), когда $h \to 0$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Пусть $g_i(x)$ и $h_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ гладкие функции соответственно на сегментах $[0, l]$ и $[0, T]$, а $f_i(x, t)$ — непрерывные функции на прямоугольнике $\overline{\Pi}$, имеющие в $\Pi$ обобщенную производную $\Phi_i(x, t)$ по $x$, которая интегрально непрерывна вдоль $i$-го семейства характеристик. Пусть далее, выполнены условия согласования* (10.1) и (11.1).

*Тогда обобщенное решение смешанной задачи* (1.1), (3.1), (4.1) *непрерывно дифференцируемо на прямоугольнике $\overline{\Pi}$ и является обычным решением.*

Доказательство. По лемме 8 построим для функции $f_i(x, t)$ последовательность гладких функций $f_i^{(n)}(x, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которая равномерно сходится к функции $f_i(x, t)$ на $\overline{\Pi}$ и для которой последовательность производных по $x$ сходится к $\Phi_i(x, t)$ в интегральном смысле вдоль $i$-го семейства характеристик. Подставим в правые части условий согласования (11.1) вместо значений функций $f_i(x, t)$ в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$ соответствующие значения функций $f_i^{(n)}(x, t)$ и для функций $g_i(x)$ подберем по лемме 6 такие непрерывно дифференцируемые функции $g_i^{(n)}(x)$, которые достаточно мало отличаются от $g_i(x)$ и для которых условия согласования (10.1) и (11.1) выполнены.

Рассмотрим смешанную задачу $(1.1)_n$, $(3.1)_n$, $(4.1)_n$, где вместо функций $g_i$ и $f_i$ подставлены функции $g_i^{(n)}$ и $f_i^{(n)}$. Такая смешанная задача имеет непрерывно дифференцируемое решение $u_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ (лемма 1). Так как $f_i^{(n)} \to f_i$ равномерно при $n \to \infty$, то и последовательность $g_i^{(n)}$ можно выбрать так, что $g_i^{(n)} \to g_i$ и $\frac{dg_i^{(n)}}{dx} \to \frac{dg_i}{dx}$ равномерно, когда $n \to \infty$. Из неравенства (12.1) следует, что последовательность $u_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно. В силу непрерывности функций $u_i^{(n)}$ предельная функция $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывна. А в силу неравенства (14.1) последовательности $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial t}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ тоже сходятся равномерно. Значит, функция $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ имеет производные по $x$ и по $t$ и эти производные непрерывны в силу гладкости функций $u_i^{(n)}$. Но согласно оценке (15.1) последовательность $u_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится и в метрике $L_{11}$ к функции $u_i$. Значит обобщенное решение $u_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ смешанной задачи (1.1), (3.1), (4.1) непрерывно дифференцируемо, а предельный переход в соотношениях $(1.1)_n$, $(3.1)_n$ и $(4.1)_n$ показывает, что это обобщенное решение является обычным гладким решением. Теорема доказана.

1 VI 1957 *Кафедра общей математики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Аболиня, В. Э.* О смешанной задаче для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными на плоскости. Диссертация. Рига, 1954.

[2]. *Петровский, И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. Изд. 2-е, М., 1953.

[3]. *Campbell, L. L.* and *Robinson, A.* Mixed problems for hyperbolic partial differential equations. Proc. London Math. Soc., Vol. V, N 18, 1955, 129—147.

[4]. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики, т. 5. М.-Л.; 1947.

[5]. *Соболев, С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., 1950.

[6]. *Мышкис, А. Д.* Простейшая краевая задача для обобщенных систем телеграфных уравнений. Мат. сб., т. 31 (73) : 2, 1952, 335—352.

## PAR JAUKTA VEIDA PROBLĒMU LINEĀRAI HIPERBOLISKAI SISTĒMAI PLAKNĒ

*V. Āboliņa un A. Miškis*

(Kopsavilkums)

Rakstā formulēti pietiekamie nosacījumi jaukta veida problēmas (1. 1), (3. 1), (4.1) gluda un vispārināta atrisinājuma eksistencei un unitātei. Noskaidrotas dažas vispārinātā atrisinājuma īpašības.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В $n$-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*Э. И. ЛЕПИНА*

## § 1.
## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Теория несобственных интегралов является одним из важнейших отделов теории интегрирования. Однако теория несобственных интегралов для функций $n \geqslant 2$ переменных почти совершенно не разработана. Встречаются лишь отдельные случаи применения несобственных интегралов в пространстве, как, например, интеграл в смысле главного значения по Коши. Это объясняется, повидимому, существенным отличием $n$-мерного случая от одномерного. Так, если функция задана на $n$-мерной области $G$ и суммируема по каждой компактной части $G$ и если существует предел интеграла от $f$ по таким частям (с как угодно гладкой границей) при произвольной аппроксимации $G$, то $f$ является в $G$ суммируемой. Это свойство показывает, что в $n$-мерном случае нельзя пользоваться произвольной аппроксимацией области $G$, если стремиться к тому, чтобы класс несобственно интегрируемых функций был шире класса суммируемых функций. Таким образом, мы приходим к необходимости рассматривать несобственный интеграл как результат предельного перехода при определенном способе или классе таких способов аппроксимации области $G$. Поэтому нам кажется естественным принять следующее определение несобственного интеграла.

Определение 1. *Пусть для $n$-мерной области $G$ определен класс* $\mathrm{P} = \{\Pi_\alpha\}$ *последовательностей* $\Pi_\alpha$ *ограниченных измеримых множеств* $P_{\alpha i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$*, *содержащихся вместе с замыканием в* $G\,(\overline{P}_{\alpha i} \subset G)$; *при этом каждая из последовательностей* $\Pi_\alpha$ *обладает следующим свойством: всякое компактное множество* $F \subset G$ *попадает во все* $P_{\alpha i}$, *начиная с некоторого номера* $i$, *т. е. при* $i \geqslant i_0(F, \alpha)$. *Пусть далее в области* $G$ *определена измеримая действительная функция* $f(A)$ $(A \in G)$, *суммируемая на всяком компактном множестве* $F \subset G$. *Тогда если для любой последовательности* $\Pi_\alpha \in \mathrm{P}$ *существует не зависящий от* $\alpha$ *предел*

$$\lim_{i \to \infty} \int\limits_{P_{\alpha i}} f\,dG \quad **$$

*(конечный или бесконечный), то мы будем говорить, что существует несобственный интеграл от функции* $f$ *по области* $G$ *относительно класса* $\mathrm{P}$ *и обозначать его* $\int\limits_G f\,d(\mathrm{P})$.

---

* Эти множества $P_{\alpha i}$ мы будем считать определенными с точностью до множества меры нуль.

** Здесь и всюду в дальнейшем под $\int\limits_X f\,dG\,(\overline{X} \subset G)$ будем понимать интеграл Лебега.

*Если этот предел конечный, то функцию $f$ будем называть интегрируемой по области $G$ относительно класса* P.

*Совокупность всех функций $f$, имеющих несобственный интеграл (интегрируемых) по области $G$ относительно класса* P *обозначим через* $\overline{\Phi}(\mathrm{P})$ *(соответственно* $\Phi(\mathrm{P})$*).*

Специфика $n$-мерного случая состоит в том, что в отличие от одномерного случая, здесь нет способа несобственного интегрирования (т. е. выбора класса P), который можно было бы считать наиболее естественным; поэтому различные способы несобственного интегрирования нужно рассматривать как равноправные.

Впредь буквы П и P (быть может, с индексами) будут применяться только для последовательностей множеств и классов таких последовательностей, обладающих описанными выше свойствами.

## § 2.

## ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Доказательства приводимых в этом параграфе свойств ввиду их простоты мы опускаем.

Свойство 1. *Если* $\mathrm{P}_1 \supseteq \mathrm{P}_2$, *то* $\overline{\Phi}(\mathrm{P}_1) \subseteq \overline{\Phi}(\mathrm{P}_2)$.

Свойство 2. *Если функция $f$ имеет в области $G$ интеграл Лебега (конечный или бесконечный), то существует несобственный интеграл по области $G$ относительно любого класса* P *и*

$$\int_G f\,d(\mathrm{P}) = \int_G f\,dG.$$

Свойство 3 (аналог теоремы Римана для условно сходящихся рядов). *Для любой функции $f$, для которой не существует ни конечный, ни бесконечный интеграл Лебега, и любого действительного числа $\gamma$ найдется последовательность* П *такая, что* $f \in \Phi(\Pi)$ *и* $\int_G f\,d(\Pi) = \gamma$.

Свойство 4. *Для любой последовательности* $\Pi = \{P_i\}$ *существует непрерывная функция $f$, для которой несобственный интеграл относительно этой последовательности не существует.*

Таким образом, класс функций, имеющих несобственный интеграл по области $G$, всегда у́же класса всех непрерывных в $G$ функций. Каким условиям должен удовлетворять класс функций, чтобы он мог служить классом $\overline{\Phi}(\mathrm{P})$ для некоторого P, а также каким условиям должен удовлетворять функционал, чтобы он мог являться значением интеграла для некоторого P, неизвестно.

Свойство 5. *Пусть функции $f_1$ и $f_2$ принадлежат классу* $\Phi(\mathrm{P})$ *и $c_1$ и $c_2$ — произвольные действительные числа, тогда функция $c_1 f_1 + c_2 f_2$ также принадлежит* $\Phi(\mathrm{P})$ *и*

$$\int_G (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,d(\mathrm{P}) = c_1 \int_G f_1\,d(\mathrm{P}) + c_2 \int_G f_2\,d(\mathrm{P}).$$

(Для функций из класса $\overline{\Phi}(\mathrm{P})$ это свойство, вообще говоря, не выполняется.)

Свойство 6. *Если* $f\varphi \in \overline{\Phi}(\mathrm{P})$ *при любой ограниченной функции* $\varphi$, *то* $f \in L$.

Свойство 7. *Пусть* $\varphi_1 \leqslant f \leqslant \varphi_2$ *и* $\varphi_1$ *и* $\varphi_2$ *принадлежат* $\Phi(\mathrm{P})$; *тогда* $f$ *также принадлежит* $\Phi(\mathrm{P})$ *и*

$$\int_G \varphi_1 d(\mathrm{P}) \leqslant \int_G f d(\mathrm{P}) \leqslant \int_G \varphi_2 d(\mathrm{P}).$$

(Для функций $\varphi_1$ и $\varphi_2$ из класса $\overline{\Phi}(\mathrm{P})$ это свойство, вообще говоря, не выполняется.)

Свойство 8. *Пусть дана последовательность* $f_1, f_2, f_3, \ldots$ *функций, принадлежащих классу* $\Phi(\mathrm{P})$, *причем* $\int_G f_n d(\mathrm{P}) = \gamma_n$. *Пусть далее существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma.$$

*Пусть, наконец, для каждой последовательности* $\Pi_\alpha \in \mathrm{P}$ *по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать номер* $i_\alpha$ *такой, что для множеств* $P_{\alpha i}$ $(i \geqslant i_\alpha)$

$$\left| \int_{P_{\alpha i}} f_n dG - \gamma_n \right| < \varepsilon$$

*при любом* $n$.

*Тогда, если функция* $f$ *такова, что на всяком ограниченном измеримом множестве* $X$, *содержащемся вместе с замыканием в* $G$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n dG = \int_X f dG,$$

*то* $f \in \overline{\Phi}(\mathrm{P})$ *и* $\int_G f dG = \gamma$.

## § 3.

## СВЕДЕНИЕ ВОПРОСА ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ К АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ

Определение 2. *Будем говорить, что класс* $\mathrm{P}_2$ *подчинен классу* $\mathrm{P}_1$ $(\mathrm{P}_1 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_2)$, *если* $\Phi(\mathrm{P}_2) \subseteq \Phi(\mathrm{P}_1)$ *и* $\int_G f d(\mathrm{P}_1) = \int_G f d(\mathrm{P}_2)$, *для любой функции* $f \in \Phi(\mathrm{P}_2)$.

Очевидно, что если $\mathrm{P}_1 \subseteq \mathrm{P}_2$, то $\mathrm{P}_1 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_2$, а также, что если $\mathrm{P}_1 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_2 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_3$, то $\mathrm{P}_1 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_2$.

*Два класса* $\mathrm{P}_1$ *и* $\mathrm{P}_2$ *назовем эквивалентными* $(\mathrm{P}_1 \sim \mathrm{P}_2)$, *если одновременно имеют место подчинения*

$$\mathrm{P}_1 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_2 \text{ и } \mathrm{P}_2 \mathrel{\underline{\subset}} \mathrm{P}_1{}^*.$$

---

* Интересен вопрос, совпадает ли приведенное определение подчинения (эквивалентности) со следующим: класс $\mathrm{P}_2$ подчинен (эквивалентен) классу $\mathrm{P}_1$, если $\Phi(\mathrm{P}_2) \subseteq \Phi(\mathrm{P}_1)$ (соответственно $\Phi(\mathrm{P}_2) = \Phi(\mathrm{P}_1)$). Этот вопрос остался нерешенным.

Так как это соотношение эквивалентности симметрично, рефлексивно и транзитивно, то тем самым совокупность классов P распадается на множества попарно эквивалентных (относительно несобственного интегрирования) классов. Совокупность этих множеств относительно подчинения образует частично упорядоченное множество способов несобственного интегрирования, свойства которого пока изучены недостаточно.

Вопрос об эквивалентности двух классов последовательностей решен в одном важном частном случае, когда каждый из этих классов состоит из одной последовательности.

Рассмотрим две последовательности $\Pi' = \{P'_i\}$ и $\Pi'' = \{P''_i\}$.

Две точки $\alpha$ и $\beta$ области $G$ назовем эквивалентными, если они одинаково расположены относительно множеств $P'_i$ и $P''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е. если совпадают множества тех номеров $i$, для которых $\alpha \in P'_i$ и $\beta \in P'_i$, а также множества тех номеров $j$, для которых $\alpha \in P''_j$ и $\beta \in P''_j$. Множества эквивалентных точек назовем *основными множествами* (они, очевидно, попарно не пересекаются); при этом будем рассматривать только множества ненулевой меры. Так как всякое компактное множество, начиная с некоторого номера, попадает во все $P'_i$ и все $P''_i$, то оно может пересекаться лишь с конечным числом основных множеств. Отсюда следует, что вся область $G$ разбивается на счетное число основных множеств, которые можно как-то занумеровать:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots .$$

При этом каждое из множеств $P'_i$ и $P''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ состоит (основное множество не может пересекаться с каким-либо из множеств $P'_i$ или $P''_i$, не содержась в нем целиком) из конечного числа основных множеств.

Выведем теперь простейшее необходимое условие эквивалентности двух последовательностей.

Назовем пару основных множеств $(g_l, g_m)$ $(l \neq m)$, отмеченной относительно последовательности $\Pi'$, если любое из множеств $P'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ либо содержит их оба, либо их оба не содержит; (аналогично введем понятие лтмеченности относительно $\Pi''$). Пара основных множеств не может быть отмеченной сразу относительно обеих последовательностей $\Pi'$ и $\Pi''$, так как оогда эта пара должна была бы входить в одно основное множество. Далее тегко проверить, что при данном $l$ может быть лишь конечное число номеров $m$, для которых пара $(g_l, g_m)$ отмечена относительно $\Pi'$. Действительно, выберем $i$ столь большим, что $g_l \subseteq P'_i$; если тогда $m$ столь велико, что $g_m \subseteq G \setminus P'_i$, то пара $(g_l, g_m)$ не может быть отмеченной.

Теорема 1. *Если относительно хотя бы одной из двух последовательностей $\Pi'$ и $\Pi''$ имеется бесконечное множество отмеченных пар, то эти последовательности не эквивалентны.*

Доказательство. Пусть для последовательности $\Pi'$ существует бесконечное множество $M$ отмеченных пар $(g_l, g_m)$. Тогда из последнего утверждения, доказанного перед формулировкой теоремы 1, следует, что для любого компактного множества $F \subset G$ найдется пара $(g_l, g_m)$ такая, что $g_l$ и $g_m$ не пересекаются с $F$. В силу этого из множества $M$ легко выбрать последовательность пар $(g_1^k, g_2^k)$ $(k = 1, 2, \ldots$ и все $g_1^1, g_2^1, g_1^2, g_2^2, \ldots$ различны), отмеченных относительно последовательности $\Pi'$, для которой найдется последовательность $\{P''_{i_k}\}$ множеств $P''_{i_k} \in \Pi''$ такая, что каждое множество $P''_{i_k}$ разбивает

пару $(g_1^k, g_2^k)$ (т. е. $g_1^k \subseteq P''_{i_k}$, а $g_2^k \subseteq G \setminus P''_{i_k}$), но не разбивает никакую другую пару из выбранной последовательности. Построим теперь функцию $f$ так, чтобы

$$\int\limits_{g_1^k} f\,dG = (-1)^{k-1}k, \quad \int\limits_{g_2^k} f\,dG = (-1)^k k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

а для всех прочих основных множеств $g_n$

$$\int\limits_{g_n} f\,dG = 0.$$

Тогда для любого множества $P'_i \in \Pi'$, так как оно не разбивает ни одной из пар $(g_1^k, g_2^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$,

$$\int\limits_{P'_i} f\,dG = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_G f\,d(\Pi') = \lim_{i\to\infty} \int\limits_{P'_i} f\,dG = 0.$$

Однако для множеств $P''_{i_k}$

$$\int\limits_{P''_{i_k}} f\,dG = k \quad \text{при нечетных } k$$

и

$$\int\limits_{P''_{i_k}} f dG = -k \quad \text{при четных } k,$$

поэтому предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{P''_{i_k}} f\,dG$, не существует; следовательно не существует и предел $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_{P''_i} f\,dG$, т. е. функция $f \overline{\in} \Phi(\mathrm{P})$.

Следствие. *Для того чтобы две последовательности были эквивалентны, необходимо, чтобы каждая из них имела не более конечного числа отмеченных пар.*

Сведем теперь вопрос об эквивалентности двух последовательностей к некоторой алгебраической задаче.

Пусть даны две последовательности $\Pi' = \{P'_i\}$ и $\Pi'' = \{P''_i\}$. Как было указано выше, им соответствует разбиение $G$ на счетное число основных множеств, которые мы каким-нибудь образом занумеруем:

$$g_1, g_2, g_3, \ldots .$$

Пусть дана теперь произвольная функция $f$. Обозначим значения ее интегралов по основным множествам через

$$x_1, x_2, x_3, \ldots . \tag{1}$$

Так как основные множества попарно не пересекаются и имеют положительную меру, то величины $x_1, x_2, \ldots$ могут принимать любые наперед заданные комбинации значений, а потому являются независимыми переменными.

Интегралы по множествам $P'_i$ и $P''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ получаются как суммы конечного числа некоторых $x_l$ из последовательности (1). Мы будем обозначать эти суммы (линейные формы) через $S'_i$, соответственно через $S''_i$, и записывать:

$$S'_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_{il} x_l, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

соответственно

$$S''_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha''_{il} x_l, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha'_{il} = 0$, если $g_l$ не содержится в $P'_i$, и $\alpha'_{il} = 1$, если $g_l \subseteq P'_i$ (соответственно, $\alpha''_{il} = 0$, если $g_l$ не содержится в $P''_i$, и $\alpha''_{il} = 1$, если $g_l \subseteq P''_i$).

Отсюда следует, что $\alpha'_{il}$ (соответственно $\alpha''_{il}$) при фиксированном $i$ равны нулю для достаточно больших $l$. Кроме того, линейные формы $S'_i$ и $S''_i$ обладают тем свойством, что для достаточно больших номеров $i$ они содержат любое конечное множество элементов последовательности (1); другими словами, для любого натурального $l_0$ существует такое $i_0$, что $\alpha'_{il} = \alpha''_{il} = 1$ при всех $l = 1, \ldots, l_0$ и $i \geqslant i_0$. Это следует из того, что всякое компактное множество $F \subset G$ попадает во все $P'_i$ и $P''_i$, начиная с некоторого номера.

Таким образом, последовательности $\Pi'$ и $\Pi''$ определяют две системы форм $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, т. е. две матрицы $\|\alpha'_{il}\|$ и $\|\alpha''_{il}\|$ $(i, l = 1, 2, \ldots)$. Конкретные же значения независимых переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots$ определяются функцией $f$.

Определение 3. В соответствии с общим определением 2 будем говорить, что *система* $\{S''_i\}$ *подчинена системе* $\{S'_i\}$ $(\{S'_i\} \mathcal{E} \{S''_i\})$, *если для любой числовой последовательности*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

*для которой существует конечный предел*

$$\lim_{i\to\infty} S''_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha''_{il} x_l = \gamma,$$

*предел*

$$\lim_{i\to\infty} S'_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_{il} x_l$$

*также существует и равен* $\gamma$.

*Две системы форм* $\{S'_i\}$ *и* $\{S''_i\}$ *назовем эквивалентными* $(\{S'_i\} \sim \{S''_i\})$, *если одновременно* $\{S'_i\} \mathcal{E} \{S''_i\}$ *и* $\{S''_i\} \mathcal{E} \{S'_i\}$.

Если функция $f \in \Phi(\Pi')$ и $\int\limits_G f\, d(\Pi') = \gamma$, то и суммы $S'_i \to \gamma$ при $i \to \infty$; и наоборот, если при данной функции $f$ последовательность сумм $S'_i$ имеет

конечный предел $\gamma$, то эта функция $f \in \Phi(\Pi')$, причем $\int\limits_G f\,d(\Pi') = \gamma$. Аналогичное свойство имеет место для последовательности $\Pi''$.

Таким образом, вопрос об эквивалентности или подчинении двух последовательностей $\Pi'$ и $\Pi''$ сводится к вопросу об эквивалентности или подчинении соответствующих систем форм $\{S_i'\}$ и $\{S_i''\}$.

Среди всех последовательностей $\Pi = \{P_i\}$ выделим наиболее важный и естественный для определения интеграла $\int\limits_G f\,d(\Pi)$ класс *простых* последовательностей.

Определение 4. Последовательность $\Pi = \{P_i\}$ мы назовем простой, если система характеристических функций $\chi_i(A)$ $(A \in G)$ множеств $P_i$ линейно независима, т. е. если из равенства почти всюду нулю суммы вида $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i \chi_i(A)$ всегда следует, что $c_1 = \ldots = c_N = 0$.

(Здесь

$$\chi_i(A) = \begin{cases} 1 & (A \in P_i), \\ 0 & (A \in G \setminus P_i). \end{cases}$$
)

Из соотношения $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i \chi_i(A) \equiv 0$, после умножения на произвольную функцию $f(A)$ и интегрирования, вытекает равенство

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \int\limits_{P_i} f\,dG = 0.$$

Поэтому если последовательность $\Pi$ не проста, то среди ее членов имеются множества, интегралы по которым однозначно определяются через значения интегралов по предыдущим членам. Такие множества, по существу, являются излишними в последовательности, в чем и состоит некоторая неестественность непростых последовательностей для определения несобственного интеграла.

Обратно, как будет вскоре показано (см. следствие 2 из леммы 2), значения интегралов на множествах, составляющих простую последовательность, могут быть заданы совершенно произвольно, причем функции $f$ с такими заданными значениями интегралов заведомо существуют (и даже допускают значительный произвол). Таким образом, интегралы по множествам, образующим простую последовательность совершенно независимы между собой.

Вопрос о том, для всякой ли последовательности $\Pi'$ существует эквивалентная ей простая последовательность $\Pi''$, пока не решен.

Простейшим примером простой последовательности является последовательность $\{P_i\}$, удовлетворяющая условию вложения $P_1 \subset P_2 \subset \ldots$ (если все разности $P_i \setminus P_{i-1}$ имеют положительную меру). Можно показать, что для любого класса $\mathrm{P}$ существует эквивалентный ему класс $\mathrm{P}'$, состоящий из последовательностей, удовлетворяющих условию вложения.

Перейдем теперь к изучению эквивалентности двух систем форм.

## § 4.
## ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

В этом параграфе мы введем несколько вспомогательных понятий и докажем две леммы.

Пусть дана произвольная система $\mathfrak{S}$ форм

$$S_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где при фиксированном $i$ все $\alpha_{il}$ равны нулю для достаточно больших $l$.

Рассмотрим вещественное линейное пространство $K(\mathfrak{S})$ формальных выражений вида $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i$, в каждом из которых лишь конечное число вещественных чисел $\beta_i$ отлично от нуля, а сложение и умножение на число производится по обычным правилам (причем соотношения (2) не принимаются во внимание). Рассмотрим далее в $K(\mathfrak{S})$ подмножество $O(\mathfrak{S})$ *O-комбинаций* — выражений вида $T = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S$, для которых $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l \equiv 0$, т. е. $\sum_{l=1}^{\infty} \beta_i \alpha_{il} = 0$ $(l = 1, 2, \ldots)$. Ясно, что это множество $O(\mathfrak{S})$ образует линейное подпространство пространства $K(\mathfrak{S})$. Каждой ненулевой $O$-комбинации (если такие имеются) соответствует некоторая линейная зависимость между формами (2).

Положив в системе (2) $x_m = 0$ ($m$ — произвольное) или, другими словами, игнорируя в формах $S_i$ переменную $x_m$, мы получим новую систему $\mathfrak{S}'$ форм

$$S'_i = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{\infty} \alpha_{il} x_l, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Отображение $T = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i \to T' = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S'_i$ представляет собой естественный изоморфизм пространств $K(\mathfrak{S})$ и $K(\mathfrak{S}')$, при котором, очевидно, $O(\mathfrak{S})$ переходит *в* (но, вообще говоря, не *на!*) $O(\mathfrak{S}')$ (так как из $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l \equiv 0$, очевидно, следует, что $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^{\infty} \alpha_{il} x_l \equiv 0$). Таким образом, между формами (3) (по сравнению с формами (2)) могут возникнуть, вообще говоря, новые линейные зависимости. Вопрос о количестве новых линейных зависимостей для системы (3) решает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть конечное или счетное множество O-комбинаций $\{T_s\}$ образует базис пространства $O(\mathfrak{S})$*. Тогда либо множество $\{T'_s\}$*

*) Из-за конечности числа слагаемых в каждом из выражений, образующих $K(\mathfrak{S})$, легко проверить, что базис не может быть несчетным.

*образует базис пространства* $O(\mathfrak{S}')$, *либо существует элемент* $T'_* \in O(\mathfrak{S}')$, *такой, что множество* $\{T'_s\} \cup \{T'_*\}$ *образует базис пространства* $O(\mathfrak{S}')$.

Другими словами, в системе форм (3) (по сравнению с системой форм (2)) может появиться не более одной существенно новой линейной зависимости.

Доказательство. Обозначим естественный изоморфизм $K(\mathfrak{S})$ на $K(\mathfrak{S}')$ буквой $\Theta$. Как было указано выше, $\Theta(O(\mathfrak{S})) \subseteq O(\mathfrak{S}')$. Если здесь имеет место знак равенства, то множество $\{\Theta(T_s)\} = \{T'_s\}$ образует базис $O(\mathfrak{S}')$, и утверждение леммы тривиально. Пусть теперь $\Theta(O(\mathfrak{S})) \subset O(\mathfrak{S}')$; выберем $T'_* \in O(\mathfrak{S}') \setminus \Theta(O(\mathfrak{S}))$. Так как множество $\{T'_s\} \cup \{T'_*\}$ линейно независимо, то достаточно проверить, что $O(\mathfrak{S}')$ совпадает с линейной оболочкой $L$ этого множества.

Допустим, что это не так, и существует элемент $T'_{**} \in \Theta(\mathfrak{S}') \setminus L$. Подставим в элементы $T_* = \Theta^{-1}(T'_*)$ и $T_{**} = \Theta^{-1}(T'_{**})$ выражения (2) $\{S_i\}$ через $\{x_l\}$ и обозначим коэффициенты при $x_m$ у полученных линейных форм соответственно через $\beta_*$ и $\beta_{**}$. Обозначив $T = \beta_{**} T_* - \beta_* T_{**}$, получим, что $\Theta(T) = \beta_{**} T'_* - \beta_* T'_{**} \in O(\mathfrak{S}')$. Однако из определения $O(\mathfrak{S})$ и $O(\mathfrak{S}')$ сразу следует, что всегда если после подстановки в элемент $T$ выражений (2) коэффициент у полученной линейной формы при $x_m$ равен нулю и если $\Theta(T) \in O(\mathfrak{S}')$, то и $T \in O(\mathfrak{S}')$. Значит, и в нашем случае по построению элемента будет $T = \beta_{**} T_* - \beta_* T_{**} \in O(\mathfrak{S})$; отсюда же получаем, что $\beta_* \neq 0$ (так как $T'_* \in O(\mathfrak{S}')$, а $T_* \overline{\in} O(\mathfrak{S})$). Но тогда $T' = \beta_{**} T'_* - \beta_* T'_{**} \in \Theta(O(\mathfrak{S}))$, откуда и $\beta_* T'_{**} \in L$, т. е. и $T'_{**} \in L$ вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть дана бесконечная система алгебраических уравнений.*

$$S_i = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

*где* $S_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l$, $i = 1, 2, \ldots$, *причем для каждого* $i$ *все* $\alpha_{il}$ *равны нулю при достаточно больших* $l$. *Пусть правые части системы* (4) *не противоречат левым, т. е. для любой О-комбинации* $T = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i \in O(\mathfrak{S})$ *будет* $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i = 0$. *Тогда система* (4) *имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Определим сначала значение $x_1$. Для этого рассмотрим естественное отображение $\Theta$ пространства $K(\mathfrak{S})$ на пространство $K(\mathfrak{S}')$, где $\mathfrak{S}' = \{S'_i\}$, а $S'_i$ получаются из $S_i$ игнорированием переменной $x_1$. Тогда, как указывалось выше, $\Theta(O(\mathfrak{S})) \subseteq O(\mathfrak{S}')$. Здесь может быть два случая.

1. Пусть $\Theta(O(\mathfrak{S})) = O(\mathfrak{S}')$. Тогда мы положим $x_1$ равным совершенно произвольному числу $\overline{x}_1$ и перейдем тем самым от системы (4) к системе уравнений относительно $x_2, x_3, \ldots$

$$S'_i = b_i - \alpha_{i1} \overline{x}_1 = b'_i \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4'}$$

Проверим теперь, что правые части системы (4′) не противоречат левым. Действительно, пусть $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S'_i \in O(\mathfrak{S}')$. Тогда в силу совпадения $O(\mathfrak{S}')$

с $\Theta(O(\mathfrak{S}))$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i \in O(\mathfrak{S})$, откуда, с одной стороны, получаем, что $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \alpha_{i1} = 0$, а с другой стороны, по условию, $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i = 0$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i' = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i - \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \alpha_{i1} \overline{x}_1 = 0,$$

что и требовалось доказать.

2. Пусть $\Theta(O(\mathfrak{S})) \subset O(\mathfrak{S}')$. Тогда по лемме 1 существует элемент $T'_* = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*} S_i' \overline{\in} \Theta(O(\mathfrak{S}'))$, для которого любой элемент из $O(\mathfrak{S}')$ можно представить в виде суммы элемента из $\Theta(O(\mathfrak{S}))$ и элемента вида $cT'_*$. Но раз

$$T_* = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*} S_i \overline{\in} O(\mathfrak{S}),\ T'_* = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*} S_i' \in O(\mathfrak{S}'),$$

то, по определению $O$-комбинаций,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*} \alpha_{i1} = \beta_* \neq 0.$$

Положим тогда

$$\overline{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*} b_i}{\beta_*}$$

и перейдем к системе (4'). Проверим, что и теперь для системы (4') правые части не противоречат левым. Действительно, если $T' = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i S_i' \in O(\mathfrak{S}')$, то $T' = \overline{T}' + cT'_*$, где $\overline{T}' = \Theta(\overline{T}) \in \Theta(O(\mathfrak{S}))$. Но раз $\overline{T} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\beta}_i S_i \in O(\mathfrak{S})$, то по условию $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\beta}_i b_i = 0$, а также $\sum_{i=1}^{\infty} \overline{\beta}_i \alpha_{i1} = 0$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i b_i' = \sum_{i=1}^{\infty} (\overline{\beta}_i + c\, b_{i*})\ (b_i - \alpha_{i1} \overline{x}_1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} c\, \beta_{i*}\ (b_i - \alpha_{i1} \overline{x}_1) = c \left[ \sum_{i=1}^{\infty} \beta_{i*}\ b_i - \beta_* \overline{x}_1 \right] = 0,$$

что и утверждалось.

Определим теперь значение $x_2 = \overline{x}_2$, отправляясь от системы (4'), аналогичным образом. Тогда мы перейдем к системе

$$S_i'' = b_i' - \alpha_{i2} \overline{x}_2 = b_i''\ (i = 1, 2, \ldots;\ S_i'' = \sum_{l=3}^{\infty} \alpha_{il} x_l), \qquad (4'')$$

для которой правые части не противоречат левым, и т. д. Проверим, что построенная последовательность чисел $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots$ удовлетворяет системе (4). Для этого рассмотрим любое из уравнений системы (4)

$$S_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l \equiv \sum_{l=1}^{m_i} \alpha_{il} x_l = b_i$$

(здесь $m_i$ достаточно велико). Так как $S_i^{(m_i)} \equiv 0$, то $S_i^{(m_i)} \in O(\mathfrak{S}^{(m_i)})$, а потому и $b_i^{(m_i)} = 0$. Но

$$b_i^{(m_i)} = b_i - \sum_{l=1}^{m_i} \alpha_{il} \bar{x}_l,$$

откуда и следует наше утверждение. Лемма 2 доказана.

Замечание. Очевидно, что сформулированное в лемме 2 условие о том, что правые части не должны противоречить левым, является одновременно и необходимым для существования у системы по крайней мере одного решения. Это необходимое и достаточное условие может быть выражено еще следующим образом: для любого натурального $n$ ранги матриц

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} b_1, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n, \alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots \end{Vmatrix}$$

должны равняться между собой (эти формально бесконечные матрицы можно считать конечными, так как все достаточно далекие столбцы состоят из нулей).

Следствие 1. *Если между левыми частями системы* (4) *нет линейных зависимостей (другими словами, если $O(\mathfrak{S})$ состоит только из нуля), то эта система при любых правых частях имеет по крайней мере одно решение.*

Следствие 2. *Если $\Pi = \{P_i\}$ — простая последовательность, то существует по крайней мере одна функция $f$, обладающая на каждом из множеств $P_i$ любым заданным значением интеграла.* Действительно, если для пары последовательностей $(\Pi, \Pi)$ построить основные множества $g_1, g_2, \ldots$, и если условно обозначить

$$P_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} g_l,$$

где $\alpha_{il} = 1$, если $g_l \subseteq P_i$ и $\alpha_{il} = 0$ в противном случае, то из определения простой последовательности вытекает, что формы $S_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{il} x_l$ линейно независимы. (Так как из равенства $\sum_{i=1}^{N} c_i S_i \equiv 0$ вытекает, что $\sum_{i=1}^{N} c_i \chi_i(A) \equiv 0$, где $\chi_i$ — характеристическая функция множества $P_i$.) Но значения интегралов функции $f$ на множествах $g_i$ могут, очевидно,

быть заданы произвольно и потому задача о построении функции $f$ с заданными интегралами на множествах $P_i$ полностью приводится к решению системы (4) с линейно независимыми левыми частями. Поэтому утверждение нашего следствия вытекает из следствия 1.

## § 5.

## ТЕОРЕМЫ О ПОДЧИНЕНИИ И ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

В этом параграфе мы докажем, опираясь на лемму 2, несколько теорем, относящихся к вопросу об эквивалентности систем форм

$$S'_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha'_{il} x_l,$$

$$S''_i = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha''_{il} x_l, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где $\alpha'_{il}$ и $\alpha''_{il}$ удовлетворяют сформулированным в § 3 условиям.

Теорема 2. *Для того чтобы выполнялось подчинение $\{S'_i\} \mathfrak{S} \{S''_i\}$ необходимо, чтобы нашлось конечное число форм $S'_{i_m}$ $(m = 1, \ldots, k)$ таких, что все формы $S'_i$ линейно выражаются через формы $S'_{i_m}$ $(m=1, \ldots, k)$ и $S''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство. Предположим, что сформулированное необходимое условие не выполнено. Тогда, прежде всего, не все формы $S'_i$ линейно выражаются через совокупность форм $\{S''_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть $S'_{i_1}$ — первая форма из $\{S'_i\}$, которая линейно не выражается через $\{S''_i\}$. Поскольку не все формы $S'_i$ выражаются линейно через $S'_{i_1}$ и $S''_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то возьмем первую форму $S'_{i_2}$ из $\{S'_i\}$, которая линейно не выражается через $S'_{i_1}$ и $\{S''_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и т. д. По предположению, сделанному в начале доказательства, этот процесс продолжится неограниченно, т. е. найдется бесконечное число форм $S'_{i_m}$ $(m = 1, 2, \ldots;\ i_1 < i_2 < \ldots)$, для которых при любом $m$ форма $S'_{i_m}$ не выражается линейно через формы $\{S'_{i_1}, \ldots, S'_{i_{m-1}}, S''_1, S''_2, \ldots\}$. Рассмотрим систему уравнений:

$$S''_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$S'_{i_m} = (-1)^m m, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Любая линейная зависимость между левыми частями может включать только формы $S''$, а потому в силу леммы 2 эта система имеет решение $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Если подставить эти значения в $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$, то любая сумма $S''_i = 0$, а значит, и $\lim\limits_{i\to\infty} S''_i = 0$, но среди сумм $S'_i$ существует подпоследовательность $\{S'_{i_m}\}$, не имеющая предела. Следовательно, и $\lim\limits_{i\to\infty} S'_i$ не существует. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы выполнялось подчинение* $\{S'_i\} \mathfrak{S} \{S''_i\}$ *достаточно, чтобы при некоторых натуральных* $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ *и положительном* $N$ *для всех форм* $S'_i$ *существовало представление*

$$S'_i = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} S''_j \tag{5}$$

($k = 1 - p$; при каждом фиксированном $i$ сумма конечная, т. е. при $j > j_0(i)$ $\gamma_{ij} = 0$), где $S''_j$ при $j < 1$ равны $S'_{i_{1-j}}$, удовлетворяющее условиям

1) $\gamma_{ij} \to 0$ при $i \to \infty$ для каждого фиксированного $j = k, \ldots, 0, 1, \ldots$,

2) $\sum\limits_{j=k}^{\infty} |\gamma_{ij}| < N \quad (i = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\sum\limits_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} \to 1$ при $i \to \infty$. Действительно, $x_1$ входит с коэффициентом 1 во все $S'_i$ для достаточно больших $i$. Точно так же $x_1$ входит с коэффициентом 1 во все $S''_j$, кроме, быть может, конечного числа. Разобьем сумму $\sum\limits_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij}$ на две суммы: $\sum' \gamma_{ij}$ — сумма чисел $\gamma_{ij}$, являющихся коэффициентами при $S''_j$, не содержащих $x_1$, и $\Sigma'' \gamma_{ij}$ — сумма $\gamma_{ij}$, стоящих при $S''_j$, содержащих $x_1$ (с коэффициентом 1). Тогда мы можем переписать (5) в виде:

$$S'_i = \Sigma' \gamma_{ij} S''_j + \Sigma'' \gamma_{ij} S''_j.$$

Сравнивая коэффициенты при $x_1$ в обеих частях этого равенства для достаточно больших $i$, получим $1 = \Sigma'' \gamma_{ij}$. Кроме того в силу условия 1) и равномерной (по $i$) ограниченности числа слагаемых в сумме $\Sigma'$,

$$\Sigma' \gamma_{ij} \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому

$$\sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} = \Sigma' \gamma_{ij} + \Sigma'' \gamma_{ij} \to 1 \quad \text{при } i \to \infty.$$

Пусть теперь $\lim\limits_{j \to \infty} S''_j = s$. Тогда, заменяя в (5) $S''_j$ на $s + \varepsilon_j$ ($\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$), можем написать:

$$S'_i = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} (s + \varepsilon_j) = s \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} + \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} \varepsilon_j. \tag{6}$$

Задав произвольное $\varepsilon > 0$, выберем $j_0$ так, чтобы для $j > j_0$ было $|\varepsilon_j| < \varepsilon$, и перепишем (6) в виде:

$$S'_i = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} + \sum_{j=k}^{j_0} \gamma_{ij} \varepsilon_j + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \gamma_{ij} \varepsilon_j.$$

Рассмотрим каждое слагаемое в отдельности. Как доказано выше,

$\sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} \to 1$ при $i \to \infty$. Поэтому, выбирая $i$ достаточно большим, можно добиться того, чтобы выполнялось неравенство:

$$\left|1 - \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij}\right| < \varepsilon. \tag{7}$$

Второе слагаемое по абсолютной величине не превосходит

$$\sum_{j=k}^{j_0} |\gamma_{ij}|\,|\varepsilon_j| \leqslant \max_{j=k,\ldots,j_0} |\varepsilon_j| \sum_{j=k}^{j_0} |\gamma_{ij}|$$

и в силу условия 1) стремится при $i \to \infty$ к нулю. Поэтому, выбирая $i$ достаточно большим, можем получить, что

$$\sum_{j=k}^{j_0} |\gamma_{ij}|\,|\varepsilon_j| < \varepsilon. \tag{8}$$

Наконец,

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} |\gamma_{ij}|\,|\varepsilon_j| \leqslant \varepsilon \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |\gamma_{ij}| < \varepsilon N.$$

Оценим теперь разность $|S'_i - s|$ для достаточно больших $i$, для которых выполняются неравенства (7) и (8). Мы будем иметь:

$$|S'_i - s| \leqslant |s| \left|1 - \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij}\right| + \sum_{j=k}^{j_0} |\gamma_{ij}|\,|\varepsilon_j| + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |\gamma_{ij}|\,|\varepsilon_j| \leqslant$$
$$\leqslant |s|\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon N = \varepsilon(|s| + 1 + N).$$

Так как $\varepsilon$ произвольно, то

$$\lim_{i\to\infty} S'_i = s.$$

Теорема 4. *Для того чтобы выполнялось подчинение $\{S'_i\} \mathrel{\underset{\sim}{\subset}} \{S''_i\}$ достаточно, чтобы в условиях теоремы 3 вместо требований 1) и 2) выполнялось такое: число слагаемых с отличными от нуля коэффициентами в разложении (5) равномерно (по $i$) ограничено.*

Доказательство. Пусть это новое требование выполнено; будем считать, что для каждого фиксированного $i$ формы $S''_j$, для которых в разложении (5) $\gamma_{ij} \neq 0$ линейно независимы. (Действительно, если некоторое $S'_j$ линейно зависит от остальных, то, заменяя его равной ему линейной комбинацией этих остальных, мы получим аналогичное разложение, но с меньшим числом слагаемых; повторяя этот процесс, мы дойдем до линейно независимых слагаемых, причем требование теоремы 4 будет продолжать выполняться.

Докажем, что $\gamma_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots;\ j = k, \ldots, 0, 1, \ldots)$ при фиксированном $j$ равняется нулю для достаточно больших $i$. Этим будет доказано выполнение условия 1) теоремы 3. Предположим противное, и пусть $j_1$ — наименьшее из тех $j$, для которых множество чисел $\gamma_{ij} \neq 0$ бесконечное. Выберем последовательность индексов $i_1^1 < i_2^1 < \ldots$, для которых $\gamma_{i_n^1 j_1} \neq 0$, и

пусть $j_2$ — наименьшее из тех $j$ (если такие есть), для которых множество чисел $\gamma_{i_n^1 j} \neq 0$ бесконечное. Выберем тогда подпоследовательность $i_1^2 < i_2^2 < \ldots$ последовательности $i_1^1 < i_2^1 < \ldots$ так, чтобы $\gamma_{i_n^2 j_2} \neq 0$ и т. д. Так как число отличных от нуля коэффициентов в представлении (5) равномерно ограничено, то в результате мы придем к подпоследовательности $i_1 < i_2 < \ldots$ такой, что в представлении

$$S'_{i_p} = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{i_p j} S''_j$$

для конечного числа индексов $j_1 < \ldots < j_m (m \geqslant 1)$ коэффициенты $\gamma_{i_p j} \neq 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, а для любого другого $j$ $\gamma_{i_p j} = 0$ при всех достаточно больших $p$. Пусть для

$$S''_{j_q} = \sum_{l=1}^{\infty} \alpha''_{j_q l} x_l \quad (q = 1, \ldots, m)$$

$\alpha''_{j_q} = 0$ при $l \geqslant t$. Выберем теперь $\bar{j} \geqslant j_m$ так, чтобы при $1 \leqslant l \leqslant t$, $j > \bar{j}$ было $\alpha''_{jl} = 1$, а затем $p$ настолько большим, чтобы при $1 \leqslant l \leqslant t$ было $\alpha'_{i_p l} = 1$, а при $1 \leqslant j \leqslant \bar{j}$, $j \neq j_1, \ldots, j_m$ было $\gamma_{i_p j} = 0$. Сравнивая теперь в (9) коэффициенты при каждом $x_l$ $(l = 1, \ldots, t)$, получим равенства

$$\alpha'_{i_p l} = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{i_p j} \alpha''_{jl} \quad (l = 1, \ldots, t),$$

откуда

$$\sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{i_p j} (\alpha''_{jl} - \alpha''_{jt}) = \alpha'_{i_p l} - \alpha'_{i_p t} \quad (l = 1, \ldots, t-1).$$

По построению $p$, правая часть равна нулю. Что касается левой части, то по выбору $\bar{j}$ она равна $\sum_{j=k}^{\bar{j}} \gamma_{i_p j} (\alpha''_{jl} - \alpha''_{jt})$, по определению $p$ —

$$\sum_{q=1}^{m} \gamma_{i_p j_q} (\alpha''_{j_q l} - \alpha''_{j_q t})$$

и, наконец, по выбору $t$ здесь $\alpha''_{j_q t} = 0$. Итак, мы приходим к соотношениям

$$\sum_{q=1}^{m} \gamma_{i_p j_q} \alpha''_{j_q l} = 0 \quad (l = 1, \ldots, t-1).$$

Но по выбору $t$ эти соотношения имеют место и при $l \geqslant t$, т. е. для всех $l$. Отсюда

$$\sum_{q=1}^{m} \gamma_{i_p j_q} S''_{j_q} = 0,$$

что (так как все $\gamma_{i_p j_q} \neq 0$) означает, вопреки предположению, линейную зависимость форм $S''_j$ в разложении (9), являющимся одним из разложений (5).

Перейдем теперь к доказательству выполнения условия 2) теоремы 3. Для этого возьмем произвольную строку

$$S'_i = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} S''_j.$$

Пусть число отличных от нуля коэффициентов $\gamma_{ij}$ равно $M_i$, т. е. $\gamma_{ij_p} \neq 0$ $(p = 1, \ldots, M_i;\ j_1 < \ldots < j_{M_i}$, а все остальные $\gamma_{ij} = 0$. Выберем натуральное $t$ таким, чтобы при $l > t$ $\alpha'_{il} = \alpha''_{j_p l} = 0$, и будем рассматривать $S'_i$, $S''_{j_1}, \ldots, S''_{j_{M_i}}$ как $t$-мерные векторы, проекциями которых служат коэффициенты этих форм при $x_1, \ldots, x_t$. Рассмотрим прямоугольную матрицу, которую для краткости будем записывать в виде

$$\left\| \begin{matrix} S''_{j_1} \\ \ldots \\ S''_{j_{M_i}} \end{matrix} \right\|; \tag{10}$$

она состоит из $M_i$ строк и $t$ столбцов. Так как по предположению, сделанному в начале доказательства теоремы, векторы $S''_{j_i}, \ldots, S''_{j_{M_i}}$ линейно независимы, то $t \geqslant M_i$. С другой стороны, в силу той же причины ранг матрицы (10) равен $M_i$, а потому в ней найдется $M_i$ линейно независимых столбцов. Оставим в формах $S'_i$, $S''_{j_1}, \ldots, S''_{j_{M_i}}$ только те элементы, которые стоят на местах с номерами выбранных столбцов, и будем рассматривать соответствующие „укороченные" векторы $\overline{S}'_i$, $\overline{S}''_{j_1}, \ldots, \overline{S}''_{j_{M_i}}$. Очевидно, что если $S'_i = \sum_{p=1}^{M_i} \gamma_{ij_p} \overline{S}''_{j_p}$, то для $S'_i$ будет справедливо разложение:

$$\overline{S}'_i = \sum_{p=1}^{M_i} \gamma_{ij_p} S''_{i_p} \tag{11}$$

т. е. укороченный вектор $\overline{S}'_i$ выражается через укороченные векторы $\overline{S}''_{j_1}, \ldots, \overline{S}''_{j_{M_i}}$ в виде линейной комбинации с теми же коэффициентами, что и вектор $S'_i$, выраженный через $S''_{j_1}, \ldots, S''_{j_{M_i}}$. При этом в силу линейной независимости векторов $\overline{S}''_{j_1}, \ldots, \overline{S}''_{j_{M_i}}$ выражение вида (11) $\overline{S}'_i$ через эти векторы единственно.

Однако согласно условию теоремы $M_i$ может принимать только конечное число значений. Для каждого из этих значений число возможных комбинаций векторов $\overline{S}''_{j_i}, \ldots, \overline{S}''_{j_{M_i}}$, а также число возможных векторов $\overline{S}'_i$ конечное, так как проекции этих векторов равны 0 или 1. А так как при всех $i$ разложение (11) возможно и единственно, то и число возможных

комбинаций чисел $\gamma_{ij_1}, \ldots, \gamma_{ij_{M_i}}$ конечно, а потому имеет место условие 2) теоремы 3.

Применяя теперь теорему 3, доказываем справедливость теоремы 4.

Теорема 5. *Если система $\{S''_i\}$ линейно независима (или, что то же, последовательность $\Pi'' = \{P''_i\}$ проста), то для того чтобы выполнялось подчинение $\{S'_i\} \mathfrak{S} \{S''_i\}$ необходимо, чтобы для всех форм $S'_i$ существовало представление* (5) *(где, как и раньше, $S''_j$ при $j < 0$ представляют собой некоторые из форм $S'_i$), удовлетворяющее условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 3.

Доказательство. Пусть $\{S'_i\} \mathfrak{S} \{S''_i\}$. Тогда существование представления вида (5) для всех форм $S'_i$ следует из теоремы 2. Исходя из соображений, аналогичных приведенным в начале доказательства теоремы 4, будем считать, что система форм $S''_i$ $(i = k, \ldots, 0, 1, \ldots)$ линейно независима. Докажем в этих условиях, что утверждения 1) и 2) выполнены.

Фиксируем произвольное $j_0$ $(k \leqslant j_0 < \infty)$ и рассмотрим систему уравнений:

$$S''_j = 0, \; j \neq j_0$$
$$S''_{j_0} = 1.$$

Левые части этой системы линейно независимы, поэтому в силу леммы 2 она имеет решение $x_1, \ldots, x_2, \ldots$. Так как для этого решения $\lim\limits_{i \to \infty} S''_i = 0$, то должно выполняться соотношение

$$\lim_{i \to \infty} S'_i = 0.$$

Но тогда из (5) имеем

$$S'_i = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{ij} S''_j = \gamma_{ij_0} \to 0 \text{ при } i \to \infty.$$

Необходимость условия 1) доказана.

Для проверки необходимости условия 2) допустим противное, что $\overline{\lim\limits_{i \to \infty}} \sum\limits_{j=k}^{\infty} |\gamma_{ij}| = \infty$. Возьмем две последовательности $c_1, c_2, \ldots$ и $q_1, q_2, \ldots$ положительных чисел так, чтобы при $n \to \infty$ $c_n \to 0$, а $c_n q_n \to \infty$. Выберем далее $i_1$ так, чтобы было $\sum\limits_{j=k}^{\infty} |\gamma_{ij}| \geqslant q$, и положим

$$S''_j = c_1 \operatorname{sign} \gamma_{i_1 j} \tag{12.1}$$

для тех $j$, для которых $\gamma_{i_1 j} \neq 0$. Тем самым будет определено конечное число сумм $S''_j$. Пусть это будут суммы $S''_{j_1}, \ldots, S''_{j_{m_1}}$. Подставляя значения этих сумм в (5), получим

$$S'_{i_1} = c_1 \sum_{j=k}^{\infty} |\gamma_{i_1 j}| \geqslant c_1 q_1.$$

Затем выберем $i_2 > i_1$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства:

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\gamma_{i_2 j}| \geqslant q_2 + 2,$$

$$\sum_{p=1}^{m_1} |\gamma_{i_2 j_p}| \leqslant 1,$$

$$\left|\sum_{p=1}^{m_1} \gamma_{i_2 j_p} S''_{j_p}\right| \leqslant c_2.$$

Тогда, обозначая

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\gamma_{i_2 j}| - \sum_{p=1}^{m_1} |\gamma_{i_2 j_p}| = \sum_{j=k}^{\infty}{}^{1} |\gamma_{i_2 j}|,$$

будем иметь:

$$\sum_{j=k}^{\infty}{}^{1} |\gamma_{i_2 j}| \geqslant q_2 + 1.$$

Положим теперь

$$S''_j = -c_2 \operatorname{sign} \gamma_{i_2 j} \tag{12.2}$$

для $j \neq j_1, \ldots, j_{m_1}$, для которых $\gamma_{i_2 j} \neq 0$. Здесь снова определится только конечное число сумм $S''_j$: $S''_{j_{m_1+1}}, \ldots, S''_{j_{m_2}}$. Подставляя эти значения в выражение (5) для $i = i_2$, получим

$$S'_{j_2} = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{i_2 j} S''_j - \sum_{p=1}^{m_1} \gamma_{i_2 j_p} S''_{j_p} - c_2 \sum_{j=k}^{\infty}{}^{1} |\gamma_{i_2 j}| \leqslant$$
$$\leqslant c_2 - c_2 (q_2 + 1) = -c_2 q_2.$$

Затем выберем $i_3 > i_2$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства:

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\gamma_{i_3 j}| \geqslant q_3 + 2,$$

$$\sum_{p=1}^{m_2} |\gamma_{i_3 j_p}| \leqslant 1,$$

$$\left|\sum_{p=1}^{m_2} \gamma_{i_3 j_p} S''_{j_p}\right| \leqslant c_3.$$

Обозначая

$$\sum_{j=k}^{\infty} |\gamma_{i_3 j}| - \sum_{p=1}^{m_2} |\gamma_{i_3 j_p}| = \sum_{j=k}^{\infty}{}^{2} |\gamma_{i_3 j}|,$$

будем иметь:

$$\sum_{j=k}^{\infty}{}^{2} |\gamma_{i_3 j}| \geqslant q_3 + 1.$$

Полагая

$$S''_j = c_3 \operatorname{sign} \gamma_{i_3 j} \tag{12.3}$$

для $j \neq j_1, \ldots, j_{m_2}$, для которых $\gamma_{i_3 j} \neq 0$, и подставляя эти значения в выражение (5) для $i = i_3$, получим

$$S'_{i_3} = \sum_{j=k}^{\infty} \gamma_{i_3 j} S''_j = \sum_{p=1}^{m_2} \gamma_{i_3 j_p} S''_{j_p} + c_3 \sum_{j=k}^{\infty}{}^{2} |\gamma_{i_3 j}| \geqslant$$

$$\geqslant -c_3 + c_3 (q_3 + 1) = c_3 q_3.$$

Продолжая таким образом, мы выберем последовательность $i_1 < i_2 < \ldots$, для которой заведомо будут выполняться неравенства:

$$S'_{i_{2p-1}} \geqslant c_{2p-1} q_{2p-1},$$

$$S'_{i_{2p}} \leqslant -c_{2p} q_{2p} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Положим теперь все $S''_j$, которые не были определены ни при каком шаге, равными нулю и рассмотрим получающуюся систему уравнений

$$S''_j = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

где $b_j$ либо равны нулю, либо определяются одним из выражений (12.1), (12.2), (12.3), ... Левые части этой системы линейно независимы, и поэтому она имеет решение $x_1, x_2, \ldots$. Если это решение подставить в $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} S''_i = 0$. Однако $\lim\limits_{i\to\infty} S'_i$ не существует. Таким образом необходимость условия 2) также доказана, а тем самым доказана и вся теорема 5.

Сопоставляя теоремы 3 и 5, мы получим для систем линейно независимых форм $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$ (соответствующих простым последовательностям П′ и П″) следующее необходимое и достаточное условие эквивалентности.

Теорема 6. *Пусть каждая из систем форм $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$ линейно независима. Тогда для того чтобы $\{S'_i\}$ и $\{S''_i\}$ были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы для всех форм каждой из этих систем существовало представление вида* (5) *через формы другой системы, удовлетворяющее условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 3.

Настоящая работа была выполнена по инициативе и под руководством А. Д. Мышкиса. Автор пользуется случаем выразить ему свою глубокую благодарность.

1 VI 1957 *Кафедра общей математики*

# NEĪSTIE INTEGRAĻI n-DIMENSIJU TELPĀ

*E. Lepina*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta neīsta integraļa $\int f d(P)$ definicija realai mērojamai funkcijai $f$ pa $n$-dimensiju apgabalu G attiecībā pret kopu virkņu klasi $P = \{\Pi_\alpha\}$. Šeit $\Pi_\alpha = \{\overline{P}_{\alpha i}\}$ ir mērojamu ierobežotu kopu $P_{\alpha i}$ $(\overline{P}_{\alpha i} \subset G)$ virkne, kurai kopas $P_{\alpha i}$ sākot ar kādu numuru satur jebkuru dotu kompaktu kopu $F \subset G$. Dažas vienkāršākās šādu integraļu īpašības dotas bez pierādījuma.

Pamatvieta darbā ierādīta jautājumam par divu neīstas integrēšanas veidu ekvivalenci. Apgabals G šeit tiek aproksimēts ar divām dažādām virkņu klasēm, attiecībā pret kurām notiek integrēšana. Jautājums atrisināts specialā gadījumā, kad katra klase sastāv no vienas vienkāršas kopu virknes: ir dots ekvivalences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums. Problema šajā gadījumā ir reducēta uz ekvivalentu algebrisku problemu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА ГРИНА

*Э. И. ЛЕПИНА*

В статье рассматриваются формулы Грина, связывающие интеграл по конечной $n$—мерной области $G$ с интегралом по поверхности $S$, ограничивающей эту область; например, формула:

$$\int_G \Delta u dG = -\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Если функция $u$ непрерывно дифференцируема вплоть до $S$ и имеет непрерывные вторые производные внутри области $G$ (эти предположения естественны в теории краевых задач), то мы приходим к необходимости рассматривать интеграл в левой части, как несобственный интеграл в $n$-мерном пространстве.

Мы принимаем следующее определение несобственного интеграла в $n$-мерном пространстве. Пусть для $n$-мерной области $G$ задан класс $\mathrm{P} = \{\Pi_\alpha\}$ последовательностей $\Pi_\alpha$ ограниченных измеримых множеств $P_{\alpha i} (i = 1, 2, \ldots)$; $\overline{P}_{\alpha i} \subset G$; при этом для любого компактного множества $F \subset G$ при $i > i_0 (F, \alpha)$ будет $F \subseteq P_{\alpha i}$. Измеримая действительная функция $f(A)$, $(A \in G)$, суммируемая на всяком компактном множестве $F \subset G$, называется интегрируемой по $G$ относительно класса P если существует (конечный) не зависящий от $\alpha$ предел

$$\lim_{i \to \infty} \int_{P_{\alpha i}} f dG$$

(несобственный интеграл). Основные свойства таких интегралов рассмотрены в работе [1].

При обобщении формул Грина на случай несобственного интеграла в работе выделяется один из наиболее естественных классов аппроксимации границы области $G$ при помощи поверхностей, в некотором обобщенном смысле параллельных границе $G$ (§ 2).

Кроме того формулы распространяются также на области с негладкими границами; при этом вводится понятие почти гладкой поверхности, обладающее достаточной общностью и простотой (§ 1).

§ 3 содержит доказательство обобщенной формулы Грина.

Автор выражает свою благодарность А. Д. Мышкису за помощь, оказанную при выполнении этой работы.

## § 1.
## ПОЧТИ ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Буквой $G$ (быть может, с индексами) будем обозначать ту или иную ограниченную область в $n$-мерном евклидовом пространстве, а буквой $S$ (с соответствующими индексами) ее границу (не обязательно связную),

которую мы будем называть поверхностью, ограничивающей область $G$.

Поверхность мы будем называть гладкой, если в некоторой окрестности каждой ее точки одна из координат может быть выражена через остальные координаты (которые могут быть приняты за локальные координаты) с помощью однозначной непрерывно дифференцируемой функции; если, например, одной из таких координат служит $x_n$, то функция имеет вид:

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{1}$$

На каждой гладкой поверхности естественным образом определяется площадь (плоская мера) любого борелевского множества $M$, которую мы будем обозначать $плM$.

Отметим, что согласно нашему определению гладкая поверхность не обязательно связна. Если она не связна, то состоит из одной связной поверхности, содержащей внутри себя конечное число связных поверхностей, расположенных одна вне другой.

Введём новый класс поверхностей, охватывающий, в частности, класс гладких замкнутых поверхностей и значительно более широкий, чем этот последний.

Определение 1. *Поверхность $S$, ограничивающую область $G$, назовем почти гладкой, если на этой поверхности указаны некоторые множества $S_r$ и $S_s$, причем*

1. $S = S_r \cup S_s$, $S_r \cap S_s = \Lambda$, *а $S_s$ — замкнуто*;

2. *существует последовательность областей $\{G_n\}$, ограниченных гладкими поверхностями $S_n$, для которых удовлетворяются условия*:

a) $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots \subseteq G$,

b) $пл\,(S_n \setminus S) \to 0$ *при* $n \to \infty$,

c) *каждое компактное множество $F \subseteq G \cup S_r$ содержится во всех $G_n$, начиная с некоторого номера, и $G_n \cap S_s = \Lambda$.*

$S_r$ и $S_s$ будем называть соответственно *регулярной и сингулярной* частями почти гладкой поверхности $S$.

Мы будем рассматривать только такие почти гладкие поверхности $S$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} пл\,(S_n \cap S) = \alpha < \infty.$$

Нетрудно показать, что этот предел всегда существует и не зависит от выбора последовательности $\{G_n\}$, удовлетворяющей условиям a), b) и c).

Теперь введём меру на почти гладкой поверхности. Объёмом (площадью) $\lambda(F)$ любого замкнутого множества $F \subseteq S$ назовём $\lim\limits_{n\to\infty} пл\,(S_n \cap F)$. Этот предел также существует и не зависит от выбора последовательности $\{G_n\}$. Следует отметить, что если $F \subseteq S_r$, то, начиная с некоторого номера $n$, будет $F \subseteq S_n$, т. е. $\lambda(F) = пл\,F$. Введённый таким образом объём удовлетворяет всем необходимым, требованиям, налагаемым на объём [2]: это будет монотонная, неубывающая, аддитивная и полуаддитивная функция множества, удовлетворяющая неравенствам

$$0 \leqslant \lambda(F) < \infty.$$

Кроме того этот объём является регулярным [2], т. е. для любого замкнутого множества $F \subseteq S$

$$\lambda(F) = \inf\{\lambda(C) : F \subseteq C^\circ \subseteq C \subseteq S\},$$

где $C$ — замкнутое множество, а $C^\circ$ — его открытое ядро (т. е. наибольшее содержащееся в $C$ открытое множество).

Как известно, [2], регулярный объём индуцирует на поверхности $S$ регулярную меру, которая для любого замкнутого множества $F \subseteq S$ совпадает с этим объёмом. Тем самым определяется интеграл по поверхности $S$.

Наконец, нетрудно показать, что функция $f$, определённая, непрерывная и ограниченная на регулярной части $S_r$ поверхности $S$, интегрируема.

## § 2.

## ПОСТРОЕНИЕ КЛАССА АППРОКСИМИРУЮШИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть даны две поверхности: почти гладкая поверхность $S$ и гладкая поверхность $S_1$. Под вырезами $\Delta S$ и $\Delta S_1$ на поверхностях $S$ и $S_1$ будем понимать открытые множества на этих поверхностях; при этом всегда будем предполагать, что $\Delta S \supseteq S_s$.

Пусть теперь заданы одновременно вырезы $\Delta S$ и $\Delta S_1$ соответственно на поверхностях $S$ и $S_1$, окрестности $U$ и $U_1$ множеств $S \setminus \Delta S$ и $S_1 \setminus \Delta S_1$ и взаимно однозначное и взаимно непрерывно дифференцируемое отображение $f$ множества $S \cap U$ на $S_1 \cap U_1$, переводящее $S \setminus \Delta S$ в $S_1 / \Delta S_1$. Рассмотрим число:

$$\bar{N}(\Delta S, \Delta S_1, S \cap U, S_1 \cap U_1, f) = \lambda(\Delta S) + пл\,\Delta S_1 + \max_{A \in S \setminus \Delta S} \rho(A, f(A)) +$$

$$+ \max_{A \in S \setminus \Delta S} |K(A) - 1| + \max_{A \in S \setminus \Delta S} |(\widehat{n_A, n_{f(A)}})|,$$

где $n_A$ — нормаль к поверхности $S$ в точке $A$, $n_{f(A)}$ — нормаль к поверхности $S_1$ в точке $f(A)$, $K(A)$ — коэффициент искажения (якобиан) преобразования $f$ в точке $A \in S \setminus \Delta S$.

Нижнюю грань

$$N(S, S_1) = \inf \bar{N}(\Delta S, \Delta S_1, S \cap U, S_1 \cap U_1, f)$$

по всевозможным вырезам, всевозможным окрестностям $U$ и $U_1$ и всевозможным отображениям $f$ назовём *уклонением* поверхности $S_1$ от поверхности $S$.

Пусть дана теперь область $G$, ограниченная почти гладкой поверхностью $S$. *Последовательность* $\Pi = P_1, P_2, \ldots$ *замкнутых областей* $P_n \subset G$, *ограниченных гладкими поверхностями* $S_n$, *назовем N-аппроксимирующей область* $G$, *если*

1) *любое замкнутое множество* $F \subset G$ *попадает во все* $P_n$, *начиная с некоторого номера*;

2) $\lim\limits_{n \to \infty} N(S, S_n) = 0$.

Класс всех последовательностей $\Pi_\alpha$, $N$-аппроксимирующих $G$, обозначим через $\mathrm{P} = \{\Pi_\alpha\}$.

Покажем теперь, что класс P не пуст. Для этого проведём следующие вспомогательные построения.

Рассмотрим гладкую поверхность $S$. Поле нормалей такой поверхности изменяется непрерывно, но, вообще говря, не непрерывно дифференцируемым образом. Мы построим поле направлений, которое как угодно мало отличается от поля нормалей и изменяется непрерывно дифференцируемым образом. Для этого каждый из направляющих косинусов $a_i(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$ внутренней нормали к поверхности $S$, которые являются непрерывными функциями, определёнными на замкнутом множестве $S$, продолжим на всё пространство. Полученные непрерывные во всём пространстве функции

$\bar{a}_i(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$ приблизим в некотором $n$-мерном шаре, содержащем $S$, полиномами $\bar{\alpha}_i(A)$ $(i = 1, \ldots, n)$ с точностью до $\varepsilon$.

Функции $\bar{\alpha}_i(x_1, \ldots, x_n)$ будут непрерывно дифференцируемыми также на поверхности $S$, так как, например, в случае представления (1), эти функции на $S$ представлятся в виде

$$\bar{\alpha}_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $\varphi$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Для того чтобы эти функции могли служить направляющими косинусами некоторого направления, мы их нормируем, полагая

$$\bar{\bar{\alpha}}_i = \frac{\bar{\alpha}_i}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k^2}} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Нетрудно видеть, что эти новые функции тоже мало отличаются от направляющих косинусов внутренней нормали в любой точке поверхности $S$.

Теперь, считая $\varepsilon$ достаточно малым, построим на поверхности $S$ поле направлений, направляющими косинусами которого будут функции $\bar{\bar{\alpha}}_1, \ldots, \bar{\bar{\alpha}}_n$ и которое назовём полем *квазинормалей* к поверхности $S$. Это поле будет направлено внутрь поверхности $S$ в силу произвольной малости (равномерной по $A \in S$) его отличия от поля направлений внутренней нормали (например, можно считать, что угол между квазинормалями и внутренними нормалями всегда меньше $\frac{\pi}{4}$).

Откладывая на квазинормалях внутрь поверхности $S$ отрезки равной длины $\delta$ $(0 < \delta \leqslant \delta_0$, $\delta_0$ — достаточно мало) с началом на $S$, мы получим новую поверхность, которая целиком лежит внутри $S$ и получается из неё с помощью преобразования:

$$x_1' = x_1 + \delta \bar{\bar{\alpha}}_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n' = x_n + \delta \bar{\bar{\alpha}}_n.$$

Покажем, что это преобразование при достаточно малом $\delta$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно дифференцируемым образом переводит поверхность $S$ в гладкую поверхность $S_\delta$. Для этого рассмотрим сначала окрестность фиксированной точки $A \in S$, которую примем за начало координат. Допустим для определённости, что в этой окрестности вдоль $S$ координата $x_n$ выразится как однозначная непрерывно дифференцируемая функция (1) прочих координат.

Обозначая

$$\alpha_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \alpha_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

мы можем изучаемое преобразование $f_\delta$ записать в виде

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \delta\, \alpha_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} + \delta\, \alpha_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ x_1' &= \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) + \delta\, \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть дана система уравнений*

$$F_i \equiv -x_i' + x_i + \delta\alpha_i(x_1, \ldots, x_m, x_1', \ldots, x_m') = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \quad (3)$$

*где $\alpha_i$ непрерывно дифференцируемые функции в окрестности $D$ ($|x_i'| \leqslant b_1$, $|x_i| \leqslant b_2$, $i = 1, \ldots, m$) начала координат, а $\delta$—некоторый параметр. Тогда найдутся числа $b_1'$ $(0 < b_1' \leqslant b_1)$, $b_2'$ $(0 < b_2' \leqslant b_2')$ и $\delta_1 > 0$ такие, что для всех $|\delta| \leqslant \delta_1$ в окрестности $D'$ ($|x_i'| \leqslant b_1'$, $|x_i| \leqslant b_2'$, $i = 1, \ldots, m$) начала координат система уравнений* (3) *определяет $x_1, \ldots, x_m$ как однозначные непрерывно дифференцируемые функции остальных аргументов $x_1', \ldots, x_m', \delta$.*

Доказательство, Каждая из функций $F_i$ зависит от аргументов $x_1, \ldots x_m, x_1', \ldots, x_m'$ и $\delta$. Якобиан

$$\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$$

при $x_1 = \ldots = x_m = x_1' = \ldots = x_m' = \delta = 0$ обращается в определитель единичной матрицы и потому равен единице. Значит, можно применить теорему о неявных функциях (см., напр., [3]), откуда и вытекагт справедливость леммы 1.

Пусть теперь $A$ — фиксированная точка поверхности $S$, которую мы примем за начало координат; и пусть для определённости в окрестности $\overline{D}$ ($|x_i| \leqslant b$, $i = 1, \ldots, n-1$, $|x_n| \leqslant \overline{b}$) координата $x_n$ для точек $S$ выражается как однозначная непрерывно дифференцируемая функция от $x_1, \ldots, x_{n-1}$

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Рассмотрим $(2n-2)$-мерный куб $D$ ($|x_i'| \leqslant b$, $|x_i| \leqslant b$, $i = 1, \ldots, n-1$). Функции $\alpha_i(x_1, \ldots, x_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ непрерывно дифференцируемы в этом кубе, следовательно, в нём можно применить к первым $n-1$ уравнениям преобразования (2):

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + \delta\alpha_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} + \delta\alpha_2(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

лемму 1. Мы найдём окрестность $D'$ ($|x_i'| \leqslant b_1'$, $|x_i| \leqslant b_2'$, $i = 1, \ldots, n-1$), содержащуюся в $D$, и $\delta_1 > 0$ такие, что для всех $|\delta| \leqslant \delta_1$, $|x_i'| \leqslant b_1'$ переменные $x_1, \ldots, x_{n-1}$ однозначно и непрерывно дифференцируемым образом выразятся через $x_1', \ldots, x_{n-1}', \delta$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x_1', \ldots, x_{n-1}', \delta), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= x_{n-1}(x_1', \ldots, x_{n-1}', \delta). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда в силу последнего из равенств (2) и $x_n'$ оказывается однозначной и непрерывно дифференцируемой функцией $x_1', \ldots, x_{n-1}'$.

Заметим, что так как соотношения (5) дают полное решение уравнений (4) (в окрестности $D'$), то в некоторой окрестности $D''$ начала координат (одной и той же для всех $|\delta| \leqslant \delta_1$) преобразование (4) взаимно однозначно, а потому взаимно однозначно и всё преобразование (2), переводящее часть

поверхности $S$, расположенную в окрестности $D''$ точки $A$, в часть поверхности $S_\delta$.

Далее нетрудно усмотреть, что

$$\frac{\partial x_n'}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_n'}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\Bigg|_{\delta=0}$$

равномерно в некоторой окрестности (содержащейся в $D''$ и произвольно мало от неё отличающейся) точки $A$, т. е. при $\delta \to 0$ угол между нормалями к поверхностям $S$ и $S_\delta$ в соответствующих точках стремится к нулю. Также легко видеть, что коэффициент искажения $\frac{dS_\delta}{dS}$ в окрестности точки $A$ равномерно стремится к единице.

Исходя из сказанного в двух последних абзацах можно доказать, что для достаточно малых $\delta$ преобразование (2) будет взаимно однозначным на всей поверхности $S$, причём поверхность $S_\delta$ гладкая; кроме того при $\delta \to 0$ угол между нормалями к $S$ и $S_\delta$ в соответствующих точках ($A$ и $f_\delta(A)$) стремится к нулю, а коэффициент искажения стремится к единице, равномерно уже на всей поверхности $S$. Заметим также, что при $\delta > 0$ поверхности $S_\delta$, как было указано выше, расположены внутри $S$.

Поверхности $S_\delta$ назовём *квазипараллельными поверхностями.*

Теперь перейдём непосредственно к доказательству непустоты класса P. Покажем, что *для любой области $G$, ограниченной почти гладкой поверхностью $S$, найдется последовательность $\Pi = \{P_i\}$ замкнутых областей $P_i \subset G$, ограниченных гладкими поверхностями $S_i'$, для которых*

1) *всякое замкнутое множество $F \subset G$ попадает во все $P_i$, начиная с некоторого номера;*

2) $N(S, S_i') \to 0$ *при* $i \to \infty$.

По определению почти гладкой поверхности существует последовательность областей $G_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), ограниченных гладкими поверхностями $S_n$, обладающая свойствами a), b) и c).

Заметим, что так как мера $\lambda(S) = \lim\limits_{n\to\infty} пл\,(S \cap S_n)$, то для достаточно больших номеров

$$\lambda(\overline{S \setminus S_n}) = \lambda(S) - пл\,(S \cap S_n)$$

может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, если при данном $\bar{n}$ взять достаточно узкую замкнутую окрестность $\bar{U}$ множества $S_{\bar{n}}$, то $\bar{U} \cap \bar{G} \subset G \cup S_r$ и поэтому при $n > N(\bar{n})$ будет $S_n \subseteq \bar{U} \cap S$, т. е. $\overline{S \setminus S_n} \subset \subset S / S_{\bar{n}}$. Значит, $\lambda(\overline{S \setminus S_n}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмём теперь последовательность положительных чисел $3 > \sigma_1 > \sigma_2 > \ldots$ и последовательность замкнутых множеств $F_i \subset G$ ($i = 1, 2, \ldots$), обладающую тем свойством, что всякое замкнутое множество $F \subset G$ попадает во все $F_i$, начиная с некоторого номера. Выберем далее для каждого $i$ область $G_{n_i}$ так, чтобы

$$G_{n_i} \supset F_i \tag{6}$$

и чтобы выполнялись неравенства:

$$пл\,(\overline{S_{n_i} \setminus S}) < \frac{\sigma_i}{18}$$

и

$$\lambda(\overline{S \setminus S_{n_i}}) < \frac{2\sigma_i}{9}.$$

Затем построим для $S_{n_i}$ поле квазинормалей и с помощью отображения $f_i$ (типа (2)) квазипараллельную поверхность $S_{n_i\delta_i}$ так, чтобы было

$$\delta_i < \rho(S_{n_i}, F_i), \tag{7}$$

где $\delta_i$ — параметр преобразования (т. е. $\delta_i = \rho(A, f_i(A))$ и

$$\delta_i + \max_{A \in S_{n_i}} |(\widehat{n_A, n_{f_i(A)}})| + \max_{A \in S_{n_i}} |K_{n_i}(A) - 1| < \frac{\sigma_i}{3} \tag{8}$$

($K_{n_i}$ — коэффициент искажения). Обозначив $S_{n_i\delta_i} = S_i'$, а внутреннюю часть $S_i'$ через $P_i$, получим из (6) и (7), что $F_i \subset P_i$; значит, всякое замкнутое множество $F \subset G$ попадает во все $P$, начиная с некоторого номера $i$ Остается проверить, что $N(S, S_i') \to 0$ при $i \to \infty$. Для этого возьмем окрестность $U_i$ множества $\overline{S \setminus S_{n_i}}$ так, чтобы $\lambda(R_i) < \frac{\sigma_i}{9}$, где $R_i = (U_i \cap S) \setminus$

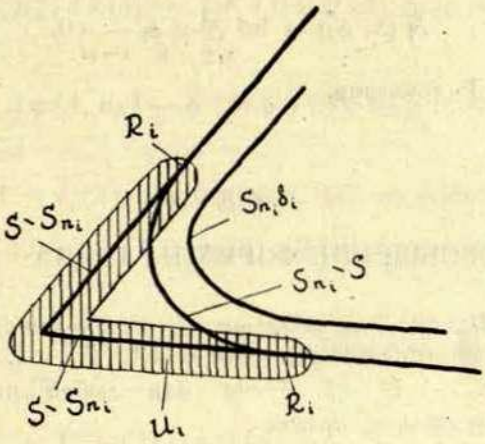



Рис. 1.

$\setminus (S \setminus S_{n_i})$ (см. рис. 1), и выберем после этого на $S$ и $S_i'$ вырезы $\Delta_i S = U_i \cap S$ и $\Delta_i S_i' = f_i(\overline{S_{n_i} \setminus S} \cup R_i)$. Заметим, что отображение $f_i$ на $S_{n_i}$ а потому и на $S \setminus \overline{S \setminus S_{n_i}}$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывно дифференцируемым и переводит $S \setminus (U_i \cap S) = S_{n_i} \setminus \setminus \overline{(S_{n_i} \setminus S} \cup R_i)$ в $f_i(S_{n_i} \setminus \overline{(S_{n_i} / S} \cup R_i))$. При этом

$$\lambda(\Delta_i S) = \lambda(R_i) + \lambda(\overline{S \setminus S_{n_i}}) < \frac{\sigma_i}{9} + \frac{2\sigma_i}{9} = \frac{\sigma_i}{3},$$

а

$$пл\, \Delta_i S_i' = пл\, f_i(\overline{S_{n_i} \setminus S} \cup R_i) \leqslant K_i\, пл\, (\overline{S_{n_i} \setminus S} \cup R_i), \tag{9}$$

где $K_i = \max_{A \in S_{n_i}} |K_{n_i}(A)|$. В силу (8) $|K_{n_i}(A) - 1| < \frac{\sigma_i}{3}$, следовательно, $0 < K_{n_i}(A) < 1 + \frac{\sigma_i}{3}$ и $\max |K_{n_i}(A)| \leqslant 1 + \frac{\sigma_i}{3} < 2$. Поэтому из (9) можно получить оценку:

$$пл\,\Delta_i S_i' < 2\left(\frac{\sigma_i}{18} + \frac{\sigma_i}{9}\right) = \frac{\sigma_i}{3}.$$

Из всего сказанного имеем:

$$\overline{N}(\Delta_i S, \Delta_i S_i', S \setminus \overline{S \setminus S_{n_i}}, f_i(S \setminus \overline{S \setminus S_{n_i}}), f_i) = \lambda(\Delta_i S) + пл\,\Delta_i S_i' +$$

$$+ \max_{A \in S \setminus \Delta_i S} \rho(A, f_i(A)) + \max_{A \in S \setminus \Delta_i S} |\widehat{(n_A, n_{f_i(A)})}| + \max_{A \in S \setminus \Delta_i S} |K_{n_i}(A) - 1| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda(\Delta_i S) + пл\,\Delta_i S_i' + \delta_i + \max_{A \in S_{n_i}} |\widehat{(n_A, n_{f_i(A)})}| + \max_{A \in S_{n_i}} |K_{n_i}(A) - 1| <$$

$$< \frac{\sigma_i}{3} + \frac{\sigma_i}{3} + \frac{\sigma_i}{3} = \sigma_i.$$

Но тогда и

$$N(S, S_i') = \inf \overline{N} \leqslant \sigma_i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0.$$

Непустота класса P доказана.

## § 3.

## ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ГРИНА

Лемма 2. *Пусть для области $G$, ограниченной почти гладкой поверхностью $S$, определена функция $\varphi(A, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, непрерывная при $A \in \overline{G}$, $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$. Тогда для любой последовательности $\Pi = \{P_n\} \in P$ существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{S_n} \varphi(A, \cos(n_A, x_1), \ldots, \cos(n_A, x_n))\, dS_n,$$

*где $n_A$ — единичный вектор направленной внутрь $P_n$ нормали к поверхности $S_n$ в точке $A$. Этот предел равен*

$$\int_S \varphi(A, \cos(n_A, x_1), \ldots, \cos(n_A, x_n))\, d\lambda(S). \tag{10}$$

Заметим, что $n_A$ — определён и непрерывен на $S_r$, а в силу непрерывности функции $\varphi$ и вся подинтегральная функция в (10) непрерывна и ограничена на $S_r$; значит, в силу конца § 1 интеграл (10) имеет смысл.

Доказательство. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольную последовательность $\Pi \in P$. Для неё по определению $N(S, S_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$. Выберем теперь $P_j \in \Pi$ так, чтобы было $N(S, S_j) = \inf \overline{N} < \sigma$ (величину $\sigma > 0$ определим позже). Выберем далее вырезы $\widetilde{\Delta} S$ и $\widetilde{\Delta} S_j$ и отображение $f$ окрестности $U$ множества $S \setminus \widetilde{\Delta} S$ на окрестность $U_j$ множества $S_j \setminus \widetilde{\Delta} S_j$ так, чтобы было

$$\overline{N}(\widetilde{\Delta} S, \widetilde{\Delta} S_j, S \cap U, S_j \cap U_j, f) < \sigma$$

Рассмотрим теперь абсолютную величину разности интегралов

$$\left| \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S) - \int\limits_{S_j \setminus \widetilde{\Delta} S_j} \varphi(A, n_A)\, dS_j \right| \tag{11}$$

$$(n_A = (\cos(n_A, x_1), \ldots, \cos(n_A, x_n))).$$

Сделаем во втором интеграле замену переменных в силу преобразования $f$. Тогда $S_j \setminus \widetilde{\Delta} S_j$ перейдёт в $S \setminus \widetilde{\Delta} S$, а весь интеграл будет равен интегралу

$$\int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} K(A)\, \varphi(f(A), n_{f(A)})\, d\lambda(S),$$

где $K(A)$ — коэффициент искажения преобразования $f$.

Теперь выражение (11) можно переписать так:

$$\left| \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S) - \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} K(A)\, \varphi(f(A), n_{f(A)})\, d\lambda(S) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} |\varphi(A, n_A) - K(A)\, \varphi(f(A), n_{f(A)})|\, d\lambda(S).$$

Полагая $K(A) - 1 = \varepsilon_1(A)$, мы получим, что последний интеграл равен:

$$\int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} |\varphi(A, n_A) - (1 + \varepsilon_1(A)\, \varphi(f(A), n_{f(A)})|\, d\lambda(S) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} |\varphi(A, n_A) - \varphi(f(A), n_{f(A)})|\, d\lambda(S) +$$

$$+ \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} |\varepsilon_1(A)|\, |\varphi(f(A), n_{f(A)})|\, d\lambda(S).$$

Так как функция $\varphi$ непрерывна, то, выбирая $\sigma$ достаточно малым, можно добиться того, чтобы было

$$\sigma < \varepsilon$$

и

$$|\varphi(A, n_A) - \varphi(f(A), n_{f(A)})| < \varepsilon.$$

В силу непрерывности функции $\varphi$ она ограничена ($|\varphi| \leqslant M$). Поэтому

$$\left| \int\limits_{S / \widetilde{\Delta} S} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S) - \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} K(A)\, \varphi(f(A), n_{f(A)})\, d\lambda(S) \right| <$$

$$< \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} \varepsilon\, d\lambda(S) + \int\limits_{S \setminus \widetilde{\Delta} S} \varepsilon M\, d\lambda(S) = \varepsilon(1 + M)\, \lambda(S \setminus \widetilde{\Delta} S) < \varepsilon \alpha (1 + M).$$

(так как $\lambda(S \setminus \widetilde{\Delta} S) < \lambda(S) < \alpha$). Следовательно, и выражение (11) меньше, чем $\varepsilon \alpha (1 + M)$. Далее имеем оценки:

$$\left|\int\limits_{\widetilde{\Delta S}_j} \varphi(A, n_A)\, dS_j\right| \leqslant M\, пл\, \widetilde{\Delta S}_j \leqslant M\sigma < M\varepsilon$$

и

$$\left|\int\limits_{\widetilde{\Delta S}} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S)\right| \leqslant M\lambda(\widetilde{\Delta S}) \leqslant M\sigma < M\varepsilon.$$

Теперь можно оценить разность:

$$\left|\int\limits_{S} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S) - \int\limits_{S_j} \varphi(A, n_A)\, dS_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_{S\setminus\widetilde{\Delta S}} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S) - \int\limits_{S_j\setminus\widetilde{\Delta S}} \varphi(A, n_A)\, dS_j\right| + \left|\int\limits_{\widetilde{\Delta S}} \varphi(A, n_A)\, d\lambda(S)\right| +$$

$$+ \left|\int\limits_{\widetilde{\Delta S}_j} \varphi(A, n_A)\, dS_j\right| < \varepsilon\alpha(1+M) + 2M\varepsilon = L\varepsilon,$$

где $L = \alpha(1+M) + 2M$. Отсюда следует лемма 2.

В качестве непосредственного следствия из леммы 2 мы получаем следующую общую теорему, дающую возможность получить из обычной формулы Грина аналогичные результаты в несобственных интегралах.

Теорема. *Пусть в предположениях леммы 2 для любой области $G'$, ограниченной гладкой поверхностью $S'$ и содержащейся вместе с границей внутри $G$, и для любой функции $u$, дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности множества $\overline{G}'$, имеет место формула*

$$\int\limits_{G'} P\left(A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) dG' = \int\limits_{S'} Q\left(A, n_A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dS', \tag{12}$$

*где функция $P$ определена и непрерывна при $A \in \overline{G}$, $-\infty < u, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} < \infty$, а функция $Q$ — при $A \in \overline{G}$, $|n_A| = 1$, $-\infty < u, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} < \infty$.*

*Тогда для любой функции $u$, определенной в $G$ и непрерывной вплоть до границы* вместе с производными первого порядка и имеющей непрерывные производные второго порядка в $G$, имеет место формула*

$$\int\limits_{G} P\left(A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) d(\mathrm{P}) = \int\limits_{S} Q\left(A, n_A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\lambda(S). \tag{13}$$

Для доказательства достаточно при любой последовательности $\{P_n\} \in \mathrm{P}$ применить формулу (12) для $G' = P_n$ $(i = 1, 2, \ldots)$, затем перейти к пределу при $n \to \infty$, воспользовавшись леммой 2.

*) Функция $f$, заданная в ограниченной области $G$, называется непрерывной вплоть до границы, если $f$ продолжима до непрерывной функции, заданной на $\overline{G}$, или, что то же, если $f$ равномерно непрерывна в $G$.

Примером такой обобщённой формулы Грина служит формула

$$\int_G \Delta\, ud\,(\mathrm{P}) = -\int_S \frac{\partial u}{\partial n}\, d\,\lambda\,(S).$$

Следует отметить, что развиваемый в работе метод аппроксимаций применим даже в классическом случае. Так, для случая, когда функция $P\left(A,\, u,\, \frac{\partial u}{\partial x_1},\, \ldots,\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)$ суммируема, а область $G$ обладает гладкой границей, формула (13) получается в более общих предположениях, чем приводится в основных курсах математической физики. Здесь она получается в естественных предположениях, вызванных существом задачи, а не методом доказательства.

Отметим также, что в формулировке теоремы поверхности $S'$ можно было бы считать $k$ раз гладкими (т. е. в представлении (1) функция $\varphi$ должна иметь непрерывные частные производные до $k$-го порядка включительно); тогда и класс P следует изменить, считая все члены любой последовательности $\{P_n\} \in \mathrm{P}$ ограниченными $k$ раз гладкими поверхностями. Очевидно также, аналогичную формулировку легко дать для формул типа Грина, связывающих интегралы от производных любого порядка.

1 VI 1957 *Кафедра общей математики.*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Э. И. Лепина,* Несобственные интегралы в $n$-мерном пространстве. Ученые записки Латв. ГУ, т. XX вып. 3, 1958, стр. 105—124.
[2]. *П. Халмош.* Теория меры, М., ИЛ, 1953.
[3]. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1, Гостехиздат, 1948.

## VISPĀRINĀTĀ GRĪNA FORMULA

*E. Lepiņa*

Darbā apskatītas Grīna tipa formulas, kas saista integrali pa n-dimensiju apgabalu $G$ ar integrali pa tā robežu S. Ja Grīna formulā ietilpstošām funkcijām ir nepārtraukti otras kārtas atvasinājumi tikai apgabala G iekšienē, tad integralis pa apgabalu G jāuzskata kā neīsts integralis n-dimensiju telpā.

Darbā Grīna formula vispārināta šim gadījumam, reizē apskatot arī vispārinājumu attiecībā pret apgabala robežvirsmu S. Gabaliem gludas virsmas vietā tiek ievests gandrīz gludas virsmas jēdziens un formula pierādīta šādām virsmām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О ПОЛИНОМАХ, ЗАДАННЫХ ФОРМУЛОЙ РОДРИГА

*Г. К. ЭНГЕЛИС*

В теории классических ортогональных полиномов большую роль играет так называемая формула Родрига. В настоящей статье рассматриваются некоторые системы полиномов, определяемые аналогичной формулой, именно

$$P_n(x) = \frac{\gamma_n}{\rho(x)} [\rho(x)\, \beta^n(x)]^{(n)}, \tag{1}$$

где $\gamma_n$ — постоянная,

$$\beta(x) = \sum_{k=0}^{s+1} \beta_k x^k, \quad s \geqslant 1 \tag{2}$$

и $\rho(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \tag{3}$$

где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{s} \alpha_k x^k, \quad |\alpha_s| + |\beta_s| > 0, \tag{4}$$

$\alpha_k$, $\beta_k$ — комплексные числа. Равенство (1) в дальнейшем будем называть формулой Родрига, так как при $s = 1$ (случай классических ортогональных полиномов) это название общепринято. В статье [3] было доказано следующее: 1) для любого натурального $n$ функция $P_n(x)$ является полиномом степени не выше $ns$; 2) если для двух действительных чисел $a$, $b$ имеет место

$$\rho(a)\, \beta(a) = \rho(b)\, \beta(b) = 0, \tag{5}$$

то полином $P_n(x)$ ортогонален ко всем полиномам степени меньше $n$ на сегменте $[a, b]$ с дифференциальным весом $\rho(x)$; 3) при условии (5) $P_n(x)$ имеет на $[a, b]$ не меньше $n$ нулей; 4) $P_n(x)$ — единственное полиномиальное решение некоторого линейного однородного дифференциального уравнения порядка $s + 1$. Для $s = 1$ эти утверждения дают общеизвестные свойства классических ортогональных полиномов. Цель этой статьи — показать, что на $P_n(x)$ при произвольном натуральном $s$ довольно просто переносятся ещё некоторые другие соотношения, известные из теории классических полиномов. Конкретно рассматриваются: представление полинома в виде определителя, элементы которого удовлетворяют некоторому рекуррентному соотношению (§ 1); рекуррентные формулы для самих полиномов (§ 2); производящие функции и интегральные представления (§ 3).

Коэффициент $\gamma_n$ в формуле Родрига в дальнейшем будем считать равным 1. Ясно, что все результаты легко переносятся и на общий случай.

## § 1.

Легко проверить следующий факт: если $Q_n(x)$ полином степени $2n$, который ортогонален ко всем полиномам степени ниже $n$ на сегменте $[a_1, b_1]$ с весом $\rho_1(x)$ и на сегменте $[a_2, b_2]$ с весом $\rho_2(x)$, то

$$Q_n(x) = \delta_n \begin{vmatrix} c_0^{(1)} & c_1^{(1)} & \dots & c_{n-1}^{(1)} & c_0^{(2)} & c_1^{(2)} & \dots & c_{n-1}^{(2)} & 1 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & \dots & c_n^{(1)} & c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & \dots & c_n^{(2)} & x \\ c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & \dots & c_{n+1}^{(1)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & \dots & c_{n+1}^{(2)} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{2n}^{(1)} & c_{2n+1}^{(1)} & \dots & c_{3n-1}^{(1)} & c_{2n}^{(2)} & c_{2n+1}^{(2)} & \dots & c_{3n-1}^{(2)} & x^{2n} \end{vmatrix}, \tag{6}$$

где $\delta_n$ — постоянная, $c_k^{(i)} = \int\limits_{a_i}^{b_i} \rho_i(x)\, x^k\, dx$, $i = 1,2$. Это следует из единственности (с точностью до постоянного множителя) полинома $Q_n(x)$.

Пусть теперь в (2) и (4) $s = 2$, уравнение $\beta(x) = 0$ имеет три различных действительных корня $a_i$ и

$$\rho(a_i)\,\beta(a_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3. \tag{7}$$

Из указанных во введении свойств 1), 2) следует, что $P_n(x)$, определенное формулой Родрига, тоже допускает представление (6), где теперь

$$c_k^{(i)} = \int\limits_{a_i}^{a_{i+1}} \rho(x)\, x^k dx,\ i = 1,2.$$

Это рассуждение остается в силе, даже если некоторые $a_i$ не действительны: тогда моменты $c_k^{(i)}$ определяются как интегралы по произвольно выбранной линии комплексной плоскости, соединяющей точки $a_i$, $a_{i+1}$. Если же в некоторой точке $a_i$ не выполняется (7), то $\rho(x)$ имеет в этой точке особенность и одна последовательность моментов вычисляется при помощи интегралов по замкнутому контуру, окружающему $a_i$. Аналогично рассматриваются случаи, когда $\beta(x) = 0$ имеет кратные корни, но $\alpha(x)$, $\beta(x)$ взаимно просты, а также случай, когда один или несколько корней бесконечны. На этом нет надобности останавливаться, так как для случая $s = 1$ этот вопрос подробно рассмотрен Я. Л. Геронимусом [1]. Некоторые особенности представляет случай, когда $\beta(x) = \beta_3(x - a_1)(x - a_2)^2$, $a_1 \neq a_2$ и $\alpha(x) = \alpha_2(x - a_2)(x - b)$ или $\alpha(x) = \alpha_1(x - a_2)$. Тогда

$$(\rho\beta^n)^{(n)} = [\rho(\alpha + n\beta')\,\beta^{n-1}]^{(n-1)} = (\rho\varphi_1\beta^{n-1})^{(n-1)} =$$
$$= [\rho\,(\alpha\varphi_1 + \varphi'_1\beta + (n-1)\,\varphi_1\beta')\,\beta^{n-2}]^{(n-2)} = (\rho\varphi_2\beta^{n-2})^{(n-2)} = \dots = \rho\varphi_n$$

и легко видеть, что $\varphi_k$ делится на $(x - a_2)^k$, значит, $P_n(x)$ содержит множитель $(x - a_2)^n$. Отсюда следует, что имеет место представление

$$P_n(x) = \delta_n \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & \dots & d_{n-1} & (x - a_2)^n \\ d_1 & d_2 & \dots & d_n & (x - a_2)^n x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & d_{n+1} & \dots & d_{2n-1} & (x - a_2)^n x^n \end{vmatrix},$$

где

$$d_k = \int \rho(x)(x-a_2)^n x^k dx$$

и интеграл берется по линии, соединяющей $a_1$, $a_2$ или по замкнутому контуру вокруг $a_1$. Подобным образом получается представление в случае $\beta(x) = \beta_3(x-a)^3$, $\alpha(x) = \alpha_2(x-a)(x-b)$ или $\alpha = \alpha_1(x-a)$. Если же $\beta(x) = \beta_3(x-a)^3$, $\alpha(x) = \alpha_2(x-a)^2$, то $P_n(x) = \delta_n(x-a)^{2n}$.

Очевидно, всё предыдущее легко распространяется и на случай $s > 2$.

Моменты $c_k$ весовой функции $\rho(x)$ связаны некоторым рекуррентным соотношением. Пусть $a$, $b$ — корни уравнения $\beta(x) = 0$ и выполняется (5). Тогда, учитывая (3), получим

$$\int_a^b \rho\alpha x^k dx = \int_a^b \rho'\beta x^k dx = \rho\beta x^k\Big|_a^b - \int_a^b \rho(\beta x^k)' dx,$$

откуда следует

$$\int_a^b \rho\,[\alpha x^k + (\beta x^k)']\,dx = 0$$

и окончательно

$$\sum_{j=0}^{s} [(k+j+1)\beta_{j+1} + \alpha_j]\, c_{k+j} + k\beta_0 c_{k-1} = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

В случае $s = 1$ можно доказать (см. [1]) и обратное предложение: если последовательность чисел $c_k$ удовлетворяет соотношению

$$\sum_{j=0}^{s} (\gamma_j k + \delta_j)\, c_{k+j} + k\gamma_1 c_{k-1} = 0,\ k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{8}$$

то 1) эта последовательность является последовательностью моментов некоторой функции $\rho(x)$, удовлетворяющей (3), и 2) соответствующий определитель даёт полином $P_n(x)$. В общем случае ($s > 1$) можно утверждать, что 1) последовательность $c_k$ является линейной комбинацией из последовательностей моментов некоторой функции $\rho(x)$, удовлетворяющей (3) (причем $\rho(x)$ определяется коэффициентами $\gamma_j$, $\delta_j$ с точностью до постоянного множителя); 2) определитель типа (6), где $c_k^{(i)}$ — линейно независимые решения уравнения (8), представляет полином, который также дается формулой (1). Последнее следует из того, что, составляя линейные комбинации столбцов определителя, можно добиться, чтобы элементы этого определителя были моментами функции $\rho(x)$.

## § 2.

Покажем, что если $P_n(x)$ определяется формулой (1), то при всех $n \geqslant 2s$ имеет место одно из соотношений

$$P_n(x) = A_s(x)\,P_{n-1}(x) + \sum_{k=2}^{s} B_{2s-k}(x)\,P_{n-k}(x) \tag{9}$$

или

$$A_s(x)\,P_{n-1}(x) + \sum_{k=2}^{2s} B_{2s-k}(x)\,P_{n-k}(x) = 0, \tag{10}$$

где $A_l(x)$, $B_l(x)$ — полиномы, степени не выше $l$, коэффициенты которых зависят от $n$ и в случае (10) не все равны нулю.

Очевидно, достаточно доказать существование таких полиномов $A_l$, $B_l$, что

$$v_n = A_s\,v_{n-1} + \sum_{k=2}^{2s} B_{2s-k}\,v_{n-k}, \tag{11}$$

где

$$v_n = v_n(x) = [\rho\,(x)\,\beta^n(x)]^{(n)}. \tag{12}$$

Для этой цели будем считать пока коэффициенты полиномов $A_l$, $B_l$ неизвестными (число этих коэффициентов равно $(s+1) + (2s-1)\,2s\,|2 = 2s^2 + 1$) и покажем, что

$$v_n = (\rho C\,(x)\,\beta^{n-2s})^{(n-2s)}, \tag{13}$$

и

$$A_s\,v_{n-1} + \sum_{k=2}^{2s} B_{2s-k}\,v_{n-k} = (\rho D\,(x)\,\beta^{n-2s})^{(n-2s)}, \tag{14}$$

где $C$, $D$ — полиномы степени $2s^2$, коэффициенты полинома $C$ выражаются через коэффициенты полиномов $\alpha$, $\beta$, а коэффициенты полинома $D$ являются линейными функциями наших неизвестных. Приравнивая $C$ и $D$, получим систему линейных алгебраических уравнений. Если определитель этой системы отличен от нуля, найденные $A_s$, $B_l$ удовлетворяют (11) и (9); если же определитель равен нулю, существует нетривиальное решение соответствующей однородной системы и получим (10). Значит, остается доказать (13) и (14).

(13) доказывается методом индукции, причем учитывается (2), (3), (4) и очевидное тождество

$$(\rho\varphi\beta^j)^{(k)} = [\rho\,(\alpha\varphi + \varphi'\beta + j\varphi\beta')\,\beta^{j-1}]^{(k-1)}, \tag{15}$$

из которого следует, что если $\varphi$ — полином степени $l$, то $\alpha\varphi + \varphi'\beta + j\varphi\beta'$ — полином степени $\leqslant l + s$, коэффициенты которого линейно зависят от коэффициентов полинома $\varphi$.

Чтобы доказать (14), достаточно выяснить, что (при той же гипотезе относительно $\varphi$)

$$\varphi\,(\rho\beta^j)^{(k)} = (\rho\Phi\beta^{j-i})^{(k-i)},\ i \leqslant j,\ i \leqslant k, \tag{16}$$

где $\Phi$ — полином степени $l + is$ (коэффициенты которого линейно зависят от коэффициентов $\varphi$) и применить это преобразование к каждому слагаемому левой части (14), считая $j = k$, $k - i = n - 2s$. (16) в свою очередь доказывается индукцией по $l$, с учётом соотношения

$$\varphi\,(\rho\beta^j)^{(k)} = (\rho\varphi\beta^j)^{(k)} - \sum_{i=1}^{k} C_k^i\,\varphi^{(i)}\,(\rho\beta^j)^{(k-i)}$$

и (15). Этим наше утверждение доказано.

В случае $s = 1$ (9) дает известное соотношение

$$P_n(x) = (a_1 x + a_o) P_{n-1}(x) + b_o P_{n-2}, \tag{17}$$

и линейная система для вычисления $a_1$, $a_o$, $b_o$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]\, a_1 && = [\alpha_1 + (2n+1)\beta_2]\,[\alpha_1 + (2n+2)\beta_2],\\
&(\alpha_0 + \beta_1)\, a_1 + (\alpha_1 + 2n\beta_2)\, a_0 && = 2\,[\alpha_1 + (2n+1)\beta_2]\,[\alpha_0 + (n+1)\beta_1],\\
&(1-n)\,\beta_0 a_1 + (\alpha_0 + n\beta_1)\, a_0 + b_0 && = \beta_0\,[\alpha_1 + (2n+2)\beta_2] + (\alpha_0 + n\beta_1)\,[\alpha_0 +\\
& && \quad + (n+1)\beta_1].
\end{aligned}$$

Определитель этой системы равен $[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]\,[\alpha_1 + 2n\beta_2]$. Нетрудно убедиться, что если это выражение равно нулю, некоторые $P_n$ имеют степень меньше $n$ и (17) может не иметь места. Этот случай в теории классических ортогональных многочленов обычно исключается уже в самом начале требованием интегрируемости функции $\rho(x)$.

При некоторых специальных предположениях формула (9) может значительно упрощаться. Так в [3] показано, что, если $P_n$ содержит только члены вида $a_k x^{ks}$, то имеет место соотношение

$$x^s P_n(x) = \sum_{j=n-s}^{n+1} \lambda_{n,j} P_j(x)$$

($\lambda_{n_j}$ — постоянные), что, конечно, представляет частный случай равенства (9).

Возможны также рекуррентные формулы, связывающие полиномы $P_n$, соответствующие различным $\rho$. Например, из (12) легко получить

$$v_n'(x;\rho) = v_{n+1}(x;\rho \mid \beta)$$

(здесь после аргумента указывается весовая функция) и отсюда в свою очередь

$$\beta(x) P_n'(x;\rho) + \alpha(x) P_n(x;\rho) = P_{n+1}(x;\rho \mid \beta). \tag{18}$$

В частных случаях (18) дает известные формулы для многочленов Якоби и Лагерра.

## § 3.

Одну из производящих функций полиномов $P_n(x)$ можно получить, буквально повторяя рассуждение, проведенное для случая $s = 1$ в [2], стр. 500. Это дает:

$$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(x) w^n = \rho(\zeta(w, x)) \rho(x)\,[1 - w\beta'((\zeta(w, x))], \tag{19}$$

где $\zeta(w, x)$ — тот корень уравнения

$$\zeta - x - w\beta(\zeta) = 0, \tag{20}$$

который стремится к $x$, когда $w$ стремится к нулю. Необходимо сразу отметить, что сколько нибудь эффективно производящая функция этим способом получается только в том случае, когда степень полинома $\beta(x)$ низка, независимо от степени полинома $\alpha(x)$.

Иногда удобнее (19) записать в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} P_n(x) w^n = \left[\frac{\partial}{\partial w} f(\zeta(w, x))\right] |\rho(x), \tag{21}$$

где

$$f(x) = \int_c^x \frac{\rho(t)}{\beta(t)} dt,$$

$c$ — постоянная. Равносильность (19) и (21) проверяется подстановкой значения $f$ с учетом (20).

Из одной производящей функции легко получить сколь угодно других, заменяя $w$ через $kw$ ($k$ — постоянная), умножая и деля на $w$, дифференцируя и интегрируя по $w$ (конечно, если можно обосновать почленное интегрироване и дифференцирование), например,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} P_n(x) w^n = [f(\zeta(w, x)) - f(x)] \, |w\rho(x), \tag{22}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} P_n(x) w^n = w \left[\frac{\partial^2}{\partial w^2} f(\zeta(w, x))\right] |\rho(x)$$

и т. п., причем иногда таким путем удается получить несколько более простые функции. Так, в случае $\beta = x^2$, $\alpha = 1$, $\rho = \exp(-x^{-1})$ (полиномы Бесселя) (19) дает производящую функцию $\{\exp[(1 - \sqrt{1 - 4wx})\,|2x]\}|\sqrt{1 - 4wx}$, а (22) — производящую функцию $\{\exp[(1 - \sqrt{1 - 4wx})|\,2x] - 1\}/w$. Если же положить $\beta = x$, $\alpha = 2 - 2x^2$, $\rho = x^2 \exp(-x^2)$, то из (15) получим $\{\exp[x^2(w^2 - 2w)/(1 - w)^2]\}/(1 - w)^3$, а из (22) $\{1 - \exp[x^2(w^2 - 2w)|(1 - w)^2]\}/2wx^2$.

Интегральное представление, годное для всех $P_n(x)$ имеет вид

$$P_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(\zeta)\beta^n(\zeta)\,d\zeta}{\rho(x)(\zeta - x)^{n+1}} \tag{23}$$

($C$ — замкнутый контур, внутри которого находится точка $x$, но не находится ни одна из особых точек функции $\rho(\zeta)$) и получается из (1) при помощи формулы Коши. При $s = 1$ и конкретных $\rho$ и $\beta$ известны многочисленные уточнения формулы (23), часто очень удобные для оценки значений $P_n(x)$. При $s > 1$ в некоторых случаях тоже удается удобно конкретизировать это представление. В качестве примера рассмотрим $P_n(x)$ при $\rho = 1$, $\beta = x^3 - x$; здесь естественно выбрать $C$ по образцу хорошо изученного случая $\rho = 1$, $\beta = x^2 - 1$ (полиномы Лежандра), а именно $\zeta = x + \sqrt{1 - x^2}\, e^{it}$. После простых преобразований получим

$$P_n(x) = \frac{2^{n-1} n!}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [(x + \sqrt{1 - x^2} e^{it})(x + i\sqrt{1 - x^2} \sin t)]^n dt.$$

Учитывая, что $|x + \sqrt{1 - x^2}\, e^{it}| \leqslant \sqrt{2}$ и $|x + i\sqrt{1 - x^2} \sin t| \leqslant 1$, получим оценку

$$|P_n(x)| \leqslant (2\sqrt{2})^n n!$$

пригодную для всех $x \in (-1, 1)$.

1 VI 1957

*Кафедра математического анализа*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Я. Л. Геронимус* — О полиномах, ортогональных относительно данной числовой последовательности, и о теореме W. Hahn'a — Известия Академии Наук СССР, сер. математическая, 1940, т. 4, № 2, 215-228.

[2]. *М. А. Лаврентьев* и *Б. В. Шабат* — Методы теории функций комплексного переменного, ГИТТЛ, М/Л, 1951.

[3]. *Г. К. Энгелис* — О некоторых системах полиномов — Учёные Записки Латвийского Государственного Университета, 1956, т. 8, 55-66.

## PAR POLINOMIEM, KAS DEFINĒTI AR RODRIGA FORMULU

*G. Eņģelis*

(Kopsavilkums)

Apskatīti polinomi $P_n(x)$, ko definē ar (1), (2), (3), (4) un kas ietver kā specialu gadījumu ($s = 1$) t. s. klasiskos ortogonalos polinomus. Parādīts, ka pastāv attēlojums ar determinantu (piem. (6)), kura elementi apmierina rekurences formulu (8); noskaidrots, ka katram $n \leqslant 2s$ ir spēkā rekurences formulas (9) vai (10); iespējams no klasisko ortogonalo polinomu teorijas pārnest uz aplūkoto vispārīgāko gadījumu arī dažus paņēmienus veidotājas funkcijas un polinomu integrālā attēlojuma iegūšanai.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

*В. Ж. РИЕКСТЫНЯ*

1. Для исследования поведения функций в окрестности некоторой точки часто пользуются асимптотическими рядами. Известное классическое определение асимптотических рядов, данное Пуанкаре, применимо только к небольшому классу функций. Некоторое обобщение классического определения асимптотических рядов дано Г. Дёчем [1]. Оно применимо к функциям, которые в некоторой окрестности данной точки представимы в виде суммы конечного числа функций, отличных от нуля в этой окрестности. Но оно уже неприменимо к такому простому разложению как

$$\int_x^\infty \frac{J_\nu(u)}{u}\,du \sim -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+k+1\right)2^k}{x^{k+1}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right)} J_{\nu+k+1}(x) \tag{1}$$

($x > 0$, $\nu$ — действительное число),
которое формально получается интегрированием по частям и применением формулы $\frac{d}{du}[u^\nu J_\nu(u)] = u^\nu J_{\nu-1}(u)$. Поэтому требуется расширение существующих определений асимптотических рядов и тем самым расширение класса функций, обладающих асимптотическими разложениями. Надо отметить, что в литературе (напр. [2], [3], и др.) пользуются такими асимптотическими разложениями, но не дают определения, в каком смысле их надо понимать.

В настоящей статье будет дано одно обобщение определения асимптотических разложений и указаны некоторые разложения такого вида.*

2. Для этой цели введем некоторые обозначения.

Буквой $z$ обозначим комплексное переменное, а буквой $G$ — односвязную открытую область, для которой $z_0$ есть внутренная или граничная точка. Под $G_{z_0}$ будем понимать такое множество:

$$G_{z_0} = \begin{cases} G, & \text{если } z_0 \overline{\in} G \\ G - z_0, & \text{если } z_0 \in G. \end{cases}$$

Будем писать, что $z \in D_{z_0,\delta}$, если $z \in G_{z_0}$ $|z - z_0| < \delta$ (если $z_0 = \infty$, то $|z| > \delta$), где $\delta > 0$ соответственно фиксированная постоянная. Предположим, что функции $F(z)$, $f(z)$ и $h(z)$ определены и непрерывны для всех $z \in G_{z_0}$, кроме того $f(z) \not\equiv 0$ в области $G_{z_0}$ и $h(z) \neq 0$ в области $D_{z_0,\delta}$.

Определение 1. Символ $f(z) = O_{G_{z_0}}[h(z)]$ будем употреблять в том случае, когда можно указать такие постоянные $K > 0$ и $\delta > 0$, что $|f(z)| < |h(z)|K$, если $z \in D_{z_0,\delta}$.

Определение 2. Если $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$, $z \in G_{z_0}$, то будем писать:

$$f(z) = o_{G_{z_0}}[h(z)].$$

Эти символы являются уже известными в литературе символами O и o, только в этой записи уточняется рассматриваемая точка и её окрестность.

* При чтении корректуры автору стала известной книга М. А. Евграфова (Асимптотические оценки и целые функций. Москва, 1957) в которой в случае вещественного аргумента дано определение, эквивалентное с нашим определением.

Определение 3. Пусть

1) $f(z) = O_{G_{z_0}}[h(z)]$;

2) существует постоянная $m > 0$ такая, что на каждом луче или отрезке принадлежащем $G_{z_0}$, на котором $\arg(z - z_0) = \varphi$ (если $z_0 = \infty$, то $\arg z = \varphi$), для всякого $\delta > 0$ найдется по крайней мере одна точка $z_{\varphi,\delta} \in D_{z_0,\delta}$ для которой

$$\left| \frac{f(z_{\varphi,\delta})}{h(z_{\varphi,\delta})} \right| \geqslant m .$$

Тогда применяем обозначение $f(z) = \overline{O}_{G_{z_0}}[h(z)]$. Например.,

$$\cos z = \overline{O}_{[0 \leqslant \arg z \leqslant \pi]\infty}(e^{\operatorname{Im} z}) . \tag{2}$$

Определение 4. Будем говорить, что $f(z)$ в окрестности точки $z_0$, принадлежащей $G_{z_0}$, является асимптотической функцией для $F(z)$, если в $G_{z_0}$ существует такая функция $h(z)$, для которой имеют место соотношения:

$$f(z) = \overline{O}_{G_{z_0}}[h(z)], \quad F(z) = f(z) + o_{G_{z_0}}[h(z)] \tag{3}$$

Правую часть равенства (3) назовем асимптотическим выражением функции $F(z)$ в окрестности точки $z_0$.

Например: учитывая (2) и асимптотическое разложение для $J_\nu(z)$, имеем

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o_{[0 \leqslant \arg z \leqslant \pi - \varepsilon]\infty}\left(e^{\operatorname{Im} z} z^{-\frac{1}{2}}\right) . \tag{4}$$

Если $F(z)$ удовлетворяет соотношению (3) и в любой окрестности $z_0$ существует точка, в которой $f(z)$ равна нулю, а $F(z)$ в этой точке отлична от нуля, то очевидно, что в этой окрестности $z_0$ существует по крайней мере 2 точки $z = z_1$ и $z = z_2$, для которых

$$|f(z_1)| < |o_{G_{z_0}}(h(z_1))| , \quad |f(z_2)| > |o_{G_{z_0}}(h(z_2))| .$$

Это указывает на то, что при апроксимации $F(z)$ через $f(z)$ во всей окрестности точки $z_0$ может создаться большая относительная погрешность. Но этот дефект исчезает, если рассмотрим асимптотический ряд.

Определение 5. Сходящиеся или расходящиеся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(z)$ ($a_k$ — вещественные или комплексные числа) назовём асимптотическим разложением функции $F(z)$ в окрестности точки $z_0$, если $f_k(z)$ определены и $f_k(z) \not\equiv 0$ в $G_{z_0}$ и для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ можно найти такие функции $h_n(z)$, что имеет место

$$f_n(z) = \overline{O}_{G_{z_0}}[h_n(z)] , \tag{5}$$

$$F(z) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k f_k(z) = a_n f_n(z) + o_{G_{z_0}}[h_n(z)] , \tag{6}$$

$$h_{n+1}(z) = o_{G_{z_0}}[h_n(z)] . \tag{7}$$

Очевидно, что асимптотические разложения по Пуанкаре или Дёчу являются частными случаями нашего разложения, ибо можно брать $h_n(z) = f_n(z)$.

Легко показать, что разложение (1) подходит к нашему определению, причем $G_{z_0}$ будет луч $x > 0$, $x_0 = \infty$ и $h_n(z) = x^{-n-\frac{1}{2}}$

3. Для получения обобщенных асимптотических разложений приводим несколько теорем, доказательства которых будут даны в другой работе автора.

Теорема 1. Если

1) функция $f(z)$ регулярна в области $|z - z_0| \leqslant \delta$ за исключением точки $z_0$, являющейся существенно особой точкой для $f(z)$, в окрестности которой для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$f(z) = \exp\left[-c(z-z_0)^{-\mu}\right] \sum_{k=0}^{N} a_n (z-z_0)^{\lambda k} +$$

$$+ o_{[|z-z_0| \leqslant \delta]_{z_0}} \left\{\exp\left[-c(z-z_0)^{-\mu}\right](z-z_0)^{\lambda_N}\right\} \tag{8}$$

где $c > 0$, $\mu > 0$, $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ действительные числа, $a_k$ комплексные числа, $(z-z_0)^{\lambda k} = \exp[\lambda_k \ln(z-z_0)]$, а для функции $\ln(z-z_0)$ выбрано главное значение и разрез из точки $z = z_0$ до бесконечности взят по какой-либо прямой вне сектора $|\arg(z-z_0)| \leqslant \Psi$ $\left(\frac{\pi}{2} < \Psi \leqslant \pi\right)$;

2) на лучах $|\arg(z-z_0)| = \Psi$ функция $f(z)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном интервале и существует такая постоянная $K > 0$, чтобы на этих лучах $|f(z)| \leqslant e^{K|z|}$ тогда

1) интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zt} f(z)\, dz \tag{9}$$

сходится для каждого действительного достаточно большого $t > T > 0$. Контур $C$ образован лучами $|\arg(z-z_0)| = \Psi$ и дугой круга $|z-z_0| = r < \delta$, причем точка $z_0$ обходится в положительном направлении, (см. рис. 1).

2) для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$)

$$F(t) = e^{z_0 t} \sum_{k=0}^{N} a_k t^{-\lambda_k - 1} J^{\mu}_{-\lambda_k - 1}(t^{\mu} c) +$$

$$+ o_{(t>T)\infty}\left[\exp\left(z_0 t + \alpha t^{\frac{\mu}{\mu+1}} \cos\frac{\pi}{\mu+1}\right) t^{-\gamma_N}\right]; \tag{10}$$

$$t^{-\lambda_k - 1} J^{\mu}_{-\lambda_k - 1}(ct^{\mu}) = \overline{O}_{(t>T)\infty}\left[\exp\left(z_0 t + \alpha t^{\frac{\mu}{\mu+2}} \cos\frac{\pi}{\mu+1}\right) t^{-\gamma_k}\right], \tag{11}$$

где

$$J^{\mu}_{\lambda_k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{m!\,\Gamma(\mu m + \lambda_k + 1)}; \tag{12}$$

$$\alpha = (c\mu)^{\frac{1}{\mu+1}}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right); \quad \gamma_k = \frac{\lambda_k + 2 + \frac{\mu}{2}}{\mu+1}.$$

Формула (11) взята из работы [4].

Замечание. Если $c < 0$, то имеет место подобная теорема, только вместо функции (12) в асимптотическом разложении $F(t)$ берется функция

$$J^{\mu}_{\lambda_k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!\,\Gamma(m\mu + \lambda_k + 1)}.$$

Соответственно меняется также остаточный член.

Для доказательства теоремы в интеграле (9) вместо $f(z)$ берём её асимптотическое разложение в окрестности точки $z_0$ (8) и для оценки остаточного члена используем метод перевала.

Частный случай, когда $\mu = 1$, рассмотрен в работе [3].

Теорема 2. Если

1) функция $f(z)$ регулярна в области $|z - i| \leqslant \delta$, $|z + i| \leqslant \delta$ за исключением точек $+i$, $-i$, которые являются алгебраическими точками развет-

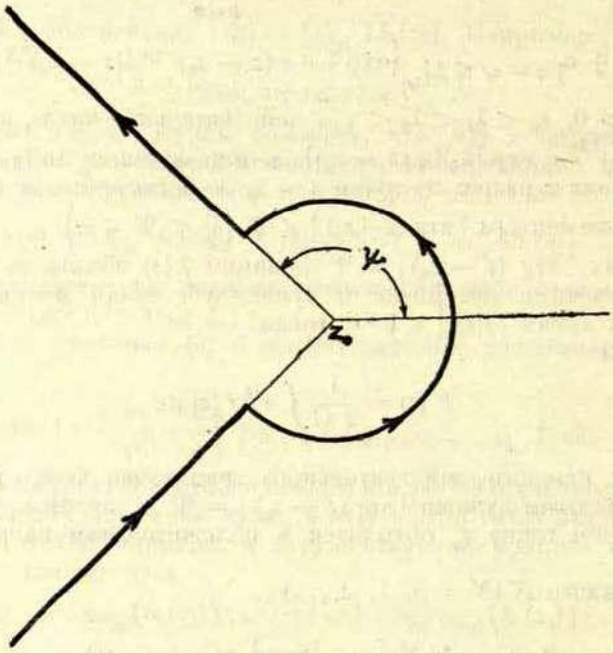



Рис. 1.

вления, в окрестности которых для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеют место соотношения

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k (z^2+1)^{\lambda_k} + o_{(|z-i| \leqslant \delta)_i} [(z^2+1)^{\lambda_N}],$$
$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k (z^2+1)^{\lambda_k} + o_{(|z+i| \leqslant \delta)_{-i}} [(z^2+1)^{\lambda_N}], \tag{13}$$

где $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ действительные числа, а $a_k$ комплексные числа $(z^2+1)^{\lambda_k} = \exp[\lambda_k \ln(z^2+1)]$, $\ln(z^2+1)$ означает главное значение логарифма и разрезы из точек $+i$ и $-i$ до бесконечно удаленной точки взяты по каким-либо прямым вне секторов $|\arg(z-i)| \leqslant \psi$, $|\arg(z+i)| \leqslant \psi$ $\left(\frac{\pi}{2} < \psi = \pi\right)$;

2) на лучах $|\arg(z-i)| = \psi$, $|\arg(z+i)| = \psi$ функция $f(z)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном интервале и существует такая постоянная $K > 0$, чтобы на этих лучах $|f(z)| \leqslant e^{K|z|}$, тогда

1) интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{zt} f(z)\, dz$$

сходится для каждого действительного достаточно большого $t > T > 0$ (контур $\Gamma$ образован лучами $\arg(z-i) = \psi$, $\arg(z+i) = -\psi$, лучами $\arg(z-i) = -\psi$, $\arg(z+i) = \psi$ до точки их пересечения и дугами кругов вокруг точки $+i$ и $-i$ $|z-i| = r < \delta$, $|z+i| = r < \delta$, направление интеграции — положительное, см. рис. 2).

2) для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$)

$$F(t) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_k + \frac{1}{2}} \frac{J_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_k)} + o_{(t>T)_\infty}\left(t^{-\lambda_N - 1}\right) \quad (14)$$

и

$$\left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_k + \frac{1}{2}} \frac{J_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_k)} = \overline{O}_{(t>T)_\infty}\left(t^{-\lambda_k - 1}\right) \quad (15)$$

(если некоторые из $\lambda_k$ целые числа, то соответствующие $\frac{1}{\Gamma(-\lambda_k)} = 0$).

Замечание. Если точками разветвления являются точки $+1$, $-1$, то имеет место подобная теорема, только в этом случае асимптотическое разложение функции $F(t)$ мы получаем при помощи модифицированных функций Бесселя.

Доказательство второй, а также следующей (третьей) теоремы, подобно доказательству теоремы об обычных асимптотических разложениях [1].

Теорема 3. Если

1) функция $f(z)$ регулярна в области $|z - z_0| \leqslant \delta$ за исключением точки $z_0$, являющейся логарифмической точкой разветвления для $f(z)$, в окрестности которой для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеет место соотношение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \ln^k (z - z_0)\, (z - z_0)^{\lambda_k} +$$

$$+ O_{(|z-z_0| \leqslant \delta)_{z_0}} \left[\ln^{N+1}(z - z_0)\, (z - z_0)^{\lambda_{N+1}}\right],$$

где $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ действительные числа, $a_k$ — комплексные числа, $(z - z_0)^{\lambda_k}$ и $\ln(z - z_0)$ имеют прежние значения и разрез из точки $z = z_0$ до бесконечности взят по какой-либо прямой вне сектора $|\arg(z - z_0)| \leqslant \psi$ $\left(\frac{\pi}{2} < \psi \leqslant \pi\right)$;

2) на лучах $|\arg(z - z_0)| = \psi$ функция $f(z)$ абсолютно интегрируема в каждом конечном

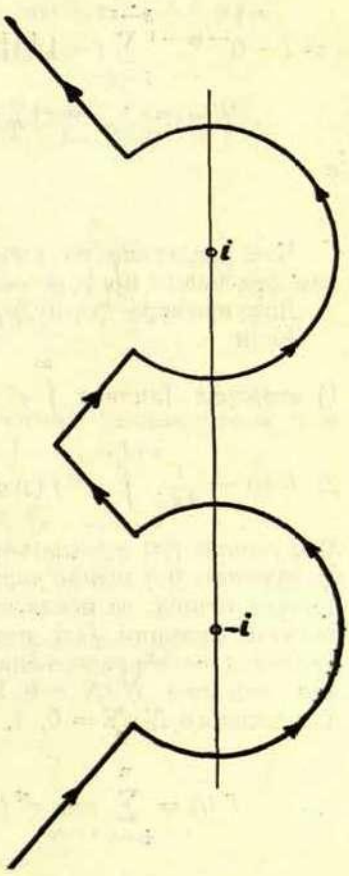



Рис. 2

интервале и существует такая постоянная $K > 0$, чтобы на этих лучах $|f(z)| \leqslant e^{K|z|}$, тогда
1) интеграл

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zt} f(z)\, dz$$

сходится для каждого действительного достаточно большого $t > T > 0$ (контур $C$ имеет прежнее значение);
2) для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) справедливо соотношение:

$$F(t) = e^{z_0 t} \sum_{k=0}^{N} a_k t^{-\lambda_k - 1} \Phi_k(\lambda_k, t) + O_{(t>T)_\infty}[e^{z_0 t} \ln^{N+1} t\, t^{-\lambda_{N+1}-1}],$$

где

$$\Phi_k(x, t) = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[\frac{t^{-x-1}}{\Gamma(-x)}\right] = \frac{(-1)^k}{t^{x+1}} \ln^k t \frac{1}{\Gamma(-x)} + o_{(t>T)_\infty}\left(\frac{\ln^k t}{t^{x+1}}\right)$$

если $x \neq 0, 1, 2, \ldots$, а
если $x = m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\Phi_k(m, t) =$$

$$= (-t)^{-m-1} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l \binom{k}{l} \ln^l t \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-l-1}{2}\right]} (-1)^j \pi^{2j} \binom{k-l}{2j+1} [\Gamma(m+1)]^{(k-l-2j-1)} =$$

$$= (-1)^{m+k} t^{-m-1} k\, \Gamma(m+1) \ln^{k-1} t + o_{(t>T)_\infty}(\ln^{k-1} t\, t^{-m-1})$$

и

$$\Phi_0(m, t) = 0.$$

Как следствие из упомянутых трех теорем можно получить теоремы для оригинала преобразования Лапласа.

Для примера формулируем следствие теоремы 2.

Если

1) интеграл Лапласа $\int_0^\infty e^{-zt} F(t)\, dt = f(z)$ сходится при $\operatorname{Re} z > \beta$;

2) $F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{zt} f(z)\, dz \qquad (\sigma > \beta)$;

3) функция $f(z)$ удовлетворяет требованиям леммы Жордана;
4) функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить налево от прямой $\operatorname{Re} z = \beta$ во всех точках, за исключением точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, которые являются полюсами функций $f(z)$ и точки $+i$, $-i$ ($z_k \neq \pm i$ $k = 1, 2, \ldots$), которые являются алгебраическими точками разветвления, в окрестности которых для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$) имеют место соотношения (13), тогда для каждого $N$ ($N = 0, 1, 2, \ldots$)

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} e^{zt} f(z) + \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{N} a_k \left(\frac{2}{t}\right)^{\lambda_k + \frac{1}{2}} \frac{J_{-\lambda_k - \frac{1}{2}}(t)}{\Gamma(-\lambda_k)} +$$

$$+ o_{(t>T)_\infty}(t^{-\lambda_N - 1}).$$

Пример. Найдем асимптотическое разложение функции

$$\int_0^t \tau^{k+2n} J_k(\tau)\, d\tau$$

($t > 0$ — действительное число, $k \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ натуральные числа).

Интегрируя по частям и применяя формулу

$$\frac{d}{dt} t^k J_k(t) = t^k J_{k-1}(t),$$

получим:

$$\int_0^t \tau^{k+2n} J_k(\tau)\, d\tau = (2n-1)!! \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1} t^{2n+k-m+1} J_{k+m}(t)}{(2n+1-2m)!!} +$$

$$+ (-1)^n (2n-1)!! \int_0^t \tau^{n+k} J_{k+n}(\tau)\, d\tau \qquad [(-1)!! = 1].$$

В силу того, что функция

$$t \int_0^t \tau^{k+n} J_{k+n}(\tau)\, d\tau - t^{k+n+1} J_{k+n+1}(t) \supset \frac{2^{k+n}\Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right)}{(z^2+1)^{k+n+\frac{1}{2}} z^2 \sqrt{\pi}}$$

удовлетворяет условиям следствия, можем написать:

$$\int_0^t \tau^{k+2n} J_k(t)\, d\tau = (2n-1)!!\, t^k \sum_{m=1}^{n} \frac{t^{2n+1-m} (-1)^{m-1} J_{k+m}(t)}{(2n+1-2m)!!} +$$

$$+ (-1)^n (2n-1)!!\, t^{k+n} J_{k+n+1}(t) -$$

$$- (-1)^n \frac{1}{t} (2n-1)!!\, 2^{k+n} \Gamma\left(k+n+\frac{1}{2}\right) \sum_{m=-n-k}^{N} \left(\frac{2}{t}\right)^m \frac{J_{-m}(t)}{\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)} +$$

$$+ o_{(t>T)_\infty}\left(t^{-N-\frac{3}{2}}\right).$$

Подобным образом можно получить асимптотическое разложение и для функции

$$\int_0^t \tau^{k-2n} J_k(\tau)\, d\tau \qquad (2n \leqslant k).$$

1 VI 1957

*Кафедра общей математики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *G. Doetch.* Handbuch der Laplace — Transformation. Bb. 2. Basel, 1955.
[2]. *A. J. Macintyre, R. Wilson.* Operational methods and the coefficients of certain power series. Mathematische Annalen, 1954, 127, 243—250.
[3]. *T. E. Hull, C. Froese.* Asymptotic behaviour of the inverse of a Laplace transform. Canad. J. Math., 1955, 7, Nr. 1. 116—125.
[4]. *E. M. Wright.* The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. Proc. Lond. Math. Soc., 1935, 38.

## PAR KĀDU ASIMPTOTISKO ATTĪSTĪJUMU VISPĀRINĀJUMU

*V. Riekstiņa*

(Kopsavilkums)

Darbā dota vispārināto asimptotisko attīstījumu definicija (definicija 5). Parādīts, kā dažos gadījumos var iegūt vispārinātos asimptotiskos attīstījumus funkcijām, kuras dotas ar integrali (9) (teoremas 1, 2, 3).

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ОБ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

*Э. Я. ГРИНБЕРГ*

В евклидовом пространстве $R_n$ $n$ измерений рассмотрим интеграл

$$\int f\,ds,$$

взятый вдоль некоторой действительной кривой $(M)$ с длиной дуги $s$; $f$ — данная функция кривизн $k_i$ $(i = 1,2,\ldots, n-1)$ кривой и их производных по $s$ до порядка $r$ включительно. Требуется определить экстремальные кривые, для которых первая вариация интеграла равна нулю.

Для кривых в $R_3$ известны следующие результаты. Радон [1] установил, что при $f = f(k_1)$ конечные уравнения экстремалей получаются посредством квадратур. Кастро-Бжезицкий [2] показал, что при

$$f = f\left(k_1, \frac{dk_1}{ds}\right)$$

конечные уравнения получаются посредством квадратур, если найдены натуральные уравнения кривой.

В настоящей работе получены общие выражения для вариации всех $k_i$ и их производных (§ 1); получены уравнения Эйлера-Лагранжа (§ 2); приведены некоторые соображения по интегрированию этих уравнений и показано, что результаты Кастро-Бжезицкого имеют место для любого $f$ в $R_3$, $R_4$ и $R_5$ (§ 3). Наконец, рассмотрены некоторые частные случаи в $R_3$, причем результат Радона обобщается на функции

$$f = f(k_1,\ k_2),$$

удовлетворяющие некоторому дифференциальному уравнению.

В дальнейшем предполагается, что все производные, встречающиеся в расчетах, существуют и непрерывны. Производные по $s$ обозначены штрихами и показателями в скобках; суммирования всегда указаны. Краевые условия считаются удовлетворенными.

## § 1.

## ВАРИАЦИИ КРИВИЗН И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $\mathrm{M}(s)$ — радиус вектор рассматриваемой кривой $(M)$, $\mathrm{t}_i$ $(i = 1,\ldots, n)$ — орты сопровождающего ортонормированного репера, $t_{ij}$ $(j = 1, \ldots, n)$ — координаты $\mathrm{t}_i$ в некоторой неподвижной ортогональной системе координат.

Посредством ортогональной матрицы

$$T = \|t_{ij}\|_1^n$$

и кососимметрической матрицы Френе

$$K = \|k_{ij}\|_1^n,$$

где

$$k_{ij} = k_j \delta_{i,j-1} - k_{i-1} \delta_{i,j+1}, \; k_o = k_n = 0$$

и $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, формулы Френе можно записать в виде

$$T' = KT. \tag{1}$$

Предполагается, что все $k_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ отличны от нуля.

Радиус вектор варьированной кривой $(N)$ берем в виде

$$\mathrm{N} = \mathrm{M}(s) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} u_i \mathrm{t}_i, \tag{2}$$

где $\varepsilon$ — параметр, $u_i$ — произвольные функции $s$.

Интересующие нас величины, характеризующие кривую $(N)$, в дальнейшем разлагаются по возрастающим степеням $\varepsilon$, причем отбрасываются степени выше первой. Коэффициент при $\varepsilon$ будем называть вариацией соответствующей величины и обозначать символом $\delta$.

Дифференцируя (2) по $s$, имеем

$$\frac{dN}{ds} = [1 + \varepsilon(u_1' - k_1 u_2)]\, \mathrm{t}_1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{n} (k_{i-1} u_{i-1} + u_i' - k_i\, u_{i+1})\, \mathrm{t}_i. \tag{3}$$

Модуль этого вектора дает производную дуги $\sigma$ кривой $(N)$ по $s$:

$$\frac{d\sigma}{ds} = 1 + \varepsilon a, \tag{4}$$

где

$$a = u_1' - k_1 u_2, \tag{5}$$

а единичный вектор $\mathrm{p}_1$ касательной к $(N)$ равен

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\sigma} = \mathrm{t}_1 + \varepsilon \sum_{i=2}^{n} a_{1i} \mathrm{t}_i,$$

где

$$a_{1i} = k_{i-1} u_{i-1} + u_i' - k_i u_{i+1}, \; i = 2, 3, \ldots, n. \tag{6}$$

Пусть $\mathrm{p}_i$ — орты сопровождающего ортонормированного репера кривой $(N)$, а

$$P = \|p_{ij}\|_1^n$$

матрица их координат. Последняя связана с матрицей $T$ соотношением вида

$$P = T + \varepsilon\, AT. \tag{7}$$

Ввиду ортогональности $P$ и $T$, матрица $A = \|a_{ij}\|_1^n$ — кососимметрическая. Соотношения (6) дают элементы первой строки (и первого столбца) матрицы $A$. Остальные элементы $A$, как и вариации $\varkappa_i$ кривизн $k_i$, получаются следующим образом: для кривой $(N)$ матрицей Френе является

$$K + \varepsilon L,$$

где кососимметрическая матрица $L = \|\varkappa_{ij}\|_1^n$ составлена из величин $\varkappa_i$ таким же образом, как $K$ составлена из $k_i$:

$$\varkappa_{ij} = \varkappa_i \delta_{i,j-1} - \varkappa_{i-1} \delta_{i,j+1}, \; \varkappa_o = \varkappa_n = 0.$$

Следовательно для $P$ имеет место соотношение

$$\frac{dP}{d\sigma} = (K + \varepsilon L)\, P.$$

Подставляя для $P$ выражение (7), учитывая (1) и приравнивая коэффициенты при $\varepsilon$, получаем

$$L + aK = A' + AK - KA. \tag{8}$$

Так как в обеих частях уравнения (8) фигурируют кососимметрические матрицы, оно эквивалентно системе $\frac{n(n-1)}{2}$ скалярных независимых уравнений, получаемых приравниванием элементов, лежащих над главной диагональю:

$$\varkappa_i + ak_i = a'_{i,i+1} + k_{i-1}\, a_{i-1,\,i+1} - k_{i+1}\, a_{i,i+2}, \tag{9}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и

$$k_i a_{i+1,j} = a'_{ij} + k_{i-1}\, a_{i-1,j} + k_{j-1}\, a_{i,j-1} - k_j\, a_{i,j+1}, \tag{10}$$

где

$$i = 1, 2 \ldots, n-2;\ j = i+2,\ i+3, \ldots, n.$$

Уравнения (10) позволяют определить все элементы $i+1$-ой строки матрицы $A$ посредством элементов предыдущих строк и кривизн. Так как (6) определяет все $a_{1j}$, имеется возможность выразить все $a_{ij}$ — а с помощью (9) также и все $\varkappa_i$ — как функции кривизн $k_i$, вариации $u_i$ и производных этих величин по $s$. Явные выражения, получаемые таким путем, в дальнейшем однако не потребуются.

Если известны вариации

$$\delta\,(ds) = a\, ds,$$

$$\delta\,(k_i) = \varkappa_i,$$

то используя соотношение ($\varphi$ — произвольная функция от $s$)

$$\delta\,(\varphi') = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{d(\varphi + \varepsilon\delta\varphi)}{(1+\varepsilon a)ds} - \frac{d\varphi}{ds} \right),$$

т. е.

$$\delta\,(\varphi') = (\delta\varphi)' - a\varphi', \tag{11}$$

имеем

$$\delta\,(k'_i) = \varkappa'_i - ak'_i,$$

и, повторно применяя (11), для производных порядка $h$ получаем

$$\delta\,(k_i^{(h)}) = \varkappa_i^{(h)} - (ak'_i)^{(h-1)} - (ak''_i)^{(h-2)} - \ldots - ak_i^{(h)}, \tag{12}$$

или в более сжатой записи

$$\delta\,(k_i^{(h)}) = \varkappa_i^{(h)} - \sum_{j=0}^{h-1} \binom{j+1}{h}\, a^{(j)}\, k_i^{(h-j)},$$

где $a^{(0)} = a,\ a^{(j)} = \frac{d^j a}{ds^j}$.

## § 2.

## УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА

Для интеграла вдоль кривой $(M)$ в $R_n$

$$J = \int f\,ds,$$

где $f$ — данная функция от $k_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и их производных по $s$ до порядка $r$ включительно, вариация равна

$$\delta J = \int \left[af + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{h=o}^{r} \frac{\partial f}{\partial k_i^{(h)}} \delta\,(k_i^{(h)})\right] ds.$$

Подставляя выражения (12) для вариаций производных от кривизн и устраняя интегрированием по частям из подынтегральной функции производные от $\varkappa_i$ и $a$, эту функцию получаем в виде

$$F = ab + \sum_{i=1}^{n-1} (\varkappa_i + ak_i)\, b_{i,i+1}, \tag{13}$$

где

$$b_{i,i+1} = \sum_{h=o}^{r} (-1)^h f_{ih}^h, \tag{14}$$

$$b = f - \sum_{i=1}^{n-1} \left[k_i\, b_{i,i+1} + \sum_{h=1}^{r} k_i^{(h)} \sum_{g=o}^{r-h} (-1)^g f_{i,h+g}^g\right], \tag{15}$$

и положено

$$f_{ih}^g = \frac{d^g}{ds^g}\left[\frac{\partial f}{\partial k_i^{(h)}}\right].$$

Дальнейшее преобразование $F$ интегрированиями по частям сводится к выделению из $F$ полных производных по $s$ от подходящих функций с целью удаления всех производных от первоначальных вариаций $u_i$. В результате получится линейная однородная форма от всех $u_i$. Приравнивание всех коэффициентов этой формы нулю даст искомые уравнения Эйлера-Лагранжа.

Для выполнения указанного преобразования рассмотрим матрицу $B = \|b_{ij}\|_1^n$, определяемую следующими свойствами:

$B$ — кососимметрическая; элементы первой наддиагонали имеют значения (14); имеет место соотношение

$$B' + BK - KB = -G, \tag{16}$$

где $G = \|g_{ij}\|_1^n$ — матрица, в которой от нуля отличны только элементы

$$g_{1j} = g_j;\ g_{j1} = -g_j \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Этими свойствами однозначно определяются матрицы $B$ и $G$. Действительно, имеем $\frac{n(n-1)}{2}$ скалярных уравнений, выражающих равенство элементов кососимметрических матриц обеих частей (16):

$$b'_{ij} + k_{i-1}\, b_{i-1,j} - k_i\, b_{i+1,j} + k_{j-1}\, b_{i,j-1} - k_j\, b_{i,j+1} = -\delta_{1i}\, g_i,$$

где

$$i = 1, 2, \ldots, n-1; \; j = i+1, i+2, \ldots, n.$$

С учетом

$$b_{ii} = 0, \; k_n = 0,$$

получаем следующий порядок определения искомых величин, исходя из известных элементов (14) первой наддиагонали матрицы $B$.

$$\begin{cases} k_{n-2} b_{n-2,n} = -b'_{n-1,n}, \\ k_{i-1} b_{i-1,i+1} = -b'_{i,i+1} + k_{i+1} b_{i,i+2} \\ (i = n-2, n-3, \ldots, 2), \\ k_i b_{ij} = -b'_{i+1,j} + k_{i+1} b_{i+2,j} - k_{j-1} b_{i+1,j-1} + k_j b_{i+1,j+1} \\ (i = n-3, n-4, \ldots, 1; \; j = i+3, i+4, \ldots, n). \end{cases} \tag{17}$$

Наконец

$$\begin{cases} g_2 = -b'_{12} + k_2 b_{13}, \\ g_i = -b'_{1j} + k_1 b_{2j} - k_{j-1} b_{1,j-1} + k_j b_{1,j+1} \\ (j = 3, 4, \ldots, n). \end{cases} \tag{18}$$

При $j = n$ отпадают последние члены правых частей, содержащие множитель $k_n = 0$.

Определим скалярное произведение двух матриц, напр. $A$ и $B$ посредством соотношения

$$A \times B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

Вследствие линейности и однородности по отношению к элементам каждого множителя это произведение аддитивно по отношению к каждому множителю. Поэтому дифференцированием получаем

$$(A \times B)' = A' \times B + A \times B'. \tag{19}$$

Используя явное выражение для скалярного произведения легко проверить, что вследствие кососимметричности $K$

$$(AK) \times B + A \times (BK) = 0,$$

$$(KA) \times B + A \times (KB) = 0, \tag{20}$$

где скобки содержат обычные произведения матриц. Подставляя в правую часть (19) значения производных $A'$ и $B'$ из соотношений (8) и (16) и учитывая дистрибутивность скалярного произведения и соотношения (20), получаем

$$(L + aK) \times B = (A \times B)' + A \times G,$$

или

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\varkappa_i + ak_i) \, b_{i,i+1} = (A \times B)' + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} g_i.$$

Тогда (13) дает

$$F = (A \times B)' + ab + \sum_{i=2}^{n} a_{1i} g_i,$$

или, с учетом значений (5) и (6) и полагая

$$g_1 = b,$$

$$F = (A \times B)' + \sum_{i=1}^{n} (u_i g_i)' - \sum_{i=1}^{n} u_i (g_i' + k_{i-1} g_{i-1} - k_i g_{i+1}).$$

Как было указано выше, уравнения Эйлера-Лагранжа получаются приравниванием нулю коэффициентов отдельных $u_i$ в последней сумме правой части, что дает

$$\begin{cases} g_1' = k_1 g_2, \\ g_i' = -k_{i-1} g_{i-1} + k_i g_{i+1} \\ (i = 2, 3, \ldots, n-1), \\ g_n' = -k_{n-1} g_{n-1}. \end{cases} \tag{21}$$

Так как $u_1$ характеризует перемещение вдоль кривой $(M)$, которое не может создавать вариации интеграла $J$, первое из уравнений (21) должно выполняться тождественно, что и имеет место. Действительно, дифференцируя значение (15) для $g_1 = b$, получаем

$$g_1' = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_{i,i+1}'.$$

С другой стороны, умножая те из уравнений (17) и (18), которые содержат $b_{i,i+1}'$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ на соответствующее $k_i$ и складывая, после упрощения получаем

$$k_1 g_2 = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i b_{i,i+1}' = g_1'.$$

Остающиеся $n-1$ уравнения (21) образуют систему Эйлера-Лагранжа, определяющую $n-1$ искомые кривизны экстремалей.

## § 3.

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПРОБЛЕМЫ

Предположим, что имеется решение системы (21); тогда известен комплект величин $k_i$, $b_{ij}$ и $g_i$, удовлетворяющий совокупности уравнений (17), (18) и (21). Рассматривая нахождение конечных уравнений кривой $(M)$, мы одновременно найдем и первые интегралы системы уравнений (21). В эти выражения будут входить $k_i$, $b_{ij}$ и $g_i$, однако их значения не зависят от $s$.

Интегрирование натуральных уравнений кривой в $R_n$, кривизны $k_1$,

$k_2, \ldots, k_{n-1}$ которой известны, сводится к нахождению $n$ независимых систем решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнений Френе

$$x_i' = -k_{i-1}x_{i-1} + k_i x_{i+1} \tag{22}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k_0 = k_n = 0).$$

Если посредством такой системы величин $x_i$ образовать вектор

$$\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{t}_i, \tag{23}$$

то этот вектор будет неподвижен, т. е. его производная будет равна нулю. Обратно, если для неподвижного ненулевого вектора x известно представление (23), то $x_i$ — система решений уравнений Френе (22). $x_1, x_2, \ldots, x_n$ можем называть относительными координатами вектора x, причем его длина — первый интеграл системы (22). Таким неподвижным вектором является g.

Исходя из $n$ неподвижных векторов, соответствующих $n$ линейно независимым решениям системы (22), можем построить ортонормированную систему неподвижных векторов $\mathrm{Z}_i$. Первые координаты $\xi_{i1}$ этих векторов дают также и разложение $\mathrm{t}_1$ по $\mathrm{Z}_i$:

$$\mathrm{t}_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}\mathrm{Z}_i,$$

и интегрированием получаем радиус вектор кривой $(M)$ в системе $\mathrm{Z}_i$.

Если известны функции $x_i$, при которых вектор (23) не неподвижен, но находится в некоторой неподвижной плоскости $(\pi)$, то одной квадратурой мы получаем два линейно независимых неподвижных вектора в этой плоскости.

Вектор x можно нормировать. В плоскости $(\pi)$ находим орт y, ортогональный к x. Тогда имеют место соотношения

$$\mathrm{x}' = \alpha \mathrm{y},$$

$$\mathrm{y}' = -\alpha \mathrm{x},$$

где $\alpha = \mathrm{x}'\mathrm{y}$ известно. Вычисляем функцию

$$\varphi = \varphi_0 - \int_{s_0}^{s} \alpha ds,$$

где $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Тогда векторы

$$\mathrm{z}_1 = \mathrm{x}\cos\varphi + \mathrm{y}\sin\varphi,$$

$$\mathrm{z}_2 = -\mathrm{x}\sin\varphi + \mathrm{y}\cos\varphi$$

неподвижны и ортонормированы.

Для нахождения векторов, которые неподвижны или лежат в неподвижной плоскости, можно использовать „неподвижные" тензоры, т. е. тензоры с постоянными координатами в неподвижной системе координат. Векторы и плоскости, однозначно определенные таким тензором, будут также неподвижными. Если же известны относительные координаты тензора, т. е. его координаты по отношению к ортогональному реперу искомой кривой, то

по ним можно определить и относительные координаты интересующего нас вектора, следовательно получить одну или две системы решений (22).

Рассматривая тензор второго порядка $B$, получаемый общим произведением двух неподвижных векторов, можем получить условия „неподвижности" или формулы Френе для тензора. В матричной записи эти формулы имеют вид (16), где $G = 0$, а в координатной записи — вид последнего уравнения (17), взятого для всех $i$, $j$.

Очевидно матрица или тензор $B$, рассмотренный в предыдущем параграфе, не неподвижен, так как $G$ должно отличаться от нуля. Однако комбинируя тензор $B$ с некоторым постоянным вектором x путем умножения и альтернирования, в результате получим неподвижный тензор третьего порядка $D$, если использованная операция, примененная к тензору $G$, даст нулевой тензор. Действительно, связь тензоров $D'$ и $D$ будет такой же, какая получилась бы для комбинации неподвижного тензора с вектором x, следовательно будут удовлетворены соответствующие формулы Френе.

В качестве x берем g, альтернируем по всем индексам. Отбрасывая знаменатель 3, для элементов $D$ получаем выражения

$$d_{ijk} = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij}, \tag{24}$$

и тензор $G$ при этом превращается в нулевой тензор.

Полученный кососимметрический тензор $D$ в общем случае не нулевой.

Покажем, что в $R_3$, $R_4$, $R_5$ при известном решении системы (21) определение кривой $(M)$ завершается квадратурами.

*Кривая в $R_3$.*

Первые интегралы (21) — длина вектора g и псевдоскаляр—единственная существенная координата $D$. После нормирования g в качестве векторов x и y, лежащих в неподвижной плоскости, перпендикулярной к g, можно взять

$$\mathrm{x} = (g_2^2 + g_3^2)^{-\frac{1}{2}} (g_3 \mathrm{t}_2 - g_2 \mathrm{t}_3),$$

$$\mathrm{y} = (g_2^2 + g_3^2)^{-\frac{1}{2}} [-(g_2^2 + g_3^2)\, \mathrm{t}_1 + g_1 g_2 \mathrm{t}_2 + g_1 g_3 \mathrm{t}_3].$$

Тогда

$$\alpha = \frac{k_1 g_3}{g_2^2 + g_3^2}$$

и одной квадратурой получаем ортонормированную систему неподвижных векторов g, $\mathrm{z}_1$, $\mathrm{z}_2$.

*Кривая в $R_4$.*

Тензор $V$, дополнительный к $D$ [ср. 3] — первого порядка, следовательно эквивалентен псевдовектору. Поэтому неподвижным будет вектор v с координатами

$$v_h = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij},$$

где $h$, $i$, $j$, $k$ — четная пермутация индексов 1, 2, 3, 4. В общем случае v не нулевой вектор; его длина — второй первый интеграл.

Очевидно v и g ортогональны. Любой вектор x, одновременно перпендикулярный к v и к g, параллелен неподвижной плоскости и, согласно выше-

изложенному позволяет определить два неподвижных ортогональных вектора $z_1$ и $z_2$. Последние, совместно с нормированными g и v, дают неподвижный репер.

Как и в случае $R_3$, определение $t_1$ требует одной квадратуры.

*Кривая в $R_5$.*

Имеем неподвижный кососимметрический тензор $V$ второго порядка, дополнительный к $D$, с координатами

$$v_{hm} = g_i b_{jk} + g_j b_{ki} + g_k b_{ij},$$

где $h, m, i, j, k$ — четная пермутация индексов 1, 2, 3, 4, 5. Вектор g — характеристический вектор этого тензора, соответствующий нулевому характеристическому числу. Остальные характеристические числа чисто мнимы и попарно сопряжены, в общем случае различны и отличны от нуля. Каждой паре сопряженных характеристических чисел соответствует некоторая двухмерная плоскость, причем эти плоскости перпендикулярны как между собой, так и к вектору g [ср. 4]. Определяя в каждой из этих плоскостей пару неподвижных ортонормированных векторов, мы посредством двух квадратур получаем представление $t_1$ в неподвижной системе.

Произведение тензора $v_{hm}$ на себя, альтернированное по трем индексам, дает антисимметрический тензор четвертого порядка, следовательно и псевдовектор. Однако последний коллинеарен с g, так что получается не новый неподвижный вектор, а только первый интеграл — отношение координат обоих векторов. Оно дается выражением

$$\nu = \frac{v_{12}v_{34} - v_{13}v_{24} + v_{14}v_{23}}{g_5},$$

или выражениями, получаемыми любой четной перестановкой индексов в правой части. Помимо длины g, имеем еще два первых интеграла, например, коэффициенты характеристического уравнения. Коэффициент при $\lambda^3$ равен $\sum\limits_{j>i} v_{ij}^2$; коэффициент при $\lambda$ равен $\nu^2 g^2$. Следовательно независимы только первые три интеграла.

В качестве простого примера, показывающего отличие от нуля величин, рассматриваемых в $R_5$ и $R_4$, рассмотрим определение экстремалей для функции

$$f = k_2 + c, \quad c = \text{const}.$$

В $R_5$, полагая $\eta = k_1^{-1} k_3$,

$$g = ct_1 + k_1(1 - \eta^2)\, t_3 + \eta' t_4 + \eta k_4 t_5,$$

и $V$ имеет следующие отличные от нуля координаты с $j > i$:

$$v_{14} = \eta k_4, \; v_{15} = \eta', \; v_{23} = -\eta^2 k_4,$$

$$v_{25} = \eta k_1 (1 - \eta^2), \; v_{45} = c.$$

Здесь $\nu = -\eta^2 k_4$; $g^2$ и $\sum v_{ij}^2$ содержат $(\eta')^2$, а их разность равна

$$k_1^2 (1 - \eta^2)^3 - \nu^2,$$

следовательно три первых интеграла действительно независимы.

В $R_4$ имеем

$$g = ct_1 + k_1 (1 - \eta^2) t_3 + \eta' t_4,$$

$$v = \eta' t_1 - \eta k_1 (1 - \eta^2) t_2 - ct_4;$$

эти векторы отличны от нуля и перпендикулярны.

## § 4.

## ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА В $R_3$

Уточним вид операций, фактически необходимых для полного решения проблемы, если

$$f = f(k_1, k_2).$$

Полагая для сокращения записи

$$k_1 = x, \ k_2 = y, \ \frac{\partial f}{\partial x} = p, \ \frac{\partial f}{\partial y} = q,$$

имеем

$$g_1 = f - xp - yq,$$

$$g_2 = -p' - \frac{y}{x} q',$$

$$g_3 = -\left(\frac{q'}{x}\right)' + xq - yp,$$

$$b_{12} = p, \ b_{31} = \frac{q'}{x}, \ b_{23} = q.$$

Решения проблемы удовлетворяют уравнениям, даваемым первыми интегралами:

$$\begin{cases} g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = c_1 = \text{const}, \\ g_1 b_{23} + g_2 b_{31} + g_3 b_{12} = c_2 = \text{const}. \end{cases} \tag{25}$$

Пусть $x$ и $y$ могут быть выражены как функции от $p$ и $q$ и последние не постоянны. Тогда, решая систему (25) по отношению к $g_2$ и $g_3$, мы получаем соотношения вида

$$\begin{cases} p' = F_1(p, q', q), \\ q'' = F_2(p, q', q). \end{cases} \tag{26}$$

Считая $q$ независимой переменной и вводя новую неизвестную $z = q'$, систему (26) можно преобразовать в каноническую систему второго порядка:

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{z} F_1(p, z, q),$$

$$\frac{dz}{dq} = \frac{1}{z} F_2(p, z, q).$$

В результате решения этой системы $s$ получается как функция от $q$ посредством квадратуры

$$s = s_0 + \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{z}.$$

Решая соответствующие уравнения, мы получаем $q$, $p$, $x$ и $y$ как функции от $s$ и заканчиваем определение решения квадратурами, как указано в предыдущем параграфе.

Рассмотренный прием не применим, если $p$ и $q$ не независимы, т. е. имеет место соотношение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0. \tag{27}$$

В последнем случае поверхность, определяемая уравнением

$$f = f(x,\ y), \tag{28}$$

в декартовых координатах $x$, $y$, $f$, является развертывающейся. Если $q$ не постоянно, то при независимых переменных $x$ и $q$ (28) допускает представление

$$\begin{cases} f = (\varphi - q\dot{\varphi})\,x + \psi - q\,\dot{\psi}, \\ y = -x\dot{\varphi} - \dot{\psi}, \\ p = \varphi, \end{cases}$$

где $\varphi$ и $\psi$ — подходящие функции от $q$, а точками обозначено дифференцирование по $q$. Исключая $g_3$ из системы (25), получаем уравнение

$$\varphi^2\left[\psi^2 + \left(\frac{\dot{\psi}q'}{x}\right)^2 - c_1\right] + \left[\psi q + \dot{\psi}\left(\frac{q'}{x}\right)^2 - c_2\right]^2 = 0,$$

которое дает

$$x = \varphi_1(q)\,q',$$

с определенной функцией $\varphi_1(q)$. Подставляя это значение $x$ в любое (например второе) уравнение (25), мы получаем соотношение, которое содержит только $q'$ и известные функции от $q$. После представления $q'$ в виде

$$q' = \psi_1(q),$$

$s$ получается квадратурой и решение заканчивается, как выше.

Если $q = q_0 = \text{const.}$, т. е.

$$f = q_0 y + \psi(x),$$

имеем

$$g_1 = \psi - x\dot{\psi},\ g_2 = -\dot{\psi}x',\ g_3 = xq_0 - y\,\dot{\psi},$$

$$b_{12} = \dot{\psi},\ b_{31} = 0,\ b_{23} = q_0;$$

исключая $g_3$, получаем уравнение, дающее $x'$ в виде известной функции от $x$. Как и раньше, $s$ получается квадратурой, а $y$ определяется из любого уравнения (25). Функция $f$ этого типа с $q_0 = 0$ рассматривается в [1].

Следует отметить, что в противоположность обычным параметрическим вариационным задачам в нашем случае допустимы решения

$$x = \text{const.},\ y = \text{const.}$$

В этом случае постоянство первых интегралов (25) еще не является достаточным условием для решения. Возвращаясь к дифференциальным уравнениям (17), (18) и (21), видим, что должно иметь место соотношение

$$(x^2 - y^2)\,p + 2xyq - xf = 0. \tag{29}$$

Для произвольных функций $f$ это условие устанавливает соотношение между $x$ и $y$, т. е. определяет однопараметрическое семейство натуральных

уравнений обыкновенных винтовых линий, являющихся экстремалями. Если же $f(x, y)$ имеет вид

$$f = c_0 \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}^3} \left[ \ln \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y} - \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^2} \right] + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} f_1 \left( \frac{x^2+y^2}{y} \right), \quad (30)$$

где $c_0$ — постоянная, а $f_1$ — произвольная функция своего аргумента, то левая часть (29) тождественно равна $2\,c_0$. Если $c_0 = 0$, любая обыкновенная винтовая линия является экстремалью. Если же $c_0 \neq 0$, среди экстремалей нет ни одной такой линии.

1 VI 1957 *Кафедра математического анализа*

## ЛИТЕРАТУРА


[1]. *W. Blaschke.* Vorlesungen über Differentialgeometrie I, §§ 26, 27, Berlin, 1930.

[2]. *A. de Castro Brzezicki.* Curvas extremales del problema variacional $\delta \int f(\varkappa, \varkappa')\, ds = 0$, Rev. mat. hisp.-amer. 1955, 15, Nr. 3—4, 71—78.

[3]. *П. К. Рашевский.* Геометрическая теория уравнений с частными производными, § 9, Гостехиздат, 1947.

[4]. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, IX, § 13, Гостехиздат, 1954.


## PAR KĀDU ĢEOMETRISKU VARIACIJU PROBLEMU

*E. Grinbergs*

(Kopsavilkums)


Rakstā aplūkota problēma: $n$ dimensiju Eiklīda telpā $R_n$ noteikt līknes, kam integrāļa

$$J = \int f\, ds$$

pirmā variācija ir nulle; $s$ ir līknes loka garums, $f$ — dota liekumu $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ un to atvasinājumu pēc $s$ funkcija.

Ņemot variētās līknes radijvektoru veidā (2), sakari (5) un (6) dod loka diferenciāļa un pieskares vienības vektora variācijas; ar (9) un (10) ir nosakāmas liekumu $k_i$ variācijas $\varkappa_i$. Liekumu atvasinājumu variācijas dod (12).

Noteikumi, lai $J$ pirmā variācija katriem $u_i$ ir nulle, ir izsakāmi sekojošā veidā: ar sakariem (14), (15), (17), (18) aprēķina lielumus $g_i$, kam jāpilda noteikumi (21) (pirmais no tiem ir identitāte). Ja ir zināms šo vienādojumu atrisinājums, telpās $R_3$, $R_4$ un $R_5$ atbilstošās līknes vienādojumi ir nosakāmi ar kvadratūrām; reizē iegūti daži pirmintegrāļi.

Telpā $R_3$, ja $f$ ir dota liekuma $x$ un vērpes $y$ funkcija, pilns problēmas atrisinājums ir reducējams uz kanonisku otrās kārtas diferenciālvienādojumu sistēmu, pēc kuras atrisināšanas jāizdara vēl kvadratūras. Ja pastāv noteikums (27), viss atrisinājums ir iegūstams ar kvadratūrām. Ekstremāļu starpā ir parastās skrūves līnijas, kam $x$ un $y$ saista (29). Ja $f$ ir ar veidu (30), gadījumā $c_0 = 0$ katra parastā skrūves līnija ir ekstremāle, bet gadījumā $c_0 \neq 0$ — neviena.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О КОНТАКТНЫХ СИЛАХ В ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

*П. Е. КУНИН и И. М. ТАКСАР*

Вопрос о том, являются ли в мезонной теории силы между нуклонами на малых расстояниях силами притяжения или отталкивания, за последнее время отошел на второй план в связи с выявившимися принципиальными трудностями как мезонной теории вообще, так ив частности, метода возмущений. В настоящей работе однако, отвлекаясь от указанных трудностей, мы хотим показать, что возможен такой вариант мезонной теории, в котором при $r \to 0$ ($r$ — расстояние между нуклонами) силы между нуклонами всегда являются силами отталкивания. При малых $r$ главную роль играют контактные силы, все остальные члены в выражении для энергии взаимодействия при этом пренебрежимо малы. Это особенно ясно видно из интегральных уравнений в пространстве импульсов, где $r \to 0$ соответствует $k \to \infty$. В этих уравнениях члены, соответствующие контактным силам, при $k \to \infty$ растут гораздо быстрее, чем остальные члены.

Если ядерные силы обусловлены псевдоскалярными мезонами с псевдовекторной связью, то контактные силы дают на малых расстояниях отталкивание в $^1S_0$ — состоянии и притяжение в $^3S_1 + {}^3D_1$ — состоянии [1]. Можно однако показать, что для смешанного скалярного + псевдоскалярного мезонного поля (при векторном взаимодействии в первом случае и псевдовекторном — во втором) при определенном весьма широком выборе констант взаимодействия контактные силы на малых расстояниях между нуклонами во всех состояниях будут давать отталкивание.

При исследовании мы исходили из уравнений Бете-Салпетера, которые в первом приближении лестничной аппроксимации дают

$$\Phi(k) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int \frac{dq}{q^2-\mu^2} K^{\mathrm{I}}(k) K^{\mathrm{II}}(-k) A^{\mathrm{I}}(q) A^{\mathrm{II}}(-q)\, \Phi(k+q). \quad (1)$$

Здесь $\Phi(k)$ — волновая функция системы двух нуклонов с импульсами в системе центра масс $k$ и $-k$, $K^{\mathrm{I}}$ и $K^{\mathrm{II}}$ — операторы свободного распространения соответственно первого и второго нуклонов, $A^{\mathrm{I}}$ и $A^{\mathrm{II}}$ — операторы взаимодействия обоих нуклонов с мезонным полем, $q$ — импульс виртуального мезона, $\mu$ — масса мезона. В дальнейшем будем использовать единицы, в которых $\hbar = c = M_{\text{нук}} = 1$.

От этих уравнений мы переходим к уравнениям типа Тамма-Данкова, в которых волновая функция зависит только от пространственных компонент импульсов (по четвертым компонентам импульсов нуклонов и мезона проинтегрировано, см., напр., [2]). Так как для псевдоскалярных мезонов с псевдовекторным взаимодействием

$$A(q) = -\frac{ig_p}{\mu_p}\sqrt{4\pi}\,\gamma_5\,\hat{q},$$

а для скалярных мезонов с векторным взаимодействием

$$A(q) = -\frac{ig_s}{\mu_s}\sqrt{4\pi}\,\hat{q},$$

где $g_p$, $g_s$, $\mu_p$, $\mu_s$ — соответственно константы взаимодействия и массы псевдоскалярных и скалярных мезонов и $\hat{q} = \gamma_i\ q_i$, то после ряда преобразований, аналогичных проведенным в [2], получим уравнения Тамма-Данкова, в которых опущены все члены, кроме контактных, в следующем виде:

$$(W - 2E_k)\, v(\vec{k}) = \frac{1}{2\pi} \int Bv(\vec{l})\, d^3l\,. \tag{2}$$

Здесь $\vec{l} = \vec{k} + \vec{q}$, $E_k = \sqrt{1 + k^2}$ и

$$B = \frac{g_p^2}{\mu_p^2}\, \rho_1^{\mathrm{I}}\, \rho_1^{\mathrm{II}} + \frac{g_s^2}{\mu_s^2}\,, \tag{3}$$

а $\rho_1^{\mathrm{I}}$ и $\rho_1^{\mathrm{II}}$ — матрица Дирака $\rho_1$ соответственно для первого и второго нуклона.

Далее разлагаем функцию $v(\vec{k})$ по ортогональным системам функций, соответствующих различным значениям спинов обоих нуклонов:

$$v(\vec{k}) = u^{\mathrm{I}}(\vec{k})\, u^{\mathrm{II}}(-\vec{k})\, a(\vec{k}, s^{\mathrm{I}}, s^{\mathrm{II}})\,,$$

где $u(\vec{k})$ — единичный биспинор Дирака (плоские волны). $u(\vec{k})$ представляем в виде

$$u(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2E_k(E_k+1)}}\,(E_k + 1 - i\,\rho_2\,\vec{\sigma}\,\vec{k}\,),$$

где $\rho_i$ и $\sigma_i$ — дираковские матрицы, и ограничиваемся только состояниями с положительными энергиями нуклонов, что означает, что после всех перемножений дираковских матриц нужно положить

$$\rho_1 = \rho_2 = 0, \qquad \rho_3 = 1\,.$$

В результате уравнения, описывающие взаимодействие двух нуклонов в состояниях с положительной энергией с учётом только контактных членов, примут вид

$$\begin{aligned}(W - 2E_k)\, a(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi} \int \Bigg\{ & \frac{g_p^2}{\mu_p^2}\, [(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{k}^*) + (\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{l}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{l}^*) + \\ & + (\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{l}^*) + (\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{l}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{k}^*)] + \frac{g_s^2}{\mu_s^2} \Big[ (E_k + 1)(E_l + 1) + (\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{l}^*) + \\ & + (\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{l}^*) + \frac{1}{(E_k+1)(E_l+1)}\,(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}\,\vec{l}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{k}^*)(\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}\,\vec{l}^*) \Big] \Bigg\}\, a(\vec{l})\, d^3l.\end{aligned} \tag{4}$$

Дираковские матрицы $\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$ и $\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}$ здесь относятся соответственно к первому и второму нуклонам, $k^* = k\sqrt{\dfrac{E_l + 1}{E_k + 1}}$, $l^* = l\sqrt{\dfrac{E_k + 1}{E_l + 1}}$.

Волновую функцию $\vec{a}(k, s^{\mathrm{I}}, s^{\mathrm{II}})$ от импульсов и спинов обоих нуклонов удобно разложить по четырем ортогональным спиновым функциям двух частиц и представить в виде [3]:

$$a(\vec{k}, s^{\mathrm{I}}, s^{\mathrm{II}}) = {}^1\sigma_0\, \varphi_1(\vec{k}) + {}^3\sigma_0\, \varphi_2(\vec{k}) + {}^3\sigma_1\, \varphi_3(\vec{k}) + {}^3\sigma_{-1}\, \varphi_4(\vec{k})\,, \tag{5}$$

где ${}^1\sigma_0$ — описывает синглетное, ${}^3\sigma_0$, ${}^3\sigma_1$, ${}^3\sigma_{-1}$ — триплетные состояния. Легко выяснить, каким образом матрицы $\vec{\sigma}^{\mathrm{I}}$ и $\vec{\sigma}^{\mathrm{II}}$ действуют на функции ${}^1\sigma_0$, ${}^3\sigma_0$, ${}^3\sigma_1$, ${}^3\sigma_{-1}$; например, одно из многих подобных соотношений выглядит так [3]:

$$\sigma_1^{\mathrm{I}}\,\sigma_2^{\mathrm{II}}\cdot\begin{cases} {}^1\sigma_0 = +\,i\,{}^3\sigma_0, \\ {}^3\sigma_0 = -\,i\,{}^1\sigma_0, \\ {}^3\sigma_1 = -\,i\,{}^3\sigma_{-1}, \\ {}^3\sigma_{-1} = +\,i\,{}^3\sigma_1. \end{cases} \tag{6}$$

Подставляя (5) в (4) и используя соотношения типа (6), после приравнивания коэффициентов при ${}^1\sigma_0$, ${}^3\sigma_0$, ${}^3\sigma_1$, ${}^3\sigma_{-1}$ получим систему четырех интегральных уравнений для четырех функций импульсов $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$:

$$\left.\begin{aligned}
&(W-2E_k)\,\varphi_1(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi}\int\Bigg\{\frac{g_p^2}{\mu_p^2}\left[-(k^2+l^2)-2\,\vec{k}\,\vec{l}\,\right]+ \\
&+\frac{g_s^2}{\mu_s^2}\Bigg[(E_k+1)(E_l+1)+2\vec{k}\,\vec{l}+\frac{[\vec{k}\,\vec{l}]^2}{(E_k+1)(E_l+1)}+ \\
&+\frac{(\vec{k}\,\vec{l})^2}{(E_k+1)(E_l+1)}\Bigg]\Bigg\}\,\varphi_1(\vec{l})\,d^3l, \\
&(W-2E_k)\,\varphi_2(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi}\int\Bigg\{\frac{g_p^2}{\mu_p^2}\left[(k^2-2k_z^2+l^2-2l_z^2+2\,\vec{k}\,\vec{l}-\right. \\
&-2k_z l_z)\,\varphi_2(\vec{l})+(k_z k_- + l_z l_- + k_z l_- + l_z k_-)\,\varphi_3(\vec{l})- \\
&-(k_z k_+ + l_z l_+ + k_z l_+ + l_z k_+)\,\varphi_4(\vec{l})\Big]+ \\
&+\frac{g_s^2}{\mu_s^2}\Bigg[\Bigg[(E_k+1)(E_l+1)+2\,\vec{k}\,\vec{l}+\frac{(\vec{k}\,\vec{l})^2-[\vec{k}\,\vec{l}]^2}{(E_k+1)(E_l+1)}- \\
&-\frac{1}{8}\frac{(k_+ l_- - k_- l_+)^2}{(E_k+1)(E_l+1)}\Bigg]\varphi_2(\vec{l})-\Bigg[(l_z k_- - k_z l_-)+\frac{\vec{k}\,\vec{l}\,(l_z k_- - k_z l_-)}{(E_k+1)(E_l+1)}- \\
&-\frac{(k_+ l_- - k_- l_+)(k_- l_z - k_z l_-)}{4(E_k+1)(E_l+1)}\Bigg]\varphi_3(\vec{l})+ \\
&+\frac{(k_+ l_- - k_- l_+)(k_z l_+ - k_- l_z)}{4(E_k+1)(E_e+1)}\,\varphi_4(\vec{l})\Bigg]\Bigg\}\,d^3l, \\
&(W-2E_k)\,\varphi_3(k) = \frac{1}{8\pi}\int\Bigg\{\frac{g_p^2}{\mu_p^2}\Bigg[(k_z k_+ + l_z l_+ + k_z l_+ + l_z k_+)\,\varphi_2(\vec{l})+ \\
&+(k_z^2+l_z^2+2k_z l_z)\,\varphi_3(\vec{l})+\frac{1}{2}(k_+ + l_+)^2\,\varphi_4(\vec{l})\Bigg]+ \\
&+\frac{g_s^2}{\mu_s^2}\Bigg[-\Bigg[k_z l_+ - l_z k_+ + \frac{\vec{k}\,\vec{l}\,(k_z l_+ - l_z k_+)}{(E_k+1)(E_l+1)}- \\
&-\frac{(k_+ l_- - k_- l_+)(k_z l_+ - k_- l_z)}{4(E_k+1)(E_l+1)}\Bigg]\varphi_2(\vec{l})+[(E_k+1)(E_l+1)+
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+ 2\vec{k}\vec{l} + \frac{(\vec{k}\vec{l})^2}{(E_k+1)(E_l+1)} - \frac{\vec{k}\vec{l}(k_+ l_- - k_- l_+)}{2(E_k+1)(E_l+1)} + \\
&+ \frac{(k_+ l_- - k_- l_+)^2}{16(E_k+1)(E_l+1)} + \frac{1}{2}(k_+ l_- - k_- l_+)\Big]\varphi_3(\vec{l}) + \\
&+ \frac{(k_z l_+ - k_+ l_z)^2}{2(E_k+1)(E_l+1)^2}\varphi_4(\vec{l})\Big]\Big\} d^3l, \\
&(W - 2E_k)\varphi_4(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi}\int\Big\{\frac{g_p^2}{\mu_p^2}\Big[-(k_z k_- + l_z l_- + k_z l_- + l_z k_-)\varphi_2(\vec{l}) + \\
&+ \frac{1}{2}(k_- - l_-)^2\varphi_3(\vec{l}) + (k_z + l_z)^2\varphi_4(\vec{l})\Big] + \frac{g_s^2}{\mu_s^2}\Big[-\Big[l_z k_- - k_z l_- + \\
&+ \frac{(\vec{k}\vec{l})^2(l_z k_- - k_z l_-)}{(E_k+1)(E_l+1)} + \frac{(k_+ l_- - k_- l_+)(k_- l_z - k_z l_-)}{4(E_k+1)(E_l+1)}\Big]\varphi_2(\vec{l}) + \\
&+ \frac{(k_- l_z - k_z l_-)^2}{2(E_k+1)(E_l+1)}\varphi_3(\vec{l}) + [(E_k+1)(E_l+1) + 2\vec{k}\vec{l} + \\
&+ \frac{1}{2}(k_+ l_- - k_- l_+) + \frac{(\vec{k}\vec{l})^2}{(E_k+1)(E_l+1)} + \frac{(\vec{k}\vec{l})(k_+ l_- - k_- l_+)}{2(E_k+1)(E_l+1)} + \\
&+ \frac{(k_+ l_- - k_- l_+)}{16(E_k+1)(E_l+1)}\Big]\varphi_4(\vec{l})\Big]\Big\} d^3l,
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

где

$$k_\pm = \sqrt{2}(k_x \pm i k_y),$$
$$l_\pm = \sqrt{2}(l_x \pm i l_y).$$

Теперь нужно исследовать состояния системы двух нуклонов с различными угловыми моментами и произвести интегрирование по угловым переменным. Рассматривались следующие состояния: $^1S_0$, $^3P_0$, $^3P_1$, $^1P_1$, $^3S_1 + {}^3D_1$. Волновые функции $\varphi_i(\vec{k})$ в каждом из этих состояний выбираются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&^1S_0 : \varphi_1 = A(k),\ \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0; \\
&^3P_0 : \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = C(k)\cos\vartheta,\ \varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}C(k)\sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \\
&\varphi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}C(k)\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}; \\
&^3P_1 : \varphi_1 = \varphi_2 = 0,\ \varphi_3 = D(k)\sin\vartheta\, e^{i\varphi},\ \varphi_4 = D(k)\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}; \\
&^1P_1 : \varphi_1 = F(k)\cos\vartheta,\ \ \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = 0; \\
&^3S_1 + {}^3D_1\ \ \varphi_1 = 0,\ \ \varphi_2 = B(k) + (1 - 3\cos^2\vartheta)C(k), \\
&\varphi_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}C(k)\cos\vartheta\,\sin\vartheta\, e^{i\varphi}, \\
&\varphi_4 = -\frac{3}{\sqrt{2}}C(k)\cos\vartheta\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}.
\end{aligned}
\quad (8)
$$

После несложного, но утомительного интегрирования по угловым переменным методом, рассмотренным в [4], для каждого из указанных состояний получим уравнения типа

$$(W - 2E_k) f(k) = \text{const.} \int \left\{ \frac{g_p^2}{\mu_p^2} B_1(k, l) + \frac{g_s^2}{\mu_s^2} B_2(k, l) \right\} f(l)\, dl, \qquad (9)$$

причём в случае $k \to \infty$, $l \to \infty$, который нас только и интересует, ядра уравнения $B_1$ и $B_2$ оказываются равными

в состоянии $^1S_0$ $B_1 = 1$, $B_2 = 1$,
в состоянии $^3P_0$ $B_1 = 1$, $B_2 = 0$,
в состоянии $^3P_1$ $B_1 = -2$, $B_2 = 1$,
в состоянии $^1P_1$ $B_1 = 1$, $B_2 = 1$.

Отсюда видно, что для указанных состояний при $k \to \infty$ и $l \to \infty$ (что соответствует $r \to 0$) мы имеем отталкивание при условиях:

$^1S_0$ — всегда,
$^3P_0$ — всегда,
$^3P_1$ — при $\frac{g_s^2}{\mu_s^2} > 2\frac{g_p^2}{\mu_p^2}$,
$^1P_1$ — всегда.

В $^3S_1 + {}^3D_1$ — состоянии надо исследовать систему двух интегральных уравнений с двумя функциями. В результате оказывается, что отталкивание имеет место при условии

$$\frac{g_s^2}{\mu_s^2} > 3\frac{g_p^2}{\mu_p^2}.$$

Исследовать все возможные состояния, естественно, не представляется возможным, однако есть все основания считать, что при

$$\frac{g_s^2}{\mu_s^3} > N\frac{g_p^2}{\mu_p^2},$$

где $N$ не очень большое по сравнению с единицей число, контактные силы обуславливают отталкивание между нуклонами на малых расстояниях.

Авторы выражают благодарность Д. В. Смирновой за помощь в проведении ряда расчётов.

1 VI 1957 *Кафедра теоретической физики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *И. Е. Тамм, В. П. Силин, В. Я. Файнберг,* ЖЭТФ, 1953, 24, стр. 3.
[2]. *П. Е. Кунин* и *И. М. Таксар.* Изв. АН ЛАТВ, ССР, 1956, № 2, стр. 105.
[3]. *П. Е. Кунин* и *И. М. Таксар.* Изв. АН Латв, ССР, 1952, № 8, стр. 137.
[4]. *П. Е. Кунин* и *И. М. Таксар.* Ученые записки Латв. Гос: Ун-та, 1956. 8, вып. 2, стр. 121.

## PAR KONTAKTU SPĒKIEM NUKLEONU SAVSTARPĒJĀ IEDARBĪBĀ

*P. Kuņins un J. Taksars*

(Kopsavilkums)

Darbā apskatīta nuklonu savstarpējā iedarbība, kuru nosaka kā skalari tā arī pseidoskalari mezoni. Šajā gadījumā kontaktspēki, kuriem ir izšķiroša nozīme pie maziem nuklonu savstarpējiem attālumiem, visos divu nuklonu sistemas stāvokļos dod atgrūšanos, ja pastāv nosacījums

$$\frac{g_s^2}{\mu_s^2} > N \cdot \frac{g_p^2}{\mu_p^2},$$

kur $g_s$, $g_p$, $\mu_s$, $\mu_p$ — atbilstošās skalaro un pseidoskalaro mezonu savstarpējās iedarbības konstantes un masas, bet $N \geqslant 3$ noteikta konstante, kuras vērtība nevar būt daudz lielāka par 3.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# К ТЕОРИИ ИОНИЗАЦИИ АТОМА ВОДОРОДА

*В. Я. ВЕЛЬДРЕ*

Рассмотрим систему — падающий и атомный электроны в поле ядра атома водорода. Волновая функция этой системы удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{H}\psi = E\psi. \tag{1}$$

Здесь H — оператор энергии системы, а

$$E = \varepsilon_1 + \frac{\overset{2}{k1}}{2} = \frac{k^2}{2} + \frac{k'^2}{2} \tag{2}$$

полная энергия системы до или после ионизации, причем $\varepsilon_1$ энергия основного состояния атома; $k_1^2/_2$, $k^2/_2$ и $k'^2/_2$ — энергии падающего, рассеянного и выбитого из атома электронов.

Волновая функция системы обоих электронов при заданном полном спине может быть представлена следующим образом

$$\psi^{(\sigma)}(\vec{r}_1; \vec{r}_2) = \sum_{\alpha} \left[ f_{\alpha}^{(\sigma)}(\vec{r}_1)\,\psi_{\alpha}(\vec{r}_2) \pm f_{\alpha}^{(\sigma)}(\vec{r}_2)\,\psi_{\alpha}(\vec{r}_1) \right] + \\ + \int \left[ f^{(\sigma)}(\vec{k}, \vec{r}_1)\,\psi(\vec{k}, \vec{r}_2) \pm f^{(\sigma)}(\vec{k}, \vec{r}_2)\,\psi(\vec{k}, \vec{r}_1) \right] dk, \tag{3}$$

где $\sigma$ означает полный спин системы, причем знак „+“ соответствует $\sigma = 0$, а „—“ — $\sigma = 1$ (далее всюду рассматриваем случай $\sigma = 0$).

$\psi_{\alpha}(\vec{r})$ и $\psi(\vec{k}, \vec{r})$ — нормированные собственные волновые функции оператора энергии электрона в поле ядра, соответствующие дискретному и непрерывному спектрам.

Подставляя оператор энергии системы, а также выражения (2) и (3) в уравнение (1), после обычных преобразований получим систему интегродифференциальных уравнений для функций $f_{\alpha}(\vec{r})$ и $f(\vec{k}, \vec{r})$.

Эти неизвестные функции разлагаем в ряд по полиномам Лежандра

$$f_{\alpha}(\vec{r}) = \sum_{j} \frac{f_{nlj}(r)}{r} \frac{2j+1}{2} P_j(\cos\vartheta_r)$$

$$f(\vec{k}, \vec{r}) = \sum_{l,j} \frac{f_{lj}(k, r)}{r} \frac{2j+1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\vartheta_k) P_j(\cos\vartheta_r).$$

После интегрирования по угловым переменным получим следующую систему интегродифференциальных уравнений для функций $f_{nlj}(r)$ и $f_{lj}(k,r)$:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{s(s+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + 2(\mathrm{E} - \varepsilon_n)\right] f_{nls}(r) = \\ = \sum_{n'l's'q} \mathrm{A}_{s'll'}\, \mathrm{C}_{ll'q}\, \mathrm{C}_{ss'q}\, f_{n'l's'}(r) \int_0^{\infty} u_{nl}(r')\, u_{n'l'}(r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+\sum_{l's'q} A_{s'll'} C_{ll'q} C_{ss'q} \int_0^\infty f_{l's'}(p, r)\, p^2\, dp \int_0^\infty u_{nl}(r')\, u_{l'}(p, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+\sum_{n'l's'q} A_{s'll'} C_{l'sq} C_{ls'q}\, u_{n'l'}(r) \int_0^\infty u_{nl}(r')\, f_{n'l's'}(r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' + \tag{4}$$

$$+\sum_{l's'q} A_{s'll'} C_{l'sq} C_{ls'q} \int_0^\infty u_{l'}(p, r)\, p^2 dp \int_0^\infty u_{nl}(r')\, f_{l's'}(p, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+ B_{ls} \sum_{n'} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n'} - E)\, u_{n's}(r) \int_0^\infty u_{nl}(r')\, f_{n'sl}(r') dr' +$$

$$+ B_{ls} \int_0^\infty \left(\varepsilon_n + \frac{p^2}{2} - E\right) u_s(p, r)\, p^2\, dp \int_0^\infty f_{sl}(p, r')\, u_{nl}(r')\, dr',$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{s(s+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + 2\left(E - \frac{k^2}{2}\right)\right] f_{ls}(k, r) =$$

$$= \sum_{n'l's'q} D_{s'l'l}\, C_{ll'q} C_{ss'q}\, f_{n'l's'}(r) \int_0^\infty u_{n'l'}(r')\, u_l(k, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+\sum_{l's'q} D_{s'l'l}\, C_{ll'q} C_{ss'q} \int_0^\infty f_{l's'}(p, r)\, p^2\, dp \int_0^\infty u_l(k, r')\, u_l(p, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+\sum_{n'l's'q} D_{s'l'l}\, C_{ls'q} C_{sl'q}\, u_{n'l'}(r) \int_0^\infty f_{n'l's'}(r')\, u_l(k, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' + \tag{5}$$

$$+\sum_{l's'q} D_{s'l'l}\, C_{ls'q} C_{sl'q} \int_0^\infty u_{l'}(p, r)\, p^2 dp \int_0^\infty u_l(k, r')\, f_{l's'}(p, r')\, \gamma_q(r, r')\, dr' +$$

$$+ F_{ls} \sum_{n'} \left(\varepsilon_{n'} + \frac{k^2}{2} - E\right) u_{n's}(r) \int_0^\infty u_l(k, r')\, f_{n'sl}(r')\, dr' +$$

$$+ F_{ls} \int_0^\infty \left(\frac{k^2}{2} + \frac{p^2}{2} - E\right) u_s(p, r)\, p^2\, dp \int_0^\infty u_l(k, r')\, f_{sl}(p, r')\, dr'.$$

Здесь обозначено

$$\gamma_q(r, r') = \begin{cases} \dfrac{r^q}{r'^{q+1}} & r \leqslant r' \\ \dfrac{r'^q}{r^{q+1}} & r \geqslant r' \end{cases};$$

$$A_{s'll'} = \frac{2s'+1}{2} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)}; \quad B_{ls} = 2\sqrt{\frac{2l+1}{2s+1}};$$

$$D_{s'ls} = \pi(2s'+1)\, B_{ls}; \quad F_{ls} = \frac{8\pi}{\sqrt{(2l+1)(2s+1)}};$$

$$C_{abc} = \int_{-1}^{+1} P_a(x) P_b(x) P_c(x)\, dx$$

Найдем связь функций $f_{lj}(k, r)$ с эффективным сечением ионизации. Асимптотическое выражение радиальных функций можно представить в виде

$$\begin{cases} f_{10s}(r) \sim 2i^s \sqrt{\dfrac{\pi r}{2k_1}}\; J_{s+1/2}(k, r) + a_{10s}\, e^{ik_1 r}, \\ f_{nls}(r) \sim a_{nls}\, e^{ik_n r} \quad (1 < n \leqslant \infty), \\ f_{ls}(k, r) \sim a_{ls}(k)\, e^{ikr} \quad (0 \leqslant k \leqslant k_{max}), \end{cases} \tag{6}$$

$$k_{max} = \sqrt{2E}.$$

При $K > K_{max}$ радиальные функции будут вещественными и не дадут вклада в эффективное сечение столкновения электронов с атомами.

Подставив (6) в (3), получим асимптотическое выражение для волновой функции системы:

$$\psi(\vec{r}_1; \vec{r}_2) \sim \frac{u_{10}(r_2)}{r_2}\, e^{i\vec{k}_1\vec{r}_1} + \sum_{nl} a_{nl}(\vartheta)\, \frac{e^{ik_n r_1}}{r_1}\, \psi_{nl}(\vec{r}_2) +$$

$$+ \sum_{l} \int_{0}^{k_{max}} a_l(k, \vartheta)\, \frac{e^{ikr_1}}{r_1}\, \psi(\vec{k}, \vec{r}_2)\, d\vec{k} + \tag{7}$$

$+$ члены, не вносящие вклада в эффективное сечение.

Здесь обозначено

$$a_{nl}(\vartheta) = \sum_j a_{nlj}\, \frac{2j+1}{2}\, P_j(\cos\vartheta),$$

$$a_l(k, \vartheta) = \sum_j a_{lj}(k)\, \frac{2j+1}{2} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, P_l(\cos\vartheta_k)\, P_j(\cos\vartheta_r). \tag{8}$$

Г. Ф. Друкаревым [1] было показано, что члены вида

$$a_{nl}\, \frac{e^{ik_n r_2}}{r_2}\, \psi_{nl}(\vec{r}_1)$$

не вносят вклада в эффективное сечение. Можно показать, что аналогичные члены в сплошном спектре так же дают стремящийся к нулю поток через бесконечно удаленную поверхность.

Из асимптотического выражения для волновой функции системы (7) можно найти эффективные сечения упругого рассеяния и возбуждения атома [1].

Для нахождения эффективного сечения ионизации найдем поток через площадку $ds$ членов вида

$$\varphi(r) = \int_0^{k_{max}} a_l(k, \vartheta)\, \frac{e^{ikr}}{r}\, \psi(\vec{k}, \vec{r}')\, dk.$$

Радиальная компонента этого потока равна

$$j_r\,ds = \frac{i}{2}\; r^2\,d\,\Omega \int \left(\varphi\,\frac{\partial\varphi^*}{\partial r} - \varphi^*\;\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) dr' =$$

$$= \int\limits_0^{k_{max}} |a_l\,(k,\ \vartheta)|^2\ k\,dk\ d\,\Omega.$$

Эффективное сечение ионизации в угле $d\,\Omega$, соответствующее моменту $l$ падающего электрона, будет

$$dq_l^{\text{иониз}} = \frac{d\Omega}{k_1} \int\limits_0^{k_{max}} |(a_l\,(k_1,\ \vartheta)|^2\ k\ dk,$$

а полное сечение ионизации, учитывая (8), получим в виде:

$$q^{\text{иониз}} = \frac{\pi}{k_1} \sum_l \sum_s\ (2s+1) \int\limits_0^{k_{max}} |a_{ls}\ (k)|^2\ k\,dk. \tag{9}$$

Таким образом для нахождения эффективного сечения ионизации нужно решить систему уравнений (4) и (5), представить асимптотический вид найденных функций в форме (6) и воспользоваться формулой (8).

Допустим, что при ионизации основного состояния атома медленными электронами, возбужденные состояния не оказывают влияния на эффективное сечение ионизации. Тогда в системе уравнений (4) и (5) можно оставить две функции $f_{100}(r)$ и $f_{00}\,(k,\,r)$, соответствующие основному и ионизированному состояниям атома. В этом случае система интегродифференциальных уравнений (4) и (5) с начальными условиями

$$f_{100}\,(0) = 0;\ f'_{100}\,(0) = \alpha_1;\ f_{00}\,(k,\ 0) = 0;\ f'_{00}\,(k,\ 0) = \alpha_2\,(k)$$

сводится к системе интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода [2]:

$$f_{100}\,(r) = \alpha_1\,\frac{\sin k_1 r}{k_1} + \frac{2}{k_1} \int\limits_0^r \sin\,k_1\,(r-s)\left\{\left[\int\limits_0^\infty u_{10}^2\,(t)\,\gamma_0\,(s,\,t)\,dt - \frac{1}{s}\right] f_{100}\,(s) + \right.$$

$$+ \int\limits_0^\infty f_{00}\,(p,\,s)\,p^2 dp \int\limits_0^\infty u_{10}\,(t)\,u_0\,(p,\ t)\,\gamma_0\,(s,\,t)\,dt +$$

$$+ u_{10}\,(s) \int\limits_0^\infty f_{100}\,(t)\,u_{10}\,(t)\left[\varepsilon_1 - \frac{k_1^2}{2} + \gamma_0\,(s,\,t)\right] dt +$$

$$\left. + \int\limits_0^\infty u_0\,(p,\ s)\ p^2\,dp \int\limits_0^\infty f_{00}\,(p,\ t)\,u_{10}\,(t)\left[\frac{p_2}{2} - \frac{k_1^2}{2} + \gamma_0\,(s,\,t)\right] dt\right\} ds, \tag{10}$$

$$f_{00}\,(k,r) = \alpha_2\,(k)\,\frac{\sin\,k'r}{k'} + \frac{8\pi}{k'} \int\limits_0^r \sin k'(r-s)\left\{ f_{100}\,(s) \int\limits_0^\infty u_{10}(t)\,u_0(k,\,t)\,\gamma_0\,(s,\,t)\,dt - \right.$$

$$- \frac{1}{4\pi s}\,f_{00}\,(k,\,s) + \int\limits_0^\infty f_{00}\,(p,\,s)\,p^2 dp \int\limits_0^\infty u_0\,(k,\,t)\,u_0\,(p,\,t)\,\gamma_0\,(s,\,t)\,dt +$$

$$+ u_{10}(s) \int_0^\infty f_{100}(t)\, u_0(k, t) \left[\varepsilon_1 - \frac{k'^2}{2} + \gamma_0(s, t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^\infty u_0(p, s)\, p^2 dp \int_0^\infty f_{00}(p, t)\, u_0(k, t) \left[\frac{p^2}{2} - \frac{k'^2}{2} + \gamma_0(s, t)\right] dt \Bigg\} ds.$$

Эту систему интегральных уравнений решаем методом последовательных приближений.

Легко видеть, что решение системы (10) можно представить в виде

$$\begin{cases} f_{100}(r) = \frac{1}{ik_1} A_1(r)\, e^{ik_1 r} - \frac{1}{ik_1} B_1(r)\, e^{-ik_1 r}, \\ f_{00}(k, r) = \frac{1}{ik'} A_0(k, r)\, e^{ik' r} - \frac{1}{ik'} B_0(k, r)\, e^{-ik' r}. \end{cases} \tag{11}$$

Сравнивая (11) при $r \to \infty$ и (6), получим уравнения

$$B_1(\infty) = 1$$

$$B_0(k, \infty) = 0$$

для нахождения неизвестных величин $\alpha_1$ и $\alpha_2(k)$, а также эффективное сечение упругого рассеяния

$$q^{\text{упр}} = \frac{\pi}{k_1^2} |A_1(\infty) - 1|^2$$

и эффективное сечение ионизации

$$q^{\text{иониз}} = \frac{\pi}{k_1} \int_0^{k_{\max}} k\, |A_0(k, \infty)|^2 \frac{dk}{k'^2}.$$

1 VI 1957 *Кафедра теоретической физики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Г. Ф. Друкарев,* Вестник Ленинградского университета, 1953, 8, стр. 153.
[2]. *Г. Ф. Друкарев,* ЖЭТФ, 1953, 25, стр. 129.

## PAR ŪDEŅRAŽA ATOMA IONIZACIJAS TEORIJU

*V. J. Veldre*

(Kopsavilkums)

Apskatīta kvantu mechanikas problema par ūdeņraža atoma ionizaciju ar lēniem elektroniem. Dabūta formula ūdeņraža atoma ionizacijas varbūtības aprēķināšanai atkarībā no krītoša elektrona enerģijas.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ПРОХОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ 3/2 ЧЕРЕЗ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ БАРЬЕР

*Б. Н. РОЛОВ*

За последнее время интерес к частицам со спином 3/2 значительно увеличился, однако поведение и свойства их остаются еще сравнительно мало изучеными. Целью настоящей работы является исследование поведения частиц со спином 3/2 при прохождении через потенциальный барьер.

1. Для решения задачи о прохождении через потенциальный барьер мы будем исходить из уравнений, записанных в форме Тамма-Давыдова [1], но отличающихся от последних несложными преобразованиями функций [2], [3]. Эти уравнения имеют вид (в единицах, где $\hbar = c = 1$):

$$(\gamma_k P_k + \varkappa)\,\varphi^m + \frac{1}{3}\left(P_m - \frac{\varkappa\gamma_m}{2}\right) D = 0 \tag{1}$$

$$D = -3\,\gamma_m\,\varphi^m \tag{2}$$

$$D = \frac{2\,ie}{3\,\varkappa^2}\left(3\,\gamma_k F_{mk}\,\varphi^m - \frac{1}{2}\,\gamma_i\,\gamma_k\,F_{ik} D\right) \tag{3}$$

$$D = \frac{2}{\varkappa}\left(\frac{1}{3}\gamma_k P_k + P_m\,\varphi^m\right) \tag{4}$$

$$\gamma_\alpha P_\alpha\,\varphi^4 + \varkappa\,\varphi^4 - \frac{1}{3}\,\gamma_4\,\gamma_\alpha P_\alpha D - \gamma_4 P_\alpha\,\varphi^\alpha + \frac{\varkappa}{3}\,\gamma_4 D = 0 \tag{5}$$

$$(\alpha = 1,\ 2,\ 3).$$

Здесь $\varphi^m$ шестнадцатикомпонентная волновая функция частицы со спином 3/2, $D$ — спинтензор нулевого ранга, $\varkappa$—масса частицы, $\gamma_i$ — обычные матрицы Дирака и

$$P_k = \frac{\partial}{\partial x_k} - ieA_k$$

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Уравнения (1) — (4) представляют собой 20 уравнений относительно двадцати неизвестных функций $\varphi^m$ и $D$; двенадцать уравнений (2), (3), (5) играют роль дополнительных условий.

2. Рассмотрим одномерный случай, т. е. случай, когда потенциальная энергия частицы зависит только от одной координаты, например, координаты $x$. Сначала рассмотрим потенциальный барьер вида:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ U_0 & x \geqslant 0 \end{cases} \tag{6}$$

Так как $U$ зависит только от $x$, то:

$$F_{41} = -F_{14} = i\,E_x = i\,E,$$

а остальные $F_{ik}$ равны нулю. Отсюда следует, что уравнения (3) будут иметь вид:

$$D = \frac{3\, ib\, \gamma_k F_{mk}\, \varphi^m}{1 + \frac{1}{2}\, i\, \gamma_i\, \gamma_k F_{ik}} = \frac{3.bE\, \{\gamma_4 \varphi^1 - \gamma_1 \varphi^4 - bE\, (\gamma_4 \varphi^4 + \gamma_1 \varphi^1)\}}{1 + b^2 E^2} \tag{7}$$

$$b = \frac{2e}{3\varkappa^2}.$$

Из (6) следует, что

$$E = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_0\, \delta\, (x);$$

где $\delta(x)$ обозначает дельта-функцию Дирака, а $E_0$ — постоянная. Тогда из уравнения (7) получим:

$$D\, (x) = \frac{3\, bE_0\, \delta\, (x)\, \{\gamma_4 \varphi^1 - \gamma_1 \varphi^4 - bE_0\, \delta\, (x)\, (\gamma_4 \varphi^4 + \gamma_1 \varphi^1)\}}{1 + b^2 E_0^2\, (\delta\, (x))^2}.$$

Требуя, чтобы $D(x)$ была непрерывной функцией от $x$ и функции $\varphi^1$ и $\varphi^4$ имели конечное значение при $x = 0$ получаем:

$$D\, (x) = 0 \quad \text{если} \quad x \neq 0$$

$$D\, (0) = \lim_{x \to 0} \mathrm{D}(x) = -\, 3\, (\gamma_4\, \varphi^4\, (0) + \gamma_1\, \varphi^1\, (0))$$

откуда следует, что $\mathrm{D}(x)$ только тогда будет непрерывной функцией во всей области, если:

$$\gamma_4\, \varphi^1\, (0) + \gamma_1\, \varphi^1\, (0) = 0. \tag{8}$$

Уравнения (1) для нашего случая запишутся в виде:

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_4 \left(\frac{\partial}{\partial x_4} + U_0\right) + \varkappa\right) \varphi^m = 0 \qquad (x > 0) \tag{9}$$

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_4 \frac{\partial}{\partial x_4} + \varkappa\right) \psi^m = 0 \qquad (x < 0) \tag{10}$$

$$(m = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Решениями этих уравнений будут:

$$\varphi^m = a^m\, e^{i\,(p_1 x_1 - \omega x_0)} + b^m\, e^{i\,(-p_1 x_1 - \omega x_0)} \tag{11}$$

$$(x < 0)$$

$$\psi^m = c^m\, e^{i\,(p_2 x_1 - \omega x_0)} \tag{12}$$

$$(x > 0)$$

Подставляя (11) и (12) в уравнения (9) и (10), получаем систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов, которые имеют нетривиальные решения только в случае

$$p_1^2 = \omega^2 - \varkappa^2$$

$$p_2^2 = (\omega - U_0)^2 - \varkappa^2$$

При этих условиях справедливы следующие соотношения между различными амплитудами:

$$\left.\begin{aligned} a_4^m &= \frac{\omega - \varkappa}{p_1}\, a_1^m; \quad & b_4^m &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1}\, b_1^m; \quad & c_4^m &= \frac{\omega - \mathrm{U}_0 - \varkappa}{p_2}\, c_1^m \\ a_3^m &= \frac{\omega - \varkappa}{p_1}\, a_2^m; \quad & b_3^m &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1}\, b_2^m; \quad & c_3^m &= \frac{\omega - \mathrm{U}_0 - \varkappa}{p_2}\, c_2^m \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Все функции должны быть непрерывными при $x = 0$, откуда имеем:

$$a^m + b^m = c^m. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11), (12) можно $b^m$ выразить через $a^m$:

$$\left.\begin{aligned} b_1^m &= \Delta_1 a_1^m & b_2^m &= \Delta_1 a_2^m \\ b_3^m &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1}\Delta_1 a_2^m & b_4^m &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1}\Delta_1 a_1^m \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

где

$$\Delta_1 = -\frac{p_1(\omega - U_0 - \varkappa) - p_2(\omega - \varkappa)}{p_1(\omega - U_0 - \varkappa) + p_2(\omega - \varkappa)}$$

амплитуды $a^m$ и $b^m$ должны удовлетворять также условию (8), которое вместе с (2) дает:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 \varphi^1(0) + \gamma_4 \varphi^4(0) = 0 \\ \gamma_2 \varphi^2(0) + \gamma_3 \varphi^3(0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Уравнения (16) и (13) дают следующие две системы для определения амплитуд:

$$\left\{\begin{aligned} a_1^4 - i \cdot \frac{\omega - \varkappa}{p_1} a_1^1 = 0 \\ a_1^4 - i \cdot \frac{p_1}{\omega - \varkappa} a_1^1 = 0 \\ a_2^4 - i \cdot \frac{\omega - \varkappa}{p_1} a_2^1 = 0 \\ a_2^4 - i \cdot \frac{p_1}{\omega - \varkappa} a_2^1 = 0 \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} a_2^2 + a i_1^3 = 0 \\ a_1^2 + i a_2^3 = 0 \\ a_1^2 + i a_2^3 = 0 \\ a_2^2 + i a_1^3 = 0 \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Каждая из этих систем содержит 4 неизвестных. Первая система (17) имеет только тривиальное решение, так как ее определитель отличен от нуля, а вторая система имеет также нетривиальное решение. Решение второй системы (17) вместе с (15) дает:

$$\left.\begin{aligned} a_1^2 &= A_2 & a_1^3 &= A_1 \\ a_2^2 &= -i A_1 & a_2^3 &= i A_2 \\ a_3^2 &= -i \frac{\omega - \varkappa}{p_1} A_1 & a_3^3 &= i \frac{\omega - \varkappa}{p_1} A_2 \\ a_4^2 &= \frac{\omega - \varkappa}{p_1} A_2 & a_4^3 &= \frac{\omega - \varkappa}{p_1} A_1 \end{aligned}\right\} \tag{18-а}$$

$$\left.\begin{aligned} b_1^2 &= \Delta_1 A_2 & b_1^3 &= \Delta_1 A_1 \\ b_2^2 &= -i \Delta_1 A_1 & b_2^3 &= i \Delta_1 A_2 \\ b_3^2 &= i \cdot \frac{\omega - \varkappa}{p_1} \Delta_1 A_1 & b_3^2 &= -i \frac{\omega - \varkappa}{p_1} \Delta_1 A_2 \\ b_4^2 &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1} \Delta_1 A_2 & b_4^3 &= -\frac{\omega - \varkappa}{p_1} \Delta_1 A_1 \end{aligned}\right\} \tag{18-б}$$

Определяя коэффициент отражения $R$ частицы как

$$R = \frac{\sum\limits_{i,m=1}^{4} |b_i^m|^2}{\sum\limits_{i,m=i}^{4} |a_i^m|^2} \tag{19}$$

получаем после несложных алгебраических преобразований:

$$R = |\Delta_1|^2 = \left|\frac{p_1(\omega - U_0 - \varkappa) - p_2(\omega - \varkappa)}{p_1(\omega - U_0 - \varkappa) + p_2(\omega - \varkappa)}\right|^2 = \frac{(2\,U_0\,\varkappa)^2}{[U_0^2 - (p_1 + p_2)^2]^2} \tag{20}$$

что полностью совпадает с результатом, полученным для дираковских частиц Клейном [4].

3. Рассмотрим теперь потенциальный барьер вида

$$U(x) = \frac{V}{1 + e^{-ax}} \qquad -\infty < x < +\infty \tag{21}$$

при этом $U(-\infty) = 0$, $U(\infty) = V$, а $a$ характеризует „крутизну" возрастания $U(x)$. Подобный случай для электрона был рассмотрен Заутером [5]. Система уравнений (1) для нашего случая дает:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) + \varkappa\right)\varphi^1 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\varkappa\gamma_1}{2}\right) D = 0\\
&\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) + \varkappa\right)\varphi^2 - \frac{1}{6}\varkappa\gamma_2 D = 0\\
&\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) + \varkappa\right)\varphi^3 - \frac{1}{6}\varkappa\gamma_3 D = 0\\
&\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) + \varkappa\right)\varphi^4 + \frac{1}{3}\left(U - \omega - \frac{\varkappa\gamma_4}{2}\right) D = 0
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Практически удобнее решать не систему (22) для четырех функций $\varphi^m$ $(m = 1, 2, 3, 4)$, а следующую систему:

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) - \varkappa\right)\psi = 0 \tag{23-а}$$

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) - \varkappa - \gamma_4\gamma_1\, bE\right)\Theta = 0 \tag{23-б}$$

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} + \gamma_4 (U - \omega) + \varkappa\right)\varphi^4 + \frac{1}{3}\left(U - \omega - \frac{\varkappa\gamma_4}{2}\right) D = 0 \tag{23-б}$$

которая получается из (22) простым преобразованием функции:

$$\begin{aligned}
\psi &= \gamma_3\varphi^2 + \gamma_2\varphi^3\\
\Theta &= \gamma_2\varphi^2 + \gamma_3\varphi^3
\end{aligned} \tag{24}$$

Так как из (2) и (7) ледует, что

$$D = -3\,bE\,\gamma_4\gamma_1(\gamma_2\varphi^2 + \gamma_3\varphi^3) = -3\,bE\,\gamma_4\gamma_1\,\Theta \tag{25}$$

$$Q = -\frac{(1 + b\,E\,\gamma_4\gamma_1)}{1 + b^2E^2}(\gamma_1\varphi^1 + \gamma_4\varphi^4) \tag{26}$$

то зная рашения (23-а), (23-б), для $\varphi^4$ получаем неоднородное дифференциальное уравнение. Если известно $\varphi^4$, то $\varphi^1$ получается из (26).

Решение уравнения (23-а) известно, так как оно дано в работе [5] и подробно исследовано в [6]:

$$\begin{aligned}
\psi_1 = \psi_2 &= \frac{1}{2}\,y^{\mu}\left\{C_0(1 - y)^{\lambda}\,\mathrm{F}_0 + i\,C_1(1 - y)^{-\lambda}\,\mathrm{F}_1\right\}\\
\psi_3 = \psi_4 &= \frac{1}{2}\,y^{\mu}\left\{C_0(1 - y)^{\lambda}\,\mathrm{F}_0 - i\,C_1(1 - y)^{-\lambda}\,\mathrm{F}_1\right\}
\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$y = -e^{-ax}$$

$$F_{0,1} = F(\mu + \nu \pm \lambda;\ \mu - \nu \pm \lambda;\ 2\mu + 1;\ y)$$

$$\mu^2 = -\frac{1}{a^2}[(\omega - V)^2 - \varkappa^2] = -\frac{k'^2}{a^2} \tag{28}$$

$$\nu^2 = -\frac{1}{a^2}[\omega^2 - \varkappa^2] = -\frac{k^2}{a^2} \tag{29}$$

$$\lambda = -i\frac{V}{a}$$

В дальнейшем нас не будут интересовать точные решения, так как при расчете коэффициента отражения мы будем учитывать только первый член асимптотического разложения, т. е. плоские волны.

Асимптотический вид решений (27) согласно [6] с учетом (28) и (29) следующий: при $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}\psi_1 = \psi_2 &= \frac{1}{2}(-1)^{\mu} C\left\{\left(\frac{A_0}{\sqrt{a_0 b_0}} - \frac{A_1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{ikx} + \left(\frac{B_0}{\sqrt{a_0 b_0}} - \frac{B_1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{-ikx}\right\}\\ \psi_3 = \psi_4 &= \frac{1}{2}(-1)^{\mu} C\left\{\left(\frac{A_0}{\sqrt{a_0 b_0}} + \frac{A_1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{ikx} + \left(\frac{B_0}{\sqrt{a_0 b_0}} - \frac{B_1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{-ikx}\right\}\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$A_{0,1} = \frac{\Gamma(b_{0,1} - a_{0,1})\Gamma(c_{0,1})}{\Gamma(b_{0,1})\Gamma(c_{0,1} - a_{0,1})}$$

$$B_{0,1} = \frac{\Gamma(a_{0,1} - b_{0,1})\Gamma(c_{0,1})}{\Gamma(a_{0,1})\Gamma(c_{0,1} - b_{0,1})}$$

$a_{0,1} = \mu + \nu \pm \lambda$; $b_{0,1} = \mu - \nu \pm \lambda$; $c_{0,1} = 2\mu + 1$ и при $x \to +\infty$

$$\begin{aligned}\psi_1 = \psi_2 &= \frac{1}{2}(-1)^{\mu} C\left(\frac{1}{\sqrt{a_0 b_0}} - \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{ik'x}\\ \psi_3 = \psi_4 &= \frac{1}{2}(-1)^{\mu} C\left(\frac{1}{\sqrt{a_0 b_0}} + \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}\right)e^{ik'x}\end{aligned} \tag{31}$$

Уравнение (23-б) после введения новых функций

$$z_0 = \Theta_4 + \Theta_1;\quad z_1 = i(\Theta_4 - \Theta_1);$$

а также нового переменного $y = -e^{-ax}$ имеет вид:

$$f_1\frac{d^2 z_{0,1}}{dy^2} + f_2\frac{dz_{0,1}}{dy} + f_3 z_{0,1} = 0 \tag{32}$$

где

$$f_1 = y^2(1 - y) \qquad f_2 = y\frac{(1-y)^3 \mp 4Gy^2}{(1-y)^2 \pm 2Gy}$$

$$f_3 = \frac{1}{a^2}\left\{\pm\frac{iay}{1-y}\cdot\frac{(1-y)^2 \mp 2G}{(1-y)^2 \pm 2Gy}[\omega(1-y) - V] \mp i\omega ay + \right.$$

$$\left. + \frac{4G^2\varkappa^2 y^2}{(1-y)^3} + (1-y)\left[\left(\omega - \frac{V}{1-y}\right)^2 - \varkappa^2\right]\right.$$

и

$$G = \frac{iba\,V}{e}$$

Здесь верхний знак относится к решению $z_0$, а нижний — к решению $z_1$. С постановкой

$$z_{0,1} = y^{\mu}(1 - y)^{\pm\lambda} v_{0,1}\,\varkappa_{0,1} \tag{33}$$

где

$$\ln v_{0,1} = \pm G \int \frac{(1+y)\,dy}{(1-y)\,[(1-y)^2 \pm 2\,Gy]} + \text{const.} \tag{34}$$

уравнение (32) переводится в:

$$\begin{gathered} y\,(1-y)\,\frac{d^2 \varkappa_{0,1}}{dy^2} + [2\mu + 1 - (2\mu \pm 2\,\lambda + 1)\,y]\,\frac{d\varkappa_{0,1}}{dy} - \\ - \left\{(\mu + \nu \pm \lambda)\,(\mu - \nu \pm \lambda) - \frac{1}{y}\,\Phi_{0,1}(y)\right\}\varkappa_{0,1} = 0 \end{gathered} \tag{35}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi_{0,1}(y) = \pm \frac{G\,y^2\,(1-y)^2\,(4+y) + C^2 y^2\,(1+2y-y^2)}{(1-y)\,[(1-y)^2 \pm 2\,Gy]^2} + \\ + \frac{1}{a^2}\left\{\pm \frac{iay}{1-y} \cdot \frac{(1-y)^2 \pm 2G}{(1-y)^2 \pm 2Gy}\,[\omega\,(1-y) - V] \mp i\,\omega\,ay + \right. \\ \left. + \frac{4\,\varkappa^2 G^2 y^2}{(1-y)^3} \mp \frac{i\,Vay}{1-y}\right\} \end{gathered}$$

Точное решение уравнения (35) получить невозможно, но это уравнение таково, что его асимптотическое решение при $x \to \pm\infty$ совпадает с асимптотическим решением гипергеометрического уравнения. Так как нас интересуют именно асимптотические решения, то:

$$\begin{gathered} \Theta_1 = \Theta_2 = \psi_1 = \psi_2 \\ \Theta_3 = \Theta_4 = \psi_3 = \psi_4 \end{gathered} \tag{36}$$

где $\psi_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ даны формулами (30) и (31).

Уравнение (23-в) при подстановке:

$$\begin{gathered} \xi_0 = \varphi_4^4 + \varphi_1^4 \\ \xi_1 = i\,(\varphi_4^4 - \varphi_1^4) \\ y = -\,e^{-ax} \end{gathered}$$

приобретает вид:

$$\begin{gathered} y^2\,(1-y)\,\frac{d^2 \xi_{0,1}}{dy^2} + y\,(1-y)\,\frac{d\,\xi_{0,1}}{dy} + \frac{1}{a^2}\left\{(1-y)\left[\left(\omega - \frac{V}{1-y}\right)^2 - \varkappa^2\right] - \right. \\ \left. - \frac{iaV}{1-y}\right\}\xi_{0,1} + \eta\,(y) = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

где

$$\eta\,(y) = \frac{y\,(1-y)}{a} \cdot \frac{d\,(\Delta_1)}{dy} \pm \frac{i}{a^2}\,[V - \omega\,(1-y)]\,\Delta_1 - \frac{\Delta_2\,\varkappa\,(1-y)}{a^2} \tag{38}$$

$$\Delta_1 = -\,\frac{1}{3}\,i\left(\frac{V}{1-y} - \omega\right)(D_1 - D_4) + \frac{1}{6}\,i\,\varkappa\,(D_1 + D_4)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{V}{1-y} - \omega\right)(D_4 + D_1) + \frac{1}{6}\,\varkappa\,(D_4 - D_1)$$

Уравнение (37) является неоднородным дифференциальным уравнением и его решение следует искать в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Легко заметить, что решение однородного уравнения имеет вид:

$$\begin{gathered} \varphi_1^{4(0)} = \varphi_2^{4(0)} = \psi_1 = \psi_2 \\ \varphi_3^{4(0)} = \varphi_4^{4(0)} = \psi_3 = \psi_4 \end{gathered} \tag{39}$$

Неоднородное уравнение не может быть решено точно, и поэтому опять будем искать только асимптотический вид решения. Из (25), (36), (38) следует, что частное решение при $x \to -\infty$ следует искать в форме $Ay^{\mu-1} + By^{-\mu-1}$, где $A$ и $B$ постоянные. Но в приближении плоских волн этими величинами можно пренебречь. Аналогично можно показать, что и при $x \to +\infty$ решение определеяется только решением однородного уравнения. Поэтому:

$$\varphi_1^4 = \varphi_2^4 = \psi_1 = \psi_2$$

$$\varphi_3^4 = \varphi_4^4 = \psi_3 = \psi_4$$

Таким образом решение системы (23) будет следующим:

$$\varphi_1^1 = -2i\psi_3 \qquad \varphi_1^2 = \varphi_1^3 = -\frac{1}{2}(1+i)\psi_3 \qquad \varphi_1^4 = \psi_1$$

$$\varphi_2^1 = -2i\psi_3 \qquad \varphi_2^2 = \varphi_2^3 = -\frac{1}{2}(1+i)\psi_3 \qquad \varphi_2^4 = \psi_1$$

$$\varphi_3^1 = 0 \qquad \varphi_3^2 = \varphi_2^3 = \frac{1}{2}(1+i)\psi_1 \qquad \varphi_3^4 = \psi_3$$

$$\varphi_4^1 = 0 \qquad \varphi_4^2 = \varphi_4^3 = \frac{1}{2}(1+i)\psi_1 \qquad \varphi_4^4 = \psi_3$$

где $\psi_1$ и $\psi_3$ задаются соотношениями (30), (31)
Определяя

$$R = \frac{\sum\limits_{m=1}^{4}{}' \varphi^{m*}\alpha_1\varphi^m}{\sum\limits_{m=1}^{4}{}'' \varphi^{m*}\alpha_1\varphi^m}$$

где $\sum'$ означает, что при суммировании следует брать от асимптотического вида только падающую волну, а $\sum''$ означает, что следует брать только отраженную волну, получаем:

$$R = \frac{|A_0|^2 a_1 b_1 - |A_1|^2 a_0 b_0}{a_1 b_1 - a_0 b_0};$$

что совпадает с результатом полученным в теории Дирака [5], [6].

4. Выше было рассмотрено поведение частиц со спином 3/2 в электростатическом, т. е. в векторном поле. Представляет интерес также рассмотрение прохождения через потенциальный барьер в скалярном поле. Как известно, для частиц со спином 1/2 в скалярном поле парадокс Клейна не имеет места [7], [8]. Так как в скалярном поле потенциал частицы в отличие от электростатического (векторного) поля является инвариантом, а не четвертой компонентной 4— вектора, то система (1) в одномерном случае примет вид:

$$\left(\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x} - \gamma_4\,\omega + \varkappa + U\right)\varphi^m = 0$$

Интересно отметить, что функция $D(x)$ в этом случае тождественно равна нулю, так как взаимодействие входит вместе с массой. Из этого следует, что поведение частицы со спином 3/2 в скалярном поле ничем не отличается от поведения частицы со спином 1/2. Поэтому все выводы работы [7], [8] остаются в силе для частиц со спином 3/2. На это обстоятельство обратил внимание студент Латвийского Государственного университета Э. П. Шилтерс.

В заключение автор работы считает необходимым выразить благодарность доц. П. Е. Кунину и старш. научн. сотруднику И. М. Таксару за ценные указания при выполнении работы.

1 VI 1957 *Кафедра теоретической физики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *А. С. Давыдов.* «К теории частиц по спином 3/2» ЖЭТФ, 1947, 17, 313.
[2]. *И. М. Таксар.* Диссертация. 1950.
[3]. *И. М. Таксар.* «Частицы со спином 3/2 в магнитном поле». Тр. института физики АН ЛССР 1953, № 6, 551.
[4]. *O. Klein.* Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach relativistischen Dynamik von Dirac». Zs. f. Phys. 1929, 53, 157.
[5]. *F. Sauter.* «Zum Kleinschen Paradoxon». Zs. f. Phys. 1931, 73, 547.
[6]. *А. Зоммерфельд.* «Строение атома и спектры», т. 2, М. 1956.
[7]. *П. Е. Кунин, И. М. Таксар.* «Прохождение частицы со спином 1/2 через потенциальный барьер при скалярном вазимодействии». Изв. АН ЛССР, 1951, № 10, 1633.
[8]. *П. Е. Кунин, И. М. Таксар.* «Некоторые релятивистские особенности поведения частиц со спином 1/2», ЖЭТФ, 1957, 32, 506.

## DAĻIŅU AR SPINU 3/2 IZIEŠANA CAUR POTENCIALA BARJERU

*B. N. Rolovs*

(Kopsavilkums)

Darbā parādīts, ka daļiņai ar spinu 3/2 izejot caur potenciala barjeru vektorialas sadarbības gadījumā ir spēkā Kleina paradokss tādā pašā formā kā Diraka teorijā. Izejot caur potenciala barjeru skalaras sadarbības gadījumā, Kleina paradokss tāpat kā Diraka teorijā neparādās. Rezultatu iegūšanai izmantoti vienādojumi daļiņai ar spinu 3/2 Tamma-Đavidova formulējumā.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ АТМОСФЕРЫ ЮПИТЕРА НА ЗАХВАТ КОМЕТ

*К. А. Штейнс*

Теория захвата комет Юпитером хорошо представляет распределение короткопериодических комет с малыми наклонностями [1]. Из 32 помещенных в каталоге [2] комет 26 комет могут быть объяснены захватом Юпитера непосредственно из числа параболических комет. Имеются некоторые несогласия между теорией и наблюдениями. Элементы некоторых из открытых комет несколько выходят за пределы предвиденных теорией, а именно, эксцентриситеты $e$ некоторых комет оказываются меньшими, чем допускает теория при данном значении большой полуоси $a$. Это принято объяснять двумя причинами. Во-первых, известно, что с точки зрения небесной механики в теории захвата допускаются весьма грубые приближения, когда предполагается, что вне сферы действия комету притягивает только Солнце, а внутри сферы действия только Юпитер. Имеются исследования [3], которые показывают, что в некоторых случаях более точная теория расширяет пределы. Во-вторых, предполагается, что захват комет из числа параболических в число короткопериодических происходит не непосредственно, а постепенно. Предполагается, что Юпитер или остальные планеты своими возмущающими силами искажают траекторию кометы, превращая ее в более или менее вытянутый эллипс. После этого происходит основной захват, в итоге которого, вообще говоря, может получиться любой эллипс. В этом направлении имеются только подсчеты для отдельных конкретных комет.

В настоящей статье рассматривается вопрос о расширении пределов элементов завлеченных комет с точки зрения влияния сопротивления атмосферы Юпитера на захват комет. Относительно атмосферы Юпитера известно весьма мало. Если встать на точку зрения акад. В. Г. Фесенкова и А. Г. Масевич [4] и предположить, что атмосфера Юпитера хорошо представляется изотермической моделью атмосферы, то получается, что плотность атмосферы Юпитера $\delta$ падает чрезвычайно быстро. Согласно этой гипотезе кометы должны перемещаться в атмосфере Юпитера в исключительно плотной среде. Если предположить адиабатическую модель строения атмосферы, то падение плотности с возрастанием высоты происходит чрезвычайно медленно. Учитывая выше сказанное, мы пришли к выводу, что в настоящее время преждевременно рассматривать количественную сторону поставленной задачи. Мы исследуем только характер влияния сопротивления атмосферы Юпитера на захват комет.

## § 1.

При интегрировании дифференциальных уравнений движения в сопротивляющейся среде за первое приближение примем элементы невозмущенных орбит, т. е. орбит, по которым двигались бы кометы, если бы трение отсутствовало. Так как мы будем рассматривать только кометы, которые близко подходят к Юпитеру, то невозмущенные орбиты будут иметь ряд особенностей, учет которых позволит значительно упростить рассматривае-

мую задачу. В настоящем параграфе установим характерные свойства тех комет, которые близко подходят к Юпитеру. Мы рассмотрим кометы, невозмущенные орбиты которых имеют перигельные расстояния $q$ в пределах от 0,0004 *ае* до 0.0008 *ае* и у которых амплитуда точки входа в круг действия Юпитера $\alpha_1$ находится в пределах от 0° до 180°. Амплитуда $\alpha$ отсчитывается от направления Солнце — Юпитер. Первое условие обеспечивает прохождение комет через достаточно плотную атмосферу, а второе условие — достаточно большое количество рассматриваемых комет.

В настоящем параграфе мы ставим целью показать, что орбиты рассматриваемых комет в первом приближении можно считать за параболы.

Согласно [5] имеем следующие формулы:

$$|\pi - \beta_2| = \frac{\sqrt{qRm}}{\rho} \frac{\sqrt{\frac{qs^2}{mR} + 2}}{s}, \tag{1}$$

$$s = -\sin(\alpha + \beta_2) + \sqrt{2 - \cos^2(\alpha + \beta_2)}, \tag{2}$$

где $m$ — масса Юпитера, $R$ — радиус орбиты Юпитера, $\rho$ — радиус круга действия Юпитера, $\beta_2$ — угол, который образует скорость в точке входа $v_r$ с нормалью круга действия. Так как в нашем случае $q$ достаточно мало, то членом $\frac{qs^2}{Rm}$ можно пренебречь. Параметр орбиты $P$ определяется согласно закона сохранения площадей по формуле

$$P = \frac{\rho^2 v_r^2 (\pi - \beta_2)^2}{k^2 m}, \tag{3}$$

где $k$ — постоянная притяжения. Для скорости $v_r$ имеем согласно [1]

$$v_r = \frac{k}{\sqrt{R}} s. \tag{4}$$

Из формул (1), (3) и (4) получаем

$$P = 2q. \tag{5}$$

Из закона сохранения энергии приближенно следует

$$A = \frac{mR}{s^2} > mR = 0{,}005. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) непосредственно дают, что соответствующие орбиты близки к параболам.

Точная формула интеграла энергии

$$v^2 = k^2 m \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{A}\right)$$

показывает, что вполне возможно удовлетвориться параболической скоростью для определения сопротивления. Действительно, вблизи Юпитера членом $\frac{1}{A}$ можно пренебречь, а вдали от него в виду малой плотности атмосферы влияние трения незначительно.

## § 2.

Так как кометы имеют большие размеры, то следует ожидать, что сопротивление атмосферы Юпитера $w$ определяется законом гидродинамического сопротивления

$$w = c_1 F \frac{\delta v^2}{2}, \tag{8}$$

где $c_1$ — коэффициент сопротивления, $F$ — площадь тела, $v$ — скорость в юпитероцентрическом движении. Для изменения $\delta$ с расстоянием от центра Юпитера $r$ мы примем следующую формулу

$$\delta = \frac{c_2}{r^n}, \tag{9}$$

где $c_2$ постоянная, а $n$ целое число, большее двух.

Подставляя (9) в (8), получим

$$w = \gamma v^2 r^{-n}, \tag{10}$$

где $\gamma$ — некоторая постоянная, характеризующая сопротивление атмосферы Юпитера при движении кометы. В нашем случае уравнения Клэро-Лапласа имеют следующий вид

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = k^2 mH^{-2}, \tag{11}$$

$$\frac{dH}{d\alpha} = -\gamma u^{n-2} v. \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения: $u = r^{-1}$, $H = r^2 \frac{d\alpha}{dt}$. В первом приближении в члены, имеющие малый множитель $\gamma$, подставим значения $u$ и $v$ из невозмущенного движения. Интегрируя уравнение (12), в первом приближении получаем

$$H = h - \gamma k \sqrt{2m}\, q^{-n+\frac{3}{2}} \int \cos^{2n-3} \frac{\alpha - \tilde{\omega}}{2}\, d\alpha =$$

$$= h\,[1 - \gamma\, k\, m^{\frac{1}{2}}\, h^{-1} f_1], \tag{13}$$

где

$$f_1 = 2\sqrt{2}\, q^{-n+\frac{3}{2}} \sum_{m=o}^{n-2} \frac{(-1)^m C_{n-2}^m}{2m+1} \sin^{2m+1} \frac{\alpha - \tilde{\omega}}{2}, \tag{14}$$

$\tilde{\omega}$ — перигельное расстояние, $h$ — постоянная интегрирования. Подставим значение $H$ (13) в уравнение (11) и ограничимся членами первой степени относительно $\gamma$. Получим

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = k^2\, mh^{-2}\, [1 + 2\gamma\, k\, m^{\frac{1}{2}}\, h^{-1} f_1]. \tag{15}$$

Общее решение (15) имеет следующий вид

$$u = k^2 mh^{-2}\, [1 + \varepsilon \cos(\alpha - \omega) + 2\gamma\, km^{\frac{1}{2}}\, h^{-1} f_2], \tag{16}$$

где

$$f_2 = 8\sqrt{2}\, q^{-n+\frac{3}{2}} (2n-1)^{-1} \sum_{m=o}^{n-2} \frac{(-1)^{m+1} C_{n-2}^m}{(2m-1)(2m+1)} \sin^{2m+1} \frac{\alpha - \tilde{\omega}}{2}, \tag{17}$$

а $\varepsilon$ и $\omega$ суть произвольные постоянные интегрирования.

Для сравнения движения кометы в сопротивляющейся среде с движением в среде без трения найдем выражения оскулирующих элементов, как функций $\alpha - \tilde{\omega}$ и постоянных интегрирования. Для этого следует

учесть, что для любого момента величины $H$, $u$ и $\frac{du}{d\alpha}$ должны иметь одни и те же значения для действительного и для оскулирующего ($\gamma = 0$) движений. Учитывая это получаем

$$P = k^{-2} m^{-1} h^2 (1 - 2\gamma k m^{\frac{1}{2}} h^{-1} f_1), \tag{18}$$

$$e = \varepsilon - 2\gamma k m^{\frac{1}{2}} h^{-1} \left\{ \varepsilon f_1 + (f_1 - f_2) \cos(\alpha - \tilde{\omega}) + \frac{df_2}{d\alpha} \sin(\alpha - \tilde{\omega}) \right\}, \tag{19}$$

$$\tilde{\omega} = \omega + 2\gamma k m^{\frac{1}{2}} h^{-1} \varepsilon^{-1} \left\{ (f_2 - f_1) \sin(\alpha - \tilde{\omega}) + \frac{df_2}{d\alpha} \cos(\alpha - \tilde{\omega}) \right\}. \tag{20}$$

Для качественных исследований можно удовлетвориться следующими приближениями

$$\tilde{\omega} - \alpha_1, = \alpha_2 - \tilde{\omega} \cong 180^\circ. \tag{21}$$

Следовательно

$$\frac{df_2}{d\alpha} = 0, \ \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = \omega \text{ t. e. } \Delta\omega = 0. \tag{22}$$

Значки указывают на то, что значения берутся соответственно в точках входа и выхода кометы из круга действия.

Подставляя значения (21) и (22) в формулу (19), получим

$$\Delta e = -4\gamma P^{-\frac{1}{2}} f_2. \tag{23}$$

Следовательно сопротивление среды уменьшает эксцентриситет.

Из формулы

$$\Delta P = -4\gamma P^{\frac{1}{2}} f_1 \tag{24}$$

следует, что параметр орбиты также уменьшается. При помощи конкретных вычислений согласно соотношению

$$P\Delta\left(\frac{1}{a}\right) = -8\gamma P^{-\frac{1}{2}} f_2 + \frac{4}{a} \gamma P^{\frac{1}{2}} f_1 \tag{25}$$

легко установить, что вследствие сопротивления трения скорость при выходе из сферы действия уменьшается. Это следует также из сравнения порядков малых величин членов формулы (25). Вычисления были нами проделаны для случая $n = 12$, где $f_1 = 0{,}77\, q^{-10{,}5}$, $f_2 = 1{,}46\, q^{-10{,}5}$. С точки зрения механики уменьшение скорости с трением является очевидным результатом.

На основе формулы (3) получаем

$$\Delta(\pi - \beta_2) \cong -2\gamma a^{\frac{1}{2}} \rho^{-1} f_1 \tag{26}$$

т. е. вследствие трения $\pi - \beta_2$ также уменьшается.

Сравнивая формулы (25) и (26), видим, что направление скорости при выходе, также как и при движении без трения, почти точно направлено вдоль радиуса-вектора, в то время как скорость в точке выхода может быть гораздо меньше, чем при движении без трения.

## § 3.

Основной задачей настоящей статьи является выяснение вопроса об изменении верхнего предела $\sqrt{p}$ при данном значении $a$ в зависимости от сопротивления атмосферы Юпитера. Для этого, во-первых, получим кри-

терий захвата комет Юпитером, если трение отсутствует. Для этого используем тот факт, что большие возмущения получаются только тогда, когда скорость кометы в юпитероцентрическом движении при выходе из круга действия направлена почти вдоль радиуса-вектора.

Параметр орбиты $p$ определяется законом сохранения площадей

$$k\sqrt{p} = R' v_a \sin i, \tag{27}$$

где $v_a$ абсолютная скорость кометы, направленная относительно юпитероцентрического радиуса-вектора под углом $i$. Если через $n$ обозначить угол, под которым виден юпитероцентрический радиус-вектор, проведенный в точку $\alpha_2$ из Солнца, то мы имеем

$$n = \frac{\rho}{R} \sin \alpha_2, \tag{28}$$

$$i = \beta_4 - n, \tag{29}$$

$$R' = R\left(1 + \frac{\rho}{R} \cos \alpha_2\right), \tag{30}$$

где $\beta_4$ — угол между абсолютной скоростью и радиусом-вектором Солнце-Юпитер $R'$. На основе формул (28) — (30) и формул, связывающих составляющие абсолютной и относительной скоростей [1], получаем

$$\frac{k\sqrt{p}}{R} = v_r \sin \beta_3 + v_J + v_J \frac{\rho}{R} \cos \alpha_2, \tag{31}$$

где $\beta_3$ угол между направлением Солнце-Юпитер и относительной скоростью.

Аналогично получается [1]

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{R} = -\frac{2\rho}{R^2} \cos \alpha_2 - \frac{v_r^2 + 2v_r v_J \sin \beta_3}{k^2}. \tag{32}$$

В первом приближении, как для движения без трения, так для движения с трением, можно считать

$$\alpha_2 = \beta_3. \tag{33}$$

Из сферы действия кометы могут выходить с различными скоростями, однако для движения без трения должно быть

$$v_r \geqslant (\sqrt{2} - 1)\, v_J, \tag{34}$$

а для движения в сопротивляющейся среде $v_r$ может быть меньше, чем $(\sqrt{2} - 1)\, v_J$.

Если формулу (32) решить относительно $v_r$

$$v_r = -v_J \sin \beta_3 \pm \sqrt{v_J^2 \sin^2 \beta_3 - 2k^2 \frac{\rho}{R^2} \cos \beta_3 - k^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)} \tag{35}$$

и при помощи (35) исключить из (31) $v_r$, то получим

$$\frac{k\sqrt{p}}{R} = v_J \cos^2 \beta_3 + \frac{\rho k}{R^{\frac{3}{2}}} \cos \beta_3 \pm$$

$$\pm \sqrt{(1 - \cos^2 \beta_3)\left[v_J^2 - v_J^2 \cos^2 \beta_3 - 2k^2 \frac{\rho}{R^2} \cos \beta_3 - k^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right)\right]}, \tag{36}$$

т. е. соотношение между $\sqrt{p}$ и $a$, зависящее от параметра $\cos\beta_3$. Чтобы получить при данном значении $a$ наибольшее значение $\sqrt{p}$, следует определить при каких значениях $\cos\beta_3$ имеет место равенство

$$\frac{d\,\frac{k\sqrt{p}}{R}}{d\cos\beta_3}=0. \tag{37}$$

Из всех возможных значений нас интересует значение $\cos\beta_3$, при котором

$$\sqrt{v_J^2\sin^2\beta_3-2k^2\frac{\rho}{R^2}\cos\beta_3-k^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{R}\right)}=-v_J\sin\beta_3-\frac{\rho k}{R^{\frac{3}{2}}}tg\,\beta_3 \tag{38}$$

т. е. максимум находится примерно при $\beta_3\cong 270°$. В дальнейшем в некоторых случаях для упрощений формул будем заменять $\sin\beta_3$ на $-1$.

Если по формуле (38) вычислить $\beta_3$ и подставить полученное значение в (36), то получим

$$\sqrt{\frac{p}{R}}=\sqrt{2-\frac{R}{a}}. \tag{39}$$

Если значение (38) подставить в формулу (36) со знаком „—", то получим

$$v_r=\frac{\rho k}{R^{\frac{3}{2}}}\,tg\,\beta_3=v_J\left[1-\sqrt{2-\frac{R}{a}}\right]. \tag{40}$$

Следовательно формула (39) для движения без трения будет иметь место только в случае, если

$$\frac{R}{a}\geqslant 4\,(\sqrt{2}-1). \tag{41}$$

Так как в случае сопротивления атмосферы Юпитера значения $v_r$ могут быть меньшими чем $(\sqrt{2}-1)\,v_J$, то формула (39) в этом случае будет иметь место также при больших значениях $a$. С другой стороны формула (39) является условием того, чтобы афелии соответствующих орбит находились на орбите Юпитера. Таким образом предельный критерий (39) является требованием того, чтобы при данном значении $a$ орбита кометы доходила до орбиты Юпитера. Если некоторые из комет выходят за пределы, определяемые формулой (39), то это отнюдь не указывает на несостоятельность идеи возникновения комет захватом Юпитера и на преимущества других гипотез, например, гипотезы извержения комет Юпитером. Формально это означает то, что эти кометы никогда не были вблизи Юпитера. Требование почти точного совпадения направления скорости и направления юпитероцентрического радиуса вектора при выходе кометы из круга действия эквивалентно требованию тесного приближения кометы к Юпитеру. Мы убеждены, что происхождение тех комет, элементы которых мало выходят за пределы, определяемые формулой (39), связано непосредственно с Юпитером. Мы предполагаем, что несогласие с формулой (39) должно быть частично отнесено к неточности приближенной теории захвата. Некоторую роль здесь может играть то, что после захвата произошли некоторые изменения в орбитах этих комет.

Если $\frac{R}{a}<4\,(\sqrt{2}-1)$, то максимум $\sqrt{p}$ достигается при $v_r<(\sqrt{2}-1)\,v_J$ В случае отсутствия сопротивления теория захвата не допускает таких значений $v_r$. Следовательно только здесь начинают выступать особенности теории захвата, которые могут быть устранены допущением сопротивления атмосферы Юпитера, или, что более вероятно, допущением двукратного

завлечения, например, сначала завлечением Сатурном, а потом завлечением Юпитером. Чтобы найти в этом случае предельный критерий, в формулы (31) и (32) следует подставить $v_r = (\sqrt{2} - 1)\ v_J$ и исключить $\beta_3$. Это дает

$$\sqrt{\frac{p}{R}} = \sqrt{2} - \frac{R}{2a}, \tag{42}$$

что совпадает с предельным критерием Тиссерана [6]. На рисунке 1 показаны кривые (39) и (42). Существуют только две кометы с малой наклонностью

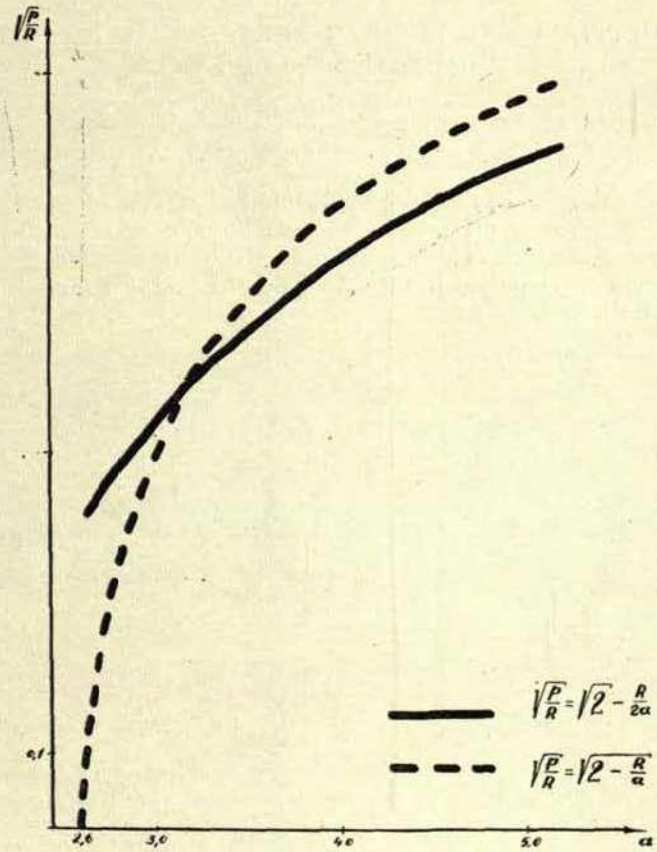



Рис. 1

плоскостей орбит, элементы которых явно противоречат формуле (42), но согласуются с формулой (39), если ее распространить на все возможные значения a.

В заключении отметим, что формулы (39) и (42) являются формулами приближенными. Однако, если учесть, что $\alpha_2 \neq \beta_3$, то формула (42) совершенно не изменится, а для формулы (39) соотношение $\alpha_2 = \beta_3$ также практически не вносит ошибки.

1 VI 1957 *Кафедра теоретической физики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *К. А. Штейнс*, Астр. журн. 1957 **34**, 86.
[2]. *F. Baldet et Mlle G. de Obaldia*, Catalogue Général des Orbites des Comètes de l'an — 466 à 1952, Paris, 1952.
[3]. *К. Д. Покровский*, Происхождение периодических комет. Юрьев, 1901.
[4]. *В. Г. Фесенков* и *А. Г. Масевич*, Астр. журн, 1951, **28**, 317.
[5]. *К. А. Штейнс*, Acta Astronomica 1957 7, вып. 4,
[6]. *F. Tisserand*, Traité de Mécanique Celeste. T. **4**, Paris, 1896.

## PAR JUPITERA ATMOSFERAS PRETESTĪBAS IESPAIDU UZ KOMETU SAĶERŠANU

*K. Šteins*

(Ķopsavilkums)

Darbā parādīts, kā kvalitativi iespējams izskaidrot Jupitera grupas anomalo kometu rašanos ar pretestību, ko rada kometu kustībās Jupitera atmosfera. Tiek pieņemts, ka Jupitera atmosferas blīvums krīt apgriezti proporcionali attāluma n-tai pakāpei. Tiek noskaidrots jautājums par orbitas parameta augšējo slieksni.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О ВЫЧИСЛЕНИИ ДЛИНЫ ВОЛНЫ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЛИНИИ ПО ФОРМУЛЕ ГАРТМАНА

*К. А. ШТЕЙНС*

Длину волны спектральной линии $\lambda$ и соответствующую длину $s$ в спектрограмме связывает следующая формула Гартмана [1]

$$\lambda = \lambda_o + \frac{c}{(s-s_o)^\alpha}, \tag{1}$$

где $\lambda_o$, $s_o$, $c$, $\alpha$ постоянные величины характеризующие данную спектрограмму. Постоянная $\alpha$ определяется в зависимости от числа использованных призм и считается известной. Для определения постоянных $\lambda_o$, $s_o$, $c$ следует измерить несколько линий с известными $\lambda$. Пусть для линий $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ мы получили $s_1$, $s_2$, $\ldots s_n$. Определение постоянных $\lambda_o$, $s_o$, $c$ производится в два этапа. На первом этапе мы берем три пары $\lambda$, $s$ и, подставляя эти значения в формулу (1), решаем эту систему относительно $\lambda_o$, $s_o$, $c$ методом последовательных приближений, причем ради простоты берем $\alpha = 1$. На втором этапе $\lambda_o$, $s_o$, $c$ определяются на основе всех $n$ измерений при помощи метода наименьших квадратов, причём за исходные величины берутся значения $\lambda_o$, $s_o$ и $c$ полученные в первом этапе. Первый этап является весьма утомительным и длинным. В настоящей работе предлагается более простой метод определения приближенных значений $\lambda_o$, $s_o$ и $c$, которые могут быть использованы в качестве исходных данных второго этапа.

Формула (1) для разных пар значений $\lambda_o$ и $s_o$ при одном и том же значении „$c$" дает одну и ту же кривую только в таких системах прямоугольных координат, оси которых взаимно параллельны. Следовательно, если строится график $\lambda_1$, $s_1$; $\lambda_2$, $s_2$; $\ldots$, $\lambda_n$, $s_n$, то получается определенная „$c$"-кривая. Если в нашем распоряжении будет также график семейства „$c$" кривых типа

$$\lambda' = c\,(s')^{-\alpha}, \tag{2}$$

то перемещая первый график так, чтобы оси обоих графиков оставались взаимно параллельны, мы сможем найти такое положение, где кривые обоих графиков полностью совпадут, т. е. найти на обоих графиках одну и ту же „$c$" кривую. Кроме того мы будем иметь

$$\lambda' = \lambda - \lambda_o, \tag{3}$$

$$s' = s - s_o, \tag{4}$$

где $\lambda_o$, $s_o$ суть координаты начала системы $\lambda'$, $s'$. Подставляя (3) и (4) в формулу (2) и сравнивая с формулой (1), убеждаемся что таким образом найдены и остальные постоянные спектрограммы.

1 VI 1957 *Кафедра теоретической физики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Handbuch der Astrophysik I, Berlin, 1933.

## PAR SPEKTRALĀS LĪNIJAS GARUMA APRĒĶINĀŠANU

*K. Šteins*

(Kopsavilkums)

Rakstā parādīts, kā konstruēt nomogramu Hartmaņa formulas atrisināšanai pirmajā tuvinājumā.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ТЕМПЕРАТУРНОЕ ТУШЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ КРИСТАЛЛОФОСФОРАХ

*И. И. КАЛНЫНЯ и К. К. ШВАРЦ*

В настоящее время довольно полно исследовано температурное тушение ряда кристаллофосфоров [1—4]. Однако температурное тушение щелочно-галоидных кристаллов изучено еще недостаточно. Есть несколько работ, посвященных температурному тушению щелочно-галоидных сублиматфосфоров [3, 5], и только единичные работы выполнены на монокристаллах [6, 7].

Нами исследовалось температурное тушение в щелочно-галоидных фосфорах на основе NaCl, KCl, KBr, KJ, активированных ртутеподобными ионами $Tl^{+}$, $Pb^{++}$, $Sn^{++}$ и медью.

Существует глубокая связь между температурным и концентрационным тушениями [8, 9]. В настоящей работе исследовано влияние концентрации таллия на температурное тушение в фосфоре KCl-Tl.

Исследования проводились на монокристаллах, выращенных методом Киропулоса [10]. Активирующими примесями служили галоидные соли. Для увеличения концентрации активатора в выращиваемом кристалле активаторные соли вводились в расплавленное основание.

Для получения кристаллов KCl-Tl с еще большей концентрацией активаторак ристаллы KCl (хч) совместно с активаторной солью TlCl нагревались в запаянных эвакуированных ампулах при 890°К. При заданной температуре концентрация активатора зависит от длительности нагревания.

Спектральные характеристики исследованных фосфоров довольно хорошо изучены [5, 11—17]. В большинстве случаев спектры излучения состоят из одной полосы, положение максимума которой при повышении температуры меняется незначительно. Исключениями являются фосфоры KBr-Tl [20] и NaCl-Sn [26], имеющие в спектре излучения две полосы, которые однако при повышении температуры сливаются.

При больших концентрациях активатора в спектре излучения появляется несколько полос [18, 19], причем их относительная интенсивность меняется в зависимости от температуры [18].

Спектральные свойства щелочно-галоидных кристаллофосфоров позволяют простым способом измерить их температурное тушение. Для этого монокристалл щелочно галоидного фосфора вкладывается в массивный металлический держатель, который помещается в печь, имеющую кварцевые окошки Температура кристалла измеряется термопарой.

Для возбуждения люминесценции использовалось ртутная лампа ПРК-2, а в качестве монохроматора-спектрограф ИСП-22 или монохроматор спектрофотометра СФ-4. Полоса люминесценции выделялась фильтрами. Кристалл в печи находился под углом 45° к направлению возбуждающего света, и интенсивность люминесценции измерялась с помощью фотоумножителя ФЭУ-18 в направлении, перпендикулярном к направлению падающего света. Кривая спектральной чувствительности ФЭУ-18 в области 240 $m\mu$ до примерно 500 $m\mu$ мало зависит от длины волны. Это устраняло ошибки, которые могли возникнуть при сдвиге максимума полосы излучения, связанного с повышением температуры. Возбуждение производилось в длинновол-

новом максимуме полосы поглощения, где возникает только флуоресценция центров свечения [20]. Перед измерением фосфоры закалялись.*

Оптическая плотность для кристаллов NaCl-Tl, KCl-Tl, KBr-Tl, NaCl-Sn была порядка двух. Это означало, что практически вся падающая энергия возбуждающего света поглощалась, и ход температурного тушения характеризовал зависимость квантового выхода от температуры. Для кристаллов NaCl-Sn, KJ-Tl, KCl-Sn, KBr-Sn, KCl-Cu и KBr-Cu оптическая плотность была порядка 0,3—0,5. В этом случае экспериментальные кривые несколько искаженно передают зависимость выхода люминесценции от температуры из-за изменения поглощения в кристаллах при нагревании.

Температурное тушение кристаллофосфоров характеризуется формулой Мотта [21, 22, 23]:

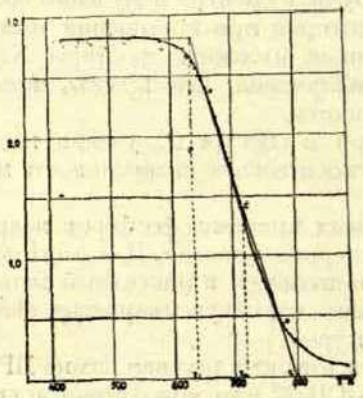
$$\eta = \frac{1}{1 + C \exp. \left(-\frac{U}{kT}\right)} \tag{1}$$

где $\eta$—квантовый выход, $C$ — постоянная пропорциональная длительности возбужданного состояния и предельной частоте колебании рещетки, $U$—энергия активации безизлучательных переходов, $k$ — постоянная Больцмана, $T$ — абсолютная температура (°К).

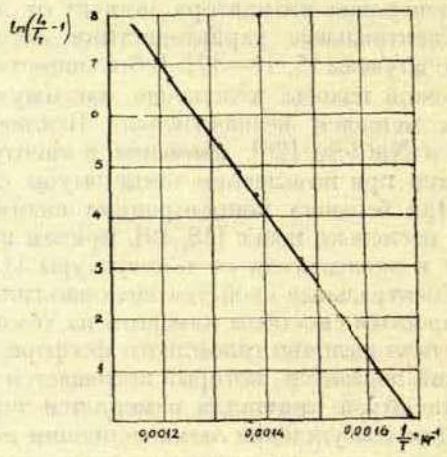
Формулу (1) можно переписать в следующем виде:

$$I(T) = \frac{I_0}{1 + C \exp. \left(-\frac{U}{kT}\right)} \tag{2}$$

где $I_0$ — интенсивность люминесценции в области температур, где тепловое тушение отсутствует, а $I(T)$ — зависимость интенсивности люминесценции от температуры. Формула Мотта выведена для случая внутреннего температурного тушения, но она применяется и для характеристики тушения рекомбинационной люминесценции [2, 4].



*Фиг. 1-а.* Экспериментальные точки на кривой $I(T)$ для фосфора KCl-Tl 0,1 мол. % в расплаве ($\lambda_{возб.} = 248$ *mμ*, фильтр УФС-2): × при нагревании; о при остывании.



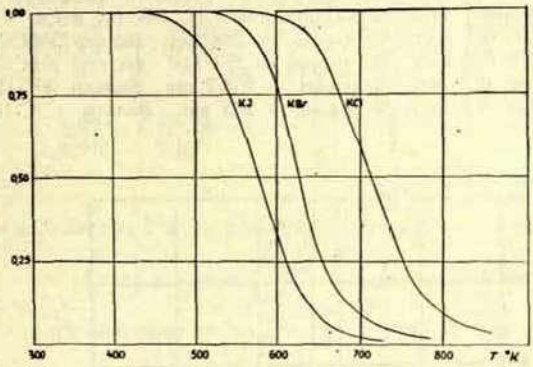

*Фиг. 1-б.* Зависимость функции $\ln\left(\frac{I_0}{I_T} - 1\right)$ от $\frac{1}{T}$ для того же фосфора.

*) Концентрация активатора в кристаллах, длина волны возбуждающего света и фильтр для выделения полосы излучения указаны на рисунках.

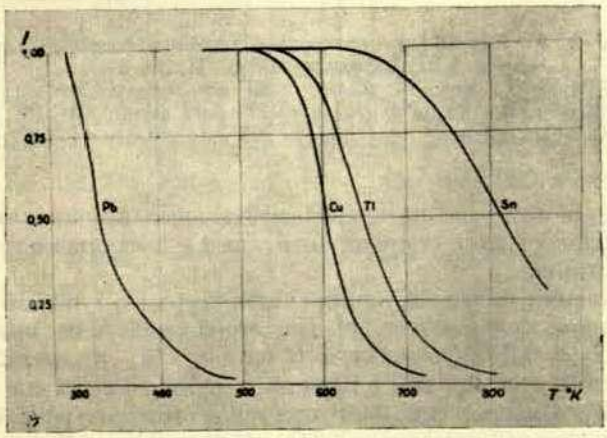
На приводимых графиках показана интенсивность люминесценции $I$ в зависимости от температуры, причем $I_0$ условно принималось равным единице.

На фиг. 1-а приведены экспериментальные точки кривой $I(T)$ для KCl-Tl 0,1 мол % при нагревании и остывании кристалла. Обе кривые хорошо совпадают.

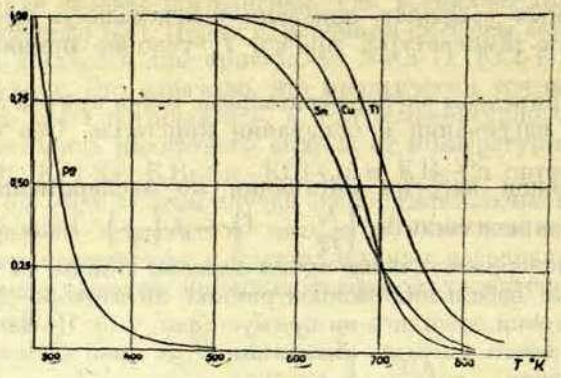
Для определения энергии активации по экспериментальной кривой была построена зависимость $\ln\left(\frac{I_0}{I_T} - 1\right) = f\left(\frac{1}{T}\right)$. Если формула Мотта верна, то все экспериментальные точки должны лежать на одной прямой. Для KCl-Tl при небольших концентрациях активатора (до 0,3 мол % в расплаве) все точки ложились на прямую (фиг. 1-б). По наклону этой прямой можно определить энергию активации $U$, а, зная $U$, можно определить постоянную тушения.



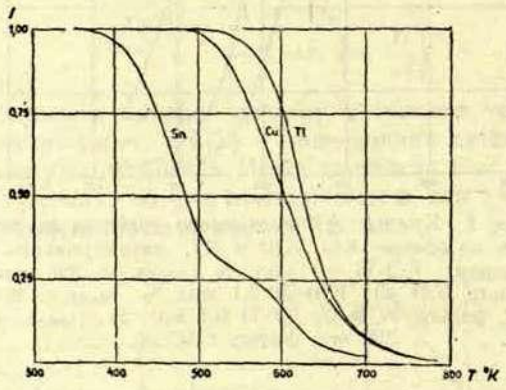

*Фиг. 2.* Кривые температурного тушения фосфоров на основе KCl, KBr и KJ, активированных таллием: KCl-Tl 0,1 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 248 *mμ*, фильтр УФС-2); KBr-Tl 0,1 мол. % $\lambda_{возб.}$ = 265 *mμ*, фильтр УСФ-3); KJ-Tl 0,1 мол. %. ($\lambda_{возб.}$ = 302 *mμ*, фильтр СЗС-18).




*Фиг. 3.* Кривые температурного тушения фосфоров на основе NaCl, активированных Tl, Pb, Sn и Cu:
NaCl-Tl 0,3 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 253,7 *mμ*, фильтр УФС-2);
NaCl-Pb 0,05 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 275 *mμ* фильтр УФС-3);
NaCl-Sn 0,2 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 296 *mμ*, фильтр СЗС-18);
NaCl-Cu 0,3 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 265 *mμ*, фильтр УФС-3).




*Фиг. 4.* Кривые температурного тушения фосфоров на основе KCl, активированных Tl, Pb, Sn и Cu:
KCl-Tl 0,1 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 248 $m\mu$, фильтр УФС-3);
KCl-Pb 0,5 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 275 $m\mu$, фильтр УФС-3);
KCl-Sn 0,2 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 253,7 $m\mu$, фильтр ЖС-12);
KCl-Cu 0,3 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 265 $m\mu$, фильтр СЗС-18).




*Фиг. 5.* Кривые температурного тушения фосфоров на основе KBr, активированных Tl, Sn и Cu:
KBr-Tl 0,1 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 265 $m\mu$, фильтр УФС-3);
KBr-Sn 0,1 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 265 $m\mu$, фильтр ЖС-12);
KBr-Cu 0,2 мол. % ($\lambda_{возб.}$ = 265 $m\mu$, фильтр СЗС-18).

На фиг. 2—5 изображены экспериментальные кривые температурного тушения. В таблице 1 даны энергия активации и постоянные тушения исследованных фосфоров.

Для определения начала и конца температурного тушения использован такой же критерий, как в работе [1]. Для этого через точки кривой $I(T)$ при $I_1 = 0{,}8\ I_0$ и $I_2 = 0{,}2\ I_0$ (точки $A$ и $B$ на фиг. 1а) проводилась прямая. Точка пересечения этой прямой с прямой $I_0$ принята за начало температурного тушения $T_1$, а пересечение этой прямой с температурной осью принято за конец температурного тушения $T_2$. За интервал температурного тушения принята величина $\Delta T = T_2 - T_1$, а за температуры полуспада принято $T_{1/2} = \frac{T_1 + T_2}{2}$. Температурные параметры исследованных фосфоров указаны в таблице 2.

Ошибка при определении энергии активации $U$ для KCl-Tl равна при-

Таблица 1.

**Энергия активации $U$ ($eV$) и постоянная тушения $C$**

| Активатор | | $Tl^+$ | | $Pb^{++}$ | | $Sn^{++}$ | | $Cu^+$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Основание | | $U$ | $C$ | $U$ | $C$ | $U$ | $C$ | $U$ | $C$ |
| NaCl | *а* | 1,09 | $0,3.10^9$ | — | — | 1,00 | $1,6.10^7$ | 1,37 | $2,3.10^{11}$ |
| | *б* | 0,93 | $0,2.10^8$ | 0,21 | $7.10^3$ | — | — | 1,38 | $2,9.10^{11}$ |
| KCl | *а* | 1,30 | $1,87.10^9$ | — | — | — | — | — | — |
| | *б* | 1,30 | $1,87.10^9$ | 0,28 | $6.10^4$ | 1,17 | $6.10^8$ | 1,6 | $7.10^{11}$ |
| KBr | *а* | 1,34 | $7.10^{10}$ | — | — | — | — | 1,00 | $3.10^8$ |
| | *б* | 0,93 | $5.10^7$ | — | — | — | — | 1,02 | $3.10^8$ |
| KJ | *а* | 0,92 | $1,1.10^8$ | — | — | — | — | — | — |
| | *б* | 0,91 | $1.10^8$ | — | — | — | — | — | — |

Примечание: Значения $U$ и $C$ в клеткха „*а*" получены из зависимости $\ln\left(\frac{I_0}{I_T}-1\right) = f\left(\frac{1}{T}\right)$ и кривой $I(T)$. Значения $U$ и $C$ в клетках „*б*" получены из зависимости $\mathrm{iuI}_T = \frac{U}{kT}$ и кривой $I(T)$

Таблица 2.

**Температурные параметры тушения кристаллофосфоров.**

| Активатор / Основание | $Tl^+$ | | | | $Pb^{++}$ | | | | $Sn^{++}$ | | | | $Cu^+$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $T_1$ | $T_2$ | $\Delta T$ | $T_{1/2}$ | $T_1$ | $T_2$ | $\Delta T_{1/2}$ | $T_{1/2}$ | $T_1$ | $T_2$ | $\Delta T$ | $T_{1/2}$ | $T_1$ | $T_2$ | $\Delta T$ | $T_{1/2}$ |
| NaCl | 585 | 725 | 140 | 655 | <293 | — | — | — | 700 | 940 | 240 | 820 | 568 | 650 | 82 | 609 |
| KCl | 635 | 793 | 158 | 714 | <293 | — | — | — | 554 | 760 | 206 | 657 | 620 | 732 | 112 | 676 |
| KBr | 592 | 684 | 92 | 638 | — | — | — | — | 416 | 610 | 194 | 498 | 530 | 686 | 156 | 608 |
| KJ | 500 | 647 | 147 | 574 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

мерно 4%. (средняя ошибка $U$ при повторных (6 раз) измерениях температурного тушения). Постоянная тушения $C$ определяется из опытных данных с гораздо большей ошибкой и с достоверностью можно только судить о порядке величины $C$.

Для остальных фосфоров значения $U$, вычисленные по кривой температурного тушения $\ln\left(\frac{I_0}{I_T}-1\right) = f\left(\frac{1}{T}\right)$ и по кривой $\ln I_T \sim \frac{U}{kT}$ (эта за-

висимость верна лишь для тех температур, при которой $C \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) \gg 1$), не различаются более чем на 10%. Исключением является фосфор KBr-Tl, для которого значения $U$, определенные обоими способами, сильно различаются. Для фосфоров NaCl-Pb и KCl-Pb, для которых начало температурного тушения лежит ниже комнатной температуры (293°$K$), $U$ определено только по формуле $\ln I_T \sim \frac{U}{kT}$

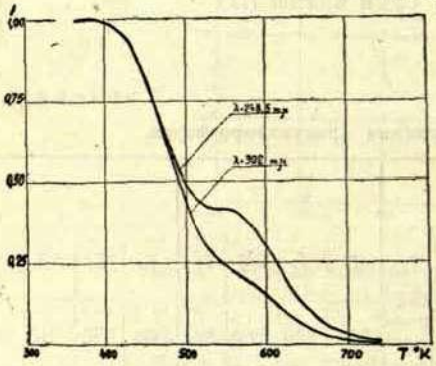
Из кривых температурного тушения (фиг. 2—5) и таблиц 1 и 2 можно сделать некоторые выводы.

Из фиг. 2 и таблицы 2 видно, что начало температурного тушения в фосфоре KCl-Tl начинается при более высоких температурах, чем в фосфоре KBr-Tl, а в KBr-Tl начало температурного тушения начинается при более высоких температурах, чем в KJ-Tl. Аналогичная зависимость наблюдается в фосфорах KCl-Cu и KBr-Cu (табл. 2).

В фосфоре NaCl-Tl температурное тушение начинается при более низких температурах, чем в KCl-Tl. Аналогичная зависимость наблюдается в фосфорах NaCl-Cu и KCl-Cu. Исключением является фосфор NaCl-Sn, в котором температурное тушение начинается при более высоких температурах, чем в KCl-Sn.

Из фиг. 2—5 и таблиц 1 и 2 видно, что все параметры температурного тушения ($U$, $C$, $T_1$, $T_2$, $\Delta T$, $T_{1/2}$) наиболее резко зависят от активатора.

Для фосфора KBr-Sn на кривой температурного тушения при температурах 550—600°K наблюдается максимум. Величина этого максимума зависит от длины волны возбуждающего света. При увеличении длины волны возбуждающего света величина максимума на кривой $I(T)$ уменьшается (фиг. 6).



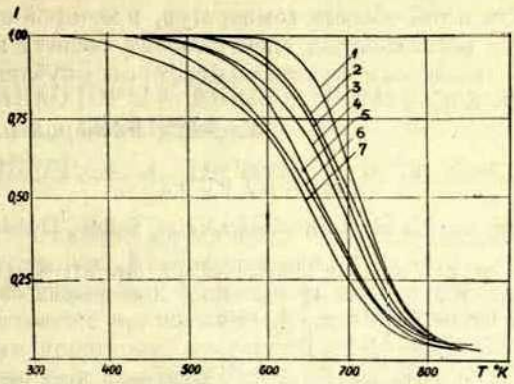

*Фиг. 6.* Кривые температурного тушения фосфора KBr-Sn 0,1 мол % в зависимости от длины возбуждающего света ($\lambda_{возб.} = 265$ $m\mu$ и 302 $m\mu$

На фосфоре KCl-Tl исследовалась зависимость температурного тушения от концентрации активатора таллия. Для этого выращивались кристаллы KCl-Tl с концентрацией таллия 0,01; 0,03; 0,10; 0,30; 1,00; 2,00, и 3,00 мол % в расплаве. Для исследования изготовлялись также кристаллы KCl (хч), активированные в ампуле (см. стр. 193.) 7, 12 и 55 часов.

Кривые температурного тушения KCl-Tl для разных концентраций активатора изображены на фиг. 7. Для малых концентраций таллия (0,01; 0,03; 0,10; 0,30) кривые температурного тушения для полосы излучения 300 мμ практически совпадают (на фиг. 7 изображена лишь одна кривая). Для этих концентраций все параметры температурного тушения ($U$, $C$, $T_1$, $T_2$, $\Delta T$, $T_{1/2}$) практически совпадают. Для больших концентраций таллия начало температурного тушения $T_1$ уменьшается, увеличивается интервал температурного тушения $\Delta T$ и изменяется характер кривой температурного тушения (фиг. 7, кривые 2—7). Для больших концентраций таллия на графиках $\ln\left(\frac{I_0}{I_T} - 1\right) = f\left(\frac{1}{T}\right)$ получается две прямые. Более детальный анализ дан в работе [26].

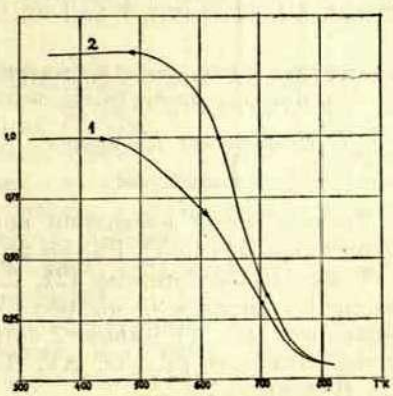
Для фосфора KCl-Tl 3,0 мол % в расплаве кривые температурного тушения $I(T)$ при нагревании и остывании отличаются (фиг. 8). Это можно объяс-

нить частичным распадом твердого раствора KCl-TlCl при медленном остывании. При закалке кристалла и повторном нагревании получалась опять кривая 1 (фиг. 8).




*Фиг. 7.* Кривые температурного тушения для KCl-Tl в зависимости от концентрации активатора ($\lambda_{возб.} = 248 = m\mu$, фильтр УФС-2):
1 — для концентрации Tl 0,01; 0,03; 0,10 и 0,30 мол. % в расплаве; 2 — для кристалла KCl (хч), активированного в ампуле 7 часов; 3 — для концентрации Tl 1,00 мол. % в расплаве; 4 — для концентрации Tl 2,00 мол. % в расплаве; 5 — для кристалла KCl (хч), активированного в ампуле 12 часов; 6 — для концентрации Tl 3,00 мол. % в расплаве; 7 — для кристалла KCl (хч), активированного в ампуле 55 часов.

Для KCl-Tl температурное тушение измерено в работе [7]. Значение $U$ полученное в работе [7] (0,60 e$V$) сильно отличается от полученной нами величины (1,30e$V$). В работе [24] приведены теоретические потенциальные




*Фиг. 8.* Кривые температурного тушения KC-lTl 3,00 мол. % (1) при нагревании и (2) при остывании ($\lambda_{возб.} = 248\ m\mu$, фильтр УФС-2).

кривые для KCl-Tl. Из этих кривых теоретическое значение энергии активации получается примерно 1,33 $eV$, что гораздо лучше совпадает с нашими данными. Это совпадение является, наверно, случайным, так как

теоретические поправки, введенные в [24] критикуются в [25]. Несовпадение со значением $U$, полученным в работе [7] можно объяснить, вероятно, тем, что в [7] авторы используют приближенную формулу $\ln I_T \sim \frac{U}{kT}$ и применяют эту формулу в той области температур, в которой она неверна.

Более детальные исследования спектральных свойств и температурного тушения щелочно галоидных кристаллофосфоров опубликованы в работе [26].

30 VI 1957 *Кафедра Экспериментальной физики*

ЛИТЕРАТУРА

[1]. *F. Krögers.* Some Aspects of the luminescence of Solids. Elsevier Phubl. Co. N. Y 1948.
[2]. *Ф. И. Вергунас, Ф. Ф. Гаврилов.* ДАН 1947, 57, стр. 31; ЖЭТФ 1950, 20 стр. 225
[3]. *К. В. Шалимова.* ЖЭТФ 1948, 18 стр. 1045; Диссертация, ФИАН, 1953.
[4]. *В. А. Ястребов.* Труды ФИАН, т. III, 1946.
[5]. *Я. Я. Кирс,* Диссертация, Тарту, 1957.
[6]. *H. N. Bose.* Ind. J. Phys. 1946, 20, стр. 21.
[7]. *P. D. Johnson, F. E. Williams.* Journ. of Chem. Phys. 1952, 20, стр. 124.
[8]. *Я. М. Зеликин, Н. И. Иванова, Ф. Д. Клемент.* ДАН 1950, 75, стр: 181:
[9]. *Ф. Д. Клемент.* Изв. АН СССР, сер. физ. 1951, 15, стр. 651; Труды ИФА АН ЭССР, 1955, 1, стр. 3.
[10]. *S. Kyropoulos.* Z. f. anorg. u. allgem. Chem. 1926, 154, стр. 308.
[11]. *W. Meyeren.* Zs. f. Phys. 1930, 61, стр. 321.
[12]. *M. Kato.* Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo 1943, 41, стр. 113.
[13]. *A. Smakula.* Zs. f. Phys. 1927, 45, стр. 1.
[14]. *R. Hilsch.* Zs. f. Phys. 1927, 44, стр. 860.
[15]. *M. Hüniger, I. Rudolph.* Zs. f. Phys. 1940, 117, стр. 81.
[16]. *M. Forro.* Zs. f. Phys. 1929, 58, стр. 613.
[17]. *M. Forro.* Zs. f. Phys. 1929, 56, стр. 235.
[18]. *К. В. Шалимова.* ЖЭТФ 1949, 19, стр. 763; ДАН 1949, 66, стр. 851.
[19]. *J. H. Schulman, R. J. Ginther, C. C. Klick.* JOSA 1950, 40, стр. 854.
[20]. *П. Прингсгейм.* Флуоресенция и фосфоресенция, ИЛ 1951.
[21]. *N. F. Mott.* Proc. Roy. Soc. 1938, 167, стр. 384.
[22]. *R. W. Gurny, N. F. Mott.* Trans. Faradey Soc. 1939, 35, стр. 69.
[23]. *М. Н. Адамов.* Вестник Ленинградского университета 1952, 2, стр. 44.
[24]. *F. E. Williams.* Journ Phys. Chem. 1953, 57, стр. 780.
[25]. *D. A. Patterson, C. C. Klick.* Phys. Rev. 1957, 105, стр. 401.
[26]. *К. К. Шварц.* Труды ИФА АН ЭССР 1957, 7, стр. 153.

## TEMPERATURAS DZĒŠANA DAŽOS SĀRMU HOLOGENIDU KRISTALFOSFOROS

*I. Kalniņa un K. Švarcs*

(Kopsavilkums)

Pētīta temperaturas dzēšana sārmu halogenidu monokristalos ar pamatvielām NaCl, KCl, KBr un aktivatoriem Tl, Pb, Sn un Cu. Tāpat pētīta temperaturas dzēšana KJ-Tl. Pēc Motta formulas [21, 22, 23] aprēķināta bezizstarojumu pārejas aktivacijas enerģija $U$ un pēc eksperimentalām līknēm aprēķināta dzēšanas konstante C (tab. 1). Tabulā 2 doti temperaturas dzēšanu raksturojošie temperaturas parametri ($T_1$, $T_2$, $\Delta T$, $T_{2/2}$) [1]. Temperaturas dzēšanas līknes attēlotas zīmējumos 2—5.

Fosforā KBr-Sn konstatēts, ka temperaturas dzēšanas raksturs atkarīgs no ierosinošā viļņu garuma (zīm. 6).

Fosforā KCl-Tl pētīts koncentracijas iespaids uz luminescences temperaraturas dzēšanu ultravioletai (maksimums pie 300 mμ) emisijas joslai (zīm. 7 un 8).

Darbā sniegts eksperimentalais materials, kuru teoretiski analizēs turpmāk.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ СИСТЕМЫ $CaO—BaO—TiO_2$

*В. Я. ФРИЦБЕРГ, А. А. АПСИТИС* и *Э. Ж. ФРЕЙДЕНФЕЛЬД*

Среди диэлектрических материалов сегнетокерамика является одним из самых перспективных. Ее замечательные свойства открывают большие возможности применения этого вида керамики в электронике и электротехнике [1]. В настоящее время ведется много работ по изучению физических и химических процессов, протекающих в сегнетокерамических материалах [2]. Широко известен метатитанат бария ($BaTiO_3$), который впервые получен и исследован Б. М. Вулом и И. М. Гольдманом [3].

Характерно, что с изоморфными веществами $BaTiO_3$ дает твердые растворы или смесь кристаллических фаз. Свойства этих материалов меняются в широком диапазоне в зависимости от их состава; это значит, что имеется известная возможность управлять этими свойствами. Несмотря на то, что в последние годы в Советском Союзе и заграницей ведутся интенсивные исследовательские работы в этой области, пока еще нет возможности теоретически предсказать свойства того или иного состава. Поэтому свойства каждой системы приходится изучать экспериментальным путем, меняя соотношения компонентов и технологические факторы.

Работа в этой области обогащает наши теоретические представления о строении твердого тела и особенно о механизме диэлектрической поляризации твердого тела. Кроме того эти эксперименты можно использовать в целях практических применений сегнетокерамических материалов.

К настоящему времени довольно детально изучены системы $BaTiO_3$ — — $BaSnO_3$ [4], $BaTiO_3$ — $BaZrO_3$ [5], $BaTiO_3$ — $PbTiO_3$ [2], $BaTiO_3$ — — $SrTiO_3$ [6].

Выяснено, как меняется в этих системах величина диэлектрической проницаемости в зависимости от состава и температуры, исследован также характер диэлектрических потерь.

В отношении системы $BaTiO_3$ — $CaTiO_3$ в литературе имеется мало данных. Более или менее систематические исследования этой системы проведены Бунтингом, Шелтоном и Кримером [7]. Однако ими исследована температурная зависимость диэлектрических свойств лишь в сравнительно узком интервале (от —60° до + 85°C) и не дан анализ процессов, протекающих в полученных материалах.

Более подробное изучение системы $BaTiO_3$ — $CaTiO_3$ является, тем не менее, весьма желательным, поскольку свойства полученных материалов интересны как с теоретической, так и с практической точки зрения. Например, на базе этой системы можно получить материалы с высокой диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon = 260$), в то же время слабо зависящей от температуры в интервале от —50°C до +60°C [7].

Возможны два способа получения образцов этого соединения: 1) отдельно синтезируются $BaTiO_3$ и $CaTiO_3$, которые смешиваются в определенных отношениях и подвергаются вторичному синтезу, и 2) образцы синтезируются из отдельных окислов [8].

В настоящей работе использован метод прямого синтеза из отдельных окислов.

В предыдущей работе [9] нами были детально исследованы диэлектрические материалы с содержанием 50—55 мол. % $TiO_2$. В настоящей работе исследованы составы, отличающиеся от эквимолярных увеличенным содержанием окислов щелочноземельных металлов или двуокиси титана. Образцы получены по обычной керамической технологии.

Состав исследованных образцов и свойства их непосредственно после изготовления показаны в таблице 1, в которой все значения представляют среднее по пяти образцам.

Таблица 1

| Обозначение | Состав в мол. % | | | ε | | | $tg\,\delta \times 10^4$ | | | Температура обжига в °C | Водопоглощение в % | Уд. вес в г/см³ | Линейная усадка в % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $TiO_2$ | BaO | CaO | 500 кгц | 1,5 Мгц | 5,0 Мгц | 500 кгц | 1,5 Мгц | 5,0 Мгц | | | | |
| *A* | 45 | 40 | 15 | 314 | 320 | 324 | 68 | 78 | 80 | 1430 | 5,9 | 3,82 | 8,4 |
| *B* | 45 | 30 | 25 | 520 | 515 | 535 | 87 | 85 | 90 | 1430 | 4,4 | 3,93 | 10,0 |
| *C* | 45 | 20 | 35 | 85 | 84 | 84 | 33 | 30 | 15 | 1430 | 8,2 | 3,34 | 3,5 |
| *D* | 45 | 10 | 45 | 58 | 58 | 58 | 130 | 40 | 16 | 1420 | 8,3 | 3,08 | 5,2 |
| *E* | 60 | 30 | 10 | 235 | 230 | 230 | 240 | 236 | 236 | 1275 | 5,4 | 3,80 | 5,3 |
| *F* | 60 | 20 | 20 | 125 | 125 | 125 | 80 | 70 | 75 | 1290 | 1,4 | 4,09 | 1,6 |
| *G* | 60 | 10 | 30 | 87 | 83 | 83 | 400 | 90 | 32 | 1330 | 5,0 | 3,51 | 7,1 |

Как видно из таблицы, полученные образцы являются не совсем плотными, что указывает на то, что температура обжига не была оптимальной. Изменение диэлектрических потерь в зависимости от состава не дает строгой закономерности, которая имела место при эквимолярных составах [9], где

Таблица 2

| $CaTiO_3$ | | $BaTiO_3$ | | *A* | | *B* | | *C* | | *D* | | *E* | | *F* | | *G* | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* | *I* | *d* |
| — | — | 6 | 3.97 | — | — | — | — | — | — | — | — | 4 | 3.98 | — | — | — | — |
| 4 | 3.80 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 6 | 3.18 |
| — | — | — | — | 4 | 3.12 | 6 | 3.12 | — | — | — | — | 6 | 3.11 | 6 | 3.12 | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 10 | 3.01 | 8 | 3.01 | — | — | — | — | 6 | 3.01 |
| — | — | 10 | 2.80 | 10 | 2.80 | 10 | 2.81 | — | — | — | — | 10 | 2.81 | 8 | 2.82 | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 10 | 2.73 | — | — | 8 | 2.74 | 10 | 2.74 |
| 10 | 2.68 | — | — | — | — | — | — | 10 | 2.70 | 2 | 2.71 | 2 | 2.71 | — | — | — | — |
| 4 | 2.30 | 8 | 2.29 | 8 | 2.29 | 6 | 2.28 | — | — | — | — | 8 | 2.30 | 6 | 2.31 | — | — |
| 4 | 2.19 | — | — | 2 | 2.22 | 4 | 2.19 | — | — | — | — | — | — | — | — | 4 | 2.20 |
| 4 | 2.11 | — | — | 2 | 2.11 | — | | 8 | 2.11 | 6 | 2.14 | — | — | — | — | 4 | 2.14 |
| — | — | 8 | 1.98 | 8 | 1.98 | 8 | 1.98 | — | — | — | — | 8 | 1.98 | — | — | — | — |
| 10 | 1.90 | | — | | — | | — | 10 | 1.92 | 10 | 1.93 | 2 | 1.91 | 6 | 1.92 | 8 | 1.92 |
| | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — | 2 | 1.86 |
| | — | 4 | 1.78 | 6 | 1.78 | 4 | 1.78 | | — | | — | 4 | 1.78 | | — | | — |
| 4 | 1.70 | | — | | — | | — | 2 | 1.73 | 6 | 1.74 | | — | | — | 4 | 1.74 |
| | — | 10 | 1.63 | 8 | 1.63 | 8 | 1.62 | | — | | — | 10 | 1.63 | 8 | 1.63 | 2 | 1.86 |
| 8 | 1.54 | | — | 2 | 1.54 | | — | 8 | 1.57 | 8 | 1.58 | 4 | 1.56 | 8 | 1.58 | 8 | 1.57 |
| | — | 6 | 1.40 | 6 | 1.40 | 6 | 1.40 | | — | | | 4 | 1.41 | 4 | 1.42 | 2 | 1.43 |
| 6 | 1.34 | | — | | — | | — | 6 | 1.36 | 4 | 1.37 | | — | 4 | 1.36 | 4 | 1.36 |
| | — | | — | 6 | 1.26 | 4 | 1.26 | | — | | — | 4 | 1.25 | 2 | 1.26 | | — |
| 6 | 1.20 | | — | | — | 2 | 1.19 | 6 | 1.22 | 4 | 1.22 | | — | 2 | 1.23 | | — |
| | — | | — | | — | 2 | 1.14 | | — | | — | | — | | — | | — |
| 6 | 1.02 | | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — |
| | — | 4 | 0.95 | 4 | 0.94 | 4 | 0.94 | | — | | — | | — | | — | | — |
| 4 | 0.93 | | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — | | — |
| | — | 4 | 0.90 | 4 | 0.89 | 4 | 0.89 | | — | 4 | 0.90 | | — | | — | 4 | 0.90 |
| 4 | 0.85 | 4 | 0.86 | 4 | 0.85 | 4 | 0.85 | | — | 4 | 0.86 | | — | | — | | — |
| 4 | 0.81 | 4 | 0.82 | 4 | 0.81 | 4 | 0.81 | | — | | — | | — | | — | | — |

с увеличением содержания CaO потери уменьшались. Рентгенографические исследования проводились путем съемки дебаеграмм по асимметрическому методу [10]. Использовалась рентгеновская трубка БСВ с медным антикатодом. Время экспозиции от 6 до 8 часов. Расчитанные межплоскостные расстояния ($d$) и соответствующая интенсивеность ($J$) даны в таблице 2.

Для сравнения даны межплоскостные расстояния чистого $BaTiO_3$ и $CaTiO_3$.

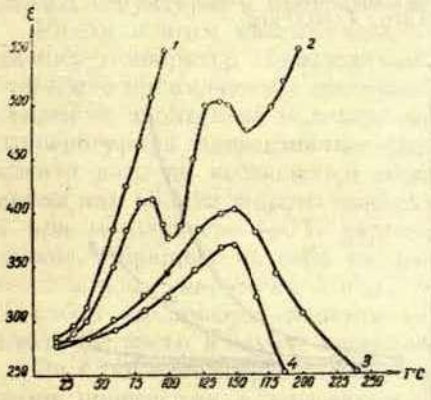
Фазовый анализ дает следующие результаты:

*A* и *B* — твердый раствор (Ba, Ca) $TiO_3$, следы $BaO_2$ и $CaO_2$
*C* — твердый раствор (Ca, Ba) $TiO_3$, следы $Ba(OH)_2 \cdot n\,H_2O$ и $BaO_2$
*D* — твердый раствор (Ca, Ba) $TiO_3$, следы $Ba(OH)_2 \cdot n\,H_2O$ и $CaO_2$
*E* — твердый раствор (Ba, Ca) $TiO_3$, следы $BaO_2$ и $CaO_2$
*F* — деформированная решетка $CaTiO_3$ и $BaTiO_3$
*G* — сильно деформированная решетка $CaTiO_3$, следы $CaO_2$ и $BaO_2$.

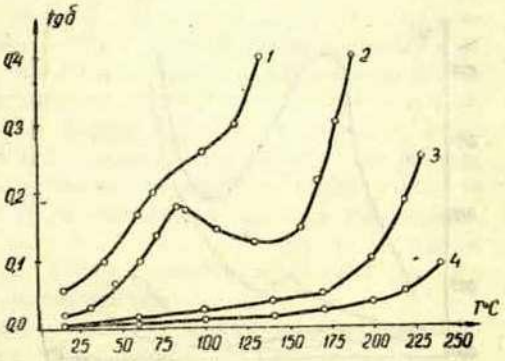
Отсюда видно, что состав полученных материалов является довольно сложным. Наряду с твердыми растворами $BaTiO_3$ и $CaTiO_3$ появляются перекиси и гидроокиси щелочноземельных металлов. Характерно, что в рентгенограммах образцов *E*, *F* и *G* не появляются линии рутила, хотя он имеется в избытке. Очевидно, что „лишний" $TiO_2$ в данном случае образует аморфную фазу.

Можно ожидать, что в материалах с такой сложной структурой и механизм поляризации будет сложным. В самом деле, об этом говорит вид кривых, показывающих зависимость диэлектрической проницаемости ε и диэлектрических потерь tg δ от температуры. В соединениях *A*, *B*, *E* и *G* эта зависимость весьма специфична, соответствующие кривые показаны на фиг. 1—9.

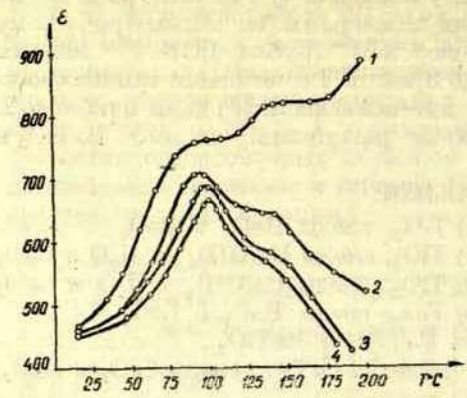
Нагревание образцов производилось в печи, позволяющей проводить измерения при нагревании до 300°C. Температура измерялась термопарой (железо-константан). Электрические параметры измерялись при 50 *гц* на мосту Шеринга (МДП), при 1000 *гц* на универсальном мосту (УМ-2), при 60 *кгц* и 600 *кгц* на куметре (КВ-1). Средняя эффективная напряженность поля была порядка 200 *в/см* при низких частотах и порядка 3 *в/см* при высоких частотах. Необходимо отметить, что у исследованных образцов ε очень мало или совсем не зависит от напряженности приложенного поля



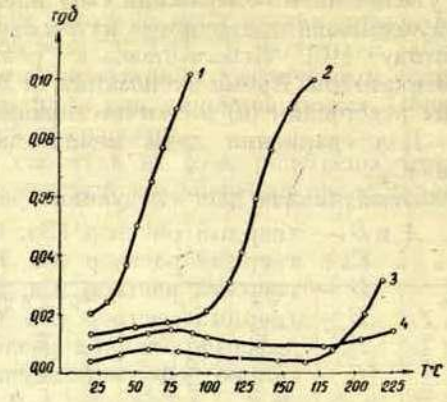

*Фиг. 1.* Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры при различных частотах для состава *A*—0,40 BaO. 0,15 CaO · 0,45 $TiO_2$
1 — 50 гц, 2 — 100 гц, 3 — 530 кгц, 4 — 600 кгц



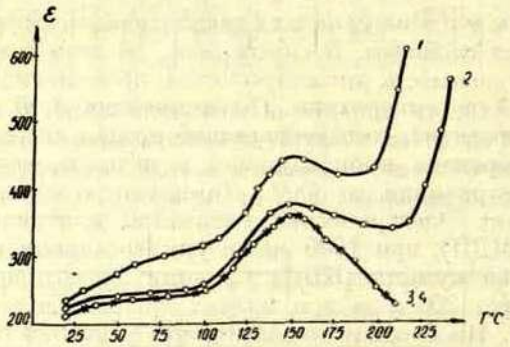

*Фиг. 2.* Зависимость tgδ от температуры при различных частотах для состава *A*—0,40 BaO · 0,15 CaO · 0,45 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц



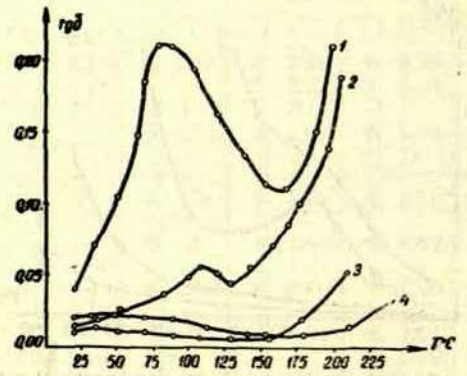

*Фиг. 3.* Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры при различных частотах для состава
$B$ — 0,30 BaO · 0,25 CaO · 0,45 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц



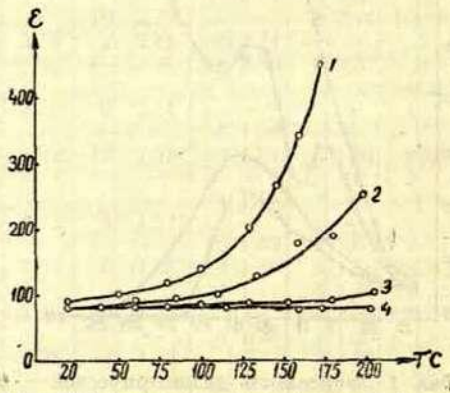

*Фиг. 4.* Зависимость tg δ от температуры при различных частотах для состава
$B$ — 0,30 BaO · 0,25 CaO · 0.45 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц



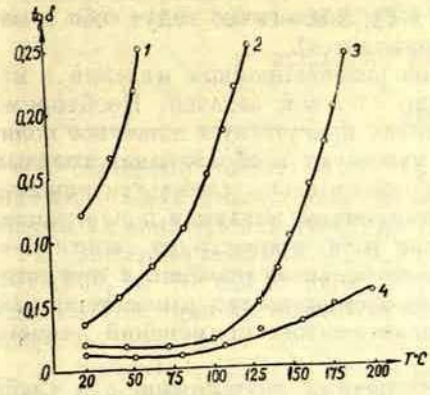

*Фиг. 5.* Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры при различных частотах для состава
$E$ — 0,30 BaO · 0,10. CaO · 0,60 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц



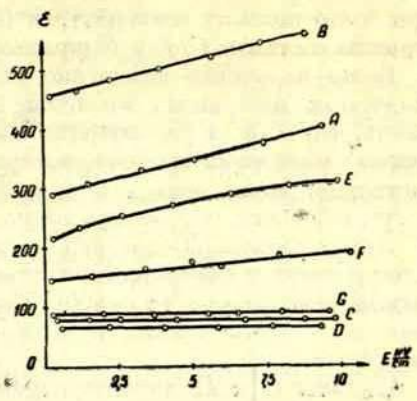

*Фиг. 6.* Зависимость tg δ от температуры при различных частотах для состава
$E$—0,30 Ba O · 0,10 · CaO · 0,60 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц




*Фиг. 7.* Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры при различных частотах для состава
$G$ — 0,10 BaO · 0,30 CaO · 0,60 $TiO_2$
1—50 гц, 2—1000 гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц




*Фиг. 8.* Зависимость tg δ от температуры при различных частотах для состава $G$ — 0,10 BaO · 0,30 CaO · 0,60 $TiO_2$ 1—50 гц, 2—1000гц, 3—60 кгц, 4—600 кгц




*Фиг. 9.* Зависимость диэлектрической проницаемости от напряженности поля при температуре 20°C (частота 50 гц)

(фиг. 9). Все кривые получены на основании измерений серии образцов. Измерения проводились спустя 3 месяца после изготовления образцов. По сравнению со свежеизготовленными образцами (табл. 1) заметно некоторое уменьшение tg δ при комнатной температуре.

Анализ кривых, приводимых на рис. 1—8 показывает наличие сложного механизма поляризации. В составах $A$, $B$ и $E$, очевидно, одновременно имеют место спонтанная и релаксационная поляризация. Спонтанная поляризация характеризуется температурным максимумом ε в районе 130—150°C (фиг. 1, 3, 5) и возрастанием ε с увеличением напряженности поля (рис. 9).

Появление спонтанной поляризации вполне закономерно, т. к. исходные компоненты этих материалов содержат достаточное количество BaO для того, чтобы мог образоваться метатитанат бария ($BaTiO_3$), вернее — его твердые растворы. Это подтверждается рентгеноструктурным анализом (табл. 2). Напомним, что температурный максимум ε при указанной температуре зафиксирован нами также в эквимолярных составах [9]. Он обусловлен структурным превращением в точке Кюри.

Рядом с этим максимумом, отчасти перекрываясь с ним, со стороны низких температур обнаруживается второй максимум, который особенно отчетливо проявляется в составах $A$ (фиг. 1) и $B$ (фиг. 3). Этот максимум не связан со спонтанной поляризацией, что подтверждается наблюдением над температурной зависимостью формы кривой гистерезиса. Действительно, вблизи него не наблюдается изменения формы кривой гистерезиса, в то время как вблизи второго максимума происходит резкое изменение формы, и при температуре 150°C характерная петля гистерезиса вырождается в эллипс. Обращает на себя внимание и то обстоятельство, что увеличение этого нового максимума (состав $B$ — фиг. 3 и состав $A$ — фиг. 1) не влечет за собой увеличения зависимости ε от напряженности поля (фиг. 9), что имело бы место в случае спонтанной поляризации.

Этот „низкотемпературный" максимум, очевидно, связан с релаксационными процессами в рассматриваемых материалах. На это, в частности, указывает заметная зависимость ε от частоты и также сдвиг максимумов ε и tgδ в сторону высоких температур при увеличении частоты. Выявлению более отчетливых температурных максимумов при измерении tg δ в ряде случаев (как это видно из кривых) сильно мешают большие потери проводимости.

Материалы состава $G$ характеризуются релаксационными процессами

при более высоких температурах (фиг. 7 и 8). Аналогично ведут себя и материалы составов *C*, *E* и *F* (кривые не приводятся).

Более подробное выяснение механизма релаксационных явлений в исследуемых материалах является довольно сложной задачей. Необходимо учесть, что во всех рассматриваемых составах присутствует известное количество избыточных окислов, которые не участвуют в образовании твердых растворов. Ионы этих окислов, будучи относительно слабо связанными, могут, очевидно, обусловить ионно-релаксационный механизм поляризации. В случае состава *B* этот вид поляризации явно превосходит спонтанную поляризацию и обуславливает относительно большое значение $\varepsilon$ при комнатной температуре ($\varepsilon = 460$). Последнее обстоятельство имеет некоторое значение с точки зрения возможности практических применений данного материала.

Составы *C* и *D* характеризуются небольшими значениями $\varepsilon$ и слабо выраженной зависимостью $\varepsilon$ от температуры. В них, очевидно, проявляется механизм поляризации, характерный для перовскита ($CaTiO_3$).

## ВЫВОДЫ

1. Синтезированные составы *A*, *B*, *C* и *D*, отличающиеся от эквимолярного состава $BaTiO_3$ — $CaTiO_3$ избытком окислов щелочноземельных металлов в количестве 5 мол. %, существуют в виде твердых растворов (Ba, Ca) $TiO_3$ и (Ca, Ba) $TiO_3$.

2. Синтезированные составы *E*, *F* и *G*, отличающиеся от эквимолярного состава $BaTiO_3$ — $CaTiO_3$ избытком $TiO_2$ в количестве 10 мол. %, существуют как в виде твердого раствора (Ba, Ca) $TiO_3$, так и в виде отдельных фаз $BaTiO_3$ и $CaTiO_3$ с деформированной решеткой.

3. Составы *A*, *B*, *C* и *D*, содержащие 45 мол. % $TiO_2$, имеют высокую температуру обжига (более 1430°C). Составы *E*, *F* и *G* содержащие 60 мол. % $TiO_2$ имеют температуру обжига около 1300°C.

4. Составы *A*, *B*, *E*, которые содержат 30 и более мол. % BaO, имеют сегнетоэлектрические свойства. Наряду с этим наблюдаются более или менее выраженные релаксационные явления.

5. У всех исследованных материалов диэлектрическая постоянная $\varepsilon$ уменьшается с увеличением содержания CaO, за исключением состава *B*, у которого наблюдается наибольшее значение $\varepsilon$.

30 VI 1957

*Кафедра экспериментальной физики,*
*Кафедра технологии силикатов*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Д. М. Казарновский.* Электричество, 2, 40, 1954.
[2]. *Д. М. Казарновский.* Сегнетокерамические конденсаторы. М.-Л. 1956.
[3]. *Б. М. Вул* и *И. М. Гольдман.* ДАН СССР, 46, 4, 154, 1945.
[4]. *Г. А. Смоленский* и *В. А. Исупов.* ЖТФ 24, 8, 63, 1950.
[5]. *Г. А. Смоленский, Н. П. Тарутин* и *Н. П. Грудцин.* ЖТФ, 24, 9, 1584, 1954.
[6]. *Г. А. Смоленский* и *К. И. Розгачев.* ЖТФ, 24, 10, 1751, 1954.
[7]. *E. Bunting, G. Shelton, A. Creamer.* Journal Res. Nat. Bur. Stand. 43, 3, 237, 1949.
[8]. *E. Wainer, A. Salomon.* Chemical Abstracts 42, 6506, 1948.
[9]. *A. Apsitis, E. Freidenfelds, V. Fricbergs.* LPSR ZA Vēstis Nr. 7, 120, 1957.
[10]. *А. Ф. Иевиньш* и *Я. К. Озол.* Прецизионное определение параметров элементарной ячейки кристаллов асимметрическим методом. Рига 1956.

# DAŽU SISTEMAI $BaO - CaO - TiO_2$ PIEDEROŠU DIELEKTRISKU MATERIALU ĪPAŠĪBAS

*V. Fricbergs, A. Apsītis* un *E. Freidenfelds*

## SECINĀJUMI

1. Sintezētie sastāvi *A*, *B*, *C*, *D*, kas atšķiras no ekvimolarā sastāva $BaTiO_3 - CaTiO_3$ ar 5 mol. % lielu sārmzemju metala oksidu pārākumu eksistē kā cieti šķīdumi (Ba, Ca) $TiO_3$ un (Ca, Ba) $TiO_3$.

2. Sintezētie sastāvi *E*, *F*, *G*, kas atšķiras no ekvimolarā sastāva $BaTiO_3$ — — $CaTiO_3$ ar 10 mol.% lielu $TiO_2$ pārākumu, eksistē gan kā ciets šķīdums (Ba, Ca)$TiO_3$, gan kā atsevišķas fazes $BaTiO_3$ un $CaTiO_3$ ar stipri deformētu režģi.

3. Sastāvi *A*, *B*, *C*, *D*, kas satur 45 mol.% $TiO_2$, prasa augstu apdedzināšanas temperaturu — virs 1430°C. Sastāviem *E*, *F*, *G*, kas satur 60 mol.% $TiO_2$, apdedzināšanas temperatura svārstās ap 1300°C.

4. Sastāvi *A*, *B*, *E*, kas satur BaO 30 mol.% un vairāk, uzrāda segnetoelektriskas īpašības. Bez tam novērojamas vairāk vai mazāk izteiktas relaksacijas parādības.

5. Visiem sintezētiem materialiem dielektriskā konstante samazinās līdz ar CaO satura palielināšanos, izņemot sastāvu *B*, kam novērojama vislielākā $\varepsilon$ vērtība

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ЗАВИСИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ ПРИ ТРЕНИИ ТВЕРДОГО СПЛАВА И СТАЛИ ПО СТАЛИ

*В. И. ФЛЕРОВ*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о зависимости коэффициента трения от скорости занимает особое место в проблеме внешнего трения. Изучение зависимости коэффициента трения от параметров трения, особенно от скорости, имеет большое значение для понимания механизма внешнего трения, для построения правильной теории трения.

С другой стороны, вопрос о зависимости коэффициента трения от скорости приобрел в настоящее время исключительно важное значение в связи с быстрым развитием машиностроения и транспорта (создание фрикционных материалов, обеспечивающих эффективное торможение, изыскание методов повышения коэффициента сцепления ведущих колес и т. д.).

Силы трения играют существенную роль при резании металлов. Знание закономерностей изменения коэффициента трения в зависимости от параметров резания (в частности, от скорости) позволило бы более рационально выбирать режимы резания в тех или иных случаях, не говоря уже о том, что без этого невозможно построение теории резания металлов.

Работ, посвященных систематическому изучению зависимости коэффициента трения от скорости, выполнено сравнительно немного. Это работы Ренни, Морена, Кимболла, Конти [1], относящиеся к XIX веку, и более поздние работы И. В. Крагельского [2, 3], Б. И. Костецкого [4 и др.] и др.

Попытки теоретического обоснования экспериментального материала были предприняты И. В. Крагельским [2, 5] и М. П. Левицким [6], однако авторы, как нам кажется, исходили из неправильных представлений о механизме внешнего трения, и поэтому полученные ими решения не объясняют экспериментальные данные.

Б. И. Костецкий, получив при трении твердого сплава по стали 20 зависимость коэффициента трения от скорости с двумя максимумами, объясняет это изменением характера взаимодействия поверхностей при изменении скорости. Но, к сожалению, автор ограничился описанием происходящих при трении процессов, не вскрыв при этом физических причин, которыми они обусловлены.

В последнее время В. К. Кузнецов [7, 8] высказал предположение о влиянии наростов на процесс внешнего трения. Он считает, что даже при трении разноименных металлических пар может иметь место трение одноименных металлов, так как происходит намазывание одного металла на другой, образуются наросты*, которые, по мнению В. Д. Кузнецова, играют при трении главную роль, и зависимость коэффициента трения от скорости обусловлена именно явлением наростообразования.

Действительно, процесс трения можно рассматривать как последовательное возникновение и разрушение мостиков схватывания, которые при определенных условиях могут развиваться до значительных размеров (макро-или микроскопические наросты), и это будет сильно сказываться на

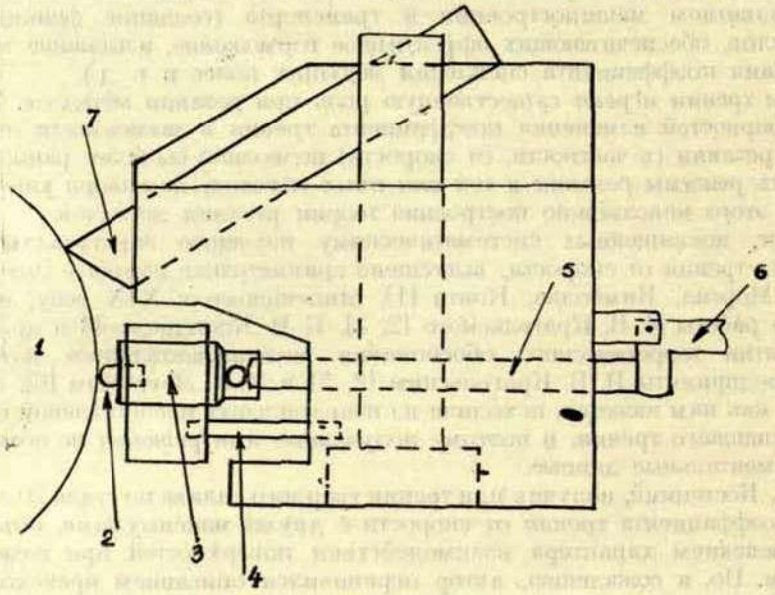
* Под наростами В. Д. Кузнецов понимает макро- и микроскопические образования на поверхности данного вещества из другого, соприкасающегося с ним.

процессе трения в целом и на зависимости коэффициента трения от скорости в частности. Однако нельзя считать, что отсутствию наростов будет соответствовать неизменность коэффициента трения при изменении скорости, так как увеличение последней в любом случае приводит к повышению температуры поверхностей трения, что должно сопровождаться (особенно при больших скоростях) падением коэффициента трения вследствие уменьшения прочности возникающих узлов схватывания.

Настоящая работа посвящена исследованию зависимости коэффициента трения от скорости и выяснению влияния процессов схватывания и наростообразования на эту зависимость.

## 2. МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследование проводилось для чистых поверхностей, причем трение все время происходило по новому месту. Последнее совершенно необходимо для того, чтобы исключить влияние изменения шероховатости поверхности в процессе трения, т. е. чтобы предыдущие проходы не влияли на последующие, а это особенно важно при изучении наростов.




*Фиг. 1.*

С этой целью на базе токарно-винторезного станка 1А62 была сконструирована установка, где осуществлялось трение полусферического (диаметр 5 мм) ползуна 2 (фиг. 1) * по боковой поверхности цилиндрической болванки I, длина которой была не менее 450 мм, а диаметр 150—180 мм. Впереди ползуна на расстоянии 30—40 мм был расположен резец 7, снимавший перед ползуном тонкую широкую стружку**. Трение производилось с продольной подачей 2—3 мм/об., так что ползун все время проходил по новому месту. Сила трения измерялась пружинным динамометром 4 и во время опыта записывалась на закопченном стекле с точностью не менее 5%. Отклонение пружины 4 во время опыта не превышало 0.5—0.7 мм, на

* В дальнейшем будем условно называть ползуном неподвижный компонент трущейся пары.

** Осуществлялось силовое резание резцом В. А. Колесова [9].

стекле эти отклонения фиксировались увеличенными в 10—15 раз. Промер диаграмм производился при 10-кратном увеличении через эпидиаскоп, так что общее увеличение измеряемых отклонений пружины 4 составляло 100—150.

Нагрузка на ползун задавалась рычагом 6 через направляющий стержень 5. Во избежание резких ударов рычаг 6 демпфировался маслянным демпфером (на фиг. 1 не показан). Все устройство, схематически показанное на фиг. 1, было изготовлено из целого куска металла (общий вес 15—20 кГ) и зажималось в супорте станка вместо резцедержателя.

Были выбраны следующие режимы трения; скорости от 0.50 до 630 м/мин, нагрузки — 1.2; 3.0; 10.0; 20.0 кГ.

Исследовались следующие трущиеся пары. Цилиндрическая болванка во всех опытах изготовлялась из осевой стали (состав по ГОСТу 3281—46: углерода 0.35—0.45%, марганца 0.5—0.9%, кремния 0.15—0.35%, фосфора и серы менее 0.05%)*. Ползуны изготовлялись из твердого сплава Т15К6 и той же самой осевой стали, но закаленной с 870°С в воду до микротвердости 570 кГ/мм².

Для пары твердый сплав-сталь методом естественной термопары измерялась температура поверхности трения. Для пары сталь-сталь температура не измерялась, однако на основании формулы Егера [10] было показано, что различие температуры поверхности при трении твердого сплава по стали и стали по стали до скоростей 70—80 м/мин незначительное, и мы принимали их приблизительно равными.

Глубина и степень пластической деформации поверхностей трения, а также строение и твердость нароста изучались методом металлографического анализа. Изучение структуры производилось на горизонтальном металлографическом микроскопе, дающим минимальное увеличение 25 и максимальное 1670. Степень и глубина пластической деформации оценивались путем измерения микротвердости на приборе ПМТ-3 при нагрузках 20 и 100 Г.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Если пользуясь вышеописанной методикой снимать зависимость коэффициента трения от скорости, то следует ожидать, что на нее будет накладываться и зависимость коэффициента трения от состояния поверхности. Действительно, при изменении скорости, во-первых, будет различным время пребывания вновь образованной поверхности на воздухе (мы будем в дальнейшем называть это время временем запаздывания). При расстоянии между резцом и ползуном 40 мм оно составляло 0.004 сек при максимальной скорости и 5 сек при минимальной. Во-вторых, при различных скоростях микрогеометрия поверхности, по которой скользит ползун вслед за резцом, будет различной, так как при изменении скорости резания шероховатость поверхности не остается постоянной.

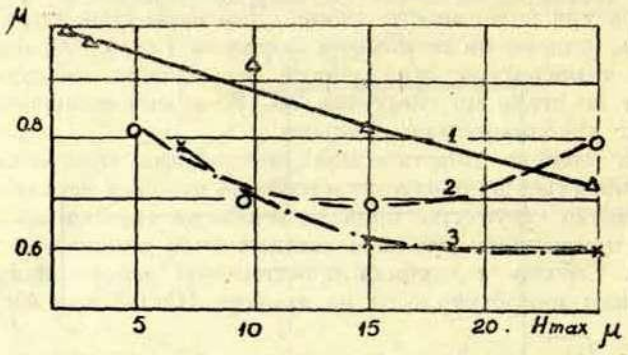
Необходимо было выяснить роль каждого из этих факторов, что, вообще говоря, представляет и самостоятельный интерес.

Оказалось, что изменение времени запаздывания в очень широких пределах (от 0.004 сек до 14 суток) не приводит к изменению коэффициента трения. Это не значит, что коэффициент трения не зависит от состояния поверхности, а может указывать только на то, что за принятые промежутки времени состояние поверхности изменяется мало. Действительно, окисление стали при комнатных температурах происходит исключительно быстро только в первый момент после образования свежей поверхности, при этом

* Специального химического анализа стали не производилось.

образуется тонкая защитная пленка, толщина которой в дальнейшем меняется очень медленно. У нас такая защитная пленка образуется уже при резании, и её состояние за 10—14 суток меняется мало. Что касается адсорбированных пленок, то скорость физической адсорбции столь велика (см., например, [11]), что она успевает произойти полностью (т. е. до насыщения) за тысячные доли секунды, так что дальнейшее пребывание поверхности на воздухе в этом смысле ничего не меняет. Если даже состояние поверхностного слоя меняется (окисление, хотя и медленно, все же происходит), то независимость коэффициента трения от времени запаздывания можно объяснить тем, что в процессе резания на поверхности образуется тонкий упрочненный слой, и степень схватывания, определяющая силу трения, будет зависеть от соотношения твердости основы и поверхностного слоя, как это наблюдается при холодной сварке металлов [12].

Зависимость коэффициента трения от шероховатости изучалась с целью выяснения влияния схватывания и наростообразования на её вид и характер. Исследование было проведено для пары Т15К6-сталь при нагрузках 1.2; 3.0; 10.0 кГ при различных скоростях.*



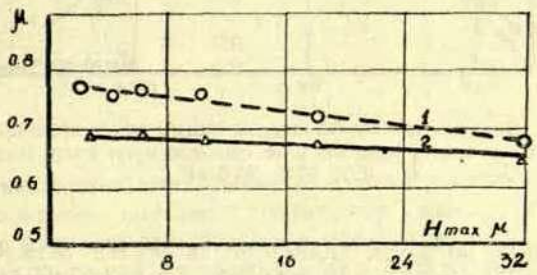

*Фиг. 2.* Зависимость коэффициента трения от шероховатости при скорости 45 м/мин. Кривая I — пр нагрузке 10.0 кГ, кривая 2 — при нагрузке 3.0 кГ, кривая 3 — при нагрузке 1.2 кГ.

Зависимость коэффициента трения от шероховатости при различных нагрузках и скорости 45.0 м/мин приведена на фиг. 2. Кривые имеют обычный вид: с увеличением шероховатости коэффициент трения падает, а затем наблюдается тенденция к его увеличению, что не противоречит общепринятым представлениям о влиянии микрогеометрии на коэффициент трения. Однако обращает на себя внимание тот факт, что интенсивность изменения коэффициента трения при больших нагрузках выше, чем при меньших. При нагрузке 1.2 кГ (кривая 3) изменение коэффициента трения составляет 16%, при нагрузке 3.0 кГ (кривая 2) — 24%, при нагрузке 10.0 кГ (кривая 1) — 29%. Это прямо противоречит выводам И. В. Крагельского [13], который считает, что с увеличением нормальной нагрузки зависимость коэффициента трения от шероховатости становится менее заметной. Такой вывод безусловно справедлив в тех случаях, когда увеличение нагрузки не связано с возрастанием роли схватывания и наростообразования (малые или очень большие скорости, смазанные или плохо очищенные поверхности и

* Микрогеометрия поверхности характеризовалась величиной Hmax (максимальная высота неровностей, характерных для данной поверхности и наиболее часто повторяющихся на ней, исключая случайные) и измерялась в микронах с помощью двойного микроскопа Линника.

т. д.). Если же трение осуществляется в условиях, когда возможны интенсивное схватывание и наростообразование, то увеличение нагрузки должно привести к более резкой зависимости коэффициента трения от шероховатости, так как для гладких поверхностей роль схватывания и наростообразования будет возрастать с увеличением нагрузки, в то время как для грубых поверхностей при различных нагрузках схватывание и наростообразование будут играть одинаково малую роль.

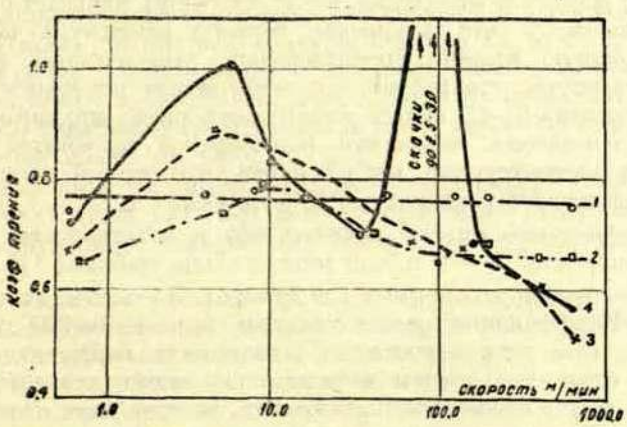
Коль скоро это так, то следует ожидать, что зависимость коэффициента трения от шероховатости должна быть очень слабой, если трение происходит в условиях, когда наросты не образуются (большие или малые скорости). Опыт подтверждает это заключение. На фиг. 3 приведена зависимость коэффициента трения от шероховатости при скоростях 3.80 м/мин и 400 м/мин (соответственно кривые 1 и 2).




*Фиг. 3.* Зависимость коэффициента трения от шероховатости при нагрузке 3.0 кГ для скоростей 3.80 м/мин. (кривая 1) и 400 м/мин. (кривая 2).

Учитывая то обстоятельство, что коэффициент трения не зависит от времени запаздывания, но зависит от шероховатости, при исследовании зависимости коэффициента трения от скорости поверхность во всех случаях перед опытом протачивалась резцом Колесова по одному режиму: скорость 170—200 м/мин, подача 2—3 мм/об., глубина 0.05 мм.

Полученные зависимости коэффициента трения от скорости для пары твердый сплав-сталь приведены на фиг. 4, для пары сталь-сталь на фиг. 5.*

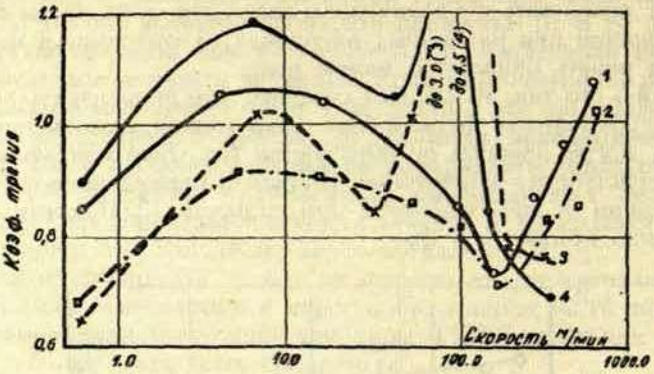



*Фиг. 4.* Зависимость коэффициента трения от скорости при трении твердого сплава по стали. Кривые 1—4 соответствуют нагрузкам 1.2; 3.0; 10.0; 20.0 кГ.

* Каждая точка на кривых является средним значением из 10—15 измерений.

Объяснить полученные закономерности, по нашему мнению, можно следующим образом.

При нагрузке 1.2 кГ для твердого сплава по стали (фиг. 4, кривая 1)




**Фиг. 5.** Зависимость коэффициента трения от скорости при трении стали по стали. Кривые 1—4 соответствуют нагрузкам 1.2; 3.0; 10.0; 20.0 кГ.

коэффициент трения во всем диапазоне скоростей остается постоянным, наростообразование здесь не наблюдается, что можно объяснить сравнительно легкими условиями трения (малая нагрузка).

Во всех остальных случаях в области скоростей 6—10 м/мин наблюдается максимум коэффициента трения. Этот максимум непосредственно связан с образованием наростов при трении. Во всех случаях (кроме кривой 1, фиг. 4), начиная со скоростей 1—2 м/мин, образуются наросты, наблюдать которые можно простым глазом. С ростом скорости растет температура поверхности трения, пластичность стали увеличивается, что способствует более интенсивному схватыванию и наростообразованию. Однако углеродистые стали обладают аномальным ходом пластичности и прочности в зависимости от температуры (явление синеломкости). Пластичность в диапазоне температур от комнатных до 100°С возрастает, а затем от 100°С до 300°С падает и достигает минимума, после чего опять начинает быстро расти. Можно предположить, что положение первого максимума коэффициента трения обусловлено именно специфической зависимостью пластичности стали от температуры, это значит, что температура поверхности трения в диапазоне скоростей 6—10 м/мин должна быть равна примерно 100°С. Перестроив на основании показаний естественной термопары скоростные зависимости в температурные, мы убедились, что первый максимум действительно соответствует температуре 100—150°С.

Металлографический анализ показал, что и пластическая деформация в диапазоне скоростей 6—10 м/мин максимальна (таблица 1)*.

Весьма своеобразен ход кривых 1 и 2 на фиг. 5 (сталь по стали, нагрузки 1.2 и 3.0 кГ). Коэффициент трения с ростом скорости от 200 до 600 м/мин увеличивается, при этом наросты на поверхности наблюдаются редко, а при больших скоростях совсем исчезают. Очевидно, повышение коэффициента трения обусловлено ростом площади фактического контакта, когда

* Металлографический анализ носил скорее качественный, чем количественный характер. Для каждого режима приготовляли не более 3 шлифов. Но это не значит, что результаты ненадежны, просто из них нельзя сделать окончательного вывода о характере пластических деформаций при различных режимах трения.

Таблица 1.

$\delta h$ — глубина наклепанного слоя.

$\delta H = \frac{H_{max} - H_{исх}}{H_{исх}}$ 100% изменение твердости, $H_{исх}$ — исходная и $H_{max}$ — максимальная твердость наклепанного слоя.

| Т15К6-сталь | | | Сталь-сталь | | |
|---|---|---|---|---|---|
| скорость м/мин | $\delta h$ мм | $\delta H$% | скорость м/мин | $\delta h$ мм | $\delta H$% |
| 5.5 | 0.10 | 170 | 5.3 | 0.09 | 270 |
| 10.0 | 0.20 | 170 | 21.0 | 0.06 | 150 |
| 21.0 | 0.15 | 180 | 45.0 | 0.06 | 150 |
| 45.0 | 0.04 | 400 | 85.0 | 0.15 | 350 |
| 70.0 | 0.11 | 490 | — | — | — |
| 100.0 | 0.02 | 400 | — | — | — |
| 240.0 | 0.015 | 470 | — | — | — |

количество возникающих металлических связей сильно растет, хотя прочность их вследствие высоких температур мала (процесс, который Б. И. Костецкий называет схватыванием второго рода).

Для стали по стали при нагрузках 10.0 и 20.0 кГ (фиг. 5, кривые 3 и 4) и для твердого сплава по стали при нагрузке 20.0 кГ (фиг. 4, кривая 4) в диапазоне скоростей 50—150 м/мин наблюдается второй максимум коэффициента трения. При этом можно говорить только об изменении коэффициента трения в каких-то пределах, а не о равенстве его определенной величине, так как сила трения периодически испытывает сильные скачки (поэтому на кривых указана не величина коэффициента трения, а предел, до которого он изменяется). Здесь влияние схватывания и наростообразования проявляется в еще большей степени, так как пластичность стали опять растет и становится бо́льшей, чем при малых скоростях.

Нарост не возникает сразу за счет однократного вырывания металла, а растет постепенно на определенном пути трения. Процесс образования нароста сопровождается резким повышением силы трения, которая достигает максимального значения в момент схватывания нароста с поверхностью болванки. Нарост срывается с ползуна, остается на поверхности болванки, сила трения резко падает, и начинается процесс образования нового нароста. Величина нароста в этих случаях может достигать нескольких миллиметров (до 3—4 мм). Пластические деформации поверхности при этом опять становятся значительными (см. табл. 1).

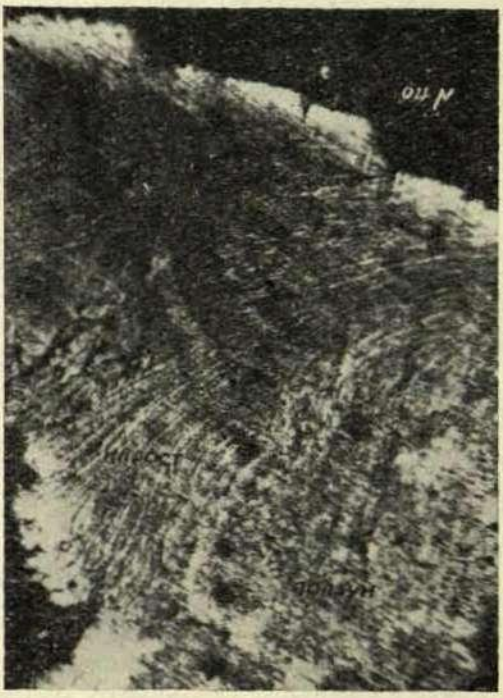
При дальнейшем увеличении скорости температура поверхности достигает 700—900°С (при 150—200 м/мин), прочность возникающих металлических связей падает, и нарост, не успев образоваться, размазывается по поверхности.

Из полученных результатов (фиг. 4 и 5) можно сделать еще один интересный вывод. Зависимость коэффициента трения от нагрузки не однозначна: при различных скоростях коэффициент трения зависит от нагрузки по разному, что обусловлено влиянием наростов. Если исследуется зависимость коэффициента трения от нагрузки, когда наросты не образуются, то с увеличением нагрузки коэффициент трения падает, что объясняется двойственной природой сил трения. Если же при трении образуются наросты, то коэффициент трения при увеличении нагрузки возрастает или изменяется по более сложной кривой.

Это обстоятельство, по нашему мнению, и объясняет противоречия в экспериментальных данных по зависимости коэффициента трения от нагрузки.

Таким образом влияние процесса наростообразования на внешнее тре-

*Фиг. 6.* Микрофотография нароста, оставшегося на поверхности болванки при трении твердого сплава по стали. Нагрузка 20.0 кГ, скорость 70.0 м/мин. (увел. 500).



*Фиг. 7.* Микрофотография нароста, оставшегося на ползуне при трении стали по стали. Нагрузка 20.0 кГ, скорость 85 м/мин. (увел. 500).

ние металлов совершенно безусловно. Однако установление этого влияния является хотя и очень важным, но только первым этапом работы в этом направлении. Вторым, не менее важным этапом, следует считать исследования, связанные с изучением строения и свойств нароста.

В настоящей работе был проведен только качественный металлографический анализ нароста.

Оказалось, что нарост при трении (фиг. 6 и 7), как и нарост при резании, имеет слоистую структуру, что объясняется постепенным наслоением и сильной пластической деформацией. Основная масса нароста, особенно его вершина, имеет настолько мелкую структуру, что можно принять нарост за скопление отдельных схватившихся частиц, однако область схватывания нароста с поверхностью имеет явно слоистый вид.

По твердости нарост весьма однороден, но встречаются отдельные очень твердые места: микротвердость при нагрузке 20 Г — 700—800 кГ/мм$^2$, в среднем же микротвердость нароста составляет 400—500 кГ/мм$^2$.

Повышение твердости нароста по сравнению с исходным металлом является, очевидно, результатом образования в процессе трения твердых химических соединений (окислы, нитриды), с одной стороны, и сильного механического наклепа, с другой. То, что при трении происходит окисление, доказано непосредственными опытами [14]. На возможность азотирования указывалось неоднократно (например, [15]), однако экспериментально это не доказано.

## 4. ВЫВОДЫ

1. Коэффициент трения не зависит от времени выдержки вновь образованной поверхности на воздухе при изменении его от 0.004 сек до 14 суток.

2. Влияние шероховатости на коэффициент трения при различных скоростях и нагрузках проявляется не одинаково. Показано, что зависимость от шероховатости в сильной степени определяется процессами схватывания и наростообразования, когда эти процессы могут иметь место.

3. Коэффициент трения в зависимости от скорости меняется по разному, при больших нагрузках имеет два максимума на кривой зависимости коэффициента трения от скорости, которые непосредственно связаны с процессами схватывания и наростообразования.

4. Металлографическое исследование показывает, что нарост представляет из себя монолитное тело без всяких следов внутренних трещин, имеющее слоистое строение; твердость нароста превышает твердость исходного металла в 2—4 раза.

5. Результаты, полученные в настоящей работе, подтверждают идею В. Д. Кузнецова о влиянии наростов на процесс внешнего трения, но явление наростообразования не является универсальным, отсутствие наростов не обязательно должно соответствовать неизменности коэффициента трения.

Настоящая работа выполнена в лаборатории резания и трения Сибирского физико-технического института под руководством академика В. Д. Кузнецова, которому автор выражает свою глубокую благодарность за предложенную тему и постоянное внимание к работе.

30 VI 1957 *Кафедра экспериментальной физики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *В. Д. Кузнецов.* Физика твердого тела, т. IV. Томск, 1947.
[2]. *И. В. Крагельский.* Трение и износ в машинах, 1941, сб. 1, стр. 5—18.
[3]. *И. В. Крагельский* и *Е. М. Швецова.* Трение и износ в машинах, 1955, сб. 10 стр. 5—34.
[4]. *Б. И. Костецкий.* Трение и износ при резании металлов, 1955, стр. 81—101.
[5]. *И. В. Крагельский.* Физика лубяного сырья. М. 1939.
[6]. *М. П. Левицкий.* Повышение износостойкости и срока службы машин. Киев, 1953, стр. 148.
[7]. *В. Д. Кузнецов.* Роль наростов при трении. Доклад в ин-те машиноведения АН СССР. М. ин-т машиноведения, 1954.
[8]. *В. Д. Кузнецов.* Наросты при резании и трении. М. 1956.
[9]. *В. А. Колесов.* Силовое резание металлов. 1953.
[10]. *Жд. К. Егер.* Прикладная механика и машиностроение 1952, № 6.
[11]. *К. Смителлс.* Газы и металлы. М., 1940.
[12]. *С. Б. Айнбиндер* и *Э. Ф. Клокова.* ЖТФ, 1955, т. 25, стр. 2356.
[13]. *И. В. Крагельский.* Влияние шероховатостей на трение. изд. АН СССР, 1946.
[14]. *Б. И. Костецкий.* Основные вопросы теории трения и изнашивания. Машгиз, 1955.
[15.] *В. А. Кислик.* Износ деталей паровозов. 1948.

## BERZES KOEFICIENTA PĒTĪŠANA ATKARĪBĀ NO ĀTRUMA PIE CIETA KAUSĒJUMA BERZES PRET TĒRAUDU UN TĒRAUDA BERZES PRET TĒRAUDU

*V. J. Florovs*

(Kopsavilkums)

Pētīta berzes koeficienta atkarība no ātruma pie pussferiska parauga berzes pret cilindriska ķermeņa attīrītu virsmu. Berzes pāri bija tērauds-tērauds un ciets kausējums — tērauds. Berzes režīmi sekojoši — ātrums tika mainīts no 0.50 līdz 630 m/min, slodzes — 1.2; 3.0; 10.0; 20.0 kG.

Izrādījās, ka berzes koeficients atkarībā no ātruma pie dažādām slodzēm izmainījās dažādi. Pie mazām slodzēm parādās viens berzes koeficienta maksimums atkarībā no ātruma, un pie lielām slodzēm parādās divi maksimumi. Berzes koeficienta maksimumu parādīšanās pie noteikta ātruma izskaidrojama ar saķeršanās un uzaugumu veidošanās ietekmi berzes procesā. Divu maksimumu rašanās saistīta ar oglekļa tēraudu (ar vidēju oglekļa saturu) specifisko izturības atkarību no temperaturas.

Uzaugumu metalografiskie pētījumi parādīja, ka uzaugums ir monolits veidojums, kura cietība pārsniedz izejas metala cietību 2 līdz 4 reizes.

Iegūtie rezultati apstiprina V. D. Kuzņecova ideju par uzaugumu ietekmi uz ārējās berzes procesu.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И РАЗРУШЕНИЕ СЛОИСТЫХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

*В. М. ГОЛЬДФАРБ и А. В. СТЕПАНОВ*

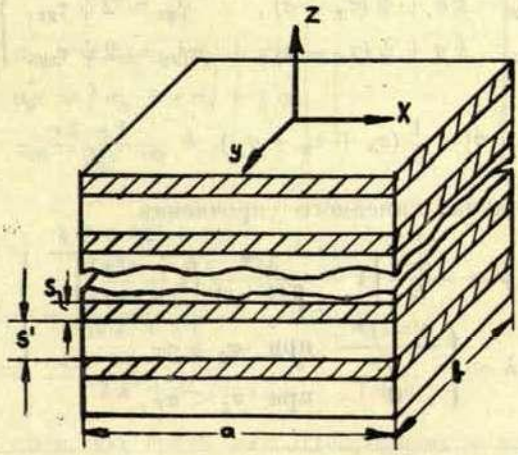
В работе [1] рассмотрено поведение слоистых материалов при упругом деформировании. Получены выражения для упругих постоянных слоистых материалов и напряжений в отдельных слоях. В настоящей работе рассматривается напряженное и деформированное состояние слоистых металлических материалов за пределом упругости и характер их разрушения при различной ориентации слоев относительно внешних условий.

## I. ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ СЛОИСТОГО МАТЕРИАЛА

### 1. Основные соотношения

Рассмотрим элемент среды, состоящей из чередующихся слоев двух различных материалов (фиг. 1). Примем, что:

1) Слои изотропны в отношении упругих и пластических свойств.




*Фиг. 1.*

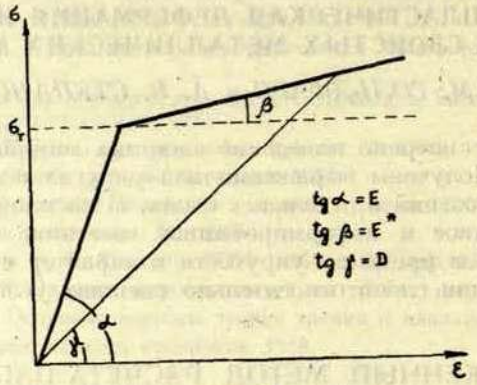
2) Диаграммы растяжения-сжатия материалов слоев состоят из двух прямолинейных участков (фиг. 2); таким образом, упруго-пластические свойства материалов характеризуются модулями упругости $E$, $E'$, пределами текучести $\sigma_T$, $\sigma'_T$ и модулями упрочнения $E^*$, $E^{*\prime}$. Коэффициенты Пуассона слоев в упругой области одинаковы: $\nu = \nu'$.

3) Слои жестко связаны между собой.

4) Толщины слоев $s$ и $s'$ малы по сравнению с поперечными размерами элемента $a$ и $b$.

5) Внешние усилия таковы, что уравновешивающие их усредненные по слоям напряжения имеют компоненты $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$, $\bar{\tau}_{xz}$, $\bar{\tau}_{yz}$, $\bar{\tau}_{xy}$, которые можно считать постоянными в пределах рассматриваемого элемента.

6) Напряженное состояние в пределах каждого слоя однородно (в какой мере это положение может быть использовано, будет показано ниже).




Фиг. 2.

Ограничиваясь случаями простого нагружения, используем уравнения теории упруго-пластических деформаций, которые могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= k\sigma + \psi(\sigma_x - \sigma), & \gamma_{xz} &= 2\psi\tau_{xz}, \\ \varepsilon_y &= k\sigma + \psi(\sigma_y - \sigma), & \gamma_{yz} &= 2\psi\tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= k\sigma + \psi(\sigma_z - \sigma), & \gamma_{xy} &= 2\psi\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad k = \frac{1-2\nu}{E}$$

и для принятого случая линейного упрочнения

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{1+\nu}{E}\left[1 - \frac{3\lambda^*}{2(1+\nu)}\left(1 - \frac{\sigma_T}{\sigma_i}\right)\right], \\ \lambda &= \begin{cases} \dfrac{E-E^*}{E} & \text{при } \sigma_i \geqslant \sigma_T \\ 0 & \text{при } \sigma_i < \sigma_T, \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xy}^2)} \tag{3}$$

Граничные условия для напряжений, условие жесткой связи между слоями и уравнения статического равновесия при указанном на фиг. 1 выборе направлений координатных осей имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z &= \sigma_z' = \bar{\sigma}_z, \\ \tau_{xz} &= \tau_{xz}' = \bar{\tau}_{xz}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{yz}' = \bar{\tau}_{yz}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} k\sigma + \psi(\sigma_x - \sigma) &= k'\sigma' + \psi'(\sigma'_x - \sigma'), \\ k\sigma + \psi(\sigma_y - \sigma) &= k'\sigma' + \psi'(\sigma'_y - \sigma'), \\ \psi\tau_{xy} &= \psi'\tau'_{xy}, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x + \varkappa\sigma'_x}{1+\varkappa}, \\ \bar{\sigma}_y &= \frac{\sigma_y + \varkappa\sigma'_y}{1+\varkappa}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy} + \varkappa\tau'_{xy}}{1+\varkappa}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

где

$$\varkappa = \frac{s'}{s}.$$

Отсюда могут быть получены формулы, связывающие напряжения в слоях с усредненными напряжениями:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-A\bar{\sigma}_x + B\bar{\sigma}_y + C(A-B)\bar{\sigma}_z}{B^2 - A^2}, \\ \sigma_y &= \frac{B\bar{\sigma}_x - A\bar{\sigma}_y + C(A-B)\bar{\sigma}_z}{B^2 - A^2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{1+\varkappa}{1+\varkappa\frac{\psi}{\psi'}}\,\bar{\tau}_{xy}, \\ \sigma'_x &= e\sigma_x + f\sigma_y + g\sigma_z, \\ \sigma'_y &= f\sigma_x + e\sigma_y + y\sigma_z, \\ \tau'_{xy} &= \frac{\psi}{\psi'}\,\tau_{xy}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{k\psi' + \psi\psi' + k'\psi}{\psi'(2k' + \psi')}, & A &= \frac{1+\varkappa e}{1+\varkappa}, \\ f &= \frac{k\psi' - k'\psi}{\psi'(2k' + \psi')}, & B &= \frac{\varkappa f}{1+\varkappa}, \\ g &= \frac{k - k' - \psi + \psi'}{2k' + \psi'}, & C &= \frac{\varkappa g}{1+\varkappa}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Рассматривая слоистую среду как однородную и анизотропную (см. подробнее работу [1]), можно записать связь между напряжениями и деформациями в упругой и пластической областях в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= s_{11}\bar{\sigma}_x + s_{12}\bar{\sigma}_y + s_{13}\bar{\sigma}_z, & \bar{\gamma}_{xz} &= s_{44}\bar{\tau}_{xz}, \\ \bar{\varepsilon}_y &= s_{12}\bar{\sigma}_x + s_{11}\bar{\sigma}_y + s_{13}\bar{\sigma}_z, & \bar{\gamma}_{yz} &= s_{44}\bar{\tau}_{yz}, \\ \bar{\varepsilon}_z &= s_{13}\bar{\sigma}_x + s_{13}\bar{\sigma}_y + s_{33}\bar{\sigma}_z, & \bar{\gamma}_{xy} &= 2(s_{11} - s_{12})\bar{\tau}_{xy}. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

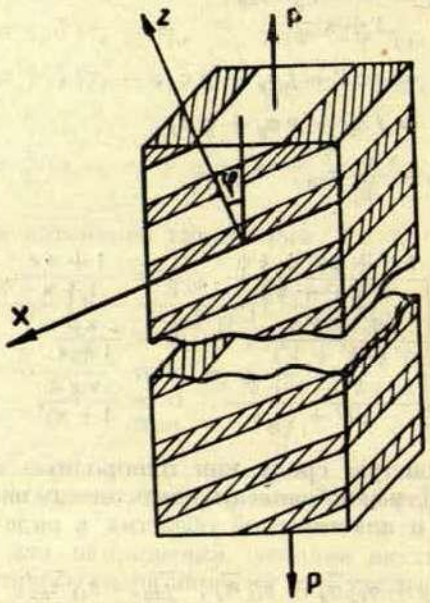
Коэффициенты $s_{ik}$ могут быть определены, исходя из формул (1), (4), (5), (7), (8) и соотношений

$$\left.\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_z &= \frac{\varepsilon_z + \varkappa \varepsilon_z'}{1+\varkappa},\\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\gamma_{xz} + \varkappa \gamma_{xz}'}{1+\varkappa},\\ \bar{\gamma}_{yz} &= \frac{\gamma_{yz} + \varkappa \gamma_{yz}'}{1+\varkappa}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

В результате получаем:

$$\left.\begin{aligned}s_{11} &= \frac{A(k+2\psi) - B(k-\psi)}{3(A^2-B^2)},\\ s_{12} &= \frac{A(k-\psi) - B(k+2\psi)}{3(A^2-B^2)},\\ s_{13} &= \frac{(A^2-B^2)(k-\psi) - C(A-B)(2k-\psi)}{3(A^2-B^2)},\\ s_{33} &= \frac{1}{3(1+\varkappa)}\left\{-\frac{2C(k-\psi)}{A+B} + k + 2\psi + \varkappa\left[\frac{-2C(k'-\psi')}{A+B}(e+f) + \right.\right.\\ &\qquad \left.\left. + k' + 2\psi' + 2g(k'-\psi')\right]\right\},\\ s_{44} &= \frac{2}{1+\varkappa}(\psi - \varkappa\psi').\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В отличие от случая упругой деформации в выражения для $e$, $f$, $g$ и $s_{4x}$ входят напряжения, поэтому в общем случае нельзя в явном виде выразить напряжения в слоях и соответствующие деформации через упругие и пластические характеристики материалов слоев. Из формул (11) видно также,




*Фиг. 3.*

что на разных стадиях пластической деформации анизотропия слоистого материала различна.

Рассмотрим действие растягивающих (сжимающих) напряжений на образец с произвольной ориентацией слоев (фиг. 3). Будем считать число

слоев достаточно большим для того, чтобы можно было пренебречь особенностями в распределении напряжений в крайних неполных слоях. Напряжения в слоях определяются подстановкой усредненных напряжений.

$$\bar{\sigma}_z = p\cos^2\varphi,$$
$$\bar{\sigma}_x = p\sin^2\varphi, \qquad \bar{\sigma}_y = \bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{xy} = 0$$
$$\bar{\tau}_{xz} = p\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$

в формулы (7):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma_x}{p} = \frac{(1+\varkappa)(1+e)\sin^2\varphi - \varkappa g(1+\varkappa e - \varkappa f)\cos^2\varphi}{(1+\varkappa e)^2 - \varkappa^2 f^2},\\
&\frac{\sigma_y}{p} = \frac{\varkappa(1+\varkappa) f\sin^2\varphi - \varkappa g(1+\varkappa e - \varkappa f)\cos^2\varphi}{(1+\varkappa e)^2 - \varkappa^2 f^2}\\
&\frac{\sigma_z}{p} = \frac{\sigma'_z}{p} = \cos^2\varphi \quad \frac{\tau_{xz}}{p} = \frac{\tau'_{xz}}{p} = \sin\varphi\cdot\cos\varphi\\
&\tau_{yz} = \tau'_{yz} = \tau_{xy} = \tau'_{xy} = 0\\
&\frac{\sigma'_x}{p} = \frac{(1+\varkappa)\varkappa[e(1+\varkappa e) - \varkappa f^2]\cdot\sin^2\varphi + \varkappa g(1+\varkappa e - \varkappa f)\cos^2\varphi}{(1+\varkappa e)^2 - \varkappa^2 f^2}\\
&\sigma'_y = \frac{\sigma_y}{\varkappa}
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Процесс деформирования образца удобно разделить на три стадии:

1) До достижения некоторого значения напряжения $p$, которое назовем первичным пределом текучести ($\sigma_{T_1}$), оба слоя деформируются упруго.

2) Начиная с $p = \sigma_{T_1}$ и до $p = \sigma_{T_2}$ („вторичный предел текучести) более „мягкие", т. е. имеющие более низкий предел текучести, слои деформируются пластически, более „жесткие"—упруго.

3) При $p > \sigma_{T_2}$ пластическое течение происходит во всех слоях.

На первой стадии деформации $\psi = \frac{1+\nu}{E}$, $\psi' = \frac{1+\nu}{E}$; и т. к. в выражения для $e$, $f$, $g$ не входят напряжения, то формулы (12) дают непосредственно напряжения в слоях. Напряженное состояние, при котором начинается пластическое течение в мягких слоях, определяется из условия пластичности $\sigma_i = \sigma_T$. Обратим внимание на то обстоятельство, что из-за объемности напряженного состояния с слоях, имеющего место несмотря на линейность усредненного по образцу напряженного состояния, первичный $\sigma_{T_1}$ и вторичный $\sigma_{T_2}$ пределы текучести образца не совпадают с пределами текучести материалов слоев $\sigma_T$ и $\sigma'_T$. Взаимное стеснение деформации приводит к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_{T_1} > \sigma_T,\\
&\sigma_{T_2} < \sigma'_T.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

На второй стадии деформирования задача определения напряжений в слоях усложняется, так как $\sigma_x$ и $\sigma_y$ входят в выражения (8). В этом случае можно поступать следующим образом:

1) задаются значения $\frac{\sigma_i}{\sigma_T}$ (являющиеся мерой пластической деформации слоя);

2) определяются значения $\frac{\sigma_x}{p}$, $\frac{\sigma_y}{p}$ из уравнений (12);

3) из уравнений (3) определяются значения $p$. Таким образом, получаем значения $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma'_x$ $\sigma'_y$ как функции напряжения нагрузки $p$.

Течение в жестких слоях начинается при условии $\sigma'_i = \sigma'_T$. Значение $\sigma'_i$ определяется по $\sigma'_x$, $\sigma'_y$, $p$, вычисленным для второй стадии деформации. На третьей стадии возможно лишь графическое определение напряжений в слоях, что осуществляется достаточно просто при предельных ориентациях $\varphi = 0°$ и $\varphi = 90°$.

Деформации образца в зависимости от заданного усилия удобно определять с помощью соотношения

$$\varepsilon_\varphi = \frac{p}{D_\varphi},$$

где $\varepsilon_\varphi$ — деформация растяжения (сжатия),

$D_\varphi$ — модуль пластичности для данной ориентации слоев (фиг. 2).

Значение $D_\varphi$ определяется из соотношения

$$\frac{1}{D_\varphi} = s'_{33} = s_{11}\sin^4\varphi + s_{33}\cos^4\varphi + (2\,s_{13} + s_{45})\sin^2\varphi\cos^2\varphi,$$

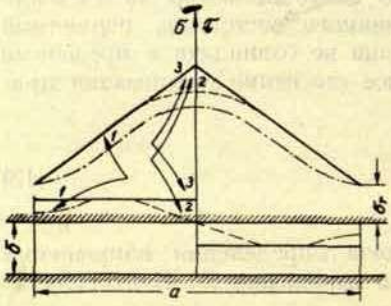
где $s_{ik}$ находятся по формулам (11).

Построив направляющие кривые $D_\varphi$ при различных нагрузках, получаем характеристики анизотропии среды в отношении упруго-пластических деформаций на разных стадиях течения.

## 2. Распределение напряжений в слоях и введение поправки на их конечную ширину

Экспериментальные данные и расчеты, относящиеся к течению пластического материала между жесткими плитами, показывают, что напряженное состояние в пределах слоя неоднородно. Таким образом, принятое выше представление об однородности напряженного состояния может быть использовано лишь как грубое приближение. В настоящем разделе на основании известных данных о распределении напряжений в пластичном слое, вводится поправка к приведенным выше формулам, что позволяет более точно определять деформацию образцов по заданным усилиям.

Обратимся, прежде всего, к задаче о сжатии идеально-пластичного слоя между жесткими плитами. Для случая бесконечной полосы задача решена Прандтлем [2]. Различные методы, примененные к решению плоской задачи для слоя конечной ширины [3, 4, 5] приводят к близким результатам. Распределение касательных и нормальных напряжений по поверхностям контакта слоя и плит определено экспериментально (см., например [5]). Обычно принимается, и это оправдано для отношений ширины слоя к его высоте $\frac{a}{s} > 5$, что по высоте слоя нормальные напряжения не меняются, а касательные напряжения меняются по линейному закону. Распределение напряжений по границе слоя показано на фиг. 4 (кривая 1). В случае жесткого скрепления слоя с плитами скольжение по краям слоя отсутствует и распределение контактных напряжений несколько изменяется (кривая 2). Для не очень малых значе-




*Фиг. 4.*

ний $\frac{a}{s}$ можно принять еще более простое распределение напряжений (кривая 3). Принимая последнее распределение, Мейерхоф и Чаплин [6] получили значение удельного давления осадки слоев, имеющих различную форму сечения в плане:

$$p = \sigma_T \left( \frac{\pi}{2} + m \frac{a}{s} \right). \tag{16}$$

Здесь $m$ — коэффициент, зависящий от формы сечения слоя: для кругового сечения радиуса $a$ $m = \frac{2}{3}$, для квадратного $m = \frac{1}{3}$, для прямоугольного со сторонами $a$ и $b$ $m = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{3b}\right)$.

Применим полученные соотношения к случаю слоистого материала, растягиваемого или сжимаемого в направлении, нормальном к плоскости слоев. Если считать напряженное состояние однородным, то напряжения в слоях могут быть определены из соотношения

$$\sigma_x = \sigma_y = -\sigma_x' = -\sigma_y' = \frac{k' - \psi' - k + \psi}{2k' + \psi' + 2k + \psi} \bar{\sigma}_z \tag{17}$$

которое вытекает из формул (12). Согласно формуле (17), в слое, находящемся между жесткими плитами, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ и течение не возникает. Однако в действительности так обстоит дело только в случае бесконечно тонких или бесконечно широких слоев (формула (16)), а при конечной ширине слоев возможно пластическое течение за счет выдавливания материала. Это различие определяется действительной неоднородностью напряженного состояния в слоях. В случае сжатия пластичного слоя между плитами с конечной упругостью (а не идеально жесткими) распределение напряжения в слоях при развитой пластической деформации не должно отличаться от показанного на фиг. 4. Будет изменяться только величина касательных и нормальных поперечных ($\sigma_x$ и $\sigma_y$) напряжений, вызванных стесненностью деформации. Поэтому естественно выбрать следующий путь введения поправок к формулам раздела 1.

Согласно формуле (3) течение в мягком слое начинается при выполнении условия

$$\sigma_T = \sigma_z - \sigma_x$$

С другой стороны, для течения между жесткими плитами

$$\sigma_T = \frac{\sigma_z}{\frac{\pi}{2} + m \frac{a}{s}}.$$

Сравнивая последние формулы, получаем

$$\sigma_x = \frac{m \frac{a}{s}}{\frac{\pi}{2} + m \frac{a}{s}} \sigma_z = \gamma \sigma_z \tag{18}$$

(вместо $\sigma_x = \sigma_z$). $\sigma_x$ представляют собой средние по слою напряжения, вызывающие наблюдаемое увеличение жесткости системы. Обобщая на случай слоистой системы, приходим к выводу, что для учета неоднородности напряженного состояния надо вызванные стеснением деформации поперечные напряжения умножить на величину $\gamma$. Так, для растяжения (сжатия) в направлении нормали к слоям

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{k - \psi' - k + \psi}{2k' + \psi' + 2k + \psi} \gamma \bar{\sigma}_z.$$

В общем же случае произвольной ориентации должны быть введены поправки в выражения для коэффициентов $s_{ik}$. После преобразований приходим к следующим формулам:

$$s_{11} = \frac{1}{3(A^2 - B^2)(1+\varkappa)} \{A(k + 2\psi) - B(k - \psi)\gamma +$$
$$+ \varkappa [(-Ae + Bf)(k' + 2\psi') - (Af - Be)(k' - \psi')\gamma]\},$$
$$s_{12} = \frac{1}{3(A^2 - B^2)(1+\varkappa)} \{-B(k + 2\psi)\gamma + A(k - \psi) +$$
$$+ \varkappa [(Be - Af)(k' + 2\psi')\gamma - (Bf - Ae)(k' - \psi')]\}, \qquad (19)$$
$$s_{13} = \frac{1}{3(A^2 - B^2)(1+\varkappa)} \{(A - B\gamma)(k - \psi) -$$
$$- \varkappa (k' - \psi')[B(f + \gamma e) - A(e + \gamma f)]\},$$
$$s_{33} = \frac{1}{3(1+\varkappa)} \left\{k + 2\psi - \frac{2C\gamma((k-\psi)}{A+B} + \right.$$
$$\left. + \varkappa \left[k' + 2\psi' + 2g\gamma(k' - \psi') - \frac{2\gamma C(e+f)(k'-\psi')}{A+B}\right]\right\},$$
$$s_{44} = \frac{2}{1+\varkappa}(\psi - \varkappa\psi').$$

Приведенный здесь метод введения поправки, сходный с методом, примененным для упругих деформаций в работе (1), является лишь приближенным. Отметим в частности, что

а) соотношение (18) справедливо при развитой пластической деформации; вследствие изменения распределения напряжений при переходе от упругой деформации к пластической [7] соотношение между средними по слою значениями $\sigma_x$ и $\sigma_z$ изменяется (так, в упругой области для квадратного сечения $\sigma_x = \beta\sigma_z = \frac{0{,}1\left(\frac{a}{s}\right)^2}{1 + 0{,}1\left(\frac{a}{s}\right)^2}$);

б) соотношение (18) получено для идеально пластичного материала; при наличии упрочнения соотношение между $\sigma_x$ и $\sigma_z$ может быть различным на разных стадиях деформации;

в) не учитывается влияние упруго-пластических характеристик и толщин жестких слоев.

Введенная поправка наиболее существенна при нагружении материала в направлении нормальном к плоскости слоев, поэтому влияние геометрии слоев на деформацию и разрушение исследовалось лишь для этого случая.

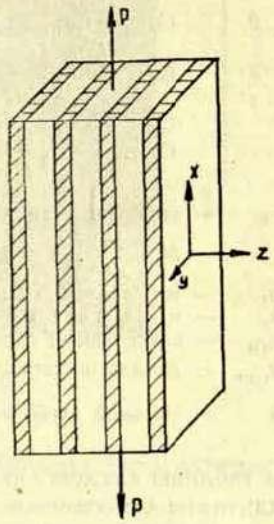
## II. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящем разделе рассматриваются процессы деформирования и разрушения, протекающие при растяжении и сжатии металлических образов (методика изготовления и испытания образцов изложена в работе [1]). Разбирается поведение образцов при различной ориентации слоев, приведены некоторые характеристики диаграмм растяжения с сжатия; эти данные сопоставлены с результатами, полученными на основании анализа напряженного состояния материала (раздел I).

### 1. Растяжение и сжатие в направлении, параллельном плоскости слоев ($\varphi = 90°$), фиг. 5

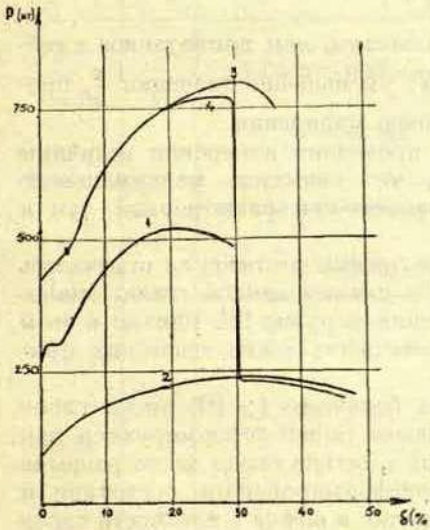
При этой ориентации слоев были проведены следующие испытания.

1) Растяжение образцов, представляющих собой два или несколько несвязанных слоев (шириной 3—10 мм, толщиной 0,5—2 мм) из одного или различных материалов. Слои деформируются независимо друг от друга, и диаграмма растяжения аддитивна по отношению к диаграммам растяжения отдельных слоев. Разрушение каждого слоя происходит при тех же напряжениях и деформациях, что и в случае раздельного их испытания. Следует обратить внимание на возможную неаддитивность диаграммы растяжения и преждевременное разрушение мягкого слоя из-за его кратковременной перегрузки после разрыва жесткого слоя. Это эффект тем более существенен, чем меньше жесткость испытательной машины.




*Фиг. 5.*

2) Растяжение образцов, состоящих из двух соединенных друг с другом тонким слоя припоя слоев меди и железа или слоев отожженой и наклепанной меди имело своей целью выяснить наличие аддитивности $\sigma_в$ и $\delta$. При хорошем качестве соединения подобные образцы деформируются как целое; разрушение происходит с образованием единой шейки. Расслоение образца в шейке происходит лишь в момент или непосредственно перед моментом разрыва. В случае низкого качества соединения при достижении удлинения, характерного для жесткого слоя, наступает расслоение образца и жесткий слой разрывается. Тенденция к расслоению образца указывает на наличие поперечных напряжений в слоях при неоднородной деформации.




*Фиг. 6.*

На фиг. 6 показана диаграмма растяжения для случаев связанных и несвязанных слоев меди и железа одинакового сечения (кривая 1 соответствует растяжению слоя Fe, кривая 2 — растяжению слоя Cu — 3 — растяжению неспаянных Cu и Fe, 4 — растяжению спаянных Cu и Fe).

В таблице 1 приведены средние значения временного сопротивления $\sigma_в$ и полного удлинения, полученные при растяжении образцов Cu Fe и Cu Cu. Один из слоев меди в образцах Cu Cu наклепывался предварительным растяжением в пределах равномерной деформации (до $\sigma = \sigma_в$); затем наклепанный слой спаивался при температуре, исключавшей отжиг, со слоем отожженой меди; полученный таким образом образец растягивался до разрыва (№№ 2, 3 табл. 1) или снова до $\sigma = \sigma_в$, после чего повторялась та же операция отпайки и припайки (№ 4).

Таблица 1

| №№ п. п. | Название образцов | Число образцов | Среднее $\sigma_в \left(\frac{кг}{мм^2}\right)$ | Среднее $\delta$ (%) | $\delta_{адд.}$ (%) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $Fe_0 - Cu_0 - Fe_0$ | 4 | 39,7 | 35 | 39 |
| | $Cu_1$ | | 24,4 | 28 | |
| 2 | $Cu_{1н} + Cu_1$ | 6 | 24,6 | 28 | 34 |
| | $Cu_1$ | 3 | 24,1 | 29 | |
| 3 | $Cu_{1н} + Cu_2$ | | 24,3 | 32 | 40 |
| 4 | $Cu_1$ | | 24,0 | 27 | |
| | $Cu_{1н} + Cu_1$ | 3 | 23,8 | 16 | |
| | $Cu_{1нн} + Cu_1$ | | 24,4 | 19 | 25 |

$Cu_0$ — отожженая листовая медь шириной $a = 8$ мм, толщиной $s = 1{,}0$ мм, $\sigma_в = 24{,}5 \frac{кГ}{мм^2}$, $\delta = 48\%$

$Cu_1$ — то же $s = 0{,}5$ мм

$Cu_2$ — то же, $s = 1{,}5$ мм

$Cu_{1н}$ — наклепанный слой $Cu_1$

$Cu_{1нн}$ — дважды наклепанный слой $Cu_1$

Fe — стальной слой; $a = 8$ мм, $s = 0{,}5$ мм, $\sigma_в = 56 \frac{кГ}{мм^2}$ $\delta = 30\%$.

Из таблицы следует, что $\bar{\sigma}_в$ образцов, как и в случае несвязанных слоев аддитивно относительно $\sigma_в$ отдельных слоев:

$$\bar{\sigma}_в = \frac{\sigma_в s + \sigma'_в s'}{s + s'}.$$

В то же время удлинение образцов неаддитивно, причем

$$\bar{\delta} < \delta_{адд.} = \frac{\delta s + \delta' s'}{s + s'}.$$

Различие между $\bar{\delta}$ и $\delta_{адд.}$ получится еще большим, чем приведенное в таблице, если учесть изменения формы образца; уменьшение значения $\frac{a}{s}$, происходящее при спайке приводит к увеличению удлинения.

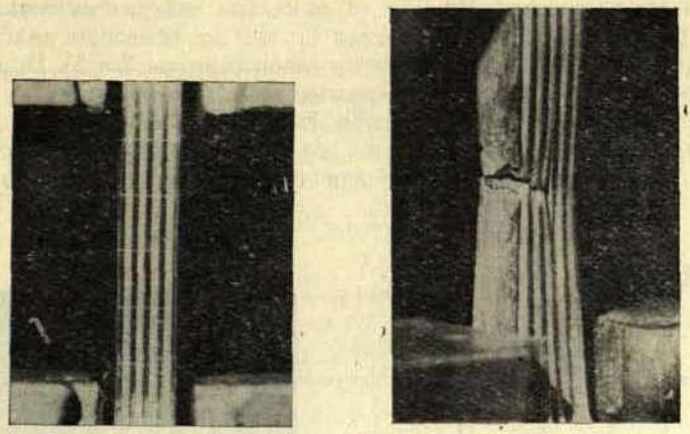
На некоторых слоистых образцах были проведены измерения величины равномерного удлинения; они показали, что снижение максимального удлинения образцов обусловлено уменьшением как равномерной, так и сосредоточенной деформации.

Следует отметить, что неаддитивность диаграммы растяжения отмечалось и ранее. Так, Дит [8] приводит данные для плакированной стали; аналогичное положение имеет место при растяжении феррана [9], однако в этом случае трудно исключить влияние на пластичность технологических факторов.

3) Растяжение образцов, состоящих из большого ($\geqslant 10$) числа слоев меди и олова или стали и олова. Эти образцы также деформируются как целое вплоть до момента разрушения, когда в шейке около места разрыва происходит расслоение. Вид образца в недеформированном состоянии и перед разрывом показан на фиг. 7 а, б. Сужение в шейке в плоскости слоев и в перпендикулярном направлении примерно одинаково. (Этого не получилось бы при независимой деформации слоев, когда сужение в плоскости слоев оказывается значительно меньшим.)

В таблице 2 приведены средние данные по деформации и разрушению

образцов CuSn и FeSn. Снова обратим внимание на аддитивность $\sigma_в$. Значение $\sigma_т$ несколько завышено по сравнению с аддитивным значением. Аддитивность $\delta$ в данном случае проверить затруднительно, так как удлинения



а б

*Фиг. 7.*

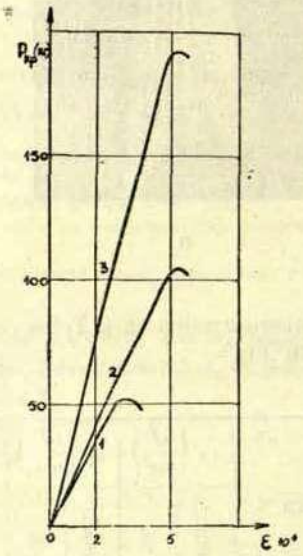
меди и олова примерно одинаковы, а удлинение образцов FeSn определяется в основном пластическими свойствами Fe.

Таблица 2

| Название образцов | Число образцов | Число и характеристики слоев | $\sigma_т \left(\frac{кГ}{мм^2}\right)$ вычисл. | $\sigma_т \left(\frac{кГ}{мм^2}\right)$ эксп. | $\sigma_в \left(\frac{кГ}{мм^2}\right)$ вычисл. | $\sigma_в \left(\frac{кГ}{мм^2}\right)$ эксп. | $\delta$ % вычисл. | $\delta$ % эксп. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cu Sn | 14 | 5 Cu $s = 0{,}52$ *мм*; $\sigma_в = 24{,}5 \frac{кГ}{мм^2}$; $\delta = 48$ %; $\sigma_т = 7{,}0 \frac{кГ}{мм^2}$ 5 Sn $s = 0{,}47$ *мм*; $\sigma_в = 2{,}5 \frac{кГ}{мм^2}$ $\delta = 50$ %; $\sigma_т = 2 \frac{кГ}{мм^2}$ | 4,9 | 6,0 | 14,0 | 14,3 | 49 | 52 |
| Fe Sn | 6 | 8 Fe $s = 0{,}32$ *мм*; $\sigma_в = 40 \frac{кГ}{мм^2}$ $\delta = 8$ %; $\sigma_т = 24 \frac{кГ}{мм^2}$ 8 Sn $s = 0{,}31$ *мм*; $\sigma_в = 2{,}5 \frac{кГ}{мм^2}$ $\delta = 50$ %; $\sigma_т = 2 \frac{кГ}{мм^2}$ | 13,3 | 14,7 | 21,3 | 22,0 | 29 | 11 |

При проведении опытов по сжатию мы интересовались, в основном, стадией разрушения образцов.

4) При сжатии нескольких несвязанных слоев между жесткими плитами разрушение происходит в результате потери продольной устойчивости, имеющей в зависимости от геометрии образца упругий или пластический характер. Диаграмма сжатия в этом случае, как и при растяжении несвязанных слоев, аддитивна. На фиг. (8) показана диаграмма сжатия для двух слоев Fe различной толщины (кривая 1); там же показаны диаграммы сжатия при раздельном нагружении этих слоев (кривые 2 и 3). Процесс потери устойчивости начинается при нагрузке, несколько большей суммы критических нагрузок для отдельных слоев. Если в дальнейшем ходе деформации возникает взаимное стеснение слоев, то нагрузка может возрасти почти до значения, соответствующего $P_{кр}$ для одного слоя суммарной толщины.




*Фиг. 8*

*Фиг. 9*

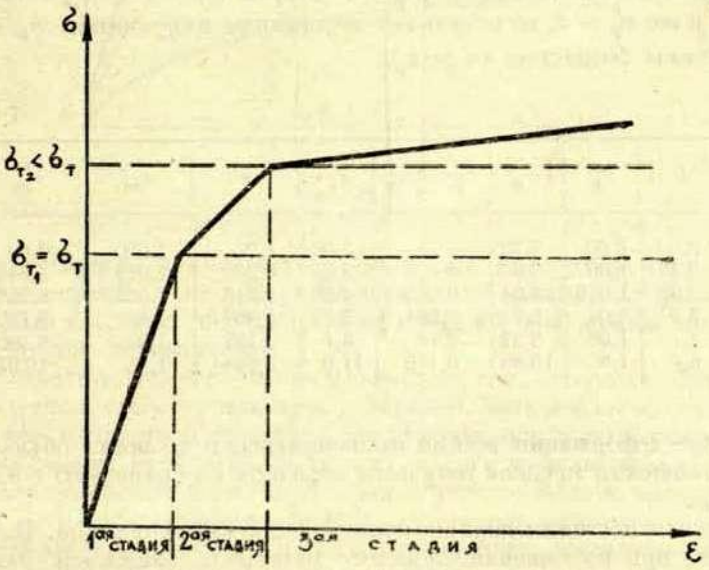
5) Сжатие образцов, состоящих из связанных одинаковых или различных слоев. Испытывались двух-трехслойные образцы, состоящие из спаянных пластин Cu и Fe, и многослойные образцы CuSn и FeSn разной геометрии. Во всех случаях, когда нагрузка была достаточна для разрушения, последнее имело вид продольного изгиба (фиг. (9)). Диаграмма сжатия для образца CuSn показана на фиг. (25). За исключением случая очень длинных образцов, $P_{кр}$ оказывается меньшей, чем рассчитанная в предположении о деформации как целого образца с некоторыми усредненными упруго-пластическими свойствами, однако большей, чем $P_{кр}$, рассчитанная в предположении независимой деформации слоев. Наблюдение за ходом деформации приводит к заключению, что потеря устойчивости происходит вскоре после появления сдвигов или трещин в слое Sn. Их возникновение связано с наличием касательных напряжений из-за начального эксцентриситета слоев, неоднородности напряженного состояния у торцов и несовершенной центрировки образца. Указанные дефекты обуславливают возможность потери устойчивости путем независимой деформации слоев. Значения $P_{кр}$, рассчитанные по значению предела текучести Sn $\sigma_т = 2\ \frac{кГ}{мм^2}$ и измеренному перед началом потери устойчивости прогибу слоев, достаточно хорошо согласуются с экспериментальными значениями $P_{кр}$.

В таблице 3 приведены значения $P_{кр}$ для образцов, состоящих из двух слоев Fe, спаянных слоями Sn различной толщины (длина пластин — 29 *мм*, ширина — 13 *мм*), рассчитанные в предположении независимой деформации слоев ($P_1$), совместной деформации слоев ($P_2$) и согласно приведенным выше соображениям ($P_3$).

Таблица 3.

| Образец | Характеристика образца | Величина прогиба | $P_3$ (*кГ*) | $P_1$(*кГ*) | $P_2$(*кГ*) | $P_{эксп.}$ (*кГ*) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Fe Sn Fe | $s_{Fe} = 0{,}7,\ s_{Sn} = 0{,}1$ | $0{,}1 \pm 0{,}03$ | $300 \pm 60$ | 280 | 900 | 260 |
| Fe Sn Fe | $s_{Fe} - 0{,}5,\ s_{Sn} = 1{,}5$ | $0{,}07 \pm 0{,}03$ | $780 \pm 160$ | 76 | 3400 | 680 |

Исследуем на основании соотношений раздела 1 напряженное и деформированное состояние при испытаниях на растяжения образцов, состоящих из связанных слоев. Если коэффициенты Пуассона слоев $\nu \neq \nu'$, то уже при упругой деформации возникают поперечные напряжения $\sigma_y$ и $\sigma'_y$, сжимающие в мягких (меньшее $E$) и растягивающие в жестких слоях. Если же $\nu = \nu'$, то напряженное состояние слоев является линейным до достижения предела текучести $\sigma_T$ мягкого слоя. Для металлических образцов вполне можно ограничиться рассмотрением последнего случая. Если $\frac{\sigma'_T}{\sigma_T} \neq \frac{E'}{E}$, то пластическая деформация слоев начинается неодновременно. Типичная диаграмма растяжения может быть разбита на три части (фиг. 10)




*Фиг. 10.*

При $\sigma_x = \sigma_T$ деформация переходит во вторую стадию, когда $\sigma_x \neq \sigma'_x$ даже при равенстве модулей упругости, и возникают поперечные напряжения $\sigma_y$ и $\sigma'_y = -\sigma_y$. Величина последних увеличивается при дальнейшей деформации вплоть до перехода жесткого слоя в пластическое состояние. Материал мягкого слоя на второй стадии деформации находится в предель-

ном состояний пластичности. Различие между $\sigma_x$ и $\sigma'_x$ оказывается меньшим, чем в случае нестесненной поперечной деформации слоев. Жесткий слой переходит в пластическое состояние ранее, чем в случае нестесненной деформации (при выполнении соотношения $\sigma'_T = \sqrt{\sigma'^2_x - \sigma_x \sigma_y + \sigma^2_y}$ вместо $\sigma'_T = \sigma'_x$). Наличие пеперечных напряжений приводит к повышению предела текучести образца в целом ($\bar{\sigma}_T$) и к неаддитивности диаграммы растяжения на второй стадии деформации. С переходом к третьей стадии деформации поперечные напряжения снова исчезают.

При разгрузке образца должен иметь место эффект, аналогичный эффекту Баушингера в поликристаллах: мягкий слой после снятия нагрузки оказывается сжатым, жесткий-растянутым. Деформация сжатия может быть упругой или пластической в зависимости от величины напряжений нагрузки.

Приведем некоторые результаты расчетов, относящихся к образцам Cu Sn. Предположим, что к Cu и Sn применимы полигональные диаграммы деформации (фиг. 2), причем

$$\lambda^* = \lambda^{*\prime} = 70, \quad \frac{E_{Cu}}{E_{Sn}} = \frac{E'}{E} = 3, \quad \sigma_{T\,Sn} = \sigma_T = 2\,\frac{кГ}{мм^2}$$

все напряжения будем выражать в единицах $\sigma_T$. В таблице 4 приведены значения напряжений в слоях Cu и Sn и их деформаций (в относительных единицах) в зависимости от значения растягивающего напряжения $p$. В последних трех столбцах таблицы даны значения напряжения и деформаций для случая несвязанных слоев Cu и Sn. Полученные значения напряжений справедливы до наступления течения слоя Cu т. е. до $\sigma'_i = \sigma'_T$. Таким образом для отожженой меди ($\sigma'_T = 3$) вторая стадия деформации отсутствует. Если же $\sigma'_T > 3$, то возникают поперечные напряжения $\sigma_y$, $\sigma'_y$ и жесткость системы возрастает ($\varepsilon > \varepsilon_0$).

Таблица 4

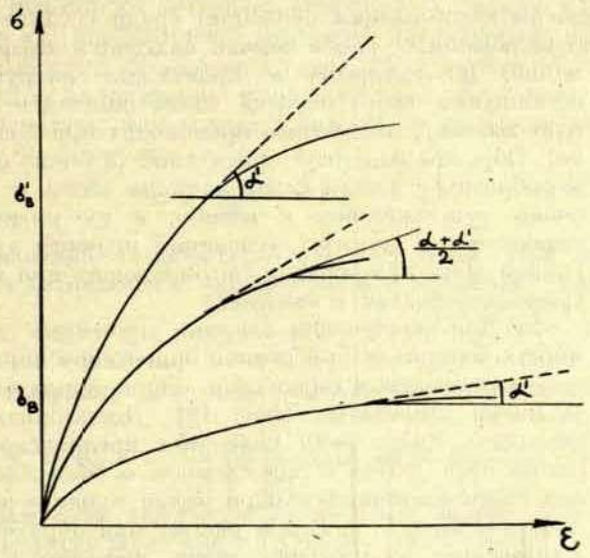
| $\sigma_i$ | $P$ | $\sigma_x$ | $\sigma'_x$ | $\sigma_y = -\sigma'_y$ | $\sigma_i$ | $\varepsilon$ | $\sigma_{xo}$ | $\sigma'_{xo}$ | $\varepsilon_0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 2,00 | 1,00 | 3,33 | 0 | 3,00 | 1,00 | 1,000 | 3,00 | 1,000 |
| 1,025 | 2,32 | 1,007 | 3,63 | 0,030 | 3,65 | 0,202 | 1,025 | 3,645 | 1,213 |
| 1,005 | 2,63 | 1,015 | 4,24 | 0,055 | 4,26 | 1,416 | 1,005 | 4,755 | 1,418 |
| 1,001 | 3,37 | 1,04 | 5,7 | 0,094 | 5,75 | 1,907 | 1,01 | 5,730 | 1,910 |
| 1,02 | 4,7 | 1,08 | 8,32 | 0,140 | 8,4 | 2,787 | 1,02 | 8,380 | 2,793 |
| 1,03 | 6,0 | 1,2 | 10,88 | 0,170 | 11,0 | 3,644 | 1,03 | 10,97 | 3,657 |

Увеличение деформации весьма незначительно и не может объяснить некоторого повышения предела текучести образцов по сравнению с аддитивным значением.

Обратимся к стадии неравномерной деформации образца. Выше указывалось, что при растяжении слоистого материала снижается равномерная и полная деформация мягких слоев и удлинение оказывается меньшим аддитивного значения. Как известно, образование шейки при растяжении начинается, когда упрочнение материала становится недостаточным, чтобы компенсировать локальное уменьшение сечения, вызванное малыми неоднородностями образца. Естественно принять, что если в случае раздельного растяжения слоев шейка образуется соответственно при выполнении условий $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}\alpha$, $\frac{d\sigma'}{d\varepsilon'} = \operatorname{tg}\alpha'$, то вследствие аддитивности диаграммы растя-

жения при равномерной деформации этот процесс в слоистом образце начнется при выполнении условия $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \alpha'}{2}$ (фиг. 11).

Если после достижения $\sigma = \sigma'_B$ упрочнение жесткого слоя оказывается постоянным, (штриховая линия на фиг. 11), то равномерное удлинение спаянного образца должно быть равно равномерному удлинению мягкого слоя. Наблюдающееся на опыте более раннее образование шейки будет происходить, если а) упрочнение жесткого слоя при $\sigma > \sigma_B$ снижается, б) полная деформация жесткого слоя меньше равномерной деформации мягкого слоя. В последнем случае не представляется возможным заранее найти величину равномерной деформации слоистого образца, так как нельзя получить значения напряжений на неустойчивой стадии деформации после




*Фиг. 11.*

достижения истинного напряжения разрушения. Возможно, напротив, что тщательное измерение величины равномерной деформации слоистых образцов может дать сведения для построения истинной диаграммы растяжения менее пластичной составляющей.

Следует отметить, что усреднение удлинений, т. е. задержка образования шейки в жестком слое стесняющим действием мягкого слоя, происходит лишь в случае достаточной прочности соединения, ибо только в этом случае сильное упрочнение материала мягкого слоя компенсирует геометрическое разупрочнение всего сечения образца. В этом процессе взаимодействия слоев по границам раздела возникают касательные напряжения. Эти напряжения снимаются, если соединение достаточно прочно и деформации переносятся на смежное сечение или вызвают расслоение образца, приводящее в дальнейшем к независимому образованию шейки в жестком слое.

После образования шейки сужение в слоях развивается одновременно. Величина сосредоточенного удлинения определяется ходом упрочнения материалов. Значительное снижение удлинения слоистых образцов объясняется слабостью упрочнения при $\sigma > \sigma_B$. Расслоение образца непосредственно перед разрывом обусловлено наличием поперечных напряжений в шейке.

Эти напряжения имеют место и в однородных образцах и не специфичны для слоистых материалов: (аналогичное расслоение в шейке составных образцов наблюдал Бриджмен [10]).

## 2. Растяжение и сжатие в направлении, нормальном к плоскости слоев ($\varphi = 0°$)

При этой ориентации были проведены следующие испытания.

1) Растяжение образцов Cu Sn. Подобные образцы разрываются после весьма незначительного удлинения при нагрузках 3—5 $\frac{кГ}{мм^2}$ обычно по границам между слоями Cu и Sn. Такое поведение объясняется несовершенством технологии изготовления образцов: среди соединений 100—200 „последовательно включенных" слоев обычно находится деффектное соединение, по которому и происходит разрушение, (если оставшуюся часть образца снова поместить в испытательную машину, то разрыв происходит при большей нагрузке). Образцы подобной ориентации (а также описанные ниже образцы с малым углом наклона слоев к оси образца) очень чувствительны к изгибу, и их низкая прочность определяется помимо указанной причины действием расслаивающих напряжений, возникающих при неточной центрировке образца в зажимах.

*Фиг. 12.*

2) Для исключения влияния случайных дефектов прочность материала при данной ориентации определялась путем растяжения одного слоя олова, заключенного между медными стержнями (фиг. 12). Достаточная толщина и жесткость слоев меди позводяет предположить, что поведение слоя олова в однослойном и многослойном образцах будет одинаковым. (При малой толщине жестких слоев возникающие в них при растяжении образца поперечные сжимающие напряжения могут привести к потере продольной устойчивости этими слоями однако исследование этого вопроса нами не проводилось).

Приведенные в таблице 5 значения подтверждают известную зависимость прочности стыковых соединений (пайка, склейка), от геометрии соединительного слоя: прочность соединений возрастает с увеличением $\frac{a}{s}$ [11]. Остановимся на двух, очевидно, наилучших объяснениях этой зависимости. Мейсснер и Болдауф [12], основываясь на испытании различных соединений, приходят к заключению, что зависимость прочности от геометрии соединения объясняется действием напряжений, возникающих при усадке материала (например, при остывании после пайки) или при его последующем нагружении (из-за различия в упругих свойствах слоя и соединяемых деталей). Разрушение соединений согласно этим авторам происходит по границе слоя, начинаясь на ее периметре. Бредс [13] исследовал прочность соединения серебром и сплавами серебра стержней из различных

Таблица 5.

| $\frac{a}{s}$ | $p_c$ $\frac{кГ}{мм^2}$ |
|---|---|
| 0,3 | 2,5 |
| 0,5 | 3,0 |
| 0,8 | 3,8 |
| 1,2 | 5,1 |
| 2,6 | 6,5 |
| 3 | 6,9 |
| 7,5 | 7,4 |
| 60 | 8,2 |

сталей. Он объясняет указанную зависимость возрастающим стеснением пластической деформации при увеличении значения $\frac{a}{s}$. Прочность соединения при этом стремится к хрупкой прочности материала. Разрушение в упомянутых опытах происходило по средней плоскости соединений. Подобный же вид хрупкого разрушения тонких слоев наблюдался в работах [14, 15].

По нашему мнению причиной указанной зависимости могут быть оба фактора — внутренние напряжения, концентрирующиеся на периметре границ соединительного слоя, и стеснение пластической деформации.

Рассмотрим образец, состоящий из двух цилиндрических частей (диаметр $2a$, модуль упругости $E'$, предел текучести $\sigma'_T$, коэффициент теплового расширения или коэффициент усадки при изменении влажности $\alpha'$), соединенных слоем некоторого материала (толщина $2s$, модуль упругости $E$, предел текучести $\sigma_T$, коэффициент теплового расширения или коэффициент усадки при изменении влажности $\alpha$ ) (фиг. 12). Средние по слою радиальные и тангенциальные напряжения, возникающие в результате усадки при понижении температуры или потере влаги после осуществления соединения определяются по формуле

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{E(\alpha' - \alpha)\Delta T}{1 - \nu}, \tag{20}$$

где $\Delta T$ — изменения температуры или влажности. При деформировании соединений растягивающим напряжением $p$ возникают напряжения

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{p\nu}{1 - \nu}\frac{E' - E}{E}. \tag{21}$$

Вводя снова поправку $\beta$ на неполное стеснение поперечной деформации, получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{\beta}{1 - \nu}\left[E(\alpha' - \alpha)\Delta T + p\nu\frac{E' - E}{E}\right]. \tag{22}$$

По границам слоя действуют касательные напряжения, распределение которых обсуждалось выше (фиг. 4). Полное скалывающее усилие по границам между слоем и стержнями

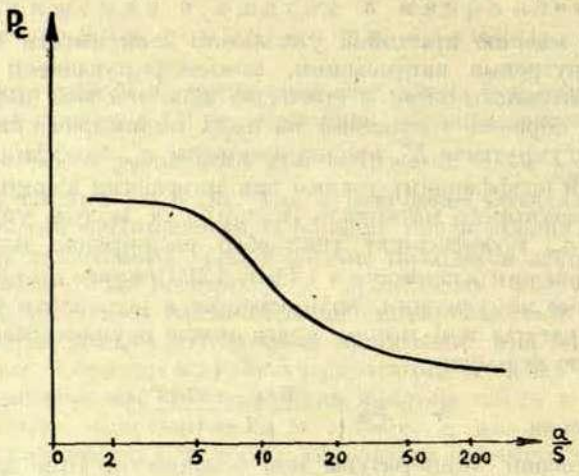
$$T = \int_0^a \tau\, dx = \frac{\beta h}{1 - \nu}\left[E(\alpha' - \alpha)\Delta T + p\nu\frac{E' - E}{E}\right]. \tag{23}$$

При большом различии между $\alpha$ и $\alpha'$, касательные усилия могут вызвать разрушение по границе при малых растягивающих нагрузках или даже в их отсутствии. Если разрушение вызвано действием касательных напряжений, то зависимость прочности соединения ($p_c$) от геометрии слоя в согласии с экспериментом [12] должна иметь вид кривой показанной на фиг. 13. Разрушение начинается при некотором критическом значении напряжения $\tau_{max}$, которое можно приближенно определить величиной $T$ и площадью ($S_T$), по которой действует основная часть усилия $T$ (фиг. 14). (Здесь мы будем использовать данные расчета касательных напряжений, основы которого изложены в работе [1]).

Рассмотрим следующие случаи (см. фиг. 13, 14):

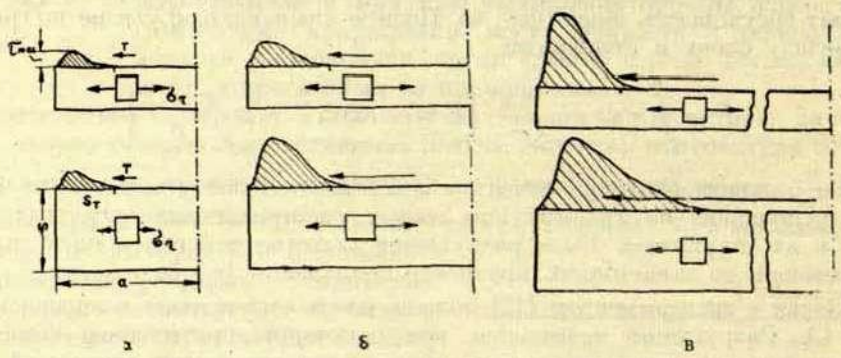
а) Малые значения $\frac{a}{s}$ ($\lesssim 4 - 8$). Увеличени $s$ не приводит к уменьшению $p_c$, так как уменьшается $\sigma_r$ (из-за падения $\beta$), а, следовательно и $T$. Уменьшение $\alpha$ не уменьшает $p_c$ по той же причине. Таким образом, в этой области значений $\frac{a}{s}$ $p_c \sim$ Const.

б) Средние значения $\frac{a}{s}\left(4-8 \lesssim \frac{a}{s} \lesssim 50\right)$. Увеличение $s$ приводит к уменьшению $p_c$, так как $\sigma_r \sim Const.$ ($\beta \simeq 1$), $T$ увеличивается, а $S_T$ увеличивается медленно ($\tau_{max}$ растет). Уменьшение $a$ также приводит к уменьшению $p_c$, так как $T \sim Const.$ а $S_T$ уменьшается.




*Фиг. 13.*

в) Большие значения $\frac{a}{s}\left(\frac{a}{s} \gtrsim 50\right)$. Увеличение $s$ не приводит к уменьшению $p_c$, так как увеличение $T$ компенсируется увеличением $s_T$; ($\tau_{max} \sim$ $\sim Const$). Уменьшение $a$ также не приводит к уменьшению $p_c$, так как $T \sim$ $\sim Const$ и $s_T \sim Cons_t$ ($\tau_{max} \sim Const$).



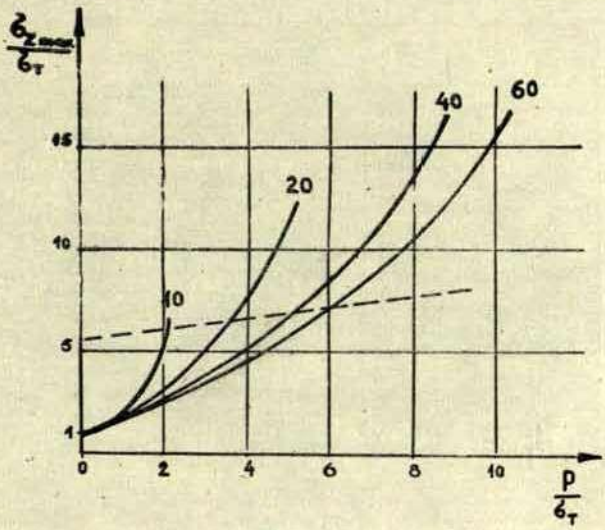

*Фиг. 14.*

При растяжении соединения у периметра границы создается также концентрация нормальных напряжений $\sigma_z$, причем как показывает расчет $\sigma_{z\,max}$ увеличивается с увеличением $\frac{a}{s}$, достигая значения $\sim 4-5\ p$. Эти напряжения также могут вызывать разрушение по границе.

Если материал пластичен и около границ не возникает хрупких прослоек (как это часто бывает при пайке), то напряжения по границам раздела могут не привести к разрушению соединения. Последующее изменение распреде-

ления напряжений в слое приводит к тому, что наиболее опасной в отношении разрушения становится средняя плоскость соединения. Действительно, если толщина слоя велика, то его пластическое разрушение будет происходить около средней плоскости, где стеснение пластической деформации наименьшее (значения $\sigma_r$ минимальны, значения $\sigma_z - \sigma_r$ максимальны). Если же слой тонок, то разрушение имеет хрупкий характер и определяется значением $\sigma_z$, которое, согласно Качанову [7] максимально в центрсредней плоскости. Кроме того, как следует из современных представлений о хрупком разрушении [16, 17] и экспериментальных данных [14], сопротивление хрупкому разрушению уменьшается с увеличением предшествующей пластической деформации, последнее же максимально в средней плоскости слоя.

Характер разрушения определяется приближенными соотношениями $\sigma_z = \sigma_{xp}$; $\sigma_z - \sigma_r = \sigma_{пл}$, где $\sigma_{xp}$ и $\sigma_{пл}$ — соответствтенно прочность при хрупком и пластическом разрушении. Так как при малых $\frac{a}{s}$ $\sigma_r$ малы и




*Фиг. 15.*

обычно $\sigma_{пл} < \sigma_{xp}$, то в этой области значений $\frac{a}{s}$ наблюдается пластическое разрушение, причем прочность слабо зависит от $\frac{a}{s}$. Начиная с некоторых значений $\frac{a}{s}$, при росте $\sigma_z$ сначала начинает удовлетворятся первое из приведенных соотношений и разрушение становится хрупким.

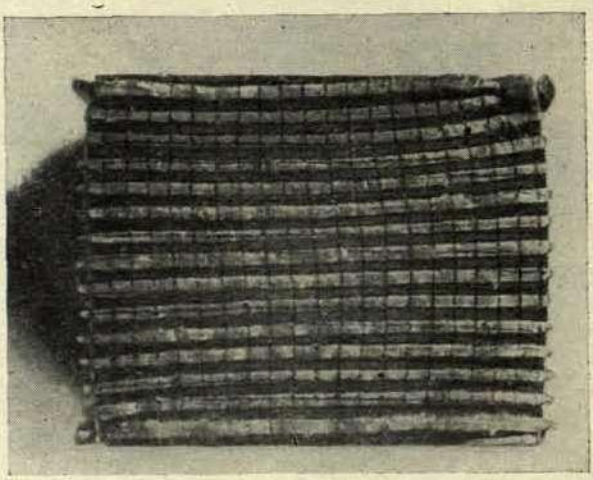
На фиг. 15 показан качественный характер зависимости $\sigma_{zmax}$ от нагрузки при различных значениях $\frac{a}{s}$ (по Качанову). Штрихованной прямой показаны значения $\sigma_{xp}$ (наличия наклона прямой определяется приведенными выше соображениями о зависимости сопротивления хрупкому разрушению от степени пластической деформации). Видно, что прочность соединения увеличивается с увеличением $\frac{a}{s}$. Точный вид зависимости определяется значениями $\sigma_{xp}$ и $\frac{a}{s}$. При больших $\frac{a}{s}$ зависимость прочности от $\frac{a}{s}$ становится более слабой. Таким образом, зависимость прочности соединения от гео-

метрии слоя должна иметь тот же вид, что при разрушении под действием внутренних напряжений (фиг. 13).

Механические свойства соединяемых деталей также оказывают влияние на прочность соединения. Малые значения $E'$ увеличивают свободу поперечной деформации и уменьшают значение $\sigma_z - \sigma_r$, тем самым снижая прочность как при пластическом, так и при хрупком разрушении.

В том же направлении действует снижение $\sigma'_T$ соединяемых деталей. Различие в упругих свойствах деталей и слоя помимо создания возможности разрушения по границам увеличивает жесткость напряженного состояния у средней плоскости соединения, что приводит к расширению области хрупкого разрушения за счет области пластичного разрушения.

3) Сжатие образцов CuSn и FeSn. Снимались диаграммы для образцов разной ширины с различной толщиной слоев Sn. Одна из диаграмм приведена на фиг. 25. Картина, наблюдающаяся при деформации, такова. В начале нагрузка быстро растет, изменения вида образца не наблюдается; затем становится заметным выжимание слоев Sn и увеличение нагрузки

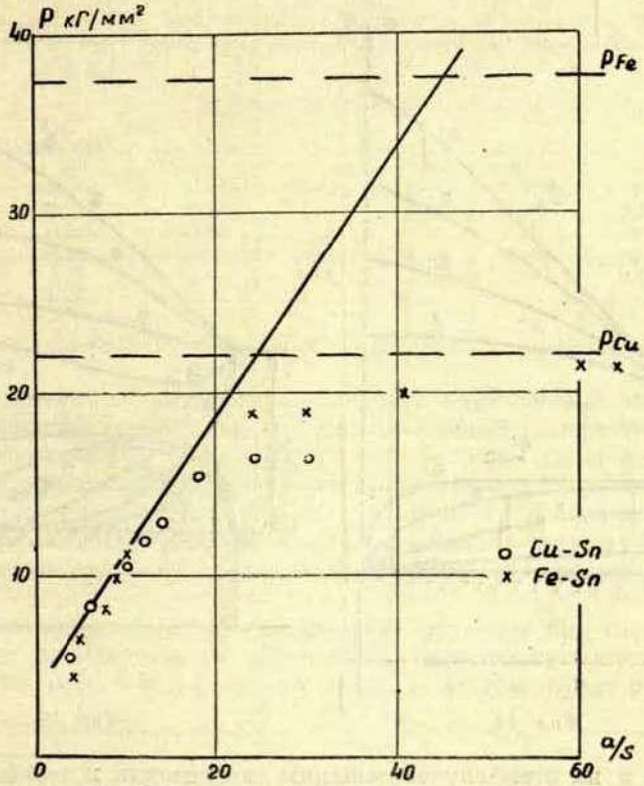


*Фиг. 16*

замедляется. Выжимание более значительно для малых значений $\frac{a}{s}$ и в случае образцов Fe Sn. При некоторой нагрузке начинается также уширение слоев Cu или Fe (в последнем случае это явление начинается много позже, после значительного выжимания слоев Sn); появляется бочкообразность образца в целом. На фиг. 16 показан образец Cu Sn после сжатия. При больших давлениях часто происходит боковой сдвиг слоев, объясняющийся нестрогой параллельностью торцевых граней образца. Часто происходит разрыв слоев по диагонали образца, сопровождающийся боковым соскальзыванием и „перемешиванием" системы слоев. При этом осадка образца определяется, в основном, сдвигом, а не уменьшением толщины отдельных слоев. Как и в случае однородных образцов, в результате трения о плиты пресса у торцов образуются жесткие конусы, которые, внедряясь в текущие при больших нагрузках совместно слои материала, расчленяют последние. Распайка образцов CuSn после сильной деформации позволяет определить вид слоев. Отметим, что разрывы в слоях Cu при больших деформациях и малых толщинах возникают и при однородном осаживании. Измерение толщин слоев после деформации показывает также, что при больших

значениях $\frac{a}{s}$ уменьшение толщин слоев Cu и Sn почти одинаковы; большая деформация слоев Cu наблюдается при малых $\frac{a}{s}$. Различия в уменьшении толщин Fe и Sn больше и сохраняется до больших значений $\frac{a}{s}$.

На фиг. 17 приведена зависимость сопротивления осаживанию образцов CuSn и FeSn от значения $\frac{a}{s}$. За меру сопротивления образцов выбрано напряжение, достигнутое при деформации 10%. Предварительно были измерены напряжения при этой деформации однородных образцов Fe Cu, и Sn $\left(37,\ 22,\ \text{и}\ 3\ \frac{кГ}{мм^2}\ \text{соответственно}\right)$. Прямая на фиг. 17 показывает зависимость, расчитанную по формуле (16), не учитывающей упругой и пластической деформации жестких слоев и упрочнения материалов.




*Фиг. 17.*

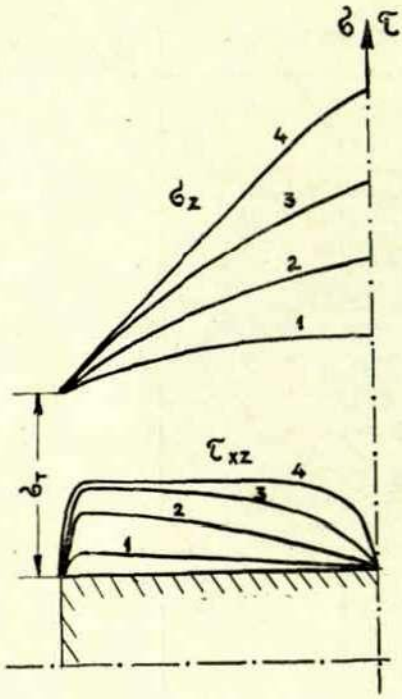
Рассмотрим изменение напряженного состояния в слоях, происходящее по мере увеличения нагрузки. Примем, что $\frac{a}{s}$ велико, т. е. $\gamma \sim 1$. Если выполнено соотношение

$$\frac{E}{E'} = \frac{\nu'}{\nu}, \tag{25}$$

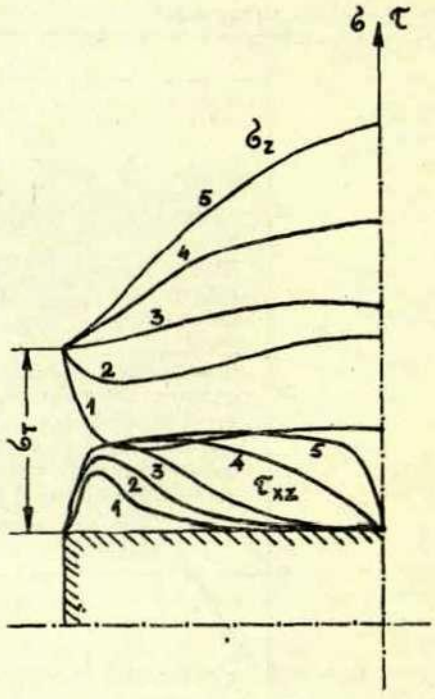
о при упругой деформации слоев напряженное состояние линейно, напряжения $\sigma_x = \sigma'_x = \sigma_y = \sigma'_y = 0$. При $\sigma_z = \sigma_T$ начинается пластическое течение мягкого слоя. На фиг. 18 показано изменение напряженного состояния по границе между слоями по мере развития пластической деформации

согласно [7]. При больших нагрузках распределение напряжений совпадает с изображенным на фиг. 4. Если соотношение (24) не выполняется, то поперечные напряжения в слоях возникают уже в упругой области. Распределение напряжений по границе для последовательных моментов деформации показано на фиг. 19. Течение в мягком слое начинается от периметра и распространяется вглубь слоя. Конечное распределение напряжений то же, что в предыдущем случае. Течение в жестком слое начинается при условии $\sigma'_T = \sigma_z + \sigma_x$ которое, прежде всего, начинает выполняться в центральной части слоя; отсюда течение распространяется к краям слоя.

Неоднородность напряженного состояния в слоях не позволяет точно указать внешнее напряжение, при котором начинается течение в случае слоев с разными упругими свойствами. Ограничимся самым грубым приближением, т. е. примем, как в разделе 1, что напряженное состояние в слоях




*Фиг. 18*




*Фиг. 19*

однородно, и на этом случае выясним зависимость поведения материала от свойств слоев. Положим $s = s'$. Как следует из формулы (17), течение в мягком слое начинается при напряжении

$$\bar{\sigma}_z = \frac{(E + E')(1 - \nu)}{E' + E - 2\nu E'} \sigma_T. \tag{25}$$

Пластическая деформация мягкого слоя остается по порядку величины равной упругой до наступления пластической деформации жесткого слоя, после чего деформации обоих слоев быстро растут.

В случае отсутствия упрочнения и при выполнении условия $E = E'$ напряжение начала течения в жестком слое

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_T + \sigma'_T}{2}$$

и поперечные напряжения после начала течения в жестком слое остаются постоянными. Если имеет место упрочнение и $E \neq E'$ то $\bar{\sigma}_z > \frac{\sigma_T + \sigma'_T}{2}$ и поперечные напряжения продолжают расти и после начала течения жесткого слоя. Деформации $\varepsilon_z$ и $\varepsilon'_z$ мягкого и жесткого слоев на третьей стадии течения отличаются только соответствующими упругими частями.

Взаимное влияние слоев пропорционально толщинам; так, большие толщины жестких слоев приводят к более значительному повышению предела текучести мягких слоев.

В таблице 6 приведены результаты расчета напряжений и деформаций слоев образца CuSn для $s_{Cu} = s_{Sn}$, $\sigma_{\tau_{Cu}} = 3{,}5\,\sigma_{\varepsilon_{Sn}}$ Видно, что течение ограничивается слоем в интервале сжимающих напряжений от 1,27 $\sigma_T$ до 2,26 $\sigma_T$.

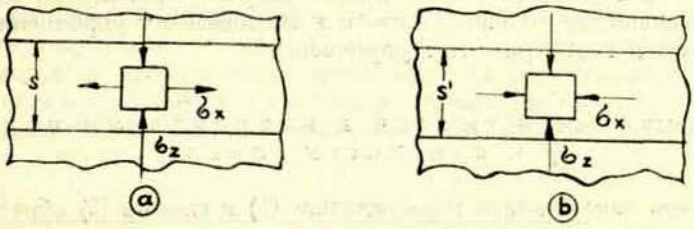
Таблица 6.

| $p = \sigma_z = \sigma'_z$ | $\sigma_x = \sigma_y = -\sigma'_x = -\sigma'_y$ | $\varepsilon_z$ | $\varepsilon'_z$ | $\varepsilon_z + \varepsilon'_z$ | $\varepsilon_{zo}$ | $\varepsilon'_{zo}$ | $\varepsilon_{zo} + \varepsilon'_{zo}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,214 | 0,376 | 0,870 | 1,246 | 0,333 | 1 | 1,333 |
| 1,273 | 0,73 | 0,48 | 1,11 | 1,59 | 0,415 | 19,6 | 20,2 |
| 1,51 | 0,505 | 0,60 | 1,54 | 2,14 | 0,51 | 38,0 | 35,5 |
| 2 | 0,73 | 0,83 | 2,20 | 3,03 | 0,666 | 88,2 | 69,0 |
| 2,26 | 1,24 | 1,01 | 2,65 | 3,66 | 0,757 | 87,2 | 88 |
| 3 | 1,61 | 26 | 28 | 54 | 1 | 158 | 159 |

В последних 3 столбцах приведены значения деформаций при отсутствии взаимного стеснения слоев.

Учесть конечную ширину слоев в первом приближении можно введением коэффициента $\gamma$ (см. 1, 2). За счет уменьшения поперечных напряжений расширяется вторая стадия деформации (течение одних слоев Sn); течение слоев Cu начинается при больших напряжениях. Средние поперечные деформации слоев при подобном расчете получаются различными, и таким образом может быть приближенно оценено выжимание мягких слоев. Деформации $\varepsilon_z$ мягких слоев на второй стадии течения получаются значительно большими.

Рассмотрим вопросы прочности широких образцов при сжатии. Разрушение может происходить по плоскостям, перпендикулярным границам слоев как в жестких, так и в мягких слоях. В первом случае разрыв явля-




*Фиг. 20.*

ется прямым следствием действия растягивающих напряжений $\sigma_x$ (фиг. 20а); он происходит при напряжениях несколько больших, чем при отсутствии сжимающих напряжений $\sigma_z$ (как обычно в опытах на растяжение при наличии нормального сжимающего напряжения). Во втором случае имеем дело с явлением, названным Бриджменом „перекусыванием" [10]. Разрушение происходит при $\sigma_z \neq \sigma_x$ даже если напряжение $\sigma_x$ сжимающее (фиг. 20б).

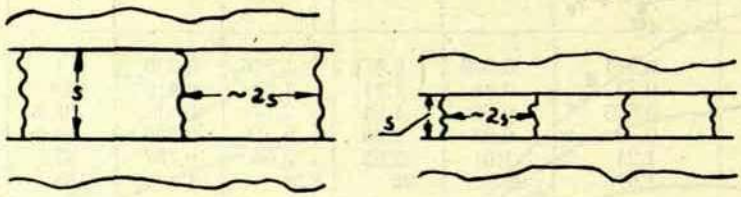
Укажем на зависимость характера разрушения от отношения толщин жестких и мягких слоев $\frac{s'}{s}$:

а) $\frac{s'}{s} \gg 1$ — Далеко идущая упругая деформация; разрушение в результате „перекусывания" мягких слоев;

б) $\frac{s'}{s} \ll 1$ — Быстро наступает пластическая деформация; разрушение жестких слоев.

в) $\frac{s'}{s} \sim 1$ — Разрушение жестких слоев, особенно если они хрупки.

С последним случаем приходится встречаться при рассмотрении разрушения горных пород, структура которых представляет собой чередующиеся хрупкие и пластичные слои. Наблюдения показывают [18], что под давлением вышележащего материала хрупкие слои распадаются на ряд блоков, размер которых по горизонтали находится в прямой зависимости от толщины слоя (фиг. 21). Указанное явление может быть объяснено следующим




*Фиг. 21.*

образом. Разрыв в некотором месте слоя, происшедший по указанной выше причине, не снимает напряжений на других участках, если расстояние до соседнего разрыва много больше толщины слоя. Однако, если следующий разрыв находится на расстоянии порядка толщины слоя, то напряжения $\sigma_x$ в блоках падают. Существенное падение напряжений происходит при $a \lesssim 2s$; до этих размеров и будет происходить дробление слоя на блоки, так как снятие напряжений, уменьшающее жесткость системы, энергетически выгодно.

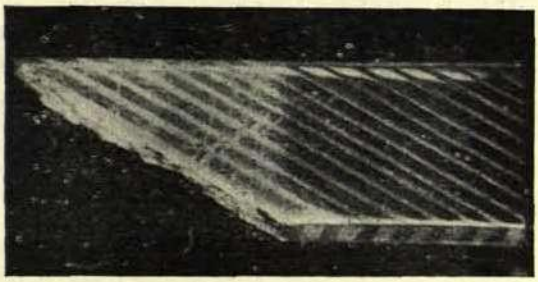
Отметим существенное различие между поведением материала при растяжении и при сжатии. В то время как при растяжении толщины слоев увеличиваются и система геометрически разупрочняется, при сжатии происходит уменьшение толщин слоев, и к физическому упрочнению образца присоединяется геометрическое упрочнение.

### 3. Растяжение и сжатие в направлении под углом $\varphi$ к плоскости слоев

Испытания заключались в растяжении (1) и сжатии (2) образцов CuSn и FeSn при различных значениях угла $\varphi$.

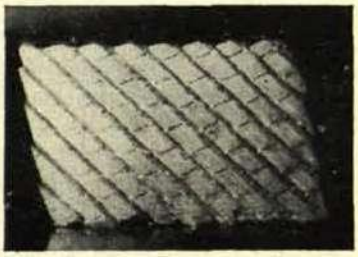
1) Деформация образцов развивается следующим образом. При некоторой нагрузке по излому штрихов, нанесенных на поверхности образца, становятся заметными относительные сдвиги слоев за счет скольжения в слоях Sn. Угол между плоскостью слоев и осью образца уменьшается. Часто скольжение локализуется в одном-двух слоях Sn. Упрочнение образца невелико (см. типичную диаграмму растяжения на фиг. 25). При больших $\varphi$ разрушение происходит после незначительной деформации по границам

слоев Cu и Sn как и в случае $\varphi = 0°$. Переход от хрупкого разрушения по мягкому слою или по границе к разрушению путем скольжения происходит при угле $\varphi$, значение которого определяется геометрией слоев и соотношением между хрупкой прочностью материала и его сопротивлением скольжению. При малых $\varphi$ разрушение по слою Sn происходит после значительной пластической деформации, измерить которую затруднительно из-за локализации скольжения в немногих слоях. При $\varphi > 60°$ в некоторых случаях происходит разрыв слоя Cu, заключенного между слоями Sn, в которых идет интенсивное скольжение. Характерный вид разрушения показан на фиг. 22.



*Фиг. 22.*

2) Деформация образцов идет за счет сдвига и выжимания мягкого материала. Последнее явление существеннее при малых $\varphi$ и большой толщине слоев. Разрушение путем разрыва слоев наблюдается только при очень малых значениях $\varphi$. При средних значениях разрушения наступает путем больших сдвигов и „перемешивания" слоев. При больших $\varphi$ наблюдается явление, сходное с потерей продольной устойчивости, однако, критические нагрузки в данном случае ниже и спад напряжения после начала процесса менее резкий чем в случае сжатия в направлении, параллельном плоскости слоев. Вид образца после значительной деформации показан на фиг. 23. Отметим, что при средних значениях углов ($\varphi \sim 45°$) нормальные напряжения мало сказываются на начале течения. Последнее начинается в мягком слое почти при тех же напряжениях, что в сплошном образце из мягкого материала. Поведение слоев материала при подобных ориентациях наиболее независимо и свойства материала определяются в основном свойствами мягких слоев.



*Фиг. 23.*

Таблица 7.

| $\varphi$ | $p$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y = \sigma_y'$ | $\sigma_z$ | $\tau_{xy}$ | $\sigma_x'$ | $\sigma_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.27 | 0.27 | 0,27 | 1.27 | 0 | —0.27 | 1.55 |
| | 3.02 | 1.60 | 1.60 | 3.02 | 0 | —1.60 | 4.62 |
| | 4.70 | 3.64 | 3.64 | 4.70 | 0 | —3.64 | 8.34 |
| | 6.42 | 5.33 | 5.33 | 0.42 | 0 | —5.33 | 11.75 |
| | 7.95 | 6.80 | 6.80 | 7.95 | 0 | —6.80 | 14.75 |

Продолжение таблицы 7

| $\varphi$ | $p$ | $\sigma_x$ | $\sigma_y = \sigma_y'$ | $\sigma_z$ | $\tau_{xy}$ | $\sigma_x'$ | $\sigma_i'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15° | 1.20 | 0.28 | 0.24 | 1.12 | 0.075 | —0.12 | 1.39 |
| | 1.92 | 1.20 | 1.18 | 1.79 | 0.12 | —0.95 | 2.95 |
| | 2.19 | 1.59 | 1.58 | 2.04 | 0.137 | —1.5 | 3.73 |
| | 2.34 | 1.81 | 1.80 | 2.18 | 0.147 | —2.0 | 4.31 |
| | 2.44 | 1.96 | 1.96 | 2.27 | 0.153 | —2.8 | 4.80 |
| 30° | 1.08 | 0.31 | 0.17 | 0.81 | 0.202 | 0.23 | 1.15 |
| | 1.32 | 0.71 | 0.66 | 0.99 | 0.246 | —0.07 | 1.75 |
| | 1.38 | 0.84 | 0.81 | 1.03 | 0.258 | —0. | 2.0 |
| | 1.43 | 0.92 | 0.89 | 1.07 | 0.267 | —0.24 | 2.3 |
| | 1.46 | 0.97 | 0.95 | 1.10 | 0.273 | —0.30 | 2.8 |
| 45° | 1.07 | 0.38 | 0.11 | 0.53 | 0.27 | 0.69 | 1.08 |
| | 1.17 | 0.49 | 0.40 | 0.58 | 0.29 | 0.70 | 1.19 |
| | 1.21 | 0.54 | 0.48 | 0.6 | 0.30 | 0.73 | 1.24 |
| | 1.24 | 0.56 | 0.52 | 0.62 | 0.31 | 0.74 | 1.28 |
| | 1.27 | 0.59 | 0.55 | 0.63 | 0.32 | 0.75 | 1.32 |
| 60° | 1.22 | 0.52 | 0.06 | 0.30 | 0.23 | 1.9 | 1.48 |
| | 1.36 | 0.41 | 0.25 | 0.34 | 0.255 | 1.62 | 1.87 |
| | 1.41 | 0.70 | 0.29 | 0.35 | 0.268 | 1.72 | 2.00 |
| | 1.44 | 0.39 | 0.32 | 0.36 | 0.27 | 1.76 | 2.05 |
| | 1.47 | 0.39 | 0.33 | 0.37 | 1.175 | 1.7 | 2.07 |
| 75° | 1.61 | 0.77 | 0.02 | 0.11 | 0.094 | 2.22 | 2.26 |
| | 2.25 | 0.49 | 0.16 | 0.15 | 0.14 | 3.70 | 3.76 |
| | 2.38 | 0.38 | 0.17 | 0.16 | 0.148 | 4.02 | 4.15 |
| | 2.47 | 0.33 | 0.175 | 0.165 | 0.155 | 4.34 | 4.85 |
| | 2.52 | 0.31 | 0.18 | 0.17 | 0.157 | 4.45 | 5.52 |

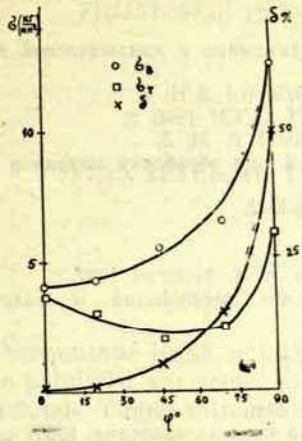
В таблице 7 приведены данные расчета напряжений в слоях при разных $\varphi$ по формулам раздела 1. Отметим, что при средних значениях $\varphi$ течение в жестких слоях не начинается даже при больших нагрузках.

## 4. Анизотропия механических свойств

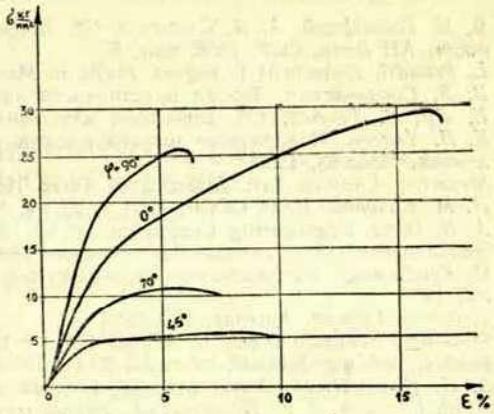
Суммируем кратко вытекающие из экспериментов и приближенного расчета зависимости механических свойств от ориентации слоев. На фиг. 24 эта зависимость приведена для случая растяжения образцов Cu Sn $\left(\varkappa \simeq 1, \frac{a}{s} = 12\right)$. (Заметим, что при малых углах $\varphi$ значения прочности будут и ными при других значениях $\frac{a}{s}$). Характер разрушения меняется от хрупкого разрушения при малых $\varphi$ к разрушению сдвигом при средних $\varphi$ и разрушению путем образования шейки при больших $\varphi$.

На фиг. 25 приведены диаграммы сжатия образцов Fe Sn $\left(\varkappa \simeq 1, \frac{a}{s} = 30\right)$ при различных ориентациях слоев. И здесь наименьшей жесткостью обладают образцы при $\varphi = 45°$.

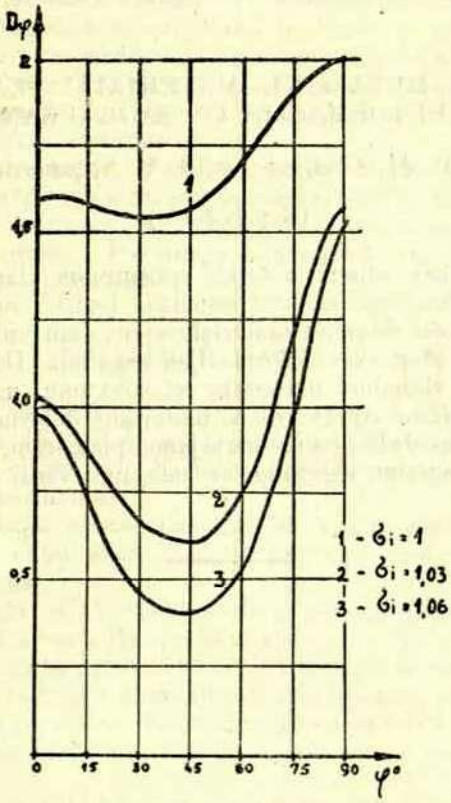
На фиг. 26 показана зависимость модуля пластичности от ориентации. Видно, что жесткость системы минимальна при средних значениях углов, причем степень анизотропии, как уже указывалось в разделе I, увеличивается по мере развития пластической деформации.




*Фиг. 24*




*Фиг. 25*




*Фиг. 26*

30 VI 1957

*Кафедра экспериментальной физики*
*Кафедра теоретической физики Ленинградского Гос. педагогического ин-та.*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *В. М. Гольдфарб, А. В. Степанов.* Сб. Вопросы динамики и динамической прочности, АН Латв. ССР, 1958, вып. 5.
[2]. *L. Prandtl.* Zeitschrift f. angew. Math. u. Mech. 1923, Bd. 3 H. 6.
[3]. *В. В. Соколовский.* Теория пластичности изд. АН СССР 1946 г.
[4]. *Е. Ли, С. Таппер.* Сб. переводов «Механика» 1953 г. № 3.
[5]. *Е. П. Унксов.* Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением. Машгиз, 1955.
[6]. *Meyerhof, Chaplin.* Brit. Journ. Appl. Phys. 1954, 4, N 2.
[7]. *Л. М. Качанов.* ДАН СССР, 1954 т. XCVI, № 2:
[8]. *A. H. Dietz.* Engineering Laminates, N. Y., 1950.
[9]. Энциклопедический справочник «Машиностроение», т. 4. Машгиз 1947..
[10]. *П. Бриджмен.* Исследование больших пластических деформаций и разрыва, ИЛ 1955.
[11]. *Дебройн, Гувинк.* Адгезия, ИЛ 1954.
[12]. *Meissner, Baldauf.* Trans. of ASME 1951, v 73, N 7.
[13]. *Bredzs.* Welding Journal, 1954, 33, N 11.
[14]. *А. Л. Немчинский.* Заводская лаборатория 1952, вып. II.
[15]. *Л. М. Качанов, А. Л. Немчинский.* Физика металлов и металловедение, 1957, т. IV, № 1.
[16]. *А. В. Степанов,* ZS f. Phys 1934, Bd 92, s 42.
[17]. *A. N. Stroh.* Proc. Roy. Soc., 1954, A 223, p 404.
[18]. *В. П. Белоусов.* Основные вопросы геотектоники. Госгеолтехиздат 1954.

## SLĀŅAINU METALISKU MATERIALU PLASTISKĀ DEFORMACIJA UN SAGRAUŠANA

*V. M. Goldfarbs* un *A. V. Stepanovs*

(Kopsavilkums)

Iegūti rezultati, kas atļauj noteikt spriegumus slāņainā materiālā un materialu deformacijas ārējās slodzes iespaidā. Iegūtie rezultati pielietoti no Cu, Sn un Fe sastāvošu slāņainu materialu spriegumu un deformaciju aprēķināšanai elastīgās un plastiskās deformacijas apgabalā. Darbā pievesti eksperimentali dati par slāņaino materialu plastiskumu un izturību pie dažādām slāņu orientacijām. Aprakstīts šo materialu deformacijas un sagraušanas process. Apskatīti daži blakus jautājumi, piemēram, plastisko materialu īstās deformacijas diagramu iegūšana, savienojumu vietu izturība utt.

P. STUCKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITATE
ZINĀTNISKIE RAKSTI, XX SĒJUMS, 3. IZLAIDUMS, 1958. g.

# SVINA IETEKME UZ RENTGENIZĒTA KALIJA HLORIDA ABSORBCIJAS SPEKTRU

L. JANSONS

## I. IEVADS

Pusvadītāju fizikā ir ļoti svarīgi kristaliskā režģa svešvielu mikrodefekti. Ar to palīdzību var veidot un mainīt elektriskās vadāmības raksturu (n vai p) un lielumu. Tomēr to mērķtiecīga iebūve kristala režģī vēl ir smaga problema un tajā vēl daudz ir empirikas. Tas tālab, ka līdz ar šādu svešvielu iebūvi režģī, tur rodas *dažādi* mikrodefekti. Tie var būt stipri dažādi dažādos apstākļos un, protams, arī dažādi var iespaidot kristala īpašības. No sacītā redzams, ka svešvielu iebūves mechanisma un mikrodefektu veidu un maiņas pētniecībai ir liela nozīme tagadnē tik popularai pusvadītāju problemai.

Vairākos gadījumos ir attaisnojies paņēmiens pusvadītāju īpašības noskaidrot vispirms pie vienkāršākiem — sārmu metalu halogenidu kristaliem. Tie palīdz veidot pusvadītāju teoriju. Savukārt mikropasaules pētniecībā ļoti noderīgas ir optiskās metodes.

Šajā darbā ir pētīti kalija hlorida kristala mikrodefekti un to maiņa, iebūvējot šī kristala režģī svinu un pēc tam iedarbojoties uz šādu režģi ar kādu aģentu (rentgenstari, redzamie un ultravioletie stari, temperatura), kas režģī var izsaukt pārkārtojumus. Par režģa mikrodefektiem un to maiņām var spriest pēc absorbcijas spektriem.

## II. PĀRSKATS

Par rentgenstaru iespaidu uz absorbcijas spektru kalija hlorida kristalā ar svina piemaisījumu [KCl(Pb)] jau ir izdarīti pētījumi [1].

A. Arsenjeva parādījusi, ka, KCl(Pb) kristalu rentgenizējot, absorbcijas spektrā rodas šādas pārmaiņas:

1) Svinam raksturīgā absorbcijas garāko viļņu josla ($\lambda_{max} = 273$ $m\mu$) samazinās, bet īsāko viļņu josla ($\lambda_{max} = 196$ $m\mu$) sašķeļas un pārbīdās uz īsāko viļņu garumu pusi.

2) Visā ultravioletā (UV) spektra daļā pieaug absorbcijas koeficients, dodot plašu izplūdušu absorbcijas spektra joslu.

3) Rentgenizējot iegūtā palielinātā UV absorbcija ir nestabila un, sasildot līdz 300°C, pilnīgi izzūd, pie kam absorbcijas spektrs pieņem iepriekšējo— pirms rentgenizēšanas — veidu. Rentgenizējot iegūtā UV absorbcijas spektrā Arsenjeva atzīmē vienu maksimu (230 mμ), bet viņas grafikās var saskatīt vairākus.

Savukārt konstatēts [2], ka kalija tvaikos aditivi krāsotam KCl(Pb) ir grūtāk panākams vēl substraktivs krāsojums (rentgenizējot) nekā aditivi nokrāsotam KCl(Pb) kristalam. Tas nozīmē, ka tie mikrodefekti, kas radušies KCl(Pb) kristalā pie aditivās krāsošanas, traucē tālāko substraktivās krāsošanas mikrodefektu veidošanos.

Ka rentgenstari var režģi ievērojami iespaidot, to ionizējot, radot elektronu un caurumu pārkārtojumus, režģa mezglu vakances, pat blīvuma maiņu, tas pierādījies vairākos darbos [3, 4].

Savukārt pastāv uzskati (skat. [2]), ka Pb ieiet KCl kristalā režģa mezglos kā $Pb^{++}$ ions vai arī izveido lielākus vai mazākus kompleksus. Lai saglabātos kristala elektriskā neitralitate, sagaidāms, ka $Pb^{++}$ iebūve izveidos režģī pašvielas pozitivā iona $K^{+}$ vakances $\boxed{+}$. Ja režģī ir šādas kationa vakances $\boxed{+}$, tad liekas vieglāk kā tīrā KCl kristalā var veidoties tā saucamie V centri [5], no kuriem vienkāršākie pēc F. Zeica domām [6] ir 1. tabulā parādītie veidojumi.

1. tabula — Таблица № 1.

| Centru apzīmējums<br>Обозначение центров | Modelis<br>Модель | Paskaidrojums<br>Пояснения |
|---|---|---|
| $V_1$ | $\boxed{+}$○ | Kationa vakance $\boxed{+}$ ar tās tuvumā lokalizētu caurumu ○.<br>Вакансия катиона $\boxed{+}$ с расположенной вблизи дыркой ○. |
| $V_2$ | $\boxed{+}$○<br>○$\boxed{+}$ | Divas blakus esošas kationa vakances ar to tuvumā lokalizētiem diviem caurumiem.<br>Две соседние вакансии катиона с двумя вблизи расположенными дырками |
| $V_3$ | $\boxed{+}$○<br>$\boxed{+}$ | Divas blakus esošas kationa vakances ar to tuvumā lokalizētu vienu caurumu.<br>Две соседние вакансии катиона с расположенной вблизи одной дыркой |
| $V_4$ | $\boxed{+}$○<br>$\boxed{-}\boxed{+}$ | Blakus esošas divas kationa un viena aniona vakance ar to tuvumā lokalizētu caurumu.<br>Две соседние вакансии катиона и одна вакансия аниона с расположенной вблизи дыркой |

Jāatzīmē, ka Zeica ieteiktie modeļi V centriem nav vienīgie, tomēr arī citu [7] ieteiktie modeļi lielāko tiesu ir režģa mezglu vakanču un caurumu kombinējumi. Kuri no modeļiem pareizāki — vēl neskaidrs.

Režģa mikrodefekti var viens otru iespaidot savstarpējās transformacijās [4, 6, 8, 9]. Tādā kārtā var viens mikrodefekts stabilizēt otru mikrodefektu. Tā, piemēram, U centri stabilizē substraktivi veidotos F centrus [4].

## III. METODES

Kristali audzēti pēc nedaudz pārveidotā Kiropulosa paņēmiena no kausējuma. Svina daudzums kristalā ņemts samērā liels (ap 0,1 mol%).

Iedarbojoties uz KCl(Pb) kristalu ar rentgenstariem, UV un redzamās gaismas stariem, vai arī paaugstinot temperaturu, sagaidāma esošo defektu pārkārtošanās un jaunu veidošanās.

Lietotā rentgenlampa ir РДВ tipa ar volframa antikatodu. Tā darbināta ar apm. 60 kV spriegumu un 4—5 mA strāvas stiprumu. Kristals apstarots 8—20 cm attālumā no antikatoda.

Kristala termiskai apstrādei izmantotas elektriskās krāsnis, kuru temperatura noteikta ar termoelementiem.

Absorbcijas spektra un tā maiņas noteikšanai izmantots spektra fotometrs СФ-4. Kristala optiskai balināšanai ar monohromatisku gaismu arī izmantots šī fotometra monochromators. Bez tam balināšana izdarīta arī ar kvēlspuldzes pilnu gaismu.

Kristalu termiskai izbalināšanai lietota elektriskā krāsns*) kopā ar spektra

* Vienu no tām izveidojis aspirants K. Švarcs saviem pētījumiem. Par tās aizdevumu manam darbam izsaku K. Švarcam pateicību.

fotometru СФ-4. Ar elektrisko krāsni vienmērīgi ceļ kristala temperaturu ar ātrumu apm. 0,1°C — 0,15°C sekundē, un ar spektra fotometru tajā pašā laikā nosaka optisko blīvumu D ņemtajam viļņu garumam.

## IV. MĒRĪJUMI UN TO ANALĪZE

Rentgenizējot KCl(Pb), tiek ionizēts kristala režģis — atbrīvojas elektroni un caurumi, kuri kustībā pa iona režģi lokalizējas elektronu un caurumu ķērājcentros vai arī savstarpēji rekombinējas. Šādā elektronu caurumu lokalizacijā izveidojas režģa defekti: elektronu centri un caurumu centri. Tie var sevi uzrādīt absorbcijas spektrā kā absorbcijas joslas.

Tīram, nerentgenizētam KCl kristalam nav saskatāmas absorbcijas joslas (maksimi) plašā viļņu garumu diapazonā no 180 līdz 21000 mμ. Nerentgenizētam KCl(Pb) kristalam ir Pb īpatnējas absorbcijas ar maksimiem pie $\lambda_{max} = 273$ mμ un $\lambda_{max} = 196$ mμ

Rentgenizējot rodas jaunas absorbcijas joslas.

1. attēlā redzamas tādas absorbcijas joslas:

1) Pie $\lambda_{max} = 555$ mμ ir F centru absorbcijas josla, kas redzama gan tīram KCl (I līkne), gan KCl(Pb) kristalam (II līkne).

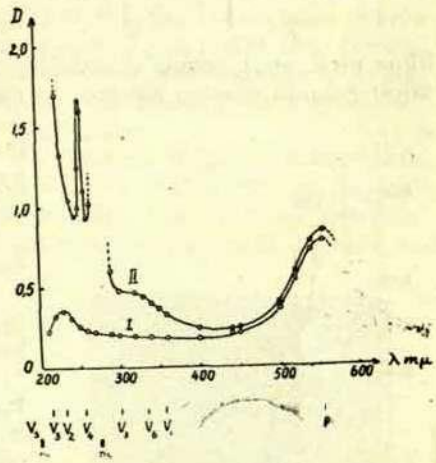
2) Pie $\lambda_{max} = 230$ mμ ir $V_2$ centru absorbcijas josla — arī redzama uz I un II līknes; tomēr redzams, ka II līknē šo joslu pārklāj vēl cita spēcīgāka absorbcijas josla uz īsāko viļņu garumu pusi.

3) II līknei ir vēl šaura absorbcijas josla ar $\lambda_{max} = 254$ mμ un plats, nesimetrisks absorbcijas rajons no svina īpatnējās absorbcijas joslas ($\lambda_{max} = 273$ mμ) pakājes uz garāko viļņu garumu pusi.

Jāatzīmē, ka Pb joslā (273) mērījumi nav izdarīti augstā optiskā blīvuma D dēļ.

Rentgenizēšanas dēļ KCl(Pb) kristalā radusies absorbcijas spektra maiņa t. i. optisko blīvumu starpība ΔD pēc rentgenizēšanas un pirms rentgenizēšanas parādīta 2. attēlā.

Tur gan dots optiskā blīvuma pieaugums tikai UV daļā. Redzami maksimi pie 254 mμ un 230 mμ, tāpat arī „šķietami" maksimi, kas atzīmēti ar (220) un (284). Pie pēdējiem atgriezīsimies vēlāk. Tāpat redzams tas, ka svina īpatnējā absorbcijas joslā (273 mμ) optiskais blīvums nav pieaudzis, bet mazinājies [1]. Spektra redzamā daļā (kas 2. zīm. nav parādīta) ir monotons optiskā blīvuma D pieaugums līdz F joslas maksimumam (555 mμ) un tam sekojošs kritums, ja F josla nav pēc rentgenizēšanas optiski izbalināta; ja F josla pēc rentgenizēšanas ir optiski izbalināta, tad redzamā spektra daļā ir




*1. attēls.* Rentgenizēta KCl un rentgenizēta KCl(Pb) absorbcijas spektri. Uz ordinatas atlikts optiskais blīvums D, bet uz abscisas — viļņu garumi λ mμ Mērījumi izdarīti pie + 20°C. I — KCl, II — KCl (Pb) Zem abscisas apzīmētas vietas spektrā, kurām atbilst nosaukto absorbcijas joslu maksimi. Pb absorbcijas joslā (273 mμ) nav izdarīti mērījumi, jo D > 2,5.

*Рис. 1.* Спектры поглощения рентгенизованного KCl и рентгенизованного KCl (Pb). По ординате отложена оптическая плотность D, а по оси абсцисс — длина волны λ mμ. Измерения произведены при +20°C. I — KCl; II — KCl (Pb). Под абсциссой отмечены места спектра, которым соответствуют максимумы названных полос поглощения. В полосе поглощения Pb (273 mμ) измерения не производились, так как D>2,5.

neliels vispārējs absorbcijas pieaugums, kas dažos gadījumos uzrāda maksimu pie apm. 530 mμ.

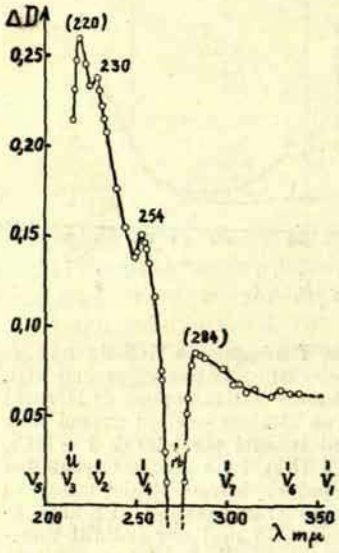
Ņemot vērā iepriekš sacīto par $Pb^{++}$ iebūvi KCl kristalā, režģī jābūt $K^{+}$ vakancēm. Pēdējās var lokalizēties caurumi un izveidot V centrus. V centru eksistences nepieciešamību norāda arī F centru esamība pēc rentgenizēšanas: tā kā F centri ir elektronu centri, tad jābūt arī caurumu centriem — V centriem. Tīrā KCl kristalā pēc rentgenizēšanas ir $V_2$ josla pie 230 mμ (1. att. I līkne). Arī KCl(Pb) kristalam ir absorbcijas pieaugums 230 mμ rajonā (1. att. II

2. tabula

**V joslas (mērītas pie 90° K) KCl kristalā**

| Nosaukums | $V_5$ | $V_3$ | $V_2$ | $V_4$ | $V_7$ | $V_6$ | $V_1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda_{max}$ mμ | < 200 | 212 | 230 | 254 | 300 | 334 | 356 |

līkne un 2. att.), tomēr absorbcijas pieaugums ir arī vēl citos rajonos: uz īsāko viļņu garumu pusi no 230 mμ, uz garāko viļņu garumu pusi no Pb joslas pakājes (no 284 mμ) un pie λ = 254 mμ. Varētu domāt, ka to dod V centri, jo tīram KCl kristalam ir atrastas [4] šādas V joslas (2. tabula):




*2. attēls.* KCl (Pb) rentgenizacijā iegūtā optiskā blīvuma pieaugums — △D. Virs abscisas atzīmētas vietas spektrā, kurām atbilst nosaukto absorbcijas joslu maksimi.

*Рис. 2.* Увеличение оптической плотности △D, полученное при рентгенизации KCl (Pb). Над абсциссой отмечены места спектра, которым соответствуют максимумы упомянутых полос поглощения

V joslu atrašanās vietas atzīmētas arī 1. un 2. attēlos. Redzams, ka rentgenizētam KCl (Pb) kristalam ir absorbcijas joslas tieši tajās vietās, kur tīram rentgenizētam KCl kristalām ir V joslas.

Tomēr ir zināms [5, 10], ka *tīrā* KCl kristalā V joslas, izņemot $V_2$ un $V_3$, nav stabilas pie istabas temperaturas un eksistē tikai zemās temperaturās. Tas labi redzams 1. att. I līknē: tur ir tikai $V_2$ josla ($V_3$ josla vēl nav izveidojusies) un protams arī F josla. Turpretim 1. att. II līkne rāda istabas temperaturā stabilas absorbcijas joslas KCl(Pb) kristalā pie viļņu garumiem, kas atbilst $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_6$ un $V_7$ joslām. Spilgti atsevišķi izceļas $V_4$ josla, bet kopā saplūstošas ir $V_2$ ar $V_3$ joslu un tāpat $V_6$, $V_7$ un $V_1$ joslas (sk. arī 2. att.). Pieminēto joslu stabilitate ir pat tik liela, ka kristalu turot istabas temperaturā vaļēju (gaismā!), 2,5 mēnešos joslas samazinas tikai par 10—20%. Jāatzīmē, ka josla KCl (Pb) kristalā ļoti ātri optiski izbal.

Savukārt ir zināms fakts, ka kristala režģa vieni mikrodefekti var stabilizēt citus mikrodefektus [4]: iebūvējot režģī kā piemaisījumu $H^{-}$ ionus tiek stabilizēta substraktivi veidotā F josla. Jautājums — vai, iebūvējot KCl režģī kā piemaisījumu $Pb^{++}$ ionu, netiek stabilizētas substraktivi veidotās V joslas, padarot tās izturīgas līdz istabas temperaturai? Uz šo jautājumu ļir jāatbild apstiprinoši, jo citādi ir grūti izskaidrot augšminētos kā arī tālāk minētos eksperimentālos faktus.

Lai dabūtu labāku ieskatu par to, ka rentgenizētā KCl(Pb) kristalā ir $V_{1-7}$ centri un tie ir termiski izturīgi pat istabas temperaturā, tālāk ir vienkopus uzskaitīti jau iepriekš minētie un vēl neminētie fakti ar paskaidrojumiem, kas to apliecina:

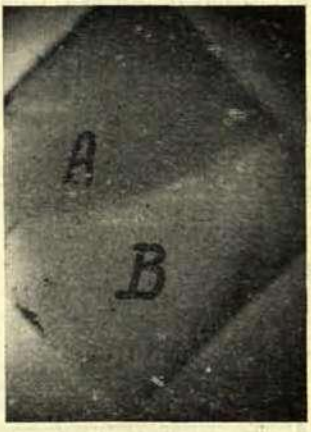
1. Iebūvējot $Pb^{++}$ ionu KCl režģī, tam līdzi ir jāiebūvējas arī $K^+$ vakancei. Tas dod iespēju vieglāk parādīties tādiem centriem, kam svarīgas ir $K^+$ vakances. Tādi ir V centri.

2. Uzņemot rentgenizēta KCl(Pb) absorbcijas spektru, parādas gan šauras gan plašākas absorbcijas vietas tur, kur tīram KCl kristalam ir V joslas.

3. Absorbcijas joslas KCl(Pb) kristalam no 220 mμ līdz 260 mμ ieskaitot 254 mμ maksimumu, un tāpat no 290 mμ līdz 450 mμ optiski ir ļoti stabilas. Tas gandrīz nemaz neizbalo dienas gaismā stāvot 2,5 mēnešus, kamēr F josla ļoti ātri izbalo. Arī speciali balinot ar monohromatisku gaismu, augšminētos spektralos rajonos nav konstatējama izbalēšana. Spēcīgi rentgenizēta kristala gadījumā izbalinot ar $\lambda = 555$ mμ gaismu F joslu, novērojama neliela absorbcijas mazināšanās arī 220—260 mμ rajonā, kā arī 300 mμ rajonā. No tā izdarāms secinājums, ka KCl(Pb) kristalam ir optiski stabilas V joslas, bet tās izbalo pateicoties elektroniem, ko optiski var atbrīvot no F centriem. Acīm redzot elektronu un caurumu rekombinacija!

Ar kvēlspuldzes pilnu gaismu izdarot rentgenizēta KCl(Pb) balinājumu dažreiz novērojams neliels absorbcijas pieaugums 254 mμ un 220 mμ rajonā. Domājams, ka kvēlspuldzes garviļņu radiacija atbrīvo no kādiem centriem caurumus, kas lokalizējoties V iedīgļos pastiprina V centrus un to absorbciju. Līdzīga parādība novērojama arī kristalu sildot — par to vēlāk.

4. Rentgenizētam KCl(Pb) kristalam savukārt F josla optiski izbal ļoti strauji — daudz ātrāk kā rentgenizētam tīram KCl kristalam. Tīram KCl kristalam līdz ar substraktivi veidoto F joslu izbal arī V josla. Vienkārši var teikt: rentgenizējot atbrīvotie caurumi un elektroni lokalizējoties rada vienādos daudzumos gan V, gan F centrus, bet no F centriem atbrīvojot elektronus tie rekombinējas ar caurumiem un vienlaicīgi izbal gan F gan V centri. Šādu domu izteicis H. Piks 1951. g. [11]. Priekš rentgenizēta KCl(Pb) kristala šī atziņa nav derīga, jo F centriem optiski izbalot V joslas saglabājas un ir visai stabilas. Acīm redzot no F centriem atbrīvotos elektronus uzķer vēl citi centri, kas novērš elektronu un caurumu rekombinaciju un V joslu izbalošanu. Režģa defekti (elektronu centri), kas radušies kādās noteiktās vietās uzķerot no F centriem optiski atbrīvotos elektronus ir optiski stabili, jo dienas gaismā tie neatbrīvo savus elektronus, kā minēts, pat 2,5 mēnešos. Šo defektu absorbcijas joslas nav sevišķi izteiktas, jo izbalinot F centrus nav manāma kādas izteiktas absorbcijas joslas veidošanās. Vienīgi atzīmējama neliela absorbcijas josla ar $\lambda_{max} = 530$ mμ, kas novērota dažiem kristaliem pēc F joslas optiskas izbalināšanas. Katrā ziņā pēc F joslas optiskas izbalināšanas KCl (Pb)




*3. attēls.* KCl (Pb) kristala fotografija. Daļa no kristala rentgenizēta un pēc tam optiski izbalināta (A), bet daļa (B) nerentgenizēta. Rentgenizētā daļā redzama gaismas absorbcija, kas ir optiski stabila: pēc rentgenizēšanas kristals atradies brīvi (gaismā) istabas temperaturā 5 mēnešus.
*Рис. 3.* Фотография кристалла KCl (Pb). Часть кристалла рентгенизована и затем обесцвечена (A); другая часть (B) нерентгенизована. В рентгенизованной части видно поглощение света, которое оптически устойчиво: после рентгенизации кристалл находился на свету при комнатной температуре 5 месяцев.

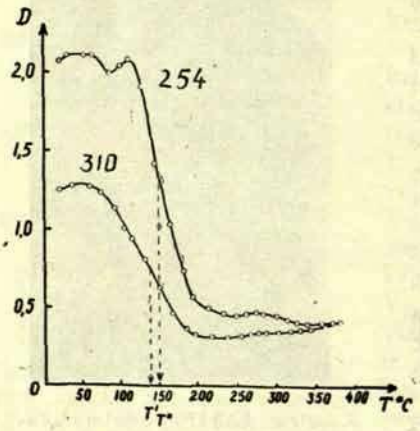
kristalā vēl saglabājās tumšāks krāsojums, ko iespējams pat nofotografēt (3. attēls); arī absorbcijas koeficients (opt. blīvums D) tādam izbalinātam kristalam ir palielināts plašā viļņu garumu rajona.

Te jāatzīmē arī tas, ka KCl (Pb) kristalā ievadot no ārpuses elektronus — izdarot aditivu krāsojumu, dabū monotoni pret īsiem viļņu garumiem pieaugošu absorbcijas palielināšanos [2].

No sacītā ir jāsecina, ka KCl(Pb) kristalā ir kāds spēcīgs elektronu ķērājs. Domājams tas ir $Pb^{++}$. Tam par labu runā analoģija ar sārmu zemju metalu divvērtīgo ionu ($Ca^{++}$, $Sr^{++}$, $Ba^{++}$) iebūvi alkaļu halogenidu kristalu režģī [6,9]. Šāds divvērtīgais ions piesaistot elektronu pārvēršas par $Z_1$ centru, kas ir optiski stabils, bet termiski nestabils. Pie temperaturām virs 110°C $Z_1$ sabrūk un izveidojas $Z_2$, kas savukārt optiski vai termiski ($t^\circ > 200^\circ$) dod $Z_3$ centrus. $Z_1$, $Z_2$ un $Z_3$ centru absorbcijas joslas (visumā neizteiktas) ir ap F joslu.

Uz šīs analoģijas pamata varētu sagaidīt, ka arī $Pb^{++}$ ions var līdzīgi izturēties. Šķiet, ka $Pb^{++}$ var ieiet KCl režģī ne izkaisīti atsevišķi, bet divu vai vairāku $Pb^{++}$ agregatos pa blakus esošiem režģa mezgliem. Pie tiem var savukārt piesaistīties kationa un aniona vakances, izveidojot vēl lielākus agregatus. Tā var izveidoties režģa defekti, kas var būt kā elektronu ķērāji [2]. Uzķerot elektronus tie pārvēršas par elektronu centriem. Nosauksim šos centrus KCl(Pb) kristalā par Z (Pb) centriem.

Ņemot vērā elektronu ķērājcentru lielos izmērus, to daudzumu (to nosaka Pb daudzums KCl kristalā) un arī to, ka Z(Pb) ir optiski stabili un vairs neatdod atpakaļ optiskā izbalināšanā saķertos elektronus, izprotama ir arī F centru ļoti straujā optiskā izbalošana rentgenizētā KCl(Pb) kristalā.




*4. attēls.* Rentgenizēta un pēc tam optiski izbalināta KCl (Pb) termiskā izbalināšana. 254 — izbalinājums 254 *mμ* rajonā, 310 — izbalinājums 310 *mμ* rajonā. Abu rajonu izbalināšanas vislielākā ātruma temperaturas $T_0 = 108°C$ sakrīt. Redzami arī maksimi 250°C rajonā.

*Рис. 4.* Термическое обесцвечивание рентгенизованного и затем оптически обесцвеченного кристалла KCl (Pb). 254—обесцвечивание в области 254 *mμ* 310—обесцвечивание в области 310 *mμ* В обеих областях температура наиболее быстрого обесцвечивания совпадает и равна 108°C. Наблюдаются также максимумы в области 250°C.

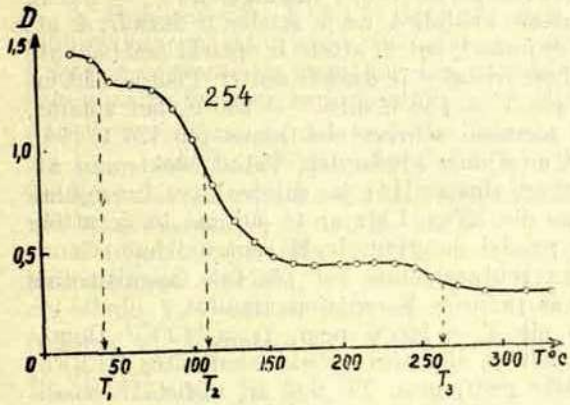
Tā kā Z(Pb) centri var būt dažādi atkarībā no agregata lieluma, tad sagaidāms, ka tie arī nedos izteiktas absorbcijas joslas, bet dos plašu lēzenu absorbciju; tas arī novērots gan aditivā [2] gan substraktivā KCl(Pb) krāsojumā. Tā kā Z(Pb) centri ir optiski stabili un arī pie istabas temperaturas pastāvīgi, tad tiem līdzi saglabājās arī V centri, jo Z(Pb) centros uzķertie elektroni nevar rekombinēties ar V centros lokalizētiem caurumiem.

Kā parādīts tālāk, termiski Z(Pb) sagraujot, atbrīvojas elektroni, kas rekombinējās ar caurumiem V centros, un pēdējie izbalo.

5. KCl(Pb) aditivi krāsojot kalija tvaikā [2], nav novērojams maksims pie 254 mμ un absorbcijas josla no 290 mμ uz garāko viļņu garumu pusi ir atšķirīga no šī rajona absorbcijas joslas substraktivā krāsojumā. Substraktivā krāsojumā šai joslai ir lēzenāks raksturs kā aditivā krāsojumā. Tas arī saprotams, jo šajā aditivā krāsojumā ir radušies Z(Pb) centri, kamēr substraktivā krāsojumā šajos absorbcijas rajonos ir V joslas.

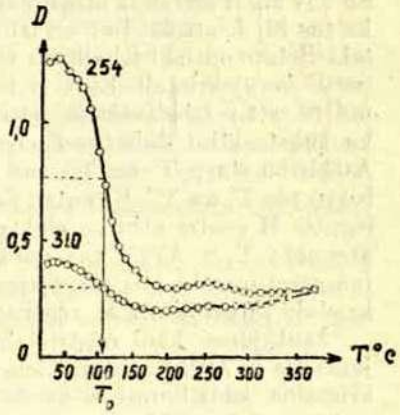
Ja turpretim KCl(Pb) kristalu krāso aditivi J tvaikos, tad istabas temperaturā mērījot, parādās absorbcijas maksims pie 254 mμ un pieaug absorbcija uz 230 mμ un vēl īsāku viļņu garumu pusi. Arī tas saprotams, jo ar J tvaikiem aditivi krāsojot palielinās režģī caurumi, kas ar kationa vakancēm dod V centrus.

6. M. Daneberga un M. Vasiļevska savos diplomdarbos LVU Eksperimentalās fizikas katedrā [12, 13] parādījušas, ka arī KBr(Pb) kristalu rentgenizējot, pie istabas temperaturas rodas un pastāv absorbcijas maksimi pie $\lambda_{max} = 265$ mμ un $\lambda_{max} = 275$ mμ, kas ir $V_2$ un $V_4$ absorbcijas vietas [5]. Arī plaša lēzena absorbcijas josla ir $V_7$ un $V_6$ centru rajonā (308 mμ un 362 mμ).




*5. attēls.* Rentgenizēta un pēc tam optiski izbalināta KCl (Pb) termiskā izbalināšana 254 mμ rajonā Redzamas izbalinājuma pakāpes pie $T_1 \approx 45°C$, $T_2 \approx 112°C$ un $T_3 \approx 260°C$.

*Рис. 5.* Термическое обесцвечивание в области 254 mμ рентгенизованного и затем оптически обесцвеченного кристалла KCl (Pb). Видны ступени обесцвечування при $T_1 \approx 45°C$, $T_2 = 112°C$ и $T_3 \approx 260°C$.




*6. attēls.* Rentgenizēta, bet pēc tam optiski neizbalināta (ar F centriem!) KCl (Pb) termiskā izbalināšana. 254 — izbalinājums 254 mμ rajonā, 310 — izbalinājums 310 mμ rajonā. $T' = 138°C$, $T'' = 150°C$

*Рис. 6.* Термическое обесцвечивание рентгенизованного, но затем не обесцвеченного оптически кристалла KCl (Pb) (с F центрами). 254 — обесцвечивание в области 254 mμ 310 — обесцвечивание в области 310 mμ $T' = 138°C$; $T'' = 150°C$

Tāpat ir spēcīga absorbcija 231 mμ rajonā ($V_3$ centri) un vēl īsākos viļņu garumos (uz $V_5$ centru rajonu). Tātad arī KBr(Pb) kristalā substraktivi var dabūt istabas temperaturā stabilas joslas, kas atbilst $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_5$, $V_6$, un $V_7$ centriem.

7. Izdarot Č. Luščika ieteikto [14] termisko izbalināšanu rentgenizētam KCl(Pb) kristalam, konstatējami šādi fakti:

1) Absorbcija pie viļņu garumiem 230 mμ, 254 mμ un 310 mμ līdz ar temperaturas kāpināšanu samazinās vienādi strauji, it kā šo absorbcijas samazināšanos izsauktu kāds kopējs cēlonis. Ja par šo kopējo cēloni uzskata kādu centru, kas termiski kādā temperaturas rajonā atbrīvo elektronus un tie rekombinējās ar caurumiem $V_2$, $V_4$, $V_7$, $V_6$ un $V_1$ centros, tad arī šie centri līdzi izbalo t. i. vienādi strauji izbalo absorbcijas joslas pie 230 ($V_2$), 254 ($V_4$) un 310 mμ ($V_7 + V_6 + V_1$). Ja turpretīm šādu domu atmet, tad grūti ir izskaidrot, kāpēc dažādas absorbcijas vietas (dažādi centri) izbalo vienādos termiskos apstākļos.

4. attēlā redzama rentgenizēta un pēc tam optiski izbalināta KCl(Pb) optiskā blīvuma maiņa līdz ar temperaturu pie 254 mμ un 310 mμ. Redzams, ka visstraujāk izbalo abi centri pie vienas un tās pašas temperaturas $T_0 = 108°C$.

2) Rūpīgāki termiskās izbalināšanas pētījumi parāda, ka rentgenizēts un pēc tam optiski izbalināts KCl(Pb), termiski izbalo pakāpjveidīgi (5. att.) pie temperaturām $T_1 \approx 45°C$, $T_2 = 112°C$ un $T_3 \approx 260°C$. Tas norāda, ka elektronus atbrīvo kādi centri pie augšminētām temperaturām, tie rekombinējas ar caurumiem $V_2$ centros un 254 mμ rajons izbal.

3) Termiski izbalinot rentgenizētu, bet optiski neizbalinātu KCl(Pb) kristalu, iegūst 6. attēlā parādītās izbalināšanas līknes, Redzams, ka izbalināšanas temperaturas $T' = 138°C$ un $T'' = 150°C$ viļņu garumiem 310 mμ un 254 mμ ir nedaudz atšķirīgas savā starpā, bet stipri atšķirīgas no $T_0 = 108°C$, kā tas bij 4. attēlā. Bet arī izbalināmie kristali 4. un 6. attēlos ir dažādi: 4. attēlā lietots optiski izbalināts (*bez F joslas*), bet 6. attēlā ir optiski neizbalināts (*ar F joslu*) kristali. Līdz ar to abos kristalos ir dažādi centri. Pēdējā gadījumā (6. att.) izbalināšana notiek pie $T' = 138°C$ un $T'' = 150°C$, bet zināms, ka substraktivi dabūtie F centri termiski atbrīvo elektronus pie 137°C [14]. Atšķirība starp $T'$ un $T''$ var būt mērījumu kļūdu dēļ. Tātad elektronus atbrīvo pie $T'$ un $T''$ F centri. Savukārt zināms [14], ka substraktivā krāsojumā iegūtie M centri atbrīvo elektronus pie 52°C. Līdz ar to jādomā ka 5. attēlā atzīmētā $T_1 \approx 45°C$, kas nevisai precizi noteikta, ir M centru izbalināšanas temperatura. Ir ļoti iespējams, ka rentgenizētais bet pēc tam apgaismotais kristals saturēja arī M centrus, kas radušies F centriem izzūdot.

Jautājums: kādi centri izbalo pie $T_0 = 108°C$ resp. $T_2 = 112°C$? Domājams tie ir Z(Pb) centri. Tiem vajadzēja atrasties optiski izbalinātos KCl(Pb) kristalos, kādi lietoti 4. un 5. attēlu gadījumos. Tie dod arī vislielāko izbalinājuma efektu 254 mμ un 310 mμ rajonos, bet no iepriekš sacītā, tie ir arī V joslu stabilizētāji istabas temperaturā.

Vai Z(Pb) centri, analogi sārmu zemju metalu veidotiem Z centriem arī ir šķirojami pēc pakāpeniskās pārveidošanās $Z_1$, $Z_2$ un $Z_3$ centros, tas vēl neskaidrs. Jādomā, ka tomēr tā ir. Uz to norāda 4., 5. un 6. attēlos vēl tālākais izbalinājuma rajons pie $T_3 = 260° - 300°C$. Liekas tas atbilst $Z_2$(Pb) sagraušanas temperaturai. Tad pie $T_2 \approx 110°C$ izbal $Z_2$(Pb) centri, bet pie $T_3 \approx \approx 260°-300°C$ — $Z_2$(Pb).

Atzīmējams vēl tas, ka sākot no istabas temperaturas termisko izbalināšanu, gan 254 mμ gan 310 mμ rajonos absorbcija drusku pieaug. Tas, liekas, vedams arī sakarā ar to, ka izbalinot rentgenizētu KCl(Pb) kristalu ar pilnu kvēlspuldzes gaismu arī 254 mμ rajonā nedaudz pastiprinās absorbcija. Šie fakti norāda uz to, ka ir arī vēl centri, kas viegli atbrīvo caurumus. Tāpat jāpiezīmē, ka iepriekš minētie „šķietamie" absorbcijas pieaugumu maksimi pie (220) un (284) (sk. 2. att.) nav vedami sakarā ar kādiem centriem. Drīzāk šie maksimi veidojas sekojoši. Rentgenizējot vispār absorbcija pieaug uz īsāko viļņu garumu pusi, ar izņēmumu Pb absorbcijas joslā (273 mμ); pēdējā absorbcija samazinās, jo veidojas $Z_2$(Pb) centri. Šo divu procesu rezultatā rodas maksims (284), kas nav saistāms ar kādiem centriem. Tāpat zināms, ka rentgenizējot samazinās U josla, jo daļēji veidojas uz tās rēķina F josla. Ir ticams, ka kristalā negribēti ir radušies U centri, kas dod 2. attēlā atzīmētā vietā U joslu. Uz U joslas samazināšanās, bet īsviļņu rajonā pieaugošās absorbcijas rēķina veidojas maksims (220), kas arī nav saistīts ar kādiem centriem.

## V. TEZES

1. Svina ioniem $Pb^{++}$iebūvējoties alkaļu halogenidu (KCl) kristalu režģī, iebūvējas arī tur atbilstošā skaitā (režģa elektriskā neitralitate!) kationa vakances. Tās dod V centru veidošanai iedīgļus, jo ir caurumu ķērājas. Sub-

straktivi vai aditivi pievadītiem caurumiem šeit lokalizējoties, izveidojas $V_{1\div7}$ centri [5], kas var pastāvēt arī istabas temperaturā (1. un 2. attēli).

2. Svina ioni $Pb^{++}$ ieiet alkaļu halogenidu (KCl) kristala režģī atsevišķi un arī kaimiņu mezglos pa vairākiem vienkopus. Šādi veidojumi var piesaistīt sev klāt arī režģa mezglu vakances. Tie ir elektronu ķērāji. Uzķerot elektronus tā izveidojas Z(Pb) centri (analogi Pika [6, 9] atklātiem Z centriem pie sārmzemju metala ioniem). Tie var būt dažādi. Viņu absorbcijas joslas spektrā ir lēzenas. Tie ir optiski stabili bet temperaturu ceļot virs istabas temperaturas — termiski nestabili.

Substraktivi veidotas F joslas ātrā optiskā izbalēšana KCl(Pb) kristalā vedama sakarā ar F centru elektronu uzķeršanu šajos Z(Pb) centros (3. att.).

3. Rentgenizējot KCl(Pb) kristalu, tiek atbrīvoti elektroni kā arī rodas ionu vakances. Atbrīvotie elektroni un caurumi nonāk ķērājcentros. Tā lokalizētie caurumi un elektroni dod dažādus režģa defektus ar tiem atbilstošām absorbcijas spektra joslām ($V_{1\div7}$ F, Z(Pb), M). Ņemot vērā Z(Pb) centru optisko stabilitati, kā arī termisko izturību līdz apm. 100°C, tiek stabilizēti arī $V_{1\div7}$ centri; pēdējie rentgenizētā KCl(Pb) kristalā var būt stabili arī pie istabas temperaturas, kamēr tīrā KCl kristalā istabas temperaturā var pastāvēt tikai $V_2$ un $V_3$ centri (1. att.).

4. Ceļot rentgenizēta KCl(Pb) temperaturu, pie noteiktām temperaturām tiek atbrīvoti elektroni no to centriem [M, Z(Pb), F]. Pie šīm temperaturām arī izbalo $V_{1\div7}$ centri, jo termiski atbrīvotie elektroni rekombinējas ar caurumiem $V_{1\div7}$ centros (4., 5. un 6. attēls.)

30 VI 1957 *Eksperimentalās fizikas katedra*

LITERATURA

[1]. *A. Arsenjeva.* Zs. f. Ph. **57**, 163 (1929).
[2]. *A. Jansone.* LVU Zin. Raksti **8**, 155 (1956).
[3]. *H. W. Etzel.* Phys. Rev. **100**, 1643 (1955).
[4]. *W. Martienssen* und *R. Pohl.* Zs. f. Ph. **133**, 153 (1952). *W. Martienssen* und *H. Pick*, Zs. f. Ph. **135**, 309 (1953).
[5]. *H. Dorendorf*, Zs. f. Ph. **129**, 317 (1951).
[6]. *F. Seitz*, Phys. Rev. **83**, 2 (1951). Rev. Mod. Phys. **26**, 7 (1954).
[7]. *J. H. O. Varley.* J. Nuclear Energy **1**, 130 (1954), РЖ 23843 (1956). A. Glasner, Bull. Res. Council Israel **4**, 414 (1955), РЖ 29011 (1956).
[8]. *S. Petroff*, Zs. f. Ph. **127**, 443 (1950).
[9]. *H. Pick*, Ann. d. Ph. **35**, 73 (1939), P. Camagni, G. Chiarotti, Nuovo cimento **11**, 1 (1954), РЖ 13786 (1954).
[10]. *D. Dutton and Maurer*, Ph. Rev. **20**, 126 (1952).
[11]. Физические основы фотограф. чувств. ст. 98, ИЛ Москва (1953).
[12]. *M. Daneberga*, Diplomdarbs, LVU (1957).
[13]. *M. Vasiļevska*, Diplomdarbs, LVU (1957).
[14]. *Ч. Б. Лущик.* Труды ИФА АН ЭССР № 3 (1955), Оптика и спектоскопия **2**, 220 (1957).

## ВЛИЯНИЕ СВИНЦА НА СПЕКТР ПОГЛОЩЕНИЯ РЕНТГЕНИЗОВАННОГО ХЛОРИСТОГО КАЛИЯ

*Л. Янсонс*

(Резюме)

Воздействие рентгеновского излучения на решетку кристалла и влияние его на ее спектр поглощения уже неоднократно исследовались [1, 2, 3, 4].

В этой работе делается попытка выяснить, каково влияние внедренного в кристалл KCl иона $Pb^{++}$ на спектр поглощения, ставя его в связь с дефектами решетки и их превращениями (изменениями).

При выращивании кристалла KCl с содержанием ионов $Pb^{++}$ в нем одновременно создаются вакансии $K^{+}$ — ионов (ввиду нейтральности решетки). Поэтому можно ожидать возникновения таких дефектов решетки, для которых необходимы эти вакансии. Таковы V — центры (1 таблица, [6, 7]).

Кристаллы выращивались по методу Киропулоса. Они рентгенизованы трубкой с вольфрамовым антикатодом. Спектры поглощения снимались с помощью спектрофотометра СФ-4.

Обнаружено, что при рентгенизации кристалла KCl (Pb) кроме обычной F — полосы поглощения ($\lambda_{max} = 555$ mμ) появляются еще полосы поглощения в тех местах, которые соответствуют V — полосам ($V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$, $V_6$ и $V_7$) (см. рис. 1. II и рис. 2).

Как известно [5, 10], у **чистого** кристалла KCl при комнатной температуре устойчивы только полосы $V_2$ и $V_3$ (и, следовательно, центры $V_2$ и $V_3$), а прочие полосы (центры) $V_1$, $V_4$, $V_5$, $V_6$ и $V_7$ неустойчивы. Это видно и на 1 рис., I. Напротив, у кристалла KCl (Pb) (1 рис., II) отдельная полоса $V_4$ и слившиеся вместе полосы $V_1 + V_6 + V_7$ и также полосы $V_2 + V_3$ не исчезают даже в течение 2,5 месяцев на дневном свету при комнатной температуре.

Это объясняется так же, как и в аналогичном явлении, уже обнаруженном при внедрении $H^{-}$ иона в кристалл (4): ион $H^{-}$ стабилизирует субтрактивно созданные F — центры. В нашем случае ион $Pb^{++}$ стабилизирует субтрактивно образовавшиеся V — центры.

Объяснение здесь следующее.

При рентгенизации кристалла KCl (Pb) возникают свободные электроны и дырки. Электроны локализуются в вакансиях отрицательного иона (F — центры) и у $Pb^{++}$ ионов, а дырки — вблизи вакансий положительного иона, создавая V — центры. При оптическом обесцвечивании исчезают F — центры, и их электроны частично рекомбинируют с дырками в V — центрах, причем последние частично обесцвечиваются. По большей же части электроны F—центров захватываются имеющимися еще в кристалле $Pb^{++}$ — центрами; так возникают Z(Pb) — центры, аналогичные открытым Пиком [6, 9] $Z_1$ — центром, которые возникают при захвате электронов центрами $Ca^{++}$, $Sr^{++}$, $Ba^{++}$. Эти Z(Pb) — центры дают широкую и низкую полосу поглощения в районе 530 mμ. Так же, как и $Z_1$ — центры, и Z (Pb) — центры при комнатной температуре оптически и термически стабильны (рис. 3). Локализованные в этих Z (Pb) — центрах электроны не могут больше рекомбинировать с дырками в V — центрах; поэтому и V — центры при комнатной температуре также оптически и термически стабильны (рис. 1, II).

При термическом освобождении электронов из Z (Pb)—центров исчезают одновременно и все V — полосы. Это видно на рис. 4., на котором представлено термическое обесцвечивание полос при длинах волн 254 mμ (т. е. $V_4$ — полоса) и 310 mμ (т. е. $V_7 + V_6 + V_1$ полосы). Вместе с тем Z (Pb) — центры термически разрушаются приблизительно при 108°C, что хорошо согласуется с данными Пика о $Z_1$ — центрах.

При термическом обесцвечивании в темноте рентгенизованного и затем необесцвеченного оптически кристалла KCl (Pb) (содержащего F — центры) полосы поглощения 254 mμ и 310 mμ исчезают при температурах выше 108°C (см. рис. 6). Это может быть поставлено в связь с тем, что разрушение F —

центров происходит при температуре более высокой (137°C, [14]) чем это соответствует Z (Pb) — центрам.

При осторожном термическом обесцвечивании полосы 254 mμ можно констатировать даже несколько ступеней обесцвечивания (рис. 5), которые возникают, можно думать, вследствие освобождения электронов M — центрами (при $T_1$), $Z_1$ (Pb) — центрами (при $T_2$) и может быть $Z_2$ (Pb) — центрами (при $T_3$).

Одинаковые условия термического обесцвечивания полос 254 mμ и 310 mμ, а также ступенчатый характер и зависимость от имеющихся в кристалле электронных центров, также указывают на то, что эти полосы поглощения создаются дырочными центрами (т. е. V — центрами).

Из сказанного вытекает, что ионы $Pb^{++}$ в кристалле KCl, помимо типических полос поглощения при 273 mμ и 196 mμ, вызывают еще следующие явления:

1. В решетке кристалла вместе с $Pb^{++}$ — ионами образуются $K^{+}$ — вакансии, дающие возможность возникать V — центрам, если дырки локализуются при этих вакансиях.

2. $Pb^{++}$ — центры, захватывая электрон, превращаются в Z (Pb) — центры с полосой поглощения при 530 mμ. При комнатной температуре Z (Pb) — центры оптически и термически стабильны.

3. Вследствие оптической и термической стабильности Z (Pb) — центров при комнатной температуре локализованные в них электроны не освобождаются и не могут рекомбинировать с дырками в V — центрах. Поэтому в кристалле KCl (Pb) V — центры стабильнее, чем в чистом кристалле KCl.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# О ВЛИЯНИИ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА

*В. М. ГОЛЬДФАРБ*

## 1.

Современная теория упругости и пластичности описывает поведение однородных изотропных и анизотропных сред. Ее применение к описанию механических свойств поликристаллов, имеющих неоднородную структуру, обосновывается малостью размеров структурных составляющих поликристаллов (зерен) по сравнению с размерами образца или размерами максимально напряженной зоны (при неоднородном напряженном состоянии) и следующей отсюда возможностью усреднения механических свойств.

Однако, механическое поведение поликристалла не всегда целиком определяется только усредненными характеристиками (модулями упругости, пределами текучести и т. д.), т. е. не всегда является структурно нечувствительным. Напряженное состояние (н. с.) зерен поликристалла (+микро н. с.) не совпадает с напряженным состоянием образца (макро н. с.); это расхождение, определяющееся степенью анизотропии отдельных кристаллитов и структурой материала, в ряде случаев является причиной несоответствия между выводами теории для однородной среды и результатами экспериментов. Материалы, обладающие близкими усредненными характеристиками, но имеющие разные структуры могут по разному деформироваться и разрушаться. Естественно, что положительная в отношении общности выводов черта теории—ее структурная нечувствительность — не позволяет определять структурночувствительных свойств материалов.

Определение свойств поликристаллического агрегата по свойствам элементов-монокристаллов и структуре также остается за пределами теории однородной среды.

Необходимо построение теории, учитывающей неоднородность полей напряжений, деформаций и сопротивлений (по терминологии Я. Б. Фридмана [1]) в поликристаллическом материале. На это неоднократно указывалось в работах А. В. Степанова (2—4).

Такая теория должна, в частности:

1) Найти правильный путь усреднения при вычислении модулей упругости поликристаллов по соответствующим данным для монокристаллов с учетом взаимодействия зерен.

2) Найти критерии текучести для поликристаллов с различной симметрией решетки; выяснить причины расхождения (или согласия) экспериментальных данных с теориями максимальных касательных и октаэдрических напряжений.

3) Дать метод построения кривой деформации поликристалла по кривым деформации монокристаллов разных ориентаций; выяснить возможность построения единой кривой деформации для данной структуры и симметрии кристаллической решетки; установить, какие особенности структуры приводят к отсутствию единой кривой деформации для разных макро н. с.

4) Рассчитывать свойства двух — и многофазных сплавов по известным механическим свойствам фаз; установить причины отклонения свойств сплавов от аддитивных значений.

5) Установить зависимость прочности и характера разрушения от степени анизотропии кристаллической решетки и структуры (в частности от размера и формы зерен); выявить влияние объемности и неоднородности н. с. на пластичность и прочность поликристаллов различной структуры. Мы покажем, что некоторые соображения по поставленным вопросам могут быть высказаны на основании самих приближенных представлений о характере напряженного и деформированного состояния поликристалла и анализа экспериментальных данных о деформации зерна в поликристаллическом агрегате.

## 2.

Приведем некоторые результаты экспериментальных исследований деформации монокристаллов и зёрен поликристаллов, которые будут необходимы в дальнейшем.

В отношении пластической деформации монокристаллов можно прийти к следующим выводам:

1) Если пластическая деформация происходит путём скольжения по одной системе плоскостей, то начало процесса определяется критическим скалывающим напряжением [5]; упрочение при этом механизме деформации линейно для металлических монокристаллов с любой симметрией решётки [6—9].

2) Если пластическая деформация происходит путём скольжения по нескольким системам плоскостей путём образования двойников, полос деформации, сбросов и т. п., то не существует определённого, независящего от ориентации значения критического напряжения; упрочнение также зависит от ориентации монокристалла, поскольку последная определяет отбор тех или иных механизмов деформации [6—16].

3) В гексагональных монокристаллах скольжение по одной системе плоскостей может происходить вплоть до деформаций в несколько десятков процентов, перечисленные в 2) процессы имеют место лишь в случае неоднородного н. с. или при некоторых особых ориентациях. В кристаллах кубической симметрии как правило (исключая случаи чистого сдвига и деформации, меньшие 1% при некоторых ориентациях) скольжение происходит по нескольким системам плоскостей [8, 9, 12].

4) При неоднородном н. с. возникает изгиб плоскостей скольжения, приводящий к образованию сбросов, полос деформации и. т. п. [14—16].

Металлографическими, рентгеновскими и оптическими методоми исследования показано, что для деформации поликристаллов характерно следующее:

1) Напряжения и деформации зёрен различны и не совпадают с напряжениями и деформациями образца [18—36].

2) Напряжения и деформации неоднородны в пределах отдельных зёрен, наибольший градиент напряжений и деформаций наблюдается вблизи границ [18—36].

3) Неоднородность в распределении напряжений и деформаций зависит от различия в свойствах зёрен и структуры поликристалла [17, 33—36].

4) Неоднородный характер н. с. оказывает влияние на механизм пластической деформации зёрен; такие процессы как образование сбросов, полос деформации, двойников, которые в монокристаллах происходят в основном при неоднородности н. с. (изгиб у зажимов, надрезы и т. п.), всегда выражены в зёрнах поликристалла [23, 25, 26, 31, 32, 37]; в некоторых случаях появляются механизмы деформации, не встречающиеся при деформации моно-

кристаллов [26, 38]. Согласование деформаций соседних зёрен происходит в основном за счет скольжения по нескольким системам плоскостей и образования сбросов [37].

Заметим, что в дальнейшем мы имеем в виду такие условия, при которых не существенны вязкие свойства границ зёрен и сегрегация примесей на границах.

3.

Некоторые сведения о распределении напряжений и деформаций в поликристалле можно получить на основе анализа н. с. слоистой среды [39, 40]. Слоистая структура поликристаллов довольно широко распространена (слоистые эвтектики, некоторые мартенситные стали, стали со слоистым цементитом, текстуры прокатки); кроме того некоторые черты н. с. слоистого материала являются общими для любого неоднородного материала.

Квазиизотропный полкристалл со сферическими (в среднем) зёрнами будем моделировать наложением ряда слоистых систем, беспорядочно ориентированных в пространстве или, проще, наложением двух систем со слоями, ориентированными перпендикулярно друг другу. Свойства слоёв различны и соответствуют свойствам зёрен, одно— или многофазного поликристалла, различно ориентированных по отношению к некоторому выделенному направлению.

Расчет упругих и особенно пластических свойств такой системы сложен т. к. требует усреднения н. с. по всевозможным ориентациям кристаллической решётки в слоях и по расположениям последних друг относительно друга. Здесь мы приведём лишь формулы, позволяющие рассчитать упругие напряжения в системе, состоящей из слоёв с двумя различными ориентациями кристаллической решётки.

Как и для случая изотропных слоёв, результат может быть получен путем решения уравнений, выражающих граничные условия для напряжений и деформаций [39]. Рассмотрим систему бесконечно протяженных в своей плоскости слоёв, материал которых ориентирован таким образом, что в координатной системе, одна из осей которой направлена перпендикулярно плоскости слоёв, упругие коэффициенты, выражающие связь между нормальными напряжениями и тангенциальными деформациями и обратно, обращаются в нуль. Тогда формулы для определения напряжений в слоях и усреднённых упругих постоянных имеют следующий вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma'_x &= \frac{A_2\bar{\sigma}_x - B_1\bar{\sigma}_y + (B_1C_2 - A_2C_1)\bar{\sigma}_z}{D} \\
\sigma'_y &= \frac{-B_2\bar{\sigma}_x + A_1\bar{\sigma}_y + (B_2C_1 - A_1C_2)\bar{\sigma}_z}{D} \\
\tau'_{xy} &= \frac{S''_{66}(1+k)\bar{\tau}_{xy} - k(s'_{64} - s''_{64})\bar{\tau}_{yz} - k(s'_{65} - s''_{65})\bar{\tau}_{xz}}{s''_{66} + k\,s'_{66}} \\
\sigma''_x &= e_1\sigma'_x + f_1\sigma'_y + g_1\bar{\sigma}_z, \\
\sigma''_y &= f_2\sigma'_x + e_2\sigma'_y + g_2\bar{\sigma}_z, \\
\tau''_{xy} &= \frac{(s'_{64} - s''_{64})\bar{\tau}_{yz} + (s'_{65} - s'_{65})\bar{\tau}_{xz} + s'_{66}\tau'_{xy}}{s''_{66}}, \\
\sigma'_z &= \sigma''_z = \bar{\sigma}_z, \\
\tau'_{xz} &= \tau''_{xz} = \bar{\tau}_{xz}, \\
\tau'_{yz} &= \tau''_{yz} = \bar{\tau}_{yz};
\end{aligned}
\right\} \qquad (1)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
s_{11} &= \frac{1}{D}\left(A_2 s'_{11} - B_2 s'_{12}\right), \\
s_{12} &= \frac{1}{D}\left(-B_1 s'_{11} - A_1 s'_{12}\right), \\
s_{13} &= \frac{1}{D}\left[D \cdot s'_{13} + (B_1 C_2 - A_2 C_1)\, s'_{11} + (B_2 C_1 - A_1 C_2)\, s'_{12}\right], \\
s_{21} &= \frac{1}{D}\left(A_2 s'_{21} - B_2 s'_{22}\right), \\
s_{22} &= \frac{1}{D}\left(-B_1 s'_{21} + A_1 s'_{22}\right), \\
s_{23} &= \frac{1}{D}\left[D s'_{23} + (B_1 C_2 - A_2 C_1)\, s_{21} + (B_2 C_1 - A_1 C_2)\, s'_{22}\right], \\
s_{31} &= \frac{1}{D(1+k)}\left(A_2 X - B_2 Y\right), \\
s_{32} &= \frac{1}{D(1+k)}\left(-B_1 X + A_1 Y\right), \\
s_{33} &= \frac{1}{D(1+k)}\left[DZ + (B_1 C_2 - A_2 C_1) X + (B_2 C_1 - A_1 C_2) Y\right], \\
s_{ij} &= \frac{1}{1+k}\left[s'_{ij} + k s''_{ij} - \frac{k s'_{i6}\left(s'_{6j} - s''_{6j}\right)}{s''_{66} + k s'_{66}} + \frac{k s''_{i6}\left(s'_{6j} - s''_{6j}\right)}{s''_{66}} - \right. \\
&\qquad \left. - \frac{k^2 s''_{6j} s'_{66}}{s''_{66}} \cdot \frac{\left(s'_{6j} - s''_{6j}\right)}{s''_{66} + k s'_{66}}\right], \quad i, j = 4, 5, \\
s_{i6} &= \frac{s'_{i6} s''_{66} + k s''_{i6} s'_{66}}{s''_{66} + k s'_{66}}, \qquad i, j = 4, 5 \\
s_{6j} &= s'_{6j} - \frac{k\left(s'_{6j} - s''_{6j}\right)}{s''_{66} + k s'_{66}}, \\
s_{66} &= \frac{s''_{66}(1+k)}{s''_{66} + k s'_{66}}.
\end{aligned}
\right\} \quad (2)
$$

В формулах (1), (2) использованы обозначения:

$$
\left.
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{s'_{11} s''_{22} - s'_{21} s''_{12}}{S}, \qquad e_2 = \frac{-s'_{12} s''_{22} + s'_{22} s''_{11}}{S} \\
f_1 &= \frac{s'_{12} s''_{22} - s'_{12} s''_{12}}{S}, \qquad f_2 = \frac{-s'_{11} s''_{21} + s'_{21} s''_{11}}{S} \\
g_1 &= \frac{s''_{22}\left(s'_{13} - s''_{13}\right) - s''_{12}\left(s'_{23} - s''_{23}\right)}{S}, \quad g_2 = \frac{-s''_{21}\left(s'_{13} - s''_{13}\right) + s''_{11}\left(s'_{23} - s''_{23}\right)}{S} \\
S &= s''_{11} s''_{21} - s''_{12} s''_{21}, \\
A_i &= \frac{1 + k e_i}{1+k}, \\
B_i &= \frac{k f_i}{1+k}, \qquad i = 1, 2.
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

$$\left.\begin{aligned} C_i &= \frac{kg_i}{1+k}, \\ D &= A_1A_2 - B_1B_2, \\ X &= s'_{31} + k(s''_{31}e_1 + s''_{32}f_2), \\ Y &= s'_{32} + k(s''_{31}f_1 + s''_{32}e_2), \\ Z &= s'_{33} + k(s''_{31}g_1 + s''_{32}g_2 + s''_{33}) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$k$ — отношение толщин слоев;

$\bar{s}'_{ik}$ $\bar{s}''_{ik}$ — упругие постоянные слоёв, отнесённые к прямоугольной системе координат, ось $z$ которой перпендикулярна плоскости слоёв;

$\sigma_x$, $\sigma_y$, ... — компоненты макро н. с.

Результаты расчёта напряжений для системы, состоящей из слоёв цинка равных толщин, в одном из которых плоскость базиса параллельна, в другом нормальна границе раздела при некоторых макро н. с. приведены в таблице 1. В таблице 2. приведены значения модулей Юнга для трёх направлений, вычисленные при условии свободной деформации слоёв и с учётом стеснения деформаций (т. е. по формулам (2)).

Если ширина слоёв конечна, то стеснение деформации является неполным; степень стеснения деформации может быть учтена введением коэффициента стеснения

$$\beta = \frac{0.1\left(\frac{a}{s}\right)^2}{1 + 0.1\left(\frac{a}{s}\right)^2} \text{ [39].}$$

Зависимость модуля $E_z$ от геометрии слоёв приведена в таблице 3.

Таблица 1

| $\bar{\sigma}_x$ | $\bar{\sigma}_y$ | $\bar{\sigma}_z$ | $\sigma'_x$ | $\sigma''_x$ | $\sigma'_y$ | $\sigma''_y$ | $\sigma'_z$ | $\sigma''_z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0,90 | 1.10 | −0,26 | +0,26 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | −0,34 | 0,34 | 1.49 | 0,51 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0,57 | −0,57 | 0,10 | −0,10 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1,13 | 0,87 | 1.33 | 0,17 | 1 | 1 |

Таблица 2

| | Стесн. деф. | Св. дефор. |
|---|---|---|
| $E_x$ | 13900 | 11900 |
| $E_y$ | 8250 | 7700 |
| $E_z$ | 6250 | 5400 |

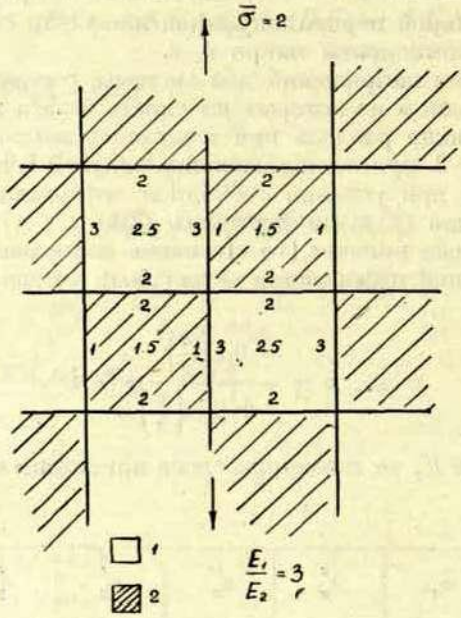
Таблица 3

| $\frac{a}{s}$ | $\beta$ | $E_z$ |
|---|---|---|
| ~ | 1 | 6250 |
| 10 | 0,91 | 6150 |
| 5 | 0,71 | 5970 |
| 2 | 0,29 | 5600 |
| 0 | 0 | 5400 |

Рассмотренный здесь пример, а также другие расчёты на основании соотношений (1, 2) и работы [39] показывают, что выводы в отношении упругого н. с. слоистого материала совпадают с результатами экспериментов по деформации зёрен поликристалла. Так, напряжения и деформации слоёв

(зёрен) различны и не совпадают с макронапряжениями и макродеформациями; при одноосном растяжении образца микро н. с. нелинейно; трёхосное растяжение с равными компонентами напряжений создает микро н. с. с неравными компонентами (т. о и при этих условиях есть возможность пластической деформации отдельных зёрен).

Неоднородность напряжённого состояния определяется различием в свойствах слоёв (зёрен) и степенью стеснения деформации, которая зависит от геометрии слоёв, т. е. от формы зёрен моделируемого поликристалла. Из соображений подобия следует, что средняя по образцу степень стеснения упругой деформации, а поэтому и модули упругости не должны зависеть от размера зерна.




Фиг. 1.

Стеснение деформации приводит к увеличению жесткости поликристалла.

Как показано в [39], н. с. слоёв неоднородно; неоднородность максимальна у границ и при конечной ширине слоя распространяется на весь его объем. Аналогичное заключение, подтверждающееся экспериментами, мы можем сделать в отношении зёрен поликристалла. Заметим, что если бы сферическое зерно находилось в окружении однородной изотропной среды, то его н. с. было бы однородным; неоднородность же является следствием различия свойств зёрен, примыкающих к данному.

В ряде работ, посвященных расчёту свойств поликристаллов [41, 42, 43, 48, 51, 52, 53] принимается одна из двух крайних гипотез относительно распределения напряжений в поликристалле: гипотеза равных напряжений или гипотеза равных деформаций. Для одноосного растяжения эти гипотезы эквивалентны моделированию поликристалла слоистой системой, слои которой расположены соответственно нормально или параллельно направлению растяжения. При моделировании поликристалла наложением двух нормально друг к другу ориентированных слоистых систем мы получаем н. с., более соответствующее результатам наблюдений.

На фиг. 1 приведена качественная картина распределения напряжений для случая поликристалла, состоящего из чередующихся в шахматном

порядке зёрен двух „сортов", модули упругости которых относятся как 1:3; у границ, нормальных нагрузке, удовлетворяются условия равенства нормальных напряжений, у второй группы границ — условия неразрывности тангенциальных деформаций.

4.

Расчёт напряжений и деформаций в пластической области затрудняется сложностью анизотропии пластического течения. Аналогия с пластическими свойствами слоистой системы позволяет всё же прийти к некоторым заключениям.

1) Пластическая деформация зёрен начинается неодновременно. Предел пропорциональности поликристалла соответствует началу пластической деформации в наиболее выгодно ориентированных („мягких") зёрнах. Значительные пластические деформации появляются после начала течения наименее выгодно ориентированных („жестких") зёрен.

2) Жёсткие зёрна задерживают деформацию мягких; наоборот, мягкие зёрна создают в жёстких дополнительные напряжения, облегчающие наступление в них пластической деформации. Увеличение стеснения деформации приводит к сокращению интервала между пределом пропорциональности и условным пределом текучести; плавность перехода от упругой деформации к пластической уменьшается.

3) Стеснение деформации в случае пластически изотропного материала не зависит от размера зёрен. Предел текучести $\bar{\sigma}_T$ системы пластически изотропных слоёв (зёрен) должен при малом стеснении лежать в интервале: $\sigma_{T_м} - \frac{\sigma_{T_м} + \sigma_{T_ж}}{2}$, при большом же стеснении $\bar{\sigma}_T > \frac{\sigma_{T_м} + \sigma_{T_ж}}{2}$.

4) Анизотропия пластичности материала увеличивает стеснение деформации зёрен и далает его зависящим от размера последних. Можно предположить следующую последовательность процессов деформации зерна: а) напряжение в некоторой системе плоскостей скольжения мягкого зерна достигло критического значения; пластическая деформация зерна по величина порядка упругой деформации окружающих более жёстких зёрен, б) стеснение деформации обуславливает изменение н. с. зерна в таком направлении, чтобы было достигнуто кричическое напряжение в других системах плооскостей или для других механизмов пластической деформации, при которых возможно согласованное формоизменение соседних зёрен, в) существенная пластическая деформация возникает, когда указанное состояние достигнуто и в соседних жёстких зёрнах.

Неоднородность деформации в пределах зерна создает возможность согласования формоизменения в основном за счет пограничных областей соседних зёрен. При малых размерах зёрен эта область охватывает весь объём зерна, н. с. и, соответственно, механизм деформации неоднородны по по всему зерну; при больших размерах зёрен их центральные части оказываются в условиях меньшего стеснения, н. с. и пластическое течение в этой области более однородны. Т. о. в пластической области стеснение деформации увеличивается с уменьшением размера зёрен. Необходимо отметить, что зависимость стеснения от размеров зерна, т. е. нарушение условий подобия, возможно здесь по той причине, что одно и то же н. с. может обуславливать различное деформированное состояние, если градиенты напряжений, а, следовательно, и механизмы деформации различны; различное упрочнение при разных механизмах деформации в дальнейшем создает различие и н. с. крупных и мелких зёрен.

С точки зрения этих соображений можно рассмотреть некоторые экспериментальные факты.

1) Весьма сильное уменьшение пластичности гексагональных поликристаллов по сравнению с монокристаллами и незначительная разница в пластичности поли- и монокристаллов кубической симметрии объясняется большим отличием механизмов неоднородной и однородной деформации и большим стеснением деформации у гексагональных кристаллов, из-за значительной пластической анизотропии. Отсюда же следует большая зависимость сопротивления пластической деформации от размера зерна для этих кристаллов. Моделирование слоистой средой приводит к следующему выражению для предела текучести:

$$\sigma_T = \frac{\frac{\sigma_м + \sigma_{ж}}{2} + \frac{\sigma_м + \sigma_{ж}}{1+\gamma}}{2}, \tag{4}$$

Здесь $\sigma_м$ — предел текучести наиболее „мягких" зёрен;
$\sigma_{ж}$ — „ „ „ „жестких";
$\gamma$ — коэффициент стеснения пластической деформации, зависящий от размеров и формы зёрен; если диаметр зерна $d \to \infty$, то $\gamma \to 0$, если $d \to 0$, то $\gamma \to 1$.

Для мелкого зерна пределы текучести $\sigma_м$, $\sigma_{ж}$ представляют собой критические напряжения по отношению к скольжению по нескольким системам плоскостей (кубические кристаллы) или по отношению к образованию сбросов или небазисному скольжению (гексагональные кристаллы), т. е. величины порядка нескольких кГ/мм²; такие значения и наблюдаются на опыте для мелкозернистых поликристаллов. Для крупнозернистых кубических кристаллов эти величины представляют собой критические напряжения по отношению к скольжению по одной ($\sigma_м$) или нескольким ($\sigma_{ж}$) системам плоскостей, однородная деформация путём скольжения по плоскостям базиса в пределах всего объёма зерна у гексагональных кристаллов не наблюдается даже при очень крупном зерне, поэтому здесь величины $\sigma_м$, $\sigma_{ж}$ имеют значения промежуточные между критическими напряжениями для однородной и неоднородной деформации.

2) Предел текучести двухфазного поликристалла может быть вычислен по формуле

$$\sigma_T = \frac{\frac{\sigma_м + k\,\sigma_{ж}}{1+k} + \frac{\sigma_м + \gamma\,k\,\sigma_{ж}}{l+\gamma\,k}}{2} \tag{5}$$

где $k$ — отношение количеств фаз в системе.

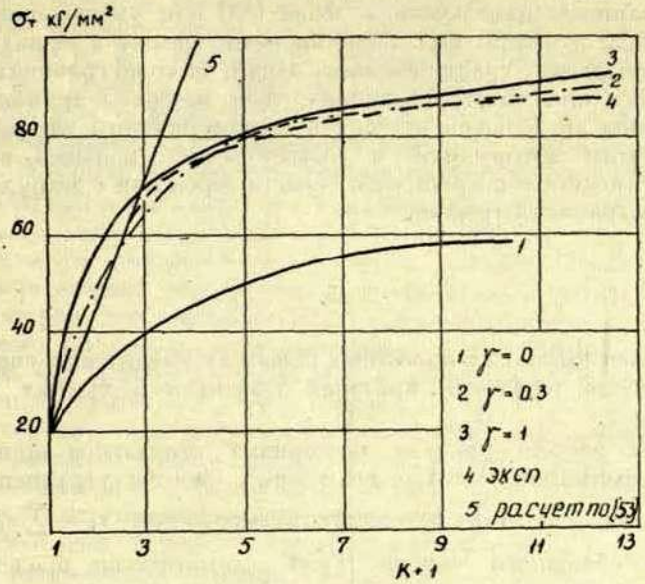
На фиг. 2 показана зависимость предела текучести от состава при разном стеснении, т. е. при разной величине зерна. Там же приведены экспериментальные значения, полученные Пашковым [53] для ферритоперлитной стали и полученная им теоретически линейная зависимость, по существу предполагающая равенство напряжений в зёрнах.

3) Аномально большая пластичность сплава Al — Zn при 80% Zn [54], превышающая пластичность как Al, так и Zn может быть объяснена резким уменьшением стеснения деформации зерен, когда они находятся в контакте не друг с другом, а с обладающими большими возможностями формоизменения зёрнами Al; такая система объединяет легкость пластической деформации монокристаллов Zn с малым стеснением пластической деформации поликристаллов Al.

Ряд других вопросов пластической деформации, в частности вопросы образования площадки текучести и явления неупругости, также могут быть рассмотрены с приведенной точки зрения.

Т. к. разрушение материала определяется не средними, а микронапря-

жениями, то учёт неоднородности структуры здесь еще существеннее; с другой стороны, концентрация напряжений зависит от деталей структуры,




Фиг. 2.

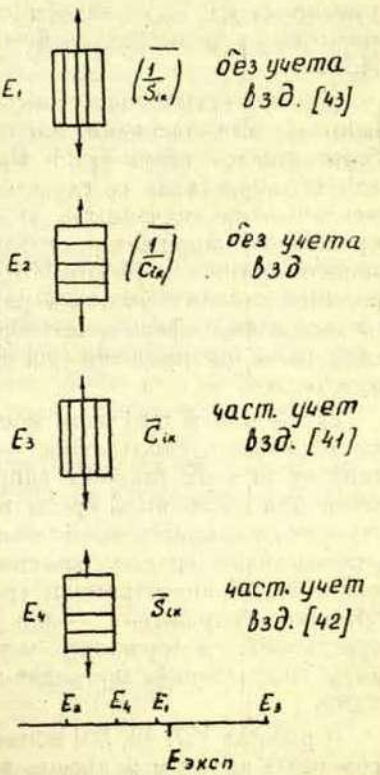
которые затруднительно моделировать. Из рассмотрения слоистых структур можно заключить следующее:

1) Если не учитывать стеснения деформации зёрен, то разрушение материала должно происходить при напряжении $\bar{\sigma}$, уовлетворяющем условию $\sigma_m < \sigma < \frac{\sigma_м + \sigma_ж}{2}$, где $\sigma_м$, $\sigma_ж$ — напряжения, вызывающие разрушение наиболее и наименее прочных зёрен.

2) Концентрация и объёмность н. с. и градиент деформаций максимальны в угловых точках слоёв (которые эквивалентны местам стыка трёх зёрен); эта область наиболее опасна в отношении хрупкого разрушения.

3) Даже в случае чистого одноосного сжатия образца в зёрнах есть нормальные растягивающие напряжения, т. е. возможно разрушение путём отрыва (см. также [55, 56]).

4) Н. с. в жёстких зёрнах смягчено по сравнению с макро н. с. (в мягких зёрнах имеет место обратная картина); это обстоятельство выравнивает возможности хрупкого разрушения для мягких и жестких зёрен, если жёсткий материал более хрупок.




Фиг. 3.

Известно (см., например [57]), что прочность, особенно хрупкая, растёт с уменьшением размера зёрен. В работе [58] показано, что хрупкая прочность стали возрастает параллельно уменьшению неоднородности деформации, вызванному измельчением зёрна [33] или уменьшением различия в механических свойствах фаз. Возникновение трещин в зёрнах происходит в области наибольшего градиента деформаций, часто по границам двойников и полос сброса или вместо последних, если материал хрупок [59]. Пока неясно, связана ли большая прочность мелкозернистого материала с меньшим градиентом деформаций, и соответственно, меньшей вероятностью образования трещин в пограничной области зёрен или с затруднением процесса распространения трещин.

## 5.

Остановимся кратко на известных попытках вычисления упругих постоянных, пределов текучести, критерия текучести и кривых деформации поликристаллов.

1) Методы расчёта упругих постоянных отличаются степенью учёта стеснения деформации. Четыре возможных способа усреднения коэффициентов $s_{ik}$, $c_{ik}$ [41—43], входящих в выражения $\varepsilon_i = \sum s_{ik}\sigma_k$ и $\sigma_i = \sum c_{ik}\varepsilon_k$ обобщённого закона Гука, схематически представлены на фиг. 3. Там же показано примерное распределение полученных значений модуля Юнга по отношению к экспериментальным значениями. Наилучшее приближение, полученное в [43] обусловлено компенсацией двух факторов: уменьшения E из-за неучёта стеснения и его увеличения, всегда имеющего место при усреднении свойств „параллельно включённых" слоёв (см. также [45]).

Лучшее совпадение с экспериментальными значениями получается при полном учёте стеснения, однако это требует моделирования поликристалла более простой структурой. Брюггеман [44] вычислил упругие постоянные для поликристалла со слоистыми зёрнами; хорошее совпадение с экспериментальными значениями указывает на незначительную зависимость распределения напряжений от формы зёрен. Более близкая к действительности модель принята в работе [46], где рассчитаны упругие постоянные к. г. ц. поликристаллов с учетом усредненного воздействия квазиизотропной среды на выделенное сферическое зерно. Для лучшего суждения о точности метода следовало бы провести расчёт для более анизотропных гексагональных кристаллов.

2) Критерий текучести монокристаллов для деформации по одной системе плоскостей скольжения — критическое скалывающее напряжение $\tau_{kp}$ зависит от всех главных напряжений в отличие от $\tau_{max}$ — критерия текучести для изотропной среды по теории Треска — Сен-Венана, который не зависит от среднего по величине главного напряжения. С другой стороны, учитывающий среднее главное напряжение критерий текучести, предложенный для анизотропной среды Мизесом [60] и представляющий собой обобщение выражения — для упругой энергии формоизменения, для монокристаллов, деформация которых сводится к сдвигу по дискретному ряду направлений, приводит к расхождению с экспериментальными данными.

В работах [47, 49, 50] показано, что вычисление предела текучести поликристалла путём усреднения пределов текучести монокристаллов приводит к критерию типа критерия Мизеса:

$$\tau^2 = \frac{a^2}{4}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] \qquad (6)$$

постоянная $a$ в котором зависит от симметрии решётки.

Абсолютные значения пределов текучести получаются в этих работах заниженными, т. к. не учитывается стеснение и изменение механизмов деформации при переходе от моно- к поликристаллу.

Расчёты для к. г. ц. металлов с применением гипотезы равных деформаций, т. е. при частичном учёте стеснения [48, 41, 52], дают менее заниженные значения $\sigma_T$. Хорошее совпадение кривой деформации с экспериментальной в случае Al [48] показывает, что влияние неоднородности микродеформаций на макродеформацию незначительно; следует отметить, что этот результат не является доказательством правильности данного метода расчёта: параболическая кривая деформации получается и без учёта стеснения, т. к. она характерна для скольжения по нескольким системам плоскостей, имеющего место для большинства ориентаций монокристаллов. Полученные в работах [51, 52] критерии текучести несколько отклоняются от критерия Мизеса в сторону критерия Треска и хорошо согласуются с экспериментом. Достаточно хорошее определение начала пластической деформации поликристаллов критерием Мизеса для изотропной среды (иначе говоря, независимость постоянной $a$ в формуле (6) от типа кристаллической решётки) указывает на то, что неоднородный характер течения поликристаллов, при котором преобладают сложные механизмы деформации с отсутствием резко выделенных направлений течения, приближает их свойства к свойствам однородной среды. Для этого случая критерий, связывающий начало течения с критическим значением энергии упругого формоизменения, представляется физически наиболее обоснованным.

Построение единой кривой упрочнения в случае монокристаллов возможно только в том случае, когда механизм деформации не меняется при изменении н. с. То же условие справедливо для поликристаллов. Расхождения кривых при разных н. с. можно ожидать при малом стеснении деформации, например, для крупнозернистой структуры (особенно в случае гексагональных кристаллов, механизмы однородной и неоднородной деформации которых сильно различаются).

## 6.

Соображения, высказанные в настоящей работе, носят в основном качественный характер. Для установления количественных соотношений, описывающих влияние неоднородности поликристаллов на их механические свойства, необходим ряд расчетов и экспериментов, касающихся распределения напряжений и деформаций, а также критическое рассмотрение значительного количества экспериментальных данных, описывающих влияние структуры материала на его свойства.

Считаю своим приятным долгом принести благодарность проф. А. В. Степанову за ценную дискуссию по вопросам, связанным с настоящей работой.

30 VIII 1957 *Кафедра экспериментальной физики*

## ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Я. Б. Фридман.* ДАН СССР, 1956, т. 6, № 2.
[2]. *А. В. Сетанов.* ЖТФ, 1950, т. 20, 1194.
[3]. *А. В. Степанов.* Известия АН СССР, сер. физ. 1950, т. 14, 122.
[4]. *А. В. Степанов.* Известия АН СССР сер. физ., 1953, т. 17, 271.
[5]. *Е. Шпид* и *В. Боас.* Пластичность кристаллов, М.-Л., 1938.
[6]. *F. C. Rosi.* I of Metals, 1954, V 6, 1009.
[7]. *K. Lücke, G. Masing, K. Schröder.* Zs. f. Metallkunde, 1955, Bd. 46, 792.
[8]. *H. Lange, K. Lücke.* Zeitschr. f. Metallkunde, 1953, Bd. 44, 183, 525.
[9]. *P. Hausen, G.* Liebfried. Zs. f. Metallkunde, 1952, Bd. 43, 317.

[10]. *F. D. Rosi, C. H. Mathewson.* I of Metals, 1950, V 2, 1159.
[11]. *H. Scholl.* Zs. f. Metallkunde, 1953, Bd. 44, 528.
[12]. *K. Lücke, H. Lange.* Zs. f. Metallkunde, 1952, Bd. 43, 55.
[13]. *R. L. Bell, R. W. Cahn.* Proc. Roy. Soc., 1957, v 239 A, 494.
[14]. *I. I. Gilman, W. T. Read.* I of Metals, 1953, 5, 49.
[15]. *I. I. Gilman.* I of Metals, 1955, 7, N 1 (2).
[16]. *I. I. Gilman.* I of Metals, 1956, 8, N 6 (2).
[17]. *R. S. Davis, R. L. Fleischner, I. D. Livingston, B. Chalmers.* I of Metals 1957, V 9, N 1 (2).
[18]. *H. C. U. Carpenter, C. F. Elam.* Proc. of Roy. Society, 1929, VA 100, 329.
[19]. *K. Jamaguchi, Sie Papers.* Inst Phys, Chem. Res., 1927, V 6, 271.
[20]. *R. L .Aston.* Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 1926, V 23, 549.
[21]. *W. Boas, M. E. Hargreaves.* Helv. Phys. Acta, 1950, Bd. 23, 159.
[22]. *W. Boas, M. E. Hargreaves.* Proc. Phys. Soc., 1948, V 193 A, 89.
[23]. *W. Boas, R. W. K. Honeycombe.* Austral. I. Sir. Rep., 1948, V 1, 70.
[24]. *L. M .Clazebrongh. Austral.* I. Sir. Rep., 1950, v 3, 72.
[25]. *C. S. Barret, L. H. Levenson.* Traks. AIME, 1940, v 137, 128.
[26]. *W. Boas, G. I. Oglvie.* Acta Metallurgica 2954, v 2, N 5 .
[27]. *А. В. Степанов.* ЖТФ, 1949, т. 19, 205.
[28]. *Р. А. Житников, А. В. Степанов.* ЖТФ, 1956, т. 26, 772, 779.
[29]. *Б. А. Кузнецов.* ЖТФ, т. 24, 1956, 1611.
[30.] *Н. Ф. Лашко.* ЖТФ, 1950, т. 20, 884.
[31.] *Н. Ф. Лашко.* ЖТФ, 1950, т. 29, 880.
[32] *Э. С. Яковлева.* Физ. металлов и металловедение, 1957, т. 4, в. 1, 2.
[33.] *Б. Б. Чечулин.* Физ. металлов и метолловедение, 1599, т. 1, 252.
[34.] *П. О. Пашков, В. А. Братухина.* ЖТФ, 1953, т. 23, 267.
[35]. *Dorn, Starz.* Relation of Properties to Microstructure Seminar of 33 Nat. Congress ASME, 1953.
[36]. *B. Chalmers.* Acta Metalurgica, 1954, v 2, 80.
[37]. *M. Hatherly, L. Samuels.* I. Inst. Metals, 1957, v 85, 437.
[38]. *B. Chalmers, G. Craig.* Canad. I. of Physics, 1957, N 1.
[39]. *В. М. Гольдфарб, А. В. Степанов.* «Вопросы динамики и прочности». Ин-т машиноведения АН Латв. ССР, 1958, сб. 5, 127—159.
[40]. *В. М. Гольдфарб, А. В. Степанов.* Опубликована в этом сборнике стр. 221.
[41]. *W. Voigt.* Lehrbuch der Kristallphysik, Leipzig 1928.
[42]. *A. Rekss.* Zeit. Angew. Math. und Mech., 1929, Bd 9, 49.
[43]. *A. Huber, E. Schmid.* Helv. Phys. Acta, 1944, Bd 7, 878.
[44]. *D. A. G. Bruggeman.* Elastizitätskonstanten von Kristallaggregaten. Utrecht Dissertation, 1930.
[45]. *H. Stadelmeyer.* Zeit. Angew. Math. und Phys., 1955, Bd. 6, 247.
[46]. *A. V. Hershey.* I. Appl. Mech., 1954, v 21, 236.
[47]. *G. Sachs.* Zeit. VDI, 1928, Bd 72, 734.
[48]. *G. I. Taylor.* I. Inst. Metals, 1938, v 62, 307.
[49]. *U. Dehlinger.* Zs. f. Metallkunde, 1943, Bd 35, 182.
[50]. *Н. К. Снитко.* ЖТФ, 1948, т. 18, 857.
[51]. *I. F. W. Bishop, R. Hill.* Phyl. Magazin, 1951, v 42, 1298.
[52]. *A. W. Herhey.* I. Appl. Mech., 1954, v 21, 241.
[53]. *П. О. Пашков.* ЖТФ, 1954, т. 24, № 3.
[54.] *А. А. Бочвар, З. А. Свидерская.* Изв. ОТН АН СССР, 1946, № 7.
[55]. *С. Д. Волков.* ЖТФ, 1953, т. 23, 2025, 2038.
[56]. *С. Д. Волков.* ТФ, 1955, т. 25, 2230.
[57]. *Я. Б. Фридман.* Механические свойства металлов, Оборонгиз, 1952.
[58.] *П. О. Пашков, В. А. Братухина.* Металловедение, Сб. статей, 1957.
[59]. *P. Morton, R. Treon, W. Baldwin.* I. Mech. Phys. Solids, 1954, v 2, N 3.
[60]. *R. Mises.* Zeit. Angew. Math., und Mech. 1928, 8, 161.

## POLIKRISTALISKU MATERIĀLU NEHOMOGENITATES IESPAIDS UZ TO MEHANISKĀM ĪPAŠĪBĀM

*V. M. Goldfarbs*

(Kopsavilkums)

Apskatīts polikristalu graudu anizotropijas un strukturas neviendabīguma iespaids uz to elastību, plastiskumu un izturību; daži jautājumi tiek risināti modulējot polikristalu ar slāņainu vidi.

Tiek dota metode, kā dažos specialos gadījumos noteikt īpašības elastīgai sistemai, sastāvošai no anizotropiem slāņiem.

Dota īsa rezultatu analize par polikristalu elastīgām un plastiskām īpašībām, noteiktām pēc attiecīgo monokristalu īpašībām.

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ П. СТУЧКИ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ, ТОМ XX, ВЫПУСК 3, 1958 ГОДА

# НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К МОЕЙ РАБОТЕ „О КВАДРАТНОМ КОРНЕ ИЗ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ“

*Я. Л. ЭНГЕЛЬСОН*

В работе [1] приведены некоторые предложения без полных доказательств. В настоящей заметке приводятся полные доказательства этих предложений.

1. Пусть $E$ — рефлексивное*) вещественное локально выпуклое пространство и $E^*$ — пространство, сопряженное к $E$. Предполагается, что $E \subset H \subset E^*$, где $H$ — гильбертово пространство, всюду плотное в $E^*$. Рассматривается самосопряженный в $H$ оператор $A$, действующий вполне непрерывно из $E^*$ в $E$. Оператор $A$ из $E_1$ в $E_2$ называется вполне непрерывным, если он отображает некоторую окрестность нуля $U \subset E_1$ в компактное множество $K \subset E_2$ (ср. [2]). При указанных условиях имеет место

Лемма 1. Каковы бы ни были $u, v \in E^*$, имеет место равенство

$$(Au, v) = (Av, u).$$

Доказательство. Предположим противное: пусть существует пара элементов $u_0, v_0 \in E^*$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$(Au_0, v_0) - (Av_0, u_0) \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

Пусть, далее, $u$ и $v$ — произвольно выбранные элементы из $E^*$. Тогда

$$\begin{aligned}(Au_0, v_0) - (Av_0, u_0) &= (Au_0, v_0) - (Au, v_0) + (Au, v_0) - (Au, v) + \\ &+ (Au, v) - (Av, u) + (Av, u) - (Av, u_0) + (Av, u_0) - (Av_0, u_0) = \\ &= (Au_0 - Au, v_0) + (Au, v_0 - v) + (Av, u - u_0) + (Av - Av_0, u_0) + \\ &+ (Au, v) - (Av, u).\end{aligned}$$

Рассмотрим выражение $(Au_0 - Au, v_0)$. Так как $(y, v_0) = f(y)$ есть линейный непрерывный функционал от $y \in E$, то существует окрестность нуля $U \subset E$ такая, что для всех $y \in U$ имеет место неравенство $|(y, v_0)| < \frac{\varepsilon}{8}$ В силу непрерывности оператора $A$ для этой окрестности $U$ найдется окрестность $U^* \subset E^*$ такая, что для $u_0 - u \in U^*$ имеет место включение $Au_0 - Au \in U$, и следовательно

$$|(Au_0 - Au, v_0)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{2'}$$

Подобным образом найдется окрестность нуля $V^* \subset E^*$ такая, что из $v - v_0 \in V^*$ следует неравенство

$$|(Av - Av_0, u_0)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{2''}$$

*) Все результаты работы [1] остаются в силе при замене рефлексивности требованием бочечности $E$.

Пусть $O$ — окрестность нуля из $E^*$, образ которой при отображении $A$ есть компактное, а значит и ограниченное множество $A(O)$. Такая окрестность существует в силу полной непрерывности оператора $A$. Очевидно, ограниченными будут также образ окрестности нуля $W=O \cap (U^* \cap V^*)$ и множества $A(v_0+W)$ и $A(u_0+W)$. Пусть $P_u$ — поляра множества $A(u_0+W)$, а $P_v$ — поляра множества $A(v_0+W)$. Рассмотрим окрестность нуля $W^* = W \cap \left(\frac{\varepsilon}{8}P_v \cap \frac{\varepsilon}{8}P_u\right)$. Если подобрать $u$ и $v$ так, чтобы $v-v_0 \in W^*$ и $u-u_0 \in W^*$, то $v \in v_0+W$, $u \in u_0+W$ и следовательно $Av \in A(W+v_0)$ и $Au \in A(W+u_0)$. Кроме того, $u-u_0 \in \frac{\varepsilon}{8}P_v$ и $v-v_0 \in \frac{\varepsilon}{8}P_v$. Поэтому имеют место неравенства

$$|(Av,\ u-u_0)| < \frac{\varepsilon}{8}, \qquad |(Au,\ v-v_0)| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{3}$$

Ясно, что для $u \in u_0+W^*$ и $v \in v_0+W^*$ также выполняются неравенства (2′) и (2″).

Ввиду того, что $H$ плотно в $E^*$, в окрестностях $u_0+W^*$ и $v_0+W^*$ найдутся точки $u_1\ v_1 \in H$, для которых, в силу самосопряженности оператора $A$ в $H$, имеет место равенство

$$(Au_1,\ v_1)-(Av_1,\ u_1)=0$$

Отсюда и из предыдущего следует:

$$|(Au_0,\ v_0)-(Av_0,\ u_0)| - |(Au_0-Au_1,\ v_0)+(Av_1-Av_0,\ u_0)+$$
$$+(Av_1,\ u_1-u_0)+(Au_1,\ v_0-v_1)| \leqslant |(Au_0-Au_1,\ v_0)|+|(Av_1-Av_0,\ u_0)|+$$
$$+|(Av_1,\ u_1-u_0)|+|(Au_1,\ v_1-v_0)| < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит неравенству (1). Лемма доказана.

Заметим, что приведенное доказательство использует не полную непрерывность, а лишь непрерывность и ограниченность оператора $A$.

Из доказанной леммы 1 следует равенство $\operatorname{grad}(Au,\ u)=2Au$. Действительно, обозначив $(Au,\ u)=J(u)$, находим

$$\mathrm{D}J(u,\ h)=\lim_{t\to 0}\frac{(A(u+th),\ u+th)-(Au,\ u)}{t}=\lim_{t\to 0}[(Au,\ h)+(Ah,\ u)+$$
$$+t(Ah,\ h)]=(2Au,\ h),\ \text{где}\ u,\ h \in E^*$$

откуда следует, что $\operatorname{grad} I(u)=2Au$. Этот результат далее используется при доказательстве слабой непрерывности функционала $I(u)$.

2. В п. 4 работы [1] доказано, что если $A$ — квазиположительный оператор, то оператор

$$A^{\frac{1}{2}}u=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_k,\ u)\,e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\varphi_k, \qquad u \in H$$

действует вполне непрерывно из $H$ в $E$ (лемма 4, и теорема 1.) и что линейный оператор

$$Tv=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\varphi_k,\ v)\,e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\varphi_k, \qquad v \in E^* \tag{4}$$

действует из $E^*$ в $H$ и является сопряженным к оператору $A^{\frac{1}{2}}$. (лемма 5).

Отсюда следует непрерывность оператора $T$, так как, если оператор $B$,

действующий из $E_1$ и $E_2$ ограничен, т. е. отображает некоторую окрестность нуля $U \subset E_1$ в ограниченное множество $D \subset E_2$, то сопряженный оператор $B^*$ непрерывен.

Действительно, оператор $B^*$ отображает поляру $D^\circ$ множества $D$ в поляру $U^\circ$ множества $U$. $D^\circ$ является окрестностью нуля в $E_2^*$ и отображается оператором $B^*$ в ограниченное множество $U^\circ \subset E_1^*$. Для произвольно заданной окрестности $V \subset E_1^*$ найдется число $\lambda > 0$ такое, что $\lambda U^\circ \subset V$; следовательно оператор $B^*$ отображает окрестность нуля $\lambda D^\circ$ в окрестность нуля $V$, а это и означает, что оператор $B^*$ непрерывен.

Сопряженный оператор назовем вполне непрерывным, если он всякое ограниченное множество отображает в компактное (ср. [2]).

Теорема 2 (см. [1]). Линейный оператор $T$ действует вполне непрерывно из $E^*$ в $H$.

Доказательство. Из равенства (4) следует, что значения оператора $T$ принадлежат собственному подпространству оператора $A$, которое имеет счетний базис и лежит в $H$. Положим

$$Tv = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, v)\, e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\, \varphi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v)\, e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}}\, \varphi_k \equiv S_n v + R_n v\,.$$

В силу квазиположительности оператора $A$ существует $n_0$ такое, что для $n \geqslant n_0$ числа $\lambda_k$ $(k = n+1,\ n+2,\ \ldots)$ положительны. Тогда для $n \geqslant n_0$ имеет место равенство

$$\|R_n v\|^2 = \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v)\, e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\, \varphi_k,\ \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v)\, e_k}{\sqrt{\lambda_k}}\, \varphi_k \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\varphi_k, v)^2}{\lambda_k} = I(v) - I_n(v)$$

(см. [1], равенства (7) и (8)).

Пусть $D$ — ограниченное множество из $E^*$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$, в силу основной леммы из [1] существует $N \geqslant n_0$ такое, что для всех $v \in D$ и $n \geqslant N$ имеет место

$$\|R_n v\|^2 = |I(v) - I_n(v)| < \varepsilon\,,$$

а значит, по известному критерию компактности (см. [3], стр. 225), образ множества $D$ компактен. Теорема доказана.

30 VIII 1957 *Кафедра общей математики*

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1]. *Я. Л. Энгельсон.* О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах. Ученые Записки ЛГУ, Рига, 1956, т. VIII физ.-мат. науки, вып. 2. 73—79.

[2]. *M. Altman.* On linear functional equations in locally convex linear topological spaces. Studia Math., 13 (1953), 194—207.

[3]. *Л. А. Люстреник* и *В. И. Соболев* Элементы Функционального анализа. Гостехиздат, 1951.

## СОДЕРЖАНИЕ


Стр.

1. Ludvigs Jansons.
2. А. Я. Лусис. Развитие математики в советской Латвии за последнее десятилетие . . . . . 5
3. А. А. Курмитис. К вопросу независимости одной системы аксиом исчисления высказываний . . . . . 21
4. Л. Я. Энгельсон. О потенциальных операторах в линейных топологических пространствах . . . . . 27
5. М. К. Зандере. О частичной непрерывности функций нескольких переменных . . . . . 47
6. А. Р. Гринфельде. Применение метода верхних и нижних функций к решению нелинейной системы второго порядка . . . 57
7. Э. Я. Риекстиньш. О методе эталонных функций . . . . 65
8. В. Э. Аболиня и А. Д. Мышкис. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости . . . . . 87
9. Э. И. Лепина. Несобственные интегралы в $n$-мерном пространстве . . . . . 105
10. Э. И. Лепина. Обобщенная формула Грина . . . . . 125
11. Г. К. Энгелис. О полимонах, заданных формулой Родрига . . 137
12. В. Ж. Риекстыня. Об одном обобщении асимптотических разложений . . . . . 145
13. Э. Я. Гринберг. Об одной геометрической вариационной задаче 153
14. П. Е. Кунин и И. М. Таксар. О контактных силах в ядерных взаимодействиях . . . . . 165
15. В. Я. Вельдре. К теории ионизации атома водорода . . . . 171
16. Б. Н. Ролов. Прохождение частиц со спином 3/2 через потенциальный барьер . . . . . 177
17. К. А. Штейнс. К вопросу о влиянии сопротивления атмосферы Юпитера на захват комет . . . . . 185
18. К. А. Штейнс. О вычислении длины волны спектральных линий по формуле Гартмана . . . . . 193
19. И. И. Калныня и К. К. Шварц. Температурное тушение в некоторых щелочно-галлоидных кристаллофосфорах . . . . 195
20. В. Я. Фрицберг, А. А. Апситис и Э. Ж. Фрейденфельд. Свойства некоторых диэлекрических материалов системы CaO — Bao — $TiO_2$ . . . . . 203
21. В. И. Флеров. Зависимость коэффициента трения от скорости при трении твердого сплава и стали по стали . . . . . 211
22. В. М. Гольдфарб и А. В. Степанов. Пластическая деформация ир азрушение слоистых металлтических материалов . . . 221
23. L. Jansons. Svina ietekme uz rentgenizēta kalija hlorida absorbcijas spektru . . . . . 249
24. В. М. Гольдфарб. О влиянии неоднородности поликристаллических материалов на их механические свойства . . . . . 261
25. Я. Л. Энгельсон. Некоторые замечания к моей работе «О квадратном корне из линейных операторов в линейных топологических пространствах» . . . . . 273

## Поправки

| На стр. | Строка или № формулы | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 33 | 3 сверху | $y_n \sqrt{(t)}$ | $y_n\ (t)$ |
| 87 | 13 снизу | $O_L t \leqslant T$ | $o \leqslant t \leqslant T$ |
| 88 | 11 снизу | $\sum\limits_{=1}^{m}$ | $\sum\limits_{j=1}^{m}$ |
| 91 | 3 сверху | $g_j(\varphi_j(o;\ o,\ t_i\ (P))$ | $g_j(\varphi_j(o;\ o,\ t_i\ (P)))$ |
| 91 | 6 сверху | $\sum\limits_{=k+1}^{m}$ | $\sum\limits_{j=k+1}^{m}$ |
| 92 | 10 сверху | $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d\,\alpha_{sj}\,d\,(o)}{dt}$ | $\sum\limits_{j=1}^{k} \frac{d\,\alpha_{sj}\,(o)}{dt}$ |
| 96 | 4 сверху | $\sum\limits_{j=o}^{m}$ | $\sum\limits_{j=1}^{m}$ |
| 96 | 5 снизу | $\sum\limits_{i=o}^{m}$ | $\sum\limits_{i=1}^{m}$ |
| 99 | 4 сверху | $h \leqslant \lvert x \rvert \leqslant \infty$ | $h \leqslant \lvert x \rvert < \infty$ |
| 113 | 21 сверху | $T \in O\ (\mathfrak{S}')$ | $T \in O\ (\mathfrak{S})$ |
| 205 | 2 снизу | 3—530 кгц | 3—60 кгц |
| 230 | 13 снизу | Дит | Дитц |
| 243 | 15 сверху | (см. 1, 2) | (см. [1, 2]) |
| 246 | 1 сверху | Гольдберг | Гольдфарб |

427818

3r

Цена 12 руб. 50 коп.

44/5764

LATVIJAS UNIVERSITĀTES BIBLIOTĒKA
0509052559