LATVIJAS UNIVERSITĀTE

FIZKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE

METODISKS PALĪGMATERIĀLS MATEMĀTIKĀ VIDUSSKOLAI JAUNĀ STANDARTA REALIZĀCIJAI

BAKALAURA DARBS

Autors: **Krišjānis Penka**

Stud. apl. KP07012

Darba vadītājs: asoc. prof. Jānis Mencis

RĪGA 2019

ANOTĀCIJA

Bakalaura darba “Metodisks palīgmateriāls matemātikā vidusskolai jaunā standarta realizācijai” mērķis ir izveidot metodisku palīgmateriālu vidusskolēniem matemātikā, kurā apskata sīkāk gadījuma klejošanu, tai skaitā Katalāna skaitļus un atvasinājuma jēdzienu, definīciju, atvasināšanas kārtulas un formulas.

Teorētiskajā daļā tiek apskatīta Markova ķēdes definīcija, un teorēma par gadījuma klejošanu, kā arī funkcijas atvasinājuma fizikālā nozīme.

Bakalaura darbā ir izveidota programma, kas simulē gadījuma klejošanu režģī, ar kustību uz leju.

Bakalaura darbā secināts, ka izveidotais metodiskais palīgmateriāls palīdz skolēniem labāk saprast gadījuma klejošanu, varbūtību principu un atvasinājuma būtību. Izstrādāto programmu var izmantot, varbūtību aprēķināšanā, ar kādām daļiņa katrā soļu skaitā var nonākt līdz ekrāna malai.

Atslēgvārdi: matemātika, vidusskola, gadījuma klejošana, atvasinājums, palīgmateriāls.

ANNOTATION

The aim of the bachelor's thesis “ Methodical Material in Mathematics for the Implementation of the New Standard in Secondary School” is to create a methodological material for the high school students in mathematics, which examines in more detail the random walking model, including Catalan numbers and the concept of derivative, definition, derivation rules and formulas.

The theoretical part deals with the definition of the Markov chain, and the theorem about the random walking model as well as the physical significance of the function derivative. In the bachelor's thesis, there is a program that simulates the random walking model in a grid with downward movement.

It was concluded that developed methodical material for high school students improves the understanding of the random walking model, the principles of probability and the nature of the derivative. The developed program can be used to calculate the probability with which a particle can reach the edge of the screen in each step.

Keywords: mathematics, secondary school, random walking, derivative, methodical material.

SATURA RĀDĪTĀJS

1. IEVADS

Bakalaura darba “Metodisks palīgmateriāls matemātikā vidusskolai jaunā standarta realizācijai” tēma tika izvēlēta saistībā ar to, ka 2020./2021. mācību gadā skolā būs jāievieš jaunais izglītības standarts, kas paredz izmaiņas skolu sistēmā un mācību procesā. Skolēniem būs iespējas izvēlēties no skolu piedāvātajiem variantiem, kurus priekšmetus mācīsies padziļināti.

Darba mērķis: izveidot palīgmateriālu, kas palīdzētu skolēniem saprast gadījuma klejošanu, un atvasinājuma būtību.

Pētījuma problēma: maz palīgmateriālu vidusskolēniem, kas paredzēti jaunā matemātikas standarta apgūšanai.

Darbā tika aprakstīts arī jaunais izglītības standarts, un kādas izmaiņas sagaida tieši matemātikas mācību jomā. Tika apskatīta teorija par gadījuma klejošanu un izveidota programma, kas simulē gadījuma klejošanu režģī uz leju, aprēķina varbūtības, ar kādām daļiņa no punkta $x = 1$ nonāk punktā $x = 0$, virzoties uz leju ar noteiktu varbūtību, kuru ievada lietotājs. Kā arī tika apskatīts Atvasinājuma jēdziens, fizikālā nozīme, atvasināšanas kārtulas un formulas.

2. JAUNAIS STANDARTS VIDUSSKOLĀ

2.1. Izglītības satura plānošanas principi vidusskolā

Vispārējās vidējās izglītības pakāpes mērķis ir palīdzēt jaunietim apzināties savas intereses un spējas un sagatavoties izglītības turpināšanai augstskolā vai profesionālai darbībai.

Projekts "Kompetenču pieeja mācību saturā" (Skola2030), turpinot satura un pieejas pilnveidi vispārējā izglītībā, ir izstrādājis un piedāvā izglītības satura plānošanas principus vispārējā vidējā izglītībā, kas dos skolēniem iespēju vairāk mācīties atbilstoši savām interesēm un nākotnes plāniem, – to nodrošina mazāks mācību priekšmetu skaits un iespēja 30 % mācību laika veltīt padziļinātiem un specializētiem kursiem. Rezultātā skolēniem veidosies dziļāka izpratne un labākas prasmes apgūstamajos mācību priekšmetos, lielāka motivācija mācīties un spēcīgāka savu interešu apzināšanās. Kvalitatīvas izglītības piedāvājums un augstas prasības visās mācību jomās nodrošinās absolventu labāku kopējo sagatavotību turpmākajām gaitām.

Pilnveidoto saturu vidusskolā plānots sākt ieviest pakāpeniski visās Latvijas skolās, sākot no 2020. gada 1. septembra 10. klasē (no 2021. gada 11. klasē, no 2022. gada12. klasē), kad valdībā tiks pieņemts jaunais vispārējās vidējās izglītības standarts.

Jaunais vidusskolas modelis paredz:

- samazinātu mācību priekšmetu skaitu, lai dotu iespēju skolēniem mērķtiecīgi izvēlēties un specializēties izraudzītajos mācību priekšmetos;
- mācību satura apguvi 3 līmeņos (vispārīgajā, optimālajā un augstākajā) un valsts pārbaudījumus atbilstoši mācību satura apguves līmenim. Mācību satura apguve optimālajā līmenī ir pietiekama, lai iestātos augstskolā;
- satura apguvi kursu veidā – pamata, padziļinātos un specializētos kursos; ir noteikts stundu skaits katram kursam, ko skola var elastīgi plānot ilgākā vai īsākā laika periodā;
- katra vidusskola piedāvā 2 izvēļu grozus jeb kursu komplektus ar vismaz 3 padziļinātajiem kursiem;
- padziļināto kursu apguve pielīdzina Latvijas skolēnu iespējas labākajām pasaules izglītības sistēmām.

Mācību slodze. Plānots, ka vispārējās vidējās izglītības posmā stundu skaits mācību satura apgūšanai paliek nemainīgs – ar 36 stundu maksimālo skolēna slodzi nedēļā jeb 3360 – 3780 mācību stundām trīs gados (vakara un neklātienes izglītības programmās mazāks mācību stundu skaits). Mācību stundas ilgums joprojām būs 40 minūtes.

Izvēle. Arī turpmāk vispārējās vidējās izglītības ieguve būs brīvprātīga.

Kāpēc vajadzīgas pārmaiņas?

Pašlaik vispārējā vidējā izglītībā skolēns izvēlas vienu no četrām izglītības programmām (humanitārā un sociālā; matemātikas, dabaszinību un tehnikas; vispārizglītojošā vai profesionāli orientētā virziena) ar nelielām variācijām. Šis modelis ir uzlabojams, jo:

- ir pārāk liels mācību priekšmetu skaits, ko vidusskolēns mācās vienlaikus (18 līdz 20); liels obligāto priekšmetu skaits un sasniedzamie rezultāti, kas vienādi visās izglītības programmās;
- skolēniem nav pietiekamas iespējas iedziļināties, atklāt un attīstīt savas intereses;
- profesionālās izglītības iestāžu, vispārizglītojošo vidusskolu un valsts ģimnāziju audzēkņiem ir atšķirīgs stundu skaits vispārizglītojošos priekšmetos (līdz pat divām reizēm), bet vienādi eksāmeni 12. klasē;
- Latvijas skolēnu iespējas nav pietiekami pielīdzināmas labākajām pasaules izglītības sistēmām, jo ir nepietiekams stundu skaits katrā no mācību priekšmetiem.

Jaunums:

Mācību satura apguve līmeņos.

Plānotie sasniedzamie rezultāti mācību jomās veidoti trīs mācību satura apguves līmeņos.

- Vispārīgais līmenis,. Šajā līmenī skolēns risina problēmas pazīstamās situācijās, nostiprina, vispārina un sistematizē pamatizglītībā apgūto mācību saturu, veido domāšanas paradumus. Mācību saturs šajā līmenī ir katras mācību jomas obligāti apgūstamā satura daļa.
- Optimālais līmenis. Šajā līmenī skolēns nostiprina prasmes plānot un īstenot patstāvīgu izziņas un problēmu risināšanas darbību, identificē un risina problēmas vienkāršās, nepazīstamās situācijās, veido padziļinātu konceptuālo izpratni mācību jomā ar starpdisciplināriem elementiem, demonstrē kompleksas prasmes, iegūst produkta radīšanas pieredzi. Mācību saturs šajā līmenī ir svarīgs vispusīgai vispārējai vidējai izglītībai;
- Augstākais līmenis. Šajā līmenī skolēns apzināti, atbildīgi, radoši un patstāvīgi plāno un pārrauga savu izziņas darbību, patstāvīgi risina problēmas nepazīstamās, sarežģītās situācijās, veido dziļu konceptuālo izpratni mācību jomā, saskata starpdisciplināras likumsakarības, mācās patstāvīgi plānot, īstenot, uzraudzīt un izvērtēt produkta radīšanas procesu. Mācību saturs šajā apguves līmenī ir padziļināts un paplašināts, un svarīgs skolēna iecerēto studiju profila specializācijas virzienam.

Vidusskolas posmā skolēni mācību saturu apgūst saskaņā ar jomās plānotajiem rezultātiem kursu veidā:

- pamatkurss sniedz vispārīgā vai optimālā līmeņa zināšanas, izpratni un prasmes;
- padziļinātais kurss sniedz augstākā līmeņa zināšanas, izpratni un prasmes;
- specializētais kurss sniedz specifiskas jebkura līmeņa zināšanas, izpratni un prasmes.

Skola izveido savu piedāvājumu un izglītības programmā iekļauj:

- vismaz divus mērķtiecīgi izveidotus padziļināto kursu komplektus jeb izvēļu grozus ar trīs padziļinātiem kursiem katrā no tiem. Vismaz vienam padziļinātajam kursam katrā izvēļu grozā jābūt atšķirīgam;
- pamatkursus katrā mācību jomā – vispārīgā vai optimālā līmenī, saskaņojot ar padziļināto kursu piedāvājumu. Lai mācītos padziļināto kursu, skolēniem jāapgūst optimālā līmeņa pamatkurss;
- specializētos kursus (izglītības iestāde var piedāvāt brīvas izvēles specializētus kursus atbilstoši skolēnu interesēm un izvēļu groziem. Specializēto kursu programmu paraugus izstrādā VISC vai izglītības iestāde saskaņā ar Valsts vispārējās vidējās izglītības standartu);
- stundu plānu trim gadiem.

Plānots, ka skolēni pamatkursus mācīsies galvenokārt 10. un 11. klasē, bet padziļinātos kursus – 11. un 12. klasē atbilstoši skolas veidotajam mācību stundu sarakstam. Pamatkursu apguvei paredzēts veltīt aptuveni 70 % mācību laika, savukārt padziļināto un specializēto kursu apguvei – aptuveni 30 % no mācību laika.

Ir noteikts optimālais stundu skaits visam kursam, nesadalot to pa mācību gadiem. Skola kursu var īstenot īsākā vai garākā laika posmā, piedāvājot kursu apgūt, piemēram, viena gada laikā ar vidēji sešām mācību stundām nedēļā, vai divu gadu laikā ar vidēji trīs mācību stundām nedēļā. Izglītības iestāde varēs mainīt mācību stundu skaitu kursā, bet nesamazinot kopējo kursa stundu skaitu vairāk par 15 %.

Prasības vispārējās vidējās izglītības ieguvei.

Uzsākot mācības 10. klasē, skolēns izvēlas vienu no skolas piedāvātajiem izvēļu groziem, kā arī citus kursus no skolas piedāvājuma. Vispārējās vidējās izglītības iegūšanas nosacījumi paredz, ka skolēns:

- apgūst mācību saturu 3360–3780 stundu apjomā;
- apgūst pamatkursus visās mācību jomās;

• apgūst trīs padziļinātos kursus un saistībā ar vienu no tiem veic patstāvīgu pētniecības, jaunrades vai sabiedrisko darbu;

• kārto valsts pārbaudes darbus:

- latviešu valodā (vismaz optimālajā līmenī);
- svešvalodā (angļu, vācu vai franču) vismaz optimālajā līmenī;
- matemātikā (jebkurā apguves līmenī – vispārīgajā, optimālajā vai augstākajā līmenī);
- divos no padziļinātajiem kursiem (augstākajā līmenī).

Atbalsts skolām izglītības satura plānošanas principu īstenošanai.

Valsts vispārējās vidējās izglītības standartā ir formulēti (a) sasniedzamie rezultāti vispārīgajā, optimālajā un augstākajā mācību satura apguves līmenī septiņās mācību jomās; (b) atsevišķā standarta pielikumā norādīts, kuri sasniedzamie rezultāti apgūstami katrā no mācību priekšmetu kursiem (pamatkursā, padziļinātajā kursā un specializētajā kursā).

VISC veidos kursu programmu paraugus un valsts pārbaudes darbu paraugus. Papildus VISC piedāvās mācību līdzekļu piemērus visiem pamatkursiem. Tāpat kā līdz šim, arī turpmāk skolotāji varēs veidot savas kursu programmas vai veidot jaunus specializētos kursus vispārējās vidējās izglītības standarta apguvei.

Pamatkursi, padziļinātie kursi un specializētie kursi mācību jomās.

Katrā mācību jomā ir pamatkursi, padziļinātie un specializētie kursi ar noteiktiem satura apguves nosacījumiem skolēnam. Katram kursam ir norādīts kopējais optimālais mācību stundu skaits, kas nepieciešams šī kursa satura apguvei. Izglītības iestāde varēs mainīt (palielināt vai samazināt) mācību stundu skaitu kursā, bet nesamazinot vairāk par 15 % no šī kursa kopējā stundu skaita.

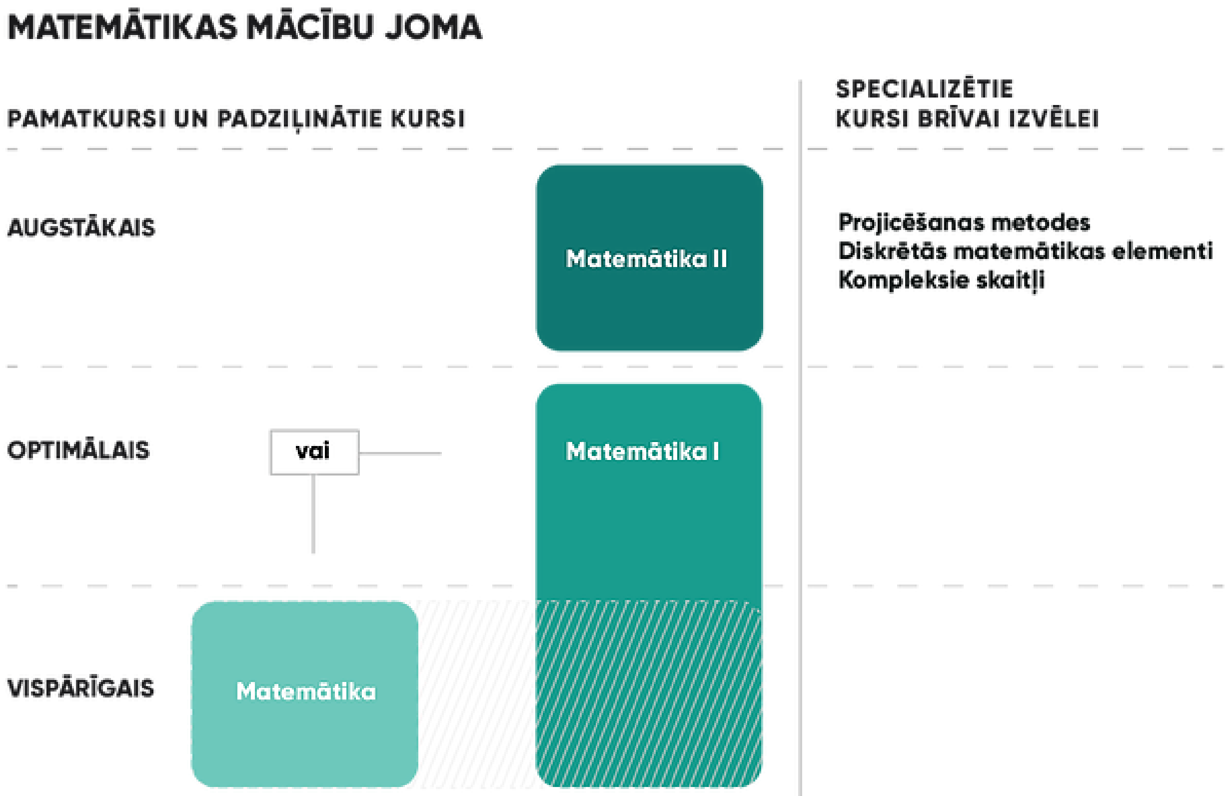
Piedāvāta arī alternatīva mācību stundu skaita uzskaites forma – kredītpunkts: vienam kredītpunktam atbilst 35 mācību stundas (1 kp = 35 mācību stundas). 35 mācību stundas izvēlētas, jo šis skaitlis atbilst mācību nedēļu skaitam mācību gadā. Šāda mācību stundu skaita uzskaites forma dod iespēju skolām un skolēniem plānojot darboties ar mazākiem skaitļiem.[1]

2.2. Matemātikas mācību joma vidusskolā

Skolēnam sasniedzamie rezultāti formulēti trīs apguves līmeņos (vispārīgais, optimālais, augstākais).

[1] Pieejams: https://www.skola2030.lv/vidusskola [aplūkots 20.05.2019]

- Vispārīgo līmeni raksturo pamatskolas satura sistematizācija un lietošana jaunās, kompleksās situācijās, kā arī vidusskolas satura kodola apguve, kas tālāk ļaus izdarīt apzinātas izvēles un nepieciešamības gadījumā turpināt matemātikas apguvi optimālajā līmenī.
- Optimālo līmeni raksturo izpratnē balstītu elastīgu matemātisko prasmju apguve, daudzveidīga pieredze matemātisko modeļu lietošanā reālos un citu mācību jomu kontekstos. Optimālajā līmenī iegūtās zināšanas ir pietiekamas, lai turpinātu tālākās studijas jomās, kurās matemātika nav profilējošs kurss.
- Augstāko līmeni raksturo niansēta iedziļināšanās saturā, vispārīgu matemātisko modeļu analīze un lietojums, sistēmiska izpētes un pierādīšanas pieredze; skolēni ierosina patstāvīgu pētījumu un realizē problēmas matemātisko modelēšanu. Satura apguve plānota trīs kursu ietvaros:
- pamatkurss "Matemātika" (vispārīgais apguves līmenis)
- pamatkurss "Matemātika I" (optimālais apguves līmenis)
- padziļinātais kurss "Matemātika II"
- Brīvās izvēles piedāvājumā augstākajā līmenī iespējami šādi kursi: "Projicēšanas metodes", "Diskrētās matemātikas elementi", "Kompleksie skaitļi". Skatīt att. 2.1.



att. 2.1. **Matemātikas mācību jomu sadalījums pa līmeņiem**

Visos līmeņos saturā iekļauti “Analītiskās ģeometrijas elementi” ar mērķi veidot saiknes starp algebriskajiem un ģeometriskajiem modeļiem, kas skolēna matemātisko instrumentāriju veidos elastīgāku un efektīvāku kompleksu problēmu risināšanā. Līdztekus tam šajā tematā iegūtās prasmes nepieciešamas sekmīgai tālākai izglītībai un darbībai IT jomā.

“Statistikas” saturs (visos kursos) vairāk orientēts uz datu analīzes prasmēm, datos balstītu secināšanu un iegūto prasmju lietojumu, veicot reālus pētījumus. Piemēram, raksturo datu sadalījumu un to saista ar vidējiem un izkliedes mēriem.

Padziļinātajā kursā iekļauti matemātiskās analīzes jautājumi ar mērķi veidot izpratni par atvasinājumu un integrāli, iegūt pieredzi atvasinājuma lietojumam autentisku problēmu risināšanā.

Pamatkursu saturs veidots ar uzstādījumu mazināt satura izvērsumu plašumā, lai veidotu dziļāku izpratni, daudzveidīgu lietojumu, piemēram, 1) pamatkursā “Matemātika I” skolēni trigonometrijas apguvē fokusēsies tikai uz divām funkcijām līdzšinējo četru vietā; 2) logaritmus aplūkos tikai kā reāla skaitļa pieraksta formu, ko plaši izmanto citās zinātņu jomās, bet nerisinās logaritmiskus vienādojumus un nevienādības.

Skola izglītības programmas piedāvājumā var iekļaut vispārīgā līmeņa pamatkursu "Matemātika" un optimālā līmeņa pamatkursu "Matemātika I". Taču visām skolām noteikti jāpiedāvā skolēniem izvēle apgūt matemātiku vismaz optimālajā līmenī ("Matemātika I").[2]

Turpmāk darbā tiks apskatītas divas tēmas, gadījuma klejošana un atvasinājumi, kas palīdzēs skolēniem, kuri vēlēsies apgūt matemātiku padziļināti.

[2]Pieejams: https://www.skola2030.lv/matematikas-macibu-joma [aplūkots 20.05.2019]

3. GADĪJUMA KLEJOŠANA

3.1. Markova ķēdes definīcija.

Markova process ir neatkarīgo mainīgo mēģinājumu virkņu vispārinājums. To teorijas pamatā ir šāda hipotēze: $n + 1$ mēģinājuma rezultāta atkarība no visiem iepriekšējo mēģinājumu rezultātiem izpaužas tikai caur n-tā mēģinājuma rezultātu. Citiem vārdiem, nākotne nav atkarīga no pagātnes, ja zināma tagadne, jeb, tagadne satur visu informāciju, kas uzkrāta pagātnē.

Apskatīsim eksperimentu galīgu vai sanumurējamu rezultātu kopu $\{G = E_0\ \ldots,\ E_N,\ \ldots\ \}$. Pieņemsim, ka varam eksperimentu neierobežoti atkārtot.

Jebkura mēģinājuma rezultāts ir G elements ar savu kārtas numuru. Apzīmēsim n-tā mēģinājumā rezultāta numuru ar X_n. Tad, $X_n = j$, ja n-tajā mēģinājumā ir iestājies notikums E_j.

3.1.definīcija.

Dota gadījuma lielumu, kas pieņem veselu skaitļu vērtības, virkne $\{X_n\}_{n\geq 0}$. $X_n = j$, ja n-tajā mēģinājumā ir iestājies notikums E_j. Virkne $\{X_n\}_{n\geq 0}$ veido Markova ķēdi, ja

$$P(X_n = j | X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{n-2} = k_{n-2}, X_{n-1} = i) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}^{(n)},$$

$$\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$$

$p_{ij}^{(n)}$ ir pārejas varbūtība no i uz j viena soļa laikā n-tajā solī.

Bieži Markova ķēdi izmanto, lai aprakstītu fizikālu sistēmu ar iespējamiem stāvokļiem E_0, E_1, E_2, ... un uzdotu sākuma stāvokļu sadalījumu $P(X_0 = j) = p_j^{(0)}, \sum_j p_j^{(0)} = 1, j = 1, 2, \ldots$ Pēc tam sistēma laikā t_1, t_2, ...(t_i – veseli skaitļi) maina savu stāvokli, pie tam, varbūtība momentā n nokļūt stāvoklī E_j, kaut arī zināmi sistēmas visi iepriekšējie stāvokļi, atkarīga tikai no tā, kurā stāvoklī sistēma atrodas $n – 1$ solī. Markova ķēdēm gan to stāvokļu telpa, gan laiks ir diskrēti.

3.2.definīcija.

Markova ķēdi $\{X_n\}_{n\geq 0}$ sauc par homogēnu, ja pārejas varbūtības $p_{ij}^{(n)}$ nav atkarīgas no n.

Virknes $\{X_n\}_{n\geq 0}$ eksistenci, kas ir Markova ķēde ar uzdotām pārejās varbūtībām $p_{ij}^{(n)}$: $p_{ij}^{(n)} \geq 0$, $\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1$, ar uzdotu sākuma sadalījumu $p_j^{(0)}: p_j^{(0)} \geq 0, \sum_j p_j^{(0)} = 1$, garantē Kolmogorova teorēma par saskaņotiem sadalījumiem, ja tie uzdoti ar sekojošām varbūtībām

$$P(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n) = p_{k_0}^{(0)} p_{k_0 k_1}^{(1)} \ldots p_{k_{n-1} k_n}^{(n)}.$$

3.3.definīcija.

Gadījuma mēģinājumu virkne ar vienu un to pašu rezultātu kopu *{E_0 …, E_N, …}* veido homogēnu Markova ķēdi, ja varbūtība uzdota šādā veidā

$$P(X_0 = k_0, \dots, X_n = k_n) = p_{k_0}^{(0)} p_{k_0 k_1} \dots p_{k_{n-1} k_n},$$

pie tam $p_j^{(0)}$ un p_{ij} ir neatkarīgi viens no otra un

$$\sum_j p_j^{(0)} = 1, p_j^{(0)} \geq 0, p_{ij} \geq 0, \sum_j p_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots,$$

p_{ij} – pārejas varbūtība no *i* uz *j* viena soļa laikā.

3.4.definīcija.

Matricu *P*, kurai izpildās $PX \geq 0$ visiem $X \geq 0$ un $P1 = 1$, sauc par Markova jeb stohastisku procesu.

Matrica *P* pilnīgi apraksta sistēmas evolūciju vienā solī.

3.1 piemērs.

(Laika prognoze). Pieņemsim, ka rītdienas laiks ir atkarīgs no tā, kāds laiks ir šodien. Ja lietus līst šodien, tad ar varbūtību α lietus līs arī rīt. Ja šodien nelīst, tad rīt tomēr līs ar varbūtību β. Analizējot rītdienas laiku, var uzskatīt katru *n*-to dienu, $n \geq 1$, kā vienu no procesa stāvokļiem (0 – līst, 1 – nelīst). Tātad laika prognoze tiek aprakstīta ar divstāvokļu Markova ķēdi ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

3.2 piemērs.

(Sakaru sistēma). Pieņemsim, ka pārraidot ciparu signālu (0 vai 1) pa sakaru kanālu, mēs izejā atbilstoši gaidām 0 vai 1. Pieņemsim, ka līdz izejai katram signālam vajag noiet dažus soļus, kur katrā solī ar varbūtību *p* signāls paliek nemainīgs.

Pieņemsim, ka $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ apraksta signālu pēc *n* soļiem. Tātad, $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ ir divstāvokļu Markova ķēde ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

3.3 piemērs.

Ir zināms, ka katrā konkrētā dienā Andra garastāvoklis var būt: lielisks (L), viduvējs (V) un slikts (S). No pieredzes ir zināms, ka, ja viņam šodien ir lielisks garastāvoklis, tad rītdien būs *L / V*

/ S ar atbilstošajām varbūtībām *0,5 / 0,4 / 0,1;* ja šodien viduvējs garastāvoklis, tad rītdien būs *L / V / S* ar varbūtībām *0,3 / 0,4 / 0,3;* ja šodien viņš ir drūms, tad rītdien būs *L / V / S* ar varbūtībām *0,2 / 0,3 / 0,5.*

Ja ar X_n mēs gribam aprakstīt Andra garastāvokli n-tajā dienā, tad $\{X_n,\ n \geq 0\}$ ir trīsstāvokļu kopa 0 – (L), 1 – (V), 2 – (S) ar pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,1 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

3.4 piemērs.

(Procesa pārveidošana Markova ķēdē) Pieņemsim, ka laika prognoze ir atkarīga no divām pēdējām dienām: ja līst divas dienas pēc kārtas, tad nākošajā dienā līs ar varbūtību 0,7; ja vakar nelija, bet šodien līst, tad rīt lietus būs ar varbūtību 0,5; ja vakar lija, bet šodien nelīst, tad rīt būs lietus ar varbūtību 0,4; un ja nelija ne vakar, ne šodien, tad rīt līs ar varbūtību 0,2. Ja mēs mēģināsim noteikt laika prognozi kā vienas dienas laika apstākļu funkciju, tad iepriekš minēto modeli nevar aprakstīt ar Markova ķēdi. Bet ir iespēja uzrakstīt stāvokļu kopu {0, 1, 2, 3} atkarīgu no divām dienām (vakardienas, šodienas): stāvoklis 0 – lija gan vakar, gan šodien; 1 – līst šodien, bet nelija vakar; 2 – lija vakar, bet nelīst šodien; 3 – nelija ne šodien, ne vakar. Viegli konstruēt pārejas varbūtību matricu

$$P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix},$$

ja, piemēram, $p_{02} = P$ {lija vakar, bet nelīst šodien, ja ir zināms, ka lija divas dienas pēc kārtas (gan vakar, gan aizvakar)} = 1 – 0,7 = 0,3.

3.5 piemērs.

(Gadījuma klejošanas modelis) Markova ķēdi ar stāvokļiem $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sauc par gadījuma klejošanas procesu, ja $p_{ii+1} = p = 1 - p_{ii-1}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, p \in (0, 1)$.

Šis process labi apraksta cilvēka klejošanu, teiksim, pa taisnu ielu, kad katrā laika momentā cilvēks paiet ar varbūtību p vienu soli pa labi un ar varbūtību $1 - p$ vienu soli pa kreisi.

3.6 piemērs.

(Gadījuma klejošana pa taisni ar absorbējošiem un atstarojošiem ekrāniem) Pieņemsim, ka modeļa stāvokļi ir punkti 1, 2, … n. (skatīt att. 3.1.)

att. 3.1.

$p_{ii+1} = 1 - p_{ii-1} = p = 1 - q$, ja $2 \leq i \leq n - 1$, $p_{11} = \delta$, $p_{12} = 1 - \delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, $p_{nn} = \delta^1$, $p_{nn-1} = 1 - \delta^1$, $0 \leq \delta^1 \leq 1$.

Gadījumā, ja $\delta = \delta^1 = 1$ modeli sauc par Markova ķēdi ar absorbējošiem ekrāniem. Ja $\delta = \delta^1 = 0$, modeli sauc par Markova ķēdi ar atstarojošiem ekrāniem.

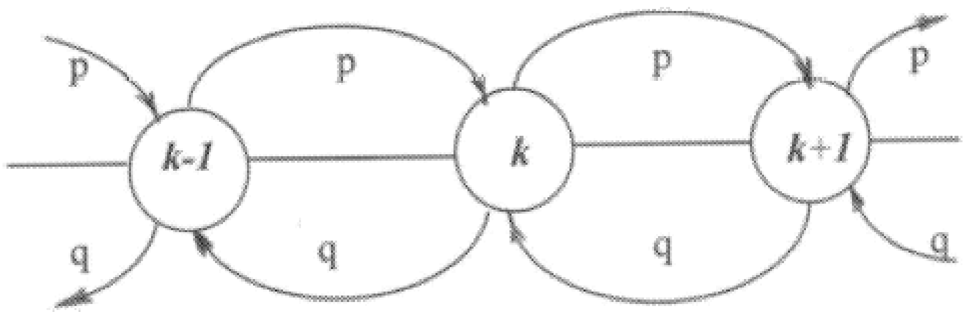
Pārejas varbūtību matrica, kas atbilst ši modelim ir

$$P = \begin{pmatrix} \delta & 1-\delta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-\delta^1 & \delta^1 \end{pmatrix}.$$ [3]

3.2. Teorēma par gadījuma klejošanu

Gadījuma klejošana pa taisnes veselu skaitļu punktiem.

Pieņemam, ka daļiņa pārvietojas uz taisnes pa veselu skaitļu punktiem. Izdarot vienu soli, daļiņa no punkta k ar pozitīvu varbūtību p pārvietojas uz punktu $k + 1$, ar varbūtību $q = 1 - p$ uz punktu $k - 1$. Skatīt att. 3.2.



att.3.2.

Aprakstītajai sistēmai atbilst gadījuma lielumu virkne

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n = X_0 + S_n,$$

[3] Carkova, V. Markova ķēdes,Rīga: LU, 2001. 6. – 11. lpp.

kur

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & ar\ varb\bar{u}t\bar{\imath}bu\ p \\ -1, & ar\ varb\bar{u}t\bar{\imath}bu\ q \end{cases}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_n,$$

kas veido Markova ķēdi ar pārejas varbūtībām

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & j = i+1 \\ q, & j = i-1 \\ 0, & j \neq i-1, \quad j \neq i+1. \end{cases}$$

Viegli redzēt, ka šī Markova ķēde ir periodiska ar periodu 2, $f_0(2) = pq + qp > 0$, jo atgriešanās jebkurā punktā iespējama tikai pēc pāra skaita soļiem.

3.1.teorēma.

Aprakstītā gadījuma klejošana veido atgriezenisku Markova ķēdi tad un tikai tad, ja $p = q = 0{,}5$.

Pierādījums. Tā kā $0 < p < 1$, tad apskatāmā Markova ķēde ir nereducējama. Tad no solidaritātes teorēmas seko, ka visi ķēdes stāvokļi ir viena tipa, un mēs varam izvēlēties jebkuru no sistēmas stāvokļiem, piemēram 0 stāvokli, un izpētīt tikai šo stāvokli. Lai noteiktu šī stāvokļa tipu vispirms izpētīsim rindas $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(n)$ konverģenci. Tā kā ķēde ir periodiska ar periodu 2, tad $p_{00}(2k+1) = 0$ visiem veseliem $k > 0$. Tad jāapskata rinda $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}(2k)$. Summa S_n ir klejojošās daļiņas koordināta pēc n soļiem, jo $X_0 = 0$. Tātad $p_{00}(2k) = P(S_{2k} = 0)$, jo tika izdarīti k soļi pa labi un k soļi pa kreisi. Citiem vārdiem, $S_{2k} = 0$ nozīmē, ka vieni k summējamie gadījuma lielumi vienādi ar 1 un otri ar -1. Tātad, jāizrēķina $P(S_{2k} = 0) = P(2k\ soļos\ punktam\ pārvietojoties\ k\ soļus\ pa\ labi, un\ k\ soļus\ pa\ kreisi)$.

Mūsu rīcībā ir Bernulli shēma, un

$$P(S_{2k} = 0) = C_{2k}^{k} p^k q^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} p^k q^k.$$

Izmantojot Stirlinga aproksimāciju

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta n}, \text{ kur } |\theta_n| < \tfrac{1}{12n},$$

iegūstam

$$P(S_{2k} = 0) \sim \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\pi k}(2k)^{2k} e^{-2k}}{(\sqrt{2\pi k})^2 (k^k)^2 (e^{-k})^2} p^k q^k = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} (4pq)^k,$$

kur $a_n \sim b_n$ nozīmē, ka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Segmentā [0,1] funkcijas $\varphi(p) = 4p(1-p)$ maksimums ir punktā $p = 0{,}5$ un $\varphi(0{,}5) = 1$. Visos pārējos segmenta punktos $\varphi(p) < 1$. Ja $\varphi(p) < 1$, tad rinda $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$ konverģē un

Markova ķēde ir neatgriezeniska visiem $p \neq 0{,}5$. Ja $p = 0{,}5$ tad $p_{00}(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$ un rinda $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$ diverģē, kas liecina par Markova ķēdes stāvokļu atgriezeniskumu. Teorēma ir pierādīta.

Tātad, ja $p \neq 0,$ tad vidējais atgriešanās reižu skaits stāvoklī 0 ir galīgs un vienāds $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$. Tas nozīmē, ka, sākot no kāda soļa, daļiņa nekad vairs neatgriezīsies stāvoklī 0. Daļiņa novirzīsies pa labi vai pa kreisi atkarīgā no tā, vai $p > 0{,}5$ vai $p < 0{,}5$. Ja $p = 0{,}5$, tad vidējais atgriešanās skaits stāvokli 0 ir bezgalīgs, t. i., daļiņa nekur nenovirzīsies. Jāatzīmē, ka gadījumā $p = 0{,}5$ vidējais atgriešanās skaits neaug proporcionāli soļu skaitam. Patiešām, vidējais atgriešanās reižu skaits pēc pirmajiem $2n$ soļiem ir $\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k)$. Tā kā $p_{00}(2k) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$, ja $p = 0{,}5$, tad

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{00}(2k) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \frac{1}{n} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}},$$

jo $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} \frac{1}{n}$ asimptotiski ekvivalenta $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = 2$.

3.7. piemērs.

(Kāršu spēle.) Divi spēlētāji ar neierobežotu kapitālu paņēma pēc kārtas uz labu laimi kārtis no kāršu komplekta. Vēloties iegūt paņemto kāršu punktu summu vienādu vai mazāku par 21, bet lielāku par otrā spēlētāja kāršu punktu summu, katrs spēlētājs izvelk kārtis vienu pēc otras. Tas, kas zaudē partiju, maksā uzvarētājam.

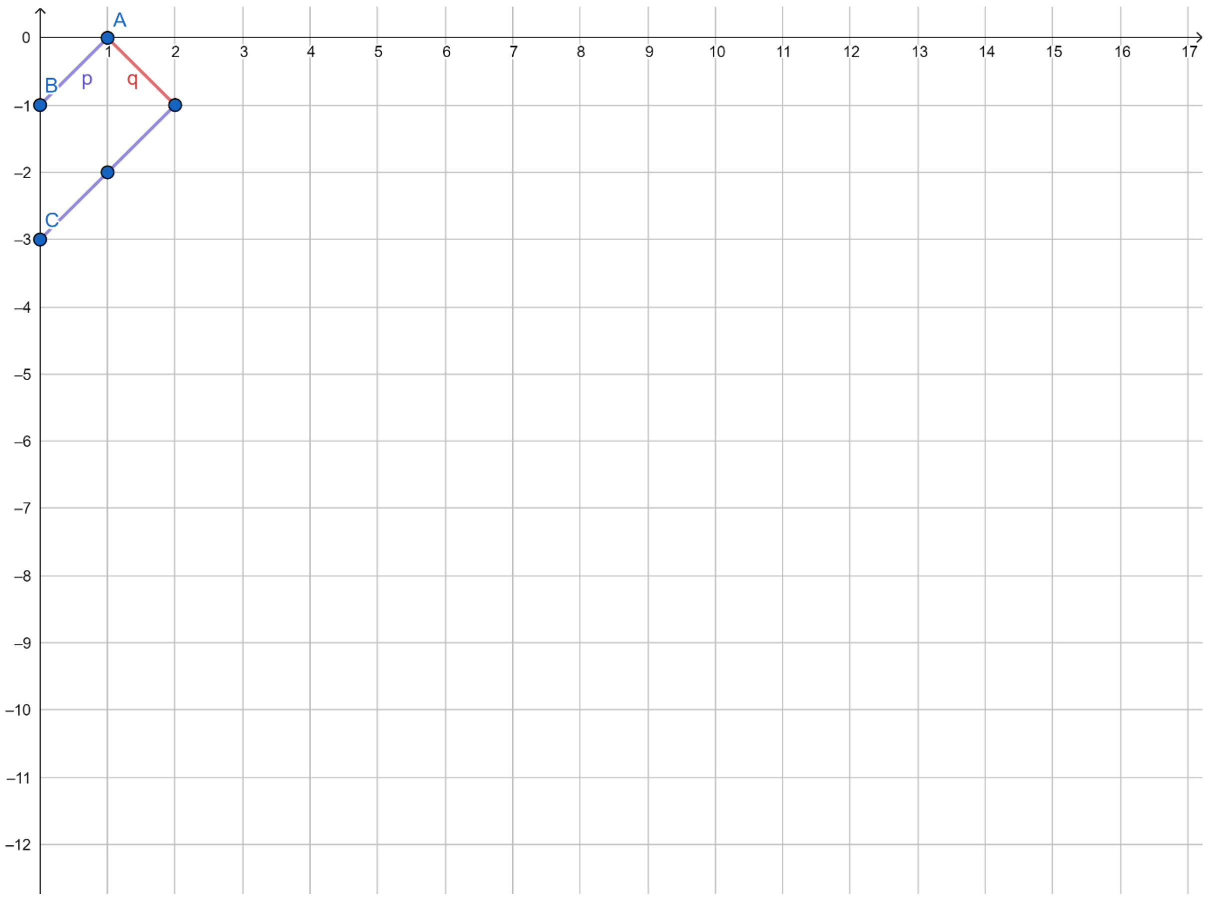
Ja spēli turpinātu neierobežotu laiku, tad mūsu apskatītajā "taisnīgajā" spēlē neizšķirto partiju daļa, pieaugot partiju skaitam $(2n)$, ātri samazinās $(\sqrt{n})$.[4]

[4] Carkova, V. Markova ķēdes,Rīga: LU, 2001. 37. – 40. lpp.

3.3. Uzdevums par gadījuma klejošanu

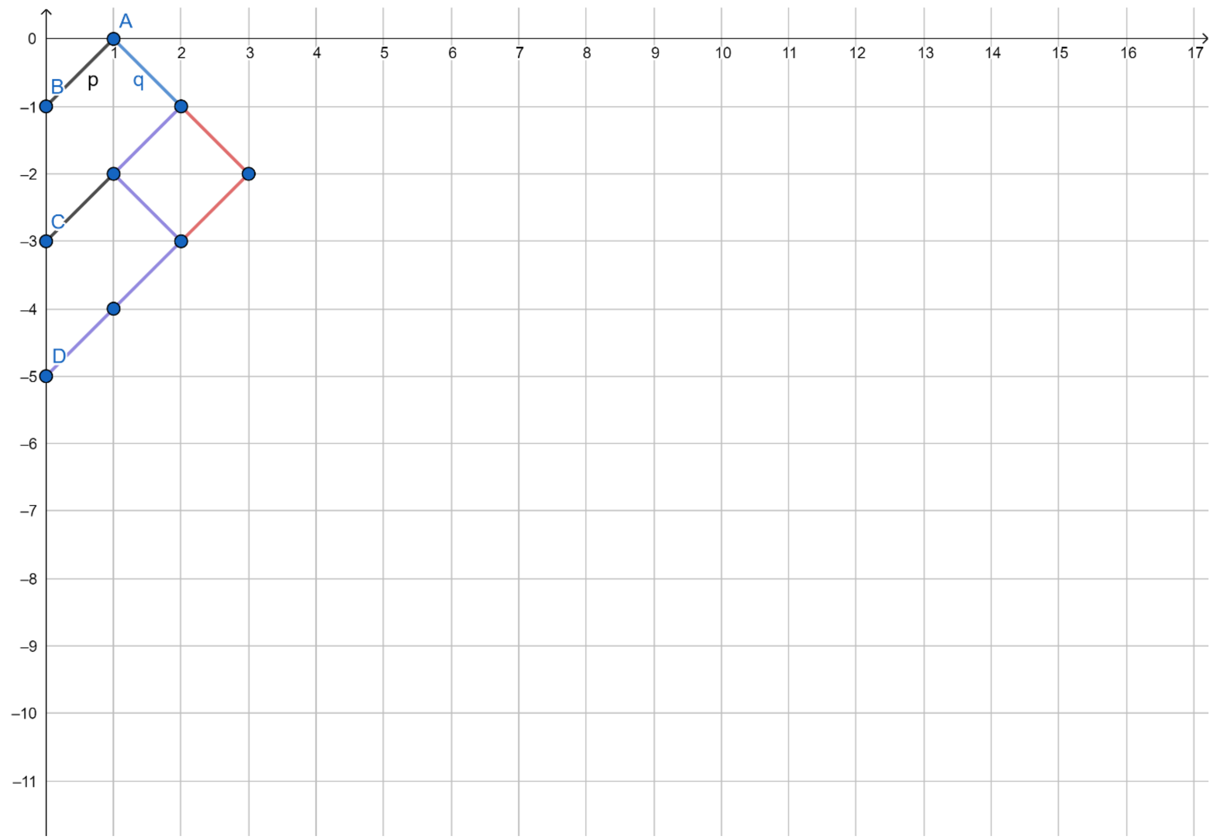
Programmā "Visual basic" izveidota programma, kura veic gadījuma klejošanas simulāciju. Programmā ievadot varbūtību p, ar kādu daļiņa dodas pa kreisi, tiek izvadītas varbūtības, ar kādām daļiņa no ievadītā stāvokļa nonāks līdz stāvoklim $x = 0$, tiek saskaitīts arī nepieciešamais soļu skaits, lai daļiņa nonāktu līdz ekrāna malai, kā arī tiek parādītas varbūtības, ar kādām daļiņa varētu nonākt līdz ekrāna malai pēc dažāda soļu skaita, un arī visu varbūtību summa.

Daļiņas sākotnējais stāvoklis ir $x = 1$. Daļiņa kustās visu laiku tikai uz leju pa režģi. Pieņemsim, ka došanās pa kreisi ir iespējama ar varbūtību p, bet pa labi - ar varbūtību $q = 1 - p$. Kā redzams attēlā 3.3., no punkta A uz punktu B daļiņa dosies ar ievadīto varbūtību p, bet pretējā virzienā - ar varbūtību q. Daļiņa punktos B un C var nonākt tikai pa vienu ceļu, un varbūtība nonākt punktā C ir reizinājums $P = q \cdot p^2$.



att. 3.3.

Skatoties tālāk attēlā 3.4., redzam, ka no punkta A uz punktu D varam nonākt jau pa 2 ceļiem, un varbūtība jau ir divu varbūtību summa. Tātad punktā D daļiņa var nonākt pēc šādiem varbūtību reizinājumiem $q \cdot p \cdot q \cdot p \cdot p$ vai arī $q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p$, kā redzams reizinātāju skaits šeit ir vienāds un varam to pierakstīt $q^2 \cdot p^3$, tātad varbūtība nonākt punktā D ir $P = 2(q^2 \cdot p^3)$.



att. 3.4.

Skatoties jau vēl vienu soli tālāk (skatīt attēlu 3.5.), redzam, ka no punkta A līdz punktam E varam nonākt 5 dažādos veidos, kuru viens no varbūtību reizinājumiem ir $q \cdot q \cdot q \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p$, tātad varam uzrakstīt arī šādi $q^3 \cdot p^4$, jeb visu 5 ceļu varbūtību reizinājums ir $P = 5(q^3 \cdot p^4)$. Ir saskatāma jau formula, ka katrā nākamajā iespējamā punktā, kad varam nonākt ekrāna malā, kāpinātāji palielinās par vienu vienību. Katru reizi palielinot iespēju nonākt ekrāna malā par divām vienībām uz leju, mums nāk klāt liels skaits ar jauniem variantiem, kā tur nonākt. Šis skaits ir pielīdzināms Katalāna skaitļiem. Kombinatorikā ar Katalāna skaitļiem sastopamies dažādās skaitīšanas problēmās, it īpaši tad, ja saistība ir ar rekursīviem objektiem. Katalāna skaitļus pirmais nodefinēja Eižens Šarls Katalāns (1814 – 1894). Katalāna skaitļus var izteikt pēc formulām:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}, pie\ n \geq 0.$$ [5]

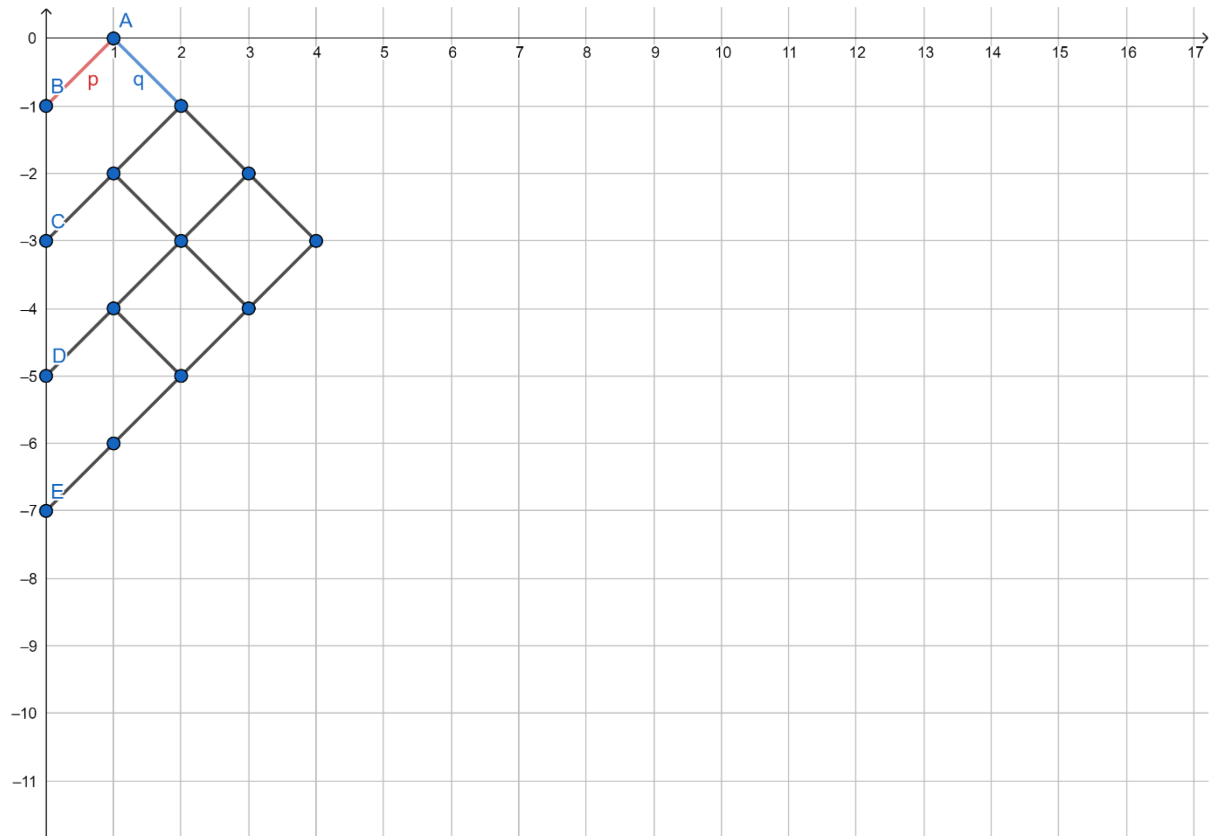
Pirmie Katalāna skaitļi pie $n = 0; 1; 2; 3; \ldots$ ir

$1; 1; 2; 5; 14; 42; 132; 429; 1430; 4862; 6796; 58786; 208012; 742900; 2674440; 9694845; \ldots$, kā redzams tie aug ļoti strauji, asimptotiski tie aug kā

[5] Circle, T. Minggatu – Catalan number. Pieejams: https://tomcircle.wordpress.com/2014/04/06/catalan-number/ [aplūkots: 23.05.2019.]

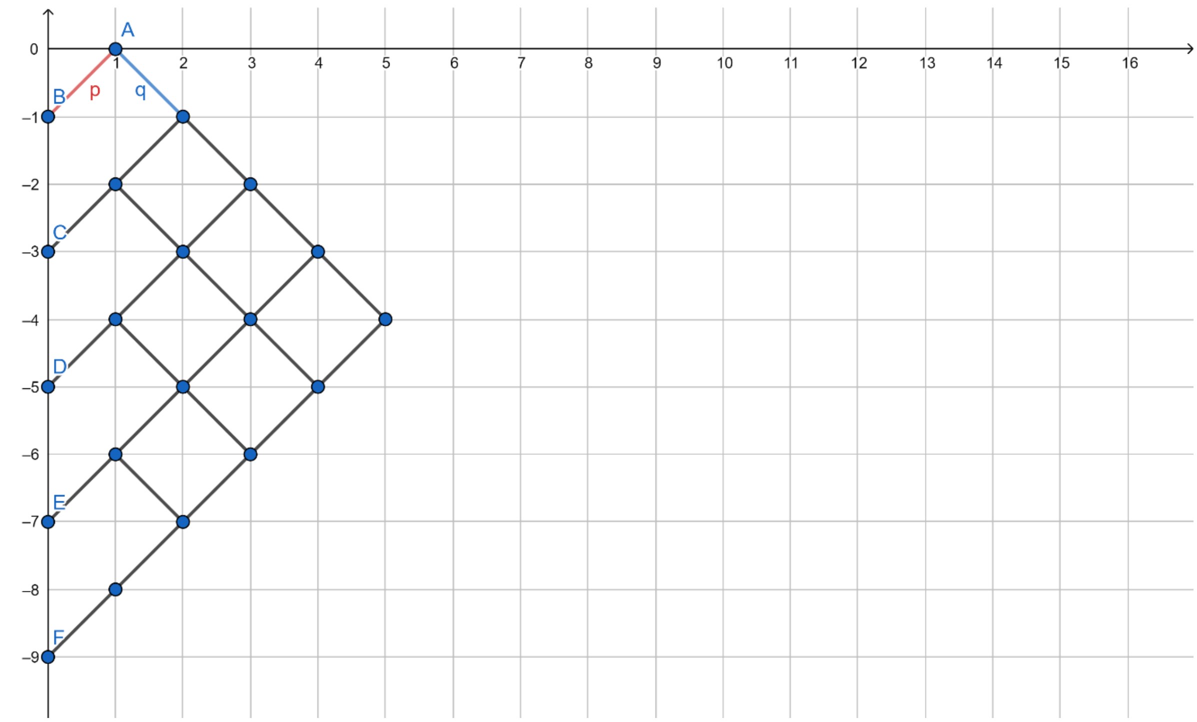
$$C_n \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}},$$

tādēļ programmā "Visual basic" var aprēķināt tikai līdz 85. Katalāna skaitlim, jo lielākais datu tips, kurā var saglabāt skaitlisku vērtību, ir sasniedzis maksimumu.

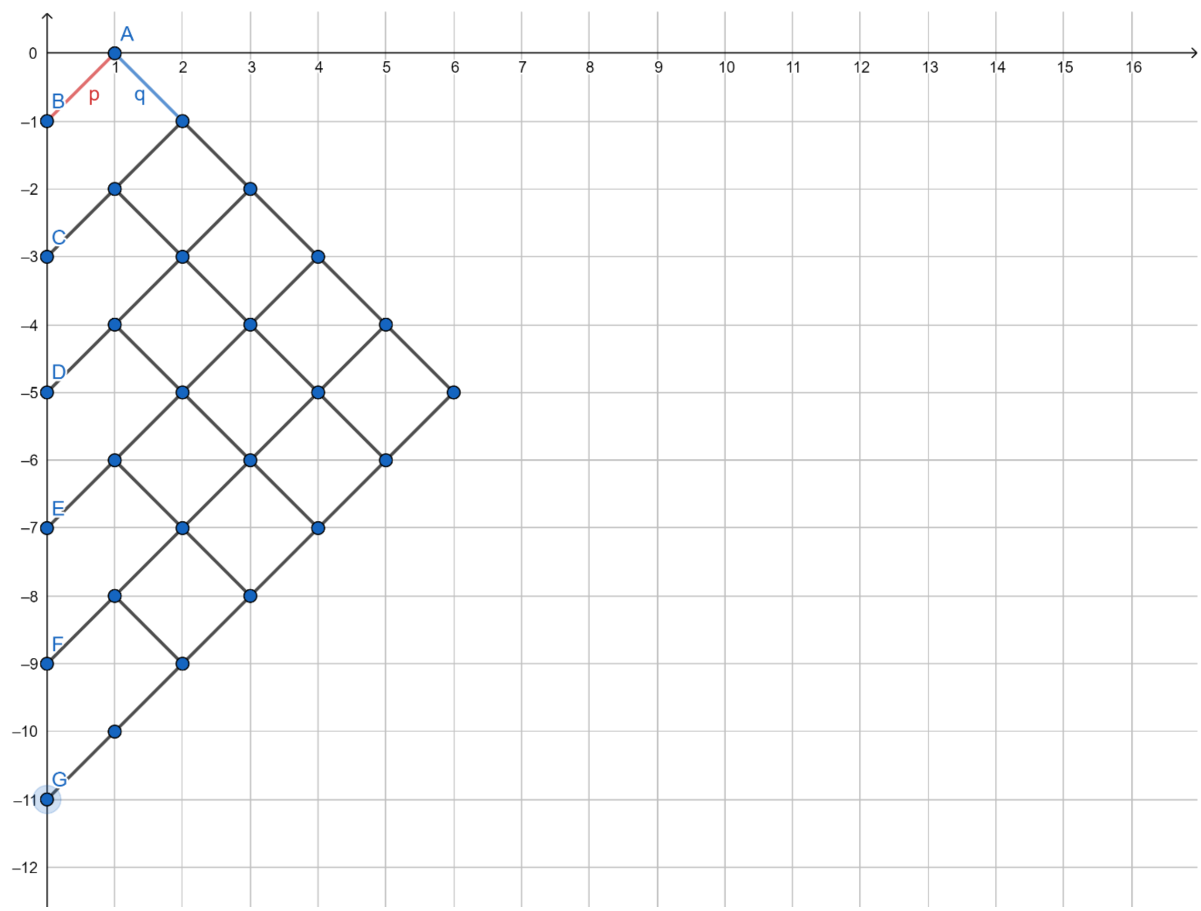


att. 3.5.

Daļiņa no punkta A līdz punktam F var nonākt pa 14 dažādiem ceļiem (skatīt att. 3.6.). Kopējo varbūtību nonākt punktā F var aprēķināt, izmantojot formulu $P = 14(q^4 \cdot p^5)$.



att.3.6.

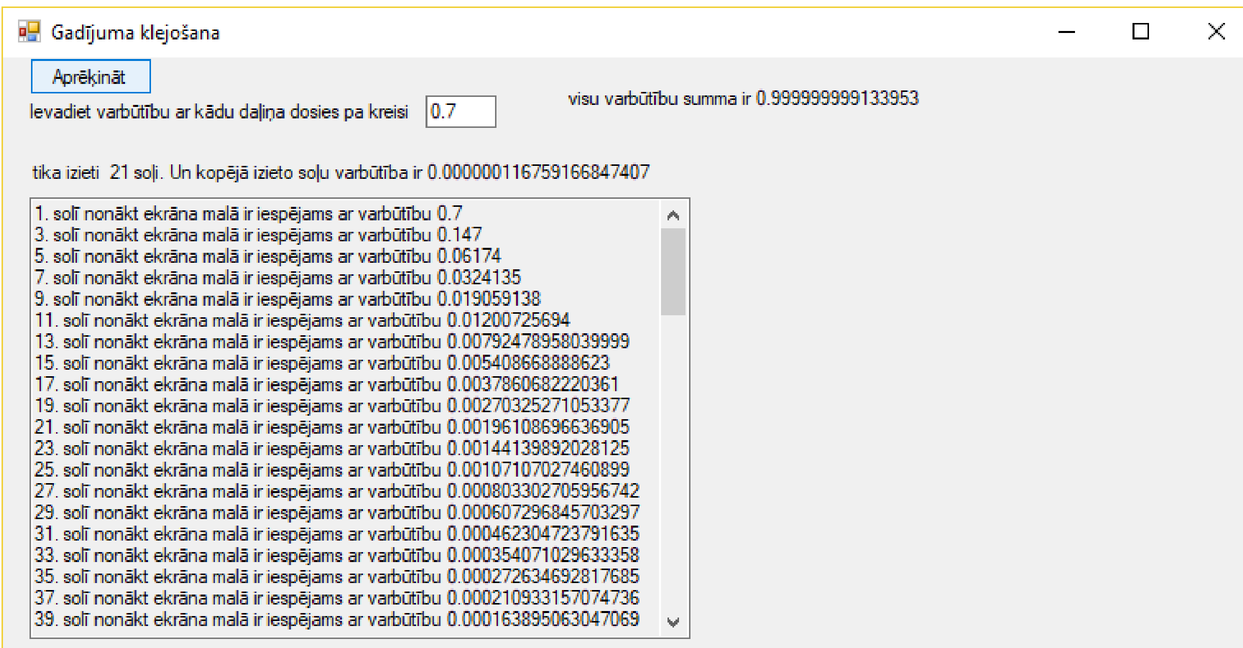


att. 3.7.

Attēlā 3.7. redzam jau 42 dažādus ceļus, kā nonākt no punkta A līdz punktam G. Kopējā varbūtība ir aprēķināma pēc formulas $P = 42(q^5 \cdot p^6)$. Piemēram, izvēloties sākotnējo varbūtību $p = 0{,}7 \Rightarrow q = 0{,}3$, varam aprēķināt precīzu varbūtību, lai nonāktu šajā punktā:

$$P = 42(0{,}3^5 \cdot 0{,}7^6) = 42(0{,}00243 \cdot 0{,}117649) = 42 \cdot 0{,}00028588707 = 0{,}01200725694.$$

Programma var izrēķināt 85 Katalāna skaitļus, tātad tā var izrēķināt, kāda varbūtība nonākt ekrāna malā būs pēc 171 soļa. Ievadot varbūtību $p = 0{,}7$, programmā viens no variantiem, kad nonāk ekrāna malā, ir pēc 21 soļa, un kopējā ceļa varbūtība ir 0,00000006759166847407 (skatīt att. 3.8.). Kā redzams attēlā, visu varbūtību summa ir tuva 1, tas nozīmē, ka ar varbūtību 0.999999999133953 daļiņa 171 soļa laikā sasniegs ekrāna malu, bet ar varbūtību 0.000000000866047 tā sasniegs ekrāna malu pēc 171. soļa.



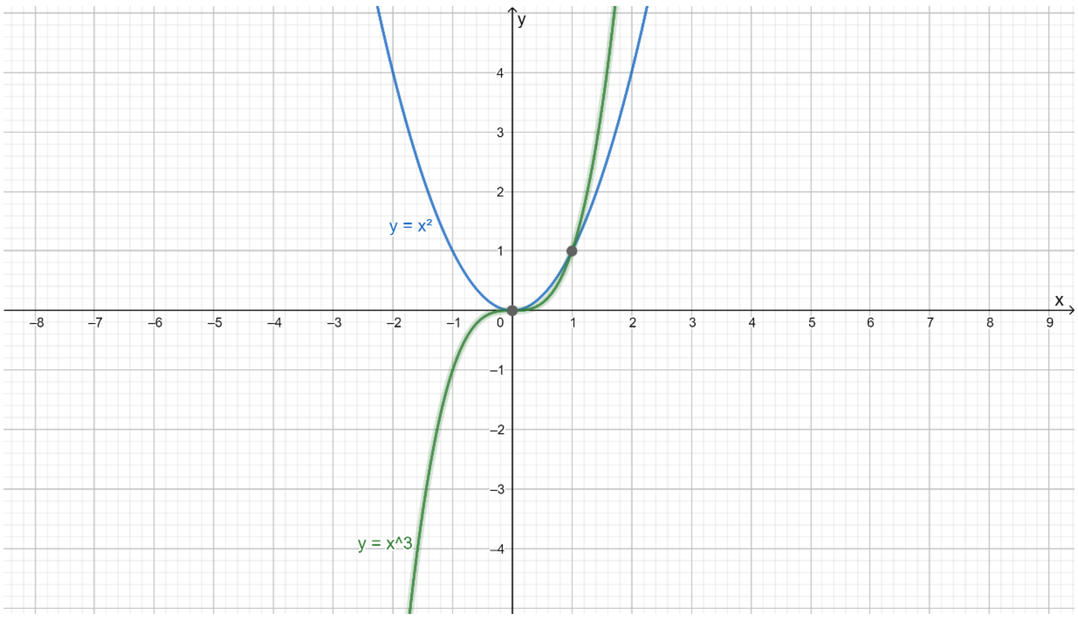
Att. 3.8.

Tika apskatīta Markova definīcija un secināts, ka Markova ķēdēm nav nozīmes visiem iepriekšējiem soļiem, bet gan tikai pēdējam. Izstrādājot programmu, kas simulē gadījuma klejošanu, nācās iepazīties ar jēdzienu – Katalāna skaitļi. Šāda programma tika izveidota pēc darba vadītāja lūguma. Programmu iespējams pilnveidot ar to, ka varētu ievadīt citu sākotnējo daļiņas stāvokli, kas atrodas dažādos attālumos no koordinātu plaknes sākumpunkta. Jo ievadīta lielāka varbūtība, ka daļiņa virzīsies pa kreisi, jo lielāka iespēja, ka daļiņa nonāks ekrāna malā ātrāk, un kopējo varbūtību summa būs 1 pēc mazāka soļu skaita, tas ir, ievadot varbūtību 0,77 varam būt pilnīgi pārliecināti, ka daļiņa 200 soļu laikā nonāks ekrāna malā.

4. ATVASINĀJUMI

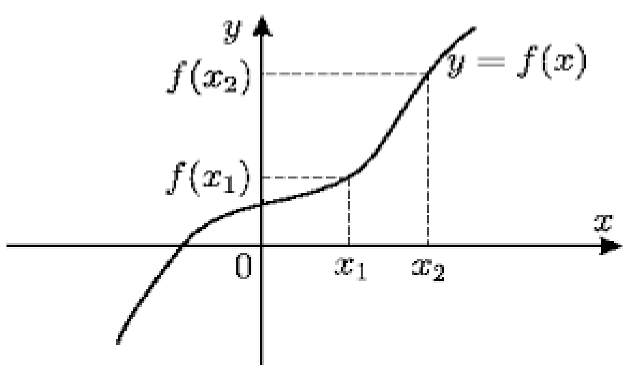
4.1. Atvasinājuma jēdziens

Ļoti svarīgs jēdziens, kas raksturo funkciju, ir funkcijas atvasinājums. Šī jēdziena pamatā ir priekšstats par funkcijas izmaiņas ātrumu. Piemēram, salīdzināsim divas funkcijas $y = x^2$ un $y = = x^3$. Argumenta vērtība $x_0 = 1$ abu funkciju vērtības ir vienādas (to grafiki krustojas punktā $(1; 1)$), (sk. att. 4.1.). Taču, sākot no punkta $x_0 = 1$, funkcija $y = x^3$ aug ātrāk nekā funkcija $y = = x^2$, jo, piemēram, $1{,}5^3 = 3{,}375$, bet $1{,}5^2 = 2{,}25$; $2^3 = 8$, bet $2^2 = 4$ u. tml.



att. 4.1.

Lai aprakstītu matemātiski šo īpašību – funkcijas izmaiņas ātrumu, jāaplūko vispārīgajā gadījumā funkciju $y = f(x)$ intervālā $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$ (skatīt att. 4.2).



Att. 4.2. **Monotoni augoša funkcija**

Funkcijas pieaugums šajā intervālā ir $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Sastādīsim funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecību $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Ar šo attiecību definē jēdzienu “funkcijas izmaiņas vidējais ātrums intervālā $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$" (analogi fizikā definē jēdzienu "kustības vidējais ātrums kādā laika intervālā"). Tomēr, ja f nav lineāra funkcija, attiecība $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ ir atkarīga no intervāla $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$ garuma: mainot Δx, mainās $\Delta f(x_0)$, un mainās arī šī attiecība. Tāpēc, lai noteiktu funkcijas izmaiņas ātrumu tieši punktā x_0, ir jāaplūko funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecība arvien mazākā intervālā $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$, t. i., jāatrod šīs attiecības robeža, kad intervāla garums Δx tiecas uz nulli:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ar šo robežu definē funkcijas $f(x)$ atvasinājumu punktā x_0.

4.1. Definīcija.

Par funkcijas atvasinājumu punktā x_0 sauc funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robežu šajā punktā, kad argumenta pieaugums tiecas uz nulli.

Atvasinājumu punktā x_0 apzīmē ar simbolu $f'(x_0)$, kuru attiecīgi lasa "ef prim no iks nulles".

Tātad

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funkcijas $f(x)$ atvasinājums punktā x_0 ir skaitlis $f'(x_0)$. Ja atvasinājumu atrod mainīgai argumenta vērtībai x, tad atvasinājums ir funkcija, ko apzīmē ar simbolu $f'(x)$. Tādējādi

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ļoti bieži funkcijas y pieaugumu apzīmē ar Δy un funkcijas atvasinājumu pieraksta šādi:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Funkcijas atvasinājuma atrašanu sauc arī par atvasinājumu jeb diferencēšanu.

No atvasinājuma definīcijas izriet, ka funkcijas $y = f(x)$ atvasinājumu argumenta vērtībai x atrod pēc šāda algoritma.

1. Atrod funkcijas vērtību $f(x)$ punktā x.
2. Atrod funkcijas vērtību $f(x + \Delta x)$ citā definīcijas apgabala punktā $x + \Delta x$.
3. Atrod argumenta pieaugumam Δx atbilstošo funkcijas pieaugumu

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

4. Sastāda funkcijas pieauguma $\Delta f(x)$ un argumenta pieauguma Δx attiecību $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

5. Atrod attiecības robežu (ja tāda eksistē) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$; šī robeža ir funkcijas atvasinājums $f'(x)$.

4.1 piemērs.

Atrast funkcijas $f(x) = x^2$ atvasinājumu $f'(x)$ un aprēķināt $f'(1)$.

Atrisinājums.

Tā kā $f(x) = x^2$, tad $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ un $\Delta f(x) =$ $= f(x + \Delta x) - f(x) = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$.

Sastādīsim attiecību

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Atrodam robežu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x.$$

Tātad funkcijas $f(x) = x^2$ atvasinājums ir $2x$, un to pieraksta šādi $(x^2)' = 2x$. Aprēķinām funkcijas atvasinājumu punktā 1. Tā kā $f'(x) = 2x$, tad $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

4.2 piemērs.

Atrast funkcijas $f(x) = x^3$ atvasinājumu $f'(x)$ un aprēķināt $f'(1)$.

Atrisinājums.

Analogi kā iepriekšējā piemērā atrodam $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$

$$= x^3 + 3 \cdot x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2);$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Līdz ar to

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Tātad $(x^3)' = 3x^2$ jeb $f'(x) = 3x^2$ un $f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$.

Nodaļas sākumā noskaidrojām, ka funkcijas atvasinājums punktā x_0 ir funkcijas izmaiņas ātrums šajā punktā. Kā redzams no piemēriem, funkcijas $y = x^3$ atvasinājums punktā $x_0 = 1$ ir lielāks nekā funkcijas $y = x^2$ atvasinājums šajā punktā. Tātad funkcija $y = x^3$ punktā $x_0 = 1$ aug ātrāk nekā funkcija $y = x^2$. Šo arī redzējām, apskatot attēlu 6.1.

4.3 piemērs.

Atrast funkcijas $f(x) = \sqrt{x}$ atvasinājumu $f'(x)$ un aprēķināt $f'(4)$.

Atrisinājums.

Šajā gadījumā

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Kad $\Delta x \to 0$, šī attiecība ir nenoteikta izteiksme $\left[\frac{0}{0}\right]$. Atrodot attiecības robežu, skaitītāju un saucēju, reizināsim ar skaitītāja algebriski saistīto izteiksmi $\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$. Tādejādi iegūstam

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tātad $(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ un $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$.

4.4 piemērs.

Atrast funkcijas $f(x)=2x+3$ atvasinājumu.

Atrisinājums.

Tā kā

$$\Delta f(x)=\ f(x+\Delta x)-f(x)=(2(x+\Delta x)+3)-(2x+3)=$$

$$=2x+2\Delta x+3-2x-3=2\Delta x,$$

tad

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2.$$

Tādējādi $(2x+3)'=2$. Kā redzams, šīs funkcijas atvasinājums ir konstants lielums, t. i., 2, visām x vērtībām. Tātad funkcija $f(x)=2x+3$ visos definīcijas apgabala punktos aug ar vienādu ātrumu, tas ir redzams no funkcijas grafika, jo tā ir taisne.

No piemēriem 6.1; 6.2; 6.3 ieguvām dažu pakāpes funkciju atvasinājumus: $(x^2)'=2x$; $(x^3)'=3x^2$; $(\sqrt{x})=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Pārveidosim šīs vienādības:$(x^2)'=2x=2x^{2-1}$; $(x^3)'=3x^2=$ $=3x^{3-1}$. Tā kā $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ un $\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, un šo izteiksmi var pārveidot šādi:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}.$$

Viegli konstatēt, ka aplūkotajos piemēros pakāpes funkcijas x^{α} atvasinājumu nosaka formula $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.[6]

4.2. Funkcijas atvasinājuma fizikālā nozīme

Iepriekš noskaidrojām, ka funkcijas $y = f(x)$ atvasinājums punktā x_0 ir skaitlis $f'(x_0)$, kas raksturo funkcijas izmaiņas ātrumu punktā x_0. Aplūkosim atvasinājuma fizikālo nozīmi piemēros, kad ar funkciju f apraksta kādu konkrētu parādību vai procesu.

Taisnvirziena kustības momentānais ātrums.

Kā zināms, ķermenim brīvi krītot, noieto ceļu h atkarībā no krišanas laika t atrod pēc formulas $h = \frac{gt^2}{2}$, kur g – gravitācijas paātrinājums. Šī formula ir analītiska izteiksme funkcijai, kuras arguments ir laiks, bet funkcijas vērtība – krītot noietais ceļš.

Krišanas vidējais ātrums laika intervālā $[t_0; t_0 + \Delta t]$ ir attiecība $\frac{\Delta h}{\Delta t}$, kur Δh ir ķermeņa noietais ceļš (pārvietojums) šajā laika intervālā, bet Δt ir laika intervāla garums.

Tā kā

$$\Delta h = \frac{g(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \frac{gt_0^2}{2} = \frac{g}{2}((t_0 + \Delta t)^2 - t_0^2) = \frac{g}{2}(2t_0\Delta t + \Delta t^2),$$

tad krišanas vidējais ātrums

$$v_{vid} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{\frac{g}{2}(2t_0\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t).$$

Krišanas momentāno ātrumu laika momentā $t_0$definē kā vidējā ātruma robežu, kad $\Delta t \to 0$, t.i.,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{vid} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{g}{2}(2t_0 + \Delta t) = \frac{g}{2} \cdot 2t_0 = gt_0.$$

Tātad krišanas momentānais ātrums $v = gt$ ir funkcijas $h = \frac{gt^2}{2}$ atvasinājums$\left(\frac{gt^2}{2}\right)' = gt$.

Vispārējā gadījumā pieņemsim, ka pa koordinātu asi pārvietojas materiāls punkts, turklāt punkta kustība notiek koordinātu ass virzienā. Kustība ir noteikta, ja katrā laika momentā var atrast šī punkta koordinātu. Pieņemsim, ka koordinātu x atkarībā no laika t uzdod ar funkciju $x = x(t)$. Spriežot analogi kā ķermeņa brīvās krišanas gadījumā, $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ ir punkta

[6] Šteiners, K. Algebra 10. – 12. klasei V. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2000. 64. – 67. lpp.

pārvietojums laika intervālā $[t; t + \Delta t]$, attiecība $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ir kustības vidējais ātrums šajā laika intervālā, bet ar robežu $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$ definē kustības momentāno ātrumu laika momentā t.

Tādējādi, ja $x = x(t)$ ir materiāla punkta koordinātas atkarība no laika kustībā pa koordinātu asi, tad šīs funkcijas atvasinājums ir punkta momentānais ātrums (precīzāk – momentānā ātruma vektora projekcija uz Ox ass), t.i., $v = x'(t)$.

Taisnvirziena kustības paātrinājums.

Ja kustība nav vienmērīga, tad arī ātrums ir atkarīgs no laika, piemēram, brīvās krišanas momentānais ātrums $v = gt$. Pieņemsim, ka taisnvirziena kustības ātrumu atkarībā no laika izsaka funkcija $v = v(t)$. Noskaidrosim atvasinājuma atrašanas algoritma fizikālo jēgu šai funkcijai:

1) $v(t)$ ir kustības momentānais ātrums laika momentā t, skaitot no kustības sākuma;
2) $v(t + \Delta t)$ ir kustības ātrums laika momentā $t + \Delta t$;
3) $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ ir ātruma pieaugums, kāds radies laika intervālā $[t; t + \Delta t]$;
4) attiecība $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ir kustības vidējais paātrinājums aplūkotajā laika intervālā;
5) ar robežu $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t)$ definē kustības paātrinājumu a laika momentā t.

Tātad, ja funkcija $v = v(t)$ ir taisnvirziena kustības ātruma atkarība no laika, tad šīs funkcijas atvasinājums ir kustības paātrinājums, t.i., $a = v'(t)$.

Šo sakarību bieži izmanto fizikas formulu pierakstos. Piemēram, izsakot kustības paātrinājumu kā ātruma atvasinājumu, 2. Ņūtona likumu $F = ma$ pieraksta šādi: $F = mv'$.

Ar atvasinājuma palīdzību matemātiski apraksta ne tikai mehānisku kustību, bet arī daudzas citas parādības. Piemēram, ja funkcija $m = m(t)$ ir radioaktīvas vielas masas atkarība no laika, tad $m'(t)$ ir radioaktīvās sabrukšanas ātrums; ja $T = T(t)$ ir atdziestoša ķermeņa temperatūras T atkarība no laika, tad atvasinājums $T'(t)$ ir atdzišanas ātrums; ja $x = x(t)$ ir mikroorganismu (vīrusu, baktēriju) daudzuma atkarība no laika, tad atvasinājums $x'(t)$ ir mikroorganismu daudzuma izmaiņas ātrums u.tml. Vispārinot šos spriedumus, atvasinājuma fizikālo jēgu var formulēt šādi.

Ja funkcija, kuras arguments ir laiks, matemātiski apraksta kādu procesu, tad funkcijas atvasinājums ir procesa norises ātrums.[7]

[7] Šteiners, K. Algebra 10. – 12. klasei V. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2000. 69. – 71. lpp.

4.3. Atvasināšanas kārtulas un formulas

Funkcijas argumenta atvasinājums.

Funkcijas argumenta atvasinājums ir vienāds ar skaitli 1, t.i., ja $f(x) = x$, tad $f'(x) = 1$ jeb $x' = 1$.

Pierādījums.

Ja $f(x) = x$, tad $f(x + \Delta x) = x + \Delta x$ un $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$. Saskaņā ar atvasinājuma definīciju atrodam:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Konstantas funkcijas atvasinājums.

Konstantas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar nulli: ja $f(x) = C$, tad $f'(x) = 0$ jeb $C' = 0$.

Pierādījums.

Ja $f(x) = C$, visiem x, tad $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$ un $f'(x) =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Funkcijas summas (starpības) atvasinājums.

Aplūkosim divas funkcijas $u(x)$ un $v(x)$. Ja eksistē atvasinājumi $u'(x)$ un $v'(x)$, tad eksistē arī šo funkciju summas (starpības) atvasinājums un $\big(u(x) \pm v(x)\big)' = u'(x) \pm v'(x)$.

Pierādījums.

Apzīmēsim doto funkciju summu ar $f(x) = u(x) + v(x)$, tad

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = \big(u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)\big) - \big(u(x) + v(x)\big) =$$

$$= \big(u(x + \Delta x) - u(x)\big) + \big(v(x + \Delta x) - v(x)\big) =$$

$$= \Delta u(x) + \Delta v(x).$$

Saskaņā ar atvasinājuma definīciju atrodam

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x) + \Delta v(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Tātad $(u + v)' = u' + v'$. Iegūtā formula ir spēkā jebkuram galīgam saskaitāmo funkciju skaitam. Analogi rīkojas arī, atvasinot funkciju starpību.

Piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^3 + x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ atvasinājumu.

Atrisinājums. Izmantojot pakāpes funkcijas atvasināšanas formulu $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, iegūstam

$$f'(x) = \left(x^3 + x^2 - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)' = (x^3)' + (x^2)' - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + (x^{-1})' =$$

$$= 3x^2 + 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} = 3x^2 + 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

Funkciju reizinājuma atvasinājums

Ja funkcijām $u(x)$ un $v(x)$ eksistē atvasinājumi, tad eksistē atvasinājumi arī šo funkciju reizinājumam $u(x) \cdot v(x)$ un

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

Pierādījums.

Atrodam funkcijas $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ pieauguma izteiksmi:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= (u(x) + \Delta u) \cdot (v(x) + \Delta v) - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= u(x) \cdot v(x) + \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x) + \Delta u \cdot \Delta v - u(x) \cdot v(x) =$$

$$= \Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x) + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Atrodot funkcijas pieauguma un argumenta pieauguma attiecības robežu, kad $\Delta x \to 0$, izmantosim šādus spriedumus:

1) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x) = u(x)$ un $\lim\limits_{\Delta x \to 0} v(x) = v(x)$, jo fiksētai x vērtībai $u(x)$ un $v(x)$ ir konstantes,
2) Tā kā eksistē atvasinājums$u'(x)$, tad $u(x)$ ir nepārtraukta funkcija un tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$.

Tādejādi iegūstam

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x) + \Delta v \cdot u(x) + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x) + u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + 0 \cdot v'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Tātad $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Secinājums. Konstantu reizinātāju C, ar kuru reizināta funkcija, var ņemt pirms atvasinājuma zīmes, t.i., $(C \cdot u)' = C \cdot u'$. Tā kā $C' = 0$, tad, izmantojot reizinājuma atvasināšanas kārtulu, iegūstam

$$\left(C \cdot u(x)\right)' = C' \cdot u(x) + C \cdot u'(x) = 0 + C \cdot u'(x) = C \cdot u'(x).$$

Piemērs. $f(x) = (3x^2 - x)(2x + 5)$ Izmantojot funkciju reizinājuma atvasināšanas kārtulu, atrodam

$$f'(x) = \left((3x^2 - x)(2x + 5)\right)' = (3x^2 - x)'(2x + 5) + (3x^2 - x)(2x + 5)' =$$
$$= (6x - 1)(2x + 5) + (3x^2 - x)(2 + 0) = 18x^2 + 26x - 5.$$

Funkciju dalījuma atvasinājums.

Ja funkcijām $u(x)$ un $v(x)$ eksistē atvasinājumi, tad eksistē atvasinājums arī šo funkciju dalījumam $\frac{u(x)}{v(x)}$ un

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}, \quad v^2(x) \neq 0.$$

Pierādījums.

Apzīmēsim $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, no kurienes iegūst identitāti $u(x) = f(x) \cdot v(x)$. Ja funkcijas ir identiskas, tad arī to atvasinājumi ir identiski (šī īpašība izriet no atvasinājuma definīcijas). Tāpēc

$$u'(x) = \left(f(x) \cdot v(x)\right)' = f'(x) \cdot v(x) + f(x) \cdot v'(x).$$

Izsakām no šīs vienādības $f'(x)$:

$$f'(x) \cdot v(x) = u'(x) - f(x) \cdot v'(x), \quad f'(x) = \frac{u'(x) - f(x) \cdot v'(x)}{v(x)}.$$

Tā kā $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, tad

$$f'(x) = \frac{u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)} \cdot v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Tādejādi ir iegūta funkciju dalījuma atvasināšanas kārtula

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Secinājums. Ja funkcijas u dalītājs ir konstants lielums C, tad, atvasinot dalījumu $\frac{u}{C}$, jāatvasina tikai funkcija u, nemainot dalītāju C, t.i., $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$. Patiešām, izmantojot formulu un ievērojot, ka $C \neq 0$, iegūst

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'C - uC'}{C^2} = \frac{u'C - u\cdot 0}{C^2} = \frac{u'C}{C^2} = \frac{u'}{C}.$$

Piemērs. $f(x) = \frac{3}{5-x} + \frac{x^2}{5}$, aprēķināt $f'(2)$.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{5-x}\right)' + \left(\frac{x^2}{5}\right)' = \frac{3'(5-x) - 3(5-x)'}{(5-x)^2} + \frac{(x^2)'}{5} =$$

$$= \frac{0(5-x) - 3(0-1)}{(5-x)^2} + \frac{2x}{5} = \frac{3}{(5-x)^2} + \frac{2x}{5}.$$

$$f'(2) = \frac{3}{(5-2)^2} + \frac{2\cdot 2}{5} = \frac{3}{9} + \frac{4}{5} = \frac{17}{15}.$$

Saliktu funkciju atvasinājums.

Pieņemsim, ka, izpildot superpozīciju ar divām funkcijām $y = f(u)$ un $u = g(x)$, ir iegūta salikta funkcija $y = f\big(g(x)\big)$. Aplūkosim kārtulu, pēc kuras atvasina saliktas funkcijas.

Ja punktā x funkcijai $u = g(x)$ eksistē atvasinājums$u'_x = g'(x)$ un funkcijai $y = f(u)$ eksistē atvasinājums $y'_u = f'(u)$ punktā $u = g(x)$, tad saliktai funkcijai $y = f\big(g(x)\big)$ eksistē atvasinājums punktā x un to atrod pēc formulas $y'_x = f'_u(u) \cdot g'_x(x)$ jeb $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Pierādījums.

Saskaņā ar atvasinājuma definīciju

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad y'_u = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}, \qquad u'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Brīvi izraugāmies funkcijas $u = g(x)$ definīcijas apgabala punkti x un izmainām argumentu par pieaugumuΔx; iegūstam funkcijas pieaugumu $\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$. Savukārt šis lielums Δu ir funkcijas $y = f(u)$ argumenta pieaugums, kuram atbilst funkcijas pieaugums $\Delta y =$ $= f(u + \Delta u) - f(u)$. Tādejādi ir iegūti trīs savstarpēji saistīt mainīgo lielumu x, u, y pieaugumi$\Delta x, \Delta u, \Delta y$. Sastādīsim attiecību $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ un reizināsim šīs daļas skaitītāju un saucēju ar Δu (ja $\Delta u \neq 0$). Iegūstam identitāti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta x \cdot \Delta u} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Atrodot Δy un Δx attiecības robežu, kad $\Delta x \to 0$, ievērosim, ka funkcija $u = g(x)$ punktā x ir nepārtraukta, jo tai eksistē atvasinājums. Tāpēc saskaņā ar nepārtrauktas funkcijas definīciju $\Delta u \to 0$, ja $\Delta x \to 0$. Līdz ar to iegūstam

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \cdot \Delta u}{\Delta x \cdot \Delta u} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_x \cdot u'_x .$$

Iegūto formulu ērti lietot šādas kārtulas veidā. Saliktas funkcijas atvasinājums ir vienāds ar ārējās funkcijas atvasinājuma un iekšējās funkcijas atvasinājuma reizinājumu.

Piemērs. Atvasināt funkciju $h(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$ un aprēķināt $h'(-2)$.

Šeit pēdējā darbība (ārējā funkcija) ir kāpināšana kubā. Tā kā $(u^3) = 3u^2$, tad

$$h'(x) = 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = 3\frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x'(x+1) - x(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= 3\frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{3x^2}{(x+1)^4};$$

$$h'(-2) = \frac{3(-2)^2}{(-2+1)^4} = 12.$$ [8]

Vidusskolēniem, iepazīstoties ar šo materiālu, būs ieskats par atvasinājuma jēdzienu, definīciju, fizikālo nozīmi un atvasināšanas kārtulām un formulām. Šo daļu varētu papildināt ar sarežģītākiem piemēriem, otrās kārtas atvasinājumiem un informāciju par to, kā tas noder funkciju pētīšanā.

[8] Šteiners, K. Algebra 10. – 12. klasei V. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2000. 80. – 86. lpp.

6.1. tabula

Biežāk lietotās atvasināšanas kārtulas un formulas

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \;\Rightarrow\; (C \cdot u)' = C \cdot u'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \Rightarrow \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C} \Rightarrow \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ $\Big(f\big(u(x)\big)\Big)' = f_u'(u) \cdot u_x'(x)\ jeb\ y_x' = y_u' \cdot u_x'$ $C' = 0, (C - const)$ $x' = 1, (x - funkcijas\ arguments)$	
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$	$(u^{\alpha})_x' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u_x'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)_x' = a^u \cdot \ln a \cdot u_x'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)_x' = e^u \cdot u_x'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)_x' = \frac{1}{u} \cdot u_x'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \ln a$	$(\log_a u)_x' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u_x'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u_x'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u_x'$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{tg} u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u_x'$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\operatorname{ctg} u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u_x'$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u_x'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u_x'$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$	$(\operatorname{arctg} u)'_x = \frac{1}{1 + u^2} \cdot u_x'$
$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$	$(\operatorname{arcctg} u)'_x = -\frac{1}{1 + u^2} \cdot u_x'$

5. SECINĀJUMI

Tika izveidots palīgmateriāls vidusskolēniem matemātikā, lai varētu vieglāk izprast gadījuma klejošanas jēdzienu, Markova ķēdes un atvasinājuma jēdzienu, tā fizikālo nozīmi un uzzināt par atvasināšanas kārtulām un formulām.

Bakalaura darba temats ir aktuāls, jo skolās jaunais izglītības standarts būs jāievieš 2020./2021. m. g., no tā izriet pētījuma mērķis – izveidot metodisku palīgmateriālu vidusskolā matemātikas priekšmeta apguvei.

Darbā tika iepazīstināts ar to, kādas pārmaiņas sagaida skolu sistēmu un kā tieši mainīsies matemātikas mācību process - skolēniem būs iespēja izvēlēties, kādus konkrētus kursus apgūt padziļināti trijos līmeņos.

Veidojot nodaļu par Gadījuma klejošanu, tika secināts, ka Markova ķēdēm nav būtiska katra iepriekšējā soļa vērtība, bet svarīgs ir tikai pēdējais solis. Pēc darba vadītāja lūguma tika izveidota programma, kas simulē gadījuma klejošanas procesu. Programma saskaita, cik soļus daļiņa ir pārvietojusies uz leju, un izvada konkrētā ceļa noieto varbūtību reizinājumu, visu varbūtību summu un varbūtības, ar kādām iespējams nonākt pēc konkrēta soļu skaita ekrāna malā. Programmā ir jāievada varbūtība, ar kādu daļiņa pārvietosies pa kreisi, ievadot šo varbūtību mazāku par 0,5, daļiņa pārvietosies tālāk no $x = 0$, un iespēja sasniegt šo punktu samazinās. Programmu var turpināt pilnveidot tā, ka lietotājs ievada sākotnējo x koordinātu, un tad tiek aprēķinātas visas varbūtības, ar kādām ir iespējams nonākt punktā $x = 0$.

Lasot nodaļu par atvasinājumiem, skolēniem rodas skaidrība, kas ir atvasinājum jēdziens, un kāda ir tā būtība. Šo nodaļu varētu pilnveidot, aprakstot funkcijas atvasinājumu izmantošanu funkciju pētīšanā, funkcijas augstāku kārtu atvasinājumus un papildinot ar vairākiem piemēriem. Šajā nodaļā tika izveidota tabula ar biežāk lietotajām atvasinājumu kārtulām un formulām, kuras varētu lietot, lai vieglāk būtu risināt uzdevumus, kuros ir nepieciešama atvasināšana.

6. IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

1. Carkova, V. Markova ķēdes,Rīga: LU, 2001
2. Šteiners, K. Algebra 10. – 12. klasei V. Rīga: Apgāds Zvaigzne ABC, 2000.
3. www.skola2030.lv
4. www.tomcircle.wordpress.com

7. 1. PIELIKUMS. PROGRAMMAS KODS, GADĪJUMA KLEJOŠNAS SIMULĀCIJAI

```
Public Class Form1
    Private Sub Button1_Click(sender As Object, e As EventArgs) Handles Button1.Click
        Dim y, j As Integer
        Dim skaitlis, c, p, kv, q, i, x As Decimal
        Dim s As String
        Dim varb, sum As Double
        p = Val(TextBox2.Text)
        If Not ((IsNumeric(TextBox2.Text)) And (Strings.InStr(TextBox2.Text, ",") = 0) And
(p <= 1)) Then
            MsgBox("nekorekti ievadīti dati")
            End
        End If
        x = 1
        y = 0
        kv = 1
        q = 1 - p
        Do
            skaitlis = Int((100 * Rnd()) + 1)
            c = p * 100
            If skaitlis <= c Then
                x = x - 1
                y = y + 1
                kv = kv * p
            Else
                x = x + 1
                y = y + 1
                kv = kv * q
            End If
            If y > 200 Then
                Exit Do
            End If
        Loop Until x = 0
        varb = p
        s = ""
        sum = 0
        j = -1
        For i = 0 To 1
            varb = p ^ (i + 1) * q ^ i
            j = j + 2
            s = s & j & ". solī nonākt ekrāna malā ir iespējams ar varbūtību " & varb &
vbCrLf
            sum = sum + varb
        Next i
        For i = 3 To 86
            varb = catalan(i - 1) * (p ^ i * q ^ (i - 1))
            j = j + 2
            s = s & j & ". solī nonākt ekrāna malā ir iespējams ar varbūtību " & varb &
vbCrLf
            sum = sum + varb
        Next i
        If y > 200 Then
            Label3.Text = ("200 soļu laikā daļiņa nenonāca līdz ekrāna malai")
            Label5.Text = "visu varbūtību summa ir " & sum
            TextBox1.Text = s
```

```
        Else
            TextBox1.Text = s
            Label5.Text = "visu varbūtību summa ir " & sum
            If y = 1 Then
                Label3.Text = "tika iziets" & Str(y) & " solis." & " ar kopējo varbūtību "
& kv
            Else
                Label3.Text = "tika izieti" & Str(y) & " soļi." & " Un kopējā izieto soļu
varbūtība ir " & kv
            End If
        End If
    End Sub


    Function faktorials(n As Double) As Double
        If n < 1 Then
            Return 1
        End If

        Dim rez As Double
        rez = 1
        For i = 1 To n
            rez = rez * i
        Next
        Return rez
    End Function

    Function catalan(n As Double) As Double
        Return faktorials(2 * n) / (faktorials(n + 1) * faktorials(n))
    End Function


End Class
```

Bakalaura darbs „Metodiskais palīgmateriāls matemātikā vidusskolai jaunā standarta realizācijai” izstrādāts LU Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Krišjānis Penka

Rekomendēju/nerekomendēju darbu aizstāvēšanai

Vadītājs: asoc. prof. Jānis Mencis 06.06.2019

Recenzents: asoc. prof. Ingrīda Uļjane

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā 7.06.2019.

Dekāna pilnvarotā persona:

Darbs aizstāvēts Valsts pārbaudījuma komisijas sēdē

13.06.2109. prot. Nr. _______

Komisijas sekretāre: Dr. math. Asoc. prof. Ingrīda Uļjane