

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

KLASISKIE EKSTRĒMU UZDEVUMI UN TO MODIFIKĀCIJAS

MAĢISTRA DARBS

Autors: Liene Gobiņa

Studentu apliecības numurs: lg12057

Darba vadītājs: prof. Dr. math. Andrejs Cibulis

Rīga, 2018

ANOTĀCIJA

Darbā aplūkoti dažādi kastu optimizācijas uzdevumi. To risināšanā nereti lieto diferenciālrēķinu metodes. Ja tas iespējams, uzdevumi risināti ar elementārām metodēm. Darbā risināta arī minimālā mīnu skaita problēma, bloķējot taisnstūrus 2×3 .

Atslēgas vārdi: bloķēšanas uzdevumi, ekstrēmu uzdevumi, nošķelta piramīda, taisnstūris.

ANNOTATION

This master thesis deals with different tasks of optimization of boxes. Often differential calculus is used to solve these tasks. If possible, tasks have been solved with elementary methods. In the work also the problem of the minimum number of mines has been solved by blocking rectangles 2×3 .

Key words: blocking tasks, extreme tasks, truncated pyramid, rectangle.

SATURS

Anotācija	2
Annotation	3
Ievads	5
1. KASTE AR VISLIELĀKO TILPUMU	6
1.1 Kaste bez vāka	6
1.2 Kaste bez vāka un sānu skaldnes.....	7
1.3 Kaste bez vāka, divām sānu skaldnēm	8
1.2 Optimālais paralēlskaldnis.....	9
1.4 Uzdevuma elementārs risinājums	18
1.5 Kaste, kuras pamatni veido regulārs n -stūris.....	19
1.6 Kaste ar taisnstūra pamatu	21
1.7 Kaste, kuras pamats ir vienādmalu trīsstūris	23
1.8 Dažādi optimālo kastu piemēri, kuri ir sastopami ikdienā	25
1.8.1 "Picas" kaste	25
1.8.2 "Popkorna" kaste	25
1.9 Nošķelta piramīda	26
1.9.1 Uzdevums par nošķeltas piramīdas maksimālo tilpumu.....	28
2. TAISNSTŪRA 2×3 BLOĶĒŠANAS UZDEVUMI.....	32
2.1 Minimālo mīnu skaits	33
2.2 Atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi.....	33
2.3 Taisnstūris $2 \times n$	36
2.4 Taisnstūris $3 \times n$	37
2.5 Taisnstūris $4 \times n$	38
2.6 Taisnstūris $5 \times n$	39
2.7 Taisnstūris $6 \times n$	42
Nobeigums	44
Literatūras saraksts	45

IEVADS

Darbā aplūkoti ekstrēmu uzdevumi, kas saistīti ar taisnstūriem, taisnstūra paralēlskaldņiem un to modifikācijām – dažādām kastēm. Kastu gadījumā galvenokārt aplūkoti uzdevumi, kuros jāmeklē maksimums kastes tilpumam, ja ir uzdoti kādi papildu ierobežojumi, piemēram, materiāla daudzums, kastes forma. Taisnstūru gadījumā aplūkots minimālā mīnu skaita uzdevums, kad tiek bloķēti (izslēgti) taisnstūri 2×3 .

Studentiem paredzētos mācību līdzekļos, kad tiek piedāvāti piemēri, lai tos risinātu ar diferenciālrēķinu metodēm, nereti ir situācija, ka starp šiem piemēriem ir ļoti maz vai vispār nav tādu, kuru risināšanā pēc būtības ievajadzētos neelementāras metodes. Šajos gadījumos pastāv neatbilstība starp izklāstīto teoriju un piemēriem. Plašu informāciju par ekstrēmu uzdevumu elementārajām risināšanas metodēm var atrast [1], [2], sk. arī [3], [4]. Vienkāršākās ekstrēmu uzdevumu risināšanas metodes tiek aplūkotas jau skolā, tiesa, tās parasti “aprobežojas” ar kvadrātfunkcijas maksimālās vai minimālās vērtības noteikšanu. Liela daļa uzdevumu, kuros jāmeklē maksimālā tilpuma kaste, reducējami uz kubiskas funkcijas ekstrēmu noteikšanu, ko arī var izdarīt ar elementārām metodēm, sk., [1].

Viens no maģistra darba mērķiem bija salīdzināt klasisko uzdevumu par maksimālā tilpuma kasti, kura tiek iegūta no kvadrātveida sagataves, izgriežot no tās stūriem vienādus kvadrātus un nolokot malas, un modificēto uzdevumu, kad no kvadrāta stūriem izgriež vienādus deltoīdus. Otrais uzdevums ir daudz sarežģītāks un tā risināšanā izmantoti divargumentu funkcijas parciālie atvasinājumi. Meklējot informāciju, par klasisko uzdevumu, kā vienu no visvecākajiem avotiem, autorei izdevās atrast I. Todhantera grāmatu [5], kurai ir vairāki izdevumi. Norāde uz šo avotu tika atrasta interneta lapā [6], kur minēts grāmatas otrais izdevums 1855. gadā. Atsauce uz 1. izdevumu (1852) atrodama Frederiksona rakstā [7].

Otrs darba mērķis bija atrast vismaz dažas minimālā mīnu skaita virknes, kādas rodas taisnstūros $a \times n$, ja tajos tiek bloķēti taisnstūri 2×3 un ja $a = 2, 3, 4, 5$. Tika noskaidrots jautājums, vai atrastās virknes ir atrodamas virkņu enciklopēdijā [8]. Figūru izslēgšanas uzdevumi vispārīgā gadījumā parasti attiecas uz neatrisinātām matemātikas problēmām, to pētīšanā izmanto dažādus kombinatorikas paņēmienus, grafu teoriju u. c. Ieskatu par šādām problēmām var gūt, piemēram, no [9], [10].

Darbā ir 45 zīmējumi, 6 tabulas un 14 bibliogrāfijas avoti, kas kārtoti atsaukšanās secībā.

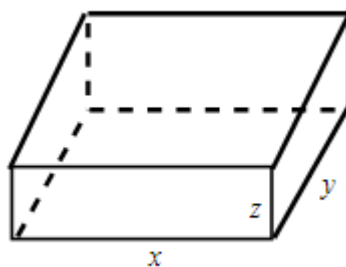
1. KASTE AR VISLIELĀKO TILPUMU

Šajā nodaļā ir aplūkotas dažāda veida kastes, kā piemēram, kastes pamatā ir kvadrāts, taisnstūris, trīsstūris un regulārs n -stūris.

1.1 Kaste bez vāka

Kādai vaļējai kastei ar uzdotu virsmas laukumu S ir maksimālais tilpums (sk. 1. zīm.)?

[9]



1. zīm.

Risinājums. Meklēsim kastes maksimālo tilpumu $V = xyz$, ja $2zx + 2zy + xy = S$.

Izmantosim apzīmējumus $a = 2zx$, $b = 2zy$, $c = xy$.

Ievietojam izvēlētos apzīmējumus izteiksmē $a + b + c = S$ un $abc = 4(zxy)^2$.

Izmantojot nevienādību $G \leq A$, kur

$$A = \frac{a + b + c}{3},$$

$$G = \sqrt[3]{abc},$$

iegūstam

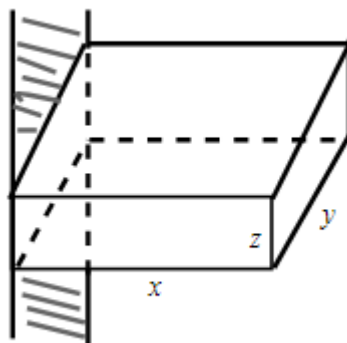
$$4(zxy)^2 = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27}$$

$$zxy \leq \sqrt{\frac{S^3}{108}}.$$

Vienādība pastāv, ja $a = b = c$, kas dod $x = y = 2z$. Tas nozīmē, ka kastei ar maksimālo tilpumu pamats ir kvadrāts, bet tās augstumam ir jābūt divas reizes mazākam kā pamata malai.

1.2 Kaste bez vāka un sānu skaldnes

Atrisināsim iepriekš apskatīto uzdevuma gadījumu, ja kastei nav nepieciešama mala pie sienas un kastes vāks (sk. 2. zīm.). Materiāla daudzums kastes izveidošanai ir S .



2. zīm.

Risinājums. Meklēsim kastes maksimālo tilpumu $V = xyz$, ja $2zx + zy + xy = S$.

Izmantosim apzīmējumus $a = xy, b = zy, c = 2xz$.

Ievietojam izvēlētos apzīmējumus izteiksmē $a + b + c = S$ un $abc = 2x^2y^2z^2$.

Izmantojot nevienādību $G \leq A$, iegūstam:

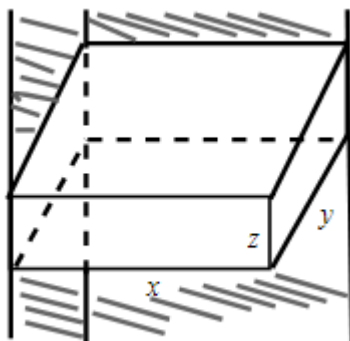
$$2(zxy)^2 = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3 = \frac{S^3}{27}$$

$$zxy \leq \sqrt{\frac{S^3}{54}}$$

Vienādība pastāv, ja $a = b = c$, kas dod $2x = y = 2z$. Tas nozīmē, ka kastei ar maksimālo tilpumu augstumam z un platumam x ir jābūt divas reizes lielākam kā pamata malas garumam y .

1.3 Kaste bez vāka, divām sānu skaldnēm

Atrisināsim iepriekš apskatīto uzdevuma gadījumu, ja kastei nav nepieciešama malas pie sienas un kastes vāks (sk. 3. zīm.). Materiāla daudzums kastes izveidošanai ir S .



3. zīm.

Risinājums. Meklēsim kastes maksimālo tilpumu $V = xyz$, ja $zx + zy + xy = S$.

Izmantosim apzīmējumus $a = xy, b = xz, c = yz$.

Ievietojam izvēlētos apzīmējumus izteiksmē $a + b + c = S$ un $abc = x^2y^2z^2$. Izmantojot nevienādību $G \leq A$, iegūstam:

$$x^2y^2z^2 = abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{S^3}{27}$$

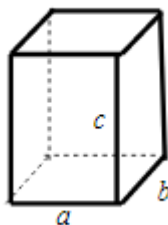
$$zxy \leq \sqrt{\frac{S^3}{27}}$$

Vienādība pastāv, ja $a = b = c$, kas dod $xy = yz = xz$. Tas nozīmē, ka optimālais paralēlskaldnis būs kubs.

1.2 Optimālais paralēlskaldnis

Apskatīsim uzdevumu par optimālo paralēlskaldni, kurš tika uzdots risināšanai Matemātikas maģistrā kursā “Ekstrēmu uzdevumu risināšanas elementārās metodes”. Nodaļā tiek piedāvāts maģistra darba izstrādātāja variants, kā arī apskatīti trīs studentu X un Y , Z iesniegtie risinājuma veidi.

Uzdevums. No visiem taisnstūra paralēlskaldņiem ar uzdotu pamata laukumu L un sānu virsmas laukumu S atrast to, kuram šķautņu garumu summa ir vismazākā? Vai optimālais paralēlskaldnis būs kubs(sk. 4. zīm.)?



4. zīm.

Atrisinājums.

Lai aprēķinātu, vai optimālais paralēlskaldnis pie šādiem nosacījumiem ir kubs, mums nepieciešams minimizēt šādu funkciju :

$$f(a, b, c) = 4(a + b + c) \rightarrow \min.$$

Apskatīsim tālāk gadījumus, kas ļautu izpētīt situāciju un atrast šķautņu garumus.

1. Regulāra prizma

Tā kā tās pamats ir kvadrāts un $ab = L$, tad $a = b = \sqrt{L}$.

Tā kā $2(a + b)c = S$, tad $4\sqrt{L} \cdot c = S$ un $c = \frac{S}{4\sqrt{L}}$.

Lai minimizētu šķautņu garumu summu, noskaidrojam, kad $a + b + c$ vērtība būs vismazākā.

Izsakām

$$a + b + c = 2\sqrt{L} + \frac{S}{4\sqrt{L}} = \frac{8L + S}{4\sqrt{L}}.$$

2. Citi paralēlskaldņi

Apskatīsim taisnstūra paralēlskaldņus, kuriem pamats nav kvadrāts. Malu a un b garumus izsakām $a = k\sqrt{L}$ un $b = \frac{\sqrt{L}}{k}$, kur $k > 0$ un $k \neq 1$.

$$a + b = \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot \sqrt{L}.$$

Zinām, ka $\forall k > 0, k \neq 1: k + \frac{1}{k} > 2$.

Apzīmēsim $k + \frac{1}{k} = 2m$, kur $m > 1$.

$$a + b = 2m\sqrt{L}$$

$$S = 2(a + b) \cdot c = 4m\sqrt{L} \cdot c$$

$$c = \frac{S}{4m\sqrt{L}}$$

$$a + b + c = 2m\sqrt{L} + \frac{S}{4m\sqrt{L}} = \frac{8Lm^2 + S}{4m\sqrt{L}}.$$

3. Iegūto rezultātu salīdzināšana

Regulāra prizma ir optimāls paralēlskaldnis tad un tikai tad, ja $\forall m > 1$ izpildās nevienādība

$$\frac{8L + S}{4\sqrt{L}} \leq \frac{8Lm^2 + S}{4\sqrt{L} \cdot m}.$$

Vienkāršosim nevienādību :

$$8L + S \leq 8Lm + \frac{S}{m}$$

$$8L - 8Lm \leq \frac{S}{m} - S$$

$$8L(1 - m) \leq S \cdot \frac{1 - m}{m}$$

$$8L \geq S \cdot \frac{1}{m}.$$

Tā kā $m > 1$, tad $0 < \frac{1}{m} < 1$, tātad $S > \frac{S}{m}$.

4. Secinājumi

Ja $8L \geq S$, tad nevienādība $8L \geq S \cdot \frac{1}{m}$ izpildās visām pieļaujamajām m vērtībām.

Ja $8L < S$, tad $\frac{S}{8L} > 1$ un $\forall m \in \left(1, \frac{S}{8L}\right)$ no $m < \frac{S}{8L}$ seko, ka $8L < \frac{S}{m}$.

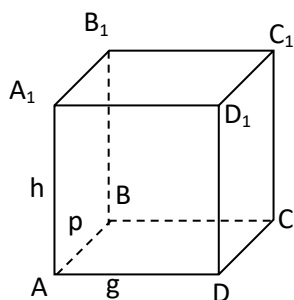
Atbilde. Ja $S = 4L$, tad optimālais paralēlskaldnis būs kubs.

Ja $8L \geq S$, tad optimālais paralēlskaldnis būs regulāra prizma. Malu garumi ir :

$$a = \sqrt{L}, b = \sqrt{L}, c = \frac{S}{4\sqrt{L}}$$

Apskatīsim kāda studenta risinājumu, kurš iekopēts no viņa iesniegtā mājasdarba.

1. mājas darbs.



5. zīm.

Dots: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – taisns paralēlskaldnis (sk. 5. zīm.)

$$S_{ABCD} = L$$

$$S_{sānu} = S$$

Jānosaka, kādā gadījumā šķautņu summa vismazākā.

Vai tas ir kubs?

$$\text{Apzīmē: } AA_1 = h$$

$$AD = g$$

$$AB = p$$

$$4g + 4p + 4h = 4(g + p + h) \rightarrow \min$$

$$p \cdot g = L \Rightarrow p = \frac{L}{g}$$

$$2gh + 2ph = 2h(g + p) = S$$

$$\boxed{h = \frac{S}{2(p + g)}} = \frac{S}{2\left(g + \frac{L}{g}\right)} = \frac{Sg}{2(g^2 + L)}$$

$$4\left(g + \frac{L}{g} + \frac{Sg}{2(g^2 + L)}\right) \rightarrow \min$$

$$4\left(\frac{g^2 + L}{g} + \frac{S}{2} \cdot \frac{g}{g^2 + L}\right) \rightarrow \min$$

reizinājums konstants $A \geq G$

$$4\left(\frac{g^2 + L}{g} + \frac{Sg}{2(g^2 + L)}\right) \geq 8\sqrt{\frac{S}{2}}$$

vienādība $A = G$, ja

$$\frac{g^2 + L}{g} = \frac{S}{2} \cdot \frac{g}{g^2 + L}$$

$$2(g^4 + 2g^2L + L^2) = Sg^2$$

$$2g^4 + g^2(4L - S) + 2L^2 = 0$$

$$D = 16L^2 - 8LS + S^2 - 16L^2 = S^2 - 8LS$$

$$g_1^2 = \frac{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}{4}; \quad g_2^2 = \frac{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}{4} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
S - 4L &\geq \sqrt{S^2 - 8LS} \\
S^2 - 8LS + 16L^2 &\geq S^2 - 8LS \\
16L^2 \geq 0 &\Rightarrow S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS} \geq 0
\end{aligned}$$

$$g_1 = \frac{\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}}{2}; \quad g_2 = \frac{\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}}{2}$$

$$\begin{aligned}
p = \frac{L}{g} &\Rightarrow p_1 = \frac{2L}{\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}} \\
p_2 &= \frac{2L}{\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h = \frac{S}{2(g + p)} &\Rightarrow h_1 = \frac{S}{2 \left(\frac{\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}}{2} + \frac{2L}{\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}} \right)} = \\
&= \frac{S\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}}{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS} + 4L} = \frac{S\sqrt{S - 4L + \sqrt{S^2 - 8LS}}}{S + \sqrt{S^2 - 8LS}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_2 &= \frac{S}{2 \left(\frac{\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}}{2} + \frac{2L}{\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}} \right)} = \\
&= \frac{S\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}}{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS} + 4L} = \frac{S\sqrt{S - 4L - \sqrt{S^2 - 8LS}}}{S - \sqrt{S^2 - 8LS}}
\end{aligned}$$

Tātad minimālā šķautņu summa ir $8\sqrt{\frac{S}{2}}$ tad, ja $S \geq 8L$ (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1 = \frac{\sqrt{S-4L} + \sqrt{S^2-8LS}}{2} \\ p_1 = \frac{2L}{\sqrt{S-4L} + \sqrt{S^2-8LS}} \\ h_1 = \frac{\sqrt{S-4L} + \sqrt{S^2-8LS}}{S + \sqrt{S^2-8LS}} \end{array} \right. \quad \text{vai} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_2 = \frac{\sqrt{S-4L} - \sqrt{S^2-8LS}}{2} \\ p_2 = \frac{2L}{\sqrt{S-4L} - \sqrt{S^2-8LS}} \\ h_2 = \frac{\sqrt{S-4L} - \sqrt{S^2-8LS}}{S - \sqrt{S^2-8LS}} \end{array} \right.$$

Izteiksmes $4\left(\frac{g^2+L}{g} + \frac{Sg}{2(g^2+L)}\right)$ minimums ir atrasts tādā gadījumā, kad $S \geq 8L$.

Vispirms noteiksim, kādas vērtības drīkst būt izteiksmei $\frac{g^2+L}{g}$, lai varētu aprēķināt g vērtību.

$$\frac{g^2+L}{g} = k \Rightarrow g^2+L = kg \Rightarrow g^2 - kg + L = 0$$

$$D = k^2 - 4L \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 4L \Rightarrow k \geq 2\sqrt{L} \Rightarrow k \in [2\sqrt{L}; \infty]$$

$$\text{Ja } k = 2\sqrt{L}, \text{ tad } g = \frac{2\sqrt{L} - \sqrt{(2\sqrt{L})^2 - 4L}}{2} = \sqrt{L}$$

$$\min 4\left(\frac{g^2+L}{g} + \frac{Sg}{2(g^2+L)}\right) = 4\left(2\sqrt{L} + \frac{S}{2 \cdot 2\sqrt{L}}\right) = \frac{8L+S}{\sqrt{L}}$$

$$g = \sqrt{L}, \quad p = \sqrt{L}, \quad h = \frac{S}{2 \cdot 2\sqrt{L}} = \frac{S}{4\sqrt{L}} \quad (**)$$

Vai tas ir kubs?

Ja tas ir kubs, tad $S = 4L$ un $g = p = h$.

Tad $L = g^2$

Jāmeklē $\min(12g) = 12\sqrt{L} = 12\sqrt{\frac{S}{4}} = 6\sqrt{S}$.

Tātad, ja $S=4L$, tad vismazākā šķautņu summa ir $6\sqrt{S}$.

Atbilde:

Vismazākā šķautņu summa ir
$$\begin{cases} 8\sqrt{\frac{S}{2}}, & \text{ja } S \geq 8L \text{ (malu garumi (*))} \\ \frac{8L + S}{\sqrt{L}}, & \text{ja } 0 < S < 8L \text{ (malu garumi (**))} \end{cases}$$

Kubs ir iekļauts otrajā gadījumā. Vispārīgā gadījumā tas nav kubs.

(*), (**) – līdzvērtīgas

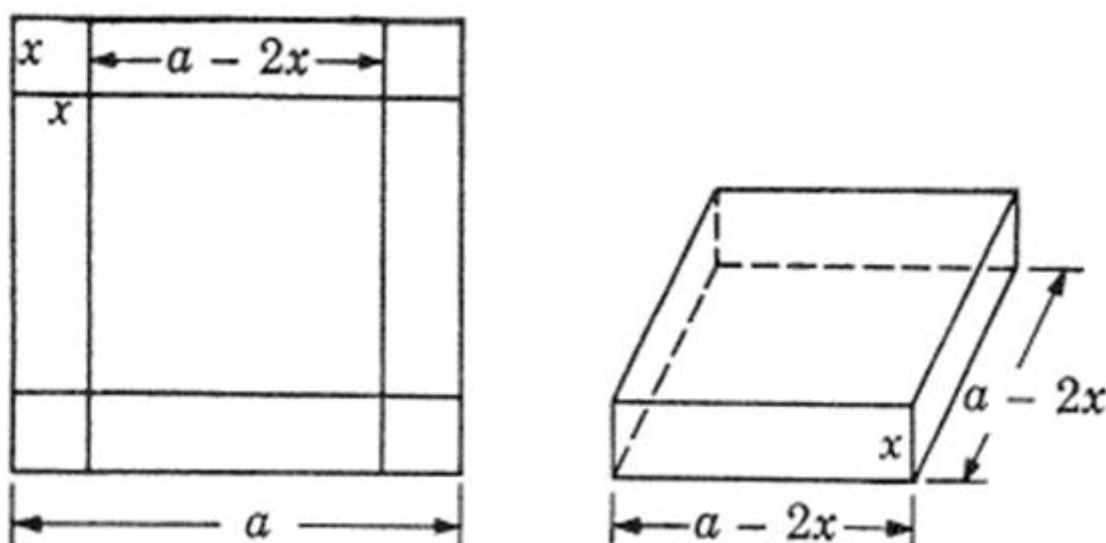
Viedoklis : Apskatot šo studenta risinājumu, varam secināt, kas tas nav racionāls atrisinājuma veids, jo uzdevumu ir iespējams atrisināt īsāk un kompaktāk. Students ir izvēlējis “smagnējus” apzīmējumus, kas uzdevuma risināšanu padarīja sarežģītāku. Students, pasakot, ka (*) un (**) ir līdzvērtīgi, pieļāvis kļūdu, jo šie abi apgalvojumi nav līdzvērtīgi..

1.3 Kaste ar kvadrātveida pamatu

Dažādos avotos [10], [11], [14] ir aplūkots šāds uzdevums par maksimālā tilpuma kastes izgatavošanu:

Izgriežot stūrus un salocot malas uz augšu, no kvadrātiska skārda gabala jāizgatavo vislielākā iespējamā tilpuma vaļēja kaste. Cik liels jāņem kastes augstums h un cik liels būs kastes tilpums? [11] Kvadrāta malas garums ir a .

Parasti uzdevumu risina ar atvasinājuma palīdzību [2], [3] bez pamatojuma, ka atrastais lokālais ekstrēms ir meklētais maksimums.



6. zīm.

Sākumā tiek apskatīts zīmējums, kas ilustrē problēmu. Nogrieztā stūra lielumu apzīmēt ar x .

Tad kastes tilpumu izsaka formula

$$y = x(x - 2a)^2, 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \quad (1)$$

Acīmredzami, ka $y = 0$, kad $x = 0$ vai $x = \frac{a}{2}$, tātad y maksimālo vērtību sasniegs intervāla iekšienē. Funkciju (1) var atvasināt jebkurā punktā, tādēļ, lai y būtu maksimāls, $\frac{dy}{dx}$ ir jābūt 0.

Atverot iekavas formulā (1), iegūstam

$$y = a^2x - 4ax^2 + 4x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = a^2 - 8ax + 12x^2 = (a - 6x)(a - 2x),$$

tātad $\frac{dy}{dx} = 0$, kad $x = \frac{a}{6}$ vai $x = \frac{a}{2}$.

Lai iegūtu papildus informāciju par funkciju (1), atrodam tās otro atvasinājumu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 8a = 24\left(x - \frac{a}{3}\right),$$

kas parāda, ka funkcijai (1) pārliekuma punkts ir $x = \frac{a}{3}$. Noskaidrosim otrā atvasinājuma zīmi punktos, kuros 1. atvasinājums ir 0:

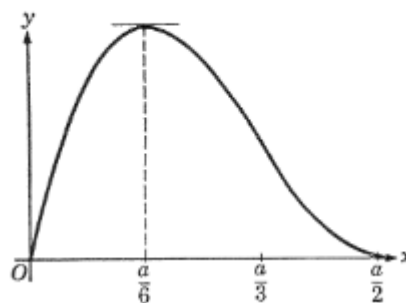
$$\text{ja } x = \frac{a}{6}, \text{ tad } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ un } \frac{d^2y}{dx^2} = -4a,$$

$$\text{ja } x = \frac{a}{2}, \text{ tad } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ un } \frac{d^2y}{dx^2} = 4a.$$

Izmantojot augstāk iegūto informāciju, varam uzzīmēt funkcijas

$$y = x(x - 2a)^2, 0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

grafika skici, sk.9 zīm., [3], no kura redzams, ka tilpums būs maksimāls, ja $x = \frac{a}{6}$.



7. zīm.

1.4 Uzdevuma elementārs risinājums

Apzīmēsim izgrieztā kvadrāta malas garumu ar x , sk. 8. zīm. Tad kastes tilpums būs

$$V = x(a - 2x)^2.$$

Pārveidosim tilpuma izteiksmi formā

$$4V = (4x)(a - 2x)(a - 2x).$$

Tā kā trīs reizinātāju $(4x)(a - 2x)(a - 2x)$ ir konstants lielums, tad to reizinājums būs maksimāls, ja

$$4x = a - 2x \Rightarrow x = \frac{a}{6} \Rightarrow V_{max} = \frac{4a^3}{9}.$$

1.5 Kaste, kuras pamatni veido regulārs n -stūris

Ja papīra gabals, ar kuru mēs sākam, ir regulārs n – stūris, kā mēs izgriežam stūrus, veidojot līdzīgu n – stūru kasti, tad kāda ir attiecība starp kastes augstumu un apotēmu kastei ar lielāko tilpumu (sk. 8. zīm., [2])?

Sākmā šķita, ka atbilde būs $x = \frac{a}{3}$, kur x ir kastes augstums, bet a apotēma no sākotnējā n -stūra. Lai šo rezultātu pierādītu, ir nepieciešams norādīt intervālu, kurā n -stūra ir funkcijas vērtība apotēmā a , skatoties uz sākotnēji doto pamatu.

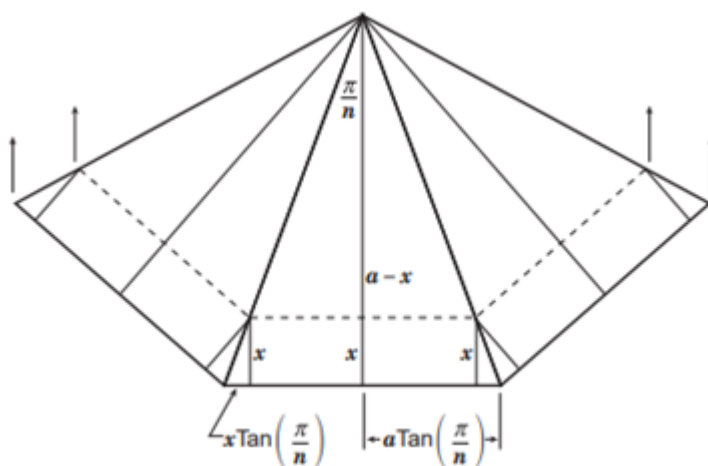
$$\text{Kvadrātam } V(x) = x(2a - 2x)^2 = 4x(a - x)^2.$$

Tas, ka kastes maksimālais tilpums tiek sasniegts, kad $x = \frac{a}{3}$, ir pierādīts iepriekš. Tādējādi, ja izteiksme tiek atvasināta un pielīdzināta 0, iegūst rezultātu $x = \frac{a}{3}$.

Ja apskatām vienādmalu trīsstūri, ir zināms, ka $s = 2a\sqrt{3}$, tā ka

$$V(x) = x(2a\sqrt{3} - 2x\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}x(a - x)^2.$$

Var redzēt, ka iegūtā formula atšķiras tikai ar konstantu koeficientu, tāpēc, to atvasinot, iegūst tādu pašu rezultātu. Tātad iegūstam, ka arī šī kaste savu maksimālo tilpumu iegūs brīdī, kad izvēlēsimies $x = \frac{a}{3}$.



8. zīm.

Apskatot zīmējumu un izmantojot faktu, ka jebkuram regulāra n – stūra tilpums ir uzdots formā $A = \left(\frac{1}{2}\right) ap$, kur a ir apotēma un p ir perimetrs, ir zināms, ka kastes tilpumu varam aprēķināt

$$V(x) = \frac{1}{2}(a - x)n \left(2a \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - 2x \tan\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) x;$$

$$V(x) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) x(a - x)^2.$$

Var redzēt, ka šis rezultāts ir tikai konstanta tilpuma formula, līdz ar to tās maksimums tiek iegūts brīdī, kas augstums ir $x = \frac{a}{3}$.

1.6 Kaste ar taisnstūra pamatu

Ja sākumā dotā loksne ir taisnstūris ar malu garumiem a un b , sk. 8. zīm., tad nepieciešams meklēt maksimumu funkcijai

$$V(x) = x(x - a)(x - b),$$

kur $0 \leq x \leq b$.

Meklēsim divus pozitīvus skaitļus p un q , lai jaunajai funkcijai

$$F(x) = px(a - x)(qb - qx)$$

būtu spēkā šādas divas īpašības [1]:

$$(i1) \quad px + (a - x) + (qb - qx) = \text{const},$$

$$(i2) \quad px = a - x = qb - qx.$$

Pirmā īpašība nozīmē, ka trīs reizinātāju summa nav atkarīga no x , kas dod sakarību

$$p - 1 - q = 0 \Rightarrow q = p = 1.$$

No vienādībām

$$px = a - x, px = qb - qx,$$

izsakot x , iegūstam:

$$x = \frac{a}{1+p} = \frac{qb}{q+p} \Rightarrow \frac{a}{1+p} = \frac{(p-1)b}{2p-1} \Rightarrow p^2b - 2ap + a - b = 0.$$

Kvadrātvienādojuma pozitīvā sakne

$$p = \frac{a + \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{b}.$$

Viegli pārbaudīt, ka $q > 0$ un ka visi reizinātāji ir pozitīvi, jo

$$b - x \geq a - x = a - \frac{a}{1+p} = \frac{ap}{1+p} > 0.$$

Tagad var lietot nevienādību $A \geq G$, kas dod

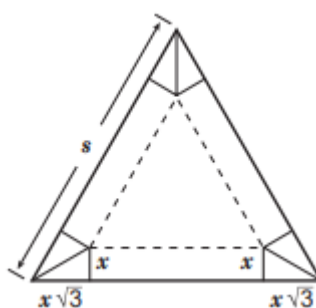
$$\max F(x) = \left(\frac{pa}{1+p} \right)^3.$$

Iepriekš aplūkojam kastes, kuras tiek izgatavotas no taisnstūrveida pamatnes, kurām stūrus izgriež $\alpha = 90^\circ$ lielumā. Tagad aplūkosim optimizācijas uzdevumus, kad kaste tiek izgatavota no citu formu pamatnes, kā arī atteiksimies no ierobežojuma, ka izgriezti stūri ir 90 grādu lieli.

1.7 Kaste, kuras pamats ir vienādmalu trīsstūris

- Mums ir dots vienādmalu trīsstūris, no kura ir nepieciešams izveidot kasti. Kādā veidā to darīsim?
- Kad izveidojam šo kasti, kuras pamatā ir trīsstūris, kāda ir attiecība starp sākotnējā vienādmalu trīsstūra malu un augstumu x , no kastes sānu malām, kas izveidota (a) daļā un kura dod šai kastei vislielāko tilpumu?

Lai izpētītu šo gadījumu, kastes stūros netiks griezts kvadrātveida forma ar malas garumu x . Mums nepieciešams ievilkt leņķu bisektrises no trīsstūra leņķiem, kā arī atzīmēsim vienādus attālumus no tiem. Savienosim šos trīs bisektrišu galapunktus.



9. zīm.

Mēs velkam sešus perpendikulus no šiem punktiem, kā attēlots 9. Zīmējumā [2]. Šo perpendikulu garumu apzīmēsim ar x . No tā mēs iegūstam, ka x ir izveidotās kastes augstums. Tādējādi no šī vienādmalu trīsstūra mēs izgriezām kongruentus četrstūrus katrā stūrī, kā attēlots zīmējumā. Katrai stūrī izgrieztajai figūrai ir divi pretēji 90° leņķi un 60° leņķi no dotā oriģinālā trīsstūra.

Lai atrisinātu *b*), mums ir nepieciešams uzrakstīt tilpuma formulu, izmantojot dotās figūras augstumu x , malas garumu s . Vienādmalu trīsstūra laukums tiek uzdots formā

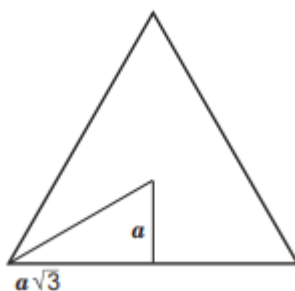
$$A = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}.$$

Tad $V(x) = x(s - 2x\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, kur $x \in \left[0, \frac{s\sqrt{3}}{6}\right]$.

Lai uzdevumu atrisinātu, funkciju atvasināsim un pielīdzināsim 0, aprēķināsim x vērtību. Iegūsim $x = s \frac{\sqrt{3}}{18}$ vai $x = s \frac{\sqrt{3}}{6}$. Tā kā rezultāts, kad $x = s \frac{\sqrt{3}}{6}$ dod minimālo tilpumu, mums jāizmanto $x = s \frac{\sqrt{3}}{18}$.

Līdz šim mēs esam apskatījuši divus regulārus daudzstūrus (kvadrāts un taisnstūris) un vienādmalu trīsstūri. Kvadrāta rezultāts bija $x = \frac{s}{6}$. Pamatuzdevums bija atrast formulu, kas ātri un vienkārši sniedz atbildi, kāds ir figūras maksimālais tilpums, lai kāds daudzstūris kastes pamatam tiktu izmantots. Līdz ar to šīs darbības kļūst “garlaicīgas un paredzamas”, tāpēc jāmeklē risinājums, jāveido sarežģītāka veida un būtības figūras.

Tālāk apskatīsim kasti, kuras pamats ir sešstūris. Izmantosim formulu $A = \frac{1}{2}ap$ figūras laukuma aprēķināšanai. Šo aprēķinu laikā tika atrasts labākais veids, kā apskatīt iegūtos rezultātus. Rezultāta iegūšanai salīdzina maksimālā tilpuma kastes augstumu ar regulāra daudzstūra apotēmu. Tā kā apotēma ir puse no kvadrāta, kaste ar vislielāko tilpumu tiks izveidota brīdī, kad izgrieztā stūra augstums ir $\frac{1}{3}$ no apotēmas jeb $x = \frac{s}{6} = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$, kur a ir laukuma apotēma un s ir puse (sk. 10. zīm., [2]).



10. zīm.

Tālāk apskatīsim vienādmalu trīsstūri kā attēlots zīmējumā. Redzam, ka $s = 2a\sqrt{3}$, tātad $x = \frac{s\sqrt{3}}{18} = \frac{2a\sqrt{3}\sqrt{3}}{18} = \frac{a}{3}$.

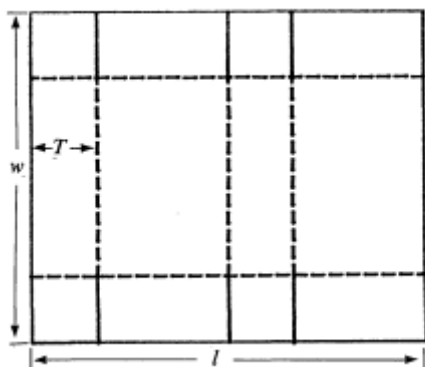
Gan kaste, kuras pamats ir kvadrāts, gan kaste, kuras pamats ir vienādmalu trīsstūris, tā savu maksimālo tilpumu sasniedz pie vērtības $x = \frac{a}{3}$, kur a ir laukuma apotēma.

1.8 Dažādi optimālo kastu piemēri, kuri ir sastopami ikdienā

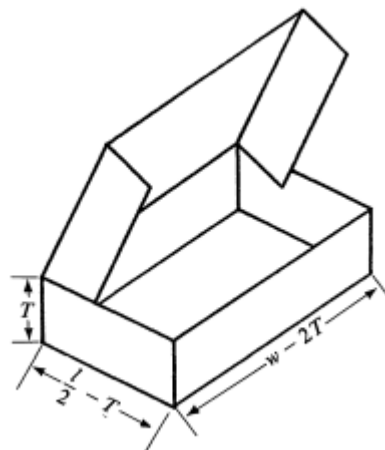
1.8.1 “Picas” kaste

Izvēloties pareiza lieluma l un w , var aprēķināt optimālo tilpumu “picas” kastei.

Lai varētu aprēķināt optimālo tilpumu “picas” kastei, tiek izmantotas jau iepriekš iegūtās formulas kastei, kuras pamatni veido taisnstūris (sk. 11., 12. zīm., [12]).



11. zīm.



12. zīm.

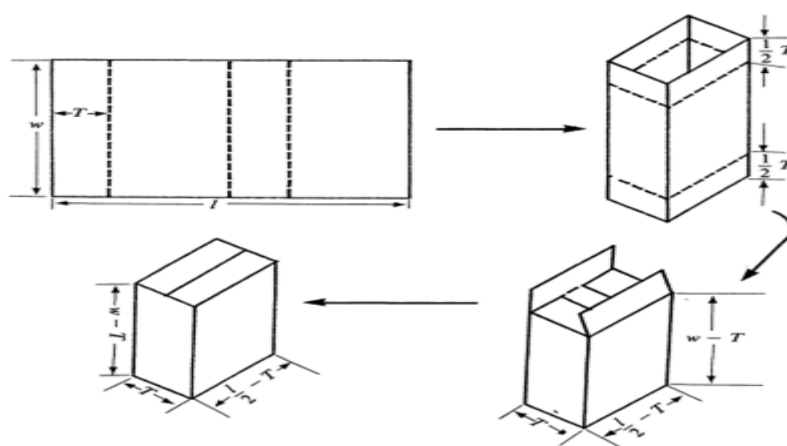
No dotajiem attēliem, tika iegūts

$$V(T) = T \left(\frac{l}{2} - T \right) (w - 2T) = \left(lw \frac{T}{2} \right) - (l + w)T^2 + 2T^3$$

$$V'(T) = 0, \text{ kad } T = \frac{(l + w \pm \sqrt{l^2 - lw + w^2})}{6}.$$

1.8.2 “Popkorna” kaste

Apskatīsim risinājumu, kā tiek veidotas optimālas “popkorna” kastes.



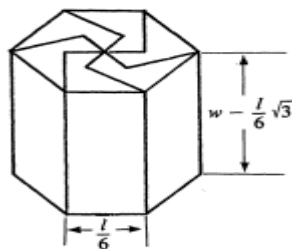
25

13. zīm.

Lai problēmu apskatītu “Popkorna” kastei, atsaucoties uz 13. zīmējumu [12], mums ir

$$V(T) = T \left(\frac{l}{2} - T \right) (w - T) = \left(\frac{lwT}{2} \right) - \left(\frac{l}{2} + w \right) T^2 + T^3.$$

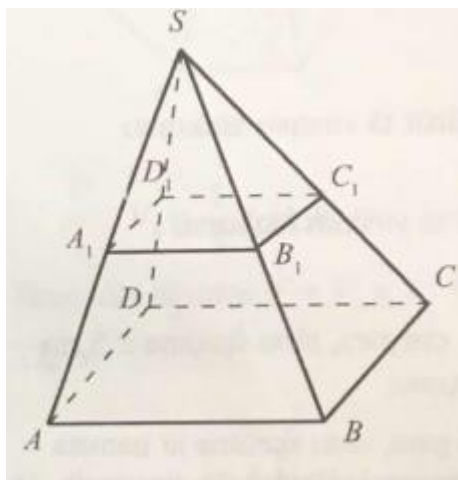
$$V'(T) = 0, \text{ ja } T = \frac{(l+2w \pm \sqrt{l^2 - 2lw + 4w^2})}{6}.$$



14. zīm.

1.9 Nošķelta piramīda

Aplūkosim nošķeltas piramīdas tilpuma aprēķināšanu, kādu piedāvā 12. klasēm.



15. zīm.

Teorēma: Nošķeltas piramīdas (sk. 15. zīm.) tilpums V ir aprēķināms pēc formulas $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$, kur H – ir nošķeltas piramīdas augstums, S_1 un S_2 – nošķeltas piramīdas pamatu laukumi.

Pierādījums.

Nošķelto piramīdu $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ papildina līdz piramīdai $SABCD$.

Pieņem, ka piramīdas $SABCD$ augstums ir H_1 , piramīdas $SA_1 B_1 C_1 D_1$ augstums ir H_2 .

Īpašība : Ja piramīdu šķel pamatam paralēla plakne, tad tā :

1. Sadala sānu šķautnes un piramīdas augstumu proporcionālās daļās;
2. Šķēlumā rodas daudzstūris, kas līdzīgs pamata daudzstūrim;
3. Šķēlums un pamata laukumi attiecas kā attālums kvadrāts no piramīdas virsotnes.

No īpašības par piramīdas paralēlo šķēlumu īpašībām :

$$\frac{H_1^2}{H_2^2} = \frac{S_1}{S_2} \text{ jeb } \frac{H_1}{H_2} = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}}$$

no kurienes $H_2 \sqrt{S_1} = (H + H_2) \sqrt{S_2}$, jo $H_1 = H + H_2$.

Izsaka augstumu H_2 :

$$H_2 = \frac{H \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Nošķeltās piramīdas tilpums ir vienāds ar abu piramīdu tilpumu starpību:

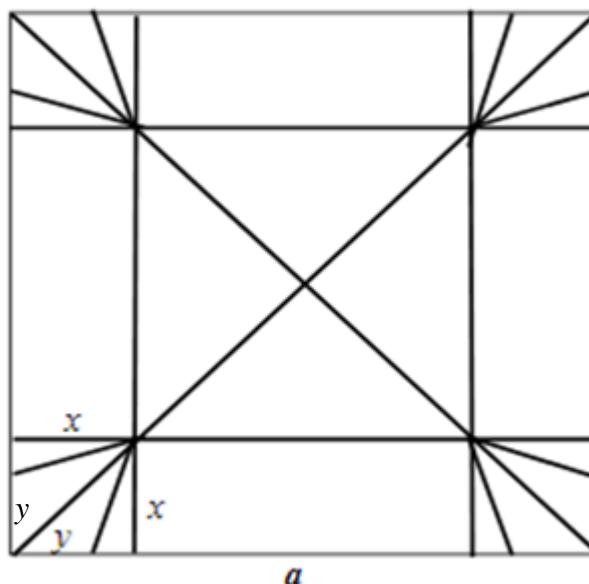
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_1 (H + H_2) - \frac{1}{3} S_2 H_2 = \frac{1}{3} (S_1 H + H_2 (S_1 - S_2)) = \\ &= \frac{1}{3} \left(S_1 H + \frac{H \sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}} (S_1 - S_2) \right) = \\ &= \frac{1}{3} (S_1 H + H \sqrt{S_2} (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})) = \frac{1}{3} H (S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) \end{aligned}$$

1.9.1 Uzdevums par nošķeltas piramīdas maksimālo tilpumu

Nošķeltai piramīdai tilpumu var aprēķināt pēc formulas,

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$$

kur h ir piramīdas augstums, bet S_1 un S_2 tās pamatu laukumi.



16. zīm.

No kvadrāta ar malas malas garumu a (sk. 16. zīm.) izgriežam četrus vienādus deltoīdus un attiecīgi nolokot papīra vai kāda cita materiāla loksni gribam iegūt nošķeltu piramīdu ar vislielāko tilpumu. Kā nezināmos lielumus izvēlēsimies šādus garumus: x – attālums no kvadrāta malas līdz locījuma līnijai, y – deltoīda malas garums.

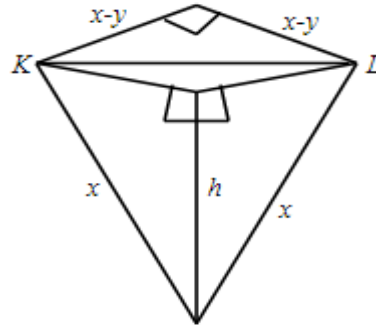
Aprēķināsim S_1, S_2 un h .

$$S_1 = (a - 2x)^2 \quad (2)$$

$$S_2 = (a - 2y)^2 \quad (3)$$

Esam ieguvuši, ka

$$V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{h}{3}[(a - 2x)^2 + (a - 2y)^2 + (a - 2x)(a - 2y)].$$



17. zīm.

Izsakām hipotenūzas KL garumu (sk. 17. zīm.):

$$h^2 = x^2 - (x - y)^2 = x^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 2xy - y^2$$

$$h^2 = 2x^2 - 4xy + 2y^2 \quad (4)$$

Meklēsim maksimumu tilpuma kvadrātam:

$$V^2 = \left(\frac{h}{3}\right)^2 [(a - 2x)^2 + (a - 2y)^2 + (a - 2x)(a - 2y)]^2$$

$$V^2 = \frac{2xy - y^2}{9} [(a - 2x)^2 + (a - 2y)^2 + (a - 2x)(a - 2y)]^2.$$

Apzīmēsim

$$P(x, y) = (a - 2x)^2 + (a - 2y)^2 + (a - 2x)(a - 2y). \quad (5)$$

Tad

$$9V^2 = (2xy - y^2)P^2$$

$$F(x, y) := (2xy - y^2)P^2(x, y).$$

Lai noteiktu tilpuma maksimumu, aprēķināsim funkcijas F parciālos atvasinājumus un tos pielīdzināsim nullei, citiem vārdiem, vispirms meklēsim funkcijas F stacionāros punktus.

$$F_x = 2yP^2 + (2xy - y^2)2P_xP = 0$$

$$F_y = (2x - 2y)P^2 + (2xy - y^2)2PP_y = 0$$

Tā kā P nav nulle, tad no šīm vienādībām iegūstam:

$$yP + (2xy - y^2)P_x = 0 \quad (6)$$

$$(x - y)P + (2xy - y^2)P_y = 0. \quad (7)$$

Atradīsim polinoma P parciālos atvasinājumus :

$$P_x = -4(a - 2x) - 2(a - 2y) \quad (8)$$

$$P_y = -4(a - 2y) - 2(a - 2x). \quad (9)$$

Saskaitīsim vienādības (6) un (7) :

$$xP + (2xy - y^2)(P_x + P_y) = 0. \quad (10)$$

Pareizinām vienādību (6) ar P_y :

$$yPP_y + (2xy - y^2)P_xP_y = 0 \quad (11)$$

Pareizinām vienādību (7) ar P_x :

$$(x - y)PP_x + (2xy - y^2)P_yP_x = 0 \quad (12)$$

No izteiksmes (11) atņemam izteiksmi (12) :

$$\begin{aligned} yPP_y - (x - y)PP_x &= 0 \\ yP_y - (x - y)P_x &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Apzīmēsim : $a - 2x = u$ un $a - 2y = v$.

$$\text{Izsakām } x = \frac{a-u}{2}.$$

$$\text{Izsakām } y = \frac{a-v}{2}.$$

Pārveidojam polinomu P , izmantojot izvēlētos apzīmējumus :

$$P = u^2 + v^2 + uv. \quad (14)$$

Lai iegūtu izteiksmi (15), izteiksmē (13) ievietojam pieņemtus pārveidojumus - x, y, P_x un P_y :

$$\left(\frac{a-v}{2}\right)(-4v-2u) - \left(\frac{a-u}{2} - \frac{a-v}{2}\right)(-4u-2v) = 0. \quad (15)$$

Vienkāršojot izteiksmi (15), iegūstam :

$$-4av - 2ua + 6v^2 - 4u^2 + 4uv = 0. \quad (16)$$

Pārveidosim izteiksmi (6), to izdalot ar y :

$$P + (2x - y)P_x = 0 \quad (17)$$

Izteiksmē (17) ievietojam pieņemtus apzīmējumus:

$$(u^2 + v^2 + uv) + \left(2\left(\frac{a-u}{2}\right) - \left(\frac{a-v}{2}\right)\right)(-4u-2v) = 0. \quad (18)$$

Vienkāršosim izteiksmi (18) :

$$4(u^2 + v^2 + uv) + (2a - 2u - a + v)(-4u - 2v) = 0$$
$$5u^2 + 3uv - 3av - 2au = 0 \quad (19)$$

Izteiksim v no izteiksmes (19):

$$v = \frac{2au - 5u^2}{3(u - a)}.$$

Šādu v , ievietojot izteiksmē (16), var iegūt vienargumenta funkciju, kuru var risināt tuvināti ar kādu no skaitliskām metodēm.

2. TAISNSTŪRA 2×3 BLOĶĒŠANAS UZDEVUMI

Šogad Latvijas 45. Atklātajā matemātikas olimpiādē skolēniem tika piedāvāti četri uzdevumi par taisnstūra 2×3 bloķēšanu.[13]

Vai kvadrātā ar izmēriem 8×8 rūtiņas var iekrāsot 12 rūtiņas tā, lai katrā taisnstūrī ar izmēriem 2×3 rūtiņas (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa? (5. kl.).

Kvadrātā ar izmēriem 7×7 rūtiņas sākotnēji visas rūtiņas ir baltas. Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso melnas, lai no dotā kvadrāta nevarētu izgriezt 2×3 rūtiņu taisnstūri, kam visas rūtiņas ir baltas? (6. kl.)

a) Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso 6×6 rūtiņu kvadrātā, lai katrā šī kvadrāta 2×3 rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa?

b) Vai noteikti tad, kad ir iekrāsots mazākais rūtiņu skaits, visas četras stūra rūtiņas paliks neiekrāsotas? (8. kl.)

Kāds ir mazākais rūtiņu skaits, kas jāiekrāso taisnstūrī ar izmēriem 5×8 rūtiņas, lai katrā šī taisnstūra 2×3 rūtiņu taisnstūrī (tas var būt arī pagriezts vertikāli) būtu vismaz viena iekrāsota rūtiņa? (9. kl.)

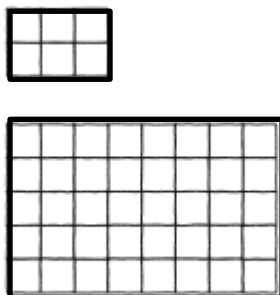
Klase, kurai paredzēts attiecīgais uzdevums ir norādīta pēc uzdevuma formulējuma iekavās. 9. klases uzdevumam, kuru skolēni kopumā ir risinājuši slikti, 2.6. punktā ir dota izvērsta analīze.

Apzīmēsim ar $t(a \times b)$ minimālo *mīnu* skaitu taisnstūrī $a \times b$, lai bloķētu taisnstūri 2×3 . Mīna ir īsāks apzīmējums olimpiāžu uzdevumu formulējumos lietotajam vārdiem „iekrāsota rūtiņa”.

2.1 Minimālo mīnu skaits

Dots : taisnstūris 5×8 un bloķējamais taisnstūris 2×3 (sk. 18. zīm.)

Kāds mazākais rūtiņu skaits (darba izpētes gaitā lietosim jēdzienu : mīna) ir jāiekrāso, lai taisnstūris 2×3 vienmēr pārklātu vismaz vienu no iekrāsotajām rūtiņām? [7]



18. zīm.

2.2 Atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

Uzdevums ir ņemts no 2018. gada Latvijas Atklātās matemātikas olimpiādes 9. klasēm. Kopā piedalījās 341(sk. 1. tabula) skolēnu, no kuriem 4 skolēni šo uzdevumu nebija apskatījuši vai arī uzdevuma nosacījumi nebija saprasti. Maksimālais punktu skaits, ko par šo uzdevumu varēja saņemt, ir 10 punkti.

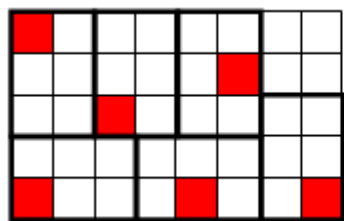
Punkti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Skolēnu skaits	142	16	168	4	1	0	1	1	2	0	2

1. tabula

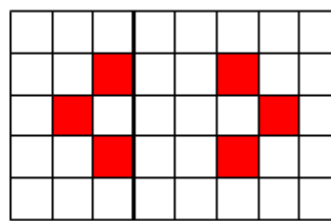
Minimālais mīnu skaits, ko uzrādījuši skolēni, ir ļoti dažāds : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 16, 26. No tā mēs varam secināt, ka liela daļa 9. klašu audzēkņu nelasa uzdevuma nosacījumus tā, lai tos saprastu. Dažas no raksturīgākajām kļūdām ir viegli saprotamas : ja dots taisnstūris 5×8 , kas dod 40 rūtiņas un iezīmējamais taisnstūris 2×3 aizņem no dotās figūras 6 rūtiņas, tad $40:6 = 6\frac{2}{3}$. Interpretācija šim rezultātam bija dažāda – daļa skolēnu noapaļošanu veica uz leju, daļa – uz augšu. Tā kā dotajā taisnstūrī var iezīmēt sešus 2×3 taisnstūrus, tad tā arī tika dota kā gala atbilde – nepieciešamas 6 mīnas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi. Skolēni nepārbauda un arī “neredz”, ka ar 6 mīnām ir par maz, lai noteikumi būtu izpildīti. Daļa skolēnu veic nekorektus matemātiskus aprēķinus, izdara secinājumus, taču zīmējumu neuzzīmē.

142 skolēni par šo uzdevumu saņēma 0 punktus, jo bija norādīts neprecīzs nepieciešamo mīnu skaits (> 7) vai arī mīnu skaits ir atrasts korekti, taču nav nepieciešamā zīmējuma (uzdevums atrisināts matemātiski vai uzzīmēts zīmējums, taču pamatojums nav sniegts).

Daži piemēri no skolēnu risinājumiem (sk. 19., 20. zīm.), kad atzīmētas tikai 6 mīnas:



19. zīm.



20. zīm.

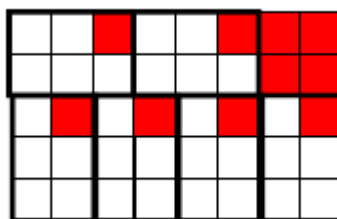
Visvairāk skolēnu saņēma 2 punktus, kas nozīmē, ka bija atrasts minimālais mīnu skaits, kas ir 7, taču nebija pamatots, ka nepietiktu ar mazāk mīnām vai arī pamatojums nebija konceptuāli pareizs. Tika uzzīmēts korekts zīmējums, kur izmantotas 7 mīnas.

Skolēnu spriedumi, ka 8 mīnas ir minimālais skaits:

Vismazākais rūtiņu skaits, kas ir jāiekrāso, ir 8 rūtiņas, jo, ievērojot mazāk rūtiņu, būs iespējams novietot 2×3 rūtiņu taisnstūri vietā, kur tas nesaturēs iekrāsoto rūtiņu. Mazāk nevar būt, jo, mēģinot noņemt kaut vienu rūtiņu, iegūst, ka var iegūt kaut vienu figūru, kur nebūs nevienas iekrāsotas rūtiņas.

Skolēnu spriedumi, ka 10 mīnas ir minimālais skaits:

Ievieto sešus taisnstūrus 2×3 , pāri paliek četras rūtiņas, tāpēc secinājums : “Tātad ir jāiekrāso vismaz 10 rūtiņas ($6 + 4 = 10$)”. Piemēru skatīt 21. zīm. :

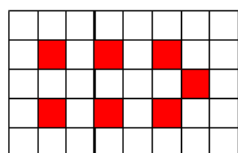


21. zīm.

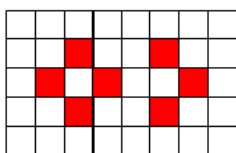
Ja rodas jautājums, kā var būt, ka minimālais mīnu skaits ir 26 : skolēns ir uzzīmējis $5\text{ cm} \times 8\text{ cm}$ lielu taisnstūri, taču aizpilda ar 26 maziem 2×3 taisnstūriem (2×3 rūtiņas).

Kā varam secināt no skolēnu rezultātiem (iegūtajiem punktiem), tikai 6 skolēni uzdevumu ir atrisinājuši pareizi vai uzdevuma risinājums ir gandrīz pabeigts (iespējams, pietrūka līdz galam loģisks pamatojums vai risinājums, lai pierādītu, ka ar 7 mīnām pietiks).

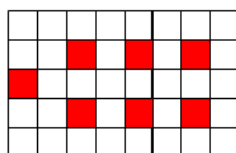
Vairāki skolēnu uzrādītie risinājumi ar 7 mīnām ir parādīti 22. - 32. zīmējumos.



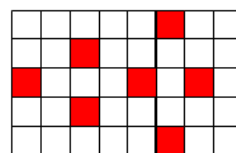
22. zīm.



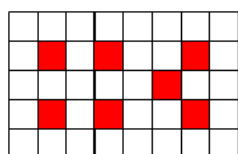
23. zīm.



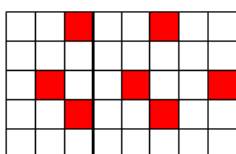
24. zīm.



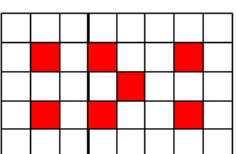
25. zīm.



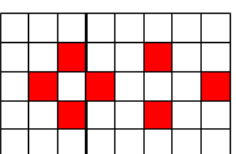
26. zīm.



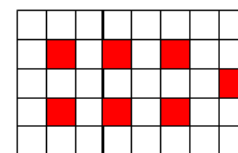
27. zīm.



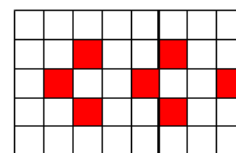
28. zīm.



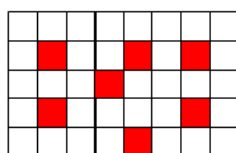
29. zīm.



30. zīm.

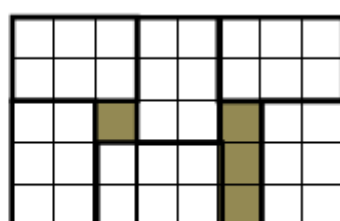
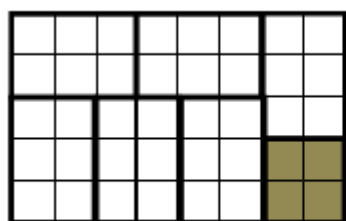


31. zīm.



32. zīm.

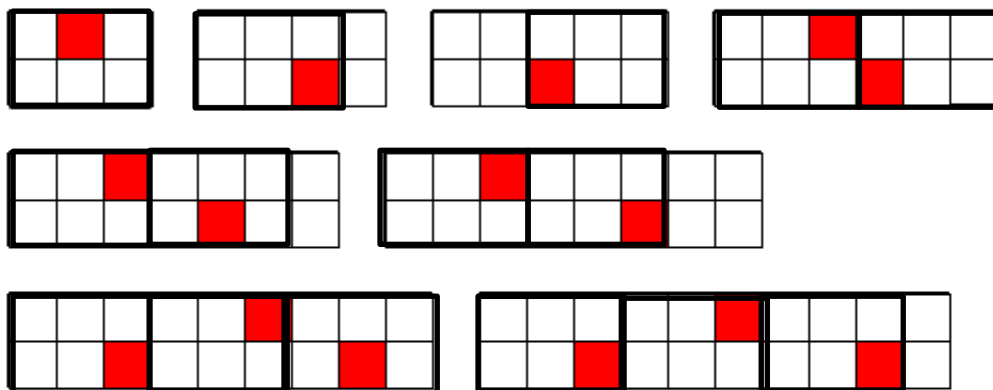
Visīsāko un visskaistāko risinājumu ir uzrādījis Dzintars Klušs no Ilģuciema vidusskolas. Viņa risinājums sastāv tikai no diviem zīmējumiem (33. zīm.), katrā no kuriem izvietoti seši taisnstūri 2×3 un kuru nepārklāto daļu apvienojums iekļauj 2×3 .



33. zīm.

2.3 Taisnstūris $2 \times n$

Meklēsim mazāko mīnu (iekrāsojamo rūtiņu) skaitu, kāds bloķē taisnstūri 2×3 . Katrā taisnstūrī 2×3 iekrāsojam tieši vienu rūtiņu, sk. 34. zīm.



34. zīm.

Uzrakstīsim minimālā mīnu skaita virkni $t(2 \times n)$, ja $n = 1, 2, \dots, 9, 10$, sk. 2. tabulas 3. rindu. Šāda virkne ir pazīstama (citā kontekstā) Virkņu enciklopēdijā „The On-line Encyclopedia of Integer Sequences” [8] ar virknes numuru [A008620](#).

Kolonnų skaits	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksimālais 2×3 skaits	1	1	1	2	2	2	3	3
Minimālais mīnu skaits	1	1	1	2	2	2	3	3

2. tabula

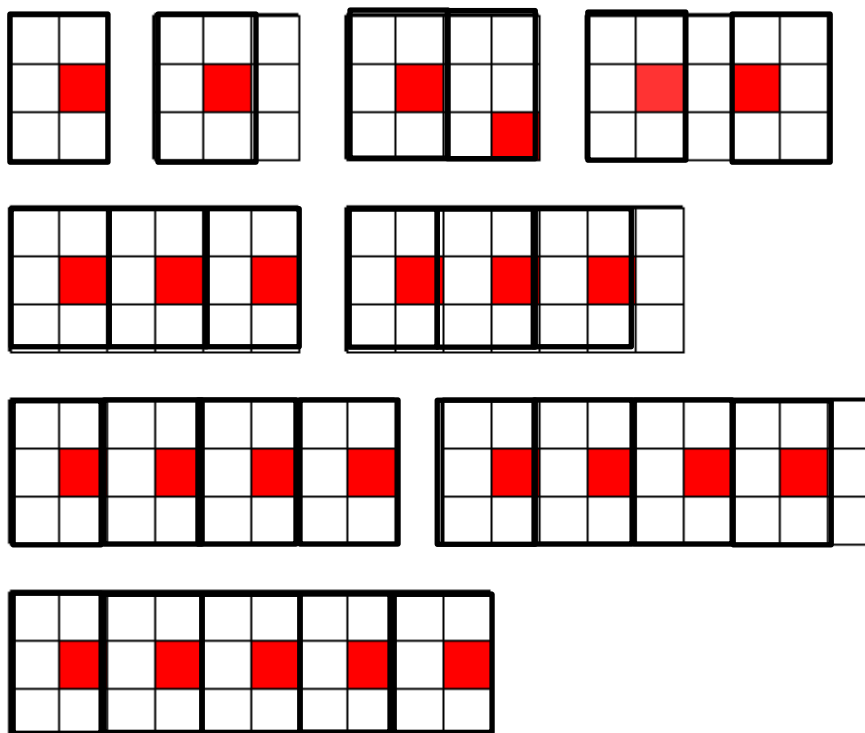
Apskatot izveidoto zīmējumu, iegūstam, ka

$$t(2 \times n) \leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor.$$

Tā kā taisnstūrī $2 \times n$ var ievietot $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ taisnstūrus ar izmēriem 2×3 (zīmējumā parādīti pirmie 10 šādu taisnstūru izvietoējumi), no tā varam secināt, ka minimālais mīnu skaits $t(2 \times n) = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$.

2.4 Taisnstūris $3 \times n$

Meklēsim mazāko mīnu (iekrāsojamo rūtiņu) skaitu, kāds bloķē taisnstūri 2×3 . Katrā taisnstūrī 2×3 iekrāsojam tieši vienu rūtiņu, sk. 35. zīm.



35. zīm.

Uzrakstīsim minimālā mīnu skaita virkni $t(3 \times n)$, ja $n = 1, 2, \dots, 9, 10$, sk. 3. tabulas 3. rindu. Šāda virkne ir pazīstama (citā kontekstā) Virkņu enciklopēdijā „The On-line Encyclopedia of Integer Sequences” [8] ar virknes numuru [A004526](#).

Kolonnu skaits	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksimālais 2×3 skaits	1	1	2	2	3	3	4	4	5
Minimālais mīnu skaits	1	1	2	3	3	3	4	4	5

3. tabula

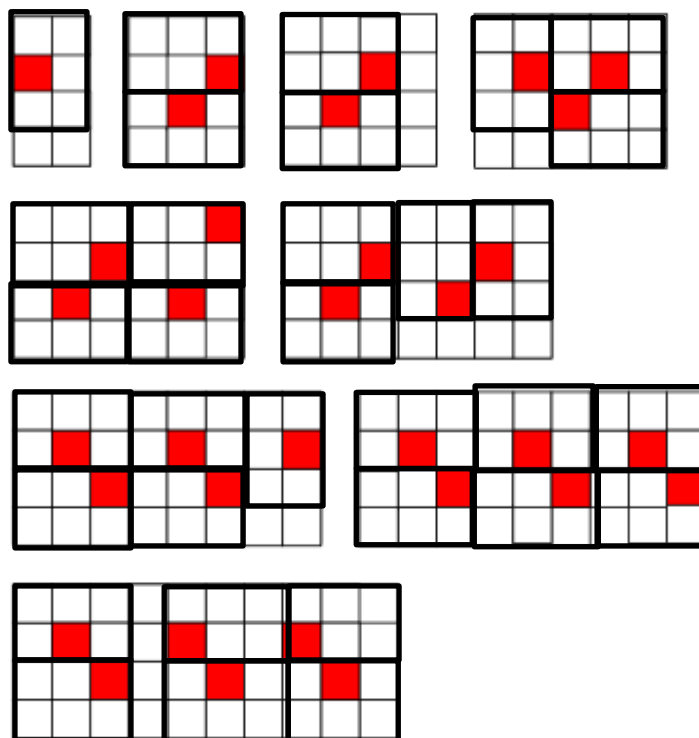
Apskatot zīmējumu, no tā redzam, ka

$$t(3 \times n) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Tā kā taisnstūrī $3 \times n$ var ievietot $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ taisnstūrus ar izmēriem 2×3 (38. zīm. parādīti pirmie 10 šādu taisnstūru izvietojumi), no tā varam secināt, ka minimālais mīnu skaits $t(3 \times n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.5 Taisnstūris $4 \times n$

Meklēsim mazāko mīnu (iekrāsojamo rūtiņu) skaitu, kāds bloķē taisnstūri 2×3 . Katrā taisnstūrī 2×3 iekrāsojam tieši vienu rūtiņu, sk. 36. zīm.



36. zīm.

Uzrakstīsim minimālā mīnu skaita virkni $t(4 \times n)$, ja $n = 1, 2, \dots, 9, 10$, sk. 4. tabulas 3. rindu. Šāda virkne ir pazīstama (citā kontekstā) Virkņu enciklopēdijā „The On-line Encyclopedia of Integer Sequences” [8] ar virknes numuru [A004523](#).

Kolonnu skaits	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksimālais 2×3 skaits	1	2	2	3	4	4	5	6	6
Minimālais mīnu skaits	1	2	2	3	4	4	5	6	6

4. tabula

Apskatot zīmējumu, no tā redzam, ka

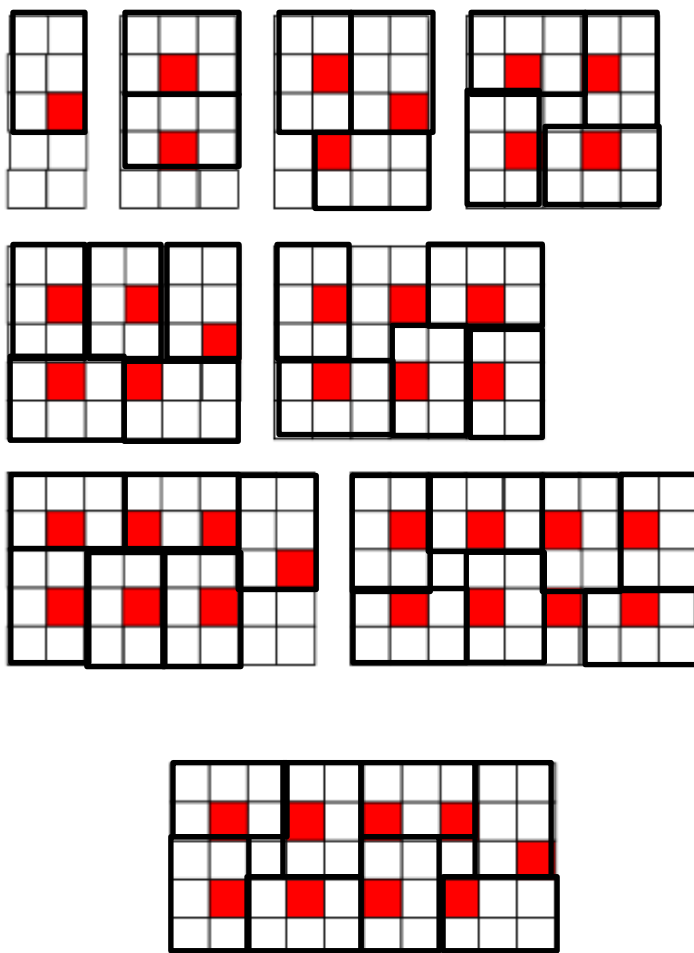
$$t(4 \times n) \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

Tā kā taisnstūrī $4 \times n$ var izvietot $\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ taisnstūrus 2×3 (39. zīm. parādīti pirmie 10 šādu taisnstūru izvietojumi), tad ir spēkā vienādība

$$t(4 \times n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$

2.6 Taisnstūris $5 \times n$

Meklēsim mazāko mīnu (iekrāsojamo rūtiņu) skaitu, kāds bloķē taisnstūri 2×3 . Katrā taisnstūrī 2×3 iekrāsojam tieši vienu rūtiņu, sk. 37. zīm.



37. zīm.

Uzrakstīsim minimālā mīnu skaita virkni $t(5 \times n)$, ja $n = 1, 2, \dots, 9, 10$, sk. 5. tabulas 3. rindu. Šāda virkne ir pazīstama (citā kontekstā) Virkņu enciklopēdijā „The On-line Encyclopedia of Integer Sequences” [8] ar virknes numuru [A000027](#).

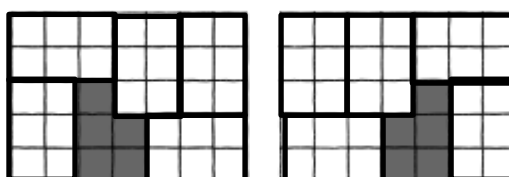
Kolonnu skaits	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksimālais 2×3 skaits	1	2	3	4	5	5	6	7	8
Minimālais mīnu skaits	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5. tabula

Taisnstūrim $5 \times n$, kur $n = 2, 3, 4, 5, 6$ minimālais mīnu skaits sakrīt ar maksimālo 2×3 skaitu. Nākamajam taisnstūrim 5×7 parādās jauns efekts – minimālais mīnu skaits nesakrīt ar maksimālo 2×3 taisnstūru skaitu.

Varam izvirzīt hipotēzi, ka $t(5 \times n) = n - 1$. Šis apgalvojums izpildās pie nosacījuma, ja $n = 2, 3, 4, 5, 6$ (to varam redzēt 40. zīm., apskatot pirmos 5 taisnstūrus).

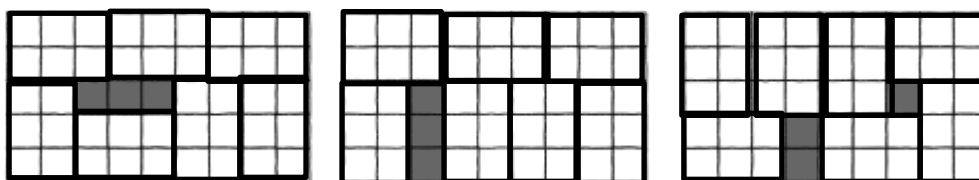
Lai pierādītu gadījumu 5×7 , izmantosim metodi, kādu bija izmantojis skolnieks kā racionālu veidu, lai pierādītu nepieciešamo minimālo mīnu skaitu (sk. 39. zīm.):



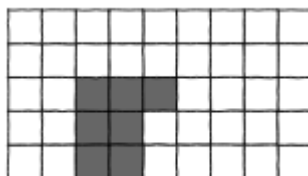
39. zīm.

Aplūkojot zīmējumu, varam secināt, ka, ja taisnstūrī 5×7 bloķēšanas taisnstūri 2×3 tiks izvietoti citādi, pelēkajā laukumā izveidosies jauns mazais taisnstūris, kur ir nepieciešams ievietot mīnu.

Lai pierādītu, ka taisnstūra 5×9 gadījumā ir nepieciešamas 8 mīnas, aplūkosim pierādījumu no pretējā. Pieņemsim, ka pietiek ar 7 mīnām, tad ietonētajās vietās (sk. 40. zīm.) mīnu nav, bet apvienojot šos trīs zīmējumus, iegūstam šādu nepārklātu taisnstūra daļu (sk. 40 zīm.), kurā var ievietot 2×3 taisnstūri, kas pierāda, ka ar 7 mīnām nepietiek. Pieņēmums ir nepareizs. Vajag vismaz 8 mīnas, lai varētu nobloķēt 2×3 taisnstūrus (sk. 41. zīm.).

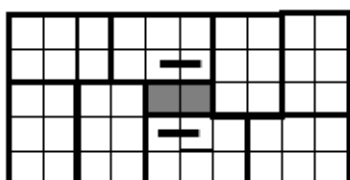


40. zīm.

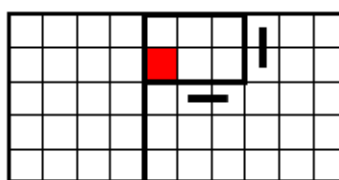


41. zīm.

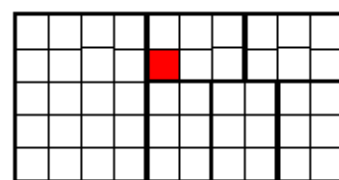
Apskatīsim pierādījumu gadījumā, kad ir dots taisnstūris 5×10 . Pieņem, ka $t(10 \times n) = 8$. Tad divās ietonētajās rūtiņās (42. zīm.) mīnu nav. Tas nozīmē, ka vismaz vienā no 42. zīm. iesvītrotajām rūtiņām ir mīna. Simetrijas dēļ var uzskatīt, ka tā ir 2. rindas piektā rūtiņa, sk. 40. zīm. Ja taisnstūrī 2×3 , sk. 43. zīm., vairāk mīnu nav, tad vismaz viena mīna ir kādā no rūtiņām, ko savieno vertikālā svītra 8. kolonnā un vismaz viena mīna ir kādā no rūtiņām, ko savieno horizontālā svītra 3. rindā. Tas nozīmē, ka taisnstūrī 5×6 būs vismaz 6 mīnas. Taisnstūrī 5×6 būs vismaz 6 mīnas arī tad, ja taisnstūrī 2×3 ir divas mīnas, sk. 44. zīm. Tā kā taisnstūrī 5×4 ir vismaz 3 mīnas, tad kopā ir nepieciešamas vismaz 9 mīnas. Iegūta pretruna ar pieņēmumu, ka $t(10 \times n) = 8$. Tātad $t(10 \times n) = 9$.



42. zīm.



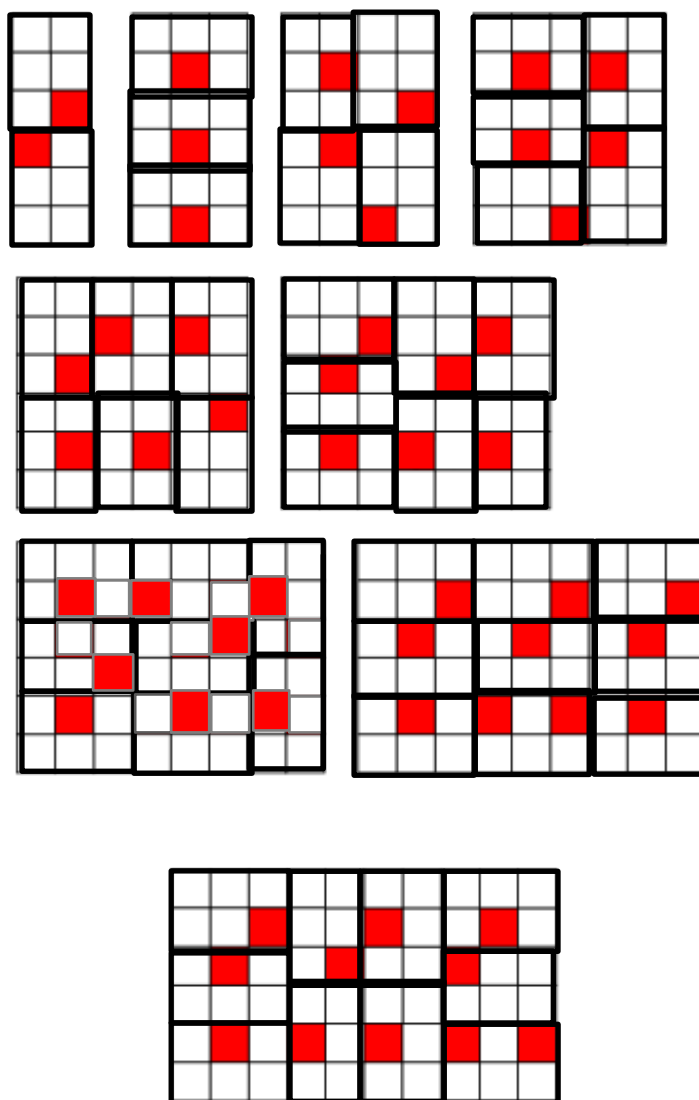
43. zīm.



44. zīm.

2.7 Taisnstūris $6 \times n$

Meklēsim mazāko mīnu (iekrāsojamo rūtiņu) skaitu, kāds bloķē taisnstūri 2×3 . Katrā taisnstūrī 2×3 iekrāsojam tieši vienu rūtiņu, sk. 45. zīm.



45. zīm.

Uzrakstīsim minimālā mīnu skaita virkni $t(6 \times n)$, ja $n = 1, 2, \dots, 9, 10$, sk. 6. tabulas 3. rindu. Šāda virkne ir pazīstama (citā kontekstā) Virkņu enciklopēdijā „The On-line Encyclopedia of Integer Sequences” [8] ar virknes numuru [A000027](#)

Kolonnu skaits	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maksimālais 2×3 skaits	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Minimālais mīnu skaits	2	3	4	5	6	7	8	10	11

6. tabula

Taisnstūrim $6 \times n$, kur $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ minimālais mīnu skaits sakrīt ar maksimālo 2×3 skaitu. Nākamajam taisnstūrim 6×9 parādās jauns efekts – minimālais mīnu skaits nesakrīt ar maksimālo 2×3 taisnstūru skaitu. Maksimālo 2×3 taisnstūru skaits ir mazāks, nekā nepieciešamais minimālo mīnu skaits.

Taisnstūra $6 \times n$ gadījumā būtu jāmeklē jauns minimālā mīnu skaita pierādījuma veids, jo tagad taisnstūri 2×3 pārklāj lielo taisnstūri bez tukšumiem un neder skolēna uzrādītais risinājums taisnstūrim 5×8 .

NOBEIGUMS

Pētot un risinot uzdevumus par optimālo kasti un optimālo paralēlskaldni, tika iegūtas izteiksmes, ar kuru palīdzību var aprēķināt maksimālo tilpumu kastei, kā arī tika apskatīti daži risinājumi, ko pildot individuālos praktiskos darbus ir piedāvājuši studenti.

Maksimālo kastu tilpumus klasiskajos uzdevumos iegūst tad, ja $x = \frac{a}{6}$, kur a – kastes malas garums, x – nogrieztās malas (standarta gadījumā – kvadrāta) malas garums.

Risinot uzdevumus par taisnstūra 2×3 bloķēšanu, tika atrastas minimālā skaita virknes taisnstūriem $m \times n$, ja $m = 2, 3, 4$.

Taisnstūru bloķēšanas uzdevumi ir piemēroti skolēnu matemātikas olimpiādēs. Šogad Latvijas 45. atklātajā matemātikas olimpiādē tika piedāvāti četri šāda tipa uzdevumi par taisnstūra 2×3 bloķēšanu. Kopumā 9. klases skolēni uzdevumu par minimālo taisnstūrī 5×8 iekrāsojamo rūtiņu skaitu ir risinājuši slikti, apmēram 31% saņēmuši vērtējumu – 0 punkti.

LITERATŪRAS SARAKSTS

- [1] Cibulis A., Ekstrēmu uzdevumi, 1. daļa, 2. izd., Rīga, 2007, Latvijas Universitāte, 106 lpp.
- [2] Cibulis A., Ekstrēmu uzdevumi, 2. daļa, Rīga, Latvijas Universitāte, 2006, 100 lp.
- [3] Niven I. *Maxima and Minima Without Calculus*, Dolciani Mathematical Expositions, Math. Association of America, No. 6, 1981.
- [4] Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах*, Москва, Наука, 1986, 190 с.
- [5] Todhunter I., *Differential Calculus*, Fifth edition, Macmillan and Co., 1871, 420 pp.)
- [6] Hern T., Meel D., Thinking Outside the Box -- or Maybe Just About the Box, pieejams <https://www.maa.org/book/export/html/117454>
- [7] Frederickson G. N., A New Wrinkle on an Old Folding Problem, The College Mathematical Journal, 2003, Vol. 4, No 3, pp. 258-263.
- [8] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Pieejams: <https://oeis.org>
- [9] Golomb S. W., *Polyominoes : puzzles, patterns, problems, and packings*, 1996
- [10] Zerovnik J., Deriving formulas for the pentamino exclusion problem, Preprint Series, Vol. 42, 2004. 17 pp. Pieejams: <http://preprinti.imfm.si/PDF/00941.pdf>
- [11] W. Dodge & S. Viktora, Thinking out of the Box ... Problem, 2002, Texas
- [12] Dundas K., To Build a Better Box, The College Mathematics Journal, Vol. 15, No. 1. 1984, pp. 30-36. Pieejams: <https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/mathdl/CMJ/Dundas30-36.pdf>
- [13] <http://nms.lu.lv/olimpiades/atklata/m-g/>
- [14] Ozols O., Ievads augstākajā matemātikā, Rīga, Latvijas valsts izdevniecība, 1947, 326 lpp.