

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ ПОЛИМЕРОВ

САУСИНЬ Велта Яновна

ДЕФОРМАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ НЕКОТОРЫХ
ВИДАХ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Д и с с е р т а ц и я
на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель:
чл.-корр. АН СССР, акад. АН Латв. ССР,
докт. техн. наук, профессор
МАЛМЕЙСТЕР А. К.

Рига 1974

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	стр.
В В Е Д Е Н И Е	4
Г Л А В А I КРАТКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ФЕНОМЕНОЛО- ГИЧЕСКИХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ .	
§ I. Основные направления в теории пластич- ности	8
§ 2. Теория деформации	9
§ 3. Теория течения	12
§ 4. Статистические теории пластичности....	16
Г Л А В А II СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТЕНЗОРОМ ДЕФОРМАЦИЙ И ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ЛОКАЛЬ- НОСТИ ДЕФОРМАЦИИ.	
§ I. Основные положения и зависимости	26
§ 2. Соотношения линейной упругости	28
§ 3. Определение тензора деформаций при сложном нагружении	31
§ 4. Критерии догрузки	36
Г Л А В А III ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРО- ВАНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ.	
§ I. Основные положения и зависимости в пя- тимерном пространстве	39
§ 2. Совместное действие растяжения и сжатия	43

§ 3. Последовательное двухосное растяже- ние	56
§ 4. Последовательно-лучеобразные пути нагружения	63

Г Л А В А IV ХАРАКТЕРНЫЕ УГЛЫ И ДЛИНА СЛЕДА ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ.

§ 1. Основные положения и зависимости.....	71
§ 2. Влияние истории нагружения на харак- терные углы и длину следа запаздыва- ния	73
А Совместное действие растяжения и сжатия	75
Б Последовательное двухосное растяже- ние	89
В Растяжение с последующей разгрузкой и поперечным растяжением (сжатием)....	96

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ	101
----------------------------------	------------

Л И Т Е Р А Т У Р А	104
----------------------------------	------------

В В Е Д Е Н И Е

Историческими решениями XXIV съезда КПСС предусмотрено создание и широкое внедрение в народное хозяйство новых конструкционных материалов. К таким материалам можно отнести, в частности, композитные материалы на основе полимерных связующих, обладающих разнообразными упруго-вязко-пластическими свойствами. При этом, очевидно, в первую очередь представляет интерес поведение конструкционного материала в различных эксплуатационных условиях, в частности, при сложных видах нагружения.

Поведение упруго-пластических материалов в напряженном состоянии изучается теорией пластичности, в которой к настоящему времени определялись два различных подхода: феноменологический (математический) и физический. Наибольшие успехи в теории пластичности на современном этапе ее развития связаны с феноменологическим подходом, в котором в зависимости от принятой связи между напряжениями и деформациями, можно выделить следующие три направления: 1) деформативные теории; 2) теории течения (инкрементальные); 3) статистические теории пластичности.

К статистическим теориям пластичности следует отнести теорию локальности деформаций, которая хорошо описывает упруго-пластические свойства материалов при сложном нагружении.

В 1954 году в теории пластичности А.А.Ильиным / 14 / было введено понятие о постулате изотропии и о следе запаздывания.

Постулат изотропии гласит: образ процесса деформирования инвариантен относительно вращения и отражения в пятимерном пространстве деформаций.

Свойство запаздывания состоит в следующем: отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформации зависит не от всей траектории деформации, а только от ее последнего участка h , называемого следом. Вывод о том, что направление вектора напряжений в процессе деформирования после излома траектории деформаций асимптотически стремится к касательной этой траектории, впервые был сделан в 1932 г. в опытах К. Коэнмзера и В. Прагера / 60 / для случая, когда векторы напряжения и деформации являются двумерными. Однако авторы не обратили внимания на явление запаздывания как на некоторое общее свойство пластических материалов. А.А. Ильинин / 14 / отметил, что свойство запаздывания характерно для всех пластических материалов, и что длина следа запаздывания является существенной характеристикой материала.

Справедливость закона запаздывания для материалов подтверждена в исследованиях В.С. Ленского / 34 - 37 /, Л.С. Андреева / 1 /, И.М. Коровина / 28 /, Р.А. Васина / 3 / и др. Экспериментальные результаты, полученные С.А. Елсуфьевым / 6 / и О.А. Шиммаревым / 59 /, показывают, что длина следа запаздывания в общем случае зависит от траектории деформирования.

Целый класс полимерных материалов в отличие от металлов вообще не имеет выраженного предела упругости, и нелинейные или остаточные (пластические) деформации, наряду с упругими, проявляются с самого начала нагружения. Связь между тензорами деформаций ϵ_{ij} и напряжений σ_{kl} для таких материалов мо-

жет быть аппроксимирована соотношением:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{\text{э}} + \varepsilon_{ij}^{\text{пл}} = a_{ijkl} b_{kl} + \\ &+ a_{ijklmn \dots op} b_{kl} b_{mn} \dots b_{op} \end{aligned} \quad (I)$$

где $a_{ijklmn \dots op}$ — тензор податливости.

Целью диссертации является проверка справедливости постулата изотропии и гипотезы следа запаздывания для нелинейных полимерных материалов типа (I) при сложном нагружении с точки зрения теории локальности деформаций. Путей сложного нагружения бесконечно много, и практически исследовать все их виды — задача нереальная, поэтому в настоящей работе рассматривались лишь наиболее характерные часто встречающиеся в практике (в частности, представляющие интерес в задачах устойчивости) виды сложного нагружения.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

В первой главе дается обзор современных феноменологических теорий пластичности, сопоставляются разные законы связи между тензором напряжений и тензором деформаций.

Во второй главе устанавливается связь между тензором напряжений и тензором деформаций при помощи теории локальности деформаций в случае, когда на локальной площадке координатные оси в вспомогательной системе координат не совпадают с направлением результирующего касательного напряжения.

В третьей главе рассматриваются частные виды сложного нагружения: совместное действие растяжения и сжатия, последовательное двухосное растяжение, растяжение с последующей разгрузкой и поперечным растяжением (сжатием) при степенях

нелинейности $n = 3$ и $n = 5$.

В четвертой главе установлена связь между вектором напряжения, вектором деформации и единичными векторами касательных к траекториям нагружения и деформации для частных видов сложного нагружения и при разных углах излома траектории нагружения в зависимости от параметра нагружения. Подробнее рассмотрено отклонение вектора напряжения от касательной к траектории деформации, а также длина следа запаздывания.

Приведенные в работе расчеты были осуществлены на электронно-вычислительной машине БЭСМ по программам, составленным автором на языке Алгол-60.

Г Л А В А I

КРАТКИЙ ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ.

§ I. Основные направления в теории пластичности.

Твердые тела являются упругими только при малых нагрузках. При воздействии более значительных сил тела испытывают неупругие, пластические деформации, величина которых зависит от свойств рассматриваемых материалов и уровня внешних усилий. Связь между напряжениями и деформациями в пластической среде описывает теория пластичности. Она является частью механики твердых деформируемых тел.

В теории пластичности основное место занимает вопрос установления законов пластического деформирования при сложном напряженном состоянии в условиях сложного нагружения.

Существующие в настоящее время теории пластичности можно подразделить на две основные группы: физические и математические теории.

Физические теории пластичности на основе экспериментальных данных о микросвойствах материала (отдельных зерен монокристаллов) описывают макроповедение данного материала. Трудность описания состоит в следующем. Во первых, свойства отдельно взятого монокристалла отличаются от свойств того же монокристалла как составной части поликристаллического тела. Во вторых, экспериментальных данных о пластических свойствах монокристаллов пока имеется недостаточно. Физическая теория пластичности разрабатывалась в работах Г.Тейлора / 76 /, Дж.Бишоп и Р.Хилла / 62 /, Дж.Хатчинсона / 67 - 69 /, К.Хавнера / 66 / и Т.Ли-

на / 72 /.

К математическим теориям пластичности относятся теории, в которых соотношения между напряжениями и деформациями устанавливаются на феноменологической основе: полученные из экспериментальных данных макросвойства материала позволяют установить связь между тензорами напряжений и деформаций и таким образом описать макроповедение упруго-пластического тела. Как уже отмечалось, в введении в математической теории пластичности имеются три главные направления.

Анализ математических теорий пластичности проведен в обзорах / 5, 23, 25, 49 /. Далее рассмотрим основные положения математических теорий пластичности, а также работы, не охваченные в выше упомянутых обзорах.

§ 2. Теории деформаций.

Деформационная теория пластичности представляет собой распространение на пластическое тело той связи между напряжениями и деформациями, которая устанавливается в нелинейной теории упругости. В основу деформационной теории положены следующие гипотезы: 1) материал изотропен; 2) объемная деформация подчиняется только закону линейной упругости; 3) направляющие тензоры напряжений и деформаций совпадают, т.е.

$$\bar{S}_{ij} = \bar{e}_{ij} \quad (I.2.I)$$

Начало деформационной теории заложили Г.Генки / 4 / и А.Надаи / 47, 74 /, которые установили следующие соотношения

между девиаторами напряжений и деформаций.

$$\begin{aligned} S_{ij} &= 2 G_s e_{ij} && \text{при } dJ_2 > 0 \\ d S_{ij} &= 2 G_0 d e_{ij} && \text{при } dJ_2 < 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

где S_{ij} , e_{ij} - девиаторы напряжений и деформаций;

G_0 , G_s - упругий и секущий модули сдвига;

J_2 - второй инвариант девиатора напряжений.

За критерий нагружения принимается условие $dJ_2 > 0$. А.А.Ильшин / II / доказал, что зависимости (1.2.2) для случая нелинейного упрочнения также пригодны, но только при простом, пропорциональном нагружении, т.е. показал существенное различие между простым и сложным нагружениями.

Многочисленные экспериментальные данные и проверки теории Генки-Надаи способствовали дальнейшему развитию этой теории. В.Прагер / 50 / вместо пропорциональной зависимости между девиаторами напряжений и деформаций (1.2.2) ввел общую функцию напряжений:

$$e_{ij} = F(J_2, J_3) [p (J_2, J_3)^2 S_{ij} + q (J_2, J_3)^2 J_3 t_{ij}] \quad (1.2.3)$$

где $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, $J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{kl}$,

$$t_{ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij}$$

В частном случае, когда $p = 1$; $q = 0$; $F = F(J_2)$, получаем закон (1.2.2).

Более широкое распространение и развитие деформационная теория получила в исследованиях А.А.Ильшина (теория малых упруго-пластических деформаций) / II, I2, I6, I8, I9 /.

А.А.Ильяхин доказал, что при простом нагружении матрицы тензоров напряжения и деформации связаны некоторыми линейными операторами:

$$L [(S_{ij})] = L' [(e_{ij})] \quad (I.2.4)$$

Согласно / I9 /, если в каждой точке тела происходит пропорциональный рост девиаторов напряжений или деформаций, то все возможные законы пластичности, построенные на основе зависимости (I.2.4), должны совпадать с законом Генки-Надаи.

На основе (I.2.1) и учитывая, что

$$\bar{S}_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sigma_i} \quad ; \quad \bar{e}_{ij} = \frac{\lambda e_{ij}}{\varepsilon_i}$$

связь между девиаторами напряжений и пластических деформаций выражается зависимостью:

$$e_{ij}^p = S_{ij} \frac{\bar{\sigma}_i}{\lambda \bar{\sigma}_i} \quad (I.2.5)$$

где

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{\lambda} \varepsilon_i \quad ; \quad \bar{\sigma}_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \sigma_i$$

Интенсивности деформаций и напряжений соответственно выражаются:

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{\lambda}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11})^2 + 6(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)} \quad (I.2.6)$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)} \quad (I.2.7)$$

Тогда зависимость (I.2.5) принимает вид:

$$e_{ij}^p = \frac{3 \varepsilon_i}{\lambda \sigma_i} S_{ij} \quad (I.2.8)$$

Соотношения между интенсивностями напряжений σ_c и деформаций ε_c определяются экспериментально (например, на одноосном растяжении или кручении).

При описании общих процессов сложного нагружения, когда компоненты девиатора напряжений не возрастает пропорционально одному параметру, соотношения теории деформации не пригодны для всех путей сложного нагружения.

Анализ определения путей сложного нагружения, для которых могут быть справедливы соотношения теории деформаций, провели Б.Будянский / 63 /, В.Д.Клишников / 22 /.

Отклонение вектора $d\sigma_c$ / 63 / от простого нагружения допустимо до такой величины угла β , при которой

$$\cos\beta \geq \sqrt{\frac{1}{1+N}} \quad (I.2.9)$$

где

$$N = \frac{E_c^p}{E_k^p}$$

E_c^p , E_k^p - секущий и касательный модули упругости соответственно.

§ 3. Теория течения.

Появились другие принципы построения соотношений между деформациями и напряжениями. Поиски привели к теории течения (дифференциальная теория пластичности).

Г.Хандельмен, Т.Лин и В.Прагер / 65 / положили начало теории течения упрочняющегося тела. В основу этой теории положены следующие гипотезы:

- 1) материал изотропен;
- 2) объемная деформация упругая;
- 3) приращение девиатора деформаций определяется девиатором напряжений и его приращением; эта связь линейна относительно приращений напряжений;
- 4) критерием догрузки является условие $dJ_2 > 0$;
- 5) полные приращения соответствующих деформаций складываются из приращений составляющих упругой и пластической деформации.

Из упомянутых предположений следует, что

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (1.3.1)$$

где $d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G_0} dS_{ij}$;

$$d\varepsilon_{ij}^p = G_{ij} dJ_2 \quad \text{при } dJ_2 > 0$$

а G_{ij} является функцией напряжений и предистории деформирования, но не зависит от приращений напряжений.

Е.Мелан / 73 / функцию G_{ij} выразил в следующем виде:

$$G_{ij} = h \frac{\partial q}{\partial S_{ij}} \quad (1.3.2)$$

где q - функция, определяющая пластический потенциал;

h - функция упрочнения, которая зависит от истории деформирования и характеризует уровень достигнутого упрочнения.

При $dJ_2 \leq 0$ происходит только изменение упругих деформа-

ции, т.е.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e \quad (1.3.1')$$

В наиболее общей форме функция напряжений и предьстории деформирования G_{ij} имеет вид:

$$G_{ij} = p(I_2, I_3^2) S_{ij} + Q(I_2, I_3^2) I_3 t_{ij} \quad (1.3.3)$$

Если предполагать, что I_3 мало влияет на деформацию, то G_{ij} является функцией только от I_2 :

$$G_{ij} = p(I_2) S_{ij} \quad (1.3.4)$$

В дальнейших исследованиях в теории течения были приняты дополнительные предположения / 75 /:

- 1) единственность в малом, т.е. малым приращениям напряжений соответствуют конечные приращения деформаций;
- 2) регулярность поверхности нагружения, т.е. в каждой точке на поверхности имеется только одна внешняя нормаль;
- 3) непрерывность изменения поверхности в процессе пластического деформирования;
- 4) необратимость, согласно которой работа напряжений на изменение пластических деформаций всегда положительна.

Дополнительные условия позволяют определить приращения пластических деформаций в виде:

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (1.3.5)$$

если $f = f(\sigma_{kl}, e_{ij}^p) = 0$

$$h = - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f}{\partial e_{ij}^p}} \quad (I.3.6)$$

Принимая $f = f(I_n)$ и $h = h(I_n)$, как частный случай получаем соотношение (I.3.2).

В.Т.Койтером / 29 / предложено обобщение закона течения для случая (I.3.5), когда поверхность текучести или поверхность нагружения имеют сингулярные точки. Неопределенность в сингулярной точке устраняется путем аппроксимации поверхности в сингулярной точке несколькими или бесконечно многими поверхностями $f_n(\sigma_{kl})$, где $n = 1, 2, 3 \dots, N$. В таком случае пластическая деформация получается как сумма отдельных приращений:

$$d e_{ij}^p = \sum_{n=1}^N C_n h_n \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl}$$

где $C_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} \leq 0 \\ 1 & \text{при } \frac{\partial f_n}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} > 0 \end{cases} \quad (I.3.7)$

Теория В.Т.Койтера / 29 / широко применяется при плоских поверхностях нагружения.

Сопоставляя деформационную теорию с теорией течения, следует, что при простом нагружении теория течения совпадает с теорией деформации. В этом случае экспериментальные данные

хорошо согласуются с обеими теориями.

Сложное нагружение экспериментально изучено недостаточно. Однако по имеющимся данным можно заметить, что результаты экспериментального изучения сложного нагружения лучше согласуются с теорией течения, чем с теорией деформации / 21, 46 /.

§ 4. Статистические теории пластичности.

А. Новый подход к определению пластических деформаций использован в статистических теориях пластичности.

Первой теорией такого вида была теория скольжения, предложенная С.Батдорфом и Б.Будянским / 61 /.

В основу теории скольжения положены следующие предположения:

1) каждый монокристалл обладает одной системой скольжения;

2) напряженное состояние в каждом кристалле везде одинаково и совпадает с напряженным состоянием агрегата в целом;

3) пластический сдвиг γ^p в данной системе скольжения зависит от наибольшего касательного напряжения τ и происходит только тогда, когда τ превышает предел текучести системы при сдвиге τ_T

$$\gamma^p = F(\tau) \quad \text{если} \quad \tau > \tau_T \quad (I.4.I)$$

Характеристику материала $F(\bar{\epsilon})$ определяют из эксперимента и представляют ее в виде полинома:

$$F(\bar{\epsilon}) = \begin{cases} \sum_{n=1}^N a_n \left(\frac{\bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}_T} - 1\right)^n, & \bar{\epsilon} > \bar{\epsilon}_T \\ 0, & \bar{\epsilon} \leq \bar{\epsilon}_T \end{cases} \quad (1.4.2)$$

Пластическая деформация в неподвижных координатных осях i, j, k, l получается путем усреднения микродеформаций /61/.

$$e_{ij}^p = \iiint_{\Omega} F(\bar{\epsilon}) \rho_{ij}(\alpha, \beta, \delta) d\alpha d\beta d\delta \quad (1.4.3)$$

где Ω - область изменения параметров α, β, δ , которые определяют положение системы скольжения.

Теория скольжения была предложена как теория, отличающаяся от других теорий. Койтер / 21 / показал, что теория скольжения представляет собой теорию течения с бесконечно многими гиперплоскостями в качестве поверхностей нагружения. П.Чикала / 64 / на основе (1.4.2) определил мгновенный модуль сдвига, но экспериментальные исследования / 9, 21 / показали, что мгновенный модуль имеет расхождение с определенными на основе теории скольжения величинами.

И.Иосимура / 20 / установил, что характеристическая функция сдвига зависит от вида напряженного состояния и, следовательно, одно из основных предположений теории неправдоподобно.

И.Кнетс / 26 / показал, что вывод Иосимуря ошибочен, так как аппроксимированные и экспериментальные кривые при растя-

лении и при кручении не соответствуют друг другу.

Б. В 1954 году Т.Лин / 39 / предложил другой вариант теории скольжения. Основные предположения этой теории:

- 1) поликристаллический агрегат состоит из множества беспорядочно ориентированных монокристаллов;
- 2) в каждом монокристалле существуют несколько систем скольжения;
- 3) напряженное состояние агрегата равно усредненной величине напряженных состояний кристаллов;
- 4) пластический сдвиг для каждого монокристалла и всего агрегата один.

Приращения пластического сдвига на одной плоскости скольжения $d\gamma^p$ зависят от приращений касательного напряжения на той же плоскости и функции $F(\gamma_0)$, которая определяется из опыта на одноосное растяжение поликристаллического агрегата. Приращение пластической деформации $d\varepsilon_{ij}^p$ определяется суммированием $d\gamma^p$ по всем плоскостям скольжения.

Т.Лин / 39 / считает, что при ортогональном догружении модуль сдвига G_i совпадает с начальным модулем сдвига G_0 , но экспериментальные данные по определению модулей сдвига / 9, 48, 55 / показали, что модуль G_i оказался явно меньшим модуля G_0 .

Теория Т.Лина математически сложнее теории Батдорфа-Будянского. Поэтому теоретически решены только простейшие задачи деформирования / 40, 70 /.

Улучшенный вариант своей теории Т.Лин предлагал в / 71 /.

Основные предположения:

- 1) каждый кристалл имеет 12 систем скольжения;
- 2) упрочнение в одном кристалле вызывает упрочнение в других кристаллах;
- 3) сдвиг определяется как функция величины скольжения и ориентации систем скольжения.

Результаты, полученные по теории Т.Лина для некоторых программ нагружения, более соответствуют результатам экспериментов, чем по теории течения или теории деформаций.

В. Для решения задач сложного нагружения широкое применение имеет теория локальности деформации, предложенная А. Малмейстером / 42, 43, 45 /, целью которой является установление связи (функция локальных деформаций) между локальными напряжениями и деформациями в вспомогательной системе координат. При помощи функционала усреднения / 33 / из отдельных деформаций в вспомогательной системе координат получаем тензор деформаций в основных осях.

А.К.Малмейстер развил свою теорию, опираясь на идеи Н.Н. Афанасьева / 2 / о статистической усталостной прочности металлов.

Исходные предположения теории локальности деформации / 42, 43 / следующие:

- 1) в основной и вспомогательной системах координат действует один и тот же тензор напряжений;
- 2) деформации сдвига в вспомогательной системе координат зависят только от касательных напряжений в этих же осях;

3) направление локального сдвига совпадает с вектором касательного напряжения $\tilde{\tau}$, действующего на этой плоскости;

4) локальная пластическая деформация сдвига происходит тогда, когда касательное напряжение $\tilde{\tau}$ превышает $\tilde{\tau}_T$ - предел текучести материала (для материалов с явно выраженным пределом текучести);

5) пластическая деформация определяется как статистически средняя величина локальных пластических сдвигов при всех возможных положениях локальной плоскости скольжения;

6) сдвиг в одной плоскости не вызывает упрочнения материала в другой;

Пластическая деформация и напряжение связаны зависимостью:

$$e_{ij}^p = \frac{1}{S_0} \int_{S_1} \sigma^p(\tilde{\sigma}_{zx}) \tilde{v}_{ij} ds \quad (I.4.4)$$

где $\sigma^p(\tilde{\sigma}_{zx})$ - локальная пластическая деформация сдвига (функция локальности деформаций); \tilde{v}_{ij} - весовая функция, преобразующая при помощи направляющих косинусов локальную деформацию из вспомогательной системы координат в основную систему; S_0 - площадь поверхности сферы текучести с радиусом $\tau = \tilde{\tau}_T$; S_1 - область интегрирования, называемая зоной догрузки.

Правильность теории локальности деформаций установлена во многих работах как при простом нагружении / 7, 8 /, так и при различных видах сложного нагружения / 27, 31, 41, 54 /.

Г. В данном обзоре в рассмотренных статистических теориях пластичности основное внимание уделялось соотношениям, определяющим тензор деформации в зависимости от заданного тензора напряжений.

Г.А.Тетерс / 56 / сформулировал законы локальности в другой форме - определяется тензор напряжений в зависимости от заданного тензора деформаций. Суть его предложения в следующем. Рассмотрим напряжения в окрестности некоторой точки тела. Как обычно, введем две системы декартовых координат - основную x_i ($i = 1, 2, 3$) и вспомогательную $x_{\beta'}$ ($\beta = 1, 2, 3$). Предположим, что изотропный в исходном состоянии материал деформирован по кусочно линейному закону в пространстве деформации. Зависимость между деформациями и напряжениями в основной системе координат определяется как средняя статистическая величина, полученная в результате усреднения локальных напряжений $\tilde{\sigma}_{\beta'\beta'}$.

Построены три типа функционала усреднения:

$$S_{ij} = \frac{1}{\Omega} \iiint_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\beta'\beta'} l_{i\beta'} l_{j\beta'} d\omega \quad (I.4.5)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{S} \iint_S \tilde{\sigma}_{\beta'\beta'} l_{i\beta'} l_{j\beta'} ds \quad (I.4.6)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{L} \int_L \tilde{\sigma}_{\beta'\beta'} l_{i\beta'} l_{j\beta'} dl \quad (I.4.7)$$

Подробнее проанализирована зависимость (I.4.6). Функция локальных напряжений сформулирована в вспомогательной системе координат при помощи величин инвариантных относительно

но поворота вокруг оси z' . Предполагается, что напряжениями, соответствующими неупругим деформациям, являются лишь полные напряжения сдвига в плоскости $1' 2'$, которые возникают только от соответствующих им деформаций сдвига:

$$S_{ij} = A_{ijkl} \epsilon - \frac{1}{5} \iint_{S^+} \tilde{\sigma}(\rho) (l_{i1}' l_{j2}' + l_{i2}' l_{j1}') ds \quad (1.4.8)$$

Связь между $\tilde{\sigma}(\rho)$ и ρ задается в виде полиномиальной зависимости:

$$\tilde{\sigma}(\rho) = \sum A_{3'1' \dots 3'1'}^{(2n+2)} \rho^{2n} \quad (1.4.9)$$

Г.А.Тетерс предложил условие активного деформирования в следующем виде:

$$\rho > \rho_I \cos(\rho, \rho_I) \quad (1.4.10)$$

но так как полная деформация состоит из упругой и пластической деформации, то при решении задач для сложного деформированного состояния это учесть довольно трудно.

Д. К статистическим теориям пластичности следует отнести также теорию М.Я.Леонова и Н.Ю.Швайко / 38, 58 /, которая основана на модели линейной анизотропно упрочняющейся плоскопластической среды (в которой при плоском напряженном состоянии деформация $\epsilon_{33} = 0$).

Основные предположения этой теории:

- 1) плоская среда первоначально изотропна;
- 2) объемная деформация упруга ;
- 3) деформации линейно упруги до тех пор, пока максимальное касательное напряжение не превышает предела начального сопротивления пластического сдвига.

Приращение сопротивления сдвигу определяется:

$$dS_m = F(w) d\gamma_{nl}^p, \quad (I.4.II)$$

где $d\gamma_{nl}^p$ - приращения деформации сдвига; n, l - взаимно ортогональные направления, w - угол образовавшихся между направлениями m и n ($0 \leq w \leq \frac{\pi}{2}$), $F(w)$ - функция угла w , характеризующая чувствительность материала к деформационной анизотропии.

Приращение пластической деформации сдвига $d\gamma_{nl}^p$ представляется в виде:

$$d\gamma_{nl}^p = \varphi(\theta, t) d\theta \quad (I.4.I2)$$

где $\varphi(\theta, t)$ - интенсивность сдвига.

Границы направлений n определяются предельными функциями $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$. $\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$. При известном приращении пластической деформации $d\gamma_{nl}^p$ (I.4.I2) ее компоненты в осях координат X_i ($i = 1, 2$) определяются по формулам преобразования тензора деформации при переходе от одной координатной системы к другой:

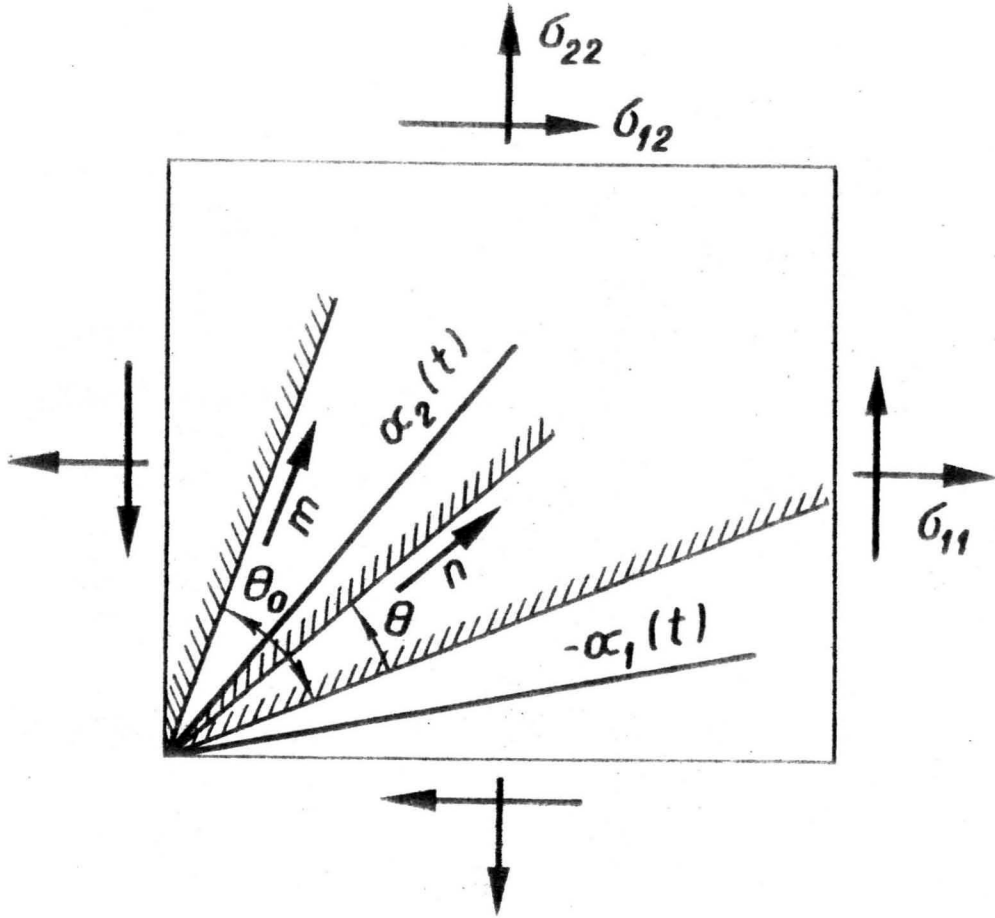


Рис. 1.4.1. Характерные величины для определения сопротивления сдвигу на произвольной площадке.

$$e_{11} = -e_{22} = \frac{1}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \cos 2(\theta + \phi_0) d\theta$$

$$e_{12} = \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \sin 2(\theta + \phi_0) d\theta \quad (I.4.13)$$

где

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tilde{\sigma}_{12}(t)}{\tilde{\sigma}_{11}(t) - \tilde{\sigma}_{22}(t)}$$

Сопротивление сдвигу $S_m(\theta, t)$ в произвольном направлении (рис. I.4.1) выражается формулой:

$$S_m(\theta_0, t) = \tilde{\sigma}_s + \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} F(w) \varphi(\theta, t) d\theta \quad (I.4.4)$$

где угол w определяется следующим образом:

$$w = \begin{cases} |\theta - \theta_0|, & \theta_0 \in [-\frac{\pi}{2} + \alpha_1(t), \frac{\pi}{2} - \alpha_2(t)] \\ \frac{\pi}{2} - |\frac{\pi}{2} + \theta - \theta_0|, & \theta_0 \in [\frac{\pi}{2} - \alpha_1(t), \frac{\pi}{2} + \alpha_2(t)] \end{cases} \quad (I.4.15)$$

Обобщение монотонной пластической деформации для пространственного случая предложено на основе постулата изотропии А.А.Ильюшина. Необходимо и достаточно, чтобы при плоско пластической деформации выполнялось условие

$$\tilde{\sigma}_{33} = \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22})$$

Г Л А В А I I

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТЕНЗОРОМ ДЕФОРМАЦИЙ И ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНОСТИ ДЕФОРМАЦИИ

§ I. Основные положения и зависимости.

Рассмотрим деформации в окрестности некоторой точки тела; через которую проведем две системы декартовых координат. Основная система x_i ($i = 1, 2, 3$) закреплена неподвижно со средой, а вспомогательная система $x_{\beta'}$ ($\beta = 1, 2, 3$) может занимать все возможные положения, относительно основной системы. Положение оси z' в пространстве относительно основной системы координат определяется следующими направляющими косинусами (рис. 2.I.I)

$$l_{13'} = \cos(\vartheta) ; \quad l_{23'} = \cos\varphi \sin\vartheta ; \quad l_{33'} = \sin\varphi \sin\vartheta ;$$

где ϑ и φ - сферические координаты, меняющиеся в пределах $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Согласно теории локальности деформаций зависимость между напряжениями и пластической деформацией в основной системе координат определяется как средняя статистическая величина, полученная в результате усреднения локальных деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta'}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{S} \iint_S \varepsilon_{\alpha\beta'} l_{i\alpha'} l_{j\beta'} ds \quad (2.I.I)$$

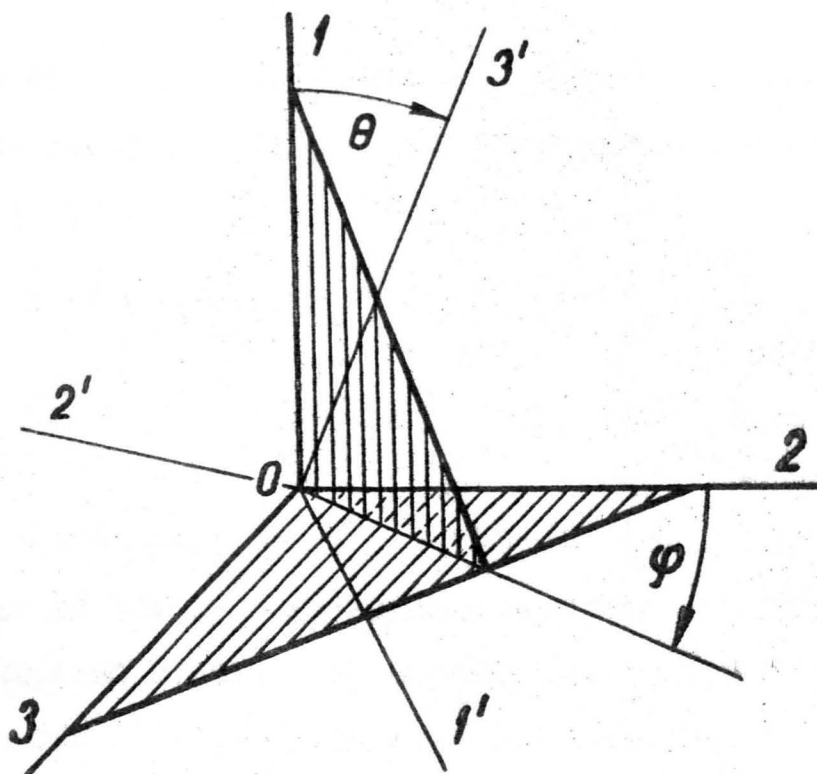


Рис. 2.1.1. Взаимоположение основной и вспомогательной координатных систем.

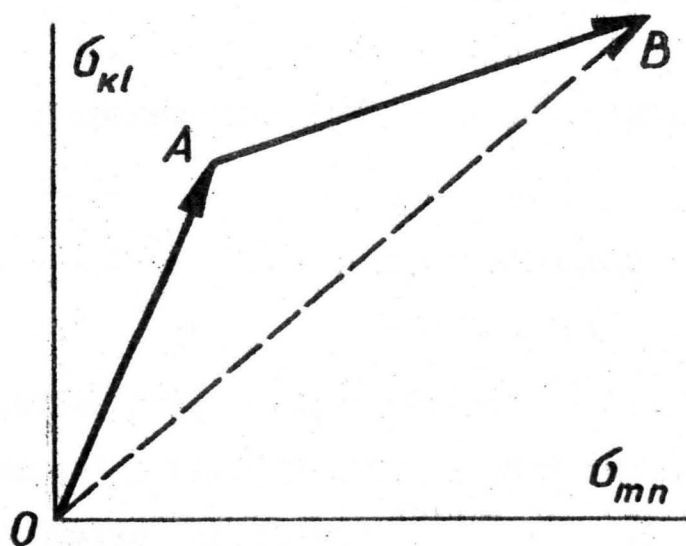


Рис. 2.2.2. Схема путей нагружения

$$k, l, m, n = 1, 2, 3$$

В общем случае деформация ε_{ij} зависит от всех компонент локальных деформаций $\varepsilon_{\alpha'\beta'}$ любого положения вспомогательной системы координат

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{5} \iint & (\varepsilon_{11'} v_{i1'} v_{j1'} + \varepsilon_{12'} v_{i1'} v_{j2'} + \varepsilon_{13'} v_{i1'} v_{j3'} + \\ & + \varepsilon_{21'} v_{i2'} v_{j1'} + \varepsilon_{22'} v_{i2'} v_{j2'} + \varepsilon_{23'} v_{i2'} v_{j3'} + \\ & + \varepsilon_{31'} v_{i3'} v_{j1'} + \varepsilon_{32'} v_{i3'} v_{j2'} + \varepsilon_{33'} v_{i3'} v_{j3'}) ds \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Придавая оси $3'$ всевозможные положения, находим, что она поочередно примет и те направления, которые занимали поочередно оси $1'$ и $2'$, следовательно выражение (2.1.2) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{5} \iint & [\varepsilon_{3'3'} v_{i3'} v_{j3'} + \varepsilon_{3'1'} \cdot \frac{1}{2} (v_{i3'} v_{j1'} + v_{i1'} v_{j3'}) + \\ & + \varepsilon_{3'2'} \cdot \frac{1}{2} (v_{i3'} v_{j2'} + v_{i2'} v_{j3'})] ds, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где $\varepsilon_{3'\beta'}$ - локальные пластические деформации, определяемые, исходя из компонент напряжений, действующих на локальной площадке.

$\varepsilon_{3'\beta'}$ представим бесконечным тензорным рядом / 24 /

$$\varepsilon_{3'\beta'} = a_{3'\beta'3'\alpha'} \overset{(2n+2)}{\sigma_{3'\alpha'}} + \dots + a_{3'\beta'3'\alpha' \dots 3'\theta'} \sigma_{3'\alpha' \dots 3'\theta'} \quad (2.1.4)$$

В работе / 24 / также показано, что для изотропного и несжимаемого в пластической области материала учитываются лишь сдвиговые напряжения $\sigma_{3'\beta'}$ ($\beta = 1, 2$). Локальную фун-

цию пластической деформации принимаем в виде / 57 /:

$$\gamma^p = \gamma(\bar{\epsilon}) = a_n \bar{\epsilon}^n \quad (2.1.5)$$

где n - степень нелинейности, определяемая при аппроксимации опытной кривой деформирования, $n = 2m + 1$ ($m = 1, 2, \dots$)
 a_n - компонента тензора локальной податливости $(2n + 2)$ -го ранга, устанавливающая связь между локальной сдвиговой деформацией и касательным напряжением $\bar{\epsilon}$.

$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\bar{\sigma}_{3'1'}^2 + \bar{\sigma}_{3'2'}^2} \quad (2.1.6)$$

а $\bar{\sigma}_{3'\beta'}$ ($\beta = 1, 2$) - локальные касательные напряжения, зависящие от заданного тензора напряжений $\bar{\sigma}_{\kappa\ell}$ ($\kappa, \ell = 1, 2, 3$) в основной системе координат X_i :

$$\bar{\sigma}_{3'\beta'} = \bar{\sigma}_{\kappa\ell} l_{\kappa 3'} l_{\ell \beta'} \quad (2.1.7)$$

При совмещении оси I' с направлением полного касательного напряжения $\bar{\epsilon}$ на локальной площадке, как это сделал А.Ф.Крегерс в работе / 32 /, имеем $\bar{\sigma}_{3'2'} = 0$ и, следовательно, $\bar{\sigma}_{3'1'} = \bar{\epsilon}$

§ 2. Соотношения линейной упругости.

Если компоненты локальных деформаций $\bar{\epsilon}_{3'\beta'}$ (2.1.4) во всех вспомогательных системах координат определяются законом Гука, то выражение (2.1.3) определяет закон Гука в основной системе координат.

Исходя из выражения (2.1.4), определим $\varepsilon_{\alpha'\beta'}$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3'3'} &= a_{3'3'3'3'} \tilde{b}_{3'3'} + a_{3'3'1'1'} \tilde{b}_{1'1'} + a_{3'3'2'2'} \tilde{b}_{2'2'} = \\ &= (a_{3'3'3'3'} - a_{3'3'1'1'}) \tilde{b}_{3'3'} + 3a_{3'3'1'1'} \tilde{b}_{cp} ; \quad (2.2.1) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{3'1'} = 2 a_{3'1'3'1'} \tilde{b}_{3'1'} ; \quad \varepsilon_{3'2'} = 2 a_{3'2'3'2'} \tilde{b}_{3'2'} ;$$

Подставляя значения компонент локальных деформаций $\varepsilon_{\alpha'\beta'}$ (2.1.4) и локальных касательных напряжений (2.1.7) в выражение (2.1.3), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (a_{3'3'3'3'} - a_{3'3'1'1'}) \tilde{b}_{mn} \frac{1}{5} \iint_S l_{i3'} l_{j3'} l_{m3'} l_{n3'} ds + \\ &+ 3a_{3'3'1'1'} \tilde{b}_{cp} \frac{1}{5} \iint_S l_{i3'} l_{j3'} ds + \\ &+ a_{3'1'3'1'} \tilde{b}_{mn} \frac{1}{5} \iint_S [l_{m3'} l_{n1'} (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'}) + \\ &+ l_{m3'} l_{n2'} (l_{i3'} l_{j2'} + l_{i2'} l_{j3'})] ds. \quad (2.2.2) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{5} \iint_S l_{i3'} l_{j3'} ds = \frac{1}{3} \delta_{ij} ;$$

$$\frac{1}{5} \iint_S l_{i3'} l_{j3'} l_{m3'} l_{n3'} ds = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) ;$$

прямым интегрированием (2.2.2) получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= (a_{3'3'3'3'} - a_{3'3'1'1'}) \tilde{b}_{mn} \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jn} + \\ &+ \delta_{in} \delta_{jm}) + 3a_{3'3'1'1'} \tilde{b}_{cp} \cdot \frac{1}{3} \delta_{ij} + a_{3'1'3'1'} \tilde{b}_{mn} \times \\ &\times \frac{1}{3} \iint_S \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (l_{m3'} l_{i3'} l_{n1'} l_{j1'} + l_{m3'} l_{j3'} l_{n1'} l_{i1'} + \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$+ l_{m3}' l_{i3}' l_{n2}' l_{j2}' + l_{m3}' l_{j3}' l_{n2}' l_{i3}') d\varphi_2 ds,$$

где φ_2 - УГОЛ ПОВОРОТА ВОКРУГ ОСИ 3'.

Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l_{n1}' l_{j1}' d\varphi_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l_{n2}' l_{j2}' d\varphi_2 = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{nj} - l_{m3}' l_{j3}'), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{15} (a_{33'3'3'} - a_{33'1'1'}) (I_1 \delta_{ij} + 2\tilde{b}_{ij}) + \frac{1}{3} a_{33'1'1'} I_1 \delta_{ij} + \\ &+ a_{31'3'1'} \tilde{b}_{mn} \frac{1}{5} \iint_S [l_{m3}' l_{i3}' \frac{1}{2} (\delta_{nj} - l_{m3}' l_{j3}') + \\ &+ l_{m3}' l_{j3}' \frac{1}{2} (\delta_{ni} - l_{m3}' l_{i3}') + l_{m3}' l_{i3}' \frac{1}{2} (\delta_{nj} - \\ &- l_{m3}' l_{j3}') + l_{m3}' l_{j3}' \frac{1}{2} (\delta_{ni} - l_{m3}' l_{i3}')] ds = \quad (2.2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{15} (a_{33'3'3'} - a_{33'1'1'}) (I_1 \delta_{ij} + 2\tilde{b}_{ij}) + \frac{1}{3} a_{33'1'1'} I_1 \delta_{ij} + \\ &+ \frac{2}{5} a_{31'3'1'} (\tilde{b}_{ij} - \tilde{b}_{cp} \delta_{ij}). \end{aligned}$$

После дальнейших преобразований выражение (2.2.3) перешется в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} a_{31'3'1'} \tilde{b}_{ij} + a_{33'1'1'} \tilde{b}_{cp} \delta_{ij}; \quad (2.2.4)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{2}{3} a_{31'3'1'} 3\tilde{b}_{cp} + 3a_{33'1'1'} \tilde{b}_{cp} = (2a_{31'3'1'} + 3a_{33'1'1'}) \tilde{b}_{cp};$$

Определяя $\tilde{\varepsilon}_{cp}$, получаем обычную форму записи закона

Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\langle ii \rangle} - \varepsilon_{cp} &= \frac{2}{3} a_{3'1'3'1'} b_{\langle ii \rangle} + a_{3'3'1'1'} b_{cp} - \\ &- \frac{2}{3} a_{3'1'3'1'} b_{cp} - a_{3'3'1'1'} b_{cp} = \frac{2}{3} a_{3'1'3'1'} (b_{\langle ii \rangle} - b_{cp}); \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{2}{3} a_{3'1'3'1'} b_{ij} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Введя технические обозначения, получаем:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{3} b_{11} a_{3'3'3'3'} \quad , \quad \frac{1}{3} a_{3'3'3'3'} = \frac{1}{E} ;$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{2}{3} b_{12} a_{3'1'3'1'} \quad , \quad \frac{2}{3} a_{3'1'3'1'} = \frac{1}{2G} ;$$

$$\frac{a_{3'3'1'1'}}{a_{3'3'3'3'}} = -\nu ;$$

§ 3. Определение тензора деформаций при сложном нагружении.

Предположим, что изотропный и однородный в исходном состоянии несжимаемый пластический материал подвергается сложному нагружению OAB по кусочно линейному закону, состоящему из двух этапов (рис. 2.3.1). При простом пропорциональном нагружении касательное напряжение τ свое направление на локальной площадке не меняет, т.е. τ_x растет в одном и том же направлении. При сложном нагружении на втором этапе нагружения AB τ отличается от τ_x как величиной, так и направлением (рис. 2.3.2).

Пластические деформации на втором этапе нагружения определяются соотношением:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{S} \iint_S \frac{1}{2} \varepsilon_{3\rho'} (l_{i3'} l_{j\rho'} + l_{i\rho'} l_{j3'}) ds + \Delta \varepsilon_{ij}, \quad (2.3.1)$$

где первый член вырождает пластическую деформацию, достигнутую на первом этапе нагружения, являющаяся постоянной величиной для второго этапа нагружения, а второй член определяет приросты пластических деформаций на втором этапе.

Предположим, что вектор приращения пластической деформации $\Delta \varepsilon'$ на локальной площадке совпадает с направлением полного касательного напряжения $\tilde{\sigma}_{II}$ на втором этапе нагружения (рис. 2.3.2). Тогда локальные сдвиговые компоненты деформаций на первом этапе нагружения выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3'1'*} &= r'(\tilde{\sigma}) \cos \varphi_1 = a_n \tilde{\sigma}_*^n \cos \varphi_1; \\ \varepsilon_{3'2'*} &= r'(\tilde{\sigma}) \sin \varphi_1 = a_n \tilde{\sigma}_*^n \sin \varphi_1; \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где $\cos \varphi_1 = \frac{\sigma_{3'1'*}}{\tilde{\sigma}_*}$ ■ $\sin \varphi_1 = \frac{\sigma_{3'2'*}}{\tilde{\sigma}_*}$

Приращения компонент пластической деформации на втором этапе определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{3'1'} &= a_n n \tilde{\sigma}^{n-1} \cos \varphi_2 d\tilde{\sigma}; \\ d\varepsilon_{3'2'} &= a_n n \tilde{\sigma}^{n-1} \sin \varphi_2 d\tilde{\sigma}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где $\cos \varphi_2 = \frac{\sigma_{3'1'}}{\tilde{\sigma}}$ ■ $\sin \varphi_2 = \frac{\sigma_{3'2'}}{\tilde{\sigma}}$

Полное приращение касательного напряжения на локальной площадке выразится:

$$d\sigma = \frac{\tilde{\sigma}_{3'1'} d\tilde{\sigma}_{3'1'} + \tilde{\sigma}_{3'2'} d\tilde{\sigma}_{3'2'}}{\sqrt{\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'}^2}} \quad (2.3.4)$$

Используя соотношения (2.1.6) и (2.3.4), перепишем локальные сдвиговые компоненты деформаций и их приращения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{3'1'x} &= a_n (\tilde{\sigma}_{3'1'x}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'x}^2)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{\sigma}_{3'1'x} ; \\ \varepsilon_{3'2'x} &= a_n (\tilde{\sigma}_{3'1'x}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'x}^2)^{\frac{n-1}{2}} \tilde{\sigma}_{3'2'x} ; \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{3'1'} &= a_n n (\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'}^2)^{\frac{n-3}{2}} (\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 d\tilde{\sigma}_{3'1'} + \\ &+ \tilde{\sigma}_{3'1'} \tilde{\sigma}_{3'2'} d\tilde{\sigma}_{3'2'}) ; \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{3'2'} &= a_n n (\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'}^2)^{\frac{n-3}{2}} (\tilde{\sigma}_{3'2'}^2 d\tilde{\sigma}_{3'2'} + \\ &+ \tilde{\sigma}_{3'1'} \tilde{\sigma}_{3'2'} d\tilde{\sigma}_{3'1'}) ; \end{aligned}$$

Суммируя по всем локальным площадкам на втором этапе нагружения вновь появившиеся пластические деформации, получаем полное приращение пластических деформаций в основной системе координат

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{S} \iint_{S^*} a_n n \int_{\tilde{\sigma}_{3'1'x}}^{\tilde{\sigma}_{3'1'y}} (\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'}^2)^{\frac{n-3}{2}} \times \\ &\times \frac{1}{2} [\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 (l_{i3'} l_{j3'} + l_{i3'} l_{j3'}) + \tilde{\sigma}_{3'1'} \tilde{\sigma}_{3'2'} \times \\ &\times (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'})] d\tilde{\sigma}_{3'1'} ds, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

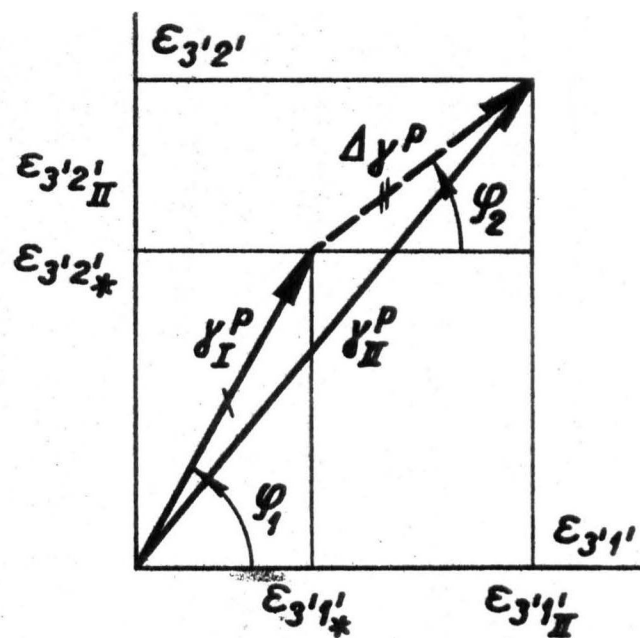
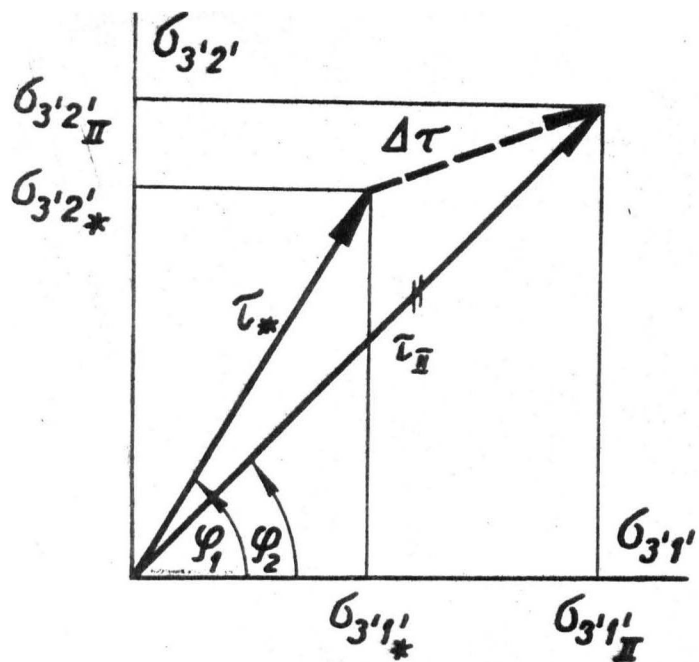


Рис. 2.2.2. Векторы напряжения τ и деформации γ^P на локальной площадке.

где S^+ - область интегрирования, называемая зоной догрузки, образуемая на единичной сфере текучести, при пересечении с поверхностью касательных напряжений ($\alpha = 2$ при $\beta = 1$ и $\alpha = 1$ при $\beta = 2$).

Пределы интегрирования на сфере S^+ определяются из условия догрузки, а под $\tilde{\sigma}_{\beta\beta}^*$ и $\tilde{\sigma}_{\beta\beta}^{\pi}$ ($\beta = 1, 2$) подразумевается интервал траектории \mathcal{E} в точках, где удовлетворяется данное условие догрузки.

На основе соотношений (2.3.1), (2.3.6) и (2.3.7) полная пластическая деформация в конце второго этапа нагружения выражается зависимостями / 54 /:

при $n = 3$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{5} \iint_S a_{3'1' \dots 3'1'}^{(8)} \frac{1}{2} [(\tilde{\sigma}_{3'1'}^3 + \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^2) (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'}) + \\ & + (\tilde{\sigma}_{3'2'}^3 + \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^2) (l_{i3'} l_{j2'} + l_{i2'} l_{j3'})] ds + \\ & + \frac{1}{5} \iint_{S^+} 3 a_{3'1' \dots 3'1'}^{(8)} \frac{1}{2} \left\{ \int_{\tilde{\sigma}_{3'1'}^*}^{\tilde{\sigma}_{3'2'}^{\pi}} [\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'}) + \right. \\ & + \tilde{\sigma}_{3'1'} \tilde{\sigma}_{3'2'} (l_{i3'} l_{j2'} + l_{i2'} l_{j3'})] d\tilde{\sigma}_{3'1'} + \int_{\tilde{\sigma}_{3'2'}^*}^{\tilde{\sigma}_{3'2'}^{\pi}} [\tilde{\sigma}_{3'2'}^2 (l_{i3'} l_{j2'} + \\ & + l_{i2'} l_{j3'}) + \tilde{\sigma}_{3'1'} \tilde{\sigma}_{3'2'} (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'})] d\tilde{\sigma}_{3'2'} \} ds. \quad (2.3.8) \end{aligned}$$

при $n = 5$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & \frac{1}{5} \iint_S a_{3'1' \dots 3'1'}^{(12)} \frac{1}{2} [\tilde{\sigma}_{3'1'}^5 + 2 \tilde{\sigma}_{3'1'}^3 \tilde{\sigma}_{3'2'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^4] \times \\ & \times (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'}) + (\tilde{\sigma}_{3'2'}^5 + 2 \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^3 + \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^4) \times \\ & \times (l_{i3'} l_{j2'} + l_{i2'} l_{j3'})] ds + \frac{1}{5} \iint_{S^+} 5 a_{3'1' \dots 3'1'}^{(12)} \frac{1}{2} \left\{ \int_{\tilde{\sigma}_{3'1'}^*}^{\tilde{\sigma}_{3'1'}^{\pi}} [(\tilde{\sigma}_{3'1'}^4 + \right. \\ & + \tilde{\sigma}_{3'1'}^2 \tilde{\sigma}_{3'2'}^2) (l_{i3'} l_{j1'} + l_{i1'} l_{j3'}) + (\tilde{\sigma}_{3'1'}^3 \tilde{\sigma}_{3'2'} + \tilde{\sigma}_{3'1'}^* \tilde{\sigma}_{3'2'}^3) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times (l_{i3}' l_{j2}' + l_{i2}' l_{j3}')] d\tilde{\sigma}_{3'1}' + \int_{\tilde{\sigma}_{3'2}'^*}^{\tilde{\sigma}_{3'2}'^n} [(\tilde{\sigma}_{3'2}'^4 + \tilde{\sigma}_{3'1}'^2 \tilde{\sigma}_{3'2}'^2) \times \\
 & \times (l_{i3}' l_{j2}' + l_{i2}' l_{j3}') + (\tilde{\sigma}_{3'1}' \tilde{\sigma}_{3'2}'^3 + \tilde{\sigma}_{3'1}'^3 \tilde{\sigma}_{3'2}') (l_{i3}' l_{j1}' + \\
 & + l_{i1}' l_{j3}')] d\tilde{\sigma}_{3'2}' \} ds \quad (2.3.9)
 \end{aligned}$$

Уравнения (2.3.8) и (2.3.9) в дальнейшем использованы в главе III для нахождения пластических деформаций для конкретных путей нагружения.

§ 4. Критерии догрузки.

В теории локальности деформаций для материала без выраженного предела текучести применяются следующие три варианта догрузки / 32, 44 /.

- 1) $\tilde{\sigma}_n > \tilde{\sigma}_*$;
 - 2) $\tilde{\sigma}_n d\tilde{\sigma}_n > 0$;
 - 3) $\tilde{\sigma}_n > \tilde{\sigma}_* \cos(\tilde{\sigma}_n, \tilde{\sigma}_*)$;
- (2.4.I)

где $\tilde{\sigma}_n$ - текущее значение касательного напряжения, $\tilde{\sigma}_*$ - наибольшее предыдущее значение касательного напряжения.

Если условие (2.4.I) удовлетворяется, то $\Delta \tilde{\epsilon}_{ij}^{nn} \neq 0$.
Условие (I) требует, чтобы касательные напряжения второго этапа превышали наибольшие касательные напряжения первого этапа нагружения и предполагает изотропность упрочнения по

локальной площадке. Условие (2) сопоставляет текущее значение касательного напряжения с бесконечно малым его приращением. Условие (3) учитывает как наибольшее значение касательного напряжения за всю историю нагружения, так и изменения направления вектора касательного напряжения по локальной площадке во время сложного нагружения (рис.2.4.1). Недостатком упомянутых критериев является то, что не учитывается эффект Баушингера. Эффект Баушингера учитывается в работе / 30 /, в которой А.Ф.Крегерс рассматривает деформирование материала с выраженным пределом текучести.

По условию (3) при простом нагружении на локальной площадке создается зона упрочнения материала (круг с радиусом $r = \frac{\tilde{\sigma}_*}{2}$), которая сохраняется и влияет на последующие нагружения после $\tilde{\sigma}_*$. Внутри зоны упрочнения изменение напряжения не вызывает дополнительных пластических деформаций.

На локальной площадке сдвиговые напряжения одного направления не вызывают упрочнения в перпендикулярном к себе направлении, т.е. прирост пластических деформаций наблюдается сразу после приложения касательного напряжения перпендикулярно к данному.

Для дальнейших исследований принимаем критерий (3), который после преобразований запишется в виде:

$$\tilde{\sigma}_{3'1'}^2 + \tilde{\sigma}_{3'2'}^2 > \tilde{\sigma}_{3'1'*} \tilde{\sigma}_{3'1''} + \tilde{\sigma}_{3'2'*} \tilde{\sigma}_{3'2''} \quad (2.4.2)$$

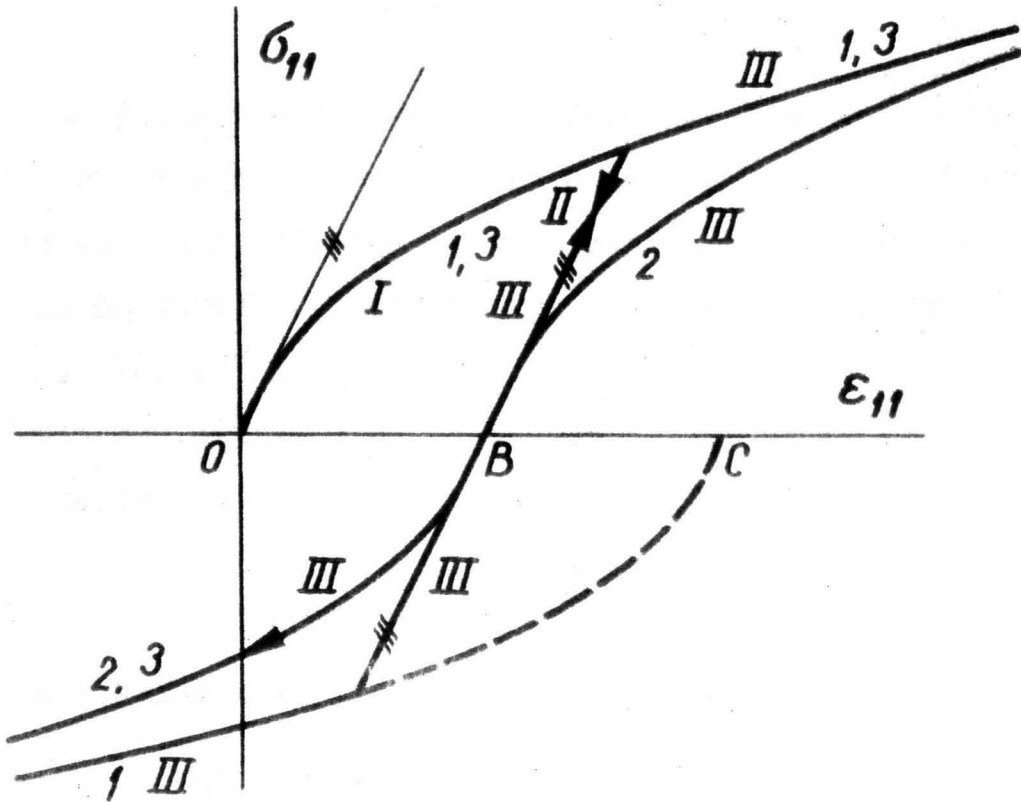


Рис. 2.3.1. Теоретические кривые деформирования при одноосном растяжении-сжатии (учитывая разные критерии догрузки 2.3.1).

Г Л А В А III

ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

§ I. Основные положения и зависимости в пятимерном пространстве.

Для расчета напряжений и деформаций в окрестности некоторой точки изотропного и однородного в исходном состоянии несжимаемого пластического материала используется специальный математический аппарат, предложенный А.А.Ильюшиным / 10, 13, 14, 15, 17 /.

Сложное напряженное состояние определяется девиатором напряжений S_{kl}

$$S_{kl} = \sigma_{kl} - \bar{\sigma} \delta_{kl} \quad (3.1.1)$$

Здесь и далее δ_{kl} обозначает символ Кронекера

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Пластические деформации характеризуются девиатором деформаций ϵ_{ij}^p

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij} - \epsilon \delta_{ij} \quad (3.1.2)$$

где

$$\epsilon = \frac{1}{3} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})$$

Так как девиаторные компоненты связаны линейными соотношениями $\sum_{k=1}^3 S_{k\ell} = 0$, $\sum_{k=1}^3 e_{ij}^p = 0$, то можно ввести 5 независимых величин S_n и $\bar{\varepsilon}_n$ ($n = 1, 2, \dots, 5$), которые рассматриваются как компоненты векторов \bar{S} , $\bar{\varepsilon}$ в пятимерном векторном пространстве.

Обозначим через x_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) компоненты девиатора напряжений $S_{k\ell}$ (деформаций e_{ij}^p) и через X_n ($n = 1, 2, \dots, 5$) компоненты вектора напряжения \bar{S}_n (деформаций $\bar{\varepsilon}_n$).

X_n и x_{ij} связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1 &= \sqrt{2} \left[x_{11} \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - x_{22} \sin\beta \right]; \\ X_2 &= \sqrt{2} \left[x_{11} \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) + x_{22} \cos\beta \right]; \\ X_3 &= \sqrt{2} x_{12}; \quad X_4 = \sqrt{2} x_{23}; \\ X_5 &= \sqrt{2} x_{31}, \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

где β - любое число, одинаковое для всех векторов напряжения и деформаций; изменение параметра β приводит к вращению \bar{X} в плоскости координатных векторов (\bar{e}_1, \bar{e}_2) в X_5 .

Принимая:

I) $\beta = 0$

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_{11}; \quad X_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x_{11} + 2x_{22});$$

(3.1.3a)

$$2) \beta = \frac{\pi}{6}$$

$$X_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (2x_{11} + x_{22}), \quad X_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} x_{22}. \quad (3.1.36)$$

В общем случае нагружения в пятимерном пространстве имеем траекторию нагружения, которую описывает конец вектора \bar{S} , и траекторию деформаций, которую описывает конец вектора $\bar{\mathcal{E}}$. Рассмотрим двумерный случай. Элементы дуг этих траекторий соответственно ds и $d\mathcal{e}$:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2} \\ d\mathcal{e} &= \sqrt{d\mathcal{E}_1^2 + d\mathcal{E}_2^2} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Модули векторов \bar{S} и $\bar{\mathcal{E}}$ с точностью до числового множителя являются соответственно результирующим касательным напряжением (интенсивностью напряжения) и сдвигом (интенсивностью деформации):

$$\begin{aligned} |S| &= \sqrt{S_1^2 + S_2^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{ij} \\ |\mathcal{E}| &= \sqrt{\mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon_{ij} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

Частный случай плоского напряженного состояния в теле, когда векторы $\bar{S} = S_1 \bar{e}_1 + S_2 \bar{e}_2$ и $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1 \bar{e}_1 + \mathcal{E}_2 \bar{e}_2$ являются двумерными (\bar{e}_1, \bar{e}_2 - единичные векторы прямоугольных осей координат), показан на рис. 3.1.1.

Основными независимыми геометрическими характеристиками траекторий нагружения и деформаций являются элементы дуг траекторий ($ds, d\mathcal{e}$) и кривизна

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\rho_{\mathcal{E}}} = \frac{d^2 \bar{\mathcal{E}}}{d\mathcal{e}^2}; \quad (3.1.6)$$

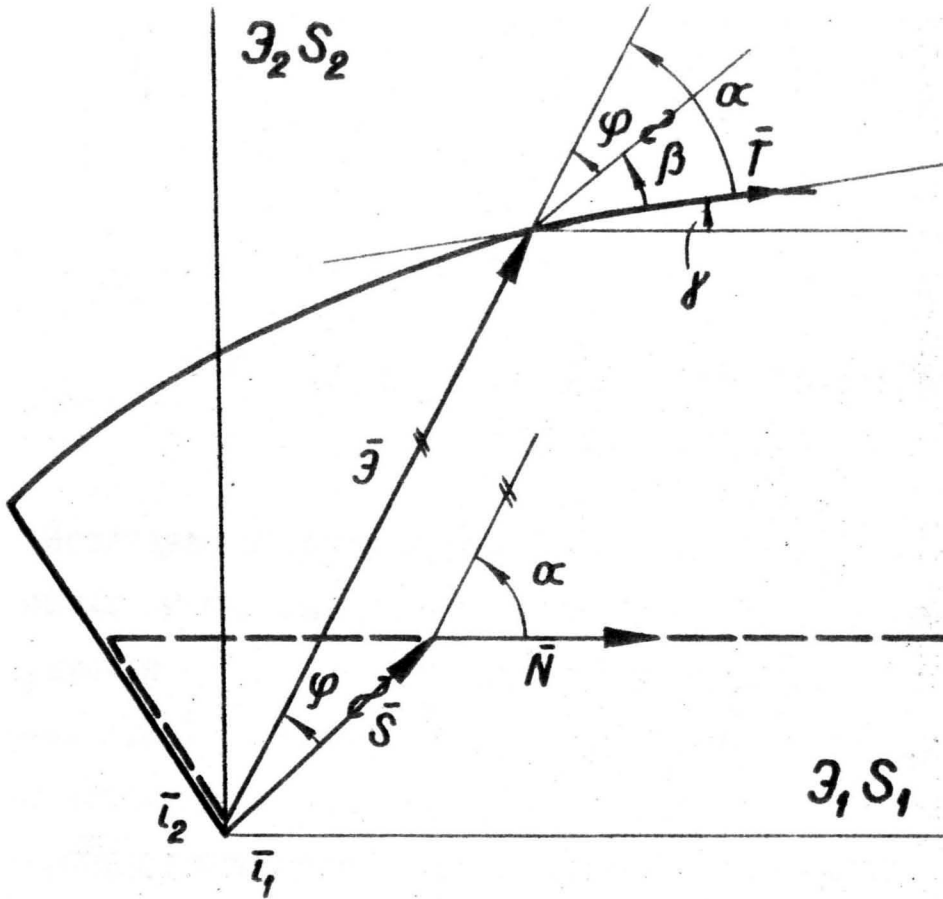


Рис. 3.1.1. Траектории деформации — и — — —
нагружения

Если за независимую переменную принять параметр нагружения (абсолютную величину отношения напряжения второго этапа к достигнутому напряжению в конце первого этапа нагружения),

то

$$\frac{1}{\rho g} = \frac{\frac{d^2 \varepsilon_1}{dk^2} \cdot \frac{d\varepsilon_2}{dk} - \frac{d\varepsilon_1}{dk} \cdot \frac{d^2 \varepsilon_2}{dk^2}}{\left[\left(\frac{d\varepsilon_2}{dk} \right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon_1}{dk} \right)^2 \right]^{3/2}} \quad (3.1.7)$$

§ 2. Совместное действие растяжения и сжатия.

Исследуем плоское напряженное состояние в случае, когда на обоих этапах нагружения совместно действуют как сжимающие напряжения $-\sigma_{11}$, так и растягивающие напряжения $\sigma_{22} / 51$, (рис. 3.2.1). Рассматриваемые пути нагружения характеризуются параметрами k_1 , k_2 , k , m и α , которые определяются в зависимости от угла излома $\delta = 180^\circ + \eta - \lambda$ (δ - угол между векторами напряжения первого и второго этапа нагружения в плоскости $-\sigma_{11}$, σ_{22} , который принимается положительным при отсчете против часовой стрелки).

В общем случае:

$$k_1 = \operatorname{tg} \eta = \left| \frac{\sigma_{ii}^*}{\sigma_{jj}^*} \right| ; \quad k_2 = \operatorname{tg} \lambda = \left| \frac{\sigma_{ii} - \sigma_{ii}^*}{\sigma_{jj} - \sigma_{jj}^*} \right|,$$

где K_1 и $K_2 = \text{const}$ для каждой истории нагружения;

$$x = \text{tg } \theta ;$$

$$K = K_I = K_{II} = \text{tg}(\eta + \theta) = \left| \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_{jj}} \right| = \frac{K_1 + x}{1 - K_1 x} ;$$

(Здесь и в дальнейшем индекс I относится к расчету по теории локальности деформаций, а индекс II - по теории малых упруго-пластических деформаций).

$$m = \frac{\sigma_{ij} - \sigma_{jj*}}{\sigma_{jj*}} = \frac{K_1 - K}{K - K_2} ,$$

где $i = 1, j = 2$ при $\delta > 0^\circ$, а $i = 2$ и $j = 1$ при $\delta < 0^\circ$.

Для степеней нелинейности $m = 3$ и $m = 5$ исследованы пути сложного нагружения со следующими значениями параметров K_1 и K_2 при $-180^\circ < \delta < 180^\circ$:

$$K_1 = 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3} ;$$

$$K_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}, \infty .$$

Всего рассмотрено 20 случаев сложного нагружения.

Определим условие догрузки, исходя из (2.4.2). Локальные касательные напряжения $\sigma_{3'\beta'}$ ($\beta = 1, 2$), зависящие от заданного тензора напряжений σ_{kk} ($k = 1, 2$), равны:

$$\sigma_{3'\beta'} = -\sigma_{11} l_{13'} l_{\beta 1'} + \sigma_{22} l_{23'} l_{\beta 2'} ;$$

$$\sigma_{3'\beta''} = -\sigma_{11} l_{15'} l_{\beta 1'} + \sigma_{22} l_{23'} l_{\beta 2'} ;$$

После преобразования (2.3.2) имеем:

$$K = K_I > - \frac{K_2 l_{13'}^2 l_{23'}^2 + l_{23'}^2 (1 - l_{23'}^2)}{K_2 l_{13'}^2 (1 - l_{13'}^2) + l_{13'}^2 l_{23'}^2} , \quad (3.2.1)$$

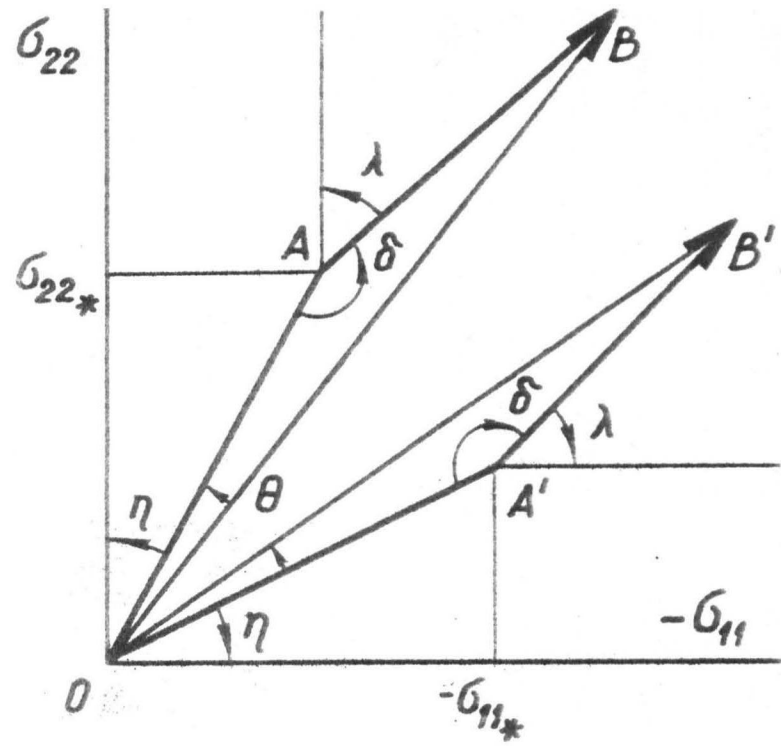


Рис. 3.2.1. Схема путей нагружения в плоскости $-\sigma_{11} \cdot \sigma_{22}$.

где K - абсолютная величина отношения напряжения второго этапа к достигнутому в конце первого этапа нагружения.

Как видно, условие (3.2.1) для данных путей нагружения удовлетворяется при любом значении K , поскольку k всегда больше 0, т.е. пластические деформации будут нарастать при всех значениях напряжений второго этапа нагружения.

После интегрирования компоненты локальной деформации $\varepsilon_{3/\beta}'$ согласно зависимостей (2.3.8) и (2.3.9) соответственно, и дальнейших преобразований (3.1.3) и (3.1.3а) получаем следующие выражения компонент вектора пластической деформации $\bar{\varepsilon}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ в пятимерном пространстве.

Для степени нелинейности $n = 3$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left\{ C_3 \left(-2 - \frac{2}{K_2} + \frac{3}{4K_2^2} \right) + C_{21} \left(-3 - \frac{9}{4K_2} + \frac{3K_1}{K_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{9K_1}{K_2^2} \right) + C_1 \left(-\frac{9K_1^2}{4K_2^2} + \frac{9K_1}{2K_2} - \frac{9}{4} \right) + C_3 \left(-K_2^2 - \frac{9}{4}K_2 - \right. \right. \\ \left. \left. - 1 \right) + C_{22} \left(3K_2^2 - 3K_1K_2 + \frac{27}{8}K_2 - \frac{27}{8}K_1 \right) + C_1 \left(-3K_2^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 6K_1K_2 - 3K_1^2 \right) \right\}; \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \left\{ C_3 \left(\frac{5}{2K_2} + \frac{5}{4K_2^2} \right) + C_{21} \left(\frac{15}{4K_2^2} - \frac{15}{4K_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{15K_1}{4K_2} + \frac{15}{4} \right) + C_1 \left(\frac{15K_1^2}{4K_2^2} - \frac{15K_1}{2K_2} + \frac{15}{4} \right) + \right. \\ \left. + C_3 \left(\frac{K_2^2}{2} + \frac{7}{4}K_2 + 3 \right) + C_{22} \left(-\frac{3}{2}K_2^2 + \frac{3}{2}K_1K_2 - \frac{27}{8}K_2 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{21}{8} K_1) + c_1 \left(\frac{3}{2} K_2^2 - 3 K_1 K_2 + \frac{3}{2} K_1^2 \right) \};$$

$$A_3 = \frac{4}{315} \overset{(8)}{a_3' \dots a_3'} \overset{3}{b_{22}^*}$$

$$C_p = K_1^p (1+m)^p - K_1^p$$

$$C_p = (m+1)^p - 1 \quad (p = 1, 2, 3)$$

Для степени нелинейности $n = 5$:

$$\begin{aligned} \partial_1 = & \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left[C_5 \left(-4 - \frac{8}{K_2} - \frac{103}{K_2^2} - \frac{63}{10K_2^3} - \frac{3}{2K_2^4} \right) + C_4 \left(\frac{10K_1}{K_2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 10 + \frac{103K_1}{K_2^2} - \frac{103}{4K_2} + \frac{189K_1}{8K_2^3} - \frac{189}{8K_2^2} + \frac{15K_1}{2K_2^4} - \frac{15}{2K_2^3} \right) + \right. \\ & \left. + C_3 \left(-\frac{103K_1^2}{6K_2^2} + \frac{103K_1}{3K_2} - \frac{103}{6} - \frac{63K_1^2}{2K_2^3} + \frac{63K_1}{K_2^2} - \frac{63}{2K_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5K_1^2}{K_2^4} - \frac{15}{K_2^2} + \frac{30K_1}{K_2^3} \right) + C_2 \left(\frac{63K_1^3}{4K_2^3} - \frac{189K_1^2}{2K_2^2} - \frac{63}{4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{189K_1}{4K_2} + \frac{15K_1^3}{K_2^4} + \frac{45K_1}{K_2^2} - \frac{45K_1^2}{K_2^3} - \frac{15}{K_2} \right) + C_1 \left(-\frac{15K_1^4}{2K_2^4} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{45K_1^2}{K_2^2} - \frac{15}{2} - \frac{30K_1^3}{K_2^3} + \frac{30K_1}{K_2} \right) + C_5 \left(-4 - \frac{73}{10} K_2^3 - \frac{101}{10} K_2^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{73}{10} K_2 \right) + C_4 \left(10K_2^4 - 10K_1 K_2^3 + \frac{219}{8} K_2^3 - \frac{421}{8} K_1 K_2 + \frac{101}{4} K_2^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{73}{8} K_2 - \frac{73}{8} K_1 \right) + C_3 \left(-20K_2^4 - 60K_1^2 K_2 + 40K_1 K_2^3 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{73}{2} K_2^3 + 73 K_1 K_2 - \frac{73}{2} K_1^2 K_2 - \frac{101}{6} K_2^2 - \frac{101}{6} K_1^2 \right) + \right. \\ & \left. + C_2 \left(20K_2^4 + 60K_1^2 K_2^2 - 60K_1 K_2^3 - 20K_1 K_2^3 - 20K_1^3 K_2 + \frac{73}{4} K_2^3 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{219}{4} K_1^2 K_2 - \frac{73}{4} K_1^3) + C_1 (-10K_2^4 - 50K_1^2 K_2^2 - 10K_1^4 + 10K_1 K_2^3 + 40K_1^3 K_2 - \frac{219}{4} K_1 K_2)] ;$$

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left[C_5 \left(\frac{33}{5K_2} + \frac{99}{2K_2^2} + \frac{15}{2K_2^3} + \frac{5}{2K_2^4} \right) + C_4 \left(-\frac{33K_1}{4K_2} + \frac{33}{4} - \frac{99K_1}{K_2^2} + \frac{99}{4K_2} - \frac{249K_1}{8K_2^3} + \frac{249}{8K_2^2} - \frac{25K_1}{2K_2^4} + \frac{15}{2K_2^3} \right) + \right.$$

$$+ C_3 \left(\frac{99K_1^2}{6K_2^2} - \frac{99K_1}{3K_2} + \frac{99}{6} + \frac{83K_1^2}{2K_2^3} - \frac{63K_1}{K_2^2} + \frac{83}{2K_2} - \frac{25K_1^2}{3K_2^4} + \frac{65}{3K_2^2} - \frac{50K_1}{K_2^3} \right) + C_2 \left(-\frac{83K_1^3}{4K_2^3} + \frac{249K_1^2}{2K_2^2} + \right.$$

$$+ \frac{83}{4} - \frac{249K_1}{4K_2} - \frac{25K_1^3}{K_2^4} - \frac{75K_1}{K_2^2} + \frac{75K_1^2}{K_2^3} + \frac{25}{K_2} \left. \right) +$$

(3.2.3)

$$+ C_1 \left(\frac{25K_1^4}{2K_2^4} + \frac{75K_1^2}{K_2^2} + \frac{25}{2} + \frac{50K_1^3}{K_2^3} - \frac{50K_1}{K_2} \right) + C_5 \left(7 + \right.$$

$$+ \frac{53}{2} K_2^3 + \frac{21}{2} K_2^2 + \frac{87}{10} K_2) + C_4 \left(-5K_2^4 + 5K_1 K_2^3 - \frac{159}{8} K_2^3 + \right.$$

$$+ \frac{369}{8} K_1 K_2 - \frac{105}{4} K_2^2 - \frac{87}{8} K_2 + \frac{87}{8} K_1) + C_3 \left(10K_2^4 + 10K_1^2 K_2^2 - \right.$$

$$- 20K_1 K_2^3 + \frac{53}{2} K_2^3 - 53 K_1 K_2 + \frac{53}{2} K_1^2 K_2 + \frac{105}{3} K_1 K_2 +$$

$$+ \frac{105}{6} K_2^2 + \frac{105}{6} K_1^2 + C_2 \left(-10K_2^4 - 30K_1^2 K_2^2 + 30K_1 K_2^3 + \right.$$

$$+ 10K_1^3 K_2 - \frac{53}{4} K_2^3 - \frac{159}{4} K_1^2 K_2 + \frac{53}{4} K_1^3) + C_1 \left(5K_2^4 + \right.$$

$$+ 25 K_1^2 K_2^2 + 5K_1^4 - 5K_1 K_2^3 - 20 K_1^3 K_2 + \frac{159}{4} K_1 K_2) \left. \right] ;$$

где $A_5 = \frac{4}{3003} a_{3'1'}^{(12)} \dots a_{3'1'} \tilde{b}_{22}^5$

$$C_p = K_I^p (1+m)^p - K_I^p$$

$$C_p = (1+m)^p - 1 \quad (p = 1, 2, 3, 4, 5)$$

При простом (лучеобразном) нагружении пластического материала или при нагружении нелинейно упругого материала по любому пути нагружения до той же точки в плоскости нагружений - \tilde{b}_{11} , \tilde{b}_{22} (рис. 3.2.1) имеем следующие выражения для компонент вектора $\tilde{\varepsilon} \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$ для $n = 3$:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 (m+1)^3 (-2K_I^3 - 3K_I^2 - 3K_I - 1); \quad (3.2.4)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 (m+1)^3 (3K_I^2 + 3K_I + 3);$$

для $n = 5$

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 (m+1)^5 \left(-4K_I^5 - 10K_I^4 - \frac{88}{5}K_I^3 - \frac{82}{5}K_I^2 - \frac{44}{5}K_I - 2 \right); \quad (3.2.5)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 (m+1)^5 \left(\frac{38}{5}K_I^4 + \frac{46}{5}K_I^3 + \frac{94}{5}K_I^2 + \frac{56}{5}K_I + 6 \right);$$

Разница между модулями деформаций (3.1.5) при простом и сложном нагружении (рассмотрен случай, когда угол излома $\delta = 90^\circ$) $\Delta|\varepsilon| = |\varepsilon|_{\text{ср}} - |\varepsilon|_{\text{сл}}$ показывает, что $\Delta|\varepsilon|$ постепенно растет с увеличением напряжения второго этапа нагружения, а относительное отношение модулей $R = \frac{\Delta|\varepsilon|}{|\varepsilon|_{\text{ср}}} \cdot 100\%$, достигнув максимума при $K_I = 1$ ($R = 1.49\%$) для $n = 3$ и при $K_I = 0.5$

($R = 0.89\%$) для $n = 5$, асимптотически стремится к нулю (рис. 3.2.2).

Согласно теории малых упруго-пластических деформаций

$$e_{ij}^p = \frac{3 \varepsilon_i}{2 \bar{\sigma}_i} s_{kl} \quad (3.2.6)$$

где e_{ij}^p и s_{kl} - девиаторы деформаций и напряжений соответственно

$$\begin{aligned} s_{11} &= \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{22*} (m+1) (-1-2k); \\ s_{22} &= \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{22*} (m+1) (2+k); \\ s_{33} &= \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{22*} (m+1) (-1+k); \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Интенсивность пластической деформации задаем как функцию от интенсивности напряжений:

$$\varepsilon_i = \beta_n \bar{\sigma}_i^n \quad (3.2.8)$$

Если материал следует закону обобщенных напряжений и деформаций, то, как показано в работе / 7 /,

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 0.0254 \quad a_{3'1' \dots 3'1'}^{(8)} \\ \beta_5 &= 0.00533 \quad a_{3'1' \dots 3'1'}^{(12)} \end{aligned}$$

Интенсивность напряжений (1.2.7) после преобразований имеет вид:

$$\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{22*} (m+1) \sqrt{k_{\bar{\sigma}}^2 + k_{\bar{\sigma}} + 1} \quad (3.2.9)$$

Так как закон несжимаемости остается в силе, т.е. объемная деформация предполагается упругой, то $\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^e$ и выражение (3.2.6) преобразуется следующим образом:

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2\nu} B_n \tilde{\sigma}_i^{n-1} S_{kl} \quad (3.2.10)$$

Преобразуя полученные значения тензора полной пластической деформации ϵ_{ij}^p , по формулам (3.1.3) и (3.1.3а) получаем значения компонент вектора деформаций:

для $\nu = 3$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \tilde{\sigma}_{22*}^3 B_3 (m+1)^3 \left(-K_{II}^3 - \frac{3}{2} K_{II}^2 - \frac{3}{2} K_{II} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.2.11)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\sigma}_{22*}^3 B_3 (m+1)^3 \left(\frac{3}{2} K_{II}^2 + \frac{3}{2} K_{II} + \frac{3}{2} \right);$$

для $\nu = 5$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} B_5 \tilde{\sigma}_{22*}^5 (m+1)^5 \left(-K_{II}^5 - \frac{5}{2} K_{II}^4 - 4K_{II}^3 - \frac{7}{2} K_{II}^2 - 2K_{II} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.2.12)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} B_5 \tilde{\sigma}_{22*}^5 (m+1)^5 \left(\frac{3}{2} K_{II}^4 + 3K_{II}^3 + \frac{9}{2} K_{II}^2 + 3K_{II} + \frac{3}{2} \right)$$

Численные значения модулей векторов деформаций по теории локальности деформаций (при сложном и простом нагружении) и по теории малых упруго-пластических деформаций при $K_I = 0$, $K_{II} = \infty$ и $\nu = 5$ представлены в таблице 3.2.1.

Таблица 3.2.1

$K_I = K_{II}$	$ \partial _{I_{cl}}$	$ \partial _{I_{np}}$	$ \partial _{II}$
0	4,899	4,899	4,901
0,1	6,386	6,395	6,361
0,2	8,51	8,545	8,391
0,3	11,473	11,549	11,164
0,5	20,924	21,112	19,855
1,0	82,597	83,156	76,396
2,0	674,155	675,595	635,35
3,0	3102,9	3105,3	2986,3

где $|\partial|_{I_{cl}}$, $|\partial|_{I_{np}}$, $|\partial|_{II}$ - модули векторов деформаций по теории локальности деформаций при сложном и простом нагружении и по теории малых упруго-пластических деформаций соответственно.

Значения компонент вектора напряжений $\bar{S} \{S_1, S_2\}$ (3.1.3) и (3.1.3а) в зависимости от заданного параметра нагружения κ и напряженного состояния в плоскости напряжения - $\tilde{\sigma}_{11}$, $\tilde{\sigma}_{22}$ запишутся в виде:

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_{22\kappa} (m+1) (2\kappa+1)$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\sigma}_{22\kappa} (m+1) \quad (3.2.13)$$

Траектории деформации и нагружения при степени нелинейности $n = 3$ и $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = \infty$ представлены на рис.3.2.3.

Численные результаты компонент векторов $\bar{\mathcal{E}}$ и $\bar{\mathcal{S}}$ по теории локальности деформации при $n = 3$, $\kappa_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\kappa_2 = \sqrt{3}$ даны в таблице 3.2.2.

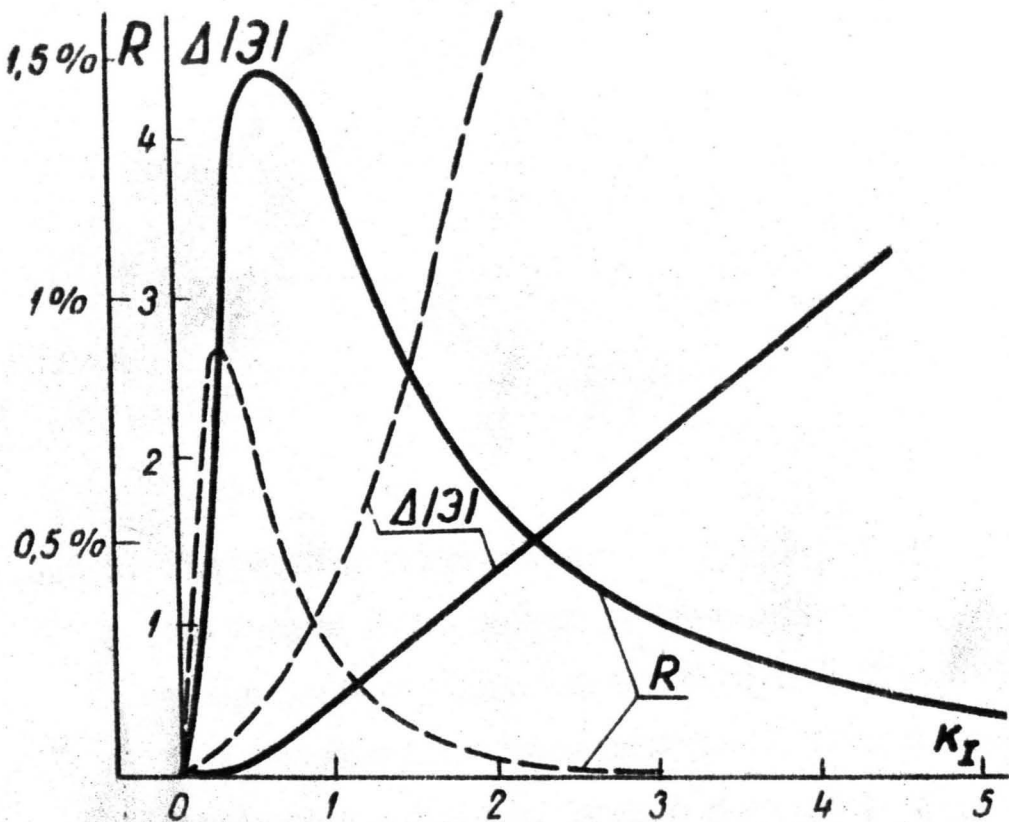


Рис.3.2.2. Диаграмма различия между $|\mathcal{E}|$ при простом и сложном нагружении (растяжение с последующим сжатием). Кривые $\Delta|\mathcal{E}|(\kappa)$ и $R(\kappa)$ построены при $A_3 = 1$ для $n = 3$ — и $A_5 = 1$ для $n = 5$. - - -

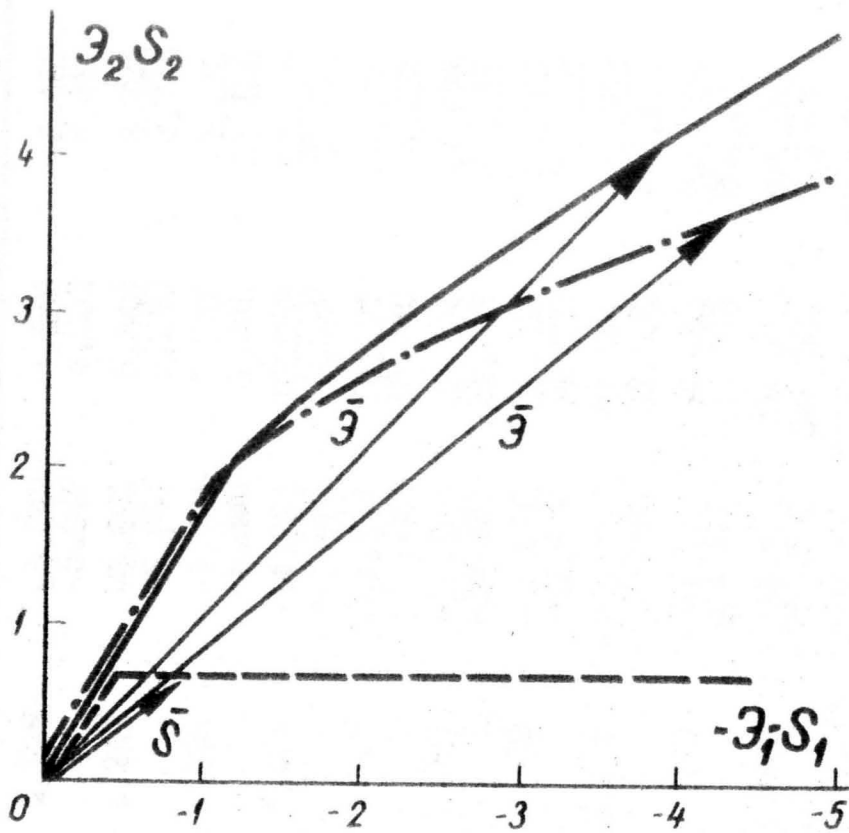


Рис.3.2.3. Траектории нагружения --- и деформации — по теории локальности деформаций, - · - по теории малых упруго-пластических деформаций при растяжении с последующим сжатием в поперечном направлении. Кривые построены при $A_3 = 1$, $\sigma'_{22} = 1$, $\nu = 3$.

Таблица 3.2.2

x	k_T	S_1	S_2	$ S $	$\partial_1 c_1$ $\partial_1 c_2$	$\partial_2 c_1$ $\partial_2 c_2$	$ \partial c_1 $ $ \partial c_2 $	$\Delta \partial $	R
0	0,577	-0,880	0,707	1,129	-5,042 -5,042	4,053 4,053	6,469 6,469	0 -	0 -
0,05	0,646	-0,905	0,752	1,247	-6,892 -6,961	5,349 5,260	8,724 8,725	- 0,001	- 0,010
0,1	0,719	-1,134	0,805	1,391	-9,721 -9,880	7,231 7,020	12,116 12,120	0,004	0,034
0,15	0,796	-1,306	0,571	1,571	-14,224 -14,501	10,072 9,688	17,429 17,440	0,011	0,063
0,2	0,879	-1,524	0,597	1,799	-21,753 -22,195	14,577 13,940	26,186 26,209	0,023	0,089
0,25	0,961	-1,807	1,067	2,099	-35,160 -35,837	22,184 21,157	41,573 41,617	0,043	0,105
0,3	1,061	-2,194	1,217	2,509	-61,096 -62,137	36,132 34,450	70,981 71,058	0,077	0,108
0,35	1,162	-2,751	1,433	3,101	-117,353 -118,999	64,794 62,000	134,052 134,183	0,131	0,097
0,4	1,271	-3,620	1,770	4,030	-261,718 -264,512	134,433 129,359	294,225 294,449	0,224	0,075
0,45	1,388	-5,173	2,373	5,691	-748,494 -753,936	356,533 345,839	829,072 829,472	0,401	0,048
0,5	1,514	-8,753	3,754	9,506	-3537,006 -3551,426	1557,761 1526,691	3864,845 3865,67	0,825	0,021
0,55	1,651	-25,312	10,187	27,285	-84689,98 -84799,52	34390,68 34127,32	91406,3 91409,15	2,849	0,003

§ 3. Последовательное двухосное растяжение

Одним из наиболее характерных процессов сложного нагружения является последовательное двухосное растяжение / 52/. Схема пути нагружения показана на рис. 3.3.1.

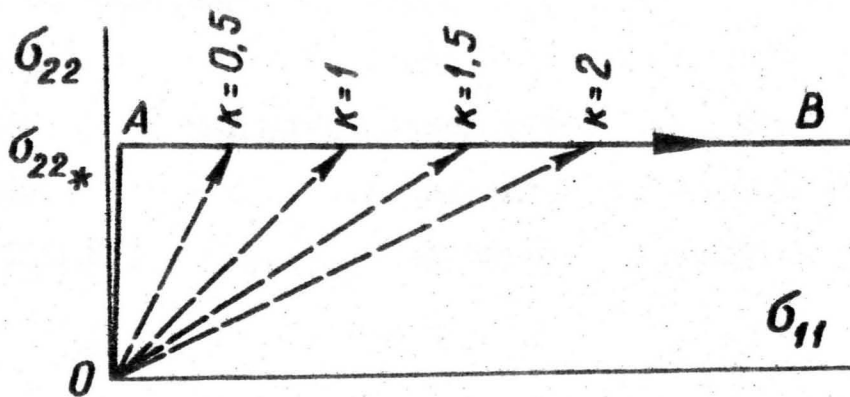


Рис.3.3.1. Последовательное двухосное растяжение

- путь сложного нагружения
- путь простого нагружения.

На первом этапе действует только растягивающее напряжение в продольном направлении, возрастающее от 0 до $\sigma_{22*} = const$. На втором этапе нагружения при $\sigma_{22} = \sigma_{22*}$ начинает возрастать растягивающее напряжение σ_{11} в поперечном направлении.

Локальные касательные напряжения равны:

$$\tilde{\sigma}'_{z'\beta'} = \sigma_{22*} l_{23}' l_{2\beta}'$$

$$\tilde{\sigma}'_{z'\beta'} = \sigma_{11} l_{13}' l_{1\beta}' + \sigma_{22*} l_{23}' l_{2\beta}' \quad (\beta = 1, 2)$$

После преобразования условия догрузки (2.4.2) имеем:

$$K \equiv \left| \frac{\tilde{\sigma}_{11}}{\tilde{\sigma}_{22*}} \right| > \frac{\tilde{\nu}_{23}'^2}{1 - \tilde{\nu}_{13}'^2} = \cos^2 \varphi \quad (3.3.1)$$

В пределах одного квадранта изменение угла φ в зависимости от заданного параметра нагружения k определяется неравенством $\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq \varphi_1$, где $\varphi_1 = \arccos \sqrt{k}$ и $0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$.

При $k \geq 1$ догрузка происходит по всей сфере и φ_1 не меняется ($\varphi_1 = 0$). Пределы интегрирования в выражениях (2.3.8) и (2.3.9) по сфере S равны:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= 0; \quad \varphi_1 = \arccos \sqrt{k}; \quad \tilde{\sigma}_{11*} = \tilde{\sigma}_{22*} \cos^2 \varphi; \\ \Theta_2 &= \pi; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \quad \tilde{\sigma}_{11*} = \tilde{\sigma}_{11}; \end{aligned}$$

После интегрирования выражений (2.3.8) для $n = 3$ и (2.3.9) для $n = 5$ и преобразования полученных компонент тензора полной пластической деформации по формулам (3.1.3) и (3.1.3а) получаем следующие выражения для вектора деформаций $\tilde{\varepsilon} \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \}$:

для $n = 3$

при $k < 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left[2k^3 - 3k^2 + \frac{9}{4}k - \frac{13}{8} + \frac{9}{\pi} (-4k^3 + 6k^2 - \frac{9}{2}k + \frac{5}{4}) + \frac{1}{\pi} \sqrt{k - k^2} \left(\frac{11}{3}k^2 - \frac{11}{3}k + \frac{5}{4} \right) \right]; \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\frac{2}{2}} A_3 \left[\frac{15}{4}k^2 - \frac{15}{4}k + \frac{267}{64} + \frac{9}{\pi} \left(-\frac{15}{2}k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{75}{32} \right) + \frac{1}{\pi} \sqrt{k - k^2} \left(\frac{5}{2}k^3 - \frac{15}{4}k^2 + \frac{95}{16}k - \frac{75}{32} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

при $k \geq I$

$$\mathcal{Z}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left(2k^3 - 3k^2 + \frac{9}{4}k - \frac{13}{8} \right); \quad (3.3.3)$$

$$\mathcal{Z}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \left(\frac{15}{4}k^2 - \frac{15}{4}k + \frac{267}{64} \right);$$

для $n = 5$

при $k < I$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 = & \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left[4k^5 - 10k^4 + \frac{103}{6}k^3 - \frac{63}{4}k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{83}{24} + \right. \\ & + \frac{\varphi}{\pi} \left(-8k^5 + 20k^4 - \frac{103}{3}k^3 + \frac{63}{2}k^2 - 15k + \frac{35}{12} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \left(10k^4 - 20k^3 + \frac{415}{18}k^2 - \frac{235}{18}k + \frac{35}{12} \right) \right]; \quad (3.3.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 = & \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left[\frac{33}{4}k^4 - \frac{33}{2}k^3 + \frac{83}{4}k^2 - \frac{25}{2}k + \right. \\ & + \frac{13661}{1536} + \frac{\varphi}{\pi} \left(-\frac{33}{2}k^4 + 33k^3 - \frac{83}{2}k^2 + 25k - \frac{4445}{768} \right) + \\ & + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \left(-\frac{14}{9}k^5 + \frac{35}{9}k^4 + \frac{769}{48}k^3 - \frac{8041}{288}k^2 + \right. \\ & \left. + \frac{24355}{1152}k - \frac{4445}{768} \right) \right]; \end{aligned}$$

при $k \geq I$

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 = & \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left(4k^5 - 10k^4 + \frac{103}{6}k^3 - \frac{63}{4}k^2 + \right. \\ & \left. + \frac{15}{2}k - \frac{83}{24} \right); \quad (3.3.5) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left(\frac{33}{4} k^4 - \frac{33}{2} k^3 + \frac{83}{4} k^2 - \frac{25}{2} k + \frac{13661}{1536} \right)$$

где коэффициенты

$$A_3 = \frac{4}{315} a_{31}^{(1)} \dots a_{31}^{(1)} \tilde{b}_{22}^3$$

$$A_5 = \frac{4}{3003} a_{31}^{(12)} \dots a_{31}^{(12)} \tilde{b}_{22}^5$$

Если нагружаем пластический материал по лучеобразному пути (простое нагружение) или нелинейно-упругий материал по любому пути нагружения до той же самой точки напряженного состояния в плоскости \tilde{b}_{11} , \tilde{b}_{22} , которая характеризуется параметром нагружения k и \tilde{b}_{22}^* , то деформации определяются по зависимости простого нагружения:

для $n = 3$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_3 (2k^3 - 3k^2 + 3k - 1); \quad (3.3.6)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 (3k^3 - 3k + 3);$$

для $n = 5$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_5 \left(4k^5 - 10k^4 + \frac{88}{5} k^3 - \frac{82}{5} k^2 + \frac{44}{5} k - 2 \right); \quad (3.3.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left(\frac{38}{5} k^4 - \frac{76}{5} k^3 + \frac{94}{5} k^2 - \frac{56}{5} k + 6 \right);$$

Рассматривая зависимость модуля деформации $|\varepsilon|$ (3.1.5) от пути нагружения при одном и том же напряженном состоянии,

находим, что

$$\Delta|\partial| = |\partial|_{np} - |\partial|_{ст} = \begin{cases} \leq 0 & \text{при } k \leq c \\ > 0 & \text{при } k > c \end{cases}$$

$$R = \frac{\Delta|\partial|}{|\partial|_{np}} \cdot 100\% = \begin{cases} \leq 0 & \text{при } k \leq c \\ > 0 & \text{при } k > c \end{cases}$$

где $c = 1,298$ при $n = 5$, $c = 1,325$ при $n = 3$. Графически это представлено на рис. 3.3.2. Кривые пересекают ось k в точке $k = c$.

Относительное отношение модулей R достигает минимума при $k = 0,5$ ($R = -56,55\%$ для $n = 3$ и $R = -90,87\%$ для $n = 5$). Пересекая ось k , график $R(k)$ достигает максимума $R = 7,36\%$ при $k = 2$ и $n = 3$, $R = 3,66\%$ при $k = 1,5$ и $n = 5$, после чего асимптотически стремится к нулю.

Выражения компонент вектора напряжений $\bar{S} \{s_1, s_2\}$ при данном пути нагружения после преобразования (3.1.3) и (3.1.3а) принимает вид:

$$s_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} (2k-1) b_{22*} \quad (3.3.8)$$

$$s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} b_{22*} = const$$

Траектории вектора деформаций $\bar{\varepsilon}$ и вектора напряжений \bar{S} в пятимерном пространстве представлены на рис. 3.3.3.

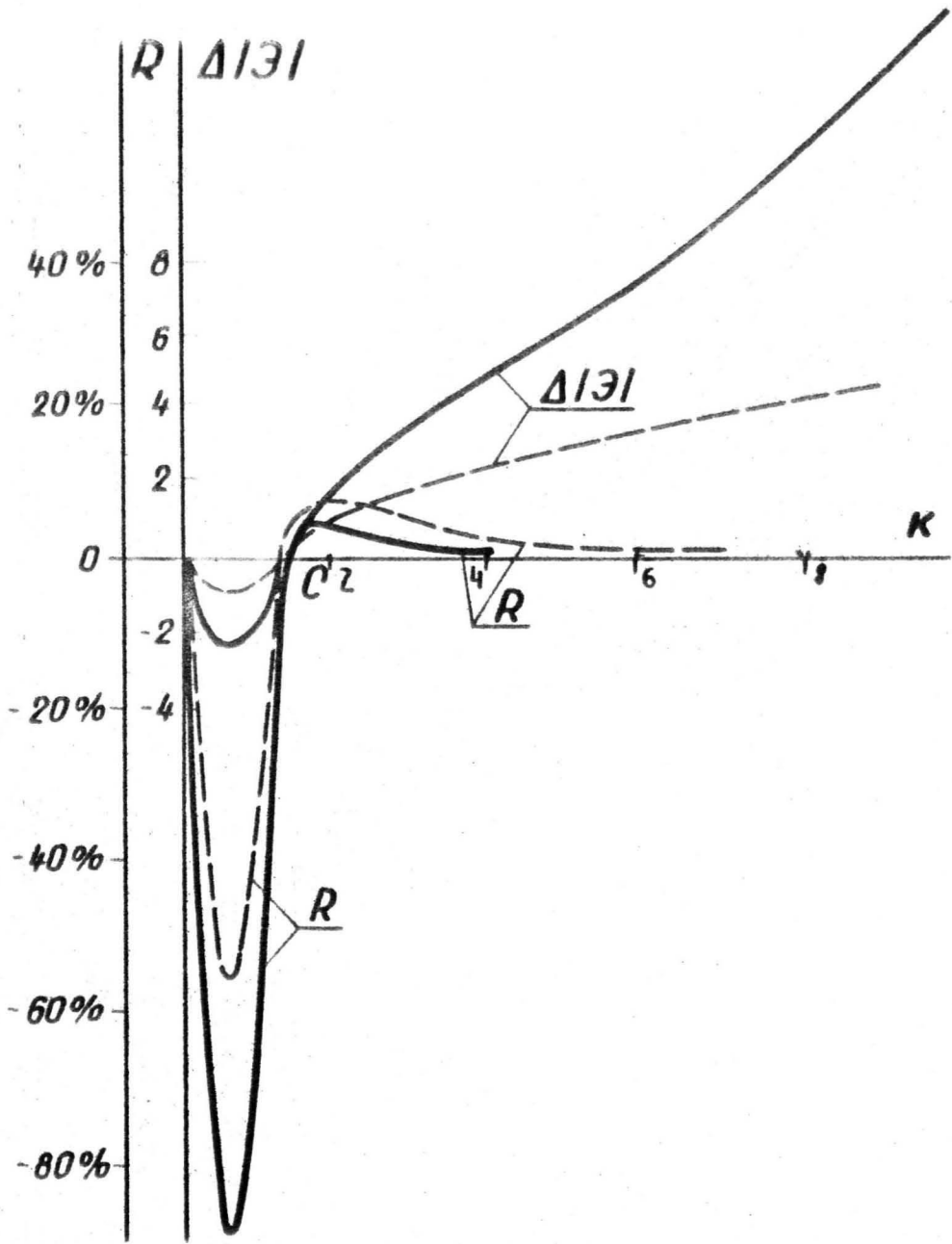


Рис.3.3.2. Диаграмма различия между $|\varepsilon|$ при простом и сложном нагружении. Кривые $\Delta|\varepsilon|(\kappa)$ и $R(\kappa)$ построены при $A_3 = 1$ для $n = 3$ ---
 $A_5 = 1$ для $n = 5$ —

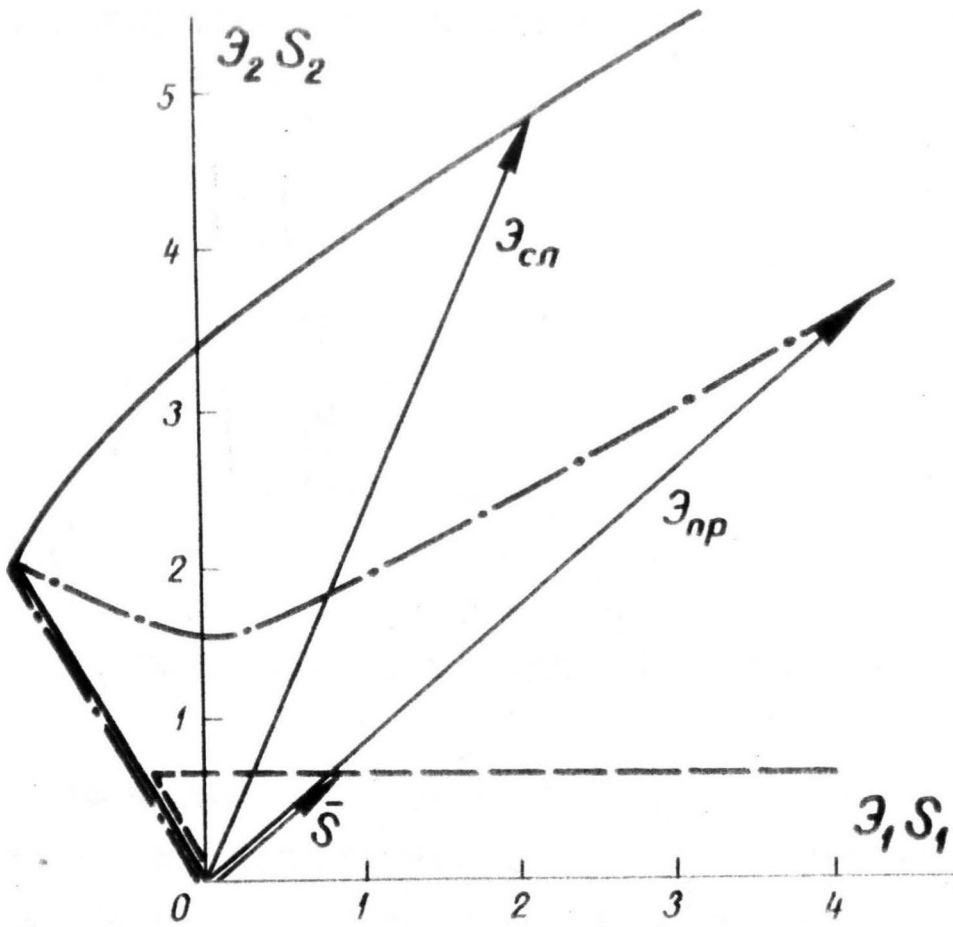


Рис. 3.3.3. Траектории нагружения — — — и деформаций — (сложное нагружение) — · — (простое нагружение) построены при $\tilde{\sigma}_{22x} = I, A_3 = I$.

§ 4. Последовательно-лучеобразные пути нагружения.

Рассмотрим сложное нагружение, путь которого в пространстве напряжений имеет последовательно-лучеобразный характер / 53 / (рис. 3.4.I).

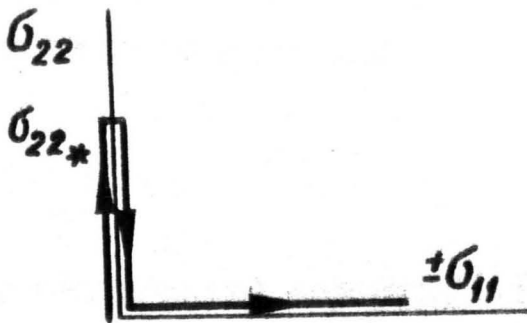


Рис. 3.4.I. Путь нагружения в плоскости $\sigma_{22}, \pm \sigma_{11}$

На первом этапе производится простое нагружение (растяжение) в продольном направлении, равномерно возрастающее от 0 до фиксированного σ_{22*} с последующей полной разгрузкой на втором этапе, после чего на третьем этапе к образцу прилагается растяжение σ_{11} или сжатие $-\sigma_{11}$ в поперечном направлении, т.е. на третьем этапе нагружения начинаем испытывать ненапряженный образец, обладающий определенной деформативной анизотропией, полученной на предыдущих этапах нагружения.

I) Растяжение с последующей разгрузкой и растяжением.

Локальные касательные напряжения равны:

$$\sigma_{z'\beta'}^{\text{I}} = \sigma_{22*} v_{23}' v_{2\beta}';$$

$$\sigma_{z'\beta'}^{\text{II}} = 0$$

$$\sigma_{z'\beta'}^{\text{III}} = \sigma_{11} v_{13}' v_{1\beta}' \quad (\beta = 1, 2)$$

Условие догрузки (2.4.2) для третьего этапа нагружения после преобразования принимает вид:

$$k > - \frac{v_{23}'^2}{1 - v_{13}'^2} \quad (3.4.1)$$

т.е. прирост пластической деформации произойдет при всех значениях напряжения третьего этапа нагружения ($\sigma^+ = \sigma$ и $\sigma_{11*} = 0$).

После интегрирования (2.3.8) и (2.3.9) и преобразования получаем следующие зависимости компонент вектора $\bar{\epsilon} \{ \epsilon_1, \epsilon_2 \}$

для $n = 3$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 (2k^3 - 1); \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} 3 A_3; \quad (3.4.2)$$

для $n = 5$

$$\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 (4k^5 - 1); \quad \epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} 6 A_5; \quad (3.4.3)$$

где

$$A_3 = \frac{4}{315} \sigma_{z'1'}^{(8)} \dots z'1' \sigma_{22*}^3$$

$$\Lambda_5 = \frac{4}{3003} a_{3'1'}^{(12)} \dots 3'1' \tilde{b}_{22*}^5$$

Компоненты вектора напряжения $\bar{S} \{S_1, S_2\}$ равны:

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} \tilde{b}_{22*} \kappa ; \quad S_2 = 0 \quad (3.4.4)$$

Траектории деформации нагружения показаны на рис. 3.4.2.

2) Растяжение с последующей разгрузкой и сжатием.

Локальные касательные напряжения равны:

$$\tilde{\sigma}_{3'\beta_*} = \tilde{\sigma}_{22*} v_{23'} v_{2\beta'} ; \quad \tilde{\sigma}_{3'\beta_{II}} = 0 ;$$

$$\tilde{\sigma}_{3'\beta_{III}} = -\tilde{\sigma}_{11} v_{13'} v_{1\beta'} ;$$

Условие догрузки для данной задачи запишется в виде:

$$\kappa > \frac{v_{23'}^2}{1 - v_{13'}^2} = \cos^2 \varphi \quad (3.4.5)$$

Пределы интегрирования по сфере S для выражения (2.3.8) и (2.3.9) равны:

$$\theta_1 = 0 ; \quad \varphi_1 = \arccos \sqrt{\kappa} ; \quad \tilde{\sigma}_{11_1} = \tilde{\sigma}_{22*} \cos^2 \varphi$$

$$\theta_2 = \pi ; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} ; \quad \tilde{\sigma}_{11_2} = \tilde{\sigma}_{11}$$

Принтегрируя, получаем следующие зависимости для компонент вектора деформаций:

для $n = 3$

при $k < 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left[-2k^3 - \frac{3}{8} + \frac{\varphi_1}{\pi} \left(4k^3 - \frac{5}{4} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \left(-\frac{2}{3} k^2 - \frac{5}{6} k - \frac{5}{4} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \left[\frac{81}{32} + \frac{15}{16} \frac{\varphi_1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \left(-3k^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} k^2 + \frac{5}{8} k + \frac{15}{16} \right) \right]; \end{aligned}$$

При $k \geq 1$ догрузка происходит по всей сфере ($\varphi_1 = 0$), и соответствующие выражения компонент вектора деформаций принимают следующий вид:

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left(-2k^3 - \frac{3}{8} \right); \quad (3.4.7)$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \frac{81}{32};$$

для $n = 5$

при $k < 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left[-4k^5 - \frac{65}{4} + \frac{\varphi_1}{\pi} \left(8k^5 - \frac{63}{32} \right) + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \times \right. \\ \left. \times \left(-\frac{4}{5} k^4 - \frac{9}{10} k^3 - \frac{21}{20} k^2 - \frac{21}{16} k - \frac{63}{32} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left[\frac{663}{128} + \frac{105}{64} \frac{\varphi_1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sqrt{k-k^2} \left(-\frac{20}{3} k^5 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{3} k^4 + \frac{3}{4} k^3 + \frac{7}{8} k^2 + \frac{35}{32} k + \frac{105}{64} \right) \right]; \end{aligned}$$

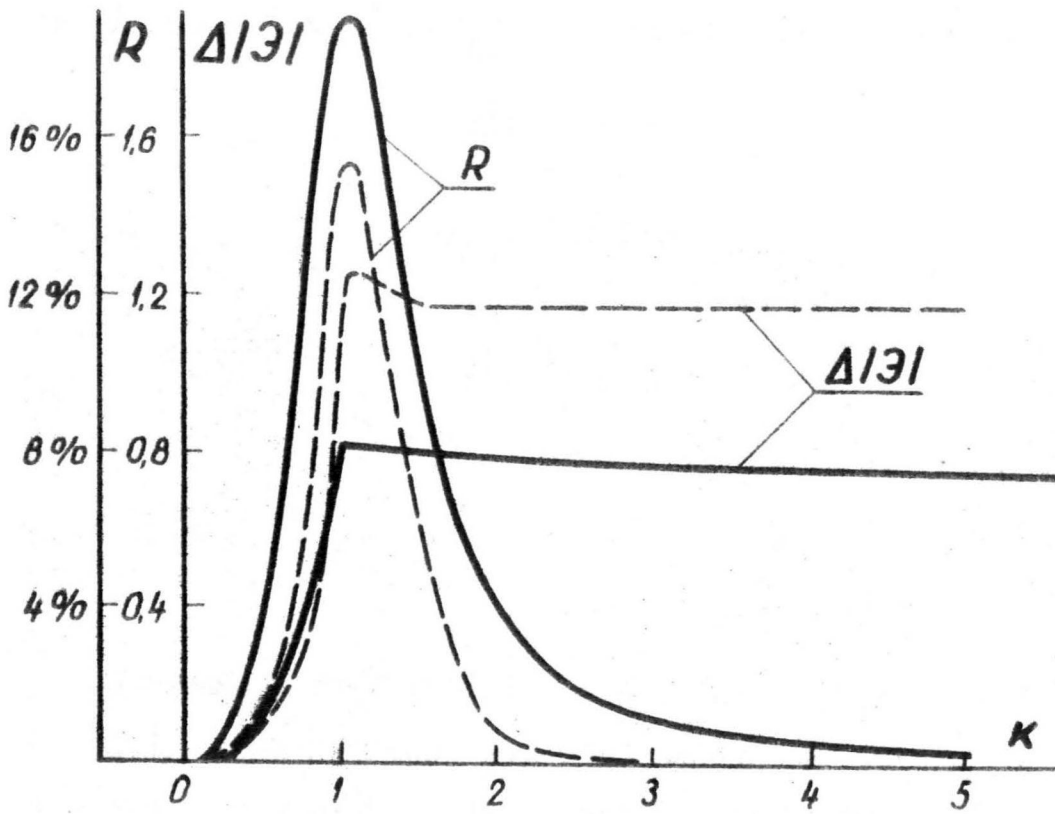


Рис. 3.4.3. Диаграмма различия между $|Э|$
Кривые $\Delta|Э|(\kappa)$ и $R(\kappa)$ построены при $A_3 = I$
для $n = 3$ — и $A_5 = I$ для $n = 5$.---

при $\kappa \geq 1$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left(-4\kappa^5 - \frac{65}{64} \right); \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \cdot \frac{663}{128}; \quad (3.4.9)$$

Допустим, что деформации рассчитываются без учета зон разгрузки. В таком случае получаем следующие выражения для \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 :

для $n = 3$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 (-2\kappa^3 - 1); \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \cdot 3; \quad (3.4.10)$$

для $n = 5$

$$\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 (-4\kappa^5 - 2); \quad \mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \cdot 6; \quad (3.4.11)$$

Сравнение выражений (3.4.2) и (3.4.10), (3.4.3) и (3.4.11) показывает, что компоненты деформации \mathcal{E}_2 при растяжении и сжатии на третьем этапе одинаковы.

Кривые на рис. 3.4.3 показывают, что модуль деформации $|\mathcal{E}|_{сн}$ с учетом сложного нагружения (3.4.6), (3.4.7), (3.4.8), (3.4.9) меньше модуля $|\mathcal{E}|_{чр}$, найденного из (3.4.10), (3.4.11), т.е.

$$\Delta|\mathcal{E}| = |\mathcal{E}|_{сн} - |\mathcal{E}|_{чр} > 0; \quad R = \frac{\Delta|\mathcal{E}|}{|\mathcal{E}|_{чр}} \cdot 100\% > 0$$

Разница между модулями $\Delta|\mathcal{E}|$ на третьем этапе нагружения постепенно растет с увеличением напряжения $-\sigma_{11}$ и дости-

гает максимума при $\kappa = 1$, $\Delta|\beta| = 0,8273$ и $R = 19,5\%$ в случае $n = 3$ и $\Delta|\beta| = 1,333$ и $R = 15,714\%$ в случае $n = 5$, после чего кривые $\Delta|\beta|(\kappa)$ и $R(\kappa)$ приобретают убывающий характер. Траектории деформации и нагружения показаны на рис. 3.4.2.

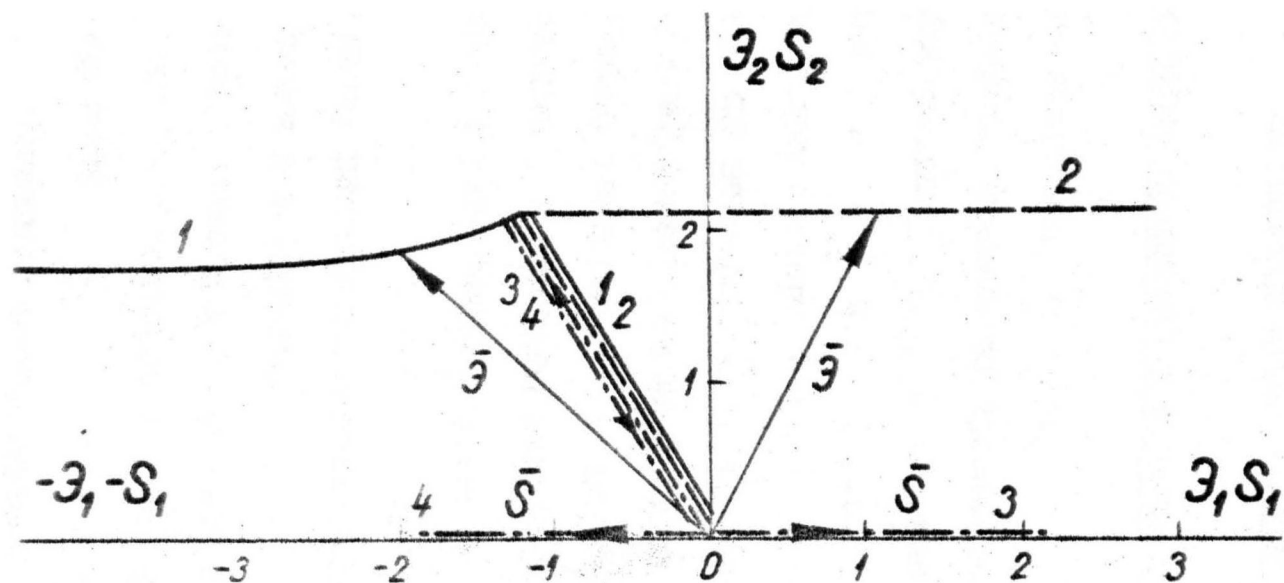


Рис.3.4.2. Траектории деформаций 1, 2 и нагружения 3, 4 соответственно для растяжения с последующей разгрузкой и растяжением и для растяжения с последующей разгрузкой и сжатием. Кривые построены при $A_3 = I$ и $\tilde{\sigma}_{2,2^*} = I$, $n = 3$

Г Л А В А IV

ХАРАКТЕРНЫЕ УГЛЫ И ДЛИНА СЛЕДА ЗАПАЗДЫВАНИЯ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§ I. Основные положения и зависимости.

Связь между векторами $\bar{\varepsilon}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ и $\bar{s}\{s_1, s_2\}$ и единичными векторами касательных траекторий нагружения $\bar{N}\{N_1, N_2\}$ и деформации $\bar{T}\{T_1, T_2\}$ выражают так называемые характерные углы α , β , γ и φ (рис. 3.1.1). Рассмотрим частный случай, когда векторы $\bar{\varepsilon}$ и \bar{s} являются двумерными.

- α - угол между вектором \bar{N} , касательным к траектории нагружения, и вектором деформации $\bar{\varepsilon}$;
- β - угол между вектором \bar{T} , касательным к траектории деформации, и вектором нагружения \bar{s} , который в процессе нагружения характеризует след запаздывания;
- γ - угол между векторами, касательными к траекториям нагружения и деформации;
- φ - угол между векторами напряжения и деформации.

Компоненты единичных векторов касательных соответственно к траектории нагружения $\bar{N}\{N_1, N_2\}$ и к траектории деформации $\bar{T}\{T_1, T_2\}$ выражаются соотношениями

$$N_1 = \frac{ds_1}{ds} ; \quad N_2 = \frac{ds_2}{ds} ; \quad (4.1.1)$$

$$T_1 = \frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} ; \quad T_2 = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon} ;$$

где ds , $d\varepsilon$ - элементы дуги траектории нагружения и деформации, соответственно. \bar{T} и \bar{N} образуют пару ортогональных координат векторов, положения которых относительно положения их в некоторой точке кривой зависят только от внутренних геометрических свойств траектории.

Упомянутые углы определяются как углы между двумя векторами и принимаются положительными при отсчете против часовой стрелки:

$$\cos \alpha = \frac{ds_1 \varepsilon_1 + ds_2 \varepsilon_2}{\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} ;$$

$$\cos \beta = \frac{d\varepsilon_1 s_1 + d\varepsilon_2 s_2}{\sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2} \sqrt{s_1^2 + s_2^2}} ;$$

(4.1.2)

$$\cos \nu = \frac{ds_1 d\varepsilon_1 + ds_2 d\varepsilon_2}{\sqrt{ds_1^2 + ds_2^2} \sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2}} ;$$

$$\cos \varphi = \frac{s_1 \varepsilon_1 + s_2 \varepsilon_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}} ;$$

Из рис. 3.1.1. видно, что между углами α , β , ν и φ имеется следующая зависимость:

$$\alpha = \beta + \nu + \varphi$$

(4.1.3)

Свойство запаздывания / 14 / состоит в следующем: отклонение вектора напряжений \bar{S} от касательной к траектории де-

формации зависит не от всей траектории деформации, а только от ее последнего участка h , называемого следом (рис.4.1.1).

Для оценки следа запаздывания целесообразно ввести некоторый допуск на величину угла β , который можно считать несущественным, чтобы принять, что векторы \bar{s} и \bar{T} совпадают. Условимся считать, что след запаздывания исчерпан, когда $\beta \leq 1^\circ$. И.М.Коровин / 28 / считает, что векторы \bar{s} и \bar{T} совпадают, если $\cos\beta \leq 0,1$, т.е. $\beta \leq 5^\circ$.

Длина следа запаздывания в зависимости от параметра нагружения κ выражается следующим соотношением:

$$h = \int_{\kappa_1}^{\kappa_*} \sqrt{\left(\frac{d\varepsilon_1}{d\kappa}\right)^2 + \left(\frac{d\varepsilon_2}{d\kappa}\right)^2} d\kappa \quad (4.1.4)$$

где κ_* - параметр нагружения κ при $\beta = 1^\circ$.

Если на длине следа h кривизна $\alpha < \frac{1}{h}$, то в конце следа вектор напряжений \bar{s} совпадает с касательной \bar{T} .

§ 2. Влияние истории нагружения на характерные углы и длину следа запаздывания.

Характерные углы определяем для частных видов сложного нагружения: совместное действие растяжения и сжатия, последовательное двухосное растяжение, продольное растяжение с последующей разгрузкой и поперечным растяжением (сжатием).

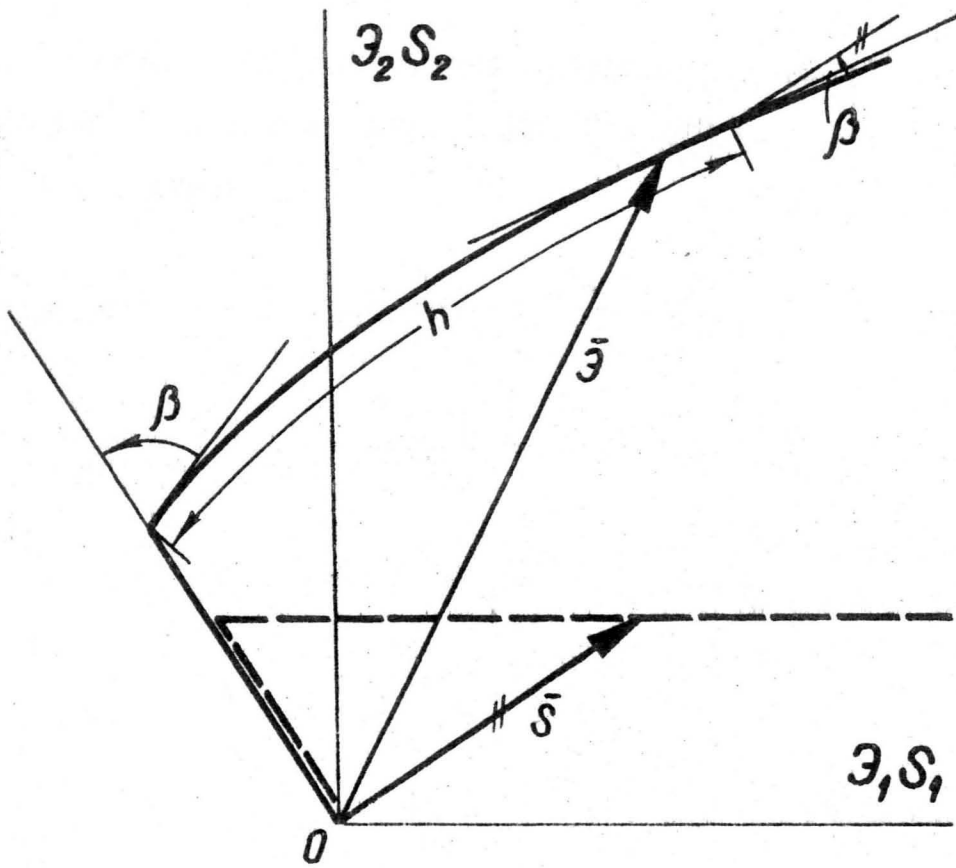


Рис. 4.1.1. Графическое изображение длины следа за-
ванна. - - - нагрузка; — деформиро-
вание.

Компоненты векторов деформаций и напряжения упомянутых путей даны в главе II. Для расчета характерных углов в зависимости от прироста \varkappa параметра нагружения K требуется найти приращения компонент деформаций и напряжения.

А. Совместное действие растяжения и сжатия.

Схема путей нагружения представлена на рис.3.2.1. По теории локальности деформаций для степени нелинейности $n = 3$ имеем:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_1 = & \sqrt{\frac{3}{2}} f_3(1+m) \left\{ \left(1 - \frac{K_I}{K_I - K_{II}}\right) \left[3K_I^2(1+m^2) \left(-2 - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{K_{II}} - \frac{3}{4K_{II}^2}\right) + 2K(1+m) \left(-3 - \frac{9}{4K_{II}} + \frac{3K_1}{K_{II}} + \frac{9K_1}{4K_{II}^2}\right) - \right. \\
 & \left. - \frac{9}{4} \left(1 - \frac{K_1}{K_{II}}\right)^2 - m(K_I + K_{II}m - K_1 + \frac{27}{8} + \frac{9}{4}m) \right] + \\
 & + [K_1(1+m) - K_1] \left[-2m + \frac{\frac{27}{8} + \frac{9}{2}m + 2K_{II}m}{K_I - K_{II}} \right] - \\
 & \left. - \frac{1+2m}{K_I - K_{II}} \left(-3K_I K_1 - \frac{27}{8} K_1 - 3\right) - 3K_1 m + \frac{3m^2 + \frac{27}{8} K_1}{K_I - K_{II}} \right\} dK_I \quad (4.2.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_2 = & \frac{\sqrt{2}}{2} f_3(1+m) \left\{ \left(1 - \frac{K_I}{K_I - K_{II}}\right) \left[\frac{15}{4} K_I^2(1+m^2) \left(\frac{2}{K_{II}} + \frac{1}{K_{II}^2}\right) + \right. \right. \\
 & + \frac{15}{2} K_I(1+m) \left(-\frac{K_1}{K_{II}^2} - \frac{K_1}{K_{II}} + \frac{1}{K_{II}} + 1\right) + \frac{15}{4} \left(1 - \frac{K_1}{K_{II}}\right)^2 + \\
 & \left. + m \left(\frac{1}{2} K_I + \frac{1}{2} K_{II} m - \frac{1}{2} K_1 + \frac{21}{8} + \frac{7}{4} m\right) \right] + [K_1(1+m) - K_1] \varkappa
 \end{aligned}$$

$$\times \left[m + \frac{-\frac{21}{8} - \frac{7}{2}m - K_{\Gamma} m}{K_{\Gamma} - K_{2}} \right] - \frac{1+2m}{K_{\Gamma} - K_{2}} \left(\frac{3}{2} K_{\Gamma} K_1 + \frac{21}{8} K_1 + \right. \\ \left. + 9 \right) + \frac{3}{2} K_1 m - \frac{\frac{21}{8} K_1 + 9m^2}{K_{\Gamma} - K_{2}} \} dK_{\Gamma};$$

Для $n = 5$ рассмотрен частный случай - продольное растяжение с поперечным сжатием, т.е. $K_1 = 0, K_2 = \infty$

$$d\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left(-20K_{\Gamma}^4 - 40K_{\Gamma}^3 - \frac{103}{2} K_{\Gamma}^2 - \frac{63}{2} K_{\Gamma} - \frac{15}{2} \right) dK_{\Gamma}; \quad (4.2.2)$$

$$d\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left(33K_{\Gamma}^3 + \frac{99}{2} K_{\Gamma}^2 + \frac{83}{2} K_{\Gamma} + \frac{25}{2} \right) dK_{\Gamma};$$

При простом лучеобразном нагружении ($n = 5$)

$$d\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left(-20K_{\Gamma}^4 - 40K_{\Gamma}^3 - \frac{264}{5} K_{\Gamma}^2 - \frac{164}{5} K_{\Gamma} - \frac{44}{5} \right) dK_{\Gamma}; \quad (4.2.3)$$

$$d\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left(\frac{152}{5} K_{\Gamma}^3 + \frac{228}{5} K_{\Gamma}^2 + \frac{188}{5} K_{\Gamma} + \frac{56}{5} \right) dK_{\Gamma}$$

По теории малых упруго-пластических деформаций ($n = 3$)

$$d\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} B_3 (m+1)^3 \left[-\frac{3}{K_{\Gamma} - K_2} \left(K_{\Gamma}^3 - \frac{3}{2} K_{\Gamma}^2 - \frac{3}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left(-3K_{\Gamma}^2 - 3K_{\Gamma} - \frac{3}{2} \right) \right] dK_{\Gamma}; \quad (4.2.4)$$

$$d\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} B_3 (m+1)^3 \left[-\frac{3}{K_{\Gamma} - K_2} \left(\frac{3}{2} K_{\Gamma}^2 + \frac{3}{2} K_{\Gamma} + \frac{3}{2} \right) + \right. \\ \left. + 3K_{\Gamma} + \frac{3}{2} \right] dK_{\Gamma};$$

Приращения компонент вектора напряжений запишутся в следующем виде:

$$d\mathcal{S}_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{3} b_{22x} (m+1) \left(-\frac{2K+1}{K-K_2} + 2 \right) dK; \quad (4.2.5)$$

$$d\mathcal{E}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\sigma}_{22} + \frac{m+1}{k-k_2} dk;$$

Подставляя полученные значения компонент вектора деформации \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 и вектора напряжений \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 и их приращений в выражения (4.1.2), получаем значения углов α , β , γ и φ в зависимости от прироста x параметра нагружения k .

Численные значения угла α от прироста x параметра нагружения k при угле излома $\sigma = 90^\circ$ даны в таблице 4.2.1.

Таблица 4.2.1

x	α_I	α_{II}	α_I	α_I
	$n = 3$	$n = 3$	$n = 5$ (сл.н.)	$n = 5$ (пр.н.)
I	2	3	4	5
0	60°	60°	60°	60°
0,1	57°28'	55°17'	55°52'	54°05'
0,5	43°3'	40°53'	42°34'	38°43'
1	36°19'	30°	33°13'	30°
1,5	28°52'	23°25'	27°28'	24°55'
2	23°43'	19°06'	23°21'	21°17'
2,5	20°3'	16°6'	20°15'	18°31'
3	17°20'	13°54'	17°50'	16°20'
4	13°36'	10°53'	14°19'	13°08'
5	11°11'	8°57'	11°56'	10°58'
6	9°29'	7°36'	10°12'	9°43'
7	8°14'	6°35'	8°54'	8°11'
8	7°16'	5°49'	7°54'	7°16'
9	6°31'	5°12'	7°5'	6°31'

I	1	2	3	4	5
10		5°54'	4°43'	6°25'	5°56'
15		4°	3°12'	4°23'	4°02'
20		3°1'	2°25'	3°19'	3°03'
25		2°26'	1°57'	2°40'	2°28'

Здесь и в дальнейшем индекс I относится к расчету по теории локальности деформации, а индекс II - по теории малых упруго-пластических деформаций.

Как видно из таблицы, при степени нелинейности $n = 3$:

$$\alpha_I(x) = \alpha_{II}(x) \quad \text{при } x = 0$$

$$\alpha_I(x) > \alpha_{II}(x) \quad \text{при } x > 0$$

При $n = 5$ угол $\alpha_I(x)$ больше при расчете с учетом сложного нагружения, а меньше - без учета сложного нагружения, т.е.

$$\alpha_I(x) = \alpha_{Iкр}(x) \quad \text{при } x = 0$$

$$\alpha_I(x) > \alpha_{Iкр}(x) \quad \text{при } x > 0$$

Угол β , характеризующий след запаздывания, рассмотрим подробнее. На рис. 4.2.1 представлена зависимость угла β от прироста параметра нагружения k для частного случая, когда угол излома $\sigma = 90^\circ$ ($k_1 = 0, k_2 = \infty$). Рассчитывая по теории локальности деформаций, при $x = k_I = 0$ для $n = 3$ и $n = 5$ $\beta = 16^\circ 6'$. При степени нелинейности $n = 5$ кривая $\beta(k_I)$ пересекает ось k_I в точке $k_I = 1,79$, достигает минимума $\beta = -0^\circ 45'$ и быстрее стремится к оси k_I , чем при $n = 3$.

Исследуем выражение (4.2.3), т.е. приращения деформации при простом лучеобразном нагружении, при определенных значениях параметра нагружения κ_{Γ} . При $\kappa_{\Gamma} = 0$ $\beta = 23^{\circ}41'$ и кривая $\beta(\kappa_{\Gamma})$ очень быстро стремится к оси κ_{Γ} , а при $\kappa_{\Gamma} = 2,5$ $\beta = 1^{\circ}$.

Если характер действующих напряжений в обоих случаях одинаков, то для угла β имеем $\beta(\kappa_{\Gamma}) = \beta(\kappa_{\Gamma})$.

Используя соотношение $\kappa_{\Pi} = 2\kappa_{\Gamma} + 0,5$, которое наблюдается при $\kappa_1 = 0$ и $\kappa_2 = \infty$, находим связь между κ_{Γ} и κ_{Π} в общем виде при любом κ_1 и κ_2 :

$$\kappa_{\Pi} = \frac{\kappa_2 [-2\kappa_{\Gamma}(\kappa_1 - \kappa_2) - 0,5 \sin^2 \lambda (\kappa_{\Gamma} - \kappa_2)]}{(\kappa_1 - \kappa_2)(-\kappa_2 - \kappa_{\Gamma}) - 0,5 \sin^2 \lambda (\kappa_{\Gamma} - \kappa_2)}, \quad (4.2.6)$$

причем для рассмотренных значений параметра нагружения справедливо соотношение:

$$|\kappa_{\Pi ф} - \kappa_{\Pi}| \leq 0,01,$$

где $\kappa_{\Pi ф}$ - фактический параметр нагружения по теории малых упруго-пластических деформаций при данном β .

При одинаковых углах излома $|\delta|$ кривые $|\beta(x)|$ почти совпадают - максимальная абсолютная разница не превышает $0^{\circ}40'$ между кривыми семейства $|\beta_{\Gamma}(x)|$ и $1^{\circ}20'$ между кривыми семейства $|\beta_{\Pi}(x)|$. Поэтому можно считать, что каждое из семейств кривых изображается одной кривой. Графическое изображение средней зависимости угла β от прироста x при разных углах излома $|\delta|$ представлено на рис. 4.2.2, где q - число рассмотренных путей нагружения при данном угле

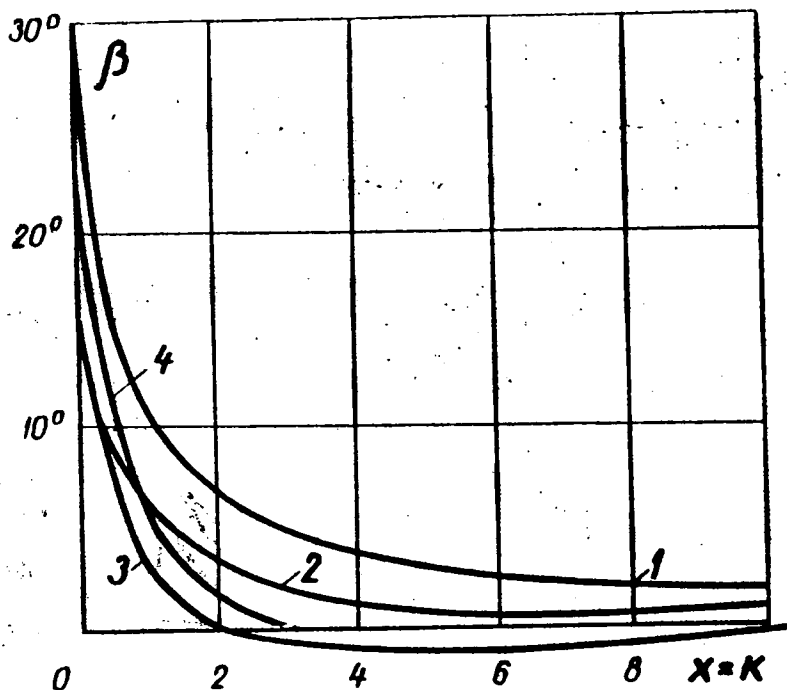


Рис. 4.2.1 Зависимость угла β от параметра нагружения χ при $\kappa_1 = 0$; $\kappa_2 = \infty$; 1 - по теории малых упруго-пластических деформаций. 2, 3, 4 - по теории локальности деформаций, 2 - при $n = 3$, 3 при $n = 5$, 4 при $n = 5$ (простое нагружение).

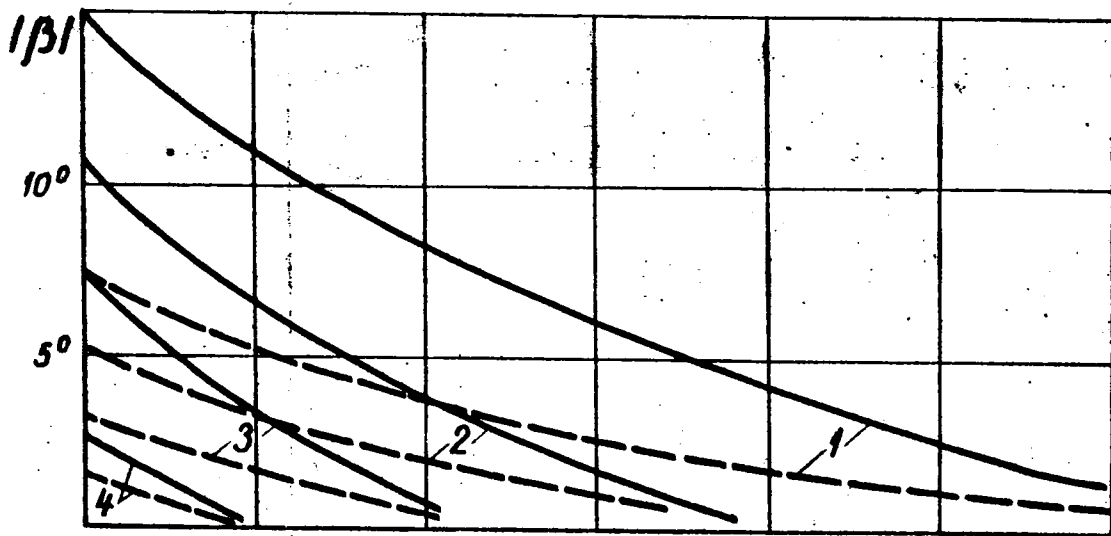


Рис. 4.2.2. Средняя зависимость угла β от параметра нагружения χ . $|\delta| = 120^\circ$ (1); 135° (2); 150° (3); 165° (4). $q = 4$ (1, 2, 4); 6 (3).

δ . Как видно из рис. 4.2.2., чем больше абсолютная величина угла излома δ , тем меньше угол $|\beta|$ и тем быстрее $|\beta(x)|$ стремится к оси x . Для конкретных путей нагружения при степени нелинейности $n = 3$ $|\beta_I(x)| < |\beta_{II}(x)|$

Кривые $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma'(x)$, убывая, стремятся к нулю, тогда как $\gamma_I(x)$, достигнув максимума (как видно из рис. 4.2.3), тоже стремится к нулю, а $\gamma_{II}(x) = 0$.

Если рассчитать деформации для конкретных x как при простом лучеобразном нагружении для степени нелинейности $n = 3$, то $\gamma_{II}(x) = 0$ для всех рассмотренных случаев, т.е. вектор деформации $\bar{\epsilon}$ совпадает с вектором напряжения $\bar{\sigma}$. Для степени нелинейности $n = 5$ $\gamma_I(x)$ имеет следующий характер: достигнув максимума $2^{\circ}26'$ при $x = 0,4$ убывает и при $x = 1$ $\gamma_I(x) = 0$. Потом $\gamma_I(x)$ медленно растет, достигает максимума $2^{\circ}26'$ при $x = 3$, и медленно стремится к оси x (рис. 4.2.4). По всей вероятности это может быть объяснено влиянием третьего инварианта девиатора напряжений. При одинаковых углах излома $|\delta|$ максимальная абсолютная разница между кривыми семейств $|\gamma_I(x)|$ не превышает $0^{\circ}35'$, поэтому считаем, что каждое из семейств кривых изображается одной кривой (рис. 4.2.3).

Во всех рассмотренных случаях в силе остается основная зависимость между углами (4.1.3) (как с индексом I, так и с индексом II):

Численные результаты зависимости углов $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\delta|$ в точках излома от угла $|\delta|$ представлены на рис. 4.2.5. При

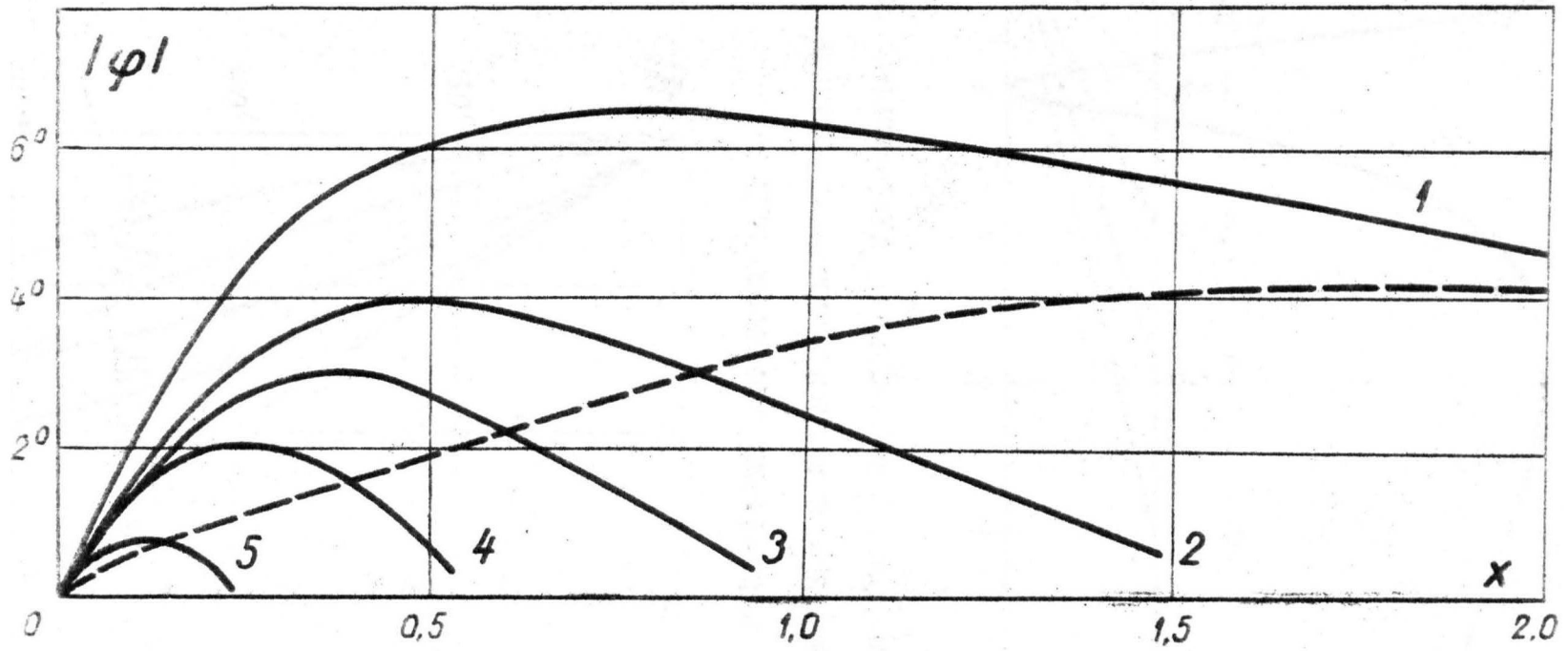


Рис. 4.2.3. Средняя зависимость угла $|\varphi_T|$ от прироста x параметра нагружения κ
 — (при $n = 3$); при $n = 5$ - - - ; $|\sigma| = 90^\circ$ (1); 120° (2);
 135° (3); 150° (4); 165° (5); $q = 2$ (1); 4 (2,3,5); 6 (4).

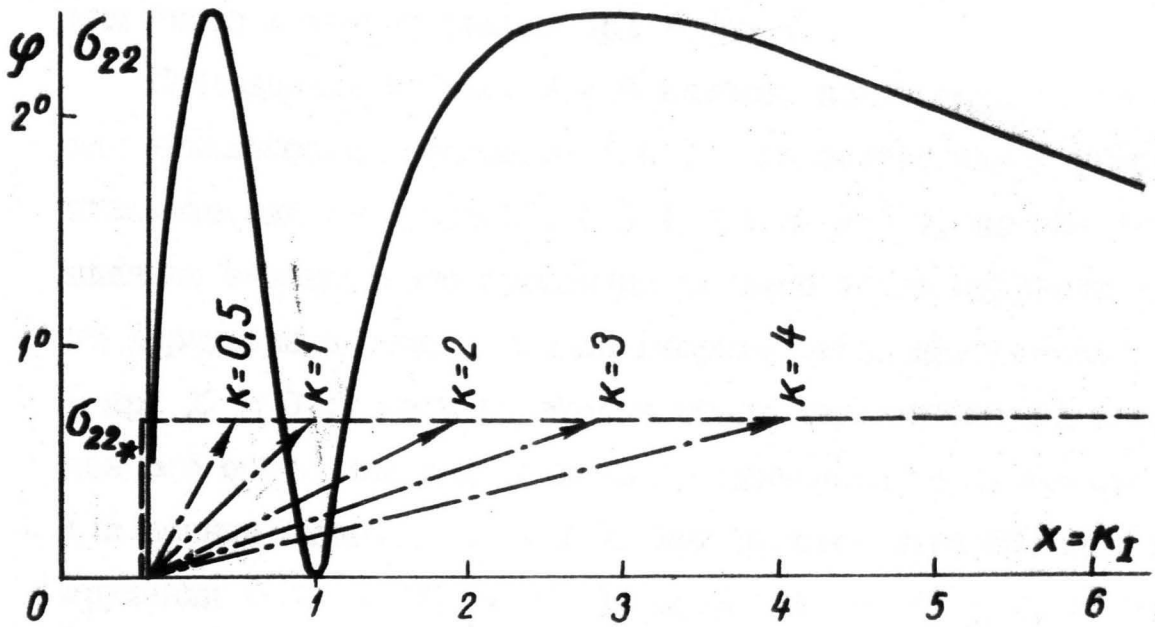


Рис. 4.2.4. Зависимость угла φ — от $\kappa_I = x$ при простом нагружении — — — для степени нелинейности $n = 5$
 — — — путь сложного нагружения.

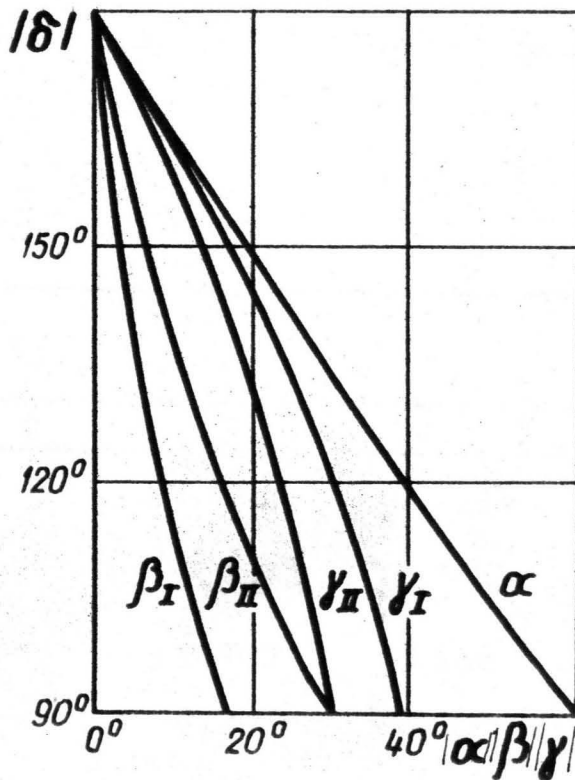


Рис. 4.2.5. Зависимость углов α, β, γ в точках излома от угла излома δ .

ПОМОЩИ ЭТИХ ГРАФИКОВ МОЖНО ОПРЕДЕЛИТЬ МАКСИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ УГЛОВ В ТОЧКАХ ИЗЛОМА ПРИ ЛЮБОМ ν .

Приведенные на рис. 4.2.6 кривые, полученные по теории локальности деформаций (а) и по теории малых упруго-пластических деформаций (б) (при $\nu = 3$), показывают влияние напряженного состояния первого этапа нагружения на характерные углы в начале второго этапа нагружения (при $\chi = 0$), если на втором этапе характеристика напряженного состояния для всех K_1 одинакова, т.е. $K_2 = \text{const}$ (в данном случае $K_2 = 1$). При простом лучеобразном нагружении ($K_1 = K_2 = K$), $\alpha = \beta = \nu = 0$. Из рис. 4.2.6 видно, что имеется зеркальное отражение углов α, β, ν относительно биссектрисы первого квадранта.

Для конкретных путей нагружения в точках излома (при $\chi = 0$) имеем:

$$\alpha_I(x) = \alpha_{II}(x); \quad \beta_I(x) < \beta_{II}(x); \quad \nu_I(x) > \nu_{II}(x)$$

Таблица 4.2.2

K_1	K_2	K_I^*	H_I	K_{II}^*	H_{II}
I	2	3	4	5	6
0	∞	7,769	17,856	16,038	141,336
$\frac{1}{3}$	∞	7,769	11,564	16,038	91,765
I	∞	7,769	6,266	16,038	49,922
$\frac{1}{3}$	∞	7,769	2,182	16,038	17,617

1	2	3	4	5	6
0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,373	1,272	0,469	10,262
0	1	0,693	3,411	0,834	27,165
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	0,693	0,115	0,834	1,281
0	$\sqrt{3}$	1,186	6,741	1,427	53,492
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1,186	1,25	1,427	10,247
1	$\sqrt{3}$	1,186	0,124	1,427	1,371
1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,843	0,124	0,701	1,371
$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0,843	1,25	0,701	10,237
$\sqrt{3}$	1	1,443	0,115	1,2	1,281

Подставляя полученные значения приращений компонент вектора деформации в выражении (4.1.4), получаем длину следа запаздывания в зависимости от параметра нагружения K .

Численные значения длины следа запаздывания при совместном действии растяжения и сжатия для степени нелинейности $n = 3$ при разных углах излома β представлены в таблице 4.2.2., где H_L и H_T - длина следа запаздывания по теории локальности деформаций и по теории малых упруго-пластических деформаций, соответственно; K_{Lx} и K_{Tx} - параметр нагружения, при котором $\beta = 1^\circ$. Для расчета длины следа за-

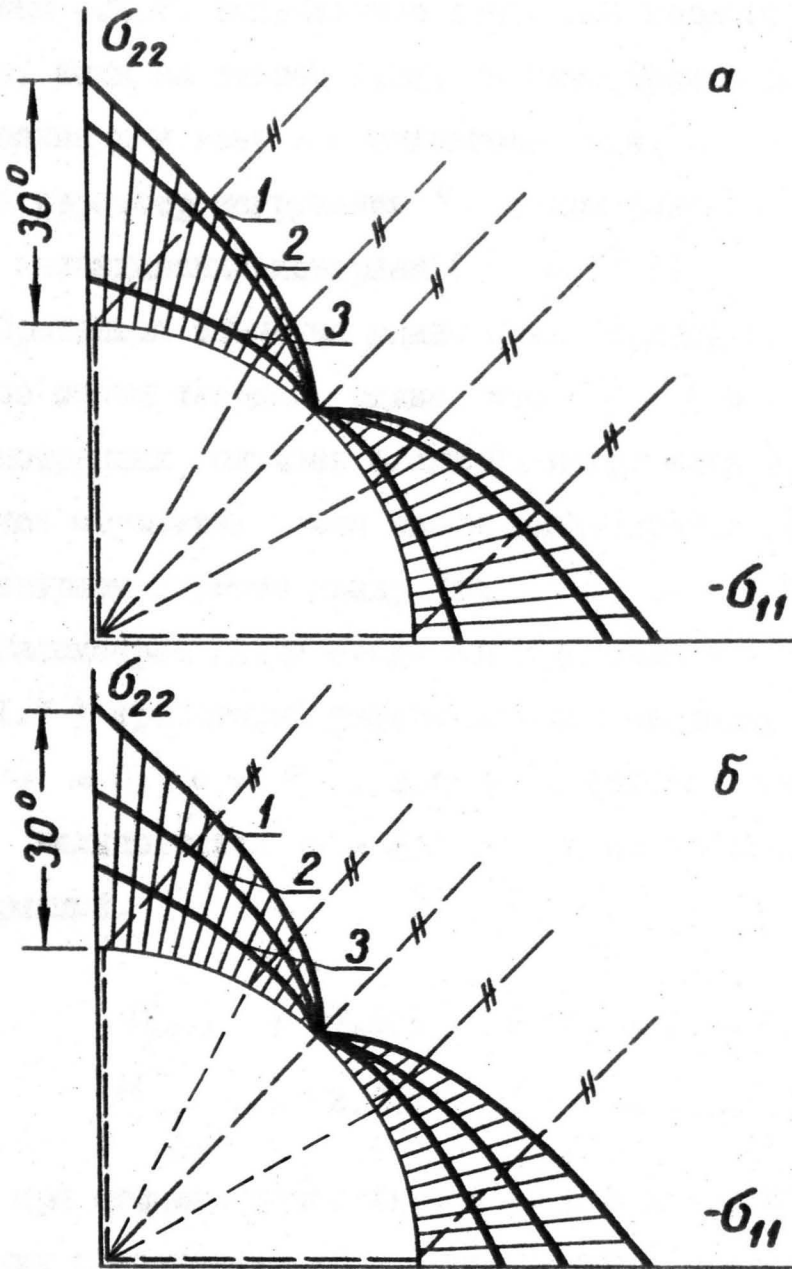


Рис. 4.2.6. Влияние напряжения на первом этапе нагружения на углы α (1), β (3) γ (2) в начале второго этапа нагружения. — — — пути нагружения.

наздывания принято, что $\bar{b}_x = \sqrt{\bar{b}_{11x}^2 + \bar{b}_{22x}^2}$. Как видно из таблицы 4.2.2, напряженное состояние первого этапа нагружения, если на втором этапе характеристика напряженного состояния для всех K_1 одинакова, т.е. $K_2 = \cos \delta$, не влияет на параметр нагружения K_x , при котором считаем, что след запаздывания исчерпан ($\rho = 1^0$).

Сравнивая значения длины следа запаздывания, полученные по обеим теориям, видно, что $H_{II} = (8 + II) H_I$ (для рассмотренных случаев сложного нагружения). Имеется зеркальное отражение длины следа запаздывания относительно биссектрисы первого квадранта.

Рассмотрим длину следа запаздывания и кривизну \mathcal{K}_g (3.1.7) траекторий деформаций для частного случая, когда $K_1 = 0$, $K_2 = \sigma$, т.е. угол излома $\delta = 90^0$ при степени нелинейности $n = 3$ и $n = 5$ по теории локальности деформаций.

$$H_{I, n=3} = 17,856 \quad (K_x = 7,769)$$

$$H_{I, n=5} = 2,203 \quad (K_x = 1,324).$$

т.е. при степени нелинейности $n = 5$ длина следа запаздывания приблизительно в 8 раз меньше, чем при $n = 3$. Этого следовало ожидать, поскольку кривая $\beta(K)$, характеризующая след запаздывания, быстрее стремится к оси K при $n = 5$.

Зависимость кривизны траекторий деформаций от параметра нагружения K представлена в таблице 4.2.3.

Таблица 4.2.3

K	$n = 3$	$n = 5$
	$\alpha_{сн}$	$\alpha_{сн}$
0	871×10^{-4}	345×10^{-4}
0,1	840×10^{-4}	215×10^{-4}
0,2	711×10^{-4}	137×10^{-4}
0,3	575×10^{-4}	901×10^{-5}
0,4	456×10^{-4}	612×10^{-5}
0,5	360×10^{-4}	427×10^{-5}
0,6	284×10^{-4}	304×10^{-5}
0,7	226×10^{-4}	221×10^{-5}
0,8	180×10^{-4}	163×10^{-5}
0,9	145×10^{-4}	122×10^{-5}
1,0	117×10^{-4}	924×10^{-6}

В конце следа запаздывания ($K_* = 7,769$ и $\alpha = 206 \times 10^{-7}$ при $n = 3$ и $K_* = 1,324$ и $\alpha = 400 \times 10^{-6}$ при $n = 5$) остается в силе соотношение $\alpha < \frac{1}{K}$ ($A_3 = A_5 = 1$).

Б. Последовательное двухосное растяжение.

Схема пути нагружения представлена на рис. 3.3.1. При последовательном двухосном растяжении ε_1 и ε_2 рассчитаны только по теории локальности деформации. Для приращений компонент вектора деформаций имеем следующие соотношения:

для $n = 3$ и $k < 1$

$$d\varepsilon_1 = 3\sqrt{\frac{3}{2}} A_3 \left[2k^2 - 2k + \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi} (-4k^2 + 4k + \frac{3}{2}) + \frac{1}{\pi} (1-k)^{\frac{1}{2}} (-3k^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{2} k^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} k^{\frac{1}{2}}) \right] dk \quad (4.2.7)$$

$$d\varepsilon_2 = 5\frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \left[\frac{3}{2}k - \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi} (-3k + \frac{3}{2}) + \frac{1}{\pi} (1-k)^{-\frac{1}{2}} \times (-2k^{\frac{7}{2}} + 4k^{\frac{5}{2}} - \frac{7}{2}k^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}k^{\frac{1}{2}}) \right] dk$$

$k \geq 1$

$$d\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 (6k^2 - 6k + \frac{9}{4}) dk$$

$$d\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 (\frac{15}{2}k - \frac{15}{4}) dk$$

(4.2.8)

для $n = 5$ и $k < 1$

$$d\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left[20k^4 - 40k^3 + \frac{103}{2}k^2 - \frac{63}{2}k + \frac{15}{2} + \frac{4}{\pi} (-40k^4 + 80k^3 - 103k^2 + 63k - 15) + \frac{1}{2\pi} (k-k^2)^{-\frac{1}{2}} (-92k^5 + 230k^4 - 244k^3 + 136k^2 - 30k) \right] dk$$

$$d\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left[33k^3 - \frac{99}{2}k^2 + \frac{83}{2}k - \frac{25}{2} + \frac{9}{\pi} (-66k^3 + 99k^2 - 83k + 25) + \frac{1}{2\pi} (k - k^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{56}{3}k^6 - 56k^5 - \frac{230}{3}k^4 + \frac{740}{3}k^3 - \frac{548}{3}k^2 + 50k \right) \right] dk; \quad (4.2.9)$$

$$k \geq 1$$

$$d\mathcal{E}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 \left(20k^4 - 40k^3 + \frac{103}{2}k^2 - \frac{63}{2}k + \frac{15}{2} \right) dk \quad (4.2.10)$$

$$d\mathcal{E}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \left(33k^3 - \frac{99}{2}k^2 + \frac{83}{2}k - \frac{25}{2} \right) dk$$

Приращения компонент вектора напряжения равны:

$$dS_1 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_{22x} dk; \quad dS_2 = 0 \quad (4.2.11)$$

При последовательном двухосном растяжении характерные углы изменяются в довольно большом диапазоне в зависимости от заданного параметра нагружения k . Результаты расчета представлены графически на рис. 4.2.7 как для степени нелинейности $n = 3$ (а), так и для $n = 5$ (б). Из графиков видно, что кривые $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\sigma(k)$ асимптотически приближаются к оси k , причем для степени нелинейности $n = 5$ быстрее, чем при $n = 3$. В точке излома

$$\alpha_1(k) = \alpha_2(k) = 120^\circ$$

$$\beta_1(k) = 64^\circ 43' > \beta_2(k) = 44^\circ 50'$$

$$\sigma_1(k) = 55^\circ 17' < \sigma_2(k) = 75^\circ 10'$$

где индекс 1 относится к расчету при степени нелинейности $n = 3$, а индекс 2 - при $n = 5$.

Кривая $\varphi(k)$, достигнув максимума $\varphi = 39^{\circ}17'$ при $k = 0,9$ ($n = 3$) и $\varphi = 39^{\circ}37'$ при $k = 0,8$ ($n = 5$), также стремится к оси k .

Кривая $\beta(k)$ при $n = 5$ пересекает ось в точке $k = 2,79$, после чего убывает до минимума $\beta = -0^{\circ}45'$ и снова асимптотически стремится к оси k .

Если действуют одинаковые по абсолютному значению напряжения (угол излома $\delta = 90^{\circ}$), то при последовательном двухосном растяжении, а также при растяжении с последующим сжатием при $n = 3$ и $n = 5$ для углов β и ν , начиная с $k \geq 1$, имеются следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\beta_p(k) &= \beta_c(k-1); \\ \nu_p(k) &= \nu_c(k-1);\end{aligned}$$

где индекс p относится к последовательному двухосному растяжению, а индекс c - к растяжению с последующим сжатием.

При последовательном двухосном растяжении длину следа запаздывания определяем в следующем виде:

$$H = H_1 + H_2$$

где

$$H_1 = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{d\beta_1}{dk}\right)^2 + \left(\frac{d\nu_1}{dk}\right)^2} dk \quad \text{при } k < 1$$

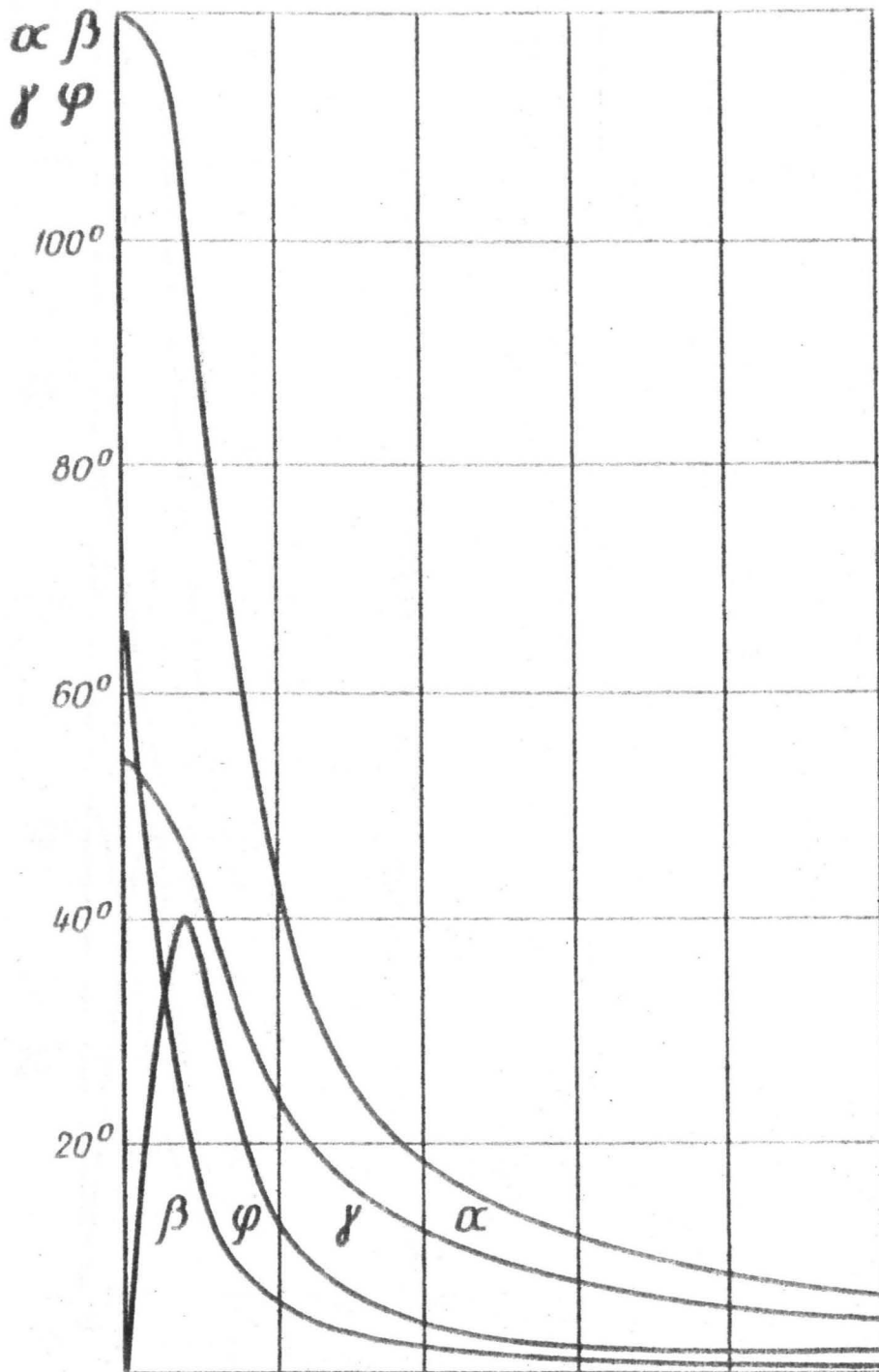


Рис.4.2.7 (а). Зависимость углов α , β , γ и φ от параметра нагружения κ при $n=3$.

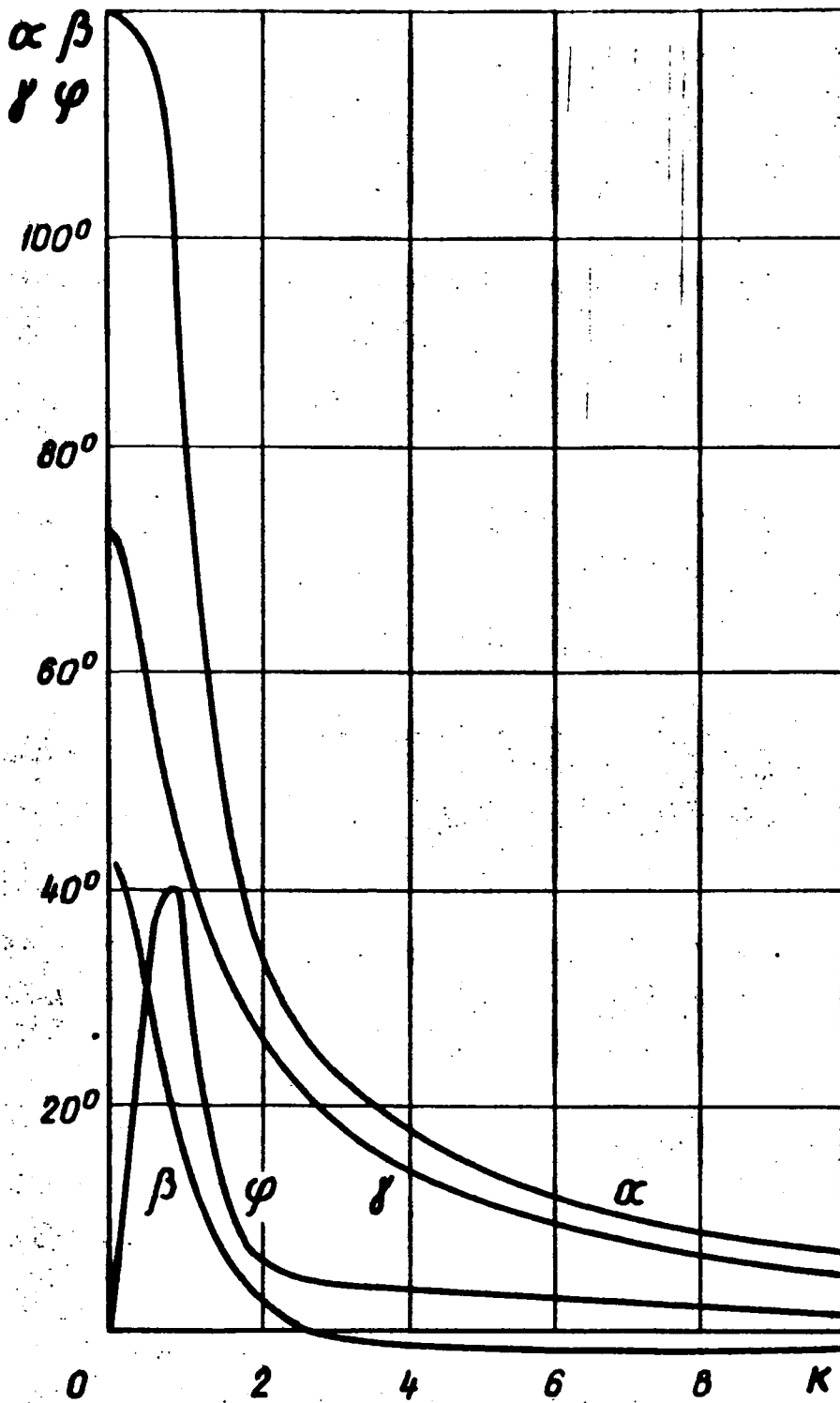


Рис.4.2.7 (б). Зависимость углов α, β, γ и φ от параметра нагружения κ при $n = 5$

$$H_{20} = \int_1^{k_*} \sqrt{\left(\frac{d\alpha_1}{dk}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dk}\right)^2} dk \quad \text{при } k \geq I$$

Полученные значения длины следа в зависимости от параметра нагружения k равны:

$$H_{n=3} = 17,87 \quad (k_* = 8,769)$$

$$H_{n=5} = 2,237 \quad (k_* = 2,324)$$

т.е. при степени нелинейности $n = 5$ длина следа запаздывания приблизительно в 8 раз меньше, чем при $n = 3$.

Сравнивая длину следа запаздывания в зависимости от заданного параметра нагружения k при растяжении с последующим сжатием и при последовательно двухосном растяжении, находим, что

$$H_{pp.} = 17,87 \approx H_{pc.} = 17,856 \quad (n = 3)$$

$$H_{pc.} = 2,237 \approx H_{pc.} = 2,203 \quad (n = 5)$$

т.е., если характеристика напряженного состояния по абсолютному значению напряжения одинакова, то длина следа запаздывания приблизительно одинакова (зависит от степени нелинейности).

В таблице 4.2.4 даны численные результаты кривизны траектории деформаций в зависимости от параметра нагружения K .

Таблица 4.2.4

K	$\mathcal{L}_{n=3}$	$\mathcal{L}_{n=5}$
0	307×10	512×10
0.1	10,368	151×10
0.2	1,975	13,7
0.3	775×10^{-3}	3,37
0.4	410×10^{-3}	1,23
0.5	257×10^{-3}	553×10^{-3}
0.6	179×10^{-3}	282×10^{-3}
0.7	135×10^{-3}	166×10^{-3}
0.8	109×10^{-3}	914×10^{-4}
0.9	831×10^{-4}	555×10^{-4}
1.0	871×10^{-4}	345×10^{-4}

Кривизна \mathcal{L} больше степени нелинейности $n = 5$, чем при $n = 3$. В конце следа как при $n = 3$, так и при $n = 5$ выполняется соотношение $\mathcal{L} < \frac{1}{n}$;

В. Растяжение с последующей разгрузкой и поперечным растяжением (скатнем).

Приращения компонент векторов деформаций и напряжения запишутся в виде:

а) растяжение с последующей разгрузкой и поперечное растяжение:

для $n = 3$ $d\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 6k^2 dk; d\epsilon_2 = 0;$

для $n = 5$ $d\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 20k^4 dk; d\epsilon_2 = 0;$ (4.2.12)

б) растяжение с последующей разгрузкой и поперечное скатие:

для $n = 3$ при $k < 1$

$$d\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 6k^2 \left(-1 + 2 \frac{\varphi_1}{\pi} \right) dk;$$

$$d\epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_3 \frac{1}{\pi} (12k^4 - 12k^3)(k - k^2)^{-\frac{1}{2}} dk;$$
 (4.2.13)

$$k \geq 1$$

$$d\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_3 (-6k^2) dk; d\epsilon_2 = 0;$$
 (4.2.14)

для $n = 5$ при $k < 1$

$$d\epsilon_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 10k^4 \left(-1 + 2 \frac{\varphi_1}{\pi} \right) dk;$$

$$d\epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} A_5 \frac{1}{\pi} (20k^6 - 20k^5)(k - k^2)^{-\frac{1}{2}} dk;$$
 (4.2.15)

при $k \geq 1$

$$d\vartheta_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} A_5 (-20k^4) dk; \quad d\vartheta_2 = 0 \quad (4.2.16)$$

Приращения компонент вектора напряжения равны:

$$dS_1 = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_{22x} dk; \quad dS_2 = 0; \quad (4.2.17)$$

где знак "+", если на третьем этапе растяжение, а знак "-", если сжатие.

Результаты расчета соответствующих кривых для степеней нелинейности $n = 3$ и $n = 5$ представлены графически на рис. 4.2.8. Зависимость угла β , а также угла γ от параметра нагружения k , если на третьем этапе происходит сжатие, имеют отличные от нуля значения при $k \in [0, 1)$. Тогда эти зависимости имеют противоположные знаки, причем

$$\beta = -\gamma = 30^\circ, \text{ если } k = 0 \text{ и } \beta = -\gamma \rightarrow 0^\circ, \text{ если } k \rightarrow 1.$$

Знак "-" указывает на то, что угол γ отсчитывается от касательной к траектории нагружения по ходу часовой стрелки.

Если на третьем этапе происходит растяжение и $k \geq 0$, а также, если на третьем этапе приложены сжимающие напряжения и $k \geq 1$, кривые $\beta(k)$ и $\gamma(k)$ совпадают с осью k , т.е.

$$\beta = \gamma = 0. \text{ Следовательно, основная зависимость между углами } \alpha, \beta, \gamma, \varphi \text{ (4.1.3) принимает вид } \alpha = \varphi.$$

Кривые $\alpha(k), \varphi(k) = 60^\circ$ при $n = 3$ и $n = 5$ пересекаются в точке $k = 1$.

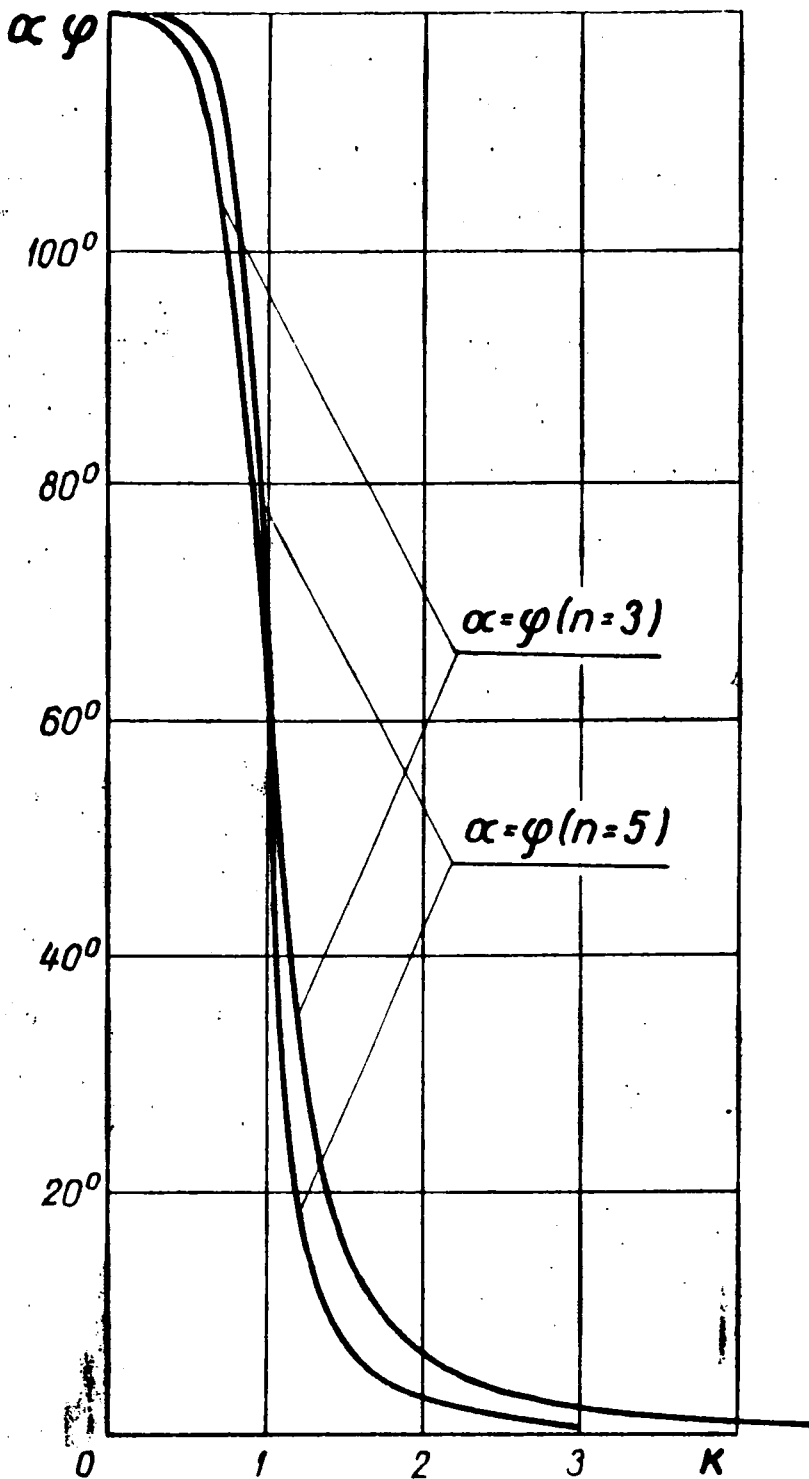


Рис.4.2.8. Зависимость углов α , β , γ и φ от параметра нагружения κ

а) растяжение с последующей разгрузкой и растяжением.

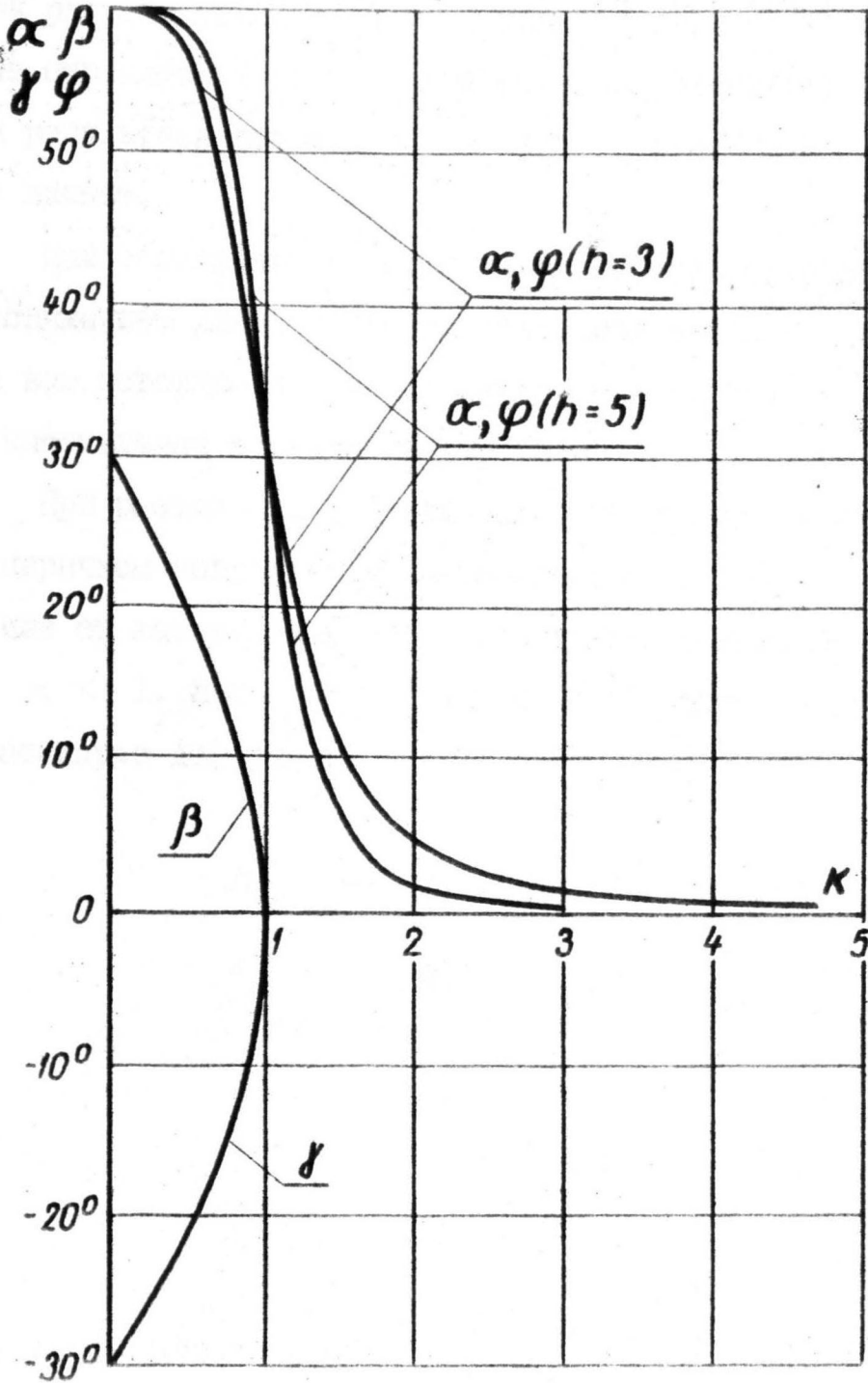


Рис. 4.2.8.6 Растяжение с последующей разгрузкой и сжатием.

График кривых показывает, что степень нелинейности n для рассмотренных путей нагружения имеет значение только при расчете углов α и φ , так как кривые $\chi(k)$ и $\varphi(k)$ быстрее стремятся к оси k при степени нелинейности $n = 5$. На результаты расчета углов β и γ степень нелинейности не влияет.

При растяжении с последующей разгрузкой и поперечным растяжением длина следа запаздывания равна нулю, поскольку за всю историю нагружения вектор напряжения \bar{s} параллелен с касательной траектории деформации.

При растяжении с последующей разгрузкой и сжатием в поперечном направлении вектор напряжения \bar{s} имеет отклонение от касательной к траектории деформации только при

$k < 1$. При $k > 1$ вектор напряжения \bar{s} параллелен к траектории деформации

$$H_{n=3} = 0,02171 \quad (K_* = 0,9979)$$

$$H_{n=5} = 0,0235 \quad (K_* = 0,9979)$$

ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Проведенные теоретические исследования данной работы сводятся к следующему.

1. Теория локальности деформаций, которая с успехом применяется при решении задач сложного нагружения, позволяет эффективно учитывать некоторые общие свойства пластических материалов - постулат изотропии и длину следа запаздывания.

2. Для частных видов сложного нагружения: совместное действие растяжения и сжатия, последовательное двухосное растяжение, растяжение с последующей разгрузкой и поперечным растяжением (сжатием) при степенях нелинейности $n = 3$ и $n = 5$ установлена связь между векторами напряжений и векторами деформаций и единичными векторами касательных к траектории нагружения и деформации; изучен характер зависимости длины следа запаздывания от заданного параметра нагружения κ :

а) при совместном действии растяжения и сжатия длина следа запаздывания, полученная на основе теории локальности деформации, от 8 до 11 раз меньше, чем длина следа запаздывания, полученная по теории малых упруго-пластических деформаций, когда не учитывается эффект сложного нагружения;

б) установлено, что при зеркальном отражении двух путей нагружения относительно биссектрисы первого квадранта

соответствующие кривые совпадают и длина следа запаздывания сохраняется, т.е. постулат изотропии в этом случае вполне подтверждается;

в) показано, что угол излома σ траектории напряжения влияет на характерные углы α , β , γ и φ второго этапа нагружения и длину следа запаздывания.

Резко выраженного следа запаздывания не наблюдается, так как вектор напряжений \bar{s} на втором этапе сложного нагружения асимптотически стремится к траектории деформаций. Поэтому предлагается след запаздывания считать исчерпанным, когда отклонение вектора \bar{s} от касательной к траектории деформации не превышает 1° .

3. Выведено дифференциальное выражение функции локальных деформаций при сложном нагружении пластического материала в общем случае, когда ось I' вспомогательной системы координат не совпадает с направлением полного касательного напряжения на локальной площадке. На основе этой функции построена зависимость тензора деформаций ε_{ij} от заданного тензора напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ в основных осях образца.

4. Используя теорию локальности деформаций для изотропного в исходном состоянии несжимаемого пластического материала получены теоретические выражения компонент деформаций в пятимерном евклидовом пространстве для выше упомянутых путей сложного нагружения:

а) при совместном действии растяжения и сжатия отношение R модулей векторов деформации зависит от угла излома δ траектории напряжения;

б) степень нелинейности n влияет на отношение модулей векторов деформации.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Андреев Л.С. "О проверке законов пластичности в пространстве напряжений", МТТ, 1966, 2, 97.
2. Афанасьев Н.Н. "Статистическая теория усталостной прочности металлов", ЖТФХ, 19, 1940.
3. Васин Р.А. "Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении", Упругость и неупругость, вып. 1, 1971, 59.
4. Генки Г. "К теории пластических деформаций и вызываемых ими в материале остаточных напряжений". В кн. "Теория пластичности", М., ИЛ, 1948, II4.
5. Гудьер Дж.Н., Холж Ф.Г. "Упругость и пластичность", М., ИЛ, 1960.
6. Елсуфьев С.А. "Экспериментальная проверка постулата изотропии и закона запаздывания общей теории пластичности. Гидротехника, 1964, 143.
7. Зилауцс А.Ф. "Закон простого нагружения в теории локальности деформаций: Изв. АН Латв. ССР, сер. физ.-техн. наук, 1962, 8, 55.
Малмейстер А.К.
8. Зилауцс А.Ф. "Простое нагружение в теории локальности деформаций". Изв. АН Латв. ССР, сер. физ.-техн. наук, 1964, 6, 74.
9. Луков А.М., Работнов Ю.Н. "Исследование пластических де-

формаций стали при сложном нагружении". Инж. об., 1954, 18, 103.

10. Ильинин А.А. "Вопросы общей теории пластичности", ПММ, 24, 1960, 3, 399.
11. Ильинин А.А. "К теории малых упруго-пластических деформаций", ПММ, 10, 1946, 3, 345.
12. Ильинин А.А. "Некоторые вопросы теории пластических деформаций", ПММ, 7, 1943, 4, 245.
13. Ильинин А.А. "О постулате пластичности", ПММ, 25, 1961, 4, 503.
14. Ильинин А.А. "О связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред", ПММ, 18, 1954, 6, 641.
15. Ильинин А.А. "О состоянии и приложениях к процессам обработки металлов давлением общей теории пластичности", Инж. методы расчета технологич. процессов обр. металлов давл., 1963, II.
16. Ильинин А.А. "Пластичность", Москва, 1948.
17. Ильинин А.А. "Пластичность", М., 1963.
18. Ильинин А.А. "Связь между теорией Сен-Венана-Мизеса и теорией малых упруго-пластических деформаций", ПММ, 9, 1945, 3, 207.
19. Ильинин А.А. "Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением", ПММ, 11, 1947, 2, 293.

20. Иосифура И. "Замечания к теории скольжения Батфорда-Будянского", сб. переводов "Механика", 1960, 2.
21. Кац Ш.Н., Качанов Л.М. "О пластичности деформации при сложном нагружении", Изв.АН СССР, отд.техн. наук, 1957, II, 172.
22. Клишников В.Д. "О возможном пути построения соотношений пластичности", ПММ, 23, 1959, 2, 282.
23. Клишников В.Д. "О законах пластичности для материала с упрочнением", ПММ, 22, 1958, 1.
24. Кнетс И.В., Крегерс А.Ф. "Анализ возможных сочетаний локальных напряжений в теории локальных деформаций", Мех.полимер., 1967, 4, 636.
25. Кнетс И.В. "Основные современные направления в математической теории пластичности", Рига, 1971.
26. Кнетс И.В. "Развитие понятий функции локальности деформаций", Мех.полимер., 1969, 3, 422.
27. Кнетс И.В., Крегерс А.Ф. "Связь между тензором деформаций и тензором напряжений при последовательно двухосном растяжении", Мех.полимер., 1965, 3, 43.
28. Коровин И.М. "Некоторые вопросы пластичности материала при нагружении по траектории с точкой излома", Мех.твёрдого тела, 1969, 3, 152.
29. Койтер В.Т. "Соотношение между напряжениями и деформациями, вариационные теоремы и теорема единственности для упруго-пластических материа-

лов с сингулярной поверхностью текучести",
сб. переводов "Механика", 1960, 2, 117.

30. Крегерс А.Ф. "Исследование поверхности нагружения в теории локальности деформаций", Мех. полим., 1971, 5, 796.
31. Крегерс А.Ф. "Пластические деформации при сложном нагружении растяжением и кручением", Мех. полим., 1966, 1, 20.
32. Крегерс А.Ф. "Сложное нагружение нелинейно деформирующихся материалов", канд. дисс., Рига, 1966.
33. Лагздыньш А.Ж. "Об одном возможном подходе к построению соотношений между тензором напряжений и деформаций и температурой в реомных средах", Мех. полим., 1967, 1.
34. Ленский В.С. "Некоторые новые данные о пластичности металлов при сложном нагружении", Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., 1960, 5, 93.
35. Ленский В.С. "Об ошибочных замечках Д.Д. Ивлева", Изв. АН СССР, Мех. и машиностроение, 1961, 3, 172.
36. Ленский В.С. "Экспериментальная проверка законов изотропии и запаздывания при сложном напряжении". Изв. АН СССР, ОТН, 1958, II, 15.
37. Ленский В.С. "Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упруго-пластических деформаций", Вопросы теории пластичности, 1961, 58.

38. Леонов М.Я., Швайко Н.Ю. "Сложная плоская деформация", ДАН, 59, 1964, 5, 1007.
39. Лин Т.Х. "Вариант теории скольжения", сб.переводов "Механика", 1956, 3.
40. Лин Т.Х. "О связи между напряжениями и деформациями в теориях скольжения", сб.переводов "Механика", 1960, 4.
41. Малмейстер А.К., Шкербелис К.К. "Деформации бетона при сложном нагружении", Исследования по бетону и ж.б., Рига, 2, 1957, 127.
42. Малмейстер А.К. "Об основах теории локальности деформаций", Изв.АН Латв.ССР, 8, 1961.
43. Малмейстер А.К. "Основы теории локальности деформации", Мех.полимер., 1964, 4.
44. Малмейстер А.К. "Пластические деформации неупрочненного и упрочненного квазиизотропного тела", Исследов. по бетону и ж.б., Рига, 6, 1961.
45. Малмейстер А.К. "Упругость и неупругость бетона", Рига, 1951.
46. Моррисон Д., Шепферд В. "Опытное исследование соотношений между напряжениями и деформациями за пределом упругости", сб.переводов "Механика", 1952, 1.
47. Надаи А. "Пластичность", 1936.

48. Нагхди П.М., Роули Я. "Экспериментальное изучение зависимости между напряжениями и деформациями в пластической области при двухосном напряженном состоянии", сб. переводов "Механика", 1955, 3.
49. Олышан В., Мруз З., Пежина П. "Современное состояние теории пластичности", Москва, 1964.
50. Прагер В. "Упрочнение материала при сложном напряженном состоянии", Теория пластичности, 1948, 325.
51. Саусинь В.Я. "Влияние истории нагружения на изменение характерных углов и длины следа запаздывания", Мех. полим., 1971, I, 92.
52. Саусинь В.Я. "Зависимость между векторами $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\sigma}$ при последовательном двухосном растяжении пластического материала", Мех. полим., 1969, 6, 975.
53. Саусинь В.Я. "Зависимость между векторами $\bar{\epsilon}$ и $\bar{\sigma}$ при последовательно лучеобразных путях нагружения пластического материала", Мех. полим., 1970, 2, 241.
54. Саусинь В.Я. "След запаздывания при растяжении с последующим сжатием в поперечном направлении", Мех. полим., 1969, 4.
55. Свешникова В.А. "О пластическом деформировании упрочня-

- ищихся металлов", Изв.АН СССР, ОТН, 1956, I.
56. Тетерс Г.А. "Вариант теории локальности", Мех.полимер., 1967, 5, 800.
57. Тетерс Г.А., Кнетс И.В. "Об устойчивости пластинок из пластических материалов без резкого предела упругости", Изв.АН Латв.ССР, сер.физ.и техн.наук, 1964, I, 67.
58. Швайко Н.Ю. "Линейная анизотропно-упрочняющаяся среда", Пластичность и хрупкость, Изд.ИЛИМ, 1967.
59. Шиммарев О.А. "Влияние вида девиатора напряжений на пластическое деформирование стали", МТТ, 1966, 5, 112.
60. Ховнемзер К. "К механике пластического поведения стали", Теория пластичности, 1948, 257.
61. Batdorf S.B. "A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip." *Budiansky B.* NASA TN 1871, 1949.
62. Bishop J.F.W., Hill R. "A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses." *Phil.Mag.* Nr. 7, 42, 414, 1951.
63. Budiansky B. "A reassessment of deformation theories of plasticity". *J.Appl.Mech.*, 26, 1959, 259.
64. Cicala P. "On plastic buckling of plates and theory of plastic slip". *J. Aeron Sci.*, 16, 1951.
65. Handelman G., Lin C., Prager W. "On the mechanical beha-

- vior of metals in the strain - hardening range". *Quart Appl. Math.*, vol. 4, 1947, 397.
66. Havner K.S., Varadarjan R. "A quantitative study of a crystalline aggregate model." *International journal of solids and structures*, 1973, 9, 3, 379.
67. Hutchinson J.W. "Elastic - plastic behavior of polycrystalline metals and composites." *Proc. R. Soc. Lond. A.* 319, 247, 1970.
68. Hutchinson J.W. "Plastic stress - strain relations of B.C.C. polycrystalline metals hardening according to Taylors rule." *J. Mech. Phys. Solids*, 1964, 12, 11.
69. Hutchinson J.W. "Plastic deformation of B.C.C. Polycrystals" *J. Mech. Phys. Solids*, 1964, 12, 25.
70. Lin. T.H. Analysis of elastic and plastic strains of a face - centred cubic crystal. *J. Mechanic. and Phys. of Solids*, 5, 143, 1957.
71. Lin T.H. "On stress strain relations based on slips". *Proc. 3 rd US Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1958, 581.
72. Lin T.H. "Physical theory of plasticity. *Advances in applied mechanic*", vol 11, 1971.
73. Melan E. "Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums" *Ings - Arch.* 9, 1938, 116.
74. Nadai A., Davis E.A. "Plastic behavior of metals in the

strain hardening range." J.Appl. Phys., 8, 1937,
205.

75. Prager W. "Recent developments in the mathematical theory of plasticity" J.Appl. Phys., 20, 1949,235.
76. Taylor G.I. "Plastic strain in metals" J.Inst. Metals, 62, 307, 1938.