

LATVIJAS
UNIVERSITĀTES STUD.
PAD. GRĀMATNICAS
IZDEVUMS

Doc. A. Vītols

Eevads mechanikā

Lekcijas, lasītas Latvijas Universitātes
inženieru un mechanikas fakultātēs
1922–23. gadā

Rigā 1922.
Krājumā Universitātes Studentu Padomes Grāmatnicā
Torņa ielā №4. (Ieeja no Jēkaba ielas)

Latvijas Universitates Studentu
Padomes Grāmatnicas izdevums

Doc. A. Vītols

Eevads mechanikā

Lekcijas, lasītas Latvijas Universitates
inženeeru un mechanikas fakultatēs
1922-23 gadā.



Rigā 1922.
Krajumā Universitates Studentu Padomes Grāmatnicā
Torņa eelā №4. (Eeeja no Jekaba eelas)

Iespiests Ernsta Plates litografijā, Rigā.

Preekšvārdam.

Peemērotas literaturas trūkums un vēlešanās studenteem izpalīdzet mana preekšmeta eestudešanā peespeeda mani, kaut sasteigtā un nenogludinatā veidā, izdot vismaz „Eevadu mecḫanikā." Jo vairak tas bija vajadzigs, ka preekšmeta pasneegšanas metode stipri atšķiras no mana preekšgājeja, kurš savu pateesi skaisto kursu sastādijis gandrīz ar veenigas projekciju metodes palīdzibu. Manškeet, ka to stipro eeroci, kuru sneedz moderna matematika vektora veidā, nevar ignoret tās veenkāršibas un pārskatamibas dēļ, kuŗu šis jēdzeens sneedz daudzu problemu atrisinašanā. Tādēļ „Eevads" satur visnepeeceešamako un elementarako materialu no vektoru analizes, kuŗš vēlak teek izleetots.

Sakarā ar steidzibu tekstā vareja eekļūt dažas neskaidribas un citi trūkumi, kuŗu novēršanai gaidu aizrādijumus no pašeem lasitajeem. Terminologiskā ziņā deezgan grūtibu darija jēdzeenu равный, подобный, равенство, подобіе nosaukšana.

Rigā, zeptembrī 1922. Doc. A. Vitols.

Tas apstāklis, ka materieli ķermeņi dabā ir sastopami trijos aggregat stāvokļos: ceelā, šķidrā un gāzveidigā, noteic paņēmeenu dažadibu, kuri teek leetoti atteecibā uz katras šīs ķermeņu grupas kustibas likumu pētīšanu.

Caur šo rodas katras minetas mechanikas daļas sadalijums trīsās atsevišķās apakšdaļās, kuru nosaukumi atvasinami no eepreekšejeem peeveenojot viņu preekšgalā preekš šķidrumeem — ĥidro (ὕδωϱ = ūdens), aero (ἀήϱ = gaiss). Ta rodas hidrostatika, hidrodinamika, aerostatika, aerodinamika. Aerostatikas problemu apskatīšanas paņēmeeni maz atšķiras no tādeem pašeem preekš hidrostatikas, kadēļ abas šīs daļas pa laikam mēdz un ir eespējams apskatīt kopigi.

Aerodinamika attīstas pašstāvigi, pateicotees, galvenā kārtā, tam uzdevumu plašumam, kuru uzstāda aviacija.

Hidromechaniku beeži mēdz apzīmet ar vārdu „hidraulika", lai gan faktiski šis nosaukums atteecas uz hidromechanikas daļu - hidrodinamiku, apstrādatu experimentālā ceļā, izleetojot teoretiskos hidrodinamikas rezultatus.

Nupat mēs eeminejamees par mechanisko problemu apstrādašanas ceļu, pee kam atteecibā uz hidrauliku plaša loma peekrīt eksperimentam. Var apskatit ķermeņu kustibas vispārejos pamatu, likumus ar ideālo (eedomajamo, veenkāršo) šķemu palīdzibu, par peemēru; atteecibā uz ceeteem ķermeņeem, peeņemot abzolutu ceetumu, atteeciba uz šķidrumeem, abzolutu šķidruma daļiņu kustigumu (подвижность). Ta ka dabā sastopami ķermeņi leelakā jeb mazakā mērā

no tāda ideala stāvokļa atšķiras, tad caur tādu šemu leetošanu gūtee rezultati leelakā jeb mazakā mērā atšķirsees no īsteneem. Saskaņošana notiek caur mineto rezultatu koriģešanu (izlabošanu) caur koeficienteem, kuru skaitliskas nozīmes tiek gūtas uz eksperimenta pamata. Šādā ceļā attīstīta mechanika ir ta saucama techniskā mechanika, kamēr ideālo šemu ceļš peekrīt ta saucamai teoretiskai (racionelai jeb analitiskai) mechanikai, dibinatai galvenā kārtā uz Ņjutona pamatprincipeem (axiomata sive leges motus), par kureem būs runa tālak. Saprotams, ka teoretiska mechanika zem tādeem apstākļeem dod ķermeņu kustības vispārejōs pamatlikumus, kurus tad izleeto techniskā mechanika.

Visveenkāršakais materiels ķermens ir materiels punkts, t.i. tāds ķermens, kura samēri ir ļoti mazi attiecībā pret viņa kustības elementu samēreem.

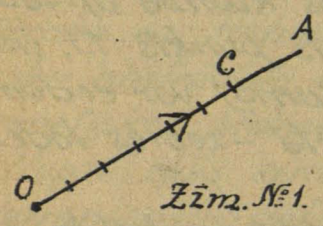
Par peem. zemes lode viņas kustībā ap sauli var tikt uzskatita, ka materiels punkts, t.i. visu zemes masu (materijas daudzums) var eedomatees koncentretu veenā punktā — zemes lodes centrā.

Katrs materiels ķermens var tikt uzskatits, ka sastāvošs no tik mazam daļiņam, ka katra no viņam var tikt uzskatita, ka materiels punkts. Šākarā ar šo katra materiela ķermeņa kustība, cik sarežģita viņa ari nebūtu, var tikt apskatita ka visas materielu punktu zistemas kustiba, no kureem — punkteem šis ķermens sastāv. Šis apstāklis rāda, ka visas mechanikas pamatā guļ materiela punkta kustības un viņas cēloņu pētīšana.

I.

Leelumi, ar kureem opere mechanika.

Šee leelumi var būt ta saucamee skalaree (Richtungslose Grössen), kuri var tikt pilnigi noteikti caur viņu skaitliskam nozīmem ka: garums, tilpums, masa, temperatura u.t.t. — un ta saucamee vektorialee, preekš kuru dabas pilnigas noteikšanas, bez viņu skaitliskam nozīmem, jaņem vērā ari viņu virzeens. Pee pēdejeem peeder leelakā daļa mechanisko leelumu, ka: spēks, ātrums, parveetojums, u.t.t.. Par peem., spēka darbibas sekas uz materielu ķermeni katrā ziņā atkaras ari no spēka virzeena. Preekš pilna parādibas raksturojuma nav veena alga, uz kuru pusi, kādā virzeenā ķermens kustesees. Pēdejas kategorijas leelumi (vektorialee) var tikt ļoti ērti attetoti grafiski taisnas līnijas nogreezņa veidā. Mēs novelkam šo nogreeznī no ta materiela ķermeņa punkta, kur dotais spēks darbojas (no eedarbes punkta) tanī virzeenā, kurā spēks uz ķermeni darbojas. Peeņemsim, ka min. eedarbes punkts ir O (sk.zīm. №1.) un virzeens sakrīt ar līniju OA Uz šas līnijas es nospreežu tik daudz kāda garuma veenibu un veenibu daļu (par peemēru santimetr., vaj pat nenoteiktu garumu), cik attēlojamā spēkā ir spēka veenibu un veenibu daļu. Ta tad kāds garuma mērs teek peelīdzinats sinamai spēka veenibai, t.i. teek peeņemts zinams spēku mērogs (masstabs). Ta ka bez līnijas stāvotnes, (положение линии) vēl ir no svara, kādā virzeenā uz šīs līnijas spēks darbojas, tad lai šo pazīmi izšķirtu noveeto



Zīm. №1.

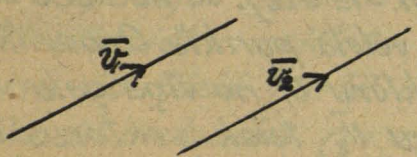
bultiti spēka darbības virzeenā. Līdz ar šo visi spēka elementi tagad ir noteikti pilnigi, un nevar būt nekāda cita spēka, kuram peemistu tas pašas īpašības, tā tad caur šādu attēlojumu spēks ir noteikts pilnigi veennozīmigi (ogrosmarro). Tādu taisnas līnijas nogreeznī, kurš grafiski attēlo kādu vektorialu leelumu, sauc par **vektoru**.

II.

Matematiskas darbibas ar vektoreem.

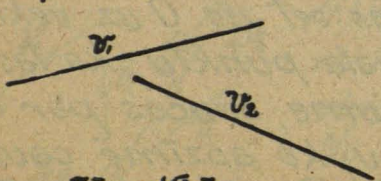
Geometriska zuma un geometr. darbiba.

Lai apzīmetu ka kāds taisnas līnijas nogreeznēs reprezentē vektoru, mēs veenosimees novietot virs burteem, kuri apzīmē vektōrorus -strīpiņu. Ta $\bar{OC}$ ir (sk. zīm. №1) vektora OC apzīmejums. Ja vektora garumā ir v garuma veenibas, tad vektōra apzīmejums ir $\bar{v}$.



zīm. №2.

1) Divi vektori $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$ (sk. zīm. №2) skaitliski veenadi paraleli un veenadi virzeti saucas par geometriski veenadeem. Šo apstākli apzīme ar veenadibu: $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$, kuru sauc geometrisku veenadibu atšķiribā no algebraiskas veenadibas, kura izteic tikai leelumu veenadibu.

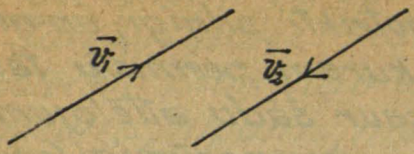


Zīm. №3.

Par peem. $v_1 = v_2$ var tikt rakstits preekš diveem taisnas līnijas nogreezņeem (sk. zīm. №3.).

2) Divi vektori skaitliski veenadi paraleli, bet preteji virziti skaitas par

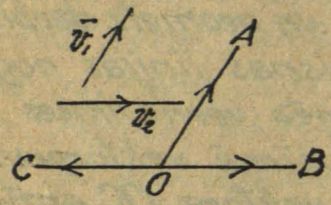
vektoreem ar pretejam zīmem (sk.zīm. № 4.)



zīm. № 4.

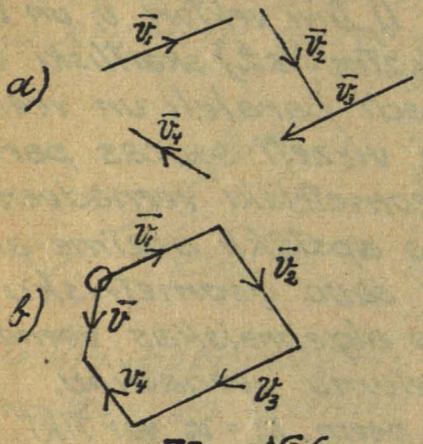
t.i. $\bar{v}_1 = -\bar{v}_2$. Tas nozīme, ka starp šādeem diveem vektoreem ģeometriska **veenadliba** var tik pastāvet, ja vektora $\bar{v}_2$ virzeens būs mainits uz pretejo.

3.) Par leņķi starp diveem vektoreem $\bar{v}_1$ un $\bar{v}_2$'s saucas leņķis $\angle AOB$ starp šeem vektoreem jeb viņu virzeeneem, vesteem caur brīvi vēletu punktu O (sk. zīm. № 5). $(\bar{v}_1, -\bar{v}_2)$ apzīmē leņķi starp vektoru $\bar{v}_1$ un vektoru $\bar{v}_2$, kuru virzeens ir mainits uz pretejo, t.i. leņķi $\angle AOC$ jeb leņķa $\angle AOB$ papildinajumu līdz π.



zīm. № 5.

4.) Peeņemsim, ka uz plaknes ir dota vektoru sistema $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ (sk. zīm. № 6 a). Ja no kāda brīvi vēleta punkta O novilksim vektoru $\bar{v}_1$ no viņa gala vektoru $\bar{v}_2$, tālak vektorus $\bar{v}_3$ un $\bar{v}_4$ saskaņā ar zīm. 6.b) tad vektors, kurš savee-no pirma vektora $\bar{v}_1$ izejas punktu ar vektora $\bar{v}_4$ gala punktu un kura virzeens eet no O uz vektora $\bar{v}_4$ gala punktu, ka tas nā-dits caur bultiti uz zīmejuma, saucas par doto vektoru ģeometrisku zumu, ko apzīmē caur nolīdzinajumu : $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4$. Pašu tādu darbibu sauc par ģeometrisku saskaitīšanu. Mums

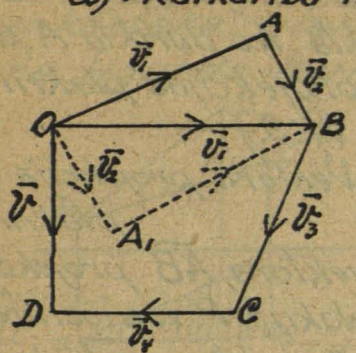


zīm. № 6.

bija dota 4 vektoru zistema. Protams, ja vektoru skaits ir n, tad caur tādu pašu darbibu atradisim vektoru, kurš reprezentes n vektoru geometrisko zumu, t.i. $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots \vec{v}_n$.

Geometriskas zumas īpašibas ir:

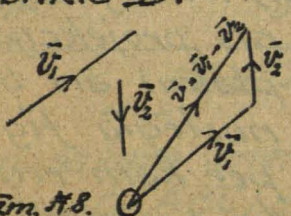
a) Neatkarībā no zumešanas kārtibas.



Zīm. № 7.

Par peem. izejot no punkta O, es varetu eesākt zumešanu ar vektoru $\vec{v}_2$, tad es nonāktu punktā A_1. Atleekot no šī beidzama vektoru $\vec{v}_1$, es tomēr nonāktu atkal tanī pašā punktā B, kur pirmo reizi, eesākot zumešanu ar vektoru $\vec{v}_1$. Še mēs mainijam divu līdzās esošu vektoru zumešanas kārtibu. Nav grūti pārleecinatees, ka nonāksim tapat punktā D, mainot zumešanas kārtibu pēc patikas.

b) Uzejot geometrisko zumu, var papreekš uzeet atsevišķu vektoru grupas un pēc tam ņemt visu šo tādā kārtā gūtu palīgu vektoru zumu. Tas ir redzams no zīmejuma № 7. Noķlūt punktā B es varu, ejot pa vektoru diagonali OB, kurš ir divu vektoru $\vec{v}_1$ un $\vec{v}_2$ geometriska zuma. Velkot tad no punkta B pārejos vektorus, ka tas ir darams pee viņu saskaitīšanas, nonāksu tapat gala punktā D.



Zīm. № 8.

4.) Par geometrisko starpibu starp diveem vektoreem $\vec{v}_1$ un $\vec{v}_2$ veenosimees saukt viņu zumu: $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2)$ No kāda brīvi vēleta punkta O es nospraužu „mazinamu" vektoru $\vec{v}_1$, tad no viņa gala vektoru $-\vec{v}_2$, t.i. vektoru, kurš virzeena ziņā ir pretejs dotam „atņemamam" vekt. $\vec{v}_2$.

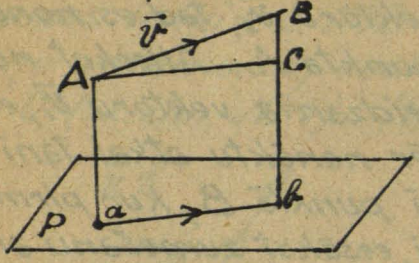
III.

Projekciju īpašības

A. Projekcijas uz plakni.

a) Punkta projekcija.

Par punkta A projekciju uz kādu plakni P mēs veenosimees skaitīt svērteniskas līnijas (perpendikulara) pamatu a, kura novilkta no punkta A pret plakni P, kura saucas par projekcijas plakni (zīm. № 9.)



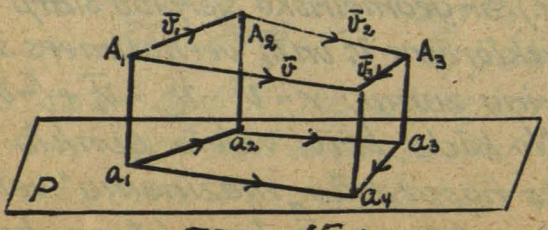
Zīm. № 9.

b) Vektora projekcija uz plakni.

Par vektora $\overline{AB}$ projekciju uz plakni P veenosimees saukt vektoru $\overline{ab}$, kurš uz plaknes P eet no vektora AB sākuma projekcijas pret viņa gala projekciju uz tās pašas plaknes. No zīm. 9 redzams, ka $\overline{ab} = AC = AB\cos(BAC) = v\cos(\bar{v}, \overline{ab})$.

c) Figuras proekcija uz plakni.

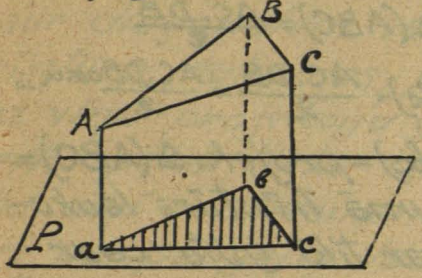
Par figuras projekciju uz plakni P veenosimees saukt visu figuras kontūru punktu projekciju geometrisko veetu (геометрическое место) uz plakni P. – Tā ka starp diveem punkteem var novilkt tikai veenu taisnu līniju, tad preekš figuras projekcijas gūšanas uz plakni P peetiks ar figuras (poligona) stūra punkta projektešanu uz plakni (sk. zīm. № 10.). Noslēgtas figuras projekcija uz plakni ari būs noslēgta figura, pee kam redzams, ka poligonu noslēdzošas puses



Zīm. № 10.

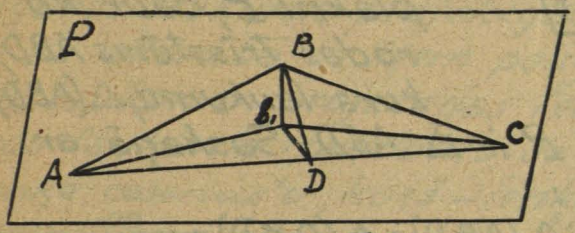
$\overline{A_1A_4}$ projekcija uz plakni P, t.i. $\overline{a_1a_4}$, būs projekcijas poligona noslēdzoša puse un, ka tāda viņa būs veenada ar pārejo malu, ka vektoru, ģeometrisko zumu, t.i. $\overline{a_1a_4} = \overline{a_1a_2} + \overline{a_2a_3} + \overline{a_3a_4}$

d) Figuru laukumu projekcija uz plakni. Veenkāršaka plakana figura ir trīsstūris, kura figuras laukuma projekcija var tikt



Zīm. № 11.

gūta saskaņā ar zīm. №11, kur trīsstūra △ abc laukums △(abc) ir trīsstūra ABC laukuma, △(ABC), projekcija. Pārveetosim projekcijas plakni P paraleli (līdztekus) sev līdz kamēr ši plakne atdursees pret kādu trīsstūra △ ABC virsotni. Ir skaidri redzams, ka pee šīs operacijas trīsstūra ABC laukuma, △(ABC), projekcija, △(abc), ne mainisees. Pee projekcijas plaknes atduršanas pret trīsstūri ABC var būt divi gadijeeni: 1) – atduras pret plakni P tikai veena virsotne, 2) – uzreiz, veenā laikā, ar



Zīm. №12.

plakni P sakrīt 2 trīsstūru virsotnes, tā ka projekcijas plaknē noklūst vesela trīsstūra mala. Ar šo gadijumu eesāksim sakara meklešanu starp trīsstūra ABC laukuma △(ABC) un viņa projekciju △(abc). No zīm. №12. ir redzams, ka △(abc) = proj. △(ABC). Vedisim caur punkteem B un b plakni

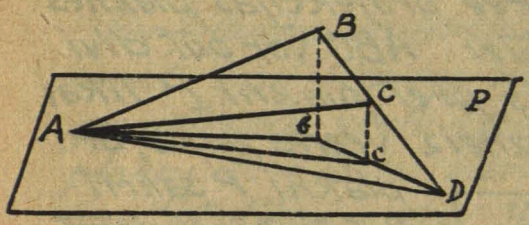
perpendikulari pret trīsstūra malu AC. D būs šīs plaknes krustošanas punkts ar trīsstūra malu AC, pee kam viņas krustošanas līnija ar trīsstūra ABC plakni būs līnija BD, bet ar trīsstūra abc (jeb projekcijas plakni P) būs līnija bD. Gūtais trīsstūris BDb ir taisnlenķisks, pee kam $bD = BD\cos\alpha$.

Trīsstūra ABC laukums, $\Delta(ABC) = \frac{AC.DB}{2}$

trīsstūra abc laukums, $\Delta(abc) = \frac{AC.DB}{2} = \frac{AC.DB\cos\alpha}{2} =$

$= \Delta(ABC)\cos\alpha$, kadēļ $\Delta(abc) = proj.\Delta(ABC) = \Delta(ABC)\cos\alpha$ t.i. šinī gadijumā trīsstūra laukuma projekcija uz plākni var tikt gūta caur trīsstūra laukuma pareizināšanu ar asa divskaldniska (двугранный), starp trīsstūra un projekcijas plaknem atrodošos lenķa cosinusu.

Peenemsim gadijumu, kad projekcijas plakne atduras tikai pret veenu trīsstūra virsotni, ta ka to rāda zīm. 13., tad $\Delta(ABc) = proj\Delta(ABC)$. Turpinajam malu BC līdz krustošanai ar plakni P, caur ko rodas trīsstūris ABD, kura laukumu $\Delta(ABD)$, projekcija uz plakni P ir Δ AbD. Saskaņā ar pirmo gadijumu ir:



Zīm. № 13.

(I) $\Delta(AbD) = proj\Delta(ABD) = \Delta(ABD)\cos\alpha$

(II) $-\Delta(AcD) = -proj\Delta(ACD) = -\Delta(ACD)\cos\alpha$

$\Delta(Abc) = proj\Delta(ABC) = [\Delta(ABD) - \Delta(ACD)]\cos\alpha =$

$= \Delta(ABC)\cos\alpha$., kuru gūstam atvelkot nolīdzinajumu (II) no nolīdzinajuma (I). Ta tad gūtais

preekš pirma gadijuma likums ari tagad ir pareizs, t.i. ka veenmēr trīsstūra laukuma projekciju uz plakni gūstam caur ši trīsstūra laukuma pareizinašanu ar asa divskaldniska leņķa cosinus'u, kurš, leņķis, rodas starp trīsstūra un projekcijas plaknem.

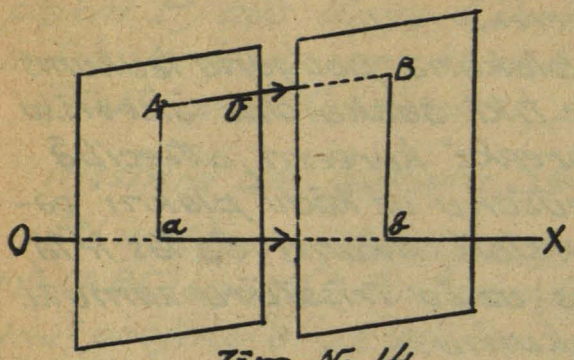
Slēdzeens. Katra plakana poligona laukums caur diagonalem var tikt saskaidits atsevišku trīsstūru laukumos, preekš kureem, attiecibā uz viņu projekciju gūšanu uz kādu plakni paleek spēkā tikko izvestais likums. Ja tas ir ta, tad viņš ir attiecinams uz šo trīsstūru zumu t.i. ari uz poligona laukumu.

Beidzot, gadijumā, kad uzejama kautkuras plakanas ar līkumainu (криволинейный) konturu figuras laukuma projekcija, šīs figuras laukumu var uzskatit, ka robežu no dotā figurā eerakstiteem un ap viņu apraksititeem poligoneem, kad šo poligona malu skaits bezgaligi paleelinajas, pee kam viņu laukumi nepārtraukti tūvojas dotas figuras laukumam, ka robežai. Šo poligonu laukumu projekcijas tai pašā laikā tūvosees dotas figuras laukuma projekcijai, ka robežai. Bet ta ka attiecibā uz šeem poligoneem viņu figuru laukumu projekcijas teek gūtas ka attieciqu laukumu produkts ar asu divskaldniska leņķa cosinus'u, kurš – leņķis – rodas starp poligonu un projekcijas plaknem, tad ari šo poligonu laukumu robežas, dotas, ar līkumainu konturu, figuras laukuma projekcija tiks gūta tādā pašā ceļā, pareizinot dotas figuras laukumu ar minetā leņķa cosinus'u."

B. Projekcijas uz asi.

a) Punkta projekcija.

Par punkta A projekciju a uz asi OX mēs veenosimees saukt no dotā punkta A uz doto asi OX nolaista perpendikulara pamatu. Šo punktu (perpendikulara pamatu) var gūt ari tādā ceļā, ka velk caur punktu A plakni perpendikulari pret asi OX. sk. zīmejumu № 14. Ase OX saucas par projekcijas asi. Uz šīs ases var tikt izšķirts ari viņas virzeens, apzīmejams caur bultiti jeb caur burtu kārtibu. Tā, OX nozīme, ka ases virzeens ir peeņemts no O pret galu X. Kamēr leeta grozas ap punkta projekciju, ases virzeens nav no svara. Viņš krīt svarā, kad pāreet uz vektora projekciju uz asi.



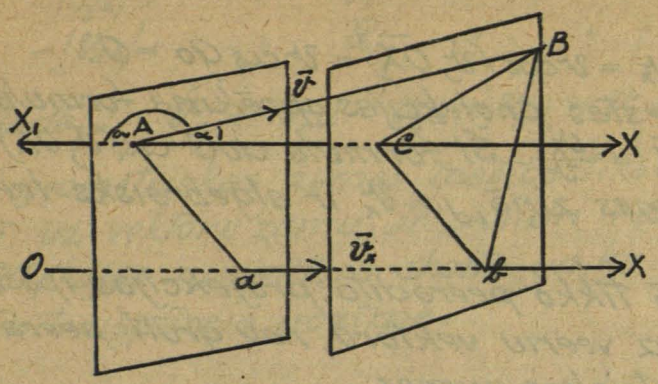
Zīm. № 14.

b) Vektora projekcija.

Par vektora $\bar{v}$ projekciju uz dotu asi (sk. zīm. № 14) mēs veenosimees skaitit vektoru $\overline{ab}$, kurš veeno vektora $\bar{v}$ sākuma un gala punktu projekcijas. Šī vektora virzeens teek skaitits no vektora $\bar{v}$ sākuma punkta A projekcijas, a, pret viņa gala punkta B projekciju, b. Caur to ka projekcijas asei mēs peeškīram zinamu virzeenu, tagad ir eespēja atšķirt projekcijas vektora $\overline{ab}$ virzeenu attieciba pret ases virzeenu. Ja projekcijas virzeens sakrīt ar ases virzeenu, tad šo projekciju skaita par pozitivu, pretejā gadijumā par negativu.

Pēc tam kad esam veenojušees par projekci-

jas leelumu un zīmi, jārāda, ka aprēķināt šādu leelumu. Nemsim (sk. zīm. N: 15.) kādu vektoru $\overline{AB} = \bar{v}$, kuru japrojekte uz kādu asi OX. Šī vektora projekcija sakrīt ar projekcijas ases virzeenu, tadēļ ir pozitiva. Vedisim iz punkta A līniju AX_1, paralelu asei OX un veenadi ar pēdejo virzītu. Ņēmuši vērā līnijas AX krustošanas punktu C ar projektejušo plakni, kura eet caur punktu B, redzam, ka:



Zīm. N: 15.

$$v_x = ab = AC.$$ Bet trīsstūrī ABC:

$$AC = AB\cos\alpha = v\cos\alpha,$$ kadēļ:

$$v_x = v\cos(\bar{v}, OX),$$ jo $\angle\alpha = \angle(\bar{v}, \overline{OX})$

Ja izmainit ases OX virzeenu uz pretejo, tad vektora $\bar{v}$ projekcija uz šo virzeenu būs negativa. Bet šinī gadijumā, no otras puses, lenķis starp vektora $\bar{v}$ virzeenu un jauno ases virzeenu ir: $\alpha_1 = \pi - \alpha$. Ja reizina vektora $\bar{v}$ skaitlisko nozīmi ar ši lenķa α_1 cosinus'u, tad gūstam rezultatu:

$$v\cos\alpha_1 = v\cos(\pi - \alpha) = -v\cos\alpha = -(ab),$$ kurš atkal izteic vektora $\bar{v}$ projekciju, ka skaitļa ta ari virzeena ziņā. Ta tad, vispāri, katrā gadijumā, vektora $\bar{v}$ projekcija uz kādu asi $\overline{OX}$ veenmēr var tikt aprēķināta saskaņā ar formulu:

$$\text{proj}\,\bar{v} = v_x = v\cos(\bar{v}, \overline{OX})$$

Atseviški gadijumi: 1) Vektora virzeens sakrīt ar ases OX virzeenu, tad $v_x = v$, jo $v_x = v\cos(\bar{v}, \overline{OX}) = v\cos 0 = v$.

Latvijas Universitātes BIBLIOTĒKA

2) Šee virzeeni ir veens otram preteji, tad

$$v_x = -v,$$ jo $v\cos(\bar{v}, \overline{OX}) = v_x = v\cos\pi = -v.$

3) Vektora virzeens ir perpendikulars pretases virzeenu; tad

$$v_x = 0,$$ jo $v_x = v\cos(\bar{v}, \overline{OX}) = v\cos 90 = 0.$

No augšā izvestas projekcijas aprēķina formulas seko $\cos(\bar{v}, \overline{OX}) = \frac{v_x}{v}$. Šī formula dod $\cos(\bar{v}, \overline{OX})$ skaitļa un zīmes ziņā, jo v_x ir algebraisks lielums.

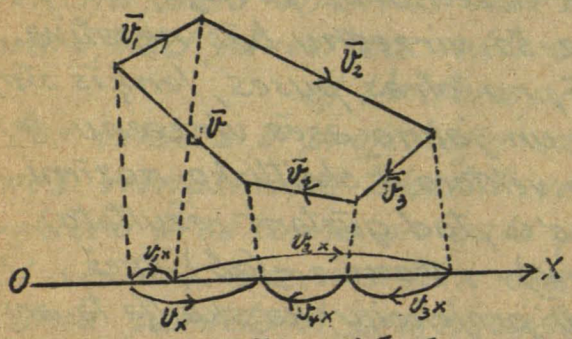
Ņemot vērā tikko peerādīto projekcijas īpašību attiecībā uz veenu vektoru, nav grūti peerādīt ka geometriskas zumas

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots \bar{v}_n$$

projekcija v_x uz kautkuru asi OX līdzinajas vektoru komponentu (saskaitamo vektoru) projekciju algebraiskai zumai, t. i.

$$v_x = v_{1x} + v_{2x} + \dots v_{nx}.$$

Pateesi, aplūkajot zīm. № 16, redzams, ka geometriskai veenadibai $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + \bar{v}_4$ izplātijumā (в пространстве) atbild uz ases OX šo vektoru projekciju veenadiba $\bar{v}_x = \bar{v}_{1x} + \bar{v}_{2x} + \bar{v}_{3x} + \bar{v}_{4x}$



Zīm. № 16.

Atnesot šo geometrisko veenadibu pretasi OX, gūstam veenadibu:

$$|v_x| = |v_{1x}| + |v_{2x}| - |v_{3x}| - |v_{4x}|,$$

kur eekavās eeslēgtee apzīmejumi ir skaitļu abzolutas nozīmes. Šo veenadibu var pārrakstīt:

$$|v_x| = |v_{1x}| + |v_{2x}| + (-|v_{3x}|) + (-|v_{4x}|).$$

Bet: $|v_x|$ ir vektora $\bar{v}$ projekcija uz OX asi, $|v_x| = v_x$
$|v_{1x}|$ " " $\bar{v}_1$ " " " " ", $|v_{1x}| = v_{1x}$
$|v_{2x}|$ " " $\bar{v}_2$ " " " " ", $|v_{2x}| = v_{2x}$
$-|v_{3x}|$ " " $\bar{v}_3$ " " " " $-|v_{3x}| = v_{3x}$
$-|v_{4x}|$ " " $\bar{v}_4$ " " " " $-|v_{4x}| = v_{4x}$,

kadēļ: $v_x = v_{1x} + v_{2x} + v_{3x} + v_{4x}$.

Šī geometriskas summas īpašība tika peerādīta attiecībā uz vektoru summu. Ir skaidri redzams, ka viņa ne atkarajas no vektoru skaita un ka viņai (īpašībai) peemīt vispāreja nozīme.

IV
Ģeometriskais produkts.

Veenosimees saukt par divu vektoru $\bar{v}$ un $\bar{v}$ ģeometrisko produktu, kuru apzīmesim ar $\bar{v}.\bar{v}$, šo vektoru absoluto nozīmju produktu, pareizinatu uz leņķa cosinus'u starp šo vektoru virzeeneem, t.i.

$$\bar{v}\bar{v} = vv\cos(\bar{v},\bar{v}).$$

Ka redzams, divu vektoru ģeometriskais produkts nav vairs vektorials, bet skalars, algebraisks leelums, ar kuru var izdarīt visas algebraiskas operacijas. Šīs ērtības dēļ viņam peekrīt sevišķa nozīme mechanikā.

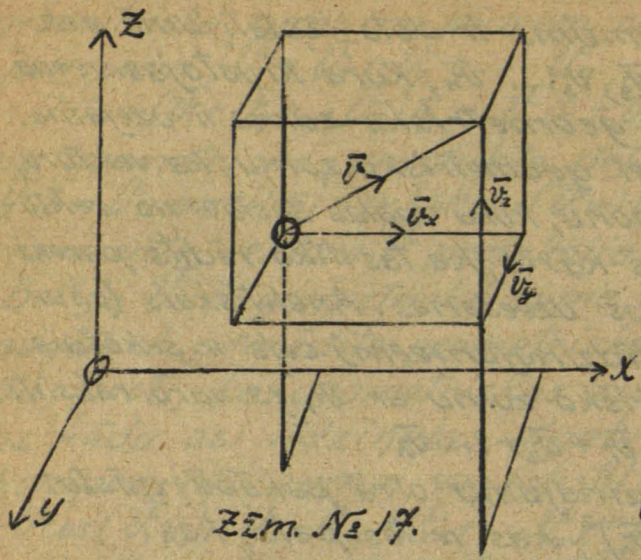
No ģeometriska produkta definicijas ir redzams, ka uz produktu-algebraisku leelumu, atteecas visas algebraiska produkta īpašības, t.i. var pēc patikas mainit leelumu pārreizinašanas kārtību, t.i. $\bar{v}\bar{v} = \bar{v}\bar{v}$.

Ja divi pārreizinamee vektori ir savstarpigi perpendikulari, tad viņu produkts:

$$\bar{v}\bar{v} = vv\cos 90 = 0.$$

Otradi, ja divu no 0 atšķirošos vektoru produkts

Katrs vektors $\bar{v}$ ļeek pilnigi noteikts caur viņa projekcijam uz trim projekciju zistemas asim.



Zīm. № 17.

Peeņemsim, ka projekciju zistema ir ortogonala (sk. zīm. № 17), tad, ka veegli redzams vektors var tikt uzskatits, ka geometriska zuma no viņa projekcijam: $\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z$.

$(\bar{v})^2 = v^2 =$
$= (\bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z)^2 =$
$= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 + 2v_x v_y \cos(\bar{v}_x, \bar{v}_y) + 2\bar{v}_x \bar{v}_z \cos(\bar{v}_x, \bar{v}_z) +$
$+ 2v_y v_z \cos(\bar{v}_y, \bar{v}_z)$. Ta ka visi vektori, kureem ir dažadi indeksi, ir virziti zem $90°$ veens pret otru, tad šo lenķu, $\cos 90° = 0$

Tādā kārtā pazūd locekļi, kuŗos eeeet lenķa $\cos_z$ un galigi: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, no kureenes: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Ja apzīmesim vektora virzeena lenķus pret zistemas asim ar α (pret X asi), β (Y-asi) un γ (Z-asi), tad:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|v|} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{|v|} = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{|v|} = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

kur v_x, v_y un v_z ir algebraiski leelumi, bet $|v|$ ir vektora absoluta skaitliska nozīme. Paceļot šos noliidzinajumus otrā pakāpē, gūstam:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{\left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right)^2} = 1,$$ kas aizrā-

da, ka no viseem trīseem leņķeem brīvi var vēlet tik divus, trešais eliminesees no beidzamas sakaribas.

Un pateesi, pee šāda slēdzeena mēs varam nonākt ari geometriskā ceļā. Ja leņķis starp X ases virzeenu un vektora $\bar{v}$ virzeenu ir α, tad, kamēr otrs leņķis nav vērā ņemts, vektoram $\bar{v}$ jasakrīt ar kona veiduli, kurš aprakstits ap p.O. Tā ka vektora virzeens ar Y-asi sastāda leņķi β, tad $\bar{v}$ jasakrīt ari ar otra kona veiduli, kurš aprakstits ap p.O. Vektora $\bar{v}$ virzeens sakritis ar abu konu virsmu krustajuma līniju, kuru būs divi. Jautajumu išķir zīmes, kuras eetilpst augšā peevestās cosinusu izteiksmēs: $\frac{v_x}{|v|}$, $\frac{v_y}{|v|}$ un $\frac{v_z}{|v|}$. Ja divu leņķu $\cos^2 > 1$, tad atrisinajums ne eespējams.

Ar geometriska produkta palīdzību var atrisinat saīsinatā ceļā dažus analitiskas geometrijas jautajumus, kuri var nākt preekšā mechanikā. Par peem. jautajums par leņķa aprēķinašanu starp diveem vektoreem $\bar{V}$ un $\bar{v}$ var tikt atrisinats sekoši:

Apzīmesim šo leņķi ar ε, tad:

$$\bar{V}\bar{v} = Vv\cos\varepsilon = (\bar{V}_x + \bar{V}_y + \bar{V}_z)(\bar{v}_x + \bar{v}_y + \bar{v}_z) = \bar{V}_x\bar{v}_x + \bar{V}_y\bar{v}_y + \bar{V}_z\bar{v}_z + \bar{V}_x\bar{v}_y + \bar{V}_x\bar{v}_z + \bar{V}_y\bar{v}_x + \bar{V}_y\bar{v}_z + \bar{V}_z\bar{v}_x + \bar{V}_z\bar{v}_y = V_xv_x + V_yv_y + V_zv_z,$$

jo pārejee locekļi = 0, ka vektoru produkti, kuru virzeeni ir perpendikulari.

Bet $V_x = V\cos\alpha_1$, $V_y = V\cos\beta_1$, $V_z = V\cos\gamma_1$,

$v_x = v_x\cos\alpha_2$, $v_y = v\cos\beta_2$, $v_z = v\cos\gamma_2$, un

$Vv\cos\varepsilon = Vv\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + Vv\cos\beta_1\cos\beta_2 + Vv\cos\gamma_1\cos\gamma_2$,

no kureenes saīsinot uz Vv, gūstam:

$$\cos\varepsilon = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

pazīstama analitiskā geometrijā atteeciba.

Ja gribam pagēret tai abi vektori būtu savā starpā virziti zem 90°, tad $\varepsilon = 90°$, $\cos\varepsilon = \cos 90° = 0$

un $\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0$.

Ja gribam, lai viņi būtu paraleli, veenadi virziti, tad $\cos\varepsilon = \cos 0 = +1$, ja - pretēji, tad $\cos\varepsilon = \cos\pi = -1$. un:

$$\pm 1 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 .$$

V.

Mechanikas pamatprincipi

(Njutona axiomata, sive leges motus)

Novērojot kermeņu dažadus kustibas veidus, mums uzmācas jautajums, kadēļ zinams kermens kustas šādi un ne tādejadi, t.i. ceļas jautajums par zinamas kustibas veida cēloneem. Par peem., var uzstādit jautajumu, kadēļ svabads ķermens, izlaists no mūsu rokam, kustas taisnā virzeenā pret zemes lodes centru, kadēļ preekšmeti ar leelam virsmu laukumu projekcijam uz plakni, kura ir stāteniska kustibas virzeenam, (plakani ķermeņi) tukšās telpās krīt ātrak, ne ka telpās, kur atrodas gaiss, kadēļ vilceens kustas pa zemes virsu zinamā virzeenā ar zinamu ātrumu u.t.t.

Inercijas jeb kūtribas princips.

Pirmais jautajums, kuru var uzstādit, ir kādu kustibas veidu gūst materiels ķermens pilnigi neatkarigs no teem cēloņeem, kuri zinamu kustibu ir izsaukuši, t.i. peeņemsim, ka cēlons, kurš ir darbojees zinamu laiku uz ķermeni, tagad savu darbibu ir pārtraucis un materiels ķermens tagad ilgstoši kustas pilnigi izolets, no jebkādeem cēloņeem. Visōs augstak peevestōs kustibas gadijumōs mēs konstatejam citu ķermeņu tūvumu, no ka

vareja nākt uz domam, vaj šo citu ķermeņu tūvums nav vedams kādā sakarā ar ķermeņa zināmu kustības veidu. Tā par peem. ķermena brīvā krišanas gadijumā mēs peieminejam zemes lodes centru, palēninatas plakanu ķermeņu kustības gadijumā minejam gaisu, vilceena kustības gadijumā konstatejam ceļa dambi ar sleedem u.t.t.

Izolesim kustību no visu šo materielu ķermeņu tūvuma. Tā ka materija nav iznīcinama, tad veenigais ceļš - eedomatees kustošo ķermeni bezgalīgā attālumā no mineteem materieleem ķermeņeem, kuru tūvums vareja tikt vests aizdomigā sakarā ar kustības veida cēloņeem.

Šādu eksperimentu mēs realizet nevaram un minetais kustības veids ir tikai eedomajamais. Tomēr mūsu varā ir izdarit veselu virkni eksperimentu tādā kārtā, ka ar katru nākamo eksperimentu ķermeņa kustības veida cēloņa eespaids mazinas.

Tādā ceļā, kurš atgādina robeža meklešanu matematikā, daudzreiz būs eespēja gūt kustību veidu rindu, kurš izrādis teeksmi tuvinatees, cik patīk, kādam idealam kustības veidam, ka robežai, kad visu cēloņu eespaids pilnigi atkristu. Par peem. šādu eksperimentu es varetu izvest sekoši. Es speežu kādu materielu ķermeni idealas bumbas veidā kustetees pa kādu plakni. Lai leela materiela ķermeņa, zemes lodes, eespaidu pilnigi paralizetu, es plakni uzstādu pilnigi horicontāli, jo, novērojot brīvi krītoša ķermeņa kustības virzeenu, es vareju nākt uz domam, ka, ja šinī kustības veidā zemes lodei kāda loma vareja peekrist, tad cēloņa darbibas virzeens vareja būt tas pats, ka kustības virzeens.

Noveetojot starp ķermeni un zemes lodi ideali horicontalu plakni, es tādā kārtā tad zemes lodes eespaidu novēršu. Uz šīs plaknes sveesta bumba, ka izrādas, kustas: pirmkārt, taisnā virzeenā, un, otrkārt, ar mazinojošos ātrumu, līdz pilnigas burnbas apstāšanos. Peešķirot šai horicontālai plaknei dažadas fizikaliskas īpašibas, es nomanu, ka šis apstāklis kustibas virzeenu neeespaido, kurš paleek taisnvirzeenisks, bet ātrums mazinas dažadi atkaribā no plaknes virsmas fiziskam īpašibam. Tūvaki nodarbojotees ar jautajumu par virsmas fizikalisko īpašibu eespaidū uz kustibas ātruma mazinašanos, es nāku peeslēdzeena, ka ši īpašiba ir virsmas gludenums Ja gludenaka virsma, jo burnba kustesees ilgaki ātrums mazinasees gausaki. Ņemot šos apstākļus vērā es varetu nākt peeslēdzeena, ka robežā, kad virsmas asums būtu 0, ķermens kustetos taisnā virzeenā, bez ātruma maiņas mūžigi. Šo idealo šemu sauc par inercijas jeb kūtribas principu (1 Njutona princips), jo viņš var tikt izskaidrots, peerakstot materielam ķermenim it ka kādu eekšeju īpašibu pretotees kustibas maiņas cēloņeem. Ejot no šīs šemas atpakaļ uz teem kustibas veideem, kurus mēs novērajam dabā, mums japeelaiž tagad cēloņu eksistenci, kuri pārvērš materiela ķermeņa taisnvirzeenisku ar veenmērigu ātrumu kustibas veidu tos bezgaligi daudzos un visdažadakos veidos, kuri valda dabā. Ka redzams, pirmam mechanikas principam peemīt 2 elementi: 1) veenmērigs ātrums un 2) taisns kustibas veidsns. Pats parsevi saprotams, ka ari preekš katra atsevišķa elementa mai-

ņas ir vajadziga sevišķa cēloņa ecdarbe. Par peemēru, cēlons ir vajadzigs, lai mainītu ātrumu, atstājot taisno virzeenu, cēlons ir vajadzigs lai mainītu taisno virzeenu kādā citā, atstājot ātrumu negrozītu. Abu elementu maiņu mēs apzīmesim pagaidam ar vispārejo nosaukumu „kustības maiņa." Ka redzesim vēlaki kinematika kustības maiņa, beidzot, ir ekvivalenta ātruma maiņai, jeb paātrinajumam..

No peevesto eksperimentu apstākļeem es vairak nekādus slēdzeenus taisit nevaru, ka tikai veenu, peevesto, proti, ka preekš dabā novērojamo kustibas veidu dažadibas ir japeelaiž sevišķu cēloņu eksistenci, kuri pārvērš idealo kustibas šemu pateesos, īstenos. Varetu tikai vēl peezīmet, ka pirmais princips pavisam nedod nekādus skaitliskus sakarus starp cēlonu leelumeem un kustibas veidu elementeem. Par ātrumu ir teikts, ka viņš idealā šemā ir veenmērigs ar kautkuru skaitlisko nozīmi. Ātruma atseviška skaitliska nozīme $v = 0$, dod ta saucamo meera stāvokli.

Kustibas maiņas atkaribas princips no spēka.

Raudzisim tagad panākt, ka materiels ķermens, kuram peemīt augšā minetais idealais kustibas veids, maina šo veidu.

Praktiski šādu gadijumu mēs varam realizet apmēram sekoši. Peeņemsim, ka pilnigi izolets augšminetā nozīmē (izolets no viseem eespējameem kustibas maiņas cēloņeem) materiels ķermens (bumba) kustas pa abzoluti gludu horicontalu plakni. Izdarot ar rokas palīdzibu darbibu, ko ikdeeniškā dzīvē sauc par grū-

šanu kustības virzeenā, mēs novērojam sekošo: ķermeņa kustības ātrums paleelinajas, no otras puses mūsu jūtu organi uzņem mūsu rokas muskuļu peepūlejumu sajūtu, kura ir leelaka, ja ķermeņa ātrums peeaug spējaki un otradi. Tā tad ši muskulu peepūlejuma sajūta atrodas taisnā sakaribā ar ātruma peeaugšanu. Tā ka citi nekādi apstākļi izņemot muskulu peepūlejumu, nav dalibu ņēmuši ātruma maiņā, tad aiseek slēdzeens, ka mūsu rokas muskuļu peepūlejums ir kustības maiņas cēlons. Par ši cēlona, mēru peeņemsim mūsu rokas muskulu peepūlejumu sajūtu, kura mainas taisnā sakaribā ar ķermeņa kustības paātrinajumu. Tā ka sajūta pate par sevi ir zubjektivs eespaidojums, kuru teeši mērit ne var, tad jaķeras peepaša peepūlejuma seku mērišanas, veenojotees skaitit par paša cēloņa mēru kādu viņa seku leelumu funkciju. Tas ir tas veenigais ceļš, kuru šinī gadijumā var peemērot. Tā tad ķermeņa ātruma kustības maiņas cēlons, kuru tagad apzīmesim ar veenu vārdu „spēks", ka matematisks leelums, kurš var būt mazaks jeb leelaks un var tikt mērits, var tikt izteikts $F = f(u)$, kur u ir ķermeņa paātrinajums, pee kam paātrinajums ir pilnigi reals leelums, kurš var tikt mērits.

Visveenkāršakais funkcijas veids ir veenkārša proporcionalitate, un tadēļ raudzisim viņu šinī gadijumā peemērot, tikdami: $F = ku$, kur k ir kāds proporcionalitates koeficients.

Izdarot kustošas bumbas nolēninašanu, mēs redzam, ka šinī gadijumā spēka virzeens ir pretejais pirmajam gadijumam, bet izrādas,

ka sekas, kuras parādas ātruma maiņā u ari mainīs savu virzienu, palikdamas virzienā ziņā pretējas pirmam gadījumam, un vispāri spēka virziens vienmēr sakrīt ar kustības paātrinājuma virzienu. Tā ka paātrinajums w ir vektors, t.i. lielums, preekš kura pilnigas lieluma noteikšanas ne pietiek ar viņa skaitlisko nozīmi vien, bet vēl ņemams vērā ari viņa virziens, tad nupat izvestā skaitliska sakariba $F=ku$ paliek par ģeometrisku sakaribu $\bar{F}=k\bar{u}$, kur tagad $\bar{F}$ un $k\bar{u}$ apzīme divus vektorus, kuru skaitliskas nozīmes ir vienadas un bez tam sakrīt abu vektoru virzieni un kura izteic Ņjutona otro principu. Vēl japiezīme, ka ievesta funkcija $F=ku$ ne runa pretim pirmam principam. Patiesi, liekot $\bar{F}=0$, gūstam $k\bar{u}=0$, t.i. spēku izolacijas gadijumā ķermens atrodas vienmērigas, taisnvirzieniskas (bez paātrinajuma) kustības stāvoklī.

Vis jautajums tagad koncentrejas ap koeficienta k noteikšanu. Vēlot preekš eksperimenta bumbas no dažada materiala, mēs varam konstatet, ka par piem. dzelzbumba vienada lieluma ar koka bumbu pagēr lielaku muskulu piepūlejumu, lai gūtu vienadus $\bar{u}$, ne ka koka bumba. No šī es varu slēgt, ka k mainās pārejot no vienas vielas uz otru, bet es vēl neesmu pārliecinats, vaj k ne mainas ari preekš viena un ta paša ķermeņa, neatkarigi no vielas. Še atkal var izpalīdzet eksperiments, preekš kura izvešanas es piemērošu sekoso metodi, izlietojot ķermeņa miera stāvokli, kad ātrums $v=0$ un kurš dod iespēju gūt ilgstošus kinema-

tiskus eespaidus atšķirībā no dinamiskas metodes, kur es būtu spiests uztvert acumirkligus eespaidus. Es aplūkoju ķermeņu zistemas meera stāvokli ($v=0$) raditu caur pazīstamu aparatu — svareem. Ka zinams, caur svareem var tikt radits tāds divu ķermeņu robežu meera stāvoklis, kuru kāda vismazaka spēka eedarbe izjauc, pārvezdama zistemu dinamiskā stāvoklī.

Es ņemu vērā veenu no diveem, uzabeem svaru kauseem atrodošeem kermeņeem, kuri atrodas tādā robežmeera stāvoklī un stājos pee šī ķermeņa dažadu fizisku un matematisku īpašibu maiņas. Par peem., es mainu krāsu, figuru, tilpumu (blīvumu), temperaturu, noaizkārdams tikai veenu, proti materijas daudzumu jeb masu. Tād izrādas, ka meera stāvoklis bezgaisa telpās ne caur kādu tādu īpašibu maiņu ne teek traucets, t.i. nevar rastees cēlons, kurš var izsaukt šinī gadijumā mechaniska stāvokļa maiņu.

Es zinu, ka mūsu eksperimenta gadijumā stāvoklis $v=0$ nav izsaukts caur abu uz svaru kauseem atrodošos ķermeņu pilnigu izolaciju no spēkeem, jo to es fiziski panākt nevaru, un tadēļ mūsu gadijums $v=0$ ne atbild Njutona 1 principa atseviškam veenmērigas, taisnvirzeeniskas kustibas gadijumam, kad $v=0$. Ta tad mūsu gadijums ir kāds, no **spēku darbibas** izsaukts, kustibas maiņas atsevišķs gadijums, kad līdz ar $w=0$ ari $v=0$. Šis ir ta saucamais spēku līdzsvara stāvoklis, ar kuru nodarbo, ēs statika.

(To es peezīmeju tikai garamejot.) Un pateesi, nav ari grūti pārleecinatees, kas tee par spēkeem ir, kuri ir noveduši abu kermeņu sistemu stāvokli, $u=0$, $v=0$. Abi ķermeņi atbrīvoti no saitem ar svareem, tukšās telpās virzas ar pilnigi noteiktu, ta saucamo **smaguma spēku** paātrinajumu $\bar{u}=\bar{g}$ pret zemes lodes centru.

Ja nu es būtu pārleecinats, ka līdz ar augstāki mineto veena ķermeņa īpašibu mainu uz svareem ne mainas ari viņa paātrinajums $\bar{u}=\bar{g}$, tad es tagad varetu nākt pee slēdzeena, ka papildu spēks, kurš vareja traucet mūsu abu kermeņu meera stāvokli, ne vareja rastees tadēļ, ka uz mineto ķermeni darbojošam spēkam ir izteiksme: $\bar{F}=k\bar{u}$, kur K = constans, jo ja līdz ar mineto īpašibu mainu rastos tāds spēks, tad tas varetu notikt tikai uz K koeficienta mainas rēķina. Pārleecinatees par paātrinajuma $\bar{u}=\bar{g}$ pastāvibu un neatkaribu no mineto īpašibu maiņas nav grūti. Es leeku no svara kauseem nonemtam kermenam brīvi krist tukšās telpās tanī pašā veetā uz zemes lodes, kur es uzstādiju svarus. Tad izrādisees, ka ķermenš, kura īpašibas tiks mainitas tapat, ka uz svareem, kustesees ar kādu pastāvigu paātrinajumu, kura nozīme atkarasees no mūsu eksperimentu izdarišanas punkta attecibā pret mūsu zemes lodi. Ja tas ir ta, tad es tagad varu likt: $\bar{F}=k\bar{u}=k\bar{g}$, kur k=const. preekš veena un ta paša ķermeņa visos apstākļos. Ja nu pee ķermeņa visdažadaku aedomajamo īpašibu maiņas tik veena pa-

lika nemainīta, proti kermeņa masa, jeb veelas daudzums, tad nākam pee slēdzeena, ka skaitlis k, kurš palika constans, mēra veenigi šo pastāvigu palikušu īpašību, t.i. ķermeņa masu. Saskaņā ar šo, es koeficienta k veetā, par kuru līdz šim es vairak ne ka ne zinaju, ka tikai to, ka viņš ir kāds pastāvigs skaitlis, varu eeveetot skaitli m, kurš mēra ķermeņa masu, un likt vispārigi: $\vec{F} = m\vec{w}$.

Tāda būtu varejusi būt spēka izteiksme elementarā gadijumā, kad uz ķermeni darbojas veens spēks.

Peeņemsim tālak, ka uz ķermeni materiela punkta veidā darbojas divi spēki veens otram preteji virziti. Es pagaidam vēl nezinu, vaj gadijumā, kad uz ķermeni darbojas vairaki spēki kopigi, veenā laikā, vaj veena spēka darbiba ir neatkariga no katra otra, t.i. vaj šinī gadijumā katrs spēks rada to pašu kustības maiņu, it ka viņš darbotos veens pats, ne atkarigi no pārejeem.

Atteecibā uz diveem veenadeem, veens otram preteji virziteem, spēkeem, peelikteem pee veena materiela punkta, janāk pee slēdzeena, ka viņu kopejas darbibas rezultāts būs $\vec{w} = 0$ ari tai gadijumā, ja viņu darbibas sekas būtu bijušas atkarigas veenas no otram, jo šema ir pilnigi zimetriska un nav eemesla peelaist veena veenada spēka kautjebkādu preekšrocibu samērā pret otru. Teešs mēģinajums to ari peerāda. Ja spēku virzeeni ne sakrīt, tad spēku darbibas neatkaribu spilgti raksturo, uz eksperimenta pamata gūtais, fizikā pazīstamais

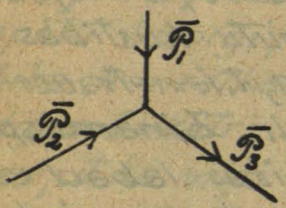
paralelograma likums, saskaņā ar kuru divu spēku rezultējoša jeb kopspēka vektors ir $\bar{R}$ ir veienads ar abu spēku paralelograma diagonali ar virzienu, kurš dod: $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2$, t.i. R rodas, ka abu spēku ģeometriska summa. Vairāku spēku gadījumā, un pieņemot to pašu spēku darbības neatkarības principu, kurš pieļaiž atsevišķu spēku saveienojumu pa diveem, no kuŗeem viens vienmēr reprezentes kādu divu citu spēku kopspēku atteecigas diagonales veidā, gūsim uz tā paša paralelograma likuma pamata sakaribu: $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots \bar{P}_n$, t.i. rezultējošs jeb kopspēks ir spēku komponentu (слагаемых сил) vektoru ģeometriska summa.

Spēka paralelograma likums vareja tikt pārbaudits, leetojot statisko šemu: $\bar{u} = 0$, $\bar{v} = 0$, t.i. kopojot spēkus tā, lai ķermens gūtu kustības maiņu $u = 0$ gadījumā, kad $\bar{v} = 0$, t.i. netraucejot ķermeņa esošo meera stāvokli. Zināms, spēku neatkaribas principu vispāribas labad es pārnesu ari uz gadijumu, kad uz ķermeni darbojas divi veienadi, bet preteji virzīti spēki, kad man nebija eespēja pārleecinatees par šī principa esamibu, jo šinī stāvoklī mūsu veenkarša spēku zisteema zaudeja tās pazīmes, kas vareja aizrādit uz neatkaribas principa eksistenci. Daudz sarežģitaka ir dinamiska metode likuma $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots \bar{P}_n$ uzstādišanai. Šeit principa pārbaudišana var notikt indirekti, novērojot kustibas elementus, no veenas puses un aprēķinot viņus uz uzstādito principu pamata. Rezultatu sakrišana garante principu pareizibu, jeb pārvērš peeņemtās hipote-

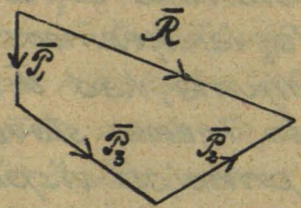
zes par principeem.

Tāds ir vispārejais fizikalisku principu uzstādīšanas ceļš. Šo principu peerādījums meklējams veenigi uz viņeem uzbūveto aprēķinu sakrišanā ar dabas parādibu novērojumu rezultāteem. Ņemot vērā apbrīnojamu precizitati, ar kuru var paregot visleelako dabā, debes, ķermeņu kustibas likumus ar Njutona principu palīdzibu, janāk peeslēdeena, ka uzstāditee principi minetā nozīmē ir pareizi.

Atgreezisimees pee dinamiska gadijuma, kurš rodas caur vairaku spēku kopdarbibu. Ka visu spēku koprezultats būs zinams paātrinajuma vektors, ar kuru ķermens kustesees uz preekšu.



Zīm. № 18.



Zīm. № 19.



Zīm. № 20.

Jautajums ir, kāds būs šis paātrinajuma vektors. Peeņemsim, ka uz materielu punktu (sk. zīm. № 18.) darbojas 3 spēki $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ un $\bar{P}_3$, kurus var saveenot kopspēkā $\bar{R}$ caur geometrisku saskaitīšanu $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$ (sk. zīm. № 19.). Tā ka spēku darbiba ir neatkariga veena no otras, tad tādā pašā ceļā vares gūt rezultejošu paātrinajumu $\bar{u}$, ka geometrisku zumu no paātrinajumeem, ņemteem no līdzibam: $\bar{P}_1 = m\bar{u}_1$,

$\bar{P}_2 = m\bar{u}_2$

$\bar{P}_3 = m\bar{u}_3$,

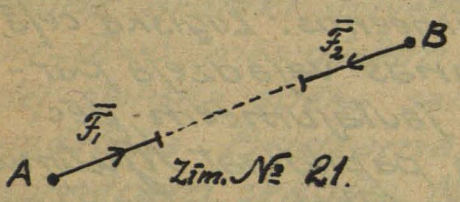
ka $\bar{w} = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3$.

Poligoni uz zīmejumeem № 19 un 20 ir līdzīgi (подобные), jo malas ir savstarpīgi paralelas, tādēļ ka spēka virzeens sakrīt ar paātrinajuma virzeeneem. Atteeciņo (zīm. № 19 un 20) poligonu malu atteecibas koeficients ir $\frac{P_1}{w_1} = \frac{P_2}{w_2} = \frac{P_3}{w_3} = m =$ $= \frac{R}{w}$, no kureenes: $\bar{R} = m\bar{w}$, jeb. $\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 =$ $= m\bar{w} = m\bar{w}_1 + m\bar{w}_2 + m\bar{w}_3$, t.i. visu doto spēku darbiba kustības maiņas ziņā peelīdzināma tai maiņai, kuru izsauktu veens pats veenigs spēks, veenads (равный) ar doto spēku kopspēkū, kurš ir doto spēku geometriska zuma. Šī sakariba, zināms, var tikt atteekta uz kaut kuru spēku skaitu un ir visas dinamikas pamatnolīdzinajums.

3) Spēku abpusigas darbibas princips.

(Принцип взаимодействия сил).

Visi dabas spēki ir abpusigas darbibas spēki veenadi un preteji virzīti. Ņemsim divus materielus punktus A un B starp kureem darbojas divi spēki $\bar{F}_1$ un $\bar{F}_2$ (skat. zīm. № 21)



Zim. № 21.

Peeņemsim uz acumirkli, ka šee spēki nav skaitliski veenadi lai gan preteji virzīti. Eedomasimees abus materielus punktus saveenotus caur ceetu, materielu eesmu. Ja nu tādi spēki ne būtu veenadi, tad zistema ar diveem materieleem punkteem gūtu paātrinajumu, pee kam ātrums beidzot pārkāptu katru eedomajamo robežu, kas ir runa pretim dabas parādibam.

Visi augšā peevestee principi ir atteekti uz materielu punktu gadijumu jeb gadijumu kad ķermens var tikt uzskatits, ka materiels punkts (par peemēru zemes lode atteecibā uz sauli, ka peevilkšanas centru). Caur tādu norobežojumu mēs speedam visus spēkus krustotees veenā kopigā punktā. Lai izplātitu minetos principus uz materieleem kermeņeem, kurus nevar uzskatit, ka materielus punktus, vajadzes apskatit dažus papildu noteikumus un jēdzeenus, par kureem būs runa tālak.

VI.

Spēku salīdzinašana, spēku veeniba un spēku mērišana.

(dinamometrija)

Eekams mēs vēl nebijam veenojušees, ko skaitit par veenadeem spēkeem un ka viņus mērit, pateesibu sakot, spēku naatkaribas principa uzstādišana un paralelograma likuma pārbaudišana ne bija eespējama, jo bija vajadzigs dot spēku izšķiršanas paņēmeenus. Logiskā ceļā, pēc $F = m\bar{u}$ uzstādišanas vajadzeja pāreet uz dinamometrijas jautajumeem, pēc kam tad būtu eespēja papildinat Njutona II principu ar spēku darbibas neatkaribas likumu.

Ta ka preekš spēku izteiksmes mēs vēlejam kustibas elementu maiņas (ātruma skaitliskās nozīmes un virzeena) funkciju $F = m\bar{u}$, kura pee doteem m un $\bar{u}$ ir veennozīmiga (однозначная), tad zinamu kustibas maiņu no-

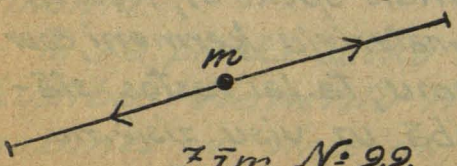
teiks tikai veens spēks skaitļa un virzeena ziņā (vektors): otrs, jeb vairaki spēki, kuri varetu atšķirtees no pirmā, nevar pastāvet. Sauksim tagad par veenadeem spēkeem tādus divus spēkus, kuri neatkarigi no viņu celšanas avoteem un dabas (elektribas, magnetisma, zemes peevilkšanas u.t.t.) peelikti veens pēc otra veenā un tai pašā materiela ķermeņa punktā (jeb peeliktī pee materiela punkta) izsauc veenu un to pašu kustibas maiņu. Šādeem diveem spēkeem jabūt skaitliski veenadeem un veenadi virziteem, ņemot vērā tikko izteikto peezīmi par spēka funkcijas veennozīmigumu. Ja tas ir tā, tad starp šeem diveem spēkeem $\bar{F}_1$ un $\bar{F}_2$ japastāv līdzibai $\bar{F}_1 = \bar{F}_2$. t.i. šee spēki ir saistiti caur geometrisku veenadibu (геометрическое равенство).

Spēku salīdzināšana var notikt, novērojot ķermeņa kustibas maiņu dinamiskā stāvoklī, kad ķermens kustas, jeb statiskā stāvoklī, kad ķermens atrodas meera stāvoklī. Pirmā gadijumā ir darīšana ar acumirkligeem eespaideem, kurus ir daudz grūtaki uztvert. Otrā gadijumā kad $\bar{v}=0$ un $\bar{a}=0$, mēs gūstam ilgstošus eespaidus, kadēļ statiska spēka salīdzināšanas metode ir visērtaka. Beidzamas metodes šema būtu apmēram sekoša. Materiels ķermens, uz kuru darbojas zināms salīdzināmais spēks $\bar{F}_1$, teek saveenots ar kaut kuru otru materielu ķermeni caur materielu ķermeņu zistemu, ta lai rastos stāvoklis $\bar{v}=0$, $\bar{a}=0$ attiecibā uz visu zistemu [Svari ar diveem ķermeneem uz svaru kauseem, kuri ir saveenoti caur svaru daļam, nesenem (kopo-

мысло) un saitem]. Kad tāds stāvoklis ($\bar{v}=0$, $\bar{\omega}=0$) ir panākts, noņem salīdzināmo spēku $\bar{F}_1$ (par peem. noņemot attiecīgo ķermeni no svaru kausa) un noveeto noņemtā spēka $\bar{F}_1$ veetā otru spēku $\bar{F}_2$ (konkreti, uzlieekot uz svaru kausiņa otru ķermeni). Ja stāvoklis $\bar{v}=0$, $\bar{\omega}=0$ attiecībā uz mūsu zistemu ari tagad neteek traucets, tad abi spēki $\bar{F}_1$ un $\bar{F}_2$ ir veenadi un ari dinamiskā stāvoklī viņi būtu spējigi izsaukt veenu un to pašu kustības maiņu.

Var vēl peezīmet, ka nupat aprakstītais paņēmeens, pateesi, dod eespēju pārkontrolet geometrisku spēku vektoru $\bar{F}_1$ un $\bar{F}_2$ veenadibu pilnigi. Ja, par peemēru, veens no salīdzinameem spēkeem grozītu savu virzeenu, skaitliski tikai palikdams veenads ar otru, tad šis apstāklis tūlit atsauktos uz zistemas stāvokli, kurš pāreetu dinamiskā, peerādidams, ka spēku veenadibas peeņemtā nozīmē vairs nav.

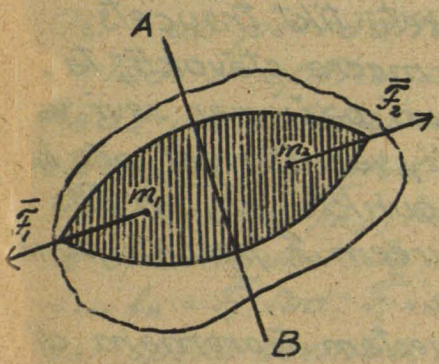
Pēc tam kad jau ir rādita augšā aprakstītā spēku salīdzinašanas metode, es varu dot vēl veenu statisku paņēmeenu preekš spēku salīdzinašanas, dibinadamees uz sekošo teoremu: Ja uz meerā atrodošos ķermeņa punktu m darbojas divi skaitliski veenadi spēki uz veenas līnijas bet pretejā virzeenā, tad mater punkta meera stāvoklis netiks traucets. (Skat. zīm. № 22.). Pateesi, negribedams izlieetot Njutona spēku darbibas neatkaribas principu,



Zīm. № 22.

kurš dotu teeši vajadzīgo atbildi, es prātoju: Ja abu šo spēku darbiba ari būtu atkariga veena no otra, tad ņemot vērā pilnigu šemas zimetriju es nevaru peelaist veena spēka kautkādu preekšrocibu atteecibā pret otru, kas zīmējas uz punkta kustības maiņu un tadēļ, ja ķermens eepreekš ir atradees meera stāvoklī, tad viņš tanī atradisees ari uz preekšu. Ja tas nu ir ta, tad, zinadams veena spēka leelumu un virzeenu (vektoru), es zinu, ka otram spēkam, lai meera stāvoklis neizjuktu, jabūt skaitliski veenadam, ar pirmajo, bet preteji virzitam, un ka starp šeem spēkeem $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$ japastāv atteecibai $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, kas nozīme, ka abi spēki būtu veenadi pilnigi (skaitļa un virzeena ziņā) ja otra spēka virzeens tiktu mainits uz pretejo.

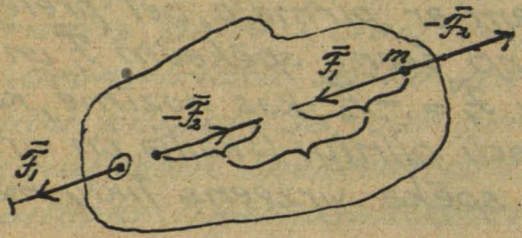
Ja abi veenadee bet preteji virziti spēki darbojas ne uz veenu meerā stāvoša ceeta ķermeņa punktu, bet uz dažadeem, tad šee spēki meera stāvokli ne trauces, ja viņi darbosees uz veenas un tas pašas taisnas linijas. Pateesi, (sk. zīm. 23) peeņemsim, ka šee spēki darbojas uz punkteem m_1 un m_2. Izdalisim ķermeņa masā kermeni, zimetrisku, kā atteecibā uz darbibas linijas virzeenu, tā ari atteecibā uz plakni, kuru mēs varam eedomatees ejošu caur AB perpendikulari pret spēku darbibas linijas virzeenu. Nav šaubu, ka šī daļa atrodisees meera stāvoklī.



Zīm. № 23.

zem spēku $\bar{F}_1$ un $\bar{F}_2$ eespaida. Šis stāvoklis nevar tikt traucets caur to, ka pēc tam minetam izdalitam ķermeņam peeveenosim ķermeņa pārejo masu, uz kuru ne kādi spēki nedarbojas.

Tulit var peerādit ari sekošo teoremu. Špēka mechaniskā nozīme un daba ne kādā ziņā netiks grozita caur to, ka es veenā, no šo spēku eedarbes, punktu pārnesišu viņa darbibas līnijas virzeenā. Pateesi, (sk. zīm. 24.) uz spēka darbibas līnijas es varu peelikt pee kāda punkta m. divu spēku zistemu $\bar{F}_1$ un $-\bar{F}_2$, pee kam $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, bez ka esošais meera stāvoklis varetu tikt traucets.



Zīm. № 24.

Ta ka ķermens atrodas meera stāvoklī, tad spēku $-\bar{F}_2$ un $\bar{F}_1$ zistemu, kuri paši par sevi varetu radit meera stāvokli, var atmest, pēc ka $-\bar{F}_2$ izrādisees pārnests punktā m, un būs spēku zistema $\bar{F}_1$ un $-\bar{F}_2$, no kureem $\bar{F}_1$ peelikts punktam O, bet $-\bar{F}_2$ – punktā m.



Zīm. № 25.

Uz nupat izvestam teoremam dibinajas seviška aparata princips, kuru sauc par dinamometru (spēka mēritajs). Šī aparata šema ir peevesta uz zīmejuma № 25. Spēku salīdzinašanu ar šo aparatu var izdarit ka pēc veena, ta otra paņēmeena. Leetojot pirmo paņē-

meenu, būtu jarīkojas šādejadi. Pee dinamometra peeleek kādu zināmu spēku, kurš dinamometra atsperu izsteeps zināmā leelumā, eekams eestāsees meera stāvoklis. Pēc tam pirmo spēku noņem un peeleek otru. Ja atspera izsteepšana abos gadijumos būs veenada, tad spēki ir veenādi. Pēc otra paņēmeena kalibre dinamometru, t.i. aprēķina atsperas izsteepi, ka funkciju no peelikteem dažadeem spēkeem. Ja šis darbs ir izdarits, tad gribedami noteikt kādu nezinamu spēku, mēs pēdejo peeleekam pee dinamometra, kurš rādis zinamu atsperas izsteepi, kurai atbild zināms spēks uz dinamometra kalibrešanas pamata. Zistemas meera stāvoklis eestājas zem divu veenadu, veens otram pretim virzitu spēku eespaida. Salīdzināmā spēka eedarbes punkts drīkst atrastees nenoteiktā attālumā uz līnijas OC - uz peerādito teoremu pamata.

Tādi ir spēku salīdzināšanas paņēmeeni. Kāds no salīdzinajameem spēkeem var rastees, ka vairaku spēku zuma, tad par peem. $\overline{F_1} = (f_1 + f_2 + \dots f_n)$, kur $f_1, f_2 \dots f_n$ ir atseviško spēku apzīmejumi. Ja šee spēki ir veenadi $f_1 = f_2 = \dots f_n = \overline{F_1}$ tad: $\overline{F_1} = n\overline{F}$. Ja $\overline{F}$ nozīmi peeņemtu par spēka veenibu, tad spēks $\overline{F_1}$ izrādītos izmērots ar peeņemto spēka veenibu un būtu:

$$\overline{F_1} = n(\text{sp. veenibu}).$$

Tagad visa leeta grozas ap spēka veenibas uzstādišanu. Šinī jautajumā mēs pavisam neesam saistiti. Spēka veeniba ir kautkāds zināms spēks, kuru mēs veenojameees skaitit par spēka veenibu.

Tā ka spēks veemēr ir saistīts ar ķermeņa masu, tad vispirms būtu javēl preekš spēka veenības zināmu masu un tad paātrinajumu ū. Kas attieecas uz masu, tad var tikt peeņemta kāda dabā izplātita fiziska ķermeņa masa. Ja ķermenis ir vēlets, tad viņa tilpums un temperatura noteic masu. Par tādu ķermeni ir vēlets dabā ļoti izplātītais ūdens, kurš ļoti ērti peeņem kautkura geometriska ķermeņa, ka viņu eeslēdzoša trauka, formas. Pee vēleta tilpuma temperatura teek peeņemta 4°C kad ūdens ir visbeezaks. 1 kub. ctm. tādas temperaturas destileta ūdeņa masas teek skaitīts par masas veenibu un saukts „grams." Šī ir ta saucamas abzolutas mēru zistemas masas veeniba, kura teek leetota fizikā. Ka jau tika minets, visi leelumi, kuri teek leetoti mechanikā un fizikā, var sastāvet tikai no 3 pamatleelumeem: garuma, laika un masas. Abzolutā mēru zistemā visas veenibas teek sastāditas caur veenibam: garuma--santim. laika - zekunda un masas - grams.

Tā tad jautajumu par masas veenibu var izškirt, ka redzejam, deezgan veegli. Kas attieecas uz paātrinajumu, tad abzolutā mēru zistemā par tādu veenibu peeņem 1 ātruma peeaugumu par 1 sant. zekundā, caur ko rodas spēka veeniba abzolutā mēru zistēmā, kuru sauc par dinu. Tā tad dina ir tas spēks, kurš masas veenibai, 1 gramam, peešķir paātrinajumu 1 sant. zekundā. Šī spēka veeniba ir ļoti nieciga un, ka tāda, noder preekš teem delikateem spēku mērijumeem, kuri nāk preekšā fizikā.

Ja pee spēka veenības sastādīšanas, ka paātrinajumu, vēlesim leelumu, kurš dabā visbeežaki nāk preekšā un, ta sakot, katru acumirkli atrodas zem rokas, tad mērit ar tādu veeību būs visērtaki. Tāds paātrinajums ir dabā uz katra sulja novērojams smaguma spēka paātrinajums, kuru mēdz apzīmet ar g. Viņa skaitliska nozīme nav visur veenada, bet atkarajas no novērojuma veetas augstuma par juras spoguli un platuma grādu. Šis sakars tuksumā ir:

$g = (980{,}6056 - 2{,}5028 \cos 2\varphi - 0{,}000002\,h)$ sant. ātruma peeauguma 1 zekundā. Uz platuma grada $\varphi = 45°$ un pee jūras spoguļa $(\cos 2\varphi)_{\varphi=45} = 0$, $h = 0$ un $g = 980{,}6056$. Ar relatīvu kļūdu ap:

$\frac{(981{,}0 - 980{,}6)}{981{,}0} 100\% = 0{,}04\%$ tad g skaitlisko nozīmi varetu peeņemt $g = 981$ sant.

Tāda g praktiska pastāviba vēl vairak runa par labu šīs nozīmes peeņemšanai preekš spēka veenības sastādīšanas. Atstājot masas veenibu to pašu gramu, mēs gūtu jaunu spēku veenibu, kura katrā ziņā ir zem rokas. Šādas spēka veenības preekšrociba ir vēl ta, ka šinī gadijumā izdarot spēku mērišanu mēs ne būtu speesti māksligi papreekš izolet masu no zemes peevilkšanas spēka, kas būtu darams katra cita paātrinajuma peeņemšanas gadijumā.

Ta tad par spēka veenību būtu vēleta zinama smaguma spēka veeniba, proti, viņa būtu tas spēks, ar kādu 1 gramu masas teek peevilkts no zemes lodes smaguma centra, jeb spēks, kurš masas veenibai - gramam peešķir paātrinajumu 981 sant. veenā zekundā. Šo veenību sauc

par svara gramu atšķirībā no masas grama - masas veenības. Sakars starp šo jauno veenību un eepreekšejo dinu, ir:

1 smag. grams = 981 dinai.

Ši veeniba, lai gan leelaka, ir vēl deezgan sīka preekš tehniskam vajadzibam, kur darišana ar leeleem spēkeem. Tādēļ rodas vajadziba uzstādit šim nolūkam kādu vairak praktiskaku tehnisku spēka veenibu. Atstājot, ka paātrinajumu to pašu smaguma spēka paātrinajumu, japaleelina masu, kura eetilps spēka veenibā. Par tādu mašu peeņem 1 kub. decim. tāda paša udens masu, caur ko rodas jauna, tehniska, spēka veeniba — svara kilograms atšķirībā no masas kilograma = 1000 masas grameem = 1 kub. dec. destileta ūdens pee 4°C masai. 1000 klgr = 1 kub.m. ūdens sv. = 1 tonai.

Ar šķidru veelu, ūdeni, (manipulet) rīkotees ir neērti, bet te ir izeja spēku darbibas veenadibā mechaniskā zinā (ekvivalentibā): ceeti ķermeņi ar tādu pašu masu (svaru bumbas) pēc eespējas „smagaki", t.i. veenā tilpuma veenibā saturoši pēc eespējas vairak masas, noderi ka ūdens masas ekvivalenti, un mineta neērtiba zūd.

Vēl var celtees veens jautajums. Spēki, kurus jamēr, var eet visdažados virzeenōs, kuri nesakrīt ar smaguma spēku virzeenu, kā izdarit mērijumu tādā gadijumā? Caur veenkāršeem mašinu elementeem, par peem. caur trīzi (bloku) ir eespējams mainit smaguma spēka darbibas virzeenu, un jautajums ir izšķirts.

VII.
Jēdzeens par darbu.

Spēka redzamas sekas ir materielu ķermeņu pārveetojums, ko sauc par darbu jeb, noteiktāki, par mechanisku darbu. Ka redzams, jēdzeenā par darbu eetilpst divi elementi: spēks un pārveetojums, no kureem jasastāda darba matematiska izteiksme, ka funkcija no šeem abeem. Ta tad, ja apzīmesim darbu ar D, tad $D = f(\overline{F}, \overline{s})$, kur F-spēks, s — pārveetojums. Ta ka, ka $\overline{F}$, ta ari $\overline{s}$ ir vektori, tad funkcijas izteiksmē jaeetilpst ari virzeena elementam — kādam leņķim, lai nezustu šī vektora īpašiba. Bez tam skaitīsim, ka apskatama īpašiba - darbs - būs pozitivaks (labaks) līdz ar spēka un virzeena skaitlisko nozīmu peeaugšanu, kas atbild tam jēdzeenam par šo īpašibu ikdeeniškā dzīvē, kur mēs darbu skaitam vērtigaku līdz ar abu mineto nozīmu peeaugšanu. Ja tas ir ta, tad visveenkāršaka D funkcija būs: $D = \overline{F}.\overline{s}\cos(\overline{F}, \overline{s}) = \overline{F}.\overline{s}$. Ta tad D varam reprezentet, ka geometrisku produktu - skalaru leelumu. Pēc spēka un pārveetojuma veenibas eevešanas, darba veeniba vares tikt noteikta sekoši: Darba veeniba ir darbs, kuru izdara spēka veeniba, ja viņas eedarbes punkts pārveetojas spēka virzeenā par veenu garuma veenibu. Tad formula

$$D = \overline{F}.\overline{s}\cos(\overline{F}, \overline{s}) = 1.1.\cos 0 = 1.$$ spēka veen. garuma veen.

Ja par spēka veenibu peeņemsim 1 kg. un garuma veenibu 1 mtr., tad gūsim darba veenibu 1 kgm., kuru mēs varam sev stādi-

ditees preekšā, ka smaguma spēka darbu, kuru veic ķermens sveroš 1 kg. pārveetodamees vertikalā virzeenā uz leju par 1 mtr., jeb kuru izdaram mēs ar mūsu muskulu spēku, pacel-dami 1 kg. smagu ķermeni 1 mtr augstumā. Ja spēks ir $F = n.kg$, tad

$D = n(kg \times mtr)$. Ja bez tam parveetojums $s = m(mtr)$ tad:

$D = m.n.(kg.mtr)$. Ka redzams, darba izteiksme gūst nozīmi

$D = 1(kgmtr)$ kad $m.n = 1$.

Ta tad smaguma spēks izdara darba veenibu ari tad, kad, par peem. ½ kg. smags ķermens pārveetojas vertikalā virzeenā uz 2 mtr.

Peeņemsim tagad, ka par spēka veenibu gribam peeņemt ne 1 kg. bet dinu un par garuma veenibu 1 santim. tad, ņemot vērā, kā 1 kg. = 1000 svara gram. = 981.1000 dinam = = 981.10^3 dinam un 1 mtr = 100 santim, gūsim

$D = n.m.981.10^3.10$ [dina × sant].

Jaunā darba veeniba, sastādita abzolutas sistemas veenibas, dina × sant, saucas par ergu un teek lietota fizikā. Ta tad, ja darbs bija mērits techniskās darba veenibās, kgm., pee kam viņā bija tādu veenibu mn kgm, tad ergōs šis darbs būs $D erg. = mn\ 981.10^5 erg$

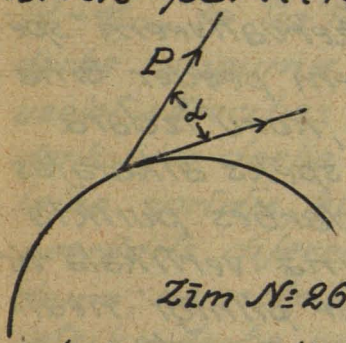
Ja spēka vektors maina savu nozīmi katrā acumirklī, tad ir eespējams sastādit tikai tāda acumirkliga – elementara, darba izteiksmi, kura gūst veidu. $dD = F ds.\cos(F, ds)$ kur ds ir bezgaligi mazs pārveetojums, jeb pārveetojuma diferencials. Ta ka ds var salikt 3 projekcijās uz 3 savstarpigi ortogonalam asim.

dx, dy un dz, tad $d\bar{s} = d\bar{x} + d\bar{y} + d\bar{z}$, tapat
$\bar{F} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$, kadēļ
$dD = \bar{F} \cdot d\bar{s} = (\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})(d\bar{x} + d\bar{y} + d\bar{z}) = Xdx + Ydy + Zdz$,
T.i. darba izteiksme, kad ir dotas minetas spēka un pārveetojuma projekcijas. Viss darbs ko spēks šinī gadijumā veic, būs zuma no atseviškeem elementareem uz atseviškeem ds_i, ta ka pilns darbs $D = P_1 ds_1 \cos(\bar{P}_1 d\bar{s}_1) + P_2 ds_2 \cos(\bar{P}_2, d\bar{s}_2) + \dots P_n ds_n \cos(\bar{P}_n, d\bar{s}_n) = \Sigma P_i ds_i \cos(\bar{P}_i, d\bar{s}_i)$.

Ta ka katrs parveetojuma elements ir ļoti mazs, tad saskaitamo $P_i ds_i \cos(\bar{P}_i, d\bar{s}_i)$ ir bezgaligi leels. spēka Šīs zumas nozīmes uzmeklešana peekrīt ta saucameem integral rēķineem. un šo zumu reprezente zimbols:

$$D = \int P_i ds_1 \cos(P_i ds_0)$$

kur s un s_0 apzīme robežas starp kuram noteek pārveetojums.



Zīm № 26.

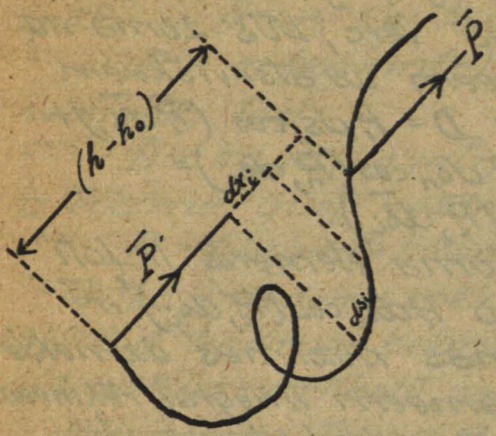
Atseviški gadijumi.

Ja ne $\cos(\bar{P}_i d\bar{s}_i)$, ne P_i skaitliska nozīme ne mainas, palikdami veenmēr $\cos(\bar{P}_i, d\bar{s}_i) = \cos(\bar{P}, d\bar{s})$ un $P_i = P$, tad $D = P\cos(\bar{P}, d\bar{s}) \Sigma ds_i = P\cos(\bar{P}, d\bar{s})(s - s_0)$, ja pārveetojums noticis no s_0 līdz s, skaititeem uz pārveetojuma no kāda izejas (sākuma) punkta.

Tādu gadijumu var stadītees preekšā saskaņā ar zīm. № 26, kur P virzeens veenmēr sastāda lenķi α ar tangenti visos pārveetojuma punktos.

Ja spēks ne maina savu nozīmi un virzeenu izplatijumā, kamēr viņa eedarbes punkts

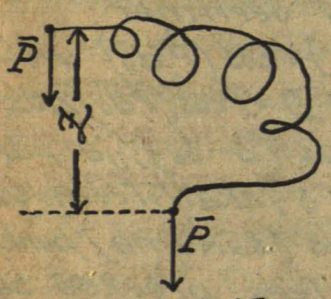
pārveetojas pa kautkādu ceļu, tad (sk. zīm. 27.) $D = P.\Sigma ds_i \cos(\bar{P}_i ds_i) = P\Sigma dx_i$, kur $dx_i = ds_i \cos(\bar{P}_i ds_i)$ ir pārveetojuma elementa projekcija uz spēka virzeenu, tad $D = P\Sigma dx_i = P(h - h_0)$ kur $h - h_0$ ir spēka eedarbes punkta pārveetojuma projekcija spēka virzeenā kur h un h_0, skaitīti no kāda sākuma punkta.



Zīm. № 27.

Ka redzams, šinī gadijumā spēka darbs pavisam neatkarajas no ceļa, kādu apraksta eedarbes punkts, bet gan tikai no spēka eedarbes punkta pārveetojuma spēka virzeenā.

Tādi spēki saucas par konservativeem spēkeem; pee viņeem, starp citeem peeder smaguma spēks. Ta tad darbs, kuru izdara smaguma spēks atkarajas tikai no eedarbes punkta pārveetojuma vertikalā virzeenā un ir pilnigi neatkarigs no pārveetojumā horicontalā virzeenā.



Zīm. № 28.

Zīmejuma № 28 gadijumā $D = Ph$. Ja pārveetojums notiktu pretejā virzeenā, tad darba izteiksme gūst negativu nozīmi. Šinī gadijumā mēdz teikt, ka smaguma spēks patēre darbu, kamēr darbu izdara spēks, kurš virza ķermeni uz

augšu par peemēru mūsu muskulu spēks.

VIII.
Jēdzeens par darba ražigumu.

(Производительность работы)

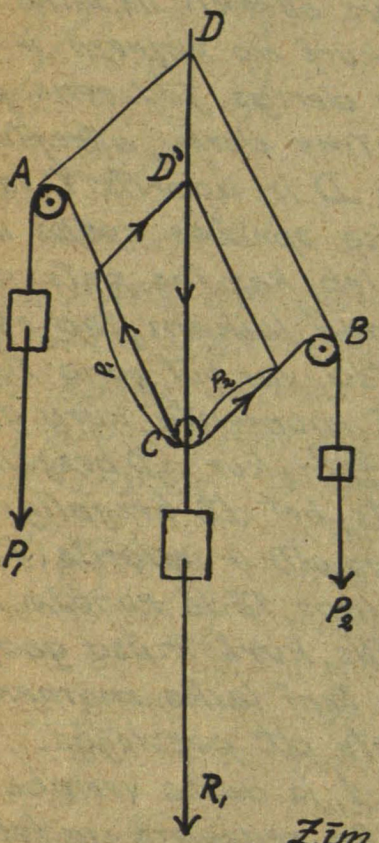
Vēl veens elements noteic darba pozitivo īpašību, proti laiks. Tas darbs būs labaks jeb vērtigaks, kurš teek izdarits īsakā laikā. Ta tad darba vērtiba aug otradi (обратно) proporcioneli laikam, patēretam preekš darba izdarišanas. Kamēr divi darbi, izdariti dažadā laikā, ne būs atteekti uz laika veenibu, nav eespējams teikt, kurš no viņeem ir vērtigaks un labaks. Tadēļ ir derigs jēdzeens par darba ražigumu, kurš nozīme darbu, atteektu uz laika veenibu. Ja darbs D ir izdarits t laikā pee kam veenados laika sprīžos spēks ir izdarijis veenadus darbus, jeb, kas tas pats, darbs ir peeaudzis proporcioneli laikam, tad ražigums $R=\frac{D}{t}$. Ja tas ta nav, tad var būt runa tikai par darba ražigumu zinamā momentā, kuru gūstam, uzejot atteecibas robežu $\frac{d.D}{dt}$, kur dD bezgaligi mazs darbs jeb darba elements, bet dt bezgaligi mazs laika sprīdis, kurā darbs dD ir izdarits. Ka teek peerādits diferencialrēķinos, tāda robeža ir atrodama, ka noteikts skaitlis, kurš mūsu gadijumā izteiks darba ražigumu tanī laika momentā, kuram teeši laika elements dt peeslējas.

Ražigums gūst nozīmi 1, ja darba veeniba teek veikta laika veenibā, ka tas redzams no formulas: $R=\frac{A}{t}$, kur leekot $A=1$ un $t=1$, gūstam $R=1$. Ta tad ražiguma veeniba ir darba veeniba veikta laika veenibā. Techniska ražiguma veeniba ir $\frac{1\,kgm}{sec}$. 75 tādu veenibu sastāda ta saucamo 1zirga spēku HP, t.i. $1HP=\frac{75\,kgm}{sec}$.

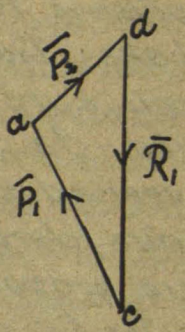
IX.
Spēku līdzsvara stāvoklis

Līdzsvarojošs un rezultējošs jeb kopspēks.

Mēs vairakkārt redzējam, ka ķermeņa meera stāvoklis $v=0$ var tikt radits caur spēku eedarbi, un ka šinī gadijumā tā tad $v=0$ ne atbild Njutona 1 principa ideala kustības stāvokļa atsevišķai nozīmei ($v=0$) kad ķermens pilnigi izolets no spēku eespaida. Ka redzam, šis gadijums (meera stāvoklis zem spēku eespaida) pagēr noteiktu sakaru starp spēkeem, kuri uz ķermeni darbojas. Tā divu spēku gadijumā, kad šee spēki darbojas veenā līnijā, starp spēkeem bij japastāv sakaram: $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, jeb $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$, t.i. šo spēku geometriskai zumai bija jabūt līdzigai 0. (Ja tādi spēki uz veenas līnijas nedarbojas, tad eksperiments peerāda, ka ķermeņa meera stāvoklis nav panākts). 3 spēku gadijumā šo likumu (spēku geometriskas zumas = 0) peerāda zinamais eksperiments, kurš dod



Zīm. № 29.



paralelograma likumu (sk. zīm. №29.). Par trīseem A un B ir pārlaistas auklas, pee kuram peelikti spēki P_1 un P_2. Tad izrādas, ka pee treša trīsa C, kurš var slīdet virs auklas, peeliktu zināmu spēku R_1, tad zistemas meera stāvoklis eestāsees tikai tad, kad šī spēka R_1 virzeens sakritis ar paralelograma ABCD diagonali; ka redzams, spēks, kurš darbojas AC virzeenā ir P_1, BC virzeenā — P_2. Nospraudisim spēku vektorus AC un BC virzeenos, tad gūstam spēku paralelogramu ABCD', kurā D'C skaitliska nozīme ir veenada ar R_1. Bet $\bar{R}_1$ skaitliskas nozīmes un virzeena ziņā, var ari gūt sekošā ceļā. No kāda punkta c ka izejas punktā, (sk. zīm.), uzbūvejam abu spēku $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ geometrisko zumu, tad, tadēļ ka R_1 jasakrīt ar paralelograma diagonali un skaitliski jabūt ar viņu veenadai, nospraužot šo spēku viņa darbibas virzeenā mēs nonāktu izejas punktā c, caur ko gūstam $\bar{P}_1+\bar{P}_2+\bar{R}_1=0$, t.i. atkal geometriskas zumas veenadibu ar 0. Abos minetos gadijumos spēki deva ķermeņa meera stāvokli, kad ķermens eepreekš (Njutona 1 principa stāvoklī) atrodas meera stāvoklī. Ja ķermenis atrastos Njutona 1 principa kustibas stāvoklī, tad šādu spēku eedarbe (kara geometriska zuma = 0) ne kādā ziņā ne traucetu šo kustibas stāvokli. Ja ķermens atrastos dinamiskā stāvoklī, kustedamees zem zinamu spēku eespaida, tad šadu spēku eedarbe ari tādu kustību ne kādā ziņā ne eespaidotu. Tādu spēku stāvokli, kurš ne kādā ziņā ne eespaido ķermeņa gūto kustibas veidu (Tai starpā ari gadijums $v=0$) sauc par spēku līdzsvara stāvokli. Viņa pazīme ir spēku geometriskas zumas veenadiba ar 0.

Nemsim tagad to pašu spēku $\bar{R}_1$, kurš peelikts punktā C un līdzsvarosim viņu ar veenu veenigu otru spēku t.i. peeveenosim viņam otru spēku $\bar{R}$, kurš kopā arviņu ķermeņa meera stāvokli uzturetu. Tad būtu divu spēku zistema, kura darbojas uz veenas līnijas. Lai spēku līdzsvars būtu, jabūt: $\bar{R}+\bar{R}_1=0$. Jr redzams, ka še $\bar{R}$ darbiba atsver, ir ekvivalenta, $\bar{P}_1+\bar{P}_2$ darbibai pirmā gadijumā, jo $\bar{R}_1+\bar{P}_1+\bar{P}_2=0$

$\bar{R}+\bar{R}_1=0$

kadēļ $\bar{R}=\bar{P}_1+\bar{P}_2$. Šis, $\bar{R}$, ir ta saucamais kopjeb rezultejošs spēks. Ta tad vispāri ņemot pastāv divu spēku zistemas: **līdzsvarojošo** un **rezultejošo**. Līdzsvarojošs spēks doto spēka zistemas geometrisko zumu pārvērš 0, kopspēks atsver doto spēku zistemu un ir līdzigs viņu geometriskai zumai.

Universitates Stud. Pad. Grāmatnīcas izdevuma:

Doc. A. Loebera – Lekcijas par ievadu tīes. zinātnē I R. 45.-
Doc. A. Loebera – " " " " " II " 30.-
Prof. Fišera red. – Logaritmi un antilogaritmi.
Atomsvari un elementu periodiskā zistema .... " 20.-
Prof. Gribovska – Valsts tiesību lekcijas I daļa .. " 80.-
" " " " " II " .. " 90.-
1903. g. Sodu likumi ar visiem papildin. līdz 1. feb. 1922. " 80.-
Doc. Kalniņa – Tēlojošās ģeometr. kurss ar 9 zīmejum. tekstā un atlasu ar 424 rasejumiem ..... " 275.-
Prof. Lautenbacha – Angļu literaturas vēsture XVI g.s. " 50.-
" " – Latviešu literaturas vēsture I d. " 40.-
Doc. Vītola – Hidrostatika ..... " 30.-
Prof. Centneršvera un asist. Krustiņsona – Neorganiskā ķīmija I d. ar 231 zīm. tekstā ..... " 230.-
Universitates kalendars 1922/23. g. sast. K. Upesleja .. " 120.-
Doc. Gulbja – Fizika. (2 daļās) I d. ar 265. zīmejum. "
Prof. Bīmans – Ūdensvadi I. (Lekciju konsp.) iesp.
Doc. K. Strauberga – Romiešu literatura (Lekcijas " 190.-
Prof. Berga – Īpatneja augkopiba, III. metiens (iespiešanā)

Sagatavo iespiešanai:

Prof. Glazenapa – Rūgšanas technoloģija. Tulk. doc. Delles red.
Doc. Gulbja – Fizika II daļa
Prof. Lautenbacha – Latviešu literaturas vēsture II. d.
Prof. Centnerszvera un asist. Krustiņsona – Neorgan. ķīm. II.
Doc. M. Prīmaņa – Siltuma un ūdens technoloģija
Prof. Fišera – Atomu teorija
Prof. Blachera – Ķīmiskas rūpniecib. techn. pamati
Agr. Starca – Sabiedriskā agronomija
Doc. Nomaļa – Purvi un kūdras izmantošana
Doc. Prīmaņa – Cilveka anatomija
Doc. Diela – Latiņu valodas chrestomatija