

LATVIJAS UNIVERSITĀTE  
DATORIKAS FAKULTĀTE

**NEKONSTRUKTĪVITĀTES DAUDZUMS  
INDUKTĪVAJĀ IZVEDUMĀ**

MAĢISTRA DARBS

Autors: **Ilja Kucevalovs**

Stud. apl. Nr. ik08322

Darba vadītājs:

profesors Hd. Mat. Rūsiņš Mārtiņš Freivalds

RĪGA 2010

## ANOTĀCIJA

Induktīvā izveduma modelis, oriģināli piedāvātais Gold [26], tiek papildināts ar Freivalda [17] definēto nekonstruktīvās skaitļošanas mehānismu. Abstraktais skaitļošanas modelis ar palīdzību, definētais analizējot nekonstruktīvo modeli salīdzinājumā ar citiem modeļiem ar palīdzību, ir izmantots par pamatu, lai definētu trīs nekonstruktīvas variācijas induktīvā izveduma modelim. Tiek pētītas vairākas šo modeļu īpatnības. Dažiem zināmiem konstruktīvi neatrisināmiem uzdevumiem tiek dots nekonstruktīvais atrisinājums, kā arī tiek uzradīta virkne jaunu nekonstruktīvi atrisināmu uzdevumu. Tiek pētīts gan funkciju, gan valodu izvedums. Dažu uzdevumu risināšanā tiek izmantota Kolmogorova sarežģītība. Tiek pētīts nekonstruktīvais induktīvais izvedums drošo un noraidošo uzdevumu nostādņē. Daži jautājumi sakarā ar ieviestiem modeļiem paliek atklāti.

Induktīvais izvedums, nekonstruktīvā skaitļošana, skaitļošana ar palīdzību.

## **ABSTRACT**

The inductive inference model originally due to Gold [26] is extended by means of Freivalds' [17] defined nonconstructive computation model. An abstract advice-using computational model, defined as a result of analyzing the nonconstructive model in comparison with other advice-taking models, is used to define three different nonconstructive inductive inference models. Several properties of these models are studied. For some known unsolvable problems, nonconstructive solutions are given; some new nonconstructively solvable problems are introduced as well. Inference of both recursive functions and recursive languages is considered. For solving some problems, Kolmogorov complexity is used. The problems of nonconstructive reliability and refutability are studied. Some questions regarding the newly introduced models are left open.

Inductive inference, nonconstructive computation, computation using advice.

## AUTOREFERĀTS

Šajā darbā tiek apvienoti divi teorētiskie modeļi: induktīvā izveduma modelis pēc Gold definīcijas (arī zināms kā “identifikācija”) un nekonstruktīvās skaitļošanas modelis pēc Freivalda definīcijas. Analizējot citus skaitļošanas modeļus, kas lieto palīdzību, autors nonāca pie secinājuma, ka nekonstruktīvā induktīvā izveduma modelis var būt definēts dažādos veidos. Šajā darbā tiek dotas un pētītas trīs dažādas definīcijas.

Atšķirībā no daudziem citiem darbiem, kas veltīti Gold stila identifikācijai, šajā darbā nekonstruktīvās definīcijas tiek dotas kā kopēja pieeja, nedefinējot konkrētus kritērijus, kurus tomēr ir iespējams noteikt katram konkrētam uzdevumam. Tas palīdz ar nekonstruktīvo modeli risināt gan rekursīvu (un nerekursīvu) funkciju, gan valodu un rekursīvu koncepciju identifikācijas uzdevumus, izmantojot dažādus konverģēšanas kritērijus.

Izrādās, ka katrai nekonstruktīvās identifikācijas definīcijai eksistē risinājumi, kas nav iespējami citās definīcijās. Tas ierosina jautājumus par doto definīciju savstarpējo saistību. Dažus jautājumus autors atstāj atklātus.

## SATURS

IEVADS .....	7
1. PAMATJĒDZIENI.....	9
2. SKAITĻOŠANA AR PAPILDUS INFORMĀCIJU .....	13
2.1. Nekonstruktīvās skaitļošanas modelis.....	13
2.1.1. Pārskats .....	13
2.1.2. Definīcijas .....	14
2.2. Skaitļošanas modelis ar palīdzību .....	16
2.2.1. Definīcijas .....	16
2.2.2. Freivalda, Damm un Holzer modeļi jaunajās definīcijās .....	18
2.2.3. Nekonstruktīvā modeļa un modeļa ar padomiem salīdzinājums .....	19
2.3. Secinājumi .....	20
2.4. Piezīme par terminoloģiju .....	20
3. INDUKTĪVAIS IZVEDUMS UN AR TO SAISTĪTIE DARBI .....	22
3.1. Pārskats.....	22
3.2. Induktīvais izvedums pēc Solomonoff.....	23
3.3. Identifikācija .....	24
3.3.1. Pārskats .....	24
3.3.2. Gold darbs un tajā definētie jēdzieni .....	25
3.3.3. Induktīvā izveduma mašīna (IIM).....	27
3.3.4. Terminoloģijas pretrunības .....	28
3.4. Identifikācijas kritēriji .....	29
3.4.1. Identificējamība robežā (EX / GN) .....	30
3.4.2. BC / GN <sup>∞</sup> identificējamība.....	31
3.4.3. Galīgā identificējamība (EX <sub>0</sub> / FIN-identificējamība) .....	32
3.4.4. Drošā un noraidošā identificējamība.....	32
4. IDENTIFIKĀCIJA AR PAPILDUS INFORMĀCIJU .....	34
4.1. Ievads.....	34
4.2. Definīcijas.....	34
4.3. Fulk, Jain, Sharma identifikācija ar papildus informāciju.....	35
4.4. Rekursīvu funkciju konstruktīvā identificējamība.....	36
4.5. Rekursīvu valodu un koncepciju konstruktīvā identificējamība.....	39
4.5.1. Ievads.....	39
4.5.2. Konstruktīvā identificējamība pēc pozitīvā attēlojuma.....	39
5. DAŽI REZULTĀTI PAR KOLMOGOROVA SAREŽĢĪTĪBU .....	41

6. NEKONSTRUKTIVITĀTE INDUKTĪVAJĀ IZVEDUMĀ .....	46
6.1. Ievads.....	46
6.2. Definīcijas.....	47
6.2.1. T-papildus informācija .....	47
6.2.2. K- un S-nekonstruktīvā identifikācija .....	48
6.2.3. F-nekonstruktīvā identifikācija .....	50
6.3. K-, S-, F-nekonstruktivitātes teorētiskais salīdzinājums .....	50
6.3.1. Ievads.....	50
6.3.2. Konstantā K- un S-nekonstruktivitāte .....	50
6.3.3. Konstantā F-nekonstruktivitāte .....	53
6.4. K-, S-, F-nekonstruktivitāte identifikācijas uzdevumos .....	54
6.4.1. F-nekonstruktivitāte un K-nekonstruktivitāte .....	54
6.4.2. Funkciju identifikācija .....	55
6.4.3. Rekursīvu valodu un koncepciju identifikācija.....	64
6.5. Nekonstruktivitāte un hipotēžu maiņu skaits.....	67
7. DROŠĀ UN NORAIĀDOŠĀ NEKONSTRUKTĪVĀ IDENTIFIKĀCIJA.....	68
7.1. Ievads.....	68
7.2. Nekonstruktivitātes definīcijas Rel / Ref uzdevumiem .....	69
7.3. NK-R-X uzdevums.....	71
7.4. R-NK-X uzdevums.....	73
8. ATKLĀTIE JAUTĀJUMI.....	75
SECINĀJUMI UN TURPMĀKĀ DARBĪBA .....	77
IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI .....	79
PIELIKUMI .....	85
Mašīnas darbības algoritms (Teorēma 6.17) .....	86

## IEVADS

Ar terminu “datorzinātne(-s)” mēdz apzīmēt daždažādu veidu teorētiskas zināšanas, kā arī to praktiskus pielietojumus. Var izdalīt vienu no lielākiem un nozīmīgākiem datorzinātņu uzdevumiem: panākt to, lai datora darbība [zināmā veidā] atgādinātu cilvēka (vai kādas citas dzīvas būtnes) uzvedību [noteiktos apstākļos]. No otrās puses, šo uzdevumu var noformulēt arī citādi – uzkonstruēt modeli dzīvas būtnes uzvedībai noteiktos apstākļos. Ja tāds modelis eksistē, vadoties pēc tā var attiecīgi uzprogrammēt datoru, vai arī izskaidrot un/vai prognozēt dažas cilvēka (dzīvnieka) uzvedības parādības.

Induktīvais izvedums ir “mācīšanas no paraugiem” modelis. Induktīvā izveduma ietvaros tiek ģenerēta (jeb sintezēta) hipotēze par kopējo likumu (piemēram, rekursīvu funkciju), pamatoties uz šajā likuma darbības piemēriem (atsevišķām funkcijas vērtībām). Šajā darbā tiek apskatīta galvenokārt Gold [26] definētā pieeja pie induktīvā izveduma, arī zināmā kā identifikācija jeb identifikācija robežā.

Kaut Gold darbā runa iet par cilvēku valodu apgūšanu, pats autors atzīmē, ka viņa piedāvātais modelis ir vienkāršots. Neeksistē matemātiskais modelis, kas precīzi aprakstītu, kādā veidā cilvēks iemācās runāt valodās vai, piemēram, veikt spriedumus. Taču ir vispārpieņemts, ka šiem nolūkiem cilvēks neizmanto tikai iemācītas zināšanas, bet arī kaut kādu citu, dažreiz “neloģisku” vai “pretrunīgu” informāciju; šo fenomenu mēdz nosaukt par intuīciju. Freivalds [18] nāca ar priekšlikumu izmantot cilvēka intuīcijas modelim tā saucamo *nekonstruktīvās skaitļošanas (nonconstructive computation)* modeli.

Šajā pētījuma mērķis ir papildināt Gold induktīvā izveduma modeli, adaptējot tam nekonstruktīvās skaitļošanas shēmu. Līdz ar to uzdevumi, kas tika izdalīti šajā darba ietvaros, ir sekojošie: 1) Izanalizēt literatūru, kas attiecas pie nekonstruktīvās skaitļošanas; salīdzināt nekonstruktīvās skaitļošanas modeli ar līdzīgiem (ja tādi eksistē); 2) Apskatīt eksistējošos induktīvā izveduma risinājumus, koncentrējoties uz Gold identifikācijas modeli; 3) Izdalīt vairākus neatrisināmus uzdevumus šajā nozarē; 4) Izstrādāt vienu vai vairākus nekonstruktīvās identifikācijas modeļus; 5) Salīdzināt izstrādātus modeļus; 6) Analizēt induktīvā izveduma uzdevumus nekonstruktīvās identifikācijas nozīmē, atšķirot dažādas definīcijas. Bez tam, divi no darba ietvaros izstrādātiem modeļiem balstās uz Kolmogorova sarežģītības jēdzienu, tāpēc darba gaitā tika izdalīts papildus uzdevums atrast pierādījumus dažām Kolmogorova sarežģītības īpašībām.

Darbs ir organizēts sekojošā veidā. Pirmajā nodaļā tiek īsi dotas nepieciešamas definīcijas pamata jēdzieniem no rekursīvo funkciju teorijas un Kolmogorova sarežģītības teorijas. Otrajā nodaļā tiek apskatīts nekonstruktīvās skaitļošanas modelis; apskatīti intuitīvais

modelis un modelis ar padomiem; ieviests vispārīgs skaitļošanas modelis ar palīdzību un definēta terminoloģija tam. Trešajā nodaļā dots īss apskats induktīvā izveduma teorijai, dotas nepieciešamas definīcijas identifikācijas nozarē. Ceturtajā nodaļā tiek ieviests identifikācijas modelis, kas lieto palīdzību; apskatīti daži zināmi uzdevumi rekursīvu funkciju un valodu identifikācijā. Piektajā nodaļā tiek pierādīti rezultāti Kolmogorova sarežģītībai, kuri tiek izmantoti tālāk. Sestajā nodaļā, izmantojot identifikācijas modeļa ar palīdzību jēdzienu, tiek ieviestas un pamatotas trīs identifikācijas definīcijas; dots to teorētiskais salīdzinājums un salīdzinājums identifikācijas uzdevumos; tiek risināta virkne iepriekš zināmu un jaunu identifikācijas uzdevumu, izmantojot šīs definīcijas. Septītajā nodaļā tiek apskatīta drošā un noraidošā nekonstruktīvā identifikācija; tiek definēti četri uzdevumi, kas var būt apskatīti šajā nozarē, un daži iepriekš dotie risinājumi tiek apskatīti šo uzdevumu nostādņē. Astotajā nodaļā tiek aprakstīti jautājumi, kas darba ietvaros autoram neizdevās pilnībā atrisināt, ar šo jautājumu un to risinājumu pamatojumiem.

Rezultāti, kas ir atrodami darbā, ir autora panāktie rezultāti, ja nav norādīts citādi. Pirmajā un trešajā nodaļā autora panākto rezultātu nav.

Daļai no terminiem, kuri tiek lietoti apskatītajos darbos, autoram neizdevās atrast apstiprinātus vai vispārpieņemtus latviešu valodas analogus<sup>1</sup>, tāpēc šajos gadījumos tiek doti autora tulkojumi ar atbilstošiem terminiem oriģinālvalodā iekavās. Uzvārdi, kuriem ir vispārpieņemts latviskots pieraksts (piemēram, Gēdels, Tjūrings) tiek lietoti šajā pierakstā. Uzvārdi, kuru oriģinālais pieraksts ir latīņu alfabētā, bet kuriem, cik autoram ir zināms, nav vispārpieņemta latviskota pieraksta (piemēram, Heath-Brown), tiek lietoti oriģinālajā pierakstā. Uzvārdi, kuru oriģinālais pieraksts nav latīņu alfabētā, pirmo reizi tekstā tiek doti latīņu alfabētā ar oriģinālo pierakstu (uzvārds un vārds) iekavās; turpmāk tekstā tiek izmantots latīņu alfabēta pieraksts.

---

<sup>1</sup> It sevišķi tas izpaužas nekonstruktīvās skaitļošanas nozarē, jo, cik autoram ir zināms, par šo tematu latviešu valodā nevienas publikācijas vēl nebija. Kaut arī saistīto ar induktīvo izvedumu darbu latviešu valodā nav īpaši daudz; vairākums Latvijas zinātnieku pētniecisko darbu par induktīvo izvedumu bija publicēts 1970. – 1980.-jos gados angļu un krievu valodā.

# 1. PAMATJĒDZIENI

Šajā apakšnodaļā tiek pārskaitīti darbā izmantotie pieņēmumi, kā arī uzrādītas dažu rekursīvo funkciju teorijas un Kolmogorova sarežģītības teorijas pamatjēdzienu definīcijas, kuras ir nepieciešamas šajā darba lasīšanai. Citus skaitļošanas teorijas jēdzienus, kas tiek lietoti šajā darbā, bet nav minēti šajā nodaļā, var atrast grāmatās [24, 25]. Detalizētāks ieskats rekursīvo funkciju teorijā ir atrodams grāmatā [58]. Kolmogorova sarežģītības jēdziens ir pamatīgi apskatīts grāmatā [46].

Ar  $\mathbb{N}$  tiek apzīmēta naturālo skaitļu kopa  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .  $\mathbb{N}^+$  apzīmē pozitīvo naturālo skaitļu kopu  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

Ja  $X$  ir kopa,  $2^X$  apzīmē visu  $X$  apakškopu kopu.

Ja  $X$  un  $Y$  ir kopas,  $X \cup Y$  apzīmē to apvienojumu (kopu no visiem elementiem, kas ietilpst  $X$  vai  $Y$ ),  $X \cap Y$  apzīmē to krustojumu (kopu no visiem elementiem, kas vienlaicīgi ietilpst  $X$  un  $Y$ ),  $X \setminus Y$  apzīmē to negāciju (kopu no visiem elementiem, kas ietilpst  $X$ , bet neietilpst  $Y$ ).  $\{ \}$  apzīmē tukšu kopu. Pieraksti  $X \subseteq Y$  un  $Y \supseteq X$  ir identiski un apzīmē  $X \cap Y = X$ . Pieraksti  $X \subset Y$  un  $Y \supset X$  ir identiski un apzīmē, ka vienlaicīgi: a)  $X \cap Y = X$ , bet b)  $Y \setminus X$  nav tukša kopa.

Tāpat kā [46], lai izvairītos no pieraksta „ $|x|$ ” neviennozīmības, ar  $l(x)$  tiek apzīmēts vārda  $x$  garums binārā pierakstā, ar  $d(X)$  tiek apzīmēta kopas  $X$  kardinalitāte, un ar  $|x|$  tiek apzīmēta skaitļa  $x$  absolūtā vērtība.

Ar  $R$  tiek apzīmēta visu visur definētu rekursīvu funkciju  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  klase.

Ja  $X$  ir kaut kādu elementu virkne  $x_0, x_1, x_2, \dots$  un  $n$  ir naturālais skaitlis, ar  $X[n]$  tiek apzīmēts šīs virknes sākotnējs fragments garuma  $n$ ; tas ir, virkne  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ .

Ja  $f$  ir funkcija,  $\text{domain}(f)$  un  $\text{range}(f)$  apzīmē respektīvi  $f$  definīcijas un vērtību apgabalu. Par *funkcijas grafiku* tiek saukta virkne  $f(x'_0, x'_1, x'_2, \dots)$ ,  $f(x''_0, x''_1, x''_2, \dots)$ ,  $f(x'''_0, x'''_1, x'''_2, \dots)$ , kur  $x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x''_0, x''_1, x''_2, \dots, x'''_0, x'''_1, x'''_2, \dots \in \text{domain}(f)$ . Ja  $f$  ir viena argumenta funkcija un argumentu vērtību secība nav norādīta, tiek uzskatīts, ka grafiks ir funkcijas argumenta pieaugšanas secībā, tas ir,  $x'_0 < x''_0 < x'''_0 < \dots$ . Turklāt, ar  $f[n]$ , kur  $n$  ir naturālais skaitlis, tiek apzīmēts grafika sākotnējs fragments garuma  $n$ .

Ja  $f$  un  $g$  ir funkcijas, tiek rakstīts  $f(x) = O(g(x))$ , ja ir spēkā:

$$(\exists c \in \mathbb{N}^+, \exists x_0 \in \mathbb{N}) [ \forall x \geq x_0 : f(x) \leq c \cdot g(x) ] \quad (1.1)$$

Ja  $f$  un  $g$  ir funkcijas, tiek rakstīts  $f(x) = o(g(x))$ , ja ir spēkā:

$$(\forall c \in \mathbb{N}^+, \exists x_0 \in \mathbb{N}) [ \forall x \geq x_0 : c \cdot f(x) \leq g(x) ] \quad (1.2)$$

Daļēji definētai funkcijai  $f$  un argumenta vērtībām  $x'_0, x'_1, \dots, x'_n$  pieraksti  $f(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \downarrow$  un  $f(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \uparrow$  apzīmē, ka  $f$  ir definēta (resp., nedefinēta) punktā  $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ .

$\exists$  apzīmē „eksistē”.  $\forall$  un  $\forall^\infty$  apzīmē respektīvi „visiem” un „visiem, izņemot galīgu skaitu”.  $\in$  un  $\notin$  apzīmē respektīvi “pieder pie” un “nepieder pie”.  $\neg$ ,  $\wedge$  un  $\vee$  apzīmē respektīvi loģisku negāciju, konjunkciju un dizjunkciju.

**Definīcija 1.1** [54]. Lai  $U$  ir rekursīvi sanumurējama kopa. Tad  $L \subseteq U$  ir *konceptija*. Ja turklāt  $U$  ir visu nenulles galīgo virkņu kopa pār galīgo alfabētu  $\Sigma$ , konceptija  $L \subseteq U$  ir *valoda*.

**Definīcija 1.2** [25]. Pie kādā alfabēta  $\Sigma$  kopa  $L \in \Sigma^*$  ir *rekursīvi sanumurējama*, t.t.t. ja eksistē Tjūringa mašīna  $M$  ar sekojošām īpašībām:

- a) jebkuram vārdam  $w \in L$   $M$  apstājas un izvada 1;
- b) jebkuram vārdam  $w \notin L$  strādā bezgalīgi, vai apstājas un izvada 0.

Valoda  $L \in \Sigma^*$  ir *rekursīva*, t.t.t. ja eksistē Tjūringa mašīna  $M$  ar sekojošām īpašībām:

- a) jebkuram vārdam  $w \in L$   $M$  apstājas un izvada 1;
- b) jebkuram vārdam  $w \notin L$   $M$  apstājas un izvada 0.

**Definīcija 1.3.** Mēs sakām, ka  $n$  argumentu funkcija  $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ir *rekursīva funkcija*, t.t.t. ja eksistē Tjūringa mašīna  $M$  ar sekojošo īpašību: jebkuriem  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \text{domain}(f)$   $M$  apstājas un izvada  $f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Šajā darbā, ja nav speciāli norādīts citādi, par rekursīvo funkciju tiek saprasta daļēji definēta viena argumenta rekursīvā funkcija.

**Definīcija 1.4.** Ja  $U$  ir objektu kopa un  $g: U \rightarrow \mathbb{N}$  ir funkcija, tad  $W$ :

$$w_0, w_1, w_2, \dots : w_i = g(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

ir *U numerācija*.

Ja  $U$  ir daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju kopa un funkcija  $g(i, x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$  ir rekursīva, tad daļēji definētu rekursīvu funkciju numerācija  $W$

$$w_0(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = g(i, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

ir rekursīva.

**Definīcija 1.5.** Daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju izrēķināmā numerācija  $W$  ir *reducējama* uz (daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju) numerāciju  $V$ , t.t.t. ja eksistē visur definētā viena argumenta rekursīvā funkcija  $f(x)$ :

$$\forall x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, n \in \mathbb{N}: w_n(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = v_{f(n)}(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad (1.5)$$

Daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju izrēķināmā numerācija  $\Phi$  ir *Gēdela numerācija*, t.t.t. ja jebkuras daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju klases jebkura izrēķināma numerācija ir reducējama uz  $\Phi$ .

Daļēji definētu  $k$  argumentu rekursīvu funkciju Gēdela numerācija  $\eta$  ir *Frīdberga numerācija* [22], t.t.t. ja jebkurai daļēji definētai  $k$  argumentu rekursīvai funkcijai  $f$  eksistē precīzi viens naturālais skaitlis  $i$ :  $\eta_i = f$ .

**Definīcija 1.6** [46] Ja  $U$  ir objektu kopa,  $W = w_0, w_1, w_2, \dots$  ir tās numerācija un  $g: U \rightarrow \mathbb{N}$  ir numerācijas funkcija,  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ir rekursīvā funkcija, tad objekta  $u \in U$  sarežģītība numerācijā  $W$  attiecībā uz  $f$  ir

$$K_f(u) = \min\{ l(p) : f(p) = g(u) \} \quad (1.6)$$

Par objekta  $u$  *Kolmogorova sarežģītību*  $K(u)$  tiek saukta  $u$  sarežģītībā fiksētā numerācijā  $W$  attiecībā uz fiksētu rekursīvu funkciju  $f$ .

Sekojošais rezultāts, citēts pēc [58] un [24], ir zināms zem nosaukumiem "rekursijas teorēma" (*recursion theorem*), kā arī "nekustīgā punkta teorēma" (*fixed point theorem*), un oriģināli pieder Kleene.

**Teorēma 1.7.** Lai  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ir daļēji definēto rekursīvo funkciju Gēdela numerācija.

a) Jebkurai visur definētai rekursīvai funkcijai  $f$  ir spēkā:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \varphi_n = \varphi_{f(n)} \quad (1.7)$$

b) Bez tam, eksistē rekursīvā funkcija  $g$  ar sekojošo īpašību: katram  $n \in \mathbb{N}$ , tādām, ka  $\varphi_n$  ir visur definēta, ir spēkā:

$$\varphi_{g(n)} = \varphi_{\varphi_n(g(n))} \quad (1.8)$$

c) Ja  $f$  ir rekursīvā funkcija no  $k+1$  argumentiem, tad eksistē rekursīvā funkcija  $g$  no  $k$  argumentiem, tāda, ka visiem  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  ir spēkā:

$$\varphi_m = \varphi_n \quad (1.9)$$

kur:

$$m = g(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \quad (1.10)$$

$$n = f(g(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}), x_0, x_1, \dots, x_{k-1}). \quad (1.11)$$

**Sekas 1.8.** Ja eksistē algoritms, kas katram  $n \in \mathbb{N}$  ģenerē funkciju  $g_n$ , tad eksistē  $n_0$  ar sekojošo īpašību:

$$g_{n_0} = \varnothing_{n_0} \quad (1.12)$$

**Teorēma 1.9** [58], [24]. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

- a)  $X$  ir rekursīvi sanumurējama kopa;
- b)  $X$  ir kādas rekursīvas funkcijas  $h$  definīcijas apgabals;
- c)  $X$  ir kādas rekursīvas funkcijas  $g$  vērtību apgabals.

**Sekas 1.10.** Jebkurai rekursīvai funkcijai  $f$  eksistē rekursīvās funkcijas  $g$  un  $h$ , tādas, ka  $\text{domain}(f) = \text{range}(g)$  un  $\text{range}(f) = \text{domain}(h)$ .

## 2. SKAITĻOŠANA AR PAPILDUS INFORMĀCIJU

### 2.1. Nekonstruktīvās skaitļošanas modelis

#### 2.1.1. Pārskats

Nekonstruktīvās un intuitīvās skaitļošanas jēdzieni šajā darbā tiek apskatīti balstoties uz Freivalda darbiem [17, 18]. Cik šajā darba autoram ir zināms, termini “nekonstruktīvs” un “intuitīvs” attiecībā pret skaitļošanas modeļiem līdz [17, 18] lietoti nebija.

Vēl agrāk, rakstos [15, 16], Freivalds uzrādīja, ka stāvokļu skaits galīgajā determinētajā automātā var eksponenciāli atšķirties no stāvokļu skaita galīgajā nedeterminētajā automātā (pazīstot šo pašu valodu ar stingri lielāku par  $\frac{1}{2}$  varbūtību). Tas bija pierādīts balstoties uz E. Artina hipotēzi un tās D.R. Heath-Brown pierādījumu [30] gandrīz visiem nepāra pirmskaitļiem, kurš ir nekonstruktīvs pierādījums (nav zināms, kuri ir tie skaitļi, kuriem Artina hipotēze nav spēkā). Bez tam, šajā pierādījumā bija pielietota formālā valoda, kura tika būvēta no vārda ar noteikto Kolmogorova sarežģītību. Šis arī ir nekonstruktivitātes elements pierādījumā, jo Kolmogorova sarežģītība nav algoritmiski izrēķināma.

Iesaistīt skaitļošanas teorijā algoritmiski neizrēķināmas funkcijas ir viena problēma, kuru tika mēģināts risināt [17]; otrā problēma ir formalizēt nekonstruktīvus pierādījumus. Šādā veida pierādījumos tiek bieži lietota shēma *ad absurdum*: tiek pieņemta noteiktas konstrukcijas eksistence (vai neeksistence) un ar šo pieņēmumu atrasta pretruna. To var apskatīt kā “informācijas no ārpuses” pielietošanu – taču netiek parādīts, kādā veidā šo konstrukciju var uzbūvēt; tiek vienkārši uzskatīts, ka tā eksistē.

[17] tiek apskatīts visvienkāršākais modelis – determinētais galīgais automāts, kuram ir definēta nekonstruktīvā valodas pazīšana (Definīcija 2.3 zemāk). Piedāvāto nekonstruktīvās skaitļošanas modeli var vienkāršoti aprakstīt sekojošā veidā: kopā ar ievada vārdu automātam tiek padots “palīdzības vārds”, kas arī piedalās automāta skaitļošanas procesā. Tomēr uz palīdzības vārdu tiek uzliedzts nosacījums, kas neatļauj izmantot terminu “nekonstruktīvā skaitļošana” triviālās situācijās – piemēram, kad palīdzības vārds ir tā pati pareizā atbilde, kura automātam jāizvada konkrētā gadījumā.

Freivalds nav pirmais, kas pētīja papildus informācijas izmantošanu galīgiem automātiem. Vēl agrāk Karp un Lipton [41] piedāvāja līdzīgu shēmu – tā saucamo Tjūringa mašīnu, kas lieto padomus (*advice-taking Turing machine*). Balstoties uz Karp un Lipton rezultātiem, Damm un Holzer [14] definēja analogisko jēdzienu galīgiem automātiem (Definīcija 2.2 zemāk). [14] ieviestais jēdziens atšķiras no nekonstruktīvās pazīšanas gan pēc konstrukcijas, gan pēc pieejas: Damm un Holzer apskatīja galīgā automāta modeļa

paplašināšanu nevieneidīguma (*nonuniformity*) formalizēšanai, Freivalds formalizēja nekonstruktīvus pierādījumus. Attiecīgi atšķiras arī iegūtie rezultāti un pētījumu virzieni. It sevišķi, Damm/Holzer modelī konstantais palīdzības daudzums palīdz pazīt tās pašas valodas, kuras ir pazīstamas ar palīdzības daudzumu, polinomiāli atkarīgo no ieejas vārda garumiem [14]. Savukārt nekonstruktīvajā modelī galvenais uzsvars ir uz palīdzības daudzuma minimizēšanu (pazīstamas valodas ir tās pašas – Lemma 2.12 zemāk).

Vēl viens Freivalda pētījums, saistīts ar nekonstruktīvo skaitļošanu, ir atrodams darbā [18]. Iepriekš definētā nekonstruktīvā skaitļošana paredzēja intuitīvi<sup>2</sup> saprotamu pieeju, pēc kurās palīdzības vārdi, kaut arī neizdod automātam uzreiz pareizu atbildi, bet (zināmā mērā) tomēr ir saistīti (kaut kādā veidā) ar pazīstamās valodas vārdiem. Tomēr [18] tiek izmēģināta cita pieeja, nosauktā par “intuitīvo skaitļošanu”: nekonstruktīvajam automātam tiek padots nejaušs (pēc Martin-Löf) binārs palīdzības vārds, kurš nenes nekādas informācijas par pazīstamo valodu. Bez tam, lai izvairītos no iespējas, ka palīdzības vārds tomēr varētu iekodēt informāciju par pazīstamo valodu, piemēram, savā garumā, tiek pieprasīts, lai palīdzības virkne būtu bezgalīga divos virzienos.

[18] tiek pierādīts, ka šāds nekonstruktīvs automāts, gan arī izmanto kā palīdzības vārdu nejaušu virkni, var pazīt valodas, kuras nav pazīstamas ar varbūtiskiem automātiem (ar varbūtību, stingri lielāku par  $\frac{1}{2}$ ). Tomēr faktiski visos [18] pierādījumos ar intuitīvo palīdzību tiek izmantota viena pieeja: bezgalīgajā binārajā virknē, nejaušajā pēc Martin-Löf, var atrast jebkura veida apakšvirkni, kas tiek pielietota, lai pārvarētu ierobežojumus, ko uzliek determinētais galīgais automāts bez atmiņas uz valodas pazīšanas iespējām. Šajā darba agrākajās stadijās tika plānots izmēģināt intuitīvo pieeju identifikācijā; pa cik induktīvā izveduma mašīna var būt patvaļīga veida Tjūringa mašīna, un pa cik autoram neizdevās atrast identifikācijas uzdevumus, kas būtu ērti risināmi ar intuitīvo palīdzību, intuitīvā pieeja izmantota nebija.

### 2.1.2. *Definīcijas*

**Definīcija 2.1.** Par (*nerakstošu*) *automātu nekonstruktīvajai skaitļošanai* tiek saukts automāts ar divām vai vairākām ievada lentām, vienu ieejas vārdiem un vienu vai vairākām palīdzības vārdiem. Ievada lentas palīdzības vārdiem tiek sauktas par *palīdzības lentām*. Automāta darbība uz visām lentām ir divos virzienos.

Par *rakstošu automātu nekonstruktīvajai skaitļošanai* tiek saukts automāts nekonstruktīvajai skaitļošanai ar papildus lentu izvadam.

---

<sup>2</sup> Šeit vārds “intuitīvi” tiek lietots vispārpieņemtajā nozīmē, bez atsaukšanas uz intuicionismu un intuitīvās skaitļošanas jēdzienu.

**Definīcija 2.2** [14]. Automāts  $A$  nekonstruktīvajai skaitļošanai *pazīst valodu*  $L$ , *lietojot padomus*, t.t.t. ja izpildās sekojošā īpašība. Jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē palīdzības vārds (vai palīdzības vārdu kortežs)  $y$ , tāds, ka visiem vārdiem  $x$ :  $l(x) = n$  automāts  $A$ , uz ievada lentas saņemot  $x$  un uz palīdzības lentām saņemot  $y$ , pabeidz darbu akceptējošā stāvoklī t.t.t. ja  $x \in L$ .

**Definīcija 2.3** [17]. Rakstošais automāts  $A$  nekonstruktīvajai skaitļošanai *nekonstruktīvi pazīst valodu*  $L$ , t.t.t. ja izpildās sekojošā īpašība. Jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē palīdzības vārds (vai palīdzības vārdu kortežs)  $y$ , tāds, ka visiem vārdiem  $x$ :  $l(x) \leq n$  automāts  $A$ , uz ievada lentas saņemot  $x$  un uz palīdzības lentām saņemot  $y$ , izvada 1, ja  $x \in L$ , un 0 pretējā gadījumā.

Rakstošais automāts  $A$  nekonstruktīvajai skaitļošanai (*nekonstruktīvi pazīst valodu*  $L$  ar *nekonstruktivitāti*  $g(n)$ ), t.t.t. ja izpildās sekojošā īpašība. Jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē palīdzības vārds (vai palīdzības vārdu kortežs)  $y$ , tāds, ka tā garums (vai kopējais korteža vārdu garums) nepārsniedz  $g(n)$  un visiem vārdiem  $x$ :  $l(x) \leq n$  automāts  $A$ , uz ievada lentas saņemot  $x$  un uz palīdzības lentām saņemot  $y$ , izvada 1, ja  $x \in L$ , un 0 pretējā gadījumā.  $g(n)$  tiek saukts par algoritma *nekonstruktivitātes daudzumu*.

Intuitīvās skaitļošanas definīcijas balstās uz nejaušības pēc Martin-Löf jēdzienu, kura definīciju var atrast, piemēram, grāmatā [46] vai saīsinātā formā rakstā [70]. Tā kā intuitīvais modelis šajā darbā tiek lietots tikai kā pamats izstrādātam skaitļošanas ar palīdzību modelim, precīza Martin-Löf nejaušības definīcija šeit nav vajadzīga.

**Definīcija 2.4** [18]. Uz divām pusēm bezgalīga bināra virkne ir nejauša pēc Martin-Löf, ja katram tās elementam  $a_i$  ir spēkā:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \{ a_i a_{i+1} \dots a_{i+n} \} \text{ ir nejauša pēc Martin-Löf;} \quad (2.1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \{ a_i a_{i-1} \dots a_{i-n} \} \text{ ir nejauša pēc Martin-Löf.} \quad (2.2)$$

*Determinētais galīgais automāts ar intuīciju* ir determinēts galīgs automāts nekonstruktīvajai skaitļošanai ar vienu palīdzības lentu, kas satur uz divām pusēm bezgalīgu virkni, nejaušu pēc Martin-Löf. Turklāt automāts strādā divos virzienos ievada un palīdzības lentās un jebkuram ievada vārdam pabeidz ģenerēt pareizo rezultātu pēc galīga soļu skaita. Bez tam, automāta galviņa nekad neaiziet pāri iezīmēm, kas atzīmē ievada vārda sākumu un beigas.

Valoda  $L$  ir *pazīstama ar determinētu galīgu automātu ar intuīciju*, ja eksistē determinētais galīgais automāts  $A$  ar intuīciju, kas pie jebkuras bezgalīgas virknes, nejaušas

pēc Martin-Löf, pabeidz darbu akceptējošā stāvokli, saņemot ievadam tos un tikai tos vārdus, kas pieder  $L$ .

## 2.2. Skaitļošanas modelis ar palīdzību

### 2.2.1. Definīcijas

Var redzēt, ka gan Freivalda nekonstruktīvās skaitļošanas, gan intuitīvās skaitļošanas modelim, gan Karp/Lipton un Damm/Holzer automātiem ar padomiem pamatā ir kopīgie elementi. Pirmkārt, tā ir pati ideja par to, ka skaitļošanas modelim tiek padots gan tieši ievada dati, gan palīdzības jeb “priekšā teikšanas” dati. Otrkārt, palīdzības iespējas tiek zināmā mērā ierobežotas – vismaz tādā veidā, ka vispārīgā gadījumā nav iespējams kā palīdzības datus vienkārši iedot atbildi, kura algoritmam jāizdod. Treškārt, palīdzības un ievada datus atšķir, jo ievada dati parasti pieder pie kādas konkrētas klases (piemēram, pie valodu klases, kuru ģenerē konkrētie likumi), un skaitļošanas rezultātam jābūt šīs klases objektu atpazīšana (identifikācija un tml.), savukārt palīdzības dati tiek definēti vadoties no tām.

Šajā apakšnodaļā tiek mēģināts vispārināt skaitļošanas ar palīdzību jēdzienu. Ieviestais modelis netiek nosaukts par nekonstruktīvās skaitļošanas modeli, jo tiek uzskatīts, ka gan nekonstruktīvās un intuitīvās skaitļošanas modeļi, gan Karp/Lipton un Damm/Holzer modeļi, gan zemāk ieviestie nekonstruktīvās identifikācijas modeļi ir šajā modeļa paveidi.

**Definīcija 2.5.** Par *skaitļošanas modeli ar palīdzību* tiek saukts kortežs no sekojošām komponentēm:

- Ievada objektu kopa  $I$
- *Palīdzības objektu kopa*  $II$
- *Palīdzības relācija*  $\rho: I \leftrightarrow II$
- *Ētikas nosacījums* jeb *ē-nosacījums*  $\bar{e}$  uz palīdzības objektu kopu, palīdzības relāciju un/vai skaitļošanas mašīnas darbību
- *Skaitļošanas mašīna, kas lieto palīdzību*  $M: I \times II$
- *Pareizības nosacījums*  $\bar{E}$  uz  $M$  darbību

Turklāt  $M$  ir vismaz viena ievada lenta.

**Definīcija 2.6.** Mēs sakām, ka skaitļošanas modelis ar palīdzību ir *pareizs*, t.t.t. ja ar visiem ievada vārdiem un ar visiem derīgiem palīdzības vārdiem mašīnas darbība ir pareiza atbilstoši pareizības nosacījumam  $\bar{E}$ .

**Definīcija 2.7.** Par rakstošu skaitļošanas modeli ar palīdzību tiek saukts kortežs no sekojošām komponentēm:

- Ievada objektu kopa  $I$
- Izvada objektu kopa  $\Theta$
- Palīdzības objektu kopa  $\Pi$
- Palīdzības relācija  $\rho: I \leftrightarrow \Pi$
- $\bar{e}$ -nosacījums  $\bar{e}$
- Pareizā izvada funkcija  $\Xi: I \rightarrow \Theta$
- Rakstoša skaitļošanas mašīna, kas lieto palīdzību  $M: I \times \Pi \rightarrow \Theta$

Turklāt  $M$  ir vismaz viena ievada lenta un viena izvada lenta.

**Definīcija 2.8.** Mēs sakām, ka rakstošais skaitļošanas modelis ar palīdzību ir pareizs, t.t.t. ja katram ievada vārdam visiem derīgiem palīdzības vārdiem mašīnas izvads ir pareizs, t.i. ja ir spēkā nosacījums

$$\forall i \in I, \forall p \in \rho(i): M(i, p) = \Xi(i) \quad (2.3)$$

kur  $M(i, p)$  ir mašīnas darbināšanas rezultāts uz ievada vārda  $i$  un palīdzības vārda  $p$ .

Ir svarīgi atzīmēt, ka pieraksti  $M(i, p)$  un  $\Xi(i)$  neuzliek ierobežojumus uz to, kādā veidā tiek iegūts rezultāts no mašīnas  $M$  un kādā veidā rezultāts tiek uzskatīts par pareizu. Tas var nozīmēt, ka par pareizu rezultātu var uzskatīt, piemēram, vienīgu rezultātu, ko izdod  $M$  un apstājās, vai arī situāciju, kad  $M$  strādā līdz bezgalībai, bet izvada galīgā garuma virkni, kurā pēdējais simbols ir pareizs rezultāts.

**Definīcija 2.9.** Mēs sakām, ka rakstošais skaitļošanas modelis ar palīdzību ir *triviāli pareizs*, t.t.t. ja

$$\forall i \in I, \forall p \in \rho(i): p = \Xi(i) \quad (2.4)$$

Ja ir spēkā ( 2.4 ), tad var uzkonstruēt triviālu skaitļošanas mašīnu, kura saņemot palīdzības vārdu, uzreiz to izvada, un šāds skaitļošanas modelis ar palīdzību uzreiz atbilsts ( 2.3 ), t.i. būs pareizs. Lai izvairītos no triviālās pareizības, dažādos skaitļošanas modeļos tiek ieviesti dažādi ētikas nosacījumi.

**Definīcija 2.10.** Par *triviālo  $\bar{e}$ -nosacījumu* tiek saukts nosacījums  $\bar{e} = TRUE$ . Šajā gadījumā mēs arī sakām, ka  $\bar{e}$ -nosacījums *nav definēts*.

**Sekas 2.11.** Ar triviālo  $\bar{e}$ -nosacījumu vienmēr var definēt triviāli pareizu rakstošo skaitļošanas modeli ar palīdzību.

Lai ilustrētu jauno terminoloģiju, iepriekš minētie modeļi ar palīdzību tiek pārformulēti turpmāk sekojošos punktos.

### 2.2.2. Freivalda, Damm un Holzer modeļi jaunajās definīcijās

Damm/Holzer skaitļošanas ar padomiem modelis ir pareizs skaitļošanas modelis ar palīdzību, kuram pie dotā alfabēta  $\Sigma$ , valodu klases  $U$  pār  $\Sigma$  un valodas  $L \in U$ :

$$I = \{ x \mid x \in L \in U \} \quad (2.5)$$

$$II = \{ a \mid a \in \Sigma^* \} \quad (2.6)$$

$$\bar{e}(\rho) = (\forall i, j \in I: l(i) = l(j) \Rightarrow \rho(i) = \rho(j)) \quad (2.7)$$

$$\mathcal{E} = \text{“Ja } w \in L, \text{ tad } M \text{ beidz darbību akceptējošā stāvoklī”} \quad (2.8)$$

Turklāt  $M$  ir galīgais automāts ar vienu lentu, kuram ievads ir formā (2.9):

$$\rho(w)w, w \in \Sigma^* \quad (2.9)$$

Freivalda ieviestais nekonstruktīvās skaitļošanas modelis ir pareizs rakstošais skaitļošanas modelis ar palīdzību, kuram pie fiksētas valodas  $L$ :

$$I = \{ x \mid x \in L \in U \} \quad (2.10)$$

$$\Theta = \{ 0; 1 \} \quad (2.11)$$

$$\bar{e}(\rho) = (\forall i, j \in I: l(i) = l(j) \Rightarrow \rho(i) \subseteq \rho(j)) \quad (2.12)$$

$$\mathcal{E}(i) = \begin{cases} 1, & i \in L \\ 0, & i \notin L \end{cases} \quad (2.13)$$

Turklāt  $M$  ir patvaļīga skaitļošanas mašīna ar vienu ievada lentu un vienu vai vairākām palīdzības lentām, kurai vārdi  $i \in I$  tiek padoti uz ievada lentas un vārdi  $p \in II$  tiek padoti uz palīdzības lentas.

Intuitīvās skaitļošanas modelis ir pareizs skaitļošanas modelis ar palīdzību, kuram pie fiksētas valodas  $L$ :

$$I = L \quad (2.14)$$

$$\Pi = \{ a_i \mid i \in (-\infty; +\infty), a_i \in \{ 0; 1 \} \} \quad (2.15)$$

Bez tam,  $\Pi$  ir spēkā ( 2.1 ) – ( 2.2 ), un  $M$  ir determinēts galīgs automāts, kas jebkuram  $i \in I$  beidz darbību galīgā soļu skaitā. Ētikas nosacījums ir “ $M$  galviņa nekad neaiziet pāri iezīmēm, kas atzīmē ievada vārda sākumu un beigas”.

### 2.2.3. Nekonstruktīvā modeļa un modeļa ar padomiem salīdzinājums

Šajā punktā tiek apspriests jautājums, kādas valodas var pazīt nekonstruktīvais automāts salīdzinot ar automātu, kas lieto padomus. Visu valodu kopas, kuras var pazīt ar nekonstruktīviem automātiem un ar Damm un Holzer modeli, apzīmēsim respektīvi ar NK un DH.

**Lemma 2.12.** DH = NK.

**Pierādījums.** No sākuma pierādīsim  $NK \subseteq DH$ . No Damm un Holzer  $\bar{e}$ -nosacījuma izpildes ( 2.7 ) seko nekonstruktīvās skaitļošanas  $\bar{e}$ -nosacījuma ( 2.13 ) izpilde. No patvaļīga nekonstruktīva automāta  $A_{NK}$  ir viegli konstruēt Damm un Holzer automātu  $A_{DH}$ , kas atgriežas pie vārda sākuma lasīšanas tajā brīdī, kad  $A_{NK}$  lasa palīdzības vārdu, un pāriet uz vārda “saturīgo” daļu tajā brīdī, kad  $A_{NK}$  lasa ievada vārdu.  $A_{DH}$  akceptējošie stāvokļi ir tie un tikai tie, kas atbilst  $A_{NK}$  stāvokļiem, kuros tiek izvadīts 1.

$DH \subseteq NK$ . Lai ir dots Damm un Holzer palīdzības modelis

$$P_{DH} = \langle I_{DH}, \Pi_{DH}, \rho_{DH}, \bar{e}_{DH}, \bar{\Xi}_{DH}, A_{DH} \rangle \quad (2.16)$$

No patvaļīga automāta  $A_{DH}$  konstruēsim nekonstruktīvo automātu  $A_{NK}$  tā, lai ievada vārds lasītos uzreiz pēc palīdzības vārda lasīšanas. Pievienosim  $A_{NK}$  izvadu sekojošā veidā: stāvokļos, kuri atbilst  $A_{DH}$  akceptējošiem stāvokļiem, tiek izvadīts 1, visiem pārējiem stāvokļiem tiek pievienota pārbaude uz ievada vārda beigām: ja lasīšana ir pabeigta un automāts ir šajā stāvoklī, izvadīt 0. Ierobežojumu, ko uzliek nekonstruktivitātes  $\bar{e}$ -nosacījums ( 2.13 ) salīdzinot ar ( 2.7 ), var apiet sekojošā veidā:

$$\rho_{NK}(i) = \rho_{DH}(0)\#\rho_{DH}(1)\#\dots\#\rho_{DH}(i) \quad (2.17)$$

tas ir,  $\rho_{NK}(i)$  ir visu  $\{ \rho_{DH}(j) \mid j \leq i \}$  vārdu konkatenācija, izmantojot kā atdalītāju speciālo simbolu #. Var viegli redzēt, ka šādi definētais modelis

$$P_{NK} = \langle I_{DH}, \{ 0; 1 \}, \Pi_{NK}, \rho_{NK}, \bar{e}_{NK}, \bar{\Xi}_{NK}, A_{NK} \rangle \quad (2.18)$$

pazīst tādu pašu valodu, ka ( 2.16 ).■

### 2.3. Secinājumi

Lemma 2.12 pasaka, ka nekonstruktīvās skaitļošanas modelis pēc būtības ir radniecisks Karp un Lipton un Damm un Holzer skaitļošanas ar padomiem modelim; galvenās atšķirības ir tehniskas – tas ir, ētikas nosacījumi un palīdzības vārdu ievada mehānismi.

Kā bija uzrādīts augstāk, nekonstruktīvās skaitļošanas modeļa nozīme bija ieviest nekonstruktīvās metodes skaitļošanas modeļos. T.i. šajā modeļa galvenā nozīme ir aprakstīt nevis palīdzības datus, ko vajag vēl padot automātam, lai tas veiksmīgi darbotos, bet informāciju, kas automātam trūkst šiem nolūkiem; pie tam šī informācija (parasti) ir tādā veidā, ka algoritmiski to dabūt nevar. Sakars ar nekonstruktīviem pierādījumiem ir acīmredzams.

Savukārt automātam ar intuīciju ir savdabīga īpatnība, ka palīdzības vārds vienmēr tiek definēts vienveidīgi jebkuras valodas pazīšanai. Kaut mūsu definīcija tas arī ir modelis, kas lieto palīdzību, acīmredzami šī pieeja ir jauna, ņemot vērā to, ka nejaušā veida informācija palīdz pazīt plašāku valodu klasi.

### 2.4. Piezīme par terminoloģiju

Var diskutēt par Freivalda un mūsu ieviesto terminoloģiju. Freivalds izmanto divus terminus, kuri apzīmē filosofijas (kā arī “matemātikas filosofijas” [65]) jēdzienus, nevis konkrēti definētus matemātiskus objektus. Pirmais termins – “nekonstruktivitāte” – ir cēlies no matemātikas pierādījumu “filosofiskās” dalīšanas uz konstruktīviem un nekonstruktīviem. Otrais termins – “intuīcija” – ir, no vienas puses, jēdziens, ar ko filosofijā paskaidro cilvēka saprašanu [1]; bet no otrās puses tam ir acīmredzams sakars ar “intuicionismu” (šis virziens arī tiek iezīmēts [17]). Pa cik ar intuicionismu mēdz apzīmēt vienu no konstruktivistiskās matemātikas apakšnozarēm [65], šeit varētu redzēt pretrunu, jo Freivalda “intuicioniskā” skaitļošana ir, otrādi, nekonstruktīvās skaitļošanas paveids.

No otrās puses, var rasties jautājums, vai ir likumīgi izmantot pavisam citus (un turklāt no pavisam citām nozarēm) jēdzienus, ja pēc būtības modeļi, ko izmanto Freivalds, ir radnieciski iepriekš ieviestiem modeļiem [21, 41, 23, 14].

Šajā darbā šī terminoloģija tomēr tiek izmantota. Katrs ir tiesīgs spriest par to, cik nekonstruktīvās skaitļošanas modelis ir veiksmīga formalizācija nekonstruktīviem pierādījumiem, bet vismaz izmantojot šo modeli var tiešām iesaistīt nekonstruktīvās metodes skaitļošanā. Savukārt automāta ar intuīciju jēdziens ir tuvs vienam no intuicionisma pamatprincipiem, atbilstoši kuram cilvēku prātos ir “iebūvēta” bezgalīga naturālo skaitļu virkne [3, 65]. Kaut šajā L.E.J. Brouwer principā nav runas par nejaušu pēc Martin-Löf bināru virkni, analogija ir acīmredzama.

2.2. nodaļā bija ieviesti divi termini – “skaitļošanas modelis ar palīdzību” un “ētikas nosacījums”. “Palīdzība” un “ētika” ir arī filosofiskie jēdzieni, kurus šajā darba autors izmantoja pēc analogijas ar iepriekš minētiem terminiem. Termins “palīdzība” (*help*) ir izteikti izmantots darbos [17, 18]. Savukārt “ētikas nosacījuma” nozīme ir neļaut skaitļošanas mašīnai pieprasīt pārāk daudz palīdzības.

### 3. INDUKTĪVAIS IZVEDUMS UN AR TO SAISTĪTIE DARBI

#### 3.1. Pārskats

“Induktīvais izvedums” (*inductive inference*) ir termins, ar kuru apzīmē hipotēzes formēšanu par kaut kādu kopējo likumu pēc dotiem paraugiem no šajā likuma darbošanās. Paraugu skaits parasti ir ierobežots (bet jebkurā gadījumā ir galīgs); laiks tiek diskretizēts. Līdz ar to uzdevumi, kurus biežāk risina induktīvā izveduma teorijā, mēdz būt šādi: Kāds var būt  $n+1$ . paraugs pēc dotiem  $n$  paraugiem? Kādas ir kopējas pazīmes šiem paraugiem? Kāda ir varbūtība, ka pēc dotiem paraugiem  $p_0, p_1, \dots, p_n$  no  $m$  garuma alfabēta  $\{ a_1, a_2, \dots, a_m \}$  nākamais paraugs ir  $a_i$ ? Kādas ir stratēģijas, vadoties pēc kurām noteiktajā laikā var atbildēt uz šādiem jautājumiem dotajā objektu klasē  $U$ ?

Var izdalīt divas pieejas šajā nozarē. Pirmkārt, tā ir R.J. Solomonoff<sup>3</sup> izveidotā “universālā induktīvā izveduma teorija” [62, 63]. Šī teorija balstās uz Bajesa teorēmu par nosacītām varbūtībām un Kolmogorova prefiksa sarežģītības [46] jēdzienu. Kā uzdevuma piemēru, ar kura risināšanas nodarbojas Solomonoff induktīvais izvedums, minēsim sekojošo: Ar doto ierobežoto informācijas daudzumu un dotām iespējamām hipotēzēm (dažas no kurām tiek noraidītas vadoties pēc šīs informācijas) noskaidrot, kura hipotēze ir “pareiza”.

Otrā pieeja pie induktīvā izveduma tika piedāvāta Gold [26]. Daļēji balstoties uz Solomonoff induktīvā izveduma teorijas rezultātiem un terminoloģiju, Gold faktiski izveidoja tās apakšnozari, kuru mēs apskatām kā atsevišķu pieeju, jo: a) Solomonoff teorija turpināja attīstīties neatkarīgi no Gold pieejas rezultātiem, b) Gold pieejai nav daudz kopēja ar “universālo induktīvā izveduma teoriju”; darbos, kuros induktīvais izvedums tiek apskatīts pēc Gold “*identifikācijas robežā*” (*identification in the limit*), parasti nav atsauču uz Solomonoff teorijas rezultātiem, un otrādi; c) Gold pieeja nodarbojas galvenokārt ar citiem uzdevumiem. Šajos uzdevumos ietilpst, bet ne tikai: pētīt minējumu stratēģijas, kuras, vadoties pēc dotās informācijas, varētu noskaidrot pareizu hipotēzi pēc galīgā soļu skaita; pētīt kritērijus, pēc kuram var secināt, vai identifikācija ir veiksmīga vai nav; u.c.

Var rasties jautājums, kā atsaukties uz katru no šīm divām pieejām. No vienas puses, Gold virzienā strādājošie pētnieki parasti lieto terminu “induktīvais izvedums” – piemēram, Angluin [6], Fulk [23], Shinohara (篠原 武) [8, 60, 61], Mukouchi (向内 康人) [53, 54]. Kaut

---

<sup>3</sup> 2009. gada 7. decembrī, tajā pašā laikā, kad tika veikta literatūras analīze šajā darba ietvaros, Ray J. Solomonoff nomira ātri tekošas slimības dēļ. Īss izskats viņa darbībā ir atrodams P.M.B. Vitányi vietnes lapā “*Obituary: Ray Solomonoff, Founding Father of Algorithmic Information Theory*” <http://homepages.cwi.nl/~paulv/obituary.html> (atsauce pārbaudīta 2010.05.20.).

vispārīgā gadījumā tas ir korekti, šajā darbā vajag atšķirt Gold pieeju no Solomonoff pieejas. No otrās puses, Gold piedāvātais termins “identifikācija robežā” arī nav precīzs, jo ar “identifikāciju robežā” mēdz saprast tā saucamo *EX*-identifikācijas kritēriju (piemēram, [12]), kas ir viens konkrētais veiksmīgā izveduma kritērijs. Dažos darbos iet runa par “identifikāciju induktīvajā izvedumā” ([13]); dažos – vienkārši par “identifikāciju” (piemēram, [32]). Podnieks [2] atzīmēja terminu “induktīvais izvedums” un “identifikācija” pretrunīgumu. Lai atšķirtu Gold un Solomonoff pieejas, mēs turpmāk lietosim jēdzienus “identifikācija” jeb “Gold pieeja” un “Solomonoff pieeja”.

### 3.2. Induktīvais izvedums pēc Solomonoff

Kaut induktīvais izvedums, it sevišķi valodu pazīšanas nozīmē, tiek parasti asociēts ar Gold darbību un Gold tiek bieži dēvēts par pirmatklājēju (piemēram, [45]), paši jēdzieni “induktīvais izvedums”, “induktīvā izveduma mašīna” un daudzi citi tika agrāk pēti Solomonoff. Savā darbā [62] Solomonoff nāk ar priekšlikumu apskatīt visas induktīvā izveduma uzdevumus kā garas simbolu virknes ekstrapolācijas uzdevumus, kā arī piedāvā izmantot Tjūringa mašīnas šo uzdevumu risināšanā. Viņš piedāvā un apspriež četrus induktīvā izveduma modeļus; turpmāk tekstā tie tiek saukti par “modeļu Nr.1”, ..., “modeļu Nr.4”.

Modelis Nr.1 ir tuvs modeļiem, kas tiek izmantoti Gold pieejā. Šajā modelī tiek apskatīta gara simbolu virkne  $T$  un universāla mašīna  $M$ , kas ģenerē šo virkni; tiek prasīts, lai  $T$  būtu vienīga informācija, kas tiek izmantota induktīvajā izvedumā (ir acīmredzama analogija ar Gold induktīvo izvedumu bez papildus informācijas). Tomēr Solomonoff pēta šo modeli tikai no varbūtību viedokļa, nefokusējoties uz “induktīvā izveduma mašīnas”, kurai būtu jāatšifrē mašīnu  $M$ . Modelī Nr.2 tiek apskatīta situācija, kad ievada virkne ir Markova ķēde, kurai katra nākamā simbola parādīšanas varbūtība ir funkcija no varbūtībām no iepriekšējo simbolu parādīšanās. (Salīdzināsim, piemēram, ar Angluin darbu [7], kurā varbūtiska ir nevis ievada virkne, bet piemēru izvēle no valodas.) Modelī Nr.3 ievada virknei tiek *a priori* nozīmēta varbūtība, izejot no tā, ka visas virknes var būt tikai vienā garumā; modelī Nr.4 tiek izmantota varbūtību novērtēšana ar svariem pēc visām dotām iespējamām varbūtības novērtēšanas metodēm. Ar Gold identifikācijas uzdevumiem kopējā nav daudz.

Solomonoff teorija tika attīstīta turpmākos darbos, lielā mērā pašā Solomonoff spēkos (sk., piemēram, darbu [63]), un īpaši neizmantojot Gold virziena pētnieku rezultātus. Savukārt Gold virziena pētnieki parasti neatsaucas uz Solomonoff rezultātiem (daži no nedaudziem pretpiemēriem ir [26] un [68]). Pēc Microsoft Academic Search datiem [48, 49] 2010. gada 20. maijā uz Solomonoff darba [62] pirmo daļu bija 195 atsauces pret 933 atsaucēm uz Gold

darbu [26]; atbilstoši Google Scholar datiem [29, 28] tajā paša datumā uz Solomonoff darba abām daļām bija 1048 atsauces pret 2592 atsaucēm uz Gold darbu.<sup>4</sup>

### 3.3. Identifikācija

#### 3.3.1. Pārskats

Gold pieeja tiek pētīta dažādos virzienos. Oriģinālais Gold raksts [26] ir uzrakstīts par valodu pazīšanu, un šajā virzienā turpina strādāt arī daudzi citi pētnieki (piemēram, Angluin [7], Shinohara [60, 61], Fulk [23], Mukouchi [52, 53, 54], Baliga [9], Yokomori (横森 貴) [67], Sakurai (櫻井 彰人) [74]; sk. arī Lange, Zeugmann un Zilles pārskatu [45]). Mukouchi [53, 54], Jain [32] un daži citi pēta arī valodu identifikāciju vispārīgākā līmenī – koncepciju identifikāciju. Nozīmīgs virziens ir arī rekursīvo funkciju identifikācija. Šajā virzienā strādā, piemēram, Wiehagen, Freivalds [21, 66]; Jain, Kinber [36]; Bārzdiņš, Podnieks [10, 57, 69, 71, 73]; sk. arī Zeugmann un Zilles pārskatu [68]. Tiek pētīti arī modeļu izvedums [59, 42], programmu un algoritmu izvedums [8, 39], algebrisko struktūru izvedums [64] u.c.

Neatkarīgi no tā, kas ir identifikācijas objekts, – valoda, funkcija, koncepcija vai kaut kas cits, – tam jābūt izrēķināmam (ar Tjūringa mašīnu). Tāpēc vispārīgākā valodu klase, kas tiek pētīta, ir rekursīvi sanumurējamas valodas, un funkciju identifikācijas jomā tiek pētītas rekursīvās funkcijas.

Runājot par valodas identifikācijas apakšvirzieniem, daži no tiem tika iezīmēti pašā Gold darbā [26] – piemēram, identifikācija pēc informācijas *pozitīvā* attēlojuma jeb “teksta” (pēc valodas vārdiem); viens no pamata darbiem šajā virzienā ir Angluin pētījums [6], kā arī sk. pētījumu [61]. Tiek pētīta arī identifikācija robežā pēc informācijas *negatīvā* attēlojuma (pēc vārdiem, kuri neietilpst alfabēta), it sevišķi sk. Shinohara darbu [60]; kā arī identifikācija robežā pēc gan pozitīvā, gan negatīvā attēlojuma (piemēram, Motoki (元木 達也) raksts [51], vai Baliga, Case un Jain raksts [9]).

*Papildus informācija.* Neatkarīgi no identifikācijas objekta būtības, māceklim var tikt vai netikt piedāvāta papildus informācija par tā struktūru – līdzīgi tam, kā tas tiek darīts apskatītos iepriekšējā nodaļā skaitļošanas modeļos ar palīdzību (sk. 4. nodaļu).

*Kritēriji.* Identifikācija tiek veikta pēc dažādiem kritērijiem (3.4. apakšnodaļa).

---

<sup>4</sup> Microsoft Academic Search [47] citējumu skaits ir norādīts ar vārdu “Citations” iekavās pa labi blakus raksta nosaukumam. Piemērs: Language Identification in the Limit – 1967 (Citations: 933). Google Scholar [27] citējumu skaits ir norādīts ar vārdiem “Cited by” (“Minēts” latviešu valodas versijā) zem visa teksta, kas attiecas pie raksta.

*Stratēģijas veids.* Vēl viens veids, kurā var sadalīt identifikācijas risinājumus, ir pēc mācekļa (stratēģijas, induktīvā izveduma mašīnas) darbības: tā var būt determinēta mašīna (piemēram, [53, 54]) vai arī varbūtiska ([4, 7, 57, 66, 56, 72]). Šajā darbā tiek apskatītas tikai deterministiskās mašīnas.

*Algoritmi.* Dažos darbos tiek apskatīti pareizās hipotēzes izveduma algoritmi un to modifikācijas, piemēram, “uzlabošanas algoritmi” [44, 42].

Rekursīvu funkciju *ekstrapolācija* jeb *prognozēšana* jeb *NV-identifikācija* nav identifikācijas paveids, bet klašu prognozēšanas iespējas pēc noteiktiem kritērijiem ir saistītas ar identificējamību pēc dažiem identifikācijas kritērijiem. Šajā jomā nozīmīgi rezultāti pieder Bārzdiņam, Freivaldam, Podniekam [13, 2, 71].<sup>5</sup>

Kaut identifikācija pēc būtības ir teorētisks modelis, kas balstās uz skaitļošanu robežā (t.i., bezgalīgu procesu), ir bijuši mēģinājumi apskatīt to praktiskākos uzdevumos. Piemēram, Arimura (有村 博紀) un Shinohara darbā [8] tiek pētīta *Prolog* valodas pazīšana. Tomēr pazīšanas iespējas ir ierobežotas (rakstā tiek definēta *Prolog* programmu apakšklase, kas ir ģenerējama ar pētītām stratēģijām).

### **3.3.2. Gold darbs un tajā definētie jēdzieni**

Darbā [26] tiek piedāvāts un apspriests valodu pazīšanas modelis, kurš tiek saukts par “identifikāciju robežā”. Savos spriedumos Gold izteikti neizmanto terminu “induktīvais izvedums”, pieminot to tikai darba beigās, atsaucoties uz Solomonoff [62], kā iespējamu pielietojumu izstrādātam modelim. Citiem vārdiem sākot, pēc Gold identifikācija ir induktīvā izveduma paveids, speciālais gadījums vai iespējamais pielietojums, bet nav viens un tas pats jēdziens. Tomēr dažos papīros, kuros tiek apskatīts induktīvais izvedums pēc Gold pieejas (t.sk., [13, 37, 53]) mēdz atsaukties uz induktīvā izveduma definīcijām kā uz Gold definīcijām. Tas nav pilnīgi korekti. Gold pieder daži jēdzieni, kurus viņš vairākumā apraksta teksta veidā, bet šo jēdzienu formālās definīcijas un terminoloģija ir vairākumā pēc Blum un Blum [11], Angluin [6], Case un Smith [13] un citiem. Šajā darbā Gold jēdzieni tiek pielietoti vēlākajā terminoloģijā; dažas terminoloģijas pretrunības tiek atrisinātas 3.3.4. punktā.

---

<sup>5</sup> Gan Bārzdiņš, gan Freivalds, gan Podnieks uzrakstīja virkni darbu par prognozēšanu; piemēram, Bārzdiņa raksts “Prognostication of automata and functions” (*Information Processing* ‘71, vol.1, North-Holland, Amsterdam, 1972, 81.–84.lpp.); Bārzdiņa un Freivalda raksts “Прогнозирование общерекурсивных функций” (“Visur definētu rekursīvu funkciju prognozēšana”) (*Soviet Math. Dokl.* 13, 1972, 1224.–1228.lpp.). Šajā darba ekstrapolācija netiek apskatīta.

**Definīcija 3.1.** *Informācijas attēlojums* jeb *informācijas attēlošanas metode* (*method of information presentation*) klasei  $U$  norāda katram objektam  $u \in U$ , kāda informācijas vienību virkņu kopa  $I(u)$  ir atļaujama šim objektam.

Gold definēja divas informācijas attēlošanas metodes – pozitīvo un pilno. Jebkurā metodē induktīvā izveduma mašīnai diskretizētā laikā tiek piedāvāta kāda informācijas virkne  $I = x_0 x_1 x_2 \dots$ , pie tam laikā  $t$  tiek piedāvāts elements  $x_t$ .

**Definīcija 3.2.** Par valodas  $L$  *pozitīvo attēlojumu* tiek saukta bezgalīga virkne  $I_T$ :

$$I_T = x_0 x_1 x_2 \dots \mid \forall x \in L \exists i: x = x_i \in I_T. \quad (3.1)$$

t.i. ka katrs valodas  $L$  vārds  $x$  vismaz vienu reizi ir sastopams  $I_T$ .

Par valodas  $L$  *pilno attēlojumu* tiek saukta bezgalīga binārā virkne  $I_B$ :

$$I_B = x_0 x_1 x_2 \dots \mid \forall t \in \mathbb{N}: ((x_t = 0) \Leftrightarrow (y_t \in L)) \wedge ((x_t = 1) \Leftrightarrow (y_t \notin L)) \quad (3.2)$$

t.i. ja rinda ar doto indeksu  $t$  pieder valodai  $L$ , tad  $x_t = 1$ , citādi  $x_t = 0$ .

Gold apskata trīs teksta veidus attiecībā uz  $x_t$ : *patvaļīgs teksts* (*arbitrary text*) bez papildus nosacījumiem; *rekursīvs teksts* (*recursive text*), kur  $x_t$  var būt jebkura rekursīva funkcija no  $t$ ; *primitīvi rekursīvs teksts* (*primitive recursive text*), kur  $x_t$  var būt jebkura primitīvi rekursīva funkcija no  $t$ . Sekojošos darbos Gold virzienā tiek parasti pētīta patvaļīga (valodu identifikācijā) vai rekursīva teksta (rekursīvu funkciju identifikācija) pazīšana.

Gold apskata trīs informētāja veidus attiecībā uz  $y_t$ : *patvaļīgs informētājs* (*arbitrary informant*), kas uzliek nosacījumu uz to, ka katram valodas vārdam jāparādās ievada virknē vismaz vienreiz; *metodisks informētājs* (*methodical informant*), kur visi valodas vārdi tiek sanumurēti un  $y_t$  ir  $t$ . numerācijas virkne; *pieprasījuma informētājs* (*request informant*), kur mācekļi (induktīvā izveduma mašīna) pats izvēlas  $y_t$ . Gold pierādīja, ka šie trīs informētāja veidi ir ekvivalenti.

**Definīcija 3.3.** Klases  $U$  *vārdu attiecība* (*naming relation*) ir kortežs no vārdu kopas  $N$  un funkcijas  $f$ , kura nozīmē katram vārdam savu objektu no klases  $U$ .

*Valodas pazīšanas modelis* (*language learnability model*) ir kortežs no trīm komponentēm:

- Pazīšanas iespējamības definīcija (*definition of learnability*)
- Informācijas attēlošanas metode
- Vārdu attiecība

*Identifikācijas situācija* (*identification situation*) ir kortežs no trīm komponentēm:

- Objektu klase  $U$
- Informācijas attēlošanas metode
- Vārdu attiecība

Gold apskata tikai vienu pazīšanas iespējamības definīciju – *identificējamību robežā* (*identifiability in the limit*). Tādejādi pats “identifikācijas robežā” termins attiecas uz veiksmīgas identifikācijas kritēriju, no kurās puses tas arī tiek apskatīts dažos darbos [7, 12, 53, 54] un kā tas tiek arī lietots šajā darbā.

**Definīcija 3.4.** *Identifikācijas uzdevums (identification problem)* ir noteiktā identifikācijas situācijā uzdotais uzdevums noskaidrot, vai eksistē tāds likums, ka jebkuram objektam  $u \in U$  un jebkurai informācijas vienību virknei  $i_0 \in I^o(u)$  vadoties pēc  $i_0$  var noteikt  $u$  vārdu.

### 3.3.3. Induktīvā izveduma mašīna (IIM)

Terminu “induktīvā izveduma mašīna” lieto Solomonoff un liela daļa no Gold pieejas pētniekiem, taču pats Gold [26] neizmanto, turoties pie termina “mācekļis” (*learner*).

Par IIM tiek parasti saprasta Tjūringa mašīna vai cits skaitļošanas modelis (dažreiz [42] lieto jēdzienu “efektīvā procedūra”), kas laiku pa laikam pieprasot un saņemot ievadu, laiku pa laikam ģenerē izvadu. Parasti gan ievads, gan izvads ir naturālie skaitļi. Saka, ka IIM izvada hipotēzes no dotās hipotēžu telpas (numerācijas). Pie IIM tiek attiecināts induktīvā izveduma uzdevuma atrisināšanas iespējas jautājums, t.i. vai ar doto ievadu var dabūt interesējošo izvadu. Parasti tiek uzdots vispārīgāks jautājums: vai eksistē tāda IIM, kas ar noteikto ievadu var uzģenerēt doto izvadu.

Dažos darbos (piemēram, Angluin [7]) IIM tiek definēta ļoti detalizēti, norādot, ka tā ir speciālā veida Tjūringa mašīna, norādot ievada un izvada lentu skaitu, speciālus stāvokļus un to izmantošanas kārtību. Dažos darbos (piemēram, Wiehagen et al. [66]) IIM jēdziens netiek izmantots ka tāds, bet tiek uzdots jautājums par noteiktā veida Tjūringa mašīnas eksistenci. Tomēr šajos gadījumos Tjūringa mašīnas īpašības tiek uzdotas tā, ka definīcijas var viegli modificēt, ievadot IIM jēdzienu.

Noteiktiem nolūkiem tiek arī definēti daži speciāli IIM veidi: piemēram, induktīvām izvedumam pēc varbūtiskiem kritērijiem tiek pielietots varbūtiskās IIM jēdziens. Ekstrapolācijas nolūkos tiek definēta ekstrapolācijas mašīna [13]. Mukouchi un Arikawa (有川 節夫) piedāvāja *noraidošās IIM jēdzienu jeb RIIM (refutable IIM, an IIM that can refute hypothesis spaces)*: šī mašīna laiku pa laikam pieprasa ievadu un *a*) laiku pa laikam izvada naturālus skaitļus, vai *b*) *noraida* doto klasi un apstājas [55]. Šī mašīna ir dabisks jēdziens

noraidošās identificējamības kritēriju pielietošanas gadījumā (sīkāk 3.4.4. punktā un 7. apakšnodaļā).

Šajā darbā uz IIM netiek uzlikti papildus nosacījumi; tā ir patvaļīgā veida determinētā Tjūringa mašīna, kurai eksistē papildus lenta palīdzības vārdiem. Jautājums, kas tiek attiecināts šajā darbā pie IIM, ir sekojošs: vai ar doto palīdzības relāciju dotā problēma ir atrisināma atbilstoši Čerča tēzei.

### 3.3.4. Terminoloģijas pretrunības

3.1. tabula

Dažas induktīvā izveduma terminoloģijas pretrunības

Jēdziena Nr. (pēc kārtas)	Termina pielietošanas piemēri	Termins	Termins (angļu val.)
1	[26]	Identifikācijas uzdevums	Identification problem
	[44, 42]	Induktīvā izveduma uzdevums	Inductive inference problem
2	[6,7,52, 53, 54]	Valodas (konceptijas) pozitīvais attēlojums	Positive presentation of a language (concept)
	[26]	Teksts	Text
3	[6,7,52, 53, 54]	Valodas (konceptijas) pilnais attēlojums	Complete presentation of a language (concept)
	[26]	Informētājs	Informant
4	[6, 7, 13, 52, 53, 54]	Induktīvā izveduma mašīna	Inductive inference machine
	[26]	Mācekļis	Learner
	[9, 23, 32]	Mācīšanas mašīna	Learning machine
	[57, 2]	Stratēģija	Strategy
5	[26]	Objektu klase	Class of objects
	[44, 42]	Semantiskais domeins	Semantic domain
6	[57]	Numerācija	Numbering
	[26]	Vārdu attiecība	Naming relation

Kā jau bija minēts, kaut Gold darbs [26] arī noteica virzienu identifikācijai un definēja dažus pamatjēdzienus, Gold terminoloģija atšķiras no tās, ko lieto citi pētnieki vēlākos darbos. Turklāt arī tajos ne vienmēr tiek lietoti vieni un tie paši termini. Situāciju vēl sarežģītāku padara tas, ka dažos darbos definīcijas ir teksta veidā (piemēram, [26]), bet citos tiek

izmantotas formālas definīcijas. Augstāk dotajā 3.1. tabulā tiek mēģināts pārskaitīt dažus jēdzienus, ko mēdz apzīmēt ar dažādiem terminiem. Apskats nav pilns un neietver visas pretrunības induktīvajā izveduma terminoloģijā.

Tabula ir organizēta sekojošā veidā. Katram terminam atbilst viena rinda; termini apzīmē vienu un to pašu jēdzienu, ja tiem atbilst viens un tas pats jēdziena numurs. 1. kolonna apvieno dažādus terminus vienā jēdzienā, izmantojot jēdziena numuru pēc kārtas; 2. kolonna tiek doti darbu piemēri, kuros tiek pielietots attiecīgais termins; 3. kolonnā tiek dots termina pieraksts latviešu valodā; 4. kolonnā tiek dots termina pieraksts angļu valodā. Pie tam, pirmajā rindā katram jēdzienam ir dots termins, kas tiek izmantots šajā darbā.

### 3.4. Identifikācijas kritēriji

Identifikācija (jeb identificēšana<sup>6</sup>) kā induktīvā izveduma paveids nav rezultāts, bet process, kas turklāt var būt bezgalīgs. Gold pieejas uzdevums ir atšķirt veiksmīgu identifikāciju no neveiksmīgas. To var izdarīt pēc vairākiem kritērijiem. Kritēriji var atšķirties dažādiem identifikācijas nolūkiem (piemēram, valodu identifikācijas kritēriji var atšķirties no funkciju identifikācijas kritērijiem, kaut dažreiz tie arī sakrīt), bet var arī pēc savas būtības: piemēram, vai tiek pieprasīts, lai induktīvā izveduma mašīna apstātos, vai netiek. Šajā apakšnodaļā tiek apskatīti dažādi identifikācijas kritēriji<sup>7</sup>. Apskats nav un nevar būt pilns; dažreiz identifikācijas kritērijus autori definē saviem konkrētiem nolūkiem. Sīks kritēriju salīdzinājums rekursīvu funkcijas jomā ir atrodams klasiskajā Case un Smith rakstā [13]; samērā jaunajā pārskatā [31], ko veica Hirowatari (廣渡 榮寿) un Arikawa, ir atrodams reālo vērtību funkciju identifikācijas kritēriju salīdzinājums.

Gold identifikācijas nozarē parasti tiek pētīta nevis viena konkrēta objekta (piemēram, konkrētas formālas valodas), bet objektu klases (piemēram, rekursīvo valodu klases) identifikācija. Līdz ar to parasti, bet ne obligāti, tiek definēts kritērijs viena objekta veiksmīgai identifikācijai, un balstoties no tā definēts kritērijs klases identificējamībai. Parasti tiek pateikts, ka objekts  $u$  ir identificējams pēc kritērija  $X$ , ja eksistē mašīna  $M$ , kas identificē  $u$  pēc kritērija  $X$ ; turklāt klase  $U$  ir identificējama pēc kritērija  $X$ , ja eksistē mašīna  $M$ , kas identificē visus klases  $U$  objektus. Šādā situācijā ar  $X$  (kritērija nosaukumu) parasti apzīmē arī kopu, kurā ietilpst visas klases, kuras ir identificējamās pēc kritērija  $X$ . Šo kopu attiecībā pret

---

<sup>6</sup> Oriģinālajā Gold rakstā lietojamais termins *identification* var būt tulkots gan kā “identifikācija”, gan kā “identificēšana”. “Identificēšana” akcentē procesu, kas tiek veikts. Tomēr šajā darbā galvenokārt tiek lietots termins “identifikācija”, par paraugu ņemot citus darbus latviešu valodā par šo tematu (sk., piemēram, Podnieka pārskatu [2]).

<sup>7</sup> Podnieks [2] lieto terminu “definīcija”.

kritērija  $X$  sauc par kritērija  $X$  izveduma pakāpi (*inferring power*) (piemēram, [38]). Līdz ar to apgalvojumu „klase  $U$  ir identificējama pēc kritērija  $X$ ” pieraksta  $U \in X$ .

Ja kritērijs ir valodu identifikācijai, parasti tiek definēti divi veidi – identifikācijai pēc pozitīvā attēlojuma (teksta) un identifikācijai pēc informētāja. Šādā gadījumā kritērija nosaukumam bieži pievieno attiecīgi prefiksus Txt un Inf. (Literatūrā ir sastopami kritēriju nosaukumu pieraksti gan tikai lieliem burtiem – piemēram, TXTEX, – gan ar maziem burtiem, izdalot kritērija nosaukuma un prefiksu pirmos burtus – piemēram, TxtEx; šajā darbā prefikss tiek rakstīts ar lielo sākuma burtu un kritērija nosaukums – ar lieliem burtiem.)

Kā arī tiek atzīmēts vairākos darbos (piemēram, [55]), no koncepcijas (konceptiju klases) identificējamības pēc pilnā attēlojuma viennozīmīgi seko koncepcijas (to klases) identificējamība pēc pozitīvā attēlojuma, jo pozitīvais attēlojums var viegli tiek iegūts no pilnā attēlojuma. Pie tam šī īpatnība ir spēkā visiem kritērijiem – ieskaitot *EX*, *BC*, *FIN*, varbūtiskus kritērijus, kā arī to drošas, noraidošās un citas variācijas.

### 3.4.1. Identificējamība robežā (*EX / GN*)

Identificējamības robežā kritērijs, arī zināms kā *EX*-identificējamība [13] jeb *GN*-identificējamība [2], bija piedāvāts Gold [26], bet paši termini “*EX*” (no angļu *explanation* “paskaidrošana, paskaidrojums” [13]) un “*GN*” (no “Gēdela numuriem” [2]), kritērija formalizācija, tā pielietošana citu objektu (izņemot valodas) identifikācijai u.c. Gold nepieder. Gold neizmanto pat terminu “kritērijs”, nosaucot to par “pazīšanas iespējamību”.

*EX* kritērijs tiek pielietots praktiski jebkādu objektu identifikācijai. Neformāls kritērija pieraksts patvaļīga objekta identifikācijai var būt šāds: determinēta Tjūringa mašīna  $M$  *EX*-identificē objektu  $u$ , t.t.t. ja iedodot  $M$   $u$  informācijas attēlojumu,  $M$  izvada netukšu galīgā garuma virkni, kuras pēdējā vērtība ir vēlamā vērtība (programma  $u$  rēķināšanai vai  $u$  numurs kādā fiksētā numerācijā). Dažos darbos tiek pateikts, ka mašīna  $M$  galīgā laikā *konverģē* jeb *stabilizējas* uz vēlamo vērtību, t.i. izvada bezgalīgu virkni, kurā sākot ar kādu indeksu visi elementi ir vēlamā vērtība. Šīs definīcijas ir ekvivalentas, jo *EX* kritērijs neprasa, lai  $M$  strādātu galīgu laiku. Tiešām, ja  $M$  var izvadīt galīgu virkni, to var modificēt, lai tā ciklā bezgalīgi izvadītu pēdējo vērtību; ja  $M$  var izvadīt bezgalīgu virkni, kurā sākot no kāda indeksa visas vērtības ir vienādas, tad izvadot kārtējo vērtību,  $M$  var pārbaudīt, vai šī vērtība nav vienāda ar izvadīto tikko iepriekš, un tad izvadītā virkne būs galīga.

Valodu identifikācijai pēc pozitīvā attēlojuma kritērijs tiek definēts sekojoši [7, 13]: mašīna  $M$  *TxtEX*-identificē valodu  $L$ , t.t.t. ja jebkuram  $L$  pozitīvam attēlojumam  $\sigma$  mašīna  $M$  izvada netukšu galīgā garuma virkni, kuras pēdējā vērtība ir  $L$  numurs fiksētā numerācijā.

Valodu identifikācijai pēc pilnā attēlojuma (informētāja) kritērijs tiek definēts sekojoši [23]. Mašīna  $M$  *InfEX-identificē* valodu  $L$ , t.t.t. ja visiem, izņemot galīgo skaitu, naturāliem skaitļiem  $n$  izpildās sekojošā īpašība:  $L$  informācijas virknes sākuma fragmentam garuma  $n$  mašīna  $M$  izvada netukšu galīgā garuma virkni, kuras pēdējā vērtība ir  $L$  numurs fiksētā numerācijā.

Funkciju identifikācijai viena no  $EX$  kritērija iespējamam definīcijām ir sekojoša [66]. Mašīna  $M$  *EX-identificē* funkciju  $f$ , t.t.t. ja sākot skaitļošanu ar visām vērtībām  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ , ... uzrakstītām uz ievada lentas argumenta pieaugšanas secībā,  $M$  ieraksta netukšu galīgu virkni, tādu, ka pēdējā vērtība tajā ir programma  $f$  rēķināšanai.

$EX$  kritērijam ir dažas variācijas. Piemēram, eksistē  $EX^n$  kritērijs ( $n$  ir naturālais skaitlis), [13], kas funkciju identifikācijai nozīmē veiksmīgu funkcijas  $EX$ -identifikāciju jebkuram ievadam, izņemot (sliktākā gadījumā)  $n$  skaitu ievadu (uz kuriem identifikācija var nenotikt vai būt kļūdaina). Notācija  $EX_n$  apzīmē kritēriju ar  $n$  hipotēžu maiņu skaitu [66]: rekursīvu funkciju klase  $U$  ir *identificējama robežā ar  $n$  hipotēžu maiņu skaitu*, t.t.t. ja tā ir identificējama robežā un katrai funkcijai  $f \in U$  virknes garums, kuru izvada induktīvā izveduma mašīna, nepārsniedz  $n+1$ . Reālo vērtību funkcijām, valodām un citiem objektiem kritērija variācijas tiek definētas analogiski.

### 3.4.2. $BC / GN^\infty$ identificējamība

$BC$  (*behaviourally correct*, korekti uzvedošs) kritērija nosaukums tika piedāvāts Case un Smith [13], kaut agrāk šo kritēriju jau pētīja Bārdziņš, nosaucot par  $GN^\infty$  [13, 2]. Tāpat kā  $EX$ , šis kritērijs tiek lietots gan funkciju, gan valodu, gan citu objektu identifikācijai.

$BC$  ( $GN^\infty$ ) identificējamība ir vispārīgāka, nekā  $EX$  ( $GN$ ) identificējamība. Objekta  $u$   $BC$ -identificējamība nozīmē vienu no divām situācijām:

- 1)  $u$  ir  $EX$ -identificējams, vai
- 2) eksistē mašīna  $M$ , kas pēc  $u$  attēlojuma izdod bezgalīgu virkni, no kuras tikai galīgais skaits elementu nav vēlamā vērtība.

Ir skaidrs, ka  $EX \subseteq BC$ . Vēl vairāk, dažos gadījumos  $EX \subset BC$  [13, 69]. Tomēr  $EX$  stipra iekļaušana iekš  $BC$  ir iespējama tikai numerācijās, kurās vienam un tam pašam objektam var eksistēt vairāki indeksi. Tāda ir, piemēram, daļēji definēto rekursīvo funkciju klases numerācija, kas atbilst standarta Tjūringa mašīnu numerācijai. Taču šai pašai klasei eksistē numerācijas bez atkārtotības, tā saucamās Frīdberga numerācijas [22]. Šajā numerācijā, acīmredzami,  $EX = BC$ .

Valodu identifikācijai pēc pozitīvā attēlojuma, valodu identifikācijai pēc informētāja u.c. kritērijs tiek definēts līdzīgi  $EX$  kritērijam; sīkāk sk., piemēram, [23].

### 3.4.3. Galīgā identificējamība ( $EX_0$ / $FIN$ -identificējamība)

Šis kritērijs tiek citēts pēc Wiehagen, Freivalda un Kinbera darba [66], kur tas tiek pielietots rekursīvām funkcijām. Rekursīvu funkciju klase  $U$  ir *galīgi identificējama* (*finitely identifiable*), t.t.t. ja eksistē determinēta Tjūringa mašīna  $M$  ar ievada lentu, izvada lentu un darba lentu, tāda, ka tai izpildās sekojošā īpašība. Katrai funkcijai  $f \in U$ , sākot skaitļošanu ar visām vērtībām  $f(0), f(1), f(2), \dots$  uzrakstītām uz ievada lentas argumenta pieaugšanas secībā,  $M$  pēc galīgā soļu skaita ieraksta tieši vienu vērtību uz izvada lentas, un šī vērtība ir programma  $f$  rēķināšanai.

Mukouchi [52] definēja *noteikto (definite) identificējamību* valodām pēc pozitīvā un pilnā attēlojumiem un parādīja, ka šis kritērijs ir analogisks galīgajai identificējamībai.

Galīgās identificējamības kritērijs dažos darbos tiek nosaukts par  $EX_0$  (piemēram, [34]),  $FIN$  (piemēram, [68]) jeb *Fin*-identificējamību (piemēram, [33]). Pēdējie divi apzīmējumi var radīt problēmas, jo par  $FIN$  mēdz apzīmēt arī galīgo valodu kopu (piemēram, [33]). Tomēr šajā darbā pēdējais apzīmējums netiek lietots, tāpēc šeit un turpmāk  $FIN$  apzīmēs galīgās identificējamības kritēriju un attiecīgi definētas klases.

No šeit un agrāk teiktā ir acīmredzama klašu iekļaušana:

$$FIN \subset EX \subset EX^* \subset BC \quad (3.3)$$

no kā sēko

$$U \in FIN \Rightarrow U \in EX \Rightarrow U \in EX^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow U \in BC \quad (3.4)$$

un

$$U \notin BC \Rightarrow U \notin EX^n, n \in \mathbb{N} \Rightarrow U \notin EX \Rightarrow U \notin FIN \quad (3.5)$$

### 3.4.4. Drošā un noraidošā identificējamība

Iepriekš apskatītie kritēriji tika būvēti no “apakšas”, t.i. tika definēts kritērijs viena objekta veiksmīgai identifikācijai, un balstoties uz tā tika definēts kritērijs visas klases identifikācijai (klase ir identificējama pēc kritērija  $X$ , t.t.t. ja katrs objekts no klases ir identificējams pēc šajā kritērija). Tādējādi netika ņemta vērā situācija, ka induktīvā izveduma mašīnai tiek padots objekts, kas nepieder konkrētai klasei; citiem vārdiem, šajā gadījumā mašīnas uzvedība nav definēta.

Blum un Blum [11] un Minicozzi [50] piedāvāja drošās (*reliable*) identifikācijas jēdzienu, kas nosaka induktīvā izveduma mašīnas uzvedību objektiem, kas nepieder identificējamai klasei. Blum un Blum / Minicozzi definēja šo jēdzienu funkciju identifikācijai; Sakurai [74] definēja analogisku jēdzienu valodu identifikācijai; Arikawa un Mukouchi [55,

53] turpināja Sakurai darbu koncepciju identifikācijas jomā, kā arī piedāvāja noraidīšanas jēdzienu. Šiem jēdzieniem eksistē vairākās variācijas, tai skaitā minimālā, noraidoši minimālā, droši minimālā, stingri minimālā identificējamība u.tml. Šajā apakšnodaļā mēs minēsim tikai divas definīcijas no koncepciju identifikācijas jomas, valodu un funkciju identifikācijai jēdzieni tiek definēti analogiski.

Klases drošā identifikācija nozīmē sekojošo nosacījumu. IIM, saņemot informācijas virkni par kaut kādu objektu no klases, konverģē uz vēlamu vērtību (objekta indekss dotā numerācijā). Tomēr saņemot informācijas virkni par objektu, kas klasei nepieder, mašīna nekonverģē ne uz kādu vērtību. Tas nozīmē, ka mašīna var neko neizvadīt, vai arī izvadīt bezgalīgu virkni.

**Definīcija 3.5.** [53]. Induktīvā izveduma mašīna  $M$  droši (*reliably*) *TextEX*-identificē klasi  $U$  fiksētajā numerācijā  $W$ , t.t.t. ja jebkurai netukšai koncepcijai  $L$  un jebkuram tās pozitīvam attēlojumam:

- 1) Ja  $L \in U$ , tad  $M$  konverģē uz  $W$  indeksu  $i$  tādu, ka  $W_i = L$ ;
- 2) Ja  $L \notin U$ , tad  $M$  nekonverģē uz nekādu  $W$  indeksu.

**Definīcija 3.6.** [53, 32].  $M$  noraidoši (*refutably*) *TextEX*-identificē klasi  $U$  numerācijā  $W$ , t.t.t. ja jebkurai netukšai koncepcijai  $L$  un jebkuram tās pozitīvam attēlojumam:

- 1) Ja  $L \in U$ , tad  $M$  konverģē uz  $W$  indeksu  $i$  tādu, ka  $W_i = L$ ;
- 2) Ja  $L \notin U$ , tad  $M$  izvada noraidīšanas simbolu un apstājas.

Ja mašīnas "nekonverģēšana" nozīmēja, ka mašīnai ir atļauts darīt jebko, bet tikai ne konverģēt uz kaut kādu vērtību, tad noraidīšana nozīmē, ka mašīnai izteikti jāpasaka, ka klase tiek noraidīta. Parasti tiek lietots kaut kāds speciāls "noraidīšanas simbols".

Visbiežāk darbos, kuros tiek pētīta drošā, noraidošā u.tml. identifikācija (piemēram, [33]), tiek atsevišķi definēti, piemēram, drošs *TextEX*-kritērijs, nedrošs *TextEX*-kritērijs, drošs *InfEX*-kritērijs, u.tml. Šajā darbā tiek uzskatīts, ka drošās un noraidošās iespējas ir kritēriju modifikācijas, nevis pamats atsevišķiem kritērijiem, un attiecīgi tiek apspriestas identifikācijas iespējas (7. apakšnodaļa).

## 4. IDENTIFIKĀCIJA AR PAPILDUS INFORMĀCIJU

### 4.1. Ievads

Šajā nodaļā tiek dota identifikācijas ar papildus informāciju definīcija vispārīgā veidā, neuzliekot uz papildus informāciju nekādus ierobežojumus. Lai precizētu turpmākus spriedumus, tiek definēta arī “konstruktīvā identifikācija” kā identifikācija bez papildus informācijas. Tādējādi pieņemtajā terminoloģijā “nekonstruktīvā” identifikācija nav “konstruktīvās” identifikācijas papildinājums (kaut, uzskatot tās par kopām, to krustojums ir acīmredzami tukšs – neeksistē identifikācijas veids, kas ir reizē konstruktīvs un nekonstruktīvs); kā tiek uzrādīts zemāk 6.2.1. punktā, eksistē arī identifikācijas veidi, kas pieņemtajā terminoloģijā nav ne konstruktīvi, ne nekonstruktīvi.

Bez tam, šajā nodaļā tiek apspriesti daži zināmi uzdevumi, kas nav risināmi ar konstruktīvo identifikāciju. Teorēmām no citiem avotiem pierādījumi netiek doti, izņemot gadījumus, kad konstrukcijas no šiem pierādījumiem tiek izmantoti sekām no šīm teorēmām.

### 4.2. Definīcijas

**Definīcija 4.1.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , mēs sakām, ka induktīvā izveduma mašīna  $M$  identificē objektu  $u$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  atbilstoši kritērijam  $X$  pēc attēlojuma  $I: U \rightarrow \mathcal{N}$  ar papildus informācijas daudzumu  $g(u)$ , t.t.t. ja saņemot  $u$  attēlojumu  $I(u)$  un [palīdzības] informācijas virkni  $p: l(p) \leq g(u)$ ,  $M$  identificē  $u$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  atbilstoši kritērijam  $X$ .

Turpmāk tekstā „*identificē atbilstoši kritērijam  $X$* ”, „*identificējams atbilstoši kritērijam  $X$* ” tiek rakstīts saīsināti „ *$X$ -identificē*”, „ *$X$ -identificējams*”. „*Papildus informācijas daudzums*” tiek saīsināti rakstīts „*papildus informācija*” vai „*palīdzība*”, kur tas neapgrūtina saprašanu.

Mašīna  $M$   $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar papildus informāciju  $g(u)$ , t.t.t. ja jebkuram objektam  $u \in U$  ir spēkā:  $M$   $X$ -identificē  $u$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $g(u)$ .

Klase  $U$  ir  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  atbilstoši kritērijam  $X$  pēc attēlojuma  $I$  ar papildus informāciju  $g(u)$ , t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $g(u)$ .

**Definīcija 4.2.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , mēs sakām, ka induktīvā izveduma mašīna  $M$  konstruktīvi  $X$ -identificē objektu  $u$  pēc attēlojuma  $I$  t.t.t. ja  $M$   $X$ -identificē  $u$  pēc  $I$  ar papildus informācijas daudzumu 0.

Mašīna  $M$  konstruktīvi  $X$ -identificē klasi  $U$  pēc attēlojuma  $I$ , t.t.t. ja  $M$   $X$ -identificē  $U$  pēc  $I$  ar papildus informācijas daudzumu 0.

Klase  $U$  ir konstruktīvi  $X$ -identificējama atbilstoši kritērijam  $X$  pēc attēlojuma  $I$ , t.t.t. ja tā ir  $X$ -identificējama pēc  $I$  ar papildus informācijas daudzumu 0.

### 4.3. Fulk, Jain, Sharma identifikācija ar papildus informāciju

Freivalds un Wiehagen [21] pētīja induktīvā izveduma versiju, kad identifikācija tiek veikta nevis tikai pēc kaut kādiem dotiem paraugiem, bet izmantojot arī “dienesta” informāciju par likumu, no kurā tika noģenerēti šie paraugi. Turpinot analogiju ar valodu pazīšanu cilvēkiem, “klasiskā” identifikācija robežā nozīmē, ka cilvēkam tiek piedāvāti tikai vārdi vai frāzes apgūstamajā valodā, kaut identifikācija ar papildus informāciju atbilst situācijai, kad tiek piedāvāti arī kaut kādi (bet ne obligāti visi un pat ne obligāti pareizi) gramatikas likumi.

Fulk [23] turpināja šo virzienu un Jain un Sharma [37, 38] vēl turpmāk to attīstīja. Daļēji balstoties uz [21], Fulk definē trīs identifikācijas ar papildus informāciju kritērijus, kuri visi balstās uz  $EX$ -identificējamības kritēriju pēc informācijas pozitīvā attēlojuma. Šeit minēsim vienu; visos trijos ir izmantota viena ideja, ka palīdzības virkne satur bezgalīgi garu informāciju par identificējamās valodas papildinājumu.

**Definīcija 4.3** [23]. Induktīvā izveduma mašīna  $M$   $CTxtEX$ -identificē valodu  $L$  pār alfabētu  $\Sigma$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , t.t.t. ja  $M$   $EX$ -identificē  $L$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc pozitīvā attēlojuma ar papildus informāciju  $p(L)$ , kur

$$p(L) = p_0 p_1 p_2 \dots : [(\lim_{i \rightarrow \infty} p_i = j) \wedge (\varphi_j = \{ x \in 2^\Sigma \mid x \notin L \})] \quad (4.1)$$

t.i.  $\varphi_j$  ir  $L$  papildinājums.

Freivalds un Wiehagen [21] definēja ekvivalentu kritēriju; tas paredz, ka mašīnai tiek iedota virkne, kas sastāv no  $L$  papildinājuma indeksa sākuma un pēc tam seko valodas pozitīvais attēlojums [23].

Jain un Sharma [37] paskaidro valodas papildinājuma indeksa (“gramatikas”) padošanu ar sekojošo piemēru no cilvēku valodu pazīšanas bērniem. Bērnam var vienkārši paziņot par to, ka viņš izmanto kļūdainu valodas konstrukciju, bet var arī paskaidrot likumu, pēc kurā var atšķirt nepareizas konstrukcijas no pareizām. Šādā veida papildus informācija, kas attiecas pie dotās valodas nepareizām konstrukcijām, t.i. pie valodas papildinājuma, tiek saukta par *negatīvo* papildus informāciju [37].

#### 4.4. Rekursīvu funkciju konstruktīvā identificējamība

Mēs uzrādīsim dažas klases, kas nav identificējamas konstruktīvi, lai pēc tam apspriestu to nekonstruktīvu identificējamību. Šeit un turpmāk tiek izmantots sekojošais svarīgais Gold rezultāts:

**Teorēma 4.4.** Funkciju identifikācijai sekojošās situācijas ir ekvivalentas:

- 1) Funkciju vērtības tiek padotas induktīvā izveduma mašīnai patvaļīgā secībā;
- 2) Funkciju vērtības tiek padotas argumenta pieaugšanas secībā;
- 3) Funkciju vērtības tiek padotas pēc mašīnas pieprasījuma pēc noteiktas vērtības.

**Sekas 4.5** (oriģinālā Gold teorēma [26], Theorem I.3) Valodu identifikācijai sekojošie informētāja veidi ir ekvivalenti (definīcijas sk. 3.3.2. punktā):

- 1) Patvaļīgs informētājs;
- 2) Metodisks informētājs;
- 3) Pieprasījuma informētājs.

Izmantojot šo teorēmu, valodu identifikācijas jomā identifikācija pēc informētāja tiek parasti apskatīta ar metodisko informētāju (t.i. ar bezgalīgu bināru virkni, kurā  $i$ . elements nosaka vārda piederību valodai), un funkcijas identifikācijas jomā tiek parasti apskatīta situācija, kad funkcijas vērtības tiek padotas argumenta pieaugšanas secībā.

Sekojošais rezultāts oriģināli pieder Bārzdīnam [69] un tiek minēts Podnieka apskatā [2]. Analogiskais rezultāts ir atrodams Blum un Blum darbā [11]. Šeit tiek dots pierādījums, kas balstās uz Bārzdīna pierādījuma, lai tālāk apspriestu izmantotās shēmas nekonstruktīvo identifikāciju.

**Teorēma 4.6.** Eksistē konstruktīvi *FIN*-identificējama rekursīvu funkciju klase  $U_0$  un konstruktīvi *EX*-identificējama rekursīvu funkciju klase  $U_1$ , tādas, ka klase  $U_{01} = U_0 \cup U_1$  nav *BC*-identificējama konstruktīvi.

**Pierādījums.** Lai  $W = w_0, w_1, w_2, \dots$  ir numerācija, kurā ir definētas visas visur definētas rekursīvas funkcijas. Klase  $U_0(W)$  tiek definēta sekojoši:

$$U_0(W) = \{ f(x) \mid f(x) = f_0(g, x, W), g \in R \} \quad (4.2)$$

kur

$$f_0(g, x, W) = \begin{cases} m : w_m = g, & x = 0; \\ g(x - 1), & x > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Citiem vārdiem,  $U_0$  ir visu visur definētu funkciju klase, kuras kā pirmo vērtību satur savu indeksu fiksētajā numerācijā  $W$ . Pie tam jebkurā visu visur definētu rekursīvu funkciju numerācijā  $U_0$  ir *FIN*-identificējama ar mašīnu  $M_0$ , kura, saņemot funkcijas attēlojumu  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ , ..., izvada  $f(0)$  kā vienīgu un pareizu hipotēzi.

Klase  $U_1$  tiek definēta sekojoši:

$$U_1 = R \cap \{ f(x) \mid f(x) = f_1(x, k), k \in \mathbb{N} \} \quad (4.4)$$

kur

$$f_1(x, k) = 0, \text{ ja } x \geq k \quad (4.5)$$

Citiem vārdiem,  $U_1$  ir visu visur definētu rekursīvu funkciju klase, kuru vērtība ir 0 visiem argumentiem sākot ar  $k$ .

$U_1$  ir rekursīvi sanumurējama. Tiešām, jebkurai funkcijai  $f(x) = f_1(x, k > 0)$  definēsim tās numuru, kas atbilst karteža  $\langle f(0), f(1), \dots, f(k-1) \rangle$  numuram plus 1 (visu naturālu skaitļu kartežu rekursīvā numerācija ir iespējama [58]), un funkcijas  $f(x) = f_1(x, 0)$  numuru definēsim kā 0. No tā seko, ka  $U_1$  ir *EX*-identificējama (Teorēma 6.1).

Pierādīsim, ka  $U_{01} = U_0 \cup U_1$  nav *BC*-identificējama. Lai  $W$  ir numerācija, kurā  $U_0 \cup U_1$  ir definētas. Pieņemsim, ka eksistē mašīna  $M_{01}$ , kas identificē  $U_{01}$  šajā numerācijā. Tad jebkurai naturālu skaitļu virknei  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$  eksistē skaitlis  $z(n_0, n_1, n_2, \dots, n_k)$ , tāds, ka saņemot virkni

$$n_0, n_1, n_2, \dots, n_k, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{z(n_0, n_1, n_2, \dots, n_k) \text{ nulles}} \quad (4.6)$$

$M_{01}$  izdos kā hipotēzi  $m$  ar sekojošo īpašību:

$$\begin{cases} w_m \in U_1; \\ (x > k) \Rightarrow (w_m(x) = 0) \end{cases} \quad (4.7)$$

Tiešām, ja šāds nosacījums neizpildītos,  $M_{01}$  nevarētu identificēt  $U_1$  un attiecīgi  $U_{01}$ .

Katram  $n_0 \in \mathbb{N}$  definēsim virkni

$$n_0, \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{z(n_0) = z_0}, \underbrace{1, 0, 0, 0, \dots, 0}_{z(n_0, 0^{z_0}, 1) = z_1}, \underbrace{1, 0, 0, 0, \dots, 0, 1, \dots}_{z(n_0, 0^{z_0}, 1, 0^{z_1}) = z_2}, \dots \quad (4.8)$$

No (4.7) seko, ka saņemot jebkuru virkni veida (4.8), visos laika momentos

$$k + \sum_{i=0}^k z_i, k \in \mathbb{N}^+ \quad (4.9)$$

$M_{01}$  izdos hipotēzi par to, ka turpmāk sekos tikai nulles; taču katrā nākamajā momentā hipotēze būs jāizmaina, jo virknē šajās vietās ir 1. Tādejādi  $M_{01}$  bezgalīgi daudz reizes mainīs

hipotēzi par šo virkni. Pa cik  $U_0$  ietilpst visu veidu virknes, un ( 4.7 ) ir definēta visiem  $n_0 \in \mathbb{N}$ , no nekustīgā punkta teorēmas (Teorēma 1.7, Sekas 1.8) seko, ka virkne ( 4.7 ), kurai  $n_0$  ir tās indekss numerācijā  $w_0, w_1, w_2, \dots$ , ir atrodama klasē  $U_{01}$ . Tāpēc  $U_{01}$  nav *BC*-identificējama. ■

Līdzīgu rezultātu var pierādīt klašu apvienojumam, kur abas klases ir *FIN*-identificējamās.

**Sekas 4.7.** Eksistē *FIN*-identificējamās klases  $U_0$  un  $U_2$ , tādas, ka klase  $U_{02} = U_0 \cup U_2$  nav *BC*-identificējama konstruktīvi.

**Pierādījums.** Lai  $p_0, p_1, p_2, \dots$  ir visu visur definētu rekursīvu funkciju numerācija. Klase  $U_0$  tiek definēta analogiski kā iepriekšējā teorēmā: ( 4.2 ) – ( 4.3 ). Klase  $U_2(W)$  tiek definēta sekojoši:

$$U_2(W) = U_{20}(W) \cap U_{21} \quad (4.10)$$

kur

$$U_{20}(W) = \{ f(x) \mid f(x) = f_0(g, x, W), g \in R \} \quad (4.11)$$

$$U_{21} = \{ f(x) \mid f(x) = f_1(x, k), k \in \mathbb{N} \setminus \{ 0; 1 \} \} \quad (4.12)$$

$$f_0(g, x, W) = \begin{cases} g(0), & x = 0; \\ m : w_m = g, & x = 1; \\ g(x - 1), & x > 1 \end{cases} \quad (4.13)$$

$$f_1(x, k) = 0, \text{ ja } x \geq k \quad (4.14)$$

Citiem vārdiem,  $U_2$  ir analogiska klasei  $U_1$  no iepriekšējās teorēmas, bet atšķiras ar to, ka tās funkcijas kā otro vērtību satur savu indeksu fiksētajā numerācijā  $W$ . Ir skaidrs, ka  $U_2$  ir *FIN*-identificējama. Tomēr  $U_0 \cup U_2$  nav *BC*-identificējama: no vienas puses, ir spēkā spriedumi no iepriekšējās teorēmas; no otrās puses, mašīna nevar izvadīt funkcijas indeksu, kas ir saturēts tās vērtībā, jo  $U_0$  klasē šis indekss ir iekodēts pirmajā, bet  $U_2$  – otrajā vērtībā. ■

**Sekas 4.8.** Visu visur definētu funkciju klase nav *BC*-identificējama konstruktīvi.

## 4.5. Rekursīvu valodu un koncepciju konstruktīvā identificējamība

### 4.5.1. Ievads

Runājot par funkciju identifikāciju, var atšķirt „konstruktīvi identificējamās” un „konstruktīvi neidentificējamās” klases, jo informācijas attēlojums tiek vienmēr lietots tikai viens – funkcijas grafiks. Taču rekursīvu valodu un koncepciju klašu identifikācijai ir vispārpieņemts lietot vismaz divu veidu attēlojumus – pozitīvo („tekstu”) un pilnu („informētāju”). Tāpēc tiek apspriesta klašu identifikējamība dažādos līmeņos:

1. Konstruktīvi identificējamās pēc pozitīvā attēlojuma klases;
2. Konstruktīvi identificējamās pēc pilnā attēlojuma klases;
3. Konstruktīvi neidentificējamās klases (šajā darbā netiek apskatītas).

(Vēl Gold [26] pierādīja, ka identificējamās pēc pilnā attēlojuma klases ir vienmēr identificējamās pēc pozitīvā attēlojuma.)

No otrās puses, *FIN*, *EX* un *BC* kritērijiem identifikējamība arī var atšķirties. Bez tam, pati pilnā attēlojuma virkne var ka tāda tikt uzskatīta par papildus informāciju, salīdzinot ar pozitīvo attēlojumu (Teorēma 6.22, Apgalvojums 6.23, Sekas 6.24 zemāk).

### 4.5.2. Konstruktīvā identifikējamība pēc pozitīvā attēlojuma

Oriģinālajā Gold darbā [26], runājot par identifikāciju robežā kā par cilvēka pirmās valodas pazīšanas modeli, valodu identifikācija pēc pozitīvā attēlojuma tika pamatota kā “visdabiskākais” modelis šajā nozīmē. Tiešām, daudziem bērniem netiek piedāvāta informācija par noteiktu vārdu vai konstrukciju neiekļaušanu noteiktā valodā (vismaz ne visi bērni tiek audzināti ģimenēs un ne visi saņem izglītību), bet vairākums cilvēku tik un tā iemācas runāt savā pirmajā valodā (labāk vai sliktāk).

Tomēr Gold pierādīja, ka tikai galīgās kardinalitātes valodu klase (un precīzi tā) ir *EX*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma (Teorēma 4.9, Teorēma 4.12). No tā Gold secināja, ka spēkā ir viena no sekojošām situācijām:

- 1) Identifikācija robežā nav piemērots modelis cilvēku valodu pazīšanai.<sup>8</sup>
- 2) Cilvēku valodu klase ir mazāka, nekā par to ir pieņemts domāt. (Tas ir, tā atbilst galīgās kardinalitātes valodu klasei.)
- 3) Bez pašu valodas vārdu un konstrukciju, ko viņš dzird, bērnam ir pieejama kāda veida papildus informācija.

---

<sup>8</sup> Citējot [26] un šos Gold secinājumus, bieži min tikai 2. un 3. secinājumus. Sk., piemēram, [37].

**Teorēma 4.9** [26]. Fiksējot alfabētu  $\Sigma$ , visu galīgās kardinalitātes valodu klase  $U_F(\Sigma)$  pār  $\Sigma$  ir konstruktīvi *EX*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

**Pierādījums.** Induktīvā izveduma mašīna  $M$  darbojas sekojošā veidā: jebkurā laika brīdī  $t$ , saņemot informācijas virkni  $I[t-1]$ , uzskatīt, ka identificējamā valoda sastāv tikai no vārdiem, kas pieder  $I[t-1]$ . Pa cik pozitīvais attēlojums satur visus valodas vārdus (sk. ( 3.1 ), Definīcija 3.2. ), jebkurai pozitīvā attēlojuma virknei  $I_0$  eksistē  $t_0$  tāds, ka  $I_0[t_0-1]$  satur informāciju par visiem vārdiem. Ir skaidrs, ka  $M$  *EX*-identificē visu klasi  $U_F(\Sigma)$ . ■

**Sekas 4.10.** Jebkura galīgās kardinalitātes klase  $U$  ir konstruktīvi *EX*-identificējama rekursīvā numerācijā, kura tā ir definēta, pēc jebkura injektīva  $U$  attēlojuma  $I$ .

Uzrādītās teorēmas oriģinālais autors ir Gold [26], taču [26] ir vairākuma veltīts *EX*-identifikācijai. Tomēr var viegli pierādīt sekojošo rezultātu *FIN*-identifikācijai:

**Apgalvojums 4.11.** Klase  $U_F(\Sigma)$  nav *FIN*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

**Pierādījums.** Tiešām, pieņemsim, ka eksistē mašīna  $M$ , kas *FIN*-identificē  $U_F(\Sigma)$ . Tad katrai naturālu skaitļu virknei  $n_0, n_1, n_2, \dots$  eksistē naturālais skaitlis  $t(n_0, n_1, n_2, \dots)$ , tāds, ka saņemot virkni  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_b$ , laika momentā  $t(n_0, n_1, n_2, \dots)$   $M$  izvada hipotēzi  $m$  par identificējamu valodu. Tad eksistē virkne  $n_0, n_1, n_2, \dots, n_b, w_m$ , kur  $w_m$  ir vārds, kas nepieder valodai ar indeksu  $m$ . Saņemot šo virkni,  $M$  izvada nepareizu hipotēzi. ■

**Teorēma 4.12** [26]. Fiksējot alfabētu  $\Sigma$ , valodu klase, kas satur  $U_F(\Sigma)$  un vismaz vienu bezgalīgās kardinalitātes valodu pār  $\Sigma$ , nav konstruktīvi *BC*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

## 5. DAŽI REZULTĀTI PAR KOLMOGOROVA SAREŽĢĪTĪBU

Šajā darbā tiek lietoti daži rezultāti no Kolmogorova sarežģītības teorijas rekursīvu funkciju teorijas nozarē. Zemāk tiek doti nepieciešami rezultāti un to pierādījumi. Ir svarīgi atzīmēt, ka šajā darbā runa iet galvenokārt par naturālo skaitļu Kolmogorova sarežģītību, kaut parasti Kolmogorova sarežģītība tiek apskatīta bināriem vārdiem [46]. Ir skaidrs, tomēr, ka definējot Kolmogorova sarežģītību bināriem vārdiem, var efektīvi definēt to naturāliem skaitļiem, pieņemot bināru vārdu interpretāciju kā naturālo skaitļu bināru pierakstu. Otrais svarīgais moments ir tas, ka šajā darbā tiek apskatīta tikai “neierobežotā” (*unrestricted*) jeb “vienkāršā” (*plain*) Kolmogorova sarežģītība, nevis “prefiksa” (*prefix*) sarežģītība. Treškārt, Li (李明) un Vitányi grāmatā [46] neierobežotā sarežģītība tiek apzīmēta ar  $C(x)$  un prefiksa sarežģītība – ar  $K(x)$ , kamēr šajā darbā tiek lietots apzīmējums  $K(x)$  pirmā veida sarežģītībai; tas tiek darīts pēc analogijas ar vairākiem citiem darbiem (piemēram, [5, 70]), kur arī tiek pielietota tikai neierobežotā Kolmogorova sarežģītība.

**Teorēma 5.1.** Jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē  $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$ , tādi, ka

$$\begin{cases} x_0 < x_1; \\ K(x_0) > K(x_1) + n. \end{cases} \quad (5.1)$$

**Pierādījums.** Pa cik katram atsevišķam objektam fiksētajā numerācijā, atbilstoši kurai tiek rēķināta funkcija  $K(x)$ , jābūt aprakstītam ar atsevišķu indeksu (programmu), tad jebkuram naturālam  $k$  ir spēkā

$$\sum_{i=0}^k K(i) \geq 2^k \quad (5.2)$$

Apskatīsim naturālus skaitļus  $z$ , kuri ir vienādi ar 2 kādā pakāpē, t.i. ir spēkā

$$\exists x \in \mathbb{N}: z = 2^x \quad (5.3)$$

Acīmredzami  $K(z) \leq \log_2 z + c_l$ , kur  $c_l$  ir konstante. Augstāk minēto iemeslu dēļ elementu  $x$ , kuriem  $K(x)$  nav lielāka par  $K(z)$  (apzīmēsim šo skaitli ar  $d_{\leq z}$ ) nav vairāk par

$$\sum_{i=0}^{\log_2 z + c_l} 2^i = 2^{\log_2 z + c_l + 1} - 1 \quad (5.4)$$

Tāpēc jebkurā kopā  $U_z = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq z \}$  apakškopas  $U_{>z} = \{ x \mid K(x) > K(z) \}$  kardinalitāte nav mazāka par

$$2^x - d_{\leq z} \geq 2^x - 2^{\log_2 z + c_l + 1} + 1 \quad (5.5)$$

Bet  $U_{\leq z} = U_z \setminus U_{> z}$  elementu Kolmogorova sarežģītību summa nav lielāka par

$$d_{\leq z} \cdot (\log_2 x + c_l) \leq (2^{\log_2 x + c_l + 1} - 1) \cdot (\log_2 x + c_l) \quad (5.6)$$

tāpēc  $U_{> z}$  elementu Kolmogorova sarežģītību summa nav mazāka par

$$2^{2^x} - (2^{\log_2 x + c_l} - 1) \cdot (\log_2 x + c_l) \geq 2^{2^x} - d_{\leq z} \cdot (\log_2 x + c_l) \quad (5.7)$$

No tā izriet, ka  $U_{> z}$  elementa vidējā aritmētiskā vērtība ir ne mazāka par

$$\frac{2^{2^x} - d_{\leq z} \cdot (\log_2 x + c_l)}{2^x - d_{\leq z}} \quad (5.8)$$

Bet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2^{2^x} - d_{\leq z} \cdot (\log_2 x + c_l)}{2^x - d_{\leq z}} - (\log_2 x + c_l) \right] = \infty \quad (5.9)$$

no kā tieši izriet vēlamais rezultāts. ■

**Sekas 5.2.** Jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē bezgalīgi daudz pāru  $x_0, x_1 \in \mathbb{N}$ , tādus, ka

$$\begin{cases} x_0 < x_1; \\ K(x_0) > K(x_1) + n. \end{cases} \quad (5.10)$$

**Lemma 5.3.** Jebkurai kopai  $X$  ar kardinalitāti  $n$  ir spēkā

$$\sum_{x \in X} K(x) \geq \sum_{i=1}^{n+1} (\lceil \log_2(i+1) \rceil - 1) \geq n \cdot (\log_2 n - 2) \quad (5.11)$$

**Pierādījums.** Pa cik katram atsevišķam objektam (šeit: naturālam skaitlim) fiksētajā numerācijā, atbilstoši kurai tiek rēķināta funkcija  $K(x)$ , jābūt aprakstītam ar atsevišķu indeksu (programmu), t.i. ar atsevišķu bināru vārdu, tad kopai ar 2 elementiem ir spēkā

$$\sum_{x \in X} K(x) \geq 1 + 1 = 2 \quad (5.12)$$

Kopai ar 5 elementiem ir spēkā

$$\sum_{x \in X} K(x) \geq 1 + 1 + 2 + 2 + 2 = 8 \quad (5.13)$$

Kopai ar  $n$  elementiem ir spēkā

$$\sum_{x \in X} K(x) \geq \underbrace{(1+1)}_{2^1} + \underbrace{(2+\dots+2)}_{2^2} + \underbrace{(3+\dots+3)}_{2^3} + \dots + \underbrace{(\log_2(n+1)+\dots+\log_2(n+1))}_{k \leq 2^{\log_2(n+1)}} \quad (5.14)$$

$n$

Ir viegli pārbaudīt, ka summa (5.14) ir vienāda ar

$$\sum_{i=1}^{n+1} (\lceil \log_2(i+1) \rceil - 1) \quad (5.15)$$

kas savukārt nav mazāka par  $n \cdot (\log_2 n - 2)$ . ■

**Sekas 5.4.**  $K(x)$  nav ierobežota no augšas.

**Sekas 5.5.** Eksistē bezgalīga naturālo skaitļu virkne  $k_0, k_1, k_2, \dots$ , tāda, ka ir spēkā:

$$(k_i \in \mathbb{N} \mid i \in \mathbb{N}); i < j \Rightarrow (k_i < k_j) \wedge (K(k_i) < K(k_j)) \quad (5.16)$$

**Lemma 5.6.** Eksistē bezgalīga naturālo skaitļu virkne  $k_0, k_1, k_2, \dots$ , tāda, ka ir spēkā (5.16) un turklāt:

$$\forall i, n \in \mathbb{N}: (n > k_i) \Rightarrow K(n) > K(k_i) \quad (5.17)$$

**Pierādījums.** Būvēsim tādu virkni. Pēc iepriekšējiem spriedumiem jebkuram naturālam skaitlim jābūt aprakstītam ar atsevišķu bināru vārdu, tad jebkuram bināra vārda garumam  $l$  eksistē tikai galīgs skaits naturālu skaitļu, kurus vārdi ar šo garumu apraksta. Tad jebkurā tādā kopā  $N(l)$  eksistē maksimālais skaitlis. Dotajā Kolmogorova numerācijā izvēsimies minimālo iespējamu vārda garuma  $l_0$  un ieliksīm  $\max(N(l_0))$  kā 0. virknes elementu. Katram nākamam minimāli iespējamam vārda garumam  $l_i$  ieliksīm  $\max(N(l_i))$  kā nākamo virknes elementu (ja tas ir lielāks par iepriekšējo; ja nav, apskatīsim nākamo minimāli iespējamo vārda garumu). Ir skaidrs, ka uzbūvētā virkne atbilst nosacījumiem (5.16) un (5.17). ■

Tomēr rekursīvām virknēm ne Lemma 5.6, ne Sekas 5.5 nav spēkā.

**Teorēma 5.7.** Neeksistē rekursīva bezgalīga naturālu skaitļu virkne, kurā visi elementi ir dažādi un katra nākamā elementa Kolmogorova sarežģītība nav mazāka par iepriekšējo.

**Pierādījums.** Pieņemsim pretējo, t.i. ka eksistē bezgalīgā rekursīvā virkne

$$k_0, k_1, k_2, \dots \quad (5.18)$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N}: i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j \quad (5.19)$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N}: i < j \Rightarrow K(k_i) \leq K(k_j) \quad (5.20)$$

Virknes rekursivitāte nozīmē rekursīvās funkcijas  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eksistenci:

$$f(x) = k_x \quad (5.21)$$

Tad katra  $i$ . virknes elementa ( $i \in \mathbb{N}$ ) Kolmogorova sarežģītība nav lielāka par

$$c_f + \lceil \log_2 i \rceil \leq c_f + c_l + K(i) \quad (5.22)$$

kur  $c_f$  un  $c_l$  ir konstantes, kas atbilst respektīvi funkciju  $f$  un  $\log_2$  Kolmogorova sarežģītībai.

Pa cik  $f(x)$  ir rekursīva un ir injekcija (no virknes definīcijas), var definēt tai apgriezto rekursīvo funkciju

$$g(y) = x \mid f(x) = y \quad (5.23)$$

Tad

$$K(f(i)) \leq c_f + c_l + K(i) \leq c_f + c_l + c_g + K(f(i)) \quad (5.24)$$

No iepriekš uzrādītā (Teorēma 5.1) ir spēkā:

$$\exists i_0, i_1 \in \mathbb{N}: (i_0 < i_1) \wedge (K(i_0) > K(i_1) + c_f + c_l + c_g) \quad (5.25)$$

Tad no (5.24)

$$K(f(i_0)) \geq K(i_0) - c_g > K(i_0) - c_g + c_f + c_l + c_g \geq K(f(i_1)) \quad (5.26)$$

tas ir,

$$(i_0 < i_1) \wedge (K(f(i_0)) > K(f(i_1))) \quad (5.27)$$

kas ir pretruna. ■

**Sekas 5.8.** Neeksistē rekursīva nedilstoša neierobežota no augšas naturālu skaitļu virkne, kurā katra nākamā elementa Kolmogorova sarežģītība nav mazāka par iepriekšējo.

**Pierādījums.** Ja tāda virkne  $X$  eksistētu, varētu definēt rekursīvu funkciju, kas izmet no  $X$  visus pēc kārtas vienādus elementus, rezultātā iegūstot bezgalīgu rekursīvu virkni, kurā visi elementi ir dažādi un katra nākamā elementa Kolmogorova sarežģītība nav mazāka par iepriekšējo. ■

**Teorēma 5.9.** Ja  $f$  ir nedilstoša, neierobežotā no augšas rekursīvā funkcija, tad jebkuram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē  $y_0, y_1 \in \text{range}(f)$ , tādi, ka

$$\begin{cases} y_0 < y_1; \\ K(y_0) > K(y_1) + n. \end{cases} \quad (5.28)$$

**Pierādījums.** Katram naturālam skaitlim  $z$  definēsim sekojošās kopas:

$$U_z \equiv \{ y \mid y \in \text{range}(f) \wedge y \leq z \} \quad (5.29)$$

$$U_{>z} \equiv \{ x \mid x \in U_z \wedge K(x) > K(z) \} \quad (5.30)$$

$$U_{\leq z} \equiv \{ x \mid x \in U_z \wedge K(x) \leq K(z) \} \quad (5.31)$$

No tā, ka programmu ar garumu ne vairāk ka  $n$  nevar būt vairāk par  $\sum_{i=0}^n 2^i$ , seko

$$d(U_{\leq z}) \leq \sum_{i=0}^{K(z)} 2^i = 2^{K(z)+1} - 1 \quad (5.32)$$

Tad

$$d(U_{> z}) = d(U_z) - d(U_{\leq z}) \geq d(U_z) - 2^{K(z)+1} + 1 \quad (5.33)$$

Turpmāk apzīmēsim  $d(U_z) = d$ ,  $K(z) = k$ .

Kopas  $U_{\leq z}$  elementu Kolmogorova sarežģītības summa nav lielāka par

$$k \cdot (2^{k+1} - 1) \quad (5.34)$$

No Lemmas par kopas elementu Kolmogorova sarežģītības summu (Lemma 5.3) kopas  $U_z$  elementu Kolmogorova sarežģītības summa nav mazāka par

$$d \cdot (\log_2 d - 2) \quad (5.35)$$

Tad kopas  $U_{> z}$  elementu Kolmogorova sarežģītības summa nav mazāka par

$$d \cdot (\log_2 d - 2) - k \cdot (2^{k+1} - 1) \quad (5.36)$$

Tad  $U_{> z}$  elementu vidējās Kolmogorova sarežģītības un elementa  $z$  Kolmogorova sarežģītības starpība nav mazāka par

$$\frac{d \cdot (\log_2 d - 2) - k \cdot (2^{k+1} - 1) - k \cdot (d - 2^{k+1} + 1)}{d - 2^{k+1} + 1} \quad (5.37)$$

kas ir vienāds ar

$$\frac{d \cdot (\log_2 d - 2 - k)}{d - 2^{k+1} + 1} \quad (5.38)$$

Savukārt no iepriekš pierādītā (Teorēma 5.1, Sekas 5.2, Teorēma 5.7, Sekas 5.8) seko, ka jebkuram  $d$  var atrast bezgalīgi daudz tādu  $k$ , kuriem  $d+1 - 2^{k+1} = m \geq 0$ , un šī  $m$  nebūs ierobežota no augšas. Tad (5.38) tiecas uz bezgalību pie  $d \rightarrow \infty$ .

Citiem vārdiem, no tā, ka  $f$  nav ierobežota no augšas, vienmēr var atrast elementu  $x_1$ , kura Kolmogorova sarežģītība ir mazāka, nekā Kolmogorova sarežģītība kādam elementam  $x_0$  no iepriekšējiem, un šo elementu Kolmogorova sarežģītības starpība ir arī neierobežota no augšas. ■

## 6. NEKONSTRUKTIVITĀTE INDUKTĪVAJĀ IZVEDUMĀ

### 6.1. Ievads

Gan klasiskajā matemātikā, gan tai radnieciskajās nozarēs (skaitļošanas teorijā u.c.) vairāki nekonstruktīvi pierādījumi tiek lietoti galvenokārt tāpēc, ka nav zināmu veidu pierādīt šos pašus faktus konstruktīvi, t.i. izteikti uzrādīt konstrukciju. Arī inductīvā izveduma nozarē var atrast virkni rezultātu, kuru pierādījumi nav konstruktīvi.

Pirmkārt, visa Solomonoff teorija ir balstīta uz algoritmiskās varbūtības – vērtības, kura nav algoritmiski izrēķināma, – līdz ar to ļoti daudzi ar to saistītie rezultāti nav konstruktīvi iegūstami. Identifikācija pēc Gold nav tik abstrakta, bet šeit arī ir vieta nekonstruktīviem pierādījumiem. Piemēram, [13] autori pat izteikti norāda, ka Teorēmas 2.3. darbā [13] pierādījums ir nekonstruktīvs. Tiešām, tajā tiek apskatīti divi iespējami ceļi, pa kuriem var attīstīties uzrādītā konstrukcija, bet nevar noteikt, kurš gadījums tiešām ir spēkā. Ļoti līdzīgs pierādījums ir Teorēmai 22 darbā [9]. Mūsu pieņemtajā terminoloģijā varētu teikt, ka šajos pierādījumos nekonstruktivitātes daudzums ir 1 bits.

Tādējādi turpmākajos spriedumos tiek pieņemts, ka nekonstruktīvā identifikācija aptver klases, kas nav parastā veidā, t.i. konstruktīvi, identificējamās.

Definīcija 4.1 atļauj definēt jebkura iepriekš minēta kritērija modifikāciju ar papildus informāciju, neuzliekot ierobežojumus uz (palīdzības) informācijas virkni, t.i. ar triviālu  $\bar{e}$ -nosacījumu. Lai definētu nekonstruktivitātes jēdzienu inductīvajā izvedumā atbilstoši Freivalda definīcijai (Definīcija 2.3), ir nepieciešams kaut kādā veidā aizliegt padot inductīvā izveduma mašīnai vienkārši atbildi, kura tai jāizvada, t.i. jādefinē  $\bar{e}$ -nosacījums. Tomēr diez vai ir iespējams formāli definēt nosacījumu „palīdzības vārds nevar būt tāds, ka to var triviāli transformēt uz pazīstama objekta numuru”.

Definīcija 2.3 uzliek ierobežojumu uz nekonstruktivitātes daudzumu, saistot to ar pazīstamo vārdu garumu; tādejādi naivs mēģinājums definēt analogisku konstrukciju identifikācijā ierobežotu identificējamo objektu klasi ar klasēm ar galīgo kardinalitāti. Acīmredzami šis ierobežojums ir pretrunā ar iepriekš minētiem mērķiem identificēt konstruktīvi neidentificējamās klases: klases ar galīgo kardinalitāti ir vienmēr *EX*- (un dažos gadījumos pat *FIN*-) identificējamās konstruktīvi (Teorēma 4.9, Sekas 4.10 un Lemma 6.12).

Ambainis un citi darbā [5], kurā runa iet nevis par papildus informācijas, bet visa izveduma sarežģītību (pēc [19] tā tiek definēta kā hipotēžu maiņu skaits), apskata to attiecībā uz identificējamās funkcijas indeksu rekursīvajā numerācijā. Šī pieeja ir piemērota darbu [5, 19] nolūkiem – šajos darbos identificējamās klases ir ierobežotas ar rekursīvi sanumurējamām

visur definēto rekursīvu funkciju klasēm – bet arī nav noderīga augstāk iezīmētiem nolūkiem, kas seko no sekojošā rezultāta:

**Teorēma 6.1.** [2, 5] Jebkura rekursīvi sanumurējama visur definēto rekursīvo funkciju klase ir *EX*-identificējama.<sup>9</sup>

Šie ierobežojumi var būt pārvarēti dažādos veidos, kas arī tiek apspriests zemāk.

## 6.2. Definīcijas

### 6.2.1. *T*-papildus informācija

**Definīcija 6.2.** Mēs sakām, ka klase  $U$  ir *definēta numerācijā*  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , t.t.t. ja katram  $U$  objektam ir uzdots indekss šajā numerācijā:

$$(\forall u \in U)[\exists n \in \mathbb{N} : \varphi_n = u] \quad (6.1)$$

**Apgalvojums 6.3.** Ja ir dota klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, tad  $U$  ir *FIN*-identificējama šajā numerācijā ar papildus informācijas daudzumu  $p : U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tādu, ka

$$(\forall u \in U)[\exists n \in \mathbb{N}, \forall p_0 \in p(u) : \varphi_n = u, K(p_0) \geq K(n)] \quad (6.2)$$

kur  $K(n)$  ir  $n$  Kolmogorova sarežģītība.

**Pierādījums.** Pēc Kolmogorova sarežģītības definīcijas (sk., piemēram, [46, 70]) jebkuru numuru  $n$  var saspiest līdz vārda  $p_n$ :  $l(p_n) = K(n)$  tā, ka to var atjaunot fiksētā mašīna  $M_0$ . Ja  $n$  ir objekta  $u$  indekss, tad induktīvā izveduma mašīna  $M$ , saņemot  $p_n$  kā papildus informāciju, simulē mašīnas  $M_0$  darbību, atjaunojot  $n$ , un izvada to kā vienīgo un pareizo hipotēzi. ■

( 6.2 ) ir tik stiprs papildus informācijas daudzums, ka  $M$  nav vajadzīgs cits objekta attēlojums – tā jau saņēma pareizo atbildi.

No šiem spriedumiem varēja arī definēt *ē*-nosacījumu nekonstruktīvajai identifikācijai. Tomēr ir iespējams, ka  $U$  ir tāda struktūra, ka katrā tās locekļa indekss var tikt saspiests vēl ar kādu funkciju  $h_0$  un atjaunots atpakaļ ar rekursīvu funkciju  $h_1$ . Pie tam  $h_0(n)$  nebūs šī indeksa Kolmogorova sarežģītība, jo  $h_0$  nav universāla (t.i. šādi iegūtā numerācija neaptver visus

---

<sup>9</sup> Šis rezultāts netieši seko no Gold [26], kaut Gold darbā runa neiet par funkciju identifikāciju. Tomēr, piemēram, Podnieks [2] atsaucas uz to kā uz Gold rezultātu.

objektus, ko uzdod izejas numerācija). Tādā gadījumā  $h_1$  rēķināšana var tikt iekļauta induktīvā izveduma mašīnā. No šiem spriedumiem tiek konstruēta sekojošā definīcija.

**Definīcija 6.4.** Ja ir dota klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta,  $T$ -palīdzība ( $T$ -papildus informācijas daudzums) klases  $U$  identifikācijai šajā numerācijā ir  $p : U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tāda, ka

$$\exists c \in \mathbb{N}: (\forall u \in U) [ \forall p_0 \in p(u) : K(p_0) \geq \min\{ K(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (6.3)$$

kur  $K(n)$  ir  $n$  Kolmogorova sarežģītība.

Kā piemēru  $T$ -daudzuma pielietošanai apskatīsim sekojošo konstrukciju no [23]. Lai ir dota valodu numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā ir definēta klase  $U$ :

$$U = \{ L \mid (\forall x \in \mathbb{N}) [ x \in L \Leftrightarrow g(x) \notin L ] \} \quad (6.4)$$

kur  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , turklāt

$$(\forall n \in \mathbb{N}) [(g(2n) = 2n + 1) \wedge (g(2n + 1) = 2n)] \quad (6.5)$$

$$(\forall i \in \mathbb{N}) [\varphi_{h(i)} = \{ x \mid g(x) \in \varphi_i \}] \quad (6.6)$$

Parādīsim, ka  $CTxtEX$  definētā palīdzība (4.1) ir virkne, kas konverģē uz  $T$ -daudzumu  $U$  identifikācijai. Tiešām, no (4.1) un (6.4) – (6.6) jebkurai valodai  $\varphi_i \in U$  ir spēkā

$$K(i) \leq K(h(p_\infty)) \leq K(p_\infty) + K(h) \quad (6.7)$$

kur  $p_\infty = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$ . Pa cik  $K(h)$  ir konstante, kas ir atkarīga no  $U$ , tad iedotā palīdzība konverģē uz  $T$ -daudzumu  $U$  identifikācijai. Tas ir, lietojot palīdzību (4.1),  $U$  ir identificējama, neizmantojot objektu attēlojumu.

### 6.2.2. $K$ - un $S$ -nekonstruktīvā identifikācija

$K$ -palīdzība ( $K$ -papildus informācijas daudzums) klases  $U$  identifikācijai ir  $p : U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tāda, ka

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists u \in U) [ \exists p_0 \in p(u) : \forall n \in \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = u \} K(p_0) < K(n) - c ] \quad (6.8)$$

vai, kas ir ekvivalents,

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists u \in U) [ \exists p_0 \in p(u) : K(p_0) < \min\{ K(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (6.9)$$

$S$ -palīdzība ( $S$ -papildus informācijas daudzums) klases  $U$  identifikācijai ir  $p : U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tāda, ka

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\forall^{\infty} u \in U) [ \exists p_0 \in p(u) : K(p_0) < \min\{ K(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (6.10)$$

Runājot par identifikāciju kā par pierādījumu formalizāciju, situācija, kuru apspriež Apgalvojums 6.3, ir tāds pierādījums, kas atsaucas pats uz sevi, t.i. „ $A$  ir spēkā, jo  $A$  ir spēkā”. Skaidrs, ka šādā veida pierādījums diez vai var tikt nosaukts par nekonstruktīvu pierādījumu, vai par pierādījumu kā tādu.  $T$ -palīdzība<sup>10</sup> apspēlē nedaudz sarežģītāku situāciju, kas pēc būtības tomēr paliek tāda pati: „ $A$  ir spēkā, jo  $B$  ir spēkā; taču  $B$  ir spēkā, tāpēc kā  $A$  ir spēkā”.  $K$ -palīdzība pēc būtības ir pamats  $\bar{e}$ -nosacījumam „neatļaut  $T$ -palīdzību”. Savukārt  $S$ -palīdzība ir pamats vēl stingrākam  $\bar{e}$ -nosacījumam.

Šie jēdzieni ir  $K$ - un  $S$ -nekonstruktīvās identifikācijas definīciju pamatā.

**Definīcija 6.5.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , palīdzības definīcija  $Y: Y \in \{ K, S \}$ , klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, mēs sakām, ka mašīna  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ , t.t.t. ja  $M$   $X$ -identificē katru  $u \in U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar jebkuru  $p_0 \in p(u)$ , kur  $p(u)$  ir  $Y$ -palīdzība.

Klase  $U$  ir  $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ , t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas  $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ .

Mašīna  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē klasi  $U$  pēc attēlojuma  $I$ , t.t.t. ja eksistē  $Y$ -palīdzība  $p(u)$  tāda, ka  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  pēc  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ . Klase  $U$  ir  $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama, t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas  $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$ .

Ir acīmredzams, ka jebkura  $S$ -palīdzība ir arī  $K$ -palīdzība, un attiecīgi pie jebkura kritērija, jebkurā numerācijā no  $S$ -nekonstruktīvās identificējamības seko  $K$ -nekonstruktīvā identificējamība (resp., ja nav iespējams  $K$ -identificēt, tad nav iespējams arī  $S$ -identificēt). Savukārt jebkurš  $T$ -daudzums nav  $K$ -daudzums.

Tā kā  $K$ - un  $S$ -palīdzības daudzums ir definēti izmantojot neizrēķināmo Kolmogorova sarežģītības jēdzienu, dažos gadījumos var pierādīt, ka noteikta palīdzības relācija ir  $K$ - un/vai  $S$ -palīdzība, bet nevar novērtēt tās daudzumu. Tāpēc šādās situācijās tiek norādīta tikai iespējamība  $K$ - vai  $S$ -identificēt, nenorādot nekonstruktivitātes daudzumu.

---

<sup>10</sup> „ $T$ ” ir no vārda „triviāls”. Sākotnējās darba versijās, kā arī rakstā [43], kas uz šajā darba sagatavošanas brīdī publicēts nebija, tika lietoti termini „triviāls” un „netriviāls” (papildus informācijas daudzums) attiecībā uz  $T$ - un  $K$ -palīdzību. Tomēr, kā tiek parādīts zemāk, (gandrīz) triviāla identifikācija ir iespējama arī ar  $K$ -palīdzību.

### 6.2.3. *F*-nekonstruktīvā identifikācija

Kā tika iezīmēts augstāk, *K*- un *S*-nekonstruktivitāte nav vienīgais iespējamais veids  $\bar{e}$ -nosacījuma definēšanai identifikācijā. Sekojošās idejas oriģinālais autors ir R.M. Freivalds [personālā komunikācija]; līdzīgas konstrukcijas var atrast Freivalda un Wiehagen darbā [21] un Jain un Sharma darbā [38]; acīmredzami šī definīcija ir vēl tuvākā nekonstruktīvās skaitļošanas definīcijai (Definīcija 2.3).

**Definīcija 6.6.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, mēs sakām, ka mašīna  $M$  *F*-nekonstruktīvi  $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(n)$ , t.t.t. ja katram naturālam skaitlim  $n$  eksistē naturālais skaitlis  $m$ , tāds, ka ir spēkā sekojošais:

- 1)  $m \leq p(n)$ ;
- 2)  $M$  identificē numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  jebkuru  $u \in U$ , kuram  $\exists i \leq n: \varphi_i = u$ , pēc attēlojuma  $I$  ar papildus informāciju  $m$ .

Šajā gadījumā mēs sakām, ka  $m$  ir *palīdzības vārds indeksiem diapazonā*  $[0..m]$ .

Klase  $U$  ir *F*-nekonstruktīvi  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(n)$ , t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas *F*-nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(n)$ .

## 6.3. *K*-, *S*-, *F*-nekonstruktivitātes teorētiskais salīdzinājums

### 6.3.1. *Ievads*

Šajā apakšnodaļā tiek apspriestas *K*-, *S*- un *F*-definīciju potenciālās iespējas, netuvinot šos modeļus identifikācijas uzdevumu risināšanai. It sevišķi, izrādās, ka *K*- un *S*-nekonstruktīvā identifikācija atļauj izmantot palīdzības daudzumu, ierobežotu no augšas ar konstanti, bet tas nav spēkā *F*-definīcijai.

Bez tam, tiek uzrādītas dažas pazīmes, pēc kurām var noteikt, vai definētā palīdzības relācija konkrētas klases identifikācijas pēc konkrētā kritērija atbilst *K*- vai *S*-definīcijai.

### 6.3.2. *Konstantā K- un S-nekonstruktivitāte*

Šeit un turpmāk par *konstantu nekonstruktivitātes daudzumu* mēs sauksim nekonstruktivitātes daudzumu, kas ir ierobežots no augšas ar konstanti. Turpmākie spriedumi parādīs, ka mūsu definīcijās tas ir praktiski tas pats, ka nekonstruktivitātes daudzums, tiešām vienāds ar kādu konstantu skaitli.

**Teorēma 6.7.** Pie jebkura identifikācijas kritērija  $X$  bez papildus informācijas klase  $U$  ar bezgalīgu kardinalitāti ir  $S$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama pēc attēlojuma  $I$  ar konstantu nekonstruktivitātes daudzumu  $n$  t.t.t., ja  $U$  ir klašu apvienojums:

$$U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_{k-1} \quad (6.11)$$

Pie tam apvienojamo klašu skaits ir  $k \leq 2^{n+1} - 2$  un katra klase  $U_i$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ , ir konstruktīvi  $X$ -identificējama pēc  $I$ .

**Pierādījums.**

*Nepieciešamība.* Apskatīsim induktīvā izveduma mašīnas  $M_0, M_1, \dots, M_{k-1}$ , kur mašīna  $M_i$   $X$ -identificē klasi  $U_i$  pēc  $I$ . Konstruēsim IIM  $M$ , kas, saņemot vārdu  $i$ , simulē mašīnas  $M_i$  darbību. Acīmredzami  $M$   $X$ -identificē  $U$  pēc  $I$ , pie tam palīdzības vārda garums  $n$  nepārsniedz  $\lceil \log_2(k+2) \rceil - 1$ , t.i.,  $k \leq 2^{n+1} - 2$ .

*Pietiekamība.* Pieņemsim, ka  $M$   $X$ -identificē  $U$  pēc  $I$  ar konstantu nekonstruktivitāti  $n$ . Tad ir iespējami ne vairāk kā  $2^{n+1} - 2$  dažādi palīdzības vārdi. Katram tādām palīdzības vārdam, ar kuru  $M$   $X$ -identificē kādu objektu  $u$ , pēc kārtas uzdosim naturālu skaitli no 0 līdz  $k-1$ , kur  $k$  ir palīdzības vārdu skaits, t.i.  $k \leq 2^{n+1} - 2$ . Lai  $u_{i,j}$  ir visi objekti, kurus  $M$  identificē ar  $i$ . vārdu. Šādus vārdus apvienosim klasē  $U_i = \{ u_{i,j} \}$ . ■

**Piezīme.** Šajā rezultātā nav pierādīts, vai vienmēr konstants nekonstruktivitātes daudzums ir  $S$ -daudzums. Bezgalīgas kardinalitātes klasēm tā arī ir (Lemma 6.10 zemāk); savukārt klases ar galīgu kardinalitāti ir  $FIN$ -identificējamās konstruktīvi pēc viennozīmīgiem attēlojumiem (Lemma 6.12) vai  $EX$ -identificējamās pēc neviennozīmīgiem attēlojumiem (Teorēma 4.9, Sekas 4.10).

**Lemma 6.8.** Ja palīdzības relācija  $p: U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  ir tāda, ka fiksētais vārds  $p_0 \in p(u)$  bezgalīgi daudziem dažādiem  $u \in U$ , tad  $p(u)$  klases  $U$  identifikācijai ir  $K$ -palīdzība.

**Pierādījums.** Ja  $u \in U: p_0 \in p(u)$  bezgalīgi daudziem  $u$ , tiem ir bezgalīgi daudz indeksu. Tad funkcija

$$\min\{ K(n) \mid \varphi_n = u \in U, n \in \mathbb{N} \} \quad (6.12)$$

nav ierobežota no augšas, un jebkurai konstantei  $c$  ir spēkā

$$(\exists u \in U)[ \exists p_0 \in p(u) : K(p_0) < \min\{ K(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (6.13)$$

kas ir tieši  $K$ -palīdzības definīcija (6.9). ■

**Sekas 6.9.** Ja palīdzības relācija  $p: U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  ir tāda, ka fiksētais vārds  $p_0 \in p(u)$  nav palīdzība tikai galīgam skaitam  $u \in U$ , tad  $p(u)$  klases  $U$  identifikācijai ir  $S$ -palīdzība.

**Pierādījums** ir analogisks iepriekšējam. ■

**Lemma 6.10.** Jebkuras bezgalīgas kardinalitātes klases  $U$  identifikācijai jebkurš konstants nekonstruktivitātes daudzums ir  $S$ -daudzums.

**Pierādījums.** No  $U$  bezgalīgas kardinalitātes seko, ka tās objektiem ir bezgalīgi daudz dažādu indeksu numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā notiek identifikācija. Ja eksistē konstants nekonstruktivitātes daudzums, kas nav  $S$ -daudzums, t.i. neizpildās ( 6.10 ), tad eksistē tāda konstante  $c_0$ , ka bezgalīgi daudziem dažādiem  $u \in U$  ir spēkā:

$$(\exists c \in \mathbb{N})[ \forall p \leq c_0 : K(p) \geq \min\{ K(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad ( 6.14 )$$

No tā seko, ka [dažādu] programmu, kuru rezultāts ir kāds  $U$  objekta indekss, eksistē ne vairāk kā  $2^{K(c_0)+c}$ . Pa cik  $m$  un  $c$  ir konstantes,  $2^{K(c_0)+c}$  ir arī konstantā vērtība un tādejādi var būt tikai konstants skaits dažādu indeksu  $U$  objektiem, kas ir pretruna. ■

**Definīcija 6.11.** Mēs sakām, ka klases  $U$  objektu  $I: U \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  attēlojums  $I$  ir *viennozīmīgs*, t.t.t. ja vienmēr ir spēkā

$$(u, v \in U, u = v) \Rightarrow (I(u) = I(v)) \quad ( 6.15 )$$

Mēs sakām, ka  $I$  ir *injektīvs*, ja ir spēkā

$$(u, v \in U, u \neq v) \Rightarrow (I(u) \neq I(v)) \quad ( 6.16 )$$

Identifikācijas uzdevumos tiek pielietoti tikai injektīvie attēlojumi. Turklāt funkciju identifikācijā, kur attēlojums ir funkcijas grafiks, attēlojums ir vienmēr viennozīmīgs; valodu identifikācijā pilnais attēlojums ir viennozīmīgs, bet pozitīvais nav.

**Lemma 6.12.** Jebkura galīgas kardinalitātes klase  $U$  ir konstruktīvi *FIN*-identificējama numerācijā, kurā tā ir definēta, pēc jebkura  $U$  attēlojuma  $I$ , kas ir viennozīmīgs un injektīvs.

**Pierādījums.** Pēc definīcijas katram  $U$  objektam  $u$  ir indekss  $i$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ ; no tā, ka attēlojums ir viennozīmīgs un injektīvs, seko, ka katram divu dažādu objektu pārim  $u, v \in U$  var atrast (galīgu) indeksu  $i_{u,v}$ , tādu, ka

$$I(u)[i_{u,v}+1] \neq I(v)[i_{u,v}+1] \quad ( 6.17 )$$

Starp visiem attēlojumiem eksistē divi vai vairāki attēlojumi, kuru sakrītība ir vislielākā, t.i.

$$i_{\max} = \max\{ i_{u,v} \mid u, v \in U, u \neq v \} \quad ( 6.18 )$$

Tad var definēt viennozīmīgu atbilstību

$$n \leftrightarrow I(\varphi_n)[i_{\max}+2] \quad (6.19)$$

No fakta, ka  $U$  kardinalitāte ir galīga, seko, ka informācija par (6.19) ir arī galīga (tātad var būt iebūvēta mašīnā). Mašīna  $M$ , saņemot virkni  $I(w)$ , gaida, kamēr tā tiks saņemta līdz indeksam  $i_{\max}+1$ , un tad uzreiz izvada pareizu hipotēzi par objekta  $w$  numuru. ■

### 6.3.3. Konstantā $F$ -nekonstruktivitāte

**Lemma 6.13.** Klase  $U$  ir  $F$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ar konstantu nekonstruktivitātes daudzumu t.t.t., ja tā ir konstruktīvi  $X$ -identificējama šajā numerācijā.

**Pierādījums.** *Pietiekamība* ir acīmredzama.

*Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka ir klase  $U$ , mašīna  $M$  un konstantais nekonstruktivitātes daudzums  $c$ , ar kuru  $M$   $F$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Ja klase  $U$  ir ar galīgu kardinalitāti, tad viss ir pierādīts (Lemma 6.12); tāpēc pieņemsim, ka  $U$  kardinalitāte ir bezgalīga. Definīcija 6.6 pasaka, ka jebkuram naturālam skaitlim  $n$  eksistē palīdzības vārds  $m \leq c$ , kas ir palīdzības vārds indeksiem diapazonā  $[0..n]$ . No tā, ka  $c$  ir konstante, izriet, ka šādu palīdzības vārdu var būt tikai galīgais skaits; savukārt no tā, ka  $U$  kardinalitāte ir bezgalīga, izriet, ka vismaz viens no šiem vārdiem (apzīmēsim to ar  $m_0$ ) palīdz identificēt bezgalīgu skaitu diapazonu. Tas ir, jebkuram naturālam skaitlim  $n$  eksistē naturālais skaitlis  $n_0 \geq n$ , tāds, ka  $m_0$  ir palīdzības vārds indeksiem diapazonā  $[0..n_0]$ . Pēc definīcijas  $m_0$  ir arī palīdzības vārds indeksiem visos diapazonos  $[0..n_1]$ , kur  $n_1 < n_0$ ; tāpēc  $m_0$  ir palīdzības vārds jebkuram diapazonam  $[0..n]$ , kur  $n$  ir naturālais skaitlis. Citiem vārdiem, ar  $m_0$  tiek  $F$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificēta visa klase  $U$ . Bet  $m_0$  ir galīgs; tāpēc var uzbūvēt mašīnu  $M_0$ , kurai iekšā ir informācija par  $m_0$  un kas simulē  $M$  darbību, balstoties uz šo iekšējo informāciju par  $m_0$ . Tad  $M_0$  konstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ■

**Piezīme.** Šis rezultāts nemin objektu attēlojumu. Tas ir, var eksistēt attēlojums  $I_0$ , pēc kura  $U$  nav konstruktīvi  $X$ -identificējama dotajā numerācijā, un attēlojums  $I_1$ , pēc kura  $U$  ir konstruktīvi  $X$ -identificējama (un attiecīgi  $F$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama ar konstantu nekonstruktivitāti).

## 6.4. K-, S-, F-nekonstruktivitāte identifikācijas uzdevumos

### 6.4.1. F-nekonstruktivitāte un K-nekonstruktivitāte

Risinot identifikācijas uzdevumu ar vienu no nekonstruktīvās identifikācijas definīciju, var rasties jautājums, vai no tā arī seko uzdevuma risināšana citā nekonstruktivitātes definīcijā. Šajā darba ietvaros atbilde uz šo jautājumu vispārīgā gadījumā atrasta nebija (8. nodaļa). Taču kā bija uzrādīts iepriekš, konstants nekonstruktivitātes daudzums ir pielietojams tikai  $K$ - un  $S$ -definīcijās. Tas ir,  $F \neq K$ , bet tas vēl atļauj iespēju  $F \subset K$ . Šajā punktā tiek uzrādīts, ka nerekursīvo funkciju gadījumā  $F \not\subset K$ .

**Teorēma 6.14.** Eksistē nerekursīvu funkciju klase  $U$  un nerekursīvā numerācija  $W = w_0, w_1, w_2, \dots$  ar sekojošām īpašībām:

- 1)  $U$  ir  $F$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama numerācijā  $W$  ar nekonstruktivitāti  $K(n)$ ;
- 2)  $U$  nav  $K$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama numerācijā  $W$ .

**Pierādījums.** No iepriekš pierādītās bezgalīgas virknes eksistences (Sekas 5.5) var definēt  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  sekojoši:

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ \min\{ n \in \mathbb{N} \mid K(n) > f(x-1) \}, & x > 0. \end{cases} \quad (6.20)$$

Atbilstoši iepriekš uzrādītā (Teorēma 5.7, Sekas 5.8)  $h$  nav rekursīva.

Numerācija  $W = w_0, w_1, w_2, \dots$  tiek definēta sekojošā veidā:

$$w_i = \begin{cases} f_n, & \exists n \in \mathbb{N} : h(n) = x; \\ f_0, & \text{citādi.} \end{cases} \quad (6.21)$$

kur

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \exists n \in \mathbb{N} : h(n) = x; \\ K(i-x) : w_i = f_0, & \text{citādi.} \end{cases} \quad (6.22)$$

un  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ :

$$f_k(x) = \begin{cases} i \in \mathbb{N} : w_i = f_k, & \exists n \geq k : h(n) = x; \\ K(i+k-x) : w_i = f_k, & \text{citādi.} \end{cases} \quad (6.23)$$

Definēsim  $U$ :

$$U = \{ f_i \mid i \in \mathbb{N} \} \quad (6.24)$$

Ir skaidrs, ka gan numerācija  $W$ , gan visas  $U$  funkcijas ir nerekursīvas; numerācijas nerekursivitāte seko no funkciju nerekursivitātes. Tomēr  $U$  ir  $F$ -nekonstruktīvi identificējama numerācijā  $W$ .

Definēsim palīdzības relāciju

$$\forall k \in \mathbb{N}: p(f_k) = \{ h(i) \mid i \geq k \} \quad (6.25)$$

Saņemot atbilstoši (6.25) jebkuru palīdzības vārdu  $p_0$  jebkurai funkcijai  $f_k$ , induktīvā izveduma mašīna  $M$  sagaida, kamēr tai tiek iedota vērtība  $f_k(p_0)$ , un šo vērtību uzreiz izvada kā vienīgu pareizu hipotēzi. Tas ir iespējams, jo konstrukcijā (6.20) – (6.23) jebkurai  $f_k$  tās indekss atrodas tās vērtībās  $h(k), h(k+1), h(k+2), \dots$

Parādīsim, ka  $U$  nav  $K$ -nekonstruktīvi  $BC$ -identificējama numerācijā  $W$ . Tiešām, papildus informācijas daudzums (6.25) pēc definīcijas ir  $T$ -daudzums. Savukārt ja eksistētu rekursīva funkcija, kas atļautu izrēķināt jebkuras funkcijas  $f_k$  indeksu, tad arī  $K(x)$  būtu rekursīva funkcija, kas nav spēkā. ■

#### 6.4.2. Funkciju identifikācija

**Teorēma 6.15.** 1) Eksistē rekursīvu funkciju klase, kas nav  $BC$ -identificējama, bet ir  $S$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama rekursīvajā numerācijā ar nekonstruktivitāti 1 bits un  $F$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama rekursīvajā numerācijā ar nekonstruktivitāti  $o(\log_2 n)$ .

2) Vēl vairāk, eksistē rekursīvu funkciju klase, kas nav  $BC$ -identificējama, bet ir  $S$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama rekursīvajā numerācijā ar nekonstruktivitāti 1 bits un  $F$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama rekursīvajā numerācijā ar nekonstruktivitāti  $o(\log_2 n)$ .

#### Pierādījums.

Katrai rekursīvai funkcijai pēc definīcijas atbilst kāda Tjūringa mašīna. No numerācijas rekursivitātes mēs turpmāk varam pieņemt, ka mašīnu un funkciju numerācija sakrīt, t.i.  $i$  funkcijai atbilst  $i$ . mašīna (ja tā nav, var definēt rekursīvas funkcijas šo numerāciju pārveidošanai uz abām pusēm).

Sākumā pierādīsim 2). Apskatīsim klasi  $U_{02}$  (4.2) – (4.3), (4.10) – (4.14) (Sekas 4.7). No iepriekš pierādītā (Teorēma 6.7) tā ir  $S$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama ar nekonstruktivitāti 1 bits. Lai pierādītu rezultātu par  $F$ -nekonstruktīvo identifikāciju, definēsim palīdzību

$$p(f) = \{ \max\{ m \in \mathbb{N}: \varphi_i[m] = \varphi_j[m] \mid i < j \leq n, \varphi_i, \varphi_j \in U_{01} \} \mid n \in \mathbb{N} \mid \exists i \leq n: \varphi_i = f \} \quad (6.26)$$

Citiem vārdiem,  $p(f)$  ir maksimālais garums grafiku sākotnēju fragmentu sakrišanas no funkcijām, kas ietilpst  $U_{01}$  un kuru indeksi nav lielāki par  $n$  (kur  $n$  ir jebkurš indeksu diapazons, kurā ietilpst identificējamā funkcija).

Parādīsim, ka eksistē mašīna  $M$ , kas, lietojot palīdzību ( 6.26 ),  $FIN$ -identificē  $U_{02}$ .  $M$  sagaida identificējamās funkcijas  $f$  grafiku līdz garumam  $m$ . Paralēli  $M$  iedarbina mašīnas ar numuriem  $f(0)$  un  $f(1)$  uz visiem argumentu vērtībām no 0 līdz  $m$ . Tiklīdz kāda no šīm mašīnām izvada vērtību, kas nesakrīt ar identificējamās funkcijas grafiku,  $M$  izvada kā hipotēzi otrās mašīnas numuru un apstājas; savukārt ja kāda no mašīnām izvada grafiku līdz  $m$  ieskaitot,  $M$  izdod kā hipotēzi tās numuru un apstājas. Acīmredzami  $M$   $FIN$ -identificē klasi  $U_{02}$ .

Parādīsim, ka  $l(\min(p(\varphi_n))) = o(\log_2 n)$ . Tiešām, ja tā nebūtu, tad funkciju grafiku sakrītība asimptotiski augtu tikpat strauji, kā funkciju indeksi. Tad visa numerācija iekļautu tikai funkcijas ar sakrītošiem grafikiem.

1) Apskatīsim klasi  $U_{01}$  ( 4.2 ) – ( 4.5 ) (Teorēma 4.6). No iepriekš pierādītā (Teorēma 6.7) tā ir  $S$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama ar nekonstruktivitāti 1 bits. Parādīsim, ka eksistē mašīna  $M$ , kas, lietojot palīdzību ( 6.26 ),  $F$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificē  $U_{01}$ .  $M$  izpilda sekojošo algoritmu.

1. Sagaidīt visas  $f(x)$  vērtības no argumenta vērtībām  $x \in \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq p(f) \}$ .
2. Inicializēt vērtību  $n$  ar 0 un kopu  $H$  ar  $\{ 0 \}$ .
3. Inicializēt vērtību  $x_n$  ar 0.
4. Iedarbināt Tjūringa mašīnu  $M_n$  uz argumenta vērtības  $x_n$ .
5. Gaidīt laiku  $t$ .
6. Ja kāda  $i$ . mašīna ( $i \in H$ ) apstājas un izvādīja rezultātu  $M_i(x_i) = y_i$ :
  - a. Ja  $y_i = f(x_i)$ :
    - i. Ja  $i \geq p(f)$ :
      1. Izvadīt kā hipotēzi  $i$ ;
      2. Izdzēst no  $H$  visus indeksus  $j \in \{ j \in \mathbb{N} \mid j > i \}$ ;
    - ii. Palielināt  $x_i$  par 1;
    - iii. Iedarbināt  $M_i$  uz  $x_i$ ;
  - b. Ja  $y_i \neq f(x_i)$ :
    - i. Izdzēst  $i$  no  $H$ ;
7. Ja  $\max \{ x_i \mid 0 \leq i \leq n \} < p(f)$ :
  - a. Palielināt  $n$  par 1;
  - b. Pāriet uz 4. soli.
8. Ja  $\max \{ x_i \mid 0 \leq i \leq n \} = p(f)$ :
  - a. Pāriet uz 5. soli.

Darbojoties pēc šajā algoritma,  $M$   $EX$ -identificē  $U_{01}$ . Tiešām, starp visām iespējamām mašīnām eksistē vismaz viena pareiza, kas uz visām vērtībām  $x \in \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq p(f) \}$  apstāsies un izdos grafiku  $M_i[p(f)] = f[p(f)]$ . Pie tam mašīna, kas atbilst identificējamajai funkcijai, ir mašīna ar vismazāku indeksu, kam izpildās šī īpašība, atbilstoši ( 6.26 ) definīcijai. Tāpēc tiklīdz tiek sagaidīts pirmais grafiks  $M_i[p(f)] = f[p(f)]$ , visi indeksi, kas lielāki par  $i$ , tiek izdzēsti no  $H$  un kopš tā momenta  $H$  vairs nepalielināsies. Vēl vairāk, identificējamās funkcijas mašīna pēc galīga laika izvadīs grafiku  $M_i[p(f)] = f[p(f)]$ ; tad no  $H$  tiek izdzēsti indeksi visām citām funkcijām, kas ir vienādas ar  $f$ , un  $H$  paliks precīzi viens indekss, kas tiek izvadīts – tas ir  $f$  indekss dotajā numerācijā. ■

**Teorēma 6.16.** Visu visur definētu rekursīvu funkciju klase  $R$  ir  $F$ -nekonstruktīvi  $BC$ -identificējama rekursīvā numerācijā ar nekonstruktivitāti  $\lceil \log_2 n \rceil$ .

**Pierādījums.**

Lai ir rekursīvā numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $R$  ir definēta. Katrai funkcijai  $f \in R$  definēsim palīdzības vārdu kopu:

$$p(f) = \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists i \leq n: \varphi_i = f \} \quad ( 6.27 )$$

Parādīsim, ka eksistē mašīna  $M$ , kas, lietojot palīdzību ( 6.27 ),  $BC$ -identificē visas funkcijas no  $R$ .

$M$  saņem funkcijas  $f$  grafiku un skaitli  $n \in p_f$ , t.i. numuru, kas nav mazāks par vienu no  $f$  indeksiem. Mēs uzskatam, ka  $M$  rīcībā ir hipotēžu kopa  $H$ , kurā ietilpst visas funkcijas līdz  $n$  ieskaitot, kuras līdz dotam brīdim nedeva “nepareizas” vērtības.

Kā iepriekš, tiek pieņemts, ka mašīnu un funkciju numerācija sakrīt. Katrai  $i$ . mašīnai tiek glabāts arguments  $x_i$ , uz kura tā pašlaik darbojas.

$M$  izpilda sekojošo algoritmu:

1. Inicializēt vērtības  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ar 0.
2. Iedarbināt visas Tjūringa mašīnas  $M_i$  uz argumentiem  $x_i$ :  $0 \leq i \leq n$ .
3. Sagaidīt  $f$  vērtību  $f(\max\{ x_i \mid 0 \leq i \leq n \})$ .
4. Sagaidīt, kamēr kāda  $M_i$  apstāsies un izvadīs kādu vērtību  $M_i(x_i) = y_i$ . (Tas notiks, jo starp mašīnām eksistē vismaz viena “pareizā”, kura ir definēta uz visām vērtībām.)
5. Ja  $M_i(x_i) \neq f(x_i)$ :
  - a. Atgriezties uz 4. soli. (Kopš šī brīža  $M_i$  vairs nedarbosies.)

6. Ja  $M_i(x_i) = f(x_i)$ :
- a. Ja  $x_i = \max\{x_j \mid 0 \leq j \leq n\}$ :
    - i. Izvadīt kā hipotēzi  $i$ ;
    - ii. Palielināt  $x_i$  par 1;
    - iii. Iedarbināt  $M_i$  uz  $x_i$ ;
    - iv. Atgriezties uz 3. soli.
  - b. Ja  $x_i < \max\{x_j \mid 0 \leq j \leq n\}$ :
    - i. Palielināt  $x_i$  par 1;
    - ii. Iedarbināt  $M_i$  uz  $x_i$ ;
    - iii. Atgriezties uz 4. soli.

Šādi rīkojoties,  $BC$ -identificē visas funkcijas, kurām eksistē indekss, nav lielāks par  $n$ . Tiešām, hipotēžu kopa – tas ir, mašīnas, kuras dotajā brīdī darbojas – ir vienmēr galīga un pēc galīga soļu skaita no tās tiek izslēgtas visas mašīnas, kuras izdod “nepareizas” vērtības. Bez tam, pēc galīga soļu skaita mašīnas, kas nav definētas uz kaut kādām vērtībām, sāk strādāt bezgalīgi ilgi un līdz ar to  $M$  vairs neizvada to indeksus kā hipotēzes. Pa cik palīdzība ( 6.27 ) ir definēta visiem naturāliem skaitļiem,  $F$ -nekonstruktīvi  $BC$ -identificē  $R$ . ■

Tomēr var pamanīt, ka ja eksistē vismaz divas mašīnas ar indeksiem  $i$  un  $j$ , kas rēķina  $f(x)$  pareizi, bet gan  $i$ ., gan  $j$ . mašīna bezgalīgi daudzām vērtībām strādā ātrāk, nekā visas pārējās (piemēram,  $i$ . visātrāk strādā uz pāra vērtībām un  $j$ . – uz nepāra), tad  $M$  neidentificē  $R$  kritērija  $EX$  nozīmē.

Ir skaidrs, ka iegūstot informāciju par indeksu ekvivalenci funkcijām no 0 līdz  $n$ , var viegli panākt  $F$ -nekonstruktīvu  $EX$ -identificējamību. Tomēr šīs informācijas apjoms ir  $n^2 - n/2$ , jo kā papildus informācija tiek lietota binārā matrica izmērā  $n \times n$ . Taču  $F$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificēt var ar mazāku nekonstruktivitāti.

**Teorēma 6.17.** Visu visur definētu rekursīvu funkciju klase  $R$  ir  $F$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama rekursīvā numerācijā ar nekonstruktivitāti  $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$ . Vēl vairāk, vērtība, uz kuru konverģē identificējošā mašīna, ir identificējamās funkcijas programma ar minimālo indeksu dotajā numerācija.

**Pierādījums.**

Lai ir rekursīvā numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $R$  ir definēta. Katrai funkcijai  $f \in R$  definēsim palīdzības vārdu kopu:

$$p_f = \{ \langle n, m \rangle \mid n, m \in \mathbb{N} \} \quad ( 6.28 )$$

kur

$$\exists i \leq n: \varphi_i = f \quad (6.29)$$

tas ir,  $n$  ir augšējā robeža identificējamās funkcijas indeksam, un

$$\min\{x \in \mathbb{N}: \varphi_m(x) \uparrow\} = \max_i \min_x \{x \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) \uparrow\} \quad (6.30)$$

Tas ir,  $m$  ir funkcijas indekss, kurai no visām funkcijām ar indeksiem no 0 līdz  $n$  mazākā argumenta vērtība, kurā tā nav definēta, ir vislielākā. Šīs palīdzības relācijas oriģinālais autors ir R.M. Freivalds [personālā komunikācija].

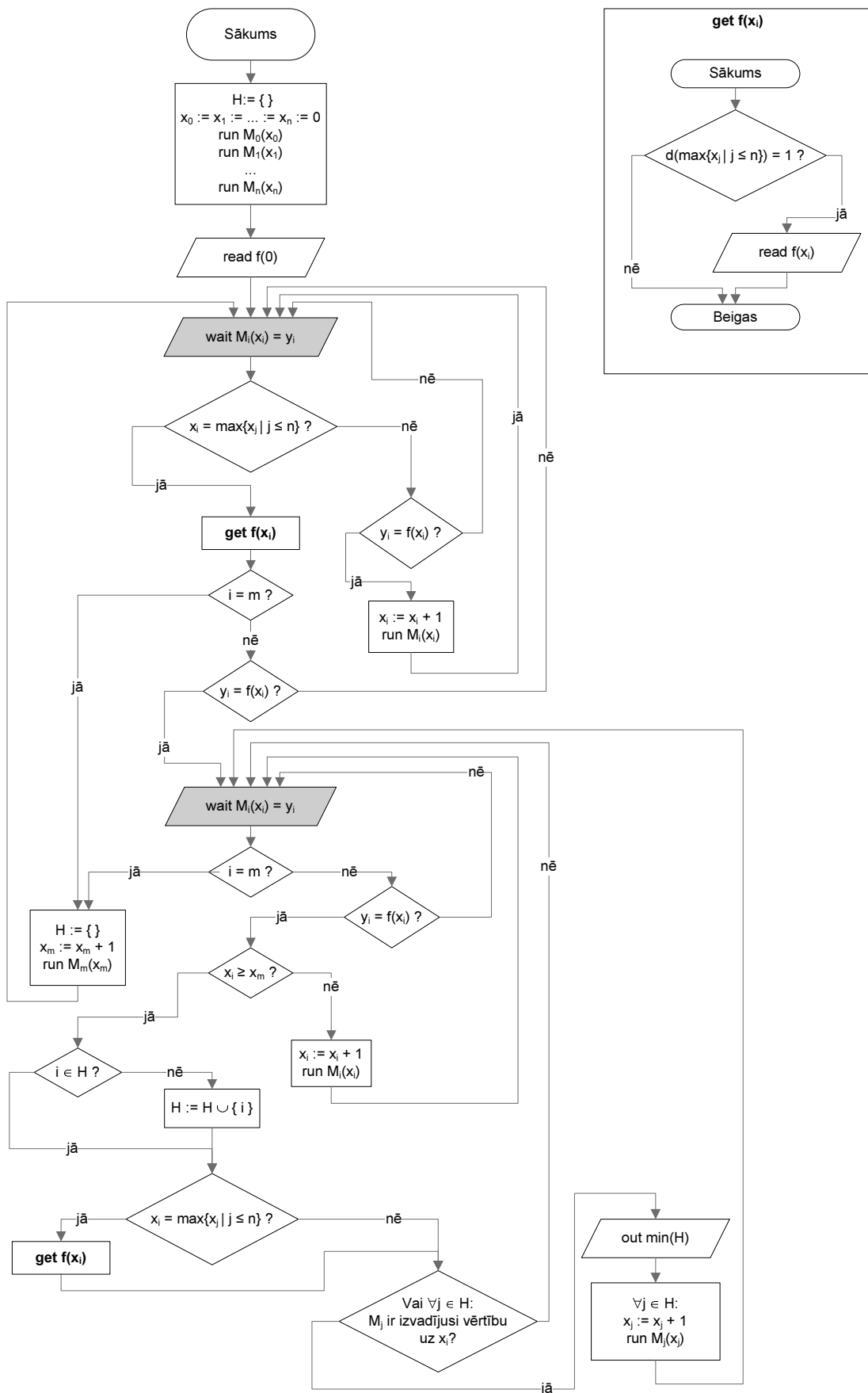
Mašīna  $M$  izpilda algoritmu, kas ir dots grafiskā veidā uz 6.1. att., kā arī tekstuālā veidā ar paskaidrojumiem pielikumā. Attēlā tiek lietoti sekojošie saīsinājumi un pieņēmumi:

1.  $\mathbf{x}_i := \mathbf{v}$  apzīmē “piešķirt mainīgam  $x_i$  vērtību  $v$ ”;
2.  $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}_1 := \dots := \mathbf{x}_n := \mathbf{v}$  apzīmē vērtības  $v$  vienlaicīgu piešķiršanu mainīgiem  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ;
3. **run**  $\mathbf{M}_i(\mathbf{x}_i)$  apzīmē “palaist mašīnu  $M_i$  uz argumenta  $x_i$ ”;  
Tiek uzskatīts, ka katras mašīnas palaišana notiek asinhroni ar pārējo algoritmu, t.i. mašīnas izvads netiek gaidīts;
4. **read**  $\mathbf{f}(\mathbf{n})$  apzīmē “sagaidīt identificējamās funkcijas  $f$  vērtību no argumenta  $n$ ”;
5. **wait**  $\mathbf{M}_i(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$  apzīmē “sagaidīt, kamēr kāda mašīna  $M_i$  izdos kādu vērtību  $y_i$ , strādājot uz argumenta  $x_i$ ”;

Šī procedūra sagaida izvadu no jebkuras mašīnas no tām, kuras tika palaistas: tiklīdz izvads ir sagaidīts no kādas mašīnas, par  $i$  tiek uzskatīts tās indekss, par  $x_i$  – tās arguments, par  $y_i$  – vērtība, kuru tā izdeva.

Pat ja faktiski kāda  $M_i$  izdeva vērtību pirms tam, kad algoritma kontroles plūsma nonāca līdz šim operatoram, tas, ka  $M_i$  “ir izvadījusi vērtību uz  $x_i$ ”, tiek uzskatīts tikai kad šis operators tika izpildīts;

6. **get**  $\mathbf{f}(\mathbf{n})$  ir apakšalgoritms, kas ir aprakstīts attēla labējā augšējā stūrī;
7. **out**  $\mathbf{min}(\mathbf{H})$  apzīmē “izvadīt minimālo vērtību no kopas  $H$ ”;
8. Algoritmam ir sākums, bet nav beigu – atbilstoši iepriekš dotām definīcijām  $M$  strādā bezgalīgi.



6.1. att. Induktīvā izveduma mašīnas darbības algoritms

Vadoties pēc šajā algoritma,  $M$  izvadīs bezgalīgu virkni, kurā sākot ar kādu indeksu  $j$  visi elementi ir identificējamās funkcijas programma ar minimālo indeksu dotajā numerācijā.

Ar  $m$  palīdzību visas funkcijas no 0 līdz  $n$  tiek sadalītas uz daļēji un visur definētām. Tiešām, vismazākā argumenta vērtība  $x_\infty$ , uz kura  $m$ . mašīna sāk strādāt bezgalīgi ilgi, ir tāda, ka pārējās mašīnas vai nu jau strādā bezgalīgi uz  $x_\infty$  vai mazākām vērtībām, vai nu būs definētas uz visām vērtībām, ieskaitot  $x_\infty$ . Var pavisam aprakstīt  $M$  kā galīgu automātu ar diviem stāvokļiem: pirmajā stāvoklī  $m$ . mašīna vēl strādā un  $M$  neizvada hipotēzes, otrajā stāvoklī  $m$ . nestrādā un  $M$  izvada hipotēzes.

Tiklīdz kāda no pagaidām neizmestām mašīnām izvada kādu vērtību uz  $x_\infty$ , no tā brīža atbilstošā funkcija tiek uzskatīta par visur definēto un pieskaitīta pie "hipotēžu kopas"  $H$ . Savukārt visur definēto funkciju vērtības tiek sagaidītas sinhronizēti, t.i. kamēr kāda no  $H$  funkcijām neizvadīs vērtību uz maksimālā  $x_i$ , hipotēze netiek izvadīta. Tieši tādā veidā arī tiek panākta īpatnība, ka pēc galīgā soļu skaita tiek izvadīta tikai viena hipotēze, un turklāt ar minimālo indeksu.

Tomēr nekad nav zināms, kāda patiešām ir  $x_\infty$  vērtība, tāpēc par to tiek pieņemta pirmā vērtība, uz kuras  $m$ . mašīnas izvads netika sagaidīts agrāk nekā pareizs izvads kādas  $i$ . mašīnas. Ja par  $x_\infty$  tika pieņemta vērtība, kas ir mazāka par  $x_\infty$ , tad tiklīdz  $m$ . mašīna atkal izvada kādu vērtību uz  $x_\infty$ ,  $M$  nodzēs kopu  $H$  un beidz izvadīt hipotēzes. Visbeidzot tomēr  $m$ . mašīna sāk strādāt bezgalīgi un  $M$  atkal sāks izvadīt hipotēzes. ■

**Teorēma 6.18.** Eksistē funkciju klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ar sekojošām īpašībām:

- 1)  $U$  ir  $K$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama;
- 2)  $U$  nav  $BC$ -identificējama;
- 3)  $U$  nav  $BC$ -identificējama ar konstantu nekonstruktivitāti.

**Pierādījums.** Lai  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  ir visu daļēji definēto funkciju numerācija. Definēsim  $U$  sekojoši:

$$(\forall f \in U) [ \exists m, n \in \mathbb{N}: \varphi_n = f, \varphi_n(m) = n ] \quad (6.31)$$

Tas ir,  $U$  ir visu tādu funkciju klase, kuras izvada atsauci uz sevi, saņemot kādu (ne obligāti nulles) argumenta vērtību. (Sauksim šo argumenta vērtību par *pašatsauces vērtību*.)

- 1) Acīmredzami, padodot jebkuru tādu funkciju  $f$  un palīdzību

$$p(f) = \{ m \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(m) = n, \varphi_n = f \} \quad (6.32)$$

tiek panākta  $U$  galīgā identificējamība.

Parādīsim, ka ( 6.32 ) ir  $K$ -palīdzība. Tiešām, vismaz viena pašatsauces vērtība eksistē bezgalīgi daudzām funkcijām. Tad atbilstoši iepriekš pierādītam (Lemma 6.8)  $U$  ir  $K$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama.

2) Apskatīsim klasi  $U$ . Acīmredzami tā iekļauj sekojošo visur definētu funkciju apakšklasi

$$U_1 = \{ f_i(x) \} \quad ( 6.33 )$$

kur

$$f_i(x) = \begin{cases} h_i(x/2), & x \equiv 0 \pmod{2}; \\ (x-1)/2, & x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases} \quad ( 6.34 )$$

un  $h_i$  ir jebkura veida visur definēta nedilstoša funkcija. Katrai funkcijai  $f_i$  precīzi viena no tās nepāra argumenta vērtībām ir pašatsauces vērtība, un katru tādas funkcija uzvedību definē atbilstoša  $h_i$  funkcija.

Pieņemsim, ka eksistē mašīna  $M$ , kas identificē  $U_1$ . Tad  $M$  jāidentificē funkciju  $f_{1,0}$ , kurai  $h_{1,0}(x) = 0$  visiem  $x$ . Neupurējot vispārīgumu (Teorēma 4.4), pieņemsim, ka  $M$  saņem funkcijas vērtības argumenta pieaugšanas secībā. Tad eksistē skaitlis  $z_{1,0}$ , tāds, ka  $M$ , saņemot  $z_{1,0}$  nulļu kā pirmās  $h_{1,0}$  vērtības, izvadīs hipotēzi par  $f_{1,0}$ .

Katram  $i \in \mathbb{N}$  definēsim  $h_{1,i+1}$ :

$$h_{1,i+1}(x) = \begin{cases} h_{1,i}(x), & x \leq z_{1,i}; \\ h_{1,i}(x) + 1, & x > z_{1,i}. \end{cases} \quad ( 6.35 )$$

kur  $z_{1,i}$  ir  $h_{1,i}$  grafika sākotnējā fragmenta garums, kuru saņemot  $M$  izvadīs hipotēzi par  $f_{1,i}$ .

Neupurējot vispārīgumu, pieņemsim, ka funkcija

$$g_1(x) = z_{1,x+1} - z_{1,x} \quad ( 6.36 )$$

ir nedilstoša. Tiešām, ja  $M$  pieņem hipotēzes un pēc tam atklāj, ka tās ir aplamas, tā kļūst „aizdomīgāka” un sāk pieņemt hipotēzes pēc jo ilgāka laika; ja tāda mašīna bezgalīgi daudz reizes maina hipotēzi, tad mašīna, kas pieņems hipotēzes pēc īsāka laika, arī bezgalīgi daudz reizes mainīs hipotēzi.

Taču  $U_1$  ietilpst funkcija  $f_{1,\infty}$ , kurai

$$h_{1,\infty}(x) = h_{1,i}(x) : i = \min \{ j \mid x \leq z_{1,j} \} \quad ( 6.37 )$$

Acīmredzami saņemot  $f_{1,\infty}$  attēlojumu,  $M$  bezgalīgi daudz reizes izvadīs nepareizu hipotēzi par šo funkciju.

3) Mēs pierādījām, ka klases  $U_1$  apakšklase  $U_{10}$ , kurā ietilpst visas  $f_{1,i}$  ar ierobežoto  $h_{1,i}$ , nevar būt  $BC$ -identificējama kopā ar  $U_1$  apakšklasi  $U_{11}$ , kurā ietilpst visas  $f_{11,i}$  ar neierobežoto

$h_{11,i}$ . Parādīsim, ka pati  $U_{11}$  nav  $BC$ -identificējama. Katrai tās funkcijas  $f_{11,i}$ , kurai atbilstošai  $h_{11,i}$  ir spēkā:  $\text{range}(h_{11,i}) = \mathbb{N}$ , definēsim visur definētu nedilstošu funkciju  $g_{11,i}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  atbilstoši ( 6.36 ):

$$H = \underbrace{0 \dots 0}_{g_{11,i}(0)} \quad \underbrace{1 \dots 1}_{g_{11,i}(1)} \quad \underbrace{2 \dots 2}_{g_{11,i}(2)} \quad \underbrace{3 \dots 3}_{g_{11,i}(3)} \quad \dots \quad \underbrace{k \dots k}_{g_{11,i}(k)} \quad (6.38)$$

kur  $H$  ir funkcijas  $h_{11,i}$  grafiks argumenta pieaugšanas secībā.

Pieņemsim, ka ir mašīna  $M$ , kas identificē  $U_{11}$ . Šajā klasē ietilpst  $f_{11,0}$  ar  $g_{11,0}(x) = 1$  visiem  $x$ . Tad eksistē skaitlis  $z_{11,0}$ , tāds, ka saņemot pietiekoši garu  $f_{11,0}$  sākotnējo fragmentu, lai tajā ietilpstu  $g_{11,0}$  sākotnējs fragments garuma  $z_{11,0}$ ,  $M$  izvada hipotēzi par  $f_{11,0}$ .

Katram  $i \in \mathbb{N}$  definēsim  $g_{11,i+1}$ :

$$g_{11,i+1}(x) = \begin{cases} g_{11,i}(x), & x \leq z_{11,i}; \\ g_{11,i}(x) + 1, & x > z_{11,i}. \end{cases} \quad (6.39)$$

kur  $z_{11,i}$  ir  $g_{11,i}$  grafika sākotnējā fragmenta garums, kuru saņemot  $M$  izvadīs hipotēzi par  $f_{11,i}$ . Atbilstoši iepriekšējiem spriedumiem, pieņemsim, ka funkcija

$$b_{11}(x) = z_{11,x+1} - z_{11,x} \quad (6.40)$$

ir nedilstoša.

Taču  $U_{11}$  ietilpst funkcija  $f_{11,\infty}$ , kurai

$$g_{11,\infty}(x) = g_{11,i}(x) : i = \min\{j \mid x \leq z_{11,j}\} \quad (6.41)$$

Acīmredzami saņemot  $f_{11,\infty}$  attēlojumu,  $M$  bezgalīgi daudz reizes izvadīs nepareizu hipotēzi par šo funkciju.

Ir skaidrs, ka šādu konstrukciju var turpināt bezgalīgi un jebkurā klasē  $U_{111\dots 1}$  ( $k$  vieninieku) varēs atrast apakšklasi  $U_{111\dots 1}$  ( $k+1$  vieninieku), tādu, ka tā nebūs  $BC$ -identificējama.

Tādējādi mēģinot uzbūvēt sadalījumu uz (potenciāli) identificējamām klasēm, pievienojot no sākuma  $U_{10}$ , pēc tām  $U_{110}$  u.t.t., nekad nebūs iespējams apstāties, jo jebkurai (potenciāli) identificējamai klasei  $U_{111\dots 0}$  ( $k$  vieninieku) eksistē neidentificējamā  $U_{111\dots 1}$  ( $k+1$  vieninieku). Tāpēc  $U$  nav  $BC$ -identificējama ar konstantu nekonstruktivitāti. ■

**Sekas 6.19.** Visu daļēji definētu rekursīvu funkciju klase ir  $K$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama ar nekonstruktivitātes daudzumu, kas nepārsniedz  $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ .

**Pierādījums.** Definēsim palīdzības vārdu, kura sākuma bits ir 1, ja funkcija pieder pie klases  $U$  no iepriekšējās teorēmas pierādījuma, un 0 pretējā gadījumā. Pirmajā gadījumā pārējā vārda daļa ir definēta pēc ( 6.32 ), un otrajā gadījumā pārējā vārda daļa ir funkcijas

indekss. Šī palīdzība ir  $K$ -palīdzība, jo „pirmā veida” palīdzības vārdi strādās priekš bezgalīgi daudziem objektiem. ■

Kā var redzēt, mūsu  $K$ -daudzuma definīcija nav pietiekoši stingra, lai neatļautu triviālu identifikāciju. Tomēr  $S$ -daudzums neatļautu palīdzību, ko izmanto Sekas 6.19, jo  $S$ -daudzumam tikai galīgam skaitam objektu ir atļauts izmantot palīdzības vārdu, kura Kolmogorova sarežģītība ne vairāk par konstanti atšķiras no minimālās objekta indeksa Kolmogorova sarežģītības.

### 6.4.3. Rekursīvu valodu un koncepciju identifikācija

**Lemma 6.20.** Eksistē rekursīvu koncepciju klase, kas nav konstruktīvi  $FIN$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma, bet ir  $K$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

**Pierādījums.** Lai  $U$  ir galīgās kardinalitātes koncepciju klase pār  $\mathbb{N}$ .  $U$  nav konstruktīvi  $FIN$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma (Apgalvojums 4.11). Taču pielietojot palīdzības relāciju

$$p(u) = d\{ w \in \mathbb{N} \mid w \in u \} \quad (6.42)$$

var konstruēt mašīnu  $M$ , kas  $FIN$ -identificē  $U$ . Tiešām, kamēr ievada virknē neparādās  $p(u)$  skaits dažādu vārdu,  $M$  neizvada hipotēzi; tiklīdz dažādu vārdu garums sasniedz  $p(u)$ ,  $M$  izvada vienīgu un pareizu hipotēzi. No fakta, ka alfabēts ir bezgalīgs, seko, ka  $p(u)$  ir definēta bezgalīgi daudziem dažādiem objektiem un respektīvi tā ir  $K$ -palīdzība (Lemma 6.8). ■

Analoģisku rezultātu valodām pierādīt nevar, jo valodu gadījumā ( 6.42 ) būs definēta tikai galīgam skaitam objektu.

**Lemma 6.21.** Eksistē valodu klase  $U$ , kas nav konstruktīvi  $BC$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma, bet ir  $S$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma ar nekonstruktivitātes daudzumu 1 bits.

**Pierādījums.** Pēc Gold rezultātiem (augstāk minētā Teorēma 4.12), klase  $U$ , kurā ietilpst visas galīgās kardinalitātes valodas un viena valoda  $L^\infty$  ar bezgalīgu kardinalitāti, nav konstruktīvi  $BC$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma. Savukārt pēc mūsu rezultātiem (Teorēma 6.7)  $U$  ir  $EX$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma ar  $S$ -palīdzības daudzumu 1 bits. ■

**Teorēma 6.22.** Jebkuram naturālam skaitlim  $n \geq 2$  eksistē bezgalīgi daudz valodu klašu, kuras nav  $K$ -nekonstruktīvi  $BC$ -identificējamās pēc pozitīvā attēlojuma ar nekonstruktivitātes

daudzumu mazāk nekā  $n$ , bet ir  $S$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējamās pēc pozitīvā attēlojuma ar nekonstruktivitātes daudzumu  $n$ .

**Pierādījums.**

Lai ir doti naturālie skaitļi  $n \geq 2$  un  $k \geq 1$ . Lai  $W = w_0, w_1, w_2, \dots$  ir vārdu numerācija. Katram  $m \in \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n - 1\}$  definēsim valodu klasi

$$U_m = \{L_{r_0, r_1, \dots, r_m} \mid (r_0, r_1, \dots, r_m \in \mathbb{N}) \wedge (r_0 < r_1 < \dots < r_m)\} \quad (6.43)$$

kur

$$L_{r_0, r_1, \dots, r_m} = \{w_{i \cdot k} \mid (i \in \mathbb{N}) \wedge (i \neq r_0) \wedge (i \neq r_1) \wedge \dots \wedge (i \neq r_m)\} \quad (6.44)$$

Citiem vārdiem, katrā valodā klasē  $U_m$  ietilpst visi vārdi ar indeksiem  $i \cdot k$ , izņemot precīzi  $m$  skaitu vārdus.

Parādīsim, ka katra klase  $U_m$  ir konstruktīvi  $EX$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma. Induktīvā izveduma mašīna  $M$  glabā vērtības  $rmin_0, rmin_1, \dots, rmin_m$  un izlasīto vārdu indeksu kopu  $V$ .  $j$  ir tikko izlasītā vārda indekss.  $M$  izpilda sekojošo algoritmu:

1. Inicializēt  $V$  ar  $\{\}$ ; inicializēt visus  $rmin_i$  ar  $i \cdot k$  ( $i \in \mathbb{N}, i \leq m$ );
2. Izvadīt hipotēzi par  $L_{0 \cdot k, 1 \cdot k, 2 \cdot k, \dots, m \cdot k}$ ;
3. Sagaidīt nākošo vārdu  $w_j$ ;
4. Ja  $j \in V$ :
  - a. Pāriet uz 3. soli;
5. Ja  $j \notin V$ :
  - a. Pievienot  $j$  pie  $V$ ;
  - b. Ja  $j = rmin_i$  ( $i \in \mathbb{N}, i \leq m$ ):
    - i. Piešķirt  $\min\{j \in \mathbb{N} \setminus V\}$  pie  $rmin_i$ ;
    - ii. Sakārtot visas  $rmin_i$  vērtības  $i$  pieaugšanas secībā;
    - iii. Izvadīt hipotēzi par  $L_{rmin_0, rmin_1, \dots, rmin_m}$ ;
  - c. Pāriet uz 3. soli.

Izpildot šo algoritmu,  $M$  izvadīs galīga garuma virkni, kurā pēdējā vērtība ir hipotēze par identificējamo valodu no  $U_m$ . Tiešām,  $rmin_0, rmin_1, \dots, rmin_m$  vērtības vienmēr atbilst  $m$  mazākām (un dažādām) “tukšām vietām”, t.i. vārdiem, ko  $M$  pagaidām nav saņēmusi. Taču pēc galīga laika  $M$  saņems visus vārdus, kuru indeksi ir mazāki par kādu no  $rmin_i$  un kopa  $\{rmin_i\}$  tiks attiecīgi pabīdīta uz augšu, līdz ar ko tiks izvadīta kārtējā hipotēze.

Parādīsim, ka jebkura klase

$$U_{m_0} \cup U_{m_1} : (m_0, m_1 \in \mathbb{N}) \wedge (0 \leq m_0 < m_1 \leq m) \quad (6.45)$$

nav konstruktīvi *BC*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma. Tiešām, pēc pozitīvā attēlojuma galīgā laikā nevar noteikt, vai kāds vārds no iepriekš neizlasītiem ietilpst identificējamā valodā<sup>11</sup>. Taču lai identificētu jebkuru valodu no klases  $U_{m_1}$ , induktīvā izveduma mašīnai “jāuzskata”, ka valodā neietilpst  $m_1$  vārdi, bet lai identificētu  $U_{m_0}$  valodu, “jāuzskata”, ka neietilpst  $m_0 < m_1$  vārdi. Acīmredzami klase  $U_{m_0} \cup U_{m_1}$  nav konstruktīvi *BC*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

Tad klase

$$U = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{n-1} \quad (6.46)$$

nav *K*-nekonstruktīvi *BC*-identificējama pēc pozitīvā attēlojuma ar nekonstruktivitātes daudzumu mazāk nekā  $n$ , bet atbilstoši iepriekš pierādītam (Teorēma 6.7) ir *S*-nekonstruktīvi identificējama pēc pozitīvā attēlojuma ar nekonstruktivitātes daudzumu  $n$ . Vēl vairāk, pa cik konstrukcija (6.43) – (6.44) ir definēta jebkuram  $k \in \mathbb{N}^+$ , šādu klašu ir bezgalīgi daudz. ■

Sekojošā klases (6.46) īpašība ilustrē, cik pilnais attēlojums ir stingrāks par pozitīvo.

**Apgalvojums 6.23.** Klase  $U$  (6.46) ir konstruktīvi *EX*-identificējama pēc pilnā attēlojuma. Vēl vairāk, katra no klasēm  $U_m$  (6.43) – (6.44) ir konstruktīvi *FIN*-identificējama pēc pilna attēlojuma.

**Pierādījums.**  $U_m$  *FIN*-identificējamība. Tiešām, induktīvā izveduma mašīna  $M_m$  neizvada hipotēzi par valodu  $L_{r_0, r_1, \dots, r_m} \in U_m$ , kamēr pilnā attēlojuma virknē netiek sagaidītas precīzi  $m$  nulles, un pēc tam hipotēze uzreiz būs pareiza.

*U EX*-identificējamība. Tad eksistē mašīna  $M$ , kas konstruktīvi *EX*-identificē klasi  $U$ : tiklīdz pilnā attēlojuma virknē tiek sagaidīta viena nulle,  $M$  pieņem hipotēzi par  $L_{r_0} \in U_0$ ; ja pēc tam tiek virknē parādās vēl viena nulle, tiek pieņemta hipotēze par  $L_{r_0, r_1} \in U_1$  utt. Pa cik  $U_m$  apakšklašu skaits ir ierobežots ar galīgu skaitu  $n-1$ , pēc galīga laika pēdējā pieņemtā hipotēze būs pareiza. ■

Citiem vārdiem, šajā gadījumā pielietojot pilno attēlojumu kā papildus informāciju, var viegli panākt klases identificējamību. Taču pilnais attēlojums ir bezgalīga virkne, kamēr *S*-daudzums ir ne tikai vienmēr galīgs, bet šajā gadījumā pat konstants. Bet šajā gadījumā pilnajam attēlojumam ir tā īpatnība, ka īstā informācija, ko tas satur (ne vairāk kā  $m$  skaits

---

<sup>11</sup> Salīdzinot ar valodu (konceptiju) pilno attēlojumu, pozitīvais attēlojums ir līdzīgs rekursīvi sanumurējamām, bet nerekursīvām kopām salīdzinājumā ar rekursīvām kopām.

nuļļu) ir nesalīdzinoši mazākā par virknes garumu (bezgalīgs). Tas ir, Kolmogorova sarežģītība šai virknei ir maza.

Šie spriedumi noved pie sekojošā secinājuma.

**Sekas 6.24.** Ja klasē  $U$  tikai galīgam skaitam koncepciju pilnā attēlojuma virkņu Kolmogorova sarežģītība nav konstanta, tad  $U$  ir  $S$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama pēc pozitīvā attēlojuma.

## 6.5. Nekonstruktivitāte un hipotēžu maiņu skaits

Ar nekonstruktīvo palīdzību var panākt ne tikai konstruktīvi neidentificējamo klašu identificējamību, bet arī hipotēžu maiņu skaitu samazināšanu.

Sekojošie divi rezultāti ir atrodami arī darbā [17].

**Teorēma 6.25.** [10] Eksistē rekursīvu funkciju numerācija  $w_0, w_1, w_2, \dots$ , tāda, ka patvaļīgs mācīšanas algoritms bezgalīgi daudzām  $n$  vērtībām ne mazāk kā  $n/2$  reizes maina hipotēzi par jebkuru visur definētu funkciju  $f(x) \in \{ w_i \mid 0 \leq i \leq n \}$ .

**Teorēma 6.26.** [72] Ja rekursīvu funkciju rekursīvā numerācija  $w_0, w_1, w_2, \dots$  ir tāda, ka ir atrisināms algoritmiskais uzdevums par tās indeksu ekvivalenci, tad eksistē mācīšanas algoritms, kurš ne vairāk kā  $g(n)$  reizes maina hipotēzi par jebkuru visur definētu funkciju  $f(x) \in \{ w_i \mid 0 \leq i \leq n \}$ , kur  $g(n)$  ir visur definētā rekursīvā funkcija, kas patvaļīgi lēni tiecas uz bezgalību.

No tā un iepriekš uzrādītā (Teorēma 6.17) tieši seko mūsu secinājums:

**Sekas 6.27.** Eksistē rekursīvu funkciju rekursīvā numerācija  $w_0, w_1, w_2, \dots$ , tāda, ka  $\forall n \in \mathbb{N}$ :

- 1) Jebkura visur definēta funkcija ar indeksu līdz  $n$  ieskaitot nevar būt konstruktīvi identificējama ar hipotēžu maiņu skaitu mazāku par  $n/2$ ;
- 2) Visa visur definēta funkciju klase ir  $F$ -nekonstruktīvi  $EX$ -identificējama šajā numerācijā ar hipotēžu maiņu skaitu  $g(n)$  ar nekonstruktivitāti  $2 \cdot \lceil \log_2 n \rceil + g(n)$ , kur  $g(n)$  ir visur definētā rekursīvā funkcija, kas patvaļīgi lēni tiecas uz bezgalību. Vēl vairāk, vērtība, uz kuru konverģē mašīna, ir vienmēr identificējamās funkcijas programma ar minimālo indeksu dotajā numerācijā.

## 7. DROŠĀ UN NORAIĀOŠĀ NEKONSTRUKTĪVĀ IDENTIFIKĀCIJA

### 7.1. Ievads

Iesaistot nekonstruktīvu skaitļošanu identifikācijā, drošās un noraidošās iespējas (definīcijas sk. 3.4.4. punktā) var apskatīt divos līmeņos.

- 1) Drošā / noraidošā identifikācija;
- 2) Drošā / noraidošā nekonstruktivitāte.

Pirmajā gadījumā identifikācijas uzdevums tiek formulēts tāpat kā konstruktīvajā identifikācija: Kādas klases kādās numerācijās var identificēt tā, lai katrs klases objekts būtu veiksmīgi identificēts, un visi pārējie objekti būtu noraidīti (noraidošās identifikācijas gadījumā) vai vismaz netiktu identificēti (drošās identifikācijas gadījumā). Nekonstruktīvās metodes tiek izmantotas, lai palīdzētu droši (noraidoši) identificēt.

Otrajā gadījumā uzdevums ir sekojošs: Kāds ir nekonstruktīvās identifikācijas modelis un kādas ir tādas klases un numerācijas, ka izmantojot ne tikai "pareizu", bet patvaļīgu palīdzību, identifikācija pēc dotā kritērija būtu veiksmīga.

Tāpēc attiecībā uz drošo (noraidošo) nekonstruktīvo identifikāciju mēs apskatām četras situācijas:

- 1) *NK-X*: Tiek apskatīta tikai pareizā palīdzība un objekti, kas ietilpst identificējamā klasē. Šis uzdevums dažādos veidos tika apspriests augstāk.
- 2) *NK-R-X*: Tiek apskatīta tikai pareizā palīdzība, objekti var neietilpst identificējamā klasē.
- 3) *R-NK-X*: Palīdzība var būt nepareiza, tiek apskatīti tikai objekti, kas ietilpst identificējamā klasē.
- 4) *R-NK-R-X*: Palīdzība var būt nepareiza, objekti var neietilpst identificējamā klasē.

Šeit *R* apzīmē *Rel* vai *Ref* (respektīvi, drošo un noraidošo kritērija modifikāciju), *NK* apzīmē nekonstruktivitātes *ē*-nosacījumu (*K*, *F*, *S*), *X* – identifikācijas kritēriju (*FIN*, *EX*, *BC*). Tāpēc var apskatīt *Rel-K*-nekonstruktīvo *EX*-identifikāciju, *Ref-S*-nekonstruktīvo *BC*-identifikāciju, utt. Ja modifikācija (*Rel*, *Ref*) nav norādīta, tiek uzskatīts, ka runa ir par nekonstruktivitātes (identifikācijas) kritēriju bez modifikācijas.

Tiek pieņemts, ka [vienādā līmenī] vienmēr ir spēkā  $Ref \subseteq Rel$ . Tiešām, ja nepareizu objektu var noraidīt, tad to neidentificē; ja nepareizu palīdzību var noraidīt, tad ar to neidentificē. Tas ir, ja ir iespējams *Ref-NK-[R-JX-* (*[R-JNK-Ref-X-*) identificēt, tad ir iespējams arī *Rel-NK-[R-JX-* (resp. *[R-JNK-Rel-X-*) identificēt; ja nav iespējams *Rel-NK-[R-JX* (*[R-JNK-Rel-X*), tad *Ref-NK-[R-JX* (*[R-JNK-Ref-X*) arī nav.

Uzdevums veidā  $R-NK-R-X$  šajā darba ietvaros apskatīts nebija. Tomēr var secināt, ka šajā uzdevuma nostādņē viena bita  $S$ -nekonstruktivitāte  $R-NK-R-X$  var tikt pielietota arī „tiešai” informācijai par objekta piederību klasei, tā kā pati nekonstruktīvā palīdzība var būt nepareiza.

## 7.2. Nekonstruktivitātes definīcijas Rel / Ref uzdevumiem

Augstāk dotās definīcijas aptver tikai gadījumus, kad identificējamais objekts pieder identificējamai klasei. Acīmredzami drošās un noraidošās identifikācijas uzdevumu nostādnei šīs definīcijas jāmodificē.

**Definīcija 7.1.** Ja ir dotas klases  $U$  un  $V$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kas ir sirjektīvs attēlojums  $\mathbb{N} \rightarrow V$ , kurā  $U$  ir definēta,  $K$ -palīdzība ( $K$ -papildus informācijas daudzums) klases  $U$  drošai (noraidošai) identifikācijai ir  $p : V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tāda, ka

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists u \in V) [ \exists p_0 \in p(u) : \forall n \in \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i = u \} \mathbf{K}(p_0) < \mathbf{K}(n) - c ] \quad (7.1)$$

vai, kas ir ekvivalenti,

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists u \in V) [ \exists p_0 \in p(u) : \mathbf{K}(p_0) < \min\{ \mathbf{K}(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (7.2)$$

$S$ -palīdzība ( $S$ -papildus informācijas daudzums) klases  $U$  drošai (noraidošai) identifikācijai ir  $p : V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ , tāda, ka

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\forall^{\infty} u \in V) [ \exists p_0 \in p(u) : \mathbf{K}(p_0) < \min\{ \mathbf{K}(n) \mid \varphi_n = u, n \in \mathbb{N} \} - c ] \quad (7.3)$$

Turpmāk tekstā prefiksi *Rel*- un *Ref*- apzīmē attiecīgi „droši” un noraidoši” (no angļu „reliably” un „refutably”).

**Definīcija 7.2.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , palīdzības definīcija  $Y: Y \in \{ K, S \}$ , klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, mēs sakām, ka mašīna  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi *Rel*- $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ , t.t.t. ja katram  $u$  un katram  $p_0 \in p(u)$ , kur  $p(u)$  ir  $Y$ -palīdzība, ir spēkā:

- 1) Ja  $u \in U$ , tad  $M$   $X$ -identificē  $u$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $p_0$ ;
- 2) Ja  $u \notin U$ , tad  $M$ , izmantojot  $I(u)$  un  $p_0$ , neidentificē nekādu  $u \in U$  atbilstoši  $X$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$

Mēs sakām, ka mašīna  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $Ref$ - $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ , t.t.t. ja katram  $u$  un katram  $p_0 \in p(u)$ , kur  $p(u)$  ir  $Y$ -palīdzība, ir spēkā:

- 1) Ja  $u \in U$ , tad  $M$   $X$ -identificē  $u$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $p_0$ ;
- 2) Ja  $u \notin U$ , tad  $M$ , izmantojot  $I(u)$  un  $p_0$ , noraida  $u$ .

**Definīcija 7.3.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, mēs sakām, ka mašīna  $M$   $F$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(n)$ , t.t.t. ja katram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē  $p_0 \in \mathbb{N}: p_0 \leq p(n)$ , tāds, ka jebkuram naturālam  $i \leq n$  ir spēkā sekojošais:

- 1) Ja  $\varphi_i \in U$ , tad  $M$   $X$ -identificē  $\varphi_i$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $p_0$ ;
- 2) Ja  $\varphi_i \notin U$ , tad  $M$ , izmantojot  $I(u)$  un  $p_0$ , neidentificē nekādu  $u \in U$  atbilstoši  $X$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$

Mēs sakām, ka mašīna  $M$   $F$ -nekonstruktīvi  $Ref$ - $X$ -identificē klasi  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(n)$ , t.t.t. ja katram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē  $p_0 \in \mathbb{N}: p_0 \leq p(n)$ , tāds, ka jebkuram naturālam  $i \leq n$  ir spēkā sekojošais:

- 1) Ja  $\varphi_i \in U$ , tad  $M$   $X$ -identificē  $\varphi_i$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar papildus informāciju  $p_0$ ;
- 2) Ja  $\varphi_i \notin U$ , tad  $M$ , izmantojot  $I(u)$  un  $p_0$ , noraida  $u$ .

**Definīcija 7.4.** Ja ir dots identifikācijas kritērijs  $X$ , palīdzības definīcija  $Y: Y \in \{ F, K, S \}$ , klase  $U$  un numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $U$  ir definēta, mēs sakām, ka klase  $U$  ir  $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ , t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas  $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificē  $U$  numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ .

Mašīna  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificē klasi  $U$  pēc attēlojuma  $I$ , t.t.t. ja eksistē  $Y$ -palīdzība  $p(u)$  tāda, ka  $M$   $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificē  $U$  pēc  $I$  ar nekonstruktivitāti  $p(u)$ . Klase  $U$  ir  $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificējama, t.t.t. ja eksistē mašīna  $M$ , kas  $Y$ -nekonstruktīvi  $Rel$ - ( $Ref$ -)  $X$ -identificē  $U$ .

### 7.3. NK-R-X uzdevums

Kad drošas (noraidošas) iespējas tiek prasītas no identifikācijas, bet ne no nekonstruktivitātes, tad acīmredzami šīs iespējas tiek arī nodrošinātas ar nekonstruktīvām metodēm. Šajā darbā netiek apspriests gadījums, kad šīs iespējas nodrošina tikai identificējama klase un/vai numerācija – tāda veida uzdevumi jau tika pētīti vairākos darbos kopš pašu drošās ([11, 50, 74]) un noraidošās ([55]) identifikācijas jēdzienu parādīšanas.

Bez tam,  $K$ - un  $S$ - nekonstruktivitātes kritēriji ir definēti tā, ka atļauj ar vienu bitu papildus informācijas triviāli aizvērt jautājumu par identificējamā objekta piederību klasei. Tādējādi apspriedīsim jautājumu nevis par  $Rel / Ref$  iespējām klašu identifikācijai, bet par to, kā  $Rel / Ref$  informācija ietekmē klašu identificējamību.

**Lemma 7.5.** Klase  $U$  ir  $S$ -nekonstruktīvi  $Ref$ - $S$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama numerācijā  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar nekonstruktivitātes daudzumu 1 bits t.t.t. ja tā ir konstruktīvi  $X$ -identificējama pēc  $I$  tajā pašā numerācijā.

**Pierādījums.** *Nepieciešamība* ir acīmredzama.

*Pietiekamība.* Pieņemsim, ka klase  $U$  ir  $Ref$ - $S$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$  pēc attēlojuma  $I$  ar  $S$ -nekonstruktīvitāti 1 bits. Acīmredzami 1 bita nekonstruktīvā informācija var tikt izmantota divos nolūkos:

- 1) Objekta piederības klasei noteikšanai ( $Rel / Ref$ );
- 2) Sadalīšanai uz divām  $X$ -konstruktīvi identificējamām pēc  $I$  klasēm (Teorēma 6.7).

Ir skaidrs, ka klasē  $U$  var attiecīgi izdalīt savstarpēji nekrustojošās apakškopas (kuras var būt tukšas)  $U_0, U_1$  un  $U_2$ , kurās nekonstruktīvā informācija tiek lietota dažādos nolūkos. Pie tam, tā kā visa nekonstruktīvā informācija ir izmantota,  $U_0, U_1$  un  $U_2$  var tikt savstarpēji atšķirtas konstruktīvi.

$U_0$  nekonstruktīvā informācija netiek lietota (tas ir,  $U_0$  ir konstruktīvi  $Ref$ - $X$ -identificējama pēc  $I$ );  $U_1$  nekonstruktīvā informācija tiek lietota objekta piederības noteikšanai  $U_1$  (tas ir,  $U_1$  ir konstruktīvi  $X$ -identificējama pēc  $I$ );  $U_2$  nav konstruktīvi  $X$ -identificējama un šajā kopā nekonstruktivitāte tiek lietota sadalīšanai uz konstruktīvi  $X$ -identificējamām pēc  $I$  klasēm  $U_{20}$  un  $U_{21}$ . Bez tam,  $U_{20}$  un  $U_{21}$  nav vienlaicīgi konstruktīvi  $Ref$ - $X$ -identificējamās pēc  $I$ : ja abas būtu konstruktīvi  $Ref$ - $X$ -identificējama pēc  $I$ , tad pēc definīcijas, simulējot  $U_{20}$  identifikāciju un saņemot  $I(u)$  jebkuram  $u \in U_{21}$ , varētu galīgā laikā noteikt, ka  $u \notin U_{20}$  un pārslēgties uz  $U_{21}$  identifikāciju (un otrādi) – tad  $U_2$  būtu konstruktīvi  $X$ -identificējama.

Acīmredzami pietiek pierādīt, ka  $U_2$  ir tukša. Tiešām, ja tā nebūtu, tad  $U_2$  nebūtu  $Ref$ - $X$ -identificējama pēc  $I$ ; pa cik vismaz vienai no tās apakšklasei nevar galīgā laikā noteikt, vai

objekts tai pieder, tad tas arī ir spēkā virsklasei. Bet tad  $U$  nav  $Ref$ - $S$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama pēc  $I$ . ■

Citiem vārdiem,  $S$ -nekonstruktivitātes gadījumā  $Ref$ -palīdzība neietekmē klašu identificējamību; tomēr  $F$ -nekonstruktivitātes gadījumā tas nav spēkā.

**Lemma 7.6.** Visu visur definētu funkciju klasei  $R$  eksistē numerācija  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ , kurā  $R$  nav konstruktīvi  $BC$ -identificējama, bet ir  $F$ -nekonstruktīvi  $FIN$ -identificējama, izmantojot informāciju par objektu piederību klasei.

**Pierādījums.** Apskatīsim klasi  $R$  Frīdberga numerācijā  $\eta$ .  $R$  nav identificējama jebkurā rekursīvu funkciju numerācijā (Teorēma 4.6, Sekas 4.8).

Definēsim palīdzības virkni

$$p(m \geq n) = b_0 b_1 b_2 \dots b_m: (b_i=1 \wedge \varphi_i \in U) \vee (b_i=0 \wedge \varphi_i \notin U) \quad (7.4)$$

Parādīsim, ka eksistē inductīvā izveduma mašīna  $M_{FIN}$ , kas, saņemot palīdzības virkni (7.4),  $FIN$ - $EX$ -identificē  $R$  numerācijā  $\eta$ . Kā iepriekš,  $i$ . funkcijai atbilst  $i$ . mašīna; identificējamā funkcija tiek apzīmēta ar  $f$ ; mašīnām  $M_{FIN}$  un  $M_{EX}$  ir hipotēžu kopa  $H$ .

$M_{FIN}$  izpilda sekojošo algoritmu:

1. Inicializēt  $H$  ar  $\{ i \mid p_i = 1 \}$ .
2. Inicializēt mainīgo  $x$  ar 0.
3. Iedarbināt mašīnas  $\{ M_i \mid i \in H \}$  uz argumenta  $x$ .
4. Sagaidīt funkcijas vērtību  $f(x)$ ; sagaidīt, kamēr katra  $i$ . no mašīnām  $\{ M_i \mid i \in H \}$  apstājas un izdruka rezultātu  $y_i$ .
5. Pārbaudīt katru rezultātu  $\{ y_i \mid i \in H \}$ : ja  $y_i \neq f(x)$ , izdzēst  $i$  no  $H$ .
6. Ja  $d(H) > 1$ , palielināt  $x$  par 1, atgriezties uz 3. soli.
7. Ja  $d(H) = 1$ , izdrukāt  $i \in H$  un apstāties.

Šis algoritms  $FIN$ -identificē visu visur definētu funkciju klasi Frīdberga numerācijā, pateicoties šīs numerācijas īpatnībai, ka tajā neeksistē divas vienādas funkcijas ar dažādiem indeksiem. Tiešām, visas mašīnas vienmēr izvadīs vērtības, pateicoties palīdzības virknes definīcijai (7.4); pēc galīgā soļu skaita no  $H$  tiek izdzēstas visas funkcijas, kas izvada nepareizas vērtības. ■

Šajā lemmā bija izmantotas divas  $F$ - $Ref$ -palīdzības īpatnības: pirmkārt, visas mašīnas, kas uz kādām vērtībām strādā bezgalīgi, tika izmestas; otrkārt, palīdzības virknes garums tika izmantots kā palīdzība. Tomēr šis algoritms nav drošs: ja iedotā funkcija nav no  $R$ , 4. soli algoritms var gaidīt bezgalīgi.

## 7.4. R-NK-X uzdevums

Šeit tiek apspriests uzdevums identificēt klases situācijā, kad ir iepriekš zināms, ka identificējamais objekts pieder klasei, bet nekonstruktīvā palīdzība var būt kļūdaina.

Atgriezīsimies pie klases  $R$   $F$ -nekonstruktīvās  $EX$ -identifikācijas ar nekonstruktivitāti  $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$  (Teorēma 6.17) un algoritma, kas ir parādīts uz 6.1. att. Kas notiks, ja palīdzība ( 6.28 ) – ( 6.30 ) nebūs korekta? Pa cik šī palīdzība sastāv no divām daļām, ir iespējamās divas situācijas:

$$\neg \exists i \leq n: \varphi_i = f \quad (7.5)$$

un

$$\min \{ x \in \mathbb{N} : \varphi_m(x) \uparrow \} \neq \max_i \min_x \{ x \in \mathbb{N} \mid \varphi_i(x) \uparrow \} \quad (7.6)$$

Ja ir spēkā ( 7.5 ), t.i. ( 6.29 ) nav pareiza, tad notiks precīzi sekojošais: pa cik neviena no strādājošām mašīnām nerēķina identificējamo funkciju, tad pēc galīga laika visas mašīnas (kas var atbilst arī visur definētām funkcijām), kas izveda nepareizas vērtības, apstāsies un induktīvā izveduma mašīna  $M$  bezgalīgi ilgi gaidīs izvadu no mašīnām, kas nav definētas uz kādām vērtībām. (Mēs neapskatām speciālo gadījumu, kad visas pirmās  $n$  mašīnas ir definētas uz visām vērtībām un  $M$ , apstādinot tās, apstāsies pati.) Pie tam  $M$  varēja arī izdrukāt galīga garuma hipotēžu virkni.

Otrā iespējamā situācija ir ( 7.6 ), t.i. kad informācija par “visproblemātiskāko” funkciju nav pareiza. Šeit savukārt ir iespējamās sekojošās situācijas:

- Tika iedota informācija par funkciju, kas neietilpst kopā  $\{ \varphi_i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq n \}$ ;
- Tika iedota informācija par visur definēto funkciju, kurai atbilstošā mašīna strādā ātrāk, nekā visas pārējas mašīnas, kas rēķina funkcijas no  $R$ ;
- Tika iedota informācija par visur definēto funkciju, kurai atbilstošā mašīna strādā lēnāk, nekā kāda cita mašīna, kas rēķina funkciju no  $R$ ;
- Tika iedota informācija par daļēji definēto funkciju, kurai pirmā argumenta vērtība, uz kuras tā nav definēta, ir mazāka, nekā vienai no funkcijām  $\{ \varphi_i \mid i \in \mathbb{N}, i \leq n \}$ .

Atgādināsim  $M$  analogiju ar automātu ar diviem stāvokļiem: pirmajā  $M$  gaida, kamēr “visproblemātiskākā” mašīna apstāsies, otrajā izvada hipotēzes. Situācija *a*) var tikt efektīvi atklāta un palīdzība – tikt noraidīta. Situācijās *b*), *c*) un *d*) induktīvā izveduma mašīna  $M$  strādās bezgalīgi ilgi. Situācijā *b*)  $M$  neko neizvadīs, vai izvadīs galīga garuma virkni, jo otrajā stāvoklī  $M$  nonāks tikai ar daļēji definētām funkcijām, kuru mašīnas pēc galīga laika beigs strādāt. Situācijās *c*) un *d*)  $M$  nonāks otrajā stāvoklī ar nepareizu funkciju; tālākais ir atkarīgs no daļēji definēto funkciju uzvedības – ja par visām ir iespējams atklāt, ka tās nav

pareizas, agrāk, nekā tiek sastapta argumenta vērtība, uz kuras tās nav definētas, tad situācijā *c*) var gadīties, ka izvads bezgalīgi daudz notiks no identificējamās funkcijas, jo no otrā stāvokļa  $M$  “izglābs” visur definētā funkcija; situācijā *d*) agrāk vai vēlāk  $M$  tomēr sāks bezgalīgi ilgi gaidīt kādas mašīnas izvadu.

Kā var redzēt, piedāvātais algoritms var atklāt nepareizu palīdzību vai pareizi strādāt ar to tikai speciālos gadījumos.

Algoritmam no citas teorēmas (Teorēma 6.22) ir vēl sliktākās parādības: saņemot nepareizu palīdzību, tas nekad nestrādās pareizi. Identificējot valodu no klases  $U_m$  un saņemot palīdzību par to, ka valoda ir no klases  $U_{n>m}$ , izvada virkne stabilizēsies uz vērtību, kas atbilst valodai no klases  $U_n$ ; taču saņemot palīdzību par klasi  $U_{n<m}$ , izvada virkne būs bezgalīga un sastāvēs no  $U_n$  valodu indeksiem.

## 8. ATKLĀTIE JAUTĀJUMI

Viens no visvispārīgākajiem uzdevumiem, ko šajā darba ietvaros tika mēģināts risināt, ir sekojošais: Ja dotai klasei dotajā numerācijā ir  $Y$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama ( $Y \in \{ F, K, S \}$ ), vai no tā arī seko, ka tā ir  $Z$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificējama ( $Y \neq Z$ ,  $Z \in \{ F, K, S \}$ )? Mūsu definīcijās tas nozīmē sekojošo: Ja klases  $U$   $X$ -identifikācijai ir dots  $Y$ -nekonstruktivitātes daudzums, vai tas arī ir  $Z$ -nekonstruktivitātes daudzums?

Dažos gadījumos šis uzdevums var būt viegli atrisināts. Kā tika atzīmēts pašā sākumā,  $S$ -daudzums ir vienmēr arī  $K$ -daudzums. Konstants  $S$ - vai  $K$ -daudzums vienmēr nav  $F$ -daudzums. Bez tam, nerekursīvo funkciju identifikācijā var definēt  $F$ -daudzumu, kas nav  $K$ -daudzums (Teorēma 6.14). Tomēr minētajā teorēmā tika definēta konstrukcija, kas, pirmkārt, balstās uz pašatsauces shēmu; otrkārt, tā balstās uz bezgalīgu virkni ar stingri augošu Kolmogorova sarežģītību, kas nevar būt rekursīva virkne (Teorēma 5.7, Sekas 5.8). Tas noveda autoru pie hipotēzes, ka ja identifikācija notiek rekursīvā numerācijā un turklāt  $F$ -daudzums ir visur definēta nedilstoša rekursīva funkcija, tad tas arī ir  $S$ - vai  $K$ -daudzums.

Šo hipotēzi pilnībā neizdevās ne pierādīt, ne apgāzt. Tomēr eksistē speciālais gadījums, kad numerācija ir bijekcija (tas ir, katram indeksam atbilst precīzi viens objekts) un apgalvojums ir viegli pierādāms  $K$ -daudzumam.

**Definīcija 8.1.** Mēs sakām, ka klases  $U$  numerācija ir *bijektīva*, t.t.t. ja tā ir *sirjektīva*:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \varphi_n \in U \quad (8.1)$$

un *injektīva*:

$$\forall i, j \in \mathbb{N}: (i \neq j) \Leftrightarrow (\varphi_i \neq \varphi_j) \quad (8.2)$$

**Apgalvojums 8.2.** Ja klase  $U$  ir  $F$ -nekonstruktīvi identificējama bijektīvā numerācijā ar nekonstruktivitātes daudzumu  $g(n)$ , kas ir nedilstoša rekursīva funkcija, tad  $U$  ir  $K$ -nekonstruktīvi identificējama šajā numerācijā ar šo pašu nekonstruktivitātes daudzumu.

**Pierādījums.**

Ja  $M$   $F$ - un  $K$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  ar nekonstruktivitāti  $g(n)$ , tad ir spēkā

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists n \in \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i \in U \}) \quad (8.3)$$

$$[ \exists n_0 \geq n : K(g(n_0)) < \min \{ K(i) \mid i \in \{ j \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = \varphi_j \} \} - c ]$$

Tad (8.3) ir ekvivalents ar

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\exists n \in \mathbb{N}) [ \exists n_0 \geq n : K(g(n_0)) < K(n) - c ] \quad (8.4)$$

No iepriekš pierādītā (Teorēma 5.9) jebkurai konstantei  $c \in \mathbb{N}$  eksistē  $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ :

$$n_0 < n_1, K(g(n_0)) > K(g(n_1)) + c \quad (8.5)$$

no kā tieši seko vēlamais rezultāts ( 8.4 ). ■

Tomēr mēģinājumi pierādīt analogisku rezultātu  $S$ -daudzumam, veiksmīgi nebeidzās.

Ja induktīvā izveduma mašīna  $M$   $F$ - un  $S$ -nekonstruktīvi  $X$ -identificē  $U$  ar nekonstruktivitāti  $g(n)$ , tad ir spēkā

$$\begin{aligned} & \forall c \in \mathbb{N}: (\forall^\infty n \in \{ i \in \mathbb{N} \mid \varphi_i \in U \}) \\ & [ \exists n_0 \geq n : \forall i \in \{ j \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = \varphi_j \} : K(g(n_0)) < K(i) - c ] \end{aligned} \quad (8.6)$$

tas ir,

$$\forall c \in \mathbb{N}: (\forall^\infty n \in \mathbb{N}) [ \exists n_0 \geq n : K(g(n_0)) < K(n) - c ] \quad (8.7)$$

Vispārīgā gadījumā var būt  $g(n) = n$ . Taču eksistē bezgalīga augoša naturālo skaitļu virkne, kur katra elementa Kolmogorova sarežģītība ir mazākā, nekā visiem naturāliem skaitļiem lielākiem par to (Lemma 5.6); no virknes bezgalības ( 8.7 ) ir pretruna. No otrās puses, tas arī nenozīmē, ka rekursīvs  $F$ -daudzums nevar būt  $S$ -daudzums, jo ja  $g(n)$  aug lēnāk par  $n$ , nekas vēl nav pierādīts.

Atgriežoties pie  $K$ -nekonstruktivitātes un atsakoties no nosacījuma ( 8.2 ), autoram neizdevās pierādīt ( 8.3 ). Nosacījums ( 8.2 ) nozīmē, ka funkcija

$$f(n) = \min \{ K(i) \mid i \in \{ j \in \mathbb{N} \mid \varphi_n = \varphi_j \} \} \quad (8.8)$$

aug kopā ar  $K(n)$ , kas kopā ar iepriekš pierādītām naturālo skaitļu Kolmogorova sarežģītības īpašībām (Teorēma 5.1, Teorēma 5.9) atļauj pierādīt ( 8.3 ). Taču atsakoties no ( 8.2 ),  $f(n)$  var augt arī patvaļīgi lēni (ja katram objektam ir bezgalīgi daudz indeksu dotajā numerācijā). Bez tam, atsakoties no sirjekcijas īpašības ( 8.1 ), numerācijā var būt daudz “tukšu vietu”, kuras neatbilst  $U$  objektiem, no kā atkal seko, ka  $f(n)$  augs patvaļīgi lēni un jautājums, vai var pierādīt vēlamo īpašību, būs atklāts.

Ir skaidrs, ka kamēr  $K$ -daudzumam nevar pierādīt vēlamo īpašību, tas arī nebūs iespējams  $S$ -daudzuma gadījumā. Un otrādi, ja hipotēze ir aplama, to neizdosies pierādīt  $K$ -daudzumam, kamēr  $S$ -daudzumam tas nav pierādīts.

## SECINĀJUMI UN TURPMĀKĀ DARBĪBA

Darba ietvaros tika izstrādātas trīs dažādas nekonstruktīvās identifikācijas modeļa definīcijas ( $K$ -,  $S$ -,  $F$ -definīcijas). Katra no definīcijām tiek dota vispārīgā veidā, kas atļauj to pielietot jebkuru objektu identifikācijai, tai skaitā arī Gold pieejā biežāk apskatītām rekursīvu valodu un koncepciju klasēm un rekursīvu funkciju klasēm. Vēl vairāk, tika uzrādīts gadījums, kad nekonstruktīvais induktīvais izvedums tiek izmantots nerekursīvo funkciju klases veiksmīgai identifikācijai (Teorēma 6.14). Tas atstāj cerības, ka ieviestās definīcijas var tikt pielietotas arī citu Gold pieejā izmantoto konstrukciju identifikācijai – reālo vērtību funkciju klasēm [31], algebrisko struktūru klasēm [64], programmēšanas valodu konstrukcijām [8] u.tml.

Katrai no piedāvātām definīcijām ir savas īpatnības.  $K$ - un  $S$ -definīcijas ir pielietojamas ar konstantu nekonstruktivitāti, kas nav iespējams  $F$ -gadījumam. Savukārt  $F$ -definīcija ar katru palīdzības vārdu izdala galīgas kardinalitātes klasi, kuru tiek prasīts identificēt. Šajā darba ietvaros neizdevās pierādīt, ka veiksmīga  $K$ - un/vai  $S$ -nekonstruktīvā identifikācija vispārīgā gadījumā seko no veiksmīgas  $F$ -nekonstruktīvās identifikācijas (8. nodaļa), kaut atsevišķās situācijās klasi var identificēt jebkurā no šīm definīcijām (Teorēma 6.15, Apgalvojums 8.2). No  $S$ -identificējamības vienmēr seko  $K$ -identificējamība, taču  $K$ -definīcija ir vājāka un atļauj arī triviālus gadījumus (Sekas 6.19).

Katra no definīcijām tika apskatīta virknei konkrētu uzdevumu risināšanai – gan rekursīvu un nerekursīvu funkciju, gan rekursīvu koncepciju un formālu valodu identifikācijas jomās. Bez tam, identifikācijas ar palīdzību definīcijas tika formulēti pietiekoši vispārīgi, lai varētu viegli paplašināt tās ar intuitīvo skaitļošanu, kaut darba ietvaros autoram neizdevās atrast uzdevumus, kuru risināšanai būtu nepieciešams intuitīvais princips.

Pierādītais vēl klasiskajā Gold darbā [26] pozitīvā attēlojuma vājums valodu identifikācijā tika apskatīts jaunā nozīmē (Lemma 6.20, Lemma 6.21). Izrādās, ka dažos gadījumos konstruktīvi neidentificējamās klases identificējamībai pietiek ar nesalīdzinoši mazāku papildus informācijas apjomu, nekā bezgalīga pilnā attēlojuma virkne (Teorēma 6.22, Apgalvojums 6.23, Sekas 6.24).

Bez tam, ir iegūti sekojošie rezultāti. Tika analizēti visi publicētie uz doto brīdi raksti, kas tieši attiecas pie nekonstruktīvās skaitļošanas. Tika analizēta Freivalda piedāvātā nekonstruktīvā pieeja pie skaitļošanas modeļa konstruēšanas. Lai salīdzinātu ar citiem skaitļošanas modeļiem, kas lieto papildus informāciju (it sevišķi ar intuitīvo modeli un ar Damm un Holzer modeļu ar padomjiem), kā arī lai precizētu turpmāk pielietoto terminoloģiju, skaitļošana ar palīdzību tika vispārināta, izmantojot abstraktā skaitļošanas ar palīdzību modeļa

definīciju. Tika pierādīts, ka Damm un Holzer modeļa valodu pazīšana ir vienādi stingra ar nekonstruktīvo modeli.

Tika pārskatīta virkne esošo avotu, kas attiecas pie induktīvā izveduma. Tika dots pārskats esošiem induktīvā izveduma risinājumiem; salīdzinātas Solomonoff un Gold paradigmas, uzrādītas to atšķirības, kā arī apskatīti svarīgi Gold pieejas virzieni. Tika analizēti daži induktīvā izveduma pamatjēdzieni, kuri bieži izraisa domstarpības. Dots īss pārskats biežāk pielietotājiem identifikācijas kritērijiem, ieskaitot drošus un nedrošus kritērijus. Tika izskatīts Fulk/Jain/Sharma piedāvātais valodu identifikācijas modelis, kas lieto papildus informāciju, un tajā pielietotais kritērijs; tika uzrādīts, ka dotais kritērijs veicina identifikācijas uzdevumu risināšanu ar triviālu  $T$ -papildus informācijas daudzumu.

Lai pierādītu divus rezultātus (Teorēma 6.14, Apgalvojums 8.2), kā arī lai pamatotu 8. nodaļā aprakstīto jautājumu atklāšanu, tika pierādītas dažas naturālo skaitļu Kolmogorova sarežģītības īpašības.

Turpmākajā darbībā var ietilpt tai skaitā, bet ne tikai, sekojošo uzdevumu risināšana: 1) Izstrādāt kopēju pieeju  $R$ - $NK$ - $X$  un  $R$ - $NK$ - $R$ - $X$  uzdevumu risināšanai (7. nodaļa); 2) Pierādīt vai apgāzt hipotēzi par  $F$ - un  $S$ - un/vai  $F$ - un  $K$ - daudzumu savstarpējo saistību (8. nodaļa).

## IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

- [1] M. Kūle, R. Kūlis. *Filosofija*, Zvaigzne ABC, 1998.
- [2] K. Podnieks. “Induktīvā izveduma teorija: 1970-tie gadi” [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://www.ltn.lv/~podnieks/slides/induct/Induct1970.htm>
- [3] K. Podnieks. “Intuicionisms un konstruktīvisms” [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://www.ltn.lv/~podnieks/slides/intuit/int.htm>
- [4] A. Ambainis. Probabilistic Inductive Inference: a Survey. *Theoretical Computer Science*, vol.264-1, 2001, 155.–167.lpp.
- [5] A. Ambainis, K. Apsītis, C. Calude, R. Freivalds, M. Karpinski, T. Larfeldt, I. Sala, J. Smotrovs. Effects of Kolmogorov Complexity Present in Inductive Inference as Well. *ALT '97: Proceedings of the 8th International Conference on Algorithmic Learning Theory*, 1997, 244.—259.lpp.
- [6] D. Angluin. Inductive inference of formal languages from positive data. *Information and Control* 45, 1980, 117.–135.lpp.
- [7] D. Angluin. *Identifying Languages from Stochastic Examples*, tech. rep. YALEU/DCS/RR-614, Yale University, March 1988.
- [8] H. Arimura, T. Shinohara. *Inductive Inference of Prolog Programs with Linear Data Dependency from Positive Data*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-70, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, 1993.
- [9] G. Baliga, J. Case, S. Jain. Language Learning with Some Negative Information. *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 51-2, October 1995, 273.–285.lpp.
- [10] J. Bārzdiņš, K. Podnieks. Towards a theory of inductive inference. *Proceedings of 2nd Symposium and Summer School on Mathematical Foundations of Computer Science*, Štrbske Pleso, High Tatras, Czechoslovakia, 1973, 9.–15.lpp.
- [11] L. Blum, M. Blum. Toward a mathematical theory of inductive inference. *Information and Control*, vol. 28, 1975, 125.–155.lpp.
- [12] J. Case, S. Jain, S.N. Manguelle. Refinements of inductive inference by Popperian and reliable machines. *Kybernetika*, vol. 30, No.1, 1994, 23.–52.lpp.
- [13] J. Case, C. Smith. Comparison of Identification Criteria for Machine Inductive Inference. *Theoretical Computer Science*, 25, 1983, 193.–220.lpp.
- [14] C. Damm, M. Holzer. *Automata that take advice*, tech. rep. WSI-95-14, Wilhelm-Schickard Institut für Informatik, 1995.

- [15] R. Freivalds. Non-Constructive Methods for Finite Probabilistic Automata. *International Journal of Foundations of Computer Science*, vol. 19, No.3, 2008, 565.–580.lpp.
- [16] R. Freivalds. Artin's Conjecture and Size of Finite Probabilistic Automata. *Pillars of Computer Science*, 2008.
- [17] R. Freivalds. Amount of nonconstructivity in finite automata. – *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5642, 2009, 227.–236.lpp.
- [18] R. Freivalds. *Towards a model for human intuition*, nublicēts raksts.
- [19] R. Freivalds, J. Bārzdīņš, K. Podnieks. Inductive inference of recursive functions: complexity bounds. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 502 (Baltic Computer Science), 1991, 111.—155.lpp.
- [20] R. Freivalds, S. Jain. Kolmogorov Numberings and Minimal Identification. *Theoretical Computer Science*, vol. 188, No.1--2, 1997, 175.—194.lpp.
- [21] R. Freivalds, R. Wiehagen. Inductive inference with additional information. *Electron. Inform. Kybernetik* 15, 1979, 179.–195.lpp.
- [22] R. Friedberg, Three theorems on enumeration. *Journal of Symbolic Logic* 23, 1958, 309.–316.lpp.
- [23] M. Fulk (revised July 13, 1998 by S. Jain, A. Sharma). Inductive Inference with Additional Information. *Journal of Computer and System Sciences* 64, 2002, 153.–159.lpp.
- [24] J. Gallier. *Formal Languages And Automata; Models of Computation, Computability; Basics of Recursion Function Theory* [nublicēta grāmata, tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20] Pieejama: <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/tocnotes.html>
- [25] J. Gallier, A. Hicks. *The Theory of Languages and Computation* [nublicēta grāmata, tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejama: <http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/tc.html>
- [26] E.M. Gold. Language identification in the limit. *Information and Control* 10, 1967, 447.–474.lpp.
- [27] *Google Scholar* [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://scholar.google.lv>
- [28] *Google Scholar* - Gold Language identification in the limit [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://scholar.google.lv/scholar?q=Gold+Language+Identification+in+the+limit>
- [29] *Google Scholar* - Solomonoff Formal theory of inductive inference [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://scholar.google.lv/scholar?q=Solomonoff+Formal+theory+of+inductive+inference>

- [30] D.R. Heath-Brown. Artin's conjecture for primitive roots. *Quart. J. Math. Oxford*, v. 37, 1986, 27–38.lpp.
- [31] E. Hirowatari, S. Arikawa. A comparison of identification criteria for inductive inference of recursive real-valued functions. *Theoretical Computer Science* 268–2, 2001, 315–366.lpp.
- [32] S. Jain. Minimal Concept Identification and Reliability. *International Journal of Foundation of Computer Science*, vol. 9(3), 1998, 315.–320.lpp.
- [33] S. Jain. Learning with Refutation. *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 57(3), 1998, 356.—365.lpp.
- [34] S. Jain. A Survey of Robust Learning. *Invited talk at International Workshop on Quantum Computing and Learning*, Sundbyholm, Sweden, 2000. Pieejams: <http://www.comp.nus.edu.sg/~sanjay/paps/robsur-c.pdf> [atsauce 2010.05.20]
- [35] S. Jain. On Some Open Problems in Monotonic and Conservative Learning. *Information Processing Letters*, vol. 109, No.16, 2009, 923.—926.lpp.
- [36] S. Jain, E. Kinber, C. Papazian, C. Smith, R. Wiehagen. On the intrinsic complexity of learning recursive functions. *Information and Computation* 184, 2003, 45.–70.lpp.
- [37] S. Jain, A. Sharma. Learning in the Presence of Partial Explanations. *Information and Computation*, vol. 95–2, Dec. 1991, 162.–191.lpp.
- [38] S. Jain, A. Sharma. Learning with the Knowledge of an Upper Bound on Program Size. *Information and Computation*, vol. 102–1, Jan. 1993, 118.–166.lpp.
- [39] S. Jain, A. Sharma. Mind Change Complexity of Learning Logic Programs. *Theoretical Computer Science*, vol. 284, No.1, Jul. 2002, 143.–160.lpp.
- [40] S. Jain, F. Stephan. Learning in Friedberg Numberings. *Information and Computation*, vol. 206, No. 6, 2008, 776—790.lpp.
- [41] R.M. Karp, R. Lipton. Turing machines that take advice. *L'Enseignement Mathematique*, vol. 28, 1982, 191.–209.lpp.
- [42] Y. Kawasaki, T. Shinohara, S. Arikawa. Model inference using bidirectional refinements. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, vol. 24, No.1-2, 1990.
- [43] I. Kucevalovs. *Towards nonconstructive inductive inference*. (Iesniegts uz *Journal of Universal Computer Science* 2010. gada 6. maijā; uz 2010. gada 24. maiju atbilde par publicēšanu nebija saņemta.)
- [44] P.D. Laird. Inductive inference by refinement. *AAAI-86 proceedings*, 1986, 472.–474.lpp.

- [45] S. Lange, T. Zeugmann, S. Zilles. Learning indexed families of recursive languages from positive data: a survey. *Theoretical Computer Science*, vol. 397, n.1-3, 2008, 194.–232.lpp.
- [46] M. Li, P.M.B. Vitányi. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications* (second edition). – Springer-Verlag, 1997.
- [47] *Microsoft Academic Search* [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://academic.research.microsoft.com>
- [48] *Microsoft Academic Search: A Formal Theory of Inductive Inference. Part I* [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://academic.research.microsoft.com/Paper/137769.aspx>
- [49] *Microsoft Academic Search: Language Identification in the Limit* [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://academic.research.microsoft.com/Paper/818413.aspx>
- [50] E. Minicozzi. Some natural properties of strong identification in inductive inference. *Theoretical Computer Science*, vol.2, 1976, 345.–360.lpp.
- [51] T. Motoki. Inductive inference from all positive and some negative data. 京都大学数理解析研究所講究録 (*Kyoto University RIMS Kôkyûroku*), vol. 754, 35.–44.lpp.
- [52] Y. Mukouchi. *Definite Inductive Inference as a Successful Identification Criterion*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-52, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, Dec. 24, 1991.
- [53] Y. Mukouchi. *Inductive Inference of an Approximate Concept from Positive Data*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-74, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, Jan. 15, 1994.
- [54] Y. Mukouchi. *Inductive Inference of Recursive Concepts*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-82, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, Mar. 25, 1994.
- [55] Y. Mukouchi, S. Arikawa. *Inductive Inference Machines That Can Refute Hypothesis Spaces*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-67, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, Jan. 15, 1994.
- [56] L. Pitt, Probabilistic Inductive Inference, *Journal Association for Computing Machinery* 36, 1989, 383.–433.lpp.
- [57] K. Podnieks. “*Inductive inference of functions by probabilistic strategies*” [tiešsaite]. – [atsauce 2009.11.15.] Pieejams: [http://www.ltn.lv/~podnieks/paper1/Podnieks\\_Paper\\_Inference\\_1977.pdf](http://www.ltn.lv/~podnieks/paper1/Podnieks_Paper_Inference_1977.pdf)
- [58] H. Rogers. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill, 1967.

- [59] E.Y. Shapiro. *Inductive inference of theories from facts*, tech.rep. YALEU/DCS/TR-192, Yale University, 1981.
- [60] T. Shinohara. Inductive inference from negative data. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, vol. 21, No. 3/4, 1985, 67.–70.lpp.
- [61] T. Shinohara. *Inductive Inference from Positive Data is Powerful*, tech. rep. RIFIS-TR-CS-20, Research Institute of Fundamental Information Science, Kyushu University, Nov. 9, 1989.
- [62] R.J. Solomonoff. A formal theory of inductive inference. *Information and Control*, Mar. 1964, 1.–22.lpp. (Part I); Jun. 1964, 24.–254.lpp. (Part II).
- [63] R.J. Solomonoff. Inductive Inference Theory – a Unified Approach to Problems in Pattern Recognition and Artificial Intelligence. *4th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, Tbilisi, Georgia, USSR, Sept. 3-8, 1975.
- [64] F. Stephan, Y. Ventsov. Learning Algebraic Structures from Text. *Theoretical Computer Science*, vol. 268, n.2 (Oct. 2001), 221.–273.lpp..
- [65] Stanford Encyclopedia of Philosophy. – “*Intuitionism in the Philosophy of Mathematics*” [tiešsaite]. – [atsauce 2010.05.20.] Pieejams: <http://plato.stanford.edu/entries/intuitionism/>
- [66] R. Wiehagen, R. Freivalds, E.B. Kinber. *On the Power of Probabilistic Strategies in Inductive Inference*. Theoretical Computer Science, 1984.
- [67] T. Yokomori. Inductive inference of context-free languages: context-free expression method. *Proceedings of the 10th international joint conference on Artificial intelligence*, vol. 1, 1987, 283.–286.lpp.
- [68] Zeugmann, Zilles. Learning Recursive Functions: A Survey. *Theoretical Computer Science*, vol. 397, n.1-3, 2008, 4.–56.lpp.
- [69] Я.М. Барздинь. Две теоремы о предельном синтезе функций. *Теория алгоритмов и программ* (выпуск 1), Латвийский государственный университет, 1974, с.82-88. (J. Bārzdīņš. Divas teorēmas par funkciju sintezi robežā. *Teorija algoritmov i programmu* (1.sējums), Latvijas Valsts universitāte, 1974, 82.–88.lpp.) (krievu val.).
- [70] А.Н. Колмогоров. Комбинаторные основания теории информации и исчисления вероятностей. *Успехи математических наук*, т. 38, вып. 4 (232), 1983, с. 27–36. (A.N. Kolmogorov. Informācijas teorijas un varbūtību skaitļošanas kombinatoriskie pamati. *Uspēhi matematičeskih nauk*, 38. sējums, nr.4. (232), 27.–36.lpp.) (krievu val.)
- [71] К.М. Подниекс. Сравнение различных типов предельного синтеза и прогнозирования функций. *Теория алгоритмов и программ* (выпуск 1), Латвийский гос. университет, 1974, с. 68–81. (K. Podnieks. Programmu sintezes un

- prognozēšanas tipu salīdzinājums. *Teorija algoritmov i programm* (1.sējums), Latvijas Valsts universitāte, 1977, 89.–102.lpp.) (krievu val.).
- [72] К.М. Подниекс. Вычислительная сложность стратегий прогнозирования. *Теория алгоритмов и программ* (выпуск 3), Латвийский гос. университет, 1977, с. 89–102. (К. Podnieks. Prognozēšanas stratēģiju skaitļošanas sarežģītība. *Teorija algoritmov i programm* (3.sējums), Latvijas Valsts universitāte, 1977, 89.–102.lpp.) (krievu val.).
- [73] К.М. Подниекс. Прогнозирование следующего значения функции. *Известия высших учебных заведений*, №5 (228), 1981, с. 71.–77. (К. Podnieks. Funkcijas nākamās vērtības prognozēšana. *Izvestija visših učebnih zavedeņij*, №5 (228), 1981, 71.–77.lpp.) (krievu val.).
- [74] 櫻井 彰人. 原始帰納的正提示からの言語の帰納推論. In 日本応用数学会論文誌 1(3), 177-193. (A. Sakurai. Valodu induktīvais izvedums no primitīvi rekursīvi sanumurētiem pozitīviem datiem. *Japānas praktiskās matemātikas biedrības zinātniskie raksti*, 1.sējums, nr.3, 177.–193.lpp) (japāņu val.).

## **PIELIKUMI**

**Mašīnas darbības algoritms (Teorēma 6.17)**

1. Inicializēt vērtības  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ar 0 un kopu  $H$  ar  $\{ \}$ .
2. Iedarbināt visas Tjūringa mašīnas, kuru indeksi ir no 0 līdz  $n$ , uz vērtības  $x_i$ , kur  $i$  ir Tjūringa mašīnas indekss.
3. Sagaidīt  $f$  vērtību  $f(0)$ .
4. „Gaidīšana I”. Sagaidīt, kamēr kāda mašīna  $M_i$  apstāsies un izvadīs kādu vērtību  $M_i(x_i) = y_i$ . (Tas obligāti notiks, jo starp mašīnām eksistē vismaz viena “pareizā”, kura ir definēta uz visām vērtībām.)
5. Ja  $x_i < \max \{ x_j \mid 0 \leq j \leq n \}$  (tas ir, mašīna izvadīja vērtību uz argumenta vērtības, uz kuras jau izvadīja kāda cita mašīna):
  - a. Ja  $y_i = f(x_i)$  (t.i.  $M_i$  izvadīja vērtību, kas atbilst  $f$  vērtībai šajā punktā):
    - i. Palielināt  $x_i$  par 1;
    - ii. Iedarbināt  $M_i$  uz  $x_i$ ;
    - iii. Atgriezties uz 4. soli („Gaidīšana I”).
  - b. Ja  $y_i \neq f(x_i)$ :
    - i. Atgriezties uz 4. soli („Gaidīšana I”). (Kopš šī laika brīža  $i$ . mašīna vairs nedarbojas.)
6. Ja ir spēkā  $x_i = \max \{ x_j \mid 0 \leq j \leq n \}$ :
  - a. Ja turklāt ir  $d(\max \{ x_j \mid 0 \leq j \leq n \}) = 1$  (tas ir, šī mašīna ir pirmā, kas izvadīja vērtību uz šī argumenta vērtības):
    - i. Sagaidīt  $f$  vērtību  $f(x_i)$  (jo vēl noteikti nebija pieprasījuma pēc tās)
  - b. Ja  $i = m$  (ja izvadīja mašīna, kas atbilst „visproblemātiskākajai” funkcijai, kurai ir vislielākā pirmā vērtība, uz kuras atbilstošā funkcija nav definēta):
    - i. Piešķirt  $\{ \}$  pie  $H$ ;
    - ii. Palielināt  $x_m$  par 1;
    - iii. Iedarbināt  $M_m$  uz  $x_m$ ;
    - iv. Atgriezties uz 4. soli („Gaidīšana I”).
  - c. Ja  $i \neq m$  (tad „visproblemātiskākā” mašīna pagaidām stāv, varbūt tā arī turpinās stāvēt):
    - i. Ja  $y_i \neq f(x_i)$ :
      1. Atgriezties uz 4. soli („Gaidīšana I”). (Kopš šī laika brīža  $i$ . mašīna vairs nedarbojas.)
    - ii. Ja  $y_i = f(x_i)$ :

1. „Gaidīšana II”. Sagaidīt, kamēr kāda mašīna  $M_i$  apstāsies un izvadīs kādu vērtību  $M_i(x_i) = y_i$ . (Tas obligāti notiks)
2. Ja  $x_i \geq x_m$  (ja šī mašīna izvadīja uz argumenta vērtības, uz kuras „visproblemātiskākā” mašīna pagaidām stāv, tad varbūt šī mašīna atbilst visur definētai funkcijai):
  - a. Ja  $i$  nepieder  $H$ : pievienot  $i$  pie  $H$ ;
  - b. Ja ir spēkā  $x_i = \max \{ x_j \mid 0 \leq j \leq n \}$  un  $d(\max \{ x_j \mid 0 \leq j \leq n \}) = 1$  (tas ir, šī mašīna ir pirmā, kas izvadīja vērtību uz šī argumenta vērtības):
    - i. Sagaidīt  $f$  vērtību  $f(x_i)$  (jo vēl noteikti nebija pieprasījuma pēc tās)
  - c. Ja visas mašīnas no  $H$  jau ir izvadījušas vērtības uz  $x_i$ , un tās tika ielasītas solī „Gaidīšana I” vai „Gaidīšana II”):
    - i. Izvadīt minimālo indeksu no  $H$  kā hipotēzi;
    - ii. Visiem  $j$  no  $H$  palielināt attiecīgu  $x_j$  par 1;
    - iii. Visiem  $j$  no  $H$  iedarbināt attiecīgu  $M_j$  uz attiecīga  $x_j$ ;
  - d. Pāriet uz 6.c.ii.1. soli („Gaidīšana II”).

Maģistra darbs „Nekonstruktivitātes daudzums induktīvajā izvedumā”

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai. Piekritu sava darba publicēšanai internetā.

Autors: \_\_\_\_\_

Ar savu parakstu apliecinu, ka esmu lasījis augstāk minēto maģistra darbu un atzīstu to par **piemērotu / nepiemērotu** (nevajadzīgo svītrot) aizstāvēšanai Latvijas Universitātes datorzinātņu maģistranūrā.

Darba vadītājs: \_\_\_\_\_

Darbs iesniegts maģistrantūras sekretariātā \_\_\_\_\_.

Ar šo es apliecinu, ka darba elektroniskā versija ir augšupielādēta LU informatīvajā sistēmā.

Studiju metodiķe: \_\_\_\_\_

Recenzents: Dr.sc.comp. Juris Vīksna

Darbs aizstāvēts maģistra gala pārbaudījuma komisijas sēdē

\_\_\_\_\_ prot. Nr. \_\_\_\_\_, vērtējums \_\_\_\_\_

Komisijas sekretārs: \_\_\_\_\_