LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS, MATEMĀTIKAS UN OPTOMETRIJAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

ATDALĀMĪBAS AKSIOMAS L-NESTRIKTĀS TOPOLOĢISKĀS TELPĀS

MAĢISTRA DARBS

Autore: Ieva Bullīte
Studenta apliecības Nr.: ib11133
Darba vadītāja: Dr. math. Ingrīda Uļjane

RĪGA 2023

ANOTĀCIJA

Darbs veltīts atdalāmības aksiomām nestriktās topoloģiskās struktūrās. Aprakstītas fazificētas topoloģijas struktūras un L-nestriktas topoloģijas konstrukcijas, kas realizētas ilustratīvos piemēros. Aplūkotas atdalāmības aksiomas, kuras raksturo klasisko punktu atdalāmību fazificētās topoloģiskās struktūrā, kā arī L-nestriktā topoloģijā.

Atslēgvārdi: topoloģija, atdalāmības aksiomas, L-topoloģija, L-nestrikta topoloģija

ABSTRACT

The thesis is devoted to the separation axioms in fuzzy topological structures. It describes fuzzifying topological structures and L-fuzzy topological structures, that are realized by illustrative examples. Separation axioms describing the separability of crisp points in a fuzzifying topological structure as well as in an L-fuzzy topology are considered.

Keywords: topology, separation axioms, L-topology, L-fuzzy topology

SATURA RĀDĪTĀJS

IEVADS

Darbs veltīts atdalāmības aksiomām nestriktās topoloģiskās struktūrās.

Klasiskai topoloģijai attīstoties un dažādiem autoriem raksturojot atšķirīgus punktu atdalāmības aspektus, sākotnēji atdalāmības aksiomu skaits bija mainīgs.

Arī mūsdienās, attīstoties nestriktā loģikā balstītiem matemātikas virzieniem, tajā skaitā nestriktās matemātikas teorijai, katram autoram ir brīvība izvēlēties, kā fazificēt attiecīgo struktūru. Šī tendence vērojama, pētot atdalāmības aksiomas nestriktās topoloģijās un nestriktās topoloģiskās struktūrās.

Darbs pie atdalāmības aksiomu izpētes nestriktās topoloģiskās telpās tika uzsākts, rakstot bakalaura darbu "Zemākās atdalāmības aksiomas nestriktās topoloģiskās telpās". Arī tur, pētot attiecīgo literatūru, bija vērojamas dažādas pieejas nestrikta punkta un tā apkārtnes definīcijām.

Šī maģistra darba mērķis ir pētīt atdalāmības aksiomas nestriktās topoloģiskās struktūrās, t.i., kad fazificēta tieši topoloģijas struktūra. Par pamatu tiek ņemts H.-Y. Li un F.-G. Shi raksts "Some seperation axioms in I-fuzzy topological spaces" [1], kur definētas punktu atdalāmības aksiomas fazificētā topoloģijas struktūrā apakškopu saimē, kā arī fazificētā topoloģijas struktūrā nestriktā apakškopu saimē.

Tālāk seko īss darba apraksts pa nodaļām. Pirmajā nodaļā ir norādīti nestrikto kopu pamat teorijas jēdzieni un definīcijas. Otrajā nodaļā tiek apskatītas nestriktas topoloģiskas struktūras, atdalāmības aksiomas šajās struktūrās un konstruēti daži to piemēri. Trešajā nodaļā apskata L-nestriktu topoloģijas, to konstrukciju veidus, atdalāmības aksiomas šajās topoloģijās un to piemēri.

1. NESTRIKTO KOPU TEORIJAS PAMATJĒDZIENI

Šajā nodaļā tiks aplūkoti darbā lietotie nestrikto kopu teorijas pamatjēdzieni, definētas darbības ar nestriktām kopām. Par pamatu šīm definīcijām ir ņemta A. Šostaka grāmata "L-kopas un L-vērtīgas struktūras" [2].

Definīcija 1.1. Par kopas X nestriktu apakškopu sauc attēlojumu $U: X \to L$.

Vērtību $U(x)$ varam interpretēt, kā pakāpi, ar kuru punkts x pieder nestriktai apakškopai U, savukārt L – kā elementu piederības skalu. Vispārīgā gadījumā skala L var būt kvantālis, pilns distributīvs režģis vai arī jebkurš režģis, kura struktūra ir pietiekami bagāta, lai īstenotu iecerētās konstrukcijas.

Šeit un tālāk darbā ar L būs vienības nogrieznis, tas ir, $L = [0,1]$.

Turpmāk, ja no konteksta būs saprotams kādas kopas nestriktas apakškopas tiek aplūkotas, lietosim īsāku terminu - nestrikta kopa.

Par parasto kopu analogu nestriktajās kopās var uzskatīt šo kopu harakteriskās funkcijas.

Definīcija 1.2. Par kopas $A \subset X$ harakterisko funkciju sauc funkciju $\chi_A: X \to \{0,1\}$, kuru definē sekojoši:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ja } x \in A \\ 0, \text{ja } x \notin A. \end{cases}$$

Aplūkosim nestriktu kopu apvienojuma, šķēluma, papildinājuma un iekļaušanas darbības. Definējot šīs darbības, izmantosim kopas X divas nestriktas apakškopas $U, V: X \to L$.

Definīcija 1.3. Par divu nestriktu kopu U un V apvienojumu sauc nestriktu kopu $U \vee V: X \to L$, un par šo kopu šķēlumu sauc nestriktu kopu $U \wedge V: X \to L$, kuras definē sekojoši:

$$(U \vee V)(x) = \max\big(U(x), V(x)\big),$$

$$(U \wedge V)(x) = \min\big(U(x), V(x)\big).$$

Par kopas X nestriktu apakškopu saimes $\{U_i: i \in J\}$ apvienojumu sauc nestriktu kopu $\bigvee U_i: X \to L$, un par šķēlumu sauc nestriktu kopu $\bigwedge U_i: X \to L$, kurus definē sekojoši:

$$\bigvee \mu_i(x) = \sup\{U_i(x): i \in J\},$$

$$\bigwedge U_i(x) = \inf\{U_i(x): i \in J\}$$

Par nestriktas kopas U papildinājumu sauc nestriktu kopu $U^c: X \to L,$ kuru definē ar vienādību:

$$U^c(x) = 1 - U(x).$$

Par nestriktas kopas U apakškopu sauc nestriktu kopu V tādu, ka izpildās:

$$\forall x \in X:\ V(x) \le U(x).$$

Tālāk tiek definēts nestrikts punkts un tā piederība nestriktai kopai. Literatūrā atrodamas vairākas pieejas nestrikta punkta definīcijai ([2] [3] [4] [5]). Šeit atgādināsim biežāk lietoto definīciju, kuru stādīja priekšā Pu un Liu [6].

Definīcija 1.4. Par nestriktu punktu sauc nestriktu kopu $p_{x_0}^{\alpha}: X \to L$, kur $x_0 \in X$ un $\alpha \in (0,1]$, un kuru definē sekojoši:

$$p_{x_0}^{\alpha}(x) = \begin{cases} \alpha, \text{ja } x = x_0 \\ 0, \text{ja } x \neq x_0 \end{cases}$$

Nestrikts punkts $p = p_{x_0}^{\alpha}$ pieder nestriktai kopai $U \subset L^X$ un to apzīmē ar $p \,\tilde{\in}\, U$, ja $\alpha \leq U(x_0)$.

Šeit un arī turpmāk ar L^X tiks apzīmēta kopas X visu nestrikto apakškopu saime.

2. NESTRIKTAS TOPOLOĢISKAS STRUKTŪRAS

Darba mērķis ir pētīt punktu atdalāmību nestriktās topoloģiskās struktūrās, t.i., tādās, kur fazificēta tieši topoloģijas struktūra, savukārt tās elementi var būt klasiskas kopas gan nestriktas kopas.

Šajā nodaļā tiks aplūkots gadījums, kad struktūras elementi ir klasiskās kopas, kā arī lietotas darbības ar klasiskajām kopām, attiecīgi šķēlums un papildinājums.

2.1 Definīcijas un piemēri

Lai būtu uzskatāmākas strukturālās sakarības starp klasiskajām topoloģijām un nestriktām topoloģiskām struktūrām, atgādināsim klasiskās topoloģijas definīciju [7]

Definīcija 2.1.1. Par topoloģiju kopā X sauc tās apakškopu saimi $\mathcal{T}$ tādu, ka izpildās sekojošās īpašības:

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ un $X \in \mathcal{T}$;

(2) Ja $U \in \mathcal{T}$ un $V \in \mathcal{T}$, tad $U \cap V \in \mathcal{T}$;

(3) Ja $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in J$, tad $\bigcup\{U_i : i \in J\} \in \mathcal{T}$.

Par topoloģisku telpu sauc pāri $(X, \mathcal{T})$.

Kopas X visu apakškopu saimi apzīmēsim ar 2^X.

Tālāk tiek definēta fazificēta topoloģiska struktūra dotajā kopā kā attēlojums, kurš katrai apakškopai piekārto pakāpi ar kādu tā pieder fazificētai topoloģiskai struktūrai [1].

Definīcija 2.1.2. Par fazificētu topoloģijas struktūru uz kopas X sauc attēlojumu $\xi: 2^X \to L$ tādu, ka

(1) $\xi(X) = \xi(\emptyset) = 1$;

(2) $\forall A, B \in 2^X, \xi(A \cap B) \geq \xi(A) \wedge \xi(B)$;

(3) $\forall A_j \in 2^X, j \in J, \xi\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \geq \bigwedge_{j\in J} \xi(A_j)$.

Par fazificētu topoloģisku telpu sauc pāri (X, ξ).

Lai konstruētu fazificētu topoloģisku telpu, par pamatu ņemam klasisku topoloģiju dotajā kopā X. Tad katrai kopai no topoloģijas piekārtosim maksimālo vērtību 1, bet pārējām apakškopām piekārtojam vērtību 0.

Pieņemsim, ka dota topoloģiska telpa $(X, \mathcal{T})$ kopā X. Tagad konstruējam fazificētu topoloģisku struktūru $\xi: 2^X \to L$:

$$\forall A \subset X,\ \xi(A) = \begin{cases} 1, \text{ ja } A \in \mathcal{T} \\ 0, \text{ pretēji} \end{cases}$$

Viegli pamatot, ka šādi konstruēts attēlojums ξ ir fazificēta topoloģiska struktūra. Acīm redzams, ka pirmā aksioma ir spēkā, jo gan X, gan $\emptyset$ pieder topoloģijai un līdz ar to $\xi(X) = \xi(\emptyset) = 1$.

Ja $A, B \in \mathcal{T}$, tad arī to šķēlums $(A \cap B) \in \mathcal{T}$ un $\xi(A \cap B) = 1 = \xi(A) \wedge \xi(B)$. Savukārt, ja $(A \cap B) \notin \mathcal{T}$ tad $\xi(A \cap B) = 0$ un vismaz viena no A vai B arī nepieder $\mathcal{T}$, atticīgi $\xi(A) \wedge \xi(B) = 0$.

Ja $\forall j \in J\ A_j \in \mathcal{T}$, tad $\xi\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = 1 = \bigwedge_{j\in J} \xi(A_j)$. Savukārt, ja eksistē kāds $i \in J$, ka $A_i \notin \mathcal{T}$, tad $\bigwedge_{j\in J} \xi(A_j) = 0$ un , $\xi\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) \geq \bigwedge_{j\in J} \xi\left(A_j\right) = 0$ būs patiesa.

2.2 Atdalāmības aksiomas nestriktajās topoloģiskajās struktūrās

Aplūkosim rakstā [1] definētās atdalāmības aksiomas fazificētajās topoloģiskajās struktūrās. Atzīmēsim, ka tiek aplūkota klasisko punktu atdalāmība.

Definīcija 2.2.1. Pieņemsim, ka (X, ξ) ir fazificētas topoloģiska telpa. Tad šo fazificēto topoloģisko telpu sauc par T_0, T_1 un T_2, ja tai izpildās attiecīgie nosacījumi:

$$T_0(X,\xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \vee \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\};$$

$$T_1(X,\xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \wedge \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\};$$

$$T_2(X,\xi) = \bigwedge \left\{ \bigvee_{A \cap B = \emptyset} (N_x(A) \wedge N_y(B)) \mid x, y \in X, x \neq y \right\},$$

kur $N_x(A) = \bigvee_{x \in B \subseteq A} \xi(B)$.

Konstruēsim trīs fazificētu topoloģisku struktūru piemērus un pārbaudīsim ar katrai struktūrai ar kādu pakāpi attiecīgās atdalāmības aksiomas ir spēkā.

Piemērs 2.2.2. Ņemsim kopu $X = \{1,2,3\}$ un aplūkosim trīs dažādas topoloģijas:

$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$;

$\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$;

$\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{1,2\}\}$.

Atzīmēsim, ka $\mathcal{T}_1$ acīm redzami ir diskrētā topoloģija un tai ir spēkā klasiskā T_2 atdalāmības aksioma. $(X, \mathcal{T}_1)$ ir Hausdorfa telpa. Topoloģijai $\mathcal{T}_2$ ir spēkā tikai T_0 atdalāmības aksioma un $(X, \mathcal{T}_2)$ ir Kolmogorova telpa. Savukārt topoloģijai $\mathcal{T}_3$ nav spēkā neviena no atdalāmības aksiomām. [8]

Par pamatu ņemot šīs trīs topoloģijas, ar iepriekš aprakstīto konstrukciju, izveidosim atbilstošās fazificētas topoloģiskās struktūras ξ_1, ξ_2, ξ_3 un pārbaudīsim, vai tām ir spēkā Definīcijā 2.2.1 definētās atdalāmības aksiomas.

Pamatosim, ka uz $\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ konstruētai fazificētai topoloģiskai struktūrai ξ_1 izpildās aksiomas T_2, T_1 un T_0 ar pakāpi 1. Katriem diviem punktiem $x, y \in X$ tādiem, ka $x \neq y$ atbilstoši A un B vietā ņemsim kopas, kas katra sastāv tikai no šiem attiecīgajiem punktiem. Tā kā $\mathcal{T}_1$ ir diskrētā topoloģija, tad $N_x(A) = 1$ katram $A \subset X: x \in A$ un analoģiski $N_y(B) = 1$. Tādēļ

$$T_2(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \bigvee_{A \cap B = \emptyset} (N_x(A) \wedge N_y(B)) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 1;$$

$$T_1(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \wedge \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 1;$$

$$T_0(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \vee \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 1.$$

Pamatosim, ka uz $\mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}$ konstruētai fazificētai topoloģiskai struktūrai ξ_2 tikai aksioma T_0 izpildās ar pakāpi 1. Izvēloties jebkuru punktu pāri $x, y \in X$, kur $x \neq y$, un atbilsotšāss kopas $A: x \in A$ un $B: y \in B$ un $A \cap B = \emptyset$, vismaz viena kopa A vai B būs tāda, kura nepieder topolģijai. Attiecīgi $N_x(A) = 0$ vai $N_y(B) = 0$. Šajā gadījumā pat neprasot, lai šķēlums būtu tukša kopa, vismaz viena no kopām nepiederēs topoloģijai. Tas nozīmē arī to, ka $\bigvee_{y \notin A} N_x(A) = 0$ vai $\bigvee_{x \notin B} N_y(B) = 0$. Un līdz ar to

$$T_2(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \bigvee_{A \cap B = \emptyset} (N_x(A) \wedge N_y(B)) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 0$$

$$T_1(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \wedge \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 0$$

Izvēloties jebkuru punktu pāri $x, y \in X$, kur $x \neq y$, un atbilstošās kopas $A: x \in A, y \notin A$ un $B: y \in B, x \notin B$, vismaz viena kopa A vai B būs tāda, kura pieder topolģijai $\mathcal{T}_2$ (pieņemsim, ka $A \in \mathcal{T}_2$) un otra noteikti nepiederēs. Tātad $N_x(A) = 1$, bet $N_y(B) = 0$. Tas nozīmē arī to, ka $\bigvee_{y \notin A} N_x(A) = 1$ vai $\bigvee_{x \notin B} N_y(B) = 0$. Līdz ar to

$$T_0(X, \xi) = \bigwedge \left\{ \left(\bigvee_{y \notin A} N_x(A) \right) \vee \left(\bigvee_{x \notin B} N_y(B) \right) \mid x, y \in X, x \neq y \right\} = 1$$

Pamatosim, ka uz $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{1,2\}\}$ konstruētai fazificētai topoloģiskai struktūrai ξ_3 visas trīs aksiomas izpildās ar pakāpi 0. Ņemot jebkuru punktu pāri $x, y \in X$, kur $x \neq y$, un atbilstošās kopas $A: x \in A, y \notin A$ un $B: y \in B, x \notin B$, kopas A un B nepiederēs topoloģijai $\mathcal{T}_3$. Tātad $N_x(A) = 0$, un $N_y(B) = 0$. Līdz ar to

$$T_2(X, \xi) = T_1(X, \xi) = T_0(X, \xi) = 0$$

Redzam, ka aplūkotajos piemēros nav pretrunas ar to, kāda atdalāmības aksioma ir spēkā pamata topoloģijā un tās fazificētajā topoloģiskajā struktūrā.

3. L-NESTRIKTAS TOPOLOĢISKAS TELPAS

Šajā nodaļā aplūkosim topoloģiskās struktūras fazifikāciju, kur topoloģiju veido nestriktu kopu saime.

3.1 Definīcijas un piemēri

Ja iepriekšējā nodaļā tika aplūkotas kopas parastās apakškopas ($A \subset X$), tad šajā nodaļā strādāsim ar nestriktām apakškopām ($A: X \to L$). Apzīmējumi atstāti līdzīgi, lai uzsvērtu analoģijas definīcijās.

Definīcija 3.1.1. [1] Par L-nestriktu topoloģiju kopā X sauc attēlojumu $\tau: L^X \to L$ tādu, ka

(1) $\tau(\underline{1}) = \tau(\underline{0}) = 1$;

(2) $\forall\, U, V \in I^X, \tau(U \wedge V) \geq \tau(U) \wedge \tau(V)$;

(3) $\forall U_j \in I^X, j \in J, \tau\left(\bigvee_{j \in J} U_j\right) \geq \bigwedge_{j \in J} \tau(U_j)$.

Vērtība $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{U})$ tiek interpretēta kā pakāpe, ar kuru nestrikta kopa $\boldsymbol{U}$ ir vaļēja L-nestriktajā topoloģijā $\boldsymbol{\tau}$. Pāri $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\tau})$ sauc par L-nestriktu topoloģisku telpu.

Lai konstruētu L-nestriktu topoloģiju kopā X, izmantosim parasto nestrikto topoloģiju kopā X. Priekš tā ir nepieciešams atgādināt nestriktās topoloģijas definīciju.

Definīcija 3.1.2. [9] Par nestrikto topoloģiju kopā X sauc tās nestrikto apakškopu saimi $\mathcal{T} \subset L^X$, kurai izpildās sekojošās īpašības:

(1) $\underline{0} \in \mathcal{T}$ un $\underline{1} \in \mathcal{T}$;

(2) Ja $U \in \mathcal{T}$ un $V \in \mathcal{T}$, tad $U \wedge V \in \mathcal{T}$;

(3) Ja $U_i \in \mathcal{T}$ $\forall i \in J$, tad $\bigvee\{U_i : i \in J\} \in \mathcal{T}$,

kur $\underline{1}: X \to 1$ un $\underline{0}: X \to 0$ ir konstantas funkcijas.

Aplūkosim vienkāršu veidu, kā konstruēt L-nestriktu topoloģiju $\tau: L^X \to L$, par pamatu ņemot parasto nestrikto topoloģiju $\mathcal{T}$, kura ir nestriktu kopu saime.

Konstruējot attēlojumu τ, katrai nestriktai kopai no $\mathcal{T}$ tiks piekārtots 1, bet pārējām nestriktām kopām 0.

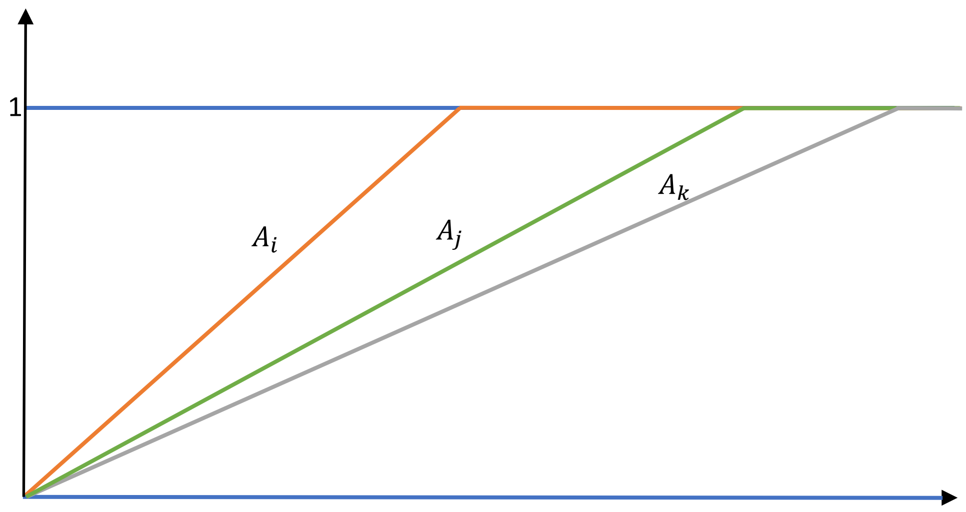
$\tau: L^X \to L$ tāds, ka $\forall A \in L^X$ $\tau(A) = \begin{cases} 1, \text{ja } A \in \mathcal{T} \\ 0, \text{pretēji} \end{cases}$

Tālāk parādīti divi L-nestriktu topoloģiju piemēri.

Piemērs 3.1.3. Lai konstruētu nestrikto topoloģiju kopā $X = [0, +\infty)$, vispirms definēsim nestriktu kopu saimi $\{A_i | i \in J\}$, kur katram $i \in J$ izpildās

$$A_i(x) = \begin{cases} k_i x, \text{ja } x \leq \dfrac{1}{k_i}, k_i > 0 \\ 1, \text{pretējā gadījumā} \end{cases}$$

$\mathcal{T}_1 = \{A_i | i \in J\} \cup \{\underline{0}\} \cup \{\underline{1}\}$ (skatīt 3.1. attēlu)



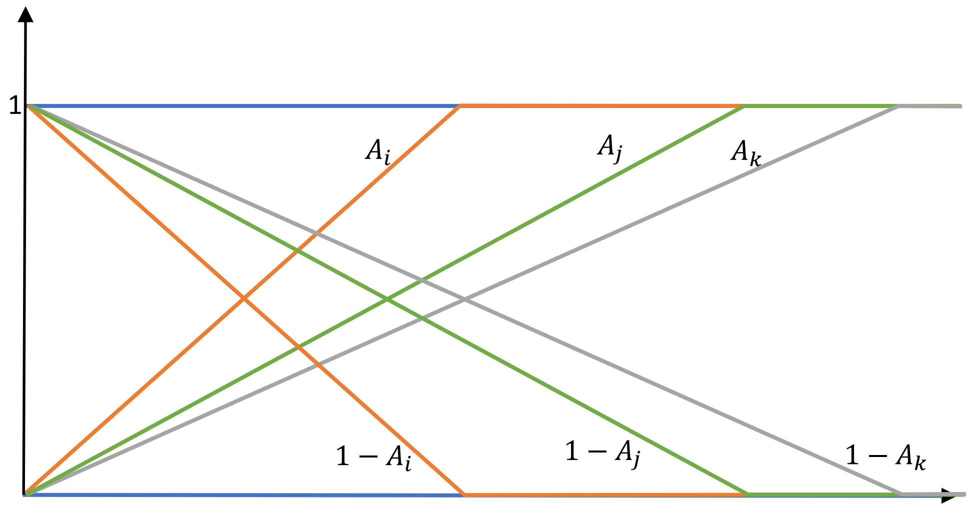
3.1. att. **Nestriktā topoloģija $\mathcal{T}_1$**

Uzskatāmi 3.1. attēlā redzams, ka jebkuru divu nestriktu kopu, kuras ņemtas no šīs saimes, šķēlums arī piederēs saimei, un jebkuru apakšsaimju apvienojums piederēs šai saimei. Ņemot vērā, ka saimei $\mathcal{T}_1$ pieder $\{\underline{0}\}$ un $\{\underline{1}\}$, varam teikt, ka tā ir nestrikta topoloģija.

Piemērs 3.1.4. Tā kā iepriekš aplūkotajā topoloģijā trūka nestriktas kopas, kuras uzdotas ar dilstošām funkcijām, aplūkosim vēl vienu piemēru, kur topoloģijas $\mathcal{T}_2$ priekšbāzi veido saime $\mathcal{C} = \{A_i | i \in J\} \cup \{1 - A_i | i \in J\}$ (skatīt 3.2 attēlu.), kur

$$A_i(x) = \begin{cases} k_i x, \text{ ja } x \leq \dfrac{1}{k_i}, k_i > 0 \\ 1, \text{ pretējā gadijumā} \end{cases}$$

Topoloģijas $\mathcal{T}_2$ bāzi konstruējam, ņemot galīgā skaitā nestriktas kopas no priekšbāzes $\mathcal{C}$ un tā šķeļot. Savukārt pašu topoloģiju $\mathcal{T}_2$ iegūstam, ņemot visus iespējamos bāzes nestriktu kopu apvienojumus.



3.2. att. **Nestriktā topoloģija $\mathcal{T}_2$**

3.2 Atdalāmības aksiomas L-nestriktajā topoloģiskajā telpā

Apakšnodaļā aplūkotās atdalāmības aksiomas raksturo klasisko punktu atdalāmību L-nestriktajā topoloģiskajā telpā.

Definīcija 3.2.1. [1] Pieņemsim, ka (X, τ) ir L-nestrikta topoloģiska telpa. Tad

(1) Pakāpe, pēc kuras telpā (X, τ) divi atšķirīgi punkti $x, y \in X, x \neq y$ ir *IF-T₀* atdalīti, tiek definēta kā

$$IF\text{-}T_0(x, y) = \bigvee_{U(x) \neq U(y)} \tau(U)$$

Pakāpe, ar kuru L-nestriktā topoloģiskā telpa (X, τ) ir *IF-T₀*, tiek definēta kā

$$IF\text{-}T_0(X, \tau) = \bigwedge_{x, y \in X, x \neq y} IF\text{-}T_0(x, y)$$

(2) Pakāpe, pēc kuras telpā (X, τ) divi atšķirīgi punkti $x, y \in X, x \neq y$ ir *KF-T₁* atdalīti, tiek definēta kā

$$KF\text{-}T_1(x,y) = \left(\bigvee_{U(x)>U(y)} \tau(U)\right) \wedge \left(\bigvee_{V(y)>V(x)} \tau(V)\right)$$

Pakāpe, ar kuru L-nestriktā topoloģiskā telpa (X,τ) ir *KF-T₁*, tiek definēta kā

$$KF\text{-}T_1(X,\tau) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} KF\text{-}T_1(x,y)$$

(3) Pakāpe, pēc kuras telpā (X,τ) divi atšķirīgi punkti $x,y \in X, x \neq y$ ir *KF-T₂* atdalīti, tiek definēta kā

$$KF\text{-}T_2(x,y) = \bigvee_{(U,V)\in\mathcal{D}_0(x,y)} \big(\tau(U) \wedge \tau(V)\big)$$

kur $\mathcal{D}_0(x,y) = \{(U,V) \in I^X \times I^X | U(x) > U(y), V(y) > V(x) \; \& \; U \leq V'\}$

Pakāpe, ar kuru L-nestriktā topoloģiskā telpa (X,τ) ir *KF-T₂*, tiek definēta kā

$$KF\text{-}T_2(X,\tau) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} KF\text{-}T_2(x,y)$$

Piemērs 3.2.2. Pārbaudīsim, ar kādu pakāpi no piemērā 3.1.3 aprakstītās topoloģijas $\mathcal{T}_1 = \{A_i | i \in J\} \cup \{\underline{0}\} \cup \{\underline{1}\}$, kur

$$A_i(x) = \begin{cases} k_i x, \text{ja } x \leq \dfrac{1}{k_i}, k_i > 0 \\ 1, \text{pretējā gadijumā} \end{cases},$$

konstruētai L-nestriktai topoloģijai ir spēkā ir spēkā augstāk minētās atdalāmības aksiomas.

No nestriktās topoloģijas $\mathcal{T}_1$, izmantojot iepriekš atrunāto tehniku, konstruējam L-nestriktu topoloģiju $\tau_1 : L^X \to L$ šādi

$$\tau_1(A) = \begin{cases} 1, \text{ja } A \in \mathcal{T}_1 \\ 0, \text{pretēji} \end{cases}.$$

Pārbaudīsim ar kādu pakāpi L-nestriktai topoloģijai τ_1 ir spēkā katra no augstāk minētajām aksiomām.

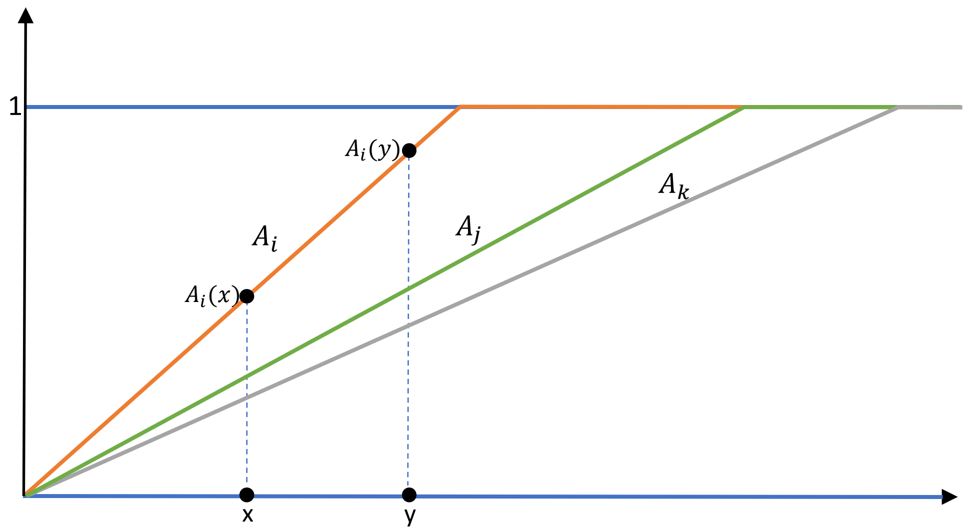
Katram punktu pārim $x,y \in X, x \neq y$ varam atrast tādu nestriktu kopu $U \in \mathcal{T}_1$, ka $U(x) \neq U(y)$. Un atbilstoši $\tau_1(U) = 1$. Līdz ar to

$$IF\text{-}T_0(x,y) = \bigvee_{U(x)\neq U(y)} \tau_1(U) = 1.$$

Tātad, secinām, ka

$$IF\text{-}T_0(X,\tau_1) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} IF - T_0(x,y) = 1.$$

Pārbaudīsim, ar kādu pakāpi ir spēkā *KF-T₁*.



3.3. att. **Punktu piederība $\mathcal{T}_1$**

Uzskatāmi 3.3. attēlā redzams, ka par pamatu ņemtajā nestriktajā topoloģijā $\mathcal{T}_1$ nav iespējams atrast nestriktu kopu pāri U, V, kur reizē izpildās, ka $U(x) > U(y)$ un $V(x) < V(y)$.

Ir viegli atrast kopu V, kas pieder topoloģijai $\mathcal{T}_1$, un kur katram pārim x, y tādam, ka $x < y$, būs spēkā $V(x) < V(y)$. Līdz ar to

$$\bigvee_{V(x)<V(y)} \tau_1(V) = 1.$$

Atzīmēsim, ka visas nestriktas kopas topoloģijā $\mathcal{T}_1$ ir nedilstošas. Tāpēc punktu pārim $x, y \in X, x \neq y$ nevar atrast tādu otru nestriktu kopu $U \in \mathcal{T}_1$, kur izpildās, ka $U(x) > U(y)$. Līdz ar to

$$\bigvee_{U(x)>U(y)} \tau_1(U) = 0.$$

Attiecīgi arī

$$KF\text{-}T_1(x, y) = \left(\bigvee_{U(x)>U(y)} \tau_1(U) \right) \wedge \left(\bigvee_{V(x)<V(y)} \tau_1(V) \right) = 0$$

No kā izriet, ka

$$KF\text{-}T_1(X, \tau_1) = \bigwedge_{x,y \in X, x \neq y} KF\text{-}T_1(x, y) = 0$$

Pārbaudīsim, ar kādu pakāpi L-nestriktā topoloģija τ_1 ir *KF-T*$_2$. Meklējot nestriktās kopas U, V, vienu no tām var atrast tādu, lai tā piederētu topoloģijai $\mathcal{T}_1$ (piemēram, $U \in \mathcal{T}_1$), bet otra nestriktā kopa noteikti nepiederēs topoloģijai ($V \notin \mathcal{T}_1$). Līdz ar to $\tau_1(U) = 1$, bet $\tau_1(V) = 0$. Un aprēķinot

$$KF\text{-}T_2(x,y) = \bigvee_{(U,V)\in\mathcal{D}_0(x,y)} \big(\tau_1(U) \wedge \tau_1(V)\big) = 0,$$

kur $\mathcal{D}_0(x,y) = \{(U,V) \in L^X \times L^X | U(x) > U(y), V(x) < V(y) \,\&\, U \leq V^c\}$

Un no tā izrit, ka

$$KF\text{-}T_2(X,\tau_1) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} KF\text{-}T_2(x,y) = 0$$

Piemērs 3.2.3. Apskatīsim piemērā 3.1.4 definēto nestrikto topoloģiju $\mathcal{T}_2$ ar priekšbāzi $\mathcal{C} = \{A_i | i \in J\} \cup \{1 - A_i | i \in J\}$ (skatīt 3.2. attēlu), kurā

$$A_i(x) = \begin{cases} k_i x, \text{ ja } x \leq \dfrac{1}{k_i}, k_i > 0 \\ 1, \text{pretējā gadījumā} \end{cases}.$$

No nestriktās topoloģijas $\mathcal{T}_2$, konstruējam L-nestriktu topoloģiju $\tau_2 \colon L^X \to L$ tādu, ka

$$\tau_2(A) = \begin{cases} 1, \text{ ja } A \in \mathcal{T}_2 \\ 0, \text{pretēji} \end{cases}.$$

Acīm redzams, ka šī L-nestriktā topoloģija τ_2 būs *IF-T0* ar pakāpi 1, tas ir

$$IF\text{-}T_0(X,\tau_2) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} IF\text{-}T_0(x,y) = 1,$$

jo pamatā ņemtā nestriktā topoloģija $\mathcal{T}_2$ satur visas iepriekšējā piemērā apskatītās topoloģijas $\mathcal{T}_1$ nestriktās kopas.

Tālāk pārbaudīsim, ar kādu pakāpi L-nestriktā topoloģija τ_2 ir *KF-T1*.

Apskatīsim kādu nestriktu kopu pāri U, V, kur $V \in \mathcal{T}_2$ (piemēram, $V = A_i$) un $U = V^c$. Katram punktu pārim x, y kur $x < y$ var atrast $V \in \mathcal{T}_2$: $V(x) < V(y)$ un $U = 1 - V \in \mathcal{T}_2$: $U(x) > U(y)$. Līdz ar to

$$\bigvee_{U(x)>U(y)} \tau_2(U) = 1 \text{ un } \bigvee_{V(x)<V(y)} \tau_2(V) = 1$$

No kā savukārt izriet, ka

$$KF\text{-}T_1(x,y) = \left(\bigvee_{U(x)>U(y)} \tau_2(U)\right) \wedge \left(\bigvee_{V(x)<V(y)} \tau_2(V)\right) = 1.$$

Tātad

$$KF\text{-}T_1(X,\tau_2) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} KF\text{-}T_1(x,y) = 1.$$

Pārbaudīsim, ar kādu pakāpi L-nestriktā topoloģija τ_2 ir *KF-T2*.

Apskatīsim kādu nestriktu kopu pāri U, V, kur $V = A_i \in \mathcal{T}_2$ un $U = V^c$. Katram punktu pārim x, y kur $x < y$ var atrast $V \in \mathcal{T}_2$: $V(x) < V(y)$ un $U = 1 - V$: $U(x) > U(y)$. No tā, kā tika izvēlēta nestrikta kopu U izriet, ka $U = V^c \in \mathcal{T}_2$.

$$KF\text{-}T_2(x,y) = \bigvee_{(U,V)\in\mathcal{D}_0(x,y)} \big(\tau_2(U) \wedge \tau_2(V)\big) = 1,$$

kur $\mathcal{D}_0(x,y) = \{(U,V) \in L^X \times L^X | U(x) > U(y), V(x) < V(y)\ \&\ U \leq V^c\}$.

Un no tā

$$KF\text{-}T_2(X,\tau_2) = \bigwedge_{x,y\in X, x\neq y} KF\text{-}T_2(x,y) = 1.$$

Ir skaidri redzams, ka katram $x \neq y$, *KF-T₂(x,y) ≤ KF-T₁(x,y) ≤ IF-T₀(x,y)*, līdz ar to *KF-T₂(X,τ) ≤ KF-T₁(X,τ) ≤ IF-T₀(X,τ)*. Zināms, ka šīs nevienādības nav atgriezeniskas L-nestriktām topoloģiskām telpām.

Piemērs 3.2.4. [1] Pieņemsim, ka X ir bezgalīga kopa un $\tau_3: L^X \to L$ tiek definēts sekojoši:

$$\tau_3(A) = \begin{cases} 1, A = \underline{0}, \underline{1} \\ \frac{1}{2}, A \text{ tāds, ka } \{x | A(x) = 0\} \text{ ir galīga kopa} \\ 0, \text{pretējā gadījumā} \end{cases}$$

Attēlojums τ_3 ir L-nestrikta topoloģija kopā X. To var interpretēt kā ko-galīgas topoloģijas analogu. Pēc formulas atdalāmības pakāpe *IF-T₂*$(X, \tau_3) = \frac{1}{2}$. Ja par pamatu ņem ko-galīgu topoloģiju kopā X un konstruē atbilstošo fazificēto topoloģisko struktūru ξ_3

$$\xi_3(A) = \begin{cases} 1, \quad A = X, \ \ A = \emptyset; \\ \frac{1}{2}, A \text{ tāda, ka } \{x | x \in X \backslash A\} \text{ ir galīga kopa;} \\ 0, \text{pretējā gadījumā.} \end{cases}$$

Viegli pārbaudīt, ka attēlojumam ξ_3 izpildās fazificētas topoloģiskās struktūras aksiomas, kaut arī kopām ar galīgu papildinājumu tika piekārtota vērtība $\frac{1}{2}$.

Pēc formulas aprēķina *T₂*$(X, \xi_3) = 0$. Tad *IF-T₂*$(X, \tau_3) >$ *T₂*(X, ξ_3).

3.3 L-nestrikto topoloģisko telpu konstruēšana ar vaļējības pakāpes operatoru

Tālāk aplūkosim, kā konstruēt netriviālas L-nestriktās topoloģijas, kurām par pamatu ņemtas dotās topoloģijas no nestriktām kopām.

Darba pirmajā nodaļā atzīmējām, ka L ir piederības pakāpju skala. Līdz šim $L = [0; 1]$.

Lai īstenotu vispārīgāku konstrukciju, skalas L lomā ņemsim pilnu bezgalīgi distributīvu režģi, kur maksimālo un minimālo elementu attiecīgi apzīmēsim ar 0 un 1.

Atgādināsim, ka režģi L sauc par pilnu, ja katrai tā elementu saimei $\{a_i : i \in I\} \subset L$ eksistē suprēms $\vee \{a_i : i \in I\}$ un infīms $\wedge \{a_i : i \in I\}$, bet par bezgalīgi distributīvu, ja katrai saimei $\{a_i : i \in I\} \subset L$ un katram $b \in L$ būs spēkā $(\wedge_i a_i) \vee b = \wedge_i (a_i \vee b)$ un $(\vee_i a_i) \wedge b = \vee_i (a_i \wedge b)$ [10]

Tāpat nepieciešams režģa L struktūru papildināt ar involūciju, t.i., attēlojumu $^c : L \to L$ tādu, ka katriem $a, b \in L : a \leq b\ būs\ spēkā\ b^c \leq a^c\ un\ (a^c)^c$.

Šajā L-nestriktās topoloģijas konstrukcijā, tāpat kā iepriekš, nestriktajām kopām no dotās nestriktās topoloģijas tiks piemērota maksimālā atvērtības pakāpe 1. Lai noteiktu, cik lielā mērā ir vaļējas pārējās nestriktās kopas, būtu dabīgi izmērīt to iekļaušanās pakāpi savā iekšienē.

Nestriktas kopas iekšieni nestriktajā topoloģijā definē analoģiski kā klasiskajā topoloģijā, un varam teikt, ka nestriktas kopas iekšiene ir tās lielākā vaļējā nestrikto apakškopa.

Definīcija 3.3.1. [9] Dota nestrikta topoloģiska telpa $(X, \mathcal{T})$ un nestrikta kopa $A \in L^X$. Nestriktās kopas A iekšieni $Int(A)$ definē

$$Int(A) = \bigvee \{ U | U \in \mathcal{T}, U \leq A \}.$$

Nestriktu kopu iekšienei ir spēkā sekojošas īpašības:

(1) $\boldsymbol{Int(\underline{1}) = \underline{1}}$;

(2) $\boldsymbol{Int(\underline{0}) = \underline{0}}$;

(3) $\boldsymbol{Int(A) \leq A}$;

(4) $\boldsymbol{Int\ (A \wedge B) = Int(A) \wedge Int(B)}$;

(5) $\boldsymbol{Int\ (Int(B)) = Int(B)}$.

Lai definēt nestriktu kopu iekļaušanas operatoru, nepieciešams režģa L struktūru papildināt ar implikatoru.

Definīcija 3.3.2. [10] Pieņemsim, ka $(L, \leq, \vee, \wedge)$, ir pilns bezgalīgi distributīvs režģis. Bināru operatoru $\longmapsto : L \times L \to L$ sauc par implikatoru, ja tam izpildās

(1) $0 \longmapsto 0 = 0 \longmapsto 1 = 1 \longmapsto 1 = 1$ un $1 \longmapsto 0 = 0$

(2) $a \longmapsto b_1 \geq a \longmapsto b_2$, katram $a, b_1, b_2 \in L$ un $b_1 \leq b_2$

(3) $a_1 \longmapsto b \geq a_2 \longmapsto b$, katram $a, b_1, b_2 \in L$ un $a_1 \leq a_2$

Šo operatoru sauc par nepārtrauktu, ja tam izpildās

(4) $a \longmapsto \vee_{i \in J} b_i = \wedge_{i \in J} (a \longmapsto b_i)$, katram $a, b_i \in L, i \in J$

(5) $\left(\vee_{i \in J} a_i\right) \longmapsto b = \wedge_{i \in J} (a_i \longmapsto b)$, katram $a_i, b \in L, i \in J$.

Viens no piemēriem, kā definēt implikatoru $\longmapsto$ pilnā režģī $(L, \leq, \vee, \wedge, {}^c)$, kura struktūra papildināta ar involūciju ^{c}, ir ar Klīni-Dinesa formulu $a \longmapsto b = a^c \vee b \quad \forall a, b \in L$. Savukārt, ja $L = [0; 1]$ un $\forall a \in L: a^c = 1 - a$, tad $\forall a, b \in L \quad a \longmapsto b = (1 - a) \vee b$.

Tālāk aplūkojam iekļaušanas operatora $\hookrightarrow: L^X \to L^X$ definīciju.

Definīcija 3.3.3. [11], [12], [13] Dotas divas nestriktas kopas $A, B \in L^X$. Pakāpi, ar kuru kopa A iekļaujas kopā B definē sekojoši:

$$A \hookrightarrow B = \bigwedge_{x \in X} \big(A(x) \longmapsto B(x)\big).$$

Iekļaušanas operatoram ir spēkā sekojošas īpašības:

(1) $\bigvee_{i \in J} A_i \hookrightarrow B = \bigwedge_{i \in J} (A_i \hookrightarrow B)$, katram $\{A_i | i \in J\} \subset L^X$, katram $B \in L^X$

(2) $A \hookrightarrow \left(\bigwedge_{i \in J} B_i\right) = \bigwedge_{i \in J} (A \hookrightarrow B_i)$, katram $A \in L^X$, katram $\{B_i | i \in J\} \subset L^X$

(3) $A \hookrightarrow B = 1$, ja $A \leq B$;

(4) $A_1 \leq A_2 \Rightarrow A_1 \hookrightarrow B \geq A_2 \hookrightarrow B$;

(5) $B_1 \leq B_2 \Longrightarrow A \hookrightarrow B_1 \leq A \hookrightarrow B_2$;

(6) $\left(\bigwedge_{i \in J} A_i\right) \hookrightarrow \left(\bigwedge_{i \in J} B_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (A_i \hookrightarrow B_i)$, katram $\{A_i : i \in J\}, \{B_i : i \in J\} \subset L^X$;

(7) $\left(\bigvee_{i \in J} A_i\right) \hookrightarrow \left(\bigvee_{i \in J} B_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (A_i \hookrightarrow B_i)$ katram $\{A_i : i \in J\}, \{B_i : i \in J\} \subset L^X$.

Tālāk, ar iekļaušanas operatoru, tiek definēta nestrikto kopu atvērtības pakāpe.

Definīcija 3.3.4. [14] Pakāpi, ar kādu nestriktā kopa $A \subset L^X$ ir vaļēja L-nestrikā topoloģiskā telpā (X, τ), definē sekojoši:

$$\mathcal{O}^+(A) = A \hookrightarrow Int(A).$$

Teorēma 3.3.5. Attēlojums $\mathcal{O}^+: L^X \to L$ ir L-nestrikta topoloģiska telpa kopā X.

Pierādījums. No iekļaušanas operatora definīcijas izriet, ka

$$A \hookrightarrow Int(A) = \bigwedge_{x \in X} \Big(A(x) \longmapsto Int\big(A(x)\big)\Big).$$

Parādīsim, ka attēlojumam $\mathcal{O}^+: L^X \to L$ ir spēkā L-nestriktas topoloģijas aksiomas, kas tika aprakstītas definīcijā 3.3.1.

Pamatojoties uz nepārtraukta implikatora definīciju 3.3.2 mēs iegūstam, ka $\mathcal{O}^+\big(\underline{0}\big) = 1$ un $\mathcal{O}^+\big(\underline{1}\big) = 1$. Tātad pirmā L-nestriktas topoloģijas aksioma ir spēkā.

Zinot, ka $Int(A \wedge B) = Int(A) \wedge Int(B)$, katram $A, B \in L^X$, iegūstam sekojošo vienādību

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^+(A \wedge B) &= (A \wedge B) \hookrightarrow Int(A \wedge B) = (A \wedge B) \hookrightarrow \big(Int(A) \wedge Int(B)\big) \\ &\geq \big(A \hookrightarrow Int(A)\big) \wedge \big(B \hookrightarrow Int(B)\big) = \mathcal{O}^+(A) \wedge \mathcal{O}^+(B). \end{aligned}$$

No šī izriet, ka arī otrā L-nestriktas topoloģijas aksioma ir spēkā.

Lai pamatotu trešo aksiomu, vispirms atzīmēsim, ka

$$Int\left(\bigvee_{i\in J} A_i\right) \geq \bigvee_{i\in J} Int(A_i)\text{, katram } A_i \in L^X, i \in J.$$

No tā tiek iegūta sekojoša vienādība

$$\mathcal{O}^+\left(\bigvee_{i\in J} A_i\right) = \left(\bigvee_{i\in J} A_i\right) \hookrightarrow Int\left(\bigvee_{i\in J} A_i\right) \geq \left(\bigvee_{i\in J} A_i\right) \hookrightarrow \left(\bigvee_{i\in J} Int(A_i)\right)$$
$$= \bigwedge_{i\in J}\big(A_i \hookrightarrow Int(A_i)\big) = \bigwedge_{i\in J} \mathcal{O}^+(A_i).$$

Tātad arī trešā aksioma ir spēkā. Līdz ar to attēlojums $\mathcal{O}^+ : L^X \to L$ ir L-nestrikta topoloģiska telpa kopā X.

□

Izmantojot vaļējības pakāpes operatoru $\mathcal{O}^+$ un nestriktās topoloģijas, ir iespējams konstruēt bagātākas L-nestriktās topoloģiskās telpas, kur vaļējības pakāpe katrai nestriktai kopai tiks aprēķināta pēc formulas un var atšķirties no 0 vai 1. Tā kā nestriktās kopas, kas pēc triviālās konstrukcijas piederēja L-nestriktajai topoloģijai ar pakāpi 1, arī šajā konstrukcijā pieder L-nestriktajai topoloģijai ar pakāpi 1, varam secināt, ka

(1) atdalāmības pakāpe atbilstoši jaunajai konstrukcijai būs maksimālā, ja tā pēc triviālās konstrukcijas bija maksimālā;

(2) citādi atdalāmības pakāpe var mainīties un būs atkarīga no tā, kāds implikators ir izmantots konstrukcijā.

NOBEIGUMS

Darbs veltīts atdalāmības aksiomām nestriktās topoloģiskās struktūrās. Analizētas rakstā [atsauce] definētās atdalāmības aksiomas, kuras klasisko punktu atdalāmību, ja tiek fazificēta topoloģijas struktūra klasiskai topoloģijai (t.i., apakškopu saimei), gan nestriktai topoloģijai (t.i., nestriktu apakškopu saimei). Būtiska darba daļa ir fazificētas topoloģijas struktūras un L-nestriktas topoloģijas konstrukciju apraksts. Katra no konstrukcijām ilustrētas ar vairākiem piemēriem. Aprēķinātas pakāpes ar kādām ir spēkā aprakstītās atdalāmības aksiomas.

Jāatzīst, ka darbā netika aplūkotas atdalāmības aksiomas, kuras raksturotu nestriktu punktu atdalāmību. Neizdevās realizēt rakstā [1] doto nestrikto punktu atdalāmības aksiomu konstrukciju to neprecīzā un kļūdainā apraksta dēļ.

Tā ir laba motivācija, lai darbu turpinātu, piedāvājot korektas aksiomu konstrukcijas nestriktu punktu atdalāmības raksturošanai.

IZMANTOTĀ LITERATŪRA UN AVOTI

[1] H.-Y. Li un F.-G. Shi, «Some Separation Axioms in I-Fuzzy Topological Spaces,» *Fuzzy Sets and Systems,* sēj. 159, p. 573–587, 2008.

[2] A. Šostaks, L-kopas un L-vērtīgas struktūras, Riga: SIA "Mācību grāmata", 2003.

[3] C. De Mitri un E. Pascali, «Characterization of fuzzy topologies from neighborhoods of fuzzy points,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* sēj. 93, nr. 1, pp. 1-14, 1983.

[4] M. Sarkar, «On fuzzy topological spaces,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* sēj. 79, nr. 2, pp. 384-394, 1981.

[5] C. Wong, «Fuzzy points and local properties of fuzzy topology,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* sēj. 46, nr. 2, pp. 316-328, 1974.

[6] P. Pao-Ming un L. Ying-Ming, «Fuzzy topology. I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* sēj. 79, nr. 2, pp. 571-599, 1980.

[7] R. Engelking, General Topology, Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[8] I. Bullīte, *Zemākās atdalāmības aksiomas nestriktajā topoloģijā,* Riga: B.S. Theses, 2016.

[9] C. Chang, «Fuzzy topological spaces,» *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* sēj. 24, nr. 1, pp. 182-190, 1968.

[10] G. Birkhoff, Lattice Theory, AMS Providence, RI.1995.

[11] W. Bandler un L. Kohout, «Fuzzy power sets and fuzzy implication operators,» *Fuzzy Sets and Systems,* sēj. 4, nr. 1, pp. 13-30, 1980.

[12] C. Cornelis, C. Van der Donck un E. Kerre, «Sinha–Dougherty approach to the fuzzification of set inclusion revisited,» *Fuzzy Sets and Systems,* sēj. 134, nr. 2, pp. 283-295, 2003.

[13] A. Kehagias un M. Konstantinidou, «L-fuzzy valued inclusion measure, L-fuzzy similarity and L-fuzzy distance,» *Fuzzy Sets and Systems,* sēj. 136, nr. 3, pp. 313-332, 2003.

[14] A. Šostaks un I. Uļjane, «Extending L-Topologies to Bipolar L-Fuzzy Topologies,» *Fuzzy Sets and Systems,* 2023.

Maģistra darbs “Atdalāmības aksiomas L-nestriktās topoloģiskās telpās” izstrādāts LU Fizikas, matemātikas un optometrijas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.
Autors: Ieva Bullīte

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai
Vadītāja: Asoc. profesore, Dr. math. Ingrīda Uļjane

Recenzents: Dr. Habil. Math. Aleksandrs Šostaks

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā __.06.2023.
Dekāna pilnvarotā persona: vecākā metodiķe Inita Šneidere

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē
26.06.2023. prot. Nr._____
Komisijas sekretārs: docents Jānis Bajārs