PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE
ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

# ZINĀTNISKIE RAKSTI
# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS 47 TOM

RIGĀ 1963 РИГА

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTE

ЛАТВИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕТРА СТУЧКИ

# ZINĀTNISKIE RAKSTI
# УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

SĒJUMS 47 ТОМ

RĪGĀ 1963 РИГА

Pētera Stučkas
Latvijas Valsts universitātes
SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI

ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
Латвийского
государственного университета
имени Петра Стучки

1. laidiens ○ Выпуск 1

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателя предлагается первый сборник трудов Вычислительного центра Латвийского Государственного университета им. П. Стучки, организованного в 1959 г. на правах научно-исследовательского математического института. Деятельность Центра развивается в двух направлениях: в направлении решения конкретных прикладных задач на электронных цифровых вычислительных машинах и в направлении теоретическом. Работы специфически связанные с использованием электронных цифровых вычислительных машин и содержащие как разработанные программы решения ряда задач, так и результаты численных расчетов, предполагается опубликовать во втором, намеченном к изданию, сборнике трудов Центра. В первый же сборник трудов Центра включены, в основном, лишь теоретические работы, выполненные работниками Центра и физико-математического факультета ЛГУ им. П. Стучки.*

*Аринь Э. И.*
Директор Вычислительного центра

---

* В сборник включено несколько работ, выполненных работниками Центра до его организации.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47. 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*Г. К. Энгелис*

# О БИОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Известно, что теория ортогональных полиномов одного аргумента не допускает простого обобщения на случай двух аргументов. Основное затруднение вызывается тем, что множество мономов $x^i y^j$ нельзя естественным образом расположить в простую последовательность, а процесс ортогонализации Э. Шмидта применим только к последовательностям. Ясно, что такое положение характерно не только для указанного множества мономов, но для любой кратной последовательности.

Д. Джексоном ([2], [3], [4], [5]; см. также обзор в [1]) была построена теория ортогональных полиномов нескольких аргументов используя некоторый двухшаговый процесс ортогонализации. Для этого данная кратная последовательность рассматривается как простая последовательность некоторых конечных своих подмножеств (сегментов); порядок элементов внутри сегмента не уточняется. На первом шагу для каждого элемента строится линейная комбинация из этого элемента и всех элементов предыдущих сегментов, при чем требуется, чтобы эта комбинация была ортогональна ко всем элементам предыдущих сегментов. На втором шагу построенные на первом шагу линейные комбинации, соответствующие элементам одного сегмента, ортогонализуются между собой. Второй шаг не дает однозначного результата; поэтому процесс Джексона дает (при определенной весовой функции) бесконечно много равноправных систем ортогональных полиномов.

В настоящей статье рассматривается другой вариант процесса Шмидта. Основная идея заключается в том, что для построении текущего члена $P_{ij}$ новой, «ортогонализованной» кратной последовательности необходимо знать: 1) какие элементы исходной последовательности $\{p_{ij}\}$ можно использовать; 2) какими свойствами ортогональности должен обладать $P_{ij}$. Естественный ответ на эти вопроса получается, если множество $\{p_{ij}\}$ считать частично упорядоченным. § 1 содержит (теорема 3) необходимые и достаточные условия для возможности такой ортогонализации (при этом рассматривается несколько более общая задача биортогонализации двух последовательностей). Эти условия оказываются довольно жесткими, ортогонализация возможна только в исключительных случаях, но результат обычно будет однозначным. В § 2 показано, что в случае исходной последовательности $\{x^{ij}\}$ рассматриваемый процесс приводит к интересным биортогональным системам полиномов (полиномы Аппеля и др.), не охватываемым теорией Джексона.

## § 1.

1. Рассмотрим множество $M$ всех упорядоченных пар $(i, j)$ целых неотрицательных чисел. Пусть каждому элементу $(i, j)$ этого множества поставлено в соответствие разбиение множества $M - (i, j)$ на три подмножества $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ так, что выполняются следующие условия:

1) $M - (i, j) = A_{i,j} \cup B_{i,j} \cup C_{i,j}$;
2) никакие два из $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ не имеют общих элементов;
3) если $(k, l) \in A_{i,j}$, то $A_{k,l} \subset A_{i,j}$;
4) $(m, n) \in C_{i,j}$, тогда и только тогда, если $(i, j) \in A_{m,n}$;
5) все множества $A_{i,j}$ конечные.

Легко видеть, что множество $M$ можно считать частично упорядоченным, если соотношения $(k, l) \in A_{i,j}$, $(m, n) \in A_{i,j}$ истолковать как $(k, l) < (i, j)$, $(m, n) > (i, j)$. В частном случае, когда все $B_{i,j}$ — пустые множества, $M$ является упорядоченным. В дальнейшем будем считать фиксированным один определенный способ частичного упорядочения, удовлетворяющий условиям 1—5, и обозначим его через $D$.

Отметим еще, что задание всех $A_{i,j}$ полностью определяет также всех $C_{i,j}$ и всех $B_{i,j}$.

2. Дальше рассмотрим двойные последовательности элементов гильбертова пространства (действительного или комплексного); ради простоты будем их называть просто последовательностями. (Каждый индекс пробегает независимо от другого все целые неотрицательные числа).

Если существуют такие постоянные $a_{i,j}$, все отличные от 0, что для всех $(i, j)$ имеем $p_{i,j} = a_{i,j}\, q_{i,j}$ будем сказать, что последовательности $\{p_{i,j}\}$ и $\{q_{i,j}\}$ совпадают с точностью до постоянного множителя.

Последовательность $P_{i,j}$ называется $D$-эквивалентной последовательности $p_{i,j}$, если для любого $(i, j)$ найдутся такие постоянные $a_{k,l}^{(i,j)}$, что

$$P_{i,j} = a_{i,j}^{(i,j)} p_{i,j} + \sum a_{k,l}^{(i,j)} p_{k,l}, \tag{1}$$

при чем $a_{i,j}^{(i,j)} \neq 0$ и суммирование относится по всем $(k, l) \in A_{i,j}$.

Теорема 1. Если последовательность $\{P_{i,j}\}$ $D$-эквивалентна последовательности $\{p_{i,j}\}$, то последовательность $\{p_{ji,}\}$ $D$-эквивалентна последовательности $\{P_{i,j}\}$.

Для доказательства введем следующее обозначение: $(i, j) \in E_r$, если множество $A_{i,j}$ содержит $r$ элементов. Для $(i, j) \in E_0$ (это множество не может быть пустым) утверждение теоремы следует из (1), для остальных $(i, j)$ оно доказывается индукцией по $r$, учитывая свойство 5 полуупорядочения $D$.

3. Последовательность $P_{i,j}$ называется слабо $D$-биортогональной к последовательности $\{q_{i,j}\}$ если для всех $(i, j)$ из $(k, l) \in A_{i,j}$ следует $(P_{i,j}, q_{k,l}) = 0$. Последовательность $\{p_{i,j}\}$ называется слабо $D$-биортогонализуемой к последовательности $\{q_{i,j}\}$, если существует $\{P_{i,j}\}$, $D$-эквивалентная с $\{p_{i,j}\}$ и слабо $D$-биортогональная к $\{q_{i,j}\}$.

С двумя заданными последовательностями $\{p_{i,j}\}$, $\{q_{i,j}\}$ можно сопоставить двойную последовательность чисел $G_{i,j}$ — обобщенных определителей Грама. $G_{i,j}$ — определитель, элементами которого являются все возможные произведения $(p_{m,n}, q_{s,r})$, где $(m, n) \in A_{i,j}$, $(r, s) \in A_{i,j}$, при чем в каждой строке фиксирована пара $(m, n)$, в каждом столбце пара $(r, s)$. Очевидно, этот определитель задан с точностью до знака (если порядок последовательностей не фиксирован и основное гильбертого пространство комплексное, то с точностью до перехода к сопряженной величине). Он не определен, если $(i, j) \in E_0$ и является определителем порядка $r$, если $(i, j) \in E_r$, $r > 0$.

Теорема 2. Последовательность $\{p_{i,j}\}$ слабо $D$-биортогонализуема к последовательности $\{q_{i,j}\}$ единственным образом (с точностью до постоянного множителя) тогда и только тогда, если все определители $G_{i,j}$ $((i, j) \overline{\in} E_0)$ отличны от нуля.

Доказательство: положим в равенстве (1) $a_{i,j}^{(i,j)} = 1$, умножим обе части этого равенства на $q_{k,l}$ $((k, l) \in A_{i,j})$ и потребуем, чтобы $(P_{i,j}, q_{k,l})=0$. Остается исследовать систему линейных уравнений относительно $a_{m,n}^{(i,j)}$.

Следствие: если последовательность $\{p_{i,j}\}$ слабо $D$-биортогонализуема единственным образом (с точностью до постоянного множителя) к $\{q_{i,j}\}$, то и $\{q_{i,j}\}$ слабо $D$-биортогонализуема единственным образом (с точностью до постоянного множителя) к $\{p_{i,j}\}$.

Элементы полученных путем взаимной биортогонализации последовательностей $\{P_{i,j}\}$ и $\{Q_{i,j}\}$ легко написать в явном виде:

$$P_{i,j}=a_{i,j}\begin{vmatrix} (p_{i_1,j_1}, q_{i_1,j_1}) & \dots & (p_{i_1,j_1}, q_{i_r,j_r}) & p_{i_1,j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \\ (p_{i_r,j_r}, q_{i_1,j_1}) & \dots & (p_{i_r,j_r}, q_{i_r,j_r}) & p_{i_r,j_r} \\ (p_{i,j}, q_{i_1,j_1}) & \dots & (p_{i,j}, q_{i_r,j_r}) & p_{i,j} \end{vmatrix}; \quad (2)$$

$$Q_{i,j}=b_{i,j}\begin{vmatrix} (p_{i_1,j_1}, q_{i_1,j_1}) & \dots & (p_{i_1,j_1}, q_{i_r,j_r}) & (p_{i_1,j_1}, q_{i,j}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (p_{i_r,j_r}, q_{i_1,j_1}) & \dots & (p_{i_r,j_r}, q_{i_r,j_r}) & (p_{i_r,j_r}, q_{i,j}) \\ q_{i_1,j_1} & \dots & q_{i_r,j_r} & q_{i,j} \end{vmatrix}. \quad (3)$$

(Здесь $(i_1, j_1), \dots (i_r, j_r)$ — все элементы множества $A_{i,j}$ и $(i, j)\,\bar{\in}\,E_0$; для $(i, j) \in E_0$ имеем $P_{i,j}=a_{ij}\,p_{ij}$; $Q_{i,j}=q_{i,j}$). Нетрудно видеть, что $\{P_{i,j}\}$ и $\{Q_{i,j}\}$ взаимно слабо $D$-биортогональны.

4. Последовательности $\{P_{i,j}\}$ и $\{Q_{i,j}\}$ называются биортогональными, если из $(i, j) \neq (k, l)$ следует

$$(P_{i,j}, Q_{k,l})=0 \quad (4)$$

Последовательности $\{p_{i,j}\}$ и $\{q_{i,j}\}$ называются $D$-биортогонализуемыми (без «слабо»), если существуют последовательности $\{P_{i,j}\}$, $\{Q_{i,j}\}$, $D$-эквивалентные соответственно $\{p_{i,j}\}$ и $\{q_{i,j}\}$ и биортогональные между собой.

Теорема 3. Если для последовательностей $\{p_{i,j}\}$, $\{q_{i,j}\}$ все определители $G_{ij}$ $((i, j)\,\bar{\in}\,E_0)$ отличны от нуля, то эти последовательности $D$-биортогонализуемы тогда и только тогда, если для каждого $(i, j) \overline{\in} E_0$ и для каждого $(k, l) \in B_{i,j}$ имеем

$$(P_{i,j}, q_{k,l}) = 0 \tag{5}$$

($P_{i,j}$ дан формулой (2)).

Доказательство: если две последовательности биортогональны, то они и слабо $D$-биортогональны. По этому надо выяснить, при каких условиях будут биортогональны последовательности $\{P_{i,j}\}$, $\{Q_{i,j}\}$, заданные формулами (2), (3). Если $(i, j) \in A_{k,l}$ или $(k, l) \in C_{i,j}$ (т. е. $(i, j) \in A_{k,l}$), то (4) следует из слабой $D$-биортогональности последовательностей $\{P_{i,j}\}$, $\{Q_{i,j}\}$. Если же $(k, l) \in B_{i,j}$, то $A_{k,l} \subset A_{i,j} \cup B_{i,j}$ и так как (5) имеет место для $(k, l) \in A_{i,j} \cup B_{i,j}$, то опять получим (4). Этим доказана достаточность условия (5). Чтобы доказать его необходимость, разобъем множество $B_{i,j}$ на непресекающиеся подмножества $F_s$ следующим образом: $(k, l) \in F_s$ если множество $A_{k,l} - A_{i,j}$ содержит $s$ элементов. Множество $F_0$ не пусто и для его элементов (4) следует из (5) и $D$-эквивалентности последовательностей $\{q_{i,j}\}$ и $\{Q_{i,j}\}$. Остается применить индукцию по $s$ и свойство 3 частичного упорядочения.

Очевидно, что (5) равносильно условию: для всех $(k, l) \overline{\in} E_0$ и для всех $(i, j) \in A_{k,l}$,

$$(p_{i,j}, Q_{k,l}) = 0. \tag{6}$$

Сущность теорем 2 и 3 можно выразить и таким образом: две произвольно взятые двойные последовательности почти всегда слабо $D$-биортогонализуемы; процесс слабой $D$-биортогонализации приводит к биортогональным последовательностям, если исходные последовательности вообще $D$-биортогонализуемы; но это будет так лишь в исключительных случаях, если выполнены условия (5). Эти условия отпадут, если все $B_{i,j}$ пустые (т. е. множество $M$ упорядочено); они станут более жесткими, если $D$ изменить так, чтобы некоторые $B_{i,j}$ увеличивались.

В качестве примера рассмотрим один конкретный случай частичного упорядочения, который обозначим через $R$. Именно, будем считать, что $(k, l) \in C_{i,j}$, если $k \leqslant i$, $l \leqslant j$, $(k, l) \neq (i, j)$. Тогда $(m, n) \in C_{i,j}$ если $m \geqslant i$, $n \geqslant j$, $(m, n) \neq (i, j)$ и $(r, s) \in B_{i,j}$, если $(r-i)\ (s-j) < 0$. Нетрудно показать, что, если две последовательности $\{p_{i,j}\}$ и $\{q_{i,j}\}$ $R$-биортогонализуемы и известны все произведения $\{p_{i,j}, q_{k,l}\}$, де $(i-k)\ (j-l) \geqslant 0$, то все произведения $(p_{i,j}, q_{k,l})$, где $(i-k)\ (j-l)<0$, определяются единственным образом.

5. Если последовательности $\{p_{i,j}\}$, $\{q_{i,j}\}$ $D$-эквивалентны, то условие $G_{i,j}\neq 0$ является условием линейной независимости множества тех $p_{i,j}$, для которых $(i, j)\in A_{i,j}$. Если это условие не выполнено, то слабая $D$-биортогонализация невозможна. Теорема 3 в этом случае гласит так: для того чтобы последовательность $\{P_{i,j}\}$ была $D$-ортогонализуемой, необходимо и достаточно, чтобы 1) все $G_{i,j}$ $((i, j)\overline{\in}\ E_0)$ были отличны от нуля, 2) для каждого $(k, l)\in B_{i,j}$ имеет место равенство $(P_{i,j}, p_{k,l})=$ $=0$. (Здесь $P_{i,j}$ дан формулой (2), где все $q_{k,l}$ заменены на $p_{k,l}$).

6. Результаты этого параграфа допускают некоторые обобщения. Во-первых, вместо гильбертова пространства можно взять некоторые более общее пространство (или пространство и его сопряженное пространство), так как нигде не используется полнота пространства и свойство «$(p, p)>0$ если $p\neq 0$» скалярного произведения. Во вторых, множество индексов $M$ может быть любым множеством, допускающим частичное упорядочение со свойствами 1—5. В частности, можно рассматривать тройные и т. д. последовательности. Наконец отметим, что можно одновременно использовать два способа частичного упорядочения $D$ и $D^1$, если только для всех $(i, j)$ множества $A_{i,j}$ и $A^1_{i,j}$ содержат одинаковое количество элементов. Например, можно для построения $P_{i,j}$ использовать те $p_{m,n}$, для которых $(m, n)\in A_{i,j}$, но требовать ортогональность к тем $q_{r,s}$ для которых $(r, s)\in A^1_{i,j}$.

7. Метод Джексона ортогонализации кратной последовательности в наших обозначениях можно характеризовать так: а) от $D$ кроме 1—5 требуются еще следующие свойства: 6) все $B_{i,j}$ конечны; 7) если $(k, l)\in B_{i,j}$ и $(m, n)\in B_{k,l}$, то $(m, n)\in B_{i,j}$ или $(m, n)=(i, j)$; (другими словами, $M$ разбивается на конечные классы эквивалентности и $(k, l)\in B_{i,j}$ тогда и только тогда, если $(k, l)$ и $(i, j)$ принадлежат одному классу эквивалентности. б) Условие $D$-эквивалентности вместо (1) имеет вид

$$P_{i,j}=a^{(i,j)}_{i,j}\,p_{i,j}+\sum a^{(i,j)}_{(k,l)}\,p_{k,l}+\sum a^{(i,j)}_{m,n}\,p_{m,n},$$

где суммирование относится ко всем $(k, l)\in A_{i,j}$ и ко всем $(m, n)\in B_{i,j}$. При измененном условии эквивалентности задача слабой $D$-биортогонализации уже не решается единственным образом; общим решением этой задачи будут произвольные линейные комбинации элементов $P_{i,j}$ и $Q_{i,j}$, заданных формулами (2) и (3). Требование биортогональности (даже вместе с условием нормированности) не определяет допустимые линейные комбинации единственным образом, но только с точностью до произвольной ортогональной матрицы, порядок которой равен числу элементов в соответствующем классе эквивалентности.

## § 2.

1. Применим результаты предыдущего параграфа к некоторым задачам, где $q_{i,j}=x^iy^j$. Рассмотрим множество $P$ всех полиномов двух аргументов $x$ и $y$ с действительными коэффициентами. Задаем произвольную двойную последовательность действительных чисел $\{c_{m,n}\}$ и определим на $P$ функционал $F$ соотношением

$$F\left(\sum_{j=o}^{l}\sum_{i=o}^{k} a_{i,j}\, x^iy^j\right)=\sum_{j=o}^{l}\sum_{i=o}^{k} a_{i,j}\, c_{i,j},$$

а скалярное произведение формулой

$$(p,\ q)=F\ (pq).$$

В зависимости от выбора $\{c_{m,n}\}$ множество $P$ с введенным таким образом скалярным произведением может быть или не быть гилбертовым пространством, но, согласно п. 6 § 1 к двойным последовательностям элементов этого множества применимы результаты § 1.

Для последовательности $\{x^iy^j\}$ довольно естественной является задача о $R$-ортогонализации, так как последовательность, $R$-эквивалентная с данной—это последовательность полиномов, где первый индекс указывает степень полинома относительно $x$, второй индекс — относительно $y$.

2. Теорема 4. Последовательность $\{x^iy^j\}$ $R$-ортогонализуема тогда и только тогда, если существуют две последовательности чисел $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ такие, что для всех $i$ и $j$

$$c_{i,j}=a_ib_j, \tag{7}$$

$$A_i\equiv\begin{vmatrix} a_o\ a_1 \dots a_i \\ a_1\ a_2 \dots a_{i+1} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_i\ a_{i+1}\ \dots a_{2i}\end{vmatrix}\neq 0,\ B_j\equiv\begin{vmatrix} b_o\ b_1 \dots b_j \\ b_1\ b_2 \dots b_{j+1} \\ \dots\ \dots\ \dots \\ b_j\ b_{j+1}\ \dots b_{2j}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{8}$$

Докажем необходимость условий (7) и (8). Из результатов § 1 ясно, что необходимими являются условия, получаемые для этого конкретного случая из $G_{i,j} \neq 0$ $((i, j) \overline{\in} E_0)$ и из (5). В нашем случае $(p_{i,j}, q_{k,l}) = F\ (x^{i+k}\ \ y^{j+l}) = c_{i+k,\, j+l}$; при этом $c_{00} = G_{1,0} \neq 0$. Условие $(P_{0,1},\ x^n) = 0$ дает

$$\begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{n,0} \\ c_{0,1} & c_{n,1} \end{vmatrix} = 0$$

и отсюда $c_{n,0} = \alpha_n\ c_{0,0}$, $c_{n,1} = \alpha_n c_{0,1}$. Дальше используем условие $(P_{0,2}, x^n) = 0$:

$$0 = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{n,0} \\ c_{0,1} & c_{0,2} & c_{n,1} \\ c_{0,2} & c_{0,3} & c_{n,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \alpha_n c_{0,0} \\ c_{0,1} & c_{0,2} & \alpha_n c_{0,1} \\ c_{0,2} & c_{0,3} & c_{n,2} \end{vmatrix} =$$

$$= (c_{n\,2} - \alpha_n c_{0\,2}) \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} \\ c_{0,1} & c_{0,2} \end{vmatrix} = (c_{n\,2} - \alpha_n c_{0,2})\ G_{0,2},$$

значит, $c_{n,2} = \alpha_n\ c_{0\,2}$. Очевидно, при помощи индукции получим $c_{n,\,k} = \alpha_n c_{0,\,k}$ и аналогично $c_{n,\,k} = \beta_k c_{n,\,0}$ ; отсюда следует

$$c_{n,\,k}^{\;2} = \alpha_n c_{n,\,0} \cdot \beta_k c_{0,\,k},$$

что равносильно (7).

Остается показать, что из $G_{i,j} \neq 0$ следует (8). Для этого достаточно доказать равенство

$$G_{i,j} = \pm A_i^j\, A_{i-1}\ B_j^i\ B_{j-1} \qquad (9)$$
$$(A_{-1} = B_{-1} = 1)$$

Если же выписать $G_{i,j}$ в явном виде, принимая во внимание (7), то видно, что это будет полиномом степени $(i+1)\ (j+1) - 1$ относительно $a_0$, $a_1$, $a_2$ ... и полиномом такой же степени относительно $b_0$, $b_1$, $b_2$, .... В этом определителе можно найти $j$ комбинаций из $i+1$ столбцов каждую, так, чтобы эти $i+1$ столбцы стали линейно зависимыми, если $A_i = 0$. Отсюда вывод, что $G_{i,j}$ делится на $A_i^j$. Аналогично находятся остальные непостоянные множители; множитель $\pm 1$ получаем, сравнивая коэффициенты обеих частей равенства (9).

(Например для $G_{4,2}$ при $A_4=0$ линейно зависимыми будут столбцы, соответствующие элементам $1$, $x$, $x^2$, $x^3$, $x^4$ и также столбцы, соответствующие элементам $y$, $xy$, $x^2y$, $x^3y$, $x^4y$).

Чтобы проверить достаточность условий (7) и (8), построим две последовательности полиномов одной переменной $\{p_k(x)\}$ и $\{q_l(y)\}$, ортогональные относительно последовательностей $\{a_i\}$ и $\{b_j\}$ соответственно (это возможно в силу (8)). Двойная последовательность полиномов двух аргументов $P_{i,j}(x, y)=$ $=p_i(x)q_j(y)$ будет результатом $R$-ортогонализации последовательности $\{x^i, y^j\}$.

3. Теорема 4 показывает, что $R$-ортогонализация последовательности $\{x^iy^j\}$ возможна только в исключительных случаях и сводится к построению двух последовательностей ортогональных полиномов одного аргумента. Ясно, что к интересным классам специальных функций двух аргументов этот процесс привести не может. Более интересные результаты получаются, если только одна из двух биортогонализуемых последовательностей будет $\{x^iy^j\}$.

Теорема 5. Для того, чтобы существовала одна (с точностью до $R$-эквивалентности) последовательность $\{P_{k,l}\}$ ($P_{k,l}(x, y)$ — полином степени $k+l$), $R$-биортогонализуемая с последовательностью $\{x^iy^j\}$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) для каждой пары $(k, l)$ можно указать $\dfrac{(k+l+1)(k+l+2)}{2}$ действительных чисел $a_{r,s}^{(k,l)}$ $(0\leqslant r,\ 0\leqslant s,\ r+s\leqslant k+l$; **хотя бы** для одного $m$ имеет место $a_{m,k+l-m}^{(k,l)}\neq 0)$ так, что

$$\sum_{r,s} a_{r,s}^{(k,l)}\ c_{i+r,\,j+s}=0 \tag{9}$$

при $i<k$ или $j<l$;

2) все определители Грама последовательностей $\{x^iy^j\}$ и $\{\sum_{r,s} a_{r,s}^{(k,l)}\ x^ry^s\}$ отличны от нуля.

Доказательство: если существуют числа $a_{r,s}^{(k,l)}$ с указанными свойствами, то положим

$$P_{k,l}(x, y)=\sum a_{r,s}^{(k,l)}\ x^ry^s \tag{10}$$

и из (9) следует $(P_{k,l}, x^iy^j)=0$, если $i<k$ или $j<l$, но это условие (5) для $D=R$. Если же существует последовательность

$P_{k,l}(x, y)$, то (10) определяет коэффициенты $a_{r,s}^{(k,l)}$ и из (5) следует (9).

4. Оказывается, что условиям предыдущей теоремы удовлетворяют некоторые хорошо исследованные конкретные биортогональные системы: полиномы Аппеля, ультрасферические полиномы двух аргументов, полиномы Эрмита двух аргументов. Это следует из того, что функция, представимая в виде

$$P_{k,l} = \rho^{-1}(x, y) \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} [\varrho(x, y)\ \beta^k(x, y)\, \delta^l(x, y)]$$

обладает свойством ортогональности

$$\iint\limits_A \varrho(x, y)\ P_{k,l}(x, y)\ x^i y^j\ dxdy = 0, \qquad \text{при } i<k \text{ или } j<l,$$

если только интеграл существует и на границе области $A$ либо $\varrho\beta=0$ либо $\varrho\delta=0$. Если область $A$ — треугольник $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $x+y\leqslant 1$, $\varrho(x, y)=x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}$, $\beta(x, y)=x(1-x-y)$, $\delta(x, y)=y(1-x-y)$, то $P_{k,l}$ с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномами Аппеля $F_{k,l}(\gamma, \gamma^1;\ x, y)$ (здесь и дальше относительно обозначений см. [1]), а последовательность, которая получается от $\{x^i y^j\}$ путем $R$-биортогонализации относительно $P_{k,l}$ — с полиномами $E_{m,n}(\gamma, \gamma^1;\ x, y)$. Если область $A$ — круг $x^2+y^2\leqslant 1$, $\varrho=(1-x^2-y^2)^{(s-1)/2}$, $\beta=\delta=1-x^2-y^2$, то $P_{k,l}$ дают ультрасферические полиномы $U^s_{k,l}(x, y)$, а последовательность $\{x^i, y^j\}$ при биортогонализации переходит в $V^s_{k,l}(x, y)$. Наконец, если $A$ — **вся плоскость,** $\varrho(x, y)=exp(-ax^2-2bxy-cy^2)$, $a>0$, $ac-b^2>0$, $\beta=\delta=1$, то $P_{k,l}$ обращаются в полиномы Эрмита $H_{k,l}(x, y)$ (но от $\{x^i y^j\}$ при $R$-биортогонализации не получаются $G_{k,l}(x, y)$).

Таким образом понятие $R$-биортогонализации естественно приводит к указанным системам, если

$$c_{m,n} = \iint\limits_A \varrho(x, y)\ x^m y^n dxdy.$$

Можно указать еще некоторые биортогональные системы, получаемые аналогичном путем при других $A$ и $\varrho$. Но вопрос об общем виде последовательности $c_{m,n}$ для которой выполняются условия 1) и 2) теоремы 5, остается открытым.

5. Легко построить последовательности полиномов, для которых естественно использовать отличие от $R$ способы частичного упорядочения. Например, если $p_{i,j} = (x+y)^i y^j$, естественно требовать, чтобы было $(k, l) \in A_{i,j}$, если $k \leqslant i$, $k+l \leqslant i+j$, $(k, l) \neq (i, j)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. Higher Transcendental Functions, vol 2, New York, Toronto, London, 1953 (chapter XII).

2. D. Jackson. Formal properties of orthogonal polynomials in two variables. Duke Mathematical Journal, 1936, vol 2. № 3, 423—434.

3. D. Jackson. Orthogonal polynomials on a plane curve. Duke Mathematical Journal, 1937, vol 3, № 2, 228—236.

4. D. Jackson. Orthogonal polynomials in three variables. Duke Mathematical Journal, 1938, vol 4, № 3, 441—454.

5. D. Jackson. Orthogonal polynomials in two complex variables. Annals of Mathematics, 1938, vol (2) 39; Nr. 2, 262—268.

*Г. К. Энгелис*

# О БИОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДВОЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

## Аннотация

Известный метод Э. Шмидта оргтонализации простой последовательности обобщается на задачу биортогонализации двух двойных последовательностей. Предполагается, что множество двойных индексов частично упорядочено по некоторому правилу $D$, которое удовлетворяет некоторым простым условиям и указывает подмножества данных последовательностей, используемые при построении текущего элемента одной из новых ($D$-биортогональных) последовательностей. Даются необходимые и достаточные условия для возможности $D$-биортогонализации. Указываются дальнейшие обобщения и изучается связь между описанным процессом и методом Д. Джексона. Более конкретные результаты получены при специальном выборе правила $D$ в случае, если одна из последовательностей имеет вид $\{x^i y^j\}$; например, некоторые хорошо известные биортогональные последовательности полиномов двух аргументов (системы Аппеля, Эрмита и др.) могут быть естественным образом определены в терминах $D$-биортогональности.

G. Engelis

## ON THE BIORTHOGONALIZATION OF DOUBLE SEQUENCES

### Annotation

The well-known E. Schmidt's method of orthogonalization of a simple sequence is generalized for the task of biorthogonalization of two double sequences. The set of double indices is supposed to be partially ordered according a rule (say, $D$) which satisfies some simple conditions only and indicates the subsets of the given sequences, utilizables for the construction of the current element of one of the new ($D$-biorthogonal) sequences. Necessary and sufficient conditions for the possibility of $D$-biorthogonalization are given. Further generalizations are indicated and the relation between the above process and D. Jacksons method is studied. More concrete results are obtained by special choice of $D$ for the case when one of the given sequences is $\{x_i\, y^j\}$, for example, some well-known biorthogonal sequences of polynomials of two variables (the systems of Appell, of Hermite a. o.) can be defined in a natural way in terms of $D$-biorthogonality.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*М. М. Вайнберг, Я. Л. Энгельсон*

# О НЕЯВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Хорошо известно, какую важную роль в различных вопросах анализа играют теоремы о неявных функциях. Классическая теорема о неявных функциях ([1], § 32) была распространена в [2] на пространства Фреше. В работе [3] (см. также [4]) дано обобщение на банаховы пространства классической теоремы о неявных аналитических функциях ([1], § 184). Эта теорема распространяется в настоящей статье на локально выпуклые пространства над полем $C$ комплексных чисел. Отметим еще, что обобщение на локально выпуклые пространства теоремы из [2] содержится в [5].

## § 1. ПОНЯТИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $X$, $Y$—комплексные локально выпуклые пространства [6] и $\mathfrak{B}$ — система ограниченных множеств $B \subset X$, обладающая следующими свойствами [7]: 1) если $B \in \mathfrak{B}$, то абсолютно выпуклая оболочка множества $B$ также принадлежит $\mathfrak{B}$, 2) $\mathfrak{B}$ содержит все замкнутые одноточечные множества.

Оператор $y=f(x)$, заданный на открытом выпуклом множестве $D \subset X$ со значениями в $Y$, называется дифференцируемым относительно $\mathfrak{B}$ или ($\mathfrak{B}$) — дифференцируемым (см. [7]) в точке $a \in D$, если для любого $h \in D-a$ существует (в смысле топологии $Y$)

$$\lim_{t\to o} \frac{f(a+th)-f(a)}{t} = df(a;\, h) = f'(a)h,$$

где $df(a;\, h)$ — линейный по $h$ оператор, ограниченный на всяком $B \in \mathfrak{B}$, причем

$$\frac{1}{t}[f(a+th)-f(a)] \to df(a, h) \quad \text{при } t\to o,$$

равномерно относительно $h$ на всяком $B \in \mathfrak{B}$. Оператор $f'(a) \in L\ (X, Y)$, где $L\ (X, Y)$ — пространство линейных операторов из $X$ в $Y$, называется производной от $f(x)$, а $df(a; h)$ — дифференциалом от $f(x)$ в точке $x=a$ (относительно $\mathfrak{B}$). Оказывается [7], если $f(x)$ ($\mathfrak{B}$)—дифференцируем в $D$, т. е. в каждой точке $x \in D$, то $f(x)$ имеет в $D$ все производные высших порядков относительно $\mathfrak{B}$, которые определяются последовательно аналогичным способом, например,

$$d^2f\ (a;\ h_1,\ h_2) = \lim_{t \to o} \frac{df(a+th_2;\ h_1) - df\ (a;\ h_1)}{t},$$

причем $f''(a)\ h_1h_2 = d^2f(a;\ h_1,\ h_2)$.

Согласно [7] оператор $f(x)$ называется ($\mathfrak{B}$) — аналитическим в $D$, если он ($\mathfrak{B}$) — дифференцируем в $D$. В этом случае, если $x+h \in D$, то

$$f\ (x+h) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)\ h^k$$

причем остаток $R_n(h) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k$ стремится к нулю при $n \to \infty$ равномерно на каждом $B \in \mathfrak{B}$. Отсюда следует, что если $x+\lambda h \in D$, то $f(x+\lambda h)$ при фиксированных $x$ и $h$ является голоморфной функцией комплексного переменного $\lambda$.

Из предыдущего видно, что дифференциал $n$-го порядка является $n$-линейным оператором от $h_1, h_2, \ldots, h_n$ из $X$ в $Y$. Если $P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — $n$-линейный оператор и

$$|P_n(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)|_V \leqslant N_{UV} |x_1|_U \cdot |x_2|_U \cdots |x_n|_U,$$

где $|\ |_U$ и $|\ |_V$ — полунормы, соответствующие окрестностям нуля $U \subset X$ и $V \subset Y$, то наименьшая из констант $N_{UV}$, удовлетворяющих этому неравенству при всевозможных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется модулем оператора $P_n$.

## § 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Как известно, при доказательстве классической теоремы о неявных аналитических функциях строятся мажоранты Коши — Гурса ([1], § 184). Здесь мы рассмотрим ряды, которые будут использованы в § 3 для построения аналога таких мажорант.

Лемма 1. Пусть $f(x)$ — оператор из $X$ в $Y$, ($\mathfrak{B}$) — аналитический и ограниченный в некоторой абсолютно выпуклой окрестности нуля $U \subset X$. Тогда, каковы бы ни были $\varepsilon > o$ и окрестность нуля $V \subset \mathcal{Y}$, найдутся положительное $M_V$, зависящее от $V$, и натуральное $n_0 = n_0(\varepsilon, M_V)$ такие, что как только $n \geqslant n_0$, выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{n!} d^n f(0, x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|_V \leqslant \frac{(M_V + \varepsilon)e^n}{\sqrt{2\pi n}} |x_1|_U |x_2|_U \ldots |x_n|_U \quad (2.1)$$

При этом, если $m_n(V)$ — модуль $n$-линейного оператора $\frac{1}{n!} d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то ряд $\sum\limits_{n=o}^{n} m_n(V)\lambda^n$ сходится при $|\lambda| < e^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x_n \in \frac{1}{n} U$ и $|\xi_i| \leqslant 1$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $\xi_i \in C$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i x_i$ принадлежит окрестности нуля $U$, в которой оператор является аналитическим по условию. Следовательно,

$$\Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i\right)$$

является голоморфной функцией от каждого из аргументов $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ со значениями в $\mathcal{Y}$. Так как

$$\left.\frac{\partial^n \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{\partial\xi_1\, \partial\xi_2 \ldots \partial\xi_n}\right|_{\xi_i = 0} = d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

то применяя $n$ раз последовательно интегральную формулу Коши и операцию дифференцирования по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ получим

$$d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \cdots \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)}{\tau_1^2\ \tau_2^2 \ldots \tau_n^2}\, d\tau_1, d\tau_2, \ldots, d\tau_n,$$

где $\Gamma$ — окружность единичного круга комплексной плоскости $C$, а интеграл понимается здесь как предел интегральной суммы Римана, существование которого следует из условий теоремы. В силу ограниченности $f(x)$ в $U$ имеем при $|\tau_i| = 1$.

$$|\Phi(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)|_V = \left|f\left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i x_i\right)\right|_V \leqslant M_V \quad (2.3)$$

для произвольной окрестности нуля $V \subset Y$. Из (2.2) и (2.3) следует

$$| d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n) |_V \leqslant M_V, \quad x_i \in \frac{1}{n} U. \qquad (2.4)$$

Пусть теперь $x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — произвольные векторы из $X$, для которых $| x_i |_U \neq 0$. Положим $x_i' = \frac{x_i}{n | x_i |_U}$. Ясно, что $x_i' \in \frac{1}{n} U$, а потому согласно (2.4) имеем

$$| d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n) |_V \leqslant M_V n^n |x_1|_U |x_2|_U \ldots |x_n|_U. \qquad (2.5)$$

Последнее неравенство имеет место и при $|x_i|_U = 0$, так как в этом случае $\lambda x_i \in \frac{1}{n} U$ при любом $\lambda$, а потому согласно (2.4)

$$d^n f(0; x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \equiv 0.$$

Из (2.5), применяя формулу Стирлинга, получаем

$$\left| \frac{1}{n!} f(0; x_1, x_2, \ldots, x_n) \right|_V \leqslant \frac{M_V e^n}{(1+\varepsilon_n)\sqrt{2\pi n}} | x_1|_U | x_2|_U \ldots | x_n|_U. \quad (2.6)$$

Так как для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $n_o = n_o(\varepsilon, M_V)$, что при $n \geqslant n_o$ $M_V (1+\varepsilon_n)^{-1} < M_V + \varepsilon$, то из (2.6) следует (2.1) Из (2.1) согласно определению модуля $m_n(V)$ следует второе утверждение леммы.

Лемма 2. Пусть $f(x, y)$ — оператор из $X \times Y$ в $Y$, ($\mathfrak{B}$) — аналитический и ограниченный в некоторой окрестности нуля $W = U \times V \subset X \times Y$. Тогда, какова бы ни была окрестность нуля $V_1 \subset Y$, ряд $\sum_{i, k=o}^{\infty} m_{ik}(V_1) \lambda^i \mu^k$, где $m_{ik}(V_1)$ — модуль оператора $\frac{1}{(i+k)!} d^{i+k} f(0, 0; x_1, x_2, \ldots, x_i, y_1, y_2, \ldots, y_k)$, сходится для $|\lambda| < \frac{1}{e}$ и $|\mu| < \frac{1}{e}$.

Доказательство. Пусть $z = (x, y) \in X \times Y$. Если $x \in U$ и $y \in V$, то $z \in W$. Положим $\Phi(z) = f(x, y)$. Из условия данной леммы согласно лемме 1 имеем

$$\left| \frac{1}{n!} d^n \Phi(0; z_1, z_2, \ldots, z_n) \right|_{V_1} \leqslant \frac{(M_{V_1} + \varepsilon) e^n}{\sqrt{2\pi n}} |z_1|_W |z_2|_W \ldots |z_n|_W \qquad (2.7)$$

для любого $\varepsilon > 0$ и $n \geqslant n_o(\varepsilon, V_1)$.

Из $(\mathfrak{B})$—дифференцируемости следует, что полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов, т. е.

$$d^n\Phi(0;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{i+k=n} d^{\,n}_{i_{x,ky}} f(0,0;\ x_{m_1}, \ldots, x_{m_i}, y_{p_1}, \ldots, y_{p_k}),$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_i, p_1, p_2, \ldots, p_k$ образуют всевозможные перестановки из чисел $1, 2, \ldots, n$. Полагая $z_1 = (x_1, o)$, $z_2 = (x_2, o)$, $\ldots, z_i = (x_i, o)$, $z_{i+1} = (0;\ y_{i+1}), \ldots, z_n = (o, y_n)$, мы получим, что

$$d^n\Phi(0;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = d^{\,n}_{ix,ky} f(0, 0;\ x_1, x_2, \ldots, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n), \tag{2.8}$$

так как другие слагаемые суммы обратятся в нуль. Учитывая, что при таком выборе $z_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, $|z_m|_W = |x_m|_U$ при $m \leqslant i$ и $|z_m|_W = |y_m|_V$ при $m > i$, мы из (2.7) и (2.8) имеем:

$$\left|\frac{1}{n!} d^{\,n}_{ix\,ky} f\,(0, 0;\ x_1, x_2, \ldots, x_i y_{i+1}, \ldots, y_n)\right|_{V_1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(M_{V_1} + \varepsilon)e^n}{\sqrt{2\pi n}}\ |x_1|_U \ldots |x_i|_U |y_{i+1}|_V \ldots |y_n|_V. \tag{2.9}$$

Согласно определению модуля оператора имеем

$m_{ik}\ (V) \leqslant \dfrac{(M_{V_1} + \varepsilon)e^n}{\sqrt{2\pi n}}$, откуда и следует утверждение леммы.

## § 3. ТЕОРЕМЫ О НЕЯВНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В данном параграфе мы будем предполагать, что пространство $\mathcal{Y}$ является полуполным, т. е., что в нем сходится всякая последовательность Коши.

Теорема 1. Пусть оператор $F\ (x, y)$ из $X \times \mathcal{Y}$ в $\mathcal{Y}$ является $(\mathfrak{B})$—аналитическим и ограниченным в некоторой окрестности нуля $U \times V \subset X \times \mathcal{Y}$, причем $dF\ (0, 0;\ y) = F(0, 0) = 0$. Тогда уравнение

$$y = F(x, y) \tag{3.1}$$

имеет единственное $(\mathfrak{B})$—аналитическое решение $y = f(x)$, определенное в некоторой окрестности нуля из $X$, такое, что $f\ (0) = 0$.

Доказательство. Из $(\mathfrak{B})$—аналитичности оператора $F\ (x, y)$ следует, что

$$F\ (x, y) = \sum_{i,k=o}^{\infty} \frac{C^{\,i}_{i+k}}{(i+k)!} d^{\,i+k}_{ik,ky} F\ (0, 0;\ x, x, \ldots, x, y, y, \ldots, y) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i,k=o}^{\infty} \frac{C^{\,i}_{i+k}}{(i+k)!} F^{(i+k)}_{ix,ky}\ (0, 0)\ x^i y^k;\ F^{(0+0)}\ (0,0) = F^{(0+1)}_y(0,0) \equiv 0,$$

причем этот ряд сходится равномерно на всяком $B \in \mathfrak{B}$ из $X \times \mathcal{Y}$. Согласно (2.9), какова бы ни была окрестность нуля $V_1 \subset \mathcal{Y}$, имеем

$$\left| \frac{1}{(i+k)!} F^{(i+k)}_{ix, ky}(0, 0) \ x^i y^k \right|_{V_1} < \frac{(M_{V_1}+\varepsilon) e^{i+k}}{\sqrt{2\pi(i+k)}} |x|^i_U |y|^k_V.$$

Отсюда следует, что ряд

$$\Phi_{V_1}(\lambda, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i+k=n} C^i_{i+k} m_{ik}(V_1) \lambda^i \mu^k, \tag{3.2}$$

где $m_{ik}(V_1)$ — модуль оператора $\frac{1}{(i+k)!} F^{(i+k)}_{ix, ky}(0, 0) x^i y^k$, сходится, если $|\lambda| < \frac{1}{2e}$, $|\mu| < \frac{1}{2e}$. Отметим, что согласно условию теоремы $m_{01}(V_1) = 0$. Так как $\Phi_{V_1}(\lambda, \mu)$ — аналитическая функция, то уравнение

$$\mu = \Phi_{V_1}(\lambda, \mu) \tag{3.3}$$

согласно классической теореме о неявных функциях, имеет единственное аналитическое решение $\mu = \mu(\lambda)$ при $|\lambda| \leqslant \alpha$ $(\alpha > 0)$, такое, что $\mu(0) = 0$. Полагая

$$\mu(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda^k, \quad b_k = b_k(V_1), \ |\lambda| \leqslant \alpha$$

и подставляя данный ряд в (3.3), мы в силу (3.2) получим

$$\begin{aligned} &b_1 = m_{10}(V_1) \\ &b_2 = m_{20} + 2 b_1 m_{11} + b_1^2 m_{02} \end{aligned} \tag{3.4}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Для коэффициентов $b_k$ получаются соотношения, из которых вытекает их положительность.

Будем теперь искать решение уравнения (3.1) в виде ряда

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x^n) \tag{3.5}$$

где $k_n(x^n)$ — однородный оператор степени $n$ из $X$ в $\mathcal{Y}$. Подставляя (3.5) в (3.1) и полагая для краткости

$$\frac{1}{(i+k)!} C^i_{i+k} \ F^{i+k}_{ix, ky}(0, 0) \ x^i y^k = h_{ik}(x^i, y^k)$$

получим

$$\begin{aligned} &k_1(x) = h_{10}(x) \\ &k_2(x^2) = h_{20}(x^2) + h_{11}(x, k_1(x)) + h_{02}((k_1(x))^2) \end{aligned} \tag{3.6}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Сравнивая (3.6) и (3.4) находим

$$|k_1(x)|_{V_1} = |h_{10}(x)|_{V_1} \leqslant m_{10}(V_1)|x|_U = b_1|x|_U$$

$$|k_2(x^2)|_{V_1} \leqslant b_2|x|_U^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|k_n(x^n)|_{V_1} \leqslant b_n|x|_U^n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Отсюда, так как при $|\lambda| \leqslant \alpha$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\lambda^n$ сходится, то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |k_n(x^n)|_{V_1} \tag{3.7}$$

равномерно относительно $x$, удовлетворяющих условию $|x|_U \leqslant \alpha$ т. е. для $x \in \alpha U$.

Из сходимости (3.7) следует, что для $m \geqslant n_0(V_1)$ и любого натурального $p$

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} k_n(x^n) \right|_{V_1} \leqslant \sum_{n=m+1}^{m+p} |k_n(x^n)|_{V_1} < 1.$$

Так как $V_1$ — произвольная окрестность нуля из $Y$, то последовательность $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i(x^i)$ является фундаментальной, равномерно относительно $x \in \alpha U$, а потому в силу полуполноты пространства $Y$ правая часть (3.5) равномерно сходится на $\alpha U$. Отсюда и из непрерывности операторов $k_n(x^n)$ $(n=1, 2, \ldots)$ следует непрерывность суммы ряда (3.5). Следовательно, по заданной окрестности $V \subset Y$ найдется окрестность нуля $U_1 \subset X$ такая, что для всех $x \in U_1 \cap \alpha U = U_0$ выполняется включение $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n(x^n) \in V$. Этим доказано, что

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x^n) \equiv f(x)$$

является $(\mathfrak{B})$—аналитическим решением уравнения (3,1), определенным в окрестности $U_0$, единственным в силу (3.6), и обращающимся в нуль при $x=0$.

Теорема 2. Пусть оператор $G(x, y)$ из $X \times Y$ в $Y$, $(\mathfrak{B})$ — аналитический на $O_1 \times O_2 \subset X \times Y$, где $O_1$ и $O_2$ — открытые множества соответственно из $X$ и $Y$, удовлетворяет условиям:

1. $G(x_0, y_0) = 0$; $(x_0, y_0) \in O_1 \times O_2$

2. $-d_y G(x_0, y_0; y-y_0)$ имеет непрерывный обратный оператор $\Gamma$.

3. $(\mathfrak{P})$ — аналитический оператор $\Gamma [G(x, y) - d_y G(x_0, y_0, y-y_0)]$ ограничен на множестве $O_1 \times O_2$.

Тогда уравнение

$$G(x, y) = 0 \tag{3.8}$$

имеет единственное $(\mathfrak{B})$—аналитическое решение $y = f(x)$, определенное в некоторой окрестности точки $x_0$, удовлетворяющее условию $f(x_0) = y_0$.

Для доказательства достаточно написать (3.8) в виде

$$-d_y G(x_0, y_0; y-y_0) = G(x\ y) - d_y G(x_0, y_0; y-y_0)$$

и применить к обеим частям оператор $\Gamma$. Полагая в уравнении

$$y - y_0 = \Gamma\,(G(x, y) - d_y G(x_0, y_0; y-y_0))$$

$y - y_0 = g$, $x - x_0 = h$, получим

$$g = F(h, g),$$

где $F(h, g)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Отсюда следует утверждение данной теоремы.

В заключение отметим, что если оператор $B(y-y_0) = -d_y G(x_0, y_0; y-y_0)$ не имеет обратного, то точка $(x_0, y_0)$ будет точкой ветвления решений. В этом случае решения уравнения (3.8) разлагаются по однородным операторам дробного порядка. Если $B$ — нормально разрешимый оператор, причем подпространства нулей оператора $B$ и сопряженного к нему оператора одномерны, то для нахождения всех решений уравнения (3.8) и вида каждого решения можно воспользоваться диаграммой Ньютона (ср. [8]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. Гурса. Курс математического анализа, Т. I. ч. 1, 2. ГТТИ 1933.

[2] T. H. Hildebrandt, L. M. Graves. Implicit functions and their differentials in general analysis Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), 127—153.

[3] A. D. Michal, A. Clifford. Fonctions analitiques implicite dans les espaces vectoriels abstraits. C. R., 197 (1933) 735—737.

[4] A. D. Michal. Le calcul differentiel dans les Espaces de Banach Paris. 1958.

[5] Д. С. Салько. К теории существования неявных функций в локально выпуклых пространствах. Уч. Зап. Моск. обл. пед. Института им. Н. К. Крупской. Т. 110 (1962). 245—264.

[6] Н. Бурбаки. Топологические векторные пространства. Москва, 1959.

[7] J. Sebastiao e Silva. Le calcul differentiel et integral dans les espaces localement convexes, reals ou complexes. Note I. 2. Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci fiz. mat. e natur. 1956, 20, № 6, 743—750; 21, № 1—2, 40—46.

[8] М. М. Вайнберг и В. А. Треногин. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. УМН, 1962, в. 2. 13—75.

*М. М. Вайнберг* и *Я. Л. Энгельсон*

# О НЕЯВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРАХ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация

В настоящей работе известная теорема о неявных аналитических функциях ([1], § 84) обобщается на операторы в локально выпуклых комплексных пространствах. Понятие аналитического оператора, использованное здесь, было дано в (7).

M. M. Vainberg and J. J. Engelson

# ON IMPLICIT ANALYTIC OPERATORS IN LOCALLY CONVEX SPACES

Annotation

In the paper the well-known teorem of implicit analytic functions ([1], § 184) is generalized to operators in complex locally convex spaces. The notion of analytic operator used here has been given in [7].

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ, ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*Б. И. Коробочкин*

# К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Настоящая работа имеет целью дополнить результаты, полученные Ю. Е. Аленицыным с помощью метода Нехари об однолистных отображениях единичного круга на взаимно неналегающие области, в частности, выяснить вопрос о множестве систем экстремальных функций в задаче об оценках некоторых функционалов в основном случае двух функций.

При изложении работы существенно используется часть теоремы Нехари, которую приводим без доказательства:

Теорема $2^0$ (Нехари). Пусть $D_\nu$ $(\nu=1,2\ldots,n)$ — взаимно неналегающие области плоскости $w$ с границами $C_\nu$, состоящими из конечного числа замкнутых аналитических кривых Жордана, и функция $S(w)$ является однозначной и гармонической в полной плоскости, за исключением конечного числа особенностей, лежащих в $\sum\limits_{\nu=1}^{n} D_\nu$. Пусть, далее, функции $p_\nu(w)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ обладают свойствами: 1) сумма $p_\nu(w)+$ $+S(w)$ является однозначной и гармонической в области $D_\nu$, непрерывной в этой замкнутой области; 2) $p_\nu(w)=0$ на $C_\nu$.

Тогда

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{C_\nu} S(w)\,\frac{\partial p_\nu(w)}{\partial n}\,dw\geqslant 0$$

($\frac{\partial}{\partial n}$ обозначает дифференцирование по направлению внешней нормали к областям $D_\nu$ ($\nu=1,\ldots,n$)).

Лемма 1. Если $f_\nu(z)$ есть система регулярных внутри единичного круга функций ($\nu=1, \ldots, n$), однолистно отображающих этот круг на взаимно station неналегающие области $D_\nu$, то для любых точек $z_1, \ldots, z_n$ из этого круга и при любом выборе постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, справедливо неравенство:

$$Re\left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \log \frac{z_i^2 f_i'(o) f_i'(z_i)}{(f_i(z_i)-f_i(o))^2} + \right. \quad {}^{*)}$$

$$\left. + \sum_{i \neq k} \alpha_i \alpha_k \log \frac{(f_i(z_i)-f_k(z_k))\ (f_i(o)-f_k(o))}{(f_i(z_i)-f_k(o))\ (f_i(o)-f_k(z_k))}\right] \leqslant$$

$$\leqslant - \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \log(1-|z_i|^2),\ i, k=1, \ldots, n$$

При $z_i \neq O$ ($i=1, \ldots, n$) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

1) области $D_\nu$ вместе с их границами заполняют всю расширенную плоскость $w$ и

2) все точки граничного, для каждой из областей $D_\nu$, континуума удовлетворяют равенству

$$Re\left[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \log \frac{w-f_\nu(z_\nu)}{w-f_\nu(o)}\right]=0,$$

$$\text{где } \log \frac{w-f_\nu(z_\nu)}{w-f_\nu(o)} = 0,$$

$$\text{при } w=\infty$$

Доказательство. Обозначим через $D_\nu$ и $C_\nu$ соответственно образ круга $|z|<1$ и границу этого образа при отображении его посредством функции $f_\nu(z)$. Положим $a_\nu=f_\nu(o)$ и $w_\nu=f_\nu(z_\nu)$, где $z_\nu$ произвольная фиксированная точка из единичного круга. Пусть $\varphi_\nu(w)$ есть функция, оборотная к $f_\nu(z)$ и $\widetilde{D}$ есть дополнение суммы $D_\nu$ ($\nu=1, \ldots$,n) до расширенной плоскости $w$.

---

*) Под логарифмами в левой части I понимаются значения тех однозначных в единичном круге ветвей многозначных функций от $z_\nu$, которые при $z_\nu=0$($\nu=1, \ldots, n$) обращаются в нуль. В дальнейшем покажем, что значения

$$\log \frac{(f_i(z_i)-f_k(z_k))\ (f_i(o)-f_k(o))}{(f_i(z_i)-f_k(o))\ (f_i(o)-f_k(z_k))}$$

как функции от $z_i$ и $z_k$ совпадают.

1. Допустим, что $f_\nu(z)$ регулярны в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ $(\nu=1, \ldots, n)$.

Будем считать, что все $z_\nu$ отличны от нуля, так как в дальнейшем этот тривиальный случай по непрерывности может быть включен в рассмотрение.

Пусть

$$S(w) = -Re\left[\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \log\frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\right]$$

$$P(w) = Re\left[\alpha_\nu \log\left(1-\frac{\varphi_\nu(w_\nu)}{\varphi_\nu(w)}\right) - \overline{\alpha_\nu} \log\left(1-\overline{\varphi_\nu(w_\nu)}\varphi_\nu(w)\right)\right]$$
$$\nu=1, \ldots, n$$

Под $\log\dfrac{w-w_\nu}{w-a_\nu}$ вне $D_\nu$ понимаем ту ветвь, которая в точке $\infty$ обращается в ноль, под $\log\left(1-\overline{\varphi_\nu(w_\nu)}\,\varphi_\nu(w)\right)$ в $D_\nu$ понимаем ту ветвь, которая при $w=a_\nu$ обращается в ноль. Обозначим через $B_\nu$ образ кольца $|z_\nu|<|z|<\rho_\nu$, где $\rho_\nu>1$ есть радиус круга, в котором $f_\nu(z)$ еще регулярна, при отображении этого кольца посредством $f_\nu(z)$. Тогда под $\log\left(1-\dfrac{\varphi_\nu(w_\nu)}{\varphi_\nu(w)}\right)$ в $B_\nu$ понимаем ту ветвь, которая совпадает с выбранной ветвью $\log\left(1-\varphi_\nu(w_\nu)\varphi_\nu(w)\right)$, т. е. если $w\in C_\nu$, то

$$\log\left(1-\frac{\varphi_\nu(\omega_\nu)}{\varphi_\nu(w)}\right) = \overline{\log\left(1-\overline{\varphi_\nu(\omega_\nu)}\varphi_\nu(w)\right)}$$

Так как в $B_\nu$ однозначен еще $\log\dfrac{w-w_\nu}{w-a_\nu}$ и выбранные таким образом ветви всех трех логарифмов совпадают, то в $B_\nu$

$$\log\left(1-\frac{\varphi_\nu(w_\nu)}{\varphi_\nu(w)}\right) - \log\frac{w-w_\nu}{w-a_\nu} \equiv \log\frac{(\varphi_\nu(w)-\varphi_\nu(\omega_\nu))(w-a_\nu)}{\varphi_\nu(w)\,(w-w_\nu)}.$$

Ввиду того, что последняя функция является гармонической и во всей области $D_\nu$, мы зафиксировали ее ветвь в $D_\nu$.

Поскольку $S(w)$ и $p_\nu(w)$ $(\nu=1, \ldots, n)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Нехари, то $\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{C_i} S(w)\dfrac{\partial p_i}{\partial n}\,ds \geqslant 0$

или, полагая

$$S(w) = Re\{\sigma(w)\}$$
$$P_\nu(w) = Re\{q_\nu(w)\}$$

и, так как $\frac{\partial p_\nu}{\partial n} ds = \frac{1}{i} q'(w) dw$

получим: $\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{C_i} S(w) \frac{\partial p_i}{\partial n} ds =$

$$= -Re\left\{\frac{1}{i} \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} (\sigma(w) + p_i(w))\sigma'(w) dw\right\} =$$

(т. к. $q_\nu(w) + \sigma(w)$ регулярна в $D_\nu$.)

$$= Re\left\{\frac{1}{i} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{C_\nu} \left[- \sum_{k \neq \nu} \alpha_k \log \frac{w - w_k}{w - a_k} - \alpha_\nu \log (1 - \overline{\varphi_\nu(w_\nu)} \varphi_\nu(w)) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_\nu \log \frac{(\varphi_\nu(w) - \varphi_\nu(w_\nu))(w - a_\nu)}{\varphi_\nu(w)\ (w - w_\nu)}\right]\left(\frac{\alpha_\nu}{w - w_\nu} - \frac{\alpha_\nu}{w - a_\nu}\right) dw\right\} =$$

$$= 2\pi Re\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\left[-\alpha_\nu \sum_{k \neq \nu} \alpha_k \log \frac{w_\nu - w_k}{w_\nu - a_k} + \alpha_\nu \sum_{k \neq \nu} \alpha_k \log \frac{a_\nu - w_k}{a_\nu - a_k} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \alpha_\nu^2 \log \frac{\varphi_\nu'(w_\nu)(w_\nu - a_\nu)}{\varphi_\nu(w_\nu)} - \alpha_\nu^2 \log \frac{\varphi_\nu(w_\nu)}{(w_\nu - a_\nu)\varphi_\nu'(a_\nu)}\right]\right\} -$$

$$-2\pi Re \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^2 \log (1 - |\varphi_\nu(w_\nu)|^2).$$

Ввиду однозначности $\log \frac{w - w_k}{w - a_k}$ вне $D_k$

и $\log \frac{(\varphi_\nu(w) - \varphi_\nu(w_\nu))\ (w - a_\nu)}{\varphi_\nu(w)\ (w - w_\nu)}$ в $D_\nu$

$$-\log \frac{w_\nu - w_k}{w_\nu - a_k} + \log \frac{a_\nu - w_k}{a_\nu - a_k} = \log \frac{(w_\nu - a_k)(a_\nu - w_k)}{(w_\nu - w_k)(a_\nu - a_k)}$$

$$\log\frac{\varphi_\nu'(w_\nu)(w_\nu-a_\nu)}{\varphi_\nu(w_\nu)}-\log\frac{\varphi_\nu(w_\nu)}{(w_\nu-a_\nu)\varphi_\nu'(a_\nu)}=$$

$$=\log\frac{\varphi_\nu'(a_\nu)\varphi_\nu'(w_\nu)(w_\nu-a_\nu)^2}{\varphi_\nu^2(w_\nu)}.$$

Покажем, что

$$1)\ \log\frac{w-w_k}{w-a_k}\bigg|_{w=a_\nu}-\log\frac{w-w_k}{w-a_k}\bigg|_{w=w_\nu}= \qquad (r)$$

$$2)\ =\log\frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\bigg|_{w=a_k}-\log\frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\bigg|_{w=w_\nu}.$$

Тем самым мы докажем сноску при формулировке леммы и неравенство I для случая 1.

Рассмотрим $F_1(a_\nu,w_\nu;\ a_k,\ w_k)\equiv$

$$\equiv\log\frac{w-w_k}{w-a_k}\bigg|_{w=a_\nu}-\log\frac{w-w_k}{w-a_k}\bigg|_{w=w_\nu}$$

как функцию от четырех комплексных переменных $a_\nu$, $w_\nu\in D_\nu$ и $a_k$, $w_k\in D_k$. Эта функция однозначна по всем аргументам, т. к. $D_\nu$ и $D_k$ — взаимно неналегающие односвязные области.

Докажем, что $F_1(a_\nu,\ w_\nu,\ a_k,\ w_k)$ непрерывна по совокупности всех аргументов.

Пусть $\zeta_k(w)=\dfrac{w-w_k}{w-a_k}$ отображает область $D_\nu$ на область $B_\nu$ и $l_\nu$ есть граница $B_\nu$. Положим $\varrho=\min\begin{cases}\rho_1\\ \rho_2\end{cases}$, где $\varrho_1$ и $\varrho_2$ равны соответственно расстоянию $\zeta_k(a_\nu)$ и $\zeta_k(w_\nu)$ до $l_\nu$. Пусть $B_{\nu\rho}$ есть односвязная область, целиком расположенная в $B_\nu$, граница которой $l_{\nu\rho}$ отстоит от $l_\nu$ на расстояние $\frac{\rho}{4}$. Всегда можно указать такое $\delta_1>0$*), что как только $|a_k-a_k'|<\delta_1$,

$$|w_k-w_k'|<\delta_1\ w_k',\ a_k'\in D_k,$$

---

*) Так как $\dfrac{w_1-w_3}{w_2-w_4}$ равномерно непрерывна по всем четырем аргументам, при $w_1,\ w_2\in\overline{D}_\nu$ и $w_3,w_4\in\overline{D}_k$, если $D_\nu$ и $D_k$ не имеют общих граничных точек, и в $\overline{D}_\nu$ и $\overline{D}_k'$ где $\overline{D}_k'\subset D_k$ и $a_k w_k\in D_k'$ если $D_\nu$ и $D_k$ имеют общие граничные точки.

так $|\zeta_k(w)-\zeta'_k(w)|<\frac{\rho}{4}$ для любого $w\in D_\nu$, где $\zeta'_k(w)=$
$=\frac{w-w'_k}{w-a'_k}$. Возьмем $\delta_2>O$ такое*, что, как только $|a_\nu-a'_\nu|<\delta_2$

$$|w_\nu-w'_\nu|<\delta_2 \quad a'_\nu, w'_\nu\in D_\nu, \text{ так } |\zeta'_k(a_\nu)-\zeta'_k(a'_\nu)|<\frac{\rho}{4} \text{ и}$$

$$|\zeta'_k(w_\nu)-\zeta'_k(w'_\nu)|<\frac{\rho}{4}.$$

Тогда, если $B'_\nu$ есть образ области $D_\nu$ при отображении ее функцией $\zeta'_k(w)$, то $\overline{B}'_{\nu\rho}$ принадлежит как $B_\nu$, так и $B'_\nu$ **и** содержит точки $\zeta_k(a_\nu)$, $\zeta_k(w_\nu)$, $\zeta'_k(a'_\nu)$ и $\zeta'_k(w'_\nu)$.

Пусть $log\ (\xi_k(w_1))-log\ (\zeta'_k(w_2))=2k\pi i$ при $\zeta_0=\zeta_k(w_1)=$
$=\zeta'_k(w_2)$, где $\zeta_0$ фиксированная точка из $B_{\nu\rho}$

Тогда, ввиду регулярности $log\,\zeta_k$ и $log\,\zeta'_k$ в $B_{\nu\rho}$, по любому $\varepsilon>O$ найдется $r>O$, что

$$|(log(\zeta_{1k})-log(\zeta'_{1k}))-(log(\zeta_{2k})-log(\zeta'_{2k}))|<\varepsilon$$

$$\text{как только } |\zeta_{1k}-\zeta'_{1k}|<r \text{ и } |\zeta_{2k}-\xi'_{2k}|<r.$$

Возьмем $\delta_3>O$ такое, что, как только

$$|a_\nu-a'_\nu|<\delta_3,\ |w_\nu-w'_\nu|<\delta_3,\ |a_k-a'_k|<\delta_3,\ |w_k-w'_k|<\delta_3,$$

$$\text{так } |\zeta_k(a_\nu)-\zeta'_k(a'_\nu)|<r \text{ и } |\zeta_k(w_\nu)-\zeta'_k(w'_\nu)|<r$$

Выбирая $\delta=min\begin{cases}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{cases}$ и полагая

$$|a_\nu-a'_\nu|<\delta,\ |a_k-a'_k|<\delta$$

$$|w_\nu-w'_\nu|<\delta,\ |w_k-w'_k|<\delta$$

получим $|F_1(a_\nu, w_\nu, a_k, w_k)-F_1(a'_\nu, w'_\nu, a'_k, w'_k|=$

$$=|(\log(\zeta_k(a_\nu))-log(\zeta'_k(a'_\nu)))-(log(\zeta_k(w_\nu))-$$

$$-(\log(\zeta'_k(w'_\nu)))|<\varepsilon.$$

Непрерывность доказана.

---

*) См. примечание на стр. 33.

Вводя функцию $F_2(a_\nu, w_\nu; a_k, w_k) \equiv$

$$\equiv \log \frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\bigg|_{w=a_k} - \log \frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\bigg|_{w=w_k}$$

аналогичным образом убедимся, что она однозначна и непрерывна по всем четырем аргументам.

Заметим, что в силу однозначности соответствующих логарифмов в рассматриваемых областях

$$F_1(a_\nu, a_\nu, a_k, w_k) \equiv O \text{ и } F_2(a_\nu, w_\nu, a_k, a_k) \equiv O.$$

Следовательно, $F_1(a_\nu, a_\nu, a_k, a_k) \equiv O$

и $F_2(a_\nu, a_\nu, a_k, a_k) \equiv O$. Рассматривая функцию

$$P(a_\nu, w_\nu, a_k, w_k) \equiv F_1(a_\nu, w_\nu, a_k, w_k) - F_2(a_\nu, w_\nu, a_k, w_k)$$

убедимся, что она должна быть равна постоянной, так как, с одной стороны, она непрерывна, а с другой стороны, она может изменяться только скачками, равными $2k\pi i$. Отсюда $P(a_\nu, w_\nu, a_k, w_k) \equiv O$, т. к. $P(a_\nu, a_\nu, a_k, a_k) \equiv O$ и (г) доказано.

2. Освободимся от требования регулярности $f_\nu(z)$ ($\nu = 1, \ldots, n$) в замкнутом круге $|z| \leqslant 1$.

Пусть $f_\nu(z)$ регулярны лишь в открытом круге. Возьмем монотонную последовательность чисел $O < r_k < 1$ такую, что $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 1$.

Положим $f_{\nu k}(z) \equiv f_\nu(r_k z)$ в круге $|z| < 1$. Взяв $O < r < 1$ такое, что все фиксированные точки $z_1, \ldots, z_n$ принадлежат этому кругу $|z| < r$, получим, что в круге $|z| < r$ все $f_{\nu k}(z)$ сходятся равномерно к $f_\nu(z)$ соответственно ($\nu = 1, \ldots, n$) вместе с производными.

При каждом $k$ к системе функций $f_{\nu k}(z)$ ($\nu = 1, \ldots, n$) применимо, по доказанному в 1, неравенство I. Так как по любому $\varepsilon > 0$ найдется $N > O$ такое, что, как только $k > N$, так $|f_{\nu k}(z) - f_\nu(z)| < \varepsilon$ и $|f'_{\nu k}(z) - f'_\nu(z)| < \varepsilon$ для всех $z$ из круга $|z| < r$ и всех $\nu = 1, \ldots, n$ одновременно, то, подставляя в I $f_{\nu k}(z)$ и переходя к пределу по $k$, докажем утверждение 2.

3. Выясним вопрос о знаке равенства в I. Пусть существует такая система функций $f_\nu(z)$ $\nu = 1, \ldots, n$, удовлетворяющая условиям этой леммы, для которой в каких-то фиксированных точках $z_1, \ldots, z_n$ имеет место знак равенства в I. Требуется

выяснить необходимые и достаточные условия, которыми должны удовлетворять указанные функции и точки.

Это равносильно тому, что требуется найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять взаимно неналегающие односвязные области $D_\nu$, ни одна из которых не содержит точки $w=\infty$ и содержит точки $a_\nu$ и $w_\nu$ принадлежащие $D_\nu$ соответственно ($\nu=1, \ldots, n$), чтобы имело место равенство

$$\text{I}'\ Re I=O, \text{ где } I=\left[\sum_{i\neq k}\alpha_i\alpha_k \log\frac{(w_i-a_k)(w_k-a_i)}{(w_i-w_k)(a_k-a_i)}+\right.$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2 \log\frac{\varphi_\nu'(a_\nu)\,\varphi_\nu'(w_\nu)\,(w_\nu-a_\nu)^2}{\varphi_\nu^2(w_\nu)}-$$

$$\left.-\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2\log\left(1-|\varphi_\nu(w_\nu)|^2\right)\right].$$

$$i,\ k=1, \ldots, n$$

Рассмотрим $\varphi_{\nu k}(w)$ как функции, обратные к $f_{\nu k}(z)$, причем все $k\geqslant k_0$, где $k_0$ такое, что $r<r_{k_0}<1$*.

Обозначая через $D_{\nu_r}$ образ круга $|z|<r$ при отображении его посредством функции $f_\nu(z)$ ($\nu=1, \ldots, n$) получим, что $a_\nu, w_\nu \in D_{\nu_r}$ и при $k\geqslant k_0$ $\varphi_{\nu k}(w)$ равномерно сходятся к $\varphi_\nu(w)$ в $D_{\nu_r}$ ($\nu=1, \ldots, n$), так как $D_{\nu_r}'\subset D_{\nu k}$ при $k\geqslant k_0$, где $D_{\nu k}$ есть области, полученные отображением круга $|z|<1$ посредством функций $f_{\nu k}(z)$.

Тогда, полагая

$$S(w)=-Re\left[\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu \log\frac{w-w_\nu}{w-a_\nu}\right]$$

$$p_{\nu k}(w)=Re\left[\alpha_\nu \log\left(1-\frac{\varphi_{\nu k}(w_\nu)}{\varphi_{\nu k}(w)}\right)-\right.$$

$$\left.-\overline{\alpha_\nu}\log\left(1-\overline{\varphi_{\nu k}(w_\nu)}\,\varphi_{\nu k}(w)\right)\right]\ \nu=1, \ldots, n.\ k\geqslant k_0.$$

---

*) $f_{\nu k}(z)$ и $r$ имеют тот же смысл, что и в 2.

из теоремы Нехари получим

$$a)\ \sum_{\nu=1}^{n}(S+P_{\nu k},\ S+P_{\nu k})_{D\nu_k}+(S,S)_{\breve{D}_k}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{C_{\nu k}}S(w)\frac{\partial p_{\nu k}}{\partial n}ds \qquad **)$$

так как $C_{\nu k}$ есть регулярные кривые!

Значение интеграла справа в a) есть $Rel$, куда вместо $\varphi_\nu(w)$ подставлены $\varphi_{\nu k}(w)$. Переходя к пределу по $k$ и учитывая I', получим

$$b)\ \sum_{\nu=1}^{n}(S+p_\nu,\ S+p_\nu)_{D_\nu}+(S,S)_{\breve{D}}=O$$

и, вследствие неотрицательности слагаемых,

c) $(S,S)_{\breve{D}}=O$

d) $(S+p_\nu,\ S+p_\nu)=O.$

Так как $S(w)\equiv\!\!\!/\ const$, то из $c)$ следует, что $m\breve{D}=O$ и области $D_\nu$ должны заполнять всю расширенную плоскость $w$. Следовательно, множество точек $w\in\breve{D}$ должно совпадать с множеством граничных точек для всех $D_\nu$. Отметим, что в расширенной плоскости $w$ множество $\breve{D}$ есть связное***).

Ввиду того, что, по определению, $p_\nu(w)=O$ для всех $w\in C_\nu$ и $S(w)$ непрерывна при $w\in\breve{D}$, то из $d)$ $S(w)=\text{const}$ для всех $w\in\breve{D}$. Но точка $w=\infty$ принадлежит $\breve{D}$ и при $w=\infty$ $S(w)=O$. Следовательно, $S(w)\equiv O$ для всех $w\in\breve{D}$, что и доказывает необходимость в формулировке леммы.

Так как достаточность полученных условий очевидна, то лемма I доказана полностью.

Замечание. Так как при выполнении условий $A$ $S(w)+p_\nu(w)\equiv O(\nu=1,\ldots,n)$ $w\in C_\nu$, то $S(w)+p_\nu(w)\equiv O$

**) Где $C_{\nu k}$ — границы $D_{\nu k}$ и $\breve{D}_k$ — дополнение суммы $D_{\nu k}$ до полной расширенной плоскости $w$. $\nu=1,\ldots,n$.

***) Если множество $\breve{D}$ распадается на несколько компонент, не имеющих общих точек ни в какой конечной части плоскости $w$, то все эти компоненты содержат точку $w=\infty$.

$w \in D_\nu$ $(\nu=1,\ldots,n)$, так как, по условию, эта сумма есть гармоническая функция при $w \in D_\nu$. Тогда условия А и В примут вид:

Знак равенства в 1 имеет место тогда и только тогда, когда

1) система функций $f_\nu(z)$ $(\nu=1,\ldots,n)$, удовлетворяющая условиям леммы, и система точек $z_1,\ldots,z_n$ $|z_\nu|<1$ $(\nu=1,\ldots,n)$ таковы, что имеет место

$$A' \quad Re\left[\alpha_\nu \log\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)-\bar{\alpha}_\nu \log(1-\bar{z}_\nu z)-\right.$$
$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \log\frac{f_\nu(z)-f_k(z_k)}{f_\nu(z)-f_k(o)}\right]\equiv O$$

по всем $z$, принадлежащим единичному кругу, т. е. как функция от $z$ при фиксированных $z_1 \ldots, z_n$ и $\nu=1,\ldots,n$ одновременно

В 2) области $D_\nu$ вместе с их границами заполняют всю расширенную плоскость $w$.

Эквивалентность условий $A'$ и $B$ условиям $A$ и $B$ очевидна.

Теорема 1. Пусть $f_1(z)$ и $f_2(z)$ есть функции, регулярные внутри единичного круга и однолистно отображающие его на взаимно неналегающие области.

Тогда для любых точек $z_1$ и $z_2$ из этого круга справедливо неравенство

$$\mathrm{I} \quad \left|\log\frac{(f_1(o)-f_2(o))(f_1(z_1)-f_2(z_2))}{(f_1(o)-f_2(z_2))(f_1(z_1)-f_2(o))}\right|\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}\log(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$$

При $z_1$ и $z_2$, отличных от нуля, знак равенства в I имеет место только тогда, когда и в неравенстве

$$\mathrm{II} \quad \sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}\leqslant\left|\frac{(f_1(o)-f_2(o))(f_1(z_1)-f_2(z_2))}{(f_1(o)-f_2(z_2))(f_1(z_1)-f_2(o))}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}$$

В II знак равенства имеет место только тогда, когда $f_1(z)$ и $f_2(z)$ однолистно отображают круг на две смежные полуплоскости. При выполнении этих условий, знак равенства в оценке сверху (снизу) в II имеет место тогда и только тогда, когда точки $f_1(o)$ и $f_2(z_2)$; $f_1(z_1)$ и $f_2(o)$ ($f_1(o)$ и $f_2(o)$; $f_1(z_1)$ и $f_2(z_2)$) симметричны относительно границы.

Доказательство. 1. Полагая в неравенстве I леммы 1 последовательно $\alpha_1=\alpha_2=e^{i\varphi}$ и $\alpha_1=-\alpha_2=ie^{i\varphi}$ и складывая, получим

$$\text{a) } Re\left\{ e^{2i\varphi} \log \frac{(f_1(o)-f_2(o))(f_1(z_1)-f_2(z_2))}{(f_1(z_1)-f_2(o))(f_1(o)-f_2(z_2))}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2} \log(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$$

Полагая $2\varphi=-arg\left\{log \frac{(f_1(o)-f_2(o))(f_1(z_1)-f_2(z_2))}{(f_1(z_1)-f_2(o))(f_1(o)-f_2(z_2))}\right\}$

получим I.

2. Выясним вопрос о знаке равенства в оценке II снизу, (геометрический способ).

Полагая $\varphi=\frac{\pi}{2}$, получим из а) оценку в II снизу.

Так как это неравенство получено сложением двух других неравенств, полученных из неравенства 1 при $n=2$ и $\alpha_1=-\alpha_2=$ $=1$, $\alpha_1=\alpha_2=i$, то знак равенства в полученном неравенстве может достигаться лишь одновременно с обоими исходными неравенствами. Из условия А леммы 1 следует, что множество граничных точек должно удовлетворять условиям

$$\Gamma \begin{cases} \text{c)} \quad \left|\dfrac{w-w_1}{w-a_1}\right| = \left|\dfrac{w-w_2}{w-a_2}\right| & \text{где } arg\, \dfrac{w-w_\nu}{w-a_\nu}=O \\ \text{d)} \quad arg\dfrac{w-w_1}{w-a_1}=arg\, \dfrac{w-a_2}{w-w_2} & \text{при } w=\infty \quad (\nu=1,2) \end{cases}$$

Пусть $\overset{\infty}{D}$ есть множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям и $C_r$ — одна из его компонент, не имеющая общих точек с другими ни в какой конечной части плоскости $w$. Обозначим через $l$ какую-либо неограниченную часть $C_r$, связную и не имеющую общих точек с отрезками, соединяющими точки $w_1$ и $a_1$, $w_2$ и $a_2$, соответственно.

Ввиду однозначности при $w\in \overset{\infty}{D}$ логарифмов в условиях $\Gamma$ и выбора ветвей, при $w\in l$ условия $\Gamma$ примут вид

$$\text{г} \begin{cases} \text{c} \quad \left|\dfrac{w-w_1}{w-a_1}\right| = \left|\dfrac{w-w_2}{w-a_2}\right| & \text{где } -\pi<\alpha_\nu=arg\,\dfrac{w-w_\nu}{w-a_\nu}<\pi \\ \text{d}_1 \quad \alpha_1=-\alpha_2 & (\nu=1,2) \end{cases}$$

Ясно, что $|\alpha_\nu|$ есть величина угла, под которым из точки $w$ виден отрезок $(w_\nu, \ a_\nu)$, и $\alpha_\nu = |\alpha_\nu|$, если вращение вектора $a_\nu - w$ вокруг точки $w$ до совпадения с направлением вектора $w_\nu - w$ внутри меньшего из углов между этими векторами, происходит против часовой стрелки, и $\alpha_\nu = -|\alpha_\nu|$, если указанное вращение происходит по часовой стрелке. Итак, так как $-\pi<\alpha_1<\pi$, $-\pi<\alpha_2<\pi$ при $w \in l$, то треугольник $a_1 w w_1$ подобен треугольнику $a_2 w w_2$ и

$$\frac{|w-a_1|}{|w-a_2|} = \frac{|w-w_1|}{|w-w_2|} = \frac{|a_1-w_1|}{|a_2-w_2|} = const.$$

Так как точка $w=\infty$ принадлежит $l$, то $const=1$. Следовательно, $l$ должна быть полупрямой, расположенной на некоторой прямой $L$, относительно которой $a_1$ и $a_2$, $w_1$ и $w_2$ должны быть симметричны (рис. 1).

Рис. 1.

Допустим, что $a_1$ и $w_1$, $a_2$ и $w_2$ оказались по разные стороны от $L$. Тогда вся $L$ не может быть граничной прямой, так как в этом случае она необходимо должна содержать точки, принадлежащие $D_1$ и $D_2$.

Покажем, что множество $\breve{D}$ может состоять только из точек $L$ и тем самым придем к противоречию.

1. Все точки $L$ удовлетворяют условиям $\Gamma$.

1) Очевидно, что все точки $l$ удовлетворяют условию $г$.

2) Так как $a_1$ и $a_2$, $w_1$ и $w_2$ симметричны относительно $L$, то точка пересечения $(a_1, w_1)$ и $(a_2, w_2)$ $Q$ расположена на $L$.

3) Если на $l$ условия $\Gamma$ имеют вид $г$, то при движении из $l$ вдоль $L$ за точку $Q$ условия $\Gamma$ примут вид

$$\begin{cases} \text{c)} \\ \text{d}_2\text{)} \quad (2\pi+\alpha_1) = -(-2\pi+\alpha_2) \end{cases}$$

или, опять-таки, $г$.

Следовательно, все точки $L$ удовлетворяют условию $\Gamma$.

Пусть точка $w_0$ не принадлежит $L$ и принадлежит $\breve{D}$.

1) Точка $w_0$ должна принадлежать некоторой граничной компоненте $C_u$, не имеющей ни в какой конечной части плоскости общих точек с $L$, так как, по непрерывности условий $\Gamma$, существует некоторая область, целиком содержащая $L$ и не содержащая отличных от $L$ точек, удовлетворяющих $\Gamma$.

Действительно, возьмем любую точку $w \in L$.

Если $w \neq Q$, то, по доказанному, для нее выполнены условия $\varepsilon$ и существует такая окрестность этой точки, в которой нет других граничных точек, отличных от точек $L$.

Если $w = Q$, рассмотрим достаточно малую окрестность этой точки (рис. 2). В частях 1 и 1′ этой окрестности выполнены условия $\varepsilon$ и не может быть граничных точек, отличных от $L$. В частях 2 и 2′ $\left| arg \dfrac{w-w_1}{w-a_1} \right| \neq \left| arg \dfrac{w-a_2}{w-w_2} \right|$ и тоже не может быть граничных точек, отличных от $L$.

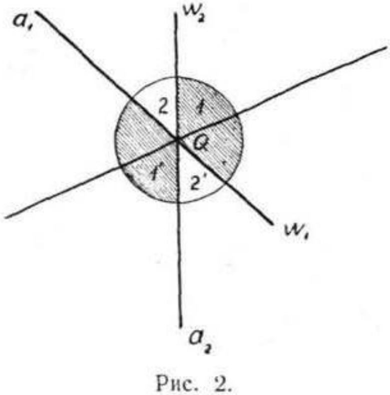

Рис. 2.

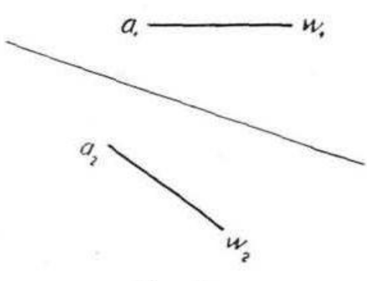

Рис. 3.

2. Такой компоненты быть не может, так как для ее неограниченной части $l_1$ должно выполняться $\varepsilon$, а $\varepsilon$ имеет место только для точек $L$.

Таким образом, точки $a_1$ и $w_1$, $a_2$ и $w_2$ должны быть расположены по одну сторону $L$ (рис. 3). Так как, в этом случае, условия $\varepsilon$ выполнены и подавно для всех точек, то из предыдущего следует, что $L$ есть единственное множество, удовлетворяющее требованиям $\Gamma$. Итак, 2 доказано.

3. Так как оценка в II сверху получается сложением I леммы 1

при $n=2$ и $\alpha_1=\alpha_2=1, \alpha_1=-\alpha_2=i$, то условия

А леммы 1 для этого случая примут вид

$$D\begin{cases}\left|\dfrac{w-w_1}{w-a_1}\right|=\left|\dfrac{w-a_2}{w-w_2}\right|\\[2ex] arg\ \dfrac{w-w_1}{w-a_1}=arg\ \dfrac{w-w_2}{w-a_2}\end{cases}$$

Так как при сохранении всех прочих условий $D$ получается из $\Gamma$ путем перестановки $a_2$ и $w$, то 3 доказано.

4. Доказательство того, что I не имеет экстремальных систем функций, отличных от II, не представляет интереса и содержится по существу в замечании к этой теореме. Итак, теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Используя замечание к лемме 1, из условий A′ легко получаем, что в I и II знак равенства имеет место только тогда, когда $D_1$ и $D_2$ есть смежные полуплоскости без разрезов. В предыдущем доказательстве обоснование этого положения занимало основное место, зато условия на точки $a_1$, $w_1$, $a_2$ и $w_2$ получались без труда. При втором методе это получается сложнее. Проведем доказательство.

Условия A′ для I (и II, полагая $\varphi=\dfrac{k\pi}{2}$) примут вид:

$$Re\left[e^{i\varphi}\log\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)-e^{-i\varphi}\log(1-z_\nu z)-\right.$$

$$\left.-e^{i\varphi}\sum_{k=1}^{2}\log\frac{f_\nu(z)-f_k(z_k)}{f_\nu(z)-f_k(o)}\right]\equiv 0.$$

$$Re\left[(-1)^{\nu+1}\,ie^{i\varphi}\log\left(1-\frac{z_\nu}{z}\right)+(-1)^{\nu+1}\,ie^{-i\varphi}\log(1-\bar{z}_\nu z)-\right.$$

$$\left.-ie^{i\varphi}\sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}\log\frac{f_\nu(z)-f_k(z_k)}{f_\nu(z)-f_k(o)}\right]\equiv 0$$

по $z$ из единичного круга $|z|<1$ и $|z_i|<1$, $i=1, 2\ldots$,

для $\nu=1,2$ одновременно.

Рассмотрим систему для $\nu=1$, учитывая, что, если вещественная часть регулярной в области (при $z$ принадлежащих кругу $|z|<1$) функции равна нулю, то сама эта функция необходимо должна быть постоянной.

a) $e^{i\varphi}\log\left(1-\frac{z_1}{z}\right)-e^{i\varphi}\log(1-\bar{z}_1 z)-e^{i\varphi}\log\frac{f_1(z)-f_1(z_1)}{f_1(z)-f_1(o)}-$

$$-e^{i\varphi}\log\frac{f_1(z)-f_2(z_2)}{f_1(z)-f_2(o)}\equiv const_1 \text{ для всех } |z|<1$$

в) $ie^{i\varphi}\log\left(1-\frac{z_1}{z}\right)+ie^{i\varphi}\log(1-\bar{z}_1 z)-ie^{i\varphi}\log\frac{f_1(z)-f_1(z_1)}{f_1(z)-f_1(o)}+$

$$+ie^{i\varphi}\log\frac{f_1(z)-f_2(z_2)}{f_1(z)-f_2(o)}\equiv const_2,$$

для всех $|z|<1$

Деля в) на $i$ и складывая с а), получим:

$$\text{c)}\ e^{i\varphi}\log\left(1-\frac{z_1}{z}\right)-e^{i\varphi}\log\frac{f_1(z)-f_1(z_1)}{f_1(z)-f_1(o)}\equiv const_3$$

$$\text{или}\quad \log\left(1-\frac{z_1}{z}\right)-\log\frac{f_1(z)-f_1(z_1)}{f_1(z)-f_1(o)}\equiv const_4=K$$

Очевидно, что $K$ есть функция от $z_1$, $f_1(z_1)$ и $f_1(o)$ при определенном выборе ветвей логарифмов.

Положив в c) $z=0$ и $z=z_1$, получим

$$\text{d)}\quad \begin{aligned} &\log\frac{f_1'(o)(-z_1)}{f_1(o)-f_1(z_1)}=K \\ &\log\frac{f_1(z_1)-f_1(o)}{f'(z_1)z_1}=K \end{aligned}$$

Заметим, что если для данных функций, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ удовлетворяющих условиям теоремы 2, в точках $z_1$ и $z_2$ достигается равенство в соотношении I теоремы 2, то это равенство сохранится и для

$$\text{f)}\quad F_1(z)\equiv\frac{f_1(z)-f_1(o)}{f'(o)}\quad\text{и}\quad F_2\equiv\frac{f_2(z)-f_1(o)}{f'(o)},$$

и $F_1(z)$ и $F_2(z)$, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 2.

Тогда из c) имеем

$$\frac{F_1(z)-F_1(z_1)}{F_1(z)}\equiv R\,\frac{z-z_1}{z}\quad\text{где } \ln R=-k$$

$$\text{или}\quad F_1(z)\equiv\frac{F_1(z_1)/_1R}{1-\frac{z-z_1}{z}R}\equiv\frac{F_1(z_1)}{Rz_1}\,\frac{z}{1-\frac{R-1}{Rz_1}z}.$$

Так как $F_1(z)$ и $F_2(z)$ должны быть регулярны внутри единичного круга и отображать этот круг на области $D_1$ и $D_2$ однолистно, причем $D_1$ и $D_2$ не имеют общих точек и заполняют всю плоскость $w$, то необходимо $\frac{R-1}{Rz_1}=e^{i\varphi}$ и $F_1(z)\equiv F_1(z_1)$

$$\frac{z}{1-e^{i\varphi}z}\left(\frac{1-e^{i\varphi}z_1}{z_1}\right) \text{ так как из e) } R=\frac{1}{1-z_1e^{i\varphi}}.$$

Так как $F'_1(o)=1$, то

$$F_1(z)\equiv\frac{z}{1-e^{i\varphi}z}.$$

Заметим, что для $F_1(z)$ условия d) выполняются автоматически.

Итак, необходимо $\quad f_1(z)=f_1(o)+f_1'(o)\dfrac{z}{1-e^{i\varphi}z};$

аналогично $\quad f_2(z)=f_2(o)+f_2'(o)\dfrac{z}{1-e^{i\varphi}z},$

Следовательно, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ необходимо должны отображать круг $|z|<1$ на полуплоскости без разрезов.

Остальная часть доказательства не представляет интереса и может быть легко получена из п.п. 2 и 3 теоремы 2.

Теорема 2. (Случай $n=2m$). Пусть $f_\nu(z)$ $(\nu=1,\ldots,n)$ однолистны и регулярны внутри круга $|z|<1$ и отображают его на взаимно неналегающие области. Тогда

$$\prod_{i=1}^{n}\sqrt{1-|z_i|^2}\leqslant\prod_{j,k}\left|\frac{(f_j(o)-f_k(o))\,(f_j(z_j)-f_k(z_k))}{(f_j(z_j)-f_k(o))\,(f_j(o)-f_k(z_k))}\right|\leqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-|z_i|^2}} \qquad \mathrm{I}$$

$$j=2p,\ p=1,\ldots,m$$
$$k=2r-1,\ r=1,\ldots,m$$

$$\left|\log\prod_{j,k}\frac{(f_j(o)-f_k(o))\,(f_j(z_j)-f_k(z_k))}{(f_j(z_j)-f_k(o))\,(f_k(z_k)-f_j(o))}\right|\leqslant\log\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-|z_i|^2}} \qquad \mathrm{II}$$

Первая оценка (а, следовательно, и вторая) является точной и достигается, например функциями:

$$\text{снизу}\quad f_j(z_j)=e^{i\frac{\pi}{m}j}\sqrt[m]{\frac{1+z_j}{1-z_j}}\quad (j=1,\ldots n)$$

при $z_j$ равных между собой и вещественных;

сверху

$$f_j(z_j)=e^{i\frac{\pi}{m}j}\sqrt[m]{\frac{1+z_j}{1-z_j}} \quad (j=2p,\ p=1,\ \ldots,\ m)$$

$$f_k(z_k)=e^{i\frac{\pi}{m}k}\sqrt[m]{\frac{1+\dfrac{\varrho-z_k}{1-\varrho z_k}}{1-\dfrac{\varrho-z_k}{1-\varrho z_k}}}\ (0<\varrho<1)$$

при $z_i=\varrho\ (i=1,\ \ldots,\ n)$

Полагая в лемме 1:

1) $\alpha_\nu=e^{i\varphi}$ 2) $\alpha_\nu=(-1)^\nu ie^{i\varphi}$, складывая и пользуясь произвольностью $\varphi$, получим I и II. Знак равенства проверяется непосредственной проверкой.

Лемма 2. Для любой системы функций $f_\nu\ (z)\ (\nu=1, ..., n)$, удовлетворяющей условиям леммы 1, и для любых точек $z_1, \ldots, z_n$ из единичного круга справедливо неравенство:

$$Re\Big\{\sum_{k\neq\nu}\alpha_\nu\alpha_k log\ (f_\nu(z_\nu)-f_k(o))^2(f_\nu(z_\nu)-f_k(z_k))(f_\nu(o)-f_k(o))+$$

$$+2\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2\, log\ (f_\nu(z_\nu)-f_\nu(o))+\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2\, log\ (f'_\nu(z_\nu)\,f'_\nu(o)\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu^2\ log\ \frac{|z_\nu|^2}{1-|z_\nu|^2},\ \nu,\ k=1, \ldots, n$$

где $\alpha_\nu$ произвольные вещественные постоянные и

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu=O.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда кривая $\prod_{\nu=1}^{n}|(w-w_\nu)(w-a_\nu)|^{a_\nu}=1$ разбивает расширенную плоскость $w$ так, как это указано в лемме 1.

Доказательство. Обоснование леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 и значительно проще.

Вспомогательные функции $S\ (w)$ и $p_\nu\ (w)$ примут вид:

$$S(w) = -\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \ log \left|(w-w_\nu)(w-a_\nu)\right|$$

$$p_\nu\ (w) = \alpha_\nu\ log \left| \frac{(\varphi_\nu\ (w) - \varphi_\nu(w_\nu))(1-\overline{\varphi_\nu(w_\nu)}\ \varphi_\nu(w))}{\varphi_\nu\ (w)} \right|.$$

Теорема 3. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ есть регулярные в единичном круге функции, однолистно отображающие его на взаимно неналегающие области, то для любых точек $z_1$ и $z_2$ из этого круга имеем точные оценки:

$$\text{III} \quad \left|\frac{(f_1(o)-f_1(z_1))(f_2(o)-f_2(z_2))}{(f_1(z_1)-f_2(o))(f_1(o)-f_2(z_2))}\right| \leqslant \frac{|z_1|\ |z_2|}{\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}$$

$$\text{IV} \quad \left|\frac{(f_1(o)-f_1(z_1))(f_2(o)-f_2(z_2))}{(f_1(z_1)-f_2(z_2))(f_1(o)-f_2(o))}\right| \leqslant \frac{|z_1|\ |z_2|}{\sqrt{(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}}.$$

Знак равенства в III достигается тогда и только тогда, когда и в оценке II теоремы 1 сверху, а в IV — в оценке II снизу.

Доказательство. Рассмотрим лемму 1 и лемму 2 для случая $n=2$.

Положив в лемме 1

$$\alpha_1 = i\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2 = i\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{а в лемме 2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

и складывая, получим III.

Полагая в лемме 1

$$\alpha_1 = i\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2 = -i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{а в лемме 2}$$

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{получим IV.}$$

Остальная часть доказательства полностью аналогична п.п. 2 и 3 теоремы 2.

Теорема 4. $(n=2m)$. Пусть $f_\nu(z)$ $(\nu=1, \ldots, n)$ регулярны внутри $|z|<1$ и однолистно отображают его на взаимно неналегающие области. Тогда имеем точные оценки

$$\prod_{j,k} \left|\frac{(f_k(o)-f_k(z_k))(f_j(o)-f_j(z_j))}{(f_k(z_k)-f_j(z_j))(f_k(o)-f_j(o))}\right| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \frac{|z_\nu|}{\sqrt{1-|z_\nu|^2}} \qquad \text{I}$$

$j=2p,\ p=1, \ldots, m$
$k=2r+1,\ r=o, \ldots, m-1$

$$\prod_{j,k} \left|\frac{(f_k(o)-f_k(z_k))(f_j(o)-f_j(z_j))}{(f_k(z_k)-f_j(o))(f_k(o)-f_j(z_j))}\right| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \frac{|z_\nu|}{\sqrt{1-|z_\nu|^2}} \qquad \text{II}$$

$j=2p,\ p=1, \ldots, m$
$k=2r+1,\ r=o, \ldots, m-1$

Знак равенства достигается, например, для I теми же функциями и в тех же точках, что и в теореме 2 — в оценке снизу, для II — в оценке сверху.

Положим в лемме 1 и в лемме 2

$$\text{а)}\ \alpha_\nu=(-1)^\nu i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_\nu=(-1)^\nu\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{в)}\ \alpha_\nu=i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_\nu=(-1)^\nu\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{и сложим,}$$

получим I и II.

Знак равенства для указанных функций в указанных точках проверяется непосредственным вычислением.

Теорема 5. Если $f(z)$ регулярна и однолистна в единичном круге, то для любых $z_1$ и $z_2$ из этого круга справедливо:

$$\text{I}\quad \left|\log\frac{(f(e^{i\varphi}z_1)-f(e^{i\varphi}\overline{z_1}))(f(e^{i\varphi}z_2)-f(e^{i\varphi}\overline{z_2}))}{(f(e^{i\varphi}z_1)-f(e^{i\varphi}\overline{z_2}))(f(e^{i\varphi}z_2)-f(e^{i\varphi}\overline{z_1}))}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \log\frac{|(1-z_1\overline{z_2})^2(z_1-\overline{z_2})^2|}{4\, Im\, z_1\, Im z_2\,(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}$$

$$\text{II}\quad \left|\frac{(f(e^{i\varphi}z_1)-f(e^{i\varphi}z_2))(f(e^{i\varphi}\overline{z_1})-f(e^{i\varphi}\overline{z_2}))}{(f(e^{i\varphi}z_1)-f(e^{i\varphi}\overline{z_1}))(f(e^{i\varphi}z_2)-f(e^{i\varphi}\overline{z_2}))}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|(1-z_1z_2)^2(z_1-z_2)^2|}{4\, Im\, z_1\, Im z_2\,(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}$$

$$Im\, z_1\, Im\, z_2 > O$$

Если $f(z) \in S$, то знак равенства имеет место только для функций

$$1)\ f(z) = \frac{z}{(1-e^{i(k\pi-\varphi)}\ z)^2} \text{ и}$$

$$2)\ f(z) = \frac{z}{1+e^{-2i\varphi}\ z^2}.$$

Доказательство. Пусть $z_1(\zeta)$ и $z_2(\zeta)$ есть регулярные функции, однолистно отображающие круг $|\zeta|<1$ на два смежных полукруга единичного круга $|z|<1$.

Пусть $e^{-i\varphi} z_1(\zeta) \equiv e^{i\varphi} \overline{z_2(\overline{\zeta})}$ и

$$Im\ e^{-i\varphi} z_1(\zeta) > O, \quad Im\ e^{-i\varphi} z_2(\zeta) < O.$$

Обратные функции $k\ z_1(\zeta)$ и $k\ z_2(\zeta)$ при $z_1(o) = b$ и $z_2(o) = \overline{b}\, e^{2i\varphi}$ соответственно, имеют вид

$$\zeta_1(z) = \frac{\left(\frac{1+ze^{-i\varphi}}{1-ze^{-i\varphi}}\right)^2 - \left(\frac{1+be^{-i\varphi}}{1-be^{-i\varphi}}\right)^2}{\left(\frac{1+ze^{-i\varphi}}{1-ze^{-i\varphi}}\right)^2 - \left(\frac{1+\overline{b}e^{i\varphi}}{1-\overline{b}e^{i\varphi}}\right)^2};$$

$$\zeta_2(z) = \frac{\left(\frac{1+ze^{i\varphi}}{1-ze^{i\varphi}}\right)^2 - \left(\frac{1+\overline{b}e^{i\varphi}}{1-\overline{b}e^{i\varphi}}\right)^2}{\left(\frac{1+ze^{i\varphi}}{1-ze^{i\varphi}}\right)^2 - \left(\frac{1+be^{-i\varphi}}{1-be^{-i\varphi}}\right)^2}.$$

Положим $ze^{-i\varphi} = z_1$; $be^{-i\varphi} = z_2$.

Тогда $\zeta_1(z_1 e^{i\varphi}) = \overline{\zeta}_2(\overline{z_1}\ e^{i\varphi}) = \zeta$.

$$\text{и } |\zeta| = \left| \frac{(1-z_1 z_2)(z_1-z_2)}{(1-z_1 \overline{z_2})(z_1-\overline{z_2})} \right|$$

$$\frac{1}{1-|\zeta|^2} = \frac{|(1-z_1 \overline{z_2})^2 (z_1-\overline{z_2})^2|}{4\ Im\, z_1\ Im\, z_2\ (1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)}.$$

Положим

2. $f_1(\zeta) = f(z_1(\zeta))$,
$f_2(\zeta) = f(z_2(\zeta))$

где $f(z)$ — произвольная функция, регулярная и однолистная в единичном круге.

Очевидно, что $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ удовлетворяют всем условиям теорем 2 и 4, и

$$3.\quad a_1=f_1(o)=f(z_2e^{i\varphi}),\qquad w_1=f_1(\zeta_0)=f(z_1e^{i\varphi})$$

$$a_2=f_2(o)=f(\overline{z}_2e^{i\varphi}),\qquad w_2=f_2(\overline{\zeta_0})=f(\overline{z}_1e^{i\varphi})$$

Подставляя указанные значения в I теоремы 1, получим I теоремы 6. Подставляя 3 в IV теоремы 3, получим оценку II снизу.

Знак равенства очевидным образом следует из требований теорем 1 и 3 к функциям $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$.

Таким образом, $f(z)$

1) должна иметь граничные точки только на некоторой прямой $L$ (т. е. отображать единичный круг на всю плоскость с одним или двумя бесконечными разрезами, лежащими на некоторой прямой);

2) переводить точки некоторого диаметра $l$ в точки $L$;

Отсюда и из условий единственности при конформных отображениях, следует 2-ое заключение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Z. Nehari. Some inequalities in the theory of functions. Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953) 256—286.

2. Ю. Е. Аленицын. Об однолистных функциях в многосвязных областях. Мат. сб. 39 (81) (1956) 315—336.

3. Ю. Е. Аленицын. К теории однолистных функций и функций Бибербаха — Эйленберга ДАН СССР 109 (1956) 247—249.

*Б. И. Коробочкин*

## К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе приводятся оценки некоторых функционалов от функций, однолистно отображающих единичный круг на взаимно неналегающие области. Проводится геометрическое доказательство неулучшаемости этих оценок. Как следствия получаются теоремы искажения для функций класса Бибербаха-Эйленберга.

B. I. Korobochkin

# ON
# THE THEORY OF ONE-SHEET FUNCTIONS

Annotation

An estimate is given of several functionals, defined as a class of one-sheet functions, mapping the circle of unique radius on the regions without common points. A geometric proof of these estimated non-ameliorations is found. The theorems of distortion for Biberbach-Eilenberg classic functions follows from these results.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*А. Т. Барабанов*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

При исследовании нестационарной линейной динамической системы с $n$ степенями свободы в качестве ее простейшей математической модели может служить обыкновенное уравнение Лапласа с вещественным аргументом $t$

$$\sum_{k=o}^{n} (a_k t + b_k) y^{(k)} = f(t),$$

где

$$o \leqslant t \leqslant t_0 \text{ а } y^{(k)}(o) = y_{ko} \quad (k = O, 1, \ldots, n-1)$$

В связи с этим весьма важно располагать методами построения решения задачи Коши уравнения Лапласа, что может дать средство для изучения процессов в таких системах. Особый интерес представляет уравнение Лапласа с регулярной особой точкой, когда $a_n t + b_n \to o$ при $t \to t_0$.

Рассмотрим уравнение Лапласа с регулярной особой точкой в виде

$$\tau Q(p) y + [Q'(p) - P(p)] y = f(t), \tag{1}$$

где

$$\tau = t - t_0, \quad o \leqslant t \leqslant t_0, \quad p = \frac{d}{dt}, \; y^{(k)} \; (o) = y_{ko} \; (k = O, 1, \ldots, n-1),$$

$Q(p)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $n$-го порядка, $Q'(z) = \dfrac{dQ(z)}{dz}$, $P(p)$-линейный оператор с постоянными коэффициентами не выше $(n-1)$-го порядка.

4*

К задаче интегрирования уравнения (1) сводится любая задача интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа

$$\sum_{k=o}^{n} (a_k x + b_k) \; y^{(k)} = F(x) \quad (a_n = 1)$$

с начальными условиями

$$x = x_0, \; y^{(k)}(x_0) = y_0{}^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Сделаем замену независимой переменной

$$x = x_0 + \xi$$

Не умаляя общности, можно считать $O \leqslant \xi < \infty$, в противном случае $(-\infty < \xi \leqslant O)$ можно заменить $\xi$ на $(-\xi)$.

Итак, после замены независимой переменной коэффициент уравнения при старшей производной примет вид

$$x + b_n = \xi + x_0 + b_n.$$

Если $x_0 + b_n < O$, то подстановкой $\xi = t$, $x_0 + b_n = -t_0$ сводим задачу к указанной $(t_0 > O,\; O \leqslant t < t_0)$.

Если $x_0 + b_n > o$, то, полагая $\xi = -t$

$$x_0 + b_n = t_0 \quad (t_0 > O),$$

получим уравнение

$$\sum_{k=o}^{n} (a_k \tau + a_k t_0 - a_k x_0 - b_k)(-1)^{k+1} \, y_t^{(k)} = f(t),$$

где

$$\tau = t - t_0, \; -\infty < t \leqslant 0.$$

Разница по сравнению с задачей интегрирования уравнения (1) состоит в задании промежутка интегрирования.

Ниже будет показано, что, решив задачу интегрирования (1) для $O \leqslant t < t_0$, с помощью аналитического продолжения мы решим и задачу Коши в промежутке $-\infty < t \leqslant O$.

Уравнение Лапласа относится к классу линейных уравнений с аналитическими коэффициентами, который занимает большое место в аналитической теории дифференциальных уравнений.

В соответствии с теоремой Фукса, однородное уравнение Лапласа, соответствующее уравнению (1), имеет две особые точки — регулярную $(\tau = o)$ и иррегулярную $(\tau = -\infty)$.

В классических работах, рассматривающих уравнения с аналитическими коэффициентами, и, в частности, уравнение Лапласа, центральное место занимает вопрос о фундаментальной системе решений в окрестности особых точек [1]—[9].

Не вдаваясь в детали, можно отметить два пути построения фундаментальных систем решений однородного уравнения, соответствующего (1).

Первый из них дает представление фундаментальной системы в окрестности регулярной особой точки с помощью бесконечных рядов вида

$$y=\tau^{\rho} \sum_{k=o}^{\infty} a_k \tau^k , \tag{2}$$

где $\varrho$ — корень так называемого определяющего уравнения, а коэффициенты ряда находят по условиям обращения дифференциального уравнения в тождество при подстановке (2) (метод Фробениуса).

Если все корни определяющего уравнения различны и их разности не равны целым числам, то таким образом получается фундаментальная система в виде рядов (2).

Если некоторые разности корней определяющего уравнения равны целым числам, то процесс отыскания решения усложняется и в решении, вообще говоря, появляются логарифмические члены. Построенные таким образом ряды для уравнения Лапласа сходятся на всей плоскости $\tau$.

Однако, следует отметить, что практическая эффективность этих рядов падает с увеличением $|\tau|$.

Аналогично может быть построена фундаментальная система решений в окрестности иррегулярной особой точки. В этом случае ряды строятся по отрицательным степеням $\tau$ и являются асимптотическими рядами, эффективность которых с уменьшением $|\tau|$ понижается. В окрестности регулярной точки эти ряды становятся непригодными для представления решений уравнения (1).

Второй путь дает представление решения линейного дифференциального уравнения в виде контурного интеграла. Этот путь характерен очень гибкими и разнообразными приемами, свойственными контурному интегрированию.

Отметим одно из возможных представлений решения однородного уравнения Лапласа в виде контурного интеграла.

А именно, контурный интеграл

$$y_k = \int_{C_k} e^{z\tau} \varphi(z)\, dz, \tag{2}$$

где $C_k$ — контур в виде бесконечной петли, охватывающей вдоль соответствующего разреза $k$-тый корень $z_k$ уравнения

$$Q(z)=0, \tag{3}$$

который является особой точкой функции

$$\varphi(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z-z_\nu)^{-\alpha_\nu},$$

где $\alpha_\nu$ — коэффициенты разложения дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ на простейшие

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\alpha_\nu}{z-z_\nu},$$

представляет решение однородного уравнения Лапласа, соответствующего уравнению (1). При этом предполагается, что степень полинома $Q(z)$ выше степени полинома $P(z)$, по крайней мере, на единицу, а корни уравнения (3) простые.

Если $-\alpha_k$ равно целому положительному числу, то (2) обращается в нуль.

Чтобы найти соответствующее ненулевое решение, можно сделать предельный переход в выражении

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_k i}}\int\limits_{C_k}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz,$$

тогда получим

$$y_k=\int\limits_{z_k}^{\infty}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz$$

При разных корнях уравнения (3) таким образом можно построить фундаментальную систему решений.

Можно легко показать, что

$$y_k=A_k\,\tau^{\alpha_k-1}\,e^{z_k\tau}\left(1+o\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)\tag{2''}$$

Посмотрим теперь в общих чертах, как можно было бы применить построенные фундаментальные системы для решения задачи Коши однородного уравнения.

Для этого надо составить общее решение

$$y=\sum_{k=1}^{n}c_k y_k$$

и по начальным условиям $y_{00}, y_{10}, \ldots, y_{n-10}$ определить произвольные постоянные $c_k$.

Тогда мы найдем, что

$$c_k = \frac{L_k[y_{mo}, y_l^{(r)}(\tau_0)]}{L[y_l^{(r)}(\tau_0)]},$$

где $L_k$ и $L$-полиномы от указанных в скобках переменных, причем индексы $m$, $r$ пробегают значения от нуля до $n$-1, а $l$ — от единицы до $n$ (индекс $r$ указывает порядок производных от $y_l(\tau)$ по $\tau$).

При попытке определить постоянные $c_k$ по этим выражениям мы сталкиваемся с необходимостью вычисления рядов (2) и рядов, получающихся дифференцированием, при больших по модулю $\tau$. При этом модули корней уравнения могут быть настолько большими, что модули произведений $z_k \tau$ будут иметь еще большие значения, чем $|\tau|$.

Можно грубо представить себе, какое огромное число членов следует взять в этих рядах, чтобы уловить основные черты процесса, время которого достаточно велико, если заметить, что решение задачи с данными начальными условиями, как это сразу становится ясным при его построении с помощью фундаментальной системы (2′), при больших по модулю $\tau$ имеет экспоненциальное поведение, а аргументами экспонент служат произведения $z_k\tau$.

Фундаментальная система в виде контурных интегралов является более подходящим средством решения задачи, т. к. она, несомненно более удобна для определения констант $c_k$. Однако и в этом случае процедуру определения этих констант следует признать неэффективной.

Необходимо знать общее выражение для констант $c_k$, чего невозможно достичь при определении $c_k$ по общему решению из начальных условий.

Определение констант $c_k$ — задача не менее важная, чем построение фундаментальной системы.

Трудности применения фундаментальной системы решений еще более увеличиваются, когда возникает задача определения процесса, вызванного внешними воздействиями (неоднородное уравнение).

Применение метода вариаций произвольных постоянных в общем случае с такими сложными фундаментальными системами, какие имеют место для уравнения Лапласа, безнадежно.

Поэтому встает вопрос о построении общего вида решения задачи Коши уравнения Лапласа (1).

Заменой переменной

$$y(t)=y_0+y_0' t+\ldots+\frac{1}{(n-1)!} y_0^{(n-1)} t^{n-1}+\eta(t) \tag{4}$$

задача сводится к неоднородному уравнению

$$\tau Q(p)\eta+[Q'(p)-P(p)]\eta=M(t) \tag{5}$$

с нулевыми начальными условиями и с правой частью, представляющей собою полином не выше $n$-ой степени. Для $t>O$ этот полином можно представить в виде контурного интеграла

$$M(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}}\frac{B(z)}{z^{n+1}}e^{zt}\,dz \tag{6}$$

где $B(z)$ — полином не выше $n$-ой степени, а контур интегрирования $\mathfrak{H}$—мнимая ось с обходом начала справа, вообще говоря, по произвольной полуокружности. В виде аналогичного контурного интеграла можно искать и решение уравнения (5)

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}} H(z, t)\,dz \tag{7}$$

Если уравнение (3) имеет корни и в правой полуплоскости, условимся обход начала делать по полуокружности достаточно большого радиуса с тем, чтобы справа от контура корни уравнения (3) отсутствовали.

Уравнению (5) с правой частью (6) можно удовлетворить интегралом вида (7), если определить $H(z, t)$ как частное решение уравнения

$$\tau Q(p)H(z, t)+[Q'(p)-P(p)]\,H(z, t)=\frac{B(z)}{z^{n+1}}e^{zt}. \tag{8}$$

В свою очередь, этому уравнению можно удовлетворить интегралом вида

$$H(z, t)=\int\limits_{c} e^{t\zeta}\,h(\zeta)\,d\zeta, \tag{9}$$

если $h(\zeta)$ определить как решение уравнения

$$Q(\zeta)\frac{dh}{d\zeta}+P(\zeta)h=O, \tag{10}$$

а выбор контура подчинить условию

$$[e^{\tau\zeta}\, Q(\zeta)\, h\,(\zeta)]_c = \frac{B(z)}{z^{n+1}}\, e^{zt}\,, \tag{11}$$

где слева стоит приращение указанной в скобках функции вдоль контура $C$.

Пусть $C$ — идущая под некоторым углом $\sigma$ к вещественной оси от точки $z$ прямая, вдоль которой $Re\, z \to \infty$. За контур $C$ можно принять эту прямую в обратном направлении. При этом, как нетрудно видеть, решение уравнения (10), обеспечивающее выполнение условия (11), будет иметь вид

$$h(\zeta) = \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0}\, \frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)} \tag{12}$$

где

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu)^{-\alpha_\nu}\,, \tag{13}$$

а $z_\nu$ — корни уравнения (3) $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ и

$$\alpha_\nu = \frac{P(z_\nu)}{Q'(z_\nu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

— коэффициенты разложения дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ на простейшие:

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{z - z_\nu} \tag{15}$$

После этого легко находим $H(z, t)$ и

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{p}} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{t_0 z}\, r\,(z, \tau)\, dz, \tag{16}$$

где

$$r\,(z, \tau) = \frac{1}{\varphi(z)} \int\limits_{\infty}^{z} e^{\tau\zeta}\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \tag{17}$$

Выражение (16) представляет формальное решение уравнения (5) для $0 < t < t_0$.

Следует заметить, что функции $\varphi(\zeta)$ и $\varphi(z)$ допускают выделение однозначной ветви по крайней мере на контуре $\mathfrak{p}$ и справа от него. При этом, как это видно из построения функции $h(\zeta)$, под этими функциями понимается одна и та же их однозначная ветвь, так что $\varphi(\zeta)/_{\zeta=z} = \varphi(z)$. Теперь покажем, что справедлива

Теорема 1. Выражение (16) определяет функцию, которая является решением задачи Коши уравнения (5) с нулевым начальными условиями.

Рассмотрим интеграл:

$$\int_{\mathfrak{b}} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)} e^{t_0 z} \frac{\partial^k r(z,\tau)}{\partial t^k} dz = \int_{\mathfrak{b}} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)} e^{zt} \cdot e^{-z\tau} \frac{\partial^k r(z,\tau)}{\partial t^k} dz \tag{18}$$

где

$$\frac{\partial^k r(z,\tau)}{\partial t^k} = \frac{1}{\varphi(z)} \int_{\infty}^{z} e^{\tau\zeta} \zeta^k \varphi(\zeta) d\zeta \tag{19}$$

Заметим, что интеграл, входящий в (19), благодаря экспоненциальному множителю подинтегрального выражения сходится равномерно в $0 \leqslant t \leqslant t_0' < t_0$ и дифференцирование функции $r(z, \tau)$ по $t$ законно.

Покажем, что интеграл (18) также сходится равномерно по $t$ в указанном промежутке для любого $k=0,1, \ldots, n$-1, а поэтому при $k=0$ представляет собою $n$-1 раз непрерывно дифференцируемую функцию $\eta(t)$.

Кроме того, покажем, что эта функция обращается в нуль при $t=0$ вместе со своими $(n-1)$-ой производными. В этом и будет заключаться доказательство теоремы, т. к. выше уже было показано, что (16) представляет собою, по крайней мере, формальное решение уравнения (5).

Оценим порядок роста подинтегральной функции выражения (16) на мнимой оси и справа от нее при $|z| \to \infty$.

Пусть $\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu$.

Нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| < \lambda |z|^{Re\mu}, \tag{20}$$

а полагая $\zeta = z + xe^{i\sigma}$ $0 \leqslant x < \infty$ (рис. 1) замечаем, что

$$\left| e^{-z\tau} \frac{\partial^k r}{\partial t^k} \right| < \gamma |z|^k \tag{21}$$

где $\lambda$ и $\gamma$ — некоторые положительные постоянные. Таким образом абсолютное значение подинтегральной функции в (18) без множителя $e^{zt}$ убывает с ростом $|z|$ вдоль мнимой оси и справа от нее по крайней мере как $\frac{1}{|z|^{n+1-k}}$. Это обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость интеграла (18) при $k=0,1, \ldots, n\text{-}1$ в отмеченном выше промежутке.

Рассмотрим теперь интеграл (18) с контуром в виде замкнутой кривой, состоящей из отрезка мнимой оси с обходом начала ($\supset_R$) и полуокружности $C_R$ радиуса $R$ в правой полуплоскости (рис. 1).

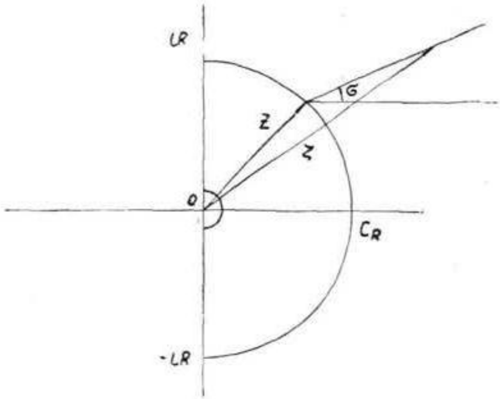


Рис. 1

Так как в области, ограниченной этим контуром (причем при любом $R$), подинтегральная функция регулярна, то

$$\int\limits_{\supset_R} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{t_0 z}\, \frac{\partial^k r(z,\tau)}{\partial t^k} = -\int\limits_{C_R} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0}\, \frac{\partial^k r(z,\tau)}{\partial t^k}\, dz \quad (22)$$

При $t=0$ в силу отмеченного выше характера убывания подинтегрального выражения интеграл по полуокружности $C_R$ когда $R\to\infty$, стремится к нулю. При этом интеграл в левой части равенства стремится к интегралу (18). Таким образом, функция (16) вместе со своими $(n-1)$-ой производными обращается в нуль при $t=0$.

Считая $\alpha_\nu$ $(\nu=1,2, \ldots, n)$ нецелыми, проведем теперь из особых точек $\varphi(z)$ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ параллельные разрезы, вдоль которых $Re\, z\to-\infty$, причем так, чтобы каждый разрез проходил только через одну особую точку функции $\varphi(z)$. Условимся, что угол наклона $\sigma$ линии интегрирования в функции $r\ (z,\ \tau)$ совпадает с углом наклона этих разрезов и $0<\sigma<\frac{\pi}{2}$. С помощью этой системы разрезов фиксируем некоторую ветвь $\varphi(z)$, определяя аргументы векторов $z-z_\nu$ неравенствами $-\pi+\delta\leqslant\Theta_\nu\leqslant\pi+\delta$ $(\nu=1,2,\ \ldots,\ n)$. Все рассуждения будем вести для случая, когда уравнение (3) имеет корень $z_1=0$, делая замечания в нужных местах и для того случая, когда такого корня нет.

Рассмотрим интеграл

$$\eta_*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0}\, r(z,\ \tau)\, dz \tag{23}$$

где контур $C$ состоит из участка мнимой оси с обходом начала справа, участков полуокружности $C_R$ и контуров $C'_\nu$, охватывающих вдоль разрезов точки $z_\nu$ $(\nu=\ 1,2,\ \ldots,\ n)$ (рис. 2).

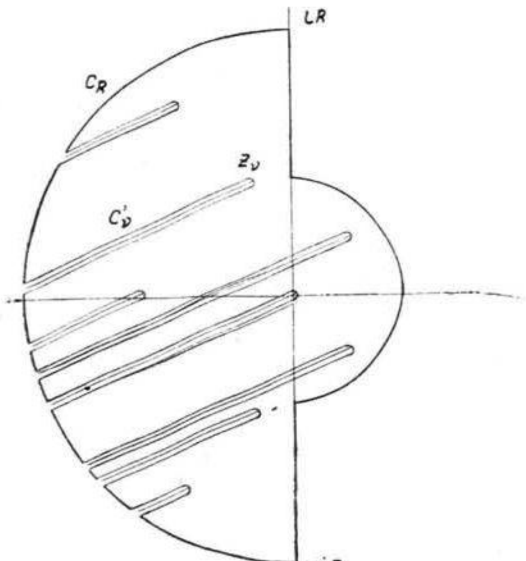


Рис. 2.

Внутри этого контура подинтегральная функция в (23) регулярна, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_R} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0} r(z, \tau)\, dz = -\sum_{\nu=1}^{n} \int\limits_{C'_\nu} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0} r(z, \tau)\, dz -$$

$$-\Sigma \int\limits_{C_R} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0}\; r(z, \tau)\, dz \tag{24}$$

где последняя сумма состоит из интегралов по дугам полуокружности $C_R$, не пересекающим разрезов.

Прежде всего покажем, что справедлива следующая

Л е м м а. Предел интеграла

$$I_{\smile M_1M_2} = \int\limits_{\smile M_1M_2} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\, e^{zt_0} r(z, \tau)\, dz \tag{25}$$

где путь интегрирования проходит по непересекающей разрезов дуге $M_1M_2$ полуокружности $C_R$, а точки $M_1$ и $M_2$ фиксированы на дуге углами $\vartheta_1$ и $\vartheta_2$, при $R \to \infty$ равен нулю.

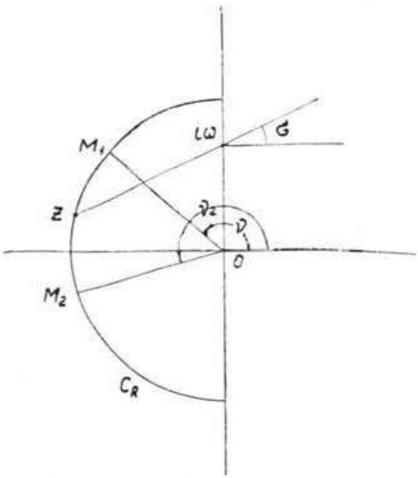


Рис. 3.

При доказательстве рассмотрим следующие возможные случаи расположения дуги $M_1M_2$ на полуокружности $C_R$:

1. Крайние точки $\smile M_1M_2$ не лежат на мнимой оси (рис. 3).

2. $\smile M_1M_2$ примыкает к мнимой оси в нижней полуплоскости (рис. 4).

3. $\smile M_1M_2$ примыкает к мнимой оси в верхней полуплоскости (рис. 5).

Отметим, что контур интеграла, входящего в $r(z, \tau)$ местами деформируется при необходимости так, чтобы ни одна особая точка функции $\varphi(z)$ на него не попадала. Другими словами, любой такой контур, начинающийся в какой-либо точке полуо-

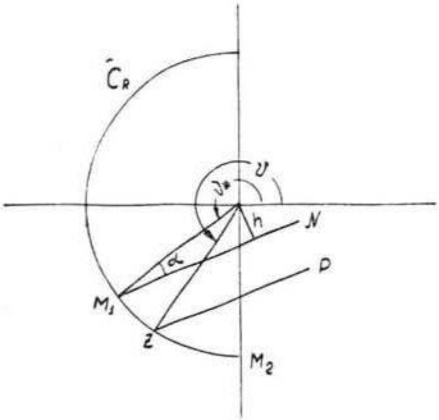


Рис. 4.

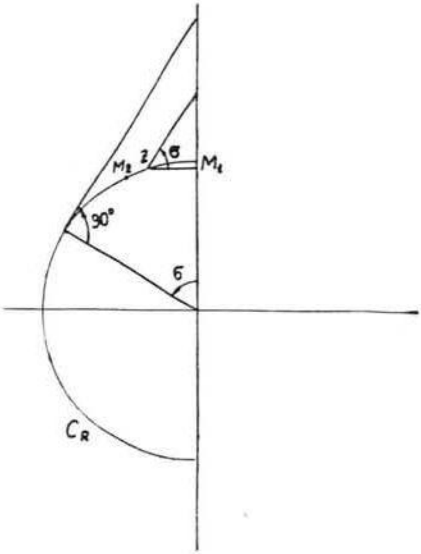


Рис. 5.

кружности $C_R$, можно считать целиком лежащим в некоторой бесконечной области $(D)$, которая получается из расширенной плоскости $z$, если из нее удалить особые точки функции $\varphi(z)$.

Рассматривая первый случай, заметим, что при $Re\ \mu \geqslant 0$ $\varphi(z)$ в этой области, очевидно, ограничена:

$$|\varphi(z)| < M_{\varphi}, \tag{26}$$

где $M_{\varphi}$ — некоторая положительная постоянная. Поэтому, разбивая интеграл, входящий в $r(z, \tau)$ на два

$$\int_{\infty}^{z} = \int_{\infty}^{i\omega} + \int_{i\omega}^{z}, \tag{27}$$

где $i\omega$ — точка пересечения контура с мнимой осью, нетрудно видеть, что на дуге полуокружности $C_R$

$$|r(z, \tau)| < R^{Re\mu} (\lambda_1 + \lambda_2 e^{\tau Re z} S_{z, i\omega}) \tag{28}$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — положительные постоянные, а

$S_{z, i\omega}$ — длина контура между точками $z$ и $i\omega$. Отсюда следует, что

$$|I \cup M_1 M_2| < \gamma_1 R^{-n+Re\mu} e^{Rt_0 \cos \upsilon_*} + \gamma_2 S^*_{z, i\omega} R^{-n+Re\mu} e^{Rt \cos \upsilon_*}, \tag{29}$$

где $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — некоторые положительные постоянные, а

$$\upsilon_1 \leqslant \upsilon_* \leqslant \upsilon_2.$$

Таким образом, $t>0$ $I \cup M_1 M_2 \to O$ при $R \to \infty$, т. к. $\cos v_* < O$. Обратимся теперь ко второму случаю.

На рис. 4 $P$ — полупрямая, идущая к точке $z$ под углом $\sigma$ к вещественной оси, т. е. путь интегрирования в $r(z, \tau)$. $N$ — полупрямая, параллельная $P$ и проходящая через $M_1$, $h$ — расстояние от начала координат до $N$. Положение точки $M_1$ на полуокружности $C_R$ будем считать фиксированным углом $\nu_*$, и следовательно $\alpha$ — не зависящим от $R$.

Функция $\prod\limits_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{z_\nu}{z}\right)^{-\alpha_\nu}$, как и $\varphi(z)$, непрерывна и ограничена в $(D)$

Поэтому

$$|\varphi(\zeta)| < |\zeta^{-Re\mu}| \cdot \bar{\lambda} \leqslant h^{-Re\mu} \cdot \bar{\lambda} = R^{-Re\mu} \frac{\bar{\lambda}}{(\sin \alpha)^{Re\mu}} \tag{30}$$

где $\bar{\lambda}$ — некоторая положительная постоянная.

В соответствии с этим

$$\left| \int\limits_{\infty}^{i\omega} e^{\tau\zeta} \varphi(\zeta) d\zeta \right| < \frac{R^{-\mu} \bar{\lambda}}{-\tau \cos \sigma (\sin \alpha)^{Re\mu}} \tag{31}$$

а

$$\left| \int\limits_{i\omega}^{z} e^{\zeta\tau} \varphi(\zeta) d\zeta \right| < e^{\tau R \cos \nu} \frac{R^{-Re\mu} \bar{\lambda}}{(\sin \alpha)^{Re\mu}} R \cos \alpha \tag{32}$$

С помощью этих оценок нетрудно получить, что

$$|I_{\cup M_1M_2}| < \rho_1 \frac{1-e^{-t_0R\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\upsilon_*\right)}}{R^{n+1}t_0\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\upsilon_*\right)} + \rho_2 \frac{1-e^{-tR\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\upsilon_*\right)}}{R^n t\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\upsilon_*\right)}, \tag{33}$$

где $\varrho_1$ и $\varrho_2$ — некоторые положительные постоянные. Таким образом, $I_{\cup M_1M_2} \to O$ при $R \to \infty$ и в этом случае.

Рассмотрим, наконец, случай, когда дуга $M_1M_2$ примыкает к мнимой оси в верхней полуплоскости.

Положение точки $M_2$ на полуокружности $C_R$ примем таким, как на рис. 5 $(\vartheta_2 < \sigma)$.

В этом случае

$$|\varphi(\zeta)| < |\zeta^{-Re\mu}|\overline{\lambda}' \leqslant R^{-Re\mu}\overline{\lambda'} \tag{34}$$

$$\left|\int\limits_{\infty}^{i\omega} e^{\zeta\tau}\varphi(\zeta)\,d\zeta\right| < R^{-Re\mu}\frac{\overline{\lambda}}{-\tau\cos\sigma},$$

$$\left|\int\limits_{i\omega}^{z} e^{\tau\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta\right| < e^{\tau R\cos\upsilon}\,\overline{\lambda}\,R^{-Re\mu}\,tg\sigma, \tag{35}$$

$$|I_{\cup M_1M_2}| < \rho_1' \frac{1-e^{-t_0R\sin\left(\upsilon_2-\frac{\pi}{2}\right)}}{t_0R^{n+1}\cos\left(\upsilon_2-\frac{\pi}{2}\right)} + \varrho_2' \frac{1-e^{-tR\sin\left(\upsilon_2-\frac{\pi}{2}\right)}}{tR^n\cos\left(\upsilon_2-\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{36}$$

где $\overline{\lambda}'$, $\rho_1'$, $\rho_2'$ — некоторые положительные постоянные. Таким образом и в этом случае при $R \to \infty$ $I_{\cup M_1M_2} \to O$. Такие же результаты имеют место и при $Re\,\mu < 0$, что можно показать аналогичным образом.

Следовательно, последняя сумма в выражении (24) при $R \to \infty$ исчезает, т. к. она представляет сумму интегралов (25) рассмотренных трех типов.

С предельным переходом контур интегрирования $C_\nu'$ превращается в бесконечную петлю $C_\nu$.

Когда уравнение (2) не имеет нулевого корня, к этим рассуждениям привлекается дополнительно теорема вычетов. Таким образом, имеет место

Теорема II. Решение уравнения (5) при нулевых начальных условиях и сделанных предположениях о корнях уравнения (3) имеет вид

$$\eta(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{C_\nu}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}e^{zt_0}\, r\ (z, \tau)\, dz, \tag{37}$$

когда среди корней имеется корень, равный нулю, и вид

$$\eta(t) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{C_\nu}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}e^{zt_0}\, r\ (z, \tau)\ dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}e^{zt_0}\, r\ (z, \tau)\ dz, \tag{38}$$

когда такого корня нет.

Рассмотрим теперь подробнее интегралы, входящие в (37) и (38).

Полагая, что $\alpha_\nu$ не равно целому числу и представляя петлю $C_\nu$ вокруг $z_\nu$ так, как указано на рис. 6, разобьем наш интеграл на сумму трех интегралов, обозначая для краткости

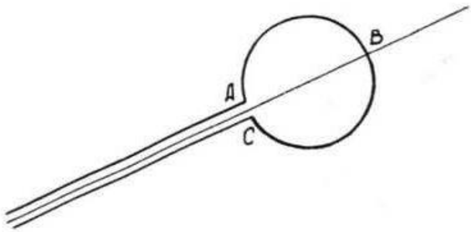


Рис. 6.

$$\Phi\ (z) = \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}e^{zt_0}.$$

$$I_\nu\ (t) = \int_{C_\nu}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}e^{zt_0}\ r\ (z, \tau)\ dz = \int_{-\infty}^{A}\Phi\ (z)\ r\ (z, \tau)\ dz +$$

$$+\int_{ABC}\Phi\ (z)\ r\ (z, \tau)\ dz + \int_{C}^{-\infty}\Phi\ (z)\ r\ (z, \tau)\ dz. \tag{39}$$

Первый интеграл берется по прямой по верхнему берегу разреза от точки $Re\, z = -\infty$ до точки A, второй — по окружности ABC и третий — от точки C до точки $Re\, z = -\infty$ по нижнему берегу разреза.

Рассмотрим функцию

$$r(z, \tau) = \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \cdot (z - z_\nu)^{+\alpha_\nu} \int\limits_\infty^z e^{\tau\zeta} (\zeta - z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta, \qquad (40)$$

где

$$\varphi_\nu(\zeta) = \prod_{k \neq \nu}^{n} (\zeta - z_k)^{-\alpha_k},$$

на каждом из трех указанных участков.

На верхнем берегу разреза до точки A функцию можно представить в виде

$$r(z, \tau) = (z - z_\nu)^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_\infty^B e^{\zeta\tau} (\zeta - z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ (z - z_\nu)^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_B^A e^{\zeta\tau} (\zeta - z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ |z - z_\nu|^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_C^z e^{\zeta\tau} |z - z_\nu|^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta, \qquad (41)$$

на нижнем берегу до точки $B$ — в виде

$$r(z, \tau) = (z - z_\nu)^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_\infty^B e^{\zeta\tau} (\zeta - z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ (z - z_\nu) \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_B^C e^{\zeta\tau} (\zeta - z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ |z - z_\nu|^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_C^z e^{\zeta\tau} |z - z_\nu|^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta \qquad (42)$$

и, наконец, на контуре $ABC$ — в виде

$$r(z,\tau) = (z-z_\nu)^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_{\infty}^{B} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_1)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ (z-z_\nu)^{\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_{B}^{z} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta \tag{43}$$

Это позволяет составить для интеграла (39) выражение

$$I_\nu(t) = \int\limits_{C_\nu} \Phi(z)(z-z_\nu)^{+\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)}\, dz \cdot \int\limits_{\infty}^{B} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{\infty}^{A} \Phi(z)(z-z_\nu)^{+\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)}\, dz \left\{ \int\limits_{B}^{A} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta - \right.$$

$$\left. - e^{-2\pi\alpha_\nu i} \int\limits_{B}^{C} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta \right\} +$$

$$+ \int\limits_{ABC} \Phi(z)(z-z_\nu)^{+\alpha_\nu} \frac{1}{\varphi_\nu(z)} \int\limits_{B}^{z} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta\, dz \tag{44}$$

В наших выкладках до сих пор фигурирует та ветвь многозначной функции $(z-z_\nu)^{-\alpha_\nu}$, у которой $-\pi+\sigma \leqslant \Theta_\nu \leqslant \pi+\sigma$ Введем в рассмотрение также и ту ветвь этой функции $(z-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu}$ у которой $\sigma \leqslant \Theta_\nu \leqslant 2\pi+\sigma$. Соответствующую ветвь функции $\varphi(z)$ на плоскости $z$ с разрезом, идущим от точки $z_\nu$ вправо до бесконечности с тем же углом наклона $\sigma$, будем обозначать $\varphi_*(z)$ так что

$$\varphi_*(z) = (z-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(z). \tag{45}$$

Замечая, что

$$e^{-2\pi\alpha_\nu i} \int\limits_{B}^{C} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta = \int\limits_{B}^{C} e^{\zeta\tau} (\zeta-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu} \varphi_\nu(\zeta)\, d\zeta \tag{46}$$

$$\int\limits_{\infty}^{B} e^{\zeta\tau}(\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu}\varphi_\nu(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\Bigg\{\int\limits_{C_{\nu_*}} e^{\zeta\tau}(z-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu}\varphi_\nu(\zeta)\,d\zeta-$$

$$-\int\limits_{BAB} e^{\zeta\tau}\,(\zeta-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu}\,\varphi_\nu\,(\zeta)\,d\zeta\Bigg\}, \tag{47}$$

где $C_{\nu_*}$ — петля, образованная зеркальным отображением петли $C_\nu$, как это видно из рис. 7, легко найдем

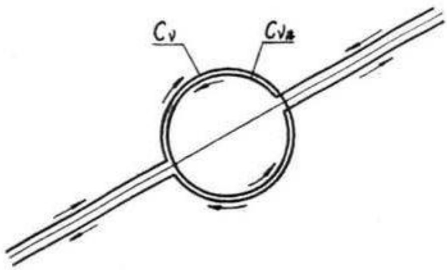


Рис. 7.

$$I_\nu\,(t)=\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\int\limits_{C_\nu}\Phi(z)\,\frac{1}{\varphi(z)}\,dz\int\limits_{C_{\nu_*}} e^{\tau z}\varphi_*\,(z)\,dz+K_\nu\,(t), \tag{48}$$

где

$$K_\nu\,(t)=\int\limits_{ABC}\Phi(z)\,\frac{1}{\varphi(z)}\Bigg\{\int\limits_{B}^{z} e^{z\tau}\,(\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu}\,\varphi_\nu\,(\zeta)\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\int\limits_{BAB} e^{\zeta\tau}\,(\zeta-z_\nu)_*^{-\alpha_\nu}\varphi_\nu\,(\zeta)\,d\zeta\Bigg\}dz \tag{49}$$

Рассмотрим интегралы, входящие в (49).

Поскольку радиус окружности может быть взят достаточно малым

$$\int\limits_{B}^{z} e^{\zeta\tau}\,(\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu}\,\varphi_\nu\,(\zeta)\,d\zeta=e^{z_\nu\tau}\sum_{k=o}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{d}{d\xi}+\tau\right)^k\varphi_\nu\,(\zeta)\,\right]z=\zeta_\nu}{k\,!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\zeta-z_\nu)^{k+1-\alpha_\nu}}{k+1-\alpha_\nu}\Bigg|_{z_B}^{z} \tag{50}$$

$$\int\limits_{BAB} e^{\zeta\tau}(\zeta-z_\nu)^{-\alpha_\nu}\,\varphi_\nu(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=-(1-e^{-2\pi\alpha_\nu i})\,e^{z_\nu\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{d}{d\zeta}+\tau\right)^k\varphi_\nu(\zeta)\right]_{\zeta=z_\nu}}{k!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(z_B-z_\nu)^{k+1-\alpha_\nu}}{k+1-\alpha_\nu} \tag{51}$$

Следовательно,

$$K_\nu(t)=\int\limits_{ABC}\Phi(z)\frac{1}{\varphi_\nu(z)}e^{z_\nu\tau}(z-z_\nu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{d}{d\zeta}+\tau\right)^k\varphi_\nu(\zeta)\right]_{\zeta=z_\nu}}{k!}\cdot$$

$$\cdot\frac{(z-z_\nu)^k}{k+1-\alpha_\nu}\,dz \tag{52}$$

Таким образом, для корня, не равного нулю, (52) тождественно равно нулю, т. к. $\Phi(z)$ имеет в точке $z_\nu$ полюс не выше первого порядка.

Рассмотрим теперь (52) для корня, равного нулю. Мы уже условились этот корень считать первым.

Соответственно

$$K_1(t)=\int\limits_{ABC}\frac{B(z)}{z^nQ(z)}e^{zt_0}\frac{1}{\varphi_1(z)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{d}{d\zeta}+\tau\right)^k\varphi_1(\zeta)\right]_{\zeta=0}}{k!}\cdot$$

$$\cdot\frac{z^k}{k+1-\alpha_1}\,dz\,. \tag{53}$$

Откуда видно, что $K_1(t)$ представляет собою полином $(n-1)$-ой степени.

Для того, чтобы найти этот полином, установим прежде всего вид полинома $B(z)$.

Наиболее просто это можно сделать следующим образом.

Для полиноминальной части (4) имеем:

$$\overset{n}{y}_0(t)=y_0+y_0' t+\ldots+\frac{1}{(n-1)!}y_0^{(n-1)}t^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\zeta}\frac{y_0z^{n-1}+y_0' z^{n-2}+\ldots+y_0^{(n-1)}}{z^n}e^{zt}\,dz\quad(t>o) \tag{54}$$

Полином в правой части (5) можно записать в виде

$$M(t) = -[\tau Q(p) + Q'(p) - P(p)]\mathring{y}_0(t) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}_-}\frac{[\tau Q(z) + Q'(z) - P(z)]Y(z)}{z^n}e^{zt}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{H}_-}\frac{nQ(z)Y(z) - t_0 zQ(z)Y(z) - zQ(z)Y'(z) - zP(z)Y(z)}{z^{n+1}}e^{zt}\,dz \quad (t>o) \tag{55}$$

где

$$Y(z) = y_0 z^{n-1} + y_0' z^{n-2} + \ldots + y_0^{(n-1)} \tag{56}$$

Контур интегрирования $\mathfrak{H}_-$ отличается от контура $\mathfrak{H}$ тем, что его концы несколько отогнуты от мнимой оси в левую полуплоскость, так что вдоль контура $Re z \to -\infty$. Вместе с тем, если в подинтегральном выражении отбросить все слагаемые содержащие неотрицательные степени $z$, контур можно вернуть к прежнему виду.

Таким образом

$$B(z) = -\{n\,Q(z)\,Y(z) - t_0\,z\,Q(z)\,Y(z) - z\,Q(z)\,Y'(z) - \\ - z\,P(z)\,Y(z)\}_{n+1}, \tag{57}$$

если фигурные скобки с индеском $n+1$ понимать как символ, указывающий на то, что все степени $z^{\kappa}$ при $k \geqslant n+1$ в данном выражении отбрасываются.

Однако следует заметить, что (53) сохраняет свое значение и тогда, когда эти степени оставляются, т. е. когда $B(z)$ заменяется на $B_*(z)$:

$$B_*(z) = -\sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)}[(k+1)Q(z) - zt_0 Q(z) - z\,P(z)]\cdot z^{n-\kappa+1} \tag{58}$$

что удобно при рассмотрении (53).

Таким образом,

$$K_1(t) = -\sum_{k=0}^{n} y_0^{(k)}\cdot K_{1k}(t), \tag{59}$$

где

$$K_{1k}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left[\left(\frac{d}{d\zeta}+\tau\right)^{\nu}\varphi_1(\zeta)\right]_{\zeta=0}}{\nu!\,(\nu+1-\alpha_1)}\int\limits_{ABC} e^{zt_0}\frac{k+1-z\,t_0-\alpha(z)}{z^{k+1-\nu}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\varphi_1(z)}\,dz, \qquad \alpha(z) = \frac{z\,P(z)}{Q(z)}, \tag{60}$$

причем изменение порядка интегрирования и суммирования, имевшие здесь место, законно в силу равномерной сходимости ряда, входящего в $K_1(t)$.

Как видно из (60), $K_1(t)$ представляет собою полином $k$-ой степени. Вычислим его.

С помощью интегрирования по частям интеграла

$$\int\limits_{ABC} e^{zt_0}\frac{1}{z^{k-1}\varphi_1(z)}\,t_0dz \quad \text{находим, что}$$

$$\int\limits_{ABC} e^{zt_0}\frac{k+1-z\,t_0-\alpha(z)}{z^{k+1-\nu}\varphi_1(z)}\,dz=\int\limits_{ABC} e^{zt_0}\frac{\nu+1-\alpha_1}{z^{k+1-\nu}\varphi_1(z)}\,dz, \tag{61}$$

после чего уже не составляет труда найти (60):

$$K_{1k}(t)=\int\limits_{ABC} e^{zt_0}\frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\left[\left(\frac{d}{d\zeta}+\tau\right)^{\nu}\varphi_1(\zeta)\right]_{\zeta=0}\cdot z^{\nu}}{z^{k+1}\varphi_1(z)}\,dz=$$

$$=\int\limits_{ABC} e^{zt}\frac{1}{z^{k+1}}\,dz=-2\pi i\frac{t^k}{k!}, \tag{62}$$

т к. бесконечная сумма под знаком интеграла равна $e^{\tau z}\varphi_1(z)$.

Таким образом,

$$K_1(t)=2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}y_0^{(k)}t^k \tag{63}$$

Интересно отметить, что

$$\eta_*(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{h}_-}\frac{B_*(z)}{z^{n+1}Q(z)}\,e^{zt_0}r(z,\tau)\,dz \tag{64}$$

по построению также является решением уравнения (5), но не удовлетворяет нулевым начальным условиям.

С помощью интегрирования по частям интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{h}_-} e^{zt_0}\frac{r(z,\tau)}{z^{k+1}}\,t_0\,dz$$

нетрудно получить, что

$$\eta_*(t)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}y_0^{(k)}\int\limits_{\mathfrak{h}_-} e^{zt}\frac{1}{z^{k+1}}\,dz=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}y_0^{(k)}t^k, \tag{65}$$

т. е. это решение соответствует тривиальному решению $y=0$ для уравнения (1).

Если уравнение (2) не имеет нулевого корня, то решение уравнения (5), как было показано выше, имеет вид (38).

Подинтегральная функция последнего слагаемого в (38) в точке $z=0$ имеет полюс $(n+1)$-го порядка, поэтому, заменив $B(z)$ на $B_*(z)$, что не меняет значения интеграла, получим аналогично предыдущим выкладкам

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)} e^{zt_0} r(z, \tau)\,dz = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} y_0^{(k)} t^k. \qquad (66)$$

Таким образом, собирая результаты (37), (38), (48), (52), (63), (66) и возвращаясь к $y(t)$, заключаем, что справедлива

Теорема III. Решение задачи Коши уравнения (1) при простых корнях уравнения (3) и нецелых коэффициентах разложения дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ на простейшие представимо в виде

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-2\pi\alpha_\nu i}}\int\limits_{C_\nu}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\,e^{zt_0}\frac{1}{\varphi(z)}\,dz\cdot\int\limits_{C_{\nu_*}}e^{z\tau_0}\varphi_*(z)dz \qquad (67)$$

где $C_\nu$ и $C_{\nu*}$ — петли вокруг точек $z_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, имеющие вид, указанный на рис. 7, с положительным направлением обхода;

$\varphi(z)$ — определяется по (13) с фиксацией той ветви, для которой $-\pi+\sigma\leqslant\arg(z-z_\nu)\leqslant\pi+\sigma$, $\alpha_\nu$ — по (14);

$\varphi_*(z)$ — по (45); $B(z)$ — по (57).

Заметим, что интегралы, зависящие от $\tau$, существуют и при $-\infty<t\leqslant 0$ и функция (67), удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям при $0\leqslant t<t_0$ остается решением уравнения (1) в силу принципа аналитического продолжения и для $-\infty<t\leqslant 0$.

Представление решения для случаев, когда те или иные коэффициенты разложения имеют целые значения, можно получить из (67) предельным переходом.

Если, например, $\alpha_m$ — целое положительное число, то соответствующее слагаемое в (67) после предельного перехода принимает вид

$$\int\limits_{z_m}^{-\infty} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\ e^{zt_0}(z-z_m)^{\alpha_m}\frac{1}{\varphi_m(z)}dz\cdot\frac{1}{(\alpha_m-1)!}\alpha_m\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{d}{dz}+\tau\right)^{\alpha_m-1}\varphi_m(z)\right]_{z=z_m} e^{z_m\tau}\ , \tag{68}$$

а если $\alpha_m$ — целое отрицательное число, то вид

$$-\frac{1}{(-\alpha_m)!}\ e^{z_m t_0}\left[\left(\frac{d}{dz}+t_0\right)^{-\alpha_m}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q_m(z)\varphi_m(z)}\right]_{z=z_m}\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{z_m}^{\infty} e^{z\tau}(z-z_m)^{-\alpha_m}\varphi_m(z)dz\ , \tag{69}$$

где $Q_m(z)=\dfrac{Q(z)}{(z-z_m)}$, $\varphi_m(z)=\prod\limits_{k\neq m}^{n}(z-z_k)^{-\alpha_k}$

а интегрирование ведется от точки $z_m$ вдоль соответствующего разреза.

Несколько более сложен случай, когда $\alpha_1$ равно целому положительному числу, при нулевом корне $(z_1=o)$.

В этом случае соответствующая постоянная

$$\int\limits_{C_\nu}\frac{B(z)e^{zt_0}}{z^{n+1}Q(z)\varphi_1(z)}\cdot z^{\alpha_1}\ dz=-\sum_{k=0}^{n-1}y_0^{(k)}\oint\frac{k+1-zt_0-\alpha(z)}{z^{k+2-\alpha_1}\varphi_1(z)}e^{zt_0}dz=0 \tag{70}$$

Причем, здесь мы заменили $B(z)$ на $B_*(z)$, что не меняет значения интеграла для целых положительных $\alpha_1$, а затем воспользовались результатом (61).

Переходя теперь к пределу в первом слагаемом (67), когда $\alpha_1$ стремится к целому положительному числу и раскрывая неопределенность, найдем для этого слагаемого следующее предельное значение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu}\frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)}\ e^{zt_0}\frac{1}{\varphi(z)}\ln z\,dz\cdot\frac{1}{(\alpha_1-1)!}\quad\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{d}{dz}+\tau\right)^{\alpha_1-1}\varphi_1(z)\right]_{z=0} \tag{71}$$

В прямой связи с уравнением (1) стоит уравнение

$$Q(p)x - P(p)\frac{x}{\tau} = 0 \tag{72}$$

причем очевидно, что подстановка

$$x = \tau y \tag{73}$$

приводит к уравнению (1) для $y$.

Определенное практическое значение имеет способ вычисления предельного значения решения задачи Коши при $\tau \to 0$. Как следует из теоремы 1

$$x(O) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{2\pi i} \tau \int_{\mathfrak{H}} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)} e^{zt_0} \frac{1}{\varphi(z)} \int_{\infty}^{z} e^{\zeta\tau} \varphi(\zeta)\, d\zeta\, dz. \tag{74}$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{\infty}^{z} e^{\zeta\tau} \varphi(\zeta) \tau\, d\zeta = e^{z\tau} \varphi(z) - \int_{\infty}^{z} e^{\zeta\tau} \varphi'(\zeta)\, d\zeta. \tag{75}$$

Когда $\mu = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu = 0$, как это следует из (74) и (75), при $\tau \to O$ существует предел выражения (74), равный

$$x(O) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\mathfrak{H}} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)} \cdot e^{zt_0} \frac{1}{\varphi(z)}\, dz. \tag{76}$$

Также как и при доказательстве теоремы III, следует, что

$$x(O) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{C_\nu} \frac{B(z)}{z^{n+1}Q(z)\varphi(z)} e^{zt_0} dz. \tag{77}$$

Эффективным практическим средством вычисления интегралов, входящих в (77), являются асимптотические разложения этих интегралов, когда $t_0$ (например, время процесса) достаточно велико.

При $\mu > 0$, как это видно из (75) и (74), предел (74) равен нулю, а при $\mu < 0$ $x \to \infty$ когда $\tau \to 0$.

Покажем в заключение, как может быть решена задача Коши для уравнения (1) с правой частью.

Прежде всего заметим, что если правая часть есть полином, то мы можем сразу применить уже полученные результаты.

Так, если

$$f(t)=\sum_{k=0}^{m} a_k t^k ,$$

то решение задачи с нулевыми начальными условиями будет иметь вид

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\flat}\frac{F(z)}{Q(z)}e^{t_0 z}\; r(z,\tau)\,dz,$$

где

$$F(z)=\frac{b_0+b_1 z+\;\ldots\;+b_m z^m}{z^{m+1}}$$

Дальше нетрудно получить результаты, аналогичные теореме III.

Вообще, если правая часть представима контурным интегралом

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\flat}F(z)e^{zt}dz \quad (t>0),$$

то имеем решение задачи Коши в виде

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\flat}\frac{F(z)}{Q(z)}e^{t_0 z}r(z,\tau)\,dz.$$

Далее в зависимости от особенностей функции $F(z)$ нетрудно получить результаты, аналогичные теореме III.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения ДНТВУ, 1939 г.

2. L. Schlesinger. Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen», Leipzig, Band I, 1895. Band $II_1$, 1897 г, Band $II_2$, 1898.

3. L. Schlesinger. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig und Berlin, 1908.

4. Perron. Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen Mathematische Annalen, Bd. 66, 1907.

5. I. H. Graf. Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen. Mathematische Annalen, Bd. 45, 1894 г.

6. I. Horn. Verwendung asymptotischer Darstellung für Untersuchung der Intergrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. Mathematische Annalen, Bd. 49, 1897

7. Pochhammer. Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten. Mathematische Annalen, Bd. 36, 1890.
8. П. А. Некрасов. Общее дифференцирование. Мат. сб. (московск. мат. общ.) том 14, вып. 1., XIX—1, Москва 1888.
9. А. В. Летников. Об интегрировании уравнения Лапласа. (см. предыд. пункт).
10. Д. Д. Мордухай-Болтовский. Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений. Изв. Варшавск., 1909, 1910, 1911 г.г.

*А. Т. Барабанов*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Аннотация.

Задача Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа n-ого порядка, с регулярной особой точкой, решается методом контурного интегрирования. Решение даётся в аналитически замкнутой форме, в предположении, что известны корни характеристического уравнения. Построенное решение задачи Коши может быть использовано для нелокальных расчетов.

A. Barabanoff

# SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LAPLACE LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Annotation

Cauchy problem for Laplace linear differential equation of n-th order with one singular point of regular type is solved. The solution is given in analytical closed form, using the loop-integral method in supposing that the roots of the characteristical equation is known. The form of the solution enables to use it for non locally computations.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47. 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Б. И. Коробочкин*

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛАПЛАСА

В настоящей статье рассматривается вопрос о представлении решения задачи Коши $y(t)$ для обыкновенного однородного дифференциального уравнения с линейными коэффициентами, позволяющем наглядно проследить все этапы описываемого этим решением процесса.

Отправным пунктом для получения этого представления, обеспечивающего в некотором, указанном далее, смысле равномерную аппроксимацию искомого решения, является его выражение в виде двойного контурного интеграла

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B(z)}{z^{n+1}Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\,dz+$$
$$+N(t)=\eta(t)+N(t)$$

Это представление для случая простых корней полинома $Q(z)$ построено А. Т. Барабановым.*

В соответствии с этим мы будем использовать аналогичную запись уравнения

$$\sum_{k=0}^{n}(a_k\ x+b_k)\frac{d^k}{dx^k}\ y=0$$

в виде

$$A(y)=[\tau Q(p)+Q'(p)-P(p)]y=0\ ,$$

что не умаляет общности решаемой задачи.

---

* См. настоящий сборник А. Т. Барабанов «Решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения Лапласа».

Однако в отличие от упомянутой работы мы нигде не будем пользоваться конкретным видом функции $\varphi(z)$, требуя лишь, чтобы $Q(z)\dot{\varphi}(z)+P(z)\varphi(z)=0$. Явный вид функции $\varphi(z)$ существенно зависит от кратности корней полинома $Q(z)$.

Нецелесообразность использования явного вида функции $\varphi(z)$ вызвана тем, что для разрешения ряда основных вопросов, связанных с описываемой этим уравнением физической системой, или, что то же, для аппроксимации этого решения, как будет видно из дальнейшего, совершенно не требуется знание конкретных значений корней $z_k$ $(k=1, \ldots, n)$ полинома $Q(z)$ или, хотя бы, знание их кратности, а лишь знание области, где все они расположены.

В связи с этим, в теореме 1 будет повторено доказательство теоремы А. Т. Барабанова о справедливости упомянутого представления в виде, не зависящем от кратности корней полинома $Q(z)$.

Пусть область $g_\varrho$ представляет собой расширенную плоскость с выброшенной полупрямой $\gamma: -\infty<z\leqslant-\varrho$ и кругом $\overline{K}_\varrho: |z|\leqslant\varrho$, $O<\varrho$. Назовем допустимыми кривыми либо непрерывные спрямляемые кривые, либо спрямляемые в каждой своей конечной части, в случае, когда они неограничены. Будем говорить, что допустимая кривая $L: z(t)$ $(\alpha<t<\beta)$ начинается (или кончается) в точке $Re z=\pm\infty$ или $Im z=\pm\infty$, если при $t\to\alpha$ (или $t\to\beta$) $Re z(t)\to\pm\infty$ или $Im z(t)\to\pm\infty$.

Выберем в качестве контура $L_\rho$ простую допустимую кривую, целиком, кроме своих концов, лежащую в $g_\rho$, начинающуюся и кончающуюся в точке $Re\, z=-\infty$. Направление обхода установим такое, что круг $\overline{K}_\rho$ при этом остается слева. В качестве контура $l_z$ выберем допустимую кривую, начинающуюся в $Re\, z=\infty$, кончающуюся в точке $z$ и целиком, кроме быть может своих концов, лежащую в $g_\rho$.

Теорема 1. $y(t)=\eta(t)+N(t)$ есть решение задачи Коши для уравнения $A(y(t))=[\tau Q(p)+Q'(\mathrm{p})-P(p)]y=0$, где

$$p=\frac{d}{dt},\ Q(p)=\sum_{k=0}^{n} q_k p^k,\ q_n=1,\ P(p)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k p^k,$$

$$Q'(p)=\frac{d}{dp}Q(p),\ \tau=t-t_0,\ 0<t<t_0$$

удовлетворяющее условиям

$$\left[\frac{d^k}{dt^k}\ y(t)\right]_{t=0}=y_k\quad (k=0, 1, \ldots, n-1)$$

при

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{zt_0}B(z)}{z^{n+1}Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z} e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\,dz$$

$$N(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k}{k!}t^k,\ 0<t<t_0,\quad \varrho>\max|z_i|, Q(z_i)=0,\ L=L_\rho,$$

если

$$B(z)=z^{n+1}\int\limits_0^\infty e^{-zt}A(-N(t))\,dt=\sum_{k=0}^{n}\beta_k z^k$$

$$\frac{\dot\varphi}{\varphi}=-\frac{P}{Q}\quad \lim_{\xi\to z}\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(z)}=1,\qquad \xi\in l_z,$$

причем это решение $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемо справа в точке $t=0$.

Предварительно докажем, что справедлива

Лемма 1. Функция $h(z,\tau)=\frac{e^{-z\tau}}{\varphi(z)}\int\limits_{l_z} e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi$ при $-\infty<\tau''\leqslant\tau\leqslant\tau'<0$ равномерно ограничена в $\overline{g}_\rho$ ($\overline{g}_\rho$ есть замыкание $g_\rho$), т. е. $|h(z,\tau)|<c$ для всех $z\in\overline{g}_\rho$.

Так как $Q\dot\varphi+P\varphi=0$, то $\varphi(z)=z^{-q}\psi(z)$ $q=p_{n-1}$, где $\psi(z)$ регулярна и не обращается в ноль при $\varrho\leqslant|z|$, т. е. и в $\overline{g}_\rho$ Следовательно,

$$|h(z,\tau)|\leqslant\left|\frac{1}{e^{z\tau}\varphi(z)}\right|\int\limits_{l_z}|e^{\xi\tau}\varphi(\xi)||d\xi|\leqslant$$

$$\leqslant c_1'\left|\frac{1}{e^{z\tau}z^{-q}}\right|\int\limits_{l_z}|e^{\xi\tau}\xi^{-q}|\,d\xi|\leqslant c_1\left|\frac{1}{e^{-z\tau}}\right||z|^{q'}\int\limits_{l_z}|e^{\xi\tau}|\,|\xi|q|\,d\xi|$$

$$q'=Re\ q.$$

---

* Для определенности можно считать, что $|\arg z|\leqslant\pi$ и $|\arg\xi|\leqslant\pi$, $z\in\overline{g}_\rho$, $\xi\in l_z$.

1) Пусть $p' = Re\ q > 0$. Тогда контур $l_z$ может быть заранее взят таким, что $|\xi|$ не убывает на этом контуре. Поэтому

$$|h(z, \tau)| \leqslant c_1 |e^{-z\tau}| \int_{l_z} |e^{\xi\tau}| \, |d\xi| < c.$$

2) Пусть $q' = Re\ q \leqslant o$. Положим $\xi = \eta + z$. Тогда

$$|h(z, \tau)| \leqslant c_1 \int_{l_o} |e^{\eta\tau}| \left| 1 + \frac{\eta}{z} \right|^{-q'} |d\eta| \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \int_{l_o} e^{\tau Re\eta} \left( 1 + \frac{|\eta|}{\varrho} \right)^{-q'} |d\eta| < C$$

($l_0$ получается сдвигом $l_z$ на величину и в направлении вектора $-z$).

Следствие. $$|h_k(z, \tau)| = \left| \frac{e^{-z\tau}}{z^k \varphi(z)} \int_{l_z} e^{\xi\tau} \xi^k \varphi(\xi) \, d\xi \right| < C_k,$$

$$z \in \overline{g}_\rho \quad -\infty < \tau'' \leqslant \tau \leqslant \tau' < 0 \qquad C_k = \text{const}.$$

Из леммы 1 следует, что $\eta(t)$ есть аналитическая функция в $0 < t < t_0$. Непосредственным дифференцированием легко убедиться, что $A(\eta(t) + N(t)) = 0 \quad t \in (0, t_0)$.

Покажем теперь, что существует $\lim\limits_{t \to +0} \eta^{(k)}(t) = 0$, $k = o, 1, \ldots, n-1$. Действительно, пусть $\tau'' < -t_0 < \tau' < 0$. Тогда

если положить $$\eta^{(k)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L H_k(z, \tau) \, dz$$

то

$$|H_k(z, \tau)| = \left| \frac{e^{zt} B(z) z^k}{z^{n+1} Q(z)} \cdot \frac{e^{-z\tau}}{z^k \varphi(z)} \int_{l_z} e^{\xi\tau} \xi^k \varphi(\xi) d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_k \left| \frac{e^{zt} B(z)}{z^{n+1-k} Q(z)} \right| \leqslant C_k' \left| \frac{e^{zt}}{z^{n+1-k}} \right| \leqslant C \left| \frac{e^{zt}}{z^2} \right|$$

при $k = o\ 1, \ldots, n-1$, $z \in \overline{g}_\rho$.

Так как $H(z, \tau)$ регулярна в $g_\rho$ при $\tau<o$, то из приведенной оценки следует:

1) что существует предел справа $\eta^{(k)}(t)$ при $t \to o$,
2) $\lim\limits_{t \to +o} \eta^{(k)}(t) = o$ при $k=o, 1, \ldots, n-1$.

Следовательно, $\lim\limits_{t \to +o} y^{(k)}(t) = N^{(\kappa)}(o) = y_k$ и $y(t)$ есть искомое решение.

Следствие. Пусть

$$B_*(z) = -\frac{z^{n+1}}{2\pi i} \int_o^\infty e^{-zt} \int_L A(e^{\xi t}) \frac{S(\xi)}{\xi^n} d\xi\, d\, t$$

$$\text{где} \quad \frac{S(\xi)}{\xi^n} = \int_o^\infty e^{-\xi t} N(t)\, dt$$

Тогда

$$B_*(z) = t_0 z\, Q(z) S(z) + z\, Q(z) S'(z) + z\, P(z) S(z) - n\, Q\, S(z)$$

$$\text{и} \quad \frac{e^{zt_0} B_*(z)}{z^{n+1} Q(z) \varphi(z)} = \frac{d}{dz} \left[ \frac{e^{zt_0} S(z)}{z^n\, \varphi(z)} \right]$$

Из определения $B(z)$ и $B_*(z)$ следует, что

$$A(-N(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt} B(z)}{z^{n+1}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt} B_*(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

Поэтому $B_*(z) = B(z) - z^{n+1} B_1(z)$, где $B_1(z) = \sum\limits_{k=o}^{n-1} b_k z^k$.

По теореме 1

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt_0} B(z)}{z^{n+1} Q(z) \varphi(z)} \int_{l_z} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz + N(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{Q(z) \varphi(z)} \int_{l_z} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt} S(z)}{z^n}\, dz + N(t) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{Q(z) \varphi(z)} \int_{e_z} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz.$$

Прежде чем переходить к дальнейшему изложению, остановимся на некоторых вспомогательных фактах и определениях.

Пусть $g$ есть область расширенной плоскости, граница которой $\gamma$ распадается на связаные компоненты $\gamma_m$ $m=1, 2, \ldots$ Обозначим через $L_z$ класс допустимых замкнутых кривых Жордана, начинающихся и заканчивающихся в точке $z$ и целиком лежащих в $g$ за исключением, возможно, своих концов. Направление обхода на них установим такое, что внутренняя по отношению к этим кривым ограниченная область остается при обходе слева. Обозначим через $L_z^k$ подклассы класса $L_z$ такие, что внутренняя по отношению к каждой из кривой подкласса область содержит одни и те же компоненты множества $\gamma$. Очевидно, что всегда можно указать такой класс $G_k$ двусвязанных областей $g_k$, что при $z \in g$ $l_z^k \subset g_k \subset g$, если $l_z^k \in L_z^k$.

Рассмотрим теперь две аналитические в $g$ функции $u(z)$ и ${}_k\Phi(z) = \int\limits_{l_z^k} u(\zeta)\,d\zeta$. Зафиксируем в $\delta$—окрестности точки $z$ принадлежащей $g$, значение одной из ветвей $u^*(z)$ функции $u(z)$. Соответственно этому, зафиксируем в той же $\delta$ — окрестности значение однозначной в ней ветви ${}_k\Phi^*(z)$ функции ${}_k\Phi(z)$ такой, что

$$ {}_k\Phi^*(z) = \int\limits_{l_z^k} u^*(\zeta)\,d\zeta $$

Обозначим теперь через ${}_k\Phi^*_m(z)$ и $u^*_m(z)$ значения, которые получают функции ${}_k\Phi^*(z)$ и $u^*(z)$ в результате непрерывного продолжения вдоль $l_z^m$ *.

Лемма 2.
$$ {}_k\Phi^*_{k}(z) = \int\limits_{l_z^k} u^*_k(\zeta)\,d\zeta $$

Действительно,

$$ {}_k\Phi^*(z) = \int\limits_{l_z^k} u^*(\zeta)\,d\zeta $$

$$ \text{и } d({}_k\Phi^*(z)) = (u^*_k(z) - u^*(z))\,dz $$

* Значение подынтегральной функции непрерывно продолжается вдоль $l_z^k$, а начальное ее значение равно $u^*(z)$.

Тогда

$$ {}_k\Phi_k^*(z) = \int\limits_{l_z^k} d({}_k\Phi^*) + {}_k\Phi^* = \int\limits_{l_z^k} u_k^*\, d\zeta $$

Если

$$ u_k^*\ (z) = C_k u^*(z)\ C_k = \text{const и } u\ (z) \neq 0 z \in g, $$

то из леммы 2 можно получить два очевидных, но полезных для дальнейшего следствия:

1. Функция ${}_kf(z) = \frac{{}_k\Phi(z)}{U(z)}$ допускает выделение в каждой из $g_k$ однозначной регулярной ветви, например

$$ {}_kf^*(z) = \frac{{}_k\Phi^*(z)}{u^*(z)} $$

2. Если внутренность $L_z^k$ содержит только одну компоненту $\gamma_k$, выродившуюся в точку $z_k$, т. е. когда найдется область $g_k$, получающаяся из односвязной области $g_k^+$ удалением точки $z_k$, и если существует конечный предел ${}_kf(z)$ при $z \to z_k$, то ${}_kf(z)$ регулярна в $g_k^+$.

Лемма 3. При выполнении предположений следствия 2 леммы 2 и $C_k \neq 1$, функция

$$ {}_kF(z) = \frac{1}{(z - z_k)u^*(z)} \int\limits_{l_z^k} u^*(\zeta)\, d\zeta $$

имеет в точке $z_k$ конечный и не равный нулю предел ${}_kF(z_k) \neq 0$ (а, следовательно, ${}_kF(z)$ регулярна в $g_k^+$) тогда и только тогда, когда существует такое число $\beta_k$, что функция $v_k\ (z) = \frac{u^*(z)}{(z - z_k)^{\beta_k}}$ имеет конечный и не равный нулю предел $v_k(z_k) \neq 0$.

Причем ${}_kF(z_k) = \frac{C_k - 1}{\beta_k + 1}$ $(C_k = e^{2\pi i \beta_k})$.

Ввиду очевидности, доказательство леммы опускается.

Теорема 2. Если полином $Q(z)$ имеет простой вещественный корень $z_1$ такой, что

$$Re\, z_\nu < z_1 - \Delta \quad o < \Delta \quad \nu = 2, 3, \dots \qquad Q(z_\nu) = 0$$

$$\text{и } C_1 = e^{-2\pi i \alpha_1} \neq 1 \qquad C_2 = e^{-2\pi i (q - \alpha_1)} \neq 1$$

то решение задачи Коши теоремы 1 $y(t)$ может быть представлено в виде

$$y(t) = A_1 y_1(t) + A_2 (y_1(t) + y_2(t)) + I(t, t_0)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} \quad q = \frac{p_{n-1}}{q_n} = p_{n-1}$$

$$A(y_1(t)) = A(y_2(t)) = A(I(t, t_0)) = 0, \text{ а}$$

$$y_1(t) = \frac{1}{1 - C_1} \int\limits_{l^1} e^{\xi\tau} \varphi(\xi) d\xi, \; y_2(t) = \frac{1}{1 - C_2} \int\limits_{l_z^2} e^{\xi\tau} \varphi(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{1}{1 - C_1} \int\limits_{l_z^1} e^{\xi\tau} \varphi(\xi) d\xi$$

$$I(t, t_0) = \frac{-C_2}{2\pi i (1 - C_2)} \int\limits_{l^2} e^{z\tau} \varphi(z) \int\limits_{l_z^2} \frac{e^{\xi t_0} B_1(\xi)}{Q(\xi) \varphi(\xi)} d\xi\, dz$$

$$A_1 = A_1(t_0) \quad A_2 = A_2(t_0) \qquad z_\nu \in g_1 \setminus g_2$$

$$z_\nu \in g_2 \setminus g_1 \quad \nu = 2, 3, \dots$$

$$l^1 = l^1_{+\infty}$$

(начало и конец $l^1_{+\infty}$ в $Re\, z = +\infty$, а для $l^2$ безразличны) справедливом при всех $-\infty < t < t_0$. Так как, по условию теоремы, $z_1$ простой корень полинома $Q(z)$, то $\varphi(z) = z^{-\alpha_1} \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ регулярна и не равна нулю в точке $z_1$. Примем в качестве области $g$ расширенную плоскость $z$ без точек $z = z_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ и $z = \infty$. Пусть $L_z^1$ содержат внутри только одну не принадлежащую $g$ точку $z_1$.

---

Далее ограничение на некратность $z_1$, $C_1 \neq 1$ и, кроме того, $C_2 \neq 1$ будут сняты.

Тогда, очевидно,

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\left[\int\limits_{e^1}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-\int\limits_{e_z^1}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\right]dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^1}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^1}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,dz.$$

Пусть $L_z^2$ содержат внутри все точки $z_\nu$ за исключением $z$ и $L^2$ есть допустимая кривая, начинающаяся и кончающаяся в $Re\,z=-\infty$ и содержащая внутри (т. е. в области, остающейся при обходе слева) так же все $z_\nu$ за исключением $z_1$. По леммам 2 и 3

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^1}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^1}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^1}e^{z\tau}\varphi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\left[\frac{1}{1-C_1}\int\limits_{l_z^1}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{1}{1-C_2}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi\right]dz-$$

$$-\frac{1}{(1-C_2)2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\xi\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^1}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}dz\left[\frac{1}{1-C_1}\int\limits_{l_z^1}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{1}{1-C_2}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i(1-C_2)}\int\limits_{l^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\,dz$$

где $l^2$ есть замкнутая допустимая кривая, принадлежащая области $g_2$.

Интегрируя по частям последнее слагаемое и опять используя лемму 2, получим

$$\int\limits_{l^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\,dz=C_2\int\limits_{l^2}e^{z\tau}\varphi(z)\int\limits_{l_z^2}\frac{e^{\xi t_0}B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\,d\xi\,dz$$

или

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i(1-C_1)}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^1}e^{z\tau}\varphi(z)\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\left[\frac{1}{1-C_2}\int\limits_{l_z^2}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi-\frac{1}{1-C_1}\int\limits_{l_z^1}e^{\xi\tau}\varphi(\xi)\,d\xi\right]-$$

$$-\frac{C_2}{2\pi i(1-C_2)}\int\limits_{l^2}e^{z\tau}\varphi(z)\int\limits_{l_z^2}\frac{e^{\xi t_0}B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\,d\xi\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\;y_1(t)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\,(y_1(t)+y_2(t))+I(t,\,t_0)$$

где $l$ означает допустимую кривую, начинающуюся и кончающуюся в $Re\,z=-\infty$ и содержащую внутри только одну особую точку $z_1$.

Как нетрудно убедиться, каждое из приведенных слагаемых играет существенную роль на определенных этапах описываемого дифференциальным уравнением физического процесса.

Так первое слагаемое характеризует установившееся движение системы, второе и третье — переходной процесс, причем второе необходимо учитывать только при малых $\Delta$ и $t_0$.

Для вычисления $I(t, t_0)$ интегрированием по частям может быть легко получено асимптотическое по $t_0$ разложение:

$$I(t\ t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^2} e^{z\tau}\varphi(z)\left[\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{t_0 Q(z)\varphi(z)} -\right.$$

$$\left.-\frac{C_2}{t_0(1-C_2)}\int\limits_{l_z^2} e^{\xi t_0}\left(\frac{B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\right)' d\xi\right]dz =$$

$$= \frac{1}{t_0 2\pi i}\int\limits_{L^2}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)}\,dz -$$

$$-\frac{C_2}{t_0 2\pi i(1-C_2)}\int\limits_{L^2} e^{z\tau}\ \varphi(z)\int\limits_{l_z^2} e^{\xi t_0}\left[\frac{B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\right]' d\xi\, dz =$$

$$= \frac{1}{t_0 2\pi i}\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{t_0^k}\int\limits_{L^2} e^{zt}\varphi(z)\left[\frac{B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\right]^{(k)} dz +$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}C_2}{t_0^{m+1}(1-C_2)}\int\limits_{L^2} e^{z\tau}\varphi(z)\int\limits_{l_z^2} e^{\xi t_0}\left[\frac{B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\right]^{(m+1)} d\xi\, dz$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi(z)\left[\frac{B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\right]^{(k)}$$

есть дробно-рациональная функция и входящие в первую сумму интегралы могут быть вычислены без труда.

Перейдем теперь к вопросу о вычислении первого и второго слагаемых. Так как фигурирующие в них множители $A_1(t_0)$ и $A_2(t_0)$ могут быть легко разложены известными методами в асимптотические по $t_0$ ряды, то займемся вопросом о вычислении функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$.

Покажем, что они разлагаются в сходящиеся ряды по функциям Уиттекера.

Пусть

$$o<\mu<\Delta \quad \operatorname{Re} z_i \leqslant -\Delta \quad i=2, 3, \ldots$$
$$z_1=o$$

$$\text{и } w(z)=\frac{z}{z+2\mu}$$

Тогда $\varphi(z)=z^{-\alpha_1}\ \varphi_1(z)$, где $\varphi_1(z)$ имеет особенности только в точках $z_2,\ z_3,\ \ldots$ и $z=\infty$ причем $\varphi_1(z)=z^{-q+\alpha_1}\psi_1(z)$, где $\psi_1(z)$ регулярна на бесконечности.

Очевидно, что, если положить

$$\varphi(z)=z^{-\alpha_1}(z+2\mu)^{-q+\alpha_1}\ \psi(\mu,\ z)\cdot(2\mu)^{-\alpha_1+q}\varphi_1(o),$$

то особыми точками $\psi(\mu,\ z)$ могут быть только точки $z_i$ $i=2, 3, \ldots$ и $z=-2\mu$.

Подставляя вместо $z$ его выражение через $w$, определим функцию

$$u(\mu;\ w)=\psi(\mu;\ z(w))$$

Тогда особыми точками $u(\mu: w)$ могут быть только

$$w_i=\frac{z_i}{z_i+2\mu}\ i=2, 3, \ldots$$
$$\text{и } w=\infty$$

Так как

$$Re\ z_i\leqslant-\Delta<-\mu, \quad \text{то}$$
$$|w_i|\geqslant h(\mu)=1+\varepsilon(\mu) \quad o<\varepsilon(\mu)$$

Следовательно,

$$u(\mu;\ w)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\ (\mu)\,w^k$$

$$|w|<1+\varepsilon(\mu)$$

Поэтому

$$\varphi(z)=(2\mu)^{q-\alpha_1}\varphi_1(o)\quad z^{-\alpha_1}\,(z+2\mu)^{-q+\alpha_1}\sum_{k=0}^{\infty}\ a_k\,(\mu)\left(\frac{z}{z+2\mu}\right)^k$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно вне круга

$$\left|\ z+\frac{2\mu\,h^2(\mu)}{h^2(\mu)-1}\right|\leqslant 2\mu\ \frac{h(\mu)}{h^2(\mu)-1}$$

содержащего все точки $z_2,\ z_3,\ \ldots$ и целиком лежащего в полуплоскости $Re\ z<-\mu$.

Так как контуры $l^1$, $l_z^1$ и $l_z^2$ участвующие в определении интегралов для $y_1(t)$ и $y_2(t)$ всегда можно считать не имеющими общих точек с указанным кругом, то законно почленное интегрирование приведенного ряда:

$$y_1(t)=\frac{(2\mu)^{q-\alpha_1}\varphi_1(o)}{1-C_1}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(\mu)\int_{l^1} e^{z\tau} z^{-\alpha_1+k}(z+2\mu)^{-q+\alpha_1-k}\,dz=$$

$$=-(2\mu)^{1-\alpha_1}\ \varphi_1(o)\ e^{-\mu\tau}(-2\mu\tau)^{\frac{q}{2}-1}\cdot$$

$$\cdot\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu)\Gamma(k-\alpha_1+1)\ W_{\lambda,\nu}(-2l\tau)$$

$$\lambda=-\frac{q}{2}+\alpha_1-k\ \ \nu=\frac{1-q}{2}.$$

Аналогично

$$y_2(t)=\frac{(2\mu)^{1-\alpha_1}\varphi_1(o)}{\Gamma(2-q)}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu)\cdot$$

$$\cdot\Gamma(k+1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1-q-k+1)\,{}_1F_1(k+1-\alpha_1;\ 2-q;\ -2\mu\tau)$$

Кроме того, нетрудно видеть, что, например,

$$y_1(t)=\frac{(2\mu)^{q-\alpha_1}\varphi_1(o)}{1-C_1}\Bigg[\sum_{m=o}^{k} a_k(\mu)\int_{l^1} e^{z\tau} z^{-\alpha_1+m}(z+2\mu)^{\alpha_1-q-m}\,dz+$$

$$+\frac{1}{k!}\int_{l^1} e^{2\mu\tau z} z^{-\alpha_1}(1+z)^{-q+\alpha_1}\int_o^1\frac{\partial^{k+1}}{\partial\eta^{k+1}}\left[u\left(\mu;\frac{z}{1+z}\eta\right)\right](1-\eta)^k d\eta\,dz\Bigg].$$

Аналогичная формула для остатка может быть выведена и для $y_2(t)$.

Приведем теперь один из алгоритмов для вычисления коэффициентов $a_k(\mu)$.

$a_0(\mu)\equiv 1$ по построению разложения.

$$a_k(\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\varepsilon}\frac{u(\mu;w)}{w^{k+1}}\,dw=\quad o<\varepsilon<\mu$$

$$=\frac{2\mu}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon_1}\frac{u(\mu;\ w(z))\ (z+2\mu)^{k-1}}{z^{k+1}}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i\,\varphi_1(o)}\int_{|z|=\varepsilon_1}\frac{\varphi_1(2\mu z)(1+z)^{q-\alpha_1-1+k}}{z^{k+1}}\,dz$$

где $\varepsilon_1$, таково, что $\varphi_1(2\mu z)$ регулярна в круге $|z| \leqslant \varepsilon_1$. Следовательно,

$$\frac{\varphi_1(2\mu z)}{\varphi_1(o)} = \sum_{k=o}^{\infty} C_k (2\mu z)^k \quad C_0 = 1 \qquad |2\mu z| \leqslant \varepsilon_1$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$a_k(\mu) = \sum_{m=o}^{k} \frac{\Gamma(q-\alpha_1+k) \quad C_m}{(k-m)!\,\Gamma(q-\alpha_1+m)} (2\mu)^m$$

Используя то, что

$$\frac{\dot{\varphi}_1(z)}{\varphi_1(z)} = \frac{\alpha_1}{z} - \frac{P(z)}{Q(z)}$$

получаем следующее рекуррентное соотношение для определения $C_m$:

$$C_{m+1} = \frac{C_m(\alpha_1 q_1 - p_1) + \sum\limits_{k=o}^{m-1} [C_k(\alpha_1 q_{m-k+1} - p_{m-k+1}) - (k+1)C_{k+1} q_{m-k}]}{(m+1)q_0}$$

Перейдем теперь к вопросу о снятии ограничений в теореме 2. Самые простые ограничения $C_1 \neq 1$ и $C_2 \neq 1$ могут быть, очевидно, сняты с помощью предельного перехода при $\alpha_1 \to m_1$ и $q-\alpha_1 \to m_2$ ($m_1$ и $m_2$ целые или нули).

Для снятия ограничения на некратность $z_1$ будем для простоты считать, что все $z_i$ лежат в левой полуплоскости $i=1, 2, 3, \ldots$. В противном случае этого всегда можно было бы добиться, полагая $y(t) = e^{z_0 t} x(t)$ при $Re\, z_i < Re\, z_0$.

Найдем предварительно из $A(y) = o$ значение $y^{(n)}(o) = y_n$. Затем положим $\tilde{Q}(p) = pQ(p)$ и рассмотрим оператор

$$p\,A(p:\tau) = \tau\, p\, Q(p) + p\, Q'(p) - p\, P(p) + Q(p) =$$
$$= \tau\, \tilde{Q}(p) + \tilde{Q}'(p) - p\, P(p)$$

Введем «испорченный» оператор

$$B_\varepsilon = \tau\, \tilde{Q}(p) + \tilde{Q}'(p) - P_\varepsilon(p), \text{ где } P_\varepsilon(p) = (p+\varepsilon) P(p)$$

Построив решение задачи Коши для

$$B_\varepsilon\,(y_\varepsilon(t)) = o \qquad y^{(k)}(o) = y_k \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

перейдем к пределу при $\varepsilon \to o$ в представлении для $y_\varepsilon(t)$. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to o} y_\varepsilon(t) = y(t)$. Так как это эквивалентно случаю

$$\lim_{\varepsilon \to o} \alpha_{1\varepsilon} = \lim \frac{P_\varepsilon(o)}{\tilde{Q}'(o)} = o,$$

то остаются в силе все предыдущие рассуждения.

В заключение отметим, что в случае наличия кратных корней полинома $Q(z)$, решение задачи Коши $y(t)$ может быть выражено через фундаментальную систему решений исходного уравнения.

Представляя

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\,\xi\,dz$$

в виде

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\overline{l}^k}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\,\xi\,dz$$

$$Q(z)=\prod_{k=o}^{m}(z-z_k)^{r_k}\quad\sum_{k=1}^{m}r_k=n$$

где $\overline{l^k}$ есть допустимые кривые, начинающиеся и кончающиеся в $Re\,z=-\infty$, охватывающие только одну особую точку $z_k$ и не имеющие общих точек в конечной части плоскости, подставим в $k^{oe}$ слагаемое:

$$\int\limits_{l_z}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi=\frac{1}{1-C_k}\left[\int\limits_{l^k}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-\int\limits_{l_z^k}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\,\xi\right]$$

($C_k$ есть множитель, который получает $\varphi(z)$ при обходе во круг $z_k$, а $l^k$ симметричны относительно $z_k$ с $\overline{l^k}$)

Тогда

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-C_k}\int\limits_{\overline{l}^k}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\,dz\int\limits_{l^k}e^{z\tau}\,\varphi(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1-C_k}\int\limits_{\overline{l}^k}\frac{e^{zt_0}B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)}\int\limits_{l_z^k}e^{\xi\tau}\,\varphi(\xi)\,d\,\xi\,dz$$

Если все $z_k$ простые, то все слагаемые последней суммы по следствию леммы 2 есть нули и мы получаем разложение, впервые для случая простых корней $Q(z)$ другим путем полученное А. Т. Барабановым.

Если какое либо из $z_k$ кратно, то

$$\frac{\dot{\varphi}(z)}{\varphi(z)} = -\frac{P(z)}{Q(z)} = -\frac{\alpha_{k,1}}{z-z_k} - \cdots - \frac{\alpha_{k,r_k}}{(z-z_k)^{r_k}} + R_k(z)$$

откуда

$$\varphi(z) = (z-z_k)^{-\alpha_{k1}} \exp\left[\sum_{\nu=1}^{r_k-1} \frac{\alpha_{k,\nu+1}}{\nu(z-z_k)^{\nu}}\right] \varphi_k(z) =$$

$$= (z-z_k)^{-\alpha_{k1}} \psi_k(z) \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ регулярна и не равна нулю в точке $z_k$.

По лемме 2 подынтегральная функция

$$\frac{e^{zt_0} B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)} \int_{l_z^k} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi$$

однозначна в области, ограниченной контуром $\overline{l}^k$, поэтому

$$\int_{\overline{l}^k} \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)} \int_{l_z^k} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz =$$

$$= \int_{|z-z_k|=\varepsilon} \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{Q(z)\varphi(z)} \int_{l_z^k} e^{\xi\tau} \varphi(\xi)\, d\xi\, dz =$$

$$= C_k \int_{|z-z_k|=\varepsilon} e^{z\tau} \varphi(z) \int_{l_z^k} \frac{e^{\xi t_0} B_1(\xi)}{Q(\xi)\varphi(\xi)}\, d\xi\, dz,$$

где $\varepsilon$ меньше расстояния от $z_k$ до ближайших из $z_\nu$.

Вообще, непосредственным дифференцированием легко убедиться, что

$$\int_{|z-z_k|=\varepsilon} e^{z\tau} \varphi(z) \int \frac{f(\xi)}{(\xi-z_k)^{r_k-\alpha_{k1}}\, \Psi_k(\xi)}\, d\xi\, dz$$

есть решение исходного уравнения, если только $f(\xi)$ регулярна в точке $z_k$.

Причем можно показать, что фундаментальная система решения исходного уравнения может быть представлена в виде

$$
\begin{array}{llll}
y_1(t) & y_{11}(t) & \cdots & y_{1(r_1-1)}(t), \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
\cdot & & & \\
y_m(t) & y_{m1}(t) & \cdots & y_{mr_{(m-1)}}(t),
\end{array}
$$

где по прежнему $r_k$ кратность корня $z_k$, а

$$y_k(t) = \int\limits_{l^k} e^{z\tau} \varphi(z) dz$$

$$y_{k\nu}(t) = \int\limits_{|z-z_k|=\varepsilon} e^{z\tau}\varphi(z) \int\limits_{l_z^k} \frac{(\xi - z_k)^\nu}{(\xi - z_k)^{r_k - \alpha_{k1}} \psi_k(\xi)} d\xi dz$$

($\varepsilon$ меньше расстояния между любой парой корней $Q(z)$).

В связи с этим, может быть получено представление:

$$\int\limits_{|z-z_k|=\varepsilon} e^{z\tau}\varphi(z) \int\limits_{l_z^k} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_k)^{r_k - \alpha_{k1}} \psi_k(\xi)} d\xi dz = \sum_{\nu=1}^{r_k - 1} \Phi_\nu(f) y_{k\nu}(t)$$

Более подробное изложение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи и будет приведено отдельно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Э. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков 1939 г.

2. В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат 1950 г.

*Б. И. Коробочкин*

## О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ УРАВНЕНИЯ ТИПА ЛАПЛАСА


Аннотация

Рассмотрена задача Коши:

$$A(y(t))=[\tau\ Q(p)+Q'(p)-P(p)]y=O;$$

$$p=\frac{d}{dt},\ Q(p)=\sum_{k=0}^{n} q_k\,p^k;\ \ q_n=1$$

$$P(p)=\sum_{\kappa=0}^{n-1} p_k\,p^k;\quad Q'(p)=\frac{d}{dp}\ Q(p);\quad \tau=t-t_0;\ o<t<t_0.$$

$$\left[\frac{d^k}{dt^k}\,y(t)\right]_{t=0}=y_k\,,\ k=o,\ 1,\ \ldots,\ n-1;$$

Решение дается в аналитически замкнутой форме в виде двойного контурного интеграла.

Использование метода контурного интегрирования позволяет выделить из решения части, определяющие переходный процесс и стационарный режим. Дается эффективный вычислительный аппарат.


B. I. Korobochkin

on

## ON THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM OF THE LAPLACE TYPE EQUATIONS


The following Cauchy problem

$$A(y(t))=[\tau\,Q(p)+Q'(p)-P(p)]y=o,$$

$$p=\frac{d}{dt}\,,\ Q(p)=\sum_{k=o}^{n} q_k\ p^k\,q_k=1$$

$$P(p)=\sum_{k=0}^{n-1} p_k p^k,\ Q'(p)=\frac{d}{dp}\,Q(p),\ \tau=t-t_0,\ o<t<t_0$$

$$\left[\frac{d^k}{dt^k}\,y(t)\right]_{t=0}=y_k\,,\ k=0,\ 1,\ -\ -,\ n-1;$$

is solved.

The solution is given in an analytical closed form by means of using the method of loop integrals.

Using the loop integration method permits us to distinguish the part of the solution which defines the transitional phase of the process and the part which defines the stationary regime. Besides this, the effective computer apparatus is given.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Б. И. Коробочкин, Ю. А. Филиппов*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Настоящая статья посвящена аналитическим методам решения задачи Коши для уравнения вида

$$\tau^2 \frac{d^n}{dt^n} y(t) + \tau (b_{n-1} \tau + c_{n-1}) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \sum_{k=0}^{n-2} (b_k \tau^2 + + c_k \tau + d_k) \frac{d^k}{dt^k} y(t) = O$$

$$\tau = t - t_0, \quad \left[ \frac{d^k}{dt^k} y(t) \right]_{t=0} = y_k$$

$$(k=0, 1, \ldots, n-1)$$

Аналогично случаю линейного уравнения с коэффициентами, линейно зависящими от аргумента, который рассмотрен хотя бы в [1], задача решается методами контурного интегрирования.

В дальнейшем мы будем придерживаться терминологии работы [1].

Теорема 1. Решение $y(t)$ задачи Коши для уравнения

$$A(y) = [\tau^2 Q(p) + \tau\, Q_1(p) + Q_2(p)]\, y = O, \tag{1}$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$,

$$Q(p) = \sum_{k=0}^{n} q_k p^k, \qquad q_n = 1$$

$$Q_1(p) = \sum_{k=0}^{n-1} {}_1q_k\, p^k,$$

$$Q_2(p)=\sum_{k=0}^{n-2} {}_2q_k\,p^{\kappa},\qquad {}_{\nu}q_k=const\quad(\nu=1,\,2)$$

$$\tau=t-t_0,\ O<t<t_0,$$

с начальными условиями

$$\left[\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}}y(t)\right]_{t=0}=y_k\qquad(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$$

может быть представлено в виде:

$$y(t)=\eta(t)+N(t),$$

где

$$N(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{y_k\,t^k}{k\,!}$$

$$\eta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{zt_0}B(z)\ \varphi_{\nu}(z)}{z^{n+2}\omega(z)}\int\limits_{l_z}\frac{\omega(\zeta)}{Q(\zeta)\,\varphi_{\nu}^{2}(\xi)}\int\limits_{l_{\nu}}e^{\eta\tau}\varphi_{\nu}(\eta)\,d\,\eta\,dz\,d\xi \tag{2}$$

$$B(z)=z^{n+2}\int\limits_{o}^{\infty}e^{-zt}A(-N(A))\,dt,$$

а контуры $L,\ l_z,\ l_{\zeta}$ представляют простые допустимые кривые, первая из которых начинается и кончается в $Re\,z=-\infty$, оставляя витури (слева по направлению обхода) область, содержащую начало координат и корни полинома $Q(z)$; $l_z,\ l_{\zeta}$ начинаются в точках $Re\,\zeta=\infty$ $(Re\,\eta=\infty)$ и кончаются в точках $\zeta=z\,(\eta=\zeta)$.

Функция $\varphi_{\nu}\ (z)\ \ (\nu=1,\ 2)$ есть одно из канонических в окрестности бесконечности решений дифференциального уравнения

$$Q(z)\ddot{\varphi}(z)+[2\,\dot{Q}(z)-Q_1(z)]\,\dot{\varphi}(z)+[\ddot{Q}(z)-\dot{Q}_1+Q_2(z)]\,\varphi(z)=O, \tag{3}$$

а функция $\omega(z)$ — решение дифференциального уравнения

$$\frac{\dot{\omega}(z)}{\omega(z)}=\frac{Q_1(z)-\dot{Q}(z)}{Q(z)} \tag{4}$$

В подынтегральных выражениях под этими функциями понимаются одни и те же значения их каких-либо однозначных во внешности контура $L$ ветвей.

Это представление является аналитической по $t$ функцией при $O<t<t_0$, $n-1$ раз непрерывно дифференцируемой справа в точке $t=O$.

Переходя к доказательству теоремы, прежде всего отметим, что точка $z=\infty$ является особой точкой регулярного типа для (3) и (4). Под каноническим решением в окрестности $z=\infty$ мы, как обычно, понимаем $\varphi_\nu(z)=z^{\rho_\nu}\psi_\nu(z)$, где $\psi_\nu(z)$ регулярна и не равна нулю на бесконечности.*

Отметим, что

$$\rho_{1,2}=\frac{{}_1q_{n-1}+1}{2}-n+\frac{1}{2}\sqrt{({}_1q_{n-1}-1)^2-4{}_2q_{n-2}} \tag{5}$$

В свою очередь $\omega(z)=z^{\mu}u(z)$, где $u(z)$ также регулярна и не равна нулю на бесконечности, а $\mu={}_1q_{n-1}-n$. Независимо от выбора $\varphi_\nu(z)$ $(\nu=1, 2)$, справедлива оценка

$$|\Phi_k(z,\tau)|=\left|\frac{e^{zt_0}B(z)\ \varphi_\nu(z)}{z^{n+2}\omega(z)}\int\limits_{l_z}\frac{\omega(\zeta)}{Q(\zeta)\varphi_\nu^2(\zeta)}\int\limits_{l_\zeta}\eta^k e^{\eta\tau}\varphi_\nu(\eta)\,d\eta\,d\zeta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{e^{zt}B(z)z^k}{z^{n+2}Q(z)}\right|\cdot\left|\frac{e^{-z\tau}Q(z)}{\omega(z)\ z^{\kappa}}\int\limits_{l_z}\left|\frac{\omega(\zeta)e^{\zeta\tau}\zeta^k}{Q(\zeta)\varphi_\nu(\zeta)}\,\frac{e^{-\zeta\tau}}{\zeta^{\kappa}\varphi_\nu(\zeta)}\int\limits_{l_\zeta}\eta^k e^{\eta\tau}\varphi_\nu(\eta)\,d\eta d\zeta\right|\leqslant\right.$$

$$\leqslant C\left|\frac{e^{zt}B(z)z^{\kappa}}{z^{n+2}Q(z)}\right|,\ \text{где}\ C=const,\ \infty<\tau_2\leqslant\tau\leqslant\tau_1<O, \tag{6}$$

что нетрудно показать, используя лемму 1 работы [1].

Из (6) следует, что $y(t)$ есть аналитическая функция в указанном в теореме интервале и что

$$\lim_{t\to o}\eta^{(\kappa)}(t)=O,\qquad \text{т. е.}\ \lim_{t\to+o}y^{(\kappa)}(t)=y$$
$$(k=0, 1, \ldots, n-1)$$

а так как непосредственным дифференцированием легко убедиться, что $A(y(t))=O$, то тем самым теорема доказана полностью.

Обозначим через $g_\infty$ область, являющуюся внешностью контура $L$, а через $\overline{g}_\infty$ ее замыкание. Пусть $\varphi_1(z)$ есть какое-либо каноническое в окрестности бесконечности решение уравнения (3), а $\varphi_2(z)$ — любое другое, линейно с ним не зависимое.

* Если $\rho_2-\rho_1$ — целое число, то существует по крайней мере одно каноническое решение, которое в данном случае имеется в виду.

Тогда, если $W(\varphi_1, \varphi_2)$ есть вронскиан этой фундаментальной системы решений, то

$$W(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1, \varphi_2) \exp \left[ \int \frac{Q_1(z) - 2\dot{Q}(z)}{Q(z)} dz \right] =$$

$$= C(\varphi_1, \varphi_2) \frac{\omega(z)}{Q(z)}, \tag{7}$$

где $\quad C(\varphi_1, \varphi_2) = \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{Q(z)\, W(\varphi_1, \varphi_2)}{\omega(z)} \neq O; \quad z \in g_\infty.$

Поэтому

$$\frac{\omega(z)}{Q(z)\, \varphi_1^2(z)} = \frac{1}{C(\varphi_1, \varphi_2)} \left[ \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} \right]' \tag{8}$$

В частности, если $\varrho_2 - \varrho_1$ не есть целое число, то в качестве $\varphi_2(z)$ может быть взято тоже каноническое решение. Считая, что при $-\pi < \arg z < \pi$ $\; u(\infty) = 1,\ \psi_1(\infty) = 1,\ \psi_2(\infty) = 1$, получим, что

$$C(\varphi_1, \varphi_2) = \varrho_2 - \varrho_1, \tag{9}$$

Теорема 2. Если $\varphi_1(z)$ есть каноническое в окрестности бесконечности решение, образующее совместно с $\varphi_2(z)$ фундаментальную систему решений уравнения (3), то решение $y(t)$ теоремы 1 представимо в виде

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i\, C(\varphi_1, \varphi_2)} \left[ \int\limits_L \frac{e^{zt_0} B(z) \varphi_2(z)}{z^{n+2} \omega(z)} \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_1(\zeta)\, d\zeta\, dz - \right.$$

$$\left. - \int\limits_L \frac{e^{zt_0} B(z) \varphi_1(z)}{z^{n+2} \omega(z)} \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_2(\zeta)\, d\zeta dz \right], \tag{10}$$

где

$$C(\varphi_1, \varphi_2) = \lim_{z \to \infty} \frac{W(\varphi_1, \varphi_2)\, Q(z)}{\omega(z)}$$

Для доказательства достаточно подставить (8) в (2) при $\nu = 1$ и один раз проинтегрировать по частям.

Пусть

$$S(z) = z^n \int\limits_0^\infty e^{-zt} N(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} s_k z^k, \tag{11}$$

тогда

$$-A(N(t)) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{A(e^{zt}) S(z)}{z^n}\, az = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{e^{zt} B(z)}{z^{n+2}} \tag{12}$$

Определим полином $B^*(z)$ степени $2n+1$

$$B^*(z)=z^{n+2}\left[-e^{zt_0}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{SQ}{z^n}e^{zt_0}\right)+e^{-zt_0}\frac{d}{dz}\left(\frac{SQ_1e^{zt_0}}{z^n}\right)-\frac{SQ_2}{z^n}\right] \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{zt}B^*(z)}{z^{n+2}}\,dz=-A(N(t)) \tag{14}$$

Поэтому $B^*(z)=B(z)-z^{n+2}B_1(z)$ (15),
где $B_1(z)$ есть полином степени $n-1$.

Замечая, что

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi_1^2(z)Q(z)}{\omega(z)}\frac{d}{dz}\frac{e^{zt_0}S(z)}{z^n\varphi_1(z)}\right]=-\frac{B^*(z)e^{zt_0}\varphi_1(z)}{z^{n+2}\omega(z)}, \tag{16}$$

подставим (16) в (2), где вместо $B(z)$ взят полином $B^*(z)$ и $\nu=1$. Тогда интегрированием по частям получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{zt_0}B^*(z)\varphi_1(z)}{z^{n+2}\omega(z)}\int\limits_{l_z}\frac{\omega(\zeta)}{Q(\zeta)\varphi_1^2(\zeta)}\int\limits_{l_\zeta}e^{\eta\tau}\varphi_1(\eta)\,d\eta\,d\zeta\,dz+N(t)=O \tag{17}$$

Теорема 3. Решение задачи Коши теоремы 1 может быть представлено в виде

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{e^{zt_0}B_1(z)\varphi_\nu(z)}{\omega(z)}\int\limits_{l_z}\frac{\omega(\zeta)}{Q(\zeta)\varphi_\nu^2(\zeta)}\int\limits_{l_\zeta}e^{\eta\tau}\varphi_\nu(\eta)\,d\eta\,d\zeta\,dz,\quad (\nu=1,2) \tag{18}$$

или в виде

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i\,C(\varphi_1,\varphi_2)}\left[\int\limits_L\frac{e^{zt_0}B_1(z)\varphi_2(z)}{\omega(z)}\int\limits_{l_z}e^{\zeta\tau}\varphi_1(\zeta)\,d\zeta\,dz-\right.$$

$$\left.-\int\limits_L\frac{e^{zt_0}B_1(z)\varphi_1(z)}{\omega(z)}\int\limits_{l_z}e^{\zeta\tau}\varphi_2(\zeta)\,d\zeta\,dz\right] \tag{19}$$

Первое из этих соотношений следует из (2), (15) и (17), а второе получается полностью аналогично теореме 2.

Допустим, что все корни $z_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ многочлена $Q(z)$ — простые. Тогда очевидно, что (3) есть уравнение класса Фукса.

Потребуем еще, чтобы разность корней $\varrho_{k_2} - \varrho_{k_1}$ определяющего уравнения в окрестности всех точек $z_k$ не была бы целым числом. Обозначим через $\varphi_{k1}(z) = (z - z_k)^{\rho_{k1}} \psi_{k1}(z)$ и $\varphi_{k2}(z) = (z - z_k)^{\rho_{k2}} \psi_{k2}(z)$ систему канонических в окрестности $z_k$ интегралов уравнения (3). Если корни многочлена $Q(z)$ просты, то $\omega(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} (z - z_k)^{\mu_k}$, где

$$\mu_k = \frac{Q_1(z_k)}{\dot{Q}(z_k)} - 1$$

Нетрудно проверить, что

$$\varrho_{k_1} + \varrho_{k2} - \mu_k = 1 \tag{20}$$

Представим теперь каждый из интегралов по контуру $L$, входящих в (19) в виде суммы:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i C(\varphi_1, \varphi_2)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{l_k} \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{\omega(z)} \left[ \varphi_2(z) \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_1(\zeta)\, d\zeta - \varphi_1(z) \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_2(\zeta)\, d\zeta \right] dz \right\} \tag{21}$$

где $l_k$ есть простые допустимые кривые, начинающиеся и кончающиеся в $Re\, z = -\infty$ не имеющие общих точек в конечной части плоскости и содержащие внутри только по одной из точек $z_k$.

Пусть теперь в достаточно малой окрестности какой либо точки контура $l_k$.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_{k1} \varphi_{k1} + a_{k2} \varphi_{k2} \\ \varphi_2 &= b_{k1} \varphi_{k1} + b_{k2} \varphi_{k2} \end{aligned} \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21), получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i C(\varphi_1, \varphi_2)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} (a_{k1} b_{k2} - a_{k2} b_{k1}) \int\limits_{l_k} \frac{e^{zt_0} B_1(z)}{\omega(z)} \left[ \varphi_{k2}(z) \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_{k1}(\zeta)\, d\zeta - \varphi_{k1}(z) \int\limits_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_{k2}(\zeta)\, d\zeta \right] dz \right\}, \tag{23}$$

где фиксация ветвей произведена в окрестности выбранных выше точек контуров $l_k$. Так как

$$\frac{W(\varphi_1, \varphi_2) Q(z)}{\omega(z)} = C(\varphi_1, \varphi_2) = |A_k| \frac{W(\varphi_{k1}, \varphi_{k2}) Q(z)}{\omega(z)} \qquad (24)$$

где определитель $$A_k = \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k2} \\ b_{k1} & b_{k2} \end{vmatrix}, \qquad (25)$$

исходя из выбора $\varphi_{k1}$ и $\varphi_{k2}$ может быть легко вычислен в окрестности $z_k$.

Представим теперь

$$\int_{l_z} e^{\zeta\tau} \varphi_{k\nu}(\zeta) d\zeta \qquad (\nu=1, 2)$$

в виде

$$\int_{l_z} e^{\xi\tau} \varphi_{k\nu}(\zeta) d\zeta = \frac{1}{1-e^{2\pi i \rho_{k\nu}}} \left[ \int_{\overline{l}_k} e^{z\tau} \varphi_{k\nu}(z) dz - \int_{\overline{l}_{zk}} e^{\zeta\tau} \varphi_{k\nu}(\zeta) d\zeta \right],$$

где $\overline{l}_k$

контур, симметричный относительно $z_k$ с $l_k$, а $\overline{l}_{zk}$ — простая допустимая кривая, начинающаяся и кончающаяся в точке $z$ и содержащая внутри только одну из $z_k$.

Т е о р е м а 4. Решение задачи Коши теоремы 1 при сделанных предположениях и $\varrho_{k\nu}$ не целых может быть представлено в виде:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} B_k \left[ \frac{1}{1-e^{2\pi i \rho_{k1}}} \int_{l_k} \frac{e^{zt_0} B_1(z) \varphi_{k2}(z)}{\omega(z)} dz \int_{l_k} e^{z\tau} \varphi_{k1}(z) dz = \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1-e^{2\pi i \rho_{k2}}} \int_{l_k} \frac{e^{zt_0} B_1(z) \varphi_{k1}(z)}{\omega(z)} dz \int_{l_k} e^{\zeta\tau} \varphi_{k2}(z) dz \right] \qquad (26)$$

Доказательство следует очевидно из (20) и леммы 2 работы [1], так как из леммы 2 вытекает что интегралы

$$\int_{l_k} \frac{e^{zt_0} B_1(z) \varphi_{k\nu_1}(z)}{\omega(z)} \int_{l_{zk}} e^{\zeta\tau} \varphi_{k\nu_2}(z) d\xi dz$$

равны нулю.

С л е д с т в и е. Случаи целых $\rho_{k\nu}$ при условии, что $\rho_{k2}-\rho_{k1}$ не целое, могут быть получены по непрерывности из (26).

Полученные результаты дают возможность надеяться, что использованная методика позволит получить эффективные решения для линейных уравнений с коэффициентами более общей структуры. С другой стороны, используя приемы работы [1], авторы надеются избавиться от ограничений, сделанных при получении конечного результата в настоящей работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Б. И. К о р о б о ч к и н. Разложение решения задачи Коши уравнения типа Лапласа. Ученые записки ЛГУ им. П. Стучки т. 47, 1963. Труды ВЦ университета 1.

2. Э. А й н с. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков 1938.

3. В. В. Г о л у б е в. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Гостехиздат 1951.

*Б. И. Коробочкин и Ю. А. Филиппов*

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

## А н н о т а ц и я

В работе развит метод решения задачи Коши для линейного обыкновенного дифференциального уравнения $n$-го порядка с квадратичными коэффициентами. Решение строится в аналитически замкнутой форме в виде двойного контурного интеграла.

B. I. Korobochkin and Y. A. Filippov

on

# THE SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH QUADRATIC COEFFICIENTS

## A n n o t a t i o n

In this paper a developed method is arrived at for the solution of the Cauchy Problem for linear differential equations of the N order with the coefficients which are quadratic functions of argument. The method consists in employing loop integration, as in the previous paper (see p . . . . .).

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Б. И. Коробочкин*

# ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

Одним из основных вопросов, возникающих при проектировании систем автоматического регулирования, является обеспечение их устойчивости и заданного «качества» протекания переходного процесса.

Если

$$\dot{x} = Ax \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

есть первое приближение математической модели системы

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j + \varphi_1(x_1 \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j + \varphi_n(x_1, \dots, x_n),$$

записанной в вариациях относительно установившегося режима, то, как показано в [1], «качество» поведения устойчивой системы зависит от того, в какой замкнутой области $\overline{G}$ левой полуплоскости расположены собственные значения матрицы $A$. В частности как известно [2], если расстояние $l$ от $\overline{G}$ до мнимой оси положительно, то система будет асимптотически устойчивой, а $l$ принято называть запасом или степенью устойчивости.

Обычно элементы $a_{ij}$ матрицы $A$, не зависящие от времени $t$, непрерывно зависят от совокупности параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ изменяющихся в некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{\Omega}$ Сама задача проектирования состоит в отыскании такой замкнутой области $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$, чтобы при $\alpha_\nu \in \overline{\omega}, \nu=1, \ldots, m$ собственные значения $\lambda_i$ $(i=1, \ldots, n)$ матрицы $A$ принадлежали заданной замкнутой области $\overline{G}$, обеспечивающей нужное «качество» поведения системы.

Если $||A||=min\left\{\underset{i}{max} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|; \underset{k}{max} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ik}|\right\}$, то, в силу того, что $\overline{\Omega}$ есть ограниченная замкнутая область, существует число $o<R<\infty$ такое, что

$$R=max ||A|| \text{ при } \alpha_i \in \overline{\Omega},\ i=1, \ldots, m$$

Тогда, как известно, все $|\lambda_i| \leq R$. Пусть $\overline{K}_R$ есть замкнутый круг $|\lambda| \leq R$ комплексной плоскости $\lambda$ и $\overline{g}=\overline{K}_R \cap \overline{G}$. Если потребовать, чтобы $\lambda_i$ не принадлежали той части $\overline{K}_R$, которая не содержит $\overline{g}$, то это будет эквивалентно требованию $\lambda_i \in \overline{g}$ $(i=1, \ldots, n)$*.

Пусть теперь $w=f(\lambda)$ есть скалярная функция, определенная и непрерывная в $\overline{K}_R$, а $B=f(A)$. Тогда, если $\beta_1, \ldots, \beta_n$ есть спектр матрицы $B$, то по известной теореме [3], $f(\lambda_i)=\beta_i$, $i=1, \ldots, n$. Если $|f(\lambda)| \leq \mu$ при $\lambda \in \overline{g}$ и $\mu<|f(\lambda)|$ при $\lambda \in \overline{K}_R \setminus \overline{g}$, то очевидно, что $\lambda_i \in \overline{g}$, $i=1, \ldots, n$ тогда и только тогда, когда $|\beta_i| \leq \mu$ $(i=1, \ldots, n)$. Таким образом, вопрос о принадлежности $\lambda_i$ к $\overline{g}$ с помощью функции $f(\lambda)$ может быть сведен к более простому вопросу о принадлежности $\beta_i$ к кругу $|w| \leq \mu$, т. е. к оценке наибольшего из $|\beta_i|$, $i=1, \ldots, n$.

Очевидно, приведенный критерий принадлежности может быть практически эффективен только тогда, когда вычисление матрицы $B$ не вызывает затруднений. Поэтому использование в качестве функции $w=f(\lambda)$ даже такой простой, как, например, дробно-линейная $w=\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ крайне нежелательно, так как при этом приходится пользоваться операцией обращения матрицы $(E-A)$, собственные значения которой при $\lambda_i \in \overline{K}_R$ могут быть сколь угодно малы.

* Если $\overline{g}$ пусто, то задача заведомо не имеет решения.

Естественно в качестве функции $f(\lambda)$ использовать наиболее легко вычислимые матричные функции — полиномы. Как известно [4], полиномы $P(\lambda)$ отображают на круг $|w| \leqslant \mu$ замкнутые области $\overline{D}$, граница которых $|P(\lambda)| = \mu$ есть лемниската, причем этими областями может быть равномерно аппроксимирована любая наперед заданная односвязная замкнутая область плоскости $\lambda$. Если при отображении $w = P(\lambda)$ прообраз распадается на $N$ замкнутых областей $D_\nu$ таких, что $\overline{D}_1 \cap \overline{K}_R$ достаточно близко к $\overline{g}$, а $D_\nu \cap \overline{K}_R$, $\nu = 2, \ldots, N$, пусто, то в качестве $B$ может быть взята матрица $P(A)$. Однако, если учесть требования теории автоматического регулирования, которые можно предъявить к областям $\overline{G}$ [1], [5], то, как будет видно, достаточно ограничиться полиномами второй степени. Будем рассматривать только такие односвязные замнутые области $\overline{G}$, которые

1) симметричны относительно вещественной оси,
2) не содержат точек правой полуплоскости,
3) выпуклы.

Отметим, что при этом $\overline{g}$ должно быть односвязной замкнутой областью, обладающей теми же тремя свойствами.

Проведем краткий иллюстративный анализ областей $\overline{D}_1$, которыми мы можем располагать при использовании в качестве функции $f(\lambda)$ полиномов второго порядка $P(\lambda)$.

Пусть $l \geqslant o$ есть заданное расстояние $\overline{G}$ от начала координат, а

$$R_1 = max\,||A + RE||, \qquad \alpha_i \in \Omega$$

($E$ — единичная матрица).

Положим $z = \dfrac{\lambda + l}{R_1}$ и введем для удобства полином

$$S = Q(z) = \frac{1}{\mu}\, P(\lambda) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a + a_2\left(z + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2$$

Вместо плоскостей $\lambda$ и $w$ будем рассматривать комплексные плоскости $z$ и $s$.

В силу требования 1) к прообразам круга $|s| \leqslant 1$, $a_0$, $a_1$, и $a_2$ должны быть вещественны. Для определенности будем всегда считать $a_2 > o$. Кроме того, отмєтим, что $a_0 = \pm 1$, потому что точка $z = o$ должна принадлежать границе прообраза ($\lambda = -l$ есть граничная точка для $\overline{G}$).

Так как $a$ есть точка разветвления обратной к $s = Q(z)$ функции $z(s)$, то при $|a| \leqslant 1$ прообраз круга $|s| \leqslant 1$ есть связное, а при $|a| > 1$ — не связное множество.

Рассмотрим первый случай, когда $|a| \leq 1$. В этом случае $a_0$ необходимо равно 1. Так как точка $z_0 = -\frac{a_1}{2a_2}$ есть прообраз точки $a$ и, следовательно, принадлежит $\overline{G}$, то $z_0 \leq o$. Поэтому $a_1 \geq o$. При $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$, как нетрудно проверить, прообраз круга $|s| \leq 1$ будет выпуклым, а при $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$ — выпуклым в направлении оси у (то есть граница его будет пересекаться прямыми, параллельными оси у, не более чем в двух точках). Следовательно, случай $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$ может также представлять интерес, так как при этом пересечение прообраза $|s| \leq 1$ с кругом $|z| \leq 1$ может обладать всеми свойствами $\overline{g}$. Примеры таких областей приводятся на рис. 1.

Перейдем теперь к случаю $|a| > 1$. При $a > 1$ прообраз круга $|s| \leq 1$ распадается на две замкнутые области без общих точек. Эти области симметричны относительно вещественной оси, и потому этот случай не интересен.

При $a < -1$ прообразы выпуклы и симметричны относительно точки $z_0$, и чтобы пересечение прообразов с кругом $|z| \leq 1$ было связным множеством, необходимо, чтобы $\frac{1}{2} < |z_0|$. Из этих двух областей наибольший интерес с точки зрения «качества» процесса представляет область, лежащая левее точки $z_0$. Чтобы иметь в качестве прообраза именно ее, необходимо, чтобы $\frac{1}{2} < z_0$. Отсюда следует, что $a_1 < o$ и $a_0 = -1$. Примеры таких областей приводятся на рис. 2.

Перейдем теперь к вопросу об оценке наибольшего из модулей собственных значений матрица $B$. Обозначим через $S_p\ (N)$ след $N$-ой степени матрицы $B$ (т. е. сумму диагональных элементов матрицы $B^N$).

Допустим, что разрядная сетка *ЦВМ* такова, что $2^{-2p+1}$ не является, а $2^{-2p}$ является «машинным нулем», (для «БЭСМ» и ряда других ЦВМ $p=5$). Возьмем $\mu = \frac{1}{2}$ и положим

$$S_k = \{S_p\ (2^{p-k})\}^{2^k} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{2(p-k)} \right\}^{2^k} \quad k = 0,\ 1,\ \ldots$$

Если матрица $B$ имеет единственное наибольшее по модулю собственное значение $\beta_1$ (оно должно быть вещественным), то

$$S_k = \beta_1^{2^p} \left[ 1 + \sum_{i=2}^{n} \left( \frac{\beta_i}{\beta_1} \right) 2^{(p-k)} \right]^{2^k} = \beta_1^{2^p}\ (1 + \varepsilon_k).$$

Считая, что $\varepsilon_k$ мало по сравнению с 1 (по крайней мере, для малых $k$), получим $S_k \backsim \beta_1^{2^p}$. Тогда, если $|\beta_1| \leq \mu = \frac{1}{2}$, то $S_k$ есть машинный нуль. Таким образом, в этом случае получается простой критерий принадлежности: точка $\alpha$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\omega}$ тогда и только тогда, когда $S_0$ есть машинный нуль. Однако, в случае, когда $r_1 e^{i\varphi_1} = \beta_1 = \overline{\beta_2}$, $r_1 > |\beta_i|$, $i=3, \ldots$, этот критерий не применим, так как

$$S_0 = r_1^{2^p}\ 2\cos\ 2^p\varphi + \sum_{i=3}^{n} \beta_i^{2^p} \quad \text{и} \ |2\cos 2^p\varphi|$$

может быть меньше 1.

Но нетрудно видеть, что неравенства

$$|\cos\psi| < \tfrac{1}{2}, \ |\cos 2\psi| < \tfrac{1}{2}$$

несовместны.

Поэтому в этом случае для получения достаточного критерия принадлежности необходимо привлечь $S_0$ и $S_1$ и считать, что $\alpha$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\omega}$ тогда и только тогда, когда $S_0$ и $S_1$ одновременно есть машинные нули.

Если окажется, что $r_1\ e^{i\varphi_1} = \beta_1 = \overline{\beta_2}$

$r_1 e^{i\varphi_2} = \beta_3 = \overline{\beta_4}$ и $r_1 > |\beta_i|$ $i=5, \ldots$, то

$$S_0 = r_1^{2^p}\left[2\cos 2^p\varphi_1 + 2\cos 2^p\varphi_2 + \sum_{i=5}\left(\frac{\beta_i}{r_1}\right)^{2^p}\right]$$

$$S_1 = r_1^{2^p}\left[2\cos 2^{p-1}\varphi_1 + 2\cos 2^{p-1}\varphi_2 + \sum_{i=5}\left(\frac{\beta_i}{r_1}\right)^{2^{p-1}}\right]^2$$

$$S_2 = r_1^{2^p}\left[2\cos 2^{p-2}\varphi_1 + 2\cos 2^{p-2}\varphi_2 + \sum_{i=5}\left(\frac{\beta_i}{r_1}\right)^{2^{p-2}}\right]^4$$

но нетрудно доказать, что неравенства

$$|\cos\psi_1 + \cos\psi_2| < \tfrac{1}{2}$$
$$|\cos 2\psi_1 + \cos 2\psi_2| < \tfrac{1}{2}$$
$$|\cos 4\psi_1 + \cos 4\psi_2| < \tfrac{1}{2}$$

несовместны ни при каких $\psi_1$ и $\psi_2$. Поэтому достаточным критерием в этом случае будет являться обращение в машинный нуль $S_0$, $S_1$ и $S_2$ одновременно.

При практическом построении границы $\omega$ так, как, например, это делается в [6], вполне достаточно требовать выполнения последнего критерия.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фельдбаум. Электрические системы автоматического регулирования. Гос. издат. обор. пром. Москва, 1957 г.
2. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. ГИГГЛ м.-л. 1950 г.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Гостехиздат. 1953 г.
4. Е. А. Ионов. Автоматическое регулирование. Физматгиз. М. — 1959.
5. А. А. Савелов. Плоские кривые. Ф-м. М — 1960.
6. Б. М. Каган, Т. М. Тер-Микаэлян. Решение инженерных задач на автоматических цифровых вычислительных машинах. Госэнергоиздат 1958.

*Б. И. Коробочкин*

## ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПАРАМЕТРОВ

Аннотация

В работе приводится методика построения областей в пространстве параметров $\overline{\Omega}$ систем автоматического регулирования, соответствующих заданному «качеству» протекания переходного процесса. $\dot{x}=A(\alpha)x$ $\alpha=\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\Omega}$. Для этого предлагается строить такие области, что собственные значения матриц $A$ оказывались бы в части левой полуплоскости, ограниченной лемнискатой, а сама задача сводится к оценке модуля наибольшего собственного значения вспомогательной матрицы В. Для этого приводится простой достаточный критерий, годный в случае кратных комплесных корней.

B. I. Korobochkin

## ON
## CONSTRUCTION OF STABILITY REGIONS IN PARAMETER SPACE

Annotation

This paper gives the methods of building regions in space $\bar{\Omega}$ of the parameter, automatic regulation system

$$\dot{x} = A(\alpha)x\,;\ \alpha = \alpha\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \overline{\Omega}$$

corresponding to the given «Quality» in the course of transitional processes.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*А. Я. Лепин*

# МЕТОД СЕТОК ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

В работе рассматривается смешанная задача для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+f$$

с довольно общими граничными условиями (см. [1], где имеются дальнейшие ссылки на литературу и [2]). Доказываются существование и единственность классического и обобщенного решений, непрерывная зависимость от коэффициентов и краевых условий и оценивается порядок приближения сеточных аппроксимаций к решению.

В полосе ($o\leq t\leq t^0$, $o\leq x\leq x^0$, $-\infty<u_1, \ldots, u_n<\infty$) рассмотрим краевую задачу:

$$\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t}=\lambda_1(t, x, u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x}+f_1(t, x, u_1, \ldots, u_n),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial u_{n_1}(t, x)}{\partial t}=\lambda_{n_1}(t, x, u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial u_{n_1}(t, x)}{\partial x}+f_{n_1}(t, x, u_1, \ldots, u_n),$$

$$\frac{\partial u_{n_1+1}(t, x)}{\partial t}=\lambda_{n_1+1}(t, x, u_1, \ldots, u_n)\frac{\partial u_{n_1+1}(t, x)}{\partial x}+$$
$$+f_{n_1+1}(t, x, u_1, \ldots, u_n),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} = \lambda_n \ (t, x, u_1, \ldots, u_n) \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial x} + f_n(t, x, u_1, \ldots, u_n),$$

$$u_1 \ (o, x) = \varphi_1(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n (o, x) = \varphi_n (x),$$

$$u_1(t, x^0) = \alpha_1(t, u_{n_1+1}(t, x^0), \ldots, u_n(t, x^0)) +$$
$$+ \int_o^t \beta_1(t, \tau, u_1(\tau, x^0), \ldots, u_n (\tau, x^0)) \, d\tau,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n_1}(t, x^0) = \alpha_{n_1} \ (t, u_{n_1+1}(t, x^0) \ \ldots, u_n (t, x^0)) +$$
$$+ \int_o^t \beta_{n_1} \ (t, \tau, u_1(\tau, x^0), \ldots, u_n \ (\tau, x^0)) \, d\tau,$$

$$u_{n_1+1}(t, o) = \alpha_{n_1+1}(t, u_1(t, o), \ldots, u_{n_1}(t, o)) +$$
$$+ \int_o^t \beta_{n_1+1} \ (t, \tau, u_1(\tau, o), \ldots, u_n \ (\tau, o)) \, d\tau,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n \ (t, o) = \alpha_n \ (t, u_1(t, o), \ldots, u_{n_1}(t, o)) +$$
$$+ \int_o^t \beta_n \ (t, \tau, u_1(\tau, o), \ldots, u_n \ (\tau, o)) \, d\tau,$$

$$\lambda_1(t, x, u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n_1}(t, x, u_1, \ldots, u_n) \geqslant 0,$$

$$\lambda_{n_1+1}(t, x, u_1, \ldots, u_n) \leqslant 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n \ (t, x, u_1, \ldots, u_n) \leqslant 0,$$

$$\lambda_1(t, x^0, u_1, \ldots, u_n) > 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_{n_1}(t, x^0, u_1, \ldots, u_n) > 0,$$
$$\lambda_{n_1+1}(t, o, u_1, \ldots, u_n) < 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n(t, o, u_1, \ldots, u_n) < 0,$$
$$\varphi_1(x^0) = \alpha_1(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_{n_1}(x^0) = \alpha_{n_1}(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)),$$
$$\varphi_{n_1+1}(o) = \alpha_{n_1+1}(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_{n_1}(o)),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_n(o) = \alpha_n(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_{n_1}(o)),$$
$$\lambda_1, f_1, \varphi_1, \alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_n, f_n, \varphi_n, \alpha_n, \beta_n \in \mathrm{Lip}.$$

($S(t, x, u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{Lip}$, если для любого $a \geqslant o$ найдется $K_\alpha \geqslant o$ такое, что из $\max\{\max\limits_i |u_i^1|, \max\limits_i |u_i^2|\} \leqslant a$ следует

$$|S(t^1, x^1, u_1^1, \ldots, u_n^1) - S(t^2, x^2, u_1^2, \ldots, u_n^2)| \leqslant$$
$$\leqslant K_\alpha(|t^1 - t^2| + |x^1 - x^2| + |u_1^1 - u_1^2| + \ldots + |u_n^1 - u_n^2|).)$$

При изучении классического решения нам понадобятся условия согласования:

$$\lambda_1(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))D_x\varphi_1(x^0) + f_1(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)) =$$
$$= \sum_{p=n_1+1}^{n} D_{u_p}\alpha_1(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))(\lambda_p(o, x^0,$$
$$\varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))D_x\varphi_p(x^0) + f_p(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))) +$$
$$+ D_t\alpha_1(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)) + \beta_1(o, o, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_{n_1}(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))D_x\varphi_{n_1}(x^0) +$$
$$+ f_{n_1}(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)) =$$
$$= \sum_{p=n_1+1}^{n} D_{u_p}\alpha_{n_1}(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))(\lambda_p(o, x^0, \varphi_1(x^0),$$
$$\ldots, \varphi_n(x^0))D_x\varphi_p(x^0) + f_p(o, x^0, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0))) +$$
$$+ D_t\alpha_{n_1}(o, \varphi_{n_1+1}(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)) + \beta_{n_1}(o, o, \varphi_1(x^0), \ldots, \varphi_n(x^0)),$$

$$\lambda_{n_1+1}(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)) D_x \varphi_{n_1+1}(o) +$$
$$+ f_{n_1+1}(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)) =$$
$$= \sum_{p=1}^{n_1} D_{u_p} \alpha_{n_1+1}(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)) (\lambda_p (o, o, \varphi_1(o),$$
$$\ldots, \varphi_n(o)) D_x \varphi_p(o) + f_p(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o))) +$$
$$+ D_t \alpha_{n_1+1}(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_{n_1}(o)) + \beta_{n_1+1}(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)),$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\lambda_n(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)) D_x \varphi_n(o) + f_n(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)) =$$
$$= \sum_{p=1}^{n_1} D_{u_p} \alpha_n(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_{n_1}(o)) (\lambda_p (o, o, \varphi_1(o),$$
$$\ldots, \varphi_n(o)) D_x \varphi_p(o) + f_p(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o))) +$$
$$+ D_t \alpha_n(o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_{n_1}(o)) + \beta_n(o, o, \varphi_1(o), \ldots, \varphi_n(o)).$$

Для компактности изложения будем пользоваться матричной записью. Тогда наша краевая задача запишется так:

$$\begin{aligned} D_t u' &= \lambda' D_x u' + f', \\ D_t u'' &= \lambda'' D_x u'' + f'', \end{aligned} \tag{1}$$

$$u = \varphi \qquad \text{при } t = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u' &= \alpha' + \int_o^t \beta' d\tau \qquad \text{при } x = x^0, \\ u'' &= \alpha'' + \int_o^t \beta'' d\tau \qquad \text{при } x = o, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &\lambda' \geqslant 0, \ \lambda'' \leqslant 0, \\ &\lambda' > 0 \qquad \text{при } x = x^0, \\ &\lambda'' < 0 \qquad \text{при } x = o, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \varphi' &= \alpha' \text{ при } x = x^0, t = 0, \\ \varphi'' &= \alpha'' \text{ при } x = o, t = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\lambda, f, \varphi, \alpha, \beta \in \mathrm{Lip}, \tag{6}$$

а условия согласования так:

$$\begin{aligned} \lambda' D_x \varphi' + f' &= \Delta_t \alpha' + \beta' \qquad \text{при } x = x^0, t = 0, \\ \lambda'' D_x \varphi'' + f'' &= \Lambda_t \alpha'' + \beta'' \qquad \text{при } x = 0, t = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $u$, $f$, $\alpha$, $\beta$, $\varphi$ — матрицы столбцы, а $\lambda$ — диагональная матрица. Конкретный вид всех матриц и обозначений ясен из предыдущего. Отметим только, что штрихи не имеют отношения к дифференцированию.

Для замены краевой задачи соответствующей разностной построим сетку $S$ с шагом $h$ по $x$ и шагом $k$ по $t$. Сетка $S\ (k, h)$ состоит из узлов $z_{ij}$ с координатами $(t_i\ x_j)$ $(o \leqslant i \leqslant \mu, o \leqslant j \leqslant \nu)$ причем будем предполагать, что всегда $t_i = i\,k$ $(t_\mu = t^0)$ и $x_j = jh$ $(x_\nu = x^0)$. Введем обозначения:

$$\lambda_{ij} = \lambda\,(z_{ij}, u_{ij}),\ \ldots,\ \varphi_j = \varphi\,(x_j)$$

и

$$\delta_t\, u_{ij} = k^{-1}\,(u_{i+1\,j} - u_{ij})\,(o \leqslant i \leqslant \mu - 1,\ o \leqslant j \leqslant \nu),$$
$$\delta_x\, u_{ij} = h^{-1}\,(u_{ij+1} - u_{ij})\,(o \leqslant i \leqslant \mu,\ o \leqslant j \leqslant \nu - 1).$$

Тогда разностную систему можно записать так:

$$\begin{aligned} u'_{i+1\,j} &= \varkappa\,\lambda'_{ij}\,u'_{ij+1} + (\varepsilon' - \varkappa\,\lambda'_{ij})\,u'_{ij} + k\,f'_{ij}, \\ u''_{i+1\,j} &= -\varkappa\,\lambda''_{ij}\,u''_{ij-1} + (\varepsilon'' + \varkappa\,\lambda''_{ij})\,u''_{ij} + k\,f''_{ij}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$u_{oj} = \varphi_j, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} u'_{i+1\nu} &= \alpha'_{i+1} + k \sum_{p=o}^{i} \beta'_{i+1\,p}, \\ u''_{i+1\,o} &= \alpha''_{i+1} + k \sum_{p=o}^{i} \beta''_{i+1\,p}, \end{aligned} \tag{10}$$

где $\varkappa = k\,h^{-1}$, а $\varepsilon$ — единичная матрица. Всюду в дальнейшем под $u_{ij}$ будет пониматься решение системы (8—10), а решение краевой задачи (1—6) в точке сетки $z_{ij}$ будет обозначаться через $u\ (z_{ij})$.

Введем следующие обозначения. Норма матрицы $A = \|a_{pq}\|$ $(p = 1, \ldots, n,\ q = 1, \ldots, m)$, где $p$ индекс строки, а $q$ индекс столбца, равна: $|A| = \max\limits_{q} \sum\limits_{p=1}^{n} |a_{pq}|$. Функция $F \in \mathrm{Lip}^1$, если она и ее первые производные удовлетворяют условию Липшица. Вместо $\sup\limits_{t,\ x,\ |u| \leqslant U} F$ будем писать $\sup\limits_{U} F$. Если имеется сетка $S = S\ (k, h)$, то $S^p = S^p\,(k\,2^{-p}, h\,2^{-p})$ $(p = 0, 1, \ldots)$; $S_t$ $(0 \leqslant t)$ состоит из точек $z_{ij} \in S$, для которых $t_i \leqslant t$; $T\,(S) = \min\,\{t^0, x^0 \varkappa\,2^{-1}\}$; $T_t^{\Pi}$ состоит из точек $z_{ij} \in S_{t^1}$ $(t^1 = \min\,\{t,\ T(s)\},\ j \leqslant i)$, а $T_t^{\Lambda}$ состоит из точек $z_{ij} \in S_{t^1}$ $(j \leqslant \nu - i)$. Сетку $S_t$ будем называть допустимой (по отношению к системе (8—10)), если $\varkappa|\lambda_{ij}|\leq 1$ $(t_i\leq t)$. $S$ допустима, если допустима $S_{t_0}$. Через $\Pi$ обозначим прямоугольник $(o\leq t\leq t^0, o\leq x\leq x^0)$, а через $\Pi_T$ $(T\geq 0)$ — прямоугольник $(o\leq t\leq \min\{t^0, T\}, o\leq x\leq x^0)$.

Ближайшей нашей целью будет доказательство локальных теорем существования классического и обобщенного решений краевой задачи (1—6). Для доказательства существования классического решения мы докажем 3 леммы, которые устанавливают ограниченность решений системы (8—10) и их первых и вторых разностей для последовательности сеток $S^p$. После этого доказательство существования классического решения получается просто. Доказательство существования обобщенного решения аналогично доказательству существования классического решения, только вместо леммы 3 нужно использовать лемму 4.

Лемма 1. Найдется такое $U_0$, что для любого $U>U_0$ найдутся сетка $S^0$ и $T\in(o, t^0]$ такие, что последовательность сеток $S_T^p$ допустима и

$$\sup_p \max_{S_T^p} |u_{ij}^p|\leq U.$$

Доказательство. Пусть $U>\Phi_1$, где $\Phi_1$ будет определено ниже. Для любой сетки $S$ определим функцию $T'(S)$ следующим образом: $T'(S)=t^0$, если $\max\limits_S|u_{ij}|\leq U$, $T'(S)=t$, если $\max\limits_{S_{t'}}|u_{ij}|\leq U$ $(t'<t)$ и $\max\limits_{S_t}|u_{ij}|>U$. Возьмем любую сетку $S^0$, для которой $\varkappa\leq\Lambda^{-1}$, где $\Lambda\dot{=}\sup\limits_U|\lambda|$. Ясно, что $S^0_{T'(s)}$ допустима. Пусть $S\in\{S^p\}$. Рассмотрим $u_{ij}$ на $T^{\Pi}_{t^1}$, где $t^1=\min\{T(S), T'(S)\}$. Для $w_i=\max\limits_j|u''_{ij}|$ справедлива оценка $w_{i+1}\leq w_i+kF$, $w_0\leq\Phi$, где $F=\max\limits_U|f|$, $\Phi=\max\limits_x|\varphi|$. Отсюда $w_i\leq\Phi+t_iF$. Если $t^2=\min\{t^1, F^{-1}\}$, то на $T^{\Pi}_{t_2}$ $w_i\leq\Phi+1$. Если обозначить $V_i=\max\limits_{j<\nu}|u'_{ij}|$, $V^1_i=|V_{i\nu}|$ и $V^2_i=\max\{V_i, V^1_i\}$, то $V_{i+1}\leq V^2_i+kF$, $V^1_{i+1}\leq A+Bt_{i+1}$, $V^2_0\leq\Phi$ где $A=\max\limits_{\Phi+1}|\alpha|$ и $B=\max\limits_{\Phi+1}|\beta|$. Если $t^3=\min\{t^2, B^{-1}\}$, то на $T^{\Pi}_{t^3}$ справедлива оценка $V_i^2 \leqslant \Phi_1 + t_i F$, где $\Phi_1 = \max\{A+1, \Phi\}$. Так как аналогичная оценка справедлива и для $T^{\Lambda}_{t^3}$, то на $S_{t^3}$ справедлива оценка $|u_{ij}| \leqslant \Phi_1 + t_i F$.

Покажем, что $T'(S) \geqslant t^4 = \min\{T(S), F^{-1}, B^{-1}, (U-\Phi_1)F^{-1}\}$. Пусть $T'(S) < t^4$, тогда для $t_i = T'(S)$ справедлива оценка $|u_{ij}| \leqslant \Phi_1 + T'(S)F < U$, что противоречит определению $T'(S)$. Таким образом, в качестве $U_0$ можно взять $\Phi_1$, а в качестве $T$ можно взять $t^4$, что и доказывает лемму.

Лемма 2. Найдется такое $U_0$, что для любого $U > U_0$ найдутся сетка $S^0$ и $T \in (o, t^0]$ такие, что последовательность сеток $S^p_T$ допустима и

$$\sup_p \{\max_{S^p_T} |\delta_t u^p_{ij}|, \max_{S^p_T} |\delta_x u^p_{ij}|\} \leqslant U.$$

Доказательство. Применяя операторы $\delta_t$ и $\delta_x$ к системе (8), получим следующую систему уравнений:

$$\delta_t u'_{i+1\,j} = \varkappa \lambda'_{ij} \delta_t u'_{ij+1} + (\varepsilon' - \varkappa \lambda'_{ij}) \delta_t u'_{ij} + k(\delta_t \lambda'_{ij} \delta_x u'_{i+1\,j} + \delta_t f'_{ij}),$$
$$\delta_t u''_{i+1\,j} = -\varkappa \lambda''_{ij} \delta_t u''_{ij-1} + (\varepsilon'' + \varkappa \lambda''_{ij}) \delta_t u''_{ij} + k(\delta_t \lambda''_{ij} \delta_x u''_{i+1\,j-1} + \delta_t f''_{ij}), \tag{11}$$

$$\delta_x u'_{i+1\,j} = \varkappa \lambda'_{ij} \delta_x u'_{ij+1} + (\varepsilon' - \varkappa \lambda'_{ij}) \delta_x u'_{ij} + k(\delta_x \lambda'_{ij} \delta_x u'_{ij+1} + \delta_x f'_{ij}),$$
$$\delta_x u''_{i+1\,j} = -\varkappa \lambda''_{ij} \delta_x u''_{ij-1} + (\varepsilon'' + \varkappa \lambda''_{ij}) \delta_x u''_{ij} + k(\delta_x \lambda''_{ij} \delta_x u''_{ij} + \delta_x f''_{ij}). \tag{12}$$

На основании леммы I найдутся такие $U_1$, $S^0$ и $t^1 \in (o, t^0]$, что последовательность $S^p_{t^1}$ допустима и $|u^p_{ij}| \leqslant U_1$ $(z_{ij} \in S^p_{t^1})$, при этом можно считать, что $|\lambda'| > a > o$ $(o \leqslant t \leqslant t^1,\ x^0 - h_0 \leqslant x \leqslant x^0)$ и $|\lambda''| > a$ $(o \leqslant t \leqslant t^1,\ o \leqslant x \leqslant h_0)$. Пусть $U > \Phi_2$, где $\Phi_2$ будет определено ниже, а $S \in \{S^p\}$. Для $S$ определим функцию $T'_1(S)$ следующим образом: $T'_1(S) = t^1$, если $\max\{\max_{S_{t^1}} |\delta_t u_{ij}|, \max_{S_{t^1}} |\delta_x u_{ij}|\} \leqslant U$, $T'_1(S) = t$ $(t \leqslant t^1)$, если $\max\{\max_{S_{t^1}} |\delta_t u_{ij}|, \max_{S_{t^1}} |\delta_x u_{ij}|\} \leqslant U$ $(t^1 < t)$ и $\max\{\max_{S_t} |\delta_t u_{ij}|, \max_{S_t} |\delta_x u_{ij}|\} > U$.

Рассмотрим $\delta_t u_{ij}$ и $\delta_x u_{ij}$ на $T^{\Pi}_{t^2}$, где $t^2 = \min\{T(S), T'_1(S)\}$. Для $W_{ti} = \max_j |\delta_t u''_{ij}|$ и $W_{xi} = \max_j |\delta_x u''_{ij}|$ справедливы оценки: $W_{t\,i+1} \leqslant W_{ti} + kF$, $W_{x\,i+1} \leqslant W_{xi} + kF$ (формулу для $F$ и для других констант, которые появятся в дальнейшем, мы не будем выписывать, учитывая, что, при желании, это можно сделать аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 1). Из $\delta_x u''_{oj} = \delta_x \varphi''_j$ и $\delta_t u''_{oj} = \lambda''_{oj} \delta_x \varphi''_{j-1} + f''_{oj}$ следует, что $W_{to} \leqslant \Phi$ и $W_{xo} \leqslant \Phi$, откуда $W_{ti} \leqslant \Phi + t_i F$ и $W_{xi} \leqslant \Phi + t_i F$. Если $t^3 = \min\{t^2, F^{-1}\}$, то на $T^{\Pi}_{t^3}$ $W_{ti} \leqslant \Phi+1$ и $W_{xi} \leqslant \Phi+1$. Если обозначить $V_{ti} = \max\limits_{j<\nu-1} |\delta_x u'_{ij}|$, $V^1_{ti} = |\delta_x u'_{i\nu}|$, $V^2_{ti} = \max\{V_{ti}, V^1_{ti}\}$, $V_{xi} = \max\limits_{j<\nu-1} |\delta_x u'_{ij}|$, $V^1_{xi} = |\delta_x u'_{i\nu-1}|$, $V^2_{xi} = \max\{V_{xi}, V^1_{xi}\}$ то $V_{ti+1} \leqslant V^2_{ti} + kF$, $V_{xi+1} \leqslant V^2_{xi} + kF$. Из $\delta_x u'_{oj} = \delta_x \varphi'_j$, $\delta_t u'_{oj} = \lambda'_{oj} \delta_x \varphi'_j + f'_{oj}$ $(j<\nu)$ и $\delta_t u'_{o\nu} = \delta_t \alpha'_o + \beta'_{10}$ следует, что $V^2_{to} \leqslant \Phi$ и $V^2_{xo} \leqslant \Phi$, а из $\delta_t u'_{i\nu} = \alpha'_{i+1} - \alpha'_i + k\beta_{i+1\,i} + k \sum\limits_{p=o}^{i-1} (\beta'_{i+1\,p} - \beta'_{ip})$ получаем $V'_{ti} \leqslant A(\Phi+1) + C + B\,t_i = A_1 + B\,t_i$ (отметим, что $A_1$ не зависит от $U$). Для оценки $V^1_{xi}$ нам понадобятся следующие тождества:

$$u'_{i+1\nu-1} = a_i u'_{i\nu} + b_i a_{i-1} u'_{i-1\nu} + \ldots + b_i \ldots b_1 a_o u'_{o\nu} + \\ + b_i \ldots b_0 u'_{o\nu-1} + k(f'_{i\nu-1} + b_i f'_{i-1\nu-1} + \ldots + b_i \ldots b_0 f'_{o\nu-1}),$$

$$u'_{i+1\nu} = a_i u'_{i+1\nu} + b_i a_{i-1} u'_{i+1\nu} + \ldots + b_i \ldots b_1 a_o u'_{i+1\nu} + \\ + b_i \ldots b_0 u'_{i+1\nu},$$

где $a_i = \varkappa \lambda'_{i\nu-1}$, $b_i = \varepsilon' - \varkappa \lambda'_{i\nu-1}$. Первое из этих неравенств следует из (8), а второе — из соотношения $a_i + b_i = \varepsilon'$. Теперь получаем

$$V^1_{xi+1} \leqslant h^{-1} |a_i (u'_{i+1\nu} - u'_{i\nu}) + \ldots + b_i \ldots b_1 a_0 (u'_{i+1\nu} - u'_{o\nu}) + \\ + b_i \ldots b_0 (u'_{i+1\nu} - u'_{o\nu-1})| + \varkappa F_1 a^{-1},$$

откуда на $T^{\Pi}_{t^4}$, где $t^4 = \min\{t^3, B^{-1}\}$ $V^1_{ti} \leqslant A_1 + 1$ и

$$V^1_{xi+1} \leqslant \varkappa |V^1_{ti} + b(V^1_{ti} + V^1_{ti-1}) + \ldots + b^i (V^1_{ti} + \ldots + V^1_{to}) + \\ + b^{i+1} (V^1_{ti} + \ldots + V^1_{to})| + b^{i+1} V^1_{xo} + \varkappa F_1 a^{-1} \leqslant \varkappa (A_1+1)\, a^{-2} + \\ + b^{i+1} \Phi + \varkappa F_1 a^{-1} = \Phi_1,$$

где $b = 1 - a$, а $\Phi_1$ не зависит от $U$. Если $\Phi_2 = \max\{\Phi, A_1+1, \Phi_1\}$, то на $T^{\Pi}_4$ $V^1_{xi} \leqslant \Phi_2$ и $V^1_{ti} \leqslant \Phi_2$, откуда получаем $V^2_{xi} \leqslant \Phi_2 + t_i F$ и $V^2_{ti} \leqslant \Phi_2 + t_1 F$. Доказательство того, что $T'_1\ (S) \geqslant$

$\geqslant t^5 = \min \{t^1, T(S), F^{-1}, B^{-1}, (U-\Phi_2)F^{-1}\}$ аналогично концу доказательства леммы I. Таким образом, лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если $\lambda, f, \varphi, \alpha, \beta, \varepsilon$ Lip[1] и выполняются условия согласования (7), то найдется такое $U_0$, что для любого $U > U_0$ найдутся сетка $S^0$ и $T \in (o, t^0]$ такие, что последовательность сеток $S_T^p$ допустима и

$$\sup_p \{ \max_{S_T^p} | \delta_t^2 \; u_{ij}^p |, \max_{S_T^p} | \delta_{xt} \; u_{ij}^p |, \max_{S_T^p} | \delta_x^2 \; u_{ij}^p | \} \leqslant U.$$

Доказательство. Идея доказательства ничем не отличается от доказательства леммы 2. Только при оценке граничных условий мы столкнемся с одним новым обстоятельством. Для оценки $\delta_{xt} \quad u'_{o\nu-1}$ и $\delta_{xt} \quad u''_{oo}$ придется воспользоваться условиями согласования.

Если из равенства

$$\delta_{xt} \quad u''_{00} = (h \;\; k)^{-1} (u''_{11} - u''_{01} + u''_{00} - u''_{10}) =$$
$$= (h\, k)^{-1} (\varkappa \, \lambda''_{01} (u''_{01} - u''_{00}) + k \, f''_{01} - \alpha''_1 - k \, \beta''_{10} + \alpha''_0)$$

вычесть равенство

$$h^{-1} (\lambda''_{00} \, D_x \; \varphi''_0 + f''_{00} - \beta''_{00} - \Delta_t \; \alpha''_0) = 0,$$

то получим

$$\delta_{xt} \, u''_{00} = h^{-1} (\lambda''_{01} \, \delta_x \, \varphi''_0 - \lambda''_{00} \, D_x \, \varphi''_0 + f''_{01} - f''_{00} - \beta''_{01} + \beta''_{00} -$$
$$- \delta_t \, \alpha''_0 + \Delta_t \, \alpha''_0),$$

откуда и следует ограниченность $\delta_{xt} \quad u''_{00}$. На этом доказательство леммы заканчивается.

Лемма 4. Если на $\Pi_T$ $(o < T)$ последовательность $u_{ij}^p$, для сеток $S^p$ равномерно сходится к $u$ и $|\delta_x \; u_{ij}^p|, |\delta_t \; u_{ij}^p| \leqslant U$ на $S_T^p$ то $u \in$ Lip удовлетворяет интегральному соотношению

$$\iint_{\Pi_T} ((D_t v - \Delta_x (v \lambda)) \;\; u + v \, f) d\,\Pi = - \int_o^T v \, \lambda \, u \Big|_o^{x^o} dt + \int_o^{x^o} v \, u \Big|_o^T d\,x \tag{13}$$

Доказательство. При доказательстве мы всюду будем опускать индекс $p$. Функцию $u_{ij}$, заданную на сетке $S$, продолжим на $\Pi$ следующим образом: $u_1 = u_{ij}$ в прямоугольнике $\Pi_{ij}$ $(t_i < t < t_{i+1},\; x_j < x < x_{j+1})$. Пусть $\lambda_1(t, x) = \lambda(t, x, u(t, x))$, $f_1(t, x) = f(t, x, u\,(t, x))$ и $\mu' = [T\,\varkappa^{-1}]$, тогда

$$\sum_{i=o}^{\mu'-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\iint\limits_{\Pi_{ij}}\left(\left(D_t v-\Delta_x(v\lambda_1)\right)u_1+vf_1\right)d\Pi=\sum_{i=o}^{\mu'-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\left(\iint\limits_{\Pi_{ij}}v\,f_1\,d\,\Pi+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}v\,u_{ij}\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}dx-\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}v\,\lambda\,u_{ij}\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}dt\right). \qquad (14)$$

При фиксированном $v$, переходя в левой части к пределу при $p\to\infty$, получим левую часть (13). Нужно показать, что предел правой части (14) равен правой части (13). Для этого заметим, что

$$\sum_{i=o}^{\mu'-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\iint\limits_{\Pi_{ij}}v\,f\,d\,\Pi=\sum_{i=o}^{\mu'-2}\sum_{j=1}^{\nu-2}\iint\limits_{\Pi_{ij}}(v'f'+v''f'')\,d\,\Pi+o(1),$$

$$\sum_{i=o}^{\mu'-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\int\limits_{x_j}^{x_{i+1}}v\,u_{ij}\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}dx=\sum_{j=o}^{\nu-1}\int\limits_{x_j}^{x_{i+1}}\left(v\,u_{\mu'-1\,j}\Big|_{t_{\mu'}}-v\,u_{oj}\Big|_{t_o}\right)d\,x-$$

$$-\sum_{i=o}^{\mu'-2}\sum_{j=1}^{\nu-2}\iint\limits_{\Pi_{ij}}\left(v'\Big|_{t_{i+1}}\delta_t\,u'_{ij}+v''\Big|_{t_{i+1}}\delta_t\,u''_{ij}\right)d\,\Pi+o(1),$$

$$-\sum_{i=o}^{\mu'-1}\sum_{j=o}^{\nu-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}v\,\lambda\,u_{ij}\Big|_{x_j}^{x_{i+1}}dt=-\sum_{i=o}^{\mu'-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left(v\lambda\,u_{i\nu-1}\Big|_{x_\nu}-v\lambda\,u_{io}\Big|_{x_o}\right)dt-$$

$$-\sum_{i=o}^{\mu'-2}\sum_{j=1}^{\nu-2}\iint\left(v'\lambda'\Big|_{x_{j+1}}\delta_x\,u'_{ij}+v''\lambda''\Big|_{x_j}\delta_x\,u''_{i\,j-1}\right)d\,\Pi+o(1).$$

Отсюда следует, что правая часть (14) равна

$$\sum_{i=o}^{\mu'-2}\sum_{j=1}^{\nu-2}\iint\limits_{\Pi_{ij}}\left(v'\lambda'\Big|_{x_{j+1}}\delta_x\,u'_{ij}-v'\Big|_{t_{i+1}}\delta_t\,u'_{ij}+v'f'+v''\lambda''\Big|_{x_j}\delta_x\,u''_{ij-1}-\right.$$

$$\left.-v''\Big|_{t_{i+1}}\delta_t\,u''_{ij}+v''f''\right)d\,\Pi+\sum_{j=o}^{\nu-1}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\left(v\,u_{\mu'-1j}\Big|_{t_{\mu'}}-v\,u_{oj}\Big|_{t_o}\right)dx-$$

$$-\sum_{i=o}^{\mu'-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\left(v\lambda u_{i\nu-1}\Big|_{x_\nu}-v\lambda u_{io}\Big|_{x_o}\right)dt+o(1).$$

Если теперь перейти к пределу при $p\to\infty$ при фиксированном $v$, то первое слагаемое стремится к нулю в силу соотношения (8), а предел остальных слагаемых дает нужный нам результат. Так как включение $u \in \mathrm{Lip}$ очевидно, то лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать следующие две теоремы.

Теорема 1. Если $\lambda$, $f$, $\varphi$, $\alpha$, $\beta \in \mathrm{Lip}^1$ и выполняются условия согласования (7), то найдется такое $T \in (o, t^0]$ что в $\Pi_T$ существует классическое решение краевой задачи (1—6) $u \in \mathrm{Lip}^1$.

Доказательство. На основании лемм 1—3 найдутся такие $T \in (o, t^0]$ и $S^p$ $(p=o, 1, \ldots)$, что в $\Pi_T$ $|u_{ij}^p|$, $|\delta_t u_{ij}^p|$, $|\delta_x u_{ij}^p|$, $|\delta_x^2 u_{ij}^p|$, $|\delta_{tx} u_{ij}^p|$, $|\delta_t^2 u_{ij}^p|\leq U$, откуда следует равномерная сходимость $u_{ij}^p\to u$, $\delta_t u_{ij}^p\to u_t$ и $\delta_x u_{ij}^p\to u_x$, причем $u_x$, $u_t \in \mathrm{Lip}$. Стандартным приемом доказывается, что $D_t u=u_t$, $D_x u=u_x$ и $u$ удовлетворяет условиям (1—3). Так как $u \in \mathrm{Lip}^1$, то теорема доказана.

Определение. Функцию $u \in \mathrm{Lip}$ будем называть обобщенным решением краевой задачи (1—6), если она удовлетворяет условиям (2—6) и удовлетворяет системе (1) почти всюду.

Замечание. Данное выше определение обобщенного решения эквивалентно следующему. Функцию $u \in \mathrm{Lip}$ будем называть обобщенным решением краевой задачи (1—6), если она удовлетворяет интегральному соотношению (13) и условиям (2—6).

Теорема 2. Найдется такое $T \in (o, t^0]$, что в $\Pi_T$ существует обобщенное решение краевой задачи (1—6).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Пусть функция $u_1$ является обобщенным решением краевой задачи (1—6). Если обозначить

$$\lambda_1(t, x)=\lambda(t, x, u_1(t, x)),\ f_1(t, x)=f(t, x, u_1(t, x)),$$

$$\psi'(t)=\alpha'(t, u_1''(t, x^0))+\int_o^t\beta'(t, \tau, u_1(\tau, x^0))\,d\tau,$$

$$\psi''(t)=\alpha''(t,\ u_1'\ \ (t,\ o))+\int\limits_o^t \beta''(t,\ \tau,\ u_1(\tau,\ o))\,d\tau,$$

то очевидно, что $u_1$ является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} D_t\, u=\lambda_1 D_x u+f_1 \\ u(o,\ x)=\varphi(x),\ u'\ (t,\ x^0)=\psi'\ (t),\ u''\ (t,\ o)=\psi''(t). \end{gathered} \tag{15}$$

Нашей ближайшей целью будет перенесение некоторых свойств краевой задачи (15) на краевую задачу (1—6). С этой целью мы докажем лемму 5, которая позволит доказать теорему о единственности обобщенного решения и две теоремы о порядке приближения сеточных аппроксимаций к решению.

Л е м м а 5. Для любого $a>o$ найдется $C>o$ такое, что из $\varkappa\Delta\leqslant 1$, где $\Delta=\max\limits_{U+a}|\lambda|$, а $U=\max\limits_{t,\ x}|u_1|$, $|u_{1ij}-u_1(z_{ij})|\leqslant\omega$ и $C\,\omega\leqslant a$ следует

$$|u_{ij}-u_1(z_{ij})|\leqslant C\,\omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий леммы следует, что сетка $S$ является допустимой для задачи (15), а если $|u_{ij}-u_1(z_{ij})|\leqslant a$, то и для задачи (1—6). Если $\delta\, u_{ij}=\omega^{-1}(u_{1ij}-u_{ij})$, то из (8) получим

$$\begin{gathered} \delta\ u'_{i+1j}=\varkappa\lambda'_{ij}\delta\ u'_{ij+1}+(\varepsilon'-\varkappa\lambda'_{ij})\ \delta\ u'_{ij}\ +k(\delta\,\lambda'_{ij}\delta_x\ u'_{1\,ij}+\delta f'_{ij}), \\ \delta\ u''_{i+1j}=-\varkappa\,\lambda''_{ij}\delta\ u''_{ij-1}+(\varepsilon''+\varkappa\lambda''_{ij})\delta\ u''_{ij}+k(\delta\lambda''_{ij}\delta_x\ u''_{1\,ij-1}+\delta f''_{ij}). \end{gathered}$$

Используя оценки

$$\begin{gathered} |\delta\lambda_{ij}|=\omega^{-1}|\lambda(t_i,\ x_j,\ u_1(t_i,x_j))-\lambda(t_i,x_j,\ u_{ij})|\leqslant K_\lambda\omega^{-1}|u_1(z_{ij})- \\ -u_{ij}|\leqslant K_\lambda\ (1+|\delta\,u_{ij}|), \\ |\delta_x\ u_{1ij}|\leqslant U_x,\qquad |\delta f_{ij}|\leqslant K_f\,(1+|\delta\,u_{ij}|). \\ |\delta\ u'_{i+1\nu}|=\omega^{-1}|\alpha'(t_{i+1j}\ u''_1(z_{i+1\nu})-\alpha'(t_{i+1},\ u''_{i+1\nu})+ \\ +k\sum_{p=o}^{i}(\beta'(t_{i+1},\tau_p,\ u_1(\tau_p,\ x^0))-\beta'(t_{i+1}\tau_p,\ u_{p\nu}))|\leqslant K_\alpha(1+ \\ +|\delta\,u''_{i+1\nu}|)+k\sum_{p=o}^{i}K_\beta\ (1+|\delta\,u_{p\nu}|) \end{gathered}$$

и

$$|\delta\,u''_{i+10}|\leqslant K_\alpha\ \ (1+|\delta\,u'_{i+10}|)+k\sum_{p=o}^{i}K_\beta\ \ (1+|\delta\,u_{po}|)$$

покажем, что $v_{ij}=\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)$ и $w_{ij}=$ $=\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i-x_j+x^0)$ являются мажорантами для $|\delta u'_{ij}|$ и $|\delta u''_{ij}|$ при соответствующем выборе $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Пусть $\gamma_1>0$ выбрано так, что $2K_\alpha<(1-2K_\beta\Delta^{-1}\gamma_1^{-1})\exp\gamma_1 x_0$, а $\gamma_2>0$ — так, что $(\Delta\gamma_1+2K_\lambda U_x+2K_f)\exp\gamma_1 x^0<\gamma_1(\Delta+\gamma_2)$. Докажем, что $|\delta u'_{i+1j}|\leqslant v_{i+1j}$ и $|\delta u''_{i+1j}|\leqslant w_{i+1j}$, если для всех меньших значений $i$ эти неравенства справедливы. Действительно

$$
\begin{gathered}
|\delta u'_{i+1j}|\leqslant\varkappa\Delta v_{ij+1}+(1-\varkappa\Delta)v_{ij}+k(K_\lambda(1+|\delta u_{ij}|)U_x+\\
+K_f(1+|\delta u_{ij}|))\leqslant\varkappa\Delta(v_{ij+1}-v_{ij})+v_{ij}+k(K_\lambda U_x+\\
+K_f)(1+\max\{v_{ij},w_{ij}\})\leqslant\\
\leqslant\varkappa\Delta(\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_{j+1})-\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j))+\\
+\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)+k(K_\lambda U_x+K_f)(1+\exp((\Delta+\gamma_2)t_i+x^0))\leqslant\\
\leqslant k\Delta\gamma_1\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x^0)+\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)+\\
+k(K_\lambda U_x+K_f)(1+\exp((\Delta+\gamma_2)t_i+x^0))\leqslant\\
\leqslant\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)+k(\Delta\gamma_1+2K_\lambda U_x+2K_f)\exp\gamma_1 x^0\cdot\\
\cdot\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)\leqslant\\
\exp\gamma_1(\Delta+\gamma_2)t_i+x_j)(1+k\gamma_1(\Delta+\gamma_2))\leqslant\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_{i+1}+x_j),\\
|\delta u'_{i+1\nu}|\leqslant K_\alpha(1+|\delta u''_{i+1\nu}|)+k\sum_{p=o}^{i}K_p(1+|\delta u_{p\nu}|)\leqslant\\
\leqslant 2K_\alpha\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_{i+1}+k\sum_{p=o}^{i}2K_\beta\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_p+x^0)\leqslant\\
\leqslant 2K_\alpha\exp\gamma_1(\Delta+\gamma_2)t_{i+1}+\\
+2K_\beta\gamma_1^{-1}(\Delta+\gamma_2)^{-1}\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_{i+1}+x^0)=\\
=(2K_\alpha(\exp\gamma_1 x^0)^{-1}+2K_\beta\gamma_1^{-1}(\Delta+\gamma_2)^{-1})\exp\gamma_1((\Delta+\\
+\gamma_2)t_{i+1}+x^0)\leqslant\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)t_{i+1}+x^0).
\end{gathered}
$$

Так как аналогичные оценки справедливы и для $|\delta u''_{i+1j}|$, $\delta u''_{i+10}|$, то в качестве $C$ можно взять $\exp\gamma_1((\Delta+\gamma_2)l^0+x^0)$, что и доказывает лемму.

Теперь мы можем доказать следующие три теоремы.

Т е о р е м а 3. Обобщенное решение краевой задачи (1—6) единственно.

Доказательство. Пусть $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют (1—6). Если для $u_1$ и $u_2$ написать системы (15) и воспользоваться леммой 5, то найдется сетка $S$ такая, что для $S^p$

$$|u_{ij}^p - u_1(z_{ij}^p)| \leqslant C_1\omega_p, \; |u_{ij}^p - u_2(z_{ij}^p)| \leqslant C_2\omega_p,$$

но так как $\omega_p \to o$, то это возможно лишь при $u_1 = u_2$.

Теорема 4. Если обобщенное решение краевой задачи (1—6) существует в П, то найдутся такие $C > o$ и $h_0 > o$, что для любой допустимой сетки $S$ из $h < h_0$ следует

$$|u_{ij} - u(z_{ij})| \leqslant C h^{1/2}.$$

Доказательство непосредственно следует из свойств системы (15) и леммы 5.

Теорема 5. Если классическое решение $u$ краевой задачи существует в П и $u \in \mathrm{Lip}^1$, то найдутся такие $C > o$ и $h_0 > o$, что для любой допустимой сетки $S$ из $h < h_0$ следует

$$|u_{ij} - u(z_{ij})| \leqslant C h.$$

Доказательство непосредственно следует из свойств системы (15) и леммы 5.

Используя метод продолжения, локальные теоремы существования и теорему о единственности решения, можно получить следующие утверждения: в условиях теоремы I либо классическое решение $u$ краевой задачи (1—6) существует в П и $u \in \mathrm{Lip}^1$, либо найдется такое $T \in (o, t^0]$, что для $\Pi_t$ $(o < t < T)$ классическое решение $u$ существует и $u \in \mathrm{Lip}^1$, а для $\Pi_T$ или решение не существует, или $u$ не $\mathrm{Lip}^1$; либо обобщенное решение краевой задачи (1—6) существует в П, либо найдется такое $T \in (o, t^0]$, что для $\Pi_t$ $(o < t < T)$ обобщенное решение существует, а для $\Pi_T$ не существует. Некоторое различие в формулировках связано с тем, что для обобщенного решения всегда $u \in \mathrm{Lip}$.

Теорема 4 позволяет доказать следующие утверждения. Если обобщенное решение $u$ краевой задачи (1—6) существует в П и последовательность сеток $S^p$ является допустимой, то $u_{ij}^p \to u$ Если в П существует обобщенное решение краевой задачи (1—6), то всегда найдется последовательность сеток $S^p$, которая будет допустимой. Если последовательность сеток $S^p$ является допустимой и $|\delta_x \; u_{ij}^p| \leqslant U$, то в П существует обобщенное решение краевой задачи (1—6) и $u_{ij}^p \to u$.

Последней мы докажем теорему о непрерывной зависимости.

Т е о р е м а 6. Если обобщенное решение $u$ краевой задачи (1—6) существует в П, то найдется такое $C>o$, что из $|\lambda-\lambda_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, $|f-f_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, $|\varphi-\varphi_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, $|\alpha-\alpha_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$, $|\beta-\beta_\varepsilon|\leqslant\varepsilon$ $(\varepsilon>o)$ и существования обобщенного решения $u_\varepsilon$ следует $|u-u_\varepsilon|\leqslant C\varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность сеток $S^p$, допустимых для системы (15) и для системы (1—6), с коэффициентами $\lambda_\varepsilon$, $f_\varepsilon$, $\varphi_\varepsilon, \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$.

Пусть $S\in\{S^p\}$, $u_{1\,ij}$ — решение системы разностных уравнений для системы (15), $\delta u_{ij}=\varepsilon^{-1}(u_{1ij}-u_{\varepsilon ij})$, $\delta\lambda_{ij}=$ $=\varepsilon^{-1}(\lambda(t_i, x_j, u(z_{ij}))-\lambda_\varepsilon(t_i, x_j u_{\varepsilon ij}))$,... Если мы докажем, что $\delta u_{ij}$ ограничено, то из $u^p_{1ij}\to u$ и $u^p_{\varepsilon ij}\to u_\varepsilon$ получим доказательство теоремы. Из (8) имеем $\delta u'_{i+1j}=\varkappa\lambda'_{\varepsilon ij}\delta u'_{ij-1}+(\varepsilon'-\varkappa\lambda'_{\varepsilon ij})\delta u'_{ij}+$ $+k(\delta\lambda'_{ij}\delta_x u_{1ij}+\delta f'_{ij})$, $\delta u''_{i+1j}=-\varkappa\lambda''_{\varepsilon ij}\delta u''_{ij-1}+(\varepsilon''+\varkappa\lambda''_{\varepsilon ij})$ $\delta u''_{ij}+k(\delta\lambda''_{ij}\delta_x u_{1\,ij-1}+\delta f''_{ij})$. Если $h_0$ достаточно мало, то $|\delta\lambda_{ij}|$ $\leqslant K_\lambda\varepsilon^{-1}(\varepsilon+|\varepsilon\delta u_{ij}|+o(h^{1/2}))\leqslant K_\lambda(|\delta u_{ij}|+2)$, $|\delta f_{ij}|\leqslant K_f$ $(|\delta u_{ij}|+2)$, $|\delta u'_{i+1\nu}|\leqslant K_\alpha(|\delta u''_{i+1\nu}|+2)+k\sum\limits_{p=o}^{i}K_\beta(|\delta u_{p\nu}|+2)$

и $|\delta u''_{i+10}|\leqslant K_\alpha(|\delta u'_{i+10}|+2)+k\sum\limits_{p=o}^{i}K_\beta(|\delta u_{po}|+2)$.

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству леммы 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Э. А б о л и н я и А. Д. М ы ш к и с, Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости, Мат. сб., т. 50 (92), № 1 (1960), 423—442.

[2] Н. С. Б а х в а л о в, Условия сходимости и порядок ошибки при решении задачи Коши для одного линейного уравнения первого порядка методом конечных разностей, ПММ, т. XX, в. 2 (1956), 279—283

*А. Я. Лепин*

# МЕТОД СЕТОК ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация

В работе рассматривается смешанная задача для системы

$$u'_t = \lambda\, u'_x + f$$

с довольно общими граничными условиями. Доказывается существование и единственность классического и обобщенного решений, непрерывная зависимость от коэффициентов и краевых условий и оценивается порядок приближения сеточных аппроксимаций к решению.

A. J. Lepin

# ON A FINITE DIFFERENCES METHOD FOR THE CANONICAL SYSTEMS OF HYPERBOLIC QUASILINEAR EQUATIONS OF THE FIRST ORDER ON THE PLANE

Annotation

In this paper, the boundary value problem for the equation —

$$u'_t = \lambda u'_x + f$$

is solved.

The paper proves the existence and uniqueness of the generalized solution; the continual dependence of the solution from the coefficient and boundary value conditions; and is evaluated by the order of approximation.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*А. Я. Лепин*

# ОЦЕНКА ОШИБКИ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ УРАВНЕНИЯ

$$U'_t=\lambda U'_x+f.$$

В первой части работы для задачи Коши в верхней полуплоскости $(t\geqslant o)$

$$U'_t\ (t, x)=\lambda(t, x)\ U'_x\,(t, x)+f\,(t, x), \tag{1}$$

$$U\,(o, x)=\varphi\,(x)$$

строится разностная схема и оценивается отклонение решения задачи (1) от решения системы разностных уравнений (см. [1]). Во второй части работы рассматривается возможность перенесения полученных результатов на системы уравнений и на смешанную задачу (см. [2]).

Для замены задачи (1) соответствующей разностной задачей построим сетку $S$ с шагом $h$ по $x$ и шагом $k$ по $t$. Сетка $S$ состоит из узлов $z_{ij}$ с координатами $(t_i, x_j)$, где $t_i=ik$ и $x_j=jh$. Если обозначить $\lambda_{ij}=\lambda(z_{ij})$, $f_{ij}=f(z_{ij})$ и $\varphi_j=\varphi(x_j)$, то систему разностных уравнений можно записать так

$$\begin{gathered} U_{i+1j}=a_{ij}\,U_{ij}+b_{ij}\,\Delta_{ij}\,U_{ij}+k\,f_{ij}, \\ U_{oj}=\varphi_j, \end{gathered} \tag{2}$$

где $a_{ij}=1-kh^{-1}|\lambda_{ij}|$, $b_{ij}=kh^{-1}|\lambda_{ij}|$, $\Delta_{ij}\,U_{ij}=U_{ij+\varepsilon}$ и $\varepsilon=\operatorname{sign}\lambda_{ij}$.

Решение задачи (1) в точке $z_{ij}$ будет обозначаться через $U(z_{ij})$, а под $U_{ij}$ в дальнейшем будет пониматься решение системы (2). Сетку $S$ будем называть допустимой, если все $a_{ij}\geqslant o$. Определим область влияния для точки $z_{ij}\in S$. Сеточная область влияния $S_{ij}$ состоит из точки $z_{ij}$ и точек сетки $z_{np}$

$(n<i)$, для которых выполняются следующие условия: $z_{np} \in S_{ij}$, если $z_{n+1\,p} \in S_{ij}$, или $z_{n+1\;p-1} \in S_{ij}$ и $\lambda_{np-1}>o$, или $z_{n+1\;p+1} \in S_{ij}$ и $\lambda_{np+1}<o$. Самую правую из точек $z_{np} \in S_{ij}$ при фиксированном $n$ обозначим через $z_n^{\Pi}$, а самую левую — через $z_n^{\Lambda}$. Тогда, соединяя точки $z_i^{\Pi}, z_{i-1}^{\Pi}, \ldots, z_o^{\Pi}$ отрезками прямой, получим ломаную $z^{\Pi}$, а соединяя $z_i^{\Lambda}, z_{i-1}^{\Lambda}, \ldots, z_o^{\Lambda}$, получим ломаную $z^{\Lambda}$. Замкнутое множество $\Pi_{ij}$, ограниченное ломаными $z^{\Pi}$, $z^{\Lambda}$ и отрезком, соединяющим точки $z_o^{\Pi}$ и $z_o^{\Lambda}$ будем называть областью влияния точки $z_{ij}$. Если все $a_{np} \geqslant o$ в $\Pi_{ij}$ $(S_{ij})$, то сетку будем называть допустимой в $\Pi_{ij}$ $(S_{ij})$.

Докажем теперь несколько оценок, которые будут использованы для доказательства теорем 1 и 2.

Пусть $z_{ij} \in S$, тогда, используя (2), для любого $n$ $(o \leqslant n \leqslant i)$ можно получить формулу:

$$U_{ij}= \sum_p \alpha_{np}\, U_{np}+k(\sum_p \alpha_{n+1\,p}\, f_{np}+\ldots+\sum_p \alpha_{ip}\, f_{i-1\,p}). \tag{3}$$

Ясно, что вне $S_{ij}$ все $\alpha_{np}=0$. Найдем зависимость между $\alpha_{n-1\,p}$ и $\alpha_{np}$. Из (2) и (3) имеем

$$\sum_p \alpha_{np}(a_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p}+b_{n-1\,p}\, \Delta_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p})=\sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p}+$$
$$+\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\, \Delta_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p}=\sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p}+$$
$$+\sum_p \Delta^{-1}_{n-1\,p}(\alpha_{np}\, b_{n-1\,p})\, U_{n-1\,p}=$$
$$=\sum_p(\alpha_{np}\, a_{n-1\,p}+\Delta^{-1}_{n-1\,p}(\alpha_{np}\, b_{n-1\,p}))\, U_{n-1\,p}=\sum_p \alpha_{n-1\,p}\, U_{n-1\,p},$$

откуда

$$\alpha_{n-1\,p}=\alpha_{np}\, a_{n-1\,p}+\Delta^{-1}_{n-1\,p}(\alpha_{np}\, b_{n-1\,p}). \tag{4}$$

Покажем, что $\sum_p \alpha_{np}=1$. Из (4) имеем

$$\sum_p \alpha_{n-1\,p}=\sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}+\sum_p \Delta^{-1}_{n-1\,p}(\alpha_{np}\, b_{n-1\,p})=$$
$$=\sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}+\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}=\sum_p \alpha_{np}(a_{n-1\,p}+b_{n-1\,p})=$$
$$=\sum_p \alpha_{np}=\ldots=\sum_p \alpha_{ip}=1.$$

Если сетка допустимая, то из (4) следует, что все $\alpha_{np} \geqslant 0$.

Пусть график $(t, y(t))$ $(o \leqslant t \leqslant t_i)$ решения задачи Коши

$$y' = -\lambda(t, y), \; y(t_i) = x_j$$

лежит в области влияния точки $z_{ij}$,

$$|\lambda(\tau, y(t)) - \lambda(t, y(t))| \leqslant l\,|\tau - t| \quad ((\tau, y(t)) \in \Pi_{ij}),$$

$$|\lambda(t, x) - \lambda(t, y(t))| \leqslant L\,|x - y(t)| \quad ((t, x) \in \Pi_{ij}),$$

$$|\lambda(t, y(t))| \leqslant M \quad \text{и} \quad y_n = y(t_n).$$

Тогда для $\Theta_n = y_{n-1} - y_n - k\lambda(t_{n-1}, y_n)$ справедлива оценка

$$|\Theta_n| \leqslant k^2 a_1, \quad a_1 = LM + 2l. \tag{5}$$

Действительно, $\Theta_n = y(t_{n-1}) - y(t_n) - k\lambda(t_{n-1}, y_n) =$

$$= -ky'(\xi) - k\lambda(t_{n-1}, y_n) = k(\lambda(\xi, y(\xi)) - \lambda(t_{n-1}, y_n)),$$

откуда

$$|\Theta_n| \leqslant k\,|\lambda(\xi, y(\xi)) - \lambda(\xi, y(t_n)) + \lambda(\xi, y(t_n)) - \lambda(t_n, y(t_n)) +$$
$$+ \lambda(t_n, y(t_n)) - \lambda(t_{n-1}, y(t_n))| \leqslant k(L\,|y(\xi) - y(t_n)| + l\,|\xi - t_n| +$$
$$+ l\,|t_n - t_{n-1}|) \leqslant k(L\,|y'(\eta)|k + 2lk) \leqslant k^2(LM + 2l).$$

Учитывая, что $y_{n-1} = y_n + k\lambda(t_{n-1}, y_n) + \Theta_n = y_n + hb_n + \Theta_n$, где $b_n = kh^{-1}\lambda(t_{n-1}, y_n)$, оценим $D_n = \sum\limits_p \alpha_{np}(x_p - y_n)^2$ в предположении, что все $\alpha_{np} \geqslant 0$.

$$D_{n-1} = \sum_p \alpha_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 = \sum_p (\alpha_{np}\, a_{n-1\,p} +$$
$$+ \Delta^{-1}_{n-1\,p}(\alpha_{np}\, b_{n-1\,p}))(x_p - y_{n-1})^2 =$$
$$= \sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 + \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\, \Delta_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 =$$
$$= \sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 +$$
$$+ \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}(x_p + h\varepsilon - y_{n-1})^2 = \sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 +$$
$$+ \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}(x_p - y_{n-1})^2 +$$
$$+ 2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\, \varepsilon(x_p - y_{n-1}) + h^2 \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p} =$$
$$= \sum_p \alpha_{np}(x_p - y_n - hb_n - \Theta_n)^2 +$$
$$+ 2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\, \varepsilon(x_p - y_n - hb_n - \Theta_n) + h^2 \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p} =$$
$$= \sum_p \alpha_{np}(x_p - y_n - hb_n)^2 +$$

$$+2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\,\varepsilon(x_p-y_n-hb_n)+h^2\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}-$$
$$-2\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n-hb_n)\Theta_n+$$
$$+\sum_p \alpha_{np}\Theta_n^2-2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\,\varepsilon\,\Theta_n=\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)^2-$$
$$-2h\sum_p \alpha_{np}\, b_n(x_p-y_n)+$$
$$+h^2\sum_p \alpha_{np}\, b_n^2+2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\,\varepsilon(x_p-y_n)-2h^2\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\,\varepsilon\, b_n+$$
$$+h^2\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}+2h\sum_p \alpha_{np}\, b_n\Theta_n-2h\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\,\varepsilon\,\Theta_n-$$
$$-2\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)\Theta_n+$$
$$+\sum_p \alpha_{np}\Theta_n^2=D_n+2h\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)(b_{n-1\,p}\,\varepsilon-b_n)+$$
$$+h^2\sum_p \alpha_{np}(b_{n-1\,p}\,\varepsilon-b_n)^2+$$
$$+h^2\sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\,p}\, a_{n-1\,p}+2h\sum_p \alpha_{np}(b_n-b_{n-1\,p}\,\varepsilon)\Theta_n-$$
$$-2\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)\Theta_n+$$
$$+\sum_p \alpha_{np}\Theta_n^2=D_n+2k\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)(\lambda(t_{n-1},x_p)-\lambda(t_{n-1},y_n))+$$
$$k^2\sum_p \alpha_{np}(\lambda(t_{n-1},x_p)-\lambda(t_{n-1},y_n))^2+kh\sum_p \alpha_{np}\,|\lambda_{n-1\,p}|\,a_{n-1\,p}+$$
$$+2k\sum_p \alpha_{np}(\lambda(t_{n-1},y_n)-\lambda(t_{n-1},x_p))\,\Theta_n-$$
$$-2\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)\Theta_n+\sum_p \alpha_{np}\Theta_n^2.$$

Так как

$$|\lambda(t_{n-1},x_p)-\lambda(t_{n-1},y_n)|\leqslant|\lambda(t_{n-1},x_p)-\lambda(t_{n-1},y_{n-1})+$$
$$+\lambda(t_{n-1},y_{n-1})-\lambda(t_{n-1},y_n)|\leqslant L\,|x_p-y_{n-1}|+L\,|y_{n-1}-y_n|\leqslant$$
$$\leqslant L\,|x_p-y_n|+2L\,|y_{n-1}-y_n|\leqslant L\,|x_p-y_n|+2kLM,$$
$$\sum_p \alpha_{np}\,|x_p-y_n|\,k\leqslant\sum_p \alpha_{np}(x_p-y_n)^2+k^2=D_n+k^2,$$

то

$$D_{n-1}\leqslant D_n+2k\sum_p \alpha_{np}\,(L(x_p-y_n)^2+2kLM\,|x_p-y_n|)+$$
$$+k^2\sum_p \alpha_{np}(L\,|x_p-y_n|+2kLM)^2+khM+$$
$$+2k^2a_1\sum_p \alpha_{np}(L\,|x_p-y_n|+2kLM)k+$$
$$2ka_1\sum_p \alpha_{np}\,|x_p-y_n|\,k+k^4a_1^2\leqslant D_n+2kLD_n+4kLM(D_n+k^2)+$$

$$+k^2L^2D_n+4\,k^2L^2M(D_n+k^2)+4\,k^4L^2M^2+khM+2\,k^2a_1L(D_n+$$
$$+k^2)+4k^4a_1LM+2\,ka_1(D_r+k^2)+$$
$$+k^4a_1^2=D_n+k((2\,L+4\,LM+kL^2+$$
$$+4\,k\,L^2M+2\,k\,a_1\,L+2\,a_1)D_n+4\,k^2LM+4\,k^3L^2M+4\,k^3L^2M^2+$$
$$+hM+2\,k^3a_1L+4\,k^3a_1LM+2\,a_1k^2+k^3a_1^2).$$

Откуда

$$D_{n-1}\leqslant D_n+k(a_2D_n+a_3), \qquad (6)$$

где $a_2=2\,L+4\,LM+2\,a_1+k(L^2+4\,L^2M+2\,a_1L)$ и $a_3=hM+k^2(4\,LM+2\,a_1)+k^3(4\,L^2M+4\,L^2M^2+2\,a_1L+ +4\,a_1LM+a_1^2)$.

Из (6) и $D_i=o$ следует

$$D_n\leqslant a_3a_2^{-1}(\exp\,a_2(t_i-t_n)-1). \qquad (7)$$

Если $\gamma(t)=a_3a_2^{-1}(\exp\,a_2(t_i-t)-1)$, то (7) можно записать в виде

$$D_n\leqslant\gamma(t_n). \qquad (8)$$

Пусть $\omega(x)$ $(x\geqslant o)$ — неотрицательная, неубывающая, полуаддитивная функция. Тогда $\omega(x)\leqslant 2\;\omega(y)y^{-1}x$ $(o<y\leqslant x)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\omega$ (с индексами или без них) удовлетворяет этим условиям.

Оценим $\sum\limits_p\alpha_{pn}\,\omega(|x_p-y_n|)$ при $\alpha_{np}\geqslant o$.

$$\sum_p\alpha_{np}\,\omega(|x_p-y_n|)=\Sigma'\alpha_{np}\,\omega(|x_p-y_n|)+\Sigma''\alpha_{np}\,\omega(|x_p-y_n|),$$

где первая сумма берется по всем $p$, для которых $|x_p-y_n|\leqslant D_n^{1/2}$, а вторая — по всем $p$, для которых $|x_p-y_n|>D_n^{1/2}$ Так как

$$\Sigma'\alpha_{np}\omega(|x_p-y_n|)\leqslant\Sigma'\alpha_{np}\,\omega(D_n^{1/2})\leqslant\sum_p\alpha_{np}\,\omega(D_n^{1/2})=\omega(D_n^{1/2}),$$

$$\Sigma''\alpha_{np}\omega(|x_p-y_n|)\leqslant\Sigma''\alpha_{np}\,2\,\omega(D_n^{1/2})\,D_n^{-1/2}\,|x_p-y_n|\leqslant$$
$$\leqslant 2\,\omega(D_n^{1/2})D_n^{-1/2}\sum_p\alpha_{np}\,|x_p-y_n|\leqslant 2\,\omega(D_n^{1/2})D_n^{-1/2}\,(\sum_p\alpha_{np}(x_p-$$
$$-y_n)^2)^{1/2}=2\,\omega(D_n^{1/2}),$$

то $\sum\limits_p\alpha_{pn}\;\omega(|x_p-y_n|)\leqslant 3\,\omega(D_n^{1/2})$,

откуда

$$\sum_p\alpha_{np}\,\omega(|x_p-y_n|)\leqslant 3\,\omega(\gamma^{1/2}(t_n)). \qquad (9)$$

Оценка $\sum_p \alpha_{np}\, \omega(|x_p - y_n|)\, |x_p - y_n|$ проводится аналогично

$$\sum_p \alpha_{np} \omega(|x_p - y_n|)\, |x_p - y_n| \leqslant \Sigma' + \Sigma'' \leqslant \omega(D_n^{1/2}) D_n^{1/2} +$$

$$+ 2\, \omega(D_n^{1/2}) D_n^{-1/2} \sum_p \alpha_{pn}\, (x_p - y_n)^2 \leqslant 3\, \omega(D_n^{1/2})\, D_n^{1/2},$$

откуда

$$\sum_p \alpha_{np}\, \omega(|x_p - y_n|)\, |x_p - y_n| \leqslant 3\, \omega(\gamma^{1/2}(t_n))\, \gamma^{1/2}(t_n). \qquad (10)$$

Если $M_n = \sum_p \alpha_{np} \ x_p$, то $\sum_p \alpha_{np}\, x_p = \sum_p \alpha_{np} \ M_n$ и $M_{n-1} =$

$$= \sum_p \alpha_{n-1\, p}\, x_p = \sum_p \alpha_{np}\, a_{n-1\, p}\, x_p + \sum_p \Delta^{-1}(\alpha_{np}\, b_{n-1\, p}) x_p =$$

$$= \sum_p \alpha_{np} \ a_{n-1\, p}\, x_p + \sum_p \alpha_{np} \ b_{n-1\, p}(x_p + h\, \varepsilon) = \sum_p \alpha_{np}\, x_p +$$

$$+ h \sum_p \alpha_{np}\, b_{n-1\, p} \ \varepsilon = M_n + k \sum \alpha_{np}\, \lambda(t_{n-1},\ x_p).$$

Предполагая, что $|\lambda'_x\, (t, y(t))| \leqslant M'$ и

$$|\lambda'_x \ (t, x) - \lambda'_x \ (t, y(t))| \leqslant \omega'_\lambda\, (|x - y(t)|),$$

оценим $C_n = |M_n - y_n|$. Так как

$$M_{n-1} - y_{n-1} = M_n - y_n + k \sum \alpha_{np} (\lambda(t_{n-1}, x_p) - \lambda(t_{n-1}, y_n)) - \Theta_n$$

то

$$C_{n-1} \leqslant C_n + k\, |\sum_p \alpha_{np}\, \lambda'_x(t_{n-1},\ \xi_p)\, (x_p - y_n)| + |\Theta_n| =$$

$$= C_n + k\, |\sum_p \alpha_{np}\, (\lambda'_x(t_{n-1}, \xi_p) - \lambda'_x(t_{n-1}, y_{n-1}) +$$

$$+ \lambda'_x(t_{n-1} \ , y_{n-1}))\, (x_p - y_n)| + |\Theta_n| \leqslant$$

$$\leqslant C_n + k (\sum_p \alpha_{np}\, \omega'_\lambda\, (|\xi_p - y_{n-1}|) |x_p - y_n| +$$

$$+ |\lambda'_x\, (t_{n-1} \ , \ y_{n-1}) \ \sum_p \alpha_{np}\, (M_n - y_n)|) + |\Theta_n| \leqslant$$

$$\leqslant k (\sum_p \alpha_{np} \ (\omega'_\lambda\, (|\xi_p - y_n|) + \omega'_\lambda\, (|y_n - y_{n-1}|))\, |x_p - y_n| +$$

$$+ M' C_n) + k^2 a_1 \leqslant$$

$$\leqslant C_n+k(M'C_n+3\,\omega'_\lambda(\gamma^{1/2}(t_n))\gamma^{1/2}(t_n)+\omega'_\lambda\,(M_k)\gamma^{1/2}(t_n)+k\,a_1).$$

Если $\gamma_1(t)=3\,\omega'_\lambda(\gamma^{1/2}(t))\gamma^{1/2}(t)+\omega'_\lambda\,(M_k)\gamma^{1/2}(t)+k\,a_1$, то из

$C_{n-1}\leqslant C_n+k(M'C_n+\gamma_1(t_n))$ и $C_i=o$ следует

$$C_n\leqslant\exp M'(t_i-t_n)\int\limits_{t_n}^{t_i}\gamma_1(\tau)\exp M'(\tau-t_i)\;d\,\tau \qquad (11)$$

Если $\gamma_2(t)=\exp M'(t_i-t)\int\limits_{t}^{t_i}\gamma_1(\tau)\exp M'(\tau-t_i)d\,\tau$, то (11)

можно записать в виде

$$C_n\leqslant\gamma_2(t_n). \qquad (12)$$

Пусть $\Omega(t)$ $(t\geqslant o)$ — неотрицательная, неубывающая функция. Докажем две теоремы о порядке приближения.

Теорема I. Пусть график $(t,\,y(t))$ $(o\leqslant t\leqslant t_i)$ характеристики, проходящей через точку $z_{ij}$, лежит в $\Pi_{ij}$, и выполняются следующие условия

$$|\lambda(\tau,\,y(t))-\lambda(t,\,y(t))|\leqslant l\,|\tau-t| \qquad ((\tau,\,y(t))\in\Pi_{ij}),$$
$$|\lambda(t,\,x)-\lambda(t,\,y\;(t))|\leqslant L\,|x-y(t)| \qquad ((t,\,x)\in\Pi_{ij}),$$
$$|f(\tau,\,y(t))-f(t,\,y(t))|\leqslant\Omega(|\tau-t|) \qquad ((\tau,\,y(t))\in\Pi_{ij}),$$
$$|f(t,\,x)-f(t,\,y(t))|\leqslant\omega_f(|x-y(t)|) \qquad ((t,\,x)\in\Pi_{ij}),$$
$$|\varphi(x)-\varphi(y(o))|\leqslant\omega_\varphi(|x-y(o)|) \qquad ((o,\,x)\in\Pi_{ij}),$$
$$|\lambda(t,\,y\;(t))|\leqslant M$$

и сетка $S$ допустима в $\Pi_{ij}$, тогда справедлива оценка

$$|U(z_{ij})-U_{ij}|\leqslant 3\,\omega_\varphi\,(\gamma^{1/2}(o))+3\,\omega_f\,(\mathrm{Mk})\,t_i+$$
$$+\int\limits_0^{t_i}\omega_f\,(\gamma^{1/2}(\tau))\,d\tau+2\,\Omega(k)\,t_i.$$

Доказательство. Для $n=o$ перепишем (3) в виде

$$U_{ij}=\sum_p\alpha_{op}\,\varphi_p+k(\sum_p\alpha_{1p}\,f_{op}+\ldots+\sum_p\alpha_{ip}\,f_{i-1p})=$$
$$=\varphi(y_0)+k(f(t_0,\,y_1)+\ldots+f(t_{i-1},\,y_i))+\beta^1_{ij}, \qquad (13)$$
$$\text{где}\;\;\beta^1_{ij}=\sum_p\alpha_{op}(\varphi_p-\varphi(y_0))+k(\sum_p\alpha_{1p}\;(f_{op}-$$
$$-f(t_0,\,y_1))+\ldots+\sum_p\alpha_{ip}\;(f_{i-1p}-f(t_{i-1},\,y_i))).$$

9*

Для оценки $\beta_{ij}^1$ воспользуемся формулой (9)

$$\left|\sum_p \alpha_{op}\ (\varphi_p-\varphi(y_0))\right|\leqslant\sum_p \alpha_{op}\ \omega_\varphi\ (|x_p-y_0|)\leqslant 3\ \omega_\varphi\ (\gamma^{1/2}(o)),$$

$$\left|\sum_p \alpha_{np}\ (f_{n-1\,p}-f(t_{n-1}\ ,y_n))\right|=\left|\sum_p \alpha_{np}\ (f(t_{n-1}\ ,\ x_p)-\right.$$

$$-f(t_{n-1}\ ,y_{n-1})+f(t_{n-1}\ ,y_{n-1}\ )-f(t_{n-1}\ ,y_n))\Big|\leqslant\sum_p \alpha_{np}\,\omega_f\ (|x_p-$$

$$-y_{n-1}\ |)+\omega_f(|y_{n-1}\ -y_n|)\leqslant\ \sum_p \alpha_{np}\ \omega_f(|x_p-$$

$$-u_n|)+2\ \omega_f(|y_{n-1}\ -y_n\ |)\leqslant 3\ \omega_f\ (\gamma^{1/2}(t_n))+2\ \omega_f(\mathrm{Mk}),$$

откуда

$$|\beta_{ij}^1|\leqslant 3\ \omega_\varphi\ (\gamma^{1/2}(o))+k(3\ \omega_f\ (\gamma^{1/2}\ (t_1))+2\ \omega_f(\mathrm{Mk})+$$
$$+\ \ldots\ +3\omega_f\ (\gamma^{1/2}(t_i))+ \tag{14}$$
$$+2\ \omega_f\ (\mathrm{Mk}))\leqslant 3\ \omega_\varphi\ (\gamma^{1/2}(o))+\ 2\ \omega_f(\mathrm{Mk})\,t_i\ +3\int\limits_o^{t_i}\ \omega_f\ (\gamma^{1/2}\ (\tau))\,d\ \tau.$$

Перепишем (13) в виде

$$U_{ij}=\varphi(y(o))+\int\limits_o^{t_i} f(\tau,\ y(\tau))\,d\ \tau+\beta_{ij}^1\ +\beta_{ij}^2, \tag{15}$$

где $\beta_{ij}^2=k(f(t_0,\ y_1)+\ \ldots\ +f(t_{n-1}\ ,\ y_j))\ -\int\limits_o^{t_1} f(\tau,\ y(\tau))\,d\tau-\ \ldots-$

$$-\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(\tau,\ y(\tau))\,d\ \tau,$$

откуда $|\ \beta_{ij}^2\ |\leqslant k\,|\,f(t_0,\ y_1)-f(\xi_1,\ y(\xi_1))+\ldots+$
$+f(t_{i-1}\ ,y_i)-f(\xi_i,\ y(\xi_i))\,|$.

Так как

$$|\,f(t_{n-1}\ ,\ y_n)-f(\xi_n,\ y(\xi_n))|=|\,f(t_{n-1}\ ,\ y_n)-f(t_n,\ y_n)+f(t_n,\ y_n)-$$
$$-f(\xi_n,\ y_n)+f(\xi_n,\ y_n)-f(\xi_n,\ y(\xi_n))|\leqslant\Omega(|\,t_{n-1}\ -t_n|)+$$
$$+\Omega(|\,t_n\ -\xi_n\ |)+\omega_f(|\,y_n-y(\xi_n)|)\leqslant 2\ \Omega(k)+\omega_f(\mathrm{Mk}),$$

то

$$|\ \beta_{ij}^2\ |\leqslant(2\ \Omega(k)+\omega_f(\mathrm{Mk}))\,t_i. \tag{16}$$

Учитывая, что $U(z_{ij}) = \varphi(y(o)) + \int\limits_o^{t_i} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$ из (15)

получим

$$|U(z_{ij}) - U_{ij}| \leqslant |\beta_{ij}^1| + |\beta_{ij}^2|.$$

Из оценок (14) и (16) следует теорема.

Теорема 2. Пусть график $(t, y(t))$ $(o \leqslant t \leqslant t_i)$ характеристики, проходящей через точку $z_{ij}$, лежит в $\Pi_{ij}$, и выполняются следующие условия

$$|\lambda(\tau, y(t)) - \lambda(t, y(t))| \leqslant l\,|\tau - t| \quad ((\tau, y(t)) \in \Pi_{ij}),$$
$$|\lambda(t, x) - \lambda(t, y(t))| \leqslant L\,|x - y(t)| \quad ((t, x) \in \Pi_{ij}),$$
$$|f(\tau, y(t)) - f(t, y(t))| \leqslant \Omega(|\tau - t|) \quad ((\tau, y(t)) \in \Pi_{ij}),$$
$$|f(t, x) - f(t, y(t))| \leqslant \omega_f(|x - y(t)|) \quad ((t, x) \in \Pi_{ij}),$$
$$|\lambda'_x(t, x) - \lambda'_x(t, y(t))| \leqslant \omega'_\lambda(|x - y(t)|) \quad ((t, x) \in \Pi_{ij}),$$
$$|f'_x(t, x) - f'_x(t, y(t))| \leqslant \omega'_f(|x - y(t)|) \quad ((t, x) \in \Pi_{ij}),$$
$$|\varphi'(x) - \varphi'(y(o))| \leqslant \omega'_\varphi(|x - y(o)|) \quad ((o, x) \in \Pi_{ij}),$$
$$|\lambda(t, y(t))| \leqslant M, \quad |\lambda'_x(t, y(t))| \leqslant M',$$
$$|f'_f(t, y(t))| \leqslant M'_f, \quad |\varphi'(y(o))| \leqslant M'_\varphi$$

и сетка $S$ допустима в $\Pi_{ij}$, тогда справедлива оценка

$$|U(z_{ij}) - U_{ij}| \leqslant 3\,\omega'_\varphi(\gamma^{1/2}(o))\,\gamma^{1/2}(o) + M'_\varphi \gamma_2(o) + (\Omega(k) + \omega_f(Mk))\,t_i +$$
$$+ \int\limits_o^{t_i} (3\,\omega'_f(\gamma^{1/2}(\tau))\,\gamma^{1/2} d\tau + \omega'_f(Mk)\,\gamma^{1/2}(\tau) + M'_f\,\gamma_2(\tau))\, d\tau.$$

Доказательство. Используя оценки (10) и (12), оценим $\beta_{ij}^1$ в формуле (13).

$$\left|\sum_p \alpha_{op}\,(\varphi_p - \varphi(y_0))\right| = \left|\sum_p \alpha_{op}\,\varphi'(\xi_p)\,(x_p - y_0)\right| = \left|\sum_p \alpha_{op}((\varphi'(\xi_p) -\right.$$
$$\left.- \varphi'(y_0))(x_p - y_0) + \varphi'(y_0)\,(x_p - y_0))\right| \leqslant \sum_p \alpha_{op}\,\omega'_\varphi(|x_p - y_0|)\,|x_p - y_0| +$$
$$+ \sum_p \alpha_{op}\,\varphi'(y_0)\,(M_0 - y_0) \leqslant 3\,\omega'_\varphi(\gamma^{1/2}(o))\,\gamma^{1/2}(o) + M'_\varphi\,\gamma_2(o).$$

$$\left|\sum_p \alpha_{np}\,(f_{n-1\,p} - f(t_{n-1}, y_n))\right| = \left|\sum_p \alpha_{np} f'_x(t_{n-1}, \xi_p)\,(x_p - y_n)\right| =$$

$$=\left|\sum_p \alpha_{np}\left(\left(f'_x(t_{n-1},\xi_p)-f'_x(t_{n-1},y_{n-1})\right)(x_p-y_n)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+f'_x(t_{n-1},y_{n-1})(x_p-y_n)\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_p \alpha_{np}\,\omega'_f(|\xi_p-y_{n-1}|)|x_p-y_n|+$$
$$+\left|\sum_p \alpha_{np} f'_x(t_{n-1},y_{n-1})(M_n-y_n)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_p \alpha_{np}\,\omega'_f(|\xi_p-y_n|)|x_p-y_n|+\sum_p \alpha_{np}\,\omega'_f(|y_n-y_{n-1}|)|x_p-y_n|+$$
$$+M'_f\gamma_2(t_n)\leqslant 3\,\omega'_f(\gamma^{1/2}(t_n))\gamma^{1/2}(t_n)+\omega'_f(\mathrm{Mk})\gamma^{1/2}(t_n)+$$
$$+M'_f\gamma_2(t_n).$$

Отсюда

$$|\beta^1_{ij}|\leqslant 3\,\omega'_\varphi(\gamma^{1/2}(o))\gamma^{1/2}(o)+M'_\varphi\gamma_2(o)+$$
$$+\int\limits_o^{t_i}\left(3\,\omega'_f(\gamma^{1/2}(\tau))\gamma^{1/2}(\tau)+\omega'_f(\mathrm{Mk})\gamma^{0/2}(\tau)+M'_f\gamma_2(\tau)\right)d\tau. \tag{17}$$

Из (17) и (16) следует теорема.

Отметим, что условие допустимости сетки, которое мы требовали в обеих теоремах, может быть ослаблено. Действительно, если просмотреть доказательства, то обнаружится, что допустимость сетки использовалась только для доказательства того факта, что $\alpha_{np}\geqslant o$. Таким образом, если вместо допустимости сетки в $\Pi_{ij}$ потребовать, чтобы выполнялось условие $\alpha_{np}\geqslant o$, то теоремы 1 и 2 останутся в силе. С другой стороны, проверка допустимости сетки гораздо легче проверки условия $\alpha_{np}\geqslant o$.

Для дальнейшего нам понадобится оценка для $\delta U_{np}=U_{np+1}-U_{np}$ в $\Pi_{ij}$.

Если сетка допустима в $\Pi_{ij}$ и в $\Pi_{ij}$ выполняются следующие условия: $|\delta\lambda_{np}|\leqslant h\,L$, $|\delta f_{np}|\leqslant\omega_f(h)$ и $|\delta\varphi_p|\leqslant\omega_\varphi(h)$, то тогда

$$|\delta U_{np}|\leqslant(2L)^{-1}\left((2\,\omega_\varphi(h)L+\omega_f(h))\exp 2\,Lt_n-\omega_f(h)\right). \tag{18}$$

Для доказательства (18) оценим $\delta U_{n+1\,p}$ через $\max|\delta U_{np}|$. В зависимости от знаков $\lambda_{np}$ и $\lambda_{np+1}$ будем различать три случая. Если $|\operatorname{sign}\lambda_{np}-\operatorname{sign}\lambda_{np+1}|\leqslant 1$, то тогда

$$|\delta U_{n+1\,p}|\leqslant a_{np}|\delta_{np}|+b_{np}\Delta|\delta U_{np}|+k(h^{-1}|\delta\lambda_{np}||U_{np+1}-$$
$$-\Delta U_{np+1}|+|\delta f_{np}|)\leqslant\max_p|\delta_{np}|+k(L\max_p|\delta_{np}|+\omega_f(h)).$$

Если $\lambda_{np} > o$, а $\lambda_{np+1} < o$, то тогда

$$\delta U_{n+1\,p} = \delta U_{np} + k(h^{-1}\delta\lambda_{np}\,\delta U_{np} + \delta f_{np}),$$

откуда

$$|\delta U_{n+1\,p}| \leqslant \max_p |\delta U_{np}| + k(L \max_p |\delta U_{np}| + \omega_f(h)).$$

Если $\lambda_{np} < o$, а $\lambda_{n\,n+1} > o$, то тогда

$$\delta U_{n+1\,p} = \delta U_{np} + b_{n\,p+1}(U_{n\,p+2} - U_{np+1}) - \\ - b_{np}(U_{np-1} - U_{np}) + k\,\delta f_{np}.$$

Пусть $\lambda(t_n, \xi) = c$ $(x_p \leqslant \xi \leqslant x_{p+1})$ и $|x_p - \xi| \leqslant 0{,}5\,h$, тогда прибавим и отнимем $b_{np}(U_{n\,p+2} - U_{n\,p+1})$, если $|x_p - \xi| > 0{,}5\,h$, то прибавим и отнимем $b_{n\,p+1}(U_{n\,p-1} - U_{np})$.

$$|\delta U_{n+1\,p}| \leqslant |\delta U_{np}| + b_{np}|U_{n\,p-1} - U_{np} - U_{n\,p+2} + U_{np+1}| + \\ + |\delta b_{np}|\,|U_{n\,p+2} - U_{n\,p+1}| + k|\delta f_{np}| \leqslant \max_p |\delta U_{np}| + \\ + k(2\,L \max_p |\delta U_{np}| + \omega_f(h)).$$

Таким образом, во всех трех случаях справедлива оценка

$$\max |\delta U_{n+1\,p}| \leqslant \max_p |\delta U_{np}| + k(2\,L \max_p |\delta U_{np}| + \omega_f(h)).$$

Из этой оценки получаем

$$|\delta U_{np}| \leqslant (2\,L)^{-1}((2\,\omega_\varphi(h)L + \omega_f(h))\exp 2\,L\,t_n - \omega_f(h)).$$

Теперь рассмотрим возможность перенесения полученных результатов на более общий случай.

Рассмотрим задачу Коши в верхней полуплоскости для почти линейной системы

$$\begin{gathered} U'_t\,(t, x) = \Lambda(t, x)\,U'_x\,(t, x) + F(t, x, U), \\ U(o, x) = \Phi(x), \end{gathered} \tag{19}$$

где $U, F$ и $\Phi$ — $n$-мерные векторы, а $\Lambda$ — диагональная матрица $n$-го порядка.

Замену задачи (19) разностной осуществим аналогично тому, как это сделано для задачи (1).

$$\begin{gathered} U_{i+1\,j} = A_{ij}U_{ij} + B_{ij}\Delta U_{ij} + k\,F_{ij}, \\ U_{oj} = \Phi_j, \end{gathered} \tag{20}$$

где $F_{ij} = F(t_i, x_i, U_{ij})$.

Если $F(t, x) = F(t, x, U(t, x))$, где $U$ — решение задачи (19), то $U$ является решением задачи

$$V'_t(t, x) = \Lambda(t, x)\ V'_x(t, x) + F(t, x), \qquad V(o, x) = \Phi(x). \tag{21}$$

В силу расщепления изучение задачи (21) эквивалентно изучению задачи (1). Если в $\Pi_{ij}$ сетка $S$ допустима, а свойства $\Lambda$, $F$ и $\Phi$ нам известны, то тогда для оценки $|U(z_{ij}) - U_{ij}|$ можно воспользоваться доказанными теоремами. Пусть в $\Pi_{ij}$ $|U(z_{np}) - V_{np}| \leqslant C$, а $F$ удовлетворяет условию Липшица по $U$ с постоянной $L_F$, $W_{ij} = V_{ij} - U_{ij}$, тогда $|U(z_{ij}) - U_{ij}| = |U(z_{ij}) - V_{ij} + V_{ij} - U_{ij}| \leqslant C + |W_{ij}|$. Оценим $|W_{ij}|$. Для этого заметим, что

$$W_{n+1\,p} = A_{np}\ W_{np} + B_{np}\,\Delta\, W_{np} + k(F(U(z_{np})) - F(U_{np})),$$
$$W_{op} = o$$

Так как $|F(U(z_{np})) - F(U_{np})| \leqslant L_F\,|U(z_{np}) - U_{np}| \leqslant L_F\,(C + |W_{np}|)$, то

$$|W_{n+1\,p}| \leqslant \max_p |W_{np}| + k\ L_F(\max_p |W_{np}| + C),\ W_{op} = 0,$$

откуда $|W_{ij}| \leqslant C(\exp L_F\,t_i - 1)$.

Таким образом, для $|U(z_{ij}) - U_{ij}|$ получается оценка

$$|U(z_{ij}) - U_{ij}| \leqslant C \exp L_F\,t_i \tag{22}$$

Для квазилинейной системы

$$U'_t\ (t, x) = \Lambda(t, x, U)\,U'_x\,(t, x) + F(t, x, U), \qquad U(o, x) = \Phi(x) \tag{23}$$

справедливо аналогичное утверждение.

Рассмотрим случай, когда разностные схемы задач (23) и (21) совпадают, а сетка $S$ является допустимой для обеих задач. Пусть в $\Pi_{ij}$ $|U(z_{ij}) - V_{ij}| \leqslant C$, $\Lambda$ удовлетворяет условию Липшица по $U$ с постоянной $L_\Lambda$, а $F$ удовлетворяет условию Липшица по $U$ с постоянной $L_F$,

$|\Delta V_{ij} - V_{ij}| \leqslant Mh$, $W_{ij} = V_{ij} - U_{ij}$. Тогда из

$$W_{n+1\,p} = A_{np}\ W_{np} + B_{np}\,\Delta\, W_{np} + k((\Lambda(U(z_{np})) - \Lambda(U_{np}))(\Delta V_{np} - V_{np})h^{-1} + F(U(z_{np})) - F(U_{np}))$$

следует

$$|W_{n+1\,p}| \leqslant \max_p |W_{np}| + k(L_\Lambda(|W_{np}|+C)M + L_F(|W_{np}|+C)) =$$
$$= \max_p |W_{np}| + k(L_\Lambda M + L_F)(|W_{np}|+C),$$

откуда

$$|U(z_{ij}) - U_{ij}| \leqslant C \exp (L_\Lambda M + L_F)\, t_i.$$

Таким образом, мы получили оценку, которая при $\Lambda$, не зависящем от $U$, переходит в оценку (22).

Рассмотрим теперь смешанную задачу

$$U'_t\ (t, x) = \lambda(t, x)\, U'_x\, (t, x) + f(t, x) \qquad (t \geqslant o,\ x \leqslant o), \tag{24}$$
$$U\ (o, x) = \varphi(x) \quad (x \leqslant o), \quad U(t, o) = \psi(t) \quad (t \geqslant o).$$

При этом мы будем считать, что $\lambda(t, o) > o$ $(t \geqslant o)$. Если $\lambda(t, o) \leqslant o$, то задача (24), если отбросить условие $U(t, o) = \psi(t)$, превращается в задачу Коши. Случай, когда при $x = o$ $\lambda$ принимает значения как большие нуля, так и нулевые, а возможно, и отрицательные, значительно сложнее предыдущих и в дальнейшем не рассматривается.

Предполагая, что $\lambda$, $f$, $\varphi$ и $\psi$ таковы, что задача (24) имеет единственное решение. Продолжим $\lambda$ и $f$ на значения ($t \geqslant o$, $x > o$) так, чтобы $\lambda$ было больше нуля, а рассматриваемые дальше задачи имели единственное решение. Тогда в первой четверти получается задача Коши с начальной функцией $\psi(x)$. Решая эту задачу, получим значения $u\ (o, x)$ при $x > o$. Обозначим их через $\varphi$. Тогда у нас задача (24) сводится к задаче (I), т. е. решение задачи (I) с так определенными $\lambda$, $f$ и $\varphi$ во второй четверти совпадает с решением задачи (24).

Пусть сетка $S$ является допустимой для таким образом полученной задачи (1), и мы можем оценить отклонение решения задачи (1) от ее разностной аппроксимации, тогда можно оценить отклонение решения задачи (24) от ее разностной аппроксимации.

Если область влияния точки $z_{ij}$ для задачи (1) лежит во второй четверти, то по предположению оценка у нас есть. Если же область влияния содержит точки правой четверит, то оценку можно провести следующим образом.

Пусть $U_{np}$ — решение (2), а $V_{np}$ — соответствующее решение для задачи (24) и $|U_{no} - \psi_n| \leqslant C$. Тогда $W_{np} = U_{np} - V_{np}$ $(p \leqslant o)$ легко может быть оценено, исходя из следующих соображений. $|W_{op}| = o$, $|W_{np}| \leqslant C$ и $W_{n+1\,p} = a_{np} W_{np} + b_{np} \Delta W_{np}$, откуда следует, что $|W_{ij}| \leqslant C$. Таким образом $|U(z_{ij}) - V_{ij}| \leqslant$ $\leqslant |U(z_{ij}) - U_{ij}| + C$.

Подобно рассмотрению систем для задачи Коши можно рассматривать и смешанную задачу для аналогичных систем. Здесь мы этим заниматься не будем. Отметим только, что при соответствующих условиях лемма 5 из работы [2] позволяет свести оценку отклонения решения от разностной аппроксимации для системы квазилинейных уравнений к оценке для смешанной задачи, аналогичной задаче (24).

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Н. С. Бахвалов, Условия сходимости и порядок ошибки при решении задачи Коши для одного линейного уравнения первого порядка методом конечных разностей, ПММ, т. XX, в. 2 (1956). 279—283.

[2] А. Я. Лепин. Метод сеток для канонической системы гиперболических квазилинейных уравнений первого порядка на плоскости.



*А. Я. Лепин*


# ОЦЕНКА ОШИБКИ МЕТОДА СЕТОК ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $\mathbf{U}'_t = \lambda\, \mathbf{U}'_x + \mathbf{f}$


## Аннотация

В первой части работы для задачи Коши

$$U'_t = \lambda(t, x)\, U'_x + f(t, x) \quad (t \geqslant o,\ -\infty < x < \infty),$$
$$U(o, x) = \varphi(x)\ (-\infty < x < \infty)$$

строится разностная схема и оценивается отклонение решения задачи Коши от решения системы разностных уравнений.

Во второй части работы рассматривается возможность перенесения полученных результатов на системы и на смешанную задачу.

A. J. Lepin

# ON
# AN ESTIMATE OF ERRORS IN THE FINITE DIFFERENCES METHOD AS APPLIED TO THE EQUATION

$$U'_t = \lambda\ U'_x + f$$


## Annotation

In the first part of the paper, some finite differences shemes for the Cauchy problem —

$$U'_t = \lambda\ (t,\ x)\ U'_x + f(t,\ x) \qquad (t \geqslant o,\ -\infty < x < \infty)$$
$$U\ (o,\ x) = \varphi\ (x)$$

are constructed. The deviation of the solution of the Cauchy problem from the solution of the systems of finite differences equations is evaluated.

In the second part of the paper, the possibility is analysed of a generalization of the given results on the systems and on the boundary value problem.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47. 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*А. Я. Лепин*

# СВЯЗЬ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА С МЕТОДОМ СЕТОК

Рассмотрим задачу Коши в верхней полуплоскости

$$U'_t = U'_x, \; U\ (o, x) = \varphi(x). \tag{1}$$

Для замены краевой задачи (1) соответствующей разностной построим сетку $S$ с шагом $h = n^{-1}$ по $x$ и $k \leqslant h$ по $t$. Сетка $S$ состоит из узлов $(t_i, x_j)$, где $t_i = ik$ $(i = o, 1, \ldots)$, а $x_j = jh$ $(j = o, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Заменим (1) следующей разностной задачей

$$(U_{i+1\,j} - U_{ij})\ k^{-1} = (U_{ij+1} - U_{ij})\ h^{-1}, \quad U_{oj} = \varphi_j$$

или

$$U_{i+1\,j} = (1-\varkappa)\,U_{ij} + \varkappa\, U_{ij+1},\; U_{oj} = \varphi_j, \tag{2}$$

где $\varkappa = k\,h^{-1}$. Используя (2), выразим $U_{no}$ через $\varphi_j$.

$$U_{no} = (1-\varkappa)\,U_{n-10} + \varkappa\, U_{n-11} = (1-\varkappa)^2 U_{n-20} + 2(1-\varkappa)\varkappa\, U_{n-21} +$$
$$+ \varkappa^2 U_{n-22} = \ldots = \sum_{p=o}^{n} C_n^p\ (1-\varkappa)^{n-p}\, \varkappa^p\, \varphi(x_p) =$$
$$= \sum_{p=o}^{n} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) C_n^p\ \varkappa^p (1-\varkappa)^{n-p} = B_n\ (\varkappa). \tag{3}$$

Таким образом, мы видим, что $U_{no} = B_n\ (\varkappa)$ для функции $\varphi$.

Для полиномов Бернштейна хорошо известны следующие свойства (см. [1—2]).

$$|\, B_n\ (x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega(n^{-1/2}), \tag{4}$$

$$B_n\ (x) - f(x) = \sum_{k=1}^{2i} \frac{1}{k!}\, S_{k,\,n}\ (x) f^{(k)}(x) + o(n^{-i}), \tag{5}$$

где

$$S_{k,n}(x) = \sum_{m=o}^{n} \left(\frac{m}{n} - x\right)^k C_n^m \, x^m \, (1-x)^{n-m}.$$

Так как $\varphi(\varkappa) = U(t_n, o)$, то из (4—5) получаем следующие оценки:

$$|U_{no} - U(t_n, o)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega_\varphi\,(h^{1/2}), \tag{6}$$

$$U_{no} - U(t_n, o) = \sum_{k=1}^{2i} (k\,!)^{-1} S_{k,n}(\varkappa)\,\varphi^{(k)}(\varkappa) + o(h^i). \tag{7}$$

Рассмотрим, как можно получить оценки, аналогичные оценкам (6—7), для задачи Коши

$$U'_t = \lambda(t, x)\,U'_x,\ U(o, x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Возьмем сетку $S$ с шагом $h$ по $x$ и шагом $k$ по $t$ и заменим задачу (8) следующей разностной задачей

$$U_{i+1\,j} = a_{ij}\,U_{ij} + b_{ij}\,\Delta_{ij}\,U_{ij},\quad U_{oj} = \varphi_j, \tag{9}$$

где $a_{ij} = 1 - k\,h^{-1}|\lambda_{ij}|$, $b_{ij} = k\,h^{-1}|\lambda_{ij}|$, $\Delta_{ij}\,U_{ij} = U_{ij+\varepsilon}$ и $\varepsilon = \mathrm{sign}\,\lambda_{ij}$.

Фиксируем точку $(t_n, x_m)$. Используя (7) для любого $i$ $(o \leqslant i \leqslant n)$, можно получить формулу

$$U_{nm} = \sum_p \alpha_{ip}\,U_{ip}. \tag{10}$$

Для дальнейшего нам понадобятся следующие свойства коэффициентов $\alpha_{ip}$: $\sum_p \alpha_{i-1\,p}\,z_p = \sum_p \alpha_{ip}\;a_{i-1\,p}\;z_p + \sum_p \alpha_{ip}\;b_{i-1\,p}\;z_{p+\varepsilon}$ и $\sum_p \alpha_{ip} = 1$.

Кроме того мы будем предполагать, что все $\alpha_{ip} \geqslant o$, для чего достаточно, чтобы было $\varkappa\,|\lambda_{ij}| \leqslant 1$.

Пусть $y(t)$ $(o \leqslant t \leqslant t_n)$ — решение задачи Коши

$$y' = -\lambda(t, y),\quad y(t_n) = x_m,$$

причем $\lambda$ ограничено и удовлетворяет условию Липшица. Тогда для $y_i = y(t_i)$ справедлива оценка

$$y_{i-1} = y_i + k\,\lambda(t_{i-1}, y_i) + \Theta_i = y_i + kb_i + \Theta_i \text{ и } |\Theta_i| \leqslant k^2 a.$$

Докажем, что для $S_i^r = \sum_p \alpha_{ip}\,|x_p - y_i|^r$ $(r = o, 1, \ldots)$ справедлива оценка $S_i^r = O(h^{r/2})$, если $k$ и $h$ одного порядка малости. Для доказательства применим индукцию, учитывая, что $S_i^o=1$. Предполагая, что для $S_i^r$ $(r\leqslant 2\nu)$ эта оценка справедлива, докажем ее для $S_i^{2\nu+2}$. После этого из $(S_i^{2\nu+1})^{\frac{1}{2\nu+1}} \leqslant (S_i^{2\nu+2})^{\frac{1}{2\nu+2}}$ получим нужную оценку и для $S_i^{2\nu+1}$, тем самым оценка будет доказана.

$$S_{i-1}^{2\nu+2}=\sum_p \alpha_{i-1p}(x_p-y_{i-1})^{2\nu+2}=$$

$$=\sum_p \alpha_{ip}\, a_{i-1p}(x_p-y_{i-1})^{2\nu+2}+\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}(x_p-y_{i-1}+\varepsilon h)^{2\nu+2}=$$

$$=\sum_p \alpha_{ip}\, a_{i-1p}(x_p-y_{i-1})^{2\nu+2}+\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}(x_p-y_{i-1})^{2\nu+2}+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon(x_p-y_{i-1})^{2\nu+1}+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^t\, h^t\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon^t(x_p-y_{i-1})^{2\nu+2-t}=$$

$$=\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i-h\, b_i+\Theta_i)^{2\nu+2}+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon(x_p-y_i-h\, b_i-\Theta_i)^{2\nu+1}+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^t\, h^t\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon^t(x_p-y_i-h\, b_i-\Theta_i)^{2\nu+2-t}=$$

$$=\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i-h\, b_i)^{2\nu+2}-(2\nu+2)\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i-h\, b_i)^{2\nu+1}\Theta_i+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^t\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i-h\, b_i)^{2\nu+2-t}(-\Theta_i)^t+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon(x_p-y_i-h\, b_i)^{2\nu+1}+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_{t=1}^{2\nu+1} C_{2\nu+1}^t\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon(x_p-y_i-h\, b_i)^{2\nu+1-t}(-\Theta_i)^t+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^t\, h^t\sum_{n=0}^{2\nu+2-t} C_{2\nu+2-t}^n\sum_p \alpha_{ip}\, b_{i-1p}\,\varepsilon^t(x_p-y_i-$$

$$-h\, b_i)^{2\nu+2-t-n}(-\Theta_i)^n=$$

$$=\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i)^{2\nu+2}-(2\nu+2)h\sum_p \alpha_{ip}\, b_i(x_p-y_i)^{2\nu+1}+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^t\sum_p \alpha_{ip}(-b_i h)^t(x_p-y_i)^{2\nu+2-t}-$$

$$-(2\nu+2)\sum_p \alpha_{ip}(x_p-y_i)^{2\nu+1}\Theta_i-$$

$$-(2\nu+2)\sum_{t=1}^{2\nu+1} C_{2\nu+1}^{t} \sum_{p} \alpha_{ip}(-b_i h)^t (x_p-y_i)^{2\nu+1-t}\Theta_i+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^{t} \sum_{n=o}^{2\nu+2-t} C_{2\nu+2-t}^{n} \sum_{p} \alpha_{ip}(-b_i h)^n (x_p-y_i)^{2\nu+2-t-n}(-\Theta_i)^t+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_{p}\alpha_{ip}b_{i-1p}\,\varepsilon(x_p-y_i)^{2\nu+1}+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_{t=1}^{2\nu+1} C_{2\nu+1}^{t}\sum_{p}\alpha_{ip}b_{i-1p}\,\varepsilon(-b_i h)^t (x_p-y_i)^{2\nu+1-t}+$$

$$+(2\nu+2)h\sum_{t=1}^{2\nu+1} C_{2\nu+1}^{t}\sum_{n=o}^{2\nu+1-t} C_{2\nu+1-t}^{n}\sum_{p}\alpha_{ip}b_{i-1p}\,\varepsilon(-b_i h)^n (x_p-$$

$$-y_i)^{2\nu+1-t-n}(-\Theta_i)^t+$$

$$+\sum_{t=2}^{2\nu+2} C_{2\nu+2}^{t} h^t \sum_{n=o}^{2\nu+2-t} C_{2\nu+2-t}^{n} \sum_{s=o}^{2\nu+2-t-n} C_{2\nu+2-t-n}^{s}$$

$$\sum_{p}\alpha_{ip}b_{i-1p}\,\varepsilon^t(-b_i h)^s (x_p-y_i)^{2\nu+2-t-n-s}(-\Theta_i)^n=$$

$$=S_i^{2\nu+2}+(2\nu+2)h\sum_{p}\alpha_{ip}(b_{i-1p}\,\varepsilon-b_i)(x_p-y_i)^{2\nu+1}-$$

$$-(2\nu+2)\sum_{p}\alpha_{ip}(x_p-y_i)^{2\nu+1}\Theta_i+O(h^{\nu+2})\leqslant$$

$$\leqslant S_i^{2\nu+2}+k(2\nu+2)L\,S_i^{2\nu+2}+k\,a(2\nu+2)S_i^{2\nu+2}+O(k\,h^{\nu+1}),$$

откуда получаем $S_i^{\;2\nu+2}=O(h^{\nu+1})$. Итак, нужная нам оценка получена.

Докажем теперь оценки, аналогичные оценкам (6—7). Пусть $\omega(x)$ $(o\leqslant x)$ удовлетворяет условиям: $\omega(o)=o$ и $\omega(\lambda x)\leqslant$ $\leqslant(\lambda+1)\,\omega(x)$ $(\lambda\geqslant o)$. Тогда, если $|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\omega_\varphi(|x-y|)$, то

$$U_{nm}-U(t_n,\,x_m)=\sum_{p}\alpha_{op}\,\varphi(x_p)-\sum_{p}\alpha_{op}\,\varphi(y(o))=$$

$$=\sum_{p}\alpha_{op}\,(\varphi(x_p)-\varphi(y(o))),$$

откуда для $\beta>o$ и $D=S_0^2$ имеем

$$|U_{nm}-U(t_n,\,x_m)|\leqslant\sum_{p}\alpha_{op}\,\omega_\varphi(|x_p-y(o)|)=$$

$$=\sum_{p}\alpha_{op}\,\omega_\varphi(D^{-1/2}\beta^{-1}|x_p-y_o|\,D^{1/2}\beta)\leqslant\sum_{p}\alpha_{op}\,(D^{-1/2}\beta^{-1}|x_p-y_0|+$$

$$+1)\,\omega_\varphi(D^{1/2}\beta)=\omega_\varphi(D^{1/2}\beta)+D^{-1/2}\beta^{-1}\omega_\varphi(D^{1/2}\beta)\sum_{p}\alpha_{op}|x_p-y_0|\leqslant$$

$$\leqslant\omega_\varphi(D^{1/2}\beta)+\beta^{-1}\omega_\varphi(D^{1/2}\beta)=(1+\beta^{-1})\,\omega_\varphi(D^{1/2}\beta),$$

т. е.

$$|U_{nm}-U(t_n,\ x_m)|\leqslant(1+\beta^{-1})\,\omega_\varphi\,(D^{1/2}\,\beta). \qquad (10)$$

Если $\lambda=1$ и $t_n\leqslant h^{-1}$, то $D\leqslant 4^{-1}\,h$ и при $\beta=2^{-1}$ из (10) получаем

$$|U_{nm}-U(t_n,\ x_m)|\leqslant\frac{3}{2}\,\omega_\varphi\,(h^{1/2}),$$

что согласуется с оценкой (6).

Пусть $\varphi(x)=\varphi(y(o))+\varphi'(y(o))(x-y(o))+\ldots+$

$$+\frac{\varphi^{(k)}(y(o))}{k\,!}(x-y(o))^k+\psi(x-y(o))(x-y(o))^k$$

и

$$|\psi(x-y(o))|\leqslant\omega_\psi(|x-y(o)|).$$

Тогда $U_{nm}-U(t_n,\ x_m)=\sum\limits_p \alpha_{op}(\varphi(x_p)-\varphi(y(o)))=$

$$=\sum_p \alpha_{op}(\varphi'(y_0)(x_p-y_0)+\ldots+(k\,!)^{-1}\varphi^{(k)}(y_0)(x_p-y_0)^k+$$
$$+\psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k)=$$
$$=\varphi'(y_0)\sum_p \alpha_{op}\,(x_p-y_0)+\ldots+(k\,!)^{-1}\varphi^{(k)}(y_0)\sum_p \alpha_{op}\,(x_p-y_0)^k+$$
$$+\sum_p \alpha_{op}\,\psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k.$$

Оценим $\sum\limits_p \alpha_{op}\psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k$.

$$\left|\sum_p \alpha_{op}\psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k\right|\leqslant\sum_p \alpha_{op}\,\omega_\psi(|x_p-y_0|)|x_p-y_0|^k\leqslant$$
$$\leqslant\sum_p \alpha_{op}\,(1+\alpha^{-1}|x_p-y_0|)\,\omega_\psi(\alpha)|x_p-y_0|^k=\omega_\psi(\alpha)(S_o^k+\alpha^{-1}S_o^{k+1}).$$

При $\alpha=S_o^{k+1}:S_o^k$ получаем оценку

$$\left|\sum_p \psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k\right|\leqslant 2\,\omega_\psi(S_o^{k+1}:S_o^k)\,S_o^k,$$

а при $\alpha=\beta\,h^{1/2}$ имеем

$$\left|\sum_p \psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k\right|\leqslant\omega_\psi\,(\beta\,h^{1/2})\,(S_o^k+\beta^{-1}\,h^{-1/2}\,S_o^{k+1}),$$

в частности при $\beta=1$ получается оценка

$$\left|\sum_p \psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k\right|\leqslant\omega_\psi\,(h^{1/2})\,(S_o^k+h^{1/2}\,S_o^{k+1}).$$

Учитывая оценку для $S_o^k$, получаем

$$\sum_p \psi(x_p-y_0)(x_p-y_0)^k=O(\omega_\psi\,(h^{1/2})\,h^{k/2}).$$

Если обозначить $\sum_p \alpha_{op} (x_p - y_0)^r = S^r$, то получим

$$U_{um} - U(t_n, x_m) = \varphi'(y_0) S^1 + \ldots + (k!)^{-1} \varphi^{(k)}(y_0) S^k + \\ + O(\omega_{\varphi}(h^{1/2}) h^{k/2}). \qquad (11)$$

Если $\lambda = 1$, $k = 2i$, $h = n^{-1}$ и $k \leqslant h$, то для точки $(t_n, o)$ из (11) следует (7).

### ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон. Конструктивная теория функций, ГИТТЛ. Москва—Ленинград (1949).

[2] С. Н. Бернштейн. Собрание сочинений, т. II, И АН СССР (1954).

*А. Я. Лепин*

## СВЯЗЬ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА С МЕТОДОМ СЕТОК

### Аннотация

Если задачу Коши

$$U'_t = U'_x, \; U(o, x) = \varphi(x) \qquad (t \geqslant o, \; -\infty < x < \infty)$$

простейшим способом заменить разностной, то решение разностной задачи совпадает с многочленом Бернштейна, откуда получаются оценки для отклонения решения разностной задачи от решения задачи Коши. В работе этот результат обобщается на задачу Коши

$$U'_t = \lambda(t, x) U'_x, \; U(o, x) = \varphi(x) \qquad (t \geqslant o, \; -\infty < x < \infty).$$

*A. J. Lepin*

on

# THE CONNECTION BETWEEN BERNSTEIN'S POLYNOMIALS AND THE FINITE DIFFERENCES METHOD


Annotation

If the Cauchy problem —

$$U'_t = U'_x;\ U\ (o,\ x) = \varphi\ (x);\ (t \geqslant o; -\infty < x < \infty)$$

is transformed by means of a simpler method to a finite differences problem, then the solution of the finite differences problem coincides with Bernstein's polynomials; from which conclusion we arrive at an estimate for the deviation of the solution of a finite differences problem from the solution of the Cauchy problem. The results are generalized in the Cauchy problem.

$$U'_t = \lambda\ (t,\ x)\, U'_x;\ U\ (o,\ x) = \varphi\ (x);\quad (t \geqslant o; -\infty < x < \infty).$$

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47. 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*З. Я. Плуме*

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ ТЕОРИИ ПОТНЕЦИАЛА В СЛУЧАЕ РАЗОМКНУТОГО КОНТУРА*

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть в плоскости $z=x+iy$ задана разомкнутая дуга $L=l_1l_2$. Касательная $k$ $L$ образует с положительным направлением оси $Ox$ угол, удовлетворяющий условию Гельдера. Плоскость $z$, из которой вырезана линия $L$, назовем областью $S$. Точки области $S$ обозначим через $z$, точки линии $L$, не совпадающие с ее концами — через $t$, концы линии $L$ — через $l_1$, и $l_2$. Положительное направление $L$ считаем от $l_1$ к $l_2$.

Мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t$ линии $L$ слева, если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^+(t)$, когда $z$ стремится к $t$ по любому пути, оставаясь однако слева от $L$. Если функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева на каждую точку линии $L$, то будем говорить, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева на $L$.

Мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку $t$ справа, если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^-(t)$, когда $z$ стремится к $t$ по любому пути, оставаясь однако справа от $L$. Если функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима справа на каждую точку линии $L$, то будем говорить, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима справа на $L$.

$\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ назовем соответственно левым и правым граичным значением функции $\Phi(z)$.

Мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на конец $l_1$ (или $l_2$), если $\Phi(z)$ стремится к $\Phi(l_1)$ (или

* Результаты этой работы доложены на всесоюзном совещании по применениям методов теории функций комплексного переменного к задачам математической физики. (Тбилиси; февраль 1961 г.).

$\Phi(l_2)$), когда $z$ стремится к $l_1$ (или $l_2$) по любому пути, не попадая на $L$.

Если функция $\Phi(z)$ голоморфная в каждой конечной области, не содержащей точек линии $L$ и непрерывно продолжима на $L$ слева и справа, кроме, буть может, концов, а вблизи концов удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| \leqslant \frac{D}{|z-l|^{\delta}}, \tag{1.1}$$

где $l$ — один из концов линии $L$ ($l_1$ или $l_2$) и $D>o$ и $\delta<1$ постоянные, то будем говорить, что $\Phi(z)$ кусочноголоморфная с линией сканков $L$.

## 2. ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ В СЛУЧАЕ РАЗОМКНУТОГО КОНТУРА

Задача состоит в следующем: найти кусочноголоморфную в области $S$, непрерывно продолжимую на $L$, ограниченную на концах, исчезающую на бесконечности функцию $\Phi(z)$, действительная часть которой $u=Re\ \Phi(z)$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{cases} A(s)\dfrac{du^+}{dn}+B(s)\dfrac{du^+}{ds}+c(s)u^+=f^+(s) \\ A(s)\dfrac{du^-}{dn}+B(s)\dfrac{du^-}{ds}+c(s)u^-=f^-(s), \end{cases} \tag{2.1}$$

где $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$ — заданные на $L$ действительные функции класса $H$, $f^+$, $f^-$ — заданные на $L$ действительные функции класса $H^*$, $s$ — дуговая абсцисса, $n$ — нормаль линии $L$.

Эта задача в случае замкнутого контура была поставлена Пуанкаре [9], но решено только в случае, когда $A(s)=1$, $c(s)=0$ считая притом, что контур $L$ и функции $B(s)$ и $f(s)$ аналитические. Первое законченное решение в случае замкнутого контура было дано Б. В. Хведелидзе [8]. Для случая разомкнутого контура задача Дирихле решена И. Н. Мусхелишвили [4], когда $A(s)=B(s)=0$, $c(s)=1$. В случае, когда $B(s)=c(s)=0$, получится задача Неймана. Эта задача решена в частном случае, когда контур $L$ состоит из конечного числа отрезков действительной оси, М. В. Келдышем и Л. И. Седовым [3]. Для произвольной дуги, кривизна которой удовлетворяет условию Н, задача Неймана решена автором [6] при условии, что функция $\Phi(z)$ ограничена на концах линии $L$. Смешанная задача теории потенциала, когда $B(s)=0$ в случае разомкнутого контору рассмотрена автором в кандидатской диссертации [7]. Решение этой задачи приведено к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений. Так как задача Неймана, а также смешанная задача теории потенциала являются частыми случаями задачи Пуанкаре, то вместе с решением задачи Пуанкаре получим и решение этих задач.

## 3. ПРИВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ К СИСТЕМЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Преобразуем граничные условия (2.1) в несколько иной вид. Положим

$$\begin{cases} \dfrac{du}{ds} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\Theta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\sin\Theta \\ \dfrac{du}{dn} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin\Theta + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\Theta, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\Theta$ — угол, составляемый касательной в точке $t_0$ с положительным направлением оси $Ox$. Тогда условия (2.1) примут вид:

$$\begin{cases} a(s_0)\dfrac{\partial u^+}{\partial x} + b(s_0)\dfrac{\partial u^+}{\partial y} + c(s_0)u^+ = f^+(s_0) \\ a(s_0)\dfrac{\partial u^-}{\partial x} + b(s_0)\dfrac{\partial u^-}{\partial y} + c(s_0)u^- = f^-(s^0), \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{cases} a(s_0) = -A(s_0)\sin\Theta + B(s_0)\cos\Theta, \\ b(s_0) = A(s_0)\cos\Theta + B(s_0)\sin\Theta, \end{cases} \tag{3.3}$$

$s_0$ — дуговая абсцисса точки $t_0$.

От функции $u$ мы будем требовать, чтобы ее частные производные $\dfrac{\partial u^+}{\partial x}, \dfrac{\partial u^-}{\partial x}, \dfrac{\partial u^+}{\partial y}, \dfrac{\partial u^-}{\partial y}$ принимали граничные значения, удовлетворяющие условию H.

Условия (3.2) можно записать так:

$$\begin{cases} Re\{(a+ib)[\Phi^+(t_0)]' + c\,\Phi^+(t_0)\} = f^+(t_0) \\ Re\{(a+ib)[\Phi^-(t_0)]' + c\,\Phi^-(t_0)\} = f^-(t_0) \end{cases} \tag{3.4}$$

Каждую кусочноголомоморфную функцию, исчезающую на бесконечности, можно представить в виде (см [5]):

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{3.5}$$

где

$$\varphi(t) = \varphi(t(s)) = \mu(s) + i\,\gamma(s), \tag{3.6}$$

$\mu(s)$ и $\nu(s)$ — действительные функции дуги $s$. Следовательно $\Phi(z)$ примет вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{[\mu(s)+i\,\gamma(s)]\,t'(s)\,ds}{t-z}. \tag{3.7}$$

Согласно формулам Сохоцкого, граничные значения этой функции имеют следующие значения

$$\begin{cases} \Phi^{+}[t(s_0)] = \mu(s_0) + i\,\gamma(s_0) + \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{[\mu(s)+i\,\gamma(s)]\,t'(s)\,ds}{t-t_0} \\ \Phi^{-}[t(s_0)] = -\mu(s_0) - i\,\gamma(s_0) + \dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int_L \frac{[\mu(s)+i\,\gamma(s)]\,t'(s)\,ds}{t-t_0} \end{cases} \tag{3.8}$$

Дифференцируем формулу (3.9) по $z$.

Получим

$$\Phi'(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{3.9}$$

Интегрируем правую часть этой формулы по частям. Тогда

получим

$$\Phi'(z) = -\frac{\varphi(l_2)}{\pi i(l_2-z)} + \frac{\varphi(l_1)}{\pi i(l_1-z)} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi'(t)\,dt}{t-z}.$$

Так как мы ищем решение задачи, ограниченное на концах линии $L$, положим (см. [5] § 29 и [6])

$$\varphi(l_1) = \varphi(l_2) = 0 \tag{3.11}$$

или, согласно (3.6),

$$\mu(o) = \mu(o) = \nu(l) = \nu(l) = 0. \tag{3.12}$$

Формулу (3.10) можно переписать так:

$$\Phi'(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi'(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{[\mu'(s)+i\,\nu'(s)]\,ds}{t-z}. \tag{3.13}$$

Тогда производные граничных значений примут следующие значения:

$$\begin{cases} \Phi'^{+}[t(s_0)]=[\mu'(s_0)+i\,\nu'(s_0)]\overline{t'}(s_0)+\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{[\mu'(s)+i\,\nu'(s)]ds}{t-t_0} \\ \Phi'^{-}[t(s_0)]=-[\mu'(s_0)+i\,\nu'(s_0)]\overline{t'}(s_0)+\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{[\mu'(s)+i\,\nu'(s)]ds}{t-t_0} \end{cases} \tag{3.14}$$

Подставляя правые части формул (3.8) и (3.14) в граничное условие (3.4), получим

$$\begin{cases} Re\Big\{\Big[a(s_0)+i\,b(s_0)\big][(\mu'(s_0)+i\,\nu'(s_0))(\cos\Theta-i\sin\Theta)+ \\ +\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{\mu'(s)\,ds}{t-t_0}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\nu'(s)\,ds}{t-t_0}\Big]+c(s_0)\,\mu(s_0)+ \\ +i\,c(s_0)\,\nu(s_0)+\dfrac{c(s_0)}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{\mu(s)\,t'(s)\,ds}{t-t_0}+\frac{c(s_0)}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\nu(s)t'(s)ds}{t-t_0}=f^{+}(s_0) \\ Re\Big\{\Big[a(s_0)+ib(s_0)\big][-(\mu'(s_0)+i\nu'(s_0)(\cos\Theta-i\sin\Theta)+ \\ +\dfrac{1}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{\mu'(s)\,ds}{t-t_0}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\frac{\nu'(s)\,ds}{t-t_0}\Big]-c(s_0)\,\mu(s_0)- \\ -i\,c(s_0)\,\nu(s_0)++\dfrac{c(s_0)}{\pi i}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{\mu(s)\,t'(s)\,ds}{t-t_0}+ \\ +\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int\limits_{L}\frac{\nu(s)\,t'(s)\,ds}{t-t_0}\Big\}=f^{-}(s_0). \end{cases} \tag{3.15}$$

Обозначим

$$\alpha(s_0)=a(s_0)+i\,b(s_0). \tag{3.16}$$

Тогда систему (3.15) можно переписать так

$$\begin{cases} [a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\,\mu'(s_0)- \\ -[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\nu'(s_0)- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\mu'(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_L Re\left[\frac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\nu'(s)\,ds+ \\ +c(s_0)\,\mu(s_0)-\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{i\,t'(s)}{t-t_0}\right]\mu(s)\,ds+ \\ +\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{t'(s)}{t-t_0}\right]\nu(s)\,ds=f^{+}(s_0) \\ -[a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\,\mu'(s_0)+ \\ +[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\nu'(s_0)- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\mu'(s)\,ds+\frac{1}{\pi}\int_L Re\left[\frac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\nu'(s)\,ds- \\ -c(s_0)\,\mu(s_0)-\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{i\,t'(s)}{t-t_0}\right]\mu(s)\,ds+ \\ +\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\frac{t'(s)}{t-t_0}\right]\nu(s)\,ds=f^{-}(s_0). \end{cases} \tag{3.17}$$

Мы получили систему двух сингулярных интегродифференциальных уравннеий с двумя неизвестными функциями $\mu(s)$ и $\nu(s)$. Покажем, что эту систему можно привести к системе двух сингулярных интегральных уравнений.

## 4. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К СИСТЕМЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Положим (см. [1])

$$\mu'(s)=\varrho(s),\quad \nu'(s)=\sigma(s). \tag{4.1}$$

Тогда будем иметь

$$\mu(s)=\int_0^s \varrho(s_1)\,ds_1+C_2,\ \ \nu(s)=\int_0^s \sigma(s_1)\,ds_1+C_2, \tag{4.2}$$

где $C_1$ и $C_2$ произвольные пока постоянные.

Последние соотношения можно переписать так:

$$\mu(s)=\int_L \omega(s, s_1)\varrho(s_1)ds+C_1,\ \nu(s)=\int_L \omega(s, s_1)\sigma(s_1)ds_1+C_2,$$

где

$$\begin{aligned} &\omega(s, s_1)=1 \quad \text{при} \quad 0\leqslant s_1\leqslant s \\ &\omega(s, s_1)=0 \quad \text{при} \quad s<s_1\leqslant l, \end{aligned}$$

если $l$ — длина дуги.

Тогда система (3.12) примет вид:

$$\begin{cases} [a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\varrho(s_0)- \\ -[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\sigma(s_0)- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\varrho(s)ds+\dfrac{1}{\pi}\int_L Re\left[\dfrac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\sigma(s)ds+ \\ +c(s_0)\displaystyle\int_L \omega(s_0, s)\varrho(s)ds+ \\ +C_1c(s_0)-\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{it'(s)}{t-t_0}\right]ds\int_L \omega(s, s_1)\varrho(s_1)ds,+ \\ +\dfrac{C_1c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{it'(s)}{t-t_0}\right]ds+ \\ +\dfrac{C_2c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{t'(s)}{t-t_0}\right]ds+ \\ +\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{t'(s)}{t-t_0}\right]ds\int_L \omega(s, s_1)\sigma(s_1)ds_1=f^+(s_0) \\ -[a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\varrho(s_0)+ \\ +[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\sigma(s_0)- \\ -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\varrho(s)ds+\dfrac{1}{\pi}\int_L Re\left[\dfrac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\sigma(s)ds- \\ -c(s_0)\displaystyle\int_L \omega(s_0, s)\varrho(s)ds- \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
-C_1 c(s_0) - \dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{it'(s)}{t-t_0}\right] ds \int_L \omega(s, s_1)\varrho(s_1)\,ds_1 - \\
-\dfrac{C_1 c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{it'(s)}{t-t_0}\right] ds + \\
+\dfrac{c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{t'(s)}{t-t_0}\right] ds \int_L \omega(s, s_1)\sigma(s_1)\,ds_1 + \\
+\dfrac{C_2 c(s_0)}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{t'(s)}{t-t_0}\right] ds = f^-(s_0)
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

Таким образом мы получим систему двух сингулярных интегральных уравнений с двумя неизвестными функциями $\varrho(s)$ и $\sigma(s)$. Принимаем во внимание, что

$$
\begin{cases}
\displaystyle\int Re\left[\dfrac{it'(s)}{t-t_0}\right] ds = Re\, i\,[ln(l_2-t_0) - ln(l_1-t_0)] = Re[i\, ln\,|\,l_2-t_0| - \\
-i\, ln\,|\,l_1-t_0\,| - \arg(l_2-t_0) + \arg(l_1-t_0)] = \arg\dfrac{l_1-t_0}{l_2-t_0} \\
\displaystyle\int Re\left[\dfrac{t'(s)}{t-t_0}\right] ds = ln\,|\,l_2-t_0| - ln\,|\,l_1-t_0| = ln\left|\dfrac{l_2-t_0}{l_1-t_0}\right|.
\end{cases}
\tag{4.5}
$$

Тогда систему (4.4) можно переписать так:

$$
\begin{cases}
[a(s_0)\cos\Theta + b(s_0)\sin\Theta]\,\varrho(s_0) + \\
-[b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta]\,\sigma(s_0) - \\
-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\varrho(s)\,ds + \dfrac{1}{\pi}\int_L Re\left[\dfrac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\sigma(s)\,ds + \\
+\displaystyle\int_L K_1(s_0, s)\varrho(s)\,ds + \int_L K(s_0, s)\sigma(s)\,ds = g^+(s_0) \\
-[a(s_0)\cos\Theta + b(s_0)\sin\Theta]\,\varrho(s_0) + \\
[b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta]\,\sigma(s_0) - \\
-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_L Re\left[\dfrac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\varrho(s)\,ds + \dfrac{1}{\pi}\int_L Re\left[\dfrac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]\sigma(s)\,ds + \\
+\displaystyle\int_L K_2(s_0, s)\varrho(s)\,ds + \int_L K(s_0, s)\sigma(s)\,ds = g^-(s_0)
\end{cases}
\tag{4.6}
$$

Ядра $K_1(s_0, s)$, $K_2(s_0, s)$, $K(s_0, s)$ можно определить следующим образом. Обратим внимание на то, что

$$\left\{\begin{aligned}
&\int\limits_L \frac{t'(s)}{t-t_0}\,ds\int\limits_L \omega(s, s_1)\varrho(s_1)\,ds_1=\int\limits_L\Big(\int\limits_L \frac{t'(s)\,\omega(s, s_1)}{t-t_0}\,ds\Big)\,\sigma(s_1)\,ds_1=\\
&=\int\limits_L\Big(\int\limits_L \frac{\tau'(S)\,\omega(S, s)}{\tau-t_0}\,dS\Big)\varrho(s)\,ds\\
&\int\limits_L \frac{t'(s)}{t-t_0}\,ds\int\limits_L \omega(s, s_1)\sigma(s_1)\,ds_1=\int\limits_L\Big(\int\limits_L \frac{\tau'(S)\,\omega(S, s)}{\tau-t_0}\,dS\Big)\,\sigma(s)\,ds
\end{aligned}\right. \tag{4.7}$$

Тогда

$$\left\{\begin{aligned}
&K_1(s_0, s)=c(s_0)\,\omega(s_0, s)-\frac{c(s_0)}{\pi}\int\limits_L Re\left[\frac{i\tau'(S)\,\omega(S, s)}{\tau-t_0}\right]dS\\
&K_2(s_0, s)=-\left\{c(s_0)\,\omega(s_0, s)+\frac{c(s_0)}{\pi}\int\limits_L Re\left[\frac{i\tau'(S)\,\omega(S, s)}{\tau-t_0}\right]dS\right.\\
&K(s_0, s)=\frac{c(s_0)}{\pi}\int\limits_L Re\left[\frac{\tau'(S)\,\omega(s, S)}{\tau-t_0}\right]dS\\
&g^+(s_0)=f^+(s_0)-C_1c(s_0)+\frac{1}{\pi}C_1c(s_0)\arg\frac{l_1-t_0}{l_2-t_0}-\\
&-\frac{1}{\pi}\,C_2c(s_0)\,ln\left|\frac{l_2-t_0}{l_1-t_0}\right|\\
&g^-(s_0)=f^-(s_0)-C_1c(s_0)+\frac{1}{\pi}C_1c(s_0)\arg\frac{l_1-t_0}{l_2-t_0}-\\
&-\frac{1}{\pi}\,C_2c(s_0)\,ln\left|\frac{l_2-t_0}{l_1-t_0}\right|.
\end{aligned}\right. \tag{4.8}$$

Далее обратим внимание на то, что

$$-Re\left[\frac{i\,\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]ds=-\frac{i\,\alpha(s_0)\,ds}{2\,(t-t_0)}+\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}\,ds}{2\,(t-t_0)}=$$

$$=-\frac{i\,\alpha(s_0)\,ds}{2\,(t-t_0)}+\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}\,t'(s)\,d\bar{t}}{2\,(\bar{t}-\bar{t}_0)}=-\frac{i\,\alpha(s_0)}{2(t-t_0)}\,ds+$$

$$+\tfrac{1}{2}\, i\,\overline{\alpha(s_0)}\,t'(s)\,d\ln(\bar{t}-\bar{t}_0) = -\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}\,ds}{2(t-t_0)}+$$

$$+\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}\,t'^2(s)\,ds}{2\,(t-t_0)}+\tfrac{1}{2}\, i\,\overline{\alpha(s_0)}\,t'(s)\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}$$

$$Re\left[\frac{\alpha(s_0)}{t-t_0}\right]ds=\frac{\alpha(s_0)\,ds}{2\,(t-t_0)}+\frac{\overline{\alpha(s_0)}\,t'^2(s)\,ds}{t-t_0}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\overline{\alpha(s_0)}\,t'(s)\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}. \tag{4.9}$$

Третье слагаемое правой части не влияет на характеристическую часть уравнений системы (4.6).

Тогда мы можем систему (4.6) переписать так:

$$\left\{\begin{aligned}
&[a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\,\varrho(s_0)-\\
&-[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\,\sigma(s_0)-\\
&-\frac{i\,\alpha(s_0)}{2\pi}\int\limits_L\frac{\varrho(s)\,ds}{t-t_0}-\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}}{2\pi}\int\limits_L\frac{t'^2(s)\,\varrho(s)\,ds}{t-t_0}+\\
&+\frac{\overline{\alpha(s_0)}}{2\pi}\int\limits_L\frac{\sigma(s)\,t'^2(s)\,ds}{t-t_0}+\frac{\alpha(s_0)}{2\pi}\int\limits_L\frac{\sigma(s)\,ds}{t-t_0}+\\
&+\int\limits_L M_1(s_0,s)\,\varrho(s)\,ds+\int\limits_L N(s_0,s)\,\sigma(s)\,ds=g^+(s_0)\\
&-[a(s_0)\cos\Theta+b(s_0)\sin\Theta]\,\varrho(s_0)+\\
&+[b(s_0)\cos\Theta-a(s_0)\sin\Theta]\,\sigma(s_0)-\\
&-\frac{i\,\alpha(s_0)}{2\pi}\int\frac{\varrho(s)\,ds}{t-t_0}-\frac{i\,\overline{\alpha(s_0)}}{2\pi}\int\frac{t'^2(s)\,\varrho(s)\,ds}{t-t_0}+\frac{\alpha(s_0)}{2\pi}\int\frac{\sigma(s)\,ds}{t-t_0}+\\
&+\frac{\overline{\alpha(s_0)}}{2\pi}\int\limits_L\frac{t'^2(s)\,\varrho(s)\,ds}{t-t_0}+\\
&+\int\limits_L M_2(s_0,s)\,\varrho(s)\,ds+\int\limits_L N(s_0,s)\,\sigma(s)\,ds=g^-(s_0),
\end{aligned}\right. \tag{4.10}$$

где

$$
\left\{
\begin{aligned}
M_1(s_0, s) &= K_1(s_0, s) + \tfrac{1}{2} i\, \overline{\alpha(s_0)}\, t'(s) \frac{d}{ds} \ln \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} \\
M_2(s_0, s) &= K_2(s_0, s) + \tfrac{1}{2} i\, \overline{\alpha(s_0)}\, t'(s) \frac{d}{ds} \ln \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} \\
N(s_0, s) &= K(s_0, s) + \tfrac{1}{2}\, \overline{\alpha(s_0)}\, t'(s) \frac{d}{ds} \ln \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}.
\end{aligned}
\right. \tag{4.11}
$$

## 5. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ (4.10) К ОДНОМУ СИНГУЛЯРНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Вычитаем второе уравнение системы (4.10) из первого. Получим:

$$
\begin{gathered}
2[a(s_0)\cos\Theta + b(s_0)\sin\Theta]\,\varrho(s_0) - \\
-2\,[b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta]\,\sigma(s_0) + \\
+2\,c(s_0)\int_L \omega(s_0, s)\,\varrho(s)\,ds = f^+(s_0) - f^-(s_0) - 2\,C_1\,c(s_0).
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

Выразим $\sigma(s_0)$ из (5.1):

$$
\begin{gathered}
\sigma(s_0) = \frac{a(s_0)\cos\Theta + b(s_0)\sin\Theta}{b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta}\,\varrho(s_0) + \\
+\frac{c(s_0)}{b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta}\int_L \omega(s_0, s)\,\varrho(s)\,ds - \\
-\frac{f^+(s_0) - f^-(s_0) - 2\,C_1\,c(s_0)}{2\,[b(s_0)\cos\Theta - a(s_0)\sin\Theta]},
\end{gathered}
$$

если $b(s_0)\cos\Theta\ a(s_0)\sin\Theta$ (5.2)

Подставляя это значение $\sigma$ в первое уравнение (4.10), получим

$$
T(\varrho) \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\gamma(s_0, s)\,\varrho(s)\,ds}{t-t_0} + \int_L \Gamma(s_0, s)\,\varrho(s)\,ds = H(s_0), \tag{5.3}
$$

где $\gamma(s_0, s)$, $\Gamma(s_0, s)$, $H(s_0)$ вполне определяемые функции. Это уравнение всегда имеет решение в данном классе $h$, если уравнение

$$
T'\psi = 0 \tag{5.4}
$$

не имеет решения отличного от нуля в союзном классе $h'$ (см [5] § 112).

Если уравнение (5.4) имеет нетривиальные решения, то уравнение (5.3) разрешено в классе $h$ тогда и только тогда когда имеют место условия:

$$\int_L H(s)\psi_j\,(s)t'(s)ds=0 \quad (j=1, 2, \ldots, k'), \tag{5.5}$$

где $\psi_j$ $(j=1, 2, \ldots, k')$ — полная система линейно независимых решений союзного класса $h'$.

## 6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОСТОЯННЫХ $C_1$ И $C_2$.

## 6. О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ.

Незивестную функцию $\varrho(s)$ мы можем определить из уравнения (5.5). Подставляя $\varrho(s)$ в (5,2), найдем функцию $\sigma(s)$. Функции $\mu(s)$ и $\nu(s)$ мы можем определить из соотношений (4.2):

$$\mu(s)=\int_o^s \varrho(s_1)\,ds_1+C_1, \qquad \nu(s)=\int_o^s \varrho(s_1)\,ds_1+C_2 \tag{4.2}$$

Так как

$$\mu(o)=\nu(o)=o,$$

то

$$c_1=c_2=0.$$

Получим

$$\mu(s)=\int_o^s \varrho(s_1)\,ds_1, \qquad \nu(s)=\int_o^s \varrho(s_1)\,ds_1 \tag{6.1}$$

Так как

$$\mu(l)=\nu(l)=0,$$

то

$$\int_L \varrho(s)\,ds=0,\ \int_L \sigma(s)\,ds=0, \tag{6.2}$$

Это значит, что задача имеет решение лишь тогда, когда выполнены условия (6.2). Подставляя значения $\mu(s)$ и $\nu(s)$ из (6.1) в формулу (3.5), найдем искомую функцию $\Phi(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. П. Векуа. Об одной системе сингулярных интегродифференциальных уравнений и ее приложение в граничных задачах линейного сопряжения. Труды Института математики АН Грузинской ССР, Тбилиси 1957.

2. Ф. Д. Гахов. Кривые задачи. Москва 1958.

3. М. В. Келдыш и Л. И. Седов. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. Доклады АН СССР XVI № 1 1937.

4. Н. И. Мусхешвили. Приложение интегралов типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений. Труды Тбилисского Мат. Инст. т. X. 1941.

5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М-л 1946.

6. З. Я. Плуме. Решение задачи Неймана теории потенциала в случае одного разомкнутого контура. Известия АН Латв. ССР № 10 1953.

7. З. Я. Плуме. Некоторые граничные задачи теории дифференциальных уравнений эллиптического типа в случае разомкнутого контура Кандидатская диссертация 1952.

8. Б. Хвезелидзе. О краевой задаче Пуанкаре теории могарифмического потенциала. Доклады АН СССР т. XXX № 3 1941.

9. H. Poincare. Lecons de Mecanique Celeste, tome III 1910.

*З. Я. Плуме*

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ПУАНКАРЕ В СЛУЧАЕ РАЗОМКНУТОГО КОНТУРА

Аннотация

В работе рассматривается задача Пуанкаре: найти кусочноголоморфную функцию $\Phi(z)$, такую что ее действительная часть $U(x, y)$ удовлетворяет условиям:

$$A(s)\frac{du^+}{dn}+B(s)\frac{du^+}{ds}+c(s)u(s)=f^+(s)$$

$$A(s)\frac{du^-}{dn}+B(s)\frac{du^-}{ds}+c(s)u(s)=f^-(s)$$

на открытой линии $L$. Предлагается, что кривая $L$ принадлежит к классу кривых Ляпунова.

Задача решена путем ее редукции к сингулярному интегральному уравнению.

E. J. Plumes

on

# SOLVING THE POINCARÉ PROBLEM IN THE CASE OF AN OPEN LINE

## Annotation

The Poincaré problem — that of finding the piece holomorphe function Φ (z) и such that its real part U $(x, y)$ $u$ satisfies the following conditions:

$$A(s)\,\frac{du^+}{dn}+B(s)\,\frac{du^+}{ds}+c(s)\,u(s)=f^+(s)$$

$$A(s)\,\frac{du^-}{dn}+B(s)\,\frac{du^-}{ds}+c(s)\,u(s)=f^-(s)$$

on an open line L is considered.

The line L is supposed to be of Liapunoff's class. The problem is solved by means of reduction to a singular integral equation.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*Л. И. Рубинштейн*

# ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С УСИЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ*

Задача Стефана об определении поля температур в среде с изменяющимся фазовым состоянием привлекала последние годы внимание многих исследователей. При этом отчетливо выявилось два принципиально различных подхода к самой проблеме.

В работах первого направления акцентируется то, что задача Стефана является задачей со свободной границей. При таком подходе выписываются, тем или иным методом, явные уравнения, определяющие свободную границу (границу раздела фаз), причем иногда удается отделить задачу отыскания этой границы от задачи определения температуры внутри каждой фазы**.

К этому направлению принадлежат работы наши [2]—[8], Ивенса [10], Сестини [11], [12], Дугласа [13], [14], Колоднера [15], Меламеда [16], Фридмана [17]—[20], Миранкера [21] и Кинера [22]. Методы, применявшиеся во всех этих работах, при всем их различии между собой, приводят к построению классического решения задачи Стефана. При этом, как правило, задача решается первоначально в «малом», в предположении, что область начального существования каждой фазы не вырождается в точку***. Располагая решением задачи в малом удается осуществлять его продолжение на произвольно заданный промежуток времени, т. е. строить решение в большом [8], [20].

*) Доложено на IV всесоюзном математическом съезде. См. также [1].

**) Здесь и ниже мы пользуемся термической интерпретацией задачи, что конечно, не обязательно.

***) Имеется в виду одномерная задача.

В большинстве работ указанного направления предполагается, что свободная граница является изотермой. Однако, как показано нами [5] и Колоднером [15] это предположение не является существенным. Можно считать, что температура свободной поверхности является заданной гладкой функцией от координат ее точек.

На том же пути решаются задачи, в которых на свободной границе выполняются обычные условия сопряжения многослойных задач [9].

Второе направление, представленое работами Л. Каменомостской [23] и О. А. Олейник [24], приводит не к классическому, но к обобщенному решению задачи. Для метода Каменомостской-Олейник существенно то, что свободная граница является изотермой. Число же фаз может быть переменным во времени. Таким образом метод Каменомостской-Олейник не накладывает никаких ограничений на область начального существования каждой фазы.

Обобщенное решение задачи строится в классе суммируемых функций. Эквивалентность его классическому решению, в случае существования последнего, вытекает из теоремы единственности и теоремы, утверждающей, что классичское решение задачи является также и обобщенным ее решением.

Нам представляется интересным отметить, что подход к решению задачи Стефана, развитый Каменомостской и Олейник, существенно связан с тем, что задача Стефана может быть сформулирована (в случае изотермичности границы раздела фаз), как обычная квазилинейная краевая задача для уравнения теплопроводности с разрывными коэффициентами. Условие сопряжения в местах разрыва коэффициентов (так называемое условие Стефана) используется при построении обобщенного решения только для редукции исходного уравнения к уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial t} a(u) = \mathrm{L}\, u \tag{1}$$

Из всего дальнейшего хода анализа условие Стефана совершенно выпадает.

Таким образом при построении обобщенного решения задачи Стефана акцентируется то, что это задача, поставленная для уравнения с разрывными коэффициентами, в то время как при построении классического решения акцентируестя характер этой задачи, как задачи со свободной границей. Это различие представляется нам существенным по двум причинам. С одной стороны во многих прикладных задачах интерес представляет определение одной лишь границы раздела фаз, а не распределения температур внутри области, заполненной каждой из фаз С другой стороны само введение понятия обобщенного решения задачи основано на изучении уравнения (1) методами, специфичными для линейных задач. Это дает некоторым исследователям повод относить задачу Стефана к числу задач со «слабой нелинейностью»*. Между тем отказ от изотермичности границы раздела фаз и акцентирование наличия свободной границы позволяет вводить в формулировку задачи Стефана нелинейности сколь угодно сложного характера, притом совершенно естественно с точки зрения приложений.

Ниже рассматривается следующий вариант задачи Стефана с усиленной нелинейностью и акцентированием влияния наличия свободной границы на все течение процесса.

Требуется найти $y(t)$ и $u(x, t)$ так, что $u(x, t)$ и $\frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$ определены и непрерывны внутри параболической области $D$**:

$$D=\{o<x<y(\tau);\ o<\tau<t;\quad o<t<\infty\}$$

причем внутри $D$ $u$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, y, \dot{y}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{0.1}$$

и на границе $D$ (т. е. при $x=o$, $x=y\ (t)$ и $t=o$) условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(t, u) \quad \text{при } x=o; \tag{0.2}$$

$$u=\varphi(x) \quad \text{при } t=o; \tag{0.3}$$

$$u=\psi\,[y(t)] \quad \text{при } x=y(t); \tag{0.4}$$

$$\dot{y}(t) = Z\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, y\right) \text{ при } x=y(t);\ y(o)=l>o \tag{0.5}$$

Задача (0,1)—0,5) рассматривается ниже абстрагированно от какой либо конкретной физической интерпретации, поскольку нас интересует здесь одна лишь математическая сторона вопроса. Отметим только, что введение в уравнение (0,1) зависимости $F$ от $y$ и $y'$ позволяет, в частности, включить в рассмот-

---

*) Так было сделано О. А. Ладыженской в ее обзорном докладе на четвертом всесоюзном математическом съезде.

**) Следуя Пини [25] мы называем область $D=\{\chi_1(\tau)<x<\chi_2(\tau);\ o<\tau<t\}$ параболической, если точки интервала $\chi_1(t)<x<\chi_2(t)$ считаются ее внутренними точками при любом $t>o$, так что граница $D$ состоит из отрезка $\chi_1(o)\leqslant x(o)\leqslant\chi_2$; $t=o$ и линий $x=\chi_i(\tau)$ $(i=1,2)$; $o\leqslant\tau\leqslant t$.

рение задачи с излучением материи или энергии на свободной границе (на поверхности раздела фаз), с поглощением этого излучения в объеме, заполненном изучаемой средой.

## § 1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ

**1.1.** Наша ближайшая цель состоит в редукции задачи (0.1)—0,5) к системе интегральных уравнений. Будем сперва рассматривать вспомогательную задачу.

Пусть $\chi_i(t)$ $(i=1, 2.)$ имеют при $o<t<\infty$ непрерывные производные первого и второго порядка, причем $\chi_i(t)$ растут при $t\to o$ не быстрее чем $t^{-1/2}$ и

$$\chi_1(t)<x<\chi_2(t); \quad o\leq t\leq\infty.$$

Рассмотрим область $D$

$$D=\{\chi_1(\tau)<x<\chi_2(\tau); \quad o<(\tau)\leq t; \quad o<t<\infty\}$$

с параболической границей

$$\Gamma=\{x=\chi_i(\tau) \ o\leq\tau\leq t; \quad (i=1, 2); \ \chi_1(o)\leq x\leq\chi_2(o); \quad \tau=o\}$$

Пусть $u$ непрерывна в $D^*=D+\Gamma$ вместе с $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и удовлетворяет внутри $D$ уравнению

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x, t)=\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{1.1.1}$$

Пусть $E(x, t)$ фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$E(x, t)=(2\sqrt{\pi t})^{-1}exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \tag{1.1.2}$$

Имеет место интегральное представление

$$\begin{aligned}u(x, t)=\int_\Gamma a^2\Big[\frac{\partial u}{\partial\xi}E(x-\xi, a^2(t-\tau)) &- \\ -u(\xi, \tau)\frac{\partial}{\partial\xi}E(x-\xi, a^2(t-\tau))\Big]d\tau &+ \\ +\int_\Gamma u(\xi, \tau)\, E(x-\xi, a^2(t-\tau))d\xi &+ \\ +\iint_D F(\xi, \tau)E(x-\xi, a^2(t-\tau))d\xi\, d\tau.\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Равенство (1.1.3) бдуем ниже называть фундаментальной формулой. В ней можно заменить $E$ функцией Грина любой из трех классических краевых задач, определенных для области $D$ или любой области $D'$ покрывающей область $D$.

Предположим, что область $D$ лежит по одну сторону от прямой $x=x_0$. Заменим $E$ в (1.1.3) функцией Грина второй краевой задачи для полупрямой $x>x_0$ $(x<x_0)$:

$$G(x, \xi, t)=E(x-\xi, a^2t)+E(x+\xi-2x_0, a^2t) \tag{1.1.4}$$

и введем обозначения

$$u\Big|_{x=\chi_i(t)}=w_i\ (t);\ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\chi_i\ (t)}=v_i\ (t);\ u\Big|_{t=o}=\varphi(x). \tag{1.1.5}$$

Тогда (1.1.3) можно, пользуясь дифференцируемостью $\chi_j\ (t)$ $(j=1,2)$, записать в виде:

$$u(x, t)=\int_o^t [a^2v_i\tau)+w_i\ (\tau)\dot{\chi}_i\ (\tau)]\, G(x, \chi_i(\tau), t-\tau)\Big|_{i=1}^{2} d\tau+$$

$$+\int_{\chi_1(o)}^{\chi_2(o)} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, t)\,d\xi-$$

$$-a^2\int_o^t w_i(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G(x, \chi_i(\tau), t-\tau)\Big|_{i=1}^{2} d\tau+$$

$$+\int_o^t d\tau\int_{\chi_1(\tau)}^{\chi_2(\tau)} F(\xi, \tau)\, G(x, \xi, t-\tau)\,d\xi. \tag{1.1.6}$$

Положим

$$q(x, t)=\frac{\partial}{\partial x}u(x, t);\quad \chi_1(t)<x<\chi_2(t);\quad t\geqslant o \tag{1.1.7}$$

и найдем его интегральное представление, пользуясь (1.1.5).

Пусть $g(x, \xi, t-\tau)$ функция Грина первой краевой задачи для полупрямой $x \gtrless x_0$:

$$g(x, \xi, t)=E(x-\xi, a^2t)+E(x+\xi-2x_0, a^2t) \tag{1.1.8}$$

Пусть, далее, $\xi(\tau)$ некоторая дифференцируемая функция. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t-\tau) &= -\frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \xi, t-\tau); \\ \frac{\partial}{\partial x} g(x, \xi, t-\tau) &= -\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi, t-\tau); \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.8_1)$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} G(x, \xi(\tau), t-\tau) &= \left(\frac{d}{d\tau} - \dot{\xi}(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) g(x, \xi(\tau), t-\tau) \\ a^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} g(x, \xi(\tau), t-\tau) &= \left(\frac{d}{d\tau} - \dot{\xi}(\tau)\frac{\partial}{\partial \xi}\right) G(x, \xi(\tau), t-\tau) \end{aligned}\right\} (1.1.8_2)$$

Пусть $\chi_1(t) < x < \chi_2(t)$; $t > o$. Тогда при вычислении $q(x, t)$ можно дифференцирование в правой части (1.1.5) производить под знаками интегралов. Пользуясь $(1.1.8_1)$ и $(1.1.8_2)$ и интегрируя в нужных местах по частям, найдем

$$\begin{aligned} q(x, t) = &\sum_{j=1}^{2} (-1)^j [w_j(o) - \varphi(\chi_j(o))] g(x, \chi_j(o), t) + \\ &+ \int_{\chi_1(o)}^{\chi_2(o)} \dot{\varphi}(\xi) g(x, \xi, t) d\xi + \\ &+ \sum_{j=1}^{2} \left\{ (-1)^{j+1} \int_o^t \dot{\omega}_j(\tau) g(x, \chi_j(\tau), t-\tau)\, d\tau + \right. \\ &\left. (-1)^{j+1} a^2 \int_o^t v_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \chi_j(\tau), t-\tau) d\tau \right\} - \\ &- \int_o^t d\tau \int_{\chi_1(\tau)}^{\chi_2(\tau)} F(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \xi, t-\tau) d\xi. \end{aligned} \qquad (1.1.9)$$

Заметим, что в силу условия непрерывности $u$ в $D^*$

$$w_j(o) = \varphi(\chi_j(o)) \quad (j = 1, 2). \qquad (1.1.10)$$

и следовательно первые два слагаемых в правой части тождественно равны нулю.

Перейдем теперь в (1.19) к пределу при $x \to \chi_k(t)$ $(k=1, 2)$. Пользуясь теоремой о разрывах теплового потенциала двойного слоя, согласно которой

$$\lim_{x \to \chi_j(t) + (-1)^{j+1}} (-1)^{j+1} a^2 \int_0^t v_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \chi_j(\tau), t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \tfrac{1}{2} v_j(t) + (-1)^{j+1} a^2 \int_0^t v_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(\chi_j(t), \chi_j(\tau), t-\tau)\, d\tau, \quad (1.1.11)$$

и учитывая (1.1.10) и (1.1.5) найдем

$$v_k(t) = 2\left\{ \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} \int_0^t [\dot{w}(\tau) g(x, \chi_j(\tau), t-\tau) + \right.$$

$$+ a^2 v_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \chi_j(\tau), t-\tau)]\, d\tau + \int_{\chi_1(o)}^{\chi_2(o)} \varphi(\dot{\xi}) g(x, \xi, t)\, d\xi -$$

$$\left. - \int_0^t d\tau \int_{\chi_1(\tau)}^{\chi_2(\tau)} F(\xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} g(x, \xi, t-\tau)\, d\xi \right\}\Bigg|_{x=\chi_k(t)} \quad (1.1.12)$$

Аналогично, переходя к пределу в (1,1.5), получим

$$w_j(t) = 2\left\{ \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \int_0^t [(a^2 v_j(\tau) + w_j(\tau) \dot{\chi}_i(\tau)) G(x, \chi_j(\tau), t-\tau) - \right.$$

$$- a^2 w_j(\tau) \frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \chi_j(\tau), t-\tau)]\, d\tau +$$

$$\left. + \int_{\chi_1(o)}^{\chi_2(o)} \varphi(\xi) G(x, \xi, t)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\chi_1(\tau)}^{\chi_2(\tau)} F(\xi, \tau) G(x, \xi, t-\tau)\, d\xi \right\}\Bigg|_{x=\chi_k(t)}$$

$$(1.1.13)$$

В (1.1.5), (1.1.11), (1.1.12) и (1.1.13) входят одновременно значения $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ на граничных кривых $x=\chi_1(t)$ и $x=\chi_2(t)$. Независимо же может быть задана лишь одна из величин $u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$

на каждой из этих кривых. Будем для определенности полагать, что заданы $v_1$ и $w_2$. Тогда должны считать в (1.1.12) $k=2$ и в (1.1.13) $k=1$.

**1.2.** Уравнения (1.1.12) и (1.1.13) могут быть использованы для отыскания $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению (1.1.1) при условиях

$$u\Big|_{x=\chi_2(t)} = w_2(t); \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\chi_1(t)} = v_1(t) \tag{1.2.1}$$

$$u\Big|_{t=o} = \varphi(x) \tag{1.2.2}$$

Именно, пусть из (1.1.12) и (1.1.13) найдены $v_2(t)$ и $w_1(t)$*) Внесем их в (1.1.5) и покажем, что $u(x, t)$ действительно удовлетворяет всем условиям задачи (1.1.1), (1.2.1), (1.2.2), если только $F(x, t)$ обладает необходимой степенью гладкости для того, чтобы объемный тепловой потенциал

$$\int\limits_D F(\xi, \tau) E(x-\xi, a^2(t-\tau))\, d\xi\, d\tau$$

был решением уравнения (1.1.1)**)

В этих условиях очевидно, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1.1) и начальному условию (1.2.2). Выполнение условия

$$\lim_{x\to\chi_1(t)+o} u = w_1(t) \tag{1.2.3}$$

очевидно, в силу способа построения уравнения (1.1.13). Далее, переходя к пределу при $t\to o$ и используя равенства*).***)

$$\lim_{t\to o}\int_\alpha^\beta \varphi(\xi) E(x-\xi a^2 t)\, d\xi = \begin{cases} o; \ x<\alpha; \ x>\beta \\ \frac{1}{2}\varphi(x); x=\alpha \text{ или } x=\beta \\ \varphi(x); \quad \alpha<x<\beta. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

*) При сделанных выше предположениях система (1.1.12), (1.1.13) является системой уравнений типа Вольтерра с ядрами, обладающими слабой особенностью. Следовательно она имеет единственное решение в классе непрерывных функций.

**) Это заведомо имеет место, если $F(x, t)$ удовлетворяет условию Гёльдера по $x$ и $t$. Более сильные достаточные условия найдены Жевреем (26).

***) Заметим, что если $\alpha=\chi_1(o)$; $\beta=\chi_2(o)$, то (1.2.4) будет справедливо и при $x=\chi_j(t)$ $(j=1, 2)$ или при любой непрерывной $x(t)\subset(\alpha, \beta)$.

выполняющиеся для любой непрерывной $\varphi(x)$, убедимся в том, что

$$\lim_{t\to o} w_1(t)=\varphi[\chi_1(o)] \tag{1.2.5}$$

Перейдем теперь в (1.1.5) к пределу при $x\to\chi_2(t)$. Пользуясь (1.1.11) найдем

$$\lim_{x\to\chi_2(t)} u=\tfrac{1}{2}w_2(t)+U(\chi_2(t),\ t), \tag{1.2.6}$$

где $U(x,\ t)$ означает правую часть (1.1.6). Но это значит, что

$$\lim_{t\to o}\lim_{x\to\chi_2(t)} u=\tfrac{1}{2}w_2(o)+\tfrac{1}{2}\varphi[\chi_2(o)] \tag{1.2.7}$$

Отсюда и из $w\ (o)=\varphi(\chi_2(o))$ следует, что $u$ непрерывна в точке $(\chi_2.(o),\ o)$. Сопоставляя (1.2.2), (1.2.5) и (1.2.7) убедимся в том, что $U$ непрерывна в $\overline{D}^*$. Но в таком случае из способа построения уравнения (1.1.9) очевидно, что правая часть (1.1.9) действительно равна $\frac{\partial u}{\partial x}$. Это означает, что

$$\lim_{x\to\chi_2(t)} \frac{\partial u}{\partial x}=\tfrac{1}{2}v_2(t)+Q(\chi_2(t),\ t), \tag{1.2.8}$$

где $Q$ — правая часть уравнения (1.1.9). Сопоставляя (1.2.8) и (1.1.12) (при $k=2$) убедимся в том, что действительно

$$\lim_{x\to\chi_2(t)} \frac{\partial u}{\partial x}=v_2(t). \tag{1.2.8*}$$

Заметим теперь, что по условию задачи выполняется неиспользованное до сих пор равенство

$$v_1(o)=\dot{\varphi}[\chi_1(o)] \tag{1.2.9}$$

Переходя в (1.1.9) к пределу при $x\to\chi_1(t)$ найдем

$$\lim_{x\to\chi_1(t)+o} \frac{\partial u}{\partial x}=\tfrac{1}{2}v_1(t)+Q(\chi_1(t),\ t) \tag{1.2.10}$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $t \to o$ и учитывая (1.2.4) найдем

$$\lim_{t\to o;\ x\to\chi_1(t)+o} \lim \frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2} v_1(o) + \tfrac{1}{2} \dot{\varphi}[\chi_1(o)]$$

а это, в силу (1.2.9), означает, что

$$\lim_{t\to o;\ x\to\chi_1(t)+o} \lim \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varphi}(\chi_1(o)) \tag{1.2.11}$$

Аналогично, переходя к пределу при $t \to o$ в (1 1.12) убедимся в том, что

$$\lim_{t\to o\ x\to\chi_2(t)-o} \lim \frac{\partial u}{\partial x} = \dot{\varphi}(\chi_2(o)). \tag{1.2.12}$$

Из непрерывности $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ в $\overline{D}^*$ следует, что к $u$ применима фундаментальная формула (1.1.3). Положим

$$\lim_{x\to\chi_2(t)} u = w_2^*(t); \qquad \lim_{x\to\chi_1(t)} \frac{\partial u}{\partial x} = v_1^*(t) \tag{1.2.13}$$

В таком случае (1.1.13) с заменой $E$ на $G$ даст подобно (1.1.5)

$$u(x, t) = \int_o^t [a^2 v_2(\tau) + w_2^*(\tau)\dot{\chi}_2(\tau)]\, G\,(x, \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_o^t [a^2 v_1^*(\tau) - w_1(\tau)\chi_1(\tau)]\, G(x, \chi_1(\tau), t-\tau)\, d\tau -$$

$$- a^2 \int_o^t w_2^*(\tau) \frac{\partial}{\partial\xi} G(x, \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ a_2 \int_o^t w_1(\tau) \frac{\partial}{\partial\xi} G(x, \chi_1(\tau), t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_{\chi_1(o)}^{\chi_2(o)} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, t)\, d\xi + \int_o^t d\tau \int_{\chi_1(\tau)}^{\chi_2(\tau)} F(\xi, \tau)\, G(x, \xi, t-\tau)\, d\xi. \tag{1.2.14}$$

Положим

$$v_1(t) - v_1^*(t) = v(t);\; w_2(t) - w_2^*(t) = w(t). \tag{1.2.15}$$

Вычитая (1.2.14) из (1.1.5) получим

$$o = -\int_o^t w(\tau)\dot{\chi}_2(\tau)\, G(x,\chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau - a^2\int_o^t v(\tau)\, G(x, \chi_1(\tau), t-\tau)\, d\tau -$$

$$-a^2\int_o^t w(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} G(x, \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau. \tag{1.2.16}$$

Переходя здесь к пределу при $x \to \chi_2(t) - o$ с помощью (1.1.11) найдем

$$w(t) = 2\left\{\int_o^t w(\tau)\dot{\chi}_2(\tau)\, G(\chi_2(t), \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau - \right.$$

$$-a^2\int_o^t v(\tau)\, G(\chi_2(t), \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau -$$

$$\left. -a^2\int_o^t w(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} G(\chi_2(t), \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau\right\} \tag{1.2.17}$$

С другой стороны дифференцируя (1.2.16) по $x$, пользуясь ($1.1.8_1$) и переходя к пределу при $x \to \chi_1(t) + o$ найдем

$$v(t) = 2\left\{\int_o^t w(\tau)\dot{\chi}_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} g(\chi_1(t), \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau + \right.$$

$$+a^2\int_o^t v(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} g(\chi_1(t), \chi_1(\tau), t-\tau)\, d\tau +$$

$$\left. +a^2\int_o^t w(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} g(\chi_1(t), \chi_2(\tau), t-\tau)\, d\tau\right\} \tag{1.2.18}$$

Система (1.2.17)—(1.2.18) является однородной системой интегральных уравнений типа Вольтера с ядрами, обладающими слабой особенностью (т. е. ядрами, все повторные ядра которых, начиная с неоторого номера, ограничены). Следовательно она имеет только тривиальное решение $w(t)=v(t)=o$ что и т. д.*

**1.3.** Вернемся теперь к исходной задаче Стефана (0.1) (0.5). Допустим что решение ее существует и определено при $o\leqslant t\leqslant T$, причем при этих $t$

$$o<\varrho\leqslant y(t). \tag{1.3.1}$$

В этом предположении $F(x,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ y,\ \dot{y})$, $f(t,\ u)$, $\psi(y)$ и $Z(t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ y)$ можно считать известными функциями от $t$ и $x$ Следовательно к $u$ и $y$ применима развитая выше теория.

Примем

$$\chi_1(t)=o;\quad \chi_2(t)\equiv y(t);\quad x_0=o; \tag{1.3.2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=y(t)}=w(t);\quad u\left.\vphantom{\frac{\partial u}{\partial x}}\right|_{x=o}=v(t);\quad \dot{y}(t)=z(t). \tag{1.3.3}$$

При таком выборе $x_0$ из (1.1.5) выпадут слагаемые, зависящие от $u\,|_{x=o}$ Поэтому (1.1.5), (1.1.9), (1.1.12) и (1.1.13) запишутся теперь в виде:

$$\begin{aligned} &u(x,\ t)=U(x,\ t\,|\,f,\ \varphi,\ \psi,\ F,\ u,\ q,\ w,\ v,\ y,\ z);\\ &q(x,\ t)=Q(x,\ t\,|\,f,\ \dot{\varphi},\ \dot{\psi},\ F,\ u,\ q,\ w,\ v,\ y,\ z);\\ &v(t)=2\ Q\,|_{x=y(t)}=V(t\,|\,f,\ \dot{\varphi},\ \dot{\psi},\ F,\ u,\ q,\ w,\ v,\ y,\ z);\\ &w(t)=U\,|_{x=y(t)}=W(t\,|\,f,\ \varphi,\ \psi,\ F,\ u,\ q,\ w,\ v,\ y,\ z); \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

где

$$U(x,\ t\,|\,f,\ \varphi,\ \psi,\ F,\ u,\ q,\ w,\ v,\ y,\ z)=-$$

$$=-a^2\int\limits_o^t f(\tau,\ w(\tau))\,G(x,\ o,\ t-)\,d\tau+$$

---

*) Заметим, что для этого заключения существенно неравенство

$$\chi_1(\tau)<x<\chi_2(\tau)\qquad 0\leqslant\tau\leqslant t$$

В случае $\chi_1(o)=\chi_2(o)$ рассуждения должны быть значительно более тонкими).

$$+\int\limits_{o}^{t}[a^2 v(\tau)+\psi(y(\tau))z(\tau)]G(x, y(\tau), t-\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int\limits_{o}^{t}\psi(y(\tau))\frac{\partial}{\partial\xi}G(x, y(\tau), t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{o}^{l}\varphi(\xi)G(x, \xi, t)\,d\xi+\int\limits_{o}^{t}d\tau\int\limits_{o}^{y(\tau)}F(\xi, \tau, u, q, y, z)G(x, \xi, t-\tau)\,d\xi \tag{1.3.5}$$

$$Q(x, t\,|\,f, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, F, u, q, w, v, y, z)=$$

$$=\int\limits_{o}^{l}\dot{\varphi}(\xi)g(x, \xi, t)\,d\xi+a^2\int\limits_{o}^{t}f(\tau, w)\frac{\partial}{\partial\xi}g(x, o, t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_{o}^{t}\dot{\psi}(y(\tau))z(\tau)g(x, y(\tau), t-\tau)\,d\tau-$$

$$-a^2\int\limits_{o}^{t}v(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}g(x, y(\tau), t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\int\limits_{o}^{t}d\tau\int\limits_{o}^{y(\tau)}F(\xi, \tau, u, q, y, z)\frac{\partial}{\partial\xi}g(x, \xi, t-\tau)\,d\xi. \tag{1.3.6}$$

К системе (1.3.4) надлежит присоединить уравнение (0.5) в интегральной форме:

$$z(t)=Z(t, \psi, v, y)$$

$$y(t)=l+\int\limits_{o}^{t}Z(\tau, \psi, v, y)\,d\tau\equiv Y(t\,|\,\psi, v, y) \tag{1.3.7}$$

При написании системы (1.3.4)—(1.3.7) существенно использовано требование

$$\varphi(l)=\psi(l) \tag{1.3.8}$$

непрерывности $u$ в точке $(y(o), o)$. Поскольку $g(x, o, t)=o$ и $\chi_1=o$ слагаемое

$$[w_1(o)-\varphi(\chi_1(o)]\,g(x, \chi_1(o), \quad t)=o$$

при любых $w_1(o)$ и $\varphi(o)$. Однако, так же как в § 1.2 из уравнения (1.3.4) для $w(t)$ сразу следует, что требование непрерывности $u$ в точке $(o, o)$ автоматически учитывается этими уравнениями. Точно так же, как и в § 1.2, автоматически выполняется условие непрерывности $\frac{\partial u}{\partial x}$ в точке $(y(o), o)$ т. е. условие

$$v(o) = \dot{\varphi}(l). \tag{1.3.9}$$

Наконец из априорного условия

$$f(o, \varphi(o)) = \dot{\varphi}(o), \tag{1.3.10}$$

которое мы будем предполагать выполненным, и доказанного выполнения условия

$$w(o) = \varphi(o), \tag{1.3.10*}$$

следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, определяемая системой (1.3.4) – (1.3.7), непрерывна в точке $(o, o)$.

Система (1.3.4)—(1.3.7) получена в предположении существования решения задачи (0.1)—(0,5). Однако из рассмотрений § 1.2 и из (1.3.8) — (1.3.10) следует, что если существует решение $u(x, t)$, $y(t)$ системы (1.3.4)—1.3.7), то оно является решением исходной задачи (0.1)—(0.5) т. е. что задачи решения систем (0.1—(0.5) и (1.3.4)—(1.3.7) эквивалентны.

## § 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ В МАЛОМ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ (1.3.4)—(1.3.7)

**2.1.** Ниже будем предполагать, что $l = y(o) \subset (0,1)$ и что $F$, $f$, $\psi$, $\varphi$ и $Z$ обладают следующими свойствами: а) $f$, $\psi$ и $\varphi$ удовлетворяют (1.3.10) и (1.3.8); б) $F$, $f$, $\psi$, $\varphi$ и $Z$ определены при $o \leqslant x \leqslant 1$ и $o \leqslant t \leqslant 1$*); в) $F$, $f$ и $Z$ однократно, $\psi$ — двукратно и $\varphi$ трижды дифференцируемы; г) Неравенства

$$o \leqslant t \leqslant 1;\ o \leqslant y \leqslant 1;\ \ o \leqslant x \leqslant 1;\ |w| < N_1;\ |u| < N_2;\ |v| < N_3;$$
$$|q| < N_4;\ |z| < N_5 \tag{2.1.1}$$

*) Длины интервалов (0,1) по $x$ и $t$ выбраны произвольно, так как задача решается в малом.

влекут за собой выполнение неравенств

$$\left.\begin{array}{r} |f(t, w)| \leqslant M_1;\ |\psi(y)|;\ |\dot{\psi}(y)| \leqslant M_2;\ |Z| \leqslant M_3; \\ |F| \leqslant M_4;\quad |\varphi|;\ |\dot{\varphi}| \leqslant M_0 \end{array}\right\} \tag{2.1.2}$$

$$\left.\begin{array}{c} \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| \leqslant M_{1,1}; \left|\frac{\partial f}{\partial w}\right| \leqslant M_{1,2}; \left|\quad\right|;\ |\ddot{\psi}(y)| \leqslant M_{2,1}; \left|\frac{\partial Z}{\partial t}\right| \leqslant N_{5,1}; \\ \left|\frac{\partial Z}{\partial u}\right| \leqslant N_{5,2}; \left|\frac{\partial Z}{\partial q}\right| \leqslant N_{5,3}; \left|\frac{\partial Z}{\partial y}\right| \leqslant N_{5,4}; \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leqslant N_{4,1}; \\ \left|\frac{\partial F}{\partial t}\right| \leqslant N_{4,2}; \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right| \leqslant N_{4,3}; \left|\frac{\partial F}{\partial q}\right| \leqslant N_{4,4}; \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \leqslant N_{4,5}; \\ \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \leqslant N_{4,6}\quad |\ddot{\varphi}||\dot{\varphi}|;\ |\dddot{\varphi}| \leqslant M \end{array}\right\} \tag{2.1.3}$$

Рассмотрим, в этих предположениях, следующий итерационный

процесс. Пусть $w_0(t)$, $u_0(x, t)$, $q_0(x, t)$, $v_0(t)$, $z_0(t)$ и $y_0(t)$ произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие при $o \leqslant x \leqslant 1$; $o \leqslant t \leqslant 1$ неравествам (2.1.1), неравенствам

$$\left.\begin{array}{l} |\sqrt{t}\,\dot{w}_0(t)| < L_1;\ |\sqrt{t}\frac{\partial u_0}{\partial t}| < L_2;\ |\sqrt{t}\,\dot{v}_0(t)| < L_3; \\ |\frac{\partial q}{\partial t}\cdot\sqrt{t}| < L_4;\ |\sqrt{t}\cdot\dot{Z}_0(t)| < L_5;\ |\frac{\partial q_0}{\partial x}| < L^* \end{array}\right\} \tag{2.1.4}$$

где $L_1, \ldots, L_5, L^*$ некоторые произвольным образом фиксированные постоянные, и условиям

$$\left.\begin{array}{l} \dot{y}_0(t) = z_0(t);\qquad q_0(y_0(t), t) = v_0(t);\quad u_0(o, t) = w_0(t); \\ u_0(x, o) = \varphi(x);\ \ q_0(x, o)\,\dot{\varphi}(x);\ w_0(o) = \varphi(o);\ y_0(o) = l \end{array}\right\} \tag{2.1.5}$$

Определим, далее, $w_n, \ldots, y_n$ равенствами

$$w_n = W_n;\ u_n = U_n;\ q_n = Q_n;\ v_n = V_n;\ z_n = Z_n;\ y_n = Y_n, \tag{2.1.6}$$

где*

$$\left.\begin{aligned}
W_n &= W(w_{n-1}, u_{n-1}, \dot{q}_{n-1}, y_{n-1}, v_{n-1}, z_{n-1}, y_{n-1});\\
U_n &= U(w_n, u_{n-1}, q_{n-1}, q_{n-1}, v_{n-1}, z_{n-1}, y_{n-1}, q_{n-1});\\
Q_n &= Q(w_n, u_n, q_{n-1}, v_{n-1}, z_{n-1}, y_{n-1});\\
V_n &= V(w_n, u_n, q_n, v_{n-1}, z_{n-1}, y_{n-1}).\\
Z_n &= Z(w_n, u_n, q_n, v_n, z_{n-1}, y_{n-1});
\end{aligned}\right\} \quad (2.1.6^*)$$

Нашей ближайшей задачей является доказательство существования $T>o$ такого, что при $o\leqslant x\leqslant 1$; $o\leqslant t\leqslant T$ семейства функций $\{w_n\}$; $\{u_n\}$; $\{q_n\}$; $\{v_n\}$ и $\{z_n\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Отсюда, из теоремы Арцела и непрерывности операторов $W \ldots Z$ будет, очевидно, следовать существование в малом решения системы (1.3.4) — (1.3.7).

2.2. Итак докажем существование $T_0>o$ такого, что если $w$, $u$, $q$, $v$ и $z$ удовлетворяют (2.1.1) при $o<x<1 \cdot o\leqslant t\leqslant T_0$, то этим же неравенствам будут удовлетворять значения действу-

---

*) В выражении оператора $Q$ входит потенциал двойного теплового слоя

$$a^2 \int\limits_o^t v(\tau)\, \frac{\partial}{\partial \xi}\, E(x) - y(\tau),\, a^2(t-\tau))\, d\tau,$$

испытывающий разрыв при переходе через точку $(x=y(t),\ t)$. При построении уравнений (1.3.4)—(1.3.7) мы считали $o<x<y(t)$. При определении же итераций мы должны считать, что $u_n$ и $y_n$ определены при $o<x<y_n$ т. е. вообще говоря, в области более широкой, чем область непрерывности оператора $Q$. Во избежание связанных с этим затруднений будем считать оператор $Q$ продолженным по непрерывности. Иными словами добавим в правую часть (1.3.6) слагаемое $v(t)\,\eta(t-y(t))$, где $\eta(x)$ единичная функция, т. е.

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x<o \\ \frac{1}{2} & x=o \\ 1 & x>o \end{cases}$$

ющих на них операторов $W$, $U$, $Q$, $V$ и $Z$. С этой целью введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&J_{1,i}(x, t, \xi, \tau \mid f(x, t, \xi, \tau)) = \\
&= a^2 \int_0^t f(x, t, \xi, \tau)\, E(x+(-1)^i \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau; \\
&J_{2,i}(x, t, \xi, \tau \mid f(x, t, \xi, \tau)) = \\
&= a^2 \int_0^t f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} E(x+(-1)^i \xi, a^2(t-\tau))\, d\tau; \\
&J_{3,i}^{\alpha\beta}(x, t, \xi \mid f(x, t, \xi)) = \\
&= \int_\alpha^\beta f(x, t, \xi)\, E(x+(-1)^i \xi, a^2 t)\, d\xi; \\
&J_{4,i}(x, t, \xi, \tau, \alpha, \beta \mid f(x, t, \xi, \tau)) = \\
&= \int_0^t d\tau \int_\alpha^\beta f(x, t, \xi, \tau) E(x+(-1)^i \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi; \\
&J_{5,i}(x, t, \xi, \tau, \alpha, \beta \mid f(x, t, \xi, \tau)) = \\
&= \int_0^t d\tau \int_\alpha^\beta f(x, t, \xi, \tau) \frac{\partial}{\partial \xi} E(x+(-1)^i \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi;
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.1)$$

В этих обозначениях (1.3.5) и (1.3.6) запишутся в виде:

$$\begin{gathered}
U(x, t \mid f, \varphi, F, u, q, w, v, y, z) = \\
= \sum_{i=1}^{2} [\, J_{1,i}(x, t, o, \tau \mid -f(\tau, w(\tau)) + \\
+ J_{1,i}(x, t, y(\tau), \tau \mid v(\tau) + a^{-2}\varphi(y(\tau)) z(\tau)) + \\
+ J_{2,i}(x, t, y(\tau), \tau \mid -\psi(y(\tau))) + \\
+ J_{3,i}^{o,l}(x, t, \xi \mid \varphi(\xi)) + J_{4,i}(x, t, \xi, \tau, o, y(\tau) \mid F(\xi, \tau, u, q, y, z))].
\end{gathered} \qquad (2.2.2)$$

$$Q(x, t \mid f, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, F, w, u, q, v, z, y) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} [J_{1,i}(x, t, y(\tau), \tau \mid a^{-2}\dot{\psi}(y(\tau))z(\tau)) +$$
$$+ J_{2,i}(x, t, o, \tau \mid f(\tau, w(\tau))) + J_{2,i}(x, t, y(\tau), \tau \mid -v(\tau)) +$$
$$+ J_{3,i}^{o,l}(x, t, \xi \mid \dot{\varphi}(\xi)) + J_{5,i}(x, t, \xi, \tau, o, y(\tau) \mid -F(\xi, \tau, u, q, y, z)] +$$
$$+ v(t)\eta(x - y(t)). \tag{2.2.3}$$

Итак, пусть имеет место (2.1.1). Возьмем $T_0^* > o$ столь малое, что

$$o < \varrho \leqslant l - N_5 T_0^* < l + N_5 T_0^* \leqslant 1, \tag{2.2.4}$$

где $\varrho$ некоторая константа. Тогда заведомо

$$o < \varrho \leqslant y = l + \int_o^t z(\tau)\, d\tau \leqslant 1; \quad o \leqslant t \leqslant T_0^*. \tag{2.2.4*}$$

Пусть $x(t)$ и $\xi(\tau)$ произвольные дифференцируемые функции, такие что

$$o \leqslant \xi(\tau);\ x(t) \leqslant 1;\ |\dot{x}(t)|;\ |\dot{\xi}(\tau)| \leqslant N_5 \text{ при } o \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T_0{}^*. \tag{2.2.5}$$

Пусть, наконец, функциональный аргумент $f$ в определениях (2.2.1) удовлетворяет неравенству

$$|f| < M \quad \text{при} \quad o \leqslant x,\ \xi \leqslant 1;\ o \leqslant \tau,\ t \leqslant T_0^*. \tag{2.2.6}$$

Очевидны оценки

$$\left| J_{3,i}^{\alpha,\beta}(x(t), t, \xi \mid f) \right| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \left| \int_c^d e^{-\lambda^2} d\lambda \right| \leqslant M; \tag{2.2.7}$$

$$|J_{1,i}(x(t), t, \xi(\tau), \tau \mid f)| \leqslant \frac{aM}{2\sqrt{\pi}} \int_o^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \frac{aM}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}; \tag{2.2.8}$$

$$|J_{4,i}(x(t), t, \xi, \tau, \alpha, \beta \mid f)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_o^t d\tau \left| \int_e^d e^{-\lambda^2} d\lambda \right| < M t; \tag{2.2.9}$$

$$|J_{5,i}(x(t),\ t,\ \xi(\tau),\ \tau,\ \alpha,\ \beta\,|\,f)|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\left|\int\limits_c^d e^{-\lambda^2}\,d\lambda\right| < \frac{M}{a\sqrt{\pi}}\sqrt{t}. \qquad (2.2.10)$$

Здесь

$$c=\frac{x(t)+(-1)^i\alpha}{2\,a\sqrt{t}};\quad d=\frac{x(t)+(-1)^i\beta}{2\,a\sqrt{t}}. \qquad (2.2.11)$$

Далее

$$J_{2,i}\,(x(t),\ t,\ \xi(\tau),\ \tau\,|\,f)=\frac{1}{4\,a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t f\,\frac{x(t)-\xi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{[x(t)-\xi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t f\cdot\frac{x(t)-\xi(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{[x(t)-\xi[t)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\cdot e^{\left\{\frac{x(t)-\xi(t)}{4a^2}\cdot\frac{\xi(t)-\xi(\tau)}{t-\tau}+\left(\frac{\xi(t)-\xi(\tau)}{t-\tau}\right)^2\cdot\frac{t-\tau}{4a^2}\right\}}+$$

$$+\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t f\,\frac{x(t)-\xi(t)}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{[x(t)-\xi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}}\,d\tau. \qquad (2.2.12)$$

отсюда и из

$$|\dot{\xi}(\tau)|<N_5;\ \ \xi(t),\ x(t)\subset[0,1]$$

следует оценка

$$|J_{2,1}\ (x(t),\ t,\ \xi(\tau),\tau\,|\,f)|<$$

$$<M\left[\ \varepsilon A\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{|x(t)-\xi(t)|}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\,\lambda+N_5\frac{1}{4a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\right],$$

где

$$A=\tfrac{1}{2}\,e^{\frac{2+N_5^2\,T_0^*}{4a^2}};\quad \varepsilon=\begin{cases}1 \text{ при } x(t)\neq\xi(t)\\ 0 \text{ при } x(t)=\xi(t)\end{cases} \qquad (2.2.12^*)$$

Итак

$$|J_{2,1}(x(t),\ t,\ \xi(\tau),\tau\,|\,f)<M\ \left|\varepsilon\,A\,Erfc\ \frac{|x(t)-\xi(t)|}{2\,a\sqrt{t}}+\frac{N_5}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\right| \qquad (2.2.13)$$

Наконец $J^{2,2}$ оценится так же, как $J_{2,1}$, если в оценке последней заменить $\xi$ на $-\xi$. Таким образом

$$|J_{2,2}(x(t),\ t,\ \xi(\tau),\ \tau\,|\,f)|<M\left[\ A\,Erfc\ \frac{|x(t)-\xi(t)|}{2\,a\sqrt{t}}+\frac{N_5}{2a\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\right] \tag{2.2.14}$$

Сопоставляя оценки (2.2.7)—(2.2.10), (2.2.13) и (2.2.14) с (2.2.2) и (2.2.3) и учитывая (2.1.2) получим

$$|U|<\left\{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[\ a(M_1+N_3)+\frac{3}{2a}M_2N_5\ \right]+\right.$$

$$\left.+2\,M_0+2\,M_4t+AM_2\left(\varepsilon\,Erfc\ \frac{|x-y(t)|}{2\,a\sqrt{t}}\ +Erfc\ \frac{|(x+y(t)|}{2\,a\sqrt{t}}\right)\right\} \tag{2.2.15}$$

$$|Q|<\left\{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[2\ M_4+N_5(M_1+M_2+M_3)\right]+M_1A(1+\varepsilon)\ Erfc\ \frac{x}{2a\sqrt{t}}+\right.$$

$$+2\,M_0+\ N_3A\left(\varepsilon\ Erfc\left|\frac{x-y(t)}{2\,a\sqrt{t}}\right|+Erfc\ \frac{x+y(t)}{2\,a\sqrt{t}}\right)+N_3\,\eta\,(x-y(t). \tag{2.2.16}$$

Здесь $\varepsilon>o$ определено согласно (2.2.12*).

Потребуем теперь выполнения неравенства

$$N_3>3\,M_0 \tag{2.2.17}$$

и зафиксируем $N_3$. Далее потребуем выполнения неравенства

$$N_5\geqslant M_3 \tag{2.2.18}$$

и зафиксируем $N_5$. Это возможно, так как $M_0$ не зависит от $u,\ w,\ q,\ v$ и $z$, а $M_3$ зависит только от $M_2$, независящего от $u,\ w,\ q,\ v$ и $z$ и от $N_3$, ибо

$$Z=Z(t,\ \psi(y),\ v,\ y);\qquad (M_3\geqslant|\,Z\,|). \tag{2.2.18*}$$

Потребуем теперь выполнения неравенств

$$N_1;\ N_2>3\ (M_0+AM_2);N_4>3(M_0+AM_1)+AN_3+N_3.$$

и зафиксируем $N_1$, $N_2$ и $N_4$. Это возможно при зафиксированных $N_3$ и $N_5$ ибо $M_0$ и $M_2$ не зависит от $N_i$ $(i=1,2,\ \ldots,\ 5)$, $A$ — зависит только от $N_5$, а $M_1$ — только от $N_1$.

После того, как зафиксированы $N_i$ $(i=1,2,\ \ldots,\ 5)$ можно, очевидно, выбрать $T_0>o$ так, что при $o\leqslant t\leqslant T_0\leqslant T_0{}^*$ будут одновременно выполняться неравенства

$$|\,U\,|\leqslant N_2;\ |\,W\,|\leqslant N_1;\ |\,V\,|\leqslant N_3;\ \ |\,Q\,|\leqslant N_4;\,|\,Z\,|\leqslant N_5, \tag{2.2.19}$$

а это и доказывает наше утверждение.

2.3. Допустим теперь, что $u$, $w$, $q$, $v$ и $z$ удовлетворяют не только (2.1.1) и (1.3.8)—(1.3.10*), но и (2.1.4) и докажем, что тогда определяемые ими значения операторов $W$, $U$, $Q$, $V$ и $Z$ также удовлетворяют (2.1.4), если только $o \leqslant x \leqslant 1$; $o \leqslant \xi \leqslant 1$, $o \leqslant \tau$, $t \leqslant \leqslant T \leqslant T_0$, где $T > o$ достаточно мало.

Мы не будем приводить все детали вычислений $\frac{dW}{dt} \dots \frac{dZ}{dt}$, $\frac{dQ}{dx}$, но укажем только их схему.

1. Во всех интегралах по $\tau$ заменяем $\tau$ на $t-\tau$ и возвращаемся к старой переменной в конце вычисления.

2. При дифференцировании функций Грина по $t$ пользуемся равенствами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} G(x(t), \xi(t-\tau), \tau) = \dot{\xi}(t-\tau) \frac{\partial}{d\xi} G(x(t), \xi(t-\tau), \tau) - \\
&\qquad - \dot{x}(t) \frac{\partial}{d\xi} g(x(t), \xi(t-\tau), \tau); \\
&\qquad a^2 \frac{d}{dt} \frac{\partial}{d\xi} G(x(t), \xi(t-\tau), \tau) = \\
&= \dot{\xi}(t-\tau) \left[\frac{d}{d\tau} + \dot{\xi}(t-\tau) \frac{\partial}{d\xi}\right] G(x(t), \xi(t-\tau), \tau) - \\
&\qquad - \dot{x}(t) \left(\frac{d}{d\tau} + \dot{\xi}(t-\tau) \frac{\partial}{d\xi}\right) g(x(t), \xi(t-\tau), \tau).
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.1)$$

и аналогичными выражениями $\frac{dg}{dt}$ и $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{d\xi} g$.

3. Интегралы, в которых содержатся $\frac{dG}{d\tau}$ и $\frac{\dot{d}}{d\tau} g$ преобразуем интеграцией по частям.

Таким образом получаем:

$$\frac{dU(x, t\dots)}{dt} = -a^2 \int_o^t \frac{d}{d\tau} f(\tau, w(\tau))\ G(x, o, t-\tau) d\tau +$$

$$+ \int_o^t [a^2 \dot{v}(\tau) + z(\tau) F(y(\tau), \tau \dots)]\ G(x, y(\tau), t-\tau) d\tau +$$

$$+\int_o^t a^2 z(\tau)v(\tau)\ \frac{\partial}{d\xi}\ G(x,\, y(\tau),\, t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_o^l [a^2\ddot{\varphi}(\xi)+F(\xi,\, o,\, \ldots)]\, G(x,\, \xi,\, t)\,d\,\xi+$$

$$+\int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} \frac{d}{d\tau}\, F(\xi,\, \tau\ldots)\ G(x,\, \xi,\, t-\tau)\,d\xi-$$

$$-a^2\int_o^t z(\tau)\,\dot{\psi}(y(\tau))\ \frac{\partial}{d\xi}\ G(x,\, y(\tau),\, t-\tau)\,d\tau\equiv U^* \tag{2.3.2}$$

Здесь

$$o\leqslant x<y(t). \tag{2.3.2*}$$

Аналогично

$$\frac{d}{dt}\,Q(x(t),\, t)=\Big\{\ z(o)\left[\dot{\psi}(l)-v(o)\right]-$$

$$-a^2\ddot{\varphi}(l)-F(l,\, o\ldots)\Big\}g(x(t),\, l,\, t)+$$

$$+\int_o^l\Big\{\left[a^2\dddot{\varphi}(\xi)+\ \frac{\partial}{\partial\xi}\ F(\xi,\, o,\, \ldots)\right]g(x(t),\, \xi,\, t)+$$

$$+\dot{x}(t)\ddot{\varphi}(\xi)\ G(x,(t),\, \xi,\, t)\ \Big\}\, d\xi+$$

$$+a^2\int_o^t \frac{d}{d\tau}\, f(\tau,\, w(\tau))\,\frac{\partial}{\partial\xi}\ g(x(t),\, o,\, t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_o^t \dot{x}(t)\ \frac{d}{d\tau}\, f(\tau,\, w(\tau))\, G(x(t),\, o,\, t-\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_o^t\left\{\frac{d}{d\tau}\,z(\tau)\left[\dot{\psi}(y(\tau))-v(\tau)\;\right]g\,(x(t),\,y(\tau),\,t-\tau)+\right.$$

$$\left.\dot{x}(t)\,\dot{v}(t)\,G\,(x(t),\,y(\tau),\,t-\tau)\right\}d\tau+$$

$$+\int_o^t\left\{z(\tau)\left[\,z(\tau)\,\left(\,\dot{\psi}\,(y(\tau))-v(\tau)\right)-\,F\,(y(\tau),\,\tau\,\ldots)\,\right]-\right.$$

$$\left.-a^2\dot{v}\,(\tau)\right\}\frac{\partial}{\partial\xi}\,g\,(x(t),\,y(\tau),\,t-\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_o^t d\tau\int_o^{y(\tau)}\left[\frac{\partial}{\partial\tau}\,F\,(\xi,\,\tau\ldots)\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,g\,(x(t),\,\xi,\,t-\tau)+\right.$$

$$\left.+\,\dot{x}(t)\;\frac{\partial}{\partial\xi}\,F\,(\xi,\,\tau\ldots)\;\frac{\partial}{\partial\xi}\,G\,(x(t),\,\xi,\,t-\tau)\,\right]d\tau=Q^*\quad(2.3.3)$$

Здесь

$$o<x(t)<y(t)\qquad\text{при}\qquad x(t)\equiv\!\!/\!\!\equiv y(t)\qquad(3.2.3^*)$$

либо

$$x(t)\equiv y(t)\qquad(2.3.3^{**})$$

Точки над знаком функции, как и выше, означают производную по аргументу, $\frac{d}{d\tau}$ — полная производная, $\frac{\partial}{\partial\tau}$ — полная частная производная, так что

$$\frac{d}{d\tau}\,F\,(\xi,\,\tau,\,f\,(\xi,\,\tau))\,\Bigg|_{\xi=\xi(\tau)}=\left(\frac{\partial I}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial f}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{d\tau}\;+\frac{\partial F}{d\tau}+\frac{\partial F}{\partial f}\,\frac{\partial f}{d\tau}$$

$$\text{и}\;\;\frac{\partial}{\partial\tau}\,F\,(\xi,\,\tau,\,f\,(\xi,\,\tau))\,\Bigg|_{\xi=\xi(\tau)}=\;\frac{\partial F}{\partial\tau}+\;\frac{\partial F}{\partial f}\;\frac{\partial f}{\partial\tau}$$

для любой дифференцируемой $F\,(x,\,t,\,f\,(x,\,t))$.

Пользуясь (1.3.4) получим

$$\frac{dW}{dt}\;=W^*\equiv\;Q^*\,\Bigg|_{\,x\,\equiv\,o}\qquad(2.3.4)$$

$$\frac{dV}{dt}\;\;=V^*\equiv\;2\;Q^*\,\Bigg|_{\,x\,\equiv\,y(t)};\qquad(2.3.5)$$

Наконец

$$\frac{dQ}{dx} = \int_o^t \ddot{\varphi}(\xi)\, G(x,\, \xi,\, t)\, d\xi - \int_o^t \frac{d}{d\tau}\, f(\tau,\, w(\tau))\, G(x,\, o,\, t-\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int_o^t \dot{v}(\tau)\, G(x,\, y(\tau),\, t-\tau)\, d\tau +$$

$$+\int_o^t \Big\{ z(\tau) \Big[ v(\tau) - \dot{\psi}(y)\tau)) \Big] + F(q(\tau), \tau \ldots) \Big\} \frac{\partial}{\partial\xi} G(x,\, y(\tau),\, t-\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} \frac{\partial}{\partial\xi} F(\xi,\, \tau,\, \ldots)\, \frac{\partial}{\partial\xi}\, G(x,\, \xi,\, t-\tau)\, d\tau = Q^{**}, \qquad (2.3.6)$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{array}{l}
f^1_{1,\, i,\, o} = -\dfrac{d}{d\tau} f(\tau,\, w(\tau));\; f^1_{1,\, i,\, 1} = \dot{v}(\tau) + a^{-2} z(\tau), F(y(\tau), \tau \ldots) \\
f^1_{2,\, i,\, 1} = z(\tau)\, [v(\tau) - \dot{\psi}(y(\tau))]; \\
f^1_{3,\, i} = a^2 \ddot{\varphi}(\xi) + F(\xi,\, 0,\, \ldots) \\
f^1_{4,\, i} = \dfrac{d}{d\tau} F(\xi,\, \tau,\, \ldots); \\
f_o = z(o)\, [\dot{\psi}(l) - v(o)] - a^2 \ddot{\varphi}(l) - F(l,\, o,\, \ldots); \\
f^2_{i,\, 1,\, 0} = (-1)^i a^{-2} \dot{x}(t)\, \dfrac{d}{d\tau} f(\tau,\, w(\tau)); \\
f^2_{i,1,1} = +a^{-2} \dfrac{d}{d\tau} \Big[ z(\tau)\, (\dot{\psi}(y(\tau)) - v(\tau) \Big] + (-1)^{i+1} a^{-2} \dot{x}(t) \dot{v}(\tau) \\
f^2_{2,\, i,\, o} = \dfrac{d}{d\tau}\, f(\tau,\, w(\tau));\; f^2_{2,\, i,\, 1} = a^{-2} \Big[ z(\tau) + (-1)^i \dot{x}(t) \Big] \cdot \\
\qquad \cdot \Big[ z(\tau)\, (\dot{\psi}(y(\tau)) - v(\tau)) - F(y(\tau),\, \tau \ldots) \Big]; \\
f^2_{3,\, i} = a^2 \dddot{\varphi}(\xi) + (-1)^{i+1} \dot{x}(t) \ddot{\varphi}(\xi) + \dfrac{d}{d\xi} F(\xi,\, o\, \ldots),
\end{array}\right\} = (2.3.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&f^2_{5,\,i} = (-1)^i\dot{x}(t)\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,F(\xi,\,\tau,\,\ldots) - \frac{\partial}{\partial\tau}\,F(\xi,\,\tau,\,\ldots).\\
&f^3_{1.\,i,\,0} = -\frac{d}{d\tau}\,f(\tau,\,w(\tau));\; f^3_{1,\,i,\,1} = \dot{v}(\tau)\\
&f^3_{2,\,i,\,1} = z(\tau)[v(\tau) - \dot{\psi}(y(\tau))] + F(y(\tau),\,\tau,\,\ldots);\\
&f^3_{3,\,i} = \ddot{\varphi}(\xi)\\
&f^3_{5,\,i} = -\frac{\partial}{\partial\xi}\,F(\xi,\,\tau,\,\ldots);
\end{aligned}\right\} \quad (2.3.7)$$

Пользуясь (2.2.1), (2.3.7), (1.1.4) и (1.1.7) запишем (2.3.2) (2.3.3) и (2.3.6) в виде

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} \equiv U^*(x,\,t,\,\ldots) = \sum_{i=1}^{2}\Big\{ & J_{1,\,i}\,(x,\,t,\,o,\,\tau\mid f^1_{1,\,i,\,0}) +\\
& + J_{1,i}\,(x,\,t,\,y(\tau),\tau\mid f^1_{1,\,i,\,1}) +\\
& + J_{2,\,i}(x,\,t,\,y(\tau),\tau\mid f^1_{2,\,i,\,1}) + J^{0,\,l}_{3,\,i}\,(x,\,t,\,\xi\mid f^1_{3,\,i}) +\\
& + J_{4,\,i}\,(x,\,t,\,\xi,\,\tau,\,o,\,y(\tau)\mid f^1_{4,\,i})\Big\}.
\end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,Q\,(x(t),\,t)}{d\,t} \equiv Q^*(x,(t),\,t) = \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1}\Big\{ & f_0E\,(x(t) + (-1)^i l,\,a^2t) +\\
& + J_{1,\,i}(x(t),\,t,\,o,\,\tau\mid f^2_{1,\,i,\,0}) +\\
& + J_{1,\,i}\,(x(t),\,t,\,y(\tau),\,\tau\mid f^2_{1,\,i,\,1}) + J_{2,\,i}\,(x(t),\,t,\,o,\,\tau\mid f^2_{2,\,i,\,0}) +\\
& + J_{2,\,i}\,(x(t),\,t,\,y(\tau),\,\tau\mid f^2_{2,\,i,\,1}) +\\
& + J^{0,\,l}_{3,\,i}(x(t),\,t,\,\xi\mid f^2_{3,\,i}) + J_{5,\,i}(x(t),\,t,\,\xi,\,\tau,\,o,\,y(\tau)\mid f^2_{5,\,i})\Big\};
\end{aligned} \quad (2.3.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\,Q\,(x,\,t)}{d\,x} \equiv Q^{**}(x,\,t) = \sum_{i=1}^{2}\Big\{ & J_{1,\,i}\,(x,\,t,\,o,\,\tau\mid f^3_{1,\,i,\,0}) +\\
& + J_{1,\,i}\,(x,\,t,\,y(\tau),\,\tau\mid f^3_{1,\,i,\,1}) +\\
& + J_{2,\,i}\,(x,\,t,\,y(\tau),\tau\mid f^3_{2,\,i,\,1}) + J^{0,\,l}_{3,\,i}\,(x,\,t,\,\xi\mid f^3_{3,\,i}) +\\
& + J_{5,\,i}\,(x,\,t,\,\xi,\,\tau,\,o,\,y(\tau)\mid f^3_{5,\,i})\Big\}.
\end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Оценим теперь интегралы $J_{k,i}$ в предположении, что их функциональный аргумент $f$ удовлетворяет неравенству

$$|f| < \frac{L}{\sqrt{t}}. \tag{2.3.1}$$

Очевидно, что

$$|J_{1,i}(x, t, \xi, \tau \mid f)| < \frac{aL}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} = \frac{aL\sqrt{\pi}}{2} \tag{2.3.12}$$

Далее, аналогично (2.2.9) и (2.2.10).

$$|J_{4,i}(x, t, \xi, \tau, \alpha, \beta \mid f)| < \frac{L}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \left| \int\limits_c^d e^{-\lambda^2} d\lambda \right| < 2L\sqrt{t}; \tag{2.3.13}$$

$$|J_{5,i}(x, t, \xi, \tau, \alpha, \beta \mid f| < \frac{L}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{t-\tau}} \left| \int\limits_c^d e^{-\lambda^2} d\lambda \right| < \frac{L\sqrt{\pi}}{a}. \tag{2.3.14}$$

Оценим $J_{2,i}$. Пользуясь (2.2.11) найдем

$$|J_{2,i}(x(t), t, \xi(\tau), \tau \mid f)| <$$

$$< \frac{LA}{4a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{|x(t)-\xi(t)|}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{|x(t)-\xi(\tau)|^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau +$$

$$+ \frac{L}{4a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{|\xi(t)-\xi(\tau)|}{\sqrt{\tau}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x(t)-\xi(\tau)]^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau = J' + J''. \tag{2.3.15}$$

Здесь $A$ определено согласно (2.2.12).* Как и при получении оценок (2.2.7)—(2.2.14) считаем, что

$$|\xi(t) - \xi(\tau)| < N_5(t-\tau)$$

Отсюда следует, что

$$J'' < \frac{LN_5}{4a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{(t-\tau)}} = \frac{LN_5\sqrt{\pi}}{4a}; \tag{2.3.16}$$

Далее, полагая в $J'$

$$z^2 = \frac{|x(t) - \xi(t)|^2}{4\,a^2(t-\tau)} + \frac{|x(t) - \xi(t)|^2}{4\,a^2\,t} \quad ; \; |x(t) - \xi(t)| = \varrho \tag{2.3.17}$$

найдем

$$J' = \frac{AL\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e}{\sqrt{t}}^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} \int\limits_0^\infty e^{-z^2}\,dz = \frac{AL\varepsilon}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\rho^2}{4a^2t}} \tag{2.3.18}$$

Таким образом

$$|J_{2,1}\;(x(t),\,t,\,\xi(\tau),\,\tau\,|\,f)| < \frac{AL\varepsilon}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\rho^2}{4a^2\,t}} + \frac{LN_5\sqrt{\pi}}{4\,a} \tag{2.3.19}$$

Здесь $\varepsilon$ определено согласно (2.2.12*).

Совершенно аналогично

$$|J_{2,2}(x(t),\,t,\,\xi(\tau),\,\tau\,|\,f)| < L\left[\frac{A}{2\sqrt{t}}\,e^{-\frac{\rho^{*2}}{4a^2\,t}} + \frac{N_5\sqrt{\pi}}{4a}\right] \tag{2.3.20}$$

Здесь

$$\varrho^* = |x(t) + \xi(\tau)|. \tag{2.3.20*}$$

Сопоставляя оценки (2.3.15)—(2.3.20), определения (2.3.7) и неравенства (2.1.2)—(2.1.4) и рассуждая так же, как при доказательстве (2.2.19) убедимся в том, что существуют $L_i > o$ $(i=1,2,\ldots,5)$ и $L^*>0$ столь большие и $T \leqslant T_0$ столь малое, что неравенства

$$\left.\begin{array}{c} |w| < N_1;\; |u| < N_2;\;\; |v| < N_3|;\;\;\; |z| < N_5;\; o \leqslant \mathrm{x},\, \xi \leqslant 1; \\ \left|\dot{w}\right| < \dfrac{L_1}{\sqrt{t}};\; \left|\dfrac{\partial u}{\partial i}\right| < \dfrac{L_2}{\sqrt{t}};\; \left|\dot{v}\right| < \dfrac{L_3}{\sqrt{t}};\; \left|\dfrac{\partial q}{\partial t}\right| < \dfrac{L_4}{\sqrt{t}}; \\ \left|\dot{z}\right| < \dfrac{L_5}{\sqrt{t}};\; \left|\dfrac{\partial q}{\partial x}\right| < L^* \quad \text{при } o \leqslant t \leqslant I \end{array}\right\} \tag{2.2.21}$$

влекут за собой выполнение тех же неравенств для $W$, $U$, $V$, $Q$ и $Z$. Но это, вместе с (2.2.19), означает, что существует $T > o$ столь малое, что при $o \leqslant t \leqslant T$ семейства функций $\{\sqrt{t}\;W_n(t)\}$; $\{\sqrt{t}\;u_n(x,\,t)\}$; $\{\sqrt{t}\,q_n(x,\,t)\}$; $\{\sqrt{t}\,v_n\,(t)\}$ $\{\sqrt{t}\,z_n(t)\}$ **равномерно** ограничены вместе с их первыми производными по $t$ и $x$. Следовательно при $o \leqslant t \leqslant T$ последовательности $\{\omega_n(t)\}\ldots\{z_n\,(t)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, чот и т. д.

## § 3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

3.1 Итак мы доказали существование в малом решения системы интегральных уравнений задачи. Можно, однако, доказать более сильное утверждение. Именно, докажем, что последовательности $\{w_n\}$, $\{u_n\}$; $\{q_n\}$; $\{v_n\}$ и $\{z_n\}$ **не только равномерно** ограничены и равностепенно непрерывны, но и равномерно сходятся. Это будет означать сходимость рассматриваемого интеграционного процесса к решению системы интегральных уравнений задачи.

Достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{m=o}^{\infty} (u_{m+1} - u_m|), \; . \; . \; . \; . \; ., \quad \sum_{m=o}^{\infty} (z_{m+1} - z_m) \tag{3.1.1}$$

Равномерная сходимость их будет обеспечена при $o \leqslant t \leqslant T_1 < \frac{1}{L}$,

если

$$| u_{m+1} - u_m|, \; . \; . \; . \; . \; ., \; | z_{m+1} - z_m \; | < M(\mathrm{L}\; T_1)^{\frac{m}{2}} \; ; \; m = 0,1.2 \; . \; . \; . \tag{3.1.2}$$

где $M$ и $L$ некоторые положительные, независящие от $m$ константы.

В силу доказанной равномерной ограниченности $\{u_n\} \dots \{z_n\}$ (3.1.2) выполняется при $m=o$. Таким образом достаточно доказать, что из справедливости (3.1.2) при $m=n$ следует его справедливость при $m=n+1$. Рассмотрим с этой целью семейство функций

$$\{f(x, t, \xi, \tau)\}; \;\; \{x(t)\}; \;\; \{\xi(t)\}; \;\; \{y(t)\}$$

обладающих следующими свойствами:

а) $x(t)$, $\xi(t)$, $y(t)$ определены и непрерывно дифференцируемые при $o \leqslant t \leqslant T$ и имеют непрерывные вторые производные при $o < t \leqslant T$, причем

$$\left.\begin{aligned} & o \leqslant y(t) \leqslant 1; \; o \leqslant x(t), \; \xi(t) \leqslant 1 \; \text{ при } o \leqslant t \leqslant T; \\ & |\dot{y}(t) \equiv z(t)|; \; |\dot{\xi}(t)|; \; |\dot{x}(t)| \leqslant N; \\ & |\sqrt{t}\, \dot{z}(t)|; \; |\ddot{\xi}(t) \cdot \sqrt{t}\,|; \; |\ddot{x}(t) \sqrt{t}\,| \leqslant L \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

б) $f(x, t, \xi, \tau)$ определены при $o \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$, непрерывны вместе со своими частными производными по всем аргументам при $o < \tau \leqslant t \leqslant T$, причем

$$|f| < M; \quad \left|\sqrt{t}\,\frac{\partial f}{\partial x}\right|; \ \sqrt{t}\,\frac{\partial f}{\partial t}\ \Big|; \ \left|\sqrt{\tau}\,\frac{\partial f}{\partial \tau}\right|; \ \left|\sqrt{\tau}\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\right| < M^*. \tag{3.1.4}$$

Рассмотрим вариацию интегралов $J_{i,j}$ на рассматриваемом классе функций. Пусть $f$, $x(t)$, $\xi(\tau)$, $y(t)$ и $f^*$, $x^*(t)$, $\xi^*(t)$, $y^*(t)$ две группы допустимых функций. Будем писать

$$\begin{aligned} &J_{i,j}(x^*(t), t, \xi^*(\tau), \tau \ldots | f^*(x^*(t), t, \xi^*(\tau), \tau)) - \\ &-J_{i,j}(x(t), t, \xi(\tau), \tau \ldots | f(x(t), t, \xi(\tau), \tau)) \\ &= \delta J_{i,j}\ (x(t), t, \xi(\tau), \tau \ldots | f(x(t), t, \xi(\tau), \tau). \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

и

$$\max |\delta J_{i,j}| = \delta^* J_{i,j}; \ o \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T; \ o \leqslant x, \ \xi \leqslant 1. \quad j = 1,2 \ldots, 5; i = 1,2. \tag{3.1.5*}$$

и аналогично для любого функционала, зависящего от рассматриваемого набора допустимых функций.

При любых $j$ и $i$ имеем

$$\delta J_{j,i} = J_{j,i}\ (x^*(t), t, \xi^*(\tau), \tau \ldots | \delta f) + \Delta J_{j,i}, \tag{3.1.6}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta J_{j,i} = J_{j,i}\,&(x^*(t), t, \xi^*(\tau), \tau \ldots | f(x(t), t, \ldots)) - \\ &- J_{j,i}\,(x(t), t, \xi(\tau), \tau \ldots | f(x(t), t \ldots)). \end{aligned} \tag{3.1.6*}$$

Имеем

$$\Delta J_{j,i} = a^2 \int_o^t f\, d\tau \int_{x(t)+(-1^i \xi(\tau)}^{x^*(t)+(-1)^i \xi(^*\tau)} \frac{\partial}{\partial \zeta} E(\zeta, a^2(t-\tau) d\zeta$$

или, что то же самое

$$\begin{aligned} \Delta J_{1,i} = a^2 \int_o^t f \cdot d\tau \int_o^{\delta[x(t)+(-1)^i \xi(t)]} \frac{\partial}{\partial \zeta} E(x(t) + (-1)^i \xi(\tau) + \zeta, a^2(t-\tau))\, d\zeta + \\ + a^2 \int_o^t f\, d\tau \int_o^{(-1)^{i+1}\delta[\xi(t)-\xi(\tau)]} \frac{\partial}{\partial \zeta} E(x^*(t) + (-1)^i \xi(\tau) + (-1)^i \delta\xi(t) + \zeta, \\ a^2(t-\tau))\, d\zeta = \Delta J'_{1,i} + \Delta J''_{1,i}. \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Положим

$$\alpha_m = \max_{o \leqslant \lambda < \infty} \lambda^m e^{-\lambda^2} \tag{3.1.8}$$

Имеем

$$\left| \frac{\partial E}{\partial \zeta} \right| < \frac{\alpha_1}{2\, a^2 \sqrt{\pi}(t-\tau)} \,. \;;\; |\delta(\xi(t)-\xi(\tau))| < N\, \delta^* \dot{\xi}(t) \cdot (t-\tau). \tag{3.1.9}$$

Следовательно

$$|\Delta J''_{1,i}| < \frac{NM}{2\sqrt{\pi}}\, \alpha_1 t\, \delta^* \dot{\xi}(t). \tag{3.1.10}$$

Далее, при $x(t) \neq \xi(t)$ в случае $x(t) \equiv / \equiv \xi(t)$

$$\Delta J'_{1,i} = a^2 \int\limits_o^{\delta[(t)+(-1)^i \xi(t)]} d\zeta \int\limits_o^t f \frac{\partial}{\partial \xi} E(x(t)t(-1)^i \xi(\tau)+\zeta,\, a^2(t-\tau))\, d\tau,$$

или в обозначениях (2.2.1)

$$\Delta J'_{1,i} = \int\limits_o^{\delta(x(t)+(-1)^i \xi(t))} J_{2,1}(x(t)+\zeta;\; t;\; (-1)^i \xi(\tau),\, \tau \,|\, f(x(t),\, t,\, \xi(\tau),\, \tau)\, d\zeta \tag{3.1.11}$$

Пользуясь оценками (2.2.13) и (2.2.14) найдем

$$|\Delta J'_{1,i}| < M\left[ A\ Erfc\ \frac{|x(t)+\xi(\tau)+\zeta^*|}{2\, a\sqrt{t}} + \frac{N\sqrt{t}}{2\, a\sqrt{\pi}} \right] |\delta(x(t)+-1)^i \xi(t))| \tag{3.1.12}$$

Объединяя (3.1.10) и (3.1.12) получим

$$|\Delta J_{1,i}| < M_{1,1} t \delta^* \dot{\xi} + M_{1,2}[\delta^* x(t) + \delta^* \xi(t)] \tag{3.1.13}$$

Здесь $M_{1,1}$ и $M_{1,2}$ некоторые константы, независящие от $\delta^* \dot{\xi}$, $\delta^* \xi$ и $\delta^* x$.

Рассмотрим $\Delta J_{2,i}$. Положим

$$z^*(t,\tau) = x^*(t) + (-1)^i \xi^*(\tau). \quad z(t,\tau) = x(t) + (-1)^i \xi(\tau); \tag{3.1.14}$$

Имеем

$$\frac{z(t,\tau)\, e^{-\frac{z^2(t,\tau)}{4a^2(t-\tau)}}}{4\,a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{d}{d\tau}Erfc\ \frac{z(t,\tau)}{2\,a\sqrt{t-\tau}} + \frac{e^{-\frac{z^2(t,\tau)}{4a^2(t-\tau)}}}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)}\frac{\partial z}{\partial\tau}\right]. \tag{3.1.15}$$

Следовательно (см. 2.2.1))

$$\Delta J_{2,i} = -\frac{1}{2}\int_o^t f\frac{\partial}{\partial\tau}\delta Erfc\ \frac{z}{2a\sqrt{t-\tau}}\,d\tau -$$

$$-\int_o^t f\,\delta\left(\frac{\partial z}{\partial\tau}\right) E(z^*(t,\tau),\, a^2(t-\tau))\,d\tau -$$

$$-\int_o^t f\,\frac{\partial z}{\partial\tau}\,\delta E(z(t,\tau),\, a^2(t-\tau))\,d\tau \equiv$$

$$\equiv \Delta J'_{2,i} + \Delta J''_{2,i} + \Delta J'''_{2,i}. \tag{3.1.16}$$

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \Delta J''_{2,i} &= J_{1,t}\left(x^*(t),\, t,\, \xi^*(\tau),\, \tau \,|\, f\,\delta\,\frac{\partial z}{\partial\tau}\right) \\ \Delta J'''_{2,i} &= \Delta J_{1,i}\left((x(t),\, t,\, \xi(\tau),\, \tau \,|\, f\,\frac{\partial z}{\partial\tau}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.1.17}$$

Пользуясь (2.2.8), (2.2.2), (3.1.13) и (3.1.14) получим

$$\left.\begin{aligned} |\Delta J''_{2,i}| &< \frac{aM}{\sqrt{\pi}}\,\delta^*\dot{\xi}\cdot\sqrt{t}, \\ |\Delta J'''_{2,i}| &< M_1^1\, t\,\delta^*\dot{\xi} + M_2^1\,[\delta^* x + \delta^*\xi] \end{aligned}\right\} \tag{3.1.18}$$

где $M_1^1$ и $M_2^1$ подходящим образом выбранные константы, независящие от $\delta\dot{\xi}$, $\delta\xi$ и $\delta x$.

Далее,

$$\Delta J^1_{2,i} = \frac{1}{2}\ f\,(x(t),\, t,\, \xi(\tau);\, \tau)\,\delta\ Erfc\ \frac{x(t) + (-1)^i\xi(o)}{2\,a\sqrt{t}} +$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_o^t \frac{d}{d\tau}\, f\,(x(t),\, t,\, \xi(\tau),\, \tau)\,\delta\ Erfc\ \ \frac{z(t,\tau)}{2\,a\sqrt{t-\tau}}\,d\tau. \tag{3.1.19}$$

Но

$$\frac{1}{2}\delta\, Erfc\ \frac{z(t,\ \tau)}{2a\sqrt{t-\tau}}=\int\limits_{o}^{\delta z(t,\tau)} E(\zeta+z(t,\ \tau),\ a^2(t-\tau))\,d\zeta. \qquad (3.1.20)$$

Следовательно (см. (3.1.4))

$$|\Delta J'_{2,i}|<\frac{M}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\delta^*x(t)+\delta^*\xi(o)\right]+\frac{N\sqrt{\pi}}{a}\left[\delta^*x(t)+\delta^*\xi(\tau)\right]. \qquad (3.1.21)$$

Объединяя (3.1.21) и (3.1.18) найдем, что

$$|\Delta J_{2,i}|<M_{2,1}\sqrt{t}\,\delta^*\dot{\xi}(t)+M_{2,2}\,t^{-\frac{1}{2}}\left[\delta^*x(t)+\delta^*\xi(o)\right]. \qquad (3.1.22)$$

где $M_{2,i}$ $(i=1,2)$ не зависят от $\delta^*\dot{\xi}$, $\delta^*x$ и $\delta^*\xi$.

Рассмотрим $\Delta J_3^{\alpha,\beta}$. Имеем

$$\Delta J_3^{\alpha,\beta}=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),\ t,\ \xi)\,d\xi\int\limits_{o}^{\delta x(t)}(-1)^i\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,E(x(t)+\zeta+(-1)^i\xi,\ a^2t)\,d\zeta \qquad (3.1.23)$$

Меняя порядок интегрирования и оценивая по модулю получим

$$|\Delta J_3^{\alpha,\beta}|<\frac{\alpha_1 M\delta^*x(t)}{\sqrt{\pi t}}, \qquad (3.1.24)$$

где $\alpha_1$ определено согласно (3.1.8).

Рассмотрим $\Delta J_{4,i}$. Имеем

$$\Delta J_{4,i}(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau,\ o,\ y(\tau)\,|\,f(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau))=$$

$$=\int\limits_{o}^{t} d\tau\int\limits_{o}^{y(\tau)} f(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau)\ d\xi\int\limits_{o}^{\delta x(t)}(-1)^i\,\frac{\partial}{\partial\xi}\,E(x(t)+$$

$$+(-1)^i\xi+\zeta,\ a^2(t-\tau))\,d\zeta+$$

$$+\int\limits_{o}^{t} d\tau\int\limits_{y(\tau)}^{y^*(t)} f(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau)\ E(x^*(t)+$$

$$+(-1)^i\xi,\ a^2(t-\tau))\,d\xi=\Delta J'_{4,i}+\Delta J''_{4,i} \qquad (3.1.25)$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь (2.2.10) найдем

$$|\Delta J''_{4,i}| < \frac{M}{a\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,\delta^* x(t). \qquad (3.1.16)$$

Далее, очевидно,

$$|\Delta J''_{4,i}| < \frac{M}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{t}\,\delta^* y(t). \qquad (3.1.27)$$

Таким образом

$$|\Delta J_{4,i}| < \frac{M\sqrt{t}}{a\sqrt{\pi}}\left[\delta^* x(t) + \delta^* y(t)\right]. \qquad (3.1.28)$$

Оценим, наконец, $\Delta J_{5,i}$. Имеем

$$\Delta J_{5,i}\,(x(t)\ t,\ \xi,\ \tau,\ o,\ y(\tau)\,|\,f(x,\ t,\ \xi,\ \tau) = \Delta J'_{5,i} + \Delta J''_{5,i}. \qquad (3.1.29)$$

где

$$\Delta J'_{5,i} = \int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} f(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau)\,\delta\frac{\partial}{\partial\xi}E(x(t) + (-1)^i\xi,\ a^2(t-\tau))\,d\xi; \qquad (3.1.30)$$

$$\Delta J''_{5,i} = \int_o^t d\tau \int_{y(\tau)}^{y^*(\tau)} f(x(t),\ t,\ \xi,\ \tau)\,\frac{\partial}{\partial\xi}E(x^*(t) + (-1)^i\xi,\ a^2(t-\tau))\,d\xi; \qquad (3.1.31)$$

Очевидно, что $\Delta J''_{5,i}$ оценивается так же, как $\Delta J_{1,i}$. Таким образом

$$|\Delta J''_{5,i}| < M''_{5,i}\,\delta^* y, \qquad (3.1.32)$$

где $M''_{5,i}$ подходящим образом выбранная константа.

Рассмотрим $\Delta J'_{5,i}$. Интегрируя по частям найдем

$$\Delta J'_{5,i} = \int_o^t f(x(t),\ t,\ y(\tau),\ \tau)\Big[E(x^*(t) + (-1)^i y(\tau),\ a^2(t-\tau)) -$$

$$- E(x(t) + (-1)^i y(\tau),\ a^2(t-\tau))\Big]\,d\tau -$$

$$-\int_o^t f(x(t),\, t,\, o,\, \tau)\,\Big[E(x^*(t)\ +(-1)^i\, l,\ a^2(t-\tau))-$$

$$-E(x(t)+(-1)^i\, l,\ a^2(t-\tau))\,\Big]\,d\tau+$$

$$+\int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} \frac{d}{d\tau} f(x(t),\, t,\, \xi(\tau),\, \tau)\,\delta\ E(x(t)+$$

$$+(-1)^i\, y(\tau)+\zeta,\ a^2(t-\tau)\,d\zeta=\Delta\, J^{1,1}_{5,\,i}+\Delta\, J^{1,2}_{5,\,i}+\Delta\, J^{1,3}_{5,\,i}. \qquad (3.1.33)$$

Здесь $l=y(o)$.

Имеем

$$\Delta\, J''_{5,\,i}=\int_o^t f(x(t),\, t,\, y(\tau),\, \tau)\,d\tau \int_o^{\delta x(t)} \frac{\partial}{\partial\zeta}\, E(x(t)+$$

$$+(-1)^i\, y(\tau)+\zeta,\ a^2(t-\tau))\,d\zeta,$$

откуда, как и выше,

$$|\,\Delta\, J''_{5,\,i}\,|<M^{1,2}_{5,\,i}\,\delta^*(x(t)). \qquad (3.1.34)$$

Аналогично

$$|\,\Delta\, J^{1,2}_{5,\,i}\,|<M^{1,3}_{5,1}\,\delta^*(x(t)). \qquad (3.1.35)$$

Рассмотрим, наконец, $\Delta\, J^{1,3}_{5,\,i}$. Подобно предыдущему имеем

$$|\,\Delta\, J^{1,3}_{5,\,i}\,|\leqslant \int_o^t \partial\tau \int_o^{y(t)} \left|\,\frac{\partial}{\partial\tau}\ f\,\right|\partial\xi \int_o^{|\delta x(t)|} \left|\,\frac{\partial}{\partial\xi}\ E(x(t)+\right.$$

$$\left.+(-1)^i\,\xi+\zeta;\ a^2(t-\tau))\,\right|\,d\zeta,$$

Меняя порядок интегрирования и пользуясь (2.3.14), (2.3.11) и (2.3.4) найдем, что

$$|\,\Delta\, J^{1,3}_{5,\,i}\,|<\frac{\sqrt{\pi}\,M^*}{a}\ \delta^* x(t). \qquad (3.1.36)$$

Объединяя полученные оценки найдем, что

$$|\Delta J_{5,i}| < M_{5,i} [\delta^* x(t) + \delta^* y(t)]. \tag{3.1.37}$$

Пользуясь оценками (3.1.13), (3.1.22), (3.1.24), (3.1.28) и (3.1.37) и замечая, что первые слагаемые в (3.1.6) оцениваются посредством (2.2.7)—(2.2.10), (2.2.13) и (2.2.14), если заменить там $M$ на $\delta^* f$, найдем*)

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^* J_{1,i} < K_1' \sqrt{t}\, \delta^* f_{1,i} + M_{1,1}\ t\, \delta^* \dot{\xi} + M_{1,2} (\delta^* x(t) + \delta^* \xi(t)) \\
&\delta^* J_{2,i} < K_2' \left[ \varepsilon\, Erfc \frac{|x(t) + (-1)^i \xi(t)|}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{t} \right] \delta^* f_{2,i} + \\
&+ M_{2,1}\ \sqrt{t}\ \delta^* \dot{\xi}(t) + \frac{M_{2,2}}{\sqrt{t}} \left[ \delta^* x(t) + \delta^* \xi(o) \right]; \\
&\delta^* J_{3,i}^{\alpha\beta} < \delta^* f_{3,i} + M_{3,i} \frac{\delta^* x(t)}{\sqrt{t}} \\
&\delta^* J_{4,i} < K_4'\, t\, \delta^* f_{4,i} + M_4 \sqrt{t}\ [\delta^* x(t) + \delta^* y(t) \\
&\delta^* J_{5,i} < K_5' \sqrt{t}\, \delta^* f_{5,i} + M_5\ [\delta^* x(t) + \delta^* y(t)]
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.38}$$

Здесь $K_i'$ ; $M_{ij}$; $M_i$константы, независящие от $\delta x, \ldots, \delta f_{5,i}$.

Будем считать, что

$$\left.\begin{aligned}
&x(t) \equiv y(t), \text{ либо } x(t) = x = \text{const} \subset [o,\ y(t)); \\
&\xi(t) \equiv y(t); \text{ либо } \xi(t) \equiv 0; \\
&\delta\, y(o) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1.39}$$

Тогда

$$\delta^* x \leqslant N\, t\, \delta^* z;\ \ \delta^* \xi \leqslant N\, t\, \delta^* z;\ \ \delta^* y \leqslant N\, t\, \delta^* z \tag{3.1.40}$$

где $N \geqslant |z(t)|$ при $o \leqslant t \leqslant T$.

---

*) Мы приписываем здесь индексы знаку $f$, соответствующей индексам у оператора $J_{j,i}$.

Ниже будем любую константу, независящую от вариаций, входящих в оценки, обозначать буквами $K, \overline{K}$ и т. д. Тогда (3.1.38) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^* J_{j,i} < K\sqrt{t}(\delta^* f_{i,j}+\delta^* z) \quad j=1,4,5;\ i=1,2.\\
&\delta^* J_{2,i} < K\left\{\left[\varepsilon\, Erfc\,\frac{|x(t)+(-1)^i\xi(t)|}{2a\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right]\delta^* f_{2,i}+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sqrt{t}\,\delta^* z\right\}\\
&\delta^* J_{3,i}^{\alpha,\beta} < \delta^* f_{3,i}+K\sqrt{t}\,\delta^* z(t)
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.40^*)$$

Здесь $\varepsilon$ определено согласно (2.2.12*).

Оценим теперь вариации функционалов $U$, $W$, $Q$, $V$ и $Z$ вызываемые вариациями $w$, $q$, $u$, $v$, $y$, и $z$. В силу (2.2.2), (2.1.3) и (3.1.40*) имеем*)

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^* U < K\sqrt{t}[\delta^* w+\delta^* u+\delta^* q+\delta^* v+\delta^* z];\\
&\delta^* W < K\sqrt{t}[\delta^* w+\delta^* u+\delta^* q+\delta^* v+\delta^* z];\\
&\delta^* Q < K\sqrt{t}[\delta^* u+\delta^* q+\delta^* z]+\overline{K}(\delta^* w+\delta^* v);\\
&\delta^* V < K\sqrt{t}[\delta^* u+\delta^* q+\delta^* z];\\
&\delta^* Z < \overline{K}(\delta v+\delta y)=K\sqrt{t}\,\delta z+\overline{K}\,\delta^* v
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.42)$$

Пусть $o\leqslant\tau\leqslant t$; $o\leqslant\xi\leqslant 1$. Положим

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^* w=\delta_n w=\max|w_n(\tau)-w_{n-1}(\tau)|;\\
&\delta^* u=\delta_n u=\max|u_n(\xi,\tau)-u_{n-1}(\xi,\tau)|;\\
&\delta^* v=\delta_n v=\max|v_n(\tau)-v_{n-1}(\tau)|;\\
&\delta^* q=\delta_n q=\max|q_n(\xi,\tau)-q_{n-1}(\xi,\tau)|;\\
&\delta^* z=\delta_n z=\max|z_n(\tau)-z_{n-1}(\tau)|;
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.43)$$

Определения (2.1.6) и оценки (3.1.42) дадут

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_{n+1} w < K\sqrt{t}\,[\delta_n w+\delta_n u+\delta_n q+\delta_n v+\delta_n z],\\
&\delta_{n+1} u < K\sqrt{t}\,[\delta_{n+1} w+\delta_n v+\delta_n q+\delta_n v+\delta_n z];\\
&\delta_{n+1} v < K\sqrt{t}\,[\delta_{n+1} v+\delta_n v+\delta_n q+\delta_n z];
\end{aligned}\right\} \quad (3.1.44)$$

---

*) Заметим, что всюду в выражениях $J_{3,i}^{o,l}$ стоит не варьируемый аргумент $\varphi$ или $\dot{\varphi}$.

$$\left.\begin{aligned}\delta_{n+1}\, q < K\sqrt{t}\,[\delta_{n+1}\, u + \delta_n\, q + \delta_n z] + \overline{K}(\delta_{n-1}\, w + \delta_{n+1} v)\\ \delta_{n+1} z < K\sqrt{t}\ \delta_n\, z + \delta_{n+1}\, v.\end{aligned}\right\} \quad (3.1.4.4)$$

Отсюда следует, очевидно, существование $T' < T$ столь малого, и $L > o$ столь большого, что если

$$\delta_n = \max\,\{\delta_n w,\ \delta_n u,\ \delta_n v,\ \delta_n q,\ \delta_n z\}, \tag{3.1.45}$$

то при $o \leqslant t \leqslant T'$ будет

$$\delta_{n+1} < \sqrt{Lt}\,\delta_n \tag{3.1.46}$$

Но неравенства (3.1.46) и (3.1.2) очевидно эквивалентны что и т. д.

3.2. Пусть

$$u = \lim_{n\to\infty} u_n;\ w = \lim_{n\to\infty} w_n;\ q = \lim_{n\to\infty} q_n;\ v = \lim_{n\to\infty} v_n;$$
$$z = \lim_{n\to\infty} z_n;\ y = \lim_{n\to\infty} y_n \tag{3.2.1}$$

Из доказанной равномерной ограниченности последовательностей

$$\left\{\sqrt{t}\ \frac{\partial u_m}{dz}\right\};\ \left\{\sqrt{t}\,\frac{dw_m}{dt}\right\};\ \left\{\sqrt{t}\ \frac{\partial q_m}{\partial t}\right\};\ \left\{\frac{\partial q_m}{\partial x}\right\};\ \left\{\sqrt{t}\,\frac{dv_m}{dt}\right\};\ \left\{\sqrt{t}\,\frac{dz_m}{dt}\right\}$$

следует, что $u \ldots, z$ удовлетворяют по $t$ условию Гёльдера порядка $\frac{1}{2}$ при $o \leqslant t \leqslant T$. Это значит, что $F\ (t, x, u, q, v, y, z)$ обладает необходимой степенью гладкости для того, чтобы можно было пользоваться теоремой эквивалентности, доказанной в § 1.2. Таким образом можно утверждать, что построенное решение системы интегральных уравнений (1.3.4)—(1.3.7) является одновременно решением исходной задачи (0,1)—(0,5).

Остается решить вопрос об единственности решения задачи. Очевидна единственность решения $(u, w, q, v, z, y)$ в классе функций удовлетворяющих условиям (2.1.4) и (2.1.5) — т. е функций дифференцируемых по $x$ и $t$ и таких, что их производные по $t$ растут при $t \to o$ не быстрее, чем $t^{-1/2}$. Действительно для таких функций справедливы оценки (3.1.42). Пусть $(u, w, q, v, z, y)$ и $(u^*, w^*, q^*, w^*, z^*, y^*)$ две таких системы решений.

Поскольку тогда

$$\delta^* U = \delta^* u;\ \delta^* W = \delta^* w;\ \delta^* Q = \delta^* q;\ \delta^* V = \delta^* v;\ \delta^* Z = \delta^* z \tag{3.2.2}$$

неравенства (3.1.42) можно будет записать в виде

$$\delta^* U;\ \delta^* W;\ \delta^* Q;\ \delta^* V;\ \delta^* Z < K \sqrt{t}\, \delta \tag{3.2.3}$$

где $K$ некоторая константа и

$$\begin{gathered}\delta = \max \{\delta^* w,\ \delta^* u,\ \delta^* q,\ \delta^* v,\ \delta^* z\} \\ o \leqslant \tau \leqslant t;\ o \leqslant x \leqslant \min\ (y(t),\ y^*(t))\end{gathered} \tag{3.2.3*}$$

Сопоставляя (3.2.2) и (3.2.3) убедимся в том, что при $t$ достаточно малом

$$\delta < K \sqrt{t}\, \delta < \delta$$

что невозможно при $\delta > o$. Очевидно, что пользуясь методом продолжения решения можно распространить этот результат на весь интервал $(o,\ T)$, на котором доказано существование решения.

Однако, доказанным утверждением единственности решения нельзя удовлетвориться потому, что существование решения установлено лишь в более широком классе функций, чем тот класс, для которых установлена теорема единственности. Поэтому вопрос об единственности решения требует специального рассмотрения.

Заметим прежде всего, что для доказательства теоремы единственности достаточно было бы доказать справедливость следующих неравенств. Пусть, как и выше, $(u,\ \ldots,\ z)$ и $(u^*, \ldots, z^*)$ две системы решений задачи; пусть, далее, $(U,\ \ldots,\ Z)$ и $(U^*,\ \ldots,\ Z^*)$ соответствующие им системы значений функционалов $U \ldots,\ Z$. Положим

$$\varrho = \min\ (x,\ 1 - \overline{y}(t));\ \overline{y}(t) = \min\ (y(t),\ y^*(t)). \tag{3.2.4}$$

и допустим, что доказаны неравенства

$$\left.\begin{aligned} &|U(x,\ t \ldots) - U^*(x,\ t \ldots)| < N(\varrho) L(t) \delta \\ &|Q(x,\ t \ldots) - Q^*(x,\ t \ldots)| < N(\varrho) L(t) \delta \\ &|W(t \ldots) - W^*(t \ldots)| < M\ L(t) \delta \\ &|V(t \ldots) - V^*(t \ldots)| < M\ L(t) \delta \\ &|Z(t \ldots) - Z^*(t, \ldots)| < M\ L(t) \delta \end{aligned}\right\} \tag{3.2.5}$$

где $N$ и $L$ определены при $o \leqslant t \leqslant T$, причем

$$\lim_{\varrho \to o} N(\varrho) = \infty;\ \lim_{t \to +o} L(t) = o, \tag{3.2.6}$$

$M$ — константа, независящая от $\delta$ и

$$\begin{gathered}\delta = \max \left\{ |w - w^*|,\ |v - v^*|;\ |z - z^*|;\ |u - u^*|;\ |q - q^*| \right\} \\ o \leqslant t \leqslant T;\ o < \varrho \leqslant x \leqslant \overline{y}(t) - \varrho < \overline{y}(t).\end{gathered} \tag{3.2.7}$$

Фиксируя $\varrho > o$ произвольно малое, найдем снова, что существует $T(\varrho)$ столь малое, что при $o \leqslant t \leqslant T(\varrho)$ и $\varrho \leqslant x < \overline{y} - \varrho$

$$u = u^*;\ q = q^*;\ w = w^*;\ v = v^*;\ z = z^*. \tag{3.2.8}$$

Принимая $T(\varrho)$ за новый начальный момент времени докажем справедливость (3.2.8) на интервале $(0;\ 2\ T(\varrho))$. Продолжая рассуждение убедимся в выполнении (3.2.8) на всем интервале $(o,\ T)$ определения решений $(u, \ldots, z)$ и $(u^*, \ldots, z^*)$ при $\varrho \leqslant x \leqslant y(t) - \varrho$; $(y = y - y^*)$. Поскольку здесь $\varrho$ сколь угодно мало, а $u$ и $q$ непрерывны при $o \leqslant x \leqslant y(t)$ видим, что при выполнении перечисленных условий теорема единственности сохраняет силу на всем интервале $(o,\ T)$ определения решения.

Докажем теперь, что оценки (3.2.5) имеют место в классе функций, удовлетворяющих по $t$ условию Липшица вида

$$|f(t) - f(\tau)| < A \frac{|t - \tau|}{\sqrt{t} + \sqrt{\tau}}\ ;\ A > o. \tag{3.2.9}$$

С этой целью заметим, что требование дифференцируемости по $t$ функций $u$, $w$, $q$, $v$ и $z$ было использовано только при получении оценок интегралов $J_{2,i}$ и $J_{5,i}$, когда проводилось интегрирование по частям. Поэтому оценки (3.1.13), (3.1.24) и (3.1.28) сохраняют силу и в рассматриваемом случае. Таким образом остается только рассмотреть $\Delta J_{2,i}$ и $\Delta J_{5,i}$ *).

Заметим, прежде всего, что

$$\Delta J_{2,i}\ (x, t, o, \tau \mid f) \equiv o \qquad x = \text{const}. \tag{3.2.10}$$

Далее, очевидно, что при $o \leqslant x \leqslant y(t) - \varrho < y(t)$

$$|\Delta J_{2,i}\,(x, t, y(\tau), \tau \mid f)| < N(\varrho)\ \delta^* y \qquad (i = 1{,}2), \tag{3.2.10*}$$

ибо на этом интервале изменения $x$ $E(x + (-1)^i\, y(\tau),\, a^2(t - \tau))$ ограничена вместе со всеми своими частными производными по $x$ и $t$. По той же причине при $y\ (\tau) \geqslant \varrho_0 > o$; $o \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$

$$|\Delta J_{2,2}\,(y(t), t, y(\tau), \tau \mid f)| < M\ \delta^* y \tag{3.2.11}$$

для любой ограниченной $f$.

---

*) При вычислении вариаций функций $f_{i,j}$, входящих в выражение операторов $J_{i,j}$ требование дифференцируемости $f_{i,j}$ не использовалось. Поэтому достаточно рассмотреть $\Delta J_{i,j}$, а не $\delta J_{i,j}$.

Рассмотрим $\Delta J_{2,1}(y(t), t, y(\tau), \tau \mid f(\tau))$. Имеем

$$\Delta J_{2,1}(y(t), t, y(\tau), \tau \mid f(\tau) = $$
$$= f(t)\,\Delta J_{2,1}(y(t), t, y(\tau), \tau \mid 1) +$$
$$+ J_{2,1}(y(t), t, y(\tau), \tau \mid f(\tau) - f(t)) = \Delta' J_{2,1} + \Delta'' J_{2,1}. \quad (3.2.12)$$

$\Delta' J_{2,1}$ оценивается согласно (3.1.22), если положить там $x(t) = y(t)$; $\xi(\tau) = y(\tau)$. Остается оценить $\Delta'' J_{2,1}$. Имеем

$$\Delta'' J_{2,1} = \int_o^t \frac{f(\tau) - f(t)}{4a\sqrt{\pi}\,\sqrt{t-\tau}}\; \frac{\mu^*(t,\tau)\, e^{-\frac{\mu^{*2}(t,\tau)}{4a^2(t-\tau)}} - \mu(t,\tau)\, e^{-\frac{\mu^2(t,\tau)}{4a^2(i-\tau)}}}{t-\tau}\, d\tau, \tag{3.2.13}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mu &= y(t) - y(\tau) = \int_\tau^t z(\lambda)\, d\lambda \\ \mu^* &= y^*(t) - y^*(\tau) = \int_\tau^t z^*(\lambda)\, d\lambda \end{aligned}\right\} \tag{3.2.13*}$$

Пусть *)

$$|f(\tau) - f(t)| < A\sqrt{t-\tau}; \quad |z|;\ |z^*| < N. \tag{3.2.14}$$

Имеем

$$\Delta'' J_{2,1} = J' + J'' = \int_o^t \frac{f(\tau) - f(t)}{4a\sqrt{\pi}\,\sqrt{t-\tau}}\; \frac{\mu^*(t,\tau) - \mu(t,\tau)}{t-\tau}\, e^{-\frac{\mu^{*2}(t,\tau)}{4a^2(t-\tau)}}\, d\tau +$$

$$+ \int_o^t \frac{f(\tau) - f(t)}{4a\sqrt{\pi}\,\sqrt{t-\tau}}\; \frac{\mu(t\,\tau)\, d\tau}{t-\tau} \int_{\mu(t,\tau)}^{\mu^*(t,\tau)} \frac{\zeta\, e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a^2(t-\tau)}\, d\zeta \tag{3.2.15}$$

Оценивая по модулю с помощью (3.2.14) найдем

$$|J'| < \frac{A\,t}{4a\sqrt{\pi}}\, \delta^*(z); \quad |J''| < \frac{A\,N}{4a^2\sqrt{\pi}}\, t^{3/2}\, \delta^*(z), \tag{3.2.16}$$

а вместе с тем

$$|\Delta'' J_{2,i}| < M\, t\, \delta^* z; \quad (i = 1,2) \tag{3.2.16*}$$

где $M > o$ некоторая константа, независящая от $\delta^* z$.

---

*) Первое из неравенств (3.2.14) следует из (3.2.9).

Итак, необходимая оценка $\Delta J_{2,i}$ установлена. Рассмотрим теперь $\Delta J_{5,i}$. Заметим, прежде всего, что оценка (3.1.32) сохраняет силу и в рассматриваемом случае, ибо она не опирается на дифференцирование $f$. Таким образом нужно только оценить

$$\Delta J''_{5,i} = \int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} f(\xi, \tau)\, \delta \frac{\partial}{\partial \xi} E(x(t) + (-1)^i \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi \tag{3.2.17}$$

при $x(t) \equiv \text{const} \subset [o, y(t))$ и при $x \equiv y(t)$.

Имеем

$$\Delta J''_{5,i}\ (x, t, \xi, \tau, o, y(\tau) \mid f(\xi, \tau)) \equiv o \qquad (x = \text{const}) \tag{3.2.18}$$

и

$$|\Delta J''_{5,1}(y(t), t, \xi, \tau, o, y(\tau) \mid f(\xi, \tau))| < M\, \delta^* y, \tag{3.2.19}$$

ибо $E(y(t)+\xi, a^2(t-\tau))$ ограничена вместе со всеми своими производными по $\xi$ и $t$ при $o \leqslant t \leqslant T$. Далее

$$\Delta J''_{5,1} = J' + J'' = \int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} f(\xi, t)\, \delta \frac{\partial}{\partial \xi} E(y(t) - \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi +$$

$$+ \int_o^t d\tau \int_o^{y(\tau)} [f(\xi, \tau) - f(\xi, t)]\, \delta \frac{\partial}{\partial \xi} E(y(t) - \xi, a^2(t-\tau))\, d\xi. \tag{3.2.20}$$

Рассмотрим $J'$. Пусть

$$o = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = t$$

последовательность внутренних экстремумов $y(t)$, так что на каждом из интервалов $(\tau_k, \tau_{k+1})$ монотонна. Пусть для определенности $y(\tau)$ возрасатет на интервалах $(\tau_{2k};\ \tau_{2k+1})$ и $m = 2n$.

Тогда полагая $y_k = y(\tau_k)$; $\tau = \tau_k(\xi)$ при $\xi \subset (y_k, y_{k+1})$ найдем

$$J' = \sum_{k=o}^{n-1} \left( \int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} d\tau \int_o^{y_{2k}} f(\xi, t)\ \delta \frac{\partial}{\partial \xi} E\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_{2k+1}}^{\tau_{2k+2}} d\tau \int_o^{y_{2k+2}} f(\xi, t)\ \delta \frac{\partial}{\partial \xi} E\, d\xi \right) +$$

$$+\sum_{k=o}^{n-1}\left(\int\limits_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} d\tau \int\limits_{y_{2k}}^{y(\tau)} f(\xi,\, t)\ \delta\, \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\tau_{2k+1}}^{\tau_{2k+2}} d\tau \int\limits_{y_{2k+2}}^{y(\tau)} f(\xi,\, t)\, \delta\, \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi \right). \qquad (3.2.21)$$

Меняя порядок итегрирования получим

$$J' = \sum_{k=o}^{n-1}\left(\int\limits_{o}^{y_{2k}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{o}^{y_{2k+2}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\tau_{2k+1}}^{\tau_{2k+2}} \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi \right) +$$

$$+\sum_{k=o}^{n-1}\left(\int\limits_{y_{2k}}^{y_{2k+1}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\tau_{2k}\,(\xi)}^{\tau_{2k+1}} \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{y_{2k+2}}^{y_{2k+1}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\tau_{2k+1}}^{\tau_{2k+1}\,(\xi)} \frac{\partial}{\partial\xi} E\, d\xi \right). \qquad (3.2.22)$$

Выполняя интегрирование во внутренних интегралах найдем

$$J' = \sum_{k=o}^{n-1} \frac{1}{a^2\sqrt{\pi}}\left(\int\limits_{o}^{y_{2k}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k}}}}^{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{o}^{y_{2k+2}} f(\xi,\, t)\, d\xi\, \delta \int\limits_{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}}^{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+2}}}} e^{-\lambda^2}\, d\lambda \right) +$$

$$+\sum_{k=o}^{n-1}\frac{1}{a^2\sqrt{\pi}}\left(\int_{y_{2k}}^{y_{2k+1}} f(\xi,\ t)\,d\xi\,\delta\int_{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k}(\xi)}}}^{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda+\right.$$

$$\left.+\int_{y_{2k+2}}^{y_{2k+1}} f(\xi,\ t)\,d\xi\,\delta\int_{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}}^{\frac{y(t)-\xi}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}(\xi)}}} e^{-\lambda^2}d\,\lambda\right)=J_1'+J_2'. \qquad (3.3.23)$$

Заметим, что при $k=n-1$

$$\frac{y(t)-\xi}{2\,a\sqrt{t-\tau_{2k+2}}}=\infty;\qquad \frac{y^*(t)-\xi}{2\,a\sqrt{t-\tau_{2k+2}}}=\infty \qquad (3.2.24)$$

и что

$$t-\tau_k=O(t);\ k\neq 2\,n \qquad (3.2.24^*)$$

Отсюда, очевидно, следует оценка

$$|J_1^1|<M\,\frac{\delta^* y}{\sqrt{t}}$$

или, что то же самое

$$|J_1^1|<M\sqrt{t}\,\delta^* z. \qquad (3.2.25)$$

Рассмотрим $J_2^1$. Заметим, что в выражении $J_2^1$ варьируется $y(t)$, но не варьируются $\tau_{2k}(\xi)$ и $\tau_{2k+1}(\xi)$. Будем временно писать $\overline{y}(t)$ вместо $y(t)$, указывая чертой над $y$, что $y(t)$ подлежит варьяции. Вводя в первом из интегралов под знаком суммы в качестве независимого переменного $\tau=\tau_{2k}(\xi)$ и во втором $\tau=\tau_{2k+1}(\xi)$ найдем

$$J_2^1=\sum_{k=o}^{n-1}\frac{1}{a^2\sqrt{\pi}}\int_{\tau_{2k}}^{\tau_{2k+1}} f(y(\tau),\ t)\,\frac{dy}{d\tau}\,d\tau\,\delta\int_{\frac{\overline{y}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{\overline{y}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda+$$

$$+\sum_{k=o}^{n-1}\frac{1}{a^2\sqrt{\pi}}\int\limits_{\tau_{2k+1}}^{\tau_{2k+2}} f(y(\tau),\ t)\,\frac{dy}{d\tau}\,d\tau\,\delta\int\limits_{\frac{\overline{y}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{\overline{\overline{y}}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda \qquad (3.2.26)$$

Поскольку

$$\left|\delta\int\limits_{\frac{\overline{y}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{\frac{\overline{y}(t)-y(\tau)}{2a\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}} e^{-\lambda^2}\,d\lambda\right| < \frac{\delta^* y}{2a}\left(\frac{1}{\sqrt{t-\tau_{2k+1}}}+\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\right)$$

найдем, как и при оценке $J_1^1$, что

$$|J_2^1| < M\sqrt{t}\delta^* z. \qquad (3.2.26^*)$$

Объединяя (3.2.251) и (3.2.26*) найдем окончательно

$$|J'| < M\sqrt{t}\,\delta^* z \qquad (3.2.27)$$

Рассмотрим теперь $J''$. Имеем

$$J''=\int\limits_o^t d\tau\int\limits_o^{y(\tau)}\frac{f(\xi,\ \tau)-f(\xi,\ t)}{4\,a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\ e^{-\frac{(y^*(t)-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,\delta\, y(t)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_o^t d\tau\int\limits_o^{y(t)}\frac{f(\xi,\ \tau)-f(\xi,\ t)}{4\,a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\ (y(t)-\xi)\,d\xi\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{y(t)-\xi}^{y^*(t)-\xi}\frac{\zeta\, e^{-\frac{\zeta^2}{4a_2(t-\tau)}}}{2\,a^2(t-\tau)}\ d\zeta=J_1''+J_2'' \qquad (3.2.28)$$

Из (3.2.9) очевидно следует

$$|J_1''| < M\sqrt{t}\,\delta^* y \qquad (3.2.29)$$

Далее

$$J_2''=\int_0^t d\tau\int_0^{y(\tau)}\frac{f(\xi,t)-f(\xi,\tau)}{4a^3\sqrt{\pi}(t-\tau)^{5/2}}(y(t)-\xi)\,d\xi\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\delta y(t)}\frac{\zeta+(y(t)-\xi)}{2a^2(t-\tau)}\cdot e^{-\frac{(\zeta+y(t)-\xi)^2}{2a^2(t-\tau)}}\,d\zeta \qquad (3.2.30)$$

Меняя двукратно порядок интегрирования получим

$$J_2''=\int_0^{\delta y(t)} d\zeta\int_0^t d\tau\int_0^{y(\tau)}\frac{f(\xi,t)-f(\xi,\tau)}{8a^5(t-\tau)^{5/2}}\cdot$$

$$\cdot\ (y(t)-\xi)(\zeta+y(t)-\xi)e^{-\frac{(\zeta+y(t)-\xi)}{4a^2(t-\tau)}}\,d\xi \qquad (3.2.30^*)$$

Отсюда следует, очевидно, что

$$|J_2''|<M\sqrt{t}\,\delta^* y \qquad (3.2.31)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, с помощью подстановки

$$\zeta+y(t)-\xi=2a\lambda\sqrt{t-\tau},$$

что двойной внутренний интеграл в (3.2.30*) есть $O(\sqrt{t})$.

Объединяя оценки (3.2.31) и (3.2.27) найдем

$$|\Delta J_{5,i}''(y(t),t,\xi,\tau,o,y(\tau)\,|\,f(\xi,\tau))|<M\,t^{2/3}\delta^* z. \qquad (3.2.32)$$

Но это вместе с (3.2.18), (3.2.19) и (3.2.16*) означает, что при выполнении условия (3.2.9) теорема единственности сохраняет силу.

Поскольку, в силу равномерной ограниченности последовательностей $\left\{\sqrt{t}\,\frac{\partial u_n}{\partial t}\right\}\dots\left\{\sqrt{t}\,\frac{dz_n}{dt}\right\}$, $\{u_n\}\dots\{z_n\}$ равностепенно удовлетворяют условию (3.2.9) видим, что теорема единственности имеем место в том же классе функций, в котором установлено существование решения.

3.3. Будем называть $a^2, l, f, \psi, \varphi, Z$ и $F$ параметрами задачи. Полученные оценки позволяют утверждать устойчивость решения относительно малых возмущений всех параметров. Точнее, пусть наряду с $a^2, l, f, \psi, \varphi, F$ и $Z$ задана система параметров $\overline{a}^2, \overline{l}, \overline{f}, \overline{\psi}, \overline{\varphi}, \overline{F}$ и $\overline{Z}$, обладающая требуемыми дифференциальными свойствами, и удовлетворяющая условиям, получаемым из (1.3.8)—(1.3.10) заменой $a^2 \ldots\ldots Z$ на $\bar{a}^2 \ldots\ldots \bar{Z}$ соответственно. Пусть $\bar{u}$, $\bar{w}$, $\bar{q}$, $\bar{v}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ решение системы (1.3.4)—(1.3.7) при новых значениях параметров. Пусть, далее, $u, \ldots, y$ и $\bar{u}, \ldots, \bar{y}$ определены одновременно при $o \leqslant t \leqslant T$, причем при $o \leqslant t \leqslant T$ и $o \leqslant x \leqslant 1$

$$\left.\begin{array}{l} |u|;\ |w|;\ |q|;\quad |v|;\ |z|;\ <N; \\ |\bar{u}|;\ |\bar{w}|;\ |\bar{q}|;\quad |\bar{v}|;\ |\bar{z}|;\ <N; \\ o<y(t);\ \bar{y}(t) \leqslant 1 \end{array}\right\} \tag{3.3.1}$$

Тогда для всякого $\varepsilon > o$ можно указать такое $\eta > o$, что на некотором интервале $(o, T_1)$, где $T_1 \leqslant T$ не зависит от $\varepsilon$, неравенства

$$\Delta u<\varepsilon;\ \Delta q<\varepsilon;\ \Delta w<\varepsilon;\ \Delta v<\varepsilon;\ \Delta z<\varepsilon;\ \Delta y<\varepsilon \tag{3.3.2}$$

выполняются, как только модули разностей $a^2$ и $\bar{a}^2$, $l$ и $\bar{l}$, $F$, $f$, $Z$, $\psi$ и $\varphi$ и, соответственно, $\bar{F}$, $\bar{f}$, $\bar{Z}$, $\bar{\psi}$ и $\bar{\varphi}$ и всех их частных производных первого порядка, взятых при совпадающих значениях аргументов, удовлетворяющих неравенствам (3.3.1), не превосходят $\eta$. Здесь

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u=\max\limits_{\substack{o \leqslant x \leqslant \min(y(t),\ \bar{y}(t))=L \\ o \leqslant t \leqslant T_1}} |u(x, t)-\bar{u}(x, t)|;\ \Delta q=\max\limits_{\substack{o \leqslant x \leqslant L \\ o \leqslant t \leqslant T_1}} |q(x, t)-\bar{q}(x, t)|, \\ \Delta z=\max\limits_{o \leqslant t \leqslant T_1} |z(t)-\bar{z}(t)|;\ \Delta y=\max\limits_{o \leqslant t \leqslant T_1} |y(t)-\bar{y}(t)| \\ \Delta v=\max\limits_{o \leqslant t \leqslant T_1} |v(t)-\bar{v}(t)|;\ \Delta w=\max\limits_{o \leqslant t \leqslant T_1} |w(t)-\bar{w}(t)|; \end{array}\right\} \tag{3.3.3}$$

Пусть сперва

$$a^2=\bar{a}^2;\quad l=\bar{l}. \tag{3.3.4}$$

Тогда для оценки $\Delta u, \ldots, \Delta y$ можно воспользоваться оценками (3.1.40) вариаций функционалов $J_{j,i}$ *).

Пусть $f(x, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ и $\bar{f}(x, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ определены и дифференцируемы при $o \leqslant x \leqslant 1$; $o \leqslant t \leqslant T_1$; $|\alpha_k| < N$; $(k=1, 2, \ldots, n)$. Положим

$$R_f=\max\max\left\{|f-\bar{f}|;\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right|;\quad \left|\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{d\bar{f}}{\partial t}\right|;\right.$$
$$\left.\left|\frac{df}{\partial \alpha_k}-\frac{d\bar{f}}{\partial \alpha_k}\right|;\ k=1, 2 \ldots n\right\} \tag{3.3.5}$$
$$o \leqslant t \leqslant T_1;\ o \leqslant x \leqslant 1;\ |\alpha_k| \leqslant N.$$

---

*) В силу результатов § 3.2 эти оценки остаются справедливыми для решений, удовлетворяющих условию (3.2.9), но не дифференцируемых

Пусть, далее,

$$|f|;\ |\bar{f}|;\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|;\ \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}\right|;\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|;\ \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\right|;\ \left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right|;\ \left|\frac{\partial \bar{f}}{\partial a_k}\right| \leqslant K, \tag{3.3.6}$$

где $K$ — некоторая константа, независящая от $R_f$. Имеем

$$|f(x, t, u, w, q, v, z, y) - \bar{f}(x, t, \bar{u}, \bar{w}, \bar{q}, \bar{v}, \bar{z}, \bar{y})| <$$
$$< R_f + K(\Delta u + \Delta w + \Delta q + \Delta v + \Delta z + \Delta y) \tag{3.3.7}$$

Сохраняя прежние обозначения рассмотрим теперь вариации функционалов $U$, $W$, $Q$, $V$ и $Z$, обсуловленные вариациями параметров задачи и вызванной ими вариацией $u, w, \ldots, y$. В силу (3.1.40), (2.2.2), (2.1.13) и (3.3.7) получим, как и при выводе (3.1.41),

$$\left.\begin{aligned}
&\delta^* U < K\sqrt{t}\ (\Delta u + \Delta w + \Delta q + \Delta v + \Delta z) + K^* R;\\
&\delta^* W < K\sqrt{t}\ (\Delta u + \Delta w + \Delta q + \Delta v + \Delta z) + K^* R;\\
&\delta Q < K\sqrt{t}\ (\Delta u + \Delta q + \Delta z) + \bar{K}(\Delta w + \Delta v) + K^* R\\
&\delta^* V < K\sqrt{t}(\Delta u + \Delta q + \Delta z) + K^* R\\
&\delta^* Z < \bar{K}(\delta v + \delta y) \leqslant K\sqrt{t}(\Delta z + \bar{K}\Delta v) + K^* R
\end{aligned}\right\} \tag{3.3.8}$$

Здесь $K$, $K^*$, $\bar{K}$ не зависят от $\Delta u, \ldots, \Delta z$ и $R$, но только от $T$; и

$$R = \max\ \{R_f,\ R_F,\ R_z,\ R_\psi \text{ и } R_\varphi\} \tag{3.3.9}$$

Поскольку $u, \ldots, y$ и, соответственно, $\bar{u}, \ldots, \bar{y}$ являются решениями задачи, соответствующими сравниваемым системам значений параметров, в (3.3.8) можно заменить $\delta^* U, \ldots, \delta^* Z$ на $\Delta u, \ldots, \Delta z$. При $t > o$ достаточно малом неравенства (3.3.8) могут быть разрешены относительно $\Delta u, \ldots, \Delta z$. В результате получим

$$\Delta u,\ \Delta w,\ \Delta q,\ \Delta v,\ \Delta z,\ \Delta y < L\,R \tag{3.3.10}$$

где $L$ подходящим образом выбранная константа, зависящая только от $t$, но не зависящая от $\Delta u, \ldots, \Delta y$, и возрастающая вместе с $t$. Но это и доказывает наше утверждение в случае (3.3.4).

Пусть теперь (3.3.4) не выполняется. Положим

$$\left.\begin{aligned}
&x^* = \frac{l}{\bar{l}}x;\ \xi^* = \xi\frac{l}{\bar{l}};\ t^* = \frac{\bar{a}^2}{a^2}\frac{l^2}{\bar{l}^2}t;\ \tau^* = \frac{\bar{a}^2}{a^2}\frac{l^2}{\bar{l}^2}\tau;\\
&y^*(t^*) = \frac{l}{\bar{l}}y(t);\ z^*(t^*) = \frac{\bar{l}a^2}{l\bar{a}^2}z(t);\\
&u^*(x^*, t^*) = \bar{u}(x, t);\ w^*(t^*) = \bar{w}(t);\\
&q^*(x^*, t^*) = \frac{\bar{l}}{l}\bar{q}(x, t);\ v^*(t^*) = \frac{\bar{l}}{l}\bar{v}(t)
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.11)$$

Положим, далее,

$$\left.\begin{aligned}
&F^*(x^*, t^*\ u^*, \ldots, y^*) = \frac{a^2}{\bar{a}^2}\frac{\bar{l}^2}{l^2}\bar{F}(x, t, \bar{u}, \ldots, \bar{y})\\
&f^*(t^*, w^*) = \frac{\bar{l}}{l}\bar{f}(t, \bar{w})\\
&\psi^*(x^*) = \bar{\psi}(x)\\
&\varphi^*(x^*) = \frac{\bar{l}}{l}\varphi(x)\\
&Z^*(t^*, \psi^*, v^*, y^*) = \bar{Z}(t, \bar{\psi}, \bar{v}, \bar{y})\frac{\bar{l}a^2}{l\bar{a}^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.12)$$

Тогда будут выполнены равенства

$$\begin{aligned}
&u^*(x^*, t^*) = U(x^*, t^*, u^*, \ldots, y^*)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^*(t^*) = Y(t^*, \ldots, z^*)
\end{aligned} \quad (3.3.13)$$

где, как и выше, $U, \ldots, Y$ — операторы, определенные равенствами (1.3.4), (1.3.7).

Имеем теперь

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta u = \max|u(x, t) - u^*(x^*, t^*)|;\\
&\Delta w = \max|w(t) - w(t^*)|;\\
&\Delta q = \max\left|q(x, t) - \frac{l}{\bar{l}}q^*(x^*, t^*)\right|;\\
&\Delta v = \max\left|v(t) - \frac{l}{\bar{l}}v^*(t^*)\right|;\\
&\Delta z = \max\left|z(t) - z^*(t^*)\frac{l\bar{a}^2}{\bar{l}a^2}\right|;\ ;\\
&\Delta y = \max\left|y(t) - \frac{\bar{l}}{l}y^*(t^*)\right|
\end{aligned}\right\} \quad (3.3.14)$$

В силу (3.3.12) $u, \ldots, y$ и $u^*, \ldots, y^*$ соответствуют равные значения $a^2$ и $l$. Следовательно величины

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^* u = \max|u(x, t) - u^*(x, t)|, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \Delta^* y = \max|y(t) - y^*(t)|\end{array}\right\} \qquad (3.3.15)$$

оцениваются согласно (3.3.10). Но разности

$$|\Delta u - \Delta^* u|, \ldots, |\Delta y - \Delta^* y|$$

стремятся к нулю вместе с

$$\alpha = |a^2 - \overline{a}^2| + |l - \overline{l}|$$

вследствие непрерывности $u, \ldots, y$ и $\overline{u}, \ldots, \overline{y}$ по $x$ и $t$ с одной стороны, и равенств

$$\lim_{\alpha \to o} x^* = x; \quad \lim_{\alpha \to o} t^* = t.$$

с другой. Но это и означает справедливость нашего утверждения устойчивости решения.

Устойчивость решения доказана нами на интервале времени $(o, T_1)$ меньшем, вообще говоря, чем интервал $(o, T)$ на котором совместно определены решения возмущенной и невозмущенной задачи. Поскольку, однако, $T_1$ не зависит от $\varepsilon$, но только от оценок «параметров» $f$, $F$, $\psi$, $\varphi$ и $Z$ и их производных (а вместе с тем и от оценок решений $u, w, \ldots, y$ и $\overline{u}, \overline{w}, \ldots, \overline{y}$), очевидно, что вывод о малости величины $\Delta u, \ldots, \Delta y$ может быть распространен на весь интервал $(o, T)$.

Пусть, действительно, $T_1$ наибольшая длина временного интервала, на котором из неравенств

$$\left.\begin{array}{c}|\overline{a}^2 - a^2| < \eta; \ |l - \overline{l}| < \eta; \ R_F^{t_0, T_1} < \eta; \ R_z^{t_0, T_1} < \eta \\ R_\psi < \eta; \ R_{u(x, t_0)} < \eta;\end{array}\right\} \qquad (3.3.16)$$

следуют неравенства

$$\begin{array}{c}\Delta_{t_0} u < \Delta\varepsilon; \ \Delta_{t_0} w < \varepsilon; \ \Delta_{t_0} q < \varepsilon; \ \Delta_{t_0} v < \varepsilon; \ \Delta_{t_0} z < \varepsilon, \\ \Delta_{t_0} y < \varepsilon.\end{array} \qquad (3.3.17)$$

Здесь $R_f^{t_0, T_1}$ определены так же, как $R_f$ в (3.3.35), но не на интервале $o \leqslant t \leqslant T_1$, а на интервале $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1$ и

$$\Delta_{t_0} u = \max_{\substack{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1 \\ o < x < \min(y(t), y(t))}} |u(x, t) - \overline{u}(x, t)|, \ \ldots, \ \Delta_{t_0} y = \max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1} |y(t) - \overline{y}(t)|;$$

Как указано выше $T_1$ не зависит от $\varepsilon$, $\eta$ и $t_0$.

Пусть $\varepsilon(\eta)$ монотонно возрастающая функция, такая что неравенства (3.3.32) выполняюстя при замене в них $\varepsilon$ на $\varepsilon(\eta)$. Пусть $\eta(\varepsilon)$ обратная ей функция. Пусть $n$ целое, такое, что

$$n-1<\frac{T}{T_1}\leqslant n \tag{3.3.19}$$

Положим $t_k=kT_1$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Возьмем произвольное $\varepsilon>o$ и определим последовательность

$$\varepsilon_{n-1}=\varepsilon;\ \varepsilon_{n-k}=\eta(\varepsilon_{n-k+1});\ (k=1,2,\ldots,n-1);\quad \eta=\varepsilon_0 \tag{3.3.20}$$

В таком случае неравенства

$$\left.\begin{aligned}&|a^2-\overline{a}^2|<\eta;\ |l-\overline{l}|<\eta;\ R_f^{o,T_1}<\eta;\ R_F^{o,T_1}<\eta;\\ &R_z^{o,T_1}<\eta;\ R_\psi<\eta;\ R_{u(x,\,o)=\varphi}<\eta\end{aligned}\right\} \tag{3.3.21}$$

обеспечивают выполнение неравенств (3.3.17) на каждом из интервалов $(t_k,\ t_{k+1})$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, что и т. д.

## § 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

**4.1.** Из доказанной сходимости пикаровского итерационного процесса и из устойчивости решения относительно всех параметров задачи вытекает, очевидно, возможность проведения следующего итерационно-разностного процесса.

Возьмем некоотрое, достаточно малое $T>o$ и последовательности

$$\begin{gathered}t_0=o<t_1<\ldots<t_n=T;\ x_0=o<x_1<\ldots<x_{m_n-1}<\\ .<x_{m_n}=l<\ldots<x_n=1\end{gathered} \tag{4.1.1}$$

Рассмотрим, далее, функции $u_{n,k}(x,t)$, $q_{n,k}(x,t)$, $w_{n,k}(t)$, $v_{n,k}(t)$, $z_{n,k}(t)$, $y_{n,k}(t)$, $\overline{u}_{n,k}(x,t)$, $\overline{q}_{n,k}(x,t)$, $\overline{w}_{n,k}(t)$, $\overline{v}_{n,k}(t)$, $\overline{z}_{n,k}(t)$, $\overline{y}_{n,k}(t)$, $u_n(x,t)$, $q_n(x,t)$, $w_n(t)$, $v_n(t)$, $z_n(t)$, $y_n(t)$, определенные условиями $A_1$ — $A_8$:

$A_1$: $u_{n,k}(x,t)$, $q_{n,k}(x,t)$, $\omega_{n,k}(t)$, $v_{n,k}(t)$ $z_{n,k}(t)$, $q_{n,k}(t)$ непрерывны вместе со своими производными первого порядка всюду в области

$$o\leqslant x\leqslant y_{n,k}(t);\ o\leqslant t\leqslant t_n$$

$$\left.\begin{aligned} \text{A}_2\text{: } & u_{n,k}\ (x_j, o) = \varphi(x_j);\ q_{n,k}\ (x_i, o) = \dot{\varphi}(x_i) \\ & w_{n,k}(o) = \varphi(o);\ v_{n,k}(o) = \dot{\varphi}(l); \\ & z_{n,k}(o) = -Z\ (o, \psi(l), \dot{\varphi}(l), l);\ y_{n,k}\ (o) = l \end{aligned}\right\} \quad (4.1.2)$$

А$_3$: Если $u_n$, $q_n$, $w_n$, $v_n$, $z_n$ и $y_n$ определены при $o \leqslant t \leqslant t_i$, а $u_{n,k}$, $q_{n,k}$, $w_{n,k}$, $v_{n,k}$ и $y_{n,k}$ при $o \leqslant t \leqslant t_{i+1}$, то

$$\left.\begin{aligned} \overline{u}_{n,k} &= \begin{cases} u_n \text{ при } o \leqslant t \leqslant t_i \\ u_{n,k} \text{ при } t_i < t \leqslant t_{i+1} \end{cases}; \\ \overline{w}_{n,k} &= \begin{cases} w_n \text{ при } o \leqslant t \leqslant t_i \\ w_{n,k} \text{ при } t_i < t \leqslant t_{i+1} \end{cases}; \\ \overline{q}_{n,k} &= \begin{cases} q_n \text{ при } o \leqslant t \leqslant t_i \\ q_{n,k} \text{ при } t_i < t \leqslant t_{i+1} \end{cases}; \\ \overline{v}_n &= \begin{cases} v_n \text{ при } o \leqslant t \leqslant t_i \\ v_{n,k} \text{ при } t_i < t \leqslant t_{i+1} \end{cases}; \\ \overline{z}_{n,k} &= \begin{cases} z_n \text{ при } o \leqslant t \leqslant t_i \\ z_{n,k} \text{ при } t_i < t < t_{i+1} \end{cases} \\ \overline{y}_{n,k}(t) &= l + \int_o^t \overline{z}_{n,k}\ (\tau)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \quad (4.1.3)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{A}_4\text{: } & u_n = \lim_{k\to\infty} u_{n,k};\ q_n = \lim_{k\to\infty} q_{n,k};\ w_n = \lim_{k\to\infty} w_{n,k} \\ & v_n = \lim_{k\to\infty} v_{n,k};\ z_n = \lim_{k\to\infty} z_{n,k};\ y_n = \lim_{k\to\infty} y_{n,k} \end{aligned}\right\} \quad (4.1.4)$$

А$_5$: Если $u_n$, ..., $y_n$ определены при $o \leqslant t \leqslant t_j$, то значения $u_{n,o}(x_i, t_{j+i})$ ..., $z_{n,o}$ $(t_{j+i})$ задаются произвольно.

А$_6$: Пусть $\overline{u}_{n,k}$, ..., $\overline{z}_{n,k}$, $\overline{y}_{n,k}$ и их производные по $x$ и $t$ определены при $o \leqslant t \leqslant t_j$. Пусть далее, $W_{n,k}$, ..., $Z_{n,k}$ совпадают со значениями операторов $W_n$, ..., $Z_n$, определенных согласно (2.1.6*), если в них $w_m$, ..., $y_m$ $(m=n-1, n)$ заменены на $\overline{w}_{n,m}$, ..., $\overline{y}_{n,m}$. $(m=k-1, k)$ соответственно. Пусть, наконец,

$W^*_{n,k}$, $U^*_{n,k}$ ... $Z^*_{n,k}$ значения производных по $t$ от операторов $W_{n,k}$, ..., $Z_{n,k}$, определенные равенствами (2.3.2) — (2.3.5), если в них $u_n$, ..., $y_n$ заменены на $\bar{u}_{n,m}$, ..., $\bar{z}_{m,n}$, $\bar{y}_{n,m}$ $(m=k-1,\ k)$. Аналогично определим производную $Q^{**}_{n,k}$ оператора $Q_{n,k}$ по $x$. Примем тогда

$$\left.\begin{array}{c} w_{n,k+1}\ (t_j) = W_{n,k+1}\ (t_j, \ldots); \\ u_{n,k+1}\ (x_i\ t_j) = U_{n,k+1}\ (x_i t_j \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n,k+1}\ (t_j) = Z_{n,k+1}\ (t_j, \ldots) \end{array}\right\} \tag{4.1.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dw_{n,k+1}}{dt}\ (t_j) = W^*_{n,k+1}\ (t_j \ldots);\ \ldots \\ \dfrac{dz_{n,k+1}}{dt}\ (t_j) = Z_{n,k+1}\ (t_j \ldots); \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\ q_{n,k+1}\ (x_i,\ t_j) = Q^{**}_{n,k+1}\ (x_i,\ t_j \ldots); \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\ u_{n,k+1}\ (x_i,\ t_j) = Q_{n,k+1}\ (x_i,\ t_j \ldots) \end{array}\right\} \tag{4.1.6}$$

$A_7$: Внутри каждого прямоугольника $x_i < x < x_{i+1}$; $t_{j-1} < t < t_j$ $w_{n,k+1}$, ..., $z_{n,k+1}$ определяются с помощью какой либо фиксированной интерполяционной формулы, обеспечивающей непрерывность $w_{n,k+1}$, ..., $z_{n,k+1}$ вместе с их производными по $x$ и $t$ в замыкании этого прямоугольника, и использующей значения $w_{n,k+1}$, ..., $z_{n,k+1}$ и их производных по $x$ и $t$ только в вершинах $(x_i,\ t_j)$; $(x_{i+1},\ t_j)$; $(x_i,\ t_{j-1})$ и $(x_{i+1},\ t_{j-1})$.

$A_8$: При любом рассматриваемом $t$

$$y_{n,k}\ (t) = l + \int\limits_0^t z_{n,k}\ (\tau)\ d\tau \tag{4.1.7}$$

Обоснование сходимости процесса, определяемого условиями $A_1$—$A_8$ может быть осуществлено с помощью уже полученных оценок и оценок им аналогичных. Поэтому мы на нем не останавливаемся. Заметим только, что из доказанной устойчивости решения и из выбора интерполяционной формулы высокой точности вытекает возможность вести расчет при не слишком малом шаге по времени. Нужно иметь только в виду, что вблизи

$t=o$ этот шаг должен быть возможно более мелким, так как при $t \to o$ $q=O(\sqrt{t})$ и $z=O(\sqrt{t})$; $v=O(\sqrt{t})$. По мере же удаления от $t=o$ шаг по времени может быть увеличен.

4.2. Развитая выше теория применима и для случая многофазного процесса, при наличии $n$ неизвестных границ раздела фаз

$$o<y_1(t)<y_2(t)<\ldots<y_n(t)<L$$

если

$$\min\,(y_{i+1}(o)-y_i(o)>o;\; y_i(o)>o;\; y_n(o)<L$$
$$i=1,2,\ldots,n-1$$

и если внутри каждой из областей $D_i=\{y_i(\tau)<x<y_{i+1}(\tau);\; o<\tau<t<\infty\}$ выполняются уравнения типа (0.1), а на границах раздела фаз условия, аналогичные условиям (0.4) и (0.5)*. Все доказательства остаются совершенно неизменными.

---

*) Именно, пусть $u_i\,(x, t)$ температура в области $D_i$. Тогда ищем $u_i$ и $y_j$ и такие, что $u_i$ и $\frac{\partial}{\partial x}u_i$ непрерывны в параболическом замыкании $D_i$, внутри $D_i$ удовлетворяют уравнениям

$$a_i^2\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+F_i\left(\kappa,\, t,\, u_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x},\, y_i,\, \dot{y}_i,\, y_{i+1},\, \dot{y}_{i+1}\right)=\frac{\partial u}{\partial t},$$

на границах $x=o$ и $x=L$ условиям вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}f(t,\, u)\ \text{или}\ u=\Phi\left(t,\, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

($L$ можно считать $\infty$. В этом случае надо потребовать регулярности на $\infty$) и на границах $x=y_k$ условиям

$$u_i\mid_{x=y_k(t)}=\psi_{i,k}(y_k) \qquad (k=i,\, i+1)$$

$$\frac{dy_k}{dt}=Z_{i,k}\left(t,\, u_i\,\frac{\partial u_i}{\partial x};\; u_k\,\frac{\partial u_k}{\partial x},\, u_k\right);\; y_k\,(o)=l_k \quad k=i,\, t+1).$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Л. И. Рубинштейн. Об одном варианте одномерной задачи Стефана с усиленной нелинейностью. ДАН СССР, т. 162 № 3 1962.

2. Л. И. Рубинштейн. О решении задачи Стефана. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз. № 1, 1947.

3. Л. И. Рубинштейн. Об определении положения границы раздела фаз в одномерной задаче Стефана. ДАН СССР, т. 58, № 2, 1947.

4. Л. И. Рубинштейн. Об устойчивости границы раздела фаз в двухфазной теплопроводящей среде. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз № 6, 1948.

5. Л. И. Рубинштейн. О распространении тепла в многослойной среде с изменяющимся фазовым состоянием. ДАН СССР, т. 79, № 2, 1951.

6. Л. И. Рубинштейн. О распространении тепла в двухфазной среде при наличии цилиндрической симметрии. ДАН СССР. т. 79, № 6, 1951.

7. Л. И. Рубинштейн. К вопросу о численном решении интегральных уравнений задачи Стефана. Известия ВУЗов, Математика, №4, 1958.

8. Л. И. Рубинштейн. О некоторых нелинейных задачах, порождаемых уравнением Фурье. Диссертация, МГУ, 1957.

9. Л. И. Рубинштейн. О решении задачи Веригина. ДАН СССР, т. 107. № 5, 1957. Об определении положения границы раздела двух малосжимаемых жидкостей, фильтрующихся через деформируемую пористую среду Труды Уфимского нефтяного института. Вып. 1, 1956.

10. G. W. Evans II. A note on the existence of a solution to a problem of Stefan; Quart. Appl. Math. (9), 1951: pp 185—193.

11. G. Sestini. Esistenza di una soluzione in problemi analogi a quello di Stefan; Rivista Mat. Univ. Parma; 3 (1952); pp 3—23

12. G. Sestini. Esistenza ed unicita nel problema di Stefan, relativo a compi dotati di simmetria. Rivista Mat. Univ. Parma; 3 (1952) pp 103—112.

13. J. Douglas and T. M. Gallie. On the numerical integration of a parabolic differential equation subject to a moving boundary condition; Duke math. j. 22 (1955) pp 557—571.

14. J. Douglas. A uniqueness theorem for the solution of a Stefan Problem. Proc. Amer. Math. Soc; 8 (1957) pp. 402—408.

15. I. I. Kolodner. Free boundary problem for the heat equation with application to problems of a change of phase; Comm. Pure Appl. Math; 9 (1956) p 1—31.

16. В. Меламед. Решение задачи Стефана сведением к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 7, стр. 848—869, 1958.

17. A. Friedman. Free Boundary Problems for Parabolic Equations. I. Melting of solids. J. Math. and Mech; vol 8; Nr. 4; 1959.

18. A. Friedman. Free Boundary Problems for parabolic Equations. II. Evaporation or Condensation of a Liquid; J. Math. and Mech; vol 9; Nr. 1 1960.

19. A. Friedman. Free Boundary Problem, for parabolic Equations; III Dissolution of a Gras Bubble in Liquid. J. Math. and Mech. vol 9; Nr. 3, 1960.

20. A. Friedman. Remarks on Stefan. Type Free Boundary Problems for Parabolic Equations. J. Math. and Mech. vol. 9 Nr. 6; 1960.

21. W. I. Miranker. A Free Boundary value Problem for the Heat Equation; Quart. Appl. Math; 16 (1958) pp. 121—130.

22. W. T. Kyner. A nonlinear Stefan Problem. J. Math. and Mech. vol 8; Nr. 4; 1959.

23. Л. Каменомостская. О задаче Стефана. Научные доклады Высшей школы. Физ. мат. науки, № 1, 1958.

24. О. А. Олейник. Об одном методе решения общей задачи Стефана. ДАН СССР, т. 135, № 5. 1960.

25. B. Pini. Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno del caso parabolico. Rendiconti del seminario Mat. della Univ. di Padova; Anno XXIII p. s. (1954) 423—434.

26. M. Crevrey. Equations aux dérivées partielles du type paraboliques. J. de Math. pure et appl. 6 Serie, t. IX f. IV; 1913.

*Л. И. Рубинштейн*

# ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА С УСИЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ


Аннотация

Изучается краевая задача:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x,\ t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ y,\ \frac{dy}{\partial t}\right) = \frac{\partial u}{dt};\ o < x < y(t);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=o} = f(t,\ u)\Big|_{x=o};\ u\Big|_{t=o} = \varphi(x);\ u\Big|_{x=y(t)} = \psi(y(t));$$

$$\frac{dy}{dt} = Z\left(t,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ y\right)\Bigg|_{x=y(t)};\quad y(o) = l > o$$

Результаты, подробно излагаемые в статье, были аннотированы автором в докладе на IV всесоюзном математическом съезде и в заметке «Об одном варианте задачи Стефана», опубликованной в ДАН СССР, т. 142, № 3, 1962 г.

L. I. Rubinstein

# ON A VARIANT OF A ONEDIMENSIONAL STEFAN-LYKE PROBLEM WITH FORCED NON-LINEARITY

## Annotation

The boundary value problem —

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, y, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{\partial u}{\partial t};\ o<x<y(t);$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=o} = f(t, u)\Big|_{x=o};\ u\Big|_{t=o} = \varphi(x);\ u\Big|_{x=y(t)} = \psi(y(t));$$

$$\frac{dy}{dt} = \Phi\left(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, y\right)\Big|_{x=y(t)};\ y(o) = l>o$$

is solved.

The author's results, analysed in detail in this article, were announced in a report made at the Fourth Mathematical Congress of the U. S. S. R., and in his article «On One Variant of the Stefan Problem», published in the journal DAN, U. S. S. R., vol. 142, No. 3, 1962.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Л. И. Рубинштейн*

# ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ПАРАМЕТРА*)

Ниже рассматривается асимптотическое по параметру $\nu$ поведение решения $u(r, z, t)$. краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\,\frac{\partial u}{\partial t}; \quad o<r<\infty; \quad o<z<\infty; \quad t>o; \tag{0,1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t}; \; o<r<\infty; \; z=o; \quad t>o; \quad (\nu, \alpha>o) \tag{0.2}$$

$$u\,|_{t=o} = o; \; o\leqslant z<\infty; \quad o<r<\infty; \quad \lim_{r^2+z^2\to\infty} u=o; \quad t\geqslant o \tag{0.3}$$

$$u\,|_{r=o;\; z=o} = 1; \quad t>o \tag{0.4}$$

Задача эта была поставлена нами ранее и решена с помощью двойного преобразования — Ханкеля по $r$ и Лапласа-Карсона по $t$ в связи с вопросом об изучении температурного поля нефтяного пласта при тепловой инжекции, осуществляемой путем нагнетания в пласт нагретой несжигаемой жидкости [1], [2]. Именно, было показано следующее. Пусть $v$-изображение Лапласа-Карсона от $u$ т. е.

$$v = p\int_o^\infty e^{-pt}\; u(r, z, t)\,dt. \tag{0,5}$$

*) Результаты, полученные ниже, кратко сообщены в [7].

Представим $v$ в виде

$$v=\int_{0}^{\infty} e^{-z\sqrt{\frac{p}{a_2}+s_2}}\, f(p,\, s) J_0(s\, r)\, s\, d\, s \tag{0,6}$$

где $J_0$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, и положим

$$\varphi(p,\, s)=\int_{s}^{\infty} f(p,\, \lambda)\, \lambda\, d\, \lambda \tag{0,7}$$

Тогда $\varphi$ является интегралом уравнения

$$\left( s^2+p+2\,\nu\sqrt{s^2+\frac{p}{a^2}}\right)\frac{d\varphi}{ds}+2\,\nu\, s\,\varphi=o; \tag{0,8}$$

при начальном условии

$$\varphi(o,\, p)=1. \tag{0,9}$$

Интеграция (0,8) дает

$$f(p,\, s)=\frac{2\,\nu\, e^{-2\nu\psi(s,\, p)}}{s^2+p+\alpha\sqrt{s^2+p/a^2}}, \tag{0,10}$$

где

$$\psi=\frac{t_1}{t_1-t_2}\, ln\,\frac{t_1-\sqrt{s^2+\frac{p}{a^2}}}{t_1-\sqrt{\frac{p}{a^2}}}-\frac{t_2}{t_1-t_2}\, ln\,\frac{t_2-\sqrt{s^2+\frac{p}{a^2}}}{t_2-\sqrt{\frac{p}{a^2}}} \tag{0,11}$$

и

$$t_{1,\,2}=-\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+p\,\frac{1-a^2}{a^2}} \tag{0,12}$$

Отметим, что в частном случае $a^2=1$ — (0,10) сводится к

$$f(p,\, s)=\frac{2\,\nu\,(\alpha+\sqrt{p})^{2\nu}}{\sqrt{s^2+p}\,(\alpha+\sqrt{s^2+p})^{2\nu+1}} \tag{0,13}$$

Зная $f$ представляем $u$ в виде двойного интеграла

$$\left.\begin{aligned} u &= \int_o^\infty \Phi(s;\ z;\ t) J_0(sr) s\, ds; \\ \Phi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt - z\sqrt{s^2 + p/a^2}}\ f(p,\ s)\ \frac{dp}{p} \end{aligned}\right\} \qquad (0,14)$$

В [1] было показано также, что в пределе (при $t \to \infty$) $u$, определяемое равенство (0,14), переходит в решение $U$ стационарной задачи, соответсвтующей задаче (0,1—(0,4), причем

$$U\ (r;\ z) = \int_o^\infty \frac{2\,\nu\,\alpha^{2\nu}}{(s+\alpha)^{2\nu+1}}\ J_0(rs)\, ds. \qquad (0,15)$$

В частности

$$U\ (r,\ o) = 1 - \int_o^t \left( 1 + \frac{\tau}{\varrho} \right)^{-2\nu} J_1(\tau)\, d\,\tau;\ \varrho = \alpha\ r. \qquad (0,16)$$

Числовые расчеты по формуле (0,14), даже в простейшем случае $a^2 = 1$, весьма затруднительны из за осцилляционного характера инетгралов, входящих в (0,14), а при больших значениях конвективного параметра $\nu$ они становятся просто невозможными, благодаря тому, что амплитуда колебаний подынтегральных функций оказывается при этом чрезвычайао большой. Таким образом оказывается необходимым получение асимптотического по $\nu$ разложения решения. Кроме того желательно преобразование решения к более обозримому виду и в случае $\nu$ малых. Цель настоящей работы и состоит в решении этих вопросов.

Вначале мы сосредоточиваем наше внимание на простейшем случае $a^2 = 1$ и $2\,\nu$ — целом. В § 1 с помощью формального применения правил операционного исчисления и интегральной теоремы Ханкеля мы приводим решение $u$ к виду

$$u = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int_o^\infty \frac{e^{\alpha R}}{R} \frac{d^n}{dR^n} \left( e^{-\alpha}\ R\, Erfc\ \frac{R}{2\sqrt{t}} \right) \cdot e^{-\alpha\, s}\, s^n\, ds, \qquad (0,17)$$

где

$$R^2 = r^2 + (s+z)^2;\quad n = 2\,\nu. \qquad (0,18)$$

В § 2 показывается, путем прямого счета, что $u$, определяемое таким образом, действительно дает решение исходной задачи

(0,1)—(0,4). В § 3 решение (0,17) представляется, с помощью интеграла Коши, в виде двойного интеграла, к которому двукратно применяется метод перевала для получения асимптотического разложения решения при $n \to \infty$

В § 4 выписываются первые два члена полученного асимптотического разложения:

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{R}\ Erfc\ \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \\ u_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\ u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\ \frac{\partial}{\partial y}\right) u_0 \end{aligned}\right\} \qquad (0.19)$$

где

$$\left.\begin{aligned} & R^2 = (1+x)^2 + y^2; \\ & x = \frac{\alpha z}{n}\ ;\ y = \frac{\alpha r}{n}\ ;\ \tau = \frac{\alpha^2 t}{n^2} \end{aligned}\right\} \qquad (0,20)$$

и показывается, что они являются решениями следующих краевых задач:

$$\left.\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_i = o;\ x>o;\quad y>o;\quad \tau>o; \\ & \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{y}\ \frac{\partial}{\partial y}\right) y_i + \psi_i = o;\ x = o;\quad y>o;\quad \tau>o; \\ & u_i \mid_{\tau=o} = o\ ;\quad u_i \mid_{x^2+y^2\to\infty} = o; \\ & y_i \mid_{x=y;\ \ y=o} = \Psi_i \end{aligned}\right\} \qquad (0,21)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} & \psi_0 = o;\quad \Psi_0 = 1; \\ & \psi_i = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\ \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_{i-1}\ ;\quad \Psi_i = o;\quad i = 1, 2, \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (0,22)$$

При этом не требуется, чтобы $n$ было целым.

Заметим, что $u_i$ $(i=0, 1, 2 \ldots)$, определяемые согласно (0,22), являются членами ряда

$$\sum_{i=o}^{\infty} v_i \cdot n^{-i}, \qquad (0,23)$$

сумма которого была бы решением задачи (0,1)—(0,4) в переменных (0,20), если бы ряд (0,23) и ряды, получаемые из него почленным дифференцированием, сходились бы равномерно.

Совпадение первых двух членов ряда (0,23) с соответствующими членами разложения, полученными методом перевала, ясно указывает на асимптотический характер этого ряда. Однако строгим доказательством этого факта мы не располагаем.

В § 5 ищется асимптотическое разложение решения исходной задачи в общем случае $a^2 \neq 1$. При этом используется метод § 4. Формальное применение правил операционного исчисления и теоремы Ханкеля приводят к следующему выражению первых двух членов разложения

$$\left.\begin{aligned} & u_0 = \frac{1}{R}\, Erfc\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\ ;\ (R^2 = (1+x)^2 + y^2); \\ & u_1 = \frac{\partial}{\partial x} u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0 - (a^2-1)\frac{\partial}{\partial \tau}\int\limits_x^\infty u_0 dx + \\ & + \frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\int\limits_0^\tau \frac{d\lambda}{\lambda}\Bigl[ u_0(x, \eta, \tau-\lambda) - \\ & - \int\limits_0^\infty \frac{u_0(x, \eta, \tau-\lambda)}{2\lambda}\, e^{-\frac{y^2+\eta^2}{4\lambda}}\, I_0\left(\frac{y\eta}{2\lambda}\right)\eta\, d\eta \Bigr] \end{aligned}\right\} \qquad (0,24)$$

что при $a^2 = 1$ совпадает с (0,19).

Ниже мы пользуемся следующими обозначениями:

$\simeq$ — знак асимптотического соответствия.

$\risingdotseq$ — знак соответствия между изображением и оригиналом при преобразовании Лапласа-Карсона, т. е.

$$F(p) \risingdotseq f(t) \text{ означает, что } F(p) = p\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \qquad (0,25)$$

$\backsim$ — знак соответствия между трансформантами Ханкеля нулевого порядка, т. е.

$F(x) \backsim f(s)$ означает, что

$$F(x) = \int\limits_0^\infty f(s) J_0(xs) s\, ds;\quad f(s) = \int\limits_0^\infty F(x) J_0(xs) x\, dx. \qquad (0,26)$$

Наконец $\dot{\simeq}$ и $\dot{\backsim}$ знаки соответствия при двойном преобразовании Лапласа-Карсона и Ханкеля, так что

$$F(s, p) \dot{\simeq} f(x, t);\ \Phi(p, s) \dot{\backsim} \varphi(t, x) \qquad (0,27)$$

означают

$$\left.\begin{aligned} F(s,\ p) &= p\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt\int\limits_0^\infty f(x,\ t)\,J_0(x\,s)\,x\,dx;\\ \Phi(p,\ s) &= p\int\limits_0^\infty J_0(x\,s)\,x\,d\,x\int\limits_0^\infty e^{-pt}\varphi(t,\ x)\,d\,t \end{aligned}\right\}\qquad(0{,}28)$$

Наконец используются следующие стандартные обозначения специальных функций:

$J_\mu(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка $\mu$,

$I_\mu(z)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента первого рода, порядка $\mu$,

$$Erfc\ x = 1 - Erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_x^\infty e^{-\tau^2}\,d\tau.$$

§ 1. Будем считать, что $a^2=1$ и $2\nu=n$ — целое. Тогда $f(p,\ s)$ из (0,13) запишется в виде

$$f(p,\ s)\,e^{-z\sqrt{s^2+p}} = \frac{n}{s^2}\,\frac{\left(\beta+\sqrt{\frac{p}{s^2}}\right)e^{-y\sqrt{1+\frac{p}{s^2}}}}{\sqrt{1+\frac{p}{s^2}}\left(\beta+\sqrt{1+\frac{p}{s^2}}\right)^{n+1}} \equiv \frac{n}{s^2}\,F\left(\frac{p}{s^2}\right),\qquad(1{,}1)$$

где

$$\beta = \frac{a}{s}\ ;\ y = sz.\qquad(1{,}2)$$

Пусть

$$F(p) \risingdotseq \varphi(t)\qquad(1{,}3)$$

Тогда по известному операционному правилу [3] из

$$f(p,\ s)\ e^{-y\sqrt{s^2+p}} \risingdotseq \Phi(s,\ z,\ t)\qquad(1{,}4^*)$$

и из (1,3) следует

$$\Phi=\varphi(s^2 t)\ \frac{n}{s^2} \tag{1,4}$$

Имеем

$$F(p)=\sum_{m=o}^{n} C_n^m\ \beta^{n-m} p^{\frac{m}{2}} \frac{e^{-y\sqrt{1+p}}}{\sqrt{1+p}\ (\beta+\sqrt{1+p})^{n+1}} \tag{1,5}$$

Пусть

$$F_1(p)=F(p^2);\quad \varphi_1(t) \doteq F_1(p). \tag{1,6}$$

Тогда по известному правилу [3]

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_o^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\ \varphi_1(\tau)\, d\tau. \tag{1,7}$$

Имеем

$$F_1(p)=\sum_{m=o}^{n} C_n^m\ \beta^{n-m} p^{m-1}\cdot\frac{p}{1+p^2}\cdot\frac{\sqrt{1+p^2}\ e^{-y\sqrt{1+p^2}}}{(\beta+\sqrt{1+p^2})^{n+1}} \equiv$$

$$\equiv \sum_{m=o}^{n} C_n^m\ \beta^{n-m} p^{m-1}\cdot\frac{p}{1+p^2}\ F^*\left(\sqrt{1+p^2}\right) \tag{1,8}$$

Пусть

$$F^*(p) \doteq \varphi^*(t) \tag{1,9}$$

Тогда [3]

$$\tilde{F}(p)\equiv\frac{p}{1+p^2}\ F^*\left(\sqrt{1+p^2}\right) \doteq \int_o^t J_0\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\varphi^*(\tau)\, d\tau. \tag{1,10}$$

Имеем

$$F^*(p)=\frac{e^{-yp}\cdot p}{(\beta+p)^{n+1}} \doteq e^{-\beta(t-y)}\ \frac{(t-y)^n}{n\,!}\ \eta(t-y)\ \equiv\varphi^*(t), \tag{1,11}$$

где $\eta(x)$ — единичная функция Хевисайда. Таким образом

$$\tilde{F}(p) \doteq \tilde{\varphi}(t)\equiv\int_y^t J_0\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)\ e^{-\beta(\tau-y)}\ \frac{(\tau-y)^n}{n\,!}\ d\tau\cdot\eta(t-y). \tag{1,12}$$

Отсюда видно, что $\bar{\varphi}$ непрерывна вместе со своими первыми $n-1$ производными при $t=y$. Действительно

$$\bar{\varphi}(y-o)=\bar{\varphi}'(y-o)= \ \ldots \ =\bar{\varphi}^{(n-1)}(y-o)=o, \qquad (1{,}13)$$

так как $\eta(-o)=o$. С другой стороны при $y=+o$ эти равенства выполняются благодаря наличию в подынтегральной функции множителя $(\tau-y)^n$.

Из (1,12), (1,13) и (1,5) следует, что

$$\varphi_1(t)=\sum_{m=o}^{n} C_n^m \beta^{n-m}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\int\limits_y^t \frac{e^{-\beta(\tau-y)}}{n!}(\tau-y)^n\eta(t-\tau)\, J_0\left(\sqrt{t^2-\tau^2}\right)d\tau. \qquad \mathbf{(1{,}14)}$$

Внося (1,14) в (1,7) найдем

$$\varphi(t)=\sum_{m=o}^{n} C_n^m \frac{\beta^{n-m}}{n!}\int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\,d\lambda\int\limits_y^{\lambda} J_0\left(\sqrt{\lambda^2-\tau^2}\right)e^{-\beta(\tau-y)}(\tau-y)^n d\tau.$$

Интегрируя по частям и замечая, что

$$\frac{d^{m-1}}{d\lambda^{m-1}}\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}=-\frac{d^m}{d\lambda^m}\,Erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{t}},$$

найдем

$$\varphi(t)=\sum_{m=o}^{n} C_n^m \frac{\beta^{n-m}}{n!}(-1)^m\int\limits_y^{\infty}\frac{d^m}{d\lambda^m}\,Erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\,d\lambda\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_y^{\lambda} J_0\left(\sqrt{\lambda^2-\tau^2}\right)e^{-\beta(\tau-y)}(\tau-y)^n d\tau. \qquad (1{,}15)$$

В силу формулы Лейбница это означает, что

$$\varphi(t)=\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_y^{\infty} e^{\beta\lambda}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left(e^{-\beta\lambda}\,Erfc\,\frac{\lambda}{2\sqrt{t}}\right)d\lambda\,\cdot$$

$$\cdot\int\limits_y^{\lambda} J_0\left(\sqrt{\lambda^2-\tau^2}\right)e^{-\beta(\tau-y)}(\tau-y)^n d\tau. \qquad (1{,}16)$$

Внося (1,16) в (1,4) найдем

$$\Phi = \frac{(-1)^n}{s^2\Gamma(n)} \int\limits_y^\infty e^{\beta\lambda} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left( e^{-\beta\lambda} \, Erfc \, \frac{\lambda}{2\sqrt{t}} \right) d\lambda \cdot$$

$$\cdot \int\limits_y^\lambda J_0 \left( \sqrt{\lambda^2 - \tau^2} \right) e^{-\beta(\tau - y)} \, (\tau - y)^n d\tau. \qquad (1,17)$$

Положим здесь

$$\tau = s\,\eta; \quad \lambda = s\,\xi$$

Тогда, учитывая (1,2), получим

$$\Phi = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int\limits_z^\infty e^{\alpha\xi} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( e^{-\alpha\xi} \, Erfc \, \frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi \cdot$$

$$\cdot \int\limits_z^\xi J_0 \left( s\sqrt{\xi^2 - \eta^2} \right) e^{-\alpha(\eta - z)} \, (\eta - z)^n d\eta \qquad (1.18)$$

Положим, наконец

$$\sqrt{\xi^2 - \eta^2} = \tau$$

Найдем

$$\Phi = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int\limits_z^\infty e^{\alpha\xi} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( e^{-\alpha\xi} \, Erfc \, \frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{\xi^2 - z^2}} J_0(s\,\tau) e^{-\alpha\left(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z\right)} \left( \sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z \right)^n \frac{\tau \, d\tau}{\sqrt{\xi^2 - \tau^2}} \qquad (1,19)$$

Внося (1,19) в первый из интегралов (0,14) и меняя порядок интегрирования получим

$$U = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n)} \int\limits_z^\infty e^{\alpha\xi} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( e^{-\alpha\xi} \, Erfc \, \frac{\xi}{2\sqrt{t}} \right) d\xi \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^\infty J_0(s\,r) s \, ds \int\limits_0^{\sqrt{\xi^2 - z^2}} \tau \, J_0(s\,\tau) \;\; e^{\left(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z\right)} \cdot \frac{d\tau}{\left(\sqrt{\xi^2 - \tau^2} - z\right)^n}. \qquad (1,20)$$

Пользуясь интегральной теоремой Ханкеля [4] найдем отсюда

$$U=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int\limits_z^\infty e^{-\alpha\xi}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\alpha\xi}\ Erfc\ \frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)\cdot$$

$$\cdot\eta(\sqrt{\xi^2-z^2}-r)\cdot e^{-\alpha(\sqrt{\xi^3-\eta^2}-z)}(\sqrt{\xi^2-r^2}+z)^n\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}}$$

или, что то же самое,

$$U=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int\limits_{\sqrt{r^2-z^2}}^\infty e^{\alpha\xi}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\alpha\xi}\ Erfc\ \frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)\cdot$$

$$\cdot e^{-\alpha(\sqrt{\xi^2-r^2}-z)}(\sqrt{\xi^2-r^2}-z)^n\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-r^2}} \tag{1,21}$$

Положим в (1,21)

$$\xi=R;\ \sqrt{\xi^2-r^2}-z=s,$$

так, что

$$R=\sqrt{r^2+(s+z)^2} \tag{1,22}$$

Получим

$$U=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty e^{\alpha R}\ \frac{d^n}{d\,R^n}\left(e^{-\alpha R}\ Erfc\ \frac{R}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\alpha s}\ s^n\cdot\frac{ds}{R}. \tag{1,23}$$

Выражения (1,21) и (1,23) эквивалентны.

§ 2. Представление решения в виде (1,21) или (1,23) получено путем формального применения операционных правил и теоремы Ханкеля без проверки законности всех проведенных преобразований. Убедимся прямым счетом в том, что $U$, так определенное, действительно является решением задачи (0,1)—(0,4), если только $a^2=1$ и $2\nu=n$ — целое. Положим, с этой целью,

$$v_n=\frac{e^{\alpha R}}{R}\frac{d^n}{d\,R^n}\left(e^{-\alpha R}\ Erfc\ \frac{R}{2\sqrt{t}}\right), \tag{2,1}$$

так что

$$U=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n)}\int\limits_0^\infty v_n\cdot e^{-\alpha s}\ s^n\,ds. \tag{2,2}$$

Покажем, что $u$ является решением уравнения (0,1) при $t>o$. Имеем

$$\Delta v_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v_n \equiv \frac{\partial^2 v_n}{\partial R^2}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\right) + \\ + \frac{\partial v_n}{\partial R}\left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right].$$

Но

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r}{R};\quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z+s}{R};\quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \frac{1}{R} - \frac{r^2}{R^3};\quad \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{1}{R} - \frac{(s+z)^2}{R^3}.$$

Следовательно

$$\Delta v_n = \frac{\partial^2 v_n}{\partial R^2} + \frac{2}{R}\frac{\partial v_n}{\partial R} \equiv \frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(R v_n). \tag{2,3}$$

Но это означает, что

$$\Delta v_n = \alpha^2 v_n + 2\alpha v_{n+1} + v_{n+2}. \tag{2,4}$$

С другой стороны при $t>o$ имеем

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = e^{\alpha R}\frac{d^n}{dR^n}\left(e^{-\alpha R}\frac{\partial}{\partial t}\, Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}}\right) \equiv \\ \equiv e^{\alpha R}\frac{d^n}{dR^n}\left(e^{-\alpha R}\frac{d^2}{dR^2}\, Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}}\right). \tag{2,5}$$

Далее

$$e^{-\alpha R}\frac{d^2}{dR^2}\, Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}} \equiv \left(\frac{d^2}{dR^2} + 2\alpha\frac{d}{dR} + \alpha^2\right)\left(e^{-\alpha R}\, Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}}\right) \tag{2,6}$$

Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t} R v_n \equiv e^{\alpha R}\left(\frac{d^{n+2}}{dR^{n+2}} + 2\alpha\frac{d^{n+1}}{dR^{n+1}} + \alpha^2\frac{d}{dR^n}\right)\left(e^{-\alpha R}\, Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}}\right)$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{R}\frac{\partial R v_n}{\partial t} = v_{n+2} + 2\alpha v_{n+1} + \alpha^2 v_n. \tag{2,7}$$

Сопоставляя (2,3) и (2,7) видим, что

$$\Delta v_n = \frac{\partial v_n}{\partial t}, \tag{2,8}$$

причем (2,8) выполнено при $t>o$ и $z\geqslant o$.

С другой стороны при $r\geqslant r_0>o$; $z\geqslant o$ интеграл (1,23) сходится равномерно вместе со всеми производными по $R$. Поэтому из (2,8) и (1,23) следует, что

$$\Delta u_n \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u_n \equiv \frac{\partial u_n}{\partial t} \text{ при } t>o;\ z\geqslant o. \tag{2,9}$$

что и т. д.

Докажем, что имеет место (0,2). В силу (2,9) достаточно доказать, что

$$L\,u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \alpha\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{n}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} = o \quad \text{при } z=o;\ r>o. \tag{2,10}$$

Воспользуемся представлением $u$ в виде (1,21). Положим

$$\frac{1}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\; e^{-\alpha\left(\sqrt{\xi^2-r^2}-z\right)}\; \left(\sqrt{\xi^2-r^2}-z\right)^n = \Psi_n;$$

$$e^{\alpha\xi}\,\frac{d^n}{d\,\xi^n}\left(e^{-\alpha\xi}\,Erfc\,\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right) \equiv w_n; \tag{2,11}$$

Ниже для простоты считаем $n\geqslant 2$. В обозначениях (2,11) интеграл (1,21) запишется в виде

$$u = \int\limits_{\sqrt{r^2-z^2}}^{\infty} w_n\,(\xi,\,t)\,\Psi_n\,(\xi,\,r,\,z)\,d\xi. \tag{2,12}$$

В силу (2,11) имеем

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = \alpha\,\Psi_n - n\,\Psi_{n-1}.$$

Следовательно

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial z^2} = \alpha^2 \Psi_n - 2\,\alpha_n\,\Psi_{n-1} + n(n-1)\,\Psi_{n-2}.$$

Таким образом

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi_n\Bigg|_{z=o} = \left(n(n-1)\Psi_{n-2} - \alpha\,n\,\Psi_{n-1})\right)\Bigg|_{z=o} \equiv$$

$$\equiv e^{-\alpha\sqrt{\xi^2-r^2}}\,(\xi^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\left[\,n(n-1) - \alpha\,n\,\sqrt{\xi^2-r^2}\,\right]. \qquad (2,13)$$

Кроме того

$$\Psi_n = \frac{\partial\Psi_n}{\partial z} = o \qquad \text{при } \xi = \sqrt{r^2+z^2}; \quad z > o. \qquad (2,13^*)$$

Следовательно

$$\lim_{z\to o}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \alpha\,\frac{\partial}{\partial z}\right)u = \int_r^\infty w_n\,(\xi,\ t)\,e^{-\alpha\sqrt{\xi^2-r^2}}\,(\xi^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left[\,n(n-1) - \alpha\,n\sqrt{\xi^2-r^2}\,\right]d\xi. \qquad (2,14)$$

С другой стороны

$$u\,\Bigg|_{z=o} = \int_r^\infty w_n(\xi,\ t)\ e^{-\alpha\sqrt{\xi^2-r^2}}\ (\xi^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\,\xi. \qquad (2,15)$$

Следовательно при $n > 1$

$$\frac{n}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r}\Bigg|_{z=o} = \int_r^\infty w_n(\xi,\ t)\ e^{-\alpha\sqrt{\xi^2-r^2}}\left(\alpha\,n - \frac{n(n-1)}{\sqrt{\xi^2-r^2}}\right)(\xi^2-r^2)^{\frac{n-2}{2}}\,d\,\xi. \qquad (2,16)$$

Сопоставляя (2,14) и (2,16) убедимся в том, что (2,10) выполняется при $n \geqslant 2$; и $r > o$; $z \geqslant o$.

Выполнение условий (0,3) очевидно. Для того, чтобы убедиться в выполнении (0,4) при $z=o$ и $r \to o$, заметим, что

$$u(r,\ o,\ t) = \int_r^\infty e^{\alpha\xi}\,\frac{d^n}{d\,\xi^n}\left(e^{-\alpha\xi}\,Erfc\,\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\alpha\sqrt{\xi^2-r^2}}\,(\xi^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\,\xi. \qquad (2,17)$$

Следовательно при $n>1$

$$u(o,\ o,\ t)=\int\limits_{o}^{\infty}\xi^{n-1}\frac{d^n}{d\xi^n}\left(e^{-\alpha\xi}\ Erfc\,\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)d\,\xi. \qquad (2{,}18)$$

$n$ — краткое интегрирование по частям покажет теперь, что

$$u\ (o,\ o,\ t)\equiv 1,$$

что и т. д.

§ 3. Отмеченная во введении трудность вычисления квадратуры (0,14) обусловлена наличием осцилляций с очень большой амплитудой колебаний. Эта трудность сохраняется и при использовании представления решения в виде (1,23). Однако, это представление удобно для получения асимптотического разложения решения по параметру $n$.

С целью построения этого разложения воспользуемся интегралом Коши. Поскольку $e^{-\alpha R}Erfc\ (R/2\ \sqrt{t})$ — целая функция от $R$ — имеем

$$\frac{d^n}{dR^n}\left(e\ \ Erfc\,\frac{R}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{n\,!}{2\,\pi\,i}\int\limits_{L}e^{-\omega\zeta}\ Erfc\,\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{d\,\zeta}{(\zeta-R)^{n+1}}, \qquad (3{,}1)$$

где $L$ — любой замкнутый контур, охватывающий точку $\zeta=R$. Для того, чтобы можно было воспользоваться представлением (3,1) при вычислении интеграла (1,23), нужно выбрать контур $L$ так чтобы была гарантирована абсолютная сходимость двойного интеграла

$$u=\frac{n\,(-1)^n}{2\,\pi\,i}\int\limits_{0}^{\infty}e^{\alpha(R-s)}\ \frac{s^n}{R}\ ds\int\limits_{L}e^{-\alpha\zeta}\ Erfc\,\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{d\,\zeta}{(\zeta-R)^{n+1}}, \qquad (3{,}2)$$

Поскольку

$$Erfc\,\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}=\frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4\,t}}}{\zeta\,\sqrt{\pi}}\ 2\sqrt{t}\ \ \left(1+O\left[\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t}}\right)^{-2}\right]\right).$$

видим, что для этого достаточно, чтобы контур $L$ лежал внутри угла, образованного полупрямыми

$$\zeta=\varrho\ e^{\pm i\left(\frac{\pi}{4}-\varepsilon\right)}\ ;\ 0<\varrho<\ \infty,$$

где $\varepsilon > o$ сколь угодно мало. Возьмем, в качестве $L$ эти лучи обходимые в положительном направлении. Тогда $L$ будет инвариантен при преобразовании подобия, что и будет сейчас использовано.

Сделаем замену переменных

$$x = \frac{\alpha z}{n}\ ;\ y = \frac{\alpha r}{n}\ ;\ \tau = \frac{\alpha^2 t}{n^2}\ ;\ \lambda = \frac{\alpha s}{n};\ \omega = \frac{\alpha \zeta}{n}. \tag{3,3}$$

Найдем из (1,23) и (3,1)

$$u = \frac{n}{2\pi i}\int_{o}^{\infty} e^{n(1-\lambda+ln\lambda)}\ \frac{d\lambda}{R}\int_{L} e^{n(R-\omega-1-ln(R-\omega))}\ Erfc\,\frac{\omega}{2\sqrt{t}}\cdot\frac{d\,\omega}{\omega-R}. \tag{3,4}$$

где

$$R^2 = (\lambda + x)^2 + y^2. \tag{3,5}$$

Воспользуемся теперь двукратно методом перевала. Напомним его осневную идею [5]. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ аналитические функции в части $D$ плоскости комплексного переменного $t$. Рассмотрим интеграл

$$J \equiv \int_{L} e^{nf(t)}\ g(t)\,dt, \tag{3,6}$$

при $n \to \infty$. Пусть $t_0 \subset D$ — критическая точка, т. е. корень уравнения $f'(t) = o$. Пусть, далее, контур $L$ можно деформировать так, что он проходит через $t_0$, причем в окрестности $t_0$ направление $L$ совпадает с критическим направлением, определяемом из условия

$$f''(t_0)\,(t - t_0)^2$$

действительно и меньше нуля. (Предполагается, что $f''(t_0) \neq o$). Тогда при $n \to \infty$ значение $J$ определяется частью интеграла, взятой по отрезку контура, лежащему в сколь угодно малой окрестности критической точки $t_0$.

Пусть

$$f(\omega) = R - \omega - 1 - ln(R - \omega). \tag{3,7}$$

Критическая точка $\omega_0$ определится из уравнения

$$f'(\omega) = -1 + \frac{1}{R - \omega} = o$$

т. е.

$$\omega_0 = R - 1 \tag{3,8}$$

Так как

$$f''(\omega)=\frac{1}{(R-\omega)^2}\ ;\ \ f''(\omega_0)=1,$$

видим, что вдоль критического направления $\omega-\omega_0$ чисто мнимое. Положим, поэтому

$$\omega=R-1+\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i;\quad -n^{\delta}<\varrho<n^{\delta},\quad o<\delta<\tfrac{1}{2}. \tag{3,9}$$

Найдем

$$f(\omega)=-\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}\, i+\sum_{m=o}^{\infty}\frac{(\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i)^{m+1}}{m+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\varrho^2}{n}+\sum_{m=3}^{\infty}\frac{(\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i)^{m}}{m}.$$

Это дает

$$\int_L e^{n\,(R-\omega-1-ln\,(R-\omega))}\ Erfc\,\frac{\omega}{2\sqrt{\tau}}\cdot\frac{d\omega}{\omega-R}$$

$$\cong i\,n^{\frac{1}{2}}\int_{-n^{\delta}}^{n^{\delta}} e^{-\frac{\rho^2}{2}+n\sum\limits_{m=3}^{\infty}\frac{(\rho n^{-\frac{1}{2}}i)^m}{m}}\ Erfc\,\frac{R-1+\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i}{2\sqrt{\tau}}\cdot\frac{d\,\varrho}{1-\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i} \tag{3,10}$$

Имеем

$$\frac{1}{1-i\,\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}}=\sum_{m=o}^{\infty}\ (i\,\varrho\, n^{-\frac{1}{2}})^m;$$

$$Erfc\ \frac{R-1+\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}i}{2\sqrt{\tau}}=\sum_{m=o}^{\infty}\frac{Erfc^{(m)}\ \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}}{m\,!}\left(\frac{\varrho\ n^{-\frac{1}{2}}i}{2\sqrt{\tau}}\right)^m, \tag{3,11}$$

где

$$Erf\,c^{(m)}(z)=\frac{d^m}{d\,z^m}\,Erfc\,(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(-1)^{m-1}\,e^{-z^2}\,\mathrm{H}_{m-1}\,(z)$$

$$\text{при } m>o; \tag{3,12}$$

и $H_m\ (z)$ — полиномы Эрмита [6].

Таким образом

$$J_1 = Erfc\,\frac{R-1+\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{1-i\,\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sum_{k=o}^{\infty} (\varrho\, n^{-\frac{1}{2}} i)^k \sum_{m=o}^{k} \frac{1}{m!}\; Erfc^{(m)}\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\right)^m \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=o}^{\infty} (\varrho\, n^{-\frac{1}{2}} i)^k \sum_{m=o}^{k} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m}\, Erf\,c\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \qquad (3,12^*)$$

Далее

$$J_2 = e^{\,n \sum\limits_{m=3}^{\infty} \frac{(\rho n^{-\frac{1}{2}} i)^m}{m}} = \prod_{m=3}^{\infty} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{(\varrho\, i)^{mk}}{m^k k!}\, n^{k-\frac{mk}{2}}, \qquad (3,13)$$

что можно записать в виде

$$J_2 \cong \sum_{k=o}^{\infty} n^{-\frac{k}{2}}\, A_k\,(\varrho), \qquad (3,14)$$

где $A_k\,(\varrho)$ — полиномы.

Таким образом

$$J_1 J_2 = \sum_{j=o}^{\infty} n^{-\frac{j}{2}} \sum_{k=o}^{j} A_{j-k}(\varrho)\,(\varrho\, i)^k \sum_{m=o}^{k} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m}\; Erfc\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}. \qquad (3,15)$$

Внося (3,15) в (3,10) получим

$$\int_L e^{n[R-\omega-1-ln(R-\omega)]}\; Erfc\, \frac{\omega}{2\sqrt{\tau}} \cdot \frac{d\,\omega}{\omega-R} \cong$$

$$\cong i n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=o}^{\infty} n^{-\frac{j}{2}} \int_{-n^{\delta}}^{n^{\delta}} \sum_{k=o}^{j} n^{-\frac{\rho^2}{2}}\, A_{j-k}\,(\varrho)\,(\varrho\, i)^k \cdot$$

$$\sum_{m=o}^{k} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m}\; Erf\,c\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\, d\,\varrho.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в интегралах правой части получим асимптотическое разложение

$$\int_L \cong i n^{-\frac{1}{2}} \sum_{j=o}^{\infty} n^{-\frac{j}{2}} \sum_{k=o}^{j} \alpha^{*}_{j,\,k} \sum_{m=o}^{k} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial R^m}\, Erf\,c\,\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}, \qquad (3,16)$$

где

$$\alpha^*_{j,\ k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{j-k}\ (\varrho)\,(\varrho\, i)^k\ e^{-\frac{\rho^2}{2}}\ d\rho. \qquad (3,17)$$

Заметим теперь, что при $j$ — нечетном $\alpha^*_{J,\ k} = 0$. Действительно из (3,13) и (3,3,14) следует, что $A_k\ (\varrho)$ образована как сумма произведений степеней $\varrho$ таких, что если

$$k = (m-2)\,i + (n-2)\,j,$$

то в эти произведения $\varrho$ входит со степенью

$$k + 2\,i + 2\,j$$

Таким образом четность степеней $\varrho$, входящих в $A_k$, совпадает с четностью $k$. Но это, в силу того, что $\alpha^*_{J,\ k}$ является интегралом с симметричными пределами, означает, очевидно, что $\alpha^*_{J,\ k} = o$ при $J$ — нечетном, что и т. д. Ниже будем писать $\alpha^*_{2J,k} = \alpha_{J,\ k}$, так что

$$\alpha_{j,\ k} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\ (\varrho\, i)^k\ A_{2j-k}\ (\varrho)\ d\,\varrho \qquad (3,18)$$

и

$$\int\limits_L \cong i\, n^{-\frac{1}{2}} \sum_{J=o}^{\infty} n^{-j} \sum_{k=o}^{2j} \sum_{m=o}^{k} \frac{\alpha_{J,\ k}}{m\,!}\, \frac{\partial^m}{\partial R^m}\ Erfc\, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}} \qquad (3,19)$$

Внося (3,19) в (3,4) получим

$$u \cong \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \sum_{J=o}^{\infty} n^{-j} \sum_{k=o}^{2j} \sum_{m=o}^{k} \frac{\alpha_{J,\ k}}{m\,!} \int\limits_{o}^{\infty} e^{n(1-\lambda+ln\lambda)}\, \frac{1}{R_0}\, \frac{\partial^m}{\partial R_0^m}\ Erfc\, \frac{R_0-1}{2\sqrt{\tau}}\, d\,\lambda, \qquad (3,20)$$

где

$$R_0^2 = (\lambda + x)^2 + y^2 \qquad (3,21)$$

Прибегнем снова к методу перевала. Критическая точка здесь равна $\lambda = 1$ и критическое направление совпадает с направлением действительной оси. Положим

$$J_m = \int\limits_{o}^{\infty} e^{n(1-\lambda+ln\lambda)}\, \frac{1}{R_0}\, \frac{\partial^m}{\partial R_0^m}\ Erfc\, \frac{R_0-1}{2\sqrt{\tau}}\, d\,\lambda, \qquad (3,22)$$

и

$$\lambda=1+\varrho n^{-\frac{1}{2}};\ -n^{\delta}<\varrho<n^{\delta};\ \ o<\delta<\tfrac{1}{2}. \tag{3,23}$$

Получим асимптотически

$$J_m \cong= n^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{-n^{\delta}}^{n^{\delta}} e^{n\,[-\rho n^{\frac{1}{2}}+ln(1+\rho n^{-\frac{1}{2}})]}\ \frac{\partial^m}{\partial R_0^m}\,Erf\,c\,\frac{R_0-1}{2\sqrt{\tau}}\ \frac{d\tau}{R_0}. \tag{3,24}$$

Имеем

$$\frac{1}{R_0}\ \frac{\partial^m}{\partial R_0^m}\ Erfc\ \frac{R_0-1}{2\sqrt{\tau}}\ =\ \sum_{k=o}^{\infty}\ \frac{1}{k!}\ \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{R}\ \frac{\partial^m}{R\,\partial R^m}\ Erfc\ \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\cdot \\ \cdot\left(\varrho\, n^{-\frac{1}{2}}\right)^k, \tag{3,25}$$

где

$$R^2=(1+x)^2+y^2. \tag{3,26}$$

Далее

$$e^{n\,[-\rho n^{-\frac{1}{2}}+ln(1+\rho n^{-\frac{1}{2}})]}=e^{-\frac{\rho^2}{2}}\prod_{k=o}^{\infty}\ \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^{k(m+1)}\varrho^{km}}{m^k k!}\,n^{-\frac{k}{2}(m-2)}\cong \\ \cong e^{-\frac{\rho^2}{2}}\sum_{k=o}^{\infty}\ B_k\ (\varrho)\ n^{-\frac{k}{2}}. \tag{3,27}$$

где $B_k\ (\varrho)$ — полиномы. Как и выше в выражении $B_k$ встречаются степени $\varrho$ лишь той же четности, что и четность $k$. Внося (3,25) и (3,27) в (3,24) найдем, что

$$J_m\cong n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=o}^{\infty}\ n^{-\frac{k}{2}}\ \sum_{s=o}^{k}\frac{1}{s\,!}\ \frac{d^s}{d\,x^s}\left(\frac{1}{R}\ \frac{\partial^m}{\partial R^m}\,Erf\ c\ \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\right)\cdot \\ \cdot\int\limits_{-n^{\delta}}^{n^{\delta}} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\ B_k(\varrho)\ \varrho^s d\ \varrho,$$

или снова переходя в интегралах к пределу при $n\to\infty$

$$J_m\cong n^{-\frac{1}{2}}\ \sum_{k=o}^{\infty}\ n^{-\frac{k}{2}}\ \sum_{s=o}^{k}\ \frac{1}{s\ !}\ f_{sm}\ \ \beta^*_{ks}, \tag{3,28}$$

где

$$\beta^*_{ks}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, B_{k-s}(\varrho)\,\varrho^s\, d\,\varrho \tag{3,29}$$

и

$$f_{s,m}=\frac{d^s}{dx^s}\left(\frac{1}{R}\,\frac{\partial^m}{\partial R^m}\,Erfc\,\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\right). \tag{3,30}$$

Как и выше $\beta^*_{k,\,s}=o$ при $k$ — нечетном. Будем писать

$$\beta_{k,\,s}=\beta^*_{2\,k,\,s}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, B_{2k-s}\,(\varrho)\,\varrho^s\,d\,\varrho \tag{3,31}$$

Получим окончательно

$$J_m\cong n^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=o}^{\infty} n^{-k}\sum_{s=o}^{2k}\frac{1}{s\,!}\,f_{s,m}\;\beta_{k,\,s}. \tag{3,32}$$

Внося (3,32) в (3,20) получим

$$u\cong\sum_{J=o}^{\infty} u_j n^{-J}, \tag{3.33}$$

где

$$u_j=\frac{1}{2\,n}\sum_{k=o}^{J}\;\sum_{k=o}^{2p}\;\sum_{m=o}^{k}\;\sum_{s=o}^{2(j-p)}\frac{\alpha_{p,\,k}}{m\,!\;s\,!}\;f_{s,m}\;\beta_{J-p,\,s}. \tag{3.34}$$

§ 4. Выпишем первые два члена разложения (3,33). Имеем

$$u_0=\frac{1}{2\,n}\;\alpha_{00}\,f_{00}\;\beta_{00};$$

$$u_1=\frac{1}{2\,\pi}\Big\{\alpha_{00}\;\beta_{10}+\alpha_{10}\beta_{00}+\alpha_{12}\;\beta_{00}+\alpha_{11}\,\beta_{00})f_{0,0}+ \tag{4,1}$$

$$+\alpha_{00}\;\beta_{11}\;f_{10}+(\alpha_{11}\;\beta_{00}+\alpha_{12}\,\beta_{00})f_{01}+\tfrac{1}{2}\;\alpha_{00}\;\beta_{12}\;f_{20}+\tfrac{1}{2}\;\alpha_{12}\;\beta_{00}\;f_{02}\Big\}.$$

Далее

$$\left.\begin{aligned} &A_0=1;\;A_1=-\,\frac{i\,\varrho^3}{3};\;A_2=\frac{\varrho^4}{4}-\frac{\varrho^6}{18};\\ &B_0=1;\;B_1=\frac{\varrho^3}{3};\;B_2=\frac{\varrho^6}{18}-\frac{\varrho^4}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{4,2}$$

Следовательно

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\, d\,\varrho=\sqrt{2\,\pi};\\
&\alpha_{1,0}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\left(\frac{\varrho^4}{4}-\frac{\varrho^6}{18}\right) d\,\varrho=-\frac{\sqrt{2\,\pi}}{12};\\
&\alpha_{11}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\frac{\varrho^4}{3}=\sqrt{2\,\pi};\\
&\alpha_{12}=-\int\limits_{+\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\,\varrho^2 d\,\varrho=-\sqrt{2\,\pi};\\
&\beta_{00}=\sqrt{2\,\pi};\quad \beta_{10}=\frac{\sqrt{2\,\pi}}{12};\ \beta_{11}=\sqrt{2\,\pi};\quad \beta_{12}=\sqrt{2\,\pi}
\end{aligned}\right\}\qquad (4,3)$$

Внося (4,3) в (4,1) найдем

$$u_0=f_{0,0};\qquad (4,4)$$

$$u_1=f_{10}+f_{2,0}-f_{02}.$$

Внося сюда $f_{ij}$ из (3,30) получим

$$u_0=\frac{1}{R}\,Erfc\,\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\qquad (4,5)$$

и

$$u_1=\frac{\partial}{\partial x}\,u_0+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-\frac{1}{2\,R}\,\frac{\partial^2}{\partial\,R^2}\,Ru_0.\qquad (4,6)$$

Но

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u_0=\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0=\frac{1}{R}\,\frac{\partial^2}{\partial\,R^2}\,Ru_0-&\\
-\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0.&
\end{aligned}\qquad (4,7^*)$$

Следовательно (4,6) можно записать в виде

$$u_1=\frac{\partial}{\partial x}\,u_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\,\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0.\qquad (4,7)$$

Покажем теперь, что $u_0$ и $u_1$ удовлетворяют всем условиям (0,21), (0,22) при $i=0$ и 1 соответственно. Относительно $U_0$ это почти очевидно. Действительно из

$$Erfc(o)=1; \quad Erfc(\infty)=o; \quad R^2=(1+x)^2+y^2 \tag{4,8}$$

следует

$$u_0 \Big|_{x=y=o}=1; \quad u_0 \Big|_{\tau=o;\ R>1}=o; \quad u_0 \Big|_{R\to\infty}=o. \tag{4.9}$$

Далее

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{1+x}{R}; \ \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{y}{R}. \tag{4,10}$$

Следовательно

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0\Big|_{x=o}=\frac{\partial u_0}{\partial R}\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial R}{\partial y}\right)\Big|_{x=o}=o. \tag{4,11}$$

Наконец

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u_0=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)Erfc\,\frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}\equiv 0. \tag{4,12}$$

Сопоставляя (4,9), (4,10) и (4,11) с (0,21) и (0,22) убедимся в том, что $u_0$ удовлетворяет всем требуемым условиям.

Рассмотрим теперь $u_1$. Очевидно, что

$$u_1\Big|_{\tau=o;\ x^2+y^2>0}=o;\ u_1\Big|_{x^2+y^2\to\infty}=o;\ \left(\Delta-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u_1\equiv$$

$$\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u_1=o \text{ при } \tau>0;\ x\geqslant 0;\ y>0. \tag{4,13}$$

Пусть, далее

$$\overline{L}(u_1,u_0)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_1+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u_0. \tag{4,14}$$

Внося сюда $u_1$ из (4,7) найдем

$$\overline{L}(u_1,u_0)=-\frac{1}{2}\,L(u_0) \tag{4,15*}$$

где

$$L=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)+\frac{2}{y}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cdot \tag{4,16}$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} M&=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ N&=\frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \tag{4,17}$$

В силу (4,11) имеем

$$M\,u_0+N\,u_0=o \qquad \text{при } x=0 \tag{4,18}$$

Поэтому достаточно доказать, что при $x=0$

$$L^*u_0=(L-M-N)\,u_0\equiv o. \tag{4,19}$$

Но

$$\begin{aligned} L-M-N=&-\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)+\\ &+\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{3}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\equiv o,\end{aligned} \tag{4,20}$$

так что (4,19) действительно имеет место.

Имеем, далее,

$$u_1=\frac{\partial}{\partial x}u_0-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_0\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\right)u_0. \tag{4,21}$$

Заметим, что при $\tau>o$ $u_0$ непрерывна вместе со своими производными в точке $x=y=0$. Отсюда и из (4,21) следует, что

$$u_1\Big|_{x=y=0}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_0(x,\ o,\ \tau)\Big|_{x=0}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}u_0(o,\ o,\ \tau) \tag{4,22}$$

Но

$$u_0(o,\ o,\ \tau)\equiv 1 \qquad \text{т. е. } \frac{\partial}{\partial\tau}u_0(o,\ o,\ \tau)\equiv 0.$$

Следовательно

$$U_1\Bigg|_{x=y=0}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_0\Bigg|_{x=y=0}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{Erfc\,\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}{1+x}\Bigg|_{x=0}. \tag{4,23}$$

Но

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{Erfc\,\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}{1+x}\right)\equiv\frac{-e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{(1+x)\sqrt{\pi\tau}}-$$

$$-\frac{Erfc\,\frac{x}{2\sqrt{\tau}}}{(1+x)^2}+\frac{1}{2}\left[-\frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{(1+x)\sqrt{\pi\tau}}\left(\frac{2}{1+x}+\frac{x}{2\tau}\right)+\frac{2}{(1+x)^3}\,Erfc\,\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right]$$

Следовательно

$$u_1\Bigg|_{x=y=0}\equiv o. \tag{4,24}$$

Сопоставляя снова полученные результаты с (0,21) и (0,22) убедимся в том, что $u_1$ удовлетворяет всем поставленным условиям.

Заметим теперь следующее. Введем в систему (0,1)—(0,4) независимые переменные $x$, $y$ и $\tau$, положив

$$x=\frac{\alpha z}{n};\ y=\frac{\alpha r}{n};\ \tau=\frac{\alpha^2 a^2}{n^2}\,t;\quad n=2\nu. \tag{4,27}$$

Найдем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u=o;\quad x>o;\quad y>o;\quad \tau>o; \tag{4,28}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1-n}{y}\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial x}-a^2\frac{\partial}{\partial\tau}\right)u=o;\quad x=o;\quad y>o;\quad \tau>o; \tag{4,29}$$

$$u\Bigg|_{\tau=o}=o \text{ при } x^2+y^2>o;\quad u\Bigg|_{x^2+y^2\to\infty}=0. \tag{4,30}$$

$$u\Bigg|_{x=y=0}=1;\quad \tau>o. \tag{4,31}$$

Будем искать решение задачи (4,28) — (4,31) в виде ряда

$$u = \sum_{m=o}^{\infty} u_m \cdot n^{-m}, \tag{4,32}$$

причем потребуем, чтобы его члены удовлетворяли условиям

$$\left.\begin{aligned} & u_m \Big|_{\tau=o} = o; \quad u_m \Big|_{x^2+y^2\to\infty} = o; \quad m=o,\ 1,\ 2, \ldots \\ & u_0 \Big|_{x=y=o} = 1;\ u_m \Big|_{x=y=o} = o;\ m=1,\ 2,\ 3\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{4,33}$$

Тогда сумма ряда будет решением рассматриваемой задачи, если ряд (4,32) и ряды получаемые его почленным дифференцированием сходятся равномерно, а члены ряда кроме условий (4,33) удовлетворяют условиям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_m = o;$$

$$x>o;\ y>o;\ \tau>o;\ m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{4,34}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0 = o;\ x=o;\ y>o;\ \tau>o; \tag{4,35}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_{m+1} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y} - a^2\frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_m = o;$$

$$x=o;\ y>o;\ \tau>o;\ m=0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{4,36}$$

Сопоставляя (4,34) — (4,36) с (0,21) — (0,22) видим, что при $a^2=1$ они совпадают. Можно было бы доказать, что это совпадение имеет место и для других членов ряда (4,33). Это указывает на то, что и в общем случае $a^2 \neq 1$ ряд (4,33) должен иметь асимптотический характер. Мы однако не располагаем строгим доказательством этого утверждения.

Имея в виду указанные во введении технические приложения и оставаясь на «физическом уровне анализа», мы ограничимся ниже получением, в случае $a^2=1$ только первых двух членов ряда (4,33). Заметим, в связи с этим, что именно таким приближением пользуются обычно в теплофизике при решении конвективных задач.

§ 5. Итак выпишем первые два члена ряда (4,33). Как и в [1] будем пользоваться двойным преобразованием — Лапласа—Карсона по $\tau$ и Ханкеля по $y$. Пусть

$$v_m \doteq u_m; \quad m=0,1,\ldots \tag{5,1}$$

$$w_m(p,\ s) \equiv (p,\ s)\ e^{-x\sqrt{p+s^2}} \dot{\sim} v_m(x,\ y,\ p) f_m \tag{5,2}$$

так что

$$f_m\ (p,\ s)\ e^{-x\sqrt{p+s^2}} \dot{\sim} u_m(x,\ y,\ \tau) \tag{5,3}$$

или, предполагая законным изменение порядка интегрирования

$$f_m\ (p,\ s)\ e^{-x\sqrt{p+s^2}} \dot{\sim} u_m\ (x,\ y,\ \tau). \tag{5,3*}$$

По условию $u_m=0$ при $\tau=0$. Следовательно $v_m$ должны быть интегралами системы

$$\frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_m}{\partial y}+\frac{1}{y}\frac{\partial v_m}{\partial y^2}-p v_m=o;$$

$$x>o;\ y>o;\ \tau>o;\ m=o;\ 1;\ 2,\ \ldots \tag{5,4}$$

$$\frac{\partial v_m}{\partial x}-\frac{1}{y}\frac{\partial v_m}{\partial q}+\psi_m=o;\ x=o;\ y>o;\ \tau>o;\ m=o;\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5,5}$$

$$v_m\Big|_{\tau=o}=o;\ v_m\Big|_{x^2+y^2\to\infty}=o; \quad m=o,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{5,6}$$

$$v_m\Big|_{x=o\,;\ y=o}=\Psi_m \quad m=o,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{5,7}$$

где

$$\psi_0=o;\ \Psi_0=1;$$

$$\psi_m=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}-a^2p\right)v_{m-1};\ \Psi_m=o; \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{5,8}$$

Представление $v_m$ в виде трансформант (5,2) обеспечивает формально выполнение (5,4) и (5,6). Условие (5,5) сводится, в силу (5,2) и (5,8) к равенству

$$\int\limits_o^\infty \left\{ f_m(p, s)\left[ -\sqrt{p+s^2}\; J_0(y\, s) - \frac{s}{y}\; J_o'(ys)\right] + \right.$$

$$\left. + f_{m-1}(p\ s)\left[ s^2\left( J_0''(y\, s) + \frac{1}{sy}\; J_0'(p, s)\right) - a^2 p\; J_0 \right]\right\} s ds = o$$

$$m = o,\ 1,\ 2\ \ldots \tag{5,9}$$

Мы принимаем здесь, для сохранения единообразия записи,

$$f_{-1} \equiv o \tag{5,9*}$$

Так как

$$J_o'(z) = -J_1(z);\quad J_o''(z) + \frac{1}{z}\; J_o'(z) + J_0(z) \equiv o \tag{5,10}$$

видим, что (5,9) равносильны равенствам

$$\int\limits_o^\infty \left\{ f_m(p, \lambda)\left[ -\sqrt{p+\lambda^2} J_0(\lambda y) + \frac{\lambda}{y}\; J_1(\lambda y)\right] - \right.$$

$$\left. - f_{m-1}(p, \lambda)(\lambda^2 + a^2 p) J_0(\lambda y) \right\} \lambda\, d\lambda = o \tag{5,11}$$

Умножая (5,11) на $y\, I_0(s\, y)$, интегрируя по $y$ и меняя в слагаемом, содержащем $I_1$, порядок интегрирования, получим

$$\int\limits_o^\infty y\; J_0(s\, y)\, dy \int\limits_o^\infty \left[ f_m(p, \lambda)\sqrt{p+\lambda^2} + \right.$$

$$\left. + (\lambda^2 + a^2 p)\; f_{m-1}(p, \lambda)\right] J_0(\lambda\, y)\lambda\, d\lambda -$$

$$- \int\limits_o^\infty \lambda^2 f_m(p, \lambda)\, d\lambda \int\limits_o^\infty J_0(s\, y) J_1(\lambda\, s)\, d\lambda = o \tag{5,12}$$

Первый интеграл в левой части (5,12) является двойным интегралом Фурье-Бесселя. Следовательно, формально, он равен

$$f_m(p, s) \sqrt{p+s^2} + (s^2+a^2p) f_m (p, s).$$

Внутренний интеграл во втором слагаемом является разрывным интегралом Вебера-Шафхейтлина [6]:

$$\Gamma(\nu-\mu) \int_0^\infty t^{\mu-\nu+1} J_\mu (at) J_\nu (b t) d t =$$

$$= \begin{cases} 2^{\mu-\nu+1} a^\mu b^{-\nu} (b^2-a^2)^{\nu-\mu+1} & b>a; \\ 0 & b<a \end{cases} \tag{5,13}$$

в котором надлежит положить $\mu=0$, $\nu=1$, $a=s$, $b=\lambda$. Следовательно он равен $\lambda^{-1}$ при $s<\lambda$ и нулю при $s>\lambda$. Таким образом (5,12) сводится к уравнению

$$\sqrt{p+s^2} f_m(p, s) - \int_s^\infty \lambda f_m (p, \lambda) d\lambda + (a^2p+s^2) f_{m-1} (p, s) = o \tag{5,14}$$

Положим

$$\varphi_m (p, s) = \int_s^\infty \lambda f_m (p, \lambda) d\lambda. \tag{5,15}$$

Из (5,2), (5,7) и (5,8) следует, что

$$\varphi_m (o, p) = \Psi_m \quad (m=o;\ 1, 2, \ldots) \tag{5,16}$$

Дифференцируя (5,15) и внося результат в (5,14) получим

$$\sqrt{p+s^2} \frac{d}{ds} \varphi_m + s\varphi_m - (s^2+a^2p) s f_{m-1} (p, s) = o. \tag{5,17}$$

Интегрируя (5,17) с учетом начального условия (5,16) получим

$$\varphi_0 = e^{\sqrt{p} - \sqrt{p+s^2}}; \tag{5,18}$$

$$\varphi_{m+1} = e^{-\sqrt{p+s^2}} \int_o^s e^{\sqrt{p+s^2}} \frac{\lambda^2+a^2p}{\sqrt{\lambda^2+p}} \cdot f_m(p, \lambda) \lambda d\lambda. \tag{5,19}$$

Отсюда и из (5,2) следует, что

$$w_0 = \frac{e^{\sqrt{p} - (1+x)\sqrt{p+s^2}}}{\sqrt{p+s^2}};$$

$$w_{m+1} = \frac{e^{-(1+x)\sqrt{p+s^2}}}{\sqrt{p+s^2}} \int\limits_0^s e^{(1+x)\sqrt{\lambda^2+p}} \frac{\lambda^2+a^2p}{\sqrt{\lambda^2+p}} \lambda\, w_m(p, \lambda)\, d\lambda -$$

$$- \frac{s^2+a^2p}{\sqrt{p+s^2}} w_m(p, s); \quad m=0, 1, 2, \ldots \tag{5,20}$$

Пусть

$$w_m \doteq W_m. \tag{5,21}$$

Тогда в силу (5,3*)

$$u_m \backsim W_m. \tag{5,22}$$

$w_m$, а следовательно и $u_m$ вычисляются рекурентно. Проведем до конца вычисление $u_0$ и $u_1$. Из (5,20) следует, что

$$w_1 = \frac{s^2}{2} w_0 - \sqrt{s^2+p}\; w_0 - \frac{(a^2-1)p}{\sqrt{s^2+p}} w_0 + \frac{a^2-1}{2} p\, ln\left(1+\frac{s^2}{p}\right) w_0 \equiv$$

$$\equiv w_{11} + w_{12} + w_{13} + w_{14}. \tag{5,23}$$

Пусть

$$w_{1i} \doteq W_{1i};\; u_{1i} \backsim;\; W_{1i} \;(i=1, 2, 3, 4), \tag{5,24}$$

так что

$$W_1 = \sum_{i=1}^{4} w_{1_i};\; u_1 = \sum_{i=1}^{4} u_1{}^i. \tag{5,25}$$

Имеем

$$w_{11} = \frac{s^2}{2} w_0 \tag{5,26}$$

Используя известное свойство трансформант Ханкеля найдем

$$W_{11} = \frac{s^2}{2} W_0 \backsim -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0. \tag{5,27}$$

Следовательно

$$u_{11} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0. \tag{5,28}$$

Далее из (5,20) следует

$$w_{12}=-\sqrt{p+s^2}\,w_0=\frac{\partial}{\partial x}w_0. \qquad (5,29)$$

Следовательно

$$W_{12}=\frac{\partial}{\partial x}W_0 \qquad (5,30)$$

т. е.

$$u_{12}=\frac{\partial}{\partial x}u_0 \qquad (5,31)$$

Далее, из (5,20) следует, что

$$w_{13}=-(a^2-1)p\int\limits_x^{\infty}w_0 d\xi. \qquad (5,32)$$

Ниже будет показано, что

$$W_0(s,x,o)=o \qquad (5,32^*)$$

Это означает, что

$$W_{13}=-(a^2-1)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_x^{\infty}W_0(s,\xi,\tau)d\xi \qquad (5,33)$$

и вместе с тем

$$u_{13}=-(a^2-1)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_x^{\infty}u_0(\xi,y,\tau)d\xi \qquad (5,34)$$

Найдем $u_{14}$. Как известно [3]

$$p\ ln\left(1+\frac{s^2}{p}\right)\doteq\frac{1-e^{-s^2\tau}}{\tau}. \qquad (5,35)$$

Отсюда, из (5,32) и теоремы о свертках следует, что

$$W_{14}=\frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_o^{\tau}\frac{1-e^{-s^2\lambda}}{\lambda}W_0(s,x,\tau-\lambda)d\lambda \qquad (5,36)$$

Потому (см. (5,22)) формально

$$u_{14}=\frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{\tau}d\lambda\int\limits_0^{\infty}\frac{1-e^{-s^2\lambda}}{\lambda}W_0(s,\ x,\ \tau-\lambda)J_0(s\,y)s\,ds. \tag{5,37}$$

Но

$$W_0(s,\ x,\ \lambda)=\int\limits_0^{\infty}u_0(x,\ \eta,\ \lambda)J_0(s\,\eta)\eta\,d\eta \tag{5,38}$$

Внося (5,38) в (5,37) найдем

$$u_{14}=\frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{\tau}d\lambda\int\limits_0^{\infty}\frac{1-e^{-s^2\lambda}}{\lambda}J_0(s\ y)s\,ds\cdot$$

$$\cdot\int\limits_0^{\infty}u_0(x,\ \eta,\ \tau-\lambda)J_0(s\,\eta)\eta\,d\eta. \tag{5,39}$$

Заметим теперь, что формально

$$\int\limits_0^{\infty}s\ J_0(s\,y)ds\int\limits_0^{\infty}u_0(x,\ \eta,\ \lambda)J_o(s\,\eta)\eta\,d\eta=u_0(x,\ y,\ \lambda). \tag{5,40}$$

и что [6]

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-s^2\lambda}J_0(s\,y)J_0(s\,\eta)s\,ds=\frac{e^{-\frac{y^2+\eta^2}{4\lambda}}}{2\lambda}\ I_0\left(\frac{y\eta}{2\lambda}\right)\cdot \tag{5,41}$$

Следовательно (5,39) сводится к

$$u_{1,4}=\frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{\infty}\frac{d\lambda}{\lambda}\Bigg[\ u_0(x,\ y,\ \tau-\lambda)-$$

$$-\int\limits_0^{\infty}\frac{u_0(x,\eta,\tau-\lambda)}{2\lambda}\ e^{-\frac{y^2+\eta^2}{4\lambda}}\ I_0\left(\frac{y\eta}{2\lambda}\right)\ \eta\,d\eta\Bigg]. \tag{5,42}$$

Вносся (5,28), (5,31), (5,34) и (5,42) в (5,25) получим

$$u_1 = \frac{\partial}{\partial x} u_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) u_0 - (a^2-1)\frac{\partial}{\partial \tau}\int_x^\infty u_0 dx +$$

$$+ \frac{a^2-1}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau \frac{d\lambda}{\lambda}\Big[ u_0(x, y, \tau-\lambda) -$$

$$- \int_0^\infty \frac{u_0(x, \eta, \tau-\lambda)}{2\lambda} e^{-\frac{y^2+\eta^2}{4\lambda}} I_0\left(\frac{y\eta}{2\lambda}\right) \eta\, d\eta \Big] \qquad (5,43)$$

Остается внести сюда $u_0$. Поскольку $u_0$ не зависит от $a^2$ очевидно, что оно совпадает с найденным ранее

$$u_0 = \frac{1}{R} \, Erfc \, \frac{R-1}{2\sqrt{\tau}}; \; (R^2 = (1+x)^2 + y^2), \qquad (5,45)$$

в чем можно убедиться и непосредственно, отправляясь от (5,20)*.

Прямая проверка того, что решение (5,43) действительно удовлетворяет всем требованиям (4,33)—(4,36) затруднительна. Именно без труда проверяется, что $u_1$, определенное согласно (5,43), удовлетворяет условию (4,34), условию на бесконечности и начальному условию (4,33). Далее легко убедиться в том, что имеют смысл операторы

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to o}\left\{\left(\frac{1}{\partial x} - \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial y^2}\right) u_1 + \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial y} - a^2\frac{\partial}{\partial \tau}\right) u_0\right\} \\ &\qquad\qquad \lim_{x\to o}\lim_{y\to o} u_1 \end{aligned}\right\} \qquad (5,44)$$

Однако прямым доказательством равенства их нулю, что необходимо для проверки условия (4,33) в точке $x=y=o$ и условия (4,36) мы не располагаем. Тем не менее можно быть уверенным в неформальном характере построенного решения, поскольку легко обосновывается законность всех операций, приведших к построению решения (5,43).

---

*) Отсюда, очевидно следует (5,32*).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Рубинштейн. Об одной контактной термоконвективной задаче; ДАН СССР, т. 135, № 4, 1960.
2. Л. И. Рубинштейн. К вопросу о температурном поле пласта при тепловой инжекции. Ученые записки КГУ, т. 121; кн. 5; 1961.
3. В. А. Диткин и П. И. Кузнецов. Справочник по операционному исчислению. ГТТИ. М—Л. 1951.
4. Г. Н. Ватсон. Теория Бесселевгх функций. ч. I., ИЛ. 1949.
5. G. Szego. Orthogonal polynomials; American Mathematical Society, New York; 1939; P. p. 215; 219—221.
6. Erdelyi, Magnus; Oberhettinger; Tricomi; Higher Transcendental Function; vol II; New York 1953.
7. Л. И. Рубинштейн. ДАН СССР, т. 146, № 5, 1962.



*Л. И. Рубинштейн*


## ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕРМОКОНВЕКТИВНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ КОНВЕКТИВНОГО ПАРАМЕТРА


Аннотация

В статьях автора «Об одной контактной термоконвективной задаче» (ДАН СССР, т. 135, № 6, 1960) и «О температурном поле пласта при тепловой инжекции» (Ученые записки казанского гос. университета, т. 121, кн. 5. 1961 стр. 129—156) рассмотрена краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t};\ o<z<\infty;\ o<r<\infty;\ t>o$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1-2\nu}{r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\alpha\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial t};\ z=o;\ o<r<\infty;\ t>o;$$

$$u\Big|_{r=z=o}=1;\quad u\Big|_{t=o}=o;\ \lim_{r^2+z^2\to\infty} u=o.$$

В аннотируемой статье дается асимптотическое представление ее решения пригодное для расчетов при больших значениях конвективного параметра $\nu$.

L. I. Rubinstein

# ON THE ASYMPTOTICAL BEHAVIOUR OF THE SOLUTION OF ONE AXIS-SYMMETRICAL THERMO-CONVECTIVE CONTACT PROBLEM BY GREAT VALUES OF CONVECTIVE PARAMETER

## Annotation

In the author's papers entitled «On one Thermo-Convenctive Contact Problem», (published in DAN, U.S.S.R., vols, 135, No. 6, 1960), and «The Oil Layer Temperature Field when there is Thermal Injection» (Transactions of the State University of Kazan, vol. 121, Book 5, 1961, pages 129—156), the following problem was solved:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t}\,;\ o<z<\infty;\ o<r<\infty;\ u\Big|_{t=o} = o$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1-2\nu}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \alpha\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t};\ o<r<\infty;\ z=o;\ u\Big|_{r=z=o} = 1;$$

$$\lim_{z+r\to\infty} u = o$$

The article, of which this is an annotation, contains a representation in asymptote form of the problem's solution, valuable for calculation when great values are used for the convective parameter $\nu$.

PETERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Э. Я. Гринберг, М. А. Шнепс*

# О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОТЕРЯННОГО ПОТОКА ТЕЛЕФОННОГО СООБЩЕНИЯ

1. Рассмотрим телефонную систему при следующих условиях:

1) расстояния между двумя последовательно поступившими вызовами являются одинаково распределенными, взаимно независимыми случайными величинами с функцией распределения

$$H(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

т. е. поток вызовов является простейшим потоком [2];

2) в системе имеется $v$ линий с номерами 1, 2, ......, $v$; предположим, что поступивший вызов занимает ту из свободных линий, которая имеет наименьший номер; в случае отсутствия свободных линий поступивший вызов теряется;

3) продолжительности обслуживания являются одинакого распределенными, взаимно независимыми случайными величинами с функцией распределения

$$G(x) = 1 - e^{-x}.$$

Качество работы изучаемой телефонной системы характеризуется вероятностью потерь, зависящей от интенсивности потока $\lambda$ и числа линий $v$.

Вероятность потерь дается формулой Эрланга

$$\pi(\lambda, v) = \frac{\lambda^v}{v!}\left[\sum_{i=o}^{v} \frac{\lambda^i}{i!}\right]^{-1}.$$

Интенсивность потерянного потока, т. е. среднее число вызовов потерянного потока в единицу времени, дается формулой

$$y(\lambda, v) = \lambda \cdot \pi(\lambda, v) = \frac{\lambda^{v+1}}{v!}\left[\sum_{i=o}^{v} \frac{\lambda^i}{i!}\right]^{-1}.$$

По формуле Эрланга можно рассчитать вероятность потерь для любой подсистемы, образуемой начальными $i$ линиями ($i \leqslant v$) изучаемой системы. Представляет существенный интерес сравнить между собой вероятности потерь на различных линиях при одинаковой интенсивности поступающих на них потоков. В работе Хинчина [2, стр. 84] упомянуется гипотеза Пальма [1], утверждающая, что эта вероятность возрастает с номером линии, т. е. если

$$(\text{при } \lambda,\ \mu>0 \text{ и целом } x)\quad y(\lambda, x)=y(\mu, x+1),$$

то

$$y(\lambda, x+1)<y(\mu, x+2).$$

В настоящей статье получены некоторые свойства функции $y(\lambda, v)$, из которых следует правильность гипотезы Пальма.

При инженерных расчетах телефонных систем не всегда учитываюстя свойства потерянного потока.

Пример, приведенный в конце статьи, показывает, что это даже для весьма простых схем приводит к очень грубым ошибкам в оценке качества схем.

2. Наряду с функцией

$$f(\lambda, x)=[y(\lambda, x)]^{-1}=\sum_{i=o}^{x}\frac{x\,!}{i\,!}\lambda^{-x+i-1} \tag{1}$$

рассмотрим функцию

$$F(\lambda, x)=\int_{o}^{\infty} e^{-\lambda t}(t+1)^{x}dt, \tag{2}$$

определенную при любом конечном $x$ и действительном $\lambda>o$ (в области $\Delta$).

В области $D$, где $\lambda>0$ и $x$ целое неотрицательное,

$$f(\lambda, x)=F(\lambda, x).$$

Соотношения, легко получаемые из (2), дадут такие же соотношения для функции $f$, если они для нее имеют смысл.

Дифференцирование (2) дает

$$\frac{\partial^{i+j} F}{\partial\lambda^{i}\,\partial x^{j}}=(-1)^{i}\int_{o}^{\infty} e^{-\lambda t}t^{i}[ln(t+1)]^{j}(t+1)^{x}\,dt. \tag{3}$$

Все эти производные определены в области $\Delta$; при действительном $x$ каждая из них имеет постоянный знак, определенный четностью $i$.

Лапласово преобразование тождества

$$-t(t+1)^x=-(t+1)^{x+1}+(t+1)^x$$

при $i=1$, $j=0$ дает

$$\frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial\lambda}=-F(\lambda,\ x+1)+F(\lambda, x). \tag{4}$$

Из формулы для изображения Лапласа от интеграла оригинала $(t+1)^x$ мы получаем

$$\lambda F(\lambda, x+1)=(x+1)F(\lambda, x)+1. \tag{5}$$

Исключение $F(\lambda,\ x+1)$ из (4) и (5) дает линейное дифференциальное уравнение

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial\lambda}+(-\lambda+x+1)F+1=0, \tag{6}$$

для которого (2) является частным решением.

Дальнейшее дифференцирование (6) по $\lambda$ дает однородное дифференциальное уравнение с тем же свойством.

Соотношения (4)—(6) легко проверяются (или получаются) для $f(\lambda,\ x)$ также и непосредственно из (1). Понятно, (3) правильно для $f$ только с $j=0$.

Для интенсивности потерянного потока (5) дает нелинейное рекуррентное соотношение

$$y(\lambda, n+1)=\frac{\lambda y(\lambda, n)}{n+1+y(\lambda, n)}.$$

Соотношения (5) и (6) по существу совпадают соответственно с (6.17) и (6.8) в [4].

3. Используя (4), гипотезу Пальма можно сформулировать следующим образом:
если

$$f(\lambda,\ x)=f(\mu,\ x+1), \tag{7}$$

то

$$-\frac{\partial f(\lambda, x)}{\partial\lambda}>-\frac{\partial f(\mu,\ x+1)}{\partial\mu}. \tag{8}$$

Мы установим несколько более сильный результат: если $x\geqslant 0$ и $\lambda(x)$ является функцией от $x$, определенной соотношением

$$F(\lambda,\ x)=F_0=\text{const} \tag{9}$$

и

$$\varphi(x) = -\frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial \lambda}, \tag{10}$$

то

$$\frac{d\,\varphi(x)}{dx} < 0. \tag{11}$$

Если (11) имеет место, то интегрируя выражение левой части от любого целого $x$ до $x+1$ и полагая

$$\lambda(x) = \lambda; \quad \lambda(x+1) = \mu, \tag{12}$$

мы получим (8).

В дальнейшем использованы обозначения $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_{\lambda_x} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda\, \partial x}$ и т. д.

Для доказательства правильности (11), мы дифференцируем (9) и (10) по $x$ и исключаем $\frac{d\lambda}{dx}$, что дает

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{-F_{\lambda_x} F_\lambda + F_{\lambda\lambda} F_x}{F_\lambda}$$

В силу (3) $F_\lambda < 0$ и (11) имеет место, если

$$G \equiv F_{\lambda\lambda} F_x - F_{\lambda_x} F_\lambda > 0. \tag{13}$$

Для расчета $G$, производные от $F$ будем брать в виде (3), при чем для $F_x$, $F_{\lambda_x}$ в качестве переменной интегрирования берем $s$. Так как переменные $t$ и $s$ и соответствующие пределы интегрирования не зависят друг от друга, мы имеем

$$G = \int\limits_{t=o}^{\infty} \int\limits_{s=o}^{\infty} e^{-\lambda(s+t)}\ (s+1)^x (t+1)^x [ln(s+1)] t(t-s)\, dt\, ds.$$

В области $s > t$ переименуем переменные, заменяя $s$ на $t$ и наоборот. Тогда

$$G = \int\limits_{t=o}^{\infty} \int\limits_{s=o}^{t} e^{-\lambda(s+t)} (s+1)^x\ (t+1)^x [t ln(s+1) - s ln(t+1)](t-s)\, ds\, dt. \tag{14}$$

В (14) подынтегральное выражение аннулируется на границах $s=0$ и $s=t$ области интегрирования. Во внутренних точках этой области, где $t>s>0$, имеем

$$ln(s+1)>0, \ ln(t+1)>0$$

и

$$\frac{t ln(s+1)-s ln(t+1)}{ln(s+1) ln(t+1)}=\frac{t}{ln(t+1)}-\frac{s}{ln(s+1)}>0,$$

так как $\frac{t}{ln(t+1)}$ при $t>0$ является монотонной строго возрастающей функцией. Следовательно значение разности в квадратной скобке подынтегрального выражения в (14) положительно, так же как и все остальные множители. Поэтому имеет место (13), (11) и (8).

Неравенство Пальма можно выразить в различных эквивалентных видах. Пусть, напр., имеет место (7), (9), (12) и

$$y_0=\frac{1}{F_0}\cdot$$

Тогда

$$\frac{\mu}{\lambda}>\frac{x+2+y_0}{x+1+y_0}.$$

4. Отметим еще следующие обобщения. Заменим (2) на

$$F(\lambda, x)=\int_0^\infty e^{-\lambda t} g(x, t)\, dt \tag{15}$$

с $g>0$ при $t>0$ и $x$ в некоторой односвязной области значений. Предположим, что все функции, о которых идет речь, существуют и что имеет место (9) и (10). Почти дословно повторяя предыдущие рассуждения, видим, что достаточным условием для правильности (11) является следующее: функция

$$\gamma(x, t)=\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial x}(ln g)$$

при $t>0$ и всех рассматриваемых значениях $x$ является невозрастающей функцией от $t$, которая строго убывает на множестве значений $t$ с ненулевой мерой.

Пусть из (15) еще вытекает соотношение типа (4), напр.

$$\frac{\partial F(\lambda, x)}{\partial \lambda}=A(\lambda, x)[-F(\lambda, x+n)+F(\lambda, x)]$$

с знакопостоянным $A$ и $n=\mathrm{const}$. Тогда, при выполнении указанного условия на $\gamma$, из

$$A(\lambda, x)F(\lambda, x) \geqslant A(\mu, x+a)F(\mu, x+a)$$

с $a>0$, следует

$$A(\lambda, x)F(\lambda, x+n) > A(\mu, x+a)F(\mu, x+a+n).$$

5. Пример. В инженерной практике часто применяют формулу Эрланга для расчета величины потерь более сложных телефонных систем, чем полнодоступная система. Это приводит к грубым ошибкам. Пусть задана телефонная система, изображенная на рис. 1.

В систему поступают два одинаковых простейших потока $\Pi_1$ и $\Pi_2$ с одинаковыми интенсивностями $\lambda$. Вызовам потока $\Pi_1$ доступны линии $l_1$ и $l_3$. Если обе линии свободны, то сначала занимается линия $l_1$. В аналогичных условиях находятся вызовы потока $\Pi_2$ по отношению к линиям $l_2$ и $l_3$.

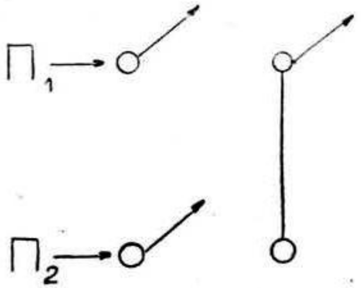

Рис. 1

Действие этой системы при условии, что продолжительность обслуживания распределена по показательному закону, описывается марковским процессом с 8 состояниями. Из-за симметрии потоков и схемы можно рассматривать процесс над 6 состояниями. Решением линейной алгебраической системы шестого порядка можно найти финальные вероятности, а оттуда вероятности потерь [3] и интенсивность потерянного потока. Оказывается, что интенсивность потерянного потока $y_1$ равна

$$y_1(2\lambda) = \lambda^3 \left[ \frac{8\lambda^3 + 20\lambda^2 + 16\lambda + 3}{4\lambda^5 + 16\lambda^4 + 27\lambda^3 + 25\lambda^2 + 13\lambda + 3} \right].$$

Однако в инженерной практике для расчета подобных неполнодоступных (или ступенчатых) схем применяют следующую методику (например, [5]).

По формуле Эрланга находят интенсивность потерянных потоков для линий $l_1$ и $l_2$ и считают, что эта суммарная интенсивность, равная, как легко видеть,

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda^2} \tag{16}$$

поступает на линию $l_3$. Далее считают $l_3$ второй линией в задаче Эрланга и ищут такую интенсивность $\nu$, поступающую на первую линию, которая бы дала потерянную интенсивность (16), т. е. приравнивают

$$\frac{\nu^2}{1+\nu}=\frac{1+\lambda}{2\lambda^2},$$

откуда

$$\nu=\lambda\,\frac{\lambda+\sqrt{(\lambda+1)^2+1}}{\lambda+1}. \tag{17}$$

Для схемы, изображенной на рисунке 1, эта приближенная методика по формуле Эрланга дает следующую интенсивность потерянного потока

$$y_2(\nu)=\frac{\nu^3}{2+2\nu+\nu^2}. \tag{18}$$

Подстановкой (17) в (18) получаем, что при $\lambda>0$

$$y_1(2\lambda)<y_2(2\lambda).$$

При уменьшении $\lambda$ относительная ошибка возрастает. Например, при $\lambda=1$

$$y_1(2)=0{,}534;\ y_2(2)=0{,}539;$$

но при $\lambda=0{,}1$

$$y_1(0{,}2)=1{,}05\cdot 10^{-3};\ y_2(0{,}2)=1{,}30\cdot 10^{-3},$$

т. е. относительная ошибка достигает $\approx 20\%$.

Столь грубые ошибки являются следствием того, что не учитываются свойства потоков, потерянных на линиях $l_1$ и $l_2$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Palm C. Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, Ericsson Technics, 44, 1943.

2. Хинчин А. Я., Математические методы теории массового обслуживания. Труды Мат. ин-та им. Стеклова, т. 49, 1955.

3. Шнепс М. А. Изучение однокаскадных неполнодоступных систем на электронной вычислительной машине. Проблемы передачи информации, 1962 (в печати).

4. Syski. Introduction to congestion theory in telephone systems, London, 1960.

5. Mina R. k., American and european traffic capacity tables and practices. Доклад на III Международном конгрессе телетрафика, Париж, 1961.

*Э. Я. Гринберг, М. А. Шнепс*

## О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОТЕРЯННОГО ПОТОКА ТЕЛЕФОННОГО СООБЩЕНИЯ

Аннотация

Рассмотрена полнодоступная телефонная линия при показательных законах распределения расстояний между вызовами и длительности обслуживания.

Доказана гипотеза Пальма, утверждающая, что потери возрастают с увеличением номера линии. Приведенный пример показывает, что в случае, если не учитываются свойства потерянного потока, возникают грубые ошибки.

E. Grinbergs and M. Shneps

## ON SOME PROPERTIES OF THE FLOW OF LOST CALLS IN TELEPHONE SYSTEMS

Summary

The full-available telephone system is examined when the distribution of the inter-arrival times of calls and the distribution of holding times are negative exponential. Proof is given of Palm's hypothesis: the loss increases with the growth of the number of trunk. The given example shows that when the properties of lost flow are not taken into account, it brings about great errors in calculating telephone systems.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*М. А. Шнепс*

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВЛОЖЕННЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

## ВВЕДЕНИЕ

Действие системы массового обслуживания определяется потоком поступающих требований, правилами предоставления свободных устройств для обслуживания поступивших требований и функцией распределения длительности обслуживания. Ввиду распространенности телефонной терминологии далее под системой массового обслуживания будем подразумевать телефонную систему. В таком случае требованиями являются вызовы. Отметим, что задачу можно рассматривать также в терминах теории надежности. Тогда поступлению требования соответствует выход из строя какого-либо элемента или блока, а время ремонта его соответствует продолжительности обслуживания.

Рассмотрим телефонную систему постоянно дейсвтующую в период $o \leqslant t < \infty$. Пусть $o = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ — случайные моменты поступления вызовов на станцию. Предположим, что интервалы времени $\tau_{n+1} - \tau_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — одинаково распределенные, взаимно независимые случайные величины. Обозначим их функцию распределения через $F(x)$, т. е.

$$P\{\tau_{n+1} - \tau_n \geqslant x\} = F(x) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

Следуя Хинчину [4], можем говорить, что поток вызовов образует поток с ограниченным последействием, определяемый функцией распределения $F(x)$.

Предположим, что задана произвольная коммутационная система, имеющая $n$ входов $b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и $v$ выходов $l_j$ $(j=1, 2, \ldots, v)$. Очередной вызов поступает на вход $b_i$ с вероятностью $a_i$ $(i=1, \ldots, n)$. Пусть множество выходов разбито на $n$ пересекающихся подмножеств $L_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Вызову, поступившему по входу $b_i$, доступны выходы подмножества $L_i$. Если в момент поступления вызова по входу $b_i$ есть свободные выходы (линии) в множестве $L_i$, то один из свободных выходов предоставляется для обслуживания поступившего вызова. Следует указать, что одновременно с предоставлением выхода, вызову предоставляется непрерывный соединительный путь в системе. Если же свободного выхода нет, то вызов теряется и не влияет на дальнейшую работу системы.

В такую схему действия системы включаются много различных систем массового обслуживания с потерями, начиная от полнодоступной системы в классической задаче Эрланга до многокаскадных систем существующих телефонных станций.

Предположим, что длительности разговора являются одинаково распределенными, взаимно независимыми случайными величинами с функцией распределения

$$H(x)=e^{-x} \quad (x\geqslant o) \tag{2}$$

Без потери общности предполагаем, что среднее время разговора равно единице (т. е. параметр показательного закона равен 1), к чему всегда можно прийти изменением масштаба времени. В нашем случае действие телефонной системы описывается марковским процессом с непрерывным множеством состояний. Однако задачу можно упростить, потому что моменты появления вызовов являются марковскими точками. Над множеством этих моментов можно определить цепь Маркова, т. наз. вложенную цепь Маркова. Но система линейных алгебраических уравнений относительно финальных вероятностей цепи для сложных схем является очень громоздкой. Практически ее невозможно решить даже на универсальной электронной вычислительной машине (ЭВМ).

Однако на ЭВМ в принципе нетрудно воспроизвести действие описанной телефонной системы [5] и методом Монте-Карло получить статистические оценки работы системы. Но обнаружение вложенной цепи Маркова позволяет сильно упростить методику моделирования и сократить используемое машинное время. Тем самым удается увеличить класс моделируемых схем и точность получаемых результатов.

## 1. ПОЛНОДОСТУПНАЯ СИСТЕМА

Заимствуем у Кендала [1] и Такача [2, стр. 97] методику решения задачи для полнодоступной системы линий. В этом случае в системе имеются один вход и каждому вызову доступны все ее линии. Построим вложенную цепь Маркова над последовательностью $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ моментов поступления вызовов. Рассмотрим последовательность случайных величин

$$\eta_n = \eta\ (\tau_n - o),$$

где $\eta(t)$ показывает число занятых линий в момент $t$ и $\eta_n$ показывает число занятых линий непосредственно перед поступлением $n$-ого вызова.

Составим матрицу вероятностей перехода $P = \{pij\}$ вложенной цепи Маркова. Легко найти, что

$$p_{ij} = P\{\eta_n = j/\eta_{n-1} = i\} = C_{i+1}^{i+1-j} \int\limits_o^\infty (1-e^{-x})^{i+1-j} e^{-jx} d\,F(x)$$

$$(i=0,1, \ldots, v-1;\ j=0,1, \ldots, i+1);$$

$$p_{vj} = p_{v-1,\ j}.$$

По матрице $P$ находим стационарное распределение $p_i$ $(i=0, \ldots, v)$, где $p_i$ — абсолютная вероятность быть в системе $i$ обслуживаемых требований (см. Феллер [3, стр. 334]).

## 2. ПРОИЗВОЛЬНАЯ СИСТЕМА

Можно описать алгоритм составления матрицы вероятностей перехода вложенной цепи Маркова для произвольной системы с потерями. Однако, так как изучение таких систем практически возможно только методом Монте-Карло, то далее приводим лишь описание программы моделирования таких систем.

Пусть вызовы поступают в моменты $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ Рассмотрим состояния системы непосредственно перед и после поступления очередного вызова, т. е. рассмотрим случайные величины

$$\eta_n^- = \eta(\tau_n - o)$$

и

$$\eta_n^+ = \eta(\tau_n + o),\ (n=1, 2, \ldots),$$

где $\eta(t)$ — состояние системы в момент $t$.

Ввиду предположения (2) в моменты $\eta_n^-$ и $\eta_n^+$ число и расположение занятых выходов полностью определяют состояние системы.

Для моделирования действия произвольной системы необходимо реализовать на машине последовательность $\eta_1^-$, $\eta_1^+$, $\eta_2^-$, $\eta_2^+$, ..., $\eta_n^-$, $\eta_n^+$, .... Для этого необходимы два алгоритма: алгоритм занятия А и алгоритм освобождения В. К состояниям $\eta_n^-$ $(n=1, 2, \ldots)$ применяется алгоритм А. Алгоритм А сначала согласно распределению $a_i$ $(i=1, \ldots, n)$ выбирает один из $n$ входов $b_i$ (обозначим его через $b_{i_0}$), потом ищет по закону, зависящему от данной системы, свободную линию среди линий множества $L_{i_0}$ и занимает ее, если такая свободная линия есть. После применения А к $\eta_n^-$ система переходит в состояние $\eta_n^+$. В случае, если поступивший вызов теряется, состояние $\eta_n^+$ совпадает с $\eta_n^-$.

Алгоритм В применяется к состояниям $\eta_n^+$ $(n=1, 2, \ldots)$. Обозначим через $\eta_n$ число занятых выходов в момент $\tau_n+o$. Алгоритм В выбирает число освобождаемых линий $i$ согласно распределению

$$c_i=C^i_{\eta_n}\int_0^\infty (1-e^{-x})^i e^{-(\eta_n-i)x}\,dF(x),$$
$$(i=0, 1, \ldots, \eta_n).$$

Потом с равной вероятностью для всех $\eta_n$ линий алгоритм В выбирает $i$ линий из $\eta_n$ и их освобождает. Оставшиеся занятыми $(\eta_n-i)$ линии определяют состояние $\eta_{n+i}^-$. Чередованием алгоритмов А и В реализуем моделирование.

## 4. ЗАМЕЧАНИЯ

При помощи описанной методики легко моделировать произвольные системы с конечной очередью. Методику моделирования можно приспособить для моделирования систем с (конечной или бесконечной) очередью и с «нетерпеливыми клиентами», выбывающими из очереди по показательному закону. Нетрудно воспроизвести неординарный стационарный поток с ограниченным последействием. В таком потоке в моменты поступления вызова $\tau_1$, $\tau_2$, ... одновременно поступают случайное число $i$ вызовов, определяемое заданным распределением.

В случае, если вместо потока с ограниченным последействием задан частный случай его, а именно, простейший поток, методика моделирования при помощи цепей Маркова еще больше упрощается [6].

## ЛИТЕРАТУРА


1. D. G. Kendall. Stochastic processes occuring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain, Ann. Math. Stat., 24 (1953), 338—354.
[Русский перевод в «Математика», 3:6; 1959; 97—111].

2. Л. Такач, Некоторые вероятностные задачи в телефонии. Математика (сборник), 4:6 (1960), 93—144.

3. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИИЛ, 1952.

4. А. Я. Хинчин, Математические методы теории массового обслуживания. Труды Мат. ин-та им. Стеклова, т. 49, 1955.

5. М. А. Шнепс. Изучение однокаскадных неполнодоступных систем на ЭВМ. Проблемы передачи информации, 1962 (в печати).

6. М. А. Шнепс. О применении цепей Маркова для изучения телефонных систем с потерями. Проблемы передачи информации (в печати).

*М. А. Шнепс*

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ВЛОЖЕННЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА К МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ

Аннотация

Вложенные цепи Маркова применяются в теоретических исследованиях систем массового обслуживания, если 1) расстояния между поступающими вызовами имеют произвольный закон распределения; 2) закон распределения длительности обслуживания — показательный. Дано краткое рассмотрение алгоритма с использованием вложенных цепей Маркова для моделирования на электронной вычислительной машине произвольно сложных систем массового обслуживания.

M. Shneps

# ON THE APPLICATION OF IMBEDDED MARKOV CHAINS TO THE SIMULATION OF LOSS SYSTEMS

Summary

Imbedded Markov chains are applied to a theoretical investigation of loss systems if:

1) The distribution of inter-arrival times of calls is arbitrary;

2) The distribution of holding times are negative exponential.

The paper contains a brief description of the application of imbedded Markov chains to simulate arbitrary loss systems by means of electronic computers when conditions 1 and 2 hold.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47. 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Симонян Л.*

# ОБ ОДНОТИПНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

1. Если дано некоторое множество конституентов $k_1, k_2, \ldots, k_m$, то для отличия каждого отдельного конституента $k_j$ от прочих, принадлежащих данному множеству, будем записывать $k_j$ в виде $\breve{x}_1^j \breve{x}_2^j \ldots \breve{x}_n^j$, где $\breve{x}_i^j$ есть либо $x_i$, либо $\overline{x}_i$.

Определение 1. Число инверсирований аргументов, необходимое для перевода конституента $k_i = \breve{x}_1^i \breve{x}_2^i \ldots \breve{x}_n^i$ в конституент $k_j = \breve{x}_1^j \breve{x}_2^j \ldots \breve{x}_n^j$, называется расстоянием между конституентами $k_i$ и $k_j$ и обозначается символом $\varrho(k_i, k_j)$.

Определение 2. Число инверсирований аргументов, необходимое для перевода конституента $k_i = \breve{x}_1^i \breve{x}_2^i \ldots \breve{x}_n^i$ в конституент $k_j' = \breve{x}_1^j \breve{x}_2^j \ldots \breve{x}_n^j$, будем называть расстоянием между конституентом $k_i$ и конституентом

$k_j = \breve{x}_1^j \breve{x}_2^j \ldots \breve{x}_n^j \breve{x}_{n+1}^j \ldots \breve{x}_m^j$ и обозначать символом $\varrho(k_i, k_j)$.

Произвольную булеву функцию $n$ переменных $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ будем записывать с помощью с. н. ф. в виде

$$f = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s,$$

где $p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ есть конституент единицы по $n$ переменным. Конституенты некоторой заданной функции могут обозначаться также другими малыми латинскими буквами.

Определение 3. Функции $f(x_1 x_2 \dots x_n)$ и $g(x_1 x_2 \dots x_n)$ назовем изометричными, если матрицы их расстояний, с точностью до одновременных перестановок строк и столбцов, совпадают.

Определение 4. Конституенты $p_{a_1}$, $p_{a_2}, \dots p_{a_k}$ называются подобными конституентами функции $f = p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_s$ если строки $a_1, a_2, \dots, a_k$ матрицы расстояний $f$ совпадают с точностью до перестановок элементов в них. Конституенты $p_1, p_2, \dots, p_r$ называются подобными, если строки матрицы расстояний функции $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_r$ совпадают с точностью до перестановок элементов в них.

На первый взгляд может показаться, что изометричность функций эквивалентна их однотипности. Однако это не так. В то время, как из однотипности функций следует их изометричность [1], обратное случается не всегда. В самом деле, возьмем в качестве примера следующие две функции

$$f(xyzw) = xyzw \vee \bar{x}y\bar{z}w \vee \bar{x}\bar{y}zw \vee x\bar{y}\bar{z}w$$

$$g(xyzw) = xyzw \vee \bar{x}y\bar{z}w \vee \bar{x}\bar{y}zw \vee \bar{x}yz\bar{w}$$

Функции $f$ и $g$ изометричны, но не одного типа.

Определение 5. Поразрядной конъюнкцией конституентов

$$k_1 = \tilde{x}_1^1 \tilde{x}_2^1 \dots \tilde{x}_n^1,\ k_2 = \tilde{x}_1^2 \tilde{x}_2^2 \dots \tilde{x}_n^2,\ \dots,\ k_m = \tilde{x}_1^m \tilde{x}_2^m \dots \tilde{x}_n^m,$$

обозначаемой символом $k_1 \bigcirc k_2 \bigcirc \dots \bigcirc k_m$, назовем следующую операцию

$$k_1 \bigcirc k_2 \bigcirc \dots \bigcirc k_m = \tilde{x}_1^1 \tilde{x}_1^2 \dots \tilde{x}_1^m \vee \tilde{x}_2^1 \tilde{x}_2^2 \dots \tilde{x}_2^m \vee \dots \vee \tilde{x}_n^1 \tilde{x}_n^2 \dots \tilde{x}_n^m.$$

Будем говорить, что литер $\tilde{x}_i$ входит дизъюнктивным членом в поразрядную конъюнкцию

$$k_1 \bigcirc k_2 \bigcirc \dots \bigcirc k_m,$$

$$\text{если } \tilde{x}_i = \tilde{x}_i^1 \tilde{x}_i^2 \dots \tilde{x}_i^m.$$

Конституент, полученный из конституента $k = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n$ инверсированием всех переменных, будем обозначать через $k^*$. То, что литер $\tilde{x}_i$ входит (не входит) в запись конституента $k_j$, будем сокращенно записывать

$$k_j \in \tilde{x}_i \; (k_j \,\overline{\in}\, \tilde{x}_i).$$

Для некоторого конституента $k = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_n$ и последовательности конституентов единицы по $n$ переменным $k_1, k_2, \ldots, k_m$ построим систему поразрядных конъюнкций следующим образом. Для литера $\tilde{x}_i \ni k$ и последовательности конституентов $k_1, k_2, \ldots, k_m$ определим новую последовательность конституентов $\hat{k}_1^i, \hat{k}_2^i, \ldots, \hat{k}_m^i$,

$$\text{где } \hat{k}_j^i = \begin{cases} k_j \text{ если } k_j \in \tilde{x}_i \\ k_j^* \text{ если } k_j \,\overline{\in}\, \tilde{x}_i \end{cases}.$$

В этом случае литер $\tilde{x}_i$ является дизъюнктивным членом поразрядной конъюнкции

$$\hat{k}_1^i \circ \hat{k}_2^i \circ \ldots \circ \hat{k}_m^i,$$

так как $\tilde{x}_i$ входит в запись каждого конституента

$$\hat{k}_j^i \; (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Эта поразрядная конъюнкция будет обозначаться символом

$$\Pi_i^k \begin{pmatrix} k_1 \; k_2 \ldots k_m \\ k_1 \; k_2 \ldots k_m \end{pmatrix}.$$

Заставляя $i$ пробегать множество натуральных чисел от 1 до $n$, получим некоторую систему поразрядных конъюнкций. Договоримся называть ее системой, порожденной конституентом $k$ и последовательностью конституентов $k_1, k_2, \ldots, k_m$. То, что литер $\tilde{x}_i$ входит дизъюнктивным членом в поразрядную конъюнкцию

$$\hat{k}_1^i \circ \hat{k}_2^i \circ \ldots \circ \hat{k}_m^i,$$

будем сокращенно записывать

$$\overset{*}{x}_i \subset \Pi_i^k \begin{pmatrix} k_1\ k_2 \ldots k_m \\ k_1\ k_2 \ldots k_m \end{pmatrix}.$$

Лемма 1. Расстояние между двумя конституентами единицы по $n$ переменным $k_i = \overset{*}{x}{}_1^i \overset{*}{x}{}_2^i \ldots \overset{*}{x}{}_n^i$ и $k_j = \overset{*}{x}{}_1^j \overset{*}{x}{}_2^j \ldots \overset{*}{x}{}_n^j$ выражается формулой

$$\varrho\ (k_i, k_j) = \sum_{h=1}^{n} \varrho\ (k_i, \overset{*}{x}{}_h^j) = \sum_{h=1}^{n} \varrho\ (\overset{*}{x}{}_h^i, k_j)$$

Определение 6. Будем говорить, что система поразрядных конъюнкций

$$k_1^i \bigcirc k_2^i \bigcirc \ldots \bigcirc k_m^i \ (i=1, 2, \ldots n),$$

где $k_j^i$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ есть конституент единицы по $n$ переменным, определяет некоторый конституент единицы по $n$ переменным, если:

1. все поразрядные конъюнкции непусты;
2. из каждой поразрядной конъюнкции можно извлечь по одному литеру, являющемуся дизъюнктивным членом этой поразрядной конъюнкции, так, чтобы конъюнкция их была конституентом единицы по $n$ переменным.

То, что конституент $p$ входит (не входит) в с. н. ф. функции $f$, будем сокращенно записывать $p \in f$ $(p \in \overline{f})$.

Пусть нам даны две функции $n$ переменных

$$f = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s \text{ и } g = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_s.$$

Возьмем произвольный конституент $p \in f$ $(p \in \overline{f})$. Построим систему поразрядных конъюнкций, порожденную конституентом $p$ и последовательностью конституентов $p_1, p_2, \ldots, p_s$,

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \ldots p_s \\ p_1\, p_2 \ldots p_s \end{pmatrix} \ (i=1, 2, \ldots, n).$$

Далее, в каждой поразрядной конъюнкции системы заменим по некоторому закону взаимнооднозначного соответствия между конституентами функции $f$ и конституентами функции $g$

$$p_j \longleftrightarrow q_{a_j} \ (j=1, 2, \ldots, s)$$

конституенты функции $f$ конституентами функции $g$. Получим новую систему поразрядных конъюнкций

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_s \\ q_{a_1} \; q_{a_2} \ldots q_{a_s} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Будем говорить, что конституент $p \in \overline{f}$ $(p \in f)$ индуцирует для данного соответствия $p_j \longleftrightarrow q_{a_j}$ конституент $q \in \overline{g}$ $(q \in g)$, если система поразрядных конъюнкций

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_s \\ q_{a_1} \, q_{a_2} \ldots q_{a_s} \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \ldots, n)$$

определяет конституент $q$ единицы по $n$ переменным.

Лемма 2. Пусть даны две булевы функции $n$ переменных

$$f=p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s \text{ и } g=q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_s$$

причем нумерация конституентов согласована с некоторым взаимнооднозначным соответствием между конституентами $f$ и $g$. Если для этого соответствия некоторый конституент $p \in \overline{f}$ $(p \in f)$ индуцирует конституент $q \in \overline{g}$ $(q \in g)$, то

$$\varrho\,(q, q_j) = \varrho\,(p, p_j)$$

Определение 7. Будем называть взаимнооднозначное соответствие $p_j \longleftrightarrow q_{aj}$ между конституентами изометричных функций $f=p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s$ и $g=q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_s$ изометрическим, если

$$\varrho(p_i, p_j) = \varrho(q_{a_i}, q_{a_j}) \quad (i, j=1, 2, \ldots s).$$

Теорема 1. Если функции $f$ и $g$ однотипны, то для некоторого изометрического соответствия между их конституентами произвольный конституент $p \in \overline{f}$ $(p \in f)$ индуцирует некоторый конституент $q \in \overline{g}$ $(q \in g)$.

Теорема 2. Если для некоторого взаимнооднозначного соответствия $p_j \longleftrightarrow q_{oj}$ $(j=1, 2, \ldots, s)$ между конституентами булевых функций $n$ переменных $f=p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s$ и $g= q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_s$ некоторый конституент $p \in \overline{f}$ $(p \in f)$ индуцирует некоторый конституент $q \in \overline{g}$ $(q \in g)$, то и любой конституент $r \in \overline{f}$ $(r \in f)$ индуцирует для данного соответствия некоторый конституент $t \in \overline{g}$ $(t \in g)$.

Пусть $p=\overset{s}{x}_1\overset{s}{x}_2 \dots \overset{s}{x}_n \in \overline{f}(f)$. Составим систему поразрядных конъюнкций, порожденную конституентом $p$ и последовательностью конституентов $p_1, p_2, \dots, p_s$,

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ p_1\, p_2 \dots p_s \end{pmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

По предложению теоремы существуют $\overset{s}{y}_i$ такие, что

$$\overset{s}{y}_i \subset \Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ q_{a_1}\; q_{a_2} \dots q_{a_s} \end{pmatrix}$$

$$\text{и } \overset{s}{y}_1\, \overset{s}{y}_2 \dots \overset{s}{y}_n = q,$$

Для произвольного $r \in \overline{f}$ $(r \in f)$ имеет место

$$r=N_{c_1c_2\dots c_n}\, p$$

Покажем, что $r$ индуцирует конституент

$$t=N_{c_1c_2\dots c_n}[\overset{s}{y}_1\overset{s}{y}_2 \dots \overset{s}{y}_n]=N_{c_1c_2\dots c_n}\, q$$

Так как

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1\; p_2 \dots p_s \\ p_1\, p_2 \dots p_s \end{pmatrix} \supset \overset{s}{x}_i,$$

то

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1^*\;\; p_2^* \dots p_s^* \\ p_1^*\;\; p_2^* \dots p_s^* \end{pmatrix} \supset \overline{\overset{s}{x}}_i.$$

Запишем конституент $r$ в виде $r=\overset{s}{z}_1\, \overset{s}{z}_2 \dots \overset{s}{z}_n$,

где

$$\overset{s}{z}_i= \begin{cases} \overset{s}{x}_i, \text{ если } c_i=0 \\ \overline{\overset{s}{x}}_i, \text{ если } c_i=1 \end{cases},$$

тогда

$$\Pi_i^r \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ p_1\, p_2 \dots p_s \end{pmatrix} = \begin{cases} \Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ p_1\, p_2 \dots p_s \end{pmatrix}, \text{ если } c_i=0 \\ \Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1^*\;\, p_2^* \dots p_s^* \\ p_1^*\;\, p_2^* \dots p_s^* \end{pmatrix}, \text{ если } c_i=1 \end{cases}$$

Наконец, определяя

$$\breve{w}_i = \begin{cases} \breve{y}_i, & \text{если } c_i = 0 \\ \bar{\breve{y}}_i, & \text{если } c_i = 1 \end{cases}$$

получим, что конституент

$$t = \breve{w}_1 \breve{w}_2 \ldots \breve{w}_n = N_{c_1 c_2 \ldots c_n} [\breve{y}_1 \breve{y}_2 \ldots \breve{y}_n]$$

индуцируется конституентом $r \in \bar{f}$ $(r \in f)$ для данного соответствия $p_j \longleftrightarrow q_{a_j}$.

Из леммы 2 следует, что

$$\varrho\ (p_j,\ r) = \varrho (q_{a_j},\ t) \quad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

В таком случае, если $r \in \bar{f}$ $(r \in f)$, то $t \in \bar{g}$ $(t \in g)$, и, если $r \in f$ и совпадает с некоторым конституентом $p_k$ из $f$, то $t$ есть конституент $q_{a_k}$. Но тогда из соотношения

$$\varrho\ (p_j, p_k) = \varrho (q_{a_j}, q_{a_k})\ (j = 1, 2, \ldots, s)$$

следует, что соответствие $p_j \longleftrightarrow q_{a_j}$ изометрическое. Таким образом, попутно доказана

Теорема 3. Если для некоторого взаимнооднозначного соответствия между конституентами функций $f$ и $g$ некоторый конституент $p \in \bar{f}$ $(p \in f)$ индуцирует некоторый конституент $q \in \bar{g}$ $(q \in g)$, то это соответствие изометрическое.

Замечания: 1. Для конституентов $p_i$ и $p_j \in \bar{f}$ и индуцируемых ими конституентов $q_i$ и $q_j \in \bar{g}$ имеет место;

$$\varrho\ (p_i,\ p_j) = \varrho (q_i,\ q_j)$$

В самом деле, если конституент $p_i \in \bar{f}$ индуцирует конституент $q \in \bar{g}$, то по доказательству теоремы 2, конституент $p_j$, равный $N^i_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ $p_i$, индуцирует для того же соответствия конституент $q_j = N_{c_1 c_2 \ldots c_n}$ $q_i$. Но тогда, как $\varrho (p_i,\ p_j)$, так и $\varrho (q_i,\ q_j)$ равны числу единиц в записи двоичного числа $c_1\ c_2 \ldots c_n$.

Резюмируя все сказанное, получим

Две произвольные изометричные функции $f$ и $g$ однотипны тогда и только тогда, когда для некоторого изометрического соответствия между их конституентами произвольный конституент $p \in \overline{f}$ ($p \in f$) индуцирует некоторый конституент $q \in \overline{g}$ ($q \in g$).

2. Введение операции, называемой поразрядной конъюнкцией, позволяет не только указать необходимое и достаточное условие однотипности, но и построить преобразование однотипности, если это условие выполнено.

Как и прежде, нам даны две функции $n$ переменных

$$f = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s \text{ и } g = q_1 \vee q_2 \vee \ldots \vee q_s$$

Возьмем произвольный конституент $p \in \overline{f}$ ($p \in f$) и составим систему поразрядных конъюнкций, порожденную конституентом $p$ и последовательностью конституентов $p_1, p_2, \ldots, p_s$

$$\Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_s \\ p_1 \, p_2 \ldots p_s \end{pmatrix} \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

При выполнении достаточного условия однотипичности для некоторого изометрического соответствия $p_j \longleftrightarrow q_{a_j}$ существуют такие $\ddot{y}_i$, что

$$\ddot{y}_i \subset \Pi_i^p \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_s \\ q_{a_1} q_{a_2} \ldots q_{a_s} \end{pmatrix}$$

и $\ddot{y}_1 \ddot{y}_2 \ldots \ddot{y}_n = q$ есть конституент единицы по $n$ переменным. Тогда подстановка

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \ddot{x}_2 \ldots \ddot{x}_n \\ \ddot{y}_1 \ddot{y}_2 \ldots \ddot{y}_n \end{pmatrix} = \sigma$$

дает искомое преобразование однотипности.

3. Применим полученные ранее результаты к вопросу об опознании групповой инвариантности произвольной булевой функции.

Определение 8. Пусть задана произвольная булева функция $n$ переменных $f = p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_s$. Для произвольного $p_j \in f$ построим систему поразрядных конъюнкций, порожденную $p_j$ и последовательностью консистуентов $p_1, p_2, \ldots p_s$

$$\Pi_i^{p_j} \begin{pmatrix} p_1 \, p_2 \ldots p_s \\ p_1 \, p_2 \ldots p_s \end{pmatrix} \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Назовем подстановку

$$\begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ p_{a_1}\, p_{a_2} \dots p_{a_s} \end{pmatrix}$$

на множестве конституентов функции $f$ нормальной, если система

$$\Pi_i^{p_j} \begin{pmatrix} p_1\, p_2 \dots p_s \\ p_{a_1}\, p_{a_2} \dots p_{a_s} \end{pmatrix} \ (i=1,\, 2,\, \dots,\, n).$$

определяет конституент

$$p_{a_j}.$$

Лемма 3. Группа инерции произвольной булевой функции гомоморфна группе всех нормальных подстановок на множестве ее конституентов.

Лемма 3 дает возможность найти группу инерции произвольной булевой функции. Процесс нахождения группы инерции состоит в переборе всех подстановок на множества конституентов функции и в выделении среди них нормальных подстановок. Для каждой нормальной подстановки находится ее прообраз в группе инерции, изложенным в 2 методом.

Ядро гомоморфизма находится следующим образом. Для произвольного конституента $p$ рассматриваемой функции строим систему порязрядных конъюнкций, порожденную конституентом $p=\overset{*}{x}_1\overset{*}{x}_2 \dots \overset{*}{x}_n$ и последовательностью всех конституентов функции. Берем все конституенты, которые определяются построенной системой поразрядных конъюнкций. Ясно, что все полученные таким образом конституенты будут отличаться лишь порядком вхождения в них литеров и потому они все совпадают между собой и равны $p$. Но нам важен именно порядок вхождения литеров в конституент, чтобы иметь возможность построить все преобразования однотипности, образующие ядро гомоморфизма. Пусть конституент $\overset{*}{x}_{l_1}\ \overset{*}{x}_{l_2} \dots \overset{*}{x}_{l_n}$ определяется построенной системой, тогда преобразование однотипности

$$\begin{pmatrix} \overset{*}{x}_1\overset{*}{x}_2 \dots \overset{*}{x}_n \\ \overset{*}{x}_{l_1}\ \overset{*}{x}_{l_2} \dots \overset{*}{x}_{l_n} \end{pmatrix}$$

принадлежит ядру.

Пример 1. Пусть нам дана функция

$$f(x_1 \dots x_4) = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$$

Занумеруем конституенты слева направо числами 1, 2, 3, 4. Система поразрядных конъюнкций, порожденная конституентом 1 и последовательностью конституентов 1, 2, 3, 4 имеет вид

$$
\begin{array}{l}
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3 \;\;\, \bigcirc 4^* \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4 \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4 \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4
\end{array}
$$

Подставляя вместо чисел 1, 2, 3, 4 обозначаемые ими конституенты, получим

$$
\begin{array}{ll}
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3 \;\;\, \bigcirc 4^* & = x_1 \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4 & = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4 & = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4 \\
1 \bigcirc 2^* \bigcirc 3^* \bigcirc 4 & = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4
\end{array}
$$

В ядро гомоморфизма входят преобразования

$$
\begin{pmatrix} x_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ x_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 & \bar{x}_2 \end{pmatrix} = S_{1342}; \quad \begin{pmatrix} x_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 & \bar{x}_4 \\ x_1 & \bar{x}_3 & \bar{x}_2 & \bar{x}_4 \end{pmatrix} = S_{1324}
$$

Поэтому ядро гомоморфизма состоит из всех перестановок аргументов $x_2$, $x_3$, $x_4$ и только из них.

Процесс выделения группы всех нормальных подстановок в группе всех подстановок на множестве конституентов рассматриваемой функции можно в некоторой степени упростить.

Всякую подстановку на множестве конституентов функции можно разложить в произведение независимых циклов. Такое представление подстановки будем называть циклической записью подстановки.

Л е м м а 4. Для того, чтобы подстановка на множестве конституентов функции была нормальной, необходимо, чтобы каждый цикл в циклической записи подстановки заполнялся лишь подобными конституентами.

Из всего предыдущего можно извлечь следующий алгоритм опознания групповой инвариантности произвольной булевой функции.

1. Разбиваем множество конституентов функции на классы подобных конституентов функции. Рассматривая каждый класс как новую функцию, снова разбиваем на классы подобных конституентов и т. д., пока процесс не оборвется. Получим разбиение множества конституентов на классы.

2. Среди подстановок на множестве конституентов функции, каждый цикл в циклической записи которых заполняется лишь подобными конституентами из одного класса, выбираем те, которые являются нормальными.

3. Для каждой нормальной подстановки строим преобразование однотипности ее вызывающее.

4. Находим ядро гомоморфизма группы инерции в группу всех нормальных подстановок.

П р и м е р 2. Найти группу инерции функции.

$$f(x_1 \ldots x_5) = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 \vee$$
$$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5$$

Занумеруем конституенты $f(x_1 \ldots x_5)$ слева направо числами 1, 2, ..., 7. Матрица расстояний функции:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{Vmatrix}$$

Классы подобных конституентов функции

1, 2, 3; 4, 5; 6, 7

Классы подобных конституентов функции $1 \vee 2 \vee 3$

2; 1, 3.

Итак, множество конституентов функции $f(x_1 \ldots x_5)$ разбивается на классы

2; 1, 3; 4, 5; 6, 7.

Проверке подлежат подстановки

1; (4, 5); (6, 7); (4, 5) (6, 7); (1, 3);
(1, 3) (4, 5); (1, 3) (6, 7); (1, 3) (4, 5) (6, 7)

Система поразрядных конъюнкций, порожденная конституентом 1 и последовательностью конституентов 1, 2, ..., 7,

1 ○ 2* ○ 3 ○ 4* ○ 5 ○ 6* ○ 7
1 ○ 2* ○ 3* ○ 4* ○ 5 ○ 6* ○ 7*
1 ○ 2* ○ 3 ○ 4* ○ 5* ○ 6 ○ 7
1 ○ 2* ○ 3 ○ 4 ○ 5* ○ 6 ○ 7*
1 ○ 2 ○ 3* ○ 4* ○ 5 ○ 6 ○ 7

Нормальной является подстановка

$$\begin{pmatrix} 2\ 13\ 45\ 67 \\ 2\ 31\ 54\ 76 \end{pmatrix},$$

так как

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
3 & \bigcirc & 2^* & \bigcirc & 1 & \bigcirc & 5^* & \bigcirc & 4 & \bigcirc & 7^* & \bigcirc & 6 & = & x_4 \\
3 & \bigcirc & 2^* & \bigcirc & 1^* & \bigcirc & 5^* & \bigcirc & 4 & \bigcirc & 7^* & \bigcirc & 6^* & = & \overline{x}_5 \\
3 & \bigcirc & 2^* & \bigcirc & 1 & \bigcirc & 5^* & \bigcirc & 4^* & \bigcirc & 7 & \bigcirc & 6 & = & \overline{x}_3 \\
3 & \bigcirc & 2^* & \bigcirc & 1 & \bigcirc & 5 & \bigcirc & 4^* & \bigcirc & 7 & \bigcirc & 6^* & = & x_1 \\
3 & \bigcirc & 2 & \bigcirc & 1^* & \bigcirc & 5^* & \bigcirc & 4 & \bigcirc & 7 & \bigcirc & 6 & = & x_2
\end{array}$$

Точно также проверяется, что остальные подстановки не являются нормальными.

Преобразование однотипности, вызывающее подстановку

$$\begin{pmatrix} 2 & 13 & 45 & 67 \\ 2 & 31 & 54 & 76 \end{pmatrix},$$

есть

$$\begin{pmatrix} x_1 & \overline{x}_2 & \overline{x}_3 & x_4 & x_5 \\ x_4 & \overline{x}_5 & \overline{x}_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = S_{45312}.$$

Ядром гомоморфного отображения группы инерции в группу всех нормальных подстановок является единица.

Группа инерции функции $f(x_1 \ldots x_5)$

$$\{e, S_{45312}\}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Н. Поваров. О групповой инвариантности булевых функций Применение логики в науке и технике. М., АН СССР, 1960, 263—340.

*Л. А. Симонян*

## ОБ ОДНОТИПНОСТИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация

В статье предлагаются два алгоритма. Первый позволяет определить, являются ли две булевы функции однотипными. С помощью второго можно построить группу инерции произвольной булевой функции.

L. A. Simonian

## ON BOOLEAN FUNCTIONS OF THE SAME TYPE

Annotation

In this paper two algorithms are obtained. The first of them can be applied for determining whether two Boolean functions are of one type. The second one is presented for determining all permutations and primings of the independent variables which leave the function unchanged.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА УНИВЕРСИТЕТА I.

*Л. А. Ладыженский, И. А. Попова, С. А. Хозиоский*

# О ВЫЧИСЛЕНИИ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

1. При нахождении решений волнового уравнения часто приходится суммировать ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \, j_k(x) \qquad (1)$$

где $j_k(x)$ — сферическая ф-я Бесселя:

$$j_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \; J_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

а коэффициент $A_k$ быстро растет при возрастании $k$. В связи с этим возникает вопрос о табулировании функций $j_k(x)$ с высокой точностью для больших значений индекса и аргумента.

В настоящей заметке, ни в коей мере не претендующей на какое-то бы ни было теоретическое значение, предлагается удобная, как нам кажется, для электронных вычислительных машин методика такого табулирования. Необходимость иметь особую методику такого рода объясняется следующими обстоятельствами:

а) Использование обычных рекурентных формул для бесселевых функций дает удовлетворительную точность только при $k<x$.

б) Вычисление бесселевой функции при помощи ряда возможно без дополнительных усложнений только для больших $k$, причём при больших значениях аргумента $k$ должно быть значительно больше аргумента и, таким образом, «склеивание» счета по рекурентным формулам и счета при помощи ряда встречает серьезные затруднения.

в) Для встречающихся на практике рядов типа (1) часто бывает затруднительно дать оценку остатка ряда. Желательно поэтому, чтобы была возможность практически неограниченно продолжать вычисления $j_k(x)$ без существенной потери точности.

2. Потеря точности при вычислении $j_k(x)$ по обычной рекурентной формуле

$$j_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{x} j_k(x) - j_{k-1}(x) \tag{2}$$

связана с тем, что общее решение разностного уравнения

$$z_{k+1} = \frac{2k+1}{x} z_k - z_{k-1} \tag{3}$$

имеет вид

$$z_k = c_1 j_k(x) + c_2 n_k(x)$$

причем функция

$$n_k(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, N_{k+\frac{1}{2}}(x)$$

очень быстро стремится к $-\infty$ при $k \to \infty$. При этом, быстрый рост $|n(x)|$ наступает при $k > x$. Отсюда ясно, что применение формулы (2) для вычисления $n_k(x)$ не связано с потерей точности и вычисления по этой формуле можно проводить сколь угодно далеко.

Воспользовавшись известной формулой

$$j_k(x) n_{k+1}(x) - n_k(x) j_{k+1}(x) = -\frac{1}{x^2}$$

(см., напр., [1]), легко получить формулу

$$j_k(x) = -\frac{n_k(x)}{x^2} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{n_i(x) n_{i+1}(x)} \tag{4}$$

Предлагаемая методика табулирования заключается в следующем:

1) При $k \leqslant x$ $j_k(x)$ вычисляются последовательно по формуле (2). Как показывает эксперимент, при этом не происходит существенной потери точности.

2) При $k>x$ $j_k(x)$ вычисляется по формуле (4). При этом ряд, стоящий в правой части представляет из себя очень быстро сходящийся ряд с положительными членами.

3. Эксперименты, проведенные на машине БЭСМ-2 Вычислительного центра Латв. Госуниверситета показали, что вычисления полиномов Лежандра по обычным рекурентным формулам, практически не приводят к потери точности. Для значения $P_{511}(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ например, верными оказываются 7 значащих цифр.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Ватсон. «Теория бесселевых функций». ИЛ, 1949 г.



*Ладыженский Л. А., Попова И. А., Хозиоский С. А.*


# О ВЫЧИСЛЕНИИ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ И ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ


## Аннотация

В заметке предлагается вычислительная процедура, удобная для вычислении на быстродействующих машинах бесселевых функций при больших значениях индекса и аргументах, больших единицы.



L. A. Ladizhensky, I. A. Popova, S. A. Khoziosky


# ON CALCULATIONS OF BESSEL FUNCTIONS AND LEGENDRE POLYNOMIALS OF GREAT ORDERS


## Annotation

In this brief paper, computation procedure, especially convenient for electronic computers, is proposed to calculate Bessel functions with large indices, for arguments exceeding one.

PĒTERA STUČKAS LATVIJAS VALSTS UNIVERSITĀTES ZINĀTNISKIE RAKSTI
47. SĒJ., 1963. UNIVERSITĀTES SKAITĻOŠANAS CENTRA RAKSTI I

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЛАТВИЙСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМ. П. СТУЧКИ. ТОМ 47, 1963. ТРУДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЦЕНТРА
УНИВЕРСИТЕТА I.

*М. И. Коробочкин*

# К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Определение взаимного положения пунктов геодезической сети основано на проведении угловых и линейных измерений, требующих установления непосредственной видимости по каждому направлению сети. Такая видимость или естественно обеспечивается условиями местности, или, что встречается значительно чаще, достигается постройкой на пунктах сети специальных сооружений — наземных геодезических знаков.

Процесс проектирования геодезической сети заключается: 1) в выборе планового положения пунктов и конфигурации сети, 2) в расчете высот наземных знаков, обеспечивающих непосредственную видимость по каждому запроектированному направлению.

В статье рассматривается метод оптимального решения последней задачи.

Стоимость постройки двух знаков, обеспечивающих прохождение визирного луча на заданной высоте над препятствием, весьма существенно зависит от конкретных высот каждого знака этой пары, причем минимальная сумма высот знаков, в общем случае не обеспечивает наименьшей стоимости постройки.

Точно так же, суммарная стоимость постройки на всех пунктах геодезической сети, развиваемой на определенном объекте, существенно зависит от конкретного набора высот знаков, с помощью которого проектируется обеспечить нужные видимости.

Для каждой геодезической сети существует множество допустимых (т. е. удовлетворяющих техническим требованиям) наборов высот знаков, один из которых обычно и реализуется на практике.

Постройка является наиболее дорогим и трудоемким процессом геодезического производства, поэтому, если проводить ее, реализуя не один из допустимых, а оптимальный набор высот знаков*, то как будет показано ниже, можно получить значительный экономический эффект.

Пусть о данной геодезической сети имеется следующая информация:

1) абсолютные или условные отметки пунктов и препятствий;

2) расстояния между пунктами и соответствующими препятствиями;

3) минимально допустимая высота визирного луча над препятствием, установленная для данного класса работ;

4) высоты уже отстроенных знаков и включенных в сеть местных предметов;

5) ограничения допустимых высот знаков снизу (за лес или искусственные сооружения в непосредственной близости от пункта);

6) поясной коэффициент, категории сложности постройки, трудности земляных работ и переездов;

7) стоимость лесоматериала на месте заготовки или франко-склад и стоимость гвоздей;

8) расстояние перевозки леса к каждому пункту, применяемый транспорт.

Для пунктов $k$ и $l$, разделенных препятствием, условие непосредственной видимости можно записать в виде следующего неравенства:

$$a_{lk}\ x_k + a_{kl}\ x_l \geqslant b_i. \tag{1}$$

Здесь $x_k$ и $x_l$ — любая пара высот знаков удовлетворяющая (1), $a_{lk}$ и $a_{kl}$ — расстояния соответственно от пунктов $l$ и $k$ до препятствия

$$b_i = a_{lk}\, H_k + a_{kl}\, H_l \tag{2}$$

---

* Оптимальным будем называть такой набор высот знаков, который обеспечивает заданные технические требования при наименьших суммарных затратах на постройку по всему рассматриваемому объекту работ.

где $H_k$ и $H_l$ — пара высот знаков, визирный луч между которыми проходит над препятствием через точку с заданной высотой*.

Неравенства типа (1) составляются для каждого препятствия на направлениях сети и в совокупности образуют систему:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \geqslant b_i \qquad (4)$$
$$(i=1 \ldots m)$$

Здесь $n$ — число знаков, высоты которых подлежат определению; $m$ — число препятствий на направлениях сети.

Когда препятствия (лес, искусственные сооружения и пр.) расположены в непосредственной близости от пунктов, неравенсвта (1) принимают вид

$$x_j \geqslant \bar{x}_j, \qquad (5)$$

где $\bar{x}_j$ — высота знака, необходимая для перекрытия близкого препятствия.

Ограничения типа (5) возникают также при необходимости обеспечения видимости на уже отстроенный знак или местный предмет. В дальнейшем будем считать, что система (4) содержит и вырожденные неравенства типа (5).

В общем случае, система (4) имеет бесконечное множество решений. Однако физический смысл рассматриваемой задачи таков, что нас могут интересовать лишь решения удовлетворяющие условиям неотрицательности

$$x_j \geqslant o, \ (j=1 \ldots n) \qquad (6)$$

Очевидно, что всякое решение, удовлетворяющее ограничениям (4) и (6) определяет собою допустимый набор, так как знаки соответствующих высот обеспечивают видимости по всем запроектированным направлениям.

---

* Величины $h_k$ и $h_l$ можно определить в процессе рекогносцировки. измеряя высоты, с которых устанавливается взаимная видимость между двумя пунктами с заданным превышением визирного луча над препятствием.

При наличии соответствующих данных эти величины могут быть определены также по формулам В. Н. Шишкина [1]:

$$\begin{aligned} H_k &= h_k + c + v_k \\ H_l &= h_l + c + v_l \end{aligned} \qquad (3)$$

где $h_k$ и $h_l$ — превышения препятствия над основаниями знаков в $k$ и $l$, $c$ — установленная для данного класса работ высота визирного луча над препятствием; $v_k$ и $v_l$ — поправки за кривизну Земли и рефракцию.

Чтобы из совокупности допустимых наборов выделить оптимальный, реализация которого связана с наименьшими затратами на постройку, рассмотрим зависимость роста стоимости знаков с увеличением их высот.

Основные затраты на постройку, зависящие от высоты знаков, складываются из: 1) стоимости содержания строительных бригад и их транспорта, 2) стоимости лесоматериалов, 3) стоимости гвоздей.

Анализ показывает, что рост затрат на содержание строительных бригад и их транспорта с увеличением высоты знаков хорошо аппроксируется кривой второго порядка:

$$y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1 \tag{7}$$

Зависимость расхода леса от высоты знака также представима квадратичной кривой:

$$y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \tag{8}$$

Расход гвоздей растет с высотой знаков по линейному закону:

$$y_3 = b_3x + c_3 \tag{9}$$

Стоимость 1 м$^3$ леса на месте постройки $j$-го пункта можно представить в виде:

$$\alpha + \beta\, l_j \tag{10}$$

где $\alpha$ — стоимость 1 м$^3$ леса франко-склад плюс стоимость погрузки и разгрузки при перевозке к пункту на данном транспорте; $\beta$ — стоимость перевозки 1 м$^3$ леса на данном транспорте на расстояние 1 км; $l_j$ — расстояние подвозки леса к $j$-му пункту.

Цена 1 кг гвоздей $\gamma$ на объекте принимается постоянной.

Таким образом, зависимость роста стоимости постройки от увеличения высоты знаков можно записать в виде:

$$\varphi_j = (a_1x_j^2 + b_1x_j + c_1) + (\alpha + \beta\, l_j)\,(a_2x_j^2 + b_2x_j + c_2) + \\ + \gamma\,(b_3x_j + c_3). \tag{11}$$

Теперь вопрос об отыскании оптимальных высот знаков для фиксированной в плане геодезической сети формулируется в виде следующей задачи квадратичного программирования.

Имеется система ограничений вида

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j &\geqslant b_i \quad i = 1 \ldots m \\ x_j &\geqslant o \quad j = 1 \ldots n \end{aligned} \tag{12}$$

Нужно определить такие значения $x_j$, которые удовлетворяют системе (12) и в то же время обращают в минимум функционал:

$$R = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j = \sum_{j=1}^{n} (A_j x_j^2 + B_j x_j + C_j) \tag{13}$$

Для решения этой задачи было испробовано несколько методов. Вначале кривая (13) аппроксимировалась вписанной ломаной [см. 2].

Решение такой линеаризованной задачи итеративным методом В. А. Булавского [3] не дало положительных результатов. Применение же симплексного метода значительно ограничивало объем разрешимых задач*.

Чтобы избежать увеличения объема задачи связанного с линеаризацией**, симплексная процедура была модифицирована таким образом, чтобы при очередной итерации проводилась замена соответствующего базисного вектора таким небазисным, который реализует наибольшее уменьшение выпуклого функционала.

Такая модификация существенно улучшает положение, однако объем задач разрешимых на машинах класса БЭСМ остается неудовлетворительным.

Наиболее эффективное решение удалось получить на основе метода, предложенного Ю. А. Клоковым, который был разработан в Вычислительном центре Латвийского Государственного университета им. П. Стучки И. И. Коробочкиной. Сущность метода состоит в следующем.

Выпуклый многогранник $n$-мерного пространства, определяемый неравенствами (12), аппроксимируется семейством, гладких поверхностей, которые задаются уравнением

$$\Phi(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^{m} x_j^2 (\alpha_{i1} x_1 + \dots + \alpha_{in} x_n)^2 = h^2 \tag{14}$$
$$j = 1, 2, \dots, n$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{a_{ik}}{b_i}.$$

---

* Программа, составленная для БЭСМ-2, позволила решать задачи, удовлетворяющие условию $n+m+3) < 6600$ элементов (без использования магнитных лент).

** При линеаризации число переменных увеличивается до 2 п, а число условий до $m + \sum_{j=1}^{n} k_j$, где $k_j$ — число звеньев ломаной.

С уменьшением $h$ эти поверхности сколь угодно точно аппроксимируют исходный выпуклый многогранник. Поэтому, если найти на поверхности $\Phi=h^2$ точку, координаты которой реализуют минимум функционала (13), то выбором $h$ погрешность решения может быть сделана меньше любой заданной.

Отыскание такой точки сводится к решению системы уравнений:

$$x_j=\frac{\sigma}{A_j}\left(\frac{1}{x_j}+\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{i1}x_1+\ldots+\alpha_{in}x_n-1}\right)-\frac{B_j}{A_j} \tag{15}$$

($\sigma$-параметр непрерывно и монотонно зависящий от $h$).

$$x_j=Q_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{16}$$

Система (16) решается с помощью итераций:

$$x_j^{r+1}=(1-\lambda_j x_j^2+\lambda_j\,Q_j(x_1^r, x_2^r, \ldots, x_n^r) \qquad (r=0,\,1,\,2,\,\ldots \qquad j=1,\,2,\,\ldots,\,n) \tag{17}$$

которые сходятся к решению со скоростью геометрической прогрессии знаменатель которой $q\leqslant 1-\lambda$, если $\lambda>o$ достаточно мало.

Описанный алгорифм запрограммирован для ЭЦВМ БЭСМ-2, причем составленная программа дает возможность решать задачи любого объема, возникающие на практике.

Приведем некоторые данные, полученные при определении оптимальных высот знаков для триангуляционной сети, расположенной в залесенных районах. Сеть состояла из 73 пунктов, оптимальные высоты знаков на которых нужно было определить. По северной границе участка имелось 8 отстроенных пунктов; на которые следовало обеспечить видимости по соответствующим направлениям. Остальные границы были свободны.

Исходными данными при машинных вычислениях служили материалы производственной рекогносцировки.

По этим данным была составлена система ограничений, содержащая 112 неравенств типа (1) и 56 неравенств типа (5)*.

Если заменить неравенство $x_j\geqslant\overline{x}_j$ уравнением

$$x_j=\overline{x}_j+\Delta\,x_j, \tag{18}$$

---

*) Выполнение условий (6) предусматривается самой методикой решения.

где $\Delta\ x_j$ — некоторая новая переменная и подставить правую часть (18) в неравенства типа (1) вместо соответствующих величин $x_j$, то после элементарных преобразований система (4) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,\Delta x_j \geqslant b_i^1 \ (i=1\ldots r) \tag{19}$$

где

$$k \leqslant n,\ r < m$$

$$b_i^1 = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j \tag{20}$$
$$(i=1\ldots m)$$

В результате такого преобразования, проведенного по специальной программе, входящей в общую программу вычислений, размеры системы неравенств уменьшились с

$$m \times n = 168 \times 73$$

до

$$r \times k = 74 \times 64.$$

В соответствии с (18) функционал (13) преобразуется к виду:

$$R = \sum_{j=1}^{k} \Big\{(a+b\,l_j]\,\Delta x_j^2 + [(2\,a\bar{x}_j + a^1) + (2\,b\,\bar{x}_j + b^1)\,l_j)\,\Delta\,x_j +$$
$$+ [(a\,\bar{x}_j^2 + a'\ \bar{x}_j + a'') + (b\,\bar{x}_j^2 + b'\bar{x}_j + b'')\,l_j]. \tag{21}$$

Для рассматриваемого объекта

$$\begin{array}{ll} a\ = 1{,}3892 & b\ = 0{,}02464 \\ a' = 18{,}001 & b' = 0{,}0364 \\ a'' = 211{,}95 & b'' = 1{,}239 \end{array}$$

Постоянная часть функционала стоимости

$$R_c = \sum_{j=1}^{k} [(a\,\bar{x}_j^2 + a'\bar{x}_j + a'') + (b\,\bar{x}_j^2 + b'\bar{x}_j + b'')\,l_j]$$

при данных ограничениях снизу $\bar{x}_j$ и расстояниях лесовывозки оказалась равной

$$R_c = 62274 \text{ рубля.}$$

($R_c$ — сумма, которую нужно затратить на постройку, чтобы перекрыть лес, находящийся в непосредственной близости от пунктов).

Оптимальные высоты знаков $H_{опT}$, полученные в результате решения системы (19), (21) приведены в таблице 1.1*.

Проверка высот, назначенных рекогносцировщиком, путем подстановки их в неравенства типа (1) показала, что в 17 случаях неравенства не удовлетворяются, что свидетельствует об ошибках в расчетах рекогносцировщика. (Следует отметить, что расчеты высот знаков на практике не сопровождаются каким-либо эффективным контролем. Поэтому не является неожиданностью, что ошибки были обнаружены во всех рассматривавшихся нами производственных материалах, включая и рекогносцриовку выполненную автором).

Чтобы обеспечить соблюдение условий типа (1), высоты 12 наземных знаков, определенные рекогносцировщиком, были исправлены. Значения высот знаков, полученные в результате рекогносцировки, с соответствующими коррективами даны в таблице 1.1.

Подставив значения $H_{практ}$ в функционал стоимости, получим общие затраты на постройку:

$$R_{практ.} = 92463 \text{ рубля.}$$

Общая стоимость постройки при оптимальных высотах знаков составляет

$$R_{опт.} = 85290 \text{ рублей.}$$

Таким образом оказалось, что в данном случае непроизводительные затраты составили 8,4% от необходимой стоимости постройки, или 31% от варьируемых затрат ($R_{вар} = R_{опT.} - R_c$).

Понятно, что экономическая эффективность оптимальных решений будет тем больше, чем шире возможность вариаций. Это значит, что процент экономии за счет реализации оптимальных наборов высот знаков должен расти с увеличением размеров совместно обрабатываемых систем, а также при уменьшении роли непосредственных ограничений снизу.

---

* Решение системы вместе с печатью результатов заняло 17 минут машинного времени.

Таблица 11

| №№ п/п | Практические высоты знаков $H_{практ}$ | Оптимальные высоты знаков $H_{опт}$ | №№ п/п | Практические высоты знаков $H_{практ}$ | Оптимальные высоты знаков $H_{опт}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15,0 | 14,4 | 33 | 25,5 | 27,4 |
| 2 | 18,0 | 20,1 | 34 | 16,4 | 11,3 |
| 3 | 31,0 | 31,9 | 35 | 12,0 | 11,3 |
| 4 | 13,0 | 0,5 | 30 | 22,4 | 22,0 |
| 5 | 17,0 | 25,1 | 37 | 18,0 | 19,2 |
| 6 | 26,0 | 23,5 | 38 | 17,0 | 18,2 |
| 7 | 12,0 | 8,4 | 39 | 26,0 | 26,2 |
| 8 | 12,0 | 11,9 | 40 | 18,0 | 12,0 |
| 9 | 27,0 | 27,0 | 41 | 16,0 | 12,2 |
| 10 | 18,2 | 21,8 | 42 | 34,0 | 27,6 |
| 11 | 18,0 | 15,6 | 43 | 20,0 | 18,4 |
| 12 | 32,0 | 32,0 | 44 | 17,0 | 15,3 |
| 13 | 46,4 | 32,0 | 45 | 27,0 | 25,7 |
| 14 | 25,0 | 26,9 | 46 | 15,0 | 19,0 |
| 15 | 25,0 | 23,7 | 47 | 27,0 | 26,0 |
| 16 | 29,0 | 30,3 | 48 | 23,0 | 24,2 |
| 17 | 36,0 | 27,0 | 49 | 23,0 | 22,9 |
| 18 | 30,0 | 29,8 | 50 | 14,0 | 10,1 |
| 19 | 27,0 | 22,4 | 51 | 17,1 | 17,7 |
| 20 | 17,0 | 17,8 | 52 | 29,0 | 26,0 |
| 21 | 28,4 | 27,1 | 53 | 15,0 | 9,7 |
| 22 | 24,0 | 21,9 | 54 | 22,0 | 0,5 |
| 23 | 30,0 | 30,3 | 55 | 14,0 | 0,1 |
| 24 | 25,0 | 33,0 | 56 | 28,0 | 28,2, |
| 25 | 32,4 | 30,0 | 57 | 12,0 | 8,1 |
| 26 | 15,0 | 15,0 | 58 | 25,0 | 25,0 |
| 27 | 27,0 | 27,3 | 59 | 30,0 | 27,3 |
| 28 | 31,2 | 31,4 | 60 | 25,0 | 30,0 |
| 29 | 29,0 | 29,0 | 61 | 28,0 | 25,3 |
| 30 | 18,0 | 20,6 | 62 | 25,0 | 25,0 |
| 31 | 20,0 | 22,1 | 63 | 24,9 | 26,1 |
| 32 | 21,6 | 8,6 | 64 | 10,0 | 7,9 |

Отметим, что определение оптимальных высот знаков не только позволяет устранить непроизводительные затраты при постройке знаков, но и способствует повышению качества геодезических сетей, т. к. знаки меньших высот, как показывает практика, имеют большую жесткость. Причем, в силу квадратичного характера функционала стоимости, оптимальный набор имеет не только меньшую среднюю высоту знака, но и существенно меньшие максимальные высоты (т. к. они являются наиболее дорогими).

Изложенная методика позволяет без какого-либо усложнения определять оптимальные высоты знаков и при условии обеспечения видимости по линии: визирная цель (отражательная установка) — место установки угломерного инструмента или дальномера.

В этом случае, вообще говоря, для каждого препятствия нужно составлять два неравенства непосредственной видимости типа (1), соответсвтующие двум линиям визирования. Однако, в силу постоянства превышения визирной цели над столиком в знаках распространенных конструкций, одно из неравенств этой пары оказывается менее сильным и может быть опущено.

Получение оптимальных высот знаков при различных превышениях визирных целей над столиками на разных пунктах, также не связано с принципиальными трудностями.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. Н. Шишкин. Рекогносцировка пунктов триангуляции. м. 1961 г.
2. Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. 1961 г.
3. В. А. Булавский. Итеративный метод решения задачи линейного программирования. ДАН том 137, № 2, 1961 г.


*М. И. Коробочкин*

## К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ


Аннотация

В статье математически формулируется задача об отыскании оптимальных высот наземных знаков для фиксированной в плане геодезической сети.

Приведены алгоритм решения поставленной задачи и результаты экспериментальных расчетов.


M. I. Korobochkin

## TO THE PROBLEM ON OPTIMAL BUILDING OF GEODESICAL NETWORKS


Annotation

In this article the problem of finding optimal altitudes of the trianqulation signs with fixed positions is mathematicaly formulated. The algorithm of the solution of the given problem and the results of the experiments are represented.

## СОДЕРЖАНИЕ

Подписано к печати 24 мая 1963 г. Формат бумаги 60x90 1/16. 18,5 печ. листов. Тираж 520 экз. ЯТ 09367.
Цена 1 руб. 20 коп.
Отпечатано в типографии № 1 «Циня» Управления полиграфической промышленности Министерства культуры Латвийской ССР, г. Рига, ул. Блаумана 38/40. Заказ № 4260-н.