

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ
ПРОСТРАНСТВА
И ИХ
ОТОБРАЖЕНИЯ

III

Министерство высшего и среднего специального образования
Латвийской ССР

Латвийский ордена Трудового Красного Знамени государственный
университет имени Петра Стучки

Кафедра математического анализа

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Выпуск 3

Республиканский межвузовский сборник научных трудов



Латвийский государственный университет им. П.Стучки

Рига 1977

УДК 513., 519., 517.

Топологические пространства и их отображения,
вып. 3. Республиканский межвузовский сборник
научных трудов, 1977.

Республиканский межвузовский сборник научных трудов "Топологические пространства и их отображения", 3 является приемником выпущенного ранее в серии Ученых записок ЛГУ им. П. Стучки сборника "Топологические пространства и отображения в них" (выпуск 1 - 1975 г., выпуск 2 - 1976 г.). Необходимость издания настоящего Республиканского межвузовского сборника вызвана, во-первых, значительным увеличением объема исследований по вопросам функционального анализа, топологии и смежных областей, проводимых в республике, и, во-вторых, существенным расширением научных контактов между специалистами-математиками различных вузов Латвийской ССР, а также контактов между математиками Латвии и математиками других республик.

Сборник содержит результаты исследований, выполненных на кафедрах математического анализа, общей математики, дискретной математики ЛГУ им. П. Стучки, кафедры высшей математики РПИ, МИУ им. С.Орджоникидзе и некоторых других вузов. Результаты, касающиеся вопросов общей теории топологических пространств, теории аппроксимации линейных и нелинейных отображений банаховых пространств, вопросов спектральной теории, были доложены на 35-й научной конференции ЛГУ им. П. Стучки в секции "функциональный анализ и теория функций".

Сборник предназначен для научных работников в области теории функций, функционального анализа, топологии и алгебры, а также для аспирантов и студентов старших курсов.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

И.В.Карклиньш, В.И.Лабеев, У.Е.Райтумс, В.А.Старцев,
А.П.Шостак, Е.Д.Энгельсон (отв. ред.), Г.К.Энгелис,

Печатается по решению редакционно-издательского совета
ЛГУ им. П. Стучки от 1 июля 1977 года

© Латвийский государственный университет им. П. Стучки, 1977

Т 20203-142у 218-77
М 812(II)-77

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ РАМСЕЯ

П. Х. Брегман

Латвийский государственный университет

Хорошо известна комбинаторная теорема Рамсея (см., например, [1]), утверждающая, что для каждого множества \mathcal{C}_n^2 найдется такое множество \mathcal{C}_n^2 , что для любого его представления в виде $\mathcal{C}_n^2 = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}_2$ множество \mathcal{C}_m^2 содержится либо в \mathcal{Y} , либо в \mathcal{Y}_2 ; здесь \mathcal{C}_p^2 обозначает множество всевозможных сочетаний из P элементов по 2. * Топологическим аналогом этой проблемы следует считать такой вопрос: существует ли для произвольного пространства X такое пространство Y , что для каждого разбиения $Y = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}_2$, X вкладывается либо в \mathcal{Y} , либо в \mathcal{Y}_2 . Эта проблема была положительно решена пражскими математиками Пелантом и др., однако построенное при этом пространство Y не является хаусдорфовым даже в случае, когда X есть отрезок $[0; 1]$. В данной заметке мы будем интересоваться специальным случаем, когда в качестве пространства Y можно взять исходное пространство X . Вся используемая терминология соответствует [2]; \mathbb{R} обозначает вещественную прямую, \mathbb{Q} — пространство рациональных чисел.

Теорема I. Пусть X — счетное регулярное пространство, обладающее счетной базой и содержащее плотное в себе подмножество. Если X представлено в виде объединения двух своих подмножеств $X = X_1 \cup X_2$, то X гомеоморфно либо подмножеству в X_1 , либо подмножеству в X_2 .

Лемма I. Пусть $X = \{x_1 = a, x_2 = b, x_3, \dots, x_n, \dots\}$, $Y = \{y_1 = c, y_2 = d, y_3, \dots, y_m, \dots\}$ — подмножества, плотные в отрезках $[a, b]$ и $[c, d]$ соответственно. Тогда пространства X и Y гомеоморфны.

Доказательство. Построим по индукции гомеоморфное отображение $j: X \rightarrow Y$, положив $j(a) = c$, $j(b) = d$ и для каждого n в

* Имеются более общие формулировки теоремы Рамсея.

качестве $f(x_n)$ взяв элемент α минимальным номером из множества

$$\left(\bigcap_{i < n} \{ (j(x_i), d) : x_i < x_n \} \right) \cap \left(\bigcap_{k < n} \{ (c, j(x_k)) : x_n < x_k \} \right)$$

В самом деле, легко проверить, что определенная таким образом функция является непрерывным, взаимнооднозначным, возрастающим отображением пространства X на пространство Y и при этом обратная к ней функция также непрерывна.

Лемма 2. Если X — плотное в себе подмножество рациональных чисел и X представлено в виде объединения своих подмножеств X_1 и X_2 , то, по крайней мере, одно из них содержит подмножество A , плотное в некотором отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, если B — плотно в себе, т. е. не имеет изолированных точек, то найдется подмножество $A \subset B$, плотное в некотором отрезке $[a; b] \subset \mathbb{R}$. Поэтому наша задача сводится к тому, чтобы построить подмножество $B \subset X_1$, или $B \subset X_2$, плотное в себе. При этом, очевидно, без ограничения общности, можем считать, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Если X_1 — плотно в себе, то положим $B = X_1$. В противном случае, в пространстве X_1 существует изолированная точка x_0 . Тогда, как нетрудно видеть, можем найти такую окрестность U_{x_0} точки x_0 , что $U_{x_0} \cap X \subset X_2$, и можем положить $B = U_{x_0} \cap X$.

Доказательство теоремы. Покажем, что в X существует счетная база, состоящая из открыто-замкнутых множеств. Из регулярности и существования счетной базы следует метризуемость пространства X . Пусть d — некоторая метрика на X . Поскольку пространство X счетно, для каждой точки $x_0 \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$, найдется такое $\varepsilon_0 < \varepsilon$, что $\{x : x \in X, d(x_0, x) = \varepsilon_0\} = \emptyset$. Тогда, как нетрудно видеть, шар $S(x_0, \varepsilon_0)$ радиуса ε_0 с центром в точке x_0 является множеством, одновременно открытым и замкнутым в X , поскольку его граница пуста. Отсюда ясно, что совокупность \mathcal{B} всех открыто-замкнутых шаров пространства X образует базу его топологии. Поскольку X — пространство со счетной базой, можем выбрать счетную базу $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

Покажем, что $X \subset \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$, где $\mathcal{D} = \{0, 1\}$ — дискретное двоичное пространство. Для этого построим счетную систему функций $F = \{f_i : X \rightarrow \mathcal{D}\}$. Для каждой окрестности $U_i \in \mathcal{B}_0$ положим $f_i = \chi_{U_i}$, где $\chi_{U_i} : X \rightarrow \mathcal{D}$ —

характеристическая функция множества U_i . Очевидно, все функции f_i непрерывны. Тем самым мы построили счетную систему непрерывных функций $f = \{f_i: X \rightarrow \mathcal{D}\}$, которая различает точки и замкнутые множества пространства X . Тогда, по теореме о вложении [2], диагональное отображение $h: X \rightarrow \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ (определенное равенством $h(x) = (f_i(x)) \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$), является гомеоморфизмом пространства X в пространства $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$.

Покажем теперь, что X гомеоморфно некоторому подмножеству рациональных чисел. Поскольку $\mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ вкладывается в отрезок $[0; 1]$, то, по доказанному, пространство X можем рассматривать как подпространство $[0; 1]$.

Представим пространство X в виде объединения дизъюнктивных плотных в себе подмножеств. С этой целью для каждого $x \in X$ определим множество A_x равенством

$$A_x = \{y: y \geq x, (\forall \alpha, \beta (x < \alpha < \beta < y) : (\alpha; \beta) \cap X \neq \emptyset)\} \cup \\ \cup \{y: y < x, (\forall \alpha, \beta (y < \alpha < \beta < x) : (\alpha; \beta) \cap X \neq \emptyset)\}$$

Легко заметить, что $X = \bigcup_x A_x$, и при этом для различных x множества A_x не пересекаются или совпадают. Поэтому считаем, что $X = \bigcup A_i = \bigcup A_i$, где все A_i — дизъюнктивны. Каждое множество A_i является точкой или плотным в некотором отрезке $[a; b]$ множеством. По лемме I, для каждого множества A_i существует возрастающий гомеоморфизм A_i на некоторое подмножество пространства $\mathcal{Q} \cap [a; b]$ $\psi_i: A_i \rightarrow \mathcal{Q} \cap [a; b]$. Определим отображение $f: X \rightarrow \mathcal{Q}$. Пусть $f: A_i \rightarrow \mathcal{Q} \cap [0; 1]$, где $f = \psi_i$. По индукции, $f: A_n \rightarrow [a_n; b_n] \cap \mathcal{Q}$, где $f = \psi_n$ и, если $A_n < A_i$ ($\forall i < n$), то $a_n = \inf f(\bigcup_{i < n} A_i) - 2$

$b_n = a_n + 1$; если $A_n > A_j$ ($\forall j < n$), то $a_n = \sup f(\bigcup_{j < n} A_j) + 1$
 $b_n = a_n + 1$; в остальных случаях $a_n = \sup f(\bigcup_{i: A_i < A_n} A_i) +$
 $+ \frac{1}{3} (\inf f(\bigcup_{j: A_j > A_n} A_j) - \sup f(\bigcup_{i: A_i < A_n} A_i))$,
 $b_n = a_n + \frac{1}{3} (\inf f(\bigcup_{j: A_j > A_n} A_j) - \sup f(\bigcup_{i: A_i < A_n} A_i))$.

Легко проверить, что построенная таким образом функция есть вложение.

Покажем, что, если $X \subset \mathcal{Q}$ и $X = X_1 \cup X_2$, то X гомеоморфно либо подмножеству в X_1 , либо подмножеству в X_2 . По лемме 2, существует подмножество A в X_i (где $i=1$ или $i=2$), плотное в отрезке. Поскольку X гомеоморфно под-

множеству \mathcal{Q} , а \mathcal{Q} , по лемме 1, гомеоморфно подмножеству в \mathcal{A} , то X вкладывается либо в X_1 , либо в X_2 .

По индукции эту теорему можно обобщить на случай конечного разбиения:

Теорема 2. Пусть X — счетное регулярное пространство, обладающее счетной базой и содержащее плотное в себе подмножество. Если X представлено в виде объединения конечного числа своих подмножеств $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$, то X гомеоморфно подмножеству в X_i , где $1 \leq i \leq n$.

Замечание. Требование наличия в пространстве X плотного в себе подмножества является существенным. Легко построить пример счетного, регулярного пространства со счетной базой, не обладающего свойством типа Рамсея: $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что при $X_1 = \{0\}$, $X_2 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, пространство X не вкладывается ни в X_1 , ни в X_2 .

Однако требование наличия в пространстве X плотного в себе подмножества не является необходимым. Можно построить пример счетного регулярного пространства со счетной базой, не обладающего плотным в себе подмножеством, но для которого имеет место теорема типа Рамсея.

Автор выражает свою благодарность А.П.Шостаку за руководство и помощь при подготовке этой работы.

Литература

1. Оре О. Теория графов. М., "Наука", 1968. 352 с.
2. Engelking R. Outline of general topology, Warszawa, 1968.

Поступила 11 ноября 1976 года

УДК 518.88

ОБ ОДНОМ ВИДЕ СХОДИМОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВ
НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

Б.И. Бурштейн

Латвийский государственный университет

В работе даются новые определения сходимостей подпространств нормированного пространства и линейных операторов, действующих в нормированных пространствах. Они называются в дальнейшем СА-сходимостью подпространств и СА-сходимостью операторов соответственно. Выясняется связь между СА-сходимостью подпространств и сходимостью по раствору (см. [3]), а также между СА-сходимостью операторов и компактной аппроксимацией ([5]). Доказываются также теоремы об устойчивости индекса и полуустойчивости дефектных чисел пары подпространств банахова пространства.

§ 1. Обозначения, определения, используемые в статье.

X, Y - нормированные пространства над полем K ($K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$);

N - множество натуральных чисел с обычным порядком;

$M \triangleleft X$ - M является векторным подпространством пространства X ;

$M \bar{\triangleleft} X$ - $M \triangleleft X$ & $M = \bar{M}$;

$X = M \oplus N$ - $M \bar{\triangleleft} X$ & $N \bar{\triangleleft} X$ & $X = M + N$ & $M \cap N = \{0\}$;

$L(X, Y)$ - множество линейных операторов \mathcal{V} с областями определения $\mathfrak{D}(\mathcal{V}) \triangleleft X$ и областями значений $R(\mathcal{V}) \triangleleft Y$;

$\mathcal{L}(X, Y)$ - пространство линейных непрерывных операторов, определенных на X и со значениями в Y ;

$Isom(X, Y) \stackrel{def}{=} \{ \mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathcal{L}(X, Y) \text{ \& } \exists \mathcal{V}^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X) \}$;

$\delta(M, N) \stackrel{def}{=} \sup_{\substack{u \in M \\ \|u\|=1}} \text{dist}(u, N)$, где $M \triangleleft X$, $N \triangleleft X$;

$\delta^{\wedge}(M, N) \stackrel{def}{=} \max \{ \delta(M, N), \delta(N, M) \}$ (см. [2], [3]);

$\text{nul}(M, N) = \dim M \cap N$, $\text{def}(M, N) = \dim X / M + N$;

$\text{ind}(M, N) = \text{nul}(M, N) - \text{def}(M, N)$, где

$\text{nul}(M, N) < \infty \vee \text{def}(M, N) < \infty$;

A - направленное множество с отношением \supset ; $A' \text{ con } f A$.

A' - конфинальная часть A ([4]); $(Z_{\downarrow})_A$ - направленность

в Z ([4]). В дальнейшем понадобится следующее вспомогательное

Утверждение 1. Пусть X - банахово пространство, $X = M \oplus N$, $(u_\alpha)_A \subset M, (v_\alpha)_A \subset N$. Тогда $\exists \lim(u_\alpha + v_\alpha) \Rightarrow \exists \lim u_\alpha \ \& \ \exists \lim v_\alpha$.

Определение 1. Направленность $(x_\alpha)_A \subset X$ называется A -компактной, если для любой $A' \text{ conf } A$ найдется $A'' \text{ conf } A$ такая, что $(x_\alpha)_{A''}$ сходится к некоторому $x \in X$.

Определение 2. ([5]). Пусть X, Y - нормированные пространства, $\forall \alpha \in A \ (u_\alpha)_A \subset L(X, Y), (v_\alpha)_A \subset L(X, Y), \forall \alpha \in A \ \mathcal{D}(v_\alpha) = \mathcal{D}(v)$. Говорят, что направленность $(v_\alpha)_A$ A -компактно аппроксимирует v (обозначение: $v_\alpha \xrightarrow{A, \alpha} v$), если выполняются условия:

$$0_1) \forall x \in \mathcal{D}(v) \ v_\alpha x \xrightarrow{A} vx.$$

$$0_2) \text{ если } (x_\alpha)_A \subset \mathcal{D}(v) \text{ и } (x_\alpha, v x_\alpha)_A -$$

- ограничена в пространстве $X \times Y$, то $(v_\alpha x_\alpha - v x_\alpha)_A$ - A -компактна.

Определение 3. Пусть X - нормированное пространство, $\forall \alpha \in A \ M_\alpha \subset X, M \subset X$. Назовем направленность $(M_\alpha)_A$ CA-сходящейся снизу к M ($M_\alpha \xrightarrow{CA} M$), если выполняются условия:

$$a_1) \text{ если } A' \text{ conf } A, \forall \alpha \in A' \ x_\alpha \in M_\alpha \text{ и } x_\alpha \xrightarrow{A'} x, \text{ то } x \in M.$$

$a_2)$ если $A' \text{ conf } A$ и $\forall \alpha \in A' \ x_\alpha \in M_\alpha$, причем $(x_\alpha)_{A'}$ - ограничена, то найдется $A'' \text{ conf } A$ и $(y_\alpha)_{A''} \subset M$ такие, что $\exists \lim(x_\alpha - y_\alpha)$.

Определение 4. Пусть X - нормированное пространство, $\forall \alpha \in A \ M_\alpha \subset X, M \subset X$. Назовем направленность $(M_\alpha)_A$ CA-сходящейся сверху к M ($M_\alpha \xrightarrow{CA} M$), если выполняются условия:

$$b_1) \text{ если } x \in M \text{ и } A' \text{ conf } A, \text{ то найдется } A'' \text{ conf } A' \text{ и } (x_\alpha)_{A''} \subset X \text{ такие, что } \forall \alpha \in A'' \ x_\alpha \in M_\alpha \ \& \ (x_\alpha) \xrightarrow{A''} x.$$

$b_2)$ если $A' \text{ conf } A$ и $(x_\alpha)_{A'}$ - ограниченная, то найдется $A'' \text{ conf } A'$ и $(y_\alpha)_{A''}$ такие, что $\forall \alpha \in A'' \ y_\alpha \in M_\alpha$ и $\exists \lim(x_\alpha - y_\alpha)$.

Определение 5. Пусть X - нормированное пространство, $\forall \alpha \in A \ M_\alpha \subset X, M \subset X$. Назовем направленность $(M_\alpha)_A$ сходящейся в смысле CA (или CA-сходящейся) к M , если $(M_\alpha)_A$ CA сходится к M и снизу и сверху.

Непосредственно из определений вытекает

Следствие 1. Если в нормированном пространстве X $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$ & $M_\alpha \xrightarrow{CA} M'$, то $M = M'$.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, на A налагается условие: для любой ее конфинальной части A' найдется $A'' \text{ conf } A'$ такая, что A'' - счетна и ее элементы можно за-

нумеровать так, что $\forall n \in \mathbb{N} \alpha_{n+1} \geq \alpha_n$.

§ 2. CA-сходимость подпространств и сходимость по раствору.

Всюду в §2 мы будем считать, что X - нормированное пространство, $M_\alpha \subset X$, $M \subset X$.

Предложение 1.

1. Если $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$, то $\overline{M_\alpha} \xrightarrow{CA} \overline{M}$
 П. Если $\overline{M_\alpha} \xrightarrow{CA} \overline{M}$, то $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$

Предложение 2.

Если $M \not\subset X$ и $(\delta(M_\alpha, M)) \xrightarrow{A} 0$, то $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$.

Предложение 3.

Пусть $(\delta(M, M_\alpha)) \xrightarrow{A} 0$. Тогда $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$.

Доказательства предложений 1-3 несложны и опускаются.

В предложениях 4-5 A - произвольное направленное множество.

Предложение 4.

Пусть $\dim M < \infty$ и $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$. Тогда $(\delta(M, M_\alpha)) \xrightarrow{A} 0$ & $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0$
 $\dim M_\alpha \geq \dim M$.

Предложение 5.

Предположим, что $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$ и найдется $A' \subset \text{con} f A$ и число $\rho \in \mathbb{N}$ такие, что $\forall \alpha \in A' \dim M_\alpha \leq \rho$. Тогда $(\delta(M, M_\alpha)) \xrightarrow{A} 0$ & $\dim M \leq \rho$.

Замечание 1. В доказательствах 4 и 5 не используется условие v_2 определения 4.

Предложение 6.

Если $\dim M < \infty$ & $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$, то $(\delta(M_\alpha, M)) \xrightarrow{A} 0$ & $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0$
 $\dim M_\alpha \leq \dim M$.

Доказательство основывается на теореме Хана-Банаха, аналоге утверждения 1 и теореме 4.24 из [2] (стр. 287).

Следствие 2. * Пусть $M_\alpha \xrightarrow{CA} M$. Тогда

- а) если $\dim M < \infty$, то $(\delta(M, M_\alpha)) \xrightarrow{A} 0$ & $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \dim M_\alpha = \dim M$,
 в) если найдется $A' \subset \text{con} f A$ и $\rho \in \mathbb{N}$ такие, что $\forall \alpha \in A' \dim M_\alpha \leq \rho$,
 то $(\delta(M_\alpha, M)) \xrightarrow{A} 0$ & $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \dim M_\alpha = \dim M$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. $X = C([0, 1])$, $A = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \geq 1\}$.

Определим $M = \{f \in X : f(0) = 0\}$, $\forall \alpha \in A M_\alpha = \{f \in X : f(\frac{1}{\alpha}) = 0\}$.

*См. также следствие 4 из §3 настоящей работы, теорему 17 из [6], а также теорему 1 из [2].

Ясно, что $M \bar{\propto} X$, $\forall \alpha \in A$ $M_\alpha \bar{\propto} X$.

Легко видеть, что имеет место $M_\alpha \bar{C}A \rightarrow M$ & $\forall \alpha \in A$ $\delta(M_\alpha, M) = \delta(M, M_\alpha) \neq 0$

II. $X = \ell_2$, $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - полная ортонормированная система.

Определим $M = \{x \in \ell_2 : (e_i, x) = 0\}$; $\forall i \in \mathbb{N}$ $M_i = \{\sum \alpha_j e_j : \alpha_j = -\alpha_i\}$

Ясно, что $M \bar{\propto} X$, $\forall i \in \mathbb{N}$ $M_i \bar{\propto} X$. Имеет место $M_i \bar{C}N \rightarrow M$ и вместе с этим $\delta(M_i, M) \not\rightarrow 0$ & $\delta(M, M_i) \not\rightarrow 0$.

Этот пример показывает, что в случае CA -сходимости, в отличие от сходимости по раствору, не имеет места двойственность даже в ℓ_2 ([3], теорема 29, стр. 255).

§ 3. Теоремы устойчивости.

Всюду в §3, если не оговорено противное, X - банахово пространство, $M \bar{\propto} X$, $M_\alpha \bar{\propto} X$, $N \bar{\propto} X$, $N_\alpha \bar{\propto} X$.

Предложение 7. Если $X = M \bar{\propto} S$ и $M_\alpha \bar{C}A M$, то $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $M_\alpha \cap S = \{0\}$.

Предложение 8. Пусть выполняются условия: $M + N \bar{\propto} X$, $\exists S \bar{\propto} X$: $X = (M \cap N) \bar{\propto} S$, $M_\alpha \bar{C}A M$, $N_\alpha \bar{C}A N$.

Тогда: 1) $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $M_\alpha \cap N_\alpha \cap S = \{0\}$.

2) если $\text{шл}(M, N) < \infty$, то $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $M_\alpha + N_\alpha \bar{\propto} X$.

Доказательство 1) Покажем, что $M_\alpha \cap N_\alpha \bar{C}A M \cap N$.

Условие а₁) определения 2 тривиально выполняется. Проверим

а₂). Пусть $A' \text{conf} A$ и $\forall \alpha \in A'$ $x_\alpha \in M_\alpha \cap N_\alpha$; $(x_\alpha)_{\alpha \in A'}$ ограничены.

Тогда найдутся $A'' \text{conf} A'$, $(y_\alpha)_{\alpha \in A''} \subset M$, $(z_\alpha)_{\alpha \in A''} \subset N$ такие, что $\exists \text{шл}(x_\alpha - y_\alpha)$ & $\exists \text{шл}(x_\alpha - z_\alpha)$. Значит $\exists \text{шл}(y_\alpha - z_\alpha)$.

Но $\forall \alpha \in A''$ $y_\alpha = u_\alpha + v_\alpha$, $z_\alpha = \tau_\alpha + s_\alpha$, где $u_\alpha \in M \cap S$, $v_\alpha \in N \cap S$, $\tau_\alpha \in M \cap N$, $s_\alpha \in M \cap N$. Так как $M + N \bar{\propto} X$,

то $\exists \text{шл} u_\alpha$, $\exists \text{шл}(v_\alpha - s_\alpha)$, $\exists \text{шл} \tau_\alpha$.

Следовательно, $\exists \text{шл}(x_\alpha - v_\alpha)$. Значит $M_\alpha \cap N_\alpha \bar{C}A M \cap N$.

и по предложению 7 $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $M_\alpha \cap N_\alpha \cap S = \{0\}$.

Доказательство 2) Покажем, что $\exists \alpha_0$ $\forall \alpha \geq \alpha_0$ $M_\alpha \cap S + N_\alpha \cap S \bar{\propto} X$

тогда предложение 8 будет доказано. Предположим противное:

$\exists A' \text{conf} A$ $\forall \alpha \in A'$ $\neg (M_\alpha \cap S + N_\alpha \cap S \bar{\propto} X)$.

Выберем $A' \text{conf} A$: $\text{card} A' = \aleph_n$ и занумеруем элементы A' по порядку: $\forall i \in \mathbb{N}$ $\alpha_{i+1} \geq \alpha_i$. Так как X - банахово пространство, то из теоремы о замкнутом графике вытекает, что $\forall i \in \mathbb{N}$ $\exists (x_{im})_{m \in \mathbb{N}} \subset M_\alpha \cap S$, $\exists (y_{im})_{m \in \mathbb{N}} \subset N_\alpha \cap S$: $\forall i, m \in \mathbb{N}$ $\|y_{im}\| = 1$ & $\forall i \in \mathbb{N}$ $(\|x_{im}\| + \|y_{im}\|) \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} 0$.

Определим $x_i = x_{im_i}$, $y_i = y_{im_i}$: $\|x_{im_i} + y_{im_i}\| \leq \frac{1}{i}$

Из доказательства пункта 1) настоящего предложения вытекает, что найдутся $(z_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset M \cap S, (\sigma_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset N \cap S$ такие, что $\exists \lim_k (x_{ik} - z_{ik}), \exists \lim_k (y_{ik} - \sigma_{ik})$. Так как $\dim(M, N) < \infty$, то $(x_{ik})_k \xrightarrow{\tau} x_0, (y_{ik})_k \xrightarrow{\tau} -x_0, x_0 \in S \cap N \cap M = \{\emptyset\}$.

Значит $x_0 = \emptyset$, что противоречит равенству $\|y_{ik}\| = 1 \forall i, k \in \mathbb{N}$.

Следствие 3. Если в условиях предложения 8 $M \cap N = \{\emptyset\}$, то $\exists c > 0 \exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \forall u \in M \forall v \in N \forall u + v \geq c \|u\| + c \|v\|$.

Предложение 9. Пусть выполняются условия предложения 8 и $\dim M \cap N < \infty, \exists S, \exists X \ X = (M + N) \oplus S$, причем $\dim S_1 = \infty$. Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{def}(M_\alpha, N_\alpha) \geq \text{def}(M, N)$.

Доказательство основывается на предложении 8 и следствии 3.

Предложение 10. Если $M_\alpha \xrightarrow{CA} X$, то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \ M_\alpha = X$. Доказательство основывается на лемме Рисса о почти перпендикулярности и весьма просто.

Предложение 11. Пусть $X = M + N, M_\alpha \xrightarrow{CA} M, N_\alpha \xrightarrow{CA} N$. Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \ M_\alpha + N_\alpha = X$.

Доказательство. Предположим сначала, что найдется $\mathcal{A} \text{ conf } A$: \mathcal{A} - счетно и $\forall i \in \mathbb{N} \alpha_{i+1} \geq \alpha_i, \forall i \in \mathbb{N} \exists \varphi_i \in M_{\alpha_i}^\perp, \exists \psi_i \in N_{\alpha_i}^\perp$: $\|\varphi_i\| = 1 \ \& \ \|\psi_i + \varphi_i\| \leq \frac{1}{i}$. Тогда $\exists (x_i)_i \subset X: \|x_i\| = 1 \ \& \ |\varphi_i(x_i)| \geq \frac{1}{2}, \forall i \in \mathbb{N} \ x_i = a_i + b_i$, где $(a_i)_i \subset M, (b_i)_i \subset N, (a_i)_i$ и $(b_i)_i$ - ограниченные последовательности (теорема 5.2^а [7] стр. 156). Следовательно найдутся такие $(u_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset X, (v_{ik})_{k \in \mathbb{N}} \subset X$, что $\forall k \in \mathbb{N} \ u_{ik} \in M_{\alpha_{ik}} \ \& \ v_{ik} \in N_{\alpha_{ik}}$ и существуют пределы $\lim_k (a_{ik} - u_{ik}), \lim_k (b_{ik} - v_{ik})$. Итак, $(x_{ik} - u_{ik} - v_{ik})_k \xrightarrow{\tau} z$. Но $z = a + b$, где $a \in M, b \in N$. Поэтому найдутся $(z_{ik})_k \in N \subset X, (t_{ik})_k \in N \subset X$ такие, что $\forall k \in \mathbb{N} \ z_{ik} \in M_{\alpha_{ik}} \ \& \ t_{ik} \in N_{\alpha_{ik}}$ и $(z_{ik})_k \xrightarrow{\tau} a, (t_{ik})_k \xrightarrow{\tau} b$. Значит $(x_{ik} - u_{ik} - z_{ik} - v_{ik} - t_{ik})_k \xrightarrow{\tau} \emptyset$. Отсюда $\varphi_{ik}(x_{ik} - u_{ik} - z_{ik}) \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно $\exists c_0 \forall c \geq c_0 \|\varphi_{ik}(u_{ik} + z_{ik})\| \geq \frac{1}{3}$, что противоречит соотношению $(\varphi_{ik} + \psi_{ik})(u_{ik} + z_{ik}) = \varphi_{ik}(u_{ik} + z_{ik}), \|\varphi_{ik} + \psi_{ik}\| \xrightarrow{\tau} \emptyset$. Следовательно, наше предложение не имеет места. Отсюда, как и в предложении 8, легко сделать вывод, что $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \ M_\alpha^\perp + N_\alpha^\perp \neq X \ \& \ M_\alpha^\perp \cap N_\alpha^\perp = \{\emptyset\}$. Отсюда $\forall \alpha \geq \alpha_0 \ M_\alpha + N_\alpha = X$.

Следствие 4. Предположим, что $X = M \oplus N, M_\alpha \xrightarrow{CA} M$, $\exists A' \text{ conf } A \ \forall \alpha \in A' \dim M_\alpha < \infty$. Тогда $\dim M < \infty$ и $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \dim M_\alpha = M \ \& \ (\delta(M, M_\alpha)) \xrightarrow{A} 0$.

Доказательство основывается на предложениях 8, 10 и следствии 2.

Следствие 5 (из предложения 11). Пусть выполняются условия $M+N \bar{\in} X \& \exists S \bar{\in} X: X = (M+N) \oplus S$; $M \xrightarrow{CA} M$, $N \xrightarrow{CA} N$. Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad M_\alpha + N_\alpha + S = X$.

Предложение 12. Если в условиях следствия 5 $\dim S < \infty$, то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad M_\alpha + N_\alpha \bar{\in} X$.

Имеет место следующий вариант предложения 12:

Предложение 12'. Пусть $U \bar{\in} X$, $\exists S \bar{\in} X: X = U \oplus S$; $\forall \alpha \in A$ $M_\alpha + N_\alpha + U_\alpha \bar{\in} X$, $U_\alpha \xrightarrow{CA} U$, $M+N \bar{\in} U$, $\dim U/(M+N) < \infty$. Предположим, что $M \xrightarrow{CA} M$, $N \xrightarrow{CA} N$.

Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad M_\alpha + N_\alpha \bar{\in} X \& \dim U_{\alpha_0}/(M_\alpha + N_\alpha) \leq \dim U/(M+N)$.

Доказательство основывается на предложении 12 и предложении 8.

Предложение 13. Пусть имеет место $X = U \oplus S$, $M+N \bar{\in} U$, $\exists Z \bar{\in} U$ $U = (M+N) \oplus Z$, $\text{nil}(M, N) < \infty$, $\dim Z = \infty$, $\forall \alpha \in A \quad M_\alpha + N_\alpha \bar{\in} U$. Предположим также, что $U \xrightarrow{CA} U$, $M \xrightarrow{CA} M$, $N \xrightarrow{CA} N$.

Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \quad \text{nil}(M_\alpha, N_\alpha) \leq \text{nil}(M, N)$, $M_\alpha + N_\alpha \bar{\in} X$, $\dim Z = \dim U_{\alpha_0}/(M_\alpha + N_\alpha)$.

Доказательство основывается на предложениях 8, 9 и следствии 5. Если X, Y - нормированные пространства и $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $\exists X \times Y$, где $X \times Y$ - прямое произведение X и Y с нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$. Таким образом, для линейных операторов имеют смысл понятия CA-сходимости. Изучению CA-сходимости линейных операторов будет посвящена отдельная работа. Здесь приведем лишь необходимые для дальнейшего результаты.

В предложениях 14, 15, 16 X, Y - нормированные пространства.

Предложение 14. Пусть $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $(\mathcal{V}_\alpha)_A \subset \mathcal{L}(X, Y)$, и имеет место $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{CA} \mathcal{V}$.

Тогда найдется $C > 0$ такое, что $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \forall x \in \mathcal{D}(\mathcal{V}_\alpha) \quad \|\mathcal{V}_\alpha x\| \leq C \|x\|$

Предложение 15. Если $\{\mathcal{V}_\alpha\}_A \subset \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{A.K.G.} \mathcal{V}$, то $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{CA} \mathcal{V}$.

В доказательстве используется предложение 14.

Предложение 16. Если $\{\mathcal{V}_\alpha\}_A \subset \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{CA} \mathcal{V}$, то $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{A.K.G.} \mathcal{V}$.

В доказательстве используется теорема 3 из [5].

Предложение 17. Пусть X, Y - нормированные пространства, $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\mathcal{D}(\mathcal{V}) \bar{\in} X$, $(\mathcal{V}_\alpha)_A \subset \mathcal{L}(X, Y)$.

Тогда: 1) $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{CA} \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}_\alpha) \xrightarrow{CA} \mathcal{D}(\mathcal{V})$.

2) $\mathcal{V}_\alpha \xrightarrow{CA} \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{V}_\alpha) \xrightarrow{CA} \mathcal{D}(\mathcal{V})$.

В доказательстве используется предложение 14.

Замечание 2. В условиях предложения 17 требование " $\mathcal{D}(U) \bar{\exists} X$ " можно заменить на " \mathcal{Y} -банахово"; при этом утверждение не изменится.

В предложениях 18, 19, 20, 21, X - банахово пространство.

Предложение 18. Пусть $X = M \oplus N$, P - проекция X на M параллельно N , $M_\alpha \subset A \rightarrow M$, $\forall \alpha \in A \varphi_\alpha = P|_{M_\alpha}$. Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \varphi_\alpha$ - изоморфное вложение. Доказательство основывается на предложении 8 и теореме 4 из [1].

Предложение 19. Пусть $X = M \oplus N$, $M_\alpha \subset A \rightarrow M$. Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 X = M_\alpha \oplus N$ & $\varphi_\alpha \in \text{Isom}(M_\alpha, M)$. Доказательство основывается на предложениях 8, 11 и 18.

Предложение 20. Пусть $X = M \oplus N$, $M_\alpha \subset A \rightarrow M$, $A^0 = \{\alpha \in A: \varphi_\alpha \in \text{Isom}(M_\alpha, M)\}$. I_M - тождественное отображение M на себя. Тогда $\varphi_\alpha^{-1} A^0 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} \varphi^{-1} I_M$.

Предложение 21. Предположим, что $M+N \bar{\exists} X$, $\text{def}(M, N) < \infty$. $\exists S \bar{\exists} X: X = (M \cap N) \oplus S$, $M_\alpha \subset A \rightarrow M$, $N_\alpha \subset A \rightarrow N$. Тогда: 1) $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 M_\alpha + N_\alpha \bar{\exists} X$, $\text{def}(M_\alpha, N_\alpha) \leq \text{def}(M, N)$. 2) Если $\text{mul}(M, N) = c < \infty$, то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{mul}(M_\alpha, N_\alpha) = \text{mul}(M, N)$. 3) Если $\text{mul}(M, N) < \infty$, то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{mul}(M_\alpha, N_\alpha) \leq \text{mul}(M, N)$ & $\text{ind}(M_\alpha, N_\alpha) = \text{ind}(M, N)$.

Доказательство. Утверждение 1) фактически доказано в следствии 5 и в предложении 12. Дадим здесь другое доказательство, методика которого будет использована при доказательстве утверждений 2) и 3).

Так как $\text{def}(M, N) < \infty$, то $\exists T \bar{\exists} S: \dim T < \infty$ & $X = (M \cap S) \oplus (M \cap N) \oplus (N \cap S) \oplus T$.

В силу предложений 19, 20 $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \varphi_\alpha \in \text{Isom}(M_\alpha, M)$ & $\varphi_\alpha^{-1} A^0 \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} I_M$. Тогда $\varphi_\alpha^{-1} N \cap S \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} I_N \cap N \cap S$. Поэтому из предложений 16, 17 вытекает $\varphi_\alpha^{-1} (N \cap S) \subset A^0 \rightarrow N \cap S$. Следовательно, учитывая предложение 8, $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 M_\alpha + \varphi_\alpha^{-1} (N \cap S) \bar{\exists} X$. Легко видеть, что $M_\alpha + \varphi_\alpha^{-1} (N \cap S) \subset A^0 \rightarrow M + N \cap S$. Отсюда и из следствия 5 вытекает, что $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \text{def}(M_\alpha, \varphi_\alpha^{-1} (N \cap S)) \leq \text{def}(M, N \cap S) = \text{def}(M, N)$.

Тогда $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 M_\alpha + N_\alpha \bar{\exists} X$ & $\text{def}(M_\alpha, N_\alpha) \leq \text{def}(M, N)$.

2) Используя следствие 3, легко доказать, что $M_\alpha + T \subset A \rightarrow M + T$. Обозначим $P = M + T$, $\forall \alpha \in A P_\alpha = M_\alpha + T$. Тогда $X = P \oplus (N \cap S)$, $P_\alpha \subset A \rightarrow P$, $\varphi_\alpha^{-1} (N \cap S) \subset A^0 \rightarrow N \cap S$.

Из предложений 8, 11 вытекает, что $\exists \alpha^2 \forall \alpha \geq \alpha^2 \exists \lambda = P_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(M \cap N)$.
 Так как $\varphi_\alpha \in \text{Isom}(M_\alpha, N)$, то $\dim(P_\alpha \cap N_\alpha) = \dim(P_\alpha \cap \varphi_\alpha^{-1}(M \cap N)) = \dim(M, N)$. Так как $\dim T < \infty$, то $\dim(M_\alpha, N_\alpha) = \dim(M, N)$ для $\alpha \geq \alpha^2$.

3) Согласно предложению 8 $\exists \alpha^3 \forall \alpha \geq \alpha^3 \dim(M_\alpha, N_\alpha) \leq \dim(M, N)$.
 Имеем $\dim(P_\alpha, N_\alpha) = \dim(P, N) = \dim(M, N)$. Тогда, согласно результату упражнения 4.6 [2, стр. 276], получаем, что $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \dim(M_\alpha, N_\alpha) = \dim(P_\alpha, N_\alpha) - \dim(M, N) = \dim(M, N) - \dim(M, N) = \dim(M, N)$.

Имеет место следующий вариант предложения 21.

Предложение 21'. Пусть $W \subseteq X$, $M, N \subseteq W$, $\dim W/M+N < \infty$, $\forall \alpha \in A$

$W_\alpha \subseteq X$, $M_\alpha + N_\alpha \subseteq W_\alpha$; $M_\alpha \subseteq A \rightarrow M$, $N_\alpha \subseteq A \rightarrow N$, $W_\alpha \subseteq A \rightarrow W$.

Тогда: 1) если $\exists Z \subseteq X$, $\exists S \subseteq X$: $X = W \oplus Z = (M \cap N) \oplus S$
 то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 M_\alpha + N_\alpha \subseteq X$ & $\dim W_\alpha/M_\alpha + N_\alpha \leq \dim W/M+N$;
 если к тому же $\dim(M, N) = \infty$, то $\dim(M_\alpha, N_\alpha) = \dim(M, N)$

2) если $\dim(M, N) < \infty$, то $\exists \alpha_0 \forall \alpha \geq \alpha_0 \dim(M_\alpha, N_\alpha) \leq \dim(M, N)$ & $\dim W_\alpha/M_\alpha + N_\alpha \leq \dim W/M+N$ & $\dim(M_\alpha, N_\alpha) - \dim W_\alpha/M_\alpha + N_\alpha = \dim(M, N) - \dim W/M+N$.

Доказательство 1) следует из предложения 21; доказательство 2) основывается на предложении 8 и следствии 3.

Используется также следующее

Предложение 22.

Если $M_\alpha \subseteq A \rightarrow M$, $K \subseteq M$, $\dim K < \infty$, $X = K \oplus S$, то $M_\alpha \cap S \subseteq A \rightarrow M \cap S$.

Предложение 23. Пусть X - нормированное пространство,

$M_\alpha \subseteq A \rightarrow M$, $N_\alpha \subseteq A \rightarrow N$, $\forall \alpha \in A M_\alpha \cap N_\alpha = \{0\}$, $\exists c > 0 \forall \alpha \in A$

$\forall u \in M_\alpha \forall v \in N_\alpha \|u+v\| \geq c(\|u\| + \|v\|)$.

Тогда $M \cap N = \{0\}$, $\forall u \in M \forall v \in N \|u+v\| \geq c(\|u\| + \|v\|)$.

Предложение 24. Пусть X - банахово пространство, $\forall \alpha \in A$
 $X = M_\alpha \oplus N_\alpha$, $M_\alpha \subseteq A \rightarrow M$, $N_\alpha \subseteq A \rightarrow N$, $\exists c > 0 \forall \alpha \in A \forall u \in M_\alpha$
 $\forall v \in N_\alpha \|u+v\| \geq c(\|u\| + \|v\|)$.

Тогда $X = M \oplus N$ & $\forall u \in M \forall v \in N \|u+v\| \geq c(\|u\| + \|v\|)$.

Доказательство основывается на предложении 23.

Замечание 3. В условиях предложений 23, 34A - произвольное направленное множество и в доказательствах не используется пункт в₂) определения 4.

§ 4. CA-сходимость подпространств и A-компактная аппроксимация проекторов.

Предложение 25. Пусть X - банахово пространство, $X = M \oplus N$, P - проекция X на M параллельно N , $M_\alpha CA \rightarrow N$, $M_\alpha CA \rightarrow N$. Пусть, далее, $\alpha_0 \in A$ такое, что $\forall \alpha \geq \alpha_0$. $X = M_\alpha \oplus N_\alpha$ (см. предложения 8, 10), и $\forall \alpha \in A^0 = \{\alpha \in A: \alpha \geq \alpha_0\}$ P_α - естественная проекция. Тогда $P_\alpha \xrightarrow{A^0 \text{ к. г. }} P$.

Предложение 26. Пусть X - нормированное пространство, P - проекция, $\forall \alpha \in A$ P_α - проекция, $P_\alpha \xrightarrow{A \text{ к. г. }} P$. Тогда $R(P_\alpha)CA \rightarrow R(P)$

Доказательство основывается на теореме 5 из [5].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность М.А. Гольдману за внимание к настоящей работе и ценные замечания.

Литература

1. Гольдман М.А., Крачковский С.И. О произведениях, степенях и сужениях гомоморфизмов. - ДАН СССР, 1968, т. 184, № 5, с. 1088-1041.
2. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. - УМН, 1957, т. 12, вып. 2, с. 43-118.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972. 740 с.
4. Хелли Дж. Общая топология. М., "Мир", 1968, с. 383.
5. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - Уч. зап. Латв. гос. ун-та, 1975, т. 236, с. 39-58.
6. Лабеев В.И. Устойчивость секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально-предкомпактной аппроксимации. - Уч. зап. Латв. гос. ун-та, 1975, т. 236, с. 76-90.
7. Рудин У. Функциональный анализ. М., "Мир", 1975, с. 443.

-Поступила 15 февраля 1976 года,

ОБ ОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛОГЕ РАСТВОРА

Е.Л. Вейлер

Латвийский государственный университет

В предлагаемой работе вводится нелинейный аналог раствора; по нему задается полуметрика в пространстве \mathcal{L} всех подмножеств нормированного пространства X . Исследуются некоторые свойства полученного полуметрического пространства. Установленные факты естественным образом используются для изучения устойчивости различных свойств, вообще говоря нелинейных, операторов в нормированных пространствах.

1. Определения. Пусть X нормированное пространство над полем K вещественных или комплексных чисел $G_1, G_2 \subseteq X, G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset$ - произвольные множества из X . I_{G_1} - тождественный оператор на G_1 ; $L_{G_1}: G_1 \rightarrow X$ - оператор, удовлетворяющий условию Липшица на G_1 , то есть $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \|L_{G_1}x - L_{G_1}y\| \leq \alpha \|x - y\| \forall x, y \in G_1^*$, нижняя грань $\alpha_{L_{G_1}}$ всевозможных констант α , удовлетворяющих этому неравенству, называется константой Липшица оператора L_{G_1} .

$$\mathcal{F}(G_1, G_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{F: G_1 \rightarrow G_2 \mid F = I_{G_1} + L_{G_1}; G_1, G_2 \subseteq X\} \quad (1)$$

$$\alpha_F \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_{L_{G_1}}, F \in \mathcal{F}(G_1, G_2), F = I_{G_1} + L_{G_1} \quad (2)$$

$$\mathcal{O}_L(G_1, G_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \exists F \in \mathcal{F}(G_1, G_2) : \alpha_F = \alpha\} \quad (3)$$

$$\varphi(G_1, G_2) \stackrel{\text{def}}{=} \inf \mathcal{O}_L(G_1, G_2) \quad (4)$$

$$\hat{\varphi}(G_1, G_2) \stackrel{\text{def}}{=} \max [\varphi(G_1, G_2), \varphi(G_2, G_1)] \quad (5)$$

Замечание 1. $\mathcal{F}(G_1, G_2) \neq \emptyset, \mathcal{O}_L(G_1, G_2) \neq \emptyset, 0 \leq \varphi(G_1, G_2) \leq 1, 0 \leq \hat{\varphi}(G_1, G_2) \leq 1$.

Действительно, пусть $z \in G_2$, положим $Fx = z, L_{G_1}x = z - x \forall x \in G_1$.

Очевидно $\|L_{G_1}x - L_{G_1}y\| = \|x - y\|, F \in \mathcal{F}(G_1, G_2), 1 \in \mathcal{O}_L(G_1, G_2), \varphi(G_1, G_2) \leq 1$.

Оценка $\varphi(G_1, G_2) \geq 0$ следует из определений (3) и (4). Откуда в силу произвольности множеств и определения (5) $0 \leq \hat{\varphi}(G_1, G_2) \leq 1$.

Непосредственно из определений (1), (2), (3) и (4) следует

Лемма 1. Пусть X нормированное пространство; $G_1, G_2 \subseteq X, G_1 \neq \emptyset, G_2 \neq \emptyset$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(G_1, G_2) : \alpha_F < \varphi(G_1, G_2) + \varepsilon$.

2. Топология. Зададим топологию в пространстве \mathcal{L}^X всех подмножеств нормированного пространства X .

Ниже мы будем полагать, что

* Под \mathbb{R}_+ понимается множество положительных чисел.

$$\varphi(\emptyset, G) \stackrel{\text{def}}{=} 0, G \in 2^X$$

$$\varphi(G, \emptyset) \stackrel{\text{def}}{=} 1, G \in 2^X, G \neq \emptyset$$

$$\varphi(G, G) \stackrel{\text{def}}{=} \max[\varphi(\emptyset, G), \varphi(G, \emptyset)], G \in 2^X$$

$$\text{Очевидно, что } \varphi(G, G) = \begin{cases} 0, & G \in 2^X, G = \emptyset \\ 1, & G \in 2^X, G \neq \emptyset \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть X нормированное пространство $G_2, G_p, G_r \subset X$.

$$\text{Тогда } \varphi(G_2, G_r) \leq \varphi(G_2, G_p) + \varphi(G_p, G_r) + \varphi(G_2, G_p) \varphi(G_p, G_r) \quad (6)$$

$$\hat{\varphi}(G_2, G_r) \leq \hat{\varphi}(G_2, G_p) + \hat{\varphi}(G_p, G_r) + \hat{\varphi}(G_2, G_p) \hat{\varphi}(G_p, G_r) \quad (7)$$

Доказательство. Пусть G_2, G_p, G_r не пустые подмножества пространства X и $F_{2,p} \in \mathcal{F}(G_2, G_p), F_{p,r} \in \mathcal{F}(G_p, G_r)$. Тогда $F = F_{p,r} \circ F_{2,p} = (L_{G_p} + L_{G_r}) \circ (L_{G_2} + L_{G_p}) = L_{G_2} \circ (L_{G_p} + L_{G_r}) + L_{G_p} \circ (L_{G_2} + L_{G_p}) = L_{G_2} + L_{G_p} + L_{G_r} \circ (L_{G_2} + L_{G_p})$. Положим $L = L_{G_2} + L_{G_p} \circ (L_{G_p} + L_{G_r})$, тогда $\|Lx - Ly\| \leq \|L_{G_2}x - L_{G_2}y\| + \|L_{G_p}(L_{G_p} + L_{G_r})x - L_{G_p}(L_{G_p} + L_{G_r})y\| \leq a_{L_{G_2}} \|x - y\| + a_{F_{p,r}} \|L_{G_p}x - L_{G_p}y\| + a_{F_{2,p}} \|L_{G_p}x - L_{G_p}y\| = (a_{L_{G_2}} + a_{F_{p,r}} + a_{F_{2,p}}) \|x - y\| \quad \forall x, y \in G_2$. Отсюда $F \in \mathcal{F}(G_2, G_r)$ и в силу произвольности $F_{2,p} \in \mathcal{F}(G_2, G_p)$ и $F_{p,r} \in \mathcal{F}(G_p, G_r)$ выполняется неравенство (6) и следовательно

$$\varphi(G_2, G_r) \leq \varphi(G_2, G_p) + \varphi(G_p, G_r) + \varphi(G_2, G_p) \varphi(G_p, G_r) \quad (8)$$

Но в предыдущих рассуждениях множества G_2 и G_p можно поменять местами, поэтому

$$\varphi(G_r, G_2) \leq \varphi(G_2, G_p) + \varphi(G_p, G_r) + \varphi(G_2, G_p) \varphi(G_p, G_r) \quad (9)$$

Неравенство (7) непосредственно следует из (8), (9) и определения (5).

В случае, когда одно или несколько подмножеств нормированного пространства X пустые, неравенства (6) и (7) проверяются непосредственно.

Пусть $G_0 \in 2^X, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{U}(G_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{G \in 2^X : \hat{\varphi}(G_0, G) < \varepsilon\} \quad (10)$$

$$\mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{U}(G, \varepsilon) : G \in 2^X, \varepsilon \in \mathbb{R}_+\} \quad (11)$$

Очевидно, что $\mathcal{U}(\emptyset, \varepsilon) = \begin{cases} 2^X, & \varepsilon \geq 1 \\ \emptyset, & \varepsilon \in (0, 1) \end{cases}$

Теорема 1. Пусть X нормированное пространство. Тогда \mathcal{U} - база топологии 2^X .

Доказательство. 1) Пусть $G \in 2^X$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, тогда $G \in \mathcal{U}(G, \varepsilon) \in \mathcal{U}$.

2) Пусть $G \in \mathcal{U}(G_1, \varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(G_2, \varepsilon_2)$ и $\alpha_i = \hat{\varphi}(G_i, G) \quad i=1, 2$. Тогда по определению (10) $\alpha_i < \varepsilon_i \quad i=1, 2$. Покажем, что $\mathcal{U}(G, \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 + \alpha_i}) \subseteq \mathcal{U}(G_i, \varepsilon_i) \quad i=1, 2$.

Пусть $G' \in \mathcal{U}(G, \frac{\varepsilon_i + \alpha_i}{1 + \alpha_i})$, тогда $\hat{\varphi}(G, G') = \beta_i < \frac{\varepsilon_i + \alpha_i}{1 + \alpha_i}, \quad i=1, 2$. Но в силу леммы 2 $\hat{\varphi}(G_i, G') \leq \hat{\varphi}(G_i, G) + \hat{\varphi}(G, G') + \hat{\varphi}(G_i, G) \hat{\varphi}(G, G') \leq \alpha_i + \beta_i(1 + \alpha_i) = \alpha_i + \varepsilon_i \alpha_i < \varepsilon_i \quad i=1, 2$.

Поэтому $\mathcal{U}(G, \frac{\varepsilon_i + \alpha_i}{1 + \alpha_i}) \subseteq \mathcal{U}(G_i, \varepsilon_i) \quad i=1, 2$. Следовательно, $\mathcal{U}(G, \varepsilon_1) \cap \mathcal{U}(G, \varepsilon_2) \subseteq \mathcal{U}(G, \frac{\varepsilon_1 + \alpha_1}{1 + \alpha_1}) \cap \mathcal{U}(G, \frac{\varepsilon_2 + \alpha_2}{1 + \alpha_2}) = \mathcal{U}(G, \varepsilon)$ где $\varepsilon = \min_{i=1, 2} (\frac{\varepsilon_i + \alpha_i}{1 + \alpha_i})$. Тогда по



теореме 2 (стр. 82) работы [2] \mathcal{U} - база некоторой топологии τ в пространстве 2^X .

Теорема 2. Пусть X нормированное пространство, $(2^X, \tau)$ топологическое пространство всех подмножеств X с топологией τ . Тогда пространство $(2^X, \tau)$ полуметризуемо и

$$\mathcal{R} = \{ \rho_{c,d}(G_1, G_2) = \frac{c \rho_d(1 + \varphi(G_1, G_2))}{c \rho_d(1+c)} ; c, d \in \mathbb{R}_+, G_1, G_2 \subseteq X \}$$

семейство эквивалентных полуметрик в $(2^X, \tau)$, согласованных с топологией τ .

Доказательство. Пусть $\rho_{c,d} \in \mathcal{R}$. Очевидно, что $G_1 = G_2 \Rightarrow \rho_{c,d}(G_1, G_2) = 0$ и $\rho_{c,d}(G_1, G_2) = \rho_{c,d}(G_2, G_1) \forall G_1, G_2 \in (2^X, \tau)$. Покажем неравенство треугольника. Пусть $G_1, G_2, G_3 \in (2^X, \tau)$. Тогда $\rho_{c,d}(G_1, G_2) + \rho_{c,d}(G_2, G_3) = \frac{c \rho_d(1 + \varphi(G_1, G_2))}{c \rho_d(1+c)} + \frac{c \rho_d(1 + \varphi(G_2, G_3))}{c \rho_d(1+c)} = \frac{c \rho_d(1 + \varphi(G_1, G_2) + \varphi(G_2, G_3) + \varphi(G_1, G_3))}{c \rho_d(1+c)}$

Отсюда в силу леммы 2 и монотонного возрастания логарифмической функции $\rho_{c,d}(G_1, G_2) + \rho_{c,d}(G_2, G_3) \geq \frac{c \rho_d(1 + \varphi(G_1, G_3))}{c \rho_d(1+c)} = \rho_{c,d}(G_1, G_3)$

Покажем согласованность с топологией τ . Пусть

$$K_{\rho_{c,d}}(G_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \{ G \in 2^X : \rho_{c,d}(G_0, G) < \varepsilon, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \}$$

открытый шар полуметрического пространства $(2^X, \rho_{c,d})$. Но

$$\rho_{c,d}(G_0, G) < \varepsilon \Leftrightarrow \varphi(G_0, G) < (1+c)\varepsilon - 1 \quad \forall G_0, G \in 2^X, \varepsilon \in \mathbb{R}_+ \quad (1?)$$

Поэтому $K_{\rho_{c,d}}(G_0, \varepsilon) = U(G_0, (1+c)\varepsilon - 1)$, $K_{\rho_{c,d}}(G_0, \frac{\varepsilon(1+c)}{1+c}) = U(G_0, \varepsilon)$, $G_0 \in 2^X, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Отсюда любое открытое множество пространства $(2^X, \rho_{c,d})$ открыто в топологии τ и любое открытое множество пространства $(2^X, \tau)$ открыто в пространстве $(2^X, \rho_{c,d})$, следовательно, полуметрика $\rho_{c,d}$ согласована с топологией τ и в силу произвольности $\rho_{c,d} \in \mathcal{R}$ полуметрики этого семейства эквивалентны.

Замечание 2. Отметим полуметрики $\rho_{1,1}(G_1, G_2) = \rho_1(1 + \varphi(G_1, G_2))$ и $\rho_{1,2}(G_1, G_2) = \rho_{1,2}(1 + \varphi(G_1, G_2))$, причем равенство $\rho_{1,2}(G_1, G_2) = 1$ эквивалентно $\varphi(G_1, G_2) = 1$, где $G_1, G_2 \in 2^X$.

Замечание 3. Пусть $\rho_{c,d} \in \mathcal{R}$. Тогда $\rho_{c,d}(G_1, G_2) = 0$ не влечет за собой $G_1 = G_2$, где $G_1, G_2 \in 2^X$.

Действительно, пусть $G \subseteq X, G \neq \emptyset, x \in G, x \neq \emptyset$. Тогда множество $\overline{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{ z = x \cup y : y \in G \} \neq G$, зададим $F_y \stackrel{\text{def}}{=} x \cup y, L_y \stackrel{\text{def}}{=} x \quad \forall y \in G$. Тогда $F \in \mathcal{F}(G, \overline{G})$ и $\varphi(G, \overline{G}) = 0$. Аналогично получаем, что $\varphi(\overline{G}, G) = 0$. Отсюда $\varphi(G, \overline{G}) = 0$ и, следовательно, $\rho_{c,d}(G, \overline{G}) = 0 \quad \forall \rho_{c,d} \in \mathcal{R}$. Поэтому $(2^X, \rho_{c,d})$ не метрическое пространство $\forall \rho_{c,d} \in \mathcal{R}$.

3. Сходимость. Пусть X - нормированное пространство. $G_n, G \in 2^X, n=1, \dots, \rho_{c,d} \in \mathcal{R}$. Отметим, что последовательность G_n сходит-

ся к $G (G_n \rightarrow G)$ тогда и только тогда, когда $\rho_{\delta}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Замечание 4. Из эквивалентности (12) следует, что предельные соотношения $\rho_{\delta}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ эквивалентны и сходимость $G_n \rightarrow G$ можно определить с помощью $\hat{\rho}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Ниже мы воспользуемся обозначениями [1 стр. 251.]

Теорема 3. Пусть X - банахово пространство. $G_1, G_2 \subseteq X$ - линейные замкнутые множества. Тогда $\delta(G_1, G_2) = \varphi(G_1, G_2)$

Доказательство. Пусть $u \in G_1, \|u\| = 1, F = F(G_1, G_2), F = I_{G_1} + L_{G_2}$

Положим $v = \alpha u + L_{G_2} u - L_{G_2} v$. Очевидно $L_{G_2} v = v + L_{G_2} v \in G_2$, поэтому из линейности G_2 $v \in G_2$. Но $\|v - u\| = \|L_{G_2} u - L_{G_2} v\| \leq \alpha, \|u\| = \alpha$

Отсюда в силу произвольности $F \in F(G_1, G_2)$ $\delta(G_1, G_2) = \varphi(G_1, G_2)$

Замечание 5. Теорема 3 показывает, что в случае линейных замкнутых множеств банахова пространства X , если $\hat{\rho}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $\delta(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, G_n, G \subseteq X (n=1, 2, \dots)$

Теорема 4. Пусть X гильбертово пространство. $G_1, G_2 \subseteq X$ - линейные замкнутые множества. Тогда $\delta(G_1, G_2) \geq \varphi(G_1, G_2)$.

Доказательство. Пусть P оператор ортогонального проектирования на линейное замкнутое множество G_1 . Положим $F = \|(P-I)|_{G_2}\|$, где под $(P-I)|_{G_2}$ понимается сужение оператора $P-I$ на G_2 .

$\|(P-I)|_{G_2}\| = \sup\{\|Pu - u\|, u \in G_2, \|u\| = 1\} = \sup_{u \in G_2} \text{dist}(u, G_1) = \delta(G_1, G_2)$

Отсюда $F \in F(G_1, G_2)$ и $\varphi(G_1, G_2) \leq \delta(G_1, G_2)$

Из теорем 3 и 4 получаем

Следствие 1. Пусть X гильбертово пространство. $G_1, G_2 \subseteq X$ - линейные замкнутые множества. Тогда $\varphi(G_1, G_2) = \delta(G_1, G_2)$

$\hat{\varphi}(G_1, G_2) = \hat{\delta}(G_1, G_2)$

Замечание 6. Следствие 1 показывает, что в случае гильбертова пространства и линейных замкнутых множеств $\hat{\rho}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \hat{\rho}_{\delta}(G_n, G) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е. сходимость в смысле $\hat{\rho}$ и по раствору $\hat{\delta}$ эквивалентны.

4. Теорема о достаточном числе множеств. Замечание 1 показывает, что интерес представляет тот случай, когда ρ меньше единицы. Оценим мощность семейства

$\mathcal{U}(G) = \{G : \varphi(G, G) < \alpha < 1; G, G_0 \subseteq X\}$

Лемма 3. Пусть X нормированное пространство над полем вещественных или комплексных чисел $K \dots G \subseteq X, G \neq \emptyset, \alpha \in \mathbb{R}_+, \alpha \neq 0$. Тогда существует $\bar{G} \subseteq X$ такое, что $\bar{G} \neq G, \varphi(G, \bar{G}) \leq \alpha$

Доказательство. Пусть $\bar{G} = \{y : y = x + \alpha x, \forall x \in G\}$. Тогда

$F = I_G + \alpha I_G \in \mathcal{F}(G, \bar{G})$ и $\varphi(G, \bar{G}) < \alpha$

Теорема 5. Пусть X нормированное пространство над полем вещественных или комплексных чисел K . $G \in X$, $G \neq \emptyset$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Тогда $\mathcal{Y}(G) \supseteq 2^{\alpha G}$ (Под $\mathcal{Y}(G)$ и $X \setminus G$ понимается мощность множеств $\mathcal{Y}(G)$ и $X \setminus G$ соответственно).

Доказательство. Из определений (1), (2), (3), (4) и леммы 3 следует, что $\varphi(G, \bar{G} \cup U) < \alpha \quad \forall U \subseteq X \setminus G$. Отсюда $\{G_p = G \cup U_p : U_p \subseteq 2^{\alpha(X \setminus G)}\} \in \mathcal{Y}(G)$. Но из задания \bar{G} следует, что отображение $f: X \rightarrow (1+\alpha)X \quad \forall x \in X$ взаимно однозначно переводит $X \setminus G$ в $X \setminus \bar{G}$, поэтому $2^{\alpha(X \setminus G)} = 2^{\alpha(X \setminus \bar{G})}$ и $\bar{A} = 2^{\alpha \bar{G}}$. Отсюда $\mathcal{Y}(\bar{G}) \supseteq 2^{\alpha \bar{G}}$.

5. Теорема о гомеоморфности.

Теорема 5. Пусть X нормированное пространство; $G_1, G_2 \subseteq X$; $\varphi(G_1, G_2) < 1$. Тогда существует $G_3 \subseteq G_2$ такое, что G_1 гомеоморфно G_3 .

Доказательство. В силу леммы 1 существует $F = I_{G_1} + L_{G_1} \in \mathcal{F}(G_1, G_2)$ такое, что $\alpha_F < 1$. Тогда $\|Fx - Fy\| = \|x - y\| - \|L_{G_1}x - L_{G_1}y\| \geq (1 - \alpha_F)\|x - y\| \geq 0 \quad \forall x, y \in G_1$. Отсюда F обратим и обратный непрерывен. Оператор F непрерывен как сумма непрерывных операторов I_{G_1} и L_{G_1} . Для завершения доказательства положим $G_3 = F(G_1)$.

Замечание 7. Теорема 5 показывает, что если $\hat{\varphi}(G_1, G_2) < 1$, то $\bar{G}_1 = \bar{G}_2 \quad \forall G_1, G_2 \in 2^X$.

Полученные результаты используются ниже для изучения устойчивости различных свойств, вообще говоря нелинейных, операторов в нормированных пространствах.

6. Определения. Пусть X, Y - нормированные пространства над одним и тем же вещественным или комплексным полем K .

$\mathcal{M}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{A: A \in \mathcal{O}(X, Y)\}$ - множество всех отображений из X в Y .

Пусть $A_i \in \mathcal{M}(X, Y)$ и $G(A_i)$ - график оператора A_i , $i = 1, 2$.

$$\varphi(A_1, A_2) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(G(A_1), G(A_2))$$

$$\hat{\varphi}(A_1, A_2) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\varphi}(G(A_1), G(A_2))$$

Отметим, что из замечания 1

$$0 \leq \varphi(A_1, A_2) \leq 1 \quad 0 \leq \hat{\varphi}(A_1, A_2) \leq 1$$

В силу теорем 1, 2 и замечания 4 в пространстве $\mathcal{M}(X, Y)$

* О гомеоморфизмах (локальных гомеоморфизмах) сумм линейных непрерывных и сжимающих операторов смотрите, например, работу [3] пункты 5.1.5-5.1.8 и 30.5.1.1.

можно ввести полуметризуемую топологию τ , в которой сходимость последовательности отображений $A_n \in \mathcal{M}(X, Y)$ по отношению к отображению $A \in \mathcal{M}(X, Y)$ эквивалентна сходимости в смысле $\hat{\varphi}(A_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Замечание 8. Пусть X, Y банаховы пространства; $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогда в силу теоремы 3 имеют место соотношения

$$\delta(A_1, A_2) \leq \varphi(A_1, A_2) \quad \hat{\delta}(A_1, A_2) \leq \hat{\varphi}(A_1, A_2)$$

Отсюда сходимость последовательности операторов $A_n \in \mathcal{B}(X, Y)$ по отношению к отображению $A \in \mathcal{B}(X, Y)$ в смысле $\hat{\varphi}(A_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ влечет сходимость в смысле раствора $\hat{\delta}(A_n, A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Замечание 9. Пусть X, Y гильбертовы пространства; $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогда в силу следствия 1 имеют место соотношения

$$\delta(A_1, A_2) = \varphi(A_1, A_2) \quad \hat{\delta}(A_1, A_2) = \hat{\varphi}(A_1, A_2)$$

и, следовательно, топология в $\mathcal{B}(X, Y)$, определенная хаусдорфовой метрикой $\hat{\delta}$ (или, что то же, функцией раствора $\hat{\delta}$) совпадает с топологией, индуцированной в $\mathcal{B}(X, Y)$ топологией τ .

Следующую лемму мы часто будем использовать в дальнейшем

Лемма 4. Пусть X, Y - нормированные пространства.

$A_1, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y)$. Тогда $\forall F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)) \exists F_1: \mathcal{D}(A_1) \rightarrow \mathcal{D}(A_2) \mid F(x, A_1 x) = (F_1 x, A_2 F_1 x) \forall (x, A_1 x) \in G(A_1)$ причем $F_1 = I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1$, где $I_{\mathcal{D}(A_1)}$ - тождественное отображение на $\mathcal{D}(A_1)$, а для L_1 справедливо следующее соотношение: $\|L_1 x - L_1 y\|^2 + \|A_2(I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1)x - A_2(I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1)y - A_1 y\|^2 \leq \alpha_F^2 (\|x - y\|^2 + \|A_1 x - A_1 y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$ (13)

Если при этом A_1 обратим (инъективен), то

$\forall F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)) \exists F_2: R(A_1) \rightarrow R(A_2) \mid F(x, A_1 x) = (F_2 x, A_2 F_2 x) \quad \forall (x, A_1 x) \in G(A_1)$ причем $F_2 = I_{R(A_1)} + L_2$, где $I_{R(A_1)}$ - тождественное отображение на $R(A_1)$, а для L_2 справедливо следующее соотношение

$$\|L_2 x - L_2 y\|^2 + \|L_2 A_1 x - L_2 A_1 y\|^2 \leq \alpha_F^2 (\|x - y\|^2 + \|A_1 x - A_1 y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$. Обозначим через P_1 и P_2 следующие отображения $P_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \forall (x, y) \in X \times Y, P_2 x \stackrel{\text{def}}{=} (x, A_1 x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_1)$

Положим $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} P_1 \circ L \circ P_2^{-1}, F_1 \stackrel{\text{def}}{=} P_1 \circ F \circ P_2^{-1}$. Тогда

$$F_1 = P_1 \circ (I_{G(A_1)} + L) \circ P_2^{-1} = P_1 \circ I_{G(A_1)} \circ P_2^{-1} + P_1 \circ L \circ P_2^{-1} = I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1$$

$$F(x, A_1 x) = (F_1 x, A_2 F_1 x) \quad \forall (x, A_1 x) \in G(A_1)$$

$$\|L_1 x - L_1 y\|^2 + \|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y - A_1 y\|^2 = \|L_{G(A_1)}(x, A_1 x) - L_{G(A_1)}(y, A_1 y)\|^2 \leq \alpha_F^2 \|(x, A_1 x) - (y, A_1 y)\|^2 = \alpha_F^2 (\|x - y\|^2 + \|A_1 x - A_1 y\|^2) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$$

Пусть A_1 - обратим. Обозначим через P^1 и P^2 следующие отображения $P^1(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} y \quad \forall (x, y) \in X \times Y, P^2 A_1 x \stackrel{\text{def}}{=} (x, A_1 x) \quad \forall A_1 x \in R(A_1)$ (оператор P^2 определен корректно ввиду обратимости операто-

ра A_1). Положим $L \stackrel{\text{def}}{=} P' \circ L_G(A_1) \circ P''$, $F_2 \stackrel{\text{def}}{=} P' \circ F \circ P''$. Тогда
 $F_2 = P' \circ (I_G(A_1) + L_G(A_1)) \circ P'' = P' \circ I_G(A_1) \circ P'' + P' \circ L_G(A_1) \circ P'' = I_{A_1(A_1)} + L_2$
 $F_2(x, A, x) = (F_1 x, F_2 A, x) \quad \forall (x, A, x) \in G(A_1)$ и так как $A_2 F_1 x = F_2 A_1 x$
 $\forall x \in \mathcal{D}(A_1)$, то неравенство (14) имеет место.

В дальнейшем через F_1, F_2, L_1 и L_2 мы будем обозначать отображения, построенные в лемме 4 по отображениям F и $L_G(A_1)$ соответственно.

Из оценок (13) и (14) непосредственно следуют неравенства $\|L_1 x - L_2 y\| \leq \alpha_F (\|x - y\| + \|A_1 x - A_1 y\|) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$ (15)

$$\|(A_2 F_1 - A_1)(x - (A_2 F_2 - A_1)y)\| \leq \alpha_F (\|x - y\| + \|A_1 x - A_1 y\|) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \quad (16)$$

$$\|L_1 A_1 x - L_2 A_1 y\| \leq \alpha_F (\|x - y\| + \|A_1 x - A_1 y\|) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \quad (17)$$

7. Обозначения и замечания. Пусть X, Y - нормированные пространства над полем вещественных или комплексных чисел K . Положим $Lip(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{A: \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \|A x_1 - A x_2\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)\}$. Нижняя грань α_A всевозможных констант α в предыдущем неравенстве называется константой Липшица оператора A .

$$Lip[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in Lip(X, Y) : \mathcal{D}(A) = X\}$$

$$Lip\{X, Y\} \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in Lip[X, Y] : A \theta_x = \theta_y\}$$

$$L(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y \mid A - \text{линейный оператор}\}$$

$$LC(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in L(X, Y) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : \|A x\| \leq \alpha \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)\}$$

$$LCC[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in LC(X, Y) \mid \mathcal{D}(A) = X\}$$

$$\text{Очевидно, что } Lip(X, Y) \cap L(X, Y) = LC(X, Y), \quad Lip[X, Y] \cap L(X, Y) = Lip\{X, Y\} \cap L(X, Y) = LCC[X, Y]$$

Непосредственно проверяется, что множества $Lip[X, Y]$ и $Lip\{X, Y\}$ являются линейными пространствами над полем K .

Пусть $\psi(A) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_A \quad \forall A \in Lip[X, Y]$. Непосредственно проверяется, что ψ полуорма в пространстве $Lip[X, Y]$. Но ψ не является нормой в $Lip[X, Y]$. Действительно, для любого $A \in Lip[X, Y]$ и фиксированного $y_0 \in Y, y_0 \neq \theta_y$ отображение A' такое, что $A' x \stackrel{\text{def}}{=} A x + y_0 \quad \forall x \in X$ лежит в $Lip[X, Y]$; $A' \neq A$ и $\psi(A') = \psi(A)$.

Пространство $Lip\{X, Y\}$ обладает следующим свойством:

$$\|A' x\| \leq \psi(A) \|x\| \quad \forall x \in X, A \in Lip\{X, Y\} \quad (18)$$

Действительно, $\|A' x\| = \|A x - A \theta_x\| \leq \psi(A) \|x - \theta_x\| = \psi(A) \|x\| \quad \forall x \in X, A \in Lip\{X, Y\}$

Отсюда следует, что полуорма ψ является нормой в $Lip\{X, Y\}$

$$\text{Положим } \|A\|_{Lip\{X, Y\}} \stackrel{\text{def}}{=} \psi(A) \quad \forall A \in Lip\{X, Y\}$$

$$\text{Очевидно } \|A\| = \|A\|_{Lip\{X, Y\}} \quad \forall A \in LCC[X, Y] = Lip[X, Y] \cap L(X, Y)$$

Замечание 10. Пусть X - нормированное пространство. Y -

банахово пространство. Тогда

- а) пространство $Lip(X, Y)$ с нормой $\| \cdot \|_{Lip(X, Y)}$ банахово;
- б) пространство $Lip[X, Y]$ полное в топологии, порожденной полунормой ψ .

Доказательство. а) Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Lip(X, Y)$ и $\|A_n - A_m\|_{Lip(X, Y)} \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$. Тогда из неравенства (18) получим: $\|A_{m+k} - A_m\| = \|(A_m - A_n) + (A_n - A_{m+k})\| \leq \|A_m - A_n\| + \|A_n - A_{m+k}\|$. Поэтому последовательность $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ фундаментальна для любого $x \in X$ в пространстве Y и, следовательно, в силу полноты Y имеет в Y предел $y(x) \forall x \in X$. Положим $Ax = y(x) \forall x \in X$. Тогда $A: X \rightarrow Y$. Покажем, что $A \in Lip(X, Y)$. Пусть $x_1, x_2 \in X$. Тогда $\|Ax_1 - Ax_2\| \leq \|Ax_1 - A_n x_1\| + \|A_n x_1 - A_n x_2\| + \|A_n x_2 - Ax_2\| \leq \|A_n - A\|_{Lip(X, Y)} \|x_1 - x_2\| + \|A_n x_2 - Ax_2\|$ (19). Из определения оператора A следует, что $\forall \epsilon > 0 \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N}; n > N_{\epsilon} \Rightarrow \|A_n x_2 - Ax_2\| \leq \epsilon \|x_2\| \in \epsilon \cdot 1 = \epsilon$. Из фундаментальности последовательности $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ заключаем, что $\exists \delta > 0; \|A_n - A_m\|_{Lip(X, Y)} \leq \epsilon \forall n, m > N_{\epsilon}$. Поэтому из неравенств (19) следует, что $\|Ax_1 - Ax_2\| \leq (\epsilon + \delta) \|x_1 - x_2\| \forall x_1, x_2 \in X$. Отсюда $A \in Lip[X, Y]$. Равенство $A\theta_2 = \theta_2$ следует из того, что $A_n \theta_2 = \theta_2 \forall n \in \mathbb{N}$ и построения оператора A . Поэтому $A \in Lip(X, Y)$ и, следовательно, $Lip(X, Y)$ - банахово пространство.

б) Пусть $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Lip(X, Y)$ и $\psi(A_m - A_n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$. Зададим отображения A'_n следующим образом $A'_n x \stackrel{\text{def}}{=} A_n x - A_n \theta_2 \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$. Очевидно $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Lip(X, Y) \subseteq Lip[X, Y]$, $\psi(A'_m - A'_n) = \psi(A_m - A_n) = \psi(A_m - A'_m + A'_m - A'_n) = \psi(A_m - A'_m) + \psi(A'_m - A'_n) = \psi(A_m - A_n)$. Отсюда $\psi(A'_m - A'_n) \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0$ и в силу полноты $Lip[X, Y]$ существует $A \in Lip[X, Y]$ такой, что $\psi(A'_n - A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Но из построения операторов A'_n следует, что $(A'_n - A)x = (A_n - A)x - A_n \theta_2 \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\psi(A'_n - A) = \psi(A'_n - A) = \psi(A'_n - A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и, следовательно, пространство $Lip[X, Y]$ полное в топологии, порожденной полунормой ψ .

8. Устойчивость непрерывности и ограниченности.

Теорема 7. Пусть X, Y - нормированные пространства.

- $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y), A_2 \in Lip(X, Y), \mathcal{D}(A_1) \subseteq \mathcal{D}(A_2)$. Тогда $\varphi(A_1, A_1 + A_2) \leq \alpha_{A_2}$
- В частности, если $A_2 \in Lip[X, Y]$ то $\varphi(A_1, A_1 + A_2) \leq \psi(A_2)$
- если $A_2 \in Lip(X, Y)$ то $\varphi(A_1, A_1 + A_2) \leq \|A_2\|_{Lip(X, Y)}$
- если $A_2 \in LCC(X, Y)$ то $\varphi(A_1, A_1 + A_2) \leq \|A_2\|$.

Доказательство. Пусть F и $L_{\mathcal{D}(A_1)}$ следующие отображения: $F(x, A, x) \stackrel{\text{def}}{=} (x, (A_1 + A_2)x)$; $L_{\mathcal{D}(A_1)}(x, A, x) \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_2, A_2 x) \forall x \in \mathcal{D}(A_1)$. Тогда $\|L_{\mathcal{D}(A_1)}(x, A, x) - L_{\mathcal{D}(A_1)}(y, A, y)\|^2 = \|(\theta_2, A_2 x - A_2 y)\|^2 = \|A_2 x - A_2 y\|^2 \leq \alpha_{A_2}^2 \|x - y\|^2 \leq \alpha_{A_2}^2 (\|x - y\|^2 + \|A_1 x - A_1 y\|^2) = \alpha_{A_2}^2 \|(x, A_1 x) - (y, A_1 y)\|^2 \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда $F \in \mathcal{F}(B(A_1), B(A_2))$ и $\varphi(A_1, A_2) \leq \alpha_2$. Неравенство $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \alpha_2)^{-1}$ показывается аналогично.

Теорема 8. Пусть X, Y - нормированные пространства.

$A_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$; $A_2 \in \text{Lip}(X, Y)$. $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \alpha_2)^{-1}$. Тогда $A_1 \in \text{Lip}(X, Y)$
и $\alpha_1 \leq \frac{\alpha_2 + (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)}$. Если при этом а) $\varphi(A_2, A_1) < (1 + \alpha_2)^{-1}$, то

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \frac{(1 + \alpha_2)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)} \quad (20)$$

б) $A_2 \in L(X, Y)$, то

$$\alpha_{A_1, A_2} \leq \frac{(1 + \alpha_2)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)} \quad (21)$$

Доказательство. Пусть $A_2 \in \text{Lip}(X, Y)$, $F \in \mathcal{F}(B(A_1), B(A_2))$,

F_1 и L_1 - отображения, построенные по F в лемме 4. Тогда $\|A_1 F_1 x - A_2 F_1 y\| \leq \alpha_1 \|F_1 x - F_1 y\| \leq \alpha_1 \|x - y\| + \alpha_2 \|L_1 x - L_1 y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$. Отсюда в силу неравенства (15)

$$\|A_1 F_1 x - A_2 F_1 y\| \leq \alpha_1 (1 + \alpha_F) \|x - y\| + \alpha_2 \alpha_F \|A_1 x - A_2 y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \quad (22)$$

С другой стороны, $\|A_1 F_1 x - A_2 F_1 y\| \geq \|A_1 x - A_2 y\| - \|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда в силу неравенства (16)

$$\|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y\| \geq (1 - \alpha_F) \|A_1 x - A_2 y\| - \alpha_F \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \quad (23)$$

Сравнив неравенства (22) и (23), получаем

$$(1 - \alpha_F (1 + \alpha_2)) \|A_1 x - A_2 y\| \leq (\alpha_1 + \alpha_F (1 + \alpha_2)) \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$$

Отсюда в силу произвольности оператора F из $\mathcal{F}(B(A_1), B(A_2))$

и условия $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \alpha_2)^{-1}$ получаем, что $A_1 \in \text{Lip}(X, Y)$ и

$$\alpha_1 \leq \frac{\alpha_2 + (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)} \quad (24)$$

а) Пусть $\varphi(A_2, A_1) < (1 + \alpha_2)^{-1}$. Тогда, если $\alpha_2 > \alpha_1$, то

$(1 + \alpha_2)^{-1} < (1 + \alpha_1)^{-1}$ и, следовательно, из предыдущего $|\alpha_2 - \alpha_1| \leq \frac{(1 + \alpha_2)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)} \leq \frac{(1 + \alpha_2)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)}$. Если $\alpha_2 \leq \alpha_1$, то необходимое неравенство непосредственно следует из неравенства (24).

б) Пусть $A_2 \in L(X, Y)$. Тогда $\|(A_1 - A_2)x - (A_1 - A_2)y\| \leq \|A_1 x - A_2 F_1 x - A_1 y + A_2 F_1 y\| +$

$$\|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y + A_2 y\| \leq \|A_1 x - A_2 F_1 x - A_1 y + A_2 F_1 y\| + \alpha_2 \|L_1 x - L_1 y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$$

Поэтому в силу неравенств (15) и (16) получаем, что

$$\|(A_1 - A_2)x - (A_1 - A_2)y\| \leq \alpha_F (1 + \alpha_2) (\|x - y\| + \|A_1 x - A_2 y\|) \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) \text{ или}$$

$$\|(A_1 - A_2)x - (A_1 - A_2)y\| \leq \alpha_F (1 + \alpha_2) (1 + \alpha_1) \|x - y\| \leq \frac{(1 + \alpha_2)^2 \alpha_F}{1 - (1 + \alpha_2) \varphi(A_1, A_2)} \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1)$$

Отсюда в силу произвольности $F \in \mathcal{F}(B(A_1), B(A_2))$ следует оценка (21).

Теорема 9. Пусть X - банахово пространство, Y - нормированное пространство.

$A_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$, $A_2 \in \text{Lip}[X, Y]$, $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \varphi(A_2))^{-1}$

Тогда $A_1 \in \text{Lip}[X, Y]$ и

$$|\varphi(A_1) - \varphi(A_2)| \leq \frac{(1 + \varphi(A_2)) \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \varphi(A_2)) \varphi(A_1, A_2)} \quad (25)$$

Если при этом $A_2 \in L(X, Y)$, то

$$\varphi(A_1 - A_2) \leq \frac{(1 + \|A_2\|)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2\|) \varphi(A_1, A_2)} \quad (26)$$

Доказательство. Пусть $\hat{\varphi}(A_1, A_2) = (1 + \varphi(A_2))^{-1}$. Тогда в силу леммы 1 существует $F \in \mathcal{F}(\mathcal{D}(A_2), \mathcal{G}(A_1))$ такое, что $a_F = (1 + \varphi(A_2))^{-1}$. Пусть F_1 и L_1 - отображения, построенные по отображению F в лемме 4. Из оценки (15) и условия $A_2 \in \text{Lip}[X, Y]$ следует, что $\|L_1 x - L_1 y\| = a_F (\|x - y\| + \|A_2 x - A_2 y\|) \leq a_F (1 + \|A_2\|) \|x - y\| \quad \forall x, y \in X$. Отсюда L_1 - сжимающее отображение и в силу II 5.1.5 и 30 5.1.1. в [3] отображение $F_1 = I - L_1$ - сюръекция. Но $R(F_1) \subseteq \mathcal{D}(A_1) \subseteq X$, поэтому $\mathcal{D}(A_1) = X$. Отсюда в силу теоремы 8 $A_1 \in \text{Lip}[X, Y]$ и оценки (25) и (26) следуют из оценок (20) и (21) соответственно.

Следующие два следствия непосредственно вытекают из теоремы 9.

Следствие 2. Пусть X - банахово пространство, Y - нормированное пространство, $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$; $A_2 \in \text{Lip}[X, Y]$. $\hat{\varphi}(A_1, A_2) = (1 + \|A_2\|_{\text{Lip}(X, Y)})^{-1}$, $A_1 a_2 = \varphi_{A_2}$ ($a_2 \in \mathcal{D}(A_1)$) в силу теоремы 9. Тогда $A_1 \in \text{Lip}[X, Y]$ и $|\|A_1\|_{\text{Lip}(X, Y)} - \|A_2\|_{\text{Lip}(X, Y)}| \leq \frac{(1 + \|A_2\|_{\text{Lip}(X, Y)})^2 \hat{\varphi}(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2\|_{\text{Lip}(X, Y)}) \hat{\varphi}(A_1, A_2)}$. Если при этом $A_2 \in L(X, Y)$, то $\|A_1 - A_2\|_{\text{Lip}(X, Y)} \leq \frac{(1 + \|A_2\|)^2 \hat{\varphi}(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2\|) \hat{\varphi}(A_1, A_2)}$.

Следствие 3. Пусть X - банахово пространство; Y - нормированное пространство. $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y) \cap L(X, Y)$, $A_2 \in L(X, Y)$. $\hat{\varphi}(A_1, A_2) = (1 + \|A_2\|)^{-1}$. Тогда $A_1 \in L(X, Y)$ и $\|A_1 - A_2\| \leq \frac{(1 + \|A_2\|)^2 \hat{\varphi}(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2\|) \hat{\varphi}(A_1, A_2)}$.

Замечание 11. Теоремы 8 и 9 показывают, что пространства $\text{Lip}(X, Y)$ и $L(X, Y)$ являются открытыми множествами в $\mathcal{M}(X, Y)$ в топологии, порожденной функцией $\hat{\varphi}$.

Замечание 12. Теорема 7 и следствие 3 показывают, что топология в $L(X, Y)$, определенная функцией $\hat{\varphi}$, совпадает с топологией, порожденной нормой и, следовательно, в силу замечания IV.2.16 в [1], совпадает с топологией в $L(X, Y)$, определенной хаусдорфовой метрикой $\hat{\delta}$ (или, что то же, функцией раствора $\hat{\delta}$).

Замечание 13. Теоремы 8 и 9 и следствие 2 являются нелинейными аналогами теоремы IV.2.13 в [1].

Теорема 8 показывает, что оператор близкий $\hat{\varphi}$ в задаваемой по $\hat{\varphi}$ полуметрике в пространстве $\mathcal{M}(X, Y)$ (или, что то же, в смысле малости функции $\hat{\varphi}$) к оператору класса $\text{Lip}(X, Y)$ является непрерывным и ограниченным. В общем случае имеют место следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y)$; A_2 - непрерывный оператор. $\varphi(A_1, A_2) < 1$. Тогда A_1 - непрерывный оператор $\Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)) : (\alpha_F < 1) \&$ (L_1 - непрерывный оператор) (где L_1 - оператор, построенный по оператору F в лемме 4).

Доказательство. Пусть A_1 - непрерывный оператор. В силу леммы 1 существует оператор $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$ такой, что $\alpha_F < 1$. Тогда из оценки (15) следует непрерывность оператора L_1 , построенного по оператору F в лемме 4.

Пусть $\exists F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)) : (\alpha_F < 1) \&$ (L_1 - непрерывный оператор), где L_1 - оператор, построенный по оператору F в лемме 4, и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{D}(A_1)$, $x \in \mathcal{D}(A_1)$ и $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Тогда для оператора F_1 , построенного по F в лемме 4, имеем $F_1 x_n = x_n + L_1 x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + L_1 x = F_1 x$. Отсюда и из непрерывности оператора A_2 вытекает, что $F(x_n, A_2 x_n) = (F_1 x_n, A_2 F_1 x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (F_1 x, A_2 F_1 x) = F(x, A_2 x)$. Поэтому из доказательства теоремы 6 следует, что $(x_n, A_1 x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, A_1 x)$. Отсюда следует непрерывность оператора A_1 .

Теорема 11. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y)$; A_2 - ограниченный оператор и $\varphi(A_1, A_2) < 1$. Тогда A_1 - ограниченный оператор $\Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)) : (\alpha_F < 1) \&$ (L_1 - ограниченный оператор) (где L_1 - оператор, построенный по оператору F в лемме 4).

Доказательство. Пусть A_1 - ограниченный оператор и $M \in \mathcal{D}(A_1)$ - ограниченное множество. В силу леммы 1 существует оператор $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$ такой, что $\alpha_F < 1$. Но из неравенства (15) следует, что $\|L_1 x\| \leq \alpha_F (\|x\| + \|y\| + \|A_1 x\| + \|A_1 y\|) + \|L_1 y\| \quad \forall x \in M$ при фиксированном $y \in M$. Отсюда множество $L_1(M)$ ограничено и, следовательно, L_1 - ограниченный оператор.

Пусть существует оператор $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$ такой, что $\alpha_F < 1$ и L_1 - ограниченный оператор. Пусть $M \in \mathcal{D}(A_1)$ - ограниченное множество. Тогда множество $A_2 F_1(M)$ ограничено в силу ограниченности операторов A_2 и $F_1 = I_{\mathcal{D}(A_1)} + L_1$. Поэтому $\exists c \in \mathbb{R}_+ : c \geq \|A_2 F_1 x\| + \|A_2 F_1 y\| \geq \|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y\| \geq \|A_1 x - A_1 y\| - \|A_2 F_1 x - A_2 F_1 y - A_1 x + A_1 y\| \quad \forall x, y \in M$ Отсюда в силу неравенства (16) $c \geq \|A_1 x - A_1 y\| - \alpha_F (\|x - y\| + \|A_1 x - A_1 y\|) \quad \forall x, y \in M$ или $\|A_1 x - A_1 y\| \leq \frac{c}{1 - \alpha_F} + \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} (\|x\| + \|y\|) \quad \forall x, y \in M$

и в силу ограниченности множества M существует $c' \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\|A_1 x - A_1 y\| \leq c' \quad \forall x, y \in M$ Отсюда заключаем о' огра-

Ниченности оператора A , .

Замечание 14. В этой части работы (пункт 8) мы получили устойчивость различных свойств, вообще говоря нелинейных, операторов при возмущениях малых в том смысле, что данный и возмущенный операторы близки в полуметрике, порожденной функцией φ (или, что то же, близки в смысле малости функции $\hat{\varphi}$).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.А.Гольдману за внимание к работе.

Литература

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972. 740 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., "Наука", 1972. 496 с.
3. Ортега Дж. Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1975. 568 с.

Поступила 30 сентября 1976 года.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ
НЕЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Е.Л. Вейлер

Латвийский государственный университет

В работе изучается устойчивость, в смысле нелинейного аналога раствора статьи [1], различных (в том числе и спектральных) свойств нелинейного оператора, действующего в нормированных пространствах.

В статье без специального пояснения применяются понятия и обозначения, введенные автором в работе [1]. Так как обе статьи находятся в одном выпуске данного сборника, то это не должно вызвать затруднений.

1. Устойчивость непрерывной и ограниченной обратимости.

Определение 1. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A \in \mathcal{NL}(X, Y)$ - произвольный оператор из $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ в $R(A) \subseteq Y$. $G(A)$ - график оператора A . Множество $G'(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in G(A)\}$ называется обратным графиком оператора A^* .

Пусть X, Y - нормированные пространства. $A_1, A_2 \in \mathcal{NL}(X, Y)$, $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$ и F_i - оператор, построенный по оператору F в лемме 4 в [1]. Тогда оператор F' такой, что $F'(A_1, x, x) \stackrel{\text{def}}{=} (A_2 F_i x, F_i x)$. $\forall (A_i, x, x) \in G(A_i)$, в силу оценки (13) в [1] лежит в $\hat{\mathcal{F}}(G'(A_1), G'(A_2))$ и $\alpha_{F'} = \alpha_F$. Отсюда $\varphi(G'(A_1), G'(A_2)) = \varphi(G(A_1), G(A_2))$

Обозначим через $\mathcal{NL}_i(X, Y)$ подмножество в $\mathcal{NL}(X, Y)$, состоящее из всех обратимых (инъективных) операторов из $\mathcal{NL}(X, Y)$.

Очевидно, если $A \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$, то $A^{-1} \in \mathcal{NL}(Y, X)$ и $G'(A^{-1}) = G(A)$. Следующая теорема немедленно вытекает из сделанных замечаний.

Теорема 1. Пусть X, Y - нормированные пространства.

$A_1, A_2 \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$. Тогда $\varphi(A_1^{-1}, A_2^{-1}) = \varphi(A_1, A_2)$; $\hat{\varphi}(A_1^{-1}, A_2^{-1}) = \hat{\varphi}(A_1, A_2)$

Замечание 1. Теорема 1 дает нелинейный аналог теоремы 1У.2.20 в [2].

Определение 2. Пусть X, Y - нормированные пространства.

$A \in \mathcal{NL}(X, Y)$ - произвольный оператор из $\mathcal{D}(A) \subseteq X$ в $R(A) \subseteq Y$. Будем говорить, что оператор A обладает свойством (i), если существ-

* Понятие обратного графика для замкнутого оператора встречается, например, в Ш.5.2. в [2].

вует $c \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\|Ax_1 - Ax_2\| \geq c \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$.

Теорема 2. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A \in \mathcal{M}_L(X, Y)$. Тогда $A \in \mathcal{M}_L(X, Y)$ & $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X) \iff A$ обладает свойством (i).

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{M}_L(X, Y)$ и $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$. Тогда существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\|A^{-1}Ax_1 - A^{-1}Ax_2\| \leq \alpha \|Ax_1 - Ax_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ или $\|x_1 - x_2\| \leq \alpha \|Ax_1 - Ax_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$. Отсюда следует свойство (i). Пусть оператор A обладает свойством (i). Положим $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax_1 = Ax_2$. Тогда из свойства (i) $c \|x_1 - x_2\| \leq \|Ax_1 - Ax_2\| = 0$ и так как $c > 0$, то $x_1 = x_2$ и, следовательно, оператор A обратим. Но из свойства (i) вытекает, что $c \|Ay_1 - Ay_2\| \leq \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathcal{R}(A)$, где $c > 0$. Отсюда $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$.

Замечание 2. В линейном случае свойство (i) эквивалентно необходимому и достаточному условию непрерывной обратимости линейного оператора; следовательно, теорема 2 дает распространение соответствующего утверждения на случай нелинейных операторов.

Покажем, что множество операторов $A \in \mathcal{M}_L(X, Y)$ таких, что $A^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ открыто в $\mathcal{M}_L(X, Y)$ в топологии, порожденной $\hat{\varphi}$ (нелинейным аналогом расстояния).

Теорема 3. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A_1 \in \mathcal{M}_L(X, Y)$.

$A_2 \in \mathcal{M}_L(X, Y)$; $A_2^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ и $\varphi(A_1, A_2) = (1 + \alpha_{A_2})^{-1}$

Тогда $A_1 \in \mathcal{M}_L(X, Y)$, $A_1^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ и $\alpha_{A_1^{-1}} \leq \frac{\alpha_{A_2} + (1 + \alpha_{A_2}) \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_{A_2}) \varphi(A_1, A_2)}$

Если при этом а) $\varphi(A_2, A_1) < (1 + \alpha_{A_2})^{-1}$, то

$|\alpha_{A_1^{-1}} - \alpha_{A_2^{-1}}| \leq \frac{(1 + \alpha_{A_2})^2 \hat{\varphi}(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_{A_2}) \varphi(A_1, A_2)}$ $A_2 \in L(X, Y)$, то

$\alpha_{A_1^{-1} - A_2^{-1}} \leq \frac{(1 + \alpha_{A_2})^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \alpha_{A_2}) \varphi(A_1, A_2)}$

Доказательство. В силу леммы 1 в [1] существует оператор $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$ такой, что $\alpha_F < (1 + \alpha_{A_2})^{-1}$ и пусть F_1 и L_1 - операторы, построенные по оператору F в лемме 4 в [1]. Тогда из оценки (16) в [1] следует, что

$\|A_2 F_1 x_1 - A_2 F_1 x_2\| - \|A_1 x_1 - A_1 x_2\| \leq \alpha_F (\|x_1 - x_2\| + \|A_1 x_1 - A_1 x_2\|) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда и из того, что $A_2^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$ получаем неравенство

$\|F_1 x_1 - F_1 x_2\| \leq \alpha_F \alpha_{A_2^{-1}} \|x_1 - x_2\| + (1 + \alpha_F) \alpha_{A_2^{-1}} \|A_1 x_1 - A_1 x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$

или, из определения оператора F_1 ,

$\|x_1 - x_2\| - \|L_1 x_1 - L_1 x_2\| \leq \alpha_F \alpha_{A_2^{-1}} \|x_1 - x_2\| + (1 + \alpha_F) \alpha_{A_2^{-1}} \|A_1 x_1 - A_1 x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда в силу оценки (15) в [1]

$\|x_1 - x_2\| - \alpha_F (\|x_1 - x_2\| + \|A_1 x_1 - A_1 x_2\|) \leq \alpha_F \alpha_{A_2^{-1}} \|x_1 - x_2\| + (1 + \alpha_F) \alpha_{A_2^{-1}} \|A_1 x_1 - A_1 x_2\|$

$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$ или, так как $a_F < (1 + a_{A_1})^{-1}$, то
 $\|x_1 - x_2\| \leq \frac{a_{A_1} + a_F(1 + a_{A_1})}{1 - a_F(1 + a_{A_1})} \|A_1 x_1 - A_1 x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(A_1)$

Отсюда получаем, что оператор A_1 обладает свойством (i) и, в силу теоремы 2, оператор A_1 обратим и обратный удовлетворяет условию Липшица. Искомые неравенства имеют место в силу теоремы 8 в [1] и теоремы 1.

Замечание 3. Из теоремы 3 следует, что если $A_1, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y)$ оператор A_2 обладает свойством (i) с константой c и $\varphi(A_1, A_2) < \frac{c}{1+c}$;

то оператор A_1 обладает свойством (i) с константой $c_1 \leq \frac{c - (1+c)\varphi(A_1, A_2)}{1 + (1+c)\varphi(A_1, A_2)}$

Из теорем 1 и 3 и теоремы 9 в [1] непосредственно вытекает

Следствие 1. Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово пространство. $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$; $A_2 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$ и $A_2^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$.
 $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \varphi(A_2^{-1}))^{-1}$. Тогда $A_1 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$, $A_1^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$ и

$$|\varphi(A_1^{-1}) - \varphi(A_2^{-1})| \leq \frac{(1 + \varphi(A_2^{-1}))^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \varphi(A_2^{-1})) \varphi(A_1, A_2)}$$

Если при этом $A_2 \in L(X, Y)$, то $\varphi(A_1^{-1} - A_2^{-1}) \leq \frac{(1 + \|A_2^{-1}\|)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2^{-1}\|) \varphi(A_1, A_2)}$

Замечание 4. Из следствия 1 вытекает устойчивость сюръективности обратимого отображения, если обратное отображение удовлетворяет условию Липшица и возмущения малы в смысле нелинейного аналога раствора работы [1].

Замечание 5. Из следствия 1 вытекает, что множество операторов $A \in \mathcal{M}_i(X, Y)$ таких, что $A^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$ открыто в пространстве $\mathcal{M}(X, Y)$ в топологии, порожденной φ .

Следующие следствия непосредственно вытекают из следствия 1.

Следствие 2. Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово пространство. $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y)$; $A_2 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$; $A_2^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$; $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \|A_2^{-1}\|_{\text{Lip}[Y, X]})^{-1}$; $\sigma_x \in \mathcal{D}(A_1)$; $A_1 \sigma_x = \sigma_y$. Тогда $A_1 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$, $A_1^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$ и справедливы оценки следствия 1.

Следствие 3. Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово пространство. $A_1 \in \mathcal{M}(X, Y) \cap L(X, Y)$, $A_2 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$ и $A_2^{-1} \in L(Y, X)$.
 $\varphi(A_1, A_2) < (1 + \|A_2^{-1}\|)^{-1}$. Тогда $A_1 \in \mathcal{M}_i(X, Y)$, $A_1^{-1} \in L(Y, X)$ и $\|A_1^{-1} - A_2^{-1}\| \leq \frac{(1 + \|A_2^{-1}\|)^2 \varphi(A_1, A_2)}{1 - (1 + \|A_2^{-1}\|) \varphi(A_1, A_2)}$ (То есть в качестве следствия мы получили результат об устойчивости непрерывной обратимости линейного оператора).

Замечание 6. Теорема 3 и следствия 1 и 2 даст н-линейные аналоги теоремы 1У.2.21 в [2].

Замечание 7. а) Результаты пункта 8 в [1] и этого пункта можно улучшить с точки зрения количественной теории, используя при доказательстве теоремы 3 в [1] оценку (13) вместо оценок (15) и (16).

б) Результаты этого пункта и пункта 8 в [1] можно усилить с помощью приема, указанного в 1У.2.22 в [2]. Применяя, например, теорему 7 в [1] и следствие 1 к операторам A_1 и A_2 , мы видим, что оператор $(A_1 + A_2) \in \mathcal{M}_2(X, Y)$, $(A_1 + A_2) \in \text{Lip}[Y, X]$, если $a_{A_1} < (1 + \psi(A_1^{-1}))^{-1}$ или $a_{A_2} < (1 + \psi(A_1^{-1}))^{-1}$. Отсюда $A_1 + A_2 \in \mathcal{M}_2(X, Y)$ и $(A_1 + A_2)^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$, если $a_{A_2} < (\psi(A_1^{-1}))^{-1}$.

Пример 1. Пусть X - банахово пространство, $V: X \rightarrow X$ - линейный вполне непрерывный оператор. $U \in \text{Lip}(X, X)$. Рассмотрим уравнения

$$x - Vx + Ux = y \quad (1) \qquad x - Vx = y \quad (2)$$

$$x - Vx + Ux = \theta \quad (1_0) \qquad x - Vx = \theta \quad (2_0)$$

Заметим, что если $N(I-V) = \{\theta\}$ ($R(I-V) = X$), то в силу первой теоремы Фредгольма $R(I-V) = X$ ($N(I-V) = \{\theta\}$) и по теореме Банаха об обратном операторе оператор $I-V$ - непрерывно обратим (I - тождественный оператор в X).

При сделанных предположениях имеет место

Теорема 4. Пусть линейное однородное уравнение (2₀) имеет только тривиальное решение и $\|U\|_{\text{Lip}(X, X)} < (1 + \|(I-V)^{-1}\|)^{-1}$. Тогда, вообще говоря, нелинейное уравнение (1) разрешимо при любой правой части $y \in X$ и уравнение (1₀) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. В силу теоремы 7 в [1] и следствия 2 оператор $I-V+U$ обратим и $(I-V+U)^{-1} \in \text{Lip}(X, X)$. Отсюда $R(I-V+U) = X$ и так как уравнение (1₀) имеет тривиальное решение, то оно имеет единственное тривиальное решение.

Аналогично получается следующая

Теорема 5. Пусть линейное уравнение (2) разрешимо при любой правой части $y \in X$ и $\|U\|_{\text{Lip}(X, X)} < (1 + \|(I-V)^{-1}\|)^{-1}$. Тогда, вообще говоря, нелинейное уравнение (1) разрешимо при любой правой части $y \in X$ и уравнение (1₀) имеет только тривиальное решение*.

* Результаты примера 1 можно получить иным способом, например, из П.5.1.7 в [3] в виду ЗС. 5.1.1 в [3].

2. Замечание о сходимости.

Теорема 6. Пусть X, Y - нормированные пространства.

$A_1, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y), B \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда $\varphi(A_1+B, A_2+B) \leq 2(1+\|B\|^2) \varphi(A_1, A_2)$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{F}(G(A_1), G(A_2)), F_1$ и L - операторы, построенные по оператору F в лемме 4 в [1]. Тогда, учитывая оценку (13) в [1], получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \|Lx - Ly, y\|^2 + \|(A_1+B)F_1x - (A_1+B)x - (A_2+B)F_1y + (A_1+B)y\|^2 \leq \\ & \|Lx - Ly, y\|^2 + (\|A_2F_1x - A_1x - A_2F_1y + A_1y\| + \|BF_1x - Bx - BF_1y + By\|)^2 \leq \\ & \|Lx - Ly, y\|^2 + 2\|A_2F_1x - A_1x - A_2F_1y + A_1y\|^2 + 2\|B\|^2\|Lx - Ly, y\|^2 \leq \\ & 2(1+\|B\|^2)\alpha_F^2(\|x - y\|^2 + \|A_1x - A_1y\|^2) \leq 2(1+\|B\|^2)\alpha_F^2(\|x - y\|^2 + (\|A_1x + Bx - A_1y - By\| + \|Bx - By\|)^2) \leq \\ & 2(1+\|B\|^2)\alpha_F^2(\|x - y\|^2 + 2\|A_1x + Bx - A_1y + By\|^2 + 2\|B\|^2\|x - y\|^2) \leq 4(1+\|B\|^2)^2\alpha_F^2(\|x - y\|^2 + \|(A_1+B)x - (A_1+B)y\|^2) \\ & \forall x, y \in \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}(A_1+B) \end{aligned}$$

Отсюда оператор F_1 заданный следующим образом:

$$F_1(x, (A_1+B)x) = (F_1x, (A_1+B)F_1x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A_1+B)$$

и $\alpha_{F_1} = 2(1+\|B\|^2)\alpha_F$. Поэтому в силу произвольности оператора F из $\mathcal{F}(G(A_1), G(A_2))$, $\varphi(A_1+B, A_2+B) \leq 2(1+\|B\|^2) \varphi(A_1, A_2)$.

Замечание 8. Теорема 6 дает нелинейный аналог теоремы 1У.2.17 в [2].

Замечание 9. Теоремы 7, 8, 9, 10, 11 в [1], следствия 2, 3 в [1], теоремы 3, 6 и следствия 1, 2, 3 дают естественным образом необходимые и достаточные условия сходимости последовательности операторов из $\mathcal{M}(X, Y)$ (-пространства всех операторов с областями определения, лежащими в нормированном пространстве X и областями значения, лежащими в нормированном пространстве Y) в полуметрике, порожденной нелинейным аналогом раствора работы [1]. Используя, например, теорему 7 в [1] и следствие 1, получаем следующий результат:

Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово пространство. $A, A_n \in \mathcal{M}(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $A_n \in \mathcal{M}(X, Y)$ и $A_n^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$ для достаточно больших n . Причем для того, чтобы $A_n \rightarrow A$ необходимо, чтобы, начиная с некоторого n , $\|\varphi(A_n^{-1}) - \varphi(A^{-1})\| \rightarrow 0$ достаточно, чтобы, начиная с некоторого n , $\varphi(A_n^{-1} - A^{-1}) \rightarrow 0$. Если A - линейный оператор, то последнее условие является необходимым и достаточным.

Результаты, отмеченные в замечании 9, дают нелинейный аналог теоремы 1У.2.23 в [2].

8. Устойчивость спектральных свойств нелинейного оператора

Определение 3. Пусть X, Y - нормированные пространства над полем комплексных чисел K . $A \in \mathcal{NL}(X, Y)$, $B \in \text{Lip}(X, Y)$, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$
 $A_{\lambda B} \stackrel{\text{def}}{=} A - \lambda B$, где $\lambda \in K$.

Множество $\rho_B(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda \in K : A_{\lambda B} \in \mathcal{NL}_i(X, Y), A_{\lambda B}^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]\}$ мы будем называть резольвентным множеством оператора A относительно оператора B .

Пусть $\lambda \in \rho_B(A)$. Тогда оператор $R(\lambda; A; B) \stackrel{\text{def}}{=} A_{\lambda B}^{-1}$ мы будем называть резольвентой оператора A относительно оператора B . Множество $\sigma_B(A) = K \setminus \rho_B(A)$

мы будем называть спектром оператора A относительно оператора B .

Замечание 10. Из теоремы 7 в [1] и следствия 2 резольвентное множество $\rho_B(A)$ оператора A относительно оператора B открыто и, следовательно, спектр $\sigma_B(A)$ оператора A относительно оператора B замкнут в K .

Следующим простым утверждением мы воспользуемся ниже:

Лемма 1. Пусть X, Y - нормированные пространства. $B \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$ и $B^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$. Тогда $-B \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$, $(-B)^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$ и $\alpha_{(-B)^{-1}} = \alpha_B^{-1}$.

Лемма 2. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A, B \in \text{Lip}(X, Y)$, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, $B \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$ и $B^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$. Тогда $\sigma_B(A)$ ограниченное множество и $|\lambda| \leq \alpha_A \psi(B^{-1}) \quad \forall \lambda \in \sigma_B(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда $\lambda^{-1}A \in \text{Lip}(X, Y)$ и $\alpha_{\lambda^{-1}A} = |\lambda|^{-1} \alpha_A$. Поэтому в силу замечания 7 и леммы 1, если $\alpha_A \psi(B^{-1}) < |\lambda|$, то $(\lambda^{-1}A - B) \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$ и $(\lambda^{-1}A - B)^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$. Отсюда получаем заключение теоремы.

Замечание 11. В линейном случае для ограниченного оператора A из теоремы 12 мы получаем, что $|\lambda| \leq \|A\| \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

Теорема 13. Пусть X, Y - нормированные пространства. $A, B \in \text{Lip}(X, Y)$, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, $B \in \mathcal{NL}_i(X, Y)$ и $B^{-1} \in \text{Lip}[Y, X]$. Тогда $\psi(R(\lambda; A; B)) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Доказательство. Применяя следствие 1 данной работы и теорему 7 в [1] к оператору $\lambda^{-1}A - B$ и оператору $-B$, получаем, что $\psi((\lambda^{-1}A - B)^{-1}) \leq \psi((-B)^{-1}) + \frac{(1 + \psi((-B)^{-1}))^2 \alpha_{\lambda^{-1}A}}{1 - (1 + \psi((-B)^{-1})) \alpha_{\lambda^{-1}A}} \quad (3)$

Непосредственно проверяется, что $a_{\lambda^{-1}} = \lambda^{-1} a_{\lambda}$. Поэтому в силу оценки (3) получаем, что $\psi(R(\lambda; A; B)) = |\lambda|^{-1} \psi((\lambda^{-1} A - B)^{-1}) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$

Теорема 14. Пусть X, Y - банаховы пространства. $A \in \mathcal{M}(X, Y)$
 $B \in \text{Lip}(X, Y)$, $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$ и $\rho_B(A) \neq \emptyset$. Тогда $G(A) = \overline{G(A)}$

Доказательство. Пусть $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq \mathcal{D}(A)$, $x_n \rightarrow x$, $Ax_n \rightarrow y$.
 Покажем, что $x \in \mathcal{D}(A)$ и $Ax = y$. Положим $(A - \lambda B)x_n = z_n$ $n \in \omega$, где $\lambda \in \rho_B(A)$. Тогда в силу непрерывности оператора B и полноты пространства Y последовательность $z_n \rightarrow z \in Y$. Отсюда $x_n = R(\lambda; A; B)z_n \rightarrow R(\lambda; A; B)z$, следовательно, $R(\lambda; A; B)z = x$, поэтому $x \in \mathcal{D}(A - \lambda B) = \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$. Отсюда в силу непрерывности оператора B последовательность $z_n = Ax_n - \lambda Bx_n \rightarrow y - \lambda Bx$, следовательно, $x = (A - \lambda B)^{-1}(y - \lambda Bx)$. Отсюда $Ax - \lambda Bx = y - \lambda Bx$ и, следовательно, $Ax = y$.

Замечание 12. Теорема 14 в качестве частного случая дает известный результат о замкнутости графика линейного оператора с непустым резольвентным множеством.

Теорема 15. Пусть X - нормированное пространство, Y - банахово пространство; $A, A_2 \in \mathcal{M}(X, Y)$, $B \in \text{Lip}(X, Y)$; Γ - компактное подмножество резольвентного множества $\rho_B(A_2)$. Тогда существует $\delta \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\Gamma \subseteq \rho_B(A_1)$, если $\hat{\varphi}(A_1, A_2) < \delta$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Gamma \subseteq \rho_B(A_2)$. Тогда в силу следствия 1 $\lambda \in \rho_B(A_1)$, если $\hat{\varphi}(A_1 - \lambda B, A_2 - \lambda B) < (1 + \psi(R(\lambda; A_2; B)))^{-1}$. Но, согласно теореме 6, последнее условие выполняется, если $2(1 + |\lambda|^2 \|B\|^2) \hat{\varphi}(A_1, A_2) < (1 + \psi(R(\lambda; A_2; B)))^{-1}$.

В силу теоремы 7 в [1] и замечания 9 функция $\psi(R(\lambda; A_2; B))$ непрерывно зависит от λ . Отсюда $\min_{\lambda \in \Gamma} 2(1 + |\lambda|^2 \|B\|^2) (1 + \psi(R(\lambda; A_2; B)))^{-1} = \delta > 0$. Поэтому $\Gamma \subseteq \rho_B(A_1)$, если $\hat{\varphi}(A_1, A_2) < \delta$.

Замечание 13. Теорема 15 дает нелинейный аналог теоремы IV.3.1 в [2] о полунепрерывности спектра сверху.

Замечание 14. Если $A_1 = A_2 + A$, где $A \in \text{Lip}(X, Y)$, то теорему 14 можно уточнить, а именно: в силу замечания 7 $\Gamma \subseteq \rho_B(A_1)$, если $\alpha_A < \min_{\lambda \in \Gamma} (\psi(R(\lambda; A_2; B)))^{-1}$. Если, кроме того, $A_2 \in \text{Lip}(X, Y)$, $B \in \mathcal{M}(X, Y)$, $B^{-1} \in \text{Lip}(Y, X)$, то Γ может быть любым замкнутым (не обязательно ограниченным) подмножеством в $\rho_B(A_1)$; в этом случае $(\psi(R(\lambda; A_2; B)))^{-1}$ имеет положительный минимум на Γ , так как из теоремы 13 $\psi(R(\lambda; A_2; B)) \rightarrow 0$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Замечание 15. Теоремы 14 и 15 дают в случае банаховых

пространств X и Y устойчивость, в смысле нелинейного аналога раствора, замкнутости графика нелинейного оператора с непустым резольвентным множеством относительно оператора из $LCC[X, Y]$

Теорема 16. Пусть X - нормированное пространство. Y - банахово пространство. $A \in \mathcal{N}(X, Y)$, $B \in LC(X, Y)$ Тогда для любых $A_0 \in L(X, Y)$, $B_0 \in LCC[X, Y]$, $\lambda_0 \in \rho_B(A_0)$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\lambda \in \rho_B(A)$ и $\varphi(R(\lambda; A; B) - R(\lambda_0; A_0; B_0)) < \varepsilon$, если $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\widehat{\varphi}(A, A_0) < \delta$ и $\widehat{\varphi}(B, B_0) < \delta$

Доказательство. Пусть $A_0 \in L(X, Y)$, $B_0 \in LCC[X, Y]$, $\lambda_0 \in \rho_B(A_0)$ и $\varepsilon > 0$. Из следствия 3 вытекает, что, если $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1 < (1 + \|B_0\|)^{-1} (1 + \|R(\lambda_0; A_0; B_0)\|)^{-1}$, то $\lambda \in \rho_B(A_0)$. Поэтому из теоремы 7 в [1] и следствия 3 вытекает, что, если $\delta_2 \in (0, \delta_1]$ и $\delta_2 < \frac{\varepsilon}{\xi} (1 + \|R(\lambda_0; A_0; B_0)\|)^{-1} (1 + \frac{\varepsilon}{\xi} + \|R(\lambda_0; A_0; B_0)\|)^{-1}$, то $\|R(\lambda; A_0; B_0) - R(\lambda_0; A_0; B_0)\| < \frac{\varepsilon}{\xi}$ (4)

Из следствия 3 в [1] вытекает, что, если $B \in LCC(X, Y)$ и $\widehat{\varphi}(B, B_0) < \delta_3 < (1 + \|B_0\|)^{-1}$, то $B \in LCC[X, Y]$ и $\|B - B_0\| < \frac{(1 + \|B_0\|)^2 \delta_3}{1 - (1 + \|B_0\|) \delta_3}$. Поэтому в силу теоремы 7 в [1], теоремы 6 и следствия 3 получаем, что, если $\delta_4 < \delta_3 (1 + \|B_0\|)^{-1} (1 + \delta_3 + \|B_0\|)^{-1}$ и $\delta_4 < (1 + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1} (1 + |\lambda|)^{-2} (1 + |\lambda| + \|B_0\|)^{-1}$, то $\lambda \in \rho_B(A_0)$, если $\widehat{\varphi}(B, B_0) < \delta_4$. Из следствия 3 вытекает, что, если $\delta_5 \in (0, \delta_4]$, $\delta_5 < \frac{\varepsilon}{\xi} (1 + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1} (1 + \frac{\varepsilon}{\xi} + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1}$ и $\widehat{\varphi}(B, B_0) < \delta_5$, то $\|R(\lambda; A_0; B) - R(\lambda; A_0; B_0)\| < \frac{\varepsilon}{\xi}$ (5)

Из теоремы 6 и следствия 1 вытекает, что, если $\delta_6 < \xi^{-1} (1 + |\lambda|^2 + \|B_0\|^2)^{-1} (1 + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1}$ и $\widehat{\varphi}(A, A_0) < \delta_6$, то $\lambda \in \rho_B(A)$. Пусть $\delta_7 \in (0, \delta_6]$, $\delta_7 < \frac{\varepsilon}{\xi} (1 + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1} (1 + \frac{\varepsilon}{\xi} + \|R(\lambda; A_0; B_0)\|)^{-1}$, $\widehat{\varphi}(A, A_0) < \delta_7$, тогда в силу следствия 1 $\varphi(R(\lambda; A; B) - R(\lambda; A_0; B)) < \frac{\varepsilon}{\xi}$ (6)

Отсюда, учитывая оценки (4), (5) и (6) получаем, что $\lambda \in \rho_B(A)$ и $\varphi(R(\lambda; A; B) - R(\lambda_0; A_0; B_0)) \leq \varphi(R(\lambda; A; B) - R(\lambda; A_0; B)) + \|R(\lambda; A_0; B) - R(\lambda; A_0; B_0)\| + \|R(\lambda; A_0; B_0) - R(\lambda_0; A_0; B_0)\| < \frac{\varepsilon}{\xi} + \frac{\varepsilon}{\xi} + \frac{\varepsilon}{\xi} = \varepsilon$

если $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $\widehat{\varphi}(A, A_0) < \delta$ и $\widehat{\varphi}(B, B_0) < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_5, \delta_7)$

Замечание 16. Теорема 16 дает нелинейный аналог теоремы IV.3.15 в [2].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М.А. Гольдману за внимание к работе.

Литература

1. Вейлер Е.Л. Об одном нелинейном аналоге раствора: Наст. сб. 16-27.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972.
3. Ортега Дж. Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1976.

Поступила 30 сентября 1976 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРА ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ,
СОХРАНЯЮЩИХ ЛИНЕЙНОСТЬ И ЗАМКНУТОСТЬ

Н.А.Дергунова

Рижский политехнический институт

В статьях [2-3] установлена устойчивость ряда свойств линейного замкнутого оператора A с замкнутой областью значений $R(A)$; при этом в качестве возмущений операторов берутся малые по норме и коммутирующие с A линейные операторы B .

В настоящей работе рассматривается случай, когда возмущающий линейный оператор B необязательно непрерывен, но обладает тем свойством, что оператор $A+B$ замкнут; кроме этого - требования к операторам A и B предъявляются и другие, более слабые, чем в [2-3].

В дальнейшем используются обозначения и некоторые результаты статей [2-3] и книги [1]. Дополнительно введем следующие обозначения: $B_{\overline{R(A)}}$ и $B_{M(A)}$ - сужения оператора B на множества $\overline{R(A)}$ и $M(A)$ соответственно.

Всюду далее рассматриваемый оператор A - линейный замкнутый оператор с замкнутой областью значений $R(A) = \overline{R(A)}$, действующий в банаховом пространстве X . для краткости формулировок теорем занумеруем используемые в них предпосылки:

- 1) $N(A) \subseteq M(A)$;
- 2) B - линейный оператор, коммутирующий с A , и такой, что оператор $A+B$ замкнут;
- 3) существует линейный непрерывный оператор проектирования Q_A пространства X на $R(A)$;
- 4) B - линейный оператор, коммутирующий с A , и такой, что операторы $A+B$ и $A+Q_A B$ замкнуты;
- 5) B - линейный оператор, коммутирующий с A , и такой, что операторы $A+B$ и $P_A B$ замкнуты;
- 6) оператор $B_{\overline{R(A)}}$ ограничен;
- 7) $\|B_{\overline{R(A)}}\| \leq \varepsilon < C_A$ и $\delta(A+B, A) \leq \varepsilon$;
- 8) $\|B_{\overline{R(A)}}\| \leq \varepsilon < (C_A \|Q_A\|)^{-1}$ и $\delta(A+B, A) \leq \varepsilon$;
- 9) оператор $B_{M(A)}$ ограничен;
- 10) $\|B_{M(A)}\| \leq \varepsilon < C_A^{-1}$ и $\delta(A+B, A) \leq \varepsilon$;
- 11) существует линейный непрерывный оператор проекти-

рования P_A пространства X на $N(A)$;

12) $\gamma(A) < \infty$;

13) $\delta(A+B, A) \leq \varepsilon$;

14) $\|B_{\mathcal{R}}\| \leq \varepsilon < (C_n \|I_n\|)^{-1}$ и $\delta(A+B, A) < \varepsilon$;

15) $\|B_{\mathcal{R}}\| \leq \varepsilon < (C_n \|I_n\|)^{-1}$ и $\delta^2(A+B, A) < \varepsilon$;

Рассмотрим операторы, введенные в статье 2 :

$$S(B_{\mathcal{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{\mathcal{R}}^n \hat{A}; \quad T(B_{\mathcal{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A} B_{\mathcal{R}})^n; \quad U(B_{\mathcal{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A} G_A B_{\mathcal{R}})^n; \quad S(B_{\mathcal{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_{\mathcal{R}}^n \hat{A}; \quad T(B_{\mathcal{R}}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A} B_{\mathcal{R}})^n$$

Определения операторов $S(B_{\mathcal{R}})$ и $T(B_{\mathcal{R}})$ корректны, если выполнены условия 1), 2), 6), 7); определение оператора $U(B_{\mathcal{R}})$ корректно при выполнении предпосылок 1)-3), 6), 8); а при выполнении условий 1), 2), 9), 10) справедливы равенства $\mathcal{M}(A) = \mathcal{R}(S(B_{\mathcal{R}}))$ и $\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(T(B_{\mathcal{R}}))$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2), 6), 7). Тогда

a) $\delta(N(A), N(A+B)) \leq \varepsilon C_n (1 - \varepsilon C_n)^{-1}$; б) $\delta^2(N(A+B), N(A)) \leq \varepsilon (1 + C_n)$;

в) $N(A+B) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(S_N(B_{\mathcal{R}}))) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(T_N(B_{\mathcal{R}})))$;

г) $N(A+B) \subseteq \mathcal{M}(A+B)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 в 2.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 3), 4), 13). Тогда

$$\delta(A + Q_n B, A) \leq \|Q_n\|^2 \delta(A+B, A) \leq \|Q_n\|^2 \varepsilon$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{R}(A + Q_n B)$ и $\|u(A + Q_n B)u\| = 1$.

Рассмотрим элемент $\{u(A+B)u\}$ графика $G(A+B)$ оператора $A+B$ с нормой $\|u(A+B)u\| = \tau$. Покажем, что $\tau \leq \|Q_n\|$. Предположим противное, т.е. что $\tau > \|Q_n\|$. Тогда, т.к. $\|Q_n\| \geq 1$, получаем:

$$1 = \|u\|^2 + \|(A + Q_n B)u\|^2 = (\|u\|^2 + \|(A+B)u\|^2) + (\|(A + Q_n B)u\| - \|(A+B)u\|)^2 \geq \tau^2 + (\|(A + Q_n B)u\| - \|(A+B)u\|)^2 > \|Q_n\|^2 + \|Q_n - I\| \|u\| \|(A + Q_n B)u\| + \|(A+B)u\|^2 > 1$$

Следовательно, $\tau \leq \|Q_n\|$. Требуемое неравенство вытекает из следующих соотношений: $\delta(A + Q_n B, A) = \delta(Q_n(A+B), G_n A) =$

$$\sup_{\|u(A + Q_n B)u\| \in G(A + Q_n B)} \inf_{\|x(A+B)x\| \in G(A)} (\|u - x\|^2 + \|Q_n(A+B)u - Ax\|)^2 \leq \|Q_n\| \cdot \tau$$

$$\sup_{\|u(A + Q_n B)u\| \in G(A + Q_n B)} \inf_{\|x(A+B)x\| \in G(A)} (\|u - x\|^2 + \|Q_n(A+B)u - Ax\|)^2 \leq \|Q_n\|^2 \delta^2(A+B, A) \leq \|Q_n\|^2 \varepsilon$$

*Пункт б) был доказан Е.Л.Бейлером в его дипломной работе.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 3), 4), 6), 8). Тогда

а) $N(A+Q_n B) = \mathcal{L}(R(U_N(B_{37})))$;

б) $N(A+B) = N(A+Q_n B)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $\|Q_n(A+Q_n B)\| \leq \|Q_n\| \varepsilon$, а это в свою очередь влечет, согласно п.б) теоремы 1, малость раствора $\delta(N(A+Q_n B), N(A))$. Учитывая это, равенство а)

можно доказать подобно п.в) теоремы 1; равенство б) следует из а), п.в) теоремы 1 и очевидного равенства $T_N(B_{37}) = U_N(B_{37})$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1), 2), 9), 10). Тогда

$$\mathcal{Y}N(A) \subseteq \mathcal{Y}N(A+B).$$

Доказательство. Если в доказательстве п.7 теоремы 1 статьи [6] заменить оператор $S(B)$ оператором $S(B_{37})$ то получим доказательство нашего утверждения.

Теорема 4. Пусть выполнены предпосылки 2), 11), 13). Тогда

а) оператор P_n устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между $N(A+B)$ и $N(A)$;

б) существует линейный непрерывный оператор проектирования P_{A+B} пространства X на $N(A+B)$ такой, что $R(I-P_n) = R(I-P_{A+B})$

Доказательство. а) Рассмотрим величину $\delta(y - y(N(A), N(P_n))) = \frac{\text{dist}(y, N(P_n))}{\text{dist}(y, N(A))}$

(см. [1] определение 1У, 4.1).

Так как $X = N(A) \oplus N(P_n)$, то $y(N(A), N(P_n)) > 0$ (см. теорему 1У, 4.2 в [1]).

Если $\varepsilon > 0$ выбрать таким, что $\varepsilon < \frac{\delta}{(2+\delta)(1+c_n)}$, то из п.б) теоремы 1 и леммы 1У, 4.29 в [1] будет следовать, что

$$X = N(A+B) \oplus N(P_n)$$

Теперь докажем, что P_n отображает $N(A+B)$ на все $N(A)$. Действительно, $(\forall y \in N(A)) (\exists z \in N(A+B)) (\exists x \in N(P_n)) : (y = z+x)$;

следовательно, $z = y-x$ и $P_n z = P_n(y-x) = P_n y - P_n x = y$, т.е. $P_n z = y$.

В силу дивергентности $N(A+B)$ и $N(P_n)$ это отображение взаимно однозначно, а поскольку $N(A+B)$ и $N(A)$ - замкнутые подпространства банахова пространства X , оно и взаимно непрерывно.

б) Это утверждение следует из равенства предыдущего пункта.

Теорема 5. Пусть выполнены предпосылки 1), 2), 6), 7), 11).

Тогда

$$N(A+B) \subseteq \mathcal{Y}N(A+B).$$

* Не путать с $\mathcal{Y}(A)$, фигурирующей в предпосылке 12),

Доказательство. При существовании оператора P_A оператор \hat{A} можно сделать линейным ограниченным, определив его равенством $\hat{A} = (A)_{R(A) \cap N(B)}$, что в свою очередь влечет линейность оператора $S_N(B_{\hat{A}})$. Из равенства $\mathcal{L}(R(S_N(B_{\hat{A}}))) = R(S_N(B_{\hat{A}}))$ и п.в) теоремы 1 получаем, что $R(S_N(B_{\hat{A}})) = N(A+B)$. Требуемое включение следует из равенств, приведенных в п.2 теоремы 1 статьи [6], в которых оператор B следует заменить оператором $B_{\hat{A}}$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия 5), 6), 12), 14).

Тогда $\mathcal{N}(A+B) \subset \mathcal{N}(A)$.

Теорема 7. Пусть выполнены предпосылки 5), 6), 12), 14).

Тогда $\dim N'(A+B) \leq \dim N'(A)$.

Теорема 8. Пусть выполнены условия 5), 6), 12), 15).

Тогда $\dim \mathcal{N}'(A+B) \leq \dim \mathcal{N}'(A)$.

Доказательства теорем 6, 7 и 8 сходны с доказательствами теорем 1 и 2 статьи [3]; используемое в них равенство $N(A+\Pi_A B) = \mathcal{L}(R(W(B_{\hat{A}})))$ устанавливается аналогично равенству а) теоремы 2 при выполнении предпосылок 5), 6), 12) и 14); а неравенство $\chi(A+\Pi_A B) \leq \chi(A)$, которое необходимо при доказательстве теоремы 7 устанавливается ниже (лемма 3). В доказательстве теоремы 8 используется результат теоремы 3, которая справедлива и при $0 < \chi(A) < \infty$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия 15). Тогда: а) $R(A) \cap \mathcal{N}(A) = R(A_{\hat{A}}) \cap \mathcal{N}(A)$; б) $\chi(A_{\hat{A}}) = \chi(A)$.

Доказательство. а) Возьмем произвольный элемент $y \in R(A) \cap \mathcal{N}(A)$, тогда $x = \hat{A}y$ - один из его прообразов. Т.к. \hat{A} (при любом его выборе) удовлетворяет условию $\hat{A}(R(A) \cap \mathcal{N}(A)) \subset \mathcal{N}(A)$, то $x \in \mathcal{N}(A) \cap R(A) = \mathcal{N}$, т.е. $x \in \mathcal{D}(A_{\hat{A}}) = \mathcal{N}$ и $Ax = A_{\hat{A}}x$. Таким образом, уравнение $A_{\hat{A}}x = y$ разрешимо $\forall y \in R(A) \cap \mathcal{N}(A)$, а т.к. $R(A_{\hat{A}}) \subset R(A)$, то $R(A) \cap \mathcal{N}(A) = R(A_{\hat{A}}) \cap \mathcal{N}(A)$. Пункт б) легко следует из пункта а), т.к. $\mathcal{N}(A_{\hat{A}}) = \mathcal{N}(A)$.

Лемма 3. Пусть выполняются условия 5), 6), 12), 14).

Тогда $\chi(A + \Pi_A B) \leq \chi(A)$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $(A + \Pi_A B)_{\hat{A}} = \hat{A} + \Pi_A B_{\hat{A}}$, т.к. $\mathcal{N}(A + \Pi_A B) \subset \mathcal{N}(A)$, что доказывается аналогично теореме 6, то $\mathcal{N}((A + \Pi_A B)_{\hat{A}}) = \mathcal{N}(A + \Pi_A B)$ и $\mathcal{N}((A + \Pi_A B)_{\hat{A}}) \subset \mathcal{N}(A_{\hat{A}})$. далее, учитывая непрерывность и малость оператора $\Pi_A B_{\hat{A}}$,

а также справедливость включения $\Pi_{\mathcal{A}} B_{\overline{\mathcal{A}}}(\overline{\mathcal{A}}) \subseteq R(A_{\overline{\mathcal{A}}}) = R(\mathcal{A})$ получим, что $R(A_{\overline{\mathcal{A}}}) = R(A_{\overline{\mathcal{A}}} + \Pi_{\mathcal{A}} B_{\overline{\mathcal{A}}}) = R((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}})$.

Таким образом, из включения $R(A_{\overline{\mathcal{A}}}) + \mathcal{Y}((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}}) \subseteq R(A_{\overline{\mathcal{A}}} + \mathcal{Y}(A_{\overline{\mathcal{A}}}))$ и равенства $R(A_{\overline{\mathcal{A}}}) = R((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}})$ следует, что $\mathcal{Y}((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}}) \subseteq \mathcal{Y}(A_{\overline{\mathcal{A}}})$.

Но $\mathcal{Y}(A + \Pi_{\mathcal{A}} B) \subseteq \mathcal{Y}((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}})$, т.к. $(A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}}$ - такое сужение оператора $A + \Pi_{\mathcal{A}} B$, при котором $\mathcal{Y}((A + \Pi_{\mathcal{A}} B)_{\overline{\mathcal{A}}}) = \mathcal{Y}(A + \Pi_{\mathcal{A}} B)$, а $\mathcal{Y}(A_{\overline{\mathcal{A}}}) = \mathcal{Y}(A)$ (см. лемму 2). Значит, $\mathcal{Y}(A + \Pi_{\mathcal{A}} B) \subseteq \mathcal{Y}(A)$.

Литература

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972. 740 с.
2. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об устойчивости некоторых свойств линейного замкнутого оператора. - ДАН, 1973, т. 209, № 4, с. 769-772
3. М.А. Гольдман, Крачковский С.Н. Поведение пространства нуль-элементов с конечномерным выступом на риссовском ядре при возмущении операторов. - ДАН, 1975, т. 221, № 3, с. 501-506
4. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. О некоторых возмущениях замкнутого линейного оператора. - ДАН, 1964, т. 158, № 3, с. 527-531.
5. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. О произведениях, отпегнях и сужениях гомоморфизмов. - ДАН, 1968, т. 181, № 5, с. 1038-1041.
6. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Об одном возмущении линейного замкнутого оператора с замкнутой областью значений. - ДАН, 1971, т. 197, № 6, с. 1243-1247.
7. Гольдман М.А., Крачковский С.Н. Операторы, нули которых образуют конечномерный выступ на риссовском ядре. - ДАН, 1974, т. 215, № 6, с. 281-284.

Поступила 26 апреля 1976 года.

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МЕТРИК
НА БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

В.Г.Евстигнеев

Московский институт управления

Показано, что, следуя известному способу пополнений метрических пространств ([1], стр. 357), можно, при определенных условиях, распространить метрику данного метрического пространства на его (тем самым, метризуемое) бикомпактное расширение. Для этого вместо фундаментальных последовательностей надо рассмотреть функциональные направленности и в основу рассуждений положить метод направленностей построения бикомпактных расширений топологических пространств ([2], [3], [3]).
Библи. 8 назв.

Введем следующие обозначения. (X, ρ) — вполне ограниченное метрическое пространство. Y — бикомпактное расширение (X, ρ) . S — класс сужений на X всех непрерывных на Y функций.

Теорема. Если класс S различает замкнутые в (X, ρ) множества, отстоящие друг от друга на положительное расстояние, то метрику ρ можно (единственным образом) продолжить с X до псевдометрики ρ' на Y , порождающей на множестве Y топологию меньше заданной.

Отождествляя в Y точки с нулевым ρ' -расстоянием, получим фактор-пространство Y/ρ' со следующими свойствами: Y/ρ' есть метризуемое бикомпактное расширение (X, ρ) с метрикой, совпадающей на X с ρ . Y/ρ' гомеоморфно, при неподвижных точках X , пополнению пространства (X, ρ) .

Доказательство. Допустим, что выполнено условие теоремы и построим бикомпакт Y_0 , совпадающий с данным бикомпактным расширением Y , следующим образом.

Направленность $\{x_\alpha\} \subset X$ назовем S направленностью, если $\forall f \in S \exists \lim f(x_\alpha)$ и S направленности $\{x_\alpha\}, \{x_\beta\}$ отождествим, если $\forall f \in S: \lim f(x_\alpha) = \lim f(x_\beta)$. В множестве Y_0 всех S направленностей в X введем топологию, относительно которой направленность $\{y_\alpha\} \subset Y_0$ сходится к точке $y \in Y_0$ (где $y_\alpha = \{x_\alpha, \rho\}$, $\rho \in P_{x_\alpha}$ и $y = \{x_\alpha\}$ суть S направленности) тогда и только тогда, когда $\forall f \in S \exists \lim_{\alpha} \lim_{\rho} f(x_\alpha, \rho) = \lim_{\rho} f(x_\rho)$. Согласно ([3], стр. 57)

$Y_5 = Y$, причём каждая точка $x \in X$ отождествляется с сходящейся к ней в (X, ρ) направленностью.

Если в (X, ρ) найдется не фундаментальная S направленность $\{x_n\}$, то из $\{x_n\}$ можно извлечь (пользуясь вполне ограниченностью метрики ρ) две фундаментальные поднаправленности, лежащие, соответственно, в замкнутых сферах S_1, S_2 таких, что $\rho(S_1, S_2) > 0$. Поэтому для функции f из S , различающей S_1 и S_2 , направленность $\{f(x_n)\}$ расходится. Следовательно, каждая S направленность в (X, ρ) фундаментальна. Отсюда вытекает: 1. Каждая равномерно непрерывная на (X, ρ) функция g имеет своим непрерывным продолжением на Y_5 функцию $g'(y) = \lim g(x_n)$, $y = (x_n)$. 2. Функция $\rho'(y_1, y_2) = \lim_{(x_n, \rho)} \rho(x_n, x'_n)$; $y_1 = \{x_n\}$; $y_2 = \{x'_n\}$ есть псевдометрика на Y_5 (считаем, что $(\alpha', \beta') \geq (\alpha, \beta)$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \geq \alpha$, $\beta' \geq \beta$).

Покажем, что тождественное отображение бикompактного расширения Y_5 ($Y_5 = Y$) на псевдометрическое пространство (Y_5, ρ') непрерывно. Для этого рассмотрим направленность $\{y_n\}$, сходящуюся к y в Y_5 (где $y_n = (x_n, \rho)$, $\rho \in B_n$ и $y = (x_n)$ - S направленности). Согласно ([3], стр. 56), $\{x_n\} = \{x_n, \psi(\alpha)\}$, где $\psi \in \Pi B_n$ и $(\alpha', \psi') \geq (\alpha, \psi)$ тогда и только тогда, когда $\alpha' \geq \alpha$ и $\psi'(\alpha) \geq \psi(\alpha)$ для всех α . Из фундаментальности $\{x_n, \psi(\alpha)\}$, для $\varepsilon > 0$ найдем индекс (α_0, ψ_0) такой, что при любых $(\alpha, \psi) \geq (\alpha_0, \psi_0)$, $(\alpha', \psi') \geq (\alpha, \psi)$ имеем: $\rho(x_n, \psi(\alpha_n), x_n, \psi'(\alpha_n)) < \varepsilon$. Следовательно, для фиксированного $\alpha' \geq \alpha_0$ находим при $(\alpha, \psi) \geq (\alpha_0, \psi_0)$: $\rho(x_n, \psi(\alpha), x_n, \psi') < \varepsilon$ для всех $\beta \in B_{\alpha'}$, $\beta \geq \psi_0(\alpha')$. Поэтому $\rho'(y_n, y_{\alpha'}) < \varepsilon$ при $\alpha' \geq \alpha_0$. Таким образом, из сходимости $\{y_n\}$ к y_0 в бикompакте Y_5 вытекает, что $\lim_{y_n} \rho'(y_0, y_n) = 0$.

Далее, образуем фактор-множество Y_5/ρ' , элементами которого являются множества $\rho'[y] = \{y \in Y_5 : \rho'(y, y_0) = c\}$, $y_0 \in Y_5$. На Y_5/ρ' можно определить две топологии: фактор-топологию, порождаемую проекцией бикompактного расширения Y_5 на Y_5/ρ' , и метрическую топологию, порождаемую псевдометрикой ρ' (за расстояние между множествами $\rho'[y_1]$ и $\rho'[y_2]$, $y_1, y_2 \in Y_5$ принимаем число $\rho'(y_0, y_1)$) ([5], стр. 168). Учитывая непрерывность тождественного отображения бикompактного расширения Y_5 на псевдометрическое пространство (Y_5, ρ') и теоремы в ([5], стр. 163, 191), легко видеть, что указанные на Y_5/ρ' топологии совпадают.

Обозначим через U (UCS) класс всех равномерно непрерывных на (X, ρ) функций. Класс U : содержит константы на X ; вместе с двумя функциями содержит их сумму и произведение; замкнут в пространстве всех непрерывных и ограниченных на (X, ρ) функций, наделенном топологией равномерной сходимости на X ; различает всякое замкнутое в (X, ρ) множество от не принадлежащих ему точек. Из ([3], стр. 57) находим поэтому, что пространство U_u всех U направленностей в X (построенное по образцу U_s) есть бикompактное расширение X , а класс U состоит из сужений на X всех непрерывных на U_u функций. Остается показать, что пространства U_s/ρ' и U_u гомеоморфны, при неподвижных точках X .

Для S направленностей $\{x_n\}, \{x_p\}$ в X имеем: $\lim_{n,p} \rho(x_n, x_p) = 0 \Leftrightarrow (\forall g \in U: \lim g(x_n) = \lim g(x_p))$ Следовательно: можно корректно построить 1-1 отображение $i: U_s/\rho' \rightarrow U_u$, полагая $\forall y = \{x_n\} \in U_s: i(\rho'(y)) = \{x_n\}$. Покажем, что i есть отображение на.

Пусть $\{x_p\} \in U_u$. Из $\{x_p\}$ выделим универсальную поднаправленность $\{x_n\}$ ([5], стр. 116). Согласно ([4], стр. 41), $\{x_n\}$ есть S направленность. Поэтому для $y = \{x_n\} \in U_s$ находим $i(\rho'(y)) = \{x_p\}$.

Докажем непрерывность i . Для этого построим отображение $m: U_s \rightarrow U_u$, полагая, $\forall y = \{x_p\} \in U_s: m(y) = \{x_p\}$. Если направленность $\{y_n\}$ сходится в U_s к точке y , то непосредственно из определения топологий в U_s, U_u (UCS) получаем, что $\{m(y_n)\}$ сходится в U_u к точке $m(y)$. Следовательно, m непрерывно.

Пусть p - проекция U_s на U_s/ρ' . Тогда $\forall y = \{x_n\}: m(y) = i(\rho'(y)) = i(p(y))$ Следовательно, $\forall A \subset U_u: m^{-1}(A) = p^{-1}(i^{-1}(A))$. Если A открыто в U_u , то $p^{-1}(i^{-1}(A))$ открыто в U_s , $i^{-1}(A)$ открыто в U_s/ρ' .

Наконец, совпадение U_s/ρ' с пополнением (X, ρ) вытекает из того, что классы сужений на X всех функций, непрерывных на этих бикompактных расширениях, совпадают.

Замечание 1. Если, в условиях теоремы, предположить дополнительно, что каждая функция из S равномерно непрерывна на (X, ρ) , то ρ' есть метрика на $U_s = U$. Как указал автору В.И. Пономарев, этот результат может быть получен также из теорем о близостях на топологических пространствах ([6], [7]).

Замечание 2. Если $\beta(X)$ расширение Стоуна-Чеха пространства (X, ρ) , то непересекающиеся замкнутые в (X, ρ) множества имеют непересекающиеся замыкания в $\beta(X)$. Из теоремы находим, что метрика ρ может быть (единственным образом) продолжена по непрерывности с X до псевдометрики ρ' на $\beta(X)$ и соответствующее фактор-пространство $\beta(X)/\rho'$ есть бикompактное расширение (X, ρ) с метрикой, совпадающей на X с ρ .

Литература

1. Александров П.С. Введение в общую теорию множеств и функций. М., Гостехиздат, 1948. 411 с.
2. Гольдман М.А. Об одном признаке компактности топологических пространств. Латвийский математический ежегодник, т.8. Рига, "Зинатне", 1970, т.8. с.42-66.
3. Евстигнеев В.Г. Бикompактность и меры. - "Функциональный анализ и его приложения", 1970, т.4, вып. 3, с.51-60.
4. Евстигнеев В.Г. Новый метод направленностей построения бикompактных расширений топологических пространств. Автореф. дис.канд. М., 1972.
5. Дж.Келли. Общая топология. М., "Наука", 1968. 383 с.
6. Смирнов Ю.М. Обобщение теоремы Вейерштрасса-Стоуна на пространства близости. - Чехосл.матем.ж., 1960, #10, с.493-500.
7. Смирнов Ю.М. О пространствах близости. - Матем.сб., 1952, # 31, с. 543-574.
8. Шостак А.П. E -компактные расширения топологических пространств. - "Функциональный анализ и его приложения", 1974, вып.1, # 8, с. 62-68.

Поступила 24 января 1976 года.

СЛУЧАЙНЫЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ

Т. А. Жданок

Латвийский государственный университет

Борастающая потребность в вероятностных методах в прикладной математике привела в последние десятилетия к возникновению самостоятельной математической дисциплины — вероятностного функционального анализа. Хотя многие воцникающие в этой теории понятия и результаты непосредственно переносятся с детерминированного случая, введение случайности приводит к различным иным проблемам. Например, встает вопрос об измеримости решений случайных операторных уравнений, изучение которых составляет центральную проблему теории. В работе М. Нашеда и Х. Салехи [5] измеримость наилучшего приближенного решения случайного операторного уравнения исследуется с помощью привлечения понятия псевдообратного оператора к случайному линейному оператору. Псевдообратные операторы имеют различные приложения в анализе. В частности, с их помощью можно записывать интерполяционные и сглаживающие сплайн-функции (см., например, [2], стр. 198). Поэтому полученные в [5] теоремы об измеримости псевдообратного отображения к случайному линейному ограниченному оператору и позволили нам в настоящей работе ввести в рассмотрение случайные сглаживающие и интерполяционные сплайн-функции и сформулировать теоремы их существования и единственности.

Напомним основные понятия, необходимые для дальнейшего.

Пусть (Ω, \mathcal{B}) — измеримое пространство и P — топологическое пространство. Функция p пространства Ω в пространство P называется случайной величиной, если p -образ каждого борелевского множества из P принадлежит \mathcal{B} -алгебре \mathcal{B} .

Пусть (Ω, \mathcal{B}) — измеримое пространство, P — топологическое пространство и X — произвольное множество. Отображение f пространства $\Omega \times X$ в пространство P называется случайным оператором, если для каждого фиксированного $x \in X$ функция $f(\cdot, x)$ является случайной величиной.

Пусть (Ω, \mathcal{B}) — измеримое пространство, P — топологическое векторное пространство и X — линейное пространство.

Случайный оператор f на $\Omega \times X$, принимающий значения из P , называется случайным линейным оператором, если для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ функция $f(\omega, \cdot)$ является линейным оператором.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ — вероятностное пространство, X и P — топологические пространства. Случайный оператор f на $\Omega \times X$ со значениями из P , называется п.в. (почти всюду) непрерывным случайным оператором, если почти для всех $\omega \in \Omega$ функция $f(\omega, \cdot)$ непрерывна.

Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ называется полным, если каждое подмножество измеримого множества меры нуль принадлежит σ -алгебре \mathcal{B} .

Символом $\mathcal{N}_{f(\omega)}$ мы будем обозначать ядро случайного линейного оператора f при данном фиксированном $\omega \in \Omega$; символом $\mathcal{R}_{f(\omega)}$ — область значений f при данном $\omega \in \Omega$.

Дадим определения случайных сглаживающей и интерполяционной сплайн-функций. Соответствующие понятия для детерминированного случая имеются, например, в [2], с. 185, 189.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ — вероятностное пространство, X, Y, Z — гильбертовы пространства. Пусть t — п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$, принимающий значения из Y ; a — п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$, принимающий значения из Z (в отличие от [2], мы не предполагаем, что t и a являются отображениями на). Пусть задана случайная величина z на вероятностном пространстве Ω со значениями в Z .

Определение 1. Функция σ , определенная на пространстве Ω и принимающая значения в X , называется сглаживающей сплайн-функцией, соответствующей t, a, z и некоторой константе $\varrho > 0$, если для почти всех $\omega \in \Omega$ выполняется равенство:

$$\|t(\omega, \sigma(\omega))\|_Y^2 + \varrho \|a(\omega, \sigma(\omega)) - z(\omega)\|_Z^2 =$$

$$= \min_{x \in \Omega \times X} (\|t(\omega, x)\|_Y^2 + \varrho \|a(\omega, x) - z(\omega)\|_Z^2). \quad (1)$$

Если функция σ , удовлетворяющая равенству (1), измерима, т.е. является случайной величиной, то σ называется случайной сглаживающей сплайн-функцией.

Предположим, что случайная величина z удовлетворяет условию: п.в. $z(\omega) \in \mathcal{R}_{a(\omega)} + \mathcal{R}_{a(\omega)}^\perp$ и обозначим

$$\mathcal{J}_z \equiv \{x: \Omega \rightarrow X \mid \text{п.в. } a(\omega, x(\omega)) = z(\omega)\},$$

где $\mathfrak{Z}(\omega)$ есть ортогональная проекция $\mathfrak{Z}(\omega)$ на $\mathcal{R}_{\alpha(\omega)}$.

Определение 2. Функция \mathcal{B} , определенная на пространстве Ω и принимающая значения в X , называется интерполяционной сплайн-функцией, соответствующей t , α и \mathfrak{Z} , если для почти всех $\omega \in \Omega$ выполняется равенство:

$$\|t(\omega, \mathcal{B}(\omega))\|_Y = \min_{x \in \mathcal{D}_x} \|t(\omega, x(\omega))\|_Y. \quad (2)$$

Если функция \mathcal{B} , удовлетворяющая равенству (2), измерима, то \mathcal{B} называется случайной интерполяционной сплайн-функцией.

Для доказательства теорем существования и единственности случайных сглаживающей и интерполяционной сплайн-функций нам понадобится уже упоминавшаяся теорема Нашеда и Салехи об измеримости псевдообратного оператора к случайному линейному п.в. ограниченному оператору. Напомним определение псевдообратного оператора.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ - вероятностное пространство, X и P - гильбертовы пространства, f - случайный линейный п.в. ограниченный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в P . Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$, такого, что $f(\omega, \cdot)$ ограничен, определим обычным способом псевдообратный оператор $f^+(\omega, \cdot)$ к $f(\omega, \cdot)$ на множестве $\mathcal{D}_{f^+(\omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{f(\omega)} + \mathcal{R}_{f^+(\omega)}$.

А именно, для произвольного элемента $p \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)} \in P$ найдем его ортогональную проекцию p_1 на $\mathcal{R}_{f(\omega)}$, выберем в замкнутом множестве $\mathcal{D}_{\omega, p} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(\omega, x) = p_1\}$ элемент x_1 минимальной нормы: $\|x_1\|_X = \min_{x \in \mathcal{D}_{\omega, p}} \|x\|_X$ и положим $f^+(\omega, p) \stackrel{\text{def}}{=} x_1$.

Так введенное отображение f^+ можно считать определенным на некоторой части пространства $\Omega \times P$ и принимающим значения из пространства X .

Теорема Нашеда и Салехи ([5], стр. 636).

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ - полное вероятностное пространство, X и P - сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть f - п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в P . Пусть для всех $\omega \in \Omega$, для которых $f(\omega, \cdot)$ ограничен, $f^+(\omega, \cdot)$ обозначает псевдообратный оператор, а $f^*(\omega, \cdot)$ - сопряженный оператор к $f(\omega, \cdot)$.

Тогда: а) почти для всех $\omega \in \Omega$ для любого α , $0 < \alpha < 2 / \|f(\omega)\|^2$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha (I - \alpha f^*(\omega) \circ f(\omega))^k (f^*(\omega, p))$

сходится к $f^+(\omega, p)$ для каждого $p \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)}$;

- б) f^+ является случайным линейным оператором из $\Omega \times P$ в X ;
 в) для каждой случайной величины p на Ω со значениями в P ,
 такой, что п.в. $p(\omega) \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)}$ отображение $f^+(\omega, p(\omega))$ является случайной величиной со значениями в X .

С помощью этой теоремы мы можем установить теперь следующий результат:

Теорема 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ - полное вероятностное пространство, X, Y, Z - сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть t - п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в Y , a - п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в Z . Тогда для любой случайной величины x на Ω со значениями в X , такой, что п.в. $x(\omega) \in \mathcal{A}(\omega) \cap \mathcal{N}_{t(\omega)} + \mathcal{A}(\omega) \cap \mathcal{N}_{a(\omega)}$, существует случайная сглаживающая сплайн-функция $b(\omega)$, отвечающая t, a, x и $\varphi > 0$. Если п.в. $\mathcal{N}_{t(\omega)} \cap \mathcal{N}_{a(\omega)} = \{0\}$, то такая функция единственна.

Доказательство. Следуя аналогичной конструкции для детерминированного случая (см. [2] , с. 199) , мы введем вспомогательный случайный оператор f так, что его псевдообратный оператор и будет случайной сглаживающей сплайн-функцией, соответствующей t, a, x и $\varphi > 0$.

Рассмотрим гильбертово пространство $P \cong Y \times Z$ со скалярным произведением $\langle p_1, p_2 \rangle \cong \langle y_1, y_2 \rangle_Y + \varphi \langle z_1, z_2 \rangle_Z$, где $p_1 = (y_1, z_1)$, $p_2 = (y_2, z_2)$, $y_1, y_2 \in Y$, $z_1, z_2 \in Z$. Определим отображение f на $\Omega \times X$, принимающее значения из P , равенством: $f(\omega, x) \cong (t(\omega, x), a(\omega, x))$. Нетрудно проверить, что так определенный оператор f является линейным оператором для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$. Далее, так как п.в. $\|t(\omega, x)\|_Y \leq C_1(\omega) \|x\|_X$ и $\|a(\omega, x)\|_Z \leq C_2(\omega) \|x\|_X$, то п.в. $\|f(\omega, x)\|_P = (\|t(\omega, x)\|_Y^2 + \varphi \|a(\omega, x)\|_Z^2)^{1/2} \leq \|x\|_X (C_1^2(\omega) + \varphi C_2^2(\omega))^{1/2}$, и, значит, f является п.в. ограниченным оператором на $\Omega \times X$ со значениями в P .

Фиксируем $x \in X$. Покажем, что $f(\cdot, x)$ является случайной величиной на Ω со значениями в P . Нетрудно проследить, что доказательство этого факта без изменений переносится с доказательства аналогичного результата в [1] , с. 391, где "составное" отображение действует на метрическом про-

пространстве с борелевской \mathcal{B} -алгеброй, а не на произвольном измеримом пространстве (Ω, \mathcal{B}) , как в нашем случае.

Итак, f является линейным п.в. ограниченным случайным оператором на $\Omega \times X$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве P . По теореме Нашеда-Салахи, пункт в), отображение $f^+(\omega, p(\omega))$ будет случайной величиной для любой случайной величины p на Ω со значениями в P , такой, что п.в. $p(\omega) \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)} = \mathcal{R}_{f(\omega)} + \mathcal{R}_{f(\omega)}^+$. Положим $p_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} (0, x(\omega))$. Так как и $x(\omega)$, и функция, тождественно равная нулю пространству Y на Ω , являются случайными величинами на Ω , то для доказательства измеримости p_0 мы можем, как и ранее, сослаться на [1], с. 891.

Из предположения, что п.в. $x(\omega) \in \mathcal{A}(\{\omega\} \times \mathcal{N}_1(\omega)) + \mathcal{A}(\{\omega\} \times \mathcal{N}_2(\omega))^\perp$, легко следует, что п.в. $p_0(\omega) \in \mathcal{R}_{f(\omega)} + \mathcal{R}_{f(\omega)}^\perp$. Обозначим $\mathcal{G}_0(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} f^+(\omega, p_0(\omega))$ и покажем, что \mathcal{G}_0 является случайной сглаживающей сплайн-функцией, т.е. удовлетворяет уравнению (1).

Из определения f следует, что $\|f(\omega, x(\omega)) - p_0(\omega)\|_p^2 = \|t(\omega, x(\omega)), \alpha(\omega, x(\omega)) - x(\omega)\|_p^2 = \|t(\omega, x(\omega))\|_y^2 + \xi \|\alpha(\omega, x(\omega)) - x(\omega)\|_z^2$ для любой функции x на Ω со значениями в X и для любого $\omega \in \Omega$.

Поэтому уравнение (1) можно записать в виде:

$$\text{п.в. } \|f(\omega, \mathcal{G}(\omega)) - p_0(\omega)\|_p = \min_{x: \Omega \rightarrow X} \|f(\omega, x(\omega)) - p_0(\omega)\|_p \quad (1a)$$

Очевидно, этому уравнению удовлетворяют те и только те функции \mathcal{G} на Ω со значениями в X , которые принадлежат множеству $\mathcal{J}_p \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathcal{G}: \Omega \rightarrow X \mid \text{п.в. } f(\omega, \mathcal{G}(\omega)) = p_0(\omega)\}$, где $p_0(\omega)$ есть ортогональная проекция $p_0(\omega)$ на множество $\mathcal{R}_{f(\omega)}$. Значит, \mathcal{J}_p есть множество сглаживающих сплайн-функций, соответствующих t, α, x и $\xi > 0$. Нетрудно проверить, используя определение псевдообратного отображения, что функция $\mathcal{G}_0(\omega) = f^+(\omega, p_0(\omega))$ принадлежит множеству \mathcal{J}_p , причем п.в. $\|\mathcal{G}_0(\omega)\|_x = \min_{\mathcal{G} \in \mathcal{J}_p} \|\mathcal{G}(\omega)\|_x$.

Значит, $\mathcal{G}_0(\omega)$ является случайной сглаживающей сплайн-функцией, соответствующей t, α, x и $\xi > 0$.

Далее, условие: п.в. $\mathcal{N}_\alpha(\omega) \cap \mathcal{N}_x(\omega) = \{0\}$, равносильно, очевидно, условию: п.в. $\mathcal{N}_f(\omega) = \{0\}$. В этом случае множество \mathcal{J}_p состоит из единственной функции \mathcal{G} (отображение $f(\omega, \cdot)$ взаимно однозначно для п.в. $\omega \in \Omega$), и этой функцией

очевидно, будет $\mathcal{B}_0(\omega) = f^+(\omega, p_0(\omega))$.

Следствие. В предположении теоремы 1 при условии, что п.в. множество $\mathcal{M}_{a(\omega)} + \mathcal{M}_{b(\omega)}$ замкнуто, сглаживающая случайная сплайн-функция существует для любой случайной величины z на Ω со значениями в Z .

Доказательство. Нетрудно видеть, что условие замкнутости множества $\mathcal{M}_{a(\omega)} + \mathcal{M}_{b(\omega)}$ равносильно замкнутости множества $a(\omega) \times \mathcal{M}_{a(\omega)}$ (см. [2], стр. 137). Но тогда $Z = a(\omega) \times \mathcal{M}_{a(\omega)} \oplus a(\omega) \times \mathcal{M}_{b(\omega)}$ почти для всех $\omega \in \Omega$.

Обратимся теперь к случаю интерполяционной сплайн-функции. Для доказательства теоремы существования и единственности нам понадобится следующая лемма, являющаяся в некотором смысле обобщением теоремы Нашеда и Салехи.

Лемма. Пусть $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ — полное вероятностное пространство, X и P — сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть в X наряду с исходным скалярным произведением определена система скалярных произведений $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$, п.в. эквивалентных данному, причем для любых $x, y \in X$ функция $\langle x, y \rangle_\omega$ от $\omega \in \Omega$ измерима. Гильбертово пространство X со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ обозначим X_ω . Пусть f — п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в P .

Пусть п.в. $\tilde{f}^+(\omega, \cdot)$ обозначает псевдообратный оператор к оператору $f(\omega, \cdot)$, рассматриваемому как отображение на X_ω со значениями в P . Пусть п.в. $\tilde{f}^*(\omega, \cdot)$ обозначает сопряженный оператор к $f(\omega, \cdot)$ на X_ω .

Тогда: а) почти для всех $\omega \in \Omega$ для любого α , $0 < \alpha < 2/\|f\|_\omega^2$, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha (I - \alpha \tilde{f}^*(\omega) \circ f(\omega))^k (\tilde{f}^*(\omega, p))$ сходится в X_ω к $\tilde{f}^+(\omega, p)$ для каждого $p \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)}$;

б) \tilde{f}^+ является случайным линейным оператором из $\Omega \times P$ в X ;

в) для каждой случайной величины p на Ω со значениями в P , такой, что п.в. $p(\omega) \in \mathcal{D}_{f^+(\omega)}$, отображение $\tilde{f}^+(\omega, p(\omega))$ является случайной величиной со значениями в X .

Доказательство. а) В [6], с. 343, доказывается для детерминированного случая сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha (I - \alpha \tilde{f}^* f)^k (f^* p)$ к $f^+(p)$, $p \in \mathcal{D}_{f^+}$, где $0 < \alpha < 2/\|f\|^2$. Фиксируя каждый раз $\omega_0 \in \Omega$ и норму $\|\cdot\|_{\omega_0}$, соответствующую скалярному

произведению $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ в X , а затем применяя сформулированный выше результат, мы получаем требуемое утверждение.

б) Так как, очевидно, $D_{\tilde{f}^*(\omega)} = D_{f^*(\omega)} = \mathcal{R}_{f^*(\omega)} + \mathcal{R}_{\tilde{f}^*(\omega)}$, мы можем воспользоваться следующим, доказанным в [4], с. 626, фактом: для любого фиксированного $p \in P$ множество $\{\omega \mid p \in D_{\tilde{f}^*(\omega)}\}$ измеримо.

С другой стороны, так как исходная норма пространства X эквивалентна норме $\|\cdot\|_\omega$ почти для всех $\omega \in \Omega$, то из а) следует, что почти для всех $\omega \in \Omega$ для любого α , $0 < \alpha < 2/\|f(\omega)\|_\omega^2$, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha (I - \alpha \tilde{f}^*(\omega) \circ f(\omega))^n (\tilde{f}^*(\omega, p))$ сходится к $\tilde{f}^*(\omega, p)$ в норме пространства X для каждого $p \in D_{\tilde{f}^*(\omega)}$. Нетрудно показать, несколько изменив доказательство теоремы об измеримости сопряженного оператора к случайному линейному п.в. ограниченному оператору в [4], с. 130, что $\tilde{f}^*(\omega, \cdot)$ является случайным оператором

Из этих двух утверждений с использованием известной теоремы сходимости случайных величин (см. [3], с. 87) следует, что для каждого фиксированного $p \in P$ отображение $\tilde{f}^*(\cdot, p)$ является случайной величиной на Ω со значениями в X .

в) Этот факт является следствием предыдущего пункта и теоремы 1.1. из [5], с. 683.

Теорема 2. Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ — полное вероятностное пространство, X, Y, Z — сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть t — п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в Y , α — п.в. ограниченный случайный линейный оператор на $\Omega \times X$ со значениями в Z . Пусть п.в. $\mathcal{N}_{\alpha(\omega)} \cap \mathcal{N}_{t(\omega)} = \{0\}$ и п.в. множество $\mathcal{N}_{\alpha(\omega)} + \mathcal{N}_{t(\omega)}$ замкнуто. Тогда для любой случайной величины z на Ω со значениями в Z , такой, что п.в. $z(\omega) \in \mathcal{R}_{\alpha(\omega)} + \mathcal{R}_{t(\omega)}$, существует единственная случайная интерполяционная сплайн-функция, соответствующая t , α и z .

Доказательство. Для каждого фиксированного $\omega \in \Omega$ рассмотрим на векторном пространстве X билинейную форму:

$$\langle x_1, x_2 \rangle_\omega \equiv \langle t(\omega, x_1), t(\omega, x_2) \rangle_Y + \langle \alpha(\omega, x_1), \alpha(\omega, x_2) \rangle_Z, \quad x_1, x_2 \in X.$$

Так как п.в. $\mathcal{N}_{\alpha(\omega)} \cap \mathcal{N}_{t(\omega)} = \{0\}$, то $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ является скалярным произведением почти для всех $\omega \in \Omega$. Соответствующей этому скалярному произведению нормой будет:

$$\|x\|_\omega = (\|t(\omega, x)\|_Y^2 + \|\alpha(\omega, x)\|_Z^2)^{1/2}, \quad \omega \in \Omega, \quad x \in X.$$

Векторное пространство X со скалярным произведением

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ и соответствующей нормой $\| \cdot \|_\omega$ обозначим X_ω .

Введем в рассмотрение, как и в доказательстве теоремы 1, отображение f на $\Omega \times X$ в гильбертово пространство $P = Y \times Z$: $f(\omega, x) \equiv (t(\omega, x), a(\omega, x))$, где скалярное произведение в P определено по формуле: $\langle p_1, p_2 \rangle_P \equiv \langle y_1, y_2 \rangle_Y + \langle z_1, z_2 \rangle_Z$, $p_1 = (y_1, z_1) \in P$, $p_2 = (y_2, z_2) \in P$.

Как было показано, f является п.в. ограниченным линейным случайным оператором: $\|f(\omega, x)\|_P \leq c(\omega) \|x\|_X$ почти для всех $\omega \in \Omega$. Но, согласно определению нормы в P , п.в.

$$\|f(\omega, x)\|_P = (\|t(\omega, x)\|_Y^2 + \|a(\omega, x)\|_Z^2)^{1/2} = \|x\|_\omega.$$

Поэтому почти для всех $\omega \in \Omega$ имеем: $\|x\|_\omega \leq c(\omega) \|x\|_X$.

С другой стороны, нетрудно показать, что условие замкнутости п.в. множества $\mathcal{N}_{a(\omega)} + \mathcal{N}_{t(\omega)}$ равносильно замкнутости п.в. множества $\mathcal{R}_{f(\omega)}$ (см. [2], с.192). Кроме того, f является почти для всех $\omega \in \Omega$ взаимно однозначным отображением, так как п.в. $\mathcal{N}_{a(\omega)} \cap \mathcal{N}_{t(\omega)} = \{0\}$. Тогда по теореме Банаха об обратном операторе существует такая константа $C, C > 0$, $C_1 = C_1(\omega)$, что для любого $x \in X$ п.в. $\|x\|_X \leq C_1(\omega) \|f(\omega, x)\|_P$.

Но так как $\|f(\omega, x)\|_P = \|x\|_\omega$, мы получаем неравенство:

$$\|x\|_X \leq C_1(\omega) \|x\|_\omega.$$

Таким образом, п.в. $\|x\|_X / C_1(\omega) \leq \|x\|_\omega \leq C(\omega) \|x\|_X$, и, значит, п.в. нормы $\| \cdot \|_\omega$ эквивалентны норме пространства X .

Заметим, что, наоборот, условие: п.в. $\mathcal{N}_{a(\omega)} \cap \mathcal{N}_{t(\omega)} = \{0\}$ легко следует из неравенства: п.в. $\|x\|_X \leq C_1(\omega) \|x\|_\omega$.

Применим теперь к случайному оператору a предыдущую лемму. В силу пункта в), для каждой случайной величины z на Ω со значениями в Z , такой, что п.в. $z(\omega) \in \mathcal{D}_{a(\omega)} = \mathcal{R}_{a(\omega)} + \mathcal{R}_{a(\omega)}^\perp$, отображение $b(\omega) \equiv \hat{a}^*(\omega, z(\omega))$ является случайной величиной со значениями в X .

Покажем, что так определенная функция $b(\omega)$ является случайной интерполяционной сплайн-функцией.

Нетрудно проверить, используя определение псевдообратного отображения, что почти для всех $\omega \in \Omega$

$$\|b(\omega)\|_\omega = \min_{x \in \mathcal{J}_z} \|x(\omega)\|_\omega,$$

где $\mathcal{J}_z \equiv \{x: \Omega \rightarrow X \mid \text{п.в. } a(\omega, x(\omega)) = z(\omega)\}$,

а $\mathcal{J}_z(\omega)$ есть ортогональная проекция $z(\omega)$ на множество $\mathcal{R}_{a(\omega)}$.

Но, для любого элемента $x \in \mathcal{J}_z$, в том числе и для функции b , имеем: $\|x(\omega)\|_\omega = (\|t(\omega, x(\omega))\|_Y^2 + \|a(\omega, x(\omega))\|_Z^2)^{1/2} =$

$$= (\|t(\omega, x(\omega))\|_Y^2 + \|z(\omega)\|_Z^2)^{1/2}.$$

Поэтому равенство $\|\sigma(\omega)\|_\omega = \min_{x \in J_2} \|t(\omega, x(\omega))\|_Y$ можно переписать в виде: $\|t(\omega, \sigma(\omega))\|_Y = \min_{x \in J_2} \|t(\omega, x(\omega))\|_Y$. Но это и есть равенство (2) и, значит, $\tilde{\alpha}^*(\omega, z(\omega))$ является случайной интерполяционной сплайн-функцией, соответствующей t , α и z .

Покажем, что эта сплайн-функция единственна. Пусть $\sigma_1(\omega)$ и $\sigma_2(\omega)$ таковы, что п.в. $t(\omega, \sigma_1(\omega)) = t(\omega, \sigma_2(\omega))$ и

$$\|t(\omega, \sigma_i(\omega))\|_Y = \min_{x \in J_2} \|t(\omega, x(\omega))\|_Y, \quad i = 1, 2.$$

Тогда п.в. $\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega) \in N_{\beta(\omega)}$. С другой стороны, так как $\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega) \in J_z$, то п.в. $\sigma_1(\omega) - \sigma_2(\omega) \in N_{\alpha(\omega)}$. Но так как п.в. $N_{\alpha(\omega)} \cap N_{\beta(\omega)} = \{0\}$, то $\sigma_1(\omega) = \sigma_2(\omega)$ почти для всех $\omega \in \Omega$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту М.А.Гольдману за постановку задачи и внимание к данной работе.

Литература

1. Куратовский К. Топология, т.1, М., "Мир", 1966, 594 с.
2. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М., "Мир", 1975.
3. Hanš O. Generalized random variables. - Trans. First Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1957, p.61-103.
4. Hanš O. Inverse and adjoint transforms of linear bounded random transforms. - Ibid., p. 127-133.
5. Nashed M.Z. and Salechi H. Measurability of Generalized Inverses. - "SIAM J. Appl. Math.", 1973, vol.25, No.4, p. 681-692.
6. Nashed M.Z. Generalized Inverses, normal solvability, and iteration for singular operator equations. - "Non-linear Functional, Analysis and Applications", L.B.Rall, ed., Academic Press, New York, 1971, p.311-359.

Поступила 26 января 1977 года.

КОМПАКТНАЯ СХОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ,
ЗАДАННЫХ НА ПОДПРОСТРАНСТВАХ

В.И.Лабеев

Латвийский государственный университет

В статье С.Л.Соболева [3] было дано обобщение сходимости по норме для последовательности линейных вполне непрерывных отображений, получившее в статьях Г.М.Вайникко название компактной аппроксимации. Причем Г.М.Вайникко изучал свойства компактной аппроксимации в той общей ситуации когда области определения отображений, входящих в аппроксимационную схему, вообще говоря, не совпадают, а связаны дополнительными условиями. В этой общей ситуации многие свойства линейных отображений оказались неустойчивыми или для их устойчивости необходимы дополнительные предположения (так, например, в [1] и [2] при доказательстве верхней непрерывности спектра требуется дополнительное условие, касающееся остаточного спектра аппроксимируемого отображения.

Если же рассматривать компактную аппроксимацию в случае совпадения областей определения отображений, входящих в аппроксимационную схему (как это делалось в статьях [4], [5], [6], [7]), то тогда многие свойства линейных непрерывных и линейных замкнутых отображений оказываются устойчивыми. В ряде статей такая сходимость называется секвенциально компактной аппроксимацией и определяется следующим образом.

Пусть X и Y - нормированные пространства над полем действительных или комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X \rightarrow Y$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное отображение $f: X \rightarrow Y$ если а) для любого вектора $x \in X$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n x = f x$;

б) для любой ограниченной последовательности векторов $(\alpha_n) \subset X$ последовательность векторов $(f_n \alpha_n - f \alpha_n)$ относительно компактна в пространстве X .

В предлагаемой статье мы рассмотрим сходимость, определенную для отображений, заданных на подпространствах, близость которых понимается в смысле с.к.а.

§ 1. Компактная сходимость подпространств банахова пространства.

Определение 1. Пусть X — банахово пространство над полем действительных или комплексных чисел. Будем говорить, что последовательность подпространств $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ пространства X компактно сходится к некоторому подпространству $X_0 \subset X$, если существует такое банахово пространство Z и существует такое множество отображений $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, что для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ g_k является биекцией Z на X_k и последовательность линейных непрерывных отображений $j_n \circ g_n: Z \rightarrow X$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $j_{X_0} \circ g_0: Z \rightarrow X$. В этой ситуации для краткости будем писать, что $X_n \xrightarrow{k.c.} X_0$. Отображения $\{g_k\}$ будем называть связующими отображениями.

Предложение 1. Если X_0 — банахово и $X_n \xrightarrow{k.c.} X_0$, то существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ X_n также является банаховым пространством.

Доказательство. Из полноты пространств X_0 и Z следует, что $g_0 \in \text{Isom}(Z, X_0)$.

Значит, если рассматривать естественное вложение $j_n = j_{X_n}$ пространства X_0 в X , то отображение $j_n \circ g_0$ будет линейной непрерывной относительно открытой инъекцией пространства Z в X . Так как $j_n \circ g_n \xrightarrow{k.c.} j_n \circ g_0$, то в силу теоремы 15 из [5] существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $j_n \circ g_n$ является линейной непрерывной относительно открытой инъекцией пространства Z в пространство X . Откуда и из полноты пространств Z и X следует замкнутость и полнота пространства X_n .

Замечание. В теореме 15 из [5] доказано большее: существует такое число $\alpha > 0$, что

$$(\forall z \in Z)(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\|g_n z\| = \|j_n \circ g_n z\| \geq \alpha \|z\|).$$

Пример 1. Отметим, что из полноты всех подпространств X_n не следует, вообще говоря, полнота пространства X_0 .

Действительно, пусть $X = Z = \ell_2$, $X_n = \ell_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
и $X_0 = \{x \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} |k(x|e_{2k})|^2 < +\infty\}$,

где $\forall k \in \mathbb{N} \quad e_k = (\delta_{m,k})_{m \in \mathbb{N}}$
 $\delta_{m,k}$ — символ Кронекера.

Сределим линейную непрерывную биекцию $g_0: l_2 \rightarrow X_0$ и последовательность линейных непрерывных биекций $g_n: l_2 \rightarrow X_n$ следующим образом: $\forall x \in l_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g_n x = \sum_{k=1}^n (x | e_{2k-1}) e_{2k-1} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{k} (x | e_{2k}) e_{2k}$
 и $\forall x \in l_2 \quad g_0 x = \sum_{k=1}^{\infty} [(x | e_{2k-1}) e_{2k-1} + \frac{1}{k} (x | e_{2k}) e_{2k}]$.

Тогда не трудно убедиться в том, что последовательность линейных непрерывных отображений $g_n: l_2 \rightarrow X_n$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $g_0: l_2 \rightarrow X_0$. Поэтому последовательность подпространств $X_n = g_n l_2$ компактно сходится к подпространству X_0 . Однако $X_0 = g_0 l_2$ всюду плотное в X_0 не замкнутое пространство, несмотря на то, что для любого $n \in \mathbb{N} \quad X_n = l_2$.

Замечание. Если $\dim Z = +\infty$, то, как нетрудно убедиться $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \dim X_k = +\infty$,
 причем $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{card } X_k = \text{card } Z$.
 Если $\dim Z < +\infty$, то $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \dim Z = \dim X_k < +\infty$

§ 2. Компактная сходимость линейных отображений, заданных на подпространствах банахова пространства.

Определение 2. Пусть X и Y - банаховы пространства над полем действительных или комплексных чисел и последовательность подпространств X_n пространства X компактно сходится к подпространству $X_0 \subset X$ относительно последовательности связующих отображений $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ и пространства Z . Будем говорить, что последовательность линейных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$ и писать, что $f_n \xrightarrow{c.c.} f_0$,

если а) для любого вектора $z \in Z \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n z = f_0 g_0 z$;
 б) для любой ограниченной последовательности векторов (z_n) из пространства Z последовательность векторов $(f_n g_n z_n - f_0 g_0 z)$ относительно компактна в пространстве Y .

Замечание. Нетрудно заметить, что условия, приведенные в определении 2, означают, что $f_n g_n \xrightarrow{c.c.} f_0 g_0$.

Предложение 2. Если $f_n \xrightarrow{c.c.} f_0$, то $f_n \xrightarrow{c.c.} f_0$.
 Действительно, в этой ситуации достаточно положить $(Z = X) \& (\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad g_k \stackrel{\text{def}}{=} I_X)$

Предложение 3. Если последовательность линейных замк-

нутых отображений $f_n: X_n \subset X \rightarrow X$ сходится к линейному замкнутому отображению $f_0: X_0 \rightarrow X$ в обобщенном смысле и $\mathcal{S}(f_0) \neq \emptyset$ (см. [3], стр. 256), то $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f_0$.

Доказательство. В силу теоремы 2.25. из [3] существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $\mathcal{S}(f_n) \neq \emptyset$ причем если $\lambda_0 \in \mathcal{S}(f_0)$, то существует такое число $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_1$ $\lambda_0 \in \mathcal{S}(f_n)$, причем последовательность линейных непрерывных отображений $(\lambda_0 I - f_n)^{-1}: X_n \rightarrow X_n$ сходится к линейному непрерывному отображению $(\lambda_0 I - f_0)^{-1}: X_0 \rightarrow X_0$ по норме. Но из сходимости по норме, как известно, следует секвенциально компактная аппроксимация. Т.е.

$(\lambda_0 I - f_n)^{-1} \xrightarrow{с.к.а.} (\lambda_0 I - f_0)^{-1} \quad (*)$
 Отметим, что тогда $\lambda_0 (\lambda_0 I - f_n)^{-1} I \xrightarrow{с.к.а.} \lambda_0 (\lambda_0 I - f_0)^{-1} I$.

и из равенства $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\lambda_0 I - f_k) \circ (\lambda_0 I - f_n)^{-1} = I$ следует равенство: $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad f_k \circ (\lambda_0 I - f_n)^{-1} = (\lambda_0 I - f_k)^{-1} I$. Тогда справедливость предложения 3 следует из того, что для всех достаточно больших $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ отображения $(\lambda_0 I - f_k)^{-1}$ являются биекциями банахова пространства X на подпространства X_n , а последовательность линейных непрерывных отображений

$\lambda_0 (\lambda_0 I - f_n)^{-1} I$ секвенциально компактно аппроксимирует линейное непрерывное отображение $\lambda_0 (\lambda_0 I - f_0)^{-1} I$.

Замечание. Используя схему доказательства предложения 3, можно доказать более сильное утверждение:

Предложение 4. Пусть последовательность линейных замкнутых отображений $f_n: X_n \subset X \rightarrow Y$ сходится к линейному замкнутому отображению $f_0: X_0 \subset X \rightarrow Y$ в обобщенном смысле и отображение f_0 является биекцией X_0 на Y , причем f_0^{-1} является непрерывным отображением. Тогда $f_n \xrightarrow{с.к.а.} f_0$.

§ 3. Некоторые свойства компактной сходимости линейных отображений.

В дальнейшем, если это не будет оговорено особо, мы будем рассматривать компактную сходимость линейных отображений

*) Указанная запись не совсем корректна, т.к. области значений приводимых отображений, вообще говоря, не совпадают.

Но ввиду того, что все они являются подпространствами одного и того же пространства X мы, если это нужно, будем понимать с.к.а. отображений $f_n \circ (\lambda_0 I - f_n)^{-1}$ и $f_0 \circ (\lambda_0 I - f_0)^{-1}$ где f_n и f_0 - естественные вложения X_n и X_0 в X .

по отношению к связующим отображениям $\{g_k\} \subset \mathcal{M}\{f_n\}$ и по отношению к банахову пространству Z . Причем если в предложении или в теореме встречаются две последовательности линейных отображений, то их компактность и сходимость мы будем рассматривать по отношению к одной и той же системе связующих отображений и к одному и тому же пространству.

Предложение 5.

- а) $(f_n \xrightarrow{K, C} f_0) \Rightarrow (\forall \lambda \in K (=R, =C)) \lambda f_n \xrightarrow{K, C} \lambda f_0$,
 б) $(f_n \xrightarrow{K, C} f_0) \& (h_n \xrightarrow{K, C} h_0) \Rightarrow (f_n + h_n \xrightarrow{K, C} f_0 + h_0)$,
 в) $(f_n \xrightarrow{K, C} f_0) \& (h_n \xrightarrow{K, C} h_0 \in L(K, Y)) \Rightarrow (h_0 \circ f_n \xrightarrow{K, C} h_0 \circ f_0)$.

Доказательство.

- а) $(f_n \circ g_n \xrightarrow{K, C} f_0 \circ g_0) \Rightarrow (\forall \lambda \in K) (\lambda f_n) \circ g_n \xrightarrow{K, C} (\lambda f_0) \circ g_0$.
 б) $(f_n \circ g_n \xrightarrow{K, C} f_0 \circ g_0) \& (h_n \circ g_n \xrightarrow{K, C} h_0 \circ g_0) \Rightarrow ((f_n + h_n) \circ g_n \xrightarrow{K, C} (f_0 + h_0) \circ g_0)$.
 в) $(f_n \circ g_n \xrightarrow{K, C} f_0 \circ g_0) \& (h_n \xrightarrow{K, C} h_0) \Rightarrow ((h_n \circ f_n) \circ g_n \xrightarrow{K, C} (h_0 \circ f_0) \circ g_0)$.

Предложение 6. Пусть отображение g_0 относительно открыто

и последовательность линейных компактных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$. Тогда отображение f_0 также является компактным отображением.

Доказательство. В силу полноты пространства Y , того, что для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение $f_n \circ g_n: Z \rightarrow Y$ является компактным и того, что $f_n \circ g_n \xrightarrow{K, C} f_0 \circ g_0$ отображение $f_0 \circ g_0: Z \rightarrow Y$ также является компактным (см. [6] теорема 11). Из биективности и открытости отображения $g_0: Z \rightarrow X_0$ следует существование такого числа $\delta > 0$, что $\forall z \in Z \quad \|g_0 z\| \geq \delta \|z\|$. (1)

Пусть теперь U - произвольное ограниченное множество в пространстве X_0 . В силу неравенства (1) $g_0^{-1}(U)$ тоже является ограниченным множеством. Воспользуемся теперь компактностью отображения $f_0 \circ g_0$. Тогда множество $f_0(U) = f_0 \circ g_0(g_0^{-1}(U))$ будет являться относительно компактным в пространстве Y , т.е. компактность отображения f_0 доказана.

Предложение 7. Предположим, что отображение g_0 - открыто. Тогда для непрерывности отображения f_0 необходимо и достаточно существования таких чисел $n_0 \in \mathbb{N}$ и $a > 0$, что для всех $n \geq n_0$ отображения f_n являются непрерывными и

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\|f_n\| \leq a).$$

Доказательство. Необходимость. Если предположить противное, т.е. предположить существование такой подпоследова-

тельности (f_n) последовательности отображений (f_n) и такой последовательности векторов $(x_k) \subset X$, что

$$(\forall k \in \mathbb{N}) x_k \in X_{n_k} \cap S_X(0, 1) \& (\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} x_k\| = +\infty), \quad (2)$$

то из относительной открытости и инъективности линейного непрерывного отображения $f_k: Y_0$ следует существование таких чисел $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, что

$$(\forall z \in Z) (\forall k \in \mathbb{N}): (k \geq k_0) \Rightarrow (\|f_{n_k} \circ g_{n_k} z\| \geq \|g_{n_k} z\| / \delta) \quad (3)$$

Отсюда, в частности, следует, что если последовательность векторов $(z_k) \subset Z$ определить равенством: $\forall k \in \mathbb{N} \quad z_k = g_{n_k}^{-1} x_k$

(в силу биективности отображения g_{n_k} это определение однозначно), то $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|z_k\| \leq \frac{1}{\delta} \|g_{n_k} z_k\| = \frac{1}{\delta} \|x_k\| = \frac{1}{\delta}$.

Таким образом, последовательность векторов (z_k) является ограниченной и так как отображение $f_n \circ g_n$ непрерывно, то в силу условий (2) и (3) получаем следующее равенство:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} \circ g_{n_k} z_k - f_0 \circ g_0 z_k\| = +\infty,$$

которое противоречит относительной компактности последовательности векторов

Достаточность. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность векторов $(x_n) \subset X_0$, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_n\| = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n x_n\| = +\infty. \quad (4)$$

Далее, в силу биективности и открытости отображения g_0 существует такая единственная ограниченная последовательность векторов $(z_n) \subset Z$, что $\forall n \in \mathbb{N} \quad g_0 z_n = x_n$.

Так как для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N} \quad \|g_n\| \leq c$ (см. [5] теорема 3), а $\|f_n\| \leq a$, то

$$\|f_n \circ g_n z_n\| \leq \|f_n\| \cdot \|g_n\| \cdot \|z_n\| \leq ac \max_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\| < +\infty.$$

Тогда из последнего соотношения и из условия (4) следует равенство: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n \circ g_n z_n - f_0 \circ g_0 z_n\| = +\infty$,

которое противоречит относительной компактности векторов $(f_n \circ g_n z_n - f_0 \circ g_0 z_n)$.

§ 4. Устойчивость замкнутости области значений, устойчивость дефектных чисел и устойчивость индекса линейных непрерывных отображений при компактной сходимости.

Предложение 3. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к

линейному непрерывному отображению $f: X_0 \rightarrow Y$. Предположим, что отображение g_0 открыто, а f_0 - инъективное относительно открытое отображение. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n является относительно открытой инъекцией, причем

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) (\forall x_n \in X_n) (\|f_n x_n\| \geq \delta \|x_n\|, \delta = \text{const}).$$

Доказательство. Из относительной открытости отображения f_0 и из открытости отображения g_0 следует относительная открытость отображения $f_0 \circ g_0$. Так как $g_n \xrightarrow{c, c, q} g_0$ и $f_n \circ g_n \xrightarrow{c, c, q} f_0 \circ g_0$, то в силу теоремы 15 из [5] существуют такие числа $n \in \mathbb{N}$ и $d > 0$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$)

$$\forall z \in Z \quad \|f_n \circ g_n z\| \geq d \|z\|, \quad (5)$$

а из теоремы 3 из [5] следует существование такого числа $c > 0$, что

$$\forall z \in Z \quad \|g_n z\| \leq c \|z\| \quad (6)$$

Пусть вектор $x_n \in X_n$ ($n \geq n_0$) выбран произвольно. В силу биективности отображения g_n существует такой единственный вектор $z_n \in Z$, что $x_n = g_n z_n$. Воспользуемся теперь неравенствами (5) и (6) и получим нужное нам неравенство: $(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0)$
 $\|f_n x_n\| = \|f_n \circ g_n z_n\| \geq d \|z_n\| \geq \frac{d}{c} \|g_n z_n\| = \frac{d}{c} \|x_n\|.$

Следствие. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f: X_0 \rightarrow Y$. Предположим, что g_0 - открытое отображение, а f_0 - инъекция с замкнутой областью значений. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n является инъекцией с замкнутой областью значений.

Доказательство. Действительно, для линейного непрерывного отображения f в банаховом пространстве следующие два утверждения эквивалентны:

- A) f - инъекция с замкнутой областью значений;
- B) f - относительно открытая инъекция.

Предложение 9. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$. Предположим, что f_0 - отображение с замкнутой областью значений, $\dim \ker f_0 < +\infty$ и существует топологическое дополнение к $f_0 X_0$ в пространстве Y . Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех

$n \geq n_0$ область значений отображения f_n замкнута, существует топологическое дополнение к $f_n X_n$ в Y , $\dim \ker f_n < \infty$, причем $(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\dim \ker f_n \leq \dim \ker f_0)$.

Доказательство. Для отображения $f_0 \circ f_0$ и для последовательности отображений $f_n \circ f_n$ выполнены все условия теоремы 28 из [4]. Поэтому существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n \circ f_n$ имеет замкнутую область значений, которая имеет топологическое дополнение в пространстве Y , $\dim \ker f_n \circ f_n < \infty$, причем

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\dim \ker f_n \circ f_n \leq \dim \ker f_0 \circ f_0)$$

Тогда справедливость предложения 9 вытекает из равенств: $f_n \circ f_n Z = f_n X$; $\dim \ker f_n \circ f_n = \dim \ker f_n$.

Предложение 10. Пусть последовательность непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$. Предположим, что отображение f_0 открыто, а f_0 - отображение с замкнутой областью значений, конечномерным ядром и коядром, имеющим топологическое дополнение в X_0 . Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение f_n является отображением с замкнутой областью значений, с ядром, имеющим топологическое дополнение в X_n , и конечномерным коядром, причем

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\dim \text{coker } f_n \leq \dim \text{coker } f_0).$$

Доказательство. Рассмотрим ядро отображения $f_0 \circ f_0$. В силу биективности отображения f_0 справедливо следующее равенство: $\ker f_0 \circ f_0 = \{z \in Z \mid z = f_0^{-1} x, f x = 0, x \in X_0\}$.

Покажем теперь, что подпространство $\ker f_0 \circ f_0$ имеет топологическое дополнение в Z . Действительно, пусть μ есть линейный непрерывный проектор пространства X_0 в себя вдоль $\ker f_0$ (т.е. $\ker \mu = \ker f_0$). Покажем, что отображение $\varphi = f_0^{-1} \mu \circ f_0$ является линейным непрерывным проектором пространства Z вдоль $\ker f_0 \circ f_0$. Действительно, непрерывность φ следует из непрерывности μ и из принадлежности $f_0 \in \mathcal{L}(\text{dom } Z, X)$. Свойства проектора показываются следующей цепочкой равенств:

$$\varphi^2 = f_0^{-1} \mu \circ f_0 \circ f_0^{-1} \mu \circ f_0 = f_0^{-1} \mu \circ \mu \circ f_0 = \varphi.$$

Далее, пусть $z \in \ker f_0 \circ f_0$. Тогда $\varphi z \in \text{coker } f_0$ и поэтому

$$\mu(\varphi_0 z) = 0 \quad \text{Следовательно, } \varphi z = f_0^{-1} \mu \varphi_0 z = 0.$$

Обратно, если для некоторого вектора $z \in Z$ $g z = 0$, то $g_0^{-1} \circ \rho \circ g z = 0$. Так как $g_0^{-1} \in \text{Isom}(X_0, Z)$, то $\rho \circ g z = 0$. Поэтому $g_0 z \in \ker f_0$, а из последнего вытекает, что $z \in \ker f_0$. Отметим теперь справедливость равенства

$$\text{coker } f_0 \circ g_0 = \text{coker } f_0.$$

Поэтому мы можем воспользоваться теоремой 27 из [4], из которой следует существование такого числа $n \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $f_n \circ g_n$ является отображением с замкнутой областью значений, с ядром, имеющим топологическое дополнение, и конечномерным коядром, причем

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\dim \text{coker } f_n \circ g_n \leq \dim \text{coker } f_0) \quad (7)$$

Из равенства $f_n \circ g_n = f_n \circ g_n$ из неравенства (7) получаем замкнутость области значений отображения f_n , конечномерность коядра f_n и неравенство:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (\dim \text{coker } f_n \leq \dim \text{coker } f_0)$$

Для завершения доказательства осталось показать, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ существует топологическое дополнение к ядру отображения f_n . Пусть g_n - линейный непрерывный проеक्टर пространства Z вдоль $\ker f_0 \circ g_n$. Покажем теперь, что отображение $\rho_n = g_n \circ g_n^{-1} \circ g_n^{-1}$ является линейным непрерывным проектором пространства X_n вдоль $\ker f_n$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Действительно, в силу замечания 1 справедливо неравенство: $(\forall x \in X_n) \| \rho_n x \| = \| g_n \circ g_n^{-1} \circ g_n^{-1} x \| \leq \| g_n \| \cdot \| g_n^{-1} \| \cdot \frac{1}{\alpha} \| x \|$ для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Далее,

$$\rho_n^2 = g_n \circ g_n \circ g_n^{-1} \circ g_n \circ g_n^{-1} \circ g_n^{-1} = g_n \circ g_n \circ g_n^{-1} = g_n \circ g_n \circ g_n^{-1} = \rho_n.$$

Поэтому ρ_n - линейный непрерывный проектор. Нам осталось доказать справедливость следующего равенства: $\ker \rho_n = \ker f_n$.

Если $\rho_n x = 0$, то $g_n \circ g_n \circ g_n^{-1} x = 0$. В силу принадлежности $g_n \in \text{Isom}(X_n, Z)$ получаем, что $g_n \circ g_n^{-1} x = 0$. Следовательно, $g_n^{-1} x \in \ker f_n \circ g_n$ или $0 = f_n \circ g_n \circ g_n^{-1} x = f_n x$.

Обратно, если $f_n x = 0$, то $f_n \circ g_n \circ g_n^{-1} x = 0$. Поэтому $g_n^{-1} x \in \ker f_n \circ g_n$ значит, $g_n \circ g_n^{-1} x = 0$ или $\rho_n x = g_n \circ g_n \circ g_n^{-1} x = 0$.

Предложение 11. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$, имеющему замкнутую область значений, конечномерное ядро и конечномерно коядро. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$

отображение f_n имеет замкнутую область значений, конечномерное ядро и конечномерное коядро, причем

$$\dim \ker f_n \leq \dim \ker f_0 \quad \dim \operatorname{coyker} f_n \leq \dim \operatorname{coyker} f_0 \quad \operatorname{ind} f_n = \operatorname{ind} f_0$$

Для доказательства предложения 11 нужно воспользоваться результатом теоремы 26 из [4] и провести рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве предложений 9 и 10.

Предложение 12. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow Y$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow Y$. Предположим, что отображение $f_0 \in \operatorname{Isom}(X_0, Y)$. Тогда существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n \in \operatorname{Isom}(X_n, Y)$ существует такое число $d > 0$, что $(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \implies \|f_n^{-1}\| \leq d$ и $\int_{X_n} \circ f_n^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} \int_{X_0} \circ f_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Доказательство. Так как отображение f_0 - биекция, то $\dim \ker f_0 = 0$, $\dim \operatorname{coyker} f_0 = 0$. Поэтому в силу предложения 11 существует такое число $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_1$ отображение f_n также является биекцией.

Далее, из полноты пространства Y и из принадлежности $f_0 \in \operatorname{Isom}(X_0, Y)$ следует полнота пространства X_0 . Таким образом биективное отображение f_0 является изоморфизмом пространства Z на X_0 . Воспользуемся теперь предложением 8: существует такое число $n_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_2$ отображение f_n является относительно открытой инъекцией, причем

$$\forall x \in X_n \quad \|f_n x_n\| \geq \delta \|x_n\|, \quad (8)$$

Пусть теперь $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда для всех $n \geq n_0$ отображение $f_n \in \operatorname{Isom}(X_n, Y)$, причем в силу неравенства (8) для всех $n \geq n_0$

$$\|f_n^{-1}\| \leq \frac{1}{\delta} = d$$

Так как $f_0 \circ g_0 \in \operatorname{Isom}(Z, Y)$, то из теоремы 16 из [5]

$$(f_0 \circ g_0)^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} (f_0 \circ g_0)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, Z)$$

Поэтому

$$g_0^{-1} \circ f_0^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} g_0^{-1} \circ f_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, Z)$$

Так как

$$\int_{X_n} \circ f_n \xrightarrow{\text{с.к.а.}} \int_{X_0} \circ f_0 \in \mathcal{L}(Z, X)$$

и отображения

$\int_{X_n} \circ f_n$ и $g_0 \circ f_0$ непрерывны, то в силу предложения

5 из [5]

$$\int_{X_n} \circ f_n \circ g_0^{-1} \circ f_0^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} \int_{X_0} \circ f_0 \circ g_0^{-1} \circ f_0^{-1}$$

откуда следует, что

$$\int_{X_n} \circ f_n^{-1} \xrightarrow{\text{с.к.а.}} \int_{X_0} \circ f_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$$

Литература

1. Байнико Г.М. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. Тарту, ТГУ, 1970.
2. Вайнико Г.М. Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1969, т.9, № 4, с.739-761.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972.
4. Карклиньш И.В., Левченков В.С. Инвариантность индекса линейных гомоморфизмов в нормированных пространствах при секвенциально компактной аппроксимации. - Латвийский математический ежегодник, 1976, т.17.
5. Лабеев В.И. О некоторых свойствах секвенциально компактной аппроксимации линейных отображений в нормированных пространствах. - Уч. зап. ЛГУ им. П. Стучки, 1975, т.236, с.39-58.
6. Лабеев В.И. Устойчивость секвенциальной предкомпактности отображений в топологических векторных пространствах при секвенциально предкомпактной аппроксимации. - Уч. зап. ЛГУ им. П. Стучки, 1975, т.236, с.76-90.
7. Раковщик Л.С. Устойчивость индекса и полустойчивость дефектных чисел при компактной аппроксимации. - "Сибирский математический журнал", 1972, т.12, № 3, с.630-638.
8. Соболев С.Л. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. - Известия АН СССР, серия математика, 1958, т.20, № 4, с.413-436.

Поступила 26 февраля 1976 года.

УСТОЙЧИВОСТЬ СВОЙСТВ СПЕКТРА ЛИНЕЙНЫХ
НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ КОМПАКТНОЙ СХОДИМОСТИ

В. И. Лабеев
Латвийский государственный университет

В предлагаемой статье мы исследуем устойчивость свойств спектра линейных непрерывных отображений при компактной сходимости и получим результаты, аналогичные результатам, касающимся устойчивости свойств спектра при секвенциальной компактной аппроксимации (см. [2]). Основные определения, а также основные свойства компактной сходимости линейных непрерывных отображений даны в статье автора [3], которая также находится в настоящем сборнике и поэтому частые ссылки на эту статью не затруднят чтение предлагаемой работы.

Так как мы будем рассматривать отображения определенные на подпространстве некоторого банахова пространства и принимающие значения из этого пространства, то уточним определения, касающиеся спектральных свойств линейных отображений.

Определение 1. Пусть X_0 — замкнутое векторное подпространство банахова пространства X , $f: X_0 \rightarrow X$ — линейное непрерывное отображение. Число $\lambda \in K$ называется регулярным числом отображения f , если отображение $\lambda I - f$ является биекцией X_0 на X и обратное к нему $R(\lambda, f) = (\lambda I - f)^{-1}$ непрерывно. Множество всех регулярных чисел назовем резольвентным множеством и будем обозначать через $\mathcal{R}(f)$, а множество, дополнительное к множеству $\mathcal{R}(f)$ в поле скаляров K , назовем спектром и будем обозначать через $\sigma(f)$.

Предложение 1. Множество $\mathcal{R}(f)$ является открытым в поле скаляров K . Доказательство этого утверждения легко провести по схеме доказательства аналогичного утверждения в случае совпадения подпространства X_0 с пространством X .

Предложение 2. Если $X_0 \neq X$, то

$$\sup \{ |\lambda| : \lambda \in \mathcal{R}(f) \} < +\infty$$

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность чисел $(\lambda_n) \subset \mathcal{R}(f)$, что $(\forall n \in \mathbb{N}) (\lambda_n \neq 0) \& (\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = +\infty)$. (1)

Рассмотрим последовательность линейных непрерывных отображений $g_n = I_n - \frac{1}{\lambda_n} f = \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_n I - f)$

В силу равенства (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I_{X_0} - g_n\| = 0$.

Таким образом, $g_n \xrightarrow{c.r.o.} f_{X_0} \circ I_{X_0}$.

Далее, $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n = \frac{1}{\lambda_n} (\lambda_n I - f) \in \text{Isom}(X_0, X)$,
причем,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_0 \in X_0) \|g_n x_0\| = \left\| x_0 - \frac{1}{\lambda_n} f x_0 \right\| \geq \left(1 - \frac{\|f\|}{|\lambda_n|}\right) \|x_0\|.$$

Воспользуемся равенством (1) и получим существование такого числа $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$. Тогда

$$|\lambda_n| > 2 \|f\| \quad (2)$$

Из неравенства (2) следует, что

$$(\forall x_0 \in X_0)(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \left(\|g_n x_0\| \geq \frac{1}{2} \|x_0\| \right).$$

Таким образом выполнены условия теоремы 17 из [2]. Поэтому

$$f_{X_0} \circ I_{X_0} \in \text{Isom}(X_0, X)$$

что противоречит неравенству $X_0 \neq X$.

Таким образом мы доказали, что при предположении $X \neq X_0$ $\mathcal{R}(f)$ -резольвентное множество отображения f является ограниченным открытым множеством, а спектр $\sigma(f)$ -замкнутым (но не компактным) множеством. Отметим справедливость следующего предложения относительно структуры спектра отображения при несовпадении пространств X_0 и X .

Предложение 3. Если $X_0 \neq X$, то $(\sigma(f) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| > \|f\|\}) \subset \sigma_c(f)$,
где $\sigma_c(f)$ -остаточный спектр отображения f .

Доказательство. действительно, если $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{K} \mid |\lambda| > \|f\|\}$, то из неравенства $\|(\lambda I - f)x_0\| \geq (|\lambda| - \|f\|) \|x_0\|$ следует относительная открытость отображения f . Поэтому, в силу полноты подпространства X_0 получаем, что

$$(\lambda I - f)X_0 = (\lambda I - f)X.$$

Таким образом, учитывая условия теоремы, $\lambda \in \sigma_c(f)$.

Предложение 4. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_0 \rightarrow X$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f: X_0 \rightarrow X$ и M -компактное подмножество резольвентного множества отображения f . Тогда

* определение остаточного спектра $\sigma_c(f_n)$ отображения f_n можно дать по аналогии с подобным определением при совпадении пространств X_0 и X (см. [1], с. 620).

а) существует такое число $\lambda_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq \lambda_0$
 $M \subset \mathcal{F}(f_n)$;

б) существует такое число $a > 0$, что для всех $n \geq \lambda_0$
 $\sup_{\lambda \in M} \{ \|R(\lambda, f_n)\| \} \leq a$,

в) для любого числа

$$f_{\lambda_n} \cdot R(\lambda, f_n) \xrightarrow{c.k.r.} f_{\lambda_0} \cdot R(\lambda, f_0)$$

Доказательство. Предположим, что условие а) неверно.

Тогда существует такая подпоследовательность (f_{λ_k}) последовательности отображений (f_n) и существует такая последовательность чисел $(\lambda_k) \subset M$, которую в силу компактности множества M можно сразу выбрать сходящейся к некоторому числу $\lambda_0 \in M$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad (\lambda_k I - f_{\lambda_k}) \notin \text{Isom}(X_{\lambda_k}, X) \quad (1)'$$

Далее, так как $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k I - \lambda_0 I\| = 0$ и $f_{\lambda_k} \xrightarrow{c.k.} f_0$, то

$$\lambda_k I - f_{\lambda_k} \xrightarrow{c.k.} \lambda_0 I - f_0.$$

Поэтому в силу принадлежности $\lambda_0 I - f_0 \in \text{Isom}(X_0, X)$ и в силу предложения 12 из [3] существует такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq k_0$ $(\lambda_k I - f_{\lambda_k}) \in \text{Isom}(X_{\lambda_k}, X)$ (2)'

Но условие (1)' противоречит условию (2)', следовательно, наше предположение было неверно и условие а) справедливо.

Предположим теперь, что условие б) неверно. Тогда существует такая последовательность чисел $(\lambda_k) \subset M$ и такая подпоследовательность (f_{λ_k}) последовательности отображений (f_n) , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|R(\lambda_k, f_{\lambda_k})\| = +\infty \quad (3)$$

Отметим, что в силу компактности множества M последовательность чисел (λ_k) можно сразу выбрать сходящуюся к некоторому числу $\lambda_0 \in M$. Так как $\lambda_k I - f_{\lambda_k} \xrightarrow{c.k.} \lambda_0 I - f_0$, то, учитывая принадлежность $\lambda_0 I - f_0 \in \text{Isom}(X_0, X)$ и результат предложения 12 из [3], можно найти такое число $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq k_0$

$$\|R(\lambda_k, f_{\lambda_k})\| \leq c = \text{const} \quad (4)$$

Но неравенство (4) противоречит равенству (3), следовательно, условие б) верно.

Справедливость условия в) следует непосредственно из принадлежности $\lambda I - f_0 \in \text{Isom}(X_0, X)$, из того, что

$$\forall \lambda \in K \quad \lambda I - f_0 \xrightarrow{c.k.} \lambda I - f_0$$

и из предложения 12 из [3].

Следствие. Пусть последовательность линейных непре-

рвных отображений $f_n: X_n \rightarrow X$ компактно сходится к линейному, непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow X$. Предположим, что $(\lambda_n) \subset K$ - такая последовательность чисел, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n \in \mathcal{B}(f_n)$. Тогда множество всех предельных точек последовательности (λ_n) принадлежит $\mathcal{B}(f)$.

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует такое число $\lambda_0 \in \mathcal{B}(f_0)$ и такая последовательность чисел $(\mu_k) \subset K$, что для любого $k \in \mathbb{N}$ $\mu_k = \lambda_{n_k}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lambda_0$. В силу принадлежности $\lambda_0 \in \mathcal{B}(f_0)$ из открытости множества $\mathcal{B}(f_0)$ в K существует такая компактная окрестность точки $\lambda_0 \in M$ в K , что $M \subset \mathcal{B}(f_0)$. Воспользуемся теперь результатом предложения 4 и получим существование такого числа $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $M \subset \mathcal{B}(f_n)$. Далее, из того, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \lambda_0$ заключаем существование такого числа $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geq k_0$ $\mu_k \in M$. Пусть теперь $n_k \geq n_0$, $k \geq k_0$. Тогда из условий, полученных при доказательстве, получаем противоречивое включение: $\mathcal{B}(f_{n_k}) \ni \mu_k = \lambda_{n_k} \in M \subset \mathcal{B}(f_{n_k})$

Пусть M - компактное подмножество резольвентного множества $\mathcal{B}(f_0)$ отображения f_0 и $f_n \xrightarrow{c.c.} f_0$. И пусть (M, ρ_0) - банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi: M \rightarrow X_0$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C(M, X_0)} = \max_{\lambda \in M} \|\varphi(\lambda)\|_{X_0}.$$

Определим линейное отображение $R_M(f_0): X \rightarrow (M, \rho_0)$ следующим образом: $\forall x \in X \quad R_M(f_0)x = R(\cdot; f_0)x$.

Тогда из компактности множества $M \subset \mathcal{B}(f_0)$ следует существование такого числа $\epsilon > 0$, что $\forall \lambda \in M \quad \|R(\lambda; f_0)\| \leq \epsilon$. Поэтому отображение $R_M(f_0)$ является непрерывным:

$$\forall x \in X \quad \|R_M(f_0)x\| \leq \sup_{\lambda \in M} \{\|R(\lambda; f_0)x\|\} \leq \epsilon \|x\|.$$

В силу условия в) предложения 4 существует такое число $\epsilon > 0$, что для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq n_0$) $M \subset \mathcal{B}(f_n)$

и
$$\sup_{\lambda \in M} \|R(\lambda; f_n)\| \leq \epsilon \quad (5)$$

Поэтому по аналогии с отображением $R_M(f_0)$ можно определить последовательность линейных непрерывных (в силу неравенства (5)) отображений $(R_M(f_n))$:

$$(\forall x \in X) (\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) \Rightarrow (R_M(f_n)x = R(\cdot; f_n)x).$$

Оказывается, что в случае компактной сходимости линейных непрерывных отображений можно доказать предложение, аналогичное теореме 15 из [2], доказанной при компактной ап-

проксимации линейных непрерывных отображений.

Предложение 5. Пусть последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow X$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow X$ и M — компактное подмножество резольвентного множества $\mathcal{R}(f_0)$ отображения f_0 . Тогда последовательность линейных непрерывных отображений $(j_n \circ R_n(f_n))$ секвенциально компактно сходится к линейному непрерывному отображению $(j_0 \circ R_n(f_0))$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ — произвольно взятый вектор из пространства X . Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} j_n \circ R_n(f_n)x = j_0 \circ R_n(f_0)x.$$

В силу определения нормы в пространстве $C(M, X)$ нам достаточно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda \in M} \|R(\lambda, f_n)x - R(\lambda, f_0)x\| = 0$.

Если это условие не верно, то существует такая последовательность чисел $(\lambda_{n_k}) \subset M$, что для некоторой подпоследовательности (f_{n_k}) последовательности отображений (f_n) и для некоторого положительного числа a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|R(\lambda_{n_k}; f_{n_k})x - R(\lambda_{n_k}; f_0)x\| \geq a. \quad (6)$$

Так как множество M компактно, то последовательность чисел сразу можно выбрать сходящейся к некоторому $\lambda_0 \in M$. Так как $\lambda_{n_k} I - f_{n_k} \xrightarrow{c.k.} \lambda_0 I - f_0$, $\lambda_{n_k} I - f_0 \xrightarrow{c.k.} \lambda_0 I - f_0$ и отображение $\lambda_0 I - f_0 \in \Gamma_{\text{rem}}(X_0, X)$, то в силу условия в) предложения 4 $R(\lambda_{n_k}; f_{n_k}) \xrightarrow{c.k.} R(\lambda_0; f_0)$ и $R(\lambda_{n_k}; f_0) \xrightarrow{c.k.} R(\lambda_0; f_0)$. Поэтому $R(\lambda_{n_k}; f_{n_k}) - R(\lambda_{n_k}; f_0) \xrightarrow{c.k.} 0 \in L(X, X)$.

Отсюда и из определения секвенциально компактной аппроксимации следует, что для любого вектора $x \in X$ справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|R(\lambda_{n_k}; f_{n_k})x - R(\lambda_{n_k}; f_0)x\| = 0$, которое противоречит неравенству (6).

Покажем теперь, что для любой ограниченной последовательности векторов $(x_n) \subset X$ последовательность векторов $(R_n(f_n)x_n - R_n(f_0)x_n)$ относительно компактна в пространстве $C(M, X)$. В силу теоремы Арцела-Асколи нам нужно показать, что семейство отображений $\{R_n(f_n)x_n - R_n(f_0)x_n\}$ равномерно непрерывно и для любого числа $\lambda \in M$ последовательность векторов $(R(\lambda; f_n)x_n - R(\lambda; f_0)x_n)$ относительно компактна в пространстве X . Справедливость последнего утверждения получается непосредственно из условия в) предложения 4. Для доказатель-

ства равностепенной непрерывности воспользуемся тождествами Гильберта: $R(\lambda; f_n) - R(\mu; f_n) = (\mu - \lambda)R(\lambda; f_n) - R(\mu; f_n)$

и $R(\lambda; f_0) - R(\mu; f_0) = (\mu - \lambda)R(\lambda; f_0) - R(\mu; f_0)$

и получим следующую цепочку равенств

$$\{ [R(\lambda; f_n) - R(\lambda; f_0)] - [R(\mu; f_n) - R(\mu; f_0)] \} x_n = (\mu - \lambda) \{ [R(\lambda; f_n) - R(\mu; f_n) - R(\lambda; f_0) + R(\mu; f_0)] x_n \},$$

из которой и из неравенства (5) получим нужное:

$$\| \{ [R(\lambda; f_n) - R(\lambda; f_0)] - [R(\mu; f_n) - R(\mu; f_0)] \} x_n \| \leq |\mu - \lambda| \cdot 2C_0^2 \|x_n\|.$$

Пусть X - комплексное банахово пространство и $\lambda_0 \neq 0$ изолированное собственное число непрерывного отображения $f_0: X_0 \rightarrow X$. Допустим, что число $\delta > 0$ ($\delta < |\lambda_0|$) достаточно мало и в круге $B_c(\lambda_0, \delta)$ нет других точек $\sigma(f_0)$ кроме λ_0 . Тогда линейное непрерывное отображение

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f) d\lambda$$

является линейным непрерывным проектором пространства X на $\{x \in X_0 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|(\lambda_0 I - f)^n x\| = 0\}$. Предположим, что последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow X$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow X$.

Тогда в силу предложения 4 существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq n_0$ $B_0(\lambda_0, \delta) \subset \sigma(f_n)$. Таким образом по аналогии с отображением $f: X \rightarrow X$ можно определить последовательность линейных проекторов $\mu_n: X \rightarrow X$ следующим образом:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (n \geq n_0) (\forall x \in X) (\mu_n x = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \delta} R(\lambda; f_n) d\lambda).$$

Отметим, что подпространство $\mu_n X$ содержит все корневые подпространства соответствующие всем значениям $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежащих пересечению $B_c(\lambda_0, \delta) \cap \sigma(f_n)$. Если $B(\lambda_0, \delta) \cap \sigma(f_n) = \emptyset$, то $\mu_n = 0$.

Тогда как следствие предложения 5 можно доказать следующее предложение:

Предложение 5. Пусть X - комплексное банахово пространство, последовательность линейных непрерывных отображений $f_n: X_n \rightarrow X$ компактно сходится к линейному непрерывному отображению $f_0: X_0 \rightarrow X$. Тогда последовательность линейных непрерывных проекторов $\mu_n: X \rightarrow X$, определенных выше, секвенциально компактно аппроксимирует линейный непрерывный проектор $\mu: X \rightarrow X$.

Следствие. Пусть X - комплексное банахово пространство, $f_n \xrightarrow{w} f_0$ и $\lambda_0 \neq 0$ - собственное изолированное число отображения f . Тогда существует такая последовательность чисел (λ_n) из $\sigma(f_n)$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ λ_n является изолированным собственным числом отображения f_n , причем $\lambda_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n$.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.
2. Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных отображений при секвенциально компактной аппроксимации. - "Уч. зап. ЛГУ им. П. Стучки", 1975, т. 236, с. 59-75.
3. Лабеев В.И. Компактная сходимость линейных отображений, заданных на подпространствах. Настоящий сборник, с. 54-64.

Поступила 26 февраля 1976 года

УДК 513.88
ВОЗМУЩЕНИЕ

ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДКОМПАКТНОЕ
ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.Х. Диепиньш
Латвийский государственный университет

Основным в предлагаемой работе является понятие возмущений, предкомпактных относительно гомоморфизмов топологических векторных пространств, и теоремы об устойчивости свойств гомоморфизмов, в частности — \mathcal{Q} -операторов, при относительно предкомпактных возмущениях.

Метод доказательства теорем основывается на формальном описании возмущений на "языке малости" по мерам некомпактности некоторого класса, в частности — содержащего меру некомпактности Хаусдорфа.

Малость возмущений по мере некомпактности Хаусдорфа относительно гомоморфизмов банаховых пространств не что иное как малость по φ -норме, которая в силу сказанного является для линейных непрерывных отображений в банаховых пространствах формальным описанием качественного соотношения — свойства относительной предкомпактности. Таким образом в работе содержится обобщение результатов Л.С. Гольденштейна и А.С. Маркуса об устойчивости \mathcal{Q} -операторов в банаховых пространствах при возмущениях, малых по φ -норме ([1]).

Читатель, если ему это представляется более удобным, может при чтении предлагаемой работы под пространством типа \mathcal{P} или \mathcal{P}_0 подразумевать метризуемое топологическое векторное пространство и под мерой некомпактности типа \mathcal{P} или \mathcal{P}_0 аналог меры некомпактности Хаусдорфа, приведенный в (2,3,7).

В работе используем следующие обозначения: \mathcal{N} — множество всех натуральных чисел; X, Y, Z — топологические векторные пространства (ТВП) над полем вещественных или комплексных чисел; \mathcal{X}, \mathcal{Y} — базис окрестностей начала в X, Y и \mathcal{Z} — в Z . В локально выпуклом пространстве (ЛВП) базис окрестностей начала считается выбранным таким образом, что любое множество базиса замкнуто, абсолютно выпукло и поглощающее и произведение на произвольный ненулевой скаляр любого множества базиса принадлежит этому базису (см. [2]).

$\mathcal{L}(X, Y)$ — векторное пространство всех линейных непрерыв-

ных отображений пространства X в Y . Множество значений отображения f обозначается через $\text{Im} f$ и ядро через $\text{Ker} f$.

Определение. Отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется гомоморфизмом, если оно, как отображение пространства X на подпространство $\text{Im} f$, открыто.

Определение. Гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, ядро которого конечномерно и подпространство $\text{Im} f$ замкнуто, называется \mathcal{L}_4 -оператором.

1. Возмущения, предкомпактные относительно гомоморфизмов топологических векторных пространств.

1.1. Относительно предкомпактные множества, ρ -окрестности начала и ρ -пространства.

Через $\mathcal{F}(Z)$ обозначается множество всех конечных подмножеств пространства Z .

1.1.1. Определение. Подмножество $A \subset Z$ называется предкомпактным относительно (ПО) окрестности $W \in \mathcal{W}$, если существует такое множество $F \in \mathcal{F}(Z)$, что $A \subset F + W$.

1.1.2. Определение. Окрестность $W \in \mathcal{W}$ в ЛВП Z называется ρ -окрестностью начала, если она не является окрестностью начала в слабой топологии пространства Z .

Калибровочная функция множества $W \in \mathcal{W}$ обозначается через ρ_W и через Z_W некоторое фиксированное алгебраическое дополнение ядра $\text{Ker} \rho_W$ в Z . В дальнейшем используем множество $I_0 = \{ \mu \in \mathcal{K} / 0 < \mu < 1 \}$.

1.1.3. Замечание. ρ -окрестность $W \in \mathcal{W}$ не является ПО окрестности W для любого $\mu \in I_0$. Действительно, предполагая противное, получим, что пополнение нормированного пространства Z_W с нормой ρ_W бесконечномерное банахово пространство, мера некомпактности Хаусдорфа замкнутого единичного шара которого меньше единицы, но это невозможно (см. [3] и [1]).

Окрестность начала в подпространстве $Z_0 \subset Z$, являющаяся образом окрестности $W \in \mathcal{W}$ при канонической инъекции $\alpha: Z_0 \rightarrow Z$, обозначается через W_0 .

1.1.4. Определение. ЛВП, в любом бесконечномерном замкнутом подпространстве которого индуцированная топология не сов-

падает со слабой топологией, называется ρ -пространством. (Таким образом для любого бесконечномерного замкнутого подпространства Z_0 ρ -пространства Z существует такая окрестность $W \in \mathcal{W}$, что W_0 ρ -окрестность.).

1.2. Относительно предкомпактные возмущения.

Следующие определения основные в работе.

1.2.1. Определение. Отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется возмущением, предкомпактным относительно (ВПО) окрестностей $U \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$, если множество $g(U)$ ПО окрестности V .
 Обозначим множество всех подмножеств пространства Y через 2^Y и рассмотрим при фиксированном гомоморфизме $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ и окрестности $U \in \mathcal{U}$ отображение $v(f, U) : \mathcal{X} \rightarrow 2^{2^Y}$, определяемое равенством $v(f, U)(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{V \in \mathcal{V} \mid V \cap \text{Im} f \subset f(U)\}$. Множество $v(f, U)(U)$ непусто для любого $U \in \mathcal{U} \setminus \{0\}$, следовательно, непусто множество $v(f, U)(I_0)$, в дальнейшем обозначаемое через $V_0(f, U)$.

1.2.2. Определение. Отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{U}$ существует такая окрестность $V \in V_0(f, U)$, что g - ВПО окрестностей U и V , т.е. если $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in V_0(f, U) \exists F \in \mathcal{F}(Y)$
 $g(U) \subset F + V$ или $\forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{V} \exists U_0 \in \mathcal{U} \exists F \in \mathcal{F}(Y)$
 $V \cap \text{Im} f \subset f(U_0) \& g(U) \subset F + V$.

1.2.3. Замечание. Если X нормируемо, гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ фиксирован и отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ - ВПО некоторых окрестностей $U \in \mathcal{U}$ и $V \in V_0(f, U)$, то g - ВПО гомоморфизма f .

2. Формальное описание относительно предкомпактных возмущений.

2.1. Меры некомпактности.

2.1.1. Определение. Отображение $\mathcal{P}(Z) : 2^Z \rightarrow 2^Z$ называется мерой некомпактности в пространстве Z .

2.1.2. Определение. Мера некомпактности $\mathcal{P}(Z_0)$ в подпространстве $Z_0 \subset Z$, для любого множества $A \in 2^{Z_0}$ определяемая равенством $\mathcal{P}(Z_0)(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(Z)(A) \cap Z_0$, называется индуцированной мерой некомпактности.

В дальнейшем под подпространством пространства с мерой

некомпактности будет пониматься подпространство с индуцированной мерой некомпактности.

2.2. Возмущения, малые по мерам некомпактности.

В дальнейшем используем множество $T(\mathcal{J}^\sigma(Y), \mathcal{U}, V) = \{g \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \mathcal{J}^\sigma(Y)(g(U)) \subset V\}$, где $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$.

2.2.1. Определение. Отображение $g \in T(\mathcal{J}^\sigma(Y), \mathcal{U}, V)$ называется возмущением, малым по мере некомпактности $\mathcal{J}^\sigma(Y)$ относительно окрестностей $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$.

2.2.2. Определение. Отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется возмущением, малым по мере некомпактности $\mathcal{J}^\sigma(Y)$ относительно гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, если для любой окрестности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ существует такая окрестность $V \in \mathcal{V}_0(f, \mathcal{U})$, что g мало по $\mathcal{J}^\sigma(Y)$ относительно окрестностей \mathcal{U} и V .

2.3. Мера некомпактности типа ρ, ρ_1 и ρ' .

На "языке малости" по мерам некомпактности типа ρ и ρ_0 выражается относительная предкомпактность отображений. Меры некомпактности типа ρ' важны при построении в пространствах линейных непрерывных отображений некоторых локально выпуклых топологий, в которых множество всех \mathcal{L} -операторов открыто. Через \mathcal{Z} обозначается множество всех подпространств пространства Z с мерой некомпактности $\mathcal{J}^\sigma(Z)$.

2.3.1. Определение. Мера некомпактности $\mathcal{J}^\sigma(Z)$ называется монотонной, если $\forall Z_0 \in \mathcal{Z} \forall A \subset Z_0 \forall A_0 \subset Z_0$.

$$A_0 \subset A \Rightarrow \mathcal{J}^\sigma(Z_0)(A_0) \subset \mathcal{J}^\sigma(Z_0)(A).$$

Обозначим сумму проекций ρ_i ($i=1, 2$) на сомножители произведения $Z \times Z$ через s , базис окрестностей начала в $Z_0 \in \mathcal{Z}$ через \mathcal{W}_0 , и рассмотрим для меры некомпактности $\mathcal{J}^\sigma(Z)$ условие (ρ) , распадающееся на две части, которые далее называются условиями (ρ_1) и (ρ_2) .

Для любого подпространства $Z_0 \in \mathcal{Z}$ выполнено: если включение $\mathcal{J}^\sigma(Z_0)(A) \subset W$ справедливо для $A \subset Z_0$ и $W \in \mathcal{W}_0$, то A предкомпактно относительно W , (1)
если $s(A) \subset Z_0$ предкомпактно для $A \subset Z_0 \times Z_0$, то (2)
 $\mathcal{J}^\sigma(Z_0)(\rho_1 A) = \mathcal{J}^\sigma(Z_0)(\rho_2 A)$. (3)

2.3.2. Определение. Монотонная мера некомпактности, для

которой выполнено условие (ρ) , называется мерой некомпактности типа ρ .

2.3.3. Определение. Мера некомпактности $\mathcal{P}(Z)$, для которой выполнено условие (α) , называется совершенной, если включение $\mathcal{P}(Z_0)(A) \subset W$ справедливо для любого подпространства $Z_0 \in \mathcal{Z}$ и любого множества $A \in 2^{Z_0}$, предкомпактного относительно окрестности $W \in \mathcal{W}$.

2.3.4. Определение. Совершенная мера некомпактности типа ρ называется мерой некомпактности типа ρ .

2.3.5. Определение. Мера некомпактности $\mathcal{P}(Z)$ называется однородной, если $\forall Z_0 \in \mathcal{Z} \forall A \in 2^{Z_0} \forall \lambda \in \mathcal{K}$:

$$\mathcal{P}(Z_0)(\lambda A) = \lambda \mathcal{P}(Z_0)(A).$$

2.3.6. Определение. Однородная мера некомпактности типа ρ называется мерой некомпактности типа ρ .

2.3.7. Пример. Одна из простейших форм определения меры некомпактности Хаусдорфа имеется для метрических пространств, а именно: для любого подмножества A метрического пространства Z мерой некомпактности Хаусдорфа общепринято называть число $\chi(A)$, определяемое равенством $\chi(A) = \inf \{ \epsilon > 0 / A \text{ имеет в } Z \text{ конечную } \epsilon\text{-сеть} \}$, $\inf \emptyset = +\infty$ (см. [3], [1], [4] и [5]).

Рассмотрим некоторый прямой аналог этой меры некомпактности, дающий пример меры некомпактности типа ρ' и тем самым типа ρ и ρ . Обозначим множество окрестностей $W \in \mathcal{W}$ относительно которых множество $A \in 2^Z$ предкомпактно, через $W(A)$.
 Отображение $\chi(Z): 2^Z \rightarrow 2^Z$, для любого множества $A \in 2^Z$ определяемое равенством $\chi(Z)(A) = \bigcap_{W \in W(A)} W$, $\bigcap_{W \in \emptyset} W = Z$, называется мерой некомпактности Хаусдорфа в ТП Z . Как устанавливается непосредственной проверкой в случае метризуемого пространства Z , отображение $\chi(Z)$ является мерой некомпактности типа ρ' и тем самым типа ρ и ρ .

2.3.8. Замечание. q -нормой отображения $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ где X и Y банаховы пространства и B замкнутый единичный шар в X , называется число $\chi(f(B))$ (см. [3] и [1]).

2.4. Пространства типа ρ , ρ_0 и ρ' .

Бъяснение точного содержания утверждения, что относительная предкомпактность отображений выражается на "языке малости" по мерам некомпактности типа ρ и ρ_0 имеет смысл лишь тогда, когда предполагается существование хотя бы одной такой меры в соответствующих пространствах.

2.4.1. Определение. ТВП, в котором существует мера некомпактности типа ρ (ρ_0, ρ'), называется пространством типа ρ (ρ_0, ρ').

2.4.2. Замечание. мера некомпактности Хаусдорфа служит примером меры некомпактности типа ρ , ρ_0 и ρ' в произвольных ТВП с линейно упорядоченным (в смысле множественного включения) базисом окрестностей начала. Но автору неизвестно, не будут ли такие пространства необходимо метризуемыми.

2.5. Относительно предкомпактные возмущения как возмущения, малые по мерам некомпактности типа ρ и ρ_0 .

Наконец, выясним точное содержание утверждения, что относительная предкомпактность отображений выражается на "языке малости" по мерам некомпактности типа ρ и ρ_0 .

В дальнейшем тип меры некомпактности указывается индексацией символа \mathcal{P} . Предположим, что Y пространство типа ρ . и обозначим множество всех отображений $g \in \mathcal{K}(X, Y)$; являющихся ВПО окрестностей $U \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$, через $\rho(U, V)$. Тогда для любых окрестностей $U \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}$ и для любой меры некомпактности $\mathcal{P}_\rho(Y)$ в силу условия (ρ) справедливо включение $\rho(U, V) \subset T(\mathcal{P}_\rho(Y), U, V)$ и для любой меры некомпактности $\mathcal{P}_\rho(Y)$ в силу условия (ρ) и совершенства меры равенство $\rho(U, V) = T(\mathcal{P}_\rho(Y), U, V)$.

3. Теоремы об устойчивости свойств гомоморфизмов при относительно предкомпактных возмущениях.

3.1. ρ -предкомпактные отображения и $\rho, \bar{\rho}$ и ρ' -пары пространств.

3.1.1. Определение. Отображение $f \in \mathcal{K}(X, Y)$ называется

ρ -предкомпактным, если существует такая ρ -окрестность $U \in \mathcal{U}$, что множество $f(U)$ предкомпактно.

3.1.2. Определение. Оботображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется ρ -отображением, если для него справедливо высказывание: если f не является гомоморфизмом, то оно ρ -предкомпактно сужаемо. (Таким образом любой гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ ρ -отображение).

3.1.3. Определение. Оботображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется ρ_2 -отображением, если для него справедливо высказывание: если подпространство $\mathcal{A} \cdot f$ не замкнуто, то f ρ -предкомпактно сужаемо.

3.1.4. Определение. Пара (X, Y) пространств X и Y называется ρ -парой, если любое отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ ρ -отображение.

3.1.5. Определение. Пара (X, Y) пространств X и Y называется ρ -парой, если любое отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \mathcal{A} \cdot f < \infty$ ρ -отображение.

3.1.6. Определение. $\tilde{\rho}$ -пара (X, Y) пространств X и Y называется ρ_2 -парой, если любое отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ ρ_2 -отображение.

3.2. Общие теоремы устойчивости.

В основе общих теорем следующая теорема, при доказательстве которой использованы идеи статьи Л.С. Гольденштейна и А.С. Маркуса ([1]). Обозначения те же, что в (1.1) и (1.2). Через f_0 обозначается сужение отображения $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ на подпространство $X_0 \subset X$, т.е. $f_0 \stackrel{\text{def}}{=} f|_{X_0}$.

3.2.1. Теорема. Если X ЛВП, Y ТБП типа ρ , мера некомпактности $\mathcal{B}_\rho(Y)$, гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, окрестности $U \in \mathcal{U}$ и $V \in \mathcal{V}(f, U)$ фиксированы и возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{B}_\rho(Y)$ относительно U и V , то для любого такого подпространства $X_0 \subset X$, что f_0 инъективный гомоморфизм и U_0 ρ -окрестность, множество $(f+g)(U_0)$ не предкомпактно.

Доказательство. В условиях теоремы для подпространства X_0 допустим, что $(f+g)(U_0)$ предкомпактно. Предкомпактность множества $(f+g)(U_0)$ (так как мера некомпактности $\mathcal{B}_\rho(Y)$)

удовлетворяет условию (ρ_2) влечет равенство $\mathcal{P}^p(Y)(\mathcal{A}(u_0)) = \mathcal{P}^p(Y)(g(u_0))$, в силу которого, монотонности меры $\mathcal{P}^p(Y)$ и выбора возмущения g справедливо включение $\mathcal{P}^p(\mathcal{A}f_0)(f_0(u_0)) \subset f_0(u_0)$, где $u_0 \in I_0$. Изображение f_0 - гомоморфизм, следовательно, множества $f_0(u_0)$ и $f_0(u_0)$ окрестности начала в $\mathcal{A}f_0$, первая из которых в силу условия (ρ_2) для $\mathcal{P}^p(Y)$ предкомпактна относительно второй. К тому же f_0 инъекция и, как отображение на $\mathcal{A}f_0$, биекция, следовательно, окрестность u_0 предкомпактна относительно u_0 . Но это невозможно в силу замечания (1.1.3).

Если подпространство $Z_0 \subset Z$ топологически дополнимо в Z , то через \widetilde{Z}_0 обозначается некоторое фиксированное топологическое дополнение к нему.

3.2.2. Лемма. Если X ЛВП и Y ТВП, то гомоморфность сужения отображения $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, ядро которого топологически дополнимо в X , на произвольно фиксированном топологически дополнительном подпространстве к $\text{Ker } f$ равносильна гомоморфности самого отображения.

Доказательство. Обозначим через ρ проекцию пространства X на подпространство $\widetilde{\text{Ker } f}$. Проекция $\rho \in \mathcal{L}(X, \widetilde{\text{Ker } f})$ открыта, поэтому семейство множеств $\{\rho(u) | u \in u_i\}$ базис окрестностей начала в $\widetilde{\text{Ker } f}$ и утверждение леммы следует из равенства $f = f \circ \rho$, где \widetilde{f} сужение отображения f на подпространство $\widetilde{\text{Ker } f}$.

Общезвестное утверждение, используемое далее, содержит следующая лемма, которая приводится без доказательства.

3.2.3. Лемма. Если Z векторное пространство над полем \mathcal{K} , являющееся прямой алгебраической суммой своих векторных подпространств Z_1 и Z_2 , где $\dim Z_2 < \infty$, и Z_0 векторное подпространство пространства Z с $\dim(Z_0 \cap Z_1) < \infty$, то $\dim Z_0 < \infty$.

По поводу определения см. (3.1).

3.2.4. Следствие. Если X ЛВП, Y ТВП типа ρ , мера некомпактности $\mathcal{P}^p(Y)$ и гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$ фиксированы, возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}^p(Y)$ относительно f и отображение $f + g$ $\rho(Y)$ -отображение,

то $f+g$ гомоморфизм (подпространство $\text{Im}(f+g)$ замкнуто).

Доказательство. (По поводу обозначений см. (1.1).) Допустим, что указанные условия выполнены, но $f+g$ не является гомоморфизмом (подпространство $\text{Im}(f+g)$ не замкнуто). Отображение $f+g$ $\rho(\rho_2)$ -отображение, поэтому тогда существует такое подпространство $X_0 \subset X$ и окрестность $U \in \mathcal{U}$, что U_0 ρ -окрестность (можно считать, что ρ_{U_0} норма) и множество $(f+g)(U_0)$ предкомпактно. Но в силу лемм (3.2.2) и (3.2.3) выполнены условия теоремы (3.2.1), согласно которой множество $(f+g)(U_0)$ имеет не предкомпактное подмножество.

3.2.5. Определение. Отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется ρ_2 -отображением, если для любого бесконечномерного подпространства $X_0 = \overline{X_0} \subset \text{Ker} f$ существует такая окрестность $U \in \mathcal{U}$, что U_0 ρ -окрестность.

3.2.6. Следствие. Если X ЛВП, Y ТВП типа ρ , мера некомпактности $\mathcal{P}_\rho(Y)$ и гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker} f < \infty$ фиксированы, возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}_\rho(Y)$ относительно f и отображение $f+g$ ρ_2 -отображение, то $\dim \text{Ker}(f+g) < \infty$.

Доказательство. Предположим, что указанные условия выполнены, и рассмотрим подпространство X_0 , определяемое равенством $X_0 = \overline{\text{Ker}(f+g) \cap \text{Ker} f}$. Докажем, что $\dim X_0 < \infty$ и, следовательно, $\dim \text{Ker}(f+g) < \infty$ по лемме (3.2.3). Действительно, в силу леммы (3.2.2) f_0 гомоморфизм и, предполагая противное, получим, что существует такая окрестность $U \in \mathcal{U}$, что U_0 ρ -окрестность, так как $f+g$ ρ_2 -отображение, и множество $(f+g)(U_0)$ согласно теореме (3.2.1) не предкомпактно. Но $(f+g)(U_0) = \{0\}$.

3.2.7 Следствие. Если X ЛВП, Y ТВП типа ρ , мера некомпактности $\mathcal{P}_\rho(Y)$ и гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker} f < \infty$ фиксированы, возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}_\rho(Y)$ относительно f и отображения $f+g$ ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 -отображение, то $f+g$ ρ_+ -оператор.

В ρ и ρ_0 -парах пространств условие на возмущенное отображение отпадает и получаются теоремы устойчивости в следующем виде.

3.2.8. Теорема. Если X ЛВП, Y ТВП типа ρ , пара

(X, Y) ρ -пара, мера некомпактности $\mathcal{P}^0(Y)$ и гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$ фиксированы и возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}^0(Y)$ относительно f , то отображение $f+g$ гомоморфизм.

3.2.9. Теорема. Если X ρ -пространство, Y ТВП типа ρ , мера некомпактности $\mathcal{P}^0(Y)$ и гомоморфизм $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$ фиксированы и возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}^0(Y)$ относительно f , то $\dim \text{Ker}(f+g) < \infty$.

3.2.10. Теорема. Если X ρ -пространство, Y ТВП типа ρ , пара (X, Y) ρ -пара, мера некомпактности $\mathcal{P}^0(Y)$ и Φ_+ -оператор $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ фиксированы и возмущение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ мало по $\mathcal{P}^0(Y)$ относительно f , то отображение $f+g$ Φ_+ -оператор.

Если Y пространство типа ρ и фиксирована мера некомпактности $\mathcal{P}^0(Y)$, то предыдущие теоремы выражают устойчивость свойств гомоморфизмов при относительно предкомпактных возмущениях.

3.2.11. Теорема (об устойчивости гомоморфности). Если X ЛВП, Y ТВП типа ρ_0 , пара (X, Y) ρ -пара и отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ - ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$, то отображение $f+g$ гомоморфизм.

3.2.12. Теорема (об устойчивости конечномерности ядра). Если X ρ -пространство, Y ТВП типа ρ_0 и отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ - ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$, то $\dim \text{Ker}(f+g) < \infty$.

3.2.13. Теорема (об устойчивости Φ_+ -операторов). Если X ρ -пространство, Y ТВП типа ρ_0 , пара (X, Y) ρ_0 -пара и отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ - ВПО Φ_+ -оператора $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, то отображение $f+g$ Φ_+ -оператор.

Следующая теорема является следствием теорем (3.2.11) и (3.2.12).

3.2.14. Теорема. Если X ρ -пространство, Y ТВП типа ρ_0 , пара (X, Y) $\tilde{\rho}$ -пара и отображение $g \in \mathcal{L}(X, Y)$ - ВПО гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с $\dim \text{Ker } f < \infty$; то отображение $f+g$ гомоморфизм.

3.3. Образование пространствами \mathcal{P} и \mathcal{P}_0 -пар.

В следующих теоремах приводятся достаточные условия для образования пространствами \mathcal{P} и \mathcal{P}_0 -пар. Форма и метод представления отображений, не являющихся гомоморфизмами, подсказана идеями статей И.Ц.Гохберга, А.С.Маркуса, И.А.Тельдмана ([6]) и Ю.Н.Владимирского ([7]).

3.3.1. Лемма. Если X совершенно полное и Y отделимое ЛВП, то для любого гомоморфизма $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ подпространство $\mathcal{A}nf$ замкнуто.

Доказательство. Подпространство $\mathcal{A}nf$ совершенно полно ([2], 6.2.9, с.186), следовательно, полно ([2], 6.2.2, с.156) и поэтому замкнуто ([2], 3.6.9(ш), с.91).

3.3.2. Лемма. Если X совершенно полное и Y отделимое ЛВП и любое замкнутое подпространство пространства Y бочечно, то любое отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ с замкнутым подпространством $\mathcal{A}nf$ гомоморфизм.

Доказательство. Подпространство $\mathcal{A}nf$ бочечно, следовательно, f гомоморфизм ([2], 6.2.7, с.176).

3.3.3. Лемма. Если X совершенно полное и Y отделимое ЛВП, любое замкнутое подпространство пространства Y бочечно и сужение f_0 отображения $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ на замкнутое подпространство $X_0 \subset X$ с $\dim X_0 < \infty$ гомоморфизм, то и f гомоморфизм.

Доказательство. Согласно лемме (3.3.2) достаточно доказать, что подпространство $\mathcal{A}nf$ замкнуто. Подпространство X_0 совершенно полно ([8], 4.8.2, с.207), таким образом по лемме (3.3.1) замкнуто подпространство $\mathcal{A}nf_0$, следовательно, так как в силу того, что $\dim X_0 < \infty$, существует такое подпространство $Y_0 \subset Y$ с $\dim Y_0 < \infty$, что $\mathcal{A}nf = \mathcal{A}nf_0 \cdot Y_0$, замкнуто и $\mathcal{A}nf$ ([8], 1.3.3, с.35).

Через X' обозначается пространство, топологически сопряженное с X . В дальнейшем используем множество

$$I = \{u \in \mathcal{L}(X) \mid u \neq 0\}.$$

3.3.4. Лемма. Если X и Y ЛВП, Y отделимо, последовательность $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$ ограничена, линейные формы последовательности $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ равномерно непрерывны и по-

следовательность $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$ такая, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ сходится, то отображение $c: X \rightarrow Y$ для любого вектора $x \in X$ определяемое равенством $c(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x'_n(x) y_n$, предкомпактно.

Доказательство. (По поводу обозначений см. (1.1).)

В силу равностепенной непрерывности линейных форм последовательности $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ существует окрестность $U \in \mathcal{U}$, для которой $0 \leq x'_n(u) \leq 1$. Выберем произвольно окрестность $V \in \mathcal{V}$, и докажем существование такого множества $F \in \mathcal{F}(Y)$, что $c(U) \subset F + V$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение $c_n: X \rightarrow Y$, определяемое равенством $c_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \mu_k x'_k(x) y_k$. Выберем окрестность $V_k \in \mathcal{V}$ так, что $V_k + V_k \subset V$. В силу выбора окрестности U , ограниченности последовательности $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $c(U) \subset c_{n_0}(U) + V$. Выбор окрестности U и ограниченность последовательности $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ влечет предкомпактность множества $c_{n_0}(U)$, поэтому существует такое множество $F \in \mathcal{F}(Y)$, что $c_{n_0}(U) \subset F + V_k$ и тем самым $c(U) \subset F + V$.

Далее используется общеизвестное описание локально выпуклых топологий в терминах полунорм (см. [2]).

3.3.5. Лемма. Если X полное и полунормируемое и Y метризуемое ЛВП, любое замкнутое подпространство пространства Y бочечно и отображение $f \in \mathcal{B}(X, Y)$ не является гомоморфизмом, то существует бесконечномерное векторное подпространство $X_0 \subset X$; сужение отображения f на котором предкомпактная инъекция.

Доказательство. Выберем возрастающую последовательность полунорм $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ порождающую топологию пространства Y , и полунорму ρ , порождающую топологию пространства X . Предположим, что существуют такие биортогональные последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ и $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$, что $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\rho(x_n) > 1 \text{ \& } \rho_n(f(x_n) = y_n) \leq 2^{1-2n} \text{ \& } \forall x \in X: \\ |x'_n(x)| \leq 2^{2n} \rho(x).$$

Через X_0 обозначим векторное подпространство пространства X , натянутое на векторов последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, сужение f_0 отображения f на котором не является гомоморфизмом, в силу чего подпространство X_0 бесконечномерно вместе с подпространством $\mathcal{Im} f_0$ ([8], 3.1.8, с. 98). Тем самым

векторов последовательности $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ можно считать линейно независимыми и, следовательно, f_0 инъекцией. К тому же согласно лемме (3.3.4) f_0 предкомпактно, ибо $\forall x \in X_0: \rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k(x_k)$. Таким образом достаточно доказать, что выполнено начальное предположение, для чего последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, существование которых предполагалось, построим индуктивно. Так как отображение f не является гомоморфизмом, то существует такой вектор $x_1 \in X$, что $\rho(x_1) \geq \rho(y_1) \geq \frac{1}{2}$. Существует такая линейная форма $x'_1 \in X'$, что: $x'_1(x_1) = \rho(x_1) \geq \rho(y_1) \geq \frac{1}{2} \forall x \in X, |x'_1(x)| \leq \rho(x)$ ([2], 2.2.2, с.49). Определим линейную форму $x'_2 \in X'$ тогда равенством $x'_2 = \frac{2x'_1 - x'_1(x_1)x_1}{\rho(x_1)}$. Предположим, что первые $n-1$ векторы и первые $n-1$ линейные формы последовательностей, существование которых доказывается, построены. Рассмотрим векторное подпространство X_n пространства X , определяемое равенством $X_n = \overline{\text{span}}\{x_k, x'_k\}$. Подпространство X_n замкнуто с $\text{codim } X_n = \infty$, поэтому согласно лемме (3.3.3) сужение отображения f на нем не является гомоморфизмом, так как X совершенно полно ([2], 8.10.5, с.798). Следовательно, существует такой вектор $x_n \in X_n$, что $\rho(x_n) \geq \rho(y_n) \geq 2^{-n}$. Существует такая линейная форма $x'_n \in X'$, что $x'_n(x_n) = \rho(x_n) \geq \rho(y_n) \geq 2^{-n} \forall x \in X, |x'_n(x)| \leq \rho(x)$ ([2], 2.2.2, с.49). Определим линейную форму $x'_n \in X'$ тогда равенством

$$x'_n = \frac{2^n x'_n - \sum_{k=1}^{n-1} x'_k(x_k)x_k}{\rho(x_n)}$$

3.3.6. Замечание. Если подпространство Z_0 отделимого ТВП Z предкомпактно, то $Z_0 = \{0\}$, так как оно ограничено.

3.3.7. Лемма. Если X бесконечномерное ЛВП, Y отделимое ТВП и отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ предкомпактная инъекция, то f ρ -предкомпактно.

Доказательство. (По поводу обозначений см. (1.1).) Достаточно доказать, что окрестность $U \in \mathcal{U}$, образ $f(U)$ при отображении f которой предкомпактен, ρ -окрестность. Действительно, подпространство $f(\overline{\text{span}} \rho U)$ предкомпактно и согласно замечанию (3.3.6) $f(\overline{\text{span}} \rho U) = \{0\}$, в силу чего, так как f инъекция, $\overline{\text{span}} \rho U = \{0\}$. Следовательно, $X_U = X$ и подпространство X_U бесконечномерно.

3.3.8: Теорема. Если X полное и полунормируемое и Y

метризуемое ЛВП и любое замкнутое подпространство пространства Y бочечно, то пара (X, Y) ρ -пара.

Доказательство. Предположим, что отображение $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ не является гомоморфизмом. Тогда согласно лемме (3.3.5) существует такое бесконечномерное векторное подпространство пространства X , что сужение отображения f на нем предкомпактная инъекция и, следовательно, по лемме (3.3.7) ρ -предкомпактно.

3.3.9. Теорема. Если X полное и полунормируемое и Y метризуемое ЛВП и любое замкнутое подпространство пространства Y бочечно, то пара (X, Y) ρ_0 -пара.

Доказательство. По теореме (3.3.9) пара (X, Y) ρ -пара и тем самым согласно лемме (3.3.1) ρ_0 -пара, так как пространство X совершенно полно ([9], 8.10.5, с.738).

3.4. Картина устойчивости свойств гомоморфизмов при относительно предкомпактных возмущениях.

Полученной схемой образования пространствами ρ и ρ_0 -пара дается некоторая картина устойчивости свойств гомоморфизмов при ВПО, которую изобразим в таблицах (стр. 86). Отметим, что пространства Фреше (обозначаются буквой F , буквой B обозначаются банаховы пространства, буквой ρ - ρ -пространства, δ - бочечность любого замкнутого подпространства) бочечны и являются ρ -пространствами. При формулировке итогов следует подчеркнуть, что существование во втором пространстве меры некомпактности, пригодной для описания ВПО, для настоящего рассмотрения существенно и что пример такой меры был построен лишь в метризуемых пространствах. Присвоим символ 1 клеткам таблицы, соответствующим парам пространств с устойчивостью гомоморфности, символ 2 с устойчивостью конечномерности ядра и символ 0 с устойчивостью Φ_+ -операторов.

3.5. Открытость множества всех Φ_+ -операторов в некоторых локально выпуклых топологиях пространств линейных непрерывных отображений.

Предположим, что Y пространство типа ρ' , и обозначим семейство $(T(\in \mathcal{P}_{\rho'}(Y), U, V))_{U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$

X \ Y	Y	шагизауа МВП	F	B
P		2 →		
		↓		
F				
B				

X \ Y	Y	шагизауа ЛВП B	F	B
шагизауа ЛВП		1 →		
		↓		
B		0 →		

через $\mathcal{F}(\mathcal{F}_p(Y))$. Если X банахово пространство и Y пространство Фреше, то существует топология $\tau(\mathcal{F}_p(Y))$ в $\mathcal{L}(X, Y)$, в которой пространство $(\mathcal{L}(X, Y), \tau(\mathcal{F}_p(Y)))$ локально выпукло, семейство $\mathcal{F}(\mathcal{F}_p(Y))$ базис окрестностей начала (см. [2]) и множество всех \mathcal{F}_+ -операторов открыто.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю доценту Латвийского государственного университета И.В.Карклиньшу за постоянную существенную помощь и поддержку в работе, ценные советы и многочисленные замечания; профессору Тартуского государственного университета Г.М.Вайникко за прочтение рукописи и сделанные им после этого полезные замечания и доценту Латвийского государственного университета А.Я.Дунзему за внимание к работе.

Литература

1. Гольденштейн Л.С., Маркус А.С. О мере некомпактности ограниченных множеств и линейных операторов. - В кн.: Исследования по алгебре и математическому анализу. Кишинев, 1965, с. 15-34.
2. Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. Топологические векторные пространства. М., "Мир", 1967, 258 с.
3. Гольденштейн Л.С., Гохберг И.Ц., Маркус А.С. Исследование некоторых свойств линейных ограниченных операторов в связи с их \mathcal{F} -нормой. - "Учен. зап. Кишиневск. ун-та", 1957, т.29, с.29-36.
4. Садовский Е.Н. Об одном принципе неподвижной точки. - "Функциональный анализ", 1967, т.1, вып. 2, с.74-76.
5. Садовский Е.Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы. - "Усп. мат. наук", 1972, т.27, вып.1, с.81-146.
6. Гохберг И.Ц., Маркус А.С., Фельдман И.А. О нормально разрывных операторах и связанных с ними идеалах. - "Изв. Молдавск. филиала АН СССР", 1960, т.76, № 10, с.51-70.
7. Владимирский Ю.Н. О строго косингулярных операторах". - ДАН СССР, 1967, т.174, № 6, с.1251-1252.
8. Дефер Х. Топологические векторные пространства. М., 1971, 357 с.
9. Эдвардс Р. Функциональный анализ. М., "Мир", 1969, 1072 с.

Поступила 19 октября 1976 года.

НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ
РАДИКАЛЬНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Р.С. Липянский

Латвийский государственный университет

1. Пусть L - алгебра Ли над произвольным, но фиксированным полем K нулевой характеристики, V - точный L -модуль над K , т.е. задано инъективное представление алгебры Ли L в алгебру Ли $gl(V)$ линейных преобразований бесконечномерного векторного пространства V над K . Обозначим через $A(L)$ ассоциативную алгебру над K , порожденную в $gl(V)$ единицей и алгеброй Ли L . В настоящей статье рассматривается вопрос о связи между алгеброй Ли L и ее обертывающей алгеброй $A(L)$.

Алгебру Ли L назовем радикальной, если она обладает возрастающим инвариантным рядом с локально нильпотентными факторами $I_\varphi(1)$. Мы покажем, что в модуле V над радикальной алгеброй Ли L совокупность нильпотентных линейных преобразований пространства V образуют подалгебру, обертывающая алгебра которой является локально нильпотентной.

2. Как известно, элемент y лиевой алгебры L называется нильэлементом, если для любого $x \in L$ найдется такое целое $n > 0$, зависящее от x , что $x \operatorname{ad}^n y = 0$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть L - алгебра Ли над полем K , a и b - нильэлементы в L , такие, что $b \operatorname{ad} a = 0$ и $a \operatorname{ad} b = 0$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда $[a, b] = \sum_{i=1}^r \alpha_i c_i$, где $\alpha_i \in K$ и c_i - нильэлементы в L , $i=1, \dots, r$. Более того, если для $x \in L$ и целого τ имеем $x \operatorname{ad}^\tau b = 0$, то $x \operatorname{ad}^\tau c_i = 0$ для $i=1, 2, \dots, r$.

Доказательство. Так как ada является нильдифференцированием (т.е. для любого $x \in L$ найдется такое k , что $x \operatorname{ad}^k a = 0$) то определим отображение $e \operatorname{ada}$, при котором элемент $x \in L$ переходит в $\sum x \operatorname{ad}^i a$. Известно, что $e \operatorname{ada}$ является автоморфизмом алгебры L [2].

Рассмотрим систему линейных уравнений в алгебре Ли

$$v e^{a d a} = v + v a d a + \frac{v a d^2 a}{2!} + \dots + \frac{v a d^{n-1} a}{(n-1)!}$$

$$v e^{2 a d a} = v + 2 v a d a + \frac{2^2 v a d^2 a}{2!} + \dots + \frac{2^{n-1} v a d^{n-1} a}{(n-1)!}$$

$$\dots$$

$$v e^{n a d a} = v + n v a d a + \frac{n^2 v a d^2 a}{2!} + \dots + \frac{n^{n-1} v a d^{n-1} a}{(n-1)!}$$

Определитель этой системы равен $\frac{1}{2! \dots (n-1)!} \prod_{i=1}^{n-1} (d_i - d_j)$

где d_i, d_j - целые числа, такие, что $1 \leq d_i \leq d_j < n$

Следовательно, найдутся $d_1, d_2, \dots, d_{n-1} \in K$, что

$$v a d a = \sum_{i=1}^{n-1} d_i v e^{i a d a}$$

Так как отображение $e^{i a d a}$ является автоморфизмом алгебры

L , то нильэлемент v переходит в нильэлемент $c_i = v e^{i a d a}$

алгебры L , причем, если $x a d^z v = 0$, для некоторого целого

$$z, \text{ то } x a d^z c_i = 0, i=1, 2, \dots, n. \text{ Поэтому,}$$

$$[v, a] = v a d a = \sum_{i=1}^{n-1} d_i c_i$$

где c_i - нильэлемент из L .

Для изучения нильпотентных л.п. в радикальных алгебрах Ли линейных преобразований векторного пространства, нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.* Пусть L - алгебра Ли над K , V - точный L -модуль над K , J - абелев идеал в L и $B = \langle A(a) \rangle$ - правый идеал в обертывающей алгебре $A(L)$, порожденный элементом $a \in J$. Если a - нильпотентное л.п. векторного пространства V , то B - локально нильпотентная ассоциативная алгебра.

Доказательство. Пусть $a^n = 0$ и $F = \{x_i\}$ - некоторое конечное подмножество элементов из B . Тогда каждый элемент $x_i \in F$ без ограничения общности можно представить в виде:

$$x_i = a^{k_i} \cdot \prod_{c=1}^{m_i} c_i \quad (1)$$

где $c_i \in L$, $0 < k_i \leq n-1$. Пусть $C = \{c_i \in F\}$ - множество различных элементов c_i присутствующих в разложении (1) для элементов x_i , $i=1, 2, \dots$, и Z - число элементов множества C .

* Лемма 2 доказана совместно с Е.М. Левичем.

Обозначим через $m = \max m_i$, а через N - некоторое фиксированное число, зависящее только от m, ε, A , формулу для вычисления которого мы укажем ниже.

Используем собирательный процесс, основанный на равенстве $v_1 v_2 = v_2 v_1 + [v_1, v_2]$. Пусть дан элемент $M = \prod_{j=1}^m x_j, x_j \in F$. Применяя упомянутое выше равенство, преобразуем его в сумму произведений, у которых впереди стоит сомножитель вида a^k ($1 \leq k \leq n-1$), а все остальные сомножители - элементы из C и коммутаторы вида $[a, c, c]$. Затем повторим собирательный процесс, собирая теперь вслед за степенями элемента a коммутаторы вида $[a, c, c]$. В результате этого шага собирательного процесса элемент M будет представлен в виде суммы произведений, у которых вначале стоит произведение из степени элемента a и коммутаторов вида $[a, v]$ ($v \in C$), а все остальные сомножители - элементы из C и коммутаторы вида $[a, v, v]$ $v_1, v_2 \in C$. Прделав m шагов собирательного процесса, мы представим элемент M в виде:

$$M = \sum \beta_j a^{\alpha_j} M_{j_1} \dots M_{j_{m-1}} S_j \quad (2)$$

где $1 \leq j_1, j_2, \dots, j_{m-1} \leq n-1, \beta_j \in K, M_{j_1} \dots M_{j_{m-1}}$ - произведение коммутаторов вида $[a, v_1, v_2, \dots, v_m], (v_i \in C)$, и $S_j \in A(L)$ является произведением элементов из C и коммутаторов вида $[a, v_1, v_2, \dots, v_m], v_i \in C$. Такое представление возможно, ибо J - абелев идеал. Заметим, что каждый коммутатор, входящий в качестве сомножителя в (2), содержит один и только один элемент a .

Используя последнее замечание и обозначив через $\ell(M_{j_n})$ число сомножителей в M_{j_n} , дадим нижнюю оценку числа $\varphi(S_j)$ коммутаторов длины m , входящих в S_j в качестве сомножителей:

$$\varphi(S_j) \geq N - (n-1) - \sum_{k=1}^{m-1} \ell(M_{j_k}) \quad (3)$$

Теперь дадим верхнюю оценку числа $\varphi(S_j)$ сомножителей из C , входящих в S_j . В запись слагаемого $a^{\alpha_j} M_{j_1} \dots M_{j_{m-1}} S_j$ может входить не более Nm элементов из C . Следовательно, $\varphi(S_j) \leq Nm - \sum_{k=1}^{m-1} n \cdot \ell(M_{j_k}) - n \varphi(S_j) \leq Nm - \sum_{k=1}^{m-1} n \ell(M_{j_k}) - Nm + m(n-1) + m \sum_{k=1}^{m-1} \ell(M_{j_k}) = \sum_{k=1}^{m-1} m \ell(M_{j_k}) + m(n-1) - \sum_{k=1}^{m-1} n \ell(M_{j_k})$

Таким образом, величина $\bar{\varphi}(S_j)$ не зависит непосредственно от N .

Из леммы 1/5/ легко получить, что при любых $b_1, b_2, \dots, b_n \in L$ имеет место равенство

$$[a, b_1, b_2, \dots, b_n] 2^n - 2^{n-1} = 0$$

Так как число возможных коммутаторов длины n с элементами из множества C равно z^n , то

$$e(M_n) \leq 2^n z^n (n-1) \quad (4)$$

т.е. произведение любых $(2z)^{n-1}$ коммутаторов длины n равно нулю.

Подставляя (4) в (3), получим

$$\bar{\varphi}(S_j) \leq m \sum_{k=1}^{n-1} (2z)^k (n-1) + m(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} k(2z)^k (n-1) = N_0$$

Выберем в качестве $N = N_0(2z)^{m(n-1)} + \sum_{k=1}^{n-1} (2z)^k (n-1) m(n-1)$

Тогда $\bar{\varphi}(S_j) > N_0(2z)^{m(n-1)}$. Учитывая, что $\bar{\varphi}(S_j) \leq N_0$, то в произведении S_j обязательно встретится произведение из более $(2z)^{m(n-1)}$ коммутаторов длины m . Поэтому $S_j = 0$. Но тогда $M = 0$.

Докажем лемму, аналогичную соответствующему утверждению в теории групп 1/1/.

Лемма 3. Пусть L - абстрактная разрешимая алгебра Ли над произвольным полем, $LN(L)$ - локально нильпотентный радикал в L . $Z(LN(L))$ - централизатор $LN(L)$ в L . Тогда

$$Z(LN(L)) \subseteq LN(L)$$

Доказательство. Рассмотрим возрастающий инвариантный ряд в L :

$$0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_n \subseteq L_{n+1} \subseteq \dots \subseteq L_n = L \quad (5)$$

все факторы которого являются абелевыми. Используя пересечения $Z(LN(L))$ с членами ряда (5), мы можем построить в

$Z(LN(L))$ возрастающий ряд идеалов алгебры L

$$0 = J_0 \subseteq J_1 \subseteq \dots \subseteq J_n \subseteq J_{n+1} \subseteq \dots \subseteq J_n = Z(LN(L)),$$

все факторы которого абелевы. Допустим, что $Z(LN(L)) \not\subseteq LN(L)$.

Тогда найдется $z \in Z$, что $z \in LN(L)$ и $z_{n+1} \notin LN(L)$.

Так как $z \in LN(L)$, то z_{n+1} является центральным расширением алгебры J_n с помощью абелевой алгебры. Следова-

тельно, J_{n+1} - локально нильпотентный идеал в L . Мы

получили противоречие с тем, что $LN(L)$ - максимальный

локально нильпотентный идеал в L . Отсюда, $J_{n+1} \subseteq LN(L)$

и поэтому $Z(LN(L)) \subseteq LN(L)$

Предложение 1. Пусть L - разрешимая алгебра Ли над полем K , V - некоторый точный L -модуль над K . Тогда все нильпотентные л.п. из алгебры Ли L находятся в радикале Левицкого обертывающей алгебры $A(L)$.

Доказательство. Пусть a - ненулевое нильпотентное л.п. из L : $a^2 = 0$, $a \neq 0$. Покажем, что в L имеется абелев идеал, содержащий ненулевое нильпотентное л.п. из L . Рассмотрим два случая.

а) Пусть $[a, LN(L)] = 0$. Тогда $a \in Z(LN(L))$. Но $Z(LN(L)) \subseteq LN(L)$ и, следовательно, $Z(LN(L))$ абелев идеал в L , который содержит ненулевое нильпотентное л.п. a .

б) Пусть $[a, LN(L)] \neq 0$. Рассмотрим в L произвольный ряд длины m .

$$L \supset L^{(1)} \supset L^{(2)} \supset \dots \supset L^{(m)} = 0 \quad (6)$$

Используя пересечения $LN(L)$ с членами ряда (6), мы можем построить в L возрастающий ряд идеалов:

$$L \supset N_1 \supset N_2 \supset \dots \supset N_m = 0,$$

где $N_k = L^{(k)} \cap LN(L)$. Так как $[a, LN(L)] \neq 0$, то в $LN(L)$ найдется такой элемент v_1 , что

$$c_1 = [a, v_1, (k-1)] \neq 0, [a, v_1, (k)] = 0, k > 1.$$

Согласно лемме 1 из [5] $c_1^2 = 0$. Очевидно, что $c_1 \in N_1$, где $N_1 = L^{(1)} \cap LN(L)$. Если $[c_1, N_1] = 0$, то $c_1 \in Z(N_1)$, где $Z(N_1)$ - центр N_1 . Но тогда $Z(N_1)$ - абелев идеал, содержащий нильпотентное л.п. c_1 . Если $[c_1, N_1] \neq 0$, то найдется такой элемент v_2 , что

$$c_2 = [c_1, v_2, (k_2-1)] \neq 0, [c_1, v_2, (k_2)] = 0, k_2 > 1$$

По лемме 1 из [5] $c_2^2 = 0$, причем $c_2 \in N_2$. Повторяя этот процесс конечное число раз, мы получим ненулевое нильпотентное л.п. c , содержащееся в L . Таким образом, в L имеется абелев идеал, содержащий ненулевое нильпотентное л.п. c .

По лемме 2 правый идеал $F = \langle A(c) \rangle$, порожденный элементом c , является локально нильпотентной подалгеброй в обертывающей алгебре $A(L)$. Но тогда радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ алгебры $A(L)$ отличен от нуля.

Покажем теперь, что все нильпотентные л.п. из L ле-

жат в $\mathcal{L}(A)$. Предположим противное, т.е. существует нильпотентное л.п. $\beta \notin \mathcal{L}(A)$. Рассмотрим фактор-алгебру $\bar{A} = A(\mathcal{L})/\mathcal{L}(A)$. Гомоморфизм A на \bar{A} индуцирует гомоморфизм \bar{L} на $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}(A)/\mathcal{L}(A)$, причем $\bar{A} = A(\bar{\mathcal{L}})$. Алгебра \bar{A} изоморфно вкладывается в алгебру линейных преобразований векторного пространства \bar{A} . Поэтому и алгебрам $\bar{\mathcal{L}}$ и \bar{A} применимы предыдущие построения. Элемент $\bar{\beta} = \beta + \mathcal{L}(A)$ является ненулевым нильпотентным л.п. векторного пространства \bar{A} . Отсюда следует, что радикал Лёвицкого $\mathcal{L}(\bar{A})$ алгебры \bar{A} отличен от 0, а это противоречит полупростоте алгебры \bar{A} . Следовательно, все нильпотентные л.п. алгебры \mathcal{L} лежат в $\mathcal{L}(A)$.

Следствие 1. Пусть алгебра Ли \mathcal{L} удовлетворяет условиям предыдущего предложения. Тогда

- 1) множество \mathcal{L} , всех нильпотентных л.п. из \mathcal{L} образует идеал в \mathcal{L} ;
- 2) множество \mathcal{L}_2 всех алгебраических л.п. из \mathcal{L} образует идеал в \mathcal{L} и $[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}] \subseteq \mathcal{L}_1$.

Доказательство. 1) Нильпотентные л.п. алгебры Ли \mathcal{L} образуют в ней идеал, так как по доказанному выше все они лежат в радикале Лёвицкого $\mathcal{L}(A)$ обертывающей алгебры $A(\mathcal{L})$, а множество $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}$ является идеалом в \mathcal{L} .

2) Рассмотрим два случая:

а) $\mathcal{L}(A) = 0$. Тогда, если a - алгебраическое л.п. из \mathcal{L} , то построим подпространство $[\mathcal{L}a, \mathcal{L}N(\mathcal{L})]$ обертывающей алгебры $A(\mathcal{L})$. Допустим, что $[\mathcal{L}a, \mathcal{L}N(\mathcal{L})]$ ненулевое подпространство. Тогда в $\mathcal{L}N(\mathcal{L})$ найдется такой элемент β , что $c = [\mathcal{L}a, \beta(m-1)] \neq 0$, $[\mathcal{L}a, \beta(m)] = 0$ при $m > 1$. По лемме 1 из /5/ c является нильпотентным л.п. из \mathcal{L} . Из предложения 1 заключаем, что $\mathcal{L}(A) \neq 0$. Мы пришли к противоречию с условием леммы. Следовательно, $[\mathcal{L}a, \mathcal{L}N(\mathcal{L})] = 0$, т.е. $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}N(\mathcal{L}))$. Так как \mathcal{L} - разрешимая алгебра, то согласно лемме 3 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}N(\mathcal{L}))$ является абелевым идеалом в \mathcal{L} . Учитывая лемму 1 из /5/, получим, что алгебраическое л.п. $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$. Следовательно, если $\mathcal{L}(A) = 0$, то все алгебраические л.п. из \mathcal{L} лежат в центре $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ алгебры \mathcal{L} и поэтому образуют идеал.

б) $\mathcal{L}(A) \neq 0$. Пусть $\bar{A} = \frac{A(\mathcal{L})}{\mathcal{L}(A)}$. Естественный гомоморфизм A на \bar{A} индуцирует гомоморфизм \mathcal{L} на $\bar{\mathcal{L}}$. Так как

$\mathcal{L}(A) \neq 0$ то все алгебраические л.п. из \mathcal{L} лежат в центре $Z(\mathcal{L})$ и согласно лемме 1 из [5] образуют идеал \mathcal{L}_2 в \mathcal{L} . Если мы через \mathcal{L}_2 обозначим полный прообраз \mathcal{L}_2 в \mathcal{L} , то \mathcal{L}_2 содержит все алгебраические л.п. из \mathcal{L} , в том числе и $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}(A)$. Таким образом, алгебраические л.п. из \mathcal{L} в этом случае также образуют идеал. Предыдущие рассуждения показывают, что $[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}] = \bar{0}$ и, следовательно, $[\mathcal{L}_2, \mathcal{L}] \subseteq \mathcal{L}_1$.

Для рассмотрения нильпотентных л.п. в модулях над локально разрешимыми алгебрами Ли нам понадобится следующая Лемма 4. Пусть V - точный \mathcal{L} -модуль над произвольным полем и алгебра Ли \mathcal{L} обладает локальной системой подалгебр $\{\mathcal{L}_\alpha\}$, $\alpha \in \Gamma$. В каждой обертывающей алгебре $A(\mathcal{L}_\alpha)$ имеется идеал R_α , такой, что из $\mathcal{L}_\alpha \subseteq \mathcal{L}_\beta$ вытекает $R_\alpha \subseteq R_\beta$ (условие монотонности). Обозначим через R теоретико-множественную сумму всех R_α . Тогда R является идеалом в обертывающей алгебре $A(\mathcal{L})$.

Доказательство. Так как $\{\mathcal{L}_\alpha\}$ локальная система в \mathcal{L} , то для любой пары идеалов R_α и R_β найдется такая подалгебра $A(\mathcal{L}_\gamma)$, что $A(\mathcal{L}_\alpha) \subseteq A(\mathcal{L}_\gamma)$ и $A(\mathcal{L}_\beta) \subseteq A(\mathcal{L}_\gamma)$, откуда следует, что $R_\alpha \subseteq R_\gamma$ и $R_\beta \subseteq R_\gamma$. Этим уже доказано, что R -алгебра и R_α является локальной системой в R . Существуют такие R_β и $A(\mathcal{L}_\alpha)$, что $x \in A(\mathcal{L}_\alpha)$ и $y \in R_\beta$. Если $A(\mathcal{L}_\alpha) \supseteq A(\mathcal{L}_\beta)$ и $A(\mathcal{L}_\alpha) \supseteq A(\mathcal{L}_\alpha)$, то так как R_β идеал в $A(\mathcal{L}_\alpha)$, $xy \in R_\beta$ и, следовательно, R идеал в $A(\mathcal{L})$.

Предложение 2. Пусть \mathcal{L} - локально разрешимая алгебра Ли, V - точный \mathcal{L} -модуль над полем K . Тогда

- 1) множество \mathcal{L}_1 всех нильпотентных л.п. из \mathcal{L} образуют идеал в \mathcal{L} ;
- 2) множество \mathcal{L}_2 всех алгебраических л.п. из \mathcal{L} образуют идеал в \mathcal{L} и $[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] \subseteq \mathcal{L}_1$.

Доказательство. 1) Пусть a - ненулевое нильпотентное л.п. из алгебры Ли \mathcal{L} : $a^n = 0$, $n > 1$. Так как \mathcal{L} -локально разрешимая алгебра, то для нее существует локальная система разрешимых подалгебр $\{B_\alpha\}$. Построим новую локальную систему подалгебр $\{\mathcal{L}_\alpha\}$, положив $\mathcal{L}_\alpha = \{B_\alpha, a\}$.

Обозначим через R_α идеал в $A(L_\alpha)$, порожденный нильпотентными л.п. из L_α . Тогда для любого α , $R_\alpha \neq 0$ и выполняется условие монотонности: если $L_\alpha \subseteq L_\beta$, то $R_\alpha \subseteq R_\beta$. По предыдущей лемме алгебра $R = \bigcup R_\alpha$ является ненулевым идеалом в $A(L)$ с локальной системой $\{R_\alpha\}$. Следовательно, R - локально нильпотентный идеал в $A(L)$. Поэтому радикал Левицкого $\mathcal{L}(A)$ обертывающей алгебры $A(L)$ отличен от нуля. Переходя к фактор-алгебре $\bar{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$ и проводя рассуждения, такие же как в доказательстве предложения 1 пункт б); мы покажем, что все нильпотентные л.п. из алгебры L находятся в $\mathcal{L}(A)$. Следовательно, они образуют идеал L_1 алгебры Ли L .

2) При рассмотрении алгебраических л.п. имеют место два различных случая:

а) Пусть $\mathcal{L}(A) = 0$. Обозначим через M подалгебру Ли в L , порожденную алгебраическим л.п. a и произвольным элементом x из L . Так как алгебра M разрешима, то элемент a лежит в центре алгебры M . Действительно, в противном случае из предложения 1 следует, что в алгебре M существует ненулевое нильпотентное л.п. векторного пространства V и, следовательно, радикал Левицкого обертывающей алгебры $A(L)$ отличен от нуля. Противоречие. Значит, $[a, x] = 0$ для любого $x \in L$, т.е. $a \in Z(L)$. Поэтому, алгебраические л.п. из L образуют идеал.

б) $\mathcal{L}(A) \neq 0$. Тогда, рассуждая так же как в доказательстве предложения 1, мы приходим к тому, что в фактор-алгебре $\bar{A} = A(L)/\mathcal{L}(A)$ все алгебраические л.п. из действующей алгебры \bar{L} лежат в центре $Z(\bar{L})$ и образуют идеал \bar{L}_2 . Если через L_2 обозначить полный прообраз \bar{L}_2 в L , то L_2 состоит из всех алгебраических л.п. алгебры L . Одновременно доказано включение $[L_2, L] \subseteq L_1$.

Следствие 2. Пусть L - локально разрешимая алгебра Ли линейных преобразований векторного пространства V на K , порожденная алгебраическими л.п. Тогда L имеет локально конечномерную обертывающую $A(L)$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

а) $\mathcal{L}(A) = 0$. Тогда из доказательства следствия 1

(п.2а) выводим, что все алгебраические л.п. лежат в центре $Z(L)$ алгебры L и, следовательно, $A(L)$ локально конечномерная алгебра.

б) $Z(A) \neq 0$. Тогда в фактор-алгебре $\bar{A} = A(L)/Z(A)$ все алгебраические л.п. пространства \bar{A} находятся в центре $Z(\bar{L})$ алгебры \bar{L} . По предыдущему пункту $\bar{A}(L)$ является локально конечномерной алгеброй. Так как расширение локально конечномерной алгебры с помощью локально конечномерной алгебры - лок. конечномерна, то $A(L)$ лок. конечномерна.

Рассмотрим теперь расширение локально разрешимой алгебры L с помощью локально разрешимой алгебры L .

Лемма 5. Пусть H - локально разрешимый идеал в алгебре L над полем K и фактор-алгебра $\bar{L} = L/H$ является локально разрешимой алгеброй, обладающей базисом $\{\bar{a}_i\}$, $i \in I$, что $\sum_{k=0}^n \beta_k ad^k \bar{a}_i = 0$. Тогда L - локально разрешимая алгебра.

Доказательство. Если для $a \in L$ дифференцирование ada является алгебраическим л.п., в фактор-алгебре L/H дифференцирование $ad\bar{a}$ является также алгебраическим л.п. Следовательно, можно считать, что локально разрешимая алгебра adL порождается алгебраическими л.п. ada , $i \in I$. Согласно следствию 2 алгебра L adL является локально конечной. Значит, алгебра L локально конечна. Следовательно, для доказательства леммы достаточно рассмотреть расширение локально разрешимой алгебры с помощью конечномерной разрешимой алгебры. Дальше, не ограничивая общности считаем, что алгебра $L = L/H$ является конечномерной разрешимой алгеброй, обладающей базисом $\{\bar{a}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ таким, что $\sum_{k=0}^n \beta_k ad^k \bar{a}_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как элементы \bar{a}_i ($i = 1, 2, \dots, n$) составляют базу алгебры L , то

$$[\bar{a}_i, \bar{a}_j] = \sum_{k=1}^n \alpha_{ij}^k a_k + y_{ij}$$

где $y_{ij} \in H$, $\alpha_{ij}^k \in K$. Чтобы доказать локальную разрешимость L , достаточно показать, что элементы a_i , $i = 1, 2, \dots, n$, вместе с любой конечнопорожденной подалгеброй Y из H , содержащей y_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) порождают разрешимую подалгебру в L . Пусть y_c , $c = 1, 2, \dots, r$ являются

Доказательство. Согласно лемме 5 алгебра Ли L является локально разрешимой. Так как по предложению 2 энгелевы элементы в локально разрешимой алгебре Ли образуют идеал, то в каждом смежном классе фактор-алгебра $L = U/H$ имеется энгелев представитель алгебры L . С другой стороны, алгебра Ли L , как расширение локально конечной алгебры H с помощью локально конечной алгебры U/H , в каждом смежном классе которой имеется энгелев представитель из L , сама является локально конечной алгеброй [3]. Поэтому любая конечнопорожденная подалгебра из L является конечномерной разрешимой алгеброй, состоящей из энгелевых элементов. Это означает, что алгебра L является локально нильпотентной.

Теорема 1. Пусть L - алгебра Ли над K , обладающая возрастающим инвариантным рядом с локально разрешимыми факторами. Тогда энгелевы элементы из L образуют подалгебру.

Доказательство. Пусть в алгебре Ли имеется возрастающий инвариантный ряд

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{i-1} \subset L_i \subset L_{i+1} \subset \dots \subset L_j = L,$$

все факторы которого являются локально разрешимыми алгебрами и пусть уже доказано, что для любых $k \neq j$ выполняется утверждение теоремы. Если число j предельное, то $L_j = \bigcup_{i < j} L_i$ и, следовательно, энгелевы элементы из $L = L_j$ образуют в ней подалгебру. Если это число j не предельное, то рассмотрим фактор-алгебру $L = U/U_i$. Пусть $\{a_i, b_i\}$ энгелевы элементы из L , не лежащие в L_{i-1} . Обозначим через B подалгебру в L , порожденную L_{i-1} и элементами $\{a_i, b_i, c_i \in I$. По лемме 1 фактор-алгебра $B = B/U_{i-1}$ обладает базисом $\{c_i, f_i, g_i \in I$, таким, что c_i - энгелевы элементы из L . Тогда, согласно лемме 5, фактор-алгебра B/U_{i-1} является локально разрешимой алгеброй. Следовательно, энгелевы элементы из L находятся в алгебре B , которая обладает рядом

$$0 = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{j-1} = B$$

длины $j-1$ с локально разрешимыми факторами. По предположению индукции энгелевы элементы из B образуют подалгебру в B и, следовательно, в алгебре L . Одновременно доказано следствие.

Следствие 3. Пусть алгебра Ли L удовлетворяет усло-

виям предыдущей теоремы. Тогда энгелевы элементы из \mathcal{L} находятся в идеале \mathcal{J} , который является расширением локально разрешимой алгебры с помощью локально конечной алгебры.

Следствие 4. В радикальной алгебре Ли над K энгелевы элементы образуют подалгебру.

Рассмотрим нильпотентные л.п. в алгебрах Ли линейных преобразований векторного пространства.

Теорема 2. Пусть \mathcal{L} - алгебра Ли над K , обладающая возрастающим инвариантным рядом с локально разрешимыми факторами, V - некоторый точный \mathcal{L} -модуль. Тогда нильпотентные л.п. из \mathcal{L} образуют подалгебру.

Доказательство. Согласно теореме 1 энгелевы элементы из \mathcal{L} образуют подалгебру M . В M имеется возрастающий инвариантный ряд

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_\alpha \subset M_{\alpha+1} \subset \dots \subset M_\beta = M$$

все факторы которого являются локально разрешимыми алгебрами. Индукцией по длине ряда будем доказывать, что M - локально нильпотентная алгебра. Так как M_1 локально разрешимая алгебра из энгелевых элементов, то по предложению 2 M_1 является локально нильпотентной алгеброй. Допустим, что утверждение доказано для всех $\alpha < \beta$. Если число β предельное, то $M_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} M_\alpha$. Так как объединение локально нильпотентных идеалов из \mathcal{L} снова является локально нильпотентным идеалом, то $M_\beta = M$ - локально нильпотентная алгебра.

Пусть β - неопределенное порядковое число. Тогда по индукционному предположению $M_{\beta-1}$ является локально нильпотентной алгеброй и фактор-алгебра $M/M_{\beta-1}$ - локально разрешимой алгеброй, в каждом смежном классе которой имеется энгелев представитель из \mathcal{L} . Согласно лемме 6 алгебра M является локально нильпотентной. Нильпотентные л.п. из \mathcal{L} являются энгелевыми элементами \mathcal{L} . Поэтому множество всех нильпотентных л.п. из \mathcal{L} находятся в локально нильпотентной алгебре M . По предложению 2 они образуют в M идеал \mathcal{I} , следовательно, в \mathcal{L} подалгебру.

Лемма 7. В локально разрешимом идеале \mathcal{A} алгебры Ли линейных преобразований векторного пространства V над K

совокупность нильпотентных л.п. образует идеал L_1 , алгебры Ли L .

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что если $\delta \in L_1$ и D - некоторое дифференцирование алгебры R , то $\delta D \in L_1$.

Согласно предложению 2, $L_1 \in \mathcal{L}(A(R))$, где $\mathcal{L}(A(R))$ - радикал Левицкого обертывающей алгебры $A(R)$. Поэтому $\delta^m = 0$ для некоторого $m > 0$ и, следовательно, $(\delta^m) D^m = m(\delta D)^m + d = 0$. Элемент $d \in \mathcal{L}(A(R))$, так как d есть сумма произведений, в каждое из которых входит хотя бы один раз элемент δ в качестве сомножителя. Следовательно, $(\delta D)^m \in \mathcal{L}(A(R))$. Поэтому найдется такое k , что $(\delta D)^{m+k} = 0$, т.е. δD - нильпотентный элемент из R . На основании предложения 2 приходим к тому, что $\delta D \in L_1$.

Нам неизвестно, образуют ли идеал нильпотентные л.п. в радикальных алгебрах Ли линейных преобразований векторного пространства, однако справедливо предложение.

Предложение 3. Пусть \mathcal{H} - локально разрешимый идеал в алгебре Ли L линейных преобразований векторного пространства V над K и фактор-алгебра L/\mathcal{H} локально разрешима. Если \mathcal{H} не содержит ненулевых л.п., то нильпотентные л.п. из L образуют идеал.

Доказательство. Покажем, что для любого ненулевого нильпотентного л.п. α из L , не лежащего в \mathcal{H} , имеет место равенство $[\alpha, \mathcal{H}] = 0$. Действительно, рассмотрим алгебру Ли B , порожденную \mathcal{H} и α над K . Так как фактор-алгебра B/\mathcal{H} - абелева и α -ангелев элемент в L , то по лемме 6 алгебра B является локально нильпотентной. Согласно предложению 2 подпространство $[\alpha, \mathcal{H}]$ состоит из нильпотентных л.п. алгебры \mathcal{H} . Следовательно, $[\alpha, \mathcal{H}] = 0$. Поэтому любое нильпотентное л.п. из L находится в централизаторе алгебры \mathcal{H} . Но алгебра $\mathcal{Z}(\mathcal{H})$, как центральное расширение локально разрешимой алгебры \mathcal{H} с помощью локально разрешимой фактор-алгебры, является локально разрешимой алгеброй. Следовательно, все нильпотентные л.п. из L находятся в локально разрешимом идеале алгебры L . По предыдущей лемме они образуют идеал в L .

Покажем теперь, что предположение о нильпотентности л.п. из алгебры Ли \mathcal{L} линейных преобразований векторного пространства V над K существенно для получения вышеприведенных теорем.

Пусть V - векторное пространство над K , A и B линейные преобразования пространства V , действие которых на базис $\{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$... задается формулами:

$$e_i A = e_{i+1}, e_i B = i e_{i-1}, i > 1, e_n B = 0$$

Тогда имеет место равенство $\mathcal{L}[A, B] = \mathcal{I}$, где \mathcal{I} - тождественное преобразование пространства V . Алгебра Ли \mathcal{L} , порожденная преобразованиями A , B и \mathcal{I} , является конечномерной и нильпотентной. Преобразование B из \mathcal{L} , очевидно, локально нильпотентно. Однако $\mathcal{L}[A, B] = \mathcal{I}$ - алгебраическое л.п. пространства V . Это показывает, что теорема 2 не верна для локально нильпотентных л.п.

Литература

1. Плоткин Б.И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. М., 1966. 603 с.
2. Джекобсон Н. Алгебра Ли. М., "Мир", 1964. 355 с.
3. Плоткин Б.И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли. - УМН, 1958, т. 13, № 6, с. 133-138.
4. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли. Семинар "Софус Ли". М., ИЛ, 1962.
5. Липянский Р.С. Некоторые радикалы линейных алгебр Ли. - УМН, 1974, т.29, вып.3 (177), с. 211-212.
6. Джекобсон Н. Строение колец. М., ИЛ, 1961. 392 с.

Поступила 19 января 1976 года,

ОБ ОЦЕНКАХ СПЕКТРОВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ
СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЕ

В.Е.Слюсарчук

Новополоцкий химико-технологический институт

В данной статье для непрерывной на ограниченном замкнутом множестве $\Omega \subset C^n$ и голоморфной на $\text{int } \Omega$ функции $f(z)$, принимающей значения из банаховой алгебры R доказывается, что $C(f(z))$ для каждого $z \in \Omega$ содержится в выпуклой оболочке множества $\bigcup_{z \in \Omega, \text{int } \Omega} C(f(z))$. Доказанное утверждение, обобщающее принцип максимума (см. [1], стр. 19), применяется к исследованию абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

§ 1. Основные обозначения.

Будем придерживаться следующих обозначений: Ω - ограниченное замкнутое множество в C^n - пространстве n комплексных переменных $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$; $\text{int } \Omega$ - внутренность Ω ; $f: \Omega \rightarrow R$ - граница Ω ; \bar{G} - замыкание множества G ; U^n - единичный поликруг в C^n , т.е. множество точек $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, для которых $|z_i| < 1, 1 \leq i \leq n$; T^n - единичный тор в C^n ; т.е. множество точек $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, для которых $|z_i| = 1, i=1, \dots, n$; R - банахова алгебра с единицей e и нормой $\|\cdot\|_R$; $\mathcal{K}[A]$ - выпуклая оболочка множества A ; $C(\Omega, R)$ - пространство непрерывных функций $f: \Omega \rightarrow R$ с нормой $\|\cdot\|_{C(\Omega, R)} (\|f(z)\|_{C(\Omega, R)} = \max_{z \in \Omega} \|f(z)\|_R)$; $C(f: \Omega, R)$ - пространство непрерывных функций $f: \Omega \rightarrow R$ с нормой $\|\cdot\|_{C(f: \Omega, R)} (\|f(z)\|_{C(f: \Omega, R)} = \max_{z \in \Omega} \|f(z)\|_R)$; $A(\Omega, R)$ - подпространство $C(\Omega, R)$, состоящее из голоморфных на $\text{int } \Omega$ функций, с нормой $\|\cdot\|_{A(\Omega, R)} = \|\cdot\|_{C(\Omega, R)}$.

§ 2. Банаховы алгебры $C(\Omega, R)$, $C(f: \Omega, R)$, $A(\Omega, R)$ и спектры их элементов.

Напомним, банахова алгебра есть комплексное банахово пространство A , которое также является алгеброй, причем умножение и норма связаны неравенством $\|fg\|_A \leq \|f\|_A \|g\|_A, f, g \in A$.

Примерами банаховых алгебр есть множества $C(\Omega, R)$, $C(\Omega, R)$ и $A(\Omega, R)$. Действительно, все эти множества являются линейными комплексными пространствами (в этом легко убедиться). Все эти пространства с соответственно заданными на них нормами $\| \cdot \|_{C(\Omega, R)}$, $\| \cdot \|_{C(\Omega, R)}$ и $\| \cdot \|_{A(\Omega, R)}$ являются полными (последнее очевидно для пространств $C(\Omega, R)$ и $C(\Omega, R)$, полнота пространства $A(\Omega, R)$ следует из предложения 2 (см. [2], стр. 9) и того, что функция $f(z)$ голоморфна на Ω тогда и только тогда, когда голоморфна на Ω функция $\psi(f(z))$ для любого функционала $\psi \in R^*$ (R^* - сопряженное пространство к R)). Рассматриваемые пространства, очевидно, являются также алгебрами. А операция умножения и нормы связаны легко проверяемыми неравенствами

$$\|f(z)g(z)\|_{C(\Omega, R)} \leq \|f(z)\|_{C(\Omega, R)} \cdot \|g(z)\|_{C(\Omega, R)}; \|f(z)g(z)\|_{C(\Omega, R)} \leq \|f(z)\|_{C(\Omega, R)} \|g(z)\|_{C(\Omega, R)}$$

$$\|f(z)\|_{C(\Omega, R)} \|g(z)\|_{C(\Omega, R)}; \|f(z)g(z)\|_{A(\Omega, R)} \leq \|f(z)\|_{A(\Omega, R)} \|g(z)\|_{A(\Omega, R)}$$

Поэтому, действительно, $C(\Omega, R)$, $C(\Omega, R)$ и $A(\Omega, R)$ есть банаховы алгебры.

Заметим, что рассматриваемые банаховы алгебры есть алгебры с единицами $e_1(z) \equiv e (z \in \Omega)$, $e_2(z) \equiv e(z - \Omega)$ для $e_1, e_2 = e (z \in \Omega)$ соответственно.

В дальнейшем под $\sigma_R(f(z))$ будем понимать спектр элемента $f(z)$, как элемента из R при фиксированном z , под $\sigma_{C(\Omega, R)}(f(z))$ - спектр элемента $f(z)$, как элемента из $C(\Omega, R)$, под $\sigma_{C(\Omega, R)}(f(z))$ - спектр элемента $f(z)$, как элемента из $C(\Omega, R)$ и под $\sigma_{A(\Omega, R)}(f(z))$ - спектр элемента $f(z)$, как элемента из $A(\Omega, R)$.

Теорема 1. $\sigma_{C(\Omega, R)}(f(z)) = \bigcup_{z \in \Omega} \sigma_R(f(z))$

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$\sigma_{C(\Omega, R)}(f(z)) \subseteq \bigcup_{z \in \Omega} \sigma_R(f(z)) \quad (1)$$

Пусть $\lambda \notin \bigcup_{z \in \Omega} \sigma_R(f(z))$. Тогда $(\lambda e - f(z))^{-1} \in R \quad \forall z \in \Omega$.

Поскольку $(\lambda e - x)^{-1}$ есть непрерывная функция от $x \in R$ во всех точках, в которых $(\lambda e - x)^{-1}$ существует (см. [3], с. 213) и $f(z) \in C(\Omega, R)$, то $(\lambda e - f(z))^{-1} \in C(\Omega, R)$, т.е.

$(\lambda e - f(z))^{-1} \in C(\Omega, R)$, поэтому $\lambda \notin \sigma_{C(\Omega, R)}(f(z))$. Отсюда вытекает соотношение (1).

Теперь покажем, что

$$G_{C(\Omega, R)}(f(z)) \subset \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z)) \quad (2)$$

Пусть $\mu \in \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z))$. Найдется $z_0 \in \Omega$ такое, что $\mu \in G_R(f(z_0))$

Тогда $(\mu - f(z_0))^{-1} \in R$, следовательно, $(\mu - f(z))^{-1} \in C(\Omega, R)$.

Поэтому $(\mu; (z) - f(z))^{-1} \in C(\Omega, R)$ и соотношение (2) также доказано. Из соотношений (1) и (2) следует утверждение теоремы. Аналогичным образом доказывается

Теорема 2. $G_{C(\Omega, R)}(f(z)) = \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z)).$

Теорема 3. $G_{A(\Omega, R)}(f(z)) = \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z)).$

Доказательство. Покажем, что

$$G_{A(\Omega, R)}(f(z)) \supset \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z)) \quad (3)$$

Действительно, пусть $\mu \in \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z))$. Тогда согласно доказательству теоремы 1 $(\mu - f(z_0))^{-1} \in C(\Omega, R)$, т.е. $(\mu; (z) - f(z))^{-1} \in C(\Omega, R)$. Следовательно, $(\mu; (z) - f(z))^{-1} \in A(\Omega, R)$. Поэтому $\mu \in G_{A(\Omega, R)}(f(z))$ и справедливость соотношения (3) доказана.

Теперь покажем, что

$$G_{A(\Omega, R)}(f(z)) \subset \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z)) \quad (4)$$

Отсюда в силу (3) будет следовать утверждение теоремы.

Пусть $\lambda \in \bigcup_{z \in \Omega} G_R(f(z))$. Тогда согласно доказательству теоремы 1 $(\lambda - f(z_0))^{-1} \in C(\Omega, R)$. Покажем, что $(\lambda - f(z))^{-1} \in A(\Omega, R)$.

Для этого возьмем произвольную точку $z_0 \in \text{int } \Omega$. Найдется окрестность $V(z_0) \subset \text{int } \Omega$ точки z_0 такая, что

$$\inf_{z \in V(z_0)} |(f(z) - f(z_0))(\lambda - f(z_0))^{-1}|_R < 1 \quad (5)$$

Тогда

$$(\lambda - f(z))^{-1} = (\lambda - f(z_0))^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} ((f(z_0) - f(z))(\lambda - f(z_0))^{-1})^k \right)$$

$$V(z_0) \subset V(z_0)$$

Поскольку сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} ((f(z_0) - f(z))(\lambda - f(z_0))^{-1})^k$ в силу (5)

и голоморфности $f(z)$ в точке z_0 голоморфна в точке

то голоморфна в этой же точке и $(\lambda - f(z))^{-1}$. Отсюда следует в силу произвольности точки $z_0 \in \text{int } \Omega$ голоморфность

функции $(\lambda - f(z))^{-1}$ на $\text{int } \Omega$, т.е. $(\lambda; (z) - f(z))^{-1} \in A(\Omega, R)$.

Поэтому $\lambda \in G_{A(\Omega, R)}(f(z))$. Отсюда вытекает соотношение (4).

Теорема доказана.

§ 3. Теорема об оценке спектров элементов из $A(C, R)$.

Теорема 4 [4, 5]. $\sigma_{A(C, R)}(\psi(z)) \subset \bigcup [\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))]$.

Доказательство. Пусть утверждение теоремы не справедливо. Тогда найдем число $\mu \in \sigma_{A(C, R)}(\psi(z))$ такое, что $\mu \notin \bigcup [\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))]$

$$\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z)) = \overline{\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))}, \Rightarrow \bigcup [\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))] = \bigcup [\overline{\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))}]$$

Поэтому $\min_{\sigma \in \bigcup [\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))]} |\mu - \sigma| > 0$

и $\operatorname{Re}(\mu \exp i\varphi \psi(z)) = \beta + \delta$ (6)
для некоторых $\varphi > 0$ и $\delta > 0$, где

$$\beta = \max_{z \in \bigcup [\sigma_{C(\psi(z), R)}(\psi(z))]} \operatorname{Re} z$$

Возьмем произвольное $\varepsilon \in (0, \delta)$ и рассмотрим спрямляемый замкнутый контур L , охватывающий $\sigma_{C(\psi(z), R)}(\exp i\varphi \psi(z))$, такой, чтобы $\sigma_{C(\psi(z), R)}(\exp i\varphi \psi(z)) \cap L = \emptyset$ (\emptyset - пустое множество) и $\max_{z \in L} \operatorname{Re} z \leq \varepsilon + \beta$.

Тогда

$$\exp i\varphi \exp i\varphi \psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp i\varphi \exp i\varphi (z - \exp i\varphi \psi(z))^{-1} dz$$

для $\forall z \in \Omega$ [3]. Нетрудно убедиться в том, что функция $(z - \exp i\varphi \psi(z))^{-1}$ непрерывна по совокупности переменных z и $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ на ограниченном замкнутом множестве $L \times \Omega$. Поэтому она ограничена.

Оценивая (7), получим $\max_{z \in L, z \in \Omega} \|(z - \exp i\varphi \psi(z))^{-1}\|_R = N \varepsilon + \infty$

$$\|\exp i\varphi \exp i\varphi \psi(z)\|_R \leq \frac{1}{2\pi} \int_L \exp i\varphi \exp i\varphi N |dz| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_L \exp i\varphi \exp i\varphi N |dz| = N \varepsilon \exp i\varphi \exp i\varphi, \forall z \in \Omega, \forall \varepsilon > 0$$

где $N \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int |dz| < \infty$. Следовательно,

$$\|\exp i\varphi \exp i\varphi \psi(z)\|_{C(\psi(z), R)} \leq N \varepsilon \exp i\varphi \exp i\varphi, \forall \varepsilon > 0$$

Исходя из соотношения (8), покажем, что

$$\|\exp i\varphi \exp i\varphi \psi(z)\|_{C(\psi(z), R)} \leq N \varepsilon \exp i\varphi \exp i\varphi, \forall \varepsilon > 0$$

Для этого рассмотрим множество $S = \{ \varphi : \varphi \in R^k, \|\varphi\|_{R^k} = 1 \}$ (здесь $\|\cdot\|_{R^k}$ - норма в R^k). Так как $\psi(z)$ голоморфная на $\operatorname{int} \Omega$ функция, то и для произвольного функционала $\varphi \in S$ скалярная функция $\varphi(\exp i\varphi \exp i\varphi \psi(z))$ также будет голоморфной

функцией на $\text{int } \Omega$. Эта функция также будет непрерывной на Ω в силу того, что $f(z) \in A(\Omega, R)$. Поэтому на основании принципа максимума модуля голоморфной функции нескольких переменных

$$\max_{z \in \Omega} |\psi(\exp \xi \exp \{i\psi f(z)\})| = \quad (10)$$

$$\max_{z \in \Omega} |\psi(\exp \xi \exp \{i\psi f(z)\})|$$

(этот принцип устанавливается с помощью формулы Коши [2] аналогичным образом как и в случае голоморфных функций одной переменной (см. [1], с. 19). К тому же $\forall \epsilon \geq 0$

$$\min_{z \in \Omega} |\psi(\exp \xi \exp \{i\psi f(z)\})| \geq N_\epsilon \exp \{(\beta + \epsilon)\xi\} \quad (11)$$

(это следует из (8)). Следовательно, на основании соотношений (10) и (11) и известного соотношения $\|a\|_R = \sup_{\psi \in S} |\psi(a)|$ для нормы $a \in R$ получим соотношение (9).

Соотношения (9) достаточно для того, чтобы

$$G_{A(\Omega, R)}(\exp \{i\psi f(z)\}) \subset \{z : \text{Re } z \in \beta + \epsilon\} \quad (12)$$

([6], с. 42-43, см. доказательство теоремы 1.2, заменив в нем банахову алгебру линейных непрерывных операторов алгеброй R). Поскольку $\mu \in G_{A(\Omega, R)}(\exp \{i\psi f(z)\})$, то $\mu \exp \{i\psi f(z)\} \in G_{A(\Omega, R)}(\exp \{i\psi f(z)\})$, поэтому согласно (12)

$$\text{Re}(\mu \exp \{i\psi f(z)\}) \in \beta + \epsilon$$

Последнее соотношение противоречит соотношению (6) ($\epsilon < \delta$) и завершает доказательство теоремы.

§ 4. Следствия теоремы 4.

Следствие 1. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция в некоторой окрестности U^n . Тогда

$$\bigcup_{z \in U^n} G_R(f(z)) \subset \bigcup_{z \in U^n} G_R(f(z))$$

Доказательство. Заметим, что функция $f(z)$ голоморфная в некоторой окрестности поликруга U^n , голоморфна также в некоторой окрестности поликруга U^n по каждой из переменных z_1, z_2, \dots, z_n . Повторное применение теоремы 4 к функции $f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ поочередно по z_1, z_2, \dots, z_n дает цепочку равенств $\bigcup_{z \in U^n} G_R(f(z)) =$

$$\bigcup_{|z_1|=1, |z_2|=1, |z_3|=1, \dots, |z_n|=1} G_R(f(z)) = \bigcup_{|z_1|=1, |z_2|=1, |z_3|=1, \dots, |z_n|=1} G_R(f(z)) =$$

$$= \gamma \left[\bigcup_{|z_1| \leq 1, |z_2| \leq 1, \dots, |z_n| \leq 1} G_R(\xi(z)) \right] = \gamma \left[\bigcup_{z \in V} G_R(\xi(z)) \right]$$

доказывающих утверждение.

Рассмотрим множество последовательностей $z = \langle z_1, z_2, \dots \rangle$ состоящих из комплексных чисел z_k ($k \geq 1$), модули которых не превышают единицы. Это множество обозначим через V . В

V выделим подмножество Γ , состоящее из последовательностей $z = \langle z_1, z_2, \dots \rangle$, в которых $|z_k| = 1 \quad \forall k \geq 1$.

Следствие 2. Пусть $\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|_R < \infty$. Тогда

$$\bigcup_{z \in V} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k) \subset \gamma \left[\bigcup_{z \in \Gamma} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k) \right] \quad (13)$$

Доказательство. Следствие 2 вытекает из следствия 1 и леммы (их мы докажем позже):

Лемма 1. $M = \{a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k\}_{z \in \Gamma}$ и $N = \bigcup_{z \in \Gamma} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k)$ есть ограниченные и замкнутые множества;

Лемма 2. Для каждого открытого выпуклого множества содержащего множество $\bigcup_{z \in \Gamma} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k)$, найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\bigcup_{z \in \Gamma} G_R(b + a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k) \subset G \quad \forall b \in \mathbb{C}^n, \|b\|_R \leq \varepsilon \quad (14)$$

Действительно, возьмем произвольное открытое выпуклое множество G , содержащее $\bigcup_{z \in \Gamma} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k)$. Найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что будет выполняться соотношение (14). Выберем число m такое, чтобы $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|a_k\|_R < \frac{\varepsilon}{2}$. Из (14) следует, что

$$G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k a_k) \subset G$$

для всех последовательностей $z = \langle z_1, z_2, \dots \rangle$, в которых $|z_k| = 1 \quad \forall k = 1, m$ и $|z_k| \leq 1 \quad \forall k > m$. При фиксированных z_{m+1}, z_{m+2}, \dots функция $a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k a_k$ голоморфна по z_1, z_2, \dots, z_m в каждой окрестности поликруга U^n . Поэтому, согласно следствию 1

$$\bigcup_{|z_1| \leq 1, \dots, |z_m| \leq 1} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k a_k) \subset \gamma \left[\bigcup_{|z_1| = |z_2| = \dots = |z_m| = 1} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^m z_k a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} z_k a_k) \right] = G$$

для произвольных фиксированных z_{m+1}, z_{m+2}, \dots ($|z_{m+k}| \leq 1, k \geq 1$). Так как $G \subset G$, то

$$\bigcup_{z \in V} G_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k) \subset G$$

Из последнего соотношения, замкнутости множества $\mathcal{U} \left[\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{B}_R(a_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k) \right]$ (это следует из замкнутости $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} \mathcal{B}_R(a_\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k)$) и того, что G - произвольное открытое выпуклов множество, следует соотношение (13).

Доказательство леммы 1. Множество \mathcal{M} , очевидно, ограничено. Покажем, что это множество содержит все свои предельные точки (отсюда будет следовать, что $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$).

Действительно, пусть α - произвольная предельная точка множества \mathcal{M} . Тогда найдется последовательность элементов $\beta_n = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(n)} a_k \in \mathcal{M}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n - \alpha\|_R = 0$. Применяя диагональный метод, выберем такую последовательность целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$, чтобы последовательность комплексных чисел $z_k^{(n_1)}, z_k^{(n_2)}, \dots, z_k^{(n_m)}$ была сходящейся для каждого $k \geq 1$. Пусть $u_k = \lim_{m \rightarrow \infty} z_k^{(n_m)}$, очевидно, что $|u_k| = 1 \quad \forall k \geq 1$. Тогда

$$\beta = \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_{n_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(n_m)} a_k \right) =$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{m \rightarrow \infty} z_k^{(n_m)} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k \in \mathcal{M}$$

Следовательно, $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}$.

Рассмотрим теперь множество M . Это множество, очевидно, ограничено. Докажем, что $M = \overline{M}$. Для этого покажем, что M содержит все свои предельные точки. Пусть m_0 - произвольная предельная точка рассматриваемого множества.

Тогда найдется такая последовательность чисел $m_k \in M$, что $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = m_0$. Каждому m_k будет соответствовать последовательность $z^{(k)} = \langle z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \dots \rangle \in \mathcal{U}$, для которой $m_k \in \mathcal{B}_R(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(k)} a_n)$.

Применяя диагональный метод, из членов последовательности $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(k)}, \dots$ выберем такую подпоследовательность $z_m^{(k_1)}, z_m^{(k_2)}, \dots, z_m^{(k_n)}, \dots$ были сходящимися для каждого $m \geq 1$. Пусть

$u_m = \lim_{n \rightarrow \infty} z_m^{(k_n)}$. Очевидно, что $|u_m| = 1, \forall m \geq 1$. Покажем, что $m_0 \in \mathcal{B}_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k)$. Пусть имеет место обратное.

Тогда найдется окрестность множества $\mathcal{B}_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k)$, обозначим ее через G , что $m_0 \notin G$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(k_n)} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k\|_R = 0$, то найдется число n_0 такое, что

$$\mathcal{B}_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k^{(k_n)} a_k) \subset G, \quad \forall n \geq n_0 \quad [4], \text{ с. 28, см. доказатель-}$$

ство теоремы 2.1, заменив в нем банахову алгебру линейных непрерывных операторов алгеброй R). Поэтому $M_n \in G, \forall n \geq n_0$ и, следовательно, $M_n \notin M_0$, когда $n \rightarrow \infty$. Это противоречит соотношению $M_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ и доказывает, что $M = \bar{M}$.

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Пусть утверждение леммы не справедливо. Тогда найдется открытое выпуклое множество A , последовательность $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, \dots$ ($\theta_m \in R \forall m \geq 1, \lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m\|_R = 0$), последовательность $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_m^{(1)}, \dots$ ($z_m^{(1)} \in \Gamma, z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \dots, z_m^{(1)} \in \Gamma, m \geq 1$) и последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$ ($\forall m \geq 1 \lambda_m \in G \cap \mathcal{G}_R$) такие, что

$$a_0 + \sum_{n=1}^m \lambda_n z_n^{(m)} a_n \in A \quad \forall m \geq 1 \quad (15)$$

Не нарушая общности доказательства, будем считать, что последовательность $z_n^{(1)}, z_n^{(2)}, \dots, z_n^{(m)}, \dots$ сходится для каждого $n \geq 1$.

Пусть $u_n = \lim_{m \rightarrow \infty} z_n^{(m)}$. Тогда $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\theta_m + a_0 + \sum_{n=1}^m \lambda_n z_n^{(m)} a_n\|_R = \|a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n a_n\|_R = 0$. Заметим, что $a_0 + \sum_{n=1}^m \lambda_n u_n a_n \in \mathcal{G}_R$.

$\mathcal{G}_R(a_0 + \sum_{n=1}^m \lambda_n u_n a_n) \subset A$. В силу того, что $\mathcal{G}_R(x)$ является полунепрерывной сверху функцией от $x \in R$ (см. доказательство предыдущей леммы).

$$\mathcal{G}_R(\theta_m + a_0 + \sum_{n=1}^m \lambda_n z_n^{(m)} a_n) \subset A \quad \forall m \geq m_0,$$

m_0 - некоторое достаточно большое число, тогда $\forall m \geq m_0, \theta_m \in A$. Последнее соотношение противоречит (15) и доказывает лемму 2. Следствие 2 доказано.

§ 5. Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Введем в рассмотрение множество операторов $B: C([-h, 0], R)^1 \rightarrow R$, нормы которых не превышают единицы и каждый из которых определяется соотношением

$$By(\varphi) = \int_{-h}^0 y(\varphi) d\theta(\varphi) \quad (y(\varphi) \in C([-h, 0], R)),$$

где $\theta(\varphi)$ - функция ограниченной вариации. $C([-h, 0], R)$ есть комплексное пространство непрерывных на $[-h, 0]$ функций, принимающих значения в R , норма в $C([-h, 0], R)$ определяется соотношением $\|y(\varphi)\|_{C([-h, 0], R)} = \max_{\varphi \in [-h, 0]} \|y(\varphi)\|_R$. Нормы операторов рассматриваемого множества, которое обозначим через L_h , определяются обычным соотношением

$$\|B\| = \sup_{\|y(\varphi)\|_{C([-h, 0], R)} = 1} \|By(\varphi)\|_{C([-h, 0], R)}$$

Через $x_k(\sigma) \in C([-h, 0], R)$, обозначим "h-отрезок" непрерывной функции $x(t): [-h, 0] \rightarrow R$, т.е. $\{x(t+\sigma): \sigma \in [-h, 0]\}$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k B_k x_k(\sigma) \quad t \geq 0 \quad (16)$$

где $a_k \in R \quad \forall k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| h^k < \infty$; $B_k \in L_k \quad \forall k \geq 1$; $x(\sigma) \in R \quad \forall \sigma \in [-h, 0]$

Будем решать задачу об асимптотической неустойчивости нулевого решения рассматриваемого уравнения при произвольных $B_k \in L_k \quad (k \geq 1)$, где h - произвольное положительное число. Аналогичная задача в конечномерных и бесконечномерных B -пространствах в случае конечного числа слагаемых $a_k B_k x_k(\sigma)$, в которых $B_k x_k(\sigma) = x(t - \Delta_k)$ (Δ_k - неотрицательная постоянная) решалась соответственно в работах [7-10] и [11, 12]. Приведенный здесь результат является обобщением известных утверждений об абсолютной асимптотической устойчивости линейных систем запаздывающего типа на случай бесконечного числа запаздываний. Напомним, система

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_0 x(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x(t - \Delta_k) \quad (17)$$

называется абсолютно асимптотически устойчивой, если она асимптотически устойчива при произвольных постоянных неотрицательных значениях Δ_k (мы будем рассматривать только такие Δ_k , чтобы $\sup_{k \geq 1} \Delta_k < \infty$).

Теорема 5. Пусть

$$\bigcup_{\sigma \in I} B_R(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k a_k) \subset \{z: \operatorname{Re} z < 0\} \quad (18)$$

Тогда нулевое решение уравнения (16) асимптотически устойчиво для произвольных $B_k \in L_k$ и $h > 0$.

Доказательство. Для доказательства утверждения теоремы, очевидно, достаточно показать, что

$$\{p \in \mathbb{C}: p = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\int_{-h}^0 \exp(p\sigma) d B_k(\sigma)) a_k\}^{-1} \in R \quad (19)$$

$\forall p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p \geq 0$, $\forall B_k \in L_k$, $\forall h > 0$ (здесь $B_k(\sigma)$ - функция ограниченной вариации, которая определяет оператор B_k).

Соотношение (19) действительно имеет место, потому что $B_R(p = a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} (\int_{-h}^0 \exp(p\sigma) d B_k(\sigma)) a_k) \subset \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ для всех $p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p \geq 0$, всех функций $B_k(\sigma)$, соответствующих операторам $B_k \in L_k$, и всех $h > 0$, что следует из

соотношения

$$B_k(a_0 + \sum_{k=1}^m (\int_{\sigma} \kappa_k \rho_k \gamma dV_k(\alpha)) a_k) \in \Omega: R_k \leq \rho_k (20)$$

которое выполняется для всех $\rho \in \Omega: R_k \geq \rho$ всех функций $V_k(\alpha)$ рассмотренных в предыдущем соотношении, и всех $k > 0$ ((20) следует из следствия 2 и соотношения

$$|\int_{\sigma} \kappa_k \rho_k \gamma dV_k(\alpha)| \leq 1 \quad \forall \rho \in \Omega: R_k \geq \rho, \quad \forall k \geq 1,$$

вытекающего из того, что $V_k \in L_k \quad \forall k \geq 1$).

Следствие 3.5. Пусть выполняется соотношение (18.).

Тогда нулевое решение уравнений (17) абсолютно асимптотически устойчиво.

Литература

1. Хёрмандер Л. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., "Мир", 1968, 279 с.
2. Мальгранж Б. Лекции по теории функций нескольких комплексных переменных. М., "Наука", 1969, 119 с.
3. Наймарк М.А. Нормирование кольца. М., "Наука", 1968.
4. Слюсарчук В.Е. Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с конечным и бесконечным числом запаздываний. Проблемы развития прикладных математических исследований. - Тезисы докладов IУ Республиканской конференции математиков Белоруссии, ч.2. Минск, 1975, 130.
5. Слюсарчук В.Е. Признаки абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным числом запаздываний. - Тезисы докладов IУ Всесоюзной конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Киев, "Наукова думка", 1975, с.218-219.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., "Наука", 1970, 535 с.
7. Репин Ю.М. Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях. - Уч. зап. Уральского ун-та, Свердловск, 1960, № 23, с.31-34.
8. Коренівський Д.Г. Про деякі ознаки стійкості лінійних стаціонарних систем з запізненням. - ДАН УРСР, 1966, № 6, с. 708-710.

9. Коваль Б.О., Царков Е.Ф. Необхідні і достатні умови абсолютної асимптотичної стійкості лінійних систем дифференціальних рівнянь з постійним запізненням. - ДАН УРСР, 1972, с. А, № 6, с. 506-509.

10. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М., "Наука", 1971. 296 с.

11. Слюсарчук В.Е. Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных уравнений в банаховом пространстве. "Математические заметки", 1975, т. 17, № 6, с. 919-923.

12. Слюсарчук В.Е. Об абсолютной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с запаздываниями. "Математические заметки", 1975, т. 18, № 2, с. 261-265.

Поступила 11 марта 1976 года.

СПЕКТРЫ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ
ОГРАНИЧЕННЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В.Е.Слюсарчук

Новополоцкий химико-технологический институт

В настоящей работе известная теорема Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье [1] обобщается на случай матричных абсолютно сходящихся рядов Фурье, зависящих от счетного числа переменных. Доказанное утверждение применяется для решения задачи о спектрах линейных непрерывных операторов, порождаемых системами линейных функциональных уравнений с бесконечным числом отклонений и бесконечным числом независимых переменных, в пространстве ограниченных вектор-функций, определенных на множестве числовых последовательностей.

§ 1. Основные обозначения.

Обозначим: R - поле вещественных чисел; Z - кольцо целых чисел; Γ - множество последовательностей $t = \langle t_1, t_2, \dots \rangle$, в которых $t_n \in R \quad \forall n \geq 1$.

Очевидно, что Γ - абелева группа относительно операции сложения: $t + \tau = \langle t_1, t_2, \dots \rangle + \langle \tau_1, \tau_2, \dots \rangle = \langle t_1 + \tau_1, t_2 + \tau_2, \dots \rangle$.

Рассмотрим в Γ произвольное счетное подмножество конечных последовательностей, т.е. последовательностей $\tau = \langle \tau_1, \tau_2, \dots \rangle$, в которых только конечное число членов $\tau_n \neq 0$. Это множество обозначим через Λ . Через $\mathcal{M}(\Lambda)$ обозначим наименьшую абелеву подгруппу группы Γ , содержащую Λ . Очевидно, что $\mathcal{M}(\Lambda)$ есть Z -модуль [2], состоящий из счетного числа конечных последовательностей χ .

Рассмотрим также в Γ произвольное счетное подмножество последовательностей $\lambda = \langle \lambda_1, \lambda_2, \dots \rangle$ таких, чтобы $\lambda_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ и последовательности $\epsilon_n \lambda = \langle \epsilon_n \lambda_1, \epsilon_n \lambda_2, \dots \rangle$ были конечными. Это множество обозначим через V . Введем в Γ операцию умножения: $t \chi = \langle t_1, t_2, \dots \rangle \cdot \langle \chi_1, \chi_2, \dots \rangle =$
 $= \langle t_1 \chi_1, t_2 \chi_2, \dots \rangle$ (по отношению

к операции умножения множество Γ также является абелевой группой) и рассмотрим наименьшую абелеву подгруппу группы Γ

относительно умножения, содержащую V , ее мы обозначим через $Y(V)$. Очевидно, что $Y(V)$ состоит из счетного числа последовательностей $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ таких, что последовательности $\epsilon_1 \beta_1, \epsilon_2 \beta_2, \dots = \epsilon \beta$ финитные.

Для произвольных элементов $t = (t_1, t_2, \dots) \in \Gamma$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots) \in M(N)$ введем в рассмотрение "произведение" $\sum_{k=1}^N t_k \tau_k$, которое обозначим через (t, τ) . Очевидно, что $(t, \tau) \in \mathbb{C}$ $\forall t \in \Gamma, \tau \in M(N)$.

Далее обозначим: \mathbb{C} - поле комплексных чисел, \mathbb{C}^n - пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которых $x_k \in \mathbb{C} \forall k \in \{1, \dots, n\}$; $\| \cdot \|_{\mathbb{C}^n}$ - норма в \mathbb{C}^n ($\|x\|_{\mathbb{C}^n} = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$); $[\mathbb{C}^n]$ - пространство $n \times n$ - матриц над полем \mathbb{C} ; $\| \cdot \|_{[\mathbb{C}^n]}$ - норма в $[\mathbb{C}^n]$ ($\|A\|_{[\mathbb{C}^n]} = \max_{1 \leq k \leq n} \|A x_k\|_{\mathbb{C}^n} = \|A\|_{\mathbb{C}^n}$).

Рассмотрим множество матричных функций $A(t): \Gamma \rightarrow [\mathbb{C}^n]$, представимых рядами вида

$\sum_{\tau \in M(N)} \exp\{i(t, \tau)\} A_{\tau}$ ($t \in \Gamma$),
в которых $A_{\tau} \in [\mathbb{C}^n] \forall \tau \in M(N)$ и $\sum_{\tau \in M(N)} \|A_{\tau}\|_{[\mathbb{C}^n]} < \infty$, и множество скалярных функций $\alpha(t): \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, представимых рядами

вида $\sum_{\tau \in M(N)} \exp\{i(t, \tau)\} a_{\tau}$ ($t \in \Gamma$),
в которых $a_{\tau} \in \mathbb{C} \forall \tau \in M(N)$ и $\sum_{\tau \in M(N)} |a_{\tau}| < \infty$. Обозначим эти

множества соответственно через $\mathcal{W}(\Gamma, [\mathbb{C}^n], M(N))$ и $\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$.
Множества $\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ и $\mathcal{W}(\Gamma, [\mathbb{C}^n], M(N))$ являются банаховыми кольцами с нормами

$$\| \sum_{\tau \in M(N)} \exp\{i(t, \tau)\} A_{\tau} \|_{\mathcal{W}(\Gamma, [\mathbb{C}^n], M(N))} = \sum_{\tau \in M(N)} \|A_{\tau}\|_{[\mathbb{C}^n]}$$

$$\| \sum_{\tau \in M(N)} \exp\{i(t, \tau)\} a_{\tau} \|_{\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))} = \sum_{\tau \in M(N)} |a_{\tau}|$$

соответственно, если операции сложения, умножения на число и умножения определить в них как соответствующие операции над матричными функциями $A(t)$ или скалярными функциями $\alpha(t)$. Единицами в них соответственно являются I (I - единичная матрица в $[\mathbb{C}^n]$) и 1 ($1 \in \mathbb{C}$).

Заметим, что кольцо $\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ является коммутативным.

Введем в рассмотрение также пространство ограниченных вектор-функций $x(t): \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^n$, которое обозначим через $\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{C}^n)$.

Норму $\| \cdot \|_{\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{C}^n)}$ введем соотношением

$$\|x(t)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{C}^n)} = \sup_{t \in \Gamma} \|x(t)\|_{\mathbb{C}^n}$$

Очевидно, что $\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{C}^n)$ - банахово пространство.

Обозначим через $\sigma(N)$ - спектр $A \in [\mathbb{C}^n]$ (аналогичным

образом будем обозначать спектры линейных ограниченных операторов), а через \bar{P} - замыкание множества P .

§ 2. Постановка задачи.

Рассмотрим в $\mathcal{M}(\Gamma, \mathbb{C})$ линейные непрерывные операторы O_α в \mathcal{B} , которые определяются соотношениями:

$$O_\alpha x(t) = \sum_{\tau \in \Lambda} A_\tau x(t + \tau),$$

$$B x(t) = \sum_{\tau \in V} B_\tau x(t + \tau),$$

где Λ и V - счетные множества, рассмотренные в предыдущем параграфе, а матричные коэффициенты A_τ и B_τ удовлетворяют условиям: $\sum_{\tau \in \Lambda} \|A_\tau\|[\xi] < \infty$, $\sum_{\tau \in V} \|B_\tau\|[\xi] < \infty$.

Основной задачей, рассматриваемой в статье, будет задача о нахождении спектров операторов O_α и B .

§ 3. Обобщение теоремы Винера.

Для решения рассмотренной задачи потребуются утверждения:

Теорема 1. Пусть $\alpha(t) \in \mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ и $\inf_{t \in \Gamma} |\alpha(t)| > 0$. Тогда $\frac{1}{\alpha(t)} \in \mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$.

Теорема 2. Пусть $A(t) = \sum_{\tau \in \Lambda} \exp[i\tau(t, \tau)] A_\tau \in \mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}^q, M(N))$ и $\inf_{t \in \Gamma} |\det A(t)| > 0$. Тогда $[A(t)]^{-1} \in \mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}^q, M(N))$ и коэффициенты C_Δ матрицы-функции $\sum_{\Delta \in M(N)} \exp[i\Delta(t, \Delta)] C_\Delta$, совпадающей с $[A(t)]^{-1}$, удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\tau + \Delta = \rho} A_\tau C_\Delta = \sum_{\tau + \Delta = \rho} C_\Delta A_\tau = \begin{cases} I, & \rho = \theta \\ 0, & \rho \neq \theta \end{cases}, \quad (1)$$

где θ - нулевая матрица, а $\theta = \langle 0, 0, \dots \rangle$.

Замечание. Сформулированные утверждения обобщают известную теорему Винера о том, что если сумма абсолютно сходящегося тригонометрического ряда $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp[in\tau]$ нигде не обращается в нуль, то функция $\frac{1}{\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \exp[in\tau]}$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что элемент $\alpha(t)$ кольца $\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ имеет обратный тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком максимальном идеале [3].

Покажем, что элемент $\alpha(t)$, удовлетворяющий условиям теоремы, не принадлежит никакому максимальному идеалу кольца $\mathcal{W}(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$.

Обозначим $d = \inf_{t \in I} a(t) (d > 0)$ и разобьем множество $M(N)$ на два непересекающихся множества M_1 и M_2 такие, чтобы множество M_1 содержало конечное число элементов и

$$\sum_{t \in M_2} \exp\{i(t, z)\} a_t \in W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N)) < \frac{d}{2} \quad (\text{здесь } a(t) = \sum_{z \in M(N)} \exp\{i(t, z)\} a_z)$$

Это возможно, поскольку $\sum_{z \in M(N)} |a_z| < \infty$. Далее рассмотрим элемент $\sum_{z \in M_1} \exp\{i(t, z)\} a_z \in W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$. Этот элемент в силу того, что все последовательности $z \in M_1$ финитные, представляет собой функцию, зависящую от некоторого числа переменных:

t_1, t_2, \dots, t_n Очевидно, что ее можно представить в виде:

$$\sum_{j=1}^Q b_j \exp\{i \sum_{k=1}^n t_k z_k^{(j)}\},$$

где Q - целое число, равное числу элементов в M_1 , $b_j \in \mathbb{C}$, $\forall j = \overline{1, Q}$, а числа $z_1^{(j)}, z_2^{(j)}, \dots, z_n^{(j)}$ для каждого $j = \overline{1, Q}$ являются первыми N элементами (остальные элементы нулевые) соответствующих последовательностей множества M_1 .

Возьмем произвольное $K (K = \overline{1, N})$ и рассмотрим множество K -тых элементов последовательностей $z = \langle z_1, z_2, \dots, z_K, \dots \rangle$ множества $M(N)$. Его мы обозначим через $M^{(K)}$. Оно, очевидно, будет содержать в себе наименьший модуль $\frac{d}{4}$, содержащий числа z_k, z_k, \dots, z_k . Поэтому в $M^{(K)}$ найдутся линейно независимые числа $d_1^{(K)}, d_2^{(K)}, \dots, d_r^{(K)}$ такие (напомним, числа d_1, d_2, \dots, d_r называются линейно зависимыми, если из равенства $m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_r d_r = 0$, где m_1, m_2, \dots, m_r - целые числа, следует, что $m_1 = m_2 = \dots = m_r = 0$), что каждое из чисел $z_k^{(j)} (j = \overline{1, Q})$ представится в виде $z_k^{(j)} = \sum_{c=1}^r n_c(z_k^{(j)}) d_c^{(K)}$,

где $n_c(z_k^{(j)}) \in \mathbb{Z} \quad \forall c = \overline{1, r}, \forall k = \overline{1, N}, \forall j = \overline{1, Q}$ Тогда

$$\sum_{j=1}^Q b_j \exp\{i \sum_{k=1}^n t_k z_k^{(j)}\} = \sum_{j=1}^Q b_j \exp\{i \sum_{k=1}^n t_k \sum_{c=1}^r n_c(z_k^{(j)}) d_c^{(K)}\}.$$

Возьмем теперь произвольный максимальный идеал F кольца $W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ и найдем образ элемента $a(t)$ при гомоморфизме кольца $W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ по идеалу F . Покажем, что образ рассматриваемого элемента при гомоморфизме кольца $W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$ по максимальному идеалу F не равняется нулю. Этого будет достаточно для того, чтобы $a(t) \notin F$ [3].

Пусть γ есть число, в которое переходит элемент $\sum_{z \in M} \exp\{i(t, z)\} a_z$ при гомоморфизме кольца $W(\Gamma, \mathbb{C}, M(N))$

по идеалу F . В силу свойств рассматриваемого гомоморфизма $|y| \leq \|\sum_{z \in M_z} \exp\{i(t, z)\} a_z\|_{W(\Gamma, C, M(N))} < \frac{\alpha}{2}$ [3]. Покажем, что элемент $\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k z_k^{(q)}\} = \sum_{z \in M_z} \exp\{i(t, z)\} a_z$ переходит при рассматриваемом гомоморфизме в число, модуль которого не меньше (отсюда будет следовать, что модуль образа $a(t)$ при рассматриваемом гомоморфизме больше $\frac{\alpha}{2} - \gamma > 0$ и $a(t) \in W(\Gamma, C, M(N))$ в силу произвольности F).

Заметим, что элемент $\exp\{it_k \alpha_z^{(k)}\}$, где $\alpha_z^{(k)}$ - числа, входящие в выражение $\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) \alpha_z^{(k)}\}$, принадлежат $W(\Gamma, C, M(N))$.

Пусть при гомоморфизме кольца $W(\Gamma, C, M(N))$ по максимальному идеалу F элемент $\exp\{it_k \alpha_z^{(k)}\}$ переходит в число $\beta_z^{(k)}$ и, следовательно, элемент $\exp\{it_k \alpha_z^{(k)}\}$ переходит в число $[\beta_z^{(k)}]^{-1}$.

Норма элемента $\exp\{it_k \alpha_z^{(k)}\}$ равна единице, следовательно, в силу свойств гомоморфизма кольца $W(\Gamma, C, M(N))$ по его максимальному идеалу F $|\beta_z^{(k)}| \leq \|\exp\{it_k \alpha_z^{(k)}\}\|_{W(\Gamma, C, M(N))} = 1$, аналогично $|\beta_z^{(k)}|^{-1} \leq \|\exp\{-it_k \alpha_z^{(k)}\}\|_{W(\Gamma, C, M(N))} = 1$, ибо норма элемента $\exp\{-it_k \alpha_z^{(k)}\}$ также равна единице. Поэтому $|\beta_z^{(k)}| = 1$ и $\beta_z^{(k)} = \exp\{it_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}\}$ при некотором $t_k (\beta_z^{(k)}) \in \mathbb{R}$.

Тогда при рассматриваемом гомоморфизме элемент

$$\exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) \alpha_z^{(k)}\} \text{ переходит в число } \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) t_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}\},$$

а элемент $\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) \alpha_z^{(k)}\}$ - в число $\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) t_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}\}$.

Покажем, что $|\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) t_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}\}| \geq \frac{\alpha}{2}$ (2) поскольку числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ линейно независимы для каждого K , где $\alpha_k = \frac{1}{N}$, то согласно теореме Кронекера (см. [4], с. 106-109) система неравенств $|t_k \alpha_z^{(k)} - t_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}| < \delta \pmod{2\pi}$

$$(z = \overline{1, N}, k = \overline{1, N})$$

разрешима при любом $\delta > 0$. Поэтому $|\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) t_k (\beta_z^{(k)}) \alpha_z^{(k)}\}| \geq \inf_{t_1 \in \mathbb{R}, \dots, t_N \in \mathbb{R}} |\sum_{q=1}^Q \theta_q \exp\{i \sum_{k=1}^N t_k \sum_{z=1}^P n_z(z_k^{(q)}) \alpha_z^{(k)}\}|$.

Но так как $\inf_{t \in \Gamma} |a(t)| = d$ и $\|\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z\|_{\mathcal{W}(\Gamma, C, M(N))} < \frac{d}{2}$,
 то $\inf_{t \in \Gamma} \frac{d}{\sum_{p=1}^N b_p \exp\{i \sum_{k=1}^N b_k \sum_{z=1}^N a_k(z_k^{(p)}) a_k^{(p)}\}} > \frac{d}{2}$.

Поэтому справедливо соотношение (2), которое, согласно сделанным ранее замечаниям, завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $A(t) \in \mathcal{W}(\Gamma, E^2, M(N))$,
 то $\det A(t) \in \mathcal{W}(\Gamma, C, M(N))$ и $\frac{1}{\det A(t)} \in \mathcal{W}(\Gamma, C, M(N))$

согласно условию $\inf_{t \in \Gamma} |\det A(t)| > 0$ и теореме 1. Тогда каждый элемент $C_{ij}(t) \in \mathcal{W}(\Gamma, C, M(N))$ матрицы-функции $(A(t))^{-1} = C(t) = \{C_{ij}(t)\}$ будет принадлежать $\mathcal{W}(\Gamma, C, M(N))$ и, следовательно, сама матрица-функция $C(t)$ будет принадлежать $\mathcal{W}(\Gamma, [C], M(N))$. Поэтому найдутся матрицы C_Δ такие, что $\sum_{\Delta \in M(N)} \|C_\Delta\|_{[C]} < \infty$ и

$$C(t) \equiv \sum_{\Delta \in M(N)} \exp\{i(t, \Delta)\} C_\Delta \quad \forall t \in \Gamma$$

Соотношения (1) следуют из очевидных цепочек тождеств

$$\begin{aligned} A(t)[A(t)]^{-1} &= \left(\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z \right) \left(\sum_{\Delta \in M(N)} \exp\{i(t, \Delta)\} C_\Delta \right) \equiv \\ &\equiv \sum_{z \in \Gamma} \sum_{\Delta \in M(N)} \exp\{i(t, z + \Delta)\} A_z C_\Delta \equiv \sum_{\rho \in M(N)} \exp\{i(t, \rho)\} \sum_{z + \Delta = \rho} A_z C_\Delta \equiv I, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [A(t)]^{-1} A(t) &= \left(\sum_{\Delta \in M(N)} \exp\{i(t, \Delta)\} C_\Delta \right) \left(\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z \right) \equiv \\ &\equiv \sum_{\Delta \in M(N)} \sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z + \Delta)\} C_\Delta A_z \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \sum_{\rho \in M(N)} \exp\{i(t, \rho)\} \sum_{z + \Delta = \rho} C_\Delta A_z \equiv I$$

и единственности единичного элемента в $\mathcal{W}(\Gamma, E^2, M(N))$

Теорема доказана.

§ 4. Спектр оператора \mathcal{O}_L .

Теорема 3. $\sigma(\mathcal{O}_L) = \bigcup_{t \in \Gamma} \sigma \left(\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z \right)$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$\sigma(\mathcal{O}_L) \supseteq \bigcup_{t \in \Gamma} \sigma \left(\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z \right) \quad (3)$$

Пусть $\lambda \in \bigcup_{t \in \Gamma} \sigma \left(\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z \right)$. Тогда $\inf_{t \in \Gamma} |\det(AI -$

$-\sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t, z)\} A_z)| = 0$. Найдутся последовательность финитных элементов $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(m)} \dots$ множества Γ и последовательность единичных векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, \dots$ пространства C^n такие, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(AI - \sum_{z \in \Gamma} \exp\{i(t^{(m)}, z)\} A_z) x^{(m)}\|_{C^n} = 0.$$

Рассмотрим последовательность функций $y_m(t) = \exp\{i(t^{(m)}, t)\} x^{(m)}$ ($m \geq 1$). Очевидно, что $\|y_m(t)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} = \|x^{(m)}\|$.

Поскольку $\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_1 y_m(t) - O y_m(t)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} = 1$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_1 y_m(t) - \sum_{z \in \Lambda} A_z y_m(t+z)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \|A_1 \exp\{i(t^{(m)}, t)\} x^{(m)} - \sum_{z \in \Lambda} A_z \exp\{i(t^{(m)}, t+z)\} x^{(m)}\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \| \exp\{i(t^{(m)}, t)\} (A_1 - \sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t^{(m)}, z)\} A_z) x^{(m)} \|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \| (A_1 - \sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t^{(m)}, z)\} A_z) x^{(m)} \|_{C^n} = 0,$$

то число 1 принадлежит предельному спектру оператора O (см. [5], с. 45), а это доказывает (3).

Покажем теперь, что $B(O) \subset \bigcup_{z \in \Gamma} B(\sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t, z)\} A_z)$ (4)

Пусть $\lambda \notin \bigcup_{z \in \Gamma} B(\sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t, z)\} A_z)$. Тогда $\inf_{z \in \Gamma} |\det(\lambda I - \sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t, z)\} A_z)| > 0$ и $(\lambda I - \sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t, z)\} A_z)^{-1} \in W(\Gamma, [C^n], M(N))$ согласно теореме 2. Пусть $\sum_{\Delta \in M(N)} \exp\{i(t, \Delta)\} C_\Delta \equiv (\lambda I - \sum_{z \in \Lambda} \exp\{i(t, z)\} A_z)^{-1}$.

Тогда согласно теореме 2

$$\lambda C_\rho \rightarrow \sum_{z+\Delta=\rho} A_z C_\Delta = \lambda C_\rho - \sum_{z+\Delta=\rho} C_\Delta A_z = \begin{cases} \lambda I, \rho = \theta \\ 0, \rho \neq \theta \end{cases} \quad (5)$$

где $\theta = \langle \theta, \theta, \dots \rangle$, $\|\theta\|_{[C^n]} = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda x(t) - \sum_{z \in \Lambda} A_z x(t+z) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (6)$$

Покажем, что оно для каждой вектор-функции $f(t) \in \mathcal{M}(\Gamma, C^n)$ имеет единственное в $\mathcal{M}(\Gamma, C^n)$ решение $x(t)$. Отсюда в силу теоремы Банаха об обратном операторе (см. [6], с. 225) будет следовать, что $\lambda \notin B(O)$, т.е. будет следовать соотношение (4). Рассмотрим вектор-функцию

$$U(t) = \sum_{\Delta \in M(N)} C_\Delta f(t+\Delta). \quad (7)$$

Очевидно, что $U(t) \in \mathcal{M}(\Gamma, C^n)$. Покажем, что $U(t)$ есть решение уравнения (6). Это вытекает из цепочки тождеств

$$\lambda U(t) - \sum_{z \in \Lambda} A_z U(t+z) \equiv \lambda \sum_{\Delta \in M(N)} C_\Delta f(t+\Delta) - \sum_{z \in \Lambda} A_z \sum_{\Delta \in M(N)} C_\Delta f(t+z+\Delta) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\Delta \in M(N)} (\lambda C_\rho - \sum_{z+\Delta=\rho} A_z C_\Delta) f(t+\rho) \equiv (\lambda I - \sum_{z \in \Lambda} A_z C_\Delta) f(t) \equiv f(t)$$

(здесь были применены соотношения (5)). Покажем теперь, что каждое другое решение $y(t)$ уравнения (6) $(Ay(t) - \sum_{z \in \Gamma} A_z y(t+z) \equiv f(t))$ совпадает с $U(t)$. Это вытекает из следующей цепочки тождеств

$$U(t) \equiv \sum_{\Delta \in M(\lambda)} C_\Delta f(t+\Delta) \equiv \sum_{\Delta \in M(\lambda)} C_\Delta (Ay(t+\Delta) - \sum_{z \in \Gamma} A_z y(t+\Delta+z)) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\rho \in M} (IC_\rho - \sum_{z+\Delta=\rho} C_\Delta A_z) y(t+\rho) \equiv (-IC_0 - \sum_{z+\Delta=0} C_\Delta A_z) y(t) \equiv y(t)$$

(здесь также были применены соотношения (5)). Это доказывает единственность решений рассматриваемого уравнения и приводит к соотношению (4).

Из (3) и (4) следует утверждение теоремы.

§ 5. Спектр оператора \mathcal{B} .

Теорема 4. $\sigma(\mathcal{B}) = U \sigma(\sum_{\lambda \in \Gamma} \exp\{i(t, \lambda)\} B_\lambda)$

Доказательство. Покажем, что

$$\sigma(\mathcal{B}) \supset U \sigma(\sum_{\lambda \in \Gamma} \exp\{i(t, \lambda)\} B_\lambda). \quad (8)$$

Пусть $\lambda \in U \sigma(\sum_{\lambda \in \Gamma} \exp\{i(t, \lambda)\} B_\lambda)$. Тогда

$\inf_{t \in \Gamma} |\det(AI - \sum_{\lambda \in \Gamma} \exp\{i(t, \lambda)\} B_\lambda)| = 0$. Поэтому найдутся последовательность финитных элементов $t_1, t_2, \dots, t_m, \dots$ множества Γ и последовательность единичных векторов $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, \dots$ пространства C^n такие, что

$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(AI - \sum_{\lambda \in \Gamma} \exp\{i(t^{(m)}, \lambda)\} B_\lambda) x^{(m)}\|_{C^n} = 0$. Рассмотрим совокупность вектор-функций

$$\Psi_m(t) = \begin{cases} \exp\{i(t^{(m)}, \lambda)\} x^{(m)} & t \in \Gamma, \\ 0 & t \in \Gamma_1, \end{cases} \quad (m \geq 1),$$

где $\lambda/\lambda^{(m)} = \langle \lambda/t_1, \lambda/t_2, \dots \rangle$, Γ_1 - подмножество Γ , состоящее из последовательностей $t = \langle t_1, t_2, \dots \rangle$, в которых $t_k \neq 0 \forall k \geq 1$, $\|0\|_{C^n} = 0$. Очевидно, что $\|\Psi_m^{(k)}\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} = 1 \forall m \geq 1$. Поскольку

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(t) - \mathcal{B} \Psi_m(t)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \|\Psi_m(t) - \sum_{\lambda \in \Gamma} B_\lambda \Psi_m(\lambda t)\|_{\mathcal{M}(\Gamma, C^n)} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Gamma} \|\Psi_m(t) - \sum_{\lambda \in \Gamma} B_\lambda \Psi_m(\lambda t)\|_{C^n} =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Gamma} \|\exp\{i(t^{(m)}, \lambda)\} x^{(m)} -$$

$$-\sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} \exp\{i(t^{(m)}, \alpha_{\lambda}/2t)\} x^{(m)} / c^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{t \in \Gamma} \|\exp\{i(t^{(m)}, \alpha_{\lambda}/2t)\} (AI -$$

$$-\sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} \exp\{i(t^{(m)}, \alpha_{\lambda})\} x^{(m)} / c^n =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \|(AI - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} \exp\{i(t^{(m)}, \alpha_{\lambda})\}) x^{(m)} / c^n = 0,$$

то число λ принадлежит предельному спектру оператора B , а это доказывает (8).

Теперь покажем, что $\mathcal{B}(B) \subset \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{B}(\sum_{\lambda \in V} \exp\{i(t, \alpha_{\lambda})\} B_{\lambda})$ (9)

Пусть $\lambda \notin \bigcup_{\lambda \in \Gamma} \mathcal{B}(\sum_{\lambda \in V} \exp\{i(t, \alpha_{\lambda})\} B_{\lambda})$. Тогда $\inf_{t \in \Gamma} |\det(AI - \sum_{\lambda \in V} \exp\{i(t, \alpha_{\lambda})\} B_{\lambda})| > 0$, поэтому согласно теореме 2 матрица-функция $(AI - \sum_{\lambda \in V} \exp\{i(t, \alpha_{\lambda})\} B_{\lambda})^{-1}$ представляется в виде $\sum_{\beta \in Y(V)} \exp\{i(t, \alpha_{\beta})\} D_{\beta}$, где $\sum_{\beta \in Y(V)} \|D_{\beta}\|_{[c]} < \infty$, $Y(V)$ - множество, рассмотренное в § 1, и

$$\lambda D_{\gamma} - \sum_{\lambda, \beta = \gamma} B_{\lambda} D_{\beta} = \lambda D_{\gamma} - \sum_{\lambda, \beta = \gamma} D_{\beta} B_{\lambda} \begin{cases} I, & \gamma = \delta \\ 0, & \gamma \neq \delta \end{cases}, \quad (10)$$

где $\delta = \langle i, i, \dots \rangle$, $\|0\|_{[c]} = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\lambda x(t) - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} x(\lambda t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \quad (11)$$

Покажем, что оно для каждой вектор-функции $f(t) \in \mathcal{M}(\Gamma, C^n)$ имеет единственное в $\mathcal{M}(\Gamma, C^n)$ решение $x(t)$. Отсюда в силу теоремы Банаха об обратном операторе будет следовать, что $\lambda \notin \mathcal{B}(B)$, т.е. будет следовать соотношение (9).

Рассмотрим вектор-функцию

$$U(t) = \sum_{\beta \in Y(V)} D_{\beta} f(\beta t) \quad (t \in \Gamma). \quad (12)$$

Очевидно, что $U(t) \in \mathcal{M}(\Gamma, C^n)$. Покажем, что $U(t)$ есть решение уравнения (11). Это следует из совокупности равенств

$$\lambda U(t) - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} U(\lambda t) \equiv \lambda \sum_{\beta \in Y(V)} D_{\beta} f(\beta t) - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} \sum_{\beta \in Y(V)} D_{\beta} f(\lambda \beta t) \equiv$$

$$\equiv \sum_{\gamma \in Y(V)} (\lambda D_{\gamma} - \sum_{\lambda, \beta = \gamma} B_{\lambda} D_{\beta}) f(\gamma t) \equiv (\lambda D_{\delta} - \sum_{\lambda, \beta = \delta} B_{\lambda} D_{\beta}) f(t) \equiv f(t)$$

(Здесь были применены соотношения (10)). Покажем теперь, что какое другое решение $y(t)$ уравнения (11) ($\lambda y(t) - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} y(\lambda t) \equiv f(t)$) совпадает с $U(t)$. Это вытекает из следующей

совокупности тождеств

$$U(t) = \sum_{\lambda \in Y(\gamma)} D_{\lambda} f(\lambda t) \equiv \sum_{\lambda \in Y(\gamma)} D_{\lambda} (\lambda \gamma (\beta t)) - \sum_{\lambda \in V} B_{\lambda} x(\lambda \beta t) \equiv \sum_{\lambda \in Y(\gamma)} (1 D_{\lambda}$$

$$- \sum_{\lambda \beta = \gamma} D_{\lambda} B_{\lambda}) x(\gamma t) \equiv (1 D_{\gamma} - \sum_{\lambda \beta = \gamma} D_{\lambda} B_{\lambda}) x(t) \equiv x(t)$$

(здесь также были применены соотношения (10)). Это доказывает единственность решений уравнения (11) и приводит к соотношению (9).

Из (8) и (9) следует утверждение теоремы.

Литература

1. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., Физматгиз, 1963. 256 с.
2. Ленг С. Алгебра. М., "Мир", 1968. 564 с.
3. Наймарк М.А. Нормированные кольца. М., "Наука", 1968.
4. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М., Гостехиздат, 1953. 396 с.
5. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М., "Мир", 1970. 352 с.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., "Наука", 1968. 496 с.

Поступила 9 марта 1976 года

УДК 513.83

СОБСТВЕННЫЕ ШЕЙПЫ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫХ ПАРАКОМПАКТОВ

А.П.Шостак

Латвийский государственный университет

Понятие шейпа (формы, фундаментального типа) метрического компакта, обобщающее понятие его гомотопического типа, было введено в 1968 году К.Борсуком [3], [4]. В 1971 году С.Мардешич и Дж.Сегал с помощью т.н. ANR -спектров ввели отношение шейповой эквивалентности для бикомпактов [6]; примерно в то же время Р.Х.Фокс, основываясь на конструкции, использующей теорему Куратовского-Войдыславского и теорему Дугунджи 5, определили шейп метрического пространства IO . При всём формальном отличии шейповыи конструкций Мардешича - Сегала и Фокса как друг от друга, так и от определения К. Борсука, в случае метрических компактов все три подхода оказываются эквивалентными [7], [10]. В заметке [II] предложено определение шейпа пространства в классе компактности где под классом компактности понимается класс топологических пространств, инвариантный относительно взятия конечных произведений и перехода к замкнутым подпространствам. В частности, для классов метрических компактов ($\mathcal{K} = MC$), бикомпактов ($\mathcal{K} = B$) и метрических пространств ($\mathcal{K} = M$) это определение эквивалентно определениям К.Борсука, С.Мардешича-Дж.Сегала и Р.Х.Фокса соответственно. С другой стороны, определение из [II] применимо и к более широким классам пространств, например, к классу p -паракомпактов. Наконец, наиболее общий, категорный подход к определению шейпа развит С.Мардешичем в [8]; он позволяет распространить понятие шейпа на произвольные топологические пространства.

В случае бикомпактов, в частности, метрических компактов, пространства, обладающие одинаковым гомотопическим типом, имеют в известном смысле схожее "геометрическое" строение как в глобальном, так и в локальном отношениях. Идея Борсуковского определения шейпа состоит в "сглаживании" локальных особенностей, поэтому о бикомпактах и, прежде всего, о метрических компактах, имеющих одинаковый шейп, можно утверждать сходность их геометрического "представления" лишь в глобальном отношении (напр. окружность обычная и "Варшавская окружность"). С другой стороны, при рассмотрении пространств, не являющихся бикомпактными, одинаковый гомотопический тип (и тем более, одинаковый шейп во всех "применимых" шейповых конструкциях) могут иметь пространства, обладающие очень различными геометрическим "строением". Так, например, одинаковый гомотопический тип, а следовательно, и одинаковый шейп (во всех тех шейповых конструкциях из рассмотренных выше, которые к ним применимы), имеют точка, прямая, плоскость, тихоновский куб, гильбертово пространство. Отмечая это, Б. Лоул и Р. Шер [2] предлагают для достижения большего соответствия между геометрическим "представлением" топологического пространства и его "шейповыми" характеристиками рассматривать при определении шейпа вместо произвольных непрерывных отображений отображения собственные*, которые в значительно большей степени сохраняют геометрическую структуру пространства.

Приведём некоторые определения из [2] и изложим идею предложенной там конструкции.

* Собственным называется отображение, прообраз каждого бикомпактного подмножества относительно которых бикомпактен. В случае, когда образ пространства X при отображении $f: X \rightarrow Y$ — локально бикомпактный паракомпакт, совершенность отображения f эквивалентна его собственности (предложение 1.5) и следовательно, поскольку мы рассматриваем локально бикомпактные паракомпакты, термины "собственное отображение" и "совершенное отображение" могут использоваться как синонимы.

Два отображения $f, g: X \rightarrow Y$ называются совершенно гомотопными ($f \approx g$), если существует совершенное отображение $H: X \times I \rightarrow Y$ такое, что $H(x, 0) = f(x)$ и $H(x, 1) = g(x)$. Пространства X и Y имеют один и тот же совершенный гомотопический тип, если существуют такие совершенные отображения $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, что $fg \approx 1_Y$ и $gf \approx 1_X$, где 1_X и 1_Y — тождественные отображения пространств X и Y соответственно.

Каждое локально бикompактное пространство со счётной базой может быть вложено замкнутым образом в гильбертов куб с выколотой точкой $K = \mathbb{N} \setminus \{\omega\}$; основываясь на этом факте, авторы [2] применяют идею совершенной гомотопии к Борсуку-суковской схеме определения шейпа, что позволяет ввести им определение совершенного, или собственного, шейпа для локально бикompактных пространств со счётной базой. Затем, используя конструкцию, аналогичную в некотором смысле шейповой конструкции Борсука для метрических пространств [4], Болла и Шера распространяют определение собственного шейпа на класс всех локально бикompактных метрических пространств.

В настоящей заметке идея применена к совершенной гомотопии для классификации топологических пространств используется для того, чтобы на основании конструкции из [11] ввести отношение совершенной, или собственной, шейповой эквивалентности в классе локально бикompактных паракомпактов (§2). В классе локально бикompактных метризуемых пространств предлагаемое нами отношение совершенной шейповой эквивалентности индуцирует отношение собственной шейповой эквивалентности в смысле Болла и Шера (§4, теорема 7).

Изучаются свойства собственных шейпов локально бикompактных паракомпактов. Доказано, что для пространств, являющихся абсолютными окрестностями ретрактами в классе локально бикompактных паракомпактов, совершенная шейповая классификация совпадает с их совершенной гомотопической классификацией (§3, теорема 4). Совершенный шейп бикompак-

та в классе бикомпактов совпадает с его обычным шейпом (т.е. с шейпом в смысле Мардешича-Сегала).

Мы желаем применить для определения собственного шейпа схему из [II]. Для этого нам потребуется прежде всего для рассматриваемого класса пространств \mathcal{K} , в данном случае для класса \mathcal{K} локально бикомпактных паракомпактов, найти класс пространств $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathcal{K})$, являющихся абсолютными окрестностными экстензорами* для класса \mathcal{K} , и обладающий свойством "универсальности" по отношению к классу \mathcal{K} в том смысле, что каждое пространство из \mathcal{K} гомеоморфно замкнутому подпространству некоторого пространства U из \mathcal{E} . Основной целью первого параграфа и является нахождение такого класса \mathcal{E} для локально бикомпактных паракомпактов, а также изучение некоторых используемых в дальнейшем свойств совершенных отображений.

Все рассматриваемые пространства предполагаются хаусдорфовыми, все отображения - непрерывными. Через J обозначаем замкнутый интервал $[0,1]$, \mathcal{R} - пространство вещественных чисел, \mathcal{N} - пространство натуральных чисел, H - гильбертов куб ($H = J^{\aleph_0}$).

* Пространство U называется абсолютным окрестностным экстензором для класса пространств \mathcal{K} , если каждое непрерывное отображение, заданное на замкнутом подмножестве A некоторого $X \in \mathcal{K}$ со значениями в U , может быть непрерывно продолжено на некоторую окрестность множества A в X . В случае, когда продолжение может быть осуществлено на всё X , пространство U называется абсолютным экстензором для \mathcal{K} . Абсолютные (окрестностные) экстензоры для класса \mathcal{K} обозначаем $\mathcal{A}\mathcal{E}(\mathcal{K})$. Легко показать, что если класс $\mathcal{A}\mathcal{E}(\mathcal{K})$ является "универсальным" для \mathcal{K} (в указанном выше смысле), то свойство пространства U ($U \in \mathcal{K}$) быть абсолютным (окрестностным) экстензором для \mathcal{K} эквивалентно его свойству являться абсолютным (окрестностным) ретрактом в классе \mathcal{K} .

§1. Некоторые классы локально бикомпактных пространств и совершенные отображения.

Пусть K - гильбертов куб с выколотой точкой, т.е. $K = N \setminus \{\omega\}$; ввиду однородности гильбертова куба пространства $N \setminus \{\omega_1\}$ и $N \setminus \{\omega_2\}$ гомеоморфны для любых $\omega_1, \omega_2 \in N$, и, следовательно, определение пространства K не зависит от выбора точки ω . Следующее предложение, принадлежащее по существу Боллу и Шеру [2], характеризует локально бикомпактные пространства со счётной базой как замкнутые подмножества K .

Предложение I.1. Пространство X является локально бикомпактным пространством со счётной базой тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подмножеству K .

Доказательство. Если X - локально бикомпактное пространство со счётной базой и X не компактно, то его одноточечная бикомпактификация П.С.Александрова $X^* = X \cup \{p\}$ также обладает счётной базой и, значит, является компактом. Как компакт, пространство X^* погружается замкнутым образом в гильбертов куб ($X^* \subseteq N$). Отсюда следует, что X гомеоморфно некоторому собственному замкнутому подмножеству в N , а следовательно, и замкнутому подмножеству в $K = N \setminus \{p\}$. Обратно, очевидно, все замкнутые подмножества пространства K локально бикомпактны и обладают счётной базой.

Итак, предложение I.1 утверждает, что K является пространством, "универсальным" для класса локально бикомпактных пространств со счётной базой. Следующее предложение определяет такие "универсальные" пространства для класса всех локально бикомпактных метрических пространств.

Предложение I.2. Пространство X является локально бикомпактным и метризуемо тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подмножеству дискретной суммы пространств K .

Доказательство. Пусть X - локально бикомпактное метризуемое пространство. Согласно теореме П.С.Александрова [1] - В.Серпинского [10] X , как и каждое метризуемое пространство, обладающее базой сепарабельных окрестностей,

может быть представлено в виде дискретной суммы своих подпространств X_a , обладающих счётной базой: $X = \bigoplus_{a \in A} X_a$. Поскольку каждое X_a , как нетрудно видеть, локально бикомпактно и, следовательно, по предложению I.1 $X_a \subseteq K (=K_a)$, пространство X может быть представлено как замкнутое подпространство дискретной суммы пространств K : $X \subseteq \bigoplus_a K_a$.

Обратно, прямая сумма $\bigoplus_a K_a$ является, очевидно, локально бикомпактным и метризуемым пространством, а следовательно, и все его замкнутые подпространства таковы.

Предложение I.3. Если отображение f пространства X на пространство Y совершенно, то X локально бикомпактно в том и только в том случае, когда пространство Y локально бикомпактно.

Доказательство. Пусть X локально бикомпактно и $y \in Y$, тогда $f^{-1}(y)$ - бикомпактное подмножество X . Возьмём такую открытую окрестность U множества $f^{-1}(y)$ в X , замыкание которой бикомпактно. Из совершенности отображения f следует, что $f(X \setminus U)$ - замкнутое подмножество в Y и, следовательно, $Y \setminus f(X \setminus U)$ является окрестностью точки y в Y ; наличие этой окрестности и доказывает локальную бикомпактность пространства Y .

Обратно, если Y локально бикомпактно и $x \in X$, то можем выбрать окрестность V точки $y = f(x)$ в Y , замыкание которой бикомпактно. Тогда из совершенности отображения f следует, что $f^{-1}(V)$ является бикомпактной окрестностью точки x в X и, следовательно, пространство X локально бикомпактно.

Следующие две теоремы определяют пространства, "универсальные" для классов локально бикомпактных (финально компактных) пространств и локально бикомпактных паракомпактов.

Теорема I. Финально компактные локально бикомпактные пространства могут быть охарактеризованы как замкнутые подмножества произведений K на тихоновские кубы J^{τ} ; при этом если вес пространства X равен τ , то X может быть вложено замкнутым образом в произведение $K \times J^{\tau}$.

Доказательство. Согласно теореме 3 из [12] локально бикompактное финально компактное пространство X (как и каждое полное в смысле Чеха финально компактное пространство) гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения счётного числа вещественных прямых \mathbb{R} на тихоновский куб J^τ при этом вес куба можем принять равным весу пространства. Таким образом, можем считать, что $X \subseteq \mathbb{R} \times J^\tau$. Рассмотрим проекцию π пространства X на \mathbb{R} ; поскольку проецирование ведётся вдоль бикompакта, отображение π совершенно. (см. [14], стр.114). Обозначим $\pi(X) = M$; ясно, что M , как подпространство \mathbb{R} , является метрическим сепарабельным пространством. С другой стороны, будучи совершенным образом X , пространство M локально бикompактно. Воспользовавшись предложением 1.1, можем вложить M замкнутым образом в K . Поскольку из определения M ясно, что X является замкнутым подмножеством произведения $M \times J^\tau$, отсюда следует, что пространство X гомеоморфно и замкнутому подмножеству произведения $K \times J^\tau$.

Обратно, пространство $K \times J^\tau$, очевидно, финально компактно и локально бикompактно; тогда и все его замкнутые подмножества обладают этими свойствами. Теорема доказана.

Теорема 2. Пространство X является локально бикompактным паракомпактом тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения дискретной суммы пространств K на тихоновский куб J^τ ($X \subseteq (\bigoplus K) \times J^\tau$). При этом вес куба можем выбрать равным весу пространства X .

Доказательство. Согласно теореме 1 из [12] локально бикompактный паракомпакт (как и каждое полное в смысле Чеха паракомпактное пространство) гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения счётного числа метрических ечей J_σ^* на тихоновский куб J^τ , причём τ можно выбрать равным весу пространства. Рассуждая как и в доказательстве теоремы 1, можем найти такое замкнутое подпространство M произведения ечей J_σ^* , что $X \subseteq M \times J^\tau$ и X совершенно отоб-

* J_σ^* - метрический еч количества σ (где σ - некоторая мощность. Определение метрического еча и связанную с ним терминологию см. в [14] или [12].

ражается на M , а следовательно, M локально бикомпактно.

По предложению 1.2. пространство M можно погрузить замкнутым образом в прямую сумму пространств K : $M \subseteq \bigoplus K_a$; тогда пространство X гомеоморфно замкнутому подмножеству произведения $\bigoplus K_a \times J^r$.

Обратно, $\bigoplus K_a \times J^r$ является, очевидно, локально бикомпактным паракомпактом, а следовательно, и все его замкнутые подмножества обладают этими свойствами.

Предложения 1.1, 1.2 и теоремы 1,2 определяют пространства, "универсальные" для различных классов локально бикомпактных паракомпактов. Поскольку K , как открытое подмножество N , является абсолютным окрестностным экстензором для нормальных пространств, то и дискретная сумма $\bigoplus K_a$, а следовательно, и произведение $\bigoplus K_a \times J^r$ являются абсолютными окрестностными экстензорами для коллективно нормальных пространств. Таким образом, построенные нами "универсальные" пространства удовлетворяют тем условиям, о которых шла речь во введении, и, следовательно, в качестве \mathcal{E} ($= \mathcal{E}(X)$) для класса локально бикомпактных паракомпактов \mathcal{K} мы можем взять класс всех пространств вида $\bigoplus K_a \times J^r$. В дальнейшем мы будем постоянно обращаться к пространствам такого вида; условимся их обозначать буквами P, Q, R ; совокупность всех пространств такого вида будет в дальнейшем обозначаться просто \mathcal{E} .

Как было сейчас отмечено, пространство K является абсолютным окрестностным экстензором для нормальных пространств. Для некоторых вопросов нам потребуется и более сильный результат:

Предложение 1.4. Пространство K , а следовательно, и пространства $K \times J^r$ являются абсолютными экстензорами для нормальных пространств.

Доказательство. Пусть A - замкнутое подмножество нормального пространства X , $f: A \rightarrow K$ - непрерывное отображение, где $K = \Pi \setminus \{\omega\}$. Ввиду однородности N можем считать, что $\omega = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$. Рассматривая K как подпрост-

ранство $N = J^{\mathbb{N}}$, можем записать f в виде $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$, где $f_n: A \rightarrow J$ - проекция функции f на n -ый сомножитель. Поскольку N является абсолютным экстензором для нормальных пространств, можем рассмотреть продолжение \mathcal{F} функции f на X со множеством значений в N . Обозначая проекции функции \mathcal{F} на n -ый сомножитель через \mathcal{F}_n , получим $\mathcal{F}(x) = (\mathcal{F}_1(x), \dots, \mathcal{F}_n(x), \dots): X \rightarrow N$, где \mathcal{F}_n является продолжением f_n для каждого n .

Положим $B = \mathcal{F}^{-1}(0)$; ясно, что $B \cap A = \emptyset$ и, следовательно, существует функция $\psi: X \rightarrow J$, которая равна 1 на A и обращается в 0 на B . Определим, наконец, функцию $\tilde{f}: X \rightarrow N$ равенством $\tilde{f} = (\mathcal{F}_1 \cdot \psi, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n, \dots)$. Легко видеть, что \tilde{f} является продолжением функции f на X . С другой стороны, ни одна точка пространства X не может быть отображена в $(1, 1, \dots, 1, \dots)$. Действительно, точки множества B отображаются функцией \tilde{f} в точку с координатами $(0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$; если же $x \notin B$, то хотя бы одна из координат $\mathcal{F}_n(x)$ отлична от 1; тогда по крайней мере одна из координат $\mathcal{F}_1(x) \cdot \psi(x), \mathcal{F}_2(x), \dots, \mathcal{F}_n(x), \dots$ также отлична от единицы. Итак, функция \tilde{f} отображает X в K и является продолжением функции f ; существование такой функции и доказывает, что K является абсолютным экстензором для нормальных пространств. Тогда и произведение $K \times J^{\mathbb{N}}$ является абсолютным экстензором для нормальных пространств.

В заключение параграфа приведём ещё несколько необходимых для дальнейшего предположений (по-видимому, известных) о совершенных отображениях.

Предложение 1.5. Если f - отображение пространства X на локально бикомпактный паракомпакт Y , прообраз каждого бикомпактного подмножества из Y относительно которого бикомпактен, то f совершенно. Другими словами, если образ пространства X относительно собственного отображения f - локально бикомпактный паракомпакт, то отображение f совершенно.

Доказательство. Достаточно показать замкнутость отображения f . Пусть $A \subseteq X$; рассмотрим $f(A) \subset Y$ и пусть $\{V_\gamma\}$ — произвольное (замкнутое) бикompактное локально конечное покрытие пространства Y . Тогда $\{u_\gamma = f^{-1}(V_\gamma)\}$ является бикompактным локально конечным покрытием пространства X . Обозначив $W_\gamma = u_\gamma \cap A$, получаем, что $\{W_\gamma\}$ служит бикompактным локально конечным покрытием пространства A . Но тогда семейство $\{f(W_\gamma)\}$ покрывает образ $f(A)$ и при этом, будучи вписанным в покрытие $\{V_\gamma\}$, является локально конечным. Из бикompактности всех $f(W_\gamma)$ следует, что множество $f(A)$ замкнуто в пространстве Y как объединение локально конечного семейства замкнутых множеств.

Предложение I.6. Пусть X и Y — локально бикompактные пространства, причём Y паракомпактно, $f: X \rightarrow Y$ и A — замкнутое подмножество X . Тогда, если ограничение отображения f на множество A совершенно, то существует замкнутая окрестность U множества A в X , ограничение отображения f на которую также совершенно.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.2 из [2].

Предложение I.7. Если f — совершенное отображение замкнутого подмножества A локально бикompактного паракомпакта X в пространство Y , являющееся абсолютным окрестностным экстензором для локально бикompактных паракомпактов, то для каждой окрестности V образа $f(A)$ в Y найдётся замкнутая окрестность U множества A в пространстве X , на которую отображение f продолжается до совершенного отображения $\tilde{f}: U \rightarrow J_n V$.

Доказательство. Рассмотрим открытую окрестность V_1 множества $f(A)$ в Y , удовлетворяющую условию $\bar{V}_1 \subset J_n V$. Как открытое подмножество пространства Y , V_1 само является ANE для локально бикompактных паракомпактов, и, следовательно, найдётся такая замкнутая окрестность U_1 множества A , на которую f может быть продолжено до отображения \tilde{f} со значениями в V_1 . Теперь мы находимся в сфере действия предыдущего предложения и, следовательно,

можем утверждать существование такой замкнутой окрестности $U \subset U_1$ пространства A в X , что отображение $f|_U: U \rightarrow V, \subset \text{Int } V \subset V$ совершенно. Предложение доказано.

§2. Отношение собственной шейповой эквивалентности для локально бикompактных паракомпактов

Пусть X и Y - локально бикompактные паракомпакты.

Согласно теореме 2 найдутся такие пространства $P, Q \in \mathcal{B}$, что X гомеоморфно замкнутому подпространству P , а Y гомеоморфно замкнутому подпространству Q ; соответствующие замкнутые вложения обозначим i и j . Рассмотрим некоторые базы замкнутых окрестностей \mathcal{U} и \mathcal{V} пространства iX в P и пространства jY в Q соответственно, и пусть F - отображение \mathcal{V} в \mathcal{U} , сохраняющее отношение включения (т.е. для любых $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ из $V_1 \subset V_2$ следует включение $F(V_1) \subset F(V_2)$). Положим $F(V) = U_V$.

Определение I. Совершенной фундаментальной направленностью из замкнутого вложения i в замкнутое вложение j называется такая система отображений $f = \{f_V, V \in \mathcal{V}\}$, где f_V - непрерывное отображение U_V в $\text{Int } V$, что для произвольных $V, V_1 \in \mathcal{V}$, удовлетворяющих условию $V_1 \subset V$, ограничение отображения f_V на U_{V_1} совершенно гомотопно отображению f_{V_1} в $\text{Int } V^*$.

Из определения I следует, что если $f_V|_{U_1} \approx f_{V_1}|_{U_1}$ в $\text{Int } V$, то и для любых $V_1, V_1' \in \mathcal{V}$ таких, что $V_1 \subset V, V_1' \subset V$ и для любого U_1 , лежащего в пересечении $U \cap F(V_1) \cap F(V_1')$ ограничения отображений f_{V_1} и $f_{V_1'}$ на U_1 совершенно гомотопны в $\text{Int } V$.

* Отметим, что совершенность отображения $f: U \rightarrow V$ такого, что $f(U) \subset W \subset V$, эквивалентна совершенности отображения $f: U \rightarrow W$. В самом деле, если $f: U \rightarrow W$ совершенно, то прообраз каждого бикompактного подмножества из $V (\supset W)$ бикompактен; тогда по предложению I.5 $f: U \rightarrow W$ также совершенно. Обратное утверждение очевидно.

Пусть \mathcal{U}' и \mathcal{V}' - некоторые другие базы замкнутых окрестностей iX в P и jY в Q соответственно; рассмотрим совершенную фундаментальную направленность $f' = \{F', f'_v, v \in \mathcal{V}'\}$

Определение 2. Будем говорить, что совершенные фундаментальные направленности f и f' совершенно гомотопны ($f \approx f'$), если для каждой окрестности V_0 пространства jY найдутся такие $V, V \in V_0, V \in \mathcal{V}, V \in \mathcal{V}'$ и $u \in F(V) \cap F(V')$ что ограничения отображений f_V и f'_V на u совершенно гомотопны в $\text{Int } V_0$.

Нетрудно видеть, что для любой совершенной фундаментальной направленности $f = \{F, f_v, v \in \mathcal{V}\}$ из i в j и для любых баз \mathcal{U}' и \mathcal{V}' замкнутых окрестностей множеств iX в P и jY в Q соответственно найдётся совершенная фундаментальная направленность $f' = \{F', f'_v, v \in \mathcal{V}'\}$ совершенно гомотопная направленности f . Поскольку в дальнейшем нас будут интересовать совершенные фундаментальные направленности с точностью до отношения их совершенной гомотопности, нам как правило, будет безразлично, какие именно базы окрестностей \mathcal{U} и \mathcal{V} рассматривать при определении совершенной фундаментальной направленности, и мы будем опускать обозначения этих баз там, где это не должно привести к недоразумению.

Отношение совершенной гомотопности является эквивалентностью на множестве всех совершенных фундаментальных направленностей из i в j : рефлексивность и симметричность этого отношения очевидны, транзитивность проверяется непосредственно.

Пусть Z - локально бикompактный паракомпакт, $k: Z \rightarrow R (\in \mathcal{E})$ - замкнутое вложение, \mathcal{W} - база окрестностей jZ в R , $G: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ и $g = \{G, g_w, w \in \mathcal{W}\}$ - совершенная фундаментальная направленность из j в k . Под композицией фундаментальных направленностей f из i в j и g из j в k понимаем систему отображений $gf = \{FG, g \circ f_w, \mathcal{W}\}$. Непосредственно проверяется, что gf является совершенной фундаментальной направленностью из i в k .

В случае, когда совершенная фундаментальная направленность \tilde{g} из j в k определяется равенством $\tilde{g} = \{ \tilde{c}, g_w, \tilde{w} \in \mathcal{N} \}$, где $\tilde{c} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \neq \mathcal{N}$, композиция фундаментальных направленностей f и \tilde{g} определяется равенством $\tilde{g} \circ f = \underline{g} f$, где $\underline{g} = \{ c, g_w, w \in \mathcal{N} \}$ - совершенная фундаментальная направленность, совершенно гомотопная \tilde{g} и такая, что $c : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$.

Если \underline{k} - совершенная фундаментальная направленность из k в некоторое замкнутое вложение \mathcal{E} (пространства T в $S \in \mathcal{E}$), то $\underline{k}(g f) = (\underline{k} g) f$, т.е. операция композиции совершенных фундаментальных направленностей ассоциативна. Нетрудно показать также, что композиции попарно совершенно гомотопных совершенных фундаментальных направленностей совершенно гомотопны, т.е. если $f \approx f' : i \rightarrow j$ и $g \approx g' : j \rightarrow k$, то $g f \approx g' f'$.

Рассмотрим категорию \mathcal{L} , объектами которой служат замкнутые вложения локально бикompактных паракомпактов, а в качестве морфизмов берутся классы совершенно гомотопных совершенных фундаментальных направленностей (т.е. $\mathcal{L}(i, j) = \{ [f]_i^j \}$, где через $[f]_i^j$ обозначен класс собственных фундаментальных направленностей из i в j , совершенно гомотопных данной совершенной фундаментальной направленности $f : i \rightarrow j$). Композиция морфизмов $[f]_i^j$ и $[g]_j^k \in \mathcal{L}(i, k)$ естественным образом определяется равенством $[g]_j^k [f]_i^j = [g f]_i^k \in \mathcal{L}(i, k)$; из вышеприведенных рассуждений следует корректность этого определения.

Рассмотрим совершенную фундаментальную направленность из i в i , определённую равенством $1_i = \{ 1_u, 1_u \}$, где 1_u - тождественное отображение \mathcal{U} на \mathcal{U} , и для каждого $u \in \mathcal{U}$ 1_u - тождественное отображение \mathcal{U} на \mathcal{U} . Ясно, что для произвольных совершенных фундаментальных направленностей $f : i \rightarrow j$ и $g : j \rightarrow i$ имеют место равенства $[f]_i^j [1]_j^j = [f]_i^j$ и $[1]_i^i [g]_j^i = [g]_j^i$, следовательно, $[1]_i^i$ играет роль тождественного морфизма из i в i .

Определение 3. Замкнутые вложения i и j * назовём совершенно фундаментально эквивалентными, если они эквивалентны в категории \mathcal{L} , т.е. если существуют такие совершенные фундаментальные направленности $f: i \rightarrow j$ и $g: j \rightarrow i$, что $gf \approx 1_i$ и $fg \approx 1_j$. Если i и j совершенно фундаментально эквивалентны, то пишем $i \approx j$.

Определение 4. Будем говорить, что совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает совершенную фундаментальную направленность $f: i \rightarrow j$, если для некоторой окрестности $V \in \mathcal{V}$ ограничение $f_V \in f$ на iX совершенно гомотопно в $Int V$ отображению f .

Другими словами, совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает совершенную фундаментальную направленность $f: i \rightarrow j$, если для некоторого V следующая диаграмма совершенно гомотопически коммутативна:

$$\begin{array}{ccccc} U_V & \xleftarrow{p} & iX & \xrightarrow{i} & X \\ f_V \downarrow & & & & \downarrow f \\ Int V & \xleftarrow{q} & jY & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

(через p и q здесь обозначены естественные проекции-вложения).

Заметим, что если предыдущая диаграмма совершенно гомотопически коммутативна для данного V , то совершенно гомотопически коммутативна будет и каждая соответствующая диаграмма для любого $V_1 \subset V$; это легко следует из определения 1.

Если f - совершенное отображение, то через f будем обозначать совершенную фундаментальную направленность, порождённую f .

Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы:

Лемма 2.1. Пусть совершенные фундаментальные направленности $f: i \rightarrow j$, $g: j \rightarrow k$ порождаются совершенными отображениями $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ соответственно.

Здесь и в дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что i, j, k - замкнутые вложения локально компактных паракомпактов X, Y, Z в $P, Q, R \in \mathcal{C}$ соответственно, а $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ - базы замкнутых окрестностей.

Тогда композиция $gf : X \rightarrow Z$ порождает композицию совершенных фундаментальных направленностей $gf : C \rightarrow K$, т.е. $gf = gf$. Тожественное отображение $1 : X \rightarrow X$ порождает тождественную совершенную фундаментальную направленность $1 : C \rightarrow C$.

Лемма 2.2. Пусть $X \subseteq P$ и отображения $f, g : X \rightarrow Q$ совершенно гомотопны в некотором замкнутом подмножестве $Z \subseteq Q$. Тогда для любой окрестности V множества U в Q найдётся замкнутая окрестность U множества X в P и совершенные продолжения $\tilde{f} : U \rightarrow \text{Int} V$, $\tilde{g} : U \rightarrow \text{Int} V$ отображений f и g соответственно, которые совершенно гомотопны на U в $\text{Int} V$.

Доказательство проводим по аналогии с доказательством леммы 3.4 из [2]. Пусть $H : X \times J \rightarrow \text{Int} V$ - совершенная гомотопия, связывающая отображения f и g ($H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$). Множество $\text{Int} V$ как открытое подмножество Q является ANE для локально бикомпактных паракompактов и, следовательно, найдётся такая замкнутая окрестность $U_1 \supset X$, на которую f и g продолжаются совершенным образом до отображений $f_1 : U_1 \rightarrow \text{Int} V$, $g_1 : U_1 \rightarrow \text{Int} V$ (предложение I.7). Рассмотрим подмножество $T = U_1 \times \{0\} \cup U_1 \times J \cup U_1 \times \{1\}$ пространства $P \times J$ и определим отображение $G(x, t) : T \rightarrow \text{Int} V$ равенством $G(x, 0) = f_1(x)$ при $x \in U_1$; $G(x, 1) = g_1(x)$ при $x \in U_1$, и $G(x, t) = H(x, t)$ при $x \in X$, $t \in [0, 1]$. Легко проверяется, что G является совершенным отображением. Снова воспользовавшись предложением I.7, можем найти такую окрестность W множества T в $U_1 \times J$, на которую отображение G продолжается до совершенного отображения $\tilde{G}(x, t) : W \rightarrow \text{Int} V$. Ввиду бикомпактности отрезка J можем выбрать (замкнутую) окрестность U множества X в U_1 такую, что $U \times J \subseteq W$. Тогда отображение $\tilde{H}(x, t)$, определяемое равенством $\tilde{H}(x, t) = \tilde{G}(x, t)|_{U \times J} : U \times J \rightarrow \text{Int} V$, является совершенной гомотопией, связывающей отображения $\tilde{f}(x) = \tilde{H}(x, 0) : U \rightarrow \text{Int} V$ и $\tilde{g}(x) = \tilde{H}(x, 1) : U \rightarrow \text{Int} V$; при этом \tilde{f} и \tilde{g} являются совершенными продолжениями отображений f и g соответственно.

Лемма 2.3. Для любых замкнутых вложений i и j каждое совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ порождает некоторую совершенную фундаментальную направленность $\underline{f}: i \rightarrow j$.

Доказательство. Поскольку Q является абсолютным окрестностным экстензором для рассматриваемых пространств, по предложению I.7 найдётся замкнутая окрестность U множества iX в P и совершенное отображение $f: U \rightarrow Q$, продолжающее f . Пусть $\mathcal{V} = \{V\}$ — некоторая база замкнутых окрестностей пространства jY в Q ; для каждого $V \in \mathcal{V}$ зафиксируем некоторую замкнутую окрестность $F(V) = U_V$ множества iX в P так, чтобы выполнялось условие $f(U_V) \subset \text{Int } V$. Дополним семейство $\{U_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ до базы замкнутых окрестностей \mathcal{U} множества iX в P . Легко видеть, что определённая таким образом система $\underline{f} = \{F, f_V, V \in \mathcal{V}\}$ является совершенной фундаментальной направленностью, которая порождается отображением f .

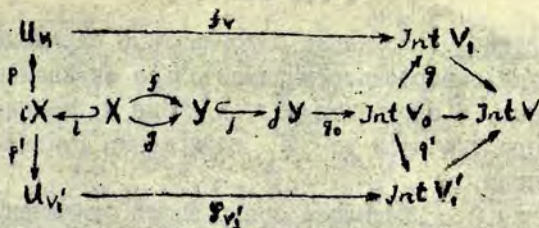
Лемма 2.4. Совершенные фундаментальные направленности \underline{f} и \underline{g} из замкнутого вложения i в замкнутое вложение j совершенно гомотопны тогда и только тогда, когда для каждой окрестности $V \supset jY$ найдутся окрестности V_1 и V_1' множества jY такие, что ограничения отображений f_{V_1} и $g_{V_1'}$ на iX совершенно гомотопны в $\text{Int } V$.

Доказательство следует из предложения I.7 и соответствующих определений.

Лемма 2.5. Если совершенные отображения $f, g: X \rightarrow Y$ совершенно гомотопны, то и порождённые ими совершенные фундаментальные направленности $\underline{f}, \underline{g}: i \rightarrow j$ совершенно гомотопны.

Действительно, из совершенной гомотопности отображений f, g по определению 4 и определению совершенной фундаментальной направленности следует, что для каждой замкнутой окрестности V пространства jY в Q найдутся такие окрестности $V_1, V_1' \subset V$, что для каждого $V_0 \subset \text{Int } V_1 \cap \text{Int } V_1'$ следующая диаграмма совершенно гомотопически коммутативна:

$$* \underline{g} = \{G, g_w, w \in \mathcal{W}\}$$



В частности, это означает, что ограничения отображений f_n и $g_{n'}$ на iX совершенно гомотопны в $Jnt V$. Утверждение леммы следует теперь из леммы 2.4.

Следующая теорема служит основой для введения отношения совершенной шейповой эквивалентности в классе локально бикompактных паракомпактов:

Теорема 3. Если локально бикompактные паракомпакты X и Y совершенно гомотопически эквивалентны, то и любые их замкнутые вложения i и j в пространства класса \mathcal{E} совершенно фундаментально эквивалентны.

Доказательство. Если X и Y - совершенно гомотопически эквивалентны, то существуют такие совершенные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, что $gf \approx 1_X$ и $fg \approx 1_Y$. По лемме 2.3 эти отображения порождают совершенные фундаментальные направленные вложения $f: i \rightarrow j$, $g: j \rightarrow i$. Из леммы 2.1 следует, что $gf = gf$ и $1_X = 1_X$. Воспользовавшись леммой 2.5, из этих равенств получаем $gf \approx 1_i$. Аналогичным образом доказываем, что $fg \approx 1_j$. Но эти соотношения как раз и означают, что замкнутое вложение i совершенно фундаментально эквивалентно замкнутому вложению j . Теорема доказана.

Следствие I. Любые два замкнутых вложения i и i' локально бикompактного паракомпакта X в пространства класса \mathcal{E} совершенно фундаментально эквивалентны.

Из этого следствия видно, что отношение совершенной фундаментальной эквивалентности можно рассматривать как отношение эквивалентности в классе локально бикompактных паракомпактов, а не в классе их замкнутых вложений. Отсюда вытекает корректность следующего определения:

Определение 5. Локально бикомпактные паракомпакты X и Y называются совершенно фундаментально эквивалентными, если некоторые, а следовательно, и любые их замкнутые вложения в пространства из \mathcal{E} совершенно фундаментально эквивалентны.

Следствие 2. Отношение совершенной фундаментальной эквивалентности разбивает класс локально бикомпактных паракомпактов на классы эквивалентности.

Определение 6. Совокупность всех локально бикомпактных паракомпактов, совершенно фундаментально эквивалентных данному X , будем обозначать $shp X$ и называть собственным, или совершенным шейпом пространства X (в классе локально бикомпактных паракомпактов).

По аналогии с тем, как это делает К. Борсук и некоторые другие авторы шейповых теорий, можно ввести отношение совершенного фундаментального доминирования " \supseteq " на классе всех совершенных шейпов локально бикомпактных паракомпактов, положив $shp Y \supseteq shp X$ тогда и только тогда, когда найдутся такие замкнутые вложения i и j пространств X и Y в пространства P и Q соответственно и такие совершенные фундаментальные направленности $f: i \rightarrow j$; $g: j \rightarrow i$ что $gf \approx 1_X$. По аналогии с доказательством теоремы 3 и её следствий нетрудно убедиться в корректности определения совершенного фундаментального доминирования и показать, что это отношение является частичным порядком на классе всех собственных шейпов локально бикомпактных паракомпактов.

Теорема 3 и её следствия позволяют нам перейти от категории замкнутых вложений \mathcal{L} к категории \mathcal{S}_p , объектами которой являются локально бикомпактные паракомпакты, а морфизмами — определяемые ниже классы совершенных фундаментальных направленностей.

Пусть X и Y — локально бикомпактные паракомпакты, i и i' — замкнутые вложения X в P и P' соответственно,

а j и j' - замкнутые вложения Y в пространства Q и Q' соответственно ($P, P', Q, Q' \in \mathcal{E}$). Рассмотрим совершенные фундаментальные направленности $\lambda: c \rightarrow c'$, $\lambda': c' \rightarrow c$ и $\mu: j \rightarrow j'$, $\mu': j' \rightarrow j$, порожденные соответственно тождественными отображениями (X на $c'X$, $c'X$ на cX и $j'Y$ на jY , jY на $j'Y$). Тогда имеет место равенства $\lambda\lambda' \approx 1_c$, $\lambda'\lambda \approx 1_{c'}$, $\mu\mu' \approx 1_j$, $\mu'\mu \approx 1_{j'}$.

Распространяя понятие совершенной гомотопности совершенных фундаментальных направленностей на случай совершенных фундаментальных направленностей, отображающих различные вложения одного и того же пространства, будем говорить, что совершенные фундаментальные направленности $f: c \rightarrow j$ и $f': c' \rightarrow j'$ совершенно гомотопны ($f \approx f'$), если $f \approx \mu'j'\lambda: c \rightarrow j$ в смысле определения 2.

Введенное отношение совершенной гомотопности является эквивалентностью: рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность проверяется непосредственно. Класс совершенных фундаментальных направленностей, совершенно гомотопных данной совершенно фундаментальной направленности f (в определенном здесь смысле) будем обозначать $[f]_c$.

Теперь можем определить морфизмы категории \mathcal{F}_p . А именно, в качестве морфизмов $\mathcal{F}_p(X, Y)$ возьмем классы совершенно гомотопных совершенных фундаментальных направленностей, кажда из которых отображает некоторое замкнутое вложение c пространства X в некоторое замкнутое вложение j пространства Y . Другими словами, $\mathcal{F}_p(X, Y) = \{[f]_c, f: c \rightarrow j\}$. Для каждого $[f]_c \in \mathcal{F}_p(X, Y)$ и для произвольных замкнутых вложений $c': X \rightarrow P'$ и $j': Y \rightarrow Q'$ найдется $f' \in [f]_c$, которая отображает замкнутое вложение c' в замкнутое вложение j' ; отсюда, в частности, следует, что $\mathcal{F}_p(X, Y)$ при фиксированных X и Y является множеством. Композиция морфизмов $[f]_c$ и $[g]_c \in \mathcal{F}_p(Y, Z)$ определяется равенством $[g]_c [f]_c = [gf]_c$, где $f \in [f]_c$, $f: c \rightarrow j$, $g \in [g]_c$, $g: j \rightarrow k$ для некоторых замкнутых вложений c, j, k пространств X, Y, Z соответственно. Корректность опреде-

ления операции композиции и её ассоциативность проверяются непосредственно. В качестве тождественного морфизма в $\mathcal{S}_p(X, X)$ возьмём класс $[1]_c$, где $1 = 1_c$ - тождественная фундаментальная направленность из i в i . Ясно, что $[1]_c [g]_c = [g]_c$ и $[f]_c [1]_c = [f]_c$ для любых $[f]_c \in \mathcal{S}_p(X, Y)$, $[g]_c \in \mathcal{S}_p(Y, X)$. Таким образом, категория \mathcal{S}_p определена корректно.

Из приведённой здесь конструкции видно, что совершенный шейп локально бикомпактного паракомпакта X является классом пространств, эквивалентных X в категории \mathcal{S}_p .

В дальнейшем мы будем употреблять также выражение "совершенная фундаментальная направленность f из пространства X в пространство Y ", подразумевая под этим, что f принадлежит некоторому $[f]_c$, где $[f]_c \in \mathcal{S}_p(X, Y)$.

Пусть \mathcal{H}_p - категория, объектами которой являются локально бикомпактные паракомпакты, а в качестве морфизмов $\mathcal{H}_p(X, Y)$ берутся классы совершенных отображений, совершенно гомотопных между собой (т.е. $[f]_c \in \mathcal{H}_p(X, Y)$ тогда и только тогда, когда $[f]_c$ состоит из всех совершенных отображений из X в Y , совершенно гомотопных данному $f : X \rightarrow Y$). Построим ковариантный функтор S из категории \mathcal{H}_p в категорию \mathcal{S}_p . Положим $S(X) = X$ для каждого объекта X . Пусть $[f]_c$ - класс отображений, совершенно гомотопных данному совершенному отображению $f : X \rightarrow Y$; определим тогда $S([f]_c)$ равенством $S([f]_c) = [f]_c$, где f - совершенная фундаментальная направленность, порождённая отображением f . Из леммы 2.3 и 2.5 легко проверяется корректность определения функтора S . Далее, если $g : Y \rightarrow Z$ - совершенное отображение, то из леммы 2.1 следует, что $S([g]_c [f]_c) = S([g]_c) S([f]_c)$ и $S([1]_c) = [1]_c$. Таким образом, S - ковариантный функтор из категории \mathcal{H}_p в категорию \mathcal{S}_p .

§3. Некоторые свойства собственных шейпов локально бикомпактных паракомпактов

Теорема 3 утверждает, что совершенно гомотопически эквивалентные локально бикомпактные паракомпакты имеют одинаковый собственный шейп. Покажем, что в случае, когда пространства X и Y являются абсолютными окрестностями ретрактами в классе локально бикомпактных паракомпактов,¹⁾ имеет место и обратное утверждение: из равенства $shp X = shp Y$ следует совершенная гомотопическая эквивалентность пространств X и Y (теорема 4). Доказательству этого факта предположим несколько лемм.

Лемма 3.1. Пусть X и Y - замкнутые подмножества в P и Q и совершенные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ порождают совершенные фундаментальные направленности $\underline{f}: X \rightarrow Y$ и $\underline{g}: Y \rightarrow X$ соответственно. Если при этом $\underline{f} \cong \underline{g}$, то для каждой окрестности V пространства Y в Q отображения f и g совершенно гомотопны в V .

Доказательство получаем, рассматривая диаграмму леммы 2.5 с учётом определений 2 и 1.

Лемма 3.2. Пусть X и Y - замкнутые подмножества P и Q соответственно, Y - ANR и отображения $f, g: X \rightarrow Y$ совершенно гомотопны в любой окрестности V пространства Y в Q . Тогда $f \cong g$.

Доказательство. Поскольку Y является ANR, в найдётся такая окрестность V_1 пространства Y , которая ретрагируется на Y : $r_1: V_1 \rightarrow Y$. По предложению 1.6 можем найти тогда такую замкнутую окрестность $V \supset Y$, ограничение r отображения r_1 на которую совершенно. Если H - совершенная гомотопия, связывающая отображения f и g в V ($H: X \times J \rightarrow V$, $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$), то, как легко видеть, композиция $rH: X \times J \rightarrow Y$ является совершенной гомотопией, связывающей

отображения f и g .

Лемма 3.3. Если пространство Y является ANR , то каждая совершенная направленность f' из X в Y порождается с точностью до совершенной гомотопии некоторым совершенным отображением $f: X \rightarrow Y$ (т.е. $f \approx f'$).

Доказательство. Рассмотрим X и Y как замкнутые подпространства P и Q соответственно ($P, Q \in \mathcal{C}$); поскольку Y является ANR , существует окрестность V_1 , которая ретрагируется на Y . По предложению 1.6 можем тогда выбрать такую замкнутую окрестность V пространства Y в Q , которая ретрагируется на Y совершенным образом: $r: V \rightarrow Y$. Поскольку $r|_V = id|_V$, то, воспользовавшись снова предложением 1.6, получаем, что $r_0 \approx r|_{V_0} \approx id|_{V_0}$ в $\text{Int } V_0$ и для некоторой замкнутой окрестности V_0 пространства Y , лежащей в V .

Рассмотрим отображение f , определяемое равенством $f = r_0 f'_0|_X$, где $f'_0 \in f'$. Ясно, что f совершенно. Покажем, что фундаментальная направленность f , порождённая f , совершенно фундаментально гомотопна f' . Действительно, из определения V_0 следует, что $f'_0 \approx r_0 f'_0$ в $\text{Int } V$. Тогда, тем более, и ограничения отображений f'_0 и $r_0 f'_0$ на X совершенно гомотопны в $\text{Int } V$. Поскольку $r_0 f'_0 \in f$, по лемме 2.4 отсюда получаем, что $f \approx f'$. Лемма доказана.

Теорема 4. Если пространства X и Y являются ANR в классе локально бикompактных паракомпактов, то $shp X = shp Y$ в том и только в том случае, когда $X \approx Y$.

Доказательство. Пусть $shp X = shp Y$. Рассмотрим совершенные фундаментальные направленности $f': X \rightarrow Y$ и $g': Y \rightarrow X$ такие, что $f'g' \approx 1_Y$ и $g'f' \approx 1_X$. Согласно лемме 3.3 найдутся такие совершенные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$, которые с точностью до гомотопии порождают, соответственно, f' и g' . По лемме 2.1 отсюда следуют равенства $gf \approx gf \approx g'f' \approx 1_X$ и $fg \approx fg \approx f'g' \approx 1_Y$. Воспользовавшись леммой 3.1, получаем отсюда, что для любой окрестности U пространства X в P $gf \approx 1_X$ в U и,

аналогично, для любой окрестности V пространства Y в Q $fg \approx 1_y$ в V . Тогда по лемме 3.3 имеют место также равенства $gf \approx 1_x$ и $fg \approx 1_y$. Последние же соотношения как раз и означают, что $X \cong Y$.

Обратное утверждение следует из теоремы 3.

Теорема доказана.

Замечание. По аналогии с доказательством теоремы 4 легко показать, что для пространств, являющихся ANR , отношение $shp X \approx shp Y$ имеет место тогда и только тогда, когда пространство X совершенно гомотопически доминирует над пространством Y .

Пусть X и Y - локально бикомпактные паракомпакты и f - совершенная фундаментальная направленность из X в Y . Тогда, если пространство Y бикомпактно, то и пространство X бикомпактно. В самом деле, рассмотрим X как подпространство P , а Y как подпространство Q . Выберем бикомпактную окрестность V пространства Y в Q и пусть $f_v \in f$, $f_v: U_v \rightarrow V$. Поскольку $X \subseteq P$, отсюда следует, что X является замкнутым подмножеством и в $f_v^{-1}(V)$; последнее же множество ввиду совершенности отображения f_v бикомпактно. Отсюда следует бикомпактность пространства X . Доказано

Предложение 3.4. Если существует совершенная фундаментальная направленность f из X в Y и пространство Y бикомпактно, то и пространство X также бикомпактно.

Следствие 1. Собственный шейп бикомпакта состоит только из бикомпактных пространств.

Следствие 2. Если пространство X бикомпактно, а Y не является бикомпактным, то собственные шейпы $shp X$ и $shp Y$ не сравнимы в смысле порядка совершенного фундаментального доминирования. \approx

Другими словами, собственный шейп бикомпакта X не может доминироваться и не может сам доминировать собственного шейпа пространства Y , не являющегося бикомпактным.

Рассмотрим класс \mathcal{B} бикомпактов. Для пространств этого класса С.Марденичем и Дж.Сегалом определено отношение шейповой эквивалентности с помощью ANR -спектров* [6]. Покажем, что введенное нами отношение совершенной шейповой эквивалентности индуцирует на \mathcal{B} отношение, равносильное отношению шейповой эквивалентности в смысле С.Марденича - Дж.Сегала. Согласно теореме 5 из [II] или теореме 4 из [I3] нам достаточно показать, что отношение совершенной шейповой эквивалентности индуцирует на \mathcal{B} отношение, равносильное отношению шейповой эквивалентности в смысле [II]. При доказательстве этого факта мы будем предполагать знакомство с терминологией из [II].

Непосредственно из определений убеждаемся в справедливости следующей леммы:

Лемма 3.5. Каждая совершенная фундаментальная направленность $f: X \rightarrow Y$ является фундаментальной направленностью (из X в Y) в смысле [II] или [I3].

Лемма 3.6. Если $f: X \rightarrow Y$ - фундаментальная направленность** и X, Y бикомпактны, то существует совершенная фундаментальная направленность $f': X \rightarrow Y$, гомогонная f .

Доказательство. Погрузим X и Y замкнутым образом в пространства $P = K * J^c$ и $Q = K * J^c$. Из бикомпактности X и Y следует, что существуют бикомпактные окрестности u_0 пространства X в P и v_0 пространства Y в Q . Для каждой замкнутой окрестности V пространства Y в $v_0 \subset Q$ существует $f_p \in f$ такая, что $f_p: u_p \rightarrow V$. Рассмотрим некоторую замкнутую окрестность u_v пространства X , лежащую в пересечении $u_p \cap u_0$ и определим f'_v равенством $f'_v = f_p / u_v$. Построив такие отображения f'_v

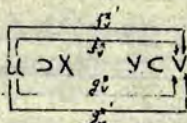
* Здесь под ANR подразумевается абсолютный окрестностный ретракт в классе метрических компактов.

** в смысле [II] или [I3].

для всех замкнутых окрестностей пространства U в V_0 , получаем совершенную фундаментальную направленность $\underline{f}' = (F', J'_v, (V))$, которая, как нетрудно видеть, гомотопна данной фундаментальной направленности \underline{f} . Тем самым, лемма доказана.

Лемма 3.7. Если \underline{f} , \underline{f}' , \underline{g} и \underline{g}' — фундаментальные направленности из бикompакта X в бикompакт Y , $\underline{f} \approx \underline{g}$, $\underline{f} \approx \underline{f}'$, $\underline{g} \approx \underline{g}'$ и направленности \underline{f}' и \underline{g}' совершенны, то $\underline{f}' \approx \underline{g}'$.

Доказательство. Пусть $X \subseteq P$ и $Y \subseteq Q$ и V некоторая бикompактная окрестность U в Q . Согласно определению фундаментальных направленностей и их гомотопности можем выбрать такую окрестность U пространства X в P , что следующая диаграмма гомотопически коммутативна:



где через f'_v , f_v , g'_v и g_v обозначены ограничения отображений f_v , f'_v , g_v и g'_v , соответственно, на U . При этом без ограничения общности можем считать окрестность U бикompактной. Тогда все отображения в этой диаграмме совершенны, и, следовательно, диаграмма является также совершенно гомотопически коммутативной. Отсюда и следует утверждение леммы.

Теорема 5. Если пространства X и Y бикompактны, то $shp X = shp Y$ в том и только в том и только в том случае, когда равны их обычные шейки (в смысле С. Мардешича — Дж. Сегала): $sh X = sh Y$.

Доказательство. Если $sh X = sh Y$, то согласно теореме 5 из [II] найдутся фундаментальные направленности $\underline{f} : X \rightarrow Y$ и $\underline{g} : Y \rightarrow X$ такие, что $\underline{f} \underline{g} \approx 1_Y$ и $\underline{g} \underline{f} \approx 1_X$. По лемме 3.6 существуют совершенные фундаментальные направленности $\underline{f}' : X \rightarrow Y$ и $\underline{g}' : Y \rightarrow X$, гомотопные \underline{f} и \underline{g} соответственно. Тогда композиция $\underline{g}' \underline{f}'$ гомотопна композиции $\underline{g} \underline{f}$, а композиция $\underline{f}' \underline{g}'$ гомотопна композиции $\underline{f} \underline{g}$.

Воспользовавшись леммой 3.7, заключаем отсюда, что $f'g' \approx 1_Y$ и $g'f' \approx 1_X$. Последние же равенства как раз и означают, что $shp X = shp Y$.

Обратно, если $shp X = shp Y$ и $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$ - совершенные фундаментальные направленности, удовлетворяющие равенствам $fg \approx 1_Y$ и $gf \approx 1_X$, то по лемме 3.5 f и g являются также фундаментальными направленностями в смысле [II]; при этом $fg \approx 1_Y$ и $gf \approx 1_X$. Последние же равенства и доказывают, что X и Y имеют одинаковый шейп в смысле [II], [I3]; а следовательно, эти пространства имеют одинаковый шейп и в смысле С. Мардешича-Дж. Сегала. Тем самым, теорема доказана.

§4. Эквивалентность двух определений собственных шейпов для локально бикомпактных метрических пространств

Как уже отмечалось, в работе Б. Болла и Р. Шера [2] определены собственные шейпы для локально бикомпактных метрических пространств. Целью настоящего параграфа является доказательство того факта, что наше определение собственного шейпа на классе локально бикомпактных метризуемых пространств индуцирует определение, эквивалентное определению Б. Болла - Р. Шера.

Всюду в этом параграфе предполагается знакомство с терминологией и конструкциями, используемыми в [2]. Термин "proper fundamental net" из [2] мы переводим как "собственная фундаментальная сеть". Отношение собственной гомотопности собственных фундаментальных направленностей обозначаем " \approx "; тем же символом будем обозначать и отношение собственной шейповой эквивалентности пространств в смысле [2]. Класс локально бикомпактных метризуемых пространств, собственно фундаментально эквивалентных (в смысле Б. Болла - Р. Шера) данному X , мы обозначаем $shp X$.

Таким образом, в данном параграфе мы покажем, что имеет место равенство $sh(p)X = shp X \cap \mathcal{M}$, где через \mathcal{M} обозначен класс всех метризуемых пространств.

Начнём с рассмотрения случая локально бикомпактных пространств со счётной базой. Пусть $X : Y$ — локально бикомпактные пространства со счётной базой; можем тогда считать, что X и Y являются замкнутыми подмножествами в K . Рассмотрим совершенную фундаментальную направленность $\underline{f} : X \rightarrow Y$, $\underline{f} = \{F, \mathcal{F}_V, \mathcal{P}\}$, и собственную фундаментальную сеть $\underline{f}' : X \rightarrow Y$, $\underline{f}' = \{f_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$. Будем говорить, что фундаментальная направленность \underline{f} ассоциирована с фундаментальной сетью \underline{f}' (или, наоборот, фундаментальная сеть \underline{f}' ассоциирована с фундаментальной направленностью \underline{f}), если выполнены следующие два условия: 1) множества Λ и \mathcal{P} изоморфны как частично упорядоченные множества (поэтому можно писать \mathcal{P} вместо Λ); 2) каждое \tilde{f}_V является продолжением соответствующего f_V на всё K (где $f_V \in \underline{f}$ и $\tilde{f}_V \in \underline{f}'$).

Лемма 4.1. Если X и Y — локально бикомпактные пространства со счётной базой, то существует (и, причём, единственная с точностью до собственной гомотопии) собственная фундаментальная сеть $\underline{f}' : X \rightarrow Y$, ассоциированная с данной совершенной фундаментальной направленностью $\underline{f} : X \rightarrow Y$.

Доказательство. Рассмотрим совершенную фундаментальную направленность $\underline{f} : X \rightarrow Y$, $\underline{f} = \{F, \mathcal{F}_V, \mathcal{P}\}$. Согласно предложению 1.4 каждое из отображений f_V , $V \in \mathcal{P}$, можем продолжить на всё K до отображения $\tilde{f}_V : K \rightarrow K$. Непосредственно проверяется, что система отображений $\underline{f}' = \{\tilde{f}_V, V \in \mathcal{P}\}$ является собственной фундаментальной сетью, ассоциированной с \underline{f} . Из определений ясно также, что если \underline{f}'' — другая собственная фундаментальная сеть, ассоциированная с \underline{f} , то фундаментальные сети \underline{f}'' и \underline{f}' собственны гомотопны: $\underline{f}'' \underset{(c)}{\approx} \underline{f}'$.

Лемма 4.2. Пусть X, Y - локально бикомпактные пространства со счётной базой и $\underline{f}: X \rightarrow Y$ - собственная фундаментальная сеть. Тогда существует (и единственна с точностью до совершенной гомотопии) совершенная фундаментальная направленность, ассоциированная с \underline{f}^* , где \underline{f}^* - некоторая собственная фундаментальная сеть, собственно гомотопная данной \underline{f}^* .

Доказательство. Согласно определению собственной фундаментальной сети, для каждой замкнутой окрестности V пространства Y в K существует такой индекс λ_V и такая замкнутая окрестность множества X в K , что - все ограничения $\bar{f}_\lambda|_{u_V}$ при $\lambda \geq \lambda_V$ совершенно гомотопны отображению $\bar{f}_{\lambda_V}|_{u_V}$ в окрестности $\text{Int } V$. Определив такой индекс λ_V и построив такую окрестность u_V для каждой замкнутой окрестности V из некоторой базы \mathcal{V} окрестностей X в K , можем рассмотреть собственную фундаментальную сеть $\underline{f}^* = \{\bar{f}_{\lambda_V}, V \in \mathcal{V}\}$. Легко видеть, что \underline{f}^* собственно гомотопна \underline{f} . Положим теперь для каждого $V \in \mathcal{V}$ $F(V) = u_V$ и $f_V = \bar{f}_{\lambda_V}|_{u_V}$ и рассмотрим систему $\underline{f} = \{F, f_V, \mathcal{V}\}$. Легко видеть, что \underline{f} является совершенной фундаментальной направленностью, ассоциированной с \underline{f}^* . Существование такой фундаментальной направленности и доказывает лемму, поскольку её единственность с точностью до совершенной гомотопии очевидна.

Непосредственно из определений убеждаемся в справедливости следующих двух лемм:

Лемма 4.3. Пусть $\underline{f}, \underline{g}$ - совершенные фундаментальные направленности, ассоциированные (с точностью до собственной гомотопии) с собственными фундаментальными сетями \underline{f}^* и \underline{g}^* соответственно. Тогда $\underline{f} \approx \underline{g}$ в том и только в том случае, когда $\underline{f}^* \approx \underline{g}^*$.

* В дальнейшем, в случае, когда $\underline{f}^* \approx \underline{g}^*$ и фундаментальная направленность \underline{f} ассоциирована с фундаментальной направленностью \underline{f}^* , мы будем говорить также, что фундаментальная направленность \underline{f} ассоциирована с фундаментальной сетью \underline{f}^* с точностью до собственной гомотопии.

Лемма 4.4. Если $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ - совершенные фундаментальные направленности и $\tilde{f} : X \rightarrow Y$, $\tilde{g} : Y \rightarrow Z$ - ассоциированные с ними собственные фундаментальные сети, то композиция $\tilde{g}\tilde{f}$ ассоциирована с композицией gf . Собственная фундаментальная сеть, ассоциированная с тождественной совершенной фундаментальной направленностью, является тождественной собственной фундаментальной сетью.

Предложение 4.5. Если X и Y - локально бикompактные пространства со счётной базой, то $X \cong Y$ в том и только в том случае, когда $X \cong Y$.

Доказательство. Пусть $X \cong Y$, тогда найдутся совершенные фундаментальные направленности $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$ такие, что $fg \cong 1_Y$ и $gf \cong 1_X$. Рассмотрим собственные фундаментальные сети, ассоциированные с f и g соответственно. Тогда по лемме 4.4 $\tilde{f}\tilde{g} \cong \tilde{1}_Y$ и $\tilde{g}\tilde{f} \cong \tilde{1}_X$ где $\tilde{f}\tilde{g}$ - собственная фундаментальная сеть, ассоциированная с композицией fg , а $\tilde{1}_Y$ - собственная фундаментальная сеть, ассоциированная с 1_Y и, следовательно, являющаяся тождественной собственной фундаментальной сетью. Аналогично, $\tilde{g}\tilde{f} \cong \tilde{1}_X$. Из этих двух равенств следует, что $X \cong Y$.

Обратно, если $X \cong Y$, то, применяя рассуждения, "двойственные" по отношению к приведённым выше, легко получаем, что $X \cong Y$.

Предложение доказано.

Следствие. В классе локально бикompактных пространств со счётной базой отношение собственной шейповой эквивалентности Болла-Шера совпадает с нашим определением совершенной шейповой эквивалентности.

Прежде, чем перейти к рассмотрению общего случая, нам придётся сначала доказать теорему 6, утверждающую, грубо говоря, что представление локально бикompактного паракompакта в виде прямой суммы своих подпространств является инвариантом совершенных шейпов:

Теорема 6. Если X и Y - локально бикомпактные паракомпакты и X представлен в виде дискретной суммы своих подпространств $X = \bigoplus_{a \in A} X_a$, то $shp X = shp Y$ в том и только в том случае, когда существует такое разложение Y в виде дискретной суммы $Y = \bigoplus_{a \in A} Y_a$, что $shp X_a = shp Y_a$ для каждого a .

Утверждение теоремы является непосредственным следствием леммы 4.6 и 4.7, доказываемых ниже.

Лемма 4.6. Если локально бикомпактные паракомпакты X и Y представлены в виде дискретных сумм своих подпространств таким образом, что $X = \bigoplus \{X_a : a \in A\}$, $Y = \bigoplus \{Y_a : a \in A\}$ и для каждого a $shp X_a = shp Y_a$, то $shp X = shp Y$.

Доказательство. Обозначив произведения $K_a \times \mathcal{J}^T$ для каждого a через L_a , можем рассматривать пространства X и Y как замкнутые подмножества в $P = \bigoplus \{L_a : a \in A\}$ и $Q = \bigoplus \{L_a : a \in A\}$ соответственно, такие, что $X_a \subset L_a$ и $Y_a \subset L_a$ для каждого $a \in A$. Пусть \mathcal{V} - база замкнутых окрестностей Y в Q ; тогда, положив для каждого $V \in \mathcal{V}$ и $a \in A$, $V_a = V \cap L_a$, получим базу окрестностей

$\mathcal{V}_a = \{V_a\}$ множества Y_a в L_a . Аналогично, если \mathcal{U} - база окрестностей X в P , то семейство $\mathcal{U}_a = \{U \cap L_a : U \in \mathcal{U}\}$ образует базу окрестностей X_a в L_a для каждого a . Зная, что $shp X_a = shp Y_a$, можем рассмотреть совершенные фундаментальные направленности $f^a = \{F^a, f_v^a, \mathcal{V}_a\} : X_a \rightarrow Y_a$ и $g^a = \{G^a, g_u^a, \mathcal{U}_a\} : Y_a \rightarrow X_a$ такие, что $f^a g^a \cong 1_{Y_a}$, $g^a f^a \cong 1_{X_a}$. Определим отображения $F : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ и $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, положив для каждого $V \in \mathcal{V}$ $F(V) = U \{F(v) : v \in V\}$ и для каждого $U \in \mathcal{U}$ $G(U) = U \{G(u) : u \in U\}$. Далее, для каждого $V \in \mathcal{V}$ положим $f_v = U f_v^a : V \rightarrow U = F(V)$, т.е. f_v полагается равной f_v^a для точек из V_a ; аналогично, для каждого $U \in \mathcal{U}$ положим $g_u = U g_u^a$. Таким образом, получаем совершенные фундаментальные направленности $f = \{F, f_v, \mathcal{V}\} : X \rightarrow Y$ и $g = \{G, g_u, \mathcal{U}\} : Y \rightarrow X$.

С другой стороны, тождественную фундаментальную направленность $1_X : X \rightarrow X$ можем рассматривать как систему отображений $1_X = \{1_U, 1_u\}$, где $1_U : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ - тождественное отображение и $1_u = U 1_u$; аналогично, $1_Y = \{1_V, 1_v\}$

где $1_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ и $1_{\mathcal{X}} = U 1_{V_a}$. Из определения ясно, что $f'g' \cong 1_{\mathcal{Y}}$ и $g'f' \cong 1_{\mathcal{X}}$. Последние же два равенства как раз и означают, что $shp X = shp Y$.

Лемма 4.7. Пусть X и Y - локально бикомпактные паракомпакты, $shp X = shp Y$ и существует разложение пространства X в дискретную сумму своих подпространств $X = \bigoplus \{X_a : a \in A\}$. Тогда существует и разложение пространства Y в дискретную сумму своих подпространств ($Y = \bigoplus \{Y_a : a \in A\}$), причём такое, что $shp X_a = shp Y_a$ для каждого a .

Доказательство. Существование разложения $X = \bigoplus \{X_a : a \in A\}$ означает, что пространство X можно рассматривать как замкнутое подмножество в $P = \bigoplus \{L_a : a \in A\}$, где $L_a = K \times J^T$ и $X_a \subset L_a$ для каждого a . Пусть $Y \subset Q' \in \mathcal{K}$. Тогда, поскольку $shp X = shp Y$, для произвольных без замкнутых окрестностей \mathcal{U} и \mathcal{Y}' пространства X в P и пространства Y в Q' найдутся совершенные фундаментальные направления $f' = \{F' : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{U}\} : X \rightarrow Y$ и $g' = \{G' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}'\} : Y \rightarrow X$, (где $F' : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{U}$ и $G' : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Y}'$), такие, что $f'g' \cong 1_{\mathcal{Y}}$ и $g'f' \cong 1_{\mathcal{X}}$. Без ограничения общности можем считать, что $P \in \mathcal{U}$. Обозначим $V_a^0 = (g')^{-1}(L_a)$ и $Y_a = V_a^0 \cap Y$ для каждого a . Легко видеть, что V_a^0 является скрещенностью Y_a в Q' , а $UV_a^0 = V'$ - окрестностью Y в Q' ; при этом $V_a^0 \cap V_{a_1}^0 = \emptyset$ для $a \neq a_1$. Каждое V_a^0 лежит в некотором подмножестве $N \subset Q'$, имеющем вид $N = \bigoplus K_i \times J^T$ (вообще говоря, неоднозначно определённым), обозначим это подмножество N_a (т.е., если в одном N лежит несколько V_a^0 , то данное N рассматривается столько раз, сколько в нём содержится V_a^0). Рассматривая V_a^0 в качестве подмножества соответствующего N_a , будем писать просто V_a^0 . Обозначим $V_0 = \bigoplus V_a^0 \subset \bigoplus N_a = Q$; при этом $Y_a \subset V_a^0$ для каждого a .

Пусть $\mathcal{Y}' = \{V : V \subset Q, V = UV_a^0, \text{ где } V_a^0 = V \cap N_a^*, V' \subset V_0, V' \in \mathcal{Y}'\}$. Установим естественным образом взаимно однозначное соответствие \mathcal{Y} между \mathcal{Y}' и \mathcal{Y} , положив

* здесь N_a рассматривается как подпространство Q' .

$\varphi(V') = V$, где $V = \bigoplus V'_a$ и $V'_a = V' \cap N_a$. Наконец, обозначим через ψ_V "тождественное" отображение $\varphi(V')$ на V для каждого $V \in \mathcal{V}$.

Определим $F: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ равенством $F(V) = F'(\psi_V^{-1}(V))$ и $G: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ равенством $G(U) = (\varphi G')U$. Далее, для каждого $V \in \mathcal{V}$ определим $f_V: U \rightarrow V$ равенством $f_V = \kappa_V f'_V: U \rightarrow V$ и $g_U: V \rightarrow U$ равенством $g_U = g'_U \psi_V^{-1}$. В результате получаем совершенные фундаментальные направленности $\underline{f} = \{F, f_V, \mathcal{V}\}$ и $\underline{g} = \{G, g_U, \mathcal{U}\}$. Как нетрудно видеть, $\underline{g}\underline{f} \approx 1_X$ и $\underline{f}\underline{g} \approx 1_Y$.

Для каждого $a \in A$ рассмотрим множества $V_a = V \cap N_a$, $U_a = U \cap N_a$; совокупность этих множеств обозначим соответственно $\mathcal{V}_a = \{V_a\}$ и $\mathcal{U}_a = \{U_a\}$. Положим $f_V^a = f_V|_{L_a}$, $g_U^a = g_U|_{L_a}$, $F^a(V_a) = F(V) \cap N_a$, $G^a(U_a) = G(U) \cap N_a$, и рассмотрим совершенные фундаментальные направленности $\underline{f}^a = \{F^a, f_V^a, \mathcal{V}_a\}$ и $\underline{g}^a = \{G^a, g_U^a, \mathcal{U}_a\}$. Покажем, что $\underline{f}^a \underline{g}^a \approx 1_X$ и $\underline{g}^a \underline{f}^a \approx 1_Y$. Действительно, пусть U_a - произвольная окрестность из \mathcal{U}_a , выберем тогда $U \in \mathcal{U}$ такую, что $U_a = U \cap L_a$. Из равенства $\underline{g}\underline{f} \approx 1_X$ следует, что существует окрестности U^* и V^* такие, что $g_U, f_V|_{U^*} \neq 1_X$ в $\text{Int } U$ для всех U^* и V^* , содержащихся соответственно в U^* и в V^* . Но тогда $f_V^a(\chi_a) \subset V_a'$, $g_U^a(V_a') \subset U_a'$. Тогда $g_U^a, f_V^a|_{U_a'} \neq 1_X$ для всех $a \in \text{Int } U_a$. Отсюда согласно лемме 2.4 получаем $\underline{g}^a \underline{f}^a \approx 1_X$. Совершенно аналогично можем показать, что $\underline{f}^a \underline{g}^a \approx 1_Y$. Последние же два равенства означают, что $sh p X_a = sh p Y_a$ для каждого a .

Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает обещанную заглавием параграфа эквивалентность двух определений собственных шейпов для локально бикompактных метризуемых пространств:

Теорема 7. Если X и Y - локально бикompактные метризуемые пространства, то $sh(p)X = sh(p)Y$ в том и только в том случае, когда $sh(p)X \cap M = sh(p)Y \cap M$. Другими словами, на классе локально бикompактных метризуемых пространств наше определение собственного шейпа индуцирует определение собственного шейпа в смысле Б.Болла-Р.Шера.

Доказательство. Очевидно, нам достаточно показать, что для двух локально бикомпактных метризуемых пространств X и Y отношение $X \cong_{(c)} Y$ имеет место тогда и только тогда, когда $X \cong_{(c)} Y$.

Допустим, что $X \cong_{(c)} Y$. Поскольку X — локально бикомпактное метризуемое пространство, по теореме П.С.Александрова [1] — В.Серпинского [9] X может быть разложено в дискретную сумму своих сепарабельных подпространств: $X = \bigoplus \{ X_\alpha : \alpha \in A \}$. Согласно теореме 6 тогда существует разложение $Y = \bigoplus \{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$, причём такое, что $X_\alpha \cong_{(c)} Y_\alpha$ для каждого α . Далее, воспользовавшись снова теоремой П.С.Александрова — В.Серпинского, представим каждое Y_α в виде дискретной суммы сепарабельных подпространств: $Y_\alpha = \bigoplus \{ Y_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha \}$. По теореме 6 соответствующее X_α можем разложить в виде $X_\alpha = \bigoplus \{ X_{\alpha\beta} : \beta \in B_\alpha \}$, причём так, что $X_{\alpha\beta} \cong_{(c)} Y_{\alpha\beta}$ для всех α, β . В результате получаем $X = \bigoplus \{ X_{\alpha\beta} : \alpha \in A, \beta \in B_\alpha \}$, $Y = \bigoplus \{ Y_{\alpha\beta} : \alpha \in A, \beta \in B_\alpha \}$ и $X_{\alpha\beta} \cong_{(c)} Y_{\alpha\beta}$ для всех α, β . Поскольку все $X_{\alpha\beta}, Y_{\alpha\beta}$, очевидно, являются локально бикомпактными пространствами со счётной базой, можем воспользоваться предложением 4.5 и из равенства $X_{\alpha\beta} \cong_{(c)} Y_{\alpha\beta}$ заключить, что $X_{\alpha\beta} \cong_{(c)} Y_{\alpha\beta}$ для всех $\alpha, \beta \in B_\alpha$. Согласно определению 5.4 из [2] отсюда следует, что $X \cong_{(c)} Y$.

Обратно, если $X \cong_{(c)} Y$, то согласно определению 5.4 из [2] существуют такие представления пространств X и Y в виде дискретных сумм сепарабельных подпространств $X = \bigoplus \{ X_\alpha : \alpha \in A \}$, $Y = \bigoplus \{ Y_\alpha : \alpha \in A \}$, что $X_\alpha \cong_{(c)} Y_\alpha$ для всех α . Воспользовавшись предложением 4.5, получаем отсюда $X_\alpha \cong_{(c)} Y_\alpha$ для всех α . Отсюда, согласно теореме 6 получаем, что $X \cong_{(c)} Y$.

Теорема 7 доказана.

Литература

1. Aleksandroff P.S. - "Mathematische Annalen", 1924, vol.92, p. 294 - 301.
2. Ball B.J., Sher R.B. - "Fundamenta Mathematicae", 1974, vol.86.
3. Borsuk K. - "Fundamenta Mathematicae", 1968, vol. 62, p. 221 - 251.
4. Borsuk K. Theory of Shape. - "Lecture Notes Series, 1972, vol. 28.
5. Борсу́к К. Теория ретрактов. М. "Мир", 1972.
6. Mardešić S., Segal J., "Fundamenta Mathematicae", 1971, vol. 72, p. 41 - 60.
7. Mardešić S., Segal J. - "Fundamenta Mathematicae", 1971, vol. 72, p. 61 - 68.
8. Mardešić S. - "General Topology and its Applications", 1973, vol. 3, p. 265 - 282.
9. Sierpinsky W. - "Fundamenta Mathematicae", 1933, vol.21, p. 117 - 122.
10. Fox R.H. - "Fundamenta Mathematicae", 1974, vol.74, p. 47 - 71.
11. Шостак А. Шейпы в классах компактности - ДАН СССР, 1974, т. 214, №1, с. 67 - 70.
12. Шостак А. Характеристика класса полных в смысле Чеха паракомпактов как класса \mathcal{C} -компактности. - "Бюллетень Польской АН. Сер. Матем.", 1974, т.22, №8 с.839 - 844.
13. Шостак А. Шейпы в классах компактности: ретракты, экстензоры, подвижность. - Уч. записки ЛГУ им. П.Стучки, 1975, т.236, с. 108 - 128.

Поступила 5 января 1976 года.

А Н Н О Т А Ц И И

УДК 513.88.

Брегман Ю.Х., с. 3-6.

Доказывается топологический аналог комбинаторной теоремы Рамсея: если счетное регулярное пространство со счетной базой, содержащее плотное в себе подмножество, представлено в виде конечного объединения своих подмножеств, то оно вкладывается в одно из этих подмножеств. Библ. 2 назв.

УДК 513.88.

Бурштейн Б.И., с. 7-15.

Определяется и изучается СА-сходимость подпространств и линейных операторов в нормированном пространстве и устанавливается ее связь, соответственно, со сходимостью по раствору и компактной аппроксимацией. Библ. 7 назв.

УДК 513.88.

Вейлер Е.Л., с. 16-27.

Для произвольных множеств (в частности графиков операторов) в нормированном пространстве вводится аналог понятия раствора. Изучается устойчивость непрерывности, ограниченности и свойства Липшица операторов (вообще говоря нелинейных) в нормированных пространствах. Библ. 3 назв.

УДК 513.88.

Вейлер Е.Л., с. 28-35.

Изучается устойчивость Липшицевой обратимости и спектральных свойств нелинейного оператора. Даются необходимые и достаточные условия сходимости нелинейных операторов, определенной автором в предыдущей статье. Библ. 3 назв.

УДК 513.881.

Дергунова Н.А., с. 36-40.

Устанавливается устойчивость ряда свойств линейного замкнутого оператора при линейных возмущениях, сохраняющих его замкнутость. Библ. 7 назв.

УДК 513.83.

Евстигнеев С.Г., с. 41-44.

Метод направленностей применяется для распространения метрики с данного метрического пространства на его бикompактное расширение. Библ. 8 назв.

УДК 519.210.

Ицданок Т.А., с. 45-53.

Рассматриваются случайные сглаживающие и интерполяционные сплайн-функции, доказываются теоремы их существования и единственности. Библ. 5 назв.

УДК 513.88.

Лабеев В.И., с. 54-63.

Изучается устойчивость относительной открытости. Библио-

ности, открытости, индекса и полуустойчивость дефектных чисел линейных непрерывных отображений при компактной сходимости, являющейся обобщением секвенциально компактной аппроксимации. Библ. 8 назв.

УДК 513.88.

Лабеев В.И., с. 65-71.

Получены результаты, касающиеся устойчивости свойств спектра линейных непрерывных отображений при компактной сходимости. Библ. 3 назв.

УДК 513.88.

Лиевиньш А.Х., с. 72-87.

Вводится понятие возмущений, предкомпактных относительно гомоморфизмов топологических векторных пространств и доказывается устойчивость при этих возмущениях некоторых свойств гомоморфизмов. Библ. 9 назв.

УДК 519.4.

Дипянский Р.С., с. 88-101.

Доказывается, что нильпотентные преобразования в радикальных алгебрах Ли линейных преобразований векторного пространства над полем нулевой характеристики образуют подалгебру, обертывающая алгебра которой локально нильпотентна. Библ. 5 назв.

УДК 513.88.

Слюсарчук В.Е., с. 102-112.

Получено обобщение принципа максимума, которое применяется к исследованию абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями. Библ. 12 назв.

УДК 513.88.

Слюсарчук В.Е., с. 113-122.

Обобщается теорема Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, полученный результат применяется к исследованию задач о спектрах линейных непрерывных операторов, определенных на множестве числовых последовательностей. Библ. 6 назв.

УДК 513.88.

Шостак А.П., с. 123-156.

Принадлежащая автору конструкция шейпов в классах компактности применяется для распространения собственной шейповой классификации (Болл Б., Шерр Р.) на класс локально бикompактных паракомпактов. Получен ответ на некоторые вопросы, поставленные Б.Боллом. Библ. 14 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

Брегман Ю.Х. Топологические аналоги теоремы Рамсея	3
Бурштейн В.И. Об одном виде сходимости подпространств ... нормированного пространства	7
Вейлер Е.Л. Об одном нелинейном аналоге раствора	16
Вейлер Е.Л. Об устойчивости некоторых свойств нелинейного оператора	28
Дергунова Н.А. Устойчивость свойств оператора при возмущениях, сохраняющих линейность и замкнутость	36
Евстигнеев В.Г. О распространении метрик на бикомпактные расширения	41
Жданок Т.А. Случайные сплайн-функции	45
Лабеев В.И. Компактная сходимость линейных отображений, заданных на подпространствах	54
Лабеев В.И. Устойчивость свойств спектра линейных не- прерывных отображений при компактной сходимости	65
Лиепиньш А.Х. Относительно предкомпактное возмущение гомоморфизмов топологических векторных пространств	72
Липянский Р.С. Нильпотентные преобразования в представ- лениях радикальных алгебр Ли	88
Слюсарчук В.Е. Об оценках спектров голоморфных функций со значениями в банаховой алгебре	102
Слюсарчук Г.Е. Спектры некоторых операторов в пространстве ограниченных вектор-функций	113
Шостак А.П. Собственные шейки локально-бикомпактных паракомпактов	123
Аннотации	157

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ОТОБРАЖЕНИЯ

Выпуск 3

Республиканский межвузовский сборник научных трудов

Редакторы: В. Старцев, Т. Фадеева
Технический редактор Н. Абола
Корректор Н. Абола

Латвийский государственный университет им. П. Стучки
Рига 1977

Подписано к печати 02.XI.1977. ЯТ 04302. Зак. № 1550.
Бумага №1. Ф/с 60x84/16. 10,2 физ. печ. л.; 7,0 уч.-изд. л.
Тираж 400 экз. Цена 70 к.

Отпечатано на ротационной машине, Рига-50, ул. Вейденбаума, 5
Латвийский государственный университет им. П. Стучки