K Ā R L I S   Z A L T S.

M A I N Ī G O
Š Ķ I R Š A N A S   P R O B L Ē M A
N O M O G R A F I J Ā.

R Ī G Ā, 1936.

LITERĀTŪRA.

Boulad, F. Sur la disjonction des variables des équations nomographiquement rationnelles d'ordre supérieur. C.R., t. CL, 1910, p. 379.

.... Application de la notion des valeurs critiques à la disjonction des variables dans les équations d'ordre nomographique supérieur. Bulletin de la Soc. mathém. de France, t. XXXIX, 1911, p. 105.

.... Sur les équations à quatre variables d'ordre nomographique supérieur. Bulletin de la Soc. mathém. de France, t. XL, 1912, p. 383.

Clark, J. Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre. Revue de Mécanique, t. XXI, 1907, p. 321.

Duporcq, E. Sur la théorie des abaques à alignements. C.R., t. CXXVII, 1898, p. 265.

Gronwall, T.-H. Sur les équations entre trois variables répresentables par des nomogrammes à points alignés. Journal de Mathém. pures et appliquées, 6. série, t. VIII, 1912, p. 59.

Kellogg, O.D. Nomograms with Points in Alignment. Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 63, 1914, p. 159.

Ocagne, M.d'. Traité de Nomographie. Paris, 1899. Otrs izdevums 1921. (Grāmatas ievadā pilnīgs saraksts autora darbiem par nomografiju).

.... Calcul graphique et Nomographie. Paris, 1908. 2-e éd., 1914.

Schwerdt,H. Lehrbuch der Nomographie. Berlin, 1924.

Soreau,R. Nomographie ou Traité des Abaques. 2-e éd. I-II. Paris, 1921. (Otrā sējumā sakopotas vispārīgās teorijas).

.... Nouveaux types d'abaques. La capacité et la valence en Nomographie. Mém. et comptes rendus de la Soc. des Ing. civils, 1906.

.... Réduction de $F_{123}=0$ à la forme $f_1f_3+f_2g_3+h_3=0$. C.R., t. CLV, 1912, p.1065.

MAINĪGO ŠĶIRŠANAS PROBLĒMA NOMOGRAFIJĀ.

I.

IEVADS.

1. Nomografija un viņas pamatuzdevums.- Nomografija ir mācība par matēmatisku sakarību attēlošanu grafiskā veidā, turklāt sakarības attēlam (grafiskai tabulai jeb nomogrammai) jābūt derīgam ātrai skaitliskai rēķināšanai.

Vispārīgais uzdevums, kas nomografijai jāatrisina, ir šāds: zinot likumu (gr. nomos = likums) jeb sakarību, kas saista mainīgos lielumus $z_1, z_2, \ldots z_n$:

$$F\,(z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_n) = 0, \qquad (1)$$

gādāt palīglīdzekli viena mainīgā vērtību nolasīšanai, kad pārējo mainīgo vērtības uzdotas.

Pietiek aprobežoties ar gadījumu, kad mainīgo skaits $n = 3$. Ja mainīgo skaits $n > 3$, kā tas bieži gadās, tad uzdoto sakarību (1), pieņemot pietiekošu, pēc iespējas mazu skaitu palīglielumu, cenšas pārveidot sistēmā tā, ka katrā sistemas nolīdzinājumā darīšana tikai ar 3 mainīgiem lielumiem.

Piemēram, ja $n = 4$ un uzdoto sakarību var uzrakstīt šādā veidā: $F\,(z_1,\ z_2) = G\,(z_3,\ z_4)$, pieņem palīglielumu, kas apzīmē abu funkciju kopīgo vērtību, un uzdoto sakarību aizvieto ar līdzvērtīgu sistemu

$$F\,(z_1,\ z_2) = u, \quad G\,(z_3,\ z_4) = u,$$

kur katrā nolīdzinājumā tikai 3 mainīgie.

Ja $n = 5$ un uzdotai sakarībai ir šāds veids :

$$F\left[f(z_1, z_2), \varphi(z_3, z_4), z_5\right] = 0,$$

to aizvieto ar ekvivalentu sistemu :

$$f(z_1, z_2) = u, \quad \varphi(z_3, z_4) = v, \quad F(u, v\ z_5) = 0,$$

kur katrā nolīdzinājumā 3 mainīgie.

To ievērojot turpinājumā nodarbosimies tikai ar to gadījumu, kad jāattēlo nomogrammā nolīdzinājums, kas saista 3 mainīgus.

2. Saisināts funkciju rakstības veids. Jēdziens par nolīdzinājumu kārtu.- Lai iegūtu viegli pārredzamas formulas, nomografijā bieži atmet mainīgo apzīmējumus, aizvietojot tos ar funkcijas simbolam piespraustu indeku. Piem., f_1 apzīmē funkciju, kas atkarājas no z_1, f_{23} apzīmē funkciju, kas atkarājas no z_2 un z_3 un t.t.

Nolīdzinājumu $F_{12..m} = 0$ sauc par nomografiski ~~sakārtotu~~ attiecībā uz z_1, ja viņu var pārrakstīt šādi :

$$f_1 \cdot F_{23...m} + g_1 \cdot G_{23...m} + \dots + l_1 \cdot L_{23...m} = 0,$$

kur funkcijas f_1, g_1, ... l_1 - lineāri neatkarīgas. Ja tā sakārtotam nolīdzinājumam ir $n - 1$ locekļu, saka, ka viņš ir n - ās kārtas (fr. ordre) attiecībā uz mainīgo z_1.

Ja tā pat noteic nolīdzinājuma kārtu n_i attiecībā uz visiem mainīgiem z_i, tad viņa kopīgā (jeb totālā) nomografiskā kārta $n = \sum n_i$.

Kārtas jēdzienu nomografijā iesāka lietāt R. Soreau memuarā

"Nouveaux types d'abaques" (1906.)

Nolīdzinājuma kopīgā kārta raksturo funkciju minimālo skaitu nolīdzinājumā, un var mainīties, kad nolīdzinājumu pārveido. Piem., sakarību

$$f_1 f_2 + \sqrt{1 + f_1^2} \cdot \sqrt{1 + f_2^2} = f_3$$

var pārveidot šādā :

$$\log\left(f_1 + \sqrt{1 + f_1^2}\right) + \log\left(f_2 + \sqrt{1 + f_2^2}\right) = \log\left(f_3 + \sqrt{f_3^2 - 1}\right).$$

Pirmais veids ir 5 - ās, bet otrais - 3 - ās kārtas.

3. Skāla. Kad skālas atbalsts ir taisne?- Uzdotas sakarības grafiskam attēlam var būt dažādi veidi, no kuriem vismodernākais un praktiskā ziņā vissvarīgākais ir tas, kas sastāv no skālām.

Vispārīgi, skāla ir skaitlisku vērtību piekārtojums līnijas punktiem. Tādu piekārtojumu gādā līknes nolīdzinājuma parametriskais veids

$$x = \frac{f(t)}{h(t)}, \qquad y = \frac{g(t)}{h(t)} \tag{2}$$

kur x, y - Dekarta koordinatas, ja konstruējot līkni iekārto, ka ikvienā līknes punktā var nolasīt attiecīgo parametra t vērtību. To sasniedz apzīmējot ar šķērsšvīkām punktus uz līknes, kas atbilst apaļām aritmetiskā progresijā pieaugošām parametra vērtībām un pierakstot šīs vērtības pietiekošam šķērsšvīku skaitam.

Šķērsšvīku kopumu apzīmē par skālas iedalījumu, ar iedalījuma un uzrakstu palīdzību līnijas punktiem piekārtotos skaitļus - par skālas atzīmēm, bet pašu līniju - par skālas atbalstu.

<u>Teorema.</u>

<u>Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla (2)— taisna, ir tas, ka identiski</u>

$$a\,f(t) + b\,g(t) + c\,h(t) = 0, \tag{3}$$

<u>kur konstantas a, b, c, visas reizē nav nulles, t.i. funkcijām f (t), g (t), h (t) jābūt lineāri atkarīgām.</u>

Attiecībā uz skālu (2) pieņemsim, ka viņa tiešām <u>ir</u>, kā noteikts līnijas punktu kopums, tā tad, nedeģenerē punktā un neaiziet bezgalībā. Tā tad, katrā ziņā $h(t) \neq 0$, un attiecības $f(t) : h(t)$ un $g(t) : h(t)$ abas nav konstantas reizē. To pieņemot viegli seko teoremas pierādījums.

Ja skāla (2) ir taisna, viņas punktu koordinātas saista lineāra sakarība :

$$a\,x + b\,x + c = 0. \tag{4}$$

Ievietojot še x un y vietā viņu izteiksmes (2) un pareizinot ar $h(t)$ dabū (3).

Otrādi, ja noteikums (3) izpildīts, skāla ir taisna. Vienādību (3) izdalām ar $h(t) \neq 0$. Ievērojot (2) dabū lineāru sakarību starp koordinātām, t.i. seko (4).

Atvasinām (3) divreiz :

$$af'(t) + bg'(t) + ch'(t) = 0,$$

$$af''(t) + bg''(t) + ch''(t) = 0.$$

Šie nolīdzinājumi ir homogēni un lineāri attiecībā uz a, b, c. Kopā ar (3) viņi veido sistemu, kurai ir netriviāls atrisinājums, jo a, b, c visi reizē nav nulles. Tā tad :

$$\begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

Secinājums.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla (2) taisna, ir tas, ka no funkcijām $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ veidotais Vronska determinants ir vienlīdzīgs nullei.

4. Trīs skālas, kā kolineāru punktu nomogramma.-Pieņemsim, ka aprakstītā kārtā konstruētas 3 skālas ($i = 1,2,3$) :

$$x_i = \frac{f_i(z_i)}{h_i(z_i)}, \qquad y_i = \frac{g_i(z_i)}{h_i(z_i)}. \tag{6}$$

Apskatīsim skālu atzīmes z_1, z_2, z_3 punktos, kas ir uz vienas taisnes. (Kolineāru punktu princips.)

Ja punkti (x_i, y_i) ($i = 1,2,3$) ir uz vienas taisnes, tad

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ievietojot še Dekarta koordinātu vietā viņu izteiksmes (6) dabū sakarību starp skālu atzīmēm punktos (x_i, y_i) :

$$\begin{vmatrix} \frac{f_1}{h_1} & \frac{g_1}{h_1} & 1 \\ \frac{f_2}{h_2} & \frac{g_2}{h_2} & 1 \\ \frac{f_3}{h_3} & \frac{g_3}{h_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

vai arī :

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{7}$$

kur determinantu raksturo tas, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā.

Izvirzot determinantu dabū (7) vietā

$$F_{123} = 0. \tag{8}$$

Tā tad, atzīmes, ko nolasa skālām (6) vienas taisnes punktos, atbilst nolīdzinājumam (7) jeb (8). Šīs skālas var lietāt nolīdzinājuma (8) grafiskai atrisināšanai : zinot z_1 un z_2 sameklē punktus uz attiecīgām skālām, kuŗiem atbilst tādas atzīmes, savieno šos punktus ar taisni un raugās, kur taisne krusto trešo skālu. Krustpunktā nolasa mainīgā z_3 vērtību.

5. Nomogrammas suga.- Par nomogrammas sugu (fr. genre, angl. genus) sauc līko skālu skaitu nomogrammā. Ja nomogrammai visas skālas taisnas, saka, ka viņa ir 0 - ās sugas. Ja viena skāla ir līka, pārējās - taisnas, nomogrammu sauc par pirmās sugas. Vispārīgi, ja nomogrammai p skālas ir līkas, pārējās - taisnas, viņu sauc par p - ās sugas.

Nomogramma, kas sastāv no 3 līkām skālām (p = 3), attēlo nolīdzinājumu

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kur visās rindās funkcijas lineāri neatkarīgas. Tāds nolīdzinājums attiecībā pret kādu vienu mainīgo ir 2 -ās kārtas, bet viņa kopīga kārta n = 6. (Sk. nolīdzinājuma nomografiskās kārtas definīciju). Tā tad, šinī gadījumā $n = p + 3$.

Ja kādā vienā rindā funkcijas f_i, g_i, h_i ir lineāri atkarīgas, nomogrammas suga pamazinās par 1 (jo viena skāla tad ir taisna), bet par tik pat pamazinās arī nolīdzinājuma kārta. Ja p = 0 (visas skālas taisnas), n = 3.

Vispārīgi, p -ās sugas nomogrammai atbilst nolīdzinājums, kuŗa nomografiskā kārta n = p + 3.

6. Vispārīgā homografiskā transformacija.- Trīs skālas, ko definē nolīdzinājumi (6), ir kolineāru punktu nomogramma, kas attēlo sakarību (7) jeb (8). Parādīsim, ka minētās trīs skālas nav vienīgās derīgās; gluži otrādi, to pašu sakarību var attēlot ar skālu trijotnēm bezgala dažādos citos veidos.

No uzdotām funkcijām f_i, g_i, $h_i (i = 1,2,3)$ lineāri sakombinēsim 9 citas :

$$
\begin{aligned}
F_i &= a_1 f_i + b_1 g_i + c_1 h_i, \\
G_i &= a_2 f_i + b_2 g_i + c_2 h_i, \qquad (i - 1,2,3) \qquad (9) \\
H_i &= a_3 f_i + b_5 g_i + c_3 h_i,
\end{aligned}
$$

kur a_i, b_i, c_i - patvaļīgi izvēlētas konstantas, kas ierobežotas vienīgi ar to noteikumu, ka no viņām veidotais determinants nav nulle :

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (10)
$$

Ievērojot lielo nenoteiktību, kāda pieļauta konstantu a_i, b_i, c_i izvēlē, var ļoti dažādi izveidot funkcijas (9). Bet skālas

$$
x_i = \frac{F_i}{H_i}, \qquad y_i = \frac{G_i}{H_i}, \qquad (11)
$$

$$(i = 1,2,3)$$

kā kolineāru punktu nomogramma attēlo sakarību

$$
\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$\begin{vmatrix} a_1f_1+b_1g_1+c_1h_1 & a_2f_1+b_2g_1+c_2h_1 & a_3f_1+b_3g_1+c_3h_1 \\ a_1f_2+b_1g_2+c_1h_2 & a_2f_2+b_2g_2+c_2h_2 & a_3f_2+b_3g_2+c_3h_2 \\ a_1f_3+b_1g_3+c_1h_3 & a_2f_3+b_2g_3+c_2h_3 & a_3f_3+b_3g_3+c_3h_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

kas, ievērojot (10), neatšķiras no (7).

Tā kā nomogramma, ko veido skālas (6), attēlo to pašu sakarību starp mainīgiem, kā nomogramma (11), tad seko, ka punkti ar atzīmēm z_1, z_2, z_3, kas pirmā nomogrammā ir uz taisnes, tāpat arī otrā ir uz taisnes. Ievērojot (9) taisne pārveidojas taisnē. Transformaciju, kuŗai tāda īpašība, sauc par homografisku jeb projektīvu.

7. Mainīgo šķiršanas problēma.- Ja kolineāru punktu nomogrammai zina skālu nolīdzinājumus, nav grūti atrast, kādu sakarību viņa attēlo. Praksē jāatrisina tieši pretējs uzdevums. Uzdotai sakarībai

$$F_{123} = 0 \qquad (12)$$

jāatrod nomografiskais attēls, t.i. skālu nolīdzinājumi un pašas skālas.

Acīmredzot, uzdevums ir atrisināts, ja uzdoto sakarību izdodas uzrakstīt ekvivalentā veidā tā, ka kreisā pusē ir determinants, kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

Ar paralelo stabiņu pieskaitīšanu vai arī ar vispārīgo homografisko transformaciju vienmēr var sasniegt to, ka beidzamajā stabiņā nav nevienas nulles. Tā tad, var pieņemt, ka $h_i \neq 0$ $(i = 1,2,3)$. Ja tas tā, nolīdzinājumu attēlo nomograma, kas sastāv no skālām

$$x_i = \frac{f_i}{h_i}, \qquad y_i = \frac{g_i}{h_i} \qquad (i = 1,2,3)$$

Ja sakarība, ko grib attēlot nomogrammā, uzdota specializētā veidā un atbilst kādai no parastajām fizikas vai technikas formulām, determinanta (t.i. determinantā ietelpstošo funkciju) veidošana, ko M. d'Ocagne savos darbos apzīmē par <u>mainīgo šķiršanu</u> (fr. disjonction des variables), bieži izdodas samērā vienkāršiem līdzekļiem. Grūtāks ir uzdevums, ja attēlojamā sakarība uzdota gluži vispārīgā veidā ; še izvirzās arī jautājums, kā pazīt, ka uzdotais nolīdzinājums pieļauj vai nepieļauj mainīgo šķiršanu.

Pieminētajiem jautājumiem, pēc pirmiem nepilnīgiem mēģinājumiem, kuŗu autori ir de Saint-Robert (1871), Massau (1884), Lecornu (1885), Duporcq (1898), plašus memuarus veltī Boulad (1910-11), Gronwall (1912), Kellogg (1914). Soreau savā kursā Nomographie ou Traité des Abaques., 2-e éd., 1921) veltī mainīgo šķiršanai lielu daļu otrā sējuma. Nomogrammu konstruktori no šiem pētījumiem gaida pietiekami vispārīgu un reizē no pārmērīgām analitiskām grūtībām brīvu metodi mainīgo šķiršanai īpašos prakses gadījumos.

II.

Duporcq'a funkcionāl-

vienādojumi.

Parīzes zinātņu akademijai iesniegtās piezīmēs (C.R., t. CXXVII, 1898) E. Duporcq nodarbojas ar jautājumu, kā pazīt, ka uzdotu funkciju F (x y z) iespējams uzrakstīt determinanta veidā tā, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā, un ja tāda uzrakstīšana iespējama, kā noteikt determinanta elementus. Jautājumu pilnīgi atrisinot iznākumi, kur,us autors nodod akademijai ("La question est résolue complètement au moyen des résultats que j'ai l'honneur de soumettre à l'Académie dans cette Note"). Pieņemsim, ka uzdotu funkciju F(x,y,z) var identiski pārveidot determinantā :

$$F(x,y,z) = \begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

kur f_i, g_i, h_i, $(i = 1,2,3)$ ir nezināmas funkcijas. Apzīmēsim minorus, kas viņām atbilst, ar attiecīgiem lieliem burtiem F_i G_i, H_i. Tad seko vienādības :

$$\left.\begin{aligned} F(x,y,z) &= F_1 f_1(x) + G_1 g_1(x), + H_1 h_1(x) \\ F(x,y,z) &= F_2 f_2(y) + G_2 g_2(y), + H_2 h_2(y) \\ F(x,y,z) &= F_3 f_3(z) + G_3 g_3(z) + H_3 h_3(z) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Tā kā determinantā (1) mainīgie atšķirti katrs savā rindā, tad funkcijas F_i, G_i, H_i atkarājas no tiem mainīgiem, kuŗus attiecīgās funkcijas f_i, g_i, h_i sevī <u>ne</u>ietver.
Vienādība nezaudē spēku, ja mainīgo aizvieto ar skaitliskām vērtībām. Pirmā vienādībā (2) var x vietā ievietot patvaļīgi

izvēlētas ~~dažādas~~ dažādas skaitliskas vērtības a, a', a" ($a \neq a'$, $a \neq a''$, $a' \neq a''$) :

$$\left.\begin{aligned} F(a,y,z) &= F_1 f_1(a) + G_1 g_1(a) + H_1 h_1(a), \\ F(a',y,z) &= F_1 f_1(a') + G_1 g_1(a') + H_1 h_1(a') \\ F(a'',y,z) &= F_1 f_1(a'') + G_1 g_1(a'') + H_1 h_1(a'') \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

No šīm vienādībām, kopā ar pirmo (2), kad eliminē F_1, G_1, H_1, seko :

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ F(a,y,z) & f_1(a) & g_1(a) & h_1(a) \\ F(a',y,z) & f_1(a') & g_1(a') & h_1(a') \\ F(a'',y,z) & f_1(a'') & g_1(a'') & h_1(a'') \end{vmatrix} = 0$$

Apzīmēsim minorus, kas atbilst pirmā stabiņa elementiem, ar A , B , C , D . Viņos nav ne y, ne z. Tāpēc vienādībā

$$\underline{A\cdot F(x,y,z) + B\cdot F(a,y,z) + C\cdot F(a',y,z) + D\cdot F(a'',y,z) = 0} \quad (4)$$

koeficienti A, B, C, D nemainās, ka y un z aizvieto ar patvaļīgi izvēlētām <u>dažādām</u> skaitliskām vērtībām b, b', b" attiec. c, c', c" :

$$\left.\begin{aligned} A\cdot F(x,b,c) + B\cdot F(a,b,c) + C\cdot F(a',b,c) + D\cdot F(a'',b,c) &= 0, \\ A\cdot F(x,b',c) + B\cdot F(a,b',c') + C\cdot F(a',b',c') + D\cdot F(a'',b',c) &= 0, \\ A\cdot F(x,b'',c'') + B\cdot F(a,b'',c'') + C\cdot F(a',b'',c'') + D\cdot F(a'',b'',c'') &= 0 \end{aligned}\right\} (4')$$

Mums ir 4 nolīdzinājumi, kas attiecībā uz A, B, C, D ir lineāri un homogēni. Viegli noskaidrot, ka A, B, C, D nevar visi reizē būt nulles. Ja pieņem, ka $A = 0$, tad seko, ka vienādībām (3) labās puses ir lineāri atkarīgas, tā tad, lineāri atkarīgām jābūt arī kreisām pusēm, t.i. starp y, z jāpieņem sakarība. Bet tāds pieņēmums ir neatļauts, jo vienādībā (1) mainīgie jāuzskata kā neatkarīgi. Tā tad, jāpieņem, ka $A \neq 0$.

Ja sistemai (4), (4') ir netriviāls atrisinājums, tad jāizzūd determinantam, ko veido izteiksmes pie A, B, C, D :

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(x,b,c) & F(x,b',c') & F(x,b'',c'') \\ F(a,y,z) & F(a,b,c) & F(a,b',c') & F(a,b'',c'') \\ F(a',y,z) & F(a',b,c) & F(a',b',c') & F(a',b'',c'') \\ F(a'',y,z) & F(a'',b,c) & F(a'',b',c') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0. \qquad (5)$$

Tādā pat kārtā, ievietojot otrā vienādībā (2) y vietā b, b', b" un trešā (z vietā) c, c', c", seko :

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(a,y,c) & F(a',y,c') & F(a'',y,c'') \\ F(x,b,z) & F(a,b,c) & F(a',b,c') & F(a'',b,c'') \\ F(x,b',z) & F(a,b',c) & F(a',b',c') & F(a'',b',c'') \\ F(x,b'',z) & F(a,b'',c) & F(a',b'',c') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0, \qquad (5')$$

$$\begin{vmatrix} F(x,y,z) & F(a,b,z) & F(a',b',z) & F(a'',b'',z) \\ F(x,y,c) & F(a,b,c) & F(a',b',c) & F(a'',b'',c) \\ F(x,y,c') & F(a,b,c') & F(a',b',c') & F(a'',b'',c') \\ F(x,y,c'') & F(a,b,c'') & F(a',b',c'') & F(a'',b'',c'') \end{vmatrix} = 0. \qquad (5'')$$

Secinājums.

Funkcija $F(x\,y\,z)$, ja viņu var uzrakstīt determinanta veidā tā, ka mainīgie atšķirti katrs savā rindā, atbilst trīs funkcionālvienādojumiem (5), (5'), (5").

Minorus, kas vienādībās (5), (5'), (5") atbilst elementam $F(x,y,z)$ apzīmēsim pēc kārtas ar $\Delta, \Delta', \Delta''$. Viņi atkarājas no konstantām a, a', a" (x vērtības), b, b', b" (y vērtības) un c, c', c" (z vērtības), kuŗu izvēle ierobežota ar prasību, ka vienam tam pašam mainīgam jāņem dažādas vērtības. Ievērojot konstantu patvaļību vienmēr var iekārtot tā, ka

$$\Delta \neq 0, \quad \Delta' \neq 0, \quad \Delta'' \neq 0. \tag{6}$$

Ja tas tā, vienādības (5), (5'), (5"), kad izvirza determinantus pēc pirmās rindas elementiem, var pārveidot šādās :

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y,z) = uF(x,b,c) + vF(x,b',c') + wF(x,b'',c'') \\ F(x,y,z) = u'F(a,y,c) + v'F(a',y,c') + w'F(a'',y,c'') \\ F(x,y,z) = u''F(a,b,z) + v''F(a',b',z) + w''F(a'',b'',z) \end{array}\right\} \tag{7}$$

kur : u, v, w - atkarājas no (y, z),
u', v', w' - " " (z, x),
u'', v'', w'' - " " (x, y).

No tā secina (sk. H. Schwerdt, Lehrbuch der Nomographie, 1924, 139. lp.p.), ka funkciju $F(x,y,z)$ var uzrakstīt determinanta veidā, kuŗa elementi tikai ar konstantiem proporcionalitates faktoriem var atšķirties no $F(x,b,c)$, $F(x,b',c')$, ...

Tā tad, identiski :

$$F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \lambda F(x\ b\ c) & \lambda' F(x\ b'\ c') & \lambda'' F(x\ b''\ c'') \\ \mu F(a\ y\ c) & \mu' F(a'\ y\ c') & \mu'' F(a''\ y\ c'') \\ \nu F(a\ b\ z) & \nu' F(a'\ b'\ z) & \nu'' F(a''\ b''\ z) \end{vmatrix} \tag{8}$$

kur λ, λ', λ''; μ, μ', μ'', ... - konstantas.

Reizē ar to mainīgo šķiršanas problēma ir novesta pie nenoteikto koeficientu atrašanas uzdevuma.

III

Boulad'a metode mainīgo škiršanai.

Mainīgo šķiršanas problēmai F. Boulad's, iesākot ar 1910.g. (C.R., T. CL), veltī vairāk darbu, par kuŗiem M. d'Ocagne *) saka, ka viņu kopums esot "viens no vislabākiem un vissvarīgākiem vispārīgās nomografijas veicinājumiem".

1. Metodes princips.- UZdots nolīdzinājums $F_{123} = 0$, kam kreisā puse atkarājas no mainīgiem z_1, z_2, z_3. Pieņemsin, ka viņam, kad to nomografiski sakārto attiecībā uz mainīgo z_1, ir šāds veids :

$$F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} \doteq 0. \qquad (1)$$

Jāatrod, ja iespējams, 6 funkcijas F_i, G_i, H_i $(i = 2\ ,\ 3)$ tādas, ka identiski

$$F_1 F_{23} + G_1 G_{23} + H_1 H_{23} = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}$$

Ja tāda vienādība iespējama un tur F_1, G_1, H_1 apmaina attiecīgi pret F_2, G_2, H_2 vai F_3, G_3, H_3, dabū labā pusē nulli :

$$\left.\begin{aligned} F_2 F_{23} + G_2 G_{23} + H_2 H_{23} = 0, \\ F_3 F_{23} + G_3 G_{23} + H_3 H_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

jo tādas apmaiņas dēļ divi rindas determinantā top vienādas. Liela nozīme metodē ir tam, ka (2) ir vienādības.

Ja nolīdzinājumā (1) funkcijas F_1, G_1, H_1 apmaina pret simboliem F_2, G_2, H_2 vai F_3, G_3, H_3, dabū vienādības (identitātes), kas spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām.

-*) Calcul graphique et Nomographie, 2^{e} éd., 1914, 258.lp.p. (piez.)

F_2, G_2, H_2 atrod no pirmās vienādības (2), sakārtojot to attiecībā uz mainīgo z_3. Pieņemsim, ka pēc pārkārtošanas ir :

$$f_3\Psi_2 + g_3\Phi_2 + \ldots + t_3\Theta_2 = 0,$$

kur f_3, g_3, ... t_3 ir zināmas funkcijas. Nezināmās F_2, G_2, H_2 ir ietvertas simbolos Ψ_2, Φ_2, ...Θ_2.

Pārkārtošanas iznākums ir vienādība, kas spēkā neatkarīgi no mainīgā z_3 vērtībām. Tas tā var būt vienīgi tad, ja

$$\underline{\Psi_2 = 0, \quad \Phi_2 = 0, \ \ldots \ \Theta_2 = 0.}$$

Vispirms jāpārliecinās, ka šie nolīdzinājumi nerunā viens otram pretim. Ja viņos ir pretruna, mainīgo šķiršana nodomātā veidā nav iespējama. Ja pretrunas nav, nolīdzinājumi kalpo F_2, G_2, H_2 atrašanai.

F_3, G_3, H_3 atrod līdzīgā kārtā no otrās vienādības (2), sakārtojot to attiecībā uz mainīgo z_2. Pieņemsim, ka pēc pārkārtošanas iznāk :

$$f_2\Psi_3 + g_2\Phi_3 + \ldots + t_2\Theta_3 = 0.$$

Tā kā tas ir spēkā identiski, neatkarīgi no z_2 vērtībām , tad jābūt

$$\underline{\Psi_3 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \ \ldots \Theta_3 = 0,}$$

no kurienes dabū F_3, G_3, H_3, pieņemot, ka sistēmā nav pretrunas.

<u>2. Vispārīgais ceturtās un trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājums ar 3 mainīgiem.</u>- Tāda nolīdzinājuma veids ir :

$$\begin{aligned} & F_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + \\ + \ & G_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) + \\ + \ & H_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

kur a_i, b_i, c_i - konstantas.

Ja F_3, G_3, H_3 lineāri neatkarīgi, nolīdzinājums attiecībā uz z_3 ir otrās (pretējā gadījumā - pirmās) kārtas. Attiecībā uz pārējiem mainīgiem viņš ir pirmās kārtas, tā kā kopīgā kārta $n = 3$ vai 4.

Gribot nolīdzinājuma kreiso pusi uzrakstīt determinanta veidā, kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā :

$$\begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix} = 0,$$

aizvietojam uzdotā nolīdzinājumā (3) F_3, G_3, H_3 (uzdotās funkcijas) ar simboliem F_1, G_1, H_1 un F_2, G_2, H_2. Seko vienādības, kuras sakārtojam attiecībā uz z_2 un z_1 :

$$f_2\Big[F_1(a_0f_1 + a_2) + G_1(b_0f_1 + b_2) + H_1(c_0f_1 + c_2)\Big] + \\ + \Big[F_1(a_1f_1 + a_3) + G_1(b_1f_1 + b_3) + H_1(c_1f_1 + c_3)\Big] = 0,$$

un tāpat :

$$f_1\Big[F_2(a_0f_2 + a_1) + G_2(b_0f_2 + b_1) + H_2(c_0f_2 + c_1)\Big] + \\ + \Big[F_2(a_2f_2 + a_3) + G_2(b_2f_2 + b_3) + H_2(c_2f_2 + c_3)\Big] = 0,$$

Tās ir vienādības, kas spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām. Pirmai jābūt spēkā neatkarīgi no z_2, otrai - neatkarīgi no z_1. Tāpēc :

$$\begin{aligned} &F_1(a_0f_1 + a_2) + G_1(b_0f_1 + b_2) + H_1(c_0f_1 + c_2) = 0, \\ &F_1(a_1f_1 + a_3) + G_1(b_1f_1 + b_3) + H_1(c_1f_1 + c_3) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

un

$$\begin{aligned} &F_2(a_0f_2 + a_1) + G_2(b_0f_2 + b_1) + H_2(c_0f_2 + c_1) = 0, \\ &F_2(a_2f_2 + a_3) + G_2(b_2f_2 + b_3) + H_2(c_2f_2 + c_3) = 0. \end{aligned} \tag{4'}$$

No šejienes seko :

$$\underline{F_1 : G_1 : H_1} =$$

$$\begin{vmatrix} b_0 f_1 + b_2 & c_0 f_1 + c_2 \\ b_1 f_1 + b_3 & c_1 f_1 + c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 f_1 + c_2 & a_0 f_1 + a_2 \\ c_1 f_1 + c_3 & a_1 f_1 + a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 f_1 + a_2 & b_0 f_1 + b_2 \\ a_1 f_1 + a_3 & b_1 f_1 + b_3 \end{vmatrix}$$

$$\underline{F_2 : G_2 : H_2 =}$$

$$\begin{vmatrix} b_0 f_2 + b_1 & c_0 f_2 + c_1 \\ b_2 f_2 + b_3 & c_2 f_2 + c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 f_2 + c_1 & a_0 f_2 + a_1 \\ c_2 f_2 + c_3 & a_2 f_2 + a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 f_2 + a_1 & b_0 f_2 + b_1 \\ a_2 f_2 + a_3 & b_2 f_2 + b_3 \end{vmatrix}$$

Funkcijas F_1, G_1, H_1 noteic skālu. Kāds nolīdzinājums ir līknei, uz kuras skāla atbalstās ? Punktā, kam atbilst atzīme z_1, koordinātas ir

$$x = \frac{F_1}{H_1} \qquad y = \frac{G_1}{H_1},$$

tā tad, $F_1 : G_1 : H_1 = x : y : 1$.

Ja nolīdzinājumos (4) funkcijas F_1, G_1, H_1 aizvieto ar proporcionāliem lielumiem x, y, 1, dabū :

$$(a_0 f_1 + a_2)x + (b_0 f_1 + b_2)y + (c_0 f_1 + c_2) = 0,$$

$$(a_1 f_1 + a_3)x + (b_1 f_1 + b_3)y + (c_1 f_1 + c_3) = 0,$$

vai , pārkārtojot :

$$(a_3 x + b_0 y + c_0)f + (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0,$$

$$(a_1 x + b_1 y + c_1)f + (a_3 x + b_3 y + c_3) = 0.$$

Eliminējot no beidzamiem nolīdzinājumiem f_1 atrod skālas atbalsta nolīdzinājumu :

$$\frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \tag{5}$$

Ja to pašu rēķinu atkārto attiecībā uz otru skālu, ko noteic funkcijas F_2, G_2, H_2, dabū to pašu nolīdzinājumu (5).

Tā tad :

Vispārīgam ceturtās un trešās kārtas nolīdzinājumam (3) atbalsts divi skālām ir kopīga otrās kārtas līkne (5).*)

*) Īpašos gadījumos līkne var deģenerēt divi taisnēs.

3. Piemērs. Šķirt nomografiski mainīgos nolīdzinājumam :

$h^2(1 + l) - hl\,(1 + p) - \frac{1}{3}\,(1 - l)(1 + 2p) = 0.$

Nolīdzinājums nomografiski sakārtots attiecībā uz h. Pieņemsim :

$$F_1 = h^2, \quad G_1 = -h, \quad H_1 = -\tfrac{1}{3}.$$

Ja šo funkciju vietā raksta F_i, G_i, H_i (i = 2, 3), dabū vienādības : $F_2(1 + l) + G_2 l\,(1 + p) + H_2(1 - l)(1 + 2p) = 0,$

$$F_3(1 + l) + G_3 l\,(1 + p) + H_3(1 - l)(1 + 2p) = 0.$$

Pieņemot, ka F_2, G_2, H_2 atkarājas no l un F_3, G_3, H_3 no p, sakārtosim pirmo vienādību attiecībā uz p, otru – attiecībā uz l :

$$p\left[G_2 l + 2H_2(1 - l)\right] + \left[F_2(1 + l) + G_2 l + H_2(1 - l)\right] = 0,$$

$$l\left[F_3 + G_3(1 + p) - H_3(1 + 2p)\right] + \left[F_3 + H_3(1 + 2p)\right] = 0.$$

Abas ir vienādības, kam jābūt spēkā neatkarīgi no mainīgo vērtībām : pirmai neatkarīgi no p, otrai – neatkarīgi no l. Tas iespējams tikai tad, ja funkcijas F_i, G_i, H_i ⊤ izzūd. No tā seko divi sistēmas nezināmo funkciju aprēķināšanai :

$$G_2 l + 2H_2(l - 1) = 0,$$

$$F_2(l + 1) + G_2 l + H_2(l - 1) = 0;$$

un :

$$F_3 + G_3(1 + p) - H_3(1 + 2p) = 0,$$

$$F_3 \qquad\qquad + H_3(1 + 2p) = 0;$$

tā tad :

$$\underline{F_2 : G_2 : H_2 = l(1 - l) : 2(l^2 - 1) : l(l + 1)}\ ;$$

$$\underline{F_3 : G_3 : H_3 = -(1 + 2p)(1 + p) : 2(1 + 2p) : (1 + p)}.$$

⊤ (i=2,3) ir tādas, ka izteikomes stūrainās iekavās

IV.

Vispārīgās homografiskās transformacijas diferenciālinvarianti. (Gronwall'a metode).

1. Divi skālas un sekante.- Gronwall's 1912.g. publicēja memuāru, kur mainīgo šķiršanas problēma apskatīta visai sīki un plaši. Vēlāk būs minēti daži šī pētījuma iznākumi. Bet papriekšu, kā sagatavojums turpmākam, šāds vienkāršs ģeometrijas uzdevums :

Ortogonālās Dekarta koordinātu asīs uzdotas divi skālas, sekante savieno kādus divus skālu punktus. Izpētīt viņas īpašības.

Apzīmējumi :

ξ, η - Dekarta koordinātas,

x, y - skālu atzīmes,

u - sekantes virziena koeficients,

v - nogrieznis ordinātu asij,

w - " abscisu asij.

Skālu nolīdzinājumi :

$$\xi_i = \frac{f_i}{h_i}, \qquad \eta_i = \frac{g_i}{h_i}, \tag{1}$$

($i = 1, 2$). Indeks 1 apzīmē, ka funkcija atkarājas no x, 2 - ka viņa atkarājas no y :

$$f_1 = f_1(x), \quad g_1 = g_1(x), \quad h_1 = h_1(x);$$

$$f_2 = f_2(y), \quad g_2 = g_2(y), \quad h_2 = h_2(y).$$

Caur punktiem (ξ_1, η_1) un (ξ_2, η_2) vilkta taisne, kuŗas nolīdzinājums :

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(\eta_1 - \eta_2)\xi - (\xi_1 - \xi_2)\eta + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = 0. \tag{2}$$

Gadījumiem, kad abas skālas ir <u>uz kopīgas taisnes</u>, kas paralela vienai vai otrai koordinātu asij, apskatāmā problēmā nav ne teoretiskas ne praktiskas intereses. Tāpēc pieņemsim, ka, vispārīgi, $\xi_1 \neq \xi_2$, $\eta_1 \neq \eta_2$. Tad no (2) seko vilktās taisnes (sekantes) virziena koeficients un asu nogriežņi :

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{g_1 h_2 - h_1 g_2}{f_1 h_2 - h_1 f_2}, \\ v &= \frac{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{f_1 g_2 - g_1 f_2}{f_1 h_2 - h_1 f_2}, \\ w &= -\frac{\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2}{\eta_1 - \eta_2} = -\frac{f_1 g_2 - g_1 f_2}{g_1 h_2 - h_1 g_2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

No šīm formulām, vai arī tieši ģeometriski redzams, ka identiski

$$\underline{u\,w + v = 0.} \tag{4}$$

Funkcijas u, v, w atkarājas no x un y. Viņu <u>parciālās atvasinātās</u> :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-h_2 D_1}{(f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{f_2 D_1}{(f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}; \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{-g_2 D_1}{(g_1 h_2 - h_1 g_2)^2} = \frac{-g_2 D_1}{u^2 (f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Tāpat :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{-h_1 D_2}{(f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{f_1 D_2}{(f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}; \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{-g_1 D_2}{(g_1 h_2 - h_1 g_2)^2} = \frac{-g_1 D_2}{u^2 (f_1 h_2 - h_1 f_2)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Šinīs formulās :

$$D_i = \begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_i' & g_i' & h_i' \end{vmatrix}. \quad (i = 1,2) \tag{6}$$

No (5) un (5') seko :

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial v}{\partial y} : u^2\frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 : g_1 : h_1; \\ \text{un} \quad & \\ &-\frac{\partial v}{\partial x} : u^2\frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x} = f_2 : g_2 : h_2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Funkcijas u, v, w saista identiska sakarība (4), tāpēc proporcijās (7) vienu lielumu, piem. w, var eliminēt. Seko :

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{\partial v}{\partial y} : \left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} \right) : \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 : g_1 : h_1; \\ &-\frac{\partial v}{\partial x} : \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \right) : \frac{\partial u}{\partial x} = f_2 : g_2 : h_2. \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

Tā tad :

<u>Funkcijas f_i, g_i, h_i ($i = 1,2$), kas ar savām attiecībām noteic skālu nolīdzinājumus (1), var saskaņā ar (7) vai (7') līdz proporcionalitātes faktoram dabūt no sekantes elementiem, u,v,w ($uw + v = 0$) un viņu parciāliem atvasinājumiem</u>.

Šis iznākums ierosina pretēju uzdevumu : <u>pieņemot divi zināmas funkcijas $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ par nezināmu skālu sekantes elementiem (u - virziena koeficients, v - nogrieznis ordinātu asij), atrast skālu nolīdzinājumus</u>.

Uzdevumu var atrisināt, ja uzdotās funkcijas u, v ir tādas, ka attiecības

$$\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}\right) : \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}\right) : \frac{\partial u}{\partial x}$$

atkarājas tikai no viena mainīgā (pirmās - no x, beidzamās - no y). Tā tad, jābūt

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

vai arī :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Viegli konstatēt, ja (8) izpildīts, ka tad <u>visas</u> attiecības, kas ir formulās (7') kreisā pusē, atkarājas tikai no viena mainīgā.

<u>Kāds veids ir funkcijām u, v, kas izpilda noteikumus (8) ?</u>

Viņus var pārrakstīt šādā veidā :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad (8')$$

un determinantus uztvert kā Vronska determinantus attiecībā uz divām divu mainīgu lielumu funkcijām. (8') izteic, ka attiecīgie parciālie atvasinājumi ir lineāri atkarīgi :

$$F_1 \frac{\partial u}{\partial y} + H_1 \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$F_2 \frac{\partial u}{\partial x} + H_2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Integrējot :

$$F_1 u + H_1 v = G_1,$$

$$F_2 u + H_2 v - G_2,$$

kur F_i, G_i, H_i ir patvaļīgas no x (indeks 1) vai y (indeks 2) atkarīgas funkcijas.

Atrisinot sistēmu dabū :

$$u = \frac{G_1 H_2 - H_1 G_2}{F_1 H_2 - H_1 F_2}, \qquad v = \frac{F_1 G_2 - G_1 F_2}{F_1 H_2 - H_1 F_2},$$

kas būtībā netšķiŗas no pirmām (3) izteiksmēm.

<u>Piemērs.</u>

<u>Divi skālu sekantei virziena koeficients $u = f_1 + f_2$, nogrieznis ordinātu asij $v = -f_1 f_2$. Atrast skālas.</u> $(f_1 = f_1(x),\ f_2 = f_2(y).)$

Papriekšu jāpārliecinās, ka uzdotās funkcijas atbilst noteikumiem (8) :

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1'(-f_1'' f_2) - (-f_1' f_2) f_1'' = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f_2'(-f_1 f_2'') - (-f_1 f_2') f_2'' = 0.$$

Aprēķinām :

$$u^2 \frac{\partial w}{\partial x} = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} = f_1' f_2^2,$$

$$u^2 \frac{\partial w}{\partial y} = v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = f_1^2 f_2'.$$

Tā tad :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} : u^2 \frac{\partial w}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' f_2 : f_1' f_2 : f_1' = f_2 : f_2^2 : 1$$

$$-\frac{\partial v}{\partial y} : u^2 \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial y} = f_1 f_2' : f_1^2 f_2' : f_2' = f_2' : f_1^2 : 1$$

Skālu nolīdzinājumi : $\xi_i = f_i$, $\eta_i = f_i^2$ $(i = 1,2)$. Abām skālām atbalsts kopīgs (parabola $\eta = \xi^2$).

2. Homografiskās transformacijas diferencialinvarianti.-

No uzdotām funkcijām f, g, h, kas atkarīgas no kopīga mainīgā, ar veselas lineāras transformacijas palīdzību veidosim jaunas funkcijas :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= a_1 f + b_1 g + c_1 h, \\ \bar{g} &= a_2 f + b_2 g + c_2 h, \\ \bar{h} &= a_3 f + b_3 g + c_3 h. \end{aligned} \tag{9}$$

Ja atbilstība starp funkcijām f, g, h un $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ ir apgriežami viennozīmīga, koeficientu determinantam jāatšķiras no nulles:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9'}$$

Tad sistemu (9) var atrisināt attiecībā uz f, g, h. Jāpiezīmē, ka šinī atrisināšanā svarīga loma ir apakšdeterminantiem, kas piekārtoti augšējā determinanta elementiem. Transformacijas determinanta apakšdeterminantus (minorus) apzīmēsim attiecīgiem lieliem burtiem :

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

$(A_1 = b_2c_3 - c_2b_3\,,\ A_2 = -b_1c_3 + c_1b_3\,,\ \ldots)$

Funkcijas f, g, h un $\bar{f}$, $\bar{g}$, $\bar{h}$ lietāsin skālu punktu noteikšanai Dekarta koordinātu asīs. Šo funkciju vērtību trijotnes, kas atbilst kādai noteiktai kopīgā parametra vērtībai, var uztvert, kā koordinātu plāknes punktu homogēnās koordinātas pirms transformacijas un pēc tās. No viņām seko nehomogēnās Dekartā koordinātas :

$$\mathrm{I})\ \xi = \frac{f}{h},\ \eta = \frac{g}{h};\quad \mathrm{II})\ \bar{\xi} = \frac{\bar{f}}{\bar{h}},\ \bar{\eta} = \frac{\bar{g}}{\bar{h}}.$$

Transformacija (9) punktam (ξ, η) piekārto punktu $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$. Abu punktu nehomogēnās koordinātas saistītas ar sakarībām :

$$\left.\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\bar{f}}{\bar{h}} = \frac{a_1 f + b_1 g + c_1 h}{a_3 f + b_3 g + c_3 h} = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a_3\xi + b_3\eta + c_3}, \\ \bar{\eta} &= \frac{\bar{g}}{\bar{h}} = \frac{a_2 f + b_2 g + c_2 h}{a_3 f + b_3 g + c_3 h} = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a_3\xi + b_3\eta + c_3}, \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

t.i pāreju no punkta (ξ,η) punktā $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ noteic vispārīgā homografiskā transformacija.

Iedomāsimies figuru, kas sastāv no koordinātu asīm, attiecībā pret kuŗām uzdotas divi skālas (1). Caur viņu punktiem (ξ_1, η_1) un (ξ_2, η_2) vilkta taisne, kuŗas virziena koeficients ir u, nogrieznis ordinātu asij v, abscisu asij -w. Transformacija (9) jeb (1o) skālas un taisni pārvieto citā stāvoklī, kur taisnes dati ir $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$. Kā saistās $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ar u, v, w ?

Pamatojoties uz (3) un (9) pierāda

$$\bar{u} = \frac{\bar{g}_1\bar{h}_2 - \bar{h}_1\bar{g}_2}{\bar{f}_1\bar{h}_2 - \bar{h}_1\bar{f}_2} = -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad (11)$$

kur A_i, B_i, C_i ir transformacijas determinanta minori, kas atbilst attiecīgi a_i, b_i, c_i. Tādas pat formulas, kas noteic asu nogriežņus $\bar{v}$ un $\bar{w}$, atšķiŗas tikai ar konstantu indekiem, tā kā iznākumus pietiks atzīmēt saīsinātā veidā, izrakstot tikai pirmās determinantu rindas :

$$\left.\begin{aligned}\bar{v} &= -\,|A_3\ B_3\ C_3| \ :\ |A_2\ B_2\ C_2|\,,\\ \bar{w} &= -\,|A_3\ B_3\ C_3| \ :\ |A_1\ B_1\ C_1|\,.\end{aligned}\right\} \qquad (11')$$

Izvirzot determinantus pēc pirmās rindas un ievērojot (3) dabū :

$$\left.\begin{aligned}\bar{u} &= -\,\frac{A_1u + C_1v - B_1}{A_2u + C_2v - B_2},\\ \bar{v} &= -\,\frac{A_3u + C_3v - B_3}{A_2u + C_2v - B_2}.\end{aligned}\right. \qquad (12)$$

<u>Jaunie sekanti noteicēji elementi izceļas no vecajiem ar vispārīgas homografiskās transformacijas palīdzību.</u>

Tāpēc izdarot vienas tās pašas darbības ar lielumiem

$$\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y)\end{aligned} \quad \text{un} \quad \begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}(x,y)\\ \bar{v} &= \bar{v}(x,y)\end{aligned}$$

dabū, vispārīgi, <u>dažādu</u> iznākumu. Ja tomēr gadas, ka kādai funkcijai F ir tāda īpašība, ka identiski

$$F\,(u,v) = F\,(\bar{u},\bar{v}),$$

tad tādu funkciju sauc par <u>invariantu</u>, un īpaši - ja darbību simbolā F ietverta arī atvasināšana - par <u>diferencialinvariantu.</u>

Gronwall'a metode mainīgo šķiršanai galvenām kārtām pamatojas uz divi izteiksmēm, kuŗu strukturu vislabāk pārredz, uzrakstot viņas determinantos :

$$C = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}, \tag{13}$$

$$D = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}}. \tag{13'}$$

Izteiksmju saucējā ir lielumu u, v funkcionāldeterminants, kas nav vienlīdzīgs nullei, jo sekantei, ar kuŗas palīdzību nomogrammā izdara nolasījumus, virziena koeficients u ir neatkarīgs no v.

Gronwall's *) pieņem

$$\frac{\partial\,(u\;v)}{\partial\,(x\;y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\theta} \tag{14}$$

un raksta

$$C = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) e^{-\theta} \tag{15}$$

---

*) Journal de Math. pures et appliquées, t. VIII, 1912, 64. lpp.

$$D = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) e^{-\theta} \tag{15}$$

Ka izteiksmes C un D invariantas attiecībā uz ikvienu homografisku transformaciju, kas skar lielumus u un v, pierādījuši E. Goursat un P. Painlevé (C.R., t. CIV, 1887.)

Diferencējot (14) parciāli pēc x un y un izmantojot iznākumu kopā ar (15), kā arī ievērojot (8), dabū diferenciālvienādojumu sistēmu :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial x} + C\right)\frac{\partial u}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} - D\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - C\right)\frac{\partial u}{\partial y}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial y} + D\right)\frac{\partial u}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

un taisni tādu pat sistemu v noteikšanai.

Tālāk veido sistēmas integrabilitātes noteikumus, dabūtās izteiksmēs aizvieto otrās atvasinātās ar viņu vērtībām (16), un secina, ievērojot u un v neatkarību, ka

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2C\right) + \frac{\partial C}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} - C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} - D\right) - \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} - D\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y} + 2D\right) + \frac{\partial D}{\partial y}.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

No (16), pieņemot tur

$$u = \omega e^{\frac{1}{3}\theta} \tag{18}$$

seko vēl:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}C^2 - \frac{\partial C}{\partial x}\right)\omega,\\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}CD + \frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,\\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= \frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}D^2 - \frac{\partial D}{\partial y}\right)\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Abām sistēmām (17) un (19) izrādās kopīgi integrabilitātes noteikumi, kuŗus izteic divi diferencialvienādojumi :

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - C\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial y} - D\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

<u>3. Mainīgo šķiramības nepieciešamie un pietiekošie noteikumi.</u>- Pieņemsim, ka uzdotu nolīdzinājumu

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (21)$$

var pārveidot viņam līdzvērtīgā citā, kur kreisā pusē determinants, turklāt mainīgie determinantā atšķirti katrs savā rindā :

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0.$$

Vienmēr var iekārtot tā, ka beidzamā stabiņā neviens elements nav nulle. To stabiņu, kuŗā nav nevienas nulles, raksta kā beidzamo. Ja katrā stabiņā ir nulle, pietiek beidzamam stabiņam pieskaitīt vienu no paraleliem stabiņiem. Tā tad, pieņemsim, ka visi $h_i \neq 0$, un izdalīsim katras rindas elementus ar attiecīgo h_i. Tad beidzamā stabiņā visur būs 1.

Tāpēc nolīdzinājumam (21) mainīgo šķiršanas iznākumu, ja šķiršana iespējama, vienmēr var rakstīt šādā veidā, kas seko, ja iepriekšējā determinantā pieņem $h_1 = h_2 = h_3 = 1$:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (21')$$

Līdzvērtīgus, tādā pat veidā uzrakstītus nolīdzinājumus :

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_1(x) & \bar{g}_1(x) & 1 \\ \bar{f}_2(y) & \bar{g}_2(y) & 1 \\ \bar{f}_3(z) & \bar{g}_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (21'')$$

dabū pielietājot funkcijām f_i, g_i, vispārīgo homografisko transformaciju, tā kā

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}_i &= \frac{a_1 f_i + b_1 g_i + c_1}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \\ \bar{g}_i &= \frac{a_2 f_i + b_2 g_i + c_2}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \end{aligned}\right\} \quad (i = 1,2,3) \qquad (22)$$

kur transformacijas konstantas a_i, b_i, c_i atbilst noteikumam (9').

Agrāk dabūtās formulas, ja tur pieņem $h_1 = h_2 = 1$, paliek spēkā arī tagad. Piem., no (3) seko, ka apskatāmā gadījumā

$$u = \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}, \quad v = \frac{f_1 g_2 - g_1 f_2}{f_1 - f_2}. \qquad (23)$$

Ja nolīdzinājumā (21') determinantu izvirza vadoties no trešās rindas, dabū :

$$g_3(z) = u\, f_3(z) + v. \qquad (24)$$

To atvasinām parciāli pēc x un y :

$$\frac{dg_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = u\,\frac{df_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} + f_3\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{dg_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = u\,\frac{df_3}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} + f_3\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ja beidzamo nolīdzinājumu pareizina ar $\partial z / \partial x$, bet iepriekšējo - ar $\partial z / \partial y$, un vienu reizinājumu atskaita otram, seko :

$$f_3\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

vai arī

$$f_3\,\frac{\partial(u,z)}{\partial(x,y)} + \frac{\partial(v,z)}{\partial(x,y)} = 0. \qquad (25)$$

Abi funkcionāldeterminanti beidzamā formulā atšķiŗas no nulles. Ja pieņem, ka viens ir nulle, tad arī otrs ir nulle. Ja abi ir nulles, seko, ka $u = u(z)$ un $v = v(z)$, tā tad, nolīdzinājumā (24) ir tikai z. Bet tas tā nevar būt, jo (24) ir līdzvērtīgs (21), kas izteic sakaru starp 3 mainīgiem. Tā tad atliek tikai pieņemt, ka neviens no abiem funkcionāldeterminantiem nav nulle.

Tāpēc (25) var atrisināt attiecībā uz f_3; iznākumā dabū:

$$f_3(z) = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}} = -\frac{M\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}}{M\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}, \qquad (26)$$

pieņemot apzīmējumu

$$M = -\frac{\partial z}{\partial y} : \frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (27)$$

Vēl viens apzīmējums :

$$N = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y} = \qquad (27')$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}.$$

Starp izteiksmēm M, N un diferenciālinvariantiem C, D Gronwall's konstatē sakarību :

$$\underline{D = M\,C + N.} \qquad (28)$$

Sekas ir tās, ka diferenciālvienādojumos (20), kuŗiem C un D atbilst, vienu no šīm funkcijām var eliminēt, piemēram, D. Tad otra (C) apmierina reizē divi nolīdzinājumus. Un ja tas tā ir, top pierādīts tālāk, var atrast u, v, θ un funkcijas f_i, g_i.

Gronwall'a teorema:

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka uzdoto nolīdzinājumu (21) var pārveidot nolīdzinājumā (21'), ir tas, ka divi parciāliem diferenciālvienādojumiem ir kopīgs integrālis C.

Visus nolīdzinājumus, kas atbilst vienai tai pašai C vērtībai, var dabūt no kāda viena ar homografijas (22) palīdzību, un otrādi, divi homografiski saistītiem nolīdzinājumiem ir kopīga C vērtība.

4. Dažas Gronwall'a teoremas, kas attiecas uz skālu atbalsta veidu.-

Teorema I.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla argumentam x ir taisna, ir tas, ka

$$\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} = 0,$$

kopā ar (20) un (28).

Teorema II.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla argumentam y ir taisna, ir tas, ka

$$2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0,$$

kopā ar (20) un (28).

Teorema III.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skāla mainīgam z ir taisną, ir tas, ka

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} = 0,$$

kopā ar (20) un (28).

Teorema IV.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka nomogrammai visas 3 skālas taisnas, ir tas, ka

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} = 0.$$

(De Saint-Robert, 1871).

Teorema V.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka skālas x un y ir taisnas, bet skāla z - līka, ir tas, ka izteiksme

$$C = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right) : \frac{\partial^2 \log M}{\partial x \partial y} \tag{29}$$

apmierina vienādojumus

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = 0.$$

Šinī teoremā ietilpstošo uzdevumu pirmo reizi atrisina Massau (1884) un Lecornu (1885).

Teorema VI.

Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka uzdotu nolīdzinājumu (21) var pārveidot šādā:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1^2(x) & 1 \\ f_2(y) & f_2^2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ir tas, ka izteiksme (29) atbilst vienādojumiem :

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = \frac{\partial D}{\partial x} \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = C\frac{\partial C}{\partial y}.$$

V.

Funkciju lineārās atkarības princips mainīgo šķiršanā.

(Kellogg'a metode).

1. Vronska determinanti.- Pieņemsim, ka uzdotas n funkcijas $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$, kurām apskatāmā argumenta maiņas intervallā ir 1-ās, 2-ās, .. (n-1)-ās kārtas atvasinātās. Vronska (Hoëné Wronski, Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, 1812) vārdā sauc determinanantus, kas veidoti rakstot pirmā rindā pašas funkcijas, otrā rindā - to pirmās atvasinātās, nākošās rindās - otrās, trešās, ... (n-1)-ās atvasinātās.

Tā tad :

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & \dots & f_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (1)$$

ir Vronska determinants.

2. Funkciju lineārā atkarība viena mainīgā gadījumā.-

Funkcijas $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_n(x)$ sauc par lineāri atkarīgām, ja tās identiski izpilda noteikumu

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0, \qquad (2)$$

kur konstantas c_1, c_2, ... c_n visas nav nulles. Ja, turpretim, noteikumu (2) nevar identiski izpildīt citādi, kā pieņemot, ka $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, tad funkcijas sauc par <u>lineāri neatkarīgām</u>.

Ja funkcijām f_i $(i = 1,2, \dots n)$ ir 1-ās, 2-ās, (n-1)-ās kārtas atvasinātās, no (2) seko :

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0,$$
$$c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + \dots + c_n f_n''(x) = 0,$$
$$\text{-----------------------------------}$$
$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Šie nolīdzinājumi, kopā ar (2) veido sistēmu, kas attiecībā uz konstantām c_i ir lineāra un homogēna. Ja pieņem, ka visi c_i nav nulles, seko:

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & \dots & f_n''(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Tā tad, <u>ja funkcijas $f_1, f_2, \dots f_n$ ir lineāri atkarīgas, no viņām veidotais Vronska determinants identiski izzūd</u>.

Apgriestā teorēma attiecībā uz analitiskām funkcijām arī ir spēkā : <u>ja Vronska determinants izzūd, funkcijas, no kurām tas veidots, ir lineāri atkarīgas</u>. To viegli parādīt, ja funkcijas ir divas, Pieņemsim :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1' = 0, \qquad (4)$$

tad, saskaņā ar determinantu atvasināšanas kārtulu, būs

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1'' & f_2'' \end{vmatrix} = f_1 f_2'' - f_2 f_1'' = 0. \qquad (5)$$

Ja viena funkcija ir konstanta, tad no (4) seko, ka arī otra ir konstanta. Šo gadījumu nepieņemot $f_1' \neq 0$. $f_2' \neq 0$. No (4) seko :

$$f_2 = \frac{f_2'}{f_1'} f_1 = c_1 f_1$$

($c_1 \neq 0$), ~~tāpēc~~ka, saskaņā ar (5) :

$$\frac{d}{dx}\frac{f_2'}{f_1'} = \frac{f_1' f_2'' - f_2' f_1''}{f_1'^2} = 0$$

Apzīmēsim apakšdeterminantus, kas kreisā pusē (3) atbilst beidzamās rindas elementiem ar $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots \omega_n(x)$. Tālāk, ievērosim, ka identitātē (3) beidzamo rindu determinantā var aizvietot ar kādu no pārējām rindām. Izvirzīsim attiecībā uz beidzamās rindas elementiem determinantu vienādībā (3), kā arī pārējās vienādībās, kas dabūtas no tās aizvietojot beidzamo rindu ar paralelām rindām::

$$\begin{aligned}
&\omega_1 f_1 + \omega_2 f_2 + \ldots + \omega_n f_n = 0, \\
&\omega_1 f_1' + \omega_2 f_2' + \ldots + \omega_n f_n' = 0, \\
&\omega_1 f_1'' + \omega_2 f_2'' + \ldots + \omega_n f_n'' = 0, \\
&- - - - - - - - - - - - - - \\
&\omega_1 f_1^{(n-1)} + \omega_2 f_2^{(n-1)} + \ldots + \omega_n f_n^{(n-1)} = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

no kurienes seko, ka $\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \ldots : \omega_n =$ kā determinanti, ko dabū matricē dzēšot

$$\begin{Vmatrix} f_1 & f_2 & - & - & f_n \\ f_1' & f_2' & - & - & f_n' \\ f_1'' & f_2'' & - & - & f_n'' \\ - & - & - & - & - \\ f_1^{(n-2)} & f_2^{(n-2)} & - & - & f_n^{(n-2)} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

pirmo, otro, trešo .... stabiņus un dzēšanas iznākumam pievienojot pārmaiņām pozitīvu un negatīvu zīmi.

Ja vienādības (6) atvasina pēc kārtas ~~un~~ ievēro nākošo, dabū
(ikrūt

sistēmu :

$$\omega_1' f_1 + \omega_2' f_2 + \dots + \omega_n' f_n = 0,$$
$$\omega_1' f_1' + \omega_2' f_2' + \dots + \omega_n' f_n' = 0,$$
$$\omega_1' f_1'' + \omega_2' f_2'' + \dots + \omega_n' f_n'' = 0,$$
$$- - - - - - - - - - - - -$$
$$\omega_1' f_1^{(n-2)} + \omega_2' f_2^{(n-2)} + \dots + \omega_n' f_n^{(n-2)} = 0,$$

no kurienes seko, ka $\omega_1' : \omega_2' : \omega_3' : \dots : \omega_n' =$ kā determinanti, kas veidoti augšā aprakstītā kārtā no matrices (7).

No tā redzams, ka

$$\omega_1 : \omega_2 : \dots \omega_n = \omega_1' : \omega_2' : \dots : \omega_n';$$
$$\frac{\omega_1'}{\omega_1} = \frac{\omega_2'}{\omega_2} = \dots = \frac{\omega_n'}{\omega_n}.$$

Tā tad :

$$\frac{d}{dx} \ln\omega_1 = \frac{d}{dx} \ln\omega_2 = \dots = \frac{d}{dx} \ln\omega_n = \rho(x),$$
$$\omega_1 = c_1 e^{\int\rho dx}, \quad \omega_2 = c_2 e^{\int\rho dx}, \quad \dots \omega_n = c_n e^{\int\rho dx}.$$

Ievietojot šīs izteiksmes pirmā vienādībā (6) un ievērojot to, ka ekponencialā funkcija nav nulle, dabū pēc izdalīšanas ar to :

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0,$$

t.i., ka <u>funkcijas $f_1, f_2, \dots f_n$ ir lineāri atkarīgas</u>.

<u>3. Funkciju lineārā atkarība vairāk mainīgu gadījumā.</u>- <u>Kellogg'a teorema</u>:

<u>Nepieciešamais un pietiekošais noteikums tam, ka starp četrām analitiskām funkcijām $f_1(y,z)$, $f_2(y,z)$, $f_3(y,z)$ un $f_4(y,z)$ ir lineārs homogēns nolīdzinājums</u>:

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 = 0, \tag{8}$$

<u>kur koeficienti c_1, c_2, c_3, c_4 neatkarīgi no y un z un nav visi nulles, ir tas, ka matricei</u>

$$M = \left\| \begin{matrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} & f_{1yy} & f_{1yz} & f_{1zz} & f_{1yyy} & f_{1yyz} & f_{1yzz} & f_{1zzz} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_3 & f_{3y} & f_{3z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_4 & f_{4y} & f_{4z} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

<u>rangs ir mazāks par 4. Matrices rangs ir vienlīdzīgs lineāri neatkarīgo funkciju skaitam</u>.

Burti x, y, z funkciju indekos apzīmē parciālo atvasināšanu.

Teorema vienkāršības labā formulēta attiecībā uz 4 funkcijām, bet tā paliek līdzīgā veidā derīga arī vispārīgā gadījumā, kad funkciju skaits ir n. Matricei tad ir n rindu un stabiņi nobeidzas ar (n-1)-ās kārtas parciālām atvasinātām.

Notiekums ir <u>nepieciešams</u>, kā pārliecinās parciāli diferencējot (8) un eliminējot c_1, c_2, c_3, c_4. Ka tas arī pietiekošs, viegli pārliecināties, kad funkcijas ir divas. Pieņemsim, ka matricei

$$M' = \begin{Vmatrix} f_1 & f_{1y} & f_{1z} \\ f_2 & f_{2y} & f_{2z} \end{Vmatrix}$$

rangs ir mazāks par 2. Pierādīsim, ka tādā gadījumā funkcijas ir lineāri atkarīgas.

Tā kā matrices rangs ir mazāks par 2, tad visi determinanti, ko no matrices var veidot svītrojot stabiņus, ir nulles :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_{1y} \\ f_2 & f_{2y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_{1z} \\ f_2 & f_{2z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{1y} & f_{1z} \\ f_{2y} & f_{2z} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

No tā seko, pieņemot, ka neviena no funkcijām nav konstanta nulle:

$$\frac{f_{1y}}{f_1} = \frac{f_{2y}}{f_2}, \quad \frac{f_{1z}}{f_1} = \frac{f_{2z}}{f_2}. \tag{11}$$

No pirmā nolīdzinājuma (11), ko var rakstīt šādi :

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln f_1) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln f_2)$$

integrējot seko, ka $f_2 = C_1 f_1$, kur $C_1 = C_1(z)$. Iznākumu pārbaudot, otrā nolīdzinājumā (11) dabū, ka $C_1 =$ const. $= c_1$. Tā tad, $f_2 = c_1 f_1$, kur c_1 neatkarājas ne no y ne no z, t.i. funkcijas f_1 un f_2 ir lineāri atkarīgas.

Pieņemsim, ka teorema pareiza attiecībā uz $n=3$ funkcijām; pierādīsim, ka tad viņa pareiza arī attiecībā uz $n+1 = 4$ funkcijām.

Dota ir matrice M, kuras rangs ir 3, t.i. vismaz viens trīsrindu determinants, ko var veidot, izdzēšot tai rindas un stabiņus, nav nulle. Ar rindu pārmaiņu vienmēr var sasniegt to, ka neizzūdošo determinantu veido elementi, kas ir matrices pirmajās 3 rindās. Sameklēsim stabiņus matricei M, no kuru rindām veidojas neizzūdošais determinants. Teiksim, tie veido matrici M''. Apskatīsim 4 rindu determinantu, ko dabū pievienojot matricei M'' vienu stabiņu no M. piem.,

$$\begin{vmatrix} f_1 & \\ f_2 & \\ f_3 & M'' \\ f_4 & \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Divi gadījumi iespējami : 1) matricē M'' nav pievienotā stabiņa, un 2) pievienotais stabiņš tur ir. Abos gadījumos determinants ir nulle : pirmajā gadījumā tāpēc, ka matricei M rangs ir 3, otrā gadījumā tāpēc, ka determinantā divi stabiņiem attiecīgie elementi ir vienādi. Determinantā (12) pirmā stabiņa vietā tikpat labi var ņemt citu matrices M stabiņu ; visi determinanti, ko tā dabū, ir nulles.

Apzīmēsim apakšdeterminantus, kas atbilst pirmā stabiņa elementiem determinantā (12) attiecīgi ar A, B, C, D. Lai dabūtu A matricē M'' jāizdzēš pirmā rinda. Lai dabūtu B, jāizdzēš otrā rinda, un dabūtais determinants jāņem ar negātīvu zīmi. Līdzīgā kārtā tālāk. Vismaz $D \neq 0$.

Izvirzīsim determinantu (12) pēc pirmā stabiņa elementiem, tāpat izvirzīsim determinantus, ko dabū apmainot pirmo stabiņu. Seko 10 vienādības :

$$\left.\begin{aligned} &Af_1 + B f_2 + C f_3 + D f_4 = 0,\\ &A f_{1y} + B f_{2y} + C f_{3y} + D f_{4y} = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &A f_{1yz} + B f_{2yz} + C f_{3yz} + D f_{4yz} = 0,\\ &A f_{1zz} + B f_{2zz} + C f_{3zz} + D f_{4zz} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &Af_{1yyy} + Bf_{2yyy} + Cf_{3yyy} + Df_{4yyy} = 0,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &Af_{1zzz} + Bf_{2zzz} + Cf_{3zzz} + Df_{4zzz} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13'}$$

Koeficienti A, B, C, D, vispārīgi atkarājas no y, z, bet viņu attiecības no šiem mainīgiem neatkarājas. Lai to parādītu, atvasināsim vienādības (13) parciāli pēc y, un iznākumu vienkāršošanai izlietāsim sakarības (13) un (13').

Seko, ka vienādības (13) paliek spēkā, ja A, B, C, D vietā liek šo funkciju parciālās atvasinātās A_y, B_y, C_y, D_y. Tā tad

$$A : B : C : D = A_y : B_y : C_y : D_y,$$

vai arī

$$\frac{A_y}{A} = \frac{B_y}{B} = \frac{C_y}{C} = \frac{D_y}{D},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\ln A) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln B) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln C) = \frac{\partial}{\partial y}(\ln D).$$

Integrējot, seko, ka

$$\ln A - \ln a = \ln B - \ln b = \ln C - \ln c = \ln D - \ln d,$$

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = \frac{D}{d},$$

kur integrācijas konstantas a, b, c, d no y neatkarājas. Tā tad attiecības

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \frac{C}{D}$$

neatkarājas no y.

Līdzīgā kārtā pierādām, ka tās neatkarājas arī no z. Tā tad tās ir konstantas, un sakarību

$$Af_1 + Bf_2 + Cf_3 + Df_4 = 0,$$

izdalot to ar D var pārrakstīt šādi :

$$f_4 = c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3,$$

kur c_i - konstantas.

<u>4. Lietājumi mainīgo šķiršanas problēmā.</u>- Kellogg's sava darba ievadā (Zeitschr. f. Math. u.- Phys., 63. Bd., 1914, 159. lpp.) atzīmējis Gronwall'a u.c. nopelnus mainīgo šķiršanas problēmas atrisināšanā, saka : "Es iedrošinos dot rakstu par šo tematu vienīgi tāpēc, ka kritēriji, kurus es esmu atradis, kā šķiet, maz atstāj ko vēlēties lietāšanas vienkāršības ziņā, jo viņi ietver sevī tikai diferencēšanas un matricu rangu noteikšanu".

Ja funkciju $g(x,y,z)$ var pārveidot determinantā, kam mainīgie atšķirti katrs savā rindā, tad jāsecina, ka

$$g(x,y,z) = F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3, \tag{14}$$

kur F_i atkarājas no y, z, bet X_i- tikai no x. Pieņemsim, ka funkcijas F_i ir savā starpā lineāri neatkarīgas ; tāpat x_i. <u>Kā pazīt ka uzdotai funkcijai $g(x,y,z)$ ir tāds veids (14)?</u>

Atvasinot vienādību (14) parciāli, kad mainās x ; dabū :

$$\begin{aligned} g_x &= F_1 X_1' + F_2 X_2' + F_3 X_3' \\ g_{xx} &= F_1 X_1'' + F_2 X_2'' + F_3 X_3'' \\ g_{xxx} &= F_1 X_1''' + F_2 X_2''' + F_3 X_3'''. \end{aligned}$$

No šīm vienādībām kopā ar (14) var eliminēt F_i; tad redz, ka $g(x,y,z)$ atbilst diferenciālvienādojumam

$$\begin{vmatrix} g & X_1 & X_2 & X_3 \\ g_x & X_1' & X_2' & X_3' \\ g_{xx} & X_1'' & X_2'' & X_3'' \\ g_{xxx} & X_1''' & X_2''' & X_3''' \end{vmatrix} = 0, \tag{15}$$

tā tad, funkcijas g, g_x, g_{xx}, g_{xxx} attiecībā uz y un z ir lineāri neatkarīgas, jo koeficienti pie viņām atkarājas tikai no x. Saskaņā ar Kellogg'a teorēmu par lineāri atkarīgām funkcijām, nepieciešamais un pietiekošais noteikums diferenciālvienādojuma (15) eksistēšanai ir tas, ka matricei

$$N = \begin{Vmatrix} g & g_y & g_z & g_{yy} & \dots & g_{zzz} \\ g_x & g_{xy} & g_{xz} & g_{xyy} & \dots & g_{xzzz} \\ g_{xx} & g_{xxy} & g_{xxz} & g_{xxyy} & \dots & g_{xxzzz} \\ g_{xxx} & g_{xxxy} & g_{xxxz} & g_{xxxyy} & \dots & g_{xxxzzz} \end{Vmatrix} \tag{16}$$

rangs ir mazāks par 4. Tās ir nepieciešamais noteikums tam, ka funkciju $g(x,y,z)$ var pārveidot determinantā

$$g(x,y,z) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix} \tag{17}$$

kur mainīgie atšķirti katrs savā rindā.

$$X_i = X_i(x), \quad Y_i = Y_i(y), \quad Z_i = Z_i(z);$$
$$(i = 1,2,3)$$

Tālakais uzdevums ir atrast funkcijas, kas ir labajā pusē formulās (14) un (17).

~~a) Atrast X_1, X_2, X_3.~~

Pieņemot, ka nepieciešamais noteikums (16) izpildīts, visi matricē N ietelpstošie 4-rindu determinanti ir nulles. Sameklējam matricē N trīs stabiņus, no kuru rindām var veidot vienu neizzūdošu trīsrindīgu determinantu. Šos trīs stabiņus apzīmēsim ar N'.

$$\begin{vmatrix} g & \\ g_x & \\ g_{xx} & N' \\ g_{xxx} & \end{vmatrix} = 0.$$

Attīstot to pēc pirmā stabiņa elementiem dabū

$$Ag + Bg_x + Cg_{xx} + Dg_{xxx} = 0.$$

Viens no koeficientiem nav nulle, teiksim $D \neq 0$. Ja ar to izdala, koeficientos

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \frac{C}{D}$$

izzūd y un z. Paliek

$$\bar{A}g + \bar{B}g_x + \bar{C}g_{xx} + g_{xxx} = 0, \tag{18}$$

kur A, B, C - atkarājas no x.

~~Vienādojumam (18) jāatrod trīs neatkarīgi atrisinājumi~~ ; ~~tie ir X_1, X_2, X_3.~~

b) Atrast F_1, F_2, F_3.

Uzskatot $X_i (i = 1,2,3)$ par zināmām funkcijām, atvasinām (14) divreiz parciāli pēc x :

$$g_x = F_1 X_1' + F_2 X_2' + F_3 X_3'$$
$$g_{xx} = F_1 X_1'' + F_2 X_2'' + F_3 X_3''.$$

Attiecībā uz F_i tā ir nehomogenu lineāru nolīdzinājumu sistēma, no kuras kopā ar (14) seko :

$$F_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} g & X_2 & X_3 \\ g_x & X_2' & X_3' \\ g_{xx} & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} = F_i(y,z),$$

$$F_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X_1 & g & X_3 \\ X_1' & g_x & X_3' \\ X_1'' & g_{xx} & X_3'' \end{vmatrix} = F_2(y,z),$$

$$F_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & g \\ X_1' & X_2' & g_x \\ X_1'' & X_2'' & g_{xx} \end{vmatrix} = F_3(y,z),$$

kur determinants

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ X_1' & X_2' & X_3' \\ X_1'' & X_2'' & X_3'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

jo funkcijas X_1, X_2, X_3 saskaņā ar iesākumā pieņemto, ir lineāri neatkarīgas.

c) Atrast Y_i un Z_i $(i = 1,2,3)$.

Salīdzinot (14) ar (17) redz, ka

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix},$$

tā tad, ievietojot abās pusēs X_i vietā Y_i un Z_i $(i = 1,2,3)$:

$$F_1 Y_1 + F_2 Y_2 + F_3 Y_3 = 0,$$
$$F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + F_3 Z_3 = 0.$$

Funkcijas F_i saista lineāras sakarības, kuŗu koeficienti atkarājas vienā gadījumā tikai no y, otrā - tikai no z.

Nepieciešamie un pietiekošie noteikumi tam , ka tādas sakarības ir spēkā, ir divu Vronska determinantu izzušana :

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1z} & F_{2z} & F_{3z} \\ F_{1zz} & F_{2zz} & F_{3zz} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ F_{1y} & F_{2y} & F_{3y} \\ F_{1yy} & F_{2yy} & F_{3yy} \end{vmatrix} = 0. \qquad (19)$$

<u>Y_1, Y_2, Y_3 ir proporcionāli vienas rindas minoriem pirmā determinantā (19)</u>; <u>Z_1, Z_2, Z_3 ir proporcionāli vienas rindas minoriem otrā determinantā (19)</u>.

VI.

Mainīgo šķiršana funkcijai

$F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23}$.

Pieņemsim ka uzdotu funkciju, kas atkarājas no 3 mainīgiem z_1, z_2, z_3, var uzrakstīt divējādi :

$$F(z_1, z_2, z_3) = F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} = \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix}$$

Uzdevums ir atrast F_i, G_i, H_i $(i = 2,3)$.*)

No abu veidu vienādības seko, ka K, L, M ir minori, kas atbilst determinanta pirmai rindai :

$$K_{23} = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix} = G_2 H_3 - H_2 G_3,$$

$$L_{23} = -\begin{vmatrix} F_2 & H_2 \\ F_3 & H_3 \end{vmatrix} = H_2 F_3 - F_2 H_3, \qquad (1)$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} F_2 & G_2 \\ F_3 & G_3 \end{vmatrix} = F_2 G_3 - G_2 F_3 .$$

No šīm vienādībām , kur K, L, M ir zināmas, no z_2 un z_3 atkarīgas funkcijas, jāatrod 6 nezināmas funkcijas. Ja vienādības (1) pareizina pēc kārtas ar F_i, G_i, H_i $(i = 2,3)$ un reizinājumus saskaita, dabū vienādības

$$F_2 K_{23} + G_2 L_{23} + H_2 M_{23} = 0,$$
$$F_3 K_{23} + G_3 L_{23} + H_3 M_{23} = 0 \qquad (2)$$

kuŗas var likt divu vienādību vietā sistēmā (1).

---

*) Noteikumi: funkcijas F_1, G_1, H_1 – lineāri neatkarīgas, tāpat K_{23}, L_{23}, M_{23}, un viņām ir pirmās un otrās kārtas atvasinātās.

Lai atrastu F_2, G_2, H_2 ņemsim pirmo vienādību (2) un atvasināsim viņu parciāli pēc z_3. Tā dabūsim nolīdzinājumus ar nezināmiem F_2, G_2, H_2 :

$$
\begin{aligned}
F_2 K_{23} + G_2 L_{23} + H_2 M_{23} &= 0 \\
F_2 K'_3 + G_2 L'_3 + H_2 M'_3 &= 0 \qquad (3) \\
F_2 K''_3 + G_2 L''_3 + H_2 M''_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Simboli $K_3^{(i)}, L_3^{(i)}, M_3^{(i)}$ apzīmē i-tos parciālos atvasinājumus pēc z_3 funkcijām K_{23}, L_{23}, M_{23}.

Trīs homogēniem nolīdzinājumiem ar 3 nezināmiem, kā zināms, ir netriviāls atrisinājums tikai tai gadījumā, ja koeficientu determinants identiski ir nulle. Tā tad, lai nolīdzinājumiem (3) būtu atrisinājums, kas atšķiras no $F_2 = G_2 = H_2 = 0$, funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka

$$
\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)
$$

Ja noteikums (4) ir spēkā, tad nezināmo funkciju F_2, G_2, H_2 aprēķināšanai var ņemt ikkatrus divus sistēmas (3) nolīdzinājumus, piemēram, divus pirmos. No tiem seko :

$$
F_2 : G_2 : H_2 = \begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \qquad (5)
$$

Determinantus proporcijas labā pusē var dabūt no tabulas

$$
\begin{Vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \end{Vmatrix}
$$

nostrīpojot pēc kārtas pirmo, otro un trešo stabiņus, un tā dabūto ņemot pārmijus ar + un - zīmēm.

Pārliecināsimies, ka attiecības $F_2 : G_2 : H_2$, kas aprēķinātas saskaņā ar priekšrakstu (5), atkarājas tikai no z_2. ATvasināsim viņas parciāli pēc z_3 :

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2} = \frac{\partial}{\partial z_3}\left\{\begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2} = -\frac{\partial}{\partial z_3}\left\{\begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_3 & M'_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}\right\}.$$

Izdarot atvasināšanu un nokārtojot iznākumu atrodam galīgi :

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2} = L_{23}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2} = -K_{23}\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_3 & L'_3 & M'_3 \\ K''_3 & L''_3 & M''_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix}^2$$

(Ja $H_2 \neq 0$, tad ievērojot (5) arī $\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} \neq 0$)

No funkcijām F_2, G_2, H_2 tikai viena drīkst būt nulle. Pieņemsim, ka H_2 (daļu saucējs) nav nulle; pretējā gadījumā par dalītāju jāņem F_2 vai G_2. Tā kā determinants (4) ir nulle, tad

$$\frac{\partial}{\partial z_3}\frac{F_2}{H_2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z_3}\frac{G_2}{H_2} = 0;$$

t.i. attiecības $F_2 : G_2 : H_2$ atkarīgas tikai no z_2.

Tādā pat kārtā atrodam $F_3 : G_3 : H_3$. No vienādībām (2) ņemam pēdējo un atvasinām parciāli pēc z_2:

$$\begin{aligned} F_3 K_{23} + G_3 L_{23} + H_3 M_{23} &= 0 \\ F_3 K'_2 + G_3 L'_2 + H_3 M'_2 &= 0 \\ F_3 K''_2 + G_3 L''_2 + H_3 M''_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

F_3, G_3, H_3 ir nezināmās funkcijas; K, L, M un viņu atvasinājumi - zināmās. Ja uzskatām F_3, G_3, H_3 par nezināmiem, tad (5) ir homogenu lineāru nolīdzinājumu sistēma, kuŗai meklējam netriviālu atrisinājumu. Tā tad

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K'_2 & L'_2 & M'_2 \\ K''_2 & L''_2 & M''_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Ja noteikums (6) izpildīts, tad var aprēķināt attiecības :

$$F_3 : G_3 : H_3 = \begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_2 & M'_2 \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_2 & M'_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_2 & L'_2 \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

un viņas atkarājas tikai no z .

Determinantiem (5) un (7) ir kopīgi dalītāji λ un attiec. μ . ATmetot šos "liekos" dalītājus (izdalot ar tiem determinantus), atrodam nezināmās funkcijas līdz konstantam proporcionalitātes faktoram: *)

$$F_2 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_3 & M'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} (L_{23} M'_3 - M_{23} L'_3)$$

$$G_2 = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_3 & M'_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} (K_{23} M'_3 - M_{23} K'_3) \qquad (8)$$

$$H_2 = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_3 & L'_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} (K_{23} L'_3 - L_{23} K'_3)$$

un tā pat :

$$F_3 = \frac{1}{\mu} \begin{matrix} L_{23} & M_{23} \\ L'_2 & M'_2 \end{matrix} = \frac{1}{\mu} (L_{23} M'_2 - M_{23} L'_2)$$

$$G_3 = -\frac{1}{\mu} \begin{matrix} K_{23} & M_{23} \\ K'_2 & M'_2 \end{matrix} = -\frac{1}{\mu} (K_{23} M'_2 - M_{23} K'_2) \qquad (9)$$

$$H_3 = \frac{1}{\mu} \begin{matrix} K_{23} & L_{23} \\ K'_2 & L'_2 \end{matrix} = \frac{1}{\mu} (K_{23} L'_2 - L_{23} K'_2).$$

Funkcijas λ un μ saista vienkārša sakarība, kuŗu atrodam, ievietojot funkcijas (8) un (9) kādā no vienādībām (1), piem., pirmā :

---

*) Skālu konstrukcijai pietiek zināt funkciju attiecības.

$$K_{23} = \begin{vmatrix} G_2 & H_2 \\ G_3 & H_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda\mu} \left| \begin{array}{c|c} M_{23}\,K_3' - K_{23}\,M_3' & K_{23}\,L_3' - L_{23}\,K_3' \\ \hline M_{23}\,K_2' - K_{23}\,M_2' & K_{23}\,L_2' - L_{23}\,K_2' \end{array} \right|$$

No tā seko :

$$\lambda\mu = - \begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Tā kā neviens no dalītājiem λ un μ nedrīkst būt nulle, tad noteikumiem (4) un (6) jāpievieno vēl trešais :

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_3' & L_3' & M_3' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (11)$$

Determinanta šīs nevienlīdzības kreisā pusē R. Soreau (Traité des Abaques, II, 55. lp.p.) sauc par nolīdzinājuma

$$F_1 K_{23} + G_1 L_{23} + H_1 M_{23} = 0$$

karakteristiku.

VII.

Mainīgo šķiršana dažiem kanoniskiem funkciju tipiem.

Piemērs I. $F_{123} \doteq f_1 + f_2 + f_3$. Funkciju var uzrakstīt nomografiski sakārtotā veidā pieņemot :

$$F_1 = f_1,\ G_1 = 1,\ H_1 = 1;$$

$$K_{23} = 1,\ L_{23} = f_2,\ M_{23} = f_3.$$

Viņa izpilda prasības, kas izteiktas iepriekšējā nodaļā formulās (4) (6) un (11)

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & f_3' \\ 0 & 0 & f_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & 0 & f_3' \end{vmatrix} = -f_2' f_3' \neq 0,$$

tā tad viņu var uzrakstīt determinanta veidā. Nezināmās funkcijas :

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 & f_3 \\ 0 & 0 & f_3' \end{vmatrix}$$

$$F_2 : G_2 : H_2 = f_2 f_3' : -f_3' : 0 = f_2 : -1 : 0 \quad (\lambda = f_3')$$

$$\begin{vmatrix} 1 & f & f \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix}$$

$$F_3 : G_3 : H_3 = -f_2' f_3 : 0 : f_2' = f_3 : 0 : -1 \quad (\mu = -f_2')$$

Tā tad :

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 1 \\ f_2 & -1 & 0 \\ f_3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Iznākuma pareizību var pārbaudīt izvirzot determinantu. Nolīdzinājumu $F_{123} = 0$ šinī gadījumā attēlo nomogramma, kas sastāv no 3 paralelām skālām.

To pašu funkciju var pakļaut vispārīgam tipam, rakstot :

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = f_1 \cdot 1 + 1 \cdot (f_2 + f_3) + 0 \cdot M_{23},$$

tā tad, pieņemot :

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = 0;$$

$$K_{23} = 1, \quad L_{23} = f_2 + f_3, \quad M_{23} = \text{nenoteikta}$$

Funkcija M_{23} jāizvēl tā, lai būtu izpildītas 3 prasības.

Vispirms

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 + f_3 & M_{23} \\ 0 & f_3' & M_3' \\ 0 & f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0$$

No tā seko integrējot, ka

$$M_{23} = A_2 f_3 + B_2, \qquad (1)$$

kur A_2 un B_2 - funkcijas z_2.

Saskaņā ar otru prasību funkcijai M_{23} jābūt tādai, ka

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 + f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \\ 0 & f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0$$

Izvirzot beidzamo determinantu un liekot M_{23} vietā izteiksmi (1) dabū :

$$f_2' \, (A_2'' f_3 + B_2'') - f_2''(A_2' f_3 + B_2') = 0,$$

$$f_3 \, (f_2' A_2'' - f_2'' A_2') + (f_2' B_2'' - f_2'' B_2') = 0.$$

Šī vienādība ir spēkā neatkarīgi no z_3, tāpēc abām iekavām identiski jāizzūd :

$$f_2' A_2'' - f_2'' A_2' = 0, \quad \text{tā tad} \quad A_2 = af_2 + c;$$

$$f_2' B_2'' - f_2'' B_2' = 0, \quad \text{"} \quad \text{"} \quad B_2 = bf_2 + d.$$

Tā tad :

$$M_{23} = A_2 f_3 + B_2 = af_2 f_3 + bf_2 + cf_3 + d \tag{2}$$

Integracijas konstantas a, b, c, d nedrīkst būt pretrunā trešajam noteikumam :

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} 1 & f_2 + f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \\ 0 & f_3' & M_3' \end{vmatrix} = f_3' M_2' - f_2' M_3' \neq 0.$$

Ieliekam M vietā izteiksmi (2) :

$$\lambda\mu = -\, f_2' f_3' \left[a(f_2 - f_3) + (c - b) \right] \neq 0 \tag{3}$$

Tas ir izpildīts, ja a, b un c tādi, ka stūrainā iekava nav nulle. Viņa var būt nulle tikai tad, ja a = 0 un reizē b = c, tā tad, ja pieņem $M_{23} = c(f_2 + f_3) + d$. Šo gadījumu neapskatot aprēķinām :

$F_2 : G_2 : H_2$ no $\begin{Vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_3' & M_3' \end{Vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= af_2^2 + (c-b)f_2 - d \\ G_2 &= -(af_2 + c) \\ H_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

$(\lambda_0 = f_3')$

$F_3 : G_3 : H_3$ no $\begin{Vmatrix} 1 & f_2+f_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' & M_2' \end{Vmatrix}$

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= -af_3^2 + (c-b)f_3 + d \\ G_3 &= af_3 + b \\ H_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$(\mu_0 = -f_2')$

Funkcijas F_i, G_i, H_i $(i = 2,3)$ uzrakstītas, atmetot λ_0 un μ_0, kas kopīgi visiem attiecību $F_i : G_i : H_i$ locekļiem. Salīdzinot $\lambda_0\mu_0$ ar $\lambda\mu$ redzam, ka vēl ir

$$\nu_0 = a(f_2 - f_3) + (c - b), \tag{6}$$

Ar kuŗu nav dalīts. Ar šo atlikušo faktoru, kad rakstām uzdoto funkciju determinanta veidā izdalām visu determinantu:

$$F_{123} = f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{\nu_0} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ F_2 & G_2 & 1 \\ F_3 & G_3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\nu_0} \begin{vmatrix} 0 & 1 & f_1 \\ -1 & G_2 & F_2 \\ 1 & G_3 & F_3 \end{vmatrix},$$

kur F_i, G_i $(i = 2,3)$ un y_0 vietā jāliek atrastās funkcijas (4), (5) un (6).

Determinants beidzamā veidā noteic trīs skālas, no kuŗām pirmā $(x_1 = 0,\ y_1 = 1 : f_1)$ ir taisna un ir uz ordinātu ass. Otrā jākonstruē saskaņā ar priekšrakstu :

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= -\frac{1}{F_2} = \frac{-1}{af_2^2 + (c-b)f_2 - d}, \\ y_2 &= \frac{G_2}{F_2} = \frac{-(af_2 + c)}{af_2^2 + (c-b)f_2 - d}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

un trešā saskaņā ar priekšrakstu :

$$x_3 = \frac{1}{F_3} \qquad y_3 = \frac{G_3}{F_3}. \qquad (7')$$

Abas beidzamās skālas ir uz kopīgas koniskas līknes, kā pārliecināmies eliminējot no (7) un (7') parametrus f_2 vai f_3. Eliminācija dod koniskās līknes nolīdzinājumu :

$$(bc - ad)x^2 - (b + c)xy + y^2 + ax = 0.$$

Lai līkne būtu plāknē simetriski pret abscisu asi, pieņemsim, ka $b + c = 0$. Tādā gadījumā mums ir

<u>elipse</u>	ja $bc - ad > 0$
<u>hiperbola</u>	" $bc - ad < 0$
<u>parabola</u>	" $bc - ad = 0$.

Pieņēmums $bc - ad = 1$ pārvērš elipsi <u>riņķī</u>. Līkne sadalās divās taisnēs, ja $a = 0$.

<u>Piemērs II</u>. $F_{123} = f_1 + f_2 h_3$.

Uzdoto funkciju var uzrakstīt sekojošā sakārtotā veidā :

$$F_{123} = f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_2 h_3 + 0 \cdot M_{23},$$

tā tad, pieņemot :

$$F_1 = f_1, \quad G_1 = 1, \quad H_1 = 0;$$

$$K_{23} = 1, \quad L_{23} = f_2 h_3, \quad M_{23} = \text{nenoteikts}.$$

Funkcijas M_{23} aprēķināšanai mums ir vispirms noteikums :

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2 h_3' & M_3' \\ 0 & f_2 h_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = f_2 \begin{vmatrix} h_3' & M_3' \\ h_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

un tā tad :

$$M_{23} = A_2 h_3 + B_2 , \tag{8}$$

kur integracijas konstantas A_2 un B_2 atkarājas no z_2. Otrs noteikums :

$$\begin{vmatrix} 1 & f_2 h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' h_3 & M_2' \\ 0 & f_2'' h_3 & M_2'' \end{vmatrix} = h_3 \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ h_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$f_2' M_2'' - f_2'' M_2' = 0.$$

Ieliekot M vietā izteiksmi (8), redzam, ka

$$h_3 (f_2' A_2'' - f_2'' A_2') + (f_2' B_2'' - f_2'' B_2') = 0.$$

Šai prasībai jābūt izpildītai identiski, tāpēc iekavas ir nulles. No tā seko :

$$A_2 = af_2 + c \qquad\qquad B_2 = bf_2 + d$$

$$M_{23} = A_2 h_3 + B_2 = af_2 h_3 + bf_2 + ch_3 + d. \tag{8'}$$

Integracijas konstantām a, b, c, d jābūt tādām, ka lieko faktoru reizinājums

$$\lambda \mu = - \begin{vmatrix} 1 & f_2 h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' h_3 & M_2' \\ 0 & f_2 h_3' & M_3' \end{vmatrix} = f_2' h_3' (bf_2 - ch_3) \neq 0,$$

tā tad, b un c nedrīkst izzust reizē.

Pieņemot, ka šis noteikums izpildīts, aprēķinām :

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \left\| \begin{matrix} 1 & f_2 h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2 h_3' & M_3' \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= f_2(bf_2 + d) \\ G_2 &= af_2 + c \\ H_2 &= -f_2 \end{aligned}\right\} \quad (\lambda_0 = -h_3')$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ no } \begin{Vmatrix} 1 & f_2 h_3 & M_{23} \\ 0 & f_2' h_3 & M_2' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F_3 &= h_3(ch_3 + d) \\ G_3 &= ah_3 + b \\ H_3 &= -h_3 \end{aligned}\right\} \quad (\mu_0 = -f_2')$$

Tā tad :

$$F_{123} = f_1 + f_2 h_3 = \frac{1}{bf_2 - ch_3} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ f_2(bf_2 + d) & af_2 + c & -f_2 \\ h_3(ch_3 + d) & ah_3 + b & -h_3 \end{vmatrix}$$

Vai arī, pareizinot trešlo stabiņu ar d (un a) un reizinājumu pieskaitot pirmam (otram) :

$$F_{123} = f_1 + f_2 h_3 = \frac{1}{bf_2 - ch_3} \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ bf_2^2 & f_2 & c \\ ch_3^2 & h_3 & b \end{vmatrix}$$

Lai palielinātu determinantā patvaļīgo konstantu skaitu, uzrakstīsim viņu šādi :

$$\begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 + mf_1 \\ bf_2^2 & f_2 & c + mbf_2^2 \\ ch_3^2 & h_3 & b + mch_3^2 \end{vmatrix}$$

kur m - izvēlēts pēc patikas. Konstruēsim 3 skālas :

I) $x_1 = \dfrac{f_1}{1 + mf_1}, \qquad y_1 = 0;$

tā ir taisna un uz abscisu ass.

II) $x_2 = \dfrac{bf_2^2}{c + mbf_2^2}, \qquad y_2 = \dfrac{f_2}{c + mbf_2^2};$

III) $x_3 = \dfrac{ch_3^2}{b + mch_3^2} \qquad y_3 = \dfrac{h_3}{b + mch_3^2};$

tās ir līkas un uz kopīgas koniskās līknes, kuŗas nolīdzinājumu atrod eliminējot f_2 un h_3 no skālu nolīdzinājumiem :

$$mx^2 + bcy^2 - x = 0.$$

Līkne, kuŗu šis nolīdzinājums izteic ir simetriska pret abscisu asi un iet caur koordinātu asu iesākumu. Viņa būs vispārīgi

<u>elipse</u>	ja	$mbc > 0$
<u>hiperbola</u>	"	$mbc < 0$
<u>parabola</u>	"	$mbc = 0 \quad (bc \neq 0)$

Speciāli viņa pārvēršas

<u>riņķī</u>	ja	$bc = m$
divās taisnēs	"	$bc = 0 \quad (m \neq 0)$

<u>Piemērs III.</u> $F_{123} = f_1 f_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3$. Mainīgos šinī gadījumā visvieglāk atšķirt, ja funkciju sakārto nomografiski attiecībā uz trešo mainīgo, t.i. pieņemot

$$F_3 = f_3, \quad G_3 = \varphi_3, \quad H_3 = \psi_3;$$

$$K_{12} = f_1, \quad L_{12} = f_2, \quad M_{12} = 1.$$

Viegli pārliecināties, ka K, L, M apmierina visus noteikumus :

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ f_1' & 0 & 0 \\ f_1'' & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & 1 \\ 0 & f_2' & 0 \\ 0 & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} f & f & 1 \\ f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{vmatrix} = -f_1' f_2' \neq 0.$$

Nezināmo funkciju attiecības :

$$F_1 : G_1 : H_1 = -f_2' : 0 : f_1 f_2'$$

$$F_2 : G_2 : H_2 = 0 : f_1' : -f_2 f_1'$$

Pašas funkcijas :

$$F_1 = 1 \quad G_1 = 0 \quad H_1 = -f_1 \quad (\lambda = -f_2')$$
$$F_2 = 0 \quad G_2 = 1 \quad H_2 = -f_2 \quad (\mu = f_1')$$

Tā tad :

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi_3 + \psi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_1 \\ 0 & 1 & -f_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix} \qquad (9')$$

Nolīdzinājumu $F_{123} = 0$ attēlo nomogramma, kuŗa sastāv no vienas līkas un divām taisnām skālām.

Sakārtosim funkciju vēl attiecībā uz kādu no citiem mainīgiem (piem., z_1) :

$$F_{123} = f_1 f_3 + 1\cdot(f_2\varphi_3 + \psi_3) + 0\cdot M_{23},$$

tā kā

$$F_1 = f_1,\quad G_1 = 1,\quad H_1 = 0;$$
$$K_{23} = f_3,\quad L_{23} = f_2\varphi_3 + \psi_3,\quad M_{23} = \text{nenoteikta}.$$

Funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka viņu Vronska determinanti attiecībā uz abiem mainīgiem identiski izzūd. Šie noteikumi palīdz atrast M. No noteikuma

$$\begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3 & M_2' \\ 0 & f_2''\varphi_3 & M_2'' \end{vmatrix} = f_2\varphi_3 \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0$$

seko, ka M ir lineāra funkcija f_2 :

$$M_{23} = A_3 f_2 + B_3, \qquad (9)$$

kur integracijas konstantas A un B vispārīgi atkarājas no z_3. No otra noteikuma

$$\begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \\ f_3'' & f_2\varphi_3'' + \psi_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0,$$

ieliekot M vietā augšā atrasto izteiksmi (9) un tā iegūto determinantu uzrakstot summas veidā, seko :

$$f_2^2\,\Delta_0 + f_2\,(\Delta_1 + \Delta_2) + \Delta_3 = 0, \qquad (10)$$

kur :

$$\triangle_0 = \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & A_3 \\ f_3' & \varphi_3' & A_3' \\ f_3'' & \varphi_3'' & A_3'' \end{vmatrix} \qquad \triangle_1 = \begin{vmatrix} f_3 & \varphi_3 & B_3 \\ f_3' & \varphi_3' & B_3' \\ f_3'' & \varphi_3'' & B_3'' \end{vmatrix}$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} f_3 & \psi_3 & A_3 \\ f_3' & \psi_3' & A_3' \\ f_3'' & \psi_3'' & A_3'' \end{vmatrix} \qquad \triangle_3 = \begin{vmatrix} f_3 & \psi_3 & B_3 \\ f_3' & \psi_3' & B_3' \\ f_3'' & \psi_3'' & B_3'' \end{vmatrix}$$

Vienādībai (10) jābūt spēkā identiski, kas iespējams tikai ja $\triangle_0 = 0, \quad \triangle_1 + \triangle_2 = 0, \quad \triangle_3 = 0.$

No tā, ka $\triangle_0 = \triangle_3 = 0$, seko, ka A_3 un B_3 ir linearās funkcijas, kas atkarājas no f_3, φ_3 vai f_3, ψ_3 :

$$A_3 = af_3 + b\varphi_3, \qquad B_3 = cf_3 + d\psi_3 .$$

Ieliekot šīs vērtības determinantos $\triangle_1$ un $\triangle_2$, pārliecināmies, ka $\triangle_1 + \triangle_2$ var identiski izzust tikai tad, ja $\underline{d = b}$.

To ievērojot

$$M_{23} = A_3 f_2 + B_3 = af_2 f_3 + bf_2\varphi_3 + cf_3 + b\psi_3 .$$

Liekie faktori nedrīkst būt nulles :

$$\lambda\mu = - \begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3 & M_2' \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \end{vmatrix} = af_2' f_3 \begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' \end{vmatrix} \neq 0$$

tā tad, <u>a neizzūd</u> ($a \neq 0$).

Aprēķinām tagad funkcijas, no kurām sastāv meklētais determinants :

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \left\| \begin{matrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' & M_3' \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= -(af_2 + c) \\ G_2 &= -b \\ H_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\lambda_0 = \begin{vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 \\ f_3' & f_2\varphi_3' + \psi_3' \end{vmatrix}\right)$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ no } \begin{Vmatrix} f_3 & f_2\varphi_3 + \psi_3 & M_{23} \\ 0 & f_2'\varphi_3 & M_2' \end{Vmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_3 = a\psi_3 - c\varphi_3 \\ G_3 = -(af_3 + b\varphi_3) \\ H_3 = \varphi_3 \end{array}\right\} \quad (\mu_0 = f_2' f_3)$$

Tā tad :

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ -(af_2 + c) & -b & 1 \\ a\psi_3 - c\varphi_3 & -(af_3 + b\varphi_3) & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

vai arī, pareizinot trešo kolonu ar c (un b) un reizinājumu pieskaitot pirmajam (otram) stabiņam :

$$F_{123} = f_1 f_3 + f_2\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ -af_2 & 0 & 1 \\ a\psi_3 & -af_3 & \varphi_3 \end{vmatrix}$$

Šis rakstības veids īstenībā neatšķiras no iesākumā atrastā (9') Nomogramma, kura gadījumam atbilst, sastāv no divi taisnām un vienas līkas skālas. Šo funkciju, tā tad, nevar attēlot vairāk principiāli dažādiem paņēmieniem, kā tas bija pirmos divos piemēros.

Piemērs IV. $F_{123} = f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\varphi_3 + \psi_3$.
Uzrakstīsim funkciju šādā veidā (sakārtotā attiecībā pret mainīgo z_1) : $F_{123} = f_1(f_2 f_3 + \varphi_3) + 1\cdot(f_2\varphi_3 + \psi_3) + 0\cdot M_{23}$,
tā tad, pieņemsim :

$F_1 = f_1 \quad G_1 = 1 \quad H_1 = 0$

$K_{23} = f_2 f_3 + \varphi_3 \quad L_{23} = f_2\varphi_3 + \psi_3 \quad M_{23} =$ nenoteikts.

un aprēķināsim funkciju M tā, kā prasa mainīgo atšķiršanas noteikumi. No (6) nod. VI. seko, tāpat kā iepriekšējā piemērā, ka funkcija M lineāri atkarīga no f_2, tā kā viņas vispārīgo veidu izteic formula (9). No (4) nod. VI., seko, ka

$$f_2^3\Delta_0 + f_2^2(\Delta_1 + \Delta_2) + f_2(\Delta_3 + \Delta_4) + \Delta_5 = 0,$$

kur Δ_0, Δ_1, Δ_2 un Δ_3 apzīmē to pašu, ko vienādībā (10), bet

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & A_3 \\ \varphi_3' & \psi_3' & A_3' \\ \varphi_3'' & \psi_3'' & A_3'' \end{vmatrix} \text{ un } \Delta_5 = \begin{vmatrix} \varphi_3 & \psi_3 & B_3 \\ \varphi_3' & \psi_3' & B_3' \\ \varphi_3'' & \psi_3'' & B_3'' \end{vmatrix}$$

Tā kā jābūt $\Delta_0 = \Delta_5 = 0$, tad A un B ir tādas pat izteiksmes, kā iepriekšējā piemērā. Divi pārējie noteikumi ($\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_3 + \Delta_4 = 0$) tomēr ierobežo konstantu izvēli un spiež pieņemt c = a, d = b, un beidzot

$$M_{23} = af_2 f_3 + bf_2\varphi_3 + a\varphi_3 + b\psi_3 .$$

IZrādās, ka šinī gadījumā, lai apmierinātu noteikumus (4) un (6) nod. VI., jāpieņem, ka funkcija M lineāri atkarīga no K un L ($M = aK + bL$). Tāds pieņēmums runā pretim noteikumam (11) nod. VI., tāpēc ka tad reizinājums $\lambda\mu$ ir nulle. Tā tad, funkciju F_{123} šinī gadījumā nevar attēlot nomografiski, izejot no augšējā sakārtojuma ($F_1 = f_1$, $G_1 = 1$, $H_1 = 0$).

Tā kā f_1 un f_2 stāvoklis funkcijā F_{123} ir simetrisks, tad secinājums attiecas arī uz mainīgo z_2. Atliek sakārtojums

$$F_3 = f_3, \quad G_3 = \varphi_3, \quad H_3 = \psi_1;$$

$$K_{12} = f_1 f_2, \quad L_{12} = f_1 + f_2, \quad M_{12} = 1.$$

Šie K, L, M apmierina visus nepieciešamos noteikumus :

$$\begin{vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \\ f_1'' f_2 & f_1'' & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \\ f_1 f_2'' & f_2'' & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda\mu = -\begin{vmatrix} f_1 f_2 & f + f & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \end{vmatrix} = f_1' f_2' (f_1 - f_2) \neq 0.$$

Aprēķinām vajadzīgā determinanta elementus :

$$F_1 : G_1 : H_1 \text{ no} \left\| \begin{matrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1 f_2' & f_2' & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{matrix} F_1 = 1 \\ G_1 = - f_1 \\ H_1 = f_1^2 \end{matrix}\right\} \quad (\lambda_0 = - f_2')$$

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no} \left\| \begin{matrix} f_1 f_2 & f_1 + f_2 & 1 \\ f_1' f_2 & f_1' & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$\left.\begin{matrix} F_2 = 1 \\ G_2 = - f_2 \\ H_2 = f_2^2 \end{matrix}\right\} \quad (\mu_0 = - f_1')$$

Tā tad

$$F_{123} = f_1 f_2 f_3 + (f_1 + f_2)\varphi_3 + \psi_3 = \frac{1}{f_1 - f_2} \begin{vmatrix} 1 & -f_1 & f_1^2 \\ 1 & -f_2 & f_2^2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

Nomografiskais attēls vispārīgā gadījumā, kad funkcijas f_3, φ_3, ψ_3 nav lineāri atkarīgas, sastāv no 3 līkām skālām, no kuŗām divas ir uz kopīgas koniskas līknes. Kāds cits, principiāli citāds attēlošanas veids šinī piemērā, pretēji diviem pirmiem, nav iespējams.

VIII.

Trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājumi ar 3 mainīgiem vispārīgā veidā.

Trešās nomografiskās kārtas nolīdzinājumu ar 3 mainīgiem R.Soreau un M.d'Ocagne raksta vispārīgā veidā sekojoši :

$$Af_1 f_2 f_3 + \Sigma B_i f_i f_k + \Sigma C_i f_i + D = 0,$$

kur A, B, C, D - konstantas un i, j, k - ciparu 1,2,3 cikliskās permutācijas. Lai determinanti ko dabūsim būtu simetriski, rakstīsim nolīdzinājuma kreiso pusi citādos koeficientu apzīmējumos, proti šādā sakārtotā veidā :

$$F_{123} = f_1 (Af_2 f_3 + Bf_2 + Cf_3 + D) + + (A_0 f_2 f_3 + B_0 f_2 + C_0 f_3 + D_0). \qquad (1)$$

Apzīmēsim izteiksmi pirmā iekavā ar K_{23} , otrā iekavā - ar L_{23}. Pieņemot apzīmējumus :

$$A_{\underline{II}} = A f_2 + C, \qquad a_{\underline{II}} = B f_2 + D,$$
$$B_{\underline{II}} = A_0 f_2 + C_0 , \qquad b_{\underline{II}} = B_0 f_2 + D_0 ,$$
$$A_{\underline{III}} = A f_3 + B, \qquad a_{\underline{III}} = C f_3 + D,$$
$$B_{\underline{III}} = A_0 f_3 + B_0 , \qquad b_{\underline{III}} = C_0 f_3 + D_0 ,$$

seko :

$$K_{23} = f_3 A_{\underline{II}} + a_{\underline{II}} = f_2 A_{\underline{III}} + a_{\underline{III}},$$
$$L_{23} = f_3 B_{\underline{II}} + b_{\underline{II}} = f_2 B_{\underline{III}} + b_{\underline{III}} .$$

Lai funkciju (1)pārveidotu determinantā, kam mainīgie atšķirti rindās, rakstām papriekšu

$$F_{123} = f_1 K_{23} + 1 . L_{23} + 0 \cdot M_{23}, \qquad (1')$$

un meklējam tādu funkciju M_{23}, kas kopā ar zināmām K_{23} un L_{23} apmierina trīs nepieciešamos un pietiekamos noteikumus. Divi noteikumi ir šādi :

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{III}f_2 + a_{III} & B_{III}f_2 + b_{III} & M_{23} \\ A_{III}f_2' & B_{III}f_2' & M_2' \\ A_{III}f_2'' & B_{III}f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} K_{23} & L_{23} & M_{23} \\ K_3' & L_3' & M_3' \\ K_3'' & L_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{II}f_3 + a_{II} & B_{II}f_3 + b_{II} & M_{23} \\ A_{II}f_3' & B_{II}f_3' & M_3' \\ A_{II}f_3'' & B_{II}f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0;$$

no tiem seko :

$$\begin{vmatrix} a_{III} & b_{III} \\ A_{III} & B_{III} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{II} & b_{II} \\ A_{II} & B_{II} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3' & M_3' \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Determinanti, kuŗu elementiem latiņu indeki, neviens nedrīkst izzust, jo pretējā gadījumā funkcija F_{123} sadalās reizinātājos tā, ka pielīdzinot viņu nullei vairs nedabūjam sakaru starp 3 mainīgajiem. Lai to parādītu, pieņemsim, ka

$$\begin{vmatrix} a_{II} & b_{II} \\ A_{II} & B_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Bf_2 + D & B_0 f_2 + D_0 \\ Af_2 + C & A_0 f_2 + C_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3)$$

vai arī izvirzītā veidā :

$$f_2^2 \begin{vmatrix} A & B \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} + f_2 \left\{ \begin{vmatrix} A & B \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} \right\} + \begin{vmatrix} C & D \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Šai vienādībai jābūt spēkā neatkarīgi no z_2, tā tad, koeficientiem, kas ir pie f_2^2 un f_2, kā arī no f_2 neatkarīgam loceklim, visiem reizā jāizzūd. Tas iespējams divos gadījumos, proti, ja

$$\frac{A}{A_0} = \frac{B}{B_0} = \frac{C}{C_0} = \frac{D}{D_0} \qquad (4)$$

vai arī, ja
$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}=\frac{A_0}{B_0}=\frac{C_0}{D_0} \qquad (4')$$

To pašu proporciju (4) vai arī viņas vietā šādu
$$\frac{A}{C}=\frac{B}{D}=\frac{A_0}{C_0}=\frac{B_0}{D_0} \qquad (4")$$

dabū meklējot noteikumus, kad determinants
$$\begin{vmatrix} a_{\overline{III}} & b_{\overline{III}} \\ A_{\overline{III}} & B_{\overline{III}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Cf_3 + D & Cf_3 + D_0 \\ Af_3 + B & A_0 f_3 + B_0 \end{vmatrix} \qquad (3')$$

var identiski būt vienlīdzīgs nullei.

Proporcija (4) izteic to, ka sakārtojumā $f_1 \cdot K_{23} + L_{23}$ funkcijas K un L atšķiras tikai ar konstantu faktoru. To pašu izteic (4') un (4") par sakārtojumiem attiecībā uz f_3 vai f_2. Visos gadījumos $L_{jk} = \alpha K_{jk}$ un F_{123} sadalās divi faktoros.
$$F_{123} = (f_i + \alpha)\, K_{jk}, \quad (i,j,k = 1,2,3)$$
tā kā pielīdzinot viņu nullei mēs nedabūjam sakaru (nolīdzinājumu) starp 3 mainīgajiem.

Pieņemsim, tā tad, ka no proporcijām (4), (4'), (4") neviena nav spēkā. Tad determinanti (3) un (3') nav nulles, un noteikumi (2) no kuriem jāaprēķina M_{23}, ir šādi :
$$\begin{vmatrix} f_2' & M_2' \\ f_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_3' & M_3' \\ f_3'' & M_3'' \end{vmatrix} = 0 \qquad (2')$$

No tā redzams (sk. pirmo piemēru iepriekšējā nodaļā), ka
$$M_{23} = af_2 f_3 + bf_2 + cf_3 + d.$$

Še a, b, c, d ir integracijas konstantas, kuŗu izvēli ierobežo prasība, ka liekie faktori $\lambda\mu$ nedrīkst būt nulles . Pēc nelieliem pārveidojumiem dabūjam :

$$\lambda\mu = -f_2' f_3' \begin{vmatrix} Cf_3 + D & C_0 f_3 + D_0 & cf_3 + d \\ Af_3 + B & A_0 f_3 + B_0 & af_3 + b \\ Af_2 + C & A_0 f_2 + C_0 & af_2 + c \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5)$$

kur pirmajā rindā var rakstīt arī

$$Bf_2 + D \quad B_0 f_2 + D_0 \quad bf_2 + d$$

No tā seko

$$\lambda\mu = + f_2' f_3' \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \\ +1 & -f_3 & -f_2 & +f_2 f_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5')$$

Lai šo noteikumu izpildītu, ceturtajai rindai atbilstošie determinanti nedrīkst visi reizē būt nulles, t.i. matricei

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \end{Vmatrix} \qquad (6)$$

jābūt trešajā rangā.

Pieņemsim, ka noteikums (5), (5') ir spēkā, un aprēķināsim F_i, G_i, H_i $(i = 2,3)$.

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ seko no } \begin{Vmatrix} Bf_2 + D & B_0 f_2 + D_0 & bf_2 + d \\ Af_2 + C & A_0 f_2 + C_0 & af_2 + c \end{Vmatrix}$$

$$(\lambda_0 = f_3')$$

$$F_3 : G_3 : H_3 \text{ seko no } \begin{Vmatrix} Cf_3 + D & C_0 f_3 + D & cf_3 + d \\ Af_3 + B & A_0 f_3 + B & af_3 + b \end{Vmatrix}$$

$$(\mu_0 = f_2')$$

Matricēm dzēš pirmo, otro, trešo stabiņus un tā dabūtos determinantus ņem ar pārmijus zīmēm $(+ - +)$ un tā līdz proporcionālitātes faktoram dabū F_i, G_i, H_i. To pašu sasniedz izejot no schemām

$$\begin{array}{r} \\ F_2 \\ -G_2 = \\ H_2 \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \\ 0 & -1 & 0 & f_2 \\ -1 & 0 & f_2 & 0 \end{vmatrix}; \quad (\lambda_0 = f_3') \qquad (7)$$

$$\begin{array}{r} \\ F_3 \\ -G_3 = \\ H_3 \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} A & C & B & D \\ A_0 & C_0 & B_0 & D_0 \\ a & c & b & d \\ 0 & -1 & 0 & f_3 \\ -1 & 0 & f_3 & 0 \end{vmatrix} \quad (\mu_0 = f_2') \qquad (7')$$

un dzēšot labajā pusē vienu no pirmām trīs rindām saskaņā ar kārtulu :

	F_i		pirmā	
lai atrastu	$-G_i$	jādzēš labajā pusē	otrā	rinda.
	H_i		trešā	

Jāpiezīmē, ka schemu (7') var dabūt no (7) apmainot B, B_0, b attiecīgi ar C, C_0, c un indeku 2 pārmijot ar 3.

Pieņemsim šādus saīsinātus apzīmējumus :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ a & b \end{vmatrix} & q_1 &= \begin{vmatrix} A_0 & B_0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_0 & D_0 \\ a & b \end{vmatrix} & r_1 &= \begin{vmatrix} C_0 & D_0 \\ c & d \end{vmatrix} \\
p_2 &= \begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix} & q_2 &= \begin{vmatrix} A & B \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ a & b \end{vmatrix} & r_2 &= \begin{vmatrix} C & D \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (8) \\
p_3 &= \begin{vmatrix} A & B \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} & q_3 &= \begin{vmatrix} A & B \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & D \\ A_0 & B_0 \end{vmatrix} & r_3 &= \begin{vmatrix} C & D \\ C_0 & D_0 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(p_1) &= \begin{vmatrix} A_0 & C_0 \\ a & c \end{vmatrix} & (q_1) &= \begin{vmatrix} A_0 & C_0 \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_0 & D_0 \\ a & c \end{vmatrix} & (r_1) &= \begin{vmatrix} B_0 & D_0 \\ b & d \end{vmatrix} \\
(p_2) &= \begin{vmatrix} A & C \\ a & c \end{vmatrix} & (q_2) &= \begin{vmatrix} A & C \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D \\ a & c \end{vmatrix} & (r_2) &= \begin{vmatrix} B & D \\ b & d \end{vmatrix} \qquad (8')
\end{aligned}$$

$$(p_3) = \begin{vmatrix} A & C \\ A_0 & C_0 \end{vmatrix} \quad (q_3) = \begin{vmatrix} A & C \\ B_0 & D_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & D \\ A_0 & C_0 \end{vmatrix} \quad (r_3) = \begin{vmatrix} B & D \\ B_0 & D_0 \end{vmatrix} \tag{8'}$$

Tad varam uzrakstīt :

$$\begin{aligned} -F_2 &= f_2^2 p_1 + f_2 q_1 + r_1 , \\ G_2 &= f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2 , \\ -H_2 &= f_2^2 p_3 + f_2 q_3 + r_3 , \end{aligned} \tag{9}$$

un tāpat

$$\begin{aligned} -F_3 &= f_3^2 (p_1) + f_3 (q_1) + (r_1) \\ G_3 &= f_3^2 (p_2) + f_3 (q_2) + (r_2) , \\ -H_3 &= f_3^2 (p_3) + f_3 (q_3) + (r_3) . \end{aligned} \tag{9'}$$

Pēc šo funkciju atrašanas mums ir visi dati, kas nepieciešami F_{123} uzrakstīšanai determinantā, kam atšķirti mainīgie. No (1') zinām, ka $F_1 = f_1$, $G_1 = 1$, $H_1 = 0$. To ievērojot :

$$F_{123} = \frac{1}{\nu_0} \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ F_2 & H_2 & G_2 \\ F_3 & H_3 & G_3 \end{vmatrix}$$

vai arī, pārmijot otro un trešo stabiņus, lai beidzamajā stabiņā nebūtu nulles :

$$F_{123} = \frac{-1}{\nu_0} \begin{vmatrix} f_1 & 0 & 1 \\ F_2 & H_2 & G_2 \\ F_3 & H_3 & G_3 \end{vmatrix}$$

ν_0 apzīmē lieko faktoru $(\lambda\mu : \lambda_0\mu_0)$, kas atmests aprēķinot funkcijas F_i , G_i , H_i , un vienlīdzīgs determinantam formulā (5').

Nolīdzinājuma nomogramma sastāv no vienas taisnas skālas, kas ir uz abscisu ass ($x = f_1$, $y = 0$), un divām līkām skālām :

$$\left.\begin{aligned} x &= F_2 / G_2 \\ y &= H_2 / G_2 \end{aligned}\right\} (z_2) \qquad \left.\begin{aligned} x &= F_3 / G_3 \\ y &= H_3 / G_3 \end{aligned}\right\} (z_3)$$

Lai atrastu līknes nolīdzinājumu, uz kuŗas ir kāda no skālām, (piem., tā, kas atbilst mainīgajam z_2), jāeliminē parametrs f_2 no skālas nolīdzinājumiem

$$x = \frac{F_2}{G_2} = -\frac{f_2^2 p_1 + f_2 q_1 + r_1}{f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2},$$

$$y = \frac{H_2}{G_2} = -\frac{f_2^2 p_3 + f_2 q_3 + r_3}{f_2^2 p_2 + f_2 q_2 + r_2},$$

jeb no nolīdzinājumiem

$$f_2^2(p_2 x + p_1) + f_2(q_2 x + q_1) + (r_2 x + r_1) = 0,$$

$$f_2^2(p_2 y + p_3) + f_2(q_2 y_3 + q_3) + (r_2 y + r_3) = 0.$$

Eliminācija dod sakaru starp x un y (t.i. līknes nolīdzinājumu) determinanta veidā :

$$\begin{vmatrix} p_2 x + p_1 & q_2 x + q_1 & r_2 x + r_1 & 0 \\ p_2 y + p_3 & q_2 y + q_3 & r_2 y + r_3 & 0 \\ 0 & p_2 x + p_1 & q_2 x + q_1 & r_2 x + r_1 \\ 0 & p_2 y + p_3 & q_2 x + q_3 & r_2 y + r_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

vai arī izvirzītā veidā :

$$A_{14} x^2 + (A_{16} + A_{34}) xy + A_{36} y^2 + (A_{15} + A_{24}) x + (A_{26} + A_{35}) y + A_{25} = 0. \qquad (11)$$

Koeficienti A_{ik} līdzinās determinantiem, ko dabū dzēšot sekojošā schēmā labajā pusē divas rindas, proti :

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & 0 \\ p_2 & q_2 & r_2 & 0 \\ p_3 & q_3 & r_3 & 0 \\ 0 & p_1 & q_1 & r_1 \\ 0 & p_2 & q_2 & r_2 \\ 0 & p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \qquad (12)$$

kur labajā pusē jādzēš, skaitot no augšas, rindas i un k.

Gaŗāki aprēķini, kuŗu kodols ir tas, ka p_i, q_i, r_i vietā liek viņu izteiksmes (8), rāda, ka visiem A_{ik} nolīdzinājumā (11) ir kopīgs faktors

$$\Omega = \Delta_1\Delta_4 - \Delta_2\Delta_3.$$

še Δ_i ir determinanti, kuŗus dabū, ja matricei

$$\begin{Vmatrix} A & B & C & D \\ A_0 & B_0 & C_0 & D_0 \\ a & b & c & d \end{Vmatrix}$$

izdzēš i-to stabiņu.

Pēc kopīgā faktora atmešanas (11) vietā stājas nolīdzinājums

$$B_{11}x^2 + 2B_{12}xy + B_{22}y^2 + 2B_{13}x + 2B_{23}y + B_{33} = 0 \tag{13}$$

kur koeficientiem ir šādas nozīmes :

$$\left.\begin{array}{ll} 2B_{12} = Bc - Ad + Cb - Da \ ; & B_{11} = BC - AD \ ; \\ 2B_{13} = BC_0 - AD_0 + CB_0 - DA_0 \ ; & B_{22} = bc - ad \ ; \\ 2B_{23} = B_0c - A_0d + C_0b - D_0a \ ; & B_{33} = B_0C_0 - A_0D_0 . \end{array}\right\} \tag{14}$$

Nolīdzinājumu (13) var uzrakstīt proporcijas veidā :

$$\frac{Ax + ay + A_0}{Bx + by + B_0} = \frac{Cx + cy + C_0}{Dx + dy + D_0}, \tag{13'}$$

kā viegli pārliecināties, pareizinot šķērsām proporcijas locekļus un reizinājumus atņemot vienu otram.

Nolīdzinājums (11) ir otrās pakāpes, skāla mainīgam z_2 ir uz koniskās līknes. Meklējot atbalsta nolīdzinājumu skālai z_3 atrod tāpat veidotas formulas, kā (10), (11), (12), tikai agrāko p , q , r vietā tagad jāliek (p), (q), (r). Tā tad, skāla z_3 arī ir uz koniskās liknes. Pāreju no $z_2 \longrightarrow z_3$ jeb no p_i, q_i, $r_i \longrightarrow (p_i)$, (q_i), (r_i), kā rāda izteiksmju (8) un (8') veids, var izdarīt, pārmijot B, B_0, b attiecīgi ar C, C_0, c un otrādi. Tāda pārmaiņa nemaina koeficientus (14) nolīdzinājumā.(13). No tā seko, ka līknei, uz kuŗas ir skāla z_3, ir tāds pat nolīdzinājums, kā otras skālas atbalstam, t.i. abas skālas ir uz

<u>kopīgas koniskās līknes.</u>

Nolīdzinājumā (13) daži koeficienti atkarājas no nenoteiktām konstantām a, b, c, d, kuŗas var izvēlēt pēc patikas, bet protams, saskaņā ar prasību (6). Brīvību minēto konstantu izvēlē var izlietot, lai padarītu līknes nolīdzinājumu vienkāršāku vai arī lai dotu pašai līknei vēlamu veidu. Izvēlēsim viņas tā, lai nolīdzinājumā (13) izzūd loceklis ar mainīgo lielumu reizinājumu.

$$2B_{12} = Bc - Ad + Cb - Da = 0.$$

Tad līknes veids atkarājas no atlikušo kvadrātlocekļu koeficientiem, un proti, mums būs

<u>elipse</u> ja $B_{11}B_{22} = (BC - AD)(bc - ad) > 0$

<u>hiperbola</u> " " " = " " < 0

<u>parabola</u> " " " = " " $= 0$

pieņemot, ka $B_{11} = BC - AD \neq 0$. Elipse pārvērtīsies par <u>riņķi</u>, ja abu kvadrātlocekļu koeficienti vienādi, t.i. ja $bc - ad = BC - AD$.

Ja matricē (6) kāda stabiņa elementi visi ir nulles, tad nolīdzinājumā (13') viens proporcijas locēklis ir nulle, un nolīdzinājums izteic <u>divi taisnes</u>. Tā, piem., ja $A = A_0 = a = 0$, tad no (13') seko

$$Bx + by + B_0 = 0, \quad Cx + cy + C_0 = 0,$$

t.i. divu taišņu nolīdzinājumi.

Nenoteiktās konstantas var izvēlēt tā, ka visi koeficienti. kuri no viņām atkarājas (B_{12}, B_{22}, B_{23}), izzūd :

$$\begin{aligned} Bc - Ad + Cb - Da &= 0, \\ B_0c - A_0d + C_0b - D_0a &= 0, \qquad (15) \\ bc - ad &= 0. \end{aligned}$$

No beidzamā nolīdzinājuma seko :

$$b : a = d : c = \theta,$$

no diviem pārējiem :

$$(p_3)\,\theta^2 - (q_3)\,\theta + (r_3) = 0.$$

Dabū divas vērtības parametram θ, kuŗas ir dažādas un reālas, ja

$$(q_3)^2 - 4(p_3)(r_3) > 0 \qquad (16)$$

Nolīdzinājuma (13) vietā stājas

$$B_{11}x^2 + 2B_{13}x + B_{33} = 0,$$

kas izteic divas taisnes parlalelas ordinātu asij. Viņas ir dažādas un reālas, ja

$$B_{13}^2 - B_{11}B_{33} > 0. \qquad (17)$$

Tā tad, ja nomogrammā divi skālām jābūt paralelām ordinātu asij, funkcijā (1) konstantām jāapmierina prasība (16), (17). Jāpiezīmē, ka abas prasības īstenībā neatšķiŗas, jo abu nevienādību kreisās puses var padarīt identiskas, ņemot palīgā (8) un (14).

IX.

Ceturtās nomografiskās kārtas nolīdzinājumi ar 3 mainīgiem vispārīgā veidā.

Šīs ~~šķiras~~ kārtas nolīdzinājumiem, kreisai pusei ir sekojošs vispārīgais veids :

$$
\begin{aligned}
F_{123} = & F_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + \\
& + G_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) + \\
& + H_3(c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kur a_i, b_i, c_i - konstantas. Apzīmēsim iekavas pēc kārtas ar K, L, M un bez tam, īsuma dēļ pieņemsim apzīmējumus :

$$
\begin{aligned}
A_I &= a_0 f_1 + a_2 & B_I &= b_0 f_1 + b_2 & C_I &= c_0 f_1 + c_2 \\
a_I &= a_1 f_1 + a_3 & b_I &= b_1 f_1 + b_3 & c_I &= c_1 f_1 + c_3 \\
A_{II} &= a_0 f_2 + a_1 & B_{II} &= b_0 f_2 + b_1 & C_{II} &= c_0 f_2 + c_1 \\
a_{II} &= a_2 f_2 + a_3 & b_{II} &= b_2 f_2 + b_3 & c_{II} &= c_2 f_2 + c_3.
\end{aligned}
$$

Funkcijas K, L, M varam sakārtot tiklab attiecībā uz mainīgo z_1, kā arī z_2:

$$
\begin{aligned}
K_{12} &= f_1 A_{II} + a_{II} = f_2 A_I + a_I \\
L_{12} &= f_1 B_{II} + b_{II} = f_2 B_I + b_I \\
M_{12} &= f_1 C_{II} + c_{II} = f_2 C_I + c_I
\end{aligned}
$$

Lai F_{123} varētu uzrakstīt determinanta veidā ar atšķirtiem mainīgiem, funkcijām K, L, M jābūt tādām, ka divi Vronska determinanti identiski izzūd.

Jābūt :
$$
\begin{vmatrix} K_{12} & L_{12} & M_{12} \\ K_1' & L_1' & M_1' \\ K_1'' & L_1'' & M_1'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_1 A_{II} + a_{II} & f_1 B_{II} + b_{II} & f_1 C_{II} + c_{II} \\ f_1' A_{II} & f_1' B_{II} & f_1' C_{II} \\ f_1'' A_{II} & f_1'' B_{II} & f_1'' C_{II} \end{vmatrix} = 0
$$

un
$$\begin{vmatrix} K_{12} & L_{12} & M_{12} \\ K_2' & L_2' & M_2' \\ K_2'' & L_2'' & M_2'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2A_I + a_I & f_2B_I + b_I & f_2C_I + c_I \\ f_2'A_I & f_2'B_I & f_2'C_I \\ f_2''A_I & f_2''B_I & f_2''C_I \end{vmatrix} = 0,$$

kas tā tiešām arī ir, tāpēc ka abos determinantos divu beidzamo rindu elementus atšķir tikai proporcionalitātes faktori.

Abu iepriekšējo noteikumu izpildīšana vēl nenodrošina mainīgo atšķiršanas iespējamību. Funkcijām K, L, M vēl jābūt tādām, ka neviens no liekajiem faktoriem $(\lambda\mu)$ nav nulle. Aprēķinām šo faktoru reizinājumu :

$$\lambda\mu = -f_1'f_2' \begin{vmatrix} a_0f_2 + a_1 & b_0f_2 + b_1 & c_0f_2 + c_1 \\ a_0f_1 + a_2 & b_0f_1 + b_2 & c_0f_1 + c_2 \\ a_if_i + a_3 & b_if_i + b_3 & c_if_i + c_3 \end{vmatrix}, \quad (i = 1,2)$$

vai arī, pēc pārveidojumiem :

$$\lambda\mu = +f_1'f_2' \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & -f_2 & -f_1 & f_1f_2 \end{vmatrix} = f_1'f_2'\nu_0 \qquad (2)$$

Tā kā $\lambda\mu$ nedrīkst būt nulle, tad seko, ka <u>determinantiem, kuŗus dabū nodzēšot matricei</u>

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix}$$

<u>kādu vienu stabiņu, nav visiem reizē jābūt nullēm t.i. matricei jābūt trešā ranga</u>.

Ja šis noteikums ir spēkā, var aprēķināt F_i, G_i, H_i $(i = 1,2)$ Atmetot kopīgos faktorus $\lambda_0 = f_2'$ un $\mu_0 = f_1'$, atrodam parastā kārtā

$$F_1 : G_1 : H_1 \text{ no } \left\| \begin{matrix} a_1 f_1 + a_3 & b_1 f_1 + b_3 & c_1 f_1 + c_3 \\ a_0 f_1 + a_2 & b_0 f_1 + b_2 & c_0 f_1 + c_2 \end{matrix} \right\|, \quad (\lambda_0 = f_2')$$

un tāpat

$$F_2 : G_2 : H_2 \text{ no } \left\| \begin{matrix} a_2 f_2 + a_3 & b_2 f_2 + b_3 & c_2 f_2 + c_3 \\ a_0 f_2 + a_1 & b_0 f_2 + b_1 & c_0 f_2 + c_1 \end{matrix} \right\|, \quad (\mu_0 = f_1')$$

VAr arī, tāpat kā iepriekšējā nodaļā iziet no schemām

$$\begin{matrix} F_1 \\ -G_1 \\ H_1 \end{matrix} = \left| \begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_1 \\ -1 & 0 & f_1 & 0 \end{matrix} \right| ; \quad (\lambda_0 = f_2') \qquad (3)$$

$$\begin{matrix} F_2 \\ -G_2 \\ H_2 \end{matrix} - \left| \begin{matrix} a_0 & a_2 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_2 & c_1 & c_3 \\ 0 & -1 & 0 & f_2 \\ -1 & 0 & f_2 & 0 \end{matrix} \right| ; \quad (\mu_0 = f_1') \qquad (3')$$

un dabūt F_i, $-G_i$, H_i, dzēšot atiecīgi labajā pusē pirmo, otro, trešo rindas. Jāpiezīmē, ka viena schema pārvēršas otrā, ja kādā no viņām pārmij savā starpā indekus 1 un 2.

Piņemot saīsinātus apzīmējumus :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} & q_1 &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} & r_1 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
p_2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} & q_2 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} & r_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (4) \\
p_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} & q_3 &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} & r_3 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$(p_1) = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \quad (q_1) = \begin{vmatrix} b_0 & b_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \quad (r_1) = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(p_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \quad (q_2) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} \quad (r_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (4')$$

$$(p_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} \quad (q_3) = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} \quad (r_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

funkcijas F_i, G_i, H_i varam uzrakstīt izvirzītā veidā :

$$\begin{aligned} -F_1 &= p_1 f_1^2 + q_1 f_1 \cancel{+} r_1 \\ G_1 &= p_2 f_1^2 + q_2 f_1 + r_2 \\ -H_1 &= p_3 f_1^2 + q_3 f_1 + r_3 \end{aligned} \qquad (5)$$

un tāpat

$$\begin{aligned} -F_2 &= (p_1) f_2^2 + (q_1) f_2 + (r_1) \\ G_2 &= (p_2) f_2^2 + (q_2) f_2 + (r_2) \\ -H_2 &= (p_3) f_2^2 + (q_3) f_2 + (r_3) \end{aligned} \qquad (5')$$

Tagad var uzrakstīt funkciju (1) determinanta veidā ar atšķirtiem mainīgiem :

$$F_{123} = \frac{1}{\nu_0} \begin{vmatrix} F_1 & G_1 & H_1 \\ F_2 & G_2 & H_2 \\ F_3 & G_3 & H_3 \end{vmatrix},$$

kur ν_0 vienlīdzīgs determinantam ~~(2)~~ formulā. Attiecīgā nomogramma vispārīgā gadījumā sastāv no 3 līkām skālām :

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{F_1}{H_1} \\ y &= \frac{G_1}{H_1} \end{aligned}\right\} (z_1) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{F_2}{H_2} \\ y &= \frac{G_2}{H_2} \end{aligned}\right\} (z_2) \qquad \left.\begin{aligned} x &= \frac{F_3}{H_3} \\ y &= \frac{G_3}{H_3} \end{aligned}\right\} (z_3)$$

Divas pirmās skālas ir uz kopīgas koniskās līknes, kuŗas nolīdzinājums proporcijas veidā :

$$\frac{a_0 x + b_0 y + c_0}{a_1 x + b_1 y + c_1} = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}.$$

K. Zalts.

Saturs.