

LATVIJAS UNIVERSITĀTE
FIZIKAS UN MATEMĀTIKAS FAKULTĀTE
MATEMĀTIKAS NODAĻA

SIGNĀLU FILTRĀCIJA UN SALĪDZINĀŠANA

BAKALaura DARBS

Autors: **Eduards Goluzins**

Stud. apl. eg09163

Darba vadītājs: doc. Dr.math. Jānis Valeinis

Recenzents: Dr.math. Uldis Strautiņš

RĪGA 2013

Anotācija

Bakalaura darba mērķis ir aplūkot dažādas signālu apstrādes metodes, tās salīdzināt un pielietot praktiskām datu problēmām. Galvenā darba daļa ir veltīta signālu filtrācijas teorijai un tās praktiskajiem pielietojumiem skaņas signālu apstrādē un bio-fizikā. Galvenās filtrācijas metodes, kas aplūkotas darbā ir slīdošās vidējās vērtības metode, augstās/zemās caurlaides metode, kā arī joslas caurlaides metode. Tāpat darbā tiek aplūkota signālu salīdzināšana ar šķērs-korelācijas metodi un apskatīta šīs metodes pielietošana stacionāru laikrindu salīdzināšanai. Tā kā signālu filtrācija ir saistīta ar Furjē transformācijām, tad darba sākuma daļa tiek veltīta Furjē analīzei. Darbā signālu apstrādei tiek izmantoti autoregresīvo un slīdošās vidējās vērtības procesu simulācijas, līdz ar to sniegts neliels ieskats laikrindu analīzē.

Atslēgas vārdi: Slīdošās vidējās vērtības filtrs, loga-sinc filtrs, šķērs-korelācijas funkcija.

Abstract

The goal of this work is to examine methods of signal processing, compare them and explore their practical usage. Main part of the work is dedicated to signal filtration theory and its practical use in sound processing and bio-physics. Two filtration methods are presented: moving average method and windowed-sinc kernel method. Second part of the work is devoted to signal comparison using cross-correlation function and its use for stationary time series. Signal filtration is connected to spectral analysis, therefore concepts of Fourier transforms are being introduced in the beginning part of the work. Also, autoregressive and moving average process simulated values are being used as data for signal processing, for this reason a short introduction into time series analysis is provided.

Keywords: Moving average filter, windowed-sinc filter, cross-correlation function.

Saturs

Ievads	2
1. Furjē transformācijas	4
2. Laikrindu analīze	6
2.1. Nobīdes operators	7
2.2. Lineārie procesi	7
3. Autoregresīvie procesi	9
3.1. AR(1) process	9
3.2. Slīdošās vidējās vērtības procesi	11
3.3. ARMA procesi	12
3.4. ARMA(1,1) process	12
4. Signālu filtrācija	13
4.1. Slīdošās vidējās vērtības filtrs	16
4.2. Loga-sinc filtri	18
5. Signālu salīdzināšana	27
5.1. Šķērs-korelācijas metode	27
6. Praktiskā daļa	29
6.1. Muzikālās kompozīcijas sadalīšana pa instrumentiem	30
6.2. Muzikālās kompozīcijas atbrīvošana no trokšņiem	31
6.3. Signālu apstrādes metožu pielietojums fizikā	32
Nobeigums	37
Izmantotā literatūra un avoti	38
Izveidoto programmu kods	40
1. AR(1) procesi	40
2. ARMA(1,1) procesi	40
3. Slīdošās vidējās vērtības filtrs	40

4.	Loga-sinc filtrs	41
5.	Signālu salīdzināšana	43
6.	Praktiskā daļa	44

Ievads

Signālu apstrādei ir aizvien lielāka nozīme pieaugot signālveida datu vākšanai dažādās zinātnes nozarēs. Tapuši daudz materiāli, kas pēta uzdevumus saistītus ar signālu apstrādi. Līdz ar Kuleja un Tukeja (Cooley and Tukey) 1965. gadā izstrādāto *ātrās Furjē transformācijas* algoritmu tika likts pamats šīs nozares straujai attīstībai. Par piemēriem signālu apstrādes lietojumos varētu minēt skaņas signālu apstrādi audio zinātnē, vizuālo datu apstrādi attēlu inženierijā, elektrokardiogrammu analizēšana bioloģijā, transmisijas procesi telekomunikāciju zinātnē, u.t.t.

Līdz ar datoru parādīšanos iepriekšējā gadsimta sešdesmitajos gados, kad tie vēl bija relatīvi nepieejami, signālu apstrāde tika pielietota tikai Nacionālās drošības uzdevumos, radaru tehnikā, un Kosmosa izpētē [1]. Signālu filtrācijas pirmsākumi, kas veicināja šīs nozares attīstību, meklējami audio ierakstu nozarē, kad parādījās pirmie audio ieraksti. Uzdevums bija panākt skaņas datu līdzīgumu '*reālajai*' skaņai, kas nāca no muzikāliem instrumentiem [2].

Darbā aplūkotas vairākas signālu apstrādes metodes - signālu filtrācija ar *slidošās vidējās vērtības* filtru un *loga-sinc* filtriem, un salīdzināšana ar *šķērs-korelācijas* funkcijas palīdzību, kā arī tiek salīdzinātas filtru pielietošanas iespējas tādu praktisku uzdevumu risināšanā kā signāla trokšņu noņemšana un stipri variējošā signāla atbrīvošana no trokšņiem. Tāpat tiek sniegts teorētiskais pamatojums *loga-sinc* filtrācijas procesam. Veicot signāla filtrāciju tiek veikta filtra iedarbības pārbaude laika domēnā un frekvenču domēnā. Par piemēriem tiek ņemti periodisku funkciju lineārās kombinācijas, kā arī simulētie $AR(1)$, $ARMA(1,1)$ procesi. Paralēli tiek aplūkoti laikrindu analīzes pamatelementi un tiek ieviesti $AR(p)$, $MA(q)$, un $ARMA(p,q)$ procesu jēdzieni, kā arī tiek sniegts ieskats *Furjē analīzes* pamat-atzinumos, uz kuriem balstās signālu aplūkošana frekvenču domēnā.

Darba praktiskajā daļā tiek apskatītas tādas problēmas kā muzikālā skaņdarba sadalīšana pa instrumentiem un skaņas signāla atbrīvošana no trokšņiem. Tāpat tiek pielietotas signālu apstrādes metodes bio-fizikā, kur tiek novērota ar lāzer-pinceti notvertās daļiņas kustība laikā un problēmas nostādne ir noteikt signāla nobīdi pa y asi un to izslēgt, kā arī atrast fāžu starpību signālam pret uzģenerētu $\sin(2\pi 64t)$ signālu un noteikt šīs frekvences sinusoīda amplitūdu, kā arī atrast frekvenci, pie kuras lāzer-pincete zaudē satvērienu pār daļiņu [3]. Pirmos divos gadījumos par problēmas risinājumu tiek piedāvāts izmantot *loga-sinc* filtrus, savukārt pēdējai problēmai tiek pielietotas Furjē transformācijas un

šķērs-korelācijas.

Bakalaura darba mērķi ir sekojoši:

- Iepazīties ar signāla filtrācijas metodēm un veikt to salīdzināšanu.
- Iepazīties ar signālu salīdzināšanas metodi stacionāru laikrindu gadījumā.
- Apskatīt augstāk minēto signālu apstrādes veidu praktiskas pielietošanas iespējas skaņas signālu apstrādē, bio-fizikā un simulētām datu kopām.

Darbs sastāv no 6 nodaļām un pielikuma. Pirmā nodaļa ir veltīta Furjē transformāciju un frekvenču domēna grafika definēšanai. Otrā un trešā nodaļa sniedz ieskatu laikrindu teorijas pamatelementos, tiek definēti $AR(p)$, $MA(q)$, un $ARMA(p,q)$ procesi un aplūkotas to īpašības. Ceturtā nodaļa ir veltīta signālu filtrācijai, tajā tiek apskatīts *Slīdošās vidējās vērtības* filtrs un *Loga-sinc* filtri, tiek veikta to iedarbības pārbaude gan laika domēnā, gan frekvenču domēnā, kā arī tiek salīdzinātas to pielietošanas iespējas. Piek-tajā nodaļā tiek aplūkota metode stacionāro laikrindu salīdzināšanai un tiek apskatīta tās pielietošana simulētiem datiem. Sestā nodaļa veltīta praktisko problēmu risināšanai, pielietojot iepriekš gūtās signālu apstrādes metodes. Pielikumā atrodams programmas **R** kods lietotiem filtriem un signālu salīdzināšanai.

1. Furjē transformācijas

Funkciju reprezentācija frekvenču domēnā balstās uz *Furjē transformācijām*, tāpēc definēsim *Tiešo Furjē transformāciju* un *Inverso Furjē transformāciju*.

Definīcija 1. [4, lpp. 134] Par tiešo Furjē transformāciju sauc

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi tx} dx,$$

kur $f(x) \in S$, kur S apzīmē Švarca telpu.

Definīcija 2. Švarca telpai pieder funkcijas, kas ir nepārtraukti diferencējamas ar kārtu ∞ un konverģē uz nulli, kad $x \rightarrow \infty$, katram $f^{(l)}(x)$ jeb

$$f(x) \in S \iff \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty,$$

katriem $k, l \geq 0$.

Šis nosacījums attiecībā uz funkcijām nav nepieciešams, bet ir pietiekams, lai integrāļi, kas saistīti ar Furjē transformācijām, eksistētu.

Definīcija 3. [4, lpp. 130] Par Inverso Furjē transformāciju sauc

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{2i\pi tx} dt,$$

kur $\hat{f}(t) \in S$.

Šīs divas definīcijas dod iespēju aplūkot jebkuru nepārtrauktu, bezgalīgu signālu gan laika domēnā gan frekvenču domēnā.

Tomēr praksē bieži vien iespējams novērot tikai galīgus signālus diskrētā laikā. Šajā gadījumā, ja novērošanu veic ar vienādu laika atstarpi, ir iespējams veikt *Diskrēto Furjē transformāciju* (DFT) un iegūt koeficientus atsevišķām frekvencēm.

Definīcija 4. [5] Par diskrēto Furjē transformāciju (DFT) sauc

$$X(\omega_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

kur $x(n)$ - diskretizētās signāla vērtības, N - novērojumu skaits, $\omega_k = \frac{2\pi k f_s}{N}$ - k tā frekvence izteikta kā radiāni sekundē un f_s - novērojumu frekvence Hercos.

$X(\omega_k)$ vērtības ir signāla projekcijas uz ortonormētās bāzes vektoriem

$$s_k(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i \frac{2\pi k n}{N}}$$

virs kompleksā lauka \mathbb{C}^N . Tādējādi vienkāršā veidā var rekonstruēt signālu kā superpozīciju no normalizētām projekcijām uz bāzes funkcijām, ko dēvē arī par inverso diskrēto Furjē transformāciju.

Definīcija 5. [5] Par inverso diskrēto Furjē transformāciju (IDFT) sauc

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{i \frac{2\pi k n}{N}}.$$

Analizējot filtru īpašības, tiks aplūkots grafiks G kā tiešās Furjē transformācijas koeficientu $X(\omega_k)$ amplitūdas jeb $|X(\omega_k)|$ atkarībā no frekvences f_k .

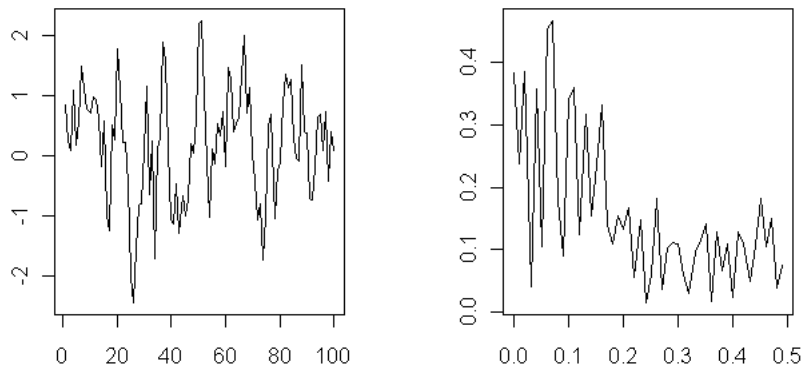
$$G = \{(f_k, |X(\omega_k)|) : k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}\},$$

kur

$$f_k = \frac{2\pi k f_s}{N} = \frac{2\pi k}{N},$$

un

$$|X(\omega_k)| = \sqrt{\text{Re}(X(\omega_k))^2 + \text{Im}(X(\omega_k))^2}.$$



1. att. Pa kreisi - $AR(1)$ process ar $\phi = 0.7$, $n = 100$, pa labi - DFT

2. Laikrindu analīze

Par laikrindu sauc gadījuma lielumu Y_1, \dots, Y_n realizācijas jeb novērotās vērtības. Šie gadījuma lielumi savukārt ir daļa no stohastiskā procesa $\{Y_t : t \in T\}$. Bieži vien ar laikrindu saprot gan novērotās vērtības gan pašu procesu, tomēr ir svarīgi šos jēdzienus atšķirt.

Tāpat kā gadījumu lielumu analīzē ir svarīgi jēdzieni *matemātiskā cerība* un *dispersija*, laikrindu teorijā tie ir *matemātiskās cerības funkcija* un *autokovariācijas funkcija*.

Definīcija 6. [6, lpp. 210] Par stohastiska procesa $\{Y_t\}$ vai $\{Y(t)\}$ matemātiskās cerības funkciju sauc

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx,$$

kur $f_t(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial x}$ un $F_t(x)$ sadalījuma funkcija laika momentā t .

Definīcija 7. [7, lpp. 20] Par stohastiska procesa $\{Y_t\}$ kovariācijas funkciju sauc

$$\gamma(s, t) = E[(Y_s - \mu_s)(Y_t - \mu_t)].$$

Ja šī funkcija ir atkarīga tikai no laika atstarpes $|t - s|$, tad to sauc par autokovariācijas funkciju un, ņemot vērā, ka $s = t + h$, to var uzrakstīt kā $\gamma(t + h, t) = \gamma(h, 0) = \gamma(h)$.

Definīcija 8. [8, lpp. 17] Stohastisku procesu $\{Y_t : t \in T\}$ sauc par stiprā nozīmē stacionāru, ja $\forall k > 0$ un $\forall t_1, \dots, t_k \in T$, galīgi dimensionāls sadalījuma vektors

$$(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_k})$$

ir tāds pats kā

$$(Y_{t_1+u}, \dots, Y_{t_k+u}),$$

katram $u > 0$.

Definīcija 9. [8, lpp. 18] Stohastisku procesu $\{Y_t : t \in T\}$ sauc par stacionāru vājā nozīmē, ja

1) $\mu(t) = c$, kur c ir kāda konstante.

2) $\gamma(s, t) = \varphi(|t - s|)$, jeb kovariāciju funkcija ir atkarīga tikai no laika atstarpes $|t - s|$.

Ja process ir stacionārs, tad ir noderīgi ieviest autokorelācijas funkcijas jēdzienu $\rho(u) = \gamma(u)/\gamma(0)$.

Šīs definīcijas ir nepieciešamas, lai definētu signāla *troksni*, kuru filtrācijas procesa gaitā mēģina noņemt vai arī samazināt tā iedarbību.

Definīcija 10. [8, lpp. 18] Par troksni sauc stohastisku procesu $\{\varepsilon_t : t \in T\}$, kuram izpildās

$$\begin{aligned} 1) \mu(t) &= 0, \\ 2) \gamma(h) &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{ja } h = 0 \\ 0, & \text{citādi.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1. Nobīdes operators

Ieviesīsim *nobīdes* operatora jēdzienu, kurš būs svarīgs laicrindu īpašību analīzē.

Definīcija 11. [8, lpp. 19] Nobīdes operators L laicrindai $\{Y_t\}$ tiek definēts kā

$$LY_t = Y_{t-1}.$$

Definīcija 12. [8, lpp. 19] Lineārām kombinācijām nobīdes operatoru definē kā

$$L(\alpha Y_{t_1} + \beta Y_{t_2}) = \alpha Y_{t_1-1} + \beta Y_{t_2-1}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Pielietojot to autokovariāciju funkcijai, var redzēt, ka

$$\text{cov}(LY_s, LY_t) = \text{cov}(LY_{s-1}, LY_{t-1}) = \text{cov}(Y_s, Y_t).$$

Definīcija 13. [8, lpp. 19] Dabiskais veids kā definēt L^k ir

$$L^k Y_t = Y_{t-k}.$$

To var redzēt piemērā $L^2 Y_t = L(LY_t) = LY_{t-1} = Y_{t-2}$. Līdzīgi lineārām kombinācijām

$$(\alpha L^k + \beta L^l) Y_t = \alpha Y_{t-k} + \beta Y_{t-l}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, k, l \in \mathbb{N}.$$

2.2. Lineārie procesi

Kā pirmo no lineārajiem procesiem definēsim *autoregresīvo* modeli ar kārtu 1 jeb $AR(1)$ sekojošā veidā

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \xi_t, \tag{2.1}$$

kur ϕ ir konstante ar $|\phi| < 1$, kas ir nepieciešamais nosacījums stacionāras laikrindas eksistencei, un ξ_t ir *troksnis*, kurš definēts 10. definīcijā.

Parādīsim, ka veicot pārveidojumus ar šo vienādību, autoregresīvo modeli var uzrakstīt lineārajā formā

$$\sum_{u=0}^{\infty} \phi^u \xi_{t-u},$$

kas ļauj šo procesu uztvert, kā bezgalīgu pagātnes trokšņu lineāru svērtu kombināciju. Vienādību (2.1) var uzrakstīt formā

$$(1 - \phi L)Y_t = \xi_t.$$

Apgalvojums 1. [10, 6.1] Operatoram $(1 - \phi L)$ eksistē inversais operators $(1 - \phi L)^{-1}$, kurš pierakstāms formā

$$\sum_{u=0}^{\infty} \phi^u L^u.$$

Tādējādi vienādību (2.1) var pārrakstīt kā

$$Y_t = \sum_{u=0}^{\infty} \phi^u L^u \xi_t = \sum_{u=0}^{\infty} \phi^u \xi_{t-u}.$$

Inversais operators tiek definēts kā robeža, kad $n \rightarrow \infty$, izteiksmei

$$\sum_{u=0}^n \phi^u \xi_{t-u}.$$

Apgalvojums 2. [8, lpp. 18] Gadījuma lielumi ar $EX = 0$ un $E|X|^2 < \infty$ veido Hilberta telpu, kur skalārais reizinājums tiek definēts kā $\langle X, Y \rangle = E(XY)$.

Tādējādi iepriekšminētā rinda konverģē, ja

$$\left\| \sum_{u=n+1}^{\infty} \phi^u \xi_{t-u} \right\|^2 \rightarrow 0.$$

Tā kā $E\phi^u \xi_{t-u} = 0 \quad \forall u, \forall t$ un $cov(\xi_i, \xi_j) = 0$, ja $i \neq j$, tad

$$\left\| \sum_{u=n+1}^{\infty} \phi^u \xi_{t-u} \right\|^2 = D\left(\sum_{u=n+1}^{\infty} \phi^u \xi_{t-u} \right) = \sum_{u=n+1}^{\infty} \phi^{2u} \sigma^2.$$

Tā kā $|\phi| < 1$, tad atlikumu rinda konverģē uz nulli un $EY_t^2 < \infty$, kas nozīmē, ka šis elements pieder Hilberta telpai.

Definīcija 14. [8, lpp. 20] $\{Y_t\}$ sauc par lineāru procesu, ja

$$Y_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} \psi_u \xi_{t-u},$$

kur ξ_t ir troksnis un $\sum_{u=-\infty}^{\infty} |\psi_u|^2 < \infty$.

Vispārīgais lineārais process atkarīgs gan no pagātnes ξ_t vērtībām, gan no nākotnes vērtībām. Lineāru procesu, kurš atkarīgs tikai no tagadnes un pagātnes vērtībām, sauc par *kauzālu* jeb *cēlonisku*. Kauzālus procesus izmanto biežāk nākotnes vērtību paredzēšanai, jo tie atspoguļo mūsu izziņas principus.

3. Autoregresīvie procesi

Definīcija 15. [8, lpp. 21] $\{Y_t\}$ sauc par autoregresīvu procesu ar kārtu p jeb $AR(p)$, ja

$$Y_t = \psi_1 Y_{t-1} + \dots + \psi_p Y_{t-p} + \xi_t,$$

kur ξ_t ir troksnis un $|\psi_u| < 1$.

Autoregresīvie procesi ir svarīgi, jo:

1. Viņiem ir skaidra interpretācija - nākotnes vērtība atkarīga no pagātnes vērtībām.
2. Viegli novērtēt to parametrus.
3. Viegli paredzēt to nākotnes vērtības.

3.1. AR(1) process

$AR(1)$ process pierakstāms kā

$$Y_t = \psi Y_{t-1} + \xi_t. \tag{3.1}$$

Tā kā Y_t un ξ_t ir nekorelēti, jo Y_{t-1} atkarīgs tikai no pagātnes ξ vērtībām, tad šīs procesa dispersija ir

$$D(Y_t) = \psi^2 D(Y_{t-1}) + \sigma_{\xi}^2,$$

kur $\sigma_\xi^2 = D(\xi_t)$. Ja $\{Y_t\}$ ir stacionārs process, tad $D(Y_t) = D(Y_{t-1}) = \sigma_Y^2$ un tādējādi

$$\sigma_Y^2 = \psi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\xi^2. \quad (3.2)$$

Tas, savukārt, nozīmē, ka $\sigma_Y^2 > \psi^2 \sigma_Y^2$ jeb $1 > \psi^2$, kas ir nepieciešamais nosacījums stacionāra atrisinājuma eksistencei. Var pierādīt, ka nepieciešamais un pietiekamais nosacījums stacionāra atrisinājuma eksistencei ir vienādojuma

$$1 - \psi z = 0,$$

kur $z \in \mathbb{C}$, saknes atrašanās ārpus vienības riņķa.

Ja vienādojumā (3.1) mēs pareizinām abas puses ar Y_{t-u} un meklējam matemātisko cerību, tad mēs iegūstam

$$E(Y_t Y_{t-u}) = \phi E(Y_{t-1} Y_{t-u}) + E(\xi_t Y_{t-u}).$$

$E(\xi_t Y_{t-u}) = 0$, jo Y_{t-u} ir neatkarīgs no ξ_t . Tas nozīmē, ka autokovariāciju funkcijai jāapmierina rekursīvā sakarība

$$\gamma(u) = \phi \gamma(u-1), \quad u = 1, 2, 3, \dots$$

Turpinot rekursiju, seko

$$\gamma(u) = \phi \gamma(u-1) = \phi^2 \gamma(u-2) = \dots = \phi^u \gamma(0), \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

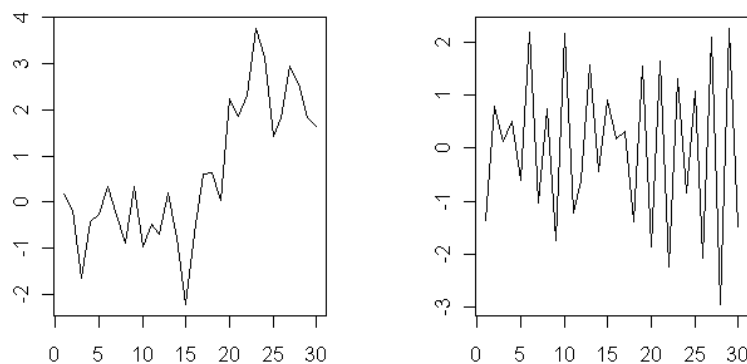
Pārveidojot vienādojumu (3.2) iegūstam $\gamma(0) = \sigma_\xi^2 / (1 - \phi^2)$, no kā seko

$$\gamma(u) = \frac{\phi^u \sigma_\xi^2}{1 - \phi^2}, \quad \text{kur } u = 0, 1, 2, \dots$$

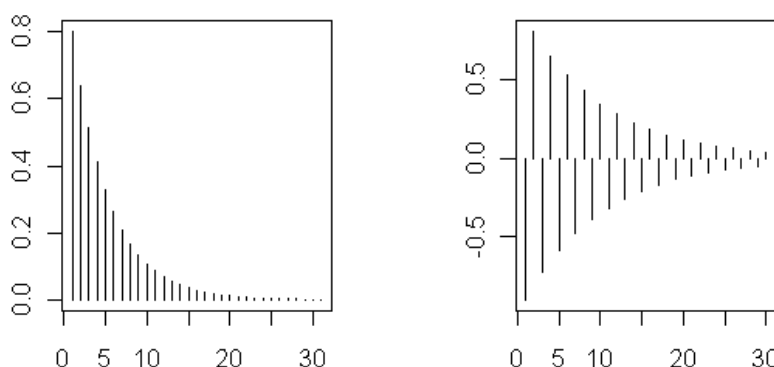
Autokorelācijas funkciju iegūst dalot autokovariācijas funkciju ar $\gamma(0)$

$$\rho(u) = \phi^u, \quad \text{kur } u = 0, 1, 2, \dots$$

Autokorelācijas funkciju un procesa simulāciju var aplūkot 2. un 3. attēlā.



2. att. Pa kreisi - $AR(1)$ ar $\phi = 0.8$, $n = 30$ pa labi - $AR(1)$ ar $\phi = -0.9$, $n = 30$



3. att. Pa kreisi - $\rho(u)$ ar $\phi = 0.8$, $n = 30$ pa labi - $\rho(u)$ ar $\phi = -0.9$, $n = 30$

3.2. Slīdošās vidējās vērtības procesi

Laikrindu $\{Y_t\}$, kurai izpildās

$$Y_t = \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \dots + \theta_q \xi_{t-q}, \quad (3.3)$$

kur $\{\xi_t\}$ ir *troksnis*, sauc par slīdošās vidējās vērtības $MA(q)$ procesu ar kārtu q . Šis process ir stacionārs, un procesa autokovariāciju funkcija ir

$$\gamma(u) = \begin{cases} (1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)\sigma^2 & \text{ja } u = 0 \\ (\theta_u + \theta_1\theta_{u+1} + \dots + \theta_{q-u}\theta_q) & u = 1, \dots, q \\ 0 & \text{citādi.} \end{cases}$$

Tas nozīmē, ka process atkarīgs no galīga skaita iepriekšējām vērtībām. Ir viegli atšķirt AR un MA procesus pēc to autokorelāciju funkcijām. MA procesa autokorelāciju funkcija 'apraujās' strauji, bet AR procesam tā dilst eksponenciāli.

3.3. ARMA procesi

Definīcija 16. [8, lpp. 30] Par ARMA(p,q) procesu sauc laikrindu, kurai izpildās

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \xi_t + \theta_1 \xi_{t-1} + \dots + \theta_q \xi_{t-q}, \quad (3.4)$$

kur $\{\xi_t\}$ ir *troksnis*, $|\phi_u| < 1$, $|\theta_u| < 1$.

Apgalvojums 3. [8, lpp. 31] ARMA(p,q) proces ir stacionārs, ja

$$1 - \phi_1 z - \dots - \phi_p z^p, \quad z \in \mathbb{C}$$

saknes atrodas ārpus vienības riņķa.

3.4. ARMA(1,1) process

ARMA(1,1) process pierakstāms formā

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \xi_t + \theta \xi_{t-1}. \quad (3.5)$$

Lai atrastu autokovariāciju funkciju $\{Y_t\}$, jāievēro, ka

$$E(\xi_t Y_t) = E[\xi_t (\phi Y_{t-1} + \xi_t + \theta \xi_{t-1})] = \sigma_\xi^2$$

un

$$E(\xi_{t-1} Y_t) = E[\xi_{t-1} (\phi Y_{t-1} + \xi_t + \theta \xi_{t-1})] = \phi \sigma_\xi^2 + \theta \sigma_\xi^2 = (\phi + \theta) \sigma_\xi^2.$$

Pareizinot vienādību (3.5) ar Y_{t-u} un atrodot matemātisko cerību, varam parādīt, ka

$$\gamma(u) = \begin{cases} \phi \gamma(1) + (1 + \theta(\phi + \theta)) \sigma_\xi^2, & u = 0 \\ \phi \gamma(0) + \theta \sigma_\xi^2, & u = 1 \\ \phi \gamma(u-1), & u \geq 2 \end{cases}$$

Aprēķinot pirmās divas vienādības iegūst

$$\gamma(0) = \frac{(1 + 2\theta\phi + \theta^2)}{1 - \phi^2} \sigma_\xi^2,$$

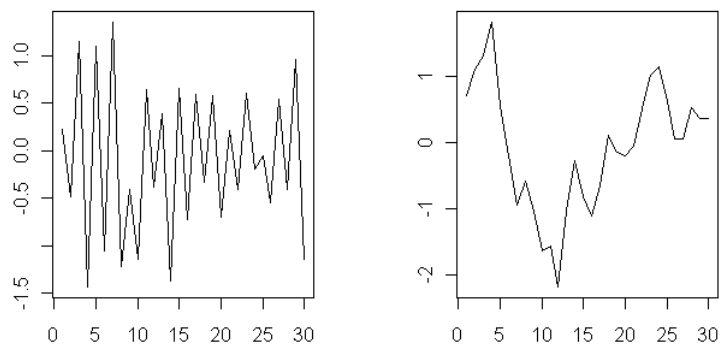
un, pielietojot gadījumam, kad $u \geq 2$ rekursīvo sakarību var parādīt, ka

$$\gamma(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\theta + \phi)}{1 - \phi^2} \phi^{u-1} \sigma_\xi^2, \quad u \geq 1.$$

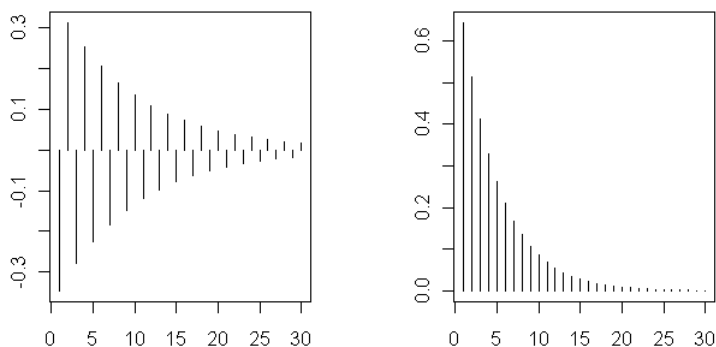
Tādējādi ARMA(1,1) procesa autokorelācijas funkcija ir

$$\rho(u) = \frac{(1 + \theta\phi)(\theta + \phi)}{1 + 2\theta\phi + \phi^2} \phi^{u-1}, \quad u \geq 1.$$

Procesu simulācijas var redzēt (4. attēlā).



4. att.: Pa kreisi - $ARMA(1,1)$ ar $\phi = -0.9, \theta = 0.3, n = 30$ pa labi $ARMA(1,1)$ ar $\phi = 0.8, \theta = 0.3, n = 30$



5. att.: Pa kreisi - $\rho(u)$ ar $\phi = -0.9, \theta = 0.3, n = 30$ pa labi $\rho(u)$, ar $\phi = -0.9, \theta = 0.3, n = 30$

4. Signālu filtrācija

Signālu apstrādē par *filtrāciju* sauc procesu, kurā signālam tiek noņemta vai apslāpēta kāda nevēlama sastāvdaļa. Visbiežāk tas nozīmē nevēlamo frekvenču noņemšanu, lai atbrīvotos no *trokšņiem*.

Definīcija 17. [8, lpp. 78] Par filtru sauc operāciju, kura ieejas signālu pārvērš citā signālā. Ja $\{Y(t)\}$ ir izejas signāls, tad filtru var pierakstīt šādi

$$Y(t) = \mathbb{A}[X](t).$$

Definīcija 18. [8, lpp. 78] Filtru sauc par lineāru, ja jebkuriem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ir spēkā šāda sakarība

$$\mathbb{A}[\alpha X + \beta Y](t) = \alpha \mathbb{A}[X] + \beta \mathbb{A}[Y].$$

Definīcija 19. [8, lpp. 78] Filtru sauc par invariantu attiecībā pret laiku (*laika-invariants*), ja

$$\mathbb{A}[L^u X](t) = L^u \mathbb{A}[X](t).$$

Viena no lineārajām, laika-invariantām filtru klasēm ir pierakstāma formā

$$\mathbb{A}[X](t) = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a(u)X(t-u),$$

kur $a(u)$ ir filtra koeficienti. Tālāk aplūkoti filtri pieder šai filtru klasei.

Signālu filtrācija balstās uz Furjē transformāciju īpašībām, konkrēti, uz funkciju konvolūcijas Furjē transformāciju.

Definīcija 20. [4, lpp. 139] Par divu uz reālās taisnes integrējamu funkciju f un g konvolūciju sauc funkciju $(f * g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ka izpildās:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Apgalvojums 4. Konvolūcijas operācija ir komutatīva jeb $(f * g)(x) = (g * f)(x)$.

Pierādījums. $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt = \int_{\infty}^{-\infty} -f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du = (g * f)(x)$ □

Apgalvojums 5. $\widehat{(f * g)}(x) = \widehat{f}(x)\widehat{g}(x)$.

Pierādījums. $\widehat{(f * g)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-2i\pi tx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right) e^{-2i\pi tx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-2i\pi t(x+y)}dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2i\pi tx}dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2i\pi ty}dy \right) = \widehat{f}(t)\widehat{g}(t)$ □

Būtībā šī īpašība parāda, ka divu funkciju konvolūcijas Furjē transformācija ir šo funkciju atsevišķo Furjē transformāciju reizinājums. Šī īpašība ir signālu filtrācijas pamatā, jo tā paver iespēju iegūt jebkādu frekvenču reakciju, kāda ir būtiska konkrētai situācijai. Funkciju, ar kuru tiek veikta konvolūcija ieejas datiem, sauc par kodolu. Tomēr praksē signāli ir galīgi un tāvad jāizmanto diskrētā cikliskā konvolūcija

$$(x * y)(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)y(n-m), \text{ kur } y(-i) = y(N-i), i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Analoģiski kā nepārtrauktā gadījumā var pierādīt, ka šai konvolūcijai izpildītās tās pašas īpašības [5, lpp. 151]. Kā redzams mums ir jāgarantē, lai signāli ir vienāda garuma, kas praksē bieži vien ir neērti, ja mēs vēlamies vienu signālu turēt konstantu, kā piemēram gadījumā ar filtra kodolu, un mainīt tikai otro signālu, kuru vēlamies filtrēt. Šajā gadījumā mēs varam papildināt īsāko signālu ar nullēm līdz abi signāli kļūst vienāda garuma

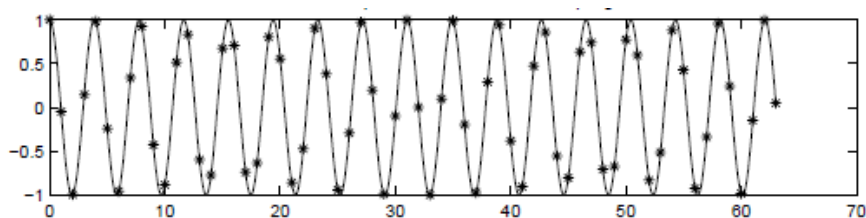
$$x = (x(0), x(1), \dots, x(N-1), 0_1, \dots, 0_l).$$

Pielietojot šim jaunajam signālam DFT, iegūst

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1+l} x(n) e^{-i \frac{2\pi kn}{N+l}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i \frac{2\pi kn}{N+l}}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1+l.$$

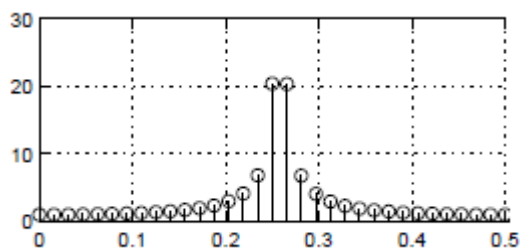
Šo īpašību signālu apstrādē dēvē arī par interpolāciju. Kā redzams jauniegūtais signāls iegūst lielāku rezolūciju jeb palielinās DFT koeficientu skaits.

Aplūkosim piemēru, kur par signālu tika ņemts $x(n) = \cos(2\pi n(0.25 + \frac{0.5}{N}))$ un $N = 64$



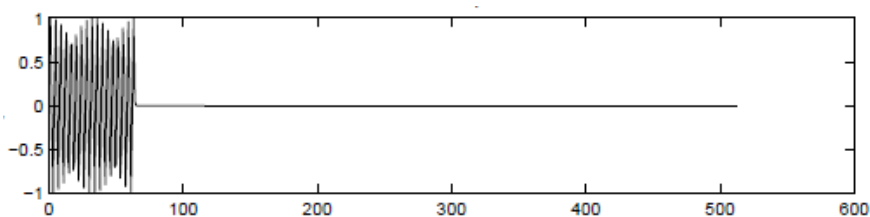
6. att. $\cos(2\pi n(0.25 + \frac{0.5}{N}))$

Veicot šim signālam DFT iegūsim



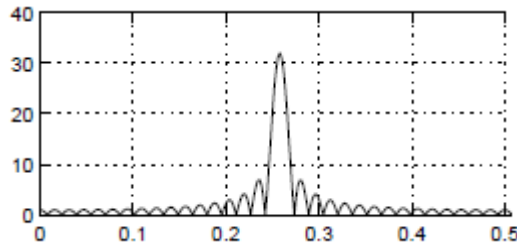
7. att. Frekvenču domēns

Savukārt, ja mēs šim signālam pievienosim vēl 448 nulles, tad signāls iegūs formu,



8. att. Signāls ar pievienotām nullēm

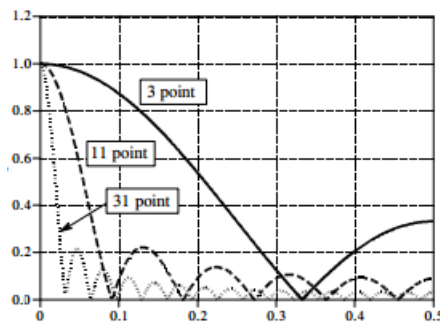
un, apskatot jauniegūtā signāla DFT, var redzēt, ka ir palielinājusies frekvenču reakcijas rezolūcija.



9. att. Frekvenču domēns

4.1. Slīdošās vidējās vērtības filtrs

Šis filtrs ir ļoti bieži izmantots signālu apstrādē, jo tas pēc būtības ir viegli saprotams un izejas signāls tiek labi nogludināts, kā arī skaitļošanas apjoms ir relatīvi mazs salīdzinot ar citām filtrācijas metodēm. Šo filtru izmanto laika domēnā, lai samazinātu trokšņa iedarbību, bet to nevar izmantot frekvenču domēnā, lai atdalītu konkrētas frekvences, jo frekvenču reakcija ir izskatā:



10. att. $n = 3$, $n = 11$, $n = 31$

Slīdošās vidējās vērtības filtrs pierakstāms šādā formā

$$\mathbb{A}[X](t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{u=-n}^n X(t-u),$$

Var parādīt, ka šis filtrs ir lineārs

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[\alpha X + \beta Y](t) &= \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{u=-n}^n \alpha X(t-u) + \beta Y(t-u) \right) = \\ &= \alpha \frac{1}{2n+1} \sum_{u=-n}^n X(t-u) + \beta \frac{1}{2n+1} \sum_{u=-n}^n Y(t-u) = \alpha \mathbb{A}[X] + \beta \mathbb{A}[Y]. \end{aligned}$$

Parādīsim, ka šis filtrs ir arī laika-invariants

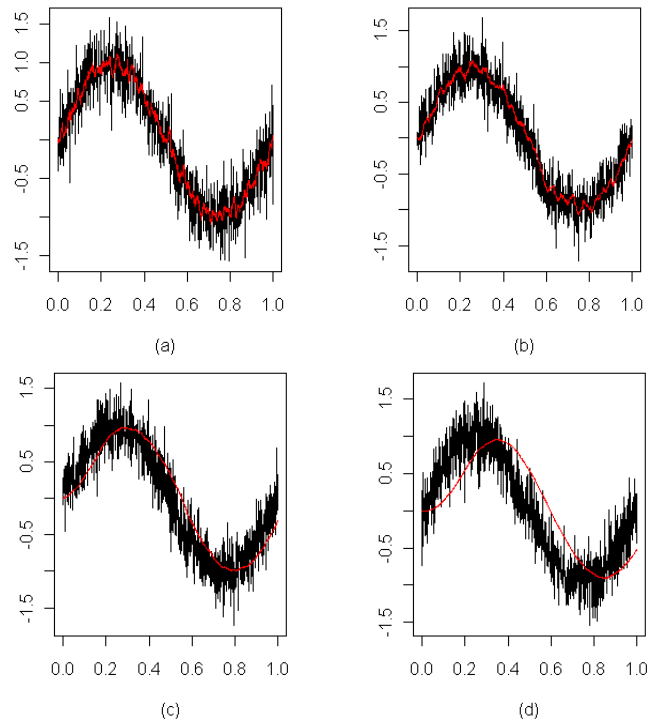
$$\mathbb{A}[L^k X](t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{u=-n}^n X(t-k-u) = \mathbb{A}[X](t-k) = L^k \mathbb{A}[X](t).$$

Šis filtrs pieder iepriekšminētai klasei, pieņemot, ka $a(u) = 0$, kad $u > n$.

Gadījumā, ja

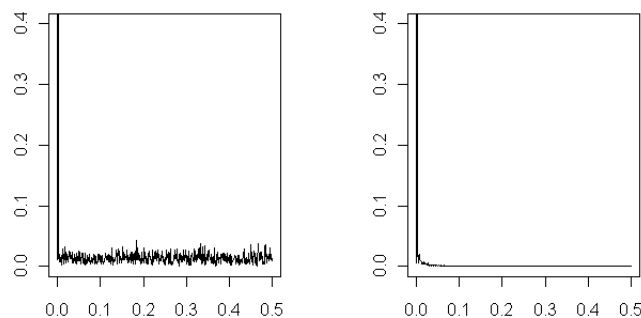
$$X(t) = \sin(2\pi t) + 0.25\xi,$$

kur $\xi \sim N(0, 1)$, slīdošās vidējās vērtības filtra iedarbību ar dažādu atsauces elementu skaitu n var aplūkot 11. attēlā.



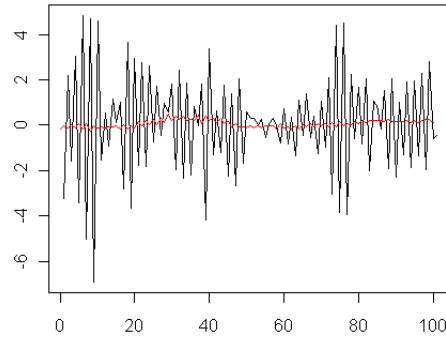
11. att. (a) $n = 5$, (b) $n = 10$, (c) $n = 50$, (d) $n = 100$.

Grafikā redzams kā, mainot atsauces elementu skaitu (n nākotnes un pagātnes vērtības), signāls tiek nogludināts. To arī var redzēt, aplūkojot šos signālus frekvenču domēnā.



12. att. Pa kreisi - nefiltrēta signāla DFT pa labi - filtrēta signāla DFT

Kā redzams, relatīvi augsto frekvenču amplitūdas tiek nogludinātas, kas arī bija šī filtra mērķis.



13. att. $AR(1)$ ar $\phi = -0.9$, $n = 10$

Tomēr, ja mēs apskatām tādu procesu kā $AR(1)$ ar $\phi = 0.9$, tad šis filtrs neparāda procesa īpatnības, kas varētu būt svarīgas, piemēram, valūtu tirgū un citviet. Šim nolūkam labāk lietot *Loga-sinc* filtru.

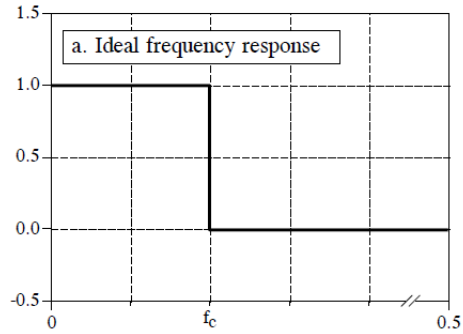
4.2. Loga-sinc filtri

Loga-sinc (windowed-sinc) filtrus izmanto, lai izdalītu kādu konkrētu frekvenču joslu. Tas ir ļoti stabils, tomēr veido fluktuācijas frekvenču domēnā, caurlaides frekvenču joslā.

Ideālā gadījumā mēs vēlamies, lai filtrs nekādā veidā neiedarbojās uz kādu iepriekš noteiktu frekvenču joslu, bet pārējās frekvences mēs vēlamies pilnībā apslāpēt. Par *Low-Pass* filtriem sauc tos, kuri atstāj tikai signāla zemās frekvences. Analogiski par *High-Pass* filtriem sauc tos, kuri atstāj tikai signāla augstās frekvences. Tā kā zems un augsts ir relatīvi jēdzieni, tad precīzāk būtu saukt par zemām frekvencēm tās, kuras ieiet $[0, f_c]$ frekvenču intervālā, bet par augstām $[f_c, \infty]$ frekvenču intervālā, kur f_c - lielākā vai mazākā pieļaujamā frekvence.

Zemās caurlaides filtrs

Apskatīsim zemās caurlaides (Low-Pass) filtru ar zemāko pieļaujamo frekvenci f_c , kur f_c izteikta kā novērošanas frekvences daļa, kas ir ne lielāka par 0.5.



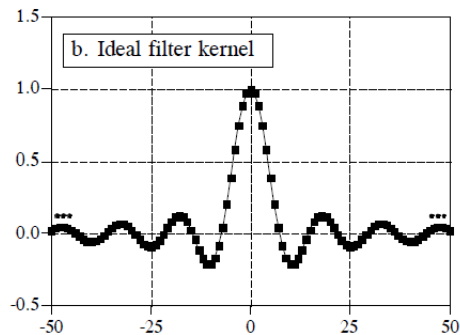
14. att. Vēlamā frekvenču reakcija.

Veicot Inverso Furjē transformāciju šādai frekvenču reakcijai (*frequency response*) mēs iegūstam filtra kodolu

$$h(k) = \frac{\sin(2\pi f_c k)}{k\pi},$$

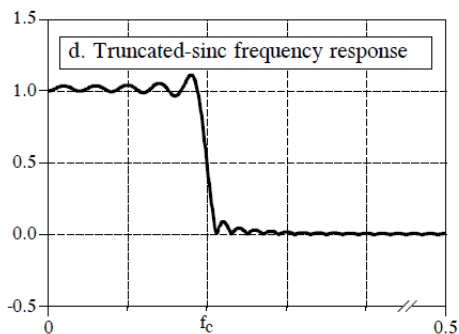
kas tiek saukta par *sinc* funkciju.

Vispārīgā veidā $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ grafiks izskatās šādi



15. att. Diskrētizēta *sinc* funkcija.

Veicot konvolūciju ieejas signālam ar šo filtra kodolu, mēs iegūstam *ideālo Low-Pass* filtru. Tomēr problēma ir tāda, ka šī funkcija tikai asimptotiski tiecās uz nulli un tātad ir jāievēro visas šī kodola vērtības. Lai izvairītos, no šīs problēmas, mēs varam 'apraut' *sinc* funkciju piešķirot tai nulles vērtību, kad $|x| > l$, kur $l \in \mathbb{R}$. Tomēr šī 'apraušana' veido fluktuācijas frekvenču reakcijas grafikā.

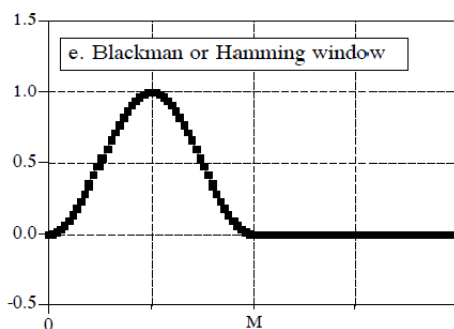


16. att. Frekvenču reakcija ar diskretizēto *sinc* funkciju.

Tomēr ir iespējams padarīt to gludāku sareizinot 'aprauto' *sinc* funkciju ar kādu no *loga* funkcijām. Ņemsim par piemēru *Blackman loga* funkciju

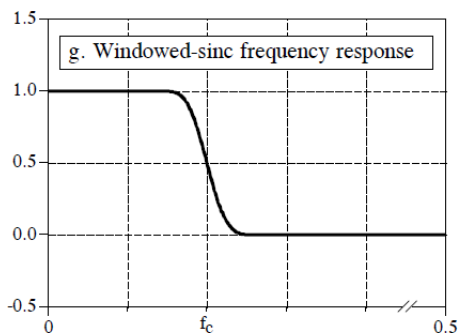
$$w(k) = 0.42 - 0.5 \cos(2\pi k/M) + 0.08 \cos(4\pi k/M),$$

kur $k = 0, 1, \dots, M$ un M - *sinc* funkcijas diskrēto vērtību skaits no 0 līdz l .



17. att. Diskrētizēta *Blackman loga* funkcija.

Sareizinot šīs abas funkcijas, mēs iegūstam kodolu, kas ir vairāk nogludināts un tā frekvenču reakcija izskatās šādi



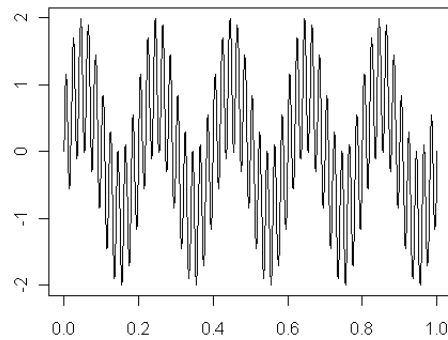
18. att. Frekvenču reakcija ar diskretizēto *Blackman – sinc* funkciju.

Šo kodolu var pierakstīt formā

$$h[k] = K \frac{\sin(2\pi f_c(k - M/2))}{k - M/2} [0.42 - 0.5 \cos(2\pi k/M) + 0.08 \cos(4\pi k/M)],$$

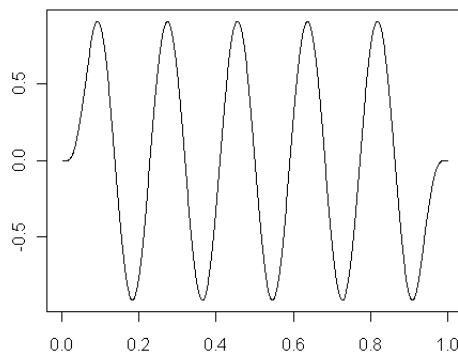
kur $h[M/2] = 2\pi f_c K$ un K tiek izvēlēts tā, lai $\sum_{k=0}^M h(k) = 1$. Normēšana ir nepieciešama, lai frekvenču domēnā kodolam būtu vienības amplitūda [1].

Piemērs 1. $X(t) = \sin(100\pi t) + \sin(10\pi t)$, $t \in [0, 1]$.



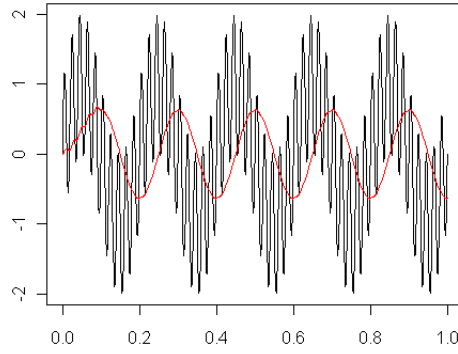
19. att. Nefiltrēts signāls.

Pielietojot *Loga-sinc* filtru, varam izfiltrēt svārstības ar augstu frekvenci, pieņemot par $f_c = 0.01$, kur novērošanas frekvence $f = 1kHz$.



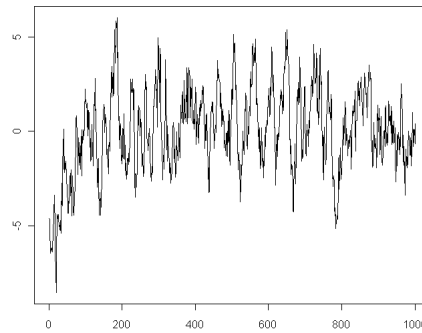
20. att. *Loga-sinc* filtrs ar $f_c = 0.01$.

Kā redzams veidojās neliela fāžu nobīde, bet augstas frekvences svārstības tiek pilnībā noņemtas. 21. attēlā redzams, kas notiek, pielietojot šim pašam signālam slidošās vidējās vērtības filtru ar $n = 50$.



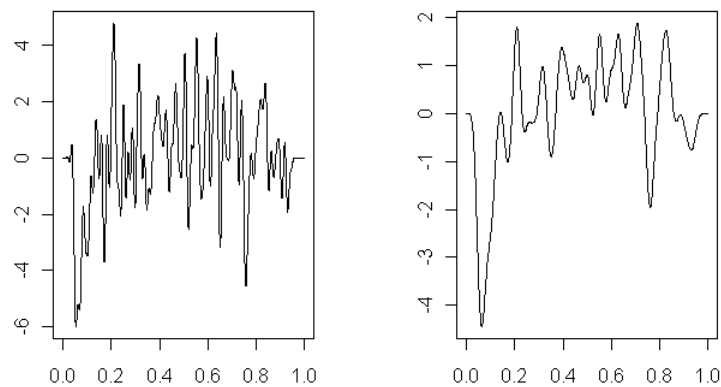
21. att. Slīdošās vidējās vērtības filtrs ar $n = 50$.

Piemērs 2. AR(1) ar $\phi = 0.9$



22. att. AR(1) ar $\phi = 0.9$.

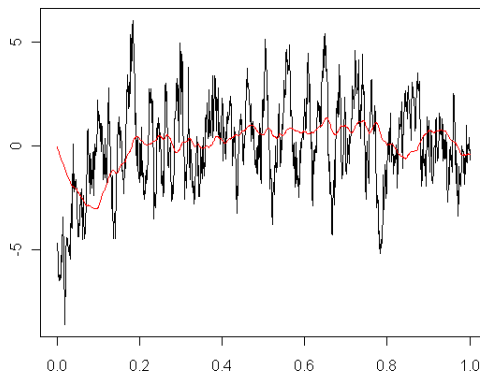
Pielietojot filtru ar dažādām f_c vērtībām iegūst



23. att. Pa kreisi - $f_c = 0.05$, pa labi - $f_c = 0.01$

Kā redzams ar šī filtra palīdzību ir iespējams prognozēt galvenos procesa trendus, neievērojot *trokšņus*.

Pielietojot šim procesam slidošās vidējās vērtības filtru ar $n = 50$ iegūst



24. att. *Slidošās vidējās vērtības* filtrs ar $n = 50$.

Vizuāli redzams, ka šis filtrs parāda tikai vidējās vērtības kādā laika intervālā, neievērojot stipras svārstības ap šo vidējo vērtību.

Augstās caurlaides filtrs

Šī filtra būtība ir tāda pati kā zemās caurlaides filtram, tomēr šajā gadījumā neaiztikas paliek augstās frekvences. Šādu filtru var izmantot, piemēram, lai iegūtu informāciju par trokšņiem.

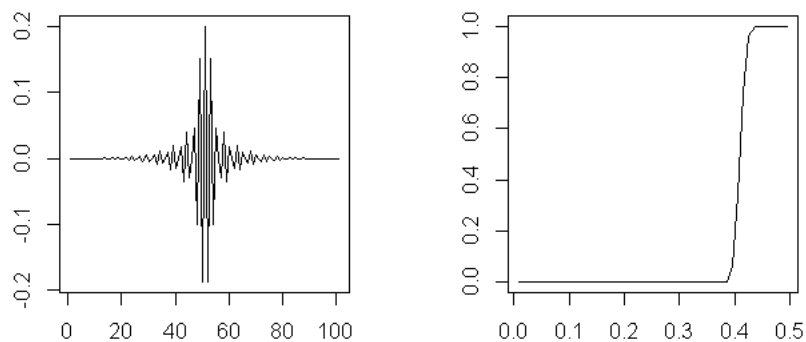
Filtra kodolu iegūst veicot spektrālo apgriešanu, t.i. pareizinot ar -1 zemās caurlaides filtra kodola vērtības un pieskaitot 1 kodola simetrijas centram. [1, lpp. 272]

Iegūtais filtra kodols ir formā

$$h[k] = -K \frac{\sin(2\pi f_c(k - M/2))}{k - M/2} [0.42 - 0.5 \cos(2\pi k/M) + 0.08 \cos(4\pi k/M)],$$

kur $h[M/2] = -2\pi f_c K + 1$.

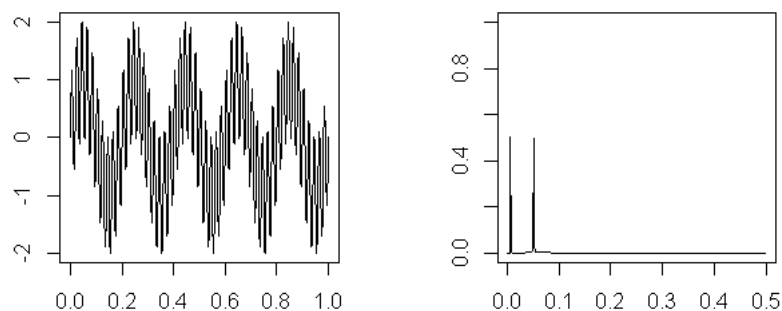
Piezīme 6. *Augstāk minētais augstās caurlaides filtra kodols nav viennozīmīgs, tas ir atkarīgs no gludinošās loga funkcijas izvēles. Šajā gadījumā tā ir Blackman loga funkcija.*



25. att. Pa kreisi - Kodols pa labi - Frekvenču reakcija

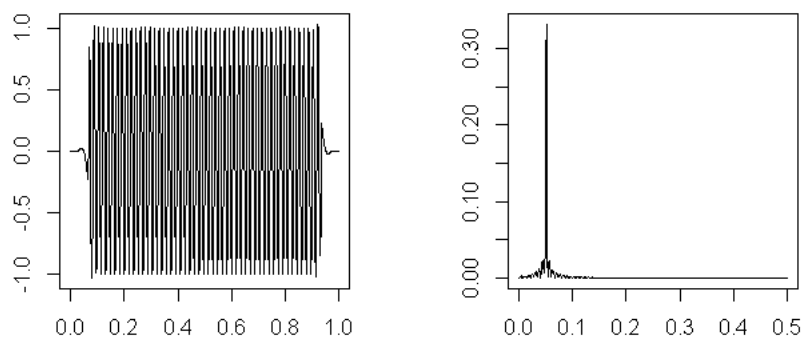
Aplūkosim salīdzināšanai piemērus, kas tika apskatīti pie zemās caurlaides filtra.

Piemērs 1. $X(t) = \sin(100\pi t) + \sin(10\pi t)$, $t \in [0, 1]$.



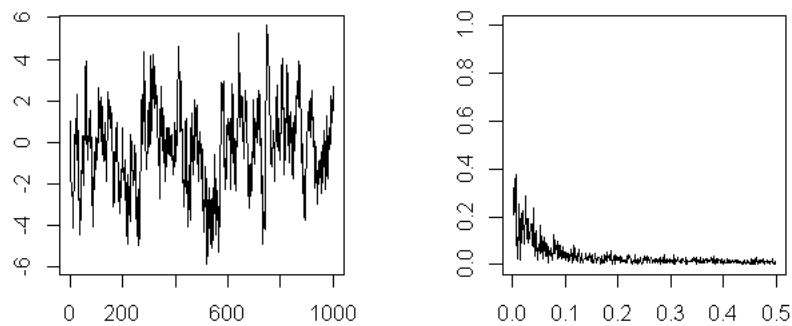
26. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns

Pielietojot augstās caurlaides filtru ar $f_c = 0.01$ un novērošanas frekvenci $f = 1kHz$, varam redzēt kā tiek noņemta zemās frekvences komponente un atstāta trokšņveida komponente.

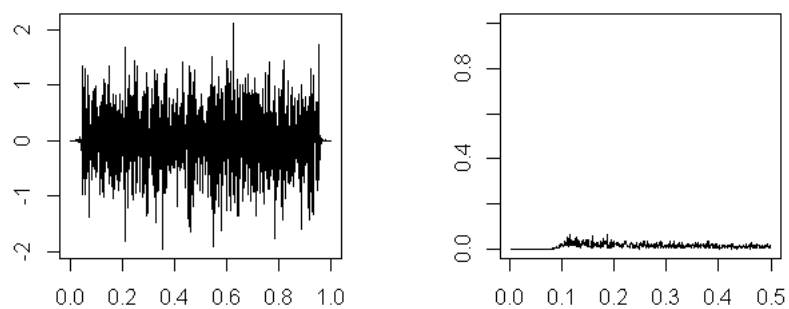


27. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns

Piemērs 2. AR(1) ar $\phi = 0.9$



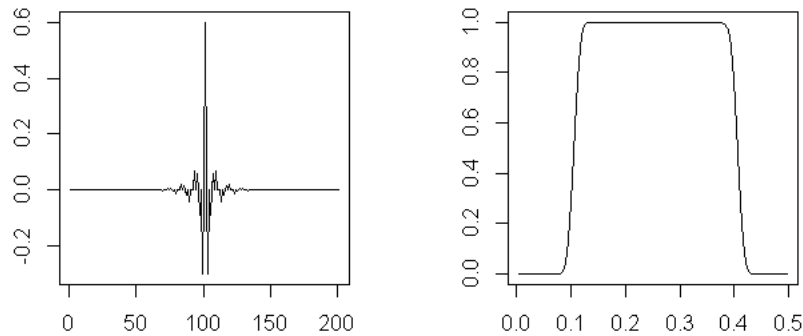
28. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 1kHz$)



29. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f_c = 0.1$)

Joslas caurlaides filtrs

Šī filtra būtība ir frekvenču komponentu pilnīga apslāpēšana ārpus kāda frekvenču diapazona, kuru mēs apzīmēsim ar $[f_L, f_H]$. Tā kā no apgalvojuma Nr.5 izriet, ka divu funkciju konvolūcijas Furjē transformācija ir šo funkciju atsevišķo Furjē transformāciju reizinājums, tad, lai iegūtu joslas caurlaides filtru, pietiek veikt konvolūciju zemās caurlaides filtra kodolam ar augstās caurlaides filtra kodolu.

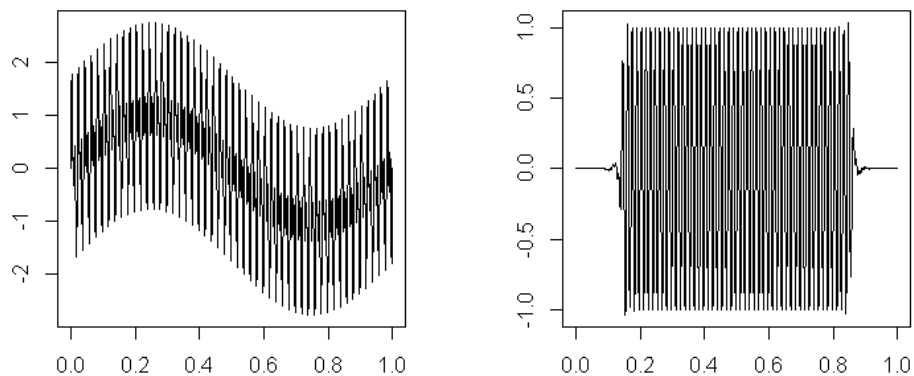


30. att. Pa kreisi - Kodols pa labi - Frekvenču reakcija

Attēla redzams filtra kodols un frekvenču reakcija pie $f_L = 0.1$ un $f_H = 0.4$

Joslas caurlaides filtrus galvenokārt izmanto bezvadu raidītājos un saņēmējos. Filtra mērķis ir līdz minimumam ierobežot caurlaides joslu izejas dātiem, lai pārsūtītu signālu bez liekas informācijas. [12]

Izmantojot trigonometrisko funkciju summas, var spilgti parādīt šī filtra iedarbību.



31. att. Pa kreisi - $\sin(2\pi) + \sin(100\pi) + \sin(200\pi)$, Pa labi - $\sin(100\pi)$

5. Signālu salīdzināšana

5.1. Šķērs-korelācijas metode

Šajā nodaļā apskatīsim signālu salīdzināšanu stacionāru procesu gadījumā, izmantojot šķērs-korelācijas metodi. Par līdzīgiem signāliem šajā gadījumā uzskatīsim tos, kuru normējumi pieņem pēc iespējas tuvākas vērtības viens otram laika domēnā.

Definīcija 21. [9] Par šķērs-korelācijas funkciju sauc

$$K(l) = E[X(t)Y(t+l)] = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y+l) dx dy = r(X(t), Y(t+l)),$$

kur $\{X(t)\}$ un $\{Y(t)\}$ ir stacionāri procesi ar matemātiskām cerībām $\mu_x = \mu_y = 0$ un standartnovirzēm attiecīgi σ_x un σ_y .

Pieņēmums par stacionaritāti vajadzīgs, lai praktiski būtu iespējams novērtēt šķērs-korelācijas funkcijas parametru vērtības. Novērtējums šķērs-korelācijas funkcijai pierakstāms formā

$$k(l) = \frac{1}{S_x S_y} \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \frac{1}{N} x(n)y(n+l),$$

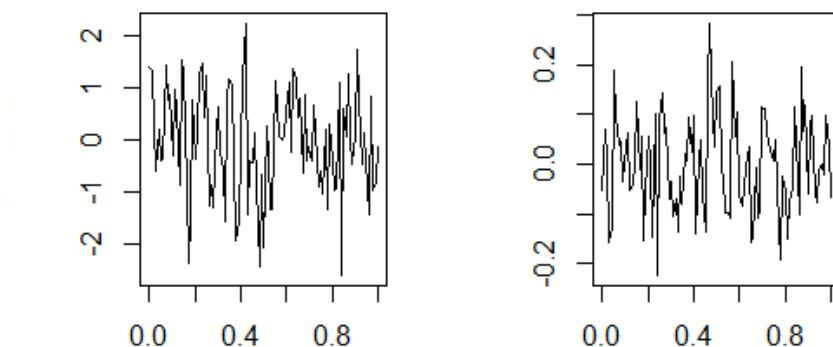
kur $l = -(N-1)/2, \dots, 0, 1, \dots, (N-1)/2$ un S_x, S_y - novērtētās standartnovirzes.

Jo lielāka ir šķērs-korelācijas funkcijas vērtība, jo vairāk šie signāli ir līdzīgi. Tāpēc par galējo līdzības novērtējumu ir vērts pieņemt

$$c = \max_{-(N-1)/2 \leq l \leq (N-1)/2} |k(l)|.$$

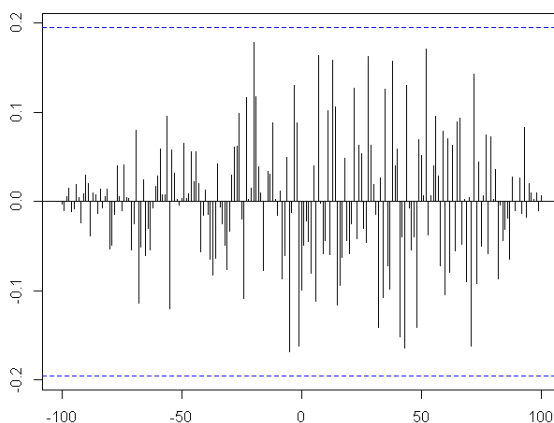
Tā kā šķērs-korelācijas funkcija pieņem vērtības no $[-1, 1]$, jo maksimumi tiek sasniegti tikai tad, kad laikrindas ir lineāri saistītas, tad $c \in [0, 1]$. Tas nozīmē, ka, jo tuvāk c vērtība būs 1, jo līdzīgāki ir signāli.

Piemērs 1. Pieņemsim, ka $X(t) = \xi_t$ un $Y(t) = \eta_t$, kur $\xi_t, \eta_t \sim N[0, 1]$, $N = 101$ un $t \in [0, 1]$.



32. att. Pa kreisi - $X(t) = \xi_t$ pa labi - $Y(t) = \eta_t$.

Pēc vizuāla novērtējuma signāli neizskatās līdzīgi, tātad varam sagaidīt, ka to šķērs-korelācijas funkcijas maksimālā vērtība c nebūs tuvu vieniniekam.

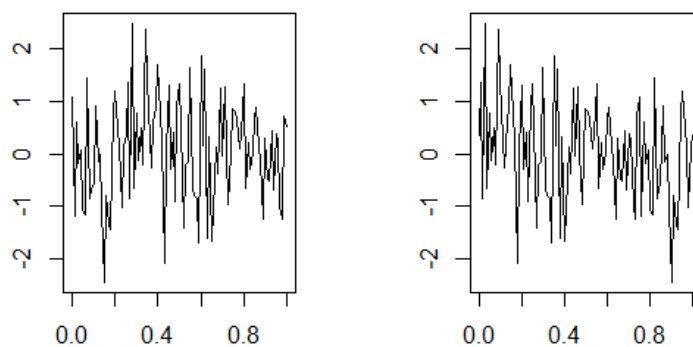


33. att. Šķērs-korelāciju funkcija.

Kā redzams 33. attēlā, koeficienti tuvu nullei norāda uz signālu neatkarību, kā arī ticamības testa rezultāti (aprautās līnijas grafikā) norāda, ka nevar noliegt šo datu neatkarību pie nozīmības līmeņa $\alpha = 0.05$ (implementēts nozīmības līmenis *ccf* funkcijā **R**).

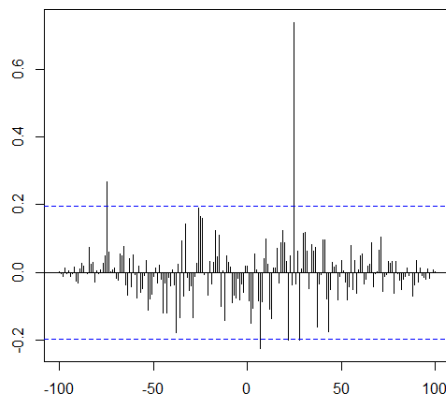
Piemērs 2. Apskatīsim arī citu gadījumu $X(t) = \xi_t$ un $Y(t) = X(t + 25/N)$, kur $\xi_t \sim N[0, 1]$, $N = 101$ un $t \in [0, 1]$.

Šajā piemērā signāla vērtības tiek pārvietotas par 25 novērotām vērtībām. Vērtības tiek piekārtotas uz riņķi, jeb $Y(0.76) = X(0)$, $Y(0.77) = X(1)$, utt.



34. att. Pa kreisi - $X(t) = \xi_t$ pa labi - $Y(t) = X(t + 25/N)$.

Šo signālu šķērs-korelācijas funkcija izskatās šādi



35. att. Šķērs-korelāciju funkcija.

Kā redzams ir viena vērtība, kura norāda uz diezgan stipru līdzību - $c = 0.736$ pie $l = 25$. Arī pēc ticamības testa var redzēt, ka šī vērtība noliedz datu neatkarību pie nozīmības līmeņa $\alpha = 0.05$.

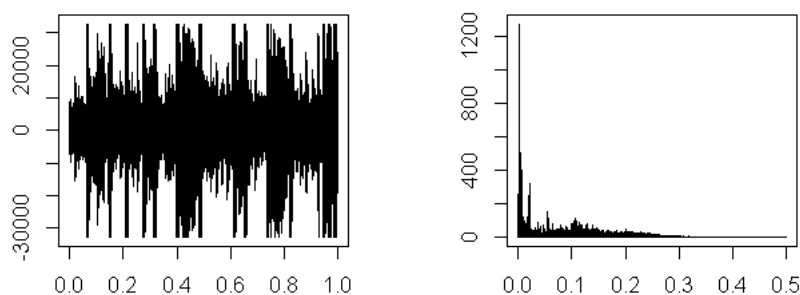
6. Praktiskā daļa

Šajā nodaļā tiks apskatīts Loga-sinc filtru, Furjē transformāciju un šķērs-korelācijas funkcijas pielietojums praktiskām datu problēmām. Tiks apskatīti divi dažādi audio signāli, kur pirmajā gadījumā tiks aplūkota iespēja no muzikālās kompozīcijas atdalīt dažādus muzikālos instrumentus, un otrajā gadījumā tiks apskatīta iespēja, izmantojot Loga-sinc

filtrus, atdalīt trokšņus no muzikālā skaņdarba. Tāpat tiks apskatīta datu kopa, kas iegūta pētot ar lāzerpinceti notvertās daļiņas kustību laikā. Šai problēmai vajadzēs noteikt dažādus parametrus, kas tiks novērtēti pielietojot Furjē transformācijas un šķērs-korelācijas funkciju.

6.1. Muzikālās kompozīcijas sadalīšana pa instrumentiem

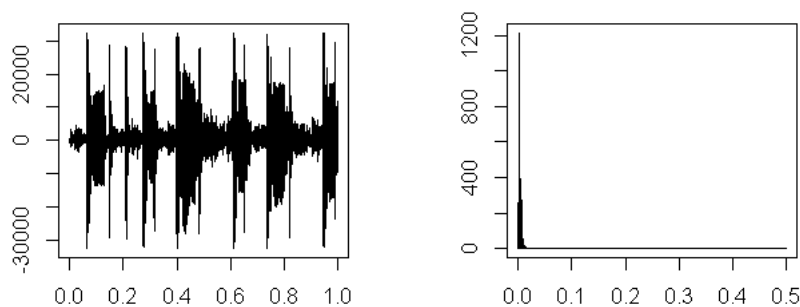
Par audio signālu tika ņemta muzikālā kompozīcija, kurā izteikti sadzirdama ir vijole un bass. Tieši šie instrumenti ir izvēlēti atdalīšanai, jo to skanēšanas frekvenču diapazons pārklājas relatīvi mazā intervālā. Bass skanēšanas frekvence vidēji ir $10-300Hz$ intervālā, bet vijolei šis intervāls ir $200-3500Hz$ [13].



36. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 44.1kHz$)

Noklausīties.

Pielietojot zemās caurlaides filtru ar $f_c = 0.001$ tiek atstātas tikai signāla zemās frekvences, kam galvenokārt ir jābūt basa instrumentam.

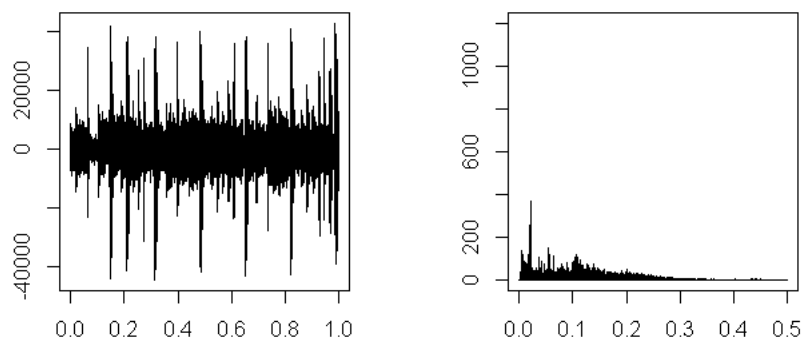


37. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 44.1kHz$)

Noklausīties.

Tāpat, pielietojot augstās caurlaides filtru ar $f_c = 0.001$, tiek noņemtas signāla zemās

frekvences un paliekošajā signālā teorētiski ir jābūt skaidri sadzirdamai vijolei.

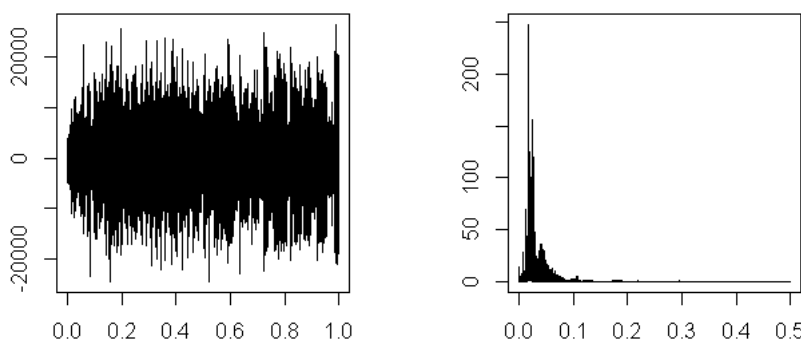


38. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 44.1kHz$)
Noklausīties.

Abiem filtriem tiek pielietota viena un tā pati atdalīšanas frekvence, lai netiktu pazaudēta kāda signāla daļa, kā arī, lai netiktu noklusināts kāds frekvenču diapazons. Noklausoties filtrētos signālus, var novērot, ka pilnīgi atdalīti instrumenti netika, tomēr katrā signālā atsevišķi izteikti sadzirdams tikai viens konkrēts instruments.

6.2. Muzikālās kompozīcijas atbrīvošana no trokšņiem

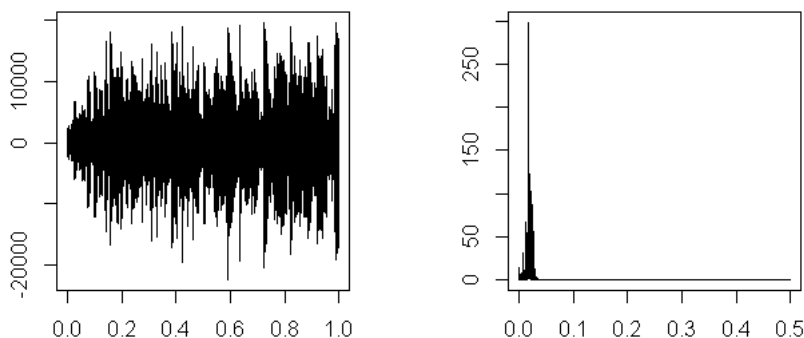
Šeit par signālu tika ņemts 1889. gadā skaņas platē ierakstīts skaņdarbs *Joe Natus* izpildījumā. Šajā skaņdarbā izteikti sadzirdams troksnis, kas traucē uztvert reālo skaņdarbu.



39. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 44.1kHz$)
Noklausīties.

Pielietojot zemās caurlaides filtru ar dažādām atdalīšanas frekvencēm, par optimālo atdalīšanas tika izvēlēta $f_c = 0.025$, jo pie zemākām vērtībām instrumenti zaudē savus

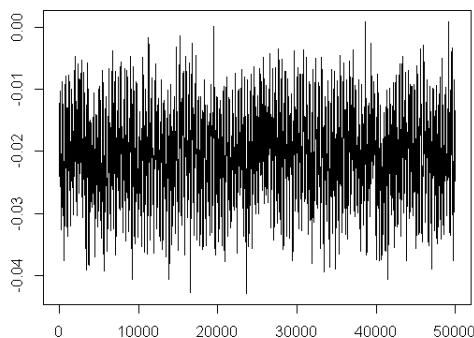
virstoņus un muzikālā kompozīcija nav skaidri sadzirdama, bet pie lielākām vērtībām troksnis nav noņemts pietiekamā līmenī, lai varētu skaidri uztvert skaņdarbu.



40. att. Pa kreisi - Laika domēns pa labi - Frekvenču domēns ($f = 44.1kHz$)
Noklausīties.

6.3. Signālu apstrādes metožu pielietojums fizikā

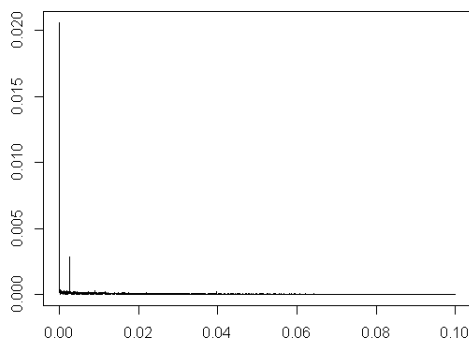
Apskatot ar lāzerpincetes palīdzību notvertās daļiņas kustību laikā, pie lāzerpincetes svārstībām ar $64Hz$ lielu frekvenci (veicot novērojumus ar $25kHz$ frekvenci), tika iegūta sekojoša datu kopa [3].



41. att. Daļiņas kustība pie novērojumu frekvences $25kHz$

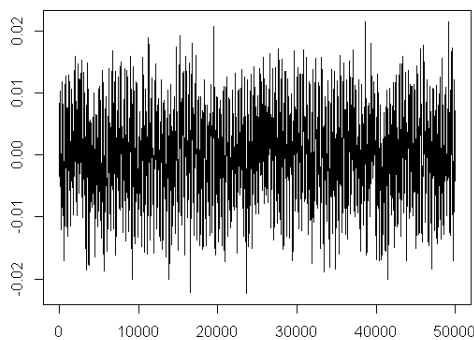
Datiem vajadzēja noteikt nobīdi pa y asi un to izslēgt, kā arī atrast fāžu starpību signālam pret uzģenerētu $\sin(2\pi 64t)$ signālu un noteikt šīs frekvences sinusoīda amplitūdu. Tāpat datu kopai bija nepieciešams atrast arī lāzerpincetes 'satvēriena' zaudēšanas frekvenci, jo tā ir proporcionāla lāzerpincetes stinguma koeficientam $\kappa = cf_c$, kur c - fizikāla konstante, f_c - 'satvēriena' zaudēšanas frekvence, kas ir svarīgs parametrs lāzerpincetes

darbības raksturošanai.



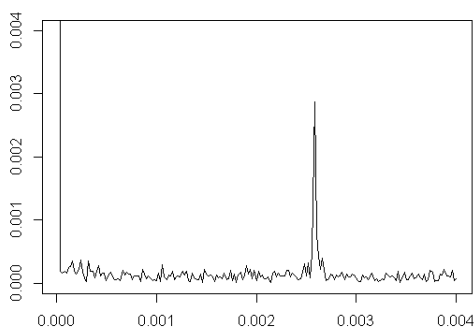
42. att. Frekvenču domēns

Veicot DFT datu kopai vienkāršā veidā var noteikt nobīdi pa y asi, jo tā atbilst nulles frekvences amplitūdai, kas šajā gadījumā ir $|X(\omega_0)| = 0.02058$, iegūstam centrētu signālu.



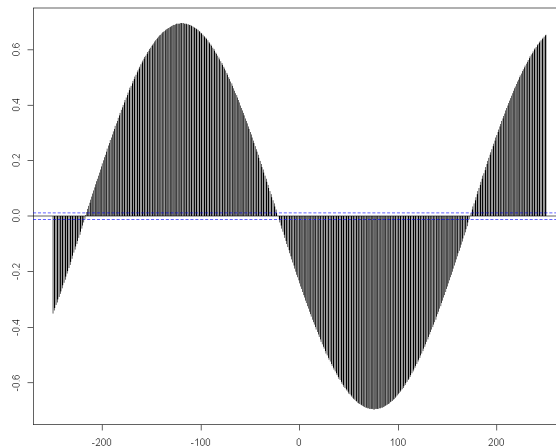
43. att. Centrēts signāls

Tikpat vienkārši no frekvenču domēna grafika iespējams nolasīt sinusoīda ar $64Hz$ frekvenci amplitūdu. Tā kā $f = \frac{k}{f_s}$, tad $f = \frac{64}{25000} = 0.00256$



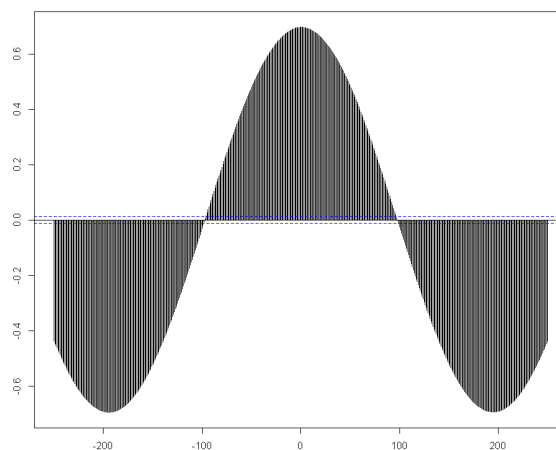
44. att. Frekvenču domēns

Kā redzams tā ir $|X(\omega_{64})| = 0.00327$. Tā kā $|X(\omega_k)| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$, tad $\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2|X(\omega_k)|$, kur koeficienti a_k, b_k ir Furjē rindas koeficienti. Tātad sinusoīda amplitūda ir $2|X(\omega_{64})| = 0.00327 \times 2 = 0.00654$. Lai atrastu fāžu nobīdi, tika veikta kroskorelācija ar uzģenerētu $\sin(2\pi 64t)$, kur $t = 0, 1/f_s, \dots, 1$.



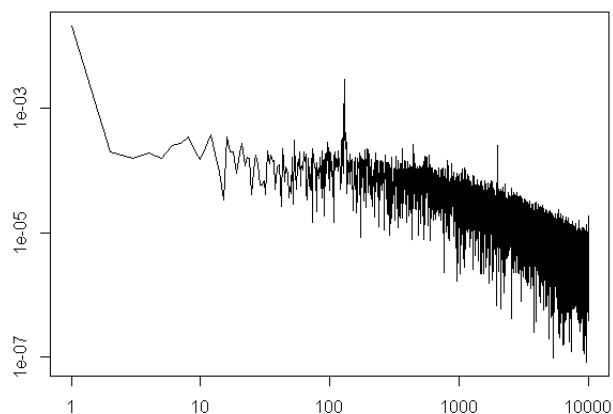
45. att. Kroskorelācija ar uzģenerētu $\sin(2\pi 64t)$

Lielākā kroskorelācijas vērtība ir pie sinusa nobīdes pa 120 vienībām, kur 1 vienība atbilst $\frac{2\pi \times 64}{f_s} = \frac{2\pi \times 64}{25000}$ radiānu lielai fāžu nobīdei. Tātad mūsu gadījumā sinusa fāze ir nobīdīta par $\gamma = \frac{2\pi \times 64 \times 120}{25000} = 0.6144\pi$ radiāniem.



46. att. Kroskorelācija ar uzģenerētu $\sin(2\pi 64t + \gamma)$

Visbeidzot signālam vajadzēja noteikt frekvenci, pie kuras lāzer-pincete zaudē savu satvērienu pār notverto daļiņu.



47. att. Frekvenču domēns, $\log - \log$ skala

Satvēriena zaudēšanas frekvence grafikā ir frekvence, pie kuras mainās signāla slīpuma koeficients. Tātad šī problēma reducējās uz maiņas punkta atrašanu datu kopai. Izmantojot **R** programmpaketi '*strucchange*', ir iespējams atrast šo liekuma maiņas punktu. Par maiņas punkta atrašanas metodi tika izvēlēta F testa metode [14], kas balstās uz standarta lineārās regresijas

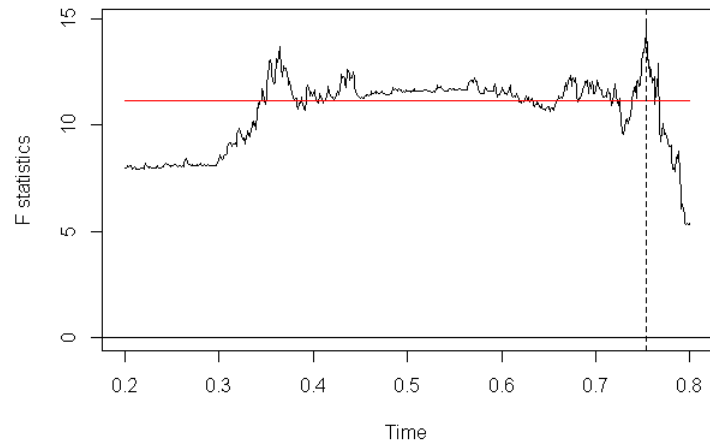
$$y_i = x_i^T \beta_i + \varepsilon_i, \quad x_i = (1, x_{i_1}, \dots, x_{i_k})^T, \quad \beta_i = (\beta_0, \dots, \beta_k)^T.$$

hipotēžu pārbaudes

$$H_0 : \quad \beta_i = (\beta_0, \dots, \beta_k)^T, \quad i = 1, \dots, n$$

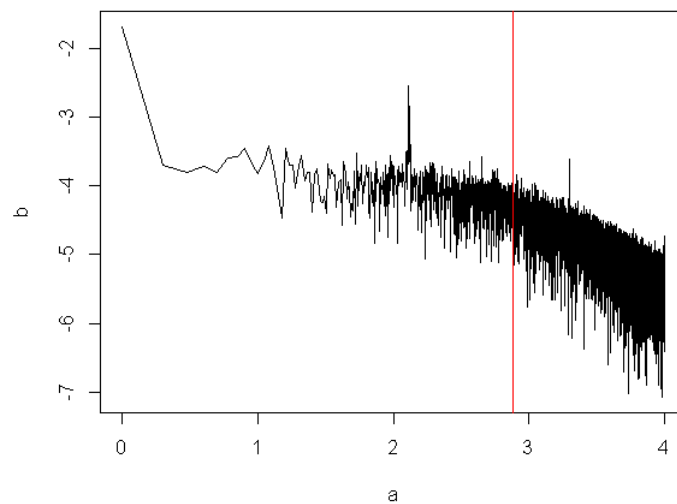
$$H_1 : \quad \beta_i = \begin{cases} \beta_A, & 1 \leq i \leq i_0 \\ \beta_B, & i_0 \leq i \leq n \end{cases}$$

Šī metode prasa, lai potenciālais maiņas punkts i_0 būtu zināms, kas ne vienmēr (arī mūsu gadījumā) ir iespējams. Tāpēc darbā tiek lietots šīs metodes vispārinājums, kas pārbauda potenciālos maiņas punktus no iepriekš izvēlēta intervāla $[\underline{i}, \bar{i}]$.



48. att. F-tests

Šeit tiek meklēts maiņas punkts izvēloties pirmos 1000 datus un meklējot maiņas punktu intervālā $[200, 800]$. Punkti virs sarkanās līnijas noraida nulles hipotēzi pie nozīmības līmeņa $\alpha = 0.05$. Kā redzams lielākā vērtība šai statistikai ir pie 0.754 jeb pie 754 punkta.



49. att. Maiņas punkts

Maiņas punkts atbilst frekvencei $f = \frac{754 \times 25000}{50000} = 377$ Hz. Tātad satvēriena zaudēšanas frekvence $f_c = 377$ Hz.

Nobeigums

Bakalaura darbā tika apskatīti laicrindu analīzes pamatelementi, tika definēti $AR(p)$, $MA(q)$ un $ARMA(1,1)$ procesi. Šiem procesiem tika sniegti piemēri, simulējot $AR(1)$ un $ARMA(1,1)$ procesus. Tika attēlotas to autokorelāciju funkcijas, un apskatītas atkarības starp gadījuma lielumiem.

Vēlāk tika sniegtas metodes signālu filtrācijai un, pielietojot tos šiem pašiem procesiem, tika pārbaudītas to iedarbības. Izrādās, ka *slīdošās vidējās vērtības* filtrs veiksmīgi noņem trokšņus ar relatīvi mazām amplitūdām, savukārt, pielietojot to signāliem, kur lielas amplitūdas svārstības laikā ir svarīga signāla sastāvdaļa, tie zaudē šo svarīgo informāciju. *loga-sinc* filtriem nav šāda veida problēmu, jo tie orientēti uz konkrēta frekvenču diapazona atdalīšanu. Ar šiem filtriem var veiksmīgi atdalīt signālus ar atšķirīgām frekvencēm, saglabājot to amplitūdu. Tāpat tos var pielietot, lai atdalītu trokšņus signāliem, kur lielas amplitūdas svārstības laikā ir svarīga signāla sastāvdaļa, jo tie saglabā visu informāciju par signālu ārpus apslāpēšanas intervāla.

Apskatot signālu salīdzināšanas metodi ar *šķērs-korelācijas* funkciju stacionāriem procesiem, tika secināts, ka tas veiksmīgi atrod atkarību datiem, kuri ir savā starpā saistīti ar kādu laika nobīdi.

Darba praktiskajā daļā tika mēģināts sadalīt muzikālo skaņdarbu pa tajā ietilpstošiem instrumentiem, kas tika izdarīts diezgan veiksmīgi izmantojot *loga-sinc* filtrus, tomēr pilnīgi izolēt instrumentus neizdevās, jo instrumentu skanēšanas frekvenču diapazoni pārklājas. Tāpat tika mēģināts atbrīvoties no *trokšņiem* skaņu plates ierakstā, tādējādi mēģinot panākt skaņas līdzību īstajai. Tas arī tika izdarīts diezgan veiksmīgi, tomēr pilnīgi troksni noņemt neizdevās, jo troksnis frekvenču domēnā ir aptuveni vienmērīgi sadalīts, kas nozīmē, ka izmantojot Loga-sinc filtrus no tā pilnīgi atbrīvoties nevar. Visbeidzot tika aplūkota datu kopa, kas tika iegūta pētot ar lāzerpinceti notvertās daļiņas kustību laikā, kur tai vajadzēja noteikt dažādus fizikālus parametrus, kas tika veiksmīgi izdarīts, pielietojot Furjē transformācijas un *šķērs-korelācijas* funkciju.

Šo darbu varētu turpināt aplūkojot citus filtrus ar brīvi izvēlētām frekvenču reakcijām, tādējādi iegūstot filtrus, kas piemēroti tieši kādai konkrētai praktiskai problēmai, kā arī aplūkojot citas metodes laicrindu salīdzināšanai, ar kurām varētu salīdzināt arī nestacionārus procesus. Tāpat darbā netika ievērota aliasinga (*aliasing*) problēma, kuru varētu iekļaut, tālāk turpinot darbu.

Izmantotā literatūra un avoti

- [1] S. W. Smith *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*. California Technical Publishing, 1997.
- [2] R. Dennis *Advanced Recording Primer*. Alexander Magazine, 2001.
- [3] R. E. Goldstein, U. F. Keyser *Soft Matter and Biological Physics*,
http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gold/teaching_biophysicsIII.html
- [4] E. M. Stein, R. Shakarchi. *Fourier analysis An introduction*. Princeton University press, Princeton New Jersey, 2002.
- [5] J. O. Smith. *Mathematics of the Discrete Fourier Transform (DFT) with Audio Applications, Second Edition*. W3K Publishing, 2007.
- [6] J. Smotrovs. *Varbūtību teorija un Matemātiskā statistika I*. Apgāds Zvaigzne ABC, 2004.
- [7] D. S. Stoffer, R.H Shumway. *Time series analysis and Its Applications with R examples, Second edition*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2006.
- [8] R. Ihaka. *Time series analysis*. Statistics department, University of Auckland, 2005.
- [9] <http://aerostudents.com/files/atmosphericFlightDynamics/stochasticVariablesAndProcesses.pdf>
- [10] F. Hayashi. *Econometrics*. Princeton University Press, Princeton New Jersey, 2000.
- [11] M. Kuhn *Digital Signal Processing*. Computer Laboratory, Cambridge University, 2009.
- [12] <http://searchcio-midmarket.techtarget.com/definition/bandpass-filter>

[13] <http://www.offbeat.co.uk/wp-content/uploads/2012/06/eq-chart.pdf>

[14] A. Zeileis, F. Leisch, K. Hornik, C. Kleiber *strucchange: An R Package for Testing for Structural Change in Linear Regression Models*

Izveidoto programmu kods

1. AR(1) procesi

```
par(mfrow=c(1,2))      # Korelācijas koeficients
t<-seq(0:30)
korel<- function(t,fi) fi^t
fi<--0.9
plot(t,korel(t,fi),type='h',xlab='Laiks',
     ylab='Korelācijas koeficients',main='AR(1) ar phi -0.9')

x<-arima.sim(n = 1001, list(ar = c(0.9, 0.0),
sd = sqrt(0.1796))      #AR(1) procesa simulācija
plot(t,x,type="l",xlab='Laiks',ylab='Amplitūda', main='AR(1) ar phi 0.9')
```

2. ARMA(1,1) procesi

```
par(mfrow=c(1,2)) # ARMA(1,1) procesu simulācija
plot(seq(1:30),arima.sim(n = 30, list(ar = c(-0.9, 0.0), ma = c(0.3, 0.0)),
     sd = sqrt(0.1796)),type='l',xlab='Laiks',ylab='Amplitūda',
     main='ARMA(1,1) ar phi -0.9 un theta 0.3')

plot(seq(1:30),arima.sim(n = 30, list(ar = c(0.8, 0.0), ma = c(0.3, 0.0)),
     sd = sqrt(0.1796)),type='l',xlab='Laiks',ylab='Amplitūda',
     main='ARMA(1,1) ar phi 0.8 un theta 0.3')
```

3. Slīdošās vidējās vērtības filtrs

```

t<-seq(0,1,by=0.001) #Signāla filtrācija ar slīdošās vidējās vērtības filtru
x<-sin(2*pi*t)+ 0.25*rnorm(t)
plot(t, x, type = "l",xlab="0<t<1, n=10",ylab="signāls")
n=100
k <-rep(1/(2*n+1),2*n+1)
ma<-Ma(k)
y<-filter(ma,x)
y
points(t,y,type="l",col="red")

```

```

par(mfrow=c(1,2)) #Signāls frekvenču domēnā
f<-0:length(t)/length(t)
f
x1<-fft(x)
mag <- sqrt(Re(x1)^2+Im(x1)^2)*2/length(t) #Amplitūda
plot(f[1:length(f)/2],mag[1:length(f)/2],type="l",xlab="Frekvence (1/Fs),
nefiltrēts signāls",ylab="Amplitūda")

```

```

f<-seq(1:length(t))/length(t)
y1<-fft(y)
mag <- sqrt(Re(y1)^2+Im(y1)^2)*2/length(t) #Amplitūda
plot(f[1:length(f)/2],mag[1:length(f)/2],type="l",xlab="Frekvence (1/Fs),
filtrēts signāls",ylab="Amplitūda",ylim=c(0.0,0.4))

```

4. Loga-sinc filtrs

```

M<-100 #Low-Pass filtrs ar Blackman loga funkciju
fc<-0.05

```

```

h<- function(i,fc,M) sin(2*pi*fc*(i-M/2))/(i-M/2)*(0.42-0.5*cos(2*pi*i/M)
+0.08*cos(4*pi*i/M))
h1<-seq(0:M)-1
h1
hi<-h(h1,fc,M)
hi[M/2+1]<-2*pi*fc
K1<-sum(hi)
hi1<-hi/K1

f12<-conv(hi1,x)
f12
par(mfrow=c(2,2))
plot(1:length(f12)/length(f12),f12,type="l",xlab='Laiks',
ylab="Amplitūda",main="fc=0.005")

t<-seq(0,1,by=0.001)
x<-sin(100*pi*t)+sin(10*pi*t-0.5)
plot(t, x, type = "l",xlab="0<t<1",ylab="signāls")

M<-100 # HIGH PASS FILTRS
fc<-0.1

h<- function(i,fc,M) sin(2*pi*fc*(i-M/2))/(i-M/2)*(0.42-0.5*cos(2*pi*i/M)
+0.08*cos(4*pi*i/M))
h1<-seq(0:M)-1
h1
hi<-h(h1,fc,M)
hi[M/2+1]<-2*pi*fc
hi
K1<-sum(hi)

```

```

K1
hi1<--hi/K1
hi1[M/2+1]<-hi1[M/2+1]+1
hi1

plot(1:length(hi1),hi1,'l',xlab="",ylab="")
f<-seq(1:length(hi1))
y1<-fft(hi1)
mag <- sqrt(Re(y1)^2+Im(y1)^2) #Amplituda
plot(f[1:length(f)/2]/length(f),mag[1:length(f)/2],type="l",xlab="",ylab="")

```

5. Signālu salīdzināšana

```

t<-seq(0,1,by=0.01) #1.piemērs
x<-rnorm(t)
y<-0.1rnorm(t)

require(graphics)
par(mfrow=c(1,2))
plot(t,x,type="l",xlab='Laiks',ylab='Amplitūda',main='rnorm(t)')
plot(t,y,type="l",xlab='Laiks',ylab='Amplitūda',main='0.10*rnorm(t)')

ccf(x,y,lag.max=length(t)) #šķērs-korelācijas f-ja

l<-25 #2.piemērs
t<-seq(0,1,by=0.01)
x<-rnorm(t)
x
for (i in 1:(length(t)-1)) y[i]<-x[i+1]

```

```
for (i in (length(t)-1):length(t)) y[i]<-x[i-length(t)+1+1]
y
```

```
require(graphics)
par(mfrow=c(1,2))
plot(t,x,type="l",xlab='Laiks',ylab='Amplitūda')
plot(t,y,type="l",xlab='Laiks',ylab='Amplitūda')
```

```
ccf(x,y,lag.max=length(t))
```

6. Praktiskā daļa

```
y<-read.table("old1.txt") # Datu ielade
x2<-y$V1
x3<-x2
```

```
plot(1:length(x3)/length(x3),x3,'l',xlab="",ylab="") # Skanas signals
```

```
f<-seq(1:length(x3))/length(x3) # Spektrs
y1<-fft(x3)
mag<- sqrt(Re(y1)^2+Im(y1)^2)/length(y1) # Spektra Amplituda
plot(f[1:length(f)/2],mag[1:length(f)/2],type="l",xlab="",ylab="")
```

```
M<-100 # HIGH PASS FILTRS
```

```
fc<-0.1
```

```
h<- function(i,fc,M) sin(2*pi*fc*(i-M/2))/(i-M/2)*(0.42-0.5*cos(2*pi*i/M)
+0.08*cos(4*pi*i/M))
```

```

h1<-seq(0:M)-1
h1
hi<-h(h1,fc,M)
hi[M/2+1]<-2*pi*fc
hi
K1<-sum(hi)
K1
hi1<--hi/K1
hi1[M/2+1]<-hi1[M/2+1]+1
hi1

plot(1:length(hi1),hi1,'l',xlab="",ylab="")
f<-seq(1:length(hi1))
y1<-fft(hi1)
mag <- sqrt(Re(y1)^2+Im(y1)^2) #Amplituda
plot(f[1:length(f)/2]/length(f),mag[1:length(f)/2],type="l",xlab="",ylab="")

a<-log10(1:(length(y1)/50)) # CHANGEPOINT
b<-log10(mag[1:(length(y1)/50)])
test <- Fstats(b ~ a, from=200)
plot(test)
plot(b)
lines(breakpoints(test))
plot(a,b,'l')
points(a[754],b[754],col='red','h')
abline(v=a[754],col='red')

```

Bakalaura darbs "Signālu filtrācija un salīdzināšana" izstrādāts LU Fizikas un Matemātikas fakultātē.

Ar savu parakstu apliecinu, ka pētījums veikts patstāvīgi, izmantoti tikai tajā norādītie informācijas avoti un iesniegtā darba elektroniskā kopija atbilst izdrukai.

Autors: Eduards Goluzins

(paraksts)

(datums)

Rekomendēju darbu aizstāvēšanai.

Vadītājs: doc. Dr.math. Jānis Valeinis

(paraksts)

(datums)

Recenzents: Dr.math. Uldis Strautiņš

(paraksts)

(datums)

Darbs iesniegts Matemātikas nodaļā _____

(datums)

(darbu pieņēma)

Darbs aizstāvēts bakalaura gala pārbaudījuma komisijas sēdē

_____ prot. Nr. _____, vērtējums _____

(datums)

Komisijas sekretārs/-e: _____

(Vārds, Uzvārds)

(paraksts)